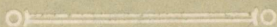


N. Rõbkin

# TRIGONOMETRIA

## ÜLESANNETE KOGU



IX - XI  
KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

2/23280





A-20029

N. RÖBKIN

# TRIGONOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

ÜHES TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST  
NÕUDVATE GEOMEETRILISTE  
ÜLESANNETEGA

KESKKOOLI IX—XI KLASSILE



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS  
TALLINN 1954

Originaali tiitel: Н. Рыбкин. Сборник задач по тригонометрии  
с приложением задач по геометрии, требующих  
применения тригонометрии.

Для 8, 9 и 10 классов средней школы.

Утверждён Министерством просвещения РСФСР.  
Учпедгиз 1953.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.



ESIMENE OSA.

TRIGONOMEETRIA.

§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine.

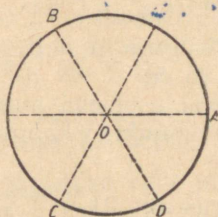
Nurga ja kaare mõistete üldistamine.

1. Kui suure nurga võrra pöördu-  
dub 4 tunni jooksul kella tunni-  
osuti? minutiosuti?

2. Masinaratas teeb 2 sekundis

6 tiiru. Mitme kraadi võrra pöördu-  
b ratas 1 sekundis?  
10 sekundis?

3. Hammasrattal on 72 hammast. Mitme kraadi võrra  
pöördu-  
b ratas, kui ta pöördu-  
b 1; 30; 144; 300 hamba võrra?



Joon. 1.

4. Joonestada liikuva raadiuse asend, kui nurk on:  $+45^\circ$ ;  
 $-30^\circ$ ;  $+225^\circ$ ;  $-135^\circ$ ;  $-90^\circ$ ;  $+450^\circ$ ;  $-810^\circ$ ;  $+2070^\circ$ . Mis-  
suguste antud nurkade liikuvad raadiused ühtivad üks-  
teisega?

5. Väljendada kraadides kaarte summa:  $\cup ABCAB +$   
 $+ \cup BAC + \cup CDA$  (joon. 1).

6. Anda nende nurkade üldavaldis, mille liikuv raadius  
on asendis: 1)  $OB$ ; 2)  $OD$  (joon. 1), ja leida nende nur-  
kade mõned eriväärtused.

Radiaanmõõt.

7. 1) Ringi raadius on 5 cm. Arvutada  
 $18^\circ$ -se kaare pikkus.

2) Avaldada  $\alpha^\circ$ -se kaare pikkus, kui  
ringi raadius on  $R$ .

8. 1) Arvu  $\pi$  abil väljendada radiaanides järgmised kaared: a)  $30^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $60^\circ$ ; d)  $135^\circ$ ; e)  $15^\circ$ ; f)  $22^\circ 30'$ ; g)  $36^\circ$ ; h)  $75^\circ$ ; i)  $108^\circ$ ; k)  $150^\circ$ ; l)  $157^\circ 30'$ ; m)  $162^\circ$ .

2) Väljendada radiaanides: a)  $51^\circ$ ; b)  $27^\circ$ ; c)  $76^\circ 30'$ ; d)  $12^\circ 30'$ ; e)  $28^\circ 42'$ ; f)  $73^\circ 21'$ ; g)  $117^\circ$ ; h)  $216^\circ 13'$  ( $\pi \approx 3,14159$ ).

3) Väljendada radiaanides korrapärase kolmnurga, nelinurga, viisnurga, kuusnurga ja  $n$ -nurga sisenurk.

9. 1) Väljendada kraadides ja minuteis nurgad, mille suurused on 1,5; 2; 0,75 radiaani ( $\pi = 3,14159$ ), ja samuti  $\frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{2}{3}\pi$ ;  $1\frac{1}{2}\pi$ ;  $\frac{\pi}{8}$ ;  $\frac{3}{4}\pi$ ;  $1\frac{1}{5}\pi$  radiaani.

2) Väljendada (tabelite abil) kraadimõõdus nurgad, mille radiaanmõõt on 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

### Nurkkiirus.

10. Ratas, mille raadius on 1,2 m, teeb minutis 300 tiiru.

1) Leida ratta nurkkiirus  $\omega$  (nurkkiirust väljendatakse ühikuis  $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$ ).

2) Leida ratta niisuguse punkti joonkiirus, mille kaugus keskpunktist on 20 cm.

3) Leida ratta põial asetseva punkti joonkiirus.

4) Tõestada, et keskpunktist kaugusel  $r$  asetseva punkti joonkiirus on  $r\omega$ .

11. Võlli nurkkiirus on  $21 \frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$ . Arvutada võlli tiirude arv minutis.

## § 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel.

1. Missuguses veerandis on kõik trigonomeetrilised funktsioonid positiivsed? Kas on olemas veerandit, milles kõik funktsioonid on negatiivsed?

2. Missugused kolmnurga nurga trigonomeetrilised funktsioonid võivad olla negatiivsed ja nimelt millal?

3. Missugused märgid on kolmnurga poole nurga trigonomeetrilistel funktsioonidel?

4. Missuguses vahemikus muutub avaldise  $1 + \sin x$  väärtus?

5. Missugused järgmistest võrdustest on võimalikud:

1)  $\sin a = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$ ; 2)  $\cos \beta = a + \frac{1}{a}$ ; 3)  $\sec a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ ?

6. Kas murd  $\frac{\cos x}{\sec x}$  võib olla negatiivne?

Lihtsustada avaldised ülesandeis 7–13:

7.  $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \tan 180^\circ$ .

8.  $a \cdot \tan 0^\circ + b \cdot \cot 90^\circ + c \cdot \sec 0^\circ$ .

9.  $a \cdot \cos 0^\circ + b \cdot \cos 180^\circ + c \cdot \cos 360^\circ$ .

10.  $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec \pi - b^2 \cdot \sin \frac{3}{2} \pi$ .

11.  $a^2 \cdot \operatorname{cosec} 90^\circ - 2ab \cdot \sin 180^\circ + b^2 \cdot \operatorname{cosec} 270^\circ$ .

12.  $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos \frac{3}{2} \pi + b^2 \cdot \tan 2\pi$ .

13.  $a^3 \cdot \cot 270^\circ + b^3 \cdot \tan 90^\circ$ .

14. Ringis, mille raadius on 5 cm, ehitada nurgad  $30^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $225^\circ$ ;  $-30^\circ$ ;  $-120^\circ$ ;  $-560^\circ$  ja nende nurkade neli trigonomeetrilist lõiku. Mõõtnud trigonomeetrilised lõigud veaga mitte üle 1 mm, arvutada järgmiste funktsioonide väärtused (veaga mitte üle 0,1):

1)  $\tan 30^\circ$ ; 2)  $\cos 120^\circ$ ; 3)  $\sin 225^\circ$ ; 4)  $\cos (-30^\circ)$ ;  
5)  $\tan (-120^\circ)$ ; 6)  $\cot (-560^\circ)$ .

15. Määrata iga järgmise vahe märk:

1)  $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$ ; 2)  $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$ ; 3)  $\tan 20^\circ - \tan 21^\circ$ ;  
4)  $\cot 20^\circ - \cot 21^\circ$ ; 5)  $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$ ;  
6)  $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$ ; 7)  $\tan 120^\circ - \tan 40^\circ$ ; 8)  $\cot 30^\circ - \cot 130^\circ$ .

16. Missugusel funktsioonil igas järgmises paaris on suurem väärtus: 1)  $\sin 20^\circ$  või  $\cos 20^\circ$ ? 2)  $\sin 50^\circ$  või  $\cos 50^\circ$ ? 3)  $\tan 40^\circ$  või  $\cot 40^\circ$ ? 4)  $\tan 50^\circ$  või  $\cot 50^\circ$ ?

Nurkade ehitamine  
ja arvutamine.

17. Ehitada nurgad, mille siinused on: 1) 0,6; 2)  $-\frac{1}{2}$ . Leida nurkade suurused (veaga mitte üle  $1^\circ$ ).

18. Ehitada nurgad, mille koosinused on: 1)  $\frac{2}{3}$ ; 2)  $-0,4$ .

19. Ehitada nurgad, mille tangensid on: 1) 1,5; 2)  $-1$ .

20. Ehitada nurgad, mille kootangensid on: 1)  $-2$ ; 2) 1.

21. Nurga antud üldavaldise järgi kirjutada tema positiivsed eriväärtused, mis on väiksemad kui  $360^\circ$  ( $2\pi$ ):

- 1)  $x = 15^\circ + n \cdot 120^\circ$ ;                      2)  $x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  
3)  $x = -10^\circ + n \cdot 60^\circ$ ;                      4)  $x = \pm 120^\circ + n \cdot 720^\circ$ ;  
5)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$ ;                      6)  $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ ;  
7)  $x = (-1)^n \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ;    8)  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \pm n \cdot \pi$ .

22. Kirjutada järgmiste võrrandite üldlahendid, leides nurgad ehitamise ja mõõtmise teel (veaga mitte üle  $1^\circ$ ):

- 1)  $\tan x = 2,6$ ;    2)  $\tan x = -0,8$ ;    3)  $\cos x = 0,9$ ;  
4)  $\cos x = -\frac{2}{3}$ ;    5)  $\sin x = 0,25$ ;    6)  $\sin x = -\frac{5}{7}$ .

Ülesandeis 23—31 arvutada võrrandis esineva trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ja ehitada nurgad.

23.  $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$ .    24.  $\cos^2 x + \cos x = 1$ .  
25.  $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$ .    26.  $\sin^2 x = 2 \sin x$ .  
27.  $\tan^2 x = 2 \tan x$ .    28.  $\sec^2 x = 2 \sec x$ .  
29.  $\cot^3 x + 4 \cot x = 0$ .    30.  $\frac{2}{1 + \tan x} = 0$ .  
31.  $(\cos x - 2) \cdot (2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$ .

**Tsüklomeetrilised funktsioonid.**

32. Järgmistest võrrandeist avaldada  $x$  tsüklomeetriliste funktsioonide kaudu: 1)  $\tan x = m$ ; 2)  $\cos x = m$ ; 3)  $\sin x = m$ . Missugused on arvu  $m$  võimalikud väärtused igas eelmises võrrandis?

33. Kirjutada ümber järgmised võrdused tsüklomeetriliste funktsioonide abil:

- 1)  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ;                      2)  $\sin (-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
3)  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;                      4)  $\cos 90^\circ = 0$ ;  
5)  $\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ ;                      6)  $\tan 0^\circ = 0$ ;  
7)  $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ;                      8)  $\cot 45^\circ = 1$ ;

9)  $\sin x = 0,23$ ;

10)  $\cos x = 0,5762$ ;

11)  $\tan x = 0,468$ ;

12)  $\cot x = 1,237$ .

34. Kasutades tabelleid väljendada kraadides ja radiaanides: 1)  $\arcsin 0,7314$ ; 2)  $\arccos 0,3987$ ; 3)  $\arctan 3,677$  ja 4)  $\text{arc cot } 0,5117$ .

35. Järgmistest võrrandeist leida  $x$ :

1)  $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ ; 2)  $\arccos x = \frac{\pi}{6}$ ; 3)  $\arctan x = \frac{\pi}{3}$ ;

4)  $\arcsin \frac{x}{3} = \alpha$ ; 5)  $\arccos \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ ; 6)  $\arctan \frac{1}{x} = \alpha$ .

36. Ehitada:

1)  $\arcsin 0,8$ ;

2)  $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right)$ ;

3)  $\arccos \frac{2}{3}$ ;

4)  $\arccos (-0,75)$ ;

5)  $\arctan \frac{1}{2}$ ;

6)  $\arctan (-1,5)$ ;

7)  $\arctan 1,2$ ;

8)  $\text{arc cot } (-0,6)$ ;

9)  $\text{arc sec } 1\frac{1}{2}$ ;

10)  $\text{arc cosec } (-2)$ .

### § 3. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed.

Avaldada nurga  $\alpha$  trigonomeetrilised funktsioonid:

1.  $\sin \alpha$  kaudu.

2.  $\cos \alpha$  kaudu.

3.  $\tan \alpha$  kaudu.

4.  $\cot \alpha$  kaudu.

Leida nurga  $\alpha$  trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

5.  $\sin \alpha = 0,8$ .

6.  $\sin \alpha = -0,3$ .

7.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .

8.  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

9.  $\tan \alpha = \sqrt{5}$ .

10.  $\tan \alpha = -\frac{9}{40}$ .

11.  $\cot \alpha = \frac{8}{15}$ .

12.  $\cot \alpha = -3$ .

13.  $\sec \alpha = 3$ .

14.  $\sec \alpha = -1\frac{9}{20}$ .

15.  $\text{cosec } \alpha = 2,6$ .

16.  $\text{cosec } \alpha = -\sqrt{3}$ .

Oletades, et  $0 < b < a$ , leida nurga  $\alpha$  trigonomeetrilised funktsioonid ülesannete 17–19 andmeil:

$$17. \sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}. \quad 18. \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \quad 19. \tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Leida nurga  $\alpha$  trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

$$20. \alpha \text{ on positiivne teravnurk ja } \tan \alpha = 4\frac{19}{20}.$$

$$21. \alpha \text{ on kolmnurga nurk ja } \cos \alpha = -0,28.$$

$$22. \alpha \text{ on III veerandi nurk ja } \sin \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$23. \alpha \text{ on IV veerandi nurk ja } \cot \alpha = -1,05.$$

Lihtsustada avaldised ülesandeis 24–52.

$$24. 1 - \sin^2 \alpha. \quad 25. 1 - \cos^2 \alpha.$$

$$26. \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad 27. \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}.$$

$$28. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha. \quad 29. \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$30. a) \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \quad 31. a) \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$b) \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \quad b) \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}.$$

$$32. \sin \alpha \cdot \cot \alpha. \quad 33. \cos \alpha \cdot \tan \alpha.$$

$$34. \tan \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha. \quad 35. \sin \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$36. \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha. \quad 37. \cot \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$38. \sin \alpha : \tan \alpha. \quad 39. \tan \alpha : \cot \alpha.$$

$$40. 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha. \quad 41. 1 - \sin^2 \alpha + \cot^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$42. (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$43. (\tan \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (\cot \alpha \cdot \sin \alpha)^2.$$

$$44. (\tan \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha)^2 - 1.$$

$$45. \sin^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

$$46. \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \tan \alpha \cdot \cot \beta + 1.$$

$$47. \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta + 1.$$

$$48. \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$49. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}.$$

50.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$ .
51.  $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$ .
52.  $\frac{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}$ .
53.  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  avaldada: a)  $\sin \alpha$  kaudu ja b)  $\cos \alpha$  kaudu.
54.  $\tan \alpha + \cot \alpha$  avaldada  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  kaudu.
55.  $\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$  avaldada  $\tan \alpha$  kaudu.
56.  $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$  avaldada  $\tan \alpha$  kaudu.
57.  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  avaldada: a)  $\tan \alpha$  kaudu ja b)  $\cot \alpha$  kaudu.
58.  $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$  avaldada: a)  $\tan \alpha$  kaudu ja b)  $\cot \alpha$  kaudu.
59.  $\sec \alpha$  avaldada  $\cot \alpha$  kaudu, kui  $\alpha$  on IV veerandi nurk.
60. Arvutada  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ , kui  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ .
61. Leida  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ , kui  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ .
62. Leida  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  ja  $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ , kui  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ .

Tõestada samasused ülesandeis 63—92.

63.  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .
64.  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .
65.  $\frac{\sec \alpha - 1}{\tan \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha + 1}$ .
66.  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$ .
67.  $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha$ .
68.  $\frac{\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$ .
69.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \cdot \tan \beta$ .

70.  $\frac{\sin a + \cos a}{\sec a + \operatorname{cosec} a} = \sin a \cdot \cos a.$
71.  $\frac{\sin a + \cot a}{\tan a + \operatorname{cosec} a} = \sin a \cdot \cot a.$
72.  $\frac{\sec a \cdot \cot a - \operatorname{cosec} a \cdot \tan a}{\cos a - \sin a} = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a.$
73.  $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{\sec a + \operatorname{cosec} a}{\sec a - \operatorname{cosec} a}.$
74.  $\frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} \cdot \frac{1 + \sec a}{1 + \operatorname{cosec} a} = \tan a.$
75.  $\frac{1 - \sin a}{1 - \cos a} : \frac{1 + \sec a}{1 + \operatorname{cosec} a} = \cot^3 a.$
76.  $\frac{\tan a}{1 - \tan^2 a} \cdot \frac{\cot^2 a - 1}{\cot a} = 1.$
77.  $\frac{1}{1 + \tan^2 a} + \frac{1}{1 + \cot^2 a} = 1.$
78.  $\frac{\sin^2 a}{\sec^2 a - 1} + \frac{\cos^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a - 1} = 1.$
79.  $\operatorname{cosec} a - \sin a = \cos a \cdot \cot a.$
80.  $\tan a + \cot a = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a.$
81.  $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a.$
82.  $\sec^2 a (\operatorname{cosec}^2 a - 1) = \operatorname{cosec}^2 a.$
83.  $1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a)(1 + \tan a).$
84.  $(\sin a - \operatorname{cosec} a)(\cos a - \sec a) = \sin a \cdot \cos a.$
85.  $(\sin a + \tan a)(\cos a + \cot a) =$   
 $= (1 + \sin a)(1 + \cos a).$
86.  $\sin a(1 + \tan a) + \cos a(1 + \cot a) =$   
 $= \sec a + \operatorname{cosec} a.$
87.  $\sin^3 a(1 + \cot a) + \cos^3 a(1 + \tan a) =$   
 $= \sin a + \cos a.$
88.  $\tan^3 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a - \operatorname{cosec} a \cdot \sec a + \cot^3 a \cdot \sec^2 a =$   
 $= \tan^3 a + \cot^3 a.$
89.  $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = (\tan a + \cot a)^2.$
90.  $\left(\frac{\sin a + \tan a}{\operatorname{cosec} a + \cot a}\right)^2 = \frac{\sin^2 a + \tan^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a + \cot^2 a}.$
91.  $\tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 a \cdot \sin^2 a.$
92.  $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}\right)^2 = 4 \tan^2 a.$

Lahendada võrrandid 93—113. Ehitanud võrrandist leitud funktsiooni väärtuse järgi nurga ja mõõtnud selle malliga (veaga mitte üle  $1^\circ$ ), anda vastus üldkujul.

93.  $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$ .
94.  $\sin x \cdot \tan x = \frac{3}{2}$ .
95.  $\sin x = \cot x$ .
96.  $\cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \tan x = 0$ .
97.  $\sin^2 x + \cos x = 0$ .
98.  $\sec x = \tan^2 x$ .
99.  $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2$ .
100.  $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$ .
101.  $\cos x = 2 \tan x$ .
102.  $\operatorname{cosec} x - \sin x = \frac{1}{2} \cot x$ .
103.  $2 \tan x = -3 \operatorname{cosec} x$ .
104.  $2 \sec x = \operatorname{cosec} x$ .
105.  $2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 3$ .
106.  $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$ .
107.  $\sin^4 x - \cos^4 x = 0,5$ .
108.  $1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0$ .

Lahendada siinuse ja koosinuse suhtes homogeensed või sellisteks taanduvad võrrandid:

109.  $\sin x = \cos x$ .
110.  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ .
111.  $3 \sin^2 x = \cos^2 x$ .
112.  $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$ .
113.  $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$ .

#### § 4. Täiendus- ja kõrvunurkade funktsioonid.

1. Taandada  $45^\circ$ -st väiksemale nurgale:

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sin 73^\circ$ ;     | 3) $\tan 69^\circ 25' 40''$ ; |
| 2) $\cos 80^\circ 40'$ ; | 4) $\cot 59^\circ 59'$ .      |

2. Taandada teravnurga samanimelisteks funktsioonideks:

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin 112^{\circ}20'$ ;    | 3) $\tan 108^{\circ}48'36''$ ; |
| 2) $\cos 99^{\circ}25'35''$ ; | 4) $\cot 140^{\circ}40'$ .     |

3. Taandada  $45^{\circ}$ -st väiksemale nurgale:

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin 121^{\circ}40'$ ; | 5) $\tan 160^{\circ}27'32''$ ; |
| 2) $\sin 163^{\circ}35'$ ; | 6) $\tan 106^{\circ}32'$ ;     |
| 3) $\cos 158^{\circ}17'$ ; | 7) $\cot 120^{\circ}28'40''$ ; |
| 4) $\cos 98^{\circ}21'$ ;  | 8) $\cot 140^{\circ}42'$ .     |

Lihtsustada avaldised:

- |   |   |
|---|---|
| 4. $\frac{\tan(180^{\circ} - \alpha)}{\cot(90^{\circ} - \alpha)}$   | 5. $\frac{\cos^2(90^{\circ} - \alpha) - 1}{\cos(180^{\circ} - \alpha)}$ |
| 6. $\sin(\pi - \alpha) \cdot \cot(\pi - \alpha)$  | 7. $\frac{\tan(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ |
| 8. $\sin(90^{\circ} - \alpha) + \sin(90^{\circ} + \alpha) + 2 \cos(180^{\circ} - \alpha)$   |   |
| 9. $\cos(90^{\circ} - \alpha) + \cos(90^{\circ} + \alpha)$  |   |
| 10. $\tan 43^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ} \cdot \tan 47^{\circ}$   |   |
| 11. $\cos(180^{\circ} - \alpha) \cdot \sin(90^{\circ} + \alpha) \cdot \tan(180^{\circ} - \alpha) \cdot \cot(90^{\circ} + \alpha)$   |   |
| 12. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cot(\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$                                     |   |
| 13. $\frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)}$ |   |
| 14. $\frac{\tan(180^{\circ} - \alpha) \cos(180^{\circ} - \alpha) \tan(90^{\circ} - \alpha)}{\sin(90^{\circ} + \alpha) \cot(90^{\circ} + \alpha) \tan(90^{\circ} + \alpha)}$   |   |
| 15. Tõestada, et $\sin(45^{\circ} + \alpha) = \cos(45^{\circ} - \alpha)$ ;<br>$\cos(45^{\circ} + \alpha) = \sin(45^{\circ} - \alpha)$ jne.                                    |   |

## § 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid.

Trigonomeetriliste funktsioonide tabelite abil leida järgmiste funktsioonide arvulised väärtused:

- |                           |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. 1) $\sin 15^{\circ}$ ; | 2) $\sin 45^{\circ}$ ;    | 3) $\sin 60^{\circ}$ ;    |
| 4) $\sin 73^{\circ}$ ;    | 5) $\sin 38^{\circ}30'$ ; | 6) $\sin 69^{\circ}24'$ ; |
| 7) $\sin 11^{\circ}50'$ ; | 8) $\sin 87^{\circ}10'$ . |                           |

2. 1)  $\tan 20^\circ$ ; 2)  $\tan 45^\circ$ ; 3)  $\tan 85^\circ$ ;  
 4)  $\tan 72^\circ 30'$ ; 5)  $\tan 17^\circ 42'$ ; 6)  $\tan 53^\circ 13'$ ;  
 7)  $\tan 20^\circ 48'$ ; 8)  $\tan 83^\circ 07'$ ; 9)  $\tan 85^\circ 28'$ ;  
 10)  $\tan 88^\circ 30'$ ; 11)  $\tan 89^\circ 48'$ ; 12)  $\tan 89^\circ 59'$ .
3. 1)  $\cos 65^\circ$ ; 2)  $\cos 45^\circ$ ; 3)  $\cos 30^\circ$ ;  
 4)  $\cos 73^\circ$ ; 5)  $\cos 38^\circ 30'$ ; 6)  $\cos 20^\circ 24'$ ;  
 7)  $\cos 61^\circ 10'$ ; 8)  $\cos 78^\circ 46'$ ; 9)  $\cos 2^\circ 52'$ ;  
 10)  $\cos 1^\circ 20'$ .
4. 1)  $\cot 20^\circ$ ; 2)  $\cot 45^\circ$ ; 3)  $\cot 37^\circ 30'$ ;  
 4)  $\cot 71^\circ 24'$ ; 5)  $\cot 69^\circ 13'$ ; 6)  $\cot 19^\circ 37'$ ;  
 7)  $\cot 88^\circ 15'$ ; 8)  $\cot 5^\circ$ ; 9)  $\cot 2^\circ 27'$ ;  
 10)  $\cot 90^\circ$ ; 11)  $\cot 1^\circ 53'$ .

Leida teravnurgad, kui on antud nende funktsioonide väärtused:

5. 1)  $\sin \alpha = 0,3420$ ; 2)  $\sin \beta = 0,5948$ ;  
 3)  $\sin \gamma = 0,8420$ ; 4)  $\sin x = 0,9293$ ;  
 5)  $\sin y = 1,0024$ ; 6)  $\sin z = 0,3932$ .
6. 1)  $\tan \alpha = 0,4452$ ; 2)  $\tan \beta = 11,43$ ;  
 3)  $\tan \gamma = 2,675$ ; 4)  $\tan x = 0,5452$ ;  
 5)  $\tan y = 5,558$ ; 6)  $\tan z = 0,5$ ;  
 7)  $\tan u = 0,42$ ; 8)  $\tan v = 12,9$ ;  
 9)  $\tan \omega = 6,63$ .
7. 1)  $\cos \alpha = 0,891$ ; 2)  $\cos \beta = 0,910$ ;  
 3)  $\cos \gamma = 0,6361$ ; 4)  $\cos x = 1,0008$ ;  
 5)  $\cos y = 0,8189$ ; 6)  $\cos z = 0,4485$ .
8. 1)  $\cot \alpha = 2,747$ ; 2)  $\cot \beta = 0,4142$ ;  
 3)  $\cot \gamma = 1,768$ ; 4)  $\cot x = 1,4948$ ;  
 5)  $\cot y = 0,6946$ ; 6)  $\cot z = 1,6946$ ;  
 7)  $\cot u = 7,115$ ; 8)  $\cot v = 10,23$ ;  
 9)  $\cot \omega = 20$ .

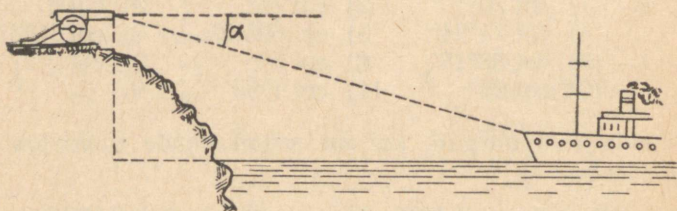
Leida tabelite abil järgmiste nürinurkade funktsioonide väärtused:

9.  $\sin 105^\circ$ ;  $\sin 172^\circ 08'$ ;  $\sin 140^\circ 15'$ ;  $\sin 115^\circ 22'$ .  
 10.  $\cos 118^\circ$ ;  $\cos 156^\circ 30'$ ;  $\cos 98^\circ 42'$ ;  $\cos 169^\circ 17'$ .  
 11.  $\tan 121^\circ$ ;  $\tan 160^\circ 24'$ ;  $\tan 101^\circ 41'$ ;  $\tan 147^\circ 39'$ .  
 12.  $\cot 175^\circ$ ;  $\cot 124^\circ 30'$ ;  $\cot 171^\circ 13'$ ;  $\cot 111^\circ 11'$ .

## § 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

T ä h i s t u s i. Täisnurkses kolmnurgas  $ABC$  nurk  $A = \alpha$ , nurk  $B = \beta$ , nurk  $C = 90^\circ$ , kaatet  $BC = a$ , kaatet  $AC = b$  ja hüpotenuus  $AB = c$ .

1. On antud täisnurkne kolmnurk  $ABC$ . Arvutada: 1)  $\sin \alpha$  ja  $\tan \alpha$ , kui  $a = 48$  cm ja  $c = 50$  cm; 2)  $\tan \alpha$  ja  $\cos \alpha$ , kui  $a = 15$  m ja  $b = 20$  m; 3)  $\tan \beta$  ja  $\cos \beta$ , kui  $b = 8,4$  cm ja  $c = 8,5$  cm.



Joon. 2.

2. Täisnurkse kolmnurga  $ABC$  külgede pikkused sentimeetris väljenduvad arvudega  $a = 7\frac{1}{5}$  ja  $c = 17$ . Arvutada kõik nurga  $\beta$  funktsioonid.

3. Arvutada täisnurkses kolmnurgas  $ABC$ : 1) kaatet  $a$ , kui on antud hüpotenuus  $c = 30,6$  cm ja  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ; 2) hüpotenuus  $c$ , kui on antud  $a = 51$  cm ja  $\sin \alpha = 0,75$ .

4. Arvutada täisnurkse kolmnurga  $ABC$  kaatet  $a$ , kui: 1)  $b = 14$  m ja  $\tan \alpha = 0,72$ ; 2)  $b = 20,4$  dm ja  $\tan \alpha = 1,5$ .

5. Õhulaev sattus helgiheitja kiirtekimpu, kui helgiheitja telg moodustas rõhttasapinnaga nurga  $47^\circ$ . Samal hetkel oli õhulaeva kaugus helgiheitjast  $3,5$  km. Arvutada: 1) õhulaeva kõrgus maapinnast, 2) õhulaeva rõhtne kaugus helgiheitjast (vastuste murdosad ümardada kahekohalisteks).

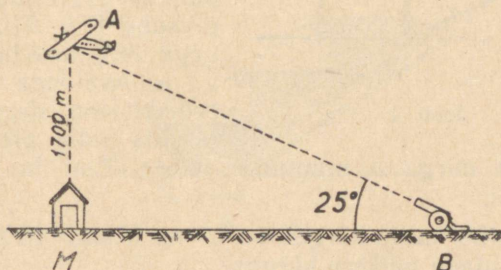
6. Patarei on paigutatud  $150$  m kõrgusele kaljule. Patareis leiti merel ujuva märgi (joon. 2) alangnurk olevat  $9^\circ$ . Kui suur on märgi kaugus patareist (rõhtsihis)?

7. Kindlustisest, mille suurtükid asetsevad  $330$  m kõrgemal merepinnast, on näha allveelaeva periskoop  $1500$  m

kaugusel. Leida nurk, mille võrra tuleb pöörata suurtüki-suudmeid rõhtsihist allapoole, et nad oleksid suunatud allveelaevale.

8. Lennukilt signaliseeritakse patareile, et lennuk on parajasti märgi kohal 1700 m kõrgusel (joon. 3). Samal hetkel leiab vaatleja patareis, et lennuki kõrgusnurk on  $25^\circ$ . Arvutada patarei kaugus märgist (rõhtsihist).

9. Jõe laiuse määramiseks võetakse jõe ühel kaldal otse vee lähedal baas  $AB$ , mille pikkus on  $a$  meetrit. Teisel kaldal vee läheduses kasvav puu  $C$  on näha baasi ühest otspunktist suunas, mis on risti baasiga, ja teisest otspunktist suunas, mis moodustab baasiga nurga  $\beta$ . Arvutada jõe laius, kui  $a = 42$  ja  $\beta = 25^\circ 28'$ .



Joon. 3.

10. Punktis, mis asetseb  $a$  meetri kaugusel torni jala keskpunktist, on torni tipu kõrgusnurk  $\alpha$ . Arvutada torni kõrgus ( $a = 86,6$ ;  $\alpha = 22^\circ 17'$ ).

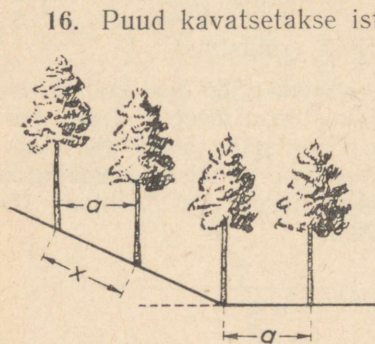
11. Vaatamisel aknast, mille kõrgus maapinnast  $h = 12$  m, on jõekallaste alangnurgad  $\alpha_1 = 17^\circ$  ja  $\alpha_2 = 45^\circ$ . Kummagi nurga tasapind on risti jõe sihiga. Arvutada jõe laius.

12. Mägiraudtee tõuseb tee pikkuse iga 30 m kohta 1 m võrra. Leida raudtee tõusunurk.

13. Sammunud mäkke 1050 m, oli jalakäija tõusnud 90 m kõrgusele mäejala tasapinnast. Leida mäenõlva keskmine tõusunurk.

14. Nivelleerimisel tehti kindlaks, et ühtlaselt tõusev tänav tõuseb oma pikkuse 728 m kohta 37,4 m võrra. Leida tänava tõusunurk ja rõhtprojektsiooni pikkus.

15. Künkale on püstitatud  $a$  meetri pikkune latt. Minigist punktist, mis asetseb künkajala tasapinnal  $b$  meetri kaugusel lati ülemisest otsast, on see ots näha rõhttasapinnaga nurgi  $\alpha$ . Avaldada ja arvutada künka kõrgus ( $a = 2$ ;  $b = 14$ ;  $\alpha = 63^\circ 18'$ ).



Joon. 4.

muutumist nurga  $\alpha$  muutudes  $90^\circ$ -st  $0^\circ$ -ni ja vastupidi:  $0^\circ$ -st  $90^\circ$ -ni.

18. Ehitis, mille kõrgus on 30 m, heidab 45 m pikkuse varju. Arvutada päikese kõrgus.

19. Keskpäeval, kui päikese kõrgus on  $28^\circ$ , heidab vabrikorsten 76 m pikkuse varju. Arvutada korstna kõrgus.

20. Kui kõrgel on päike, kui: 1) seisva inimese vari on kaks korda lühem kui inimene; 2) vari on kaks korda pikem kui inimene ja 3) vari on  $2\frac{1}{2}$  korda pikem kui inimene?

21. Püsti asetseva varda vari on  $\frac{1}{n}$  võrra lühem kui varras. Kui kõrgel on päike ( $n = 10,5$ )?

22. Haubits  $H$ , mis 2500 m kauguselt tulistab märki  $T$ , sai käsu tuli üle kanda märgist  $T$  1500 m kaugusel asetsevale märgile  $S$ . Missuguse nurga võrra peab pöörama suurtükki, kui sirge  $ST$  on risti sirgega  $HT$ ?

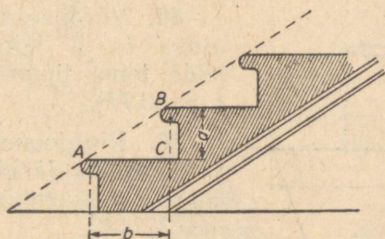
23. Kaks punkti, mis ühtaegu väljuvad täisnurga tipust, liiguvad ühtlaselt: üks mööda täisnurga üht haara, teine mööda teist haara; üks punkt kulgeb  $a$  meetrit ja teine

$b$  meetrit sekundis. Kui suuri nurgi  $\varphi$  esimese punkti liikumise suunaga on temast näha teine punkt?

24. Kivist majatrepi (joon. 5) iga käik (s. o. trepi osa kahe platvormi vahel) sisaldab 15 trepiastet. Iga astme laius  $b = 27$  cm ja kõrgus  $a = 18$  cm. Leida trepi tõusunurk.

25. Majatrepi astme laius on 25 cm. Kui suur peab olema trepiastme kõrgus, et trepi tõusunurk oleks  $40^\circ$ ?

26. Kaks sirget tänavat lõikuvad teineteisega nurgi  $51^\circ 50'$ . Üks neist on vaja 1625 m kaugusel lõikumiskohast lühimat teed mööda ühendada teisega. Arvutada selle põiktänava pikkus.



Joon. 5.

27. Väljaspool ringjoont, mille keskpunkt on  $O$ , asetseva punkti kaugus keskpunktist on  $AO = c = 2,53$  m. Punktist  $A$  on joonestatud ringjoonele puutuja  $AC$ , mis sirgega  $AO$  moodustab nurga  $\alpha = 38^\circ 46'$ . Leida raadiuse ( $r$ ) ja puutuja lõigu ( $x$ ) pikkused.

28. Avaldada täisnurkse kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius, kui kolmnurga kaatet on  $a$  detsimeetrit ja selle lähisnurk on  $\beta$ .

Täisnurkse kolmnurga lahendamisele taanduvaid ülesandeid.

29. Joonisel 6 kujutatud võlli koonilise osa moodustaja tõus on 12%, s. o. kõrguse iga 100 mm kohta raadius suureneb 12 mm võrra.

Leida moodustaja tõusunurk  $\alpha$  ja läbimõõt  $D$  ( $h = 105$  mm,  $d = 80$  mm).

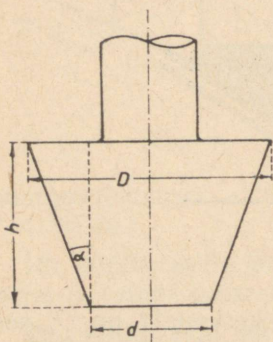
30. Joonisel 6 antud tüvikoonuse põhjade läbimõõdud on  $d$  ja  $D$ . Koonuse moodustaja tõus on  $1 : n$ . Leida tüvikoonuse kõrgus  $h$  ja moodustaja tõusunurk  $\alpha$  ( $n = 20$ ).

31. Raudteetamm, mille kõrgus on 120 m, on alt 360 m ja ülalt 60 m lai. Arvutada tammi nõlva kaldenurk rõhttasapinna suhtes.

32. Raudteetamm on ülalt 60 m ja alt 240 m lai. Tammi nõlvad moodustavad rõhttasapinnaga nurga  $35^\circ$ . Arvutada tammi kõrgus.

33. Võrdhaarse trapetsi kujulise ristlõikega tammi nõlva kaldenurgale on ehitamisel antud suurim võimalik väärtus  $\varphi = 39^\circ$ . Trapetsi alumine alus  $a = 10$  m ja kõrgus  $h = 3$  m. Leida trapetsi ülemine alus.

34. Võrdhaarse kolmnurga aluse  $b$  ja haara  $a$  järgi leida tema alusnurk ( $b = 28,13$ ;  $a = 17,53$ ).



Joon. 6.

35. Võrdhaarse kolmnurga aluse  $b$  ja kõrguse  $h$  järgi leida tema tipunurk ( $b = 31,26$ ;  $h = 20,75$ ).

36. Ringjoone raadiuse  $R$  ja kaare  $a$  järgi leida sellele kaarele vastav kõõl ( $R = 4,175$ ;  $a = 37^\circ 42'$ ).

37. Ringis, mille raadius  $R = 35,8$  dm, on joonestatud kõõl, mille pikkus  $a = 28,7$  dm. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minuteis ning kõõlu kaugus keskpunktist.

38. Kõõlu pikkus on  $\frac{3}{4}$  ringi diameetrist. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minuteis.

39. Kõõl jaotab ringjoone kaheks osaks, mille suhe on  $m : n$ . Ringjoone pikkus on  $c$  meetrit. Leida kõõlu kaugus keskpunktist ( $m : n = 3 : 7$ ;  $c = 120$ ).

40. Piirdenurk  $a$  toetub kõõlule, mille pikkus on  $a$  sentimeetrit. Avaldada ringi raadius.

41. On antud kaks jõudu:  $P = 4,372$  kG ja  $Q = 5,645$  kG, mis on suunatud teineteisega risti. Kui suur on resultant ja kui suure nurga ta moodustab jõuga  $P$ ?

42. Võrdhaarse kolmnurga alus on  $b$  desimeetrit ja alusnurk on  $a$ . Avaldada kolmnurga übermõõt.

43. Võrdhaarse kolmnurga alus on  $b$  detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on  $h$  detsimeetrit. Avaldada kolmnurga alusnurk.

44. Joonisel 7 on kujutatud nuudi ristlõige. Arvutada nuudi külgede kaldenurk  $\alpha$  põhja suhtes.

45. Joonisel 8 on kujutatud suurtükiluku keermestik. Arvutada selle keermestiku lõikamiseks vajaliku noa teritusnurk  $\alpha$ .

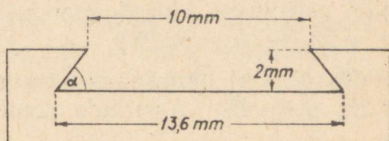
46. Kolm punkti  $A$ ,  $B$  ja  $C$  asetsevad nii, et kaardil nende vahelised kaugused on kujutatud lõikudega  $AB = 0,85$  dm,  $AC = 1,20$  dm ja  $BC = 1,20$  dm. Punkt  $B$  asetseb täpselt põhja suunas punktist  $A$ . Leida siht punktist  $A$  punkti  $C$ .

47. Sirge kangi õlgade pikkused on 5 dm ja 15 dm. Mitme detsimeetri võrra tõuseb (püstsuunas) kangi kumbki ots, kui kangi pöörata rõhtseisust 1)  $40^\circ$ , 2)  $60^\circ$  ja 3)  $90^\circ$  võrra?

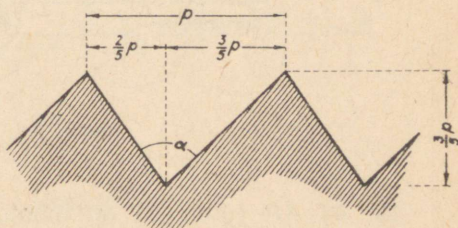
48. Laev liikus alloleva rumbide tabeliga kirjeldatud teed mööda<sup>1</sup>. Arvutada kaugused, mille võrra laev liikus lähtekohast põhja poole ja ida poole.

Siht	Läbitud tee pikkus kilomeetris
$23^\circ$ NO	10
$37^\circ$ NO	13
$82^\circ$ NO	15

<sup>1</sup> Rumbiks nimetatakse geograafilise meridiaani ja antud sihi vahelist nurka. Rumbe loetakse kummalegi poole põhja- või lõunasihist  $0^\circ$ -st kuni  $90^\circ$ -ni. Rumbi kraadisuuruse järel näidatakse veerand, milles asetseb antud siht: NO — kirre, SO — kagu, SW — edel, NW — loe.



Joon. 7.



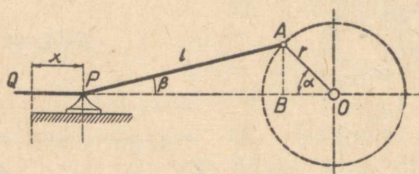
Joon. 8.

49. Ristküliku külgede  $a$  ja  $b$  järgi leida nurgad, mis ta diagonaal moodustab külgedega ( $a = 75,2$  dm;  $b = 63,6$  dm).

50. Ristküliku küljed on  $a$  ja  $b$ . Leida tema diagonaalide vaheline nurk ( $a = 13,5$  dm;  $b = 7,4$  dm).

51. Ristküliku küljed on  $a$  ja  $b$  sentimeetrit. Külgede keskpunktid on nelinurga tippudeks. Leida nurgad, mis selle nelinurga küljed moodustavad ristküliku külgedega ( $a = 23,76$ ;  $b = 58,28$ ).

52. Rombi diagonaalid on  $d_1$  ja  $d_2$  sentimeetrit ( $d_1 = 28$ ;  $d_2 = 49$ ). Arvutada rombi nurgad.



Joon. 9.

53. 1)  $AP$  (joon. 9) on mootori keps ja  $OA$  on selle vänt. Leida lõikude  $OB$  ja  $AB$  pikkused, kui  $OA = r = 0,4$  m ja nurk  $\alpha = 30^\circ$ . Seejärel arvutada nurk  $APB$  ja kepsu projektsiooni  $PB$  pikkus teljel  $OP$ , teades, et kepsu pikkus  $l = 2$  m.

2) Tõestada, et nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel, mis keps ja vänt moodustavad rõhttasapinnaga, valitseb seos

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

3) Leida nurga  $\alpha$  mõnedele väärtustele vastavad nurga  $\beta$  väärtused, kui  $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$  ( $\alpha = 0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ; 60^\circ; 70^\circ; 80^\circ; 90^\circ$ ).

4) Miks nurk  $\beta$  omandab (selle ülesande p. 2 antud valemi järgi) suurima väärtuse, kui  $\alpha = 90^\circ$ ?

5) Kui suur on nurk  $\beta$ , kui keps ja vänt on teineteisega risti?

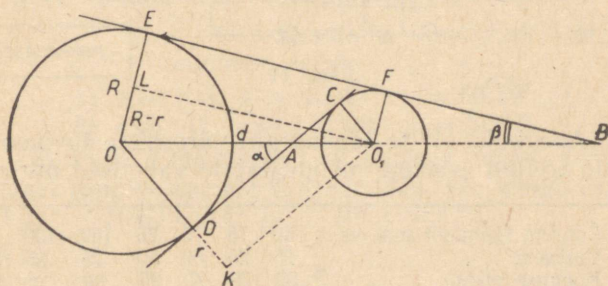
6) Olgu punkt  $P$  asendis  $Q$ , kui  $a = 0$ . Näidata, et kepsupea nihet  $QP = x$  võib arvutada valemi

$$x = r(1 - \cos a) + l(1 - \cos \beta)$$

järgi.

Arvutada suurus  $x$  eespool antud nurga  $a$  väärtuste puhul (p. 3), kui vända pikkus  $r = 300$  mm ja kepsu pikkus  $l = 1500$  mm.

54. On antud ring, mille raadius on  $r$  sentimeetrit. Punktist, mille kaugus keskpunktist on  $a$  sentimeetrit, on ringile joonestatud kaks puutujat. Leida nendevaheline nurk ( $r = 3,35$ ;  $a = 8,32$ ).



Joon. 10.

55. Kahe ringi (joon. 10) keskpunktide vaheline kaugus on  $d$  sentimeetrit ning nende raadiused on  $R$  ja  $r$  sentimeetrit. Leida nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ , mis nende ringide ühine sisemine ja ühine välimine puutuja moodustavad nende keskpunkte läbiva sirgega ( $R = 3,065$ ;  $r = 1,057$ ;  $d = 6,245$ ).

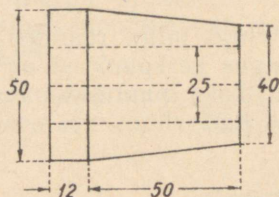
56. 5 dm pikkuse raadiusega ringjoone punktist  $A$  on joonestatud kaks kõõlu pikkustega 7 dm ja 8 dm. Arvutada nende kõõlude vaheline nurk, käsitledes kaht juhtumit: kui kõõlud asetsevad 1) üks ühel ja teine teisel pool raadiust  $AO$  ning 2) ühel ja samal pool seda.

57. Võrdhaarse kolmnurga alusele joonestatud kõrgus on  $h$  detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on  $h_1$  detsimeetrit. Leida kolmnurga alusnurk ( $h = 2,5$ ;  $h_1 = 3$ ).

58. Võrdhaarse kolmnurga haar on  $a$  sentimeetrit ja tipunurk on  $\beta$ . Avaldada kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringjoonte raadiused ( $R$  ja  $r$ ).

59. Täisnurkse kolmnurga kaatet on  $b$  meetrit ja hüpotenuusile joonestatud kõrgus on  $h$  meetrit. Leida kolmnurga üks teravnurk ning seejärel teine kaatet  $a$  ja hüpotenuus  $c$ .

60. Arvutada joonisel 11 telglõikes kujutatud puksi koonilise osa moodustajate vaheline nurk.

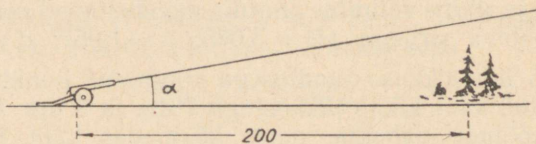


Joon. 11.

61. Arvutada ( $1^\circ$ -se täpsusega) järgmiste tüvikoonusekujuliste treitud esemete moodustajate vahelised nurgad:

Suurem läbimõõt mm-eis	50	75	75	75	100	100
Väiksem „ „	25	25	50	50	25	25
Koonuse pikkus „ „	50	75	75	25	40	25

62. Maakera läbimõõdu järgi, mille pikkus on 12 740 km, ja koha geograafilise laiuse  $\varphi$  järgi leida selle koha geograafilise paralleeli pikkus ( $\varphi = 57^\circ 05'$ ;  $\pi = 3,14$ ).



Joon. 12.

63. Kui suur peab olema suurtüki tõstenurk  $\alpha$  (joon. 12), kui suurtükk peab laskma üle metsa, mis on suurtükist 200 m kaugusel, ja mille puuladvad ulatuvad 15 m üle suurtüki tasapinna? Arvutamisel lisatakse varjendi (praegusel korral metsa) kõrgusele 1% suurtüki ja varjendi vahelisest kaugusest ehk distantsist.

64. Suurtüki ja märki ühendav sirge moodustab rõhttasapinnaga nurga, mida nimetatakse märki kõrgusnurgaks. Arvutada märki kõrgusnurk, kui märk asetseb 65 meetrit kõrgemal suurtüki tasapinnast ja kaardil, mille mõõt on  $\frac{1}{10\,000}$ , märki kaugus suurtükist on 31,5 cm.

65. Punktide  $A$  ja  $B$  kaugus teineteisest on 15 cm. Punktide ees asetseb tasapeegel, mille kaugus ühest punktist on  $a = 5$  cm ja teisest  $b = 7$  cm. Kui suur on niisuguse kiire langemisnurk, mis, lähtunud punktist  $A$ , pärast peegeldumist läbib punkti  $B$ ?

### § 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine.

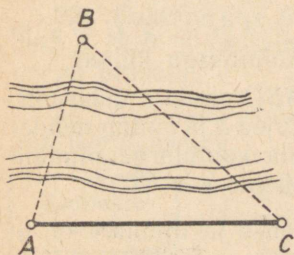
#### Siinusetoreem.

1. Lahendada kolmnurk järgmiste andmete järgi:

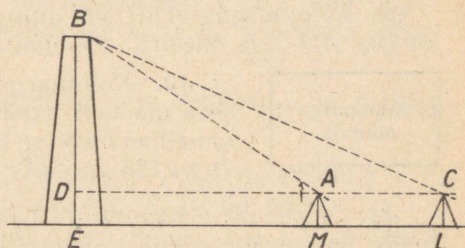
1)  $a = 109$ ;  $\beta = 33^\circ 24'$ ;  $\gamma = 66^\circ 59'$ ;

2)  $c = 16$ ;  $\alpha = 143^\circ 08'$ ;  $\beta = 22^\circ 37'$ .

2. On vaja leida tehase  $A$  kaugus teisel pool jõge asetsevast raudteejaamast  $B$  (joon. 13). On teada, et  $AC = 100$  m,  $\angle BAC = 74^\circ$  ja  $\angle BCA = 44^\circ$ .



Joon. 13.



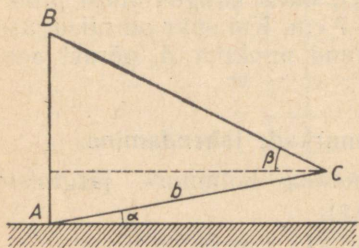
Joon. 14.

3. Ligipääsmatu vabrikukorstna kõrguse leidmiseks mõõdeti baas  $AC = 11$  m, mille pikendus läbib korstna jalga (joon. 14), ning nurgad  $BAD = 49^\circ$  ja  $BCD = 35^\circ$ . Nurgamõõtja kõrgus oli 1,37 m. Kui kõrge on korsten?

4. Vertikaalse eseme  $AB$  kõrguse leidmiseks võeti tema aluspunktis  $A$  algav baas  $AC$ , mille pikkus on  $b$  meetrit ja mis punktist  $A$  punkti  $C$  suunas tõuseb nurgi  $\alpha$  rõhttasapinna suhtes (joon. 15). Baasi otspunktist  $C$  on eseme tipp  $B$  näha rõhttasapinna suhtes nurga all  $\beta$ . Avaldada eseme kõrgus.

5. Mäenõlval, mis rõhttasapinnaga moodustab nurga  $\beta$ , kasvab puu, mille vari langeb mööda mäenõlva alla. Kui päikese kõrgus on  $\alpha$ , siis puu varju pikkus on  $l$  meetrit. Avaldada puu kõrgus.

6. Rööpküliku ühe diagonaali pikkus on  $d$  ning ta jaotab rööpküliku nurga osadeks  $\alpha$  ja  $\beta$ . Avaldada rööpküliku küljed.



Joon. 15.

7. On antud kolmnurga külg  $a$  ning selle lähisnurgad  $\beta$  ja  $\gamma$ . Avaldada kolmnurga kõigi nurkade poolitajad  $l_a$ ,  $l_b$  ja  $l_c$ .

8. Jõe laiuse määramiseks võeti jõe kaldal vee läheduses baas  $AB$  pikkusega  $c$  meetrit ja teisel kaldal valiti viseerimiseks vee läheduses kasvav

puu  $C$ ; seejärel mõõdeti nurgad  $CAB = \alpha$  ja  $ABC = \beta$ . Leida jõe laius puu  $C$  kohal ( $c = 400$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ).

9. Kolmnurgas  $ABC$  on antud  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$  ja kõrgus  $AD = h_a$  meetrit. Avaldada kolmnurga küljed.

Kolmnurga pindala.

10. Kolmnurga  $ABC$  pindala määramiseks mõõdeti tema küljed  $a$  ja  $b$  ning nende vaheline nurk  $\gamma$ . Leida kolmnurga pindala ( $a = 125$  m;  $b = 160$  m;  $\gamma = 52^\circ$ ).

11. Võrdhaarse kolmnurga haar on  $b$  ja tipunurk on  $\alpha$ . Leida kolmnurga pindala ( $b = 10$  m;  $\alpha = 75^\circ 20'$ ).

12. Kolmnurga küljed  $a$  ja  $b$  on muutumatud, nende vaheline nurk  $\gamma$  aga muutub vahemikus  $0^\circ$  kuni  $180^\circ$ . Mis suguse nurga  $\gamma$  väärtuse puhul omandab kolmnurga pindala suurima väärtuse?

13. Tõestada, et rööpküliku pindala võrdub tema kahe lähiskülje ja nende vahelise nurga siinuse korrutisega.

14. Tõestada, et iga nelinurga pindala võrdub tema diagonaalide ja nende vahelise nurga siinuse korrutisega.

15. Rombi külje  $a$  ja nurga  $\alpha$  järgi leida tema pindala ( $a = 7,5$  cm;  $\alpha = 22^\circ 10'$ ).

16. Ristküliku diagonaali  $d$  ja diagonaalidevahelise nurga  $\varphi$  kaudu avaldada ristküliku pindala  $Q$ . Leida pindala  $Q$  suurim väärtus nurga  $\varphi$  muutumisel  $0^\circ$ -st  $180^\circ$ -ni.

17. Trapetsi alused on  $a$  ja  $b$ , haar on  $c$  ning selle lähisnurk on  $\alpha$ . Avaldada trapetsi pindala.

18. Rööpküliku pindala on  $12 \text{ dm}^2$ , ta küljed on  $a = 3,7 \text{ dm}$  ja  $b = 4,2 \text{ dm}$ . Arvutada rööpküliku nurgad.

19. Kolmnurga pindala on  $71,24 \text{ cm}^2$ , ta küljed on  $a = 15 \text{ cm}$  ja  $b = 13 \text{ cm}$ . Leida nende külgede vaheline nurk.

20. Maatükil on kolmnurga kuju, mille üks külg on  $c$  ning teised küljed moodustavad sellega nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ . Leida maatüki pindala ( $c = 20 \text{ m}$ ;  $\alpha = 65^\circ 30'$ ;  $\beta = 84^\circ 30'$ ).

21. Metsatüki kaks sirgjoonelist piirjoont ühinevad nurgi  $BAC = \alpha$ . Sirgjoone  $DE$  abil, mis küljega  $AC$  moodustab nurga  $AED = \gamma$ , on vaja metsatükist eraldada osa  $DAE$ , mille pindala on  $Q$ . Seda sirget on kerge ajada, kui on teada külgede  $AE$  ja  $AD$  pikkused. Leida nende külgede pikkused.

22. Kolmnurgas  $ABC$  on teada: nurk  $C = \gamma$  ning tippudest  $A$  ja  $B$  joonestatud kõrgused  $h_a$  ja  $h_b$ . Avaldada kolmnurga pindala.

23. Avaldada kolmnurga pindala nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  ning kõrguse  $h_b$  kaudu.

**Koosinuse-  
teoreem.**

24. Kolmnurgas  $ABC$  on antud:  $b = 7$ ,  $c = 10$  ja  $\alpha = 56^\circ 29'$ . Leida külg  $a$ .

25. Lahendada kolmnurk  $ABC$  järgmiste andmete järgi:

1)  $a = 10$ ;  $b = 15$ ;  $\gamma = 123^\circ 17'$ ;

2)  $a = 0,2$ ;  $c = 0,6$ ;  $\beta = 23^\circ 28'$ ;

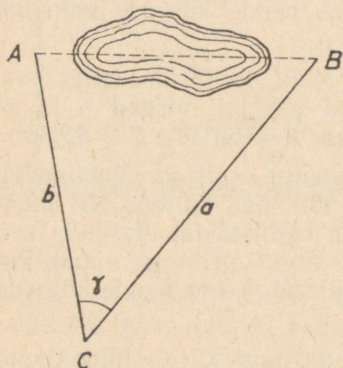
3)  $c = 40$ ;  $a = 100$ ;  $\beta = 16^\circ 28'$ .

26. Punktid  $A$  ja  $B$  asetsevad nii, et nendevahelise kauguse otsene mõõtmine on takistatud (joon. 16). Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti kolmas punkt  $C$  nii, et mõlemad punktid on nähtavad ja ligipääsetavad sellest punktist; seepärast mõõdeti kaugused  $BC = a$  ja  $AC = b$  ning nurk  $ACB = \gamma$ . Arvutada kaugus  $AB$  ( $a = 100 \text{ m}$ ;  $b = 80 \text{ m}$ ;  $\gamma = 48^\circ 57'$ ).

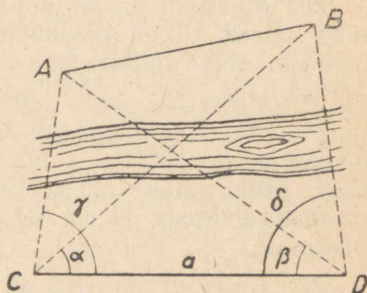
27. Kolmnurgas  $ABC$  on antud küljed  $a = 3$ ,  $b = 4$  ja  $c = 6$ . Arvutada nurk  $\gamma$ .

28. Rööpküliku küljed on 4 m ja 5 m ning üks nurk on  $52^\circ$ . Arvutada rööpküliku diagonaalid.

29. Materiaalsele punktile on rakendatud jõud  $P = 100$  kG ja  $Q = 200$  kG, mis moodustavad teineteisega nurga  $\alpha = 50^\circ$ . Arvutada resultandi  $R$  suurus ning nurgad, mis ta moodustab jõududega  $P$  ja  $Q$ .



Joon. 16.



Joon. 17.

30. Ligipääsmatute punktide  $A$  ja  $B$  (joon. 17) vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas  $CD$ , mis ei kulge punktide  $A$  ja  $B$  vahelt ja mille pikkus on  $a$  meetrit, ning nurgad  $ACD = \gamma$ ,  $BCD = \alpha$ ,  $ADC = \beta$  ja  $BDC = \delta$ . Arvutada kaugus  $AB$ , kui  $a = 2000$ ,  $\alpha = 52^\circ 40'$ ,  $\beta = 42^\circ 01'$ ,  $\gamma = 86^\circ 40'$  ja  $\delta = 81^\circ 15'$ .

## § 8. Taandamisvalemid.

1. Taandada nurkade

a)  $162^\circ 30'$ ; b)  $230^\circ$ ; c)  $335^\circ$

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade s a m a d e k s funktsioonideks.

2. Taandada nurkade

a)  $25^\circ 30' 20''$ ; b)  $130^\circ$ ; c)  $250^\circ$ ; d)  $340^\circ$

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade kaasfunktsioonideks.

### 3. Taandada nurkade

- a)  $75^\circ$ ; b)  $150^\circ$ ; c)  $200^\circ$ ; d)  $315^\circ$

trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendid ei ületa  $45^\circ$ .

Taandada vähimale positiivsele argumendile:

4. a)  $\sin 2000^\circ$ ; b)  $\sin (-1000^\circ)$ ;  
c)  $\cos 1500^\circ$ ; d)  $\cos (-2900^\circ)$ .
5. e)  $\tan 600^\circ$ ; f)  $\tan (-40^\circ)$ ;  
g)  $\cot 1305^\circ$ ; h)  $\cot (-300^\circ)$ .
6. i)  $\sec 1900^\circ$ ; k)  $\sec (-2150^\circ)$ ;  
l)  $\operatorname{cosec} 500^\circ$ ; m)  $\operatorname{cosec} (-80^\circ)$ .
7. a)  $\sin (-7,3\pi)$ ; b)  $\cos \frac{34}{9}\pi$ ;  
c)  $\tan \left(-\frac{79}{11}\pi\right)$ ; d)  $\operatorname{cosec} (-0,6\pi)$ .

Arvutada:

8. a)  $\sin (-1350^\circ)$ ; b)  $\cos 720^\circ$ ;  
c)  $\tan 900^\circ$ ; d)  $\cot (-450^\circ)$ .
9. a)  $\sin \frac{19}{6}\pi$ ; b)  $\cos \frac{11}{2}\pi$ ;  
c)  $\tan \frac{16}{3}\pi$ ; d)  $\sec 9\pi$ .

10. Väljendada nurga  $50^\circ$  trigonomeetrilised funktsioonid tema kõrvunurga funktsioonide kaudu.

Lihtsustada avaldised ülesandeis 11–21:

11.  $\sin(90^\circ + a) + \cos(180^\circ - a) +$   
 $+ \tan(270^\circ + a) + \cot(360^\circ - a)$ .

12.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \cos(\pi - a) +$   
 $+ \tan(\pi - a) - \cot\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$ .

13.  $\sin^2(270^\circ - a) + \sin^2(360^\circ - a)$ .

14.  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \cdot \tan(2\pi - a)$ .

15.  $a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - a)$ .

$$16. \frac{\sin(-a) \cdot \tan(-a)}{\cos(-a) \cdot \cot(-a)}.$$

$$17. \frac{\operatorname{cosec}(-a) \cdot \operatorname{cosec}(90^\circ + a)}{\sec(-a) \cdot \sec(180^\circ + a)}.$$

$$18. \frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\tan(\pi - \alpha) \cdot \sec(2\pi - \alpha)}.$$

$$19. \sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \tan 110^\circ \cdot \tan 340^\circ.$$

$$20. \frac{\sin(90^\circ - a) \cdot \tan 132^\circ \cdot \operatorname{cosec} 222^\circ \cdot \sin 90^\circ}{\cos(180^\circ + a) \cdot \sec 312^\circ \cdot \cot 48^\circ \cdot \cos 180^\circ}.$$

$$21. \frac{\tan(270^\circ - a) \cdot \sin 130^\circ \cdot \operatorname{cosec} 220^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\cot(180^\circ - a) \cdot \cos 50^\circ \cdot \sec 320^\circ \cdot \cos 360^\circ}.$$

22. Teisendada järgmiste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid:

a)  $a - 90^\circ$ ; b)  $a - 180^\circ$ ; c)  $a - 270^\circ$ ; d)  $a - 360^\circ$ .

23. Leida  $\cos x$  võrrandist

$$3 \sin^2(360^\circ - x) - 7 \sin(x - 90^\circ) + 3 = 0.$$

24. Leida  $\sin x$ , kui

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

25. Leida  $\tan x$  võrrandist

$$\sin(2\pi - x) \cos(\pi - x) + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \sin^2(2\pi - x) = 0.$$

Lahendada võrrandid (ülesandeis 26—30):

$$26. \sin^2(270^\circ - x) + 2 \cos(360^\circ - x) = 3.$$

$$27. \sin(x - 90^\circ) = -\sin(x - 180^\circ).$$

$$28. \cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$29. \tan(x + \pi) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$30. \sin(x + 90^\circ) = -\cot(360^\circ - x).$$

## § 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid.

Summa ja vahe  
siinus ja koosinus.

1. Arvutada  $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ , kui  $\sin \alpha = 0,625$  ja  $\sin \beta = 0,8$ .

2. Arendada ja lihtsustada:

a)  $\sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ)$ ;

b)  $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha)$ .

3. On antud:  $\cos \alpha = 0,6$ ;  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Arvutada  $\sin(\alpha + 30^\circ)$ .

4. On antud:  $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$ ;  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Arvutada  $\cos(60^\circ + \alpha)$ .

5. On antud:  $\cos \alpha = 0,5$ ;  $\sin \beta = -0,4$ ;  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ;  $180^\circ < \beta < 270^\circ$ . Arvutada  $\sin(\alpha - \beta)$  ja  $\cos(\alpha + \beta)$ .

6. On antud:  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ;  $\cos \beta = -\frac{3}{4}$ ;  $\alpha$  on II veerandi ja  $\beta$  on III veerandi nurk. Arvutada  $\sin(\alpha + \beta)$  ja  $\cos(\alpha - \beta)$ .

7. Arvutada  $\sin(\alpha + \beta)$ , kui  $\sin \alpha = 0,6$  ja  $\sin \beta = 0,8$ .

8.  $\alpha$  ja  $\beta$  on positiivsed teravnurgad:

$$\cos \alpha = \frac{1}{7}; \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}. \text{ Arvutada } \cos \beta.$$

9. Arvutada:

a)  $\sin 75^\circ$  ja  $\cos 75^\circ$ , asendades  $75^\circ$  summaga  $45^\circ + 30^\circ$ ;

b)  $\sin 15^\circ$  ja  $\cos 15^\circ$ , asendades  $15^\circ$  vahega  $45^\circ - 30^\circ$ .

10. Rakendada  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ja  $\cos(\alpha \pm \beta)$  arendamise valemid juhtumeile: a)  $\alpha = 0^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $270^\circ$ ;  $360^\circ$ ; b)  $\beta = 90^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $270^\circ$ ;  $360^\circ$ ; c)  $\alpha = \beta$ .

11. Kui  $\alpha$  ja  $\beta$  on positiivsed nurgad ning  $\alpha + \beta < 90^\circ$ , siis  $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$ . Tõestada see lause 1) joonise abil ja 2) valemi abil.

12.  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$  ja  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$  väljendada a)  $\tan \alpha$  ja  $\tan \beta$  kaudu; b)  $\cot \alpha$  ja  $\cot \beta$  kaudu.

13. Arendada  $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$  ja  $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ .

14. On antud:  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ;  $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ;  $\sin \gamma = \frac{7}{25}$ , kus  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  on teravnurgad. Arvutada  $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$  ja  $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$ .

Summa ja vahe tangens.
---------------------------

15. Arendada ja lihtsustada  $\tan(45^\circ \pm \alpha)$ .

16. Arvutada  $\tan 105^\circ [= \tan(60^\circ + 45^\circ)]$ .

17. On antud:  $\tan \alpha = 3$ . Arvutada  $\tan(45^\circ - \alpha)$ .

18. On antud:  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$  ja  $\tan \beta = -2$ . Arvutada  $\tan(\alpha + \beta)$  ja  $\cot(\alpha - \beta)$ .

19.  $\tan(\alpha \pm \beta)$  väljendada  $\cot \alpha$  ja  $\cot \beta$  kaudu.

20.  $\cot(\alpha \pm \beta)$  väljendada a)  $\cot \alpha$  ja  $\cot \beta$  kaudu; b)  $\tan \alpha$  ja  $\tan \beta$  kaudu.

21. Arendada  $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ .

Lihtsustada järgmised avaldised (ülesandeis 22—26):

$$22. \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} \quad 23. \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$24. \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} \quad 25. \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$$

$$26. \frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$$

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 27—37):

$$27. \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$28. \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$29. \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \\ = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta.$$

$$30. (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \beta - \cos \beta) = \\ = \sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha).$$

$$31. \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta - \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = \\ = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos \gamma.$$

$$32. a) \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$$b) \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

$$33. \cot \alpha - \cot 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

$$34. \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$$35. \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta = \\ = \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta.$$

$$36. \cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0.$$

$$37. \frac{1}{2}(\cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha) = \cos(60^\circ - \alpha).$$

38. Kui  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  ja  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ , kusjuures  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad, siis  $\alpha + \beta = 45^\circ$ . Tõestada see.

39. Kui  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  on teravnurgad, mille tangensid on  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$  ja  $\frac{1}{8}$ , siis  $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$ . Tõestada see.

40. On antud:  $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\cot \beta = \frac{1}{7}$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad. Tõestada, et  $\alpha + \beta = 135^\circ$ .

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 41–54):

$$41. \sin(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = 0.$$

$$42. \cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) + 0,75 = \cos^2 \alpha.$$

$$43. \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\gamma - x) = \\ = \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + x).$$

$$44. \tan(x + 45^\circ) + \tan(x - 45^\circ) = 2 \cot x.$$

$$45. \sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = \cos \alpha.$$

$$46. \sin(\alpha - x) : \cos(\alpha + x) = a : b.$$

$$47. \tan(x + \alpha) \cdot \tan(x - \alpha) = m.$$

$$48. \sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x.$$

$$49. \sin x \cdot \sin 2x = \cos x \cdot \cos 2x.$$

$$50. \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x.$$

$$51. \sin(\alpha + x) - \cos x \cdot \sin \alpha = \cos \alpha.$$

52.  $2 \sin x = \sin (45^\circ - x)$ .

53.  $\sin (45^\circ - x) = \frac{1}{2} \cos (45^\circ + x)$ .

54.  $\sin \left( \frac{\pi}{6} + x \right) + \sin \left( \frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{1}{2}$ .

### § 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetriselised funktsioonid.

**Kordse argumendi funktsioonid.**

1. Arvutada: a)  $\sin 2a$  ja  $\cos 2a$ , kui  $\sin a = 0,8$ ; b)  $\tan 2a$ , kui  $\tan a = -3$ .

2. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on  $\frac{5}{13}$ . Arvutada tipunurga siinus ja koosinus.

3. Kui  $0^\circ < a < 45^\circ$ , siis  $\sin 2a < 2 \sin a$ . Tõestada see lause: 1) joonise abil ja 2)  $\sin 2a$  valemi abil.

4. On antud:  $\sin a = 0,8$ ;  $90^\circ < a < 180^\circ$ . Arvutada  $\sin 2a$  ja  $\cos 2a$ .

5. On antud:  $\cos a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ;  $270^\circ < a < 360^\circ$ . Arvutada  $\sin 2a$  ja  $\cos 2a$ .

6. On antud  $\tan a = 3$ . Arvutada  $\tan 2a$ .

7.  $\sin 2a$  ja  $\cos 2a$  väljendada: a) ainult  $\sin a$  kaudu; b) ainult  $\cos a$  kaudu.

8.  $\cot 2a$  väljendada: a)  $\cot a$  kaudu ja b)  $\tan a$  kaudu.

9.  $\sec 2a$  väljendada  $\sec a$  kaudu.

10. a)  $\sin a$  ja  $\cos a$  väljendada  $\sin \frac{\alpha}{2}$  ja  $\cos \frac{\alpha}{2}$  kaudu; b)  $\tan a$  väljendada  $\tan \frac{\alpha}{2}$  kaudu.

11.  $\sin a$  ja  $\cos a$  väljendada  $\tan \frac{\alpha}{2}$  kaudu.

12. Näidata, et nurga  $a$  kõik trigonomeetriselised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt  $\tan \frac{\alpha}{2}$  kaudu.

13. On antud  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$ . Arvutada  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$ .

14. On antud  $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1$ . Arvutada  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  ja  $\tan 2\alpha$ .

15. Väljendada  $\sin 3\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$  ja  $\tan 3\alpha$  vastavalt  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$  kaudu.

16.  $\sin 4\alpha$  ja  $\cos 4\alpha$  väljendada  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  kaudu.

Murrulise argumendi  
funktsioonid.

17. Arvutada  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  ja  $\tan \frac{\alpha}{2}$ , kui  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  ja  $\sin \alpha = -0,6$ .

18. Arvutada nurga  $15^\circ$  siinus, koosinus, tangens ja kootangens, võttes  $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$ . (Võrrelda tulemusi § 9 ülesandes 9 leitud tulemustega.)

19. Arvutada nurga  $22^\circ 30'$  ( $= \frac{45^\circ}{2}$ ) siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

20. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga koosinus on  $\frac{7}{25}$ . Arvutada alusnurga siinus ja koosinus.

21. Arvutada  $\sin \frac{\alpha}{4}$ , kui  $45^\circ < \alpha < 540^\circ$  ja  $\sin \alpha = \frac{336}{625}$ .

22. Arvutada  $\cot \frac{\alpha}{4}$ , kui  $45^\circ < \frac{\alpha}{4} < 90^\circ$  ja  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

23. Kui  $\cos \alpha = \frac{40}{41}$  ja  $\cos \beta = \frac{60}{61}$ , kusjuures  $\alpha$  ja  $\beta$  on positiivsed teravnurgad, siis  $\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{41 \cdot 61}$ . Kontrollida see.

24. Kontrollida, kas  $\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ .

25.  $\sin \frac{\alpha}{2}$  ja  $\cos \frac{\alpha}{2}$  väljendada  $\sin \alpha$  kaudu.

26.  $\tan \frac{\alpha}{2}$  ja  $\cot \frac{\alpha}{2}$  väljendada vastavalt  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  kaudu.

27. Arvutada  $\tan \frac{\alpha}{2}$ , kui  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  ja  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ .

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 28—49):

28. a)  $2 \sin (90^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha$ ;

b)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$ .

29. a)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ ;

b)  $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha$ .

30. a)  $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$ ;      b)  $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$ .

31.  $\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 1$ .

32.  $\frac{\cos \alpha}{\sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha$ .

33.  $\frac{\cos^2 \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha$ .

34. a)  $\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha$ ;

b)  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ .

35. a)  $\sin 2\alpha - \tan \alpha = \cos 2\alpha \cdot \tan \alpha$ ;

b)  $\sin 2\alpha - \cot \alpha = -\cos 2\alpha \cdot \cot \alpha$ .

36.  $\frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \tan 2\alpha$ .

37.  $\tan (\alpha + 45^\circ) + \tan (\alpha - 45^\circ) = 2 \tan 2\alpha$ .

38.  $2 \sin (45^\circ + \alpha) \cdot \sin (45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$ .

39.  $\frac{1 - \tan^2 (45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2 (45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha$ .

40.  $\sin 3\alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \cdot \sec \alpha = 2$ .

41.  $4 \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$ .

42.  $4 \cos \alpha \cdot \cos (60^\circ - \alpha) \cdot \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$ .

43.  $\tan \alpha \cdot \tan (60^\circ - \alpha) \cdot \tan (60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha$ .

44.  $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\cot \alpha$ .

45.  $\frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 60^\circ}{\tan^2 \alpha - \cot^2 60^\circ} = \tan 3\alpha \cdot 3 \cot \alpha$ .

46. a)  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ;

b)  $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

47. a)  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ;

b)  $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

48.  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ .

49.  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan (45^\circ + \alpha)$ .

50. Kui  $\tan \alpha = \frac{1}{7}$  ja  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ , kusjuures  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad, siis  $\alpha + 2\beta = 45^\circ$ . Tõestada see.

51. Kui  $\tan \alpha = \frac{1}{7}$  ja  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ , siis  $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$ . Kontrollida see.

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 52—74):

52.  $\sin x \cdot \cos x = 0,25$ .

53.  $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5$ .

54.  $1 = \tan^2 x + 2 \tan x$ .

55.  $\sin 2x = \sin x$ .

56.  $a \cdot \sin x = b \cdot \cos \frac{x}{2}$ .

57.  $1 + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x$ .

58.  $\cos 2x = \cos x$ .

59.  $\cos 2x = 2 \sin^2 x$ .

60.  $\tan 2x = \tan x$ .

61.  $\tan 2x = 3 \tan x$ .

62.  $a(1 + \cos x) = b \cdot \cos \frac{x}{2}$ .

63.  $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$ .

64.  $a(1 + \cos x) = b \cdot \sin x$ .

65.  $1 - \cos x = \sin x$ .

66.  $1 + \sec x = m \cdot \tan^2 \frac{x}{2}$ .

67.  $1 + \sec x = \cot^2 \frac{x}{2}$ .

68.  $\sin 3x = 2 \sin x$ .

69.  $\cos 3x = 4 \cos^2 x$ .

70.  $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$ .

71.  $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$ .

Võrrandis 72—74 kõigepealt väljendada  $\sin x$  ja  $\cos x$  ülesandes 11 saadud valemite abil:

72.  $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{4}$ . 73.  $4 \sin x + 3 \cos x = 2$ .

74.  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$ .

§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Abinurk.

Järgmistele avaldistele anda logaritmitav kuju ja need lihtsustada (ülesanded 1—26):

1. a)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ;                      b)  $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$  ;  
     c)  $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$ ;                      d)  $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$ .
2. a)  $\sin 5^\circ + \sin 20^\circ$ ;                      b)  $\sin 3^\circ - \sin 5^\circ$ ;  
     c)  $\cos 3^\circ 15' + \cos 17^\circ$ ;                      d)  $\cos 5^\circ - \cos 25^\circ$ .
3. a)  $\sin (30^\circ + a) + \sin (30^\circ - a)$ ;  
     b)  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .
4. a)  $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$ ;                      b)  $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$ .
5. a)  $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ$ ;                      b)  $\cos 20^\circ - \sin 20^\circ$ ;  
     c)  $\sin \alpha - \cos \beta$ .
6. a)  $\sin \alpha + \cos \alpha$ ;                      b)  $\sin \alpha - \cos \alpha$ .
7. a)  $\tan \alpha \pm \tan \beta$ ;                      b)  $\cot \alpha \pm \cot \beta$ ;  
     c)  $\tan \alpha \pm \cot \beta$ ;                      d)  $\cot \alpha \pm \tan \beta$ .
8. a)  $\tan \alpha + \cot \alpha$ ;                      b)  $\tan \alpha - \cot \alpha$ .
9. a)  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ;                      b)  $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ .
10. a)  $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$ ;                      b)  $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta$ ;  
     c)  $\tan^2 \alpha - \cot^2 \beta$ ;                      d)  $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha$ .
11. a)  $1 + \sin \alpha$ ;                      b)  $\sin \alpha - 1$ ;  
     c)  $1 - 2 \sin^2 \alpha$ ;                      d)  $1 - 2 \cos^2 \alpha$ .
12.  $\sin \alpha + \tan \alpha$ .
13.  $\tan \alpha - \sec \alpha$ .
14.  $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha$ .
15. a)  $1 \pm \tan \alpha$ ;                      b)  $1 \pm \cot \alpha$ .
16.  $1 \pm \tan \alpha \cdot \cot \beta$ .
17. a)  $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}$ , kui  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .  
     b)  $\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}$ , kui  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .
18.  $\sqrt{\tan \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\tan \alpha - \sin \alpha}$ , kui  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

19. a)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$ ;  
 b)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta$ .
20. a)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$ ; b)  $1 - \sin \alpha - \cos \alpha$ .
21.  $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$ .
22. a)  $1 + \tan \alpha + \sec \alpha$ ; b)  $\sec \alpha + \tan \alpha - 1$ .
23. a)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha$ ;  
 b)  $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \tan \alpha$ .
24. a)  $\tan \alpha + \cot \alpha + \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$ ;  
 b)  $\tan \alpha - \cot \alpha - \sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha$ .
25. a)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$ ;  
 b)  $\sin \alpha - \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$ .
26.  $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ .

Tõestada järgmised samasused (ülesanded 27–38):

27.  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \cot \frac{\beta - \alpha}{2}$ .

28.  $\frac{\cot \alpha - \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \cot (\alpha + \beta) \cdot \tan \beta$ .

29. a)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$ ;

b)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$ ;

30.  $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan (45^\circ + \alpha)$ .

31.  $\frac{\sec \alpha + \tan \alpha}{\sec \alpha - \tan \alpha} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$ .

32. a)  $\frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} = \sin 2\alpha$ ;      b)  $\frac{1}{1 + \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha} = \cos 2\alpha$ .

33.  $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  
 kui  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

34.  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$ .

$$35. \text{ a) } (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \\ = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\text{ b) } (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = \\ = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$36. \text{ a) } 1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta};$$

$$\text{ b) } 1 - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta = - \frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

$$37. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha.$$

$$38. \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha.$$

Tõestada, et tingimusel  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  (näiteks kui  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  on kolmnurga sisenurgad) on kehtivad järgmised seosed (ülesandeis 39—49; nendele ülesannetele on vastustes antud näpunäited):

$$39. \text{ a) } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$\text{ b) } \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$40. \text{ a) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \\ = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$\text{ b) } \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \\ = -1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$41. \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma.$$

$$42. \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma + \\ + \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{cosec} \gamma.$$

$$43. \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}.$$

$$44. \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$45. \cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \alpha \cdot \cot \gamma + \cot \beta \cdot \cot \gamma = 1.$$

$$46. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$47. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$48. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

$$49. \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \\ = -1 - 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Avaldised ülesandeis 50—59 teisendada korrutisteks, kasutades mõningate tuntud nurkade funktsioone:

$$50. 1 + 2 \sin \alpha.$$

$$51. 1 - 2 \cos \alpha.$$

$$52. \sqrt{3} - 2 \sin \alpha.$$

$$53. a) \sqrt{2} + 2 \cos \alpha;$$

$$54. 3 - 4 \sin^2 \alpha.$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sin \alpha - 1.$$

$$55. 3 - 4 \cos^2 \alpha.$$

$$56. 1 - 3 \tan^2 \alpha.$$

$$57. 3 - \cot^2 \alpha.$$

$$58. 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha.$$

$$59. a) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha;$$

$$b) \cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha.$$

60. Teisendada järgmised avaldised, kasutades abinurka:

$$1) \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$2) \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ kui } p > 2\sqrt{q} > 0.$$

61. Eeldades, et  $a > b > 0$ , teisendada järgmised avaldised abinurga abil:

$$1) \frac{a+b}{a-b}; \quad 2) \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}; \quad 3) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

62. Rakendada abinurga võtet avaldise

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

arvutamisel.

Lahendada järgmised võrrandid (63—75), teisendanud enne funktsioonide summa või vahe korrutiseks:

$$63. \sin 3x + \sin x = 0.$$

$$64. \cos 4x + \cos x = 0.$$

$$65. \sin 5x = \sin x.$$

$$66. \cos 2x = \cos x.$$

$$67. \cos 3x = \sin x.$$

$$68. \sin x + \cos x = 1.$$

$$69. \cos x - \sin x = 1 : \sqrt{2}.$$

$$70. \tan x + \cot x = 2(1 + \sqrt{5}).$$

$$71. \tan x - \cot x = 2(1 - \sqrt{2}).$$

$$72. \cot 2x - \cot 4x = 2.$$

$$73. \tan x + \tan 3x = \sec x \cdot \sec 3x.$$

$$74. \cos x + \cos 3x = \cos 2x.$$

$$75. \sin 3x = \sin 2x - \sin x.$$

## § 12. Logaritmade tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks.

Selle paragrahvi, samuti ka § 13 ja 14 ülesannete vastused on antud neljakohaliste tabelite järgi. Kuid ülesannete lahendamisel kasutatakse ka täpsemaid, viiekohalisi tabelleid. Seejuures peab aga silmas pidama, et siis vastus võib erineda raamatus antud vastuses! viimase koha 1—2 ühiku võrra.

Leida tabelite abil:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. a) $\log \sin 21^\circ 37'$ ;     | b) $\log \sin 63^\circ 42'$ ;      |
| c) $\log \sin 21^\circ 11'$ ;        | d) $\log \sin 47^\circ 12'$ ;      |
| e) $\log \sin 53^\circ$ ;            | f) $\log \sin 1^\circ 23' 18''$ .  |
| 2. a) $\log \cos 32^\circ 08'$ ;     | b) $\log \cos 50^\circ 22'$ ;      |
| c) $\log \cos 44^\circ 53'$ ;        | d) $\log \cos 62^\circ 47'$ ;      |
| e) $\log \cos 30^\circ 48'$ ;        | f) $\log \cos 89^\circ 36' 20''$ . |
| 3. a) $\log \tan 27^\circ 41'$ ;     | b) $\log \tan 16^\circ 07'$ ;      |
| c) $\log \tan 70^\circ 42' 53''$ ;   | d) $\log \tan 14^\circ 0' 15''$ ;  |
| e) $\log \tan 52^\circ 0' 12''$ ;    | f) $\log \tan 89^\circ 10' 16''$ . |
| 4. a) $\log \cot 80^\circ 0' 53''$ ; | b) $\log \cot 20^\circ 26' 48''$ ; |
| c) $\log \cot 77^\circ 21'$ ;        | d) $\log \cot 45^\circ 0' 36''$ ;  |
| e) $\log \cot 87^\circ 59' 34''$ ;   | f) $\log \cot 15' 40''$ .          |

Leida teravnurk  $x$ , kui on antud:

- |   |                          |
|---|--------------------------|
| 5. $\log \sin x =$ a) $\overline{1,4001}$ ; | b) $\overline{1,8634}$ ; |
| c) $\overline{1,6747}$ ;                    | d) $\overline{1,9341}$ ; |
| e) $\overline{1,8711}$ ;                    | f) $\overline{3,8662}$ . |
| 6. $\log \cos x =$ a) $\overline{1,8615}$ ; | b) $\overline{2,9301}$ ; |
| c) $\overline{1,9497}$ ;                    | d) $\overline{1,8493}$ ; |
| e) $\overline{1,8080}$ ;                    | f) $\overline{2,0584}$ . |
| 7. $\log \tan x =$ a) $\overline{2,7865}$ ; | b) $0,0066$ ;            |
| c) $\overline{1,4608}$ ;                    | d) $0,0771$ ;            |
| e) $0,0002$ ;                               | f) $\overline{3,3500}$ . |

8.  $\log \cot x =$  a) 1,0367;      b)  $\overline{1,5018}$ ;  
    c) 0,3738;      d)  $\overline{1,3387}$ ;  
    e)  $\overline{1,9999}$ ;      f)  $\overline{2,0000}$ .

Leida logaritmid tabelite abil:

9. a)  $\sin 20^\circ$ ; b)  $\cos 47^\circ 36'$ ; c)  $\tan 75^\circ 36'$ ;  
     d)  $\cot 15'$ ; sec  $40^\circ$ ; f) cosec  $53^\circ 03'$ .  
 10. a)  $\sin 230^\circ$ ; b)  $\cos 740^\circ$ ; c)  $\tan (-250^\circ 10')$ ;  
       d)  $\cot 1000^\circ 15'$ ; e) sec  $(-100^\circ)$ ; f) cosec  $500^\circ 18'$ .

Leida teravnurk  $x$ , kui on antud:

11. a)  $\sin x = \frac{4}{7}$ ; b)  $\cos x = 0,38934$ ; c)  $\tan x = 4$ ;  
       d)  $\cot x = 10$ ; e) sec  $x = 1,5$ ; f) cosec  $x = 2,65047$ ;  
       g)  $\sin x = \frac{1}{2} \sin 20^\circ$ ; h)  $\cot x = 3 \cot 48^\circ$ .

Leida nurgad vahemikust  $0^\circ$  kuni  $360^\circ$ , kui on antud:

12.  $\sin x = \frac{5}{11}$ .      13.  $\sin x = -0,682$ .  
 14.  $\cos x = 0,76213$ .      15.  $\cos x = -0,5688$ .  
 16.  $\tan x = \frac{176}{353}$ .      17.  $\tan x = -2,48$ .  
 18.  $\cot x = 5$ .      19.  $\cot x = -0,731$ .  
 20. sec  $x = 15$ .      21. sec  $x = -2,5$ .  
 22. cosec  $x = 10$ .      23. cosec  $x = -1\frac{2}{7}$ .

Ülesanded 24—31 leida absoluutväärtuselt väikseim nurk  $x$  (positiivne või negatiivne):

24.  $\tan x = \tan 40^\circ + \tan 70^\circ$ .  
 25.  $\cot x = 1 + \sin 23^\circ 15'$ .  
 26.  $\cos x = 1 - \cot 66^\circ 12'$ .  
 27.  $\sin x = \sin 37^\circ 15' - 1$ .  
 28.  $\cos x = 1 + \tan 117^\circ$ .  
 29.  $\tan x = \sin 44^\circ + \cos 166^\circ$ .  
 30.  $\cot (-x) = 1 - \cos (-20^\circ) \cdot \sec 70^\circ 46'$ .  
 31.  $\sin (x + 180^\circ) = \sqrt[3]{-\tan 152^\circ}$ .

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused (ülesandeis 32—34):

32.  $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$ , kui  $a = 7,3863$ ;  $b = 5,2138$ ;  
 $\alpha = 42^\circ 26'$ ;  $\beta = 68^\circ 34'$ .

33.  $(a + \sin \alpha) \cdot (a + \cos \alpha)$ , kui  $a = 0,001$  ja  $\alpha = 143^\circ 12'$ .

34.  $a^2 \cdot \sec \alpha \cdot \sqrt[4]{-\tan 2\alpha}$ , kui  $a = 0,0204$  ja  $\alpha = 67^\circ 43'$ .

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused (ülesandeis 35—41), teisendanud nad enne korrutisteks:

35.  $x = \pi \cdot (\sin 30^\circ 53' 30'' + \sin 80^\circ 24')$ .

36.  $x = \frac{\sqrt[3]{0,0001}}{\cos 16^\circ 41' - \sin 49^\circ 10'}$ .

37.  $x = \left(16 \frac{768}{815}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11^\circ 07')$ .

38.  $x = \sqrt{2} \cdot (1 - \tan 61^\circ 39')$ .

39.  $x = \sqrt[4]{0,005} \cdot (1 + 2 \sin 41^\circ 19')$ .

40.  $x = 2,7148^3 \cdot \sqrt{3 - 4 \cos^2 72^\circ 05'}$ .

41.  $x = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$ , kui  
 $a = 0,0148$ ,  $b = 0,0040$  ja  $\alpha = 36^\circ 15'$ .

**Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.**

42—57. Täisnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuhtumid.

I. On antud hüpotenuus ja teravnurk:

42.  $c = 9,35$ ;  $A = 65^\circ 14'$ .      43.  $c = 627$ ;  $A = 23^\circ 30'$ .  
 44.  $c = 0,7979$ ;  $A = 66^\circ 36'$ .      45.  $c = 3,644$ ;  $A = 50^\circ 02'$ .

II. On antud kaatet ja teravnurk:

46.  $a = 6,37$ ;  $A = 4^\circ 35'$ .      47.  $a = 18,003$ ;  $B = 43^\circ$ .  
 48.  $b = 0,1738$ ;  $A = 35^\circ 55'$ .      49.  $b = 0,2954$ ;  $B = 25^\circ 37'$ .

III. On antud hüpotenuus ja kaatet:

50.  $c = 65$ ;  $a = 16$ .      51.  $c = 113$ ;  $b = 15$ .  
 52.  $c = 697$ ;  $a = 528$ .      53.  $c = 1710,2$ ;  $b = 823$ .

IV. On antud kaatetid:

54.  $a = 261$ ;  $b = 380$ .

55.  $a = 156$ ;  $b = 133$ .

56.  $a = 0,09783$ ;  $b = 0,1003$ .

57.  $a = 12,06$ ;  $b = 6,919$ .

58—69. Vördhaarne kolmnurk.

Tähistusi:  $a$  ja  $c$  — haarad;  $b$  — alus;  $A$  ja  $C$  — alusnurgad;  $B$  — tipunurk;  $h$  — alusele joonestatud kõrgus;  $h_1$  — haarale joonestatud kõrgus;  $2p$  — ümbermõõt;  $S$  — pindala.

Lahendada vördhaarne kolmnurk järgmisil andmeil:

58.  $a = 797,9$ ;  $A = 66^\circ 36'$ .

59.  $a = 627$ ;  $B = 133^\circ$ .

60.  $b = 15,65$ ;  $A = 59^\circ 45'$ .

61.  $b = 5,478$ ;  $B = 50^\circ 42'$ .

62.  $a = 8,757$ ;  $b = 13,958$ .

63.  $b = 925,2$ ;  $h = 721,4$ .

64.  $A = 65^\circ 40'$ ;  $h_1 = 20$ .

65.  $b = 130,7$ ;  $S = 1955$ .

66.  $B = 73^\circ 54'$ ;  $S = 45,04$ .

67.  $2p = 40,65$ ;  $A = 72^\circ 46'$ .

68.  $S = 250$ ;  $a : b = 7 : 4$ .

69.  $S = 56$ ;  $a = 14$ .

§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmide abil.

Tähistusi:  $a$ ,  $b$  ja  $c$  — kolmnurga küljed;  $A$ ,  $B$  ja  $C$  — nende külgede vastasnurgad;  $S$  — pindala;  $2p$  — ümbermõõt;  $R$  — ümberjoonestatud ringjoone raadius;  $r$  — sissejoonestatud ringjoone raadius;  $h_a$ ,  $l_a$  ja  $m_a$  — küljele  $a$  vastav kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuhtumid.

I. On antud külg ja kaks nurka:

1.  $a = 370$ ;

$B = 86^\circ 03'$ ;

$C = 50^\circ 56'$ .

2.  $a = 450$ ;

$A = 87^\circ 55'$ ;

$B = 10^\circ 53'$ .

3.  $a = 951$ ;

$B = 126^\circ 43'$ ;

$C = 13^\circ 41'$ .

4.  $a = 97,52$ ;

$A = 102^\circ 48'$ ;

$C = 21^\circ 06'$ .

5.  $b = 13,02$ ;

$A = 11^\circ 48'$ ;

$B = 133^\circ 42'$ .

6.  $c = 15,94$ ;

$A = 51^\circ 38'$ ;

$B = 18^\circ 19'$ .

II. On antud kaks külge ja nendevaheline nurk:

7.  $a = 510$ ;  $b = 317$ ;  $C = 76^\circ 19'$ .

8.  $a = 225$ ;  $b = 800$ ;  $C = 36^\circ 44'$ .

9.  $a = 2,29$ ;  $c = 1,69$ ;  $B = 29^{\circ}52'$ .  
 10.  $b = 28$ ;  $c = 42$ ;  $A = 124^{\circ}$ .  
 11.  $a = 30,99$ ;  $c = 69,01$ ;  $B = 87^{\circ}48'$ .  
 12.  $b = 40,33$ ;  $c = 32,11$ ;  $A = 73^{\circ}40'$ .

III. On antud kaks külge ja ühe antud külge vastasnurk:

13.  $a = 87$ ;  $b = 65$ ;  $A = 75^{\circ}45'$ .  
 14.  $a = 34$ ;  $b = 93$ ;  $A = 14^{\circ}15'$ .  
 15.  $a = 24$ ;  $b = 83$ ;  $A = 26^{\circ}45'$ .  
 16.  $b = 360$ ;  $c = 309$ ;  $C = 21^{\circ}14'$ .  
 17.  $a = 13,9$ ;  $c = 8,43$ ;  $A = 126^{\circ}43'$ .  
 18.  $a = 0,437$ ;  $b = 1,299$ ;  $B = 11^{\circ}03'$ .  
 19.  $a = 13,81$ ;  $c = 8,14$ ;  $C = 14^{\circ}36'$ .  
 20.  $b = 263$ ;  $c = 215$ ;  $B = 70^{\circ}15'$ .  
 21.  $a = 19,06$ ;  $b = 28,19$ ;  $A = 31^{\circ}17'$ .  
 22.  $a = 457,1$ ;  $b = 169,9$ ;  $B = 21^{\circ}49'$ .  
 23.  $a = 2579$ ;  $c = 10$ ;  $A = 130^{\circ}22'$ .

IV. On antud kolm külge:

24.  $a = 19$ ;  $b = 34$ ;  $c = 49$ .  
 25.  $a = 89$ ;  $b = 321$ ;  $c = 395$ .  
 26.  $a = 44$ ;  $b = 483$ ;  $c = 486$ .  
 27.  $a = 0,099$ ;  $b = 0,101$ ;  $c = 0,158$ .  
 28.  $a = 172,5$ ;  $b = 1135$ ;  $c = 1205$ .  
 29.  $a = 421,6$ ;  $b = 409,8$ ;  $c = 335,9$ .  
 30.  $a = 1,236$ ;  $b = 2,346$ ;  $c = 3,456$ .

Kaldnurksete kolm-  
 nurkade lahendamise  
 erijuhtumeid.

31.  $R = 7,92$ ;  $A = 113^{\circ}17'$ ;  
 $B = 48^{\circ}16'$ .  
 32.  $S = 501,9$ ;  $A = 15^{\circ}28'$ ;  
 $B = 45^{\circ}$ .

33.  $h_a = 5,37$ ;  $B = 115^{\circ}10'$ ;  $C = 5^{\circ}08'$ .  
 34.  $l_a = 0,758$ ;  $B = 98^{\circ}31'$ ;  $C = 4^{\circ}25'$ .

35.  $a + b = m = 488,8$ ;  $A = 70^{\circ}24'$ ;  $B = 40^{\circ}16'$ .
36.  $a - b = n = 23$ ;  $A = 108^{\circ}$ ;  $B = 18^{\circ}$ .
37.  $h_a + h_b = m = 1,381$ ;  $A = 102^{\circ}32'$ ;  $B = 58^{\circ}17'$ .
38.  $h_a - h_c = n = 60,8$ ;  $B = 46^{\circ}24'$ ;  $C = 80^{\circ}28'$ .
39.  $2p = 420,7$ ;  $A = 24^{\circ}37'$ ;  $B = 52^{\circ}31'$ .
40.  $r = 5$ ;  $A = 22^{\circ}37'$ ;  $B = 39^{\circ}18'$ .
41.  $c = 1,230$ ;  $a : b = 3 : 4$ ;  $B = 48^{\circ}$ .
42.  $a = 63,51$ ;  $b : c = 9 : 11$ ;  $A = 95^{\circ}30'$ .
43.  $c = 226,8$ ;  $h_c : b = 63 : 65$ ;  $B = 17^{\circ}04'$ .
44.  $a = 15,98$ ;  $A = 46^{\circ}20'$ ;  $b = a_c$  ( $a_c$  on  $a$  projektsioon küljel  $c$ ).
45.  $b = 29$ ;  $l_c = 31$ ;  $A = 68^{\circ}43'$ .
46.  $S = 2423$ ;  $a = 42,5$ ;  $B = 124^{\circ}38'$ .
47.  $a = 32$ ;  $b = 25$ ;  $A = 2B$ .
48.  $a + b = 36,5$ ;  $R = 19,06$ ;  $A - B = 19^{\circ}31'$ .
49.  $a + b = m = 2147$ ;  $c = 353$ ;  $C = 13^{\circ}41'$ .
50.  $a - b = n = 6,45$ ;  $c = 18,3$ ;  $C = 53^{\circ}40'$ .
51.  $a + b = m = 14,31$ ;  $c = 5,18$ ;  $A = 102^{\circ}38'$ .
52.  $a - b = n = 6,232$ ;  $c = 15,14$ ;  $A = 78^{\circ}40'$ .
53.  $S = 15$ ;  $ab = 48$ ;  $\sin A = \cos B$ .
54.  $h_b = 60$ ;  $h_c = 36$ ;  $a : R = \cos A$ .
55.  $a = 23$ ;  $b = 45$ ;  $R = 25,09$ .
56.  $a = 120$ ;  $b = 29$ ;  $h_c = 23,76$ .
57.  $a = 6$ ;  $b = 8$ ;  $S = 12$ .
58.  $b = 98$ ;  $c = 76$ ;  $m_c = 68$ .
59.  $a = 20$ ;  $b = 12$ ;  $m_c = 14$ .
60.  $h_a = 8$ ;  $h_b = 12$ ;  $h_c = 18$ .
61.  $b = 42$ ;  $c = 28$ ;  $l_a = 12,81$ .

## § 14. Trigonomeetrilised võrrandid.

Võrrandeist 1—12 leida  $x$ : 1) üldkuju 1 ja 2) vahemikus  $0^\circ$  kuni  $360^\circ$  ( $0$  kuni  $2\pi$ ).

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $3 \sin x = 2 \cos^2 x.$     | 2. $\sin x = \cot x.$  |
| 3. $3 + 2 \cos x = 4 \sin^2 x.$ | 4. $\sin x = -\cos x.$                                       |
| 5. $\tan x = 3 \cot x.$         | 6. $\tan x = 2 \sin x.$                                      |
| 7. $\cot x = 3 \cos x.$         | 8. $\operatorname{cosec} x = 2 \sin x.$                      |
| 9. $\sin 3x = 0,5.$             | 10. $\cot \frac{2x}{5} = 1.$                                 |
| 11. $3 \tan^2 \frac{x}{3} = 1.$ | 12. $2 \sin \left( \frac{x}{6} - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$ |
13. Leida seos nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel järgmistel juhtudel:
- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sin \alpha = \sin \beta;$  | 2) $\cos \alpha = \cos \beta;$   |
| 3) $\tan \alpha = \tan \beta;$  | 4) $\cot \alpha = \cot \beta;$   |
| 5) $\sin \alpha = -\sin \beta;$ | 6) $\cos \alpha = -\cos \beta;$  |
| 7) $\tan \alpha = -\tan \beta;$ | 8) $\cot \alpha = -\cot \beta;$  |
|                                 | 9) $\sin \alpha = \cos \beta;$   |
|                                 | 10) $\sin \alpha = -\cos \beta;$ |
|                                 | 11) $\tan \alpha = \cot \beta;$  |
|                                 | 12) $\tan \alpha = -\cot \beta.$ |

Lahendada järgmised võrrandid (14—73):

14.  $\cot 10x = 0.$
15.  $(\cos x)^{\sin x} = 1.$
16.  $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$
17.  $a(\sin x + \cos x)^2 = b \sin 2x.$
18.  $\tan px + \tan qx = 0.$
19.  $\sin 3x = -\cos x.$
20.  $\sin 5x \cdot \tan 4x \cdot \cos 2x = 0.$
21.  $a \sin x + b \cos x = 0.$
22.  $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x.$
23.  $5 \cos 2x = 4 \sin x.$
24.  $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1.$

25.  $\sin(m+x) + \sin x = \cos \frac{m}{2}$ .
26.  $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ .
27.  $\frac{\tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2,5$ .
28.  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
29.  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ .
30.  $2 \sin x - 9 \cos x = 7$ .
31.  $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ .
32.  $14,36 \sin x + 23 \cos x = 26,02$ .
33.  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ .
34.  $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$ .
35.  $\sec x = \sin x + \cos x$ .
36.  $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$ .
37.  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \tan x$ .
38.  $\tan x + \cot x = \sec 80^\circ$ .
39.  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .
40.  $(4 - \sqrt{3})(\sec x + \operatorname{cosec} x) =$   
 $= 4(\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot \cot x)$ .
41.  $\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ) = \sin 30^\circ$ .
42.  $\tan x + \tan(45^\circ + x) = 2$ .
43.  $\cos(a - b) \cdot \sin(c - x) =$   
 $= \cos(a + b) \cdot \sin(c + x)$ .
44.  $\tan 2x = \tan(x - 45^\circ) \cdot \tan x \cdot \tan(x + 45^\circ)$ .
45.  $\sec^2 x + 3 \sec x \cdot \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec}^2 x = 4$ .
46.  $\tan 3x = \sin 6x$ .
47.  $\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos x + \sin x$ .
48.  $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$ .
49.  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ .
50.  $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 30^\circ$ .

51.  $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$ .
52.  $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$ .
53.  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin 2x - b \cdot \cos 2x$ .
54.  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ .
55.  $\cot(\pi - 3x) = \tan(x - \pi)$ .
56.  $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$ .
57.  $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$ .
58.  $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} = 16 \cot x$ .
59.  $8 \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x$ .
60.  $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \sin 2x$ .
61.  $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ .
62.  $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$ .
63.  $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$ .

Võrrandis (64—73) esinevad murdavaldised tuleb enne taandada (vastasel korral tekivad vöörlahendid):

64.  $\frac{\cos 2x}{1 + \tan x} = 0$ .
65.  $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$ .
66.  $\tan x \cdot \cot 2x = 0$ .
67.  $\sin 3x \cdot \cot x = 0$ .
68.  $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ .
69.  $\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$ .
70.  $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ .
71.  $\cot x \cdot \tan 2x - \tan x \cdot \cot 2x = 2$ .
72.  $\sin 3x \cdot \tan 2x \cdot \sec x = 0$ .
73.  $3 \sin x = 1 - \sqrt{3 \cos^2 x - 2}$ .

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid (74—95):

74. Leida  $\sin x$  ja  $\sin y$ , kui  $\sin x + \sin y = 0,2$  ja  $\cos x + \cos y = -0,2$ .

75. Leida  $\cos x$  ja  $\cos y$  võrrandisüsteemist:

$$\cos(x+y) = \frac{1}{6}(1-2\sqrt{6}); \quad \cos(x-y) = \frac{1}{6}(1+2\sqrt{6}).$$

76. Leida  $\tan x$  ja  $\tan y$ , kui  $x+y=45^\circ$  ja  $\tan x + \tan y = 10$ .

77. Võrrandisüsteemist

$$a = x \cdot \sin \alpha; \quad b = x \cdot \sin \beta; \quad \alpha + \beta = \varphi$$

avaldata  $x$  suuruste  $a$ ,  $b$  ja  $\varphi$  kaudu.

78. Leida  $x$  ja  $y$ , kui  $\sin(x-y) = \cos(x+y) = \frac{1}{2}$ .

Leida teravnurkade järgmistest võrrandisüsteemidest (79–95):

79.  $\sin x \cdot \cos y = 0,36; \quad \cos x \cdot \sin y = 0,14.$

80.  $\sin x \cdot \sin y = 0,36; \quad \cos x \cdot \cos y = 0,14.$

81.  $x+y = \alpha; \quad \sin x + \sin y = a.$

82.  $x+y = 77^\circ; \quad \cos x - \cos y = 0,4898.$

83.  $x+y = \alpha; \quad \sin x \cdot \sin y = a.$

84.  $x-y = 48^\circ 20'; \quad \cos x \cdot \cos y = 0,4897.$

85.  $x+y = \alpha; \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}.$

86.  $x+y = 96^\circ 38'; \quad \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{5}{3}.$

87.  $x+y = \alpha; \quad \tan x + \tan y = a.$

88.  $x-y = 31^\circ; \quad \tan x - \tan y = 0,74.$

89.  $x+y = \alpha; \quad \tan x \cdot \tan y = a.$

90.  $x-y = 5^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 0,8391.$

91.  $x+y = \alpha; \quad \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{m}{n}.$

92.  $x-y = 3^\circ 46'; \quad \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{11}{9}.$

93.  $2^{\sin x + \cos y} = 1; \quad 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4.$

94.  $x+y+z = 180^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 2;$   
 $\tan y \cdot \tan z = 3.$

95.  $x+y+z = 180^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 3;$   
 $\tan y \cdot \tan z = 14.$

## § 15. Tsükloomeetrilised funktsioonid.

(Vt. ka § 2, nr. 32—36.)

Näpunäide. Järgmiste ülesannete lahendamisel peab meeles pidama neid vahemikke, milles on kokku lepitud vaadelda tsükloomeetriliste funktsioonide väärtusi, ja heitma kõrvale need lahendid, mis ei kuulu neisse vahemikesse.

Leida järgmiste avaldiste väärtused (1—16):

1. 1)  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; 2)  $\operatorname{arcsec} 2$ ; 3)  $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .
2. 1)  $\sin\left(\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ; 2)  $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;  
3)  $\tan\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ .
3. 1)  $\cot[\arctan(-1)]$ ; 2)  $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  
3)  $\cos\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ .
4. 1)  $\cos(\arccos x)$ ; 2)  $\sin\left(\arctan\frac{3}{4}\right)$ ;  
3)  $\sin[\arctan(-2)]$ .
5. 1)  $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; 2)  $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ ;  
3)  $\tan(\arctan\sqrt{3})$ .
6. 1)  $\operatorname{arccot}\left(\cot\frac{4\pi}{5}\right)$ ; 2)  $\arctan(\tan x)$ ;  
3)  $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$ .
7. 1)  $\sin(\arccos 0,8)$ ; 2)  $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$ ;  
3)  $\tan\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ .
8. 1)  $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$ ;  
2)  $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .
9. 1)  $\tan\left(\arctan 2 + \arctan\frac{1}{2}\right)$ ;  
2)  $\tan\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right)$ .

$$10. \tan \left( \arctan \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \arctan \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} \right).$$

$$11. \sin \left( \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17} \right).$$

$$12. \cos \left( \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arccsc} \frac{\sqrt{41}}{4} \right).$$

$$13. \cos \left( 2 \arcsin \frac{2}{7} \right). \quad 14. \sin (2 \arcsin m).$$

$$15. \tan \left( 3 \arctan \frac{1}{4} \right). \quad 16. \sin (2 \arctan m).$$

Kontrollida järgimiste võrduste kehtivust (17—31):

$$17. \text{ a) } \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5};$$

$$\text{ b) } \arcsin \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$18. \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

$$19. \arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left( -\frac{11}{14} \right).$$

$$20. \arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28.$$

$$21. \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$22. \operatorname{arccot} \frac{1}{7} + \operatorname{arccot} \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$23. 2 \arccos a = \arccos (2a^2 - 1), \text{ kui } 0 \leq a \leq 1.$$

$$24. 2 \arcsin m = \arccos (1 - 2m^2), \text{ kui } 0 \leq m \leq 1.$$

$$25. 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{32}{43}.$$

$$26. \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$27. 2 \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} = \arccos \frac{a-x}{a+x}.$$

$$28. \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arccot} \frac{2}{11}.$$

$$29. \arctan m + \arctan n = \arccos \frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}},$$

kui  $0 \leq m$  ja  $0 \leq n$

$$30. \operatorname{arc} \cot \sqrt{3} + \operatorname{arc} \cot (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$31. \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arc} \tan \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arc} \tan (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Lahendada järgmised võrrandid (32—44):

$$32. \operatorname{arc} \tan (1 + x) + \operatorname{arc} \tan (1 - x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$33. \operatorname{arc} \cos (x - 1) = 2 \operatorname{arc} \cos x.$$

$$34. \operatorname{arc} \tan x = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x}.$$

$$35. \operatorname{arc} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arc} \tan (x - 1).$$

$$36. \operatorname{arc} \sin 2x = 3 \operatorname{arc} \sin x.$$

$$37. x = \operatorname{arc} \sin (\cos x).$$

$$38. 2x = \operatorname{arc} \cot (\tan x).$$

$$39. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$40. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin x \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}.$$

$$41. \operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1 - x) = \operatorname{arc} \cos (-x).$$

$$42. \operatorname{arc} \tan x + \operatorname{arc} \tan 3x = \frac{\pi}{2}.$$

$$43. \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x+1} = \operatorname{arc} \tan a.$$

$$44. \operatorname{arc} \tan x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sec 5x = \frac{\pi}{4}.$$

TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST NÕUDVAID  
GEOMEETRILISI ÜLESANDEID.

§ 15a. Planimeetria.

Korrapäraseid  
hulknurkad.

1. Ringisse joonestatud korrapärase  $n$ -nurga antud külje  $a$  kaudu avaldada ringi ümber joonestatud korrapärase  $n$ -nurga külge  $b$ .

2. Arvutada korrapärase 7-nurga diagonaalide pikkused, kui 7-nurga külge on 10 cm.

3. Avaldada korrapärase  $n$ -nurga lühima diagonaali pikkus, kui  $n$ -nurga külge on  $a$  cm.

4. Korrapärase  $n$ -nurga külge  $a$  kaudu avaldada selle  $n$ -nurga pikima diagonaali pikkus kahel juhul: 1) kui  $n$  on paarisarv ja 2) kui  $n$  on paaritu arv.

Hulknurga  
pindala.

5. Ristküliku diagonaalid moodustavad teineteisega nurga  $75^{\circ}24'$ ; ristküliku pindala on  $562 \text{ m}^2$ . Arvutada ristküliku küljed.

6. Ringi ümber, mille raadius on  $r$ , on joonestatud romb, mille teravnurk on  $\alpha$ . Leida rombi pindala ( $r = 5$ ;  $\alpha = 36^{\circ}47'$ ).

7. Võrdhaarse kolmnurga pindala on  $Q$  ja tipunurk on  $\beta$ . Leida kolmnurga kõrgus ( $Q = 450$ ;  $\beta = 73^{\circ}$ ).

8. Võrdhaarse kolmnurga pindala on  $Q \text{ m}^2$  ja alus on  $b \text{ m}$ . Leida kolmnurga tipunurk ( $Q = 1956$ ;  $b = 130,7$ ).

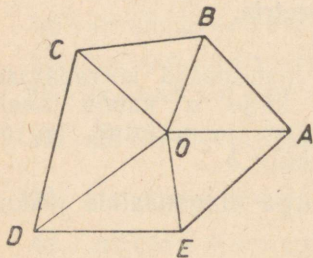
9. Korrapärase  $n$ -nurga külge  $a$  järgi avaldada ja arvutada  $n$ -nurga pindala: 1)  $n = 7$ ;  $a = 20$ ; 2)  $n = 8$ ;  $a = 1$ ; 3)  $n = 12$ ;  $a = 10$ .

10. Ringisse, mille raadius on  $R$ , on joonestatud korrapärane  $n$ -nurk. Avaldada ja arvutada  $n$ -nurga pindala: 1)  $n = 12$ ;  $R = 7$ ; 2)  $n = 5$ ;  $R = 7$ .

11. Ringi ümber, mille raadius on  $R$ , on joonestatud korrapärane  $n$ -nurk. Avaldada  $n$ -nurga pindala.

12. Trapetsi alused on 25 cm ja 15 cm, haar on 12 cm ning haara ja suurema aluse vaheline nurk on  $50^\circ$ . Arvutada trapetsi pindala.

13. Maamõõtja mõõtis viienurgelise maa-ala nn. polaarsel viisil (joon. 18). Lähtudes punktist  $O$  (poolus) ta mõõtis kaugused  $OA = 43$  m,  $OB = 36$  m,  $OC = 41$  m,  $OD = 56$  m ja  $OE = 34$  m ning nurgad  $\angle AOB = 65^\circ 30'$ ,  $\angle BOC = 71^\circ 20'$ ,  $\angle COD = 80^\circ$  ja  $\angle DOE = 61^\circ 35'$ . Arvutada maa-ala pindala.



Joon. 18.

14. Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui trapetsi diagonaal on  $a$  ja diagonaal moodustab alustega nurga  $\alpha$ .

15. Korrapärase 6-nurga külge on 84 cm; arvutada temaga pindvõrdse korrapärase 7-nurga külge.

16. Korrapärasel 9-nurgal ja 10-nurgal on võrdsed ümbermõõdud. Leida, kuidas suhtuvad nende pindalad.

**Ringi osade pindalad.**

17. Arvutada sektori pindala, kui sektori raadius on 8 cm ja temasse joonestatud ringi raadius on 2 cm.

18. Arvutada segmendi pindala, kui on antud ta raadius  $r$  ja kaar  $\alpha$ : 1)  $r = 4,73$ ;  $\alpha = 46^\circ 44'$ ; 2)  $r = 12$ ;  $\alpha = 29^\circ 38'$ .

19. Kõõl, mille pikkus on  $a$  cm, jaotab ringi, mille raadius on  $R$  cm, kaheks segmendiks. Leida väiksema segmendi pindala ( $a = 3,5$ ;  $R = 6,2$ ).

20. Ringis, mille raadius on  $R$  cm, on joonestatud kaks paralleelset kõõlu; kummalegi kõõlule vastav kaar on  $\alpha^\circ$ . Avaldada kõõlude vahel asetseva ringi osa pindala.

**Segaülesandeid.**

21. Pool ringjoont on jaotatud suhtes 4 : 7 ja jaotuspunkti on joonestatud ristsirge läbimõõdule. Arvutada läbimõõdu lõigud, kui läbimõõdu pikkus on 11 cm.

22. Rööpküliku teravnurk on  $\alpha$  ning diagonaalide lõikepunkti kaugused ühe nurga haaradest on  $a$  ja  $b$ . Avaldada diagonaalide pikkused ja rööpküliku pindala.

23. Kolm ringi, millede raadiused on 1 m, 2 m ja 3 m, puutuvad üksteist. Arvutada nende vahelise tasapinnatüki pindala.

24. Rombi külg on tema diagonaalide keskmine võrdeline. Leida rombi teravnurk.

**§ 16. Sirged ja tasapinnad.**

**Rist- ja kaldlõigud tasapinnani.**

1. Punktist  $M$  tasapinnale  $P$  ehitatud ristlõigu ja kaldlõigu vaheline nurk on  $\alpha$ . Kaldlõigu pikkus on  $a$ . Leida punkti  $M$  kaugus tasapinnast  $P$  ( $a = 11,22$ ;  $\alpha = 72^\circ 45'$ ).

2. Tasapinnale on ehitatud ristlõik, mille pikkus on  $p$ ; tema aluspunkt on võetud tasapinnal joonestatud ringjoone keskpunktiks; ringjoone raadius on  $r$ . Leida ristlõigu ning tema otspunkti ja ringjoone mingit punkti ühendava lõigu vaheline nurk ( $p = 4,54$ ;  $r = 8$ ).

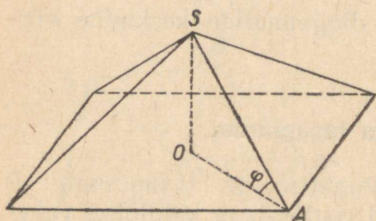
3. Ruudu külg  $AB = a = 30$ . Ruudu keskpunktist  $O$  on ehitatud ristsirge ruudu tasapinnale. Ristsirgel on võetud lõik  $OM = d = 20$  ja punktist  $M$  on ehitatud ristlõik  $MC$  küljele  $AB$ . Arvutada nurk  $x$  lõigu  $MC$  ja tema projektsiooni  $OC$  vahel.

4. Arvutada kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk.

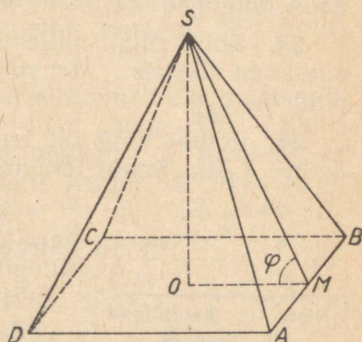
5. Ruudukujulise põhjaga silosüvendile on tarvis ehitada korrapärase 4-nurkse püramiidi kujuline katus. Põhiserv on 6,5 m. Katuse kõrgus peab olema 2,5 m. Arvutada sarika  $SA$  pikkus ja sarika kaldenurk põhitahu suhtes (joon. 19).

6. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 7 cm ja põhiserv on 8 cm. Kui suur on külgserva ja põhitahu vaheline nurk?

7. Telk, millel on korrapärase nelinurkse püramiidi kuju, koosneb presendiga ületõmmatud neljast latist (joon. 20). Telgi kõrgus  $SO$  on 2,4 m; kahe kõrvuti oleva lati aluspunktide kaugus teineteisest  $AB = 2$  m. Leida telgi tipu kaugus  $SM$  põhiserva keskpunktist (s. o. püramiidi apoteem) ja tema kaldenurk põhja suhtes.



Joon. 19.



Joon. 20.

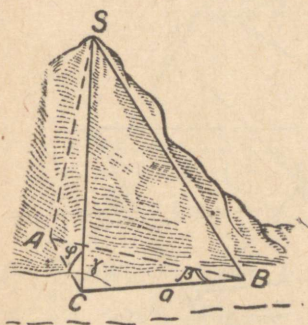
8. Korrapärase kolmnurga  $ABC$  külg on  $a$ . Kolmnurgasse joonestatud ringi keskpunktist  $O$  ehitatakse sirge risti kolmnurga tasapinnaga; ristsirgel võetakse punkt  $M$  nii, et  $MA = a$ ; seejärel ehitatakse punktist  $M$  küljele  $AC$  ristlõik  $MD$ . Arvutada lõigu  $MD$  ja kolmnurga  $ABC$  tasapinna vaheline nurk  $\varphi$ .

9. Kaldsirge moodustab tasapinnaga nurga  $\alpha$ ; selle nurga tipust on antud tasapinnal ehitatud sirge, mis kaldsirge projektsiooniga moodustab nurga  $\beta$ . Leida nurk nende sirgete vahel ( $\alpha = 43^\circ 53'$ ;  $\beta = 11^\circ 10'$ ).

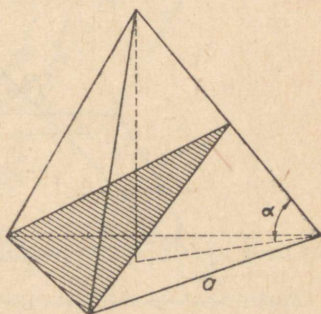
10. Väljaspool tasapinda asetsev sirge lõikub tasapinnal asetseva sirgega, moodustades sellega nurga  $\alpha$ . Viimane sirge moodustab esimese sirge projektsiooniga tasapinnal nurga  $\beta$ . Leida esimese sirge ja tasapinna vaheline nurk ( $\alpha = 8^\circ 26'$ ;  $\beta = 5^\circ 40'$ ).

11. Kolmnurga küljed on  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Kolmnurga ümber joonestatud ringi keskpunktist on ehitatud kolmnurga tasapinnale ristlõik  $h$ . Leida nurgad, mille moodustavad selle tasapinnaga sirged, mis ühendavad ristjoone otspunkti kolmnurga tippudega ( $h = 60$ ;  $a = 30$ ;  $b = 5$ ;  $c = 29$ ).

12. Sirge teeosa  $BC$ , mille pikkus on  $a$  meetrit, kulgeb mööda rõhtsat maapinda. Tee kõrval asetseb mägi, mille tipu kõrgusnurk punktis  $C$  on  $\varphi$  (joon. 21). Tipu  $S$  projektsioon maapinnal on punkt  $A$ . Lõik  $BC$  moodustab oma otspunktidest punkti  $A$  suunatud kiirtega nurgad  $\angle ACB = \gamma$  ja  $\angle ABC = \beta$ . Leida mäe kõrgus ( $a = 400$ ;  $\beta = 40^\circ 10'$ ;  $\gamma = 60^\circ 40'$ ;  $\varphi = 50^\circ 50'$ ).



Joon. 21.



Joon. 22.

13. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ja külgserv moodustab põhitahuga nurga  $\alpha$  (joon. 22). Leida põhiserva ja külgserva keskpunkti läbiva lõike pindala.

Paralleelsed sirged  
ja tasapinnad.

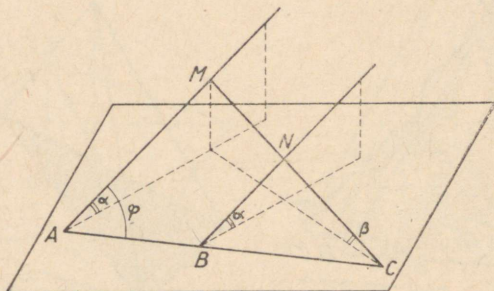
14. Lõigu  $AB = a = 13$  cm otspunktide kaugused tasapinnast on  $m = 5$  cm ja  $n = 8$  cm. Leida nurk lõigu ja tasapinna vahel (2 juhtu).

15. Tasapinna kahest punktist väljuvad kaks paralleelset kaldsirget  $AM$  ja  $BN$ , mis tasapinnaga moodustavad nurga  $\alpha$  (joon. 23); sirge  $MN$ , lõikudes kaldsirgetega täisnurkselt, moodustab tasapinnaga nurga  $\beta$ . Avaldada sirgete  $AB$  ja  $AM$  vaheline nurk  $\varphi$ .

16. Tasapinna kahest punktist, mille kaugus teineteisest on  $a$ , väljuvad kaks teineteisega paralleelset kaldsir-

get, mille kaldenurgad tasapinna suhtes on  $\varphi$ . Avaldada nende sirgete vaheline kaugus, kui nende projektsioonide vaheline kaugus tasapinnal on  $b$ .

17. Lõik  $AB$  on paralleelne tasapinnaga. Lõigu otspunktidest on ehitatud kaldlõigud tasapinnale  $AC = c$  ja  $BD = d$ . Kaldlõik  $AC$  moodustab tasapinnaga nurga  $\alpha$ . Leida kaldlõigu  $BD$  ja tasapinna vaheline nurk ( $c = \sqrt{6}$ ;  $d = 3$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ).



Joon. 23.

18. Tasapinnaga paralleelse lõigu otspunktidest on võetud temale kaks ristsirget, mis tasapinnaga moodustavad nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Lõigu pikkus on  $a$  ning ristsirgete ja tasapinna lõikepunktide kaugus teineteisest on  $b$ . Avaldada lõigu kaugus tasapinnast (2 juhtu).

19. Kaks sirglõiku, mis on piiratud kahe paralleelse tasapinnaga, suhtuvad nagu 2:3. Nurgad, mis need lõigud moodustavad tasapindadega, suhtuvad nagu 2:1. Arvutada need nurgad.

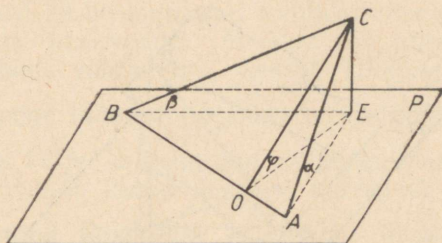
## § 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad.

1. On antud kahetahuline nurk  $\alpha$ . Punktist, mis asetseb nurga ühel tahul kaugusel  $a$  nurga servast, on ehitatud ristlõik lõikumiseni teise tahuga. Leida ristlõigu pikkus ( $a = 6,06$ ;  $\alpha = 41^\circ 55'$ ).

2. 1) Täisnurkne kolmnurk  $ABC$  asetseb nii, et ta hüpotenuus on tasapinnal  $P$  ning kaatetid moodustavad tasa-

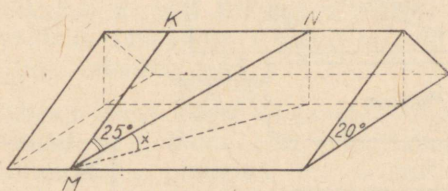
pinnaga  $P$  nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  (joon. 24). Avaldada tasapindade  $ABC$  ja  $P$  vaheline nurk  $\varphi$ .

2) Kolmnurga  $ABC$  üks külge ( $AB$ ) asetseb tasapinnal  $P$ . Teised küljed ( $CA$  ja  $CB$ ) moodustavad tasapin-



Joon. 24.

naga  $P$  nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ , mille tangensid on vastavalt  $\frac{1}{3}$  ja  $\frac{1}{4}$ ; nende külgede projektsioonid sel tasapinnal on teineteisega risti. Arvutada tasapinna  $ABC$  kaldenurk tasapinna  $P$  suhtes.

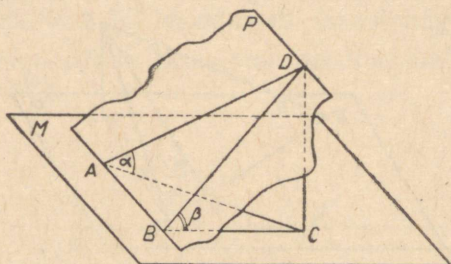


Joon. 25.

3. Katusel, mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on  $20^\circ$ , on ehitatud sirge  $MN$  (joon. 25) nurgi  $25^\circ$  langusjoonega  $MK$  (tasapinna langusjooneks nimetatakse seda tasapinna sirget, mis on risti samal tasapinnal võetud rõhtsa sirgega). Arvutada sirge  $MN$  ja rõhttasapinna vaheline nurk  $x$ .

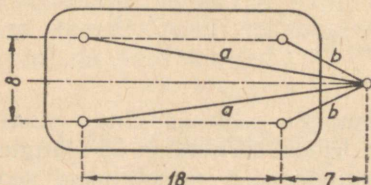
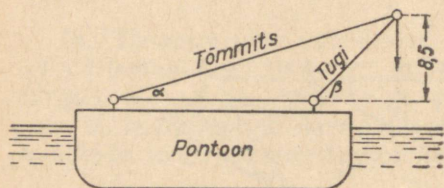
4. Mööda mäenõlva, mille kaldenurk on  $32^\circ$ , kulgeb tee, mis langusjoonega moodustab  $45^\circ$ -se nurga (vt. ülesannet 3). Arvutada tee tõusunurk.

5. Läbi tasapinna  $M$  punkti  $A$  on ehitatud sirge  $AD$ , mis tasapinnaga moodustab nurga  $\alpha$  (joon. 26). Läbi  $AD$  on ehitatud tasapind  $P$  nurgi  $DBC = \beta$  tasapinnaga  $M$ . Avaldada sirge  $AD$  ning tasapindade  $M$  ja  $P$  lõikesirge vaheline nurk.

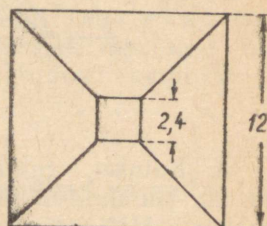


Joon. 26.

6. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi kõrgus on kaks korda väiksem kui püramiidi põhiserv. Avaldada põhja ja külgtahu vaheline nurk  $\varphi$ .



Joon. 27.



Joon. 28.

7. Joonisel 27 on antud ujuva pontoonkraana (pontoon on lamedapõhjaline raudpaat) kõrvaltvaade ja pealtvaade. Mõõdud on antud meetreis. Arvutada: a) tõmmitsate

pikkus  $a$  ja tugede pikkus  $b$ ; b) tõmmitsate ja tugede kaldenurgad pontooni rõhtsa pinna suhtes; c) tõmmitsatevaheline nurk ja tugedevaheline nurk; d) tõmmitsate tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk ning tugede tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk.

8. Joonisel 28 on kujutatud ruudukujulise põhiplaaniga hoone katuse pealtvaade. Mõõdud on antud meetreis. Katuse ülemine, rõhtne osa asetseb kõrgusel, mis moodustab  $\frac{1}{3}$  hoone laiusest (lugedes katuse põhjast). Kõigi nelja katuse külje kaldenurgad rõhttasapinna suhtes on võrdsed. Arvutada katuse külgede kaldenurk.

9. On antud täisnurkse kolmnurga hüpotenuus  $a$  ja teravnurk  $\alpha$ . Avaldada täisnurga tipu kaugus tasapinnast, mis läbib hüpotenuusi ja moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga  $\varphi$ .

10. Püramiidi põhjaks on korrapärane kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga ja teised külgtahud moodustavad põhitahuga kumbki nurga  $\alpha$ . Kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel?

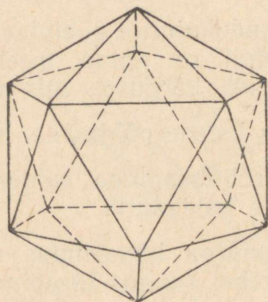
11. Sirge  $AB$  on paralleelne tasapinnaga  $P$ . Sirge  $CD$  moodustab lõikudes sirgega  $AB$  nurga  $\alpha$  ja tasapinnaga  $P$  nurga  $\varphi$ . Avaldada tasapinna  $P$  ning sirgeid  $AB$  ja  $CD$  läbiva tasapinna vaheline nurk.

12. Risttahuka ühest tipust väljuvate servade otspunktid on ühendatud sirglõikude abil. Risttahuka tahkudel tekkinud kolmnurkade pindalad on  $4 \text{ dm}^2$ ,  $6 \text{ dm}^2$  ja  $12 \text{ dm}^2$ . Arvutada ühenduslõike läbiva tasapinna ja risttahuka väiksema põhja vaheline nurk.

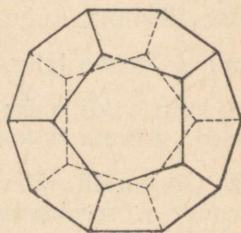
13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserf ja külgserv suhtuvad nagu  $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ . Läbi põhja diagonaali on asetatud tasapind paralleelselt külgservaga. Arvutada selle tasapinna ja põhitahu vaheline nurk.

14. Rööpküliku üks väiksem külg asetseb tasapinnal  $P$ , tema vastaskülg asetseb tasapinnast  $P$  kaugusel, mis on võrdne rööpküliku suuremate külgede kaugusega teineteisest. Arvutada rööpküliku tasapinna ja tasapinna  $P$  vaheline nurk, kui rööpküliku külgede suhe on  $3 : 5$ .

15. Arvutada: 1) korrapärase tetraeedri; 2) korrapärase oktaeedri; 3) korrapärase ikosaeedri (joon. 29); 4) korrapärase dodekaeedri (joon. 30) lähistahkude vahelised nurgad.



Joon. 29.



Joon. 30.

### § 18. Kujundi projektsiooni pindala.

1. Rööpküliliku pindala  $Q = 50 \text{ cm}^2$ . Tema tasapind moodustab projektsioonitasapinnaga  $30^\circ$ -se nurga. Rööpküliliku üks külg asetseb projektsioonitasapinnal. Arvutada rööpküliliku projektsiooni pindala.

2. Läbi kolmnurkse püstprisma põhiserva on asetatud tasapind, mis lõikub vastasoleva külgservaga ja moodustab põhitahuga  $45^\circ$ -se nurga. Avaldada lõike pindala, kui põhja pindala on  $Q$ .

3. Läbi korrapärase kolmnurkse prisma põhiserva on asetatud lõiketasapind, mis moodustab põhitahuga nurga  $\alpha$ . Prisma põhiserv on  $a$ . Avaldada lõike pindala.

4. Korstnal on korrapärase nelinurkse prisma kuju. Katuse kaldenurk on  $32^\circ$ . Katusesse korstna jaoks jäetud avaase pindala on  $2100 \text{ cm}^2$ . Arvutada korstna laius.

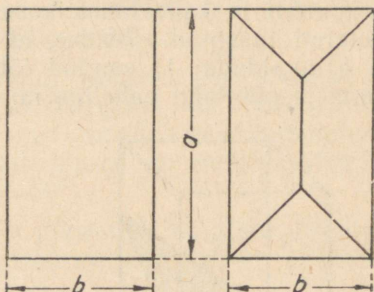
5. Korstna ristlõige on  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ . Katuse kaldenurk on  $35^\circ$ . Arvutada korstna jaoks katusesse jäetud avaase pindala.

6. Neljaküljeline katus katab 28-ruutmeetrilist pindala.

Katuse iga külg moodustab laega nurga  $32^{\circ}53'$ . Arvutada katuse pindala.

7. Neljaküljelise katuse küljel on võrdhaarse trapetsi kuhu, mille alused on 10 m ja 6 m ning kõrgus on 5 m. Katuse külje projektsiooni pindala lae tasapinnal on  $32 \text{ m}^2$ . Leida katuse külje kaldenurk ja katuse kõrgus laest.

8. Joonisel 31 on kujutatud ühe- ja neljaküljelise katuse ristküliku-kujulised põhijoonised. Ristkülikute küljed on  $a$  ja  $b$  ning mõlema katuse külgede kaldenurgad on  $\alpha$ . Kumba katuse värvimiseks kulub rohkem värvi?



Joon. 31.

9. Pinna valgustustugevus oleneb valguskiirte ja valgustatava pinna vahelisest nurgast. Olgu valgustatava tasapinnatüki pindala  $Q$  ja moodustagu valguskiired selle tasapinnaga nurga  $\alpha$ . Kui suurele pinnale langeksid samad kiired, kui valgustatav tasapind oleks kiirtega risti? Kas see pind on endisest suurem või väiksem? Kas pind on endisest tugevamini või nõrgemini valgustatud?

10. Kui suurt rõhttasapinna osa saab katta katusega, mille kaldenurk on  $27^{\circ}30'$  ja pindala on  $120 \text{ m}^2$ ?

## § 19. Rööptahukad, prismad, püramiidid ja nende pindalad.

### Rööptahukad ja prismad.

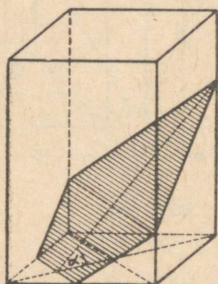
1. Risttahuka diagonaal moodustab tema servadega nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .

1) Tõestada, et  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . 2) Arvutada  $\gamma$ , kui  $\alpha = 31^{\circ}10'$  ja  $\beta = 69^{\circ}09'$ .

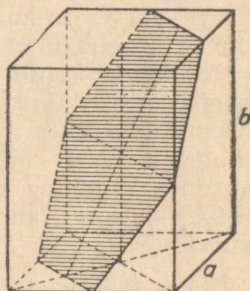
2. Kui korrapärast nelinurkset prismet lõigata nii, et lõikena tekib romb, mille teravnurk on  $\alpha$ , siis lõiketaspind osutub paralleelseks põhja diagonaaliga ja moodustab põhjaga nurga  $\varphi = \arccos\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)$ . Tõestada see lause.

3. Läbi korrapärase nelinurkse prisma (joon. 32) kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on asetatud tasapind, mis lõikab kolme külgserva ja moodustab põhitähuga nurga  $\alpha$ . Avaldada saadud lõike pindala, kui prisma põhiserv on  $a$ .

4. Läbi korrapärase nelinurkse prisma (joon. 33) telje keskpunkti ja kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on asetatud tasapind. Teades, et põhiserv on  $a$  ja külgserv on  $b$ , avaldada: 1) saadud lõike pindala ja 2) lõiketasa-pinna ja põhitahu vaheline nurk.



Joon. 32.



Joon. 33.

5. Nelinurkse püstprisma põhjaks on romb, mille teravnurk on  $\alpha$ . Kuidas peab lõikama seda prisma, et lõikena tekiks ruut, mille tipud asetsevad prisma külgservadel?

6. Risttahuka diagonaal  $d$  moodustab põhjaga nurga  $\beta$ . Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on  $\alpha$ . Leida risttahuka külgpindala ( $\alpha = 21^\circ 35'$ ;  $\beta = 54^\circ 24'$ ;  $d = 17,89$  m).

7. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on  $d$  ja teravnurk on  $\alpha$ . Rööptahuka kõrgus on  $\frac{d}{2}$ . Leida rööptahuka täispindala ( $d = 25,87$ ;  $\alpha = 75^\circ 20'$ ).

8. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on  $a$ , põhja diagonaal on  $d$  ja prisma kõrgus on  $\frac{d}{4}$ . Leida prisma täispindala ( $a = 23,79$ ).

9. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on  $a$  ja tipunurk on  $\alpha$ . Võrdsete külgtahkude diago-

naalid, mis väljuvad ühest ja samast põhja tipust, moodustavad teineteisega nurga  $\beta$ . Leida prisma külgpindala ( $a = 97,84$  cm;  $\alpha = 63^\circ 28'$  ja  $\beta = 39^\circ 36'$ ).

10. Prisma põhjaks on korrapärase kolmnurk, mille külg on  $a$ . Ühe põhja ühe tipu projektsioon asetseb teise põhja keskpunktis. Külgservad moodustavad põhitahuga nurga  $\alpha$ . Avaldada prisma külgpindala.

**Püramiid.**

11. Püramiidi põhjaks on korrapärase kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised aga moodustavad põhitahuga kumbki nurga  $\varphi$ . Leida, kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel ( $\varphi = 30^\circ$ ).

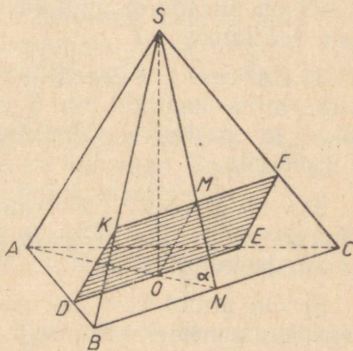
12. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi külgtahu tipunurk on  $\alpha$ . Leida püramiidi külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad ( $n = 4$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ).

13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ja külgserv moodustab põhitahuga nurga  $\alpha$ . Püramiidisse on kujundatud kuup nii, et ta neli tippu asetsevad püramiidi apoteemidel. Avaldada kuubi serv.

14. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ja moodustab külgservaga nurga  $\alpha$ . Avaldada läbi püramiidi külgserva ja kõrguse tehtud lõike pindala.

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on  $c$  ja diagonaallõike pindala on  $P$ . Leida püramiidi külja ja põhitahu vaheline nurk ning põhiserv ( $c = 5$ ;  $P = 15$ ).

16. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrguse ja põhiserva suhe on  $m : n$ . Läbi põhitahu diagonaali on pandud kaldtasapind nii, et lõike pindala võrdub diagonaallõike pindalaga. Leida lõiketasapinna ja põhitahu vaheline nurk ( $m : n = 1 : \sqrt{6}$ ).



Joon. 34.

17. Korrapärase kolmnurkse püramiidi (joon. 34) põhiserv on  $a$  ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $\alpha$ . Püramiidi lõike  $DEFK$  tasapind läbib põhja keskpunkti ja on paralleelne püramiidi kiivsete servadega  $SA$  ja  $BC$ . Leida selle lõike pindala ( $a = 3$ ;  $\alpha = 70^\circ$ ).

18. Korrapärase nelinurkse püramiidi külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $\alpha$ . Püramiid on lõigatud põhiserva läbiva tasapinnaga, mis põhitahuga moodustab nurga  $\beta$ . Põhiserv on  $a$ . Avaldada lõike pindala.

Projektsiooni pindala  
lause rakendamine  
püramiidi pindala  
arvutamiseks.

19. Kui mingi püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad  $\alpha$ , siis:

$$S_{\text{külg}} = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad \text{ja} \quad S_{\text{täis}} = \frac{2Q \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

kus  $S$  on püramiidi pindala ja  $Q$  on põhja pindala. Tõestada see lause.

20. (*Peast.*) Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatedid on 6 cm ja 8 cm. Püramiidi kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $60^\circ$ . Arvutada külgpindala.

21. 1) (*Peast.*) Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $60^\circ$ . Avaldada külgpindala.

2) On antud kaks korrapärast püramiidi, üks kolme- ja teine kuusnurkne. Kummagi püramiidi põhiserv on  $a$  ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $30^\circ$ . Avaldada kummagi püramiidi külgpindala.

22. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on 13 cm, 14 cm ja 15 cm ning kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $60^\circ$ . Arvutada püramiidi külgpindala.

23. Torn on kaetud korrapärase kaheksanurkse püramiidi kujulise katusega. Püramiidi külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $60^\circ$ . Põhiserv on 1,23 m. Mitu ruutmeetrit plekki kulub katuse katmiseks?

24. Korrapärase püramiidi põhja pindala on  $168 \text{ cm}^2$  ja külgpindala on  $200 \text{ cm}^2$ . Arvutada külge- ja põhitahu vaheline nurk.

25. (*Peast.*) Korrapärase nelinurkse püramiidi külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $a$ . Põhiserv on  $a$ . Avaldada külgpindala.

26. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on  $h$  ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on  $a$ . Avaldada püramiidi täispindala.

27. Püramiidi põhjaks on romb, mille külge on  $a$  ja teravnurk on  $a$ . Püramiidi kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $\varphi$ . Avaldada püramiidi täispindala.

28. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi apoteem on  $k$  ja ta moodustab põhitahuga nurga  $\alpha$ . Leida püramiidi täispindala ( $n = 12$ ;  $k = 36,3$ ;  $\alpha = 35^\circ 40'$ ).

29. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on  $a$  ja  $b$  ( $b > a$ ). Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $\alpha$ . Avaldada püramiidi täispindala.

30. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille diagonaal on  $l$  ja mis moodustab suurema alusega nurga  $\alpha$ . Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on  $\varphi$ . Avaldada püramiidi täispindala.

**Püramiidi  
pindala.**

31. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ja külgtahu tipunurk on  $\alpha$ . Avaldada püramiidi täispindala.

32. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada püramiidi külgpindala.

33. Kolmnurkse püramiidi tipu juures olevad tasanurgad on  $\alpha$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$ . Külgserv, mis on võrdsete nurkade ühiseks haaraks, on  $a$  ja on risti põhitahuga. Avaldada püramiidi külgpindala.

34. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külge on  $a$ . Kaks külgtahku on risti põhitahuga ja teised kaks külgtahku moodustavad põhitahuga nurgad  $\alpha$ . Avaldada püramiidi külge- ja täispindala.

35. Püramiidi põhjaks on ristkülik. Kaks külgtahku on risti põhitahuga ja teised kaks külgtahku moodustavad põhitahuga nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ . Püramiidi kõrgus on  $h$ . Avaldada püramiidi külgpindala.

36. Püramiidi põhjaks on romb, mille külge on  $a$  ja teravnurk on  $\alpha$ . Kaks külgtahku (näiteks need, mis hõlma-

vad nurka  $\alpha$ ) on risti põhitahuga ja kumbki ülejäänud tahk moodustab põhitahuga nurga  $\varphi$ . Avaldada püramiidi külgpindala.

**Tüvipüramiid.**

37. Korrapärase  $n$ -nurkse tüvipüramiidi külgserv on  $c$  ning põhiservad on  $a$  ja  $b$  ( $a > b$ ). Avaldada tüvipüramiidi kõrgus.

38. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurem ja väiksem põhiserv suhtuvad nagu  $m:n$  ning külgservad moodustavad suurema põhitahuga nurga  $\alpha$ . Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib suurema põhja serva ja tema vastas asetsevat väiksema põhja serva. Kui suure nurga moodustab see tasapind püramiidi põhjaga?

39. Korrapärase  $n$ -nurkse tüvipüramiidi kõrgus on  $h$  ning põhiservad on  $a$  ja  $b$  ( $a > b$ ). Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

40. Korrapärase  $n$ -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on  $a$  ja  $b$  ( $a > b$ ) ning külgserv moodustab põhjaga nurga  $\alpha$ . Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

41. Korrapärase  $n$ -nurkse tüvipüramiidi põhjade pindalade suhe on  $m^2$ , apoteem on  $k$  ning apoteemi ja kõrguse vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

42. On antud korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus  $h$  ning nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ , mis suurem põhi moodustab külgservaga ja tüvipüramiidi diagonaaliga. Leida tüvipüramiidi külgpindala ( $h = 25$ ;  $\alpha = 50^\circ 15'$ ;  $\beta = 35^\circ$ ).

**§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad.**

**Silinder.**

1. Võrdkülgse telglõikega silindri ülemise põhja piirde punkt on ühendatud alumise põhja piirde punktiga. Nendes punktidesse suunatud raadiuste vaheline nurk (mõeldakse kiivsirgete vahelist nurka) on  $30^\circ$ . Arvutada ühendussirge ja silindri telje vaheline nurk.

2. Võrdkülgse telglõikega silindri põhja raadius on  $R$ . Ülemise põhja piirde punkt on ühendatud alumise põhja piirde punktiga sirge abil, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga  $\alpha$ . Avaldada selle sirge lühim kaugus silindri teljest.

3. Silindrile on ehitatud puutuja, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga  $\alpha$ . Avaldada alumise põhja keskpunkti kaugus sellest sirgest, kui põhja raadius on  $R$  ja põhja keskpunkti kaugus puutepunktist on  $d$ .

4. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv on  $b$  ja moodustab põhitahuga nurga  $\alpha$ . Sellesse püramiidi on kujundatud võrdkülgse telglõikega silinder nii, et ta põhi asetseb püramiidi põhitalul (joon. 35). Avaldada silindri kõrgus.

**Koonus.**

5. Koonuse põhja raadius on  $R$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga  $\varphi$ . Avaldada lõike pindala.

6. Koonus asetseb kahe paralleelse tasapinna vahel nii, et ta põhi asetseb ühel neist ja tipp teisel. Koonuse moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on  $\alpha$ . Kõrgust poolitab sirge, mis temaga moodustab nurga  $\beta$  ja lõikab koonuse külgpinda kahes punktis. Selle sirge paralleelsete tasapindade vahel asetsev lõik on  $a$ . Avaldada selle sirge lõik, mis asetseb seespool koonuse külgpinda.

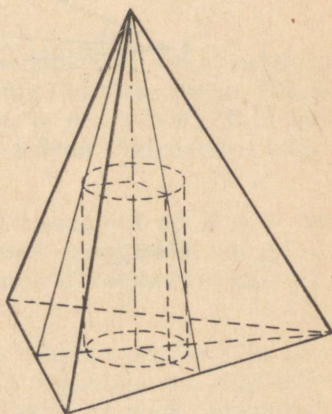
7. Koonusesse, mille moodustaja on  $l$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ , on kujundatud kuup. Avaldada kuubi serv.

8. Koonuse põhja raadius on  $R$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Koonusesse on kujundatud kolmnurkne võrdsete servadega püstprisma nii, et ta põhi asetseb koonuse põhja tasapinnal. Avaldada prisma servade pikkus.

**Koonuse pindala.**

9. Koonuse moodustaja  $a$  ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada koonuse täispindala.

10. Koonuse külgpindala on kolm korda suurem kui ta põhja pindala. Leida moodustaja ja põhja vaheline nurk.

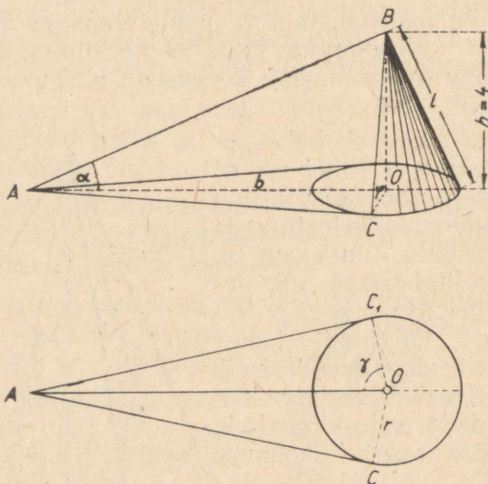


Joon. 35.

11. Arvutada koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui koonuse telglõike pindala on neli korda väiksem kui täispindala.

12. Avaldada koonuse täispindala, kui ta moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$  ning telglõike pindala on  $Q$ .

13. Läbi koonuse kahe moodustaja, mis teineteisega moodustavad nurga  $\varphi$ , on pandud tasapind, mis koonuse põhjaga moodustab nurga  $a$ . Lõike pindala on  $S$ . Leida koonuse kõrgus ( $\varphi = 52^{\circ}16'$ ;  $a = 33^{\circ}10'$ ;  $S = 617,5 \text{ cm}^2$ ).



Joon. 36.

14. Koonuse põhja raadius on  $r$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $a$ . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga  $\delta$ . Leida koonuse külgpindala ja lõike pindala ( $r = 2,3 \text{ m}$ ;  $a = 42^{\circ}27'$ ;  $\delta = 36^{\circ}21'$ ).

15. Muldvallil on joonisel 36 näidatud kuju. On antud:  $\frac{h}{b} = \frac{1}{h} = 0,05$ ;  $\frac{h}{r} = \frac{1}{m} = \frac{2}{3}$ ;  $h = 4 \text{ m}$ . Arvutada: 1)  $b$ ; 2)  $r$ ; 3)  $a = \angle BAO$ ; 4)  $\varphi = \angle BCO$ ; 5)  $\gamma$ ; 6) valli põhja pindala; 7) valli külgpindala.

16. Koonuse külgpindala on  $S$  ja moodustaja on  $a$ . Leida koonuse telglõike tipunurk ( $S = 81,312 \text{ m}^2$ ;  $a = 10 \text{ m}$ ).

17. Koonuse kõrgus on  $H$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Koonuse täispind on jaotatud pooleks tasapinnaga, mis on risti kõrgusega. Avaldada: 1) lõike-tasapinna kaugus koonuse tipust; 2) külgpinna osade suhe ( $\alpha = 60^\circ$ ).

18. Koonuse telglõike tipunurk on  $\alpha$ . Avaldada koonuse külgpinnalaotuse kesknurk. [Näited: 1) võrdkülgse telglõikega koonus; 2)  $\alpha = 70^\circ 24'$ .]

**Tüvikoonus.**

19. Tüvikoonuse põhjade raadiused on  $R$  ja  $r$ . Moodustaja kaldenurk esimese põhja suhtes on  $\alpha$ . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

20. Tüvikoonuse kõrgus on tema põhjade raadiuste keskmine võrdeline; raadiuste summa on  $m$ . Moodustaja kaldenurk põhja tasapinna suhtes on  $\alpha$ . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

21. Läbi tüvikoonuse kahe moodustaja, mille vaheline nurk on  $\beta$ , on pandud tasapind, mis koonuse põhju lõikab mööda kõõle, mille pikkused on  $m$  ja  $n$  ( $m > n$ ). Kummalegi kõõlule vastav kaar on  $a$ . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

22. Tüvikoonus, mille põhjade raadiused on  $R$  ja  $r$ , on lõigatud tasapinnaga, mis põhjaga moodustab nurga  $\beta$ . Lõiketasapind lõikab kummagi põhja piirdejoonest kaare  $\delta$ . Avaldada lõike pindala.

23. Tüvikoonuse kõrgus on  $h$  ning moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Moodustaja on risti telglõike diagonaaliga, mis läbib tema ülemist otspunkti. Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

24. Tüvikoonuse alumise ja ülemise põhja pindalad ning külgpindala suhtuvad nagu  $m : n : p$ . Avaldada moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk.

25. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on teineteisega risti. Moodustaja on  $l$  ning tema ja alumise põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Leida tüvikoonuse kül- ja täispindala ( $l = 12$ ;  $\alpha = 70^\circ 20'$ ).

26. Tüvikoonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$  ning põhjade pindalad on  $Q$  ja  $q$ . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

## § 21. Ruumalade arvutamine.

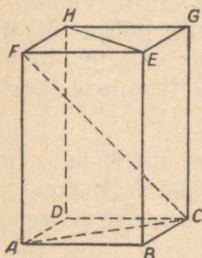
### Rööptahukas.

1. Risttahuka diagonaal  $l$  moodustab põhja tasapinnaga nurga  $\varphi$ . Põhja diagonaalide vaheline vaheline teravnurk on  $\beta$ . Avaldada risttahuka ruumala.

2. Risttahuka põhja diagonaal  $d = 7,5$  dm, põhja diagonaalide vaheline nurk  $\alpha = 35^\circ 27'$  ning põhja suuremat külge läbiva diagonaaltasapinna ja põhja vaheline nurk  $\beta = 57^\circ 33'$ . Arvutada risttahuka ruumala.

3. Püströöptahuka põhja teravnurk on  $a$  ning küljed on  $a$  ja  $b$ . Rööptahuka väiksem diagonaal võrdub põhja suurema diagonaaliga. Avaldada rööptahuka ruumala.

4. Püströöptahuka (joon. 37) põhjaks on rööpkülik, mille diagonaal  $AC = d$ , külge  $CB = \frac{1}{4} AC$  ja  $\angle ABC = \alpha$ . Rööptahuka diagonaal  $FC$  moodustab põhja tasapinnaga nurga  $\varphi$ . Leida rööptahuka ruumala ning põhjate diagonaalide  $AC$  ja  $EH$  vaheline nurk ( $d = 14,28$  dm;  $\alpha = 106^\circ 06'$ ;  $\varphi = 57^\circ 47'$ ).



Joon. 37.

5. Rööptahuka ühest tipust väljuvad servad  $a$ ,  $b$  ja  $c$ ; servad  $a$  ja  $b$  on teineteisega risti ning serv  $c$  moodustab kummagagi nurga  $\alpha$ . Avaldada rööptahuka ruumala ning serva  $c$  ja ristküliku tasapinna vaheline nurk ( $\alpha = 120^\circ$ ).

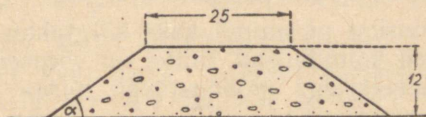
### Prisma.

6. Kõrrapärase nelinurkse prisma diagonaal moodustab külgtahuga nurga  $\alpha$ ; prisma põhiserv on  $a$ . Avaldada prisma ruumala.

7. Läbi kõrrapärase nelinurkse prisma alumise põhja diagonaali ja ülemise põhja tipu on pandud tasapind, mis kahte lähiskülgtahku lõikab mööda sirgeid, mis teineteisega moodustavad nurga  $\alpha = 58^\circ 48'$ . Prisma põhiserv  $a = 6,4$  cm. Arvutada prisma ruumala.

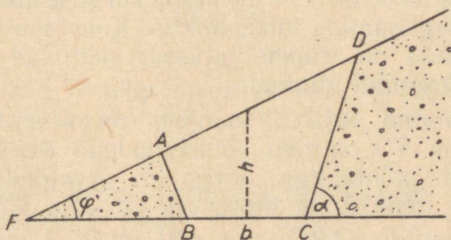
8. Kõrrapärase kolmnurkse prisma ülemise põhja kaks tippu on ühendatud nende vastas asetsevate alumise põhja külgede keskpunktidega. Ühendussirgete vaheline nurk, mille sisepiirkond on pööratud põhja poole, on  $\alpha$ ; prisma põhiserv on  $a$ . Avaldada prisma ruumala.

9. Joonisel 38 on kujutatud raudtee muldkeha ristlõige. Nurk  $\alpha$  on määratud võrdusega  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ . Mitu kuupmeetrit mulda sisaldab muldkeha 1 jooksev meetre? Mõõdud on joonisel antud meetreis.



Joon. 38.

11. Püstprisma kõrgus  $h = 20$  dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk  $\alpha = 45^\circ 42'$ ; ringi raadius  $r = 6,15$  dm. Avaldada ja arvutada prisma ruumala.



Joon. 39.

12. Maa-alale, mille pinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes  $\varphi = 18^\circ 30'$  (joon. 39), tahetakse kaevata süvend. Süvendi külgede kaldenurk peab olema  $\alpha = 68^\circ 10'$ , süvendi alumine laius  $b = 14,2$  m ja sügavus keskkohal  $h = 9,2$  m. Mitu kuupmeetrit mulda tuleb süvendi 1 jooksva meetri kohta?

13. Prisma põhjaks on kolmnurk  $ABC$ , milles  $BC = a$  ja  $AB = AC$ . Serv  $AA_1$  on  $b$  ja on risti servaga  $BC$ ; kahtahuline nurk serva  $AA_1$  juures on  $\alpha$ . Avaldada prisma ruumala.

**Püramiid.**

14. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi külgserv  $b$  moodustab põhja tasapinnaga nurga  $\beta$ . Leida püramiidi ruumala ( $n=8$ ;  $b=3,5$ ;  $\beta=78^{\circ}39'$ ).

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on  $b$  ja külgtahu tipunurk on  $\alpha$ . Avaldada püramiidi ruumala.

16. Avaldada püramiidi ruumala, kui ta kõrgus on  $h$ , külgservad moodustavad põhitahuga nurga  $\varphi$  ning põhjaks on kolmnurk, mille kaks nurka on  $\alpha$  ja  $\beta$ .

17. Kolmnurkse püramiidi kaks külgtahku on võrdhaar- sed täisnurksed kolmnurgad, millel on võrdsed hüpotenuu- sid  $b$ , mis teineteisega moodustavad nurga  $\alpha$ . Avaldada püramiidi ruumala.

18. Püramiidi põhjaks on trapets, mille haarad on võrd- sed väiksema alusega  $a$  ja teravnurgad on  $\alpha$ . Püramiidi külgservad moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad  $\varphi$ . Avaldada püramiidi ruumala.

19. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alu- sed on  $a$  ja  $b$  ( $a > b$ ) ning diagonaalide mittevõrdsete lõi- kude vaheline nurk on  $\alpha$ . Püramiidi kõrguse aluspunkt aset- seb põhja diagonaalide lõikepunktis. Kahetahulised nurgad, mille servadeks on trapetsi alused, suhtuvad nagu 1:2. Avaldada püramiidi ruumala.

20. Püramiidi  $SABCD$  põhjaks on rööpkülik  $ABCD$ . Servad  $SB$  ja  $SD$  on risti põhiservadega  $BC$  ja  $AD$  ning moodustavad põhitahuga nurga  $\varphi$ . Avaldada püramiidi ruumala, kui rööpküliku teravnurk on  $\alpha$  ja pindala on  $P$ .

21. Püramiidi  $SABC$  tahu  $ABC$  nurk  $A$  on  $\alpha=72^{\circ}36'$  ja nurk  $B$  on  $\beta=47^{\circ}23'$ . Püramiidi ruumala  $V=317\text{ cm}^3$ . Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib serva  $SC$  ja kolmnurga  $ABC$  nurga  $C$  poolitajat. Missuguseiks osadeks jaotab see tasapind püramiidi ruumala?

22. Korrapärase tetraeedri serva läbiv tasapind jaotab tetraeedri ruumala suhtes 3:5. Missuguseiks osadeks jaotab see tasapind tetraeedri kahetahulise nurga?

**Tüvipüramiid.**

23. Tiigi süvendil on korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kuju. Põhiserv- vad on  $a=14\text{ m}$  ja  $b=10\text{ m}$ . Külgtahkude kaldenurk põhitahu suhtes  $\alpha=38^{\circ}$ . Kui palju vett võib süvend mahutada?

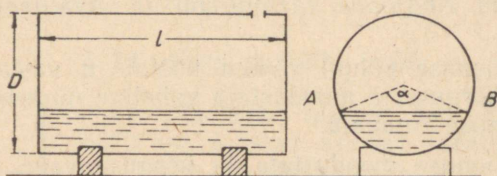
24. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on  $a$  ja  $b$  ning külgtahu teravnurk on  $\alpha$ . Leida tüvipüramiidi ruumala ( $a = 25,7$ ;  $b = 15,2$ ;  $\alpha = 65^\circ 12'$ ).

25. Korrapärase  $n$ -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on  $a$  ja  $b$ . Külgservade kaldenurk põhitahu suhtes on  $\alpha$ . Avaldada tüvipüramiidi ruumala.

**Silinder.**

26. Silindri külgpinnalaotus on ristkülik, mille diagonaal  $d$  moodustab alusega nurga  $\alpha$ . Avaldada silindri ruumala.

27. Silindri põhjal on võetud kõõl, mille pikkus on  $a$ . Temaile vastav kaar on  $\alpha$ . Silindri kõrgus on  $h$ . Leida silindri ruumala ( $a = 4,8$  dm;  $\alpha = 26^\circ 32'$ ;  $h = 23$  dm).



Joon. 40.

28. Võrdkülgse telglõikega silindri põhjasse on kujundatud korrapärase  $n$ -nurk, mille külge on  $a$ . Avaldada silindri ruumala.

29. Rõhtsalt asetsev silindrikujuline paak on osaliselt täidetud vedelikuga (joon. 40). Kaarele  $AB$  vastab nurk  $\alpha = 135^\circ$ . Paagi sisemine läbimõõt  $D = 1,7$  m ja sisemine pikkus  $l = 3,5$  m. Arvutada vedeliku hulk.

30. Silindrilise toru kõrgus on  $H$ . Kui läbi toru välispinna moodustaja juhtida kaks tasapinda, mis puutuvad tema sisepinda, siis nende tasapindade vaheline nurk on  $\alpha$  ning kõõl, mis ühendab nende tasapindade ja toru põhja sisemise ringjoone puutepunkte, on  $b$ . Avaldada toru seinte ruumala.

31. Kui silindri põhjasse kujundatud korrapärase  $n$ -nurga külje otspunktid ühendada teise põhja keskpunktiga, siis tekib võrdhaarne kolmnurk, mille pindala on  $Q$  ja tipunurk on  $\alpha$ . Avaldada silindri ruumala.

**Koonus.**

32. Peene liiva vaba pinna kaldenurk  $\varphi = 31^\circ$ . Liivakuhjal on koonuse kuju, mille põhja übermõõt  $c = 11$  m. Liiva erikaal  $d = 1,6$ . Avaldada ja arvutada kuhja kaal.

33. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk  $\alpha = 18^\circ 46'$ , moodustaja pikkus  $l = 36,17$  dm. Arvutada koonuse ruumala.

34. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$  ning kõrgus on  $h$ . Avaldada koonuse ruumala.

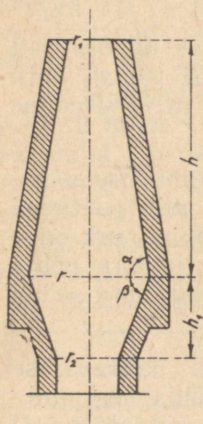
35. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$  ning põhja raadius on  $R$ . Avaldada koonuse täispindala ja ruumala.

36. Koonuse telglõike tipunurk on  $\alpha$ . Telglõike ümber kujundatud ringjoone raadius on  $R$ . Avaldada koonuse ruumala.

37. Koonuse põhjal võetud kõõlule  $a$  vastab kaar  $\alpha$ . Koonuse kõrguse ja moodustaja vaheline nurk on  $\beta$ . Avaldada koonuse ruumala.

38. Koonuse moodustaja ja kõrguse vahe  $d = 2,5$  m ning nendevaheline nurk  $\alpha = 42^\circ 38'$ . Avaldada ja arvutada koonuse ruumala.

39. Kaks koonust asetsevad ühel ning samal pool nende ühist põhja, mille raadius  $R = 5,38$  dm. Ühe koonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes  $\alpha = 74^\circ 28'$  ja teise oma  $\beta = 60^\circ 12'$ . Avaldada ja arvutada koonuste külgpindade vaheline ruumala.



Joon. 41.

**Tüvikoonus.**

40. Tüvikoonuse põhjade raadiused on  $R$  ja  $r$ . Moodustaja ja esimese põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada tüvikoonuse ruumala.

41. Tüvikoonuse põhjade pindalade suhe on 4, moodustaja on  $l$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\varphi$ . Avaldada koonuse ruumala.

42. Joonisel 41 on kujutatud kõrgahju telglõige. Ahju õõne moodustavad kaks tüvikoonust. Ülemise ja alumise

ava raadiused on  $r_1$  ja  $r_2$ . Moodustajate kaldenurgad põhja suhtes on  $\alpha$  ja  $\beta$ . Ahju õõne ruumala on  $V$ . Avaldada ja arvutada tüvikoonuste ühise põhja raadius  $r$  ning nende kõrgused  $h$  ja  $h_1$  ( $2r_1 = 4,2$  m;  $2r_2 = 4,9$  m;  $\alpha = 86^\circ$ ;  $\beta = 76^\circ$ ;  $V = 572,6$  m<sup>3</sup>).

43. Tüvikoonuses asetseb koonus, mille põhjaks on tüvikoonuse väiksem põhi, kõrguseks aga tüvikoonuse kõrgus ja mille moodustajad on paralleelsed tüvikoonuse moodustajatega. Tüvikoonuse moodustaja  $a = 24,9$  dm ja moodustajate pikendite vaheline suurim nurk  $\alpha = 65^\circ 49'$ . Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala.

44. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on teineteisega risti, moodustaja on  $l$  ning moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala ( $l = 12$ ;  $\alpha = 70^\circ 20'$ ).

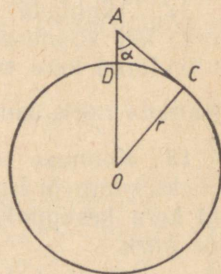
## § 22. Kera ja selle osad.

### Kera.

1. Maakera raadius on (ligikaudu) 6370 km. Moskva asetseb paralleelringjoonel, mille geograafiline laius on  $56^\circ$ . Arvutada selle paralleeli raadius.

2. Maakera raadius on 6370 km. Arvutada pöörijoone (laius  $20^\circ 27'$ ) ja polaarjoone (laius  $66^\circ 33'$ ) pikkus.

3. Vaatleja, asetsedes mäetipus  $A$  (joon. 42), mõõtis püstsirge  $AD$  ja silmapiirile suunatud vaatekiire  $AC$  vahelise nurga  $\angle DAC = \alpha$ . Teades maakera raadiust  $r$  avaldada mäe kõrgus  $AD = x$ .



Joon. 42.

4. Kerasse, mille ruumala  $V = 53,37$  dm<sup>3</sup>, on kujundatud koonus. Koonuse põhja läbimõõdu otspunktidest lähtuvate moodustajate vaheline nurk  $\alpha = 42^\circ 18'$ . Avaldada ja arvutada koonuse ruumala.

5. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk  $\alpha = 35^\circ 18'$ . Leida koonuse ja tema ümber kujundatud kera ruumalade suhe.

6. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi põhiseriv on  $a$  ning põhi- ja külgtahu vaheline nurk on  $\varphi$ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.

7. Korrapärase  $n$ -nurkse püramiidi põhiserv on  $a$  ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada ja arvutada püramiidi ümber kujundatud kera raadius ( $n = 8$ ;  $a = 3,5$ ;  $\alpha = 58^\circ 37'$ ).

8. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on  $a$  ja teravnurk on  $\alpha$ . Külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad on võrdsed nurgaga  $\varphi$ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.

9. Koonuse põhja ümbermõõt on  $C$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Avaldada koonuse ja temasse kujundatud kera puutejoone pikkus.

10. Kera pinna punktist väljub kolm võrdset kõõlu, mis üksteisega moodustavad võrdsed nurgad. Avaldada kõõlude pikkus, kui nendevaheline nurk on  $\alpha$  ja kera raadius on  $R$ .

11. Koonuse põhja pindala, koonusesse kujundatud kera pindala ja koonuse külgpindala moodustavad aritmeetilise progressiooni. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

12. Avaldada koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui koonuse ruumala on  $m$  korda suurem temasse kujundatud kera ruumalast. Leida arvu  $m$  väikseim väärtus; arvutada nurk, kui  $m = 2\frac{1}{4}$ .

13. Koonuse teljega ristuv lõige, mis jaotab koonuse kaheks ruumvõrdseks osaks, läbib koonuse ümber kujundatud kera keskpunkti. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

14. Nelja võrdse kera ümber, mis asetsevad nii, et iga kera puutub kokku kõigi teistega, on kujundatud koonus. Arvutada koonuse telglõike tipunurk.

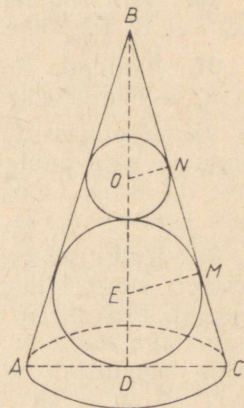
15. Kera ümber on kujundatud tüvikoonus, mille külgpindala ja kera pindala suhe on  $m : n$ . Avaldada ja arvutada moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk ( $m : n = 2 : 1$ ).

16. Avaldada tüvikoonuse ümber kujundatud kera raadius, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on  $R$  ja  $r$  ning moodustaja ja alumise aluse vaheline nurk on  $\alpha$ .

17. Tüvikoonusesse, mille põhjade raadiused on  $r_1$  ja  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), on kujundatud kera. Avaldada: 1) kera pindala ning 2) koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

18. Koonusesse on kujundatud kaks kera nii, et nad puutuvad teineteist ning koonuse pinda (joon. 43). Kerade raadiuste  $EM$  ja  $OM$  suhe on  $m:n$ . Avaldada ja arvutada koonuse telglõike tipunurk ( $m:n = 3:1$ ).

19. Koonuse põhja raadius on  $R$  ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on  $\alpha$ . Koonusesse on kujundatud rida kerad nii, et esimene neist puutub koonuse külgpinda ja põhja pinda, iga järgmine aga koonuse külgpinda ja eelmist kera. Leida kerade ruumalade summa piirväärtus kerade arvu piiramatul kasvamisel.



Joon. 43.

**Kera osad.**

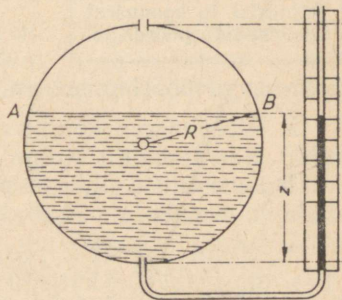
20. Kerakujulisse paaki on valatud vedelikku, mille erikaal on  $d$ . Kaare  $AB$  (joon. 44) suurus on  $\varphi$ . Paagi sisemine raadius on  $R$ . Avaldada vedeliku kaal.

21. Gaasisäilitil on ülalt sfääri segmendiga kaetud silindri kuju. Silindri sisemised mõõdud on: läbimõõt 24 m, kõrgus 6 m. Silindrit katva sfääri segmendi telglõike kaar  $73^\circ 44'$ . Arvutada säiliti ruumala.

22. Arvutada kera kihi telglõike kaar, kui kihil on võrdsed põhjad ja ta külgpindala võrdub põhjade pindalade summaga.

23. Avaldada sfääri segmendi pindala, kui ta telglõike kaar on  $\alpha$  ja sellel vastav kõõl on  $a$ .

24. Sfääri segmendi telglõike kaar  $\alpha = 65^\circ 28'$  ja raadius  $R = 24$  dm. Avaldada ja arvutada sfääri segmendi pindala.



Joon. 44.

25. Kera sektori telglõike kaar on  $\alpha$  ja temale vastav kõõl on  $b$ . Avaldada ja arvutada sektori ruumala ( $b = 25,13$ ;  $\alpha = 63^\circ 17'$ ).

26. Kera ruumala on  $V$ . Avaldada kera sektori ruumala, kui ta telglõike kesknurk on  $\alpha$ .

27. Avaldada kera sektori täispindala, kui ta raadius on  $R$  ja telglõike kesknurk on  $\alpha$ .

28. Koonusesse on kujundatud kera. Koonuse külginna ja kera puutejoon jaotab kera pinna osadeks, mille suhe on  $m:n$ . Leida koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk ( $m:n = 1:3$ ).

29. Ringi sektor, mille kaar on  $\alpha$  (väiksem kui  $180^\circ$ ), pöörleb ringi läbimõõdu ümber, mis asetseb väljaspool sektorit. Pöördkeha ruumala suhtub sama raadiusega kera ruumalaga nagu  $m:n$ . Leida väiksem nurk, mis see läbimõõt moodustab sektori äärmiste raadiustega ( $\alpha = 90^\circ$ ;  $m:n = \sqrt{3}:\sqrt{8}$ ).

30. Kera sektori raadius on  $R$  ja raadiuste vaheline suurim nurk on  $\alpha$ . Avaldada sektorisse kujundatud kera pindala ja ruumala.

### § 23. Pöördkehad.

Silindrist ja koonusest koosnevaid pöördkehi.

1. Kolmnurgas on antud: külge  $a$  ning nurgad  $B$  ja  $C$ . Avaldada keha pindala ja ruumala, mis tekib kolmnurga pöörlemisel antud külje ümber.

2. Võrdhaarse kolmnurga pindala  $Q = 50 \text{ dm}^2$  ja tipunurk  $\beta = 100^\circ 24'$ . Kolmnurk pöörleb sirge ümber, mis läbib tema aluse ühte otspunkti ja on risti alusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha täispindala.

3. Kolmnurk  $ABC$  pöörleb sirge ümber, mis läbib tippu  $A$  ja on paralleelne küljega  $BC$ . Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala, kui  $BC = a = 23,54 \text{ dm}$ , külje  $AB$  projektioon pöörlemisteljel on  $b = 7,33 \text{ dm}$  ning külje  $AB$  ja telje vaheline nurk on  $\alpha = 18^\circ 36'$ .

4. Korrapärase kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib tema külje otspunkti ja moodustab selle küljega teravnurga  $\alpha$ . Avaldada pöördkeha pindala.

5. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on  $b$  ja tipunurk on  $\alpha$ , pöörleb oma haara ümber. Leida pöördkeha ruumala ja pindala ( $\alpha = 120^\circ$ ).

6. Romb, mille külg on  $a$  ja teravnurk on  $\alpha$ , pöörleb teravnurga tippu läbiva telje ümber, mis on risti rombi küljega. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala.

7. Tasane siksakiline joon koosneb  $n$  võrdsest lõigust, mille pikkus on  $a$  ja mis moodustavad üksteisega võrdsed nurgad  $\alpha$ . See joon pöörleb telje ümber, mis läbib ta üht otspunkti ja on paralleelne nurga  $\alpha$  poolitajaga. Avaldada pöördkeha pindala.

8. Kolmnurgas on antud küljed  $b$  ja  $c$  ning nendevahe-line nurk  $\alpha$ . Kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib nurga  $\alpha$  tippu ning moodustab külgedega  $b$  ja  $c$  võrdsed nurgad. Avaldada pöördkeha ruumala.

9. Kolmnurgas on antud külg  $a$  ning selle lähisnurgad  $\alpha$  ja  $90^\circ + \alpha$ . Kolmnurk pöörleb küljele  $a$  tõmmatud kõrguse ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

10. Poolringjoonel, mille läbimõõt on  $AB = 2R$ , on võetud kaar  $BC = \alpha$  (väiksem kui  $90^\circ$ ). Punktist  $C$  on tõmmatud puutuja lõik  $CD$  kuni läbimõõdu pikenduseni, peale selle on punkt  $C$  ühendatud veel punktiga  $A$ . Kolmnurk  $ACD$  pöörleb külje  $AD$  ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

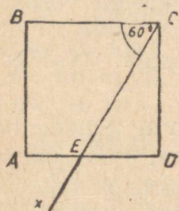
11. On antud kolmnurga  $ABC$  nurgad. Kolmnurk pöörleb järgemööda oma külgede  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ümber. Leida, kuidas üksteisega suhtuvad tekkinud pöördkehade ruumalad  $V_a$ ,  $V_b$  ja  $V_c$ .

12. Võrdhaarne kolmnurk, mille tipunurk  $\alpha = 54^\circ 16'$ , ja võrdkülgne kolmnurk, millel on ühine alus  $b = 25,34$  cm, asetsevad ühel ja samal tasapinnal, üks ühel pool ja teine teisel pool nende ühist alust. Nendest kolmnurkadest koosnev kujund pöörleb telje ümber, mis läbib kolmnurkade üht ühist tippu ja on paralleelne võrdhaarse kolmnurga kõrgusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala ja pindala.

13. Täisnurkse kolmnurga pindala on  $S$  ja üks teravnurk on  $\alpha$ . Kolmnurk pöörleb ümber sirge, mis on kolmnurga tasapinnas hüpotenuusiga risti ja läbib nurga  $\alpha$  tippu. Avaldada pöördkeha ruumala.

14. Ristkülik pöörleb ümber sirge, mis läbib tema üht tippu, on risti diagonaaliga  $d$  ja moodustab ristküliku küljega nurga  $\alpha$ . Arvutada pöördkeha ruumala ja pindala ( $d = 34,06$  m;  $\alpha = 56^\circ 14'$ ).

15. Läbi ruudu  $ABCD$  tippu  $C$  (joon. 45) on tõmmatud sirge  $Cx$ , mis küljega  $BC = a$  moodustab nurga  $BCx = 60^\circ$  ja lõikab külge  $AD$  punktis  $E$ . Avaldada nelinurga  $CBAE$  pöörlemisel telje  $Cx$  ümber tekkiva keha ruumala.



Joon. 45.

16. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt  $2p = 27,42$  dm ja üks nurk  $\alpha = 41^\circ 16'$ . Kolmnurk pöörleb oma hüpotenuusi ümber. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala.

17. Ringi ümber, mille raadius on  $r$ , on kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk on  $\alpha$ . Trapets pöörleb oma väiksema haara ümber. Avaldada pöördkeha külgpindala.

18. Rööpküliku nürinurga tipust tõmmatud diagonaal moodustab rööpküliku väiksema küljega nurga  $\beta$ ; suuremate külgede vaheline kaugus on  $h$  ja rööpküliku teravnurk on  $\alpha$ . Rööpkülik pöörleb telje ümber, mis läbib teravnurga tippu ja on paralleelne mainitud diagonaaliga. Avaldada pöördkeha ruumala.

19. Paarisarvulise külgede arvuga ( $n$ ) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva tippu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse  $r$  kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse  $R$  kaudu ja 3) hulknurga külje  $a$  kaudu.

20. Paarisarvulise külgede arvuga ( $n$ ) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva külje keskpunktide ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse  $r$  kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse  $R$  kaudu ja 3) hulknurga külje  $a$  kaudu.

21. Paaritu arvulise külgede arvuga ( $n$ ) korrapärase hulknurk pöörleb ühe külje keskpunkti ja tema vastas asetseva tippu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raa-

diuse  $r$  kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse  $R$  kaudu ja 3) hulknurga külje  $a$  kaudu.

Kera osi sisaldavaid pöördkehi.

22. Ringi segment, mille raadius on  $R$  ja kaar on  $\alpha$ , pöörleb kaare otspunktis tōmmatud läbimōodu ümber. Avaldada pōördkeha ruumala ja täispindala.

23. Ringi sektor, mille raadius on  $r$  ja kesknurk on  $\alpha$ , pöörleb läbimōodu ümber, mis sektori kesknurga poolitajaga moodustab nurga  $\beta$ . Avaldada pōördkeha ruumala.

24. Ringi sektor, mille kesknurk on  $\alpha$ , pöörleb läbimōodu ümber, mis on risti kesknurga poolitajaga. Sektori pindala on  $Q$ . Leida pōördkeha ruumala ( $\alpha = 70^{\circ}36'$ ;  $Q = 211,8$ ).

25. Kera läbimōodu otspunktist on ehitatud kōōl nii, et pind, mille kōōl moodustab pōörlemisel läbimōodu ümber, jaotab kera kaheks ruumvōrdseks osaks. Arvutada kōōlu ja läbimōodu vaheline nurk  $\alpha$ .

26. Ringi segment, mille kaar on  $\alpha$  ja kōōl on  $a$ , pöörleb kōōluga paralleelse läbimōodu ümber. Avaldada pōördkeha pindala ja ruumala.

Trigonomeetriliste funktsioonide tabel.

	sin	tan	cot	cos	0
0	0,000	0,000	$\infty$	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
0	cos	cot	tan	sin	0

## VASTUSED.

### § 1.

1.  $-120^\circ$ ;  $-1440^\circ$ . 2.  $1080^\circ$ ;  $10\ 800^\circ$ . 3.  $5^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $720^\circ$ ;  $1500^\circ$ . 5.  $360^\circ$ .
6. 1)  $120^\circ + n \cdot 360^\circ$ ; 2)  $-60^\circ + n \cdot 360^\circ$ .  
 1)  $120^\circ$ ,  $480^\circ$ ,  $840^\circ$ , ...; 2)  $-60^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $660^\circ$ , ...  
 3)  $300^\circ$ ,  $660^\circ$ ,  $1020^\circ$ , ...
7. 1)  $\approx 1,57$  cm; 2)  $\frac{\pi R \alpha}{180}$ . 8. 1) a)  $\frac{\pi}{6}$ ; b)  $\frac{\pi}{4}$ ; c)  $\frac{\pi}{3}$ ; d)  $\frac{3}{4} \pi$ ; e)  $\frac{\pi}{12}$ ;  
 f)  $\frac{\pi}{8}$ ; g)  $\frac{\pi}{5}$ ; h)  $\frac{5}{12} \pi$ ; i)  $\frac{3}{5} \pi$ ; k)  $\frac{5}{6} \pi$ ; l)  $\frac{7}{8} \pi$ ; m)  $0,9\pi$ .  
 2) a)  $\approx 0,8901$ ; b)  $\approx 0,4712$ ; c)  $\approx 1,3352$ ; d)  $\approx 0,2182$ ; e)  $\approx 0,5009$ ;  
 f)  $\approx 1,2802$ ; g)  $\approx 2,0420$ ; h)  $\approx 3,7737$ .
- 3)  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{3}{5} \pi$ ;  $\frac{2}{3} \pi$ ;  $\frac{\pi(n-2)}{n}$ .
9. 1)  $\approx 85^\circ 57'$ ;  $\approx 114^\circ 35'$ ;  $\approx 42^\circ 58'$ ;  $30^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $270^\circ$ ;  $22^\circ 30'$ ;  $135^\circ$ ;  $216^\circ$ .  
 2)  $40^\circ$ ;  $75^\circ$ ;  $13^\circ 30'$ ;  $57^\circ 42'$ ;  $218^\circ$ ;  $27^\circ 30'$ ;  $74^\circ 29'$ ;  $45^\circ 50'$ .
10. 1)  $10\pi \approx 31,4$ ; 2)  $\approx 6,28$  m/sek; 3)  $\approx 37,68$  m/sek. 11.  $\approx 200$ .

### § 2.

1. Esimeses; ei. 4. 0-st 2-ni. 5. Ainult 1-ne. 6. Ei.
7. 0. 8.  $c$ . 9.  $a - b + c$ . 10.  $(a - b)^2$ . 11.  $a^2 - b^2$ . 12. 0.
13. Pole arvulist väärtust.
14. 1) 0,6; 2)  $-0,5$ ; 3)  $-0,7$ ; 4) 0,9; 5) 1,7; 6)  $-2,7$ .
15. 1, 3, 7 — negatiivsed; 2, 4, 5, 6, 8 — positiivsed.
16. 1)  $\cos 20^\circ$ ; 2)  $\sin 50^\circ$ ; 3)  $\cot 40^\circ$ ; 4)  $\tan 50^\circ$ .
21. 1)  $15^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  $255^\circ$ ; 2)  $300^\circ$ ; 3)  $50^\circ$ ;  $110^\circ$ ;  $170^\circ$ ;  $230^\circ$ ;  $290^\circ$ ;  $350^\circ$ ;  
 4)  $120^\circ$ ; 5)  $\frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{5}{6} \pi$ ;  $1\frac{1}{6} \pi$ ;  $1\frac{5}{6} \pi$ ; 6)  $\frac{\pi}{12}$ ;  $1\frac{5}{12} \pi$ ; 7)  $45^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  
 8)  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{2}{3} \pi$ .

22. 1)  $69^\circ + n \cdot 180^\circ$ ; 2)  $-39^\circ + n \cdot 180^\circ$ ; 3)  $\pm 26^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  
 4)  $\pm 132^\circ + n \cdot 360^\circ$ ; 5)  $15^\circ + n \cdot 360^\circ$  ja  $165^\circ + n \cdot 360^\circ$  ehk  
 $(-1)^n \cdot 15^\circ + n \cdot 180^\circ$ ; 6)  $-45^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 ja  $-135^\circ + n \cdot 360^\circ$  ehk  $(-1)^{n+1} \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$ .
23.  $\sin x = -1$ .      24.  $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ .      25.  $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
26.  $\sin x = 0$ .      27.  $\tan x = 0$ ; 2.      28.  $\sec x = 2$ .
29.  $\cot x = 0$ .      30. Pole lahendit.      31. Võimatu.
32.  $\arctan m + n \cdot 180^\circ$ , kus  $m$  on mistahes arv;  
 2)  $\pm \arccos m + n \cdot 360^\circ$ ,  $-1 \leq m \leq 1$ ;  
 3)  $(-1)^n \cdot \arcsin m + n \cdot 180^\circ$ ,  $-1 \leq m \leq 1$ .
33. 1)  $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$ ; 2)  $-45^\circ = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;  
 3)  $\frac{\pi}{4} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 4)  $90^\circ = \arccos 0$ ; 5)  $-\frac{\pi}{4} = \arctan (-1)$ ;  
 6)  $0^\circ = \arctan 0$ ; 7)  $30^\circ = \operatorname{arccot} \sqrt{3}$ ; 8)  $45^\circ = \operatorname{arccot} 1$ ;  
 9)  $x = \arcsin 0,23$ ; 10)  $x = \arccos 0,5762$ ; 11)  $x = \arctan 0,468$ ;  
 12)  $x = \operatorname{arccot} 1,237$ .
34. 1)  $47^\circ$  ehk  $0,8203$ ; 2)  $66^\circ 30'$  ehk  $1,1606$ ;  
 3)  $74^\circ 47'$  ehk  $1,3052$ ; 4)  $62^\circ 54'$  ehk  $1,0978$ .
35. 1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ ; 4)  $3 \sin \alpha$ ; 5)  $a \cos \frac{b}{c}$ ; 6)  $\frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$ .

§ 3.

Olesande nr.	1	2	3	4
$\sin \alpha$	$(\sin \alpha)$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$(\cos \alpha)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$(\tan \alpha)$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$(\cot \alpha)$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$
Olesande nr.	5	6	7	8
$\sin \alpha$	$(0,8)$	$(-0,3)$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm \frac{4}{5}$
$\cos \alpha$	$\pm 0,6$	$\pm \frac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{3}{5}\right)$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{4}{3}$	$\mp \frac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp \frac{4}{3}$
$\cot \alpha$	$\pm 0,75$	$\mp \frac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\mp \frac{3}{4}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{5}{3}$	$\pm \frac{10}{\sqrt{91}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$1,25$	$-\frac{10}{3}$	$\pm \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm \frac{5}{4}$

Ulesande nr.	9	10	11	12
$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm \frac{9}{41}$	$\pm \frac{15}{17}$	$\pm \sqrt{0,1}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$	$\mp \frac{40}{41}$	$\pm \frac{8}{17}$	$\mp \sqrt{0,9}$
$\tan \alpha$	$(\sqrt{5})$	$(-\frac{9}{40})$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$(\frac{8}{15})$	$(-3)$
$\sec \alpha$	$\pm \sqrt{6}$	$\mp \frac{41}{40}$	$\pm \frac{17}{8}$	$\mp \frac{\sqrt{10}}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{6}{5}}$	$\pm \frac{41}{9}$	$\pm \frac{17}{15}$	$\pm \sqrt{10}$
Ulesande nr.	13	14	15	16
$\sin \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm \frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm \frac{12}{13}$	$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$
$\tan \alpha$	$\pm \sqrt{8}$	$\mp \frac{21}{20}$	$\pm \frac{5}{12}$	$\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\mp \frac{20}{21}$	$\pm 2,4$	$\mp \sqrt{2}$
$\sec \alpha$	$(3)$	$(-1\frac{9}{20})$	$\pm \frac{13}{12}$	$\mp \sqrt{\frac{3}{2}}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm \frac{29}{21}$	$(2,6)$	$(-\sqrt{3})$

Ulesande nr.	17	18	19	20
$\sin \alpha$	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm \frac{b}{a}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{a+b}{a-b}$	$\pm \frac{a}{b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
Ulesande nr.	21	22	23	
$\sin \alpha$	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
$\cos \alpha$	(-0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
$\tan \alpha$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
$\cot \alpha$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(-1,05)	
$\sec \alpha$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	-1,45	

24.  $\cos^2 \alpha$ . 25.  $\sin^2 \alpha$ . 26.  $1 - \cos \alpha$ .  
 27.  $-(1 + \sin \alpha)$ . 28.  $\sec^2 \alpha$ . 29.  $\cos^2 \alpha$ .  
 30. a)  $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ ; b)  $\cot \alpha \cdot \cot \beta$ . 31. a)  $\cot^2 \alpha$ ; b)  $\tan^2 \alpha$ .  
 32.  $\cos \alpha$ . 33.  $\sin \alpha$ . 34.  $\sec \alpha$ . 35.  $\tan \alpha$ . 36.  $\cot \alpha$ .  
 37.  $\operatorname{cosec} \alpha$ . 38.  $\cos \alpha$ . 39.  $\tan^2 \alpha$ .  
 40.  $2 \sin^2 \alpha$ . 41.  $2 \cos^2 \alpha$ . 42. 1. 43. 1.  
 44.  $\tan^2 \alpha$ . 45.  $\sec^2 \alpha$ . 46.  $\sec^2 \alpha$ . 47.  $\operatorname{cosec}^2 \beta$ .  
 48.  $\operatorname{cosec}^2 \alpha$ . 49.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ . 50.  $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ . 51. 4.

52.  $\cot^6 \alpha$ . 53. a)  $2 \sin^2 \alpha - 1$ ; b)  $1 - 2 \cos^2 \alpha$ . 54.  $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ .

55.  $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ . 56.  $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$ . 57. a)  $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$ ; b)  $\frac{1 - \cot \alpha}{1 + \cot \alpha}$ .

58. a)  $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ; b)  $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$ . 59.  $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$ .

60. 9. 61.  $\frac{m^2 - 1}{2}$ . 62.  $m^2 - 2ja m^3 - 3m$ .

93.  $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

94.  $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

95.  $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

96.  $n \cdot 360^\circ$ .

97.  $\pm 128^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

98.  $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

99.  $n \cdot 180^\circ$ .

100.  $\approx 63^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja  $\approx -27^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

101.  $\approx (-1)^n \cdot 24^\circ 28' + n \cdot 180^\circ$ .

102.  $90^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja  $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

103.  $\pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

104.  $\approx 27^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

105.  $45^\circ + n \cdot 90^\circ$ .

106.  $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

107.  $\pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

108.  $n \cdot 360^\circ$  ja  $90^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

109.  $45^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

110.  $60^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

111.  $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

112.  $45^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja  $\approx -72^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

113.  $\approx 70^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja  $\approx -36^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

## § 4.

1. 1)  $\cos 17^\circ$ ;

2)  $\sin 9^\circ 20'$ ;

3)  $\cot 20^\circ 34' 20''$ ;

4)  $\tan 30^\circ 01'$ .

2. 1)  $\sin 67^\circ 40'$ ;

2)  $-\cos 80^\circ 34' 25''$ ;

3)  $-\tan 71^\circ 11' 24''$ ;

4)  $-\cot 39^\circ 20'$ .

3. 1)  $\cos 31^\circ 40'$ ;

2)  $\sin 16^\circ 25'$ ;

3)  $-\cos 21^\circ 43'$ ;

4)  $-\sin 8^\circ 21'$ ;

5)  $-\tan 19^\circ 32' 28''$ ;

6)  $-\cot 16^\circ 32'$ ;

7)  $-\tan 30^\circ 28' 40''$ ;

8)  $-\cot 39^\circ 18'$ .

4. -1. 5.  $\cos \alpha$ . 6.  $-\cos \alpha$ . 7.  $-\sec \alpha$ . 8. 0. 9. 0. 10. 1.

11.  $-\sin^2 \alpha$ . 12. 0. 13.  $2 \cos \alpha$ . 14. 1.

## § 5.

- |               |               |               |              |
|---------------|---------------|---------------|--------------|
| 1. 1) 0,2588; | 2. 1) 0,3640; | 3. 1) 0,4226; | 4. 1) 2,747; |
| 2) 0,7071;    | 2) 1;         | 2) 0,7071;    | 2) 1;        |
| 3) 0,8660;    | 3) 11,43;     | 3) 0,8660;    | 3) 1,3032;   |
| 4) 0,9563;    | 4) 3,172;     | 4) 0,2924;    | 4) 0,3365;   |
| 5) 0,6225;    | 5) 0,3191;    | 5) 0,7826;    | 5) 0,3796;   |
| 6) 0,9361;    | 6) 1,3375;    | 6) 0,9373;    | 6) 2,805;    |
| 7) 0,2051;    | 7) 0,3799;    | 7) 0,4823;    | 7) 0,0305;   |
| 8) 0,9988.    | 8) 8,284;     | 8) 0,1948;    | 8) 11,43;    |
|               | 9) 12,61;     | 9) 0,9987;    | 9) 23,37;    |
|               | 10) 38,19;    | 10) 0,9997.   | 10) 0;       |
|               | 11) 286,5;    |               | 11) 30,41.   |
|               | 12) 3438.     |               |              |

5. 1) 20°; 2) 36°30'; 3) 57°21'; 4) 68°20'; 5) võimatu; 6) 23°09'.
6. 1) 24°; 2) 85°; 3) 69°30'; 4) 28°36'; 5) 79°48'; 6) 26°34';  
7) 22°47'; 8) 85°34'; 9) 81°25'.
7. 1) 27°; 2) 24°30'; 3) 50°30'; 4) võimatu; 5) 35°02'; 6) 63°21'.
8. 1) 20°; 2) 67°30'; 3) 29°29'; 4) 33°47'; 5) 55°13'; 6) 30°33';  
7) 8°; 8) 5°35'; 9) 2°52'.
9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036.
10. -0,4695; -0,9171; -0,1513; -0,9825.
11. -1,6643; -0,3561; -4,836; -0,6334.
12. -11,43; -0,6873; -6,472; -0,3876.

## § 6.

1. 1)  $\sin \alpha = 0,96$ ;  $\tan \alpha = 3\frac{3}{7} \approx 3,429$ ; 2)  $\tan \alpha = 0,75$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ ;  
3)  $\tan \beta \approx 6,462$ ;  $\cos \beta \approx 0,1529$ .
2.  $\sin \beta = \frac{77}{85}$ ;  $\cos \beta = \frac{36}{85}$ ;  $\tan \beta = 2\frac{5}{36}$ ;  $\cos \beta = \frac{36}{77}$ .
3. 1) 20,4 cm; 2) 68 cm.
4. 1) 10,08 m; 2) 30,6 dm. 5. 1) 2,56 km; 2) 2,39 km. 6. 947 m.
7. 12°43'. 8. 3646,5 m  $\approx$  3647 m. 9. 20 m. 10. 35,5 m.
11. 27,25 m. 12. 1°54'.
13. 4°55'. 14. 2°57'; 727 m. 15.  $b \sin \alpha - a = 10,5$  m.
16. 3,9 m. 18. 33°41'. 19.  $\approx 40$  m.
20. 1) 63°26'; 2) 26°34'; 3) 21°48'. 21.  $\arctan \frac{n}{n-1} = 47°52'$ .
22. 30°58'. 23.  $\varphi = 180^\circ - \arctan \frac{b}{a}$ . 24. 33°41'.
25. 21 cm. 26. 1278 m. 27.  $r = 1,584$  m;  $x = 1,973$  m.

28.  $\frac{a}{2 \cos \beta}$ . 29.  $6^{\circ}51'$ ; 105,2 mm. 30.  $h = 10(D - d)$ ;  $2^{\circ}52'$ .

31.  $38^{\circ}40'$ . 32.  $\approx 63$  m. 33. 2,6 m.

34.  $36^{\circ}39'$ . 35.  $73^{\circ}58'$ . 36. 2,698.

37.  $47^{\circ}16'$ ; 32,8 dm. 38.  $97^{\circ}12'$ .

39.  $\frac{c}{2\pi} \cdot \cos \frac{180^{\circ} m}{m+n} \approx 11,2$ . 40.  $\frac{a}{2 \sin \alpha}$ .

41.  $52^{\circ}15'$ ; 7,141 kG. 42.  $b(1 + \sec \alpha)$ . 43.  $\arcsin \frac{h}{b}$ .

44.  $48^{\circ}01'$ . 45.  $78^{\circ}48'$ .

46. Moodustab põhja suunaga nurga  $69^{\circ}15'$ .

47.

$\alpha$	5 dm	15 dm
$40^{\circ}$	3,2 dm	9,6 dm
$60^{\circ}$	4,3 „	13,0 „
$90^{\circ}$	5 „	15 „

48. 26,6 km ida suunas ja 21,7 km põhja suunas. 49.  $40^{\circ}13'$  ja  $49^{\circ}47'$ .

50.  $57^{\circ}28'$ ;  $122^{\circ}32'$ . 51.  $67^{\circ}49'$  ja  $22^{\circ}11'$ . 52.  $120^{\circ}30'$  ja  $59^{\circ}30'$ .

53. 1)  $OB \approx 0,35$  m;  $AB = 0,2$  m;  $\beta = 5^{\circ}44'$ ;  $BP \approx 1,99$  m;  
 3) 0;  $1^{\circ}59'$ ;  $3^{\circ}55'$ ;  $5^{\circ}44'$ ;  $7^{\circ}23'$ ;  $8^{\circ}49'$ ;  $9^{\circ}59'$ ;  $10^{\circ}50'$ ;  $11^{\circ}22'$ ;  $11^{\circ}32'$ ;  
 5)  $11^{\circ}19'$ ; 6) 0; 5 mm; 22 mm; 48 mm; 83 mm; 125 mm;  
 173 mm; 224 mm; 277 mm; 330 mm.

54.  $47^{\circ}30'$ . 55.  $\alpha = 41^{\circ}20'$ ;  $\beta = 18^{\circ}45'$ .

56. 1)  $82^{\circ}27'$ ; 2)  $8^{\circ}38'$ . 57.  $53^{\circ}08'$ .

58.  $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$ ;  $r = a \sin \frac{\beta}{2} \tan \left( 45^{\circ} - \frac{\beta}{4} \right)$ .

59.  $\alpha = \arcsin \frac{h}{b}$ ;  $a = \frac{h}{\cos \alpha}$ ;  $c = \frac{b}{\cos \alpha}$ . 60.  $11^{\circ}26'$ .

61.  $28^{\circ}$ ;  $37^{\circ}$ ;  $19^{\circ}$ ;  $53^{\circ}$ ;  $86^{\circ}$ ;  $113^{\circ}$ . 62.  $\approx 21741$  km.

63.  $4^{\circ}52'$ . 64.  $1^{\circ}11'$ . 65.  $51^{\circ}05'$ .

## § 7.

1. 1)  $b = 61$ ;  $c = 102$ ; 2)  $a = 39$ ;  $b = 25$ . 2. 78,7 m. 3. 21,1 m.

4.  $\frac{b \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta}$ . 5.  $\frac{l \sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$ . 6.  $\frac{d \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$  ja  $\frac{d \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ .

7.  $l_b = \frac{\alpha \sin \gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)}$ ;  $l_c = \frac{\alpha \sin \beta}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$ ;  $l_a = \frac{\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma) \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$ .
8.  $\frac{c \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 146,4$  m.
9.  $a = \frac{h_a \sin \alpha}{\sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}$ ;  $b = \frac{h_a}{\sin \gamma}$ ;  $c = \frac{h_a}{\sin(\alpha + \gamma)}$ .
10. 7880 m<sup>2</sup>. 11.  $\frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \approx 48$  m<sup>2</sup>. 12.  $\gamma = 90^\circ$  puhul.
15.  $a^2 \sin \alpha \approx 21$  cm<sup>2</sup>.
16.  $\frac{d^2 \sin \varphi}{2}$ ; maksimum on  $\frac{d^2}{2}$ , kui  $\varphi = 90^\circ$ .
17.  $\frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha$ . 18.  $50^\circ 33'$  ja  $129^\circ 27'$ . 19.  $46^\circ 57'$  ja  $133^\circ 03'$ .
20. 362,3 m<sup>2</sup>. 21.  $AE = \sqrt{\frac{2Q \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}}$ ;  $AD = \sqrt{\frac{2Q \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}}$ .
22.  $\frac{h_a h_b}{2 \sin \gamma}$ . 23.  $\frac{h_b^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}$ . 24.  $a \approx 8,5$ .
25. 1)  $c = 22,07$ ;  $\alpha = 22^\circ 12'$ ;  $\beta = 34^\circ 31'$ ; 2)  $b = 0,4$ ;  $\alpha = 11^\circ 29'$ ;  $\gamma = 145^\circ 03'$ ; 3)  $b = 63$ ;  $\alpha = 153^\circ 16'$ ;  $\gamma = 10^\circ 16'$ .
26. 77 m. 27.  $117^\circ 17'$ . 28. 8,1 m ja 4,0 m.
29. 275 kG;  $16^\circ 10'$  ja  $33^\circ 50'$ . 30. 1633 m.

## § 8.

1.  $\cos 162^\circ 30' = -\cos 17^\circ 30'$ . 2.  $\sin 340^\circ = -\cos 70^\circ$ .
3.  $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ ;  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ .
4. a)  $-\sin 20^\circ$ ; b)  $\cos 10^\circ$ ; c)  $\sin 30^\circ$ ; d)  $\cos 20^\circ$ .
5. e)  $\cot 30^\circ$ ; f)  $-\tan 40^\circ$ ; g)  $\cot 45^\circ$ ; h)  $\tan 30^\circ$ .
6. i)  $-\operatorname{cosec} 10^\circ$ ; k)  $\sec 10^\circ$ ; l)  $\operatorname{cosec} 40^\circ$ ; m)  $-\sec 10^\circ$ .
7. a)  $\cos 0,2 \pi$ ; b)  $\cos \frac{2}{9} \pi$ ; c)  $-\tan \frac{2}{11} \pi$ ; d)  $-\sec 0,1 \pi$ .
8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 9. a)  $-\frac{1}{2}$ ; b) 0; c)  $\sqrt{3}$ ; d)  $-1$ .
10.  $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$ . 11.  $-2 \cot \alpha$ . 12.  $2 \cos \alpha$ . 13. 1.
14.  $-1$ . 15.  $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$ . 16.  $-\tan^3 \alpha$ .
17.  $\cot \alpha$ . 18.  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ . 19. 0. 20.  $\cot^2 42^\circ$ .

21.  $-\cot^2 40^\circ$ .  
 22.  $\sin(a - 90^\circ) = -\cos a$ ;  $\cos(a - 180^\circ) = -\cos a$ ;  
 $\tan(a - 360^\circ) = \tan a$ .  
 23.  $\cos x = -\frac{2}{3}$ . 24.  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 25.  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . 26.  $n \cdot 360^\circ$ .  
 27.  $135^\circ + n \cdot 180^\circ$ . 28.  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ . 29.  $\pi \cdot n \pm \frac{\pi}{4}$ . 30.  $(2n + 1) \cdot 90^\circ$ .

## § 9.

1.  $-1$ . 2. a)  $\sin a$ ; b)  $-\sin a$ . 3.  $0,4\sqrt{3} + 0,3$ .  
 4.  $\sqrt{0,2} - \sqrt{0,15}$ . 5.  $0,2 + \sqrt{0,63}$ ;  $-\sqrt{0,21} - \sqrt{0,12}$ .  
 6.  $\frac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$ ;  $\frac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$ . 7.  $\pm 1$ ;  $\pm 0,28$ . 8.  $\frac{1}{2}$ .  
 9. a)  $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ ;  
 b)  $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ .  
 12. a)  $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$  ja  $\frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ ; b)  $\frac{\cot \beta - \cot \alpha}{\cot \beta + \cot \alpha}$  ja  
 $\frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha \cot \beta + 1}$ .  
 13.  $\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma -$   
 $-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ;  
 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma -$   
 $-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .  
 14.  $\frac{56}{65}$  ja  $\frac{57}{1625}$ . 15.  $\frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$ . 16.  $-(2 + \sqrt{3})$ . 17.  $-\frac{1}{2}$ .  
 18.  $-1$  ja  $\frac{1}{7}$ . 19.  $\frac{\cot \beta \pm \cot \alpha}{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}$ . 20. a)  $\frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$ ;  
 b)  $\frac{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha \pm \tan \beta}$ .  
 21.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \cdot \tan \gamma - \tan \gamma \cdot \tan \alpha}$ . 22.  $\tan(\alpha + \beta)$ .  
 23.  $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ . 24.  $\tan \alpha \cdot \cot \beta$ . 25.  $\cot \alpha \cdot \cot \beta$ .  
 26.  $\tan \alpha$ . 41.  $-45^\circ + n \cdot 180^\circ$ . 42.  $\pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$ .  
 43.  $x = \arctan(\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma) + n \cdot 180^\circ$ . 44.  $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja  
 $\frac{\pi}{2}(2n + 1)$  ehk üldiselt  $(2n + 1) \cdot 30^\circ$ .

$$45. x = (-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$46. x = \arctan \frac{a - b \cdot \tan \alpha}{a \cdot \tan \alpha - b} + \pi n.$$

$$47. x = \arctan \left( \pm \sqrt{\frac{m + \tan^2 \alpha}{1 + m \tan^2 \alpha}} \right) + \pi n. \quad 48. x = n \cdot 180^\circ \text{ ehk } x = \pi n.$$

$$49. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot n. \quad 50. x = n \cdot 90^\circ; \quad n \cdot 60^\circ. \quad 51. \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$52. 14^\circ 38' + n \cdot 180^\circ. \quad 53. 45^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 54. \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

### § 10.

$$1. a) \pm 0,96; -0,28; b) \frac{3}{4}. \quad 2. \frac{120}{169}; -\frac{119}{169}.$$

$$4. -0,96; -0,28. \quad 5. -\frac{2}{3} \sqrt{2}; -\frac{1}{3}. \quad 6. -\frac{3}{4}.$$

$$7. a) \pm 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$b) \pm 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$8. a) \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}; \quad b) \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}. \quad 9. \frac{\sec^2 \alpha}{2 - \sec^2 \alpha}.$$

$$10. a) 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad b) \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$11. \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \text{Näpunäide. Algul kirjutame:}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

12. Et  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  kaudu teised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt, siis piisab  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  käsitlemisest; nende kohta vaata aga ülesande 11 lahendust.

$$13. \frac{12}{13}; \frac{5}{13}; 2,4. \quad 14. \frac{1}{2} \sqrt{2}; \frac{1}{2} \sqrt{2}; 1.$$

$$15. 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.$$

$$16. 2 \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha); \quad \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

$$17. \sqrt{0,9}; -\sqrt{0,1}; -3.$$

$$18. \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}; \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}; 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}.$$

$$19. \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}; \sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1.$$

$$20. \frac{4}{5} \text{ ja } \frac{3}{5}. \quad 21. \frac{4}{5}. \quad 22. \sqrt{5}-2.$$

$$25. \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ ja } 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha; \text{ siit leiame:}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \text{ ja } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Nende võrduste abil leiame nii  $\sin \frac{\alpha}{2}$  kui  $\cos \frac{\alpha}{2}$  jaoks neli väärtust. Kuid kui mingi uue tingimuse lisamisega saab võimalikuks määrata märk kummagi juuravaldise ees, siis ülesandel on ainult üks lahend.

$$26. \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}; \quad \cot \alpha \pm \sqrt{\cot^2 \alpha + 1}. \quad 27. -2.$$

$$52. x = (-1)^n \cdot 15^\circ + n \cdot 90^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

$$53. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n. \quad 54. x = 22^\circ 30' + n \cdot 90^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

$$55. x = \pi n; \quad \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$56. x_1 = \pm 2 \arccos 0 + 4\pi n = \pi(2n + 1);$$

$$x_2 = 2 \cdot (-1)^n \arcsin \frac{b}{2a} + 2\pi n.$$

$$57. x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ.$$

$$58. x = n \cdot 120^\circ.$$

$$59. x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 60. x = \pi n. \quad 61. x = \pi n; \quad \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

$$62. x_1 = \pi + 2\pi n; \quad x_2 = \pm 2 \arccos \frac{b}{2a} + 4\pi n.$$

$$63. x = n \cdot 360^\circ; \quad (-1)^n \cdot 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

$$64. x_1 = \pi + 2\pi n; \quad x_2 = 2 \arctan \frac{a}{b} + 2\pi n. \quad 65. x = 2\pi n; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$66. x = \pm \arccos \frac{m-2 \pm \sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)} + 2\pi n.$$

$$67. x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n.$$

$$68. x = n \cdot 180^\circ; \quad \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 69. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$70. x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ; \quad \pm 30^\circ + m \cdot 180^\circ.$$

$$71. x_1 = x_2 = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}. \quad 72. 72^\circ 52' + n \cdot 360^\circ \text{ ja } 17^\circ 08' + n \cdot 360^\circ.$$

$$73. 119^\circ 34' + n \cdot 360^\circ \text{ ja } -13^\circ 18' + n \cdot 360^\circ.$$

$$74. 90^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ja } 30^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

## § 11.

1. a)  $\sqrt{1,5}$ ; b)  $\sin 18^\circ$ ; c) 0; d)  $-\sin 18^\circ$ .

2. a)  $\sin 12^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ ; b)  $-2 \sin 1^\circ \cdot \cos 4^\circ$ ;  
c)  $2 \cos 10^\circ 07' 30'' \cdot \cos 6^\circ 52' 30''$ ; d)  $2 \sin 15^\circ \cdot \sin 10^\circ$ .

3.  $\cos \alpha$ ; b)  $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ . 4. a)  $\frac{\tan 20^\circ}{\tan 5^\circ}$ ; b)  $\cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cot \frac{\beta - \alpha}{2}$ .

5. a)  $2 \sin 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$ ; b)  $\sqrt{2} \cdot \sin 25^\circ$ ;  
c)  $2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} + 45^\circ \right)$ .

6.  $\sqrt{2} \cdot \cos (\alpha - 45^\circ)$ ;  $\sqrt{2} \sin (\alpha - 45^\circ)$  ehk  $\sin \alpha \pm \cos \alpha =$   
 $= \sqrt{2} \cdot \sin (\alpha \pm 45^\circ)$ .

7. a)  $\frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ ; b)  $\frac{\sin (\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$ ; c)  $\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$ ; d)  $\frac{\cos (\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$ .

8. a)  $2 \operatorname{cosec} 2\alpha$ ; b)  $-2 \cot 2\alpha$ .

9. a)  $\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)$ ; b)  $\sin (\beta + \alpha) \cdot \sin (\beta - \alpha)$ .

10. a)  $\frac{\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$ ; b)  $\frac{\sin (\beta + \alpha) \cdot \sin (\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$ ;

c)  $-\frac{\cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$ ; d)  $-4 \cot 2\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha$ .

11. a)  $2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$ ; b)  $-2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$ ; c)  $\cos 2\alpha$ ;  
d)  $-\cos 2\alpha$ .

12.  $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \alpha$ . 13.  $\tan \left( \frac{\alpha}{2} - 45^\circ \right)$ . 14.  $\tan \frac{\alpha}{2}$ .

15. a)  $\frac{\sin (45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha}$ ; b)  $\frac{\sin (\alpha \pm 45^\circ)}{\sin 45^\circ \cdot \sin \alpha}$ .

*Näpunäide.*  $1 = \tan 45^\circ = \cot 45^\circ$ .

16.  $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$ . 17. a)  $2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ ; b)  $2 \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

18.  $2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\tan \alpha}$ .

19. a)  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$ ; b)  $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$ .

20. a)  $\sqrt{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$ ; b)  $\sqrt{8} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$ .

21.  $-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha$ . 22. a)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ; b)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ .

23. a)  $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ; b)  $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

24. a)  $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ; b)  $\frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ .

25. a)  $4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ ; b)  $4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ .

Näpunäide. Avaldame  $\sin(\alpha + \beta)$  nurga  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  funktsioonide kaudu.

26.  $4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ .

39. Esmalt kõrvaldame nurga  $\gamma$  (vasakul poolel), teisendame saadud avaldise ja taastame  $\gamma$ . 40. Sama võtte nagu ülesandes 39.

41. Võrduses  $\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma$  avame sulud ja vabastame võrduse nimetajaist.

42. Rakendades sama võtet, mis ülesandes 39, asendame vasaku poole avaldisega  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ; seejärel pärast mõningaid teisendusi saame avaldise

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) + 1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} \text{ jne.}$$

43. Võrduses  $\cot\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 1 : \cot \frac{\gamma}{2}$  avame sulud ja vabastame võrduse nimetajaist. 44. Sama võtte, mis ülesandes 43.

45. Sama võtte, mis ülesandes 41. 46. Sama võtte, mis ülesandes 39. Algul saame  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ , seejärel avame sulud ning asendame  $\sin^2 \alpha$  ja  $\sin^2 \beta$  avaldistega  $1 - \cos^2 \alpha$  ja  $1 - \cos^2 \beta$  jne.

47. Sama võtte, mis eelmises ülesandes. Algul saame  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 (\alpha + \beta)$ , seejärel avame sulud ning asendame  $\sin^2 \alpha$  ja  $\sin^2 \beta$  avaldistega  $1 - \cos^2 \alpha$  ja  $1 - \cos^2 \beta$  jne.

48. Sama võtte, mis ülesandes 39. Algul saame  $2 \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) - 2 \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta)$  jne.

49. Sama võtte, mis eelmises ülesandes.

$$50. 4 \sin \left( 15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left( 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$51. 4 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right).$$

$$52. 4 \cos \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left( 30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$53. a) 4 \cos \left( 22^\circ 30' + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left( 22^\circ 30' - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$b) \sqrt{8} \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} + 22^\circ 30' \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha}{2} - 22^\circ 30' \right).$$

$$54. 3 - 4 \sin^2 \alpha = 4 (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) = 4 \sin (60^\circ + \alpha) \cdot \sin (60^\circ - \alpha).$$

$$55. 4 \sin (\alpha + 30^\circ) \cdot \sin (\alpha - 30^\circ). \quad 56. \frac{4 \sin (30^\circ + \alpha) \cdot \sin (30^\circ - \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

$$57. \frac{4 \sin (\alpha + 30^\circ) \cdot \sin (\alpha - 30^\circ)}{\sin^2 \alpha}$$

$$58. 4 \cos \alpha \cdot \cos \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left( 30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$59. a) 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right);$$

$$b) 4 \cos 2\alpha \cdot \sin \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left( 30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$60. 1) \left| \frac{a}{\cos \varphi} \right|, \text{ kus } \varphi = \arctan \frac{b}{a}; \quad 2) p \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \sqrt{q} \cdot \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$\text{kus } \sin \varphi = \frac{2 \sqrt{q}}{p}.$$

61. Viies  $a$  sulgude ette ja võttes  $\frac{b}{a} = \cos \varphi$ , saame:

$$1) \cot^2 \frac{\varphi}{2}; \quad 2) 2 \sqrt{a} \cdot \sin \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right); \quad 3) 2 \operatorname{cosec} \varphi.$$

62.  $x = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab(1 + \cot \gamma)} = (a+b) \cdot \cos \varphi$ , kusjuures

$$\sin \varphi = \frac{2 \sqrt{ab}}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$



26.  $56^{\circ}01'$ . 27.  $-23^{\circ}15'$ . 28.  $164^{\circ}17'$ . 29.  $-15^{\circ}25'$ . 30.  $28^{\circ}21'$ .  
 31.  $-54^{\circ}07'$ . 32. 103,6.  
 33.  $-0,48$ . 34. 0,00109. 35. 4,887. 36. 0,2307. 37. 342,6.  
 38.  $-1,208$ . 39. 0,617. 40. 32,41. 41. 0,09326.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>S</i>
42.	8,49	3,916	9,35	$65^{\circ}14'$	$24^{\circ}46'$	16,63
43.	250	575	627	$23^{\circ}30'$	$66^{\circ}30'$	71 880
44.	0,7323	0,3169	0,7979	$66^{\circ}36'$	$23^{\circ}24'$	0,116
45.	2,793	2,340	3,644	$50^{\circ}02'$	$39^{\circ}58'$	3,268
46.	6,37	79,45	79,7	$4^{\circ}35'$	$85^{\circ}25'$	253
47.	18,003	16,79	24,62	$47^{\circ}$	$43^{\circ}$	151,1
48.	0,1259	0,1738	0,2146	$35^{\circ}55'$	$54^{\circ}05'$	0,01094
49.	0,6162	0,2954	0,6832	$64^{\circ}23'$	$25^{\circ}37'$	0,0910
50.	16	63	65	$14^{\circ}15'$	$75^{\circ}45'$	504
51.	112	15	113	$82^{\circ}22'20''$	$7^{\circ}37'40''$	840
52.	528	455	697	$49^{\circ}15'$	$40^{\circ}45'$	120 120
53.	1499	823	1710,2	$61^{\circ}14'$	$28^{\circ}46'$	616 800
54.	261	380	461	$34^{\circ}29'$	$55^{\circ}31'$	49 590
55.	156	133	205	$49^{\circ}33'$	$40^{\circ}27'$	10 374
56.	0,09783	0,1003	0,1401	$44^{\circ}17'$	$45^{\circ}43'$	0,004906
57.	12,06	6,919	13,9	$60^{\circ}09'$	$29^{\circ}51'$	41,73

58.  $B = 46^{\circ}48'$ ;  $b = 633,8$ ;  $S = 232\ 100$ .  
 59.  $A = 23^{\circ}30'$ ;  $b = 1150$ ;  $S = 143\ 800$ .  
 60.  $B = 60^{\circ}30'$ ;  $a = 15,53$ ;  $S = 105$ .  
 61.  $A = 64^{\circ}39'$ ;  $a = 6,398$ ;  $S = 15,95$ .  
 62.  $A = 37^{\circ}10'$ ;  $B = 105^{\circ}41'$ ;  $S = 36,92$ .  
 63.  $A = 57^{\circ}19'$ ;  $B = 65^{\circ}22'$ ;  $a = 856,7$ ;  $S = 333\ 700$ .  
 64.  $B = 48^{\circ}40'$ ;  $b = 21,95$ ;  $a = 26,64$ ;  $S = 266,4$ .  
 65.  $A = 24^{\circ}36'$ ;  $B = 130^{\circ}48'$ ;  $a = 71,86$ .  
 66.  $A = 53^{\circ}03'$ ;  $a = 9,68$ ;  $b = 11,64$ .  
 67.  $B = 34^{\circ}28'$ ;  $a = 15,68$ ;  $b = 9,29$ ;  $S = 69,58$ .  
 68.  $A = 73^{\circ}24'$ ;  $B = 33^{\circ}12'$ ;  $a = 30,20$ ;  $b = 17,27$ .  
 69.  $B_1 = 34^{\circ}51'$ ;  $B_2 = 145^{\circ}09'$ ;  $A_1 = 72^{\circ}34'30''$ ;  $A_2 = 17^{\circ}25'30''$ ;  
 $b_1 = 8,39$ ;  $b_2 = 26,72$ .

*Näpunäide.* Nurga  $B$  kohta saame  $\sin B = \dots$  ja  $0^{\circ} < B < 180^{\circ}$ , kuid selles vahemikus antud siinuse väärtusele vastab kaks nurka. Selgitada lahenduse kahesust ka geomeetriliselt.

§ 13.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
1.	(370)	541	421	43°01'	(86°03')	(50°56')	77 710
2.	(450)	85	445	(87°55')	(10°53')	81°12'	18 900
3.	(951)	1196	353	39°36'	(126°43')	(13°41')	134 550
4.	(97,52)	83,01	36,00	(102°48')	56°06'	(21°06')	1 457
5.	3,683	(13,02)	10,15	(11°48')	(133°42')	34°30'	13,58
6.	13,30	5,333	(15,94)	(51°38')	(18°19')	110°03'	33,32
7.	(510)	(317)	531,9	68°23'	35°18'	(76°19')	78 540
8.	(225)	(800)	634,1	12°15'	131°01'	(36°44')	58 830
9.	(2,29)	1,178	(1,69)	104°33'	(29°52')	45°35'	0,964
10.	62,17	(28)	(42)	(124°)	21°56'	34°04'	487,5
11.	(30,99)	74,6	(69,01)	24°32'	(87°48')	67°40'	1069
12.	43,92	(40,33)	(32,11)	(73°40')	61°46'	44°34'	621,4
13.	(87)	(65)	76	(75°45')	46°24'	57°51'	2394
14.	(34)	(93)	{ 65 115,3	(14°15')	{ 137°41' 42°19'	{ 28°04' 123°26'	{ 744 1320
15.	(24)	(83)	—	(26°45')	—	—	—
16.	{ 55,42 615,7	(360)	(309)	{ 3°44' 133°48'	{ 155°02' 24°58'	(21°14')	{ 3613 40 150
17.	(13,9)	7,102	(8,43)	(126°43')	24°11'	29°06'	24
18.	(0,437)	(1,299)	1,726	3°42'	(11°03')	165°15'	0,07226
19.	(13,81)	{ 20,72 6,004	(8,14)	{ 25°19' 154°41'	140°05' 10°43'	(14°36')	{ 36,27 10,45
20.	240,8	(263)	(215)	59°29'	(70°15')	50°16'	24 350
21.	(19,06)	(28,19)	{ 36,31 11,88	(31°17')	{ 50°10' 129°50'	{ 98°33' 18°53'	{ 265,8 86,95
22.	(457,1)	(169,9)	{ 427,4 421,4	{ 89° 91°	(21°49')	{ 69°11' 67°11'	{ 36 300 35 790
23.	(2579)	2572	(10)	(130°22')	49°28'	0°10'	9800
24.	(19)	(34)	(49)	16°26'	30°24'	133°10'	235,6
25.	(89)	(321)	(395)	7°58'	29°58'	142°04'	8783
26.	(44)	(483)	(485)	5°12'	84°48'	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22'	38°16'	104°22'	0,004844
28.	(172,5)	(1135)	(1205)	7°44'	62°16'	110°	91 980
29.	(421,6)	(409,8)	(335,9)	68°04'	64°24'	47°32'	63 800
30.	(1,235)	(2,346)	(3,456)	10°52'	20°58'	148°10'	0,7639

$$31. C = 18^{\circ}27'; \quad a = 2R \sin A = 14,55; \quad b = 2R \sin B = 11,82; \\ c = 2R \sin C = 5,013; \quad S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 27,22.$$

$$32. C = 119^{\circ}32'; \quad a = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}} = 20,3; \quad b = 55,9; \quad c = 66,16.$$

$$33. A = 59^{\circ}42'; \quad a = \frac{h_a \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 57,25; \quad b = \frac{h_a}{\sin C} = 60,01;$$

$$c = \frac{h_a}{\sin B} = 5,933; \quad S = \frac{h_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 153,7.$$

$$34. A = 77^{\circ}04'; \quad a = \frac{l_a \sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 6,610;$$

$$b = \frac{l_a}{\sin C} \cos \frac{B-C}{2} = 6,708; \quad c = \frac{l_a}{\sin B} \cos \frac{B-C}{2} = 0,5223;$$

$$S = \frac{l_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cos^2 \frac{B-C}{2} = 1,708.$$

$$35. a = \frac{m}{2} \cdot \sin A \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2};$$

$$b = \frac{m}{2} \cdot \sin B \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}; \quad c = m \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2};$$

$$S = \frac{m^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \tan \frac{C}{2} \cdot \sec^2 \frac{A-B}{2};$$

$$C = 69^{\circ}20'; \quad a = 290,2; \quad b = 199,1; \quad c = 288,1; \quad S = 27\,020.$$

*Näpunäide.* Saame  $m = 2R (\sin A + \sin B) = \dots$ , kust leiame  $2R$ ; seejärel koostame külgede avaldised  $2R$  abil.

$$36. C = 54^{\circ}; \quad a = \frac{n}{2} \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 34,07;$$

$$b = \frac{n}{2} \cdot \sin B \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 11,07;$$

$$c = n \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} = 28,98;$$

$$S = \frac{n^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cot \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{A-B}{2} = 152,5.$$

$$37. C = 19^{\circ}11'; \quad c = \frac{m}{2} \sec \frac{C}{2} \sec \frac{A-B}{2} = 0,7558; \quad b = 1,958;$$

$$a = 2,247; \quad S = 0,722. \quad \text{Näpunäide. } m = c (\sin A + \sin B).$$

$$38. A = 53^{\circ}08'; \quad a = n : 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C-B}{2} = 232; \quad b = 210; \quad c = 286; \\ S = 24\,020.$$

$$39. C = 102^{\circ}52'; \quad a = p \cdot \sin \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} = 80,22;$$

$$b = p \cdot \sin \frac{B}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{C}{2} = 152,7;$$

$$c = p \cdot \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} = 187,6;$$

$$S = p^2 \cdot \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 5974.$$

Näpunäide. 1. viis.  $2p = 2R (\sin A + \sin B + \sin C) =$

$$= 8R \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \quad \text{siit } 2R = \frac{\frac{p}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

mida kasutamegi arvutamisel ja mille abil koostame külgede avaldised ja seejärel pindala avaldise.

2. viis. Külje  $AC$  pikendustel võtame lõigud  $CE = CB$  ja  $AD = AB$  ning ühendame punktid  $D$  ja  $E$  punktiga  $B$ ; kolmnurgas  $DBE$  külj  $DE = 2p$ , nurk  $D = \frac{A}{2}$  ja nurk  $E = \frac{C}{2}$ . Võrdhaarsest kolmnurgast  $BCE$  leiame:  $a = \frac{BE}{2} : \cos \frac{C}{2}$ ;  $BE$  määramiseks kolmnurgast  $DBE$  leiame:

$$BE : 2p = \sin \frac{A}{2} : \sin \left( \frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} : \cos \frac{B}{2}.$$

Sel viisil määrame külje  $a$ ; külgede  $b$  ja  $c$  avaldised koostame analoogia põhjal.

$$40. C = 118^\circ 05'; \quad c = r \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2};$$

$$b = r \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2};$$

$$a = r \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2};$$

$$S = r^2 \cdot \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Otstarbekam on kasutada arvutamiseks külgede lõike  $(x, y, z)$  tippudest  $(A, B, C)$  kuni puutepunktideni; siis saame:  $x = 25$ ,  $y = 14$  ja  $z = 3$ ; seejärel leiame:  $a = z + y = 17$ ,  $b = z + x = 28$ ,  $c = x + y = 39$  ja  $S = r(x + y + z) = 5 \cdot 42 = 210$ .

$$41. A = 33^\circ 53'; \quad C = 98^\circ 07'; \quad a = 0,6927; \quad b = 0,9236; \quad S = 0,3167.$$

$$42. C = 47^\circ 26'; \quad B = 37^\circ 04'; \quad b = 38,47; \quad c = 47; \quad S = 89,7.$$

$$43. A_1 = 75^\circ 44'; \quad C_1 = 87^\circ 12'; \quad a_1 = 220,2; \quad b_1 = 66,66; \quad S_1 = 7330; \\ A_2 = 104^\circ 15'; \quad C_2 = 58^\circ 41'; \quad a_2 = 257; \quad b_2 = 77,94; \quad S_2 = 8569.$$

$$44. B = 35^\circ 53'; \quad C = 97^\circ 47'; \quad b = 12,95; \quad c = 21,905; \quad S = 102,6.$$

$$45. B = 10^\circ 02'; \quad C = 101^\circ 15'; \quad a = 155,2; \quad c = 163,4; \quad S = 2207.$$

46.  $A = 12^\circ 08'$ ;  $C = 43^\circ 14'$ ;  $b = 166,5$ ;  $c = 138,6$ .  
 47.  $A = 100^\circ 25'$ ;  $B = 50^\circ 12'$ ;  $C = 29^\circ 23'$ ;  $c = 15,96$ ;  $S = 196,2$ .  
 48.  $A = 38^\circ 49'$ ;  $B = 19^\circ 18'$ ;  $C = 121^\circ 53'$ ;  $a = 23,84$ ;  $b = 12,66$ ;  
 $c = 32,32$ ;  $S = 127,5$ .  
 49.  $A = 126^\circ 43'$ ;  $B = 39^\circ 36'$ ;  $a = 1196$ ;  $b = 951$ ;  $S = 134\,550$ .

Näpunäide.  $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$ ; siit  $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{m}{c} \cdot \sin \frac{C}{2}$ ,

mille abil leiame  $\frac{A-B}{2}$ ; teades aga  $\frac{A+B}{2}$  ja  $\frac{A-B}{2}$ , leiame  $A$  ja  $B$ .

50.  $A = 81^\circ 30'$ ;  $B = 44^\circ 50'$ ;  $a = 22,47$ ;  $b = 16,02$ ;  $S = 144,9$ .

51.  $B = 41^\circ 05'$ ;  $C = 36^\circ 17'$ ;  $a = 8,556$ ;  $b = 5,762$ ;  $S = 14,58$ .

Näpunäide. 1. viis. Mollweide esimese valemi järgi

$$\frac{m}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2},$$

mis võimaldab leida nurga  $B$ .

2. viis. Korrutada teineteisega

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \text{ ja } \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}, \text{ kuid } \frac{p-c}{p} = \frac{2(p-c)}{2p} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{m-c}{m+c}.$$

52.  $B = 37^\circ 43'$ ;  $C = 63^\circ 36'$ ;  $a = 16,58$ ;  $b = 10,35$ ;  $S = 76,86$ .

Näpunäide. 1. viis. Mollweide teise valemi järgi

$$\frac{n}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2},$$

mis võimaldab leida nurga  $B$ .

2. viis. Jagades  $\tan \frac{A}{2}$  ja  $\tan \frac{B}{2}$ , saame  $\tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} =$

$$= \frac{p-b}{p-a}; \text{ kuid } \frac{p-b}{p-a} = \frac{2(p-b)}{2(p-a)} = \frac{c+a-b}{c+b-a} = \frac{c+n}{c-n}.$$

53.  $A = 115^\circ 39'$ ;  $B = 25^\circ 40'$ ;  $C = 38^\circ 41'$ ;  $a = 9,998$ ;  $b = 4,801$ ;  
 $c = 6,931$ .
54.  $A = 26^\circ 34'$ ;  $B = 30^\circ 04'$ ;  $C = 123^\circ 22'$ ;  $a = h_c : \sin B = 71,84$ ;  
 $c = h_b : \sin A = 134,16$ ;  $b = c \cdot 0,6 = 80,49$ ;  $S = 0,5 \cdot c \cdot h_c = 2415$ .
- Näpunäide.*  $\tan A = 0,5$ ;  $b : c = h_c : h_b = 3 : 5$ .
55.  $A = 27^\circ 16'$ ;  $B_1 = 63^\circ 42'$ ;  $C_1 = 89^\circ 02'$ ;  $c_1 = 50,19$ ;  $S_1 = 517,4$ ;  
 $B_2 = 116^\circ 18'$ ;  $C_2 = 36^\circ 26'$ ;  $c_2 = 29,81$ ;  $S_2 = 307$ .
56.  $B = 11^\circ 25'$ ;  $A_1 = 55^\circ 02'$ ;  $C_1 = 113^\circ 33'$ ;  $c_1 = 134,2$ ;  
 $S_1 = 0,5 \cdot c_1 \cdot h_c = 1595$ ;  $A_2 = 124^\circ 59'$ ;  $C_2 = 43^\circ 36'$ ;  $c_2 = 101$ ;  
 $S_2 = 1200$ .
57.  $C_1 = 30^\circ$ ;  $B_1 = 103^\circ 04'$ ;  $A_1 = 46^\circ 56'$ ;  $c_1 = 4,106$ ;  $C_2 = 150^\circ$ ;  
 $B_2 = 17^\circ 12'$ ;  $A_2 = 12^\circ 48'$ ;  $c_2 = 13,53$ . (Vastuse kahesust selgitada  
joonisega.)
58.  $A = 30^\circ 24'$ ;  $B = 99^\circ 45'$ ;  $C = 49^\circ 51'$ ;  $a = 50,32$ ;  $S = 1884$ .
59.  $A = 83^\circ 25'$ ;  $B = 36^\circ 35'$ ;  $C = 60^\circ$ ;  $c = 17,434$ ;  $S = 103,9$ .

*Näpunäide.* Pikendanud mediaani  $CD$  lõigu  $DE = CD$  võrra ja ühendanud punktid  $B$  ja  $E$ , leiame kolmnurgast  $CBE$  nurga  $CBE$ .

60.  $A = 127^\circ 10'$ ;  $B = 32^\circ 05'$ ;  $C = 20^\circ 45'$ ;  $a = h_b : \sin C = 33,88$ ;  
 $b = h_a : \sin C = 22,59$ ;  $c = h_a : \sin B = 15,06$ ;  $S = 135,5$ .

*Näpunäide.* Saame võrde  $a : b : c = \frac{2S}{8} : \frac{2S}{12} : \frac{2S}{18} = 9 : 6 : 4$ , mis  
võimaldab leida nurgad.

61.  $A = 135^\circ 11'$ ;  $B = 27^\circ 07'$ ;  $C = 17^\circ 42'$ ;  $a = 64,93$ ;  $S = 414,5$ .

*Näpunäide.* Kolmnurkade pindalade võrdlemisest saame:

$$\frac{bc}{2} \cdot \sin A = \frac{bl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{cl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}; \text{ siit leiame, et } \cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}$$

## § 14.

1. a)  $x = (-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ$  ehk  $x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ ;

b)  $x = 30^\circ, 150^\circ$  ehk  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ .

2. a)  $x = \pm 51^\circ 50' + n \cdot 360^\circ$ ; b)  $x = 51^\circ 50'; 308^\circ 10'$ .

3. a)  $x = \pm 72^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  $\pm 144^\circ + n \cdot 360^\circ$  ehk  $x = \pm \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$ ;  
 $\pm \frac{4\pi}{5} + 2\pi n$ ;

b)  $x = 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$  ehk  $x = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ .

4. a)  $x = -45^\circ + n \cdot 180^\circ$  ehk  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ; b)  $x = 135^\circ, 315^\circ$  ehk

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

5. a)  $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$  ehk  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ; b)  $x = 60^\circ, 120^\circ,$

$$240^\circ, 300^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

6. a)  $x = n \cdot 180^\circ; \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$  ehk  $x = n \cdot 360^\circ; x = 60^\circ + n \cdot 120^\circ;$

b)  $x = 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ$  ehk  $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi.$

7. a)  $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ; (-1)^n \cdot 19^\circ 28' + n \cdot 180^\circ;$

b)  $x = 19^\circ 28', 90^\circ, 160^\circ 32', 270^\circ.$

8. a)  $x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ$  ehk  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot m$ ; b)  $x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ,$

$315^\circ$  ehk  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$

9. a)  $x = (-1)^n \cdot 10 + 60^\circ \cdot n$  ehk  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} \cdot n;$

b)  $x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ$

ehk  $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}.$

10. a)  $x = 112^\circ 30' + n \cdot 450^\circ$  ehk  $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} \cdot n$ ; b)  $x = 112^\circ 30'$  ehk

$$x = \frac{5\pi}{8}.$$

11. a)  $x = (6n \pm 1) \cdot 90^\circ$  ehk  $x = (6n \pm 1) \frac{\pi}{2}$ ; b)  $90^\circ$  ehk  $\frac{\pi}{2}.$

12. a)  $x = (3n \pm 1) \cdot 4\pi$ ; b) ei ole.

13. 1)  $\alpha - \beta = 2n \cdot 180^\circ$  või  $\alpha + \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

2)  $\alpha \pm \beta = n \cdot 360^\circ;$  3)  $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ;$

4)  $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ;$

5)  $\alpha + \beta = 2n \cdot 180^\circ;$  või  $\alpha - \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

6)  $\alpha \pm \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

7)  $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ;$  8)  $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ;$

9)  $\alpha \pm \beta = 90^\circ + n \cdot 360^\circ;$  10)  $\alpha \pm \beta = 270^\circ + n \cdot 360^\circ;$

11)  $\alpha + \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ;$  12)  $\alpha - \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ.$

14.  $(2k + 1) \cdot 9^\circ.$  15.  $k \cdot 180^\circ.$  16.  $(2k + 1) \cdot 60^\circ.$

17.  $\sin 2x = \frac{a}{b-a}.$  Võrrandil on lahendid, kui  $|a| \leq |b-a|.$

18.  $\frac{k}{p+q} \cdot 180^\circ$ .
19.  $(4k-1) \cdot 45^\circ$  ja  $(4k+3) \cdot 22^\circ 30'$ .
20.  $k \cdot 36^\circ$  ja  $k \cdot 45^\circ$ .
21.  $x = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) + n \cdot 180^\circ$ .
22.  $(2k+1) \cdot 90^\circ$  ja  $45^\circ + k \cdot 180^\circ$ .
23.  $(-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + n \cdot 180^\circ$ .
24.  $\pm 2 \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + n \cdot 720^\circ$ .
25.  $k \cdot 180^\circ + (-1)^k 30^\circ - \frac{m}{2}$ .
26.  $k \cdot 90^\circ$  ja  $\pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ .
27.  $k \cdot 180^\circ$ . 28.  $\tan x_1 = \tan x_2 = \frac{a}{b}$ .
29.  $x = \arctan \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$ , kusjuures  $c^2 \leq a^2 + b^2$ .
30.  $x_1 = 126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ$ ;  $x_2 = -151^\circ 56' + n \cdot 360^\circ$ .
31.  $x = n \cdot 360^\circ$ ;  $-126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ$ .
32.  $x = 31^\circ 59' \pm 16^\circ 20' + n \cdot 360^\circ$ .
33.  $x = 15^\circ + n \cdot 360^\circ$ ;  $105^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

*Näpunäide.* Jagades võrrandi mõlemad pooled 2-ga saame:  
 $\cos(x-60^\circ) = \cos 45^\circ$ .

34.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$ .      35.  $x = n \cdot 180^\circ$ ;  $45^\circ + n \cdot 180^\circ$ .
36.  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ .
37.  $x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

*Näpunäide.* Viinud kõik liikmed võrrandi vasakule poole ja ühendanud nad üheks murruks, taandame selle avaldisega  $1 + \sin x$ .

38.  $x = 10^\circ 10' + n \cdot 180^\circ$ ;  $79^\circ 50' + n \cdot 180^\circ$ .
39.  $x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi n$ . 40.  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ;  $\frac{\pi}{6} + \pi n$ ;  $\frac{\pi}{3} + \pi n$ .
41.  $\pm 60^\circ + m \cdot 180^\circ$ .
42.  $x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$ ;  $15^\circ + n \cdot 180^\circ$ . 43.  $\tan x = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$ .
44.  $m \cdot 60^\circ$ .

$$45. x = (-1)^n \cdot 75^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$46. x = n \cdot 60^\circ; 15^\circ + n \cdot 30^\circ.$$

$$47. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 48. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$49. x_1 = x_2 = 90^\circ + n \cdot 180^\circ; x_3 = 45^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

$$50. m \cdot 180^\circ \pm 18^\circ; m \cdot 180^\circ \pm 54^\circ.$$

$$51. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

*Näpunäide.* Avaldis  $\cos 4x + \cos 2x$  teisendada korrutiseks.

$$52. x = n \cdot 120^\circ; -90^\circ + n \cdot 360^\circ; 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

*Näpunäide.*  $\cos x - \cos 2x$  teisendada korrutiseks ja  $\sin 3x$  arendada kui  $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$ .

$$53. x = 60^\circ + n \cdot 120^\circ; 2 \arctan \frac{b}{a} + 2\pi n.$$

$$54. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}.$$

*Näpunäide.* Teisendanud  $\sin x + \sin 3x$  ja  $1 + \cos 2x$  korrutisteks ja teinud veel mõned teisendused, saame võrrandi

$$\cos x \cdot (1 + 2 \cos x) (1 - 2 \sin x) = 0.$$

$$55. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

*Näpunäide.* Antud võrrand taandub võrrandiks  $\frac{\cos 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = 0$ .

$$56. \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}; x = \pm 77^\circ 20' + n \cdot 720^\circ.$$

$$57. x = 2\pi n; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n.$$

$$58. x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

*Näpunäide.* Vasaku poole teisendame murruks  $\frac{4}{\sin^2 x}$ .

$$59. \cos x_1 = \cos x_2 = \frac{1}{3}; x_1 = x_2 = \pm 70^\circ 32' + n \cdot 360^\circ.$$

$$60. x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n; x_2 = x_3 = \pi n$$

*Näpunäide.*  $1 + \sin 2\alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$ .

61.  $x_1 = x_2 = n \cdot 90^\circ$ ;  $x_3 = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$  ehk  $x = n \cdot 180^\circ$ ;  
 $30^\circ + n \cdot 60^\circ$ .

*Näpunäide.*  $\sin^2 3x - \sin^2 x$  lahutame tegureiks.

62.  $x = n \cdot 60^\circ$ ;  $\pm 35^\circ 16' + n \cdot 180^\circ$ .

*Näpunäide.* Esitanud antud võrrandi kujul  $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x$ , arendame  $\tan 3x$  kui  $\tan(x + 2x)$ . Uuest võrrandist saame järgmised kaks võrrandit: 1)  $\tan x + \tan 2x = 0$  ja 2)  $1 = -1 : (1 - \tan x \cdot \tan 2x)$ . Võrrandist 1 leiame, et  $\sin 3x = 0$ , ja võrrandist 2 leiame, et  $\tan x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

63.  $x = n \cdot \frac{\pi}{8}$ .

*Näpunäide.* Korrutanud võrrandi mõlemad pooled 2-ga, kasutame võrdust  $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ .

64.  $x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$ . 65.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$ .

66.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$ . 67.  $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$ ;  $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

68.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ;  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ . 69. Pole lahendeid.

70. Pole lahendeid. 71.  $\tan x = \pm(\sqrt{2} + 1)$ ;  $\pm(\sqrt{2} - 1)$ ;  
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$ .

72.  $x = n \cdot 60^\circ$ .

*Näpunäide.*  $\tan 2x$  asendame avaldisega  $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$ .

73.  $x = \pi n$ .

74. 1)  $\sin x = 0,8$ ;  $\sin y = -0,6$ ; 2)  $\sin x = -0,6$ ;  $\sin y = 0,8$ .

*Näpunäide.* Tõstame ruutu  $\sin y = 0,2 - \sin x$  ja  $\cos y = -0,2 - \cos x$  ning liidame liikmeti.

75. 1)  $\cos x = \frac{1}{2}$ ;  $\cos y = \frac{1}{3}$ ; 2)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ;  $\cos y = -\frac{1}{3}$ ;

3)  $\cos x = \frac{1}{3}$ ;  $\cos y = \frac{1}{2}$ ; 4)  $\cos x = -\frac{1}{3}$ ;  $\cos y = -\frac{1}{2}$ .

*Näpunäide.* Liites ja lahutades liikmeti antud võrrandid, avaldame neist  $\cos y$  ja  $\sin y$  ning liidame nende ruudud.

76.  $\tan x = 5 + \sqrt{34}$ .  $\tan y = 5 - \sqrt{34}$ ; 2)  $\tan x = 5 - \sqrt{34}$ .  
 $\tan y = 5 + \sqrt{34}$ .

$$77. x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

*Näpunäide.* Võtnud  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \varphi$ , avame sulud, avaldame  $\cos \alpha$  ja  $\cos \beta$  vastavalt  $\sin \alpha$  ja  $\sin \beta$  kaudu ning asendame  $\sin \alpha$  ja  $\sin \beta$  avaldistega  $\frac{a}{x}$  ja  $\frac{b}{x}$ .

$$78. \begin{aligned} 1) & x = 45^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, & y &= 15^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 2) & x = 105^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, & y &= -45^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 3) & x = -15^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, & y &= -45^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 4) & x = 45^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, & y &= -105^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

$$79. 1) x = 21^\circ 21' 15'', \quad y = 8^\circ 38' 45''; \quad 2) x = 81^\circ 21' 15'', \quad y = 68^\circ 38' 45''.$$

$$80. 1) x = 81^\circ 21' 15'', \quad y = 21^\circ 21' 15''; \quad 2) x = 21^\circ 21' 15'', \quad y = 81^\circ 21' 15''.$$

81.  $x$  ja  $y$  leiame nende poolsumma ja poolvahe järgi: 1) esimese võrrandi järgi on  $\frac{x+y}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ; 2) teise võrrandi esitame

$$\text{kujul } 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \alpha \text{ ja leiame sellest } \frac{x-y}{2}.$$

$$82. x = 15^\circ 20', \quad y = 61^\circ 40'.$$

83.  $x$  ja  $y$  leiame nende summa ja vahe järgi: 1)  $x+y$  on antud; 2)  $x-y$  leiame teisest võrrandist, kui korrutame ta mõlemad pooled 2-ga ja  $2 \sin x \cdot \sin y$  asendame avaldisega  $\cos(x-y) - \cos(x+y)$ .

$$84. x = 60^\circ, \quad y = 11^\circ 40'.$$

85. Esimesest võrrandist saame  $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\alpha$  ja teisest võrrandist

$$\text{leiame, et } \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m+n}{m-n} \text{ ehk } \frac{\tan \frac{1}{2}(x+y)}{\tan \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{m+n}{m-n},$$

$$\text{millest leiame } \frac{1}{2}(x-y).$$

$$86. x = 35^\circ 46', \quad y = 60^\circ 52'.$$

87. Teise võrrandi võib esitada kujul  $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \alpha$ , millest saame

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(x+y) \text{ ehk } \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha. \text{ Korrutades nüüd võrrandi mõlemad pooled 2-ga ja asendanud } 2 \cos x \cdot \cos y \text{ avaldisega } \cos(x+y) + \cos(x-y), \text{ võime leida } x-y.$$

$$88. x = 44^\circ 20', \quad y = 13^\circ 20'.$$

89. Esitanud teise võrrandi kujul  $\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{a}{1}$ , saame sellest:  
 $\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{1+a}{1-a}$  ehk  $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}$ .

Viimasest võrrandist leiame  $x-y$ .

90.  $x = 45^\circ$ ,  $y = 40^\circ$ .

91. Teisest võrrandist leiame, et  $\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{m+n}{m-n}$  ehk

$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}$ , millest leiame  $x-y$ .

92. 1)  $x = 22^\circ 25'$ ,  $y = 18^\circ 39'$ ; 2)  $x = 71^\circ 21'$ ,  $y = 67^\circ 35'$ .

93. Pole lahendipaari, milles mõlemad nurgad oleksid teravad.

94.  $\tan x = 1$ ;  $\tan y = 2$ ;  $\tan z = 3$ ;  $x = 45^\circ$ ;  $y = 63^\circ 26'$ ;  $z = 71^\circ 34'$ .

*Näpunäide.*  $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$ .

95.  $x = 30^\circ 58'$ ;  $y = 78^\circ 41'$ ;  $z = 70^\circ 21'$ . (Vt. ülesanne 94.)

## § 15.

1. 1)  $-\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{3}$ ; 3)  $\frac{3}{4}\pi$ .

2. 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2) 0; 3)  $\sqrt{3}$ .

3. 1) -1; 2) 1; 3) 0.

4. 1)  $x$ ; 2)  $\frac{3}{5}$ ; 3)  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

5. 1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $\frac{1}{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ .

6. 1)  $\frac{4\pi}{5}$ ; 2)  $x$ ; 3)  $\frac{5\pi}{14}$ .

7. 1) 0,6; 2)  $\frac{15}{17}$ ; 3)  $\frac{3}{4}$ .

8. 1) 1; 2)  $\frac{1}{2}$ .

9. 1) pole väärtust;  
2) pole väärtust.

10.  $\sqrt{3}$ .

11.  $\frac{77}{85}$ .

12.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

13.  $-\frac{41}{49}$ .

14.  $2m\sqrt{1-m^2}$ .

15.  $\frac{47}{52}$ .

16.  $\frac{2m}{1+m^2}$ .

32.  $\pm\sqrt{2}$ .

33. 0;  $\frac{1}{2}$ .

34.  $\pm\sqrt{3}$ .

35.  $\sqrt{2}$ .

36. 0;  $\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ .

37.  $\frac{\pi}{4}$ .

38.  $\pm\frac{\pi}{6}$ .

39.  $\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}$ .

40.  $\frac{1}{2}$ .

41. 0;  $\frac{1}{2}$ .

42.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

43.  $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$ .

44.  $\pm\frac{1}{3}$ .

## § 15a.

1.  $a \sec \frac{180^\circ}{n}$ .    2. 18,02 cm ja 22,47 cm.    3.  $2a \cos \frac{180^\circ}{n}$ .
4. 1)  $2R = a \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$ ; 2)  $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{90^\circ}{n}$ .    5. 26,97 m ja 20,84 m.
6.  $4r^2 \operatorname{cosec} \alpha = 167$ .    7.  $\sqrt{Q \cot \frac{\beta}{2}} = 24,66$ .    8.  $\beta = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{b^2}{4Q} = 130^\circ 47'$ .
9.  $\frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$ ; 1) 1453; 2) 4,829; 3) 1120.    10.  $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ ; 1) 147; 2) 116,5.    11.  $nR^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$ .    12. 183,8.    13.  $\approx 41 a$ .
14.  $a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$ .
15. 71 cm.    16.  $S_9 : S_{10} = 10 \cot 20^\circ : 9 \cot 18^\circ = 0,992$ .    17. 21,75 cm<sup>2</sup>.
18.  $\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha$ ; 1) 0,98; 2) 1,63.    19.  $\frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$ ;  $\alpha = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{a}{2R}$ ; 0,59 cm<sup>2</sup>.
20.  $R^2 \left[ \frac{\pi (180^\circ - \alpha)}{180^\circ} + \sin \alpha \right]$ .    21. 3,215 cm ja 7,785 cm.
22.  $S = \frac{4ab}{\sin \alpha}$ ;  $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$ ;  
 $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$ .
23.  $6 - \pi \frac{90^\circ + \alpha}{72^\circ} = 0,4643$ ;  $\alpha$  on suurem ringjoone puutepunktide vaheline kaar.
24.  $30^\circ$ .

## § 16.

1. 3,328.    2.  $\operatorname{arc} \tan \frac{r}{p} = 60^\circ 26'$ .    3.  $\operatorname{arc} \tan \frac{2d}{a} = 53^\circ 08'$ .
4.  $35^\circ 16'$ .    5. 5,2 m;  $28^\circ 33'$ .    6.  $51^\circ 03'$ .
7. 2,6 m;  $67^\circ 23'$ .    8.  $70^\circ 32'$ .    9.  $\cos \omega \cdot \cos \beta = \cos \varphi$ ;  $\varphi = 45^\circ$ .
10.  $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ ;  $\varphi = 6^\circ 15'$ .    11.  $x = y = z = \operatorname{arc} \tan \frac{4hS}{abc}$ ;  $75^\circ 52'$ .
12.  $\frac{\alpha \sin \beta \tan \varphi}{\sin (\gamma + \beta)} = 322,5$  m.    13.  $\frac{a^2}{4\sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 \alpha}$ .

14.  $\arcsin \frac{n \pm m}{a}$ ;  $13^{\circ}21'$ ;  $90^{\circ}$ .    15.  $\varphi = \arcsin \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

*Näpunäide.* Paralleelsete kaldsirgete ja lõikaja lõikepunktid tasapinnaga asetsevad ühel sirgel.

16.  $\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$ .    17.  $\arcsin \frac{c \sin \alpha}{d}$ ;  $45^{\circ}$ .

18. 1)  $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ ; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktid asetsevad ühel ja samal pool tasapinda, mis on pandud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga. 2)  $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ ; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktidest asetseb üks ühel pool ja teine teisel pool tasapinda, mis on pandud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga.

*Näpunäide.* Projitseerime antud lõigu ja temale ehitatud ristsirged antud tasapinnale; seejärel ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpoteenusiks on  $b$  ja mille üks kaatet on paralleelne lõigu  $a$  projektsiooniga.

19.  $41^{\circ}25'$  ja  $82^{\circ}50'$ .

## § 17.

1.  $a \tan \alpha = 5,441$ . 2. 1)  $\varphi = \arcsin \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$ ; 2)  $\varphi = 22^{\circ}37'$ .

3.  $\sin x = \sin 20^{\circ} \cos 25^{\circ}$ ;  $x = 18^{\circ}04'$ . 4.  $22^{\circ}$ . 5.  $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

6.  $\frac{180^{\circ}}{n}$ . 7. a) 26,7 m; 11,7 m; b)  $\alpha = 18^{\circ}33'$ ;  $\beta = 46^{\circ}31'$ ; c)  $17^{\circ}14'$ ;  $40^{\circ}$ ; d)  $18^{\circ}47'$ ;  $50^{\circ}32'$ .

8.  $39^{\circ}48'$ . 9.  $\frac{a}{2} \sin 2\alpha \cdot \sin \varphi$ . 10.  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$ ;  $\tan y = \frac{1}{2} \tan \alpha$ .

11.  $x = \arcsin \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)$ . 12.  $73^{\circ}24'$ . 13.  $30^{\circ}$ .

14.  $\varphi = \arcsin 0,6 = 36^{\circ}52'$ . 15. 1)  $70^{\circ}32'$ ; 2)  $109^{\circ}28'$ ; 3)  $138^{\circ}12'$ .

*Näpunäide.* Ulesanne taandub niisuguse korrapärase viisnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille kõik servad on võrdsed. 4)  $116^{\circ}34'$ . *Näpunäide.* Ulesanne taandub niisuguse korrapärase kolmnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille külgtahu tipunurk on  $108^{\circ}$ .

## § 18.

1. 43,3 cm<sup>2</sup>.      2.  $Q \sqrt{2}$ .      3.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos a}$ .      4. 42,2 cm.  
 5. 1953 cm<sup>2</sup>.      6. 33,35 m<sup>2</sup>.      7. 36°52'; 3 m.  
 8. Ühepalju.      9.  $Q \sin \alpha$ ; väiksem; heledamalt.      10. 106,4 m<sup>2</sup>.

## § 19.

1. 67°56'.      3.  $\frac{7a^2}{8 \cos a}$ .      4. 1)  $\frac{3a}{4} \sqrt{a^2 + 2b^2}$ ; 2)  $\arctan \frac{b \sqrt{2}}{a}$ .  
 5. Lõiketaspind on paralleelne põhja suurema diagonaaliga ja moodustab põhitahuga nurga  $\varphi = \arccos \left( \tan \frac{\alpha}{2} \right)$ .  
 6.  $d^2 \sqrt{2} \cdot \sin 2\beta \cdot \sin (45^\circ + \alpha) \approx 393,1 \text{ m}^2$ .      7.  $d^2 \cot \frac{\alpha}{4} \approx 1963 \text{ m}^2$ .  
 8.  $5a^2 \cot 36^\circ \cdot \cos^2 27^\circ \approx 3092 \text{ m}^2$ .  
 9.  $4a^2 \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \approx 34700 \text{ cm}^2$ .  
 10.  $\frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \sec \alpha \cdot (1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha})$ .  
 11.  $x = \arctan \left( \frac{1}{2} \tan \varphi \right) = 16^\circ 06'$ ;  $y = \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \varphi \right) = 26^\circ 34'$ .  
 12.  $x = \arccos \left( \cot \frac{180^\circ}{n} \tan \frac{\alpha}{2} \right) = 54^\circ 44'$ .      13.  $\frac{a \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + 45^\circ)}$ .  
 14.  $\frac{1}{4} a^2 \sec \alpha \cdot \sqrt{\sin (\alpha + 30^\circ) \sin (\alpha - 30^\circ)}$ .  
 15.  $x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{p \sqrt{2}}{c^2} = 29^\circ 02'$  või  $x = 60^\circ 58'$ ;  
 $y = 2c \cos x = 8,743$  või  $y = 4,853$ .  
 16.  $\tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{m \sqrt{2}}{n}$ ;  $\varphi = 90^\circ - 2 \arctan \frac{m \sqrt{2}}{n} = 30^\circ$ .  
 17.  $\frac{a^2}{9 \sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 \alpha} = 1,962$ .      18.  $a^2 \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$ .      20. 48 cm<sup>2</sup>.  
 21. 1)  $2a^2$ ; 2)  $\frac{a^2}{2}$ ;  $3a^2$ .      22. 168 cm<sup>2</sup>.      23. 14,61 cm<sup>2</sup>.      24. 32°51'.  
 25.  $a^2 \sec \alpha$ .      26.  $4h^2 \cot \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$ .      27.  $2a^2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi$ .  
 28.  $2nk^2 \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} = 6238$ .      29.  $(a + b) \sqrt{ab} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \alpha$ .

$$30. l^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi. \quad 31. a^2 \sqrt{2} \cdot \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}.$$

$$32. \frac{na^2}{4 \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\text{ehk } \frac{na^2}{4} \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}}}.$$

$$33. a^2 \sec^2 \alpha \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$34. a^2 \cot \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \quad a^2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$35. \frac{2h^2}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$36. a^2 \sin \alpha \cdot \cot \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right). \quad 37. \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$38. \varphi = \arctan \left(\tan \alpha \cdot \frac{m-n}{m+n} \sqrt{2}\right).$$

$$39. \frac{n(a+b)}{2} \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} \cot^2 \frac{180^\circ}{n} + h^2 + n \frac{a^2 + b^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$40. \frac{n(a^2 - b^2)}{4 \sin \frac{180^\circ}{n}} \sqrt{\tan^2 \alpha + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \frac{n(a^2 + b^2)}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$41. hk^2 \frac{m+1}{m-1} \sin \alpha \tan \frac{180^\circ}{n}. \quad 42. 2h^2 \cot \beta \cdot \sqrt{2 + \cot^2 \alpha} = 2928.$$

## § 20.

$$1. \tan \varphi = \sin 15^\circ; \quad \varphi = \arctan (\sin 15^\circ) = 14^\circ 31'.$$

$$2. R \operatorname{cosec} \alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

$$3. \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + d^2 \cos^2 \alpha}.$$

*Näpunäide.* Olgu pöhja keskpunkt  $O$ , puutepunkt  $A$ , puutuja ja pöhja tasapinna löikepunkt  $B$ , punkti  $A$  läbiva moodustaja alumine otspunkt  $C$  ja punktist  $O$  sirgele  $AB$  ehitatud ristlõik  $OD$ . Siis on  $\angle ABC = \alpha$ ,  $OA = d$  ja  $OC = R$ . Ühendades punktid  $C$  ja  $D$  saame kolmnurgas  $ODC$  tipu  $C$  juures täisnurga.

$$4. \frac{b \sin 2\alpha}{2 \sqrt{2} \sin (45^\circ + \alpha)}.$$

$$5. \left(\frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos \varphi}\right)^2 \sin \alpha \sqrt{\cos (\alpha + \varphi) \cos (\alpha - \varphi)}.$$

$$6. \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}.$$

*Näpunäide.* Otsitava lõigu leiame osade kaupa.

$$7. \frac{l \sin \alpha \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \tan \alpha} = l \sin \alpha \sin^2 \varphi, \text{ kusjuures } \varphi \text{ leiame võrdusest } \frac{\tan \alpha}{\sqrt{2}} = \cot^2 \varphi.$$

$$8. \frac{R \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ}{\sin(\alpha + 60^\circ)}. \quad 9. 2\pi a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 10. 70^\circ 32'.$$

$$11. \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = 2 \arctan \frac{\pi}{4} = 76^\circ 17'. \quad 12. \pi Q \cot \frac{\alpha}{2}.$$

$$13. \sin \alpha \sqrt{S \cot \frac{\varphi}{2}} = 19,42 \text{ cm}. \quad 14. 22,52 \text{ m}^2; \quad 4,442 \text{ m}^2.$$

$$15. 1) b = nh = 80 \text{ m}; \quad 2) r = mh = 6 \text{ m}; \quad 3) \alpha = \arctan \frac{1}{n} = 2^\circ 52';$$

$$4) \varphi = \arctan \frac{2}{3} = 33^\circ 41'; \quad 5) \gamma = \arccos \frac{m}{n} = 85^\circ 42';$$

$$6) 537,9 \text{ m}^2; \quad 7) 646,5 \text{ m}^2.$$

$$16. \sin \frac{x}{2} = \frac{S}{\pi a^2}; \quad x = 2 \arcsin \frac{S}{\pi a^2} = 30^\circ.$$

$$17. 1) H \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = H \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \text{tipupoolne osa suhtub põhjapoolse osaga nagu } \cos^2 \frac{\alpha}{2} : \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \text{ Võrdkülgse telglõikega koonuse puhul saame: } 1) x = \frac{3}{4} \text{ moodustajast; } 2) 3:1.$$

*Näpunäide.* Sarnaste koonuste külgpindalad suhtuvad nagu koonuste kõrguste ruudud.

$$18. 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; \quad 1) 180^\circ; \quad 2) 207^\circ 31'. \quad 19. \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos \alpha}.$$

$$20. \frac{\pi m^2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}. \quad 21. \frac{\pi(m^2 - n^2)}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}. \quad 22. \frac{(R^2 - r^2) \sin \delta}{2 \cos \beta}.$$

$$23. \pi h^2 \sec \alpha. \quad 24. \cos \varphi = \frac{m - n}{p}. \quad 25. S_{\text{külg}} = \pi l^2 \sin \alpha = 426;$$

$$S_{\text{täis}} = 2\pi l^2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) = 652. \quad 26. \frac{Q - q}{\cos \alpha}.$$

## § 21.

1.  $\frac{1}{2} l^3 \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi.$       2.  $\frac{1}{2} d^3 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \beta = 58,6.$

3.  $2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}.$

4.  $\frac{1}{4} d^3 \sin \left[ \alpha + \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{4} \right) \right] \tan \varphi = 1000 \text{ dm}^3; 30^\circ.$

5.  $V = abc \sqrt{-\cos 2\alpha}; x = 45^\circ.$       6.  $\frac{a^3}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha}.$

7.  $\frac{a^3 \sqrt{2 \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 271,8 \text{ cm}^3.$

8.  $\frac{3a^3}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left( 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}.$       9.  $516 \text{ m}^3.$

10.  $V = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \gamma}{2(a+b) \cos \varphi} = 17\,850 \text{ dm}^3.$

*Näpunäide.*  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (a+b)^2 \cos^2 \varphi,$  kus  $\sin \varphi =$   

$$= \frac{2 \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} \text{ (vt. § 11, nr. 62).}$$

11.  $\frac{4r^2 h \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} = 3,627 \text{ m}^3.$

12. *Näpunäide.* Algul avaldame kolmnurga  $FCD$  pindala ja seejärel kolmnurga  $FAB$  pindala:

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)} \left[ \left( h^2 \cot^2 \varphi + \frac{b^2}{4} \right) \cot \alpha + hb \right]; \approx 170 \text{ m}^3.$$

13. *Näpunäide.* Avaldada ruumala ristlõike pindala kaudu:

$$\frac{a^2 b^2}{4} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}.$$

14.  $\frac{1}{6} n b^3 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \beta \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = 1,535 \text{ m}^3.$

15.  $\frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$

16.  $\frac{2}{3} h^3 \cot^2 \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$       17.  $\frac{b^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$

18.  $\frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \tan \varphi$ .    19.  $\frac{1}{24} (a+b)^2 \sqrt{a(a-2b)} \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ .  
 20.  $\frac{1}{6} \rho \sqrt{\rho \tan \alpha} \cdot \tan \varphi$ .

*Näpunäide.* Olgu püramiidi kõrguse aluspunkt  $E$ . Siis joon  $BED$  on sirgjoon, mis on risti sirgetega  $BC$  ja  $AD$ .

$$21. V_A = \frac{V \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = 138,9 \text{ cm}^3.$$

*Näpunäide.*  $V_A : V_B = \sin B : \sin A$ .

$$22. 45^\circ 18' \text{ ja } 25^\circ 14'.$$

$$23. V = \frac{a^3 - b^3}{6} \tan \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \varphi \tan \alpha, \text{ kus } \sin^2 \varphi = \frac{b^3}{a^3}; V = 227 \text{ m}^3.$$

$$24. V = \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3 \cos^2 \varphi}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}, V = 4304.$$

$$25. \frac{n(a^3 - b^3) \cot \frac{180^\circ}{n}}{24 \sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \tan \alpha. \quad 26. \frac{a^3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{8\pi}.$$

$$27. \frac{\pi a^2 h}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 7900 \text{ dm}^3. \quad 28. \frac{\pi a^3}{4 \sin^3 \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$29. V = \frac{D^2 l}{8} \cdot \frac{\pi \alpha}{180} \cdot \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \varphi},$$

$$\text{kus } \tan \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot 180}{\pi \alpha}; \quad V \approx 2,1 \text{ m}^3. \quad 30. \frac{\pi b^2 H}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$31. V = \frac{\pi Q}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{180^\circ}{n}} \sqrt{Q \tan \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

$$32. \frac{c^3 d \tan \varphi}{24\pi^2} \approx 5,4 \text{ t}. \quad 33. \frac{\pi}{3} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \approx 4856 \text{ dm}^3. \quad 34. \frac{\pi h^3}{3} \cot^2 \alpha.$$

$$35. S = \frac{2\pi R^2}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad V = \frac{\pi R^3}{3} \tan \alpha.$$

$$36. \frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$37. \frac{\pi a^3 \cot \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}. \quad 38. \frac{\pi d^3 \cot \alpha}{3 \tan^3 \frac{\alpha}{2}} = 299 \text{ m}^3.$$

$$39. \frac{\pi R^3 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta} = 302 \text{ dm}^3.$$

$$40. \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \tan \alpha.$$

$$41. \frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

$$42. r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} V + r_1^3 \tan \alpha + r_2^3 \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}} = 3,45 \text{ m};$$

$$h_1 = (r - r_1) \tan \alpha = 19 \text{ m}; \quad h_2 = (r - r_2) \tan \beta = 4 \text{ m}.$$

$$43. \frac{7}{6} \pi a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = 28\,030 \text{ dm}^3. \quad 44. \frac{\pi}{12} l^3 \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha) = 1182.$$

## § 22.

$$1. 3562 \text{ km}. \quad 2. 36\,710 \text{ km}; \quad 15\,930 \text{ km}. \quad 3. \frac{2r \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}.$$

$$4. \frac{V}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 10,52 \text{ dm}^3. \quad 5. \frac{\sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2} = 0,2963.$$

$$6. \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\varphi}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}. \quad 7. \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \sin 2\alpha} = 5,145 \text{ m}.$$

$$8. \frac{a}{2} \sin \alpha \tan \frac{\varphi}{2}. \quad 9. 2C \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$10. x = 2R \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ \cdot \sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

*Näpunäide.* Ehitanud läbi kõõlude ühise punkti veel läbimõõdu ja tähistanud kõõlu pikkuse tähega  $x$ , avaldame kõõlu otspunkti kauguse läbimõõdust. See on  $x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$ . Uhendanud läbimõõdu otspunkti kõõlu otspunktiga, koostame võrrandi:

$$x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = 2R \cdot x \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ.$$

$$11. 70^\circ 32'.$$

$$12. \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}; \quad \alpha_1 = 78^\circ 28'; \quad \alpha_2 = 60^\circ;$$

$$m = 2 \text{ (väikseim).}$$

$$13. \sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 52^{\circ}32'. \quad 14. \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha = 70^{\circ}32'.$$

$$15. \sin \alpha = \sqrt{\frac{n}{m}}; \quad (\alpha = 45^{\circ}). \quad 16. \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

$$17. 1) 4\pi r_1 r_2; \quad 2) \cos z = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \text{ ehk } \tan \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

$$18. \sin \frac{ABC}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$19. \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\tan^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^6 \frac{\alpha}{2}} \text{ ehk } \frac{2}{3} \pi R^3 \tan 2\varphi, \text{ v\u00f6ttes } \tan^3 \frac{\alpha}{2} = \tan \varphi.$$

$$20. \frac{4}{3} \pi R^3 d \cos^4 \frac{\varphi}{4} \left( 3 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{4} \right). \quad 21. 3652 \text{ m}^3.$$

$$22. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha = 49^{\circ}02'. \quad 23. \frac{\pi a^2}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4}.$$

$$24. 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 574,8 \text{ dm}^2. \quad 25. \frac{\pi b^3 \tan \frac{\alpha}{4}}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 4276 \text{ dm}^3.$$

$$26. V \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}. \quad 27. \frac{\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}, \text{ kus } \tan \varphi = \sqrt{2 \tan \frac{\alpha}{4}}.$$

$$28. \sin \alpha = \frac{n - m}{n + m}; \quad (\alpha = 30^{\circ}).$$

$$29. \sin \left( x + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}; \quad (x = 15^{\circ}).$$

$$30. \frac{\pi R^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{6 \cos^6 \left( 45^{\circ} - \frac{\alpha}{4} \right)}; \quad \frac{\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^4 \left( 45^{\circ} - \frac{\alpha}{4} \right)}.$$

### § 23.

$$1. S = \pi a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos \frac{1}{2}(B - C)}{\sin(B + C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B + C)}; \quad V = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}{\sin^2(B + C)}.$$

$$2. 4\pi Q \cot \left( 45^{\circ} - \frac{\beta}{4} \right) = 1736 \text{ dm}^2.$$

$$3. \frac{2}{3} \pi a b^2 \tan^2 \alpha = 300 \text{ dm}^3. \quad 4. 2\pi a^2 \sqrt{3} \cdot \sin(30^\circ + \alpha).$$

$$5. \frac{1}{3} \pi b^3 \sin^2 \alpha; 4\pi b^2 \sin \alpha \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right); \text{ kui } \alpha = 120^\circ.$$

$$V = \frac{\pi b^3}{4}; S = \frac{1}{2} \pi b^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} + 1). \quad 6. 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$2\pi a^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 7. \pi a^2 n^2 \sin \frac{\alpha}{3}.$$

$$8. \frac{\pi}{3} \cdot bc(b+c) \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \quad 9. \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^3 \tan 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$10. \frac{2}{3} \pi R^3 \tan \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$11. V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} C.$$

$$12. V = \frac{\pi b^3 \sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 47\,090 \text{ cm}^3;$$

$$S = \frac{4\pi b^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = 8460 \text{ cm}^2.$$

$$13. \frac{4}{3} \pi (1 + \cos^2 \alpha) \sqrt{\frac{S^3}{\sin 2\alpha}}.$$

$$14. \frac{1}{2} \pi d^3 \sin 2\alpha = 57\,380 \text{ m}^3;$$

$$4\pi d^2 \cdot \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha) = 10\,110 \text{ m}^2.$$

$$15. \frac{10 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \pi a^3. \quad 16. \frac{\pi p^3 \sqrt{2} \tan \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha}{3 \cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 378,4 \text{ dm}^3.$$

$$17. \frac{8\pi r^2}{\sin^2 \alpha} \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \quad 18. \frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2.$$

$$19. 1) S = 4\pi r^2 \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \sec \frac{180^\circ}{n};$$

$$2) S = 4\pi R^2 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2 \frac{180^\circ}{n};$$

$$3) S = \pi a^2 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}; \quad V = \frac{\pi}{6} a^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \sec \frac{180^\circ}{n}.$$

$$20. 1) S = 2\pi r^2 \left(2 + \tan^2 \frac{180^\circ}{n}\right); \quad V = \frac{2}{3} \pi r^3 \left(2 + \tan^2 \frac{180^\circ}{n}\right);$$

$$2) S = 2\pi R^2 \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right); \quad V = \frac{2}{3} \pi R^3 \cos \frac{180^\circ}{n} \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right);$$

$$3) S = \pi a^2 \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5\right); \quad V = \frac{\pi a^3}{6} \cot \frac{180^\circ}{n} \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5\right).$$

$$21. 1) S = 4\pi r^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \sec^2 \frac{180^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cdot \sec^2 \frac{180^\circ}{n};$$

$$2) S = 4\pi R^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

$$3) S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{n}; \quad V = \frac{\pi a^3}{24} \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{n}.$$

$$22. V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2}; \quad S = 8\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4}.$$

$$23. \frac{4}{3} \pi r^3 \sin \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$24. 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4259 \left(\text{kusjuures } \tan \varphi = \frac{1}{2}\right).$$

$$25. \cos \alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 32^\circ 47'. \quad 26. \pi a^2 \cdot \cot \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{\pi a^3}{6}.$$

# SISUKORD.

Esimene osa.

## Trigonomeetria.

	Lk.
§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine . . . . .	3
§ 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel . . . . .	4
§ 3. Uhe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed . . . . .	7
§ 4. Täiendus- ja kõrvunurkade funktsioonid . . . . .	11
§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid . . . . .	12
§ 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine . . . . .	14
§ 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine . . . . .	23
§ 8. Taandamisvalemid . . . . .	26
§ 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid . . . . .	29
§ 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetrilised funktsioonid . . . . .	32
§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Abinurk . . . . .	36
§ 12. Logaritmid tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks . . . . .	40
§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmid abil . . . . .	43
§ 14. Trigonomeetrilised võrrandid . . . . .	46
§ 15. Tsüklomeetrilised funktsioonid . . . . .	50

Teine osa.

## Trigonomeetria rakendamist nõudvaid geomeetrilisi ülesandeid.

§ 15a. Planimeetria . . . . .	53
§ 16. Sirged ja tasapinnad . . . . .	55
§ 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad . . . . .	58
§ 18. Kujundi projektsiooni pindala . . . . .	62
§ 19. Rööptahukad, prismad, püramiidid ja nende pindalad . . . . .	63
§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad . . . . .	68
§ 21. Ruumalade arvutamine . . . . .	72
§ 22. Kera ja selle osad . . . . .	77
§ 23. Pöördkehad . . . . .	80
Trigonomeetriliste funktsioonide tabel . . . . .	84
Vastused . . . . .	85

Toimetaja K. Kallaste. Tehniline toimetaja H. Kohu.  
Korrektorid H. Peel ja Ü. Rattur.

Ladumisele antud 3. II 1954. Trükkimisele antud 8. IV 1954. Trükiarv 6000. Paber 54×84, <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Trükipoognaid 7,75. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 6,35. Arvutuspoognaid 6,27. MB-07147. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Vallikraavi 4.  
Tellimise nr. 511.

На эстонском языке.

Hind rbl. 1.35







Rbl. 1.35

A-20029

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00378397 6