TPI

K. Allik

# INTEGRAAL-ARVUTUS

Tallinn 1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Arvutusmatemaatika kateeder

K. Allik

# INTEGRAALARVUTUS

Tallinn
1969

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра вычислительной математики

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

К. Аллик

На эстонском языке



Vastutav toimetaja H. Roos

Trükkimisele antud 11. XII 68. Paber 60x84/16
Trükipg. 4,5. Tingpg. 4,19. Tiraaž 1500
MB-10499. TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14
Tell.831 Hind 12 kop.

## § 1. Algfunktsioon ja määramata integraal

Diferentsiaalarvutuse põhiülesandeks on funktsiooni $F(x)$ tuletise leidmine, s.o. niisuguse funktsiooni $f(x)$ leidmine, mis rahuldab tingimust $f(x) = F'(x)$.

Püstitame nüüd vastupidise ülesande: antud on funktsioon $f(x)$; leida funktsioon $F(x)$, mille tuletis $F'(x)=f(x)$.

D e f i n i t s i o o n. Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks lõigul $[a,b]$, kui selle lõigu igas punktis $F'(x) = f(x)$.

T e o r e e m. Kui funktsioonid $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid lõigul $[a,b]$, siis võrdub nende vahe konstandiga.

T õ e s t u s. Definitsiooni järgi $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$ igas lõigu $[a,b]$ punktis. Olgu $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Et aga $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, siis $\varphi(x) = c$.

J ä r e l d u s. Funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid erinevad teineteisest konstandi võrra.

Näiteks funktsioon $F(x) = x^2$ on funktsiooni $f(x) = 2x$ algfunktsioon, sest $F'(x) = (x^2)' = 2x$. Samuti on aga ka $F_1(x) = x^2 + 7$ funktsiooni $f(x) = 2x$ algfunktsioon, sest $F_1'(x) = (x^2 + 7)' = 2x + 0 = 2x$.

Nii võib ühel funktsioonil olla lõpmata palju algfunktsioone.

D e f i n i t s i o o n. Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis avaldist $F(x) + c$, kus $c$ on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määramata e. üldintegraaliks ja tähistatakse sümboliga $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Antud funktsioonile $f(x)$ algfunktsiooni $F(x)$ leidmist nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integreerimiseks.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse integreeritavaks funktsiooniks (integrandiks), $f(x)dx$ - integreeritavaks avaldiseks, märki $\int$ - integraali märgiks, c - integreerimiskonstandiks. Seega avaldis, mida tuleb integreerida, on algfunktsiooni $F(x)$ diferentsiaal, sest $d\,F(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Et $y=F(x)$ on mingi tasapinnaline joon, siis määramata integraali $\int f(x)dx = F(x) + c$ geomeetriliseks vasteks on joonteparv, mille iga joon on teise suhtes paralleelselt nihutatud piki y-telge.

## § 2. Määramata integraali omadusi

1. a. Määramata integraali tuletis võrdub integreeritava funktsiooniga:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\,(F(x) + c) = f(x).$$

b. Määramata integraal mingi funktsiooni diferentsiaalist võrdub selle funktsiooniga pluss integreerimiskonstant:

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

2. Määramata integraal lõpliku arvu funktsioonide summast võrdub nende funktsioonide integraalide summaga:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)]\,dx =$$

$$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_k(x)dx.$$

Tõestuseks tarvitseb vaid diferentseerida võrduse mõlemaid pooli, rakendades omadust 1.

3. Konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Võrduse õigsus selgub kohe, kui omaduses 2 lugeda $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x) = f(x)$, seega $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) = kf(x)$, paremal pool võrdusmärki on aga k võrdse integraali summa.

## § 3. Integraalide tabel

Et funktsiooni f(x) integreerimine tähendab sellise funktsiooni F(x) leidmist, mille tuletis võrdub integreeritava funktsiooniga f(x), siis saab tuletiste tabeli abil kergesti koostada integraalide tabeli.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$

3. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c.$

4. $\int \cos x \, dx = \sin x + c.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.$

7. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c.$

8. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c.$

9. $\int e^x dx = e^x + c.$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$

11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c.$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + c.$

14. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \arcsin x + c.$

$$15.\quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

$$16.\quad \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

Valemite 1 - 16 ôigsust saab kontrollida diferentseerimise teel. Valemeid 2 ja 13 kontrollime näiteks nii:

a. Et $|x| = \begin{cases} x, \text{ kui } x > 0 \\ -x, \text{ kui } x < 0, \end{cases}$

siis

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \text{ kui } x > 0 \\ \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, \text{ kui } x < 0. \end{cases}$$

Nii siis

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

b. $$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad \text{kui } \frac{a+x}{a-x} > 0 \\ \frac{1}{2a} \ln\left(- \frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{x-a}, \text{kui } \frac{a+x}{a-x} < 0. \end{cases}$$

Et

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}\right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{a-x-(-1)(a+x)}{(a-x)^2} = \frac{a-x+a+x}{2a(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2-x^2}$$

ja

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{x-a}\right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x-a}{a+x} \cdot \frac{x-a-(a+x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{-2a}{x^2 - a^2} =$$

$$= - \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a^2 - x^2},$$

siis

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$$

## § 4. Otseselt integreeritavad funktsioonid

Kui mõnede hiljem esitatavate integreerimismeetodite puhul on määravaks võtete ja vahendite õige valik, siis otsest integreerimist iseloomustab konstateerimine: kas integreeritav funktsioon vastab vajalikele tingimustele või mitte.

a. Kui integreeritav avaldis on esitatav kujul $[f(x)]^n \cdot f'(x)dx$, integreeritakse teda astmena:

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad \text{sest } \frac{d}{dx} \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} = [f(x)]^n \cdot f'(x).$$

<u>Näide</u>. $\int \sqrt{4+5x^2}\; x\,dx = \frac{1}{10}\int (4+5x^2)^{\frac{1}{2}}\, 10x\,dx = \frac{1}{10}(4+5x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + c = \frac{1}{15}\sqrt{(4+5x^2)^3} + c.$

b. Kui integreeritav funktsioon on esitatav murruna, mille lugeja on nimetaja tuletis, võrdub integraal nimetaja loomuliku logaritmiga:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, \quad \text{sest } \frac{d}{dx}|\ln f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

<u>Näide 1</u>. Arvutame tabeliintegraali nr. 8

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + c.$$

Analoogiliselt arvutatakse ka tabelintegraal 7.

<u>Näide 2</u>.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + c.$$

<u>Näide 3</u>.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

## § 5. Integreerimine asendusvõttega

Juhul kui funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni ei õnnestu leida vahetult, võib integreeritava avaldise teisendada sobiva asendusega kujusse, mille integraal on teada. Selleks asendame integreeritavas avaldises $f(x)dx$ sõltumatu muutuja $x = \varphi(t)$, siis $dx = \varphi'(t)\,dt$ ja

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Saadud valemi õigsust on kerge kontrollida, leides tuletise $x$ järgi nii vasakust kui ka paremast poolest.

Võrduse vasaku poole tuletis on $f(x)$, paremat poolt diferentseerime kui liitfunktsiooni, arvestades, et kui $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, siis $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$. Seega

$$\frac{d}{dx}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \frac{d}{dt}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Vahel on integreerimisel otstarbekam teha asendus mitte kujul $x = \varphi(t)$, vaid kujul $t = \psi(x)$.

Näide 1. Arvutame tabelintegraali nr.15.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1-(\frac{x}{a})^2}$$, asendame $x = at$, siis

$dx = adt$ ja $\frac{1}{a}\int\frac{dx}{1-(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int\frac{adt}{1-t^2} =$

$= \arcsin t + c = \arcsin\frac{x}{a} + c.$

Analoogiliselt arvutatakse ka tabelintegraal 12.

Näide 2.

Integraalis $I = \int x\,e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$ asendame $\frac{x^2}{2} = t$, siis $xdx = dt$

ja

$$I = \int e^t dt = e^t + c = e^{\frac{x^2}{2}} + c.$$

## § 6. Ositi integreerimine

Kui $u(x)$ ja $v(x)$ ehk lühemalt $u$ ja $v$ on diferentseeruvad funktsioonid, siis $du = u'dx$ ja $dv = v'dx$ ning $(uv)' = u'v + uv'$. Järelikult

$$\int (uv)'dx = \int (u'v + uv')dx.$$

Seega

$$uv = \int vu'dx + \int uv'\,dx,$$

millest

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$$

ehk lühemalt $\int udv = uv - \int vdu.$

Saadud valemit nimetatakse ositi integreerimise valemiks.

Valemi rakendamisel on eesmärgiks integreeritav avaldis esitada sellise korrutisena $udv$, mis integraalis $\int vdu$ annab uue, eelmisest lihtsama või vähemalt mitte keerulisema integreeritava avaldise. Oskus integreeritava avaldise kaheks teguriks lahutamiseks kujuneb välja kogemuste najal, kuid üldiselt võib märkida, et kui esineb astmefunktsiooni (või polünoomi) korrutis funktsioonidega $\sin ax$, $\cos ax$ või $e^{ax}$, tuleb teguriks $u$ valida aste (polünoom), kui aga astmefunktsioon (polünoom) on korrutatud funktsioonidega $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ või $\ln x$, lülitatakse aste (polünoom) tegurisse $dv$.

Näide 1.

$I = \int x^2 \sin 2x\,dx$. Valime $u = x^2$, seega $du = 2x\cdot dx$, $dv = \sin 2x\,dx$, $v = -\frac{\cos 2x}{2}$ ja $I = -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \int x \cos 2x\,dx.$

Nüüd integreerime uuesti ositi valides $u = x$, seega $du = dx$ $dv = \cos 2x\,dx$, $v = \frac{\sin 2x}{2}$ ja $I = -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c =$

$= \frac{1}{4}\left[(1 - 2x^2)\cos 2x + 2x \sin 2x\right] + c.$

Näide 2.

$I = \int (x^2 + 5)\ln x\, dx$. Valime $u = \ln x$, seega $du = \frac{dx}{x}$, $dv = (x^2 + 5)dx$, $v = \frac{x^3}{3} + 5x$ ja $I = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \int \frac{x^3 + 15x}{3x}\, dx = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + c.$

Kui on tegemist kahe transtsendentse funktsiooni korrutisega, integreeritakse antud avaldist kaks korda järjest ositi, eesmärgiga saada integraalina $\int v du$ uuesti antud integraal.

Näide 3.

$I = \int e^{2x}\cos 3x\, dx$. Funktsiooniks u võib siin valida ükskõik kumma teguri, näiteks $u = e^{2x}$, siis $du = 2e^{2x}dx$, $dv = \cos 3x\, dx$, $v = \frac{\sin 3x}{3}$ ja $I = \frac{1}{3} e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\, dx$. Nüüd tuleb aga kindlasti uuesti valida $u = e^{2x}$, ja seega $du = 2e^{2x}dx$, $dv = \sin 3x\, dx$, $v = \frac{-\cos 3x}{3}$ ja $I = \frac{1}{3} e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\, dx.$

Seega $I = \frac{1}{9}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)\, e^{2x} - \frac{4}{9} I$, millest

$\frac{13}{9} I = \frac{1}{9}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)\, e^{2x}$ ja $I = \frac{1}{13}(3\sin 3x + 2 \cos 3x)\, e^{2x} + c.$

## Kordamisküsimusi

1. Kuidas kontrollida, kas määramata integraal on õigesti avaldatud või mitte?

2. Kuidas leida funktsiooni tuletise järgi funktsiooni ennast?

3. Kuidas avaldub $\int f(ax + b)\, dx$, kui $\int f(x)dx = F(x)+c$?

4. Kui integraali $\int \sin 2x\,dx$ avaldamiseks teha muutuja asendus $2x = u$, saame $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$. Kui aga võtta $\sin x = v$, saame $\int \sin 2x\,dx = 2\int \sin x \cos x\,dx = 2\int v\,dv = v^2 + c = \sin^2 x + c$.

Näidata, et mõlemad tulemused on õiged.

5. Otsustada, milliste integraalide puhul on sobiv kasutada muutuja asendamist, ositi integreerimist või otsest integreerimist:

$$\int \frac{e^{\arctan x}dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx, \quad \int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2},$$

$$\int \sqrt[7]{\sin^3 x}\;\cos x\,dx, \quad \int \cos x \ln \sin x\,dx, \quad \int x^2 e^x dx.$$

6. Avaldada $\int \arcsin x\,dx + \int \arccos x\,dx$. Millega võrdub $\arcsin x + \arccos x$?

7. Leida jooneteparvest $y = \int 5x^2 dx$ joon, mis läbib punkti $P_1(\sqrt{3},\ 5\sqrt{3})$.

M ä r k u s: nõuda, et punkti $P_1$ koordinaadid rahuldaksid funktsiooni $5x^2$ üldintegraali avaldist.

Vastused on antud alates 61. leheküljest.

## § 7. Murdratsionaalsete funktsioonide integreerimine

Kahe polünoomi $P_m(x) = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m$ ja $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ jagatist $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ nimetatakse murdratsionaalseks funktsiooniks

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Kui $m \geq n$, siis saab murdratsionaalset funktsiooni kirjutada summana $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{F_k(x)}{Q_n(x)}$, kus $M(x)$ ja $F_k(x)$ on polünoomid (või konstandid) ja $F_k(x)$ aste on väiksem kui $n$, $k < n$. Polünoom $M(x)$ on kergesti liikmeti integreeritav, mille tõttu edaspidi vaatleme ainult murru $\frac{F_k(x)}{Q_n(x)}$ integreerimist.

Nagu keskkoolist teada, on iga polünoom lahutatav teguriks $Q_n(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \dots (x^2+p_1x+q_1)^{\mu} \dots (x^2+px+q)^{\vartheta}$, kus a on polünoomi $Q_n(x)$ $\alpha$-kordne nullkoht, b tema $\beta$-kordne nullkoht jne., aga $x^2 + p_1x + q_1$, ..., $x^2 + px + q$ on trinoomid kompleksete nullkohtadega, kordsusega vastavalt $\mu, \dots, \vartheta$, mille juures $\alpha + \beta + \dots + 2\mu + \dots + 2\vartheta = n$.

Iga murdratsionaalne funktsioon $\frac{F_k(x)}{Q_n(x)}$ (kus $k < n$) on esitatav osamurdude summana: $\frac{F_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{C_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{C_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots$

$$\dots + \frac{C_{\alpha}}{x - a} + \frac{D_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{D_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{D_{\beta}}{x - b} + \dots + \frac{K_1x + L_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu}} +$$

$$+ \frac{K_2x + L_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu-1}} + \dots + \frac{K_{\mu}x + L_{\mu}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{(x^2+px+q)^{\vartheta}} +$$

$$+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2+px+q)^{\vartheta-1}} + \dots + \frac{M_{\vartheta}x + N_{\vartheta}}{x^2+px + q}$$, kus $C_1$, $C_2, \dots C_{\alpha}$, $D_1$, $D_2$, ..., $D_{\beta}$, $K_1, K_2, \dots$, $K_{\mu}$, $L_1$, $L_2, \dots$, $L_{\mu}$, $M_1$, $M_2, \dots$, $M_{\vartheta}$, $N_1$, $N_2$, ..., $N_{\vartheta}$ on konstandid. Need leitakse järgmisel viisil:

a) viime ülaltoodud osamurdude summa ühisele nimetajale ja korraldame tema lugeja x astmete järgi,

b) et saadud "uus" lugeja $\Phi_k(x)$ peab võrduma endise lugejaga $F_k(x)$, võime võrdsustada kordajad nende polünoomide ühesuguste x astmete ees,

c) lahendame nii saadud lineaarse võrrandisüsteemi, kus otsitavateks on osamurdude kordajad.

Kui polünoomi $Q_n(x)$ nullkohad on enamuses reaalsed ja erinevad, võib vähemalt osa kordajaid leida kergemini sel teel, et samasuses $\Phi_k(x) = F_k(x)$ anname tundmatule x järjekorras väärtusi $x = a$, $x = b$, ...

## Osamurdude integreerimine

Nagu nägime, võib esineda üldse nelja liiki osamurde

$$\frac{C_\alpha}{x-a}, \quad \frac{C_1}{(x-a)^\alpha}, \quad \frac{Kx+L}{x^2+p_1x+q_1} \quad \text{ja} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\nu},$$

kus $p^2 - 4q < 0$, $p_1^2 - 4q_1 < 0$.

Nende integreerimine toimub järgmiselt:

1) $$\int \frac{C_\alpha}{x-a}\,dx = C_\alpha \int \frac{dx}{x-a} = C_\alpha \ln|x-a|.$$

2) $$\int \frac{C_1}{(x-a)^\alpha}\,dx = C_1 \int (x-a)^{-\alpha}\,dx = C_1 \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

3) $$\int \frac{Kx+L}{x^2+p_1x+q_1}\,dx = \frac{K}{2}\int \frac{2x+p_1}{x^2+p_1x+q_1}\,dx + \left(L-\frac{Kp_1}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+p_1x+q_1} =$$

$$= \frac{K}{2}\ln|x^2+p_1x+q_1| + \left(L-\frac{Kp_1}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p_1}{2}x+\frac{p_1^2}{4}+q_1-\frac{p_1^2}{4}} =$$

$$= \frac{K}{2}\ln|x^2+p_1x+q_1| + \left(L-\frac{Kp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{p_1}{2})^2+(q_1-\frac{p_1^2}{4})} =$$

$$= \frac{K}{2}\ln|x^2+p_1x+q_1| + \frac{2L-Kp}{\sqrt{4q_1-p_1^2}}\arctan\frac{2x+p_1}{\sqrt{4q_1-p_1^2}} + c.$$

4) Teisendame osamurrus $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx$ trinoomi $x^2+px+q$ kujule $X^2 + A^2$ nii, nagu p.3 näidatud, kusjuures

$X = x + \frac{p}{2}$ ja $A = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$. Murru lugeja $Mx + N = MX + N_1$, kus $N_1 = N - \frac{Mp}{2}$ ja seega vaatleme edaspidi osamurdu

$$\int \frac{MX + N_1}{(X^2+A^2)^\nu}\, dX.$$

a) $$\int \frac{MX + N_1}{(X^2+A^2)^\nu}\, dX = \frac{M}{2} \int \frac{2X\, dX}{(X^2+A^2)^\nu} + N_1 \int \frac{1}{(X^2+A^2)^\nu}\, dX =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \frac{(X^2 + A^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + N_1 \int \frac{1}{(X^2+A^2)^\nu}\, dX.$$

b) Osamurru $\frac{1}{(X^2+A^2)^\nu}$ integreerimiseks korrutame ja jagame teda arvuga $A^2$ ning liidame ja lahutame lugejas suuruse $X^2$:

$$\frac{1}{A^2} \int \frac{A^2+X^2-X^2}{(X^2+A^2)^\nu}\, dX = \frac{1}{A^2} \int \frac{dX}{(X^2+A^2)^{\nu-1}} - \frac{1}{A^2} \int \frac{X^2 dX}{(X^2+A^2)} .$$

Esimene liidetav on jälle (b) tüüpi osamurd, kuid nimetaja aste on endisest ühe võrra väiksem. Nimetaja astmenäitaja edasiseks vähendamiseks tuleb korrata võtet (b).

c) Osamurdu $\frac{X^2}{(X^2+A^2)^\nu}$ integreerime ositi, valides $u = \frac{X}{2}$, seega $du = \frac{dX}{2}$, $dv = \frac{2X dX}{(X^2+A^2)^\nu}$, $v = \frac{(X^2+A^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}$ ja

$$\int \frac{X^2 dX}{(X^2+A^2)^\nu} = \frac{X}{2(1-\nu)(X^2+A^2)^{\nu-1}} - \frac{1}{2(1-\nu)} \int \frac{dX}{(X^2+A^2)^{\nu-1}} .$$

Viimane liidetav on jälle (b) tüüpi osamurd, mille nimetaja astmenäitaja on esialgsest ühe võrra väiksem.

Korrates võtteid (b) ja (c) teisendame nimetaja astmenäitaja lõpuks üheni, viimane integraal $\int \frac{dX}{X^2+A^2} = \frac{1}{A} \arctan \frac{X}{A} + C$ (tabelintegraal nr.12).

$$\underline{\text{Näide}}.\ I = \int \frac{2x^5-x^4+6x^3-20x^2-11x-94}{x^4-x^3-2x^2-4x-24}\,dx.$$

Kuna lugeja aste on suurem kui nimetajal, jagame esimese teisega:

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 - x^4 + 6x^3 - 20x^2 - 11x - 94 & \underline{x^4-x^3-2x^2-4x-24} \\
 & 2x + 1 + P_1(x) \\
\underline{2x^5 - 2x^4 - 4x^3 - \ \ 8x^2 - 48x\qquad\quad} & \\
\qquad x^4 + 10x^3 - 12x^2 + 37x - 94 & \\
\qquad \underline{x^4 - \ \ x^3 - \ \ 2x^2 - \ \ 4x - 24} & \\
\qquad\qquad 11x^3 - 10x^2 + 41x - 70 &
\end{array}$$

Seega $\dfrac{2x^5-x^4+6x^3-20x^2-11x-94}{x^4-x^3-2x^2-4x-24} = 2x+1 + \dfrac{11x^3-10x^2+41x-70}{x^4-x^3-2x^2-4x-24}$,

$$I = \int (2x+1)dx + \int \frac{11x^3-10x^2+41x-70}{x^4-x^3-2x^2-4x-24}\,dx\,.$$

Järelikult esimene integraal on $\int (2x+1)dx = x^2 + x$, teise integraali peame aga osamurdudeks lahutama. Nimetaja tegureiks lahutamisel arvestame, et nimetaja nullkohtade korrutis on 24, seega täisarvuliste nullkohtadena vôivad tulla kône alla $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$. Esimesed neist ilmselt ei sobi, järgnevaid aga kontrollime Horneri skeemi abil:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -2 & -4 & -24 \\
2 & & 2 & 2 & 2 & -4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & -2 & -28
\end{array}$$

Seega 2 ei ole nimetaja nullkoht.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -2 & -4 & -24 \\
-2 & & -2 & 6 & -8 & 24 \\
\hline
 & 1 & -3 & 4 & -12 & 0
\end{array}$$

Seega $-2$ on nimetaja nullkoht.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 4 & -12 \\
3 & & 3 & 0 & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 0
\end{array}$$

Seega 3 on nullkoht.

Teguril $x^2 + 4$ ei ole reaalseid nullkohti, mille tõttu

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 4).$$

Lahutame jagamisel saadud murdratsionaalse funktsiooni osamurdudeks ja määrame kordajad:

$$\frac{11x^3-10x^2+41x-70}{x^4-x^3-2x^2-4x-24} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} =$$

$$= \frac{A(x - 3)(x^2 + 4) + B(x + 2)(x^2 + 4)+(Cx + D)(x^2 - x - 6)}{(x + 2)(x - 3)(x^2 + 4)}.$$

Kuna kaks nullkohta on reaalsed, kasutame võrduses $11x^3 - 10x^2 + 41x - 70 = A(x - 3)(x^2 + 4) + B(x + 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - x - 6)$ tundmatute A, B, C, D määramiseks tema samasust iga x väärtuse puhul. Kui $x = 3$, saame

$$65B = 11\cdot27 - 10\cdot9 + 41\cdot3 - 70,$$
$$B = 4.$$

Kui $x = -2$, saame $-40A = -88-40-82-70$,

$$A = 7.$$

Kui $x = 0$, saame $-12A + 8B - 6D = -70$.

$$D = -3.$$

Kui $x = 1$ (võimalik lihtsaim väärtus pärast eelnevaid), siis $-10A + 15B - 6C - 6D = -28$, $C = 0$.

Seega teine integraal on $\int \frac{7}{x + 2}\,dx + \int \frac{4}{x - 3}\,dx + \int \frac{3}{x^2 + 4}\,dx = 7 \ln (x + 2) + 4 \ln (x - 3) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$,

ja $I = x^2 + x + \ln(x + 2)^7(x - 3)^4 + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$

## § 8. Mõnede irratsionaalsete funktsioonide integreerimine

Enamik irratsionaalseid funktsioone ei integreeru elementaarfunktsioonides. Allpool esitatakse mõned liitfunktsioonid, millede väline funktsioon on ratsionaalne, sisemine aga irratsionaalne ja mis integreeruvad elementaarfunktsioonides.

Siin ja edaspidi tähistatakse ratsionaalseid funktsioone tähega R; seega $R(\sqrt{x})$ tähendab funktsiooni, kus sisemise funktsiooniga $\sqrt{x}$ sooritatakse ainult ratsionaalseid tehteid.

1. $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})\, dx.$

Olgu k murdude $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ ühine nimetaja. Kasutades asendust $x = t^k$ ja $dx = kt^{k-1}dt$ selgub, et integreeritav avaldis on argumendi t ratsionaalne funktsioon, sest muutuja x iga murruline aste avaldub muutuja t täisastmena.

Sama kehtib ka integraali $\int R\left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right.$

$\left.\ldots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$ kohta, kui asendada $\frac{ax + b}{cx + d} = t^k$.

<u>Näide</u>. $I = \int \frac{\sqrt{x - 3}}{x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x} \left(\frac{x - 3}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$ Asendame

$\frac{x-3}{x} = t^2$, seega $x = \frac{3}{1-t^2}$ ja $dx = \frac{6t\, dt}{(1-t^2)^2}$ ja

$$I = \int \frac{(1 - t^2)t \cdot 6t}{3(1 - t^2)^2}\, dt = 2\int \frac{t^2}{1 - t^2}\, dt = 2\int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2}\right)dt =$$

$$= 2\left(-t + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1 + t}{1 - t}\right|\right) + C = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{x-3}{x}}}{1 - \sqrt{\frac{x-3}{x}}} - 2\sqrt{\frac{x-3}{x}} + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}} - 2\sqrt{\frac{x-3}{x}} + C.$$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx.$

Teisendame juuritava avaldise kujule $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$.

Tähistades nüüd $c - \frac{b^2}{4a} = m^2$, võib esineda üks kolmest võimalusest:

I. Kui $a > 0$, siis $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 + m^2} =$

$= \frac{m}{\cos t}$ asenduse $x + \frac{b}{2a} = \frac{m}{\sqrt{a}} \tan t$ abil, millest

$dx = \frac{m\,dt}{\sqrt{a}\cos^2 t}$.

II. Kui $a > 0$, siis $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - m^2} =$

$= m \tan t$ asenduse $x + \frac{b}{2a} = \frac{m}{\sqrt{a}\cos t}$ abil, millest

$dx = \frac{m \sin t\,dt}{\sqrt{a}\cos^2 t}$.

III. Kui $a < 0$, siis $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 - a(x+\frac{b}{2a})^2} =$

$= m \cos t$ asenduse $x + \frac{b}{2a} = \frac{m}{\sqrt{a}} \sin t$ abil, millest

$dx = \frac{m}{\sqrt{a}} \cos t\,dt$.

Kõigil kolmel juhtumil teisendub irratsionaalne avaldis ja integreeritav funktsioon tervikuna ratsionaalseks avaldiseks argumentidest $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$.

Näide.

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2-6x-5}}.$$

Teisendame ruuttrinoomi kujule

$-x^2-6x-5 = -(x^2+6x + 9 - 9 + 5) = -\left[(x+3)^2-4\right] = 4 - (x+3)^2$.

Vastavalt juhtumile III asendame $x + 3 = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t\,dt$.

Seega $I = \int \frac{(2\sin t - 3)2\cos t\,dt}{2\cos t} = -2\cos t - 3t + c =$

$= c - 2\sqrt{1 - \sin^2 t} - 3t = c - \sqrt{-x^2-6x-5} - 3\arcsin \frac{x+3}{2}$.

## § 9. Mõnede trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

1. $\int R(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx$.

Kasutades asendust $\tan \frac{x}{2} = t$, millest $x = 2 \arctan t$, teisendub integreeritav avaldis ratsionaalseks, sest

a) $$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

b) $$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

c) $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}$$

ja d) $$\frac{x}{2} = \arctan t, \quad dx = 2\frac{dt}{1+t^2}.$$

__Näide__. $$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2-t} + c = \frac{1}{2-\tan\frac{x}{2}} + c.$$

2. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x, \tan x)\,dx$.

Integreeritav avaldis teisendub ratsionaalseks asendusega $\tan x = t$, sest

a) $$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

b) $$\sin^2 x = \cos^2 x \tan^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

c) $$\sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}$$ ja

d) $x = \arctan t$:   $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Näide. $I = \int \frac{dx}{\tan x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\tan x(\cos^2 x - \sin^2 x)} =$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{t\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}\right)dt.$$

Kordajate määramiseks saame samasuse

$$\frac{1}{t(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}, \text{ millest}$$

$$1 = A(1-t^2)+B(t+t^2)+C(t-t^2).$$

Kui $t = 1$,   $1 = 2B$:   $B = \frac{1}{2}$;

kui $t = -1$,   $1 = -2C$:   $C = -\frac{1}{2}$;

kui $t = 0$,   $1 = A$.

Seega $I = \ln t - \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t) + \ln c =$

$$= \ln \frac{ct}{\sqrt{1-t^2}} = \ln \frac{c \tan x}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \ln \frac{c \sin x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

3. $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$.

a) Kui vähemalt üks täisarvudest $m$ või $n$ on positiivne ja paaritu, näiteks $n = 2k+1$, teisendatakse integreeritav funktsioon summaks:

$\cos^m x \sin^{2k+1} x = \cos^m x(\sin^2 x)^k \sin x = \cos^m x(1-\cos^2 x)^k \sin x$,

mille üksikud liikmed kujutavad endast pärast sulgude avamist otseselt integreeritavaid funktsioone (vt. § 4, a).

Näide. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^4 x}dx =$

$$= \int (\cos^{-4}x \sin x - \cos^{-2}x \sin x)dx = \frac{\cos^{-3}x}{3} + \frac{\cos^{-1}x}{-1} + c =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c.$$

b) Kui mõlemad arvud m ja n on positiivsed paarisarvud (või üks neist on null), asendatakse

$$\cos^m x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^k$$

$$\sin^n x = \sin^{2r} x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^r,$$ misjärel avatakse sulud. Saadud avaldise liikmete edasine teisendamine toimub jällegi käesoleva punkti juhise a või b järgi.

Näide. $\int \cos^6 x \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$

$$= \frac{1}{16} \int (1 + 2\cos 2x - 2\cos^3 2x - \cos^4 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left[ 1 + 2\cos 2x - 2(1 - \sin^2 2x) \cos 2x - \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{3}{4} + \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x - \cos 4x - \frac{\cos^2 4x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16} \left[ \frac{3}{4}x + \frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 8x) \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{5}{8}x + \frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 8x}{64}\right) + c.$$

c) Kui üks täisarvudest m või n on positiivne paarisarv ja teine negatiivne, tuleb avaldist $\int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^n x} dx$ või $\int \frac{\sin^{2p} x}{\cos^m x} dx$ ositi integreerida valides

$$dv = \frac{\cos x}{\sin^n x} dx \quad \text{või} \quad dv = \frac{\sin x}{\cos^m x} dx.$$

Näide. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = I$

Valime $u = \sin x$; $du = \cos x \, dx$, ja $dv = \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$;

$$v = \frac{1}{2 \cos^2 x}.$$

Seega $I = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \int \frac{\cos x \, dx}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c.$

d) Kui mõlemad arvud m ja n on negatiivsed (või üks neist on null), on mõnikord võimalik avaldist $\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$ lihtsustada samuti ositi integreerimise teel.

__Näide.__ $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = I.$

Valime

$$u = \sin^{-3} x, \quad du = -3 \sin^{-4} x \cos x \, dx,$$

$$dv = \cos^{-2} x \, dx, \; v = \tan x.$$

Seega $$I = \frac{\tan x}{\sin^3 x} + 3 \int \frac{\tan x \cos x}{\sin^4 x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x \cos x} + 3 \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Tihti aitab negatiivsete astmenäitajate puhul avaldist lihtsustada lugeja (arvu 1) asendamine avaldisega $\sin^2 x + \cos^2 x$, nagu näiteks:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$

$$= \ln \tan \left|\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \ln \tan \left|\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \ln \tan \left|\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x},$$

kus avaldise $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ integreerimine toimub analoogiliselt näitega punktist c.

Seega $$I = \frac{1}{\sin^2 x \cos x} + \frac{3}{2} \ln \tan \frac{x}{2} - \frac{3 \cos x}{2\sin^2 x} + c.$$

4. $\int \sin kx \cos mx \, dx$, $\int \sin kx \sin mx \, dx$ või $\int \cos kx \cos mx \, dx$.

Korrutised teisendatakse trigonomeetria valemite abil funktsioonide summaks või vaheks:

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}\left[\sin(k-m)x + \sin(k+m)x\right],$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\right],$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-m) + \cos(k+m)x\right].$$

Näide.

$$\int \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \cos(3x + \frac{\pi}{4} x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(2x - \frac{\pi}{6} - 3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(2x - \frac{\pi}{6} + 3x + \frac{\pi}{4})\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[-\sin(x + \frac{5}{12}\pi) + \sin(5x + \frac{\pi}{12})\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x + \frac{5}{12}\pi) - \frac{\cos(5x + \frac{\pi}{12})}{5}\right] + c.$$

## § 10. Ratsionaalselt eksponentfunktsioonidest sõltuva avaldise integreerimine

Kui integreeritav funktsioon kujutab endast ratsionaalset avaldist $e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx}$ suhtes, sobib asendus

$$e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t},$$

ning seega $e^{ax} = t^a,\ e^{bx} = t^b, \ldots, e^{kx} = t^k$.

Näide. $$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dt}{(t^2 + t - 2)t} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+2)t} =$$

$$= \int \frac{A\,dt}{t-1} + \int \frac{B\,dt}{t+2} + \int \frac{C\,dt}{t} = \frac{1}{3}\ln(t-1) + \frac{1}{6}\ln(t+2) - \frac{1}{2}\ln t + c =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(e^x - 1) + \frac{1}{6}\ln(e^x + 2) - \frac{x}{2} + c.$$

Kordajate arvutamiseks (vt. § 7) saame samasuse:

$$\frac{1}{(t-1)(t+2)t} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t};$$

$$A(t+2)t + B(t-1)t + C(t-1)(t+2) = 1;$$

kui $t = 0$, siis $-2C = 1$, $C = -\frac{1}{2}$ ;

kui $t = 1$, siis $3A = 1$, $A = \frac{1}{3}$ ;

kui $t = -2$, siis $6B = 1$, $B = \frac{1}{6}$ .

## § 11. Näiteid integraalidest, mis ei avaldu elementaarfunktsioonides

Nagu juba § 8 oli märgitud, ei integreeru enamik irratsionaalseid funktsioone elementaarfunktsioonides. Sama kehtib suurel määral trigonomeetriliste ja teiste transtsendentsete funktsioonide kohta, eriti aga nende jagatiste kohta astmefunktsiooniga. See ei tähenda muidugi, et neid integraale ei saaks avaldada, seda enam, et nad sageli esinevad mitmesugustes rakendustes. Siin lihtsalt elementaarfunktsioonide klass osutub liiga kitsaks ja meil tuleb kasutusele võtta uusi mitteelementaarseid funktsioone. Nende funktsioonide kohta on koostatud tabelid ja laialdaselt uuritud nende omadusi. Allpool esitame mõned näited sellistest funktsioonidest.

1) $\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \mathrm{si}\, x$ - integraalsiinus,

2) $\int \frac{\cos x}{x}\, dx = \mathrm{ci}\, x$ - integraalkoosinus,

3) $\int \frac{e^x}{x}\, dx = \mathrm{Ei}\, x$ - integraal-eksponentfunktsioon,

4) $\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\, x$ - integraallogaritm [ kus $\mathrm{li}\, x = \mathrm{Ei}(\ln x)$],

5) $\int e^{-x^2} dx = \phi(x)$ - Gaussi funktsioon,

$$\left.\begin{aligned} &6)\ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) \\ &7)\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi = E(k,\varphi) \end{aligned}\right\} \text{elliptilised integraalid.}$$

Sageli on võimalik kindlaks teha, kas antud funktsioon avaldub elementaarfunktsioonides või mitte, rakendades Tšebõševi teoreemi:

T e o r e e m. Diferentsiaalbinoom $x^m(a+bx^n)^p$ on integreeruv elementaarfunktsioonides ratsionaalsete m, n ja p puhul, juhul kui

1) p on täisarv,

2) $\frac{m+1}{n}$ on täisarv (asendus $a + bx^n = t^r$, kus r on murru p nimetaja) ja

3) $\frac{m+1}{n} + p$ on täisarv (asendus $a + b\,x^n = t^r\,x^n$).

Näide.

$$\int \sqrt{\sin x}\;dx = I.$$

Kasutame asendusi § 9 p.1, kus $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ja $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

seega $I = \int \sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\sqrt{2}\int t^{\frac{1}{2}}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}dt.$

Integreeritav avaldis on diferentsiaalbinoom, kus

$m = \frac{1}{2}$, $n = 2$ ja $p = -\frac{3}{2}$. Seega Tšebõševi teoreemi järgi

$\frac{m+1}{n} = \frac{3}{4}$ ja $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{4}$ ja $\int\sqrt{\sin x}\,dx$ ei avaldu elementaarfunktsioonides.

K o r d a m i s k ü s i m u s i

1. Kas on mõistlik integraalis $\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx$ lahutada integreeritav funktsioon osamurdudeks? Milline asendus võimaldab seda funktsiooni kohe liikmeti integreerida?

2. Kuidas integraalis $\int \frac{dx}{x^4+4}$ lahutada integreeritav funktsioon osamurdudeks?

3. Mida tuleb kôigepealt teha integraali $\int \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x} dx$ avaldamiseks?

4. Milline on üks polünoomi nullkohtadest, kui tema kordajate summa on null?

5. Kas on vôimalik avaldada integraali $\int \sqrt{20x-2x^2-51}\, dx$? Miks?

6. Kas integraal $\int \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 3}}\, e^{2x} dx$ on avaldatav elementaarfunktsioonides?

7. Millise vôttega on avaldatav integraal $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos 2x}$?

8. Milliste m väärtuste puhul avaldub integraal $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^3}}$ elementaarfunktsioonides?

9. Tuletada valem integraali $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n > 2)$ avaldamiseks integraali $I_{n-2}$ kaudu.

# MÄÄRATUD INTEGRAAL

## § 1. Määratud integraali môistega seotud ülesandeid

### a. Kôvertrapetsi pindala

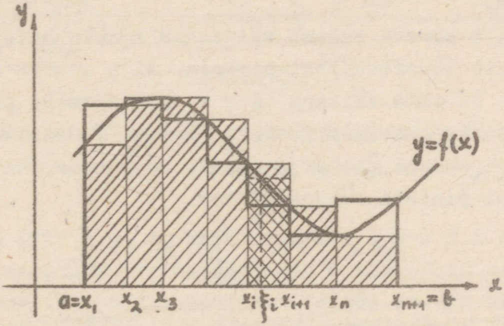
Elementaarmatemaatika ei suuda anda meetodeid tasapinnaliste kujundite pindalade arvutamiseks, kui kujund kas vôi osaliselt on piiratud mingi kôveraga. Tôsi küll, elementaarmatemaatikas käsitletakse ringi ja tema osade pindalade arvutamist, kuid seda tehakse kôrgema matemaatika meetodite abil, piirväärtuse môiste kasutamisega.

Vaatleme kôvertrapetsi pindala arvutamise vôimalusi.

D e f i n i t s i o o n. Kôvertrapetsiks nimetatakse tasapinnalist kujundit, mis on piiratud abstsisstelje, kahe sirge $x = a$ ja $x = b$ ning kôveraga $y = f(x)$*.

* Funktsioon $f(x)$ on ühene ja pidev.

Pindala arvutamiseks jaotame lõigu $[a,b]$ n osavahemikuks $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2$, ..., $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, ..., $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ vabalt valitud punktide $a = x_1, x_2, \ldots, x_n$, $b = x_{n+1}$ abil (joon. 1). Nüüd on osavahemikes võimalik mitmel viisil moodustada ristkülikuid, millede pindalade summa ligikaudu väljendab kõvertrapetsi pindala. Näiteks võib iga osavahemikku moodustada ristküliku alusega $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$ ja kõrgusega $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_i)$, ..., $f(x_n)$.




Joon. 1.

Nende ristkülikute pindalade summa (joon. 1 viirutatud ala) $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ võrdub ligikaudu kõvertrapetsi pindalaga, sest olenevalt kõvera kujust, võib teatav hulk ristkülikuid olla pindalalt väiksemad vastavatest osa-kõvertrapetseist (vahemiku algus- ja lõpposa joonisel 1), teine osa aga suuremad (sama vahemiku keskosa).

Kuid ristkülikute kõrguseks võib valida ka iga osavahemiku lõppordinaadi $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{i+1})$, ..., $f(x_{n+1})$; sel juhul on nende pindalade summa

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

(joonisel 1 jämeda joonega piiratud ala), mis samuti ligikaudu vastab kõvertrapetsi pindalale, kuigi $\underline{S}_n \neq \overline{S}_n$.

Lõpuks võib igas osavahemikus vabalt valida punkti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$ ja moodustada ristkülikud kõrgusega $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_i)$, ..., $f(\xi_n)$ (joon. 1 on näidatud kahekordselt viirutatuna ainult üks selline ristkülik alusega $\Delta x_i$). Ka nende ristkülikute pindalade summa $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ vastab teatava täpsusega kõvertrapetsi pindalale.

Olenevalt kõvera kujust väljendab igaüks neist summadest seda täpsemalt kõvertrapetsi pindala, mida suurem on osavahemike arv n ja mida väiksem i g a osavahemiku pikkus $\Delta x_i$. On ilmne, et kui osavahemike arvu järjest suurendada, liginevad kõik need summad ühele ja samale suurusele, milleks on kõvertrapetsi pindala väljendav arv.

D e f i n i t s i o o n. Kõveraga $y = f(x)$ piiratud kõvertrapetsi pindalaks S nimetatakse piirväärtust, millele ligineb selle kõvera põhjal konstrueeritud n ristkülikust koosneva kujundi pindala, kui ristkülikute (osavahemike) arvu lõpmatult suurendada*:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \text{kus } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}.$$

Kuigi me oleme eespool põhjalikult tutvunud funktsioonide piirväärtuste arvutamisega, ei tule me toime uut tüüpi muutuva suuruse piirväärtusega

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Seda laadi piirväärtused ei teki aga ainult pindalade probleemi puhul.

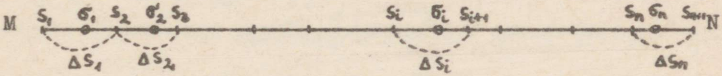
---

* Tingimusele $n \to \infty$ kaasneb, et suurim osavahemikest $\Delta x_s \to 0$, s.t. osavahemike arvu suurenemine toimub koos i g a osavahemiku pikkuse lähenemisega nullile. Seega on välistatud võimalus, et n lõpmatul kasvamisel ühe osavahemiku pikkus jääks konstantseks.

b. Töö

Liikugu mingi keha sirgjooneliselt punktist M punkti N muutuva jõu $\vec{Q}$ toimel, mille projektsioon tee s suunale olgu $P = f(s)$. Tehtud töö arvutamine elementaarmatemaatika vahenditega ei ole võimalik, sest jõukomponent P muutub pidevalt teepikkuse s muutumisel.

Töö ligikaudseks arvutamiseks jaotame teepikkuse s osadeks $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_i, \ldots, \Delta s_n$, ja määrame jõu $P_i$ iga osavahemiku mingis punktis $\sigma_i$, kusjuures $s_i \leqslant \sigma_i \leqslant s_{i+1}$ (joon. 2).




Joon. 2.

Lugedes jõu $P_i = f(\sigma_i)$ iga osavahemiku ulatuses konstantseks, võrdub kogu liikumisel tehtud töö ligikaudu suurusega

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)\Delta s_i,$$

kusjuures $A_n$ vastab seda täpsemalt tegelikult tehtud tööle A, mida suurem on osavahemike $\Delta s_i$ arv n, s.o. mida väiksem on jõu $P_i$ muutumine osavahemiku ulatuses. Jällegi võib loogiliselt järeldada, et tehtud töö täpseks väärtuseks tuleb lugeda

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)\Delta s_i.$$

Viimane avaldis kui matemaatiline probleem ei erine millegi poolest eelmises punktis saadud S avaldisest. Kuna samasugused piirväärtused tekivad veel paljude oluliste geomeetriliste ja füüsikaliste probleemide uurimisel, tuleb piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

defineerida uue matemaatilise mõistena.

## § 2. Määratud integraali definitsioon ja omadusi

Olgu funktsioon $f(x)$ pidev lõigul $a \leqslant x \leqslant b$. Võtame antud lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ suvalised punktid $x_i$ nii, et $a = x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$. Sellega jaotub antud lõik osavahemikeks pikkusega

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2$, $\ldots$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\ldots$
$\ldots$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Võtame igas osavahemikus suvalise punkti $\xi_i$ nii, et $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, arvutame funktsiooni väärtuse $f(\xi_i)$ ja moodustame korrutise $f(\xi_i)\Delta x_i$. Kõigi sellise $n$ korrutise summat $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integraalsummaks lõigul $[a,b]$.

D e f i n i t s i o o n. Kui eksisteerib integraalsumma $I_n$ piirväärtus suurima osavahemiku pikkuse $\Delta x_s$ lähenemisel nullile (kusjuures $n \to \infty$)

$$I = \lim_{\Delta x_s \to 0} I_n = \lim_{\Delta x_s \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks lõigul $[a,b]$.

Määratud integraali tähiseks on

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_s \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kus $f(x)$ nimetatakse integreeritavaks funktsiooniks (integrandiks), $x$ integreerimismuutujaks, $f(x)dx$ integreeritavaks avaldiseks, $a$ alumiseks ja $b$ ülemiseks rajaks, ning lõiku $[a, b]$ integreerimisvahemikuks.

Kui $f(x)$ on pidev lõigul $a \leqslant x \leqslant b$, siis on olemas määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$.

Seega on määratud integraal mingi kindel arv, mis e i s õ l t u i n t e g r e e r i m i s m u u t u j a t ä h i s e s t, vaid ainult rajadest ning integreeritavast funktsioonist.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds = \ldots = \int_a^b f(t)dt.$$

Määratud integraali omadusi:

1. Määratud integraal lõpliku arvu funktsioonide summast võrdub nende funktsioonide määratud integraalide summaga:

$$\int_a^b [u(x) + v(x) + \ldots + z(x)]\, dx = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_a^b z(x)dx \tag{1}$$

T õ e s t u s. Määratud integraali definitsiooni järgi

$$\int_a^b [u(x) + v(x) + \ldots + z(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [u(\xi_i) + v(\xi_i) + \ldots$$
$$\ldots + z(\xi_i)]\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta x_i + \ldots$$
$$\ldots + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \ldots + \int_a^b z(x)dx.$$

2. Integreeritava funktsiooni konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette.

T õ e s t u s e k s loeme võrduses (1), et $u = v = \ldots = z$ (võrdsete funktsioonide arv on k), seega

$$\int_a^b kudx = k \int_a^b udx.$$

Olgu märgitud, et see kehtib ka juhul, kui k ei ole naturaalarv.

3. Kui määratud integraalis vahetada omavahel ülemine ja alumine raja, muutub ainult integraali ees olev märk:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Integraalis $\int_b^a f(x)dx$ on integreerimispiirkonna alguspunktiks punkt b ja lôpp-punktiks punkt a, integraalis $\int_a^b f(x)dx$ aga alguspunktiks a ja lôpp-punktiks b.

Seega, kui ühes integraalis on osavahemiku pikkus $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$, siis teises integraalis tuleb sama vahemiku pikkuseks $x_i - x_{i+1} < 0$, $\xi_i$ ja $f(\xi_i)$ on aga mõlemas integraalis samade väärtustega. Seega on kummagi integraali integraalsummad teineteise vastandarvud, järelikult on ka nende piirväärtused ehk määratud integraalid teineteise vastandarvud.

J ä r e l d u s. Vôrdsete rajadega määratud integraal vôrdub nulliga.

Teoreemi järgi $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$, s.o.

$2\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. Kui integreerimisvahemik jaotada kaheks osaks $[a, c]$ ja $[c, b]$, siis kehtib vôrdus

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

T ô e s t u s e k s juhul $a < c < b$ tarvitseb vaid integraalsumma välja kirjutada kujul

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{j=k+i}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j,$$

kus punktid $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ kuuluvad lôiku $[a, c]$, aga punktid $x_{k+1}, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ lôiku $[c, b]$, ja üle minna piirväärtusele tingimusel $k \to \infty$ ja $n \to \infty$ (samuti $\Delta x_i \to 0$ ja $\Delta x_j \to 0$).

Peatume ligemalt ainult juhul, kui c ei kuulu lõiku [a, b], ja näitame, et 4. omadus kehtib ka sel juhul.

Olgu $a < b < c$, seega

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \quad \text{siis}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Kui $a \leqslant x \leqslant b$ ja integreeritav funktsioon ei muuda integreerimisvahemikus märki, on määratud integraalil $\int_a^b f(x)dx$ sama märk mis integreeritaval funktsioonilgi.

T õ e s t u s. Rajade $a < b$ puhul on osavahemikud $\Delta x_i$ alati positiivsed. Seega on korrutis $f(\xi_i)\Delta x_i$ sama märgiga kui $f(\xi_i)$, sama kehtib ka nende korrutiste summa $I_n$ ja selle piirväärtuse I (s.o. määratud integraali) kohta.

## § 3. Määratud integraali hindamine

T e o r e e m: Kui m ja M on vastavalt funktsiooni f(x) vähim ja suurim väärtus lõigul $a \leqslant x \leqslant b$, siis

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

T õ e s t u s. Et vastavalt teoreemi tingimustele:

$M - f(x) \geqslant 0$ ja $m - f(x) \leqslant 0$,

siis viienda omaduse põhjal

$$\int_a^b [M - f(x)]\, dx \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad \int_a^b [m - f(x)]\, dx \leqslant 0.$$

Esimese omaduse põhjal aga

$$\int_a^b M\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad \int_a^b m\,dx - \int_a^b f(x)dx \leqslant 0, \text{ millest}$$

on näha, et $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$ ehk

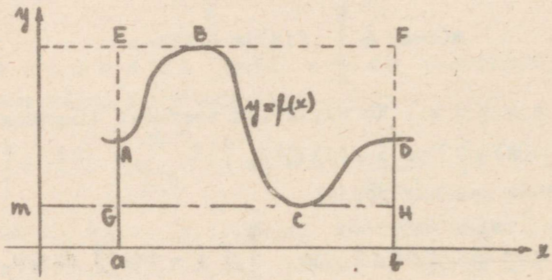
$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \quad M \leqslant \int_a^t dx.$$

Et

$$\int_a^b dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a, \quad \text{siis}$$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Eriti lihtne on toodud teoreemi geomeetriline tõlgendus: kõvertrapetsi aABCDb pindala $\int_a^b f(x)dx$ ei ole suurem ristküliku aEFb pindalast M(b-a) ega väiksem ristküliku aGHb pindalast m(b-a) (joon.3).




Joon. 3.

## § 4. Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Kui f(x) on pidev lõigul [a,b], siis leidub sellel lõigul niisugune arv $\xi$, et $a \leq \xi \leq b$ ja

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

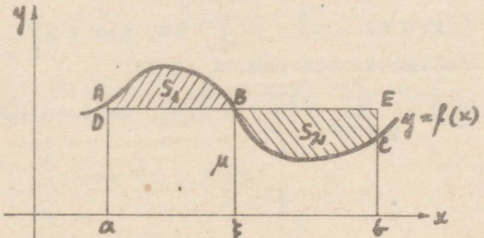
T õ e s t u s. Eelmise teoreemi põhjal

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M, \qquad \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu .$$

Et $m \leq \mu \leq M$ ja f(x) on pidev lõigul [a,b], siis peab f(x) läbima kõik väärtused m ja M vahel, sealjuures ka väärtuse $\mu$. Leidku see aset punktis $x = \xi$, s.o. $\mu = f(\xi)$, mille järgi

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Ka keskväärtusteoreemil on ilmekas geomeetriline interpretatsioon (joon.4). Punkt $\xi$ tuleb nii valida, et temale vastav ordinaat oleks ristküliku aDEb selliseks kõrguseks, mille puhul ristküliku pindala võrdub kõvertrapetsi aABCb pindalaga, s.o. mille puhul "äralõigatud" osa pindala $S_1$ võrdub "juurdetuleva" osa pindalaga $S_2$.




Joon. 4.

## § 5. Määratud integraali tuletis ülemise raja järgi

Määratud integraali definitsiooni ja tema geomeetrilise tähenduse järgi on selge, et integraali väärtus sõltub rajade valikust. Seega integraal

$$\int_a^x f(t)dt,$$

kus ülemiseks rajaks on muutuv suurus x, on selle muutuja funktsioon

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Selguse mõttes tähistame siin integreerimismuutuja t-ga, et seda mitte ära segada ülemise raja tähisega x.

T e o r e e m. Määratud integraali tuletis tema ülemise raja järgi võrdub integreeritava funktsiooniga.

T õ e s t u s. Andes sõltumatule muutujale x juurdekasvu $\Delta x$, on funktsiooni $I(x)$ juurdekasv

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Rakendades keskväärtusteoreemi saame

$$I = f(\xi)\,[(x+\Delta x) - x] = f(\xi)\Delta x, \text{ kus } x \leq \xi \leq x+\Delta x.$$

Tuletise definitsiooni põhjal saame

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x), \text{ sest kui } \Delta x \to 0,$$

siis $\xi \to x$.

## § 6. Newton-Leibnizi valem

T e o r e e m. Kui integreeritav funktsioon on pidev integreerimisvahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, võrdub määratud integraal integreeritava funktsiooni mistahes algfunktsiooni väärtuste vahega ülemise ja alumise raja kohal, s.o.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{kus } F'(x) = f(x).$$

T õ e s t u s. Vastavalt eeldusele on $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon. Kuid eelmise teoreemi põhjal on ka $\int_a^x f(t)dt$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon ja erineb seega funktsioonist $F(x)$ suvalise konstandi C võrra.

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + c.$$

Kui $x = a$, siis $\int_a^a f(x)\, dx = F(a) + c = 0,$

seega $F(a) + C = 0$, millest

$$C = -F(a), \quad \text{ja} \quad \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Olgu nüüd $x = b$, siis $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

M ä r k u s 1.

Newton-Leibnizi valemit märgitakse lühendatud kujul ka alljärgnevalt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b .$$

M ä r k u s 2.

Kui $F'(x) = f(x)$, siis $F(x) + c = \int f(x)dx$.

$$\text{Et} (F(x) + c) \Big|_a^b = (F(b)+c) - (F(a)+c) =$$

$$= F(b)+c-F(a) - c = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\text{siis} \int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b .$$

## § 7. Määratud integraali arvutamine ositi ja asendusvõttega

I. Ositi integreerimise valemi $\int udv = uv - \int vdu$ põhjal on võrduse parem pool integreeritava funktsiooni üheks algfunktsiooniks ja seega kehtib võrdus:

$$\int_a^b u\,dv = (uv - v\,du) \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Järelikult ei pruugi ositi integreerimist viia üldkujul lõpuni ja siis asendada x rajade a ja b-ga, vaid avaldise paremal poolel võib vähendatavas kohe teha sama asenduse.

<u>Näide.</u> $\int_e^{e^2} x \ln x\,dx$ arvutamiseks valime

$u = \ln x$ ja $dv = x\,dx$, järelikult $du = \frac{dx}{x}$ ja $v = \frac{x^2}{2}$ .

$$\text{Seega} \int_e^{e^2} x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^4}{2} \ln e^2 - \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_e^{e^2} = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} =$$

$$= \frac{e^2}{4} (3e^2 - 1).$$

II. T e o r e e m. Kui funktsioonid $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ ja $f[\varphi(t)]$ on pidevad lõigul $[t_1, t_2]$ ja $a = \varphi(t_1)$ ning $b = \varphi(t_2)$, kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

T õ e s t u s. Olgu $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \text{siis}$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + c.$$

Seega $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ja samuti $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t_2)] - F[\varphi(t_1)] =$

$$= F(b) - F(a).$$

Niisiis määratud integraali puhul pärast muutuja asendamist ja integraali avaldamist ei pruugi saadud avaldist uuesti teisendada esialgse muutuja funktsiooniks, vaid sellesse avaldisse võib vahetult asetada rajad $t_2$ ja $t_1$, mis kujutavad endast võrrandite $a = \varphi(t)$ ja $b = \varphi(t)$ lahendeid.

Tihti on otstarbekam kasutada asendust $t = \psi(x)$, nagu oli märgitud ka määramata integraali puhul. Uued rajad saadakse vahetult asendustega:

$$t_1 = \psi(a) \quad \text{ja} \quad t_2 = \psi(b).$$

Asendus $t = \psi(x)$ on lubatav, kui funktsioon $\psi(x)$ on vahemikus $(a,b)$ monotoonne ja tema tuletis ei võrdu vahemiku üheski punktis nulliga.

Näide. Integraali $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,dx$ arvutamine asendusega $t=x^2$ annab vale tulemuse:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_{1}^{4} t \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{1}^{4} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3},$$

sest punktis x = 0 on funktsiooni t tuletis null, samuti ei ole $t = x^2$ vahemikus (-1,2) monotoonne. Õige on lõigu [-1,2] jaotamine kaheks osaks [-1,0] ja [0,2], kus need nõuded on täidetud:

$$\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \int_{-1}^{0} x^2\, dx + \int_{0}^{2} x^2 dx = \int_{1}^{0} t\left(-\frac{dt}{2\sqrt{t}}\right) + \int_{0}^{4} t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sqrt{t}\, dt + \int_{0}^{4} \sqrt{t}\, dt = 3.$$

Muidugi on näide mõeldud illustratsioonina, sest muutuja vahetuseks ei ole siin mingit tarvidust, kuna

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = 3.$$

## § 8. Päratud integraalid

Määratud integraali puhul eeldasime, et integreerimisvahemik [a, b] on lõplik ja funktsioon f(x) on pidev lõigul [a, b]. Teatavatel tingimustel võib nendest nõuetest vabaneda, defineerides päratu integraali mõiste, mis on määratud integraali üldistuseks. Päratuid integraale on kaht liiki: integraalid katkevast funktsioonist ja lõpmatute rajadega integraalid.

### I. Integraalid katkevast funktsioonist

D e f i n i t s i o o n. Kui integraalis $\int_a^b f(x)\,dx$ funktsioon f(x) ei ole tõkestatud punkti b ümbruses, kuid eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{k \to b-} \int\limits_a^k f(x)\,dx$, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni f(x) päratuks integraaliks lõigul [a,b], s.o.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to b-} \int\limits_a^k f(x)\,dx.$$

Päratuks integraaliks nimetatakse samuti avaldist $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kui funktsioon f(x) on tõkestamata punkti a ümbruses, kuid eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{k \to a+} \int\limits_k^b f(x)\,dx$, s.o.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a+} \int\limits_k^b f(x)\,dx.$$

Kui märgitud piirväärtused eksisteerivad, siis öeldakse, et integraal $\int\limits_a^b f(x)dx$ koondub, vastasel korral nimetatakse integraali hajuvaks.

Juhul kui funktsioon on tõkestamata mõlema raja ümbruses või kui katkevuskoht on lõigu [a,b] sees, saab rakendada eeltoodud definitsioone, jagades integreerimisvahemiku osavahemikkudeks.

__Näide__. Integraali $\int\limits_{-1}^{8} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ei saa arvutada määratud integraalina, sest punktis x = 0 funktsioon $\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}$ on tõkestamata. Avaldame integraali kahe integraali summana ja rakendame eeltoodud definitsioone:

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \int\limits_{0}^{8} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{k\to 0-} \int_{-1}^{k} (3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}})dx + \lim_{k\to 0+} \int_{k}^{8} (3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}})dx =$$

$$= \lim_{k\to 0} (\frac{9}{7} k^{\frac{7}{3}} + 6k^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{7} + 6) + \lim_{k\to 0} (\frac{9}{7} \cdot 128 + 6 \cdot 2 - \frac{9}{7} k^{\frac{7}{3}} - 6k^{\frac{1}{3}}) =$$

$$= \frac{51}{7} + \frac{1152}{7} + 12 = 183\frac{6}{7} .$$

## II. Lôpmatute rajadega integraalid

D e f i n i t s i o o n. Kui funktsioon f(x) on pidev vahemikus $[a, \infty)$ ja eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{k\to +\infty} \int_a^k f(x)dx$,

siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni f(x) päratuks integraaliks vahemikus $[a, \infty)$ ning tähistatakse sümboliga

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to +\infty} \int_a^k f(x)\,dx.$$

Päratuks integraaliks nimetatakse ka integraali

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{k\to -\infty} \int_k^b f(x)\,dx$, kui see piirväärtus eksisteerib, samuti ka avaldist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

kui eksisteerivad môlemad piirväärtused. Kôigil neil juhtudel öeldakse, et vastav lôpmatu rajaga integraal koondub. Kui nimetatud piirväärtused ei eksisteeri, öeldakse, et vastav integraal hajub.

Näide 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{n\to -\infty \\ k\to +\infty}} \int_{n}^{k} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty} \arctan k - \lim_{n\to -\infty} \arctan n =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Näide 2. Integraalis $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$ katkeb funktsioon $\frac{1}{x}$ alumise raja puhul, peale selle on ülemine raja lôpmatu. Seega saame I ja II liiki päratute integraalide definitsioonide järgi:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{n\to 0+ \\ k\to +\infty}} \int_{n}^{k} \frac{dx}{x} = \lim_{k\to +\infty} \ln k - \lim_{n\to 0+} \ln n = \infty ,$$

integraal hajub.

## § 9. Määratud integraali ligikaudne arvutamine

Nagu eelmise peatüki § 11 märgitud, ei ole paljude transtsendentsete ja irratsionaalsete funktsioonide määramata integraalid avaldatavad elementaarfunktsioonides. Määratud integraali arvutamisel vôib sel juhul kasutada mitmesuguseid ligikaudseid meetodeid, millede kôikide ühiseks printsiibiks on integreeritava funktsiooni asendamine mingi teise lihtsama, kuid antud vahemikus sellele funktsioonile lähedase funktsiooniga. Nii oma ideelt lihtsaimate kui ka ajalooliselt vanimatena esitame alljärgnevalt kaks sellist meetodit.

### 1. Trapetsvalem

Kui $\int f(x)dx$ ei ole avaldatav elementaarfunktsioonides vôi kui vastav algfunktsioon on arvutamiseks liiga keeruline, asendatakse funktsiooni $f(x)$ graafik murdjoonega, mis ühendab lôigul $[a,b]$ ordinaatide $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$ lôpppunkte (joon. 5). Kuna integreerimisvahemik $[a, b]$ on jaotatud $n$ vôrdseks osaks $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, on igas osavahemikus tekkinud trapetsite pindaladeks:

$$\Delta S_1 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Delta x,$$

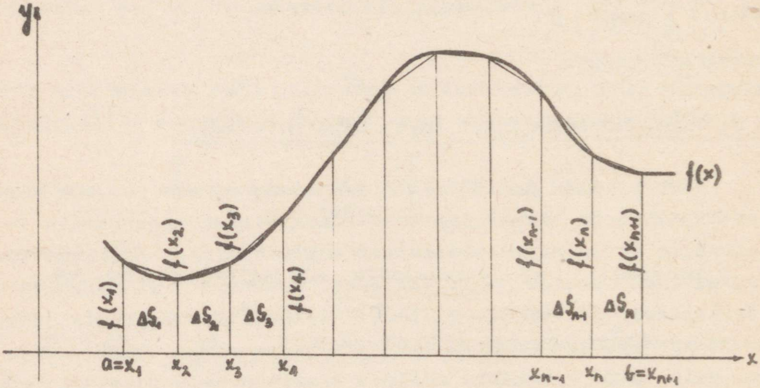
$$\Delta S_2 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \Delta x,$$

$$\Delta S_3 = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \Delta x,$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta S_{n-1} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \Delta x,$$

$$\Delta S_n = \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2} \Delta x.$$




Joon. 5.

Nende trapetsite pindalade summa

$$S_1 = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3) +\ldots+ 2f(x_n)+f(x_{n+1})\right]$$

on ligikaudu vôrdne kôvertrapetsi $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ pindalaga.

Seega on määratud integraali ligikaudseks väärtuseks

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\ldots+ 2f(x_n) + f(x_{n+1})\right].$$

## 2. Paraboolse kõvertrapetsi pindala

Arvutame parabooliga $y = ax^2 + bx + c$ piiratud kõvertrapetsi pindala S lõigul $[0,2h]$ (joon.6):

$$S = \int_0^{2h} (ax^2+bx+c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_0^{2h} =$$

$$= \frac{8}{3} ah^3 + 2bh^2 + 2ch =$$

$$= \frac{h}{3}(8ah^2 + 6bh + 6c).$$

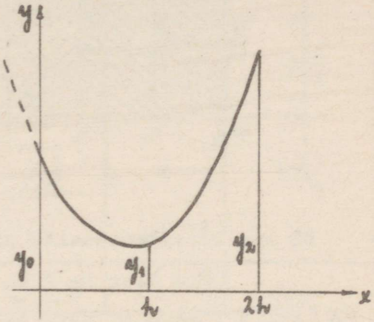
Moodustame summa $S_1 = y_0 + 4y_1 + y_2 =$

$$= c + 4(ah^2+bh+c) + 4ah^2 + 2bh + c =$$

$$= 8ah^2 + 6bh + 6c.$$

Seega $S = \frac{h}{3} S_1 =$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$



Joon. 6.

## 3. Simpsoni valem

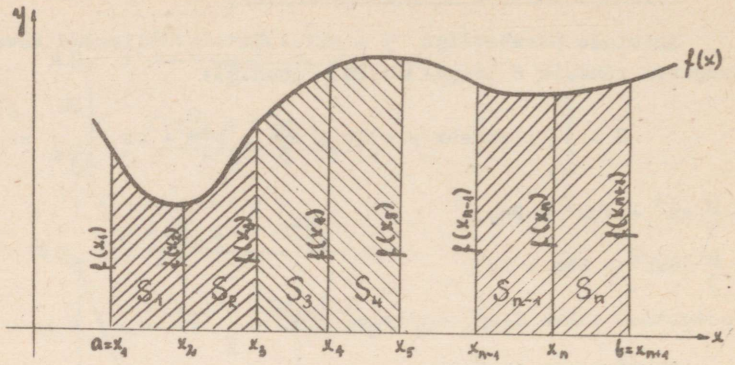
Jaotame integraali $\int_a^b f(x)dx$ integreerimisvahemiku $[a,b]$ n osaks (n on paarisarv) ja kujutleme, et paarikaupa võetud osavahemikele vastavaid kõvertrapetseid ei piira mitte joon f(x), vaid parabool, millega piiratud pinnatüki pindala arvutamiseks tuletati äsja valem. Seega joon. 7 kujutatud kõvertrapetsite pindalad avalduvad ligikaudu alljärgnevalt:

$$S_1 + S_2 \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)],$$

$$S_3 + S_4 \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$S_{n-1} + S_n \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})].$$




Joon. 7.

Et aga kôvertrapetsite pindalade summa vôrdub

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1} + S_n =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})\right],$$

siis määratud integraal vôrdub ligikaudu arvuga S:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+\ldots+2f(x_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + 4f(x_n)+f(x_{n+1})\right].$$

Seda valemit nimetataksegi Simpsoni valemiks.

<u>Näide</u>. Arvutada trapetsvalemi ja Simpsoni valemi abil:

$$I = \int_{-1}^{3} (x^4 - 8x^3 + 18x^2)dx.$$

Jagame integreerimisvahemiku $-1 \leq x \leq 3$ kaheksaks vôrdseks osaks (n=8) ning koostame tabeli, kus x tähendab abstsisstelje jaotuspunkte, y nendele jaotuspunktidele vastavaid ordinaate, $k_1$ trapetsvalemi ja $k_2$ Simpsoni valemi kordajaid:

| x | y | $k_1$ | $k_1y$ | $k_2$ | $k_2y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 27 | 1 | 27 | 1 | 27 |
| $-\frac{1}{2}$ | $5\frac{9}{16}$ | 2 | $11\frac{1}{8}$ | 4 | $22\frac{1}{4}$ |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $3\frac{9}{16}$ | 2 | $7\frac{1}{8}$ | 4 | $14\frac{1}{4}$ |
| 1 | 11 | 2 | 22 | 2 | 22 |
| $\frac{3}{2}$ | $18\frac{9}{16}$ | 2 | $37\frac{1}{8}$ | 4 | $74\frac{1}{4}$ |
| 2 | 24 | 2 | 48 | 2 | 48 |
| $\frac{5}{2}$ | $26\frac{9}{16}$ | 2 | $53\frac{1}{8}$ | 4 | $106\frac{1}{4}$ |
| 3 | 27 | 1 | 27 | 1 | 27 |
| | | Summa | 232,5 | | 340 |

Et

$$\frac{b-a}{2n} = \frac{3-(-1)}{2\cdot 8} = \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad \frac{b-a}{3n} = \frac{4}{3\cdot 8} = \frac{1}{6},$$

siis võrdub otsitava integraali ligikaudne väärtus trapetsvalemi järgi

$$I \approx 232{,}5 \cdot \frac{1}{4} \approx 58{,}12$$

ja Simpsoni valemi järgi

$$I \approx 340 \cdot \frac{1}{6} \approx 56{,}67.$$

Integraali täpne väärtus on

$$I = \left.\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3\right|_{-1}^{3} = \frac{243}{5} - 162 + 162 + \frac{1}{5} + 2 + 6 = 56{,}8.$$

Nagu näeme, annab Simpsoni valem tunduvalt täpsema tulemuse kui trapetsvalem.

Peale siintoodute on veel suur hulk teisi täpsemaid meetodeid määratud integraali ligikaudseks arvutamiseks.

## Kordamisküsimusi

1. Kuidas saab integreerida funktsiooni, millel on integreerimisvahemikus hüppekoht?

2. Milline on keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus?

3. Milliseid tingimusi peab täitma funktsioon, millega asendatakse muutuja määratud integraalis?

4. Kasutades muutujate vahetust, näidata, et

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ kui } f(x) \text{ paarisfunktsioon, ja}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \text{ kui } f(x) \text{ on paaritu funktsioon.}$$

5. Missuguste k väärtuste puhul koondub päratu integraal

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^k} ?$$

6. Missuguste k väärtuste puhul koondub päratu integraal

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^k} ?$$

7. Milline on päratu integraali koonduvuse või hajuvuse geomeetriline tähendus?

8. Millal annab trapetsvalem määratud integraalile täpsema väärtuse: kas siis, kui integreeritav funktsioon on integreerimisvahemikus monotoonne, või siis, kui ta seda ei ole?

# MÄÄRATUD INTEGRAALI RAKENDUSI

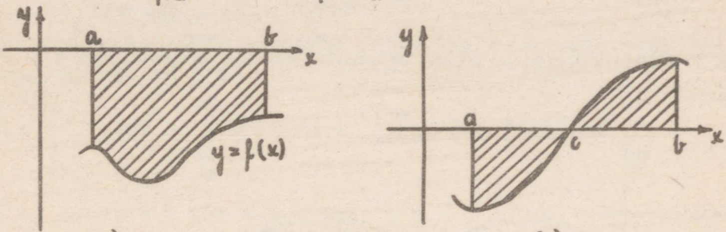
## § 1. Tasapinnalise kujundi pindala

a) Kui $f(x) \geqslant 0$ on pidev lõigul $a \leqslant x \leqslant b$, siis joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pindala, nagu teada, on

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Kui $f(x) < 0$, siis $\int_a^b f(x)dx < 0$, mille tõttu

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b \left| f(x)\, dx \right| \text{ (joon.8a).}$$




a) b)

Joon. 8.

Kui $f(x)$ muudab märki punktis c, $a < c < b$ (joon. 8b), siis

$$S = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^b f(x)dx \right| .$$

<u>Näide.</u> Arvutada pindala joone $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ja x-telje vahel.

On ilmselt näha, et polünoomi üheks nullkohaks on 1 (kordajate summa võrdub nulliga). Seega

$$(x^3-2x^2 - 5x + 6):(x-1) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),$$

millest näeme, et kõver lõikub x-teljega punktides $-2$, 1 ja 3.

Arvutame pindala:

$$S = \left| \int_{-2}^{1} (x^3-2x^2-5x + 6)dx \right| + \left| \int_1^3 (x^3-2x^2-5x+6)dx \right| =$$

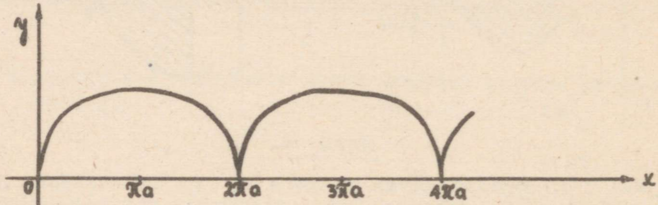
$$= \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_{-2}^{1} + \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_{1}^{3} = \frac{63}{4} + \left| -\frac{16}{3} \right| = 21\frac{1}{12}.$$

b) Kui joone $y = f(x) \geqslant 0$ võrrand on antud parameetrilisel kujul $y = \psi(t)$ ja $x = \varphi(t)$, kusjuures $a = \varphi(t_1)$ ja $b = \varphi(t_2)$, siis asendusega $y = f(x) = \psi(t)$ ning $\dot{\varphi}(t)dt = \dot{x}\,dt$ saame pindala S avaldada parameetri t kaudu:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\ \varphi'(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} y\,\dot{x}\,dt.$$

Näide. Leida tsükloidi $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

ja x-telje vaheline pindala punktist $t = 0$ punktini $t = 2\pi$ (joon. 9).




Joon. 9.

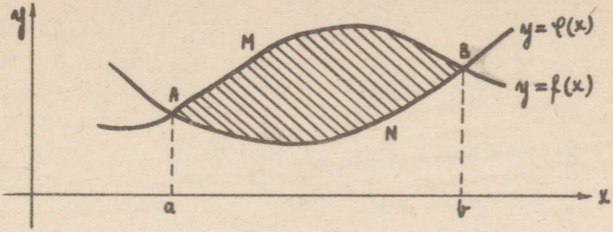
$$S = \int_0^{2\pi} y\,\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2})dt = a^2 \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\cos t +$$

$$+ \frac{\cos 2t}{2})dt = a^2(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

c) Kahe joonega piiratud kujundi pindala. Olgu antud kaks joont $y = \varphi(x)$ ja $y = f(x)$, mis lõikuvad punktides A ja B (joon.10).

Lõikepunktide abstsissid, mis saadakse nende joonte võrrandite koos lahendamisel $\begin{cases} y = f(x) \\ y = \varphi(x), \end{cases}$ on integreerimisrajadeks.




Joon. 10.

Kõvertrapetsite aAMBb ja aANBb pindalade vahe ongi otsitav pindala S, mis võrdub

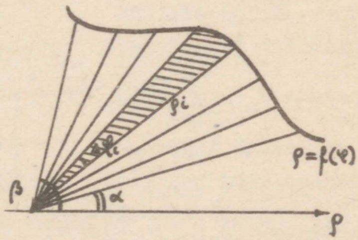
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x)\right] dx.$$

d) K õ v e r s e k t o r i  p i n d a l a. Kõversektoriks nimetatakse kujundit, mida piiravad joon. $\rho = f(\varphi)$ ja kaks poolust läbivat sirget (joon.11). Jaotades kõversektori n osasektoriks ja asendades igaühe neist ringisektoriga, mille raadius on $\rho_i$ ja kesknurk $\Delta\varphi_i$, on iga osa pindala

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Moodustame summa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i$$




Joon. 11.

Selle summa piirväärtust, kui $\Delta\varphi_i \to 0$, nimetataksegi sektori pindalaks S,

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$

Näide. Leida joonega $\rho = a\cos 3\varphi$ piiratud kujundi pindala.

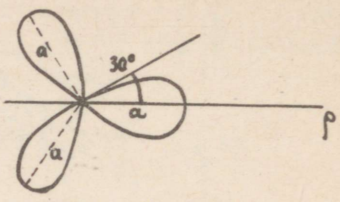
Antud võrrand esitab nn. kolmelehelist roosi (joon.12).

Arvestades sümmeetriat on kogu pindala

$$S = 6\cdot \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \, d\varphi =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} \, d\varphi =$$

$$= 3a^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 6\varphi}{12}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

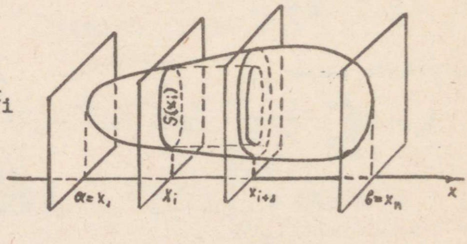


Joon. 12.

## § 2. Keha ruumala

Olgu teada ühe koordinaatteljega, näiteks x-teljega (joon. 13) risti oleva tasapinna ja antud keha lõikepindala, s.t. on tuntud funktsioon $S(x)$, mis väljendab lõikepindala muutumist seoses x muutumisega. Asendame iga kahe lõiketasapinna vahelise keha osa silindriga, mille põhjaks on $S(x_i)$, kõrguseks $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ ning ruumalaks $\Delta V_i = S(x_i)\Delta x_i$.

Nende silindriliste ruumalade summa $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$ väljendab ligikaudu antud keha ruumala. Kui lõikeid teha tihedamalt, siis suureneb osakeste $\Delta V$ arv ja lüheneb iga osakese kõrgus $\Delta x$, summa $V_n$ aga väljendab üha täpsemalt keha tõelist ruumala.



Joon. 13.

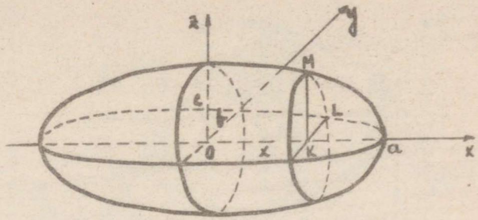
Keha ruumalaks V loetakse integraalsumma $V_n$ piirväärtust, kui $n \to \infty$ (s.o. maksimaalne $\Delta x \to 0$),

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Näide. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ruumala (joon.14).

Tasapinna xy võrrand on $z=0$, seega tema lõikejoon ellipsoidiga on $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, millest $KL = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Ellipsoidi lõige xz-tasapinnaga on ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, millest $KM = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.




Joon. 14.

Seega on ellipsoidi ja punkti K läbiva ja x-teljega risti oleva tasapinna lõige ellips, mille pindala on

$$S(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ ja}$$

ellipsoidi ruumala

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2}\left| a^2x - \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{2\pi bc}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{2\pi bc \cdot 2a^3}{3a^2} =$$

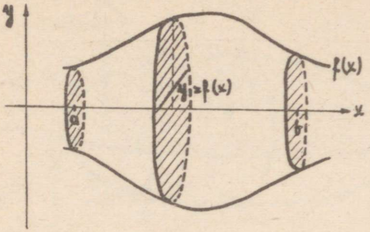
$$= \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c.$$

Pöördkeha ruumala. Keha, mida piiravad joone $y = f(x)$ pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördpind ja tasapinnad $x = a$ ning $x = b$, nimetatakse pöördkehaks (joon.15). Selle pöördkeha ja x-teljega risti oleva tasapinna lõige on ring, mille raadius on $y = f(x)$. Seega lõikepindala on

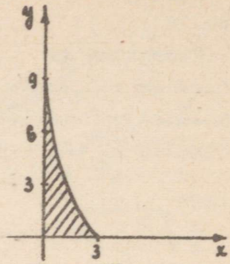
$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

ja pöördkeha ruumala

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$




Joon.15.




Joon.16.

Näide. Leida joontega $y = (3-x)^2$, $y = 0$ ja $x = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber Ox-telje tekkiva keha ruumala.

Et joonte $y = (3-x)^2$ ja $y = 0$ ühiseks punktiks on (3,0), siis on integraali rajadeks $a = 0$ ja $b = 3$ (joon.16) ja pöördkeha ruumala

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_0^3 (3-x)^4 dx = -\frac{(3-x)^5}{5}\pi\Big|_0^3 = \frac{243}{5}\pi = 48\frac{3}{5}\pi.$$

M ä r k u s: Kui joone $y = f(x)$ võrrand on antud parameetri t kaudu $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, siis $dx = \dot{x}\,dt = \varphi'(t)dt$ ja keha ruumala

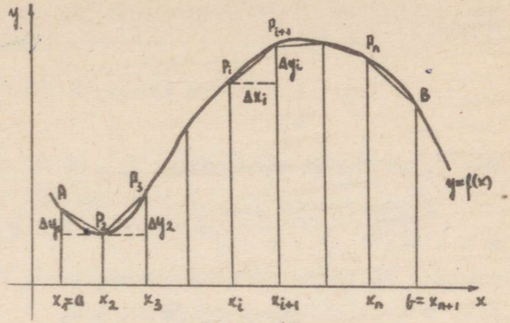
$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}\,dt = \pi\int_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\,\varphi'(t)dt,$$

kus $t_1$ ja $t_2$ on võrrandite $a = \varphi(t)$ ja $b = \varphi(t)$ lahendid.

## § 3. Joone kaare pikkus

Vaatleme joone $y = f(x)$ kaart punktide A ja B vahel (joon.17), kusjuures funktsioon $f(x)$ ja tema tuletis $f'(x)$ olgu pidevad lõigul [a,b].

Jaotame lõigu $[a,b]$ n osaks, kusjuures igale osavahemikule $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ vastab joone $y=f(x)$ kõõl $P_iP_{i+1}$. Kõõlmurdjoone pikkus punktide A ja B vahel on:




Joon. 17.

$$L_n = AP_2 + P_2P_3 + \ldots$$

$$\ldots + P_iP_{i+1} + \ldots + P_nB = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} + \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2} + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} + \ldots + \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\, \Delta x_i,$$

sest Lagrange'i teoreemi põhjal on $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$,

kus $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$.

Selle kõõlumurdjoone pikkuse piirväärtust, kus $n \to \infty$ (suurima osavahemiku $\Delta x$ lähenemisel nullile), nimetatakse joone $y = f(x)$ kaare AB pikkuseks.

Seega kaare AB pikkus

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

M ä r k u s 1. Integreeritav avaldis on kaare $y = f(x)$ diferentsiaal $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

M ä r k u s 2. Kui joon $y = f(x)$ on antud p a r a m e e t r i l i s e l k u j u l $x = \varphi(t)$ ja $y = \psi(t)$, siis

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad dx = \dot{x}\,dt$$

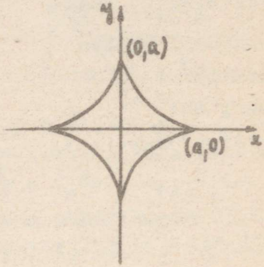
ja $\sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\dot{x}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt,$

seega

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

kus $t_1$ ja $t_2$ on vôrrandite $a = \varphi(t)$ ja $b=\varphi(t)$ lahendid.

Näide. Leida astroidi $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ pikkus. Et astroid on sümmeetriline nii x- kui ka y-telje suhtes, I veerandis aga paiknevad kôik astroidi punktid punktide $(a,0)$, seega $t_1=0$ ja $(0,a)$, s.t. $t_2 = \frac{\pi}{2}$ vahel (joon.18), on astroidi pikkus:




Joon. 18.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos)^2}\,dt=$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 12a\, \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 12a \cdot \frac{1}{2} = 6a.$$

## § 4. Pöördkeha pindala

Olgu funktsioon $f(x)$ ja tema tuletis $f'(x)$ pidevad lôigul $a \leqslant x \leqslant b$.

Laseme joone $y = f(x)$ kaart punktist $A = [a;\ f(a)]$ punktini $B = [b;\ f(b)]$ pöörelda ümber x-telje ning leiame tekkinud pöördpinna pindala. Selleks jaotame lôigu $[a,b]$ $n$ osavahemikuks, leiame igale jaotuspunktile vastava kaarepunkti ning ühendame järjestikku seisvad kaarepunktid kôôludega. Selle tulemusena tekib kaarele AB vastav kôôlmurdjoon, mille iga kôôlu pöörlemisel ümber x-telje tekib kooniline pind (joon.19). Vaadeldes osavahemikule $[x_i, x_{i+1}]$ vastavat kôôlu, näeme, et tegemist on tüvikoonusega, mille kôrgus on $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, pôhjade raadiused $y_i = f(x_i)$ ja $y_{i+1} = f(x_i + \Delta x_i)$ ning külgpindala seega:

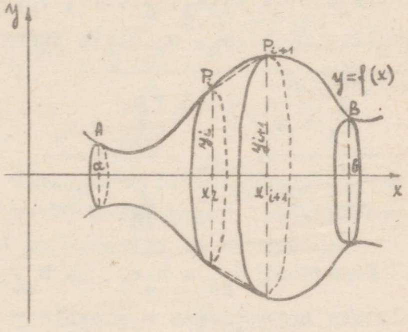
$$P_i = 2\pi\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i)}{2} P_iP_{i+1} =$$

$$= \pi\left[f(x_i)+f(x_i + \Delta x_i)\right] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \text{ (vastavalt § 3).}$$

Nende tüvikoonuste külgpindalade summa

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i)\right]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$$ väljendab ligikaudu pöördpinna pindala P, ja seda täpsemalt, mida suurem on osavahemike arv n (s.o. mida väiksem on iga tüvikoonuse kôrgus $\Delta x$).

Pöördkeha pindalaks P nimetatakse integraalsumma $P_n$ piirväärtust, kui $n \to \infty$ (maksimaalse $\Delta x$ lähenemisel nullile), seega




Joon. 19.

$$P = \lim_{n\to\infty} \pi\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)+f(x_i + \Delta x_i)\right] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i =$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

M ä r k u s: Kui joon $y = f(x)$ on antud p a r a m e e t r i l i s e l k u j u l $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, siis, kasutades eelmises paragrahvis toodud teisendusi, saame:

$$P = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Näide. Leida pöördparaboloidi $y^2 + z^2 = 18x$ pindala tasapindade $x = 0$ ja $x = 8$ vahel.

Vaatleme antud paraboloidi pinda pöördpinnana, mis tekib xy-tasapinnal oleva joone $y^2 = 18x$ pöörlemisel ümber x-telje lõigul $0 \leqslant x \leqslant 8$. Et $y' = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, siis

$$P = 2\pi \int_0^8 3\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{9}{2x}}\, dx = 6\pi \int_0^8 \sqrt{2x+9}\, dx = 3\pi \frac{(2x+9)^{3/2} \cdot 2}{3}\Bigg|_0^8 =$$

$$= 2\pi(125-27) = 196\pi.$$

## § 5. Tasapinnalise kujundi masskese

Kui on antud teatav arv materiaalseid punkte $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2),\ldots, P_i(x_i,y_i),\ldots, P_n(x_n,y_n)$ massiga vastavalt $m_1, m_2,\ldots,m_i,\ldots m_n$, on selle punktidesüsteemi masskeskme koordinaadid

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Korrutisi $M_{yi} = x_i m_i$ ja $M_{xi} = y_i m_i$ nimetatakse staatilisteks momentideks vastavalt y-telje ja x-telje suhtes (kuna $x_i$ on punkti $P_i$ kaugus y-teljest ja $y_i$ kaugus x-teljest).

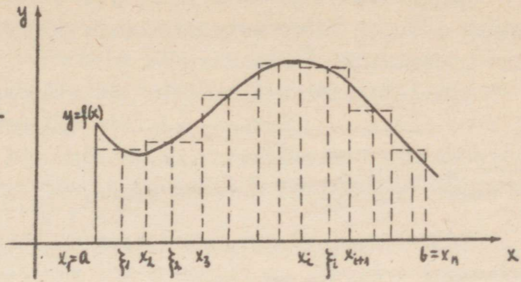
Seega on masskese punkt, kuhu nagu oleks koondatud kogu süsteemi mass, mille staatiline moment mingi telje suhtes võrdub süsteemi üksikute punktide staatiliste momentide summaga.

Kõvertrapetsi masskese. Vaatleme homogeenset ühtlase paksusega tasapinnalist kõvertrapetsi-kujulist plaati, mille tihedus on $\delta$ (joon.20).

Jaotame lõigu [a,b] n osavahemikuks ning moodustame ristkülikud, mille kõrguseks on funktsiooni f(x) väärtus iga osavahemiku keskel $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Iga vaadeldava ristküliku masskeskme koordinaadid on

$$\left[\xi_i, \frac{1}{2} f(\xi_i)\right],$$

mass aga $m_i = \delta f(\xi_i) \Delta x_i$.




Joon.20.

Koondades iga ristküliku massi tema masskeskmesse, on nende punktide (ristkülikute masskeskmete) süsteemi masskeskme koordinaadid:

$$x_c^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \delta f(\xi_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta f(\xi_i) \Delta x_i}, \quad y_c^{(n)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \delta f(\xi_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta f(\xi_i) \Delta x_i}.$$

Pärast lihtsustamist ja üleminekut piirväärtusele tingimusel $n \to \infty$ (maksimaalse $\Delta x \to 0$) saame nende integraalsummade asemel vastavad määratud integraalid ja kõvertrapetsi masskeskme koordinaatideks on:

$$x_c = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f(\xi_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y\, dx},$$

$$y_c = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b y\, dx}.$$

Kasutades sama mõttekäiku on kerge tuletada valemid ka pöördkeha ja tasapinnalise joone masskeskme arvutamiseks.

Näide. Joontega $y = \ln x$, $y = 0$ ja $x = e$ piiratud pinnatükk pöörleb ümber x-telje. Leida pöördkeha masskese, kui keha ruumtihedus $\delta$ =konst.

Sümmeetriatelje olemasolu tõttu (joon.21) on selge, et $y_c = 0$. Lõigates pöördkeha risti x-teljega viiludeks ja kujutledes iga viilu silindrina, on viilu i mass $m_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ ja staatiline moment y-telje suhtes $M_{iy} = x_i \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$.

Kujutledes, et iga viilu mass on koondatud tema masskeskmesse $(\xi_i, 0)$, on viimaste kui süsteemi masskeskme abstsiss

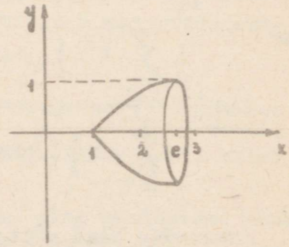
$$x_c^{(n)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i \delta}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i \delta}.$$

Summeerides ja üle minnes piirväärtusele $n \to \infty$ $(\max \Delta x \to 0)$ saame:

$$x_c = \frac{\int_a^b x f^2(x)\,dx}{\int_a^b f^2(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x y^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx} = \frac{\int_1^e x \ln^2 x\,dx}{\int_1^e \ln^2 x\,dx} =$$

$$= \left.\frac{\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)}\right|_1^e = \frac{e^2 - 1}{4(e-2)} \approx 2{,}22.$$

K o r d a m i s k ü s i m u s i



Joon.21.

1. Kas kahe joone vahelise pinnatüki pindala arvutamisel on oluline, et kumbki funktsioon ei muudaks integreerimisvahemikus märki või mitte?

2. Kuidas arvutatakse kõvertrapetsi pindala joone ja Oy-telje vahel?

3. Kuidas avaldub pöördkeha ruumala, kui joon pöörleb Oy-telje ümber? sirgete $y = c$ ja $x = a$ ümber?

4. Miks ei või pöördkeha pindala arvutamisel kahe lõike vahelist keha vaadelda silindrina, nagu me seda tegime pöördkeha ruumala arvutamisel?

5. Tuletada valem homogeense pinnatüki raskuskeskme arvutamiseks, kui pinnatükk on piiratud kahes punktis lõikuvate joontega $y = f(x)$ ja $y = \varphi(x)$.

6. Kui kõvertrapetsi raskuskeskme ordinaadi avaldise

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y\, dx}$$

mõlemaid pooli korrutada $2\pi$-ga, saame

$$2\pi y_c \int_a^b y\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx .$$

Selgitada integraalide geomeetriline tähendus ja sõnastada saadud tulemus.

## Vastused kordamisküsimustele

Lk. 10 ja 11

1. Seda, kas integraal on õigesti avaldatud või mitte, saab kontrollida tulemuse diferentseerimise teel. Saadud avaldise tuletis peab võrduma integreeritava funktsiooniga.

2. Kui on teada funktsiooni tuletis, saab leida funktsiooni enda antud avaldise integreerimise teel.

3. Teeme integraalis $\int f(ax+b)dx$ asenduse $ax+b=u$, $dx=\frac{du}{a}$. Siis $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u)+c = \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$

4. Esimesena saime algfunktsiooni $-\frac{1}{2}\cos 2x$ ja teisena $\sin^2 x$. Need aga erinevad teineteisest ainult konstandi poolest, sest $-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = -\frac{1}{2} + \sin^2 x$.

5. Integraal $\int \frac{e^{\arctan x} dx}{1+x^2} = \int e^u du = e^u + c = e^{\arctan x} + c$ asendusega $u = \arctan x$.

Integraal $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx = \int (1+\ln x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{3}{4}(1+\ln x)^{\frac{4}{3}} + c$ on otseselt integreeritav, sest $(1+\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Integraal $I = \int \frac{\arcsin x \, dx}{x^2}$ avaldatakse ositi:
$u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ja $dv = \frac{dx}{x^2}$, $v = -\frac{1}{x}$, seega $I = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. Viimases integraalis teeme asenduse $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, seega $I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$

$$= -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| \text{ ja } I = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| - \frac{\arcsin x}{x} + c.$$

Integraal $\int \sqrt[7]{\sin^3 x} \cos x \, dx = \int (\sin x)^{\frac{3}{7}} \cos x \, dx =$ $= \frac{7}{10} \sin^{\frac{10}{7}} x + c$ on otseselt integreeritav, sest $(\sin x)' = \cos x$.

Integraal $\int \cos x \ln \sin x \, dx = \int \ln t \, dt =$
$= t \ln t - t + c = \sin x(\ln \sin x - 1) + c$ asendusega
$\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$. Integraal $\int \ln t \, dt = t \ln t - \int dt =$
$= t \ln t - t + c$ on leitud ositi: $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$;
$dv = dt$, $v = t$.

Integraali $I = \int x^2e^x dx$ avaldamiseks tuleb teda kaks korda järjest ositi integreerida, valides mõlemal korral $dv = e^x dx$, millest $v = e^x$. Seega $I = x^2e^x - 2\int x\, e^x dx =$
$= x^2e^x - 2\left[x\, e^x - \int e^x dx\right] = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$

6. $\int \arcsin x\, dx + \int \arccos x\, dx = \int(\arcsin x + \arccos x)dx =$
$= \int \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi x}{2}$. Sama argumendiga arkus-siinuse ja arkus-koosinuse summa on konstant $\frac{\pi}{2}$ (samuti ka $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$).

Selles võib veenduda ka avaldiste $\int \arcsin x\, dx$ ja $\int \arccos x\, dx$ ositi integreerimisel, valides vastavalt $u = \arcsin x$ või $u = \arccos x$, $dv = dx$.

7. Valime joonteparvest $y = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + c$ joone, mis läbib punkti $P_1$:

$$5\sqrt{3} = \frac{5}{3}\cdot 3\sqrt{3} + c,\quad c = 0;\ \text{seega } y = \frac{5}{3}x^3.$$

Lk. 25 ja 26

1. Tuleb teha asendus $x + 1 = t$, seega

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}\, dx = \int \frac{(t-1)^3}{t^4}\, dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t^3} - \frac{1}{t^4}\right)dt =$$
$$= \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + c.$$

2. $$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{x^4+4x^2+4-4x^2} = \frac{1}{(x^2+2)^2 - 4x^2} =$$
$$= \frac{1}{(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2},$$

millest $(A + C)x^3 + (-2A + B + 2C + D)x^2 + 2(A - B + C + D)x + 2B + 2D = 1$ ja süsteemi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B + 2C + D = 0 \\ A - B + C + D = 0 \\ 2B + 2D = 1 \end{cases}$$

lahendid on: $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{8}$ ja $D = \frac{1}{4}$.

Seega $\int \frac{dx}{x^4+4} = \int \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{(x^2+2x+2)} dx + \int \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{(x^2-2x+2)} dx =$

$= \frac{1}{16} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8} \arctan(x+1) + \frac{1}{8} \arctan(x-1) + c.$

3. Integraalis $I = \int \frac{x^3-8}{x^2+4x} dx$ tuleb kõigepealt lugeja jagada nimetajaga $(x^3-8):(x^2+4x) = x-4+\frac{16x-8}{x^2+4x}$, seejärel lahutada murd osamurdudeks: $\frac{16x-8}{x(x+4)} = \frac{-2}{x} + \frac{18}{x+4}$;

$$I = \frac{x^2}{2} - 4x - 2\ln x + 18\ln(x+4) + c.$$

4. Kui polünoomi kordajate summa on null, on tema nullkohaks arv 1.

5. $\int\sqrt{20x-2x^2-51}\,dx = \int\sqrt{-2(x-5)^2-1}\,dx$, millest nähtub, et integreeritav funktsioon ei ole määratud ühegi $x$ väärtuse puhul.

6. Valime asenduse $e^x = t$, seega $dx = \frac{dt}{t}$ ja

$I = \int\sqrt{\frac{e^x}{e^x+3}}\,e^{2x}dx = \int\sqrt{\frac{t}{t+3}}\,t^2\frac{dt}{t} = \int t^{\frac{3}{2}}(t+3)^{-\frac{1}{2}}dt$ on diferentsiaalbinoom, kus $m = \frac{3}{2}$, $n = 1$ ja $p = -\frac{1}{2}$.

Seega $\frac{m+1}{n} + p = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$ ja integraali $I$ avaldamiseks tuleb valida asendus $t+3 = u^2t$, millest $t = \frac{3}{u^2-1}$ ja $dt = -\frac{6u}{(u^2-1)^2}du$, $I = -18\int\frac{du}{(u^2-1)^3}$.

7. Kasutame asendust $\tan x = t$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ ja $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, seega $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos 2x} = \int\frac{1+t^2}{t^2(1-t^2)}dt =$

$= -\frac{1}{t} - \ln(1-t) + \ln(1+t) + c = -\cot x + \ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x} + c.$

8. Integraal $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^3}}$ avaldub elementaarfunktsioonides Tšebõševi teoreemi põhjal ($n = 3$, $p = -\frac{1}{2}$), kui

a) $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3}$ on täisarv, seega $m = 3k-1$ või $m=-3k+2$, kusjuures $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

b) $\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2m-1}{6}$ on täisarv, seega $m = \frac{6k+1}{2}$.

9. $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx$. Kasutades ositi integreerimist $u = \cos x$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^n x} dx$, $du = -\sin x\, dx$ ja $v = \frac{1}{(-n+1)\sin^{n-1} x}$ saame

$$I_n = I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

Lk. 48

1. Kui integreeritaval funktsioonil on hüppekoht punktis $x = c$ ($a < c < b$), tuleb integraal arvutada kahes osas:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Keskväärtusteoreemi geomeetriliseks tähenduseks on kõvertrapetsi $\int_a^b f(x)dx$ pindvõrdsus ristkülikuga, mille aluseks on lõik $b - a$ ja kõrguseks ordinaat $f(\xi)$, mis tuleb valida nii, et ristkülikust väljaulatuv kõvertrapetsi osa võrduks pindalaga ristküliku ja kõvertrapetsi vahel (joon.4).

3. Asendades määratud integraalis $x = \varphi(t)$, peavad $\varphi(t)$,

$\varphi'(t)$ ja $f[\varphi(t)]$ olema pidevad lõigul $[t_1, t_2]$ ja $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$.

4. Kui f(x) on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad (1)$$

Asendades esimeses liidetavas $x = -t$, $dx = -dt$, saame

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ sest } f(x)=f(-x).$$

Kui f(x) on paaritu funktsioon ja summa (1) esimeses liidetavas teha asendus $x = -t$, $dx = -dt$, saame

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt +$$

$$+\int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0, \text{ sest } -f(x) = f(-x).$$

5. Päratu integraal

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{dx}{x^k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(-k+1)x^{k-1}}\Bigg|_1^N =$$

$= \frac{1}{-k+1} \lim\limits_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N^{k-1}} - 1\right)$ koondub, kui $k > 1$, sest $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k-1}} = 0$

ainult sellel tingimusel; $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}$.

6. Päratu integraal

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^k} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^k} = \frac{1}{k-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(b-x)^{k-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} =$$

$= \frac{1}{k-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^{k-1}} - \frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right)$ koondub, kui $k < 1$, sest $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = 0$ ainult sel tingimusel; $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \frac{1}{(1-k)(b-a)^{k-1}}$.

7. Päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ avaldab joonte $y = f(x)$, $x = a$ ja abstsisstelje vahele jääva tõkestamatu (lõpmatu) piirkonna pindala. Kui $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, ei tähenda see alati, et nimetatud pindala läheneks kindlale piirväärtusele: näiteks $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ja $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, kuid $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$, aga $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$ (vt. p.5).

Kui $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$, avaldab päratu integraal $\int_a^b f(x)dx$ joonte $y = f(x)$, $y = a$, $y = b$ ja abstsisstelje vahele jääva tõkestamatu (lõpmatu) piirkonna pindala.

8. Trapetsvalem annab määratud integraalile täpsema tulemuse enamasti siis, kui integreeritav funktsioon ei ole integreerimisvahemikus monotoonne, sest sel juhul on igale osavahemikule vastava trapetsi pindala kord suurem, kord väiksem samale osavahemikule vastava kõvertrapetsi pindalast (vt. joon.5). Vastupidi, kui integreeritav funktsioon näiteks ainult kasvab ja ta graafik on nõgus, on kõik trapetsid suuremad vastavaist kõvertrapetseist ja viga integraali arvutamisel võib tulla küllalt suur.

<u>Lk. 60 ja 61</u>

1. Kahe joone $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ vahelise pinnatüki pindala arvutamisel ei ole oluline kummagi funktsiooni $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ märk. Kui näiteks mingil lõigul $[c,d]$ $(a < c < d < b)$ $f_2(x) > 0$ ja $f_1(x) < 0$, siis nende vahel oleva pindala

$$S = \int_c^d [f_2(x)-f_1(x)]\,dx = \int_c^d f_2(x)dx + \int_c^d |f_1(x)|\,dx,$$ sest

$\int_c^d f_1(x)dx < 0$, integraalide summa $\int_c^d f_2(x)dx + \int_c^d |f_1(x)|\,dx$

väljendab aga tõepoolest otsitavat pindala.

2. Kõvertrapetsi pindala joonte $y = c$, $y = d$, kusjuures $d > c$, $x = f(y)$, ja ordinaattelje vahel avaldub alljärgnevalt:

$$S = \int_c^d f(y)dy.$$

3. Kui joon $x = f(y)$ pöörleb ordinaattelje ümber tasapindade $y = c$ ja $y = d$ vahel, on pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_c^d f^2(y)dy.$$

Kui joon pöörleb sirge $x = a$ ümber, on tekkiva pöördkeha iga Oy-teljega risti olevaks lõikeks ring raadiusega $f(y)-a$ ja seega pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_c^d [f(y)-a]^2\,dy.$$

Kui joon $y = f(x)$ pöörleb sirge $y = c$ ümber lõigul $[a,b]$, on Ox-teljega risti olevaks lõikeks ring raadiusega $f(x)-c$ ja pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_a^b [f(x)-c]^2\,dx.$$

4. Pöördkeha pindala arvutamisel tuleb kahe Ox-teljega risti oleva lõike vahelist keha vaadelda tüvikoonusena, sest nimelt kõikide tüvikoonuste külgpindalade summa läheneb pöördkeha pindalale täpsalt samuti, kui köölumurdjoone pikkus läheneb $n \to \infty$ puhul joone kaare pikkusele (vt.joon.17). Osavahemike pikkuste $\Delta x$ summa võrdub aga alati (ka $n \to \infty$ puhul) pöördkeha kõrgusega $b-a$.

5. Joonte $y = f(x)$ ja $y = \varphi(x)$ võrrandite koos lahendami-

sel saame nende lõikepunktide abstsissid x = a ja x = b. Jaotades pinnatüki kahe joone vahel n ribaks, võib iga riba massikeskme koordinaatidena vaadelda $[\xi_i;\ \frac{f(\xi_i)+\varphi(\xi_i)}{2}]$ vastavalt § 5 (lk. 59), riba massina aga $m_i = \delta[f(\xi_i)-\varphi(\xi_i)]\Delta x_i$.

Seega kogu pinnatüki massikeskme koordinaadid on:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f(x)-\varphi(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,dx},$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,dx}.$$

6. Kui joon y pöörleb lõigul [a,b] ümber Ox-telje, on $2\pi y_c$ ringjoone pikkus, mille moodustab joonega y = f(x) piiratud kõvertrapetsi raskuskese pöörlemisel ümber Ox-telje, $\int_a^b y\,dx$ sama kõvertrapetsi pindala ja $\pi\int_a^b y^2dx$ selle kõvertrapetsi poolt pöörlemisel moodustatud pöördkeha ruumala. Seega võrdub lõigul [a,b] joone y = f(x) pöörlemisel ümber Ox-telje tekkinud pöördkeha ruumala sama joonega piiratud kõvertrapetsi pindala ja selle raskuskeskme poolt kujundatud ringjoone pikkuse korrutisega (Guldini 2.teoreem).

S i s u k o r d

lk.

Hind 12 kop.