Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Ave Pošlin

Võrratuste kordamiseks õppematerjalide loomine ning õpetajate tagasiside loodud õppematerjalidele

Matemaatika- ja informaatikaõpetaja eriala

Magistritöö (15 EAP)

Juhendaja: Sirje Pihlap, MA

Tartu 2023

VÕRRATUSTE KORDAMISEKS ÕPPEMATERJALIDE LOOMINE NING ÕPETAJATE TAGASISIDE LOODUD ÕPPEMATERJALIDELE

Magistritöö

Ave Pošlin

Lühikokkuvõte

Õpilastel on tihti raske omandada matemaatikas õpitavaid teemasid. Uuringud näitavad, et võrratuste lahendamine on läbi aegade olnud õpilastele keeruline. Tänapäeval eelistavad õpilased digitaalseid vahendeid uute teemade õppimiseks ja vanade teemade kordamiseks, kuid iseseisvaks kordamiseks olevaid eestikeelseid õppematerjale on vähe. Seetõttu oli käesoleva magistritöö eesmärgiks koostada lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste kordamist toetavad digitaalsed õppematerjalid ja selgitada välja õpetajate hinnangud loodud materjalidele.

Keskkonnas Teacher.Desmos loodi gümnaasiumi õpilastele võrratuste kordamiseks kolm õppematerjali: lineaarvõrratuste, ruutvõrratuste ja murdvõrratuste kordamiseks. Tagasiside õppematerjalidele saadi matemaatikaõpetajatelt ja selleks kasutati küsimustikku. Kokku hindas õppematerjale viis õpetajat. Tulemustest selgus, et õpetajate arvates on õppematerjalid kordamist toetavad ja ülesanded aitavad teemat meelde tuletada ning kinnistada. Õpetajad plaanivad kasutada materjale ka oma õpilastega. Õppematerjalides tehti muudatused tagasisidest saadud soovituste põhjal ning lisati keskkonda E-koolikott kõigile kasutamiseks.

CERCS teaduseriala: S270 Pedagoogika ja didaktika

Märksõnad: Algebra, võrratused, lineaarvõrratused, ruutvõrratused, murdvõrratused, Desmos, teacher.Desmos, õppematerjal

CREATION OF LEARNING MATERIALS FOR REVISING INEQUALITIES AND FEEDBACK ON THE MATERIALS FROM TEACHERS

Master thesis

Ave Pošlin

Abstract

Mathematics is one of the most challenging subjects for students. Studies indicate that solving inequalities has historically been difficult for students. Nowadays, students prefer digital tools for learning new topics and reviewing old ones. However, there are very few learning materials available for independent revision on the topic of inequalities in Estonian language.

The aim of this master's thesis was to create digital learning materials to support the revision of linear, quadratic, and fractional inequalities and to determine teachers' assessments of the created materials. In the Teacher.Desmos environment, three sets of learning materials were developed for high school students to review inequalities: linear inequalities, quadratic inequalities, and fractional inequalities. Feedback on the learning materials was obtained from mathematics teachers using a questionnaire. Five teachers evaluated the learning materials. The results revealed that according to the teachers these digital learning materials are suitable for use in revision and the tasks help to recall and reinforce the inequalities. Teachers are also planning to use the materials with their students. Based on the feedback received, changes were made to the learning materials, and they were added to the E-koolikott environment for everyone to use.

CERCS research specialisation: S270 Pedagogy and didactics

Keywords: Algebra, inequalities, linear inequalities, quadratic inequalities, rational inequalities, Desmos, teacher.Desmos, learning materials

Sisukord

Sissejuhatus 5

1. Teoreetiline ülevaade 7

1.1 Võrratused 7

1.1.1 Võrratuste vajalikkus 7

1.1.2 Soovitused võrratuste õpetamisel 8

1.1.3 Võrratuste õppimine Eestis 9

1.1.4 Lineaarvõrratused 10

1.1.5 Ruutvõrratused 11

1.1.6 Murdvõrratused 13

1.2 Õppematerjali koostamise nõuded 15

1.3 Desmose programmi tutvustus 17

2. Töö eesmärk ja uurimisküsimused 18

3. Metoodika 18

3.1 Õppematerjalide koostamine toetudes ADDIE mudelile 19

3.2 Valim 20

3.3 Õppematerjalide tagasiside küsimustik 20

4. Õpetajate hinnangud õppematerjalidele 21

5. Arutelu 23

Kokkuvõte 26

Kasutatud kirjandus 27

Lisa 1. Küsimustik õpetajale 29

Sissejuhatus

Algebra on matemaatika osa, mis uurib tehteid ja nende omadusi. Nii põhikoolis kui gümnaasiumis tehakse tehteid reaalarvudega - nii liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist, astendamist kui ka juurimist. Algebras lisanduvad arvude kõrvale või asemele tähed, mille abil on võimalik üldistada tehteid ning luua valemeid. (Reinup, 2019)

Enamus inimesi mõistab, miks matemaatikas on vaja osata aritmeetikat. Täisarvud, murrud, kümnendmurrud ja protsendid on kasutusel igapäevaelus - neid on vaja poes käies, valimiste tulemustest arusaamisel, remondi jaoks õige koguse värvi ostmiseks jne. Algebra vajalikkusest on õpilastel keerulisem aru saada, kuigi algebra on kasutusel paljudes valdkondades. Samuti on õpilastel algebra teemasid raskem mõista, sest see on liiga üldistav. (Usiskin, 1995) Et lahendada algebra ülesandeid õigesti, peab õpilane olema tähelepanelik, saama aru ülesandest, tundma valemeid ja leidma erinevaid seoseid, mistõttu on oluline pidev harjutamine ja iseseisev kinnistamine.

Üheks algebra teemaks on võrratused. Eestis õpitakse võrratusi gümnaasiumi riikliku õppekava (2011) järgi algebra osana 10. klassis, kuid kasutatakse rohkem jadade lahendamisel ning funktsioonide uurimise juures. Võrratuste lahendamise oskus on vajalik paljudel erialadel. Majanduses kasutatakse võrratusi majandusliku olukorra modelleerimiseks ja analüüsimiseks (nt tootmisvõimalused, kasulikkusfunktsioon) (Kaldaru, 2006). Programmeerimises kasutatakse võrratusi tingimuslausetes ja tsüklites, et juhtida programmi tööd erinevates olukordades. Tsiviilehitussutes kasutatakse võrratusi näiteks koormuste kandevõime ja konstruktsiooni stabiilsuse modelleerimiseks.

Võrratuste lahendamisoskust analüüsis Tiia Järve oma diplomitöös aastal 1992, hilisemaid Eestis tehtud uuringuid autor ei leidnud. Samu vigu teevad õpilased ka aastakümneid hiljem käesoleva magistritöö autori kogemuse põhjal. Võrratuste lahendamisoskus on koolis olulisel kohal. Gümnaasiumi lõpueksamil kontrollitakse võrratuste lahendamise oskust nii eraldioleva ülesandena kui ka osana suuremast ülesandest, näiteks on vajalik funktsiooni uurimisel koostada ja lahendada võrratus. Aastal 2022 oli kitsa matemaatika riigieksamil vaja õpilastel lahendada lineaarvõrratuste süsteem. Keskmine punktide arv antud ülesandel oli 2 punkti 5-st võimalikust punktist. Sama aasta laia matemaatika riigieksami 9. ülesanne koosnes kahest osast, kus 5 punkti andis ruutvõrratuse ja murdvõrratuse süsteemi lahendamine. Keskmiselt said õpilased 3,2 punkti 5-st võimalikust punktist. (Arismaa, 2023)

Võrratuste õppimist toetavad erinevad digitaalsed õppematerjalid. YouTube keskkonnas on võrratuste lahendamist tutvustavad videod (nt Allar Veelmaa loodud õppevideod - Veelmaa, 2023). Lisaks videote vaatamisele on õpilastel vajalik ka iseseisvalt lahendada ülesandeid. Paljud õppijad eelistavad ülesannete paberil lahendamisele tehnilisi vahendeid, et saada kiiret tagasisidet oma vastustele. Õpilased saavad kasutada ka eestikeelset digitaalset õppevara portaali E-koolikott, kuhu on õpetajad loonud erinevaid õppematerjale. Võrratuste kohta on sinna loodud palju erinevaid ülesandeid, kuid õpilastel on iseseisvalt keeruline leida sobivaid ülesandeid (E-koolikott, 2023). Samuti on loodud digitaalsed haridusportaalid Opiq ja TaskuTark, kus on võimalik õpilastel ka iseseisvalt teemasid omandada, kuid kuna need on suures osas tasulised, siis pole need kõigile kättesaadavad (Opiq, 2023; TaskuTark, 2023). Seetõttu on magistritöö eesmärk koostada lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste iseseisvat kordamist toetavad kompaktsed õppematerjalid ning välja selgitada õpetajate hinnangud loodud õppematerjalidele.

1. Teoreetiline ülevaade

1.1 Võrratused

Võrratus saadakse, kui seotakse omavahel kaks avaldis ühega järgnevatest võrratusmärkidest:

- $>$ - on suurem kui;
- $\geq$ - on suurem või võrdne kui;
- $<$ - on väiksem kui;
- $\leq$ - on väiksem või võrdne kui.

Märkide > ja < puhul räägitakse rangest võrratusest ning märkide ≥ ja ≤ puhul mitterangest võrratusest. Näiteks $2x + 3 > 0, (x-2)^2 \leq 0, 3 < 5,\ x + y\ \geq 3$ ja $5 > 7$.

Näidetest on näha, et võrratusi leidub erinevaid. On arvvõrratused nagu $3 < 5$, muutujat sisaldavad võrratused nagu $2x + 3 > 0$, samuti saab võrratused jagada tõesteks ja vääradeks või rangeteks ja mitterangeteks. Muutujat sisaldava võrratuse lahendamine tähendab muutuja nende väärtuste leidmist, mille korral võrratus osutub tõeseks. Muutuja väärtusi, mille korral võrratus osutub tõeseks, nimetatakse võrratuse lahenditeks ning kõik lahendid moodustavad lahendihulga.

Meile tuttavad võrratusmärgid on loodud üsna hiljuti, kuid võrratuste mõte oli tuttav juba antiikmatemaatikutele. Nad ei kasutanud arvudevahelisi võrratusi, kuid näiteks Eukleides tundis tingimust, kui üks pikkus oli teisest suurem, ning väljendas seda sõnadega nagu "jääb alla" (ingl k "*falls short*") või "ületab" (ingl k "*is in excess of*") (Halmaghi, 2011).

1.1.1 Võrratuste vajalikkus

Võrratusi kasutatakse väga erinevates valdkondades. Igapäevaelus kasutatakse võrratusi tihti inimestele märkamatult, nt piiranguteks - auto kiirus peab olema väiksem või võrdne mingi kindla kiirusega, lapse pikkus peab olema suurem või võrdne kindlast pikkusest lõbustuspargi mõnel atraktsioonil. Matemaatika haru matemaatiline analüüs uurib funktsioone, mille suureks osaks on võrratuste lahendamine. Funktsioonide positiivsus- ja negatiivsusvahemike, kasvamis- ja kahanemisvahemike, kumerus- ja nõgususvahemike määramiseks on vajalik osata lahendada võrratusi. Vahel on ka määramispiirkonna määramisel vaja lahendada võrratus -

näiteks juur- ja logaritmfunktsioonid. Seega erialad, kus kasutatakse funktsioone erinevate nähtuste ja teemade uurimiseks, vajavad võrratuste lahendamise oskusi. Geomeetrias saab võrratuse abil kontrollida, kas tegemist on kolmnurgaga või mitte (iga kahe külje pikkuste summa peab olema suurem kolmandast küljest). Füüsikas on kasulik osata võrrelda erinevaid funktsioone, et teada saada, kumb neist on suurem mingites kindlates tingimustes.

Võrratusi kasutatakse ka optimaalsete (ehk mingite tingimuste korral parimate) plaanide leidmiseks vajalike optimeerimismeetodite väljatöötamiseks. Näiteks tehases töö planeerimine, kus peab arvestama mitmeid tingimusi (kaua töötajad saavad töötada või kaua läheb aega erinevate toodete tootmiseks), optimaalse maakasutuse leidmine (kuidas kasutada erinevaid maatükke nii, et tulu oleks maksimaalne) või transpordiülesanne, kus on vaja koostada veoplaan, mille korral kõikide tarbijate vajadused oleksid rahuldatud ja vedude kogukulu oleks minimaalne (arvestades transpordikanalite läbilaskevõimeid, töötajate tööaega jne) (Roosaare, *s.a*).

1.1.2 Soovitused võrratuste õpetamisel

Enne lineaarvõrratuste lahendusvõtete õpetamist, tuleb meelde tuletada arvuhulgad, reaalarvude piirkondade tähised ja tähendused ning võrratusmärgid. Vaja on seletada ja arutada võrratuse põhiomadusi ning nende tähtsust. Kuna õpilaste jaoks on võrrandid ja võrratused sarnased, siis on mõistlik selgitada, et nii võrratuse poolte vahetamisel kui ka negatiivse arvuga korrutamisel tuleb muuta võrratusmärk vastupidiseks ja miks see nii on. Lahendihulka on kasulik tõlgendada arvteljel. Võrratuste lahendamist on mõistlik harjutada ulatusliku ja esialgu lihtsa ülesannete kogu abil, kuna läbi harjutamise kujuneb välja arusaam võrratuse lahendamise kohta. Tähelepanu tasub pöörata ka võrratuse lahendi kontrollimisele ning ülesannetele, mis eeldavad võrratuse koostamist. Väga oluline on osata kirja panna seosed matemaatiliste sümbolite abil. (Kikas, 1992)

Uuringud soovitavad erinevaid strateegiaid, et aidata õpilastel aru saada ja lahendada õigesti võrratusi. Teemaga alustades peaks õpilasi julgustama leidma võrratusi oma igapäevaelust, et muuta õppimine tähendusrikkamaks (Bicer, Capraro & Capraro, 2015). Tunde planeerides on oluline võtta arvesse õpilaste eelnevaid teadmisi ja matemaatilist mõtlemisvõimet. Stephanie Prestage ja Pat Perks (2005) viisid läbi uuringu tulevaste õpetajatega nende arusaamade kohta võrratustest. Enamus üliõpilastest väitsid, et kasutavad võrratusi lahendades pigem mälu kui matemaatikateadmisi. Et õppimine oleks matemaatilisem ja mitte ainult algoritmide meelde jätmine, peaksid õpetajad seostama õpitu reaalse eluga ja teiste õpilastele tuttavate matemaatiliste teemadega ning korraldama erinevaid tegevusi ja mänge klassis enne matemaatiliste sümbolite tutvustamist (Prestage & Perks, 2005).

Arvestama peab ka õpilaste väärate uskumustega. Paljudele õpilastele jääb võrratusi lahendades meelde, et lahendiks on võrratus või vahemik, lõik või poollõik. Seega võrratused, mille lahendiks on kõik reaalarvud, tühihulk või üks kindel arv, on õpilastele keerulisemad. Tsamir ja Bazzini (2004) viisid läbi uuringu, kus analüüsiti Iisraeli õpilaste teadmisi võrratuste lahendamisel. Üheks küsimuseks oli, kas x=3 võib olla võrratuse lahendiks. Märkimisväärne osa õpilastest vastas, et see pole võimalik, kuna võrratuse lahendiks saab olla ainult võrratus. Samas lahendasid võrratuse $5x^4 \leq 0$ õigesti, andes vastuseks x=0. Õpilased vaatasid iga võrratust eraldiseisvana ja ei märganud oma vastustes vastuolu. Ka selles uuringus märgati õpilaste seas uskumust, et võrratuste ja võrrandite lahendamine on sama protsess. Kuna võrrandeid olid nad lahendanud palju, siis olid õpilased kindlad, et sama protseduur on ka võrratuste puhul õige. Seega on väga oluline arvestada, kuidas õpilased intuitiivselt mõtlevad. Vaja on tuua rohkem näiteid võrratustest, mille lahendiks on üks arv, tühihulk või kõik reaalarvud, ning arutada ja analüüsida klassis põhjalikult, miks on sellised lahendid. Antud uuringu põhjal võib väita, et suuline analüüs toob selliste võrratuste korral paremaid tulemusi. Tsamir ja Bazzini (2004) soovitavad klassis arutada põhjalikult erinevate lahendihulkadega võrratusi, näiteks $5x^4 \leq 0$, kus lahendiks on x=0, $5x^4 \leq 5$, kus lahendiks on hulk [-1;1] ja $5x^4 \leq -9$, mille vastuseks on tühihulk. Samuti arutada võrratusi $5(x-8)^6 \leq 0$ ja $(x+5)^2 \leq 0$, mille vastuseks on mõlemal üks kindel arv. (Tsamir & Bazzini, 2004)

Erinevad uuringud näitavad, et võrratuste lahendamisel tehtavad vead on ühed ja samad läbi aastate ning ei tunnista riikide piire. Seega on oluline õpetajal teemat tutvustades ja tunde planeerides mõelda, milliseid vigu on õpilased varem teinud ja miks ning rõhutada näiteid võrratuste kasutamisest erinevates valdkondades. Vaja on rohkem analüüsida kogu klassiga erinevaid näiteid ning lasta õpilastel jõuda lahenduseni või oma lahenduse vastuoluni nagu tehti Tsamiri ja Bazzini uuringu intervjuudes (2004).

1.1.3 Võrratuste õppimine Eestis

Esimene kokkupuude võrratustega on lastel juba enne kooli — lasteaias õpitakse hulkade võrdlemist kasutades mõisteid rohkem, vähem ja võrdselt (Koolieelse lasteasutuse riiklik õppekava, 2011). Arvvõrratusi ja võrratusmärke õpitakse Eestis tundma I kooliastmes

(Põhikooli riiklik õppekava Lisa 3, 2011). Ühe tundmatuga võrratustega tutvuvad õpilased praeguse õppekava järgi alles IV kooliastmes. Gümnaasiumis õpitakse matemaatikat kas kitsa või laia matemaatika programmi järgi, mis erinevad nii matemaatika mahu, sisu kui ka käsitluslaadi poolest (Gümnaasiumi riiklik õppekava Lisa 5, 2011).

Kitsa matemaatika programm koosneb 8 kursusest ja selle eesmärk on matemaatika rakenduste vaatlemine ning kasutada matemaatikat igapäevaelus. Võrratusi õpitakse kursusel "Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused". Kursuse lõpul peab õpilane oskama selgitada, mis on võrratus ja võrratuse omadused, ning lahendada lineaar- ja ruutvõrratusi ning ühe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteeme. (Gümnaasiumi riiklik õppekava Lisa 5, 2011)

Laia matemaatika programm koosneb 14 kursusest ning eesmärgiks on aru saada matemaatikateaduse olemusest, anda ettekujutus matemaatika tähendusest ühiskonnas ja rakendamisest erinevates valdkondades (tehnoloogias, majanduses jms). Võrratusi õpitakse selles programmis kursusel "Võrratused. Trigonomeetria I". Nagu kitsa matemaatika programmi läbinud õpilane peab ka laia matemaatika programmi järgi õppiv õpilane oskama selgitada, mis on võrratus ja võrratuse omadused, ning lahendada lineaar- ja ruutvõrratusi ning ühe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteeme. Lisaks peab õpilane oskama lahendada murdvõrratusi, lihtsamaid võrratusesüsteeme (süsteem ei pea koosnema ainult lineaarvõrratustest), kõrgema astme võrratuste lahendamiseks intervallmeetodit. (Gümnaasiumi riiklik õppekava Lisa 5, 2011)

Selles magistritöös keskendutakse lineaarvõrratustele, ruutvõrratustele ja murdvõrratustele.

1.1.4 Lineaarvõrratused

Lineaarvõrratused on kujul $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ või $ax + b \geq 0$. Lineaarvõrratuse lahendamine tähendab selle lineaarvõrratuse kõikide lahendite, mis rahuldavad esialgset võrratust, leidmist. Lahendamiseks kasutatakse samasusteisendusi.

Lahenduseeskiri (Lepmann, Lepmann & Velsker, 2011):

1) kui võrratuses esineb harilikke murde, siis tuleb neist vabaneda, korrutades võrratuse pooli murdude ühise nimetajaga;

2) võimaluse korral lihtsustada võrratuse pooled (nt avada sulud, koondada sarnased liikmed);

3) viia muutujat sisaldavad liikmed võrratuse vasakule ja vabaliikmed paremale poole;
4) koondada sarnased liikmed;
5) kui muutuja kordaja on ühest erinev arv, siis tuleb jagada võrratuse mõlemaid pooli (kui kordaja on negatiivne, siis võrratuse märk tuleb muuta vastupidiseks).

Aastal l992 analüüsis Tiia Järve oma diplomitöö raames eesti ja vene õppekeelega õpilaste oskusi võrratuste lahendamisel. Eesti õppekeelega koolide õpilastest lahendas rahuldavalt ülesandeid 45% ja vene õppekeelega koolide õpilastest 65%. Uuringus osales 744 õpilast ja läbi viidi neli kontrolltööd (Järve, 1992). Magistritöö autori kogemuse põhjal tehakse samu vigu ka 30 aastat hiljem, mida näitavad ka erinevates riikides läbiviidud uuringud. (Tsamir & Bazzini, 2004; Prestage & Perks, 2005)

Järve (1992) analüüsist selgus, et lineaarvõrratusi lahendas õigesti 67% õpilastest. Kui lineaarliikme kordaja oli positiivne, siis lahendas õigesti 78% õpilastest ning kui kordaja oli negatiivne, lahendas õigesti 63% õpilastest. Seega eksitakse lineaarvõrratuste lahendamisel rohkem, kui lineaarliikme kordaja on negatiivne. (Järve, 1992)

Diplomitöö autor tõi välja, et kõige enam valmistaski õpilastele raskusi võrratuse poolte jagamine negatiivse arvuga (eksimusprotsent 14%), kus jäeti võrratuse märk muutmata. Vigadeks oli ka liikmete viimine võrratuse ühelt poolt teisele poole märki vastupidiseks muutmata (eksimusprotsent 7%), sulgude avamine ja koondamine (eksimusprotsent 7%), võrratuse poolte jagamine positiivse arvuga (eksimusprotsent 3%) ja vastuse väljakirjutamine (eksimusprotsent 1%). (Järve, 1992)

2022. aasta kitsa matemaatikakursuse eksami analüüsis toodi välja sarnased vead- võrratuse märgi muutmata jätmine, kui jagati negatiivse arvuga; liikmete viimisel teisele poole, jäeti liikme märk muutmata (Arismaa, 2023).

1.1.5 Ruutvõrratused

Ühe muutujaga ruutvõrratuseks nimetatakse võrratust kujul $ax^2 + bx + c > 0$, kus $a \neq 0$. Märgi $>$ asemel võib võrratuses olla ka üks märkidest $\geq, <$ või $\leq$. Näiteks $2x^2 + 5x - 2 < 0$, $x^2 + 9 > 0$ ja $4x^2 + 15x \geq 0$. Ruutvõrratusi kujul $ax^2 + bx + c > 0$ $(\geq 0, < 0, \leq 0)$ nimetatakse mittetäielikeks ruutvõrratusteks, kui *b=0* või *c= 0* või *b=c=0*.

Ruutvõrratuse lahenduseeskiri (Lepmann *et al.*, 2011):

1) lihtsustada mõlemad pooled, koondada sarnased liikmed ja viia kõik liikmed vasakule poole
2) lahendada ruutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$ ehk leida funktsiooni nullkohad;
3) skitseerida funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik;
4) graafikult leida, millistes vahemikes on funktsioon positiivne, millistes negatiivne;
5) kirjutada välja vastus vastavalt võrratuse märgile.

Tiia Järve uuringu kontrolltööd sisaldasid täielikke ruutvõrratusi kujul $ax^2 + bx + c > 0$ (võrratusmärk erines) ja $a > 0$ või $a < 0$. Samuti oli igas kontrolltöös ka üks mittetäielik ruutvõrratus. Täielikke ruutvõrratusi lahendas õigesti 46% õpilastest ja mittetäielikke ruutvõrratusi 40%. (Järve, 1992)

Kui ruutvõrratuse ruutliikme kordaja oli negatiivne, siis lahendusetappide eksimusprotsendid olid järgmised:

1) vabanemine negatiivsest ruutliikme kordajast - 19%
2) nullkohtade leidmine - 20%
3) parabooli visandamine- 5%
4) vastuse väljakirjutamine- 10%

Suurimateks probleemideks olid jagamine negatiivse arvuga (ei muudetud võrratuse märki) ja ruutvõrrandi lahendamine ehk nullkohtade leidmine (Järve, 1992).

Kui ruutvõrratuse ruutliikme kordaja oli positiivne, siis selle lahendamisel eksisid õpilased vähem võrreldes ruutvõrratusega, mille ruutliikme kordaja oli negatiivne. 52% õpilastest lahendasid seda tüüpi võrratuse õigesti. Antud tüüpi ruutvõrratuse lahendamisel eristatakse kolme lahendusetappi, mis koos eksimusprotsentidega olid:

1) nullkohtade leidmine - 15%
2) parabooli visandamine - 15%
3) vastuse väljakirjutamine - 15%. (Järve, 1992)

Autor tõi välja, et raskusi valmistas ka nende ruutvõrratuste lahendamine, mille korral ruutvõrrandi lahendamisel diskriminant oli negatiivne. Eksiti nullkohtade leidmisel ja parabooli visandamisel. Kui diskriminant oli null, siis järeldati valesti, et nullkohad puuduvad. (Järve, 1992)

Mittetäielikke ruutvõrratusi lahendasid õigesti 40% õpilastest. Kui vabaliige oli null ehk võrratus kujul $ax^2 + bx$>0 , siis 53% õpilastest lahendas antud võrratuse õigesti. Suurimaks probleemiks oli sellisel juhul funktsiooni nullkohtade leidmine. (Järve, 1992)

Kui lineaarliige oli null ehk võrratus kujul $ax^2 + c > 0$, siis 56% õpilastest lahendas selle õigesti. Kusjuures eksiti rohkem siis, kui ruutliikme kordaja oli negatiivne. Ka antud juhul eksiti kõige enam nullkohtade leidmisel. Ühes kontrolltöös oli võrratus kujul $ax^2 < 0$ (ehk b=c=0), kus õpilased üritasid kohe vastust kirjutada, kuid tegid seejuures vigu. Õigesti lahendas seda tüüpi võrratuse 54% õpilastest ning suurimaks komistuskohaks oli jälle nullkohtade leidmine. (Järve, 1992)

1.1.6 Murdvõrratused

Võrratust, milles muutuja esineb murru nimetajas, nimetatakse murdvõrratuseks. Näiteks $\frac{x}{x-3} > \frac{2}{x+1}$ ja $\frac{2}{x+2} \leq 3$ on murdvõrratused, kuid võrratus $\frac{x+4}{3} > 2$ ei ole murdvõrratus. Murdvõrratuse lahendamisel viiakse kõik võrratuse liikmed vasakule poole võrratusmärki ning ühisele murrule. Murdvõrratuse üheks lahendusmeetodiks on lugeja ja nimetaja omavahel korrutada ja saadud võrratuse lahendamine intervallmeetodiga. Selle lahendusmeetodi puhul arvestame, et kahe avaldise jagatise ja korrutise positiivsuse (negatiivsuse) tingimused on täpselt samad, s.t.

$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow a \cdot b > 0$ (lugeja ja nimetaja on samamärgilised) ja

$\frac{a}{b} < 0 \quad \Leftrightarrow a \cdot b < 0$ (lugeja ja nimetaja on erimärgilised) (Lepmann *et al*., 2011).

Edasi leitakse vastava funktsiooni nullkohad ja määratakse nende kordsus, misjärel kantakse kõik nullkohad x-teljele. Nii tehes jaguneb arvtelg lõplikuks arvuks vahemikeks ehk intervallideks, millest igaühes funktsioon säilitab oma märgi “+” või “-”. Edasi tõmmatakse läbi nullkohtade abijoon, alustades paremalt poolt. Seda, kas abijoon algab ülevalt- või altpoolt x-telge, saab otsustada nii, et võtta kõige parempoolsest vahemikust üks arv ning arvutada funktsiooni väärtus. Kui väärtus on positiivne, alustatakse abijoont ülevalt poolt x-telge, ja kui negatiivne, siis alt. Seejuures abijoon lõikab x-telge, kui nullkoha kordsus on paarituarvuline, ning puudutab x-telge, kui nullkoht on paarisarvulise kordsusega. Saadud jooniselt leitakse võrratuse lahendid vastavalt võrratuse märgile. (Lepmann *et al*., 2011)

Mitterange võrratuse korral tuleb lisada tingimus, et nimetaja ei võrdu nulliga.

$$\frac{a}{b} \geq 0 \iff \begin{cases} a \cdot b \geq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

ja

$$\frac{a}{b} \leq 0 \iff \begin{cases} a \cdot b \leq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Edasi tuleb lahendada nagu range murdvõrratuse korral. Jooniselt lahendi väljakirjutamisel tuleb meeles pidada, et nimetaja ei võrdu nulliga, s.t. nimetajas oleva hulkliikme nullkohad ei kuulu lahendihulka.

Tiia Järve uuringu igas kontrolltöös leidus ka üks murdvõrratus. Õigesti lahendas murdvõrratusi 37% õpilastest. Kahes kontrolltöös oli murdvõrratus, mille parem pool oli nullist erinev naturaalarv, ning selliseid murdvõrratusi lahendas vigadeta 22% õpilastest. Kahes ülejäänud kontrolltöös oli murdvõrratus, mille parem pool oli null, neid lahendas vigadeta 60% õpilastest. Seega õpilaste jaoks on lihtsamad murdvõrratused, mille paremal pool on 0. Õpilased kasutasid uuringu põhjal murdvõrratuste lahendamiseks kolme erinevat lahendusmeetodit: võrratusesüsteemide koostamine, kasutades murru negatiivsuse/positiivsuse tingimust; 2) korrutiseks taandamine; 3) intervallmeetod. (Järve, 1992)

Murdvõrratuse lahendamisel tehtud vead (koos eksimusprotsendiga) (Järve, 1992):

1) Liikmete viimine ühelt poolt võrratusmärki teisele poole ja koondamine (26%)
2) nullkohtade leidmine (5%)
3) parabooli visandamine (1%)
4) võrratusesüsteemide lahendamine (1%)
5) murru negatiivsuse tingimuse rakendamine (11%)
6) murru positiivsuse tingimuse rakendamine (3%)
7) mitterange võrratuse lahendihulga väljakirjutamine (2%)
8) otsustus $cx^2 + d > 0$ (6%)
9) võrratuse $ax + b < 0$ lahendamine (1%)
10) vastuse väljakirjutamine (9%)

Suurimateks vigadeks olid liikmete viimine ühelt poolt võrratusmärki teisele poole ja koondamine, murru negatiivsuse tingimuse mittetundmine ja lõppvastuse väljakirjutamine (Järve, 1992).

1.2 Õppematerjali koostamise nõuded

Õppematerjali koostamise üks levinumaid mudeleid on ADDIE, mis koosneb järgmisest viiest etapist (Villems *et al*., 2014-2015):

- **analüüs** (ingl k *analyse*) – vajaduste, sihtrühma, sisu ja võimaluste analüüs (Villems *et al*., 2014-2015);
- **kavandamine** (ingl k *design*) – eesmärkide ja õpitulemuste sõnastamine, õpitulemuste saavutamiseks sobivate õpetamismeetodite valimine, õppematerjali, selle sisu struktuuri ning õppeprotsessi kava koostamine (Villems *et al*., 2014-2015);
- **väljatöötamine** (ingl k *development*) – sisu loomine, tehniline teostus ja testimine. Etapi lõpuks on valmis ja avalikustatud töökorras õppematerjal (Villems *et al*., 2014-2015);
- **kasutamine** (ingl k *implementation*) – õppija kasutab õppematerjali iseseisvalt või juhendatud õppeprotsessis (Villems *et al*., 2014-2015);
- **hinnangu andmine** (ingl k *evaluation*) – õppematerjali kohta tagasiside saamine, et saada ideid, kuidas õppematerjali paremaks muuta (Villems *et al*., 2014-2015).

Õppematerjali luues on oluline järgida kvaliteedipõhimõtteid, sest siis on võimalik tõsta õppetöö kvaliteeti ja toetada õpitulemuste saavutamist. Õppijakeskne õppematerjal aitab luua ja hoida õpilastel õpimotivatsiooni (Villems *et al*., 2014-2015).

Tehnoloogia kiire arengu tõttu kasutatakse õppimiseks järjest rohkem tehnoloogia abi. Digitaalse õppematerjali suureks eeliseks on õppematerjali kerge kohandamine vastavalt õpilase vajadustele ning sellel puuduvad aja, ruumi ja koha piirangud. Arvestama peab, et lihtsalt tehnoloogia kasutamine õppimisel ei garanteeri efektiivsuse suurenemist. Digitaalse õppematerjali sisu peab olema korrektne ja struktureeritud ning sisaldama erinevaid tehnoloogiapõhiseid vahendeid efektiivse õpikeskkonna loomiseks. (Zwart, Luit, Noroozi, & Goei, 2017)

Õppematerjali luues peab valima teksti suuruse, kirjastiili, paigutuse ja värvi (sh taustavärvi) hoolikalt võttes arvesse ka sihtrühma vanust, et teksti lugemine oleks ladus (Õppekirjandusele esitatavad…, 2016). Liiga pika või keerulise lauseehitusega teksti eirab lugeja ka siis, kui see sisaldab olulist informatsiooni. Visuaalselt atraktiivne õppematerjal suurendab aga õppijate soovi antud vahendit kasutada. Samuti tuleb vältida liiga pikki heli- või videoklippe ning arvestada õppijate arvutist lugemise või vaatamise harjumustega. Lugemise lihtsustamiseks on vajalik valida teksti ja tausta värvid võimalikult kontrastsed, sobivaimaks peetakse musta teksti kasutamist valgel taustal. (Villems *et al*., 2014-2015)

Õppematerjali hindamiseks on loodud erinevaid mudeleid, millest üks on LORI-mudel (ingl k *Learning Object Review Instrument*). LORI-mudeli abil on võimalik hinnata õppematerjali erinevaid aspekte (Villems *et al*., 2014-2015):

- **õppimist toetav** - õppematerjal on loodud toetama õppijate arusaamist, oskuste arendamist ja teadmiste omandamist, olles samal ajal kohandatud õppijate vajaduste ja õppeprotsessi eesmärkidega;
- **sisult kvaliteetne** - õppematerjal on sisuliselt tervik, seal olevad faktid on tõepärased, informatsioon ja ülesanded on esitatud sihtrühmale vastavalt; keeleliselt korrektne;
- **motiveeriv** - õppematerjal tekitab huvi, kaasab õppijaid, suurendab soovi õppida ja saavutada õpieesmärke ning vastab sihtrühma vajadustele;
- **kohandatav** - sobilik kasutamiseks erinevates õpiolukordades ning erinevate õppuritega;
- **interaktiivne** - õppija saab ise juhtida õppematerjali kasutamist ja saada tagasisidet oma tegevusele;
- **autoriõigusi järgiv** - õppematerjal järgib autoriõiguse seadust (nt sisaldab autori(te) kohta informatsiooni, teiste autorite poolt loodud materjalide kasutamise korral on viidatud neile korrektselt);
- **kasutajasõbralik** - õppematerjali ülesehitus on visuaalselt köitev, intuitiivselt kasutatav ning sobilik ka erivajadustega õppurile;
- **tehniliselt korrektne ja ühilduv** - õppematerjal on tehniliselt töökorras ja võimalik kasutada erinevate tarkvarade ja seadmetega;
- **leitav** - õppematerjal on kättesaadav inimestele ja olemas on metaandmed.

Õppematerjali peab esimesena testima autor, et olla kindel selle korrasolekus. Esmalt tuleb kontrollida, kas kõik olemasolevad vahendid avanevad levinumate veebilehitsejatega (Firefox, Mozilla, Chrome, Internet Explorer jt) ning erinevate seadmetega (lisaks arvutile nutitelefon, tahvelarvuti jm). Edasi testivad kolleegid, kes oskavad hinnata sisu — kas materjal on ainealaselt ja keeleliselt korrektne ning kas õppijad saavutavad seda kasutades õpitulemused. Viimasena testivad õppematerjali ka sihtrühm ehk õppijad. Õppematerjali kohta saab tagasisidet koguda tagasisideküsimustiku abil. Kui tulemus on üle 70%, siis võib õppematerjali pidada kvaliteetseks. Küsimustiku eesmärk on anda õppematerjali autorile tagasisidet, mis on hästi ja mida tuleks muuta. (Villems *et al*., 2014-2015)

1.3 Desmose programmi tutvustus

Desmos on Desmos Studio poolt loodud matemaatika õppimist toetav programm, mida kasutab igal aastal enam kui 75 miljonit inimest üle maailma. Desmose programmi on võimalik kasutada nii veebiversioonina kui ka osaliselt allalaetud äpina ning see võimaldab kasutada erinevaid matemaatika tööriistu - graafikakalkulaator, teaduslik kalkulaator, nelja-funktsiooniline kalkulaator, maatrikskalkulaator, geomeetria tööriist ja harjuta kontrolltööks. Desmose eesmärgiks on aidata kõigil soovijatel õppida matemaatikat ja lõimida matemaatikat erinevate ainetega (Desmos, 2023).

Desmose programm on väga kasutajasõbralik ja kasutatav erinevatel platvormidel (McCulloch *et al*., 2018). Õpetajad saavad kasutada keskkonda nimega teacher.Desmos, kus on juba olemas palju tegevusi matemaatika õppimiseks. Olemasolevaid õppematerjale on võimalik ka soovi korral muuta või luua täiesti uusi. Suurem osa materjalidest on inglise keeles, kuid leidub ka eestikeelseid. Osad on tõlgitud ingliskeelsest tegevusest ning teised eestlaste poolt loodud. (Desmos, 2023) Õpetajad väidavad, et kasutavad oma klassis Desmose keskkonda, sest nende arvates võib Desmose kasutamine õppetöös aidata õpilastel matemaatika teemasid paremini mõista, õppuritel on meeldiv antud keskkonda kasutada ja nad saavad kohest tagasisidet oma vastustele (McCulloch *et al*., 2018).

Õpilased saavad tegevustes visandada oma ideid, muuta geomeetrilisi kujundeid, vastuseid esitada tekstina (lühivastus või arutluskäik) või arvuga, kaarte ühendada jpt. Suure eelisena saab õpetaja jälgida reaalajas õppurite edasijõudmist, mida õpilased teevad ja kus slaidil probleem tekib, seeläbi varakult sekkuda ja aidata mahajääjaid. Tunni lõpus saab õpetaja koos õpilastega analüüsida läbi probleeme tekitanud kohad. Õpetaja saab juba tundi planeerides seada pause slaididele, et tempo oleks ühtlane ja õpetaja saaks vajalikke kohti enne seletada nii, et kõik kuulavad. (Desmos, 2023)

2. Töö eesmärk ja uurimisküsimused

Gümnaasiumi matemaatikas on võrratused olulisel kohal. Eksamil lahendatakse nii erinevaid võrratusi kui ka võrratuse süsteeme või on vajalik funktsiooni uurimisel koostada ja lahendada võrratus. Aastal 2022 oli kitsa matemaatika riigieksamil vaja lahendada lineaarvõrratuste süsteem, kuid keskmine punktide arv oli kaks punkti viiest võimalikust punktist. Sama aasta laia matemaatika riigieksami üheksas ülesanne koosnes kahest osast, kus viis punkti andis ruutvõrratuse ja murdvõrratuse süsteemi lahendamine. Keskmiselt saadi 3,2 punkti viiest võimalikust punktist. (Arismaa, 2023) Õpilastel on keeruline leida kiirelt tasuta olevaid interaktiivseid õppematerjale võrratuste kordamiseks, seega otsustas autor magistritöö raames luua vajalikud õppematerjalid.

Magistritöö eesmärk on koostada lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste iseseisvaks kordamiseks sobivad kompaktsed digitaalsed õppematerjalid ning selgitada välja õpetajate hinnangud loodud materjalidele. Uuringuga leitakse vastused järgnevatele küsimustele:

1) Milline on õpetajate tagasiside loodud õppematerjalidele toetudes LORI hindamismudelile?
2) Millised on õpetajate ettepanekud õppematerjalide parendamiseks?

3. Metoodika

Magistritöö eesmärgist ja uurimisküsimustest lähtuvalt valiti uurimismeetodiks tegevusuuring. Tegevusuuring on teaduslik uuring, mis defineeritakse sotsiaalsete olukordade uurimisena, ning seega rakenduvad sellele samad üldpõhimõtted- süsteemsus ja täpsus (Löfström, 2011). Uuringu läbiviijaks on eelkõige praktikust uurija (näiteks õpetaja) ning eesmärgiks on lahendada õpetamisega seotud probleeme (Brighton & Moon, 2007), parandada teatud (erialase) tegevuse kvaliteeti ja kasvatada oma teadmiste pagasit (Löfström, 2011). Tegevusuuring on olemuselt tsükliline ning mille täistsükkel koosneb neljast etapist: planeerimine (*Diagnosis*), tegutsemine (*Action Planning*), vaatlemine (*Action Taking*) ja analüüsimine (*Action Evaluation*) (Nunes & McPherson, 2003).

Käesoleva töö raames viidi läbi tegevusuuringu täistsükkel. Esimeseks etapiks on planeerimine. Magistritöö esimeses peatükis kirjeldati võrratuste vajalikkust ja õpilaste poolt enim tehtavaid vigu, lisaks anti ülevaade õppematerjalide koostamise nõuetest ning digitaalsest õppekeskkonnast Desmos. Teiseks etapiks on tegutsemine. Tuginedes ADDIE (*analysis*, *design*, *development*, *implementation*) mudelile analüüsis autor materjalide vajalikkust, valis sihtrühma ning otsustas, millised peavad olema loodavad materjalid. Õppematerjalide koostamine toimus juuni-juuli 2023. Tegevusuuringu kolmandaks etapiks on vaatlemine, mille eesmärgiks on koguda tagasisidet koostatud õppematerjalile. Autor koostas küsitluse matemaatikaõpetajatele, kes valiti mugavusvalimi põhimõttel. Küsimustikule vastamine toimus augustis 2023. Neljandaks ehk viimaseks etapiks on tulemuste analüüs, mis

toimus samuti augustis 2023.

3.1 Õppematerjalide koostamine toetudes ADDIE mudelile

ADDIE mudeli esimeses ehk analüüsi etapis tuleb uurida, mida sihtrühm ehk õpilased vajavad ja välja mõelda, mida tegema hakatakse (Villems *et al*., 2014-2015). Autor analüüsis enda kogemusi õpetajana ning rääkis erinevate matemaatikaõpetajatega, kes õpetavad gümnaasiumis. Õpetajad tõid välja, et gümnaasiumi õpilastele on võrratused keeruline teema, kuna aetakse võrrandite ja võrratuste lahendusmeetodit segamini, tehakse arvutusvigu, unustatakse negatiivse arvuga jagamisel muuta võrratusmärki. Need on samad vead, mis on tulnud välja erinevates uuringutes ja analüüsides (Järve, 1992; Tsamir & Bazzini, 2004; Prestage & Perks, 2005; Arismaa, 2023). Õppematerjalid koostati teacher.Desmos keskkonnas ning nende eesmärk on aidata õpilastel meelde tuletada võrratuste lahendamine.

Mudeli teiseses ehk kavandamise etapis tuleb kirja panna, mis on loodava õppematerjali eesmärk ja õpitulemused, planeerida õppematerjali sisu ja meedia tüübid, et saavutada kirja pandud eesmärk ja õpitulemused (Villems *et al*., 2014-2015). Plaan oli luua kolm õppematerjali lineaarvõrratuste, ruutvõrratuste ja murdvõrratuste meeldetuletamiseks. Õppematerjalide eesmärgid: 1) õpilane oskab lahendada lineaarvõrratusi, ruutvõrratusi ja murdvõrratusi, 2) õpilane oskab kasutada Desmos keskkonda.

Kolmandaks etapiks on väljatöötamine. Antud etapi eesmärgiks on luua ja avalikustada töökorras õppematerjal (Villems *et al*., 2014-2015). Õppematerjalide koostamisel lähtuti LORI-mudelis kirjeldatud omadustest ning kokku loodi kolm erinevat õppematerjali. Autor konsulteeris juhendajaga, kellega koos katsetati, kas kõik töötab nii nagu plaanis oli.

Neljas etapp on on hinnangu andmine, mille eesmärk on saada ideid õppematerjali parendamiseks (Villems *et al*., 2014-2015). Tagasisidet küsiti matemaatikaõpetajatelt. Selleks loodi Google Forms abil 20 küsimusest koosnev küsimustik, mis jagunes kaheks osaks: taustandmed ja tagasiside õppematerjalidele (vaata lisa 1).

Viiendaks ehk viimaseks etapiks õppematerjali kasutamine sihtrühmaga, kuid antud magistritöös jäi see etapp vahele, sest töö kirjutamine toimus suvevaheajal.

3.2 Valim

Magistritöö eesmärkide saavutamiseks ja uurimisküsimustele vastuse saamiseks pöörduti eriala ekspertide ehk gümnaasiumis matemaatikat õpetavate õpetajate poole e-maili teel. Uurimuse läbiviimiseks tuleb uuritavatele selgitada, mida uurimises osalemine tähendab, teavitada uurimuse käigust ja eesmärkidest ning saada nõusolek osalemiseks (Hirsjärvi, Remes, & Sajavaara, 2007). Kirjas oli pöördumise põhjus ja lingid õppematerjalidele ning küsimustikule. Õpetajatele selgitati, et vastamine on anonüümne ja uurimistulemusi kasutatakse ainult käesoleva töö raames.

Keeruline oli saada tagasisidet õpetajatelt seoses suvepuhkuse lõpuga. Kutse õppematerjalid läbi vaadata ja tagasiside andmiseks saadeti 25 õpetajale, kes valiti mugavusvalimi põhimõttel. Autor pöördus esmalt oma tutvusringkonnas olevate õpetajate poole. Valimi suurendamiseks otsis autor üle Eesti erinevate gümnaasiumide kodulehekülgedelt matemaatikaõpetajate kontakte, pöördudes eelkõige nende poole, kelle digitaalseid õppematerjale on varasemalt kasutanud. Viis õpetajat nõustus uurimuses osalema. Küsimustiku esimene osa sisaldas viit küsimust õpetajate taustainfo kohta.

Kõik viis vastajat olid naisõpetajad (100%). Üks oli vanuses 21-30 aastat, üks 41-50 aastat, kaks 51-60 aastat ja üks 61-70 aastat. Staaž matemaatikaõpetajana oli ühel 6-10 aastat, kahel õpetajal 21-30 aastat ja kahel 31-40 aastat, seega uurimuses osalesid kogenud õpetajad. Kõik vastajad õpetavad või on õpetanud matemaatikat gümnaasiumis. Kolm õpetajat on loonud Desmose keskkonnas tegevusi ja kaks on vaadanud keskkonda, kuid ei ole kasutanud.

3.3 Õppematerjalide tagasiside küsimustik

Küsimustiku teine osa sisaldas õppematerjalide kohta 15 küsimust, mille loomisel lähtuti LORI-mudelis välja toodud omadustest. Õpetajate hinnanguid analüüsiti kolme õppematerjali kohta kokku. Küsimused olid kinnised või avatud. Kinniseid küsimusi oli kaheksa ning nende eesmärk oli saada hinnangud õppematerjalide kohta. Avatuid küsimusi oli seitse ja nende kaudu sooviti täpsustusi hinnangute kohta ning ettepanekuid õppematerjali paremaks muutmiseks.

4. Õpetajate hinnangud õppematerjalidele

Järgnevalt esitatakse õpetajate hinnangud loodud õppematerjalidele.

Uurimuses osales viis õpetajat. Ülesannete valikul jälgis autor soovitust tutvustada õpilastele erineva kuju ja lahendihulgaga võrratusi (Tsamir & Bazzini, 2004). Esimesena paluti õpetajatel hinnata, kuidas õppematerjalid sobivad gümnaasiumi õpilastele võrratuste iseseisvaks kordamiseks viiepalliskaalal (1- ei sobi üldse, 5- sobivad väga hästi). Kõik viis õpetajat vastasid küsimusele, et materjalid sobivad väga hästi. Üks õpetaja põhjendas oma valikut: "*Hõlmab erinevaid võrratusi, ka selliseid näiteks kus vastuseks tuleb ainult üks arv jne*". Teine õpetaja kirjutas: "*Mitmekesine ja vaheldusrikas. Kõik võrratusetüübid esindatud*." Kolmas tõi välja: "*Õpilasel on võimalus proovida, katsetada ja jõuda õige tulemuseni, õpetajal on samaaegselt võimalus jälgida õpilase tegevusi ja tulemust.*" Neljas kirjutas: "*Antud töös on selgitav teooria ja harjutusülesanded tasakaalus*." Teisena küsiti, kas õppematerjalis leidub matemaatilisi vigu. Sellele küsimusele vastasid kõik õpetajad vastusega "Ei". Üks õpetaja märkis, et kiirel vaatlusel ei märganud vigu. Kõik õpetajad hindasid, et õppematerjalid on parasjagu pikad.

Järgmisena paluti õpetajatel hinnata, kui hästi aitavad õppematerjalid võrratusi korrata. Kõik õpetajad vastasid, et materjalid aitavad väga hästi. Üks õpetaja põhjendas: "*Selgitav teooria aitab ununenud osa meenutada ja harjutusülesanded kinnistavad.*" Õpetajatel paluti hinnata, kui arusaadav oli õppematerjalide ülesehitus. Neli õpetajat vastasid sellele küsimusele, et said hästi aru. Üks õpetaja vastas, et osaliselt olid arusaadavad, ning arvas, et mõned slaidid olid alguses veidi liiga pika juhisega. Teine õpetaja kirjutas: "*Esimene võrratus võttis aega, aga seda seepärast, et polnud Desmosega tuttav*." Õpetajatel paluti ka hinnata, kui arusaadavad olid slaididel olevad ülesanded. Kolme õpetaja arvates olid väga arusaadavad, kahe arvates osaliselt arusaadavad. Ühe õpetaja jaoks tekitas küsimusi, et lineaarvõrratuste slaididel võis vastuseid kirjutada võrratuse märkidega, aga teistel slaididel eeldati vastuseid hulkadena. Kolm vastajat ei leidnud õppematerjalides kirjavigu, kuid kaks õpetajat leidsid mõned kirjavead. Kirjavead leiti Desmose poolt automaatselt loodud õpetaja juhendist, kuid neid töö autor parandada ei saa.

Kujunduses järgis autor soovitust valida teksti ja tausta värvid võimalikult kontrastsed, jättes slaidide tausta valgeks ja teksti mustaks, et oleks lihtsam lugeda (Villems *et al.*, 2014-2015). Õppematerjalide kujundus oli nelja õpetaja arvates väga sobiv. Ühe õpetaja arvates oli kujundus üldiselt lihtne ja ei olnud ülepakutud. Teine õpetaja kirjutas: "*Slaidid olid loogiliselt ja arusaadavalt paigutatud.*" Kolmas õpetaja arvas: "*Ülesanded olid järjestatud kergemast* *raskemani, lisatud näitematerjal ja õppevideod.*" Neljas õpetaja kirjutas, et reaalarvu piirkondade tabel ei avanenud suuremalt täisekraani vaates. See probleem eksisteerib, kui tegevust vaadata täisekraanil õpilase eelvaates. Kui õpetaja määrab tegevuse klassile, siis õpilastel avaneb tabel korrektselt.

Üks õpetaja uuris, kas on sobiv, kui õpilane kirjutab ruutvõrratuste või murdvõrratuste tegevustes vastused võrratuse märkidega (mitte hulkadena), kuna õpilased eelistavad vastuseid nii kirjutada. See on sobiv võimalus, kui õpetaja või õpilane oskab kontrollida vastuse õigsust, kõrvutades võrratuse märgiga kirjutatud tulemust etteantud vastusega, mis kasutab hulgateooria sümboleid. Samuti on võimalik kõigil õpetajatel soovi korral muuta slaide nii, et automaatkontroll annab tagasisidet võrratusmärgiga kirjutatud vastustele.

5. Arutelu

Käesoleva magistritöös koostati lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste kordamiseks sobivad digitaalsed õppematerjalid ning selgitati välja õpetajate hinnangud loodud materjalidele. Tagasiside saamiseks pöörduti 25 õpetaja poole, kuid suvevaheaja tõttu oli keeruline leida õpetajaid, kellel oli võimalus materjale läbi lahendada ja küsitlusele vastata. Koostatud õppematerjalide sisu ja vastavust nõuetele hindasid 5 matemaatikaõpetajat.

Õppematerjal peab olema õppimist toetav- õpilast motiveeriv, sisult kvaliteetne ja sobiva mahuga, et õpilane saavutaks seda läbides õpieesmärgid (Villems, *et al*., 2014-2015). Õppematerjalid loodi keskkonnas Teacher.Desmos ning valdkonna ekspertide poole pöörduti e-maili teel, kus tutvustati uurimuse eesmärke ning kinnitati, et vastamine on anonüümne ja vastuseid kasutatakse ainult käesoleva töö raames. Tagasisideküsitlus koostati Google Forms vahendusel. Õpetajatete küsitlus koosnes 20 küsimusest, mis koosnes kahest osast. Esimeses osas oli 5 küsimust õpetajate taustainfo kohta. Teises osas oli 15 küsimust, mille eesmärgiks oli saada tagasiside loodud õppematerjalide sobivuse kohta võrratuste kordamiseks ning ettepanekuid materjalide paremaks muutmiseks.

Esimesele uurimisküsimusele "Milline on õpetajate tagasiside loodud õppematerjalidele toetudes LORI hindamismudelile?" vastuse leidmiseks analüüsis autor küsitluse teise osa vastuseid. Õppematerjalid peavad toetama õpieesmärkide ja õpitulemuste saavutamist (Villems, *et al*., 2014-2015). Õpetajate arvates aitab slaididel olev teooria meenutada võrratuste kohta ununenud osa ning harjutusülesanded sobivad teema kinnistamiseks. Õpilased saavutavad loodud õppematerjale läbides õpieesmärgid ehk tuletavad meelde võrratuste lahendamise reeglid. Õpilastel on võimalik koheselt saada tagasiside, kas nende sisestatud vastus on õige, mis on iseseisvaks lahendamiseks mõeldud õppematerjalide juures oluline. Õppematerjalid on sobilikud gümnaasiumi õpilastele ja ainealaselt korrektsed - õpetajad ei leidnud matemaatilisi vigu. Materjalide kujundus on lihtne- must tekst valgel taustal, et lugemine oleks õpilastele lihtsam. Õppematerjalidele esitatavate nõuete kohaselt peab teksti suuruse ja värvi valimisel arvestama sihtrühma (Õppekirjandusele esitatavad…, 2016). Õpetajate hinnangul on kujundus sobilik õppematerjalile. Tehniliselt olid õppematerjalid korras ning ülesannetele saadi korrektsed vastused.

Teisele uurimisküsimusele "Millised on õpetajate ettepanekud õppematerjalide parendamiseks?" vastuse leidmiseks analüüsis autor õpetajate ettepanekuid.

Muudatusettepanekud:

- Lisada nupp, mis viitab reaalarvu piirkondade tabeli suurendamisele
  - Nupp on juba olemas, kuid soovitus vajadusel sellele vajutada lisati “Abi õpilasele”.
- Soovitati kuhugi märkida, et kümnendmurrus on koma asemel vaja kirjutada punkt.
  - Soovitus oli olemas “Abi õpilasele”.
- Murdvõrratuste viimasel slaidil, kus peab lahendihulga järgi looma ise sobiva võrratuse, oli joonisel halvasti aru saada, milline oli lahendihulk.
  - Joonis sai parandatud.
- Lineaarvõrratuste slaididel võiks olla erinevat tüüpi ülesandeid (näiteks, leidke vähim või suurim täisarv lahendipiirkonnast)
  - Lisati slaid ülesandega “Leidke suurim täisarv, mis rahuldab võrratust $-5x - 7 > 0$.”
- Ruutvõrratuste tegevusele lisada mittetäielikke ruutvõrratusi
  - Lisati mittetäielik ruutvõrratus $3x - x^2 \geq 0$.

Erinevat tüüpi ülesandeid saab iga õpetaja soovi korral lisada täpselt selliseid nagu soovib, kopeerides sarnase ülesande slaidi, seega rohkem ülesandeid peale kahe (esimene ülesanne: suurim täisarv lahendipiirkonnast lineaarvõrratuste tegevuses; teine ülesanne: mittetäieliku ruutvõrratuse lahendamine ruutvõrratuste tegevuses) autor ei lisanud.

Õppematerjalid laeti üles keskkonda E-koolikott, et need oleksid kõigile õpetajatele ja õpilastele soovi korral leitavad ja kasutatavad. Leitavad on need veebilehel: https://e-koolikott.ee/et/oppematerjal/33318-Lineaar-ruut-ja-murdvorratuste-kordamise-oppematerjalid-Desmose-keskkonnas

Töö autor leiab, et materjalide loomise suurimaks probleemiks oli ajaline piirang. Õppeaja lõppemise ja töiste kohustuste tõttu lükkus magistritöö valmimine suvepuhkusele. Desmose keskkonnaga põhjalikuks tutvumiseks jäi aeg liiga lühikeseks. Suvel oli ka ekspertide arvamust keeruline saada puhkuste tõttu, mistõttu jäi tagasisidet ja muudatusettepanekuid väheks.

Käesoleva töö raames koostatud õppematerjalid on rakendatavad võrratuste kordamiseks nii klassis kui iseseisvalt ning iga õpetaja saab neid vastavalt oma soovidele ja vajadustele muuta. Töö autor plaanib oma õpilastega loodud tegevusi katsetada ning edasi arendada.

Edasistes uurimustes soovitab autor analüüsida põhjalikult võrratuste lahendamisoskust- ja võimalusi ning selle põhjal koostada uusi ja põhjalikumaid interaktiivseid õppematerjale. Samuti on kasulik lisada võimalus valida, kummal viisil (võrratuse märgi või hulgateooria sümbolitega) õpilane võrratuse vastust sisestada soovib.

Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärk oli koostada lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste kordamiseks sobivad digitaalsed õppematerjalid ning selgitada välja õpetajate hinnangud loodud materjalidele. Eesmärkidest lähtuvalt kavandati tegevusuuring. Magistritöö teoreetilises osas kirjeldati võrratuste vajalikkust, soovitusi teema õpetamisel, lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste lahendamisel tehtavaid vigu, tutvustati programmi Desmos ning õppematerjali koostamise ja hindamise põhimõtteid.

Tegevusuuringu raames valmisid kompaktsed digitaalsed õppematerjalid lineaar-, ruut- ja murdvõrratuste kordamiseks. Koostatud õppematerjalide sisu ja vastavust nõuetele hindasid erialaspetsialistid. Õpetajate soovituste põhjal täiendas autor õppematerjale ning lisas need keskkonda E-koolikott.

Kasutatud kirjandus

Arismaa, H. (2023). *Matemaatika riigieksami analüüs 2022*. Külastatud aadressil: https://projektid.edu.ee/pages/viewpage.action?pageId=142575079

Bicer, A., Capraro, R. M., Capraro, M. M. (2014). *Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

Brighton, C. M., & Moon, T. R. (2007). *Action Research-by-Step: A Tool for Educators to Change Their Worlds. Gifted Child Today, 30(2), 23–27*. Külastatud aadressil: https://journals.sagepub.com/doi/10.4219/gct-2007-28

Desmos. (2023) Külastatud aadressil: https://www.desmos.com/about?lang=et

E-koolikott. (2023, August 5). Külastatud aadressil: *Õppematerjalid*: https://e-koolikott.ee/et

Gümnaasiumi riiklik õppekava Lisa 5. (2011). Külastatud aadressil: https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/1080/3202/3006/18m_gym_lisa5.pdf#

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities.* Doktori dissertatsioon.

Hirsjärvi, S., Remes, P., Sajavaara, P. (2007). *Uuri ja kirjuta*. Tallinn, Medicina.

Järve, T. (1992). *Võrratuste käsitlus koolis.* Diplomitöö.

Kaldaru, H. (2006). *Mikroökonoomika*. Tartu Ülikooli Kirjastus.

Kikas, A. (1992). *Lineaarvõrratused ja graafiline planeerimine koolimatemaatikas*. Diplomitöö

Koolieelse lasteasutuse riiklik õppekava. (2011). Külastatud aadressil: https://www.riigiteataja.ee/akt/13351772

Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2011). *Matemaatika 10. klassile.* Koolibri

Löfström, E. (2011). *Tegevusuuringu käsiraamat*. Tallinn: Archimedes.

McCulloch, A.W., Hollebrands, K., Lee, H., Harrison, T., & Mutlu, A. (2018). *Factors that influence secondary mathematics teachers' integration of technology in mathematics lessons.* Computers & Education, 123, 26–40.

Nunes, M. B., & McPherson, M. (2003). *An Action Research Model for the Management of Change in Continuing Professional Distance Education*. Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences, 2(1), 1–6. doi: 10.11120/ital.2003.02010003

Opiq. (2023, August 5). Külastatud aadressil: https://www.opiq.ee/

Põhikooli riiklik õppekava Lisa 3. (2011). Külastatud aadressil: https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/1290/8201/4018/141m%20lisa3.pdf#

Prestage, S., Perks, P. (2005). *Inequalities and paper hats*. Mathematics Teaching, 193, 31-33.

Reinup, R. (2019). Väike algebraraamat. Maurus Kirjastus.

Roosaare, J. (*s.a*) *Lineaarne planeerimine.* Tartu Ülikool. Vaadatud 5.08.2023 http://www.geo.ut.ee/kartool/geoinfo/SDSS2chp.pdf

TaskuTark (2023, August 5). Külastatud aadressil: https://www.taskutark.ee/

Tsamir, P., Bazzini, L. (2004). *Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol 35, 793-812.

Usiskin, Z. (1995). *Why Is Algebra Important to Learn.* American Educator, 30-37.

Veelmaa, A. (2023). Külastatud aadressil: https://www.youtube.com/@allarv/videos

Villems, A., Aluoja, L., Pilt, L., Naulainen, M.-M., Kusmin, M., Rogalevitš, V., & Tokko, U. (2014-2015) *Digitaalse õppematerjali loomise soovitused*. Külastatud aadressil: https://oppevara.edu.ee/kvaliteet/

Zwart, D. P., Luit, J. E. H. V., Noroozi, O., & Goei, S. L. (2017). *The effects of digital learning material on students' mathematics learning in vocational education.* Cogent Education, 4(1). doi: 10.1080/2331186x.2017.1313581

Õppekirjandusele esitatavad nõuded, õppekirjanduse retsenseerimisele ja retsensentidele esitatavad miinimumnõuded ning riigi poolt tagatava minimaalse õppekirjanduse liigid klassiti ja õppeaineti (2016). Riigi teataja I, 29.03.2016, 1. Külastatud aadressil https://www.riigiteataja.ee/akt/129032016001

Lisa 1. Küsimustik õpetajale

Lugupeetud õpetaja!

Olen 2. kursuse Tartu Ülikooli Matemaatika ja statistika instituudi tudeng Ave Pošlin, kes õpib matemaatika- ja informaatikaõpetajaks. Pöördun Teie poole seoses enda magistritööga. Minu magistritöö raames olen loonud digitaalsed õppematerjalid gümnaasiumi õpilastele võrratuste kordamiseks Desmose keskkonnas. Antud küsimustiku abil soovin saada tagasisidet koostatud õppematerjalidele. Küsimustiku vastuseid kasutatakse ainult minu magistritöös ja õppematerjalide parendamise jaoks. Vastamine on anonüümne.

Õppematerjalid:

- lineaarvõrratused: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/649bdc34a7f9622c00cf51f2?lang=et
- ruutvõrratused: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/649c82b960ca957c7a5e8f41?lang=et
- murdvõrratused: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/63ebe955357c97511c510fd0?lang=et

Tagasisideküsitlus: https://forms.gle/acuDm9zodYbDwgf5A

Olen väga tänulik, kui nõustute valminud õppematerjale läbi lahendama ning andma tagasisidet.

Kui tekib küsimusi, siis kirjutage palun minu e-mailile.

Ette tänades

Ave Pošlin

matemaatika- ja informaatikaõpetaja õppekava magistrant

aveposlin@gmail.com

Taustandmed	
Sugu	Naine Mees
Vanus	kuni 20- aastane 21-30- aastane 31-40- aastane 41-50- aastane 51-60- aastane 61-70- aastane üle 71- aastane
Staaž matemaatikaõpetajana	kuni 5 aastat 6-10 11-20 21-30 31-40 41-...
Kas õpetate või olete õpetanud matemaatikat gümnaasiumis?	Jah Ei
Milline on teie kogemus Desmose keskkonnaga?	Olen loonud Desmose tegevusi Olen kasutanud teiste loodud tegevusi Olen vaadanud, kuid ei ole kasutanud Ei ole Desmosega kokku puutunud

Õppematerjalide tagasiside	
Hinnake, kuidas õppematerjalid sobivad gümnaasiumi õpilastele võrratuste iseseisvaks kordamiseks.	Ei sobi üldse 1, 2, 3, 4, 5 Sobivad väga hästi
Palun põhjendage oma vastus.	
Kas õppematerjalis leidub matemaatilisi vigu?	Jah Ei
Kui vastasite jah, siis palun täpsustage, kus viga/ vead olid.	
Õppematerjalide pikkus on	liiga lühike parasjagu liiga pikk
Kui hästi aitavad õppematerjalid võrratusi korrata?	Ei aita üldse 1, 2, 3, 4, 5 Aitavad väga hästi
Palun põhjendage	
Kui arusaadav olid õppematerjalide ülesehitus?	Ei saanud üldse aru 1, 2, 3, 4, 5 Sain hästi aru
Palun põhjendage, kui oli midagi arusaamatut.	
Kui arusaadavad olid ülesanded slaididel?	Ei saanud üldse aru 1, 2, 3, 4, 5 Sain hästi aru
Palun põhjendage, kui oli midagi	

arusaamatut.	
Kas leidus kirjavigu?	Leidus väga palju kirjavigu Leidusid mõned kirjavead Ei jäänud silma
Hinnake õppematerjalide kujundust	Ebasobiv 1, 2, 3, 4, 5 Sobiv
Palun põhjendage oma vastust.	
Milliseid ettepanekuid teeksite õppematerjalide parendamiseks?	

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ave Pošlin,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Võrratuste kordamiseks õppematerjalide loomine ning õpetajate tagasiside loodud õppematerjalidele, mille juhendaja on Sirje Pihlap, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Ave Pošlin

23.08.2023