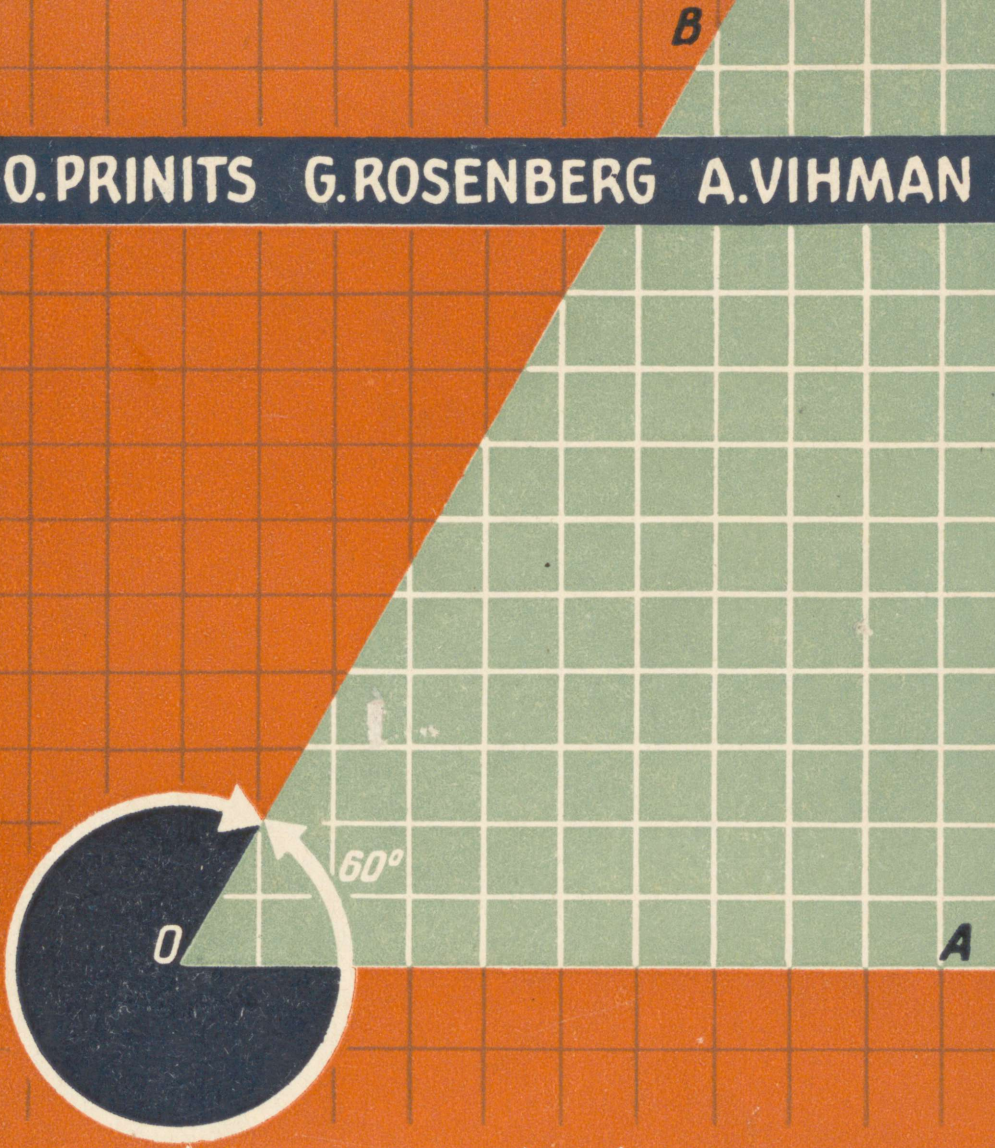
O. PRINITS G. ROSENBERG A. VIHMAN



MATEMAATIKA

IX KLASSILE

A-26678

O. PRINITS, G. ROSENBERG, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

IX KLASSILE

Õ-414

TÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise
metoodika kateeder

TÜ MATEMAATIKA-
INFORMAATIKATEADUSKOND

KIRJASTUS «EESTI RAAMAT» · TALLINN 1965

51
P77

Kaanekujundus *G. Pant*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

I. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

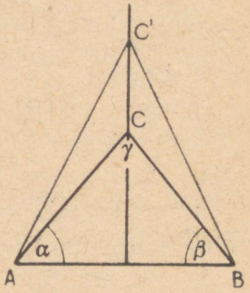
§ 1. JÄÄVAD JA MUUTUVAD SUURUSED.

Igasuguste nähtuste uurimisel kohtume kaht erinevat liiki suurustega. Ühed neist on antud nähtuse käigus muutumatud ehk jäävad, teised aga muutuvad. Toome selgituseks mõned näited, mis on seotud kolmnurga kuju muutumisega.

1. Liikugu võrdhaarse kolmnurga tipp edasi piki kõrgussirget (joon. 1).

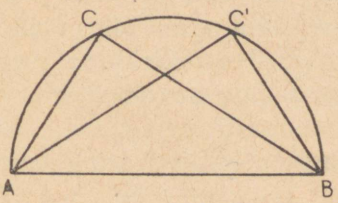
Siin osutuvad:

jäävateks suurusteks	muutuvateks suurusteks
alus AB	küljed BC ja AC
sisenurkade summa	kõik nurgad
	ümbermõõt
	pindala

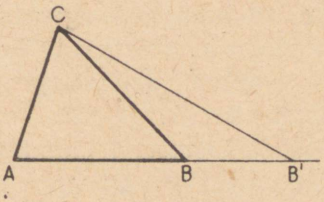


Joon. 1.

2. Ringi diameetrile toetuva kolmnurga tipp liigub piki ringjoont (joon. 2). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?

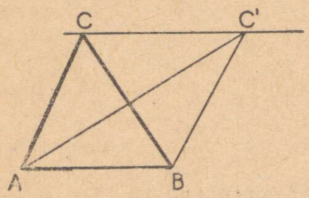


Joon. 2.



Joon. 3.

3. Kolmnurga tipp liigub piki alussirget (joon. 3). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?



Joon. 4.

4. Kolmnurga aluse vastastipp liigub piki alusega paralleelset sirget (joon. 4). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?

Toodud näidetest ilmneb, et suurus, mis ühe küsimusseade puhul on muutuv, võib teise küsimusseade puhul osutuda jäävaks.

Missugused suurused on toodud näidete juures sellised?
Missugused suurused on kõigi näidete juures muutuvad?
Missugused suurused on kõigi näidete juures jäävad?
Nimeta suurusi, mis osutuvad alati jäävaiks.

§ 2. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

Eelmise paragrahvi näidetes paneme tähele, et ühe suuruse muutumist põhjustab mingi teise suuruse muutumine. Nii näiteks 1. ülesandes

kõrguse muutumine põhjustas pindala muutumise,

külgede BC ja AC muutumine põhjustas ümbermõõdu muutumise,

tipu C nihkumine piki kõrgussirget, s. o. kauguse CC' muutumine põhjustas kõrguse, külgede BC ja AC ning samuti kõigi nurkade muutumise.

Me ütleme, et

pindala sõltub kõrgusest,

ümbermõõt sõltub külgede pikkusest,

kõrgus, küljed BC ja AC, samuti nurgad α, β *ja* γ *sõltuvad kaugusest CC'.*

Siinjuures on huvitav tähele panna asjaolu, et niipea, kui punkti C' asukoht kõrgussirgel on fikseeritud, on kõigi muutuvate suuruste väärtused üheselt määratud. Nii näiteks on joonisel 1 punkti C' asukohaga määratud α, β ja γ suurused, mis on vastavalt 64°, 64° ja 52°.

Mõõda joonisel 1 punkti C' asukohaga määratud teiste muutuvate suuruste väärtused!

Kasutades esitatud jooniseid tee ka teiste näidete puhul kind-

laks muutuvate suuruste väärtused muutumist põhjustava suuruse mingi eriväärtuse korral!

Analoogilist ühe muutuva suuruse sõltuvust teisest võime tähele panna väga paljudel juhtudel. Näiteks:

ruudu pindala sõltub külje pikkusest,

ringjoone pikkus sõltub raadiusest,

läbitud tee pikkus sõltub konstantse kiiruse puhul liikumise ajast,

vasktraadi pikkus sõltub temperatuurist,

voolu tugevus sõltub jääva takistuse puhul pingest jne.

Kõigi toodud näidete puhul jääb kehtima sama tähelepanek, mis tuli ilmsiks eespool vaadeldud näidete juures. Nimelt *niipea, kui sõltuvust põhjustava suuruse väärtus on antud, on määratud ka sõltuva suuruse väärtus.* Näiteks, kui ruudu külje pikkus on 2 cm, on ruudu pindala 4 cm^2; kui keha liigub ühtlaselt kiirusega $10\frac{km}{h}$, siis 3 tunniga läbib ta 30 km jne.

Niisugust muutuvate suuruste vahelist sõltuvust, kus ühe muutuva suuruse igale võimalikule väärtusele vastab teise muutuva suuruse kindel väärtus, nimetatakse funktsionaalseks sõltuvuseks.

Nii on ruudu pindala funktsionaalses sõltuvuses külje pikkusest, ringjoone pikkus raadiusest jne.

Sõltuvust põhjustavat suurust nimetatakse **sõltumatuks muutujaks** ehk **argumendiks,** sõltuvat suurust nimetatakse **sõltuvaks muutujaks** ehk **funktsiooniks.**

Tuginedes funktsionaalse sõltuvuse definitsioonile, anna vastus küsimusele:

millal nimetatakse muutuvat suurust y teise muutuva suuruse x funktsiooniks?

Koolis käsitleme ainult ühest argumendist sõltuvaid suurusi ehk **ühemuutuja funktsioone.** Nii vaatleme

ühtlasel liikumisel läbitud tee pikkust funktsioonina kas ajast, kui kiirus on konstantne, või kiirusest, kui aeg on konstantne;

risttahuka ruumala vaatleme funktsioonina pikkusest, kui laius ja kõrgus on konstantsed jne.

Leidub aga ka küllaldaselt muutuvate suuruste vahelisi sõltuvusi, kus funktsionaalse sõltuvuse definitsioonis rõhutatud kindla väärtuse vastavuse omadus puudub. Toome mõned näited.

Inimese raskus sõltub tema pikkusest,
koolis saadud hinne sõltub õppimiseks kulutatud ajast,
matkaja saapatalla paksus sõltub tema poolt läbitud tee pikkusest,
sillast ülekäijate arv sõltub kellaajast,
pesu kuivamise aeg sõltub tuule tugevusest jne.

Nende näidete puhul ei ole sõltuvust põhjustava suuruse väärtusega määratud sõltuva suuruse väärtus. Näiteks, kui on teada, et keegi on 160 cm pikk, siis ei saa kindlalt öelda, et tema raskus on näiteks 60 kg; ei kehti ka seaduspärasust, et kui kodus õppimiseks kulutab õpilane 1 tunni, siis saab hinde 3, ja kui kolm tundi, siis hinde 5 jne.

Seega, mitte kõik suurustevahelised sõltuvused pole funktsionaalsed.

§ 3. FUNKTSIOONI ESITUSVIISID.

Funktsiooni esitusviiside all mõistame eeskirja, mille järgi toimub antud argumendi väärtustele vastavate funktsiooni väärtuste leidmine. Enamkasutatavad on analüütiline, tabeliline ja graafiline esitusviis.

a) Funktsiooni analüütiline esitusviis.

Funktsioon on esitatud analüütiliselt, kui eeskiri funktsiooni väärtuste leidmiseks on antud matemaatilise avaldise või valemi kujul.

Olgu antud matemaatilised avaldised:

$$2x;\ \tan x;\ \frac{1}{x+2};\ x-1;\ \frac{5-x}{3+x^2}\ \text{jne.}$$

või ka

ax^2+b, ax^2+bx+c, kus a, b ja c on konstandid.

Kui neis avaldistes esinevat tähte x vaadelda argumendi tähisena, siis need avaldised on funktsioonideks, sest igale x väärtusele vastab kindel avaldise väärtus. Seega on need avaldised x funktsioonid. Matemaatilise avaldise lühemaks üleskirjutamiseks kasutatakse sageli uut tähte. Näiteks võib tähistada avaldist $ax+b$, kus a ja b on konstandid, tähega y, s.t.

$$y=ax+b.$$

Nüüd võime aga öelda, et y-ga tähistatud suurus on x funktsioon, sest igale x väärtusele vastab kindel y väärtus.

b) Funktsiooni tabeliline esitusviis.

Funktsioon on esitatud tabeliliselt, kui on antud tabel, milles esitatakse argumendi väärtused ja neile vastavad funktsiooni väärtused.

Nii näiteks esitab tabel

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

funktsiooni y sõltuvust argumendist x.

Üldiselt, kui argumendi x väärtuseks on $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ja neile vastavaiks funktsiooni y väärtusteks $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, siis funktsiooni y tabel näeb välja järgmine:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Kui funktsioon on antud analüütiliselt, siis saame selle abil koostada tabelilise esitusviisi. Olenevalt sellest, kuidas valime argumendi väärtusi, võime saada antud funktsioonile väga mitmeid tabelilisi esitusi.

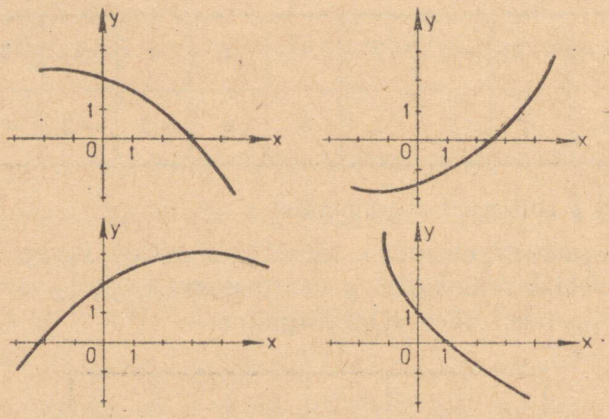
Näiteks olgu antud funktsioon $y=\frac{5-x}{3+x^2}$. Võttes argumendi väärtuseks 0, 1, 2, ..., 6, saame tabeli

x	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{19}$	0	$-\frac{1}{39}$

Andes aga argumendile väärtuseks —5, —3, —1, 0, 2, 4, saame tabeli

x	-5	-3	-1	0	2	4
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{19}$

c) Funktsiooni graafiline esitusviis.



Joon. 5.

Joonisel 5 on esitatud koordinaatteljestikes mitmesuguseid kõveraid. Ka need esitavad muutuvate suuruste x ja y vahelist funktsionaalset sõltuvust, sest igale x väärtusele saab jooniselt mõõta vastava kindla y väärtuse.

Seega,

funktsiooni graafiliseks esituseks on joon koordinaatteljestikus.

Et vaatluse all on ainult ühesed funktsioonid, s. t. funktsioonid, kus igale argumendi väärtusele vastab ainult üks funktsiooni väärtus, siis vaatleme ka ainult niisuguseid graafikuid, mille iga punkti abstsissi väärtusele vastab ainult üks ordinaadi väärtus.

Tutvusime funktsiooni analüütilise, tabelilise ja graafilise esitusviisiga. Esimesel juhul on funktsiooni väärtused leitavad arvutamise teel, teisel juhul on teatud hulk funktsiooni väärtusi ette antud ning kolmandal juhul saame funktsiooni väärtused mõõtmise teel.

Analüütilise esitusviisi korral on võimalik leida funktsiooni väärtust kõigi väärtuste korral, mis sobivad argumendi väärtusteks.

Tabeliline esitusviis annab meile ainult teatud piiratud hulga funktsiooni väärtusi.

Graafikult saame funktsiooni väärtusi mõõta joonisega piiratud ulatuses.

Nii näiteks ei ole jooniselt 5 võimalik mõõta argumendi väärtusele 10 vastavat funktsiooni väärtust. *Et nii tabel kui graafik annavad meile funktsiooni väärtusi ainult piiratud ulatuses, siis tuleb nimetatud kolmest funktsiooni esitusviisist lugeda kõige täielikumaks analüütilist esitust, s. t. valemit või vastavat avaldist.*

Ülesandeid.

4. Esita järgmiste suuruste vaheline sõltuvus analüütiliselt:
   a) *ringjoone pikkus* ja *ringi raadius*;
   b) *võrdkülgse kolmnurga pindala* ja *külje pikkus*;
   c) *korrapärase kuusnurga ümbermõõt* ja *apoteem*;
   d) *kera pindala* ja *kera suurringi pindala*;
   e) *antud ruumalaga silindri kõrgus* ja *põhja raadius*.

5. Esita ruudu ümbermõõdu $ü$ ja ruudu külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui külje pikkuse väärtuseks on 1; 2; ...; 10.

6. Esita võrdkülgse kolmnurga pindala S ja külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui külje pikkuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; ...; 5.

7. Esita jalakäija poolt läbitud tee pikkuse a ja käimiseks kulutatud aja t vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui on teada, et jalakäija käis ühtlaselt 5,2 $\frac{km}{h}$ ja kui t väärtuseks on 1; 2; 3; ...; 6.

8. On antud funktsioonide väärtuste tabelid. Vastavad funktsiooni avaldised ei ole tabelis õiges järjekorras. Leia nende õige järjekord.

Argumendi väärtused / Funktsiooni avaldis	-2	-1	0	1	2	3
$3x-5$				-1		-3
$\frac{2x}{x^2+1}$			3			-3
x^2-2		1	1		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{2-x}{x+3}$				-2	1	
$3-2x$		-1		-1		
x^2+3x	$-\frac{4}{5}$					$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{x-4}$	$-\frac{4}{5}$	-1				
$\frac{1-x}{x^2+1}$	-2	-2				

9. Joonesta see tabel endale vihikusse, esita seal funktsiooni avaldised õiges järjekorras ja täida kogu tabel.

10. Esita funktsioon $\frac{3+4x-5x^2}{2x^2-1}$ tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on:

a) 0; 1; 2; 3; 4.

b) -4; -3; -2; -1.

c) $-\frac{5}{3}$; -1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{5}{3}$.

11. Esita funktsioon $\frac{2x^2+1}{4x-1}$ tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on:

a) 01; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

b) 0,11; 0,12; 0,13; 0,14.

c) $-\frac{4}{7}$; $-\frac{2}{7}$; 0; $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{7}$.

12. Leia joonisel 5 toodud graafikutest mõõtmise teel argumendi väärtustele -2, -1, 0, 1 ja 2 vastavad funktsioonide väärtused.

a) Funktsiooni graafilise esituse saamine tabelilisest esitusest.

Kui funktsiooni analüütiline eeskiri on antud, siis võime selle abil esitada tema tabelilise eeskirja ja, nagu nägime, väga mitmel viisil. Vaadeldes vastavaid arvupaare tasapinna punktide koordinaatidena ja ühendades siis need punktid sileda kõveraga, saame mingi joone — selle funktsiooni graafiku.

Olgu funktsiooni analüütiliseks esituseks näiteks

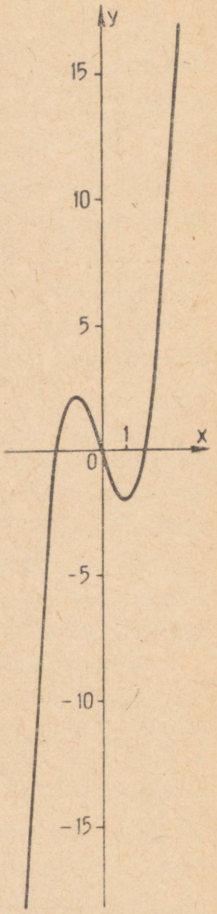
$$y = x^3 - 3x,$$

siis üheks tema tabeliliseks esituseks on

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-2	2	0	-2	2	18

mille abil saame graafiku (joon. 6). Selleks kanname joonisele esmalt vastavad punktid ja ühendame siis need niisuguse joonega, mille punktideks antud punktid näivad olevat.

Mida täpsema graafiku tahame saada, seda tihedamalt peab meil olema antud punkte.



Joon. 6.

Ülesandeid.

13. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4:

1) $y = 5x - 3$,
2) $y = \frac{1+x}{x^2}$,
3) $y = \frac{2}{2+x}$,
4) $y = -2x^2 + 3x$;
5) $y = x^3 - 2x^2$.

14. Esita ülesandes 13 antud funktsioonide graafikud saadud tabelite järgi.

b) Funktsiooni analüütilise esituse saamine graafilisest esitusest.

Püüame nüüd lahendada vastupidist ülesannet, s. t. *leida antud tabeli või graafiku järgi funktsiooni analüütilist eeskirja.*

Antud tabeli järgi funktsiooni analüütilise eeskirja leidmine võiks toimuda näiteks proovimise teel. See tähendab, et võtame mõne valemi ja proovime, kas antud väärtuspaarid seda võrdust rahuldavad. See on aga väheviljakas meetod ja harva eesmärgile viiv.

Niisuguse ülesandega kohtutakse sageli teaduslikus uurimistöös, kus teostatud katseandmete põhjal tahetakse saada vastavat analüütilist eeskirja. Kuid sealgi püstitatakse see ülesanne veidi teisiti. Näiteks: leida see lineaarne funktsioon, mis kõige paremini vastab leitud katseandmetele.

Antud graafiku järgi analüütilise eeskirja leidmise ülesanne osutub teatud erijuhtumeil täpselt lahenduvaks. Tutvumegi niisuguste ülesannetega.

Oletame, et koordinaatteljestikus esitatud joon on defineeritud punkti geomeetrilise kohana (näit. ringjoon, nurgapoolitaja, antud sirgega paralleelne sirge). Sel juhul osutub võimalikuks seose tuletamine punkti geomeetrilist kohta määravate suuruste ja joont kujundava punkti koordinaatide vahel.

Ringjoont määravaks suuruseks on teatavasti tema iga punkti kaugus keskpunktist ehk nn. raadius.

Nurgapoolitajat määravaks suuruseks on tema iga punkti kaugus nurga haaradest.

Antud sirgega paralleelset sirget määravaks suuruseks on tema iga punkti kaugus antud sirgest.

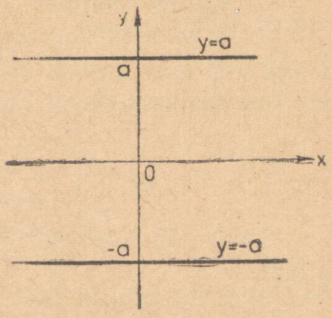
Võrrandit, mis seob vaadeldavat joont kujundava punkti koordinaate seda joont määravate suurustega, nimetatakse selle joone võrrandiks.

§ 5. JOONE VÕRRANDI NÄITEID.

a) x-teljega paralleelse sirge võrrand.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis on paralleelne x-teljega ja asetseb temast a ühiku kaugusel (joon. 7).

Antud sirgega paralleelne sirge on teatavasti niisuguse punkti geomeetriliseks kohaks, mis antud sirgest asub antud kaugusel. Seega on meid huvitavatest sirgetest ühel kõigi punktide ordinaadid võrdsed a-ga, teisel $-a$-ga. See tõsiasi lubabki nende sirgete võrrandeid esitada kujus



Joon. 7.

$$y = a \text{ ja } y = -a,$$

kus a tähendab vaadeldavat joont kujundava punkti ordinaati. Teiselt poolt on saadud võrdused vaadeldavad valemitena, s. t. nad esitavad mingi funktsiooni analüütilist eeskirja. Eeskiri $y = a$ ei sisalda argumenti. Sellest järeldub, et olenemata argumendi väärtustest on funktsiooni väärtus alati a.

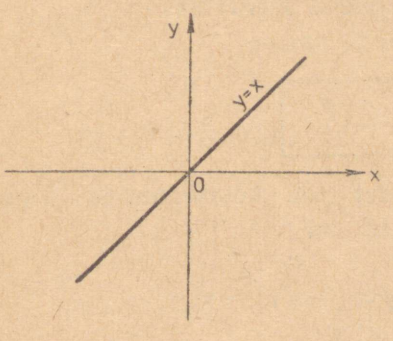
Kui funktsiooni väärtus on kõigi argumendi väärtuste korral üks ja sama, siis nimetatakse seda funktsiooni konstantseks.

Seega,

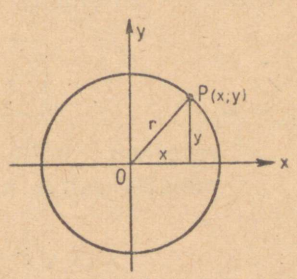
x-teljega paralleelsed sirged on konstandina avalduvate funktsioonide graafikuteks.

b) Koordinaattelgedevahelise nurga poolitaja.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis poolitab koordinaattelgedevahelised nurgad I ja III veerandis (joon. 8).



Joon. 8.



Joon. 9.

Et nurgapoolitaja on niisuguse punkti geomeetriliseks kohaks, mis asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel, siis on vaadeldaval sirgel asetsevate punktide abstsissid ja ordinaadid võrdsed. See tõsiasi lubab meid otsitava sirge võrrandi esitada kujus

$$y = x \text{ ehk } y - x = 0,$$

kus x ja y tähendavad vaadeldavat joont kujundava punkti koordinaate.

Leitud joone võrrand $y = x$ on funktsiooni analüütiline esitus ja seega

koordinaattelgedevahelise I ja III veerandi nurga poolitaja on funktsiooni $y = x$ graafikuks.

Ülesandeid.

15. Leida võrrand y-teljega paralleelsele sirgele.

16. Leida võrrand koordinaattelgedevahelise nurga II ja IV veerandi poolitajale.

17. Avalda koordinaattelgede võrrandid.

c) Ringjoone võrrand.

Ülesanne. Leida võrrand ringjoonele, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja mille raadius on r (joon. 9).

Et ringjoon on antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks, siis, nagu näeme jooniselt 9, on ringjoont kujundava punkti $P(x; y)$ koordinaadid seotud raadiusega järgmise võrduse abil:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (missuguse teoreemi põhjal?)}.$$

Saadud võrrandit nimetatakse **ringjoone võrrandiks.**

Avaldades ringjoone võrrandist y, saame

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

s. t.

ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis, esitab kahe funktsiooni

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ ja } y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

graafikuid.

Ülalpool x-telge asuv poolringjoon on funktsiooni $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks ja allpool x-telge asuv poolringjoon funktsiooni $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks.

18. Leia järgmistest võrranditest ringjoonte raadiused:

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 0{,}81$

c) $x^2 + y^2 = \frac{121}{169}$ d) $2x^2 + 2y^2 = 288$

19. Leia eelmises ülesandes antud ringjoonte pikkused ja vastavate ringide pindalad.

20. Tuleta võrrand ringjoonele, mille raadius on 2 ja keskpunkt asub punktis:

a) A (1; 4), b) B (−2; 3), c) C (−2,3; −4,1).

21. Tuleta võrrand ringjoonele, mille keskpunktiks on punkt C $(a; b)$ ja raadiuseks on r.

d) Sirge võrrand.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis lõikab koordinaattelgi punktides $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$, kus $p \neq 0$ ja $q \neq 0$ (joon. 10).

Et sirge on määratud oma kahe punktiga, siis on antud ülesandes sirgjoont määravateks suurusteks punktide A ja B koordinaadid. Seda joont kujundavaks punktiks olgu punkt $P(x; y)$. Ülesandeks on leida võrrand, mis seoks punktide A, B ja P koordinaate.

Jooniselt 10 näeme, et

$\triangle OBA \sim \triangle CPA$ (miks?)

ja seega

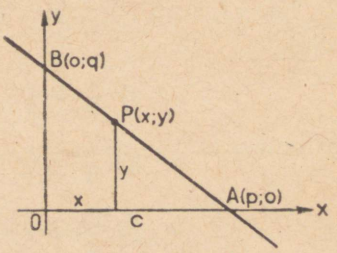
$$\frac{CP}{OB} = \frac{CA}{OA}.$$

Et $CP = y$; $OB = q$;
$CA = p - x$ ja $OA = p$, siis

$$\frac{y}{q} = \frac{p-x}{p}$$

ehk

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$



Joon. 10.

mis esitabki otsitavat sirge võrrandit. Viimast võrrandit nimetatakse **sirge võrrandiks telglõikudes.** Avaldades nüüd y, saame

$$y = \frac{p-x}{p} \cdot q$$

ehk

$$\boxed{y = -\frac{q}{p} \cdot x + q.}$$

Seega on koordinaattelgi punktides $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$, kus $p \neq 0$ ja $q \neq 0$, lõikav sirge funktsiooni $y = -\frac{q}{p}x + q$ graafikuks.

Saadud sirge võrrandis on x kordajaks $-\frac{q}{p}$. See võib olla kas positiivne või negatiivne arv. Millal on see kordaja positiivne, millal negatiivne?

Sirge võrrandi kirjutuse lihtsustamiseks tähistame

$$-\frac{q}{p} = a \quad \text{ja} \quad q = b.$$

Seega,

koordinaattelgi väljaspool alguspunkti lõikav sirge on funktsiooni $y = ax + b$, kus $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, graafikuks.

22. Esita võrrand sirgele, mille lõikepunktid koordinaattelgedega A ja B on antud:

a) $A(5; 0)$ $B(0; 2)$
b) $A(2; 0)$ $B(0; 4)$
c) $A(-3; 0)$ $B(0; -1)$
d) $A(-2{,}5; 0)$ $B(0; 1{,}5)$

23. Leia punktid, kus alljärgnevad sirged lõikavad koordinaattelgi

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ d) $2x + 3y = 1$

b) $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$ e) $x + y = 2$

c) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 1$ f) $-2x - 5y = 3$

Joonesta need sirged!

24. Missuguste funktsioonide graafikuid esitavad ülesandes 22 antud sirged?

25. Kolmnurga ABC tipp A liigub piki küljega AB ristuvat ja punkti A läbivat sirget. Missugused suurused osutuvad siin muutuvaiks? Nimeta suurus, millest sõltuvad need muutuvad suurused.

26. Leia järgmiste muutuvate suuruste paaride hulgast need, mis on funktsionaalses sõltuvuses:

a) ühtlasel liikumisel etteantud ajavahemiku vältel keha poolt läbitud tee pikkus	liikumise kiirus
b) auto kiirus	paagis olev bensiini hulk
c) rongi kiirus	rongi kaal
d) veerõhk allveelaevale	allveelaeva sügavus
e) antud kõrgusega ristküliku pindala	ristküliku alus
f) õhu hulk antud klassiruumis	klassi õpilaste arv
g) saapatalla paksus	käidud tee pikkus
h) metallvarda pikkus	temperatuur
i) vabalt langeva keha poolt läbitud tee pikkus	langemise aeg
j) sõidupileti hind	sõidetud tee pikkus
k) ostjate arv kaupluses	kellaaeg
l) toa temperatuur	ahju kütmise kestus

27. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt ja graafiliselt:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$; b) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

28. Esita funktsioon graafiliselt, kui tema tabeliline esitus on:

a)

x	-2	0	2	4	6	8
y	2	1	0	-2	-1	0

T Ü Matemaatikateaduskon
Matemaatika õpetam

b)

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
y	-2	0	-1	$-0{,}5$	0	1	$0{,}5$

29. Leia sirgete $x=-2$ ja $x=5$ vaheline kaugus.

30. a) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgetest $y=-4$ ja $y=2$ võrdsel kaugusel.

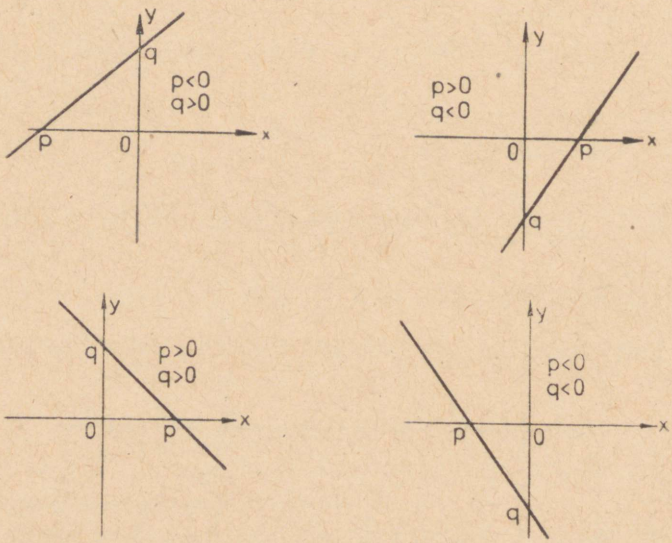
b) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgetest $x=-5$ ja $x=-1$ võrdsel kaugusel.

c) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgest $x=-3$ kaks korda kaugemal kui sirgest $x=-1$.

d) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgele $y=5$ kolm korda lähemal kui sirgele $y=1$.

31. Kirjuta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguses ja

a) raadius on 1,5;
b) raadius on 2;
c) ringjoone pikkus on 6;
d) ringjoone pikkus on 2,4;
e) ringi pindala on 14;
f) ringi pindala on 5,22.



Joon. 11.

32. On antud joonte võrrandid:

$$x = 3;\ y = -2;\ x^2 + y^2 = 4;\ y = x;\ y = -\frac{2}{3}x + 2$$

ja punktid:

$$A(1;\ 1);\ B(0;\ -2);\ C(3;\ 0);\ D(0;\ 0);\ E(\sqrt{2};\ \sqrt{2}).$$

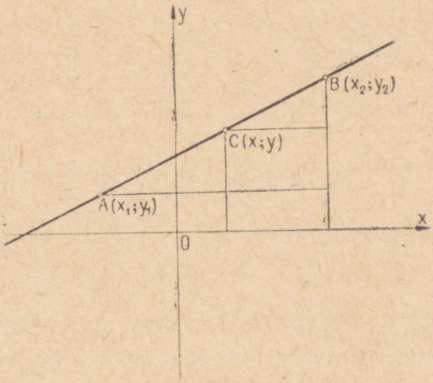
Leia, missugustel antud joontest need punktid asetsevad.

33. Joonisel 11 on esitatud neli koordinaattelgi lõikavat sirget. Missuguste sirgete võrrandis on x kordaja positiivne, negatiivne? Miks?

34. Leia sirgete $y = 2x - 1$ ja $y = -x + 2$ lõikepunkt.

35. Leia võrrandid sirgele, mis läbib punkte $A(-3;\ 0)$ ja $B(0;\ 2)$ ja sirgele, mis läbib punkte $C(2;\ 0)$ ja $D(0;\ -2)$. Leia nende sirgete lõikepunkt.

36. Näita, et kui sirge läbib punkte $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$, siis esitub tema võrrand kujus $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Selleks leia jooniselt 12 sarnased kolmnurgad ja esita vastavate külgede võrdelisus koordinaatide kaudu.



Joon. 12.

II. LINEAARNE FUNKTSIOON.

LINEAARSE FUNKTSIOONI UURIMINE.

§ 6. LINEAARNE FUNKTSIOON JA TEMA PÕHIOMADUS.

Eelmises peatükis tutvusime funktsiooni *analüütilise, tabelilise* ja *graafilise* esitusviisiga. Nagu teada, ei ole tabelilises esituses praktiliselt võimalik esitada kõiki funktsiooni väärtusi ja ka graafiline esitus on piiratud ulatusega. Analüütilisest esitusest on aga võimalik arvutamise teel leida igale argumendi väärtusele vastavat funktsiooni väärtust. *Seepärast kasutamegi edaspidi üksikute funktsioonide defineerimiseks matemaatilist avaldist või valemit.*

Lineaarseks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis esitub avaldisena $ax+b$ või valemina $y=ax+b$, kus a ja b on konstantsed arvud ($a \neq 0$).

Vaatleme lineaarse funktsiooni $-3x+2$ kahte tabelilist esitust.

x	-3	-1	1	3	5
$-3x+2$	11	5	-1	-7	-13

x	-4	-1	2	5	8
$-3x+2$	14	5	-4	-13	-22

Nimetame argumendi kahe järjestikuse väärtuse vahet **argumendi muuduks** *ja tähistame seda sümboliga* Δx. *Funktsiooni kahe*

järjestikuse väärtuse vahet nimetame **funktsiooni muuduks** *ja tähistame sümboliga* Δy.

Toodud näites on esimesel juhul $\Delta x = 2$ ja $\Delta y = -6$ ning teisel juhul $\Delta x = 3$ ja $\Delta y = -9$. Näeme, et *võrdsetele argumendi muutudele vastavad võrdsed funktsiooni muudud.*

Moodustame nüüd funktsiooni ja argumendi vastavate muutude suhted. Näeme, et need on võrdsed

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Tõestame, et see võrdelisuse omadus tuleb ilmsiks kõikide lineaarsete funktsioonide juures.

Lineaarse funktsiooni põhiomadus:

lineaarse funktsiooni muut on võrdeline argumendi muuduga, kusjuures võrdeteguriks on funktsiooni avaldises esinev argumendi kordaja, s. t.

$$\boxed{\Delta y = a\Delta x.}$$

Moodustame tabeli

x	$x + \Delta x$
$ax+b$	$a(x+\Delta x)+b$

,

milles argumendi muut on Δx. Vastavate funktsiooni väärtuste vahe ehk vastav funktsiooni muut on

$$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b).$$

Avades sulud ja koondades saamegi, et

$$\Delta y = a \cdot \Delta x.$$

Kui $\Delta x = 1$, siis $\Delta y = a$, s. t. *lineaarse funktsiooni avaldises argumendi kordaja näitab, kui palju muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus muutub ühe ühiku võrra.*

Ülesanne.

37. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt, võttes üks kord $\Delta x = \frac{1}{3}$ ja teine kord $\Delta x = -2{,}5$. Leia vastavad Δy väärtused ning seejärel ka suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ väärtused. Võrdle tulemust x kordajaga.

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ c) $y = 0{,}2x - 1{,}5$

§ 7. KASVAV JA KAHANEV LINEAARNE FUNKTSIOON.

Funktsiooni nimetatakse **kasvavaks funktsiooniks,** *kui positiivsetele argumendi muutudele vastavad positiivsed funktsiooni muudud.*

Funktsiooni nimetatakse **kahanevaks funktsiooniks,** *kui positiivsetele argumendi muutudele vastavad negatiivsed funktsiooni muudud.*

Lineaarse funktsiooni põhiomaduse kohaselt

$$\Delta y = a \cdot \Delta x,$$

kus Δx on argumendi muut ja Δy funktsiooni muut. Siit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Kui nüüd $\Delta x > 0$ ja $\Delta y > 0$, siis ka $a > 0$, s. t.

lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on kasvav siis, kui $a > 0$.

Kui aga $\Delta x > 0$ ja $\Delta y < 0$, siis $a < 0$ ja järelikult

lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on kahanev siis, kui $a < 0$.

Ülesandeid.

38. Missugused järgmistest funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

a) $y = \frac{2}{3}x + 5$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 5$

b) $y = \frac{2}{-3}x + 5$ c) $y = \frac{-2}{3}x - 5$

§ 8. NÜRINURGA TANGENS.

Joonisel 13 on esitatud täisnurkne kolmnurk AOB tipuga koordinaatide alguspunktis. Avaldame tipu O juures oleva nurga φ tangensi

$$\tan \varphi = \frac{AB}{OB}.$$

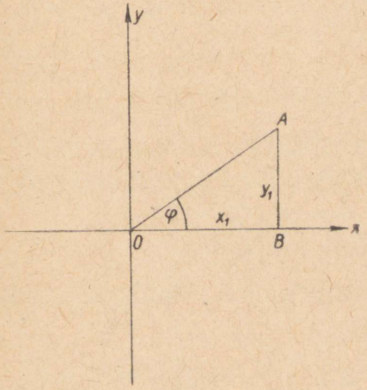
Kui on teada punkti A koordinaadid $(x_1; y_1)$, siis

$$\tan \varphi = \frac{y_1}{x_1}.$$

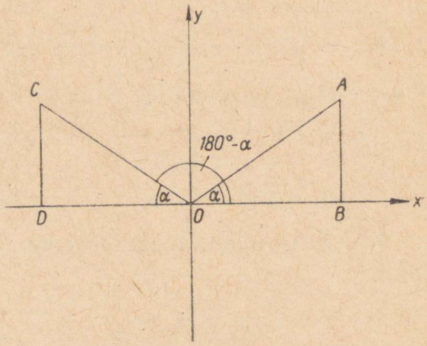
Nimetame nurka, mille tipp asetseb koordinaatide alguspunktis, k e s k n u r g a k s.

Vaatleme kesknurka φ muutuvana. Üheks, nn. alghaaraks on tal x-telje positiivne pool, teist, nn. lõpphaara võib aga pöörata x-telje positiivsest suunast alates vastupidi kellaosuti liikumise suunale. Kui lõpphaar asub I veerandis, nagu näiteks OA, siis on kesknurk φ teravnurk ja tema tangens on võrdne lõpphaara mingi punkti ordinaadi ja abstsissi suhtega.

Kui lõpphaar jõuab II veerandisse, siis on kesknurk φ nürinurk. Mõistame ka nüüd nurga tangensi all liikuva haara mingi punkti ordinaadi ja abstsissi suhet.



Joon. 13.



Joon. 14.

Joonisel 14 on kujutatud kesknurgad α ja $180° - \alpha$. Sealjuures punktid A ja C on nii valitud, et lõigud OB ja OD on võrdsed. Kolmnurkade võrdsusest $\triangle OAB = \triangle OCD$ (põhjenda!) järeldub, et $AB = CD$.

Seega, kui punkti A koordinaadid on x_1 ja y_1, siis punkti C koordinaadid on $-x_1$ ja y_1.

Terav- ja nürinurga tangensi definitsioonile tuginedes võime kirjutada

$$\tan\alpha = \frac{y_1}{x_1} \text{ ja } \tan(180° - \alpha) = \frac{y_1}{-x_1}.$$

Seega

$$\boxed{\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha}$$

Selgita, et saadud valem kehtib ka siis, kui α on nürinurk!

Teravnurga α tangens on positiivne arv. Saadud võrdusest järeldub, et nürinurga $180° - \alpha$ tangens peab olema negatiivne arv, s. t. et kui α on teravnurk, siis

$$\tan\alpha > 0 \text{ ja } \tan(180° - \alpha) < 0.$$

Ülesandeid.

39. Leia nurga α tangens, kui α on:

a) 135°, b) 120°, c) 150°.

40. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia

a) tan 100°
b) tan 115°
c) tan 170°
d) tan 162°
e) tan 144°
f) tan 95°

41. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia x, kui

a) $\tan x = -0{,}213$
b) $\tan x = -0{,}727$
c) $\tan x = 1{,}66$
d) $\tan x = 3{,}73$
e) $\tan x = 0{,}466$
f) $\tan x = -5{,}14$
g) $\tan x = -14{,}3$
h) $\tan x = -0{,}052$

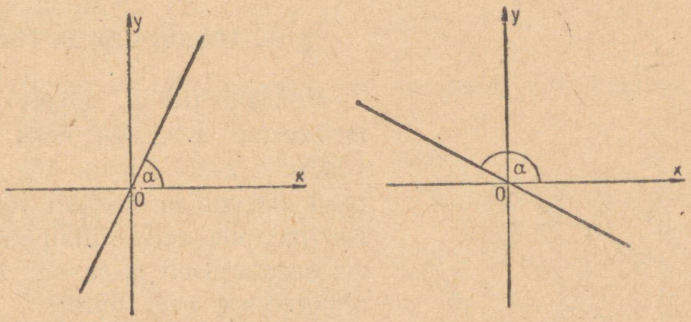
42. Leia kesknurga tangens ja kesknurk, kui lõpphaaral on punkt

a) $A(2;\ 1)$
b) $B(-3;\ 3)$
c) $C\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{7}\right)$
d) $D\left(-\frac{8}{5};\ 1{,}2\right)$
e) $E(7{,}6;\ 12{,}3)$
f) $F\left(-6{,}12;\ \frac{12}{5}\right)$.

Kontrolli tulemusi, joonistades koordinaatteljestikku vastavad nurgad ja mõõtes nende nurkade suurused.

§ 9. KOORDINAATIDE ALGUSPUNKTI LÄBIVA SIRGE VÕRRAND.

Moodustagu koordinaatide alguspunkti läbiv sirge x-telje positiivse poolega nurga α. See nurk on kas teravnurk või nürinurk (joon. 15), s. t. me ei vaatle neid juhte, kui $\alpha=0$ ja kui $\alpha=90°$



Joon. 15.

(üles. 17). Võtame sellel sirgel vabalt ühe punkti $(x; y)$. Teame (§ 8), et

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha$$

ja siit

$$y = x \cdot \tan\alpha.$$

Tähistame $\tan\alpha$ kui konstandi tähega a, siis saame koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrandiks

$$y = ax,$$

kus $a \neq 0$.

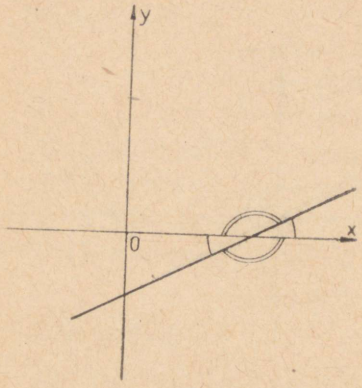
Ülesandeid.

43. Esita koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand, kui sirge moodustab x-telje positiivse poolega nurga

a) 30° d) 42°
b) 60° e) 122°
c) 135° f) 169°

44. Esita koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand, kui sirge läbib antud punkti:

a) $A(2; 4)$
b) $B(-3; 4)$
c) $C(4; -4)$
d) $D(-5; -4)$



Joon. 16.

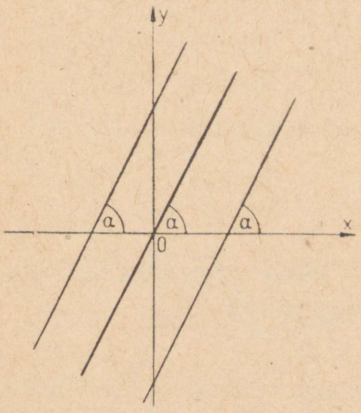
§ 10. TÕUSUNURK JA TÕUS.

Koordinaattelgi lõikav sirge moodustab x-teljega kaks paari võrdseid nurki (joon. 16). Miks need nurgad on paariti võrdsed? Nurgad, mis asuvad ülalpool x-telge, on suuruselt erinevad. Kuidas nimetatakse neid nurki?

Sirge tõusunurgaks nimetatakse sirge ja x-telje vahelist nurka, mis asub ülalpool x-telge ja mille x-teljel asuv haar on tipust paremal.

Tõusunurk on seega kas teravnurk või nürinurk.

Sirget, mille tõusunurk on teravnurk, nimetatakse **tõusvaks sirgeks.**



Joon. 17.

Sirget, mille tõusunurk on nürinurk, nimetatakse **langevaks sirgeks.**

Sirge tõusunurga tangensit nimetatakse sirge tõusuks.

Koordinaatide alguspunkti läbiva sirge $y = ax$ tõusuks on seega x kordaja a, sest $a = \tan \alpha$, kus α on tõusunurk.

Sirgega $y = ax$ paralleelsetel sirgetel on temaga võrdne tõusunurk (joon. 17). Miks? Et võrdsete

nurkade tangensid on võrdsed, siis on sirgega $y = ax$ paralleelsete sirgete tõus samuti a. Järelikult,

sirgega $y = ax$ paralleelse sirge võrrandiks on $y = ax + b$.

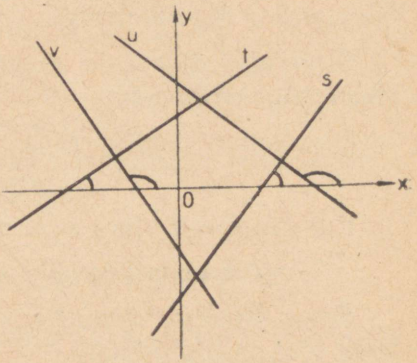
Et tõusva sirge tõusunurk on teravnurk, siis **tõusva sirge tõus on positiivne.**

Et langeva sirge tõusunurk on nürinurk, siis **langeva sirge tõus on negatiivne.**

Ülesandeid.

45. Leia malli abil joonisel 18 esitatud sirgete s, t, u ja v tõusunurgad. Missugused neist sirgeist on tõusvad, missugused langevad?

46. Tee kindlaks, missugused järgnevatest lausetest on õiged, missugused valed:



Joon. 18.

a) funktsiooni $y = 2x + 6$ graafik on tõusev sirge;

b) funktsiooni $y = 3x - 1$ graafik on langev sirge;

c) funktsiooni $y = -5x + 3$ graafik on tõusev sirge;

d) funktsiooni $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ graafik on langev sirge.

47. Kui suured on ülesannetes 43 ja 44 leitud sirgete tõusud?

§ 11. LINEAARSE FUNKTSIOONI GRAAFIK.

Eespool (§ 5) näitasime, et koordinaattelgi väljaspool algus-punkti lõikav sirge on funktsiooni $y = ax + b$ graafikuks juhul, kui $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.

Koordinaatide alguspunkti läbiv sirge, mis ei ühti telgedega, on funktsiooni $y = ax + b$ graafikuks juhul, kui $a \neq 0$ ja $b = 0$.

Seega,

lineaarse funktsiooni graafikuks on mõlemat koordinaattelge lõikav sirge.

§ 12. ALGVÄÄRTUS JA ALGORDINAAT.

Funktsiooni väärtust, mis saadakse argumendi väärtusel 0, *nimetatakse* **funktsiooni algväärtuseks.** Nii on näiteks funktsiooni $y = 2x - 3$ algväärtuseks -3. *Funktsiooni algväärtusele vastab graafikul ordinaattelje ja vastava sirge lõikepunkti ordinaat, mida nimetatakse* **algordinaadiks.**

Sirge algordinaat on seega ühtlasi vastava lineaarse funktsiooni algväärtuseks.

Olgu antud sirge võrrand

$$y = ax + b.$$

Kui siin $x = 0$, siis $y = b$. Seega,

sirge algordinaadiks on sirge võrrandis esinev vabaliige.

Seega on sirge võrrand $y = ax + b$ kohe esitatav, kui on teada tema tõus ja algordinaat.

Ülesandeid.

48. On antud sirged

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$;

b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$;

c) $\frac{x}{-\frac{2}{3}} - \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1$;

d) $-\frac{x}{3{,}2} + \frac{y}{5{,}4} = 1$.

1) Kui suur on nende sirgete tõus ja algordinaat?

2) Missuguste lineaarsete funktsioonide graafikuiks on need sirged?

3) Missugused neist funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

49. Leia sirge võrrandid, kui

a) tõusunurk on 60° ja algordinaat -2;

b) tõusunurk on 35° ja algordinaat 3;

c) tõusunurk on 160° ja algordinaat 2,31;
d) tõusunurk on 110° ja algordinaat —4,6;
e) tõus on 1,2 ja algordinaat 2,1;
f) tõus on —3,2 ja algordinaat —19.

50. Joonesta koordinaatteljestikku vabalt kaks sirget. Leia mõõtmise teel kummagi sirge tõusunurk ja algordinaat. Esita nende sirgete võrrandid.

51. Leia iga sirge algordinaat, tõus ja tõusunurk, kui sirge võrrandiks on:

1) $x - y + 1 = 0$
2) $3x + 2y - 4 = 0$
3) $5x - 3y = 0$
4) $\frac{3}{4}y + \frac{2}{3}x - 3 = 0$
5) $x - 3y - 3 = 0$
6) $2x + 5y = 0$
7) $2{,}3x + 4{,}6y - 0{,}1 = 0$
8) $0{,}12x - 1{,}6y = \frac{4}{5}$

52. Missugused ülesandes 51 esitatud võrrandeile vastavaist sirgeist läbivad koordinaatide alguspunkti?

53. Missugustes punktides lõikavad ülesandes 51 esitatud võrrandeile vastavad sirged koordinaattelgi?

§ 13. LINEAARSE FUNKTSIOONI NULLKOHT.

Funktsiooni nullkohaks *nimetatakse seda argumendi väärtust, mille puhul funktsiooni väärtus on* 0.

Seega leiame lineaarse funktsiooni

$$y = ax + b$$

nullkoha, kui lahendame võrrandi

$$ax + b = 0.$$

Lahendades saame

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Graafikul vastab lineaarse funktsiooni nullkohale sirge $y = ax + b$ ja x-telje lõikepunkt, s. o. punkt, mille abstsiss $x = -\frac{b}{a}$. Nullkoht on positiivne, kui see lõikepunkt on x-telje positiivsel poolel, ja negatiivne, kui see lõikepunkt on x-telje negatiivsel poolel.

Kui a ja b on samade märkidega, siis

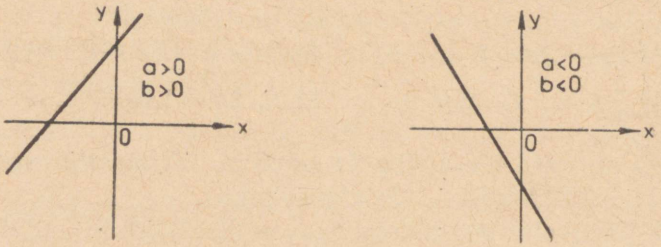
$$\frac{b}{a} > 0 \text{ ehk } -\frac{b}{a} < 0.$$

Seega,

1) *kui* $a > 0$ *ja* $b > 0$ *ning*
2) *kui* $a < 0$ *ja* $b < 0$,

siis lineaarse funktsiooni nullkoht on negatiivne.

Joonisel 19 on esitatud sirged, mis rahuldavad nimetatud tingimusi.



Joon. 19.

Kui a ja b on erinevate märkidega, siis

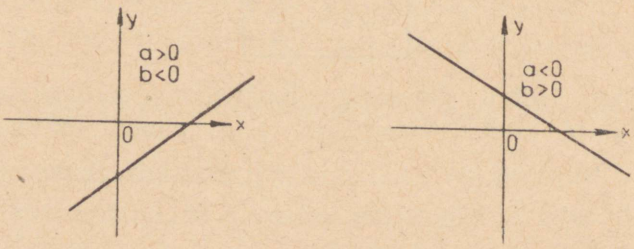
$$\frac{b}{a} < 0 \quad \text{ehk} \quad -\frac{b}{a} > 0.$$

Seega,

1) *kui* $a > 0$ *ja* $b < 0$ *ning*
2) *kui* $a < 0$ *ja* $b > 0$,

siis lineaarse funktsiooni nullkoht on positiivne.

Joonisel 20 on esitatud sirged, mis rahuldavad nimetatud tingimusi.



Joon. 20.

Lineaarse funktsiooni nullkohaks on koordinaatide alguspunkt, kui $b = 0$, *sest siis* $x = -\frac{0}{a} = 0$ *ja tema graafikuks on sel juhul koordinaatide alguspunkti läbiv sirge.*

Lineaarse funktsiooni olemasoluks on vajalik, et

$$a \neq 0.$$

Kui aga oletada, et $a = 0$, siis saame x-teljega paralleelse sirge võrrandi $y = b$, mis ei esita lineaarset funktsiooni, vaid nn. konstantset funktsiooni.

Ülesandeid.

54. Missuguse märgiga on järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = -2x + 1$
2) $y = 3x - 3$
3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
4) $y = -0{,}462x + \frac{12}{533}$
5) $y = \frac{63}{47}x - 2{,}56$
6) $y = x + 5$

55. Teisendades võrrandid sobivale kujule, tee kindlaks, missuguse märgiga on järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $4x - 6y + 3 = 0$
2) $21x + 46y - 100 = 0$
3) $\frac{15}{43}x - \frac{61}{18}y + 1 = 0$
4) $-8{,}43x + 9{,}34y + 0{,}105 = 0$

56. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}$
2) $y = 5{,}32x + 10{,}64$
3) $-3x + 0{,}6y - \frac{2}{3} = 0$
4) $\frac{4}{5}x - \frac{7}{8}y + 5{,}2 = 0$

57. Missuguse lineaarse funktsiooni nullkoha leidmise ülesandele sa jõuad järgmiste võrrandite lahendamisel?

a) $9x + 6 = 10(9 - \frac{1}{2}x)$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$

c) $0{,}36x - 3{,}4 = 0{,}3(0{,}4x - 1{,}2)$

d) $\frac{5-x}{8} = \frac{18-5x}{12}$

e) $2 - \frac{3x-7}{4} = \frac{x+17}{5}$

Missugused sinu poolt leitud funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

Tee leitud funktsiooni avaldisest kindlaks, missuguse märgiga on selle funktsiooni nullkoht.

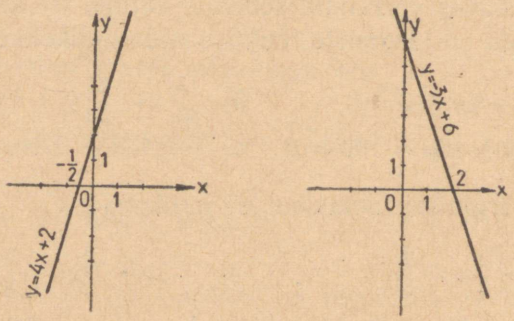
Leia nullkohad.

§ 14. LINEAARSE FUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKOND.

Olgu antud 2 niisugust lineaarset funktsiooni, et ühe graafikuks oleks tõusev, teise graafikuks langev sirge.

Nullkohast paremal on tõusev sirge ülalpool x-telge, s. t. funktsiooni väärtused on seal positiivsed. Nullkohast vasakul on see sirge aga allpool x-telge ja funktsiooni väärtused on seal negatiivsed. Langeva sirge puhul on vastupidi.

Olgu antud näiteks funktsioonid $y = 4x + 2$ ja $y = -3x + 6$ (joon. 21). Neist esimese graafikuks on tõusev, teise graafikuks



Joon. 21.

langev sirge. Miks? Et esimese funktsiooni nullkohaks on $x = -\frac{1}{2}$ ja teise funktsiooni nullkohaks $x = 2$, siis

$$4x + 2 > 0, \text{ kui } x > -\frac{1}{2}, \quad \text{ja } 4x + 2 < 0, \text{ kui } x < -\frac{1}{2};$$

$$-3x + 6 > 0, \text{ kui } x < 2, \text{ ja } -3x + 6 < 0, \text{ kui } x > 2.$$

Funktsiooni positiivsuspiirkonnaks *nimetatakse argumendi nende väärtuste piirkonda, milledele vastavad funktsiooni väärtused on positiivsed.*

Funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks *nimetatakse argumendi nende väärtuste piirkonda, milledele vastavad funktsiooni väärtused on negatiivsed.*

Nii on funktsiooni $4x+2$ positiivsuspiirkonnaks $x>-\frac{1}{2}$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<-\frac{1}{2}$ ning funktsiooni $-3x+6$ positiivsuspiirkonnaks $x<2$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x>2$.

Ülesandeid.

58. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=3x-5$
b) $y=2x+7$
c) $y=-4x-1$
d) $y=-x+3$
e) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}$
f) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{7}$

59. Leia järgmiste funktsioonide nullkoht ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=x-2$
b) $y=5x+1$
c) $y=-2x+3$
d) $y=-3x-5$
e) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$
f) $y=-0{,}4x-0{,}1$
g) $y=4\frac{1}{5}x$
h) $y=-\frac{4}{3}x$

LINEAARNE VÕRRATUS.

§ 15. LINEAARSE VÕRRATUSE LAHENDAMISEST.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ positiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b>0$.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ negatiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b<0$.

Kirjutusi $ax+b\geqslant 0$ ja $ax+b\leqslant 0$ *nimetatakse* **lineaarseteks võrratusteks.**

Niisiis, selle asemel, et öelda:

leida funktsiooni $ax+b$ *positiivsuspiirkond,*

võib öelda:

lahendada võrratus $ax+b>0$.

Näitame nüüd, et võrrandi lahendamisel kasutatavad võtted:

1) *liikmete ühelt poolelt teisele ülekandmine tema märgi vastupidiseks muutmisega, s. t. võrrandi mõlemale poolele ühe ja sama arvu liitmine,*

2) *võrrandi mõlema poole korrutamine ühe ja sama arvuga,* on rakendatavad ka võrratuse lahendamisel.

Vaatleme esmalt mõningaid võrratuste omadusi.

Olgu a ja b kaks arvu, mille kohta on teada, et

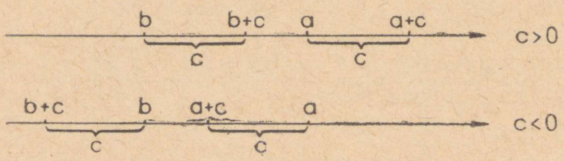
$$a > b.$$

See tähendab, et arvule a vastav punkt on arvteljel arvule b vastavast punktist paremal (joon. 22).

1° Kui liita võrratuse mõlema poolega üks ja sama arv, näiteks c, mis võib olla nii positiivne kui ka negatiivne, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

$$\textit{kui } a > b, \textit{ siis ka } a + c > b + c.$$

Selle omaduse kehtivus selgub jooniselt 22.



Joon. 22.

Too arvulisi näiteid.

2° Kui korrutada võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse arvuga, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

$$\textit{kui } a > b \textit{ ja } m > 0, \textit{ siis } am > bm.$$

Too arvulisi näiteid!

Selle omaduse tõestamiseks kasutame omadust 1°. Liidame võrratuse $a > b$ mõlema poolega $-b$, siis saame

$$a - b > 0.$$

Et arv $(a - b)$ on positiivne ja ka m on positiivne, siis on ka nende korrutis positiivne, s. t.

$$(a - b)m > 0$$

ehk

$$am - bm > 0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bm, saamegi

$$am > bm.$$

3° Kui korrutada võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama negatiivse arvuga, siis saame vastupidise võrratuse, s. t.

$$\textit{kui } a > b \textit{ ja } n < 0, \textit{ siis } an < bn.$$

Too arvulisi näiteid!

Tõestamiseks lahutame võrratuse $a > b$ mõlemast poolest b (ehk liidame $-b$), saame

$$a - b > 0.$$

Et n on negatiivne ja et negatiivse ja positiivse arvu korrutis on negatiivne, siis

$$(a - b)n < 0,$$

millest

$$an - bn < 0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bn, saamegi

$$an < bn.$$

§ 17. LINEAARSE VÕRRATUSE LAHENDAMINE.

Eelmises paragrahvis käsitletud võrratuse omadused kehtivad ka tundmatut sisaldava võrratuse korral, sest iga tundmatut sisaldav võrratus muutub arvvõrratuseks, kui anname tundmatule mingi niisuguse arvulise väärtuse, mis seda võrratust rahuldab. Nii saame antud võrratust

$$ax + b > 0$$

lahendada järgmiselt:

1) liidame võrratuse mõlema poolega $-b$, saame

$$ax > -b;$$

2) korrutame võrratuse mõlemaid pooli $\frac{1}{a}$-ga:

kui $a > 0$, saame $x > -\frac{b}{a}$,

kui $a < 0$, saame $x < -\frac{b}{a}$.

Seega oleme saanud võrratuse lahendamiseks järgmised juhised.

1. Võrratuse liikmeid võib üle kanda võrratuse ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme ees oleva märgi vastupidiseks.

2. Võrratuse mõlemaid pooli võib korrutada ühe ja sama arvuga: kui see arv on positiivne, jääb võrratuse märk muutmata, kui see arv on negatiivne, tuleb võrratuse märk muuta vastupidiseks.

Näiteid.

1. Lahendada võrratus:

$$3x - 12 < 0.$$

Viies -12 võrratuse teisele poolele, saame

$$3x < 12.$$

Jagades 3-ga, saame

$$x < 4.$$

Tulemuse kontrollimiseks võtame mõne arvulise väärtuse, mis rahuldab tingimust $x < 4$, näiteks 1 ja $\frac{1}{3}$. Asetame need väärtused algvõrratusse. Saame $-9 < 0$ ja $-11 < 0$, mis on õiged.

Seega $x < 4$ on antud võrratuse lahendiks.

2. Lahendada võrratus:

$$\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled 10-ga, saame

$$35 - 5x - 30 < 6 + 8x - 40.$$

Koondame ning kanname tuntud liikmed ühele, tundmatud teisele poolele:

$$5 - 5x < 8x - 34;$$
$$-5x - 8x < -34 - 5;$$
$$-13x < -39.$$

Jagades — 13-ga, saame

$$x > \frac{-39}{-13}$$

ehk

$$x > 3.$$

Tulemuse kontrollimiseks asetame algvõrratusse x asemele näiteks arvud 4 ja 10. Saame $-\frac{3}{2} < -\frac{1}{5}$ ja $-\frac{9}{2} < \frac{23}{5}$, mis on õiged. Seega $x > 3$ on antud võrratuse lahendiks.

Nagu juba eespool märgitud, on võrratuse lahendiks mitte tundmatu üksainus väärtus, vaid väärtuste piirkond. Nii rahuldavad esimest võrratust kõik x väärtused, mis on väiksemad kui 4, ja teist kõik x väärtused, mis on suuremad kui 3.

Ülesandeid.

60. Lahenda järgmised võrratused:

1) $5(x-2) - 9 < 11$
2) $8(10-x) > 5(x+3)$
3) $5(z+1) + 6(z+2) < 9(z+3)$
4) $8(3y-1) > 30 + 9(5y-11) - 2(7-2y)$
5) $x - 1 < \frac{2x+1}{3}$
6) $x + \frac{12-x}{4} > \frac{26-x}{2}$
7) $\frac{9x+7}{2}\left(x - \frac{7x-2}{7}\right) < 36$
8) $\frac{x+10}{3} + \frac{16x-3}{20} - \frac{7x-6}{4} > \frac{x-3}{2} + \frac{3(x-3)}{10}$.

Olgu antud kaks ühe tundmatuga võrratust ja nõutagu leida selle tundmatu niisugune väärtuste piirkond, mis rahuldaks mõlemat antud võrratust. Niisugust ülesannet nimetatakse **võrratusesüsteemiks** ja tähistatakse loogelise suluga võrratuste ees nagu võrrandisüsteemigi. Näiteks on

a) $\begin{cases} 4-2x>0 \\ 1+3x<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{13-2x}{2}<2x \\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3} \end{cases}$

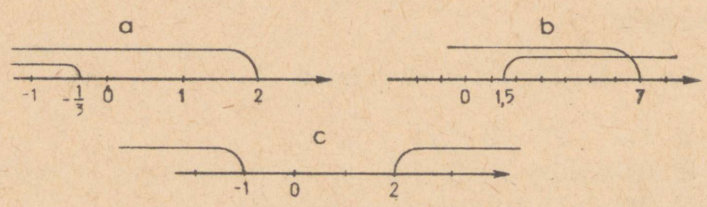
c) $\begin{cases} \frac{3x-4}{2}>1 \\ 2x+7<5 \end{cases}$

võrratusesüsteemid.

Lahendades neis võrratusesüsteemides eraldi kummagi võrratuse, teisenduvad need järgmisteks võrratusesüsteemideks:

a) $\begin{cases} x<2 \\ x<-\frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x>1{,}5 \\ x<7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x>2 \\ x<-1 \end{cases}$

Esitame need tulemused arvteljel (joon. 23).



Joon. 23.

Nagu näeme, võime võrratusesüsteemi lahendamisel saada kaht liiki tulemusi:

1) *mõlema võrratuse lahendite piirkonnad osaliselt kattuvad* (*joon. 23, a ja b*) (*erandjuhul võivad ka täiesti kattuda*);

2) *mõlema võrratuse lahendite piirkonnad ei kattu* (*joon. 23, c*).

Kattuvate piirkondade puhul on piirkondade ühine osa võrratusesüsteemi lahendiks.

Kui üksikute võrratuste lahendite piirkonnad ei kattu, siis võrratusesüsteemil lahend puudub.

Nagu näeme, on juhtudel a) ja b) kattuvad piirkonnad, juhul c) mittekattuvad. Seega juhtudel a) ja b) on võrratusesüsteemil lahend olemas. Need on vastavalt

$$x < -\frac{1}{3} \text{ ja } 1{,}5 < x < 7.$$

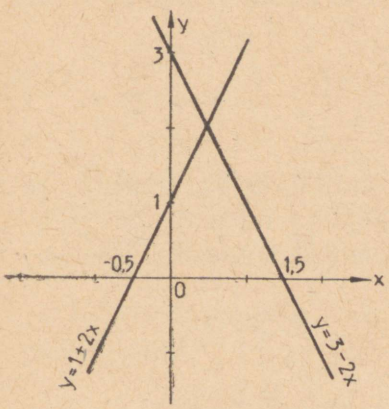
Juhul c) aga võrratusesüsteemil lahend puudub.

§ 19. LINEAARSE VÕRRATUSESÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE.

Lineaarse võrratusesüsteemi graafiline lahendamine tähendab leida üks järgnevatest abstsissi väärtuste piirkondadest:

a) *piirkond, kus mõlemad sirged on ülalpool x-telge;*
b) *piirkond, kus mõlemad sirged on allpool x-telge;*
c) *piirkond, kus üks sirge on ülal-, teine allpool x-telge.*

Joonisel 24 on antud funktsioonide $y = 1 + 2x$ ja $y = 3 - 2x$ graafikud.



Joon. 24.

Lahendada võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ 3 - 2x > 0 \end{cases}$$

tähendab leida see x väärtuste piirkond, kus mõlemad sirged on ülalpool x-telge. Nagu jooniselt näeme, on selle ülesande lahendiks

$$-0{,}5 < x < 1{,}5.$$

Lahendada sellesama graafiku abil võrratusesüsteemid

$$\begin{cases} 1 + 2x < 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 1 + 2x < 0 \\ 3 - 2x > 0. \end{cases}$$

Ülesandeid.

61. Lahenda järgmised võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} 2(10-7x)<28 \\ 5x-(2x-7)>11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-0{,}3x<4{,}5x+2 \\ 0{,}1x-0{,}1<0{,}15x-5{,}1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{14}>14 \\ \frac{3}{4}x+\frac{5}{6}x>38 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}<\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8} \\ \frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}>\frac{x+6}{6} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{3x+2}{18}-\frac{5x-8}{24}>\frac{3(2x+1)}{36}-\frac{x-1}{2}-\frac{2}{9} \\ \frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}>x-\frac{20x-(10-3x)}{156} \end{cases}$

62. Teades, et kahe teguri korrutis on positiivne, kui mõlemad tegurid on samamärgilised, ja negatiivne, kui mõlemad tegurid on erimärgilised, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

1) $(x-3)(x+4)>0$
2) $(x+2)(x+5)<0$
3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{3}\right)<0$
4) $(2x-0{,}42)(3x-2{,}31)>0$.

63. Teades, et murd on positiivne, kui lugeja ja nimetaja on samamärgilised, ja negatiivne, kui lugeja ja nimetaja on erinevate märkidega, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

1) $\frac{x-3}{2x+1}<0$
2) $\frac{5x+1}{x}>0$
3) $\frac{-3x-7}{(5x+6)^2}<0$
4) $\frac{(-3x+6)^2}{3-2x}>0$
5) $\frac{4x+3}{2x-7}>1$
6) $\frac{-3x+5}{4x}<2$
7) $\frac{-2x}{4-3x}>3$
8) $\frac{2-5x}{2x-5}<-1$

64. Lahenda graafiliselt järgmised võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} 2-3x>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2-3x<0 \\ 2x+1<0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2-3x>0 \\ 2x+1<0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2-3x<0 \\ 2x+1>0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x+2>0 \\ -3x+4<0 \end{cases}$

65. Kahekohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist 1 võrra suurem. Leia see arv, teades, et ta on suurem kui 77 ja väiksem kui 96.

66. Kui antud kahekohalise arvuga liita pool temast, siis saame 128-st suurema, kuid 130-st väiksema arvu. Leia see arv.

ARITMEETILINE PROGRESSIOON.

§ 20. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Lineaarse funktsiooni väärtuste jada, mis on saadud argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, ..., *nimetatakse* **aritmeetiliseks progressiooniks.**

Näiteks lineaarsetest funktsioonidest $2x+3$, $-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ ja $0{,}2x-2$ saame aritmeetilised progressioonid

5, 7, 9, 11, ...

$\frac{2}{3}$, 0, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, ...

$-1{,}8$; $-1{,}6$; $-1{,}4$; $-1{,}2$, ...

Aritmeetilise progressiooni arve nimetatakse vastavalt tema esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. **liikmeks.**

Moodustagu arvud

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

aritmeetilise progressiooni, s. t. on antud üks lineaarne funktsioon tabeliliselt:

x	1	2	3	...	$n-1$	n	...
$ax+b$	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n	...

Lineaarse funktsiooni põhiomaduse kohaselt vastavad võrdsetele argumendi muutudele võrdsed funktsiooni muudud.

Aritmeetilise progressiooni korral $\Delta x = 1$. Valemist $y = a \cdot \Delta x$ järeldub nüüd, et $\Delta y = a$, s. t. et

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = a.$$

Seega, *kui on antud arvude jada ja tahame kindlaks teha, kas ta esitab aritmeetilist progressiooni või mitte, siis tuleb kontrollida, kas iga järgnev arv erineb eelmisest ühe ja sama konstandi võrra.*

Näiteks on jada

$$6, 4, 2, 0, -2, \ldots$$

aritmeetiline progressioon, sest

$$4 - 6 = 2 - 4 = 0 - 2 = -2 - 0 = -2.$$

Seevastu jada

$$6, 3, 2, 1, -2$$

aga pole aritmeetiline progressioon, sest

$$3 - 6 \neq 2 - 3 = 1 - 2 \neq -2 - 1.$$

On saanud tavaks aritmeetilise progressiooni vahet tähistada tähega d (lad. k. *differentia* — vahe). Eespool toodud näidete juures on aritmeetilise progressiooni vaheks vastavalt 2, $-\frac{3}{2}$ ja 0,2

§ 21. ARITMEETILISELE PROGRESSIOONILE VASTAVA LINEAARSE FUNKTSIOONI LEIDMINE.

1. Olgu ülesandeks leida aritmeetilise progressiooni

$$-5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots$$

kümnes ja sajas liige.

Otsitavad liikmed võime saada, kui jätkame antud progressiooni kirjutamist. Jätkamine 10. liikmeni toimub suhteliselt kiiresti:

$$-5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31$$

Seega 10. liige on 31. Hoopis aeganõudvam oleks progressiooni väljakirjutamine 100. liikmeni. Ka ei ole selle pika arvjada üleskirjutamisel eksimise võimalused välditud. Seetõttu on siin otstarbekohasem leida see lineaarne funktsioon, mille väärtuste jada antud aritmeetiline progressioon esitab.

Olgu otsitavaks lineaarseks funktsiooniks $y = ax + b$. Et antud progressiooni vahe $d = 4$ ja et $d = a$, siis otsitav funktsioon esitub kujus

$$y = 4x + b.$$

b on lineaarse funktsiooni algväärtus. Seega tuleb leida otsitava funktsiooni see väärtus, mis vastab argumendi väärtusele 0. Seda on aga antud progressiooni abil võimalik leida, lahutades 1. liikmest, s. o. argumendi väärtusele 1 vastavast funktsiooni väärtusest progressiooni vahe. Vaadeldava näite korral on $b = -5 - -4 = -9$. Otsitavaks funktsiooniks on seega

$$y = 4x - 9.$$

Et progressiooni liikmed on selle funktsiooni väärtusteks argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, . . . , siis peavad väärtuspaarid (1; —5), (2; —1), (3; 3) jne. saadud võrrandit rahuldama. Kontrolli seda!

Olgu $x = 100$. Siis $y = 4 \cdot 100 - 9 = 391$. Seega on progressiooni 100. liige 391.

2. Lahendame vaadeldud probleemi ka üldiselt.

Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n.$$

Need arvud on otsitava lineaarse funktsiooni vastavateks väärtusteks argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, . . ., n.

Seame ülesandeks leida vastav lineaarne funktsioon.

Teame juba, et otsitavas lineaarses funktsioonis $y = ax + b$ on $a = d$ ja $b = a_1 - d$. Otsitav funktsioon on seega

$$y = dx + a_1 - d$$

ehk

$$y = a_1 + (x - 1)d.$$

§ 22. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIIKME VALEM.

Et aritmeetilise progressiooni korral argument omandab ainult väärtused 1, 2, 3, 4, . . . , n, milledele vastavateks funktsiooni väärtusteks on a_1, a_2, a_3, a_4, . . ., a_n, siis asendatakse saadud valemis x n-ga ja y a_n-ga. Saame valemi

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d.}$$

Seda võrdust nimetatakse **aritmeetilise progressiooni üldliikme valemiks.**

Nii on aritmeetilise progressiooni

$$-5,\ -1,\ 3,\ 7,\ \ldots$$

üldliikme valemiks

$$a_n = -5 + (n-1)\cdot 4.$$

Ülesandeid.

67. Leia alljärgnevatele funktsioonidele vastavad aritmeetilised progressioonid:

a) $-3x+1$; b) $5x+2$; c) $\frac{3}{4}x-1$; d) $2{,}3x-1{,}2$.

68. Leia alljärgnevatele progressioonidele vastavad lineaarsed funktsioonid:

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...
b) 8, 3, −2, −7, −12, ...
c) −1,6; −1,2; −0,8; −0,4, ...
d) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \ldots$
e) $2\frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1\frac{3}{4}, \ldots$
f) 3,14; 3; 2,86; 2,72; ...

69. Leia igale ülesandes 68 esitatud aritmeetilisele progressioonile üldliikme valem.

70. Kirjuta üles aritmeetilise progressiooni 10 esimest liiget, kui üldliikme valem on:

a) $a_n = 3 + (n-1)\cdot\frac{3}{4}$
b) $a_n = -5 + (n-1)\cdot(-1{,}5)$
c) $a_n = \frac{2}{3} + (n-1)\cdot\frac{7}{6}$
d) $a_n = -4{,}3 + (n-1)\cdot(-0{,}12)$

§ 23. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI OMADUS.

Olgu vaja leida aritmeetilise progressiooni teatud hulga liikmete summa, s. t. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Kui progressiooni liikmete arv on väike, siis on selle summa leidmine lihtne. Näiteks

progressiooni $-3, -1, 1, 3, 5$ summaks on 5. Kui aga liikmete arv on suur, siis on summa arvutamine küllaltki aeganõudev. Sel juhul kasutatakse vastavat valemit, mille tuletamisele asumegi.

Eelkõige tutvume aga aritmeetilise progressiooni omadusega:

aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Vaatleme aritmeetilist progressiooni

$$-6, \quad -3, \quad 0, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15.$$

Siin on esimese ja viimase liikme summa

$$-6 + 15 = 9$$

ning algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summad:

$$\begin{aligned} -3 + 12 &= 9; \\ 0 + 9 &= 9; \\ 3 + 6 &= 9. \end{aligned}$$

Et aritmeetilise progressiooni teise liikme saame, kui esimesele liikmele liidame progressiooni vahe, ning eelviimase liikme saame, kui viimasest liikmest lahutame vahe, s. t.

$$a_2 = a_1 + d \text{ ja } a_{n-1} = a_n - d,$$

siis nende summa

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

ongi võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Samasuguse arutluse teel võime veenduda, et algusest ja lõpust kolmanda, neljanda jne. liikme summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Selle omaduse kehtivust saame selgitada ka järgmise arutlusega.

Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Näeme, et lõpust teise liikme indeks on $n-1$, lõpust kolmanda liikme indeks $n-2$ jne. Lõpust k-nda liikme indeks on seega $n-k+1$. Teoreem väidab, et

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Üldliikme valemi järgi

$$a_k=a_1+(k-1)d$$

ja

$$a_{n-k+1}=a_1+(n-k+1-1)d.$$

Niisiis

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d.$$

Avades sulud ja koondades saame

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+kd-d+a_1+nd-kd=a_1+a_1+(n-1)d.$$

Et

$$a_1+(n-1)d=a_n,$$

siis saamegi, et

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Kui osutub, et progressiooni liikmete arv on paaritu, siis keskmise liikme kahekordne on võrdne esimese ja viimase liikme summaga. Tõepoolest, kui $\bar{a}$ on keskmine liige, siis leidub niisugune k väärtus, mille puhul

$$a_k=a_{n-k+1}=\bar{a}.$$

Saadud valemi kohaselt

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n$$

ja seega

$$2\bar{a}=a_1+a_n.$$

Siit

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_n}{2},$$

s. t. progressiooni keskmine liige on võrdne esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmisega.

§ 24. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Leiame nüüd valemi aritmeetilise progressiooni n liikme summa arvutamiseks.

Tähistades n liikme summa tähega S_n, võime kirjutada

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n.$$

Esitame selle summa kaks korda: üks kord on liidetavateks

progressiooni liikmed antud järjestuses, teine kord vastupidises järjestuses.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Üksteise all asetsevate liikmete summa on teatavasti jääv ja võrdne esimese ning viimase liikme summaga. Seega

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ja siit

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}.}$$

Seega,

aritmeetilise progressiooni summa on võrdne äärmiste liikmete aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Teades, et $a_n = a_1 + (n-1)d$, võime aritmeetilise progressiooni summa valemi esitada veel kujus

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n.}$$

Ülesandeid.

71. Leia aritmeetilise progressiooni n-es liige, kui

a) $a_1 = 3$ $\quad d = -2$ $\quad n = 16$

b) $a_1 = -\frac{2}{3}$ $\quad d = \frac{1}{3}$ $\quad n = 13$

c) $a_1 = 2{,}5$ $\quad d = -1{,}2$ $\quad n = 26$

72. Leia aritmeetilise progressiooni summa, kui

a) $a_1 = 6$ $\quad a_n = 76$ $\quad n = 15$

b) $a_1 = 10$ $\quad a_n = -19$ $\quad n = 30$

c) $a_1 = 3{,}4$ $\quad d = 2{,}1$ $\quad n = 14$

d) $a_1 = \frac{5}{6}$ $\quad d = \frac{4}{3}$ $\quad n = 12.$

73. Täida järgnev tabel:

a_1	d	n	a_n	S_n
$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{8}$	
-10		6	-20	
	$-\frac{1}{4}$	13	1	
	2	15	-10	
14,5	0,7		32	
$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$	
-10	-2	6		
5,2	0,4	43		
0,7		30		108
		10	-37	-55

74. Mitu silma on kokku ühel täringul?

75. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul kell, kui ta lööb ainult täistunde, alates 1 kuni 12?

76. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul Tartu raekoja kell, kui ta lööb täistunde alates 1 kuni 12 ja lisaks sellele iga veerandtunni ajal 1 löögi, pooltunni ajal 2 lööki, kolmveerandtunni ajal 3 lööki ja täistunni ajal 4 lööki?

77. Leia esimese 100 täisarvu summa.

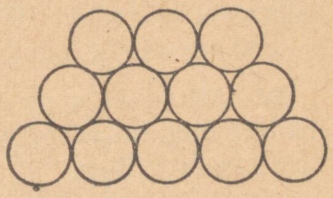
78. Leia esimese 100 paarisarvu summa.

79. Leia esimese 100 paaritu arvu summa.

80. Vabalt langev keha läbib esimeses sekundis 4,9 m ja igas

järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelnevas. Leida: a) kui pika tee läbib see keha 21 sekundiga, b) mitu sekundit langeb keha 500 m kõrguselt.

81. Kahe linna vahelise gaasijuhtme ehitamiseks valmistatud 25 m pikkused torud olid laotud tehase õuele 8 suurde täpselt ühesuurusesse kuuerealisesse virna, nii nagu näidatud joonisel 25. Alumises reas oli 20 toru. Leia: a) mitu toru oli igas virnas, b) kui pikk oli ehitatav gaasijuhe.

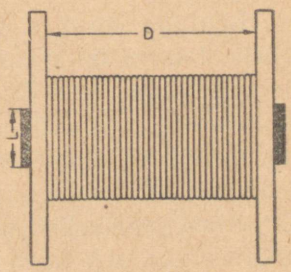


Joon. 25.

82. Jalgratturite matkagrupp otsustas pärast ühtlast kahetunnilist sõitu, kui oli läbitud 24 km, tõsta igas järgnevas tunnis keskmist kiirust 2 km võrra tunnis. Mis kellaajal jõudis matkagrupp sihtkohta, kui väljuti kell 7 hommikul ja kogu tee pikkus oli 114 km?

83. Maja katus koosneb kahest võrdsest trapetsikujulisest ja kahest võrdsest kolmnurgakujulisest osast. Trapetsikujulise osa räästapoolsele küljele pandi 240 kivi ja igasse järgmisse ritta kaks kivi vähem kui eelmisse. Kolmnurgakujulise osa harjapoolsele viimasele reale pandi üks kivi ja igas eelmises reas oli kaks kivi rohkem. Teades, et kivide ridade arv nii trapetsikujulistel kui ka kolmnurgakujulistel osadel oli 30, leia, mitu kivi kulus katuse katmiseks.

Kui transpordil purunemise ja defektidega kivide osale langes 3,7% kogu tellimusest, siis ca mitmele kivile oli esitatud tellimus, kui katus sai täielikult kaetud ja ülejääki polnud?



Joon. 26.

84. Rullile, mille mõõtmed on D ja L (joon. 26), on mähitud telefonikaabel, mille läbimõõt on d cm. Kui palju kaablit mahub 1., 2., 3., ..., n. kihile, kui iga järgnev kiht on keritud eelmisele täpselt peale, mitte vahekohtadesse? Kui pikk on rullile mähitud kaabel, kui $D = 0{,}9$ m, $L = 0{,}8$ m, $d = 4$ cm ja kihte on 25?

85. Kolhoosi üldkoosolek võttis 1961. a. kohustuse tõsta 20 aasta jooksul piimatoodang 3-kordseks, kusjuures piimatoodangu juurdekasv iga aasta kohta kavandati ühtlane. Kui palju kohustus kolhoos piima tootma 1965. a., 1972. a. ja 1980. a., kui 1961. a. piimatoodang oli 760 tonni?

86. Aritmeetilise progressiooni n-es liige on 1800% esimesest liikmest ning liikmete arv ja liikmete summa suhtuvad nagu 1 : 19. Leida esimene liige.

87. Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv, kui esimene liige on 2,5% ja vahe 7,5% n-dast liikmest.

LINEAARNE INTERPOLATSIOON.

§ 25. LINEAARSE INTERPOLATSIOONI VALEM.

Olgu antud mingi funktsioon tabelilisel kujul. Vaatame näiteks väljavõtet ruutjuurte tabelist.

x	3,2	3,3	3,4	3,5
y	1,79	1,82	1,84	1,87

Huvitagu meid y väärtus, kui x väärtus on 3,33. Esitatud tabeli ulatuses on argumendi muuduks 0,1; sellele vastavad funktsiooni muudud on 0,03; 0,02 ja 0,03. Et viimaste erinevus on küllaltki väike, siis võime vaatluse all oleva funktsiooni antud argumendi väärtuste vahemikus lugeda ligikaudu lineaarseks. Seda enam võime selle funktsiooni lugeda lineaarseks kahe kõrvutiasetseva tabeliväärtuse vahel. Kui argumendi muut on küllalt väike, siis tuleb see lineaarsuse omadus ilmsiks iga funktsiooni juures.

Interpolatsiooniks[1] *nimetatakse funktsiooni väärtuste tabeli täiendamist vahepealsete väärtustega.* Lineaarse interpolatsiooni

[1] *interpolatio* (lad. k.) — vahelelüke.

korral vaadeldakse funktsiooni antud väärtuste vahel lineaarse funktsioonina.

Tuletame nüüd **lineaarse interpolatsiooni valemi.**

Olgu antud mingi funktsioon tabelina

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

Leiame argumendi väärtusele $x_1 + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y_1 + \Delta y$. Et me loeme funktsiooni vahemikus x_1-st x_2-ni lineaarseks, siis graafikul ühendab neid punkte sirge.

Jooniselt 27 näeme, et

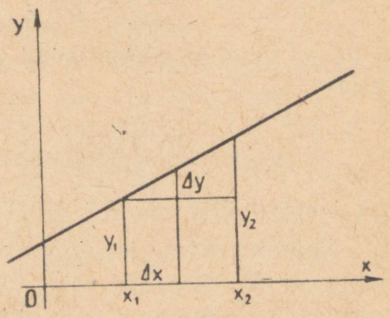
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (põhjenda seda!),

kust

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x.$$

Seega otsitav funktsiooni väärtus

$$y_1 + \Delta y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x.$$



Joon. 27.

N ä i d e. Kasutades eelmisel leheküljel toodud tabelit, leiame $\sqrt{3{,}33}$. Sel juhul

$$\Delta y = \frac{1{,}84 - 1{,}82}{3{,}4 - 3{,}3} \cdot 0{,}03 = \frac{0{,}02}{0{,}1} \cdot 0{,}03 = 0{,}006$$

ja otsitavaks funktsiooni väärtuseks on $1{,}82 + 0{,}006 = 1{,}826$.

§ 26. LINEAARSE INTERPOLATSIOONI RAKENDAMINE.

Vaatleme, kuidas on lineaarset interpolatsiooni rakendatud koolides kasutusel olevais V. Bradise tabeleis.

T Ü Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise kateeder
TARTU ÜLIKOOLI

Toome väljavõtte näiteks kuupide tabelist

N	0	1	2	3	....	7	8	9
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	....	416,8	418,5	420,2

Otseselt leitavad on siit kolmekohaliste arvude 7,40 kuni 7,49 kuubid. Nii on näiteks

$$7{,}43^3 = 410{,}2, \qquad 7{,}47^3 = 416{,}8.$$

Kui tahame saada aga neljakohalise arvu kuupi, siis kasutame lineaarset interpolatsiooni. Leiame näiteks $7{,}422^3$. Tähistame

$$x_1 = 7{,}42; \qquad x_2 = 7{,}43;$$
$$y_1 = 408{,}5; \qquad y_2 = 410{,}2;$$
$$\Delta x = 0{,}002$$

siis

$$\Delta y = \frac{410{,}2 - 408{,}5}{7{,}43 - 7{,}42} \cdot 0{,}002 = \frac{1{,}7}{0{,}01} \cdot 0{,}002 = 0{,}34 \approx 0{,}3$$

ja seega $7{,}422^3 = 408{,}5 + 0{,}3 = 408{,}8$.

Need lineaarse interpolatsiooni abil leitavad Δy väärtused on esitatud V. Bradise tabelites parandusveergudes. Vaatluse all olev rida jätkub seal veergudega

1	2	3	4	5
2	3	5	7	8

Siit leiamegi, et argumendi kahele neljanda koha ühikule vastab funktsiooni kolm neljanda koha ühikut jne.

Seega, et tabelist leida $7{,}422^3$, võtame tabelist $7{,}42^3$ ja liidame 2-le vastava paranduse, s. o. $408{,}5 + 0{,}3 = 408{,}8$.

Kui tahame selle tabeli abil leida aga näiteks

$$7{,}487^3,$$

siis võtame tabelist $7{,}49^3$ ja lahutame 3-le vastava paranduse, s. o. $420{,}2 - 0{,}5 = 419{,}7$.

Parandusveergude kasutamine toimub samal viisil ka teiste tabelite juures.

Näiteks olgu antud väljavõte siinuste tabelist

A	0′	6′	12′	...	48′	54′	60′		1′	2′	3′
54°	0,8090	8100	8111	...	8171	8181	0,8192	35°	2	3	5
	60′	54′	48′	...	12′	6′	0′	A			

Siit leiame näiteks, et $\sin 54°12' = 0{,}8111$, $\sin 54°50' = 0{,}8174$ ja $\sin 54°10' = 0{,}8108$.

Viimasel juhul võtame tabelist $\sin 54°12'$ ja lahutame sellest 2′-le vastava paranduse, s. o. $0{,}8111 - 0{,}0003 = 0{,}8108$.

Siinuste tabelit kasutatakse ka koosinuste tabelina, sest nagu teada, on $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$. Nii on $\cos 35°12' = 0{,}8171$, $\cos 35°59' = 0{,}8092$. Koosinuse väärtuste leidmisel tuleb arvestada, et nurga suurenemisel koosinuse väärtused vähenevad.

Ülesandeid.

88. On antud tabel

x	9,10	9,11	9,12	9,13	9,14
x^2	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades x^2, kui $x = 9{,}106$; 9,114; 9,121; 9,138.

89. On antud siinuste tabel

15°	15°10′	15°20′	15°30′	15°40′	15°50′	16°
0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades $\sin \alpha$, kui

$$\alpha = 15°06'; \ 15°12'; \ 15°27'; \ 15°38'; \ 15°43'; \ 15°55'.$$

90. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $\sin 15°42'$; $\sin 82°13'$; $\sin 62°53'$; $\cos 2°18'$; $\cos 52°49'$; $\cos 77°8'$;

b) $\tan 30°12'$; $\tan 53°16'$; $\tan 72°47'$; $\cot 18°18'$; $\cot 34°15'$; $\cot 65°5'$.

91. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $3{,}14^2$; $5{,}42^2$; $9{,}47^2$; $2{,}143^2$; $4{,}276^2$; $8{,}033^2$;

b) $\sqrt{7{,}44}$; $\sqrt{28{,}8}$; $\sqrt{94{,}7}$; $\sqrt{1{,}972}$; $\sqrt{6{,}409}$; $\sqrt{39{,}25}$; $\sqrt{47{,}12}$; $\sqrt{84{,}86}$.

c) $1{,}292^3$; $2{,}045^3$; $3{,}917^3$; $8{,}435^3$.

92. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) ringjoone pikkus, kui diameetri pikkus on:

4; 15; 6,47; 5,321; 8,972; 2,651;

b) ringi pindala, kui diameetri pikkus on:

1,422; 3,563; 6,743; 8,106; 9,327.

93. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia järgmiste arvude pöördväärtused:

1,192; 2,435; 3,569; 8,888; 9,052.

§ 27. LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI UURIMINE.

Vaatleme täheliste kordajatega lineaarset võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} q_1 x + p_1 y = m_1 \\ q_2 x + p_2 y = m_2. \end{cases}$$

Rakendame selle süsteemi uurimiseks võrdlemisvõtet. Selleks tuleb mõlemast võrrandist avaldada y:

$$\begin{cases} y = -\frac{q_1}{p_1} x + \frac{m_1}{p_1} \\ y = -\frac{q_2}{p_2} x + \frac{m_2}{p_2}. \end{cases}$$

Need võrrandid on tõlgendatavad sirge võrranditena, millede tõusud on vastavalt $-\frac{q_1}{p_1}$ ja $-\frac{q_2}{p_2}$ ning algordinaadid $\frac{m_1}{p_1}$ ja $\frac{m_2}{p_2}$.

Asendame selles süsteemis kordajad järgmiselt:

$$-\frac{q_1}{p_1}=a_1;\quad \frac{m_1}{p_1}=b_1;\quad -\frac{q_2}{p_2}=a_2 \text{ ja } \frac{m_2}{p_2}=b_2.$$

Võrrandisüsteem esitub siis kujus:

$$\begin{cases} y=a_1x+b_1 \\ y=a_2x+b_2. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi lahendi olemasoluks on tarvilik, et need sirged lõikuksid, sest ainult siis leidub niisugune x väärtus, millele vastavad y väärtused on võrdsed.

Oletame, et nende sirgete tõusud on võrdsed, s. t. et

$$-\frac{q_1}{p_1}=-\frac{q_2}{p_2} \text{ ehk } a_1=a_2.$$

x kordaja sirge võrrandis tähendab sirge tõusunurga tangensit. Olgu esimese võrrandiga määratud sirge tõusunurk α_1 ja teisel α_2, siis

$$\tan\alpha_1=a_1 \text{ ja } \tan\alpha_2=a_2.$$

Et nende võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on ka

$$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2.$$

Et nurga α muutumisel 0°-st 180°-ni vastab igale nurga väärtusele üks kindel tan α väärtus, siis järeldub viimasest võrdusest, et

$$\alpha_1=\alpha_2.$$

Seega juhul, kui sirgete tõusud on võrdsed, on võrdsed ka nende tõusunurgad. See tähendab aga, et vaadeldavad sirged on paralleelsed, sest kaasnurgad α_1 ja α_2 on võrdsed ainult paralleelsete sirgete juures.

Et võrdust $-\frac{q_1}{p_1}=-\frac{q_2}{p_2}$ saab esitada kujus

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{p_1}{p_2},$$

siis juhul, kui lineaarses võrrandisüsteemis on tundmatute kordajad võrdelised, puudub sellel süsteemil lahend.

Kui tõusude võrdsuse tingimusele lisandub algordinaatide võrdsuse tingimus, s. t. et ka

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2} \text{ ehk } b_1 = b_2,$$

siis on paralleelseil sirgeil üks ühine punkt. Järelikult need sirged peavad ühtima.

Tingimused

$$-\frac{q_1}{p_1} = -\frac{q_2}{p_2} \text{ ja } \frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2}$$

saame esitada ka teisiti, kasutades võrde põhiomadust:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Neist võrdustest järeldub aga, et

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Seega,

kui võrrandisüsteemis ainult tundmatute kordajad on võrdelised, siis on vastavad sirged paralleelsed ja võrrandisüsteemil lahend puudub. Kui aga nii tundmatute kordajad kui ka vabaliikmed on võrdelised, siis sirged ühtivad ja võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid.

Nii näiteks pole võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

lahendit, sest vastavad sirged on paralleelsed $\left(\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2}\right)$.

Võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid, sest vastavad sirged ühtivad $\left(\frac{1}{-3} = \right.$
$\left. = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}\right)$.

Oletame nüüd, et

$$-\frac{q_1}{p_1} \neq -\frac{q_2}{p_2} \text{ ehk } a_1 \neq a_2,$$

s. t. et sirgete tõusud ei ole võrdsed. Sellest järeldub, et ka tõusunurgad ei ole võrdsed, sest kui

$$\tan \alpha_1 \neq \tan \alpha_2,$$

siis ka

$$\alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Seega on nüüd kaasnurgad erineva suurusega ja sirged lõikuvad olenemata sellest, kas algordinaadid on võrdsed või erinevad. Juhul, kui algordinaadid on võrdsed $b_1 = b_2 = b$, siis asub sirgete lõikepunkt ordinaatteljel ja tema koordinaadid on 0 ja b. Süsteemi lahendiks on siis

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = b. \end{cases}$$

Ülesandeid.

94. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x - y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

95. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid võrdlusmeetodiga:

1) $\begin{cases} 0{,}6x - 3{,}2y = 2{,}8 \\ 2{,}2x + 1{,}4y = -6{,}3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3{,}1x + 0{,}2y = 1{,}9 \\ 0{,}6x - 1{,}3y = 0{,}7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = \frac{6}{7} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y = 8\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1\frac{3}{4} \end{cases}$

96. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid kas asendus- või liitmisvõttega:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1{,}5x + 2{,}3y = -1 \\ 0{,}3x + 0{,}4y = -0{,}2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}3y = 12{,}7 \\ 0{,}3y + 0{,}4x = 9{,}7 \end{cases}$

97. Selgita, missugustel järgmistest süsteemidest on üks lahend, lõpmata palju lahendeid või lahendid puuduvad:

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -3x+2y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-3y=6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{2}y=x-1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y=5-x \\ 2x-10=2y \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-x=7 \\ y+3x=21 \end{cases}$

98. Leia sirgete lõikepunkt:

1) $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-3x-1 \\ y=x+2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+2\frac{2}{3} \\ y=2\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=4{,}32-2{,}16x \\ y=-15{,}6+6{,}51x \end{cases}$

KORDAMISÜLESANDEID.

99. On antud lineaarsed funktsioonid:

a) $y=x-2$ e) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

b) $y=5x+1$ f) $y=-0{,}4x-0{,}1$

c) $y=-2x+3$ g) $y=4\frac{1}{5}x$

d) $y=-3x-5$ h) $y=-\frac{4}{3}x$

a) Missugused nendest funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

b) Kasutades trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid, leia, kui suure nurga moodustavad vastavad sirged x-teljega.

c) Tee kindlaks, mis märgiga on nende funktsioonide nullkohad.

d) Leia nende funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

100. a) Leia kõigi kolmega jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 300 (incl.).

b) Leia kõigi kolmega mittejaguvate arvude summa samas vahemikus.

c) Leia kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 1000 (incl.).

101. Jaota 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{2}$ mõõtu vähem kui eelmine (Ahmes, ca 1700 a. e. m. a.).

102. Näita, et kui aritmeetilise progressiooni esimene liige on $n^2 - n + 1$ ja vahe on 2, siis n liikme summa on n^3.

103. Leia

a) progressiooni
$-12, -7, -2, 3, \ldots$ 236. liige ja 12. liige,

b) progressiooni
$0, -3, -6, -9, \ldots$ 101. liige ja 11. liige,

c) progressiooni
$-1\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, \ldots$ 555. liige ja 5. liige.

104. Lahenda järgmised võrratused.

1) $\frac{x-1}{4} + \frac{2x+3}{2} > \frac{4-x}{3}$

2) $\frac{1}{3} - \frac{2-3x}{6} < \frac{4x+1}{12} + \frac{1-x}{4}$

3) $\frac{3x-5}{30} > \frac{6-5x}{75}$

105. Lahenda järgmine võrratusesüsteem ja võrratused.

1) $\begin{cases} \frac{4-3x}{20} - \frac{2-5x}{36} > 1\frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{9} + \frac{6-2x}{15} < 3\frac{4}{5} \end{cases}$

2) $(5-3x)(6+7x) > 0$

3) $\frac{8-2x}{x-5} < 0.$

106. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}(x+2) = 1{,}1 \\ x - 2y + 4 = \frac{1}{4}\left[2x + 3\left(y - \frac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{2} - y = \left\{\frac{1}{3}[x - 5(y - 0{,}3)] - 1\right\} + 1{,}2 \\ 3\left[1 - \frac{2-3(x-y)}{5}\right] + 6{,}94 = 2(3x - 1) \end{cases}$

107. Leia sirge $y = -2x + 2$ ja ringjoone $x^2 + y^2 = 4$ lõikepunktid.

108. Leia sirge $y = 0{,}3x + 3$ ja ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ lõikepunktid.

109. Leia sirge $y = 2x - 1$ ja ringjoone $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ lõikepunktid.

110. Leia sirge $y = -4x + 3$ ja parabooli $y = \frac{1}{2}x^2$ lõikepunktid.

111. Leia sirge $y = 2x - 1$ ja hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ lõikepunkt.

III. RUUTFUNKTSIOON.

§ 28. RUUTFUNKTSIOON JA TEMA GRAAFIK.

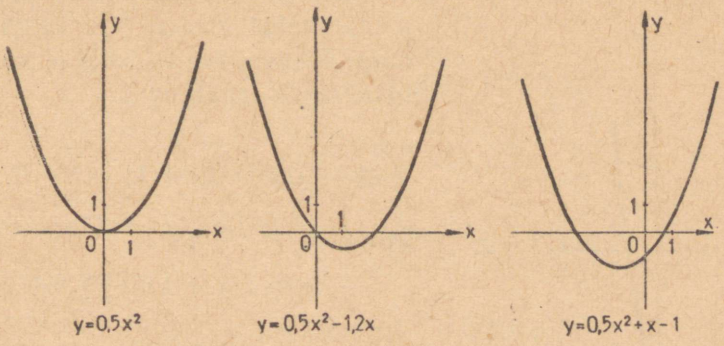
Ruutfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis esitub avaldisena $ax^2 + bx + c$ või valemina $y = ax^2 + bx + c$, kus a, b ja c on konstantsed arvud ($a \neq 0$).

Ruutfunktsiooni graafikuks on **parabool,** *mille sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega.*

Seega on ruutfunktsiooni analüütiline esitus valemi kujus

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabooli võrrandiks.



Joon. 28.

Joonisel 28 on esitatud VIII klassis tundma õpitud ruutfunktsioonide graafikud. Nagu neilt jooniseilt nähtub, sõltub parabooli

võrrand tema asendist koordinaatteljestiku suhtes. Ja nimelt järgmiselt.

1° Kui ükski parabooli punkt ei asu koordinaatide alguspunktis, siis tema võrrandis $y = ax^2 + bx + c$ on a, b ja c nullist erinevad.

2° Kui parabool läbib koordinaatide alguspunkti, siis on $c = 0$ ja parabooli võrrand esitub kujus $y = ax^2 + bx$.

3° Kui parabooli haripunkt asub koordinaatide alguspunktis, siis on $b = c = 0$ ja parabooli võrrand esitub kujus $y = ax^2$.

Teame ka, et parabool avaneb ülespoole, kui $a > 0$ ja allapoole, kui $a < 0$.

§ 29. PARABOOLI HARIPUNKT.

Kui parabool avaneb ülespoole, siis on haripunkti ordinaat väiksem, kui selle parabooli mistahes teise punkti ordinaat.

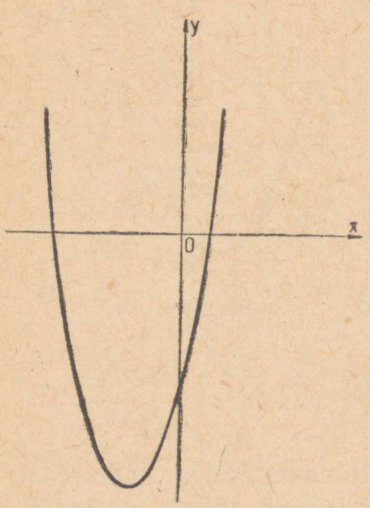
Näide 1. Olgu antud parabooli võrrand $y = 2x^2 + 4x - 3$. Seame ülesandeks leida vastava parabooli haripunkti koordinaadid. Selleks teisendame ruutfunktsiooni avaldist järgmiselt: võtame kahes esimeses liikmes 2 sulgude ette ja täiendame sulgudesse jäänud kaksliikme $x^2 + 2x$ täisruuduks. Et avaldise väärtus ei muutuks, tuleb lahutada 2:

$$y = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 - 2.$$

Siit

$$y = 2(x + 1)^2 - 5.$$

Kui nüüd $x = -1$, siis $y = -5$. Iga teise x väärtuse puhul on $(x+1)^2$ positiivne ja y väärtus suurem kui -5. Punkt $(-1; -5)$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 29).



Joon. 29.

Näide 2. Olgu antud parabooli võrrand $y = -3x^2 - 4x + 1$. Teisendame seda avaldist samal viisil nagu eelmistki:

$$y = -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 1 + \frac{4}{3};$$

$$y = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 2\frac{1}{3}.$$

Kui $x = -\frac{2}{3}$, siis $y = 2\frac{1}{3}$. Kui $x \neq -\frac{2}{3}$, siis on $y < 2\frac{1}{3}$.

Punkt $\left(-\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 30).

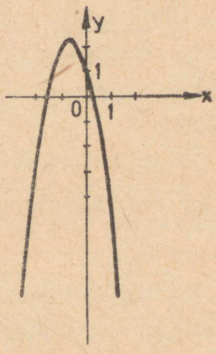
Teisendame nüüd parabooli üldkujulist võrrandit

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Võtame esimeses kahes liikmes a sulgude ette

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Teisendame sulgavaldise täisruuduks, liites sulgudes $\frac{b^2}{4a^2}$ ning, et võrdus jääks kehtima, lahutame väljaspool sulge $\frac{b^2}{4a}$.



Joon. 30.

Saame

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

ehk

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Parabooli haripunktiks on $\left(-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Ülesandeid.

112. Leia järgmiste paraboolide haripunktid.

a) $y = x^2 - 6x + 10$
b) $y = x^2 + 4x - 2$
c) $y = 2x^2 - 2x - 2$
d) $y = -3x^2 - 4x + 1$
e) $y = 0{,}4x^2 + 4x + 10$
f) $y = -2{,}4x^2 + 0{,}24x - 0{,}096$
g) $y = -x^2 + 4x - 4$
h) $y = 3x^2 - 18x + 27$
i) $y = 2x^2 + 16$
j) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{27}$

§ 30. RUUTFUNKTSIOONI EKSTREEMUMKOHAD.

Kui ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool avaneb ülespoole, siis tema haripunkti abstsiss on argumendi väärtuseks, mille korral ruutfunktsioon omab vähima ehk nn. m i n i m a a l s e v ä ä r t u s e. Seda argumendi väärtust nimetatakse ruutfunktsiooni **miinimumkohaks.**

Esimesele näitele tuginedes võime öelda, et funktsiooni $2x^2 + 4x - 3$ miinimumkohaks on $x = -1$ ja miinimumväärtuseks -5.

Kui ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool avaneb allapoole, siis tema haripunkti abstsiss on argumendi väärtuseks, mille korral ruutfunktsiooni väärtus on suurim ehk nn. m a k s i m a a l n e. Seda argumendi väärtust nimetatakse ruutfunktsiooni **maksimumkohaks.**

Teisele näitele tuginedes võime öelda, et funktsiooni $-3x^2 - 4x + 1$ maksimumkohaks on $x = -\frac{2}{3}$ ja maksimaalseks väärtuseks $2\frac{1}{3}$.

Nii funktsiooni maksimumkohti kui ka miinimumkohti nimetatakse ühe nimetusega — **ekstreemumkohad.** Vastavaid funktsiooni väärtusi nimetatakse **ekstreemumväärtusteks.**

Ülesandeid.

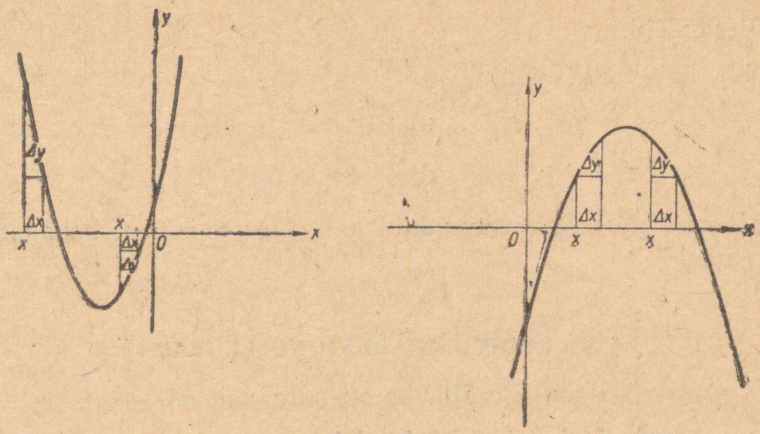
113. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad ja ekstreemumväärtused. Tee kindlaks, kas ekstreemumkoht on maksimum- või miinimumkoht.

a) $x^2 + 2x - 2$
b) $x^2 - 4x + 4$
c) $3x^2 - 8x - 3$
d) $4x^2 - 4x - 3$
e) $-x^2 + 12x - 35$
f) $-4x^2 + 4x - 1$
g) $-3x^2 + 2x + 8$
h) $-5x^2 + 4x - 7$

§ 31. RUUTFUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

Joonisel 31 on esitatud ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikud juhul, kui $a > 0$ ja juhul, kui $a < 0$.

Võtame esimesel graafikul haripunktist vasakul ühe abstsissi väärtuse x ja tõmbame sellele vastava ordinaatlõigu. Muutugu



Joon. 31.

nüüd x positiivse muudu Δx võrra, siis y muutub negatiivse muudu Δy võrra. See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist vasakul.

Paremal pool haripunkti vastab aga positiivsele muudule Δx y positiivne muut Δy. See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist paremal.

Tähistades haripunkti abstsissi kui vastava funktsiooni ekstreemumkohta x_e, võime seega öelda, et

kui $a > 0$, siis ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$ on kahanev piirkonnas $x < x_e$ ja kasvav piirkonnas $x > x_e$.

Jälgides joonist võime öelda, et

kui $a < 0$, siis ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$ on kahanev piirkonnas $x > x_e$ ja kasvav piirkonnas $x < x_e$.

Nii on näiteks § 29 vaadeldud ruutfunktsioon

$$y = 2x^2 + 4x - 3$$

kahanev, kui $x < -1$ ja kasvav, kui $x > -1$, ja funktsioon

$$y = -3x^2 - 4x + 1$$

kasvav, kui $x < -\frac{2}{3}$ ja kahanev, kui $x > -\frac{2}{3}$.

Ülesandeid.

114. Leia funktsioonide

a) $x^2 - 3x + 5$ b) $-2x^2 + 3x - 2$

c) $5x^2 - 10x + 25$ d) $-4x^2 - 6x + 9$

maksimum- või miinimumpunktid ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

§ 32. RUUTFUNKTSIOONI NULLKOHAD.

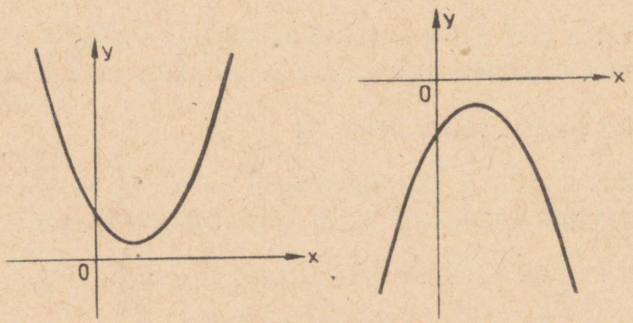
Et ruutfunktsiooni graafikuks on parabool, siis

ruutfunktsiooni nullkohtadeks on vastava parabooli ja x-telje lõikepunktide abstsissid.

Vaatleme, missugused on parabooli võimalikud asendid x-telje suhtes.

a) Parabool võib koordinaatteljestikus asetseda nii, et ta ei lõika x-telge (joon. 32), s. t. et sel juhul ruutfunktsioonil p o l e n u l l k o h t i. Niisuguse juhuga on tegemist siis, kui pärast ruutkolmliikme teisendamist kujule

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$



Joon. 32.

on kas

$$1)\ a > 0 \text{ ja } c - \frac{b^2}{4a} > 0$$

või

$$2)\ a < 0 \text{ ja } c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

Et

$$c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

siis esimene tingimus esitub järgmiselt:

$$a > 0 \text{ ja } \frac{4ac - b^2}{4a} > 0,$$

millest järeldub, et

$$4ac - b^2 > 0$$

(kui murd on positiivne ja murru nimetaja on positiivne, siis peab ka murru lugeja olema positiivne).

Korrutades võrratuse mõlemaid pooli (—1)-ga, saame

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Teisel juhul on

$$a < 0 \text{ ja } \frac{4ac - b^2}{4a} < 0,$$

millest järeldub, et

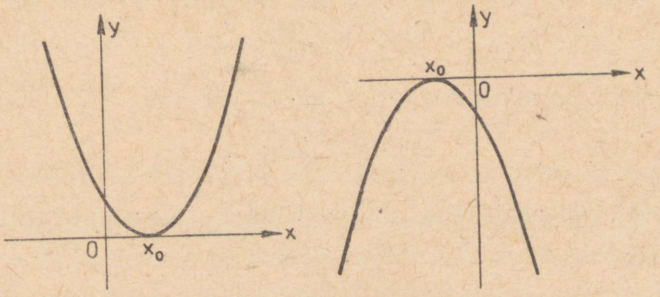
$$4ac - b^2 > 0 \text{ ehk } b^2 - 4ac < 0.$$

Põhjenda seda!

Seega

ruutfunktsiooni $ax^2 + bx + c$ nullkohtade puudumise tunnuseks on, et $b^2 - 4ac < 0$.

b) Parabool võib teljestikus asetseda nii, et tal on x-teljega ainult üks ühine punkt. See on siis, kui x-telg on parabooli puutujaks (joon. 33). Sel juhul asetseb haripunkt x-teljel ja järelikult



Joon. 33.

$$c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

ehk

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

millest järeldub, et

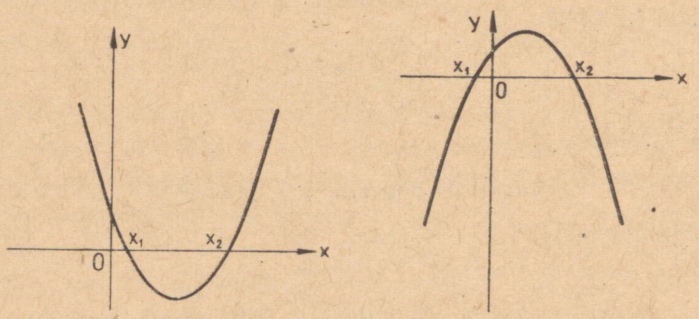
$$b^2 - 4ac = 0.$$

Põhjenda!

Me ütleme sel juhul, et ruutfunktsioonil on kaks ühtelangevat nullkohta.

Seega

ruutfunktsiooni $ax^2 + bx + c$ kahe ühtelangeva nullkoha tunnuseks on, et $b^2 - 4ac = 0$.



Joon. 34.

c) Kolmandaks võimaluseks on, et paraboolil on x-teljega 2 lõikepunkti, s. t. et ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta (joon. 34). Kahe erineva nullkoha olemasolu korral peab a ja haripunkti ordinaat

$$c - \frac{b^2}{4a}$$

olema erinevate märkidega, s. t. kui $a > 0$, siis

$$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0.$$

Et nimetaja on positiivne, siis peab lugeja olema negatiivne, s. t.

$$4ac - b^2 < 0$$

ehk

$$b^2 - 4ac > 0,$$

või, kui $a < 0$, siis peab

$$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$$

ja siit

$$4ac - b^2 < 0 \text{ ehk } b^2 - 4ac > 0.$$

Seega

ruutfunktsiooni $ax^2 + bx + c$ kahe erineva nullkoha olemasolu tunnuseks on, et $b^2 - 4ac > 0$.

Ruutfunktsiooni nullkoha leidmine toimub ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamise teel. Selle võrrandi lahendi valemis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olevat avaldist $b^2 - 4ac$ nimetatakse **diskriminandiks.** Leitud tingimused diskriminandi märgi kohta on ka sellest valemist väljaloetavad. Tee seda!

Ülesandeid.

115. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

a) $2x^2 - x - 3$ c) $-2x^2 - 3x + 6$
b) $9x^2 + 10x - 27$ d) $x^2 - 2x + 1$

116. Haripunkti leidmise kaudu tee kindlaks, mitu nullkohta on järgmistel ruutfunktsioonidel:

a) $5x^2 - 6x + 7$ f) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
b) $-3x^2 - 3x - 3$ g) $0{,}4x^2 + 2{,}6x - 14{,}5$
c) $8x^2 + x + 3$ h) $-0{,}2x^2 - 0{,}75x + 17$
d) $-x^2 - x + 6$ i) $-\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{7}$
e) $2x^2 - 7x - 10$

§ 33. RUUTFUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKONNAD.

Kui oskame leida ruutfunktsiooni nullkohti, siis saame raskusteta välja kirjutada ka *need argumendi väärtuste piirkonnad, kus funktsioon on positiivne* (**positiivsuspiirkonnad**), *või piirkonnad, kus funktsioon on negatiivne* (**negatiivsuspiirkonnad**).

Vaatleme positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade määramist eraldi juhtudel, kui ruutfunktsioonil nullkohti pole, kui tal on kaks võrdset nullkohta ja kui tal on kaks erinevat nullkohta.

a) Kui ruutfunktsioonil nullkohad puuduvad, siis on parabool kõigi oma punktidega ühel pool x-telge: kui $a > 0$, siis on ta sellest ülalpool, kui $a < 0$, siis allpool (joon. 32).

Missugustel tingimustel puuduvad ruutfunktsioonil nullkohad? Järelikult, kui neile tingimustele lisandub, et $a > 0$, siis on ruutfunktsioon positiivne iga x väärtuse korral, ja kui $a < 0$, siis on ruutfunktsioon negatiivne iga x väärtuse korral.

b) Kui ruutfunktsioonil on kaks võrdset nullkohta, siis kõigi argumendi väärtuste korral, mis on nullkohast erinevad, on ruutfunktsioon positiivne, kui $a > 0$, ja negatiivne, kui $a < 0$.

See selgub jooniselt 33.

Tõepoolest, kui ruutfunktsiooni kahekordseks nullkohaks on $x = x_0$, siis:

1) kui $a > 0$, on $ax^2 + bx + c > 0$ siis, kui $x > x_0$, ja ka siis, kui $x < x_0$;

2) kui $a < 0$, on $ax^2 + bx + c < 0$ siis, kui $x > x_0$, ja ka siis, kui $x < x_0$.

Esimesel juhul ei ole ruutfunktsioonil negatiivsuspiirkonda, teisel juhul ei ole ruutfunktsioonil positiivsuspiirkonda.

c) Kui ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta, siis on tal olemas nii positiivsus- kui ka negatiivsuspiirkond.

Olgu nullkohtadeks $x = x_1$ ja $x = x_2$, kus $x_1 < x_2$ (joon. 34). Jooniselt näeme, et

1) kui $a > 0$, on $ax_2 + bx + c > 0$ siis, kui $x < x_1$ ja kui $x > x_2$, ning $ax^2 + bx + c < 0$ siis, kui $x_1 < x < x_2$;
2) kui $a < 0$, on $ax^2 + bx + c > 0$ siis, kui $x_1 < x < x_2$, ning $ax^2 + bx + c < 0$ siis, kui $x < x_1$ ja kui $x > x^2$.

Ülesandeid.

117. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $-2x^2 - 7x + 3$
b) $3x^2 - x - 10$
c) $-2x^2 + 4x + 16$
d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$
e) $x^2 - 5x + 8$
f) $-2x^2 - 10$

Leida antud ruutfunktsiooni $ax^2 + bx + c$ positiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtuste piirkonnad, mille puhul

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Leida antud ruutfunktsiooni $ax^2 + bx + c$ negatiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtuste piirkonnad, mille puhul

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Kirjutusi

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ja } ax^2 + bx + c < 0$$

nimetatakse **ruutvõrratusteks.** Seega oleme eelmises paragrahvis juba tutvunud ruutvõrratuse lahendamisega.

Näide. Lahendada võrratus

$$3x^2 + 5x - 2 < 0,$$

s. t. leida funktsiooni $3x^2 + 5x - 2$ negatiivsuspiirkond.

Leiame kõigepealt nullkohad, milleks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Siit

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6}$$

ja nullkohad $x_1 = \frac{1}{3}$ ja $x_2 = -2$.

Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis on nii antud funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks kui ka antud võrratuse lahendiks

$$-2 < x < \frac{1}{3}$$

Kui ruutvõrratus ei ole normaalkujus, s. t. kujus

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$$

siis tuleb ta eelkõige sellisele kujule teisendada, kasutades lineaarse võrratuse lahendamisel tundmaõpitud teisendusi.

Ülesandeid.

118. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ 3) $3x^2 + 2x + 1 < 0$
2) $-x^2 + 9x - 14 > 0$ 4) $6x^2 - x - 12 < 0$.

119. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

1) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{x+5}{6}$

2) $\frac{x(x-7)}{3} - 1 > \frac{11x}{10} - \frac{x-4}{3}$

3) $\frac{(x+3)^2}{5} + 1 - \frac{(3x-1)^2}{5} < \frac{x(2x-3)}{2}$

KORDAMISÜLESANDEID.

120. Leia järgmiste funktsioonide graafikute haripunktid, kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $-x^2 + 3x - 4$ e) $2x^2 - 6x$
b) $3x^2 + 4x - 7$ f) $-4x^2 + 3x$
c) $0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5$ g) $x^2 + 6$
d) $3x^2 + 2x + 2$ h) $-3x^2 + 9$.

121. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

a) $3x^2 + 3x - 3$ d) $-2x^2 - 6x + 3$
b) $2x^2 - 5$ e) $-3x^2 + 9x$
c) $-x^2 + 2x - 1$ f) $-x^2 - 4$

122. Leida järgmiste funktsioonide ühine positiivsuspiirkond.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -x^2 + x + 2$
$y = x^2 - 2x - 3$ $y = -x - 1$

123. Leia järgmiste funktsioonide ühine negatiivsuspiirkond.

a) $y = x - 2$ b) $y = -3x^2 + 2x + 5$
$y = 2x^2 - 4x - 16$ $y = -x + 3$

124. Lahenda järgmised võrratused:

a) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$

b) $\frac{x-1}{x^2+4x+2} < 0$

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$

d) $2 - \frac{x-3}{x-2} < \frac{x-2}{x-1}$

e) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} > 0$

f) $3 - \frac{2x-17}{x-5} < \frac{x-5}{x+2}$

125. Missuguse tingimuse korral sirge $y = ax + b$ ja ringjoon $x^2 + y^2 = r^2$

a) lõikuvad kahes punktis,
b) puutuvad,
c) ei lõiku?

IV. TEHTED ASTMETE JA JUURTEGA. ASTMEFUNKTSIOONID.

§ 35. TEHTED ASTMETEGA NATURAALARVULISTE ASTENDAJATE KORRAL.

Nagu teada,

astendamine on võrdsetest teguritest koosneva korrutise arvutamine.

Astme definitsioonist järeldub, et

$$1^n = 1 \quad \text{ja} \quad 0^n = 0.$$

Negatiivsete arvude korrutamise juhisest järeldame, et

negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne ja paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Näiteid.

$(-4)^2 = 16$;
$(-4)^3 = -64$;
$(-a)^{2n} = a^{2n}$, sest $2n$ on paarisarv;
$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$, sest $2n - 1$ on paaritu arv.

Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui astendaja $n = 1$, mõistame astet a^n arvu a-na:

$$a^1 = a.$$

Ülesandeid.

126. Arvuta järgmised astmed:

1)	2)	3)	4)
2^6	$(-2)^3$	$0{,}3^2$	$(-0{,}9)^4$
3^5	$(-2)^6$	$0{,}5^3$	$(-0{,}02)^5$
5^5	$(-3)^5$	$0{,}01^4$	$(-0{,}1)^6$

127. Arvuta järgmised astmed:

1)	2)	3)	4)
56^2	$(-12)^2$	$(-a)^9$	$(-b)^3$
$0{,}03^4$	$(-17)^3$	$(-b)^5$	$(-a)^{10}$
$1{,}7^4$	$(-0{,}2)^6$	$(-n)^8$	$(-m)^{11}$

128. Arvuta järgmised astmed:

1)	2)	3)	4)
10^3	20^5	$0{,}1^6$	$(-0{,}1)^9$
10^9	30^4	$0{,}1^3$	$(-0{,}1)^5$
10^6	40^3	$0{,}1^5$	$(-10)^7$

5) $(-6)^2+(-4)^3+(-2)^5$
$7^2+(-5)^3+(-1)^{10}$
$(-1)^{10}\cdot(-2)^5\cdot(-3)^4$

129. Arenda järgmised astmed:

1)	2)
$(-c)^{2n+1}$	$(+2)^3\cdot(-3)^2$
$(-x)^{2n}$	$(-3)^3\cdot(+2)^2$
$(-x)^{2m-1}$	$(-4)^4\cdot(-2)^2$

Tehted astmetega toimuvad järgmiste eeskirjade järgi:

1. Korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur ja saadud astmed korrutatakse.

Sümbolites:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Kui vahetame võrduse $(ab)^n = a^n b^n$ pooled, siis saame valemi võrdsete astendajatega astmete korrutamiseks:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

2. Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendatavad korrutatakse ja saadud korrutis astendatakse antud astendajaga.

Näiteid.

$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10\,000;$

$2{,}5^3 \cdot 8^3 = (2{,}5 \cdot 8)^3 = 20^3 = 8000.$

3. Murru astendamisel astendatakse tema lugeja ning nimetaja ja esimene tulemus jagatakse teisega.

Sümbolites:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Näiteid.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8};$$

$$\left(\frac{2a}{5b}\right)^2 = \frac{4a^2}{25b^2}.$$

Kui vahetame võrduse $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pooled, siis saame juhise võrdsete astendajatega astmete jagamiseks:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

mida sõnastame nõnda:

4. Võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatav jagatavas jagatakse astendatavaga jagajas ja tulemus astendatakse antud astendajaga.

Näiteid.

$24^2 : 12^2 = (24 : 12)^2 = 4;$

$$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27;$$

$$\frac{(6ab)^5}{(3b)^5} = \left(\frac{6ab}{3b}\right)^5 = (2a)^5 = 32a^5.$$

5. Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näiteid.

$$8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5;$$
$$a^3 \cdot a^7 = a^{3+7} = a^{10}.$$

Kui vahetame võrduse $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pooled, siis saame valemi astme teisendamiseks, kui astendaja on summa:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

6. Astet, mille astendaja on summa, saab kirjutada astmete korrutisena.

Näiteid.

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x;$$
$$0{,}3 \cdot 10^7 = 0{,}3 \cdot 10 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^6.$$

7. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem, ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \text{kui} \quad m > n.$$

Näiteid.

$$\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27;$$
$$a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2.$$

8. Astme astendamisel astendajad korrutatakse ja saadud korrutisega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites väljendub viimane teoreem nii:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Näiteid.

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64;$

$(2a^2b^3)^4 = 2^4a^8b^{12} = 16a^8b^{12};$

$(a^3 + a^4)^2 = a^{3 \cdot 2} + 2a^{3+4} + a^{4 \cdot 2} = a^6 + 2a^7 + a^8.$

Võrdustest $(a^m)^n = a^{mn}$ ja $(a^n)^m = a^{mn}$ järeldub, et

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Näiteid.

$a^6 - x^2 = (a^3)^2 - x^2 = (a^3 + x)(a^3 - x);$

$a^6 - x^3 = (a^2)^3 - x^3 = (a^2 - x)(a^4 + a^2x + x^2).$

Ülesandeid.

130. Arenda järgmised astmed:

1) $(4 \cdot 1{,}5)^2$
$(2 \cdot 5)^5$
$(4{,}5 \cdot 2)^3$

2) $(5mn)^3$
$(-4ab)^2$
$(-4uv)^4$

131. Leia lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1) $2^3 \cdot 5^3$
$45^2 \cdot 2^2$
$2{,}5^5 \cdot 4^5$

2) $3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$
$13^7 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^7$
$\left(5\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)^2$

132. Arenda järgmised astmed:

1) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$
$\left(2\frac{1}{2}\right)^2$
$\left(-3\frac{2}{3}\right)^3$

2) $\left(-\frac{er}{4d}\right)^5$
$\left(-\frac{3h}{5mn}\right)^3$
$\left(-\frac{0{,}7anx}{0{,}01bz}\right)^2$

133. Arvuta peast järgmiste avaldiste väärtused:

1) $16^3 : 4^3$ 2) $\left(1\frac{7}{8}\right)^3 : \left(6\frac{1}{4}\right)^3$ 3) $\frac{5^3 \cdot 12^3}{6^3}$

$9^5 : 18^5$ $2{,}25^2 : 0{,}45^2$ $\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$

$160^3 : 640^3$ $0{,}75^3 : 2{,}4^3$ $\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{25}{5^5}$

134. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

1) $c \cdot c^2 \cdot c^3$ 2) $x^{m+1}x^{m+2}$

$k^2 \cdot k^3 \cdot k^3$ $y^{n+3}y^{2n-1}$

$n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5$ $z^{p+5}z^{p-5}$

135. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

1) $3u \cdot 5u^2$ 2) $6x \cdot 0{,}4x^2 \cdot 0{,}1x^3$

$(-6r^2) \cdot 7r^3$ $0{,}1D \cdot (-0{,}2D^2) \cdot 0{,}3D^3$

$aN^4 \cdot bN^3$ $\left(-\frac{3}{5}w^2\right) \cdot 2\frac{1}{2}\,w^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}w^2\right)$

136. Kirjuta järgmised jagatised astmetena:

1) $n^3 : n^5$ 2) $p^n : p^{n-1}$

$q^6 : q$ $q^{n+3} : q^n$

$r^4 : r^4$ $d^{m+1} : d^{n+1}$

137. Kirjuta järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

1) $\frac{a^5b^3}{a^2b}$ 2) $\frac{a^{2n}b^{5m}}{a^n b^{3m}}$ 3) $3{,}6x^6y^5z^8 : 5{,}6x^2y^3z^4$

$\frac{9x^4y^3z^2}{54x^2y^2z}$ $\frac{x^{m+8}y^{n-5}}{x^{m-2}y^{n-7}}$ $7n^{2q} : 0{,}14n^{q-3}$

$\frac{8a^4}{5b^6} : \frac{16a^2}{25b^8}$ $\frac{a^{2n+2}}{b^{m-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{3n-1}}$ $1{,}72m^{p+6} : 4{,}3^{p+2}$

138. Arenda järgmised astmed:

1) $(4a)^3$ 2) $(-2h)^4$

$(3mn)^3$ $\left(+\frac{5aQ}{6cR}\right)^3$

$\left(-\frac{4a}{7H}\right)^2$ $\left(-\frac{0{,}2cU}{0{,}5d}\right)^4$

139. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $(-N^3)\cdot(2N)^5$; $(4u^2)^2\cdot(-u^3)^3$; $\left(-\frac{2}{3}q\right)^3\cdot(6q)^2$

2) $(-2f)^3:(5f)^2$; $(96ax)^4:(16x)^4$; $(36nD)^5:(-81D)^5$

140. Arenda järgmised astmed:

1) $(m^2)^3$; $(u^{2n})^3$; $(Q^2)^{n+1}$

2) $\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$; $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{m}{q^2}\right)^3$; $\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$

141. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{2x}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{6x}{5a}\right)^2$; $\left(-\frac{4m}{5n}\right)^3\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^4$; $\left(\frac{7u}{4v}\right)^4\cdot\left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3$

2) $\left(-\frac{1}{N}\right)^3:\left(\frac{N^3}{2}\right)$; $\frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^2:\frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^2$; $\left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2:\left(\frac{0{,}2}{D^3}\right)^2$

142. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $(ax)^m:(bx)^m$; $(3cu)^n:(cdu)^n$; $(-pqr)^{2t}:(-pq^{2t})$

2) $(8Nu)^{2a-1}:(-2u)^{2a-1}$; $\left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1}:\left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1}$; $\left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m}:\left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}$

143. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)L^n\cdot\frac{3}{2}L\cdot 6L^3$; $u^a\cdot u^{a+b}\cdot u^{a+b+c}$; $D^n\cdot D^{n-m}\cdot D^{m-p}$

2) $\frac{1}{4}x^p\cdot\frac{4}{5}x^{p+2}\cdot\frac{2}{5}x^{2p+1}$; $7H^m\cdot 0{,}2H^{m+1}\cdot 0{,}5H^{m+2}$; $N^{x+2}\cdot N^{x-3}\cdot N^{2-2x}$

144. Arenda järgmised korrutised:

1) $(a^2+a^4)\cdot(a+a^3)$ 4) $(2p^4+5q^3)\cdot(2p^4-5q^3)$

2) $(a^6-a^5)\cdot(a^5+a^4)$ 5) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

3) $(u^3+v^2)\cdot(u^3-v^2)$ 6) $\left(2s^3+\frac{1}{t^3}\right)\cdot\left(s^3-\frac{1}{t^3}\right)$

145. Arenda järgmised bionoomide astmed:

1) $(a^2+b^2)^2$ 4) $(3x^3-5x^5)^2$ 7) $(a^2+b^2)^3$

2) $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^2}{b^2}\right)^2$ 5) $(m^2n^3+m^3n^2)^2$ 8) $(a^3-b^3)^3$

3) $(a^4-a^2)^2$ 6) $\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)^2$ 9) $(m^3+m^2)^3$

§ 36. ASTMEFUNKTSIOONID.

Kui astme alust vaadelda muutuva suurusena, siis esitab aste nn. **astmefunktsiooni.** Nii näiteks on x^2, x^3 ja x^4 vastavalt teise, kolmanda ja neljanda astme funktsioonid.

Lähemalt oleme juba tuttavad teise astme ehk ruutfunktsiooniga. Astmefunktsioon x^2 on erijuht üldisest ruutfunktsioonist ax^2+bx+c. Tutvume lähemalt kuupfunktsiooniga $y=x^3$.

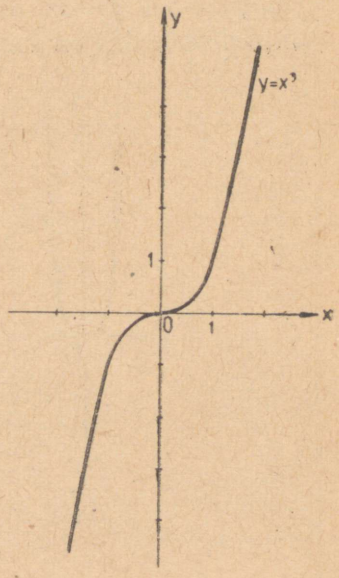
Me oleme tuttavad kera ruumala valemiga

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Igale r väärtusele vastab kindel ruumala suurus.

Seega on kera ruumala raadiuse funktsioon. Siin on tegemist funktsiooniga $y=ax^3$, kus $a=\frac{3}{4}\pi$.

Võtame lähema vaatluse alla juhu, kus $a=1$. Koostame funktsiooni $y=x^3$ väärtuste tabeli:



Joon. 35.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
x^3	-8	$-3{,}4$	-1	$-0{,}1$	0	0,1	1	3,4	8

Esitame vastavad punktid koordinaatteljestikus ja ühendame need ladusa kõveraga (joon. 35).

Saadud joont nimetatakse **kuupparabooliks.**

Uurime funktsiooni $y = x^3$, tuginedes tema graafikule.

Kõigepealt paneme tähele, et funktsiooni $y = x^3$ graafikuks on tõusev joon. Kui argumendi mingi väärtus saab positiivse muudu, siis saab ka funktsioon positiivse muudu. Argumendi kasvades funktsioon kasvab. Kontrolli seda vähemalt kolme argumendi väärtuse juures!

Seega,

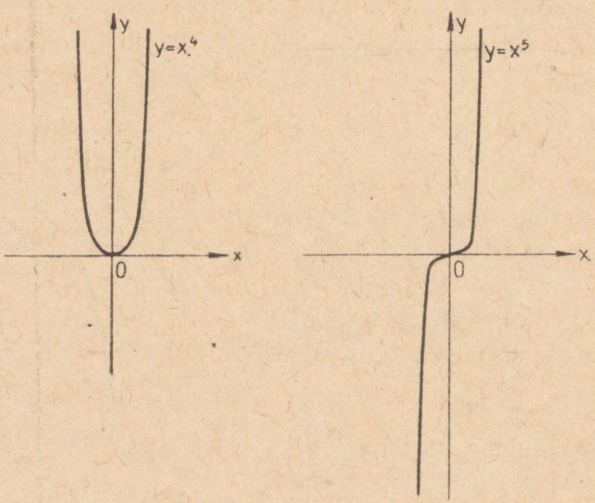
funktsioon $y = x^3$ *on kasvav.*

Nii graafikult kui ka funktsiooni valemist on kergesti näha, et

funktsiooni $y = x^3$ *nullkohaks on* $x = 0$.

Nüüd võime kohe kirjutada, et

funktsiooni $y = x^3$ *positiivsuspiirkonnaks on* $x > 0$ *ja negatiivsuspiirkonnaks on* $x < 0$.

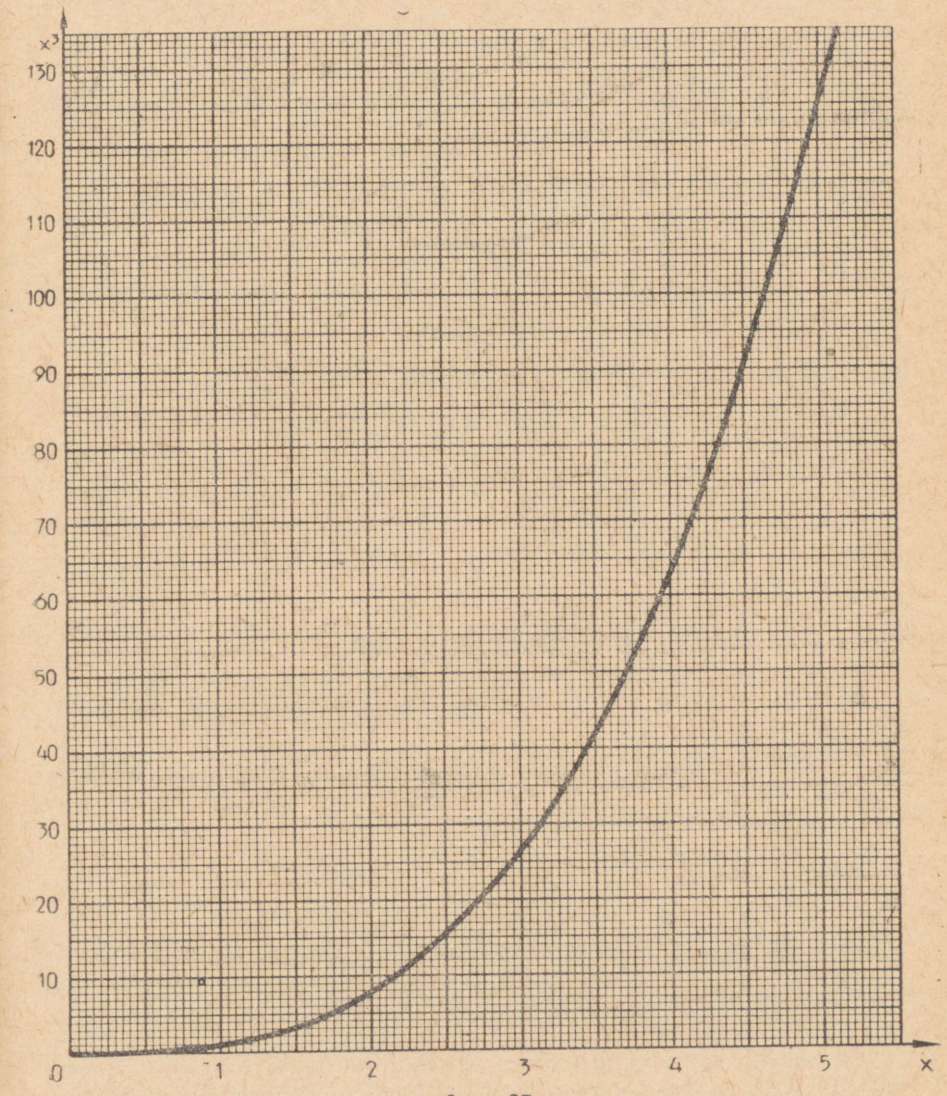


Joon. 36.

Ülesandeid ja küsimusi.

146. Uurida funktsioone $y = x^4$ ja $y = x^5$ nende graafikute abil (joon. 36).

147. Mille poolest erinevad funktsioonide $y = x^2$ ja $y = x^4$ graafikud?



Joon. 37.

148. Mille poolest erinevad funktsioonide $y=x^3$ ja $y=x^5$ graafikud?

149. Missugust funktsiooni nimetatakse kasvavaks (kahanevaks)?

150. Mis on funktsiooni positiivsus- (negatiivsus-) piirkond?

151. Leia joonise 37 abil järgmiste arvude kuubid:

1) 1,5; 1,6; 2,2; 3,6; 4,8;
2) 2,4; 2,8; 3,2; 4,4; 4,9.

152. Kasutades joonist 37 ja kera ruumala ligikaudset valemit

$$V\approx 4{,}2r^3,$$

arvuta kera ruumala, kui raadius on

1,7 cm; 2,3 cm; 3,5 dm; 3,8 m; 4,7 mm.

153. Kasutades joonist 37 ja kera ruumala ligikaudset valemit

$$V\approx 0{,}52d^3,$$

arvuta kera ruumala, kui diameeter on

1,9 cm; 3,1 cm; 4,6 dm; 4,5 dm.

154. Leia joonise 37 abil arv x, kui x^3 on

1) 18; 12; 40; 30; 94.
2) 10; 50; 60; 70; 130.

§ 37. ARVU KUUPJUUR.

Arv, mille kuup on 27, võrdub 3-ga ja arv, mille kuup on 125, võrdub 5-ga.

Arvu 3 *nimetatakse arvu* 27 *kuupjuureks ja märgitakse sümboliga* $\sqrt[3]{27}$ (loe «kuupjuur kahekümne seitsmest»).

Seega $\sqrt[3]{8}=2$.

Et $(-9)^3=-729$, siis $\sqrt[3]{-729}=-9$. Seega, *negatiivse arvu kuupjuur on negatiivne.* $\sqrt[3]{0}=0$, sest $0^3=0$.

Antud arvu kuupjuureks ehk kolmandaks juureks nimetatakse niisugust arvu, mille kuup võrdub antud arvuga.

Ülesandeid.

155. Leia graafiku abil (joon. 37) järgmiste kuupjuurte ligikaudsed väärtused:

1) $\sqrt[3]{21}$, $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt[3]{92}$, $\sqrt[3]{120}$;

2) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{28}$, $\sqrt[3]{75}$;

3) $\sqrt[3]{-23}$, $\sqrt[3]{-29}$, $\sqrt[3]{-36}$, $\sqrt[3]{-52}$.

Näide. $\sqrt[3]{-46} = -\sqrt[3]{46} \approx -3{,}6$.

156. Arvuta peast järgmised kuupjuured:

1) $\sqrt[3]{1000}$; 2) $\sqrt[3]{64}$; 3) $\sqrt[3]{216}$.

§ 38. KUUPIDE TABELI KASUTAMISEST.

Koolis kasutatavais V. Bradise tabeleis on antud arvude 1 kuni 10 kuubid.

Tekib küsimus, kuidas leida ühest väiksemate ja kümnest suuremate arvude kuupe.

Näiteid.

1) Leida $0{,}235^3$.

Tabelis leidub $2{,}35^3$. Teisendame arvu 0,235 korrutiseks nii, et saaksime kasutada kuupide tabelit.

$$0{,}235^3 = (0{,}1 \cdot 2{,}35)^3 = 0{,}1^3 \cdot 2{,}35^3 = 0{,}001 \cdot 12{,}98 = 0{,}01298.$$

2) Leida $(24{,}7)^3$.

$$(24{,}7)^3 = (10 \cdot 2{,}47)^3 = 10^3 \cdot 2{,}47^3 = 1000 \cdot 15{,}07 = 15070.$$

Kuupide tabelit kasutatakse ka kuupjuurte leidmiseks.

Kuupjuure leidmiseks arvust, mis kuulub vahemikku 1 kuni 1000, otsime kuupide tabeli sees leiduvate arvude hulgast antud arvule lähima. Otsitava arvu saame vastava rea ja vastava veeru numbritest. Kui soovitakse saada täpsemat tulemust, siis arvestatakse ka parandusveerge.

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{13} = ?$

$\sqrt[3]{12{,}98} = 2{,}35$

$2 \ldots \ 01$

$\sqrt[3]{13} = 2{,}351$

2. $\sqrt[3]{12{,}78} = ?$

$\sqrt[3]{12{,}81} = 2{,}34$

$3 \ldots \ 02$

$\sqrt[3]{12{,}78} = 2{,}338.$

Ülesandeid.

157. Leia tabelist järgmiste arvude kuubid:

1)	2)	3)
9,2	7,8	0,47
56	47	0,56
3,75	8,92	0,375
2,44	7,66	0,244

158. Leia tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

1)	2)
2,58	3,76
61,34	59,26
51,70	246
728	896

159. Kui palju kaalub klaasist kuup, mille serva pikkus on 47,5 mm? Klaasi erikaal on 2,25.

160. Kui pikk serv on vasest kuubil, mis kaalub 25 g? Vase erikaal on 8,93.

161. Kui palju kaalub rauast (erikaal 7,85) tõukekuul, mille läbimõõt $d = 11{,}36$ cm?

162. Kui palju kaalub tinast (erikaal 11,34) tõukekuul, mille läbimõõt on 8,78 cm?

163. Arvuta terasest (erikaal 7,85) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli raskus on 5 kg?

164. Kui suur on messingist (erikaal 8,5) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli kaal on 7,257 kg?

Positiivset arvu, mille teine aste võrdub antud positiivse arvuga, nimetame antud arvu **ruutjuureks;** *positiivset arvu, mille kolmas aste võrdub antud positiivse arvuga, on arvu* **kolmas juur.**

Analoogiliselt eelnevaga ütleme, et *arv* 2 *on arvu* 32 **viies juur,** *sest* $2^5 = 32$.

Sümbolites:

$$\sqrt[5]{32} = 2.$$

Üldiselt,

positiivse arvu a n-ndaks juureks nimetatakse positiivset arvu, mille n-es aste on arv a.

Arvu *a* *n*-ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Nii on:

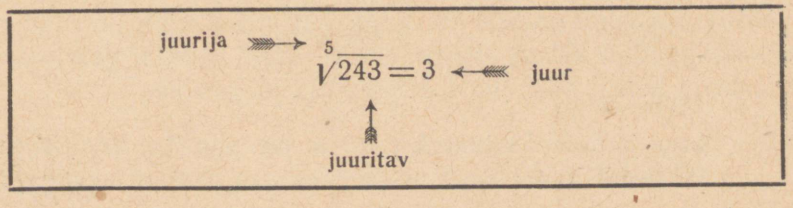
$\sqrt[4]{2401} = 7$, sest $7^4 = 2401$;

$\sqrt[7]{128} = 2$, sest $2^7 = 128$;

$\sqrt[5]{0{,}00243} = 0{,}3$, sest $0{,}3^5 = 0{,}00243$.

n-nda juure leidmist mingist arvust nimetatakse selle arvu **juurimiseks** *arvuga n.*

Juurimine on astendamise pöördtehe. Astendamine seisneb astme leidmises antud astendatava ja astendaja järgi, juurimine aga seisneb selles, et antud astme *a* ja astendaja *n* järgi leitakse niisugune astendatav *x*, et $x^n = a$. Seega juur $\sqrt[n]{a}$ on otsitav astendatav *x*, kui on antud aste *a* ja astendaja *n*. Sel puhul *astet a ehk arvu, mida juuritakse, nimetatakse* **juuritavaks** *ja astendajat n ehk arvu, millega juuritakse,* — **juurijaks.**



Juure definitsiooni järgi on juure $\sqrt[n]{a}$ n-es aste võrdne juuritavaga a, kui $a > 0$. Seega juure definitsiooni järeldusena saame samasuse:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Juure definitsioonist järeldub ka samasus:

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

sest arv, mille n-es aste on a^n, on a.

Juurija n võib olla kas paaris- või paaritu arv. Kui n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

vasak pool on paarisarvulise n puhul ikka positiivne arv, millest järeldub, et ka a on positiivne arv. Seega,

negatiivsetel arvudel pole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Paarituarvulise juurija m ja negatiivse juuritava a korral leidub niisugune negatiivne arv, mille m-es aste võrdub negatiivse arvuga a.

Näiteks $\sqrt[3]{-8} = -2$, sest $(-2)^3 = -8$.

Üldiselt, olgu $a < 0$ ja $m = 2k + 1$, ning

$$\sqrt[m]{a} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$a = x^m = x^{2k+1}.$$

Et siin $a < 0$, siis ka $x < 0$, sest ainult negatiivse arvu paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Niisiis, paarituarvulise juurijaga juurimisel võib juuritav olla nii positiivne kui ka negatiivne arv või null. Seega paarituarvulise juurija korral võib juurt defineerida järgmiselt:

arvu a n-ndaks juureks, kui n on paaritu arv, nimetatakse niisugust arvu, mille n-es aste võrdub arvuga a.

Vastavate tabelite olemasolu korral saab juuri hõlpsasti leida tabelitest. Tabelite puudumisel võib juure leidmine toimuda proovimise teel.

Leiame proovimise teel näiteks

$$\sqrt[5]{16\,807}.$$

Tarvis on leida arv, mille 5. aste on 16 807. Proovides leiame, et

$$2^5 = 32 < 16807, \qquad 3^5 = 243 < 16807,$$
$$4^5 = 1024 < 16807, \ldots, \qquad 7^5 = 16807.$$

Seega,

$$\sqrt[5]{16807} = 7.$$

Ülesandeid.

165. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

1) $(\sqrt{5})^2$	2) $(\sqrt[3]{17})^3$	3) $\left(\sqrt[5]{37}\right)^5$	4) $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n$
$\sqrt{19^2}$	$\sqrt[3]{12^3}$	$\sqrt[4]{7^4}$	$\sqrt[m]{c^m}$
$(\sqrt{23})^4$	$\left(\sqrt[3]{16}\right)^6$	$\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$	$\left(\sqrt[n]{Q}\right)^{2n}$
$8\sqrt{49}$	$4\sqrt[3]{27}$	$8\sqrt[4]{256}$	$R\sqrt[p]{R^p}$
$(5\sqrt{N})^2$	$\left(2\sqrt[3]{5}\right)^3$	$\left(h^2\sqrt[3]{u}\right)^3$	$\left(f^3\sqrt[n]{f^{2n}}\right)^n$

166. Leia proovimise teel järgmised juured:

1) $\sqrt{169}$	2) $\sqrt{361}$	3) $\sqrt{529}$
$\sqrt[3]{512}$	$\sqrt[3]{1331}$	$\sqrt[3]{3{,}375}$
$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[4]{2401}$	$\sqrt[4]{0{,}0256}$

Ülesanne. Kui pikk tuleb võtta ruudu külg, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus x meetrit. Siis on tema pindala x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on 3^2, 4^2, 5^2 jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murruga $\frac{a}{b}$.

Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on taandatud kujul. Sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algtegureiks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \ldots n}{p \cdot q \cdot r \ldots v};$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja tegureist. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \ldots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \ldots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega meie nõuet ei rahulda murdarv. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

Esitatust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2 = 2$ täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu ja pealegi nii hästi kui iganes soovime.

Jätkates ruutjuure leidmist järk-järgult viga vähendades, näeme, et

$$1 < x < 2,$$
$$1{,}4 < x < 1{,}5,$$
$$1{,}41 < x < 1{,}42.$$

Joonisel 38, millel kujutamisühikuks on 1 dm, on arvteljel kujutatud vahemikud arvust 1 arvuni 2, arvust 1,4 arvuni 1,5 ja arvust 1,41 arvuni 1,42 graafiliselt.



Joon. 38.

Vaadeldava vahemiku edasisel kitsendamisel saame:

$$1{,}414 < x < 1{,}415,$$
$$1{,}4142 < x < 1{,}4143,$$
$$1{,}41421 < x < 1{,}41422,$$

jne.

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasakpoolses tulbas seisavad x *lähendid* puuduga, parempoolses tulbas x *lähendid* liiaga. Vastavate lähendite vahe järjest väheneb: esimeses reas ei küüni vahe 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad meid x väärtusele:

$$x = 1{,}41421\ldots$$

Selles kirjutuses numbrite jada ei lõpe.

Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespool tõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x lõputu kümnendmurd. Seda lõputut kümnendmurdu pole võimalik kirjutada ühegi hari-

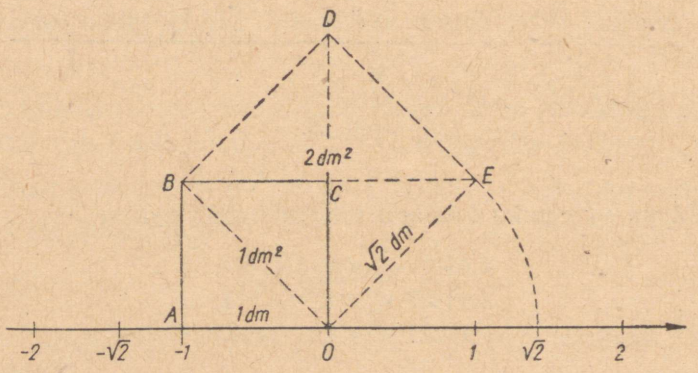
liku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Murru 1,41421 ... saamislugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1{,}41421\ldots)^2 = 2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputa kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Vaatamata sellele, et $\sqrt{2}$ pole täpselt väljendatav ühegi täisarvu ega ühegi hariliku murru abil, on ometi võimalik anda täpne konstruktsioon sirkli ja joonlaua abil joonlõigu joonestamiseks, mille pikkus on täpselt $\sqrt{2}$ dm.



Joon. 39.

Kui ehitame ruudu *ABCO* külje pikkusega 1 dm (joon. 39), siis selle pindala on 1 dm². Kui nüüd pikendame ühe paari lähiskülgi oma pikkuse võrra ja võtame pikendatud küljed uue nelinurga *OBDE* diagonaalideks, siis uus nelinurk on ruut pindalaga 2 dm². Seda näeme sellest, et uus ruut koosneb neljast niisugusest tükist, nagu neid esialgses ruudus on kaks.

Uue ruudu külje pikkuse leidmiseks peame arvutama ruutjuure arvust 2, seega on see pikkus $\sqrt{2}$ dm. Jooniselt näeme, et uue ruudu külg on esialgsele ruudule diagonaaliks, seepärast võime öelda, et kui ruudu külje pikkus on 1 pikkusühik, siis ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Samale tulemusele jõuame ka vaadeldes joonisel 39 täisnurk-

set kolmnurka OCE. Selles $OC = 1$ ja $CE = 1$. Rakendades Pütagorase teoreemi, saame

$$OE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Kirjeldatud konstruktsioon võimaldab arvteljel konstrueerida punkti, mis vastab arvule $\sqrt{2}$.

Kandes lõigu OE punktist O alates arvteljele negatiivses suunas, saame punkti, mis kujutab sümbolit $-\sqrt{2}$.

Samuti nagu $\sqrt{2}$ korral, saab näidata, et $\sqrt{3}$ ei väljendu täpselt ühegi täisarvu ega ühegi murdarvu näol, kuid sirkli ja joonlaua abil saame ehitada lõigu pikkusega $\sqrt{3}$. Seda saab teha Pütagorase teoreemi rakendamisega: ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 1 ühik ja hüpotenuus on 2 ühikut, siis teise kaateti pikkus on $\sqrt{3}$ ühikut.

Kandes saadud kaateti arvteljele nullpunktist positiivses suunas, saame arvteljel punkti, mis vastab sümbolile $\sqrt{3}$.

Me teame, et kõik täisarvud ja kõik harilikud murrud (siinjuures peame silmas, et kõik lõplikud kümnendmurrud on avaldatavad ka harilike murdudena) moodustavad **ratsionaalarvude valla.** Et sümbolid $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ ei ole väljendatavad ei täisarvudena ega harilike murdudena, siis nad ei ole ratsionaalarvud. Et aga on olemas lõigud, mille pikkuste mõõtarvudeks on need sümbolid, siis tuleb need sümbolid lugeda arvudeks. Neid nimetatakse irratsionaalarvudeks.

Arvu, millele arvteljel leidub vastav punkt ja mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

Loeme aksioomiks, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel üksainus punkt.

Kui näiteks arvude 1 ja 2 vahel oleks kõik ratsionaalarvud kujutatud arvteljel punktidena, siis ei oleks arvtelje lõik punktide 1 ja 2 vahel veel punktidega täidetud, sest seal leidub veel kohta punktidele, millele ei vasta ükski ratsionaalarv, vaid neile vastavad irratsionaalarvud, nagu näiteks arvud $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$.

Nagu $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$, nii on paljud juured, näiteks $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{10}$, irratsionaalarvud. Irratsionaalarvud on enamik trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, ka arv $\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots$ on irratsionaalarv.

Praktiliste arvutuste korral avaldame antud irratsionaalarvude ligikaudsed väärtused ratsionaalarvude (kümnendmurdude) abil lubatava vea ülemääraga ja teeme arvutused saadud ligikaudsete arvudega vastavate reeglite järgi.

Ülesandeid.

167. Ehita ruut külje pikkusega 2 ühikut ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut. Kui pikk on uue ruudu külg?

168. Ehita ruut külje pikkusega 2,5 cm ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut.

169. Ehita ruut külje pikkusega 5 cm ning selle abil 2 korda väiksema pindalaga ruut.

170. Ehita ruut pindalaga 36 cm^2 ning selle abil ruut pindalaga 18 cm^2.

171. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{18}$ cm.

172. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{32}$ cm.

173. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik, mille pikkus on $\sqrt{5}$ ühikut.

174. Kujuta arv $\sqrt{5}$ arvteljel punktina; joonesta arvteljel punkt, mis vastab arvu $\sqrt{5}$ vastandarvule.

175. Konstrueeri arvteljel punktid, mis kujutavad arve $\sqrt{13}$ ja $-\sqrt{13}$.

176. Leia tabelist irratsionaalarvude

1) $\sqrt{5}$ ja $\sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[3]{9}$ ja sin 10

ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01 ning arvuta nende summa, vahe, korrutise ja jagatise ligikaudsed väärtused.

Omal ajal laiendasime arvuvalda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalda murdarvudega ja saime ratsionaalarvude valla. Irratsionaalarvude loomisega ratsionaalarvude vahele tihendame arvuvalda veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

$$-1,\ -5,\ -7\tfrac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid, nagu

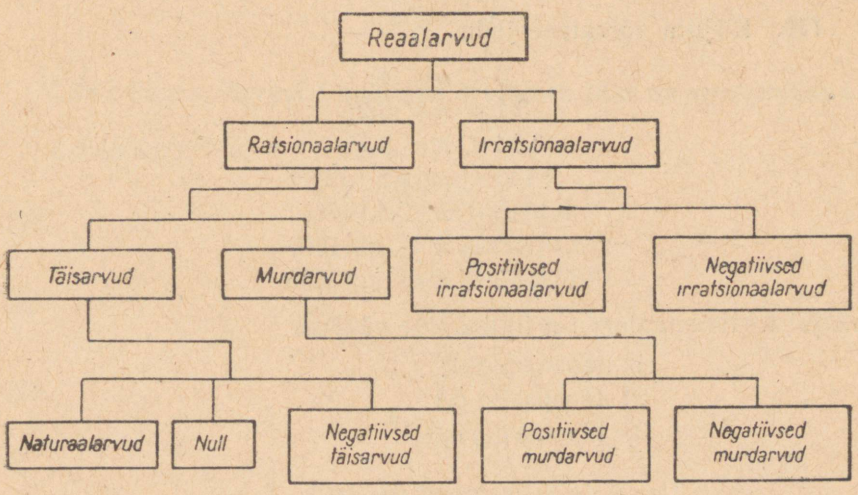
$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5\tfrac{1}{2}},\ \sqrt[7]{10{,}2},\ -\sqrt{2},\ -\sqrt[3]{4},\ -\pi,$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas.

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud moodustavad koos **reaalarvude valla.**

On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka reaalarvude vallas.

Joonisel 40 näeme reaalarvude liigitamise skeemi.



Joon. 40.

Eespool toodud arutlusest järeldame, et igale reaalarvule vastab arvteljel üks punkt. Tunnustame aksioomina, et ka igale punktile arvteljel vastab üks reaalarv.

Ülesandeid.

177. Kirjuta 1) viis ratsionaalarvu;
2) viis irratsionaalarvu;
3) viis täisarvu;
4) viis naturaalarvu.

178. Kirjuta võrratuste jada

$$1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}73211;$$
$$1{,}73204 < \sqrt{3} < 1{,}73205$$

põhjal $\sqrt{3}$ ligikaudne väärtus

1) täpsusega 0,1;
2) „ 0,01;
3) „ 0,001;
4) „ 0,0001.

179. Kirjuta võrratuse jada

$$3 < \pi < 4;$$
$$3{,}1 < \pi < 3{,}2;$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15;$$
$$3{,}141 < \pi < 3{,}142;$$
$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416;$$
$$3{,}14159 < \pi < 3{,}14160;$$
$$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$$

põhjal irratsionaalarvu π ligikaudne väärtus

1) täpsusega 1;
2) täpsusega 0,1;
3) täpsusega 0,001.

§ 43. JUURTE OMADUS.

Mõistes juuritavat ja juurt positiivsete arvudena, saame tõestada teoreemi:

võrdsete juurijatega juurtest on suurem see, millel juuritav on suurem

ehk sümbolites, kui

$$a > b,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui oletada, et $\sqrt[n]{a}$ ei ole suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b};$$

siis oleks ka

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leqslant \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

ehk juure definitsiooni põhjal

$$a \leqslant b,$$

mis on vastuolus eeldusega $(a > b)$. Seega

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Järeldus. **Arvust 1 suurema arvu n-es juur on suurem kui 1.**

Tõestus. Kui

$$a > 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}.$$

Et

$$\sqrt[n]{1} = 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > 1.$$

Sellest omakorda järeldub, et arvust 1 väiksema positiivse arvu n-es juur on 1-st väiksem positiivne arv.

Sümbolites, kui

$$0 < a < 1, \text{ siis } 0 < \sqrt[n]{a} < 1.$$

Ülesandeid.

180. Leia proovimise teel järgmised juured täpsusega 0,1:

1) $\sqrt{1{,}7}$ 2) $\sqrt[3]{1{,}2}$ 3) $\sqrt{0{,}8}$ 4) $\sqrt[3]{0{,}9}$

5) $\sqrt[4]{28}$ 6) $\sqrt[5]{15}$ 7) $\sqrt[5]{3{,}4}$

$\sqrt[4]{10}$ $\sqrt[5]{100}$ $\sqrt[5]{24{,}2}$

§ 44. TEOREEMID TEHETEST JUURTEGA.

1. Teoreem juurte korrutamisest.

Võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Tõestus. Tähistame juurte korrutise tähega x, nii et

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n, saame

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = x^n$$

ehk korrutise astendamise juhise põhjal

$$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = x^n;$$

et juure definitsiooni põhjal $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja $(\sqrt[n]{b})^n = b$, siis tähendab eelmine võrdus, et

$$ab = x^n.$$

Seega x on arv, mille n-es aste on ab; juure definitsiooni kohaselt

$$x = \sqrt[n]{ab}.$$

Võttes nüüd arvesse, et tähega x oli meil tähistatud $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, saame võrduse

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cm^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2m} = \sqrt[3]{64c^3m^3} = \sqrt[3]{(4cm)^3} = 4cm.$$

Vahetades tõestatud võrduse pooled, saame korrutise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

s. t.

korrutise juurimisel juuritakse iga tema tegur ja tulemused korrutatakse.

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

Korrutise juurimise teoreemi rakendamisel peame arvestama asjaolu, et paarisarvulise juurija puhul ei saa seda teoreemi alati kasutada. Nimelt ei ole see teoreem rakendatav juhul, kui juurija on paarisarv ja kui juuritav teisendatakse korrutiseks, mille mõned tegurid on negatiivsed. Näiteks $\sqrt{30}$ on küll esitatav kujul $\sqrt{2 \cdot (-3) \cdot (-5)}$, kuid mitte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$, sest negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

Ülesandeid.

181. Leia peast järgmised juured:

1) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ 2) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$ 3) $\sqrt[3]{1000 \cdot 729}$

$\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$ $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$

182. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrutamise teoreemi:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; $\sqrt{162}\cdot\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4}$

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; $\sqrt{0{,}8}\cdot\sqrt{45}$; $\sqrt[3]{-7}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; $\sqrt[3]{40\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[4]{486}$

3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; $\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{0{,}6}$; $\sqrt[3]{-12}\cdot\sqrt[3]{18}$; $\sqrt[3]{0{,}32}\cdot\sqrt[3]{-200}$; $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[5]{48}$

183. Lihtsusta järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{49a^2}$; $\sqrt[3]{125u^3}$; $\sqrt[4]{256g^4}$

2) $\sqrt{121x^4}$; $\sqrt[3]{-343f^6}$; $\sqrt[5]{k^5x^{10}}$

3) $\sqrt{a^2b^2}$; $\sqrt[3]{-p^3q^9}$; $\sqrt[7]{-128r^7}$

184. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}$; $\sqrt[3]{4c}\cdot\sqrt[3]{2c^2}$; $\sqrt[4]{3N^2}\cdot\sqrt[4]{27N^2}$

2) $\sqrt[4]{\frac{243}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^9}{3}}$; $\sqrt[3]{9u}\cdot\sqrt[3]{-3u^5}$; $\sqrt[4]{48x^3}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5}$

3) $\sqrt{\frac{1}{2}ax^3}\cdot\sqrt{288ax}$; $\sqrt[3]{m^{14}n^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}}$; $\sqrt[5]{9H^3}\cdot\sqrt[5]{27H^7}$

185. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{15}$

2) $\sqrt[8]{5x}\cdot\sqrt[8]{3y}$; $\sqrt[6]{-\frac{x^2}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{x^2}}$

3) $\sqrt[3]{-m}\cdot\sqrt[3]{-n}$; $\sqrt[3]{1\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{80}$

186. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{81 \cdot 169}$ 2) $\sqrt{196 \cdot 10^4}$ 3) $\sqrt{57600}$

$\sqrt[3]{216 \cdot 27}$ $\sqrt[3]{7{,}29 \cdot 121}$ $\sqrt[3]{512000}$

$\sqrt[3]{729 \cdot 1000}$ $\sqrt[3]{3375 \cdot 1331}$ $\sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}$

187. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

1) $\sqrt{50}$ 2) $\sqrt{45}$ 3) $\sqrt{32}$ 4) $\sqrt{63}$

$\sqrt{72}$ $\sqrt{245}$ $\sqrt{300}$ $\sqrt{768}$

$\sqrt[3]{54}$ $\sqrt[3]{375}$ $\sqrt[3]{108}$ $\sqrt[3]{1512}$

$\sqrt[3]{-24}$ $\sqrt[3]{320}$ $\sqrt[3]{-1024}$ $\sqrt[3]{2000}$

$\sqrt[4]{512}$ $\sqrt[4]{240}$ $\sqrt[5]{486}$ $\sqrt[5]{-96}$

188. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{N^3}$ 2) $\sqrt{a^5}$ 3) $\sqrt{c^2n^3}$ 4) $\sqrt{ax^4}$

$\sqrt{c^5h}$ $\sqrt{7m^2x^2}$ $\sqrt{4a^4b}$ $\sqrt{25f^4g^3}$

$\sqrt[3]{27c^5}$ $\sqrt[3]{16a^4}$ $\sqrt[3]{2a^2x^3}$ $\sqrt[3]{8a^3b^2}$

$\sqrt[3]{40cu^4}$ $\sqrt[3]{54h^6k}$ $\sqrt[3]{135u^3v^3}$ $\sqrt[3]{-64N^3}$

$\sqrt[4]{6a^4}$ $\sqrt[4]{64n^5}$ $\sqrt[5]{32P^6}$ $\sqrt[5]{81a^5x}$

189. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisenda tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$ 2) $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{10n}$ 3) $\sqrt{5A} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3A}$

$\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{ah}$ $\sqrt[3]{pq^2r^2} \cdot \sqrt[4]{p^2q}$ $\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \cdot \sqrt[3]{4x^3}$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$ $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$ $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{240}$

$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{36}$ $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{75}$ $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[4]{98}$ $\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[5]{96}$ $\sqrt[6]{2{,}5} \cdot \sqrt[6]{1{,}6} \cdot \sqrt[6]{48}$

2. Kuupjuure leidmine tabeli kasutamisega.

Teoreemi korrutise juurimisest kasutame kuupjuure leidmisel tabeli abil.

Kui antud arv on 1-st väiksem või 1000-st suurem, siis enne kuupjuure leidmist korrutame antud arvu vastavalt 1000-ga (1 000 000-ga) või 0,001-ga (0,000001-ga).

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{0{,}009447} = \sqrt[3]{0{,}001 \cdot 9{,}447} = 0{,}1 \cdot 2{,}114 = 0{,}2114.$

2. $\sqrt[3]{11390} = \sqrt[3]{1000 \cdot 11{,}39} = 10 \cdot 2{,}25 = 22{,}5.$

Ülesandeid.

190. Leia tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

1)	2)	3)
9994	0,2794	0,003667
1154	0,3422	0,004065
6623	0,1991	0,02102
7940	0,2172	0,07167

191. Kasutades kera ruumala valemit

$$V \approx 4{,}19r^3,$$

leia tabelist kera raadius, kui ruumala on 1) 33,7 dm^3; 2) 10,5 m^3; 3) 7,2 m^3.

192. Kasutades kera ruumala valemit

$$V \approx 0{,}52\, d^3,$$

leia tabelist kera läbimõõt, kui ruumala on 1) 5190 cm^3; 2) 53040 mm^3; 3) 0,6404 m^3.

193. Leia tabelist kuubi serva pikkus, kui kuubi ruumala on 1) 0,523 m^3; 2) 0,0725 m^3; 3) 8577 cm^3.

3. Teoreem juurte jagamisest.

Võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas jagatakse juuritavaga jagajas ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Tõestus. Tähistame antud juurte jagatise tähega x, siis

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x.$$

Astendades saadud võrduse kummagi poole arvuga n, saame

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = x^n$$

ehk jagatise astendamise eeskirja põhjal

$$\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = x^n.$$

Juure definitsiooni põhjal

$$\frac{a}{b} = x^n.$$

Et x on arv, mille n-es aste on $\frac{a}{b}$, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Võrdustest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x \text{ ja } x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

järeldame, et

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame jagatise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

s. t.

murru juurimisel juuritakse tema lugeja ja nimetaja ning arvutatakse tulemuste jagatis.

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

Jagatise juurimise teoreemi ei saa kasutada siis, kui juurija on paarisarv ja jagatav ning jagaja juuritavas on negatiivsed.

Ülesandeid.

194. Kirjuta järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

1) $\sqrt{72} : \sqrt{2}$ 2) $\sqrt{ab} : \sqrt{b}$ 3) $\sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c}$ $\sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$

$\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17}$ $\sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2}$ $\sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{p^2}}$

195. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

1) $\sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}}$

$\sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}}$

$\sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}}$

2) $\sqrt{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt{\frac{a^5x}{n^2}}$

$\frac{\sqrt{a^2b-a^2c}}{\sqrt{b-c}}$

$\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m^2-n^2}}$

3) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$

$\frac{\sqrt{(u+v)^2}}{\sqrt{u^2-v^2}}$

$\frac{\sqrt[3]{a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a(a+b)}}$

196. Kirjuta järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}$

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$

$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}$

2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}}$

$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}}$

$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}}$

3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

$\frac{\sqrt[3]{h^7}}{\sqrt[3]{h}}$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}}$

$\frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{c^2u^2}}$

4) $\frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}}$

$\frac{\sqrt[3]{a^2h}}{\sqrt[3]{ah^2}}$

$\frac{\sqrt{px^3}}{\sqrt{p^2x^2}}$

$\frac{\sqrt[3]{mx^2}}{\sqrt[3]{m^4x^5}}$

197. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{\frac{9}{64}}$

$\sqrt{6\frac{1}{4}}$

$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

2) $\sqrt{\frac{49}{81}}$

$\sqrt{3\frac{1}{16}}$

$\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$

3) $\sqrt{\frac{144}{25}}$

$\sqrt{7\frac{9}{16}}$

$\sqrt[3]{5\frac{23}{64}}$

4) $\sqrt{\frac{169}{289}}$

$\sqrt{4\frac{21}{25}}$

$\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$

5) $\sqrt{\frac{5^2}{6^4}}$

$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}$

6) $\sqrt[3]{\frac{2^6}{7^3}}$

$\sqrt[4]{\left(1\frac{9}{16}\right)^3}$

7) $\sqrt[4]{\frac{236}{10^8}}$

$\sqrt[4]{\left(3\frac{13}{81}\right)^2}$

8) $\sqrt[5]{\frac{243}{10^{15}}}$

$\sqrt[5]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}$

198. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

1) $\sqrt{\frac{18}{25}}$ 2) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$ 3) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{125a}{27x^3}}$

$12\sqrt{\frac{a^3}{16x^2}}$ $\sqrt{1\frac{9x^3}{16a^2}}$ $0{,}2\sqrt[3]{1000Nu^3}$

$10\sqrt[3]{\frac{1}{8}M}$ $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{4}m^2n^4}$ $10\sqrt[3]{\frac{H^2}{0{,}008}}$

4. Teoreem juure astendamisest.

Juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Tõestus. Kirjutame astme $(\sqrt[n]{a})^m$ korrutisena, siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}}.$$

Juurte korrutamise teoreemi põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}} = \underbrace{\sqrt[n]{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}_{m \text{ tegurit}} = \sqrt[n]{a^m};$$ seega

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$(\sqrt{5a^3})^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8\cdot 5a} = 5a^4\sqrt{5a}.$$

Vahetades eespool tõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{16}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{4^2}\right)^3}=\left(\sqrt{\frac{a^2h^2}{4^2}}\right)^3=\left(\frac{ah}{4}\right)^3=\frac{a^3h^3}{64}.$$

Valemit $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ei ole võimalik kasutada siis, kui juurija n on paarisarv ja astendatav a juuritavas on negatiivne.

Ülesandeid.

199. Kirjuta järgmised astmed võimalikult väheste sümbolitega:

1) $(\sqrt{5})^4$ $(\sqrt{3})^8$ $(\sqrt{2})^{10}$ $(\sqrt[3]{3})^6$ $(\sqrt[9]{5})^9$

2) $(\sqrt[3]{7})^5$ $(\sqrt[5]{a})^6$ $(\sqrt[4]{x})^5$ $(\sqrt[5]{b^2})^7$ $(\sqrt[10]{x^2})^5$

3) $(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})^6$ $(\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$ $(\sqrt[4]{x}:\sqrt[4]{y})^5$ $(\sqrt[4]{27}:\sqrt[4]{3})^2$ $(\sqrt[5]{u^2}:\sqrt[5]{v^2})^3$

200. Arenda järgmised korrutised ja astmed.

1) $(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{3}$ $(\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}$

2) $(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})$ $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

3) $(\sqrt{7}-1)^2$ $(\sqrt{10}-\sqrt{8})^2$ $(\sqrt[3]{3}-1)^3$

4) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ $(2\sqrt{8}-3)(9+4\sqrt{8})$ $(2\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{3})^3$

201. Teisenda järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks võimalikult vähe tegureid:

1) $(\sqrt{2a^2})^3$ 2) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$ 3) $\left(\sqrt{\frac{bc^3}{3a}}\right)^3$

$(\sqrt{3hu^2})^5$ $(2\sqrt[3]{cu^6})^3$ $\left(\sqrt{\frac{a^3x}{5u^3}}\right)^3$

$(\sqrt[3]{5c^2N^2})^2$ $(\sqrt[4]{6R^2})^2$ $\left(\sqrt{\frac{2m^3x^5}{n^4}}\right)^4$

$(\sqrt[4]{7p^4q^2})^4$ $(\sqrt[4]{\pi R^3h})^2$ $\left(\sqrt[3]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}}\right)^4$

$(ax^2\sqrt{2ax})^2$ $(2N\sqrt{3N^2u})^4$ $\left(\frac{1}{2c}\sqrt[3]{5a^2x^3}\right)^5$

5. Teoreem astme juurimisest

Kui juuritavaks on aste, mille astendaja on juurija kordne, s. t. kui avaldises $\sqrt[n]{a^m}$ on $m = kn$, siis saab näidata, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k.$$

Astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga ja saadud jagatisega astendatakse astendatav juuritavas.

Tõestus. Avaldise a^{kn} võime kirjutada kujul $(a^k)^n$. Eelmise teoreemi ja juure definitsiooni põhjal saame nüüd, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k.$$

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[21]{x^7} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärib, on see juhtum, kus juurijal ja juuritava astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s. t.

juurijat ja juuritava astendajat võib jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija ja juuritava astendaja ühine tegur märgitud tähega k; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Tähistame $\sqrt[km]{a^{kn}}$ tähega x; teatavasti aga $a^{kn} = (a^n)^k$, mistõttu ka

$$\sqrt[km]{(a^n)^k} = x$$

ehk eelmise teoreemi põhjal

$$(\sqrt[km]{a^n})^k = x.$$

Astendades võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$(\sqrt[km]{a^n})^{km} = x^m$$

ehk

$$a^n = x^m.$$

Et x on niisugune arv, mille m-es aste on a^n, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[m]{a^n}.$$

Võttes arvesse, et tähega x tähistasime tõestuse algul avaldist $\sqrt[km]{a^{kn}}$, saamegi võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näiteid.

$$\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{a^{3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$\sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuritava astendajat võib korrutada ühe ning sama arvuga.

Näiteid.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \qquad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

Ülesandeid.

202. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

1) $\sqrt{3^4}$ 2) $\sqrt[3]{a^6}$ 3) $\sqrt{a^2b^4}$

$\sqrt{2^6}$ $\sqrt[4]{a^4b^8}$ $\sqrt[3]{125a^6}$

$\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{27m^3n^6}$ $\sqrt[3]{8r^3}$

203. Taanda järgmised juured:

1) $\sqrt[4]{a^2}$ 2) $\sqrt[9]{a^6}$ 3) $\sqrt[4]{5^2}$

$\sqrt[6]{a^2}$ $\sqrt[12]{a^4b^8}$ $\sqrt[4]{64}$

$\sqrt[4]{a^2x^6}$ $\sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}}$ $\sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{a^2b^4}$ $\sqrt[15]{u^5v^{10}}$ $\sqrt[6]{1000}$

$\sqrt[2n]{a^{2m}}$ $\sqrt[3n]{a^{3p}b^{9q}}$ $\sqrt[6]{\frac{25}{81}}$

204. Teosta juurte korrutamine või jagamine, juurt tarbe korral laiendades või taandades:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2^4}$ 2) $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$

$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[15]{a^2}$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}$ $\sqrt[4]{b} : \sqrt{b}$

6. Teoreem juure juurimisest.

Juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juuritav arv.

Sümbolites:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Tõestus.

Tähistame avaldise $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ tähega x, nii et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x.$$

Astendame selle võrduse pooled arvuga m, saame

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = x^m.$$

Astendame nüüd saadud võrduse kummagi poole veel arvuga n, siis saame

$$(\sqrt[n]{a})^n = (x^m)^n$$

ehk

$$a = x^{mn}.$$

Juure definitsiooni põhjal ongi nüüd

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Viimasest võrdusest ja võrdusest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

järeldame, et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{\frac{30}{15}} = D^2.$$

Nagu varem käsitletud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Seega on alati võimalik juurimist mingi kordarvuga mn teostada sel teel, et enne juuritakse näiteks arvuga n ja tulemust juuritakse arvuga m. Nii võime 4-nda juure arvust 625 leida sel teel, et leiame arvu 625 ruutjuure ja tulemusest veel kord ruutjuure:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5.$$

Analoogiliselt leiame $\sqrt[6]{27}$:

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3} = 1{,}732.$$

Ülesandeid.

205. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

1) $\sqrt{\sqrt{5}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{13}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{29}}$; $\sqrt{2\sqrt{3}}$

2) $\sqrt{\sqrt{N^3}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{h^3}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4x^3}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

3) $\sqrt[3]{\sqrt{ab^3}}$; $\sqrt{\sqrt[5]{(3c^4)}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^9}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10}f^{15}}}$; $\sqrt{2x\sqrt[3]{\frac{a}{2}}}$

206. Arvuta järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid:

1) $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[6]{36}$; $\sqrt[8]{81}$

2) $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[6]{27}$; $\sqrt[8]{625}$

3) $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{144}$; $\sqrt[8]{1296}$

4) $\sqrt[4]{100}$; $\sqrt[6]{1331}$; $\sqrt[12]{10000}$

§ 45. JUURAVALDISTE TEISENDAMISI.

Juuravaldisteks *nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri.*

Näiteks

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3};\quad \left(10-2\sqrt[5]{100}\right)^2;\quad \frac{1}{3-\sqrt{5}}.$$

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu, milleks asendame avaldises esinevad juured nende ligikaudsete väärtustega, tavaliselt 2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli

kohane avaldist enne teisendada. Teisendamise võtteist käsitame kahte:

a) teguri toomine juuremärgi alt juuremärgi ette;

b) juure kaotamine murru nimetajast.

Esimene teisendus põhineb kas korrutise või jagatise juurimise teoreemil ja vastavalt sellele teostub see kas nii:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

või nii:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juuravaldisega.

Näiteid.

1. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}.$

2. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{b^2}.$

3. $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$

4. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada avaldise

$$4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt leiame tabeli abil kõik antud avaldises esinevad juured, siis teostame nõutavad korrutamised ja seejärel liitmised ning

lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$\begin{aligned}
&4\sqrt{63}-5\sqrt{28}-2\sqrt{7}+\sqrt{20}=\\
&=4\sqrt{9\cdot 7}-5\sqrt{4\cdot 7}-2\sqrt{7}+\sqrt{4\cdot 5}=\\
&=4\cdot 3\sqrt{7}-5\cdot 2\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2\sqrt{5}=\\
&=12\sqrt{7}-10\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2\sqrt{5}=\\
&=2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimis-, 2 korrutamis-, 2 lahutamistehet ja 1 liitmistehte, s. o. 10 tehte sooritamist. Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab kõigest ühe juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähisväärtuse 2,236, saame avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{20}$ ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvutada avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et võtame tabelist $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse, korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}}=\frac{26\cdot\sqrt{13}}{5\cdot 13}=\frac{2}{5}\sqrt{13}=0{,}4\sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab ühtainsat korrutamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtus võetakse tabelist.

Ülesanne 3. Arvutada avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et leiame tabelist $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame 8 selle vahega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast

juured. Selleks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19}+\sqrt{15}$:

$$\frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{15}}=\frac{8(\sqrt{19}+\sqrt{15})}{(\sqrt{19}-\sqrt{15})(\sqrt{19}+\sqrt{15})}=$$

$$=\frac{8(\sqrt{19}+\sqrt{15})}{19-15}=\frac{8}{4}(\sqrt{19}+\sqrt{15})=2(\sqrt{19}+\sqrt{15}).$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab vaid üht liitmis- ja üht korrutamistehet, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

Ülesandeid.

207. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 3) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$ 4) $\sqrt{3\frac{1}{7}}$

$\sqrt{\frac{3}{20}}$ $\sqrt{\frac{5}{12}}$ $\sqrt{1\frac{5}{18}}$ $\sqrt{2\frac{1}{50}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

208. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 2) $\sqrt{\frac{m}{2n}}$ 3) $\sqrt{\frac{5x}{8a}}$ 4) $\sqrt{\frac{p}{q^3}}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ $\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}}$ $\sqrt[5]{\frac{a^2}{d^3}}$

$\sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}$ $\sqrt[4]{\frac{m^5}{n}}$ $\sqrt[3]{\frac{250}{3x}}$ $\sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}$

209. Kirjuta järgmised juuravaldised kujul, mille nimetajas puudub juur, ja arvuta avaldiste väärtused:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$

$\frac{6}{\sqrt{6}}$ $\frac{6}{\sqrt{18}}$ $\frac{10}{3\sqrt[3]{25}}$ $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$

210. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille nimetajas ei esine juurt:

1) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 2) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 3) $\frac{m}{\sqrt{2n}}$ 4) $\frac{3p}{\sqrt{3q}}$

$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$ $\frac{a^2}{x\sqrt{ax}}$ $\frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ $\frac{x}{\sqrt[3]{x^3}}$ $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$

211. Kirjuta järgmised avaldised kujul, milles nimetajas ei esine juurt, ja arvuta avaldiste väärtused:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ 2) $\frac{21}{5+\sqrt{2}}$ 3) $\frac{12}{5-\sqrt{13}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ $\frac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}$

$\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}}$ $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$

212. Anna järgmistele murdudele kuju, mille nimetaja on juurevaba:

1) $\frac{n}{\sqrt{u}-1}$ 2) $\frac{w}{w\sqrt{w}+1}$ 3) $\frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}}$ $\frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}}$ $\frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}}$

$\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$ $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ $\frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$

213. Koonda järgmised juuravaldised:

1) $6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ 2) $10\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{5}$ 3) $a\sqrt{x}+\sqrt{x}$

$8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ $\sqrt[5]{4}+4\sqrt[5]{4}$ $m\sqrt[3]{d}-2n\sqrt[3]{d}$

$m\sqrt{7}+n\sqrt{7}$ $a\sqrt[3]{x}+b\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[4]{3f}-5\sqrt[4]{3f}$

$a\sqrt{z}-2\sqrt{z}$ $k\sqrt[n]{a}+\frac{\sqrt[n]{a}}{k}$ $a^2\sqrt[5]{b}-a\sqrt[5]{b}$

214. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste ja lihtsate juurte abil:

1) $8\sqrt{7}+5\sqrt[3]{7}-10{,}7\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$

$3\sqrt{10}+\sqrt[3]{10}-5{,}5\sqrt[3]{10}-0{,}7\sqrt{10}$

$2\sqrt{N}-\sqrt{M}+4\sqrt{N}-6\sqrt{M}$

$\sqrt[3]{H}+3\sqrt{H}-2\sqrt{H}+\sqrt[3]{H}$

2) $6\sqrt{3}-7\sqrt{12}+\sqrt{75}-3\sqrt{48}+3\sqrt{108}+\sqrt{300}$

$\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{40}+9\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{432}$

$6\sqrt{18}-5\sqrt[3]{54}-4\sqrt{72}+4\sqrt[3]{1024}$

$5\sqrt[3]{72}-7\sqrt{45}+11\sqrt[3]{9000}-10\sqrt{180}$

3) $4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2\sqrt[3]{2}\cdot 5\sqrt[3]{12}\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{32}$

$5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{18}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{20}$

$\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\cdot 7\sqrt[3]{18}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[3]{16}$

4) $5\sqrt{3}:(2\sqrt{12})$

$\sqrt{48}:\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$\frac{3}{5}\sqrt{56}:(3\sqrt{8})$

$\sqrt{91}:\left(\frac{3}{4}\sqrt{39}\right)$

215. Leides tabelist vastavate arvude ruut- ja kuupjuured, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused:

1) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$

$\sqrt{21}$

2) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

$\sqrt{14}$

$\sqrt{98}$

3) $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{35}$

$\sqrt[3]{45}$

4) $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{49}$

$\sqrt[3]{448}$

5) $\sqrt{50}-\sqrt{28}+\sqrt{35}$

$2\sqrt{15}+\sqrt{27}-2\sqrt{75}$

$\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{200}$

216. Teisenda järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

1) $2\sqrt{5}$ $\quad h^2\sqrt{u}$ $\quad c^2\sqrt{\frac{b}{c}}$

2) $b\sqrt[3]{c^2}$ $\quad N^2\sqrt[5]{N}$ $\quad 4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}}$

3) $ax^2\sqrt[3]{a}$ $\quad 3D^2\sqrt[3]{3D}$ $\quad \frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}$

217. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

1) $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}$ $\quad \sqrt{b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ $\quad 2\pi\sqrt{r^2-\frac{3}{8}r^2}$

2) $3N\sqrt{N^2-\frac{5}{9}N^2}$ $\quad \sqrt{4x^2-\frac{19}{25}x^6}$ $\quad \sqrt{\frac{12}{25}R^4-\frac{4}{25}R^2}$

218. Lihtsusta järgmised korrutised:

1) $\frac{2}{a}\sqrt{3x}\cdot\frac{5}{a}\sqrt{6x}$ $\quad m^2\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot 3\sqrt{m}$ $\quad h^2\sqrt[3]{2u}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{4u^2}$ $\quad \pi\sqrt{aR^2}\cdot\frac{5R^2}{3}\sqrt[3]{a^2R}$

2) $\sqrt{N}(\sqrt{N}-a\sqrt{aN})$ $\quad \sqrt{2x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})$ $\quad m\sqrt{n}(\sqrt{mn}-5m\sqrt{n})$ $\quad 3\sqrt{cD}(\sqrt{cD}+2\sqrt{aD})$

§ 46. JUURVÕRRANDITE LAHENDAMISE NÄITEID.

Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse **juurvõrrandiks.**

Juurvõrrandid on näiteks võrrandid

$$\sqrt{x}+\sqrt{2x}=3$$

ja

$$\sqrt[3]{x}+50=4.$$

Seevastu võrrand

$$x\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$$

ei ole juurvõrrand, sest tundmatu ei esine juuritavas.

Et lahendada juurvõrrand, selleks tuleb teda enne niisuguseks teisendada, et üheski juuritavas ei esineks tundmatut.

Allpool selgitame lähemalt juurvõrrandite lahendamise võtteid kahe näite varal.

1. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x-\sqrt{x+2}=10.$$

Kui võrrandi vabastamiseks juurest tõstaksime ta otsekohe ruutu, siis võrrandi vasakul poolel peale juurevabade liikmete saaksime ka liikmete x ja $-\sqrt{x+2}$ kahekordse korrutise; seega jääks juur $\sqrt{x+2}$ ikkagi võrrandisse püsima. Seepärast talitame nii, nagu eespool öeldud: viime juure võrrandi ühele poolele ja kogume kõik muud liikmed teisele poolele; siis võrrand omandab kuju:

$$x-10=\sqrt{x+2}.$$

Tõstes selle võrrandi pooled ruutu, saame võrrandi

$$(x-10)^2=x+2$$

ehk pärast sulgude avamist ja koondamist

$$x^2-21x+98=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 14 ja 7.

Asendades lähtevõrrandis tähe x ruutvõrrandi lahendiga 14, saame võrrandi vasakul poolel $14-\sqrt{14+2}$ ehk 10, s. o. sama arvu, mis seisab paremal poolel. Seega ruutvõrrandi lahend 14 on ka antud juurvõrrandi lahendiks.

Tehes sedasama ruutvõrrandi teise lahendiga, arvuga 7, saame juurvõrrandi vasakul poolel $7-\sqrt{7+2}$ ehk 4. Et aga paremal poolel seisab 10, siis arv 7 juurvõrrandit ei rahulda.

Arv 7 rahuldab küll võrrandit $x+\sqrt{x+2}=10$, kuid mitte antud võrrandit.

Sellest nähtub, et lähtevõrrand ja temast poolte astendamisel saadud võrrand pole s a m a v ä ä r s e d, s. o. mitte kõik astendamisel saadud võrrandi lahendid pole ühtlasi ka lähtevõrrandi lahenditeks.

Lõppvõrrandi lahendit, mis ei rahulda lähtevõrrandit, nimetatakse lähtevõrrandi **võõrlahendiks.**

Arv 7 on seega antud juurvõrrandi võõrlahend ja selle võrrandi ainsaks lahendiks on 14.

Kõigest öeldust järeldub, et võrrandi teisendamisel astendamise teel võib tekkida võõrlahendeid. Seepärast

alati tuleb selgitada, missugused juurvõrrandi lahendamise tulemustest rahuldavad seda võrrandit.

Ülesandeid.

219. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{5x}=10$
2) $x-\sqrt{3x}=0$
3) $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$
4) $\sqrt{x-1}-3=0$
5) $x-3+\sqrt{x^2-1}=0$
6) $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{2x^2-2x}$
7) $\sqrt[3]{10x+46}=\sqrt[3]{7x+43}$
8) $\sqrt{x^2+10x}=12$
9) $\sqrt{6x+25}-x=3$
10) $3x-4\sqrt{x}-32=0$

220. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{2x}=8$
2) $\sqrt[3]{\frac{z}{8}}=z$
3) $\sqrt[3]{5x}=x$
4) $\sqrt[3]{x^2}=9$
5) $\sqrt[6]{v^5}=1024$
6) $\sqrt{x+7}=x$
7) $y-2=\sqrt{y}$
8) $\sqrt{10u-24}=u$
9) $x-11\sqrt{x}+24=0$
10) $x+1=\sqrt{2x+4}$

221. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+8}=x+2$
2) $\sqrt{x+8}=-x-2$
3) $\sqrt{x^2+16}+x=8$
4) $\sqrt{2x}-x=4$
5) $4x+2\sqrt{5-4x}=5$
6) $2a-\sqrt{x^2-8a}=1$

2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+5}=1,$$

milles peale juurevaba liikme esineb kaks ruutjuurt tundmatuga juuritavas.

Kui tõstaksime ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, siis vasakul poolel saaksime peale juurevabade liikmete ka juurte kahekordse korrutise. Et vältida selle keerulise avaldise tekkimist, teisendame võrrandit nii, et jätame vasakule poolele ainult ühe juure, näiteks esimese:

$$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi pooled ruutu, saame:

$$3x+4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$$

ehk pärast koondamist ja taandamist

$$x-1=\sqrt{x+5}.$$

Tõstes uuesti mõlemad pooled ruutu, saame pärast koondamist võrrandi

$$x^2-3x-4=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 4 ja -1.

Tehes lähtevõrrandis asendused $x=4$ ja $x=-1$, veendume, et esimene neist rahuldab lähtevõrrandit, teine aga ei rahulda. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on 4.

Ülesandeid.

222. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}+1=0$
2) $\sqrt{x}-\sqrt{x-28}=2$
3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6}$
4) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+\sqrt{5}$
5) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$
6) $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$
7) $\sqrt{x}+\sqrt{3x-a}=\sqrt{a}$

223. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 1 cm võrra pikem kui üks kaatet ja kolmnurga ümbermõõt on 56 cm. Leia kolmnurga küljed.

224. Täisnurkse kolmnurga kaatetite vahe on 7 cm ja kolmnurga ümbermõõt 30 cm. Leia kolmnurga küljed.

225. Kolmnurga kahe külje suhe on 5 : 8, kolmas külg on 39 cm ja sellele tõmmatud kõrgus 24 cm. Leia kolmnurga kaks külge.

226. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

2) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}$

3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}=\sqrt{17x-4}$

4) $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$

5) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$

6) $5\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2x-5}=4\sqrt{3x-5}$

7) $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$

8) $2a-\sqrt{2ax+x^2}=x$

9) $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$

10) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$

11) $\sqrt{3x+a+2b}-\sqrt{3x+a-2b}=2\sqrt{x-a}$

12) $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{2b(x-a)}=\sqrt{ax+4bx+b^2}$

ASTENDAJA 0. NEGATIIVSED JA MURRULISED ASTENDAJAD.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n.$$

Laiendame nüüd astme mõistet nii, et ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, kehtiks võrdus

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

§ 47. ASTENDAJA 0.

Kui $m = n$, siis

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{n-n} = a^0.$$

Avaldisel a^0 ei ole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Et vaadeldaval juhul $a^m = a^n$ ja et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Nii on

$$7^0 = 1 \qquad (-9)^0 = 1 \qquad \left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1.$$

Võrdust $a^0 = 1$ loetakse õigeks ainult siis, kui $a \neq 0$; 0^0 jäetakse aga ilma arvu tähenduseta.

§ 48. NEGATIIVNE ASTENDAJA.

Kui $m < n$, siis

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)}, \text{ kus } n - m > 0.$$

Saadud avaldisel kui negatiivse astendajaga astmel pole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Kirjutame vaadeldava astmete jagatise murru kujul ja jagame selle murru lugejat ja nimetajat arvuga a^m:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ kui } m < n.$$

Niisiis tuleb avaldist $a^{-(n-m)}$ mõista naturaalarvulise astendajaga astme a^{n-m} pöördväärtusena:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n - m$ üheainsa tähega r, näeme, et

$$\boxed{a^{-r} = \frac{1}{a^r}.}$$

Nii on

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Astme mõiste laiendamisel võtsime aluseks, et jääks kehtima võrdsete alustega astmete jagamise reegel. Saab näidata, et ka teised tehted, mis kehtivad naturaalarvulise astendajaga astmete korral, jäävad kehtima samuti täisarvulise astendajaga astmete korral.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m + (-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Samuti

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Samuti

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n,$$

sest

$$a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2x^3 \cdot \frac{2}{5}\, n^{-3}x^{-2} = \frac{2}{5}\, n^{-1}x = \frac{2x}{5n}.$$

Tehnikaalases praktikas kasutatakse negatiivset astendajat sageli. Allpool on toodud mõned näited, mil kasutatakse negatiivset astendajat.

1) Parema ülevaate saamiseks füüsikalistest konstantidest, kui konstandid on väiksed kümnendmurrud. Nii kirjutame näiteks joonpaisumise koefitsiendid järgmiselt:

plaatina	$0{,}90 \cdot 10^{-5}$
raud	$1{,}20 \cdot 10^{-5}$
kuld	$1{,}42 \cdot 10^{-5}$
vask	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$.

Kirjutades vase joonpaisumise koefitsiendi negatiivset astendajat kasutamata, saame $1{,}65 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000165$.

2) Väikeste mõõtühikute puhul, näiteks:

1 (mikromeeter) $= 10^{-6}$ m $= 10^{-3}$ mm;
1 (nanomeeter) $= 10^{-9}$ m $= 10^{-6}$ mm.
Vesiniku aatomi läbimõõt on 10^{-8} cm;
aatomituuma läbimõõt on ligikaudu 10^{-12} cm;
elektroni läbimõõt on $3 \cdot 10^{-13}$ cm;
vesiniku aatomi mass on $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g.

3) Murrujoone vältimiseks mõõtühikute nimetuste kirjutustes, näiteks:

kiiruse mõõtühik $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kirjutatakse $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

kiirenduse mõõtühik $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ kirjutatakse $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

tiheduse mõõtühik $1\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ kirjutatakse $1 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

Ülesandeid.

227. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) 3^{-2} $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $1{,}7^{-2}$ $4^0 \cdot 5^{-2}$ $\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$

2) 6^{-2} $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $0{,}9^{-1}$ $2^5 \cdot 3^{-4}$ $\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$

3) 2^{-5} $\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$ $2{,}4^{-3}$ $(-1)^4 \cdot 8^{-2}$ $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$

4) 10^{-7} $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $3{,}6^{-2}$ $(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$ $(-0{,}2)^{-5} \cdot 10^3$

228. Kirjuta järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{u^5}$
$\frac{2}{n^3}$	$\frac{4}{v}$	$\frac{5}{N^6}$	$\frac{a}{b^4}$
$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{2x^3}$	$\frac{u}{3v^4}$	$\frac{m}{p^2p^5}$
$\frac{0,7}{cx^2}$	$\frac{5a}{z^3}$	$\frac{9a}{8b^2u^3}$	$\frac{8}{10c^2u^4}$
$\frac{100}{\pi D^2}$	$\frac{3c^3}{10gh^2}$	$\frac{0,2p}{q^2r^3}$	$\frac{7s^3}{23rh^2}$

229. Kirjuta järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

1)	2)	3)
a^{-1}	$3b^0$	$2^{-1}c^{-1}$
N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
$4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0,9a^{-2}x^{-3}$
$\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
$\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

230. Kasutades arvu 10 astmeid avalda:

1) 1 km meetrites
1 mm sentimeetrites
1 kg milligrammides
0,7 ha ruutmeetrites
1,4 l kuupsentimeetrites

2) l m millimeetrites
a cm meetrites
s m^2 aarides
V cm^3 liitrites
P g tonnides

231. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1)	2)	3)
$7^3 \cdot 7^{-4}$	$3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$	$7,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$
$5^3 : 5^{-1}$	$2 \cdot 10^6 : 10^{-6}$	$3,43 \cdot 10^{-6} : (0,49 \cdot 10^{-8})$
$4^5 \cdot 4^{-3}$	$5,7 \cdot 9^{-3} : 9^0$	$8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,125 \cdot 10^{12}$
$3^{-6} : 3^{-4}$	$10^4 : (5 \cdot 10^{-2})$	$1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$
$10^{-4} : 10^{-7}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 : (2 \cdot 10^{-3})$	$2,25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$

232. Kirjuta järgmised arvud kümne astme kordsetena:

1)	2)	3)	4)
70	900	1400	1750 000
$\frac{9}{10}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{325}{1000}$	$\frac{283}{10000}$
$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{500}$	$\frac{15}{4000}$	$\frac{112}{500000}$
0,72	3,2	1,11	0,033
0,025	1,375	5,0081	0,000 765

233. Teosta järgmised tehted ja kirjuta tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

1)	2)	3)
$a^5 : a^0$	$8{,}5q^{-3} : 1{,}5q^{-5}$	$5a^{-4}x^2 : a^2$
$h^{10} : (-h)^0$	$10p^{-5} \cdot 0{,}2p^8$	$3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3}\, b^{-3}$
$3m^5 \cdot (-n)^{-1}$	$\frac{3}{2}\, u^3 : 6u^{-2}$	$f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{18}\, f^{-2}g^{-1}h^0$

234. Lihtsusta järgmised avaldised ja teisenda tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

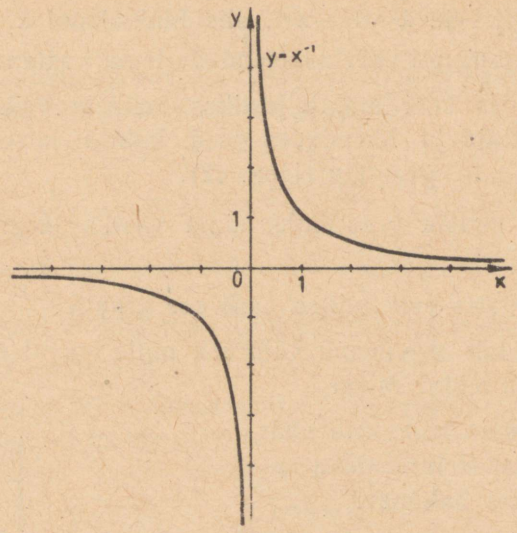
1)	2)	3)
$(N^{-2})^2$	$(\frac{1}{2}\, m^3)^{-2}$	$(0{,}1a^2x^{-1})^2$
$(a^{-1})^{-3}$	$(0{,}3h^{-2})^{-1}$	$(1{,}2H \cdot 5H)^{-2}$
$(cu^{-2})^{-2}$	$(3ax^4)^{-3}$	$(\frac{1}{2}\, x^{-1} \cdot 3x^{-2})^{-4}$

§ 49. FUNKTSIOONID $y = x^{-1}$ JA $y = x^{-2}$.

Funktsioon $y = x^{-1}$ ehk $y = \frac{1}{x}$ esitab x ja y vahelist **pöördvõrdelist sõltuvust.** Selle funktsiooni graafikuks on **hüperbool** (joon. 41).

Uurime nüüd funktsiooni $y = x^{-1}$ tema graafiku põhjal. Kõigepealt näeme, et see graafik koosneb kahest harust: üks asub teljestiku I veerandis, teine III veerandis. Et 0-ga jagada ei saa, siis kohal $x = 0$ funktsioonil väärtus puudub. Paneme tähele, et kui x väärtus läheneb nullile negatiivselt poolelt, siis funktsiooni väärtus on negatiivne ja kasvab absoluutväärtuse poolest kuitahes suureks.

Kui aga argumendi väärtus läheneb nullile positiivselt poo-



Joon. 41.

lelt, siis funktsiooni väärtus on positiivne ja kasvab kuitahes suureks.

Miș sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus on negatiivne ja ta absoluutväärtus saab kuitahes suureks?

Mis sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus kasvab positiivsena kuitahes suureks?

Graafikult ilmneb, et funktsioon $y = x^{-1}$ on kahanev. Selgita seda!

Edasi näeme, et vaadeldaval funktsioonil nullkohti pole ning et ta positiivsuspiirkonnaks on $x > 0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x < 0$.

Funktsiooni $y = x^{-2}$ graafiku joonestamiseks koostame tema väärtuste tabeli:

x	0,01	0,1	0,5	1	2	3	4	5
x^{-2}	10000	100	4	1	0,25	0,11	0,06	0,04

Et $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ja $x^2 = (-x)^2$, siis funktsiooni x^{-2} väärtus ei muutu, kui argumendi väärtus asendada tema vastandarvuga.

Konstrueerides koordinaatteljestikus nendele väärtuspaaridele vastavad punktid ja ühendades need ladusa kõveraga, saame funktsiooni $y = x^{-2}$ graafiku (joon. 42).

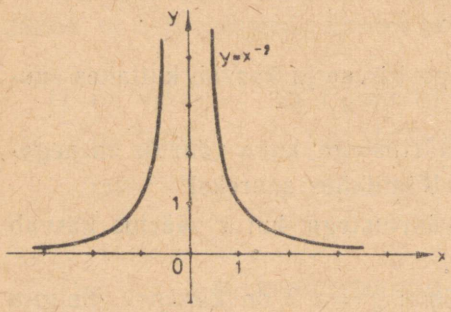
Tuginedes sellele graafikule, anna vastus järgmistele küsimustele.

a) Missugustes veerandites asub see graafik?

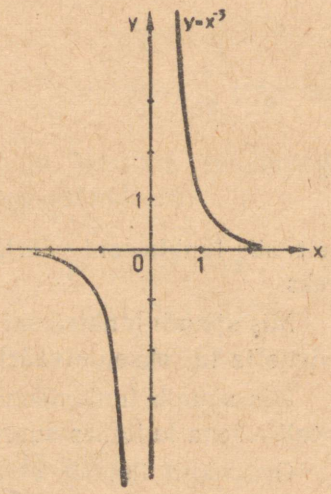
b) Kas leidub argumendi väärtusi, mille korral ei saa funktsiooni väärtust leida? Miks?

c) Missuguses argumendi väärtuste piirkonnas on funktsioon kasvav, missuguses kahanev?

d) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus läheneb nullile negatiivselt (positiivselt) poolelt?



Joon. 42.



Joon. 43.

e) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi absoluutväärtus kasvab negatiivses (positiivses) suunas?

Ülesanne.

235. Joonisel 43 on antud funktsiooni $y = x^{-3}$ graafik. Uuri seda funktsiooni graafiku põhjal!

§ 50. MURRULISTE ASTENDAJATEGA ASTMED.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv. Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a.

Laiendame nüüd astme mõistet murrulise astendajaga astme puhuks. Selleks loeme võrduse

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

kehtivaks ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv. Seega

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

iga täisarvulise m ja n korral.

Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7,$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(27)^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} =$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abil .nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

Näide.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} = x^{-\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Et juurt saab kirjutada murrulise astendajaga astmena ja murrulise astendajaga astet saab kirjutada juuremärgi abil, siis arvutuste asemel juurtega võib sooritada arvutused murrulise astendajaga astmetega ja ümberpöördult.

Kumba eelistada, kas juuremärki või murrulist astendajat, see sõltub lahendatavast probleemist. Mõnikord on otstarbekohasem esimene, mõnikord teine viis.

Ülesandeid.

236. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $9^{\frac{1}{2}}$ 2) $16^{\frac{3}{2}}$ 3) $27^{\frac{1}{3}}$ 4) $64^{\frac{2}{3}}$

$1{,}44^{\frac{1}{2}}$ $0{,}001^{\frac{5}{3}}$ $0{,}343^{\frac{4}{3}}$ $0{,}729^{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{4}{3}}$

237. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$\sqrt{5x}$ $7\sqrt[3]{c^2}$ $0{,}1\sqrt[3]{D^2}$ $\sqrt[5]{(3cu)^3}$

$0{,}7\sqrt[5]{a^2b^3}$ $\frac{3}{4}x\sqrt[4]{H^2u^4}$ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{N^4x}$ $\sqrt[5]{A^3x^5}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ $\frac{1}{5\sqrt{k}}$ $\frac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$ $\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$

238. Kirjuta järgmised avaldised juurtena:

1) $19^{\frac{1}{2}}$ 2) $7^{\frac{1}{2}}$ 3) $83^{\frac{1}{4}}$ 4) $100^{\frac{1}{5}}$

$N^{\frac{1}{6}}$ $u^{\frac{4}{3}}$ $a^{\frac{3}{5}}$ $x^{\frac{5}{2}}$

$(2h)^{\frac{4}{3}}$ $\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ $(10f)^{0,1}$ $(mn^2)^{0,3}$

239. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata.

1) $\sqrt[3]{a^{-2}}$ 2) $\sqrt[5]{x^{-3}}$ 3) $\sqrt{\frac{(a+bx)^3}{a}}$ 4) $\sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}}$

$\frac{a}{\sqrt{a+bx}}$ $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ $\frac{5}{\sqrt{2px}}$ $\frac{7}{\sqrt[3]{10mn^2}}$

$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3}$ $\sqrt{\frac{b}{a+bx}}$ $\sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}}$ $\sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}}$

240. Kirjuta järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

1) $27^{-\frac{2}{3}}$ 2) $36^{-\frac{1}{2}}$ 3) $8^{-\frac{4}{3}}$ 4) $64^{-\frac{3}{4}}$

$0{,}343^{-\frac{1}{3}}$ $0{,}01^{-\frac{1}{2}}$ $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ $0{,}0169^{-\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$3a^{-\frac{3}{4}}f^{\frac{3}{4}}$ $\left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $(5kw^3)^{-\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

241. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ 2) $d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}}$ 3) $f^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$ 4) $h_0 \cdot h^{\frac{3}{4}}$

$N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{4}}$ $\cdot u \cdot u^{-\frac{2}{3}}$ $p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^0$ $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$ $t^0 \cdot l^{-\frac{3}{2}}$ $D^{\frac{1}{8}} \cdot D^{-\frac{3}{4}}$ $c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}$

242. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1) $A : A^{\frac{1}{2}}$ 2) $c^2 : c^{\frac{1}{3}}$ 3) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}}$ 4) $a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{3}}$

$c^2 : c^{-\frac{1}{3}}$ $f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}}$ $h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}}$ $u^{\frac{2}{3}} : u^{-2}$

$N^{-1} : N^{\frac{3}{2}}$ $z^{\frac{4}{5}} : z^{-1}$ $q^0 : q^{-\frac{1}{2}}$ $l^{\frac{1}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}$

243. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata, toimeta nõutavad tehted ja anna tulemus juure kujul:

1) $\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2}$ 2) $\sqrt{c^3} : \sqrt[4]{c}$ 3) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$

$\sqrt[3]{D^2} \cdot \sqrt{D^3}$ $\sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h}$ $\sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}$

244. Kirjuta järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

1) $(x^0)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(h^2)^{\frac{3}{2}}$ 3) $(u^{-1})^{\frac{2}{3}}$ 4) $(D^{-1})^{-\frac{1}{2}}$

$(a^{\frac{2}{3}})^3$ $(N^{-1})^{\frac{2}{3}}$ $(c^{-2})^{-\frac{1}{3}}$ $(x^{-\frac{1}{3}})^6$

$N^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{3}{5}}$ $(2u^{\frac{3}{4}})^4$ $x : x^{-\frac{3}{4}}$ $H^2 : H^{\frac{2}{3}}$

KORDAMISÜLESANDEID.

245. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2$ 2) $\left(\frac{2u}{v}\right) \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3$

$\left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3$ $\left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(-\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}$

246. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$ 2) $\sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}}$ 3) $\sqrt[n]{a^{-3n}b^{2n}}$

$\sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{a^{3n+3}} : \sqrt[n]{a^{n+3}}$ $\sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}$

247. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}}+2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}}$

$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})$

2) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

$\frac{\sqrt{m^2p-m^2q}-\sqrt{n^2p-n^2q}}{\sqrt{p-q}}$

248. Vabasta järgmiste murdude nimetajad juurtest:

1) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$ $\quad\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3) $\frac{8+3\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}$ $\quad\frac{2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-5\sqrt{5}}$

249. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\quad\frac{h}{\sqrt[3]{h}}$

2) $\frac{16}{\sqrt{8}}$ $\quad\frac{a}{b\sqrt[3]{a^2}}$

3) $\frac{21}{\sqrt{7}}$ $\quad\frac{c^2}{a\sqrt{c}}$

4) $\frac{30}{\sqrt[3]{25}}$ $\quad\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$

250. Lihtsusta järgmised juured ning leia nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$ $\quad\sqrt{\frac{9}{5}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{27}{6}}$

3) $\sqrt[4]{\frac{10}{81}}$ $\quad\sqrt{4\frac{1}{2}}$

4) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{1}{9\cdot 64}}$

251. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koonda:

1) $\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{20}-5\sqrt{\frac{1}{18}}-\frac{1}{6}\sqrt{245}-\sqrt{24\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{\frac{a^5}{8}}-3a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

252. Arenda järgmiste kaksliikmete ruudud:

1) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$

$\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2$

253. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt{\frac{25}{27}}:10-\frac{\sqrt{3}}{6}$

2) $\sqrt{3-\frac{6a}{b}+\frac{3a^2}{b^2}}$

3) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}-\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+1\right)$

254. Lihtsusta avaldised:

$\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}}-\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}$, $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}$, $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[6]{a^4}}$.

255. a) Näita, et $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{18}$.

b) Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on:

1) $2+\sqrt{3}$ ja $2-\sqrt{3}$ 2) $-3+\sqrt{5}$ ja $-3-\sqrt{5}$

3) $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ ja $\frac{5-\sqrt{7}}{6}$ 4) $\frac{-9+\sqrt{11}}{10}$ ja $\frac{-9-\sqrt{11}}{10}$

256. Teisenda järgmised avaldised sellisteks, et nende nimetajais poleks juurt:

$\frac{1}{n\sqrt{3}-1}-\frac{1}{n\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

257. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) $(-5)^3-(-2)^0+(-1)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{5}{6}\right)^0$

258. Vabasta järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsusta tulemus:

1) $(a^5 - a^{-3}) : (a - a^{-3})$ 2) $(a^{-4} - a^{-6}) : (a^{-2} + a^{-3})$.

259. Näita, et $a = b^{\pm 1}$, kui $a + a^{-1} = b + b^{-1}$.

260. Näita, et

$$(a-b)^{-2} - (a+b)^{-2} = 4ab(a^2 - b^2)^{-2}.$$

261. Arenda avaldis $(a^x - a^{-x})^2$.

262. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

263. Kirjuta järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juurijaid:

1) $ax^{\frac{1}{2}}$ 2) $(ab)^{\frac{2}{3}}$ 3) $(x-y)^{1\frac{1}{2}}$

$a^{-\frac{1}{3}}$ $a(2n)^{-\frac{3}{4}}$ $(u + v^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

264. Arenda korrutis $(x^{\frac{1}{2}} - 5)(x^{\frac{1}{2}} + 4)$.

265. Arenda avaldis $\left(a^x - a^{\frac{1}{x}}\right)^2$.

266. Taanda murd $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

267. Näita, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

268. Lihtsusta avaldised:

$$\sqrt{10} : 0{,}81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25} \cdot (0{,}04)^{-\frac{1}{6}}, \quad 0{,}16^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{5}.$$

269. Leia avaldise $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$ väärtus.

270. Lihtsusta järgmised korrutised ja jagatised:

1) $(\sqrt[3]{3x^2})^2 \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{81x^5}}$

2) $\sqrt{\frac{2x}{9}} : \left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{6x}$

3) $\frac{3}{7}a \sqrt[3]{2x^2} : (6\sqrt{a})$

4) $5c^2 : \left(2{,}5c \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\right)$

5) $\sqrt[3]{\frac{s}{t}} (5s)^{\frac{1}{3}}$

6) $\left(\frac{1{,}5}{2}a\right)^3 : \left(\frac{0.375}{a}\right)^3$

271. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

1) $6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) $8{,}5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$

3) $\sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$

272. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $144^3 : 72^3$

$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$

$9^{-\frac{1}{2}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0{,}25^{-1\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$

$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$

$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^3$

273. Kirjuta avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}}.$$

274. Arenda binoomi ruut:

$$\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

275. Lihtsusta avaldis:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}.$$

276. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $x+\sqrt{16+x^2}=8$

2) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+1}=-2$

3) $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

4) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$

5) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}-2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{7}{3}$

277. Alljärgnevatest võrranditest mõnel lahend puudub. Tee kindlaks, missugusel.

1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-1}=1$

2) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2$

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x+6}$

4) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+6}+7=0$

5) $\sqrt{5x-9}-\sqrt{5x-16}=1$

6) $\sqrt{10x-1}+\sqrt{10x+6}+7=0$

7) $a\sqrt{x+1}=b\sqrt{x-1}$

8) $\sqrt{x+b^2}=b+\sqrt{x-2b}$

9) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$

10) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x-3a}=\sqrt{x+6a}$

278. Arvuta.

1) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 3) $\left(39\frac{1}{16}\right)^{-0{,}25}$

4) $\left[9^{-\frac{1}{4}}+\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[9^{-\frac{1}{4}}-\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$

5) $\left[\left(3+5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

6) $\left[\left(5+11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(5-11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

279. Näita, et

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

4) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}$.

280. Lihtsusta, juuremärki kasutamata:

1) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}:\left[\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a}-(ab)^{\frac{1}{2}}\right]$, $a>0, b>0$.

2) $\left\{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\left[\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{4}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

3) $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b}$, $a>0, b>0$.

4) $\left[a^{\frac{1}{2}}+(ab^2+c)^{\frac{1}{2}}\right]:\left[b\cdot a^{\frac{1}{2}}+b(ab^2+c)^{\frac{1}{2}}\right]$

5) $\left[\dfrac{3}{(1+a)^{\frac{1}{2}}}+(1-a)^{\frac{1}{2}}\right]:\left[\dfrac{3}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}+1\right]$

6) $\dfrac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{(x+a)^{\frac{1}{2}}}$, kus $x>a$.

7) $\dfrac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)^{\frac{1}{2}}}$, kus $x>3$.

V. $\dfrac{6}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$.

281. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $(2x)^{\frac{1}{2}}=8$

2) $(5x)^{\frac{1}{3}}=x$

3) $x^{\frac{2}{3}}=9$

4) $(x+7)^{\frac{1}{2}}=x$

5) $(x-1)^{\frac{1}{2}}-3=0$

6) $x-3+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}=0$

7) $x-11x^{\frac{1}{2}}+24=0$

8) $x+1=(2x+4)^{\frac{1}{2}}$

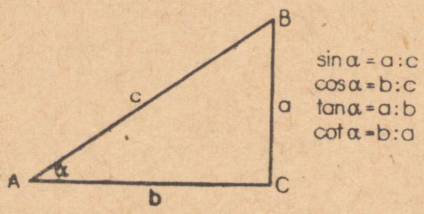
9) $2x^{\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{2}}=8$

10) $2(x-2)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

V. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

§ 51. TERAVNURGA ÜHE TRIGONOMEETRILISE FUNKTSIOONI JÄRGI SAMA NURGA TEISTE FUNKTSIOONIDE LEIDMINE.

Teravnurga iga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi saab ehitada selle nurga, kui ehitada täisnurkne kolmnurk, mille vastavate külgede suhe on võrdne antud funktsiooni väärtusega. Saadud kolmnurgast võib nüüd leida vaadeldava nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtused (joon. 44).



Joon. 44.

Lahendame näitena ülesande:

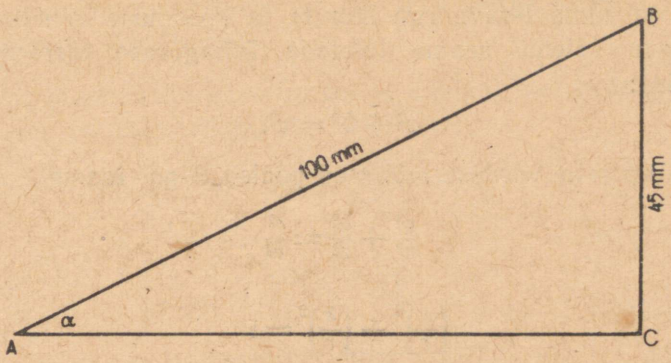
$\sin \alpha = 0{,}45$. Leia $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.

Lahendus. $\sin \alpha = 0{,}45 = 45 : 100$.

Ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 45 mm ja hüpotenuus 100 mm (joon. 45).

Mõõtmisel leiame, et teine kaatet on 89 mm (olgu märgitud, et teise kaateti suuruse võib leida ka arvutamise teel, rakendades Pütagorase teoreemi). Edasi saame, et

$$\cos \alpha = 89 : 100 = 0{,}89;$$
$$\tan \alpha = 45 : 89 = 0{,}51;$$
$$\cot \alpha = 89 : 45 = 1{,}98.$$



Joon. 45.

Sellest näitest näeme, et kui teravnurga trigonomeetrilistest funktsioonidest üks on antud, siis kõigi teiste funktsioonide väärtusi saab selle antud väärtuse järgi leida.

Kui on kasutada nurgafunktsioonide tabelid, siis saab antud nurgafunktsiooni väärtuse järgi leida sama nurga ülejäänud kolm funktsiooni ka tabelite abil, leides esmalt antud funktsiooni väärtuse järgi nurga suuruse.

Ülesandeid.

282. $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Leia graafiliselt $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.

283. $\cos\alpha = 0{,}75$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.

284. $\tan\alpha = 1{,}5$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$.

285. $\cot\alpha = 2$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

286. $\sin\alpha = 0{,}53$. Leia tabelite abil $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.

287. $\cos\alpha = 0{,}07$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.

288. $\tan\alpha = 0{,}344$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$.

289. $\cot\alpha = 11{,}4$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

§ 52. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VAHELISED SEOSED.

1. Nurgafunktsiooni antud väärtuse järgi saab sama nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtusi leida ka arvutamise teel, kasutades valemeid, mis väljendavad nurgafunktsioonidevahelisi seoseid.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahelist seost väljendava valemi saame tuletada Pütagorase teoreemi abil (joon. 44):

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled c^2-ga, saame

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Siit

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1,$$

mida kirjutatakse tavaliselt nõnda:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub 1-ga.

See seos võimaldab $\sin \alpha$ väljendada $\cos \alpha$ kaudu ja ümberpöördult:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

2. Tuletame seose ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse ja tangensi vahel.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

ja

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

seega

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

millest

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

3. Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi vahelise seose tuletamiseks paneme tähele, et

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot \alpha = \frac{b}{a},$$

seega

$$\boxed{\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1}$$

Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi korrutis võrdub 1-ga.

Võrdusest $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ saame

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ja

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Seega,

nurga kootangens ja tangens on teineteise pöördväärtused.

Seoseid

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide vahelisteks **põhiseosteks.** Need põhiseosed võimaldavad nurga ühe funktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolme funktsiooni.

Seda selgitavad järgmised näited.

N ä i d e 1. On teada, et $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Arvuta

1) $\cos \alpha$; 2) $\tan \alpha$; 3) $\cot \alpha$.

Lahendus. 1) Asendades võrduses

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$\sin\alpha$ antud väärtusega, saame

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

2) Kasutades võrdust

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ning asendades seal $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ nende väärtustega, saame

$$\tan\alpha = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12}.$$

3) Et nurga kootangens on sama nurga tangensi pöördväärtus, siis

$$\cot\alpha = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Näide 2. Avalda $\tan\alpha$ kaudu 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$.

Lahendus. 1) Jagades võrduse

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mõlemad pooled $\sin^2\alpha$-ga, saame

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ehk

$$1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

millest

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

Siit saame

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

2) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

Sellest

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.$$

Arvestades, et $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$,

saame

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Näide 3. Avalda $\cot\alpha$ kaudu 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$.

Lahendus. 1) $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\cot\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}$;

seega

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

2) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

Näide 4. Avalda murd

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$\tan\alpha$ kaudu.

Lahendus. Jagades antud murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos^2\alpha$, saame

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

Ülesandeid.

290. Avalda murd $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ $\tan\alpha$ kaudu.

291. Väljenda vahe $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ funktsiooni $\sin\alpha$ kaudu.

292. Avalda summa $\tan\alpha + \cot\alpha$ funktsioonide $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

293. Väljenda $\tan\alpha$ kaudu avaldis

$$\frac{1}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}.$$

Näide 5. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha = 1\frac{1}{2}$.

Lahendus. Jagades antud avaldise lugeja ja nimetaja arvuga $\cos\alpha$ ning asendades seejärel saadud avaldises $\tan\alpha$ antud väärtusega $1\frac{1}{2}$, saame:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{1\frac{1}{2}+1}{1\frac{1}{2}-1}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=5.$$

Ülesandeid.

294. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha=\frac{5}{4}$.

295. Arvuta avaldise

$$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha=2$.

296. On teada, et $\tan\alpha+\cot\alpha=10$. Arvuta avaldise $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$ väärtus.

297. Arvuta $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ väärtus, kui on teada, et $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}2$.

Näide 6. Lihtsusta avaldist

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

Eespool saadud valemid nurga ühe funktsiooni avaldamiseks sama nurga teise funktsiooni kaudu on kokkuvõtlikult esitatud järgmises tabelis.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha=$	—	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha=$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha=$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	—

Need valemid hõlbustavad arvutusi ning kergendavad avaldiste lihtsustamist ja samasuste tõestamist.

Ülesandeid.

298. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

2) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cot^2\alpha$

4) $\cot\alpha\cdot\sin\alpha$

5) $\frac{1}{\cos\alpha}:\tan\alpha$

6) $1-\sin\alpha\cdot\cot\alpha\cdot\cos\alpha$

7) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cot\alpha}$

8) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha}{1:\cos\alpha}$

9) $\sin^2 52^\circ+\sin^2 38^\circ$

10) $\tan 41^\circ\cdot\tan 45^\circ\cdot\tan 49^\circ$

11) $\frac{\cos 31^\circ}{\cos 59^\circ}\cdot\frac{\sin 31^\circ}{\sin 59^\circ}$

12) $\frac{\cos 23^\circ}{\sin 67^\circ}:\frac{\sin 23^\circ}{\cos 67^\circ}$

299. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin\alpha \cot\alpha + \cos\alpha$
2) $1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$
4) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
5) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$
6) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha$
7) $\cot\alpha \cdot \sin\alpha$
8) $\sin\alpha : \tan\alpha$
9) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$
10) $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$
11) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$
12) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$

Näide 7. Tõesta, et

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cot^2\alpha} = 1.$$

Lahendus. Tõestamiseks teisendame antud võrduse vasakut poolt.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cot^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1.$$

Näide 8. Tõesta samasus

$$\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \sin^2\alpha.$$

Lahendus.

$$\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha \cdot \sin^2\alpha.$$

Märkus. Mõnikord osutub samasuse tõestamisel otstarbekaks teisendada võrduse mõlemat poolt.

Ülesandeid.

300. Tõesta järgmised samasused:

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

2) $\frac{4-5\cos\alpha}{3-5\sin\alpha}+\frac{3+5\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}=0$

3) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$

4) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$

5) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

7) $\frac{1}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1}{1+\cot^2\alpha}=1$

8) $\cot\alpha+\cos\alpha=\frac{\cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cot\alpha-\cos\alpha}$

9) $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha=\cos^2\alpha$

10) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

11) $\sin^2\alpha\cdot(1+\cot^2\alpha)=1$

12) $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha$

KORDAMISÜLESANDEID.

301. Esita vahe $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

a) kahe nurga siinuste vahena;
b) kahe nurga koosinuste vahena.

302. Esita summa $1+\sqrt{3}$.

a) kahe nurga tangensite summana;
b) kahe nurga kootangensite summana.

303. Esita summa $1+\frac{1}{2}$

a) kahe nurga siinuste summana;
b) kahe nurga koosinuste summana.

304. Arvuta peast

a) $\tan 57^\circ\cdot\tan 33^\circ$;

b) $\frac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}$.

305. Arvuta: 1) $\sin 45^\circ-\cos 60^\circ$;
2) $\sin 60^\circ-\cos 45^\circ$;
3) $\cos 30^\circ-\cos 45^\circ$;
4) $\tan 45^\circ-\cot 45^\circ$;
5) $\tan 45^\circ-\cos 0^\circ$;
6) $\sin 0^\circ-\tan 0^\circ$;
7) $\sin 30^\circ+\tan 45^\circ$;
8) $\cos 60^\circ-\cot 45^\circ$;
9) $\cos 0^\circ-\sin 0^\circ$;
10) $\sin 90^\circ-\cos 0^\circ$.

306. Arvuta 60°-se nurga ja 30°-se nurga siinuste suhe.

307. Leia 45°-se nurga ja 60°-se nurga koosinuste suhe.

308. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin(75°-\alpha)}$$

väärtus, teades, et $\alpha = 45°$.

309. Mast on toestatud vaieritega, mille pikkused on 10 m ja mis maapinnaga moodustavad nurga 60°. Kui kõrgel maapinnast on vaierid kinnitatud masti külge?

310. Jõud 10 kg on lahutatud kaheks komponentjõuks, mille suunad on teineteisega risti, kusjuures ühe komponendi suund moodustab antud jõu suunaga nurga 30°. Arvuta komponentide suurused.

311. Päike on silmapiirilt 30° kõrgusel. Kase varju pikkus on sel ajal 50 m. Kui kõrge on kask?

312. Maasse püstilöödud teiba kõrgus maapinnast on 3 m ja ta varju pikkus 5 m. Leia päikese kõrgusnurk.

313. Lihtsusta avaldised:

1) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3) $\sin\alpha\cos\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha)$

314. Tõesta samasused:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

2) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

§ 53. NEGATIIVNE NURK.

Auto rooliratast saab pöörata kahes teineteisele vastupidises suunas. Kui rooliratast pööratakse kellaosuti liikumise suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb asendisse OB (joon. 46), siis auto esirattad pöörduvad paremale. Rooliratta pööramisel kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb asendisse OB_1, pöörduvad esirattad vasakule. Loeme ühe pööramise suuna positiivseks, teise negatiivseks.

Positiivseks pöörlemise suunaks loetakse seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunale.

Vankri vasakpoolsete rataste mutrid keeratakse kinni, kui pöörata neid positiivses suunas, parempoolsete rataste mutrite kinnikeeramiseks tuleb neid pöörata negatiivses suunas. Kellaosutid pöörlevad negatiivses suunas.

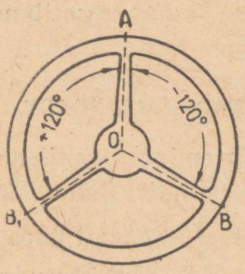
Igapäevases kõnekeeles nimetatakse pöörlemist positiivses suunas pöörlemiseks v a s t u p ä e v a ning pöörlemist negatiivses suunas pöörlemiseks p ä r i p ä e v a.

Kui on teada, et auto rooliratast pöörati nurga võrra 120°, siis pole veel teada, kas kodar OA (joon. 46) läks asendisse OB või asendisse OB_1, s. t. pole teada, kas sellel pöörlemisel tekkis nurk AOB või nurk AOB_1.

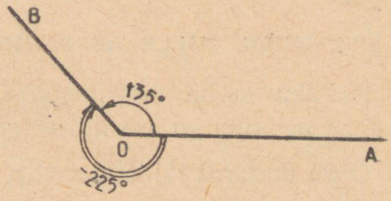
Pöörlemisel tekkiv nurk on määratud siis, kui on antud pöörde suurus ja pöörlemise suund.

Pöörlemisel tekkiva nurga loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.

Negatiivse nurga mõõtarvu kirjutame märgiga miinus. Näiteks, kui kodar OA (joon. 46) on jõudnud negatiivses suunas pööreldes asendisse OB, siis on tekkinud nurk $-120°$. Kella minutiosuti pöördub veerand tunniga $-90°$, poole tunniga $-180°$, kolmveerand tunniga $-270°$.



Joon. 46.



Joon. 47.

Vaatleme nurka, mis tekib kiire pöörlemisel tasapinnal oma otspunkti O ümber (joon. 47).

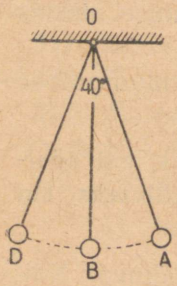
Kui kiir on pöörlemisel jõudnud asendist OA asendisse OB, siis on tekkinud nurk AOB. *Nurga haara OA, millest kiir alustas*

pöörlemist, nimetatakse **alghaaraks** *ja haara OB, millel kiire pöörlemine lõppes, nimetatakse* **lõpphaaraks.** Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutatakse esikohale täht, mis asub alghaara juures. Joonisel 47 kujutatud nurka *AOB* võib mõista kahel viisil: kas positiivse nurgana 135° või negatiivse nurgana —225°. Nagu näeme on nende nurkade absoluutväärtuste summa 360°. Kahesuse vältimiseks on lepitud kokku, et sümbolid

$$\measuredangle AOB,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

tähendavad positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

Ülesandeid.



Joon. 48.

315. Millise nurga teeb pendel (joon. 48) võnkumisel

a) asendist *OD* asendisse *OA*?

b) asendist *OA* asendisse *OD*?

316. Missuguse nurga võrra pöördub kella minutiosuti 5 minutiga? 20 minutiga? 45 minutiga?

317. Missuguse nurga võrra peab pöörama kella minutiosutit, et lükata kella tagasi 10 minuti võrra? 15 minuti võrra? 30 minuti võrra?

318. Kummalt pooluselt vaadatuna on Maa pöörlemise suund positiivne?

319. Kummal juhul, kas õmblemisel edaspidi või õmblemisel tagaspidi, on õmblusmasina hooratta pöörlemise suund negatiivne, kui masinale vaadata hoorattapoolsest otsast?

§ 54. NURK, MILLE ABSOLUUTVÄÄRTUS ÜLETAB TÄISPÖÖRDE.

Paistku meile diiselmootori hooratta pöörlemine positiivses suunas ja toimugu see kiirusega 1 täispööre sekundis (joon. 49).

Olgu kodarat tähistava kiire lähteasend *OA*, $\frac{1}{6}$ sekundi pärast on kiir pöördunud 60° võrra, jõudes asendisse *OB*. Kui hooratas pöörleb positiivses suunas edasi ja kiir *OA* läbib järjekorras asendid

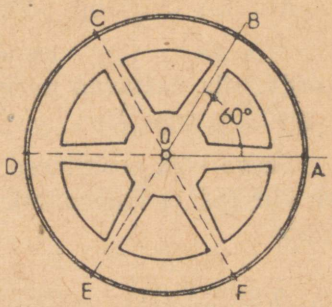
$$OC,\ OD,\ OE,\ OF,\ OA,$$

siis öeldakse, et hooratas on pöördunud nurga võrra, mille suurus on vastavalt

120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

Hooratta edasisel samasuunalisel pöörlemisel jõuab kiir OA teist korda asendisse OB. Nüüd on nurk, mille võrra hooratas on pöördunud, suurem kui 360°. Öeldakse, et see nurk on

$$360° + 60° \text{ ehk } 420°.$$



Joon. 49.

Kui hooratas pöörleb samas suunas edasi, läbib kiir OA teist korda oma lähteasendi ning jõuab kolmandat korda asendisse OB. Sel korral öeldakse, et tekkinud nurga suurus on

$$60° + 2 \cdot 360° \text{ ehk } 780°.$$

Hooratta edasisel pöörlemisel jõuab kiir OA asendisse OB

$$3, 4, 5, \ldots, k$$

korda. Tekkinud nurkade suurused on siis vastavalt

$$60° + 3 \cdot 360°, \quad 60° + 4 \cdot 360°, \quad 60° + 5 \cdot 360°,$$
$$\ldots, \quad 60° + k \cdot 360°,$$

kus k tähendab positiivset täisarvu.

Nurga mõistet sel viisil laiendades, s. o. kasutades nurka pöörde mõõduna, võib kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest.

Kui hooratas pöörleb aga näiteks negatiivses suunas, nii et kiir OA läbib järjekorras asendid

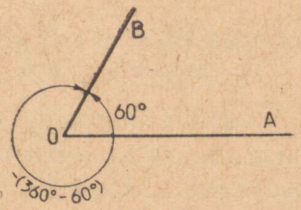
$$OF, OE, OD, OC, OB, OA, OF, OE,$$

siis tekkinud nurga suurus on vastavalt:

$$-60°, -120°, -180°, -240°, -300°, -360°, -420°, -480°.$$

Kui kiir OA (joon. 50) pöörleb negatiivses suunas ja jõuab esimest korda asendisse OB, siis tekib negatiivne nurk, mille absoluutväärtus on $360° - 60°$; seega selle nurga suurus on

$$-(360° - 60°) = 60° - 360°.$$



Joon. 50.

Kui kiir OA läbib pöörlemisel samas suunas asendi OB

$$2, 3, 4, \ldots, k$$

korda, siis vastavad nurgad on

$$60° - 2 \cdot 360°,\ 60° - 3 \cdot 360°,\ 60° - 4 \cdot 360°,\ \ldots,\ 60° - k \cdot 360°.$$

Seega kõik positiivsed ja negatiivsed nurgad, mille alghaaraks on kiir OA ja lõpphaaraks kiir OB, on väljendatavad ühise valemiga

$$60° + k \cdot 360°,$$

kus k on mistahes täisarv.

Üldiselt,

iga nurga x saab avaldada kujul

$$x = \alpha + k \cdot 360°,$$

kus k on täisarv ja α on 360°-st väiksem positiivne nurk.

Näiteid.

1. $5764° = 4° + 16 \cdot 360°$
2. $6038° = 278° + 16 \cdot 360°$ ehk
   $6038° = -82° + 17 \cdot 360°$
3. $-1000° = 80° - 3 \cdot 360°$.

Ülesandeid.

320. Lihvimisketta äärel asuv punkt liigub kiirusega $900 \frac{m}{s}$. Ketta läbimõõt on 4 dm. Kui suure nurga võrra pöördub ketta raadius sekundis?

321. Elektrimootori rihmaratas teeb 900 pööret minutis. Mitme kraadi võrra pöördub rihmaratta raadius sekundis?

322. Väljenda järgmised nurgad kujul

$$\alpha + n \cdot 360°,$$

kus $0 < \alpha < 360°$.

1) 1117°; 2) 1940°; 3) 2720°; 4) 1030°.

323. Väljenda järgmised nurgad kujul

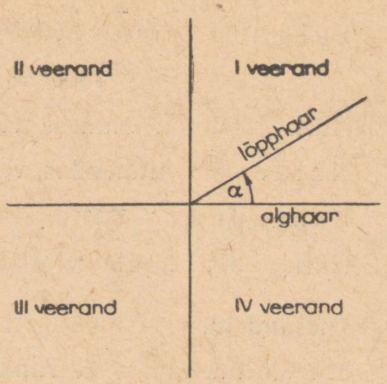
$$\alpha + n \cdot 360°,$$

kus $-180 < \alpha < 180°$ ehk $|\alpha| < 180°$.

1) 1420°; 2) 1770°; 3) 2020°; 4) −2400°.

Jaotame tasapinna koordinaattelgedega neljaks **veerandiks**, mida nimetatakse positiivse pöörlemise suuna järjekorras e s i m e s e k s, t e i s e k s, k o l m a n d a k s ja n e l j a n d a k s veerandiks.

Paigutame mingi nurga teljestikku nõnda, et ta tipp asub nullpunktis ja alghaar asub abstsisside positiivsel poolteljel. Nurga lõpphaar asub siis sõltuvalt nurga suurusest kas mõnel poolteljel või tasapinna esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis (joon. 51).



Joon. 51.

Nurkasid nimetatakse esimese, teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadeks vastavalt sellele, mitmendas veerandis asetseb nurga lõpphaar, sõltumata sellest, mis suunas pööreldes ta sellesse asendisse on jõudnud.

Seega, positiivsed teravnurgad on esimese veerandi nurgad; positiivsed nürinurgad on teise veerandi nurgad; nurk, mis on suurem kui 180° ja väiksem kui 270°, on kolmanda veerandi nurk; nurk, mis on suurem kui 270° ja väiksem kui 360°, on neljanda veerandi nurk.

Negatiivne teravnurk on neljanda veerandi nurk, negatiivne nürinurk on kolmanda veerandi nurk jne.

On ilmne, et kui α on esimese, teise, kolmanda või neljanda veerandi nurk, siis on seda ka nurk

$$\alpha + n \cdot 360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Veerandite kuuluvateks ei loeta nurki, mis on täisnurga kordsed:

$$0°,\ \pm 90°,\ \pm 180°,\ \pm 270°,\ \ldots,$$

sest nende lõpphaarad asetsevad telgedel, mis jaotavad tasapinna veeranditeks.

Et leida, mitmendas veerandis antud nurk lõpeb, selleks tuleb ta avaldada kujul

$$\alpha + n \cdot 360°, \text{ kus } |\alpha| < 360°.$$

Antud nurk lõpeb samas veerandis, kus nurk α.

N ä i d e 1. Mitmendas veerandis lõpeb nurk 1500°?

Lahendus. $1500 : 360 = 4$, jääk 60.

$$1500° = 60° + 4 \cdot 360°.$$

Nurk 1500° on esimese veerandi nurk.

Näide 2. Mitmendas veerandis lõpeb nurk —800°?

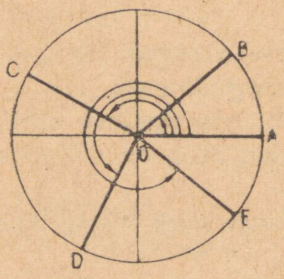
Lahendus. $-800° = -80° - 2 \cdot 360°$.

Nurk —800° lõpeb neljandas veerandis.

Ülesandeid.

324. Mitmendasse veerandisse kuuluvad nurgad joonisel 52:

1) $\angle AOB$;
2) $\angle AOC$;
3) $\angle AOD$;
4) $\angle AOE$?



Joon. 52.

325. Mitmendasse veerandisse kuuluvad järgmised nurgad:

1)	405°	2)	200°
	600°		300°
	840°		700°
	250°		950°
3)	—30°	4)	—370°
	—100°		—500°
	—170°		—600°
	—400°		—800°

326. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurgad

1) 300°; 2) —150°; 3) —135°; 4) 840°.

327. Ehita malli ja joonlaua abil nurgad

1) 1000°; 2) —1000°; 3) 500°; 4) —500°.

§ 55. NURGA MÕÕDUÜHIKUD.

1. Kraad.

Kõige rohkem levinud nurga mõõduühik on nurgakraad.

Nurgakraad on $\frac{1}{90}$ täisnurgast ehk $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Nurgakraadi sümboliks on 1°.

$$1^\circ = 60',$$
$$1' = 60''.$$

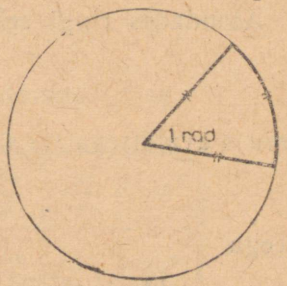
Maamõõtjad kasutavad praktilistel nurga mõõtmistel peaaegu eranditult kraadimõõtu.

2. Radiaan.

Radiaan on kesknurk, millele vastava kaare pikkus on võrdne raadiuse pikkusega (joon. 53).

Sellest definitsioonist järeldub, et täispööre on 2π radiaani, s. o.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radiaani.}$$



Joon. 53.

Siit

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani}$$

ehk

$$1^\circ = 0{,}0175 \text{ radiaani.}$$

Et

$$2\pi \text{ radiaani} = 360^\circ,$$

siis

$$1 \text{ radiaan} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ kraadi}$$

ehk

$$1 \text{ radiaan} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} = 180^\circ \cdot 0{,}3185 = 57{,}2958^\circ$$

ehk

$$\mathbf{1 \text{ radiaan} = 57^\circ 17' 45''.}$$

Üldiselt, kui mingi nurga suurus kraadimõõdus on n ja radiaanmõõdus x, siis

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{n}{360} \text{ ehk } \frac{x}{\pi} = \frac{n}{180},$$

millest

$$x = \frac{\pi n}{180}$$

ja

$$n = \frac{180x}{\pi}.$$

Kraadimõõdus antud nurga suuruse ümberarvutamiseks radiaanideks ja ümberpöördult kasutatakse sellekohaseid tabeleid. (V. M. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid, lk. 59—61).

Asendades n-kraadise kaare pikkuse arvutamisel valemis

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot n$$

arvu n avaldisega $\frac{180x}{\pi}$, saame

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{180x}{\pi} = rx,$$

s. t.

kesknurgale vastava kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja kesknurga radiaanmõõdu korrutisega.

Asendades ringi sektori pindala valemis

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

arvu s avaldisega rx, saame

$$S = \frac{r^2 x}{2}.$$

Seega,

sektori pindala võrdub tema nurga radiaanmõõdu ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

Märkus. Nimetuse radiaan lühendiks on rad, kuid see nimetus jäetakse tavaliselt kirjutamata.

Nurga mõõtarv radiaanmõõdus antakse sageli arvu π abil. Näiteks selle asemel, et ütelda «nurk, mille suurus on 1,2 radiaani» või «... $\frac{\pi}{2}$ radiaani», öeldakse «nurk 1,2» või «nurk $\frac{\pi}{2}$».

Näiteid.

1. Mitu radiaani on 40°?

Lahendus. $x = \frac{\pi \cdot 40}{180} = \frac{2\pi}{9} \approx 0{,}6981.$

Vastus. 40° on $\frac{2\pi}{9}$ ehk 0,6981 radiaani.

2. Avalda võrdkülgse kolmnurga nurga suurus radiaanides.

Lahendus. $x = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3}.$

Vastus. Võrdkülgse kolmnurga nurk on $\frac{\pi}{3}$ radiaani.

3. Avalda 1,5 rad kraadimõõdus.

Lahendus. $n = \frac{180 \cdot 1{,}5}{\pi} = \frac{270}{\pi} = 270 \cdot \frac{1}{\pi} = 270 \cdot 0{,}3185 =$
$= 89{,}13^\circ = 89^\circ 7' 48''$.

Vastus. 1,5 rad on $89^\circ 7' 48''$.

4. Avalda kraadimõõdus järgmised radiaanmõõdus antud nurgad:

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi.$$

Anna vastus tabeli kujul.

Lahendus. $n = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{180}{4} = 45$ (kraadi), jne.

$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

Ülesandeid.

328. Avalda radiaanmõõdus:
1) 50°; 2) 32,56°; 3) 114°36′.

329. Avalda 1 radiaan
1) minutites; 2) sekundites.

330. Avalda kraadimõõdus:
1) 2 rad; 2) 3 rad; 3) 1,7 rad; 4) 2,15 rad.

331. Avalda radiaanmõõdus alljärgnevad kraadimõõdus antud nurgad:

30°, 60°, 120°, 150°, 210°, 240°.

Anna vastus tabeli kujul. Radiaanmõõdud kirjuta π abil.

332. Millega võrdub iga alljärgneva funktsiooni väärtus:

1)	2)	3)	4)
$\sin 0$	$\tan \frac{\pi}{6}$	$\tan \frac{\pi}{4}$	$\tan \frac{\pi}{3}$
$\cos 0$	$\cot \frac{\pi}{6}$	$\cot \frac{\pi}{4}$	$\cot \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{2}$
$\cos \frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{2}$

333. Ülivõimsa elektrimootori ajamiratas teeb 12 000 pööret minutis. Väljenda selle ratta nurkkiirus ühikutes $\frac{\text{rad}}{\text{—}}$.

334. Lihvimisketta nurkkiirus on 4500 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb lihvimisketas minutis?

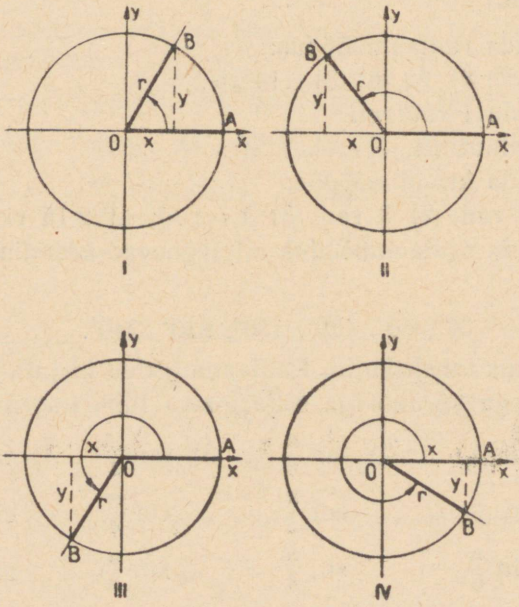
335. Elektrigeneraatori ankru nurkkiirus on 50 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb ankur minutis?

§ 56. MISTAHES SUURUSEGA NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseks mistahes nurga puhul toimime järgmiselt.

Olgu antud mistahes positiivne kesknurk $AOB = \alpha$, mis ei ole täisnurga kordne. Selle nurga lõpphaar võib asetseda kas esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis.

Joonestame nurga AOB kõigil neljal juhul, võttes alghaaraks abstsisside positiivse pooltelje (joon. 54, I, II, III, IV).



Joon 54.

Valime nurga AOB lõpphaaral mingi punkti B. Tähistame selle punkti koordinaate tähtedega x ja y ning lõiku OB tähega r, kusjuures $r > 0$.

Lõpphaara pöörlemisel joonestab punkt B ringjoone, mille keskpunktiks on nurga tipp O ja raadius on r. Nimetame seda ringjoont trigonomeetriliseks ringjooneks. Olgu nurga α alghaaral asetsev raadius OA. Nüüd võime nurka vaadelda trigonomeetrilise ringjoone raadiuste OA ja OB vahelise kesknurgana.

Täisnurkse kolmnurga abil antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhtumil I, et

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}; \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

Ülejäänud juhtumitel defineerime trigonomeetrilised funktsioonid nendesamade võrdustega.

Nende mõistete abil saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

kesknurga siinus võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga koosinus võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga tangens võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja abstsissi suhtega, kui abstsiss ei ole null;

kesknurga kootangens võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja ordinaadi suhtega, kui ordinaat ei ole null.

§ 57. PÕHISEOSTE KEHTIVUS MISTAHES NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PUHUL.

Kui trigonomeetrilise ringjoone mistahes punktiks on punkt $B(x; y)$, siis trigonomeetrilise ringjoone võrrand on $x^2 + y^2 = r^2$ (vt. § 5, c).

Siit

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=1.$$

Et $\frac{y}{r}=\sin\alpha$ ja $\frac{x}{r}=\cos\alpha$, kus α on mistahes kesknurk, siis kehtib iga kesknurga puhul seos

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Et

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha,$$

siis

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha}$$

nagu on teravnurga korralgi.

Mistahes nurga α tangensi ja kootangensi definitsiooni järgi

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}.$$

Korrutades viimaste võrduste vastavad pooled, saame

$$\boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1}$$

Seega kõik kolm põhiseost jäävad kehtima mistahes nurga puhul, välja arvatud see juhtum, mil nurk α on täisnurga kordne.

Ilmselt jäävad siis kehtima mistahes nurga puhul ka kõik need seosed, mis järelduvad põhiseostest (vt. tabel § 52).

Ülesandeid.

336. Arvuta peast:

1) $\sin^2 500^\circ+\cos^2 500^\circ$
2) $\sin^2 400^\circ+\sin 300^\circ+\cos^2 400^\circ$
3) $\tan 700^\circ\cdot\cot 700^\circ$
4) $\tan 850^\circ\cdot\cot 850^\circ-\cos 60^\circ$.
5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1$
6) $2-\sin^2 210^\circ-\cos^2 210^\circ$

Nurga kootangens on tangensi pöördväärtus:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Nurga siinuse pöördväärtust nimetatakse **koosekansiks** *ja tähistatakse sümboliga* cosec α.

Seega

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Nurga koosinuse pöördväärtust nimetatakse **seekansiks** *ja tähistatakse sümboliga sec α.*

Seega

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

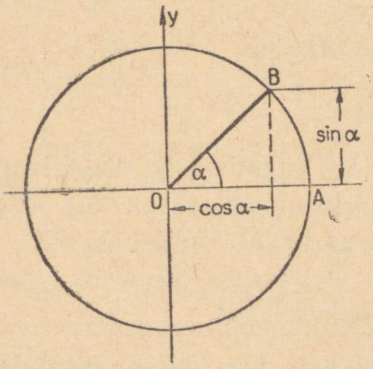
Õppides tundma nurga siinust, koosinust ja tangensit, ei ole vajadust eraldi uurida nende pöördväärtusi, seepärast me edaspidi sellest loobume.

§ 58. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSED LÕIKUDE PIKKUSTENA.

Trigonomeetrilist ringi, mille raadius on võrdne ühe pikkusühikuga, nimetatakse ü h i k r i n g i k s. Jooniselt 55 näeme, et

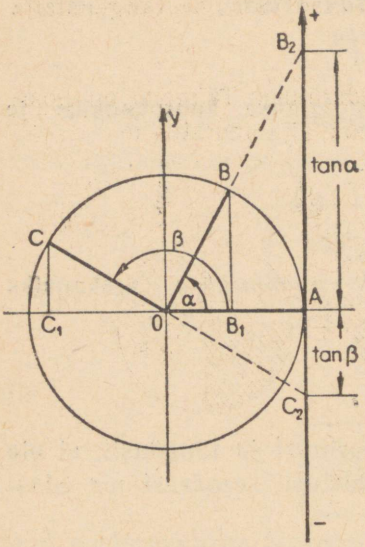
ühikringis nurga siinus võrdub lõpphaara ja ringjoone lõikepunkti ordinaadiga ja koosinus selle punkti abstsissiga.

Sõltuvalt sellest, missuguse märgiga on nimetatud punkti abstsiss ja ordinaat, on nurga vastav trigonomeetriline funktsioon kas positiivne või negatiivne (kui ta nullist erineb). Nii on nurga siinus I ja II veerandis positiivne, III ja IV veerandis negatiivne; koosinus I ja IV veerandis positiivne, II ja III veerandis aga negatiivne.



Joon. 55.

Et saada lõiku, mille mõõtarv võrdub nurga tangensiga, selleks kasutame t a n g e n s t e l g e, s. o. *ühikringi puutujat, mis on risti*



Joon. 56.

nurga alghaaraga punktis A (joon. 56). Tangenstelje positiivseks suunaks loeme y-telje positiivse suuna.

Näitame nüüd, et nurga haarade vaheline tangenstelje lõik kujutabki nii suuruselt kui märgilt nurga tangensit.

Vaatleme esmalt esimese veerandi nurka α (joon. 56). Kolmnurgast AOB_2 näeme, et

$$\tan\alpha = \frac{AB_2}{AO}.$$

Et ühikringis

$$OA = 1,$$

siis

$$\frac{AB_2}{OA} = \frac{AB_2}{1} = AB_2.$$

Seega

$$\tan\alpha = AB_2.$$

Juhul, kui nurk lõpeb teises veerandis, nagu nurk β joonisel 56, siis

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{C_1C}{OC_1}.$$

Et kolmnurgad OC_1C ja OAC_2 on sarnased, siis

$$\frac{C_1C}{OC_1} = \frac{AC_2}{OA} = \frac{AC_2}{1} = AC_2 \text{ ja}$$

$$\tan\beta = AC_2.$$

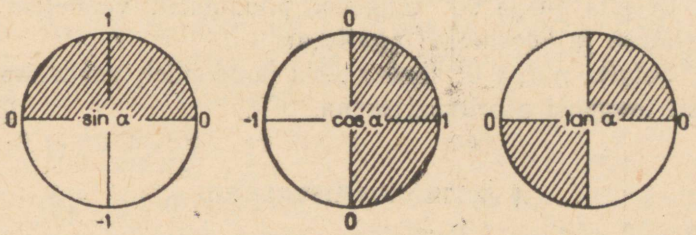
Et punkt C asub teises veerandis, siis jagatis $\frac{y}{x}$ on negatiivne ja seega ka $\tan\beta$ on negatiivne. Kooskõlas sellega on lõik AC_2 suunatud x-teljest allapoole ja seega negatiivne.

Kui nurk lõpeks kolmandas või neljandas veerandis, siis jõuaksime samasuguse arutlusega tulemusele, et

ühikringis nurga tangens võrdub kas nurga haarade vahelise tangenstelje lõigu või alghaara ja lõpphaara

(üle keskpunkti võetud) pikenduse vahelise tangenstelje lõigu mõõtarvuga.

On kerge näha, et I ja III veerandi nurga tangens on positiivne, II ja IV veerandi nurga tangens aga negatiivne.



Joon. 57.

Joonis 57 annab ülevaate sellest, missugune märk on trigonomeetrilistel funktsioonidel igas veerandis ja missugused on funktsioonide väärtused nurkade 0°, 90°, 180°, 270° ja 360° korral. Joonisel on viirutatud need veerandid, milles nurga trigonomeetriline funktsioon on positiivne.

Tangenstelje lõiku ei ole olemas, kui nurk on 90° või 270°, sest neil juhtudel nurga lõpphaara pikendus ei lõika puutujat, vaid on sellega paralleelne.

Kuigi nurkadel 90° ja 270° tangens puudub, võime siiski jooniselt 56 näha, missugune on nurga tangens siis, kui nurk veidi erineb 90°-st ja kui ta veidi erineb 270°-st.

Kui nurk on veidi väiksem 90°-st, siis nurga tangens on väga suur positiivne arv. Kui nurk on veidi suurem 90°-st, siis nurga tangens on väga suure absoluutväärtusega negatiivne arv.

Milline on nurga tangens, kui nurk on veidi väiksem (suurem) 270°-st?

Ülesandeid.

337. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurk α ning seejärel lõikudena $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$. Leia saadud jooniselt nende funktsioonide väärtused.

1) $\alpha = 135°$; 2) $\alpha = 210°$; 3) $\alpha = 285°$.

338. Leia alljärgnevate trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

1) $\sin 180°$	2) $\cos \pi$	3) $\tan 0°$
$\sin \frac{3\pi}{2}$	$\cos 270°$	$\tan \pi$
$\sin 2\pi$	$\cos 2\pi$	$\tan 2\pi$

339. Selgita nurga 90° tangensi puudumist, vaadeldes tangensit siinuse ja koosinuse jagatisena.

340. Selgita nurga 0° kootangensi puudumist, vaadeldes kootangensit tangensi pöördväärtusena.

§ 59. TAANDAMISVALEMID

1) Taandamine 360°-st väiksemale nurgale.

Trigonomeetriliste funktsioonide üldistest definitsioonidest järeldub, et nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on määratud vastava nurga lõpphaara asendiga, sõltumata sellest, mitme täispöörde järel või mis suunas pöörlemisel ta sellesse asendisse jõudis. Kui nurk kasvab või kahaneb täispöörde või täispöörde kordse võrra, siis lõpphaar tuleb endisse asendisse. Seega,

trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel täispöörde või selle kordse võrra.

Sümbolites:

$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin \alpha$ ehk $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha$,
$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos \alpha$ ehk $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$,
$\tan(\alpha + k \cdot 360°) = \tan \alpha$ ehk $\tan(\alpha + 2\pi k) = \tan \alpha$,

kus k on mistahes täisarv.

Need valemid võimaldavad mistahes nurga trigonomeetrilise funktsiooni taandada 360°-st väiksema nurga funktsiooniks: selleks tarvitseb meil vaid antud nurk avaldada kujul

$$k \cdot 360° + \alpha,$$

kus k on sobivalt leitud positiivne või negatiivne täisarv ja α on 360°-st väiksem positiivne nurk.

Näiteid.

1) $\sin 2530° = \sin(7 \cdot 360° + 10°) = \sin 10°$
2) $\tan(-1095°) = \tan(-4 \cdot 360° + 345°) = \tan 345°$

Ülesandeid.

341. Avalda alljärgnevad funktsioonid 360°-st väiksema nurga funktsioonidena:

1) $\sin 395°$; 2) $\cos 695°$; 3) $\tan 1956°$; 4) $\sin(-2783°)$;
5) $\cos(-730°)$.

342. Avalda $\sin 900°$ 360°-st väiksema nurga koosinuse kaudu.

343. Avalda $\cos 1000°$ 360°-st väiksema nurga siinuse kaudu.

344. Avalda $\tan 400°$ 360°-st väiksema nurga siinuse kaudu.

345. Avalda $\tan 600°$ 360°-st väiksema nurga koosinuse kaudu.

346. Lihtsusta avaldised:

1) $\frac{1-\sin^2 200°}{1-\cos^2 200°}$ 2) $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

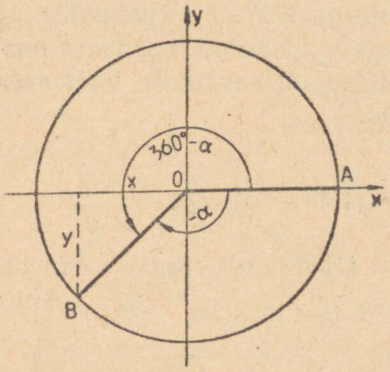
3) $\sin 210° \cdot \cot 210°$ 4) $\cos 370° \cdot \tan 370°$

Võimalus mistahes nurga funktsiooni taandada 360°-st väiksema nurga funktsiooniks vabastab meid 360°-st suuremate nurkade funktsioonide uurimisest.

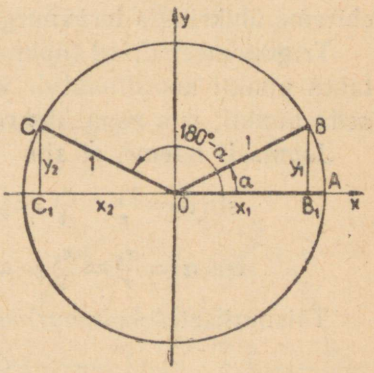
2) Taandamine positiivsele nurgale.

Vaadeldes eraldi negatiivse nurga funktsioone (joon. 58), saame:

$\sin(-\alpha)=\frac{y}{r}$, $\cos(-\alpha)=\frac{x}{r}$, $\tan(-\alpha)=\frac{y}{x}$.



Joon. 58.



Joon. 59.

Needsamad jagatised aga väljendavad ühtlasi positiivse nurga $(360°-\alpha)$ funktsioone. Seega,

$\sin(-\alpha)=\sin(360°-\alpha)$ ehk $\sin(-\alpha)=\sin(2\pi-\alpha)$,
$\cos(-\alpha)=\cos(360°-\alpha)$ ehk $\cos(-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)$,
$\tan(-\alpha)=\tan(360°-\alpha)$ ehk $\tan(-\alpha)=\tan(2\pi-\alpha)$.

Näide.

$$\sin(-310°) = \sin(360° - 310°) = \sin 50°.$$

3) Taandamine teravnurgale.

Eespool nägime, et kõikide negatiivsete nurkade ja kõikide 360°-st suuremate nurkade funktsioone saab avaldada 360°-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide kaudu ehk, nagu öeldakse, saab taandada 360°-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonideks. Nüüd näitame, et viimaseid saab taandada positiivsete teravnurkade funktsioonideks.

Paneme tähele, et kui α on teravnurk, siis teise veerandi nurga võib kirjutada kujul $180° - \alpha$, kolmanda veerandi nurga kujul $180° + \alpha$ ja neljanda veerandi nurga kujul $360° - \alpha$.

Näiteks,

teise veerandi nurk $160° = 180° - 20°$;
kolmanda veerandi nurk $240° = 180° + 60°$;
neljanda veerandi nurk $345° = 360° - 15°$.

Seetõttu esimesse veerandisse mittekuuluva nurga funktsiooni taandamiseks teravnurga funktsioonile piisab, kui leiame taandamisvalemid nurkade $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ ja $360° - \alpha$ funktsioonide jaoks.

Nurga $180° - \alpha$ funktsioonide taandamisvalemite leidmiseks ehitame ühikringis teravnurga α ja nurga $180° - \alpha$ (joon. 59).

Trigonomeetrilised funktsioonid on defineeritud lõpphaara mistahes punkti koordinaatide kaudu. Edaspidi kasutame lõpphaara seda punkti, mis asub ühikringjoonel.

Jooniselt näeme, et siis

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 \text{ ja } \sin(180° - \alpha) = y_2,$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{1} = x_1 \text{ ja } \cos(180° - \alpha) = x_2.$$

Täisnurksetes kolmnurkades B_1OB ja C_1OC on

$$OB = OC,$$

$$\angle B_1OB = \angle C_1OC.$$

Seega

$$\triangle B_1OB = \triangle C_1OC,$$

millest järeldub, et

$$y_2 = y_1$$

ja

$$x_2 = x_1$$

(x_1 ja x_2 on vastandsuunalised.)

Nüüd saame, et

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha.$$

Niisiis, teise veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide taandamisel rakendame valemeid:

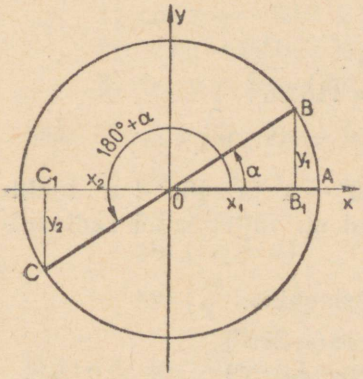
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha.$$

Nurga $180° + \alpha$ funktsioonide taandamisvalemite saamiseks ehitame ühikringis nurgad α ja $180° + \alpha$ (joon. 60). Arutledes samal viisil nagu eelmisel korral, saame:

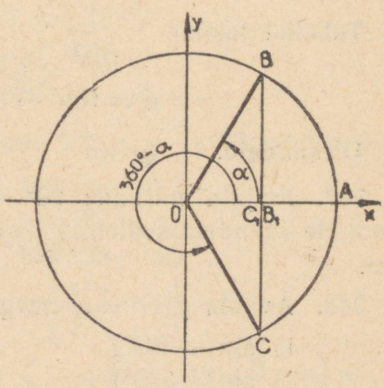
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha.$$

Analoogiliselt saame neljanda veerandi nurga $360° - \alpha$ (joon. 61) funktsioonide jaoks järgmised taandamisvalemid:

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha.$$



Joon. 60.



Joon. 61.

Arvestades viimaseid taandamisvalemeid ja varem tähelepandud asjaolu, et nurga $(-\alpha)$ funktsioonid on samased nurga $360° - \alpha$ funktsioonidega, saame

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

Taandamisvalemeid on kerge meeles pidada, pannes tähele, et

nurga $180° - \alpha$ $180° + \alpha$ kui ka $360° - \alpha$ funktsioon taandub nurga α samanimeliseks funktsiooniks: märk sõltub sellest, mis veerandis nurk lõpeb.

Näiteid.

1. $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.
2. $\sin 243° = \sin(180° + 63°) = -\sin 63° = -0{,}8910$.
3. $\sin 560° = \sin(360° + 200°) = \sin 200° = \sin(180° + 20°) = -\sin 20° = -0{,}3420$.
4. $\tan 275°24' = \tan(360° - 84°36') = -\tan 84°36' = -10{,}58$.
5. $\tan(-2094°) = \tan(-6 \cdot 360° + 66°) = \tan 66° = 2{,}2460$.
6. $\tan(5\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.
7. Leia nurk α, teades, et $\tan\alpha = -1{,}9970$ ja $90° < \alpha < 180°$.

Lahendus. Kasutades valemit

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha,$$

saame

$$\tan(180° - \alpha) = 1{,}9970.$$

Tabelist leiame

$$180° - \alpha = 63°24',$$
$$\alpha = 180° - 63°24' = 116°36'.$$

Ülesandeid.

347. Kirjuta nurkade $90° - \alpha$, $180° - \alpha$ ja $180° + \alpha$ funktsioonide taandamisvalemid, kui nurgad on väljendatud radiaanides.

348. Avalda positiivse nurga funktsioonina:

1) $\sin(-300°)$ 2) $\cos(-300°)$
3) $\sin(-330°)$ 4) $\cos(-315°)$
5) $\tan(-315°)$ 6) $\tan(-340°)$

349. Arvuta peast:

1) $\sin 120°$ 2) $\cos 315°$ 3) $\tan 135°$
$\sin 210°$ $\cos 225°$ $\tan 225°$
$\sin 315°$ $\cos 150°$ $\tan 330°$

350. Leia tabelite abil järgmiste nurkade siinused:

1) $112°$; $164°36'$; $178°18'$; $115°30'$.
2) $196°$; $212°$; $200°24'$; $308°12'$.

351. Leia tabelite abil järgmiste nurkade koosinused:

1) $99°$; $152°$; $170°42'$; $100°50'$.
2) $112°$; $315°$; $200°24'$; $308°12'$.

352. Leia tabelite abil järgmiste nurkade tangensid:

1) $114°$; $152°$; $160°06'$; $259°18'$.
2) $196°$; $293°$; $272°18'$; $342°40'$.

353. Taanda järgmised funktsioonid positiivse teravnurga funktsioonideks:

1) $\sin 200°$ 2) $\cos 310°$ 3) $\tan 192°$
$\sin 115°$ $\cos 164°$ $\tan(-200°)$
$\sin(-15°)$ $\cos(-60°)$ $\tan(-282°)$
4) $\sin 460°$ 5) $\cos 540°$ 6) $\tan 499°$
$\sin 693°$ $\cos 982°$ $\tan 654°$
$\sin 850°$ $\cos 754°$ $\tan 815°$

354. Leia nurk α, teades, et

1) $\cos\alpha = -0{,}9311$ ja $90° < \alpha < 180°$;
2) $\sin\alpha = 0{,}5000$ ja $90° < \alpha < 180°$;
3) $\tan\alpha = 1$ ja $180° < \alpha < 270°$.

355. Taanda järgmised funktsioonid nurga α funktsioonideks:

1) $\sin(\pi + \alpha)$ 2) $\tan(\pi - \alpha)$
$\sin(2\pi - \alpha)$ $\tan(2\pi - \alpha)$
$\sin(3\pi + \alpha)$ $\tan(2\pi + \alpha)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Näide. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$
$= -\cos\alpha$.

356. Arvuta:

1) $\sin \frac{5\pi}{6}$ 2) $\tan \frac{5\pi}{6}$

Näide. $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

357. Kontrolli järgmiste võrduste õigsus:

1) $\frac{\sin(180°+\alpha)}{\cos(360°+\alpha)} + \frac{\sin(360°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)} = 0$

2) $\frac{\sin(540°-x)\cos(x-180°)}{\tan(900°-x)} = \cos^2 x$

3) $\sin(\alpha - 30°) + \sin(\alpha + 150°) = 0$

4) $\tan(45° + \alpha) = \cot(45° - \alpha)$

5) $\cos(45° - \alpha) = \sin(45° + \alpha)$

6) $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$

358. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$

2) $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - \sin(-40°)$

3) $\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) - \tan(\alpha - \pi) - \tan(2\pi - \alpha)$

§ 60. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD.

Kujutame funktsiooni

$$y = \sin x$$

graafiliselt vahemikus

$$0 \leqslant x \leqslant 3\pi.$$

Selleks joonestame koordinaatteljestiku ja ühikringi, mille keskpunkti võtame x-teljel, nii nagu on tehtud joonisel 62.

Jaotades nüüd ühikringi näiteks 16-ks võrdseks osaks, saame nurgad suurusega 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, ... Iga nurga lõppraadiuse otspunktist joonestame lõigu, mille pikkus kujutab vastava nurga siinust, mõõdetud ühikringi raadiusega. Täispööret, s. o. nurka

360° ehk 2π radiaani kujutab siis abstsissteljel lõik pikkusega 6,28 ühikut ja nurka $\frac{\pi}{8}$ lõik, mille pikkus on ligikaudu 0,4 ühikut. Seejärel ehitame teljestikus üksteise järele punktid, mille abstsissiks on vastava nurga mõõtarv radiaanides ja ordinaadiks vastava nurga siinus. Joonisel on nurkade lõppraadiuste otspunktid ja nendele nurkadele vastavad graafiku punktid märgitud numbritega 1, 2, 3, ...

Nurga siinuse graafikut võime jätkata nii positiivsete kui ka negatiivsete nurkade suunas kuitahes kaugele, saades lõpmatu lainelise kõverjoone, mida nimetatakse **sinusoidiks.**

Funktsiooni

$$y = \cos x$$

graafiku võib ehitada samal viisil nagu siinuse graafiku, võttes nüüd graafiku punkti ehitamisel ordinaadiks lõigu, mille mõõtarv on võrdne vastava nurga koosinusega.

Nurga koosinuse graafiku võime aga ehitada ka järgmiselt. Arvestades valemeid

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \text{ ja } \sin\alpha = \sin(180° - \alpha),$$

saame:

$$\cos x = \sin(90° - x) = \sin[180° - (90° - x)] = \sin(x + 90°).$$

Seega,

$$\cos x = \sin(x + 90°),$$

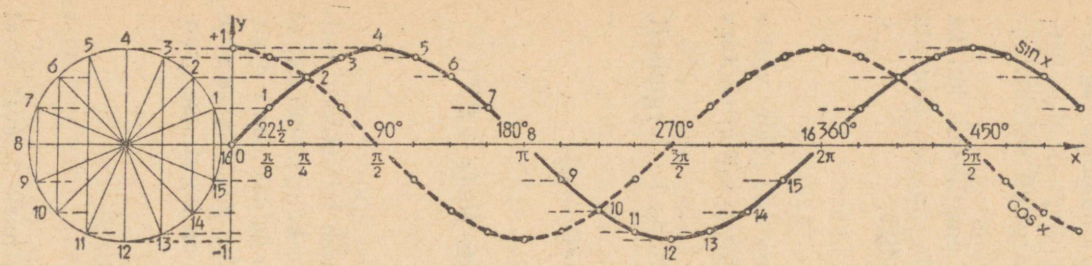
millest nähtub, et cos x graafiku saamiseks tuleb teljestikku, milles on ehitatud sin x graafik, nihutada x-telje suunas nõnda, et teljestiku algus läheb punkti $x = 90°$ ehk, teisiti öeldes, cos x graafiku saame, kui sin x graafikut nihutame x-telje negatiivses suunas lõigu võrra, mis vastab 90°-le. Joonisel 62 on koosinuse graafik joonistatud punktiirjoonega.

Ülesandeid.

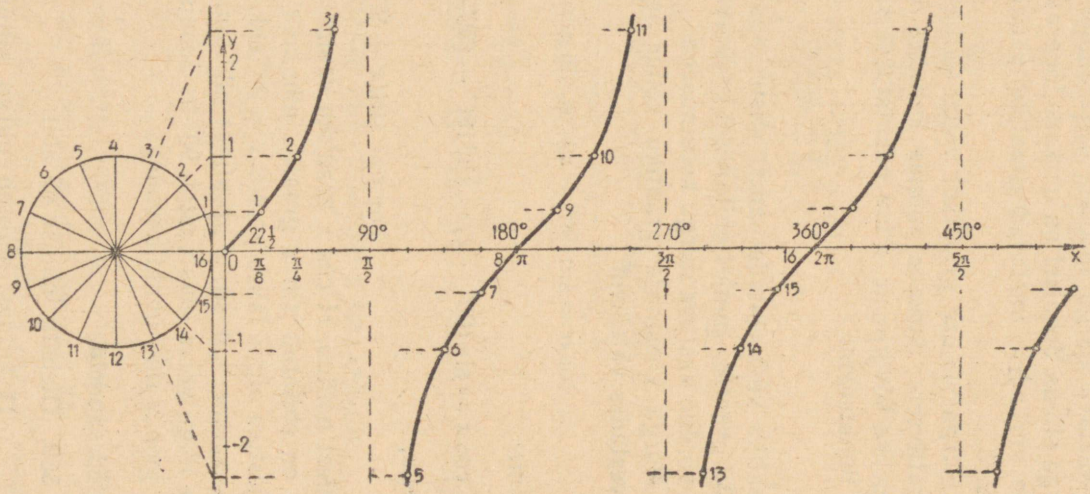
359. Otsusta joonise 62 abil:

1) kuidas muutub nurga siinus, kui nurk kasvab 0°-st 90°-ni; 90°-st 270°-ni; 270°-st 450°-ni; 450°-st 540°-ni?

2) missugustes argumendivahemikkudes cos x kasvab, missugustes kahaneb?



Joon. 62.



Joon. 63.

3) missuguste x väärtuste korral $\sin x = \cos x$?

4) missugused on funktsioonide $\sin x$ ja $\cos x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad?

Nurga tangensi graafiku ehitamisel toimime samal viisil nagu eespool siinuse graafiku ehitamiselgi. Joonisel 63 on näidatud funktsiooni $y = \tan x$ graafiku ehitamine.

Et nurkadel 90°, 270°, ... , $(2k + 1) \cdot 90°$ (kus k on mistahes täisarv) tangensi väärtus puudub, siis nurga tangensi graafik ei ole pidev joon, nagu seda on siinuse ja koosinuse graafikud, vaid katkeb 90°, 270°, ... , $(2k + 1)90°$ kohal. Tangensi graafik koosneb seetõttu üksikutest üksteisest lahusolevatest harudest.

Ülesandeid.

360. Kuidas muutub $\tan x$, kui nurk x kasvab 0°-st 90°-ni; 90°-st 270°-ni; 270°-st 450°-ni?

361. Kas leidub niisugune vahemik, milles nurga kasvamisel tangens kahaneb?

362. Nimeta funktsiooni $\tan x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

363. Missuguste x väärtuste korral

$$\tan x = 0?$$

§ 61. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PERIOODILISUS.

On nähtusi, mis korduvad iga ühe ja sama ajavahemiku tagant, näiteks aurumasina töötamisel auru jaotuskarbi klapi avamine ja sulgumine, kella pendli võnkumine, tõukuri liikumine automootoris, planeedi tiirlemine ümber Päikese, öö ja päeva vaheldumine, aastaaegade vaheldumine, mere mõõnad ja tõusud, pulsilöögid jne. Sääraseid nähtusi nimetatakse **perioodilisteks.**

On funktsioone, mille muutumine toimub perioodiliselt. Kõige lihtsamate perioodiliste funktsioonide näideteks on trigonomeetrilised funktsioonid. Me nägime eespool, et ühegi trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka muudetakse 360° või selle kordse võrra. Otsime nüüd iga trigonomeetrilise funktsiooni jaoks niisugust väikseimat positiivset nurka p, mille puhul

nurga x iga väärtuse korral nurga $x+p$ funktsioon on võrdne nurga x samanimelise funktsiooniga. Niisugust nurka p nimetatakse uuritava funktsiooni perioodiks.

Jooniselt 64 näeme, et

nurga siinuse ja koosinuse periood on 360°.

Taandamisvalemitest on teada, et

$$\tan(x+180°)=\tan x.$$

Vaadeldes tangensi graafikut (joon. 65) näeme, et tõepoolest kordub tangensi väärtus t iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb 180° võrra ja et pole 180°-st väiksemat nurka p, mille korral $\tan(x+p)=\tan x$.

Seega,

nurga tangensi periood on 180°.

Et trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka suurendatakse või vähendatakse perioodi võrra, siis

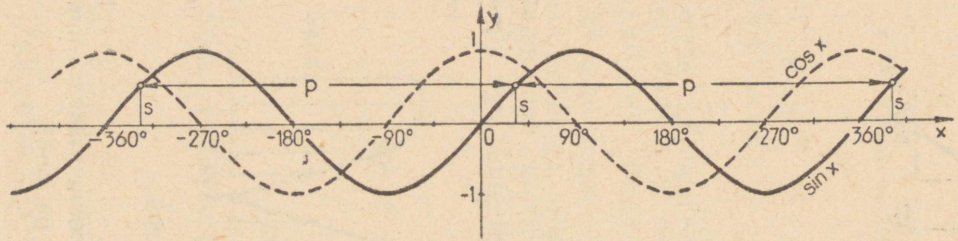
$$\sin(\alpha+k\cdot 360°)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+k\cdot 360°)=\cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha+k\cdot 180°)=\tan\alpha,$$

kus k on mistahes täisarv.

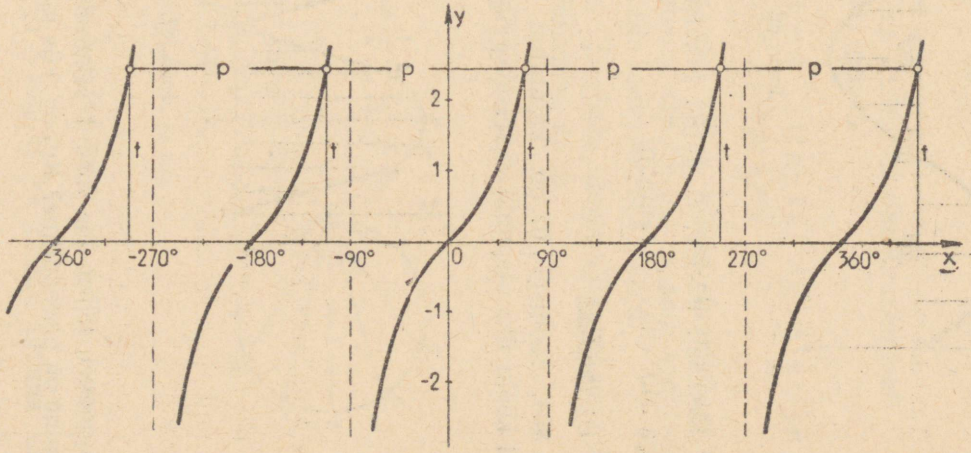
Näide. Kujuta funktsioon $y=\sin 1{,}5x$ graafiliselt ja selgita saadud joonise abil funktsiooni perioodilisust. Kui pikk on periood?

Lahendus. Koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli, võttes x väärtused vahemikust $0°\leqslant x\leqslant 360°$ iga 30° tagant.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$1{,}5x$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°	405°	450°	495°	540°
y	0°	0,70	1	0,70	0	−0,70	−1	−0,70	0	0,70	1	0,70	0

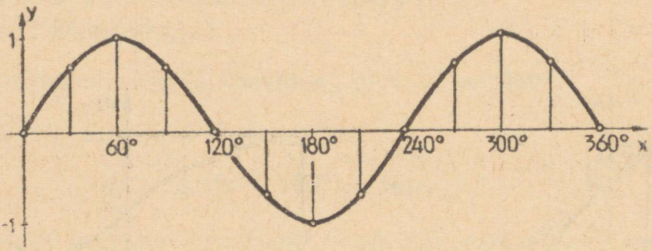


Joon. 64.



Joon. 65.

Valime telgedel ühikuks lõigu pikkusega 2 cm. Kujutagu ühiklõik nurgateljel nurka 1 radiaan, s. o. ligikaudu 60° (joon. 66).

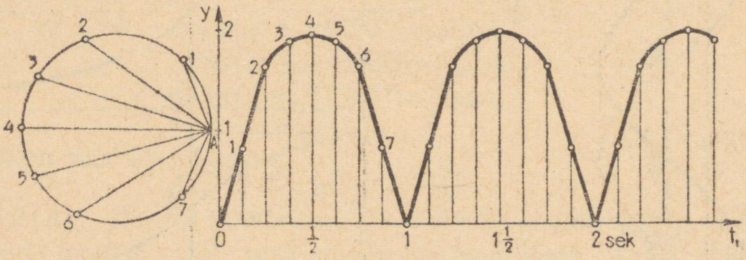


Joon. 66.

Jooniselt näeme, et antud funktsioon on perioodiline, perioodiga 240° ehk $\frac{4\pi}{3}$ radiaani.

Ülesandeid.

364. Joonisel 67 on kujutatud kõõlu pikkuse muutumine, kui kõõlu üks otspunkt A seisab paigal, teine otspunkt aga liigub



Joon. 67.

ringjoonel, tehes ühe tiiru 1 sekundiga. Kas kõõlu pikkuse muutumine on perioodiline? Kui on, siis kui pikk on periood?

365. Kujuta alljärgnevad funktsioonid graafiliselt ja selgita siis graafiku abil funktsioonide perioodilisust. Kui pikk on periood?

1) $y = \sin 2x$
2) $y = \sin 3x$
3) $y = \sin \frac{x}{2}$
4) $y = \sin \frac{x}{3}$

366. Kujuta funktsioon graafiliselt ja selgita graafiku abil, kas funktsioon on perioodiline. Kui on, siis kui pikk on periood?

1) $y = 1 + \sin x$ 2) $y = \sin x + \cos x$
3) $y = 2 \sin x$ 4) $y = 3 \cos x$

§ 62. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

1. Kahe nurga summa siinuse võrdlemine nende nurkade siinuste summaga.

Kui tahame näiteks 30°-se ja 45°-se nurga funktsioonide järgi arvutada 75°-se nurga siinust, siis peame oskama avaldada $\sin(30° + 45°)$ liidetavate nurkade funktsioonide kaudu.

Et kahe nurga summa siinus ei võrdu liidetavate nurkade siinuste summaga, seda näitab järgmine näide:

$$\sin(30° + 60°) = \sin 90° = 1,$$

kuid

$$\sin 30° + \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$$

Seega,

$$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta.$$

Samal viisil veendume, et näiteks

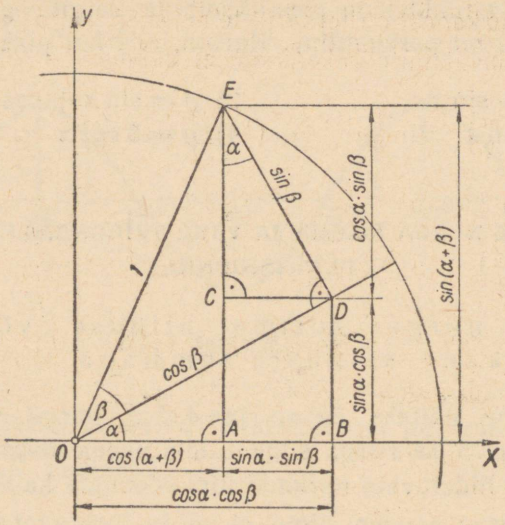
$$\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta.$$

2. Kahe nurga summa siinus.

Olgu antud teravnurgad α ja β nii, et ka nende summa on teravnurk. Niisiis $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ja $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Joonestame nurgad α ja β xy-teljestikus võetud ühikringi kesknurkadena (joon. 68):

$$\alpha = \angle DOB,\ \beta = \angle EOD,\ \alpha + \beta = \angle EOB.$$



Joon. 68.

Joonestame nurga β lõppraadiuse otspunktist E lõigu EA risti nurga α algraadiusega ja lõigu ED risti nurga α lõppraadiusega. Seega

$$EA \perp OB;\ ED \perp OD \text{ ja } DC \perp EA.$$

Siis kolmnurgas DCE nurk $CED = \alpha$.

Et ühikringi raadius $r = OE = 1$, siis saame:
kolmnurgas OAE lõik $AE = \sin(\alpha + \beta)$,
kolmnurgas ODE lõik $ED = \sin\beta$, ja lõik $OD = \cos\beta$,
kolmnurgas ECD lõik $EC = \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
kolmnurgas OBD lõik $DB = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.
Et $DB = AC$ ja $AE = AC + CE$, siis

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta} \qquad (1)$$

Seega oleme saanud valemi (1) kahe teravnurga summa siinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu, kusjuures see summa ise on ka teravnurk.

Kui üks nurkadest on terav ja teine täisnurk, näiteks kui $\beta = \frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite rakendamisel saame:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Valem (1) annab:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha.$$

Siit näeme, et ka sel korral valem (1) kehtib.

Kui nurkade α ja β asemel võtta $\frac{\pi}{2}$ võrra suuremad nurgad, s. o. nurgad $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ja $\beta + \frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite kasutamisel saame:

$$\sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin[(\alpha + \beta) + \pi] =$$
$$= -\sin(\alpha + \beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Valem (1) annab sel korral:

$$\sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha\sin\beta -$$
$$- \sin\alpha\cos\beta = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Siit nähtub, et valem (1) kehtib selgi korral.

Nurkasid α ja β niiviisi samm-sammult suurendades veendume, et valem (1) kehtib igasuguste nurkade korral.

3. Kahe nurga summa koosinus.

Valemi kahe nurga summa koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame analoogiliselt eelnevaga joonise 68 abil:

$$\cos(\alpha + \beta) = OA = OB - AB = OB - CD =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Ka valemi (2) kehtivuses igasuguste nurkade korral saame veenduda nurkasid α ja β samm-sammult $\frac{\pi}{2}$ võrra suurendades.

4. Kahe nurga vahe siinus ja koosinus.

Valemid kahe nurga vahe siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame, kasutades taandamisvalemeid:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[2\pi+(\alpha-\beta)]=\sin[\alpha+(2\pi-\beta)]=\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot\cos(2\pi-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(2\pi-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

Samal viisil saame:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\pi+(\alpha-\beta)]=\cos[\alpha+(2\pi-\beta)]=\cos\alpha\cdot$$
$$\cdot\cos(2\pi-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(2\pi-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Valemeid (1), (2), (3) ja (4) nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide liitmislauseteks.

Eespool tuletatud valemite abil saame ka valemid $\tan(\alpha+\beta)$ ja $\tan(\alpha-\beta)$ teisendamiseks.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Jagades viimase murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, saame avaldise:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Niisiis,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Kasutades seost

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,$$

saame

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Ülesandeid.

367. Arvuta:
1) $\sin 75°$
2) $\cos 75°$
3) $\tan 75°$
4) $\sin 15°$
5) $\cos 15°$
6) $\tan 15°$

368. Arvuta $\cos(\alpha-\beta)$ väärtus, teades et $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{5}{13}$ ja et α ja β on teravnurgad.

369. Arvuta $\sin(\alpha+\beta)$ väärtus, teades et α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\sin\beta=\frac{12}{13}$.

370. Arvuta $\cos(\alpha+\beta)$, teades et $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$ ja α ja β on teravnurgad.

371. Arvuta $\cos(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$ ning α ja β on teravnurgad.

372. Arvuta $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, kui α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

373. Näita, et $\sin(45°+x)+\cos(45°+x)=\sqrt{2}\cdot\cos x$.

374. Näita, et $\sin(45° + x) - \cos(45° - x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$.

375. Kolmnurgas kahe teravnurga koosinused on vastavalt $\frac{15}{17}$ ja $\frac{9}{41}$. Arvuta antud nurkadega mitte kõrvuti asetseva välisnurga siinus.

376. Kolmnurga kahe teravnurga siinused on vastavalt $\frac{7}{25}$ ja $\frac{4}{5}$. Arvuta kolmanda nurga koosinus.

377. Kolmnurga ABC sees olevast punktist O on küljed AB, AC ja BC näha nürinurkade all. Teades, et $\sin A\widehat{O}B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos B\widehat{O}C = -\frac{1}{3}$, arvuta $\sin A\widehat{O}C$.

378. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin(\alpha + 30°) - \sin(\alpha - 30°)$
2) $\cos(\alpha + 45°) - \cos(\alpha - 45°)$

379. Arvuta:

1) $\sin 20° \cos 40° + \cos 20° \sin 40°$
2) $\cos 47° \cos 17° + \sin 47° \sin 17°$
3) $\frac{\tan 70° - \tan 40°}{1 + \tan 70° \tan 40°}$
4) $\frac{\tan 70° + \tan 80°}{1 - \tan 70° \tan 80°}$
5) $\frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{5\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{5\alpha}{2}}$, kui $\alpha = 15°$
6) $\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$

380. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$
2) $\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

381. On teada, et α ja β on teravnurgad ja et $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ning $\tan \beta = \frac{1}{7}$.

Tõesta, et $\alpha + \beta = 45°$.

382. Tõesta, et

1) $\tan 2° + \tan 12° = \frac{\sin 14°}{\cos 2° \cdot \cos 12°}$

2) $\frac{\sin 5°}{\sin 15°} = \frac{\tan 10° - \tan 5°}{\tan 10° + \tan 5°}$

383. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 10° \cos 50° + \cos 10° \sin 50°$

2) $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$

384. Kahe nurga tangensite summa on 2, kuid nende nurkade summa tangens on 4.

Leia nende nurkade tangensite korrutis.

385. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja nende nurkade vahe koosinus on 0,8.

Leia nende nurkade siinuste korrutis.

§ 63. KAHEKORDSE NURGA JA POOLNURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS.

Valemid kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi avaldamiseks ühekordse nurga funktsioonide kaudu saame, kui kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemites võtame liidetavad nurgad teineteisega võrdseks.

Võttes $\beta = \alpha$, saame

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Valemid poolnurga siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurga funktsioonide kaudu saame järgmiselt.

Esiteks kasutame põhiseost

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1. \qquad (1)$$

Teiseks asendame kahekordse nurga koosinuse valemis nurga α nurgaga $\frac{\alpha}{2}$, saame

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ehk

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha. \qquad (2)$$

Lahutades nüüd võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavad pooled, saame

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha, \qquad (3)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Sellest saamegi poolnurga siinuse valemi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, saame

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha, \qquad (4)$$

millest

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Siit

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Et tangens on siinuse ja koosinuse jagatis, siis

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}:\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

ehk

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Märgi poolnurga valemites oleva radikaali ees määrab muidugi see, mis veerandis nurk $\frac{\alpha}{2}$ lõpeb.

Poolnurga tangensi saab nurga siinuse ja koosinuse kaudu avaldada ka ratsionaalselt (s. o. radikaalivabalt). Selleks korrutame võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

paremal pool oleva murru lugejat ja nimetajat avaldisega $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ning arvestades võrdust (4), saame

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Korrutades võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

parema poole lugeja ja nimetaja avaldisega $1-\cos\alpha$, saame pärast taandamist

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Seega

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ \tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}}$$

Kahekordse nurga ja poolnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid kasutame avaldiste teisendamisel ja mõne nurga funktsiooni väärtuse arvutamisel.

Näide 1. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Leia tipunurga siinus ja koosinus.

Lahendus. Tähistame alusnurga tähega α ja tipunurga tähega β, siis

$$\beta = 180° - 2\alpha$$

ja

$$\sin\beta = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Seega,

$$\sin\beta = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$

$$\cos\beta = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha =$$

$$= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = -\frac{119}{169}.$$

Näide 2. Arvuta $\tan 22\frac{1}{2}°$.

Lahendus. Võttes valemis

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\alpha = 45°$, saame

$$\tan 22\frac{1°}{2} = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414.$$

Ülesandeid.

386. Rombi külje ja diagonaali vahelise nurga siinus on 0,2. Leia rombi nurkade koosinused.

387. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga koosinus on $\frac{3}{4}$. Leia tipunurga koosinus.

388. Ringjoone veerandist väiksemale kaarele toetuva kesknurga koosinus on $\frac{1}{9}$. Leia samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens.

389. Kontrolli võrdust

$$\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ.$$

390. Avalda x ja y vaheline seos, milles ei esine nurka α:

1) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$

391. On teada, et $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$. Leia $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

392. Lihtsusta avaldised:

1) $2\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$
2) $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)\cdot(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$
3) $\sin(60^\circ + \alpha)\cdot\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)\cdot\sin(60^\circ - \alpha)$

§ 64. KAHE NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS.

Kasutades kahe nurga summa ja vahe siinuse ning kahe nurga summa ja vahe-koosinuse valemeid:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad (4)$$

saame tuletada kahe nurga siinuste summa ja vahe ning koosinuste summa ja vahe korrutiseks teisendamise valemid.

1. Kahe nurga siinuste summa valemi tuletamiseks liidame võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, saame

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y. \quad (5)$$

Tähistades nurgad $x+y$ ja $x-y$ vastavalt tähtedega α ja β, saame

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta,$$

kust

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ja } y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehes nüüd asendused, saame võrdusele (5) anda kuju

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Seega,

kahe nurga siinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

2. Kahe nurga siinuste vahe korrutiseks teisendamise valemi saame, kui võrduse (1) pooltest lahutame võrduse (2) vastavad pooled:

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$$

ehk, pärast asendamist,

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Kahe nurga siinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.

3. Kahe nurga koosinuste summa korrutiseks teisendamise valemi saame, kui liidame võrduste (3) ja (4) vastavad pooled:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y.$$

Tehes siin samad asendused, nagu eelmisel korral, saame

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Kahe nurga koosinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordse korrutisega.

4. Kahe nurga koosinuste vahe korrutiseks teisendamise valemi tuletamiseks lahutame võrduse (3) pooltest võrduse (4) vastavad pooled. Saame

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y.$$

Tehes siin asendused, nagu eelmistel puhkudel, saame valemi:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Kahe nurga koosinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe siinuste kahekordse korrutisega võetud märgiga miinus.

Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe korrutiseks teisendamise valemid võimaldavad avaldisi lihtsustada ja kergendavad avaldiste väärtuste arvutamist.

Näiteid.

1. Arvuta avaldise $\sin 75° + \sin 15°$ väärtus.

Lahendus. $\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} =$

$= 2\sin 45°\cos 30° = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \approx 1{,}224.$

2. Teisenda üksliikmeks avaldis

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x).$$

Lahendus. $\sin(60° + x) - \sin(60° - x) =$

$$= 2\cos\frac{60°+x+60°-x}{2}\sin\frac{60°+x-60°+x}{2} =$$

$$= 2\cos 60°\sin x = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x = \sin x.$$

3. Lihtsusta avaldist

$$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\cos 0^\circ-\cos\alpha}{\cos 0^\circ+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

4. Teisenda korrutiseks avaldis $1+2\cos\alpha$.

Lahendus. $1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=$

$$=2\cdot 2\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

5. Taanda murd

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$$

Lahendus. Taandaja selgitamiseks esitame murru lugeja ja nimetaja korrutistena.

Lugeja teisendamisel saame:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=$$
$$=[\sin(90^\circ-x)+\sin x][\sin(90^\circ-x)-\sin x]=$$
$$=2\sin 45^\circ\cos(45^\circ-x)\cdot 2\cos 45^\circ\sin(45^\circ-x)=$$
$$=2\cos(45^\circ-x)\sin(45^\circ-x).$$

Nimetaja teisendamisel saame:

$$1-\sin 2x=\sin 90^\circ-\sin 2x=2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x).$$

Nüüd

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\frac{2\cos(45^\circ-x)\sin(45^\circ-x)}{2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)}=\frac{\cos(45^\circ-x)}{\cos(45^\circ+x)}=$$
$$=\frac{\sin(45^\circ+x)}{\cos(45^\circ+x)}=\tan(45^\circ+x).$$

6. Teisenda korrutiseks avaldis

$$\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Lahendus. $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=$
$$=2\sin 45^\circ\cos(-45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha).$$

Ülesandeid.

393. Tuleta kahe nurga siinuste vahe valem selles paragrahvis antud võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavate poolte lahutamise teel.

394. Tuleta kahe nurga koosinuste vahe valem selles paragrahvis antud võrduse (3) pooltest võrduse (4) vastavate poolte lahutamise teel.

395. Kasutades seoseid $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ tõesta, et

a) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

b) $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

396. Tuleta seoste (1) ja (2) (§ 64) abil valem

$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},$$

mis võimaldab nurga siinuse ja teise nurga koosinuse korrutise teisendada kahe nurga siinuste summaks.

397. Tuleta seoste (3) ja (4) (§ 64) abil kahe nurga koosinuste korrutise summaks teisendamise valem

$$\cos x\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}.$$

398. Kasutades seoseid (3) ja (4) (§ 64), tuleta kahe nurga siinuste korrutise vaheks teisendamise valem

$$\sin x\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.$$

399. Teisenda korrutiseks ja arvuta siis avaldise väärtus:

1) $\sin 75° - \sin 15°$
2) $\cos 48° + \cos 12°$
3) $\cos 135° + \cos 45°$
4) $\cos 135° - \cos 45°$
5) $\cos 5° - \cos 35°$
6) $\tan 20° + \tan 70°$
7) $\sin 80° + \sin 10°$
8) $\cos 58° + \cos 32°$

400. Lihtsusta avaldis ja seejärel arvuta ta väärtus:

1) $\frac{\sin 55°+\sin 35°}{\sin 55°-\sin 35°}$
2) $\frac{\cos 54°+\cos 36°}{\cos 54°-\cos 36°}$
3) $\frac{\sin 36°+\sin 24°}{\sin 36°-\sin 24°}$
4) $\frac{\sin 100°-\sin 80°}{\sin 100°+\sin 80°}$
5) $\sin^2 50° - \sin^2 40°$
6) $\frac{\cos 5°-\cos 25°}{\sin 5°+\sin 25°}$
7) $\frac{\sin 24°+\sin 6°}{\cos 24°+\cos 6°}$
8) $\frac{\sin 29°-\sin 9°}{\sin 29°+\sin 9°}$
9) $\frac{\cos 65°+\cos 35°}{\sin 65°-\sin 35°}$
10) $\sin^2 70° - \cos^2 50°$

401. Teisenda korrutiseks:

1) $\sin\alpha+\frac{1}{2}$

2) $\sin\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3) $1+\sin\alpha$

4) $1+2\sin\alpha$

5) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$

6) $\frac{1}{2}+\cos\alpha$

7) $\sqrt{3}+\tan\alpha$

8) $1-4\sin^2\alpha$

9) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

10) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

402. Lihtsusta avaldist:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$

2) $\frac{\sin\frac{2}{3}\alpha+\sin\frac{4}{3}\alpha}{\cos\frac{2}{3}\alpha+\cos\frac{4}{3}\alpha}$

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

403. Teisenda korrutiseks:

1) $\sin(45°+x)+\sin(45°-x)$

2) $\sin(30°+x)+\sin(30°-x)$

3) $\sin(45°+x)-\sin(45°-x)$

4) $\cos(30°+x)-\cos(30°-x)$

404. Tõesta samasus:

1) $\frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha\sin 2\alpha}=-1$

2) $\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\tan^2(45°+\alpha)$

3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\tan^2(45°-\alpha)$

4) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$

5) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45°+\alpha)$

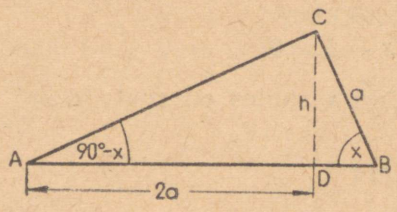
6) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

7) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID.

§ 65. TRIGONOMEETRILISE VÕRRANDI MÕISTE.

On ülesandeid, mille lahendamine viib niisuguse võrrandi lahendamisele, milles otsitav esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.



Joon. 69.

N ä i d e 1. Täisnurkses kolmnurgas on ühe kaateti projektsioon hüpotenuusil kaks korda pikem kui teine kaatet. Arvuta selle kolmnurga nurgad.

Lahendamisel saame kolmnurgast ADC (joon. 69)

$$h = 2a \tan(90° - x)$$

ja kolmnurgast BDC

$$h = a \sin x.$$

Seega saame võrrandi

$$a \sin x = 2a \tan(90° - x)$$

ehk

$$\sin x = 2 \tan(90° - x).$$

See on trigonomeetriline võrrand.

Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb mingi trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Tundmatu x väljendab trigonomeetrilises võrrandis tavaliselt nurga suurust kraadides või radiaanides, mõnikord (sõltuvalt ülesande tingimustest) aga ka abstraktset arvu, nagu näiteks võrrandis

$$x + \sin x = \frac{1}{2}.$$

Siin $\sin x$ tähendab x-radiaanise nurga siinust, näiteks

$$\sin 2{,}6 = \sin 148°58' = \sin 31°02' = 0{,}5155.$$

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel püüame võrrandit nii teisendada, et see sisaldaks ainult üht trigonomeetrilist funktsiooni, näiteks ainult funktsiooni $\sin x$.

Eespool saadud võrrandit

$$\sin x = 2\tan(90° - x) \text{ ehk } \sin x = 2\cot x$$

on kerge teisendada niisuguseks, et see sisaldaks ainult funktsiooni $\cos x$. Teeme seda:

$$\sin x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sin^2 x = 2\cos x,$$
$$1 - \cos^2 x = 2\cos x,$$
$$\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi, mis $\cos x$ suhtes on ruutvõrrand, leiame

$$\cos x = 0{,}414$$

ja

$$\cos x = -2{,}414.$$

Saadud kahest uuest võrrandist teisel ilmselt lahend puudub, sest pole olemas nurka, mille koosinus on —2,414. Seega jääb nüüd lahendada lihtne võrrand

$$\cos x = 0{,}414.$$

Et otsitav nurk on täisnurkse kolmnurga nurk, siis meie ülesande ainsaks lahendiks on

$$x = 65°33'.$$

Kolmnurga teine teravnurk on

$$90° - 65°33' = 24°27'.$$

Näide 2. Kolmnurga üks nurk on teisest kaks korda suurem, kusjuures nende nurkade siinuste suhe on $\frac{5}{3}$. Leia kolmnurga nurgad.

Olgu üks nurk x kraadi, siis teine on $2x$ kraadi. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{5}{3}$$

ehk

$$3\sin 2x = 5\sin x.$$

Selle võrrandi vasakul poolel on siinuse argumendiks $2x$, paremal poolel aga x. Teisendame võrrandit nii, et see sisaldaks

ainult ühe ja sama argumendi funktsioone, kasutades selleks valemit

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Saame

$$6 \sin x \cos x - 5 \sin x = 0.$$

Tuues $\sin x$ sulgude ette, saame

$$\sin x (6 \cos x - 5) = 0.$$

Nüüd peab kas

$$\sin x = 0$$

või

$$6 \cos x - 5 = 0,$$

millest

$$\cos x = \frac{5}{6}.$$

Näeme, et ka selle ülesande lahendamisel saadud võrrand taandus lihtsatele võrranditele:

$$\sin x = 0 \text{ ja } \cos x = \frac{5}{6}.$$

Neist esimene võrrand meie ülesandele lahendit ei anna, sest kolmnurga nurk ei saa olla 0° ega 180°.

Teisest võrrandist aga saame

$$x = 33°33'.$$

Teine nurk on

$$2x = 67°06'$$

ja kolmas nurk on

$$180° - (33°33' + 67°06') = 79°21'.$$

Nende näidisülesannete lahendamiskäigust selgub, et trigonomeetrilise võrrandi lahendamise üldplaan võiks olla järgmine:

1) antud võrrand teisendatakse niisuguseks, mis sisaldab ainult ühe argumendi üht ja sama funktsiooni;

2) saadud võrrand taandatakse üheks või mitmeks trigonomeetriliseks põhivõrrandiks;

3) lahendatakse saadud **trigonomeetrilised põhivõrrandid**, milleks on:

$$\sin x = m,$$
$$\cos x = m,$$
$$\tan x = m.$$

1. Võrrandi $\sin x = m$ lahendamine.

Teame, et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, seega ka $-1 \leqslant m \leqslant 1$.

a) Olgu ülesandeks lahendada võrrand $\sin x = \frac{1}{2}$.

Lõikame funktsiooni $y = \sin x$ graafikut sirgega $y = \frac{1}{2}$ (joon. 70). Saadud lõikepunktide abstsissid on antud võrrandi lahendeiks. Nagu näeme, on antud võrrandil lõpmata palju lahendeid.

Absoluutväärtuselt väikseimaks lahendiks, nn. pealahendiks on $x = 30°$ ehk $x = \frac{\pi}{6}$ radiaani.

Siinusfunktsiooni perioodilisuse tõttu on lahendeiks ka

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}, \text{ kus } n \text{ on mistahes täisarv.}$$

Vastavad punktid on joonisel märgitud kriipsukesega.

Jooniselt näeme, et $\sin x = \frac{1}{2}$ ka siis, kui

$$x = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ kus } n \text{ on mistahes täisarv.}$$

Vastavad punktid on joonisel märgitud ringikestega.

Et $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, siis on antud võrrandi lahendeiks nii

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

kui ka

$$x = (2n + 1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Need x avaldised võib aga kokku võtta üheks avaldiseks

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}, \text{ kus } k \text{ on mistahes täisarv.}$$

Tõepoolest, asendades siin üks kord $k = 2n$ ja teine kord $k = 2n + 1$, saame eelmised avaldised.

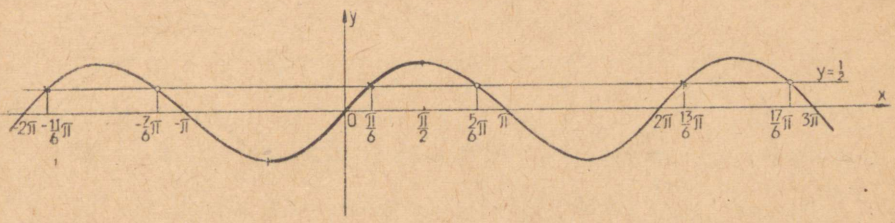
Niisiis on võrrandi $\sin x = \frac{1}{2}$ kõik lahendid antud valemiga $x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$, kus k on mistahes täisarv. Seepärast nimetataksegi seda valemit antud võrrandi üldlahendiks.

Esita see üldlahend kraadides!

b) Lahendame võrrandi $\sin x = m$ üldjuhul, s. t. et m on mingi arv, mis rahuldab tingimust $-1 \leqslant m \leqslant 1$.

Väikseima absoluutväärtusega nurka, mille siinus on m, nimetatakse arkussiinus m ja tähistatakse sümboliga arcsin m, s. t.

$$\sin(\arcsin m) = m.$$



Joon. 70.

Joonisel 70 on sinussoidi see osa, mis vastab absoluutväärtuselt väikseimatele nurkadele, joonestatud paksemalt. Seega

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin m \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Näiteks,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arcsin(-1) = -90° = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0°.$$

Punktis a) esitatud mõttekäiku korrates saame, et võrrandi $\sin x = m$

pealahendiks on $x = \arcsin m$

ja

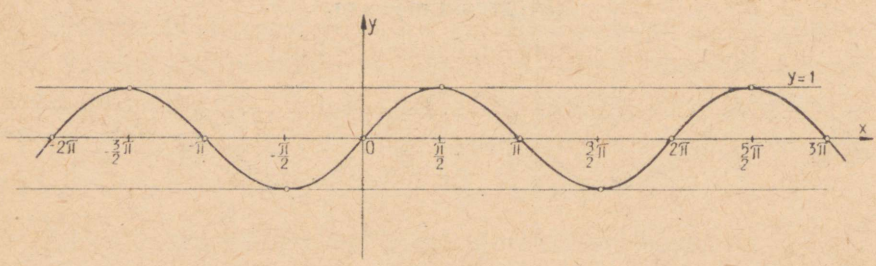
üldlahendiks on $x = k\pi + (-1)^k \arcsin m$,

kus k on mistahes täisarv.

c) Lahendame võrrandi $\sin x = m$ juhtudel, kui $m = 1$, -1 ja 0.

Sirged $y = 1$ ja $y = -1$ ei lõika sinussoidi $y = \sin x$, vaid ainult puudutavad teda (joon. 71). Seetõttu võrrandi

$$\sin x = 1$$



Joon. 71.

pealahendiks on $x = \frac{\pi}{2}$ ja üldlahendiks on $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kus k on mistahes täisarv.

Võrrandi

$$\sin x = -1$$

pealahendiks on $x = -\frac{\pi}{2}$ ja üldlahendiks on $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = (4k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kus k on mistahes täisarv.

Kui $m = 0$, siis ka $\arcsin m = 0$ ning võrrandi

$$\sin x = 0$$

pealahendiks on $x = 0$ ja üldlahendiks on $x = k\pi$, kus k on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

405. Leia:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$
2) $\sin[\arcsin(-1)]$
3) $\sin(\arcsin 0{,}463)$
4) $\sin[\arcsin(-0{,}8461)]$

406. Esita võrrandi $\sin x = m$ üldlahend, kui tema pealahend on:

1) $x = 35°$
2) $x = -62°12'$
3) $x = 0°52'$
4) $x = -\frac{\pi}{8}$
5) $x = \frac{\pi}{3}$
6) $x = -0{,}3\pi$

407. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin(-0{,}75)$.

408. Konstrueeri nurk ja leia selle suurus, kui

1) $\arcsin 0{,}8$; $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$.

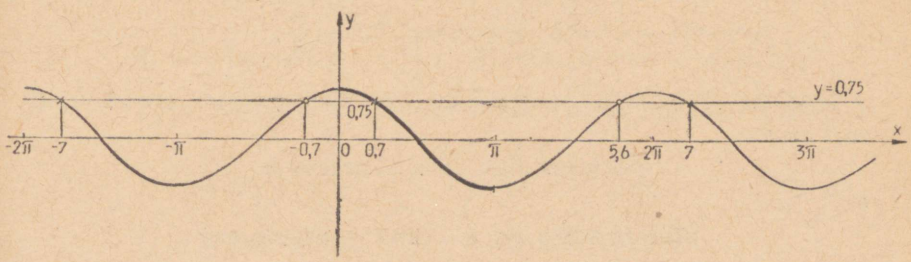
409. Lahenda võrrandid:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2) $\sin x = 0$
3) $\sin x = 0{,}849$
4) $\sin x = -\frac{2}{5}$
5) $\sin x = 0{,}3156$
6) $\sin x = 0{,}0087$
7) $\sin x = 0{,}4051$
8) $\sin x = 0{,}0456$

2) Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine.

Teame, et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, seega ka $-1 \leqslant m \leqslant 1$.

a) Olgu ülesandeks lahendada võrrand $\cos x = 0{,}75$. Lõikame funktsiooni $y = \cos x$ graafikust sirgega $y = 0{,}75$ (joon. 72). Saadud lõikepunktide abstsissid on antud võrrandi lahendeiks. Nagu jooniselt näeme, on sellel võrrandil lõpmata palju lahendeid.



Joon. 72.

Väikseimaks positiivseks lahendiks, nn. pealahendiks on $x = 41°25'$ ehk $x = 0{,}7246$ radiaani. Koosinusfunktsiooni perioodilisuse tõttu on antud võrrandi lahendeiks ka väärtused

$$x = 2n\pi + 0{,}7246,$$

kus n on mistahes täisarv.

Jooniselt näeme, et $\cos x = 0{,}75$ ka siis, kui

$x = 2n\pi - 0{,}7246$, kus n on mistahes täisarv.

Saadud x avaldised võib kokku võtta üheks avaldiseks

$$x = 2n\pi \pm 0{,}7246, \text{ kus } n \text{ on mistahes täisarv.}$$

See valem on võrrandi $\cos x = 0{,}75$ **üldlahendiks.**

Esita see üldlahend kraadides!

b) Lahendame võrrandi $\cos x = m$ üldjuhul, s. t. m on mingi arv, mis rahuldab tingimust $-1 \leqslant m \leqslant 1$.

Võtame teadmiseks, et

väikseimat positiivset nurka, mille koosinus on m, nimetatakse arvu m arkuskoosinuseks ja tähistatakse sümboliga arccos m, s. t.

$$\cos(\arccos m) = m.$$

Joonisel 72 on funktsiooni $y = \cos x$ graafiku see osa, mis vastab väiksematele positiivsetele nurkadele, joonistatud paksemalt. Näeme, et

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi.$$

Näiteks,

$$\arccos \frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}; \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45° = \frac{\pi}{4};$$

$$\arccos 1 = 0° = 0; \quad \arccos 0 = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

Punktis a) esitatud mõttekäiku korrates saame, et võrrandi $\cos x = m$

pealahendiks on $x = \arccos m$

ja

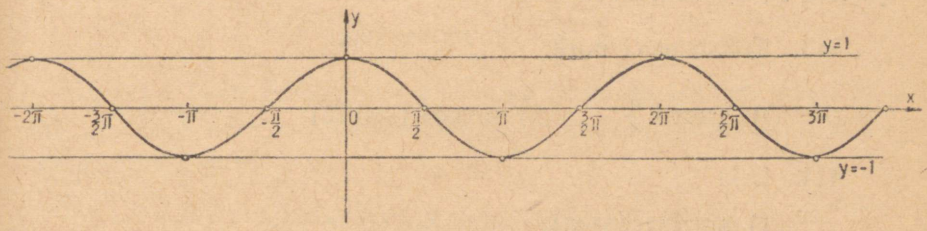
üldlahendiks on $x = 2n\pi \pm \arccos m$,

kus n on mistahes täisarv.

c) Lahendame võrrandi $\cos x = m$ juhtudel, kui $m = 1$, -1 ja 0.

Sirged $y = 1$ ja $y - 1$ ei lõika funktsiooni $y = \cos x$ graafikut, vaid ainult puudutavad teda (joon. 73). Seetõttu on võrrandi

$$\cos x = 1$$



Joon. 73.

pealahendiks $x = 0$ ja üldlahendiks $x = 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.

Võrrandi

$$\cos x = -1$$

pealahendiks on $x = \pi$ ja üldlahendiks $x = (2n + 1)\pi$, kus n on mistahes täisarv.

Võrrandi

$$\cos x = 0$$

pealahendiks on $x = \frac{\pi}{2}$ ja üldlahendiks $x = n\pi + \frac{\pi}{2} = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

410. Leia

1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

2) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

3) cos (arccos 0,462)

4) cos [arccos (—0,112)].

411. Esita võrrandi $\cos x = m$ üldlahendid, kui tema pealahendid on:

1) $x = 36°$

2) $x = 162°14'$

3) $x = 116°29'$

4) $x = \frac{4}{7}\pi$

5) $x = \frac{3}{4}\pi$

6) $x = \pi - 0{,}12$

412. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\arccos \frac{2}{3}$ 3) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\arccos 0{,}9673$ 5) $\arccos (-0{,}4848)$

ja leia nende väärtused.

413. Konstrueeri nurk:

1) $\arccos \frac{3}{4}$ 2) $\arccos (-0{,}25)$

414. Leia

1) $\sin (\arccos m)$
2) $\cos (\arcsin m)$

415. Lahenda võrrandid:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos x = \frac{1}{2}$ 4) $\cos x = 0{,}9646$

5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

7) $\cos x = -\frac{5}{7}$ 8) $\cos x = -0{,}3422$

3) Võrrandi $\tan x = m$ lahendamine.

a) Olgu ülesandeks lahendada võrrand $\tan x = 2$.

Lõikame funktsiooni $y = \tan x$ graafikut sirgega $y = 2$ (joon. 74). Saadud lõikepunktide abstsissid on antud võrrandi lahendeiks. Jooniselt näeme, et sellel võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Väikseima absoluutväärtusega lahendiks, s. o. pea-lahendiks on $x = 63°26'$ ehk $x = 1{,}1071$ radiaani. Tangens-funktsiooni perioodilisuse tõttu on antud võrrandi lahendeiks ka

$$x = n \cdot 180° + 63°26',$$ kus n on mistahes täisarv.

Et see valem annab kõigi lõikepunktide abstsissid, siis on ta võrrandi $\tan x = 2$ üldlahendiks.

Esita see üldlahend radiaanides!

b) Lahendame võrrandi $\tan x = m$ üldjuhul.

Võtame teadmiseks, et

väikseima absoluutväärtusega nurka, mille tangens on m, nimetatakse arvu m arkustangensiks ja tähistatakse sümboliga arctan m, s. t.

$$\tan(\arctan m) = m.$$

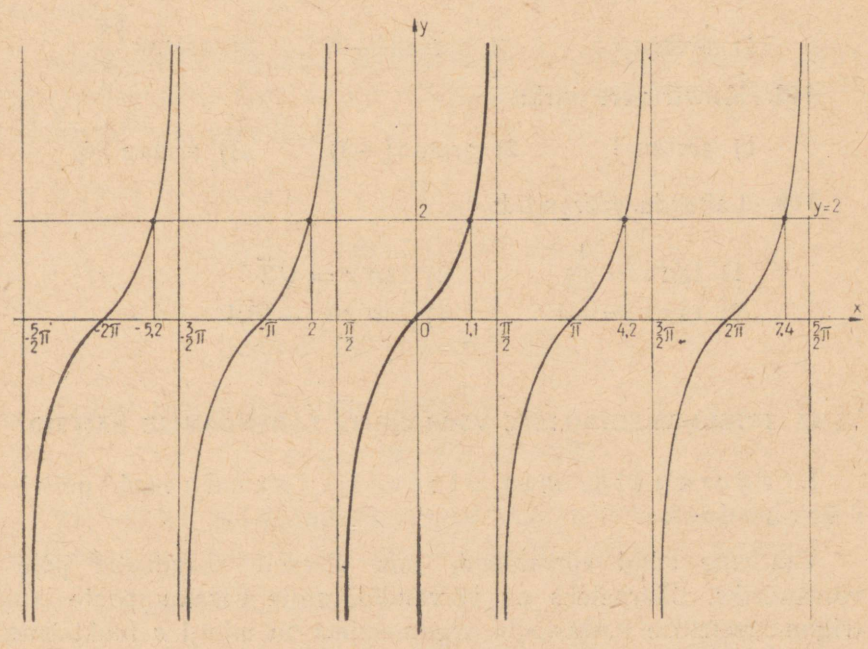
Joonisel 74 on funktsiooni $y = \tan x$ graafiku see osa, mis vastab absoluutväärtuselt väikseimatele nurkadele, joonestatud paksemalt. Näeme, et

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$

Näiteks on

$$\arctan 1 = 45° = \frac{\pi}{4};$$

$$\arctan(-14{,}30) = -86° = -1{,}501.$$



Joon. 74.

Punktis a) esitatud mõttekäiku korrates saame, et võrrandi $\tan x = m$

pealahendiks on $x = \arctan m$

ja

üldlahendiks on $x = n\pi + \arctan m$,

kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

416. Esita võrrandi $\tan x = m$ üldlahendid, kui tema pealahendid on:

1) $72°$
2) $-15°$
3) $-42°16'$
4) $\frac{2}{3}\pi$
5) $-\frac{\pi}{4}$
6) $-0{,}15\pi$

417. Selgita sümboli tähendus ja leia ta väärtus:

1) $\arctan 2{,}5$ 2) $\arctan(-3)$ 3) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$

418. Konstrueeri nurk:

1) $\arctan 3$ 2) $\arctan(-3)$ 3) $\arctan 1{,}5$.

419. Lahenda võrrandid:

1) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
2) $\tan x = \sqrt{2}$
3) $\tan x = -1$
4) $\tan x = -13{,}4$

§ 67. TRIGONOMEETRILISTE VÕRRANDITE LAHENDAMISE NÄITEID.

1. Võrrandid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks.

Vaatleme nüüd võrrandeid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks. Säärasteks on võrrandid, mille vasaku poole kui trigonomeetrilise funktsiooni argumendiks on mingi x funktsioon ning paremaks pooleks on mingi arv.

Niisugused on näiteks võrrandid

$$1)\ \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2)\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$3)\ \tan 4x = 1.$$

Selliste võrrandite lahendamisel vaatleme vasakul poolel esineva trigonomeetrilise funktsiooni argumenti abitundmatuna, sest siis on antud võrrand abitundmatu suhtes põhivõrrand. Näiteks võrrand

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

on $3x$ suhtes põhivõrrand; võrrand

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

on seda $2x + \frac{\pi}{3}$ suhtes ja võrrand

$$\tan 4x = 1$$

$4x$ suhtes.

Niisuguste võrrandite lahendamisel lahendame esmalt põhivõrrandi abitundmatu suhtes ning seejärel leiame otsitava abitundmatu väärtuste järgi.

Näide 1. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ehk

$$3x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot 60°.$$

Sellest võrrandist leiame nüüd x:

$$x = n \cdot 60° + (-1)^n \cdot 20°.$$

Kui saadud üldlahendi kirjutame kahe valemi abil, siis saame lihtsamad avaldised ja ka lahendite kontrollimine on kergem.

1) Võttes $n = 2k$, saame

$$x_1 = 2k \cdot 60° + 20° = 6k \cdot 20° + 20° = (6k + 1) \cdot 20°;$$

2) Võttes $n = 2k + 1$, saame

$$x_2 = (2k + 1) \cdot 60° - 20° = (6k + 3) \cdot 20° - 20° = (6k + 2) \cdot 20°.$$

Kontroll.

1) $\sin 3x = \sin [3 \cdot (6k + 1) \cdot 20°] = \sin [(6k + 1) \cdot 60°] =$
$= \sin (k \cdot 360° + 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

2) $\sin 3x = \sin [3 \cdot (6k + 2) \cdot 20°] = \sin [(6k + 2) 60°] =$
$= \sin (k \cdot 360° + 120°) = \sin 120° = \sin (180° - 120°) =$
$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Näide 2. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

$$2x + \frac{\pi}{3} = n \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$2x = n \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2};$$

$$x = n\pi - \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4}.$$

Selle üldlahendi võib kirjutada kahe sarjana:

$$x_1 = n\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{12};$$

$$x_2 = n\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{5\pi}{12}.$$

Kontroll.

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(n\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$
$= \cos\left(n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

2) $\cos\left[2\left(n\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(n \cdot 2\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$
$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

420. Lahenda võrrandid ja kontrolli lahendid:

1) $\tan 4x = 1$ 2) $3\cos\frac{x-45^\circ}{2} = 2$

3) $\tan 2x = -1$ 4) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

2. Võrrandid, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null.

Olgu lahendada võrrand

$$\sin 2x \cdot \cos 3x = 0.$$

See võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null, ja ka siis, kui teine tegur on null. Seega saame kaks võrrandit

$$\sin 2x = 0 \text{ ja } \cos 3x = 0.$$

Nende lahendamisel saame:

$2x = n \cdot 180^\circ$; $3x = n \cdot 360^\circ \pm 90^\circ$;

$x_1 = n \cdot 90^\circ$. $x = n \cdot 120^\circ \pm 30^\circ$ ehk

$x_2 = n \cdot 120^\circ + 30^\circ = (4n+1) \cdot 30^\circ$;

$x_3 = n \cdot 120^\circ - 30^\circ = (4n-1) \cdot 30^\circ$.

Kontroll näitab, et kõik kolm sarja rahuldavad antud võrrandit.

Kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga, siis ei saa aga alati ütelda, et ka korrutis võrdub nulliga. Seda ei saa ütelda siis, kui ühe teguri nulliga võrdumise puhul mõni ülejäänud tegureist kaotab arvu tähenduse. Näiteks, kui võrrandis

$$\tan x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0,$$

$$\tan x = 0,$$

s. t.

$$x = n \cdot 180^\circ,$$

siis teine tegur kaotab arvu mõtte, sest kui

$$x = n \cdot 180^\circ,$$

siis

$\sin x = 0$ ja murrul $\frac{1}{\sin x}$ puudub arvu tähendus. Kui selle võr-

randi vasakus pooles teine tegur

$$1 - \frac{1}{\sin x} = 0$$

ehk

$$\sin x = 1,$$

millest

$$x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot 90°,$$

siis esimesel teguril puudub arvu tähendus.

Niisiis, kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga ja teised tegurid sel puhul omavad arvu tähendust, siis korrutis võrdub nulliga.

Siit saame juhise:

et lahendada võrrandit, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null, võrrutame nulliga iga teguri eraldi, lahendame saadud võrrandid ja kõrvaldame lahendite hulgast need, mille puhul mõnel teguritest puudub arvu tähendus.

Näide 1. $\sin 2x \cdot \tan x = 0.$

$\sin 2x = 0;$ $\quad \tan x = 0;$
$2x = n \cdot 180°;$ $\quad x_2 = n \cdot 180°.$
$x_1 = n \cdot 90°.$

Lahendite sari x_2 rahuldab võrrandit, kuna sel korral on vasaku poole mõlemal teguril arvu tähendus. Kuid sari x_1 ei ole võrrandi lahendiks paarituarvulise n korral, sest $\tan(n \cdot 90°)$ ei oma siis arvu tähendust; paarisarvulise m korral annab see sari samad lahendid mis sari x_2.

Seega on antud võrrandi ainsaks lahendiks

$$x = n \cdot 180°.$$

Kui võrrandi parem pool on null ja vasak pool ei ole korrutis, kuid on korrutiseks teisendatav, siis teeme seda ning lahendame edasi nii, nagu eespool kirjeldatud.

Näide 2. $1 + \sin x + \cos 3x + \sin x \cos 3x = 0.$

Lahutades vasaku poole tegureiks, saame

$$1 + \sin x + \cos 3x(1 + \sin x) = 0;$$
$$(1 + \sin x)(1 + \cos 3x) = 0.$$

Siit saame:

$1 + \sin x = 0;$ $\quad 1 + \cos 3x = 0;$

$\sin x = -1;$ $\quad \cos 3x = -1;$

$x_1 = (4n - 1) \cdot 90°.$ $\quad 3x = n \cdot 360° \pm 180°;$

$x = n \cdot 120° \pm 60°;$

$x = (2n \pm 1)60°.$

Et sari $(2n - 1) \cdot 60°$ on samane sarjaga $(2n \pm 1) \cdot 60°$, siis

$$x_2 = (2n + 1) \cdot 60°.$$

Mõlemad sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

421. Jaota täisnurk kahte ossa nii, et nende siinuste suhe oleks $1 : \sqrt{3}$.

422. Lahenda võrrandid:

1) $2 \sin x - 1 = 0$ $\quad$ 2) $\sin 6x = 0{,}5$

423. Lahenda võrrandid:

1) $2 \cos (2x - 60°) + 1 = 0$ $\quad$ 2) $3 \tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) $\cos x \sin x - 0{,}25 = 0$ $\quad$ 4) $\sin (x + 40°) = 1$

424. Lahenda võrrandid:

1) $(2 \tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$

2) $(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

425. Lahenda võrrandid:

1) $\tan^2 x - \tan x = 0$ $\quad$ 2) $\sin^2 x = \sin x$

3) $\tan^3 x = 3 \tan x$ $\quad$ 4) $\sin^2 x - \cos x = 0$

426. Lahenda võrrandid:

1) $\sin 2x = \sin (x - 90°)$ $\quad$ 2) $\cos 4x + \cos x = 0$

3) $\sin^2 4x - \sin 4x \sin 2x = 0$

427. Täisnurkse kolmnurga nurkade siinused moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

428. Täisnurkse kolmnurga poolnurkade tangensid moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

429. Täisnurkse kolmnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on võrdne hüpotenuusil asuvate kaatetite projektsioonide vahega. Leia kolmnurga nurgad.

430. Lahenda võrrandid:

1) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$
2) $\tan x + 3 \cot x = 4$
3) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$
4) $\cos^2 x + \cos 2x = \frac{1}{2}$
5) $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x = 0$
6) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$
7) $\cos 2x + \cos x = 0$

431. Arvuta võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub tipunurga kahekordse siinusega.

432. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg kahe teise külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

433. Ruudusse on joonestatud teine ruut. Arvuta ruutude külgede vaheline väiksem nurk, teades, et ruutude pindalade suhe on 1,5.

434. Lahenda võrrandid:

1) $\cos^2 x = 0{,}25$
2) $\cos (2x + 45°) = 0$
3) $(4 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$
4) $\sin 2x + \sin x = 0$
5) $\sin^2 2x = \cos^2 x$
6) $\cos 2x + \cos x = 0$
7) $\cos 3x = \cos (60° - x)$
8) $\sin 4x = \sin 2x$
9) $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$
10) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$
11) $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$
12) $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$
13) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$
14) $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$

KORDAMISÜLESANDEID.

435. Lihtsusta avaldist $\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$.

436. Tõesta, et $\sin x \cdot \cot x = \cos x$.

437. Tõesta, et $\cos x \cdot \sin x \cdot \tan x = 1 - \cos^2 x$.

438. Tõesta, et $\frac{\cos (90 - x)}{\cos x} = \tan x$.

439. Lihtsusta avaldist $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

440. Lihtsusta avaldist $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

441. Tõesta, et

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x).$$

442. Tõesta, et

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x).$$

443. Tõesta, et $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

444. Teades, et $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, avalda $\tan x + \cot x$ suuruste a ja b kaudu.

445. Avalda x kaudu avaldis $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, teades, et $\tan\alpha = x$ ja $\tan\beta = \frac{1}{x}$.

446. Kolmnurgas ABC on $\sin B = \frac{1}{3}$ ja $\sin C = \frac{1}{2}$. Leia $\sin A$.

447. Rööpkülikus $ABCD$ on $\sin B = \frac{3}{5}$ ja $\sin C = \frac{1}{4}$. Leia suhe $AB : BC$.

448. Kuidas saab funktsiooni $y = \sin x$ graafikust funktsiooni $y = |\sin x|$ graafiku? Kas viimane on perioodiline funktsioon? Kui suur on periood?

449. Joonesta funktsiooni $y = |\cos x|$ graafik.

450. Arvuta peast:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\pi$
2) $\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}$
3) $\tan 60° \sin 90°$
4) $\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\sin\pi$
5) $\cot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$
6) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{3}$
7) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
8) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\arccos(-1)$

451. Arvuta:

1) $x + \cos x$, kui $x = 1{,}295$
2) $x + \cos\frac{1}{x}$, kui $x = \pi$

452. Lihtsusta avaldisi:

1) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3\cos^2\frac{\alpha}{2}$
2) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha$
3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$
4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$

5) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$

6) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$

453. Tõesta, et

1) $\cos(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)=0$

2) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$

454. Lihtsusta algul avaldist ja arvuta siis ta väärtus.

1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, kui $\alpha=60°$ ja $\beta=30°$

2) $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\beta}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\beta}}\right)^2$, kui $\alpha=48°$ ja $\beta=45°$

455. Lahenda võrrandid:

1) $3(1-\sin x)=1+\cos 2x$

2) $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-2}{\sin^2 2x(1+\cot^2 2x)}=\frac{1}{2}$

3) $\frac{(\cos x+\sin x)^2-\sin 2x}{\cos^4 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x}=2$

4) $\cos x^2=1$

5) $\sin|x|=1$

6) $|\sin x|=1$

456. Taanda ja lahenda seejärel võrrand

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$$

457. Jaga võrrandi liikmed avaldisega $\cos x$ ja lahenda seejärel saadud võrrand:

1) $\sin x=-\cos x$

2) $2\sin x-3\cos x=0$

3) $2\sin x+3\cos x=0$

4) $\sin x=\cos x$

458. Lahenda võrrandid:

1) $1-\cos x=\sin\frac{x}{2}$

2) $\sin(x-60°)=\cos(x+30°)$

459. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja diagonaaliga nurga α.

Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a = 4$ m; $\alpha = 20°$;
2) $a = 36$ mm; $\alpha = 32°$;
3) $a = 345$ mm; $\alpha = 67°20'$.

460. Täisnurksest kolmnurgast on teada kaateti a ja hüpotenuusi c ligikaudsed väärtused (veaga mitte üle poole viimase koha ühikut):

1) ühe tüvenumbriga, näiteks $a = 3$ m, $c = 5$ m;
2) kahe tüvenumbriga, „ $a = 3{,}5$ cm, $c = 5{,}8$ cm;
3) kolme tüvenumbriga, „ $a = 153$ mm, $c = 342$ mm.

Arvuta antud kaateti vastasnurga siinuse tõkked ja seejärel nurga tõkked.

Kuidas on sobiv ümardada tulemust juhul, kui pikkusmõõdud on antud ühe tüvenumbriga? kahe tüvenumbriga? kolme tüvenumbriga?

§ 68. VEA ÜLEMMÄÄR NURGA ARVUTAMISEL.

Kui lineaarsed andmed (pikkused) nurga arvutamiseks on saadud mõõtmise teel, siis on nad ligikaudsed arvud, mistõttu ka nurga suurus kui arvutustulemus on ligikaudne. Selle tulemuse ümardamisel peame teadma, kui suur viga võib ülimalt tekkida nurga arvutamisel. Selgitame nurga vea ülemmäära leidmist näidete varal.

N ä i d e 1. Laste mänguväljakul oleval muruplatsil on täisnurkse kolmnurga kuju, mille üks kaatet on 35 m ja hüpotenuus 60 m. Kui suured on selle muruplatsi teravnurgad?

L a h e n d u s. Paneme tähele, et kolmnurga külgede pikkused on siin mõõdetud veaga mitte üle 0,5 m.

Arvutame 35-meetrise kaateti vastasnurga suuruse tõkked.

Tähistades selle nurga tähega α, saame sin α ülemtõkkeks

$$\frac{35{,}5}{59{,}5} = \frac{71}{119} = 0{,}597;$$

seega nurga α enda ülemtõkkeks on

$$\arcsin 0{,}597 = 36°42'.$$

sin α alamtõkkeks saame

$$\frac{34{,}5}{60{,}5} = \frac{69}{121} = 0{,}571,$$

millest nurga α enda alamtõkkena leiame

$$\arcsin 0{,}571 = 34°48'.$$

Ligikaudse suuruse kõige tõenäolisemaks väärtuseks loetakse ta ülemtõkke ja alamtõkke aritmeetilist keskmist. Niisiis

$$\alpha \approx \frac{36°42' + 34°48'}{2} = 35°45'.$$

Ligikaudse suuruse ülemtõkke ja alamtõkke vahet nimetatakse ligikaudse suuruse **kõikumisvahemikuks.**

Meie näites nurga α kõikumisvahemik on

$$36°42' - 34°48' = 1°52' \approx 2°.$$

Pool kõikumisvahemikust kannab ligikaudse suuruse **absoluutse vea ülemmäära** nime.

Antud juhul nurga α absoluutse vea ülemmäär on $2° : 2 = 1°$. Sümbolites märgitakse seda nõnda: $\Delta\alpha = 1°$ (kus kolmnurkne sümbol on kreeka suur täht «delta»).

Et nurga α arvutamisel viga võib küündida 1°-ni, siis pole otstarbekohane vastuses näidata minuteid; vastuseks saadav arv tuleb ümardada kraadideni: $35°45' \approx 36°$.

Vastuse kirjutame nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 1°),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 1°».

Absoluutse vea ülemmäära ja ligikaudse arvu suhet nimetatakse ligikaudse arvu **relatiivse vea ülemmääraks.** See suhe antakse tavaliselt protsentides.

Meie näites on nurga α relatiivse vea ülemmääraks

$$1° : 36° = 0{,}028 \approx 0{,}03 = 3\%.$$

Tulemuse võib nüüd kirjutada ka nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 3\%),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 3%».

Ülesandes esineva muruplatsi teine nurk $\beta \approx 54°$ ($\pm 1°$) ehk $\beta \approx 54°(\pm 2\%)$.

Näide 2. Ristküliku alus on 564 mm, kõrgus 162 mm. Kui pikk on selle ristküliku diagonaal ja kui suure nurga moodustab diagonaal alusega?

Lahendus. Et pikkused on mõõdetud millimeetrise täpsusega, siis vea ülemmääraks on siin 0,5 mm.

Diagonaali arvutamisel võtame arvesse, et andmed on kolme tüvenumbriga arvud, mistõttu ka tulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks, ümardades seejuures vahepealsed tulemused nelja tüvenumbriga arvudeks.

Tähistades aluse tähega a, kõrguse tähega h ja diagonaali tähega d, saame:

$$\begin{aligned} a^2 &= 162^2 \approx 26\,240; \\ h^2 &= 569^2 \approx 328\,000; \\ \hline d^2 &\approx 355\,000; \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{355\,000} = 595{,}8 \approx 596.$$

Diagonaali ja aluse vahelise nurga α tangensi ülemtõke on

$$\frac{162{,}5}{568{,}5} = 0{,}2858.$$

millest nurga α ülemtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2858 = 15°57'.$$

Arvutades $\tan\alpha$ alamtõket, leiame

$$\frac{161.5}{569{,}5} = 0{,}2835,$$

millest nurga α enda alamtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2835 = 15°50'.$$

Nurga α absoluutse vea ülemmäära arvutamisel leiame, et

$$\Delta\alpha = \frac{15°57' - 15°50'}{2} \approx 4'.$$

Nurga α kõige tõenäolisem väärtus on

$$\alpha = \frac{15°57' + 15°50'}{2} = 15°54'.$$

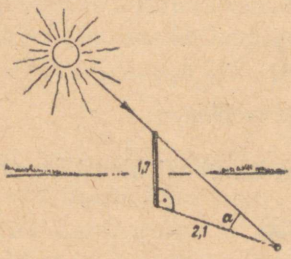
Seega $\alpha \approx 15°54'(\pm 04')$ ehk $\alpha \approx 15°54'(\pm 0{,}4\%)$.

Ülesandeid.

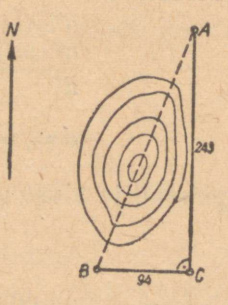
461. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on ligikaudu 4 m ja 6 m. Arvuta hüpotenuus ja nurgad. Nurga arvutamisel leia absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär. Ümarda tulemused vastavalt andmetele.

462. Tarvis on joonestada täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on 372 mm ja hüpotenuus 943 mm. Kui pikk tuleb teine kaatet ja kui suured tulevad nurgad? Kui suur viga võib tekkida nurkade arvutamisel?

463. Päikese kõrgusnurga α määramiseks löödi maa sisse püsti teivas, mille maapealse osa pikkuseks jäi 1,7 m; teiba varju pikkus oli 2,1 m (joon. 75). Arvuta Päikese kõrgusnurk α varju mõõtmise momendil.

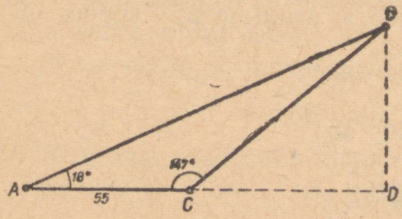


Joon. 75.

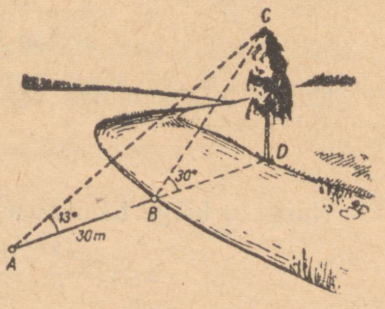


Joon. 76.

464. Punktide A ja B vahele on tarvis ehitada tunnel (joon. 76). Punkt C on valitud nõnda, et kolmnurk ABC on täisnurkne, kusjuures $BC = 94$ m ja $AC = 234$ m. Kui pikk tuleb ehitatav tunnel?



Joon. 77.



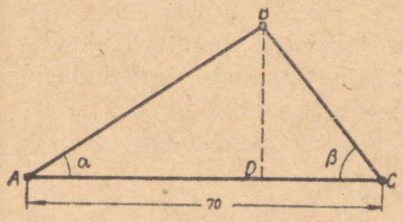
Joon. 78.

Kui suure nurga moodustab tunneli siht AB põhja-lõuna sihiga AC ja kui suure nurga ta moodustab ida-lääne sihiga?

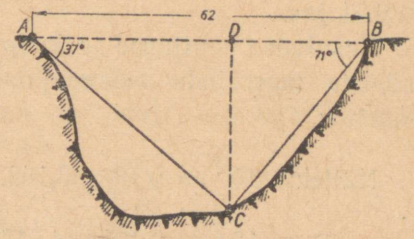
465. Arvuta nürinurkse kolmnurga ABC kõrgus BD, teades, et alus $AC = 55$ mm, alusnurk $BAC = 18°$ ja alusnurk $ACB = 147°$ (joon. 77).

466. Jõe laiuse BD mõõtmiseks märgiti BD sihis pikkus $AB = 30$ m (joon. 78). Jõe teisel kaldal vee piiril kasvava puu latv C paistab punktist A nurgas 13° ja punktist B nurgas 30°. Kui lai on jõgi?

467. Kolmnurga ABC alus $AC = 70$ mm, nurk $\alpha = 32°20'$ ja nurk $\beta = 50°20'$ (joon. 79). Arvuta kõrgus BD.



Joon. 79.



Joon. 80.

468. Üle oru punktide A ja B vahele hakatakse ehitama silda (joon. 80). Tugisamba DC kõrguse leidmiseks mõõdeti punkti C alangunurgad DAC ja DBC. Arvuta samba DC pikkus, teades, et $AB = 62$ m, $\angle DAC = 37°$ ja $\angle DBC = 71°$.

VI. KÜMNENDLOGARITMID.

§ 69. KÜMNE ASTMED.

Täisarvulise astendajaga kümne astmed on järguühikud: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ jne.; $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-2} = 0{,}01$ jne.

Kasutades ruutjuure ja kuupjuure tabeleid, saame leida ka mõnede murruliste astendajatega kümne astmete ligikaudseid väärtusi.

Näiteks: $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162$,

$$10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = 4{,}642.$$

Mõnikord on otstarbekas järguühikuid kirjutada kümne astmetena: 1 000 000 asemel on lihtsam kirjutada 10^6; 0,00001 asemel 10^{-5} jne.

Leia eeskiri, mille järgi saab järguühikut kirjutada kümne astmena!

Arvu, mis pole järguühik, näiteks 2, saab esitada kümne astmena, kui võrrandil

$$10^x = 2$$

on lahend olemas. Selgub, et x ei saa olla täisarv, sest täisarvulise astendaja kümne aste on järguühik. Kui x oleks murd, siis peaks kehtima võrdus

$$10^{\frac{m}{n}} = 2 \quad (m \text{ ja } n \text{ on täisarvud}).$$

Astendades võrduse mõlemad pooled arvuga n, saame

$$10^m = 2^n,$$

mis on vastuoluline, sest 10^m on järguühik, 2^n aga pole järguühik. Seega ei ole selle võrrandi lahendiks ka murd.

On võimalik näidata, et igal võrrandil $10^x = a$ on kas täpne

täisarvuline lahend või seda lahendit saab esitada kuitahes suure täpsusega kümnendmurru abil.

Ülesandeid.

469. Leia tabelite abil $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{-\frac{1}{2}}$, $10^{-\frac{3}{2}}$, $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{-\frac{4}{3}}$.

§ 70. KÜMNENDLOGARITMI DEFINITSIOON.

Võrrandi

$$10^x = a$$

lahendit x nimetatakse arvu a **kümnendlogaritmiks** *ja tähistatakse sümboliga*

$$\log a.$$

Seega,

arvu kümnendlogaritm on astendaja, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Näiteid. $\log 100 = 2$, sest $10^2 = 100$;
$\log 0{,}1 = -1$, sest $10^{-1} = 0{,}1$;
$\log 2 = 0{,}3010$, sest $10^{0{,}3010} = 2$.[1]

Üldiselt,

$$\boxed{\log a = b, \text{ kui } 10^b = a}$$

Et arvu a kümnendlogaritm (lühidalt $\log a$) tähendab astendajat, millega kümmet astendades saame arvu a, siis peab kehtima samasus

$$\boxed{10^{\log a} = a}$$

Näiteid.

$10^{\log 100} = 100$;
$10^{\log 0{,}1} = 0{,}1$;
$10^{\log 2} = 2$ jne.

Märkus. Negatiivsetel arvudel ja arvul 0 puudub kümnendlogaritm, sest ei ole olemas arvu, millega kümmet astendades saaksime negatiivse arvu või arvu null.

[1] Kuigi siin ei kehti täpne võrdus, on kokku lepitud kasutada arvu logaritmi üleskirjutamisel võrdusmärki.

Ülesandeid.

470. Leia järgmised kümnendlogaritmid:
log 10 000, log 1000, log 10, log 1, log 0,1, log 0,01, log 0,001.

471. Sõnasta eeskiri, mille järgi saab leida kümnendlogaritmi järguühikutest.

472. Kasutades samasust $10^{\log a} = a$, arvuta:
$10^{\log 2}$, $10^{\log 7}$, $10^{\log 1}$, $10^{\log 2{,}5}$.

473. Kirjuta järgmised arvud kümne astmetena:

$3,\ 5,\ 0{,}7,\ b,\ x,\ ab,\ \frac{a}{b}$.

474. Teisendades antud astmed astmete korrutiseks, leia:
$10^{\log 2 + \log 3}$, $10^{\log 4 + \log 3}$, $10^{\log 5 + \log 2}$,
$10^{\log 3 + \log 5 + \log 2}$, $10^{1 + \log 3}$.

475. Teisendades antud astmed astmete jagatiseks, leia:
$10^{\log 6 - \log 2}$, $10^{\log 12 - \log 4}$, $10^{\log 8 - \log 2 - \log 2}$,
$10^{2 - \log 5}$, $10^{\log 8 - \log 2 = \log 2}$.

476. Teisendades antud astmed astme astmeks, leia:

$$10^{2 \log 5},\ 10^{3 \log 3},\ 10^{-2 \log 4},\ 10^{\frac{1}{2} \log 4}.$$

§ 71. KORRUTISE, JAGATISE, ASTME JA JUURE LOGARITM.

1. Korrutise logaritm.

Kümnendlogaritmi definitsiooni põhjal

$$10^{\log a} = a,$$
$$10^{\log b} = b.$$

Korrutades nende võrduste vastavad pooled, saame

$$10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = a \cdot b$$

ehk

$$10^{\log a + \log b} = a \cdot b.$$

Kümnendlogaritmi definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\log ab = \log a + \log b,$$

sest arvu 10 tuleb astendada summaga $\log a + \log b$, et saada ab. Niisiis,

korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

2. Astme logaritm.

Astendades võrduse

$$10^{\log a} = a$$

mõlemad pooled mistahes ratsionaalarvuga r, saame

$$(10^{\log a})^r = a^r$$

ehk

$$10^{r \log a} = a^r,$$

millest jällegi kümnendlogaritmi definitsiooni põhjal järeldub, et

$$\log a^r = r \log a.$$

Seega,

astme logaritm võrdub astme aluse logaritmi ja astendaja korrutisega.

3. Jagatise logaritm.

Et $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, siis leiame jagatise logaritmi kasutades juba tuntud korrutise ja astme logaritmi.

$$\log \frac{a}{b} = \log (a \cdot b^{-1}) = \log a + \log b^{-1} = \log a - \log b,$$

s. o.

jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega;

4. Juure logaritm.

Et juur on murrulise astendajaga aste, siis

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a = \frac{\log a}{n},$$

s. o.

juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

Teades, et $\log 2 = 0{,}3010$ ja $\log 3 = 0{,}4771$, saame tõestatud teoreeme rakendades leida $\log 6$; $\log 1{,}5$; $\log 4$; $\log 8$; $\log 32$; $\log \sqrt{3}$ jne.

$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781.$
$\log 1{,}5 = \log(3 : 2) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761.$
$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}9030.$
$\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3 = 0{,}4771 : 2 = 0{,}2386.$

Ülesandeid.

477. Teades, et $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 5 = 0{,}6990$ ja $\log 7 = 0{,}8451$, arvuta:

1) $\log 14$; $\log 35$; $\log 1{,}4$; $\log 0{,}4$; $\log 25$.

2) $\log \frac{7}{5}$; $\log 125$; $\log \sqrt[3]{7}$; $\log 5^4$.

§ 72. AVALDISE LOGARITM.

Rakendades teoreeme korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi kohta, saame leida üksliikmete logaritme.

Näide 1. $\log \frac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c.$

Näide 2. $\log \frac{a\sqrt[3]{c}}{b^2 d} = \log a\sqrt[3]{c} - \log b^2 d = \log a + \log \sqrt[3]{c} -$

$$- (\log b^2 + \log d) = \log a + \frac{1}{3} \log c - (2 \log b + \log d) =$$

$$= \log a + \frac{1}{3} \log c - 2 \log b - \log d.$$

Murdavaldise logaritmi leidmine muutub lihtsamaks, kui murdavaldise esitame täisavaldisena, kasutades selleks negatiivseid astendajaid. Ka juuri on soovitav kirjutada murrulise astendajaga astmetena.

Ülesandeid.

478. Leia järgmiste avaldiste logaritmid:

1) abc 2) a^2x 3) $\frac{2a}{b}$ 4) $\frac{0{,}7\,a^2}{b}$ 5) $\frac{a+b}{c^2}$ 6) $a\sqrt[3]{b^2}$ 7) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$

8) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 9) $\frac{(a-b)^2}{c}$ 10) $\frac{(a+b)d}{(a-b)c}$ 11) $a\sqrt{b}$ 12) $\frac{a^2b}{c^4}$ 13) $\frac{d^2f\sqrt{e}}{h\sqrt{g}}$

14) $\frac{10\sqrt{a^2-b^2}}{a^2b^2}$ 15) $\sqrt[5]{(e+f)\sqrt{h}}$ 16) $\sqrt{\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}}$ 17) $\frac{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}{c}$

18) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{5}}}{c^{-1}d}$ 19) $\frac{x\sqrt[5]{y}}{\frac{a+b}{c}}$

479. Kasutades ülesandes 477 (lk. 226) antud arvude logaritme, arvuta:

1) $\log(2 \cdot 3 \cdot 7)$ 2) $\log \frac{5 \cdot 3}{2}$ 3) $\log(3^2 \cdot \sqrt{5})$

4) $\log \frac{5^3 \cdot \sqrt[3]{7}}{3^3}$ 5) $\log \frac{1}{2^5 \cdot \sqrt{3}}$

§ 73. KÜMNENDLOGARITMI OMADUSED.

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist (§ 71) ja teades, et $\log 2 = 0{,}3010$, saame arvutada $\log 20$; $\log 200$; $\log 2000$; $\log 0{,}2$; $\log 0{,}02$; $\log 0{,}002$ jne.

$\log 20 = \log(10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0{,}3010 = 1{,}3010$;

$\log 200 = \log(100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + 0{,}3010 = 2{,}3010$ jne.

$\log 0{,}2 = \log(0{,}1 \cdot 2) = \log 0{,}1 + \log 2 = -1 + 0{,}3010 = -0{,}6990$.

$-0{,}6990 = -1 + 0{,}3010$ asemel aga kirjutatakse $\bar{1}{,}3010$ (loe: üks miinusega koma 3010).

Niisugust kümnendmurdu, mille täisosa on negatiivne, murdosa aga positiivne, nimetatakse **poolnegatiivseks arvuks.**

$\log 0{,}02 = \log(0{,}01 \cdot 2) = \log 0{,}01 + \log 2 = -2 + 0{,}3010 = \bar{2}{,}3010$.

Teades, et $\log 3{,}728 = 0{,}5714$, võime samuti leida, et

$\log 37{,}28 = 1{,}5714$; $\log 0{,}3728 = \bar{1}{,}5714$;

$\log 372{,}8 = 2{,}5714$; $\log 0{,}03728 = \bar{2}{,}5714$;

$\log 3728 = 3{,}5714$; $\log 0{,}003728 = \bar{3}{,}5714$ jne.

$\log 37280 = 4{,}5714$ jne.

Esitatust selgub, et *arvu kümnendlogaritm on kümnendmurd, mille* **täisosa** *sõltub koma asukohast antud arvus ja alati positiivne* **murdosa** *sõltub arvu tüvest.*

Kümnendlogaritmi täisosa ja murdosa nimetatakse vastavalt ka tema **karakteristikuks** *ja* **mantissiks.**

Toodud näidete põhjal võime öelda, et

a) *arvust 1 suurema arvu kümnendlogaritmi täisosa on positiivne ja võrdub* $(n-1)$*-ga, kui arvul on* n *numbrit koma ees;*

b) *arvust 1 väiksema arvu kümnendlogaritmi täisosa on nega-*

tiivne ja selle absoluutväärtus võrdub nullide arvuga tüve ees (koma ees seisev null kaasa arvatud).

Näiteks arvu 287,4 kümnendlogaritmi täisosa on 2, sest koma ees on kolm numbrit. Arvu 0,00047 kümnendlogaritmi täisosa on $\overline{4}$, sest tüve 47 ees seisab neli nulli.

Ülesandeid.

480. Määra järgmiste arvude kümnendlogaritmide täisosad:

1) 32,4; 300; 4,576; 6; 0,643; 0,0007; 1,008; 100.

2) 23 000 000; 0,0080; 0,001; 682 397; 0,00006602; 1,5788.

§ 74. TEHTED POOLNEGATIIVSETE ARVUDEGA.

Ühest väiksemate positiivsete arvude kümnendlogaritmid on poolnegatiivsed arvud. Niisuguseid arve saab kirjutada negatiivse täisarvu ja positiivse murdosa summana.

Näiteks:

$$\overline{2},7409 = -2 + 0,7409.$$

See summa on negatiivne. Poolnegatiivset arvu saab muuta negatiivseks, kui arvutame negatiivse täisosa ja positiivse murdosa summa.

Nii on

$$\overline{2},7409 = -2 + 0,7409 = -1,2591,$$
$$\overline{1},7880 = -1 + 0,7880 = -0,2120,$$
$$\overline{3},0336 = -3 + 0,0336 = -2,9664 \text{ jne.}$$

Kui tahame negatiivset arvu teisendada poolnegatiivseks, toimime nii:

$$-1,2591 = -1 - 0,2591 = (-1 - 1) + (-0,2591 + 1) =$$
$$= -2 + 0,7409 = \overline{2},7409.$$

Siit selgub, et negatiivse arvu teisendamisel poolnegatiivseks peame täisosaga liitma -1 ja murdosa asemele kirjutama tema täienduse üheni. Lühidalt kirjutame:

$$-1+1$$
$$-1{,}2591 = \bar{2}{,}7409,$$
$$-1+1$$
$$-2{,}4240 = \bar{3}{,}5760,$$
$$-1+1$$
$$-0{,}6605 = \bar{1}{,}3395 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

481. Teisenda alljärgnevad poolnegatiivsed arvud negatiivseiks:

1) $\bar{1}{,}4462$; $\bar{2}{,}0738$; $\bar{5}{,}6804$; $\bar{1}{,}2480$; $\bar{3}.0073$.
2) $\bar{1}{,}0008$; $\bar{1}{,}6200$; $\bar{4}{,}7000$; $\bar{2}{,}2219$; $\bar{6}{,}3040$.
3) $\bar{1}{,}5999$; $\bar{2}{,}9990$; $\bar{3}{,}3001$; $\bar{4}{,}0048$; $\bar{1}{,}8548$.

482. Teisenda alljärgnevad negatiivsed arvud poolnegatiivseiks:

1) $-3{,}7082$; $-2{,}0563$; $-1{,}8455$; $-0{,}6639$; $-0{,}0470$.
2) $-0{,}5861$; $-2{,}0009$; $-4{,}9991$; $-0{,}2$; $-5{,}76$.
3) $-3{,}408$; $-4{,}4000$; $-0{,}02$; $-1{,}0001$; $-4{,}4739$.

*

Poolnegatiivseid arve saab liita ja lahutada nagu kümnendmurde, kirjutades neid üksteise alla nii, et vastavad järgud oleksid kohakuti. Siinjuures ei tohi aga unustada, et täisosad on negatiivsed!

Näide 1.
$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}8647 \\ + \\ \bar{1}{,}7438 \\ \hline \bar{2}{,}6085. \end{array}$$

Täisosade liitmisel peame silmas, et kümnendike liitmisel saime 16 kümnendikku. Siit saame ühe positiivse ühelise, mille liidame antud täisosadega

$$1+(-2)+(-1)=-2.$$

Näide 2.
$$\begin{array}{r} \dot{\bar{1}}{,}7608 \\ - \\ \bar{2}{,}9462 \\ \hline 0{,}8146 \end{array}$$

Täisosade lahutamisel peame silmas, et kümnendike lahutamiseks oli vähendatavas vaja üks üheline peenestada kümnendikeks (seda tähistab punkt vähendatava täisosa kohal). Selle tulemusena muutus vähendatava täisosa ühe võrra väiksemaks. Seega pärast kümnendike lahutamist on vähendatava täisosa —2 ja vahe täisosa on

$$-2-(-2)=0.$$

Näide 3. $\dot{2},\dot{7}648$

$$\underline{-\quad 4,4766}$$

$$\bar{2},2882$$

Ülesandeid.

483. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $\bar{1},7446+0,8367$
$\bar{1},5834+0,4293$
$2,6737-\bar{1},4636$
$0,6351-\bar{2},9442$

2) $\bar{4},6385-\bar{2},8856$
$\bar{1},9074+\bar{1},5229$
$2,1788-\bar{5},0669$
$\bar{3},4467-\bar{1},6262.$

3) $\bar{1},7735+\bar{2},6849+2,5327$
$4,3374+\bar{5},5228+\bar{1},5781+0,6117$
$\bar{3},0805+\bar{4},5901+5,3306+\bar{2},7717+0,4862$
$0,8840+\bar{8},6162+4,5287+\bar{5},5613+3,7494$

*

Poolnegatiivsete arvude korrutamisel ja jagamisel teisendame need üldiselt enne negatiivseteks, sooritame siis korrutamise või jagamise ja muudame tarbe korral saadud vastuse uuesti poolnegatiivseks.

Näiteid. 1) $1,2\cdot\bar{3},4675=1,2\cdot(-2,5325)=-3,0390=$
$=\bar{4},9610.$

2) $\bar{2},8896:2,4=-1,1104:2,4=-0,4627=$
$=\bar{1},5373.$

Erijuhtumeil, kui korrutaja või jagaja on naturaalarv, saab poolnegatiivseid arve korrutada ja jagada negatiivseks teisendamata.

Näide. $3 \cdot \bar{4},7708 = \bar{10},3124$.

Peame silmas, et $3 \cdot (-4) = -12$ ja 2 meeles annab -10.

Kui negatiivne täisosa jagub jagajaga, saame poolnegatiivse arvu kohe jagada.

Näide. $\bar{6},4672 : 2 = \bar{3},2336$.

Kui negatiivne täisosa ei jagu jagajaga, siis poolnegatiivse arvu kirjutame negatiivse täisosa ja positiivse murdosa summana. Seejärel täiendame täisosa negatiivse arvuni, mis jagub jagajaga. Positiivse murdosaga liidame aga selle täienduse vastandarvu, et summa ei muutuks, ja sooritame siis jagamise.

Näide. $$\bar{7},6438 : 3 = \overset{-2+2}{(-7} + 0,6438) : 3 =$$
$$= (-9 + 2,6438) : 3 =$$
$$= -3 + 0,8813 = \bar{3},8813.$$

Kasutades lühemat kirjutusviisi, saame viimast ülesannet lahendada ka nii:

$$\overset{-2+2}{\bar{7}},6438 : 3 = 3,8813,$$

kusjuures positiivne täiendus tuleb mõelda murdosa ette.

Ülesandeid.

484. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $2 \cdot \bar{2},1323$ 2) $\bar{1},5472 : 2$ 3) $\bar{2},7567 : 6$
$3 \cdot \bar{3},8813$ $\bar{8},4666 : 2$ $\bar{14},6735 : 5$
$4 \cdot \bar{1},7633$ $\bar{4},0833 : 3$ $\bar{5},1852 : 4$
$7 \cdot \bar{1},8043$ $\bar{9},4572 : 4$ $\bar{3},0051 : 3$

4) $\bar{1},4766 : 0,2$; $2,5 \cdot \bar{1},5825$; $7,5 \cdot \bar{3},7604$

§ 75. LOGARITMIDE TABELID.

Eespool nägime, et kui

$x = 100$, siis $\log x = 2$;
$x = 1000$, siis $\log x = 3$;
$x = 2$, siis $\log x = 0,3010$ jne.

Siit näeme, et kui avaldises log x vaadelda x muutuva suurusena, siis igale x väärtusele vastab avaldise log x kindel väärtus. See aga tähendab, et avaldis log x on muutuva suuruse x funktsioon. Valemi kujul kirjutatakse seda järgmiselt:

$$y = \log x,$$

kus y on funktsioon ja x argument. Sellist funktsiooni nimetatakse **logaritmfunktsiooniks.**

Kuna kümnendlogaritme kasutatakse laialdaselt arvutustöös, siis töö lihtsustamiseks on koostatud kümnendlogaritmide tabelid. Kuna kümnendlogaritmi täisosa on leitav peast, siis on tabelisse kantud ainult logaritmide murdosad. Vastavalt sellele, mitme kohaga on murdosa antud, nimetatakse logaritme ja ka tabeleid kolme-, nelja- jne. kohalisteks. Tabeli valik sõltub arvutustöö täpsusest. Et neljakohalised tabelid on piisavad enamiku igapäevases elus esinevate ülesannete lahendamiseks, siis vaatleme ainult neid.

Koolis kasutatava V. Bradise logaritmide tabeli abil saab leida ülimalt nelja tüvenumbriga arvu kümnendlogaritmi murdosa. Kui arvul on rohkem tüvenumbreid, siis ümardame selle neljale tüvenumbrile.

Näiteks: $27{,}4683 \approx 27{,}47$.
$397\,732 \approx 397\,700$ jne.

Selgitame arvu kümnendlogaritmi murdosa leidmist näite varal.

Väljavõte neljakohaliste logaritmide tabelist.

N	0	1	2	3	4	...	9	1	2	3	4	...	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	3010	3032	3054	3075	3096	...	3201	2	4	6	8	...	19
21	3222	3243	3263	3248	3304	...	3404	2	4	6	8	...	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	...	3598	2	4	6	8	...	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	...	3784	2	4	6	7	...	17
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Paranduste tabel

Tabeli esimesse, N-ga tähistatud veergu on trükitud arvu esimene ja teine tüvenumber, esimesse ritta aga kolmas tüvenumber. Sisenedes arvu kolme esimese tüvenumbri järgi tabelisse, leiame tabeli seest arvu kümnendlogaritmi murdosa.

Näiteks arvu 214 logaritmi murdosa on 3304,
„ 2,32 „ „ „ 3655,
„ 20,4 „ „ „ 3096,
„ 20,9 „ „ „ 3201,
„ 22 „ „ „ 3424
„ 2 „ „ „ 3010 jne.

Kui arvul on neli tüvenumbrit, siis kasutame arvu logaritmi murdosa leidmiseks paranduste tabelit.

Algul leiame logaritmi murdosa arvu esimese kolme tüvenumbri järgi, siis siirdume samal real paranduste tabelisse, kus on trükitud neljandale tüvenumbrile vastav parandus.

Näiteks arvu 2234 puhul saame 223 järgi murdosa 3483 ja paranduste tabelis 4 järgi paranduse 8. Seega arvu 2234 logaritmi murdosa on $3483+8=3491$. Samuti leiame, et

arvu 2321 logaritmi murdosa on 3657,
„ 2,002 „ „ „ 3014,
„ 0,2199 „ „ „ 3422,
„ 20,43 „ „ „ 3102,
„ 20,94 „ „ „ 3209 jne.

Arvu kümnendlogaritmi määramisel leiame tabelite abil arvu kümnendlogaritmi murdosa, kümnendlogaritmi täisosa aga leiame peast. Sel teel saame näiteks, et

$$\log 2234 = 3{,}3491,$$
$$\log 2{,}002 = 0{,}3014,$$
$$\log 0{,}02303 = \bar{2}{,}3623,$$
$$\log 209{,}1 = 2{,}3203.$$

Ülesandeid.

485. Leia alljärgnevate arvude kümnendlogaritmid.

1) 2,55; 67,3; 52; 40; 0,4; 0,0308; 0,01.
2) 28,62; 0,5323; 2,646; 705 200; 0,004508; 1,006.
3) 1,5848; 17 523; 832 960; 60 953; 0,0079527; 1,0008.

§ 76. ARVU LEIDMINE TEMA KÜMNENDLOGARITMI JÄRGI.

1. Arvu kümnendlogaritmi leidmise pöördtehteks on arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi, mida nimetatakse **antilogaritmi** leidmiseks.

Võrrandi

$$\log x = a$$

lahendamine nõuab kümne astendamist arvuga a. Selleks võime kasutada logaritmide tabelit, kusjuures antud kümnendlogaritmi a murdosa otsime tabeli seest ja kui see on leitud, siis saame x tüvenumbrid lugeda tabeli äärtelt. Koma asukoha aga määrame kümnendlogaritmi täisosa järgi.

Leiame näiteks x, kui $\log x = 1{,}3464$.

Leidnud tabeli seest kümnendlogaritmi murdosa 3464, saame tabeli äärtelt lugeda x tüvenumbrid 222. Koma asukoha määrame sellise kaalutlusega, et otsitava x kümnendlogaritmi täisosa oleks 1. See aga saab olla 1 ainult siis, kui x täisosas on kaks numbrit. Seega

$$x = 22{,}2.$$

Leiame x, kui $\log x = 0{,}3681$.

Kui oleme kindlaks teinud, et kümnendlogaritmi murdosa 3681 asub tabeliarvude 3674 ja 3692 vahel, siis määrame paranduse, mis tuleb liita väiksemale tabeliarvule, et saada antud kümnendlogaritmi murdosa. Käesoleval juhul on see $3681 - 3674 = 7$. Siirdudes real, millel seisab väiksem tabeliarv 3674, paranduste tabelisse, otsime sealt 7-ga võrdse või lähima paranduse; selle paranduse veerunumber annabki meile arvu neljanda tüvenumbri 4.

$$x = 2{,}334.$$

2. Kümnendlogaritmi järgi arvu leidmist hõlbustab veelgi antilogaritmide tabel.

Väljavõte antilogaritmide tabelist.

m	0	1	2	3	...	9	1	2	3	...	9
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..
,40	2512	2518	2523	2529	...	2564	1	1	2	...	5
,41	2570	2576	2582	2588	...	2624	1	1	2	...	5
,42	2630	2636	2642	2649	...	2685	1	1	2	...	6
,43	2692	2698	2704	2710	...	2748	1	1	2	...	6
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..

Paranduste tabel

Selle tabeli esimesse *m*-ga tähistatud veergu on trükitud arvu kümnendlogaritmi murdosa kaks esimest numbrit ja esimesse ritta kolmas number.

Sisenenud tabelisse kümnendlogaritmi murdosa kolme esimese numbri järgi, leiame tabelist arvu tüvenumbrid, milledele tuleb veel liita kümnendlogaritmi murdosa neljanda numbri järgi saadud parandus paranduste tabelist.

Näiteks leiame antilogaritmi tabelite abil x, kui

$$\log x = 2{,}4123.$$

Kümnendlogaritmi murdosa esimese kolme numbri 412 järgi leiame tabeli seest tüvenumbrid 2582. Samal real paranduste tabelist saame kümnendlogaritmi murdosa neljanda tüvenumbri 3 järgi paranduse 2. Seega on otsitava x tüvenumbrid 2584. Määranud kümnendlogaritmi täisosa (2) järgi koma asukoha, saame, et

$$x = 258{,}4.$$

Samuti leiame, et kui

$\log x = 0{,}4101$, siis $x = 2{,}571$,
$\log x = \bar{2}{,}4333$, siis $x = 0{,}02712$,
$\log x = 4{,}4009$, siis $x = 25\,170$,
$\log x = \bar{1}{,}0377$, siis $x = 0{,}1091$,
$\log x = 1{,}0086$, siis $x = 10{,}20$ jne.

Ülesandeid.

486. Leia x, kui:

1) $\log x = 2{,}5478$; $\log x = \overline{1}{,}8035$; $\log x = 0{,}1703$.
2) $\log x = \overline{3}{,}3350$; $\log x = 4{,}8751$; $\log x = \overline{2}{,}9317$.
3) $\log x = 1{,}0622$; $\log x = 0{,}0096$; $\log x = \overline{1}{,}0007$.
4) $\log x = 5{,}7762$; $\log x = 4{,}6068$; $\log x = \overline{3}{,}4004$.
5) $\log x = 0{,}0520$; $\log x = \overline{4}{,}6000$; $\log x = \overline{2}{,}9746$.

§ 77. ARVUTAMINE KÜMNENDLOGARITMIDE ABIL.

Kümnendlogaritmide kasutamine arvutamisel hõlbustab tööd, sest korrutamine taandub liitmisele, jagamine — lahutamisele, astendamine — korrutamisele ja juurimine — jagamisele. Arvutustulemuste täpsus neljakohaliste murdosadega kümnendlogaritmide kasutamisel ei ületa küll nelja tüvenumbrit, kuid tavaliselt on selline täpsus piisav.

Kümnendlogaritmide rakendamist arvutamisel selgitame mõne konkreetse näite varal.

Näide 1. Leia korrutis

$$x = 29{,}78 \cdot 6{,}546.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log x = \log 29{,}78 + \log 6{,}546.$$

Tabelist leiame $\log 29{,}78$ ja $\log 6{,}546$ väärtused:

$$\log x = 1{,}4740 + 0{,}8160 = 2{,}2900.$$

Antilogaritmide tabelist leiame kümnendlogaritmi murdosa 2900 järgi x tüvenumbrid 195. Et karakteristik on 2, siis peab arvu täisosa olema kolmekohaline, seega

$$x = 195.$$

Näide 2. Arvuta: $x = \frac{763{,}6 \cdot 0{,}8445}{42{,}94 \cdot 2{,}706}$.

Kirjutame murdavaldise täisavaldisena

$$x = 763{,}6 \cdot 0{,}8445 \cdot 42{,}94^{-1} \cdot 2{,}706^{-1}$$

ja logaritmime

$$\log x = \log 763{,}6 + \log 0{,}8445 - \log 42{,}94 - \log 2{,}706.$$

Kui oleme tabelist leidnud arvude kümnendlogaritmid, saame:

$$\log x = 2{,}8828 + 1{,}9266 - 1{,}6329 - 0{,}3423 = 0{,}8342.$$

Antilogaritmide tabelist leiame, et

$$x = 6{,}826.$$

Näide 3. Arvuta:

$$x = \frac{0{,}0874^2 \cdot \sqrt[3]{68150^2}}{1{,}488^4 \cdot \sqrt{0{,}00547}}.$$

Esitanud murdavaldise täisavaldisena ja juured murruliste astendajatega astmetena, saame

$$x = 0{,}0874^2 \cdot 68150^{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}488^{-4} \cdot 0{,}00547^{-\frac{1}{2}}.$$

Edasi leiame avaldise logaritmi:

$$\log x = 2 \log 0{,}0874 + \frac{2}{3} \log 68150 - 4 \log 1{,}488 - \frac{1}{2} \log 0{,}00547.$$

Arvutuste käepärasemaks muutmiseks koostame tabeli.

N	$\log N$	n	$n \cdot \log N$	
0,0874	$\bar{2}$,9415	2	$\bar{3}$,8830	
68150	4,8334	$\frac{2}{3}$	3,2223	
			1,1053	$\log x = 1{,}5459$; $x = 35{,}15$
1,488	0,1726	4	0,6904	
0,00547	$\bar{3}$,7380	$\frac{1}{2}$	$\bar{2}$,8690	
			$\bar{1}$,5594	

Tabelis arvutame esiteks positiivsete liikmete summa ja teiseks negatiivsete liikmete summa. Lahutanud positiivsete liikmete summast negatiivsete liikmete summa, saame $\log x$ väärtuse. Lõpuks leiame antilogaritmide tabelist x väärtuse.

Ülesandeid.

Arvuta logaritmide tabeli abil:

487. 1) $68{,}4 \cdot -3{,}764$ 2) $459{,}2 \cdot 0{,}08063$

488. 1) $65410 \cdot 0{,}01728$ 2) $17{,}66 \cdot 1{,}8647$

489. 1) $56397 \cdot 0{,}8804365$ 2) $1{,}7588 \cdot 0{,}4294$

490. 1) $\frac{15.3 \cdot 1.206}{44{,}8}$ 2) $\frac{0.4921 \cdot 75.8}{0{,}1422}$

491. 1) $\frac{4608 \cdot 3}{67{,}45 \cdot 0{,}72}$ 2) $\frac{0{,}1}{2{,}66 \cdot 0{,}3666 \cdot 4}$

492. 1) $\frac{1}{24{,}32 \cdot 0{,}0092}$ 2) $\frac{29{,}61 \cdot 0{,}0532}{0{,}8177 \cdot 163{,}4}$

493. 1) $8{,}803^5 : 0{,}6146^4$ 2) $31{,}73^{2{,}2} : 0{,}562^{0{,}12}$

494. 1) $\sqrt[3]{5713} : \sqrt[5]{9417}$ 2) $\sqrt[7]{10} : \sqrt[10]{1000}$

495. 1) $62{,}4 \cdot 17{,}8^2$ 2) $\frac{0.7324^3}{\sqrt{0{,}0142}}$ 3) $0{,}158^2 \cdot \sqrt{77{,}2}$

496. 1) $\frac{14{,}85 \cdot \sqrt[3]{0.9308}}{5{,}78^2 \cdot \sqrt{0{,}126}}$ 2) $\frac{6{,}85^2 \cdot \sqrt[5]{667{,}9}}{11{,}42^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}033}}$

497. 1) $\frac{66240 \cdot \sqrt[3]{0.09405 \cdot 1.52^2}}{0{,}868^3 \cdot \sqrt{226{,}2 \cdot 0{,}78}}$ 2) $\frac{0.004492 \cdot \sqrt[5]{17900^2}}{\sqrt[7]{55{,}2^4} \cdot 0{,}00895^3}$

498. 1) $\sqrt[3]{\frac{17{,}96^2 \cdot \sqrt{0{,}52}}{42{,}8}}$ 2) $\frac{\sqrt[4]{0{,}04671}}{0{,}0728^3 \cdot \sqrt[5]{0{,}000496}}$

499. Leia ringi pindala, kui ringi diameeter on 82,64 cm.

500. Torni katus on ruudukujulise põhjaga korrapärane püramiid. Leia katuse pindala, kui põhiserv on 6,78 m ja külgtahu apoteem 8,06 m.

501. Koonuse põhja diameeter on 522 mm ja kõrgus 472 mm. Leia koonuse ruumala.

502. Kera raadius on 8,27 cm. Kui suur on kera ruumala?

503. Vagonett sõidab paigalseisust 1 minuti ja 13 sekundi kestel kallakust alla kiirendusega 14,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. Kui pika tee läbib vagonett selle ajaga ja milline on vagoneti kiirus tee lõpul?

*

Kui avaldises esinevad liitmise ja lahutamise tehted, siis peame need sooritama eraldi, sest summat ja vahet ei saa logaritmida.

Näide 4. $\frac{16{,}73}{0{,}5208} + \frac{6{,}38^2 \sqrt[3]{42{,}2}}{44{,}7}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame algul logaritmide abil esimese ja teise liikme eraldi ja siis liidame tulemused.

Teosta nimetatud tehted!

Näide 5. $\frac{84{,}17\sqrt{36{,}42^2-17{,}85^2}}{72{,}63}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame ruutude tabelite abil $36{,}42^2 - 17{,}85^2$, mille tulemusena saame juba logaritmitava avaldise.

Ülesandeid.

Arvuta:

504. $\sqrt{3{,}442^2 - 0{,}67888^2}$

505. $\sqrt{\frac{848{,}3}{766{,}5}} + \sqrt[3]{\frac{42.55^2}{2067}}$

506. $\sqrt[3]{\frac{14+\sqrt{14}}{81-\sqrt{170}}}$

507. $\frac{3.64^3\sqrt{18{,}72^2-66{,}4}}{15{,}52\sqrt{3{,}974^3+8{,}693^2}}$

508. Arvuta ülesannete 500 ja 501 andmete põhjal torni katusealuse ruumala ja koonuse täispindala.

§ 78. FUNKTSIOONI SKAALA MÕISTE.

Koordinaatteljestikus kujutatakse argumendi ja vastava funktsiooni väärtusi kahe arvtelje, abstsisstelje ja ordinaattelje abil.

On olemas võte argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste graafiliseks kujutamiseks ühe arvtelje abil. Selleks paigutatakse pärast mõõtühiku valimist arvteljele alguspunktist alates lõigud, mille pikkused kujutavad funktsiooni väärtusi; nende lõikude lõpp-punktide juurde aga kirjutatakse argumendi vastavad väärtused. Funktsiooni väärtusi joonisele ei kirjutata, sest need on lõigu pikkustena mõõdetavad. Sel teel saadaksegi pilt nii argumendi kui ka funktsiooni vastavatest väärtustest ühelainsal arv-

teljel. Niisugust arvtelge nimetatakse funktsiooni a s t m i k u k s ehk s k a a l a k s.

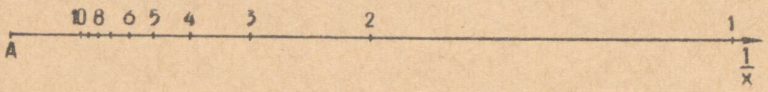
Valmistame näitena funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

skaala. Selleks koostame kõigepealt argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste tabeli.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

Kui valime mõõtühikuks lõigu pikkusega 1 dm, siis argumendi väärtustele 1, 2, 3 jne. vastavad funktsiooni väärtused võime kujutada lõikudena, mille pikkused on 1 dm, 5 cm, 3,3 cm jne. Paigutame need lõigud arvteljele nii, et kõikide nende alguspunktid ühtivad teljel võetud kindla punktiga A ning lõpp-punktide juurde kirjutame vastavad argumendi väärtused (joon. 81).



Joon. 81.

Ülesandeid.

509. Valmista skaala, millel on kujutatud funktsiooni $y = \frac{1}{x}$-väärtused, mis vastavad x väärtustele.

$-1, -2, -3, -4, -5, -8;\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$

510. Valmista funktsiooni $y = x^2$ skaala argumendi väärtustel

$$\frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ 3.$$

511. Valmista funktsiooni $y = \frac{1}{x+1}$ skaala.

§ 79. LOGARITMILINE SKAALA.

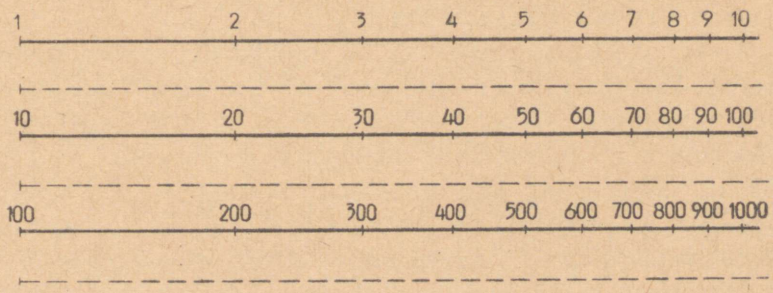
Valmistades funktsiooni $y = \log x$ *skaala, saame* **logaritmilise skaala.**

Selle skaala ehitamiseks koostame esmalt funktsiooni $y = \log x$ väärtuste tabeli, ümardades logaritmide väärtused kahe numbrini koma järel.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0,00	10	1,00	100	2,00
2	0,30	20	1,30	200	2,30
3	0,48	30	1,48	300	2,48
4	0,60	40	1,60	400	2,60
5	0,70	50	1,70	500	2,70
6	0,78	60	1,78	600	2,78
7	0,85	70	1,85	700	2,85
8	0,90	80	1,90	800	2,90
9	0,95	90	1,95	900	2,95
10	1,00	100	2,00	1000	3,00

Valides logaritmide lõikudena kujutamisel mõõtühikuks 1 dm, saame log 2 puhul lõigu pikkusega 3 cm, log 3 puhul 4,8 cm, log 10 puhul 10 cm, log 20 puhul 13 cm, log 30 puhul 14,8 cm jne. Paigutades kõik need lõigud ühisest alguspunktist alates arvteljele ja kirjutades nende lõikude otspunktide juurde vastavad argumendi x väärtused, saame logaritmilise skaala. See skaala on osade kaupa paigutatud joonisele 82.

Nagu näha, skaala vahemikus 1-st 10-ni on samasuguse kujuga nagu vahemikus 10-st 100-ni või vahemikus 100-st 1000-ni, sest logaritmide väärtused teises tulbas erinevad esimese tulba logaritmide vastavatest väärtustest ühe võrra ja kolmanda tulba väärtused — kahe võrra.



Joon. 82.

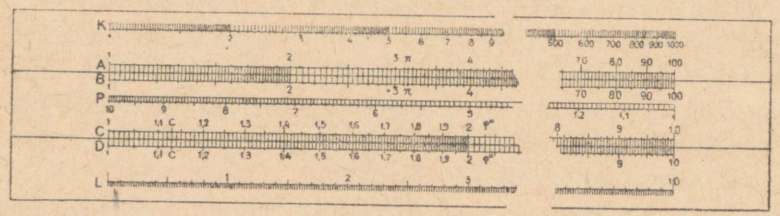
Logaritmilist skaalat vahemikus 1-*st* 10-*ni nimetatakse* **logaritmiliseks põhiskaalaks,** sest ta kujutab ühtlasi ka funktsiooni $y = \log x$ skaalat vahemikus 10-st 100-ni, 100-st 1000-ni jne.; samuti ka vahemikus 0,1-st 1-ni, 0,01-st 0,1-ni jne. Seetõttu tuleb skaalale märgitud arvude all mõista ainult argumendi x tüve. Näiteks arv 2 võib tähistada argumendi x väärtusi ... 0,02; 0,2; 2; 20; 200; ...

§ 80. ARVUTUSLÜKATI EHITUS. LÜKATI PÕHISKAALAD D JA C.

Arvutuslükati koosneb kolmest osast: korpusest, korpuses liikuvast keelest ja korpusel liuglevast märkijast.

Korpusele on kantud neli skaalat (joon. 83). Neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla: skaala *K*, skaala *A*, põhiskaala *D* ja skaala *L*.

Keele esiküljele on kantud kolm skaalat. Neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla: skaala *B*, skaala *P* ja põhiskaala *C*.



Joon. 83.

Keele tagaküljel leiame veel kolm trigonomeetriliste funktsioonide skaalat.

Skaalad *K*, *A*, *B*, *P*, *D* ja *C* on logaritmilised skaalad.

Tutvume esmalt põhiskaalaga *D*.

Normaallükati põhiskaalal *D* on funktsiooni $\log x$ väärtused kujutatud lõikudena, kui mõõtühik on 25 cm. Nende lõikude otspunkte tähistavad kriipsud võimaldavad skaalal märkida ja lugeda kuni kolm tüvenumbrit argumendi x väärtusest.

Skaala alguskriips on tähistatud arvuga 1 ja lõppkriips arvuga 10. Kogu skaala on jaotatud üheksaks osaks, vastavad jaotuskriipsud on tähistatud suuremas trükis arvudega 2, 3, ..., 8, 9. Nimetame sel teel tekkinud skaala lõike põhikriipsu-

vahedeks. Vaatame eraldi põhikriipsuvahesid 1—2; 2—3; 3—4; . . . .

Põhikriipsuvahe 1—2 on jaotatud kümneks osaks. Vastavad jaotuskriipsud on tähistatud väiksemas trükis arvudega

1,1; 1,2; 1,3; . . .; 1,8; 1,9.

Märkus. Mõnedel lükatitüüpidel on need kriipsud tähistatud arvudega 1, 2, 3, . . ., 8, 9. Sel juhul tuleb nendele vaadata kui kümnendike numbritele.

Iga tekkinud väiksem kriipsuvahe 1—1,1; 1,1—1,2 jne. on omakorda jaotatud kümneks osaks. Seega skaalaosas 1—2 on iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,01.

Analoogiliselt on põhikriipsuvahe 2—3 jaotatud pikemate kriipsudega kümneks osaks. Siin (ja edaspidi) on aga kümnendike numbrid jäetud kirjutamata. Sellise jaotamise tulemusena tekkinud uued kriipsuvahed on jaotatud omakorda viieks osaks (mitte kümneks nagu vahemikus 1—2). Seega vastab skaalaosas 2—3 igale kõige väiksemale kriipsuvahele 0,02.

Kuidas on jaotatud põhikriipsuvahe 3—4?

Vaadeldes põhikriipsuvahet 4—5, näeme, et seal vastab igale kõige väiksemale kriipsuvahele 0,05. Sama kehtib ka kõigi järgmiste põhikriipsuvahede kohta. Seega lükati põhiskaalal on võimalik vahetult märkida vahemikus 1—10 olevaid arve järgmiselt:

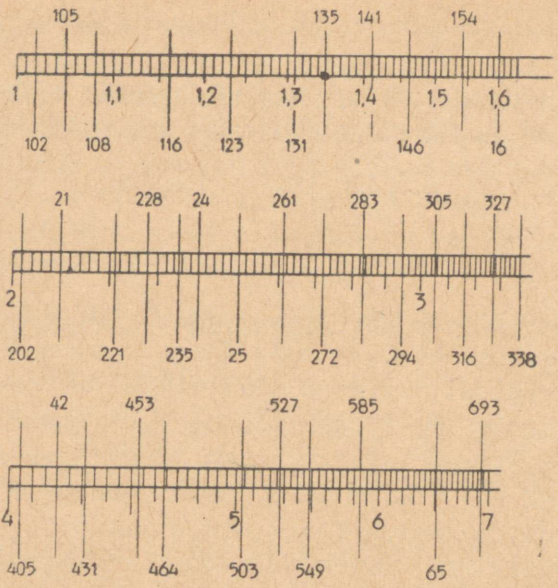
vahemikus	1—2	ülimalt iga	0,01	tagant
„	2—4	„ „	0,02	„
„	4—10	„ „	0,05	„

Kui aga vahemikku 2—4 kuuluva arvu sajandike number ei ole paarisarv või vahemikku 4—10 kuuluva arvu sajandike number ei ole 5 (või 0), siis tuleb arv märkida silma järgi.

Vastavalt logaritmilise skaala ehitusprintsiibile (vt. § 79) võime kirjeldatud skaalal märkida mitte ainult arve 1—10, vaid üldse kolme tüvenumbriga arve, jättes koma tähele panemata. Seega samal kohal, kus märgime näiteks arvu 5,76, märgime ka arvud

. . . 0,0576; 0,576; 57,6; 576; 5760; . . .

Joonisel 84 on näidatud, kuidas tuleb märkida arvu tüvenumbreid skaalal *D*.



Joon. 84.

Ülesandeid.

512. Märgi märkijaga joonisel 84 näidatud arvud arvutuslükati skaalal *D*.

513. Märgi märkijaga skaalal *D* järgmised arvud:

1) 7; 80; 0,09; 1,8; 95; 0,24; 680; 0,081; 79.
2) 137; 197; 25,2; 36,5; 0,765; 92,5; 4,44.
3) 245; 0,395; 6,23; 5,08; 77,7; 802; 484; 9,08.
4) 461; 5,29; 0,888; 17,9; 2,09; 0,101; 927; 78,1.

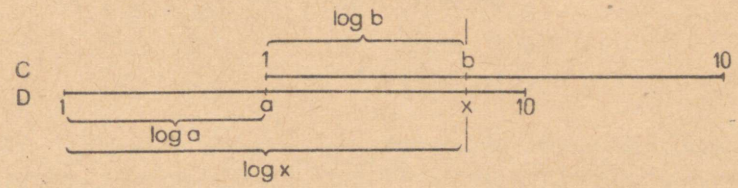
§ 81. KORRUTAMINE LÜKATI SKAALADE D JA C ABIL.

Skaalat *C* saab viia ühtima skaalaga *D*. Selles võib veenduda otsese võrdlemisega. Kui viia skaala *C* ja *D* esimesed kriipsud ühtimisele, siis langevad ka kõik nende ülejäänud vastavad kriipsud kokku.

Et hõlbustada lükatil teostatavate operatsioonide kirjeldamist, tähistame erinevate skaalade jaotuskriipsu lühidalt skaala tähega, millele järgnevad jaotuskriipsule vastava arvu tüvenumbrid.

Näiteks *D*-27 tähendab skaala *D* jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 2 ja 7, näiteks 2,7; 27; 270; 0,27 jne. *C*-475 tähendab skaala *C* jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 4, 7 ja 5, näiteks 4,75; 47,5; 0,475 jne.

Selleks, et korrutada arve *a* ja *b*, paigutame *C*-1 *D*-*a* kohale ja märgime märkijaga *C*-*b*. Arvude *a* ja *b* korrutise *x* leiame skaalalt *D* märkija alt.



Joon. 85.

Tõestuseks vaatleme joonisel 85 kujutatud logaritmiliste skaalade *D* ja *C* ning püstkriipsuga tähistatud märkija seisu, millest nähtub, et

$$\log a + \log b = \log x.$$

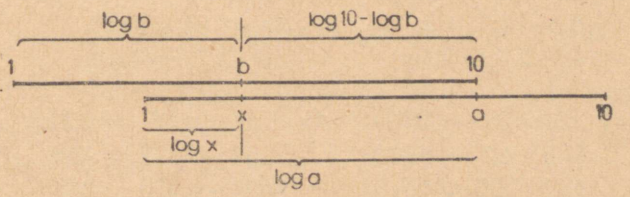
Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log x,$$

millest

$$ab = x.$$

Kui *C*-*d* peaks sattuma väljapoole skaala *D* piirkonda, siis viime *C*-1 asemel *C*-10 *D*-*a* kohale. Niisugust skaala *C* otste vahetamist nimetatakse keele ü l e l ü k k e k s. Peale ülelükke teostamist on lükatil joonisel 86 näidatud seis ja me leiame korrutise *x* tüvenumbrid *C*-*d* kohalt skaalal *D*.



Joon. 86.

Tõestuseks vaatleme joonist 86, millest nähtub, et

$$\log a = \log x + \log 10 - \log b,$$

millest

$$\log a + \log b = \log x + \log 10.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log(x \cdot 10),$$

kust

$$ab = x \cdot 10$$

ja

$$\frac{ab}{10} = x.$$

Nii esimese kui ka teise lükatiseisu puhul leiame lükatilt kahe arvu a ja b korrutise tüvenumbrid. Koma asukoha aga määrame vastuse ligikaudse hindamise teel.

Näiteks korrutades lükatil

$$2{,}78 \cdot 1{,}28,$$

leiame esmalt vastuse kolm tüvenumbrit 356. Koma asukoha määramiseks ümardame $2{,}78 \approx 3$ ja $1{,}28 \approx 1$. Et $3 \cdot 1 = 3$, siis peab vastus olema

$$3{,}56.$$

Täpne vastus on 3,5584, mis erineb lükatil saadud vastusest 0,0016 võrra.

Ülesandeid.

514. Kontrolli lükatiga järgnevad korrutised:

1) $2{,}2 \cdot 4{,}5 = 9{,}90$
$3{,}7 \cdot 1{,}8 = 6{,}66$
$5{,}8 \cdot 1{,}23 = 7{,}13$
$4{,}9 \cdot 2{,}02 = 9{,}90$

2) $6{,}5 \cdot 4{,}4 = 28{,}6$
$7{,}8 \cdot 2{,}05 = 16{,}0$
$8{,}6 \cdot 5{,}07 = 60{,}6$
$3{,}2 \cdot 5{,}7 = 18{,}2$

3) $13{,}5 \cdot 28 = 378$
$256 \cdot 4{,}7 = 1200$
$48{,}5 \cdot 333 = 16150$
$208 \cdot 7{,}2 = 1500$

4) $3{,}78 \cdot 0{,}64 = 2{,}42$
$256 \cdot 0{,}072 = 18{,}4$
$80{,}5 \cdot 0{,}473 = 38{,}0$
$0{,}082 \cdot 0{,}407 = 0{,}0334$

515. Korruta:

1) 3,8 · 1,9
3,08 · 1,9
2,75 · 2,8
1,2 · 5,7

2) 7,8 · 3,4
6,45 · 4,05
8,3 · 2,7
8,03 · 2,7

3) 32 · 1,4
2,8 · 308
11,5 · 66
545 · 37,8

4) 7,8 · 0,24
0,675 · 323
0,094 · 0,52
2060 · 0,0132

516. Kolhoosis maksti enne rahalisele töötasule üleminekut naturaaltasu normipäevade eest alljärgneva arvestustabeli järgi, kusjuures ühe normipäeva eest maksti 5,7 kg kartuleid ja 3,4 kg teravilja.

Arvestustabel

Jrk. nr.	Kolhoosniku nimi	Normipäevade arv	Kartuleid (kg)	Teravilja (kg)
1.	Mägi, J.	128		
2.	Jõgi, K.	203		
3.	Mets, M.	171		
4.	Karu, P.	84		
5.	Oja, V.	264		
6.	Meri, J.	193		
	KOKKU			

Täida arvestustabeli tühjad lahtrid.

Kuidas tuleb arvutuslükatil arvutada, et keele nihkeid oleks võimalikult vähe?

Kuidas saab kontrollida arvutuste õigsust?

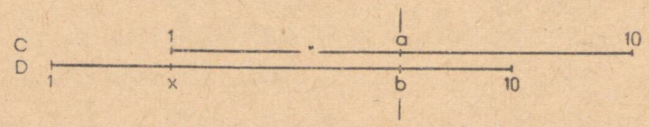
§ 82. JAGAMINE LÜKATI SKAALADE D JA C ABIL.

Korrutise $x \cdot a = b$ leidmisel on lükatiseis selline, nagu joonisel 87 või 88.

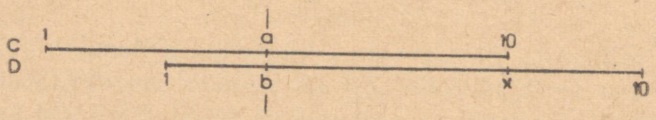
Siit järeldame, et jagatise

$$x = \frac{b}{a}$$

leidmiseks peame *D-b* ja *C-a* viima üksteise kohale ja vastuse lugema skaalalt *D* *C*-1 või *C*-10 kohalt.



Joon. 87.



Joon. 88.

Näiteks jagades

$$545 : 13{,}8,$$

märgime märkijaga *D*-545 ja viime siis *C*-138 märkija kriipsu alla. Selliselt toimides satuvad *D*-545 ja *C*-138 üksteise kohale ja me saame jagatise tüvenumbrid 395 lugeda skaalalt *D* *C*-1 kohalt.

Koma asukoha määramiseks ümardame $545 \approx 500$; $13{,}8 \approx 10$, ja jagame $500 : 10 = 50$, millest järeldame, et jagatis peab olema kahekohalise täisosaga arv. Seega

$$545 : 13{,}8 = 39{,}5.$$

Samuti leiame, et

$$6{,}85 : 2{,}77 = 2{,}47,$$
$$1760 : 38 = 46{,}3,$$
$$0{,}346 : 6{,}9 = 0{,}0502 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

517. Kontrolli lükatiga järgmised jagatised:

1) $5{,}3 : 2{,}9 = 1{,}825$; $8{,}8 : 3{,}7 = 2{,}38$; $6{,}55 : 4{,}5 = 1{,}455$; $3{,}07 : 1{,}16 = 2{,}64$

2) $4{,}8 : 7{,}2 = 0{,}667$; $1{,}06 : 6{,}8 = 0{,}156$; $2{,}43 : 2{,}85 = 0{,}853$; $7{,}4 : 9{,}05 = 0{,}818$

3) 16,7 : 3,06 = 5,46
882 : 72 = 12,25
6,3 : 17,8 = 0,354
44 : 960 = 0,0458

4) 0,81 : 3,72 = 0,218
62,5 : 0,48 = 130
7,7 : 0,0203 = 379
0,505 : 0,065 = 7,77

518. Arvuta:

1) 6,9 : 5,3
4,75 : 1,92
9,6 : 7,85
3,78 : 2,04

2) 5,3 : 7,8
5,53 : 9,55
6,73 : 8,9
1,17 : 4,07

3) 18,3 : 4,7
29,3 : 61
3,07 : 98
528 : 370

4) 6,42 : 0,87
0,465 : 3,93
0,1095 : 0,082
333 : 0,71.

519. Leia voolu tugevused tabelis antud takistustega juhtmetes, kui pinge on 220, 170 ja 32 volti.

Jrk. nr.	Juhtme takistus oomides	Voolu tugevused amprites		
		220 V	170 V	32 V
1.	17			
2.	8,6			
3.	54			
4.	3,4			
5.	0,72			

§ 83. PROTSENTÜLESANNETE LAHENDAMINE LÜKATIGA.

Osates skaalade *D* ja *C* abil korrutada ja jagada, saame lükatil hõlpsasti lahendada ka protsentülesandeid.

Näiteks, et leida, mitu protsenti moodustab arv 0,446 arvust 6,15, peame arvutama murru

$$\frac{0{,}446 \cdot 100}{6{,}15}$$

väärtuse. Skaalade *D* ja *C* abil saame jagatise 0,446 : 6,15 tüvenumbrid 727. Murru väärtuse hindamine aga annab meile ühe-

kohalise täisosaga arvu. Seega arv 0,446 moodustab arvust 6,15 7,27%.

Kui tahame leida arvu, mis moodustab 22,6% arvust 384, siis peame arvutama murru

$$\frac{384 \cdot 22{,}6}{100}$$

väärtuse. Lükatilt saame korrutise $384 \cdot 22{,}6$ tüvenumbrid 867 ja murru väärtuse hindamine annab meile kahekohalise täisosaga arvu. Seega 22,6% arvust 348 on 86,7.

Ülesandeid.

520. Mitu protsenti moodustavad alljärgnevad arvud 32,6-st:

15; 6,2; 25,3; 10,8; 0,7; 0,083; 19,5; 96,5?

521. Leia arvust 682

13%; 17,6%; 20,7%; 0,62%; 109%; 424%.

522. Milline on arv, kui sellest arvust

7,6% on 3,04; 57% on 28,9; 122% on 44,4?

523. Ekskavaator kaevas ühel päeval 47 jooksvat meetrit kraavi ja täitis päevaplaanist 79%. Järgmisel päeval kaevas ekskavaator 66 jooksvat meetrit kraavi. Mitu protsenti päevaplaanist täitis ekskavaator järgmisel päeval?

524. Filmiilmuti sisaldab 84% vett, 1,7% metooli, 8,5% naatriumsulfiiti, 0,2% kaaliumbromiidi ja 5,6% naatriumsulfaati. Mitu grammi igat ainet on tarvis võtta 600 g ilmuti valmistamiseks?

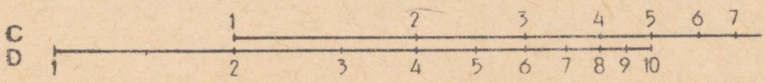
§ 84. VÕRDE LAHENDAMINE LÜKATIGA.

Paragrahvis 82 selgus, et skaalade *D* ja *C* kohakuti seisvate arvude jagatis võrdub *C*-1 või *C*-10 kohal oleva arvuga skaalal *D*. Seega on ühe ja sama lükatiseisu korral kõik skaalade *D* ja *C* kohakuti seisvate arvude jagatised võrdsed.

Joonisel 89 näidatud lükatiseisu juures on skaalade *D* ja *C*

kohakuti seisvate arvude jagatis võrdne kahega. Kui vaadelda skaalade C ja D vahelist pilu murrujoonena, arvu skaalal C lugejana ja arvu skaalal D nimetajana (või ka ümberpöördult), siis moodustavad üksteise kohal olevad arvupaarid võrdseid murde. Nii on joonisel 89 näha, et

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}.$$



Joon. 89.

Kirjeldatud logaritmilise skaala C ja D omadus võimaldab hõlpsasti leida võrde tundmatut liiget.

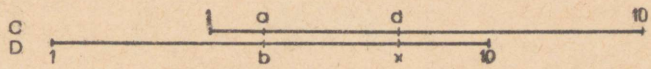
Olgu antud võrre

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{x},$$

kus x on tundmatu.

Kui viime C-a D-b kohale, on kõik skaalade C ja D kohakuti asuvatest arvudest moodustatud murrud võrdsed murruga $\frac{a}{b}$.

Siit järeldame, et d ja x peavad asuma kohakuti, sest ka $\frac{d}{x}$ võrdub murruga $\frac{a}{b}$. Seepärast saame leida x väärtuse C-d järgi skaalal D.

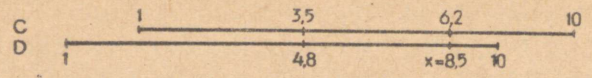


Joon. 90.

Joonis 90 näitab, et võrde lahendamisel peame võrde liikmed paigutama skaalale C ja D nii, nagu nad seisavad võrdes.

Näide 1. Leia x võrdest $\frac{3{,}5}{4{,}8}=\frac{6{,}2}{x}$.

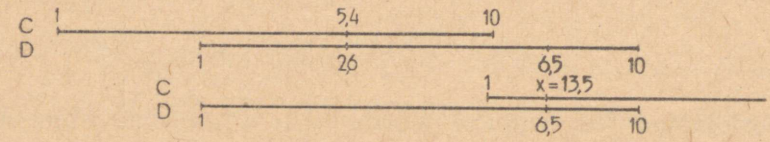
Paigutame skaaladele C ja D võrde liikmed selliselt, nagu on näidatud joonisel 91. Tundmatu asub siis C-62 kohal skaalal D.



Joon. 91.

Näide 2. Leia x võrdest $\frac{5,4}{2,6} = \frac{x}{6,5}$.

Paigutanud võrde lükatile, tuleks leida x D-6,5 kohalt C-skaalalt. Kuna see pole võimalik, teostame ülelükke ja määrame nüüd x väärtuse (joon. 92).



Joon. 92.

Nagu korrutamisel ja jagamisel, opereeritakse ka võrde lahendamisel ainult tüvenumbritega ning koma asukoht määratakse tulemuse hindamise teel.

Viimases näites

$$\frac{5,4}{2,6} = \frac{x}{6,5}$$

on x tüvenumbrid 135. Vaadeldes esimest murdu, näeme, et lugeja on umbes 2 korda suurem nimetajast, seega peab ka x olema ligikaudu kaks korda suurem 6,5-st ja järelikult

$$x = 13,5.$$

Ülesandeid.

525. Leia x järgnevatest võrretest:

1) $\frac{3,6}{x} = \frac{14}{25,3}$
2) $\frac{x}{0,84} = \frac{6,8}{19,4}$
3) $208 : 83,5 = x : 29,3$
4) $0,52 : 0,49 = 7,7 : x$
5) $62 : x = 18,5 : 7,2$
6) $3380 : 528 = 77 : x$

Eriti tõhusat abi pakub arvutuslükati võrdelisel jaotamisel, mida illustreerime järgmise näitega.

Reservuaarist, milles on 8370 l vett, juhitakse vesi välja 7 toru kaudu. Leida igast torust läbivoolanud vee hulk, kui torude ristlõigete pindalad on antud alljärgnevas tabelis ning kui kõik torud on ühel ja samal kõrgusel.

Jrk. nr.	Toru ristlõike pindala S_i cm²-tes	Torust läbivoolanud vee hulk v_i liitrites
1.	162	2340
2.	107	1540
3.	84	1210
4.	78	1120
5.	65	936
6.	52	749
7.	33	475
Kokku	581	8370

Torude ristlõike pindala iga 1 cm² kohta tuleb $\frac{8370}{581}$ l vett. Et ülesandes antud tingimustel on torust väljavoolanud vee hulk võrdeline toru ristlõike pindalaga, siis torust, mille ristlõike pindala on S_i (i on toru järjekorranumber), voolab vett

$$v_i = \frac{8370 \cdot S_i}{581} \text{ l.}$$

Siit saame võrde

$$\frac{581}{8370} = \frac{S_i}{v_i}.$$

Paigutades C-581 D-8370 kohale ja märkides järjest märkijaga skaalal C kõik ristlõigete pindalad S_i, saame skaalalt D lugeda järjest kõik torudest läbivoolanud vee hulgad v_i, mis on kantud tabelisse.

Ülesanne.

526. Jaota 23,5 tonni mineraalväetist kolhoosi 5 põllule võrdeliselt tabelis antud põldude suurustega.

Põllu nr.	Põllu suurus hektarites	Mineraalväetise hulk tonnides
1.	10,6	
2.	8,2	
3.	6,7	
4.	13,4	
5.	5,9	
Kokku		

§ 85. MÕNEDE MURDUDE ARVUTAMINE LÜKATIGA.

Murde, mille lugejas olevate tegurite arv võrdub nimetajas olevate tegurite arvuga või on sellest ühe võrra suurem, arvutatakse kõige lihtsamalt nii, et jagamise ja korrutamise tehteid sooritatakse vaheldumisi.

Näide.

$$x = \frac{2{,}7 \cdot 0{,}84 \cdot 62}{3{,}3 \cdot 4{,}7}.$$

Alustame alati jagamisega:

$$2{,}7 : 3{,}3 = v_1,$$
$$v_1 \cdot 0{,}84 = v_2,$$
$$v_2 : 4{,}7 = v_3,$$
$$v_3 \cdot 62 = x.$$

Niisuguste tehete järjekorra juures on erinevate lükatiseisude arv minimaalne ja peale selle pole tarvis lugeda ja märkida vahepealseid tulemusi v_1, v_2, v_3. Kui lõpptulemuse tüvenumbrid 905 on leitud, määrame koma asukoha murru väärtuse hindamise teel, näiteks nii:

$$2{,}7 : 3{,}3 \approx 1,$$
$$1 \cdot 0{,}84 \approx 0.8,$$
$$0{,}8 \cdot 60 \approx 50,$$
$$50 : 4{,}7 \approx 10.$$

Seega,

$$x = 9{,}05.$$

Ülesandeid.

527. 1) $\frac{6 \cdot 17{,}4}{8{,}3}$ 2) $\frac{72 \cdot 0{,}34}{6{,}8}$

528. 1) $\frac{14{,}6 \cdot 81}{34{,}2 \cdot 26}$ 2) $\frac{0{,}55 \cdot 4{,}3 \cdot 23}{0{,}08 \cdot 11{,}2}$

529. 1) $\frac{1{,}83 \cdot 20{,}4 \cdot 7{,}8}{0{,}4 \cdot 10{,}5 \cdot 8{,}9}$ 2) $\frac{93 \cdot 0{,}58 \cdot 48 \cdot 1{,}09}{68{,}5 \cdot 16{,}2 \cdot 0{,}26}$

§ 86. LÜKATI SKAALAD A JA B.

Logaritmilistel skaaladel A ja B on kujutatud funktsiooni $\log x$ väärtused lõikudena, kui mõõtühikuks on 12,5 cm, s. o. pool skaala D pikkusest. Nende skaalade jaotuskriipsud tähistavad argumendi x väärtusi vahemikus 1-st 100-ni.

Põhijaotuskriipsud on varustatud arvudega 1, 2, 3 ..., 10, 11, 12, ..., 100.

Kuna vaadeldava skaala puhul on mõõtühik väiksem kui põhiskaala puhul, siis on muutunud ka kõige väiksemate kriipsuvahede arvulised väärtused suuremaks. Seetõttu tuleb skaaladel A ja B teostada arvude märkimist ja lugemist silma järgi sagedamini kui põhiskaalal.

Põhikriipsuvahe 1—2 on jaotatud kümneks osaks ja iga osa veel viieks. Seega, kui märgime skaalal A (või B) arve vahemikust 1-st 100-ni, siis on põhikriipsuvahes 1—2 iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,02.

Analoogiliselt veenduksime, et põhikriipsuvahes 10—20 on väikseima kriipsuvahe arvuline väärtus 0,2.

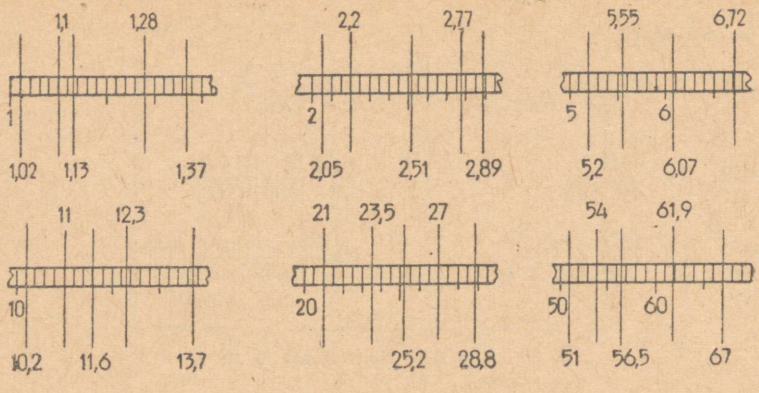
Näita, et põhikriipsuvahes 2—3 on iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,05 ja põhikriipsuvahes 20—30 iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,5.

Milline on kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus skaala teistes põhikriipsuvahedes?

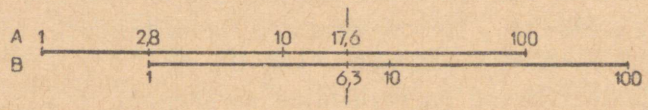
Nii nagu lükati põhiskaalalgi, opereeritakse ka skaaladel A ja B ainult arvu tüvenumbritega.

Joonisel 93 on näidatud mõne arvu märkimist skaalal A või B.

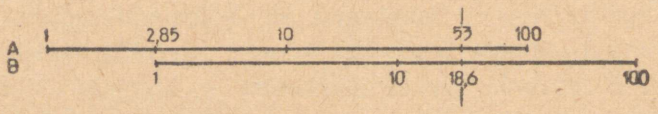
Skaalade A ja B abil saame korrutada ja jagada nagu skaalade D ja C abilgi.



Joon. 93.



Joon. 94.



Joon. 95.

N ä i t e i d. 1) Korrutades 2,8 · 6,3 viime *B*-1 *A*-2,8 kohale ja korrutise 17,6 leiame märkija abil *B*-6,3 kohalt skaalalt *A* (joon. 94).

2) Jagades 53 : 18,6 märgime märkijaga *A*-53. Siis viime märkija alla *B*-18,6 ja vastuse 2,85 loeme *B*-1 kohalt skaalal *A* (joon. 95).

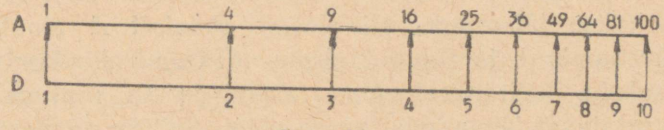
Korrutades või jagades skaalade *A* ja *B* abil ning opereerides ainult arvude tüvenumbritega, pole oluline, et arvud kuuluksid piirkonda 1-st 100-ni. Ka pole oluline, kas me arvu tüvenumbrid märgime skaala esimesel või teisel poolel.

Koma asukoha määrame igal juhul hindamise teel.

Ülesandeid.

530. Lahenda paragrahvides 81 ja 82 antud ülesanded, kasutades skaalasid *A* ja *B*.

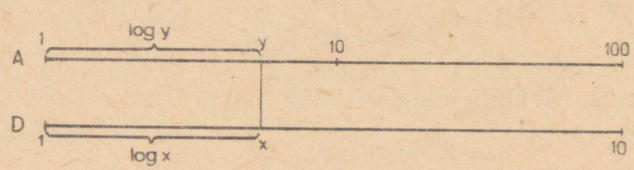
Skaalade A ja B peamine ülesanne ei seisne mitte korrutamis- ja jagamistehete teostamises, vaid arvu ruudu ning ruutjuure leidmises.



Joon. 96.

Võrdleme skaalade A ja D kohakuti seisvaid arve (joon. 96). Võrdlus näitab, et skaala D arvudele vastavad skaalal A nende arvude ruudud.

Tõestuseks vaatleme kahte suvalist teineteise kohal asuvat arvu y ja x skaaladel A ja D (joon. 97).



Joon. 97.

Nende arvude kümnendlogaritmidele $\log y$ ja $\log x$ vastavad lõigud skaaladel on võrdsed. Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kaks korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis $\log y$ arvuline väärtus on kaks korda suurem $\log x$ arvulisest väärtusest.

$$\log y = 2 \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^2$$

ja

$$y = x^2.$$

Sedasama võime tõestada ka skaalade B ja C kohakuti seisvate arvude kohta.

Arvu ruudu leidmiseks paigutame märkija skaala D vastavale kriipsule ja arvu ruudu tüvenumbrid loeme skaalalt A märkija alt.

Kui arv on ühekohalise täisosaga, siis arvu ruut võib olla ühe- või kahekohalise täisosaga. Kas arvu ruut on ühe- või kahekohalise täisosaga, seda näeme otsekohe skaalalt A. Kui arv ei ole ühekohalise täisosaga, siis loeme skaalalt A ainult arvu ruudu tüvenumbrid ja koma asukoha määrame hindamise teel. Koma asukoha määramisel võime rakendada ka ruutude tabeli puhul kasutatavat koma nihutamise võtet. Selleks vaatleme arvu esmalt ühekohalise täisosaga arvuna ja leiame selle ruudu. Siis nihutame arvus koma õigele kohale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda.

N ä i d e 1. Et leida 354^2, leiame esmalt $3{,}54^2 = 12{,}5$. Nüüd nihutame arvus koma õigele kohale, s. o. kahe koha võrra paremale. Arvu ruudus aga teeme sama komanihutuse kaks korda, s. t. nihutame koma paremale nelja koha võrra ja me saame

$$354^2 = 125\,000.$$

N ä i d e 2. Samuti leiame $0{,}208^2$.

$$2{,}08^2 = 4{,}33,$$
$$0{,}208^2 = 0{,}0433$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude ruudud:

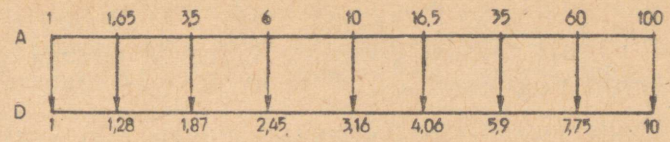
531. 4; 7; 10; 7,26; 3,16; 0,41; 50,5; 0,155.

532. 91,3; 88; 8,08; 0,0745; 2380; 667; 6,07; 0,137.

*

On arusaadav, et kui asetada märkija skaala A mingile arvule, siis peab märkija all skaalal D olema arv, mis vastab skaala A arvu ruutjuurele. Ruutjuure leidmisel peame skaala A esimese poole arve lugema ühekohalise täisosaga arvudeks, teise poole arve aga kahekohalise täisosaga arvudeks ja skaala D arvé ühekohalise täisosaga arvudeks.

Joonisel 98 on näidatud ruutjuurte leidmine nii ühekohalise kui ka kahekohalise täisosaga arvudest.



Joon. 98.

Arve, mis pole ühe- või kahekohalise täisosaga, muudame niisugusteks koma nihutamisega k a h e k o h a kaupa ja leiame siis ruutjuure. Kui ruutjuur on leitud, siis viime arvus koma õigele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem.

Näiteks $\sqrt{360}$ leidmisel nihutame mõttes koma kahe koha võrra vasakule ja leiame $\sqrt{3{,}6} = 1{,}9$. Siis viime arvus koma õigele kohale, s. o. kaks kohta paremale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem, s. o. viime koma ühe koha võrra paremale. Seega, $\sqrt{360} = 19$.

Samuti leiame veel, et $\sqrt{0{,}73} = 0{,}855$; $\sqrt{66\,000} = 257$;

$$\sqrt{1780} = 42{,}2;\quad \sqrt{0{,}005} = 0{,}0707;\quad \sqrt{3850000} = 1960.$$

Ülesandeid.

533. Leia ruutjuured järgmistest arvudest.

1) 3,9; 39; 2,02; 202; 115; 0,115; 6000; 0,6.
2) 0,07; 0,7; 440; 82000; 0,0051; 1080; 920000.

534. Lahenda lükati abil järgmised ülesanded:

1) $8{,}4^2 + 6{,}75^2$; 2) $\sqrt{32{,}5^2 - 17{,}6^2}$;
3) $\sqrt{520} + \sqrt{425}$; 4) $\sqrt{\sqrt{0{,}42} - \sqrt{0{,}32}}$.

535. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 425 m ja 380 m. Leia hüpotenuus.

536. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 9,2 cm ja üks kaatet 7,8 cm. Leia teine kaatet.

537. Võrdhaarse trapetsi lühem alus on 17,6 m, pikem alus 28 m ja haar 20,8 m. Leia trapetsi pindala.

538. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 68,6 cm ja haar 19,2 cm. Leia kolmnurga pindala.

539. Ringile on ühest ja samast punktist tõmmatud puutuja ja lõikaja. Lõikaja välisosa pikkus on 4,9 cm ja puutuja pikkus 7,05 cm. Arvuta ringi raadius.

540. Arvuta korrapärase kuusnurga pindala, kui kuusnurga külje pikkus on 5,6 m.

Märkus. Ruutude ja ruutjuurte leidmisel võib skaalade *A* ja *D* asemel kasutada ka skaalasid *B* ja *C*.

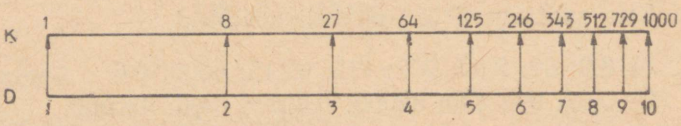
§ 88. KUUPIDE JA KUUPJUURTE LEIDMINE LÜKATIGA.

Skaala *K* koosneb kolmest ühepikkusest osast, mille põhijaotuskriipsud on tähistatud arvudega 1, 2, 3, ..., 9. Vaadates nendele arvudele vasakpoolses osas kui ühelistele, keskmises osas kui kümnelistele ja parempoolses osas kui sajalistele, võime skaalal *K* märkida arve vahemikus 1-st 1000-ni.

Tee kindlaks kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus skaala üksikutes põhikriipsuvahedes!

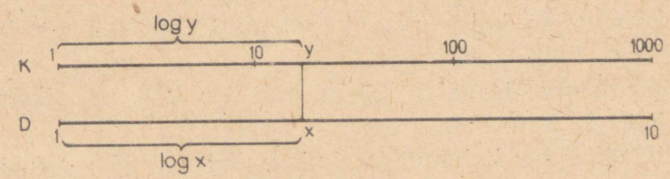
Arvutamisel opereerime ainult arvu tüvenumbritega.

Ühekohalise täisosaga arvu kuubi leidmiseks paigutame märkija skaala *D* vastavale arvule ja vastuse loeme skaalal *K* märkija alt (joon. 99).



Joon. 99.

Tõestuseks vaatleme kahte suvalist kohakuti seisvat arvu *y* ja *x* skaalal *K* ja skaalal *D*. Nende arvude kümnendlogaritmidele (log *y* ja log *x*) vastavad lõigud skaaladel on võrdsed (joon. 100).



Joon. 100.

Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kolm korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis $\log y$ arvuline väärtus on kolm korda suurem $\log x$ arvulisest väärtusest:

$$\log y = 3 \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^3$$

ja

$$y = x^3.$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude kuubid:

541. 2; 4; 7; 1,5; 2,7; 6,3; 8,3; 4,7; 9,1.

542. 2,66; 1,72; 1,06; 3,72; 3,08; 9,05; 7,75.

543. 3,87; 6,23; 7,07; 8,88; 1,915; 2,05; 4,33.

*

Kui arvu täisosa ei ole ühekohaline, siis teeme ta selliseks koma nihutamise teel ja leiame kuubi. Seejärel viime arvus koma endisele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kolm korda.

Näiteks, et leida 528^3, leiame esmalt $5{,}28^3 = 147$. Nüüd nihutame koma arvus endisele kohale, s. o. 2 kohta paremale. Vastuses peame tegema sama komanihutuse kolm korda, s. t. peame viima koma 6 kohta paremale, seega

$$528^3 = 147\,000\,000.$$

Niisamuti leiame $0{,}214^3$:

$$2{,}14^3 = 9{,}8;$$
$$0{,}214^3 = 0{,}0098.$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude kuubid:

544. 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.

545. 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.

*

Kuupjuure leidmisel talitame ümberpöördult, s. t. märgime arvu skaalal K ja loeme vastuse skaalalt D. Kui antud arv on ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, kasutame vastavalt esi-

mest, teist või kolmandat skaala K osa. Vastuse saame niisuguse arvu korral alati ühekohalise täisosaga.

Näiteid. $\sqrt[3]{5{,}2} = 1{,}73$; $\sqrt[3]{29{,}5} = 3{,}09$; $\sqrt[3]{380} = 7{,}25$.

Ülesandeid.

Leia kuupjuured järgmistest arvudest:

546. 5; 50; 500; 325; 17,2; 1,48; 22,6; 10; 100.

547. 304; 3,4; 25,6; 820; 93,5; 73,3; 1,89; 1,09.

Kui arv ei ole ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, siis teeme ta kõigepealt selliseks, nihutades koma kolme koha kaupa. Pärast juurimist viime koma arvus endisele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kolm korda vähem.

Näiteks $\sqrt[3]{37000000}$ arvutamiseks leiame esmalt $\sqrt[3]{37} = 3{,}33$. Siis viime arvus koma endisele kohale, s. o. 6 kohta paremale; vastuses aga peame koma nihutama 2 kohta paremale, seega

$$\sqrt[3]{37000000} = 333.$$

Samuti leiame $\sqrt[3]{0{,}27}$:

$$\sqrt[3]{270} = 6{,}46;$$
$$\sqrt[3]{0{,}27} = 0{,}646.$$

Ülesandeid.

Leia lükatil kuupjuured järgmistest arvudest:

548. 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 100000; 0,01.

549. 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

Arvuta:

550. $\sqrt[3]{14{,}8^2 + 6{,}7^3}$ 2) $\sqrt[3]{328^2 - 260^2}$

551. 1) $0{,}47^3 - 0{,}38^3$ 2) $\sqrt[3]{7600000}$

552. $\sqrt[3]{56^2}$; $\sqrt[3]{455^2}$; $\sqrt[3]{0{,}79^2}$; $\sqrt[3]{0{,}006^2}$.

553. $\sqrt{6{,}8^3}$; $\sqrt{380^3}$; $\sqrt{0{,}157^3}$; $\sqrt{0{,}026^3}$.

554. Kuubi ruumala on 85 cm³. Leia kuubi ühe tahu pindala.

555. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on 4,26 m²?

VII. KOLMNURGA LAHENDAMINE.

§ 89. TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE LOGARITMIDE KASUTAMISEGA.

Kui andmetena esinevad arvud on enam kui kahe tüvenumbriga, siis kolmnurga lahendamisel on kasulik teha arvutusi logaritmide abil.

Matemaatiliste tabelite kogudes on peale nurgafunktsioonide tabelite ka nende funktsioonide logaritmide tabelid, kust saame leida kas nurga antud suuruse järgi soovitava funktsiooni logaritmi või ümberpöördult — nurgafunktsiooni logaritmi järgi nurga.

Näiteks:

$$\log \sin 31°42' = \bar{1},7205;$$
$$\log \cos 40°45' = \bar{1},8794;$$
$$\log \tan 69°20' = 0,4235.$$

Mõned näited ka nurga leidmise kohta nurgafunktsiooni antud logaritmi järgi:

$\log \sin \alpha = \bar{1},7723;$ $\alpha = 36°18'.$

$\log \tan \beta = \bar{1},3032;$ $\beta = 11°22'.$

Ülesandeid.

556. Leia.

1) $\log \sin 16°24'$, $\log \tan 19°30'$, $\log \cos 72°12'$, $\log \cot 32°12'$

2) $\log \sin 42°54'$, $\log \tan 59°18'$, $\log \cos 26°42'$, $\log \cot 7°36'$

3) $\log \sin 47°15'$, $\log \tan 8°08'$, $\log \cos 16°45'$, $\log \cot 56°17'$

4) $\log \sin 4°41'$, $\log \tan 30°04'$, $\log \cos 72°19'$, $\log \cot 83°16'$

557. Leia trigonomeetrilise funktsiooni antud logaritmi järgi vastav nurk.

1) $\log \sin x = \bar{2},7183$
$\log \tan x = \bar{2},8960$
$\log \cos x = \bar{1},8053$
$\log \cot x = \bar{1},9529$

2) $\log \sin y = \bar{1},9656$
$\log \tan y = 0,4068$
$\log \cos y = \bar{1},9998$
$\log \cot x = 0,5174$

3) $\log \sin x = \bar{1},5692$
$\log \tan x = \bar{1},7375$
$\log \cos x = \bar{1},9776$
$\log \cot x = 0,6934$

4) $\log \sin x = \bar{1},9320$
$\log \tan y = 0,4496$
$\log \cos y = \bar{1},7199$
$\log \cot y = \bar{1},7759$

*

Lahendame nüüd täisnurkse kolmnurga logaritmide kasutamisega.

Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 23,5$ mm ja kaatet $b = 24,1$ mm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

Lahendus.

1) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{23,5}{24,1}$;
$\log a = 1,3711$;
$\log b = 1,3820$;
$\log \tan \alpha = \bar{1},9891$;
$\alpha = 44°17' \approx 44°20'$.

2) $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{24,1}{23,5}$;
$\log b = 1,3820$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \tan \beta = 0,0109$;
$\beta = 45°43' \approx 45°40'$.

3) $\frac{a}{c} = \sin \alpha$;
$c = \frac{a}{\sin \alpha}$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \sin \alpha = \bar{1},8439$;
$\log c = 1,5272$;
$c = 33,67 \approx 33,7$ mm.

Kontroll:
$a^2 = 552,2$;
$b^2 = 580,8$;
$a^2 + b^2 = 1133,0 = c^2$;
$c = \sqrt{1133} = 33,66 \approx 33,7$.

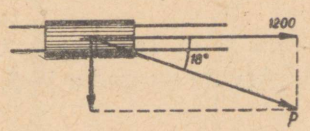
Vastus. Kolmnurga teravnurgad on 44°20′ ja 45°40′, hüpotenuus on 33,7 mm.

Ülesandeid.

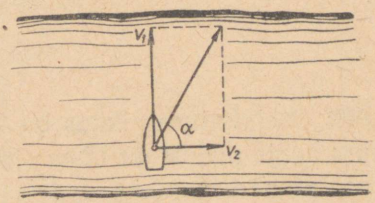
558. Lahenda täisnurkne kolmnurk, ümardades tulemused vastavalt andmetele. Arvutatud nurgad ümarda kraadideni, kui lineaarsed andmed on kahe tüvenumbriga; kümnete minutiteni, kui lineaarsed andmed on kolme tüvenumbriga; minutiteni, kui lineaarsed andmed on nelja tüvenumbriga.

1) $a = 25$; $b = 75$.
2) $a = 31$; $c = 76$.
3) $a = 30{,}2$; $\beta = 53°20'$.
4) $b = 32{,}2$; $\beta = 62°30'$.
5) $c = 32{,}5$; $b = 18{,}4$.
6) $c = 4{,}56$; $a = 2{,}88$.
7) $c = 32{,}54$; $\alpha = 26°42'$.
8) $a = 12{,}75$; $c = 20{,}58$.

559. Raudtee-vagunit, mida rööpme sihis mõjuv jõud 1200 kG võib paigast ära nihutada, tõmbab rööpme kõrval liikuv traktor (joon. 101). Vagunit ja traktorit ühendav vaier moodustub rööpme sihiga nurga 18°. Kui suure jõuga P tõmbab traktor?

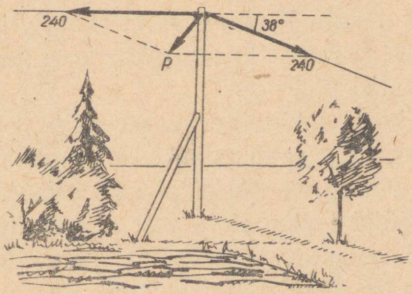


Joon. 101.

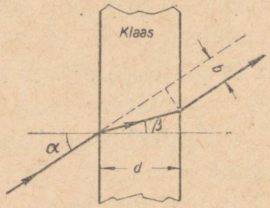


Joon. 102.

560. Mootorpaat sõidab kiirusega $v_1 = 1{,}7\frac{m}{s}$. Paat sõidab üle jõe, mille voolu kiirus $v_2 = 0{,}9\ \frac{m}{s}$ (joon. 102). Kui suure nurga α all liigub paat kalda suhtes, kui tüüritakse kaldaga risti?



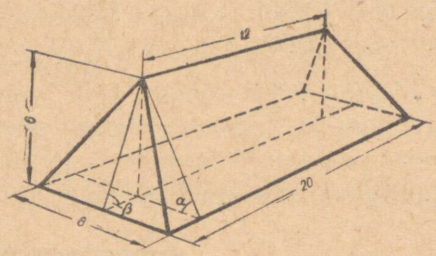
Joon. 103.



Joon. 104.

561. Kõrgepinge kaabel juhitakse ühest isolaatoripostist oma sihist horisontaaltasapinnas 38° võrra kõrvale (joon. 103). Kaabel on pingutatud jõuga 240 kG. Kui suur on horisontaalne jõud P, millega kaabel kisub posti viltu?

562. Tasaparalleelsele klaasplaadile kaldu langev valguskiir teeb plaati läbides paralleelse nihke b (joon. 104). Arvuta see nihe, kui plaadi paksus $d = 26$ mm, murdumisnäitaja $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1{,}5$ ja langemisnurk $\alpha = 30°$?



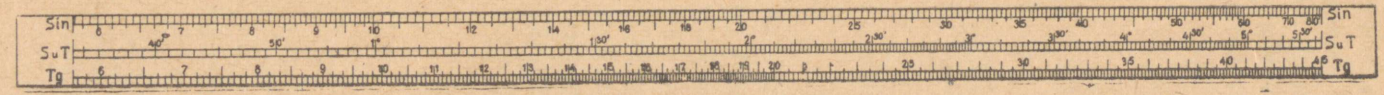
Joon. 105.

563. Kelpkatuse pikkus on 20 m, laius 8 m ja kõrgus 6 m, katuse harja pikkus on 12 m (joon. 105). Arvuta nurgad α ja β, mis katuse pinnad moodustavad laega.

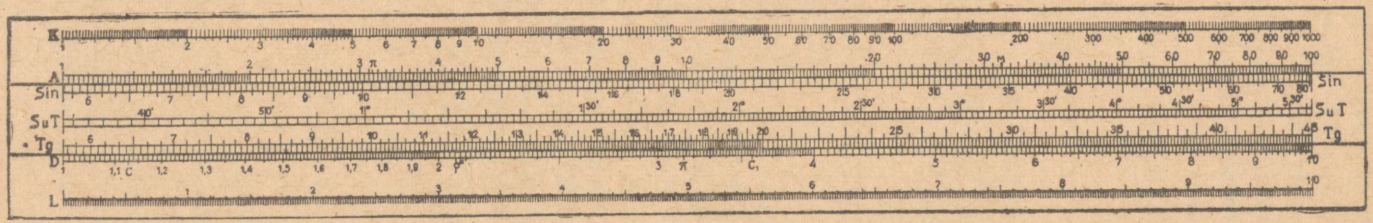
§ 90. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SKAALAD ARVUTUSLÜKATIL.

Trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse leidmiseks, samuti aga ka nurga leidmiseks võib kasutada arvutuslükati trigonomeetrilisi skaalasid, mis leiduvad keele tagaküljel (joon. 106): skaala S (siinuste skaala, joonisel «Sin»), skaala ST (siinuste ja tangensite ühine skaala, joonisel «SuT») ja skaala T (tangensite skaala, joonisel «Tg»). Igaüht neist kolmest skaalast kasutatakse koos põhiskaalaga D. See võib toimuda kahel viisil.

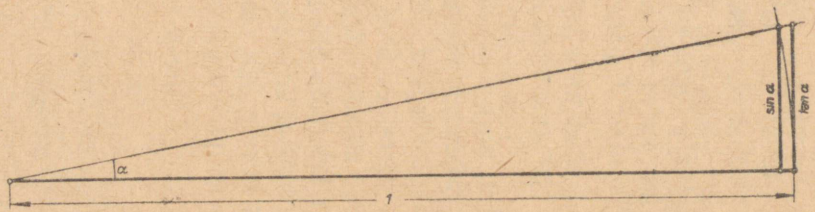
Esiteks nõnda, et tõmbame keele lükati korpusest välja, pöörame ta pikitelje ümber nii, et tagakülg saab esiküljeks ja lükkame ta siis korpusesse tagasi, seades kõigi esiküljel olevate skaalade alg- ja lõppkriipsud kohakuti. Nüüd loeme skaala D alguskriipsu vastavaks arvule 0,1 ja lõppkriipsu vastavaks arvule 1 (joon. 107). Siis siinuste skaala algab suurusega 5°44′ ja tema lõppkriips märgib nurka 90°. Tõepoolest, arcsin 0,1 = 5°44′, arcsin 1 = 90°. Tan-



Joon. 106.



Joon. 107.



Joon. 108.

gensite skaala alguskriips ‘aga märgib nurka 5°43′ ja lõppkriips nurka 45°. Tõepoolest, arctan 0,1 = 5°43′ ja arctan 1 = 45°. Seega viimati kirjeldatud asendis skaalad *S* ja *T* koos põhiskaalaga *D* esitavad vastavalt siinuste ja tangensite tabelit, esimene vahemikus 5°44′ kuni 90°, teine vahemikus 5°43′ kuni 45°.

Skaalat *S* uurides märkame, et

6°-st kuni 10°-ni iga kriipsuvahe märgib 5′,
10°-st „ 20°-ni „ „ „ 10′,
20°-st „ 40°-ni „ „ „ 20′,
40°-st „ 60°-ni „ „ „ 30′,
60°-st „ 80°-ni „ „ „ 1°,

Skaala lõpul 80° ja 90° vahel on kaks kriipsu, millest esimene märgib nurka 83° ja teine nurka 85°.

Skaalalt *T* paneme tähele, et

6°-st kuni 20°-ni iga kriipsuvahe märgib 5′.
20°-st „ 45°-ni „ „ „ 10′.

Kui nurk α on väike, siis $\sin \alpha \approx \tan \alpha$. Seda näeme joonisel 108, kus ühikringis väikese nurga α korral siinuslõik ja tangenslõik on peaaegu võrdsed. (Kontrolli seda ka siinuste ja tangensite tabelite abil, võrreldes 6°-st väiksemate nurkade siinuseid tangensitega!)

See asjaolu võimaldab väikeste nurkade siinuste ja tangensite jaoks kasutada ühist skaalat, milleks ongi skaala *ST*. Selle skaala kasutamisel koos skaalaga *D* loetakse skaala *D* alguskriips vastavaks arvule 0,01 ja lõppkriips vastavaks arvule 0,1. Skaala *ST* alguskriips märgib siis nurka 34′ ja lõppkriips nurka 5°44′, sest

$$\arcsin 0{,}01 \approx \arctan 0{,}01 \approx 34';$$
$$\arcsin 0{,}1 \approx \arctan 0{,}1 \approx 5°44'.$$

Paneme tähele, et skaalal *ST*

40′-st kuni 3°-ni iga kriipsuvahe märgib 1′,
3°-st „ 5°-ni „ „ „ 2′,
5°-st „ lõpuni „ „ „ 5′.

Niisiis skaala *ST* koos põhiskaalaga *D* kujutab siinuste ja tangensite ühist tabelit vahemikus 34′ kuni 5°44′.

Eeldusel, et keel on pööratud ja nurk α on vahemikus 5°44′ . . . 90°, leiame $\sin \alpha$ väärtuse järgmiselt: märgime märkijaga skaalal *S* nurga α ja loeme niidi alt skaalalt *D* selle nurga siinuse

väärtuse. Ümberpöördult, antud siinuse järgi nurga leidmisel märgime skaalal *D* antud siinuse ja loeme niidi alt skaalalt *S* nurga suuruse.

Analoogiliselt toimime antud nurga tangensi leidmisel ning antud tangensi järgi nurga leidmisel, kasutades sel korral vaid skaalat *T*.

Näiteks:

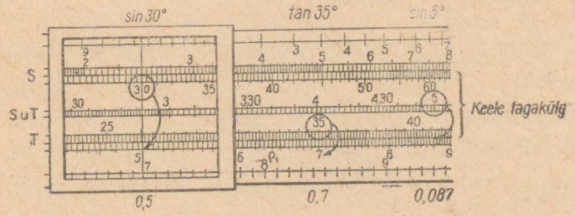
sin 45° = 0,707; tan 15° = 0,268;
arcsin 0,574 = 35°; arctan 0,795 = 38°30′.

Kui antud nurk on vahemikus 34′ ... 5°44′, siis toimime täpselt eespool kirjeldatud viisil, kasutades skaalat *ST* ja pidades silmas, et siinuse ja tangensi väärtused on sel korral vahemikus 0,01 ... 0;1.

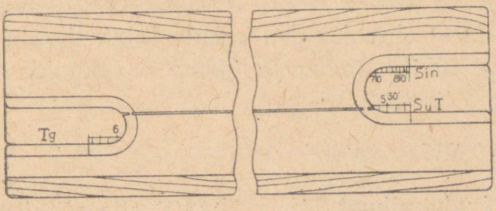
Näiteks:

sin 1°30′ = 0,0262; tan 2°18′ = 0,0402;
arcsin 0,0405 = 2°19′; arctan 0,0769 = 4°24′.

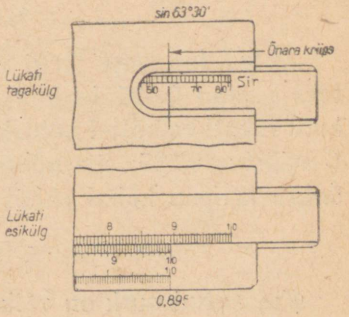
Joonisel 109 on näidatud sin 30°, tan 35° ja sin 5° leidmine lükatil, kui selle keel on pööratud.



Joon. 109.



Joon. 110.



Joon. 111.

Kirjeldatud operatsioone saab lükatil teostada ka keelt pööramata, kasutades selle asemel lükati korpuse otstes leiduvaid õnaraid. Pöörates lükatit pikitelje ümber 180°, näeme tagaküljel õnarate äärtel kriipse: parempoolses otsas kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakpoolses otsas üks kriips — all (joon. 110).

Parempoolse otsa ülemist kriipsu kasutame kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks skaalal *S*, alumist skaalal *ST*; vasakpoolse otsa kriipsu kasutame seoses skaalaga *T*.

Leiame keelt pööramata näiteks sin 63°30′. Selleks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt paremale seni, kuni skaala *S* arvule 63°30′ vastav kriips tuleb kohakuti parempoolse õnara ülemise kriipsuga (joon. 111, ülal); siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* lõppkriipsu kohalt skaalalt *C* (keele alumisel äärel) numbrid 8—9—5 (joon. 111, all); seega

$$\sin 63°30′ = 0{,}895.$$

Antud nurga tangensi (näiteks tan 20°) leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaalal *T* arvule 20° vastav kriips tuleb kohakuti vasakpoolse õnara kriipsuga; siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* alguskriipsu kohalt skaalal *C* numbrid 3—6—4; seega

$$\tan 20° = 0{,}364.$$

Antud siinuse järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks arcsin 0,515 leidmiseks) tõmbame keelt paremale seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala *D* lõppkriipsu kohale tuleb skaala *C* väärtus 0,515; siis pöörame lükati tagakülje ette ja loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu kohal skaalalt *S* arvu 31°; seega

$$\arcsin 0{,}515 = 31°.$$

Antud tangensi järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks arctan 0,535 leidmiseks) tõmbame keelt vasakule seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala *D* alguskriipsu kohale tuleb skaala *C* väärtus 0,535; siis pöörame lükati ümber ja loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohal skaalalt *T* 28°10′; seega

$$\arctan 0{,}535 = 28°10′.$$

Kui antud nurk on väike (vahemikust 34′ ... 5°44′), siis nii siinuse kui ka tangensi leidmine (samuti nurga leidmine) toimub

analoogiliselt, ainult selle erinevusega, et siis kasutame skaalat *ST* ja parempoolse õnara alumist kriipsu. Näiteks:

$$\sin 4° = \tan 4° = 0{,}0698;$$
$$\arcsin 0{,}0525 = \arctan 0{,}0525 = 3°.$$

Antud nurga koosinuse ja antud koosinuse järgi nurga leidmisel kasutame valemi

$$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$$

vahendust; näiteks:

$$\cos 32° = \sin(90° - 32°) = \sin 58° = 0{,}848.$$

Olgu antud, et $\cos \alpha = 0{,}588$. Kui suur on α?
Sel korral $\sin(90° - \alpha) = 0{,}588$; siit

$$90° - \alpha = 36° \text{ ja } \alpha = 54°.$$

Antud nurga kootangensi leidmisel kasutame abivahendina seost

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Näiteks $\cot 25° = \frac{1}{\tan 25°}$ leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaala *T* koht 25° tuleb kohakuti vasaku õnara kriipsuga; nüüd pöörame lükati esikülje üles ning loeme skaalalt *C* (skaala *D* alguskriipsu kohalt) $\tan 25° = 0{,}466$, aga skaalalt *D* (skaala *C* lõppkriipsu kohalt) jagatise

$$\frac{1}{\tan 25°} = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}14 = \cot 25°.$$

90°-st suurema nurga siinuse või koosinuse leidmisel rakendame taandamisvalemeid. Näiteks:

$$\sin 125° = \sin(180° - 125°) = \sin 55° = 0{,}82.$$

45°-st suurema nurga tangensi leidmisel rakendame seoseid

$$\tan \alpha = \cot(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}.$$

Näiteks

$$\tan 75° = \cot(90° - 75°) = \cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = 3{,}73.$$

Erilist käsitlust nõuavad trigonomeetrilised funktsioonid nurkade puhul, mis on väiksemad kui 34′. Sääraste nurkade korral

nii siinuslõik kui ka tangenslõik on pikkuselt peaaegu võrdsed kaare pikkusega (vt. joon. 108). Kesknurka teatavasti mõõdab temale vastav kaar; niisiis, kui kesknurk on α radiaani, siis ka sellele nurgale vastav kaar on α radiaani. Teades, et

$$1 \text{ rad} = 57°18' = 3438',$$

leiame nurgale α' vastava kaare pikkuse radiaanides jagatisena:

$$\alpha' : 3438'.$$

Arvu 3438 kohal leidub lükati põhiskaalal märge ϱ', nii et

$$\varrho' = 3438' \text{ ja (kui } \alpha < 34')$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'}.$$

Näiteks $\sin 20' = \frac{20'}{3438'} = \frac{20'}{\varrho'} = 0{,}00582.$

Sääraste jagatiste arvutamisel peame meeles: kui $\alpha < 34'$, siis $\sin \alpha = \tan \alpha < 0{,}01$.

Ülesandeid.

564. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) sin 50°	2) sin 8°25′	3) cos 15°
sin 45°	sin 85°	cos 40°30′
sin 24°	sin 14°10′	cos 72°50′
sin 51°	sin 130°	cos 61°
sin 9°30′	sin 300°	cos 147°
4) tan 13°	5) tan 50°	6) cot 61°
tan 32°	tan 54°	cot 43°
tan 9°10′	tan 77°30′	cot 48°
tan 36°30′	tan 71°	cot 12°30′
tan 25°30′	tan 60°30′	cot 19°10′
7) sin 1°30′	8) sin 2°10′	9) tan 2°05′
tan 2°18′	sin 3°20′	tan 2°44′
tan 0°42′	sin 3°25′	tan 0°54′
tan 4°24′	sin 1°55′	cos 88°17′
tan 5°30′	sin 0°42′	cot 87°54′

565. Leia lükatilt keele normaalasendi puhul:

1) sin 30′	2) cot 89°45′	3) sin 15′
sin 27′	tan 89°44′	sin 32′

tan 25′	tan 88°45′	tan 18′
sin 17′	cos 89°15′	tan 21′
tan 6′	cos 88°20′	tan 46′

566. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul teravnurk x, kui:

1) $\sin x = 0{,}245$	2) $\cos x = 0{,}670$	3) $\sin x = 0{,}309$
$\sin x = 0{,}142$	$\cos x = 0{,}245$	$\sin x = 0{,}339$
$\sin x = 0{,}315$	$\cos x = 0{,}158$	$\sin x = 0{,}799$
$\sin x = 0{,}375$	$\cos x = 0{,}588$	$\sin x = -0{,}242$
$\sin x = 0{,}485$	$\cos x = 0{,}225$	$\sin x = -0{,}334$
4) $\tan x = 0{,}268$	5) $\tan x = 1{,}192$	6) $\cot x = 0{,}554$
$\tan x = 0{,}625$	$\tan x = 1{,}376$	$\cot x = 1{,}07$
$\tan x = 0{,}161$	$\tan x = 4{,}511$	$\cot x = 0{,}900$
$\tan x = 0{,}795$	$\tan x = 2{,}90$	$\cot x = 4{,}51$
$\tan x = 0{,}966$	$\tan x = 1{,}192$	$\cot x = 2{,}88$

567. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) arcsin 0,707	2) arctan 0,839	3) arctan 1,195
arcsin 0,375	arctan 0,259	arctan 1,575
arcsin 0,777	arctan 0,445	arccot 2,90
arcsin 0,165	arctan 0,835	arccot 1,192
arcsin 0,146	arctan 0,615	arccot 0,554
4) arcsin 0,0552	5) arctan 0,0364	6) arcsin 0,00262
arcsin 0,0596	arctan 0,0477	arctan 0,00582
arcsin 0,0334	arctan 0,0157	arcsin 0,00728
arcsin 0,0122	arctan 0,0114	arctan 0,00485
arcsin 0,030	arctan 0,0556	arcsin 0,00211
7) arcsin 0,00582	8) sin 31°	9) sin 1°40′
arcsin 0,00786	tan 19°	sin 40′
arctan 0,00728	sin 1°15′	tan 9°
arcsin 0,00512	sin 3°40′	tan 17°
arctan 0,00197	tan 2°10′	cot 52°
10) cot 76°	11) arctan 0,625	12) arcsin 0,707
cot 87°	arctan 0,815	arcsin 0,174
tan 43°20′	arctan 0,244	arcsin 0,819
cot 47°40′	arctan 0,880	arcsin 0,985
cot 62°20′	arctan 0,250	arcsin 0,259

Näiteid.

1) Leia nurk α, kui $\sin \alpha = \frac{12,6}{17,5}$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Märgime skaalal D arvu 17,5; tõmbame keelt paremale niipalju, et skaala C arv 12,6 jääb kohakuti arvuga 17,5 skaalalt D. Pöörame nüüd lükati ümber ning loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu järgi skaalalt S väärtuse 46°. Seega vastuseks on $\alpha = 46°$.

2) $\frac{3,6}{\sin 30°} = \frac{2,5}{\sin x}$. Leia x.

Lahendus pööratud keelega lükatil on järgmine. Märgime niidiga skaalal D arvu 3,6. Tõmbame keelega niidi alla 30° skaalalt S. Nüüd märgime niidiga skaalal D arvu 2,5. Niidi alt skaalal S loeme vastuseks 20°19′. Seega $x = 20°19'$.

3) Arvuta avaldis $14,6 \cdot \sin 56°30'$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Lükatit tagaküljelt jälgides tõmbame keelt paremale niipalju, et skaalalt S tuleks õnara kriipsu kohale 56°30′. Pöörame nüüd lükati päripidi ning märgime niidiga skaalal D arvu 14,6. Vastuseks loeme niidi alt skaalalt C arvu 12,2.

Seega $14,6 \cdot \sin 56°30' = 12,2$.

4) Teosta jagamine $\frac{13,9}{\tan 41°}$.

Lahendame ülesande lükatil keele pööratud asendis. Märgime niidiga skaalal D arvu 13,9, tõmbame niidi alla skaala T arvu 41 ning loeme keele lõpult skaalalt D tulemuseks 16. Seega

$$\frac{13,9}{\tan 41°} = 16.$$

5) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 250$ ja $b = 575$. Leia teravnurgad ja hüpotenuus.

Ülesannet lükati abil lahendades leiame kõigepealt, et

$$\tan \alpha = \frac{250}{575} = 0,435.$$

Nüüd seame skaala C arvu 0,435 kohakuti skaala D algus-

kriipsuga, pöörame lükati ümber ning loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohalt skaalalt T arvu 23°30′. Seega

$$\alpha = 23°30'; \quad \beta = 90° - 23°30' = 66°30'.$$

Hüpotenuusi arvutame seosest

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \text{ ehk } c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{250}{\sin 23°30'}.$$

Viimase jagatise leiame järgmiselt. Pöörame keele ja märgime niidiga skaalal S koha 23°30′; niidi all skaalal D leidub siis vastav siinuse väärtus (0,399; selle väljalugemine pole tarvilik). Nüüd pöörame keele tagasi ja leiame jagatise

$$250 : \sin 23°30' = 627.$$

Kontrolliks kasutame Pütagorase teoreemi, arvutades lükatil

$$\begin{aligned} a^2 &= 250^2 = 62\,500; \\ b^2 &= 575^2 = 331\,000; \\ \hline a^2 + b^2 &= 393\,500 \approx 393\,000; \\ c^2 &= 627^2 \approx 393\,000. \end{aligned}$$

Vastus. $\alpha = 23°30'$; $\beta = 55°30'$; $c = 627$.

Ülesandeid.

568. Arvuta lükati abil nurk α, kui

1) $\sin\alpha = \frac{6,3}{8,6}$ 3) $\tan\alpha = \frac{37,6}{54,5}$

2) $\cos\alpha = \frac{18}{73}$ 4) $\cot\alpha = \frac{23}{52}$

569. Arvuta lükati kasutamisega avaldis:

1) $\frac{15,4}{\sin 69°30'}$ 6) $\frac{12,5}{\sin 28°20'}$ 11) $5,85 \cdot \sin 21°40'$

2) $\frac{13,8}{\sin 24°30'}$ 7) $\frac{41,5}{\sin 45°30'}$ 12) $2,4 \cdot \tan 22°20'$

3) $\frac{8,5}{\sin 76°}$ 8) $\frac{26,2}{\sin 15°15'}$ 13) $2,54 \cdot \tan 66°30'$

4) $\frac{52}{\sin 69°}$ 9) $\frac{243}{\sin 71°}$ 14) $\frac{27,8}{\tan 42°}$

5) $\frac{25,4}{\tan 35°}$ 10) $\frac{1,43}{\tan 40°35'}$ 15) $\frac{0,84}{\tan 28°10'}$

570. Arvuta lükati abil avaldis:

1) $\frac{25{,}2}{\sin 3°11'}$ 3) $\frac{0.28}{\sin 2°30'}$ 5) $78 \cdot \sin 1°55'$

2) $\frac{10}{\tan 2°20'}$ 4) $\frac{542}{\tan 4°20'}$ 6) $635 \cdot \tan 4°15'$

571. Lahenda lükati kasutamisega võrre:

1) $\frac{\sin 15°}{3{,}5} = \frac{\sin x}{6{,}9}$ 4) $\frac{\sin 10°}{2{,}4} = \frac{\sin x}{3{,}8}$

2) $\frac{43{,}3}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 30°}$ 5) $\frac{7{,}2}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin x}$

3) $\frac{\tan 18°}{30} = \frac{\tan 32°}{x}$ 6) $\frac{\tan 40°}{3} = \frac{\tan x}{2}$

572. Arvuta lükati abil täisnurkse kolmnurga puuduvad küljed ja nurgad.

1) $a = 7{,}9$ cm; $c = 10{,}7$ cm
2) $b = 10{,}5$ dm; $c = 15{,}3$ dm
3) $a = 6{,}05$ m; $b = 8{,}32$ m
4) $a = 16{,}1$ cm; $b = 13{,}3$ cm
5) $a = 12{,}9$ mm; $\alpha = 33°30'$
6) $c = 74{,}5$ mm; $\alpha = 28°20'$

573. Joonestati kolmnurk külgede pikkustega $a = 8$ cm, $b = 5$ cm ja $c = 7{,}2$ cm. Nurkade mõõtmisel leiti, et $\alpha = 80°$, $\beta = 38°$ ja $\gamma = 62°$. Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\sin \gamma}$$

ja võrdle tulemusi omavahel.

574. Joonesta kolmnurk, mille küljed on $a = 4$ cm, $b = 6$ cm ja $c = 8{,}9$ cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad α, β ja γ.

Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Võrdle nende suhete suurusi. Joonesta saadud kolmnurga ümber ringjoon ja mõõda selle diameeter sentimeetrites; võrdle saadud arvu eelmiste suhetega.

575. Joonesta kolmnurk külgedega $a = 87$ mm, $b = 65$ mm ja $c = 76$ mm. Mõõda saadud kolmnurga nurgad α, β ja γ ning arvuta lükati abil suhted

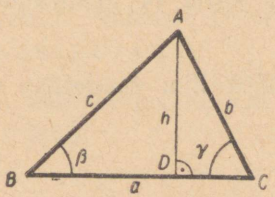
$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Võrdle neid tulemusi kolmnurga ümberringjoone läbimõõduga, kui viimane on mõõdetud millimeetrites.

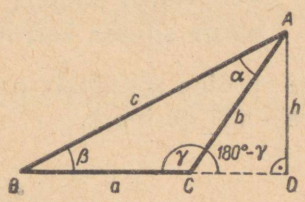
§ 92. KOLMNURGA PINDALA KAHE KÜLJE JA NENDEVAHELISE NURGA JÄRGI.

Kolmnurga pindala saab arvutada külje ja nendevahelise nurga järgi. Vastava eeskirja saamiseks lähtume valemist

$$S = \frac{1}{2} ah.$$



Joon. 112.



Joon. 113.

Tõmmates kolmnurgas ABC kõrguse h alusele a (joonised 112 ja 113), saame täisnurkse kolmnurga ACD, milles $h = b \sin\gamma$ [nürinurkses kolmnurgas $h = b \sin(180° - \gamma) = b \sin\gamma$]. Asendades pindala valemis h avaldisega $b \sin\gamma$, saamegi otsitava valemi:

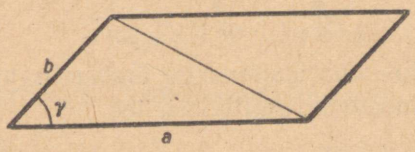
$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma}$$

Võttes kõrguse küljele b või küljele c, saame vastavalt valemid

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha} \quad \text{ja} \quad \boxed{S = \frac{1}{2} ac \sin\beta}$$

Niisiis,

kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisest.



Joon. 114.

Järeldus. Et diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks (joon. 114), millest kummagi pindala on $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$ siis rööpküliku pindala arvutamiseks saame valemi:

$$S = ab \sin \gamma.$$

Rööpküliku pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

Eeskiri on õige sõltumata sellest, kas rööpküliku vaadeldav nurk on terav- või nürinurk.

Ülesandeid.

576. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm; nende külgede vaheline nurk on 30°. Kui suur on kolmnurga pindala?

577. Rööpküliku küljed on 5 dm ja 12 dm ja teravnurk on 30°. Kui suur on rööpküliku pindala?

578. Tõesta, et diagonaalid jaotavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

579. Tõesta, et diagonaalid jaotavad ristküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

580. Arvuta lükati abil kolmnurga pindala, kui

1) $a = 632$ m; $b = 496$ m; $\gamma = 134°20'$;
2) $b = 542$ mm; $c = 435$ mm; $\alpha = 35°40'$.

581. Arvuta rööpküliku pindala, kui küljed ja nurk on vastavalt

1) 4 cm, 6 cm ja 40°;
2) 4,6 m, 5,8 m ja 130°.

582. Võrdhaarse kolmnurga haar on 3,4 cm ja tipunurk 80°. Arvuta kolmnurga pindala.

583. Võrdkülgse kolmnurga külg on 15 cm. Arvuta pindala.

584. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 6 cm. Kolmnurga pindala on 7,5 cm². Leia antud külgede vaheline nurk.

585. Arvuta ringi segmendi pindala, kui segmendi kaar on 70° ja ringi raadius on 20,2 cm.

586. Arvuta korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga ümberringjoone raadius on 3 cm.

§ 93. SIINUSTEOREEM.

Üldkujulist kolmnurka saab lahendada, kui tükeldada antud kolmnurk kõrgusega täisnurkseteks kolmnurkadeks ning arvutada nendest antud kolmnurga puuduvad elemendid. Lihtsam on aga siiski lahendada otseselt, kasutades mõnesuguseid kolmnurga elementide vahelisi seoseid. Üht niisugust seost väljendab nn. siinusteoreem:

kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}}$$

Tõestus. Lähtume kolmnurga pindala valemitest:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta; \tag{1}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{2}$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma. \tag{3}$$

Esimesest ja teisest võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta=bc\sin\alpha$$

ehk

$$a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

Siit

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Esimesest ja kolmandast võrdusest järeldub, et

$$ac \sin \beta = ab \sin \gamma$$

ehk

$$c \sin \beta = b \sin \gamma.$$

Siit saame

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Seega tõesti

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kui võrdes

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

kolm liiget on antud, siis neljanda saab arvutada. Seega siinusteoreem võimaldab

1) arvutada kolmnurga külge teise külje ja nende külgede vastasnurkade järgi; näiteks:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta};$$

2) arvutada kolmnurga nurka teise nurga ja nende nurkade vastaskülgede järgi, näiteks:

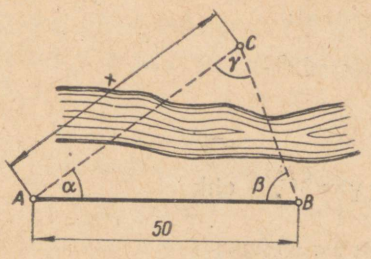
$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b},$$

kust nurga α saame leida lükati või tabeli abil.

Kokkuvõttes: *siinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks nurka ja üks külg või*
2) *kaks külge ja neist ühe külje vastasnurk.*

Näide 1. Tahetakse mõõta ligipääsmatu punkti C kaugust punktist A. Selleks võetakse lõik $AB = 50$ m baasiks ja mõõdetakse nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$. Arvutame kauguse $AC = x$, kui $\alpha = 36°30'$ ja $\beta = 68°30'$ (joon. 115).



Joon. 115.

Lahendus. Rakendades siinusteoreemi, saame:

1) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;

2) $\frac{x}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$,

millest

$$x = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Numbriliselt:

$$\gamma = 180° - (36°30' + 68°30') = 180° - 105° = 75°.$$

Võrret $\frac{x}{\sin 68°30'} = \frac{50}{\sin 75°}$ lükatiga lahendades leiame, et $x = 48{,}2$. Seega on punktide A ja C vaheline kaugus ligikaudu 48 m.

Näide 2. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$c = 93{,}1; \quad b = 49{,}5; \quad \gamma = 110°50'.$$

Lahendus. Et antud nurk on nürinurk, siis peavad ülejäänud nurgad α ja β olema teravnurgad.

1) Arvutame nurga β, milleks rakendame siinusteoreemi:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma}.$$

Asendades saame:

$$\frac{49{,}5}{\sin\beta} = \frac{93{,}1}{\sin 110°50'} \quad \text{ehk} \quad \frac{49.5}{\sin\beta} = \frac{93{,}1}{\sin 69°10'}.$$

Siit $\beta = 29°50'$.

2) $\alpha = 180° - (110°50' + 29°50') = 39°20'$.

3) Arvutame külje a:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{\sin 39°20'} = \frac{49{,}5}{\sin 29°50'}.$$

Seega,

$$a = 63{,}19 \approx 63{,}2.$$

Paneme tähele, et

$$b < a < c \text{ ja } \beta < \alpha < \gamma.$$

Vastus. $a = 63{,}2$; $\alpha = 39°20'$; $\beta = 29°50'$.

Näide 3. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$b = 34;\quad c = 46;\quad \beta = 42°.$$

1) Arvutame nurga γ:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta},\ \text{millest}\ \sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}\ \text{ehk}$$

$$\sin\gamma = \frac{46 \cdot \sin 42°}{34}\ \text{ehk}\ \sin\gamma = 0{,}9054.$$

Nurga γ arvutamisel peame silmas pidama, et $\gamma > \beta$ (sest $c > b$) ja teiseks, et viimasel võrrandil on kaks lahendit; tõesti, ka

$$\sin(180° - \gamma) = 0{,}9054.$$

Nurga γ väärtuseks saame antud juhul:

$$\gamma_1 = 53°32' \approx 53°30';$$
$$\gamma_2 = 126°30'.$$

Mõlemad väärtused võivad olla lahendatava kolmnurga nurgaks, sest mõlemad on suuremad kui β.

2) Leiame nurga α:

$$\alpha_1 = 180° - (42° + 53°30') = 84°30';$$
$$\alpha_2 = 180° - (42° + 126°30') = 11°30'.$$

3) Külje a arvutamisel saame:

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1} = \frac{b}{\sin\beta},\ \text{millest}\ a_1 = \frac{b\sin\alpha_1}{\sin\beta}$$

ehk

$$a_1 = \frac{34 \cdot \sin 84°30'}{\sin 42°} \approx 50{,}5;$$

$$a_2 = \frac{34 \cdot \sin 11°30'}{\sin 42°} \approx 10{,}2.$$

Vastused.

1) $\begin{cases} \alpha = 84°30' \\ \gamma = 53°30' \\ a = 50{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \alpha = 11°30' \\ \gamma = 126°30' \\ a = 10{,}2 \end{cases}$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, siis, nagu teada, määravad need andmed kas kaks kolm-

nurka, ühe kolmnurga või ei määra ühtki kolmnurka. Olgu näiteks antud a, b ja α nii, et $a < b$; nurga β arvutamisel saame

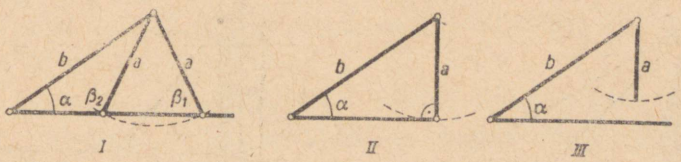
$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}.$$

Sõltuvalt andmetest a, b ja α võib juhtuda, et

1) $a > b \sin\alpha$; 2) $a = b \sin\alpha$; 3) $a < b \sin\alpha$, millele vastavalt peaks olema

1) $\sin\beta < 1$; 2) $\sin\beta = 1$; 3) $\sin\beta > 1$.

Esimesel juhul leidub alati teravnurk β_1, mis sellele siinusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk β_2, millel on sama siinuse väärtus, sest $\sin\beta_1 = \sin(180° - \beta_1)$, seega $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Lahendamisel saame sel korral kaks kolmnurka, ühe teravnurkse, teise nürinurkse (joon. 116 — I).



I II III

Joon. 116.

Teisel juhul, kui $\sin\beta = 1$, saame lahendamisel ühe kolmnurga, nimelt täisnurkse, sest siis $\beta = 90°$ (joon. 116—II).

Kolmandal juhul, kui $\sin\beta > 1$, andmed a, b ja α ei määra ühtki kolmnurka, sest pole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1. Ülesandel sel korral lahend puudub (joon. 116—III).

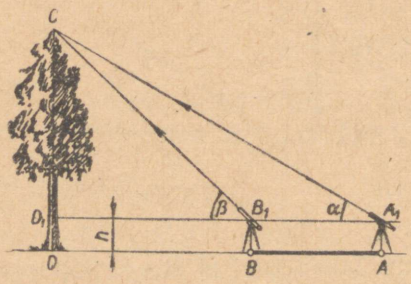
Ülesandeid.

587. Lahenda kolmnurk andmeil:

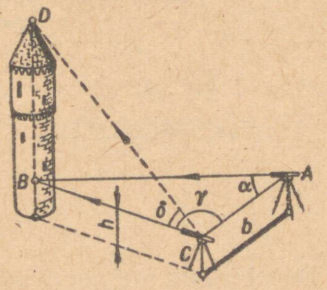
1)	$a = 22$;	$\alpha = 36°$;	$\beta = 52°$.
2)	$b = 30$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 58°$.
3)	$c = 24$;	$\beta = 122°$;	$\gamma = 35°$.
4)	$c = 174$;	$\beta = 36°30'$;	$\gamma = 63°30'$.
5)	$b = 72$;	$c = 45$;	$\beta = 58°20'$.
6)	$a = 416$;	$b = 635$;	$\beta = 28°10'$.
7)	$b = 85{,}76$;	$\beta = 36°55'$;	$\gamma = 74°18'$.
8)	$c = 144{,}7$;	$\alpha = 120°16'$;	$\beta = 42°24'$.
9)	$b = 56$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 6°$.

10) $a = 62$; $b = 48$; $\alpha = 50°$.
11) $a = 32$; $b = 48$; $\beta = 40°$.
12) $b = 35$; $c = 45$; $\beta = 46°$.
13) $b = 127$; $c = 283$; $\beta = 70°30'$.
14) $a = 99$; $c = 68$; $\gamma = 28°$.
15) $a = 14{,}5$; $b = 21{,}1$; $\alpha = 63°50'$.

588. Mõõtmistöödel maastikul said õpilased ülesande mõõta niisuguse puu kõrgus, millele ei saanud ligi minna. Ülesande täitmiseks võeti puu tüve läbival sirgel baas $AB = 10$ m ning mõõdeti puu kõrgusnurgad α ja β vastavalt punktide A ja B juurest viseerimisega puu latva C (joon. 117). Saadi $\alpha = 28°17'$ ja $\beta = 41°20'$. Nurgamõõtja kõrgus $h = 1{,}3$ m. Kui kõrge oli puu?



Joon. 117.



Joon. 118.

589. Vabrikukorstna kõrguse kindlakstegemiseks mõõdeti korstna sihis baas $AB = 75$ m ning korstna kõrgusnurgad punktide A ja B kohal, saades $\alpha = 20°48'$ ja $\beta = 32°18'$. Nurgamõõtja kõrgus oli 1,3 m. Kui kõrge oli korsten? (Kasuta joonist 117!)

590. Veetorni kõrguse mõõtmiseks võeti maapinnal baas $b = AC$, mis ei asunud torni jalamit läbival sirgel. Mõõdeti nurgad $BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$ ja $DCB = \delta$ (joon. 118). Arvuta torni kõrgus andmeil: $b = 35$ m; $\alpha = 47°43'$; $\gamma = 110°28'$; $\delta = 32°13'$. Teodoliidi kõrgus $h = 1{,}3$ m.

591. Näita, et siinusteoreem kehtib ka täisnurkse kolmnurga kohta.

592. Näita siinusteoreemi abil, et

1) kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende nurkade vastasküljed;

2) kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik küljed võrdsed.

593. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3 ja ümbermõõt on 20 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

594. Kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BE, kus E on nurgapoolitaja ja külje AC ühine punkt. Rakendades siinusteoreemi, tõesta kolmnurga nurgapoolitaja omadus:

$$AE : EC = AB : BC.$$

§ 94. KOOSINUSTEOREEM.

Kolmnurga lahendamist juhul, kui ta on määratud kolme küljega või kahe külje ja nendevahelise nurgaga, ei saa alustada siinusteoreemiga, sest sel korral ei saa kirjutada võrret, millest kolm liiget on teada.

Sel puhul on rakendatav seos, mida väljendab nn. koosinusteoreem:

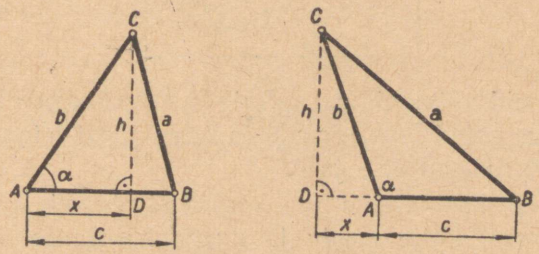
kolmnurga külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede ja viimaste vahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

Sümbolites

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

Tõestus. Tõestame koosinusteoreemi ühtaegu nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga kohta (joon. 119).

Tõmbame tipust C kõrguse $CD = h$. Tähistame tähega x külje b projektsiooni küljel c või selle pikendusel.



Joon. 119.

Pütagorase teoreemi põhjal saame kolmnurgast DBC:

teravnurkse kolmnurga korral:	nürinurkse kolmnurga korral:
$a^2 = h^2 + (c - x)^2,$	$a^2 = h^2 + (c + x)^2,$
$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 - 2cx.$	$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 + 2cx.$

Kolmnurgast ADC : $h^2 + x^2 = b^2$, seega

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$

Kolmnurgast ADC saame, et

$x = b \cos \alpha.$	$x = b \cos (180° - \alpha)$ $= - b \cos \alpha.$

Kirjutades eespool saadud valemites tähe x asemele tema avaldised, saame

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha.$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cos \alpha).$

Seega saame nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga puhul:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analoogiliselt saame koosinusteoreemi tõestada ka külgede b ja c kohta.

Valemid, mis väljendavad koosinusteoreemi, võimaldavad arvutada kolmnurga külge kahe ülejäänud külje ja nendevahelise nurga järgi.

Eespooltoodud valemeid võib kirjutada ka kujul:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Need valemid võimaldavad arvutada kolmnurga nurkasid, kui kõik küljed on antud. $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ järgi leiame tabelitest või lükati abil nurgad α, β ja γ.

Logaritmide kasutamine on koosinusteoreemi rakendamisel raskendatud, sest külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad.

Niisiis, *koosinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks külge ja nendevaheline nurk või*
2) *kolm külge.*

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nendevaheline nurk, näiteks a, b ja γ, siis ülejäänud elemendid võime leida kahel erineval viisil.

A. Koosinusteorcemi põhjal:

1) rakendades valemit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$ arvutame külje c;

2) rakendades valemit

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$ leiame nurga β;

3) rakendades valemit

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$ leiame nurga α.

Viis A on otstarbekohane siis, kui antud külgede mõõtarvud on ühe- või kahekohalised.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal:

1) valemist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ arvutame külje c;
2) rakendades siinusteoreemi, kirjutame võrde

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$ millest leiame nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga α.

Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis võib nurkade arvutamine toimuda samuti kahel viisil:

A. Koosinusteoreemi põhjal, kasutades nurkade koosinuste valemeid leheküljelt 286.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal järgmiselt:

1) kasutades valemit

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$ leiame nurga α;

2) kirjutades siinusteoreemi põhjal võrde

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$ leiame sellest nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga γ.

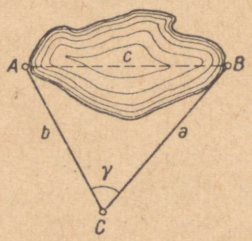
§ 95. KOLMNURGA LAHENDAMISE NÄITEID.

N ä i d e 1. Arvuta tiigi pikkus AB (joon. 120), kui $AC=60$ m, $BC=80$ m ja nurk $ACB=88°$.

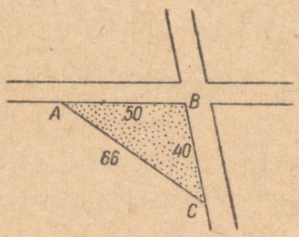
L a h e n d u s. Tähistades pikkuse AB meetrites tähega c, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$c^2=60^2+80^2-2\cdot60\cdot80\cdot\cos88°=$$
$$=3600+6400-9600\cdot0{,}0349=9665.$$
$$c=\sqrt{9665}=98{,}29\approx98.$$

Seega on tiigi pikkus ligikaudu 98 m.



Joon. 120.



Joon. 121.

N ä i d e 2. Risttänavate vahel on kolmnurkne haljasala ABC, mille külgede pikkused on vastavalt 50, 40 ja 66 m (joon. 121). Arvuta tänavatevaheline nurk ABC.

L a h e n d u s. Tähistades otsitava nurga tähega β, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$\cos\beta=\frac{50^2+40^2-66^2}{2\cdot50\cdot40}=\frac{2500+1600-4356}{4000}=-0{,}0640.$$

Seega

$$\cos(180°-\beta)=0{,}0640;$$

$$180° - \beta = 86°20';$$
$$\beta = 93°40' \approx 94°.$$

Seega on tänavatevaheline nurk 94°.

N ä i d e 3. Kui suured on nurgad kolmnurgas, mille küljed on: $a = 195$, $b = 169$, $c = 182$?

Lähtudes koosinusteoreemist ja rakendades tuntud valemit

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

pole raske tuletada (proovi seda teha!) kolmnurga nn. **poolnurkade koosinuste valemeid:**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

kus $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ tähendab kolmnurga poolt ümbermõõtu. Need valemid on eriti sobivad lükatiga arvutamiseks. Meie näite puhul korraldaksime arvutused nii:

$a = 195;$ $\quad p - a = 273 - 195 = 78;$
$b = 169;$ $\quad p - b = 273 - 169 = 104;$
$c = 182;$ $\quad p - c = 273 - 182 = 91;$
$p = 546 : 2 = 273;$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{273 \cdot 78}{169 \cdot 182} = 0{,}692;$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}692 = 0{,}308; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}308};$$
$$\frac{\alpha}{2} = 33°40'; \quad \alpha = 67°20'.$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{273 \cdot 104}{195 \cdot 182} = 0{,}800;$$
$$\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - 0{,}800 = 0{,}200; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{0{,}200}$$
$$\frac{\beta}{2} = 26°35'; \quad \beta = 53°10'.$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{273 \cdot 91}{195 \cdot 169} = 0{,}753;$$
$$\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 0{,}753 = 0{,}247; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{0{,}247};$$
$$\frac{\gamma}{2} = 29°45'; \quad \gamma = 59°30'.$$

K o n t r o l l. $\alpha + \beta + \gamma = 180°00'$.

M ä r k u s. Arusaadavalt võiks näiteks 3. antud ülesande lahendada ka ainult koosinusteoreemi põhjal või rakendada viimast koos siinusteoreemiga (tee seda!).

Ülesandeid.

595. Lahenda kolmnurk järgmisil andmeil:

1) $a = 16$; $b = 12$; $\gamma = 38°$.
2) $b = 81{,}7$; $c = 39{,}2$; $\alpha = 122°10'$.
3) $a = 52{,}84$; $c = 14{,}88$; $\beta = 24°55'$.
4) $a = 8$; $b = 12$; $c = 16$.
5) $a = 50$; $b = 41$; $c = 19$.
6) $a = 6{,}4$; $b = 8{,}8$; $c = 10$.
7) $a = 40$; $b = 19$; $c = 41$.
8) $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$; $c = 1{,}8$.
9) $a = 24{,}57$; $b = 24{,}75$; $c = 10{,}05$.
10) $a = 0{,}2243$; $b = 0{,}2469$; $c = 0{,}3126$.

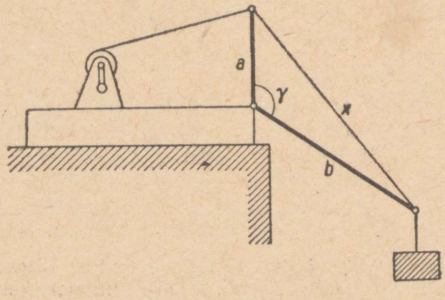
596. Arvuta järve pikkus AB (joon. 120), kui $AC = 570$ m, $BC = 860$ m ja nurk $\gamma = 79°$.

597. Nelinurga küljed on järjestikku 16 m, 18 m, 24 m ja 26 m; üks diagonaal on 36 m. Arvuta nelinurga pindala.

598. Matkaja näeb oma asukohast P kolme mäetippu A, B ja C, milledest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas ja milledest A on talle kõige lähemal. Kaardi järgi on $AB = 9{,}4$ km, $BC = 6{,}0$ km ja $AC = 11{,}2$ km. Matkaja mõõdab nurga BPC ja leiab selle olevat 12°. Kui kaugel on matkaja mäest C?

599. Ühest ja samast punktist alustasid ühtlast sirgjoonelist liikumist kaks keha, üks kiirusega 2 m sekundis, teine kiirusega 3 m sekundis. Kui kaugel on need kehad teineteisest 10 sekundi pärast, kui liikumise teed moodustavad nurga 34°?

600. Joonisel 122 on skemaatiliselt kujutatud tõstekraana, millel tugi $a = 3{,}8$ m, õlg $b = 6{,}5$ m ning nendevaheline nurk $\gamma = 125°$. Arvuta trossi pikkus x.



Joon. 122.

§ 96. KOLMNURGA PINDALA VALEMID.

Kolmnurga pindala saab arvutada tuntud valemi

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ah} \qquad (1)$$

järgi, kus a tähendab kolmnurga alust ja h alusele tõmmatud kõrgust.

Kui kolmnurk on määratud kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, siis pindala arvutamiseks sobib valem (vt. § 92):

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma} \qquad (2)$$

Viimasest pindala valemist saab tuletada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks ühe külje ja kolme nurga järgi.

Avaldame siinusteoreemi põhjal külje b:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta};\quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Asendades pindala valemis (2) külje b tema avaldisega, saame

$$S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma;$$

$$\boxed{S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}} \qquad (3)$$

Analoogiliselt saame valemid:

(3′) $\boxed{S=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}}$ $\boxed{S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}}$ (3″)

Näide. Leida kolmnurga pindala, kui külg $c=89$ m ja selle lähisnurgad on: $\alpha=88°$, $\beta=10°50'$.

Lahendus.

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-98°50'=81°10'.$$

Valemi (3″) järgi kirjutame:

$$S=\frac{89^2\cdot\sin 88°\cdot\sin 10°50'}{2\cdot\sin 81°10'}.$$

Edasisi arvutusi lükati abil sooritades saame vastuse järgmiselt:

$$S = \frac{7900 \cdot 1 \cdot 0{,}188}{2 \cdot 0{,}988} = \frac{7900 \cdot 0{,}094}{0{,}988} = 756 \ (\text{m}^2).$$

Kolmnurga pindala saab arvutada ka kolme külje järgi. Selle kohase valemi tuletamisel lähtume valemist (2) kujul

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

ning rakendame põhiseost

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}.$$

Saame: $S = \frac{bc}{2} \sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}$.

Teisendame juuritavat avaldist. Liites koosinusteoreemist saadud valemis

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

mõlema poolega arvu 1, saame

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

ehk, lahutades viimase murru lugeja tegureiks,

$$1 + \cos \alpha = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}.$$

Tähistame kolmnurga ümbermõõdu sümboliga $2p$; siis

$a + b + c = 2p$,
$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$,
$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$,
$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$.

Seega

$$1 + \cos \alpha = \frac{2p(p - a)}{bc}.$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli arvust 2 lahutades saame

$$1 - \cos \alpha = 2 - \frac{2p(p - a)}{bc} = \frac{2}{bc}(bc - p^2 + ap).$$

Asendades viimases sulgavaldises a väärtusega $2p - b - c$, saame sulgavaldist teisendada järgmiselt:

$$bc - p^2 + ap = bc - p^2 + 2p^2 - pb - pc =$$
$$= p^2 - pb - pc + bc =$$
$$= (p - b)(p - c).$$

Järelikult

$$1 - \cos\alpha = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Pindala valemi saame lõpuks nii:

$$S = \frac{bc}{2}\sqrt{\frac{2p(p-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad (4)$$

Seda valemit nimetatakse Heroni pindalavalemiks. Kreeka matemaatik Heron elas II ja III sajandi vahetusel e.m.a. Viimasel ajal on selgunud, et valem oli tuntud juba enne Heronit.

Näide. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui haar on 4,6 m ja alus 5,8 m.

Lahendus. Kasutades Heroni pindalavalemit viime arvutused läbi järgmise skeemi järgi:

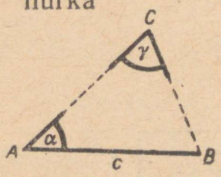
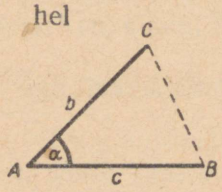
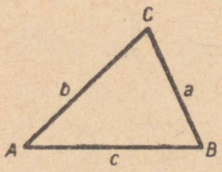
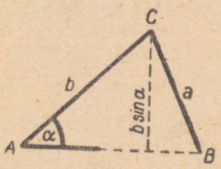
$a = 4{,}6;$ $\quad p - a = 2{,}9;$
$b = 4{,}6;$ $\quad p - b = 2{,}9;$
$c = 5{,}8;$ $\quad p - c = 1{,}7;$

$p = 15{,}0 : 2 = 7{,}5;$

$$S = \sqrt{7{,}5 \cdot 2{,}9^2 \cdot 1{,}7} = 2{,}9 \cdot \sqrt{7{,}5 \cdot 1{,}7}.$$

Edasi leiame lükatil korrutise $7{,}5 \cdot 1{,}7$ skaalade A ja B abil; korrutise väärtust välja lugemata saame niidi alt skaalalt D ruutjuure väärtuse; viimastki välja lugemata korrutame ta kohe arvuga 2,9 ning loeme lõpptulemuseks numbrid 1—0—4. Arvutusandmete suurusjärke ja nimetusi arvestades otsustame, et

$$S = 10{,}4 \ (\text{m}^2).$$

Antud elemendid	Puuduvate elementide leidmine	Pindala
I. Külg ja kaks nurka 	1) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$ 3) $a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$	$S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$
II. Kaks külge ja nurk nende vahel 	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ 3) $\sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a}$	$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$
III. Kolm külge 	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	Heroni pindalavalem
IV. Kaks külge ja neist ühe vastasnurk 	A. Lahend puudub, kui $a < b \sin\alpha$. B. On üks lahend, kui 1) $a > b$ 2) $a = b$ ja $\alpha < 90°$ 3) $a = b \sin\alpha$ C. Kaks lahendit, kui $b > a > b \sin\alpha$ $\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$	

Ülesandeid.

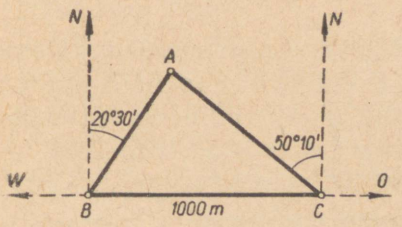
601. Arvuta kolmnurga pindala järgmisil andmeil:

1) $a = 93$; $b = 65$; $\gamma = 42°$.
2) $b = 4{,}42$; $c = 5{,}72$; $\alpha = 65°20'$.
3) $a = 50{,}8$; $c = 32{,}3$; $\beta = 23°30'$.
4) $a = 20{,}73$; $b = 36{,}26$; $\gamma = 70°45'$.
5) $a = 48{,}8$; $\beta = 106°$; $\gamma = 25°20'$.
6) $a = 98{,}55$; $\alpha = 23°42'$; $\beta = 47°24'$.
7) $b = 0{,}307$; $\alpha = 32°40'$; $\beta = 70°20'$.
8) $a = 28$; $b = 35$; $c = 42$.
9) $a = 0{,}18$; $b = 0{,}23$; $c = 0{,}09$.
10) $a = 421{,}6$; $b = 499{,}8$; $c = 335{,}9$.

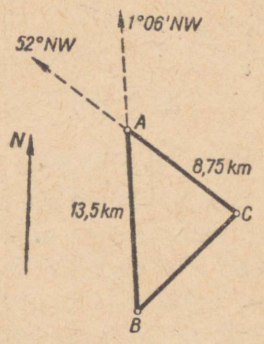
602. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 636 cm² ja kolmnurga suurim nurk on 92°42′. Arvuta kolmnurga haar.

603. Leia kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on 78 m² ja kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.

604. Joonisel 123 on kujutatud kolmnurgakujulise väljaku ABC plaan. Arvuta väljaku pindala.



Joon. 123.

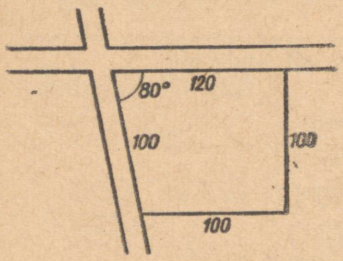


Joon. 124.

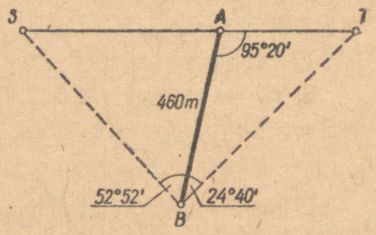
605. Arvuta joonisel 124 kujutatud kolmnurga pindala.

606. Arvuta joonisel 125 kujutatud kahe risttee vahelise maatüki pindala.

607. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas AB, mille üks otspunkt A asus sirgel ST punktide S ja T vahel (joon. 126) ja mille pikkus oli 460 m. Peale selle mõõdeti nurgad $\angle BAT = 95°20'$, $\angle ABT = 24°40'$ ning $\angle ABS = 52°52'$. Arvuta kaugus ST.



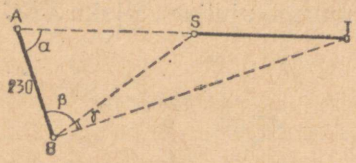
Joon. 125.



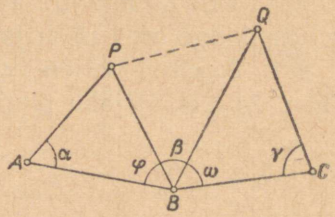
Joon. 126.

608. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse kindlakstegemiseks mõõdeti baas AB, mille otspunkt A asus lõigu ST pikendusel (joon. 127), ning nurgad $\angle SAB = \alpha$, $\angle ABS = \beta$ ja $\angle SBT = \gamma$.

Arvuta kaugus ST, kui $AB = 230$ m, $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$ ja $\gamma = 25°$.



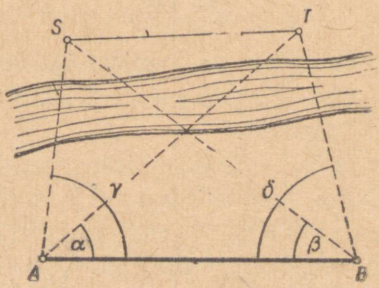
Joon. 127.



Joon. 128.

609. Punktid P ja Q teisel pool jõge on siinpoolselt kaldalt korraga nähtavad ainult punktist B (joon. 128). Punktid B ja P on korraga nähtavad punktist A. Punktid Q ja B on nähtavad punktist C. Pikkused AB ja BC on vastavalt 92,3 ja 72,1 m. Teodoliidiga nurki mõõtes leiti, et $\alpha = 66°16'$, $\beta = 20°48'$, $\gamma = 82°25'$, $\varphi = 52°18'$ ja $\omega = 60°05'$. Arvuta pikkus PQ.

610. Punktid S ja T teisel pool jõge on korraga nähtavad nii punktist A kui ka punktist B siinpool jõge. Punktide S ja T vahelise kauguse (joon. 129) määramiseks mõõdeti AB ja nurgad α, β, γ ja δ. Arvuta kaugus ST, kui $AB = 100$ m, $\alpha = 52°$, $\beta = 57°$, $\gamma = 96°$ ja $\delta = 87°$.



Joon. 129.

Näpunäiteid. 1) Arvuta AS kolmnurgast ASB. 2) Arvuta AT kolmnurgast ATB. 3) Arvuta ST kolmnurgast AST.

Kontrolliks arvuta samal viisil ST kolmnurgast BST.

611. Lahenda ülesanne 610 (joon. 129) järgmisil andmeil: $AB = 150$ m, $\alpha = 97°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 107°$, $\delta = 59°$.

ÜLESANDEID KORDAMISEKS.

612. Ristküliku pikem külg $a = 48{,}06$ mm; ühendades külgede keskpunktid, saame rombi, mille nurk $\alpha = 32°$. Arvuta ristküliku lühem külg.

613. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugused teineteisest on 17 cm.

Kui suur langemisnurk on valguskiirel, mis väljudes ühest punktist läbib pärast peegeldumist teise punkti?

614. Täisnurkse kolmnurga pindala on 12,34 m^2 ja üks nurk on 36°24′. Leia kolmnurga hüpotenuus.

615. Arvuta korrapärase kümmenurga ümberringjoone raadius, kui kümmenurga apoteem on 26,8 cm.

616. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 10$ cm, $\alpha = 60°$ ja $\beta = 45°$. Mõõda külg b. Kontrolli mõõtmistulemust arvutamise teel.

617. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 54$ mm, $b = 42$ mm ja $\alpha = 135°$. Mõõda jooniselt nurk β ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

618. Alljärgnevas tabelis on antud kümne kolmnurga elemendid. Kontrolli nende sobivust.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	5	12	13	22°37′	67°23′	90°	30
2.	16	63	65	14°15′	75°45′	90°	500
3.	6	5	5	73°44′	53°08′	53°08′	12
4.	55	110	110	28°58′	75°31′	75°31′	2 900
5.	84	72	45	89°35′	58°18′	32°07′	1 600
6.	416	635	970	18°02′	28°12′	133°46′	95 200
7.	133,1	85,76	137,5	68°47′	36°55′	74°18′	5 500
8.	52	56	6,3	52°	122°32′	5°28′	140
9.	17	8	11,9	116°	25°	39°	43
10.	108	81,7	39,2	122°06′	39°58′	17°56′	1 350

619. a) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 50$ mm, $b = 70$ mm ja $\gamma = 22°30'$. Mõõda jooniselt kolmas külg c ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

b) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk, mille küljed on: $a = 60$ mm, $b = 70$ mm ja $c = 80$ mm. Mõõda jooniselt kolmnurga nurgad ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

620. Alljärgnevas tabelis on antud kolmnurka määravad elemendid. Arvuta puuduvad elemendid.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	7	8					14
2.	5			44°25′		101°32′	
3.	5	7					9,8
4.		14		53°08′		67°23′	
5.	13	20			67°23′		
6.		75	91			120°31′	
7.	9	65		6°22′			
8.		65	76		46°24′		
9.	9	1,7	8,9				
10.	8,95	6,88	10,2				

621. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise progressiooni, on üks külg 5 cm ja selle külje vastasnurk 120°. Arvuta teised küljed, nurgad ja pindala.

622. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Millisteks osadeks jaguneb täisnurk?

623. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?

624. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?

625. Kolmnurga pindala on 252 cm² ja kaks nurka on 53°08′ ja 120°31′. Arvuta kolmnurga küljed.

626. Nelinurga küljed on järjestikku 11 cm, 8,4 cm, 5,5 cm ja 4,2 cm; viimase kahe külje vaheline nurk on 70°. Arvuta nelinurga pindala.

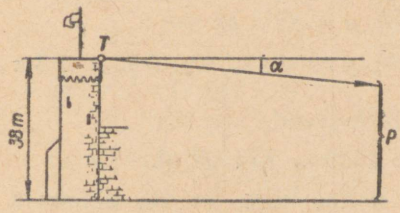
627. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α siinus on $\frac{1}{3}$. Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet a?

628. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β koosinus on $\frac{5}{8}$. Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga β lähiskaatet?

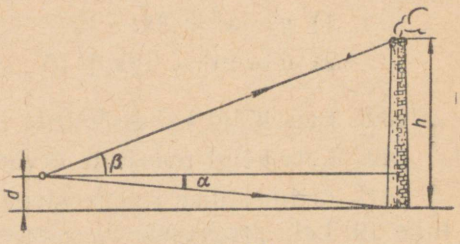
629. Missuguse nurga koosinus võrdub 45°-se nurga tangensiga?

630. Missuguse teravnurga tangens võrdub 30°-se nurga siinusega?

631. 38 m kõrguse torni tipust T vaadeldava punkti P alangunurk $\alpha = 4{,}3°$ (joon. 130). Arvuta punkti P kaugus torni tipust T.



Joon. 130.



Joon. 131.

632. Kõrguselt $d = 9{,}30$ m vaadelduna paistab vabriku korstna jalg rõhtsihist nurga $\alpha = 6{,}1°$ võrra allpool, korstna ülemine äär aga nurga $\beta = 16{,}3°$ võrra kõrgemal (joon. 131). Arvuta korstna kõrgus h.

633. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

a) $\cos x = \sin 2x$; b) $\cos x + \cos 2x = 0$; c) $\sin x = 2\cos x$.

ÜLESANDEID IX KLASSI KURSUSE KORDAMISEKS.

634. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = 2x + 9$ 3) $y = -\frac{1}{3}x + 1$ 5) $y = \sin 2x$

2) $y = -x^2 + x - 12$ 4) $y = 12 - x - 6x^2$ 6) $y = \cos \frac{1}{3}x$

635. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspiirkonnad:

1) $y = 3x - 6$ 3) $y = 24 - 17x - 20x^2$

2) $y = x^2 + 5x - 14$ 4) $y = \sin x$, kui $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

636. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsuspiirkonnad:

1) $y = -0{,}3x + 1{,}5$ 3) $y = 2x^2 + 3x - 2$

2) $y = -x^2 - 6x + 16$ 4) $y = \cos x$, kui $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$

637. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkonnad:

1) $y = x^2 + 3x + 22$ 3) $y = \tan x$, kui $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$,

2) $y = -x^2 - x + 2$ 4) $y = x^4$

638. Leia järgmiste funktsioonide kahanemispiirkonnad:

1) $y = x^2 + 3x - 10$ 3) $y = x^3$.

2) $y = 2x^2 - 13x + 15$ 4) $y = \sin x$, kui $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

639. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

640. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st 99-ni.

641. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

642. Kaldpinda mööda liikuv kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

643. Leia progressiooni

$$\log 1;\ \log 10;\ \log 100;\ \log 1000;\ \ldots$$

10. liige

644. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3 - (8yz)^2}{4x^3y^2 - 3x^5z^2}$$

väärtus, kui $x = -2$, $y = 5$ ja $z = -3$.

645. Lahenda proovimise teel võrrandid:

1) $4x^3 - 108 = 0$

2) $3x^4 - 48 = 0$

646. Järjesta suuruse järgi:

1) 3^9; $2{,}1^9$; 10^9; $(-9)^9$; $0{,}2^9$; $0{,}9^9$; $(-0{,}2)^9$; $(-31)^9$; $(-5)^9$.

2) 3^{10}; $2{,}1^{10}$; 10^{10}; $(-9)^{10}$; $0{,}2^{10}$; $0{,}9^{10}$; $(-0{,}2)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-5)^{10}$.

647. Lihtsusta avaldisi:

1) $(-2x \cdot 4yz^2)^3$ 2) $\frac{4^3a^4b^5c^2}{4^2a^7b^3c^3}$

3) $3x^2y^5 \cdot 2x^4y^3 - (2x^3y^4)^2 + \frac{12x^9y^{10}}{3x^3y^2}$

648. Järjesta suuruse järgi:

1) 2^8; 2^{-8}; $(-2)^8$; $(-2)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$.

2) 3^7; 3^{-7}; $(-3)^7$; $(-3)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}$.

3) 5^9; 5^{10}; $(-5)^9$; $(-5)^{10}$; 5^{-9}; 5^{-10}; $(-5)^{-9}$; $(-5)^{-10}$; $(-5)^0$; 5^0.

649. Lihtsusta avaldisi:

1) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

2) $x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}} : x^{-2\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{6}}\right)^2 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

4) $(a^4b^6c)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\right)^2$

5) $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^4$

6) $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-3}$

7) $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

8) $\sqrt[3]{x^2y^4z} : \sqrt[4]{x^3y^2z^3}$

9) $(\sqrt[3]{x^2y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3$

10) $\left[(\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[2]{a^2b})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

650. Järjesta suuruse järgi:

1) $52^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$; $52^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2) $3^{\frac{1}{3}}$; $(-3)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{1}{3}}$; $(-3)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3) 10^2; $10^{\frac{1}{2}}$; 10^{-2}; $10^{-\frac{1}{2}}$; 10^0; 10^3; 10^{-3}; $10^{\frac{1}{3}}$; $10^{-\frac{1}{3}}$.

651. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y}}$ 2) $\frac{1}{1-\sqrt{14}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 4) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$

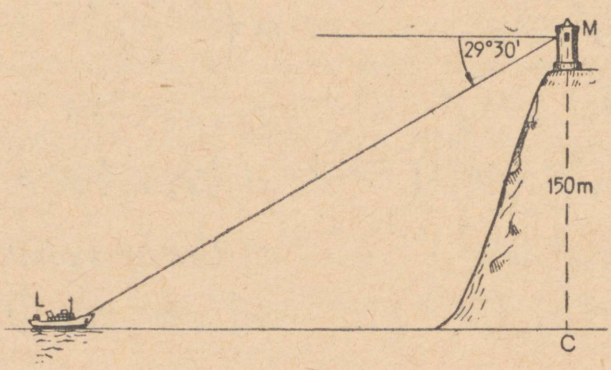
5) $\frac{xy}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$ 6) $\frac{(2-a)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-(2-a)^{\frac{1}{2}}}$

652. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $3\sqrt{x}-75=0$ 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=0$

2) $(2-x)^{\frac{1}{2}}-7=0$ 5) $(x+2)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}=0$

3) $(2y-1)^{\frac{1}{2}}-y=0$



Joon. 132.

653. Tuletornist, mis asub 150 m kõrgusel merepinnast, paistab laev horisontaaltasapinnast, mis läbib vaatleja silma, 29°30′ allpool. Kui kaugel on laev rannast (punktist C, joon. 132)?

654. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 16 mm ja 28 mm. Kui kaugel nende ringjoonte ühisest keskpunktist paistab suurem ring kaks korda suuremas nurgas kui väiksem? Kontrolli lahendit andmete ja saadud tulemuse järgi tehtud joonise abil.

655. Sarika pikkus maja seina kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on 35°. Leia aampalgi pikkus.

656. On antud lõik a ja nurk α. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

1) $a \sin \alpha$; 2) $a \cos \alpha$.

657. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui kõlisti osutit saab pöörata tunniosuti pöörlemisele vastupidises suunas?

658. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöördub hammasratas, kui ta pöördub:

1) kellaosuti pöörlemisele vastupidises suunas 42; 300 hamba võrra?

2) kellaosuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

659. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$

2) $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - -\sin(-40°)$

3) $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$

660. Arvuta järgnevate avaldiste väärtused tabeleid kasutamata:

1) $\dfrac{\tan 26° + \tan 19°}{1 - \tan 26° \tan 19°}$

2) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{15} + \tan\frac{4\pi}{15}}{1 - \tan\frac{\pi}{15}\tan\frac{4\pi}{15}}$

3) $\sin 18° \cos 42° + \cos 18° \sin 42°$

4) $\cos 48° \cos 16° + \sin 48° \sin 16°$

661. Avalda nurga α trigonomeetriliste funktsioonide kaudu:

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$.

662. Lahenda võrrandid:

1) $\cos 4x + \cos 2x = 0$

2) $\tan 2x = \tan x$

663. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

664. Arvuta logaritmide abil:

1) $\dfrac{\sqrt{0{,}06768 \cdot \sqrt{0{,}001}}}{0{,}004837^3 \cdot \sqrt{10}}$

2) $\dfrac{17{,}62}{4{,}834^3 \cdot \sqrt{\frac{0.716}{8{,}55}}}$

3) $\frac{\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[3]{100}}{\sqrt{100000} \cdot \sqrt[4]{10}}$

4) $\frac{\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt[5]{0.0001}}{\sqrt[3]{0{,}0001} \cdot \sqrt[4]{0{,}001}}$

5) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks niisama suure ruumalaga kuubi serv?

6) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistiiru ümber Päikese? (Maa kaugus Päikesest on 149 700 000 km.)

7) Rauast kuup kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on $7{,}8 \frac{G}{cm^3}$.)

8) Vasktraadi kera kaalub 24,67 kG. Mitu meetrit traati on keras, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on $8{,}9 \frac{G}{cm^3}$.)

9) Kolmnurga külgede pikkused on 283,5 m, 309,2 m ja 3467 m. Arvuta kolmnurga pindala.

665. Lahenda arvutuslükati abil järgmised ülesanded:

1) 0,722 · 268
14,9 : 0,066
0,0304 : 9,23
3,14 · 2030

2) 56,6 · 125,5
6200 : 19,8
0,87 : 52,3
942 : 40,7

3) $0{,}0288^2$
137^3
8530^2
$0{,}046^3$

4) $\sqrt{108000}$
$\sqrt[3]{0{,}01}$
$\sqrt[3]{675000}$
$\sqrt{0{,}00007}$

5) $\sqrt[4]{28000}$; $\sqrt[6]{0{,}003}$

6) Leia x:

a) $x : 232 = 15{,}6 : 8{,}7$; $59{,}3 : x = 692 : 7{,}4$.

b) $19{,}9 : 0{,}79 = x : 36{,}5$; $0{,}0405 : 0{,}97 = 16{,}4 : x$.

7) $\frac{31{,}7 \cdot 9{,}25}{17{,}2}$ $\quad$ $\frac{0.281 \cdot 4{,}76 \cdot 18{,}9}{11{,}8 \cdot 0.647}$

$\frac{91{,}5 \cdot 107 \cdot 3{,}90}{16{,}4 \cdot 0{,}54 \cdot 522}$ $\quad$ $\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}$

8) Silikaatkivi standardmõõtmed on 6×12×25 cm. Arvuta ühe kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on $2{,}1 \frac{G}{cm^3}$.

9) Ristkülik, mille mõõtmed on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõtmed.

10) Toa põranda mõõtmed on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõtmed on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Arvuta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

12) Lahenda võrrandid:

a) $2{,}1x^2 - 4{,}7x - 5{,}85 = 0$
b) $0{,}2x^2 + 1{,}82x - 7{,}87 = 0$

666. Teisenda logaritmitavaks:

1) $\frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{\cos x - \sqrt{3}\sin x}$

2) $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

667. Teisenda avaldist

$$\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61°.$$

668. Arvuta peast:

1) $\cos 40° \cos 10° + \sin 40° \sin 10°$
2) $\sin 10° \cos 50° + \cos 10° \sin 50°$

669. Lihtsusta:

1) $4\cos\left(45° - \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(45° - \frac{x}{2}\right)$
2) $\tan(30° + x) \cdot \tan(x - 60°)$
3) $\sin^2 2x(1 + \cot^2 2x)$
4) $\cos^4 \alpha + \sin^2 2\alpha$

670. Missugustel argumendi väärtustel funktsioonid $y = \cos^2 x$ ja $y = 2(\sin x + 1)$ on võrdsed?

671. Missugusel argumendi väärtusel funktsiooni $y = 2\sin x \cdot \tan x + \cos x$ väärtus võrdub 1-ga?

672. Leia arvutamise teel niisuguste punktide koordinaadid, milles funktsiooni $y = 7(1 - \cos x) - 2\sin^2 x$ graafik lõikab x-telge?

673. Lahenda võrrandid:

1) $5\cos 2x = 4\sin x$
2) $2\cos x - \cos 2x = 1$
3) $\sin\frac{x}{3} = 1$
4) $\sin 10x = 2\cos 5x$
5) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$
6) $\cos 4x + \cos 2x = 0$
7) $\sin 5x - \sin x = 0$
8) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos x = 1$

674. Teisenda korrutiseks:

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$
2) $\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

675. Tõesta, et

1) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot^2\frac{\alpha}{2}$
2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2}{\sin\alpha}$
3) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = 2\tan\alpha$

676. Tõesta, et avaldise

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$$

väärtuseks ei saa olla negatiivne arv.

677. Lihtsusta ja arvuta

$$\sin 27^\circ\cos 33^\circ + \sin 63^\circ\cos 57^\circ.$$

678. Teades, et α ja β on positiivsed teravnurgad, näita, et kui $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ ja $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, siis $\alpha + 2\beta = 45^\circ$.

679. Kumb on suurem, kas sin 1 või sin 1°?

680. Missugustel x väärtustel funktsioon

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

on määratud?

681. Leia niisugused x väärtused, mille puhul avaldise $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$ väärtus on suurem kui 1?

682. Lahenda võrratus:

$$\tan\frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$$

683. Lahenda võrrandid:

1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

2) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

4) $x+x^{\frac{1}{2}}=6$

684. Lihtsusta avaldised:

1) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

2) $\left[a+\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[a-\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$

685. Arvuta avaldise $\sin\alpha\cos\alpha$ väärtus, teades, et α ja β on täisnurkse kolmnurga teravnurgad ja et $\sin\alpha+\sin\beta=1{,}4$.

686. Arvuta murru $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ väärtus, teades, et $\tan\alpha=2{,}7$.

687. Kas on olemas niisugune nurk, mille puhul

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ja $\cos\alpha=\frac{1}{2}$?

2) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$?

688. Arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$, teades, et $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\sin\alpha<0$.

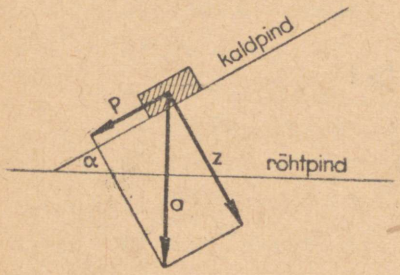
689. Arvuta kolmnurga nurga α funktsioonide väärtused, teades, et $\cos\alpha=-0{,}4$.

690. Tõesta, et

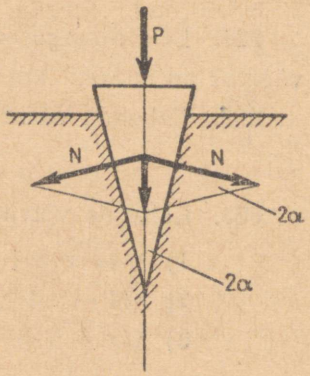
1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geqslant\frac{1}{2}$

2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\geqslant\frac{1}{4}$

691. Kaldpinnal (joon. 133) on keha, mille raskus $Q=50$ kG. Arvuta jõud P, mis keha kaldpinda mööda alla veab, ja kaldpinnale risti mõjuv jõud z, kui kaldpinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes on $\alpha=30°$.

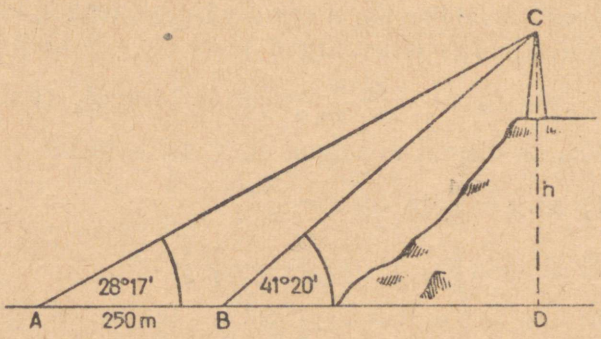


Joon. 133.



Joon. 134.

692. Kiilu silmale mõjuv jõud P jaotub kaheks komponendiks, mis kiilu põsktasapindadega on risti. Arvuta komponent N (joon. 134), kui kiilunurk $2\alpha = 28°$.



Joon. 135.

693. Mäel asuva mälestusobeliski tipp C (joon. 135) paistab mäejalamist mööduval horisontaalsel teel punktist A nurgas 28°17′. Punktist B, mis on obeliskile 250 meetrit lähemal, paistab tipp C nurgas 41°20′. Arvuta obeliski tipu C kõrgus CD tee tasapinnast.

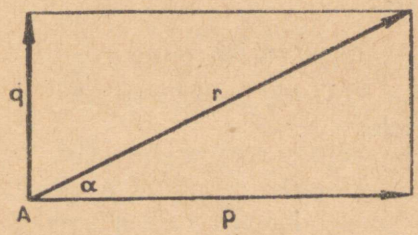
694. Tõesta, et

1) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$
2) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$

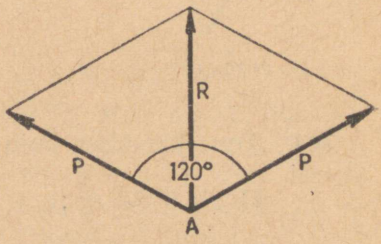
695. Rombi lühema diagonaali pikkus on 4 cm ja teravnurk 68°. Arvuta teise diagonaali pikkus.

696. Kasvuhoone, mille pikkus on 16 m ja laius 6 m, on kaetud kaheviilulise klaaskatusega. Mitu ruutmeetrit klaasi kulub selle katuse valmistamiseks, kui katuse kalle on 48°?

697. Punktile A mõjuvad kaks jõudu $p = 40$ kG ja $q = 20$ kG, mille suunad on teineteisega risti. Arvuta punktile A mõjuv resultantjõud r, kui selle suund moodustab jõu p suunaga nurga $\alpha = 28°$ (joon. 136).



Joon. 136.



Joon. 137.

698. Jõud $R = 600$ kg lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis teineteisega moodustavad 120°-se nurga (joon. 137). Kui suured on need komponendid?

699. Tõestada, et

1) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$;

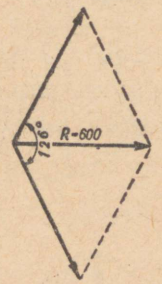
2) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$.

700. Rombi lühema diagonaali pikkus on 4 cm ja teravnurk on 68°. Arvuta teise diagonaali pikkus.

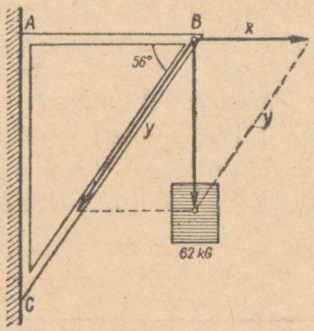
701. Arvutada $a \sin 2x + b \cos 2x$, teades, et $\tan x = \frac{a}{b}$.

702. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

703. Jõud $R = 600$ kG lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis moodustavad teineteisega 126°-se nurga (joon. 138). Kui suured on need komponendid?



Joon. 138.



Joon. 139.

704. Anna korrutise kuju avaldisele:

1) $\sin 52° + \frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{4} - \sin^2 42°$;

3) $3 - 4\cos^2 56°$;

4) $1 - 2\sin 15°$;

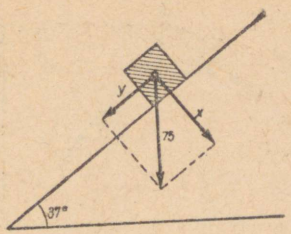
5) $\frac{1}{2} + \cos 81°$.

705. Lahenda võrrand.

1) $\sin(x + 30°) = \sin x$
2) $\cos(x - 60°) = \sin 2x$
3) $\cos 3x + \cos 2x = 0$
4) $\sin 5x + \sin 3x = \cos x$

706. Kronsteini (seinapuki) ABC punktisse B on riputatud raskus 62 kG. Rõhtsa varda AB ja kaldtoe BC vaheline nurk on 56°. Kui suur jõud x mõjub varrast AB seinalt lahti rebivalt ja kui suur on surve y toele BC (joon. 139)?

Et siin andmed on mõõtmise teel saadud, seega ligikaudsed, siis ümarda tabelist saadavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused kahe tüvenumbrini ja anna ka lõpptulemus kahe tüvenumbriga. Arvutused tee arvutuslükatill



Joon. 140.

707. Kaldpinnal, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga 37° (joon. 140), on 75 kG raskune kast kaubaga. Kui suurt jõudu y on tarvis selle kasti hoidmiseks kaldpinnal tasakaalus (hõõrdumist arvestamata) ja kui suur on rõhk x kaldpinnale?

Lahendamisel arvesta märkust eelmise ülesande lõpus!

708. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et andmed on ligikaudsed arvud (kaatetid on a ja b, hüpotenuus c, kaateti a vastasnurk on α ja kaateti b vastasnurk β):

1) $c = 8$ m; $\beta = 40°$;
2) $c = 12$ m; $\alpha = 26°$;
3) $a = 200$ m; $\beta = 67°$;
4) $a = 72$ mm; $\alpha = 32°$;
5) $b = 24$ m; $\beta = 78°$;
6) $b = 153$ mm; $\alpha = 56°30'$.

709. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b ning teravnurgad on α ja β. Prisma kõrgus on h. Arvuta prisma ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

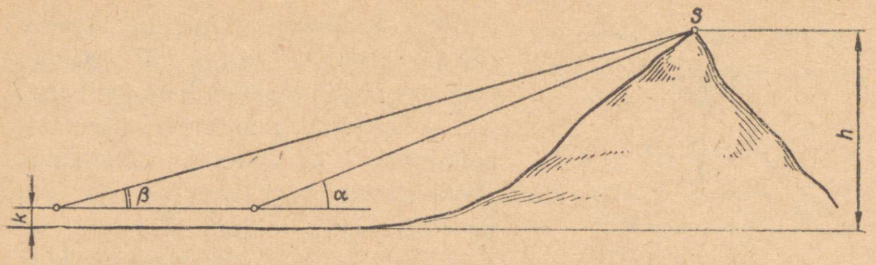
1) $a = 48$ mm; $\alpha = 35°$; $h = 82$ mm;
2) $b = 13{,}5$ cm; $\alpha = 62°30'$; $h = 11{,}2$ cm;
3) $b = 2{,}72$ m; $\alpha = 43°20'$; $h = 1{,}55$ m;
4) $a = 2{,}08$ dm; $\beta = 59°10'$; $h = 1{,}12$ dm.

710. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja mediaaniga nurga α. (Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrguse aluspunktiks on põhja mediaanide lõikepunkt.)

Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

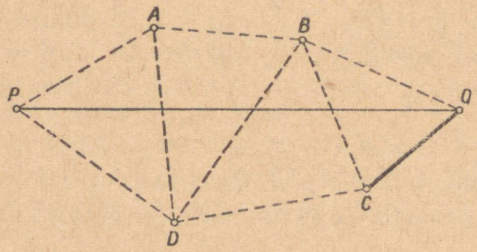
1) $a = 5$ cm; $\alpha = 40°$;
2) $a = 18$ cm; $\alpha = 32°$;
3) $a = 124$ mm; $\alpha = 50°30'$.

711. Mäetipp S (joon. 141) paistab punktidest A ja B, mis on punktiga S ühes ja samas püsttasapinnas, vastavalt kõrgusnurkadega $\alpha = 15{,}5°$ ja $\beta = 7{,}4°$. Arvuta mäetipu kõrgus h, kui $AB = 538$ m ja nurgamõõtja kõrgus $k = 1{,}65$ m.



Joon. 141.

712. Suurte kauguste mõõtmisel valitakse mõõdetava lõigu ümbruses vaatluspunktid nii, et igast vaatluspunktist on nähtavad kaks naabruses olevat punkti (triangulatsioonimeetod).



Joon. 142.

Mõõdetakse baas CQ (joon. 142) ja vajalikud nurgad. Arvuta kaugus PQ, teades, et $CQ = 2{,}00$ km ja nurkade suurused on järgmised: $\angle APD = 83°20'$; $\angle PAD = 46°50'$; $\angle BAD = 71°20'$; $\angle ADB = 38°40'$; $\angle DBC = 62°10'$; $\angle BDC = 40°30'$; $\angle CBQ = 35°20'$; $\angle BCQ = 72°20'$.

Näpunäide.

1)	Arvuta	BC	kolmnurgast BCQ;
2)	„	BD ja DC	„ DBC;
3)	„	AD	„ ABD;
4)	„	PD	„ PAD;
5)	„	PC	„ PCD;
6)	„	PQ	„ PQC.

Kontrolliks arvuta analoogiliselt PQ kolmnurgast PQB.

SISUKORD.

I. Funktsionaalne sõltuvus.

§ 1. Jäävad ja muutuvad suurused 3
§ 2. Funktsionaalne sõltuvus 4
§ 3. Funktsiooni esitusviisid 6
§ 4. Joone võrrand 11
§ 5. Joone võrrandi näiteid 12

II. Lineaarne funktsioon.

Lineaarse funktsiooni uurimine.

§ 6. Lineaarne funktsioon ja tema põhiomadus 20
§ 7. Kasvav ja kahanev lineaarne funktsioon 22
§ 8. Nürinurga tangens 23
§ 9. Koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand 25
§ 10. Tõusunurk ja tõus 26
§ 11. Lineaarse funktsiooni graafik 27
§ 12. Algväärtus ja algordinaat 28
§ 13. Lineaarse funktsiooni nullkoht 29
§ 14. Lineaarse funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond . . . 32

Lineaarne võrratus.

§ 15. Lineaarse võrratuse lahendamisest 33
§ 16. Võrratuse omadused 34
§ 17. Lineaarse võrratuse lahendamine 35
§ 18. Lineaarse võrratusesüsteemi lahendamine 38
§ 19. Lineaarse võrratusesüsteemi graafiline lahendamine 39

Aritmeetiline progressioon.

§ 20. Aritmeetilise progressiooni mõiste 41
§ 21. Aritmeetilisele progressioonile vastava lineaarse funktsiooni leidmine 42
§ 22. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem 43
§ 23. Aritmeetilise progressiooni omadus 44
§ 24. Aritmeetilise progressiooni summa valem 46

Lineaarne interpolatsioon.

§ 25. Lineaarse interpolatsiooni valem 50
§ 26. Lineaarse interpolatsiooni rakendamine 51
§ 27. Lineaarse võrrandisüsteemi uurimine 54

III. Ruutfunktsioon.

§ 28. Ruutfunktsioon ja tema graafik 61
§ 29. Parabooli haripunkt 62
§ 30. Ruutfunktsiooni ekstreemumkohad 64
§ 31. Ruutfunktsiooni kasvamine ja kahanemine 64
§ 32. Ruutfunktsiooni nullkohad 66
§ 33. Ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad 69
§ 34. Ruutvõrratuse lahendamine 71

IV. Tehted astmete ja juurtega. Astmefunktsioonid.

§ 35. Tehted astmetega naturaalarvuliste astendajate korral 74
§ 36. Astmefunktsioonid 81
§ 37. Arvu kuupjuur 84
§ 38. Kuupide tabeli kasutamisest 85
§ 39. Arvu n-es juur 87
§ 40. Juure leidmine proovimise teel 89
§ 41. Irratsionaalarvud 90
§ 42. Reaalarvud 95
§ 43. Juurte omadus 96
§ 44. Teoreemid tehetest juurtega 98
§ 45. Juuravaldiste teisendamisi 113
§ 46. Juurvõrrandite lahendamise näiteid 119

Astendaja null. Negatiivsed ja murrulised astendajad.

§ 47. Astendaja 0 124
§ 48. Negatiivne astendaja 124
§ 49. Funktsioonid $y=x^{-1}$ ja $y=x^{-2}$ 128
§ 50. Murruliste astendajatega astmed 131

V. Trigonomeetrilised funktsioonid.

§ 51. Teravnurga ühe trigonomeetrilise funktsiooni järgi sama nurga teiste funktsioonide leidmine 142
§ 52. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed . . 143
§ 53. Negatiivne nurk 152
§ 54. Nurk, mille absoluutväärtus ületab täispöörde 154
§ 55. Nurga mõõduühikud 158
§ 56. Mistahes suurusega nurga trigonomeetrilised funktsioonid . . . 162
§ 57. Põhiseoste kehtivus mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide puhul 163
§ 58. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused lõikude pikkustena . 165
§ 59. Taandamisvalemid 168
§ 60. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud 174
§ 61. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus 177
§ 62. Kahe nurga summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid . . 181
§ 63. Kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus ja tangens . . 187
§ 64. Kahe nurga trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks 191

Trigonomeetrilised võrrandid.

§ 65. Trigonomeetrilise võrrandi mõiste 197
§ 66. Trigonomeetrilised põhivõrrandid 200
§ 67. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamise näiteid 208
§ 68. Vea ülemmäär nurga arvutamisel 217

VI. Kümnendlogaritmid.

§ 69. Kümne astmed 222
§ 70. Kümnendlogaritmi definitsioon 223
§ 71. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm 224
§ 72. Avaldise logaritm 226
§ 73. Kümnendlogaritmide tabelid 227
§ 74. Tehted poolnegatiivsete arvudega 228
§ 75. Logaritmide tabelid 231
§ 76. Arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi 234
§ 77. Arvutamine kümnendlogaritmide abil 236
§ 78. Funktsiooni skaala mõiste 239
§ 79. Logaritmiline skaala 241
§ 80. Arvutuslükati ehitus. Lükati põhiskaalad *D* ja *C* 242
§ 81. Korrutamine lükati skaalade *D* ja *C* abil 244
§ 82. Jagamine lükati skaalade *D* ja *C* abil 247
§ 83. Protsentülesannete lahendamine lükatiga 249
§ 84. Võrde lahendamine lükatiga 250
§ 85. Mõnede murdude arvutamine lükatiga 254
§ 86. Lükati skaalad *A* ja *B* 255
§ 87. Ruutude ja ruutjuure leidmine lükatiga 257
§ 88. Kuupide ja kuupjuurte leidmine lükatiga 260

VII. Kolmnurga lahendamine.

§ 89. Täisnurkse kolmnurga lahendamine logaritmide kasutamisega . 263
§ 90. Trigonomeetriliste funktsioonide skaalad arvutuslükatil . . . 266
§ 91. Trigonomeetrilisi arvutusi lükati kasutamisega 274
§ 92. Kolmnurga pindala kahe külje ja nendevahelise nurga järgi . . 277
§ 93. Siinusteoreem 279
§ 94. Koosinusteoreem 285
§ 95. Kolmnurga lahendamise näiteid 288
§ 96. Kolmnurga pindala valemid 291
§ 97. Kolmnurga lahendamise skemaatiline ülevaade 294
Ülesandeid IX klassi kursuse kordamiseks 299

Прииц Олаф Иоханнесович
Розенберг Георг Георгевич
Вихман Арнольд Юрьевич

МАТЕМАТИКА
для IX класса

На эстонском языке
Обложка Г. Пант

Издательство «Ээсти Раамат»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste

Kunstiline toimetaja H. Keigo

Tehniline toimetaja L. Krikmann

Korrektorid S. Ridala ja H. Kull

Ladumisele antud 30. I 1965. Trükkimisele antud 14. IV 1965. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 19,75. Arvestuspoognaid 14,2. Trükiarv 15 000. Tellimise nr. 950. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I

Hind 26 kop.

6—2

26 kop.

A
26678

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00990798 3