TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

PLANIMEETRIA

Metoodiline juhend matemaatika proseminariks

1987

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika kateeder

PLANIMEETRIA

Metoodiline juhend matemaatika proseminariks

E. Jõgi

TARTU 1987

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
5. oktoobril 1987.a.

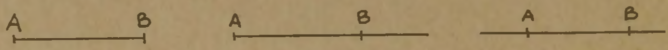
ПЛАНИМЕТРИЯ.
Методическое руководство.
Составитель Эрих Й ы г и.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja J. Reimand.
Paljundamisele antud 11.11.1987.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 3,72.
Arvestuspoognaid 3,52. Trükipoognaid 4,0.
Trükiarv 1000.
Tell. nr. 982.
Hind 10 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

EESSÕNA

Käesolev väljaanne sisaldab matemaatika proseminari üht osa - planimeetriat. Esitatakse planimeetria mõisteid, teoreeme, valemeid ning näitülesandeid koos lahendustega. Näitülesanded on valitud nii, et nad süvendaksid keskkoolis õpitut ja oleksid kasutatavad ka matemaatikaõpetaja töös.

§ 1. SIRGED JA NURGAD

1. *Lõik, kiir ja sirge.* Punktihulka, mille elementideks on kaks punkti A ja B koos kõigi nende vahel asetsevate punktidega nimetatakse *sirglõiguks* ehk *lõiguks* (joon. 1 a).



a) b) c)

Joon. 1

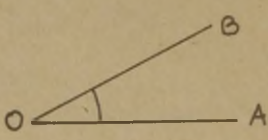
Kiir on punktihulk, mis tekib lõigu pikendamisel üle ühe otspunkti (joon. 1 b). *Sirge* on punktihulk, mis tekib lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti (joon. 1c).

Iga punktihulka nimetatakse *geomeetriliseks kujundiks*.

Kaht lõiku, üldiselt kaht geomeetrilist kujundit, mida saab ühitada, nimetatakse *kongruentseteks*. Kui lõigud on kongruentsed, siis on neil ka võrdsed pikkused. Järgnevas mõistame võrdsete lõikude all võrdse pikkusega lõike.

Punkte, lõike, kiiri, sirgeid ja teisi kujundeid kujutleme asetsevana tasasel pinnal ehk *tasandil*, mis igas suunas ulatub kuitahes kaugele.

2. *Nurk.* Tasandi osa koos kahe ühest punktist väljuva kiirega nimetatakse *nurgaks* (joon. 2).



Joon. 2

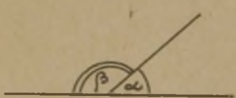
Et kahe kiire vahel tekib üldiselt kaks nurka, siis vaadeldavat nurka märgitakse vajadusel kaarega. Kiiri OA ja OB nimetatakse nurga haaradeks, alguspunkti O nurga tipuks. Nurka tähistatakse kas $\angle AOB$ või $\angle BOA$ ja sama nurga suurust $\widehat{AOB}$. Praktikas sageli ei eristata nurka (kui punktihulka) ja nurga suurust.

Nurkade liigitus sõltub sellest, mida võtta aluseks. Kui aluseks võtta nurga suurus, siis pälvivad termini:

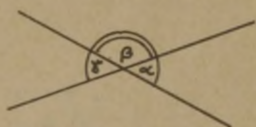
a) teravnurk; b) täisnurk; c) nürinurk; d) sirgnurk.

K õ r v u n u r k a d e k s nimetatakse kaht nurka, millel on üks ühine haar ja teised haarad moodustavad sirge (joon. 3).

K õ r v u n u r k a d e s u m m a o n 180°.



Joon. 3



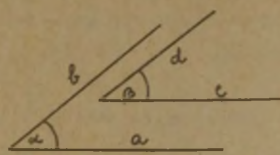
Joon. 4

T i p p n u r k a d e k s nimetatakse kaht nurka, mis on ühe ja sama nurga kõrvunurkadeks (joon. 4). Nurgad α ja γ on tippnurgad, sest nad on nurga β kõrvunurkadeks (joon. 4). Tippnurki võib vaadelda kui nurki, mis tekivad kahe sirge lõikumisel.

Vastavalt paralleelsete (ristuvate) haaradega nurgad on

1) võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad (joon. 5) või
2) nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks on terav- ja teine nürinurk (joon. 6).

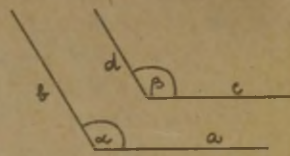
2



$\alpha < 90°; \quad \beta < 90°$

$a \parallel c; \quad b \parallel d$

$\alpha = \beta$

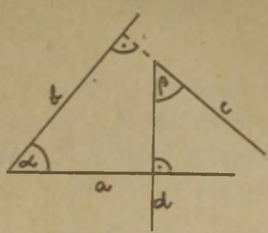


$90° < \alpha < 180°$

$90° < \beta < 180°$

$a \parallel c; \quad b \parallel d$

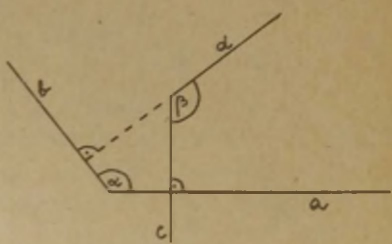
$\alpha = \beta$



$\alpha < 90°; \quad \beta < 90°$

$a \perp d; \quad b \perp c$

$\alpha = \beta$



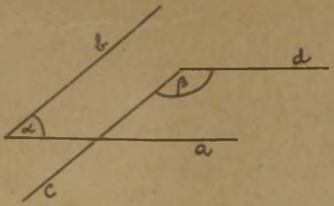
$90° < \alpha < 180°$

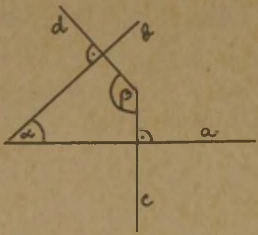
$90° < \beta < 180°$

$a \perp c; \quad b \perp d$

$\alpha = \beta$

Joon. 5





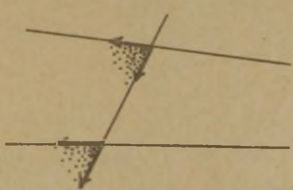
$\alpha < 90°$; $90° < \beta < 180°$
$a \parallel d$; $b \parallel c$
$\alpha + \beta = 180°$

$\alpha < 90°$; $90° < \beta < 180°$
$a \perp c$; $b \perp d$
$\alpha + \beta = 180°$

Joon. 6

3. K a h e   s i r g e   l õ i k a m i s e l   k o l m a n d a   s i r g e g a   t e k i v a d   n u r g a d. Lisaks kõrvu- ja tippnurkadele tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga veel nurgad, mida vaadeldakse paarikaupa.

1. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajatel on samasuunalised, nimetatakse k a a s n u r k a d e k s (joon. 7).



Joon. 7

Joon. 8

2. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastassuunalised, nimetatakse l ä h i s n u r k a d e k s (joon. 8).

3. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on teine teisel

pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastassuunalised, nimetatakse p õ i k n u r k a d e k s (joon. 9).

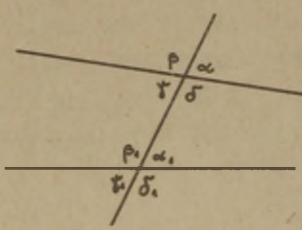
Joon. 9

Joonistel 10 ja 11 on

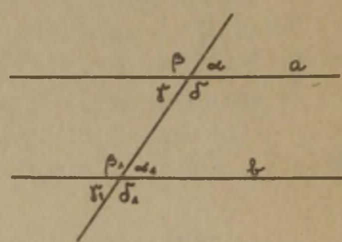
kaasnurkadeks: α ja α_1, β ja β_1, γ ja γ_1, δ ja δ_1;

lähisnurkadeks: α ja δ_1, β ja γ_1, γ ja β_1, δ ja α_1;

põiknurkadeks: α ja γ_1, β ja δ_1, γ ja α_1, δ ja β_1.



Joon. 10



Joon. 11

4. S i r g e t e v a s t a s t i k u n e a s e n d .
Kaht sirget, millel on üks ja ainult üks ühine punkt, nimetatakse l õ i k u v a t e k s sirgeteks. Lõikumise erijuhuks on ristumine. R i s t u v a d on sirged, mille lõikumisel tekivad sirgete vahel täisnurgad. Kaht sirget, mis ei lõiku, nimetatakse p a r a l l e e l s e t e k s sirgeteks.

Ige kaks sirget tasandil kas lõikuvad või on paralleelsed.

Kahe sirge p a r a l l e e l s u s e t u n n u s .

Kaks sirget on paralleelsed siis ja ainult siis, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega on täidetud üks tingimustest:

1) üks paar kaasnurki on võrdsed;

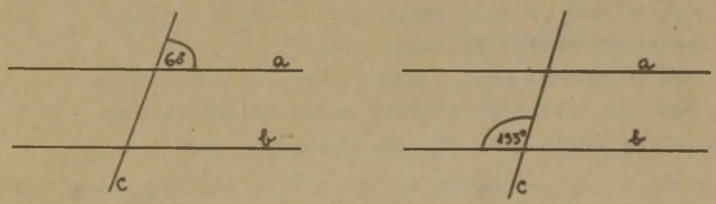
2) üks paar põiknurki on võrdsed;

3) ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk.

Et joonisel 11 $a \parallel b$, siis

$$\begin{array}{lll} \alpha = \alpha_1 & \alpha = \gamma_1 & \alpha + \delta_1 = 180^\circ \\ \beta = \beta_1 & \beta = \delta_1 & \beta + \gamma_1 = 180^\circ \\ \gamma = \gamma_1 & \gamma = \alpha_1 & \gamma + \beta_1 = 180^\circ \\ \delta = \delta_1 & \delta = \beta_1 & \delta + \alpha_1 = 180^\circ \end{array}$$

<u>Näide</u>. Arvutada kõik nurgad, mis tekivad paralleelsete sirgete a ja b lõikamisel kolmanda sirgega c (joon. 12).



Joon. 12

§ 2. KOLMNURGAD

1. K o l m n u r k. K o l m n u r k a d e l i i g i d. Punktihulka, mille elementideks on kolme punktiga määratud kinnise murdjoone sees olevad punktid koos murdjoone punktidega, nimetatakse k o l m n u r g a k s. Kolmnurki liigitatakse: 1) külgede järgi eriküljseteks, võrdhaarseteks ja võrdkülgseteks; 2) nurkade järgi teravnurkseteks, täisnurkseteks ja nürinurkseteks.

2. K o l m n u r k a d e k o n g r u e n t s u s. Kaht kolmnurka nimetatakse k o n g r u e n t s e t e k s , kui nad sobival viisil teineteisele paigutatult ühtivad.

Kui kaks kolmnurka on kongruentsed, siis ühe kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega ja nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega. Kolmnurkade kongruentsust tähistatakse sümboliga $\cong$. Kolmnurkade kongruentsust on võimalik tuvastada kõiki vastavaid külgi ja nurki võrdlemata, kasutades kongruentsuse tunnuseid.

A. K o l m n u r k a d e k o n g r u e n t s u s e t u n n u s e d. Kaks kolmnurka on kongruentsed siis, kui:

1) ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga (KNK);
2) ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle lähisnurkadega (NKN);
3) ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega (KKK);
4) ühe kolmnurga kaks külge ja neist pikema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja pikema külje vastasnurgaga (KKN).

B. T ä i s n u r k s e t e k o l m n u r k a d e k o n g r u e n t s u s e t u n n u s e d. Need tunnused tuletuvad kolmnurkade kongruentsuse tunnustest, kui arvestada täisnurka.

Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui:

1) ühe kolmnurga kaatetid on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaatetitega;
2) ühe kolmnurga kaatet ja selle teravnurkne lähisnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaateti ja selle teravnurkse lähisnurgaga;
3) ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga;
4) ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga.

3. K o l m n u r g a n u r g a p o o l i t a j a. Kolmnurga nurki nimetatakse ka s i s e n u r k a d e k s. Kolmnurga v ä l i s n u r g a k s nimetatakse sisenurga

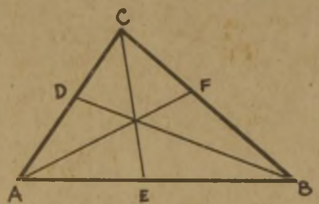
kõrvunurka.

Kolmnurga välisnurk võrdub nende sisenurkade summaga, mis ei ole tema kõrvunurgad.

Lõiku, mis jaotab kolmnurga sisenurga pooleks, nimetatakse kolmnurga n u r g a p o o l i t a j a k s ehk b i s e k t o r i k s .

Nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsel kaugusel.

Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje osadeks, mis suhtuvad nagu selle nurga lähisküljed.



Joon. 13

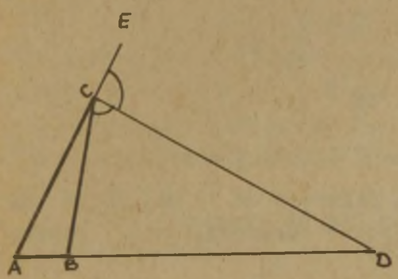
Jooniselt 13

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC};$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}.$$

Kolmnurga sisenurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, mis on kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

Kolmnurga (ABC) välisnurga (BCE) poolitaja (CD) lõikab vastaskülje pikendust niisuguses punktis (D), mille kaugused selle külje otspunktidest (DA, DB) suhtuvad nagu vastava sisenurga lähisküljed (AC, BC).



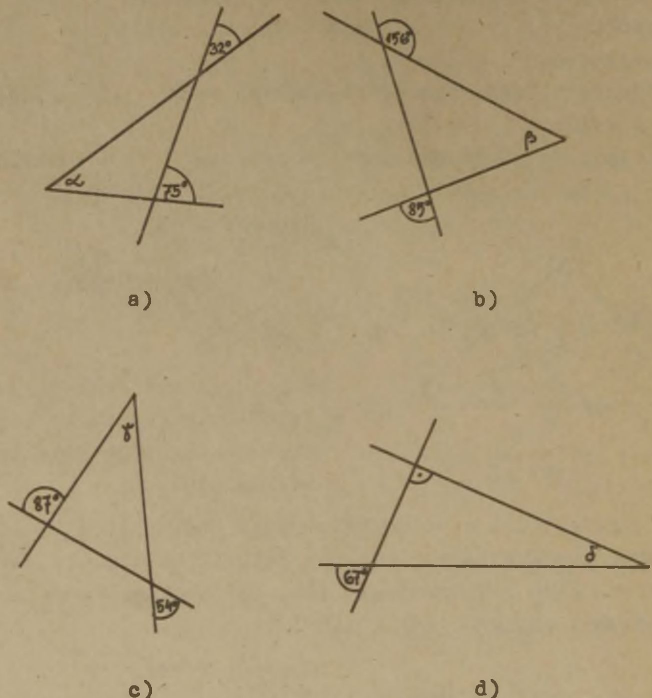
Joon. 14

Jooniselt 14

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}.$$

3*

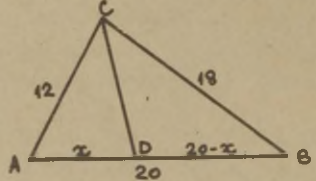
Näide 1. Arvutada joonisel 15 märgitud nurgad.



Joon. 15

V a s t u s . a) $\alpha = 43°$; b) $\beta = 71°$; c) $\gamma = 33°$; d) $\delta = 23°$.

Näide 2. Kolmnurga külgede pikkused on 12 cm, 18 cm ja 20 cm. Missugusteks lõikudeks jaotab nurgapoolitaja pikema külje?



Joon. 16

L a h e n d u s .

Antud: AB = 20 cm; BC = 18 cm; AC = 12 cm (joon. 16).

Leida: AD; DB.

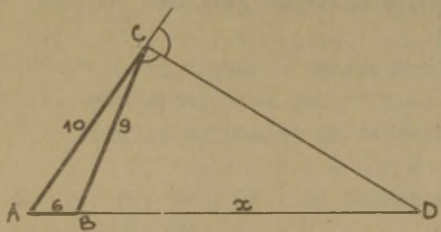
Kandes joonisele mõõtmed ning tähistades AD = x, saame kolmnurga sisenurga poolitaja omadusest

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}, \text{ et } \frac{x}{20 - x} = \frac{12}{18},$$

millest 18x = 12(20 - x); 30x = 240; x = 8. DB = 20 -8 =12.

V a s t u s. Otsitavad lõigud on 8 cm ja 12 cm.

Näide 3. Kolmnurga ABC külje AB pikendusel asub punkt D. Arvutada lõik BD, kui CD on nurga C välisnurga poolitaja ja AB = 6 cm, BC = 9 cm ning AC = 10 cm (joon. 17).



Joon. 17

L a h e n d u s .

Antud: AC = 10 cm;

BC = 9 cm;

AB = 6 cm.

Leida: BD.

Välisnurga poolitaja omaduse tõttu

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Olgu BD = x, siis $\frac{6 + x}{x} = \frac{10}{9}$, millest x = 54.

V a s t u s . Lõik BD = 54 cm.

4. K o l m n u r g a   m e d i a a n . Lõiku, mis ühendab kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse m e d i a a n i k s .

Mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab mediaani osadeks, mis suhtuvad nagu 2 : 1, lähtudes tipust.

Olgu kolmnurga küljed a, b ja c, siis küljele a joonestatud mediaani m_a pikkus

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Näide. Kolmnurga küljed on 18 cm, 16 cm ja 26 cm. Arvutada suurimale küljele joonestatud mediaani pikkus.

L a h e n d u s.

Antud: a = 18 cm; b = 16 cm; c = 26 cm.

Leida: m_c.

Valemi

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

põhjal

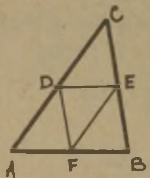
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(18^2 + 16^2) - 26^2} = 11.$$

V a s t u s . Mediaani pikkus on 11 cm.

5. K o l m n u r g a   k e s k l õ i k . Kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku nimetatakse kolmnurga k e s k l õ i g u k s .

Kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest.

Näide. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 3 : 4 : 6. Joonestanud kõikide külgede kesklõigud, tekib kolmnurk, mille ümbermõõt on 5,2 m. Arvutada antud kolmnurga küljed.



Joon. 18

L a h e n d u s .

Antud: AB : BC : AC = 3 : 4 : 6;
FE + ED + DF = 5,2 m (joonis 18).

Leida: AB; BC; AC.

Olgu AB = 3x,
siis BC = 4x,
AC = 6x.

Järelikult DE = 1,5x
DF = 2x
EF = 3x

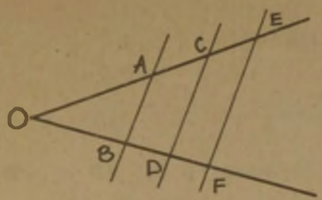
6,5x = 5,2
x = 0,8

ja AB = 2,4, BC = 3,2, AC = 4,8.

V a s t u s . Antud kolmnurga küljed on 2,4 m, 3,2 m ja 4,8 m.

6. V õ r d e l i s e d   l õ i g u d . Lõikude võrdelisus eeldab vähemalt nelja lõigu olemasolu.

K i i r t e t e o r e e m . Kui nurga haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega, siis ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.



Joon. 19

Jooniselt 19

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF}$$

Nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

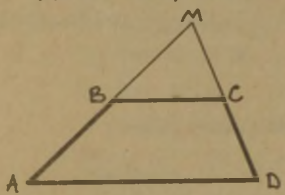
Et $AB \parallel CD$, siis $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

<u>Näide 1</u>. Trapetsi ABCD haarad AB ja CD on pikendatud lõikumiseni punktis M (joon. 20). Arvutada:

1) lõik CM, kui AB = 1 m, CD = 15 dm ja BM = 8 dm;

2) lõik BM, kui AB = 1,2 m ja CD : CM = $\frac{1}{6}$: 0,25;

3) lõik CD, kui AB : BM = 17 : 9 ja CD - CM = 1,6 m.



Joon. 20

L a h e n d u s .

1) Antud: AB = 1 m = 10 dm;

CD = 15 dm; BM =8 dm.

Leida: CM.

Trapetsi alused

$AD \parallel BC$.

Edasi kasutame võrdeliste lõikude omadust

$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CD}$. Antud juhul $\frac{8}{CM} = \frac{10}{15}$ ja CM = 12.

2) Antud: AB = 1,2 m; CD : CM = $\frac{1}{6}$: 0,25.

Leida: BM.

Võrdeliste lõikude omaduse põhjal

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CM}{BM}.$$

Vahetades võrde siseliikmed ja asendades antud suurused saame, et

$$\frac{CD}{CM} = \frac{AB}{BM};\quad \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 1} = \frac{1,2}{BM};\quad BM = 1,8.$$

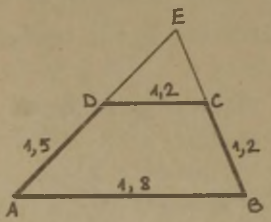
4*

3) Antud: AB : BM = 17 : 9; CD - CM = 1,6 m.
Leida: CD.

Et $\frac{AB}{BM} = \frac{CD}{CM}$, siis $\frac{17}{9} = \frac{CD}{CD - 1,6}$ ja CD = 3,4.

V a s t u s: 1) CM = 12 dm; 2) BM = 1,8 m; CD = 3,4 m.

Näide 2. Trapetsi aluste pikkused on 1,8 m ja 1,2 m; tema 1,5 m ja 1,2 m pikkused haarad on pikendatud lõikumiseni. Arvutada, kui palju on haarasid pikendatud.



Joon. 21

L a h e n d u s .
Antud: AB = 1,8 m; DC = 1,2 m;
AD = 1,5 m; CB = 1,2 m
(joon. 21).
Leida: DE; CE.

Nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad:

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CE}{BE} = \frac{DC}{AB}.$$

Esimesest ja kolmandast suhtest moodustatud võrdest

$$\frac{DE}{1,5 + DE} = \frac{1,2}{1,8}; \quad DE = 3.$$

Analoogiliselt ka

$$\frac{CE}{1,2 + CE} = \frac{1,2}{1,8}; \quad CE = 2,4.$$

V a s t u s . Trapetsi haarasid tuleb pikendada 3 m ja 2,4 m võrra.

7. K o l m n u r k a d e s a r n a s u s . Kaht kolmnurka nimetatakse s a r n a s t e k s, kui ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

Sarnasust tähistatakse sümboliga $\sim$.

Kahe sarnase kolmnurga vastavate külgede suhet nimetatakse nende kolmnurkade s a r n a s u s t e g u r i k s .

A. K o l m n u r k a d e s a r n a s u s e t u n n u s e d . Kaks kolmnurka on sarnased, kui:

1) ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised

teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed;

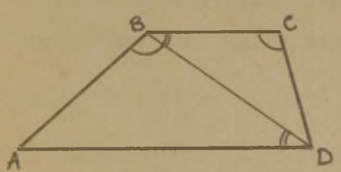
2) ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga;
3) ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega;
4) ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja neist pikema külje vastasnurk on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

B. T ä i s n u r k s e t e k o l m n u r k a d e s a r n a s u s e t u n n u s e d . Kuna täisnurgad on alati võrdsed, siis täisnurksete kolmnurkade sarnasuse tunnused võib sõnastada ka nii.

Kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui:

1) ühe kolmnurga kaatetid on võrdelised teise kolmnurga kaatetitega;
2) ühe kolmnurga teravnurk võrdub teise kolmnurga teravnurgaga.
3) ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on võrdelised teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga.

Näide 1. Trapetsis ABCD (BC ∥ AD), mille diagonaaliks on BD, on nurgad ABD ja BCD võrdsed. Arvutada AB ja AD, kui BC = 10 cm, DC = 15 cm ja BD = 20 cm.

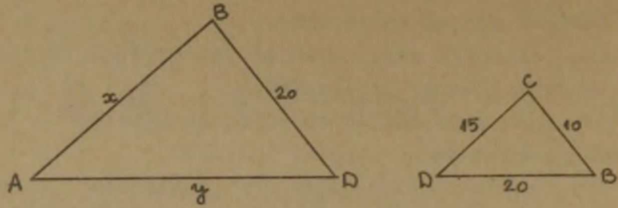


Joon. 22

L a h e n d u s .

Antud: BC = 10 cm; DC =15 cm; BD = 20 cm; $\angle$ ABD = $\angle$ BCD (joon. 22).

Kolmnurgad ABD ja BCD on sarnased, sest neil on kaks paari vastavalt võrdseid nurki ($\angle$ ABD = $\angle$ BCD kui võrdsetena antud nurgad ja $\angle$ ADB =$\angle$CBD, kui põiknurgad paralleelide juures). Paigutame need kolmnurgad nii, et vastavad elemendid oleksid kergesti jälgitavad.



Et sarnaste kolmnurkade küljed on võrdelised, siis

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

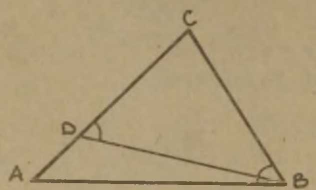
Asendades arvud, saame

$$\frac{x}{15} = \frac{20}{10} = \frac{y}{20}.$$

Võrretest leiame, et $x = 30$ ja $y = 40$.

V a s t u s . Lõigud $AB = 30$ cm ja $AD = 40$ cm.

<u>Näide 2</u>. Kolmnurgas ABC on joonestatud lõik BD nii, et $\angle BDC = \angle ABC$; küljel AC tekivad lõigud $AD = 7$ cm ja $DC = 9$ cm. Arvutada külg BC ja suhe $BD : BA$.



Joon. 23

L a h e n d u s .

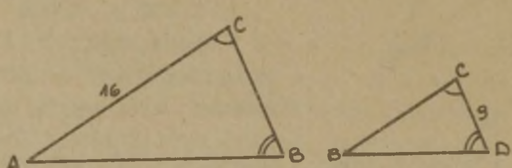
Antud: $AD = 7$ cm; $DC = 9$ cm.

$\angle BDC = \angle ABC$

(joon. 23).

Leida: BC; $BD : BA$.

Kolmnurgad ABC ja DCB on sarnased, sest nurk C on mõlemal kolmnurgal ühine ja lähteandmete põhjal on veel paar võrdseid nurki. Abijooniselt



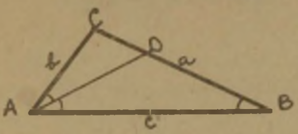
kolmnurkade sarnasuse tõttu

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD} \text{ ehk } BC^2 = AC \cdot CD, \quad BC = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Otsitav suhe $\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$

V a s t u s . Külg BC = 12 cm ja BD : BA = 3 : 4.

Näide 3. Kolmnurgas ABC nurk A on kaks korda suurem nurgast B. Antud külgede b ja c põhjal avaldada külg a.



Joon. 24

L a h e n d u s .

Antud: $\angle A = \angle 2B$; AC = b;

AB = c; BC = a

(joon. 24).

Leida: a.

Joonestame nurga A poolitaja AD. Nurgapoolitaja omadusest

$$\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}.$$

Kolmnurkade ABC ja ACD sarnasusest (kaks paari võrdseid nurki: nurk C ühine, $\angle B = \angle CAD = \angle \frac{A}{2}$) järeldub vastavate külgede võrdelisus:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \quad \text{või} \quad \frac{b}{CD} = \frac{a}{b}.$$

Süsteemi

$$\begin{cases} \frac{CD}{DB} = \frac{b}{c} \\ \frac{b}{CD} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

esimesest võrdekujulisest võrrandist

$$\frac{DB}{CD} = \frac{c}{b}; \quad \frac{DB}{CD} + 1 = \frac{c}{b} + 1$$

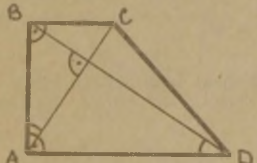
$$\frac{DB + CD}{CD} = \frac{c + b}{b}.$$

Kuna DB + CD = a, siis $\frac{a}{CD} = \frac{b + c}{b}$ ja $CD = \frac{ab}{c + b}$.

Asendus teise võrrandisse annab $a = \sqrt{b^2 + bc}$.

V a s t u s . Külg $a = \sqrt{b^2 + bc}$.

Näide 4. Täisnurkse trapetsi aluste suhe on k ja diagonaalid ristuvad. Avaldada diagonaalide suhe.



Joon. 25

L a h e n d u s .

Antud: $AC \perp BD$; BC : AD = k

(joon. 25).

Leida: AC : BD.

Nurgad $\angle$ BAC = $\angle$ ADB kui ristuvate haaradega teravnurgad. Kolmnurgad ABC ja DAB on sarnased (täisnurksetes kolmnurkades on üks paar võrdseid teravnurki). Seega

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{AB} \text{ ja } \frac{AC}{BD} = \frac{AB}{AD}.$$

Korrutades võrrete vastavad pooled, saame

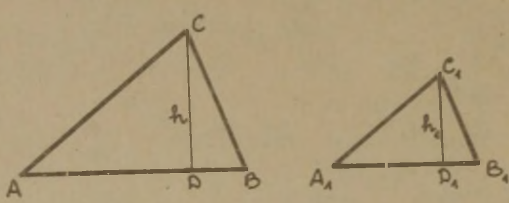
$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{BC \cdot AB}{AB \cdot AD} = \frac{BC}{AD} = k.$$

Otsitav suhe AC : BD = $\sqrt{k}$.

V a s t u s . Diagonaalide suhe on $\sqrt{k}$.

8. T e o r e e m e   s a r n a s t e   k o l m n u r k a d e   k o h t a .

1. Sarnaste kolmnurkade küljed on võrdelised vastavate kõrgustega.



Joon. 26

Jooniselt 26

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h}{h_1} = k,$$

kus k - kolmnurkade sarnasustegur.

Et sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, siis

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{h}{h_1} = k.$$

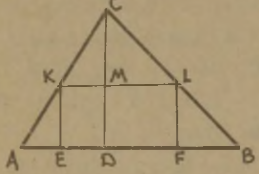
2. Sarnaste kolmnurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu nende vastavad küljed.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

3. Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = k^2.$$

Näide 1. Kolmnurka, mille alus on 48 cm ja kõrgus on 16 cm, on joonestatud ristkülik mõõdete suhtega 5 : 9, kusjuures pikem külg asub kolmnurga alusel. Arvutada ristküliku küljed.



Joon. 27

L a h e n d u s .

Antud: AB = 48 cm; CD= 16 cm;

KE : EF = 5 : 9

(joon. 27).

Leida: KE; EF.

Olgu KE = 5x ja EF = 9x.

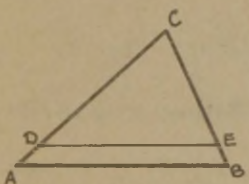
Kolmnurkade ABC ja KLC sarnasuse tõttu kasutame lauset vastavate kõrguste ja külgede võrdelisusest

$$\frac{KL}{AB} = \frac{CM}{CD}; \quad \frac{9x}{48} = \frac{16 - 5x}{16}, \quad x = 2.$$

Siis KE = 10 ja EF = 18.

V a s t u s . Ristküliku küljed on 18 cm ja 10 cm.

Näide 2. Kolmnurgas ABC on AB = 24 cm. Antud küljele on joonestatud kolmnurga teisi külgi lõikav paralleelne sirge nii, et tekkinud trapetsi pindala on 25 % esialgse kolmnurga pindalast. Arvutada trapetsi lühem alus.



Joon. 28

L a h e n d u s .

Antud: AB = 24 cm; AB ∥ DE ;

$S_{ABED} = 0{,}25\ S_{ABC}$

(joon. 28).

Leida: DE.

Et $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, siis kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AB^2}{DE^2}.$$

6

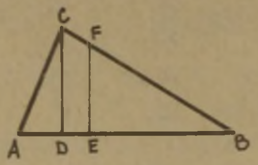
Olgu $S_{ABC} = x$, siis $S_{DEC} = 0{,}75x$ ja

$$\frac{x}{0{,}75x} = \frac{24^2}{DE^2}.$$

Siit $DE^2 = 432$ ja $DE = 12\sqrt{3}$.

V a s t u s . Trapetsi lühem alus on $12\sqrt{3}$ cm.

Näide 3. Kolmnurga kõrgus on 4 cm ja jaotab aluse kaheks osaks, mis suhtuvad nagu 1 : 8. Arvutada sellise lõigu pikkus, mis on paralleelne kõrgusega ja jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks osaks.



Joon. 29

L a h e n d u s .

Antud: $CD = 4$ cm; $AD : DB = 1 : 8$ (joon. 29).

Leida: FE.

Olgu $AD = x$, siis $DB = 8x$ ja

$$S_{ADC} = \frac{x \cdot CD}{2}, \quad S_{DCB} = \frac{8x \cdot CD}{2},$$

millest

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DCB}} = \frac{1}{8}.$$

Kuna kolmnurga ABC pindala S on 9 osa, siis

$$\frac{S_{DCB}}{S} = \frac{8}{9} \text{ ja } S_{EBF} = \frac{1}{2}S.$$

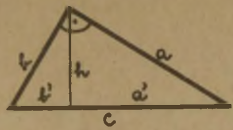
Kolmnurkade CDB ja EFB sarnasusest

$$\frac{S_{DCB}}{S_{EBF}} = \frac{CD^2}{FE^2} \text{ ehk } \frac{\frac{8}{9}S}{\frac{1}{2}S} = \frac{4^2}{FE^2}, \text{ millest } FE = 3.$$

V a s t u s . Kolmnurka jaotav lõik on 3 cm.

9. M e e t r i l i s e d   s e o s e d   k o l m n u r g a s . Meetrilisteks seosteks on valemid, mis väljendavad kujundite joonelementide mõõtmistulemustega seotud omadusi.

P y t h a g o r a s e   t e o r e e m . Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.



Jooniselt 30

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Joon. 30

E u k l e i d e s e   t e o r e e m. Täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub hüpotenuusil võetud selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega.

Kasutades joon. 30 sümboolikat

$$a^2 = a'c,$$

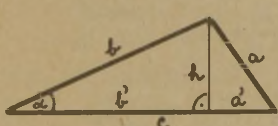
$$b^2 = b'c.$$

K õ r g u s e   t e o r e e m. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrguse ruut võrdub kaatetite projektsioonide korrutisega

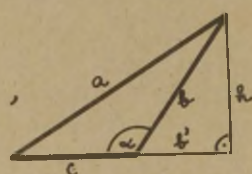
$$h^2 = a'b'.$$

K o l m n u r g a   t e r a v n u r g a   v a s t a s - k ü l j e   r u u t võrdub kahe teise külje ruutude summaga, millest on lahutatud kahekordne ühe külje korrutis teise külje projektsiooniga sellel küljel. Joonise 31 põhjal

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb'.$$



Joon. 31



Joon. 32

K o l m n u r g a   n ü r i n u r g a   v a s t a s - k ü l j e   r u u t võrdub kahe teise külje ruutude summaga, millele on liidetud kahekordne ühe külje korrutis teise külje projektsiooniga sellel küljel (joon. 32)

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cb'.$$

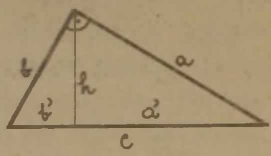
Kasutades nurga α koosinust on võimalik ühendada eelmised kaks valemit, ning saame

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

mis on nimetatud k o o s i n u s t e o r e e m i k s .

Näide 1. Täisnurkse kolmnurga kahe antud elemendi järgi arvutada ülejäänud neli:

1) $a = 6$, $a' = 3{,}6$;
2) $a = 136$, $h = 120$;
3) $a' = 2$, $b' = 18$;
4) $c = 3$, $b' = 2$;
5) $c = 26$, $h = 12$.



Joon. 33

L a h e n d u s e d . Kasutame Pythagorase ja Eukleidese teoreeme ja joonist 33.

1. Antud: $a = 6$; $a' = 3{,}6$.
   Leida: b, c, b', h.

$a^2 = a'c$, $\qquad c = \frac{a^2}{a'} = \frac{36}{3{,}6} = 10$,

$b^2 = c^2 - a^2$, $\qquad b = \sqrt{100 - 36} = 8$,

$b' = c - a'$, $\qquad b' = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$,

$h^2 = a'b'$, $\qquad h = \sqrt{3{,}6 \cdot 6{,}4} = 4{,}8$.

V a s t u s . $b = 8$, $c = 10$, $b' = 6{,}4$, $h = 4{,}8$.

2. Antud: $a = 136$; $h = 120$.
   Leida b, c, a', b'.

$(a')^2 = a^2 - h^2$. $\qquad a' = \sqrt{136^2 - 120^2} = 64$,

$h^2 = a'b'$, $\qquad b' = \frac{120^2}{64} = 225$,

$c = a' + b'$, $\qquad c = 64 + 225 = 289$,

$b^2 = b'c$, $\qquad b = \sqrt{225 \cdot 289} = \sqrt{225} \cdot \sqrt{289} = 15 \cdot 17 = 255$.

V a s t u s . $b = 255$, $c = 289$, $a' = 64$, $b' = 225$.

3. Antud: $a' = 2$; $b' = 18$.
   Leida: a, b, c, h.

$h^2 = a'b'$, $\qquad h = \sqrt{2 \cdot 18} = 6$,

$a^2 = (a')^2 + h^2$, $\qquad a = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$,

$b^2 = (b')^2 + h^2$, $\qquad b = \sqrt{18^2 + 6^2} = 6\sqrt{10}$,

$c^2 = a^2 + b^2$, $\qquad c = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2} = 20$.

V a s t u s . $a = 2\sqrt{10}$, $b = 6\sqrt{10}$, $c = 20$, $h = 6$.

4. Antud: $c = 3$; $b' = 2$.

Leida: a, b, a', h.

$b^2 = b'c$, $\qquad b = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$,

$a^2 = c^2 - b^2$, $\qquad a = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$,

$a^2 = a'c$, $\qquad a' = \frac{3}{3} = 1$,

$h^2 = a'b'$, $\qquad h = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$.

V a s t u s . $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, $a' = 1$, $h = \sqrt{2}$.

5. Antud: $c = 26$; $h = 12$.

Leida: a, b, a', b'.

$h^2 = a'b'$, $\qquad a'b' = 144$

$a' + b' = c$, $\qquad a' + b' = 26$.

Süsteemi lahendamisel kasutame V i e t e' i t e o r e e m i ja abitundmatut t. Siis lahendatav võrrandisüsteem on samaväärne võrrandiga

$$t^2 - 26t + 144 = 0.$$

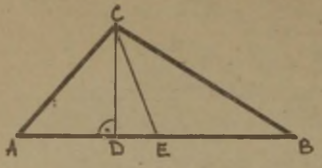
Viimase lahendid on $t_1 = 8$ ja $t_2 = 18$ ning kaatetite projektsioonid on 8 ja 18. Olgu $a' = 8$, siis $b' = 18$ (võib valida ka vastupidi, kuid tulemuseks saame ikkagi ühe täisnurkse kolmnurga). Kaatetid

$a^2 = a'c$, $\qquad a = \sqrt{8 \cdot 26} = 4\sqrt{13}$,

$b^2 = b'c$, $\qquad b = \sqrt{18 \cdot 26} = 6\sqrt{13}$.

V a s t u s . $a = 4\sqrt{13}$, $b = 6\sqrt{13}$, $a' = 8$, $b' = 18$
või $a = 6\sqrt{13}$, $b = 4\sqrt{13}$, $a' = 18$, $b' = 8$.

Näide 2. Kolmnurga üks külg on 60 cm. Sellele küljele joonestatud kõrgus on 12 cm ja mediaan 13 cm. Arvutada teised küljed.



Joon. 34

L a h e n d u s .

Antud: AB = 60 cm; CD= 12 cm;
CE = 13 cm (joon. 34).

Leida: AC ja BC.

Täisnurksest kolmnurgast DEC kaatet

$$DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = $$
$$= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Et mediaan poolitab vastaskülje, siis

$$AD = \frac{1}{2} AB - DE = 30 - 5 = 25.$$

Lõik $DB = DE + EB = 5 + 30 = 35.$

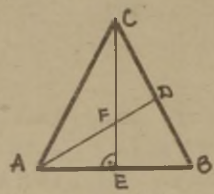
Pythagorase teoreemi põhjal

$$AC = \sqrt{25^2 + 12^2} = \sqrt{769} \approx 27{,}7,$$

$$BC = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37 \text{ cm}.$$

V a s t u s . Kolmnurga teised küljed on 27,7 cm ja 37 cm.

Näide 3. Võrdhaarse kolmnurga alus on $4\sqrt{2}$ cm, haara mediaan 5 cm. Arvutada haara pikkus.



Joon. 35

L a h e n d u s .

Antud: AC = CB; AB = $4\sqrt{2}$ cm;
AD = 5 cm (joon. 35).

Leida: AC, CB.

Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ka mediaaniks. Seega F on mediaanide lõikepunkt ja

$$AF = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot 5 = 3\frac{1}{3} \quad \text{ning} \quad CE = 3FE.$$

Täisnurksest kolmnurgast AFE

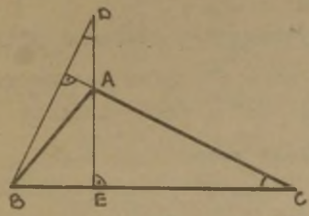
$$FE = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{(3\frac{1}{3})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{28}}{3}.$$

Siis $CE = 3 \cdot \frac{\sqrt{28}}{3} = \sqrt{28}$ ja kolmnurgast ACE

$$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{28})^2} = 6.$$

V a s t u s. Kolmnurga haarad on 6 cm.

Näide 4. Kolmnurgas ABC AB = 2 cm, AC = 5 cm, BC =6 cm. Arvutada tipu B kaugus kolmnurga ABC kõrguste lõikepunktist.



Joon. 36

L a h e n d u s.

Antud: AB = 2 cm; AC = 5 cm; BC = 6 cm (joon. 36).

Leida: BD.

Täisnurksetes kolmnurkades AEC ja BDE on $\angle$ BDE = = $\angle$ ACE (kui ristuvate haaradega nurgad). Vaadeldud kolmnurkade sarnusest

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BE}{AE}, \quad \text{millest} \quad BD = \frac{AC \cdot BE}{AE}.$$

Lõigud BE ja AE määrame täisnurksetest kolmnurkadest AEC ja ABE:

$$\begin{cases} AE^2 = AC^2 - (BC - BE)^2, \\ AE^2 = AB^2 - BE^2. \end{cases}$$

Siit

$$AC^2 - BC^2 + 2BC \cdot BE - BE^2 = AB^2 - BE^2,$$

$$BE = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2BC} = \frac{5}{4}.$$

Siis

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{\frac{39}{16}} = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

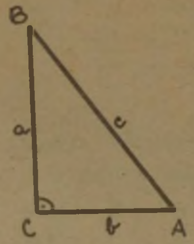
ja

$$BD = \frac{AC \cdot BE}{AE} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{39}} = \frac{25}{\sqrt{39}} = \frac{25}{39}\sqrt{39}.$$

V a s t u s. Tipu B kaugus kõrguste lõikepunktist on $\frac{25}{39}\sqrt{39}$ cm.

Näide 5. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 132, külgede ruutude summa 6050. Arvutada küljed.

7*



Joon. 37

L a h e n d u s .

Antud: $a + b + c = 132;$

$a^2 + b^2 + c^2 = 6050$

(joon. 37).

Leida: a, b, c.

Pythagorase teoreemi põhjal $a^2 + b^2 = c^2$. Siis asendades saame $2c^2 = 6050$, millest

$c = \sqrt{3025} = 55$. Lähteandmetest pärast asendamist $a + b = 77$ ja $a^2 + b^2 = 3025$. Tõstes esimese võrrandi ruutu ja lahutades sellest teise võrrandi saame, et $ab = 1452$. Kasutades Viete'i lauset ja abitundmatut t

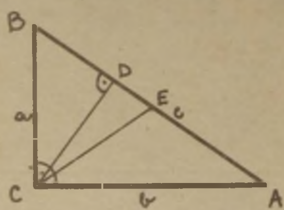
$$t^2 - 77t + 1452 = 0,$$

millest

$$t_1 = 33, \; t_2 = 44.$$

V a s t u s . Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 33 ja 44, hüpotenuus 55 pikkusühikut.

Näide 6. Arvutada täisnurkse kolmnurga kaatetite suhe, kui täisnurga tipust joonestatud kõrguse ja mediaani suhe on 40 : 41.



Joon. 38

L a h e n d u s .

Antud: CD : CE = 40 : 41 (joon.38).

Leida: a : b.

Olgu CD = 40x, siis CE = 41x. Et $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ (sest täisnurksetes kolmnurkades on üks ühine nurk $\angle CAB$), siis

$$\frac{a}{40x} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 40^2x^2}} = \frac{82x}{b}.$$

Äärmistest suhetest moodustatud võrdest

$$ab = 40 \cdot 82x^2, \text{ millest } x^2 = \frac{ab}{40 \cdot 82}.$$

Teisest ja kolmandast suhtest saadud võrdest

$$b = 82x\sqrt{b^2 - 40^2x^2}.$$

Viimast võrrandit astendades vabaneme juurest ja peale x^2 asendamist

$$b^4 = (82b)^2 \cdot \frac{ab}{40 \cdot 82} - 82^2 \cdot 40^2 \cdot \frac{a^2b^2}{40^2 \cdot 82^2} \quad \Big| : b^4$$

$$1 = \frac{82}{40}\frac{b}{a} - \frac{a^2}{b^2}.$$

Tähistades $\frac{a}{b} = t$, saame ruutvõrrandi

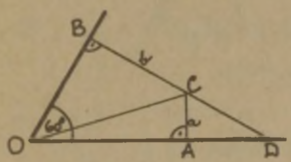
$$40t^2 - 82t + 40 = 0,$$

millest

$$t_1 = \frac{5}{4};\ t_2 = \frac{4}{5}.$$

V a s t u s . Kaatetite suhe on $5 : 4$ või $4 : 5$.

Näide 7. Nurga sees, mille suurus 60°, on võetud punkt, mille kaugused külgedest on a ja b. Arvutada punkti kaugus nurga tipust.



Joon. 39

L a h e n d u s .
Antud: $AC = a$; $BC = b$;
$\angle BOD = 60°$ (joon.39).
Leida: CO.

Vaatleme täisnurkset kolmnurka BOD, millest

$$\cos 60° = \frac{OB}{OD} \text{ ja } OD = 2OB.$$

Samast kolmnurgast

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = 4OB^2 - OB^2 = 3OB^2.$$

Kolmnurgas ACD $\angle ACD = 60°$ (ristuvate haaradega nurgad BOD ja ACD on võrdsed), siis $\cos 60° = \frac{AC}{CD}$, millest

$$CD = 2AC = 2a.$$

Teiselt poolt

$$DB = BC + CD = b + 2a$$

ja asendades BD^2 avaldisse saame

$$(b + 2a)^2 = 3OB^2, \text{ millest } OB = \frac{2a + b}{\sqrt{3}}.$$

Kolmnurgast OBC

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{(2a + b)^2}{3} + b^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

8

ja $\quad OC = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}.$

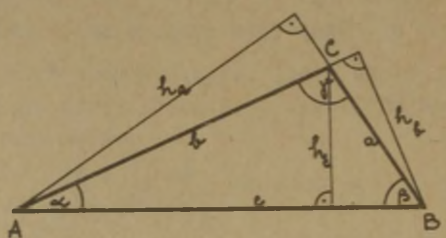
V a s t u s . Punkt on nurga tipust kaugusel
$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2 + ab + b^2}.$

10. K o l m n u r g a ü m b e r m õ õ t j a p i n d a l a . Kolmnurga ü m b e r m õ õ d u k s on kolmnurga külgede pikkuste summa. Jooniselt 40

$$P = a + b + c.$$

Kasutatakse ka tähistust

$$2p = a + b + c, \quad \text{siit} \quad p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$



Joon. 40

Kolmnurga p i n d a l a on võrdne kolmnurga aluse ja kõrguse poole korrutisega.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Sõltuvalt lähteandmetest on mõnikord otstarbekas kasutada teisi pindala valemeid:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}, \qquad \text{(Heroni valem)}$$

$$S = pr,$$

$$S = \frac{abc}{4R},$$

kus r - kolmnurga siseringjoone raadius,
R - ümberringjoone raadius.

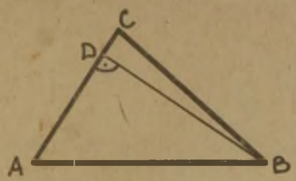
Kui kasutada kolmnurga nurkade trigonomeetrilisi funktsioone, siis kolmnurga pindala avaldub

$$S = \frac{1}{2}ab \sin\gamma = \frac{1}{2}ac \sin\beta = \frac{1}{2}bc \sin\alpha,$$

$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha},$$

$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma .$$

Näide 1. Arvutada kolmnurga kõige pikem kõrgus, kui kolmnurga küljed on 13 cm, 14 cm ja 15 cm.



Joon. 41

L a h e n d u s .

Antud: AC = 13 cm; AB = 14 cm; BC = 15 cm (joon. 41).

Leida: BD.

Kõige lühemale küljele vastab kõige pikem kõrgus. Pindala $S = \frac{1}{2} AC \cdot DB$, kuid Heroni valemi põhjal

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

Siis

$$DB = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{13} = 12\frac{12}{13}.$$

V a s t u s . Kolmnurga pikim kõrgus on $12\frac{12}{13}$ cm.

Näide 2. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 3 : 25 : 26 ja pindala on 144 cm^2. Arvutada ümbermõõt.

L a h e n d u s .

Antud: Külgede suhted 3 : 25 : 26 ja S = 144 cm^2.

Leida: P.

Olgu kolmnurga küljed 3x, 25x ja 26x. Siis

$$p = \frac{3x + 25x + 26x}{2} = 27x$$

ning

$$S = \sqrt{27x \cdot 24x \cdot 2x \cdot x} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3x^2.$$

Võrrandist $36x^2 = 144$, $x = 2$. Siis $p = 27 \cdot 2 = 54$ ja $P = 2p = 108$.

V a s t u s . Kolmnurga ümbermõõt on 108 cm.

Näide 3. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on m ja hüpotenuus c. Kaateteid leidmata avaldada kolmnurga pindala.

L a h e n d u s .

Antud: a + b = m; c.

Leida: S.

Lähtudes Pythagorase teoreemist $c^2 = a^2 + b^2$ ja teisendades seda avaldist

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab, \quad c^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

millest

$$2ab = (a + b)^2 - c^2; \quad ab = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2}; \ ab = \frac{m^2 - c^2}{2}.$$

Kolmnurga pindala

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{m^2 - c^2}{4}.$$

V a s t u s . $S = \dfrac{m^2 - c^2}{4}$.

<u>Näide 4</u>. Teades kolmnurga kõrgusi h_a, h_b, h_c, avaldada tema pindala.

L a h e n d u s .

Antud: h_a, h_b, h_c.

Leida: S.

Kolmnurga pindala valemeist

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

saab avaldada a, b ja c, mis asendame Heroni valemisse

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

kus

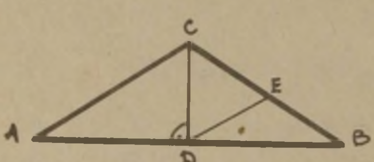
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

$$S = S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}.$$

V a s t u s .

$$S = 1 : \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}.$$

<u>Näide 5</u>. Arvutada võrdhaarse kolmnurga pindala, kui alus on 12 cm ja alusele joonestatud kõrgus võrdub aluse ja haara keskpunkte ühendava lõiguga.



Joon. 42

L a h e n d u s .

Antud: AB = 12 cm; DC = DE = $= \frac{1}{2}$AC (joon. 42).

Leida: S.

Kolmnurk ACD on täisnurkne, seega

$$\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \angle CAD = 30°.$$

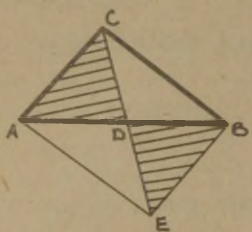
Samast kolmnurgast

$$\frac{CD}{AD} = \tan 30°, \quad CD = AD \cdot \tan 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

V a s t u s . Võrdhaarse kolmnurga pindala on $12\sqrt{3}$ cm^2.

Näide 6. Arvutada kolmnurga pindala, kui üks külg on 27 cm ja teine 29 cm ning kolmnda külje mediaan on 26 cm.



Joon. 43

L a h e n d u s .

Antud: AC = 27 cm; BC = 29 cm; CD = 26 cm (joon. 43).

Leida: S.

Pikendades mediaani CD oma pikkuse võrra saame punkti E, mille ühendame antud kolmnurga tippudega. Tunnuse KNK põhjal $\triangle ACD \cong \triangle DEB$ (AD = DB, CD= DE, tippnurgad).

Kongruentsed kolmnurgad on ka pindvõrdsed ning S_{ABC} asemel leiame S_{CBE}. Heroni pindala valemist

$$S = \sqrt{54 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 27} = \sqrt{2 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 27} = 2 \cdot 27 \cdot 5 = 270.$$

V a s t u s . Kolmnurga pindala on 270 cm^2.

§ 3. HULKNURGAD

1. H u l k n u r g a m õ i s t e . Punktihulka, mille elementideks on tasandi osa koos seda piirava kinnise murdjoonega, nimetatakse h u l k n u r g a k s. Hulknurki liigitatakse tippude (külgede) arvu järgi. Hulknurka, mis sisaldab iga oma diagonaali, nimetatakse k u m e r a k s h u l k n u r g a k s . Hulknurka, millel on võrdsed küljed ja võrdsed nurgad, nimetatakse k o r r a p ä r a s e k s h u l k n u r g a k s . Igal korrapärasel hulknurgal leidub sise- ja ümberringjoon. Hulknurka, mille tipud asuvad ringjoonel, nimetatakse k õ õ l h u l k n u r g a k s . Nelinurga ümber saab joonestada ringjoone siis, kui nelinurga

vastasnurkade summa on sirgnurk. Ümberringjoon on ristkülikul, ruudul ja võrdhaarsel trapetsil, ümberringjoont ei ole rööpkülikul ja rombil. Hulknurka, mille kõik küljed on ringjoone puutujatel, nimetatakse p u u t u j a h u l k n u r g a k s . Puutujanelinurga vastaskülgede summad on võrdsed.

Kumera n-nurga:

1) diagonaalide arv on $\frac{n(n-3)}{2}$;

2) ühest tipust lähtuvad diagonaalid jaotavad hulknurga n - 2 kolmnurgaks;

3) sisenurkade summa on $(n-2) \cdot 180°$;

4) välisnurkade summa on 360°.

Näide 1. Mitu külge on korrapärasel hulknurgal, mille sisenurk on 150°?

L a h e n d u s .

Antud: Sisenurk on 150°.

Leida: n.

Kuna n-nurkse hulknurga sisenurkade summa on $(n-2) \cdot 180°$, siis

$$150° n = 180°(n-2),$$

millest $n = 12$.

V a s t u s . Korrapärasel hulknurgal on 12 külge.

Näide 2. Mitu külge on korrapärasel hulknurgal, mille välisnurk on 24°?

L a h e n d u s .

Antud: Välisnurk on 24°.

Leida: n.

I võimalus. Kasutades välisnurkade summat:

$24n = 360°$; $n = 15$.

II võimalus. Sisenurk on 180° - 24° = 156° ja sisenurkade summast

$$156° n = 180°(n-2) \quad \text{ja} \quad n = 15.$$

V a s t u s . Korrapärasel hulknurgal on 15 külge.

2. H u l k n u r k a d e s a r n a s u s . Kaht hulknurka nimetatakse s a r n a s t e k s, kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja vastavad küljed on võrdelised.

Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad samuti kui vastavad küljed (sarnasustegur k).

Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud (k^2).

Korrapärased ühenimelised hulknurgad on sarnased ja nende küljed suhtuvad nagu apoteemid või ümberringjoonte raadiused.

Korrapäraste ühenimeliste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu nende külgede ruudud või ümberringjoonte raadiuste ruudud või apoteemide ruudud.

Näide 1. Kahe sarnase hulknurga suurimate külgede pikkused on 35 m ja 14 m ning ümbermõõtude vahe on 60 m. Arvutada ümbermõõdud.

Lahendus.

Antud: $a_1 = 35$ m; $b_1 = 14$ m; $P_1 - P_2 = 60$ m.

Leida: P_1; P_2.

Et sarnaste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed, siis

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{b_1}$; antud juhul $\frac{P_2 + 60}{P_2} = \frac{35}{14}$, millest $P_2 = 40$,

$P_1 = 100$.

Vastus. Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud on 40 m ja 100 m.

Näide 2. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2. Arvutada suurema hulknurga ümbermõõt, kui väiksema hulknurga ümbermõõt on 48 cm.

Lahendus.

Antud: $S_1 = 180\ cm^2$; $S_2 = 80\ cm^2$; $P_2 = 48$ cm.

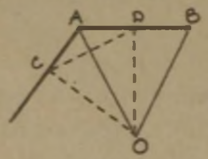
Leida: P_1.

Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud, ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed. Seega

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{180}{80} = k^2$; $k = \frac{3}{2}$; $\frac{P_1}{48} = \frac{3}{2}$; $P_1 = \frac{3}{2} \cdot 48 = 72$.

Vastus. Suurema hulknurga ümbermõõt on 72 cm.

Näide 3. Korrapärase n-nurkse hulknurga külgede keskpunktid ühendatakse. Tekib uus korrapärane hulknurk, mis asub eelmise sees. Avaldada nende hulknurkade pindalade suhe.



Joon. 44

L a h e n d u s .

Antud: n-nurkne hulknurk.

Leida: $S_1 : S_2$.

Korrapäraste samanimeliste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu ümberringjoonte raadiuste ruudud (joon. 44)

$$S_1 : S_2 = OD^2 : OA^2.$$

Täisnurksest kolmnurgas OAD

$$\frac{OD}{OA} = \cos\frac{180°}{n}, \quad OD = OA\cos\frac{180°}{n}$$

ja asendades

$$S_1 : S_2 = \cos^2\frac{180°}{n}.$$

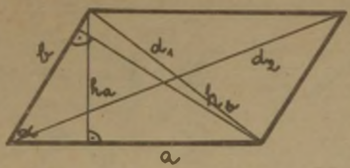
V a s t u s . Pindalade suhe on $\cos^2\frac{180°}{n}$.

3. R ö ö p k ü l i k , r i s t k ü l i k , r o m b , r u u t . Nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed, nimetatakse r ö ö p k ü l i k u k s .

Rööpküliku omadusi:

1) vastasküljed on võrdsed;
2) vastasnurgad on võrdsed;
3) lähisnurkade summa on sirgnurk;
4) diagonaalid poolitavad teineteist;
5) diagonaalide lõikepunkt on rööpküliku sümmeetriakeskpunkt;
6) diagonaal jaotab rööpküliku kongruentseteks kolmnurkadeks;
7) diagonaalide ruutude summa on võrdne külgede ruutude summaga (joon. 45)

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



Joon. 45

Rööpküliku pindala

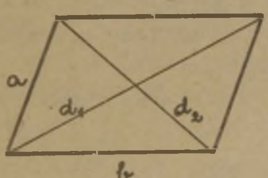
$$S = a\,h_a = b\,h_b = ab\sin\alpha\,.$$

Näide 1. Arvutada rööpküliku küljed ja diagonaalid, kui suurem külg võrdub väiksema diagonaaliga, külgede pikkuste vahe on 3 cm ja diagonaalide pikkuste vahe on 2 cm.

L a h e n d u s .

Antud: $b = d_2$; $b - a = 3$ cm; $d_1 - d_2 = 2$ cm (joon. 46).

Leida: a; b; d_1; d_2.



Joon. 46

Kasutame omadust, et diagonaalide ruutude summa on võrdne külgede ruutude summaga:

$$(d_2 + 2)^2 + d_2^2 = 2\left[d_2^2 + (d_2 - 3)^2\right].$$

Ruutvõrrandi $d_2^2 - 8d_2 + 7 = 0$ lahenditest $(d_2)_1 = 7$ ja $(d_2)_2 = 1$ sobib esimene. Seega $d_2 = 7$, $d_1 = 9$, $b = 7$, $a = 4$.

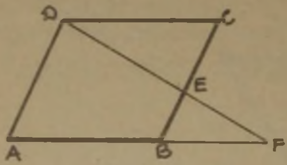
V a s t u s . Rööpküliku küljed on 4 cm ja 7 cm ning diagonaalid 7 cm ja 9 cm.

Näide 2. Rööpküliku ABCD külg AB = 42 cm. Küljel BC on võetud punkt E nii, et BE : EC = 5 : 7. Lõiku DE on pikendatud lõikumiseni külje AB pikendusega punkti F. Arvutada BF.

L a h e n d u s .

Antud: AB = 42 cm; BE : EC = 5 : 7 (joon. 47).

Leida: BF.



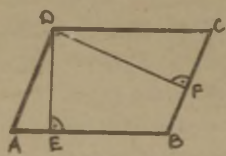
Joon. 47

Olgu BE = 5x, siis EC = 7x ja AD = BC = 12x. Kolmnurkade $\triangle$ AFD ja $\triangle$ BFE sarnasusest $\frac{AD}{BE} = \frac{AF}{BF}$. Asendades võrdesse antud suurused, saame võrrandi $\frac{12x}{5x} = \frac{42 + BF}{BF}$, millest BF = 30.

V a s t u s. Lõik BF = 30 cm.

Näide 3. Rööpküliku ümbermõõt on 48 cm ning tema kõrgused suhtuvad nagu 5 : 7. Arvutada rööpküliku küljed.

L a h e n d u s.



Joon. 48

Antud: P = 48 cm; DE : DF = = 5 : 7 (joon. 48).

Leida: AB, AD.

Olgu DE = 5x, siis DF = 7x. Olgu AB = y, siis BC = 24 - y. Avaldame rööpküliku pindala kahel viisil:

AB . DE = BC . DF ehk y . 5x = (24 - y) . 7x.

Kuna $x \neq 0$, siis

5y = (24 - y) · 7, millest y = 14.

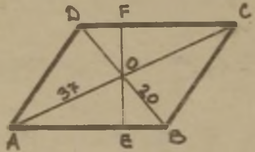
Siis

BC = 24 - 14 = 10.

V a s t u s . Rööpküliku küljed on 14 cm ja 10 cm.

Näide 4. Arvutada rööpküliku kõrgus, kui rööpküliku alus on 51 cm ning diagonaalid on 40 cm ja 74 cm.

L a h e n d u s .



Joon. 49

Antud: AB = 51 cm; BD = 40 cm; AC = 74 cm (joon. 49).

Leida: EF.

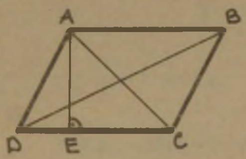
Et $\triangle$ AOB $\cong$ $\triangle$ DOC, siis FO = OE. Arvutame $\triangle$ AOB pindala Heroni valemi põhjal

$$S = \sqrt{54 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 34} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 17} = 3 \cdot 6 \cdot 17 = 306.$$

Et ka $\frac{51 \cdot OE}{2} = 306$, siis siit $OE = 12$, $EF = 24$.

V a s t u s . Rööpküliku kõrgus on 24 cm.

Näide 5. Rööpküliku külgede suhe on 2, sama suur on ka diagonaalide suhe. Nürinurga tipust A on tõmmatud kõrgus AE küljele CD. Arvutada lõikude DE ja CE suhe.



Joon. 50

L a h e n d u s .

Antud: $AB = 2AD$; $DB = 2AC$ (joon. 50).

Leida: $DE : CE$.

Kasutame valemit, mis seob rööpküliku külgi ja diagonaale:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2 + DC^2.$$

Siis

$$AC^2 + 4AC^2 = AD^2 + 4AD^2 + AD^2 + 4AD^2,$$

millest

$$5AC^2 = 10AD^2, \quad AC = \sqrt{2}\,AD.$$

Kolmnurgas ACD on AC teravnurga vastaskülg. Seega

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DE.$$

Pärast asendamist saame

$$2AD^2 = AD^2 + 4AD^2 - 4AD \cdot DE, \text{ millest } DE = \tfrac{3}{4}AD.$$

Lõik

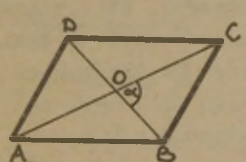
$$CE = DC - DE = 2AD - \tfrac{3}{4}AD = \tfrac{5}{4}AD.$$

Siis suhe

$$DE : CE = \tfrac{3}{4}AD : \tfrac{5}{4}AD = \tfrac{3}{5}.$$

V a s t u s . Lõikude suhe $DE : CE = 3 : 5$.

Näide 6. Rööpküliku küljed on a ja b, diagonaalide vaheline teravnurk α . Avaldada rööpküliku pindala.



Joon. 51

L a h e n d u s .

Antud: $AB = a$; $AD = b$; $\angle COB = \alpha$ (joon. 51).

Leida: S.

Tähistame $OC = d_1$, $OB = d_2$. Siis rööpküliku pindala

$$S = 2d_1d_2 \sin\alpha .$$

Koosinuslause põhjal

$$a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(180° - \alpha),$$
$$b^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos\alpha .$$

Lahutades esimesest teise võrduse saame, et

$$a^2 - b^2 = 4d_1d_2 \cos\alpha ,$$

millest

$$2d_1d_2 = \frac{a^2 - b^2}{2\cos\alpha} .$$

Asendades saadud tulemuse pindala valemisse, saame

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a^2 - b^2}{2} \tan\alpha .$$

V a s t u s . Rööpküliku pindala $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \tan\alpha$.

R i s t k ü l i k on rööpkülik, mille lähisküljed on risti. Ristkülikul on kõik rööpküliku omadused, kusjuures ristküliku diagonaalid on võrdsed.

Ristküliku pindala võrdub pikkuse ja laiuse korrutisega.

Näide 7. Ristküliku diagonaalide vaheline nurk on 60°. Ristküliku lühemate külgede ja diagonaalide summa on 3,6 m. Arvutada diagonaalide pikkus.

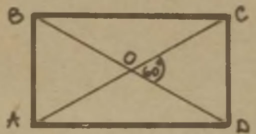
L a h e n d u s .

Antud: $\angle COD = 60°$;

$AB + DC + AC + BD =$

$= 3{,}6$ m (joon. 52).

Leida: AC.



Joon. 52

Ristküliku diagonaalid on võrdsed pikkusega ja poolitavad teineteist. Siis AO = OC = OB = = OD. Järelikult kolmnurk COD on võrdhaarne. Et tipunurk on 60°, siis ka alusnurgad on 60° ja kolmnurk on võrdkülgne. Olgu ristküliku lühem külg a. Siis ülesande tingimuste põhjal 6a = 3,6. Siit a = 0,6 ja ristküliku diagonaal on 1,2 m.

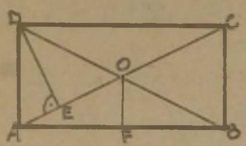
V a s t u s. Ristküliku diagonaalid on 1,2 m.

Näide 8. Ristküliku tipust diagonaalile joonestatud ristsirge jaotab diagonaali osadeks suhtes 1 : 3. Arvutada diagonaali pikkus, kui diagonaalide lõikepunkt asetseb suuremast küljest 2 m kaugusel.

L a h e n d u s .

Antud: AE : EC = 1 : 3;
OF = 2 m; $DE \perp AC$
(joon. 53).

Leida: AC.



Joon. 53

Tähistame AE = x. Siis EC = 3x. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus $DE = \sqrt{AE \cdot EC} = \sqrt{x \cdot 3x} = x\sqrt{3}$. Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgas ADE

$$DE^2 + AE^2 = AD^2 \quad \text{ehk} \quad 3x^2 + x^2 = 16,$$

millest x = 2.

Diagonaal AC = AE + EC = 2 + 6 = 8.

V a s t u s . Ristküliku diagonaal on 8 m.

R o m b on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

Rombi: 1) diagonaalid on risti ja poolitavad rombi nurgad;
2) kõrgused on võrdsed.

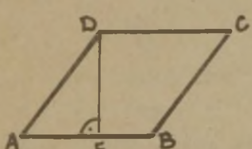
Rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.

Näide 9. Rombi ümbermõõt on 8 cm ja kõrgus 1 cm. Arvutada rombi nürinurk.

L a h e n d u s .

Antud: AB + BC + CD + AD= 8 cm;
DE = 1 cm (joon. 54).

Leida: $\angle$ ABC.



Joon. 54

Rombi külgede võrdsusest AD = 2 cm.

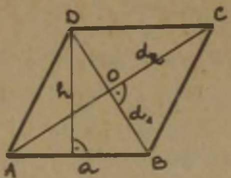
Täisnurksest kolmnurgast ADE

$$\sin \widehat{DAE} = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \angle DAE = 30°.$$

Nürinurk $\angle ABC = 180° - \angle DAE = 180° - 30° = 150°$.

V a s t u s . Rombi nürinurk on 150°.

Näide 10. Rombi kõrgus on 12 cm ja üks diagonaalidest 15 cm. Arvutada rombi pindala.



Joon. 55

L a h e n d u s .

Antud: $d_1 = 15$ cm; $h = 12$ cm (joon. 55).

Leida: S.

Avaldades rombi pindala kahel viisil:

$$ah = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Antud juhul

$$12 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot d_2.$$

Kolmnurgast AOB Pythagorase teoreemi põhjal:

$$\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2.$$

Süsteemi

$$\begin{cases} 12a = 7{,}5d_2 , \\ 7{,}5^2 + \frac{d_2^2}{4} = a^2 \end{cases}$$

esimesest võrrandist $\frac{d_2}{2} = \frac{4}{5}a$

ja teisest võrrandist

$$7{,}5^2 + \frac{16}{25}a^2 = a^2, \quad \frac{3}{5}a = 7{,}5, \quad a = 12{,}5.$$

Pindala

$$S = a \cdot h = 12{,}5 \cdot 12 = 150.$$

V a s t u s . Rombi pindala on 150 cm^2.

Näide 11. Rombi ümbermõõt on 2p cm, diagonaalide summa m cm. Avaldada rombi pindala.

L a h e n d u s .

Antud: $4a = 2p$; $d_1 + d_2 = m$ (vt. joon. 55).

Leida: S.

Rombi külg $a = \frac{1}{2}p$. Täisnurksest kolmnurgast AOB

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Teise võrrandi saame diagonaalide summast:

$$\left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2.$$

Neist võrrandeist koostame süsteemi

$$\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = p^2 \\ (d_1 + d_2)^2 = m^2, \end{cases}$$

millest

$$d_1 d_2 = \frac{m^2 - p^2}{2}$$

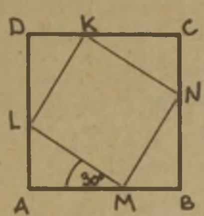
ja pindala

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$

V a s t u s . Rombi pindala on $\frac{m^2 - p^2}{4}$ cm^2.

R u u t on rööpkülik, mille kõik küljed on võrdsed ja kõik nurgad on täisnurgad.

Näide 12. Ruutu on kujundatud ruut, mille tipud asuvad antud ruudu külgedel ja küljed moodustavad 30°-se nurga antud ruudu külgedega. Avaldada nende ruutude pindalade suhe.



Joon. 56

L a h e n d u s .

Antud: $\angle LMA = 30°$ (joon. 56).

Leida: $S_{ABCD} : S_{KLMN}$.

Et $\sin 30° = \frac{AL}{LM}$ ja $\cos 30° = \frac{AM}{LM}$, siis

$$AL = \frac{1}{2} ML; \quad AM = \frac{\sqrt{3}}{2} ML.$$

$$AB = AM + MB = AM + AL =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} ML + \frac{1}{2} ML = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) ML.$$

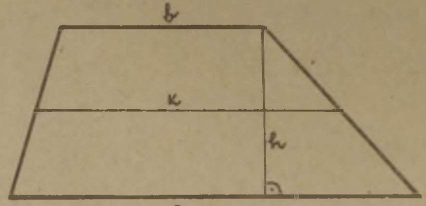
$$S_{ABCD} : S_{KLMN} = AB^2 : ML^2 = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

V a s t u s . Ruutude pindalade suhe on $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

4. T r a p e t s . Nelinurka, mille kaks külge on paralleelsed ja kaks külge mitteparalleelsed, nimetatakse t r a p e t s i k s .

Trapetsi kesklõik on paralleelne alustega ja võrdub aluste poolsummaga (joon. 57):

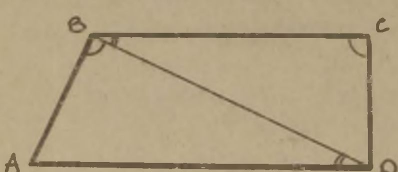
$$k = \frac{a + b}{2}.$$



Joon. 57

Trapetsi pindala $S = \frac{a + b}{2} \cdot h = kh.$

Näide 1. Trapetsis ABCD (BC ∥ AD), mille diagonaaliks on BD, on nurgad ABD ja BCD võrdsed. On teada, et BC = 10 cm, DC = 15 cm ja BD = 20 cm. Arvutada AB ja AD.



Joon. 58

L a h e n d u s .

Antud: $\angle ABD = \angle BCD$; BC = = 10 cm; DC = 15 cm ja BD = 20 cm (joon. 58).

Leida: AB; AD.

Kolmnurkade ABD ja BCD sarnasusest ($\angle ABD = \angle BCD$, $\angle DBC = \angle ADB$)

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}, \text{ millest } \frac{AB}{15} = \frac{20}{10} = \frac{AD}{20} \text{ ja}$$

AB = 30, AD = 40.

V a s t u s . AB = 30 cm, AD = 40 cm.

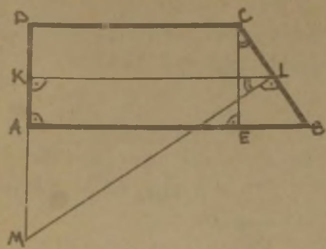
Näide 2. Täisnurkse trapetsi alused on 17 dm ja 25 dm ning pikem haar on 10 dm. Selle haara keskpunktist on joonestatud ristlõik samale haarale lõikumiseni teise haaraga. Arvutada selle ristlõigu pikkus.

L a h e n d u s .

Antud: AB = 25 dm; DC = 17 dm; CB = 10 dm (joon. 59).

Leida: ML.

Joonestame kesklõigu KL ja nürinurga tipust kõrguse CE.



Joon. 59

Kesklõik KL = 21 dm. Täisnurksetes kolmnurkades MKL ja CEB $\angle KLM = \angle ECB$ kui ristiseisvate haaradega nurgad. Seega $\triangle MKL \sim \triangle ECB$ ja

$$\frac{KL}{CE} = \frac{ML}{CB}, \quad \frac{21}{CE} = \frac{ML}{10}.$$

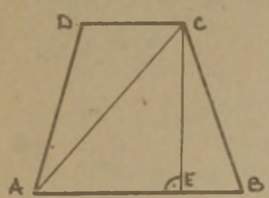
Lõigu CE määrame täisnurksest kolmnurgast CBE:

$$CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Asendades CE väärtuse viimasesse võrdesse, saame et ML = 35.

V a s t u s . Ristlõigu pikkus on 35 dm.

Näide 3. Võrdhaarse trapetsi pikem alus on 44 cm, haar 17 cm ja diagonaal 39 cm. Arvutada trapetsi pindala.



Joon. 60

L a h e n d u s .

Antud: AB = 44 cm; AD = CB = = 17 cm; AC = 39 cm (joon. 60).

Leida: S.

Heroni valemiga arvutame $\triangle ABC$ pindala:

$$S = \sqrt{50 \cdot 11 \cdot 33 \cdot 6} = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3} = $$
$$= 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 = 330.$$

Kuid $S = \frac{AB \cdot CE}{2}$, siis $CE = \frac{2S}{AB}$ ja trapetsi kõrgus

$$CE = \frac{2 \cdot 330}{44} = 15.$$

Pythagorase teoreemi põhjal

$$EB = \sqrt{CB^2 - CE^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17+15)(17-15)} =$$
$$= \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 4} = 8.$$

Trapetsi lühem alus

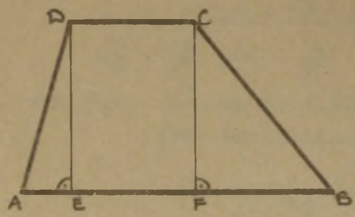
$$DC = AB - 2EB = 44 - 16 = 28$$

ja trapetsi pindala

$$S = \frac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 540.$$

V a s t u s . Trapetsi pindala on 540 cm^2.

Näide 4. Arvutada trapetsi pindala, kui paralleelsed küljed on 60 cm ja 20 cm ning mitteparalleelsed küljed 13 cm ja 37 cm.



Joon. 61

L a h e n d u s .

Antud: AB = 60 cm; DC =20 cm;
AD =13 cm; BC = 37 cm
(joon. 61).

Leida: S_{ABCD}.

Võib kasutada eelmise näite võtet, et joonestame läbi tipu C sirge paralleelselt AD-ga. Tekkinud kolmnurga pindala arvutame Heroni valemiga jne. Siin kasutame teist lahendusvõimalust. Tähistame AE = x, siis FD = 40 - x. Täisnurksetest kolmnurkadest ADE ja BCF

$$\begin{cases} DE^2 = 13^2 - x^2 . \\ CF^2 = 37^2 - (40 - x)^2. \end{cases}$$

Et DE = CF, siis

$$13^2 - x^2 = 37^2 - (40 - x)^2 \quad \text{ja} \quad x = 5.$$

Trapetsi kõrgus

$$DE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

ja pindala

$$S = \frac{20 + 60}{2} \cdot 12 = 480.$$

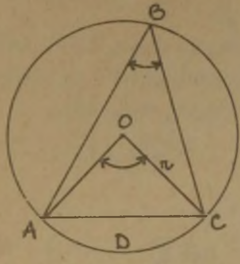
V a s t u s . Trapetsi pindala on 480 cm^2.

§ 4. RINGJOON JA RING

1. R i n g j o o n e j a r i n g i m õ i s t e . Tasandi kõigi punktide hulka, mille kaugus fikseeritud punktist O on r, nimetatakse r i n g j o o n e k s (r - raadius, O - keskpunkt).

Tasandi kõigi punktide hulka, mille kaugus punktist O on väiksem või võrdne raadiusega, nimetatakse r i n g i k s.

2. K e s k n u r k j a p i i r d e n u r k . Nurka, mille tipp asub ringi keskpunktis, nimetatakse k e s k n u r g a k s .



Joon. 62

Joonisel 62 on kesknurgaks $\angle$ AOC ja temale vastav kaar $\smile$ AC. Poolringjoonest väiksemat kaart märgitakse kahe tähega, suuremat kolme tähega $\smile$ ABC.

Nurka, mille tipp on ringjoonel ja haaradeks on kõõlud, nimetatakse p i i r d e n u r g a k s . Joonisel 62 $\angle$ ABC on piirdenurk ja $\angle$ AOC kesknurk, nad mõlemad vastavad kaarele AC.

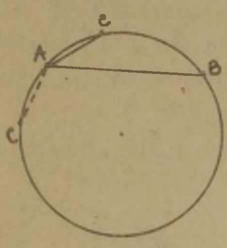
Piirdenurk võrdub poolega vastavast kesknurgast,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC.$$

Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Piirdenurgad, mis vastavad võrdsetele kaartele, on võrdsed.

Näide 1. Lõigud AB ja AC on kaks kõõlu: kaar AB on 110°23' ja kaar AC on 38°. Arvutada $\angle$ BAC.



Joon. 63

L a h e n d u s .

Antud: $\smile AB = 110°23'$,

$\smile AC = 38°$ (joon.63).

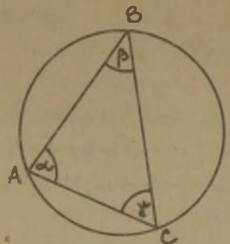
Leida: $\angle$ BAC.

I võimalus (joonisel katkev joon): $\smile BC = 360° - \smile AC - \smile AB = 211°37'$ ja vastav piirdenurk $\angle BAC = 105°48'30''$;

II võimalus.(pidev joon): $\smile BC = \smile AB - \smile AC = 72°23'$, $\angle BAC = 36°11'30''$.

V a s t u s . On kaks võimalust ja nurgad on 36°11'30" ja 105°48'30".

Näide 2. Ringjoon on jaotatud kaarteks, mis suhtuvad nagu 7 : 11 : 6, ning jaotuspunktid on ühendatud üksteisega. Arvutada tekkinud kolmnurga nurgad.



Joon. 64

L a h e n d u s .

Antud: $\smile AB : \smile BC : \smile AC =$
$= 7 : 11 : 6$ (joon. 64).

Leida: α; β; γ.

Olgu $\smile AB = 7x$, siis $\smile BC = 11x$ ja $\smile AC = 6x$. Nende summa
$7x + 11x + 6x = 360°$, $x = 15°$.
$\smile AB = 105°$, $\smile BC = 165°$, $\smile AC = 90°$.

Piirdenurga omaduse põhjal
$\alpha = 82°30'$, $\beta = 45°$, $\gamma = 52°30'$.

V a s t u s . Kolmnurga nurgad on 82°30', 45° ja 52°30'.

3. R i n g j o o n e l õ i k a j a j a p u u t u j a. Ringjoone l õ i k a j a k s nimetatakse sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti. Lõikaja piirsirget, millele läheneb lõikaja, kui üht lõikepunkti ringjoone kaart mööda teisele lähendada, nimetatakse ringjoone p u u t u j a k s . Ringjoone puutujal on ringjoonega üks ühine punkt.

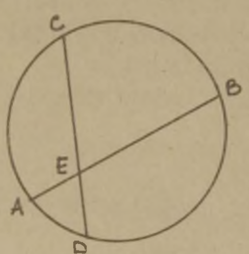
Puutuja on risti puutepunkti joonestatud raadiusega.

Kui väljaspool ringjoont võetud punktist joonestada puutujad, siis selle punkti kaugused puutepunktidest on võrdsed.

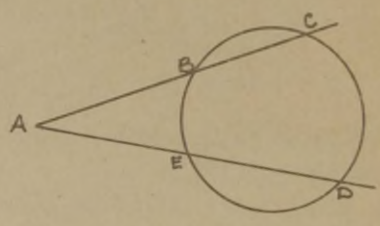
Kui ringjoone lõikajate vaheline nurk asub:

1) seespool ringjoont, siis selle nurga suurus on võrdne nurga ja tema tippnurga haarade vahele jäävate kaarte suuruste poolsummaga (joon. 65)

$$\angle BEC = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB), \quad \angle AEC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile DB);$$



Joon. 65



Joon. 66

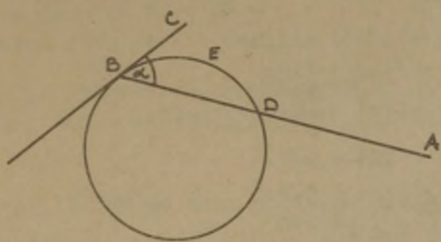
2) väljaspool ringjoont, siis selle nurga suurus on

võrdne lõikajate vahele jäävate kaarte suuruste poolvahega (joon. 66)

$\angle BAE = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile BE)$.

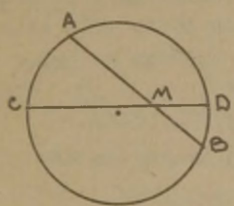
Ringjoone puutuja ja puutepunktist joonestatud lõikaja vahelise nurga suurus on võrdne poolega lõikaja poolt eraldatud kaarest (joon. 67)

$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile BED$.



Joon. 67

Näide 1. Ringjoone kõõlud AB ja CD lõikuvad punktis M, $\angle AMC = 40°$, kaar AD on kaarest CB suurem 20°54' võrra. Arvutada $\smile AD$.



Joon. 68

L a h e n d u s .

Antud: $\angle AMC = 40°$;

$\smile AD = \smile CB + 20°54'$

(joon. 68).

Leida: $\smile AD$.

Kõrvunurk

$\angle AMD = 180° - 40° = 140°$.

Kõõlude vaheline nurk

$\angle AMD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB)$.

Kuna $\smile CB = \smile AD - 20°54'$, siis

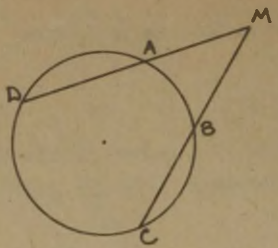
$$140° = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile AD - 20°54').$$

Siit

$$\smile AD = 129°33'.$$

V a s t u s . Kaar AD on 129°33'.

Näide 2. Ringjoon on jaotatud punktidega A, B, C ja D nii, et $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Kõõlud AD ja BC on pikendatud lõikumiseni punktis M. Arvutada $\angle AMB$.



Joon. 69

L a h e n d u s .

Antud: $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA =$
$= 3 : 2 : 13 : 7$ (joon. 69).

Leid : $\angle AMB$.

Lõikajate CM ja DM vaheline nurk

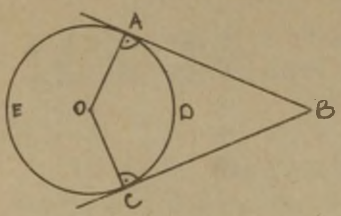
$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile AB).$$

Olgu $\smile AB = 3x$, siis $\smile BC = 2x$, $\smile CD = 13x$, $\smile AD = 7x$. Kuna $3x + 2x + 13x + 7x = 360°$, millest $x = 14°24'$. Seega $\smile CD = 187°12'$ ja $\smile AB = 43°12'$ ning

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(187°12' - 43°12') = 72°.$$

V a s t u s . $\angle AMB = 72°$.

<u>Näide 3</u>. Puutujate vaheline nurk on 73°25'. Arvutada puutujate vahelised kaared.



Joon. 70

L a h e n d u s .

Antud: $\angle ABC = 73°25'$ (joon. 70).

Leida: $\smile AEC$, $\smile ADC$.

Et nelinurga sisenurkade summa on 360°, siis kesknurk $\angle COA$ (mõõdab ka kaart ADC) on 106°35' ja $\smile AEC = 360° - 106°35' = 253°25'$.

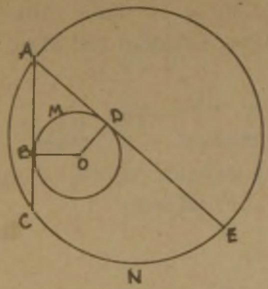
V a s t u s . Puutujate vahelised kaared on 106°35' ja 253°25'.

<u>Näide 4</u>. Antud ringjoone sees on teine ringjoon. Suurema ringjoone kõõlud on ABC ja ADE, mis punktides B ja D puutuvad väiksemat ringjoont; BMD on puutepunktide vaheline väiksem kaar; CNE kõõlude alguspunktide vaheline kaar. Arvutada kaar CNE, kui kaar BMD on 130°.

L a h e n d u s .

Antud: $\smile BMD = 130°$ (joon. 71).

Leida: $\smile CNE$.



Joon. 71

Nelinurgast ADOB

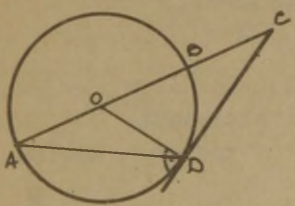
$\angle BAD = 50°$.

Kuna piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast, siis

$\cup CNE = 100°$.

V a s t u s . Kaar CNE = 100°.

<u>Näide 5</u>. Diameetri AB pikendusel asub punkt C; CD on puutuja ja $\angle ADC = 114°25'$. Mitu kraadi ja minutit on kaares BD?



Joon. 72

L a h e n d u s .

Antud: $\angle ADC = 114°25'$ (joon. 72).

Leida: $\cup BD$.

Võrdhaarsest kolmnurgast OAD piirdenurk

$\angle DAO = \angle ADO = 114°25' - 90° =$
$= 24°25'$.

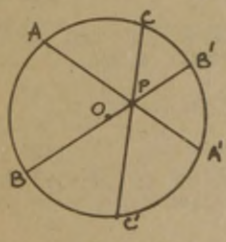
Siis $\cup BD = 2 \cdot 24°25' =$
$= 48°50'$.

V a s t u s . Kaar BD on 48°50'.

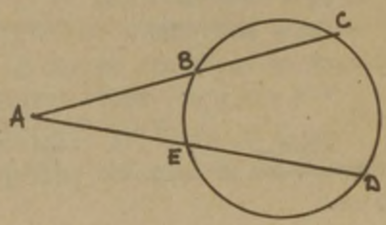
4. V õ r d e l i s e d   l õ i g u d   r i n g i s .

Kõõlude lõikepunkt jaotab kõõlud nii, et ühe kõõlu lõikude korrutis võrdub teise kõõlu lõikude korrutisega (joon. 73).

$$AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = CP \cdot PC' = \text{const.}$$



Joon. 73



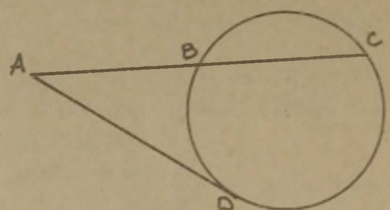
Joon. 74

Ringjoon jaotab väljaspool ringjoont asuvast punktist joonestatud kaks lõikajat (joon. 74) nii, et ühe lõikaja ja tema välisosa korrutis võrdub teise lõikaja ja tema välisosa korrutisega

$$AC \cdot AB = AD \cdot AE.$$

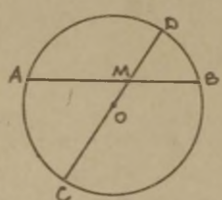
Väljaspool ringjoont asuvast punktist joonestatud puutuja (joon. 75) lõigu ruut võrdub samast punktist joonestatud lõikaja ja selle välisosa korrutisega

$$AD^2 = AC \cdot AB.$$



Joon. 75

Näide 1. Ringi sees on punkt M, mis asub 5 cm kaugusel keskpunktist. Läbi punkti M on joonestatud kõõl AB = 25 cm. Arvutada kõõlu AB lõikude pikkused, kui ringi raadius on 13 cm.



Joon. 76

L a h e n d u s .

Antud: CO = OD = 13 cm;
MO = 5 cm; AB = 25 cm
(joon. 76).

Leida: AM; MB.

Et DM = DO - MO = 8, siis CM = CO + MO = 18. Edasi kasutame lõikuvate kõõlude omadust

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD,$$

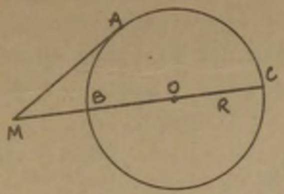
$(25 - MB) \cdot MB = 18 \cdot 8$, $(MB)_1 = 9$ ja $(MB)_2 = 16$.

Lõik BM on vastavalt 16 või 9.

V a s t u s . Kõõlu lõigud on 9 cm ja 16 cm.

Näide 2. Arvutada ringjoone diameeter, kui punktist M ringjoonele joonestatud puutuja on 20 cm ja suurim lõikaja 50 cm.

L a h e n d u s .
Antud: AM = 20 cm;
MC = 50 cm (joon. 77).
Leida: BC.



Joon. 77

Kasutades puutuja omadust

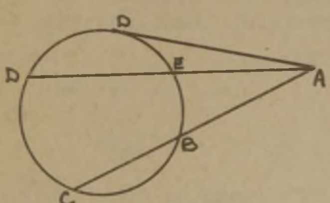
$$MC \cdot MB = MA^2,$$

saame et

$$50 \cdot (50 - 2R) = 20^2, \text{ millest } R = 21.$$

V a s t u s . Ringjoone diameeter on 42 cm.

<u>Näide 3</u>. Nurga ühel haaral asuvad punktid B ja C ning teisel haaral punkt D. Nende kaugused nurga tipust A on vastavalt 6, 8 ja 10 cm. Kas sirge AD puutub või lõikab ringjoont, mis läbib punkte B, C ja D? Lõikumise korral selgitada, kas punkt D on tipu A suhtes lähem või kaugem lõikepunkt.



Joon. 78

L a h e n d u s .
Antud: AB = 6 cm;
AC = 8 cm;
AD = 10 cm
(joon. 78).
Leida: Kas AD on puutuja või lõikaja ning määrata lõikaja korral punkti D asend.

Oletame, et AD on puutuja, siis vastavalt teoreemile puutuja kohta peab kehtima seos

$$AB \cdot AC = AD^2.$$

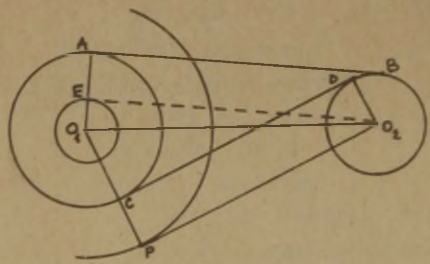
Et aga $6 \cdot 8 \neq 10^2$, siis AD ei ole puutujaks. Kui ta on lõikajaks, siis kasutame teoreemi ringjoonele joonestatud kahe lõikaja kohta:

$$AE \cdot AD = AB \cdot AC.$$

Antud juhul $AE \cdot 10 = 6 \cdot 8$. Siit $AE = 4{,}8$.

V a s t u s . Sirge AD lõikab ringjoont ja punkt D on A suhtes kaugem lõikepunkt.

Näide 4. Kahe ringjoone, mille raadiused on 5 cm ja 2 cm, ühine puutuja on $1\frac{1}{2}$ korda pikem sisemisest puutujast. Arvutada nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus.



Joon. 79

L a h e n d u s .

Antud: $AB = 1{,}5\ CD$;

$AO_1 = 5$ cm;

$DO_2 = 2$ cm

(joon. 79).

Leida: O_1O_2.

Tähistame $CD = x$.

Siis ka $O_2P = x$ ja

$O_2E = \frac{3}{2}x$.

Kolmnurkadest O_1EO_2 ja O_1PO_2

$$\begin{cases} O_1O_2^2 = O_1E^2 + O_2E^2 \\ O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P^2. \end{cases}$$

Kuna $O_1E = 5 - 2 = 3$ ja $O_1P = 5 + 2 = 7$, siis eelnevast süsteemist pärast O_1O_2 elimineerimist saame võrrandi

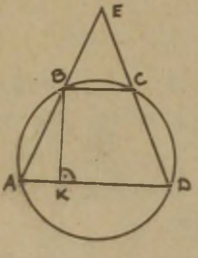
$$9 + \frac{9}{4}x^2 = 49 + x^2,$$

millest $x^2 = 32$. Siis

$$O_1O_2^2 = 49 + 32, \quad O_1O_2 = 9.$$

V a s t u s . Ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus on 9 cm.

Näide 5. Väljaspool ringjoont asuvast punktist on joonestatud kaks lõikajat, mille välised osad on pikkusega 2 m. Ühendades lõikepunktid saame nelinurga, mille paralleelsed vastasküljed on 6 m ja 2,4 m. Arvutada nelinurga pindala.



Joon. 80

L a h e n d u s .

Antud: $BE = EC = 2$ m; $BC = 2{,}4$ m;

$AD = 6$ m (joon. 80).

Leida: S_{ABCD}.

Lõikajate omadusest

$EB \cdot AE = EC \cdot ED$,

millest AE = ED. Nelinurgaks on võrdhaarne trapets. Et $\triangle BEC \sim \triangle AED$, siis $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AD}$. Siit

$$AE = \frac{BE \cdot AD}{BC} = \frac{2 \cdot 6}{2,4} = 5.$$

Trapetsi kõrgus

$$h = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{3^2 - 1,8^2} = 2,4,$$

pindala

$$S = \frac{6 + 2,4}{2} \cdot 2,4 = 10,08.$$

V a s t u s . Nelinurga pindala on 10,08 m^2.

5. R i n g j o o n e p i k k u s j a r i n g i p i n d a l a . Ringjoone pikkuse ja ta diameetri suhe on konstantne. Seda konstanti tähistatakse tähega π . Ta arvuline väärtus on alati ligikaudne

$$\pi = 3,14159265... \approx 3,14.$$

Seega ringjoone pikkus avaldub valemiga

$$C = 2\pi r = \pi d.$$

Ringjoone kaare pikkus s, mis vastab kesknurgale α (kraadides), avaldub valemiga

$$s = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Ringi pindala

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Ringide pindalad suhtuvad nagu nende raadiuste või diameetrite ruudud

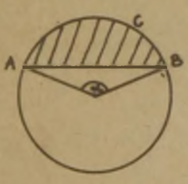
$$\frac{S_1}{S_2} = (\frac{r_1}{r_2})^2 = (\frac{d_1}{d_2})^2.$$

Sektori pindala, mille kesknurk on α (kraadides), avaldub valemina

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{sr}{2}.$$

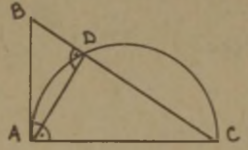
Kesknurgale α (radiaanides) vastava segmendi ABC (joon. 81) pindala

$$S = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha).$$



Joon. 81

Näide 1. Täisnurkse kolmnurga pikemale kaatetile kui diameetrile on joonestatud pool ringjoont. Teine kaatet on 30 cm. Lõik täisnurga tipust hüpotenuusi ja ringjoone lõikepunktini on 24 cm. Arvutada poolringjoone pikkus.



Joon. 82

L a h e n d u s .

Antud: AB = 30 cm; AD = 24 cm (joon. 82).

Leida: $\frac{C}{2}$.

$\angle$ ADC = 90° kui diameetrile toetuv piirdenurk. Täisnurksest kolmnurgast $\triangle$ ABD

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 18.$$

Kasutame lauset, mis seob puutujat ja lõikajat. Siis

$$AB^2 = BC \cdot BD, \text{ millest } BC = \frac{AB^2}{BD} = 50.$$

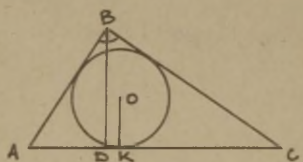
Pythagorase teoreemi kohaselt

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 40 \quad \text{ja} \quad r = 20,$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 20\pi.$$

V a s t u s . Poolringjoone pikkus on 20π cm.

Näide 2. Täisnurkse kolmnurga sisse on joonestatud ringjoon. Arvutada ringi pindala, kui kõrgus jaotab hüpotenuusi lõikudeks 25,6 cm ja 14,4 cm.



Joon. 83

L a h e n d u s .

Antud: AD = 14,4 cm;
DC = 25,6 cm (joon.83).

Leida: S.

Ringjoone raadiuse OK = r leiame kolmnurga pindala valemist S = pr.

Kolmnurga küljed on:

$$AC = AD + DC = 40, \quad AB = \sqrt{AD \cdot AC} = 24,$$
$$BC = \sqrt{DC \cdot AC} = 32.$$

Heroni valemist

$$S = \sqrt{48 \cdot 24 \cdot 8 \cdot 16} = 24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 384.$$

Ringi raadius

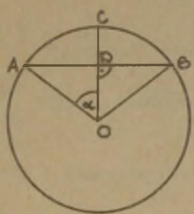
$$r = \frac{S}{p} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4}{48} = 8$$

ja pindala

$$S = \pi r^2 = 64\pi.$$

V a s t u s . Ringi pindala on 64π cm^2.

Näide 3. Avaldada ringi segmendi pindala, kui segmendi alus on $r\sqrt{3}$ ja kõrgus $\frac{r}{2}$, kus r on ringi raadius.



Joon. 84

L a h e n d u s .

Antud: $AB = r\sqrt{3}$; $CD = \frac{r}{2}$ (joon. 84).

Leida: S_{ABCA}.

Täisnurksest kolmnurgast AOD

$$\tan\alpha = \frac{AD}{DO} = \frac{r\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot r} = \sqrt{3}.$$

Siis $\alpha = 60°$ ja $\angle AOB = 120°$. Sektori pindala on $\frac{1}{3}$ ringi pindalast, seega

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Olgu kolmnurga AOB pindala S_2, siis

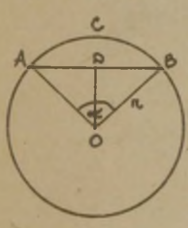
$$S_2 = \frac{r\sqrt{3} \cdot r}{2 \cdot 2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Segmendi pindala võrdub sektori pindala ja kolmnurga pindala vahega

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

V a s t u s . Segmendi pindala on $r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Näide 4. Avaldada ringi segmendi pindala, kui segmendi ümbermõõt on p ja segmendi kaar on 120°.



Joon. 85

L a h e n d u s .

Antud: $\smile ACB + AB = p$;

$\alpha = 120°$ (joon. 85).

Leida: S_{ACBA}.

Kaare ACB pikkus on $\frac{1}{3}$ ringi ümbermõõdust, seega $\frac{2}{3}\pi r$. Kõõlu AB määrame, lähtudes täisnurksest kolmnurgast AOD.

Siin

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{AO}; \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{2}r; \quad AB = \sqrt{3}r.$$

Antud tingimuse põhjal

$$\frac{2}{3}\pi r + \sqrt{3}\,r = p, \text{ millest } r = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}.$$

Segmendi pindala

$$S = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}\,r \cdot r}{2 \cdot 2} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$$

V a s t u s . Segmendi pindala on $\dfrac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$.

Näide 5. Ringi raadius on r. Avaldada sektori pindala, kui sektorile vastava kaare pikkus on s.

L a h e n d u s .

Antud: $\smile ACB = s$ (vt. joon. 85).

Leida: S_{AOBC}.

Kaare pikkus $s = \dfrac{\pi r \alpha}{180°}$, millest $\alpha = \dfrac{180°}{\pi}$.

Sektori pindala

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{r^2}{2}.$$

V a s t u s . Sektori pindala on $\frac{1}{2}r^2$.

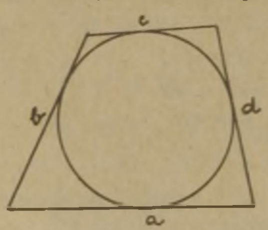
6. H u l k n u r g a   s i s e -   j a   ü m b e r - r i n g j o o n . Iga korrapärase hulknurga

1) ümber saab joonestada ringjoone;

2) sisse saab joonestada ringjoone.

Kumerale nelinurgale saab joonestada siseringjoone, kui vastaskülgede pikkuste summad on võrdsed (joon. 86)

$$a + c = b + d.$$



Joon. 86

Joon. 87

Kumerale nelinurgale saab joonestada ümberringjoone, kui tema vastasnurkade summa on 180° (joon. 87)

$$\alpha + \beta = \beta + \delta = 180°.$$

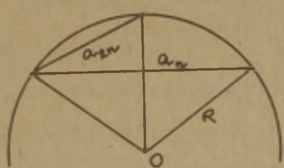
Ümberringjoon on ristkülikul ja võrdhaarsel trapetsil, siseringjoon rombil.

Kolmnurga siseringjoone keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt, ümberringjoone keskpunktiks külgede keskristsirgete lõikepunkt.

Korrapärase kõõlhulknurga (joon. 88) külgede arvu kahekordistamise valem on järgmine:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}},$$

kus R on ümberringjoone raadius ja a_n n-nurkse kõõlhulknurga külg.



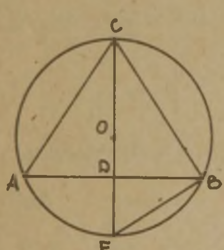
Joon. 88

Korrapärase hulknurga pindala

$$S = pr,$$

kus p - pool ümbermõõdust, r - siseringjoone raadius.

<u>Näide 1</u>. Ringi on kujundatud võrdkülgne kolmnurk. Avaldada kolmnurga pindala, kui ringi raadius on R.



Joon. 89

L a h e n d u s .

Antud: AB = BC = AC (joon. 89).

Leida: S_{ABC}.

Olgu CB = a ja OC = R.

Täisnurksest kolmnurgast CBE

$$CB = \sqrt{CE^2 - EB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

Kõrgus

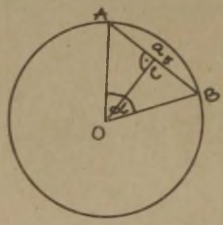
$$CD = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{2}R,$$

pindala

$$S_{ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

V a s t u s . Kolmnurga pindala on $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

<u>Näide 2</u>. Avaldada ringi kujundatud korrapärase 5-nurga külg ümberringjoone raadiuse R kaudu.



Joon. 90

L a h e n d u s .

Antud: $n = 5$, R (joon. 90).

Leida: a_5.

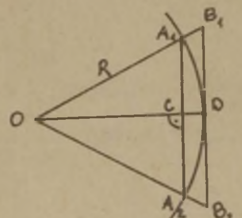
Täisnurksest kolmnurgast ACO

$$\frac{\frac{a_5}{2}}{R} = \sin \frac{180°}{5};$$

$$a_5 = 2R \sin 36° \approx 1,18\ R.$$

V a s t u s . Korrapärase 5-nurga külg on 1,18R.

<u>Näide 3</u>. Avaldada korrapärase kõõlhulknurga külg a_n sama külgede arvuga puutujahulknurga külje b_n ja viimase siseringjoone raadiuse R kaudu.



Joon. 91

L a h e n d u s .

Antud: $B_1B_2 = b_n$; R (joon. 91).

Leida: $a_n = A_1A_2$.

Et $\triangle OB_1D \sim \triangle OA_1C$,

siis

$$\frac{OD}{OC} = \frac{B_1D}{A_1C}.$$

Täisnurksest kolmnurgast OA_1C kaatet

$$OC = \sqrt{R^2 - (\frac{a_n}{2})^2}.$$

Kuna $OD = R$, $A_1C = \frac{a_n}{2}$, $B_1D = \frac{b_n}{2}$, siis kolmnurkade OA_1C ja OB_1D sarnasusest

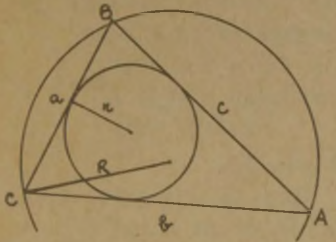
$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - (\frac{a_n}{2})^2}} = \frac{\frac{b_n}{2}}{\frac{a_n}{2}},$$

millest

$$a_n = \frac{2b_nR}{\sqrt{4R^2 + b_n^2}}.$$

V a s t u s . Kõõlhulknurga külg $a_n = \frac{2b_nR}{\sqrt{4R^2 + b_n^2}}$.

Näide 4. Arvutada kolmnurga sise- ja ümberringjoone raadiused, kui kolmnurga küljed on 13, 14 ja 15.



Joon. 92

L a h e n d u s .

Antud: $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$ (joon. 92).

Leida: r; R.

Avaldame otsitavad suurused kolmnurga pindala kaudu.

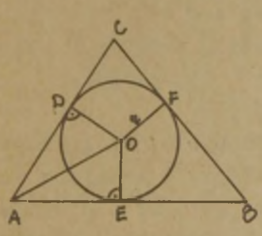
$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Kolmnurga pindala (näide 1 lk. 31) $S = 84$, siis

$$r = \frac{84}{21} = 4, \quad R = \frac{4 \cdot 84}{13 \cdot 14 \cdot 15} = 8{,}125.$$

V a s t u s . Kolmnurga siseringjoone raadius on 4 ja ümberringjoone raadius 8,125.

Näide 5. Kolmnurga siseringjoone raadius on 4 cm. Puutepunkt jaotab ühe külje osadeks, mille pikkused on 6 cm ja 8 cm. Arvutada teiste külgede pikkused.



Joon. 93

L a h e n d u s .

Antud: $OF = r = 4$ cm; $AE = 6$ cm; $EB = 8$ cm (joon. 93).

Leida: AC; CB.

Punktist A ringjoonele joonestatud puutujate lõigud $AE = AD = 6$ cm ja samal põhjusel $FB = 8$ cm. Olgu $DC = x$, siis pindala valemitest

$$S = pr \quad \text{ja} \quad S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

saame võrrandi

$$4(14 + x) = \sqrt{(14 + x) \cdot x \cdot 6 \cdot 8},$$

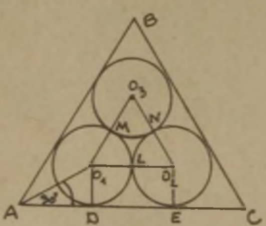
mille lahendiks $x = 7$.

Kolmnurga teised küljed

$$AC = 6 + 7 = 13, \quad CB = 8 + 7 = 15.$$

V a s t u s . Teised kolmnurga küljed on 13 cm ja 15 cm.

Näide 6. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud kolm ringjoont, mis puutuvad üksteist ja kolmnurga kaht külge. Avaldada ringjoonte raadiused.



Joon. 94

L a h e n d u s .

Antud: $AB = BC = AC = a$ (joon. 94).

Leida: O_1D.

Olgu $O_1D = r$, siis arvestades $30°$-st nurka

$$AD = EC = r\sqrt{3}.$$

Kuna $AD + DE + EC = a$, siis $2r\sqrt{3} + 2r = a$ ja

$$r = \frac{a}{2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

V a s t u s . Ringjoonte raadius $r = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

Näide 7. Võrdhaarse trapetsi aluste suhe on 0,75; kesklõik on võrdne kõrgusega, mis on 7 m. Arvutada trapetsi ümberringjoone raadius.

Joon. 95

L a h e n d u s .

Antud: $\frac{a}{b} = 0{,}75$; $h = 7$ m (joon. 95).

Leida: R.

Olgu $a = 3x$, siis $b = 4x$ ja trapetsi kesklõik on $3{,}5x$. Et $3{,}5x = 7$, siis $x = 2$. Trapetsi alused on 6 ja 8 m. Täisnurksetest kolmnurkadest

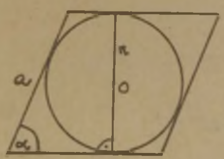
$$\begin{cases} R^2 = 4^2 + y^2 \\ R^2 = 3^2 + (7 - y)^2. \end{cases}$$

Siit

$$4^2 + y^2 = 3^2 + (7 - y)^2, \text{ millest } y = 3 \text{ ja } R = 5.$$

V a s t u s . Trapetsi ümberringjoone raadius on 5 m.

Näide 8. Avaldada rombi nurgad, kui rombi pindala on P ja sissejoonestatud ringi pindala S.



Joon. 96

L a h e n d u s .

Antud: $S_{rombi} = P$; $S_{ringi} = S$ (joon. 96).

Leida: α .

Tähistame rombi külje a. Rombi kui rööpküliku pindala

$$P = a^2 \sin\alpha .$$

Rombi kõrgus $h = 2r$, aga ka $h = a \sin\alpha$. Ringi pindala $S = \pi r^2$. Neist seostest saame, et $2r = a \sin\alpha$, mille ruut $4r^2 = a^2 \sin^2\alpha$. Suurusi a ja r avaldades antud pindala kaudu saame peale asendamist

$$\sin\alpha = \frac{4S}{\pi P},$$

millest $\alpha = \arcsin \frac{4S}{\pi P}$.

V a s t u s . Rombi nurgad on $\arcsin \frac{4S}{\pi P}$ ja $\pi - \arcsin \frac{4S}{\pi P}$.

SISUKORD