Die Methodik

des

elementaren Rechenunterrichts.

Principiell-systematisch abgeleitet

von

R. G. Kallas.

1869

Motto: Ὁ θεὸς γεωμετρεῖ.

Gekrönte Preisschrift.

Mitau,
E. Behre's Verlag.
1889.

Bitte die Rückseite des Umschlages zu beachten.

Die Methodik

des

elementaren Rechenunterrichts.

Die Methodik

des

elementaren Rechenunterrichts.

Principiell-systematisch abgeleitet

von

R. G. Kallas.

Motto: Ὁ θεὸς γεωμετρεῖ.

Gekrönte Preisschrift.

Mitau,
E. Behre's Verlag.
1889.

Дозволено цензурою. Рига, 2-го Сентября 1888 г.

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen & Sohn in Mitau.

Inhaltsangabe.

Anmerkung. Beabsichtigt war mit dieser Inhaltsangabe nicht ein paginirtes Register, sondern eine Vorführung der Gliederung in Hauptgesichtspunkten.

Einleitendes Vorwort.

1. Nothwendigkeit einer systematischen Deduction der elementaren Rechenmethodik.
2. Die Haupttheile dieser Arbeit.

1. Nothwendigkeit einer systematischen Deduction der elementaren Rechenmethodik.

Das Capital- und Glanzfach der seminaristischen Pädagogik ist die Methodik des elementaren Rechnens.

Während die Seminarien für die übrigen Fächer sich die treibenden Gedanken aus der Philosophie und den betreffenden Fachwissenschaften geben liessen, waren sie in der Rechenmethodik durchaus auf ihre eigne beobachtende Arbeit angewiesen.

Daher ist die eigentliche Rechenmethodik noch sehr jung und nur eine kurze Reihe von bedeutenden Männern ist hier zu nennen. Pestalozzi ist der Vater des modernen Rechenunterrichts, die von ihm neuentdeckten Grundsätze der Anschauung, der Einheit der vorzunehmenden Operationen, des vorwaltenden Kopfrechnens und der Lückenlosigkeit der Übungen sind das Erbe, davon die Methodiker heute noch zehren.

Tillich († 1807 Dessau) hat das sehr bedeutende Verdienst, zum ersten Mal die von dort ab stets festgehaltenen Zahlenräume deutlich ausgeprägt zu haben. [Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik 1806].

Die ältere Schule Pestalozzis, wie sie in Joseph Schmied, Stephani, von Türk und Kawerau auftritt, hat Partielles nach den Grundsätzen des Meisters ausgebaut; die neuere begann ihre epochemachenden Arbeiten mit Diesterwegs und Heusers „Methodischem Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen" und schloss sie mit Hentschel, der eben als der grosse Meister die Rechenmethodik zum Glanzfach der Seminarien erhoben hat. Denn alles, was noch nach Hentschel erschienen ist, wie das Rechenwerk von A. Lorey und C. Dorschel, das Rechenbuch von Kaselitz und Geyger, ferner die in den Ostseeprovinzen erschienenen Rechenbücher von Kellner, von Dohne u. a. legt Zeugniss dafür ab, dass die elementare Rechenmethodik nun schon zu einer einheitlichen empirischen Abrundung gelangt ist und auf dem eingeschlagenen Wege nicht mehr bedeutsam weiter zu fördern ist, als Hentschel sie gefördert hat.

Es ist daher nun wegen der Reife der Erfahrungsarbeit auf diesem Gebiet an der Zeit und nützlich, dasselbe Object speculativ und deducirend zu bearbeiten. Denn diese Männer, so bedeutend ihre Verdienste sind, haben das Fach doch nur empirisch-descriptiv bearbeitet und, gedrängt von practischen Fragen, so bearbeiten müssen, und alles speculativ-deducirende Leben aus naheliegenden pädagogischen Gründen ferngehalten. Auf diesem Wege kommt man aber, so nothwendig er zunächst ist, doch nur zur practischen Gewandtheit und zur schablonenmässigen Orientirung, nicht aber zur freudig schaffenden Gewissheit, die Wahrheit wirklich erkannt zu haben, noch zur Möglichkeit die einzig nothwendigen Theile eines methodischen Ganzen erschöpfend zu entdecken, noch auch zu der Fähigkeit die zufällig gefundenen Gedanken organisch zu ordnen. Das heisst aber gar nicht weniger als: auf diesem Wege kann die Rechenmethodik doch nicht zur eigentlichen festgeschlossenen Wissenschaft erhoben werden. „Die Theile habt ihr in der Hand, fehlt leider nur das geistige Band." Der eine Begriff, der alles Einzelne zu einer organisirten Einheit bindet, fehlt in diesen empirischen Methodiken, es fehlt das deductive Leben, es fehlt das alles zusammenhaltende Princip. Die Einheit aber wird gefordert von der Seele, die Unorganisches nicht aufnehmen kann und eben deshalb von der gesetzgebenden Wissenschaft der Philosophie insbesondere, da ja die Rechenmethodik vor dem Mikroskop der Philosophie — ohne sich principiell systematisch rechtfertigen zu können — eben noch ein Nichts ist und todt.

Damit ist die Nothwendigkeit einer principiellen, systematischen Bearbeitung des Faches nachgewiesen.

Da dieses Thema, soweit dem Verfasser bekannt, noch nirgends gestellt und bearbeitet worden ist, so fällt also eine literärische Orientirung selbstverständlich weg. Die angeführten empirischen Methodiker aber dienen als Beziehungspunkte zu den abzuleitenden Gesichtspunkten und sind daher von durchgreifender Bedeutung, indem ihre Arbeiten entweder confirmirt oder corrigirt werden, sie selbst aber die vorliegende Deduction in ihrer Haltbarkeit controlliren können und sollen, damit so die Wahrheit von zwei Säulen gestützt werde. Nur darum ist dieser principielle deductive Versuch möglich und zeitgemäss, weil die so ausserordentlich bedeutenden, aber mehr inductiv gehaltenen Arbeiten der berühmten Pädagogen, wie Hentschel, Schütze, Kehr, Schmied, Dittes u. a. vorliegen, und wenn ich, von einem andern Gesichtspunkt ausgehend, in allen Hauptpunkten, wie der Unterrichtsplan zeigt, auf die schon durch die Arbeit dieser Männer ans Licht geförderten Wahrheiten herauskomme, so ist dies ein Beweis mehr, wie treffend und scharf ihre Beobachtungen gewesen sind.

Diesen bahnbrechenden Pädagogen, wie insbesondere dem Dörptschen Seminarinspector Maass, meinem verehrten Lehrer, dem ich meine Einführung und Einsicht in die elementare Rechenmethodik verdanke, möchte ich mit dieser Arbeit meine Huldigung dargebracht haben.

---

2. Die nothwendigen Haupttheile dieser Arbeit sind durch das Thema selbst deutlich angegeben. Darnach wird der erste Haupttheil es mit der Erkenntniss des alles tragenden Hauptbegriffes, der höchsten Beziehungseinheit, die den Namen: „Fundamentalprincip" tragen mag, zu thun haben, im zweiten Haupttheil muss sich dann die Tragkraft dieses Fundamentalprincips erproben.

Schema:

Erster Haupttheil: **Ableitung des Fundamentalprincips.**

Zweiter Haupttheil: **Systematische Anwendung des Fundamentalprincips.**

Erster Haupttheil:

Ableitung des Fundamentalprincips.

Vorbemerkung. 1. Philosophische Voraussetzungen.
2. Deducirung der nothwendigen Abschnitte dieses Hauptheiles.

---

1. Philosophische Voraussetzungen.

Da es sich hier nicht etwa um Entdeckung mathematischer Wahrheiten handelt, sondern blos um die systematische Methode ihrer Vermittelung an die Psyche des Lernenden, so ist die Arbeit eine pädagogische und muss sich daher ihre Initiativen und tragenden Gedanken von einer ganz bestimmten Weltanschauung erwecken lassen. — Diese Weltanschauung kann nun weder Materialismus, noch Idealismus, noch Realidealismus sein; denn alle diese grossen Weltanschauungen können den Ursprung und das Wesen des Gedankens nicht erklären, indem sie entweder wie der Materialismus die Begriffe, wie überhaupt die geistigen Functionen an die von ihnen als einzig wesenhaft angenommenen sensualen Dinge unklar anhängen oder Functionen der Materie sein lassen, — das ist aber der Tod des Gedankens, also auch des Rechnens, — oder wie der Idealismus, die Begriffe selbst nach Aussen projicirend, sie zu falschen Substanzen machen und dadurch auch den Begriff des realen oder functionellen Seins verdunkeln, — oder aber wie der Realidealismus durch die stete Gefahr des πάντα ῥεῖ aus der

Gedankenwelt einen „schottischen Brei“ des Joh. Scotus Erigena machen und so in die Unmöglichkeit, die einzelnen Zahlen in ihrem differenten Fürsichsein auseinanderhalten zu können, verfallen. Diese Mängel erstehen aus dem ihnen gemeinsamen Mangel des Substanzbegriffs, denn werden die Substanzen falsch vorgestellt, so erst recht die Functionen, sind aber die Functionen falsch vorgestellt, so auch die Rechenfunctionen. Es wird daher eine Weltanschauung postulirt, die die Welt der Substanzen oder Wesen als differente Elementarprinzipien — vorgestellt nach Analogie der Seele — statuirt, Elementarprincipien aber, die in einem organischen Coordinatensystem durch geistige Beziehungen lebendig sind. Diese Weltanschauung leistet alles, was vom Denken verlangt werden kann, denn so wie sie Substanzen unterschiedlich und doch coordinirt vorstellt, so auch die Functionen und Functionsgruppen, da ja jede Substanz in ihren Functionen lebt.

Von dieser Weltvorstellung aus, die nach der angedeuteten und hier verwendeten Seite genauer in Prof. Teichmüller's Werken nachzulesen ist, lässt sich eine klare und practisch anwendbare Rechenmethodik leicht construiren.

---

2. Deducirung der nothwendigen Abschnitte des ersten Haupttheils.

Um das Rechnen zu erfassen, muss man stets dreierlei unterscheiden: 1) das rechnende Subject, 2) die Function des Rechnens, 3) die Zahl, die als Resultat der zusammenfassenden Thätigkeit beim Rechnen erscheint und von der die Function des Rechnens als von Beziehungspunkten ausgeht.

Da nun das Fundamentalprincip in seiner beherrschenden Macht durch alle Sphären des Rechnens und also auch der Rechenmethode durchgeht, so muss es in einem ersten Abschnitt in seiner dreifachen Wendung dargelegt werden: 1) als das rechnende Subject tragend, 2) als das Rechnen normirend, 3) als die Zahlenordnung bestimmend, das heisst: das Fundamentalprincip tritt auf 1) als Personalprincip, 2) als Operationsprincip, 3) als Stoff- oder Materialprincip, um dann, wie das Wesen des Denkens es erfordert, in einem zweiten Abschnitt als eine Einheit erfasst zu werden.

Der philosophisch-metaphysische Grund einer solchen Eintheilung liegt in der vierten Weltanschauung, die stets ein substanzielles, reales und ideelles Leben unterscheidet. Nun greift aber das Personalprincip in das substanzielle, die Function des Rechnens in das reale Sein, die Zahl selbst aber ist das objectiv-ideelle Sein des Rechnens. Aus diesem Grunde kann das Fundamentalprincip weder zwei- noch vier- noch mehrtheilig sein, sondern es erschöpft sich in einer dreiheitlichen Einheit.

I. Das Fundamentalprincip in seiner Dreiheit.

A. Das Fundamentalprincip als Personalprincip.

Das Wesen der Arithmetik kann durch die Person des lernenden Subjects nicht alterirt werden, wohl aber muss die Methode der Uebermittelung genau die subjectiven Entwickelungsstände und die erreichten Bildungsgrade berücksichtigen, denn sonst wird der beste Unterricht unbegriffen bleiben. Und dies ist eben die allgemeinste Form des Personalprincips: Berücksichtige den Entwickelungsstand der lernenden Person.

Diese allgemeine Form muss hier genügen. In welcher Weise aber dieses Princip anzuwenden ist und wie es besonders bei der Construction des Unterrichtsplans präponderirend auftritt, wird sich im zweiten Haupttheil zeigen.

B. Das Fundamentalprincip als Operationsprincip.

Hier fragt es sich, worin das Wesen des realen Rechnens besteht, denn dieses Wesen eben bildet das Operationsprincip. Nun hat die Elementarschule eigentlich nur die Addition zu lehren, da die anderen Elementarspecies alle auf Addition principiell zurückgeführt werden können. In dem Wesen der realen Addition spricht sich daher das Wesen des Elementarrechnens speciell aus. Die einfachste Addition findet aber statt bei der Bildung der Zahlenreihe, dadurch dass die Ureinheit (1) mit je einer vorhergehenden Zahl (Einheit) der Zahlenreihe zu einer neuen (grössern) Einheit zusammengefasst wird. Ob nun die andere Einheit die Ureins oder eine so neu gebildete Einheit ist, macht keinen Unterschied. Auch die Gesichtspunkte des Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens können wegen ihrer Verwandtschaft mit dem Addiren dieses Wesen nicht alteriren. Die allgemeinste Form des Operationsprincips ist daher in dem Satz enthalten: Das Wesen des realen Rechnens besteht in der Zusammenfassung der aus der Zahlenreihe gegebenen Beziehungspunkte unter dem Gesichtspunkt des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens oder Dividirens.

Diese allgemeine Form des Operationsprincips muss hier genügen. In welcher Weise aber dieses Princip anzuwenden ist, und wie es besonders bei der Theorie der angewandten Aufgaben prävalirend auftritt, wird sich im zweiten Hauptteil zeigen.

C. Das Fundamentalprincip als Princip der Zahlenordnung oder als Stoffprincip.

Da nach unseren philosophischen Voraussetzungen sich die Substanzen und auch ihre Functionen und Functionsgruppen in coordinirten geistigen Beziehungen, die Systeme bilden, anordnen, so folgt, dass die natürliche Zahlenreihe, die der mathematische Ausdruck der Zahlenordnung ist, aus einer solchen Zahlenordnung bestehen muss, deren einzelne Individuen, d. h. Zahlen unter sich ein Coordinatensystem bilden; d. h. ein so nach bestimmten Gesetzen erfolgendes Zahlensystem, dass jede Zahl an ihrem bestimmten mathematischen Ort stehend mit jeder anderen Zahl in einer bestimmten Beziehung steht, der Ursprung aller aber auf ein Princip, nämlich die Ureins zurückgeführt werden muss.

Anmerkung. Das Wort „Coordinatensystem“ das in der Philosophie mehr von den Substanzen als von Funktionsgruppen und ihren Zusammenfassungen im ideellen Sein gebraucht wird, hat hier als Ausdruck der Zahlenordnung dasselbe Recht zu stehen, wie in der Philologie die Hypostasirung fast jeder grammatischen Kategorie. Durch diese bewusste und erlaubte Personification wird das Denken handlicher, auch hat sie ihren guten metaphysischen Grund. In demselben Bilde fortfahrend, wird also „individuelles d. h. specielles Coordinatensystem der Zahl“ im Gegensatze zu dem allgemeinen Coordinatensystem der Welt, das System der Zahlenreihe, sofern ihre Zahlen „kahl“, d. h. ohne Anwendung bleiben, bedeuten.

Was ist nun aber dieses im Allgemeinen a priori erkannte Gesetz der Zahlenreihe?

Alle Gesetze dieser Reihe aussprechen, heisst das Gesammtsystem des Rechnens angeben; die Vermittelungsgesetze der Methode folgen aus dieser ersten Erkenntniss; hier handelt es sich nur um das allen anderen Gesetzen der Zahlenreihe zu Grunde liegende, d. h. um das genetische Gesetz.

Nun wird für unseren Zweck nur das Zehnersystem berücksichtigt, aus demselben aber eliminirt die Elementarschule die negativen, die immaginären und irrationalen Zahlen und fragt daher nur: was ist das genetische Gesetz der natürlichen und der Bruchzahlenreihe?

Da nun, wie jedes Mathematikbuch lehrt, die Bruchreihe genau nach dem Gesetz der natürlichen Zahlenreihe gebaut ist, und zwar durch Interpolation, so fragt es sich blos: was ist das Gesetz, das genetische, der natürlichen Zahlenreihe?

Nun ist das durch die Natur gegebene Element der Zahlenreihe die Ureins; wird die 1 mit der 1 zu einer neuen Einheit zusammengefasst, so entspringt die Kategorie 2, wird nun die Einheit 2 mit der Ureins als Einheit gefasst, so entsteht der Begriff 3 u. s. w. Das allgemeine Gesetz der Zahlenanordnung, das jeder Zahl ihren bestimmten mathematischen Ort im Bewusstsein real und in der Zahlenreihe ideell anweist, lautet daher: Die mit der Ureins als ihrem Element beginnende natürliche Zahlenreihe entsteht so, dass jede folgende Zahl im Bewusstsein durch den Hinblick auf die vorhergehende Zahl und die Ureins als höhere zusammenfassende Einheit beider entspringt.

Diese allgemeine Form des Stoffanordnungsprincips, durch welches jede Zahl aus ihrer armmachenden Isolirtheit in den Universalzusammenhang gehoben wird, muss hier genügen.

In welcher Weise aber dieses Princip anzuwenden ist, und wie es besonders in der Theorie der Auflöseweisen als alles bestimmend auftritt, wird sich im zweiten Haupttheil zeigen.

II. Das Fundamentalprincip in seiner Einheit.

Dass die Deduction nun bei einer Dreiheit von Principien angelangt ist, kann zunächst nur als ein gutes Prognosticon für die Möglichkeit der Einheit angesehen werden. Denn da alle Dinge different und in einem Coordinatensystem geistiger Relationen lebendig sind, da ferner alles Leben ein substanzielles oder reales oder ideelles ist, so giebt es keine absolute Einheit. Es fragt sich blos, in welcher Weise hier die Einheit erfasst werden soll. Dazu muss vor allen Dingen das organisirende Moment des Fundamentalprincips herausgestellt werden. Dieses kann aber nur das Specificum des Rechnens sein. Das Specifische des Rechnens kann aber nicht ausgesprochen sein in dem Personalprincip, denn das Subject des Kindes gehört auch zu den übrigen Fächern des Unterrichts, ebenso nicht im Operationsprincip, denn das Operationsprincip ist ja blos der für das Rechnen individualisirte Ausdruck für das Wesen des Denkens, das Wesen des Denkens aber besteht in der Zusammenfassung von Beziehungspunkten unter Gesichtspunkten, also ist das Specifische ausgesprochen in dem Stoffprincip. Da sich diesem organisirenden Princip die beiden anderen angliedern, so lassen sich die drei Principe so zur Einheit des Fundamentalprincips zusammenfassen: Das Wesen des elementaren Rechnens ist die durch die Person des Rechners erfolgende Zusammenfassung der aus der Zahlenreihe herausgehobenen

Beziehungspunkte unter einen gegebenen Gesichtspunkt (der Elementarspecies) mit bewusstem Hinblick auf die Zahlenreihe, die beim Denken jeder Einzelzahl in steter intellectualer Intuition gehalten wird.

Schlussbemerkung. Das Bemerkenswerthe und Neue für die elementare Rechenmethodik hierbei ist dieses: 1) es wird verlangt, dass der Rechner und der Lehrer keine Zahl isolirt denke, sondern beim Denken jeder Zahl die ganze Zahlenreihe in intellectualer Intuition habe; 2) es wird verlangt, dass alle zu übermittelnden Sätze: Rechengesetze, Erklärungen, Auflöseweisen nur im Hinblick auf die Baugesetze der Zahlenreihe entspringen sollen und eben darum wird 3) verlangt, dass bei Ableitung der methodischen Grundsätze die Baugesetze der Zahlenreihe in erster Linie massgebend sein sollen. — Und zwar wird dieses als klar im Bewusstsein beabsichtigt verlangt und ausserdem giebt es keinen Quell der Erfassung der Rechengesetze.

Es ist ein isolirtes Denken, wenn der Geist beim Worte: drei — etwa stehen bleibt in diesem Punkte und sich nicht sofort mit Blitzesschnelle vorwärts und rückwärts durch die ganze Zahlenreihe orientiert und so stets auf das Denken im Universalzusammenhange der Beziehungen lossteuert, denn dadurch allein wird die Methode aus der Rathlosigkeit des Zufalls erlöst.

Zur Unterstützung der zu erwerbenden intellectualen Intuition der Zahlenreihe dient natürlich die bekannte räumliche Darstellung der elementaren Zahlenreihen:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \; \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{4}{2} \quad \tfrac{5}{2} \quad \tfrac{6}{2} \quad \tfrac{7}{2} \quad \tfrac{8}{2} \; \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{3}{3} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{5}{3} \quad \tfrac{6}{3} \; \ldots\ldots$$

Es leitet zu ganz falschen Auflöseweisen, wenn etwa beim Begriff $^3/_4$ nicht sofort die Relation zur 1 und zu ihrer ganzen Interpolationsreihe angegeben werden kann; nach $^1/_4$ z. B. folgt nicht $^1/_5$, sondern $^2/_4$, $^3/_4$ u. s. f.

Ja es ist unmöglich, ohne diese innere Anschauung auch nur etwas Erkleckliches zu leisten; denn beruhen nicht die unzähligen Übungsfamilien in den ersten drei Zahlenräumen der empirischen Methodik fast ausschliesslich auf dieser Erkenntniss, die hier als klar bewusst postulirt wird. Die unmittelbare äussere Anschauung oder sensuale Intuition des Zahleninhalts durch Strichtabellen, Rechenbretter u. s. w. ist deshalb und trotzdem durchaus erforderlich, aber diese so sehr premirte Anschauungsart ist doch fast nur beim Beginn des Unterrichts anwendbar und lässt ja blos den Lernenden mit der Anzahl der bei einer Zahlbildung zusammenzufassenden Einheiten bekannt werden. Ist nun diese nothwendige Erkenntniss befestigt, so tritt diese sensuale Intuition, von der die empirischen Methodiker alles Heil abhängig machen, um so mehr zurück, als ja die von der Ureins entfernten Zahlen sich durch Striche gar nicht veranschaulichen lassen, sondern in ihren Grösseverhältnissen nur durch die intellectuale Intuition ihres mathematischen Orts erkannt werden. Intellectuale Intuition heisst Zusammenschauung aller elementaren Zahlen in ihrer Naturreihe. Jener Dorfschulmeister hatte ganz recht, der behauptete, er habe nirgends Millionen zu sehen bekommen, habe aber von anderen gehört, dass es welche geben soll. Und nun gar die Rechengesetze und die methodischen Gesetze, wie sollen sie ohne steten bewussten Hinblick auf die permanent im Bewusstsein gewärtige Zahlenreihe möglich sein?! Nein, nein, soll die äussere Anschauung Flügel bekommen in der Seele, so muss sie sich allmählich wieder ablösen von den Aussendingen, damit der Begriff in innerer Anschauung wieder frei werde von seinen zufälligen Wiegen und so zur souverainen Macht und Herrschaft auch in der Rechenmethodik gelange.

Zweiter Haupttheil:

Systematische Anwendung des Fundamentalprincips.

Vorbemerkung. Deduction der nothwendigen Untertheile dieses Haupttheils

Hier soll nun gezeigt werden, wie das Fundamentalprincip den ganzen Rechenstoff, alle Rechenfunctionen und insbesondere alle methodischen Gesetze bis in die letzten Ausläufer hinein normirt. Es ist daher nothwendig zu wissen, in wie vielen Abschnitten sich der hier vorliegende Stoff erschöpft. Da nun aber nach den Lehren der Philosophie jedes individuelle d. h. specielle Coordinatensystem in Relationen gesetzt werden kann mit dem allgemeinen Coordinatensystem der Welt, so muss demnach hier die Tragkraft des Fundamentalprincipes in dem Coordinatensystem der Zahl sich durch einen ersten Theil erproben, in einem zweiten Theil müssen die so erworbenen Erkenntnisse in das allgemeine Coordinatensystem der Welt eintreten, um ihre Anwendbarkeit zu zeigen. Aus beiden zusammen aber ergiebt sich in einem dritten Theil die Construction des methodischen Unterrichtsplans. Der erste Theil behandelt also die von der empirischen Methodik sogenannten nackten oder kahlen Zahlen, der zweite die angewandten.

Die dreifache Wendung des Fundamentalprincips hält das Ganze wie mit einer dreifachen eisernen Klammer fest, denn es empfiehlt sich die Festgeschlossenheit des vorliegenden Systems durch die Wahrnehmung, dass der erste Theil durch das Materialprincip, der zweite durch das Operationsprincip, der dritte durch das Personalprincip als prävalirende Seiten des Fundamentalprincips normirt wird.

Erster Theil.

Die Anwendung des Fundamentalprincips in dem individuellen Coordinatensystem der Zahl oder die Theorie der Methodik des Rechnens mit reinen (= kahlen) Zahlen.

Vorbemerkung. Deducirung der allein möglichen Abschnitte dieses Theils.

Hier muss nun das vorherbesprochene „Coordinatensystem der Zahl“ d. h. die elementare Zahlenreihe in intellectualer Intuition, unterstützt durch die räumliche Darstellung, lebhaft die Vorstellung füllen. Diese Zahlenreihe aber hat zwei gesonderte Bestandtheile: 1) die natürliche Zahlenreihe und 2) die Bruchzahlenreihe, die, wiewohl es unendlich viele Stammbrüche und demnach auch unendlich viele isolirte Bruchzahlenreihen geben kann, als die Einheit aller isolirten Bruchzahlenreihen zu fassen ist. Demnach ist nun eine dreifach verschiedene Rechenbewegung denkbar: 1) in der natürlichen Zahlenreihe 2) in der Bruchreihe 3) von der einen Zahlenreihe zur anderen, d. h. Communicationsbewegungen. Das sind die drei allein möglichen Abschnitte dieses Theils. Das Specielle folgt später. Das Wort „Bewegung“, das im Folgenden so oft angewandt wird, ist zwar nicht adaequat und müsste eher durch „Zusammenfassung“ ersetzt worden, denn das Wort ist metaphorisch, und wäre es nicht metaphorisch, so würde es doch nicht das

Wesen des realen Rechnens ausdrücken, das ja nach dem Operationsprincip nicht blos eine Bewegung über die Beziehungspunkte hinweg ist, sondern auch Denken; allein: de potiori fit denominatio, und als Concession der empirischen Methodik gegenüber darf es vielleicht gebraucht werden.

Abschnitt I.

Methodik der Rechenbewegungen in der natürlichen Zahlenreihe.

Vorbemerkung. Deducirung der nothwendigen Unterabschnitte dieses Abschnitts.

Hier soll die Methodik derselben Rechenbewegungen aufgezeigt werden, die man sonst mit der Benennung: „Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen" zusammenfasst. Es handelt sich daher um die Beziehungspunkte, von denen die Function ausgeht. Die Beziehungspunkte sind herzunehmen aus dem Materialprincip d. h. aus dem Bau der natürlichen Zahlenreihe. Nun sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zwar schon geordnet nach dem genetischen Gesetz, allein wenn die vorzunehmenden Übungen nicht bis ins Unendliche fortgehen sollen, so müssen auf Grund des genetischen Gesetzes aus der Zahlenreihe höhere Zusammenfassungen herausgestellt werden, um die sich die Repräsentantenaufgaben als um ihre Beziehungspunkte zu sammeln haben. Der Hinblick auf das Materialprincip liefert also den ersten Unterabschnitt: Die Gesichtspunkte für die methodische Vertheilung des Unterrichtsstoffs. — Die Gruppirung des Unterrichtsstoffs um die Repräsentantenaufgaben geschieht zu dem Zweck, um auch wirklich, von den gegebenen Beziehungspunkten ausgehend, die Functionen des realen Rechnens auszuführen. Der Hinblick auf das Operationsprincip liefert also den zweiten Unterabschnitt: Die Functionen des realen Rechnens. Bis dahin wirkte aber das Personalprincip nur mittelbar, indem ja alles, was hier gesagt ist, Beziehung zum Subject hat, da es sich um eine Methodik handelt. — Zur unmittelbaren, überragenden Wirkung kommt es aber erst in dem letzten Abschnitt, wo es sich ums schriftliche Rechnen handelt, denn das Schriftliche im Rechnen hat seinen Grund nur in den schwachen Fähigkeiten des Subjects, das grosse Zahlencomplexe nicht behalten kann. Andere Zwecke des schriftlichen Rechnens, die ausserhalb der Pädagogik liegen, sollen dadurch nicht geleugnet werden.

A. Die Gesichtspunkte für die methodische Vertheilung des Unterrichtsstoffes.

Vorbemerkung: Die Gliederung. Die in einer ersten Abtheilung zunächst zu deducirenden Gesichtspunkte müssen in einer zweiten Abtheilung des Stoffes ihre Haltbarkeit zeigen. Darnach erschöpft sich das Folgende in zwei Wendungen.

1. Ableitung der Gesichtspunkte.

Jede Zahl kann gefasst werden als in einer unmittelbaren Relation stehend mit dem Element der Zahlenreihe, d. h. mit der Ureins, die Bewegung über die so gefassten Einzelzahlen der Zahlenreihe hinweg heisst die Einerbewegung und die so gefasste Anordnung der Zahlen heisst die Einerordnung; diese Ordnung ist die allgemeinste und durch die Genesis der Zahlenreihe unmittelbar gegeben. Den ganzen Aufgabenstoff nun um diese Einerordnung, wie z. B. Grube angestrebt hat, gruppiren d. h. jede Einzelzahl für sich behandeln wollen, ist unmöglich, langweilig, zeitraubend und ganz unnütz. Es fragt sich daher, ob sich noch andere

Relationen und in Folge dessen höhere Einheiten und Zusammenfassungen denken lassen und in Wirklichkeit vorfinden. Nun kann natürlich jede Zahl, abgesehen von der ersten Möglichkeit, auch als zu jeder anderen Zahl der Reihe in Relation stehend gedacht werden. Ohne die Möglichkeiten solcher Relationen erschöpfen zu können und zu wollen, sei hier nur das für unseren Zweck sich von selbst Ergebende herausgehoben. Nach dem Constructionsgesetz der Zahlenreihe muss es in derselben für jede Zahl solche mathematische Orte geben, in welchen jede Zahl als verdoppelt, verdreifacht ..... multiplicirt erscheint, d. h. als eine höhere Zusammenfassung in der Zahlenreihe erscheint die zu jeder Zahl gehörige Productenreihe. Werden die Producte als aus lauter gleichen Factoren bestehend gedacht, so entsteht die in die Zahlenreihe gelagerte Potenzreihe als ein specieller Fall der Productenordnung und aus dieser Potenzreihe muss hier die Decimalreihe als ein eminenter Gesichtspunkt — weil durch das Zehnersystem gegeben — besonders betont werden. Als Productenordnung specieller Art drängt sich in der Decimalordnung durch den Bau der decadischen Zahlenreihe die Decimalproductenreihe auf. Hiermit sind alle Gesichtspunkte einer etwaigen Stoffgruppirung gegeben und nur aus Eitelkeit oder Unverstand haben einige Lehrer andere Einschnitte in den Stoff gemacht. Was soll es auch für einen Sinn haben, etwa blos bis 17 alle Rechnungsarten durchzuführen und dann bis 25 etwa u. s. w.? Alle diese nutzlosen Eintheilungen sind in keiner Weise weder in dem Operationsprincip noch auch in dem Materialprincip, die doch hier zunächst massgebend sind, begründet. Die angegebenen Gesichtspunkte, die überall aushelfen müssen, ordnen sich nach ihrer Wichtigkeit — abgesehen von der Einerordnung, die allen zu Grunde liegt, folgendermaßen:

1) Die Decimalordnung.
2) Die Decimalproductenordnung.
3) Die allgemeine Productenordnung.

2. Anwendung dieser Gesichtspunkte.

Gegeben ist die ganze unendliche natürliche Zahlenreihe, eine Beherrschung aller elementaren Functionen mit jeder denkbaren ganzen Zahl wird als Erfolg des Unterrichts erwartet. Die Behandlung jeder Einzelzahl ist unmöglich und auch völlig unnütz, denn es genügt, die Gesetze aller Functionen erkannt und eingeübt zu haben. Welcher von den noch übrig bleibenden drei Gesichtspunkten hat also den ersten Einschnitt in den Stoff zu machen? Gewiss nur dieser, der alle elementaren Speciesfunctionen in einem kleinen Zahlenraume erstens vollkommen, zweitens so gestattet, dass die allgemeinen Gesetze dieses ersten „Raumes" zugleich die Gesetze des etwa noch folgenden Zahlenkreises abspiegeln. Dieser Gesichtspunkt kann also weder die Decimalproductenordnung, noch die allgemeine Productenordnung sein, denn beide schliessen die natürliche Reihenfolge der Zahlen aus, er muss vielmehr durch den Satz ausgedrückt sein, der, unmittelbar ans genetische Gesetz sich anlehnend, unser einmal angenommenes Zahlensystem beherrscht. Das ist aber der Gesichtspunkt der Decimalordnung. Sollen also überhaupt, wie das Personalprincip es erfordert, concentrische Kreise im Unterricht gemacht werden, so können die Grenzpunkte nur 10, 100 und 1000 — 10^x sein. Alle anderen Eintheilungen sind willkürlich und tragen nichts ein. Mehr Zahlenkreise- „Zahlenräume" sind nicht nöthig, da die Gesetze dieselben bleiben. Darnach muss nun gelehrt werden: 1) Das Rechnen mit den Zahlen von 1—10. 2) Das Rechnen mit den Zahlen von 1—100. 3) Das Rechnen mit den Zahlen von 1—1000 — x.

Nach welchen Gesichtspunkten aber sollen nun die so gewonnenen Kreise noch gruppirt werden? Im ersten Zahlenkreis ist durch den Bau der Zahlenreihe die Möglichkeit der Anwendung der Decimalproductenordnung (d. h. $x \times 10$; $x \times 100$ etc.) ausgeschlossen, selbstverständlich auch die Decimalordnung, da sie schon die erste Eintheilung abgegeben hat, es bleiben daher noch zwei mögliche Gesichtspunkte der Stoffanordnung übrig: 1) die Einerordnung, 2) die Productenordnung. — Dass nun in diesem ersten Zahlenkreis jede Zahl für sich einen Behandlungskreis bilden muss, ist nothwendig, da ja der folgende Gesammtbestand der Reihe durch die ersten zehn Zahlen existirt und im Folgenden nur das aus den Übungssphären ausgelassen werden darf, was schon im Vorhergehenden Hexis geworden ist.

Nun ist die Productenordnung, wenn man von dem Factor 1 absieht, eine sehr beschränkte; nämlich; 2×2; 3×2; 4×2; 5×2; 2×3; 3×3; 2×4; 2×5, ferner selbstverständlich nur massgebend für die Division und Multiplication, es fragt sich daher nur noch, nach welchem Gesichtspunkte die Additions- und Subtractionsübungen hier in diesem Kreis zu ordnen sind. Da dieser Gesichtspunkt nur in diesem speciellen Fall anwendbar ist, so ist er unter den vier allgemeinen und durchgehenden Gesichtspunkten nicht unmittelbar gegeben, sondern muss aus einem derselben abgeleitet werden. — Der Gesichtspunkt aber, der die Additions- und Subtractionsgesetze in einem Fall, nämlich wenn der Summand 1 ist, darstellt, ist der Gesichtspunkt der Einerordnung. Dieser muss den abgeleiteten Gesichtspunkt für die methodische Anordnung des bezüglichen Stoffes liefern. Nun ist nach dem Materialprincip das Element aller Zahlen die Ureins, es kann daher wie beim Zählen und Bilden der Zahlenreihe stets die vorhergehende Zahl und die Ureins zusammengefasst wird, so auch umgekehrt jede Zahl wiederum zerlegt werden in dieselben Bestandtheile, und da diese Zerlegung fortgesetzt werden kann bis zum ersten Glied der Zahlenreihe und da ferner beliebig viele gegebene Einse zusammengefasst und von einer gegebenen Zahl (nach Massgabe der Zusammenfassung) getrennt werden können, so ist damit nach Analogie der Bildung der Zahlenreihe eine ungeheure Anzahl der Zerlegungs- und Zusammenfassungsmöglichkeiten gegeben, von denen die zweigliedrigen in diesem Zahlenkreis erschöpfend und sensual behandelt werden: z. B.

$6 = 1 + 5$; $1 + 5 = 6$; $6 - 1 = 5$; $(6 - 5 = 1)$
$6 = 2 + 4$; $2 + 4 = 6$; $6 - 2 = 4$;
$6 = 3 + 3$; $3 + 3 = 6$; $6 - 3 = 3$;
$6 = 4 + 2$; $4 + 2 = 6$; $6 - 4 = 2$;
$6 = 5 + 1$; $5 + 1 = 6$; $6 - 5 = 1$;
$6 = 6 + 0$; $6 + 0 = 6$; $6 - 0 = 6$.

Hiermit ist der Gesammtstoff des ersten Zahlenkreises erschöpfend principiell gruppirt. Welche Formen diese Gruppirung im Speciellen und Einzelnen annimmt, wird der Unterrichtsplan andeuten, und ein Lehrbuch des Rechnens genau ausführen. Das Letzte liegt nicht in der Aufgabe dieser Arbeit.

Der zweite Zahlenraum ist methodisch der complicirteste und verlangt daher die sorgfältigste Gruppirung des Stoffes um Repräsentantenaufgaben, denn die Behandlung jeder einzelnen Zahl ist unmöglich und auch darum nicht nöthig, weil die Einer schon behandelt sind. Die methodischen Gesetze bilden eine genaue Analogie zu denen des ersten Zahlenkreises, doch so, dass hier die Zehner dieselbe Schwierigkeit dem Lernenden entgegenstellen, wie dort die Einer, also ist der vorwaltende Gesichtspunkt und zwar nach dem Wesen der Zahlenreihe für die Addition und Subtraction die Decimalproductenordnung d. h. die Zehner. Mit jedem neuen Zehner beginnt für das Kind eine neue Welt, der Durchgang durch einen Zehner hat also hier genau dasselbe zu bedeuten, wie im ersten Zahlenkreis der Übergang von einem Einer zum folgenden. — Je mehr Zusammenfassungen zu immer neuen Einheiten zur Bildung eines solchen neuen Zehners stattfinden mussten, desto schwieriger für den Lernenden. — Es sei nun nach allen diesen Lehren die Aufgabe gestellt alle Repräsentanten der Addition im zweiten Zahlenraume zu ordnen.

Nun theilt der zuletzt herangerufene Gesichtspunkt alle Aufgaben in zwei Theile, die sich zu einander wie das Einfachere zum Complicirteren verhalten:

A. Repräsentanten ohne Durchgang z. B. 14 + 5
B. „ mit „ z. B. 14 + 9.

Damit ist zwar das ganze Gebiet nach dem Grundsatz des exclusi tertii erschöpft, allein die Anordnung noch nicht vollendet, denn da, wie ein Blick in die Zahlenreihe lehrt, hier drei Arten von Zahlen vorkommen: erstens: Einer, zweitens: Reine Zehner, drittens: Gemischte Zehner, so müssen diese Elemente in allen ihren Variationen unter A und B zur geordneten Darstellung kommen. Wenn man nun von der Repetition des ersten Zahlenraumes absieht, so bleiben mit diesen drei Elementen nur 5 Möglichkeiten übrig. Denn würde man die Möglichkeit, einen reinen Zehner z. B. = 20 zu setzen, mit a, die Möglichkeit eines Einers = 4 mit B und die Möglichkeit eines gemischten Zehners = 43 mit c bezeichnen, so würden, da jede Möglichkeit mit jeder Möglichkeit gesetzt werden kann, folgende Additionen [und mithin auch Subtractionen] aufgeführt werden müssen:

I.	1) a + a = 20 + 20	
	2) a + b = 20 + 4	
	3) a + c = 20 + 43	
II.	4) b + b = 4 + 4	
	5) b + c = 4 + 43	
	6) b + a = 4 + 20	
III.	7) c + c = 43 + 43	
	8) c + b = 43 + 4	
	9) c + a = 43 + 20.	

Diese 9 Möglichkeiten aber lassen sich reduciren.

1) Es fällt № 4 in der zweiten Gruppe, da sie nur eine Repetition aus dem ersten Zahlenraum ist.
2) Es fällt ferner b + a, wenn a + b bleibt und Es fällt ferner c + a, wenn a + c bleibt.
3) Es fällt b + c, wenn c + b bleibt.

Es fallen daher 4 Möglichkeiten und stehen bleiben folgende 5:

1) a + a
2) a + b
3) a + c
4) c + c
5) c + b.

Das heisst in die Sprache der Methodik übersetzt: Unter A können addirt werden:

1) Reine Zehner und reine Zehner.
2) Reine Zehner und Einer.
3) Reine Zehner und gemischte Zehner.
4) Gemischte Zehner und gemischte Zehner.
5) Gemischte Zehner und Einer.

In welcher Reihenfolge nun sollen diese 5 Möglichkeiten, die ja die Repräsentanten von ganzen Übungsfamilien sind, zur Übermittelung an den Lernenden kommen? Diese Frage kann nur durch einen Blick auf die Zahlenreihe gelöst werden. Die mathematische Stelle des zweiten Zahlenraumes ist nämlich zwischen dem ersten und dritten, es soll durch ihn ein in concentrischen Kreisen sich ergebender Zuwachs zum ersten Zahlenraum und eine Vorahnung des dritten Zahlenraumes vermittelt werden. — Folglich muss der Weiterbau dort begonnen werden, wo das Balkenende des ersten Zahlenraumes eine Anstückung erwartet, das ist aber da, wo eine ganz ähnliche Rechenbewegung stattfinden kann, wie im ersten Zahlenraum, ferner werden die Bewegungen dem dritten Zahlenraume zu immer complicirter und stets die vorhergehenden benutzende werden. Ein gemischter Zehner aber verlangt bei der Summirung complicirtere Bewegungen als ein reiner Zehner. Darnach haben wir bis jetzt folgendes Schema:

Thema: **Repräsentanten der Additionsübungen im zweiten Zahlenraum.**

A. Repräsentanten ohne Durchgang.

Gruppe I: Additionen mit einfacher Bewegung.

a) Reine Zehner und Einer.
b) Reine Zehner und reine Zehner.

Gruppe II: Additionen mit complicirter Bewegung.

c) Gemischte Zehner und gemischte Zehner.
d) Gemischte Zehner und reine Zehner.
e) Gemischte Zehner und Einer.

Da aber die Bewegung da beginnen soll, wo sie sich an die methodischen Gesetze des ersten Zahlenraumes anschliesst, und also so beginnen soll, wie sie das Zehnergesetz verlangt, so muss b) vor a) stehen, denn die Bewegung der Zahlenreihe von den reinen Zehnern zu den reinen Zehnern erfolgt genau mit derselben Leichtigkeit wie von einem gegebenen Einer zum folgenden. Somit ist nun die erste Gruppe vollständig geordnet. Noch erwarten die 3 Repräsentanten der zweiten Gruppe den electrischen Schlag. Nun finden sich aber unter den folgenden Summanden einfachere und complicirtere; der complicirteste ist ein solcher Repräsentant, dessen beide Summanden gemischte Zehner sind und seine Bewegungsacte bis zum Resultat sind darum sehr mannigfaltige; darnach ist der Fall c) der complicirteste und muss die Reihe schliessen. Die beiden noch übrigen Fälle verlangen genau gleichviel Bewegungsacte zu ihrer Lösung, denn bei beiden müssen zunächst die gemischten Zehner zerlegt, bei beiden muss eine der Resultatzusammenfassung vorhergehende Zusammenfassung stattfinden. Welcher Fall muss nun voran stehen? Das ist fast einerlei; doch scheint der Fortschritt von reinen Zehnern zu reinen Zehnern in diesem Zahlenraum mehr im Ohr zu liegen, während die Bewegung von den Einern hinüber zu den Zehnern weniger sich der Redeweise des Unterrichtssubjects anschliesst. — Wir erhalten daher folgendes Schema:

Thema: **Genetische Repräsentantenfolge der Additionsübungen des zweiten Zahlenraumes.**

A. Repräsentanten ohne Durchgang.

Gruppe I: Additionen mit einfacher Bewegung in der Zahlenreihe.

a) Reine Zehner und reine Zehner.
b) Reine Zehner und Einer.

Gruppe II: Additionen mit complicirter Bewegung in der Zahlenreihe.

a) Reine Zehner und gemischte Zehner.
b) Gemischte Zehner und Einer.
c) Gemischte Zehner und gemischte Zehner.

B. Repräsentanten mit Durchgang.

Die Gruppirung (unter B.) erfolgt genau nach ähnlicher Überlegung; das Specielle kann im dritten Theil nachgelesen werden, hier genügt es die Kraft und Anwendungsfähigkeit der deducirten Gesichtspunkte gezeigt zu haben.

Die Anordnung der Subtractionsaufgaben muss in genauer Analogie der Additionsaufgabenreihe folgen, da ja die Addition sich von der Subtraction genau so unterscheidet, wie das Vorwärtszählen von dem Rückwärtszählen. Was hier der Zurückgang von einem grösseren Zehner zu einem kleineren, das war dort der Durchgang von einem kleineren Zehner zu einem grösseren, und darnach nun muss die Zerlegung des Subtrahendus stets so eingerichtet werden, dass das jeweilige Resultat, womöglich auf die Knotenpunkte der Zahlenreihe, d. h. auf die reinen Zehner herauskommt z. B. $45 - 7 = ?$ $45 - 5 = 40$; $40 - 2 = 38$.

Mit diesem Satz ist die Subtractionsaufgabenfolge geordnet.

Da nun für die beiden folgenden Species als für höhere Zusammenfassungen der beiden vorhergehenden die Productenreihe als Aufgabenordner in erster Linie massgebend sind, — denn der Durchgang in einen neuen Zehner kann als schon überwundene Schwierigkeit nur ein untergeordneter Gesichtspunkt sein, so kann es hier nur zwei grosse Repräsentantensorten geben: A. Die Bildung der Productenreihe der Grundzahlen, die zugleich als Dividenden (Stationen) der betreffenden Grundzahlen durchgearbeitet werden. B. Die Bildung von Producten, die nicht aus den Factoren des Einmaleinses bestehen und die Ausführung solcher Divisionsaufgaben, die nicht im Einmaleins liegen, sondern die erst lösbar sind mit Hilfe der Stationen, d. h. der Einmaleinsproducte. Alle anderen Gesichtspunkte sind von untergeordneter Bedeutung und können leicht aus der Construction des Unterrichtsplanes als Ableitungen der angegebenen vier natürlichen Gesichtspunkte der Stoffanordnung erkannt werden.

Da nun der folgende Zahlenraum genau nach den Gesetzen des vorhergehenden gebaut ist, so ist es nicht mehr nöthig, die hier anzuwendenden methodischen Gesetze zu repetiren; sie könnnen vielmehr im dritten Theil als selbstverständliche Anwendungen und Entfaltungen der Methodik des zweiten Zahlenraumes eingesehen werden.

B. Die Rechenbewegungen selbst oder die Normalauflöseweisen.

Vorbemerkung: Gliederung. Sowie bei jeder Bewegung der Beginn, die Ausführung logisch unterschieden werden muss und das Ziel, so erschöpft sich auch das angegebene Thema in einer dreifachen Wendung. Die erste führt die Arten der Bewegungen vor, die zweite giebt die Ausführungen derselben an und die dritte bestimmt das Ziel und die Mittel der Erreichung desselben. — (Cfr. die dreifache Wendung des Fundamentalprincips.)

---

1. Die Arten der Functionen des realen Rechnens.

Die Arithmetik unterscheidet 7 Species; denn das Potenziren hat, je nachdem Basis oder Exponent gesucht wird, zwei Umkehrungen. Zu ihren Rechenspecies aber kommt die elementare Methodik auf folgende Weise. Jede Zahl hat nach dem Baugesetz der Zahlenreihe einen ganz bestimmten mathematischen Ordnungsort. Nun kann der Geist sich die Ordnungsreihe der Einzelzahlen so vorstellen, dass er sich, von der Ureins oder einer beliebigen Zahl beginnend, die folgenden oder die vorhergehenden Zahlen vorstellt. Es sind demnach durch den Bau der Zahlenreihe nur zwei Arten der Rechenbewegung möglich: Eine Bewegung von der Ureins weiter, oder zu der Ureins hin, d. h. eine Vorwärts- und eine Rückwärtsbewegung. — Nun kann jede dieser Bewegungen in den Grenzen der Elementarschule stattfinden in ungleichen oder in gleichen Intervallen. Dass man für die Bewegungen mit gleichen Intervallen besondere, rasch zusammenfassende Methoden hat, verwischt dieses ursprüngliche Wesen in keiner Weise. Von der einen gegebenen Zahl in der Zahlenreihe um so viel Einheiten fortschreiten, wie die zweite gegebene Zahl anzeigt, heisst addiren, die Zahl, zu welcher man in der Zahlenreihe auf diese Weise gelangt, heisst Summe. Ist nun der je hinzukommende Summand dem vorhergehenden gleich, so kann die Zusammenfassung rascher durch das Auswendigwissen des Einmaleinses vollbracht werden unter dem Namen Multiplication. Man kann daher die Multiplication folgendermassen definiren: Die eine gegebene Zahl so viel mal als Summand setzen, wie die zweite gegebene Zahl anzeigt. Die directe Umkehrung der so gefassten Multiplication ist die Theilung. Subtrahiren aber heisst, von einer gegebenen Zahl der Zahlenreihe um so viel Einheiten rückwärts schreiten, wie die zweite gegebene Zahl anzeigt, der mathematische Ort, zu welchem man auf diese Weise gelangt, heisst Differenz; ist nun das Wesen dieses Rückwärtsschreitens dieses, dass die je abzuziehenden Zahlen einander gleich sind, so sieht man sich in die Messung hinübergeleitet und somit unterscheidet die elementare Methodik 5 Species, da die Division durchaus als Messung und Theilung geübt werden muss. — Wiewohl nun der Quellort der Messung die Subtraction und der der Theilung die Umkehrung der Multiplication ist, so gehören sie doch wiederum in so fern zusammen, als bei beiden ein Factor gesucht wird, indem der andere Factor und der Multiplicandus als gegeben auftreten. Daher unterscheiden einige Methodiker diese beiden Seiten der Division nicht, was ein grosser Mangel ist, denn man kann weder das Wesen der Division ohne diese Unterscheidung verstehen, noch auch bei angewandten Aufgaben richtig die Divisionsverhältnisse der gegebenen Zahlen durchschauen. Es müssen vielmehr alle möglichen Divisionsfragen noch ausserdem, wie sie die Construction des Unterrichtsplanes aufführen wird, besonders geübt werden.

Hiernach gehören also Addition und Subtraction, Subtraction und Messung, Addition und Multiplication, Multiplication und Theilung, Theilung und Messung, Multiplication und Division um so mehr zusammen, je mehr sich der Rechner noch in den Anfängen befindet, und darnach bestimmt sich das methodische Verhältniss der Reihenfolge der vorzunehmenden und mit einander zu verschlingenden Übungsfamilien, wie der dritte Theil diese Verhältnisse des Näheren entwirren wird; — denn da wird der lebendige Contact der Species hergestellt.

2. Die Ausführung der Rechenbewegungen.

Die Auflöseweisen und zwar die normalen fassen gegebene Zahlen unter einem der vorherdeducirten fünf Gesichtspunkte zusammen. Es fragt sich also, welche Zusammenfassungsmethoden die erfolgreichsten, bequemsten und richtigsten sind? Nun müssen es offenbar diese sein, die sich durch den Bau der Zahlenreihe als bequemste und grossartigste Einheiten von selbst aufdrängen. Folglich ist der Gesichtspunkt der Auflöseweisen: Die Auflösungen müssen sich auf den Wegen bewegen, die zugleich die Stoffeintheilungen normirt haben. Also giebt es vier normale Auflöseweisen: 1) durch Einerbewegung, 2) durch Decimalbewegung, 3) durch Decimalproductenbewegung, 4) durch Productenbewegung. — Wiewohl nun alles Specielle in die Construction des Unterrichtsplanes hineingehört, so kann doch hier eine solche Eingliedernng der vier Gesichtspunkte vorgenommen werden, die den methodischen Heimathsort jedes Gesichtspunktes aufweist. Da nun sogar die Stoffeintheilungsprincipien mehrfach durch einen Rückschluss aus den bis zum Resultat vollbrachten Functionen erschlossen wurden, so ist schon damit gesagt, dass die Individualisirung oder Specialisirung hier eine ähnliche wie bei der Stoffeintheilung sein wird. Der metaphysisch-philosophische Grund dieser Norm liegt darin, dass sich die Auflöseweisen zu den Stoffen verhalten wie das reale Sein zum ideellen, das ideelle Sein aber nichts anderes als die Zusammenfassung der Einzelacte der realen Function ist.

Darnach muss man also, abgesehen von dem anschaulichen Einerrechnen im ersten Zahlenraum, bei den Additions- und Subtractionsauflöseweisen das Augenmerk auf den Zehner- und Hunderterdurchgang geheftet halten, also bei der Summirung die Summanden so zerlegen, dass man womöglich eine reine decadische Einheit oder deren Vielfaches als Summe erhält, ebenso soll die Zerlegung des Subtrahendus eine decadische Differenz vermitteln womöglich, denn bei kleineren Zahlen ist es nicht immer möglich. Z. B.

a) $399 + 566 = ?$ $399 + 1 = 400$; $400 + 500 = 900$
$900 + 65 = 965$.
b) $595 - 197 = ?$ $595 - 195 = 400$; $400 - 2 = 398$;
oder $595 - 200 = 395$; $395 + 3 = 398$.

Damit ist das einzige, aber mannigfach variirbare Gesetz der Auflöseweisen der beiden ersten Species ausgedrückt. — Dass nun die Multiplicationsauflöseweisen sich auf den Wegen der Additionsauflöseweisen bewegen müssen, geht aus dem Wesen der Multiplication hervor und kann specialisirt im dritten Theil angesehen werden, denn alle die Eintheilungen dort sind von dem Gedanken getragen, entweder im Resultat oder in der Zerlegung der Factoren auf die reinsten decadischen Einheiten herauszukommen und von diesen Orientirungspunkten aus die Bewegung weiter zu leiten. Z. B. $52 \times 367 = 50 \times 367 + 2 \times 367$; $50 \times 367 = 50 \times 300 + 50 \times 60 + 50 \times 7$; $2 \times 367 = 2 \times 300 + 2 \times 60 + 2 \times 7$ u. s. w.

Alle Divisionen können aber allein so ausgeführt werden, dass der Dividendus in lauter Producte des Divisors zerlegt wird. Z. B. $565 : 5 = (500 : 5) + (50 : 5) + (15 : 5)$.

3. Das Ziel der Rechenbewegungen

ist das Können und zwar das rasche Können derselben nebst der Einsicht in die sich bei jeder Function vollziehenden Gesetze. Zur Einsicht führt nur die Erklärung und zwar die sensual und intellectuell-anschauliche, zum Können aber nur die Übung. Die Frage ist daher, wie soll denn geübt werden: Soll der Lehrer etwa den Satz: $5 + 6 = 11$, — soviel mal wiederholen lassen, wie eine lateinische Vocabel, bis er im Gedächtniss bleibt? Das ist mit Benutzung der sensualen Intuition bei einer bestimmten Anzahl von Fällen gewiss nothwendig, nämlich beim Grundstock alles Rechnens: 1×1; $1 + 1$; $1 - 1$; $1 : 1$; — dieser Grundstock nämlich muss auswendig gekannt werden. Das ist aber auch vollkommen genügend, und die Schüler noch ausserdem etwa mit dem Auswendiglernen des grossen 1×1 plagen zu wollen, ist reiner Unverstand. Es genügt, wenn der vorherangegebene Zweck erreicht ist. Welche Mittel aber bietet nun die Zahlenreihe zur Erreichung dieses Zweckes? Gesetze können nur durch Vergleichung klar erkannt werden, und mechanische Schwierigkeiten werden durch Bearbeitung analoger Fälle überwunden. Zu beiden bietet nun der bekannte symmetrische Bau der Zahlenreihe eine ausgezeichnete Handhabe. Denn da die Reihe von 10—20 nach denselben Gesetzen sich bildet, wie die Reihe von 20—30, 30—40 etc., so muss dasselbe Gesetz im Bewusstsein auftauchen bei der Addition von $14 + 9$, $24 + 9$, $34 + 9$, $44 + 9$ . . . . $94 + 9$ etc. Sollen die Übungen daher nicht isolirt werden, so müssen sie nach den Repräsentanten gruppirt in Reihen durch die Zahlenreihe so lange weiter geführt werden, bis die Einsicht eine deutliche und das Können ein rasches geworden ist. Da nun hierbei eine unberechenbare Anzahl von Variationen möglich ist, so ist jeglicher Mechanik vorgebeugt.

Ein reiches fruchtbares Feld der Thätigkeit ist hiermit eröffnet und ein prächtiges Mittel viele Abtheilungen in grossen Schulen leicht zu beschäftigen dem Lehrer in die Hand gegeben und zwar blos durch den steten Hinblick auf den Bau der Zahlenreihe.

B e i s p i e l.

1. Reihenbildungen zum Behuf des Bekanntwerdens mit der Zahlenreihe.

A. Bildung der natürlichen Zahlenreihe.

a) Ohne Überspringungen.

1) Bildet die natürliche Zahlenreihe von 1—150.
2) Bildet die natürliche Zahlenreihe von 150—1.

b) Mit Überspringungen.

1) Bildet eine Reihe von 1—150 mit Auslassung jeder fünften Zahl.
2) Ebenso umgekehrt.

B. Bildung anderer Reihen.

1) Decimalreihe bis 10,000.
2) Productenreihe der 9! etc.

2. Reihenbildungen behufs Einübung der 4 Species.

a) Beginn mit dem Repräsentanten nach dem Gesichtspunkt der Stoffvertheilung.	b) Weiterführung durch die Zahlenreihe in den verschiedensten Variationen.	c) Zielort findet sich da in der Reihe, wo sich die Einsicht als erworben und die mechanische Schwierigkeit als überwunden erzeigt.
	A. Übungsreihen der Addition.	
4 + 9 = 13;	14 + 9 = 23, 24 + 9 = 33	84 + 9 = 93.
	B. Übungsreihen der Subtraction.	
13 — 9 = 4;	23 — 9 = 14, 33 — 9 = 24	93 — 9 = 84.
	C. Übungsreihen der Multiplication.	
4 × 5 = 20;	4 × 50 = 200, 4 × 500 = 2000,	4 × 5 Mill. = 20 M.
	D. Übungsreihen der Division.	
20 : 4 = 5;	200 : 4, 2000 : 4	2 Mill. : 4 = ?

Man sieht, wie fruchtbar und interessant das Rechnen in solchen Reihen werden muss, wie sehr eine solche Rechenbildung schon jetzt die Idee der höheren Reihenbildungen wach erhält und vorbereitet. Das Specielle gehört nicht hierher.

C. Das schriftliche Rechnen.

Es giebt zwar ebenso wenig ein wirkliches schriftliches Rechnen, wie es ein schriftliches Denken giebt, denn beides kann ja nicht räumlich vor sich gehen. So wie aber alles Intelligible eine semiotische Bezeichnung in der sensualen Sphäre hat und haben kann, so auch das Rechnen. Es können nämlich die Zusammenfassungen des realen Rechnens (d. h. das ideale Sein des Rechnens) räumlich-semiotisch bezeichnet werden. Aus der Reihe der einzelnen in bestimmter Ordnung folgenden Zusammenfassungen kann dann wieder rückwärts auf die stattgehabte reale Function geschlossen werden, denn dass man die reale Function selbst nicht aufs Papier bringen kann, ist selbstverständlich. — Das sogenannte schriftliche Rechnen fällt daher genau unter denselben Gesichtspunkt der Werthschätzung wie das Schriftliche überhaupt, in der Schule aber ist die nächste Ursache der schriftlichen Übungen das Nichtbehaltenkönnen der grösseren Zahlen. Daher ist das Dirigirende überall das Mündliche; dies liefert allein alle Gründe für die wenigen allerdings zur raschen Ausführung nothwendigen mechanischen Regeln, dies bestimmt in der Hauptsache die Reihenfolge der Aufgaben, und da die reale Function des Rechnens trotz der nachher erfolgenden Anschreibung des Resultats nur im Geiste vor sich geht, so wäre das Vorstellen der Ziffern beim Kopfrechnen genau so klug, wie das Vorstellen der Buchstaben beim Anhören eines Gesprächs. Um dieses Letztere insbesondere zu verhüten und das Bewusstsein der Hegemonie des mündlichen Rechnens zu stärken, müsste man das erste Unterrichtsjahr überhaupt mit mündlichem Rechnen allein verbringen. Denn sofern man unter schriftlichem Rechnen in erster Linie die Anschreibeformen und Auflöseformen zu lehren hat, kann von demselben auch erst im dritten Zahlenbereich die Rede sein. Das durchgängig Unterscheidende zwischen dem schriftlichen und mündlichen Rechnen ist der Anfangspunkt der realen Function; denn abgesehen von der Division beginnt das schriftliche Rechnen wegen der sonst sehr complicirt werdenden Zusammenfassung zu höheren Zahlenreiheneinheiten — immer mit den Einern, während das mündliche nach Analogie der mehrfach benannten Zahlen stets mit der höchsten decadischen Einheit der betreffenden Zahl anhebt. Das Glanzfach des schriftlichen Rechnens ist die Division; hier wie bei allen anderen Species ist die Erklärung nur im Bau des Zehnersystems zu suchen; bei grösseren Divisoren aber muss der Blick auf den mathematischen Ort der Zahl in der Zahlenreihe die Bestimmung des Quotienten leicht ermöglichen, denn je näher ein gegebener Divisor einer reinen decadischen Einheit ist, desto mehr wird der gesuchte Quotient sich dem Quotienten dieser annähern: 1755 : 599 = 1755 : 600. — Sehr zu halten ist auf die richtige Factorenfolge bei der Theilung und Messung, denn wer bei der Theilung den Divisor mit dem Quotienten multipliciren wollte, um das betreffende Product zu erhalten, würde damit zeigen, dass er nicht die geringste Ahnung davon hat, dass bei der Theilung ja der Divisor der Multiplicator ist. — Da das Schriftliche eine conventionelle Semiotik ist, so hat eine systematische Methodik hier sehr wenig zu sagen, es muss vielmehr das Nöthige in den Rechenbüchern und theilweise im Unterrichtsplan gesucht werden. — Nur dies kann noch aus dem Fundamentalprincip erkannt werden, dass der Unterricht hier auf ein Dreifaches seinen Blick zu richten hat. Aufgezeichnet werden nur die Zusammenfassungen des realen

Rechnens. Nun hat das reale Rechnen zu seinen eignen Zusammenfassungen zwei Verhältnisse: Entweder sind diese die Beziehungspunkte, von denen das Rechnen beginnt, oder sie sind in einer bestimmten Organisation die Endpunkte der Function, durch die hindurch die Function weiter geleitet wird bis zum Endresultat. Die Fähigkeit der Aufzeichnung der ersteren Aufgabenzahlen, die denn auch bei der zweiten Sorte von Zusammenfassungen benutzt wird, wird im Numeriren, die Fähigkeit der Aufzeichnung der zweiten Sorte von Zusammenfassungen in der Lehre von den schriftlichen Auflöseformen besonders zu erreichen sein. Bei beiden aber ist vorausgesetzt die Fähigkeit des Zifferschreibens. Diese drei Wendungen des schriftlichen Rechnens vertheilen sich auf den hiermit schliessenden ersten Theil der Methodik in seinem ersten Abschnitt — so, dass das Zifferschreiben fast ausschliesslich dem ersten Zahlenraum, die eigentlichen schriftlichen Auflöseweisen dem letzten Zahlenraum heimfallen. Der mittlere Zahlenraum aber bereitet die Hauptsache des Numerirens vor, denn wer eine dreistellige Zahl schreiben kann, dem machen die vielstelligen keine Mühe.

Abschnitt II.

Methodik der Rechenbewegungen in jeder der isolirten Interpolationsreihen.

Vorbemerkung: Gliederung dieses Abschnitts.

Der andere Bestandtheil der elementaren Zahlenreihe ist die Bruchreihe. Die Bruchreihe aber hat beliebig viele Interpolationsreihen, die — jede einzeln — als selbstständige Zahlenreihen betrachtet werden können. Da nun die beabsichtigten Bewegungen hier in den einzelnen als selbständig gedachten d. h. als von einander unabhängig herangezogenen — isolirten Interpolationsreihen stattfinden sollen, so ist es zunächst nothwendig die Beziehungspunkte zu kennen, die ja dann die Wege der Auflöseweisen dem Methodiker an die Hand geben. Das Wesen der Bruchreihe zu erkennen, ist daher die Aufgabe des ersten, die nothwendigen methodischen Folgerungen daraus zu ziehen die des zweiten Unterabschnitts.

A. Die Construction der Bruchreihe.

Da die Bruchreihe aus einer bestimmten Ordnungsfolge einzelner Brüche besteht, so ist es zunächst nothwendig, das Wesen eines Bruches zu erkennen. Hierbei muss man nun zunächst den Irrthum fern halten, als ob ein Bruch durch räumliche Functionen entstehen könnte. Diese Meinung ist merkwürdiger Weise auch von Mathematikern vorgetragen, denn wenn Wittstein in seiner Elementarmathematik Band I pag. 42 und 43 sagt: „Eine Zahlenreihe interpoliren heisst: Die Intervalle dieser Zahlenreihe durch Einschiebung neuer Zahlen in eine vorgeschriebene Anzahl unter sich gleicher Theile theilen; die Zahlen aber der dadurch erweiterten Zahlenreihe führen den Namen Brüche," so muss man sich über diese Erklärung wundern, denn offenbar ist hier der Begriff des Bruchs als identisch mit der Veranlassung für die Bildung dieses Begriffs aus den sensualen Quellen gefasst. Eine sensuale Intuition z. B. das Zerschneiden der Äpfel ist zwar für den Anfänger unbedingt nöthig, und er wird sich zunächst auch etwa einen Stammbruch wie $^1/_4$ so vorstellen, als ob die Ureinheit in 4 gleiche Theile getheilt wäre, aber diese Vorstellung ist nur insofern berechtigt als das Kind sich die Ureins ja nicht als Element der Zahlenreihe, sondern als eine qualitative sensuale Einheit vorstellt, die dann selbstverständlich immer in gleiche Theile getheilt werden kann. Aber das Urelement der Zahlenreihe, das heisst die Eins als Idee, nämlich die Ureins auch noch in Theile zertheilen zu wollen, heisst den Begriff der Quantität aufheben.

Die Ureins ist untheilbar, da durch sie nur das Vorhandensein einer Vorstellung im Bewusstsein — ausgedrückt werden soll. Eine Vorstellung aber kann nicht noch getheilt werden, so dass sie etwa eine halbe Vorstellung wäre.

Nun haben die Methodiker um das Rechnen mit Brüchen leicht und anschaulich zu lehren, den Gedanken eingeführt, dass der Nenner gar nichts anderes sei als der Name des Bruches, und damit scheinen wirklich alle methodischen Schwierigkeiten gehoben zu sein, und bei vorausgesetzter Kenntniss der ganzen Zahlen ist also hiemit alles gelehrt. Denn so wie man 5 Ä. + 3 Gänse nicht addiren kann, so auch keine ungleichnamigen Brüche; so wie aber 5 Ä. + 3 Ä. = 8 Ä., so auch $^5/_{14} + {}^3/_{14} = {}^8/_{14}$, so wie 5 Ä. — 3 Ä. = 2 Ä., so $^5/_{14} - {}^3/_{14} = {}^2/_{14}$ und so alle Species durch.

Aber diese Analogie ist ganz falsch und enthält nicht das methodische Gesetz der Bruchreihe, denn man verwickelt sich bei der Festhaltung dieser beliebten Analogie in die grössten Schwierigkeiten. Denn wenn, fragt der Schüler, in $^3/_4$ etwa die vier blos der Name des Bruches ist, wo ist denn der Bruch selbst? 3 etwa ist der Bruch selbst? und wenn „Viertel“ blos der Name ist, wie etwa in „3 Äpfel“, so ist es doch merkwürdig, wie ein blosser Name multiplicirt oder dividirt werden kann, was doch sonst beim „Apfel“ z. B. nicht der Fall ist, denn man kann sich die Zahlenreihe ja nur als aus Zahlen bestehend vorstellen! Soll ferner $^3/_4 \times {}^3/_5$ multiplicirt werden, so fällt es dem Schüler auf, dass hier auch der Multiplicator also einen Namen hat, und soll gar $^3/_4$ *Ul.* durch 5 etwa dividirt werden, so hat der Dividendus zwei Namen. Nein, nein, das ist nicht die richtige Analogie und enthält nicht die methodischen Gesetze. — Ein Stammbruch (etwa $^1/_4$) entsteht vielmehr dadurch, dass die Ureinheit mit irgend einer in der Zahlenreihe gegebenen ganzen Zahl unter dem Gesichtspunkt der Division so zusammengefasst wird, dass die Ureins der Dividendus und die andere Zahl der Divisor wird. Der Bruch ist daher ein Quotientverhältniss, und daraus lassen sich alle methodischen Gesetze sowohl als die specifischen Bruchfunctionen ableiten. Diese Erklärung widerspricht nicht den Ausstellungen an der zuerst angeführten Erklärungsweise, denn der Begriff der Division ist ja noch keineswegs mit dem Begriff der Theilung erschöpft. — Sowie nun die Ureins das Element der natürlichen Zahlenreihe ist, so ist das Urverhältniss im Stammbruch ausgedrückt — dem Element jeder isolirten Interpolationsreihe. Und da nun dieses Urverhältniss zunächst mit sich selbst zu einer neuen Einheit, und diese so entsprungene neue Einheit wiederum mit dem Stammbruch zu einer dritten Einheit und so ferner zusammengefasst werden kann, so kann mit jedem Stammbruch als Element eine eigne bis ins Unendliche gehende Zahlenreihe gebildet werden, genau und auf ein Haar nach demselben Gesetze, nach welchem auch die natürliche Zahlenreihe gebildet wird.

Wir haben also in jeder der Interpolationsreihen eine völlig nach denselben Gesetzen gebildete Zahlenreihe vor uns, wie in der natürlichen Zahlenreihe, sobald man den Stammbruch als Ureinheit fasst; wird der Stammbruch aber als in einem Relationsverhältniss zur Ureinheit gefasst, so wird dadurch die Genesisbeziehung jedes abgeleiteten Bruches eine complicirte, nämlich jeder abgeleitete Bruch muss gedacht werden in seiner Relation zum Stammbruch und zur Ureinheit. Durch diese beiden Beziehungen werden alle methodischen Gesetze bestimmt. Zugleich wird nun durch diese Analogie zwischen den beiden Zahlenreihen klar, womit der Nenner zu parallelisiren ist, nämlich nicht etwa mit den willkürlichen Namen, die ja nur die Anwendung einer Zahl bezeichnen, sondern mit der Ureinheit, denn so wie die Ureinheit das Element der natürlichen Zahlenreihe ist, so ist der Stammbruch das Element seiner isolirten Interpolationsreihe; soll nun die rechnende Bewegung nicht aus einer Interpolationsreihe in die andere hinüberspringen, so besteht

B. Die Folgerung aus dieser Constructionsweise

der Bruchreihe darin, dass es absolut keinen grösseren Unterschied zwischen den einzelnen Interpolationsreihen giebt, als zwischen einer beliebigen Interpolationsreihe und der natürlichen Zahlenreihe. Wenn nun somit der Unterschied beider Reihen völlig aufhört, so ist die Methodik dieses Abschnitts Wort für Wort die Methodik des vorhergehenden. Es werden also, so lange die Bewegung aus einer Interpolationsreihe nicht in eine andere hinüberspringt, sowohl die Gesichtspunkte der Stoffvertheilung als auch die Normalauflösereihen als auch die Übungsarten vollkommen den betreffenden Abschnitten der schon bekannten Methodik des Rechnens mit ganzen Zahlen entsprechen, und es ist sehr unnütz die Meinung aufrecht zu erhalten, als ob es methodisch nöthig wäre, Zwischenwände zwischen dem Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen aufzuthürmen, so lange die Bewegung in der isolirten Reihe bleibt; nur die Zusammenfassungen aus verschiedenen Reihen machen noch einen besonderen Abschnitt nöthig. Die völlige Parallelisirung des Nenners mit der Ureinheit stellt alle Operationen in die Reihe der schon bekannten, denn so wie 5 Einer und 3 Einer $= 8$ E., so 5 Viertel $+$ 3 Viertel $= 8$ V., sowie 5 E. $-$ 3 E. $= 2$ E., so 5 V. $-$ 3 V. $= 2$ V., sowie 5×3 E. $= 15$ E., so 5×3 V. $= 15$ V. etc.

Da nun aber die mechanischen Schwierigkeiten, die von den ganzen Zahlen dargeboten werden, schon überwunden sind, so bedarf es hier überhaupt bei vorausgesetzter Kenntniss der Entstehung des Bruches und der Bruchreihe keines methodischen Apparats, es genügen vielmehr einige willkürlich ausgewählte Aufgaben, deren Auflösungen den parallelismus membrorum zwischen den Reihen der Species erkennen lassen.

Abschnitt III.

Methodik der Communicationsbewegungen zwischen den elementaren Zahlenreihen.

Vorbemerkung: Gliederung dieses Abschnitts.

So wie der vorige Abschnitt durch die Isolirung der einzelnen Bruchreihen im Allgemeinen die Wege, die die gleichnamigen Brüche in ihren Zusammenfassungen einschlagen, kennen lehrt, so versetzen die Beziehungspunkte, sofern sie hier aus ganz beliebigen Reihen gegeben werden sollen, den Methodiker in den Unterricht des Rechnens mit ungleichnamigen Brüchen. Es müssen daher auch hier analog dem ersten Abschnitt, auf Grund des genetischen Gesetzes beider Zahlenreihen, die Aufgaben um ihre Repräsentanten gesammelt werden. Nachdem so die Beziehungspunkte geordnet, wird die Nothwendigkeit, die Communicationsbewegungen nun auch wirklich ausführen zu lehren, eintreten. Hier ist die Hauptsache die Aneignung der normalen Auflöseweisen.

Diese beiden Erwerbnisse kehren aber in einer höheren Combination wieder, wenn sie nun in einem dritten Unterabschnitt die Ausführung der Species ermöglichen. Der erste Abschnitt blickt auf das Materialprincip, der zweite auf das Operationsprincip, und sofern hier überhaupt von der Normirung der Methodik durch das Personalprincip die Rede sein kann, hört man dessen Anklingen im dritten Abschnitt.

A. Gruppirung des Unterrichtsstoffs um Repräsentantenaufgaben.

Hier soll die Anzahl der sogenannten Vorübungen zum Bruchrechnen deducirt werden. Diese Vorübungen sind aber die Hauptsache, und das sogenannte Bruchrechnen ist im Allgemeinen nur die Anwendung dieser Vorübungen. Es giebt nun eine festbestimmte Anzahl dieser Vorübungen. Das kann auf folgende Weise erkannt werden. Vor dem Methodiker liegen zunächst zwei Zahlenreihen, die für den Schüler als zunächst unterschiedlich auftreten: die natürliche Zahlenreihe = a, und irgend eine Interpolationsreihe b. Nun kann die rechnende Bewegung so gedacht werden, dass sie von der natürlichen Zahlenreihe aus zu irgend einer Interpolationsreihe oder von einer beliebigen Interpolationsreihe zur natürlichen Zahlenreihe fortschreitet; jedesmal kann entweder die Communicationsbewegung allein oder mit einer Zusatzbewegung gefordert sein. Also erhalten wir auf diesem Wege vier verschiedene Gruppen von Vorübungen. — Da nun aber je zwei Interpolationsreihen in einem ebenso heterogenen Verhältniss zu einander stehen wie a und b, so ist noch eine zweite Hauptgruppe von Rechenfunctionen denkbar: Communicationsbewegungen zwischen je zwei Interpolationsreihen.

Diese Bewegungen können nun ebenfalls von einer höheren Interpolationsreihe in eine niedere, oder von einer niederen aus in eine höhere stattfinden. Wir erhalten folgende Repräsentantengruppen, denen die gewöhnlichen Kunstausdrücke beigefügt sind.

A) Communicationsbewegungen zwischen der natürlichen Zahlenreihe und irgend einer Interpolationsreihe.

I. Von der natürlichen Reihe zur beliebigen Interpolationsreihe.

1. Communicationsbewegungen allein.

Z. B. $4 = ?\,\frac{}{8} = \frac{32}{8}$.

Anmerkung. Diese Übung hat in der empirischen Methodik den Namen: Verwandlung ganzer Zahlen in Brüche.

2. Communicationsbewegung und noch eine Vorwärtsbewegung (beziehentlich Rückwärtsbewegung) in der Interpolationsreihe.

Z. B. $4\frac{3}{8} = \frac{?}{8} = \frac{35}{8}$.

Anmerkung. Diese Übung trägt den Namen: Verwandlung gemischter Zahlen in Brüche.

II. Von einer beliebigen Interpolationsreihe zur natürlichen Zahlenreihe.

1. Communicationsbewegung allein.

Z. B. $\frac{32}{8} = 4$.

2. Communicationsbewegung und noch eine Rückwärtsbewegung (beziehentlich Vorwärtsbewegung) in der Interpolationsreihe.

Z. B. $\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$. (Ausziehen.)

B) Communicationsbewegung zwischen je zwei Interpolationsreihen.

a) Communicationsbewegung von einer höheren Reihe aus in eine niedere.

Z. B. $\frac{3}{12} = \frac{15}{60}$. (Erweitern.)

Anmerkung. Der allgemeine Fall dieser Übung giebt ein bestimmtes Bewegungsziel an, sehr wichtig aber ist der specielle Fall, der den Ausdruck vieler Brüche verschiedener Interpolationsreihen in derselben Interpolationsreihe verlangt. Diese Übung heisst in der empirischen Methodik: Generalnenner suchen.

b) Communicationsbewegungen von einer niederen Interpolationsreihe in eine höhere.

Z. B. $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. (Heben.)

Man sieht, wie diese Deduction dem Streit der Methodiker über Reihenfolge und Anzahl der Vorübungen ein Ende setzt, wie es die empirische Methodik nie könnte. Alles aber folgt aus dem prävalirenden Theil des Materialprincips.

B. Die Normen der Auflöseweisen.

Es ist nun selbstverständlich, dass hier weder die Factorenlehre noch die Auflösung der Einzelfälle durchzunehmen ist, sondern nur diejenigen Gesichtspunkte herauszuheben sind, die sich aus dem genetischen Bau der Reihen unmittelbar ergeben und als Normen allen Auflöseweisen zu Grunde liegen. Es fragt sich daher zunächst, zwischen welchen Zahlen ein directer und zwischen welchen ein indirecter d. h. durch andere Zahlen vermittelter Schluss behufs der Erlangung des Resultats stattfinden muss? Das ist nun durch die Lehre von der Entstehung der natürlichen Zahlenlehre und durch das doppelte Verhältniss der abgeleiteten Brüche, vermittelt durch die Ureinheit mit der natürlichen Reihe, von selbst klar. Darnach kann ein directer Schluss nur stattfinden

1) in jeder isolirt gedachten Reihe zwischen dem Element der Reihe und irgend einer Zusammenfassung;

2) zwischen der Ureinheit und jedem beliebigen Stammbruch.

Ein vermittelter Schluss dagegen ist indicirt zwischen der Ureinheit und jedem abgeleiteten Bruch, vermittelt nämlich durch den Stammbruch als der Ureinheit der jeweiligen Bruchreihe, ebenso zwischen je zwei Reihen. Und zwar kann bei dem letzten Fall die Forderung gestellt werden, entweder zwischen der natürlichen Zahlenreihe und jeder beliebigen Interpolationsreihe zu schliessen oder aber zwischen je zwei Interpolationsreihen. Die erste Forderung begnügt sich mit einer einfachen Vermittelung durch die

Ureinheit, wenn es von der ganzen Zahl zum Stammbruch geht: z. B. 5 ℔. = 10 Mark; $^1/_4$ ℔. = ?

5 ℔. = 10 Mark; 1 ℔. = 2 Mark

$^1/_4$ ℔. = $^2/_4$ Mark

$^3/_4$ ℔. = 3 × $^2/_4$ = $^6/_4$ Mark,

sobald es aber von der ganzen Zahl zu einem abgeleiteten Bruch geht, ist die Vermittelung, wie dasselbe Beispiel zeigt, eine doppelte, durch die Ureinheit und den Stammbruch hindurch. Bei der zweiten Forderung geht der Weg des Schlusses 1) zum Stammbruch der gegebenen Reihe, 2) von dort zur Ureinheit, 3) dann zum Stammbruch der Communicationsreihe, um 4) von dort endlich an den Bestimmungsort zu gelangen.

Ein Beispiel mag den letzten Fall erläutern:

$^3/_4$ ℔. = 9 Mark, $^5/_6$ ℔. = ?

1) $^1/_4$ ℔. = $^9/_3$ = 3 M.
2) 1 ℔. = 4 × 3 = 12 M.
3) $^1/_6$ ℔. = $^{12}/_6$ = 2 M.
4) $^5/_6$ ℔. = 5 × 2 = 10 M.

Hiermit sind alle die denkbar möglichen Normalauflöseweisen aus dem Bau der Reihen abgeleitet, die Specialisirung aber ist Sache eines Rechenbuches. Es erübrigt nur noch

C. Die Anwendung der Communicationsbewegungen in den Species vorzuführen.

Vorbemerkung: Gliederung.

Auch hier liefert der Blick auf das Materialprincip die Gruppirung der Species, das Operationsprincip bestimmt die Norm der Zusammenfassung, und da jede Zahl in unendlich vielen Formen ausgedrückt werden kann, so wählt das Personalprincip eine bestimmte dieser Formen. Welche? wird ein dritter Punkt „der Anwendung“ zeigen.

1) Die Reihenfolge der Species.

Da die Messung eine directe Folgerung aus der Subtraction ist, und die Multiplication, sofern sie bei der Ausführung der Messung nothwendig ist, schon durch die früheren Lehrabschnitte dem Schüler überliefert ist, da ferner die eigentliche einfache Multiplication ($3 \times {}^4/_5$) schon im vorigen Abschnitt eingeübt ist, und da es sich hei der Addition, Subtraction und Messung um eine Zusammenfassung oder Zertheilung durchaus von gleichnamigen Grössen handelt, wodurch eben die Auflöseweisen unter vielfach ähnliche Bestimmungen gestellt werden, so lautet die erste Gruppe der Übungen: a) Addition, b) Subtraction, c) Messung. Es bleiben für die zweite Gruppe nur noch zwei Aufgabenrepräsentanten übrig: a) die Theilung und b) eine Verbindung von Theilung und Multiplication, wie die letzte Species im vorigen Abschnitt gelehrt wurde. Alle untergeordneten stoffordnenden Gesichtspunkte sind aus den Principien der Communicationsbewegungen hergenommen und im Unterrichtsplan einzusehen.

2) Das Gesetz der Auflösung.

Abgesehen von den Normalwegen der Auflösungen, wie sie im Vorigen deducirt sind, muss hier noch bemerkt werden, dass, da durch das genetische Gesetz der Zahlenreihen nur gleichnamige, d. h. gleichelementige Grössen unter die 3 Gesichtspunkte der ersten Speciesgruppe zusammengefasst werden können, also die behufs solcher Zusammenfassungen in den Aufgaben etwa gegebenen ungleichnamigen Zahlen zuerst vermittelst der Eweiterung gleichnamig zu machen sind. Darnach fällt die Rechenbewegung unter die Methodik der isolirten Interpolationsreihe. — Bei der Theilungsaufgabe a) ist eine solche Gleichnamigmachung nicht nöthig aus Gründen der Entstehung des Stammbruches einer Interpolationsreihe. Die Aufgabe b) $^3/_4 \times ^5/_6$ aber ist sowohl unter diesen wie den vorigen Abschnitt fallend.

3) Das Gesetz des Resultats.

Jede Zahl kann durch die verschiedenen Systeme, die sich zur elementaren Zahlenreihe verbunden haben, in unendlich vielen Formen ausgedrückt werden. Es hat aber die Seele die grösste Freude an der Einfachheit und der der Praxis zugewandten Überschaulichkeit. Nun werden aber die Zahlen in ihrer Ordnungsfolge um so unüberschaubarer als sie sich von der Ureins entfernen und umgekehrt um so überschaubarer. Daher bestrebt man sich das Resultat so nah als möglich (durch Heben) zur Ureinheit zu rücken: statt 2 Millionen Secunden sagt man daher die genügende Wochenzahl etwa, und statt $\frac{500000}{1000000}$ lieber $^1/_2$.

Die specielle Durchführung dieser Gesichtspunkte beginnt zwar schon in der Construction des Unterrichtsplanes, ist aber in der Vollendung die Aufgabe eines Rechenbuches.

Zweiter Theil.

Das individuelle Coordinatensystem der Zahl in dem allgemeinen Coordinatensystem der Welt oder Methodik des Rechnens mit angewandten Zahlen.

Vorbemerkung: Gliederung dieses Theils.

Die Zahlen entspringen wie alle Begriffe durch den unterstützenden Hinblick auf sensuale Beziehungspunkte, daher können sie nun auch wieder auf alle beliebigen Erscheinungen angewandt werden. Ja, so sehr tritt die Zahl der Psyche des lernenden Kindes zuerst nur in einer bestimmten Anwendung nahe, dass der wirkliche Unterricht eben mit dem vorliegenden Theil beginnen muss und in keiner Stunde ganz die angewandte Zahl entbehren kann, denn die Entwickelung geht von den sensualen Quellen aufwärts zu den intelligiblen. — Es fragt sich nur, nach welchen Principien die Reihe der angewandten Aufgaben erfolgen muss, denn geht man principlos zu Werke, so ist die beabsichtigte Entwickelung vernichtet. Welche Wendung des Fundamentalprincips wird hier prävaliren? Nun kann es nicht das Materialprincip sein, denn es handelt sich ja nicht mehr in erster Linie um das Erkennen und Einüben der Zahlenverbindungsgesetze; das heisst: die Fähigkeit, das Wie? der Ausführung der 4 Species ist als überwunden vorausgesetzt. — Würde man aber speciell aus dem Personalprincip alle

Stufen der Anwendungen ableiten, so würde noch immerhin — abgesehen davon, dass einige Rechenbücher auf diesem Wege auf „Kartoffel-, Butter- und Salzrechnung“ methodisch hinausgekommen sind — die Frage übrig bleiben, wodurch denn die Aufgaben so geordnet werden, wie die etwaige Entwickelungsstufe es verlangt. Man sieht sich also ans Operationsprincip gewiesen und zwar an eine bestimmte Seite desselben. Was ist nämlich der Zweck von dem Eintritt des individuellen Coordinatensystems der Zahl in das universale Coordinatensystem?

Es soll die Anwendung der vier Functionsarten des realen Rechnens im individuellen Coordinatensystem der Zahl — gelernt und gelehrt werden, das heisst es soll die Beurtheilungskraft geübt werden in der Erkenntniss des Wann? der anzuwendenden Species. Diejenige Stufe der Anwendung wird also die höchste sein, die die Aufgaben in einer solchen Einkleidung vorführt, dass die anzuwendende Species zunächst in keiner Weise in der Aufgabe unmittelbar aufgedeckt vorliegt, sondern, weil versteckt, erst durch verschlungene Überlegungen erschlossen werden muss; die unterste Stufe wird als Extrem zu dieser obersten durch solche Anwendungen geschaffen, die die anzuwendende Species geradezu angeben oder wenigstens auf den ersten Blick erkennen lassen; in der Mitte ist aber nur noch eine solche Stufe der Anwendung denkbar, deren Aufgaben die zu vollziehende Species theilweise angeben, theilweise verstecken. — Es erschöpft sich daher dieser zweite Theil in den angegebenen drei Abschnitten oder Stufen der Anwendung.

Die Einkleidungen müssen selbstverständlich aus allen Gebieten des Lebens hergenommen werden, und sich blos mit Mark und Thaler begnügen, heisst den Rechenunterricht degradiren.

Erste Stufe der Anwendung: Das individuelle Coordinatensystem der Zahl tritt in das allgemeine Coordinatensystem der Welt so ein, dass die anzuwendende Species deutlich angesagt ist.

Vorbemerkung: Die nothwendigen Unterstufen.

Da die Kategorie der Quantität auf jede Erscheinung und jedes Ding angewandt werden kann, so kann man sich eine Stufe der völligen Freiheit in der Anwendung einer Namenreihe denken; als Gegensatz dazu bietet sich nun, durch das practische Leben mehr als durch ein Princip gefordert, eine staatlich vorgeschriebene Namenreihe der Verhältniss- oder Währungszahlen. Beide erschöpfen in der Elementarschule das Gebiet derjenigen Anwendungen, die die wirkende Species selbst ankündigen.

Erste Unterstufe: Das individuelle Coordinatensystem der Zahl in einer freigewählten Namenreihe.

Wenn der elementare Unterricht Tische, Bänke, Knaben, Finger etc. in den ersten Stunden als Einkleidungen heranzieht, so stellt er sich damit zwar auf diese im Allgemeinen willkürliche Anwendungsstufe, doch wird es gut sein immer auch hier eine Reihe in der Anwendung leise durchmerken zu lassen, etwa so wie Kehr es in seiner deutschen Grammatik gezeigt hat. — Durch die Gegenüberstellung der Übungen angewandter und reiner Zahlen wird ein helles Licht auf folgende wichtige mathematische Verhältnisse geworfen. Aufforderungen wie: 5 ℔ Fleisch und 3 Jahre zu addiren oder von einander zu subtrahiren, erläutern die Unmöglichkeit ähnlicher Zusammenfassungen bei unbenannten Zahlen. Ferner, sowie es unmöglich ist 5 ℔ × 4 Menschen als einen vernünftigen Gedanken zu erfassen, ebenso sehr ist es unmöglich 4 *M.* in 5 *M.*-Theile zu zerlegen oder in $^3/_4$ Theile; kurz die Anwendung veranschaulicht den Satz, dass Theiler und Multiplicator immer unbenannt sind. Endlich kann nur diese Art der Anwendung den Unterschied zwischen Theilung und Messung für immer befestigen.

Z. B. a) 15 : 5 = 3
b) 15 *M.* : 5 *M.* = 3
c) 15 *M.* : 5 = 3 *M.*
d) 15 : 5 *M.*

Hier springt nun sofort ins Auge, dass a) sowohl Theilung als Messung, d) weder Theilung noch Messung sein kann. b) dagegen kann nur Messung und c) nur Theilung sein. — Nimmt man nun noch hinzu, dass diese rasch fluctuirende Art der Anwendung am raschesten die Begriffe von ihren sensualen Entspringungsursachen lösen kann, so hat sie sich somit in alle Wendungen des individuellen Coordinatensystems lichtbringend hineinverschlungen. — Schon durch die letztangeführten Anwendungen hat sich der Gedanke einer Einschränkung der freiheitlichen Bewegung des individuellen Coordinatensystems der Zahl durch das allgemeine der Welt angebahnt.

Zweite Unterstufe: Das individuelle Coordinatensystem der Zahl angewandt in einer staatlich vorgeschriebenen Namenreihe.

Gemeint ist das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. — Die staatlich vorgeschriebenen Verhältnisszahlen beziehen sich auf Raum, Zeit, Bewegung und Materie. Hier liegt nun wiewohl ein künstliches doch ein vollständiges Coordinatensystem von Verhältnissen und Namenreihen vor. Also kommt man auf den Gedanken einen Vergleich zwischen der Zahlenreihe und der Namenreihe anzustellen. Nun steht die Reihe: Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute, Sekunde unter einem ganz bestimmten Constructionsgesetz: 12 Monate

= 1 Jahr, 30 Tage = 1 Monat, 24 Stunden = 1 Tag etc. Man sieht also, dass hier ein ganz bestimmtes System beobachtet wird, ähnlich wie das decadische oder Fünfer- oder irgend ein anderes System, nur nicht von einer solchen Regelmässigkeit. Folglich giebt es hier eine einzige methodische Bemerkung, die den Gesammtstoff ordnet und alle Auflöseweisen an die Hand giebt. — Wie heisst dieses Gesetz, das bei vorausgesetzter Kenntniss der veranschaulichten Verhältnisszahlen die sonst so sehr ausgedehnte Arbeit mit mehrfach benannten Zahlen, dieser crux mathematicorum, auf einige Stunden reducirt? Das ist die bewusst und bis ins Einzelne durchgeführte, festgehaltene und ausgesprochene Analogie zwischen den beiden Systemen. Ein Beispiel erläutert das Gesagte: Wie soll man 5 Jahre 8 Monate 6 Tage 7 Stunden abziehen von 9 Jahren? Antwort: da die angegebene eine Zahl durch ein analoges System von Zahlen ausgedrückt ist, wie etwa im Zehnersystem die Zahl 5867, so wird die Subtraction genau so vor sich gehen, wie 9000 — 5867; — hier werden nämlich die Tausender in Tausender und Hunderter, die so gewonnenen Hunderter in Hunderter und Zehner, die so erhaltenen Zehner in Zehner und Einer zerlegt; dort wird man also die Jahre in Jahre und Monate, die so gewonnenen Monate in Monate und Tage, die Tage in Tage und Stunden zerlegen, wodurch eben die Subtraction ermöglicht wird. — Diese Analogie ist eine durchgehende und muss es sein, weil man es mit ganz ähnlich gebauten Systemen zu thun hat. Aus diesem einzigen methodischen Gesetz des Rechnens mit mehrfach benannten Zahlen folgt nun alles Specielle in ähnlicher Weise, wie bei den reinen Zahlen. Dieses Gesetz nun in seiner Ausführung anzudeuten ist die Aufgabe des dritten Theils und kann dort eingesehen werden. Wiewohl nun auf dieser Stufe die Operationsschwierigkeiten mit reinen Zahlen schon überwunden sind, so ist es doch interessant, aus der Concurrenz beider Systeme, die hier ja in Verbindung auftreten, die allgemeine und natürliche Reihenfolge der Aufgaben abzuleiten. Das System der Verhältnisszahlen mag hier in Ermangelung einer besseren Bezeichnung „Namenreihe“ heissen. — Grade wie in der natürlichen Zahlenreihe eine Vorwärts- und Rückwärtsbewegung speciell im Zehnersystem denkbar war, so auch in der Namenreihe. Die Rückwärtsbewegung in der Namenreihe ist die Hauptbewegung, die die Beziehungspunkte beim Reduciren, die Vorwärtsbewegung in der Namenreihe die Hauptbewegung, die die Beziehungspunkte beim Resolviren liefert. — Jede dieser Bewegungen kann nun mit der zugleich stattfindenden Rechenbewegung in der Zahlenreihe in einer doppelten Weise verschlungen werden, und so ergiebt sich als methodische Reihe der Species das folgende Schema:

I. Rückwärtsbewegung in der Namenreihe und Vorwärtsbewegung in der Zahlenreihe.

Erster Fall: Rückwärtsbewegung in der Namenreihe, Vorwärtsbewegung und zwar in ungleichen Intervallen in der Zahlenreihe. (Addition.)

Zweiter Fall: Rückwärtsbewegung in der Namenreihe, Vorwärtsbewegung und zwar in gleichen Intervallen in der Zahlenreihe. (Multiplication.)

II. Vorwärtsbewegung in der Namenreihe und Rückwärtsbewegung in der Zahlenreihe.

Erster Fall: Vorwärtsbewegung in der Namenreihe und ungleichmässige Rückwärtsbewegung in der Zahlenreihe. (Subtraction.)

Zweiter Fall: Vorwärtsbewegung in der Namenreihe und gleichmässige Rückwärtsbewegung in der Zahlenreihe.

a) Vorwärtsbewegung im Dividendus allein = Theilung.

b) Vorwärtsbewegung im Dividendus und Divisor = Messung.

Mit der angegebenen Gruppirung ist nun keineswegs beabsichtigt eine Definition der Functionen zu geben. Es sind blos die Wege angedeutet, auf denen sich die Beziehungspunkte der 5 Species finden, und das ist grade die Hauptaufgabe der Methodik. Die vorliegende aus der Combination beider Systeme erfolgende Speciesreihe ist also darnach, empirisch ausgedrückt, diese: 1) Addition, 2) Multiplication, 3) Subtraction, 4) Theilung, 5) Messung.

Man ersieht aus der Deduction, warum sie grade so aufeinander folgen müssen, und dies ist eben die Confirmation, die die empirische Methodik von der systematischen erhält.

Zweite Stufe der Anwendung: Das individuelle Coordinatensystem der Zahl tritt in das allgemeine Coornatensystem der Welt so ein, dass die anzuwendende Species sich allmählich verbirgt.

Hiermit ist die Regeldetri mit allen ihren traditionell benannten Anwendungen gemeint. Die Aufgabenreihe wird schon durch die beiden grossen Abtheilungen des directen und indirecten Schlusses, besonders aber durch die hier zu lehrende Repartitionsrechnung so geordnet, dass die Erkennung der anzwendenden Species von Aufgabe zu Aufgabe schwerer wird. Die Frage ist hier, abgesehen von allen speciellen Gruppirungen, die in die Rechenbücher gehören, die: Was ist das methodische Gesetz der Regeldetri, woraus alles andere folgt? Da die anzuwendenden Rechnungsarten in der Regeldetri: Multiplication, Theilung, Messung sind, so müssen die von D i e s t e r w e g sogenannten Multiplications- und Divisionsschlüsse speciell und sehr viel geübt werden, wobei der Unterschied zwischen 3×4 und $4 \times 3 = ab$ und ba und daher auch zwischen 5 in 15 und $^1/_5$ von 15, wie überhaupt die Unterschiede zwischen den 9 im dritten Theil angegebenen Divisionsfragen, ängstlich zu beobachten sind. Denn, da alle Zahlen entweder als ganze die Ureins direct zum Element haben oder aber als Interpolationsreihen durch ihre Genesis in irgend einer Relation zu der

Ureins stehen, so müssen alle Schlüsse von einer Zahl auf die andere durch die Eins vermittelt werden. Dieses Gesetz, das allein die elementare Methodik aus dem Bann des Mechanismus gelöst hat, muss nach allen Seiten geübt werden. — Nun ist denkbar 1) ein Schluss von der Ureins auf alle Zahlen, 2) ein Schluss von einer beliebigen Zahl auf die Ureins; da man aber nach dem Bau der Zahlenreihe von einer beliebigen Zahl auf eine andere beliebige nur dann direct d. h. ohne Vermittelung der Ureins schliessen kann, wenn diese andere Zahl ein Vielfaches oder ein bestimmter Theil von ihr ist, so muss noch eine dritte Schlussgruppe geübt werden: Von jeder Zahl auf jede Zahl.

Hier sind nun die Unterabtheilungen auch wichtig und aus den die Unterschiede herbeiführenden Elementen der Zahlenreihe leicht zu deduciren. Da nämlich als Elemente im weiteren Sinne gedacht werden können:

1) Die Ureins $= 1 = a$

2) Eine ganze Zahl $= 3 = b$

3) Ein Stammbruch $= {}^1/_4 = c$

4) Ein abgeleiteter Bruch $= {}^3/_4 = d_1 = {}^3/_5 = d_2$

5) Eine gemischte Zahl; — so müssen in der ersten Gruppe, wie auch in der zweiten vier Unterfälle geübt werden, in der dritten Gruppe aber brauchen die in der Productenreihe liegenden ganzen Zahlen unter sich nicht besonders geübt zu werden, so wie auch der Schluss von einem Stammbruch auf einen Bruch seiner eignen Interpolationsreihe nicht besonders berücksichtigt zu werden braucht.

Eine unmittelbare Anschauung von dem durch die Construction der Zahlenreihe festnormirten Gang der Schlussreihen giebt ein Beispiel.

1) Aufgabe. $2^3/_4$ ℔. kosten 22 Pfennige; wieviel kosten $5^1/_3$ ℔.?

2) Auflösung.

a) Schluss von einem abgeleiteten Bruch auf den Stammbruch:

${}^{11}/_4$ ℔. $=$ 22 Pf.; ${}^1/_4$ ℔. $=$ 22 Pf. : 11 $=$ 2 Pf.

b) Schluss von dem Stammbruch auf die Ureinheit:
$^1/_4$ *U.* = 2 Pf., $^4/_4$ *U.* = 1 *U.* = 4 × 2 Pf. = 8 Pf.

c) Schluss von der Ureinheit auf einen vorgeschriebenen Stammbruch:
1 *U.* = 8 Pf., $^1/_3$ = $^1/_3$ × 8 Pf. = $^8/_3$ Pf.

d) Schluss von dem Stammbruch auf den abgeleiteten Bruch:
$^1/_3$ *U.* = $^8/_3$ Pf.; $^{16}/_3$ *U.* = 16 × $^8/_3$ Pf. = $^{128}/_3$ Pf. = $42^2/_3$ Pf.

3) Resultat. $5^1/_3$ *U.* = $42^2/_3$ Pf.

Anmerkung. Im schriftlichen Rechnen findet die Zusammenziehung erst zum Schluss statt, weil dadurch die Übersichtlichkeit und das Reduciren der Brüche ermöglicht wird.

Dritte Stufe der Anwendung: Das individuelle Coordinatensystem der Zahl tritt in das allgemeine Coordinatensystem der Welt so ein, dass die anzuwendende Species absichtlich versteckt wird.

Gemeint sind die (besonders von Hentschel, Unger und Stubba für die Elementarschule bearbeiteten) algebraischen Aufgaben, die ihre Einkleidung, abgesehen von den Erfahrungskreisen des Kindes, auch gern aus der Physik hernehmen. Denn das Wesen der algebraischen Aufgaben besteht darin, „dass man eine oder mehrere Zahlen, welche zu einer oder mehreren anderen Zahlen in irgend eine Beziehung gesetzt sind, aus dem Ergebniss dieser Beziehung bestimmen soll.“ Wenn man sich z. B. folgende Aufgabe ansieht: „Der Fleischermeister N. kaufte sich eine Menge Ochsen. Die Hälfte der Anzahl gab er auf die Weide, $^1/_3$ zur Mästung, $^1/_{12}$ zur Schlachtung, der Rest wurde verkauft, jeder kostete so viel Rubel, als er überhaupt Ochsen verkaufte und im Ganzen erhielt er so viel Rubel, als er selbst Ochsen gekauft hatte,“ — so merkt man, dass nicht eine einzige anzuwendende Species direct verrathen ist, sondern alles muss aus den Beziehungen der Unbekannten erschlossen werden. Der bildende Werth dieser Aufgaben ist, abgesehen von den anregenden Einkleidungen derselben, für die Beurtheilungskraft des Schülers so gross, dass ein guter Rechenunterricht diese „Lustexempel“ in einer allmählich schwerer werdenden Reihe in alle Lehrstunden hineinstreut. — Da nun eine allmähliche Erschwerung besonders auch durch die Erkennung der Divisionsschlüsse, denen die Multiplicationsschlüsse vorangehen, verursacht wird, so gewinnt man eine beherrschende Übersicht, wenn man die algebraischen Aufgaben zunächst nach den Species gruppirt.

a) Gegeben ist ein der Unbekannten zugezählter Summand und die dadurch erhaltene Summe beider.

b) Gegeben ist ein von der Unbekannten abgezogener Subtrahend und die dadurch erhaltene Differenz.

c) Gegeben ist ein Vielfaches der Unbekannten.

d) Gegeben ist eines der neun Divisionsverhältnisse.

e) Gegeben die Combination aller vorhergehenden Möglichkeiten.

Bei der Auflösung sind alle Regeln und Formeln durchaus zu vermeiden; — jeder Satz, der hier gesprochen wird, nimmt die Form einer streng-logischen Unterhaltung an.

S c h l u s s b e m e r k u n g. Die specielle Vertheilung der Aufgaben ist Sache eines Rechenbuches. Der Unterrichtsplan weist den angegebenen Stufen ihrem pädagogischen Orte nach ihren hier aufgezeigten Deductionsort an. Darnach werden zwar alle Stufen in allen Stufen geübt, allein prävalirend ist die erste Stufe besonders in ihrer ersten Unterstufe im ersten Zahlenraum; die isolirten Regeldetrischlüsse werden prävalirend geübt in dem zweiten Zahlenraum, die dritte Stufe dagegen im dritten Zahlenraum und in der Bruchrechnung, weil hier schon die mechanischen Schwierigkeiten der Operation in den Hintergrund zu treten beginnen. Selbständig wird die erste Stufe in ihrer zweiten Unterstufe erst nach der Behandlung der reinen Zahlen, die zweite wird in der Regeldetri als dem letzten Cursus der Elementarschule zur ausschliesslichen Concentration gelangen, und die Selbständigkeit der algebraischen Aufgaben bleibt in der Gymnasialmathematik zu erwarten.

Dritter Theil.

Construction des Unterrichtsplanes.

Vorbemerkung: Deduction der nothwendigen Abschnitte dieses Theils.

Hier kommt nun das Personalprincip zur Geltung, denn es soll ja eine Anordnung des schon vorliegenden und in seinen methodischen Grundsätzen durchdrungenen Lehrstoffs mit Berücksichtigung des lernenden Subjects stattfinden. Wiewohl daher das Folgende in seinem ganzen Bestand nichts anderes ist, als eine Combination des I. und II. Theils unter dem Gesichtspunkt des Personalprincips, so finden doch hier und da kleine Umwege um die hohe Strenge der deducirenden Begriffe statt, weil eben die practische Erfahrung in der Schule gezeigt hat, dass man wegen der verschiedenen Naturanlagen nicht direct in das Hochland der begrifflichen Postulate hineinkommt. Das ist aber eine ganz analoge Erscheinung, wie sie sich auch sonst in allen Gebieten, wo es sich ums Verhältniss von Wirklichkeit und Ideal handelt, als Klage vorfindet. Weil auch das lernende Subject ferner im Allgemeinen die Hauptpostulate des Unterrichtsplanes in dessen Stoffanordnung überschauen muss, so muss dieser Theil die Nomenclatur der beiden ersten Theile verlassen und sich mehr der Kunstsprache der empirischen Methodik anschliessen. — Nichtsdestoweniger ist der Hintergrund, aus dem die Directiven erwachsen, die in den beiden ersten Theilen erworbenen Erkenntnisse. — Da ein Unterrichtsplan aber construirt werden soll, so handelt es sich nun nicht mehr um die Vermittelung jedes methodischen Satzes, sondern kurze methodische Andeutungen, die sich gleich als durch das Vorhergehende gegeben verrathen, werden genügen. Das Hauptgewicht liegt hier im ideellen Sein. Es kommt auf eine lückenlose Angabe der Rechenfunctionen an, die nach der Reihe zu erfolgen haben bis zur letzten elementaren Function, die alle die vorhergehenden voraussetzt und ohne diese nicht vollzogen werden kann. Und wenn nun diese Anforderung in erster Reihe auf die Operationen mit reinen Zahlen geht, so muss doch Ähnliches auch mit den angewandten stattfinden, da ja das lernende Subject nicht gleich complicirte Verhältnisse überschauen kann, sondern stets nach den alten pädagogischen Sätzen: „Vom Einfachen zum Zusammengesetzten,“ „Vom Bekannten zum Unbekannten,“ Vom Leichten zum Schweren,“ behandelt werden muss. Kenntnisse im Rechnen werden nicht vorausgesetzt, höchstens die Zahlennamen von 1—10. Unberücksichtigt bleibt das bestimmt angegebene Alter des Lernenden, die Dauer des Cursus und die Classeneintheilung, denn die Einschnitte, die der Unterrichtsstoff durch diese Gesichtspunkte erleiden würde, sind in jeder Schule andere. Was aber überall gilt, ist die lückenlose Anordnung des Stoffs nach den drei angegebenen Sätzen. — Darnach muss sich nun die Reihe der vorhergehenden beiden Theile umkehren. Denn, da das Kind, wenn es überhaupt etwas kennt, nur angewandte Zahlen kennt, so muss mit benannten Zahlen begonnen werden, und da die mehrfach benannten Zahlen die Behandlung der reinen Operationen schon voraussetzen, so müssen in einem ersten Cursus die ganzen Zahlen so behandelt werden, dass das zweite Hauptstück die mehrfach benannten und das erste zwar die Operationen mit reinen Zahlen, doch in ihrer beständig erfolgenden Anwendung als einfach benannte Grössen zur Lehre bringt. Ebenfalls mit Betonung der Anwendung wird hiernach ein im ersten Cursus allseitig verbreiteter zweiter Cursus die Bruchzahlenreihe zur Erkenntniss vermitteln. — Bis dahin handelte es sich aber doch noch mehr um das Wie? der Operationen, dann um alle zerstreuten Elemente des Wann? der anzuwendenden Operationen zu sammeln und alle Beurtheilungskraft allein auf die Anwendung zu concentriren, fordert der Unterrichtsplan in einem dritten Cursus die Lehre von der Anwendung ganzer Zahlen und der Brüche.

Erster Cursus:

Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

Erstes Hauptstück:

Unbenannte und einnamige ganze Zahlen.

Erster Zahlenbereich: 1 — 10.

Vorbereitende Lehren.

Mündliches Rechnen.		Schriftliches Rechnen.	
Unterrichts-Stoff.	Unterrichts-Methode.	Stoff.	Methode.
I. Veranschaulichung der Zahlen von 1—10. 1. An der Strichgruppe: | || ||| |||| ||||| u. s. w. 2. An den Fingern, demRechenbrett, den Kindern selbst, Hölzchen u. s. w.	1. a) Der Lehrer zeichnet die Strichgruppe an die Wandtafel, die Kinder sprechen: Da ist ein Strich, 1 Str. und noch 1 Str. = 2 Striche, ... bis 9 St. + 1 St. = 10 St. 1. b) Die Kinder zeichnen und sprechen. 1. c) Der Lehrer fragt ausser der Zahlenreihefolge: Wo sind 4, 7 u. s. w. Striche. 2. L.: Johann hebe 7 Finger auf u. s. w.	I. Zeichnen der Strichgruppe. 1. Nach einer vorgezeichneten Strichgruppe. 2. Aus dem Kopf. 3. Zeichnung von anderen veranschaulichenden Zeichen ✕✕; □ etc.	Die Methode ist durch die Kalligraphiemethode vorgeschrieben, und nur durch grosse Energie ist hier etwas zu erreichen.
II. Einübung der Zahlenreihe. 1. Vorwärtszählen: a) anschaulich. b) begrifflich. 2. Rückwärtszählen: a) anschaulich. b) begrifflich.	1. a) Die Kinder zeigen und zählen: 1 Strich, 2 Striche, 3 Str., ... 10 Striche, 1. b) Die Kinder kehren der Wandtafel den Rücken und sprechen: 1, 2, 3, 4 ...... 10. 2. a) Die Kinder zeigen und zählen: 10 Striche, 9 Str., ... 1 Strich. 2. b) 10, 9, 8, ... 1.	II. Zifferlehre. 1. Zifferschreiben mit nebenstehender Strichgruppe, z. B. 5 = |||||	Die Reihe der einzuübenden Ziffern geht von den leich-

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	Methode.	Stoff.	Methode.
III. Befestigende Fragen aus I und II durch Heranziehung der dem Kinde sonst noch bekannten Lebenskreise.	Beispiele: 1. Wie viele Schläge hörtest du die Uhr eben schlagen? 2. Zwischen welchen Zahlen befindet sich 8, 9?	2. Zifferschreiben allein.	teren zu schwereren Zeichen, also: a) 1, 4, 7 b) 2, 3, 5 c) 0, 6, 9 d) 8. —

Erster Schritt: Addition und Subtraction.

Vorbemerkung. Jede Zahl erfährt eine specielle Behandlung nach folgendem Muster: 1. Veranschaulichung. 2. Stand der Zahl in der Zahlenreihe. 3. Zerlegung. 4. Addition. 5. Subtraction. 6. Vergleichungen: 5 ist kleiner als 10. 7. Anwendung.

I. Durcharbeitung jeder einzelnen Zahl von 1—10. a. Zerlegung: a) anschaulich. b) begrifflich. b. Addition: a) anschaulich. b) begrifflich. c. Subtraction: a) anschaulich. b) begrifflich.	Beispiel. a) Anschaulich: L.: Nehmt jeder 7 Hölzchen in die Hand. L.: Stellt nun 1 Hölzchen besonders, so seht ihr 7 = 6 + 1. Also sprecht: 7 = 6 + 1. L.: Schiebt nun das eine Hölzchen zu den 6 6 + 1 = 7. L.: Nehmt das eine Hölzchen fort : 7 — 1 = 6. So mit jeder Zerlegung. b) Begrifflich: Von 7 Äpfeln nehmt 5 Äpfel fort, wieviele bleiben übrig?	I. Zifferschreiben. II. Zerlegungen allein. III. Zerlegungen und Additionen. IV. Additionen allein. V. Zerlegungen und Subtractionen.	Beispiele. 4, 4, 4, . . . 9 = 8 + 1 = 7 + 2 u. s. w 9=8+1, 8+1=9. 9=7+2, 7+2=9. 2 + 1 = 3 2 + 2 = 4 2 + 3 = 5 2 + 4 = 6. 9=8+1, 9—1=8.
II. Befestigende Übungen durch Heranziehung von speciellen Anwendungen und Repetitionen.	1. Reine Zahlen. Übung a) Addition. Jede Zahl zu jeder Zahl, so dass die Summe nicht über 10 geht. Übung b) Subtraction. Jede Zahl von jeder Zahl. Übung c) Zerlegung. Üebung d) Vergleichung und Verbindung. 2. Angewandte Zahlen. Von 10 Schafen entlaufen 2, es bleiben?	VI. Subtractionen allein. VII. Verbindung von IV und VI. VIII. Complicirte Zerlegungen.	9 — 1 = 8 9 — 2 = 7. 6 — 2 + 3 = 7. 8 = 6 + 1 + 1 8 = 5 + 1 + 2 u. s. w.

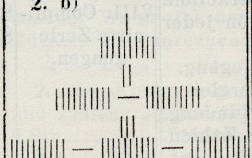
Zweiter Schritt: Multiplication und Messung.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	**Methode.**	**Stoff.**	**Methode.**
I. Durcharbeitung jeder einzelnen Zahl: a) anschaulich. b) begrifflich. a. Zerlegung. b. Multiplication. c. Messung.	Beispiel. a) Anschaulich: a) ||—||—|| = 6 = 3×2 b) 3×2 = 6 c) in 6 Strichen sind 2 Striche 3 mal enthalten. b) Ohne Anschauung: 3×2 = ? 4×2 = ?	I. Additionen von gleichen Summanden. II. Subtractionen mit je gleichen Subtrahenden III. Zerlegungen allein. IV. Multiplicationen und Zerlegungen.	Beispiele. 2 + 2 = 4 2 + 2 + 2 = 6 2 + 2 + 2 + 2 = 8. 6 — 2 — 2 — 2 = 0. 6 = 3 × 2 6 = 2 × 3. 6 = 3 × 2, 3 × 2 = 6.
II. Befestigende Fragen.	a) Reine Zahlen. Multiplication und Division jeder hier möglichen Zahl mit jeder — in Reihen: 10 : 1 = 10 10 : 2 = 5 10 : 5 = 2 10 : 10 = 1. b) Angewandt. Eine Gans hat 2 Flügel, 5 Gänse = ?	V. Multiplicationen allein. VI. Zerlegungen und Messungen. VII. Messungen allein. VIII. Repetitionen der 4 Species.	1 × 6 = 6 2 × 3 = 6. 6 = 3 × 2, 6 : 3 = 2. 6 : 6 = 1 6 : 2 = 3. 2 + 4 — 6 + 2 × 3 : 2 = ?

Anmerk. Alles geschieht in beliebig zu verlängernden Reihen.

Zweiter Zahlenbereich: 1—100.

Vorbereitende Lehren.

I. Veranschaulichung der Zahlen. 1. Der reinen Zehner: a) an den Fingern. b) an d. Strichgruppe.	1. a) L.: Johann hebe 10 Finger in die Höhe, Peter auch, jetzt sind es 2 Zehner. 2. b)  Zeigt 25 Striche etc.	I. Schreiben der Zahlenreihe. 1. Nach der Reihe: a) vorwärts. b) rückwärts.	Beispiele. 1, 2, 3, bis x. 100, 99, . . 1.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	Methode.	Stoff.	Methode.
2. Der gemischten Zehner: a) an d. Strichgruppe. b) mit Hilfe des Rechenbretts.	1. a) Zählt von 1—100, von 100—1. b) von 20—70, „ 70—20.	2. Mit Auslassungen: a) vorwärts. b) rückwärts.	Intervall 4. 1, 5, 10 etc. 100, 95 . . 1.
II. Einübung der Zahlenreihe: 1. nach der Reihe. 2. mit Auslassung.	2. a) Zählt von 1—100, von 100—1 mit Auslassung von 5 Intervallen. b) von 20—70, „ 70—20 mit Auslassung von 5.	II. Zerlegungen und Zusammenfassungen.	25 = 20 + 5 20 = 20 + 6 etc. 20 + 3 = 23 20 + 4 = 24.
III. Zerlegungen.	Zerlegt alle Zahlen von 11—70: 11 = 10 + 1 12 = 10 + 2.		

Erster Schritt: Addition.

Es kommen zur Addition: I. Reine Zehner und reine Zehner. 1. Reine Zahlen 50 + 30. 2. Angewandte Zahlen.	Zu üben in Gegenüberstellung zu den Einern. 5 + 3 = 8; 5 Zehner + 3 Zehner = 8 Zehner.	I. Genau die Reihenfolge der mündlichen Übungen.	Form: 5 + 6 = 11.
II. Reine Zehner und Einer. 1. Reine Zahlen 20 + 7. 2. Angewandte Zahlen.	Zu veranschaulichen am Rechenbrett.	II. Vorbereitungen zur Multiplication.	Form: 5 + 5 = 5 + 5 + 5 = 5 + 5 + 5 + 5 =
III. Gemischte Zehner und Einer ohne Durchgang 1. 34 + 5. 2. conf. II.	34 = 30 + 4 4 + 5 = 9 30 + 9 = 39.		
IV. Reine Zehner u. gemischte Zehner. 1. 50 + 36. 2. conf. II.	36 = 30 + 6 30 + 50 = 80 80 + 6 = 86.		
V. Gemischte Zehner u. gemischte Zehner ohne Durchgang 1. 24 + 25. 2. conf. II.	24 = 20 + 4 25 = 20 + 5 20 + 20 = 40 4 + 5 = 9 40 + 9 = 49.		

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	**Methode.**	**Stoff.**	**Methode.**
VI. Eins und eins 1. $2 + 9$. 2. conf. II.	$9 + 1 = 10$ $10 + 1 = 11$.	III. Einübung der bleibenden schriftlichen Form der Addition.	Form: 51 26 19 96 1. Erklärende Auflösung: 1 E. + 6 E. = 7 E. 7 E. + 9 E. = 16 E. oder 6 Einer und 1 Z. 1 Z. + 5 Z. = 6 Z., + 2 Z. = 8 Z., + 1 Z. = 9 Z. 2. Rasche Auflöseweise: $6 + 1 = 7$ etc.
VII. Gemischte Zehner und Einer mit Durchgang 1. $15 + 9$. 2. conf. II.	$15 + 5 = 20$ $20 + 4 = 24$.		
VIII. Gemischte Zehner und gemischte Zehner mit Durchgang 1. $24 + 39$. 2. conf. II.	$24 = 20 + 4$ $39 = 30 + 9$ $30 + 20 = 50$ $9 + 4 = 13$ $50 + 13 = 63$.		

Zweiter Schritt: Subtraction.

Es kommen zur Subtraction:	Einzuüben durch Veranschaulichung.	I. Genau die Reihenfolge der mündlichen Übungen.	Form: $15 - 2 = 13$.
I. Reine Zehner von reinen Zehnern. 1. Reine Zahlen 50—30. 2. Angew. Zahlen.			
II. a) Einer von reinen Zehnern 1. $30 - 5$. 2. conf I.		II. Vorbereitungen zur Division,	Form: 18—2—2—2—2 =
II. b) Gemischte Zehner von reinen 1. $50 - 25$. 2. conf. I.	$50 - 20 = 30$ $30 - 5 = 25$		
III. Einer von gemischten Zehnern ohne Durchgang 1. $69 - 7$. 2. conf. I.	Zu veranschaulichen.		
IV. Reine Zehner von gemischten Zehnern 1. $69 - 20$. 2. conf. I.	$69 - 9 = 60$ $60 - 10 = 50$ $50 - 1 = 49$.		

Mündlich. Stoff.	Mündlich. Methode.	Schriftlich. Stoff.	Schriftlich. Methode.
V. Gemischte Zehner von gemischten Zehnern ohne Durchgang 1. 58 — 23. 2. conf. I.	58 — 20 = 38 38 — 3 = 35.	III. Einübung der bleibenden schriftlichen Form der Subtraction.	Form: 36 — 19 17 1. Erklärung des sogenannten Borgens durch Zerlegung. 2. Rasche Auflöseweise ohne Nennung der decadischen Stellennamen.
VI. Einsvoneins 1. 12 — 9. 2. conf. I.	12 — 2 = 10 10 — 7 = 3.		
VII. Einer von gemischten Zehnern mit Durchgang 1. 27 — 9. 2. conf. I.	27 — 7 = 20 20 — 2 = 18.		
VIII. Gemischte Zehner von gemischten Zehnern mit Durchgang 1. 74 — 68. 2. conf. I.	74 — 64 = 10 10 — 4 = 6.		

Dritter Schritt: Multiplication und die aus dem Einmaleins folgenden Divisionen.

I. Das Einmaleins und Einsineins. 1. Veranschaulichung. 2. Einübung. 1) Tafel der Null 2) „ der Eins 3) „ der Zehn 4) „ der Fünf 5) „ der Zwei 6) „ der Vier 7) „ der Drei 8) „ der Sechs 9) „ der Neun 10) „ der Sieben 3. Anwendung: Schluss von der Einheit auf d. Mehrheit: Wenn 1 ℳ 25 Pfennige kostet, wieviel kosten 3 ℳ?	1. Z. B. 3 × 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 Hier werden folgende Sätze angeschaut u. auswendig gelernt: 3 × 4 = 12 4 × 3 = 12 1 × 12 = 12 12 × 1 = 12 12 : 4 = 3 12 : 3 = 4 12 : 1 = 12 12 : 12 = 1. 2. Zu üben: a) nach der Reihe vorwärts und rückwärts und mit stetem Anschluss der Messung. b) Mit Überspringungen. c) Die Reihe der Producte. 3. 3 = 3 × 1, also 3 ℳ = 3 × 25 Pf. = 75 Pf.	I. Das vielfach variirte Aufschreiben des Einmaleins und des Einsineins: a) nach der Reihe. b) mit Überspringungen und jede von beiden Übungen: 1. verbunden. 2. isolirt.	Form: 1 × 2 = 2 2 × 2 = 4 3 × 2 = 6. 2 : 2 = 1 4 : 2 = 2 6 : 2 = 3. etc. Anm. Diese Übungen gehen durch den Unterricht eines halben Jahres hindurch.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	Methode.	Stoff.	Methode.
II. Multiplicationen, deren Producte nicht aus den Factoren des Einmaleins bestehen. 1. Reine Zahlen. Erste Gruppe: der Multiplicator einstellig a) 4 × 20 b) 4 × 12.	1. Es muss alles erst am Rechenbrett veranschaulicht werden. Darauf werden Multiplicationen mit reinen Zehnern als Mltplc. u. Einern als Mltpltr. gegenüber den analogen Übungen im I. Zahlenbereich vorgenommen: a) 4×2 E. = 8 E., also 4×2 Z. = 8 Z. = 80 E. b) 4×10 = 40 4×2 = 8 40 + 8 = 48.	II. Einübung der bleibenden schriftlichen Form der Multiplication. Anm. Das Product soll selbstverständlich nur selten über 100 gehen.	Form: $\begin{array}{r} 23 \\ \times 4 \\ \hline 92 \end{array}$ 1. Die erklärende Auflöseweise: 4 × 3 E. = 12 E. = 2 E. + 1 Z. 4 × 2 Z. = 8 Z. 8 Z. + 1 Z. = 9 Z. = 92. 2. Die rasche Auflöseweise lässt die Stellen ohne Benennung und achtet nur auf den richtigen Ort der Hinschreibung der Ziffer.
Zweite Gruppe: der Multiplicator zweistellig a) 20 × 4 b) 12 × 4.	Zu veranschaulichen: 20×4 = 4×20.		
2. Angewandte Zahlen: Schluss von der Einheit auf die Mehrheit.	2. a) Erklärende Auflöseweise mit Veranschaulichung oder Addition: z. B. 1 ℔ = 14 Kop. 5 ℔ = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 70 Kop. 2. b. Rasche Auflöseweise: 1 ℔ = 14 Pf. 5 ℔ = 5×14 = 70 Pf.		

Vierter Schritt: Division.

Erstes Lehrstück: Messung.

a) Reine Zahlen. I. Messung der Stationen, d. h. der Einmaleinsproducte: 1. anschaulich. 2. auswendig. B. 15 : 5 = 3.	a) 1 u. 2. Genau wie im dritten Schritt, nur isolirt von der Multiplication.	I. Reihenbildungen: a) Miss jede Zahl von 5—100 mit 5!	Form: 5 | 5 = 1 5 | 6 = 1 R. 1 5 | 7 = 1 R. 2 etc.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	**Methode.**	**Stoff.**	**Methode.**
II. Messung der Zahlen, die sich zwischen den Stationen befinden: 1. anschaulich. 2. auswendig. B. 27 : 5 = 5 R. 2. III. Messung der Zahlen, die über die Stationen hinausgehen. B. 53 : 5 = 10 R. 3. b) Angewandte Zahlen. Übung des Reducirens 500 Kop. = ? Rubel.	1. 7 : 5 = 1 R. 2 ||||| — || 2. 27 = 25 + 2 25 : 5 = 5 also 5 R. 2. 53 = 50 + 3 50 : 5 = 10, also 10 R. 3. b) 100 Kop. = 1 R., so viel mal also 100 in 500 enthalten ist, so viel Rubel sind in 500 Kop. = 5 Rubel.	b) Miss jede fünfte Zahl von 5—100 mit 5 u. s. w. II. Einübung der bleibenden schriftlichen Form der Messung.	5 : 5 = 1 10 : 5 = 2 etc. 25 | 76 | 3 75 1 1. Erklärende, 2. Rasche Auflöseweise.

Zweites Lehrstück: Theilung.

Einleitung. 1. Der Unterschied zwischen Messung und Theilung.

a) Anschaulich: 10 : 5 = 2 ||||| — |||||

$^1/_5$ von 10 = 2 || — || — || — || — ||

b) Begrifflich: Die Messung sucht den Multiplicator, die Theilung den Multiplicandus.

a) Reine Zahlen. | 2. Übung der Theilung gegenüber der Messung: 3 in 15 = 5; $^1/_3$ von 15 = 5 etc.

I, II, III Genau wie bei der Messung.	a) Genau wie bei der Messung, nur dass auch schon Vorübungen zur Bruchrechnung aufgenommen werden können: $^1/_5$ von 7 = $5^2/_7$.	I und II Genau wie bei der Messung, nur sollen auch die Reste getheilt werden.	Form I: $^1/_5$ von 17 = $5^2/_7$ etc. Form II: Genau wie bei der Messung.
b) Angewandte Zahlen. Uebung des wichtigen Schlusses von der Mehrheit auf die Einheit: 5 ℔ = 75 Pf. 1 ℔ = ?	b) Die 75 Pf. müssen in 5 gleiche Theile zerlegt werden: 75 = 50 + 25. $^1/_5$ von 50 = 10; $^1/_5$ von 25 = 5. Zs.: 15.		

Schluss des zweiten Zahlenbereichs: Repetitionen und neue Perspectiven.

Erste Gruppe: Veranschaulichungen.

Zweite Gruppe: Verbindungen der Species a) reine b) angewandte Zahlen.

Dritte Gruppe: Vergleichungen der Zahlen unter einander

a) vermittelst der Subtraction,

b) vermittelst der Division.

Vierte Gruppe: Die übrigen Divisionsfragen.

1) Die Findung des Masses und des Theilers.

2) Die Findung des zu Messenden und des zu Theilenden.

Fünfte Gruppe: Rechnen von algebraischen Aufgaben nach elementarer Methode.

Dritter Zahlenbereich: 1—1000 und bis ins Unendliche.

Vorbereitende Lehren.

I. Bekanntschaft mit der Zahlenreihe.

1. Vorwärtszählen bis 1000 und Rückwärtszählen:
   a) nach Hunderten,
   b) nach Zehnern.

2. Befestigende Fragen:
   a) Zählen von gegebenen Zahlen ab mit und ohne Überspringungen.
   b) Zerlegungen: 124 = 100 + 20 + 4.
   c) Zusammensetzungen: 100 + 20 + 4 = 124.
   d) Verwandlungen: 200 Einer = 20 Zehner, = 2 H.

Anmerkung. Genau so wird die Bekanntschaft mit der Zahlenreihe bis zur Million vermittelt.

II. Übergang zum Schriftlichen.

Erste Übung: Verhältnissbestimmung der decadischen Stellenwerthe.

1 Million = 10 Hunderttausend,
1 Hunderttausend = 10 Zt.
1 Zt. = 10 T. etc.
und umgekehrt.

Zweite Übung: Einübung der decadischen Stellennamen.

Dritte Übung: Zusammenfassung von je drei decadischen Einheiten zu einer Einheit behufs des Numerirens, Z. B. 3 Ht. + 2 Zt. + 3 T. = 324 Tausender etc.

III. Das sogenannte Numeriren.

Erste Übung: Das Lesen aufgeschriebener Zahlen von den Einern ab mit der Hinzunahme von je einer decadischen Stelle bis etwa zur Million.

Zweite Übung: Das Aufzeichnen dictirter Zahlen.

a) Mit Hilfe des Rechenbrettes.

b) Mit Benutzung der Hilfstafel, in der die Stellen schon vorher bezeichnet sind.

c) Mit Benutzung der Kommata: 5′763,304.

d) Ohne Hilfsmittel: 5763304.

Schlussübung: 1. Das Aufschreiben und Lesen grösserer Zahlen: 5‴763,724″743,455′734,416.

2. Die Schreibung der Decimalbrüche, wenn sie zum Elementarcursus gerechnet werden.

Anmerkung. Die annähernde Vorstellung von Millionen und Billionen muss durch Vertheilung derselben auf Räume und Zeiten erweckt werden. Z. B. Die Kanonenkugel, die in der Sekunde 60 Fuss zurücklegt, braucht 25 Jahre um 20 Millionen Meilen zu durcheilen.

Erster Schritt: Addition.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	**Methode.**	**Stoff.**	**Methode.**
Zur Addition kommen:	500 + 4 500 + 24 } Conf. Einl.	I. Additionen ohne Durchgang:	Form: 956234 78947 5643 Summenort.
a) Die reinen Zahlen	315 = 300 + 15 300 + 500 = 800 800 + 15 = 815.	a) reine, b) angew. Zahlen.	
I. ohne Durchgang: 1. der eine Summand hat 1, der andere 1, 2, 3 geltende Stellen: 500 + 4, + 24, + 315.		II. Additionen mit Durchgang: a) reine, b) angew. Zahlen.	1. Die erklärende Auflöseweise nennt die Stellennamen.
2. Der eine S. hat 2, der andere 1, 2, 3 geltende Stellen: 540 + 424.	500 + 400 = 900 40 + 24 = 64 900 + 64 = 964.		2. Die rasche Auflöseweise behandelt alle Stellen wie Einer, nur wird
3. Der eine S. hat 3, der andere 1, 2, 3 geltende Stellen: 535 + 424.	500 + 400 = 900 30 + 20 = 50 5 + 4 = 9 900 + 59 = 959.		3. beim Schreiben das Gesetz: „Gleichnamiges stehe unter Gleichnamigem", im Auge behalten.
II. Mit Durchgang:			
1. Der eine S. zweistellig, der andere 1- oder 2-stellig: 98 + 9.	98 + 2 = 100 100 + 7 = 107.		
2. Der eine S. dreistellig, der andere 1, 2, oder 3-stellig: 299 + 9; 999 + 611,	299 + 1 = 300 300 + 8 = 308. 999 + 1 = 1000 1000 + 610 = 1610.		
b) Die angewandten Zahlen.	115 Fr. + 3 Fr. = 118 Fr.		

Zweiter Schritt: Subtraction.

Mündlich.		Schriftlich.	
Stoff.	**Methode.**	**Stoff.**	**Methode.**
Zur Subtraction kommen: a) Reine Zahlen. I. Subtractionen ohne Durchgang:		I. Subtractionen ohne Zerlegung: a) reine, b) angew. Zahlen.	Form: 573402 196793 Differenz.
1. Der Minuend hat 1 geltende Stelle, der Subtrahend 1, 2 oder 3 geltende Stellen: 500 — 424.	500 — 400 = 100 100 — 20 = 80. 80 — 4 = 76.	II. Subtractionen mit Zerlegung a) reine, b) angew. Zahlen.	1. Die erklärende Auflöseweise hält sich an den decadischen Stellennamen 2. die rasche behandelt alle Stellen wie Einer, nur wird 3. beim Schreiben das Gesetz: „Gleichnamiges unter Gleichnamigem“ im Auge behalten.
2. Der M. hat 2 geltende Stellen, der S. 1, 2, 3: 540 — 424.	540 — 400 = 140 140 — 20 = 120 120 — 4 = 116.		
3. Der M. hat 3 geltende Stellen, der S. 1, 2, 3: 535 — 213.	535 — 200 = 335 335 — 13 = 322.		
II. Subtractionen mit Durchgang: 1. Der S. hat 1 geltende Stelle: 104 — 8 954 — 60	104 — 4 = 100 100 — 4 = 96 954 — 54 = 900 900 — 6 = 894.		
2. Der S. hat 2 oder 3 geltende Stellen: 104 — 88 954 — 899.	104 — 4 = 100 100 — 80 = 20 20 — 4 = 16. 954 — 900 = 54 54 + 1 = 55.		
b) Angewandte Zahlen.	Anm. Jede angegebene Gruppe lässt eine bestimmte Anzahl von Fällen zu, die leicht abzuleiten sind nach den Directiven des principiellen Theils.		

Dritter Schritt: Multiplication und Messung der grossen Stationen.

1. Reine Zahlen. I. Jeder Factor hat eine geltende Stelle. 1. Der Multiplicandus ist 10 oder eine Potenz, oder Vielfaches von 10, der Multiplicator jede Grundzahl von 1—9. a) 7 × 10, 100, 1000 b) 7 × 10, 200, 2000 u. s. w.	1. Die Veranschaulichung geschieht durch Addition: 7 × 200 = 200 + 200 + 200 etc. 2. wird auf 1. zurückgeführt. Die Hauptsache ist die Erfassung der mehrstelligen Vielfachen von	I. Die Bildung der grossen Stationen mit den zugehörigen Multiplicationen und Messungen.	a) Schreibt die grossen Stationen von den Grundzahlen auf. z. B. von 9 90, 180, 270 etc. 6) Bildet die grossen Stationen von 8: 10 × 8 = 80 10 × 16 = 160 10 × 24 = 240.

<table>
<tr><th colspan="2">Mündlich.</th><th colspan="2">Schriftlich.</th></tr>
<tr><th>Stoff.</th><th>Methode.</th><th>Stoff.</th><th>Methode.</th></tr>
<tr><td>2. Der Multiplicator ist 10 oder ein Vielfaches von 10, der Multiplicandus jede Zahl von 1—9.
a) 10, 100, 1000 $\times$ 7
b) 20, 200, 2000 $\times$ 7.</td><td>10, als ob sie in den I. Zahlenraum hineingehörten.</td><td>II. Der Multiplicator einstellig:
a) reine.
b) angew. Zahlen.</td><td>c) Messt die grossen Stationen von 7 mit den Grundzahlen:
$70 : 7 = 10$
$140 : 7 = 20.$</td></tr>
<tr><td>3. Jeder Factor ist 10 oder ein Vielfaches von 10.
a) Multiplication d. Potenzen von 10.
b) Multiplication anderer Vielfachen von 10.
z. B. 300 $\times$ 400.</td><td>Auflösung von b:
300×400
$3 \times 4 = 12$
$3 \times 40 = 10 \times 12 = 120$
$3 \times 400 = 10 \times 120$
$= 1200$
$30 \times 400 = 10 \times 1200$
$= 12000$
$300 \times 400 = 10 \times 12000$
$= 120000$</td><td>III. Der Multiplicator mehrstellig:
a) reine.
b) angew. Zahlen.</td><td>Form:
24563
$\times$ 42
49126
98252
1031646
1. Die erklärende Auflöseweise nennt die decadischen Stellen,
2. die rasche sieht von diesen beim Sprechen ab,
3. nicht aber beim Schreiben.</td></tr>
<tr><td>II. Der eine Factor hat eine geltende Stelle.
1. Der Multiplicator.
2. Der Multiplicandus hat 1 geltende Stelle:
3 $\times$ 62. 62 $\times$ 3.</td><td>3×62
$3 \times 6 = 18$
$3 \times 60 = 180$
$3 \times 2 = 6$
$180 + 6 = 186.$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Anm. Hier ist eine sehr wichtige Sache die Einübung der grossen Stationen d. h. der mit 10 multiplicirten kleinen z. B. 20, 40, 60 etc.; $20 : 2 = 10$, $40 : 2 = 20$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Mündlich.</th></tr>
<tr><th>Stoff.</th><th>Methode.</th></tr>
<tr><td>III. Jeder Factor hat 2 geltende Stellen:
a) 15 $\times$ 16
b) 25 $\times$ 83
c) 99 $\times$ 75.</td><td>a) $10 \times 16 = 160$
$5 \times 16 = 80$
$160 + 80 = 240.$
Anm. Man zerlege nur einen Factor.
$25 \times 83 = 100 \times 83 = 8300 : 4 = 1675$
$99 \times 75 = 100 \times 75 = 7500 - 75 = 7425$</td></tr>
<tr><td>2. Angewandte Zahlen.
1. Resolvirung. 15 L℔ = ? ℔</td><td>1. 1 L℔ = 20 ℔
15 „ = 15 $\times$ 20 = 300 ℔</td></tr>
<tr><td>2. Andere eingekleidete Aufgaben:
1 ℔ Butter = 80 Pfennige.
70 L℔ „ = ? „
Anm. Als das eine Glied der Regeldetri ist diese Übung sehr wichtig.</td><td>2. 1 L℔ = 20 ℔ also:
70 „ = 70 $\times$ 20 ℔ = 1400 ℔
1 ℔ = 80 Pf.
1400 ℔ = 1400 $\times$ 80 Pf. = ?</td></tr>
</table>

Vierter Schritt: Division.

Vier vorbereitende Lehren.

An Beispielen müssen folgende Sätze eingesehen werden:

1. In dem Verhältniss als der Divisor durch Multiplication vergrössert oder durch Division verkleinert wird, in demselben Verhältniss fällt oder steigt der Quotient bei übrigens unverändert bleibendem Dividendus.

2. In dem Verhältniss als bei gleichbleibendem Divisor der Dividendus durch Multiplication oder Division zu- oder abnimmt, in demselben Verhältniss nimmt auch der Quotient zu oder ab.

3. Wenn Divisor und Dividendus mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so bleibt der Quotient unverändert.

4. Eine Zahl ist ohne Rest nur in ihrem eignen Vielfachen enthalten und in sich selbst.

Anmerkung. Die Sätze werden am besten an kleinen Zahlen eingeübt.

Erstes Lehrstück: Messung.

Mündlich.		Schriftlich: Messung.	
Stoff.	Methode.	Stoff.	Methode.
Es kommen zur Division: a) Reine Zahlen. I. Messungen ohne Reste. 1. Das Mass = Divisor jede Grundzahl: 560 : 4. 2) Der Divisor jede andere zwei- od. dreistellige Zahl: 560 : 40. II. Messungen mit Resten. 1. Der Divisor jede Grundzahl: 1000 : 9. 2. Der Divisor jede andere zwei- od. dreistellige Zahl: 489 : 24. b) Angewandte Zahlen, besonders Reductionsübungen.	Hier ist die Hauptsache die richtige Zerlegung: 560 = 400 + 160 400 : 4 = 100 160 : 4 = 40 100 + 40 = 140. 560 = 400 + 160 400 : 40 = 10 160 : 40 = 4 10 + 4 = 14. 1000 = 999 + 1 999 : 9 = 111, also 111 R. 1. 489 = 480 + 9 480 : 24 = 20, also 20 R. 9.	Das Bedeutendste, was der elementare Rechenunterricht überhaupt (hier) zu erreichen hat, ist die Fähigkeit des raschen und fehlerlosen Dividirens. Um nun die Operation concreter zu fassen, muss der Dividendus in jedem einzelnen Gliede, das getheilt wird, so auch der Quotient einen bestimmten Namen haben, daher muss schriftlich mit der Theilung begonnen werden. Die Schwierigkeiten entstehen hier durch die Bestimmung des Quotienten, der ist aber um so schwerer zu bestimmen, je entfernter der Divisor von den Grundzahlen ist, da ja die Divisionen mit den Grundzahlen durch das Einmaleins auswendig gekannt werden, also ist der nächste Eintheilungsgrund: der ein- und mehrstellige Divisor, bei dem mehrstelligen Divisor aber muss	

Zweites Lehrsfück: Theilung.

Genau dieselbe Reihenfolge und Eintheilung wie bei der Messung.	Genau dieselbe Zerlegung der Dividenden wie bei den Messungen, nur dass auch die Reste noch getheilt werden, was eine specielle Vorübung zur Bruchrechnung ist.	man fragen, welcher reine Zehner, Hunderter oder Tausender ihm am nächsten ist, denn darnach wird sich der Quotient richten. Endlich ist die erklärende Auflöseweise, die so wenigen überhaupt bekannt ist, viel zu üben, wobei sehr scharf auf die decadischen Stellennenner, wie besonders auf die Verschiedenheit des Ausgangs bei der Theilungs- und Messungs-Multiplication zu halten ist.

Drittes Lehrstück: Specielle Anwendung der Messung und Theilung resp. der Multiplication behufs der Vorbereitung zur Bruchrechnung.

Vorbereitende Lehren.

Folgende 4 Lehren müssen an kleinen Zahlen eingeübt werden:

1. Jede Zahl theilt jede solche Zahl ohne Bruch, in der sie selbst Factor ist.

2. Eine Zahl, die eine andere Zahl ohne Rest theilt, theilt auch deren Vielfaches ohne Rest.

Anmerkung. Die Methode giebt sich selbst an die Hand. Z. B. 7 ist vollkommen in 14 enthalten, aber auch in 28, 42, 56, 70, 84 nicht aber in 29, 43, 53, 72, 85, denn die erste Reihe enthält lauter Vielfache von 14, die zweite keine.

3. Eine Zahl, die gegebene andere Zahlen vollkommen theilt, theilt auch deren Summe vollkommen.

4. Eine Zahl, die zwei gegebene Zahlen vollkommen theilt, theilt auch deren Differenz vollkommen, d. h. so, dass der Quotient eine ganze Zahl wird.

Erste Übung: Kennzeichen der Theilbarkeit.

1. Stoff: Zu lehren sind die Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 4, 8; 5, 10; 3, 9, 6; 11; denn die anderen Zahlen haben sehr complicirte Kennzeichen.
2. In der Methode sind alle Gründe aus dem Bau der Zahlenreihe abzuleiten, wie man das Nöthige in jedem Rechenbuch nachlesen kann.

Zweite Übung: Die Primfactoren.

1. Stoff: Zu zerlegen sind alle Zahlen von 1—100, von den grösseren aber nur einige.
2. Die Methode besteht in der Anwendung der ersten Übung auf die zweite, die Gründe aber folgen aus den vorbereitenden Lehren.

Dritte Übung: Der grösste gemeinschaftliche Divisor.

1. Stoff: Gegeben sind je 2, 3 oder 4 Zahlen.
2. Methode besteht in der Kettendivision, Begründung in den vorbereitenden Lehren.

Vierte Übung: Der kleinste gemeinschaftliche Dividendus.

1. Stoff: Gegeben sind 2 oder mehrere Zahlen.
2. Methode: Die gewöhnliche Form.

Schlussübungen.

1. Die Proben der 4 Species.
2. Repetition aller durchgenommenen Lehren angeknüpft an algebraische Aufgaben.

Schlussbemerkung. Völlig durchgearbeitet ist nun das Gebiet der ganzen Zahlen und zwar insbesondere sofern sie unbenannt waren, die benannten Zahlen haben eine bedeutende Vorbereitung in den Reductions- und Resolutionsübungen erhalten, den Übergang zu den gewöhnlichen Brüchen bildeten die Theilungsübungen, die Decimalbrüche, sofern sie überhaupt zum Elementarcursus gerechnet werden sollen, beginnen bei dem Numeriren, ziehen sich durch die Species mit ganzen Zahlen als Anhang hindurch und kommen erst in der Bruchrechnung zum Abschluss. Aber auch der letzte Cursus des elementaren Rechnens: die Regeldetri hat seine

Wurzeln in diesem ersten: nämlich in dem Multiplications- und Divisionsschluss sowohl als auch besonders in den algebraischen Aufgaben, die auf der elementaren Stufe ja nur mit Hilfe des Regeldetrischiusses: d. h. der ausgesprochenen Zurückführung auf die Ureins zu lösen sind.

Somit ist das Fundament des gesammten elementaren Rechnens durch das Fundamentalprincip gelegt.

Zweites Hauptstück:

Mehrfach benannte ganze Zahlen.

Vorbereitende Übungen.

Erste Übung: Veranschaulichung und Einprägung der Verhältniss- oder Währungszahlen.

Zweite Übung: Vergleichung der verschiedenen Masse unter einander.

Dritte Übung: Die abgekürzte Schreibung der Namen: z. B. 𝒰., L𝒰. etc.

Anmerkung 1. Abgesehen von dem durch den betreffenden Staat nahe gelegten Stoff, sind noch die Metermasse in jedem Falle einzuüben, methodisch ist die sensuale Intuition durch die erste, die intelligible aber durch die zweite Übung zu betonen.

Anmerkung 2. Im Folgenden sind die neuen Meter-, Gramm- und Litermasse darum nicht in die Repräsentantenaufgaben hineingezogen, weil durch diese Verhältnisszahlen überhaupt fast jegliche Schwierigkeit im Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen beseitigt wird und sie daher keiner besonderen methodischen Behandlung bedürfen. Die etwa denkbaren Schwierigkeiten können eben an den traditionellen Verhältnisszahlen der verschiedenen Staaten besser eingesehen werden.

Erster Schritt: Umwandlungen.

Erstes Lehrstück: Resolviren.

Mündlich.		Schriftlich.
Reihenfolge der Aufgaben.	Auflöseweisen.	Auflöseform.
a) 5 Jahre = ? Monate. b) 5 Jahre 3 Monate = ? Monate. c) 5 S℔ = ? ℔. d) 5 S℔ 3 ℔ = ? ℔. e) 5 S℔ 3 L℔ 5 ℔ = ? ℔. Anmerkung. a und c sind eingliedrig, b und d zweigliedrig, e ist dreigliedrig, a und b wird bis zur nächsten Stufe ohne Auslassung anderer Stufen resolvirt, die anderen kommen im Resultat auf eine weitere Stufe hinaus oder überspringen in der Aufgabe eine Stufe.	Alle Auflösungen geschehen durch den aus dem ersten Hauptstück schon bekannten Resolutionsschluss von Stufe zu Stufe.	Die schriftliche Auflöseform kann in jeder empirischen Methodik nachgesehen werden, methodisch ist zu bemerken, dass hier der Multiplicandus ausnahmsweise unter den Multiplicator geschrieben wird.

Der Eintheilungsgrund ist gegeben durch den Blick auf die Namencoordinatenreihe.

Zweites Lehrstück: Reduciren.

a) 80 ℔ = ? L℔. b) 800 ℔ = ? S℔. c) 97 Bogen = ? Buch. d) 859 Gz. = ? Gz., Tk., Tt.? Anmerkung. Der Eintheilungsgrund ist gegeben durch das allgemeine Princip des Namencoordinats. Conf. Erstes Lehrst.	Alle Auflösungen geschehen durch den aus dem ersten Hauptstück bekannten Reductionsschluss von Stufe zur Stufe.	Die Auflöseform ist die bekannte in jedem Rechenbuch angegebene.

Drittes Lehrstück: Die Proben.

Erste Übung: Das Resolviren wird in seiner Richtigkeit erprobt durch das Reduciren.

Zweite Übung: Das Reduciren wird in seiner Richtigkeit erprobt durch das Resolviren.

Zweiter Schritt: Addition.

Mündlich.		Schriftlich.
Reihenfolge der Aufgaben.	Auflöseweisen.	Auflöseform.
a) 2 ℔ 13 Loth + 7 ℔ 15 L. = ? b) 16 ℔ + 14 ℔ = ? c) 19 ℔ 31 L. + 31 L. = ? d) 19 ℔ 21 L. + 18 ℔ + 23 L. = ? Anmerkung, Das Eintheilungsprincip ist, wie man sieht hergenommen aus der Gliederanzahl der Summanden und aus der Summe, sofern sie zu reduciren ist oder nicht. Denn Beides zusammen rückt das Schwerere und Leichtere an seinen pädagogischen Ort.	Der erste Summand muss bei jeder Einzelhinzufügung des zweiten Summands in allen seinen Gliedern ganz genannt werden, um das Bewusstein der Einheit der durch die verschiedenen einzelnen Glieder ausgedrückten (einen) Zahl nicht zu zerreissen. Jede Reduction wird gleich nach der Summirung vollzogen: B.: 16 ℔ + 4 ℔ = 1 L℔ 1 L℔ + 10 ℔ = 1 L℔ 10 ℔.	Die Auflöseform hat unter dem letzten Summanden zwei durch drei horizontale Linien hergestellte Zwischenräume. In den ersten Raum schreibt man die unreducirte Summe der Einzelglieder, in den zweiten das reducirte letzte Glied und die um die Reductionsresultate vergrösserten anderen Summen, unter die dritte Linie tritt das Endresultat — alle Glieder reducirt.

Dritter Schritt: Multiplication.

a) 2 × 4 Ries 2 Buch 11 Bgn. = ? b) 5 × 23 Bogen = ? c) 5 × 15 Buch 23 Bgn. = ? d) 5 × 4 Ries 15 Buch 23 Bgn. = ? Anmerkung. Auch hier ist selbstverständlich das Erschwerende entweder in den gegebenen Grössen, sofern sie ein- oder mehrgliedrig sind oder sofern sie ein Resultat geben, das unreducirt bleibt oder zu reduciren ist. Daher die vorliegende Reihenfolge.	Die Auflöseweisen beachten die Principien der Addition, man beginnt hier wie dort mit dem höchsten Glied und reducirt gleich nach der Ausrechnung des Resultats.	Abgesehen von dem durch grosse Zahl etwa erforderten neuen Zwischenraum, ist die Form genau wie bei der Addition beschaffen.

Vierter Schritt: Subtraction.

M ü n d l i c h.		S c h r i f t l i c h.
Reihenfolge der Aufgaben.	Auflöseweisen.	Auflöseform.
a) 29 Mark 75 Pf. — 14 M. 67 Pf. = ? b) 29 M. — 75 Pf. = ? c) 29 M. — 5 M. 75 Pf. = ? d) 29 M. 70 Pf. — 5 M. 75 Pf. = ? e) 29 M. — 5 M. 75 Pf. = ? Anmerkung. Diese die Möglichkeiten erschöpfende Repräsentantenreihe erfolgt nach denselben Principien wie die Aufgabenreihe der vorhergehenden Schritte.	Nur zweierlei muss hier stets im Auge behalten werden: 1) Jedes Glied des Subtrahendus wird einzeln und wenn möglich so subtrahirt, dass das Resultat zunächst Null wird z. B. d. 29 M. 70 Pf. — 70 Pf. = 29 M.; 29 M. = 28 M. + 100 Pf.; — 5 Pf. = 28 M. 95 Pf. 2) Die Einheit des Minuendus und des Resultats muss beachtet werden.	Hier müssen Aufgaben mit und ohne Zerlegung des Minuendus unterschieden werden. Bei den ersten wird eine Linie unter den Minuendus zu ziehen sein, die als Summenlinie des neuen durch resolvirende Zerlegung entstandenen Minuendus dient.

Fünfter Schritt: Division.

I. Theilung. a) 1/5 | 25 S℔ 15 L℔ 10 ℔ = ? b) 1/5 | 27 S℔ = ? c) 1/5 | 24 S℔ 10 L℔ = ? d) 1/5 | 24 S℔ 13 L℔ 10 ℔ = ? e) 1/5 | 2 S℔ 12 ℔ = ? II. Messung. a) 20 L℔ : 5 ℔ = ? b) 15 L℔ 16 Loth : 8 Loth = ? c) 25 Tscht. 2 Tk. : 12 Tt. 5 Tk = ? d) 2 S℔ 8 L℔ : 1 Berk. 2 Pud = ? Anmerkung. Die Eintheilungsgründe bleiben dieselben, nur dass das Resultat durch den etwaigen Bruch noch complicirter wird.	Die Theilung wird genau wie die erklärende Theilung mit reinen Zahlen behandelt, indem ja die decadischen Namen sich von den hier gebrauchten Namen im Wesen nicht unterscheiden. Bei der Messung kommt das Gesetz zur Geltung, dass nur gleichnamige Grössen eine Messung mit einander zulassen.	Die schriftliche Form der Theilung ist genau wie die der Division mit unbenannten Zahlen, die Messung besteht stets aus zwei Darstellungen: 1) Die Gleichnamig- und Eingliedrigmachung des Divisors und des Dividendus. 2) Die ausgeführte Messung selbst.

Schlussübung: Die Zeitrechnung.

Wiewohl die Zeitrechnung eine specielle Anwendung der Addition und Subtraction ist, so kann sie doch, besonders rücksichtlich der hier kaum zu vermeidenden Brüche, leicht als Repetition aller vorhergehenden Lehren und als Übergang zum zweiten Cursus des elementaren Rechnens benutzt werden. Da man nun hier Zeitanfang, Zeitende und Zeitdauer unterscheiden muss, so sind folgende Übungsgruppen möglich:

Erste Übung: Gegeben ist der Anfang und das Ende, gesucht wird die Dauer.

Zweite Übung: Gegeben ist das Ende und die Dauer, gesucht wird der Anfang.

Dritte Übung: Gegeben ist der Anfang und die Dauer, gesucht wird das Ende.

Zweiter Cursus:

Das Rechnen mit Brüchen.

Erstes Hauptstück:

Die Vorübungen.

Die Reihenfolge der Vorübungen.	Methode.
I. Die Entstehung des Bruchs: a) anschaulich, b) begrifflich als Quotient zu fassen.	Alles muss durch Striche, Äpfel etc. veranschaulicht werden, aus practischen Gründen werden die gleich- und ungleichnamigen Brüche in einen Cursus zusammengezogen.
II. Das Lesen und Schreiben der Brüche.	
III. Die verschiedenen Bruchârten.	
IV. Die Vergleichungen.	
V. Die Umwandlungen: a) Einrichten. b) Ganze ausziehen. c) Heben. d) Erweitern.	
VI. Das Suchen des Generalnenners.	

Zweites Hauptstück:

Anwendung der Vorübungen.

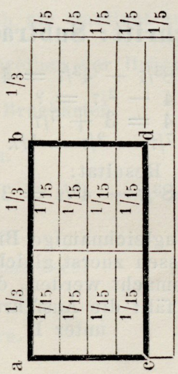
Erster Schritt: Addition.

M ü n d l i c h.		Schriftlich.
Aufgabenreihe.	Auflöseweise.	
1. Reine Zahlen. I. Gleichnamige Brüche: a) $^1/_9 + ^2/_9 + ^3/_9 = ?$ b) $2^3/_7 + 5^6/_7 = ?$ II. Ungleichnamige Brüche: a) $^1/_2 + ^1/_3 + ^{11}/_{12} = ?$ b) $7^5/_6 + 8^2/_3 = ?$ 2. Angewandte Zahlen: a) Einfach, b) mehrfach benannte Zahlen.	Das Resultat wird in einem gehobenen Bruch und nöthigenfalls durch eine ganze oder gemischte Zahl ausgedrückt. Die ungleichnamigen Brüche werden gleichnamig gemacht. Beispiel: II a) $^1/_2 = ^6/_{12}$ $^1/_3 = ^4/_{12}$ $^{11}/_{12} = ^{11}/_{12}$ $^6/_{12} + ^4/_{12} = ^{10}/_{12}$ $^{10}/_{12} + ^2/_{12} = 1$ $1 + (^9/_{12} =)\ ^3/_4 = 1^3/_4$	Die Reihenfolge der Aufgaben ist durch das Kopfrechnen gegeben. Die Auflöseformen sind die gewöhnlichen, wie sie in jedem Rechenbuch zu finden sind. Die Stelle des Generalnenners ist über den Posten.

Zweiter Schritt: Subtraction.

1. Reine Zahlen. I. Minuendus und Subtrahendus gleichnamig: a) $^4/_5 - ^3/_5 = ?$ b) $3^5/_8 - ^3/_8 = ?$ c) $8^3/_7 - 4^5/_7 = ?$ II. Minendus und Subtrahendus ungleichnamig: a) $^1/_2 - ^1/_{14} = ?$ b) $3^7/_8 - ^3/_4 = ?$ c) $4 - ^5/_7 = ?$ d) $8^1/_2 - 5^4/_5 = ?$ 2. Angewandte Zahlen: a) Einfach, b) mehrfach benannte Zahlen.	c) $8^3/_7 - 4^3/_7 = 4$ $4 - ^2/_7 = ?$ $4 = 3 + ^7/_7$ $^7/_7 - ^2/_7 = ^5/_7.$ Resultat: $8^3/_7 - 4^3/_2 = 3^5/_7.$ Ungleichnamige Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden, darauf fällt die Ausführung unter I.	Die Reihenfolge bestimmt sich, abgesehen von der mündlichen Analogie auch noch nach der Nothwendigkeit den Minuendus zu zerlegen oder nicht. Die schriftliche Form ist ähnlich der schriftlichen Form der Addition.

Dritter Schritt: Multiplication und Theilung.

Mündlich.		Schriftlich.	
Aufgabenreihe.	**Auflöseweise.**	**Stoff.**	**Form.**
1. Reine Zahlen. Multiplicirt wird: I. Ein Bruch mit einer ganzen Zahl: $5 \times {}^3/_4$. Zwischenlehre. Theilung: a) $4 : 5$ b) ${}^3/_4 : 4$.	Man schliesst von der Einheit auf den Stammbruch, vom Stammbruch auf einen abgeleiteten Bruch: $5 \times {}^1/_4 = {}^5/_4$ $5 \times {}^3/_4 = 3 \times$ so viel $= {}^{15}/_4 = 3^3/_4$. a) ${}^1/_5$ von $4 = {}^4/_5$, denn ${}^1/_5 : 1 = {}^1/_5$, ${}^1/_5 : 4 = 4 \times {}^1/_5 = {}^4/_5$.	I. Multiplicationen ohne Reductionen. II. Multiplicationen mit Reductionen. III. Theilungen.	Zunächst muss die mechanische Regel der Multiplication aus dem mündlichen herübergenommen werden. Die horizontale Bruchlinie ist als Vorbereitung zur Regeldetri und zur Algebra streng festzuhalten.
II. Eine ganze Zahl mit einem Bruch: ${}^3/_4 \times 5$.	b) wird an einer Linie veranschaulicht. ${}^3/_4 \times 5$ bedeutet: nimm den 4. Theil von 5 dreimal.		
III. Ein Bruch mit einem Bruch: ${}^2/_3 \times {}^4/_5$.	${}^2/_3 \times {}^4/_5$ ${}^1/_3 \times {}^1/_5 = {}^1/_{15}$ ${}^1/_3 \times {}^4/_5 = 4 \times {}^1/_{15} = {}^4/_{15}$ ${}^2/_3 \times {}^4/_5 = 2 \times {}^4/_{15} = {}^8/_{15}$.		
2. Angewandte Zahlen: a) Einfach, b) mehrfach benannte Zahlen.	Veranschaulichung:  Das Oblongum a, b, c, d ist ${}^2/_3$ von ${}^4/_5 = {}^8/_{15}$.		

2. Angewandte Zahlen.

a) Vorbereitung zur Regeldetri.

Erste Übung: Schluss von der Einheit auf den Stammbruch. Z. B.: 1 ℔. = $^3/_4$ Mark. $^1/_5$ ℔. = $^1/_5 \times {}^3/_4$ Mark.

Zweite Übung: Schluss vom Stammbruch auf die Einheit.

Dritte Übung: Schluss vom Stammbruch auf einen von demselben abgeleiteten Bruch.

Vierte Übung: Schluss von jedem ächten oder unächten Bruch auf den Stammbruch.

Fünfte Übung: Schluss von der Einheit auf jeden Bruch.

Sechste Übung: Schluss von jedem Bruch auf die Einheit.

b) Mehrfach benannte Zahlen.

Erste Übung: Resolviren.

Zweite Übung: Reduciren.

Dritte Übung: Multipliciren.

Vierte Übung: Theilen.

Vierter Schritt: Messung.

Vorbereitende Übungen.

Erste Übung: Dividendus 1, Divisor ein Stammbruch: $^1/_4$ ist in 1 | 4mal enthalten.

Zweite Übung: Divisor 1, Dividendus ein Bruch: $^1/_5 : 1 = {^1/_5}$; $^2/_5 : 1 = {^2/_5}$.

Dritte Übung: Dividendus 1, Divisor jede beliebige ganze Zahl.

Vierte Übung: Dividendus und Divisor ganze Zahlen, der Dividendus jedoch kleiner als der Divisor.

Anmerkung. Alle diese Übungen sind an Strichen zu veranschaulichen oder besser an Dingen, die ein deutliches Ganze bilden, wie ein Apfel etc., die Übungen vollziehen sich, wie gewöhnlich, nicht an isolirten Zahlen, sondern in Reihen.

Mündlich.		Schriftl.
Aufgabenreihe.	Auflöseweisen.	
1. Reine Zahlen. Es werden dividirt: I. Gleichnamige Brüche: a) $^8/_9 : {^2/_9}$ b) $^4/_{17} : {^{10}/_{17}}$. u. s. w. II. Ungleichnamige Brüche: a) $^1/_4 : {^2/_3}$ b) $5^3/_4 : 7^5/_6$. Anm. Die Möglichkeiten der Repräsentantenaufgaben werden erschöpft durch die Combinationen der Brucharten. 2. Angewandte Zahlen: a) Einfach, b) mehrfach benannte Zahlen.	**Erste Gruppe der Auflöseweisen.** Gleichnamige Brüche werden in gleichnamige dividirt. A. Die gegebenen Brüche sind schon gleichnamig. Dann werden die Zähler dividirt wie ganze Zahlen: a) $^8/_9 : {^2/_9} = 8 : 2 = 4$ b) $^4/_{17} : {^{10}/_{17}} = 4 : 10 = {^4/_{10}} = {^2/_5}$. B. Die gegebenen ungleichnamigen Brüche werden gleichnamig gemacht, darauf fällt die Auflösung unter A. z. B. $^1/_4 = {^3/_{12}}$, $^2/_3 = {^8/_{12}}$, $^3/_{12} : {^8/_{12}} = {^3/_8}$. **Zweite Gruppe d. Auflöseweisen.** Divisionen werden vollzogen mit Hilfe der Ureins und des Stammbruchs: $^5/_6 : {^3/_4} = ?$ $^5/_6 : 1 = {^5/_6}$, $^5/_6 : {^1/_4} = 4 \times {^5/_6} = {^{20}/_6} = {^{10}/_3}$, $^5/_6 : {^3/_4} = {^1/_3} \times {^{10}/_3} = {^{10}/_9} = 1^1/_9$.	Jede schriftlich darzustellende Division wird durch Umkehrung des Divisors in eine Multiplication verwandelt, aus Gründen, die durch die mündliche Auflöseweise gegeben sind.

Schlussübungen.

1. Repetitionen. 2. Die neun Divisionsfragen.

Man übt gewöhnlich nur die Quotientenfrage, aber zum Verständniss der Division und zur Auflösung von algebraischen Aufgaben ist es unbedingt nothwendig alle Divisionsfragen zu üben:

1. Fragen bei der Messung:
   a) Quotientfrage: wieviel mal ist $^1/_2$ in $^1/_3$ enthalten?
   b) Divisorfrage: welche Zahl ist in $^4/_5$ | $^2/_7$mal enthalten?
   c) Dividendusfrage: in welcher Zahl ist $^1/_2$ | $^2/_3$mal enthalten?

2. Fragen bei der Theilung:
   a) Quotientfrage: wie gross ist $^1/_5$ von $^3/_4$?
   b) Divisorfrage: Der wievielte Theil von $^3/_4$ ist $^3/_{20}$?
   c) Dividendusfrage: von welcher Zahl ist $^3/_{20}$ der fünfte Theil?

3) Allgemeine Formen der Divisionsfragen:
   a) Womit müsste man $^2/_3$ multipliciren, um $^1/_3$ zu erhalten?
   b) Welche Zahl müsste man mit $^1/_2$ multipliciren, um $^1/_3$ zu erhalten.
   c) Durch welche Zahl müsste man $^4/_5$ dividiren, um $^2/_7$ zu erhalten?

Anmerkung. Die Auflösung geschieht mit Hilfe der betreffenden Zahlenreiheneinheit. — Alles Specielle gehört in die Rechenbücher, — hier genügt es die Gesichtspunkte angegeben zu haben.

Dritter Cursus:

Anwendung der ganzen Zahlen und der Brüche.

Erstes Hauptstück:

Regeldetri.

Mündlich.		Schriftlich.	
Reihenfolge der Aufgaben.	Auflöseweisen.	Stoff.	Form.
I. Einfacher Dreisatz. A. Directer Schluss: a) von der Einheit auf jede Zahl. b) von jeder Zahl auf die Einheit. c) von jeder Zahl auf jede Zahl. B. Indirecter Schluss: a) b) c) conf. A. II. Zusammengesetzter Dreisatz. A. und B. = I. C. Indirecte und directe Regeldetri verbunden.	Die Proportion ist als mechanisirend zu verbannen, alle Aufgaben werden mit Hilfe der „Eins“ gelöst, z. B.: 5 ℔ = 30 Mark 1 ℔ = $^{30}/_{5}$ = 6 M., 7 ℔ = 7 × 6 = 42 M.	I. Einfacher, II. zusammengesetzter Dreisatz.	Alle Aufgaben und Auflöseweisen stellen sich dar im Ansatz und in der Gruppirung der gegebenen Factoren und Divisoren an die Bruchlinie.

Zweites Hauptstück:

Specielle Anwendung der Regeldetri

(oder Regeldetri unter anderen Namen).

Die Reihenfolge der Aufgaben.

Erster Schritt: Zinsrechnung.

I. Einfache Zinsrechnung.

Erste Übung:	Procente	zu finden.
Zweite „	Kapital	
Dritte „	Zinsen	
Vierte „	Zeit	

II. Zinseszinsrechnung.

Aufgabenfolge: conf. I.

Anmerkung. Jeder Schüler fertigt sich eine Zinseszinstabelle an.

III. Terminrechnung.

Erste Übung: Der mittlere Termin zu bestimmen.
Zweite Übung: Der Termin des Restes zu bestimmen.

Die Auflöseweisen — mündliche sowohl als schriftliche — unterscheiden sich in keiner Weise von der gewöhnlichen Regeldetri.

Zweiter Schritt: Repartitionsrechnung.

Vorbereitende Lehren: **Vergleichungen.**

Erste Übung: Ganze Zahlen zur Vergleichung gegeben.

Zweite Übung: Brüche und gemischte Zahlen zur Vergleichung gegeben.

Anmerkung. Jede dieser Übungen wird vorgenommen anschaulich, begrifflich, mit unbenannten und benannten Grössen.

I. Der Theilbestimmer direct gegeben.

II. Der Theilbestimmer versteckt gegeben, z. B.

Vier Töpfer erhielten für eine Arbeit 100 Thaler. A hatte 5 Gesellen auf 10 Tage, B 7 Gesellen auf 2 Tage, C 8 Gesellen auf 4 Tage und D 3 Gesellen auf 4 Tage angestellt. Wieviel Geld erhält jeder?

Die Auflöseweisen sind neben denen der Regeldetri die der algebraischen Aufgaben, wie sie von Stubba und Hentschel gelehrt werden.

Dritter Schritt: Kaufmännische Rechnungsarten.

Sofern solche überhaupt in den Elementarcursus aufgenommen werden, kann es sich hier nur um die einfache und zusammengesetzte Mischungsrechnung, wie noch um die Kettenregel handeln. Natürlich ist jede kaufmännische Mechanik ganz bei Seite zu lassen. Alles Specielle kann in den empirischen Rechenmethodiken nachgelesen werden. Alles Einzelne dieses zweiten Hauptstücks braucht hier um so weniger berücksichtigt zu werden, als, streng genommen, die speciellen Anwendungen der Regeldetri unter den angegebenen traditionellen Namen, nicht mehr unter den Begriff einer systematischen Methodik fallen.