



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Ü. Kaasik

*Kompleksmuutuja
funktsioonide
teooria*

TARTU 1962

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI

GEOMEETRIA KATEEDER

U. Kaasik

*Kompleksmuutuja
funktsioonide
teooria*

TARTU 1962

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ю. Каасик
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
На эстонском языке

Vastutav toimetaja G. Kangro
Korrektor E. Võhandu

=====

TRÜ rotaprint 1962. Trükipoognaid 11,4.
Tir. 400 eks. MB 02868. Tell. nr. 724.
Hind 34 kop.

S I S S E J U H A T U S .

Käesolevas kursuses üldistatakse funktsiooni mõiste kompleksmuutuja juhule ning ehitatakse aparaat selliste funktsioonide omaduste uurimiseks, laiendades kompleksmuutuja funktsioonide juhule tuletise ja joonintegraali mõiste. Põhiliseks uurimisobjektiks osutuvad nn. analüütilised funktsioonid. Me nimetame funktsiooni $f(z)$ analüütiliseks teatud hulgal, kui selle hulga iga punkti z_0 ümbruses on ta esitatav astmereana

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Vaadeldavas kursuses tõestatakse järgmised põhilise tähtsusega faktid.

Funktsioon $f(z)$ on analüütiline komplektasandi mingis piirkonnas parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:

1) funktsioonil $f(z)$ on selle piirkonna igas punktis tuletis;

2) kui $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, kus $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on kahe reaalmuutuja x ja y funktsioonid, siis $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on kaks korda diferentseeruvad funktsioonid, mis rahuldavad Laplace'i võrrandit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

ning seoseid

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

3) funktsioon $f(z)$ on pidev selles piirkonnas ja integraal temast mõõda mis tahes selles piirkonnas asuvat kinnist kõverat võrdub nulliga.

Nendel omadustel põhinevad analüütiliste funktsioonide paljud rakendused. Rakendused mitmetes füüsika ja mehhaanika harudes (soojusliku ja elektrilise tasakaalu tasandilised ülesanded, hüdrodünaamika probleemid jt.) on seotud just omadusega 2). Tuleb aga märkida, et kompleksmuutuja funktsioonidel on laialdane, rakendusväli ka matemaatika niisugustes osades, nagu algebra, analüütiline arvuteooria ja diferentsiaalvõrrandid. Samuti mitmed matemaatilise analüüsi küsimused, nagu seda on seos eksponent- ja trigonomeetriliste funktsioonide vahel, lahenduvad tänu kompleksmuutuja kasutamisele.

Kompleksarve ja kompleksmuutuja funktsioone hakkasid matemaatikud kasutama juba XVIII sajandil. Eriti suured teened selles osas on Peterburi matemaatikul L. Euleril (1707 - 1783), keda võib täie õigusega lugeda üheks kompleksmuutuja funktsioonide teooria rajajaks. Euleri poolt on detailselt läbi uuritud logaritmi-, eksponent-, trigonomeetrilised ja arkusfunktsioonid (1740 - 1749). Samuti on tema poolt antud funktsiooni diferentseeruvuse tingimused (1755) ja kompleksmuutuja funktsioonide integreerimise alused (1777). Euler andis ka rea kompleksmuutuja funktsioonide rakendusi mitmesugustel aladel, näiteks hüdrodünaamikas (1755) ja kartograafias (1777).

Peale Eulerit hakkasid kiiresti arenema ja täiustuma kompleksmuutuja funktsioonide teooria resultaadid ja meetodid, mistõttu juba XIX saj. I poolel kujuneb temast välja suure tähtsusega matemaatilise analüüsi haru. Praegusel ajal osutub tutvumine kompleksmuutuja funktsioonide teooriaga igaühe matemaatilise hariduse vältendamatuks osaks.

Teise trüki ettevalmistamisel vaatas matemaatilise analüüsi kateedri dots.kt. E.Jürimäe läbi kogu teksti, tegi sinna mõningad täiendused ja varustas töö sissejuhatusega.

I p e a t ü k k .

Ü L E M I N E K K O M P L E K S M U U T U J A L E .

§ 1. Kompleksarvud ja nende geomeetriline interpreteerimine.

Kompleksarvude teooriaga tutvumine toimub kõrgema algebra kursuses (vt. näit. [1] lk. 5 - 27). Meenutame siin vaid selle teooria põhilisi definitsioone ja tulemusi.

Iga kompleksarv c omab kuju $c = a + ib$, kus a ja b on reaalarvud ning i nn. imaginaarühik. Reaalarvu a nimetatakse kompleksarvu c reaalosaks (tähist. $a = \operatorname{Re} c$) ja reaalarvu b kompleksarvu c imaginaarosaks (tähist. $b = \operatorname{Im} c$). Kompleksarvud $c' = a' + ib'$ ning $c'' = a'' + ib''$ on võrdsed siis ja ainult siis, kui $a' = a''$ ning $b' = b''$.

Kui $\operatorname{Im} c = 0$, siis $c = \operatorname{Re} c$ on reaalarv. Kui $\operatorname{Re} c = 0$, aga $\operatorname{Im} c \neq 0$, siis c kannab puhtimaginaararvu nime. Arvuid $a + ib$ ja $a - ib$ nimetatakse kaaskompleksseteks. Kui üks neist on tähistatud c , siis teist tähistame $\bar{c}$. Ilmselt on kompleksarv c reaalne siis ja ainult siis, kui $c = \bar{c}$.

Kompleksarvude liitmine ja korrumine defineeritakse võrdustega

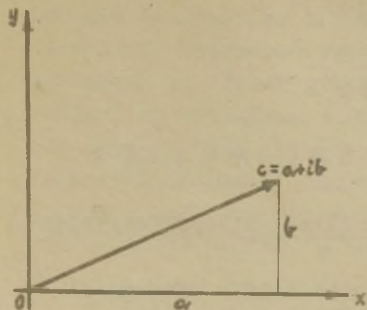
$$c' + c'' = (a' + ib') + (a'' + ib'') = (a' + a'') + i(b' + b''),$$

$$c' \cdot c'' = (a' + ib')(a'' + ib'') = (a'a'' - b'b'') + i(a'b'' + a''b'),$$

ning lahutamine ja jagamine kui vastavad pöördtehted. Korrumise definitsioonist järeldub, et $i \cdot i = i^2 = -1$ ja $c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2$ (kui $c = a + ib$). Mittenegatiivset reaalarvu

$\sqrt{a^2 + b^2}$ nimetatakse kompleksarvu $c = a + ib$ mooduliks ja tähistatakse märgiga $|c|$. Seega $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$ ja $|c| = |\bar{c}|$.

Kompleksarvude geomeetriliseks kujutamiseks valime tasandil Cartesiuse ristkoordinaadistiku ja seame kompleksarvule $c = a + ib$ vastavusse tasandi selle punkti c , mille koordinaadid on a ja b (vt. joon. 1). Tasandit, mille punktide ja kompleksarvude vahel on korraldatud niisugune üksühene vastavus, nimetatakse komplekstasandiks. Muuhulgas vastab kompleksarvule null ($0 + i0$) koordinaatide algus O , reaalarvudele abstsissitelje ja puhtimaginaararvudele ordinaattelje punktid.



Joonis 1.

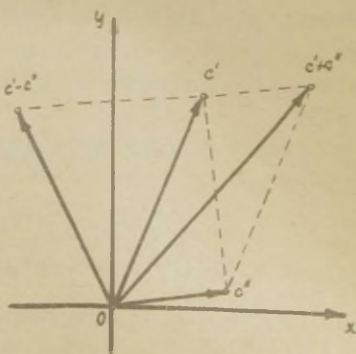
Sellepärast nimetame abstsissitelge komplekstasandil reaalteljeks ja ordinaattelge imaginaarteljeks.

Sageli on otstarbekohane vaadelda kompleksarvu $c = a + ib$ geomeetrilise vastena mitte punkti (a,b) , vaid selle punkti kohavektorit $\vec{c}$ (vt. joon. 1). Sel juhul on näiteks lihtne geomeetriliselt interpreteerida kompleksarvude liitmist ja lahutamist kui vastavate vektorite liitmist ja lahutamist (vt. joon. 2).

Ilmselt tähendab kompleksarvu moodul geomeetriliselt sellele arvule vastava vektori pikkust ja elementargeomeetria tuntud teoreemi rakendades saame võrratuse

$$|c' + c''| \leq |c'| + |c''|,$$

s.t. summa moodul ei ületa liidetavate moodulite summat. Täieliku induktsiooniga on seda võrratust kerge üldistada mis tahes



Joonis 2.

lõpliku arvu liidetavate juhule (läbi teha!).

Kompleksarvude korrutamise ja jagamise geomeetriliseks interpreteerimiseks on otstarbekohane minna kompleksarvude vastava punkti ristkoordinaatidelt üle polaarkoordinaatidele. Valides nullpunkti pooluseks ja reaaltelje polaarteljeks, saame (vt. joon. 3):

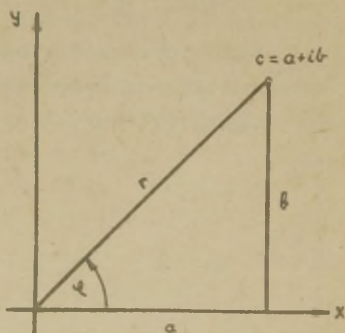
$$a = r \cos \varphi \quad \text{ja} \quad b = r \sin \varphi.$$

Seega on kompleksarv c avaldatav kujul

$c = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, mis kannab kompleksarvu trigonomeetrilise kju nime.

Euleri valemi $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (vt. [3] või siin III ptk. lk. 55) abil võime anda kompleksarvule kju

$$c = re^{i\varphi}.$$



Joonis 3.

Polaarnurka φ nimetatakse kompleksarvu c argumendi ja tähistatakse $\varphi = \arg c$. Kuna polaarnurgaks võib valida iga nurga kujul $\varphi + 2k\pi$, kus k on mis tahes täisarv, siis pole kompleksarvu argument üheselt määratud. Kompleksarvu c argumentide ühist avaldist tähistatakse sümboliga $\text{Arg } c$, kuna sümbol $\arg c$ reserveeritakse tavaliselt absoluutselt vähima argumendi jaoks ($-\pi < \arg c \leq \pi$). Mõnikord kasutatakse sümbolit $\arg c$ ka lihtsalt mõne fikseeritud (mitte tingimata absoluutselt vähima) argumendi väärtuse tähistamiseks. Igal juhul kehtib aga valem

$$\text{Arg } c = \arg c + 2k\pi,$$

kus k on suvaline täisarv.

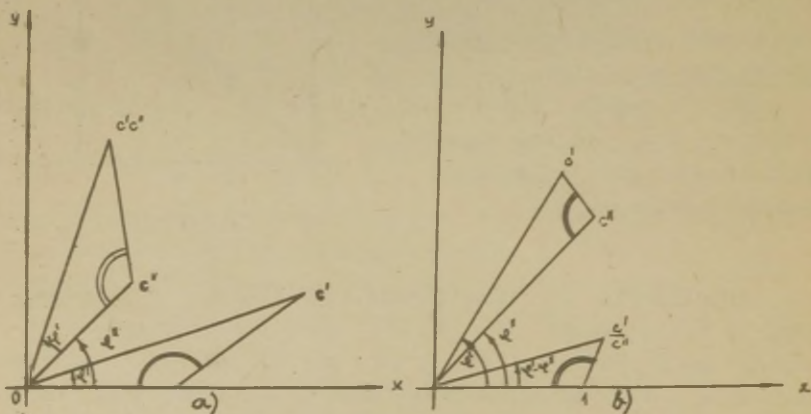
Kompleksarve $c' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$ ja $c'' = r''(\cos \varphi'' + i \sin \varphi'')$ definitsiooni kohaselt läbi korrutades saame (pärast lihtsaid teisendusi)

$$c' \cdot c'' = r' r'' [\cos(\varphi' + \varphi'') + i \sin(\varphi' + \varphi'')].$$

Seega $|c' \cdot c''| = |c'| \cdot |c''|$ ja $\text{Arg}(c' \cdot c'') = \text{Arg } c' + \text{Arg } c''$, s. t. korrutise moodul võrdub tegurite moodulite korrutisega ja korrutise argument võrdub tegurite argumentide summa- ga (viimast võrdust tuleb mõista kui vastavate hulkade võr- dumist). Analoogiliselt saame (tõestada!)

$$\left| \frac{c'}{c''} \right| = \frac{|c'|}{|c''|} \quad \text{ja} \quad \text{Arg } \frac{c'}{c''} = \text{Arg } c' - \text{Arg } c''.$$

Neid tulemusi arvestades on lihtne anda geomeetrilisi konstruktsioone kompleksarvude korrutise (vt. joon. 4, a) või jagatise (joon. 4, b) leidmiseks. Need konstruktsioonid



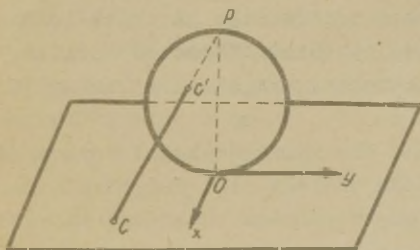
Joonis 4.

seisnevad (juhul kui vektorid $\vec{c}'$ ja $\vec{c}''$ pole kollineaarsed) antud kolmurgaga sarnase kolmurga joonestamises: näiteks korrutise $c'c''$ leidmiseks tuleb vektoril $\vec{c}''$ konstrueerida kolmurgaga Olc' sarnane kolmnurk (endal selgitada jagatise leidmine!).

Funktsioonide teooria arendamiseks tuleb meil kompleks- tasandit täiendada veel lõpmatuspunktiga, millele vastavat kompleksarvu nimetatakse lõpmatuseks ja tähistatakse ∞ . Lõpmatuse defineerime kui kompleksarvu, mille moodul on $+\infty$, s. t. $|\infty| = +\infty$. Lõpmatuse reaali- ja imaginaarosa ning ar- gumenti me ei defineeri (samuti ei defineerita kompleksarvu

null puhul argumenti). Lõpmatuses eraldamiseks nimetame n.-ö. tavalisi kompleksarve, s. t. neid, mis omavad reaali- ja imaginaarosa) lõplikeks.

Selleks, et saada lõpmatuse geomeetrilist vastet, kasutatakse kompleksarvude kujutamist kerapinna punktidenä. Paigutame (mingi fikseeritud raadiusega) kerapinna nii, et ta puudutab kompleksatasandit (näiteks nullpunktis O). Puutepunkti $tõmmatud$ diameetri teist otsupunkti P nimetatakse pooluseks. Ühendame kompleksarvule c kompleksatasandil vastava punkti ja pooluse sirgega. Selle sirge (poolusest erinevat) lõikepunkti c' kerapinnaga loeme kompleksarvu c kujutiseks kerapinnal (vt. joon. 5). Ilmselt on nii korraldatud vastavus kompleksarvude ja kerapinna punktide vahel üksühene. Erandi moodustavad vaid kompleksarv ∞ ja poolus P . Kuna suurema mooduliga kompleksarvude kujutised asuvad poolusele lähemal, siis on loomulik poolust P lugeda lõpmatuse kujutiseks.



Joonis 5.

Niisuguse nn. stereograafilise projekteerimise teel oleme seega püstitanud üksühese vastavuse kompleksarvude (kaasa arvatud ka lõpmatus) ja kerapinna kõikide punktide vahel. See vastavus aitab illustreerida asjaolu, et kompleksatasandil me võtame vaatlusele vaid üheainsa lõpmatuspunkti (erinevalt näiteks projektiivsest tasandist, kus teatavasti on otstarbekohane vaadelda tervet lõp-

mata kauget sirget). Lõpmatuspunkti ainsuse parem näitlikusdamine ongi toodud interpretatsiooni peamiseks eeliseks.

Edaspidi kasutame siiski ainult tasandilist interpretatsiooni, mis võimaldab lihtsamini kasutada analüütilisest geo-

meetriast ja matemaatilisest analüüsist tuntud mõisteid.

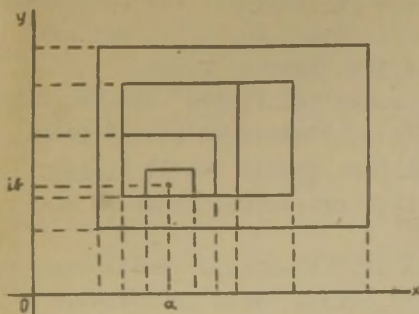
Näiteks saab kompleksarvude juhule üle kanda matemaatilisest analüüsist tuntud ümbruse mõiste: kompleksarvu c ümbruseks nimetame talle vastavat punkti kui keskpunkti ümbritseva ringi sisemistele punktidele vastavate kompleksarvude hulka. Kuna me edaspidi ikka samastame kompleksarvud ja neile vastavad komplekstasandi punktid, siis võib lühemalt defineerida: kompleksarvu ümbruseks nimetatakse teda kui keskpunkti ümbritseva ringi sisemiste punktide hulka. Kui on tarvis esile tõsta selle ringi raadiust r , siis kõneleme punkti r -ümbrusest. Kuna kompleksarvude vahe moodul tähendab vastavate punktide vahelist kaugust, siis ringjoonel raadiusega r ja keskpunktiga c asuv kompleksarv z peab rahuldama võrrandit $|z-c|=r$. Punkti c r -ümbruseks on seega niisuguste kompleksarvude z hulk, mis rahuldavad võrratust $|z-c|<r$.

§ 2. Piirväärtuste teooria kompleksarvude vallas.

Piirväärtuste teooria reaalarvude vallas rajatakse enamasti järgmisele printsiibile (vt. näit. [2] lk. 96): kui arvsirgel on antud lõikude jada, milles iga järgmine lõik sisaldub eelmises ning lõikude pikkused lähenevad nullile, siis leidub üks ja ainult üks punkt, mis sisaldub antud jada kõikides lõikudes.

Seda printsiipi on lihtne üle kanda ka komplekstasandi juhule, kus teda võib sõnastada näiteks nii: kui kompleks-tasandil on antud telgedega paralleelsete külgedega kinniste ristkülikute jada, milles iga järgmine ristkülik sisaldub eelmises ning ristkülikute ümbermõõdud lähenevad nullile, siis leidub üks ja ainult üks komplekstasandi punkt, mis sisaldub antud jada kõikides ristkülikutes.

Tõestuseks (vt. joon. 6) vaatleme nende ristkülikute projektsioone imaginaar- ja reaalteljel. Mõlemal teljel kujutavad need projektsioonid lõikude jadasid, mille iga järgmine sisaldub eelmises ja mille pikkused lähenevad nullile.



Joonis 6.

Järelikult leidub reaalteljel ainus punkt a , mis asub kõikides selle telje lõikudes ja imaginaarteljel analoogiliselt ainus punkt bi . Siis aga asub punkt $a+bi$ kõikides ristkülikutes. See punkt on ainus, mis asetseb kõigis ristkülikuis, sest kui leiduks teine selline punkt, siis ei saaks ta leitud olla kaudu

gemal kui mis tahes ristküliku diagonaali pikkus, mis aga läheneb nullile koos ümbermõõduga.

Seda printsiipi ei ole raske üldistada, asendades telgedega paralleelsete külgedega ristkülikud näiteks mis tahes kujuliste kinniste hulknurkadega (tõestada!).

Olgu meil antud kompleksarvude jada

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

Kompleksarvu c nimetatakse jada $\{c_n\}$ kuhjumispunktiks, kui tema igas ümbruses sisaldub lõpmata palju selle jada elemente. Ümbruse tähendust arvestades võib seda definitsiooni sõnastada ka nii: kompleksarvu c nimetatakse jada $\{c_n\}$ kuhjumispunktiks, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul võrratus $|c - c_n| < \varepsilon$ on rahuldatud lõpmata paljude n väärtuste korral.

Kui jadal on vaid ainus lõplik kuhjumispunkt, siis nimetame jada koonduvaks, kuhjumispunkti tema piirväärtuseks ja kirjutame

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Koonduva jada korral leidub iga $\varepsilon > 0$ puhul ainult lõplik arv selliseid jada elemente, mis ei rahulda võrratust $|c - c_n| < \varepsilon$. Järelikult leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et see võrratus on rahuldatud iga $n > N$ puhul. Ilmselt piirväärtuseks c koonduva jada iga lõpmatu osajada koondub samaks

piirväärtuseks.

Kompleksarvude jada nimetame tõkestatuks, kui kõik tema elemendid asuvad nullpunkti mingis ümbruses, s. t. kui leidub konstant $M > 0$ nii, et $|c_n| < M$ iga n puhul.

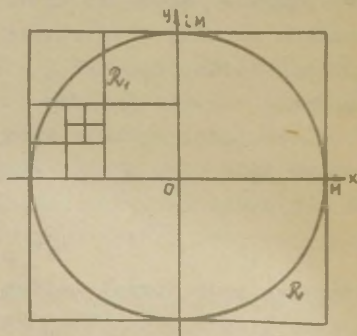
Ilmselt ei tarvitse tõkestamata jadal olla lõplikku kuhjumispunkti (konstrueerida näide!). Tõkestatud jadade puhul sellist olukorda aga esineda ei saa. Nimelt kehtib Bolzano-Bolzano-Weierstrassi teoreem. Igal tõkestatud jadal on olemas vähemalt üks kuhjumispunkt.

T ö e s t u s . Kuna jada kõik elemendid asuvad ringis raadiusega M , siis asuvad nad ka seda ringi ümbritsevas ruudus R külje pikkusega $2M$ (vt. joon. 7). Teljed jaotavad selle ruudu neljaks võrdseks ruuduks, millest vähemalt ühes (olgu see ruut R_1) peab leiduma lõpmata palju jada elemente. Jaotame ruudu R_1 jälle neljaks võrdseks ruuduks, valime neist välja selle (R_2), mis sisaldab lõpmata palju jada elemente jne. Nii saame ruutude jada, milles iga järgmine sisaldub eelmises ja mille ümbermõõdud lähenevad nullile. Sealjuures igas ruudus asub lõpmata palju jada elemente. Järelikult leidub punkt, mis asub kõikides ruutudes ja mille igas ümbruses leidub lõpmata palju jada elemente, sest iga ümbrus sisaldab ju meie ruutude jada küllalt väikesi ruute. Kuhjumispunkti definitsiooni arvestades on aga teoreem sellega tõestatud.

Sellest teoreemist ei järeldu muidugi, et iga tõkestatud jada oleks koonduv. Küll on aga õige vastupidine väide: iga koonduv jada on tõkestatud (tõestada!).

Täpselt samuti, nagu reaalarvude jadade piirväärtuste teoorias (vt. [2], lk. 84), saab tõestada, et kui $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = c'$, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n \pm c'_n) = c \pm c',$$



Joonis 7.

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n c'_n = cc'$ ning $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c'_n} = \frac{c}{c'}$, (kui vaid $c' \neq 0$).

Reaalarvude jadade piirväärtuste teooriast on üle kantav ka nn. Cauchy koonduvuskriteerium: jada $\{c_n\}$ koondumiseks on tarvilik ja piisav, et vastavalt igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nõnda, et võrratus

$$|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$$

kehtib iga $n > N$ ja iga naturaalarvu p puhul.

Tõestus. Püstitatud tingimuse tarvilikkus tõestatakse täpselt samuti nagu reaalarvuliste jadade puhul (tõestada!).

Põhjendame tingimuse piisavuse. Tingimuse täidetust tähendab, et jada $\{c_n\}$ kõik punktid, alates punktist c_{N+1} asuvad $c_{N+1} \pm \varepsilon$ ümbruses. Kuna sellest ümbrusest jääb välja vaid lõplik arv jada punkte, siis jada on tõkestatud. Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt omab ta siis kuhjumispunkti. Jääb vaid tõestada, et jadal ei saa olla kaht erinevat kuhjumispunkti. Oletame väitevastaselt, et leidub kaks kuhjumispunkti c ja c' , kusjuures $|c - c'| = \delta > 0$. Valime $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$. Sellele vastavalt leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et $|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$ kui $n > N$. Seega jada $\{c_n\}$ elemendid, alates elemendist c_{N+1} , asuvad ringis diameetriga $2\varepsilon < \delta$. Siis ei saa aga selles ringis asuda mõlemad kuhjumispunktid. Järelikult ühel neist on ümbrusi, mis ei kuulu vaadeldud ringi ja milles seega saab asuda vaid lõplik arv jada elemente. Saadud vastuolu (kuhjumispunkti definitsiooniga) tõestabki jada koondumise.

Kompleksarvude jadade piirväärtuste teooria võib täielikult taandada reaalarvude jadade piirväärtuste teooriale. Nimelt kehtib

Teoreem. Jada $\{c_n\} = \{a_n + ib_n\}$ koondub piirväärtuseks $c = a + ib$ siis ja ainult siis, kui reaalarvude jadad $\{a_n\}$ ning $\{b_n\}$ koonduvad vastavalt piirväärtusteks a ning b .

Tõestus. Tarvilikkus. Kui $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, siis vastavalt igale $\varepsilon > 0$ leidub $N(\varepsilon)$ nii, et $|c_n - c| < \varepsilon$ $n > N$ korral. Ilmselt aga siis

$$|a_n - a| = |\operatorname{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$$

ja

$$|b_n - b| = |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon,$$

kui $n > N$. See aga tähendab, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Piisavus. Kui $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, siis vastavalt igale $\varepsilon > 0$ saab leida naturaalarvu N nii, et

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon,$$

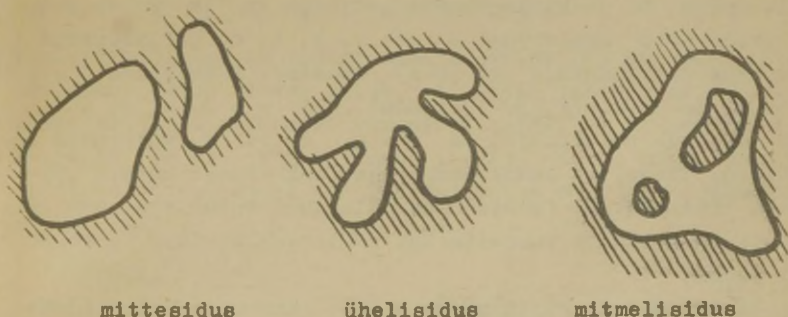
s. t. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

Kõesolevas paragrahvis jada puhul vaadeldud mõisted on tavalisel viisil defineeritavad ka mis tahes võimsusega lõpmatute punktihulkade jaoks. Näiteks punkti c nimetatakse kompleksarvude hulga D kuhjumispunktiks, kui tema igas ümbruses sisaldub lõpmata palju hulga D elemente. Hulka D nimetatakse tõkestatuks, kui kõik tema punktid asuvad mingis ringis (keskpunktiga nullpunktis).

Hulga D punktinimetatakse sisepunktiks, kui tal leidub ümbrus, mis sisaldub hulgas D . Hulka, mis koosneb ainult sisepunktidest, nimetatakse lahtiseks. Punkte, mis on lahtise hulga kuhjumispunktideks, kuid ei kuulu sellesse hulka, nimetatakse rajapunktideks (mis tahes hulga korral nimetatakse rajapunktideks neid, mille igas ümbruses leidub nii hulga punkte kui ka hulka mittekuuluvaid punkte). Rajapunktide hulka nimetame edaspidi rajajooneks (ka siis, kui see hulk geomeetriliselt joont ei kujuta). Kui hulgale D lisada tema rajapunktide hulk, siis saame hulga D sulundi, mida tähistame $\bar{D}$.

Hulka D nimetatakse sidusaks, kui iga tema kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva kõveraga (näiteks murdjoonega). Lahtist ja sidusat hulka nimetame piirkonnaks. Olgu märgitud, et piirkond võib üldiselt hõlmata ka

lõpmatuspunkti. Mingi lõpliku piirkonna D sulundist $\bar{D}$ kõneleme me edaspidi mõnikord ka kui kinnisest piirkonnast. Lõplikku piirkonda nimetame edaspidi ühelisidusaks, kui iga selles piirkonnas paiknev kinnine kõver hõlmab ainult piirkonna punkte. Geomeetriliselt see tähendab, et piirkonnas puuduvad "väljalõiked" (joon. 8).



Joonis 8.

Kõiki teisi sidusaid piirkondi nimetatakse mitmelisidusateks. Edaspidi me vaatleme vaid selliseid mitmelisidusaid piirkondi, milles on ülimalt lõplik arv "väljalõikeid". Kursuse viimases peatükis me üldistame ühelisidususe mõiste ka lõpmatute, s. t. lõpmatuspunkti sisaldavate piirkondade juhule.

§ 3. Kompleksmuutuja funktsioonid.

Olgu kompleksatasandil antud mingi piirkond D . Kui kompleksarv z võib omandada väärtusi kogu sellest piirkonnast, siis nimetatakse suurust z kompleksmuutujaks ja piirkonda D tema muutumispiirkonnaks. Kompleksmuutujate tähistamisel kasutame edaspidi sümboleid $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $w = u + iv$ jne.

Kui hulga D igale kompleksarvule z on seatud vastavusse üks või mitu kompleksarvu w , siis ütleme, et hulgal D on defineeritud kompleksmuutuja w funktsioon ja kirjutame näiteks $w = f(z)$. Kui igale z väärtusele on seatud

vastavusse ainult üks w väärtus, siis nimetame funktsiooni üheseks, vastasel juhul mitmeseks. Edaspidi me vaatleme peaaegu eranditult ainult juhtu, mil hulk D on piirkond (nimetatakse ka funktsiooni määramispiirkonnaks).

Tähistades, üldiselt $z = x+iy$ ja $w = u+iv$ näeme, et kui hulgal D on defineeritud funktsioon $w = f(z)$, siis igale hulga D punktile koordinaatidega x ja y on seadatud vastavusse reaalarvud u ja v , s. t. on defineeritud kaks kahe reaalmuutuja (x ja y) reaalsel funktsiooni $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$. Erijuhul, kui $y = 0$, s. t. kui hulk D asub reaalteljel ja $v = 0$, s. t. w väärtused on reaalsed, näeme, et kompleksmuutuja funktsiooni mõiste hõlmab ka reaalmuutuja funktsioone. Üldjuhul tuleb aga kompleksmuutuja funktsiooni vaadelda kui kahe reaalmuutuja funktsiooni paari.

Tähistades funktsiooni $w = f(z)$ väärtuste hulga sümboliga D' ütleme, et funktsioon $w = f(z)$ kujutab hulga D hulgaks D' (hulka D' nimetatakse ka hulga D kujutiseks funktsiooniga $w = f(z)$). Enamasti on parema geomeetrilise ettekujutuse saamiseks kasulik vaadelda hulka D ühel komplekstasandil (nn. z -tasand) ja hulka D' teisel (w -tasand). Kui funktsioon $w = f(z)$ on ühene, siis hulga D igale punktile z vastab ainult üks punkt hulgast D' . Seda punkti nimetatakse punkti z kujutiseks ja punkti z tema kujutise originaaliks. Sealjuures võib aga mitmele (isegi lõpmata mitmele) hulga D punktile vastata hulga D' üks ja seesama punkt w (neid hulga D punkte nimetatakse ikka punkti w originaalideks). Vaadeldes vastavust hulkade D ja D' vahel kui hulga D' kujutamist hulgaks D , näeme seega, et vastav funktsioon, mida nimetatakse funktsiooni $w = f(z)$ pöördfunktsiooniks ja tähistatakse sageli $z = f^{-1}(w)$, ei tarvitse olla ühene. Funktsiooni, mis erinevates punktides omandab erinevaid väärtusi, nimetatakse ühелеheliseks. Ilmselt on ühese ja ühelehelise funktsiooni pöördfunktsioon samuti ühene ja üheleheline.

Näide 1. Olgu

$$w = kz, \quad (1)$$

kus k on positiivne konstant. Kasutades polaarkoordinaate ($z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$), võime antud teisenduse üles kirjutada kahe võrdusega

$$\rho = kr, \quad \theta = \varphi + 2k\pi.$$

Nendest seostest on lihtne näha kujutise (1) geomeetrilist iseloomu. Teine võrdus ütleb, et punkti polaarnurk jääb muutumatuks, kuna esimesest võrdusest saame, et polaarkaugus kas suureneb ($k > 1$) või väheneb ($k < 1$), s. t. toimub kas tasandi väljavenitamine või kokkusurumine piki nullpunktist väljuvaid kiiri.

Näide 2. Olgu

$$w = e^{i\alpha} z, \quad (2)$$

kus α on reaalarv. Kasutades jällegi polaarkoordinaate ($z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$), saame

$$\rho = r, \quad \theta = \varphi + \alpha + 2k\pi.$$

Siit näeme, et kujutise (2) puhul jääb muutumatuks polaarkaugus, kuid polaarnurk suureneb α võrra. Seega toimub antud juhul tasandi pööre ümber koordinaatide alguse nurga α võrra.

Näide 3. Olgu

$$w = z + b, \quad (3)$$

kus $b = \beta_1 + i\beta_2$. Ristkoordinaatide ($z = x + iy$, $w = u + iv$) kasutamisel näeme, et

$$u = x + \beta_1, \quad v = y + \beta_2,$$

s. t. teisendus (3) teostab tasandi paralleellükke.

Näide 4. Olgu

$$w = az + b, \quad (4)$$

kus $a = ke^{i\alpha}$, $b = \beta_1 + i\beta_2$. (Belmiste näidete abil selgitada välja antud teisenduse geomeetriline iseloom!)

Näide 5. Olgu

$$w = z^2. \quad (5)$$

Tähistades $z = re^{i\varphi}$ ja $w = \rho e^{i\theta}$, saame võrdusest (5), et

$$\rho = r^2, \quad \theta = 2\varphi + 2k\pi.$$

Kui teisendused 1-4 olid ühesed ja ühelehelised, nagu seda on lihtne näha, siis teisendus (5), olles küll ühene, ei ole enam üheleheline, sest punktid $z_1 = re^{i\varphi}$ ja $z_2 = re^{i(\varphi + \pi)}$ kujutuvad üheks ja samaks punktiks.

Näide 6. Olgu

$$w = \sqrt[3]{z}. \quad (6)$$

Tähistame jällegi $z = re^{i\varphi}$ ja $w = \rho e^{i\theta}$. Kuna $z = w^3$, siis

$$r = \rho^3 \text{ ja } \varphi = 3\theta + 2k\pi,$$

millest

$$\rho = \sqrt[3]{r} \quad \text{ning} \quad \theta = \frac{\varphi + 2n\pi}{3}$$

($n = -k$). Siit näeme, et kujutis (6) ei ole küll ühene, kuna ühele punktile vastab 3 erinevat kujutist ($n = 0, 1, 2$), kuid on üheleheline.

Defineerime nüüd funktsiooni piirväärtuse mõiste:

Me ütleme, et piirkonnas D määratud funktsioon $f(z)$ omab argumendi z lähenemisel punktidele $z_0 \in D$ piirväärtuse A , kui vastavalt igale $\varepsilon > 0$ saab leida $\delta(\varepsilon) > 0$ nii, et $|f(z) - A| < \varepsilon$, kui vaid $|z - z_0| < \delta$. Sümboolselt kirjutame seda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse punktis z_0 pidevaks, kui $A = f(z_0)$, s. t. kui

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Geomeetriliselt võib pidevust defineerida järgmiselt:

funktsiooni $f(z)$ nimetatakse punktis z_0 pidevaks, kui ta punkti z_0 küllalt väikese ümbruse kujutab punkti $f(z_0)$ kui tahes väiksesse ümbrusesse.

Piirkonna D igas punktis pidevat funktsiooni nimetatakse pidevaks selles piirkonnas.

Funktsiooni piirväärtuse mõistele võib anda ka teise, eelmisega ekvivalentse definitsiooni:

Kui iga jada $\{z_n\} \subset D$ puhul, mis koondub punktiks $z_0 \in D$, vastav funktsiooni väärtuste jada $\{f(z_n)\}$ koondub (üheks ja samaks piirväärtuseks), siis viimase jada piirväärtust nimetatakse funktsiooni piirväärtuseks punktis z_0 .

Märkuse "üheks ja samaks piirväärtuseks" võib selles definitsioonis ära jätta, sest ei ole raske näha, et tehtud eeldusel (iga jada $z_n \rightarrow z_0$ puhul jada $\{f(z_n)\}$ koondub) jadade $\{f(z_n)\}$ ja $\{f(z'_n)\}$ piirväärtused on $z_n \rightarrow z_0$ ja $z'_n \rightarrow z_0$ korral võrdsed. Tõepoolest, kuna jada

$$z_1, z'_1, z_2, z'_2, \dots, z_n, z'_n, \dots$$

koondub piirväärtuseks z_0 , siis koondub ka jada

$$f(z_1), f(z'_1), f(z_2), f(z'_2), \dots, f(z_n), f(z'_n), \dots,$$

ning tema piirväärtus peab eelmises paragrahvis tehtud märkuse põhjal ühtuma osajadade piirväärtustega.

Edaspidi tuleb meil mõnikord funktsiooni vaadelda pidevana piirkonna D sulundis $\bar{D}$. Pidevust rajapunktis tuleb siis mõista nii, et pidevuse definitsioonis vaadeldakse z neid väärtusi, mis kuuluvad piirkonna D sulundisse. Näiteks on lihtne näha, et piirkonnas $\bar{D}$ on pidev funktsioon ka tõkestatud (tõestada!).

Analoogiliselt räägime funktsiooni pidevusest mingil kõveral, kui pidevuse tingimus on täidetud sellel kõveral asuvate z väärtuste korral.

Kompleksmuutuja funktsiooni piirväärtuse mõistet seob (kahe) reaalmuutuja funktsioonide piirväärtuse mõistega järgmine teoreem.

Teoreem. Seos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + i v_0$$

leiab aset siis ja ainult siis, kui

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = u_0 \quad \text{ning} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = v_0,$$

kus $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z = x + i y$ ja $z_0 = x_0 + i y_0$. (Tõestada!)

Analoogiliselt vastava tõestusega reaalmuutuja funktsioonide teooriast (vt. [2] lk. 136 ja 241) saab näidata, et kinnises tõkestatud piirkonnas D pidev funktsioon $w = f(z)$ on selles piirkonnas ühtlaselt pidev, s. t. vastavalt igale $\varepsilon > 0$ saab leida $\delta(\varepsilon)$ nii, et piirkonnas D mis tahes kahe punkti z' ja z'' puhul, mis rahuldavad tingimust $|z' - z''| < \delta$, kehtib võrratus

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Samuti saab reaalmuutuja funktsioonide teooriast (vt. [2] lk. 120) lihtsalt üle kanda teoreemi, mille kohaselt piirkonnas D pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis ja jagatis on samas piirkonnas pidevad funktsioonid (jagatis on pidev ainult piirkonnas D nendes punktides, milles jagaja erineb nullist).

§4. Kompleksliikmetega read.

Vaatleme lõpmatut rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

mille liikmed on kompleksarvud ja moodustame tema osasummad $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Kui jada $\{s_n\}$ koondub, siis nimetame rida koonduvaks ning jada piirväärtust selle rea summaks. Ilmselt rida $\sum (a_n + i b_n)$ koondub siis ja ainult siis, kui koonduvad reaalarvuliste liikmetega read $\sum a_n$ ja $\sum b_n$ (tõestada!).

Kuna

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

siis rakendades osasummade jada puhul Cauchy kriteeriumi,

näeme, et rida $\sum u_n$ koondub siis ja ainult siis, kui mis tahes $\varepsilon > 0$ korral saab leida naturaalarvu $N(\varepsilon)$ nii, et

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

iga $n > N$ ja naturaalarvu p puhul. Muuhulgas järeldub siit ($p = 1$ puhul) rea koondumise tarvilik tingimus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Rida $\sum u_n$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub tema liikmete moodulitest moodustatud rida $\sum |u_n|$. Kuna

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

siis Cauchy kriteeriumi rakendades näeme, et rea absoluutselt koondumisest järeldub tema koondumine.

Rea $\sum (a_n + ib_n)$ absoluutseks koondumiseks on tarvilik ja piisav reaalarsete ridade $\sum a_n$ ning $\sum b_n$ absoluutne koondumine (tõestada!).

Kuna rea $\sum |u_n|$ liikmed on mittenegatiivsed reaalarvud, siis saab rea $\sum u_n$ absoluutse koondumise selgitamiseks kasutada kõiki positiivsete ridade koonduvustunnuseid (vrd. [3] lk. 45 jj.). Näiteks on rea $\sum u_n$ absoluutseks koondumiseks piisav, kui teatud n väärtusest alates

$$|u_{n+1}| \leq q |u_n| \quad (\text{D'Alembert'i tunnus})$$

või

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq q, \quad (\text{Cauchy tunnus})$$

kus $0 < q < 1$. Samuti on rida absoluutselt koonduv, kui teda (vähemalt küllalt suurest n väärtusest alates) saab majoreerida koonduva reaga.

Kompleksliikmetega ridade puhul jäävad kehtima ka kõik tuntud teoreemid tehete kohta ridadega (vt. näit. [3] lk. 14 ja 41). Nimelt, kui rida $\sum u_n$ koondub ja tema summa on s , mida lühidalt kirjutame: $\sum u_n = s$, siis iga kompleksarvu c korral $\sum cu_n = cs$; kui $\sum u'_n = s'$ ja $\sum u''_n = s''$, siis

$\sum (u_n' \pm u_n'') = s' \pm s''$; kui $\sum u_n' = s'$ ja $\sum u_n'' = s''$ on absoluutselt koonduvad, siis korrutisrida $\sum v_n$, kus $v_n = u_1' u_n'' + u_2' u_{n-1}'' + \dots + u_n' u_1''$, on samuti absoluutselt koonduv ja tema summa on $s' s''$.

Absoluutselt koonduva rea puhul kehtib teoreem, mis lubab rea liikmeid mis tahes viisil ümber paigutada (vrd. [3], lk. 36). Tingimisi koonduva, s. t. koonduva, kuid mitte absoluutselt koonduva rea korral saab aga liikmete sobiva ümberpaigutamise teel rea summa muuta võrdseks iga etteantud arvuga kas kogu komplekstasandilt või vähemalt ühelt kindlalt sirgelt (vt. [5] lk. 42). Nende teoreemide tõestamisel me käesolevas kursuses ei peatu.

Edaspidi tuleb meil sageli kokku puutuda nn. funktsionaalriidadega

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

mille liikmeteks on teatud hulgal (enamasti piirkonnas) D määratud kompleksmuutuja funktsioonid. Tähistame sellise rea esimese $n + 1$ liikme summa (osasumma) sümboliga

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z).$$

Kui osasummade jadal $\{S_n(z)\}$ on piirväärtus, s. t. rida koondub iga z puhul piirkonnast D , siis ütleme, et funktsionaalrida koondub piirkonnas D . Rea summa on siis üheselt määratud iga $z \in D$ puhul, s. t. kujutab endast teatud kompleksmuutuja funktsiooni $f(z)$ määramispiirkonnaga D .

Piirkonnas D koonduvat funktsionaalrida $\sum f_n(z)$, mille summa on $f(z)$, nimetatakse selles piirkonnas ühtlaselt koonduvaks, kui vastavalt igale $\varepsilon > 0$ saab leida naturaalarvu $N(\varepsilon)$ nii, et võrratus

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

kehtib $n > N$ puhul igas punktis $z \in D$.

Ühtlasele pidevusele võib anda ka teise, tooduga ilmselt ekvivalentse definitsiooni.

Funktsionaalrida nimetatakse piirkonnas D ühtlaselt koonduvaks, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks saab leida naturaalarvu $N(\varepsilon)$

nii, et $n > N$ puhul võrratus

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

kehtib iga naturaalarvu p ja $z \in D$ korral.

Definitsioonist nähtub, et ühtlaselt koonduva funktsionaalrea summat saab mis tahes täpsusega ε aproksimeerida selle rea ühe ja sama arvu n esimese liikme summaga vaadeldava piirkonna igas punktis.

Analoogiliselt defineeritakse ka funktsioonide jada ühtlane koondumine.

Teoreem. Kui piirkonnas D ühtlaselt koonduva funktsionaalrea liikmed on punktis $z_0 \in D$ pidevad funktsioonid, siis on ka rea summa selles punktis pidev funktsioon.

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ vabalt etteantud arv. Ühtlase koondumise tõttu leidub siis N nii, et $n > N$ puhul $|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ja $|f(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Fikseerime mingi $n > N$. Siis $S_n(z)$ kui lõpliku arvu pidevate funktsioonide summa on pidev funktsioon ja leidub $\delta(\varepsilon) > 0$ nii, et $|z - z_0| < \delta$ (kus $z \in D$) korral

$$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seega punkti z_0 δ -ümbruses

$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$,
s. t. vaadeldava rea summa $f(z)$ on punktis z_0 pidev.

Märgime veel, et rea ühtlane koonduvus ei ole summa pidevuseks tarvilik.

Rea ühtlase koondumise kindlakstegemine vahetult definitsiooni abil on enamasti äärmiselt tülikas või hoopis läbiviidamatu. Seepärast anname lihtsa tunnuse, mis sageli võimaldab praktiliselt selgitada rea ühtlast koondumist (Weierstrassi tunnus).

Kui rea $\sum f_n(z)$ kõik liikmed rahuldavad piirkonnas D võrratust

$$|f_n(z)| \leq a_n$$

ning positiivsete liikmetega rida $\sum a_n$ koondub, siis rida $\sum f_n(z)$ koondub piirkonnas D absoluutselt ja ühtlaselt.

Tõepoolest, rida $\sum |f_n(z)|$ koondub piirkonnas D igas punktis, sest teda saab majoreerida koonduva reaga (siin on tegemist tavaliste positiivsete ridadega). Seega rida $\sum f_n(z)$ koondub absoluutselt mingiks funktsiooniks $f(z)$. Kuid

$$|f(z) - S_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Kuna rida $\sum a_n$ koondub, siis tema jääkliige $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ saab väiksemaks etteantud arvust $\epsilon > 0$, kui vaid $n > N(\epsilon)$. Seega

$$|f(z) - S_n(z)| < \epsilon,$$

kui $n > N(\epsilon)$, sõltumata punktist $z \in D$. Järelikult rida $\sum f_n(z)$ koondub ka ühtlaselt.

§ 5. Astmerealad.

Kompleksmuutuja funktsioonide teoorias on eriti suure tähtsusega nn. astmerealad, s. t. funktsionaalread, milles $f_n(z) = a_n z^n$, kus a_n on konstantsed kompleksarvud ja z kompleksmuutuja.

Astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

koonduvuspiirkonnaks nimetatakse komplekstasandi kõigi nende punktide z hulka, milles see rida koondub. Ilmselt koondub iga astmerida punktis $z = 0$, s. t. nullpunkt kuulub iga astmerea koonduvuspiirkonda. Astmerea koonduvuspiirkond võib koosneda ainult nullpunktist. Nii on see näiteks rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n = 1 + z + 2^2 z^2 + \dots + n^n z^n + \dots$$

puhul, mille üldliige läheneb iga $z \neq 0$ korral lõpmatusele, sest küllalt suurest n väärtusest alates on $n|z| > 2$ ja seega $|n^n z^n| > 2^2$.

Jättes praegu kõrvale niisugused read, eeldame, et vaadeldavad astmereal koonduvad vähemalt ühes nullist erinevas punktis. Siis kehtib

Abeli 1. teoreem. Kui astmerida koondub punktis z_0 , siis koondub ta absoluutselt igas punktis z , mille puhul $|z| < |z_0|$.

Tõestus. Kuna rida $\sum a_n z_0^n$ koondub, siis koondumise tarviliku tingimuse tõttu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$. Seega jada $\{a_n z_0^n\}$ liikmed on tõkestatud, s. t. iga n puhul

$$|a_n z_0^n| \leq M.$$

Antud rea võib aga kirjutada kujul

$$\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

ja tema liikmete mooduleid seega hinnata võrratustega

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n,$$

kus tähistasime

$$\left|\frac{z}{z_0}\right| = q.$$

Kuid $|z| < |z_0|$ puhul $q < 1$ ning vaadeldav rida majoreerub seega koonduva geomeetrilise reaga ja on järelikult absoluutselt koonduv.

Äsja tõestatud teoreemile saab anda lihtsa geomeetrilise interpretatsiooni: kui astmerida koondub punktis z_0 , siis koondub ta absoluutselt ja ühtlaselt niisuguse ringi kõigis sisepunktides, mille keskpunktiks on nullpunkt ja mida piirav ringjoon läbib punkti z_0 (joon. 9).

Nüüd pole raske selgitada astmerea koonduvuspiirkonna struktuuri.

Esiteks on olemas astmeridu, mis koonduvad ainult nullpunktis.

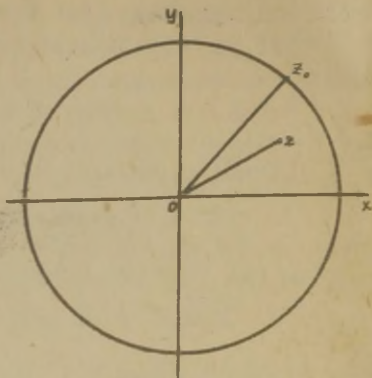
Teiseks leidub ridu, mis koonduvad kogu komplekstasandil. Niisugune on näiteks rida

$$\sum \frac{z^n}{n^n} = 1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots,$$

sest küllalt suure n puhul (täpsemalt, kui $n > 2|s|$)

$$\left| \frac{z^n}{n} \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Kolmandaks aga leidub ridu (selline on näiteks geomeetriline rida), millel on nullist erinevaid koonduvuspunkte, kuid ka hajuvuspunkte. Abeli 1. teoreemist järeldeb (üksikasjalik tõestus vt. [5], lk. 61-62), et niisuguste ridade koonduvuspiirkonnaks on teatud ringi sise-punktid ja võib-olla ka osa punkte seda ringi piiraval ringjoonel.



Joonis 9.

Seega iga kolmandat tüüpi astmerea puhul leidub ring raadiusega R ja keskpunktiga nullpunktis, mille sisepunktides see astmerida (absoluutselt) koondub ja välispunktides hajub. Seda ringi nimetatakse astmerea koonduvusringiks ja tema raadiust R koonduvusraadiuseks.

Et neid mõisteid saaks kasutada iga astmerea puhul, siis loeme ainult nullpunktis koonduva astmerea korral $R = 0$ ja kogu komplekstasandil koonduva astmerea korral $R = \infty$.

Mis puutub koonduvusringjoonel, s. t. koonduvusringi piiraval ringjoonel asuvatesse punktidesse, siis osas neist võib rida koonduda ja osas hajuda.

Kui Abeli 1. teoreemi tõestamisel arvestada Weierstrassi tunnust, siis näeme, et iga astmerida koondub ühtlaselt punktides $|z| \leq r < R$. Seega astmerea summa on koonduvusringi sisepunktides pidev funktsioon, sest astmefunktsioonid on pidevad, nagu seda võib tõestada täpselt samuti kui reaalmuutuja funktsioonide teoorias.

Küsümuse sellest, kuidas leida astmerea koonduvusraa-

düas selle rea kordajate kaudu, lahendab

Cauchy-Hadamard'i teoreem. Astmerea koonduvusraadius vördub suuruse

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

pöördväärtusega ($\lim$ tähendab suurimat kuhjumispunkti, juur on aritmeetiline). Kui $a = 0$, siis $R = \infty$; kui $a = \infty$, siis $R = 0$.

T ö e s t u s tuleb läbi viia eraldi kolmel juhul.

1. $a = \infty$. Näitame, et astmerida hajub igas nullist erinevas punktis. Oletame väitevastaselt, et rida koondub mingis punktis $z_0 \neq 0$. Siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$ ja seega leidub konstant M nii, et iga n puhul $|a_n z_0^n| < M$. Järelikult $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z_0| < \sqrt[n]{M}$ ja $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\sqrt[n]{M}}{|z_0|}$. Seega jada $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ osutub tõkestatuks, mis on aga vastuolus eeldusega $a = \infty$.

2. $a = 0$. Näitame, et astmerida koondub igas punktis z . Kuna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, siis peab küllalt suurest n väärtusest alates olema

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \xi,$$

kus $\xi > 0$ on mis tahes ettevalitud arv. Valides näiteks

$$\xi = \frac{1}{2|z|}, \text{ saame}$$

$$|a_n| \cdot |z|^n < \frac{1}{2^n},$$

s. t. meie astmerida majoreerub koonduva geomeetrilise reaga ning on järelikult ise koonduv.

3. $0 < a < \infty$. Näitame, et igas punktis $|z_1| < \frac{1}{a}$ meie rida koondub ja igas punktis $|z_2| > \frac{1}{a}$ hajub.

Suurima kuhjumispunkti definitsiooni kohaselt peab küllalt suurest n väärtusest alates olema

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon.$$

Valides $\varepsilon = \frac{1 - a|z_1|}{2|z_1|}$, saame (küllalt suure n puhul)

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon = \frac{1+a|z_1|}{2|z_1|},$$

millest

$$\sqrt[n]{|a_n|} |z_1| < \frac{1+a|z_1|}{2} = q < 1.$$

Seega $|a_n z_1^n| < q^n$ ja järelikult rida koondub punktis z_1 .

Suurima kuhjumispunkti definitsiooni kohaselt peab lõpmata paljude n väärtuste puhul olema

$$\sqrt[n]{|a_n|} > a - \varepsilon.$$

Valides $\varepsilon = \frac{a|z_2| - 1}{|z_2|}$, saame

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z_2|}$$

ehk

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z_2| > 1.$$

Järelikult $|a_n z_2^n| > 1$ ja rida hajub punktis z_2 , sest viimane võrratus kehtib lõpmata paljude n väärtuste korral ning seega ei saa olla täidetud koondumise tarvilik tingimus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_2^n = 0.$$

Märgime lõpuks, et kõrvuti astmeridadega $\sum a_n z^n$ tuleb sageli vaadelda astmeridu kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

Lihtne on näha, et sellise rea koonduvuspiirkonnaks on ring keskpunktiga z_0 ja raadiusega R , kusjuures koonduvusraadius

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

II p e a t ü k k .

K O M P L E K S M U U T U J A F U N K T S I O O N I D E D I F E R E N T S E E R I M I N E .

1. Tuletis ja diferentsiaal.

Olgu $w = f(z)$ ühene funktsioon, mis on määratud piirkonnas D . Me ütleme, et funktsioon $w = f(z)$ on punktis $z \in D$ diferentseeruv, kui jagatisel

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

on $\Delta z \rightarrow 0$ puhul kindel lõplik piirväärtus, sõltumata sellest, millisel viisil Δz nullile läheneb (eeldatakse, et z on piirprotsessis konstantne ja et $z + \Delta z \in D$).

Selle jagatise piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(z)$ tuletiseks punktis z ja tähistatakse

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} .$$

Kui funktsioon on diferentseeruv piirkonnas D igas punktis, siis ütleme, et ta on diferentseeruv piirkonnas D .

Ilmselt on funktsiooni pidevus tarvilik tema diferentseeruvuseks (tõestada!). Lihtsalt saab aga konstrueerida funktsioone, mis on pidevad kogu komplekstatasandil, kuid pole diferentseeruvad üheski punktis. Näiteks on funktsioon

$$w = \bar{z} = x - i y \quad (\text{kus } z = x + i y)$$

pidev kogu komplekstatasandil. Tähistades

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y,$$

saame

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{x + \Delta x - i(y + \Delta y) - (x - i y)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Laseme nüüd $\Delta z \rightarrow 0$ kahel erineval viisil: kui $\Delta x = 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$, siis $\frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow -i$; kui aga $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y = 0$, siis $\frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow 1$. Seega jagatise $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ piirväärtus sõltub sellest, kuidas $\Delta z \rightarrow 0$. Järelikult vaadeldav funktsioon pole ühegi z puhul diferentseeruv.

Sama omadusega on veel pidevad funktsioonid $w = \operatorname{Re} z$, $w = \operatorname{Im} z$, $w = |z|$ jt.

Selliste lihtsate pidevate kuid mittediferentseeruvate funktsioonide olemasolu viitab sellele, et kompleksmuutuja funktsiooni diferentseeruvuse nõue on nähtavasti rangem kui reaalmuutuja funktsiooni diferentseeruvuse nõue (teatavasti matemaatilise analüüsi kursuses tavaliselt ei toodagi kõikjal pideva kuid mittediferentseeruva funktsiooni näidet, mis on tingitud selliste näidete komplitseeritud ehitusest). Suuremale rangusele viitab ka see, et reaalmuutuja funktsioon $y = |x|$ on diferentseeruv kõikjal peale nullpunkti, kuid vastav kompleksmuutuja funktsioon $w = |z|$ pole kuskil diferentseeruv (ka mitte reaalteljel, s. t. kui z ja $z + \Delta z$ on reaalarvud).

Olgu $w = f(z)$ mingis piirkonnas D diferentseeruv funktsioon. Kuna definitsiooni kohaselt

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

siis $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, kus $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$ (sellise omadusega muutuvaid suurusi nimetame ikka lõpmata väikesteks suurusteks, samuti kanname reaalmuutuja juhult muudatusteta üle lõpmata väikeste suuruste järgu mõiste - vt. [2] lk. 110).

Seega

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z.$$

Siit näeme, et funktsiooni kasv avaldub kahe lõpmata väikese suuruse summana. Esimene neist on $f'(z) \neq 0$ puhul sama järku lõpmata väike nagu Δz , teine on aga kõrgemat

järku lõpmata väike, sest $\frac{\alpha \cdot \Delta z}{\Delta z} \rightarrow 0$. Seega kujutab esimene liidetav endast funktsiooni kasvu Δw lineaarset peaosat, mida nimetatakse funktsiooni $w = f(z)$ diferentsiaaliks ja tähistatakse

$$dw = f'(z) \cdot \Delta z.$$

Kuna $w = z$ puhul ilmselt $w' = 1$ ja seega $dz = 1 \cdot \Delta z$, siis argumendi (kui samasusfunktsiooni $w = z$) diferentsiaal ühtib tema kasvuga ning viimase valemi võib kirjutada kujul

$$dw = f'(z) \cdot dz.$$

Seega ka kompleksmuutuja funktsiooni tuletis võrdub funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide jagatisega:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}.$$

Kuna kompleksmuutuja funktsiooni tuletise ja diferentsiaali definitsioonid langevad formaalselt ühte vastavate definitsioonidega reaalmuutuja funktsioonide puhul, siis saab täpselt samuti nagu matemaatilises analüüsis (vt, [2], lk. 149 jj.) töestada ka põhilised diferentseerimise reeglid (funktsioonid $f_k(z)$ on eeldatud diferentseeruvatena):

$$1) \text{ kui } f(z) = \text{const.}, \text{ siis } f'(z) = 0;$$

$$2) [c \cdot f(z)]' = c \cdot f'(z) \quad (c = \text{const.});$$

$$3) \left[\sum_{k=1}^n f_k(z) \right]' = \sum_{k=1}^n f'_k(z);$$

$$4) (z^n)' = n \cdot z^{n-1};$$

$$5) [f_1(z)f_2(z)\dots f_n(z)]' = \sum_{k=1}^n f_1(z)\dots f_{k-1}(z)f'_{k-1}(z) \cdot f_{k+1}(z)\dots f_n(z);$$

$$6) \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right]' = \frac{f_2(z)f'_1(z) - f_1(z)f'_2(z)}{f_2(z)^2} \quad (\text{kus } f_2(z) \neq 0);$$

$$7) [f^{-1}(w)]' = \frac{1}{f'(z)} \quad (z = f^{-1}(w) \text{ on funktsiooni } w = f(z) \text{ pöördfunktsioon});$$

$$8) \frac{d}{dz} \{g[f(z)]\} = \frac{dg(w)}{dw} \cdot \frac{df(z)}{dz} = g'[f(z)] \cdot f'(z).$$

Tõestame näitena ainult viimase (liitfunktsiooni diferentseerimise) reegli.

Olgu $w = f(z)$ piirkonnas D diferentseeruv funktsioon ja olgu D' tema väärtuste hulk. Eeldame veel, et vaadeldav punkt $w_0 = f(z_0)$ on hulga D' kuhjumispunkt. Funktsioon $Z = g(w)$ olgu määratud hulgal D' ja diferentseeruv vähemalt vaadeldavas punktis w_0 . Näitame, et siis liitfunktsioon $Z = g[f(z)]$ on punktis z_0 diferentseeruv, kusjuures kehtib valem 8).

Vaatleme algul juhtu, mil punkti z_0 igas ümbruses leidub punkte $z \in D$, $z \neq z_0$ nii, et $f(z) = f(z_0) = w_0$. Siis saab valida jada $\{z_n\} \subset D$, $z_n \rightarrow z_0$ nii, et iga n puhul $f(z_n) = f(z_0)$. Selle jada korral

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = 0$$

ja seega diferentseeruvuse tõttu peab olema $f'(z_0) = 0$. Järelikult tuleb näidata, et sel juhul ka valemi 8) vasak pool võrdub nulliga.

Ilmselt iga $z \neq z_0$ puhul, mis rahuldab tingimust $f(z) = f(z_0)$, on

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = 0$$

ja seega ka $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = 0$. Olgu nüüd valitud jada $z'_n \rightarrow z_0$ nii, et $f(z'_n) = w'_n \neq w_0$. Siis

$$\frac{g[f(z'_n)] - g[f(z_0)]}{z'_n - z_0} = \frac{g(w'_n) - g(w_0)}{w'_n - w_0} \cdot \frac{w'_n - w_0}{z'_n - z_0} =$$

$$= \frac{g(w'_n) - g(w_0)}{w'_n - w_0} \cdot \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} \rightarrow g'(w_0) \cdot f'(z_0) = 0.$$

Seega on valem 8) sel juhul tõestatud.

Leidugu nüüd niisugune punkti z_0 ümbrus, millesse kuuluvate z väärtuste korral $f(z) = w \neq w_0$. Siis

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow g'(w_0).$$

$\cdot f'(z_0)$, kui $z \rightarrow z_0$.

Sellega on funktsiooni $Z = g[f(z)]$ diferentseeruvus ja valem 8) igal juhul tõestatud.

§ 2. D'Alembert-Euleri võrrandid.

Olgu

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Kompleksmuutuja funktsioon $f(z)$ on määratud, kui on antud kaks kahe reaalmuutuja funktsiooni $u(x,y)$ ja $v(x,y)$. Ilmselt ei või aga diferentseeruva funktsiooni $f(z)$ saamiseks funktsioone u ja v täiesti vabalt ning teineteisest sõltumatult valida, sest juba lihtne valik $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ andis mittediferentseeruva funktsiooni $f(z) = \bar{z}$. Käesolevas paragrahvis selgitamegi tingimused, mida u ja v peavad $f(z)$ diferentseeruvuseks rahuldama.

Toodud näitest järeldub, et funktsioonide u ja v diferentseeruvusest nähtavasti ei piisa funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuseks. Lihtne on aga näha, et see tingimus on tarvilik. Tõepoolest, kui $f(z)$ on punktis z diferentseeruv, siis

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

kus $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$. Tähistades

$$\Delta z \rightarrow 0$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$f'(z) = a + ib$$

ja arvestades, et

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i v(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - i v(x, y) = \Delta u + i \Delta v,$$

saame (kompleksarvude võrduse definitsiooni silmas pidades)

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \alpha_2 \Delta x + \alpha_1 \Delta y,$$

$$\text{kus } \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \alpha_1 = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \alpha_2 = 0.$$

Mitme muutuja funktsioonide diferentseeruvuse mõistet meenutades (vt. [2] lk. 251) näemegi, et funktsioonid u ja v peavad seega olema diferentseeruvad. Saadud seostest järeldub aga veel, et peab olema

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -b = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ja} \quad a = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Seega lisaks u ja v diferentseeruvusele on $f(z)$ diferentseeruvuseks tarvilik, et funktsioonide u ja v osatuletised rahuldaksid võrrandeid

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Neid võrrandeid nimetatakse D'Alembert-Euleri võrrandeiks (või ka monogeensuse tingimusteks).

Suuruste a ja b tähendust arvestades näeme ühtlasi, et diferentseeruva funktsiooni $f(z)$ tuletis on avaldatav järeldumisel neljal viisil:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Need valemid taandavad kompleksmuutuja funktsiooni diferentseerimise täielikult kahe reaalmuutuja funktsiooni diferentseerimisele ning on seega sobivad tuletise praktiliseks arvutamiseks.

Näitame nüüd, et funktsioonide u ja v diferentseeru-

vus koos D'Alembert-Euleri võrrandite rahuldatusena on funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuseks ka piisav.

Funktsioonide u ja v diferentseeruvus tähendab, et

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \beta$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \gamma,$$

kus β ja γ on kõrgemat järku lõpmata väikesed kui

$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (vt. [2] lk. 251). Neid võrdusi kasutades võime kirjutada

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y)}{x + i y} + \alpha,$$

kus $\alpha = \frac{\beta + i\gamma}{\Delta z} \rightarrow 0$ kui $|\Delta z| \rightarrow 0$ (s. t. kui $\Delta z \rightarrow 0$).

Asendades nüüd osatuletised y järgi D'Alembert-Euleri võrrandest saame

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \alpha = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha. \end{aligned}$$

Kuna $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$, siis eksisteerib järelikult ka

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

s. t. funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv.

Olgu muide märgitud, et kui on teada funktsiooni $f(z)$ pidevus, siis võib funktsioonide u ja v diferentseeruvuse nõude ära jätta, s. t. pideva funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuseks on tarvilik ja piisav, et funktsioonid u ja v omaks osatuletisi, mis rahuldavad D'Alembert-Euleri võrrandeid.

Sageli on tarvis teada funktsiooni diferentseeruvuse

tingimusi avaldatuna polaarkoordinaatides, s. t. juhul, kus argument on antud trigonomeetrilisel kujul. Tavalise muutuja vahetusega saame (läbi teha!), et kui $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, siis funktsiooni $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ diferentseeruvaks on tarvilik ja piisav, et funktsioonid u ja v oleksid diferentseeruvad ning rahuldaksid võrrandeid

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Funktsiooni tuletis avaldub sealjuures valemitega

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Oletame, et funktsioonidel u ja v on olemas ka teist järku tuletised (hiljem me näeme, et diferentseeruva $f(z)$ korral on see alati nii). Diferentseerides esimest D'Alembert-Euleri võrrandit x järgi ja teist y järgi, saame

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Neid võrdusi liites näeme, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

s. t. funktsioon u rahuldab Laplace'i võrrandit ja on seega harmooniline funktsioon. Ilmselt on ka v , harmooniline funktsioon (tõestada!). Kuid mitte iga kahe harmoonilise funktsiooni u ja v korral pole $u + iv$ diferentseeruv. Kui üks nendest harmoonilistest funktsioonidest, näiteks u , on ette antud, siis v tuleb määrata võrrandeist

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Siit saame

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

ja seega

$$v = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} dy + c .$$

Nii saadud funktsiooni v nimetatakse harmoonilise funktsiooni u suhtes kaasharmooniliseks funktsiooniks.

§3. Astmeridade diferentseerimine.

Varem (I ptk. §5) me nägime, et astmerea summa on koonduvusringis pidev funktsioon. Näitame nüüd, et astmerea summa on koonduvusringis ka diferentseeruv, kusjuures tema tule-tise võib saada antud astmerida liikmeti diferentseerides.

Olgu antud astmerea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

koonduvusraadius R . Näitame kõigepealt, et seda rida formaalselt liikmeti diferentseerides saadava rea

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \dots + (n+1)a_{n+1} z^n + \dots$$

koonduvusraadius on samuti R . Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \end{aligned}$$

ja Cauchy-Hadamard'i teoreemi põhjal on mõlema rea koonduvusraadiused seega võrdsed.

Näitame nüüd, et $f(z)$ on diferentseeruv koonduvusringi mis tahes punktis z_0 , kusjuures $f'(z_0) = g(z_0)$.

Kui z_0 on koonduvusringi sisepunkt, siis leidub arv $r < R$ nii, et $|z_0| < r$. Valime z_0 ümbruses mingi punkti

z selliselt, et oleks ka $|z| < r$. Meil tuleb näidata, et avaldisel

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) - (a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \dots)}{z - z_0} =$$

$$= a_1 + a_2(z + z_0) + a_3(z^2 + zz_0 + z_0^2) + \dots$$

on $z \rightarrow z_0$ puhul piirväärtus $g(z_0)$.

Valime nüüd n nii suurena, et mingi etteantud $\varepsilon > 0$ puhul oleks

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1} = (n+1) |a_{n+1}| r^n + (n+2) |a_{n+2}| r^{n+1} + \dots < \frac{\varepsilon}{3}$$

(see on alati võimalik, sest $g(z)$ astmerida on koonduvusringis absoluutselt koonduv ja $r < R$) ning kirjutame

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) =$$

$$= \left\{ [a_1 + a_2(z + z_0) + \dots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})] - \right.$$

$$- (a_1 + 2a_2z_0 + \dots + na_nz_0^{n-1}) \left. \right\} + \left\{ a_{n+1}(z^n + z^{n-1}z_0 + \dots + z_0^n) + \right.$$

$$+ a_{n+2}(z^{n+1} + z^n z_0 + \dots + z_0^{n+1}) + \dots \left. \right\} -$$

$$- \left\{ (n+1)a_{n+1}z_0^n + (n+2)a_{n+2}z_0^{n+1} + \dots \right\}.$$

Siin esimestes loogelistes sulgudes olev avaldis on (lõpliku n tõttu) pidev funktsioon, mille piirväärtuseks $z \rightarrow z_0$ puhul on null. Seega, kui $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, siis

$$|\{I\}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Teistes loogelistes sulgudes arvestame, et $|z| < r$ ja $|z_0| < r$. Siis saame

$$|\{II\}| < (n+1) |a_{n+1}| r^n + (n+2) |a_{n+2}| r^{n+1} + \dots < \frac{\varepsilon}{3},$$

sest n oli ju valitud just sellest tingimusest.

Täpselt samuti näeme, et kolmandates loogelistes sulgudes oleva avaldise moodul $|\{III\}|$ on väiksem kui $\frac{\epsilon}{3}$ ja seega kokkuvõttes

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| < \epsilon,$$

kui $|z - z_0| < \delta(\epsilon)$, s. t. kui z asub küllalt lähedal punktile z_0 (n oli valitud ainult abisuurusena selle võrratuse tõestamiseks).

Järelikult eksisteerib

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0),$$

s. t. paragrahvi alguses sõnastatud väide on tõestatud.

Loomulikult kehtib tulemus ka juhul, kui astmerida omab kuju

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

Äsja tõestatud väide kujutab endast erijuhtu nn. Weierstrassi teoreemist: kui piirkonnas D ühtlaselt koonduva rea $\sum f_n(z)$ liikmed on selles piirkonnas diferentseeruvad funktsioonid, siis on samas piirkonnas diferentseeruv ka rea summa $f(z)$, kusjuures tema tuletise võib saada antud rida liikmeti diferentseerides, s. t.

$$f'(z) = \sum f'_n(z).$$

Selle teoreemi tõestamisel me käesolevas kursuses ei peatu (tõestus vt. näit. [3], lk. 196 või [4], lk. 172).

§ 4. Tuletise geomeetriline tähendus.

Olgu $w = f(z)$ piirkonnas D diferentseeruv funktsioon. Siis igale z -tasandi punktile z_0 vastab üks kindel w -tasandi punkt $w_0 = f(z_0)$. Kui z liigub mööda mingit kõ-

verat S , lähtudes punktist z_0 , siis liigub w oma tasandil mööda kõverat C (kõvera S kujutist), lähtudes punktist w_0 . Kui joone S võrrand on $z = z(t)$, kus t on reaalne parameeter, näiteks $0 \leq t \leq 1$, siis C võrrand on $w = f[z(t)]$ ($0 \leq t \leq 1$). Juhul kui S omab punktis z_0 puutujat, mida me järgnevas eeldamegi, omab ka C punktis w_0 puutuja.

Eeldades, et $f'(z_0) \neq 0$, võime kirjutada

$$f'(z_0) = \varrho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

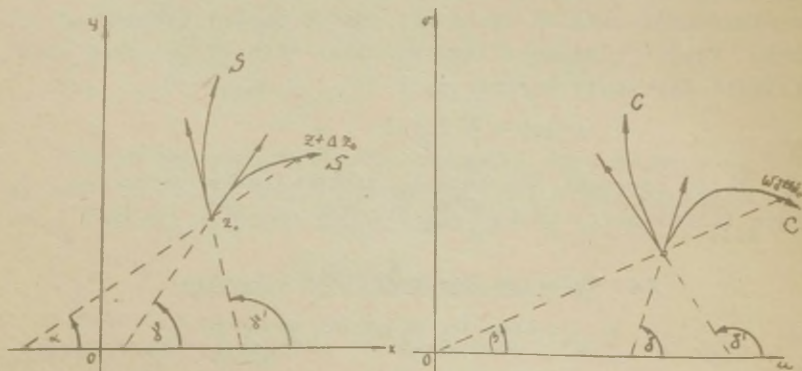
($f'(z_0) = 0$ korral poleks ψ määratud). Olgu $z_0 + \Delta z_0$ mingi punkt kõveral S ja $w_0 + \Delta w_0$ temale vastav punkt kõveral C , siis

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0}$$

ja seega

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \psi$$

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = \varrho.$$



Joonis 10.

Vaatleme kõigepealt esimest nendest võrdustest, mis kehtib täpsusega $2k\pi$). Tähistades $\arg z_0 = \alpha$ ja $\arg w_0 = \beta$ (vt. joon. 10), saame

$$\psi = \lim \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \lim \arg \Delta w_0 - \lim \arg \Delta z_0 = \lim \beta - \lim \alpha.$$

Kuna ilmselt $\lim \alpha = \gamma$, kus γ on nurk reaaltelje ja joonele S punktis z_0 tõmmatud puutuja vahel, ning analoogiliselt $\lim \beta = \delta$, siis

$$\psi = \delta - \gamma$$

ehk

$$\delta = \gamma + \psi.$$

Kui z - ja w -tasandi reaalteljed võtta paralleelsetena, siis viimane valem näitab, et ψ (tuletise argument) on nurk, mille võrra pöörduv z -tasandi joone S puutuja punktis z_0 selle joone kujutamisel funktsiooniga $w = f(z)$.

Kuna S oli mis tahes kõver läbi punkti z_0 , siis saadud tulemusest järeldub, et sama valem kehtib ka iga teise joontepaari S' ja C' puhul:

$$\delta' = \gamma' + \psi.$$

Suurus $\psi = \arg f'(z_0)$ on aga konstantne ja seega

$$\delta' - \delta = \gamma' - \gamma,$$

s. t. mis tahes kaks kõverat, mis väljuvad punktist z_0 , kujutuvad kaheks kõveraks, mis väljuvad punktist $w_0 = f(z_0)$ nii, et nurk puutujate vahel säilitab suuruse ja suuna. Lühidalt: kujutamine diferentseeruva funktsiooniga säilitab nurgad kõikides punktides, kus $f'(z) \neq 0$.

Vaatleme nüüd võrdust

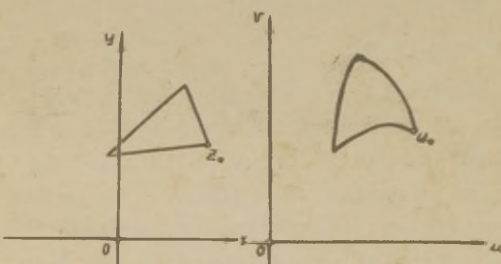
$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = 0.$$

Siin $|\Delta z_0|$ kujutab punktide z_0 ja $z_0 + \Delta z_0$ vahelist kaugust ning $|\Delta w_0|$ punktide w_0 ja $w_0 + \Delta w_0$ vahelist kaugust. Võrdus ütleb, et lõpmata lähedaste kujutispunk-

tide vahelise kauguse suhe nende originaalide vahelisse kaugusesse võrdub konstantse suurusega $\varrho = |f'(z_0)|$ ning ei sõltu seega kõverast S . Järelikult võib suurust ϱ vaadelda kui mastaabi muutust punktis z_0 (täpsemalt: selle punkti lõpmata väikeses ümbruses).

Seega kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga muutub punktides, kus $f'(z) \neq 0$, mastaap igas suunas ühtmoodi.

Kui võtta z -tasandil lõpmata väike kolmnurk, mille üks tipp asub punktis z_0 , siis kujutamisel funktsiooniga $w = f(z)$ vastab temale w -tasandil samuti lõpmata väike (üldiselt kõverjooneline) kolmnurk tipuga



Joonis 11.

selt kõverjooneline) kolmnurk tipuga

punktis w_0 (vt.

joon. 11). Sealjuures nende kolmnur-

kade vastavad nurgad

on võrdsed (kui z_0

ümbruses $f'(z) \neq 0$)

ning vastavate külge-

de suhted on kõrge-

mat järku lõpmata väikeste suuruste täpsusega võrdsed kon-

stantse arvuga $\varrho = |f'(z_0)|$. Niisugust kaht lõpmata väi-

kest kolmnurka nimetatakse sarnasteks. Seepärast nimetatakse

ka kujutamist, mis säilitab nurgad ja muudab mastaapi igas

suunas ühtviisi, konformseks kujutamiseks.

Ülalöeldust järeldub, et diferentseeruva funktsiooni

poolt teostatav kujutamine on konformne kõikides punktides,

kus tuletis erineb nullist. Eelnevast saaks aga järeldada,

et on õige ka vastupidine väide: kui funktsioon teostab kom-

formse kujutamise, siis on ta diferentseeruv ning tema tule-

tis erineb nullist (selle tõestamisel me ei peatu).

Kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga säilivad nur-

gad mitte ainult suuruse vaid ka suuna poolest. Kui aga ku-

jutamisel mastaabi konstantse muutumise kõrval nurkade suu-

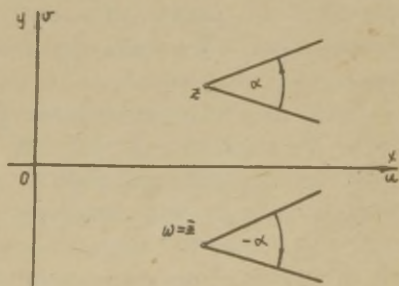
rused säilivad, kuid nende suunad muutuvad vastupidisteks,

siis niisugust kujutamist nimetatakse II liiki konformseks

kujutamiseks (ülalvaadelduid tuleb siis nimetada I liiki konformseteks kujutamisteks). Selgub, et II liiki konformset kujutamist teostavad funktsioonid on diferentseeruvate funktsioonide kaaskompleksid.

Tõepoolest, kui funktsiooni $w = \bar{z}$ puhul kujutada z ja w samal tasandil, siis näeme (vt. joon. 12), et see funktsioon teisendab iga punkti z temaga reaaltelje suhtes sümmeetriliseks. Ilmselt sealjuures nurkade suurus säilib, kuid suund muutub vastupidiseks. Kuna mastaap vaadeldava teisenduse puhul üldse ei muutu, siis on meil tegemist II liiki konformse kujutamiseega.

Nüüd on lihtne järeldada, et kui $f(z)$ on diferentseeruv funktsioon, siis $w = \overline{f(z)}$ teostab II liiki konformse kujutamise. Nimelt võib viimast kujutamist vaadelda koosnevana kahest: $\zeta = f(z)$ ja $w = \bar{\zeta}$. Esimesel kujutamisel säilivad nurgad nii suuruse kui suuna poolest, teine aga muudab ainult nurkade suunda. Seega kokkuvõttes säilitavad nurgad suuruse, kuid muudavad suunda. Mastaabi muutumine on konstantne, sest mõlema osateisenduse puhul on see nii. Järelikult saab II liiki konformsete kujutamiste uurimise alati taandada I liiki konformsete kujutamiste uurimisele.



Joonis 12.

III p e a t ü k k .

E L E M E N T A A R F U N K T S I O O N I D .

§1. Murdlineaarne funktsioon.

Murdlineaarseks nimetatakse funktsiooni $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kus a, b, c ja d on kompleksarvulised konstandid ning $ad - bc \neq 0$ (juhul $ad - bc = 0$ taanduks see funktsioon kujule $f(z) = \frac{a}{c}$, mis teisendab kogu tasandi üheks punktiks).

Kui $c = 0$, siis saame lineaarse funktsiooni $f(z) = \alpha z + \beta$, kus $\alpha = \frac{a}{d}$ ja $\beta = \frac{b}{d}$. See funktsioon on määratud iga z väärtuse puhul, kusjuures $f'(z) = \alpha \neq 0$. Seega teostab ta kogu komplekstasandi konformse kujutamise, kusjuures kõvarate puutujad pöörduvad kogu tasandil nurga $\arg \alpha$ võrra ja mastaap muutub kõikjal $|\alpha|$ kordselt. Juhul $\alpha = 1$ nii pööre kui ka mastaabi muutus faktiliselt puuduvad ja teisendus $w = z + \beta$ teostab seega lihtsalt tasandi paralleellükke vektori β võrra.

Kui $\alpha \neq 1$, siis funktsiooni võib kirjutada kujul

$$w - \gamma = \alpha (z - \gamma), \text{ kus } \gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Kujutades muutujaid z ja w samal komplekstasandil, saame selle funktsiooni poolt teostatavale kujutamisele lihtsa geometrilise interpretatsiooni: iga vektor $z - \gamma$, mis väljub punktist γ , pöörduv kujutamisel nurga $\arg \alpha$ võrra ning tema pikkus muutub $|\alpha|$ korda, andes tulemuseks vektori $w - \gamma$, mis väljub samast punktist γ . Järelikult niisugune kujuta-

mine taandub pöördeks ümber punkti γ ja väljavenitamiseks (või kokkusurumiseks) selle punkti suunas $|\alpha|$ korda.

Olgu nüüd $c \neq 0$. Kui $z \neq \delta = -\frac{d}{c}$, siis

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{(z - \delta)^2}.$$

Seega punktides $z \neq \delta$ on $f'(z) \neq 0$, s. t. $w = f(z)$ teostab konformse kujutamise kõikides lõplikes punktides peale punkti δ . Vaatleme lähemalt erandpunkte $z = \delta$ ja $z = \infty$.

Ilmselt on loomulik defineerida

$$f(\delta) = \infty \quad \text{ja} \quad f(\infty) = \eta = \frac{a}{c}.$$

Seega funktsioon $f(z)$ kujutab punkti δ lõpmatuspunktiks ja lõpmatuspunkti punktiks η . Näitame, et kujutamine on konformne ka nendes punktides. Selleks näitame, et kujutamisel säilivad nurgad. Saaks nimelt tõestada teoreemi: iga pidev üksühene kujutamine, mis säilitab nurgad, on konformne (selle teoreemi tõestusel me käesolevas kursuses ei peatu).

Kõigepealt tuleb selleks defineerida lõpmatuspunktist väljuvate kõverate vaheline nurk: z -tasandi lõpmatuspunkti läbivate kõverate S ja S' vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka, mille moodustavad ζ -tasandi nullpunktis nende kõverate kujutised C ja C' , mis on saadud funktsiooniga $\zeta = \frac{1}{z}$.

Olgu S_1 ja S_2 kaks kõverat, mis läbivad z -tasandi punkti δ ning C_1 ja C_2 nende kujutised. Funktsiooniga $\zeta = \frac{1}{z}$ saab need lõpmatuspunkti läbivad kõverad C_1 ja C_2 kujutada ζ -tasandi nullpunkti läbivateks kõverateks C_1^1 ja C_2^1 . Üleminek z -tasandilt ζ -tasandile teostub nüüd murdlineaarse teisendusega

$$\zeta = \frac{1}{z} = \frac{c}{a} \frac{z + d}{z + b},$$

mis on konformne punktis $z = \delta = -\frac{d}{c}$. Seega nurk kõverate C_1^1 ja C_2^1 vahel võrdub nurgaga kõverate S_1 ja S_2 vahel. Sama nurgaga võrdub aga definitsiooni kohaselt siis

ka nurk kõverate C_1 ja C_2 vahel ning kujutamine funktsiooniga $w = f(z)$ on punktis $z = \zeta$ järelikult konformne.

Analoogiliselt tõestame konformsuse lõpmatuspunktis. Nimelt kui S_1 ja S_2 läbivad z -tasandi lõpmatuspunkti, siis nendevaheline nurk võrdub kõverate S_1 ja S_2 vahelise nurgaga ζ -tasandi nullpunktis, kus $\zeta = \frac{1}{z}$. Üleminek w -tasandi vastavatele kõveratele C_1 ja C_2 teostub nüüd funktsiooniga

$$w = \frac{a z + b}{c z + d} = \frac{a \cdot \frac{1}{\zeta} + b}{c \cdot \frac{1}{\zeta} + d} = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}.$$

See teisendus on murdlineaarne ning järelikult konformne punktis $\zeta = 0$, millest järeldubki, et kõverad C_1 ja C_2 moodustavad punktis $w = \eta$ sama nurga, mis S_1 ja S_2 punktis $\zeta = 0$.

Kui $c = 0$ puhul funktsiooni $w = \alpha z + \beta$ jaoks sa-
muti defineerida $f(\infty) = \infty$, siis saab analoogiliselt näi-
data ka selle teisenduse konformsuse lõpmatuspunktis (tões-
tada!).

Seega iga murdlineaarne funktsioon kujutab kogu z -ta-
sandi konformselt kogu w -tasandiks.

Tõestame nüüd, et murdlineaarse funktsiooni puhul on
sirgete ja ringjoonte kujutisteks jälle sirged ja ringjoo-
ned, kusjuures küll sirge võib kujutuda ringjooneks või vas-
tupidi.

Lineaarse funktsiooni $f(z) = \alpha z + \beta$ korral on see
ilmne, sest vastav kujutamine taandub ju paralleellükkeks
või pöördeks ja venitamiseks ühe punkti suhtes.

Näitame järgnevalt, et meie väide on õige funktsiooni

$$w = p(z) = \frac{1}{z}$$

puhul.

Iga sirge või ringjoone võrrandi tasandil võib kirjuta-
da kujul

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0,$$

kus $B^2 + C^2 - AD > 0$. Juhul $A = 0$ saame siit sirge ja

juhul $A \neq 0$ ringjoone. Üleminekuks komplekskujule arvestame, et $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, $2x = z + \bar{z}$ ja $2y = -i(z - \bar{z})$. Siis saame

$$A z \bar{z} + \bar{E} z + E \bar{z} + D = 0,$$

kus $E = B + iC$. Tingimus $B^2 + C^2 - AD > 0$ omandab nüüd kuju $E\bar{E} - AD > 0$ (juhul $A = 0$, s. t. kui tegemist on sirgega, taandub see lihtsalt nõudeks $E \neq 0$).

Teisendusega $w = p(z)$ omandab saadud võrrand kuju

$$A \cdot \frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E} \cdot \frac{1}{w} + E \cdot \frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

ehk

$$D w \bar{w} + E w + \bar{E} \bar{w} + A = 0.$$

Tingimuse $E\bar{E} - AD > 0$ täidetuse tõttu on see jälle sirge või ringjoone võrrand (juhul $D = 0$ sirge ja juhul $D \neq 0$ ringjoon).

Järelikult teisenduse $w = p(z)$ puhul on sirgete ja ringjoonte kujutisteks sirged või ringjooned.

Vaatleme nüüd üldjuhtu. Iga murdlineaarse teisenduse $w = f(z) = \frac{a z + b}{c z + d}$ saab $c \neq 0$ puhul kirjutada kujul

$$w = \frac{a}{c} + \frac{b c - a d}{c(c z + d)}.$$

Defineerime

$\zeta = f_1(z) = c z + d$, $\chi = p(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, $w = f_2(\chi) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \chi$. Siis $f(z) = f_2\{p[f_1(z)]\}$. Seega mis tahes murdlineaarne funktsioon f osutub funktsioonide f_1 , p ja f_2 superpositsiooniks. Kuna aga viimaste puhul on tõestatava omaduse õigsus näidatud, siis kehtib ta ka funktsiooni f puhul.

Nimetame punkti $\delta = \frac{d}{c}$ funktsiooni $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pooluseks. Kuna $f(\delta) = \infty$, siis punkti δ läbivate sirgete ja ringjoonte kujutised läbivad lõpmatuspunkti, ei saa seega olla ringjooned ning peavad äsjatõestatu põhjal olema sirged. Seevastu aga punkti δ mitte läbiva sirge või ringjoone kujutis ei läbi lõpmatuspunkti, ei saa olla sirge ja peab jä-

relikult olema ringjoon. Kokkuvõttes: murdlineaarse teisenduse $w = f(z)$ puhul kõik selle funktsiooni poolust läbivad sirged ja ringjooned kujutavad w -tasandi sirgeteks, aga poolust mitteläbivad sirged ja ringjooned w -tasandi ringjoonteks.

Kui S on sirge või ringjoon z -tasandil, siis jaotab ta tasandi kaheks piirkonnaks D_1 ja D_2 . Olgu S' joone S kujutis w -tasandil mingi murdlineaarse teisendusega. S' (kui sirge või ringjoon) jaotab w -tasandi samuti kaheks piirkonnaks D'_1 ja D'_2 . Näitame, et viimasest kahest üks on piirkonna D_1 ja teine piirkonna D_2 kujutis. Tõepoolest, kui väitevastaselt oletada, et punktide $z_1 \in D_1$ ja $z_2 \in D_2$ kujutised w_1 ja w_2 asuvad ühes piirkonnas (näiteks D'_1), siis saab neid ühendada sirglõiguga või ringjoone kaarega, mis ei lõiku joonega S' . Selle lõigu (või kaare) originaal on siin samuti sirglõik või ringjoone kaar, mis ei lõiku joonega S . See pole aga võimalik $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$ tõttu.

Kui $w = f(z)$ pole ühikteisendus, s. t. kui $f(z) \neq z$, siis üldiselt $w \neq z$. Kuid leiduvad siiski nn. püsipunktid, mis saab leida võrrandist

$$z = f(z) = \frac{a z + b}{c z + d}.$$

Juhul $c \neq 0$ leidub ilmselt kaks lõplikku (erinevat või kokkulangevat) püsipunkti. Kui aga $c = 0$, siis teiseks püsipunktiks on lõpmatuspunkt ning $\infty = \frac{a}{d} = 1$ korral osutub otsarbekohaseks lugeda lõpmatuspunkti kahekordseks püsipunktiks. Seega igal murdlineaarsel teisendusel, mis pole ühikteisendus, on kaks püsipunkti (need võivad ka ühtuda). Kui murdlineaarsel teisendusel on üle kahe püsipunkti, siis on ta ühikteisendus.

Seega kahe murdlineaarse teisenduse $f(z)$ ja $g(z)$ võrdumiseks piisab, kui võrdsus $f(z) = g(z)$ kehtib kolmes erinevas punktis. Siit aga järeldub, et murdlineaarne teisendus on määratud, kui on antud tema väärtused w_1 , w_2 ja w_3 kolmes erinevas punktis z_1 , z_2 ja z_3 . Vastava teisenduse leidmine ei valmista siis raskusi. Nimelt saame (läbi teha!):

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Kuna siin esinevad punktid on suvalised, siis saame teha olulise järelduse: mis tahes nelja punkti liitsuhe on murdlineaarse teisenduse invariant.

§ 2. Polünoomid. Juured.

Vaatleme n -astme polünoome

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

kus $n \geq 2$, $a_n \neq 0$. Teatavasti (vt. [1]) on võrrandil

$$w = P_n(z)$$

iga w puhul n lahendit $z_1, \dots, z_n$ (mille hulgas võib olla ka võrdseid). Kui veel arvestada, et $P_n(\infty) = \infty$ ja lugeda z -tasandi lõpmatuspunkti selle võrrandi n -kordseks lahendiks, siis näeme, et w -tasandi iga punkt osutub z -tasandi teatud punktide kujutiseks, kusjuures tal on n originaali ($z_1, \dots, z_n$). Sealjuures üksikute w -tasandi punktide puhul (niisuguseks punktiks on ka $w = \infty$) võib erinevate originaalide arv olla väiksem kui n .

Lihtne on näha, et selliseid erandpunkte saab w -tasandil olla ülimalt n . Tõepoolest, kui mõne $w_0 \neq \infty$ puhul on võrrandil $w_0 = P_n(z)$ kordseid juuri, siis teatavasti iga sellise juure z korral $P'_n(z) = 0$. Viimasel võrrandil on aga $n-1$ juurt $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ (mille hulgas omakorda võib olla võrdseid). Seega w_0 peab olema üks arvudest $P_n(\zeta_1), \dots, P_n(\zeta_{n-1})$. Kui siia lisada veel lõpmatuspunkt, siis saamegi need (ülimalt) n w -tasandi punkti, millel on vähem kui n originaali.

Varemtõestatu põhjal on kujutamine $w = P_n(z)$ konformne kõikjal, kus $P'_n(z) \neq 0$, s. t. kõikides z -tasandi punktides peale punktide $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ ja ∞ . Vahetu kontrollimisega saab veenduda (tõestus vt. [4] lk. 53), et

nendes punktides konformsus tõepoolest aset ei leia. Nimelt suurenevad nurgad nendes punktides nii mitu korda, mitmekordse juurega on seal tegemist.

Polünoomi erijuhuks on aste $w = (z-a)^n$. See kujutab z -tasandi w -tasandiks nii, et w -tasandi iga punktil peale $w = 0$ ja $w = \infty$ on z -tasandil n erinevat originaali. Erandpunktide n -kordseteks originaalideks on vastavalt $z = a$ ja $z = \infty$. Punktide $w (\neq 0, \infty)$ vastavad originaalid leiame valemist (vt. [1] lk. 21)

$$z = a + \sqrt[n]{w} = a + \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\text{Arg } w}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } w}{n} \right),$$

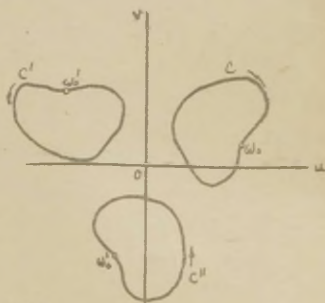
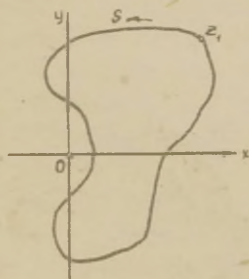
kus sümbol $\sqrt[n]{|w|}$ tähendab aritmeetilist juurt.

Vaatleme nüüd astmefunktsiooni pöördfunktsiooni $w = \sqrt[n]{z}$, mis pole enam ühene, vaid millel on iga $z \neq 0, \infty$ puhul n väärtust. Need väärtused paiknevad niisuguse korrapärase n -nurga tippudes, mille keskpunktiks on $w = 0$ (vt. [1]).

Fikseerime mingis punktis z_0 argumendi ühe väärtuse $\arg z_0$ ja nõuame, et punkt z , lähtudes punktist z_0 , liigub mööda pidevat kõverat S , mis ei läbi nullpunkti. Tähistame sümboliga $\arg z$ niisuguse argumendi väärtuse, mis alates väärtusest $\arg z_0$ muutub pidevalt. Kuna ka $|z|$ muutub kõveral S pidevalt, siis vastav juure väärtus

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right)$$

on samuti pidev funktsioon.



Joonis 13.

Olgu S kinnine kõver, mis ei hõlma nullpunkti (vt. joon. 13). Kui z läbib selle kõvera, jõudes tagasi punkti z_0 , siis vastav juure väärtus $\sqrt[n]{z}$ pöördub samuti tagasi oma esialgse väärtuse

$$w_0 = \sqrt[n]{|z_0|} \left(\cos \frac{\arg z_0}{n} + i \sin \frac{\arg z_0}{n} \right)$$

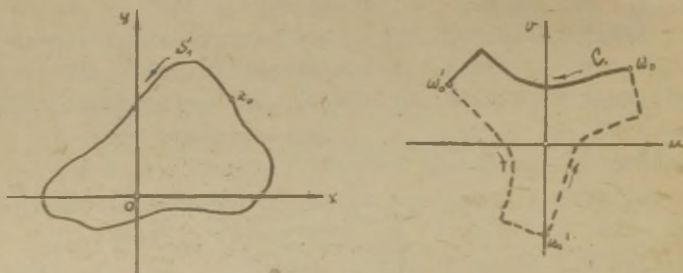
juurde, olles kirjeldanud joone C . Juure teised väärtused, mis on saadud $\arg z_0$ teistest valikutest (neile vastavad esialgsed väärtused $w_0', w_0'', \dots$), kirjeldavad sealjuures kõverad $C', C'', \dots$, mis erinevad kõverast C ainult pöörde poolest nurga $\frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) võrra ümber nullpunkti (joonisel 13 on lihtsuseks valitud $n=3$).

Olgu nüüd S_1 punkti z_0 läbiv kinnine kõver, mis hõlmab nullpunkti (kuid ei lõiku iseendaga). Kui z läbib sellise kõvera, siis valitud $w = \sqrt[n]{z}$ ei pöördu tagasi mitte esialgse väärtuse w_0 juurde, vaid omandab väärtuse $w_0' = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) w_0$ (joonisel 14 on w muutumine märgitud pideva joonega C_1). See seletub asjaoluga, et kui z teeb täisringi ümber nullpunkti (positiivses suunas), siis $\arg z$ saab juurdekasvu 2π . Oma esialgse väärtuse w_0 omandab w alles pärast seda, kui z on veel $n-1$ korra kõvera S_1 läbinud (joonisel 14 punktiirjoon).

Siit järeldub, et igas piirkonnas D , mis ei sisalda ühtki nullpunkti hõlmavat kinnist kõverat (niisuguseks piirkonnaks on näiteks kogu komplekstasand, millest on eraldatud nullpunktist väljuv kiir), saab eraldada n pidevat ja ühest funktsiooni, millest igaüks omandab ühe $\sqrt[n]{z}$ väärtustest. Neid n funktsiooni nimetatakse mitmese funktsiooni $w = \sqrt[n]{z}$ harudeks. Igas fikseeritud punktis erinevad nende väärtused üksteisest teguri $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ poolest. Kuna iga haru teostab ilmselt üksühese kujutamise, siis saab tema tuletise leidmiseks kasutada pöördfunktsiooni diferentseerimise valemit:

$$\left(\sqrt[n]{z} \right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n w^{n-1}} = \frac{w}{n w^n} = \frac{\sqrt[n]{z}}{n z}.$$

Kui tähistada $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$, siis

$$(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1}.$$


Joonis 14.

Kui aga piirkond D sisaldab kas või ühe kinnise kõvera, mis hõlmab nullpunkti, siis ei saa selles piirkonnas funktsiooni $\sqrt[n]{z}$ harusid üksteisest eraldada: liikumine ümber nullpunkti viib teise haru väärtuste juurde.

Punkti $z = 0$, mille üheski ümbruses ei saa eraldada funktsiooni $\sqrt[n]{z}$ harusid, nimetatakse selle funktsiooni harunemispunktiks. Täpsemalt: punkti nimetatakse funktsiooni harunemispunktiks, kui ühekordne liikumine ümber selle punkti mööda pidevat kinnist kõverat asendab funktsiooni ühe haru teisega.

Analoogiliselt arutledes veenduaksime, et funktsiooni $\sqrt[n]{z-a}$ harunemispunktiks on $z = a$.

Üldiselt saab tõestada, et funktsiooni

$$w = \sqrt[n]{P_m(z)},$$

kus $P_m(z)$ on m -astme polünoom, harunemispunktideks on polünoomi $P_m(z)$ lahendid, s. t. need z väärtused, mille puhul $P_m(z) = 0$.

§ 3. Eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.

Reaalmuutuja puhul teatavasti

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

Kui asendada siin reaalmuutuja x kompleksmuutujaga z , siis saame read, mille koonduvusraadius $R = \infty$ (tõestus vt. [5] lk. 67). Seega nende ridade summad on kogu kompleks- tasandil diferentseeruvad funktsioonid. Seda arvestades võime defineerida

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} .$$

Mäitame, et nii defineeritud funktsioonide puhul jäävad kehtima vastavate reaalmuutuja funktsioonide põhilised omadused (kuigi ilmneb ka rida uusi omadusi).

Valemi $e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}$ saab tõestada vahetult:

$$e^z \cdot e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z_1)^n}{n!} = e^{z+z_1}.$$

Võttes saadud valemis $z_1 = -z$, saame $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$, millest

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Seda arvestades kehtib valem

$$\frac{e^z}{e^{z_1}} = e^{z-z_1}.$$

Kuna z esineb cos z astmerekas vaid paarisastmeil ja sin z astmerekas vaid paarituil astmeil, siis ilmselt

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{ja} \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

s.t. sin z on paaritu ja cos z paarisfunktsioon.

Kirjutame e^z avaldises z asemele iz ning eraldame tulemuses liikmed, milles esineb i , liikmetest, milles i (ilmutamata) ei esine:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots =$$

$$= 1 + i \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) =$$

$$= \cos z + i \sin z.$$

Seega saime nn. Euleri valemi:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

mis kehtib iga kompleksarvu z puhul (ainult reaalmuutujaga piirdudes sellist seost trigonomeetriliste funktsioonide ja eksponentfunktsiooni vahel avastada ei õnnestu).

Kirjutades Euleri valemit z asemele $-z$, saame võrduse

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Seda Euleri valemile liites ja lahutades saame vastavalt

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Need tulemused kannavad samuti Euleri valemite nime.

Euleri valem võimaldab kompleksarvu trigonomeetrilise kuju

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

asemel kasutada tunduvalt kompaksemat eksponentkuju:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Euleri valemil abil on samuti lihtne näidata, et eksponentfunktsioon e^z on perioodiline perioodiga $2\pi i$. Tõepoolest

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Selle asjaolu tõestus, et $2\pi i$ on põhiperiood, s.t. et iga teine periood avaldub kujul $2\pi i \cdot k$ (vt. [4] lk.83).

Paneme veel tähele, et kui $z = x + iy$, siis

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Seega funktsioon e^z ei muutu komplekstasandil kuskil nulliks.

Viimati saadud valemist näeme, et funktsioon $w=e^z$ kujutab piirkonna $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ ülemisele pooltasandile (näidata!).

Rakendades võrduse $e^{i(z+z_1)} = e^{iz} \cdot e^{iz_1}$ mõlemates pooltes Euleri valemit, saame

$$\cos(z + z_1) + i \sin(z+z_1) = (\cos z + i \sin z) (\cos z_1 + i \sin z_1)$$

ning võrdusest $e^{-i(z+z_1)} = e^{-iz} \cdot e^{-iz_1}$ analoogiliselt

$$\cos(z+z_1) - i \sin(z+z_1) = (\cos z + i \sin z)(\cos z_1 - i \sin z_1).$$

Nende võrduste liitmine ja lahutamine annab (pärast koondamist) vastavalt

$$\cos(z + z_1) = \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1$$

$$\sin(z + z_1) = \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1,$$

s.t. koosinuse ja siinuse liitmisvalemid kehtivad ka kompleksse argumendi korral.

Võttes nendes valemites $z_1 = 2\pi$ näeme, et nii koosinuse kui ka siinuse perioodiks jääb kompleksse argumendi puhul ikka 2π . Meist varemest järeldub veel, et $\sin z$ nullkohad on $z = \pi k$ ja $\cos z$ nullkohad $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, kus k on suvaline täisarv.

Nälgime, et kompleksse argumendi puhul ei kehti enam võrratused $|\sin z| \leq 1$ ja $|\cos z| \leq 1$. Näiteks $\sin i = \frac{e^2 - 1}{2e} - i = 1,17521$ ja $\cos i = 1,5431$.

Analoogiliselt ülaltooduga üldistame kompleksse argumendi juhule ka hüperboolsed funktsioonid

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \cos iz.$$

Seega iga seos trigonomeetriliste funktsioonide vahel annab analoogilise seose hüperboolsete funktsioonide vahel.

Arvestades astmeridade diferentseerimise reeglit, saame lihtsalt, et

$$(e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z, (\sinh z)' = \cosh z, \\ (\cosh z)' = \sinh z.$$

Ülejäänud trigonomeetrilised ja hüperboolsed funktsioonid defineeritakse samuti nagu reaalse argumendi puhul:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Sealjuures kehtivad valemid (tõestada !):

$$\tanh z = -i \tan iz, \\ \coth z = i \cot iz.$$

§ 4. Logaritm-, arkus- ja astmefunktsioonid.

Olgu $z = e^w$. Selle pöördfunktsiooni nimetatakse logaritm-funktsiooniks ja tähistatakse

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

$$\text{Kui } z_1 = e^{w_1} \text{ ja } z_2 = e^{w_2}, \text{ siis } z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2} \text{ ning}$$

seega

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

Analoogiliselt saame

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

Kuna eksponentfunktsioon ei omanda väärtust null, siis logarifmfunktsioon pole määratud $z = 0$ puhul.

Tähistame $z = r e^{i\varphi}$ ja $w = u + i v$. Siis $z = e^w$ tõttu

$$r e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u e^{iv},$$

millset kompleksarvude võrduse definitsiooni ja eksponent-funktsiooni perioodilisust arvestades saame

$$|z| = r = e^u \quad \text{ja} \quad v = \varphi + 2\pi k = \text{Arg } z.$$

Seega $u = \ln |z|$, $v = \text{Arg } z$ ning järelikult

$$\ln z = \ln |z| + i \text{Arg } z.$$

Viimasest valemist näeme, et $\ln z$ on lõpmata mitmene funktsioon, sest $\text{Arg } z$ omandab lõpmata palju väärtusi. Ühtlasi näeme siit, et kõigil kompleksarvudel peale nulli (sealhulgas ka negatiivsetel reaalarvudel) on logaritme.

Täpselt samuti nagu juure puhul võib ka siin veenduda, et kui piirduda piirkonnaga, mis ei sisalda nullpunkti hõlmavaid kõveraid, siis saab logarifmfunktsiooni jaotada lõpmata paljudeks pidevateks (ja ühtseteks) harudeks. Iga niisuguse haru saame, kui lähtume $\text{Arg } z$ konkreetsest väärtusest ja laseme tal pidevalt muutuda. Kui aga argument liigub ümber nullpunkti, siis jõuame funktsiooni teise haru väärtuste juurde ning pidevus ja ühesus kaovad. Harunemispunktiks on seega jälle nullpunkt.

Funktsiooni $\ln(z-a)$ harunemispunktiks on vastavalt punkt a .

Piirkonnas, mis ei sisalda harunemispunkti hõlmavaid kõveraid, saame logarifmfunktsiooni iga haru tuletise arvutada seega pöördfunktsiooni diferentseerimise eeskirja järgi:

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Järelikult logaritmfunksiooni kõik harud on diferentseeruvad, kusjuures kõigil neil on sama tuletis.

Analoogiliselt logaritmfunksiooniga defineeritakse ka arkus- (ja area-) funksioonid:

$w = \arccos z$ tähendab, et $z = \cos w$

$w = \arcsin z$ tähendab, et $z = \sin w$ jne.

Kuna trigonomeetrilised ja hüperboolsed funktsioonid on lihtsalt avaldatavad eksponentfunksiooni kaudu, siis saab ka arkus- ja areafunktsioone avaldada logaritmfunksiooni kaudu. Näitena tuletame $w = \arcsin z$ avaldise. Kuna

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2i e^{iw}},$$

ehk $e^{2iw} - 2ie^{iw} - 1 = 0$, siis seda võrrandit e^{iw} suhtes lahendades saame $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$, millest

$$w = \frac{1}{i} \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Seega

$$\arcsin z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

(Saadud valemi abil selgitada, millal on $\arcsin z$ reaalne!)

Logaritmfunksiooni abil saab defineerida ka üldise astmefunktsiooni $w = z^a$, kus $a = \alpha + i\beta$ on suvaline kompleksne konstant. Nimelt defineerime

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

Kui $z = re^{i\varphi}$, siis seega

$$z^a = e^{(\alpha + i\beta) [\ln r + i(\varphi + 2k\pi)]} = e^{\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{i[\beta \ln r + \alpha(\varphi + 2k\pi)]}.$$

Siit on näha, et $\beta \neq 0$ puhul on funktsioon z^a alati lõpmata mitmene. Kui $\beta = 0$, s.t. kui $a = \alpha$ on reaalne, siis funktsiooni $w = z^a$ kõik väärtused paiknevad (fikseeritud z

korral) ringjoonel $|w| = e^{a \ln r} = r^a$, kusjuures nende argumendid on

$$\varphi_k = a (\varphi + 2k\pi) = a \operatorname{Arg} z.$$

Kui $a = \frac{m}{n}$ on ratsionaalarv, siis argumendi φ_k väärtuste hulgas on ainult n oluliselt erineva väärtusega (teised erinevad neist 2π kordsete võrra). Järelikult on funktsioon z^a sel juhul vaid lõplikult mitmene ja (nagu selles lihtne on veenduda) ühtub funktsiooniga

$$w = \sqrt[n]{z^m}.$$

Kui aga a on irratsionaalne reaalarv, siis φ_k väärtuste hulgas pole selliseid, mis erinevad 2π kordsete võrra ja järelikult on funktsioon z^a siis lõpmata mitmene. Tema harude eraldamine toimub samuti nagu varem vaadeldud juhtudel, kusjuures harunemispunktiks on nullpunkt.

Täiesti analoogiliselt üldise astmefunktsiooniga võib defineerida ka üldise eksponentfunktsiooni. Nimelt

$$z^z = e^{z \ln z} = e^{z \ln a} \cdot e^{zi \operatorname{Arg} a}.$$

Erinevalt funktsioonist e^z kujutab see endast (lõpmata) mitmest funktsiooni, mille harud erinevad üksteisest teguri $e^{2k\pi i}$ poolest.

IV p e a t ü k k .

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE.

§ 1. Integraali definitsioon ja põhiomadused.

Reaalmuutuja funktsioonide puhul kasutatavatest integraalidest sobib kompleksmuutuja funktsioonidele ülekanamiseks joonintegraali mõiste (vt. näit. [3] lk. 212-229).

Kõikvõimalikest kõveratest vaatleme edaspidi (ilma seda igakord uuesti rõhutamata) enamasti ainult nn. Jordani kõveraid. Jordani kõveraks nimetatakse kõverat, mida saab esitada niisuguse parameetrilise võrrandiga $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), kus $z(t)$ on pidev funktsioon, mille väärtused erinevate parameetri t väärtuste puhul on erinevad (erandi võivad moodustada ainult parameetri väärtused $t = \alpha$ ja $t = \beta$). Lühidalt: Jordani kõver on pidev kõver, mis ei lõika iseennast, kuid võib olla kiinnine. Kui funktsioon $z(t)$ omab (kogu lõigus $t \in [\alpha, \beta]$) pideva tuletise, siis nimetatakse kõverat siledaks. Sileduse nõuet me edaspidi alati ei püstita, küll aga nõuame n-õ. tükiti siledust, s. t. seda, et kõverat saab jaotada lõplikuks arvuks siledateks osadeks (näit. hulknurk). Samuti eeldame edaspidi ikka, et kõveral on antud positiivne suund (näiteks parameetri kasvamisega vastav suund). Kiinnise kõvera korral loeme positiivseks enamasti seda suunda, milles liikudes hõlmatav piirkond jääb vasakule.

Kui valitud positiivse suunaga kõverat tähistada sümboliga S , siis sümbol $(-S)$ tähendab sama kõverat, kuid vastupidise suunaga. Kõigi vaadeldavate kõverate puhul eeldame, et nad omavad lõpliku pikkuse.

Olgu $w = f(z)$ piirkonnas D pidev funktsioon ja S selles piirkonnas asuv kõver, mille otspunktideks on a ja b (vt. joon. 15). Jaotame kõvera S (kaare ab) punktidega $a = z_0$,

$z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ mingil viisil n osaks. Igal osakaarel

$z_k z_{k+1}$ valime vabalt mingi punkti ζ_k ning moodustame summa

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k,$$

kus $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Laseme nüüd $\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$

ja näitame, et sõltumata sellest, kuidas kõver S on jaotatud osakaarteks, eksisteerib lim I_n .

Tähistame $z_k = x_k + i y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i \eta_k$, $z = x + i y$,

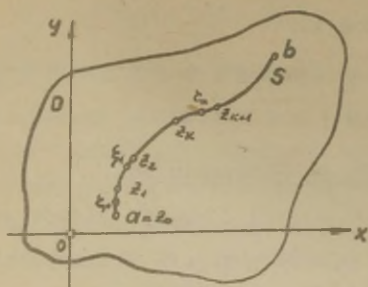
$\Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$, $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, kus $f(z)$

pidevuse tõttu ka u ja v on pidevad kahe muutuja funktsioonid. Nendes tähistustes saame

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &+ i \sum_{k=0}^{n-1} [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned}$$

Seadud summad kujutavad endast aga integraalsummasid (vt. [3] lk. 219), mille piirväärtusteks (kui $\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$) on vastavalt (teist liiki) joonintegraalid

$$\int_S u \, dx - v \, dy \quad \text{ja} \quad \int_S v \, dx + u \, dy.$$



Joonis 15.

Need piirväärtused eksisteerivad funktsioonide u ja v pidevuse tõttu (vt. [3] lk. 221). Seega eksisteerib ka $\lim I_n$, mida nimetatakse integraaliks kompleksmuutuja funktsioonist $f(z) = u + i v$ mööda kõverat S ja tähistatakse

$$\int_S f(z) dz.$$

Ühtlasi oleme saanud valemi

$$\int_S f(z) dz = \int_S u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_S v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

mis taandab kompleksmuutuja funktsiooni integreerimise harilike joointegraalide arvutamisele. Seda valemit on kerge meeles pidada, kui kirjutada ta kujul

$$\int_S f(z) dz = \int_S (u + i v) (dx + i dy).$$

Mis puutub selle integraali praktilisse arvutamisse, siis eeldades, et kõver S on sile ning tema võrrand on $z = z(t) = x(t) + i y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), saame valemi

$$\begin{aligned} \int_S f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t) \} dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} \{ v[x(t), y(t)] x'(t) + u[x(t), y(t)] y'(t) \} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt, \end{aligned}$$

kus $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$, nagu see tuleb üldisest definitsioonist järeldub (tõestada!). Seega

$$\int_S f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \{ f[z(t)] z'(t) \} dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} \{ f[z(t)] z'(t) \} dt.$$

Kuna integraal kompleksmuutuja funktsioonist avaldub

joonintegraalide kaudu, siis kanduvad talle lihtsalt üle joonintegraalide tuntud omadused:

$$1) \int_S f(z) dz = - \int_{-S} f(z) dz ;$$

$$2) \int_S c f(z) dz = c \int_S f(z) dz \quad (c = \text{const.}) ;$$

$$3) \int_S [f_1(z) + \dots + f_k(z)] dz = \int_S f_1(z) dz + \dots + \int_S f_k(z) dz ;$$

$$4) \int_S f(z) dz = \int_{S_1} f(z) dz + \dots + \int_{S_k} f(z) dz ,$$

kus $S_1, \dots, S_k$ on kaared, mis on saadud kõvera S mingi osadeks jaotamise tulemusel, kusjuures kaare S_1 lõpp-punkt langeb ühte kaare S_2 alguspunktiga jne.

Tõestame veel, et kui kogu kõveral S kehtib võrratus $|f(z)| \leq M$, siis

$$5) \left| \int_S f(z) dz \right| \leq M s ,$$

kus s on kõvera S pikkus. Tõepoolest

$$\left| I_n \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq M s ,$$

sest $\sum |\Delta z_k|$ on kõverasse S sissejoonestatud murdjoone pikkus. Piirile minnes saamegi võrratuse 5).

Defineeritud integraali puhul jääb kehtima ka tuntud teoreem sellest, et ühtlaselt koonduvat funktsionaalrida

võib liikmeti integreerida (vrd. [3], lk. 81). Tõepoolest, olgu rida $\sum f_n(z)$ ühtlaselt koonduv funktsiooniks $f(z)$ kõveral S misaldivas piirkonnas (või vähemalt kõveral S). Siis vastavalt valitud arvule $\varepsilon > 0$ leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et $n > N(\varepsilon)$ puhul kegu kõveral S kehtib võrratus

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

kus

$$S_n(z) = f_0(z) + \dots + f_n(z).$$

Järelikult valemi 5) põhjal

$$\left| \int_S [f(z) - S_n(z)] dz \right| < \varepsilon n$$

(n on kõvera S pikkus) ja seega

$$\begin{aligned} \left| \int_S f(z) dz - \int_S S_n(z) dz \right| &= \left| \int_S f(z) dz - \int_S f_0(z) dz - \dots - \right. \\ &\quad \left. - \int_S f_n(z) dz \right| < \varepsilon n, \end{aligned}$$

s. t.

$$\begin{aligned} \int_S f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_S f_0(z) dz + \dots + \int_S f_n(z) dz \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_S f_n(z) dz. \end{aligned}$$

Tõestatud tulemuse võib sõnastada ka nii: kui pidevate funktsioonide $S_n(z)$ jada koondub kõveral S ühtlaselt funktsiooniks $f(z)$, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S S_n(z) dz = \int_S \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) dz = \int_S f(z) dz,$$

s.t. ühtlaselt koonduva jada korral võib piirväärtuse ja integraali sümboloid vahetada.

§ 2. Cauchy teoreem.

Põhilist tähtsust kogu kompleksmuutuja funktsioonide teoorias omab järgmine

teoreem (Cauchy 1825). Kui $f(z)$ on üheli sidusas piirkonnas D diferentseeruv funktsioon, siis

$$\int_S f(z) dz = 0$$

iga piirkonda D kuuluva kinnise kõvera S puhul.

Seda teoreemi on lihtne tõestada lisaeeldusel, et $f'(z)$ on vaadeldavas piirkonnas pidev. Siis on tuletise definitiooni põhjal pidevad ka funktsioonide u ja v osatuletised. Me võime rakendada Greeni valemit (vt. [3], lk. 263)

$$\int_S P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

kus Δ on kinnise kõvera S poolt piiratud piirkond. Seda valemit rakendades saame

$$\begin{aligned} \int_S f(z) dz &= \int_S u dx - v dy + i \int_S v dx + u dy = \\ &= \iint_{\Delta} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

sest D'Alembert-Euleri võrrandite põhjal on mõlema kahekordse integraali integrandid võrdsed nulliga. Sellega on teoreem tehtud lisaeeldusei tõestatud. See lisaeeldus on kindlasti täidetud näiteks funktsioonide $f(z) = z$ ja $f(z) = \text{const.}$ puhul (teoreemi kehtivust nende funktsioonide puhul me kasu-

tame järgnevas tõeustuses).

Esitatud tõeustusega ei saa aga piirduda, sest $f'(z)$ pidevase eeldamine on täiesti üleliigne. Pealegi kasutame me seda teoreemi hiljem muuhulgas $f'(z)$ diferentseeruvuse tõeustamisel.

Teoreemi tõeustamiseks asume teda järk-järgult lihtsustama. Kõigepealt veendume, et kinnise kõvera S teoreemi sõnastuses võib asendada kinnise murdjoonega L . Selleks näitame, et iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub kõverasse S sissejoonestatud murdjoon L nii, et

$$\left| \int_S f(z) dz - \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Kinnises piirkonnas $\Delta \subset D$ on $f(z)$ teatavasti ühtlaselt pidev, s.t. leidub $\delta(\varepsilon)$ nii, et iga $z', z'' \in \Delta$ korral

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2s}, \text{ kui } |z' - z''| < \delta$$

(s on kõvera S pikkus). Jaotame kõvera S (joon. 16) punktidega $z_0, z_1, \dots, z_n = z_0$ n kaareks nii, et iga kaare S_k pikkus s_k oleks väiksem kui δ . Ühendades jaotuspunktid z_k sirglõikudega, on iga lõigu L_k pikkus l_k samuti väiksem kui δ . Moodustame integraalsumma I_n , valides $S_k = z_k$:

$$I_n = f(z_0) \Delta z_0 + \dots + f(z_{n-1}) \Delta z_{n-1}.$$

Kuna $f(z) \equiv 1$ puhul meie teoreem on tõeustatud, siis

$$\int_{S_k} dz + \int_{-L_k} dz = 0,$$

millest

$$\int_{S_k} dz = - \int_{-L_k} dz = \int_{L_k} dz = \Delta z_k$$

(viimast integraali on lihtne vahetult arvutada). Seega võime kirjutada

$$I_n = \int_{S_0} f(z_0) dz + \int_{S_1} f(z_1) dz + \dots + \int_{S_{n-1}} f(z_{n-1}) dz .$$

Teiselt poolt aga

$$\int_S f(z) dz = \int_{S_0} f(z) dz + \int_{S_1} f(z) dz + \dots + \int_{S_{n-1}} f(z) dz$$

ja järelikult

$$\int_S f(z) dz - I_n = \int_{S_0} [f(z) - f(z_0)] dz + \dots + \int_{S_{n-1}} [f(z) - f(z_{n-1})] dz .$$

Kuna $z \in S_k$ puhul $|z - z_k| < \delta$ ja seega $|f(z) - f(z_k)| < \frac{\epsilon}{2\delta}$,

siis

$$\left| \int_S f(z) dz - I_n \right| < \frac{\epsilon S_0}{2\delta} + \frac{\epsilon S_1}{2\delta} + \dots + \frac{\epsilon S_{n-1}}{2\delta} = \frac{\epsilon}{2} .$$

S

Täpselt samuti saame (läbi teha !)

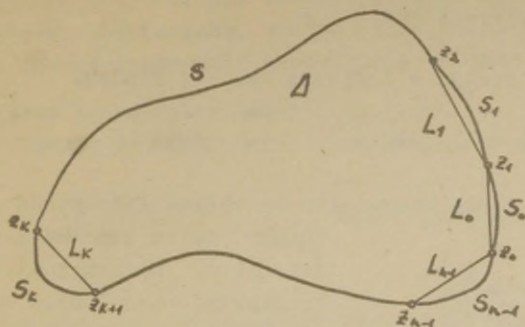
$$\left| \int_L f(z) dz - I_n \right| < \frac{\epsilon l}{2\delta} < \frac{\epsilon}{2} ,$$

kus L on lülidest L_k koosnev kinnine murdjoon (hulknurk) ja l tema pikkus.

Seega

$$\left| \int_S f(z) dz - \int_L f(z) dz \right| \leq \left| \int_S f(z) dz - I_n \right| +$$

$$+ \left| \int_L f(z) dz - I_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$



Joonis 16 .

Nüüd tuleb meil Cauchy teoreem tõestada ainult hulk-
nurkade jaoks, s.t. näidata, et integraal mööda mis tahes
kinnist murdjoont on null). Tõepoolest, kui oletada, et hulk-
nurkade jaoks on teoreem tõestatud, siis mis tahes kinnise
kõvera S korral aproksimeerime selle murdjoonega L nii,
et

$$\left| \int_S f(z) dz - \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Kuna oletuse kohaselt $\int_L f(z) dz = 0$, siis

$$\left| \int_S f(z) dz \right| < \varepsilon,$$

mis arvu ε suvalisuse tõttu on võimalik ainult juhul

$$\int_S f(z) dz = 0.$$

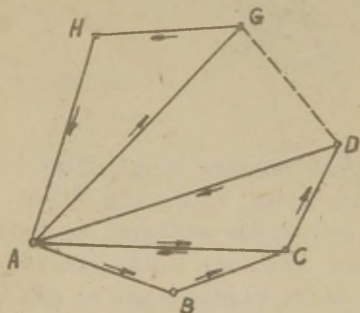
Näitame nüüd, et teoreemi tõestamise hulknurkade jaoks võib asendada selle teoreemi tõestamisega kolmnurkade jaoks. Selleks jaotame hulknurga L (näiteks diagonaalidega) kolmnurkadeks (joon.17). Ilmselt

$$\int_L f(z)dz = \int_{ABCA} f(z)dz + \int_{ACDA} f(z)dz + \dots + \int_{AGHA} f(z)dz,$$

sest integraali mõõda diagonaale on võetud kaks korda ja vastupidistes suundades. Seega kui Cauchy teoreem kehtib kolmnurkade puhul, siis kehtib ta ka mis tahes hulknurga puhul.

Olgu K mingi kolmnurk piirkonnas D . Tähistame

$$\left| \int_K f(z)dz \right| = M$$



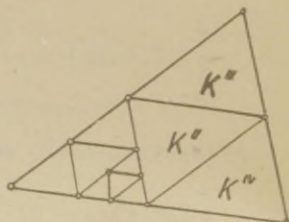
Joonis 17.

ja näitame, et $M = 0$ (sel-

lega oleks Cauchy teoreem tõestatud).

Jaotame kolmnurga K küljed pooleks ja ühendame jaotuspunktid sirglõikudega (joon.18). Nii saame neli kongruentset kolmnurka K' , K'' , K''' ja K^{iv} . Ilmselt

$$\begin{aligned} \int_K f(z)dz &= \\ &= \int_{K'} f(z)dz + \int_{K''} f(z)dz + \\ &+ \int_{K'''} f(z)dz + \int_{K^{iv}} f(z)dz. \end{aligned}$$



Joonis 18.

Kuna vasakpoolse integraali moodul on M , siis peab vähemalt ühe parempoolse integraali moodul olema mitte väiksem kui $\frac{M}{4}$ (tõestada!). Olgu vastavaks kolmnurgaks K_1 (joonisel 18 on $K_1 = K'$). Jaotame selle kolmnurga jälle neljaks kongruentseks kolmnurgaks, valime neist välja selle (K_2), mida mööda võetud integraali moodul pole väiksem kui $\frac{M}{4^2}$ jne. Nii saame kolmnurkade jada $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, milles iga järgmine sisaldub eelmistes, kusjuures

$$\left| \int_{K_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Kui tähistada kolmurga K ümbermõõtu tähega k , siis on kolmurga K_n ümbermõõduks $\frac{k}{2^n}$. Kuna $\frac{k}{2^n} \rightarrow 0$, siis piirväärtuse käsitlemisel antud printsiibi kohaselt leidub punkt z_0 , mis asub kõikides kolmnurkades ja seega ka differentseeruvuse piirkonnas D . Järelikult eksisteerib lõplik $f'(z_0)$, s.t. vastavalt ettevalitud arvule $\varepsilon > 0$ leidub $\delta(\varepsilon)$ nii, et

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \text{ kui } |z - z_0| < \delta.$$

Seega niisuguse z puhul

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

See võrratus on rahuldatud punkti z_0 δ -ümbruses. Kõikjal suurest n väärtusest alates kuuluvad sellesse ümbrusesse aga kõik kolmnurgad K_n . Järgnevas tähistagugi K_n sellist kolmnurka.

Kuna $f(z) = z$ ja $f(z) = 1$ puhul teoreem on tõestatud, siis

$$\int_{K_n} z dz = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{K_n} dz = 0.$$

Seega võime kirjutada

$$\int_{K_n} f(z) dz = \int_{K_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)] dz.$$

Järelikult küllalt suure n puhul

$$\left| \int_{K_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{k}{2^n} \cdot \frac{k}{2^n} = \frac{\varepsilon k^2}{4^n},$$

sest kui $z \in K_n$, siis kindlasti $|z - z_0| < \frac{k}{2^n}$ (K_n ümbermõõt).

Kuna aga teiselt poolt

$$\left| \int_{K_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n},$$

siis saame

$$\frac{M}{4^n} < \frac{\varepsilon k^2}{4^n} \quad \text{ehk} \quad M < \varepsilon k^2,$$

millest $M = 0$, sest ε on kui tahes väike ja k konstantne.

Seega oleme Cauchy teoreemi täielikult tõestanud. Tõestuse käigus me kasutasime asjaolu, et teoreem kehtib $f(z) = z$ ja $f(z) = 1$ puhul, mis järeldub nende funktsioonide tuletiste pidevusest ning päragrahvi alguses selle erijuhu jaoks antud tõestusest. Selle lihtsustatud tõestuse võib aga ka ära jätta, sest on lihtne vahetult integraali definitsioonist järeldada, et

$$\int_S dz = 0 \quad \text{ja} \quad \int_S z dz = 0$$

mööda mis tahes kinnist kõverat S (vt. [4] lk.133).

Märgime veel ilma tõestuseta, et Cauchy teoreemi saaks järgmiselt üldistada (vt. näit. [5] lk. 170):

Kui D on kõvera S poolt piiratud piirkond ning $f(z)$ on diferentseeruv piirkonnas D ja pidev kinnises piirkonnas

$\bar{D} = D + S$, siis

$$\int_S f(z)dz = 0.$$

Cauchy teoreemi võib sõnastada ka järgmiselt:

Kui funktsioon $f(z)$ on üheli sidusas piirkonnas D diferentseeruv, siis integraali

$$\int_S f(z)dz$$

väärtus ei sõltu kõvera S kujust (kui see kõver ainult kuulub piirkonda D), vaid üksnes tema otspunktide asukohast.

Tõepoolest, olgu a ja b kaks fikseeritud punkti piirkonnas D ning S ja S' mingid kaks neid punkte ühendavat kõverat (joon.19). Siis

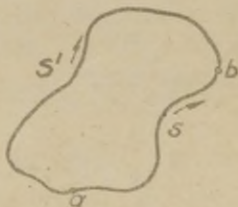
$$\int_{S+(-S')} f(z)dz = 0,$$

$S+(-S')$

millest

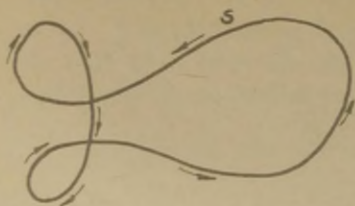
$$\int_S f(z)dz = - \int_{-S'} f(z)dz = \int_{S'} f(z)dz.$$

Olgu veel märgitud, et kõver S võib omada ka kahe -



Joonis 19.

kordseid punkte. Tõepoolest, kui kõver S lõikab iseennast



Joonis 20.

(vt. joon 20), siis moodustab ta kaks või enam kinnist kõverat (silmust), kusjuures integraal üle iga niisuguse silmuse on eraldi võrdne nulliga. Tähtis on aga, et funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuse piirkond D oleks üheli sidus ja kõver ei väljuks sellest piirkonnast.

§ 3. Määramata integraal.

Kogu käesoleva paragrahvi vältel eeldame, et $f(z)$ on üheli sidusas piirkonnas D diferentseeruv funktsioon.

Olgu S mingi punkti z_0 ja z ühendav kõver piirkonnas D . Siis integraal

$$\int_S f(z) dz$$

ei sõltu teatavasti kõvera S kujust, vaid ainult tema otspunktidest z_0 ja z . Sellepärast võime vaadeldava integraali kirjutada kujul

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta .$$

Kui punkt z_0 on fikseeritud, siis viimane integraal sõltub ainult punktist z . Järelikult võime kirjutada

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta .$$

kus $F(z)$ on ülalöeldu tõttu piirkonnas D määratud ja ühene funktsioon.

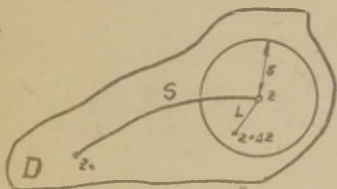
Näitame, et $F(z)$ on piirkonnas D diferentseeruv, kusjuures

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = f(z)$$

Funktsiooni $f(z)$ pidevuse tõttu leidub iga $\varepsilon > 0$ puhul piirkonnas D punkti z selline δ -ümbrus, et kui ζ kuulub sellesse ümbrusesse, s.t. kui $|\zeta - z| < \delta$, siis

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Valime Δz nii, et punkt $z + \Delta z$ kuulub nimetatud ümbrusesse (vt. joon. 21).



Joonis 21.

Olgu S mingi punkte z_0 ja z ühendav kõver ning L punkte z ja $z + \Delta z$ ühendav sirg-lõik. Siis

$$F(z + \Delta z) = \int_{S+L} f(\zeta) d\zeta,$$

$$F(z) = \int_S f(\zeta) d\zeta$$

ning

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_L f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

Järelikult

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

Kuna vahetult arvutades on lihtne leida, et

$$\int_z^{z + \Delta z} d\zeta = \int_L d\zeta = \Delta z,$$

siis

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta$$

ja seega

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta.$$

Kuna $z + \Delta z$ kuulub ülalvalitud ümbrusesse, siis kuulub samasse ümbrusesse ka kogu lõik L , s.t. $\zeta \in L$ puhul on

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Arvestades veel, et lõigu L pikkus on $|\Delta z|$, saame lõpuks

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Seega eksisteerib

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z},$$

kusjuures $F'(z) = f(z)$, m.o.t.t.

Olgu märgitud, et esitatud tõestuses oli funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvust tarvis ainult Cauchy teoreemi kasutamise lubatavuseks.

Funktsiooni $f(z)$ algfunktsiooniks nimetatakse iga

funktsiooni $\Phi(z)$, mis kogu piirkonnas D rahuldab tingimust

$$\Phi'(z) = f(z) .$$

Asjatõestatut arvestades on $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ seega

üks algfunktsioonidest. Näitame, et mis tahes algfunktsioon $\Phi(z)$ omab kuju

$$\Phi(z) = F(z) + c = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + c ,$$

kus c on suvaline konstant.

Tähistame

$$\Phi(z) - F(z) = G(z) = U(x,y) + i V(x,y) .$$

Siis

$$G'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 ,$$

s.t.

$$G'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} = 0 ,$$

millest

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

kogu piirkonnas D . Seega U ja V on selles piirkonnas konstantsed:

$$U(x,y) \equiv U_0, \quad V(x,y) \equiv V_0$$

ja järelikult

$$G(z) = U_0 + i V_0 = c = \text{const},$$

millega võrdus

$$\Phi(z) = F(z) + c$$

ongi tõestatud.

Funktsiooni $f(z)$ kõikide algfunktsioonide ühist avaldist nimetatakse määramata integraaliks sellest funktsioonist.

Võttes võrduses

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + c = \Phi(z)$$

$z = z_0$, saame

$$c = \Phi(z_0).$$

Seega

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

s.t. ka kompleksmuutuja funktsioonide puhul kehtib Newton-Leibnitzi valem, mis avaldab määratud integraali algfunktsiooni muuduna.

Järelikult võime ka integraali kompleksmuutuja funktsioonist vaadelda kahelt seisukohalt:

- 1) kui summeerimisprotsessi tulemust ja
- 2) kui diferentseerimise pöördtehte tulemust.

§ 4. Integraal mitmelisidusas piirkonnas.

Mitmelisidusate piirkondade puhul üldiselt ei kehti

Cauchy teoreem. Näiteks funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$ on diferentseeruv rõngas $\frac{1}{2} < |z| < 2$, kuid integraalid punktist -1 punktini $+1$ mööda ringjoone $|z|=1$ ülemist ja alumist poolt on erinevad (joon. 22). Tõepoolest, mööda ülemist poolringjoont S_1 , kus $z = z(t) = e^{it}$ ($\pi \geq t \geq 0$), saame

$$\int_{S_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 \frac{i e^{it} dt}{e^{it}} = -i\pi.$$

Mööda alumist poolringjoont S_2 , kus $z = z(t) = e^{it}$ ($-\pi \leq t \leq 0$), saame aga

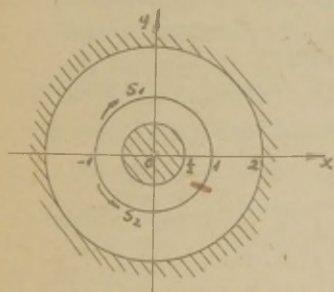
$$\int_{S_2} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^0 \frac{i e^{it} dt}{e^{it}} = i\pi.$$

Üldse saavad ühiste otspunktidega kõverad S_1 ja S_2 mitmelisidusas piirkonnas D paikneda kahel põhimõtteliselt erineval viisil: nende poolt hõlmatav pinnaosa võib kuuluda piirkonda D (joon. 23, a), kuid võib ka sinna täielikult mitte kuuluda (joon. 23, b).

Esimesel juhul on integraalid

$$\int_{S_1} f(z) dz \quad \text{ja} \quad \int_{S_2} f(z) dz$$

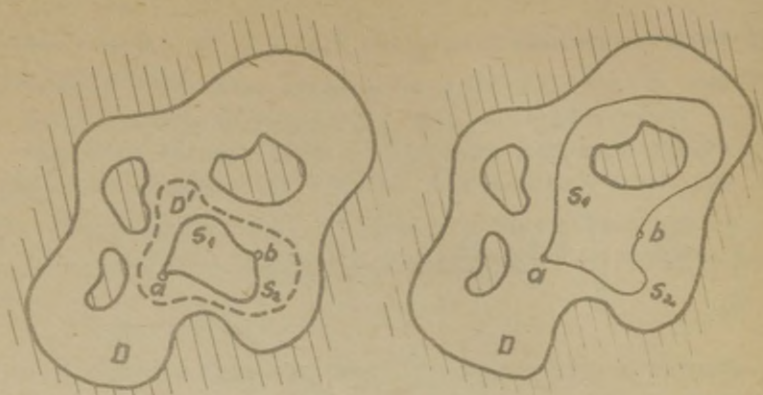
ilmselt võrdsed, sest kõverate S_1 ja S_2 poolt piiratud pinnaosa kuulub mingisse ühelisidusasse piirkonda $D' \subset D$.



Joonis 22.

milles $f(z)$ on diferentseeruv.

Teisel juhul need integraalid üldiselt võrdsed ei ole, nagu see nähtub äsjatoodud näitest.



a)

Joonis 23.

b)

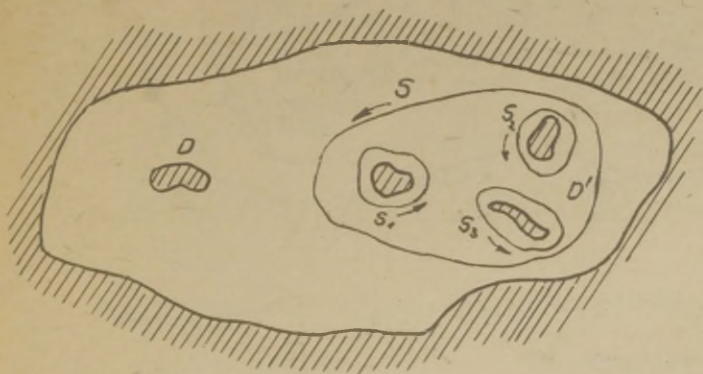
Õeldust järeldub, et integraal mitmelisidusas piirkonnas diferentseeruvast funktsioonist ei muutu, kui integreerimisteed deformeerida pidevalt nii, et tema otspunktid jäävad paigale ja ta deformeerimise käigus ei välju vaadeldavast piirkonnast.

Mäitame nüüd, et mitmelisidusas piirkonnas D diferentseeruva funktsiooni integreerimise mööda mis tahes kinnist kõverat S saab alati taandada niisuguste integraalide arvutamisele, mis on võetud mööda kõvera S poolt piiratud pinnatüki sees olevaid kõveraid. Täpsemalt:

Olgu $S, S_1, \dots, S_n$ piirkonnas D asuvad kinnised kõverad, mis üksteisega ei lõiku. Kõver S hõlmaku ülejäänuid, kuid ükski kõveratest $S_1, \dots, S_n$ ärgu hõlmaku teisi (joon.24). Kõveratega $S, S_1, \dots, S_n$ piiratud mitmelisidus piirkond D' kuulugu täielikult piirkonda D (ilmselt peavad selleks piirkonna D kõik "väljalõiked", mis on ümbritsetud kõveraga S , olema ümbritsetud ka ühega kõverast $S_1, \dots, S_n$). Siis

$$\int_S f(z)dz = \int_{S_1} f(z)dz + \dots + \int_{S_n} f(z)dz$$

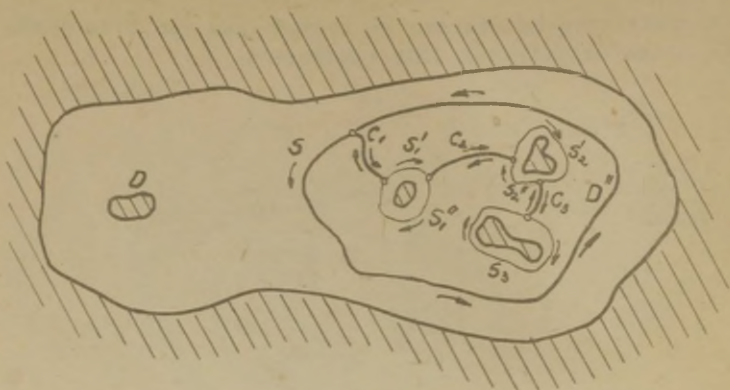
(kõverate positiivseks saunaks on loetud ikka see, mida mõnda liikudes hõlmatav piirkond jääb vasakule).



Joonis 24.

Tõestuseks ühendame kõverad S ja S_1 pideva kõveraga C_1 , kõverad S_1 ja S_2 kõveraga C_2 jne. kõverad S_{n-1} ja S_n kõveraga C_n (kõverad C_k ärgu väljuga piirkonnast D' ega lõikugu omavahel). Kõverad C_k muudavad piirkonna D' ühelisidusaks piirkonnaks D'' , mille rajajoon S'' koosneb kõverate S_k osadest S_k' ning S''_k , kõverast S ja kõveratest C_k , kusjuures viimaseid tuleb arvestada kahekordselt (joon. 25). Piirkonnas D'' ja tema rajajoonel S'' on funktsioon $f(z)$ diferentseeruv, seega võime rakendada Cauchy teoreemi, mille kohaselt

$$\int_{S''} f(z) dz = 0.$$



Joonis 25 .

Kuid (vt. joon. 25)

$$S^* = S + C_1 + (-S_1^1) + C_2 + (-S_2^1) + \dots + (-S_{n-1}^1) + C_n + (-S_n^1) + \\ + (-C_n) + (-S_{n-1}^0) + \dots + (-S_2^0) + (-C_2) + (-S_1^0) + (-C_1),$$

mida arvestades viimane võrdus pärast lihtsaid teisendusi omandabki nõutud kuju (läbi teha !)

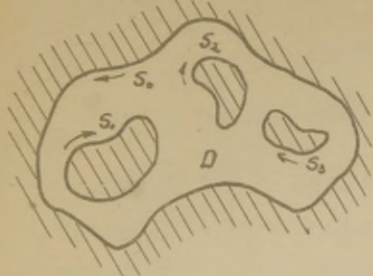
Saadud tulemust võib aga tõlgendada ka kui Cauchy teoreemi üldistust mitmelisidusate piirkondade jaoks:

Kui funktsioon on mitmelisidusas piirkonnas D diferentseeruv ja D sulundis pidev, siis tema integraal mööda piirkonna rajajoont S , mis koosneb mitmest kinnisest kõverast $S_0, S_1, \dots, S_n$, võetuna nii, et piirkond jääb kogu aeg vasakule, võrdub nulliga (joon.26).

Olgu a ja b mitmelisidusa piirkonna D fikseeritud punktid ning S_0 neid ühendav kordsete punktideta kõver. Olgu S mingi teine neid punkte ühendav kõver (vt. joon.27,a). Vaatleme integraali

$$\int_S f(z) dz,$$

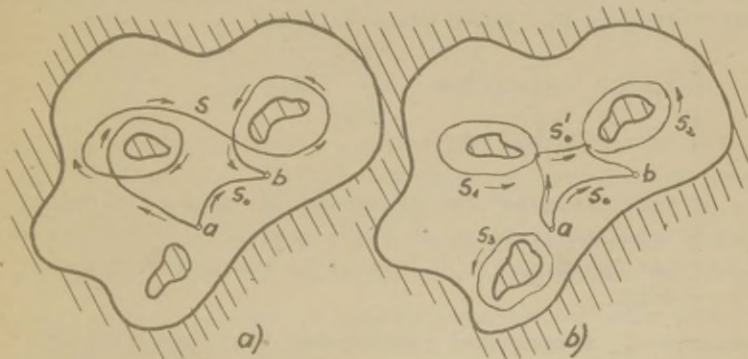
kus $f(z)$ olgu piirkonnas D diferentseeruv funktsioon.



Joonis 26.

Ülalõeldut arvestades võime me seda integraali muutmata kõvera S asendada kõveraga, mis koosneb:

- 1) kõverast S'_0 , mis koos kõveraga S_0 hõlmab piirkonna D ühelisidusat osa ja
- 2) kõveratest $S_1, S_2, \dots, S_n$, mis igaüks hõlmavad piirkonna D rajajoone üht kinnist osa ("väljalõiget").



Joonis 27.

Sealjuures mõni kõveratest S_k tuleb läbida mitu korda ning üldiselt erinevates suundades (joonisel 27, b tuleb S_1 läbida kaks korda kellaaosuti liikumise suunas ja S_2 üks kord vastu kellaaosuti liikumise suunda). Tavaliselt lepitakse kokku, et kõik integraalid mööda kõveraid S_k võetakse ühes suunas (näiteks vastu kellaaosuti liikumise suunda) ja pannakse integraali ette tarbe korral miinusmärk.

Kuna

$$\int_{S'_0} f(z) dz = \int_{S_0} f(z) dz,$$

aga integraal

$$I_k = \int_{S_k} f(z) dz$$

ilmselt ei sõltu kõvera S_k kujust, vaid ainult funktsioonist $f(z)$ ja piirkonnast D , siis saab integraali mõõda punkte a ja b ühendavat mistahes kõverat (kui see ainult kuulub piirkonda D) alati avaldada kujul

$$\int_S f(z) dz = \int_{S_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n N_k \cdot I_k$$

kus n on "väljalõigete" arv piirkonnas D ja N_k täisarvud, mis näitavad, mitu korda ja millises suunas tuleb ümber k -nda "väljalõike" integreerida (joonise 27 puhul on $n=3, N_1=-2, N_2=1, N_3=0$).

Suurusi I_k nimetatakse funktsiooni $f(z)$ tsüklilisteks konstantideks piirkonna D suhtes.

V p e a t ü k k .

CAUCHY INTEGRAL .

§ 1. Cauchy valem. Mooduli maksimumi printsiip.

Olgu $f(z)$ ühelisidusus piirkonnas D diferentseeruv funktsioon. Fikseerime selles piirkonnas vabalt punkti z ja näitame, et funktsiooni väärtus selles punktis on määratud funktsiooni väärtustega mingil seda punkti ümbritseval kõveral. Nimelt kehtib valem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

kus S on mingi punkti z ümbritsev kinnine kõver. Seda valemit nimetatakse Cauchy valemiks ja tema parempoolset integraali Cauchy integraaliks.

Märgime, et kui kõver S ei ümbritseks punkti z , siis funktsioon $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ oleks selle kõvera poolt piiratud piirkonnas diferentseeruv ja Cauchy integraal võrduks (Cauchy teoreemi põhjal) nulliga.

Cauchy valemi tõestamiseks eraldame kõvera S poolt piiratud piirkonnast ringi, keskpunktiga z ja (küllalt väikese) raadiusega ρ . Ülejäänud piirkonnas on funktsioon

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

diferentseeruv ja seega Cauchy teoreemi tõttu (mitmelisidusate piirkondade jaoks)

$$\int_S \varphi(\zeta) d\zeta = \int_C \varphi(\zeta) d\zeta ,$$

kus C on punkti z ϱ -ümbrust väljaeraldav ringjoon ja integreerimine toimub positiivses suunas (vt. joon. 28). Viimane võrdus näitab, et parempoolne integraal ei sõltu ringjoone

C raadiusest ϱ . Kui $\varrho \rightarrow 0$, s.t. kui $\zeta \rightarrow z$, siis ilmselt eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \varphi(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z).$$

Järelikult kui defineerida

$\varphi(z) = f'(z)$, siis on $\varphi(\zeta)$ pidev kogu kõvera S poolt piiratud piirkonnas ja seega tõkestatud:

$|\varphi(\zeta)| < M$. Seda arvestades saame

Joonis 28.

$$\left| \int_C \varphi(\zeta) d\zeta \right| < M \cdot 2\pi\varrho,$$

millest järeldub, et $\int_C \varphi(\zeta) d\zeta = 0$, sest ϱ on kui tahes väike, aga integraal ei sõltu ϱ suurusest. Siis on aga ka

$$\int_S \varphi(\zeta) d\zeta = 0,$$

s.t.

$$\int_S \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \text{ ehk } \int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_S \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Arvutame integraali

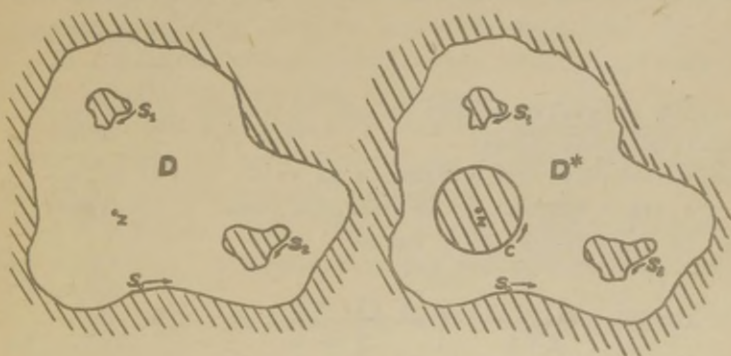
$$\int_S \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Kuna ringjoone C võrrand on $\zeta = z + \varrho e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), siis

$$\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{1 \cdot \varrho e^{it} dt}{\varrho e^{it}} = 2\pi \cdot 1,$$

millega Cauchy valem ongi tõestatud.

Lihtne on näha, et tehtud eeldus piirkonna D ühelsidususe kohta ei ole tarvilik. Tõepoolest, olgu D mitmelisidus piirkond, milles funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv, rajajoonega S , mis koosneb kinnistest kõveratest $S_0, S_1, \dots, S_n$ (joon. 29, a). Fikseerides punkti $z \in D$, eraldame piirkonnast D ringjoonega C ($s.t. |\zeta - z| = \rho$) piiratud ringi. Nii saame piirkonna D^* rajajoonega $S^* = S + (-C)$, milles funktsioon $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ on diferentseeruv (joon. 29, b).



Joonis 29 .

Cauchy teoreemi põhjal siis

$$\int_{S^*} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

s.t.

$$\int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} .$$

Kuna aga $f(z)$ on ringjoonega C piiratud ringis diferentseeruv, siis Cauchy valemi kohaselt

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z)$$

ja seega ka

$$\int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z) \quad \text{ehk} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Tulemus kujutabki Cauchy valemi üldistust mitmelisidusa piirkonna juhu jaoks.

Cauchy valemit võib kirjutada ka veidi teisel kujul. Võttes mis tahes kõvera S asemel ringjoone C keskpunktiga z ja raadiusega ρ , saame

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Kuna ringjoone C võrrand on $\zeta = z + \rho e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), siis järelikult

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it}) \rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt.$$

Saadud valemit võib lugeda nii: diferentseeruva funktsiooni väärtus mis tahes punktis võrdub tema väärtuste aritmeetilise keskmisega seda punkti ümbritseval ringjoonel (nimetatakse ka keskväärtusvalemiks).

Kui tähistada $\max_{\zeta \in C} |f(\zeta)| = M(\rho)$, siis viimane

valem annab:

$$|f(z)| \leq M(\rho).$$

Funktsiooni $f(z)$ pidevuse tõttu omandab tema moodul (kui ühe reaalmuutuja t pidev funktsioon kinnisel hulgal) väärtuse $M(\rho)$ ringjoone C teatavas punktis. Kuna raadius ρ võib olla kui tahes väike, siis viimasest võrratusest järeldub, et punkti z igas ümbruses leidub punkte, milles funktsiooni moodul pole väiksem kui punktis z . Seega piirkonnas diferentseeruva funktsiooni moodul ei saa selles piirkonnas omada ranget maksimumi. Selles seisneb nn. mooduli maksimumi printsiip, mida me aga veel täpsustame, näidates, et mittekonstantse funktsiooni korral võib sõna "ranget" ära jätta. Selleks tõestame kõigepealt

Lemma. Kui piirkonnas D diferentseeruv funktsiooni $f(z)$ reaalosa või moodul on selles piirkonnas konstantne, siis on ka see funktsioon konstantne.

Tõestus. Olgu $f(z) = u + iv$. Kui $u = \text{const.}$, siis $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. D'Alembert-Euleri võrrandite põhjal siis $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ja seega ka $v = \text{const.}$ Järelikult

$f(z) = \text{const.}$ Kui $|f(z)| = M = \text{const.}$, siis $M = 0$ puhul on lemma kehtivus ilmne. Kui aga $M \neq 0$, siis funktsiooni $F(z) = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$ iga haru on piirkonnas D diferentseeruv ($F'(z) = f'(z):f(z)$). Selle funktsiooni reaalosa on aga konstantne ($= \ln M$), seega on konstantne ka $F(z)$ ja sellega ühtlasi $f(z)$.

Teoreem. Kui funktsioon $f(z) \neq \text{const.}$ on diferentseeruv piirkonnas D ja pidev selle sulundis $\bar{D}$, siis tema moodul ei saa omandada oma suurimat väärtust piirkonna D üheski sisepunktis.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et $|f(z)|$ omandab oma maksimaalse väärtuse M piirkonna D mingis sisepunktis z_0 . Ülaltoodatu põhjal leidub siis z_0 igas ümbruses punkte, milles $|f(z)| = M$. Kuna (lemmat arvestades)

$|f(z)| \neq \text{const.}$, siis leidub z_0 igas ümbruses ka punkte, milles $|f(z)| < M - \varepsilon$, kus ε on küllalt väike positiivne arv.

Olgu C ringjoon raadiusega ρ ümber punkti z_0 , kus ρ on nii valitud, et ringjoonel leidub positiivse pikkusega kaar C_1 , mille punktides $|f(z)| < M - \varepsilon$ (siin $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$). Ringjoone ülejäänud osal on C_2 ilmselt $|f(z)| \leq M$. Keskväärtusvalemist saame

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi\rho} \int_C f(z) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \int_{C_1} f(z) ds + \int_{C_2} f(z) ds \right\}, \end{aligned}$$

kus $z = z_0 + \rho e^{it} = z_0 + \rho e^{i\frac{s}{\rho}}$ ja $ds = \rho dt$ on ringjoone kaarepikkuse diferentsiaal. Tähistades kaarte C_1 ja C_2 pikkused vastavalt l_1 ja l_2 järeldub viimasest valemist

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ (M - \varepsilon)l_1 + Ml_2 \right\} = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi\rho}$$

(sest $2\pi\rho = l_1 + l_2$). Saadud vastuolu tõestabki teoreemi.

§ 2. Cauchy tüüpi integraalid.

Olgu S tükiti sile (mitte tingimata kinnine) kõver, $\varphi(\zeta)$ sellel kõveral pidev funktsioon ja z punkt, mis ei asu kõveral S . Siis integraali kujul

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

nimetatakse Cauchy tüüpi integraaliks.

Kui S on kinnine kõver ja $\varphi(\zeta)$ diferentseeruv sel-
lel kõveral ning tema poolt piiratud piirkonnas, siis kuju-
tab viimane kirjutis Cauchy integraali. Selle väärtus on tea-
tavasti $\varphi(z)$ või null sõltuvalt sellest, kas punkt z
asub kõvera S poolt piiratud piirkonnas või mitte.

Üldjuhul kujutab aga Cauchy tüüpi integraal ilmselt
ühast funktsiooni muutujast z , mis on määratud igas piir-
konnas D , mis ei sisalda kõvera S punkte:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

(Olgu märgitud, et funktsiooni $\varphi(\zeta)$ pidevus kõveral S
on vajalik ainult integraali eksisteerimiseks).

Teoreem 1. Cauchy tüüpi integraaliga määratud funkt-
sioon $F(z)$ on diferentseeruv igas ühelisidusas piirkonnas
 D , mis ei sisalda kõvera S punkte, kusjuures tuletise
saab arvutada integrandi diferentseerimise teel:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

T ö e s t u s . Olgu punkt $z \in D$ fikseeritud ja $2d$
tema kaugus kõverast S , s.t.

$$2d = \inf_{\zeta \in S} |\zeta - z|.$$

Ilmselt iga $\zeta \in S$ puhul $|\zeta - z| > d$. Valime Δz nii väik-
sena, et oleks ka $|\zeta - z - \Delta z| > d$ (selleks peab $z + \Delta z$
kuuluma punkti z ümbritsevasse ringi raadiusega d - vt. joon.
30).

Vaatleme siisuguse Δz puhul suhet

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta-z-\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta-z} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)},$$

ning näitame, et see omab $\Delta z \rightarrow 0$ korral piirväärtuse, milleks on

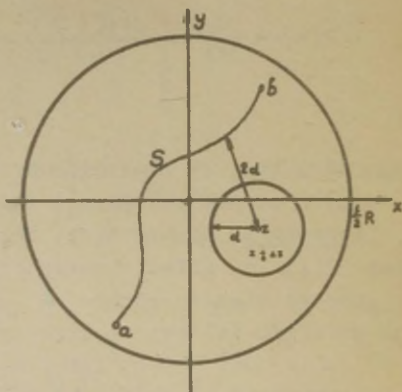
$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^2}.$$

Selleks hindame vahet

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} -$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Delta z \varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}.$$



Joonis 30.

Tähistame $M = \max_{\zeta \in S} |\varphi(\zeta)|$ (see eksisteerib $\varphi(\zeta)$ pidevuse tõttu kõveral S). Siis

$$\left| \frac{\Delta z \varphi(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2} \right| < \frac{|\Delta z| M}{d^3}$$

ja seega

$$\left| \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^2} \right| < \frac{|\Delta z| M}{2\pi d^3},$$

kus s on kõvera S pikkus. Viimane suureneb aga $\Delta z \rightarrow 0$ korral nullile ja sellega on teoreem tõestatud.

Tõestatud teoreem kujutab endast erijuhtu hoopis üldisemast tulemusest. Nimelt osutub, et funktsioon $F(z)$ pole mitte ainult diferentseeruv, vaid tal on olemas ka mis tahes kõrgemat järku tuletised (kõrgemat järku tuletised defineeritakse tavalisel viisil: $F''(z) = [F'(z)]'$ jne.).

Teoreem 2. Cauchy tüüpi integraaliga määratud funktsioon $F(z)$ omab igas punktis, mis ei asu kõveral S , kõiki järku tuletisi, mida saab arvutada integrandi diferentseerimise teel:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tõestuse viime läbi täieliku induktsiooni meetodiga. Väite õigsus $n = 1$ puhul järeldub teoreemist 1. Oletades, et teoreem on õige mingi n puhul, näitame tema õigsuse $n + 1$ puhul, s.t. oletades, et $F^{(n)}(z)$ eksisteerib ja avaldub viimase võrdusega, näitame, et eksisteerib ka $F^{(n+1)}(z) = [F^{(n)}(z)]'$ ja võrdub avaldisega

$$\psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}}.$$

Valime z samuti nagu eelmise teoreemi tõestamisel, s.t. olgu $\zeta \in S$ puhul

$$|\zeta - z| > d \quad \text{ja} \quad |\zeta - z - \Delta z| > d.$$

Kõvera S ja vaadeldavate piirkondade lõplikkuse tõttu leidub ring keskpunktiga O ja (küllalt suure) raadiusega $\frac{1}{2}R$, millesse kuuluvad kõik vaadeldavad punktid (vt. joon.30). Muuhulgas iga $\zeta \in S$ puhul

$$|\zeta - z| < R \quad \text{ja} \quad |\zeta - z - \Delta z| < R.$$

Kuna me fikseeritud n puhul eeldasime teoreemi õigsust, siis

$$\begin{aligned} \frac{P^{(n)}(z + \Delta z) - P^{(n)}(z)}{\Delta z} &= \frac{n!}{2\pi i \Delta z} \int_S \varphi(\zeta) \frac{(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - z - \Delta z)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z - \Delta z)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_S \varphi(\zeta) \frac{(\zeta - z)^n + (\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z - \Delta z) + \dots + (\zeta - z - \Delta z)^n}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z - \Delta z)^{n+1}} d\zeta \end{aligned}$$

ja seega (vajalikud teisendused läbi teha !)

$$\begin{aligned} \frac{P^{(n)}(z + \Delta z) - P^{(n)}(z)}{\Delta z} - \psi(z) &= \\ &= \frac{n! \Delta z}{2\pi i} \int_S \varphi(\zeta) \frac{(\zeta - z)^n + 2(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z - \Delta z) + 3(\zeta - z)^{n-2} (\zeta - z - \Delta z)^2 + \dots + (n+1)(\zeta - z - \Delta z)^n}{(\zeta - z)^{n+2} (\zeta - z - \Delta z)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Ülaltoodud võrratusi arvestades saame meid huvitava vahe moodulit lihtsalt hinnata :

$$\begin{aligned} \left| \frac{P^{(n)}(z + \Delta z) - P^{(n)}(z)}{\Delta z} - \psi(z) \right| &\leq \frac{n! |\Delta z|}{2\pi} \cdot M \cdot \\ \frac{R^n + 2R^n + \dots + (n+1)R^n}{2^{n+3} d} &= \frac{(n+2)! MR^n}{4\pi d^{2n+3}} \cdot |\Delta z|, \end{aligned}$$

kus M ja s tähendavad sama, mis eelmise teoreemi tõestuses.

Kuna n , M , R ja d on konstandid, siis viimase võrratuse parem pool läheneb $\Delta z \rightarrow 0$ puhul nullile, millega teoreem on tõestatud.

Märgime veei, et äsja tõestatud valem kehtib $n = 0$ puhul, kui tähistada $F^{(0)}(z) = F(z)$.

§ 3. Kõrgemat järku tuletised. Morera teoreem.

Peatume nüüd eelmise paragrahvi teoreemide ühel äärmiselt olulisel järeldusel.

Teatavasti reaalmuutuja funktsiooni lõpliku tuletise olemasolu faktist ei järeldu üldiselt isegi selle tuletise pidevus. Kompleksmuutuja funktsioonide puhul on aga olukord tunduvalt erinev. Nimelt:

Kui ühene kompleksmuutuja funktsioon $f(z)$ omab kogu piirkonnas D tuletise, siis omab ta selles piirkonnas ka mis tahes kõrgemat järku tuletisi.

Tõepoolest, olgu z mis tahes punkt piirkonnas D ja S mingi seda punkti ümbritsev kinnine kõver, mis ei välju piirkonnast D . Siis Cauchy valemi põhjal

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

s.t. funktsioon $f(z)$ on esitatav Cauchy tüüpi integraalidega. Eelmise paragrahvi teoreemi 2 põhjal omab aga $f(z)$ siis mis tahes järku tuletisi, kusjuures

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

See tulemus näitab veel kord, et kompleksmuutuja funktsiooni diferentseeruvuse nõue on tunduvalt rangem kui vastav nõue reaalmuutuja funktsiooni puhul. Muuhulgas järeldub siit, et diferentseeruva funktsiooni kõik tuletised on samuti mis tahes arv korda diferentseeruvad.

Fikseerime mingi punkti z_0 funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuse piirkonnas D . Olgu C ringjoon, keskpunktiga z_0 ja raadiusega ρ , mis ei välju piirkonnast D . Viimaste valemite kohaselt siis

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Kui tähistada

$$M(\rho) = \max_{z \in C} |f(z)|,$$

siis neid integraale tavalisel viisil hinnates saame

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(\rho)}{2\pi \rho^{n+1}} \cdot 2\pi \rho = \frac{n! M(\rho)}{\rho^n}.$$

Saadud võrratused omavad kompleksmuutuja funktsioonide teoorias suurt tähtsust ning kannavad Cauchy võrratuste nime. Nende võrratustega antud hinnang (fikseeritud n ja z_0 puhul) sõltub raadiusest ρ . Ilmselt peab olema

$$0 < \rho \leq d,$$

kus d tähendab kaugust punktist z_0 kuni piirkonna D rajajooneni. Kui ρ kasvab, siis viimases murrus kasvab nii lugeja kui ka nimetaja. Sellepärast tuleb neil juhtudel, kui on tarvis eriti täpset hinnangut, leida niisugune väärtus, mille puhul funktsioon $\frac{M(\rho)}{\rho^n}$ omandab miinimumi. Sageli saab seda teostada tavaliste diferentsiaalarvutuse reeglite järgi.

Kui $n > 0$, siis Cauchy võrratused võib kirjutada kujul

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{M(\rho)}}{\rho}.$$

Kuna $M(\rho)$ ei sõltu n suurusest, siis ilmselt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M(\rho)} = 1$$

ja viimasest võrratusest järeldub

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Lastes nüüd $\rho \rightarrow d$ saame

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \frac{1}{d}.$$

See võrratus, mis on tuntud Cauchy-Hadamard'i võrratuse nime all, näitab, et suurus μ , mis sõltub ainult funktsiooni tuletise väärtustest mingis punktis z_0 , on seotud selle punkti kaugusega funktsiooni diferentseeruvuse piirkonna rajajoonest. (Mäiteks, kui funktsioon on diferentseeruv kogu komplekstasandil, siis iga z_0 puhul $d = \infty$ ja seega $\mu = 0$). Järgmises peatükis selgub selle võrratuse lihtne geomeetriline tähendus.

Käesoleva peatüki teoreemide tõestamisel me kasutasime oluliselt Cauchy teoreemi. Osutub, et seda teoreemi saab pöörata. Nimelt kehtib

Morera teoreem. Kui piirkonnas D pidev funktsioon $f(z)$ rahuldab iga sellesse piirkonda kuuluva kolmnurga K puhul tingimust

$$\int_K f(z) dz = 0,$$

siis see funktsioon on piirkonnas D diferentseeruv.

T ö e s t u s. Täpselt samuti nagu Cauchy teoreemi tõestamisel (vt. IV ptk. § 2) on kolmnurkadelgi lihtne üle minna hulknurkadele ja neilt mis tahes kinnisele kõverale S (nendes üleminekutes me ei kasutanud funktsiooni diferentseeruvust). Seega iga kinnise kõvera S puhul, mis kuulub piirkonda D , on

$$\int_S f(z) dz = 0.$$

Siis iga integraal

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

ei sõltu integreerimise teest ja määrab järelikult ühese funktsiooni $f(z)$, kusjuures $P'(z) = f(z)$. Kuid Asja tõestatu põhjal on diferentseerual funktsioonil $P(z)$ seega mis tahes järku tuletisi. Siis on aga sama omadus ka tema tuletisel, s.t. funktsioonil $f(z)$. Järelikult $f(z)$ on diferentseeruv funktsioon ja teoreem on tõestatud.

Morera teoreemi võib sõnastada ka nii :

Kui piirkonnas D pidev ühene funktsioon $f(z)$ rahuldab iga sellesse piirkonda kuuluva kolmurga K puhul tingimust

$$\int_K f(z) dz = 0,$$

siis $f(z)$ omab piirkonnas D igat järku tuletisi.

VI p e a t ü k k .

K O M P L E K S M U U T U J A F U N K T S I O O N I D E R E A K S A R E N D U S E D .

§ 1. Analüütilised funktsioonid.

Varem (II ptk. § 3) näitasime, et astmeresa summa on koonduvusringis diferentseeruv funktsioon, kusjuures tuletise võib saada antud astmerida liikmeti diferentseerides. Loomulikult on see tulemus rakendatav ka järgmiste tuletiste puhul.

Seega astmerida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

kujutab oma koonduvusringis funktsiooni $f(z)$, millel on olemas igat järku tuletised, kusjuures

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + \dots + na_n(z-z_0)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(z-z_0) + \dots + n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2} + \dots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

.....

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$$

.....

Võttes nendes ridades $z = z_0$, saame

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \dots$$

Need valemid kannavad Taylori valemite nime ja astmerida, mille kordajad a_k on määratud nende valemitega, nimetatakse Taylori reaks. Järelikult iga positiivse koonduvus-raadiusega astmerida on Taylori rida, s.t. kui funktsiooni saab arendada astmereaks, siis ainult tema Taylori reaks. Samuti nagu reaalmuutuja funktsioonide teoorias nimetame funktsiooni punktiks z_0 analüütiliseks, kui teda saab selle punkti mingis ümbruses arendada Taylori reaks.

Elmise peatüki tulemusi arvestades saab Taylori valemitele anda kuju

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

kus C on ringjoon keskpunktiga z_0 ja raadiusega $\rho < R$.

Asja me nägime, et funktsiooni diferentseeruvus on tema analüütilisuseks tarvilik. Näitame nüüd, et see on ka piisav. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem. Kui funktsioon $f(z)$ on kõveraga $\bar{S}$ piiratud piirkonnas D diferentseeruv, siis on ta selle piirkonna igas sisepunktis z_0 analüütiline, s.t. on arendatav Taylori reaks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

mis koondub $|z - z_0| = q\rho$ puhul, kui $q < 1$ ja $\rho < d$, kus d on punkti z_0 kaugus rajajoonest S (vt. joon 31).

Tõestus. Cauchy valemi põhjal

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Astmerea saamiseks vaatleme jagatist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)},$$



kui astmerea summat. Tõe-
poolest, kuna

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = q < 1,$$

Joonis 31.

siis võime kirjutada

$$\frac{1}{\zeta - z} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Järelikult

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Kui $\zeta \in G$, siis

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{\rho} q^n$$

ja saadud rida koondub ringjoonel C seega ühtlaselt (Weierstrassi tunnus). Selle rea korrutamisel tõkestatud suurusega $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ ühtlane koondumine muidugi säilib. Seega

võib rida

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

liikmeti integreerida, mis toodud valemeid arvestades annab

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kus

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

. Seega olemegi tõestanud, et piirkonnas diferentseeruv funktsioon on selles piirkonnas analüütiline. Järelikult võib kompleksmuutuja funktsioonide teoorias mõisted "diferentseeruv funktsioon" ja "analüütiline funktsioon" samastada. Teatavasti reaalmuutuja funktsioonidel (või kõveral määratud funktsioonidel) sellist omadust ei ole, isegi kui need funktsioonid on mis tahes arv kordi diferentseeruvad.

Kuna äsja tõestatu põhjal funktsiooni $f(z)$ Taylori rida koondub igas ringis raadiusega $\rho < d$, siis järelikult selle Taylori rea koonduvusraadius R ei ole väiksem, kui punkti z_0 kaugus funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuse piirkonna rajajooneni.

Sama tulemuse saame ka Cauchy-Hadamard'i teoreemist (I ptk. § 5) ja samanimelisest võrratusest (V ptk. § 3).

Tõepoolest:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \frac{1}{d},$$

millest $R \geq d$.

Kuna teiselt poolt aga R ei saa olla suurem kui d (sest muidu oleks astmerida koonduv ja tema summa seega diferentseeruv ka väljaspool diferentseeruvuse piirkonda), siis saame lihtsa tulemuse: funktsiooni Taylori rea koonduvusraadius võrdub kaugusega punktist z_0 diferentseeruvuse piirkonna rajajooneni (s.t. lähima punktini, kus see funktsioon ei ole diferentseeruv). Seda tulemust saab sageli kasutada Taylori rea koonduvusraadiuse praktiliseks leidmiseks.

Analüütilist funktsiooni, mille Taylori rida koondub kogu komplekstasandil, s.t. mille puhul $R = \infty$, nimetatakse täisfunktsiooniks. Täisfunktsioonid on näiteks kõik polünoomid, eksponentfunktsioon e^z , $\sin z$, $\cos z$ jne.

Kuna täisfunktsiooni puhul võib Cauchy võrratustes

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} = |a_n| \leq \frac{M(\varrho)}{\varrho^n},$$

kus $M(\varrho) = \max_{|z-z_0|=\varrho} |f(z)|$, võtta ϱ kui tahes suurena,

siis näeme, et kui täisfunktsiooni moodul on tõkestatud kogu komplekstasandil, s.t. kui $M(\varrho) \leq M < \infty$ iga ϱ puhul, siis $n \geq 1$ korral $a_n = 0$ ja järelikult $f(z) = a_0 = \text{const.}$ Seega kehtib nn.

Liouville'i teoreem. Kui täisfunktsiooni moodul on tõkestatud kogu komplekstasandil, siis see funktsioon on konstantne.

Selle teoreemi lihtsaks järelduseks on muide algebra põhiteoreem (tõestus vt. [4] lk. 166).

§ 2. Analüütiliste funktsioonide omadusi.

Tõestame kõigepealt teoreemi analüütiliste funktsioonide ainsusest. Kui mingis piirkonnas D analüütilised funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ on võrdsed selle piirkonna lõpmatul punktihulgal E , mis omab piirkonnas D vähemalt

ühe kuhjumispunkti, siis need funktsioonid on võrdsed kogu piirkonnas D .

Tõestuse viime läbi kahes osas. Kõigepealt tõestame teoreemi juhul, kui D on ring, mille keskpunkt z_0 on hulga E kuhjumispunktiks. Arendame funktsioonid f ja g punktis z_0 Taylori reaks:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Need read koonduvad ringi D igas sisepunktis, kusjuures hulgal E nende summad on võrdsed. Valime mingi jada $\{z_k\} \subset E$ nii, et oleks $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ ja $z_k \neq z_0$ iga n puhul. Siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z_k - z_0)^n.$$

Lastes $k \rightarrow \infty$ järeldub astmerea summa pidevusest koonduvusringis, et

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z_k - z_0)^n = b_0.$$

Seega saame võrduse

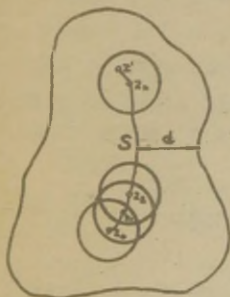
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z_k - z_0)^n,$$

mida suurusega $z_k - z_0 \neq 0$ jagades leiame

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z_k - z_0)^{n-1}$$

Lastes nñüd jälle $k \rightarrow \infty$, saame $a_1 = b_1$ jne. Nii saame, et iga n puhul $a_n = b_n$, s.t. vaadeldavad astmerekad ühtivad ning seega ühtivad ka funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ kogu ringis D .

Vaatleme nñüd üldjuhtu. Olgu z_0 hulga E kuhjumispunkt. Teoreem on tõestatud, kui me näitame funktsioonide $f(z)$ ja $g(z)$ väärtuste võrduse piirkonna D suvalises punktis z' . Selleks ühendame z_0 ja z' pideva kõveraga S , mis asub täielikult piirkonnas D . Tähistame kõvera S kauguse piirkonna D rajajoonest tähega d (vt. joon.32). Ilmselt iga ring, mille keskpunkt asub kõveral S ja raadius on väiksem kui d (näiteks $\frac{1}{2}d$), paikneb täielikult diferentseeruvuse piirkonnas D .



Joonis 32.

Kuna z_0 on hulga E kuhjumispunkt, siis ülalvaadeldud erijuhtul antud tõestuse põhjal on funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ võrdsed kogu ringis keskpunktiga z_0 ja raadiusega $\frac{1}{2}d$. Seega kuulub see ring hulka E ja iga tema punkt on selle hulga kuhjumispunktiks. Valime nñüd sellesse ringi kuuluval kõvera S osal uue keskpunkti z_1 ja tõmbame selle ümber ringjoone raadiusega $\frac{1}{2}d$. Saadud ringis on funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ jälle võrdsed. Lastes ringi keskpunkti niimoodi (näiteks $\frac{1}{2}d$ kaupa) edasi liikuda mööda kõverat S , jõuame lõpuks punktini z_n , mida ümbritsev ring (raadiusega $\frac{1}{2}d$) sisaldab juba punkti z' ja seega $f(z') = g(z')$, m.o.t.

Tõestatud teoreemist järeldub, et mingis piirkonnas

analüütilised funktsioonid on võrdsed, kui nad langevad kokku ühe punkti mis tahes väikeses ümbruses või kui tahes väikesel joonel.

Olgu $f(z)$ piirkonnas D analüütiline funktsioon ja A mingi fikseeritud kompleksarv. Võrrandi $f(z) = A$ juuri nimetatakse funktsiooni $f(z)$ A -punktideks. Ühesuse teoreemist järeldub, et $f(z) \neq A$ puhul on funktsiooni A -punktide hulk selline, et tal ei ole piirkonnas D ühtki kuhjumispunkti. Muuhulgas ei saa üheski kinnises hulgas $F \subset D$ olla lõpmatu arv A -punkte (põhjendada!) . Iga A -punkt z_0 on seega isoleeritud selles mõttes, et leidub punkti z_0 ümbrus, milles pole ühtki teist selle funktsiooni A -punkti.

Kui $f(z_0) = A$ (s.t. kui z_0 on funktsiooni A -punkt), siis

$$f(z) - A = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots$$

Seldades, et $f(z) \neq A$ peab viimase võrduse paremal poolel leiduma nullist erinevaid liikmeid. Olgu esimene nullist erinev $z - z_0$ astme kordaja $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$. Siis

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \left\{ \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0) + \dots \right\}.$$

Naturaalarvu $k \geq 1$ nimetatakse A -punkti z_0 korduseks ehk järguks. Kui $k = 1$, siis A -punkti nimetatakse lihtsaks (või ka ühekordseks) ja ta on iseloomustatud sellega, et

$$f(z_0) = A \text{ ning } f'(z_0) \neq 0.$$

Vastavalt k -kordset A -punkti iseloomustavad seosed

$$f(z_0) = A, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Kui z_0 on k -kordne A -punkt, siis funktsioon

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - A}{(z - z_0)^k} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0) + \dots$$

on punkti z_0 ümbruses analüütiline, kusjuures $\varphi(z_0) \neq 0$. Lihtne on tõestada ka pöördväidet (sõnastada ja tõestada!).

Kõik öeldu kehtib muidugi ka juhul $A = 0$ (0-punkti nimetatakse enamasti nullkohaks). Kuna funktsiooni $f(z)$ iga A -punkt on funktsiooni $f(z)$ - A nullkohaks, siis võime A -punktide vaatlemisel piirduda ainult nullkohtadega.

Tõestame, et piirkonnas D analüütilise funktsiooni nullkohtade hulk on ülimalt loenduv, s.t. kas lõplik või loenduv.

Kui $f(z)$ on täisfunktsioon, s.t. kui D rajajoon koosneb ainult lõpmatuspunktist $z = \infty$, siis ringis $|z| < 1$ ja samuti rõngastes $1 \leq |z| < 2$, $2 < |z| \leq 3$, ... $n < |z| \leq n+1$, ... leidub igaühes ainult lõplik arv funktsiooni $f(z)$ nullkohti. Kui need igaühes järjestada (lugedes nende kordsust või mitte), siis saamegi nullkohtade jada, s.t. loenduva hulga.

Omaga nüüd D vähemalt ühe lõpliku rajapunkti. Tähistame piirkonna D nende punktide hulga, mille kaugus rajajoonest pole väiksem kui $\frac{1}{n}$, sümbooliga F_n (ilmselt vähemalt küllalt suure n puhul pole need hulgad tühjad, kusjuures iga järgmine sisaldab kõiki eelmisi). Kuna hulgad F_n on kõik kinnised, siis sisaldavad nad igaüks lõpliku arvu $f(z)$ nullkohti. Järjestades alul hulgas F_1 asuvad nullkohad, siis hulgas $F_2 - F_1$ asuvad nullkohad jne., saame nullkohtade jada, millesse kuuluvad kõik $f(z)$ nullkohad, mis asuvad piirkonnas D .

Varem (V ptk. §1) me tõestasime mooduli maksimumi printsiibi, mille kohaselt mittekonstantse funktsiooni moodul ei saa analüütilisuse piirkonnas omada maksimumi. Ilmselt mooduli miinimumi kohta analoogiline printsiip ei kehti, sest iga nullkohas omandab funktsiooni moodul ju oma mini-

maalse väärtuse. Küll aga järeldub maksimumi printsiibist, et mittekonstantse funktsiooni $f(z)$ moodul ei saa omada miinimumi analüütilisuse piirkonna üheski punktis, mis pole funktsiooni nullkoht.

Tõepoolest, kui $f(z_0) \neq 0$, siis $f(z)$ pidevuse tõttu kehtib see väärtus ka punkti z_0 teatud ümbruses. Järelikult on mittekonstantne funktsioon $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ selles ümb-

ruses analüütiline ning tema moodul ei saa omada maksimumi punktis z_0 . See aga tähendab, et funktsiooni $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ moodul ei saa punktis z_0 omada miinimumi.

§ 3. Laurent'i rida.

Olgu funktsioon $f(z)$ analüütiline rõngas, mis on piiratud ringjoontega S ja C , millel on ühine keskpunkt z_0 ning raadiused vastavalt R ja r . Seame endale eesmärgiks konstrueerida rida $z - z_0$ positiivsetest ja negatiivsetest astmetest, mis koonduks funktsiooniks $f(z)$ vaadeldava rõnga igas punktis z , s.t. kui

$$r < |z - z_0| = \varrho < R.$$

Selline rida oleks ilmselt Taylori rea üldistuseks, mis koosneb ju ainult $z - z_0$ mittenegatiivsetest astmetest.

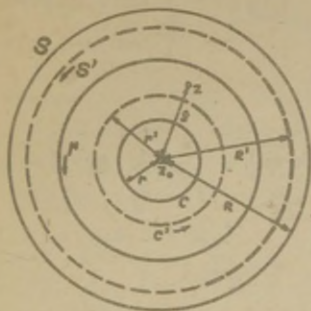
Valime kaks raadiust r' ja R' nii, et

$$r < r' < \varrho < R' < R,$$

ning tähistame vastavad (eelmistega kontsentrilised) ringjooned C' ja S' (vt. joon.33). Belduse kohaselt on $f(z)$ nendel ringjoontel ja nende poolt piiratud rõngas analüütiline ning Cauchy valemi põhjal seega

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^*} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$



Joonis 33.

kus integreerimine toimub mõlemas saadud integraalis positiivses suunas (vastu kellaosuti liikumise suunda) ja $S^* = S' + (-C')$. Kuna esimeses integraalis $\zeta \in S'$, siis

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{\rho}{R'} < 1$$

ja seega võime kirjutada

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

kus rida ilmselt koondub ühtlaselt.

Analoogiliselt teises integraalis $\zeta \in C'$ tõttu

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{\rho} < 1$$

ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

kus rida on jällegi ühtlaselt koonduv.

Asendades need read toodud integraalidesse, oleme seega õigustatud liikmeti integreerima, mis annab

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S'} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Tähistades lühiduseks

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{ja} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta$$

($n = 0, 1, \dots$),

omandab valem kuju

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Ilmselt võib integrandide analüütilisuse tõttu a_n ja b_n definitsioonis ringjooned S' ja C' asendada ühe ringjoonega Γ , mille keskpunktiks on z_0 ning mis asub vaaeldavas rõngas. Kirjutades veel b_n asemele a_{-n} võib viimaste ridade kordajad defineerida ühe valemiga:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Saadud reaksarendus omandab siis kuju

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(z)$ Laurent'i reaks. See rida koondub antud rõnga igas punktis z , kusjuures kordajad

a_n punktist z ilmselt ei sõltu.

Laurent'i rida koosneb tegelikult kahest eritüüpi reast. Meist esimene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

on tavaline astmerida, mis järelikult koondub kogu ringjoonega S piiratud ringis mingiks funktsiooniks $f_1(z)$.

Seda rida nimetatakse Laurent'i rea korrapäraseks osaks.

Teostades teises reas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

asenduse $\frac{1}{z - z_0} = Z$ ja kirjutades a_{-n} asemele b_n saame

astmerea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Z^n$. See rida koondub, kui $\frac{1}{R} < |Z| < \frac{1}{r}$,

sest esialgne rida koondus ju $r < |z - z_0| < R$ puhul. Kuna aga viimane rida on Z suhtes astmerida, siis koondub ta iga $|Z| < \frac{1}{r}$ korral, kujutades selles ringis analüütilist Z funktsiooni.

Järelikult rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

koondub nendes punktides z , mis rahuldavad tingimust $|z - z_0| > r$, s.t. väljaspool ringjoont C asuvates punktides, analüütiliseks funktsiooniks $f_2(z)$. Seda rida nimetatakse Laurent'i rea peaosaks. Seega funktsiooni $f(z)$ võib kujutada summana $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, kus $f_1(z)$ on analüütiline seespool ringjoont S ja $f_2(z)$ analüütiline

väljaspool ringjoont C . Seda asjaolu kasutatakse sageli funktsiooni Laurent'i rea praktiliseks leidmiseks.

Ka Laurent'i rea korral saab lihtsalt näidata, et antud funktsioonil on (antud rõngas) ainu reaksarendus. Selle tõestamiseks oletame väitevastaselt, et antud rõnga igas sisepunktis z saab leida kaks erinevat reaksarendust:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n (z-z_0)^n.$$

Korrutades need mõlemad ridu teguriga $(z-z_0)^{-k-1}$, kus k on mis tahes täisarv, jääb ridade ühtlane koondumine püsima (ülaltoodud arutlusest järeldus ju muuseas Laurent'i rea ühtlane koonduvus vaadeldud rõngas). Seega võime neid ridu liikmeti integreerida (näiteks) mööda ringjoont Γ . Integreerides saame $2\pi i a_k = 2\pi i a'_k$, s.t. $a_k = a'_k$ ($k=0,1,2,\dots$), sest ülejäänud integraalid võrduvad ilmselt nulliga (põhjustada!). Sellega ongi reaksarenduse ainsus näidatud.

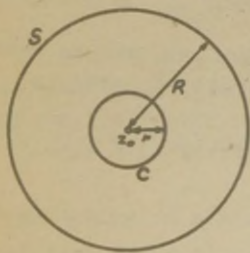
VII p e a t ü k k .

Ü H E S E F U N K T S I O O N I I S E Ä R A S E D P U N K T I D .

§ 1. Iseäraste punktide liigitamine.

Punkte, milles funktsioon on analüütiline, nimetatakse selle funktsiooni korrapärasteks (või regulaarseteks) punktideks. Teisi punkte nimetatakse iseäraseks. Iseärast punkti nimetatakse isoleerituks, kui tema mingis ümbruses ei ole teisi iseäraseid punkte. Järgnevas piirdumegi ainult isoleeritud iseärase punktide vaatlemisega, s.t. juhuga, mil ringjoonega S piiratud ringis pole ühesel funktsioonil $f(z)$ teisi iseäraseid punkte peale keskpunkti z_0 .

Ümbritseme punkti z_0 veel ringjoonega C , mille raadius r olgu küllalt väike (joon. 34). Saadud rõngas arendame meie funktsiooni Laurent'i reaks:



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Joonis 34.

Kuna r võib olla kuitahes väike, siis see rida koondub ringjoonega S piiratud ringi

igas punktis peale punkti z_0 .

Iseärase punktide liigitamisel võetakse aluseks saadud rea peaosa kuju. Siin võib esineda kolm juhtu.

1. Kui Laurent'i rea peaosa sisaldab lõpmata palju

liikmeid, s.t. vahe $z - z_0$ negatiivseid astmeid, siis punkti z_0 nimetatakse funktsiooni $f(z)$ oluliselt iseäraseks punktiks.

2. Kui Laurent'i rea peaosas sisaldab lõpliku (nullist erineva) arvu liikmeid, siis punkti z_0 nimetatakse funktsiooni $f(z)$ pooluseks.

3. Kui Laurent'i rea peaosas on null, s.t. rida ei sisalda $z - z_0$ negatiivseid astmeid, siis punkti z_0 nimetatakse funktsiooni $f(z)$ kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks.

Viimasel juhul osutub Laurent'i rida harilikuks astme-reaks, mis koondub nii punkti z_0 ümbruses kui ka punktis z_0 endas. Seega kujutab see rida funktsiooni, mis on analüütiline kogu ringjoonega S piiratud ringis, sealhulgas ka punktis z_0 . See funktsioon ühtub antud funktsiooniga vaadeldava ringi kõikides punktides peale z_0 . Järelikult võime me antud funktsiooni muuta analüütiliseks kogu selles ringis, kui defineerime täiendavalt

$$f(z_0) = a_0.$$

Seega kolmandat tüüpi iseärane punkt kaob, kui me sobivalt defineerime juurde funktsiooni väärtuse vaadeldavas punktis. Edaspidi me enamasti eeldame, et seda tüüpi iseäraseid punkte on juba kirjeldatud viisil kõrvaldatud ja neid me rohkem vaatlusele ei võta.

Märgime veel vaid, et kuna kõrvaldatava iseärase punkti puhul eksisteerib $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$, siis leiduvad konstantid M ja δ nii, et

$$|f(z)| \leq M \text{ kui } |z - z_0| < \delta,$$

s.t. kõrvaldatava iseärase punkti ümbruses on funktsioon tõkestatud. Sama omadus leiab aset muidugi ka iga korrapärase punkti ümbruses. Järgnevast me näeme, et kehtib ka

pöördvääde: kui funktsioon on isoleeritud iseärase punkti ümbruses tõkestatud, siis see iseärase punkt on kõrvaldatav (järeldub sellest, et muud tüüpi iseärase punktide ümbruses ei saa funktsioon olla tõkestatud).

Vaatleme nüüd funktsiooni käitumist pooluse ümbruses.

Olgu k murru $\frac{1}{z - z_0}$ suurim astendaja funktsiooni

$f(z)$ Laurent'i reas, s.t. olgu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k},$$

kus $a_{-k} \neq 0$. Kui $k = 1$, siis punkti z_0 nimetatakse esimest järku ehk lihtsaks pooluseks. Kui aga $k > 1$, siis punkti z_0 nimetatakse kõrgemat järku pooluseks ja arvu k tema järguks (kõneldakse ka k-järku poolusest).

Korrutades viimase võrduse mõlemad pooli teguriga

$(z - z_0)^k$, saame

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k} + a_{-1} (z - z_0)^{k-1} + \dots + a_{-k}.$$

Siis parem pool on harilik astmerida, mille vabaliige erineb nullist. Seega z_0 on funktsiooni $(z - z_0)^k f(z)$ jaoks kõrvaldatav iseärase punkt, kusjuures

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq 0.$$

Muuhulgas siis ka

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^k |f(z)| = |a_{-k}|.$$

Valime positiivse arvu δ nii, et oleks $\delta < |a_{-k}|$. Siis piirväärtuse definitsiooni põhjal leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|z - z_0|^k |f(z)| > a, \text{ kui } |z - z_0| < \delta.$$

Seega punkti z_0 δ -ümbruses

$$|f(z)| > \frac{a}{|z - z_0|^k},$$

millest järeldub, et

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

s.t. pooluses muutub funktsioon lõpmatuks. Selle omaduse võiks muide võtta ka pooluse definitsiooniks.

Vaatleme nüüd seost nullkoha ja pooluse vahel.

Olgu z_0 funktsiooni $f(z)$ k -järku nullkoht. Siis punkti z_0 ümbruses teatavasti (vt. VI ptk. § 2)

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z),$$

kus analüütiline funktsioon

$$\varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots$$

ei võrdu $a_k \neq 0$ tõttu punktis $z = z_0$ nulliga. Siis on aga ka funktsioon $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ punkti z_0 ümbruses analüütiline ja nullist erinev:

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \psi'(z_0)(z - z_0) + \dots, \psi(z_0) \neq 0.$$

Seega

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{\psi(z_0)}{(z - z_0)^k} + \frac{\psi'(z_0)}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots,$$

kust järeldub, et punkt z_0 on funktsiooni $\frac{1}{f(z)}$ k -järku poolus. Seda tulemust arvestades on eriti lihtne leida näiteks ratsionaalse funktsiooni poolusi.

Esitatud tõestusest järeldub kohe ka vastupidine väide: kui z_0 on funktsiooni $f(z)$ k -järku poolus, siis on ta ühtlasi funktsiooni $\frac{1}{f(z)}$ k -järku nullkoht (tõestada!). Samuti on siit lihtne näha, et kui z_0 on funktsiooni $f(z)$ oluliselt iseärane punkt, siis ka funktsiooni $\frac{1}{f(z)}$ (tõestada!).

Uurime nüüd funktsiooni käitumist oluliselt iseärase punkti ümbruses. Osutub, et oluliselt iseärase punkti ümbruses kõik kui väikeses ümbruses omandab funktsioon väärtusi, mis on kui tahes lähedased mis tahes etteantud arvule. Mõeldakse järgmine

Schhotski teoreem. Milline ka ei oleks konstant A (lõplik või lõpmatu), ikka leidub oluliselt iseäraseks punktiks z_0 koonduv jada $\{z_n\}$ nii, et

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = A.$$

Tõestus. Vaatleme kõigepealt juhtu $A = \infty$. Meil tuleb konstrueerida jada $z_n \rightarrow z_0$ nii, et oleks

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = \infty.$$

Tähistame vaadeldava funktsiooni $f(z)$ Laurent'i rea korrapärase osa lühidalt sümboliga $f_1(z - z_0)$ ja peaosaga sümboliga $f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$. Siis

$$f(z) = f_1(z - z_0) + f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right).$$

Ilmselt on

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z - z_0) = a_0,$$

sõltumata sellest, kuidas z läheneb oluliselt iseärasete punktidele. Seega taandub küsimus ainult peaosu uurimisele. Teostades seal muutuja vahetuse

$$\frac{1}{z - z_0} = Z,$$

saame

$$f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = f_2(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z^n.$$

Kuna rida $f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ koondus igas punktis peale $z = z_0$, siis rida $f_2(Z)$ koondub kogu Z -tasandil, peale punkti $Z = \infty$. Seega $f_2(Z)$ on täisfunktsioon ja ei saa Liouville'i teoreemi kohaselt olla tõkestatud. Järelikult leidub iga n puhul Z_n nii, et $|f_2(Z_n)| > n$. See aga tähendab, et

$$\lim_{Z_n \rightarrow \infty} f_2(Z_n) = \infty.$$

Sellega aga ongi defineeritud jada

$$\{z_n\} = \left\{z_0 + \frac{1}{Z_n}\right\} \rightarrow z_0$$

nii, et

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f\left(\frac{1}{z_n - z_0}\right) = \infty, \text{ m.o.t.t.}$$

Olgu nüüd A mis tahes lõplik kompleksarv. Kui osu-

tub, et punkti z_0 kui tahes väikeses ümbruses leidub punkte z , milles $f(z) = A$, siis on teoreem ilmselt tõestatud. Seejärel võime eeldada, et punkti z_0 küllalt väikeses ümbruses võrrand $f(z) = A$ ei oma lahendeid. Siis aga funktsioon

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

on analüütiline punkti z_0 nimetatud ümbruses peale punkti z_0 enda. Sealjuures z_0 on funktsiooni $\varphi(z)$ suhtes oluliselt iseärane punkt. Asjatõestatu põhjal leidub siis aga jada $z_n - z_0$ nii, et

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} \varphi(z_n) = \infty.$$

Sellest järeldubki, et

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = A.$$

Sohhotski teoreem on saanud aluseks paljudele uurimistele funktsiooni käitumise kohta oluliselt iseärase punkti ümbruses. Saadud tulemustest nimetame (tõestuseta) järgmise:

Picard'i teoreem. Kui z_0 on funktsiooni $f(z)$ oluliselt iseärane punkt, siis iga lõpliku A puhul (kusjuures erandiks võib olla ainult üks A väärtus) leidub funktsiooni $f(z)$ A -punktide jada, mis koondub punktiks z_0 .

§ 2. Resiidid.

Kui $f(z)$ on punktis z_0 ja selle ümbruses analüütiline funktsioon, siis Cauchy teoreemi kohaselt

$$\int_S f(z) dz = 0,$$

kus S on mis tahes kinnine kõver, mis hõlmab punkti z_0 ja mille poolt piiratud piirkonnas $f(z)$ on analüütiline. Kui aga z_0 on isoleeritud isepärane punkt, siis see integraal üldiselt ei võrdu nulliga, kuigi ta ikkagi ei sõltu kõvera S kujust. Osutub, et ka sel juhul pole integraali väärtust raske arvutada.

Selleks arendame funktsiooni punkti z_0 ümbruses (s.t. rõngas $0 < |z - z_0| < R$, kus R on küllalt väike) Laurent'i reaks

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + (z-z_0)^2 + \dots,$$

mis kõveral S (seeldades, et see kuulub vaadeldavasse rõngasse) koondub ühtlaselt. Seda rida liikmeti integreerides saame

$$\int_S f(z) dz = a_{-1} \cdot 2\pi i,$$

sest (põhjendada!)

$$\int_S (z-z_0)^n dz = 0, \quad \text{kui } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_S \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0, \quad \text{kui } n = 2, 3, \dots$$

ja

$$\int_S \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.$$

Kui S on ülalnimetatud viisil valitud, siis integraali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz$$

väärtust nimetatakse funktsiooni $f(z)$ resiidiks iseärase punkti z_0 suhtes ja tähistatakse

$$\text{res } f(z_0).$$

Äsjatõestatu põhjal võrdub resiidi suurusega a_{-1} , s.t.

$(z - z_0)^{-1}$ kordajaga funktsiooni $f(z)$ Laurent'i reas (vaadeldava iseärase punkti suhtes).

Arvestades aga seda, et funktsiooni Laurent'i rea leidmine on küllaltki tülikas operatsioon, tekib vajadus lihtsama algoritmi järgi funktsiooni resiidi praktiliseks arvutamiseks. Osutub, et sellise algoritmi saab anda juhul, kui z_0 on funktsiooni $f(z)$ poolus (kõrvaldatava iseärase punkti puhul on resiidi ilmselt võrdne nulliga).

Olgu z_0 alul funktsiooni $f(z)$ esimest järku poolus. Siis vastav Laurent'i rida omab kuju

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Seda võrdust teguriga $z - z_0$ korrutades saame

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Kuna siin parempoolse rea kui hariliku astmerea summa on punktis $z - z_0$ pidev, siis piirile minnes saamegi meid huvitava valemi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} = \text{res } f(z_0).$$

Seda valemit on eriti sobiv kasutada juhul, kui vaadeldav funktsioon avaldub murruna

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

kusjuures pooluseks on nimetaja esimest järku nullkoht. Tõepoolest, kui $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ ja $\varphi(z_0) \neq 0$, siis viimasest valemist saame

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Olgu nüüd z_0 funktsiooni $f(z)$ k -järku poolus. Siis

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

millest

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \dots$$

Diferentseerides seda võrdust $k - 1$ korda, saame paremal pool astmerea, mille vabaliige on

$$a_{-1} \cdot (k-1)!.$$

Seega oleme tõkestanud valemi

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z - z_0)^k f(z) \right\} = a_{-1} = \text{res } f(z_0),$$

mis on rakendatav ka esimest järku pooluse puhul, mil ta ühtib varem saadud valemiga.

Resiidide rakendusvõimaluste selgitamiseks vaatleme olukorda, kui funktsioonil $f(z)$ on piirkonnas D ainult lõplik arv iseäraseid punkte $z_1, \dots, z_k$ (s.t. piirkonna D ülejäänud punktides on $f(z)$ analüütiline). Olgu S mingi

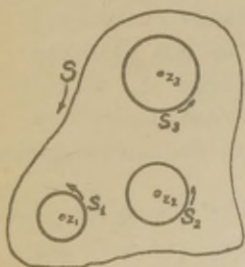
piirkonda D kuuluv kinnine kõver, mis hõlmab kõiki neid iseäraseid punkte. Nendel tingimustel kehtib järgmine teoreem.

Resiidide teooria põhiteoreem. Integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz$$

võrdub funktsiooni $f(z)$ nende resiidide summaga, mis on võetud kõveraga S hõlmatud iseärase punktide $z_1, \dots, z_k$ suhtes.

T ö e s t u s . Tõmbame punktide $z_1, \dots, z_k$ kui keskpunktide ümber ringjooned $S_1, \dots, S_k$ nii väikeste raadiustega, et nad ei lõikuks omavahel ega kõveraga S (vt. joon. 35). Kõveratega $S, S_1, \dots, S_k$ piiratud (mitmelisidusas) piirkonnas on funktsioon $f(z)$ analüütiline. Tähistades



Joonis 35.

$$S^* = S + (-S_1) + \dots + (-S_k)$$

saame seega Cauchy teoreemi põhjal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S^*} f(z) dz = 0,$$

ehk

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} f(z) dz + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_k} f(z) dz. \end{aligned}$$

Viimased integraalid aga võrduvadki ju funktsiooni $f(z)$ resiididega vaadeldavate iseärase punktide suhtes, millega valem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz = \sum_{j=1}^K \operatorname{res} f(z_j)$$

ongi tõestatud.

Tõestatud teoreem kujutab endast Cauchy teoreemi üldistust, sest juhul kui kõver S ei hõlma iseäraseid punkte (või kui hõlmatavad iseäraseid punktid on kõrvaldatavad), siis võrdub see integraal nulliga.

§ 3. Funktsiooni käitumine lõpmatuspunktis.

Siiani me vaatlesime tasandi lõplikus osas paiknevaid iseäraseid punkte. Ilmselt on aga ka lõpmatuspunkt enamasti iga funktsiooni (vähemalt kõrvaldatav) iseärane punkt.

Kirinevalt tuleb nüüd defineerida ümbruse mõiste. Lõpmatuspunkti ümbruseks nimetatakse küllalt suure raadiusega ringist väljaspool asuvate lõplikkude punktide hulka (selle ringi keskpunktiks võetakse tavaliselt nullpunkt).

Kui küllalt suure R puhul $f(z)$ ei oma lõplikke iseäraseid punkte väljaspool ringi raadiusega R , siis nimetatakse lõpmatuspunkti isoleeritud iseäraseks punktiks. (Selle tingimuse täidetust me eeldame kogu käesolevas paragrahvis).

Funktsiooni uurimiseks lõpmatuspunkti ümbruses toimime järgmiselt. Olgu funktsioon $f(z)$ lõpmatuspunkti ümbruses, s.t. $|z| > R$ puhul, analüütiline. Teostades muutuja vahetuse

$$z = \frac{1}{z'}$$

saame funktsiooni

$$\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right) = f(z),$$

mis on (määratud ja) analüütiline ringis $|z'| < \frac{1}{R}$ peale punkti

$Z = 0$. Seega z -tasandi lõpmatuspunkti ümbrusele vastab z -tasandi nullpunkti ümbrus, kusjuures funktsioonide $f(z)$, ja $\varphi(Z)$ väärtused vastavates punktides z ja Z on võrdsed. Järelikult võib funktsiooni $f(z)$ uurimise z -tasandi lõpmatuspunkti ümbruses asendada funktsiooni $\varphi(Z)$ uurimisega Z -tasandi nullpunkti ümbruses. Sellest asendamisest tuleneb kohe loomulik definitsioon: lõpmatuspunkti loome funktsiooni $f(z)$ suhtes sama tüüpi iseäraseks punktiks, mida on nullpunkt funktsiooni $\varphi(Z)$ suhtes.

Selleks, et funktsiooni $f(z)$ arendada lõpmatuspunkti ümbruses Laurent'i reaks, toimime järgmiselt. Arendame funktsiooni $\varphi(Z)$ nullpunkti ümbruses Laurent'i reaks:

$$\varphi(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n Z^n,$$

mis koondub $0 < |Z| < r$ puhul. Teostades nüüd asenduse $Z = \frac{1}{z}$ ja tähistades $a_n = b_{-n}$ saame r-ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

mis koondub $|z| > \frac{1}{r} = R$ puhul. Seda rida nimetamegi funktsiooni $f(z)$ Laurent'i reaks lõpmatuspunkti suhtes.

Lõpmatuspunkti kui iseärase punkti liigi määrame nüüd argumendi z positiivsete astmetega liikmete arvu järgi selles reas. Nimelt kui neid liikmeid on lõpmata palju, siis loeme lõpmatuspunkti oluliselt iseäraseks, kui aga lõplik arv, siis pooluseks. Kui positiivsete z astmetega liikmed puuduvad, siis eksisteerib

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$$

ja me võime funktsiooni $f(z)$ lugeda analüütiliseks ka lõpmatuspunktis.

Funktsiooni käitumise kohta lõpmatuspunkti ümbruses kehtib kõik see, mis on öeldud (vt. § 1) üldse funktsiooni käitumise kohta isoleeritud iseärase punkti ümbruses.

Lõpmatuspunkti juhuks saab üldistada ka residüdi mõiste.

Olgu lõpmatuspunkt funktsiooni $f(z)$ isoleeritud iseärase punkt ja S kinnine kõver, mis paikneb lõpmatuspunkti selles ümbruses, milles pole teisi iseäraseid punkte (S võib olla näiteks küllalt suure raadiusega ringjoon). Positiivse suuna kõveral S määrame nii, et selles suunas liikudes lõpmatuspunkt jääks vasakule, s.t. positiivseks loeme kellaosuti liikumise suunda. Funktsiooni $f(z)$ resiidiks lõpmatuspunkti suhtes nimetame integraali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz$$

väärtust (erinevus lõplikust juhust seega vaid integreerimise suunas).

Kasutades funktsiooni $f(z)$ Laurent'i rida lõpmatuspunkti suhtes

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

mis kõveral S ühtlaselt koondub, saame liikmeti integreerides

$$\int_S f(z) dz = a_{-1} \int_S \frac{dz}{z} = -a_{-1} \cdot 2\pi i,$$

sest ülejäänud integraalid võrduvad nulliga (tõestada!).

Seega erinevalt lõplike iseärase punktide juhust võrduvad funktsiooni resiidi lõpmatuspunkti suhtes $\frac{1}{2\pi i}$ kordaja vastand-arvuga selle funktsiooni Laurent'i reas.

Funktsiooni resiidi lõpliku kõrvaldatava iseärase punkti

suhtes võrdub teatavasti alati nulliga. Viimast tulemust arvestades ei tarvitse see omadus lõpmatuspunkti korral alati kehtida. Näiteks funktsioonil $\frac{1}{z}$ on lõpmatuses kõrvaldatav iseärane punkt (nullkoht), kuid vastava resiidi väärtus on -1 .

Arvestades seda, kuidas on defineeritud funktsiooni resiidi lõpmatuspunkti suhtes, saab lihtsalt tõestada, et kehtib allpool toodud teoreem.

Teoreem . Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline kogu kompleksitasandil, välja arvatud lõplik arv iseäraseid punkte, siis selle funktsiooni kõikide resiidide summa (kaasa arvatud ka resiidi lõpmatuspunkti suhtes) on võrdne nulliga.

Tõestus. Tõmbame nullpunkti ümber nii suure raadiusega ringjoone S , et kõik lõplikud iseäraseid punktid asuvad saadud ringis. Resiidide teooria põhiteoreemi kohaselt siis integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz$$

võrdub funktsiooni $f(z)$ lõplike iseärase punktide suhtes võetud resiidide summaga.

Teiselt poolt aga funktsiooni $f(z)$ resiidi lõpmatuspunkti suhtes võrdub integraaliga

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-S} f(z) dz ,$$

millega teoreem ongi tõestatud.

§ 4. Analüütiliste funktsioonide liigitamine.

Vaatleme siin analüütiliste funktsioonide liigitamist nende iseärase punktide iseloomu järgi.

Näiteks on teada, et iga täisaratsionaalsel funktsioonil, s.t. polünoomil on ainus iseärane punkt - lõpmatuspunkt, mis on tema (n -järku) pooluseks. Näitame, et kehtib ka vastupidine väide: kui funktsiooni $f(z)$ ainsaks iseäraseks punktiks on lõpmatuses asuv poolus, siis see funktsioon on täisaratsionaalne.

Selleks arendame funktsiooni $f(z)$ lõpmatuspunkti suhtes Laurent'i ritta. Kuna lõpmatuspunkt on poolus, siis sisaldab see rida vaid lõplikku arvu liikmeid, milles z on positiivsel astmel. Olgu need liikmed (Laurent'i rea peaos)

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k.$$

Lahutades selle peaos

$$F(z) = f(z) - (a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k),$$

mis on analüütiline kogu komplektasandi lõplikus osas. Lõpmatuspunktis on tal aga kõrvaldatav iseärane punkt, sest tema Laurent'i reaks lõpmatuspunkti suhtes on funktsiooni $f(z)$ vastava rea korrapärane osa (Laurent'i rea ainsuse tõttu). Seega võime me funktsiooni $F(z)$ lugeda analüütiliseks ka lõpmatuses, kui defineerida

$$F(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

Näisugune kõikjal analüütiline funktsioon on aga ühtlaselt tõkestatud ning Liouville'i teoreemi kohaselt järelikult konstantne:

$$F(z) = f(z) - (a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k) = 0,$$

sillest

$$f(z) = 0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k.$$

Seega $f(z)$ on täisratsionaalne funktsioon, m.o.t.t.

Täisfunktsiooniks nimetatakse teatavasti funktsiooni, mis on kujutatav astmereaga, mille koonduvusraadius $R = \infty$. Kui see astmerida sisaldab lõpmata palju liikmeid, siis vastavat funktsiooni nimetatakse täistranstsendentseks (vastasel juhul on ta täisratsionaalne). Ilmselt on lõpmatuspunkt niisugusele funktsioonile oluliselt iseäraseks punktiks. Lihtne on veenduda ka vastupidises: kui ühese funktsiooni ainsaks iseäraseks punktiks on lõpmatuses asuv oluliselt iseärane punkt, siis see funktsioon on täistranstsendentne. Selle väite tõestus vt. [5] lk. 232.

Kokkuvõttes: täisfunktsioon saab olla täistranstsendentne, täisratsionaalne või konstantne sõltuvalt sellest, kas lõpmatuspunkt on tema oluliselt iseärane punkt, poolus või kõrvaldatav iseärane punkt.

Ühest funktsiooni nimetatakse meromorfsesks, kui tal ei ole komplekstasandi lõplikus osas teisi iseäraseid punkte peale pooluste. Muuhulgas kuuluvad sellesse funktsioonide klassi ka kõik ratsionaalsed funktsioonid

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}.$$

Komplekstasandi lõplikus osas on selle funktsiooni iseäraseks punktideks ainult nimetaja nullkohad, mis seega osutuvad poolusteks. Kui $n > m$, siis lõpmatuspunkt on selle funktsiooni $(n-m)$ - järku, poolus, kui aga $n \leq m$, siis kõrvaldatav iseärane punkt.

Mäitame, et viimane asjaolu iseloomustabki ratsionaalset funktsiooni. Nimelt kehtib väide: kui meromorfsel funktsioonil $f(z)$ on lõpmatuses ülimalt poolus, siis see funktsioon on ratsionaalne.

Tõestuseks paneme kõigepealt tähele, et kui mingi funktsiooni poolustel on kuhjumispunkt, siis see punkt ei saa

olla poolus. See järeldub juba pooluse kui isoleeritud iseärase punkti ühe erijuhu definitsioonist. Kui aga poolus defineerida punktina, milles funktsiooni piirväärtus on ∞ , siis saab samuti lihtsalt veenduda, et pooluste kuhjumispunktis võib funktsiooni piirväärtus võrduda iga etteantud arvuga, s.t. kehtib Sokhotski teoreem (tõestus vt. [5] lk. 227).

Õeldust järeldub kohe, et antud juhul ei saa lõpmatuspunkt olla lõplikus ulatuses asuvate pooluste kuhjumispunkt, sest tema ümbruses $|z| > R$ peab $f(z)$ olema analüütiline. Siis aga ringis $|z| \leq R$ saab olla vaid lõplik arv poolusi, kuna muidu neil oleks kuhjumispunkt. Tähistame lõplikud poolused $z_1, \dots, z_n$. Arendame funktsiooni $f(z)$ iga pooluse ümbruses Laurent'i ritta ja tähistame nende ridade peaosad vastavalt

$$f_j(z) = \frac{a_{-1}^{(j)}}{z - z_j} + \frac{a_{-2}^{(j)}}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{-\kappa_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{\kappa_j}}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Samuti arendame $f(z)$ Laurent'i ritta ka lõpmatuspunkti suhtes. Olgu selle rea peaosad

$$f_0(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k.$$

Kõigi nende peaosade summa

$$R(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$$

on ilmselt ratsionaalne funktsioon. Lahutades selle antud funktsioonist $f(z)$, saame funktsiooni

$$P(z) = f(z) - R(z),$$

mille iseärasusteks punktideks on $z_1, \dots, z_n$ ja ∞ . Kuid

kõik need iseärased punktid on kõrvaldatavad, sest vastavates Laurent'i ridades puuduvad (ainsuse tõttu!) peaosad. Defineerides nendes punktides $f(z)$ väärtused sobivalt, saame seega funktsiooni, mis on analüütiline ja järelikult tõkestatud kogu kompleksitasandil. Liouville'i teoreemi põhjal siis $f(z) = 0 = \text{const.}$, ning järelikult $f(s) = R(s) + 0$, s.t. $f(z)$ on ratsionaalne funktsioon.

Saab tõestada, et iga meromorfne funktsioon on kujutatav kahe täisfunktsiooni jagatisena (selle omadusega võiks meromorfeid funktsioone muide ka defineerida).

Lõpuks olgu märgitud, et meromorfsed ja täisfunktsioonid ei ammenda kaugeltki kogu analüütiliste funktsioonide hulka. Nad moodustavad selles hulgas vaid kaks kõige lihtsamat klassi.

§ 5. Logaritmiline resiid. Argumendi printsiip.

Olgu kinnine kõver S valitud nii, et funktsioonil $f(z)$ ei ole sellel kõveral nullkohti. Kui $f(z)$ on veel selle kõveraga piiratud piirkonna sulundis analüütiline, peale lõpliku arvu punktide, mis võivad olla talle ülimalt poolusteks, siis integraali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

nimetatakse funktsiooni $f(z)$ logaritmiliseks resiidiks kõvera S suhtes (nimetus tuleb sellest, et integrand on funktsiooni $f(z)$ logaritmi tuletis).

Olgu funktsiooni $f(z)$ nullkohad kõveraga S piiratud piirkonnas $a_1, \dots, a_n$ ja poolused $b_1, \dots, b_m$. Nende nullkohtade ja pooluste järgud olgu vastavalt $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ja $\beta_1, \dots, \beta_m$. Näitame, et integrandile $\frac{f'(z)}{f(z)}$ on kõik need punktid esimest järku poolusteks.

Kui a_j ($j=1, \dots, n$) on funktsiooni $f(z)$ α_j -järku nullkoht, siis punkti a_j ümbruses

$$f(z) = (z - a_j)^{\alpha_j} \varphi(z),$$

kus $\varphi(a_j) \neq 0$. Seega selles ümbruses

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}\varphi(z) + (z-a_j)^{\alpha_j}\varphi'(z)}{(z-a_j)^{\alpha_j}\varphi(z)} = \frac{\alpha_j}{z-a_j} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

kusjuures $\varphi'(z) : \varphi(z)$ on analüütiline.

Analoogiliselt, kui b_k ($k=1, \dots, m$) on funktsiooni $f(z)$ β_k -järku poolus, siis tema ümbruses

$$f(z) = (z - b_k)^{-\beta_k} \psi(z),$$

kus $\psi(b_k) \neq 0$. Järelikult sel juhul

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta_k}{z-b_k} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

kus $\psi'(z) : \psi(z)$ on analüütiline.

Seega integrandi $f'(z) : f(z)$ ainsateks iseärasusteks punktideks vaadeldavas piirkonnas on esimest järku poolused $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$, kusjuures resiidideks on vastavalt $\alpha_1, \dots, \alpha_n, -\beta_1, \dots, -\beta_m$. Resiidide teooria põhiteoreemi tõttu siis

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \alpha_j - \sum_{k=1}^m \beta_k.$$

Siin kujutab $\sum_{j=1}^n \alpha_j = N$ endast funktsiooni $f(z)$ kõikide nullkohtade arvu vaadeldavas piirkonnas ja $\sum_{k=1}^m \beta_k = P$ selle funktsiooni pooluste arvu, kusjuures iga nullkohta ja poolust

on loetud nii mitu korda, milline on tema järk. Seega: funktsiooni logaritmiline resiid kõvera S suhtes võrdub selle funktsiooni nende nullkohtade ja pooluste arvude vahega, mis asuvad kõveraga S piiratud piirkonnas:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Tuletatud valem kujutab endast erijuhtu üldisemast valemist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(a_j) - \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi(b_k),$$

mis kehtib siis, kui $\varphi(z)$ on kõveral S ja temaga piiratud piirkonnas analüütiline (vt. näit. [5] lk. 249).

Selgitame nüüd logaritmilise resiidi geomeetrilise tähenduse. Selleks kirjutame vastava integraali kõigepealt kujul

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d}{dz} \{ \operatorname{Ln} [f(z)] \} dz.$$

Fikseerime kõveral S mingi punkti z_0 , mida loeme integreerimise algus- ja lõpp-punktiks. Kui z läbib kõvera S positiivses suunas, siis $\operatorname{Ln} [f(z)]$ muutub pidevalt ja pärast kogu kõvera läbimist tema väärtus punktis z_0 üldiselt erineb lähteväärtusest. Kuna aga $f(z_0)$ on ühesuse tõttu ikka endine, siis $\operatorname{Ln} f(z_0)$ väärtused võivad erineda vaid $\operatorname{Arg} f(z_0)$ erinevate väärtuste tõttu enne ja pärast kõvera läbimist. Tähistades $\operatorname{Arg} f(z_0)$ lähte- ja lõppväärtused vastavalt φ_0 ja φ_1 , saame

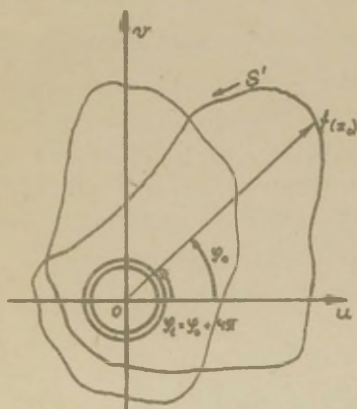
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ [\ln |f(z_0)| + i\varphi_1] - \right. \\ &\quad \left. - [\ln |f(z_0)| + i\varphi_0] \right\} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi}, \end{aligned}$$

ehk

$$n - p = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi}.$$

See võrdus väljendab nn. argumendi printsiipi : funktsiooni $f(z)$ nende nullkohtade ja pooluste arvude vahe, mis asuvad kõveraga S piiratud piirkonnas, on 2π korda väiksem, kui $\text{Arg } f(z)$ muutumine punkti z liikumisel mööda kogu kõverat S positiivses suunas.

Geomeetrilise pildi saamiseks vaatleme w -tasandil vektorit $\vec{w} = \vec{f(z)}$ (vt. joon. 36). Kui z läbib kõvera S , siis vektori $\vec{f(z)}$ lõpp-punkt kujutab mingi kõvera S' . Olgu n täispöörde arv, mida vektor $\vec{f(z)}$ sealjuures sooritab ümber nullpunkti. Täisarv n on positiivne või negatiivne sõltuvalt nende pöörde suunast (joonisel 36 on $n = +2$). Nende pöörde tulemusel $\text{Arg } f(z)$ muutub seega $2n\pi$ võrra. Järelikult võime me argumendi printsiibi sõnastada ka järgmiselt: funktsiooni $f(z)$ nende nullkohtade ja pooluste arvude vahe, mis asuvad kõveraga S piiratud piirkonnas võrdub täispöörde arvuga, mida vektor $\vec{f(z)}$ sooritab ümber nullpunkti, kui z läbib kõvera S positiivses suunas.



Joonis 36.

Lihtsaks järelduseks saadud tulemustest on Rouché teoreem. Kui funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ on kinnisel kõveral S ning selle poolt piiratud piirkonnas analüütilised, kusjuures kõveral S kehtib võrratus $|f(z)| > |g(z)|$, siis funktsioonidel $f(z)$ ja $f(z) + g(z)$ on kõveraga S piiratud piirkonnas ühepalju nullkohti.

Tõestus. Kuna funktsioonil $f(z) + g(z)$ ei ole (võrratuse $|f(z)| > |g(z)|$ tõttu) kõveral S nullkohti ja selle

kõveraga piiratud piirkonnas poolusi (f ja g on analüütilised), siis tema nullkohtade arv kõveraga S piiratud piirkonnas võrdub logaritmilise resiidiga

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz .$$

Kuid

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d}{dz} \left\{ \ln [f(z) + g(z)] \right\} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d}{dz} \left\{ \ln f(z) + \ln \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d}{dz} \left\{ \ln \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} dz . \end{aligned}$$

Seega tuleb meil näidata, et viimane integraal võrdub nulliga, sest eelviimane võrdub ja funktsiooni $f(z)$ nullkohtade arvuga kõveraga S piiratud piirkonnas. Tähistades $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$, omandab viimane integraal kuju

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S'} \frac{dw}{w} ,$$

kus S' on kinnine kõver, mille kujutab w , kui z läbib kõvera S . Kuna aga kõveral S $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$, siis kõver S' asub täielikult ringis keskpunktiga $w = 1$ ja raadiusega üks. Seega ei hõlma S' nullpunkti ja Cauchy teoreemi põhjal võrdubki viimane integraal nulliga.

§ 6. Resiidide kasutamine määratud integraalide
arvutamisel.

Järgnevalt vaatleme resiidide teooria üht võimalikku rakendust matemaatilises analüüsis. See rakendus toetub sageli järgmisele kahele lihtsale lemmale.

Lemma 1. Kui funktsioon $f(z)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

siis

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = 0,$$

kus C on ringjoon (või osa sellest) ümber punkti z_0 raadiusega r .

Tõestus. Piirväärtuse definitsiooni põhjal leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta(\varepsilon) > 0$ nii, et $|(z - z_0) f(z)| < \varepsilon$, kui $r = |z - z_0| < \delta$. Siis aga

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C (z - z_0) f(z) \frac{dz}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon \cdot 2\pi r}{r} = 2\pi \varepsilon.$$

Lemma 2. Kui funktsioon $f(z)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

s.t. kui $z = \infty$ on sellele funktsioonile vähemalt teist järku nullkohaks, siis

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S f(z) dz = 0,$$

kus S on ringjoon (või osa sellest) ümber punkti z_0 raadiusega R .

Tõestus on analoogiline eelmisega (läbi viia !).

Vaatleme nüüd nende lemma rakendamist.

Olgu $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ratsionaalne (reaalmuutuja) funktsioon, kusjuures nimetaja $Q(x)$ argu omagu reaalteljel ühtki nullkohta ja tema aste olgu vähemalt kahe võrra suurem lugeja $P(x)$ astmest. Meil eeldustel eksisteerib integraal (vrd. [3], lk. 117)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx.$$

Selle integraali arvutamiseks toimime järgmiselt. Asendame reaalmuutuja x kompleksmuutujaga z . Siis saame ratsionaalse funktsiooni $f(z)$, millel pole teisi iseäraseid punkte peale lõpliku arvu pooluste (nendeks on nimetaja $Q(z)$ nullkohad). Valime R nii suurena, et kõik need poolused z_k asuks ringis $|z| < R$. Kuna ükski poolus ei asu reaalteljel, siis resiidide teooria põhiteoreemi põhjal

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_S F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{res } F(z_k),$$

kus $\Gamma = S + [-R, R]$ (vt. joon. 37) ja resiidid on võetud ülemises pooltasandis asuvate iseärase punktide suhtes (samtuti võiks kasutada ka alumist pooltasandit). Lastes nüüd $R \rightarrow \infty$ saame lemma 2 kohaselt

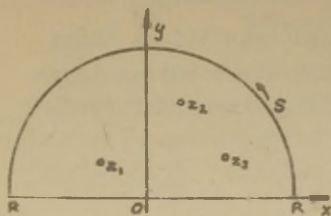
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S F(z) dz = 0$$

(kontrollida!) ja seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{res } F(z_k)$$

Kuna ratsionaalse funktsiooni resiide on suhteliselt lihtne

arvutada, siis oleme saanud sobiva meetodi vaadeldavat tüüpi pööratud integraalide arvutamiseks.



Joonis 37.

Lihtne on näha, et sama vale kehtib üldse juhul, kui $F(z)$ on ülemises pooltasandis ja reaalteljel analüütiline peale lõpliku arvu pooluste, mis ei asu reaalteljel, ning lõpmatuspunkt on talle vähemalt teist järku nullpunktiks.

Näide 1. Arvutame integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

kus $n \geq 1$. Funktsiooni

$$F(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$$

ainus iseärane punkt ülemises pooltasandis on $(n+1)$ -järku poolus $z_1 = i$. Vastavaks resiidiks saame (vt. § 2)

$$\text{res } F(i) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \frac{(z-i)^{n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} \right\} = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z+i)^{-n-1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2) \dots 2n}{(z+i)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n (n+1)(n+2) \dots 2n}{n! (2i)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n} \cdot 2i}.$$

Seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\pi i \text{ res } F(i) = \frac{\pi (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{\pi (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Vaatleme nüüd integraali

$$\int_0^{2\pi} F(\sin x, \cos x) dx,$$

kus F on selline ratsionaalne funktsioon, et integreerimise tee on vaba iseärasestest punktidest.

Teostame muutuja vahetuse

$$e^{ix} = z.$$

Kui $0 \leq x \leq 2\pi$, siis z kujutab komplekstasandi ühikringjoone C . Kuna $dx = \frac{dz}{iz}$ ja Euleri valemeist

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

siis (resiidide teooria põhiteoreemi kohaselt)

$$\int_0^{2\pi} F(\sin x, \cos x) dx = \int_C F\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \operatorname{res} G(z_k),$$

kus $G(z) = \frac{1}{iz} F\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$ on ratsionaalne funktsioon ja resiidid on võetud ühikringis asuvate pooluste suhtes. Seega küsimus taandus jälle ratsionaalse funktsiooni resiidide leidmisele.

Näide 2. Arvutame integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x},$$

kus $a > 1$. Teostades ülalnäidatud muutuja vahetuse, saame integrandiks

$$G(z) = \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1}.$$

Selle funktsiooni iseärasteks punktideks on esimest

järku poolused $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ ja $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$, millest ainult z_1 asub ühikringis. Kuna (vt. § 2)

$$\operatorname{res} G(z_1) = \frac{-21}{2z_1 + 2a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - 1}},$$

siis järelikut

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = 21 \operatorname{res} G(z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Muud tüüpi määratud integraalide arvutamise võimalust selgitame veel kahe näitega.

Näide 3. Arvutada integraal (vrd. [3], lk. 168)

$$B(p, 1-p) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx,$$

kus $0 < p < 1$. Minnes üle kompleksmuutujale, vaatleme funktsiooni

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}$$

ja integreerime teda mööda kõve-

rat $\Gamma = S + [R, r] + C + [r, R]$

(vt. joon. 38). Selle kõveraga

piiratud piirkonnas omab $f(z)$

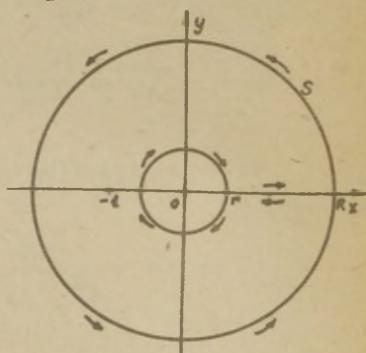
ainsa iseärase punkti- esimest

järku pooluse $z = -1$. Ilmselt

$\operatorname{res} f(-1) = (-1)^{p-1}$ ja seega

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i (-1)^{p-1}.$$

Γ



Joonis 38.

Selle integraali osadeks jaotamisel tuleb arvestada, et täisringi tegemisel ümber nullpunkti muutub arg z ja seega ka $\operatorname{Im} [\ln z]$ 2π võrra. Järelikult

$$\int_S \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_R \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} dx + \int_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx =$$

$$= 2\pi i (-1)^{p-1},$$

kus

$$\int_R \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} dx = - \int_r^R \frac{x^{p-1} e^{2\pi (p-1)i}}{1+x} dx =$$

$$= -e^{2\pi (p-1)i} \int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

Lastes nüüd $R \rightarrow \infty$ ja $r \rightarrow 0$, läheneb integraal üle ringjoone S lemma 2 põhjal nullile ja integraal üle ringjoone C lemma 1 põhjal samuti nullile. Seega

$$-e^{2\pi (p-1)i} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = (1 - e^{2\pi (p-1)i}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i (-1)^{p-1}$$

ja

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i (-1)^{p-1}}{1 - e^{2\pi (p-1)i}} = \frac{\pi (-1)^{p-1}}{e^{\pi (p-1)i} \cdot \frac{-\pi (p-1)i - \pi (p-1)i}{2i}} =$$

$$= \frac{\pi (-1)^{p-1}}{(e^{\pi i})^{p-1} \sin[(p-1)\pi]} = \frac{\pi (-1)^{p-1}}{(-1)^{p-1} \sin p\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Näide 4. Arvutada integraal (vrd. [3], lk. 121)

$$\operatorname{Si}(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

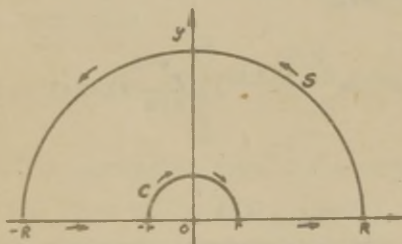
Selle arvutamiseks lähtume integraalist

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

kus $\Gamma = [-R, -r] + C + [r, R] + S$ (vt. joon.39). Kuna integrand selle kõveraga piiratud piirkonnas on analüütiline, siis Cauchy teoreemi (või resiidide teooria põhiteoreemi) kohaselt see integraal võrdub nulliga. Seega

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_S \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Selgitame kõigepealt, mis juhtub teise ja neljanda integraaliga, kui $r \rightarrow 0$ ja $R \rightarrow \infty$.



Joonis 39.

Kuna $e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots$,
siis

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^{iz}}{z} &= \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} - \frac{z}{2!} - \dots \\ &= \frac{1}{z} + g(z), \end{aligned}$$

kus $g(z)$ on täisfunktsioon ja seega tõkestatud (nullpunkti ümbruses): $|g(z)| \leq M$.

Järelikult

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_C \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma} g(z) dz = -i\pi + \int_{\Gamma} g(z) dz \rightarrow -i\pi,$$

kui $r \rightarrow 0$, sest

$$\left| \int_C g(z) dz \right| \leq M \cdot \pi r \rightarrow 0.$$

Kõveral S on $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $iz = -R \sin \varphi + i R \cos \varphi$ ja

$$\int_S f(z) dz = i \int_0^\pi e^{-R \sin \varphi + i R \cos \varphi} d\varphi.$$

Kuid $R \rightarrow \infty$ puhul $|zf(z)| = |e^{iz}| = e^{-R \sin \varphi} \rightarrow 0$ vaid siis, kui φ pole 0 ega π . Seega viimase integraali kohta tervikuna lemmat 2. rakendada ei saa. Sellepärast jaotame ta kolmeks osaks (valides $\varepsilon > 0$ kui tahes väiksena):

$$\int_0^\pi \dots = \int_0^\varepsilon \dots + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \dots + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \dots$$

Nüüd lemma 2 põhjal $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \dots = 0$, aga ülejäänud kaks integraali saavad samuti nulliks, sest näiteks

$$\left| \int_0^\varepsilon e^{-R \sin \varphi + i R \cos \varphi} d\varphi \right| < \varepsilon,$$

kuna ju $|e^{-R \sin \varphi + i R \cos \varphi}| = e^{-R \sin \varphi} \leq 1$.

Kokkuvõttes seega

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

millest

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = i\pi,$$

$$\text{ch}\text{ } Si(0) = \frac{\pi}{2}.$$

VIII p e a t ü k k .

A N A L Ü Ü T I L I N E J Ä T K A M I N E .

§ 1. Analüütilise jätkamise mõiste.

Seni oleme me funktsioone vaadelnud ikka analüütilisena mingis kindlas piirkonnas. See on ka loomulik, sest juba funktsiooni defineerimine ise on peaaegu alati seotud mingi piirkonnaga, milles see definitsioon üldse mõtet omab (näiteks astmereaga defineeritud funktsiooni puhul on selles piirkonnaks koonduvusring). Kerkib aga küsimus, kas ei saa seda piirkonda laiendada nii, et ta oleks analüütiline mingis ulatuslikumas piirkonnas. Sellises üldistamises seisnebki analüütilise jätkamise ülesanne.

Niisugust jätkamist me teostasime tegelikult juba III peatükis, nimelt reaalteljel määratud funktsioonide e^x , $\sin x$, x^a jne. üldistamisel kogu kompleksatasandile. Seal toimus jätkamine lihtsalt sel teel, et vastava reaalmuutuja funktsiooni (sobivas) definitsioonis asendasime reaalmuutuja x formaalselt kompleksmuutujaga z .

Vaatleme nüüd üldjuhtu.

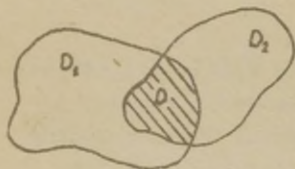
Olgu antud kaks funktsiooni $f_1(z)$ ja $f_2(z)$, millest esimene on analüütiline piirkonnas D_1 ja teine piirkonnas D_2 . Feldame veel, et piirkonnas D_1 ja D_2 omavad ühisosa D , ning et piirkonnas D funktsioonid $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ langevad ühte (vt. joon. 40). Arvestades teoreemi analüütiliste funktsioonide ainsusest (vt. VI ptk. § 2) on funktsioonid $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ teineteise kaudu üheselt määratud. See tähendab, et näiteks ei leidu teist piirkonnas D_2 analüütilist funktsiooni peale $f_2(z)$, millel oleks piirkonnas D funktsiooniga $f_1(z)$ võrdseid väärtusi. Kui ülalnimetatud omadustega funktsioon $f_2(z)$ eksisteerib, siis ütleme, et piirkonnas

D_1 antud funktsioon $f_1(z)$ on analüütiliselt jätkatav piirkonda D_2 ja vastavat funktsiooni $f_2(z)$ nimetatakse funktsiooni $f_1(z)$ analüütiliseks jätkuks piirkonda D_2 . Analooogiliselt on $f_1(z)$ muidugi funktsiooni $f_2(z)$ analüütiline jätk piirkonda D_1 .

Kuna funktsioonid $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ on vastastikku üheselt määratud, siis pole sisulist vajadust vaadelda neid eraldi funktsioonidena, vaid neid mõlemaid võib käsitleda kui piirkonnas $D_1 + D_2$ analüütilise funktsiooni $f(z)$ koostisosi:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & , \text{ kui } z \in D_1 \\ f_2(z) & , \text{ kui } z \in D_2 . \end{cases}$$

Toodud arutlustes pole muidugi oluline, et piirkondade D_1 ja D_2 ühisosa D oleks piirkond (kuigi see alati nii on). Tähtis on vaid, et ta oleks lõpmatu punktihulk ja sisaldaks vähemalt ühe oma kuhjumispunkti (see on vajalik analüütilise jätkamise ainsuseks). Praktikas on olulise tähtsusega selline üldisem juht, mil piirkondadel D_1 ja D_2 on vaid ühine rajajoone osa S (vt. joon. 41).



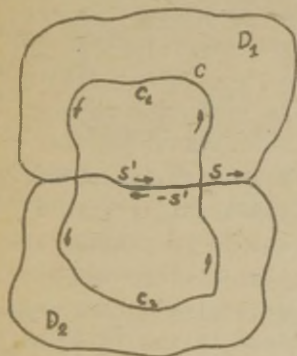
Joonis 40.

Sel juhul eeldame, et funktsioonid $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ on peale analüütilisuse vastavalt piirkondades D_1 ja D_2 veel pidevad vastavalt hulkades $D_1 + S$ ja $D_2 + S$, ning et $f_1(z) = f_2(z)$, kui $z \in S$.

Et ka nendel eeldustel funktsioon

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{kui } z \in D_1 \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{kui } z \in S \\ f_2(z), & \text{kui } z \in D_2 \end{cases}$$

on analüütiline piirkonnas $D = D_1 + S + D_2$, see järeldub Morera teoreemist (vt. V ptk. § 3). Nimelt on integraal



Joonis 41.

funktsioonist $f(z)$ mööda mis tahes kinnist kõverat C , mis kuulub piirkonda D , nüüd võrdne nulliga. Tõepoolest, kui C asub ainult ühes piirkondadest D_1 või D_2 , siis järeldub see Cauchy teoreemist. Kui aga C koosneb nii piirkonna D_1 kui ka piirkonna D_2 punktidest, siis tähistame tema vastavad osad sümbolitega C_1 ja C_2 ning sümboliga S' kõvera S selle osa, mis on hõlmatud kõveraga C (vt. joon.41).

Cauchy teoreemi (üldistuse) põhjal aga

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{S'} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{-S'} f(z)dz = 0$$

ja seega ka

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

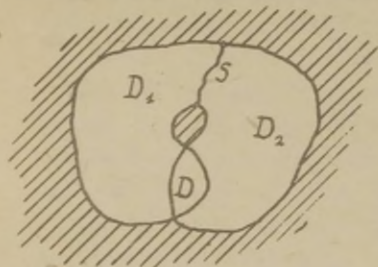
Vaadeldaval juhul me nimetame funktsiooni $f_2(z)$ funktsiooni $f_1(z)$ analüütiliseks jätkuks üle kõvera S (ja vas-

tupidi). Ilmselt on see definitsioon selmisest üldisem, sest siis, kui D_1 ja D_2 omavad peale ühise rajajoone osa S veel ühisosa D (joon. 42), me ei püstita nõuet

$$f_1(z) = f_2(z), \text{ kui } z \in D.$$

Seega sel juhul ei tarvitse ülaldefineeritud funktsioon $f(z)$ olla ühene (kuigi $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ seda on).

Isjatõestatud me nägime muuhulgas, et analüütilise funktsiooni pidev jätkamine on ühtlasi ka analüütiliseks jätkamiseks (sest funktsioone $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ sidus ainult pidevus ja võrdumine kõveral S). Sellist omadust ei ole muidugi reaalmuutuja funktsioonidel (tuna näide!), kuid neil puudub ju ka analüütilise (ja diferentseeruvust säilitava) jätkamise ühesuse omadus. Näiteks lõigul $[0, R]$ defineeritud funktsiooni $f_1(x) = x^2$



Joonis 42.

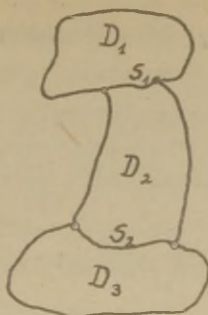
saab lõigule $[-R, 0]$ jätkata vähemalt kahel erineval viisil: $f_2(x) = x^2$ ja $f_2(x) = -x^2$.

Kui piirkonnas D_1 analüütilise funktsiooni $f_1(z)$ jaoks on leitud analüütiline jätk $f_2(z)$ piirkonda D_2 ja sellele omakorda analüütiline jätk $f_3(z)$ piirkonda D_3 , siis nimetame viimast ka funktsiooni $f_1(z)$ analüütiliseks jätkuks piirkonda D_3 (joon. 43). Sellist nimetust õigustab asjaolu, et funktsioon

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{kui } z \in D_1 \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{kui } z \in S_1 \\ f_2(z), & \text{kui } z \in D_2 \\ f_2(z) = f_3(z), & \text{kui } z \in S_2 \\ f_3(z), & \text{kui } z \in D_3 \end{cases}$$

on analüütiline piirkonnas $D = D_1 + S_1 + D_2 + S_2 + D_3$. Seega võime analüütilist jätkamist teostada korduvalt.

Olgu antud piirkonnas D_1 ühene analüütiline funktsioon $f_1(z)$. Võib juhtuda, et see funktsioon pole analüütiliselt jätkatav ühtegi ulatuslikumasse piirkonda. Sel korral ütleme, et D_1 on funktsiooni $f_1(z)$ loomulik olemasolu-



Joonis 43 .

piirkond. Funktsiooni $f_1(z)$ ennast nimetatakse (Weierstrassi järgi) täielikuks analüütiliseks funktsiooniks.

Kui aga funktsiooni $f_1(z)$ saab piirkonnast D_1 välja jätkata, siis vaatleme tema kõikide võimalike analüütiliste jätkude väärtusi ühe funktsiooni $f(z)$ väärtustena. Seda funktsiooni $f(z)$ nimetatakse funktsiooniga $f_1(z)$ määratud täielikuks analüütiliseks funktsiooniks, ning kõikide nende piirkondade (ja ühiste rajajoonte) summat, milles toimus analüütiline jätkamine, selle funktsiooni $f_1(z)$ loomulikuks olemasolupiirkonnaks ja kõiki tema jätkke, millest igaüks määrab ju sama täieliku analüütilise funktsiooni $f(z)$, nimetatakse funktsiooni $f(z)$ harudeks.

Muidugi ei tarvitse ühese funktsiooniga $f_1(z)$ määratud täielik analüütiline funktsioon olla ühene, kuigi ta koos oma olemasolupiirkonnaga on funktsiooni $f_1(z)$ poolt üheselt määratud. Seega me oleme täieliku analüütilise funktsiooni defineerimisega tegelikult üldistanud analüütilisuse mõiste ka mitmeste funktsioonide juhule.

Vaatleme nüüd analüütilise jätkamise praktilist teos-

tamist, mis (jättes kõrvale triviaalsed erinevused) toimub astmeridade abil. Sisuliselt me tutvusime sellega juba analüütiliste funktsioonide ühesuse teoreemi tõestamisel.

Olgu antud funktsioon $f_1(z)$, mis on analüütiline piirkonnas D_1 . Fikseerime selles piirkonnas mingi punkti z_1 ja arendame funktsiooni $f_1(z)$ selle punkti ümbruses Taylori reaks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z - z_1)^n.$$

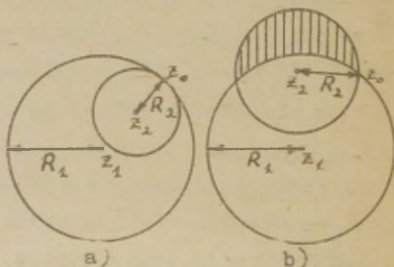
Võib juhtuda, et saadud rea koonduvusraadius R_1 on lõpmatus. Siis rea summa on täisfunktsioon ja kujutab funktsiooni $f_1(z)$ ainust võimalikku analüütilist jätku (sellise olukorra võimalikkust illustreeriv näide vt. [5] lk.297).

Üldiselt aga R_1 on lõplik. Sel juhul valime selle rea koonduvusringis mingi keskpunkti erineva punkti z_2 ja moodustame meie funktsiooni Taylori rea selle punkti suhtes:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} (z - z_2)^n, \text{ kus } a_n^{(2)} &= \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} a_k^{(1)} (z_2 - z_1)^{k-n}. \end{aligned}$$

Selle rea koonduvusraadius R ei saa olla väiksem, kui punkti z_2 kaugus eelmise rea koonduvusringjoonest : $R_2 \geq R_1 - |z_2 - z_1|$.

Kui $R_2 = R_1 - |z_2 - z_1|$ (joon. 44,a), siis saadud rida määrab meie funktsiooni väärtusi ainult nendes punktides, milles see funktsioon on määratud juba eelmise reaga. Seega mingit analüütilist jätkamist



Joonis 44.

ei toimunud. Põhjuseks on asjaolu, et mõlema koonduvusringjoone puutepunkt z_0 on meie funktsiooni iseärane punkt.

Kui aga $R_2 > R_1 - |z_2 - z_1|$, siis uuest koonduvusringist (joonisel 44, b viirutatud) asub väljaspool eelmist, ning seega me oleme saavutanud oma funktsiooni analüütilise jätkamise raadiuse $z_1 z_2$ suunas. Muidugi ei saa me ühekordse jätkamisega esimesest koonduvusringist väga kaugele välja minna, sest koonduvusringjoonel peab leiduma vähemalt üks iseärane punkt ja seega $R_2 \leq R_1 + |z_2 - z_1|$.

Samal põhjusel pole võimalik, et jätkamist saaks teostada igas suunas. Küll aga võib esineda vastupidine olukord, mil jätkamine pole üheski suunas teostatav, s.t. mil esimene koonduvusring osutub meie funktsiooni loomulikuks olemasolupiirkonnaks (vastav näide vt. näit. [5] lk. 298-299).

§ 2. Sümmeetría printsiip.

Anneme nüüd ühe erijuhu jaoks lihtsa piisava tingimuse analüütilist jätkamist teostava funktsiooni olemasoluks.

Teoreem. Olgu D_1 ühelisidus piirkond, mille rajajoon sisaldab sirglõigu L . Kui $f_1(z)$ on piirkonnas D_1 analüütiline, hulgas $D_1 + L$ pidev, ning omandab lõigu L punktides väärtused, mis asuvad (w -tasandi) mingil sirglõigul L' , siis seda funktsiooni saab analüütiliselt jätkata üle lõigu L piirkonda D_2 , mis on lõigu L (täpsemalt: seda lõiku kandva sirge) suhtes sümmeetriline piirkonnaga D_1 .

Tõestuse viime kõigepealt läbi juhul, mil L ja L' asuvad reaaltelgedel, s.t. kui $f_1(z)$ omandab reaaltelje lõigul $L = (A, B)$ reaalsed väärtused. Kui piirkond D_1 koosneb punktidest z , siis temaga reaaltelje suhtes sümmeetriline piirkond D_2 koosneb punktidest $\bar{z}$ ja vastupidi (joon. 45).

Defineerime piirkonnas D_2 funktsiooni

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})},$$

kus $z \in D_2$ tõttu $\bar{z} \in D_1$.

Näitame kõigepealt, et

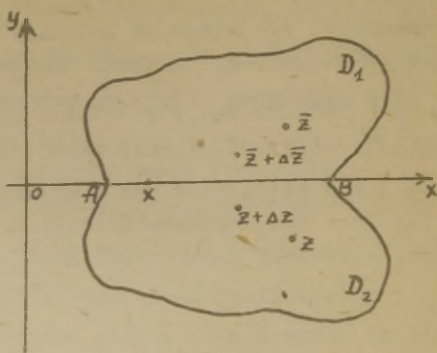
$f_2(z)$ on piirkonnas D_2 analüütiline. Kui z ,

$z + \Delta z \in D_2$, siis

$\bar{z}$, $\bar{z} + \Delta \bar{z} \in D_1$, kus-

juures $\Delta z \rightarrow 0$ puhul

ka $\Delta \bar{z} \rightarrow 0$. Seega



Joonis 45.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_2(z)}{\Delta z} &= \frac{f_2(z + \Delta z) - f_2(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f_1(\bar{z} + \Delta \bar{z})} - \overline{f_1(\bar{z})}}{\Delta z} = \\ &= \overline{\left(\frac{f_1(\bar{z} + \Delta \bar{z}) - f_1(\bar{z})}{\Delta \bar{z}} \right)} \end{aligned}$$

ning $f_1(z)$ analüütilisuse tõttu piirkonnas D_1 eksisteerib soovitud piirväärtus:

$$f'_2(z) = \overline{f'_1(\bar{z})}.$$

Näitame nüüd $f_2(z)$ pidevuse hulgal $D_2 + (A, B)$. Selleks tuleb näidata pidevus reaaltelje lõigul (A, B) mingis punktis x . Kui $z_n \in D_2$ ja $z_n \rightarrow x$, siis $\bar{z}_n \in D_1$ ja $\bar{z}_n \rightarrow x$. Järelikult

$$f_2(x) = \lim_{z_n \rightarrow x} f_2(z_n) = \lim_{\bar{z}_n \rightarrow x} \overline{f_1(\bar{z}_n)} = \overline{f_1(x)} = f_1(x),$$

sest $f_1(x)$ on ju eelduse kohaselt punktis x pidev ja tema väärtus seal reaalne. Seega oleme ühtlasi näidanud ka funktsioonide $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ võrdumise lõigul (A,B) , s.t. $f_2(z)$ on funktsiooni $f_1(z)$ pidev jätk ning eelmises paragrahvis tõestatu põhjal siis ka analüütiline jätk. Sellega on teoreem vaadeldud erijuhul tõestatud, kusjuures me ühtlasi konstrueerisime soovitud analüütilise jätku, milleks osutus funktsioon, mis reaaltelje suhtes sümmeetrilistes punktides omandab väärtused, mis on reaaltelje suhtes sümmeetrilised, s.t. kaaskompleksed antud funktsiooni vastavate väärtustega.

Üleminek üldjuhule ei valmista nüüd raskusi. Selleks teostame z -tasandil lineaarteisenduse $z' = az + b$ nii, et sirglõik L kujutuks reaaltelje mingiks lõiguks (A,B) ja w -tasandil lineaarteisenduse $w' = ow + d$ nii, et sirglõik L' kujutuks reaalteljele. Ilmselt nende teisenduste puhul säilib sümmeetria (samuti nagu nende pöördteisenduste puhul). Seega lõigu L suhtes sümmeetrilised punktid kujutavad kaaskompleksseteks (ja samuti ka lõigu L' korral). Konstrueerides nüüd vajaliku analüütilise jätku $f_2(z')$ korral, läheme tagasi lähtemuutujatele ning teoreem ongi tõestatud. Sealjuures analüütiliseks jätkuks osutub niisugune funktsioon $f_2(z)$, et $f_2(z_2)$ ja $f_1(z_1)$ on lõigu L' suhtes sümmeetrilised, kui $z_2 \in D_2$ ja $z_1 \in D_1$ on sümmeetrilised lõigu L suhtes.

Asjatõestatud teoreemis väljendubki nn. Riemann-Schwarzi sümmeetria printsiip, millel on palju rakendusi eeskätt konformse kujutamise teoorias. Tegelikult saab seda printsiipi veelgi üldistada. Nimelt võib teoreemis lõiguks L ja L' asendada mis tahes ringjoonte kaartega. Selle üldistuse me tegelikult põhjendame järgmises peatükis (§ 2), kui defineerime sümmeetria ringjoone suhtes ja näitame, et mürdlises arne teisendus kujutab ringjoone suhtes sümmeetrilised punktid mingi teise ringjoone suhtes sümmeetrilisteks

punktideks. Kui arvestada veel seda, et sirglõiku võib (kokkuleppeliselt) vaadelda lõpmata suure raadiusega ringjoone kaarena, siis saame sümmeetria printsiibi sõnastada järgiselt:

Kui funktsioon $w = f(z)$ on :

1) analüütiline piirkonnas D , mille rajajoon sisaldab ringjoone kaare S ;

2) pidev hulgas $D + S$;

3) omandab kaarel S väärtused, mis asuvad (w -tasandil) mingil ringjoone kaarel C ,

siis see funktsioon on analüütiliselt jätkatav üle kaare S funktsiooniga, mille väärtused on kaare C suhtes sümmeetrilised funktsiooni $f(z)$ väärtustega nendes punktides, mis on sümmeetrilised kaare S suhtes.

§ 3. Riemanni pinna mõiste.

Eagu me ülal nägime, võib analüütilisel jätkamisel tekkida olukord, et lähtepiirkonda tagasi jõudes saame oma funktsioonile väärtused, mis ei ühti lähteväärtustega (kui- gi lähtefunktsioon oli ühene). Kuna iga täielik analüütiline funktsioon on ühe oma haruga täiesti määratud, siis võime mitmest funktsiooni alati vaadelda kui teatud ühese funktsiooni analüütilise jätkamise tulemust.

B. Riemannile kuulub piirkonna mõiste niisuguse üldistamise idee, et iga (kompleksmuutuja) mitmene funktsioon osutub üheseks, kui teda vaadelda vastava üldistatud piirkonna punkti funktsioonina. Sellist üldistatud piirkonda nimetataksegi vastava funktsiooni Riemanni pinnaks.

Riemanni pinna konstrueerimise idee seisab selles, et koos analüütilise jätkamise käigus tekkiva mitmesusega võetakse vaatlusele uus "eksemplar" argumendi tasandit, mis seotakse eelmise z -tasandiga teatud "kleepimise" teel nii, et üleminek ühelt tasandilt teisele toimuks argumendi vas-

tava liikumise korral automaatselt.

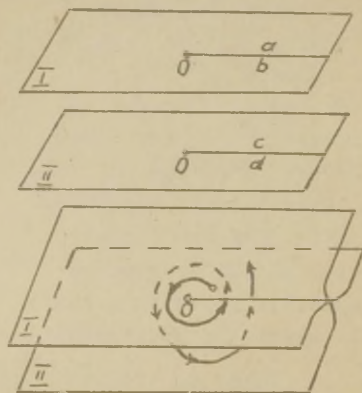
Kui meil on mitmene täielik analüütiline funktsioon juba ette antud, siis jääb analüütilise jätkamise tegelik teostamine muidugi ära ja Riemanni pinna konstrueerimine lihtsustub (analüütilise jätkamise asemel võib nüüd vaadelda argumendi liikumist).

Me piirdume Riemanni pinna mõistega tutvumisel ainult mõne lihtsa näite läbivaatamisega, kusjuures lähtume ikka juba etteantud täielikust analüütilisest funktsioonist.

Näide 1. Funktsioon $w = \sqrt{z}$ on (kogu komplektasandil) kahene, kusjuures tema väärtused erinevad teguri -1 poolest. Võrdsed on need väärtused ainult punktis $z = 0$, mis on ühtlasi iseärane, sest seal ei eksisteeri tuletist.

Lähtume näiteks punktist $z = 1$ ja valime seal $w = +1$ (analüütilise jätkamise korral tähendaks see lähtumist vastavast astmereast). Kui z liigub mööda kinnist kõverat korra ümber nullpunkti, siis teatavasti saame me samas punktis ($z = 1$) funktsiooni väärtuseks juba $w = -1$. Alles pärast teist ringi ümber nullpunkti omandab funktsioon punktis $z = 1$ jälle lähteväärtuse $w = +1$. Sellepärast tuleb Riemanni pind konstrueerida nii, et liikumisel ümber nullpunkti satuksime ühe ringi järel teisele z -tasandile ja alles pärast teist ringi endisele tasandile tagasi.

Seda saab läbi viia näiteks järgmiselt. Võtame kaks eksemplari z -tasandeid (joon. 46) ning tähistame nad I ja II (kui on tarvis rõhutada, et z asub näiteks tasandil I, siis kirjutame $:(z)_I$). Mundame nüüd funktsiooni $w = \sqrt{z}$ üheks järgmise kokkuleppega: kui z asub tasandil I, siis seame



Joonis 46.

talle vastavasse funktsiooni selle väärtuse, mille argument rahuldab tingimust

$$0 \leq \arg w < \pi;$$

kui aga z asub tasandil II, siis seame talle vastavasse funktsiooni väärtuse, mille puhul

$$\pi \leq \arg w < 2\pi.$$

(Lühemalt võib seda kokkulepet kirjutada ka nii:

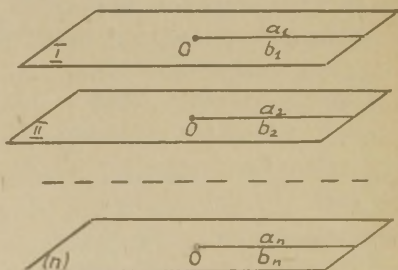
$$0 \leq \arg \sqrt{z}_I < \pi, \quad \pi \leq \arg \sqrt{z}_{II} < 2\pi).$$

Näiteks: $\sqrt{(1)}_I = 1$, $\sqrt{(1)}_{II} = -1$, $\sqrt{(-1)}_I = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$,

$\sqrt{(-1)}_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$ jne.

Nüüd tuleb veel korraldada "ühendus" tasandite I ja II vahel. Selleks "lõikame" mõlemad tasandid läbi mõnda positiivset reaalspooltelge ning "kleebime" tasandi I serva a kinni tasandi II servaga b ja serva b servaga a (vt. joon. 46). Sellega kaob vahetu ülemineku võimalus näiteks servalt b servale a .

Kui nüüd z liigub tasandil I ümber nullpunkti servast a servani b , siis w liigub ülemises pooltasandis. Kui aga z ületab serva b , sattudes seega tasandile II, siis w läheb üle alumisele pooltasandile.



Joonis 47.

Näide 2. Funktsiooni $w = \sqrt[n]{z}$ puhul toimub Riemanni pinna konstrueerimine analoogiliselt, ainult et kasutusele

peab võtma n eksemplari z -tasandeid (neid nimetatakse ka lehtedeks). "Kleepimised" tuleb teostada järgmiselt: serv b_1 ühendatakse servaga a_2 , b_2 servaga a_3 jne. kuni lõpuks b_n servaga a_1 (vt. joon.47). Vastavuse korraldame nii, et lehel (k) asuvatele z väärtustele vastaku need w väärtused, mille puhul

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} \leq \arg w < \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

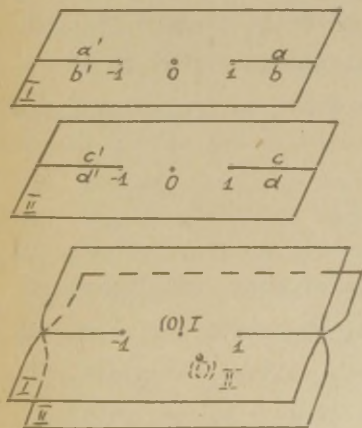
Näide 3. Lõpmata mitmese funktsiooni $w = \ln z$ korral toimub Riemanni pinna konstrueerimine lõpmata arvust lehtedest põhimõtteliselt samuti nagu eelmises näites. Uhesus saavutatakse sel teel, et lehel (k) asuvale z väärtusele vastab see w väärtus, mille puhul

$$2k\pi \leq \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

Näide 4. Funktsioon $w = \sqrt{1-z^2}$

on samuti kahene nagu näite 1 puhul. Harunemispunktideks on nüüd $z = \pm 1$. Riemanni pinna saamiseks "lõikame" kaks tasandit läbi mööda reaaltelge, jättes terveks lõigud $[-1, 1]$. "Kleebime" kokku servad a ja d , a' ja d' , b ja c ning b' ja c' (vt. joon.48).

Vastavuse korraldame näiteks nii, et tasandil I nullpunktis oleks $w = +1$ ja tasandi II nullpunktiks $w = -1$.



Joonis 48.

§ 4. Analüütilise funktsiooni lokaalne pööramine.

Käesolevas paragrahvis selgitame, kuidas antud analüütilise funktsiooni $w = f(z)$ kaudu saab konstrueerida tema pöördfunktsiooni $z = f^{-1}(w) = g(w)$ ja uurida selle omadusi. Selleks tõestame kõigepealt kolm teoreemi.

Teoreem 1. Kui mittekonstantne ühene funktsioon $w = f(z)$ on piirkonnas D analüütiline, siis piirkonna D kujutis D' osutub samuti piirkonnaks.

Tõestus e k s tuleb meil piirkonna definitsiooni (vt. I ptk. § 2) arvestades näidata, et 1) iga $z_0 \in D$ korral punkt $w_0 = f(z_0)$ kuulub hulka D' koos oma mingi ümbrusega; 2) hulga D' iga kahte punkti saab ühendada sellesse piirkonda kuuluva pideva kõveraga.

1. Fikseerides mingi $z_0 \in D$, leiame r nii väiksena, et punkti z_0 r -ümbruses ja selle rajajoonel C ei leiduks teisi w_0 -punkte peale z_0 . See on võimalik sellepärast, et z_0 oleks vastasel juhul w_0 -punktide kuhjumispunkt ja järeltõttu (ühesuse teoreemi põhjal) $f(z) = w_0 = \text{const}$. Tähistame

$$m = \min_{z \in C} |f(z) - w_0|.$$

Kuna funktsioon $f(z) - w_0$ on pidev ja ei muutu ringjoonel C nulliks, siis $m > 0$. Näitame nüüd, et punkti w_0 m -ümbruse kuulub hulka D' . Olgu w mingi punkt sellest ümbrusest, s.t. $|w_0 - w| < m$. Kuna $z \in C$ puhul $|f(z) - w_0| \geq m$, siis $|f(z) - w_0| > |w_0 - w|$. Seega Rouche teoreemi põhjal (vt. VII ptk. § 5) võrrandid $f(z) - w_0 = 0$ ja $[f(z) - w_0] + (w_0 - w) =$

$f(z) - w = 0$ omavad punkti z_0 r -ümbruses ühepalju lahendeid. Esimesel võrrandil on seal aga vähemalt üks lahend $z = z_0$ ("vähemalt" sellepärast, et z_0 võib olla ka kordne lahend). Järelikult on ka teisel võrrandil samas ringis vähemalt üks lahend, s.t. leidub punkt z nii, et $f(z) = w$. Seega $w \in D'$, m.o.t.t.

2. Olgu w' ja w'' mis tahes kaks punkti hulgast D' ning z' ja z'' nende mingid originaalid, s.t. $w' = f(z')$ ja $w'' = f(z'')$. Kuna z' ja z'' kuuluvad piirkonda D , siis selles piirkonnas leidub (sidususe tõttu) pidev kõver $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), mis neid punkte ühendab ($z(\alpha) = z'$, $z(\beta) = z''$). Ilmselt on aga kõver $w = f[z(t)] = w(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) pidev, sisaldab piirkonnas D' ning ühendab punkte w' ja w'' (sest näiteks $w' = f(z') = f[z(\alpha)] = w(\alpha)$).

Teoreem 2. Olgu $w = f(z)$ ühene, üheleheline (vt. I ptk. § 3) ja analüütiline funktsioon, mis kujutab piirkonna D piirkonnaks D' . Siis on pöördfunktsioon $z = g(w)$ piirkonnas D' samuti ühene, üheleheline ja analüütiline.

Tõestus. Funktsiooni $g(w)$ ühesus ja ühelehelisus järelduvad kohe vastavalt funktsiooni $f(z)$ ühelehelisusest ja ühesusest (tõestada!).

Näitame nüüd funktsiooni $g(w)$ pidevuse mis tahes punktis $w_0 \in D'$, millele vastav piirkonna D punkt olgu $z_0 = g(w_0)$. Helmise teoreemi tõestamisel me nägime, et iga w puhul punkti w_0 m -ümbrusest vastav originaal z asub punkti z_0 r -ümbruses. Kui etteantud $\epsilon > 0$ korral valida $r < \epsilon$, siis leidub seega m nii, et $|w - w_0| < m$ puhul on $|z - z_0| = |g(w) - g(w_0)| < r < \epsilon$. See aga tähendabki, et $g(w)$ on punktis w_0 pidev.

Jääd veel tõestada funktsiooni $g(w)$ diferentseeruvus punktis $w_0 \in D'$. Kuid pidevuse tõttu $w \rightarrow w_0$ puhul ju $z = g(w) \rightarrow g(w_0) = z_0$ ja seega

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Viimane piirväärtus eksisteerib sellepärast, et ühelehelise funktsiooni tuletis ei võrdu nulliga. Tõepoolest, kui oleks $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ($k \geq 2$), siis valides r nii väiksena, et punkti z_0 r -ümbruses ja seda piiraval ringjoonel C ei leidu tuletise teisi nullkohti peale z_0 (tõestada, et selline valik on võimalik!) on võrrandil $f(z) - w_0 = 0$ selles ringis k lahendit (lahend z_0 on k -kordne). Belmise teoreemi tõestust arvestades omab aga võrrand $f(z) - w = 0$ (kus w on punkti w_0 n -ümbrusest) selles ringis siis samuti k lahendit $z_1, \dots, z_k$. Sealjuures ei saa need lahendid olla kordsed, sest $f'(z_j) \neq 0$. Seega punktil w on k erinevat originaali, mis on vastuolus ühelehelisusega. Teoreem on tõestatud.

Sellest tõestusest me nägime ühtlasi, et tuletise erinevuse nullist on funktsiooni ühelehelisuseks tarvilik. Piisavaks see tingimus ei osutu, küll aga kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3. Kui $f'(z_0) \neq 0$, siis leidub punkti z_0 selline ümbrus, milles $f(z)$ on üheleheline.

Tõestus. Analüütilisuse tõttu koondub funktsiooni $f(z)$ Taylori rida $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (kus eelduse

kohaselt $a_1 = f'(z_0) \neq 0$) mingis ringis raadiusega R . Samas ringis koondub (absoluutselt) ka rida $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Seega $r < R$ puhul osutub rida $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$ koonduvaks ja tema summa läheneb nullile, kui $r \rightarrow 0$. Valime r nii väiksena, et oleks

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1|.$$

Siis punkti z_0 (kinnises) r -ümbruses on $f(z)$ üheleheline, s.t. $z' \neq z''$ korral (sellest ümbrusest) $f(z') \neq f(z'')$.

Tõepoolest:

$$\begin{aligned} |f(z') - f(z'')| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(z' - z_0)^n - (z'' - z_0)^n] \right| = \\ &= |z' - z''| \left\{ |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| [(z' - z_0)^{n-1} + \dots + (z'' - z_0)^{n-1}] \right\} \leq \\ &\leq |z' - z''| \left\{ |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| [|z' - z_0|^{n-1} + \dots + |z'' - z_0|^{n-1}] \right\} \leq \\ &\leq |z' - z''| \left\{ |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \right\} > 0, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

Rakendame nüüd saadud tulemusi ühese, kuid üldiselt mitte ühelehelise analüütilise funktsiooni $w = f(z)$ lokaalseks pööramiseks, s.t. pöördfunktsiooni $z = g(w)$ leidmiseks ühe punkti $w_0 = f(z_0)$ mingis ümbruses.

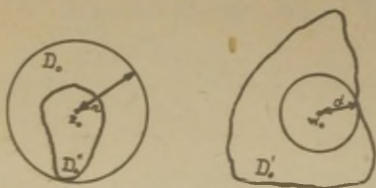
Punkti z_0 valime nii, et oleks $f'(z_0) \neq 0$. Teoreemi 3 kohaselt leidub siis selline r , et $f(z)$ on punkti z_0 r -ümbruses D_0 üheleheline. Funktsioon $w = f(z)$ kujutab ringi D_0 (teoreemi 1 kohaselt) üksüheselt mingiks w -tasandi piirkonnaks D'_0 , kusjuures $w_0 \in D'_0$. Teoreemi 2 kohaselt on pöördfunktsioon $z = g(w)$ piirkonnas D'_0 ühene, üheleheline ja analüütiline. Tähistame punkti w_0 kauguse

piirkonna D_0' rajajoonest tähega d . Siis $z = g(w)$ on punkti

w_0 d -ümbruses analüütiline ja kujutab selle ümbruse (üksüheselt) z -tasandi mingiks piirkonnaks $D_0'' \subset D_0$ (joon.49), kusjuures $z_0 \in D_0''$.

Nimetatud ümbruses, s.t.

$|w - w_0| < d$ puhul, on $g(w)$ seega arendatav Taylori reaks



Joonis 49.

$$z = g(w) = b_0 + b_1(w - w_0) + \dots + b_n(w - w_0)^n + \dots,$$

kus kordajad b_n võib arvutada näiteks määramata kordajate meetodiga. Selleks tuleb viimases reas teostada asendus

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

(kordajad a_k võime ju lugeda tuntuiks). Nii saame

$$b_0 = z_0, \quad b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad \dots$$

Olles nii leidnud pöördfunktsiooni $z = g(w)$ reaksarenduse ühe punkti ümbruses, on tema edasine uurimine juba analüütilise jätkamise ülesanne.

Lõpuks märgime, et kui lähtuda sellisest punktist z_0 , mille puhul $f'(z_0) = 0$, siis Taylori rida enam pöördfunktsiooni leidmiseks kasutada ei saa.

Viimase juhu lähemal analüüsil me käesolevas kursuses aga ei peatu.

IX p e a t ü k k .

K O N F O R M N E K U J U T A M I N E .

§ 1. Konformse kujutamise põhiprobleemid.

Kursuse algul (II ptk. § 4) me nägime, et analüütiline funktsioon kujutab z -tasandi iga piirkonna, milles tema tule-
tis erineb nullist, konformselt w - tasandi mingiks piir-
konnaks (et viimane on piirkond , selles me veendusime eel-
mises paragrahvis).

Praktikas huvitab meid enamasti aga mitte küsimus, millise
piirkonna antud funktsioon mingiks piirkonnaks kujutab, vaid
vastupidine, nn. konformse kujutamise teooria põhiülesanne:

On antud piirkonnad B ja D' . Konstrueerida funktsioon,
mis kujutab ühe piirkonna konformselt ja ühesüseselt teiseks
piirkonnaks.

Kuna üldist lihtsat algoritmi selle ülesande lahendamiseks pole õnnestunud leida, siis on konformse kujutamise teooria arenenud põhiliselt järgmistes suundades:

1) otsitakse üldisi tingimusi konformset kujutamist teos-
tava funktsiooni olemasoluks ja ühesuseks;

2) analüütiliste funktsioonide üldiste omaduste abil uuritakse konformsete kujutamiste mitmesuguseid omadusi sõltuvalt kujutatavate piirkondade kujust;

3) selgitatakse välja piirkondade konkreetseid klasse, mis on kujutatavad elementaarfunktsioonide ja nende mitmesuguste kombinatsioonide abil;

4) töötatakse välja meetodid konformse kujutamise ligikaudseks teostamiseks.

Neljandas suunas saadud tulemustel me käesolevas kursuses ei peatu. Kolmanda suuna küsimusi käsitleme järgmistes paragrahvides. Siin aga vaatleme mõningaid tulemusi, mis on saa-

duj esimeses kahes suunas. Nende põhjendamisel me sealjuures enamasti ei peatu.

On ilmne, et üldiselt mis tahes piirkond ei ole konformselt kujutatav mis tahes piirkonnaks. Näiteks ei saa mitmelisidusast piirkonda kujutada ühelisidusaks (isegi siis mitte, kui kujutamisel nõuda ainult pidevust). Samuti ei saa kogu tasandit konformselt kujutada tõkestatud piirkonnaks, sest siis peaks analüütiline funktsioon olema tõkestatud kogu komplekstasandil, mis on aga vastuolus Liouville'i teoreemiga. Konformset kujutamist teostava funktsiooni olemasolu kohta kehtib

Riemanni teoreem. Millised ka ei oleks ühelisidusad piirkonnad D ja D' , mille rajajooned sisaldavad vähemalt kaks punkti, ikka leidub lõpmata palju funktsioone, mis kujutavad piirkonnas D konformselt ja üksüheselt piirkonnaks D' .

Olgu muide märgitud, et selles teoreemis (ja kogu käesolevas peatükis) on ühelisidusust mõistetud üldisemalt, kui me seda seni tegime. Nimelt on konformse kujutamisega seotud küsimustes alatasa tegemist lõpmatute piirkondadega, mistõttu piirkonda D nimetame ühelisidusaks siis, kui iga selles piirkonnas paiknev kinnine kõver jaotab tasandi niisuguseks kaheks osaks, millest üks kuulub piirkonda D . Muidugi ei muutu sellega lõplike piirkondade ühelisidususe mõiste, kuid lõpmatuspunkti sisaldavatest piirkondadest loeme nüüd ühelisidusaks ka näiteks kogu tasandit, millest on eraldatud lõplik ühelisidus osa.

Jättes Riemanni teoreemi tõestamata, selgitame järgnevalt tingimused, millal vajalik funktsioon on üheselt määratud.

Ainsuse teoreem. Leidub ainult üks funktsioon, mis ku-

jutab piirkonna D konformselt ja üksüheselt piirkonnaks D' nii, et etteantud punkt $z_0 \in D$ kujutab etteantud punktiks $w_0 \in D'$ ja suund selles punktis muutub etteantud nurga α_0 võrra, s.t. nii, et oleks rahuldatud tingimused

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0.$$

T ö e s t u s e viime läbi kahes osas. Kõigepealt näitame teoreemi kehtivuse juhul, mil D ja D' on ühikringid $|z| < 1$ ja $|w| < 1$ ning $z_0 = w_0 = \alpha_0 = 0$. Sel juhul me peame seega tõestama, et kui funktsioon $w = f(z)$ kujutab ringi $|z| < 1$ ringiks $|w| < 1$ nii, et $f(0) = 0$ ja $\arg f'(0) = 0$ (viimast tingimust võib kirjutada ka kujul $f'(0) > 0$), siis $f(z) = z$, samasusteisendus on ju nõutavate omadustega. Defineerime ühikringis abifunktsiooni

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{kui } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{kui } z = 0. \end{cases}$$

See funktsioon (kui analüütiliste funktsioonide jagatis) on analüütiline kogu ühikringis, sest iseärasus nullpunktis on kõrvaldatud. Seega moodulimaksimumi printsiibi kohaselt selle funktsiooni moodul ringis $|z| \leq r$ (kus $r < 1$) ei ületa tema moodulit ringjoonel $|z| = r$, s.t.

$$\max_{|z| \leq r} |h(z)| = \max_{|z| \leq r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Lastes $r \rightarrow 1$ näeme, et kogu ühikringis $|h(z)| \leq 1$ ja seega $|f(z)| \leq |z|$ ehk $|w| \leq |z|$. Kuna vaadeldava funktsiooni pöörd-funktsioon $z = g(w)$ teisendab ühikringi samuti ühikringiks, siis sama mõttekäiku korrates saame $|g(w)| \leq |w|$ ehk $|z| \leq |w|$.

Järelikult $|z| = |w| = |f(z)|$, ehk $|h(z)| = 1$ kogu ühik-ringis. Siis aga $h(z) = e^{i\alpha}$, ehk $f(z) = ze^{i\alpha}$. Kuid kuna $f'(z) = e^{i\alpha}$, siis tingimust $\arg f'(0) > 0$ arvestades saamegi $\alpha = 0$ ja järelikult $f(z) = z$.

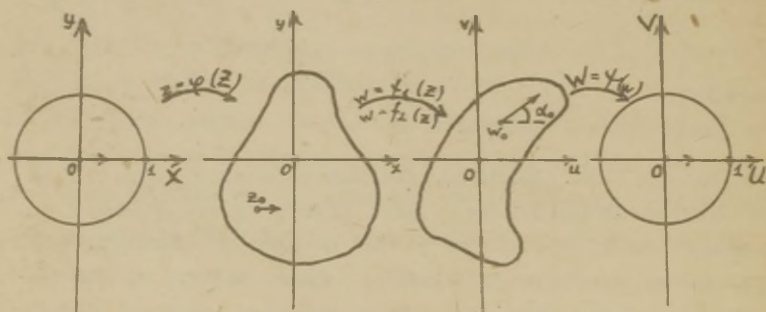
Vaatleme nüüd üldjuhtu. Oletame väitevastaselt, et leidub kaks funktsiooni

$$w = f_1(z) \quad \text{ja} \quad w = f_2(z),$$

mis kujutavad piirkonnas D konformselt ja üksüheselt piirkonnaks D' nii, et

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = w_0, \quad \arg f_1'(z_0) = \arg f_2'(z_0) = \alpha_0.$$

Võtame lisaks z -tasandile ja w -tasandile vaatlusele



Joonis 50,

veel z -tasandi ja w -tasandi (joon.50) ning defineerime funktsioonid $z = \varphi(Z)$ ja $w = \psi(w)$ järgmiselt. Olgu $z = \varphi(Z)$ üks funktsioonidest, mis kujutab ringi $|Z| < 1$ konformselt ja üksüheselt piirkonnas D nii, et $\varphi(0) = z_0$, $\arg \varphi'(0) = 0$ ning $w = \psi(w)$ funktsioon, mis kujutab piirkonna D' (konformselt ja üksüheselt) ringiks $|w| < 1$, nii, et $\psi(w_0) = 0$, $\arg \psi'(w_0) = -\alpha$. Siis funktsioonid

$$w = F_1(z) = \psi\{f_1[\varphi(z)]\}$$

ja

$$w = F_2(z) = \psi\{f_2[\varphi(z)]\}$$

kujutavad ringi $|z| < 1$ konformselt ja üksüheselt ringiks $|w| < 1$ nii, et

$$F_1(0) = F_2(0) = 0 \quad \text{ning} \quad \arg F_1'(0) = \arg F_2'(0) = 0.$$

Tõestuse esimese osa põhjal seega $F_1(z) \equiv F_2(z)$, millest kohe järeldubki, et $f_1(s) \equiv f_2(s)$ (tõestada!).

Kui funktsioon $w = f(z)$ kujutab piirkonna D , mille rajajoon on S , konformselt ja üksüheselt piirkonnaks D' rajajoonega S' , siis see funktsioon pole üldiselt kõveral S määratud. Saab aga tõestada, et alati on võimalik seda funktsiooni kõvera S punktides nii juurde defineerida, et ta muutub pidevaks hulgal $D + S$. Sealjuures osutub, et saadud funktsioon kujutab kõvera S kõveraks S' . Kui S ja S' on Jordani kõverad, siis saadud vastavus rajajoonte punktide vahel on pidev ja üksühene. Seega: kinnise Jordani kõveraga piiratud piirkonna konformne kujutamine teiseks sama tüüpi piirkonnaks määrab nende piirkondade rajajoonte punktide vahel üksühese vastavuse (selles lauses väljendub nn. teoreem rajajoonte vastavusest).

Neid märkusi arvestades saaks tõestada ka teistsuguse ainsuse teoreemi. Nimelt osutub, et piirkonda D konformselt ja üksüheselt piirkonnaks D' kujutav funktsioon on üheselt määratud, kui piirkonna D rajajoonel S on antud kolm punkti z_1, z_2, z_3 , mis peavad kujutama piirkonna

D' rajajoone S' kolmeks antud punktiks w_1, w_2, w_3 .

§ 2. Konformne kujutamine murdlineaarsete funktsioonidega.

Varem (III ptk. § 1) me tõestasime, et murdlineaarne funktsioon

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

kujutab z-tasandi iga ringjoone C mingiks w-tasandi ringjooneks C' (sirge on siinjuures loetud ringjoone erijuhuks). Sealjuures piirkonnad, milleks C jaotab z-tasandi, kujutuvad piirkondadeks, milleks C' jaotab w-tasandi. Kui veel arvestada, et murdlineaarne funktsioon on määratud, kui on teada tema väärtused kolmes erinevas punktis ja et ringjoon on määratud oma kolme punktiga, siis näeme, et leidub lõpmata palju murdlineaarseid funktsioone, mis kujutavad z-tasandi etteantud ringi (või selle välise osa) konformselt ja üheselt w-tasandi etteantud ringiks (või selle väliseks osaks). Sirge puhul asendub ring muidugi pooltasandiga.

Selleks, et saada lihtsat meetodit vajaliku funktsiooni praktiliseks konstrueerimiseks, vaatleme järgnevalt murdlineaarsete funktsioonide üht olulist omadust.

Punkte z' ja z'' nimetatakse ringjoone $|z - z_0| = R$ suhtes sümmeetrilisteks, kui nad asuvad punktist z_0 väljuval kiirel ning $|z' - z_0| \cdot |z'' - z_0| = R^2$. Juhul $R \rightarrow \infty$, s.t. kui ringjoon osutub sirgeks, saame siit ilmselt tavalise sümmeetria, sest siis ka $z_0 \rightarrow \infty$.

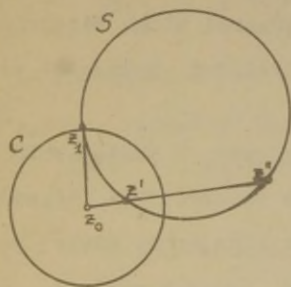
Lemma. Punktid z' ja z'' on ringjoone C suhtes sümmeetrilised siis ja ainult siis, kui nad on ringjoonega C ortogonaalsete ringjoonte kimbu tippudeks.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu punktid z' ja z'' ringjoone C , s.t. $|z - z_0| = R$ suhtes sümmeetrilised ja S neid punkte läbiv mis tahes ringjoon (joon. 51). Tõmbame ringi C keskpunktist z_0 ringjoonele S puutuja z_1 . Elementaar-

geomeetriast tuntud teoreemi kohaselt

$$|z_1 - z_0|^2 = |z'' - z_0| \cdot |z' - z_0|.$$

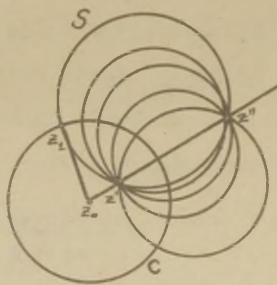
Kuna z' ja z'' on C suhtes sümmeetrilised, siis viimase korrutise väärtus R^2 , s.t. $|z_1 - z_0| = R$ ja $z_1 \in C$. Järelikult ringjoone S puutuja on ringjoone C raadiusseks ning S ja C seetõttu



Joonis 51.

ortogonaalsed. Seega kõik ringjooned, mis läbivad punkte z' ja z'' (s.t. ringjooned, mis kuuluvad nende punktide kui tippude poolt määratud kimpu) on ortogonaalsed ringjoonega C .

Piisavus. Olgu punktid z' ja z'' ringjoonega C ortogonaalsete ringjoonte kimbu tippudeks (joon.52). Siis on ka kimbu telg $z'z''$ ringjoonega C ortogonaalne, s.t. punktid z' ja z'' asuvad ringjoone C keskpunktist z_0 väljuval kiirel. Olgu S mis tahes ringjoon vaadeldavast kimbust. Puutuja punktist z_0 ringjoonele



Joonis 52 .

S on siis ringjoone C raadiuseks ja tema pikkus R . Ülal-
kasutatud teoreemist järeldub seega, et $|z' - z_0| \cdot |z'' - z_0| = R^2$
m.o.t.t.

Teoreem. Murdlineaarne funktsioon teisendab iga punkti-
paari, mis asub sümmeetriliselt z -tasandi mingi ringjoone
 C suhtes punktideks, mis on sümmeetrilised w -tasandi vas-
tava ringjoone C' suhtes.

Tõestus. Olgu z' ja z'' ringjoone C suhtes sümmeet-
rilised punktid. Konstrueerime nende punktide kui tippude
peale ringjoonega C ortogonaalsete ringjoonte kimbu $\{S\}$.

Murdlineaarne funktsioon $w = f(z)$ kujutab punktid z'
ja z'' punktideks w' ja w'' , ringjoone C ringjooneks
 C' ning ringjooned $\{S\}$ ringjoonteks $\{S'\}$. Ilmselt pea-
vad ringjooned $\{S'\}$ läbima punkte w' ja w'' . Kuid murdli-
nearse teisenduse konformsuse tõttu säilivad nurgad; seega
ringjooned $\{S'\}$ on ortogonaalsed ringjoonega C' ning jä-
relikult w' ja w'' , kui kimbu $\{S'\}$ tipud on sümmeetrilised
ringjoone C' suhtes.

Illustreerime selle teoreemi rakendamist kahe näitega.

Näide 1. Leida funktsioon, mis kujutab ülemise pool-
tasandi konformselt ühikringiks. Ülalöeldu põhjal peab see
funktsioon omama kuju

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Olgu β see z -tasandi punkt, mis peab kujutama w -tasan-
di nullpunktiks. Siis $\bar{\beta}$ peab kujutama w -tasandi lõpmatus-
punktiks (sümmeetrilised punktid!). Seega

$$0 = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \quad \text{ja} \quad \infty = \frac{a\bar{\beta} + b}{c\bar{\beta} + d},$$

millest $\beta = -\frac{b}{a}, \quad \bar{\beta} = -\frac{d}{c}$ ja järelikult

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}.$$

Kuna reaalsete z väärtuste puhul peab olema $|w| = 1$ (rajajoonte vastavus!), siis muuhulgas $z = 0$ korral saame $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$, millest $\frac{a}{c} = e^{i\alpha}$. Lõplikult seega

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$$

annab kõikide soovitud funktsioonide üldkuju. Et tegemist oleks just ülemise pooltasandi kujutamisega, peab olema täidetud tingimus $\text{Im}\beta > 0$.

Viimasest valemist leiame lihtsalt ka pöördteisenduse, s.t. funktsiooni, mis kujutab ühikringi ülemiseks pooltasandiks. Tähistades $\beta = \rho e^{i\varphi}$ ($0 < \varphi < \pi$), saame

$$z = \rho e^{-i\varphi} \frac{w - e^{i(2\varphi + \alpha)}}{w - e^{i\alpha}}.$$

Näide 2. Leida funktsioon, mis kujutab ühikringi konformselt ühikringiks.

Kujutugu z -tasandi punkt α ($|\alpha| < 1$) w -tasandi nullpunktiks. Punktiga α sümmeetriline ühikringjoone suhtes on ilmselt punkt $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ (tõestada!). Seega

$$0 = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{ja} \quad \infty = \frac{a\frac{1}{\bar{\alpha}} + b}{c\frac{1}{\bar{\alpha}} + d},$$

millest

$$w = \frac{a}{b} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = \frac{a\bar{\alpha}}{b} \cdot \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} = k \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

Kuna ühikringjoon kujutub ühikringjooneks, siis $|z| = 1$ puhul peab olema $|w| = 1$. Muuhulgas $z = 1$ korral

$$|w| = \left| k \frac{1 - \alpha}{\bar{\alpha} - 1} \right| = |k| = 1.$$

millest $k = e^{i\beta}$ ja seega

$$w = e^{i\beta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

Vastav pöördteisendus omab kuju

$$z = e^{-i\beta} \frac{w - \alpha'}{\bar{\alpha}'w - 1},$$

kus $\alpha' = \alpha e^{i\beta}$ on punkt, milleks kujutas z -tasandi nullpunkt.

§ 3. Pooltasandi konformne kujutamine hulknurgaks.

Seame endale ülesandeks leida funktsioon, mis kujutab z -tasandi ülemise poole konformselt w -tasandi n -nurgaks tippudega $A_1, A_2, \dots, A_n$. Hulknurga kohta eeldame, et ta küljed ei oma ühiseid punkte peale tippude. Selleks, et otsitav funktsioon oleks üheselt määratud, anname z -tasandi reaalteljel ette 3 punkti a_1, a_2 ja a_3 , mis peavad kujutama hulknurga tippudeks A_1, A_2 ja A_3 . Olgu hulknurga sisenurgad

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi,$$

kus $0 < \alpha_k < 2$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$ (loomulikult $\alpha_k \neq 1$).

Beldame alul, et otsitav funktsioon $w = f(z)$ on leitud, ning on teada z -tasandi reaaltelje punktid $a_4, a_5, \dots, a_n$, mis kujutavad hulknurga tippudeks $A_4, A_5, \dots, A_n$.

Kuna reaaltelje igal lõigul $[a_k, a_{k+1}]$ funktsioon $w = f(z)$ omandab väärtused, mis asuvad sirglõigul $A_k A_{k+1}$, siis on ta sümmeetrilise printsiibi põhjal jätkatav üle selle lõigu alumisse pooltasandisse. See analüütiline jätk kujutab alumise pooltasandi hulknurgaks, mis on antud hulknurgaga külje $A_k A_{k+1}$ suhtes sümmeetriline (vt. joon.53). Saadud jätku võime uuesti jätkata üle mingi teise lõigu $[a_j, a_{j+1}]$, saades funktsiooni, mis kujutab ülemise pooltasandi esialgsega kongruentseks, kuid teisiti paiknevaks hulknurgaks (see on vahepeal saadud hulknurgaga külje $A'_j A'_{j+1}$ suhtes sümmeetriline).

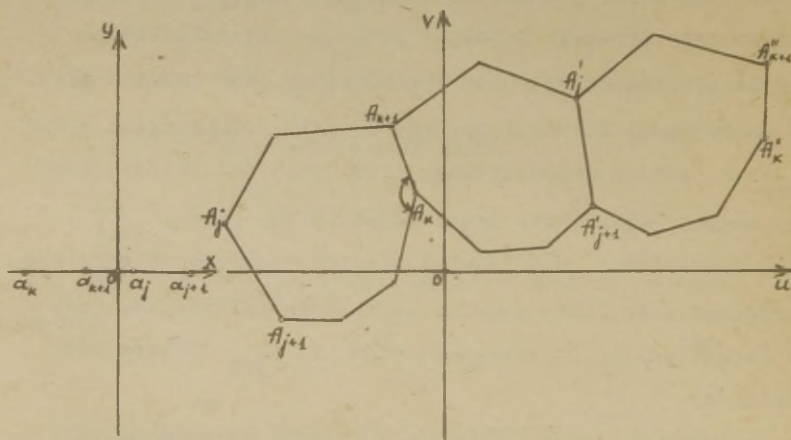
Kujutame nüüd ette, et oleme teostanud kõik võimalikud teisendused analüütilised jätkamised. Selle tulemusel oleme saanud lõpmata mitmese funktsiooni $w = F(z)$, mille üheseks haruks ülemises pooltasandis on lähtefunktsioon $w = f(z)$.

Funktsiooni $F(z)$ kõik ülemises pooltasandis määratud harud teostavad selle pooltasandi konformse kujutamise hulknurkadeks, mis erinevad üksteisest vaid asendi poolest w -tasandil. Täpselt sama võib öelda ka alumises pooltasandis määratud harude puhul. Seega mis tahes kaks samas pooltasandis

dis määratud haru $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ peavad olema seotud valemiga

$$f_1(z) = e^{1\alpha} f_2(z) + a,$$

kus reaalarv α ja kompleksarv a on antud funktsioonidepaari puhul konstandid, e.t. üks haru on saadav teisest paralleelseltükke ja pöörde teel.



Joonig 53.

Sis aga

$$\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{f_2''(z)}{f_2'(z)}$$

ja järelkult funktsioon

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

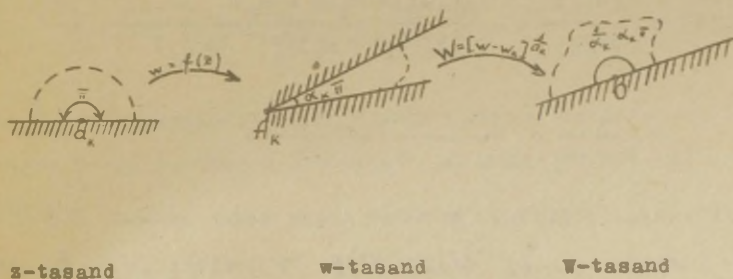
jääb üheseks kõigi vaadeldavate analüütiliste jätkamiste

puhul. Kuna $f'(z)$ kui konformset kujutamist teostava funktsiooni tuletis erineb nullist, siis $g(z)$ on analüütiline kogu kompleksitasandil, peale punktide a_k . Nendes punktides ta analüütiline ei ole, sest neis ei säili ju kujutamisel nurgad (nurk π kujutub nurgaks $\alpha_k \pi$, kus $\alpha_k \neq 1$). Lõpmatuspunkt ei moodusta erandit, sest ta kujutub hulknurga ühele küljele.

Selgitame nüüd funktsiooni $g(z)$ iseärasuse liigi punktides a_k . Selleks tähistame $w_k = f(a_k)$ (w_k on punktile a_k vastav kompleksarv) ja vaatleme funktsiooni

$$W = [w - w_k]^{\frac{1}{\alpha_k}} = [f(z) - f(a_k)]^{\frac{1}{\alpha_k}} = W(z).$$

See funktsioon kujutab punkti $z = a_k$ ümbruse ülemises pooltasandis asuva osa punkti $W = 0$ ümbruse ühes pooltasandis asuvaks osaks (vt. joon. 54). Kuna rajajoonte vastavuse tõttu z -tasandi reaaltelje lõigule vastab



Joonis 54.

W -tasandi sirglõik, siis vaadeldav funktsioon on sümmeetria printsiibi põhjal jätkatav punkti a_k kogu ümbrusesse ja esitatav seal Tayloriga reaga

$$W(z) = o_1 (z - a_k) + o_2 (z - a_k)^2 + \dots,$$

kus vabaliige $W(a_k) = 0$ tõttu puudub, aga $o_1 = W'(a_k) \neq 0$, sest funktsioon teostab konformse kujutamise (nurk säilib). Siis aga

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + \left\{ o_1 (z - a_k) + o_2 (z - a_k)^2 + \dots \right\}^{\alpha_k} = \\ &= w_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \left\{ b_1 + b_2 (z - a_k) + \dots \right\}^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Kuna viimastes loogelistes sulgudes esinev avaldis ei saa $o_1 \neq 0$ tõttu nulliks, kui $z = a_k$, siis võime eraldada funktsiooni $\{o_1 + o_2(z - a_k) + \dots\}^{\alpha_k}$ ühese analüütilise haru. Arendades viimase Taylor'i ritta, saame

$$f(z) = w_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \left\{ b_0 + b_1 (z - a_k) + \dots \right\}$$

(ilmselt $b_0 \neq 0$). Sellest saame vahetu arvutuse teel, et

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\alpha_k b_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \dots}{\alpha_k b_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - a_k} \cdot \frac{(\alpha_k - 1)\alpha_k b_0 + \dots}{b_0 + \dots}. \end{aligned}$$

Viimases avaldises kujutab teine tegur endast $b_0 \neq 0$ tõttu punktis $z = a_k$ analüütilist funktsiooni, s.t. on esitatav kujul

$$(\alpha_k - 1) + d_0 (z - a_k) + d_1 (z - a_k)^2 + \dots$$

(vabaliige on siin leitud murru väärtuse arvutamise teel punktis $z = a_k$) . Seega

$$g(z) = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + d_0 + d_1 (z - a_k) + \dots ,$$

millest näeme, et $z = a_k$ on funktsiooni $g(z)$ esimest järku poolus resiidiga $\alpha_k - 1$.

Kuna funktsioonil $g(z)$ on ainult n iseärasust punkti $z = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) , mis kõik osutusid esimest järku poolusteks, siis lahutades funktsioonist $g(z)$ kõik tema peaosad, saame funktsiooni

$$h(z) = g(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} - \dots - \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n} ,$$

mis on analüütiline kogu komplekstasandil (ka lõpmatuspunktis), s.t. on seal ka tõkestatud ning Liouville'i teoreemi põhjal $h(z) = 0$. Konstandi 0 määramiseks paneme tähele, et $z = \infty$ kuulub lõigule $[a_n, a_1]$, mistõttu $f(z)$ on analüütiline $z = \infty$ ümbruses, s.t.

$$f(z) = \beta_0 + \frac{\beta_{-p}}{z^p} + \frac{\beta_{-p-1}}{z^{p+1}} + \dots ,$$

kus β_{-p} on funktsiooni $f(z)$ Laurent'i rea esimene nullist erinev kordaja. Otsest arvutust teel saame näha, et $z = \infty$ ümbruses

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{p(p+1) \frac{\beta_{-p}}{z^{p+2}} + \dots}{-\frac{p\beta_{-p}}{z^{p+1}} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z} \frac{p(p+1) \beta_{-p} + \dots}{-\beta_{-p} + \dots} = -\frac{p+1}{z} + \dots , \end{aligned}$$

millest $g(\infty) = c' = 0$.

Kuna

$$g(z) = \frac{d}{dz} [\ln f'(z)] = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n},$$

siis viimase võrduse integreerimisel mõõda mis tahes kõvera-
rat ülemises pooltasandis saame

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^n \ln (z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \ln b$$

ehk

$$f'(z) = b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1},$$

millest

$$w = f(z) = b \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + c.$$

Saadud tulemus kannab Christoffel-Schwarzi valemi nime.

Selle valemi me saime eeldusel, et punktid a_k , mis kujutu-
vad hulknurga tippudeks, on teada. Tavaliselt on neist ai-
nult kolm punkti antud, kuna aga ülejäänud, ning samuti kons-
tandid c ja b tuleb mingitest teistest kaalutlustest
määrata. Nende konstantide määramisega seotud raskused ongi
peamiseks takistuseks Christoffel-Schwarzi valemi prakti-
lisel kasutamisel. Nende konstantide määramise võimalusi
selgitame järgmises paragrahvis ühe näite varal.

§ 4. Ristküliku konformne kujutamine pooltasandiks.

Vaatleme lihtsuseks niisuguse ristküliku kujutamist ülemiseks pooltasandiks, mille tipud A_1, A_2, A_3 ja A_4 asuvad vastavalt punktides $K + i \cdot 0$, $K + i \cdot K'$, $-K + i \cdot K'$ ja $-K + i \cdot 0$, kus $K > 0$ ning $K' > 0$ (vt. joon.55).

Imaginaartelg jaotab selle ristküliku kaheks võrdseks osaks. Teostame oma kujutamise alul nii, et ristküliku parem pool kujutuks w -tasandi I veerandiks, kusjuures kehtiks vastavus

$$0 \leftrightarrow 0, \quad A_1 \leftrightarrow 1, \quad B \leftrightarrow \infty.$$

Punkti A_2 kujutise tähistame $\frac{1}{k}$, kusjuures $0 < k < 1$.

Kui seda kujutamist teostavat funktsiooni jätkata teisele poole imaginaartelge, siis saame vastavused $A_4 \leftrightarrow -1$ ja $A_3 \leftrightarrow -\frac{1}{k}$.

Esimest funktsiooni selle jätkuga täiendades saamegi otsitava funktsiooni, mille pöördfunktsioon on Christoffel-Schwarzi valemi abil kohe üles kirjutatav. Tõepoolest, kuna antud juhul $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$, siis w -tasandi ülemist poolt z -tasandi vaadeldavaks ristkülikuks kujutav funktsioon omab kuju

$$z = b \int_0^w (w-1)^{\frac{1}{2}-1} (w - \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}-1} (w+1)^{\frac{1}{2}-1} (w + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}-1} dw + c =$$

$$= b' \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2 w^2)}} ,$$

kus $b' = kb$ ja vastavuse $0 \leftrightarrow 0$ tõttu $c = 0$.

Konstantide b' ja k määramiseks kasutame vastavusi

$$A_1 \leftrightarrow 1 \quad \text{ja} \quad A_2 \leftrightarrow \frac{1}{k} :$$

$$K = b' \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} ; \quad (*)$$

$$\begin{aligned} K + i K' &= b' \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \\ &= b' \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + b' \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \end{aligned}$$

millest

$$K' = b' \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}} . \quad (**)$$

Võrranditest (*) ja (**) võib põhimõtteliselt leida konstandid k ja b' . Lihtsuseks eeldame, et K ja K' (ristküliku mõõted) on nii valitud, et $b' = 1$. Siis pooltasandi konformne kujutamine meie ristkülikuks teostub funktsiooniga

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} .$$

See integraal ei avaldu elementaarfunktsioonides ja

kuulub nn. elliptiliste integraalide hulka (täpsemalt :
ta on 1. liiki elliptiline integraal - vt. näit. 2 lk.
318).

Viimase integraali pööramise tulemusel (pöördfunktsiooni
meil ju vaja ongi) saame funktsiooni, mida nimetatakse
elliptiliseks siinuseks (ta kuulub nn. Jacobi elliptilis-
te funktsioonide hulka) ja tähistatakse

$$w = \operatorname{sn} z.$$

Seega juba niivõrd lihtne konformne kujutamine, nagu seda
on käesolevas paragrahvis vaadeldav juht, viib meid kõrge-
mate transtsendentsete funktsioonide juurde. Selgub, et ka
mis tahes ristküliku kujutamine pooltasandiks teostub tea-
tava elliptilise funktsiooniga.

Elliptilised funktsioonid defineeritakse üldiselt kui
kaheliperioodilised meromorfsed funktsioonid. Ühest funkt-
siooni $w = f(z)$ nimetatakse kaheliperioodiliseks, kui
ta on perioodiline perioodiga ω_1 , s.t. iga z puhul määra-
mispiirkonnast $f(z + \omega_1) = f(z)$ ja perioodiline perioo-
diga ω_2 , kusjuures perioodide ω_1 ja ω_2 suhe ei ole reaalne.

Äsjasaadud elliptiline siinus on meromorfnе funktsioon,
kusjuures tema poolused asuvad punktides $4nK + i(2m+1)K'$,
kus n ja m on suvalised täisarvud. Elliptilise siinuse peri-
oodideks on $\omega_1 = 4K$ ja $\omega_2 = 2K'i$ (selles on suhteliselt
lihtne veenduda, kui äsjateostatud konformse kujutamise
pühul rakendada korduvalt sümmeetria printsiipi).

Kirjandus

1. Kangro, G., Kõrgem algebra II, Tallinn-Tartu 1950.
2. Фиктенгольд Г.М., Основы математического анализа I,
Москва, 1955.
3. Фиктенгольд Г.М., Основы математического анализа II,
Москва, 1956.
4. Маркушевич А.И., Краткий курс теории аналитических
функций, Москва, 1957.
5. Привалов И.И., Введение в теорию функций комплексного
переменного, Москва-Ленинград, 1948.