

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Puhta matemaatika instituut

Maksim Ivanov

**KOLMNURGAGA SEOTUD LÕIKUDE GEOMEETRIA
PÕHITULEMUSED JA NENDE TÕESTUSMEETODID**

Magistritöö

Juhendaja: dotsent Elts Abel

Tartu 2006

Sisukord

Sissejuhatus	5
I Eesti võistkondade edukuse analüüs rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel	8
§ 1. Matemaatikavõistluste kohast matemaatikaõpetuses	8
§ 2. Rahvusvaheliste matemaatika olümpiaadide korraldusest	9
§ 3. Eesti võistkondade tulemustest rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel	10
3.1. Võistkonna koht mitteametlikus pingereas	10
3.2. Tulemuste analüüs valdkondade kaupa	12
3.3. Tulemuste võrdlus ülesannete kaupa	14
3.4. Eesti koondiste tulemustest võistlusel „Balti tee“	16
§ 4. Geomeetriaülesannete temaatikast RMO-I	18
II Kolmnurga tseviaanid ja nende omadused	20
§ 1. Kolmnurga mediaan	23
1.1. Põhimõiste	23
1.2. Põhitulemus kolmnurga mediaanide kohta	23
1.3. Kolmnurga mediaanide omadused	27
1.4. Mediaanid ja kolmnurga pindala	33
1.5. Kolmnurga mediaaniga seotud võrdused ja võrratused	35
a) Valemid mediaani pikkuse arvutamiseks ja muud võrdused	35
b) Mediaaniga seotud võrratused	38
1.6. Mediaanid ja kolmnurkade võrdsuse tunnused	41
1.7. Mediaaniga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdkülgne, võrdhaarne või täisnurkne	43
§ 2. Mediaanid ja kolmnurgaga seotud ringjooned	46
2.1. Põhitulemus	46
2.2. Täiendavaid tulemusi kolmnurga mediaanide ja ringjoonte kohta	46

2.3.	Kolmnurga mediaanidega ja ümberringjoone raadiusega seotud võrratused	50
§ 3.	Näiteülesandeid	53
§ 4.	Kolmnurga nurgapoolitaja	57
4.1.	Nurgapoolitaja	57
4.2.	Põhitulemused kolmnurga sisenurkade poolitajate kohta	58
4.3.	Täiendavaid tulemusi kolmnurga sisenurga poolitaja kohta	61
4.4.	Tulemused kolmnurga välisnurga poolitaja kohta	64
4.5.	Nurgapoolitajad ja kolmnurga pindala	66
4.6.	Nurgapoolitajate aluspunktide poolt moodustatud kujundite omadused	68
4.7.	Kolmnurga nurgapoolitajaga seotud võrdused ja võrratused ...	71
a)	Valemid nurgapoolitaja pikkuse arvutamiseks	71
b)	Nurgapoolitajaga seotud võrratused	74
4.8.	Nurgapoolitajad ja kolmnurkade võrdsuse tunnused	75
4.9.	Nurgapoolitajaga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdhaarne või täisnurkne	78
§ 5.	Nurgapoolitajad ja kolmnurgaga seotud ringjooned	82
5.1.	Põhitulemused	82
5.2.	Kolmnurga nurgapoolitajate pikendused kuni ümberringjooneni ja nende omadused	83
5.3.	Täiendavaid tulemusi kolmnurga nurgapoolitajate ja ümberringjoone kohta	88
§ 6.	Näiteülesandeid	92
§ 7.	Kolmnurga kõrgus	97
7.1.	Kolmnurga kõrgus ja põhitulemused selle kohta	97
7.2.	Kolmnurga kõrgustega seotud kolmnurkade sarnasus	100
7.3.	Kõrgused ja kolmnurga pindala	104
7.4.	Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste kohta	104
7.5.	Võrdhaarse kolmnurga kõrguste omadused	109
7.6.	Täisnurkse kolmnurga kõrguste täiendavad omadused	112
7.7.	Võrdkülgse kolmnurga kõrguste täiendavad omadused	115

7.8.	Kõrgustega seotud kolmnurkade võrdsuse tunnused	117
7.9.	Kolmnurga kõrgustega seotud täiendavad võrdused ja võrratused	119
a)	Võrdused	119
b)	Võrratused	121
§ 8.	Kolmnurga kõrgus ja sellega seotud ringjooned	123
8.1.	Põhitulemused	123
8.2.	Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste ja ümberringjoonte kohta	125
§ 9.	Näiteülesandeid	133
§ 10.	Kolmnurga mediaani, nurgapoolitaja ja kõrguse vahelised seosed	139
10.1.	Põhitulemused	139
10.2.	Täiendavaid seoseid kolmnurga kõrguse, mediaani ja nurgapoolitaja vahel	140
III	Lisakonstruktsioonide meetod	151
§ 1.	Meetodi kirjeldus	151
§ 2.	Kolmnurga tseviaanidega seotud lisakonstruktsioonid	152
§ 3.	Mediaanidega seotud lisakonstruktsioonid	156
§ 4.	Nurgapoolitajatega seotud lisakonstruktsioonid	159
§ 5.	Kõrgustega seotud lisakonstruktsioonid	162
	Kokkuvõte	164
	Resümee	166
	Kasutatud kirjandus	168

Sissejuhatus

Kaasajal on matemaatikavõistlused ja nendega kaasnevad tegevused muutunud õppeprotsessi lahutamatuks osaks paljudes maades [18].

Matemaatikavõistluste ajalugu Eestis algas 1950. aastal. Kõrgetasemelistel matemaatikavõistlustel osaleb Eesti oma võistkonnaga alates 1992. aastast [4]. Möödunud viisteist aastat on piisav aeg, et teha kokkuvõtteid võistlustulemustest, analüüsida meie õpilaste edukust rahvusvahelistel võistlustel ning nende teadmisi ja oskusi matemaatika olümpiaadide ülesannete lahendamisel.

Uurimused on näidanud, et edu nn eksklusiivsetel võistlustel (matemaatika olümpiaadidel) oleneb järgmistest põhikomponentidest [18]:

- 1) tüüpiliste olümpiaadiülesannete lahendamismeetodite tundmine;
- 2) intellektuaalse töö kultuur (sh probleemülesannete lahendamise üldised võtted, oskused kriitiliselt analüüsida oma ja teiste lahendusi ning näha vigu jne);
- 3) motivatsiooni küsimused ja psühholoogilised aspektid (sh valmidus pingutuseks võidu nimel, lahendaja tervislik seisund jne).

Käesolevas magistritöös pööratakse tähelepanu esimese põhikomponendi arendamisele kolmnurga geomeetria valdkonnas.

Iga olümpiaadiülesanne on kahtlemata unikaalne ja suure tõenäosusega selle lahendamiseks ei piisa ainult faktide ja meetodite teadmisest, vaid on vajalikud ka vilumused nende rakendamiseks uues situatsioonis. Samal ajal on sageli tegemist teatud tüüpi ülesannetega, mille edukas lahendamine sõltub suurel määral lahendaja kogemustest. Viimased saadakse aga järjekindla ja süsteemse tööga õppematerjalide abil. Nende koostamisele on võistlustel edukamates riikides kulutatud palju vahendeid. Paraku ei ole peale ülesannete kogude teisi õppematerjale üldjuhul avalikustatud.

Käesoleva magistritöö koostamisel lähtuti Eesti võistkondade edukuse analüüsist Rahvusvahelise Matemaatika Olümpiaadi (RMO) ja võistluse „Balti tee“ tulemuste põhjal aastatel 1995-2004 ning olümpiaadiülesannete lahendamisel kasutatavate meetodite liigitusest.

Tehtud analüüs näitas, et

- 1) meie võistlejate kõige nõrgemaks kohaks on klassikalise geomeetria ülesannete lahendusoskus [2];
- 2) käibelolevates eestikeelsetes kooliõpikutes ja mõnes üksikus geomeetria-alases raamatus (vt [7], [13], [16]) või õppevahendis (vt [3], [10-12], [19]) toodud faktidest ja meetoditest ei piisa kaugeltki rahvusvaheliste matemaatikavõistluste ülesannete edukaks lahendamiseks.

Käesolevas töös esitatakse võistlusülesannetes kasutatavad põhitulemused koos tõestustega ning lahendusmeetodite kirjeldustega, mis kuuluvad kolmnurga geomeetria valdkonda. Materjali mahukuse tõttu piirduakse selles töös vaid kolmnurga ning selle põhiliste tseviaanide ja nendega seotud ringjoonte temaatikaga. Vaatamata sellele on kaetud suurem osa võistlusülesannete lahendamiseks vajalikest põhiteadmistest ja meetoditest.

Töös sisalduv materjal on jaotatud kolme peatükki.

Esimeses peatükis antakse lühiülevaade rahvusvaheliste matemaatikavõistluste osatähtsusest ja korraldusest ning esitatakse Eesti võistkondade edukuse analüüs aastatel 1995-2004.

Töö kõige mahukam osa on teine peatükk, kus vaadeldakse kolmnurka, selle mediaane, nurgapoolitajaid ja kõrgusi ning nendega seotud ringjooni. Tõestatakse arvukalt teoreeme ja lauseid, mis annavad nii põhiseosed, kui ka rahvusvahelisel tasemel ülesannete lahendamiseks vajalikud seosed vaadeldud geomeetriliste kujundite vahel. Lisatud on ka mõned teemaga sobivad näiteülesanded olümpiaadidelt. Seejuures püütakse anda võimalikult

palju erinevaid tõestusi ja lahendusmeetodeid ühele ja samale probleemile (või sarnastele probleemidele).

Selle peatüki koostamisel on tuginetud ülesannete kogumikele (vt [3], [10-13], [16], [22], [24-27], [37], [40], [42-43], [45], [47], [50-51], [53]), artiklitele (vt [21], [28-29], [31], [34], [39], [41], [44], [46], [48-49], [52]) ja internetilehekülgedele (vt [6], [15], [30], [32-33]).

Kolmandas peatükis vaadeldakse ühte olulist geomeetriaülesannete lahendamismeetodit, mida nimetatakse lisakonstruktsioonide meetodiks (vt [9], [35-36]). Siin liigitatakse võimalikud lisakonstruktsioonid ja põhjendatakse nende konstruktsioonide otstarvet teises peatükis toodud näidete põhjal. Antakse ka soovitusi sobiva lisakonstruktsiooni valikuks teatud tüüpi ülesannete lahendamisel.

I Eesti võistkondade edukuse analüüs rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel

§ 1. Matemaatikavõistluste kohast matemaatikaõpetuses

Kaasajal peaks iga riik lahendama oma kõrgelt kvalifitseeritud spetsialistide ettevalmistamise probleemid ise. Selleks on kahtlemata vajalik kvaliteetne kõrgharidus, mis eeldab ka üldhariduse kõrgemat taset. Kooliharidussüsteemi üheks põhiliseks eesmärgiks ongi suunata õpilasi professionaalselt orienteeritud õppimisele, et igaüks neist saaks temale sobivas valdkonnas oma potentsiaali realiseerida.

Ajalugu ja uurimused [17] on näidanud, et matemaatikavõistlused ja nendega seotud tegevused (ringitöö, ettevalmistus võistlusteks jne) mõjutavad üldjuhul positiivselt ka õppeprotsessi tavakoolis. Võistluste iseloom ja kasutatavate ülesannete mittestandardisus annavad lisamotivatsiooni süvendatud tegelemiseks ainega. Matemaatika olümpiaadidel mängivad olulist rolli mitte ainult õpilaste konkreetsed ainealased teadmised, vaid ka tema suutlikkus piiratud aja jooksul loovalt läheneda probleemile, et lahendada ülesannet.

Kokkuvõtlikult saab öelda [4], et matemaatikavõistlused

- 1) ärgitavad nii õpilaste kui ka õpetajate huvi aine vastu ja annavad motivatsiooni aine süvendatud omandamiseks;
- 2) annavad võimaluse võrrelda oma oskusi ja teadmisi oma eakaaslastega;
- 3) testivad õpilase võimeid tulla toime uudses situatsioonis;
- 4) loovad tingimused kaasaegse elementaar matemaatika arenguks;
- 5) annavad õpilasele võimaluse suhtlemiseks mõttekaaslastega, õpetajatega ja professionaalsete matemaatikutega uuel tasandil;
- 6) arendavad meeskonnatöö oskusi;
- 7) annavad võimaluse didaktikutele uurida, millist materjali ja milliste vahenditega on võimalik õpilastele õpetada;
- 8) näitavad, millises osas oleks vaja täiendada õpetajate koolitust.

§ 2. Rahvusvaheliste matemaatika olümpiaadide korraldusest

Esimene Rahvusvaheline matemaatika olümpiaad (RMO) toimus Rumeenias 1959. aastal. Sellest sai alguse traditsioon korraldada igal aastal (peale 1980) matemaatika olümpiaad, kus iga riigi parimatel koolilastel on võimalus näidata oma tugevamaid külgi matemaatikas rahvusvahelises konkurents.

Viimastel aastatel on RMO-l osalenud keskmiselt 80 riiki, kusjuures igal maal on õigus võistlusele saata kuni 6 õpilast, kelle vanus ei ületa 20 aastat ja kelle haridus piirdub keskharidusega. Sõltumata olümpiaadil osalejate klassist ja vanusest tuleb RMO-l kahel võistluspäeval kõikidel lahendada ühesuguseid ülesandeid [6], mis on jaotatud nelja valdkonna algebra (A), geomeetria (G), arvuteooria (N) ja kombinatoorika (C) vahel. Ülesannete valikul arvestatakse tavaliselt järgmiste soovitustega:

- igas voorus peaks olema üks geomeetriaülesanne;
- võistlusülesannete hulgas peaks olema vähemalt üks ülesanne igast valdkonnast (A, G, N, C);
- igas voorus peaks olema üks suhteliselt lihtne, üks keskmise raskusega ja üks raskem ülesanne.

Rahvusvaheline Matemaatika Olümpiaad toimub kahes voorus kahel teineteisele järgneval päeval. Võistluse mõlemas voorus pakutakse 3 ülesannet ja iga ülesande eest võib saada 0 kuni 7 punkti. Kuna RMO on tegelikult individuaalvõistlus, siis on igaühel võimalus auhinda võita. Olümpiaadi reeglite järgi saavad mitte enam kui pooled osalejatest medali, kusjuures kuld-, hõbe- ja pronksmedalite arvude suhe on umbes 1:2:3. Seega kõikide osalejate arvust ligikaudu $\frac{1}{12}$ saab kuldmedali, $\frac{1}{6}$ saab hõbemedali ja $\frac{1}{4}$ saab pronksi. Nendele osalejatele, kes medalit ei saa, aga vähemalt ühe ülesande eest saavad maksimumpunktid, antakse audiplom.

§ 3. Eesti võistkondade tulemustest rahvusvahelistel matemaatika-võistlustel

3.1. Võistkonna koht mitteametlikus pingereas

Rahvusvaheline matemaatika olümpiaad on ametlikult individuaalvõistlus. Igal aastal koostatakse siiski ka nn mitteametlikke riikide edetabeleid summeerides võistkondade liikmete lahenduste eest saadud punktid. Analüüsi aluseks võetud andmed edetabelite kohta on saadud portaalidest [6], [8] ja [15].

Vaatluse alla on võetud aastatel 1995–2004 toimunud Rahvusvahelised Matemaatika Olümpiaadid.

Viimaste aastate RMO kindlad liidrid on olnud Hiina, Venemaa ja USA võistkonnad. Nagu võiks eeldada, on parimate hulgas ka enamus Aasia maadest. Kui rääkida Euroopa võistkondade tulemustest, siis palju paremini on läinud Kesk- ja Ida-Euroopa riikidel.

Alltoodud tabelis 1 on esitatud need 20 riiki, kelle võistkondade saadud kohtade aritmeetiline keskmine mitteametlikus pingereas vaadeldavatel aastatel on olnud kõige parem (st väiksem). Eesti võistkondade kohtade aritmeetiline keskmine on aga 50,9. Alates aastast 1995 on Eesti koondise parimaks saavutuseks olnud 37. koht 2001. aastal Washingtonis. Samal ajal parim punktide suhtarv (saadud punktide ja maksimaalselt võimaliku arvu punktide suhe protsentides) saavutati olümpiaadil 2004. aastal Ateenas (33,7%).

Tabel 1. 20 parima võistkonna kohtade aritmeetiline keskmine RMO-l

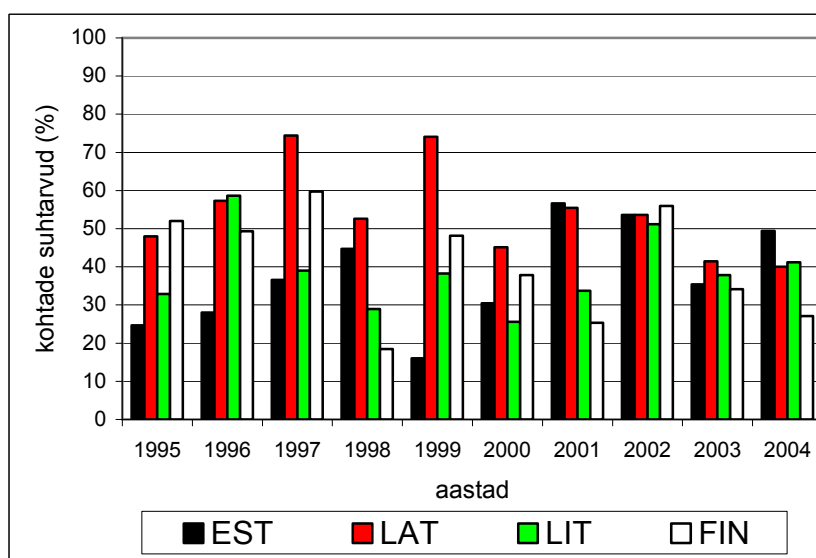
Hiina	1,7	Rumeenia	7,6	Jaapan	12,0	Suurbritannia	17,8
Venemaa	3,2	Lõuna-Korea	7,7	India	12,7	Iisrael	18,1
USA	4,3	Ungari	8,3	Ukraina	13,3	Türgi	18,5
Bulgaaria	5,0	Iraan	9,4	Valgevene	15,4	Poola	19,9
Vietnam	6,1	Taivan	10,6	Saksamaa	15,7	Kanada	20,1

Et saada paremat ettekujutust Eesti võistkonna edukusest rahvusvahelistel olümpiaadidel aastatel 1995–2004, võrdleme Eesti koondise tulemusi naaberriikide (Läti, Leedu ja Soome) võistkondade tulemustega [15].

Tabelis 2 on toodud Eesti, Läti, Leedu ja Soome võistkondade kohtade suhtarvud protsentides aastate kaupa. Kuna osalevate riikide hulk erineb aastati, leiti suhtarvud aastate kaupa järgmise eeskirja alusel:

$$\text{kohtade suhtarv (\%)} = \frac{\text{võistkondade arv} - \text{antud võistkonna koht} + 1}{\text{võistkondade arv}} \cdot 100(\%).$$

Tabel 2. Eesti ja naaberriikide võistkondade kohtade suhtarvud (%) RMO-l



Sellest tabelist selgub, et kui vaadeldava aastakümne esimesel poolel oli Eesti meeskond naaberriikide seas peaaegu alati viimane, siis selle ajaperioodi teisel poolel jõudis ta kaks korda võita antud arvestuses. Tabeli põhjal võib täheldada vaadeldavate võistkondade taseme ühtlustumist. On kindlasti vaja veel märkida, et 1999. aastal oli Eesti meeskonnas vaid 4 olümpiaadil osalejat. Sellega võib põhjendada kõige madalama koha saavutamist, kuna edetabel koostatakse kogu võistkonnaga saadud punktide summa alusel.

Vaadeldava kümne aasta jooksul on Eesti võistkonna liikmed saanud 14 medalit, nendest 4 hõbedat ja 10 pronksi. Aastal 2005 lisandus neile veel 3 pronksmedalit. Kuldmadalit saada ei ole seni õnnestunud. Informatsioon kõikide medalite kohta aastatel 1995-2004 on toodud tabelis 3.

Tabel 3. Eesti ja naaberriikide võistkondade medalite arvud

Riik	Medal	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Kokku
Eesti	kuld	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	hõbe	0	0	0	1	0	0	1	2	0	0	4
	pronks	0	0	2	1	1	1	3	0	0	2	10
	diplom	2	0	1	0	0	1	0	2	3	3	12
Läti	kuld	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	hõbe	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	6
	pronks	1	3	4	3	0	3	2	2	1	1	20
	diplom	2	1	1	0	0	0	2	2	2	2	12
Leedu	kuld	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	hõbe	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
	pronks	0	2	1	1	2	1	1	2	2	0	12
	diplom	4	1	1	1	0	1	0	1	2	5	16
Soome	kuld	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	hõbe	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	pronks	3	2	4	0	0	3	1	3	1	1	18
	diplom	2	2	1	1	1	1	0	3	2	0	13

3.2. Tulemuste analüüs valdkondade kaupa

Alates 1995. aastast on RMO võistlusülesannete hulka valitud 20 ülesannet geomeetria valdkonnast, 15 algebra (sealhulgas ka ülesanded funktsionaalvõrrandite, võrratuste ja jadade kohta), 13 arvuteooria ja 12 kombinatoorika valdkonnast.

Tabelist 4 leiame saadud punktide suhtarvud (protsentides) kõigi osalejate (Kõik), top 10 võistkondade (Top), Eesti võistkonna (EST) ja naaberriikide võistkondade (LAT, LIT, FIN) jaoks valdkondade kaupa 10 aasta jooksul.

Tabelist 4 on näha, et keskmiselt kõige rohkem punkte saadakse geomeetriaülesannete eest. Ka tippmeeskondade korral kehtivad samad seaduspärasused. Aga meie naaberriikide võistkondade jaoks ei ole nimetatud matemaatika valdkond kõige lihtsam. Eesti, Läti, Leedu ja Soome võistkonnad saavad rohkem punkte kombinatoorika ülesannete lahendamise eest. Arvuteooria ülesanded osutuvad aga kõigi jaoks kõige raskemateks.

Tabel 4. RMO tulemused kõikide ülesannete lõikes valdkondade kaupa

Valdkond	Kõik	Top	EST	LAT	LIT	FIN
Geomeetria	41,3	76,9	23,9	36,2	19,5	17,6
Algebra	30,5	72,1	20,8	24,0	21,9	26,2
Arvuteooria	28,0	66,2	16,8	22,7	18,5	16,7
Kombinatorika	35,2	66,7	31,2	36,5	29,0	40,1

Tabelis 5 on esitatud valdkondade kaupa tabeli 4 suhtarvude mõned vahed. Punktide suhtarvude vahed „Kõik – riik“ ja „Top – riik“ näitavad valdkondade kaupa, mitme protsendipunkti võrra on antud riigi meeskond kogunud vähem punkte võrreldes keskmise tulemusega või kümne tippmeeskonna saavutusega.

Tabel 5. Suhtarvude vahed valdkondade kaupa

Valdkond	Kõik– EST	Kõik– LAT	Kõik– LIT	Kõik– FIN	Top– EST	Top– LAT	Top– LIT	Top– FIN
Geomeetria	17,4	5,1	21,8	23,7	53,0	40,7	57,4	59,3
Algebra	9,7	6,5	8,6	4,3	51,3	48,1	50,2	45,9
Arvuteooria	11,2	5,3	9,5	11,3	49,4	43,5	47,7	49,5
Kombinatorika	4,0	–1,3	6,2	–4,9	35,5	30,2	37,7	26,6

Tabelist 5 on väga hästi näha, et Eesti, Leedu ja Soome jaoks on kõige tõsisemaks probleemiks geomeetriaülesannete lahendamine. Need esinevad samas aga kõige sagedamini võistlusülesannete hulgas. Kuna võib öelda, et top 10 meeskonna tulemused määravad ülesannete raskusastme, siis tabeli 5 näitaja „Top – riik“ annab ettekujutuse sellest, mis valdkonnas tegelikult antud riigi meeskonnad olümpiaadil kaotavad kõige rohkem punkte. Eesti, Leedu ja Soome jaoks on selleks valdkonnaks geomeetria, aga Läti jaoks – algebra.

3.3. Tulemuste võrdlus ülesannete kaupa

Tabel 6. Tulemuste võrdlus ülesannete kaupa (%)

2004 Ateena (Kreeka)					1999 Bukarest (Rumeenia)				
44. koht (85)		kõik	top10	EST	69. koht (81)		kõik	top10	EST
Geomeetria	G	65,8	92,9	66,7	Geomeetria	G	61,4	94,5	28,6
Funktsionaalvõrrandid	A	39,4	84,8	35,7	Võrratused	A	23,9	80,2	3,6
Kombinatorika	C	14,5	44,0	2,4	Kombinatorika	C	23,0	33,3	28,6
Võrratused	A	58,3	100,0	69,0	Arvuteooria	N	40,1	86,7	35,7
Geomeetria	G	35,9	76,2	26,2	Geomeetria	G	25,9	67,9	0,0
Arvuteooria	N	18,0	64,0	2,4	Funktsionaalvõrrandid	A	16,4	36,7	10,7
Kõik ülesanded		36,8	77,0	33,7	Kõik ülesanded		31,7	66,6	17,9
2003 Tokyo (Jaapan)					1998 Taipei (Taiwan)				
54. koht (82)		kõik	top10	EST	43. koht (76)		kõik	top10	EST
Kombinatorika	C	50,8	87,4	54,8	Geomeetria	G	45,8	86,4	26,2
Arvuteooria	N	32,9	73,8	19,0	Kombinatorika	C	39,1	81,0	21,4
Geomeetria	G	5,8	29,0	0,0	Arvuteooria	N	25,2	47,6	11,9
Geomeetria	G	66,2	95,5	26,2	Arvuteooria	N	49,5	88,6	47,6
Võrratused	A	23,0	71,2	11,9	Geomeetria	G	42,0	82,1	42,9
Arvuteooria	N	8,3	37,6	0,0	Funktsionaalvõrrandid	A	9,7	40,7	0,0
Kõik ülesanded		31,2	65,8	18,7	Kõik ülesanded		35,2	71,1	25,0
2002 Glasgow (Suurbritannia)					1997 Mar del Plata (Argentiina)				
40. koht (84)		kõik	top10	EST	53. koht (82)		kõik	top10	EST
Kombinatorika	C	47,5	86,2	52,4	Algebra	A	35,4	72,1	28,6
Geomeetria	G	49,0	90,5	35,7	Geomeetria	G	55,7	97,1	40,5
Arvuteooria	N	8,1	32,6	7,1	Võrratused	A	25,0	79,0	2,4
Arvuteooria	N	53,6	88,1	61,9	Kombinatorika	C	53,5	89,3	52,4
Funktsionaalvõrrandid	A	31,2	80,2	21,4	Arvuteooria	N	47,9	96,4	26,2
Komb. geomeetria	G	5,6	27,4	0,0	Kombinatorika	C	12,0	45,0	2,4
Kõik ülesanded		32,5	67,5	29,8	Kõik ülesanded		38,3	79,8	25,4
2001 Washington (USA)					1996 Bombay (India)				
37. koht (83)		kõik	top10	EST	55. koht (75)		kõik	top10	EST
Geomeetria	G	52,1	99,3	50,0	Kombinatorika	C	45,4	70,7	47,6
Võrratused	A	22,1	73,3	26,2	Geomeetria	G	29,0	76,4	0,0
Kombinatorika	C	12,5	31,7	4,8	Funktsionaalvõrrandid	A	34,3	73,8	14,3
Kombinatorika	C	46,2	88,1	50,0	Arvuteooria	N	30,3	77,9	2,4
Geomeetria	G	39,0	74,5	40,5	Geomeetria	G	7,0	18,8	2,4
Arvuteooria	N	11,1	44,0	0,0	Kombinatorika	C	32,0	65,2	11,9
Kõik ülesanded		30,5	68,5	28,6	Kõik ülesanded		28,4	63,8	13,1
2000 Taejon (Lõuna-Korea)					1995 Toronto (Kanada)				
58. koht (82)		kõik	top10	EST	56. koht (73)		kõik	top10	EST
Geomeetria	G	58,5	98,6	19,0	Geomeetria	G	72,2	98,1	31,0
Võrratused	A	39,5	83,1	28,6	Võrratused	A	24,4	78,1	0,0
Jadad	A	9,4	35,0	2,4	Komb. geomeetria	G	44,7	87,9	40,5
Kombinatorika	C	45,5	78,6	45,2	Jadad	A	65,6	93,8	57,1
Arvuteooria	N	23,3	75,0	4,8	Geomeetria	G	48,7	93,3	2,4
Geomeetria	G	15,0	50,5	0,0	Arvuteooria	N	15,1	48,3	0,0
Kõik ülesanded		31,7	66,6	16,7	Kõik ülesanded		45,1	83,3	21,8

Tabelisse 6 on koondatud andmed ülesannete eest saadud punktide suhtarvude kohta aastate kaupa [15]. Aastarvule on lisatud RMO toimumise koht ja korraldav riik, Eesti võistkonna koht edetabelis ning võistkondade koguarv. Tähtedega on määratletud iga ülesande kuuluvus ühte nelja ülalpool nimetatud ülesannete klassi, tähe ees olevas reas on lisatud kas selle klassi või selle alaliigi nimetus. Iga ülesande korral on leitud nii kõigi osalejate, top 10 võistkonna kui ka Eesti võistkonna lahenduste eest saadud punktide ja täieliku lahenduse eest võimalike punktide suhtarv protsentides. Viimane rida annab vastavad suhtarvud kõikide ülesannete lahenduste eest kokku.

Kogutud andmed võimaldavad meil jälgida ka žürii töö põhimõtteid ülesannete temaatika valimisel ja raskusastme määramisel. Paneme tähele, et mõlemal päeval on ülesandeid püütud järjestada põhimõttel lihtsamalt keerulisemale. Geomeetria ülesandeid on reeglina kaks (erandid 1995. a ja 1997. a), neist üks tavaliselt päeva kergeim ülesanne, teine aga kas keskmise raskusega või raskeim ülesanne.

Mis Eesti koondisesse puutub, siis vaadeldava aastakümne jooksul pole Eesti võistkonna kõikide ülesannete eest kogutud punktide suhtarv kunagi ületanud kõigi osalejate kohta moodustatud suhtarvu. Kuigi tabelist 6 on näha, et aastatel 2001, 2002 ja 2004 on mainitud protsentide erinevus juba väiksem kui 4 protsendipunkti.

Kui nüüd võrrelda Eesti võistkonna tulemusi kõigi osalejate ja top 10 tulemustega [8], võime teha mõningaid järeldusi. Eesti võistkonna punktide suhtarvude vahed kõigi ülesannete kokkuvõttes võrreldes kõigi osavõtjate tulemustega kõiguvad 23,3 protsendipunktist 1995. aastal kuni peaaegu olematu vahe 1,9 protsendipunktini 2001. aastal, seejuures vahede aritmeetiline keskmine on 11,1. Samad vahed võrreldes aga top 10 tulemustega on 61,5 protsendipunkti 1995. aastal kuni 37,7 protsendipunktini 2002. aastal aritmeetilise keskmisega 47,9. Kõigi osavõtjate ja top 10 meeskondade liikmete saadud punktide suhtarvude vahed kõiguvad aga üsna väikeses vahemikus (41,5–34,6) aritmeetilise keskmisega 36,9% protsendipunkti.

3.4. Eesti koondiste tulemustest võistlusel „Balti tee“

Rahvusvaheline matemaatika ülesannete lahendamise võistlus „Balti tee“ sai alguse 1990. aastal Vilniuses kolme Balti riigi võistlusena. Alates 1992. aastast hakkasid selle võistlusega liituma ka teised Balti merd ümbritsevad riigid ning Island. Erinevalt Rahvusvahelisest Matemaatika Olümpiaadist on „Balti tee“ võistkondlik võistlus ning rõhuv enamus sellel osalevatest maadest ei kuulu RMO tippmeeskondade hulka. Võistlusel „Balti tee“ kuulub riigi esindusse 5 üldhariduskooli õpilast, kes peavad lahendama 20 ülesannet. Ülesanded on liigitatud nagu RMO-l, nelja valdkonda: geomeetria, algebra, arvuteooria ja kombinatorika (diskreetne matemaatika), igaühel 5 ülesannet.

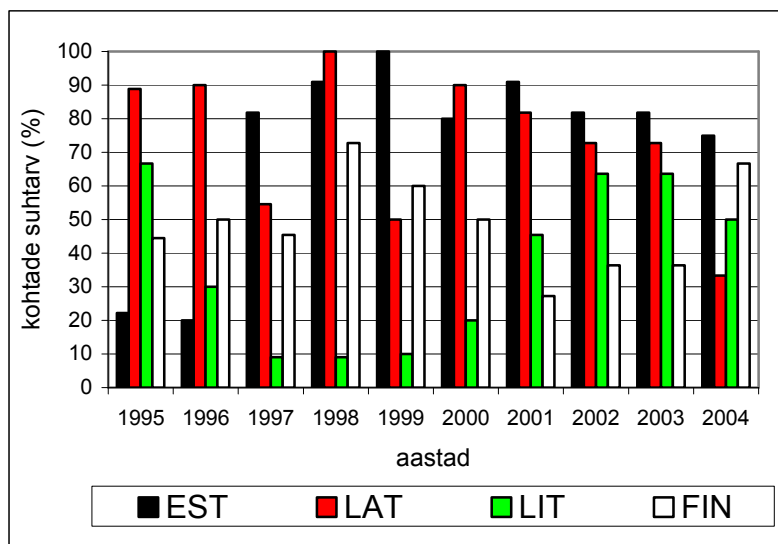
Võrdluseks RMO tulemustele toome alljärgnevalt ka mõned „Balti tee“ osalenud maade võistkondade tulemused aastatel 1995–2004. Tabelisse 7 on valdkondade kaupa koondatud nende riikide võistkondade kogutud punktide suhtarvud, kes on osalenud nimetatud võistlusel regulaarselt. Tabelis 7 on riigi nimetusele lisatud vaadeldava maa osalemiste arv „Balti tee“l, selle riigi võistkonna lahenduste eest saadud punktide ja täieliku lahenduse eest võimalike punktide suhtarv protsentides kümne aasta jooksul ning saavutatud kohtade aritmeetiline keskmine. Viimase näitaja poolest on Eesti esindused vaadeldavas regioonis parimate seas.

Tabel 7. „Balti tee“ punktide suhtarvud valdkondade kaupa

Riik	A	N	C	G	Koht
Poola (10)	84,8	82,8	69,6	81,2	2,2
Eesti (10)	66,4	71,6	60,8	72,0	3,8
Läti (10)	79,2	75,2	68,4	54,8	3,9
Sankt-Peterburg (7)	77,1	77,7	61,7	62,3	4,1
Norra (9)	57,3	71,1	66,2	48,0	6,2
Soome (10)	68,8	71,2	56,0	41,6	6,4
Rootsi (10)	61,6	67,6	58,8	41,2	6,5
Taani (10)	60,8	51,2	61,6	51,2	6,8
Saksamaa (8)	57,0	59,5	58,5	53,5	7,1
Leedu (10)	66,0	54,0	44,4	52,8	7,7
Island (10)	40,0	43,2	38,0	41,6	9,9
Kõikide riikide keskmine	65,4	65,9	58,5	54,6	-

Päris huvitav on võrrelda tabelites 4 ja 7 toodud andmeid. Kui RMO-l saadakse kõikide riikide arvestuses kõige rohkem punkte geomeetriaülesannete lahenduste eest ning sealt edasi kahanevas järjekorras kombinatoorika, algebra ja arvuteooria ülesannete lahenduste eest, siis „Balti tee“ võistluse statistika (viimane rida tabelis 7) näitab täpselt vastupidist järjekorda. Kui „Balti teel“ lahendatakse paremini arvuteooria ja algebra ülesandeid, siis suuremaid raskusi valmistab selle regiooni riikidele ikkagi geomeetria. Seda panime tähele ka tabeli 5 põhjal, kui analüüsisime meie ja naaberriikide tulemusi RMO-l. Erinevalt RMO keskmisest tulemusest, on Eesti „Balti teel“ just üks parimaid geomeetriaülesannete lahendajaid. Selliste erinevuste üheks peamiseks põhjuseks tuleb kindlasti lugeda ülesannete arvu, nende valiku printsiipide ja raskusastme olulisi erinevusi vaadeldud kahel võistlusel. Teine põhjus peitub ka selles, et RMO-l edukas võistleja peab valdama hästi kõiki valdkondi, „Balti tee“ võistkonna aga võib komplekteerida õpilastest, kes valdavad eriti hästi vaid ühte vajalikust neljast valdkonnast, kuid kes sobivad meeskonnatööks. Meie võistkondade suhtelist edukust „Balti teel“ võrreldes naaberriikidega vaadeldaval kümnendil kinnitab ka kohtade suhtarvude tabel 8.

Tabel 8. Naaberriikide võistkondade kohtade suhtarvud (%) „Balti teel“



§ 4. Geomeetriaülesannete temaatikast RMO-I

Ülalpool esitatud andmed näitavad, et tänaseks päevaks on RMO-I osalevate Eesti võistkondade jaoks kõige probleemsemaks ja raskemaks matemaatika valdkonnaks osutunud geomeetria, täpsemalt planimeetria. Just seepärast tuleb detailsemalt uurida, milline on RMO geomeetria võistlusülesannete temaatika ja millised on eeldatavad teadmised ning oskused selle valdkonna ülesannete edukaks lahendamiseks. Aastatel 1995–2004 RMO-I olnud 20 geomeetriaülesande ametlike lahenduste analüüsi põhjal on välja eraldatud üheksa ulatuslikumat alateemat. Tabel 9 annabki väikese ülevaate nendest planimeetria alateemadest. Iga ülesande jaoks on tabelis välja toodud selle kasutamise aasta ja järjekorranumber võistlusülesannete seas ning märgitud plussmärgiga valdkonnad, millest vajalikke teadmisi kasutati ametlikes lahendustes [6].

Tabel 9. Geomeetriaülesannete sisu RMO-I

Ülesanded	1995 - 1	1995 - 3	1995 - 5	1996 - 2	1996 - 5	1997 - 2	1998 - 1	1998 - 5	1999 - 1	1999 - 5	2000 - 1	2000 - 6	2001 - 1	2001 - 5	2002 - 2	2002 - 6	2003 - 3	2003 - 4	2004 - 1	2004 - 5
1	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+		+		+	+		+	+	+	+	+				+				
3	+		+	+	+	+		+						+	+		+	+		
4			+		+		+	+					+			+	+			+
5		+		+	+				+			+				+	+			
6	+									+		+						+		+
7			+															+		
8		+					+													
9																	+			
Tähistused:																	A	B		
1	-	Nurgad ja meetrilised seosed ringi elementide vahel.															16	26,20%		
2	-	Geomeetrilised teisendused (paralleellüke, peegeldus, homoteetia).															10	16,40%		
3	-	Meetrilised seosed kolmnurgas.															10	16,40%		
4	-	Geomeetrilised võrratused.															8	13,10%		
5	-	Muud teemad (hulknurgad jne).															7	11,50%		
6	-	Kongruentsuse ja sarnasuse tunnused.															5	8,20%		
7	-	Teoreemide teadmine (Ptolemaiose, Ceva, Menelaose jt).															2	3,30%		
8	-	Hulknurga pindala ja selle rakendamine.															2	3,30%		
9	-	Vektorite kasutamine.															1	1,60%		
A	-	Antud teema rakenduste arv.																		
B	-	Antud teema rakenduste suhtarv kõikide teemade suhtes.																		

Paneme tähele, et vaadeldava aastakümne jooksul on enamus RMO geomeetriaülesandeid nii või teisiti olnud seotud ringjoontega ja nurkade omadustega ringis. Samuti on olnud sageli vaja rakendada sümmeetria omadusi, millega Eesti võistkondadel on tekkinud suuri probleeme.

Tabel 6 annab võimaluse jälgida ka nende ülesannete lahendamise edukust Eesti võistkondade poolt.

II Kolmnurga tseviaanid ja nende omadused

Teise peatüki põhieesmärgiks on anda võimalikult palju erinevaid matemaatilisi ideid ja lahendamismeetodeid, mis on võistlusülesannete lahenduste analüüsi tulemusena osutunud autori arvates vajalikeks probleemülesannete lahendamisel geomeetrias.

Selles peatükis esitatud teoreeme ja lauseid võib nimetada [14] teatud mõttes *abiülesanneteks* ehk niisugusteks ülesanneteks, mida me lahendame mitte niivõrd nende endi pärast, kui lootuses nende analüüsimisest abi saada teiste ülesannete lahendamisel. Abiülesannete uurimisest saadav kasu võib olla mitut laadi. Ühelt poolt võib abiülesannete lahendamisel saada uusi tulemusi, teiselt poolt aga võib saada oskusi ja kogemusi abiülesandes kasutatud meetodi rakendamiseks teiste probleemide korral.

On suur hulk ülesandeid ja lahendusteid, milleni iseseisvalt pole sugugi lihtne jõuda [16]. Kui aga ühe või mitme ülesande varal aru saada, kuidas meetod töötab, siis edaspidi on võimalik seda iseseisvalt rakendada juba uues situatsioonis. Selle eesmärgi saavutamiseks võib ülesandeid leida mitmest valdkonnast. Antud töös on valitud kolmnurga geomeetria sellepärast, et kolmnurk on esmalt kõige lihtsam kujund ning paljude geomeetriaülesannete lahendamine taandub ühe või mitme kolmnurga vaatlemisele. Nagu näitas analüüs, on kõrgetasemelistel matemaatika olümpiaadidel paljud ülesanded seotud ka ringjoontega ja nurkade omadustega ringis. Seetõttu on töös pööratud suurt tähelepanu ka nende kujundite omaduste uurimisele.

Selles peatükis vaadeldakse kolmnurga kolme põhitseviaani. *Tseviaaniks* nimetatakse (vt [1], *Ceva teoreem*) kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud sirglõiku või selle lõigu pikkust. Töös vaadeldud põhitseviaanideks on kolmnurga mediaanid, nurgapoolitajad ja kõrgused. *Põhitulemusteks* nimetatakse antud töös neid seoseid, mis kuuluvad nn „olümpiaadide klassikasse“ ja/või mida kasutatakse juba madalama tasemega võistlustel ning millele tuginevad ka kõrgematasemeliste ülesannete koostajad.

Iga põhitseviaani käsitletakse kolmes paragrahvis. Nendest esimeses paragrahvis vaadeldakse defineeritud tseviaani omadusi kolmnurgas. Selle koostamisel on järgitud alltoodud skeemi:

- esmalt tuuakse sisse kolmnurga põhitseviaani mõiste ja antakse erinevaid tõestusi selle tseviaaniga seotud põhitulemustele;
- teiseks tõestatakse põhitseviaani täiendavad omadused, ja leitakse selle tseviaani seoseid kolmnurga teiste elementidega;
- kolmandaks uuritakse võimalusi kolmnurga pindala leidmiseks põhitseviaanide kaudu;
- neljandaks tõestatakse põhitseviaaniga seotud erinevaid geomeetrilisi võrdusi ja võrratusi, tuletatakse valemeid põhitseviaani pikkuse arvutamiseks;
- viiendaks sõnastatakse ja tõestatakse põhitseviaanide abil kolmnurkade võrdsuse tunnused;
- viimaseks antakse tarvilikud ja piisavad tingimused kolmnurga liigi määramiseks põhitseviaanide abil.

Teises paragrahvis vaadeldakse seoseid kolmnurga põhitseviaani ja sellega seotud ringjoonte elementide vahel. Siin on samuti püütud liigitada tulemusi tähtsuse järgi põhitulemusteks ja täiendavateks seosteks. Tõestatakse konstrueeritud ringjoonte raadiustega või keskpunkti läbivate lõikudega seotud võrdusi ja võrratusi.

Kolmandas paragrahvis antakse mõned näiteülesanded (koos lahendustega) vaadeldava põhitseviaani kohta, mis on pärit erinevatelt matemaatikavõistlustelt.

Teise peatüki viimane paragrahv on pühendatud mediaanide, nurgapoolitajate ja kõrguste omavaheliste seoste uurimisele. Siin vaadeldakse näiteks nende põhitseviaanide vastastikuseid asendeid, leitakse nendevahelisi nurki, antakse tarvilikud ja piisavad tingimused nende lõikumiseks ühes ja samas punktis jne.

Töös sõnastatud teoreemide (lauset, järelduste, definitsioonide ja ülesannete) numeratsioon koosneb kolmest arvust: esimene on peatüki number, teise numbriga on määratud paragrahvi number ja kolmas on väite järjenumbr selles paragrahvis.

Rõhuv enamik selle peatüki teoreemidest ja lausetest on esitatud kas koos täieliku tõestusega või tõestuse skeemiga. Täieliku tõestuse korral kasutatakse selle lõpetamise kinnitamiseks sümbolit ■, tõestuse skeemi korral aga sümbolit □. Kui autori arvates on lause või teoreemi tõestus ilmne või selle algoritm ei erine sellest, mis on eelmiste lausetest või teoreemidest korral juba kasutatud, siis selline väide tuuakse ilma tõestuseta.

Iga väite tõestus on esitatud punktide kaupa selleks, et oleks lihtsam jälgida tõestuse käigus tehtud samme.

§ 1. Kolmnurga mediaan

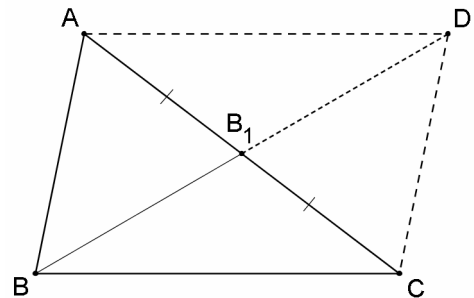
1.1. Põhimõiste

Definitsioon 2.1.1. Kolmnurga mediaaniks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga, või selle lõigu pikkust.

Teoreem 2.1.2. Kui kolmnurga ABC mediaani BB_1 pikendusel üle punkti B_1 on võetud punkt D nii, et $BB_1 = B_1D$, siis nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus.

- Tõestuseks kasutame (vt [16], lk 126) järgmist rööpküliku tunnust: kui kumera nelinurga diagonaalid poolitavad teineteist, siis see nelinurk on rööpkülik.
- Kuna $BB_1 = DB_1$ konstruktsiooni põhjal ja $AB_1 = CB_1$ (B_1 on lõigu AC keskpunkt), siis $ABCD$ on rööpkülik. ■



1.2. Põhitulemus kolmnurga mediaanide kohta

Teoreem 2.1.3. Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes 2:1 tipust alates.

Tõestused.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC mediaan ja O selline mediaani AA_1 sisepunkt, et $AO = 2OA_1$ (ehk punkt O jaotab mediaani AA_1 suhtes 2:1 tipust alates).
- Olgu B' sirgete BO ja AC lõikepunkt.
- Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et lõik BB' osutubki kolmnurga ABC mediaaniks BB_1 (st $B_1 = B'$). Analoogiliselt saaksime näidata, et sama kehtib ka mediaani CC_1 kohta. Kuna kolmnurga mediaanid ja sirgete lõikepunkt on üheselt määratud, siis ilmselt punkt O ongi mediaanide lõikepunkt, mis jaotab iga mediaani suhtes 2:1 tipust alates.

Tõestus 1 (kiirteteoreemi kasutades).

- Olgu O_1 lõigu AO keskpunkt.
- Näitame, et $AB' = B'C$.

- Tõmbame läbi punktide A_1 ja O_1 sirgega BO paralleelsed lõigud A_1C' ja O_1A' , kus C' ja A' on külje AC punktid.

- Kuna $AO_1 = O_1O = OA_1$, siis vastavalt kiirteteoreemile kehtib võrdus

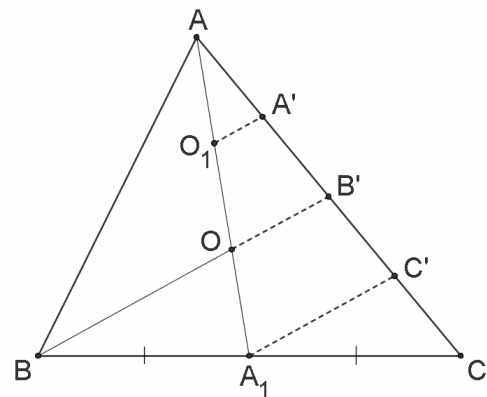
$$AA' = A'B' = B'C'.$$

- Kuna $A_1C' \parallel BB'$ ja A_1 on külje BC keskpunkt, siis A_1C' on kolmnurga $BB'C$ kesklõik. Järelikult $B'C' = C'C$.

- Lõpptulemusena saame, et

$$AA' = A'B' = B'C' = C'C,$$

kust järeldub, et $AB' = B'C$. Seega BB' on tõepoolest mediaan. ■



Tõestus 2 (pindalade kaudu).

- Vaatleme kahte kolmnurka AOC ja A_1OC .

- Tipust C tõmmatud kõrgused nende kolmnurkade puhul ühtivad ja nende alused AO ja A_1O suhtuvad nagu $2:1$.

- Kasutades kolmnurga pindala leidmise standardset valemit $S = \frac{1}{2}ch_e$ (vt [1], kolmnurga pindala), saame

$$S_{\Delta AOC} = 2 \cdot S_{\Delta A_1OC}.$$

- Analoogiliselt kehtib kolmnurkade AOB ja A_1OB korral võrdus

$$S_{\Delta AOB} = 2 \cdot S_{\Delta A_1OB}.$$

- Kuna OA_1 on ühtlasi ka kolmnurga BOC mediaan, siis

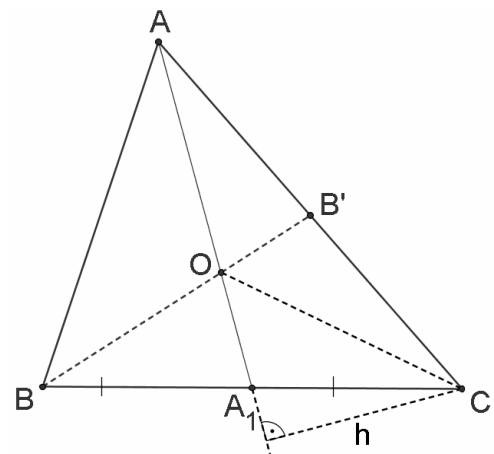
$$S_{\Delta A_1OB} = S_{\Delta A_1OC}.$$

- Järelikult kolmnurkade AOB , AOC ja BOC pindalad on võrdsed.

- Näitame, et $AB' = B'C$. Ühelt poolt

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{\Delta AOB'}}{S_{\Delta COB'}},$$

kuna tipust O tõmmatud kõrgused on kolmnurkade AOB' ja COB' puhul samad ja nende pindalade suhe sõltub ainult kolmnurkade aluste suhtest.



- Teiselt poolt kolmnurkade ABB' ja CBB' jaoks analoogiliselt tuletatakse võrdus

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle CBB'}}.$$

- Järelikult, võrde omadustele tuginedes (vt [1], *tuletatud võrre*) saame, et BB' on tõepoolest kolmnurga ABC mediaan, sest

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{\triangle AOB'}}{S_{\triangle COB'}} = \frac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle CBB'}} = \frac{S_{\triangle AOB'} - S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle COB'} - S_{\triangle CBB'}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = 1. \quad \blacksquare$$

Tõestus 3 (siinusteoreemi kasutades).

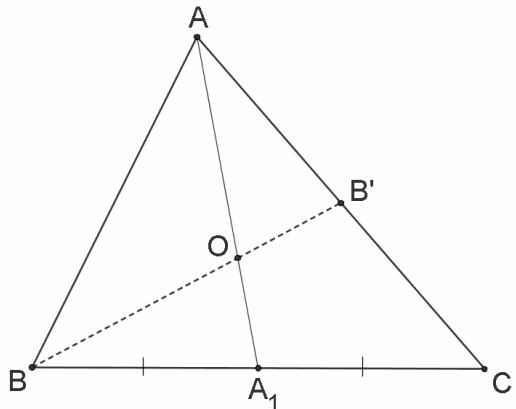
- Rakendame kolmnurkadele $AB'B$, $CB'B$, AOB ja A_1OB siinusteoreemi (vt [1], *siinusteoreem*):

$$\frac{AB'}{\sin \angle ABB'} \stackrel{(1)}{=} \frac{AB}{\sin \angle AB'B},$$

$$\frac{B'C}{\sin \angle CBB'} \stackrel{(2)}{=} \frac{CB}{\sin \angle CB'B},$$

$$\frac{AB}{\sin \angle AOB} \stackrel{(3)}{=} \frac{AO}{\sin \angle ABO},$$

$$\frac{A_1B}{\sin \angle A_1OB} \stackrel{(4)}{=} \frac{A_1O}{\sin \angle A_1BO}.$$



- Märgime siinkohal, et

$$\sin \angle AB'B = \sin \angle CB'B \quad \text{ja} \quad \sin \angle AOB = \sin \angle A_1OB.$$

- Kasutame saadud võrdusi ja leiame suhte

$$\begin{aligned} \frac{AB'}{B'C} &\stackrel{(1)\&(2)}{=} \frac{AB \sin \angle ABB'}{\sin \angle AB'B} : \frac{CB \sin \angle CBB'}{\sin \angle CB'B} = \\ &= \frac{AB \sin \angle ABB'}{CB \sin \angle CBB'} = \frac{AB \sin \angle ABB'}{2A_1B \sin \angle CBB'} \stackrel{(3)\&(4)}{=} \\ &= \frac{AO \sin \angle AOB \sin \angle ABB'}{\sin \angle ABO} : \frac{2A_1O \sin \angle A_1OB \sin \angle CBB'}{\sin \angle A_1BO} = \frac{AO}{2A_1O} = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tõestus 4 (homoteetia omadusi kasutades).

- Olgu B_1 ja C_1 vastavalt külgede AC ja AB keskpunktid.
- Kui teostada homoteetia keskpunktiga O ja teguriga $-\frac{1}{2}$, siis toimuvad (vt [1], *homoteetsusteisendus*) järgmised teisendused.

- a) Punkt A kujutub punktiks A_1 , sest

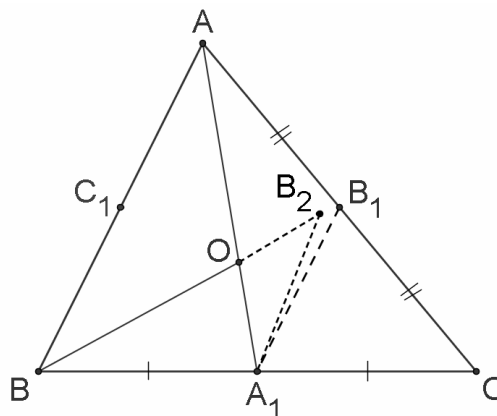
$$\overrightarrow{OA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

- b) Olgu punkti B kujutiseks punkt B_2 , st

$$\overrightarrow{OB_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

- c) Siis lõik AB kujutub lõiguks A_1B_2 nii, et kehtib seos

$$\overrightarrow{A_1B_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$



- Teiselt poolt, võib teostada homoteetia keskpunktiga C ja teguriga $\frac{1}{2}$. Siis lõik BA kujutub kolmnurga ABC kesklõiguks A_1B_1 nii, et kehtib seos $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- Järelikult,

$$\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow B_2 = B_1.$$

- Jääb veenduda selles, et punktid B , O ja $B_1 = B_2$ asuvad ühel ja samal sirgel.
- Kuna kolmnurk ABC teisendub kolmnurgaks $A_1B_1C_1$ homoteetsusteisenduste abil, mille keskpunkt on O , siis homoteetia definitsiooni järgi punktid B , O ja $B_1 = B_2$ asuvad ühel sirgel. ■

Tõestus 5 (vektorite kaudu).

- Olgu B_1 külje AC keskpunkt. Ühendame punkti O punktidega B , C ja B_1 .

- Püüame avaldada vektori \overrightarrow{BO} vektori $\overrightarrow{BB_1}$ kaudu:

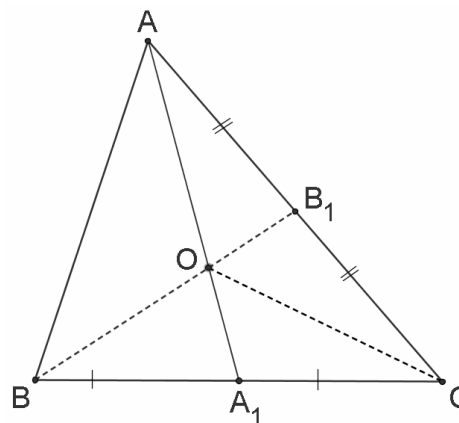
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}) =$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} =$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}.$$

- Järelikult punkt O asub mediaanil BB_1 ja jaotab selle suhtes 2:1 tipust B alates. ■



1.3. Kolmnurga mediaanide omadused

Näitame nüüd, et kolmnurgaga seotud tseviaanidest on ainult mediaanid sellised, mille lõikepunkt jaotab tseviaanid suhtes 2:1 tipust alates.

Lause 2.1.4. Kui kolmnurga ABC tseviaanid AA_1 ja BB_1 lõikuvad punktis O ja see lõikepunkt jaotab neid suhtes 2:1 kolmnurga tipust alates, siis AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC mediaanid.

Tõestus.

- Sellest, et

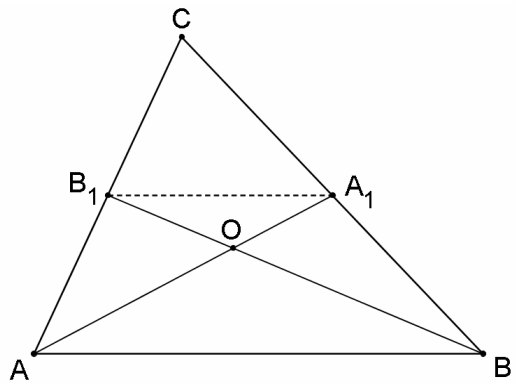
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} \quad \text{ja} \quad \angle AOB = \angle A_1OB_1,$$

järeldub kolmnurkade AOB ja A_1OB_1 sarnasus (sarnasustegur 2).

- Seega

$$A_1B_1 = \frac{1}{2} AB \quad \text{ja} \quad \angle B_1A_1A = \angle A_1AB.$$

- Järelikult $A_1B_1 \parallel AB$ ja kolmnurgad ABC ja B_1A_1C on sarnased (sarnasustegur 2).
- See tähendab, et A_1 ja B_1 on vastavalt külgede BC ja AC keskpunktid ning AA_1 ja BB_1 on selle kolmnurga mediaanid. ■



Vektorite liitmise reeglist järeldub, et kolmnurga ABC korral $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$. Ühtlasi on see tingimus ka piisav selleks, et kolmest vektorist \vec{AB} , \vec{BC} ja \vec{CA} saaks moodustada kolmnurga. Uurime, kuidas on lugu mis tahes kolmnurga mediaanidega.

Teoreem 2.1.5. Kui AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC mediaanid, siis

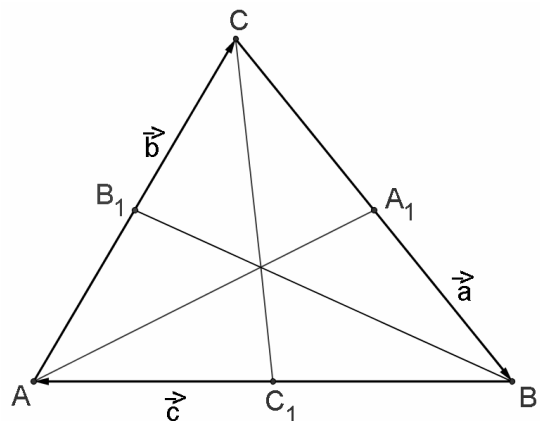
$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}.$$

Tõestus.

- Olgu $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$ ja $\vec{c} = \vec{AB}$ ning AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC mediaanid.
- Teoreemi 2.1.2. põhjal võime kirjutada, et

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}), \quad \vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}),$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$



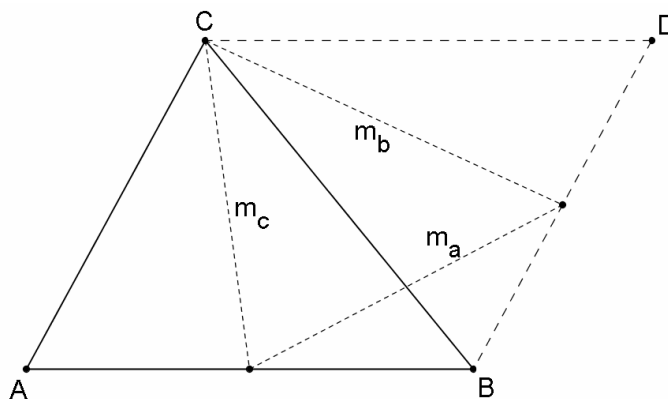
- Järelikult

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}. \quad \blacksquare$$

Järeldus 2.1.6. Mis tahes kolmnurga mediaanidest saab moodustada kolmnurga.

Tõestus.

- Eelmise teoreemi 2.1.5. tulemus $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ on piisav selleks, et kolmnurga ABC mediaanidest AA_1 , BB_1 ja CC_1 saab moodustada kolmnurga.
- Antud olukorda võib illustreerida ka joonise abil, kus $ABDC$ on rööpkülik.



Saadud tulemustest võime teha ka mõned järeldused.

Järeldus 2.1.7. Leidub kolmnurk, mille küljed on vastavalt võrdsed ja paralleelsed antud kolmnurga mediaanidega.

Järeldus 2.1.8. Kui ühe kolmnurga küljed on vastavalt paralleelsed teise kolmnurga mediaanidega, siis on ka teise kolmnurga küljed vastavalt paralleelsed esimese kolmnurga mediaanidega.

Järeldus 2.1.9. Kui kolmnurga ABC mediaanidest on moodustatud kolmnurk $A_1B_1C_1$ ja selle mediaanidest omakorda kolmnurk $A_2B_2C_2$, siis kolmnurgad ABC ja $A_2B_2C_2$ on sarnased, kusjuures sarnasustegur on $\frac{3}{4}$.

Näitame, et on teatud seos kolmnurga külgede ja nendele tõmmatud mediaanide pikkuste vahel.

Teoreem 2.1.10. Mis tahes kolmnurgas pikemale küljele vastab lühem mediaan.

Tõestus.

- Olgu AA_1 , BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC mediaanid ning O nende lõikepunkt.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AB > AC$. Näitame, et siis $CC_1 < BB_1$.

- Kuna kolmnurkade AA_1B ja AA_1C jaoks külg AA_1 on ühine, $A_1B = A_1C$ ja $AB > AC$, siis

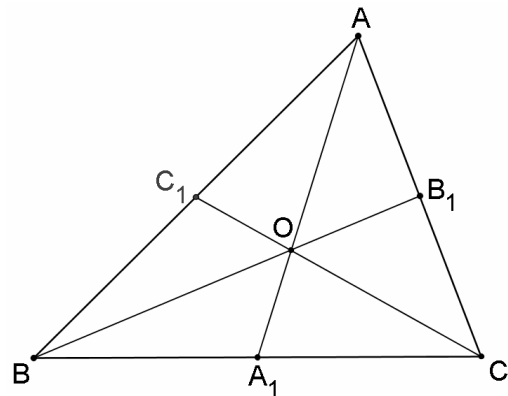
$$\angle AA_1B > \angle AA_1C.$$

- Analoogiliselt sellest, et kolmnurkade OA_1B ja OA_1C jaoks külg OA_1 on ühine, $A_1B = A_1C$ ja $\angle OA_1B > \angle OA_1C$, saame, et

$$OB > OC.$$

- Viimasest võrratusest järeldubki, et

$$BB_1 = \frac{3}{2}OB > \frac{3}{2}OC = CC_1.$$



Anname nüüd tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et mediaan poolitaks teatava lõigu.

Teoreem 2.1.11. *Kui punktid B_1 ja C_1 paiknevad vastavalt kolmnurga ABC külgedel AB ja AC , siis mediaan AA_1 poolitab lõigu B_1C_1 parajasti siis, kui $B_1C_1 \parallel BC$.*

Tõestus.

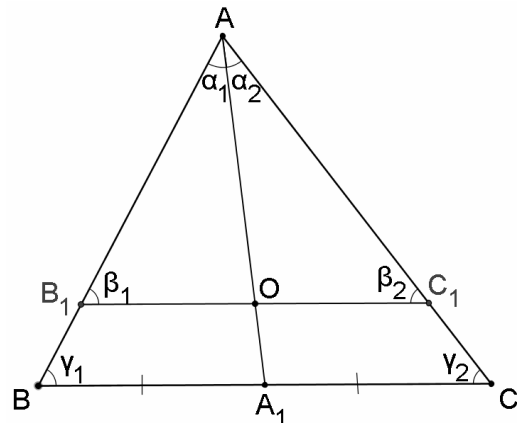
- Esialgu tõestame tarvilikkuse.
- Olgu O mediaani AA_1 punkt, mis poolitab lõigu B_1C_1 .
- Toome sisse järgmised tähistused:

$$\angle BAA_1 = \alpha_1, \quad \angle CAA_1 = \alpha_2,$$

$$\angle AB_1O = \beta_1,$$

$$\angle AC_1O = \beta_2, \quad \angle ABA_1 = \gamma_1,$$

$$\angle ACA_1 = \gamma_2.$$



- Kolmnurkadest AB_1C_1 ja ABC järeldub, et

$$\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (*)$$

- Kasutame siinusteoreemi kolmnurkades AOB_1 , AOC_1 , AA_1B ja AA_1C :

$$\frac{OB_1}{\sin \alpha_1} = \frac{AO}{\sin \beta_1}, \quad \frac{OC_1}{\sin \alpha_2} = \frac{AO}{\sin \beta_2},$$

$$\frac{BA_1}{\sin \alpha_1} = \frac{AA_1}{\sin \gamma_1}, \quad \frac{CA_1}{\sin \alpha_2} = \frac{AA_1}{\sin \gamma_2},$$

kust tingimuste $BA_1 = CA_1$ ja $OB_1 = OC_1$ tõttu saame, et

$$\frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \Leftrightarrow \sin \gamma_2 \cdot \sin \beta_1 = \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_1.$$

- Kasutades nüüd trigonomeetriast tuntud valemeid ja saadud seost (*), saame

$$\frac{1}{2} [\cos(\beta_1 - \gamma_2) - \cos(\beta_1 + \gamma_2)] = \frac{1}{2} [\cos(\beta_2 - \gamma_1) - \cos(\beta_2 + \gamma_1)] \Leftrightarrow$$

$$\cos(\beta_1 + \gamma_2) = \cos(\beta_2 + \gamma_1) \Leftrightarrow$$

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 + \gamma_2)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin(\gamma_2 - \beta_2) = 0.$$

- Saadud võrdus tähendab, et kas $\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ$, mis on vastuolus sellega, et β_1 ja β_2 on kolmnurga AB_1C_1 kaks nurka, või $\beta_2 = \gamma_2$, st, et β_2 ja γ_2 on võrdsed kaasnurgad. Järelikult $B_1C_1 \parallel BC$.
- Nüüd tõestame piisavuse. Olgu $B_1C_1 \parallel BC$ ning O mediaani AA_1 ja lõigu B_1C_1 lõikepunkt.
- Siis tekib kaks paari sarnaseid kolmnurki:

$$\triangle AOB_1 \sim \triangle AA_1B \quad \text{ja} \quad \triangle AOC_1 \sim \triangle AA_1C.$$

- Kolmnurkade sarnasusest järelduvad järgmised võrdused:

$$\frac{OB_1}{BA_1} = \frac{AO}{AA_1} \quad \text{ja} \quad \frac{OC_1}{CA_1} = \frac{AO}{AA_1},$$

kust saame, et

$$\frac{OB_1}{BA_1} = \frac{OC_1}{CA_1}.$$

- Kuna AA_1 on kolmnurga ABC mediaan, siis $BA_1 = CA_1$. Seega ka $OB_1 = OC_1$ ja O on lõigu B_1C_1 keskpunkt. ■

Järeldus 2.1.12. *Kolmnurga kesklõik ja seda lõikav mediaan poolitavad teineteist.*

Järeldus 2.1.13. *Kui O on kolmnurga ABC mediaani AA_1 suvaline sisepunkt ning B_1 ja C_1 on sirgete BO ja CO lõikepunktid vastavalt külgedega AC ja AB , siis $B_1C_1 \parallel BC$.*

Järeldus 2.1.14. *Kui punktid B_1 ja C_1 on vastavalt kolmnurga ABC külgedele AC ja AB sisepunktid ja lõik B_1C_1 on paralleelne kolmnurga alusega BC , siis sirgete BB_1 ja CC_1 lõikepunkt asub mediaanil AA_1 .*

Osutub, et mediaani pikkuse järgi saab otsustada ka kolmnurga sisenurga suuruse üle.

Teoreem 2.1.15. *Kolmnurga sisenurk on teravnurk parajasti siis, kui selle nurga tipust tõmmatud mediaan on pikem, kui pool vastaskülge.*

Tõestus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC mediaan. Peame näitama, et $\angle BAC$ on teravnurk parajasti siis, kui $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

- Tõestame piisavuse. Olgu

$$AA_1 > \frac{1}{2}BC = BA_1.$$

- Järelikult kolmnurga AA_1B suuremale küljele vastab ka suurem nurk ehk

$$\angle BAA_1 < \angle ABA_1 = \angle ABC.$$

- Analoogiliselt kolmnurgast AA_1C ja sellest, et $AA_1 > \frac{1}{2}BC = CA_1$, saame

$$\angle CAA_1 < \angle ACA_1 = \angle ACB.$$

- Nendest võrratustest saame, et

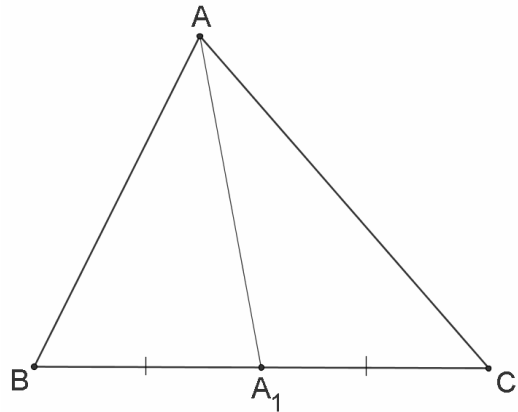
$$\angle BAC = \angle BAA_1 + \angle CAA_1 < \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC$$

ehk $\angle BAC < 90^\circ$.

- Tarvilikkuse tõestus. Olgu $\angle BAC$ teravnurk.

- Oletame nüüd vastuväiteliselt, et $AA_1 \leq \frac{1}{2}BC$.

- Analoogiliselt piisavuses toodud tõestusele saame, et siis $\angle BAA_1 \geq \angle ABC$ ja $\angle CAA_1 \geq \angle ACB$, kust järeldub, et $\angle BAC \geq 90^\circ$. See on aga vastuolus eeldusega. Järelikult $AA_1 > \frac{1}{2}BC$. ■



Järgmine teoreem annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et kolmnurga kaks mediaani oleksid risti.

Teoreem 2.1.16. *Kui kolmnurga külgede pikkused on a , b ja c , siis külgedele pikkustega a ja b tõmmatud mediaanid on risti parajasti siis, kui $a^2 + b^2 = 5c^2$.*

Tõestus.

- Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC vaadeldavad mediaanid ning O nende lõikepunkt.

- Siis $\angle AOB$ on täisnurk parajasti siis, kui

$$AO^2 + BO^2 = AB^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}AA_1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}BB_1\right)^2 = AB^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA_1^2 + BB_1^2 = \frac{9}{4}AB^2.$$

- Kasutame koosinusteoreemi külgede AB ja AC pikkuste avaldamiseks vastavalt kolmnurkadest AA_1B ja AA_1C :

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos \angle AA_1B,$$

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C.$$

- Kuna nurgad $\angle AA_1B$ ja $\angle AA_1C$ on kõrvunurgad, siis

$$\cos \angle AA_1B = -\cos \angle AA_1C.$$

- Liidame nüüd saadud võrdused ja saame

$$2AA_1^2 = AB^2 + AC^2 - A_1B^2 - A_1C^2 \Leftrightarrow AA_1^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2).$$

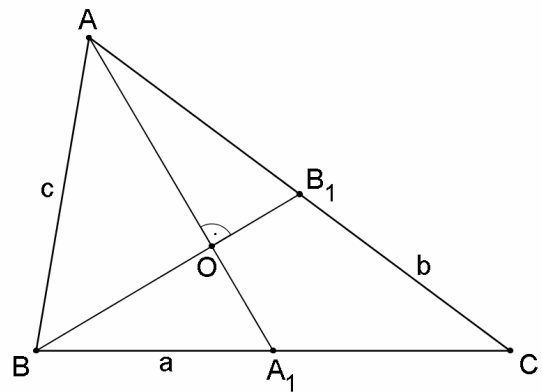
- Analoogiliselt saame võrduse

$$BB_1^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2).$$

- Seega, kasutades kolmnurga külgede pikkuste jaoks standardseid tähistusi, saame

$$AA_1^2 + BB_1^2 = \frac{9}{4}AB^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(4AB^2 + AC^2 + BC^2) = \frac{9}{4}AB^2 \Leftrightarrow$$

$$BC^2 + AC^2 = 5AB^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2 \quad \blacksquare$$



Saab tõestada ka kaks järgmist lauset mediaaniga ristuvate tseviaanide kohta.

Lause 2.1.17. Kui kolmnurga ABC tipust A tõmmatud sirge on risti mediaaniga BB_1 ja poolitab selle, siis $AB : AC = 1 : 2$.

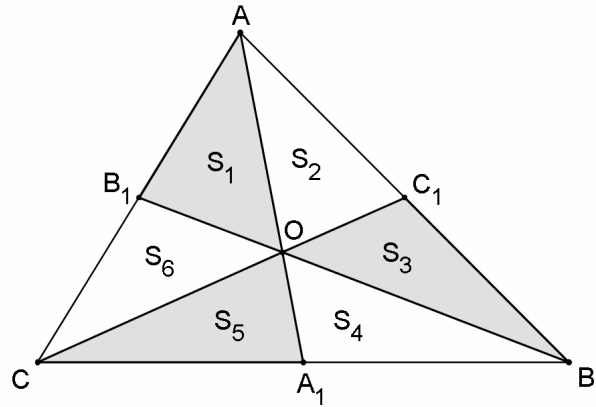
Lause 2.1.18. Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC mediaanid ning mediaani AA_1 pikendusel üle punkti A_1 on valitud punkt A_2 nii, et $A_1A_2 = \frac{1}{3}AA_1$ ja $A_2B_1 = CB_1$, siis mediaanid AA_1 ja BB_1 on risti.

1.4. Mediaanid ja kolmnurga pindala

Teoreem 2.1.19. *Suvalise kolmnurga mediaanid jaotavad selle kolmnurga kuueks võrdpindseks kolmnurgaks.*

Tõestus.

- Olgu O kolmnurga ABC mediaanide AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt.
- Kuna punkt O jaotab mediaani BB_1 suhtes 2:1 tipust B alates ning kolmnurkade BB_1C ja OB_1C korral tipust C tõmmatud kõrgused langevad kokku, siis



$$S_{\Delta OB_1C} = \frac{1}{3} S_{\Delta BB_1C}.$$

- Analoogiliste arutlustega saame, et

$$S_{\Delta BB_1C} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}.$$

- Seega

$$S_{\Delta OB_1C} = \frac{1}{3} S_{\Delta BB_1C} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \right) = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}.$$

- Sama arutelu võib läbi viia ka teiste kolmnurkade jaoks. Järelikult jaotavad kolmnurga ABC mediaanid kolmnurga kuueks võrdpindseks kolmnurgaks. ■

Järeldus 2.1.20. *Suvalise kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdpindseks kolmnurgaks.*

Järeldus 2.1.21. *Kui kolmnurga ABC mediaanid BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O , siis kolmnurga BOC pindala on võrdne nelinurga AB_1OC_1 pindalaga.*

Järeldus 2.1.22. *Kui kolmnurga ABC sisepiirkonnas valida punkt O nii, et kolmnurkade ABO , ACO ja BCO pindalad on võrdsed, siis O on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt.*

Leiame nüüd seose kolmnurga ja selle mediaanidest moodustatud kolmnurga pindalade vahel.

Teoreem 2.1.23. *Kui kolmnurga ABC pindala on S , siis selle kolmnurga mediaanidest moodustatud kolmnurga pindala on $\frac{3}{4}S$.*

Tõestus.

- Olgu O kolmnurga ABC mediaanide AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt.
- Olgu S_1 kolmnurga ABC mediaanidest moodustatud kolmnurga pindala.
- Kolmnurga AOC mediaani OB_1 pikendusel üle punkti B_1 valime punkti B_2 nii, et

$$B_1B_2 = OB_1.$$

- Siis tekib rööpkülik $AOCB_2$. Seega

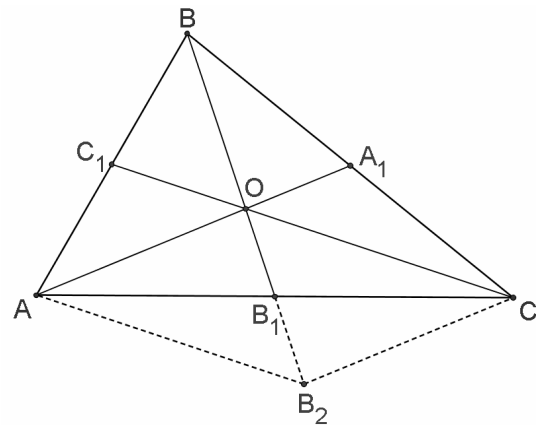
$$CB_2 = AO.$$

- Märgime, et kolmnurk OCB_2 on sarnane kolmnurga ABC mediaanidest moodustatud kolmnurgaga, kusjuures teoreemi 2.1.3. põhjal on sarnasustegur $\frac{2}{3}$, kuna

$$CB_2 = AO = \frac{2}{3}AA_1, \quad OB_2 = 2OB_1 = \frac{2}{3}BB_1, \quad OC = \frac{2}{3}CC_1.$$

- Järelikult kolmnurga OCB_2 pindala moodustab $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ otsitava kolmnurga pindalast.
- Arvestades teoreemis 2.1.19. tõestatuga, saame

$$S_1 = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot S\right) = \frac{3}{4}S. \quad \blacksquare$$



1.5. Kolmnurga mediaaniga seotud võrdused ja võrratused

Järgnevas tuletame mõned valemid mediaanidega seotud olulisemate lõikude pikkuste ja punktide vaheliste kauguste leidmiseks ning anname ka hinnanguid mediaanidega seotud kaugustele ja lõikude pikkustele. Leiame ka mõnede olulisemate vektorite avaldised.

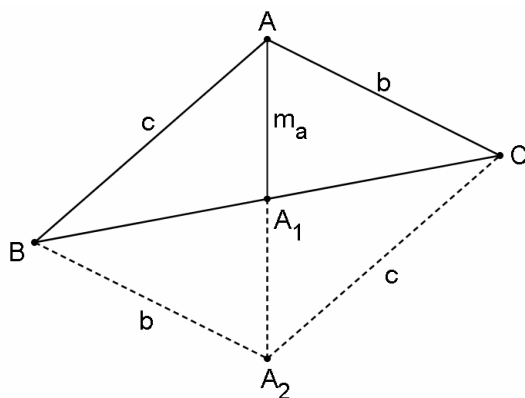
a) *Valemid mediaani pikkuse arvutamiseks ja muud võrdused*

Teoreem 2.1.24. *Kui a , b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused, siis küljele a tõmmatud mediaani pikkuse m_a saab arvutada järgmise valemi abil:*

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Tõestus.

- Olgu kolmnurga ABC külgede BC , AC ja AB pikkused vastavalt a , b ja c ning m_a selle kolmnurga mediaani AA_1 pikkus.
- Pikendame mediaani AA_1 üle punkti A_1 nii, et tekiks rööpkülik ABA_2C (vt Teoreem 2.1.2.).
- Siis $BA_2 = b$ ja $CA_2 = c$.
- Kasutades rööpküliku diagonaalide ja külgede pikkuste vahelist seost (vt [1], rööpkülik), saame, et



$$AA_2^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2m_a)^2 + a^2 = 2(c^2 + b^2),$$

millest järeldub, et

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \blacksquare$$

Äsja tuletatud valemit on võimalik saada ka järeldusena matemaatika olümpiaadide klassikasse kuuluvast nn Stewarti teoreemist (vt [1], [13]), mille esitame (selle olulisust arvestades) koos tõestusega.

Teoreem 2.1.25. (Stewarti teoreem) *Kolmnurga ABC tipu A ja külje BC mingi punkti P vaheline kaugus AP on määratud võrdusega*

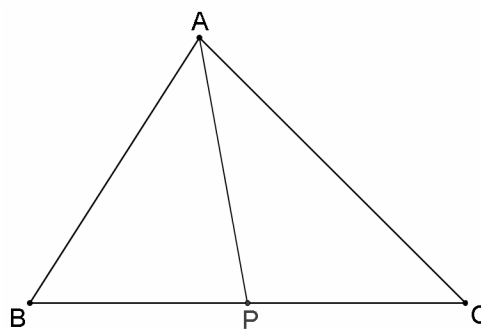
$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{CP}{CB} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot CP.$$

Tõestus.

- Kasutame koosinusteoreemi (vt [1], *koosinusteoreem*) nurga ABC koosinuse leidmiseks kolmnurkadest ABC ja ABP :

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC},$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BP^2 - AP^2}{2AB \cdot BP}.$$



- Võrduse

$$\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{BC} = \frac{AB^2 + BP^2 - AP^2}{BP}$$

lihtsustamise järel saamegi tõestatava võrduse.

- Kui nüüd Stewarti teoreemis punkt P on külje BC keskpunkt, siis

$$AP = m_a \quad \text{ja} \quad BP = CP = \frac{1}{2}a.$$

- Järelikult

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{CP}{CB} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot CP \Leftrightarrow$$

$$m_a^2 = c^2 \cdot \frac{1}{2} + b^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \blacksquare$$

Järeldus 2.1.26. Suvalise kolmnurga mediaanide ruutude summa ja selle kolmnurga külgede ruutude summa suhe on $\frac{3}{4}$, teisisõnu

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tuletame nüüd mõned täiendavad avaldised mediaanidega seotud punkte ühendavate vektorite jaoks.

Teoreem 2.1.27. Kui punkt O on kolmnurga ABC mediaanide AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt ning X tasandi suvaline punkt, siis kehtivad järgmised võrdused:

a) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0};$

b) $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{0};$

c) $\vec{XO} = \frac{1}{3}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC}).$

Osa a) tõestus.

- Tuginedes teoreemile 2.1.5., saame

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = -\frac{2}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}. \quad \blacksquare$$

Osa b) tõestus.

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{1}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}. \quad \blacksquare$$

Osa c) tõestus.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{XO} &= \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XO} = \\ &= (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1O}) + (\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1O}) = \\ &= (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) + \underbrace{(\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{A_1O})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CA_1})}_{\vec{0}} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Järeldus 2.1.28. Kui punktid O_1 ja O_2 on vastavalt kolmnurkade $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ mediaanide lõikepunktid, siis

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Järgmine nn Leibnizi teoreem kuulub samuti matemaatika olümpiaadide klassikasse (vt [1], *Leibnizi teoreem*).

Teoreem 2.1.29. (Leibnizi teoreem) Kui punkt O on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja X tasandi suvaline punkt, siis

$$XO^2 = \frac{1}{3}(XA^2 + XB^2 + XC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Tõestus.

- Kui $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA}$, siis

$$\overrightarrow{XA}^2 = \overrightarrow{XO}^2 + 2\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2.$$

- Analoogiliselt saame veel kaks võrdust:

$$\overrightarrow{XB}^2 = \overrightarrow{XO}^2 + 2\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{XC}^2 = \overrightarrow{XO}^2 + 2\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2.$$

- Liites need kolm võrdust, saame

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XA}^2 + \overrightarrow{XB}^2 + \overrightarrow{XC}^2 &= 3\overrightarrow{XO}^2 + 2\overrightarrow{XO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \\ &= 3\overrightarrow{XO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2, \end{aligned}$$

kuna $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (vt Teoreem 2.1.27. a)).

- Seega

$$XO^2 = \frac{1}{3}(XA^2 + XB^2 + XC^2 - OA^2 - OB^2 - OC^2).$$

- Teoreemi 2.1.26. põhjal saame nüüd teha asenduse

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

ning saada soovitud tulemuse. ■

Järeldus 2.1.30. Tasandi punkt, mille kauguste ruutude summa antud kolmnurga tippudest on minimaalne, on selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt.

b) Mediaaniga seotud võrratused

Lause 2.1.31. Suvalise kolmnurga mediaanide pikkuste summa on suurem selle kolmnurga $\frac{3}{4}$ ümbermõõdust, aga väiksem selle kolmnurga ümbermõõdust, st

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p,$$

kus p on kolmnurga pool ümbermõõtu.

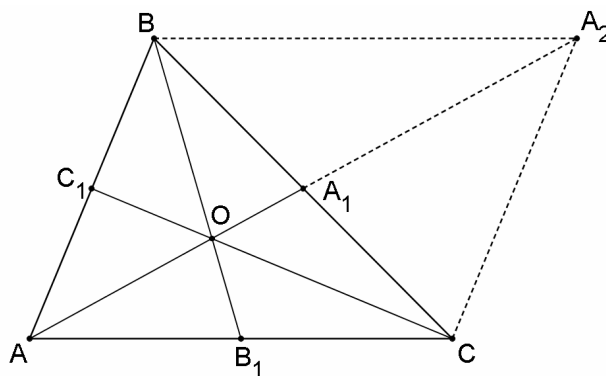
Tõestus.

- Olgu O kolmnurga ABC mediaanide AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt.
- Siis kehtivad järgmised kolmnurga võrratused:

$$OA + OB > AB,$$

$$OA + OC > AC,$$

$$OB + OC > BC.$$



- Kui liidame need võrratused, siis saame

$$2(OA + OB + OC) > AB + AC + BC \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{2}{3}AA_1 + \frac{2}{3}BB_1 + \frac{2}{3}CC_1\right) > AB + AC + BC \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > AB + AC + BC \Leftrightarrow m_a + m_b + m_c > \frac{3}{2}p.$$

- Pikendame mediaani AA_1 üle punkti A_1 ja pikendusel valime punkti A_2 nii, et $A_1A_2 = AA_1$.
- Siis ABA_2C on rööpkülik, millest järeldub, et $BA_2 = AC$.
- Seega

$$2AA_1 = AA_2 < AB + BA_2 = AB + AC \Leftrightarrow$$

$$AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC) \Leftrightarrow m_a < \frac{1}{2}(b + c).$$

- Analoogiliselt saame, et

$$m_b < \frac{1}{2}(a+c) \quad \text{ja} \quad m_c < \frac{1}{2}(a+b).$$

- Liites saadud võrratused, saame

$$m_a + m_b + m_c < \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c) = 2p. \quad \blacksquare$$

Järeldus 2.1.32. Kui m_a ja m_b on vastavalt kolmnurga külgedele a ja b tõmmatud mediaanid, siis kehtivad võrratused

$$m_a + m_b < \frac{3}{2}c \quad \text{ja} \quad m_a^2 + m_b^2 < \frac{9}{8}c^2.$$

Lause 2.1.33. Kui a , b ja c on kolmnurga külgede pikkused, siis küljele a tõmmatud mediaan m_a rahuldab järgmisi võrratusi:

$$\frac{|c-b|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{|c^2-b^2|}{2a} < m_a \leq \frac{b^2+c^2}{2a}.$$

Tõestuse skeem.

- Vasakpoolse võrratuse tõestamiseks võib pikendada mediaani (kuni tekib rööpkülik) ja kasutada kolmnurga võrratust selle kolmnurga jaoks, kus $2m_a$ on üheks küljeks.
- Parempoolse võrratuse tõestamiseks saab kasutada Heroni valemit (vt [1], *Heroni valem*) kolmnurga pindala leidmiseks:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow$$

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

- Teame, et mediaani pikkuse saab (vt Teoreem 2.1.24.) leida valemist

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

- Nende võrduste abil saame, et

$$m_a^2 \leq \left(\frac{b^2+c^2}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow S \leq \frac{1}{2}bc$$

ja

$$m_a^2 > \left(\frac{|c^2-b^2|}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow S > 0. \quad \square$$

Lause 2.1.34. Kolmnurga mediaan jaotab sisenurga kaheks osaks nii, et selle sisenurga lühem lähiskülg on suurema osanurga haaraks.

Tõestus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC mediaan. Näitame, et tingimusest $AB < AC$ järgneb tingimus $\angle BAA_1 > \angle CAA_1$.

- Olgu $AB < AC$.
- Pikendame mediaani AA_1 üle punkti A_1 nii, et tekiks rööpkülik ABA_2C .
- Seega

$$AB \parallel CA_2 \Rightarrow \angle CA_2A = \angle BAA_1.$$

- Kolmnurga CAA_2 kohta on teada, et

$$AC > CA_2 = AB.$$

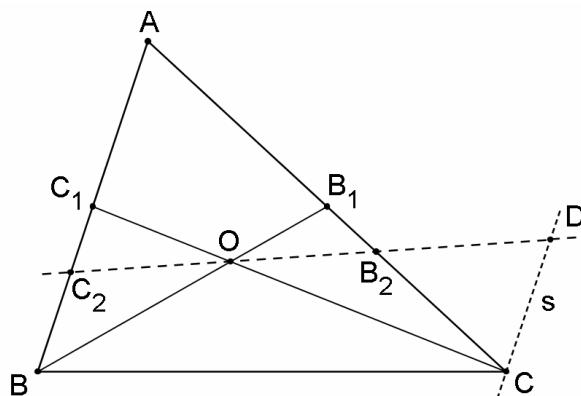
- Järelikult

$$\angle BAA_1 = \angle CA_2A > \angle CAA_2 = \angle CAA_1. \quad \blacksquare$$

Lause 2.1.35. Kui kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti O läbiv sirge lõikab kolmnurga külgi AC ja AB vastavalt punktides B_2 ja C_2 , siis kehtib võrratus $OB_2 \leq 2OC_2$, kus võrdus leiab aset parajasti siis, kui B_2C_2 ühtib mediaaniga CC_1 .

Tõestus.

- Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC mediaanid.
- Tõmbame läbi tipu C küljega AB paralleelse sirge s . Olgu punkt D sirgete s ja B_2C_2 lõikepunkt.
- Kolmnurgad C_1OC_2 ja COD on sarnased (nurgad C_1OC_2 ja COD on tippnurgad ning nurgad C_1C_2O ja CDO on põiknurgad).
- Järelikult



$$OD = \frac{OC}{OC_1} \cdot OC_2 = 2OC_2.$$

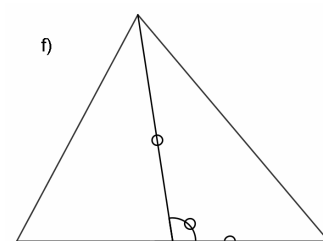
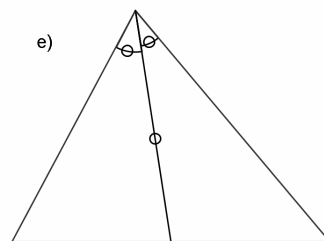
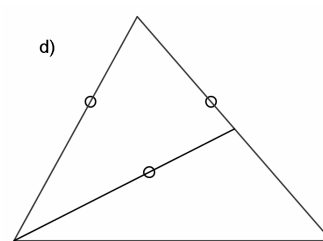
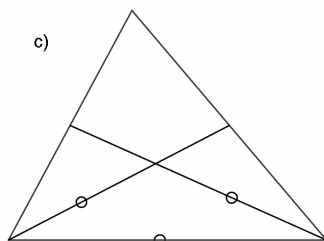
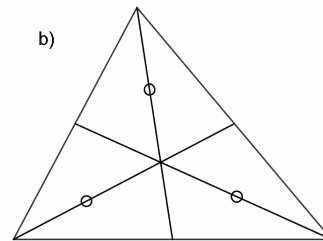
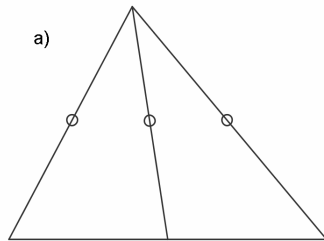
- Seega saame, et

$$OB_2 \leq OD = 2OC_2. \quad \blacksquare$$

1.6. Mediaanid ja kolmnurkade võrdsuse tunnused

Teoreem 2.1.36. *Kaks kolmnurka on võrdsed, kui kehtib üks järgmistest tingimustest:*

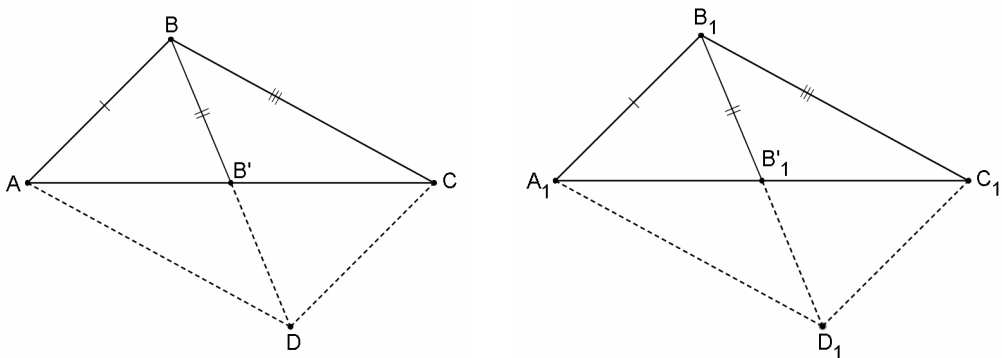
- ühe kolmnurga kaks külge ja kolmandale küljele tõmmatud mediaan on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja kolmandale küljele tõmmatud mediaaniga;*
- ühe kolmnurga kolm mediaani on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme mediaaniga;*
- ühe kolmnurga külg ja teistele külgedele tõmmatud mediaanid on vastavalt võrdsed teise kolmnurga küljega ja selle teistele külgedele tõmmatud mediaanidega;*
- ühe kolmnurga kaks külge ja ühele nendest külgedest tõmmatud mediaan on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja ühele nendest külgedest tõmmatud mediaaniga;*
- ühe kolmnurga ühele küljele tõmmatud mediaan ja kaks nurka, milleks mediaan jaotab selle külje vastasnurga, on vastavalt võrdsed teise kolmnurga ühele küljele tõmmatud mediaaniga ja kahe nurgaga, milleks mediaan jaotab selle külje vastasnurga;*
- ühe kolmnurga külg, sellele küljele tõmmatud mediaan ja suurem nurkadest, mille mediaan moodustab selle küljega, on vastavalt võrdsed teise kolmnurga küljega, sellele küljele tõmmatud mediaaniga ja suuremaga nurkadest, mille mediaan moodustab selle küljega.*



Tõestus.

- Kuna kõikide väidete a)–f) tõestused on standardsed kolmnurkade võrdsuse näitamiseks, toome siin ainult osa a) tõestuse.
- Olgu BB' ja $B_1B'_1$ vastavalt kolmnurkade ABC ja $A_1B_1C_1$ mediaanid.
- Vastavalt teoreemi eeldustele

$$AB = A_1B_1, \quad CB = C_1B_1 \quad \text{ja} \quad BB' = B_1B'_1.$$



- Pikendame mediaane BB' ja $B_1B'_1$ üle punktide B' ja B'_1 . Pikendusel valime punktid D ja D_1 nii, et

$$DB' = BB' \quad \text{ja} \quad D_1B'_1 = B_1B'_1.$$

- Siis tekivad rööpkülikud $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$, kusjuures

$$AB = CD \quad \text{ja} \quad A_1B_1 = C_1D_1.$$

- Nüüd saame, et kolmnurgad BCD ja $B_1C_1D_1$ on võrdsed tunnuse KKK järgi, seega

$$\angle CBD = \angle C_1B_1D_1.$$

- Analoogiliselt on kolmnurgad ABD ja $A_1B_1D_1$ võrdsed ($AD = BC = B_1C_1 = A_1D_1$). Seega

$$\angle ABD = \angle A_1B_1D_1.$$

- Järelikult

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle A_1B_1D_1 + \angle C_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$$

ja kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse KNK järgi. ■

1.7. Mediaaniga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdkülgne, võrdhaarne või täisnurkne.

Osutub, et ka kolmnurga mediaanidega seotud lõikude ja nurkade abil on võimalik määrata kolmnurga liiki. Alljärgnevas toome mõned näited sellistest võimalustest.

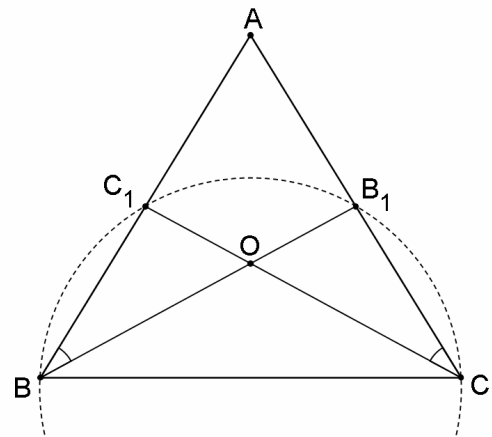
Olgu kolmnurgas ABC tõmmatud mediaanid BB_1 ja CC_1 ning olgu O nende lõikepunkt.

Teoreem 2.1.37. *Kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

- a) $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$;
- b) $BB_1 = CC_1$;
- c) $AO \perp B_1C_1$.

Osa a) tõestus.

- Tarvilikkuse tõestamiseks piisab märkida seda, et B_1C_1 on kolmnurgas ABC kesklõiguks ja BCB_1C_1 on võrdhaarne trapets, mille diagonaalid BB_1 ja CC_1 on võrdsed. Seega kolmnurgad BB_1C_1 ja CC_1B_1 ning ka nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Järelikult $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$.



- Piisavuse näitamiseks oletame, et nurgad ABB_1 ja ACC_1 on võrdsed.
- Siis BCB_1C_1 on kõõlnelinurk, kuna võrdsed nurgad toetuvad ühele ja samale kõõlule B_1C_1 (vt [1], *kõõlnelinurk*).
- Järelikult on piirdenurgad BB_1C_1 ja BCC_1 võrdsed (toetuvad kaarele BC_1).
- Teiselt poolt tingimuse $B_1C_1 \parallel BC$ tõttu on $\angle BB_1C_1 = \angle CBB_1$ (põiknurgad).
- Kokkuvõttes saame, et

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = \angle ACC_1 + \angle BB_1C_1 = \\ &= \angle ACC_1 + \angle BCC_1 = \angle ACB \end{aligned}$$

ehk kolmnurk ABC on võrdhaarne. ■

Osa b) tõestus.

- Tarvilikkus on näidatud eelmise osa tõestamisel.
- Olgu nüüd $BB_1 = CC_1$. Siis kehtivad järgmised võrdused:

$$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{1}{3}CC_1 = OC_1 \quad \text{ja} \quad OB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}CC_1 = OC.$$

- Seega on kolmnurgad BOC_1 ja COB_1 võrdsed tunnuse KNK järgi.
- Järelikult

$$AB = 2BC_1 = 2CB_1 = AC. \quad \blacksquare$$

Osa c) tõestus.

- Kuna $B_1C_1 \parallel BC$ ja võrdhaarses kolmnurgas tipunurgast tõmmatud mediaan on risti selle kolmnurga alusega (mediaan ühtib kõrgusega), siis ka $AO \perp B_1C_1$ ja tarvilikkus on tõestatud.
- Kui $AO \perp B_1C_1$, siis tipust A tõmmatud mediaan on risti kolmnurga alusega BC (kuna $B_1C_1 \parallel BC$) ehk mediaan on samas ka kõrguseks. Selline olukord on võimalik ainult võrdhaarses kolmnurgas. \blacksquare

Teoreem 2.1.38. Kolmnurk ABC , mille mediaanid on BB_1 ja CC_1 , on võrdkülgne parajasti siis, kui $\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 30^\circ$.

Tõestus.

- Esialgu tõestame tarvilikkuse. Kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis selle mediaanid osutuvad ka nurgapoolitajateks, st

$$\angle ABB_1 = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

ja

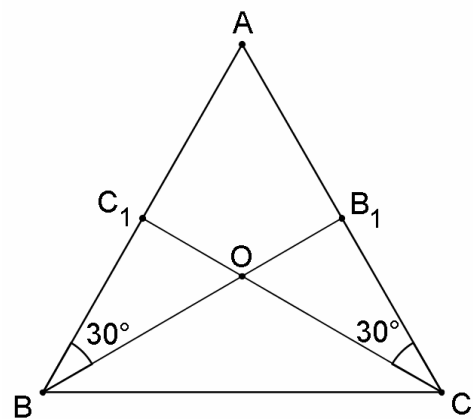
$$\angle ACC_1 = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

- Tõestame piisavuse. Eeldame, et

$$\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 30^\circ$$

ja näitame, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

- Teame (vt Teoreem 2.1.37. a)), et kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$. Samuti teame (vt Teoreem 2.1.37. b)), et võrdhaarses kolmnurgas on mediaanide pikkused, mis on tõmmatud selle haaradele, võrdsed.
- Seega $AB = AC$ ja $BB_1 = CC_1$.



- Olgu O mediaanide lõikepunkt. Vaatleme kolmnurka OCB_1 .
- Kuna $BB_1 = CC_1$ ja O jaotab mediaane suhtes $2:1$ tipust alates, siis

$$OC = 2OB_1.$$

- Järelikult kolmnurk OCB_1 on täisnurkne, kuna siinusteoreemi kaudu saame

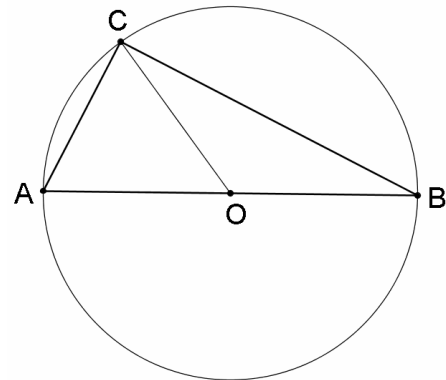
$$\sin \angle OB_1C = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \Leftrightarrow \angle OB_1C = 90^\circ.$$

- Seega mediaan BB_1 osutub kõrguseks ning $BC = BA$, mis koos eelnevalt saadud võrdusega $AB = AC$ tõestabki, et kolmnurk ABC on võrdkülgne. ■

Teoreem 2.1.39. *Kolmnurga sisenurk on täisnurk parajasti siis, kui selle nurga tipust tõmmatud mediaan on kaks korda lühem küljest, millele ta on tõmmatud.*

Tõestus.

- Olgu kolmnurk ABC täisnurkne (täisnurgaga ACB), siis hüpotenuusi AB keskpunkt O , kui täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, asub tippudest võrdsel kaugusel.



- Seega mediaan

$$CO = AO = BO = \frac{1}{2} AB.$$

- Tõestame piisavuse. Olgu antud kolmnurk ABC . Eeldame, et CO on selline kolmnurga ABC mediaan, et $CO = \frac{1}{2} AB$.
- Viimane aga tähendab, et kolmnurga tipud asuvad ringjoonel keskpunktiga O ja raadiusega $r = CO = AO = BO$.
- Seega AB on selle ringjoone diameeter ja nurk ACB , mis toetub diameetrile, on suurusega 90° . ■

§ 2. Mediaanid ja kolmnurgaga seotud ringjooned

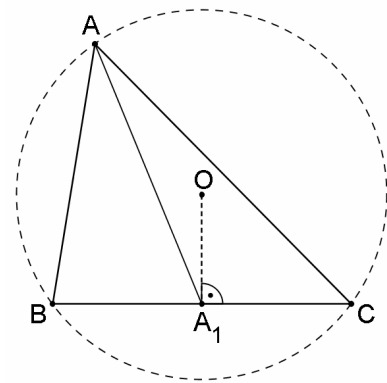
Selles paragrahvis vaatleme mõningaid seoseid kolmnurga mediaanide ja kolmnurgaga seotud ringjoonte vahel. Alljärgnevas kasutame mediaanide lõikepunkti tähistamiseks tähte M ja vaadeldava ringjoone keskpunkti tähistamiseks reeglina tähte O .

2.1. Põhitulemus

Teoreem 2.2.1. *Kolmnurga ümberringjoone keskpunkti ja mediaanide aluspunkte läbivad sirged on kolmnurga külgede keskristsirgeteks.*

Tõestus.

- Tõepoolest, ümberringjoone keskpunkt O asub külje BC otspunktide B ja C võrdsel (raadiuse) kaugusel. Seega asub O lõigu BC keskristsirgel, mis läbib ka lõigu BC keskpunkti ehk mediaani aluspunkti A_1 .
- Teoreemi väite tõestamisel saab toetuda ka faktile (vt [1], *ümberringjoon*), et kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes punktis, kusjuures see on selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks. ■



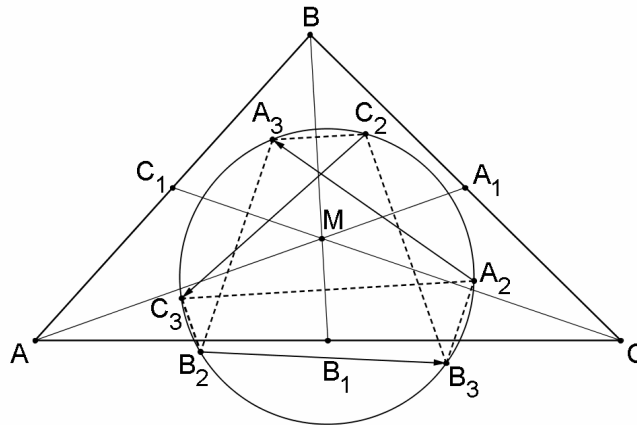
Järeldus 2.2.2. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC mediaan ja selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O erineb punktist A_1 , siis kolmnurgad OA_1C ja OA_1B on täisnurksed kolmnurgad.*

2.2. Täiendavaid tulemusi kolmnurga mediaanide ja ringjoonte kohta

Teoreem 2.2.3. *Kolmnurga mediaanide poolt tekitatud kuue osakolmnurga ümberringjoonte keskpunktid asuvad ühel ja samal ringjoonel.*

Tõestus.

- Olgu AA_1 , BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC mediaanid ja M nende lõikepunkt. Olgu A_2 , B_3 , C_2 , A_3 , B_2 ja C_3 vastavalt kolmnurkade CMB_1 , CMA_1 , BMA_1 , BMC_1 , AMC_1 ja AMB_1 ümberringjoonte keskpunktid.
- Näitame, et punktid A_2 , B_3 , C_2 , A_3 , B_2 ja C_3 asuvad ühel ja samal ringjoonel.
- Näitame esialgu, et kuusnurga $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ vastasküljed on paralleelsed ja diagonaalid A_2A_3 , B_2B_3 ja C_2C_3 on võrdsed. Kui nii, siis $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ on kõõlkuusnurk (vt [42], ül. 6.57).



- Vaatleme punktide B_2 ja B_3 ristprojektsioone sirgele AA_1 .
- On teada, et B_2 on kolmnurga AMC_1 ümberringjoone keskpunkt, kusjuures selles punktis lõikuvad selle kolmnurga keskristsirged, seega punkti B_2 ristprojektsioon küljele AM on selle külje keskpunktiks (vt Teoreem 2.2.1.).
- Analoogiliselt saame, et ka punkti B_3 ristprojektsioon kolmnurga CMA_1 küljele MA_1 poolitab selle külje.
- Järelikult vektori $\overline{B_2B_3}$ ristprojektsioon sirgele AA_1 võrdub $\frac{1}{2}\overline{AA_1}$.
- Analoogiliselt on punktide B_2 ja B_3 ristprojektsioonid sirgele CC_1 vastavalt lõikude MC_1 ja CM keskpunktid, seega vektori $\overline{B_2B_3}$ ristprojektsioon sirgele CC_1 võrdub $-\frac{1}{2}\overline{CC_1}$.
- Sama arutelu võib läbi viia ka vektorite $\overline{A_2A_3}$ ja $\overline{C_2C_3}$ korral. Tulemusena saame, et
 - vektori $\overline{A_2A_3}$ ristprojektsioon sirgele BB_1 võrdub $-\frac{1}{2}\overline{BB_1}$ ja selle ristprojektsioon sirgele CC_1 on $\frac{1}{2}\overline{CC_1}$;
 - vektori $\overline{C_2C_3}$ ristprojektsioon sirgele AA_1 võrdub $-\frac{1}{2}\overline{AA_1}$ ja selle ristprojektsioon sirgele BB_1 on $\frac{1}{2}\overline{BB_1}$.
- Märkime, et B_2C_3 ja C_2B_3 on vastavalt lõikude AM ja MA_1 keskristsirged, seega $B_2C_3 \perp AA_1$ ja $C_2B_3 \perp AA_1$ ehk $B_2C_3 \parallel C_2B_3$.
- Analoogiliselt saame, et $B_2A_3 \parallel A_2B_3$ ja $A_2C_3 \parallel C_2A_3$.
- Seega me näitasime, et kuusnurga $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ vastasküljed on paralleelsed.

- Teame, et vektorite $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ja $\overrightarrow{CC_1}$ summa võrdub nullvektoriga (vt Teoreem 2.1.5.), seega nendest vektoritest võime moodustada kolmnurga $A_4B_4C_4$ nii, et $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{B_4C_4}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{C_4A_4}$ ja $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_4B_4}$.

- Olgu O kolmnurga $A_4B_4C_4$ ümberringjoone keskpunkt.

- On selge, et tasandi suvalise punkti D korral näiteks vektor $\overrightarrow{B_4D}$ on üheselt määratud oma ristprojektsioonidega sirgetele B_4A_4 ja B_4C_4 .

- Kuna vektori $\overrightarrow{B_4O}$ ristprojektsioonid sirgetele B_4A_4 ja B_4C_4 võrduvad vastavalt

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{B_4A_4} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{B_4C_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1},$$

siis vektori $\overrightarrow{B_4O}$ ja vektori $\overrightarrow{B_2B_3}$ ristprojektsioonid paralleelsetele sirgetele on võrdsed.

- Analoogiliselt vektorite $\overrightarrow{A_4O}$ ja $\overrightarrow{A_2A_3}$ ning vektorite $\overrightarrow{C_4O}$ ja $\overrightarrow{C_2C_3}$ ristprojektsioonid paralleelsetele sirgetele on võrdsed.

- Seega

$$\overrightarrow{A_4O} = \overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{B_4O} = \overrightarrow{B_2B_3} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{C_4O} = \overrightarrow{C_2C_3}.$$

- Kuna A_4O , B_4O ja C_4O on kolmnurga $A_4B_4C_4$ ümberringjoone raadiused, siis

$$|\overrightarrow{A_4O}| = |\overrightarrow{B_4O}| = |\overrightarrow{C_4O}| = |\overrightarrow{A_2A_3}| = |\overrightarrow{B_2B_3}| = |\overrightarrow{C_2C_3}|.$$

- Järelikult me näitasime, et kuusnurga $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ diagonaalid A_2A_3 , B_2B_3 ja C_2C_3 on võrdsed ning seega $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ on kõõlkuusnurk. ■

Lause 2.2.4. (Teoreemi 2.1.39. järelalus) *Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga täisnurgast tõmmatud mediaani aluspunktiga (ehk hüpotenuusi keskpunktiga).*

Vaatleme nüüd kolmnurga mediaanide lõikepunkti M ja ümberringjoone keskpunkti O ühendavat lõiku OM .

Lause 2.2.5. (Leibnizi teoreemi 2.1.29. järelalus) *Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti M ja selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkti O vaheline kaugus võrdub*

$$OM = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + BC^2)},$$

kus R on selle ümberringjoone raadius.

Teoreem 2.2.6. Kui O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja M punktist O erinev selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt, siis sirge OM on mediaaniga CC_1 risti parajasti siis, kui $a^2 + b^2 = 2c^2$, kus a , b ja c on vastavalt kolmnurga ABC külgede BC , AC ja AB pikkused.

Tõestus.

- Olgu $C_1M = m$ ja $\angle C_1MO = \varphi$, siis

$$\angle CMO = 180^\circ - \varphi.$$

- Kuna $OC = OB$ kui kolmnurga ABC ümberringjoone raadiused ning

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi,$$

saame koosinusteoreemi kolmnurkade C_1MO ja CMO jaoks kasutades, et

$$OC_1^2 = m^2 + OM^2 - 2m \cdot OM \cdot \cos \varphi$$

ja

$$\begin{aligned} OB^2 &= CM^2 + OM^2 + 2CM \cdot OM \cdot \cos \varphi = \\ &= 4m^2 + OM^2 + 4m \cdot OM \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

- Teame, et ümberringjoone keskpunkt O on kolmnurga ABC keskristsirgete lõikepunkt ja C_1 on külje AB keskpunkt, seega $OC_1 \perp AB$ ehk BOC_1 on täisnurkne kolmnurk (vt Järeldus 2.2.2.).
- Kasutades Pythagorase teoreemi selle kolmnurga jaoks, saame

$$BC_1^2 = OB^2 - OC_1^2 = 3m^2 + 6m \cdot OM \cdot \cos \varphi.$$

- Seega

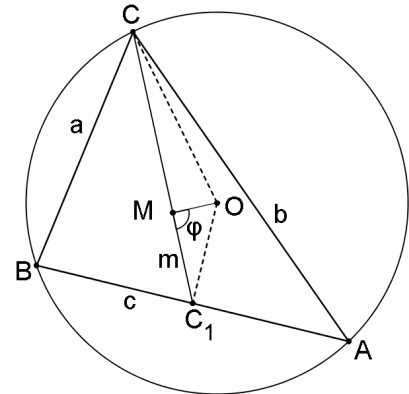
$$c^2 = 4BC_1^2 = 12m^2 + 24m \cdot OM \cdot \cos \varphi.$$

- Teame, et küljele c tõmmatud mediaani pikkuse m_c võib arvutada järgmise valemi abil (vt Teoreem 2.1.24.):

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

- Kuna mediaanide lõikepunkt M jaotab mediaani CC_1 nii, et $CC_1 = 3m$ (vt Teoreem 2.1.3.), siis

$$18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2.$$



- Järelikult on võrdus $a^2 + b^2 = 2c^2$ punktide O ja M erinevuse korral samaväärne järgmiste võrdustega:

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \Leftrightarrow 18m^2 = \frac{3}{2}c^2 \Leftrightarrow 12m^2 = c^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = c^2 + 24m \cdot OM \cdot \cos \phi \Leftrightarrow 24m \cdot OM \cdot \cos \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 90^\circ \Leftrightarrow CC_1 \perp OM.$$

- Seega teoreemi tarvilikkus ja piisavus on tõestatud. ■

2.3. Kolmnurga mediaanidega ja ümberringjoone raadiusega seotud võrratused

Lause 2.2.7. Kui m_a , m_b ja m_c on kolmnurga ABC mediaanide pikkused ja R selle kolmnurga ümberringjoone raadius, siis kehtivad järgmised võrratused:

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4} R^2$;

b) $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2} R$.

Osa a) tõestus.

- Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

- Märgime, et

$$AO = BO = CO = R,$$

seega

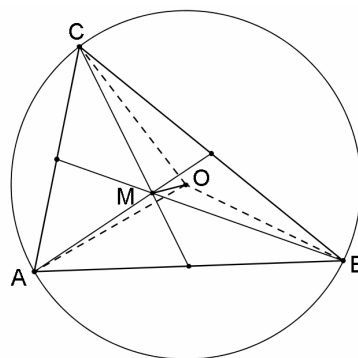
$$\begin{aligned} 3R^2 &= AO^2 + BO^2 + CO^2 = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{BO}^2 + \overrightarrow{CO}^2 = \\ &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO})^2 = \\ &= \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) \cdot \overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{MO}^2 = \\ &= AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MO^2, \end{aligned}$$

kuna $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ (vt Teoreem 2.1.27. a)).

- Seega

$$\begin{aligned} 3R^2 &= AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MO^2 \geq \\ &\geq AM^2 + BM^2 + CM^2 = \frac{4}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2). \end{aligned}$$

- Korrutades saadud võrratuse murruga $\frac{9}{4}$, saamegi tõestatava võrratuse. ■



Osa b) tõestus.

- Kui näitame, et suvaliste reaalarvude x , y ja z korral kehtib võrratus

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

siis kehtib ka võrratus

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

- Seega arvestades osas a) tõestatud võrratusega, järeldub ka teise võrratuse kehtivus.
- Suvaliste reaalarvude x , y ja z korral on järgmised võrratused samaväärsed:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow 2xy + 2xz + 2yz \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2.$$

- Kuna viimane võrratus on tõene iga reaalarvu x , y ja z korral, siis ka kõik sellega samaväärsed võrratused on tõesed. ■

Lause 2.2.8. Kui kolmnurk ABC ei ole nürinurkne ning m_a , m_b ja m_c on selle kolmnurga mediaanide pikkused ja R ümberringjoone raadius, siis kehtib võrratus

$$m_a + m_b + m_c > 4R.$$

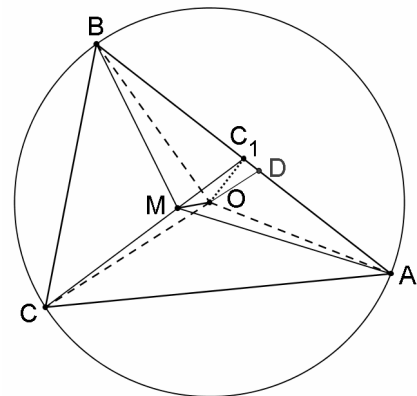
Tõestus.

- Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.
- Kuna kolmnurk ABC ei ole nürinurkne, siis selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O ei asu kolmnurgast väljas, seejuures asub see kas kolmnurga AMB , AMC või BMC sees või küljel.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt O asub kolmnurga AMB sees või selle küljel. Siis ilmselt kehtib võrratus

$$AM + MB \geq AO + OB.$$

- Viimane võrratus on samaväärne (vt Teoreem 2.1.3.) võrratusega

$$m_a + m_b \geq 3R.$$



- Olgu D sirge CO ja külje AB lõikepunkt. Sellest, et nurk COC_1 on kolmnurga DOC_1 välisnurk ja sirge OC_1 on külje AB keskristsirge (vt Teoreem 2.2.1.), jäeldub võrratus

$$\angle COC_1 > \angle OC_1D = 90^\circ,$$

kust saame, et $\angle COC_1$ on nürinurk.

- See tähendab, et kolmnurgas COC_1 suurima nurga COC_1 vastas on suurim külg CC_1 . Teisisõnu $CC_1 > CO = R$.
- Kokkuvõttes saame, et

$$m_a + m_b + m_c \geq 3R + m_c > 3R + R = 4R. \quad \blacksquare$$

§ 3. Näiteülesandeid

Ülesanne 2.3.1. (vt [22], ül. 94.15).

Olgu punkt L võetud kolmnurga ABC mediaanil BB_1 . Läbi punkti L on tõmmatud küljega AB paralleelne sirge s ning läbi punkti C on tõmmatud mediaaniga BB_1 paralleelne sirge t , mis lõikub sirgega s punktis M . Tõestada, et $BM = AL$.

Ülesanne 2.3.2. (vt [22], ül. 95.49).

Olgu antud kolmnurk ABC ning sellised punktid K ja L , et

$$\angle AKB = \angle BLC = 90^\circ.$$

Tõestada, et lõigu KL pikkus ei ole suurem kolmnurga ABC poolest ümbermõõdust.

Ülesanne 2.3.3. (vt [45], ül. 9.10).

Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, CC_1 selle kolmnurga mediaan ning M kolmnurga ACC_1 mediaanide lõikepunkt. Tõestada, et kui $AB = AC$, siis $OM \perp CC_1$.

Ülesanne 2.3.4. (vt [22], ül. 96.72).

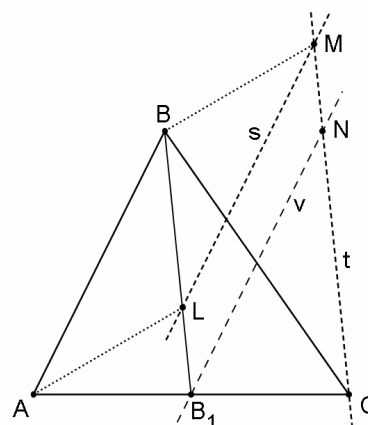
Kolmnurga ABC nurk BAC on 60° . Kolmnurga sisepiirkonnas on võetud punkt O nii, et

$$\angle AOB = \angle AOC = 120^\circ.$$

Tõestada, et kui BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC mediaanid, siis AB_1OC_1 on kõõlnelinurk.

Ülesande 2.3.1. lahendus.

- Tõmbame küljega AB paralleelse sirge v läbi punkti B_1 . Olgu N sirgete t ja v lõikepunkt.
- Kuna $MN \parallel LB_1$ ja $LM \parallel B_1N$, siis $LMNB_1$ on rööpkülik, kust järeldub, et $LM = B_1N$.
- Vaatleme kahte kolmnurka ABB_1 ja B_1NC :
 - $\angle B_1AB = \angle CB_1N$ (kaasnurgad, $AB \parallel B_1N$);
 - $\angle AB_1B = \angle B_1CN$ (kaasnurgad, $BB_1 \parallel NC$);
 - $AB_1 = B_1C$ (kuna BB_1 on kolmnurga ABC mediaan).
- Järelikult on kolmnurgad ABB_1 ja B_1NC võrdsed tunnuse NKN põhjal.
- Seega saame, et



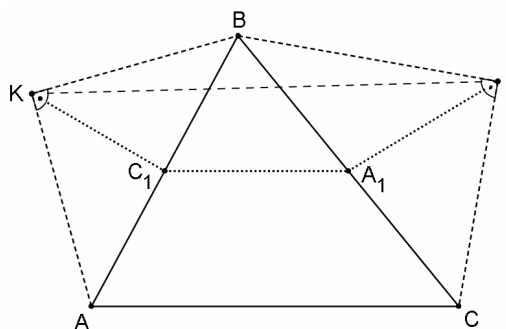
$$AB = B_1N = LM \quad \text{ja} \quad AB \parallel LM.$$

- Kuna nelinurga $ABML$ kaks külge on paralleelsed ja võrdsed, siis $ABML$ on rööpkülik.
- Seega lõigud BM ja AL on võrdsed kui rööpküliku $ABML$ vastasküljed. ■

Ülesande 2.3.2. lahendus.

- Olgu A_1 ja C_1 vastavalt külgede BC ja AB keskpunktid.
- Kuna A_1C_1 on kolmnurga ABC kesklõik, siis

$$A_1C_1 = \frac{1}{2} AC.$$



- Kuna täisnurkses kolmnurgas täisnurgast tõmmatud mediaani pikkus on kaks korda väiksem hüpotenuusi pikkusest (vt Teoreem 2.1.39.), siis

$$KC_1 = \frac{1}{2} AB \quad \text{ja} \quad LA_1 = \frac{1}{2} BC.$$

- Kokkuvõttes saame, et

$$KC_1 + C_1A_1 + A_1L = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) = p,$$

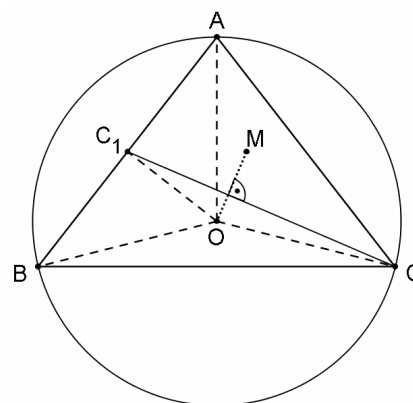
kus p on kolmnurga ABC pool ümbermõõdust.

- On selge, et murdjoone KC_1A_1L pikkus ei ole väiksem lõigu KL pikkusest ehk lõigu KL pikkus ei ole suurem kolmnurga ABC poolest ümbermõõdust.
- On ilmne, et ülalpool antud tõestus ei sõltu punktide K ja L asukohast tasandil kolmnurga suhtes. ■

Ülesande 2.3.3. lahendus.

- Tõestame väite vektorite abil.
- Teame (vt Teoreem 2.1.27. c)), et juhul kui punkt M on kolmnurga ACC_1 mediaanide lõikepunkt, siis tasandi suvalise punkti korral (antud juhul punkti O korral) kehtib võrdus

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1}).$$



- Sellest, et

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

järeldub võrdus

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}).$$

- Avaldame ka vektori $\overrightarrow{CC_1}$ vektorite \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} ja \overrightarrow{OC} kaudu:

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}).$$

- Märgive, et kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A , siis $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$. Samuti märgive, et $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = R^2$, kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius.
- Neid seoseid kasutades, saame

$$\begin{aligned} 12 \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CC_1} &= (2\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) = \\ &= 3\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 4\overrightarrow{OC}^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \\ &= 3R^2 + R^2 - 4R^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 4\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \\ &= 4\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0. \end{aligned}$$

- Seega $OM \perp CC_1$. ■

Ülesande 2.3.4. lahendus.

- Sellest, et

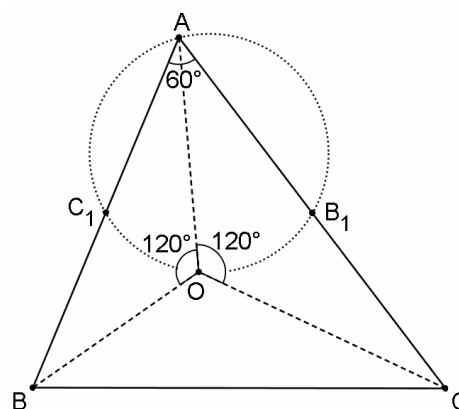
$$\angle ABO + \angle BAO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

ja

$$\angle BAO + \angle CAO = 60^\circ,$$

järeldub, et

$$\angle ABO = 60^\circ - \angle BAO = \angle CAO.$$



- Seega on kolmnurgad ABO ja CAO sarnased tunnuse NNN põhjal, millest saame

$$\frac{OB}{OA} = \frac{AB}{CA} = \frac{2BC_1}{2AB_1} = \frac{BC_1}{AB_1}.$$

- Kuna $\angle ABO = \angle CAO$ ja $\frac{OB}{BC_1} = \frac{OA}{AB_1}$, siis on ka kolmnurgad AOB_1 ja BOC_1 sarnased.

- Seega

$$\angle OB_1A = \angle OC_1B = 180^\circ - \angle OC_1A$$

ehk

$$\angle OB_1A + \angle OC_1A = 180^\circ.$$

- Viimane võrdus aga tähendabki, et AB_1OC_1 on kõõlnelinurk. ■

§ 4. Kolmnurga nurgapoolitaja

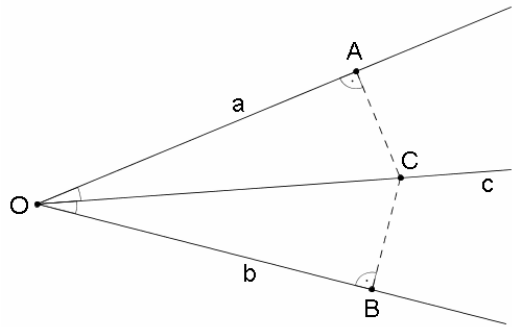
4.1. Nurgapoolitaja

Definitsioon 2.4.1. Antud nurga poolitajaks nimetatakse nurga tipust lähtuvat kiirt, mis paikneb nurga sisepiirkonnas ja jaotab selle kaheks võrdseks nurgaks.

Teoreem 2.4.2. Punkt asub vaadeldava nurga poolitajal parajasti siis, kui selle punkti kaugused nurga haaradest on võrdsed.

Tõestus.

- Tõestame esmalt tarvilikkuse.
- Olgu kiired a ja b nurga haaradeks alguspunktiga O ja kiir c selle nurga poolitajaks.
- Olgu C nurgapoolitaja c suvaline punkt, millest tõmbame kiirtele a ja b vastavalt kaks ristlõiku CA ja CB .
- Vaatleme kahte kolmnurka CAO ja CBO . Kuna mõlemad kolmnurgad on täisnurksed ja lõik OC poolitab nurga AOB , siis ka nurgad ACO ja BCO on võrdsed.
- Lõik OC on vaadeldavate kolmnurkade ühine külg, kusjuures selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed. Järelikult kolmnurgad CAO ja CBO on võrdsed tunnuse NKN põhjal.
- Seega on ka kolmnurkade vastavad küljed CA ja CB võrdsed.
- Tõestame piisavuse.
- Olgu nüüd kiired a ja b nurga haaradeks alguspunktiga O ja punkt C niisugune, et selle kaugused $|CA|$ ja $|CB|$ nurga vastavatest haaradest a ja b on võrdsed.
- Kuna kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga, siis täisnurksed kolmnurgad CAO ja CBO on võrdsed (hüpotenuus OC on ühine, kaatetid CA ja CB on võrdsed).
- Kuna võrdsetel kolmnurkadel on ka vastavad nurgad võrdsed, siis kehtib võrdus $\angle AOC = \angle BOC$. Järelikult OC on nurga AOB poolitaja. ■



4.2. Põhitulemused kolmnurga sisenurkade poolitajate kohta

Teoreemist 2.4.2. saame kolmnurga sisenurga poolitajate jaoks järgmise tulemuse.

Järeldus 2.4.3. Kolmnurga küljele tõmmatud sisenurga poolitaja iga punkt asetseb kolmnurga teistest külgedest võrdsel kaugusel. Teiste sõnadega, nurgapoolitajad on kolmnurga nurkade sümmeetriateljed.

Teoreem 2.4.4. Kolmnurga ABC sisenurga poolitaja BB_1 jaotab nurga vastaskülje AC lõikudeks AB_1 ja B_1C , mis on võrdselised vaadeldava nurga kahe lähisküljega, st

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Teoreemi tõestused.

- Olgu BB_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja.

Tõestus 1 (kiirteteoreemi kasutades).

- Tõmbame läbi tipu C nurgapoolitajaga BB_1 paralleelse sirge s .
- Olgu B_2 selle sirge s ja lõigu AB pikendamisel üle punkti B saadud kiire lõikepunkt.
- Vastavalt kiirteteoreemile (vt [1], kiirteteoreem) kehtib võrdus

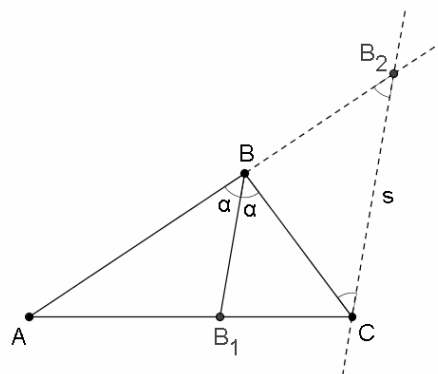
$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC}{AB_1} \Leftrightarrow \frac{AB + BB_2}{AB} = \frac{AB_1 + B_1C}{AB_1} \Leftrightarrow \frac{BB_2}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1}.$$

- Kuna nurgad $\angle B_1BC$ ja $\angle BCB_2$ on paralleelsete sirgete BB_1 ja B_2C lõikamisel sirgega BC tekkinud põiknurgad ja nurgad $\angle ABB_1$ ja $\angle BB_2C$ on samas kaasnurgad, saame

$$\angle BCB_2 = \angle B_1BC = \angle ABB_1 = \angle BB_2C.$$

- Järelikult kolmnurk BB_2C on võrdhaarne ($\angle BCB_2 = \angle BB_2C$) ja $BC = BB_2$, kust, arvestades eelpool saadud võrdust, jõuame soovitud tulemuseni:

$$\frac{BB_2}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C}. \quad \blacksquare$$



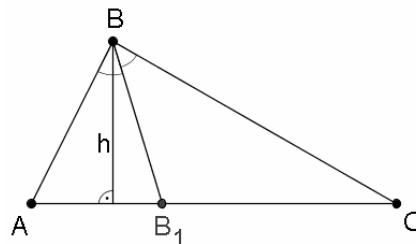
Tõestus 2 (pindalade kaudu).

- Olgu h tipust B tõmmatud kõrgus.
- Kasutades kolmnurga pindala leidmise standardseid valemeid

$$S = \frac{1}{2}ac \sin \beta \quad \text{ja} \quad S = \frac{1}{2}bh_b,$$

kolmnurkade BB_1C ja BB_1A jaoks, saame

$$\frac{S_{\Delta BB_1C}}{S_{\Delta BB_1A}} = \frac{\frac{1}{2}BB_1 \cdot BC \cdot \sin \frac{\angle ABC}{2}}{\frac{1}{2}BB_1 \cdot AB \cdot \sin \frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ning} \quad \frac{S_{\Delta BB_1C}}{S_{\Delta BB_1A}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot B_1C}{\frac{1}{2}h \cdot B_1A} = \frac{B_1C}{B_1A}.$$



- Järelikult

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C}{B_1A} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C}.$$

Tõestus 3 (siinusteoreemi kasutades).

- Rakendame kolmnurkadele BB_1A ja BB_1C siinusteoreemi

$$\frac{AB_1}{\sin \frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BB_1}{\sin \angle BAC} \quad \text{ja} \quad \frac{CB_1}{\sin \frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BB_1}{\sin \angle BCA}.$$

- Saame, et kehtib võrdus

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle BCA}.$$

- Rakendame nüüd kolmnurgale ABC siinusteoreemi

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle BCA},$$

millest saamegi vajaliku võrduse.

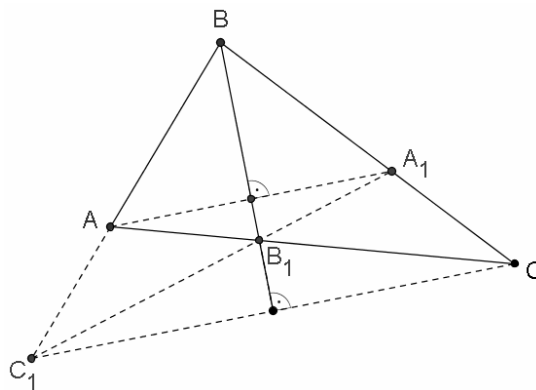
Tõestus 4 (sümmeetría omadusi kasutades).

- Leiame punktidega A , B ja C sümmeetrilised punktid nurgapoolitaja BB_1 suhtes. Olgu

$$S_{(BB_1)}A = A_1, \quad S_{(BB_1)}B = B, \\ S_{(BB_1)}C = C_1.$$

- Siis tunnuse NNN põhjal on järgmised kolmnurgad sarnased:

$$\Delta CC_1B_1 \sim \Delta AA_1B_1 \quad \text{ja} \\ \Delta CC_1B \sim \Delta A_1AB,$$



kust vastavalt

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad \text{ja} \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CB}{AB}.$$

- Kokkuvõttes saame, et $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{AB}$. ■

Tõestus 5 (vektorite abil).

- Avaldame vektori $\overrightarrow{BB_1}$ vektorite \overrightarrow{BA} ja \overrightarrow{BC} kaudu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BB_1} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

- Vektor $\overrightarrow{BB_1} = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \overrightarrow{BC}$ on paralleelne vektoriga $\frac{1}{BA} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{BC} \overrightarrow{BC}$.
- Seega

$$\frac{1}{BA} : \frac{1}{BC} = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) : \frac{AB_1}{AC} \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{AC - AB_1}{AB_1} = \frac{CB_1}{AB_1}. \quad \blacksquare$$

Erinevatel viisidel saab tõestada ka teoreemi 2.4.4. pöördteoreemi.

Teoreem 2.4.5. Kui kolmnurga ABC küljel AC on võetud sisepunkt B_1 nii, et $\frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}$, siis BB_1 on selle kolmnurga nurgapoolitaja.

Vaatleme nüüd, millised võivad olla kolmnurga sisenurkade poolitajate vastastikused asendid.

Lause 2.4.6. Kolmnurga kaks sisenurga poolitajat ei saa olla paralleelsed.

Tõestus.

- Kui oletada vastuväiteliselt, et leidub kolmnurk ABC , mille tippudest B ja C tõmmatud nurgapoolitajad on paralleelsed, siis peaks kehtima võrdus

$$\frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ,$$

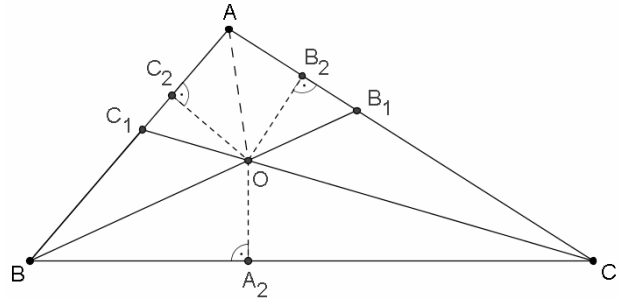
mis on ilmselt võimatu, kuna kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.

- Seega mis tahes kolmnurga kaks nurgapoolitajat alati lõikuvad. ■

Teoreem 2.4.7. Kolmnurga sisenurga poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

Tõestus.

- Lõikugu kolmnurga ABC sisenurga poolitajad BB_1 ja CC_1 punktis O .
- Näitame, et lõik AO poolitab nurga BAC .
- Olgu OA_2 , OB_2 ja OC_2 punktist O vastavalt külgedele BC , AC ja AB tõmmatud ristlõigud.



- Kuna nurgapoolitaja BB_1 on nurga ABC sümmeetriateljeks (vt Järeldus 2.4.3.), siis selle nurgapoolitaja punkt O asub võrdsel kaugusel nurga ABC haaradest ehk $OA_2 = OC_2$.
- Kuna O on ka nurgapoolitaja CC_1 punkt, siis analoogiliselt saame, et $OA_2 = OB_2$.
- Kahest viimasest võrdusest järeldub, et $OB_2 = OC_2$ ehk punkt O asub nurga BAC haaradest võrdsel kaugusel. Järelikult nurga BAC poolitaja läbib punkti O . Teisisõnu, AO on nurgapoolitaja.
- Kuna nurgapoolitajate lõikepunkt asub võrdsel kaugusel kolmnurga kõikidest külgedest, siis see on kolmnurga siseringjoone keskpunkt. ■

4.3. Täiendavaid tulemusi kolmnurga sisenurga poolitaja kohta

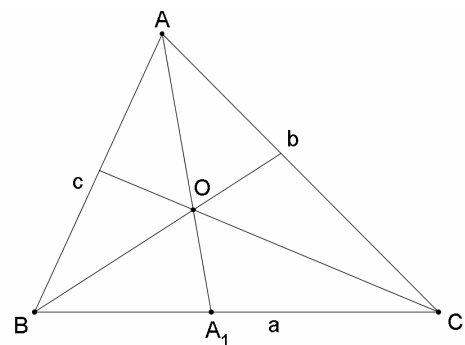
Tõestame nüüd mõned tulemused nurgapoolitajatega seotud lõikude pikkuste kohta.

Teoreem 2.4.8. Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt jaotab iga nurgapoolitaja kolmnurga tipust alates kaheks lõiguks, mis suhtuvad nagu lähiskülgede summa suhtub vastaskülge.

Tõestus.

- Olgu $l_a = AA_1$ kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja O nurgapoolitajate lõikepunkt.
- Olgu $BC = a$, $AC = b$ ja $AB = c$.
- Näitame, et küljele a tõmmatud nurgapoolitaja l_a jaotatakse suhtes

$$(b+c):a.$$



- Nurgapoolitaja põhiomadust kasutades (vt Teoreem 2.4.4.), saame kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} BA_1 + A_1C = a \\ \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow BA_1 = \frac{ac}{b+c}.$$

- Sellest, et BO on kolmnurga BAA_1 nurgapoolitaja saame

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{c}{BA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Lause 2.4.9. Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje kaheks lõiguks nii, et pikemale lähisküljele vastab pikem lõik vastasküljel.

Tõestus 1.

- Olgu BB_1 kolmnurga ABC nurgapoolitaja.
- Tõepoolest, võrdest $\frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}$ (vt Teoreem 2.4.4.) järeldub vahetult, et tingimused $AB > BC$ ja $AB_1 > CB_1$ on samaväärsed. ■

Sellele tulemusele saab anda ka geomeetrilise tõestuse.

Tõestus 2.

- Näitame, et tingimusest $AB > BC$ järeldub võrratus $AB_1 > CB_1$.
- Olgu C_1 punktiga C sümmeetriline punkt nurgapoolitaja BB_1 suhtes. Siis C_1 on külje AB sisepunkt (vt Järeldus 2.4.3.).
- Seega $CB_1 = C_1B_1$ ja $BC_1 = BC < AB$ ning $\angle BB_1C$ on kolmnurga BB_1A välisnurk, st

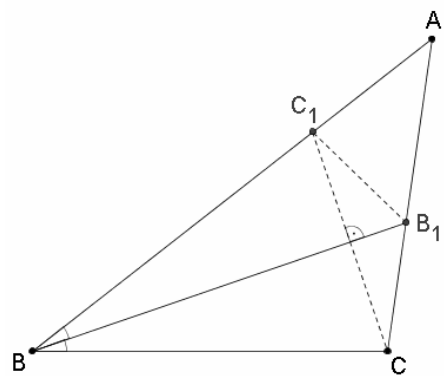
$$\angle BB_1C = \angle B_1AB + \angle B_1BA.$$

- Kuna C_1 on lõigu AB sisepunkt ja $\angle AC_1B_1$ on kolmnurga BB_1C_1 välisnurk ($\angle AC_1B_1 = \angle BB_1C_1 + \angle B_1BC_1$), saame

$$\angle AC_1B_1 > \angle BB_1C_1 = \angle BB_1C > \angle BAC = \angle C_1AB_1.$$

- Järelikult

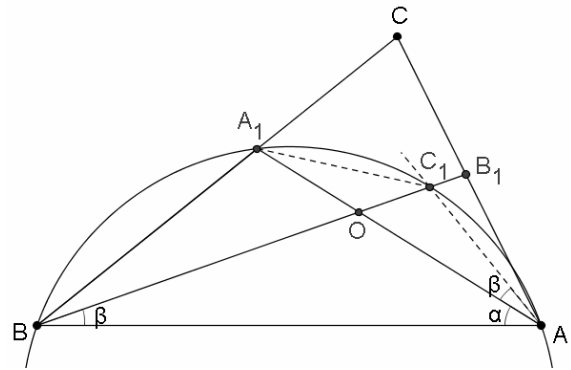
$$CB_1 = C_1B_1 < AB_1. \quad \blacksquare$$



Lause 2.4.10. Kolmnurga pikemale küljele vastab lühem nurgapoolitaja.

Tõestus.

- Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC nurgapoolitajad ja O nende lõikepunkt. Olgu $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ ja $\angle ACB = 2\gamma$.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AC < BC$ ehk $\beta < \alpha$.
- Näitame, et $BB_1 > AA_1$.
- Tõmbame tipust A kiirte AA_1 ja AC vahele kiire, mis moodustab kiirega AA_1 nurga β . Olgu C_1 selle kiire lõikepunkt nurgapoolitajaga BB_1 .
- Kuna lõik A_1C_1 on tippudest A ja B nähtav nurga β all, siis võime teha järelduse, et punktid A , B , A_1 ja C_1 asuvad ühel ringjoonel (võrdsed nurgad A_1AC_1 ja A_1BC_1 toetuvad ühele ja samale kõõlule).
- Sellest, et $\beta < \alpha$ ning 2β ja 2α on kolmnurga ABC sisenurkade suurused, järeldub, et



$$\angle ABA_1 = 2\beta < 90^\circ.$$

- Vaatleme nurka $\angle C_1AB$:

$$\angle C_1AB = \alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

- Ilmselt $\angle ABA_1 < \angle C_1AB$ (kuna $2\beta < \alpha + \beta$), seega ka $AA_1 < C_1B$ (kuna suurem piirdenurk toetub suuremale kõõlule).
- Kokkuvõttes saame, et

$$AA_1 < C_1B < C_1B + C_1B_1 = BB_1. \quad \blacksquare$$

Kolmnurga sisenurga poolitaja kohta võib sõnastada ja ka tõestada järgmised laused.

Lause 2.4.11. Kui kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitajad AA_1 ja BB_1 ja nende lõikepunktiks on O , siis

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ACB + 90^\circ.$$

Järeldus 2.4.12. Kolmnurga kaks sisenurga poolitajat ei saa olla risti.

Lause 2.4.13. Kolmnurga nurgapoolitaja ei saa teist nurgapoolitajat poolitada.

Lause 2.4.14. Kolmnurga kolmest nurgapoolitajast ei saa üldjuhul moodustada kolmnurka.

Lause 2.4.15. Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC nurgapoolitajad, mis moodustavad võrdse nurga vastavalt külgedega BC ja AC , siis kas

$$\angle BAC = \angle ABC \quad \text{või} \quad \angle BAC + \angle ABC = 120^\circ.$$

Lause 2.4.16. Kui AA_1 on kolmnurga ABC nurgapoolitaja, punkt O on nurgapoolitajate lõikepunkt ja OA_2 on punktist O küljele BC tõmmatud ristlõik, siis

$$\angle BOA_2 = \angle COA_1.$$

Lause 2.4.17. Kui AA_1 on kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja A_2 külje AB sisepunkt, siis tingimusest $AA_2 = A_1A_2$ järeldeb, et $A_1A_2 \parallel AC$.

Lause 2.4.18. Kui AA_1 on kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja A_2 külje AB sisepunkt, siis tingimusest $\angle A_2A_1B = \angle CAB$ järeldeb, et $CA_1 = A_1A_2$.

4.4. Tulemused kolmnurga välisnurga poolitaja kohta

Selles punktis me lähtume välisnurga definitsioonist (vt [1], välisnurk) ja vaatleme kolmnurga välisnurka kui selle sisenurga kõrvunurka.

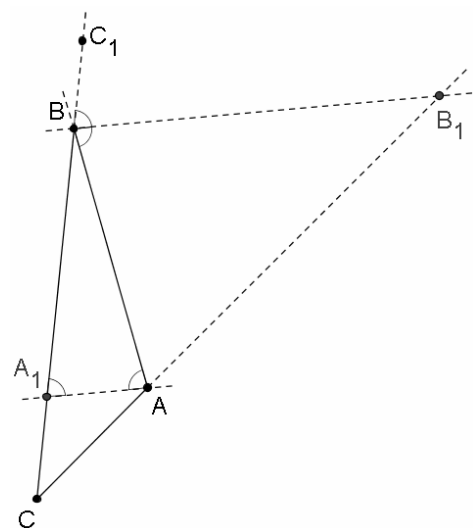
Järgmiselt tõestame kolm olulisemat tulemust, mis on seotud kolmnurga välisnurkade poolitajatega.

Teoreem 2.4.19. Kolmnurga tipust tõmmatud välisnurga poolitaja lõikab vastaskülje pikendust niisuguses punktis, mille kaugused selle külje otspunktidest suhtuvad nagu vastava sisenurga lähisküljed.

Tõestus.

- Tähistame tähega B_1 kolmnurga ABC tipust B tõmmatud välisnurga poolitaja ja kolmnurga külje CA pikendamisel üle punkti A saadud kiire lõikepunkti.
- Peame näitama, et

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB}{CB}.$$
- Tõmbame läbi tipu A nurgapoolitajaga BB_1 paralleelse sirge, mis lõikab külge BC punktis A_1 .
- Külje BC pikendusel üle tipu B märgime suvalise punkti C_1 .



- Kuna

$$\angle BA_1A = \angle C_1BB_1 \quad (\text{kaasnurgad}),$$

$$\angle B_1BA = \angle BAA_1 \quad (\text{põiknurgad})$$

ja BB_1 on nurga $\angle ABC_1$ poolitaja,

siis saame, et

$$\angle BA_1A = \angle BAA_1.$$

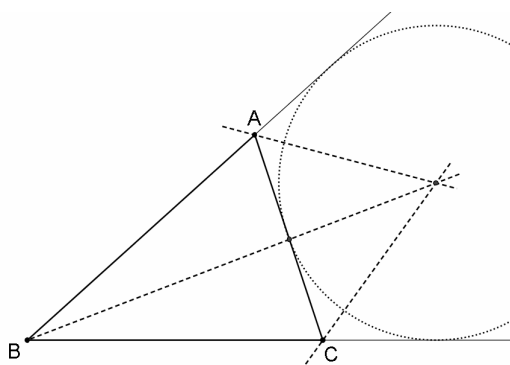
- Järelikult, $AB = BA_1$ ja kolmnurk BAA_1 on võrdhaarne.
- Kasutame kiirteteoreemi (vt [1], *kiirteteoreem*): kaks paralleelset sirget AA_1 ja BB_1 lõikavad nurga $\angle BCB_1$ haarasid, seega

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BA_1}{CB} = \frac{AB}{CB}. \quad \blacksquare$$

Teoreem 2.4.20. *Kolmnurga kahest tipust tõmmatud välisnurkade poolitajad ja kolmandast tipust tõmmatud sisenurga poolitaja lõikuvad ühes punktis, mis on kolmnurga külgringjoone keskpunktiks.*

Tõestuse skeem.

- Selle teoreemi tõestus on analoogiline kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikumist käsitleva teoreemi 2.4.7. tõestusega. \square

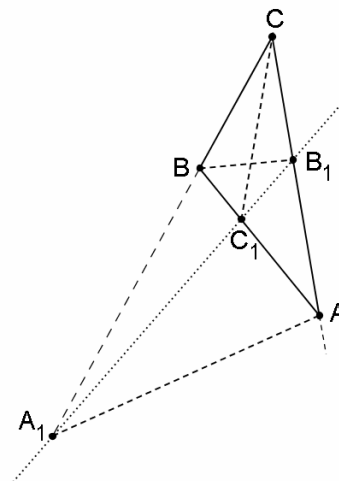


Teoreem 2.4.21. *Kolmnurga kahest tipust tõmmatud sisenurkade poolitajate aluspunktid vastaskülgedel ja kolmandast tipust tõmmatud välisnurga poolitaja aluspunkt vastaskülje pikendusel asuvad ühel ja samal sirgel.*

Tõestus.

- Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC sisenurkade poolitajad ning A_1 nurga BAC välisnurga poolitaja ja külje BC pikenduse lõikepunkt.
- Nurgapoolitaja põhiomadustest (vt Teoreemid 2.4.4. ja 2.4.19.) järelduvad järgmised võrdused:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}.$$



- Teoreemi tõestuseks saab rakendada Menelaose teoreemi (vt [1], *Menelaose teoreem*, [13], [19]), mis väidab, et kolmnurga ABC külgedel AB , BC ja AC või nende pikendustel vastavalt võetud punktid C_1 , A_1 ja B_1 (kusjuures pikendustel olgu võetud neist punktidest üks või kõik kolm) asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

- Kuna vaadeldaval juhul

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1,$$

siis punktid A_1 , B_1 ja C_1 asuvad ühel sirgel. ■

Elementaarsete võtetega on tõestatavad järgmised laused.

Lause 2.4.22. *Kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga.*

Lause 2.4.23. *Võrdhaarse kolmnurga tipunurga välisnurga poolitaja on kolmnurga alusega paralleelne.*

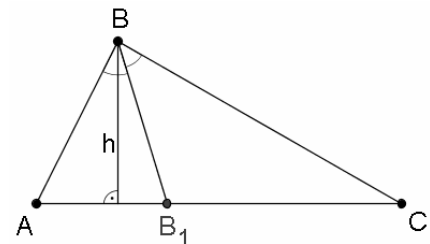
4.5. Nurgapoolitajad ja kolmnurga pindala

Teoreem 2.4.24. *Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille pindalad on võrdelised vaadeldava nurga lähiskülgedega.*

Tõestus.

- Näitame, et kolmnurga ABC sisenurga poolitaja BB_1 korral

$$\frac{S_{\Delta BAB_1}}{S_{\Delta BCB_1}} = \frac{AB}{BC}.$$



- Kuna kolmnurkadel BAB_1 ja BCB_1 on sama kõrgus, siis

$$S_{\Delta BAB_1} : S_{\Delta BCB_1} = AB_1 : B_1C.$$

- Sisenurga poolitaja põhiomaduse põhjal (vt Teoreem 2.4.4.) aga

$$AB_1 : B_1C = AB : BC.$$

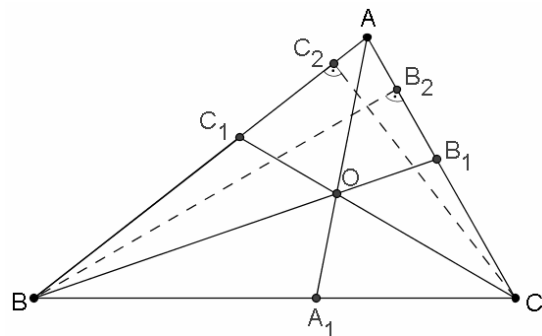
- Seega väide on tõestatud. ■

Lause 2.4.25. Kui kolmnurga kõikide nurgapoolitajate pikkused on väiksemad kui 1, siis selle kolmnurga pindala on väiksem kui $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tõestus.

- Olgu AA_1 , BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC nurgapoolitajad, mille pikkused on ühest väiksemad.
- Olgu BB_2 ja CC_2 antud kolmnurga kõrgused.
- Vaatleme eraldi juhtumeid, kus 1) kolmnurk on teravnurkne ja 2) kolmnurk on nürinurkne (või täisnurkne).

- 1) Eeldame, et kolmnurk on teravnurkne, mille suurim nurk on $\angle BAC$. Vastavalt omadusele 2.4.10. on selle nurga poolitaja AA_1 , kui kõige pikemale küljele tõmmatud nurgapoolitaja, kõige lühem.



- Siis kehtib võrratus

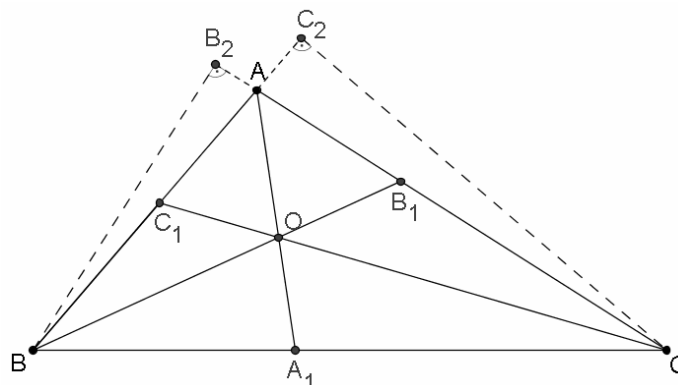
$$60^\circ \leq \angle BAC < 90^\circ.$$
- Kuna suvalise kolmnurga kõrgus ei ole samast tipust tõmmatud nurgapoolitajast pikem, saame

$$BB_2 \leq BB_1 < 1 \quad \text{ja} \quad CC_2 \leq CC_1 < 1,$$

kust

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC_2 = \frac{1}{2} \frac{BB_2}{\sin \angle BAC} \cdot CC_2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- 2) Olgu nüüd kolmnurk ABC nürinurkne (või täisnurkne) ja $\angle BAC \geq 90^\circ$ (siis nurga BAC poolitaja on kõige väiksem).



- Sel juhul on kõrgused BB_2 ja CC_2 tõmmatud külgede pikendustele ja kolmnurga küljed AB ja AC asuvad vastava kõrguse ja nurgapoolitaja vahel.

- Siis kehtivad järgmised võrratused:

$$AB \leq BB_1 < 1 \quad \text{ja} \quad AC \leq CC_1 < 1,$$

kust saame

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \leq \frac{1}{2} AB \cdot AC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Seega mõlemal juhul $S_{\Delta ABC} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

4.6. Nurgapoolitajate aluspunktide poolt moodustatud kujundite omadused

Lause 2.4.26. Kui O on kolmnurga ABC nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 lõikepunkt, siis nelinurk AC_1OB_1 osutub kõõlnelinurgaks parajasti siis, kui $\angle BAC = 60^\circ$.

Tõestus.

- Vaatame nelinurka AC_1OB_1 . Nurgapoolitajate vahelise nurga suuruse leidmise valemi põhjal (vt Lause 2.4.11.) saame

$$\angle C_1OB_1 = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle BAC + 90^\circ.$$

- Nelinurk AC_1OB_1 on kõõlnelinurk parajasti siis, kui selle vastasnurkade summa on 180° . Seega parajasti siis, kui

$$\angle C_1OB_1 + \angle C_1AB_1 = 180^\circ,$$

millest

$$\frac{1}{2} \angle BAC + 90^\circ + \angle BAC = 180^\circ \quad \text{ehk} \quad \angle BAC = 60^\circ. \quad \blacksquare$$

Järeldus 2.4.27. Kui kolmnurgas ABC sisenurk BAC võrdub 60° ja nurgapoolitajad BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O , siis $OB_1 = OC_1$.

Lause 2.4.28. Kui kolmnurgas ABC sisenurga BAC suurus on 120° ja nurgapoolitajad AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O , siis

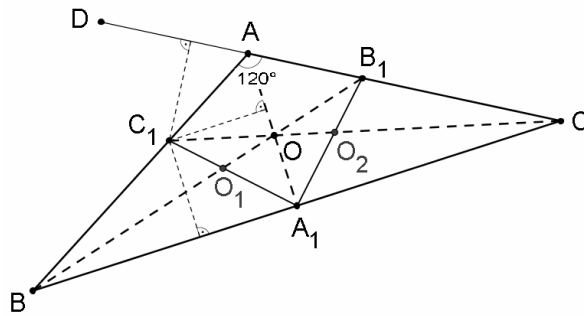
$$\angle A_1C_1O = \angle A_1B_1O = 30^\circ.$$

Tõestus.

- Olgu D suvaline punkt kiire CA pikendusel.
- Kuna

$$\angle DAB = \angle A_1AB = 60^\circ,$$

siis AB on nurga DAA_1 poolitaja.



- Sellest, et C_1 on lõigu AB sisepunkt, järeldub nüüd, et punkti C_1 kaugused sirgetest AC ja AA_1 on võrdsed (vt Järeldus 2.4.3.).
- Samas asub C_1 ka nurga ACB poolitajal, seega punkti C_1 kaugused sirgetest AC ja BC on samuti võrdsed.
- Järelikult, punkt C_1 asub võrdsel kaugusel sirgetest BC ja AA_1 , mis tähendab, et A_1C_1 on nurga AA_1B poolitaja.
- Olgu O_1 lõikude BB_1 ja A_1C_1 lõikepunkt. Siis O_1 on kolmnurga AA_1B nurgapoolitajate lõikepunkt.
- Kasutades kahe nurgapoolitaja vahelise nurga leidmiseks valemit (lausest 2.4.11.), saame

$$\angle C_1O_1O = \angle BO_1A_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAA_1 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

- Sama valemi järgi arvutame nurga BOC suuruse:

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

- Kuna nurk BOC on kolmnurga C_1O_1O välisnurk, saame

$$\angle A_1C_1O = \angle BOC - \angle C_1O_1O = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ.$$

- Analoogiliselt saame näidata, et lõikude CC_1 ja A_1B_1 lõikepunkt O_2 on kolmnurga AA_1C nurgapoolitajate lõikepunkt ning seega ka $\angle A_1B_1O = 30^\circ$. ■

Lause 2.4.29. Kui kolmnurga üks sisenurkadest on 120° , siis selle kolmnurga nurgapoolitajate aluspunktide moodustatud kolmnurk on täisnurkne.

Tõestus.

- Olgu kolmnurga ABC sisenurga BAC suurus 120° ning O nurgapoolitajate AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt.
- Siis eelnevas lauses tõestatu põhjal

$$\angle C_1O_1O = \angle B_1O_2O = 120^\circ \quad \text{ning} \quad \angle O_1OO_2 = 150^\circ,$$

kus O_1 on lõikude BB_1 ja A_1C_1 lõikepunkt ning O_2 on lõikude CC_1 ja A_1B_1 lõikepunkt.

- Seega saame, et nelinurgas $OO_1A_1O_2$ on kolme sisenurga suurused

$$\angle O_1OO_2 = 150^\circ, \quad OO_1A_1 = OO_2A_1 = 60^\circ.$$

- Järelikult

$$\angle C_1A_1B_1 = \angle O_1A_1O_2 = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 90^\circ.$$

- Seega kolmnurk $C_1A_1B_1$ on täisnurkne. ■

Lause 2.4.30. Kui võrdhaarses kolmnurgas ABC , kus $AB = BC = a$ ja $AC = b$, on tõmmatud nurgapoolitajad AA_1 ja CC_1 , siis

$$A_1C_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Tõestuse skeem.

- Tõestatakse kasutades kolmnurkade sarnasust ja teoreemi 2.4.8. □

Lause 2.4.31. Kui kolmnurgas külgedega a , b ja c on tõmmatud nurgapoolitajad, siis antud kolmnurga ja selle nurgapoolitajate aluspunktidest moodustatud kolmnurga pindalade suhe võrdub

$$\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Tõestus.

- Olgu antud kolmnurk ABC ja selle nurgapoolitajad AA_1 , BB_1 ja CC_1 .
- Siis ülesanne seisneb suhte $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1}$ leidmises.
- Esialgu leiame kolmnurkade AB_1C_1 , BA_1C_1 ja CA_1B_1 pindalad.
- Kasutades kolmnurga pindala leidmise standardset valemit $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (vt [1], kolmnurga pindala), saame

$$S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{AB_1}{AC} \cdot S_{\Delta ABC}.$$

- Nurgapoolitaja põhiomaduse kohaselt

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a},$$

kust

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{b}{a+b} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{AC} = \frac{c}{a+c}.$$

- Järelikult,

$$S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} S_{\Delta ABC}.$$

- Analoogiliselt leiame ka ülejäänud pindalad

$$S_{\Delta B_1 A_1 C_1} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)} S_{\Delta ABC} \quad \text{ja} \quad S_{\Delta C_1 A_1 B_1} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)} S_{\Delta ABC}.$$

- Lõpuks saame, et

$$\begin{aligned} S_{\Delta A_1 B_1 C_1} &= S_{\Delta ABC} - S_{\Delta A_1 B_1 C_1} - S_{\Delta B_1 A_1 C_1} - S_{\Delta C_1 A_1 B_1} = \\ &= S_{\Delta ABC} - \frac{bc S_{\Delta ABC}}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac S_{\Delta ABC}}{(b+a)(b+c)} - \frac{ab S_{\Delta ABC}}{(c+a)(c+b)} = \\ &= \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} S_{\Delta ABC}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lause 2.4.32. Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitajad BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O_1 ning kolmnurga AB_1C_1 sisenurga poolitajate lõikepunkt on O_2 , siis punktid A , O_1 ja O_2 asuvad ühel ja samal sirgel.

Lause 2.4.33. Kui kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitajad AA_1 ja BB_1 , siis lõigu A_1B_1 suvalise sisepunkti D kaugus sirgest AB võrdub punkti D kauguste summaga sirgetest AC ja BC .

4.7. Kolmnurga nurgapoolitajaga seotud võrdused ja võrratused

a) Valemid nurgapoolitaja pikkuse arvutamiseks

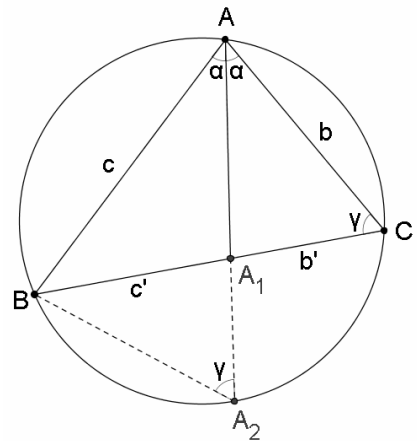
Kolmnurga nurgapoolitaja pikkuse või selle ruudu leidmiseks on tuletatud mitmeid valemeid. Järgnevatel lausetel on kolmnurga ABC korral kasutusel traditsioonilised tähistused $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ja nurga BAC nurgapoolitaja on $AA_1 = l_a$.

Lause 2.4.34. Kolmnurga sisenurga nurgapoolitaja pikkuse ruut avaldub selle nurga lähiskülgede ja vastaskülje osalõikude kaudu kujul

$$l_a^2 = bc - b'c', \quad \text{kus} \quad b' = CA_1 \quad \text{ja} \quad c' = BA_1.$$

Tõestus.

- Joonestame kolmnurga ABC ümberringjoone ja pikendame antud nurgapoolitajat AA_1 üle punkti A_1 kuni ümberringjoonega lõikumiseni punktis A_2 .
- Kuna piirdenurgad ACB ja AA_2B on võrdsed (toetuvad ühele ja samale kaarele AB), siis kolmnurgad AA_2B ja ACA_1 on sarnased (tunnuse NNN põhjal) ja sellest järeldub, et



$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{AC}{AA_2} \Leftrightarrow AA_1 \cdot (AA_1 + A_1A_2) = AB \cdot AC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA_1^2 = AB \cdot AC - AA_1 \cdot A_1A_2.$$

- Kasutades teoreemi kõõludest (vt [1], *kõõlnelinurk*), saame võrduse

$$BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot A_1A_2.$$

- Viimasest järeldub vajalik seos

$$l_a^2 = AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C = bc - b'c'. \quad \blacksquare$$

Lause 2.4.35. Kolmnurga sisenurga nurgapoolitaja pikkust saab arvutada kolmnurga külgede kaudu valemitega

$$l_a = \frac{\sqrt{4p(p-a)bc}}{b+c} \quad \text{ja} \quad l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c},$$

kus p on pool kolmnurga ümbermõõdust.

Tõestus.

- Parempoolse võrduse tõestamiseks võib kasutada näiteks Stewarti teoreemi (vt [1], [13]): kui suvalise kolmnurga ABC tseviaan AA_1 jagab vastaskülje lõikudeks $BA_1 = m$ ja $CA_1 = n$, siis tseviaani pikkuse t saab leida võrdusest

$$a(t^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

- Nurgapoolitaja põhiomadust (antud juhul $bm = cn$) ja seost $m + n = a$ kasutades saame, et

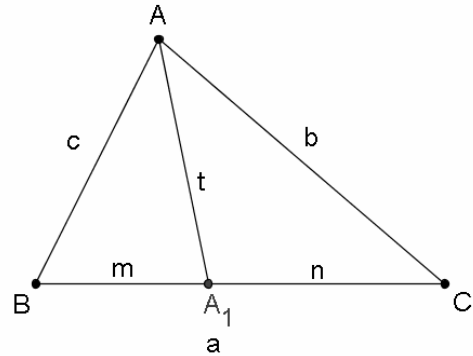
$$m = \frac{ac}{b+c} \quad \text{ja} \quad n = \frac{ab}{b+c}.$$

- Asenduse tulemusena Stewarti valemisse, saame

$$l_a^2 = t^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}.$$

- Vasakpoolse võrduse tõestamiseks piisab märkida, et

$$(b+c)^2 - a^2 = 4p(p-a). \quad \blacksquare$$



Lause 2.4.36. Kolmnurga sisenurga nurgapoolitaja pikkust l_a saab arvutada selle nurga suuruse α ja tema lähiskülgede pikkuste b ja c kaudu valemiga

$$l_a = \frac{2bc \cos(\frac{1}{2}\alpha)}{b+c}.$$

Tõestus.

- Tõestame võrduse kolmnurga pindala leidmise valemi $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ abil.
- Olgu S antud kolmnurga pindala, S_1 nurgapoolitaja l_a , külje b ja nurga $\frac{1}{2}\alpha$ poolt määratud kolmnurga pindala ja S_2 aga nurgapoolitaja l_a , külje c ja nurga $\frac{1}{2}\alpha$ poolt määratud kolmnurga pindala.
- Siis pindalade kohta kehtib võrdus $S = S_1 + S_2$, mis on samaväärne järgmiste võrdustega:

$$\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}bl_a \sin(\frac{1}{2}\alpha) + \frac{1}{2}cl_a \sin(\frac{1}{2}\alpha) \quad \Leftrightarrow$$

$$bc \sin(\frac{1}{2}\alpha) \cos(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}(b+c)l_a \sin(\frac{1}{2}\alpha) \quad \Leftrightarrow$$

$$l_a = \frac{2bc \cos(\frac{1}{2}\alpha)}{b+c}. \quad \blacksquare$$

Lause 2.4.37. Kolmnurga sisenurga poolitaja pikkust l_a saab arvutada teiste nurkade suuruste β ja γ ning vastaskülje pikkuse a kaudu valemiga

$$l_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma) \cos(\frac{1}{2}(\beta - \gamma))}.$$

Tõestus.

- Kasutame siin siinusteoreemi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

mille põhjal saame, et

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)} \Leftrightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

- Leiame nurga AA_1B suuruse pidades silmas, et see on kolmnurga AA_1C välisnurk:

$$\angle AA_1B = \gamma + \frac{1}{2}\alpha = \gamma + 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\gamma - \beta).$$

- Rakendades nüüd siinusteoreemi kolmnurga AA_1B jaoks saame:

$$\frac{AA_1}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \angle AA_1B} = \frac{\frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}}{\cos(\frac{1}{2}(\gamma - \beta))},$$

millega on väide tõestatud. ■

Lause 2.4.38. Võrdhaarses kolmnurgas ABC tipunurgaga B ja alusega $AC = b$, saab alusnurga poolitaja AA_1 pikkust l_a arvutada valemitega

$$l_a = \frac{b \cos(\frac{1}{2} \angle ABC)}{\sin(45^\circ + \frac{3}{4} \angle ABC)}$$

ja

$$l_a = m \sqrt{2 + \frac{m}{n}}, \quad \text{kus} \quad m = A_1C \quad \text{ja} \quad n = A_1B.$$

Lause 2.4.39. Täisnurkses kolmnurgas ABC täisnurgaga C ning kaatetidega a ja b , saab täisnurga nurgapoolitaja pikkust l_c arvutada valemiga

$$l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

b) Nurgapoolitajaga seotud võrratused

Lause 2.4.40. Kui kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitaja AA_1 , siis kehtivad võrratused

$$AB > A_1B \quad \text{ja} \quad AC > A_1C.$$

Tõestus.

- Tõestame esimese võrratuse. Teine tõestatakse analoogiliselt.
- Kuna nurk AA_1B on kolmnurga AA_1C välisnurk, siis

$$\angle AA_1B = \angle CAA_1 + \angle ACA_1 > \angle CAA_1 = \angle BAA_1.$$

- Viimasest järeldub kohe, et $AB > A_1B$. ■

Lause 2.4.41. Kui võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AC on tõmmatud nurgapoolitaja AA_1 , siis kehtib võrratus

$$AA_1 < 2CA_1.$$

Tõestus.

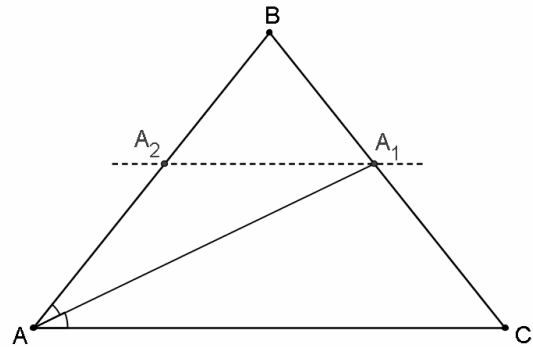
- Tõmbame läbi punkti A_1 alusega AC paralleelse sirge. Olgu A_2 selle sirge ja külje AB lõikepunkt.

- Kolmnurk AA_1A_2 on võrdhaarne, kuna

$$\angle AA_1A_2 = \angle CAA_1 = \angle A_1AA_2.$$

- Seega saame, et $AA_2 = A_2A_1 = A_1C$.
- Kolmnurga võrratuse abil saame lõpuks, et

$$2CA_1 = AA_2 + A_2A_1 > AA_1. \quad \blacksquare$$



Lause 2.4.42. Kui AA_1 on kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja O nurgapoolitajate lõikepunkt, siis

$$AO > OA_1.$$

Tõestus.

- See tulemus järeldeb vahetult teoreemist 2.4.8., mille põhjal

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}. \quad \blacksquare$$

4.8. Nurgapoolitajad ja kolmnurkade võrdsuse tunnused

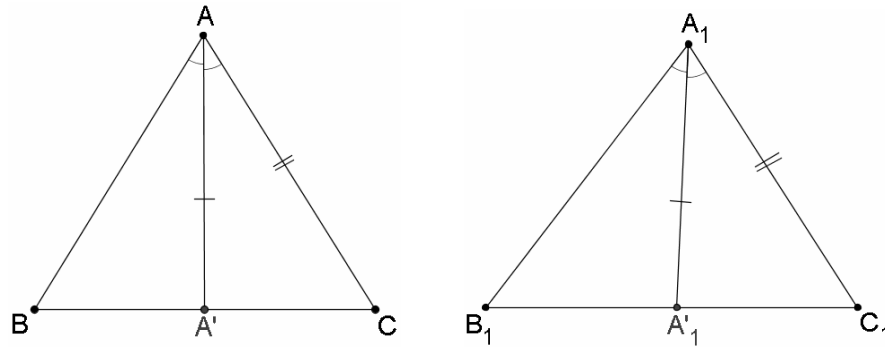
Vaatleme nurgapoolitajate abil sõnastatavaid kolmnurkade võrdsuse tunnuseid.

Teoreem 2.4.43. Kaks kolmnurka on võrdsed, kui kehtib üks järgmistest tingimustest:

- ühe kolmnurga nurk, selle lähiskülg ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitaja on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurgaga, selle nurga lähisküljega ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitajaga;
- ühe kolmnurga nurk, selle vastaskülg ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitaja on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurgaga, selle nurga vastasküljega ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitajaga;
- ühe kolmnurga kolm nurgapoolitajat on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme nurgapoolitajaga.

Teoreemi a) osa tõestus.

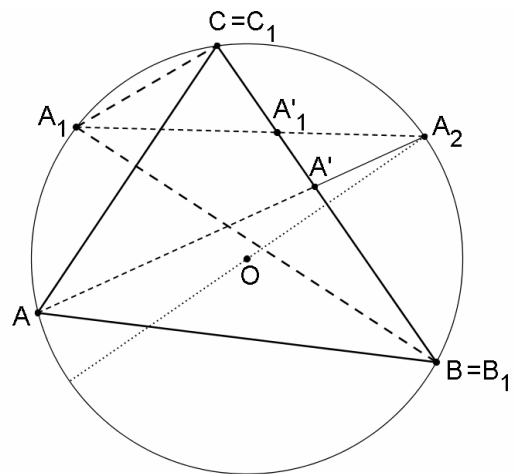
- Olgu kolmnurga ABC nurk BAC , selle lähiskülge AC ja selle nurga nurgapoolitaja AA' vastavalt võrdsed kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgaga $B_1A_1C_1$, selle lähisküljega A_1C_1 ja selle nurga nurgapoolitajaga $A_1A'_1$.



- Kuna $\frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$, siis kolmnurgad $AA'C$ ja $A_1A'_1C_1$ on võrdsed kahe külje ja nende vahelise nurga järgi.
- Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub ka nurkade $A'CA$ ja $A'_1C_1A_1$ võrdsus.
- Seega on kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ võrdsed ühe külje ja selle lähisnurkade järgi. ■

Teoreemi b) osa tõestus.

- Olgu kolmnurga ABC nurk BAC , selle vastaskülge BC ja selle nurga nurgapoolitaja AA' on vastavalt võrdsed kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgaga $B_1A_1C_1$, selle lähisküljega B_1C_1 ja selle nurga nurgapoolitajaga $A_1A'_1$.



- Oletame vastuväiteliselt, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ ei ole võrdsed.
- Joonistame kolmnurga ABC ja selle ümberringjoone keskpunktiga O . Lisame joonisele ka nurgapoolitaja AA' ja pikendame seda üle punkti A' kuni lõikumiseni ümberringjoonega punktis A_2 .
- Nüüd kanname joonisele kolmnurga $A_1B_1C_1$ nii, et kolmnurkade võrdsed küljed BC ja B_1C_1 langeksid kokku, kolmnurkade tipud A ja A_1 asuksid diameetrist A_2O ühel ja samal pooltasandil ja A_1 oleks ringjoone punkt. Viimane on võimalik sellepärast, et $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ja need nurgad toetuvad ühele ja samale kõõlule BC .
- Nurgapoolitaja $A_1A'_1$ läbib samuti punkti A_2 , kuna A_2 on kaare BC keskpunkt.

- Vastuväitelisest oletusest, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ ei ole võrdsed, ja tehtud konstruktsioonist järeldub, et punktid A ja A_1 ei ühti. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt A_1 asub kaarel AC .
- Siis ilmselt kehtivad järgmised võrratused lõikude pikkuste kohta

$$AA_2 > A_1A_2 \quad \text{ja} \quad A_2A' < A_2A'_1.$$
- Seega saame

$$AA' = AA_2 - A_2A' > A_1A_2 - A_2A'_1 = A_1A'_1,$$
 mis on vastuolus eeldusega, et nurgapoolitajad AA' ja $A_1A'_1$ on võrdsed.
- Järelikult, kolmnurkade tipud A ja A_1 langevad kokku ning kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed. ■

Teoreemi c) osa tõestus.

- Olgu kolmnurga Δ_1 nurgapoolitajad vastavalt võrdsed kolmnurga Δ_2 nurgapoolitajatega. Nende kolmnurkade vastavateks külgedeks nimetame neid külgi, millele on tõmmatud vastavalt võrdsed nurgapoolitajad.
- Väite tõestamiseks piisab vaadelda kolme järgmist juhtumit:
 - 1) ühe kolmnurga kõik küljed on teise kolmnurga vastavate külgedega võrdsed;
 - 2) ühe kolmnurga ükski külg ei ole teise kolmnurga vastavast küljest väiksem (kui ühe kolmnurga kõik küljed on teise kolmnurga vastavate külgedega võrdsed, siis realiseerub juhtum 1);
 - 3) ühe kolmnurga külgedest ainult üks külg on teise kolmnurga vastavast küljest väiksem.
- Vaatleme esimest juhtumit.
- Kui nende kolmnurkade kõik vastavad küljed on võrdsed, siis on ka need kolmnurgad omavahel võrdsed (kolmnurkade võrdsuse tunnuse KKK järgi).
- Vaatleme teist juhtumit.
- Üldisust kitsendamata eeldame, et kolmnurga Δ_1 ükski külg ei ole kolmnurga Δ_2 vastavast küljest väiksem, kusjuures vähemalt üks kolmnurga Δ_1 külg on kolmnurga Δ_2 vastavast küljest suurem.
- Märgime, et siis kolmnurgad ei saa olla sarnased teguriga $k > 1$. Sarnasuse korral oleksid ühe kolmnurga nurgapoolitajad teise kolmnurga vastavatest nurgapoolitajatest suuremad, mis on vastuolu.
- Järelikult, kolmnurkadel Δ_1 ja Δ_2 leiduvad mittevõrdsed nurgad.
- Seega leidub kolmnurgas Δ_1 nurk α_1 , mis on väiksem vastavast nurgast α_2 kolmnurgas Δ_2 .

- Kui nurga α_1 lähisküljed on b_1 ja c_1 ning nurga α_2 lähisküljed on b_2 ja c_2 , siis kolmnurga Δ_1 nurga α_1 nurgapoolitaja l_1 ja kolmnurga Δ_2 nurga α_2 nurgapoolitaja l_2 avalduvad kujul (vt Lause 2.4.36.)

$$l_1 = \frac{2b_1c_1 \cos(\frac{1}{2}\alpha_1)}{b_1 + c_1} \quad \text{ja} \quad l_2 = \frac{2b_2c_2 \cos(\frac{1}{2}\alpha_2)}{b_2 + c_2}.$$

- Sellest, et $\alpha_2 > \alpha_1$, $b_2 \leq b_1$ ja $c_2 \leq c_1$, järeldub range võrratus $l_2 < l_1$, mis on vastuolus eeldusega.
- Vaatleme kolmandat juhtumit.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kolmnurga Δ_1 külgede a_1 , b_1 ja c_1 vastavateks külgedeks kolmnurgas Δ_2 on a_2 , b_2 ja c_2 , kusjuures

$$a_1 < a_2, \quad b_1 \geq b_2, \quad c_1 \geq c_2.$$

- Siis kolmnurga Δ_1 nurgapoolitaja l_{a_1} ja kolmnurga Δ_2 nurgapoolitaja l_{a_2} ruudud avalduvad kujul (vt Lause 2.4.35.)

$$l_{a_1}^2 = \frac{b_1c_1((b_1 + c_1)^2 - a_1^2)}{(b_1 + c_1)^2} \quad \text{ja} \quad l_{a_2}^2 = \frac{b_2c_2((b_2 + c_2)^2 - a_2^2)}{(b_2 + c_2)^2}.$$

- Külgede vahelistest seostest ja viimastest võrdustest järeldub, et $l_{a_1}^2 > l_{a_2}^2$, mis on vastuolus eeldusega.
- Seega võrdsuse tunnus kolme nurgapoolitaja järgi on tõestatud. ■

4.9. Nurgapoolitajaga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdhaarne või täisnurkne

Nagu mediaanide korralgi õnnestub ka nurgapoolitajate korral leida piisavaid ja tarvilikke tingimusi kolmnurga liigi määramiseks.

Teoreem 2.4.44. *Kui kolmnurga ABC nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 lõikepunkt on O , siis kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

- $BB_1 = CC_1$ (Steiner-Lehmus'i teoreem);
- $\angle AB_1C_1 = 2\angle BB_1C_1$ ja $\angle AC_1B_1 = 2\angle CC_1B_1$;
- $AO \perp B_1C_1$.

Teoreemi a) osa on tuntud ka Steiner-Lehmus'i teoreemina (vt [38]).

Teoreemi a) osa tõestus.

- Tingimuse a) tarvilikkus.
- Kui kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC , siis kolmnurkade BB_1C ja CC_1B võrdsusest (tunnus NKN) järeldub nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 võrdsus.

- Tingimuse a) piisavus.
- Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC võrdsed nurgapoolitajad.
- Olgu punkt A_1 niisugune, et

$$BA_1 \parallel CB_1 \quad \text{ja} \quad CA_1 \parallel BB_1.$$

- Siis tekib rööpkülik BB_1CA_1 .
- Kuna

$$CC_1 = BB_1 = CA_1,$$

siis kolmnurk CC_1A_1 on võrdhaarne.

- Olgu $\angle ACB = 2\gamma$ ja $\angle ABC = 2\beta$.
- Oletame vastuväiteliselt, et külgede AB ja AC pikkused ei ole võrdsed. Siis üldisust kitsendamata võime eeldada, et näiteks $AB > AC$. See tähendab, et siis $\gamma > \beta$.
- Vaatleme kahte kolmnurka BCC_1 ja BCA_1 . Lõik BC on kolmnurkade ühine külg, $CC_1 = CA_1$ ja nurkade BCC_1 ja BCA_1 vahel kehtib seos

$$\angle BCC_1 = \gamma > \beta = \angle CBB_1 = \angle BCA_1,$$

kuna nurgad CBB_1 ja BCA_1 on põiknurgad. Kuna suuremale nurgale, mis on moodustatud kahe võrdse külje abil, vastab ka suurem külg, siis

$$BC_1 > BA_1.$$

- Järelikult,

$$\angle BA_1C_1 > \angle BC_1A_1.$$

- Kuna võrdhaarse kolmnurga CC_1A_1 alusnurgad CC_1A_1 ja CA_1C_1 on võrdsed, siis kehtib järgmine võrratus

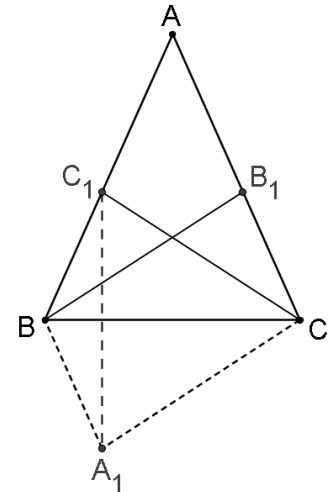
$$\angle BA_1C = \angle CA_1C_1 + \angle BA_1C_1 > \angle CC_1A_1 + \angle BC_1A_1 = \angle BC_1C.$$

- Pidades silmas rööpküliku vastasnurkade võrdsust (s.t. $\angle BA_1C = \angle BB_1C$), saame viimasest võrratusest, et

$$180^\circ - 2\gamma - \beta > 180^\circ - \gamma - 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta > \gamma,$$

mis on vastuolus eeldusega $\gamma > \beta$.

- Seega $AB = AC$ ja kolmnurk ABC on võrdhaarne, mida oligi vaja tõestada. ■



Teoreemi b) ja c) osa tõestuseks piisab, kui näidata, et mõlemad tingimused on samaväärsed a) osas antud tingimusega.

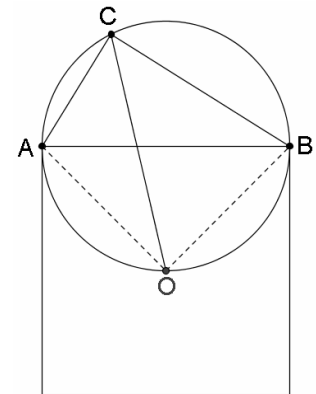
Teoreem 2.4.45. Kui ABC on isekülgne kolmnurk, mille küljele AB on konstrueeritud välisruut keskpunktiga O , siis kolmnurk ABC on täisnurkne ($\angle ACB = 90^\circ$) parajasti siis, kui CO on nurga ACB nurgapoolitaja.

Tõestus.

- Tõestame esmalt tarvilikkuse.
- Olgu kolmnurk ABC täisnurkne, s.t.

$$\angle ACB = 90^\circ.$$

- Kuna ruudu diagonaalid on alati risti ja võrdsed, siis ka $\angle AOB = 90^\circ$ ja $AO = BO$.
- Sellest järeldub, et $ACBO$ on kõõlnelinurk (vastasnurkade summa on 180 kraadi).
- Nurgad ACO ja BCO toetuvad võrdsetele kõõludele AO ja BO , seega on need võrdsed.
- Järelikult, CO on nurga ACB nurgapoolitaja.
- Piisavus.



- Olgu ABC isekülgne kolmnurk ja CO nurga ACB nurgapoolitaja.
- Kasutame järgmisi tähistusi:

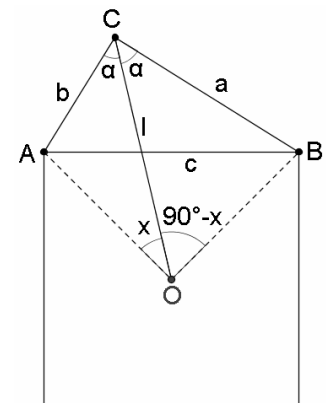
$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad CO = l, \\ \angle ACO = \angle BCO = \alpha.$$

- Piisavuse tõestamiseks on vaja näidata, et $\alpha = 45^\circ$.
- Teame, et $\angle AOB = 90^\circ$. Olgu $\angle AOC = x$, siis $\angle BOC = 90^\circ - x$.
- Pythagorase teoreemi kohaselt

$$AO = BO = \frac{1}{\sqrt{2}}c.$$

- Kasutame nüüd koosinusteoreemi kolmnurkade ACO ja BCO jaoks. Saame külgede a ja b ($a \neq b$) leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}c^2 + l^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot l \cdot \cos x \\ a^2 = \frac{1}{2}c^2 + l^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot l \cdot \cos(90^\circ - x) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b^2 - a^2}{2l} = \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot (\sin x - \cos x)$$



ning külgede AO ja BO leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c^2 = b^2 + l^2 - 2b \cdot l \cdot \cos\alpha \\ \frac{1}{2}c^2 = a^2 + l^2 - 2a \cdot l \cdot \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2l} = \cos\alpha.$$

- Kokkuvõttes saame, et

$$(b-a) \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot (\sin x - \cos x).$$

- Samade kolmnurkade jaoks, kasutades siinusteoreemi, saame

$$\begin{cases} \frac{b}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}c}{\sin\alpha} \\ \frac{a}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}c}{\sin\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

- Võrreldes siinus- ja koosinusteoreemide abil saadud tulemusi, saame

$$(b-a) \cdot \cos\alpha = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos x} (\sin x - \cos x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ. \quad \blacksquare$$

§ 5. Nurgapoolitajad ja kolmnurgaga seotud ringjooned

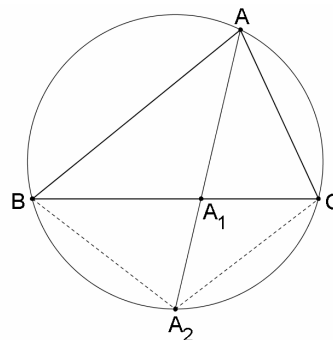
Selles paragrahvis tõestame mõned seosed kolmnurga nurgapoolitajate ja kolmnurgaga seotud ringjoonte vahel.

5.1. Põhitulemused

Teoreem 2.5.1. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 , siis on kaared BA_2 ja A_2C võrdsed.*

Tõestus.

- Kuna piirdenurgad BAA_2 ja A_2AC on võrdsed, siis on võrdsed ka kaartele BA_2 ja A_2C toetuvad kesknurgad ning seega on võrdsed ka need kaared ise. ■



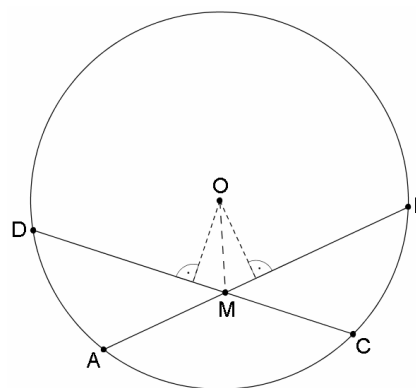
Järeldus 2.5.2. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 , siis kõõlud BA_2 ja A_2C on võrdsed.*

Järeldus 2.5.3. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 , siis nurgad CBA_2 ja BCA_2 on võrdsed.*

Lause 2.5.4. *Ringjoone keskpunkt ja kahe võrdse kuid diameetrist erineva kõõlu lõikepunkt asuvad sirgel, mis poolitab kõõludevahelise nurga.*

Tõestus.

- Olgu AB ja CD antud ringjoone kaks punktis M lõikuvat võrdset kõõlu.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et ringjoone keskpunkt O asub nurga DMB sees. Tõestame, et MO on selle nurga poolitaja.
- Sellest, et ringjoone võrdsed kõõlud asuvad ringjoone keskpunktist võrdsetel kaugustel, järeldub, et punkti O kaugused nurga DMB haaradest on võrdsed.
- Seega punkt O asub nurga DMB poolitajal (vt Teoreem 2.4.2.) ehk sirge MO on kõõlude AB ja CD vahelise nurga poolitaja. ■



5.2. Kolmnurga nurgapoolitajate pikendused kuni ümberringjooneni ja nende omadused

Lause 2.5.5. Kui kolmnurga ABC sisenurga ACB poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis C_2 , siis kehtib võrratus

$$CC_2 > \frac{1}{2}(AC + BC).$$

Tõestus.

- Toome sisse standardsed tähistused:

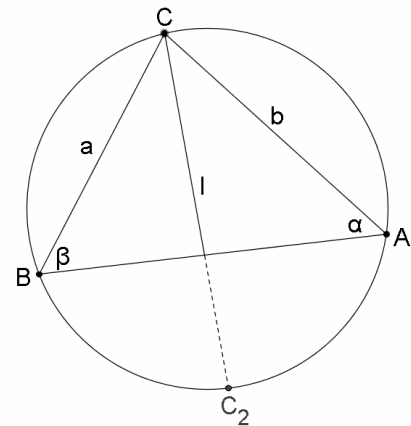
$$BC = a, \quad AC = b, \quad CC_2 = l,$$

$$\angle BAC = \alpha, \quad \angle ABC = \beta.$$

- Lause tõestuseks on vaja näidata, et

$$l > \frac{1}{2}(a + b)$$

- Olgu d kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter.



- Siinusteoreemist (üldkujul $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$) järeldeb, et suvalise ringjoone kõõlu pikkus võrdub selle ringjoone diameetri d ja sellele kõõlule toetuva piirde nurga siinuse korrutisega.
- Avaldame nurga CAC_2 suuruse nurkade α ja β kaudu:

$$\angle CAC_2 = \alpha + \angle BAC_2 = \alpha + \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\pi + \alpha - \beta).$$

- Siis siinusteoreemi ja taandamisvalemi $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi$ põhjal saame

$$a = d \sin \alpha, \quad b = d \sin \beta, \quad l = d \sin \frac{\pi - (\beta - \alpha)}{2} = d \cos \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

- Seega saame tõestatava võrratusega samaväärsed võrratused

$$l > \frac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow d \cos \frac{\beta - \alpha}{2} > \frac{1}{2}(d \sin \alpha + d \sin \beta) \Leftrightarrow$$

$$2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} > \sin \alpha + \sin \beta.$$

- Kuna kehtib valem

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ja antud tingimustel $\cos \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$, siis

$$2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} > \sin \alpha + \sin \beta \Leftrightarrow 0 < \sin \frac{\alpha + \beta}{2} < 1.$$

- Viimane võrratus on aga tõene, kuna $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 90^\circ$, sest α ja β on kolmnurga ABC sisenurgad. ■

Teoreem 2.5.6. Kui kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis B_2 , punkt O on kolmnurga siseringjoone keskpunkt ja O_1 külge AC puudutava külgringjoone keskpunkt, siis punktid A , C , O ja O_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel keskpunktiga B_2 .

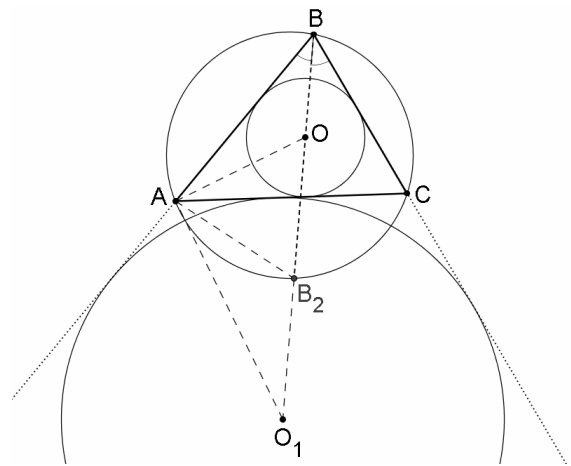
Tõestus.

- Nurk AOB_2 on kolmnurga AOB välisnurk, seega

$$\angle AOB_2 = \angle BAO + \angle ABO.$$

- Teame, et kolmnurga siseringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktiga (vt Teoreem 2.4.7.). Sellest järeldub, et

$$\angle AOB_2 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC).$$



- Avaldame nurga OAB_2 samade nurkade BAC ja ABC kaudu:

$$\angle OAB_2 = \angle OAC + \angle CAB_2 = \frac{1}{2} \angle BAC + \angle CBB_2 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC).$$

- Järelikult, kolmnurk AOB_2 on võrdhaarne, kusjuures $AB_2 = B_2O$.
- Kuna $AB_2 = B_2C$ (vt Järeldus 2.5.2.), siis kehtib ka võrdus $CB_2 = B_2O$.
- Seega punktid A , C ja O asuvad ringjoonel, mille keskpunktiks on B_2 . Näitame, et sellel ringjoonel paikneb ka punkt O_1 .
- Teame, et nurga BAC välisnurga poolitaja läbib külgringjoone keskpunkti O_1 (vt Teoreem 2.4.20.). Samas teame, et kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga (vt Lause 2.4.22.). Seega kolmnurk OAO_1 on täisnurkne, milles eelnevalt tõestatu põhjal $AB_2 = B_2O$.
- Järelikult on B_2 täisnurkse kolmnurga OAO_1 hüpotenuusi keskpunkt ja seega ka $B_2O_1 = B_2O$.
- See tähendab, et ka punkt O_1 asub punktidega A , C ja O ühel ja samal ringjoonel keskpunktiga B_2 . ■

Järeldus 2.5.7. Kui kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis B_2 ja punkt O on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt, siis kolmnurgad AB_2O ja CB_2O on võrdhaarsed.

Teoreem 2.5.8. Kui kolmnurga ABC sisenurkade poolitajate pikendused lõikavad selle kolmnurga ümberringjoont vastavalt punktides A_2 , B_2 ja C_2 ning punkt O on nurgapoolitajate lõikepunkt, siis on tõesed võrdused

$$a) \quad \frac{OB \cdot OC}{OA_2} = \frac{OA \cdot OC}{OB_2} = \frac{OA \cdot OB}{OC_2} = 2r,$$

kus r on kolmnurga ABC siseringjoone raadius;

$$b) \quad \frac{OB_2 \cdot OC_2}{OA} = \frac{OA_2 \cdot OC_2}{OB} = \frac{OA_2 \cdot OB_2}{OC} = R,$$

kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius.

Teoreemi osa a) tõestus.

- Punkt B_2 on kolmnurga AOC ümberringjoone keskpunkt ja OB_2 selle raadius (vt Teoreem 2.5.6.).
- Kasutame siinusteoreemi kolmnurga AOC külje AO avaldamiseks:

$$AO = 2OB_2 \sin \angle ACO.$$

- Kuna kolmnurga ABC siseringjoone raadius r langeb kokku punktist O tõmmatud kolmnurga AOC kõrgusega, siis kehtib võrdus

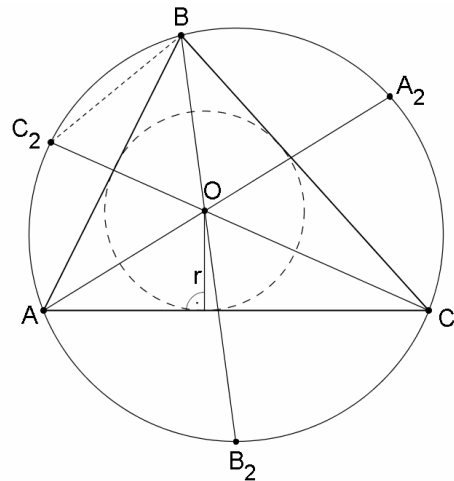
$$OC = \frac{r}{\sin \angle ACO}.$$

- Järelikult,

$$\frac{OA \cdot OC}{OB_2} = 2r.$$

- Analoogiliselt saab tõestada, et

$$\frac{OB \cdot OC}{OA_2} = \frac{OA \cdot OB}{OC_2} = 2r.$$



Teoreemi osa b) tõestus.

- Sellest, et

$$\angle OBC_2 = \angle BOC_2 = 180^\circ - \angle BOC \quad \text{ja} \quad \angle BC_2O = \angle BC_2C = \angle BAC,$$

saame

$$\frac{OC_2}{BC} = \frac{BO}{BC} \cdot \frac{OC_2}{BO} = \frac{\sin \angle BCO}{\sin \angle BOC} \cdot \frac{\sin \angle OBC_2}{\sin \angle BC_2O} = \frac{\sin \angle BCO}{\sin \angle BAC}.$$

- Siinusteoreemi kasutades, saame

$$BO = 2OA_2 \sin \angle BCO.$$

- Järelikult,

$$\frac{OA_2 \cdot OC_2}{OB} = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = R.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et

$$\frac{OB_2 \cdot OC_2}{OA} = \frac{OA_2 \cdot OB_2}{OC} = R. \quad \blacksquare$$

Teoreem 2.5.9. Kui kolmnurga ABC nurgapoolitajate pikendused lõikavad selle kolmnurga ümberringjoont vastavalt punktides A_2 , B_2 ja C_2 , siis kehtib võrdus

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_2 B_2 C_2}} = \frac{2r}{R},$$

kus r ja R on vastavalt kolmnurga ABC siseringjoone ja ümberringjoone raadiused.

Tõestuse skeem.

- Teoreemi tõestuseks võib kasutada seoseid:

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad \text{ja} \quad \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R},$$

kus S on kolmnurga pindala, α , β ja γ on selle nurgad, r ja R on vastavalt kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone raadiused.

- Teiseks võimaluseks on mõlema kolmnurga jaoks valemi $S = \frac{abc}{4R}$ kasutamine koos kolmnurkade sarnasusest

$$\Delta COB \sim \Delta B_2 OC_2, \quad \Delta COA \sim \Delta A_2 OC_2, \quad \Delta BOA \sim \Delta A_2 OB_2$$

tulenevate seostega. Siinjuures O on nagu ikka kolmnurga ABC sisenurkade poolitajate lõikepunkt. \square

Teoreem 2.5.10. Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 , siis lõigu AA_2 ristprojektsioonid külgedele AB ja AC , või nende pikendustele, on võrdsed ja selle projektsiooni pikkus on võrdne külgede AB ja AC pikkuste poolsummaga.

Tõestus.

- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AB \leq AC$.
- Vaatleme külje AC punkti B' , mis on punktiga B sümmeetriline nurgapoolitaja AA_1 suhtes (vt Järeldus 2.4.3.).

- Kuna punktid B ja B' on sümmeetrilised ja $A, A_2 \in AA_1$, siis ilmselt

$$AB = AB' \text{ ja } A_2B = A_2B'.$$

- Kuna võrdsed nurgad $\angle BAA_2 = \angle CAA_2$ toetuvad võrdsetele kõõludele, siis $BA_2 = CA_2$ (vt Järeldus 2.5.2.).

- Seega saame, et

$$B'A_2 = BA_2 = CA_2.$$

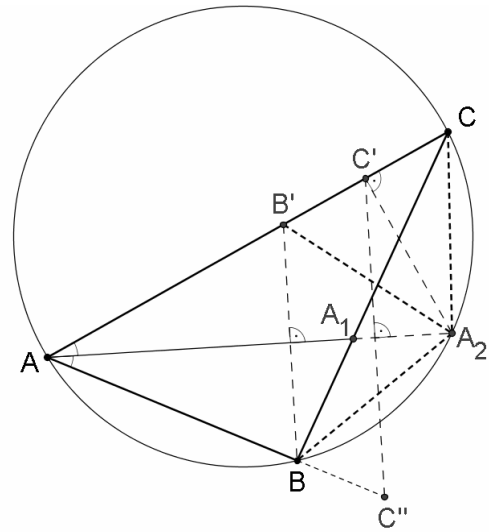
- Järelikult, kolmnurk $B'A_2C$ on võrdhaarne ja selle kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus A_2C' on ka selle kolmnurga mediaan (s.t. $CC' = B'C'$).

- Lõpuks saame, et

$$AC' = AB' + B'C' = AB + \frac{AC - AB}{2} = \frac{AB + AC}{2}.$$

- Kui vaadata nüüd punktiga C' sümmeetrilist punkti C'' nurgapoolitaja AA_1 suhtes külje AB pikendusel, siis AC'' ongi AA_2 projektsiooniks sirgel AB ja

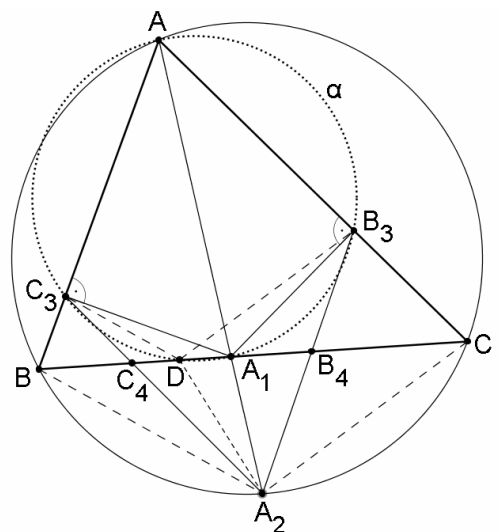
$$AC'' = AC' = \frac{AB + AC}{2}. \quad \blacksquare$$



Teoreem 2.5.11. Kui teravnurkse kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 ning A_1B_3 ja A_1C_3 on vastavalt külgedele AC ja AB tõmmatud ristlõigud, siis $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_3A_2C_3}$.

Tõestus.

- Kuna $\angle AC_3A_1 = \angle AB_3A_1 = 90^\circ$, siis $AB_3A_1C_3$ on kõõlnelinurk ehk punktid B_3 ja C_3 kuuluvad ringjoonele α diameetriga AA_1 .
- Olgu D ringjoone α ja külje BC lõikepunkt (kui kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC , siis punktid D ja A_1 langevad kokku).
- Kuna AA_1 on nurga BAC poolitaja, nurgad BAA_2 ja BCA_2 toetuvad kolmnurga ABC ümberringjoone ühele ja samale kaarele BA_2 ning



nurgad A_1AB_3 ja A_1DB_3 toetuvad ringjoone α ühele ja samale kaarele A_1B_3 , siis

$$\angle DCA_2 = \angle BCA_2 = \angle BAA_2 = \angle A_1AB_3 = \angle A_1DB_3 = \angle CDB_3.$$

- Viimasest järeldub, et $CA_2 \parallel DB_3$.
- Analoogiliselt võib tõestada, et ka $BA_2 \parallel DC_3$.
- Olgu B_4 ja C_4 külje BC lõikepunktid vastavalt külgedega A_2B_3 ja A_2C_3 .
- Kuna CA_2DB_3 on trapets ja B_4 selle trapetsi diagonaalide lõikepunkt, siis ilmselt $S_{\Delta A_2B_4D} = S_{\Delta CB_4B_3}$.
- Analoogiliselt trapetsist BA_2DC_3 saame võrduse $S_{\Delta A_2C_4D} = S_{\Delta BC_4C_3}$.
- Järelikult,

$$S_{\Delta ABC} = S_{AB_3B_4C_4C_3} + S_{\Delta CB_4B_3} + S_{\Delta BC_4C_3} = S_{AB_3B_4C_4C_3} + S_{\Delta A_2B_4D} + S_{\Delta A_2C_4D} = S_{AB_3A_2C_3}. \quad \blacksquare$$

5.3. Täiendavaid tulemusi kolmnurga nurgapoolitajate ja ümberringjoone kohta

Lause 2.5.12. Kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikkuse l_a saab leida kolmnurga ümberringjoone raadiuse R ning teiste nurkade suuruste β ja γ kaudu valemiga

$$l_a = 2R \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos(\frac{1}{2}(\beta - \gamma))}.$$

Tõestus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja, AD selle kolmnurga kõrgus ja R ümberringjoone raadius.

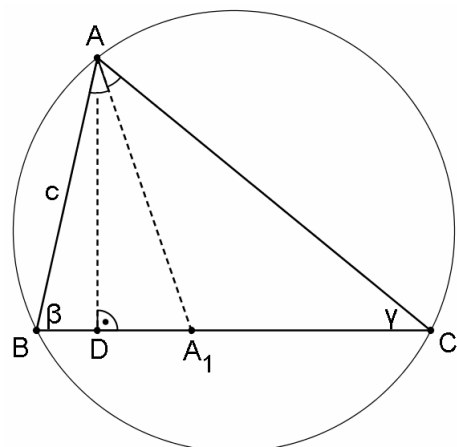
- Tähistame

$$AB = c, \quad \angle BAC = \alpha,$$

$$\angle ABC = \beta \quad \text{ja} \quad \angle ACB = \gamma.$$

- Täisnurksest kolmnurgast ADB ja siinusteoreemist kolmnurgas ABC saame, et

$$AD = c \sin \beta = 2R \sin \beta \sin \gamma.$$



- Teiselt poolt, kolmnurgast AA_1D saame

$$AD = AA_1 \sin \angle AA_1D = l_a \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha) =$$

$$= l_a \sin(\frac{1}{2}(\pi + \beta - \gamma)) = l_a \cos(\frac{1}{2}(\beta - \gamma)).$$

- Viimasest kahest võrdusest järeldubki lause 2.5.12. väide. ■

Teoreem 2.5.13. Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja on CC_1 ning selle kolmnurga ümberringjoone puutuja punktis C lõikab sirget AB punktis L , siis $CL = C_1L$.

Tõestus.

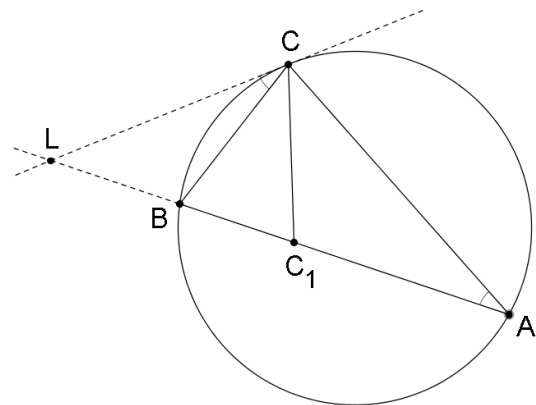
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt L asub kolmnurga külje AB pikendusel üle punkti B .
- Kuna kõõlu ja puutuja vaheline nurk on võrdne sellele kõõlule toetuva piirdenurgaga, siis

$$\angle LCB = \angle BAC.$$

- Sellest, et nurk CC_1B on kolmnurga CC_1A välisnurk, saame

$$\angle LCC_1 = \angle LCB + \angle BCC_1 = \angle BAC + \angle ACC_1 = \angle CC_1B.$$

- Järelikult kolmnurk CLC_1 on võrdhaarne ja $CL = C_1L$. ■



Teoreem 2.5.14. Kui kolmnurga ABC nurga ACB välisnurga poolitaja lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis D . Siis $AD = BD$.

Tõestus.

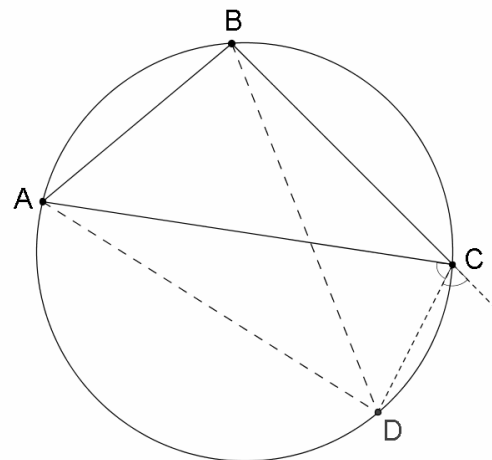
- Olgu $\angle ACB = 2\gamma$.
- Avaldame kolmnurga ABD nurgad suuruse γ kaudu.
- Kuna

$$\angle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma,$$

siis

$$\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ - \gamma$$

(toetuvad kaarele AD).



- Sellest, et nurgad ADB ja ACB toetuvad ühele ja samale kaarele AB , järelduvad võrdused

$$\angle ADB = \angle ACB = 2\gamma \text{ ning}$$

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle ADB - \angle ABD = 180^\circ - 2\gamma - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \gamma.$$

- Seega kolmnurk ABD on võrdhaarne ja $AD = BD$. ■

Teoreem 2.5.15. Kui A_3 on kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja ja nurga ACB välisnurga poolitaja lõikepunkt ning A_4 sisenurga ACB poolitaja ja nurga ABC välisnurga poolitaja lõikepunkt, siis lõigu A_3A_4 keskpunkt K asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Tõestus.

- Teoreemi tõestamiseks piisab näidata, et nurk BAC võrdub nurgaga BKC .
- Kuna kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga (vt Lause 2.4.22.), siis

$$\angle A_4BA_3 = \angle A_3CA_4 = 90^\circ.$$

- Seega punktid B , C , A_3 ja A_4 asuvad ühel ja samal ringjoonel α diameetriga A_3A_4 ja keskpunktiga K (täisnurgad toetuvad ringjoone diameetritele).

- Sellest järeldub, et

$$\angle A_3A_4C = \angle A_3BC = \frac{1}{2} \angle ABC \quad \text{ja} \quad \angle A_4A_3B = \angle A_4CB = \frac{1}{2} \angle ACB.$$

- Olgu O nurgapoolitajate BA_3 ja CA_4 lõikepunkt. Kuna BOA_4 on kolmnurga OA_3A_4 välisnurk, saame

$$\angle BOA_4 = \angle A_3A_4O + \angle A_4A_3O = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB).$$

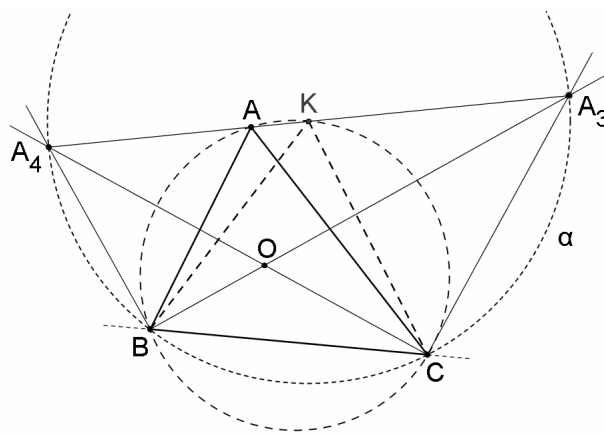
- Järelikult,

$$\angle BA_4C = 90^\circ - \angle BOA_4 = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC - \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

- Kuna BA_4C on ringjoone α piirdenurk, BKC samale kõõlule toetuv kesknurk ja $\angle BA_4C = \frac{1}{2} \angle BAC$, siis

$$\angle BAC = \angle BKC.$$

Järelikult punktid A ja K asuvad ühel ja samal ringjoonel punktidega B ja C . ■



Lause 2.5.16. Kui kolmnurga ABC sisenurkade poolitajate BB_1 ja CC_1 aluspunktid asuvad vastavalt külgedel AC ja AB ning kolmnurkade ABB_1 ja ACC_1 ümberringjoonte lõikepunkt asetseb küljel BC , siis $\angle BAC = 60^\circ$.

Tõestus.

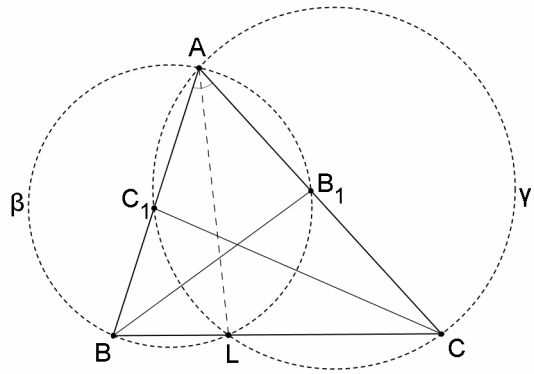
- Olgu L kolmnurkade ABB_1 ja ACC_1 vastavate ümberringjoonte β ja γ lõikepunkt, mis asub küljel BC .
- Siis piirdenurgad LAB_1 ja LBB_1 toetuvad ringjoone β ühele ja samale kaarele LB_1 .
- Samuti toetuvad piirdenurgad LAC_1 ja LCC_1 ringjoone γ ühele ja samale kaarele LC_1 .
- Kuna BB_1 ja CC_1 on nurgapoolitajad, siis

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB).$$

- Siis võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\ \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \end{cases}$$

saame, et $\angle BAC = 60^\circ$. ■



§ 6. Näiteülesandeid

Ülesanne 2.6.1. (vt [22], ül. 94.50).

Olgu AA_1 kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja punkt C_1 valitud kolmnurga küljel AC nii, et $CC_1 = CA_1$. Sirge A_1C_1 ja nurga ABC poolitaja lõikuvad punktis B_1 . Tõestada, et $AB_1 = A_1B_1$.

Ülesanne 2.6.2. (vt [22], ül. 99.102).

Kolmnurga ABC nurgapoolitajal BB_1 on valitud punkt O nii, et

$$\angle OCA = \angle BAC + \angle ABC.$$

Sirged AO ja CO lõikavad kolmnurga külgi BC ja AB vastavalt punktides A_1 ja C_1 . Tõestada, et nurk $A_1C_1B_1$ on täisnurk.

Ülesanne 2.6.3. (vt [12], ül. 309).

Kolmnurga ABC nurgapoolitajad on AA_1 ja BB_1 . Tõestada, et kui $AC < BC$, siis $AB_1 < A_1B_1 < BA_1$.

Ülesanne 2.6.4. (vt [22], ül. 99.95).

Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ja O selle diagonaalide lõikepunkt. Olgu O' nelinurga $ABCD$ ümberringjoonel paiknev punkt, mis on sümmeetriline punktiga O lõigu AD suhtes. Tõestada, et $O'O$ on nurga $BO'C$ poolitaja.

Ülesanne 2.6.5. (vt [22], ül. 99.53).

Teravnurkse kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt D . Nurga CAD poolitaja pikendus lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis A_1 . Tõestada, et kui sirge A_1D on lõiguga AB risti, siis kas $AD = BD$ või $AD = AC$.

Ülesanne 2.6.6. (vt [45], ül. 9.19).

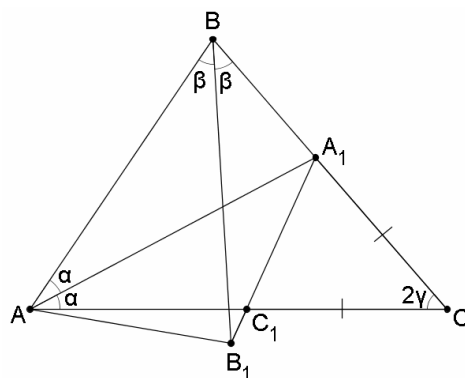
Kolmnurga ABC nurga ACB sisenurga ja välisnurga poolitajad lõikavad sirget AB vastavalt punktides C_1 ja C_2 . Tõestada, et kui $CC_1 = CC_2$, siis

$$AC^2 + BC^2 = 4R^2,$$

kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius.

Ülesande 2.6.1. lahendus.

- Olgu $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ ja $\angle ACB = 2\gamma$.
- Olgu $\angle CA_1C_1 = \varphi$, siis võrdhaarsest kolmnurgast CA_1C_1 saame
 $2\varphi + 2\gamma = 180^\circ$ ehk $\varphi = 90^\circ - \gamma$.
- Kolmnurgast AA_1C avaldame nurga AA_1B_1 :



$$\angle AA_1B_1 = 180^\circ - \alpha - 2\gamma - \varphi = 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$

- Kuna nurgad ABB_1 ja AA_1B_1 on võrdsed, siis ABA_1B_1 on kõõnelinurk.
- Piirdenurkade ABB_1 ja A_1BB_1 võrdsusest (BB_1 on nurga ABC poolitaja) järeldub ka kõõlude AB_1 ja A_1B_1 võrdsus. ■

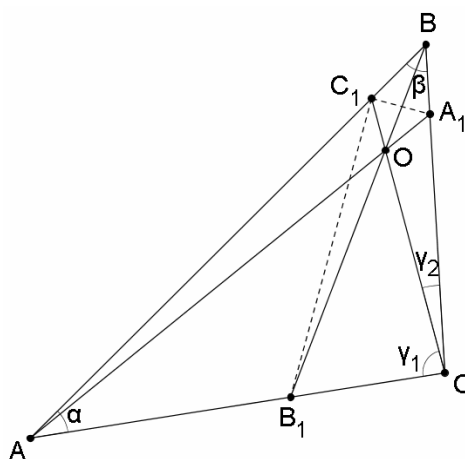
Ülesande 2.6.2. lahendus.

- Olgu $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle OCA = \gamma_1$ ja $\angle OCB = \gamma_2$.
- Ülesande tekstis antud võrdust ja kolmnurga ABC nurkade summa omadust kasutades, saame süsteemi:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ, \end{cases}$$

kust järeldub, et $2\gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$.

- Saadud võrdus tähendab, et CA on kolmnurga BCC_1 välisnurga poolitaja.
- Kuna B_1 on kolmnurga BCC_1 ühest tipust tõmmatud sisenurga poolitaja ja teisest tipust tõmmatud välisnurga poolitaja lõikepunkt, siis see on selle kolmnurga külgringjoone keskpunktiks (vt Teoreem 2.4.20.).
- Seega C_1B_1 on nurga AC_1C poolitaja (vt Teoreem 2.4.20.).
- Teame, et kolmnurga kahe sisenurga poolitaja aluspunktid ja kolmanda välisnurga poolitaja aluspunkt asuvad ühel ja samal sirgel (vt Teoreem 2.4.21.). Kasutades teoreemi kolmnurga BCC_1 jaoks saame, et C_1A_1 on kolmnurga CC_1B sisenurga poolitaja.
- Kuna kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga (vt Lause 2.4.22.), siis $C_1A_1 \perp C_1B_1$ ehk $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$. ■



Ülesande 2.6.3. lahendus.

- Joonestame alusega AB paralleelsed sirged läbi punktide A_1 ja B_1 ning tähistame nende lõikepunktid külgedega BC ja AC vastavalt A_2 ja B_2 .
- Kuna $AC < BC$, siis näiteks sirgel AC paiknevad punktid järgmises järjestuses: A , B_1 , B_2 ja C .
- Siis tekib kaks paari põiknurki:

$$\angle B_2A_1A = \angle BAA_1 \quad \text{ja} \quad \angle A_2B_1B = \angle ABB_1.$$

- Et AA_1 ja BB_1 on nurgapoolitajad, siis

$$\angle B_2A_1A = \angle CAA_1 \quad \text{ja} \quad \angle A_2B_1B = \angle CBB_1.$$

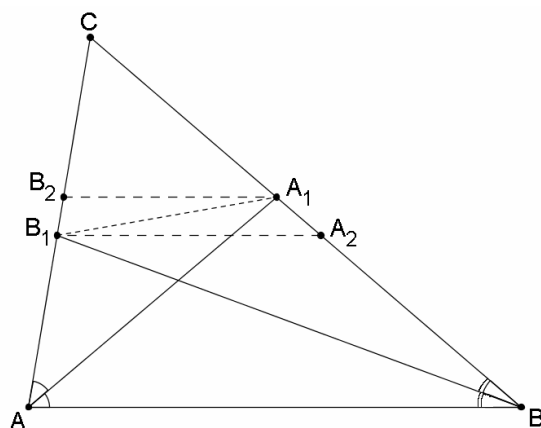
- Siis kolmnurga AB_1A_1 korral kehtib võrratus

$$\angle B_1A_1A < \angle B_2A_1A = \angle CAA_1.$$

- Kuna väiksema nurga vastas asub väiksem külg, siis $AB_1 < A_1B_1$.
- Analoogiliselt kolmnurgast BB_1A_1 saame, et

$$\angle A_1B_1B > \angle A_2B_1B = \angle CBB_1.$$

- Järelikult $A_1B_1 < BA_1$. ■



Ülesande 2.6.4. lahendus.

- Kuna O' on punktiga O sümmeetriline punkt lõigu AD suhtes, siis

$$\angle O'AD = \angle OAD.$$

- Sellest, et samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, saame

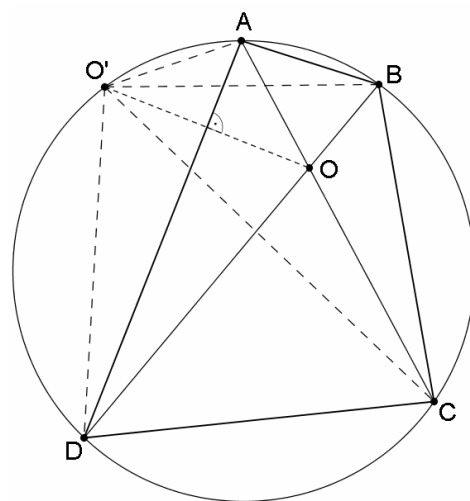
$$\angle O'BD = \angle O'AD = \angle OAD = \angle DBC.$$

- Analoogiliselt saame, et

$$\angle O'CA = \angle O'DA = \angle ADO = \angle ACB.$$

- Seega sirged BO ja CO on kolmnurga $BO'C$ nurgapoolitajad ja O nende lõikepunkt.

- Järelikult ka $O'O$ on nurga $BO'C$ poolitaja, kuna läbib kolmnurga $BO'C$ nurgapoolitajate lõikepunkti. ■



Ülesande 2.6.5. lahendus.

- Märgime, et

$$\angle A_1BD = \angle A_1AC = \angle A_1AD.$$

- Olgu O lõikude AA_1 ja BC lõikepunkt.
- Olgu D' punkti D projektsioon lõigule AB ja B' punktiga B sümmeetriline punkt punkti D' suhtes.
- Kui punkt B' langeb kokku punktiga A , siis $AD = BD$ (kuna punkt D asub lõigu AB keskristsirgel).
- Vastasel juhul

$$\angle A_1AD = \angle A_1BD = \angle A_1B'D.$$

- Seega punktid A , A_1 , D ja B' asuvad ühel ja samal ringjoonel (võrdsed nurgad A_1AD ja $A_1B'D$ toetuvad ühele ja samale kõõlule A_1D).

- Sellest, et kõõlnelinurga vastasnurkade summa on 180° , saame

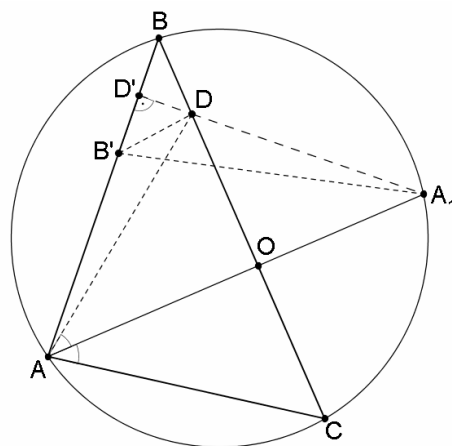
$$\angle AA_1D = 180^\circ - \angle AB'D = \angle DB'B = \angle DBA.$$

- Seega saame, et kolmnurgad BDD' ja A_1DO on sarnased ($\angle BDD' = \angle A_1DO$ ja $\angle DBD' = \angle OA_1D$).

- Järelikult

$$\angle A_1OD = \angle AOD = 90^\circ.$$

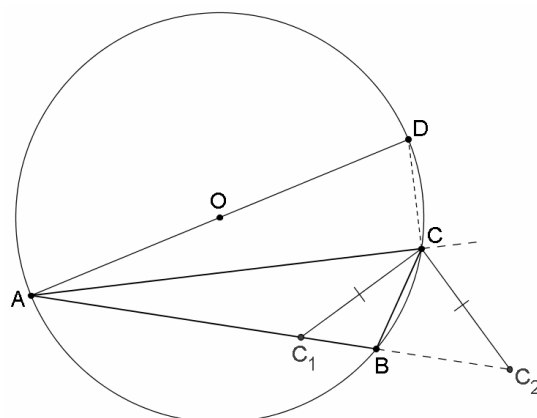
- Seega nurgapoolitaja AO on kolmnurgas ACD ka kõrguseks. See tähendab, et tegemist on võrdhaarse kolmnurgaga ja $AD = AC$. ■



Ülesande 2.6.6. lahendus.

- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punktid A , C_1 , B ja C_2 paiknevad sirgel AB toodud järjekorras (punktide järjestuse C_2 , A , C_1 ja B korral on tõestus analoogiline).
- Leiame kolmnurga CC_1C_2 nurgad. Kuna see kolmnurk on võrdhaarne ($CC_1 = CC_2$) ja $CC_1 \perp CC_2$ (vt Lause 2.4.22.), siis

$$\angle C_1CC_2 = 90^\circ \quad \text{ja} \quad \angle CC_1C_2 = 45^\circ.$$



- Kuna $\angle CC_1C_2$ on kolmnurga ACC_1 välisnurk, saame

$$2\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle C_1AC + \angle C_1CA) = 2\angle CC_1C_2 = 90^\circ.$$

- Viimasest võrdusest ja sellest, et kolmnurga ABC sisenurkade summa võrdub 180° , saame

$$\angle BAC = \angle ABC - 90^\circ.$$

- Seega nurk ABC on nürinurk.
- Järelikult kolmnurga ABC tipud B ja C asuvad ümberringjoone diameetrist AD ühel pool.
- Kuna kõõlnelinurga $ABCD$ vastasnurkade ADC ja ABC summa on 180° ja nurk ACD on täisnurk (toetub ringjoone diameetrile), saame

$$\angle DAC = (180^\circ - \angle ADC) - \angle ACD = \angle ABC - 90^\circ = \angle BAC.$$

- Seega $DC = BC$ (vastavad piirdenurgad on võrdsed).
- Nüüd Pythagorase teoreemist järeldub väide:

$$AC^2 + BC^2 = AC^2 + DC^2 = AD^2 = 4R^2. \quad \blacksquare$$

§ 7. Kolmnurga kõrgus

7.1. Kolmnurga kõrgus ja põhitulemused selle kohta

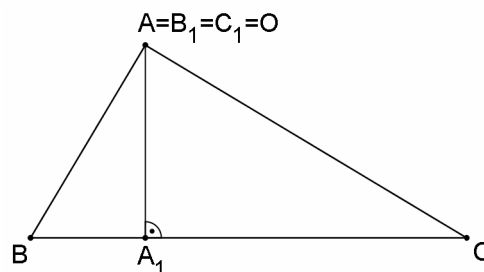
Definitsioon 2.7.1. Kolmnurga kõrguseks nimetatakse kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku või selle pikkust.

Järeldus 2.7.2. Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis kolmnurgad ABA_1 ja ACA_1 on täisnurksed kolmnurgad.

Teoreem 2.7.3. Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis. Kõrguste lõikepunkti nimetatakse ka vaadeldava kolmnurga ortotsentriks.

Tõestused.

- Täisnurkse kolmnurga ABC juhul on väide ilmne, sest kaatedid AB ja AC , mis on ühtlasi ka kolmnurga kõrgusteks, lõikuvad kolmanda kõrgusega täisnurga tipus A . Jääb üle vaadelda teravnurkseid ja nürinurkseid kolmnurki.

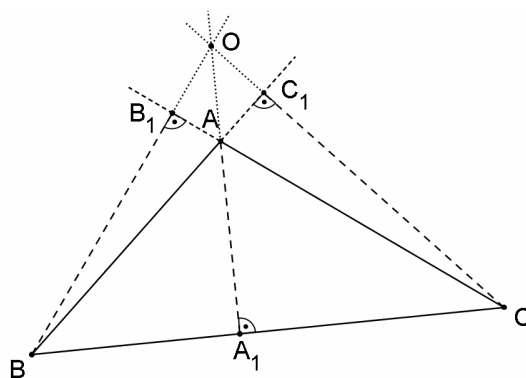
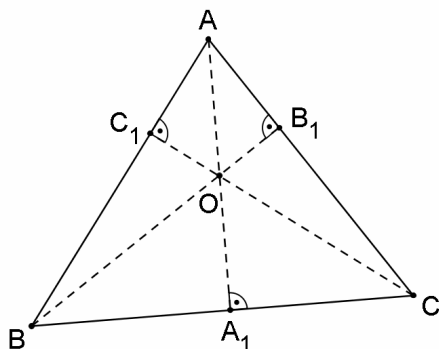


Tõestus 1 (Ceva teoreemi kasutades).

- Kui on vaja tõestada, et kolm sirget lõikuvad ühes punktis, siis on kõige standardsemaks võimaluseks kasutada Ceva teoreemi (vt [1], *Ceva teoreem*): kui kolmnurga ABC külgedel AB , AC ja BC või nende pikendustel on võetud vastavalt punktid C_1 , B_1 ja A_1 , siis sirged AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

- Olgu AA_1 , BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC kõrgused. Tähistame $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$.



- Märgime, et iga nurga φ korral kehtib taandamisvalem (vt [1], taandamisvalemid)

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi,$$

seega

$$|\cos \varphi| = |\cos(180^\circ - \varphi)|.$$

- Täisnurksest kolmnurgast ABA_1 saame, et võrdus

$$BA_1 = AB \cdot |\cos \beta|$$

on tõene nii teravnurkse, kui ka nürinurkse kolmnurga korral.

- Analoogiliselt kolmnurkade ACA_1 , BAB_1 , BCB_1 , CAC_1 ja CBC_1 jaoks saame vastavalt

$$CA_1 = AC \cdot |\cos \gamma|, \quad AB_1 = AB \cdot |\cos \alpha|, \quad CB_1 = BC \cdot |\cos \gamma|,$$

$$AC_1 = AC \cdot |\cos \alpha| \quad \text{ja} \quad BC_1 = BC \cdot |\cos \beta|.$$

- Leides nüüd lõikude suhete korrutise antud juhul, saame vajaliku võrduse

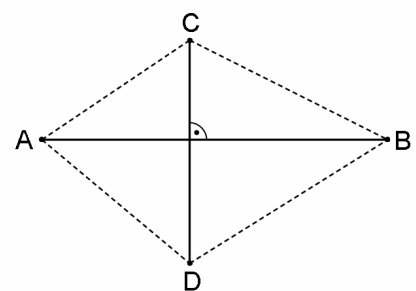
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB \cdot |\cos \alpha| \cdot AC \cdot |\cos \gamma| \cdot BC \cdot |\cos \beta|}{BC \cdot |\cos \gamma| \cdot AB \cdot |\cos \beta| \cdot AC \cdot |\cos \alpha|} = 1.$$

- Seega Ceva teoreemi põhjal sirged AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvadki ühes punktis. ■

Tõestus 2 (kahe lõigu ristseisu tingimust kasutades).

- Selles tõestuses tugineme (vt [16], lk 185) kahe lõigu ristseisu tunnusele: lõigud AB ja CD on risti parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$



- Kuna mis tahes kolmnurga kaks külge ei saa olla paralleelsed, siis kolmnurga kaks kõrgust või nende pikendused alati lõikuvad.
- Olgu O kolmnurga ABC kõrguste BB_1 ja CC_1 või nende pikenduste lõikepunkt.
- Kuna $AC \perp BO$, siis ülaltoodud tingimuse põhjal saame võrduse

$$AB^2 - CB^2 = AO^2 - CO^2. \quad (1)$$

- Analoogiliselt tingimusest $AB \perp CO$ järeldeb võrdus

$$AC^2 - BC^2 = AO^2 - BO^2. \quad (2)$$

- Lahutades esimesest võrdusest teise, saame

$$AB^2 - AC^2 = BO^2 - CO^2,$$

mis tähendab, et $BC \perp AO$.

- Järelikult kolmnurga tipust A tõmmatud kõrgus läbib samuti punkti O . Ehk teisisõnu, kolmnurga ABC kolm kõrgust AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis. ■

Tõestus 3 (vektorite kaudu).

- Esialgu näitame, et tasandi suvaliste punktide A , B , C ja O korral leiab aset võrdus

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} = 0.$$

- Püüame avaldada selles võrduses esinevaid vektoreid vektorite \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} ja \overrightarrow{CO} kaudu:

- $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$,
- $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$.

- Seega saame

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} = \\ & = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}) + (-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}) = 0. \end{aligned}$$

- Olgu nüüd A , B ja C kolmnurga tipud ning O selle kolmnurga kõrguste BB_1 ja CC_1 või nende pikenduste lõikepunkt.

- Siis $BO \perp CA$ ja $CO \perp AB$, millest saame, et

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} = 0 \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = 0.$$

- Tõestatud võrduse põhjal on siis ka

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} = 0,$$

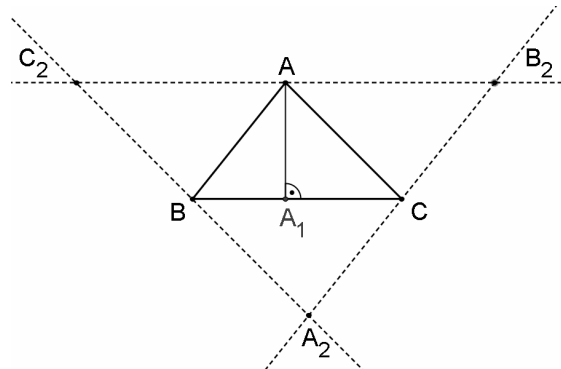
mis tähendab, et $AO \perp BC$.

- Seega kolmnurga ABC kõrgused AA_1 , BB_1 ja CC_1 või nende pikendused lõikuvad ühes punktis. ■

Tõestus 4 (keskristsirgete põhiomadust kasutades).

- Tõmbame läbi kolmnurga tippude A , B ja C vastavalt vastaskülgedega BC , AC ja AB paralleelsed sirged.
- Tekkinud kolmnurga külgede B_2C_2 , A_2C_2 ja A_2B_2 keskpunktideks osutuvad vastavalt punktid A , B ja C . Tõepoolest, näiteks nelinurgad $ABCB_2$ ja $BCAC_2$ on konstruktsiooni tõttu rööpküliligid, seega

$$BC = AB_2 = AC_2.$$



- Seega kolmnurga ABC kõrgused on kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirgeteks, sest näiteks punkt A on külje B_2C_2 keskpunkt, kolmnurga ABC kõrgus AA_1 on küljega BC risti ning lõigud BC ja B_2C_2 on paralleelsed.
- Kuna kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirged lõikuvad ühes punktis (kolmnurga $A_2B_2C_2$ ümberringjoone keskpunktis) (vt [1], *ümberringjoon*), siis ka kolmnurga ABC kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis. ■

Järeldus 2.7.4. *Teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt asub selle kolmnurga sisepiirkonnas, täisnurkse kolmnurga korral ühtib see lõikepunkt täisnurga tipuga ning nürinurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt asub väljaspool kolmnurka.*

Nagu eelnevas näidatud (vt Teoreem 2.1.3. ja Teoreem 2.4.7.), asuvad nii kolmnurga mediaanide lõikepunkt, kui ka sisenurkade poolitajate lõikepunkt alati kolmnurga sisepiirkonnas sõltumata kolmnurga liigist. Ortotsentri asukoha sõltuvus kolmnurga liigist tingib aga sageli vajaduse kontrollida kõrguste ja nende aluspunktidega seotud tulemuste kehtivust kolmnurga iga liigi jaoks eraldi.

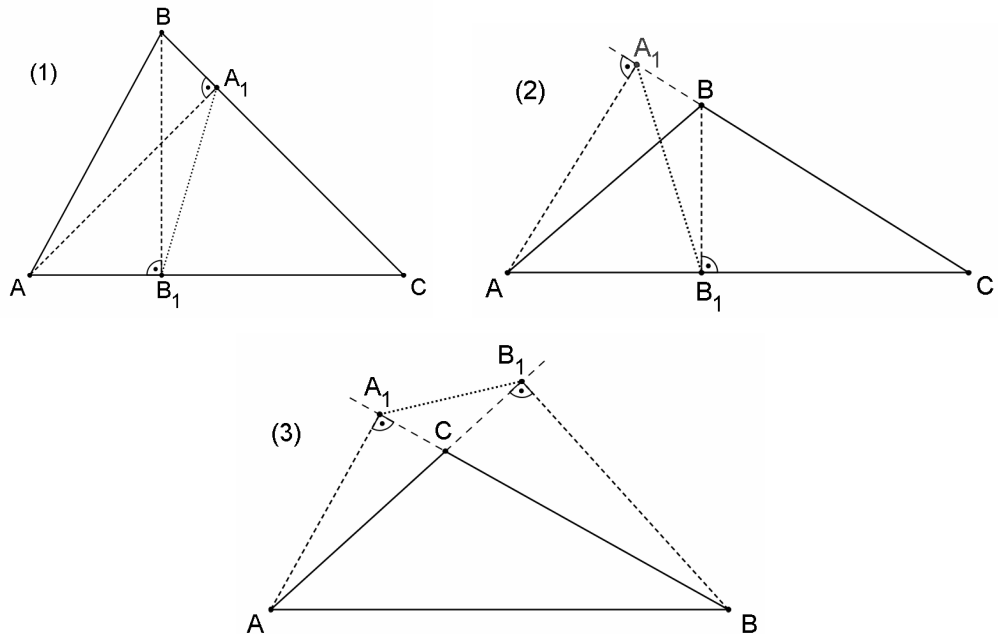
7.2. Kolmnurga kõrgustega seotud kolmnurkade sarnasus

Kolmnurga kõrguste ja nende aluspunktide poolt tekitatud kolmnurkade seas on üllatavalt palju sarnaste kolmnurkade paare. Järgnevalt tõestame nendest mõnede paaride sarnasuse.

Teoreem 2.7.5. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC ($\angle ACB \neq 90^\circ$) kõrgused, siis*

- $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$;
- $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$ (sarnasustegur $|\cos \angle ACB|$).

Teoreemi tõestamiseks vaatleme kolme juhtumit:



- (1) kui kolmnurk ABC on teravnurkne;
- (2) kui kolmnurk ABC on nürinurkne (või täisnurkne) nürinurgaga (või täisnurgaga) ABC ;
- (3) kui kolmnurk ABC on nürinurkne nürinurgaga tipu C juures.

Osa a) tõestus.

- Kolmnurgad AA_1C ja BB_1C on sarnased vastavate nurkade võrdsuse tõttu, sest
 - (1) ja (2) juhul $\angle AA_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$ ning nurk ACB on ühine;
 - (3) juhul $\angle AA_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$ ning nurgad ACA_1 ja BCB_1 on tippnurgad. ■

Osa b) tõestus.

- Sellest, et kolmnurgad AA_1C ja BB_1C on äsja tõestatu põhjal sarnased, järeldub võrdus

$$\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB},$$

millest saame, et kolmnurgad ABC ja A_1B_1C on sarnased, kuna tippnurgad ACB ja A_1CB_1 on võrdsed ja nende lähisküljed on võrdelised.

- Siinjuures saab arvutada ka sarnasusteguri:

$$\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB} = |\cos \angle ACB|. \quad \blacksquare$$

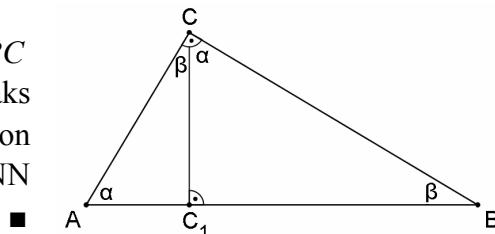
Järgmine teoreem on Pythagorase teoreemi kõrval üks olulisemaid lauseid täisnurksete kolmnurkade jaoks.

Teoreem 2.7.6. Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, siis

$$\triangle ABC \sim \triangle ACC_1 \sim \triangle BCC_1.$$

Tõestus.

- Täisnurksete kolmnurkade paaridel ABC ja ACC_1 ning ABC ja BCC_1 on lisaks täisnurgale ka ühine teravnurk. Seega on $\triangle ACC_1 \sim \triangle ABC \sim \triangle BCC_1$ tunnuse NNN järgi.



Järgmise tulemuse teadmine avardab oluliselt täisnurksete kolmnurkade lahendamise võimalusi.

Teoreem 2.7.7. (üldistatud Pythagorase teoreem). Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, siis kolmnurkade ABC , BCC_1 ja ACC_1 vastavate lineaarsete elementide l , m ja n korral kehtib võrdus

$$l^2 = m^2 + n^2.$$

Tõestus.

- Olgu l , m ja n täisnurksetes kolmnurkades ABC , BCC_1 ja ACC_1 tõmmatud sama tüüpi lõikude pikkused (näiteks täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud mediaani pikkus).
- Teoreemis 2.7.6. näidatud sarnasuse tõttu

$$\frac{m}{l} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{n}{l} = \frac{AC}{AB},$$

millest Pythagorase teoreemi $AB^2 = AC^2 + BC^2$ arvestades saame, et

$$\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2} = 1 \quad \text{ehk} \quad l^2 = m^2 + n^2. \quad \blacksquare$$

Järgmised laused näitavad, milliseid huvitavaid sarnaste kolmnurkade paare võib tekitada spetsiaalsete lisakonstruktsioonidega.

Lause 2.7.8. Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus ning BB_2 ja CC_2 punkti A läbivale sirgele tõmmatud ristlõigud, siis kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased.

Tõestus.

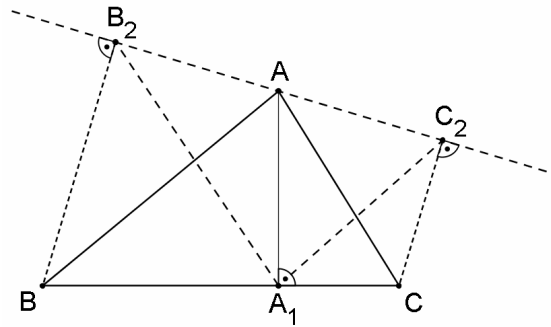
- Kuna $\angle BB_2A = \angle AA_1B = 90^\circ$, siis punktid A_1 ja B_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on AB .

- Seega

$$\begin{aligned} \angle(C_2B_2, B_2A_1) &= \angle(AB_2, B_2A_1) = \\ &= \angle(AB, BA_1) = \angle(AB, BC). \end{aligned}$$

- Analoogiliselt saame, et ka punktid A_1 ja C_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on AC , ning

$$\angle(B_2C_2, C_2A_1) = \angle(AC, CB).$$



- Järelikult on kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased tunnuse NNN põhjal.
- Väide kehtib kõikide kolmnurga liikide korral. ■

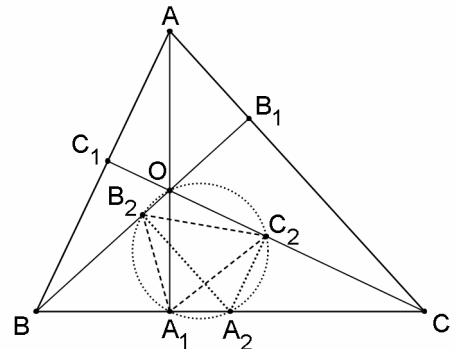
Lause 2.7.9. Kui AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused ning punktid B_2 ja C_2 on vastavalt kõrguste BB_1 ja CC_1 keskpunktid, siis kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased.

Tõestus.

- Toome siin tõestuse ainult teravnurkse kolmnurga ABC jaoks. Analoogiliselt saab näidata, et väide kehtib ka teiste, teoreemis 2.7.5. mainitud juhtumite korral.

- Olgu siis kolmnurk ABC teravnurkne ja O selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt.
- Olgu A_2 külje BC keskpunkt.
- Kuna $CB_1 \perp BB_1$ ja $BC_1 \perp CC_1$ ning A_2B_2 ja A_2C_2 on vastavalt kolmnurkade CBB_1 ja BCC_1 kesklõigud, siis

$$\angle A_2B_2O = \angle A_2C_2O = 90^\circ.$$



- Seega punktid B_2 ja C_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on A_2O . Kuna $\angle OA_1A_2 = 90^\circ$, siis ka punkt A_1 paikneb samal ringjoonel.
- Järelikult

$$\angle A_1B_2C_2 = 180^\circ - \angle A_1A_2C_2 = \angle CBA$$

ning

$$\angle A_1C_2B_2 = \angle A_1A_2B_2 = \angle ACB.$$

- Seega kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased tunnuse NNN põhjal. ■

Lause 2.7.10. Kui AA_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus ning A_1B_2 ja A_1C_2 on vastavalt külgedele AC ja AB tõmmatud ristlõigud, siis kolmnurgad ABC ja AB_2C_2 on sarnased.

7.3. Kõrgused ja kolmnurga pindala

Koolis kasutatakse kolmnurga pindala leidmiseks erinevaid valemeid. Esimesena võetakse kasutusele (vt [16], lk 213) järgmises teoreemis sõnastatud valem.

Teoreem 2.7.11. *Kolmnurga pindala võrdub selle kolmnurga aluse ja alusele tõmmatud kõrguse poole korrutisega.*

Raskemate ülesannete lahendamisel on aga olulisem selle teoreemi otsene järeldus.

Järeldus 2.7.12. *Kolmnurga külje ja sellele tõmmatud kõrguse pikkuste korrutis on antud kolmnurga jaoks konstantne suurus.*

See tähendab, et kui a , b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused ning h_a , h_b ja h_c neile tõmmatud kõrguste pikkused, siis

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Saab konstrueerida ka üsna erilisi kolmnurki.

Lause 2.7.13. *Leidub kolmnurk, mille kõik kõrgused on väiksemad, kui 1 cm, aga pindala on suurem, kui 1 m².*

Tõestuse skeem.

- Sellise kolmnurga saab leida näiteks järgmisel viisil.
- Kui O on rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt ning $AB = 1\text{ cm}$ ja $BC = 500\text{ m}$, siis kolmnurk AOD rahuldab nõutavat tingimust. \square

7.4. Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste kohta

Teoreem 2.7.14. *Mis tahes kolmnurgas pikemale küljele vastab lühem kõrgus.*

Tõestus.

- Olgu h_a ja h_b vastavalt kolmnurga külgedele a ja b tõmmatud kõrgused.
- Selle kolmnurga pindala S avaldub kujul

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2},$$

millest järeldub, et

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$

- Seega kui $a > b$, siis $h_a < h_b$. \blacksquare

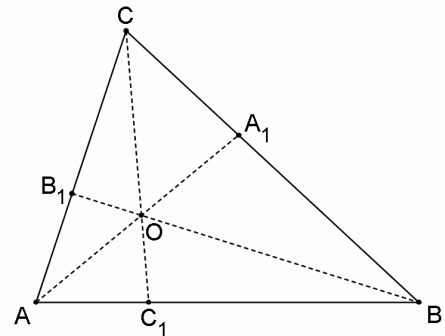
Anname nüüd tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kolmnurga kolm, ühes punktis lõikuvat tseviaani, osutuksid selle kolmnurga kõrgusteks.

Teoreem 2.7.15. Kui teravnurkse kolmnurga ABC külgedel BC , AC ja AB on vastavalt võetud punktid A_1 , B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis O , siis need lõigud AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgusteks parajasti siis, kui

$$AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1.$$

Tõestus.

- Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu O kolmnurga ABC kõrguste AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt.
- Siis on täisnurksed kolmnurgad AOB_1 ja BOA_1 sarnased (tunnuse NNN põhjal).
- Sellest järeldub, et



$$\frac{AO}{BO} = \frac{OB_1}{OA_1} \Leftrightarrow AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1.$$

- Analoogiliselt saame, et

$$\triangle AOC_1 \sim \triangle COA_1 \quad \text{ning} \quad AO \cdot OA_1 = CO \cdot OC_1.$$

- Tõestame piisavuse. Olgu lõikude AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikepunkt O ja kehtigu võrdus

$$AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1.$$

- Siis jällegi on kolmnurgad AOB_1 ja BOA_1 sarnased, kuna

$$\frac{AO}{OB_1} = \frac{BO}{OA_1} \quad \text{ning} \quad \angle AOB_1 = \angle BOA_1.$$

- Seega $\angle AB_1O = \angle BA_1O$.

- Analoogiliselt saame, et

$$\angle AC_1O = \angle CA_1O \quad \text{ning} \quad \angle BC_1O = \angle CB_1O.$$

- Kuna

$$\angle AB_1O + \angle CB_1O = \angle CA_1O + \angle BA_1O = \angle BC_1O + \angle AC_1O = 180^\circ,$$

siis arvestades eelpool saadud nurkade võrdsusi saame, et

$$\angle AB_1O = \angle AC_1O = \angle BA_1O = \angle BC_1O = \angle CA_1O = \angle CB_1O = 90^\circ.$$

- Viimane võrdus aga tähendabki, et AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused ning O nende kõrguste lõikepunkt. ■

Analoogiliselt saab tõestada ka järgmise teoreemi nürinurkse kolmnurga kohta.

Teoreem 2.7.16. Kui nürinurkse kolmnurga ABC nürinurga vastasküljel AC on võetud punkt B_1 ning külgede AB ja BC pikendustel üle punkti B asuvad vastavalt punktid C_1 ja A_1 nii, et lõigud AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O , siis need lõigud AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgusteks parajasti siis, kui

$$AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1.$$

Kolmnurka, mille tippudeks on kõrguste aluspunktid selle kolmnurga külgedel, nimetatakse ka *ortotsentriliseks kolmnurgaks* (vt [1], *ortotsenter*). Tõestame järgmised kaks tulemust ortotsentrilise kolmnurga kohta.

Lause 2.7.17. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused AA_1 , BB_1 ja CC_1 poolitavad ortotsentrilise kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurki.

Tõestus.

- Sellest, et kolmnurkade paarid ABC ja A_1B_1C ning ACB ja A_1C_1B on sarnased (vt Teoreem 2.7.5. b)), järeldub, et

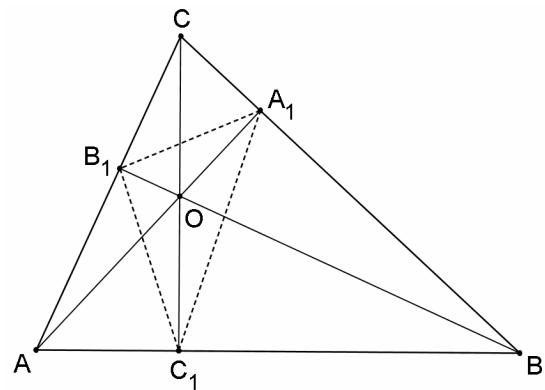
$$\angle B_1A_1C = \angle BAC = \angle BA_1C_1.$$

- Seega saame, et

$$\begin{aligned} \angle B_1A_1A &= 90^\circ - \angle B_1A_1C = \\ &= 90^\circ - \angle BA_1C_1 = \angle C_1A_1A. \end{aligned}$$

- Analoogiliselt saab näidata, et

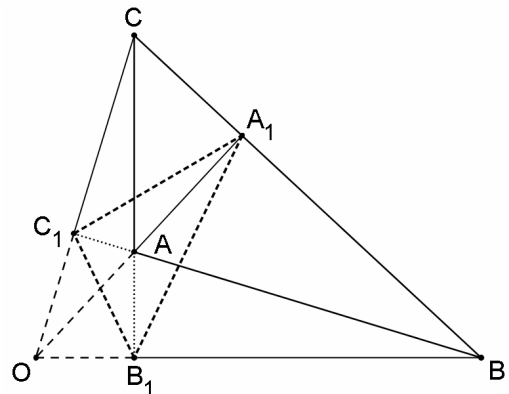
$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B \quad \text{ja} \quad \angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C. \quad \blacksquare$$



Järeldus 2.7.18. Nürinurkse kolmnurga ABC nürinurga tipust A tõmmatud kõrguse AA_1 ning külgede BA ja CA pikendused poolitavad ortotsentrilise kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurki.

Tõestus.

- Olgu O nürinurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.
- Vaatame teravnurkset kolmnurka BCO . Sirged AA_1 , BA ja CA sisaldavad kolmnurga BCO kõrguseid, mille aluspunktideks on vastavalt A_1 , C_1 ja B_1 .



- Siis teoreemi 2.7.17. põhjal sirged AA_1 , BA ja CA poolitavad ortotsentrilise kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurki. ■

Järgnevalt vaatleme mõningaid täiendavaid tulemusi teravnurksete kolmnurkade kohta.

Lause 2.7.19. Kui AA_1 , BB_1 ja CC_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused, siis punktiga A_1 sümmeetrilised punktid sirgete AB ja AC suhtes asuvad sirgel B_1C_1 .

Tõestus.

- Näitame, et punktiga A_1 sümmeetriline punkt A_2 sirge AC suhtes asub sirgel B_1C_1 . Analoogiliselt saab näidata, et ka punktiga A_1 sümmeetriline punkt sirge AB suhtes asub samal sirgel.

- Kuna $BB_1 \perp AC$ ning $A_1A_2 \perp AC$, siis $BB_1 \parallel A_1A_2$.

- Seega

$$\angle B_1A_1A_2 = \angle A_1B_1B.$$

- Lausest 2.7.17. järeldub, et kõrgus BB_1 poolitab nurga $A_1B_1C_1$, st

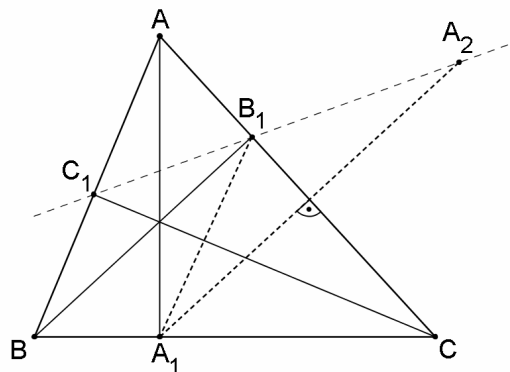
$$\angle C_1B_1B = \angle A_1B_1B = \angle B_1A_1A_2.$$

- Lause tõestamiseks piisab näidata, et nurgad C_1B_1B ja $A_1A_2B_1$ on võrdsed.

- Kuna kolmnurk $A_1B_1A_2$ on võrdhaarne, siis tõepoolest

$$\angle A_1A_2B_1 = \angle B_1A_1A_2 = \angle C_1B_1B,$$

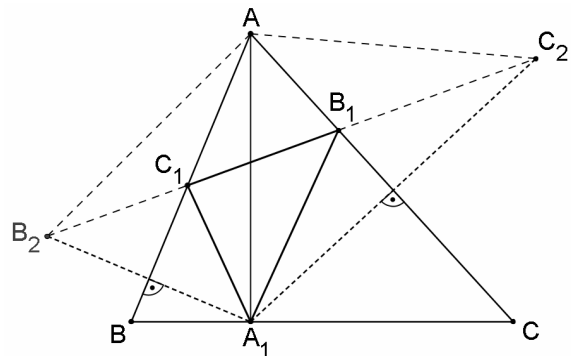
ning punktid C_1 , B_1 ja A_2 asuvad ühel ja samal sirgel. ■



Teoreem 2.7.20. Kolmnurkadest, mille tipud asuvad antud teravnurkse kolmnurga külgedel, on minimaalse ümbermõõduga selle kolmnurga ortotsentriline kolmnurk.

Tõestus.

- Olgu A_1 , B_1 ja C_1 teravnurkse kolmnurga ABC vastavatel külgedel BC , AC ja AB võetud suvalised sisepunktid.
- Olgu B_2 ja C_2 punktiga A_1 sümmeetrilised punktid vastavalt külgede AB ja AC suhtes.



- Siis kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümbermõõt P avaldub kujul

$$P = A_1C_1 + C_1B_1 + B_1A_1 = B_2C_1 + C_1B_1 + B_1C_2 \geq B_2C_2,$$

kusjuures võrdus leiab aset parajasti siis, kui sirge B_2C_2 läbib punkte C_1 ja B_1 .

- Kuna sirged AB ja AC on vastavalt lõikude B_2A_1 ja C_2A_1 keskristsirged, siis kehtib võrdus

$$AB_2 = AA_1 = AC_2,$$

millest jäeldub, et kolmnurk B_2AC_2 on võrdhaarne ning

$$\angle B_2AC_2 = 2\angle BAA_1 + 2\angle CAA_1 = 2\angle BAC.$$

- Sellest, et B_2C_2 on võrdhaarse kolmnurga alus, AB_2 on selle haar ning $\angle B_2AC_2 = 2\angle BAC$, jäeldub võrdus

$$B_2C_2 = 2AB_2 \sin \angle BAC.$$

- Kui h on kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus, siis

$$B_2C_2 = 2AB_2 \sin \angle BAC = 2AA_1 \sin \angle BAC \geq 2h \sin \angle BAC,$$

kusjuures siin võrdus leiab aset parajasti siis, kui A_1 on kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt.

- Kokkuvõttes saab öelda, et selleks, et kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümbermõõt oleks minimaalne, peaks AA_1 olema kolmnurga ABC kõrguseks.
- Ülaltoodud tõestusest jäeldub, et leidub parajasti üks minimaalse ümbermõõduga kolmnurk $A_1B_1C_1$, kuna selle kolmnurga kõik tipud on üheselt määratud (punktid B_1 ja C_1 asuvad sirgel B_2C_2 ning A_1 on kõrguse aluspunkt).
- Seega vahetades punktide A_1 ja B_1 (või C_1) rolli, jõuame selleni, et ka B_1 (või C_1) on kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt.
- Järelikult minimaalse ümbermõõduga kolmnurk $A_1B_1C_1$ on ortotsentriline kolmnurk. ■

Lause 2.7.21. Kui AA_1 ja BB_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused ning AA_2 ja BB_2 on sirgele A_1B_1 tõmmatud ristlõigud, siis $A_1B_2 = A_2B_1$.

Tõestus.

- Kuna $\angle AA_1B$ ja $\angle AB_1B$ on täisnurgad, siis punktid A , B , A_1 ja B_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel α , mille keskpunktiks on külje AB keskpunkt O .
- Olgu C_2 punktist O sirgele A_1B_1 tõmmatud ristlõigu aluspunkt.
- Kuna lõik A_1B_1 on ringjoone α kõõl ja $OC_2 \perp A_1B_1$, siis OC_2 on lõigu A_1B_1 keskristsirge.

- Seega

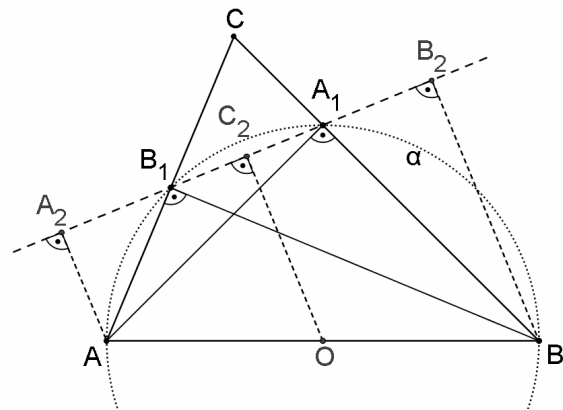
$$A_1C_2 = B_1C_2.$$

- Kuna OC_2 on trapetsi ABB_2A_2 kesklõik, siis kehtib võrdus

$$A_2C_2 = B_2C_2.$$

- Järelikult

$$\begin{aligned} A_1B_2 &= B_2C_2 - C_2A_1 = \\ &= A_2C_2 - C_2B_1 = A_2B_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



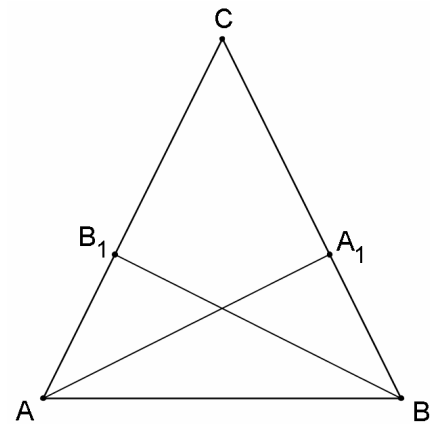
7.5. Võrdhaarse kolmnurga kõrguste omadused

Teoreem 2.7.22. Kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:

- kolmnurga kaks kõrgust on võrdsed;
- kolmnurga kõrguste lõikepunkti ja kahte tippu ühendavad lõigud on võrdsed.

Osa a) tõestus.

- Tarvilikkus. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne, kusjuures $AC = BC$, ning AA_1 ja BB_1 selle kolmnurga kõrgused.
- Sellest, et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad $\angle ABC = \angle BAA_1$ ja $\angle BAC = \angle BAB_1$ on võrdsed ning täisnurksetel kolmnurkadel AA_1B ja BB_1A on ühine külg AB , saame, et kolmnurgad AA_1B ja BB_1A on võrdsed tunnuse NKN põhjal.



- Seega ka võrdsete kolmnurkade vastavad küljed on võrdsed, st $AA_1 = BB_1$.
- Piisavus. Olgu nüüd kolmnurga ABC kõrgused võrdsed, st $AA_1 = BB_1$.
- Seega kolmnurgad CA_1A ja CB_1B on võrdsed tunnuse NKN põhjal, kuna

$$\angle CA_1A = \angle CB_1B = 90^\circ, \quad AA_1 = BB_1$$

ning

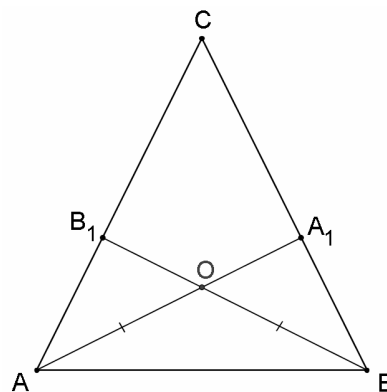
$$\angle CAA_1 = \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle ACB.$$

- Järelikult $AC = BC$ ja kolmnurk ABC on võrdhaarne. ■

Osa b) tõestus.

- Tarvilikkus. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne ($AC = BC$), ning O selle kolmnurga kõrguste AA_1 ja BB_1 lõikepunkt. Näitame, et $AO = BO$.
- Teoreemi a) osa tarvilikkuse tõestusest teame, et kolmnurgad AA_1B ja BB_1A on võrdsed.
- Seega

$$AB_1 = BA_1 \quad \text{ja} \quad \angle B_1AO = \angle A_1BO,$$



millest saame, et kolmnurgad AB_1O ja BA_1O on võrdsed tunnuse NKN põhjal.

- Järelikult $AO = BO$.
- Piisavus. Olgu nüüd $AO = BO$.
- Siis kolmnurk AOB on võrdhaarne, st $\angle BAO = \angle ABO$.
- Kuna

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAO \quad \text{ja} \quad \angle BAC = 90^\circ - \angle ABO,$$

siis $\angle ABC = \angle BAC$ ning kolmnurk ABC on võrdhaarne. ■

Lause 2.7.23. Kui võrdhaarse kolmnurga alusel on võetud suvaline sisepunkt, siis sellest punktist kolmnurga haaradele tõmmatud ristlõikude pikkuste summa võrdub selle kolmnurga haarale tõmmatud kõrguse pikkusega.

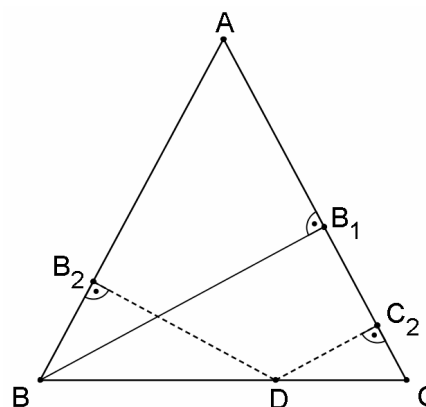
Tõestus.

- Olgu D võrdhaarse kolmnurga ABC aluse BC suvaline sisepunkt, DB_2 ja DC_2 vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõigud ning BB_1 kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus.
- Siis kolmnurkade ABC , ABD ja ACD pindalade vahel leiab aset järgmine seos:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC \cdot BB_1}{2} = \frac{AB \cdot DB_2}{2} + \frac{AC \cdot DC_2}{2} \Leftrightarrow BB_1 = DB_2 + DC_2,$$

mida oligi vaja tõestada. ■



7.6. Täisnurkse kolmnurga kõrguste täiendavad omadused

Lause 2.7.26. Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ning punktid K ja L on vastavalt niisugused lõikude CC_1 ja AC_1 sisepunktid, et $\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1}$, siis $BK \perp CL$.

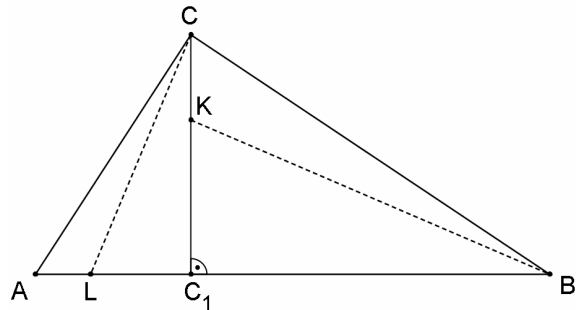
Tõestus.

- Tingimus $\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1}$ on samaväärne järgmiste võrdustega:

$$\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{CK}{AL} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{CC_1 - CK}{AC_1 - AL} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{C_1K}{C_1L},$$

millest järeldub, et $KL \parallel AC$.

- Kuna $AC \perp BC$, siis ka $KL \perp BC$.
- Seega K on kolmnurga BCL kõrguste lõikepunkt. Järelikult $BK \perp CL$. ■



Anname nüüd tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne kolmnurk.

Olgu kolmnurgas ABC tõmmatud kõrgus CC_1 .

Teoreem 2.7.27. Kolmnurk ABC on täisnurkne täisnurgaga ACB parajasti siis, kui $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$.

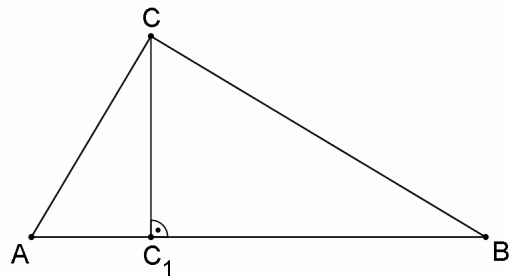
Tõestus.

- Tarvilikkus. Kasutades Pythagorase teoreemi täisnurksete kolmnurkade AC_1C , ACB ja BC_1C , saame

$$\begin{aligned} CC_1^2 &= AC^2 - AC_1^2 = AB^2 - BC^2 - AC_1^2 = \\ &= (AC_1 + BC_1)^2 - (CC_1^2 + BC_1^2) - AC_1^2 = 2AC_1 \cdot BC_1 - CC_1^2. \end{aligned}$$

- Seega tõepoolest on õige võrdus $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$.

- Olgu märgitud, et seda osa teoreemist tuntakse koolis ka „kõrguse teoreemi” nime all. Tingimuse piisavust selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne, tavaliselt koolis ei vaadelda.



- Piisavus. Kehtigu nüüd võrdus $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$. Näitame, et kolmnurk ABC on täisnurkne.
- Kuna CC_1 on kolmnurga kõrgus, siis saame kasutada Pythagorase teoreemi kolmnurkade AC_1C ja BC_1C jaoks:

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = AC_1^2 + AC_1 \cdot BC_1 = AC_1 \cdot (AC_1 + BC_1) = AC_1 \cdot AB$$

ning analoogiliselt

$$BC^2 = BC_1 \cdot AB.$$

- Liidame saadud võrdused

$$AC^2 + BC^2 = AC_1 \cdot AB + BC_1 \cdot AB = AB \cdot (AC_1 + BC_1) = AB^2.$$

- Kuna kolmnurga ABC kohta kehtib Pythagorase teoreem, siis see kolmnurk on täisnurkne (täisnurgaga ACB). ■

Teoreem 2.7.28. *Kui CC_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis nurk ACB on täisnurk parajasti siis, kui*

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB \quad \text{ja} \quad BC^2 = BC_1 \cdot BA.$$

Tõestus.

- Esmalt näitame, et antud tingimuste korral punkt C_1 on külje AB sisepunkt.
- Seejärel näitame, et need tingimused on samaväärsed tingimusega $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$, mis on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne (vt Teoreem 2.7.27.).
- Oletame vastuväiteliselt, et võrduste $AC^2 = AC_1 \cdot AB$ ja $BC^2 = BC_1 \cdot BA$ kehtivuse korral punkt C_1 ei ole külje AB sisepunkt.
- See tähendab, et kas nurk ABC või nurk BAC on nürinurk.
- Olgu $\angle ABC > 90^\circ$. Kuna täisnurkses kolmnurgas AC_1C hüpotenuusi AC pikkus on suurem selle kaateti AC_1 pikkusest, siis saame, et

$$AC^2 > AC_1^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 > AC_1 \cdot AC_1 > AC_1 \cdot AB,$$

mis on vastuolus eeldusega $AC^2 = AC_1 \cdot AB$.

- Kui nurk BAC on nürinurk, siis analoogiliselt saame, et

$$BC^2 > BC_1^2 \quad \Rightarrow \quad BC^2 > BC_1 \cdot BC_1 > BC_1 \cdot AB,$$

mis on samuti vastuolus eeldusega $BC^2 = BC_1 \cdot BA$.

- Seega C_1 on külje AB sisepunkt.

- Seega on järgmised võrdused samaväärsed:

$$\begin{aligned} AC^2 = AC_1 \cdot AB &\Leftrightarrow AC^2 = AC_1 \cdot (AC_1 + C_1B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow AC^2 - AC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B &\Leftrightarrow CC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B. \end{aligned}$$

- Analoogiliselt saab näidata, et

$$BC^2 = BC_1 \cdot BA \Leftrightarrow CC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B.$$

- Seega teoreem on tõestatud. ■

Koolis tõestatakse nn. Eukleidese teoreem, mis väidab, et täisnurkses kolmnurgas on kaateti ruut võrdne hüpotenuusi ja kaateti projektsiooni korrutisega. Pöördteoreemi koolis ei käsitleta. Äsja vaadeldud Teoreem 2.7.28. aga kujutabki endast nii Eukleidese teoreemi kui ka selle pöördteoreemi ühendamisel saadud teoreemi.

Järgmise järelduse väited on lihtsalt tõestatavad teoreemide 2.7.27. ja 2.7.28. abil.

Järeldus 2.7.29. Kui CC_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis nurk ACB on täisnurk parajasti siis, kui kehtib üks järgmistest võrdustest:

$$\begin{aligned} \text{a) } CC_1 = \frac{AC \cdot BC}{AB} \quad \text{ehk} \quad h_c = \frac{ab}{c} \\ \text{b) } \frac{1}{CC_1^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

Lause 2.7.30. Kui A_2 ja B_2 on vastavalt kolmnurga ABC kõrguste AA_1 ja BB_1 sellised sisepunktid, et

$$\angle CA_2B = \angle CB_2A = 90^\circ,$$

siis $CA_2 = CB_2$.

Tõestus.

- Kuna A_2A_1 ja B_2B_1 on vastavalt täisnurksete kolmnurkade CA_2B ja CB_2A kõrgused, siis teoreemi 2.7.28. põhjal kehtivad võrdused

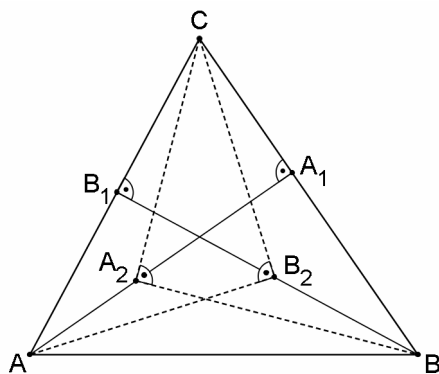
$$CA_2^2 = CB \cdot CA_1 \quad \text{ja} \quad CB_2^2 = CA \cdot CB_1.$$

- Sellest, et kolmnurgad A_1B_1C ja ABC on sarnased (vt Teoreem 2.7.5. b)), järeldub seos

$$\frac{CB_1}{CB} = \frac{CA_1}{CA},$$

millest eelpool antud võrdusi arvestades saame, et

$$CA_1 \cdot CB = CB_1 \cdot CA \Leftrightarrow CA_2^2 = CB_2^2 \Leftrightarrow CA_2 = CB_2. \quad \blacksquare$$



Järeldus 2.7.31. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ei ole pikem, kui pool hüpotenuusi.

Tõestuse skeem.

- Teoreemi 2.1.39. põhjal kolmnurga sisenurk on täisnurk parajasti siis, kui selle nurga tipust tõmmatud mediaan on kaks korda lühem küljest, millele ta on tõmmatud. \square

Lause 2.7.32. Kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab täisnurga kaheks mittevõrdseks osaks, siis täisnurga pikem lähiskaadet on suurema osanurga haaraks.

Tõestus.

- Olgu CC_1 täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus.
- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AC < BC$. Näitame siis, et $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$.
- Kuna kolmnurgad ACC_1 , CBC_1 ja ABC on sarnased (vt Teoreem 2.7.6.), siis

$$AC < BC \Leftrightarrow \angle ABC < \angle BAC \Leftrightarrow \angle ACC_1 < \angle BCC_1. \quad \blacksquare$$

7.7. Võrdkülgse kolmnurga kõrguste täiendavad omadused

Olgu a , b ja c antud kolmnurga külgede pikkused, h_a , h_b ja h_c nendele külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused ning α , β ja γ antud külgede vastasnurkade suurused.

Üldtuntud tarvilik ja piisav tingimus kolmnurga võrdkülgseuseks on selle kõrguste võrdsus. Lisame sellele tingimusele veel ühe.

Teoreem 2.7.33. Kolmnurk on võrdkülgne parajasti siis, kui

$$a + h_a = b + h_b = c + h_c.$$

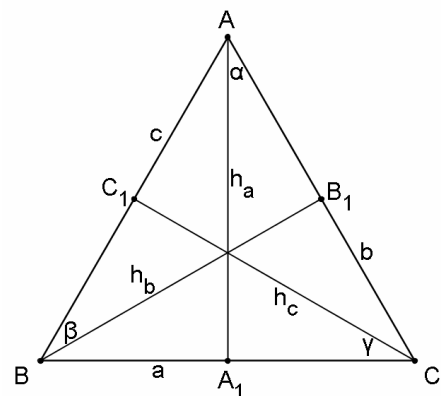
Tõestus.

- Tarvilikkus on ilmne. Tõestame piisavuse.
- Kehtigu võrdus $a + h_a = b + h_b = c + h_c$.
- Oletame vastuväiteliselt, et kolmnurk ei ole võrdkülgne. Siis üldisust kitsendamata, võime eeldada, et $a \neq b$.
- Kuna

$$a + h_a = a + b \sin \gamma$$

ja

$$b + h_b = b + a \sin \gamma,$$



siis saame

$$(a - b) \cdot (1 - \sin \gamma) = 0.$$

- Järelikult $\sin \gamma = 1$ oletuse $a \neq b$ tõttu ning $\gamma = 90^\circ$.
- See aga tähendab, et c on kolmnurga kõige pikem külg. Seega ka $a \neq c$.
- Kuna nüüd

$$a + h_a = a + c \sin \beta \quad \text{ja} \quad c + h_c = c + a \sin \beta,$$

siis analoogiliselt saame, et $\beta = 90^\circ$.

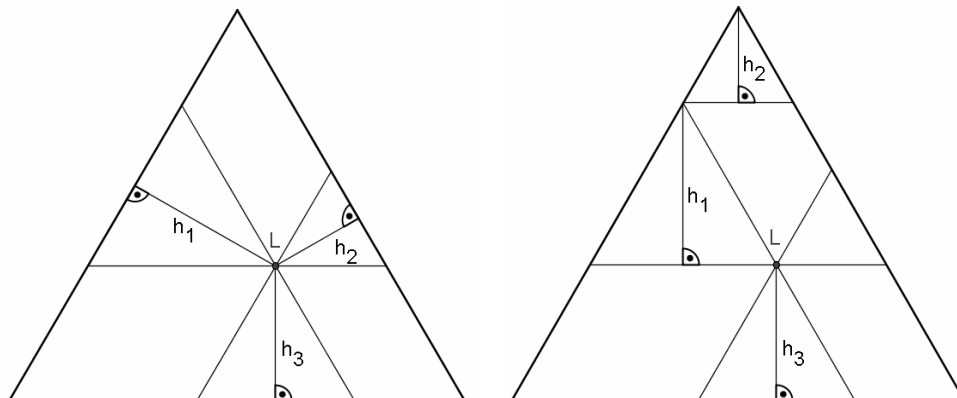
- Tekib vastuolu, sest β ja γ on kolmnurga nurgad. Järelikult vaadeldav kolmnurk on võrdkülgne. ■

Mõnikord on ülesannete lahendamisel kasulik teada ka järgmist tulemust.

Lause 2.7.34. *Võrdkülgse kolmnurga mis tahes sisepunkti kauguste summa kolmnurga külgedest võrdub selle kolmnurga kõrguse pikkusega.*

Tõestuse skeem.

- Olgu L võrdkülgse kolmnurga suvaline sisepunkt ning h_1 , h_2 ja h_3 punkti L kaugused kolmnurga külgedest.
- Tõmbame läbi punkti L külgedega paralleelsed lõigud. Tekkinud väikesed kolmnurgad on ilmselt samuti võrdkülgseid.
- Illustreerime antud olukorda jooniste abil. Väite edasine tõestus on nende põhjal ilmne. □



7.8. Kõrgustega seotud kolmnurkade võrdsuse tunnused

Kolmnurga mediaanide ja nurgapoolitajate abil sai sõnastatud (vt Teoreem 2.1.36. ja Teoreem 2.4.43.) mitmed kolmnurkade võrdsuse tunnused. Alljärgnevas teeme seda ka kõrguste abil.

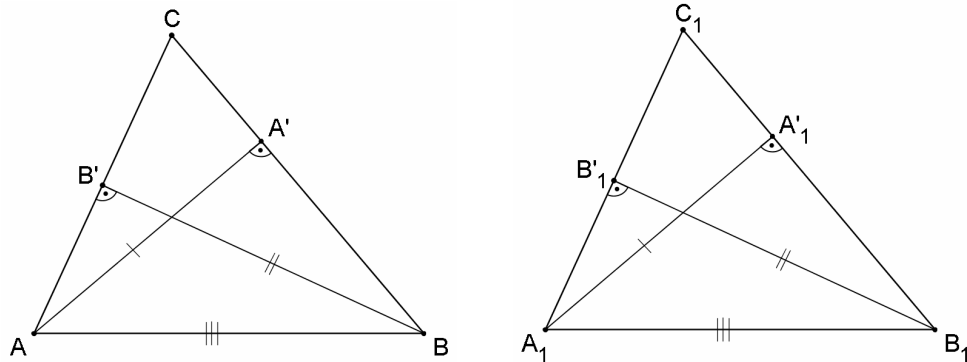
Teoreem 2.7.35. *Kaks kolmnurka on võrdsed, kui kehtib üks järgmistest tingimustest:*

- ühe kolmnurga külg ja teistele külgedele tõmmatud kõrgused on vastavalt võrdsed teise kolmnurga küljega ja selle teistele külgedele tõmmatud kõrgustega;*
- ühe kolmnurga kaks külge ja kolmandale küljele tõmmatud kõrgus on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja kolmandale küljele tõmmatud kõrgusega;*
- ühe kolmnurga kolm kõrgust on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme kõrgusega.*

Osa a) tõestus.

- Olgu AA' ja BB' kolmnurga ABC ning $A_1A'_1$ ja $B_1B'_1$ kolmnurga $A_1B_1C_1$ kõrgused.
- Vastavalt teoreemi eeldustele olgu

$$AA' = A_1A'_1, \quad BB' = B_1B'_1 \quad \text{ja} \quad AB = A_1B_1.$$



- Siis täisnurksed kolmnurgad $AA'B$ ja $A_1A'_1B_1$ ning $BB'A$ ja $B_1B'_1A_1$ on vastavalt võrdsed kui täisnurksed kolmnurgad, millel on vastavalt võrdsed üks kaatet ja hüpotenuusid.
- Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub ka vastavate nurkade ABA' ja $A_1B_1A'_1$ ning BAB' ja $B_1A_1B'_1$ võrdsus. Seega

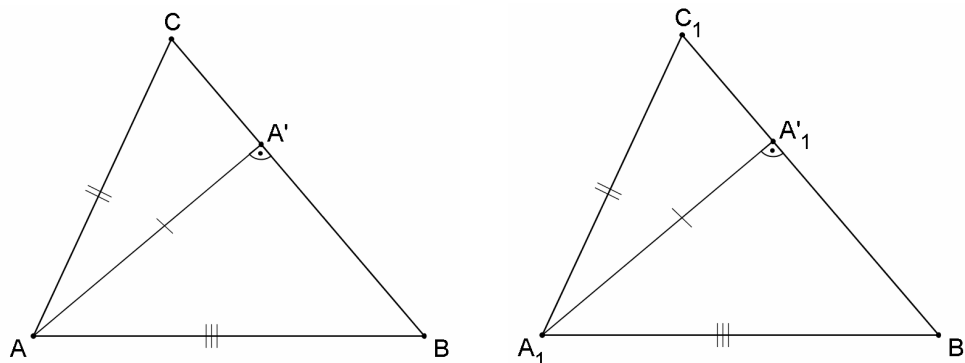
$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \quad \text{ja} \quad \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

- Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse NKN põhjal. ■

Osa b) tõestus.

- Eeldame, et

$$AA' = A_1A'_1, \quad AB = A_1B_1 \quad \text{ja} \quad AC = A_1C_1.$$



- Nagu eelmises osaski põhjendasime, on täisnurksed kolmnurgad $AA'B$ ja $A_1A'_1B_1$ ning $AA'C$ ja $A_1A'_1C_1$ vastavalt võrdsed.

- Seega

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$$

ning

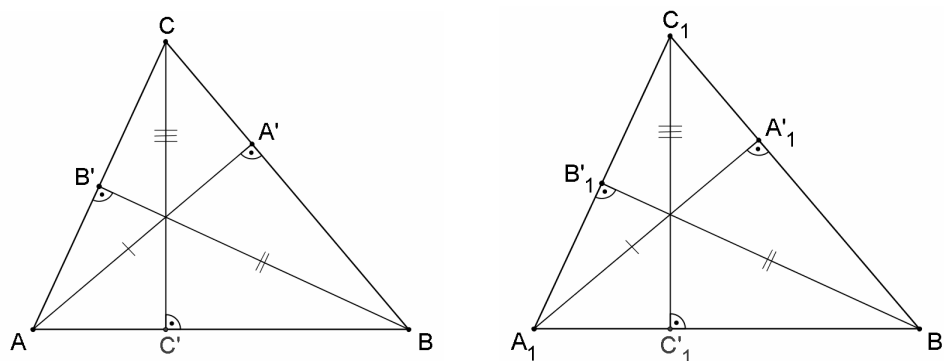
$$\angle BAC = \angle BAA' + \angle CAA' = \angle B_1A_1A'_1 + \angle C_1A_1A'_1 = \angle B_1A_1C_1.$$

- Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse NKN põhjal. ■

Osa c) tõestus.

- Vastavalt teoreemi eeldustele

$$AA' = A_1A'_1, \quad BB' = B_1B'_1 \quad \text{ja} \quad CC' = C_1C'_1.$$



- Täisnurksetest kolmnurkadest $AA'C$ ja $A_1A'_1C_1$ ning $BB'C$ ja $B_1B'_1C_1$ saame

$$AA' = A_1A'_1 \Leftrightarrow AC \cdot \sin \angle ACB = A_1C_1 \cdot \sin \angle A_1C_1B_1$$

ning

$$BB' = B_1B'_1 \Leftrightarrow BC \cdot \sin \angle ACB = B_1C_1 \cdot \sin \angle A_1C_1B_1,$$

millest järeldub seos

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et leiab aset ka seos

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

- Seega kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased tunnuse KKK põhjal.
- See aga tähendab, et nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Järelikult

$$AC \cdot \sin \angle ACB = A_1C_1 \cdot \sin \angle A_1C_1B_1 \Leftrightarrow AC = A_1C_1.$$

- Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse NKN põhjal. ■

7.9. Kolmnurga kõrgustega seotud täiendavad võrdused ja võrratused

a) Võrdused

Eelnevalt tõestatud tulemuste põhjal saame sõnastada järgmise lause.

Lause 2.7.36. Kui a , b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused, h_a , h_b ja h_c on nende külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused, α , β ja γ on antud külgede vastasnurkade suurused ning S on selle kolmnurga pindala, siis kehtivad järgmised võrdused:

- $h_a = \frac{2S}{a}$;
- $h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$;
- $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Lause 2.7.37. Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis kehtivad võrdused

- $AB^2 - AC^2 = BA_1^2 - CA_1^2$;
- $AB^2 - AC^2 = A_2B^2 - A_2C^2$, kus A_2 on kõrguse AA_1 suvaline punkt.

Osa a) tõestus.

- Täisnurksetest kolmnurkadest AA_1B ja AA_1C vastavalt saame, et

$$AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2 \quad \text{ja} \quad AA_1^2 = AC^2 - CA_1^2,$$

millest järeldubki väide. ■

Osa b) tõestus.

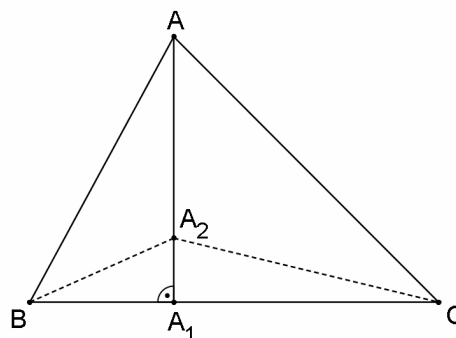
- Analoogiliselt osas a) toodud tõestusele saame, et

$$A_2A_1^2 = A_2B^2 - BA_1^2 = A_2C^2 - CA_1^2,$$

millest järeldub, et

$$BA_1^2 - CA_1^2 = A_2B^2 - A_2C^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = A_2B^2 - A_2C^2. \quad \blacksquare$$



Lause 2.7.38. Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis kehtib võrdus

$$A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC.$$

Tõestus.

- Täisnurksetest kolmnurkadest AA_1C ja BB_1C saame nii terav-, täis-, kui ka nürinurkse kolmnurga ABC juhul

$$|\cos \angle ACB| = \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}. \quad \blacksquare$$

Lause 2.7.39. Kui AA_1 , BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis kehtivad võrdused

a) $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2;$

b) $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1.$

Osa a) tõestus.

- Teame (vt Lause 2.7.37. a)), et kehtivad võrdused

$$AB^2 - AC^2 = BA_1^2 - CA_1^2, \quad BC^2 - AB^2 = CB_1^2 - AB_1^2,$$

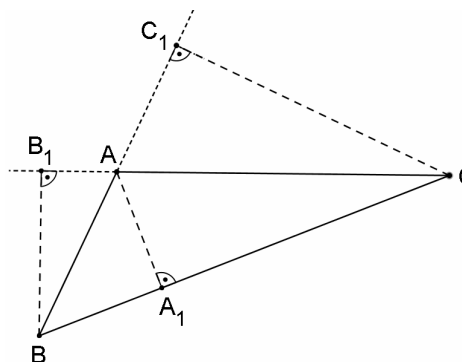
$$AC^2 - BC^2 = AC_1^2 - BC_1^2.$$

- Kui liidame vastavalt nende võrduste vasakud ja paremad pooled, siis saamegi tõestatava võrduse. ■

Osa b) tõestus.

- Olgu kolmnurga ABC nurgad standardselt tähistatud sümboolitega α , β ja γ .

- Märgime, et kui kolmnurk ABC on täisnurkne (oletame, et $\gamma = 90^\circ$), siis tipp C langeb kokku punktidega A_1 ja B_1 ning vaadeldav võrdus kehtib,



kuna

$$CA_1 = CB_1 = A_1B_1 = 0.$$

- Kui kolmnurk ABC ei ole täisnurkne, siis teoreemi 2.7.3. tõestuse järgi saame, et

$$AB_1 = AB \cdot |\cos \alpha|, \quad AC_1 = AC \cdot |\cos \alpha|,$$

$$BA_1 = AB \cdot |\cos \beta|, \quad BC_1 = BC \cdot |\cos \beta|,$$

$$CA_1 = AC \cdot |\cos \gamma| \quad \text{ja} \quad CB_1 = BC \cdot |\cos \gamma|.$$

- Kuna kolmnurgad ABC ja A_1B_1C on sarnased ning sarnasustegur on $|\cos \angle ACB|$ (vt Teoreem 2.7.5. b)), siis

$$\frac{A_1B_1}{AB} = |\cos \gamma|$$

ehk

$$A_1B_1 = AB \cdot |\cos \gamma|.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et kehtivad võrdused

$$A_1C_1 = AC \cdot |\cos \beta| \quad \text{ja} \quad B_1C_1 = BC \cdot |\cos \alpha|.$$

- Seega avaldised $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1$, $AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1$ ja $A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1$ on võrdsed avaldisega

$$AB \cdot AC \cdot BC \cdot |\cos \alpha| \cdot |\cos \beta| \cdot |\cos \gamma|. \quad \blacksquare$$

b) Võrratused

Lause 2.7.40. Mis tahes kolmnurga kõrguste pikkuste summa on väiksem selle kolmnurga ümbermõõdust.

Tõestus.

- Kui a , b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused ning h_a , h_b ja h_c on nende külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused, siis ilmselt kehtivad järgmised võrratused:

$$h_a \leq b, \quad h_b \leq c \quad \text{ja} \quad h_c \leq a,$$

kusjuures vähemalt üks nendest võrratustest on range.

- Järelikult

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c. \quad \blacksquare$$

Lause 2.7.41. *Kui $a < b$, siis $a + h_a < b + h_b$.*

Tõestus.

- Olgu S antud kolmnurga pindala.
- Kuna (vt Järeldus 2.7.36. a))

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{ja} \quad S \leq \frac{ab}{2},$$

siis saame, et

$$h_a - h_b = 2S\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 2S \cdot \frac{b-a}{ab} \leq b - a. \quad \blacksquare$$

§ 8. Kolmnurga kõrgus ja sellega seotud ringjooned

Selles paragrahvis vaatleme seoseid kolmnurga kõrguste ja mõnede ringjoonte vahel. Seetõttu kasutame kõrguste lõikepunkti tähistamiseks tähte H .

8.1. Põhitulemused

Teoreem 2.8.1. Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused ning H nende lõikepunkt, siis

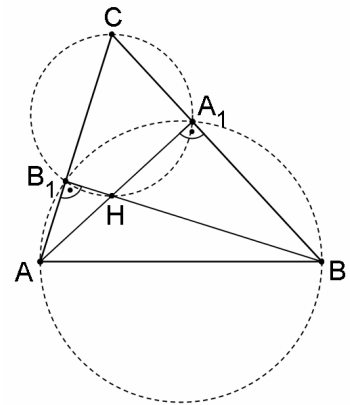
- punktid C , B_1 , H ja A_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH ;
- punktid B , A_1 , B_1 ja A asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga AB .

Tõestus.

Esialgu tõestame teoreemi teravnurkse kolmnurga jaoks ja seejärel põhjendame, miks tulemus jääb kehtima ka teiste kolmnurga liikide korral.

Osa a) tõestus.

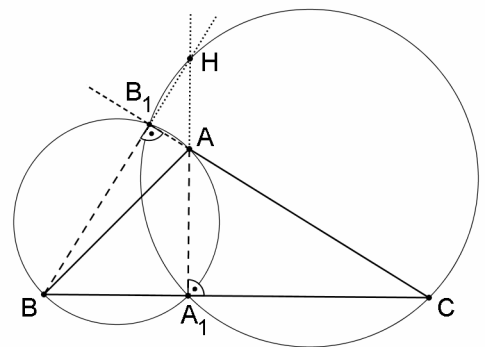
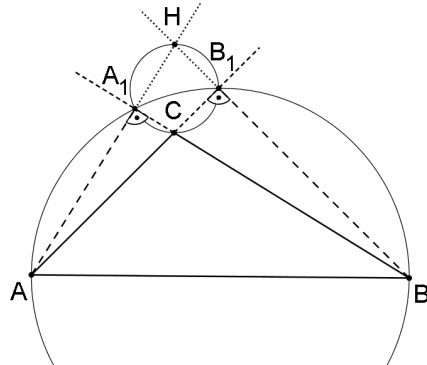
- Teame (vt [1], *kõõlnelinurk*), et nelinurk on kõõlnelinurk parajasti siis, kui nelinurga vastasnurkade summa on 180° .
- Kuna nelinurga CB_1HA_1 vastasnurgad CB_1H ja CA_1H on täisnurgad, siis CB_1HA_1 on ülalöeldu põhjal tõepoolest kõõlnelinurk. Kuna piirdenurgad suurusega 90° toetuvad alati diameetrile, siis CH on nelinurga CB_1HA_1 ümberringjoone diameetrik.



Osa b) tõestus.

- Kuna nurgad AA_1B ja AB_1B on täisnurgad, siis ka punktid B , A_1 , B_1 ja A asuvad ühel ja samal ringjoonel, kusjuures AB on selle ringjoone diameetrik.

Tõestus nürinurkse ja täisnurkse kolmnurga jaoks.



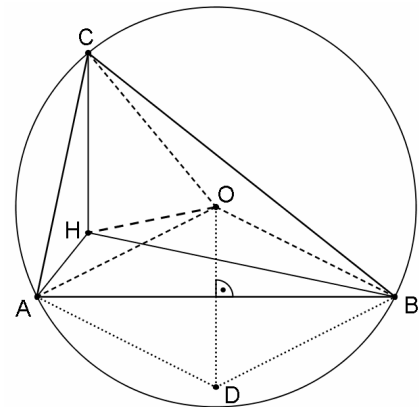
- Olgu tegemist nürinurkse kolmnurgaga ABC . Siis on kaks võimalust: kas 1) mõlemad kolmnurga kõrgused AA_1 ja BB_1 on tõmmatud kolmnurga teravnurkade tippudest (vasakpoolne joonis) või 2) üks neist on tõmmatud nürinurga tipust (parempoolne joonis).
- Esimesel juhul tekib teravnurkne kolmnurk ABH , kusjuures AB_1 ja BA_1 on selle kõrgused ning punkt C on nende lõikepunkt. Siis käesoleva teoreemi osa a) tõestuse põhjal punktid C , B_1 , H ja A_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH . Ning ilmselt ka A , A_1 , B_1 ja B asuvad ühel ringjoonel diameetriga AB .
- Teise võimaluse juhul olgu AA_1 kolmnurga ABC nürinurgast tõmmatud kõrgus. Kasutades nüüd teoreemi b) osa teravnurkse kolmnurga CHB jaoks kõrgustega CB_1 ja HA_1 , saame, et punktid H , B_1 , A_1 ja C asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH . Ning ka punktid B , B_1 , A ja A_1 asuvad ühel ringjoonel diameetriga AB .
- Kui kolmnurk ABC on täisnurkne, siis juhul 1) punktid C , A_1 , B_1 ja H lihtsalt langevad kokku, juhul 2) aga ühtivad punktid A , B_1 ja H . Mõlemal juhul võib lugeda teoreemi väited õigeks. ■

Teoreem 2.8.2. Kui O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis H on selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Tõestus.

- Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.
- Moodustame vektori $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$. On selge, et lõik OD on rombi $OADB$ diagonaal. Seega $OD \perp AB$.
- Kuna lõik CH asub küljele AB tõmmatud kõrgusel (st $CH \perp AB$), siis sirged CH ja OD on paralleelsed.
- Kui nüüd moodustame vektori $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$, siis eelmises punktis näidatud paralleelsusest järeldub, et punkt E asub sirgel CH .
- Analoogiliselt saame moodustada vektorid $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ ja $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG}$ ning järeldada, et punkt G asub sirgel BH .



- Kuna

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG},$$

siis punktid E ja G langevad kokku sirgete CH ja BH ainsa ühise punktiga H .

- See tähendabki, et

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

- Tõestame nüüd piisavuse. Kehtigu võrdus

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

ning olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius.

- Tõestame, et lõigud CH ja AB on risti. Selleks moodustame vektorid \overrightarrow{CH} ja \overrightarrow{AB} ning näitame, et nende skalaarkorrutis on 0.

- Kuna

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

ning

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

siis

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 = -R^2 + R^2 = 0.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et $BH \perp AC$ ning $AH \perp BC$. Seega H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. ■

8.2. Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste ja ümberringjoonte kohta

Konstrueerime punktiga H sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes ja tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 2.8.3. *Antud kolmnurga kõrguste lõikepunktiga sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes asuvad selle kolmnurga ümberringjoonel.*

Tõestus.

- Kui kolmnurk ABC on täisnurkne, siis väide on triviaalne, kuna täisnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt langeb kokku kolmnurga tipuga täisnurka juures. Seega kõrguste lõikepunkt asub selle kolmnurga kahel küljel (kaatetitel) ning kõrguste lõikepunktiga sümmeetriline punkt hüpotenuusi (ümberringjoone diameetri) suhtes ilmselt asub kolmnurga ümberringjoonel.
- Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning H_1 olgu üle punkti H võetud lõigu CH pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt.

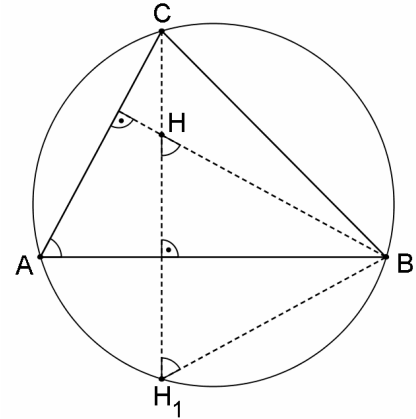
- Kolmnurk HBH_1 osutub võrdhaarseks, kuna

$$\angle BH_1H = \angle BH_1C = \angle BAC,$$

kui samale kõõlule toetuvad piirdenurgad, ning

$$\angle BAC = \angle BHH_1,$$

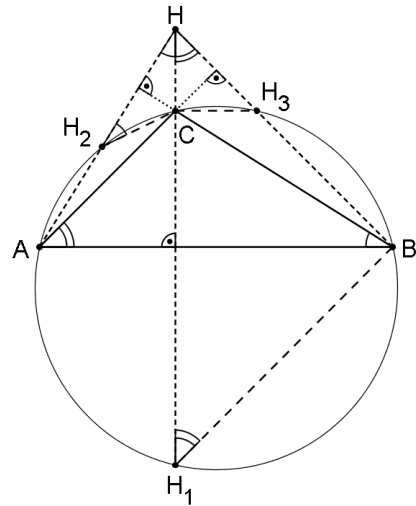
kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad.



- Kuna võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus osutub ka mediaaniks, siis AB on lõigu HH_1 keskristsirge.
- Viimane aga tähendabki, et H_1 on punktiga H sümmeetriline punkt külje AB suhtes.

- Analoogiliselt saab näidata, et punktiga H sümmeetrilised punktid ka teiste külgede suhtes asuvad selle kolmnurga ümberringjoonel.

- Olgu nüüd H nürinurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning H_1 üle punkti C võetud lõigu HC pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt. Olgu H_2 ja H_3 vastavalt lõikude HA ja HB ning kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunktid, mis erinevad punktidest A ja B .



- Siis analoogiliselt eelmise juhuga saame, et kolmnurgad HBH_1 , HCH_2 ja HCH_3 on võrdhaarsed kolmnurgad, kuna

$$\angle BH_1H = \angle BH_1C = \angle BAC = \angle BHH_1,$$

$$\angle CH_2H = 180^\circ - \angle CH_2A = \angle CBA = \angle CHH_2$$

ning

$$\angle CH_3H = 180^\circ - \angle CH_3B = \angle CAB = \angle CHH_3.$$

- Seega AB , BC ja AC on vastavalt lõikude HH_1 , HH_2 ja HH_3 keskristsirged ehk punktid H_1 , H_2 ja H_3 on punktiga H sümmeetrilised punktid vastavalt külgede AB , BC ja AC suhtes. ■

Näitame nüüd mõned seosed kolmnurga ümberringjoone puutuja ja keskpunkti ning kõrguste aluspunkte ühendava lõigu vahel.

Teoreem 2.8.4. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis*

- kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis C tõmmatud puutuja on paralleelne sirgega A_1B_1 ;*
- $A_1B_1 \perp OC$, kus O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.*

Osa a) tõestus.

- Võtame punkti C läbival kolmnurga ABC ümberringjoone puutulal punkti D nii, et punktid A ja D asuksid sirge BC suhtes erinevatel pooltasanditel.
- Kuna ringjoone puutuja ja kõõlu vaheline nurk on pool selle nurga sees asetsevast kaarest, siis (vt [1], ringjoone puutuja)

$$\angle DCA_1 = \angle DCB = \angle CAB.$$

- Sellest, et kolmnurgad CAB ja CA_1B_1 on sarnased (vt Teoreem 2.7.5.), järeldeb nurkade võrdsus

$$\angle CAB = \angle CA_1B_1.$$

- Kuna põiknurgad DCA_1 ja CA_1B_1 on võrdsed, siis $CD \parallel A_1B_1$.

Osa b) tõestus.

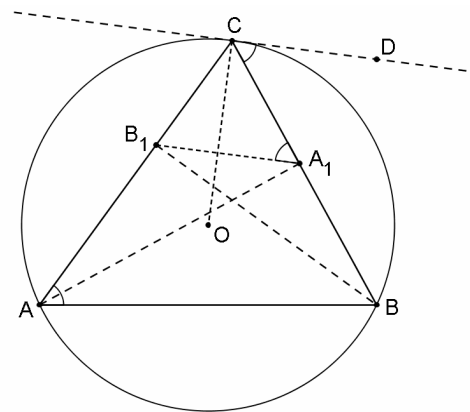
- Sellest, et puutepunkti tõmmatud raadius on risti puutujaga ($CD \perp OC$) (vt [1], ringjoone puutuja) ja äsja tõestatud paralleelsusest $CD \parallel A_1B_1$ järeldebki lõikude A_1B_1 ja OC ristseis.

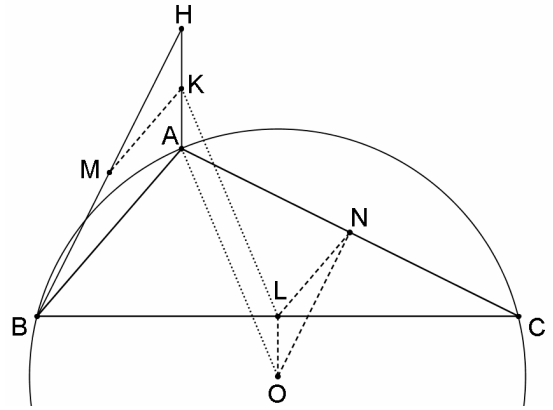
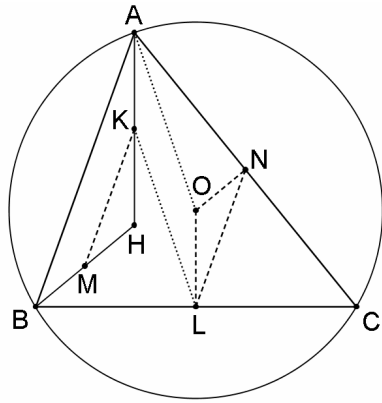
- Märgime, et teoreemi tõestus ei sõltu kolmnurga liigist. ■

Teoreem 2.8.5. *Kui H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis lõikude AH ja BC keskpunkte ühendava lõigu pikkus võrdub kolmnurga ABC ümberringjoone raadiuse pikkusega.*

Tõestus.

- Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning K ja L vastavalt lõikude AH ja BC keskpunktid.
- Esmalt näitame, et $AK = OL$.





- Olgu M ja N vastavalt lõikude BH ja AC keskpunktid. Siis KM ja LN on vastavalt kolmnurkade ABH ja ABC kesklõigud.
- Seega

$$KM = LN = \frac{1}{2}AB \quad \text{ning} \quad KM \parallel LN \parallel AB.$$

- Kuna OL ja ON on vastavalt külgede BC ja AC keskristsirged ning $AH \perp BC$ ja $BH \perp AC$, siis

$$AH \parallel OL \quad \text{ja} \quad BH \parallel ON.$$

- Seega kolmnurgad MHK ja NOL on võrdsed tunnuse NKN põhjal, kuna

$$\angle HMK = \angle ONL, \quad KM = LN, \quad \angle HKM = \angle OLN.$$

- Järelikult

$$OL = HK = AK.$$

- Kuna $OL = AK$ ning $OL \parallel AK$, siis nelinurk $AKLO$ on rööpkülik. See tähendab, et $AO = KL$.
- Sellest, et AO on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius, saamegi, et lõigu KL pikkus võrdub kolmnurga ABC ümberringjoone raadiuse pikkusega. ■

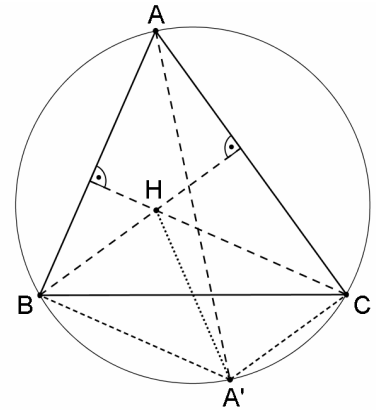
Tõestatud teoreemist järeldub vahetult üsna kasulik meetriline seos kolmnurgas.

Järeldus 2.8.6. *Kolmnurga tipu kaugus selle kolmnurga kõrguste lõikepunktist on kaks korda suurem kolmnurga ümberringjoone keskpunkti kaugusest selle tipu vastasküljest.*

Teoreem 2.8.7. Kui H on mittetäisnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning AA' on selle kolmnurga ümberringjoone diameeter, siis lõik $A'H$ poolitab külje BC .

Tõestus.

- Kuna AA' on ümberringjoone diameeter, siis kolmnurk ACA' on täisnurkne ehk $A'C \perp AC$.
- Sellest, et $BH \perp AC$, järeldub, et $BH \parallel A'C$.
- Analoogiliselt saame, et $CH \parallel A'B$.
- Seega nelinurk $A'BHC$ on rööpkülik ja selle diagonaalid poolitavad teineteist.
- Tõestus on analoogiline nürinurkse kolmnurga korral. ■

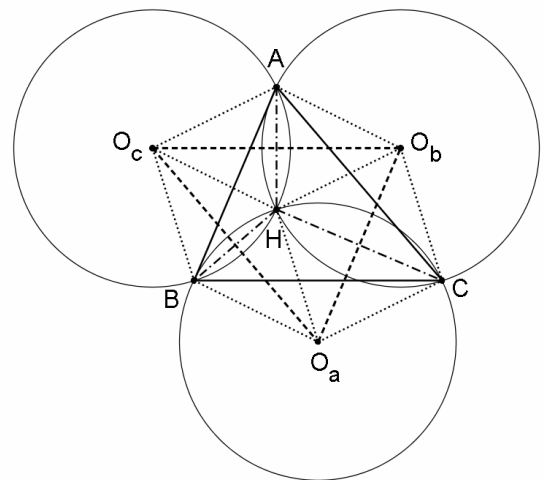


Näitame nüüd, kuidas on võimalik punkti H läbiva kolme ringjoone abil tekitada esialgsega võrdset kolmnurka.

Teoreem 2.8.8. Kui H on mittetäisnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis kolmnurkade AHB , AHC ja BHC ümberringjoonte keskpunktidega määratud kolmnurk on võrdne kolmnurgaga ABC .

Tõestus.

- Olgu O_a , O_b ja O_c vastavalt kolmnurkade BHC , AHC ja AHB ümberringjoonte keskpunktid.
- Esmalt tõestame, et nimetatud kolmnurkade ümberringjooned on võrdsed kolmnurga ABC ümberringjoonega.
- Olgu R ja R_a vastavalt kolmnurkade ABC ja BHC ümberringjoonte raadiused.
- Kuna



$$\sin \angle BHC = \sin(180^\circ - \angle BHC) = \sin \angle BAC,$$

siis siinusteoreemist (üldkujul $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$) järeldub seos

$$R_a = \frac{BC}{2 \sin \angle BHC} = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = R.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et ka vastavalt kolmnurkade AHC ja AHB ümberringjoonte raadiused R_b ja R_c on kolmnurga ABC ümberringjoone raadiusega võrdsed.
- Seega nelinurgad AO_bHO_c ja HO_bCO_a on rombid, kuna nende küljed on võrdsete ringjoonte raadiused.
- Järelikult

$$AO_c = O_bH = CO_a \quad \text{ja} \quad AO_c \parallel O_bH \parallel CO_a$$

ning

$$AO_b = O_cH = BO_a \quad \text{ja} \quad AO_b \parallel O_cH \parallel BO_a.$$

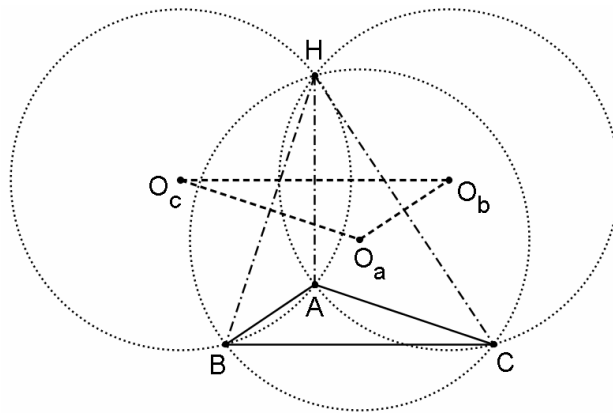
- Nelinurgad AO_cO_aC ja AO_bO_aB on rööpkülilikud ja seega

$$O_aO_b = AB \quad \text{ja} \quad O_aO_c = AC.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et kehtib võrdus

$$O_bO_c = BC.$$

- Seega kolmnurgad ABC ja $O_aO_bO_c$ on võrdsed tunnuse KKK põhjal.
- Teoreemi tõestust nürinurkse kolmnurga korral illustreerime järgmise joonise põhjal.

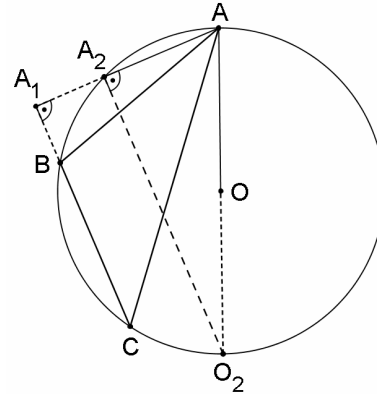
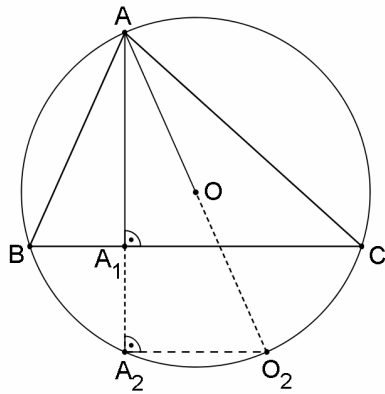


Näitame nüüd, kuidas on hõlbus leida nurga kolmnurga tipust tõmmatud kõrguse ja sama tippu ümberringjoone keskpunktiga ühendava lõigu vahel.

Teoreem 2.8.9. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle BAA_1 = \angle CAO$.*

Tõestus.

- Tõestame esmalt väite teravnurkse kolmnurga ABC korral.
- Kui lõikude AA_1 ja AO pikendused teist korda lõikavad kolmnurga ABC ümberringjoont vastavalt punktides A_2 ja O_2 , siis AO_2 on selle ringjoone diameeter ning $\angle AA_2O_2$ on täisnurk.



- Seega $BC \parallel A_2O_2$, millest järeldub kaarte BA_2 ja CO_2 võrdsus. Kuna võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed piirdeurgad, siis

$$\angle BAA_1 = \angle CAO.$$

- Kui kolmnurk ABC on täisnurkne ja kõrgus on tõmmatud hüpotenuusile, siis tõestus on eelmisega võrreldes täpselt sama. Kui aga kõrgus on tõmmatud kaatetile, siis on vaadeldavate nurkade suurused võrdsed nulliga.
- Kui kolmnurk ABC on nürinurkne, siis punkt A_2 on kas lõigul AA_1 või selle pikendusel sõltuvalt sellest, kas nurk BAC on teravnurk või nürinurk. ■

Järeldus 2.8.10. Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, siis

$$\angle OAA_1 = |\angle ABC - \angle ACB|.$$

Kolmnurga ümberringjoone raadiuse ja külgede pikkuste abil on võimalik leida ka kõrguse või selle osalõigu pikkust.

Lause 2.8.11. Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, H on kõrguste lõikepunkt ja R on selle kolmnurga ümberringjoone raadius, siis kehtivad võrdused

a) $AA_1 = \frac{AB \cdot AC}{2R};$

b) $AH^2 = 4R^2 - BC^2.$

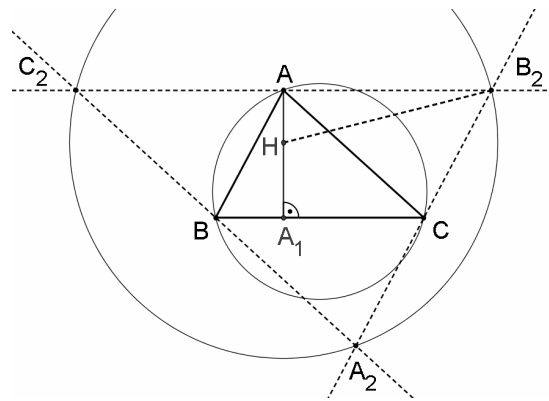
Osa a) tõestus.

- Kui S on kolmnurga ABC pindala, siis teoreemi 2.7.11. ja siinusteoreemi põhjal saame, et

$$AA_1 = \frac{2S}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{2R}. \quad \blacksquare$$

Osa b) tõestus.

- Tõmbame läbi kolmnurga ABC tippude A , B ja C vastaskülgedega paralleelsed sirged.
- Kui tekkinud kolmnurgas $A_2B_2C_2$ punktid A , B ja C on vastavalt külgede B_2C_2 , A_2C_2 ja A_2B_2 sisepunktid, siis need punktid on ka samade külgede keskpunktideks, sest näiteks nelinurgad $ABCB_2$ ja $BCAC_2$ on rööpkülilikud.



- Seega kolmnurga ABC kõrgused on kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirged ning H on kolmnurga $A_2B_2C_2$ ümberringjoone keskpunkt, kuna mis tahes kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktis (vt [1], *ümberringjoon*).
- Sellest, et kolmnurkade ABC ja $A_2B_2C_2$ küljed on vastavalt paralleelsed ning A , B ja C on kolmnurga $A_2B_2C_2$ külgede keskpunktid, järeldub kolmnurkade ABC ja $A_2B_2C_2$ sarnasus (sarnasustegur 2).
- Seega

$$4R^2 = B_2H^2 = B_2A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2,$$

millest

$$AH^2 = 4R^2 - BC^2.$$

mida oligi vaja tõestada. ■

§ 9. Näiteülesandeid

Ülesanne 2.9.1. (vt [22], ül. 97.95).

Olgu AA_1 ja CC_1 kolmnurga ABC kõrgused ning $\angle ABC = 60^\circ$. Olgu s sirgega A_1C_1 ristuv sirge, mis läbib punkti B . Olgu M punktist B erinev sirge s selline punkt, et $\angle AMC = 60^\circ$. Tõestada, et $\angle AMB = 30^\circ$.

Ülesanne 2.9.2. (vt [24], ül. 4-1).

Olgu a ja b täisnurkse kolmnurga kaatedid, c selle hüpotenuus ning h hüpotenuusile tõmmatud kõrgus. Tõestada, et kehtib võrratus

$$c + h > a + b.$$

Ülesanne 2.9.3. (vt [12], ül. 311).

Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC kõrguse BB_1 sisepunkt ning lõigaku sirged AO ja CO kolmnurga külgi BC ja AB vastavalt punktides A_2 ja C_2 . Tõestada, et $\angle BB_1A_2 = \angle BB_1C_2$.

Ülesanne 2.9.4. (vt [22], ül. 96.20).

Olgu AA_1 teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus ning B_2 ja C_2 punktist A_1 vastavalt külgedele AC ja AB tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tõestada, et punktid B , C_2 , B_2 ja C asuvad ühel ja samal ringjoonel.

Ülesanne 2.9.5. (vt [22], ül. 96.103).

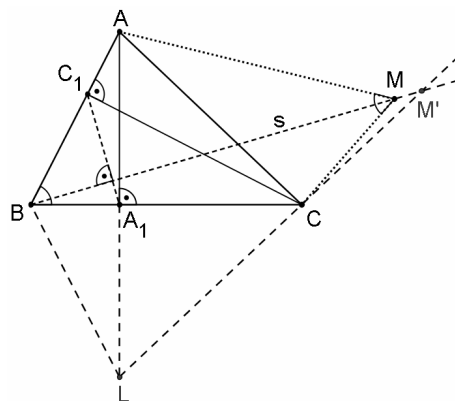
Olgu H kolmnurga ABC kõrguste AA_1 ja CC_1 lõikepunkt ning lõikugu kolmnurkade ABC ja A_1BC_1 ümberringjooned teist korda punktis O . Tõestada, et sirge OH poolitab külje AC .

Ülesanne 2.9.6. (vt [22], ül. 95.67).

Lõikugu teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja C tõmmatud kõrguste pikendused selle kolmnurga ümberringjoonega vastavalt punktides A_2 ja C_2 . Olgu D ringjoone väiksemal kaarel AC võetud suvaline punkt, A_3 sirgete DA_2 ja BC lõikepunkt ning C_3 sirgete DC_2 ja AB lõikepunkt. Tõestada, et sirge A_3C_3 läbib kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti.

Ülesande 2.9.1. lahendus.

- Olgu BL lõiguga BA sümmeetriline lõik sirge BC suhtes.
- Siis punkt L asub kõrguse AA_1 pikendusel üle punkti A_1 .
- Olgu M' sirgete BM ja LC lõikepunkt.
- Sellest, et kolmnurgad BAC ja BA_1C_1 on sarnased (vt Teoreem 2.7.5. b)) ning kolmnurk ACL on võrdhaarne, saame, et



$$\angle ABM' = 90^\circ - \angle BC_1A_1 = 90^\circ - \angle BCA = \angle LAC = \angle ALC = \angle ALM'.$$

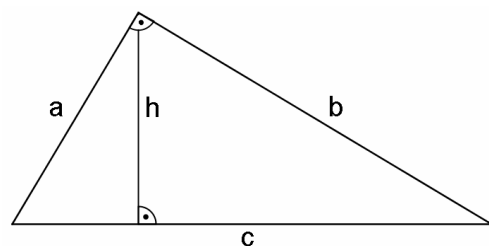
- Seega nelinurk $ABLM'$ on kõõlnelinurk.
 - Kõõlnelinurga omadust kasutades, saame, et
- $$\angle AM'L = 180^\circ - \angle ABL = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ.$$
- Järelikult punktid M ja M' ühtivad. Seega punktid L , C ja M asuvad ühel ja samal sirgel.
 - Kuna nüüd $ABLM$ on samuti kõõlnelinurk, siis nurgad AMB ja LMB on võrdsed, sest et toetuvad võrdsetele kõõludele AB ja LB .
 - Seega

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AML = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ. \quad \blacksquare$$

Ülesande 2.9.2. lahendus.

- Antud täisnurkse kolmnurga pindala S arvutamiseks saab kasutada kahte viisi:

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}.$$



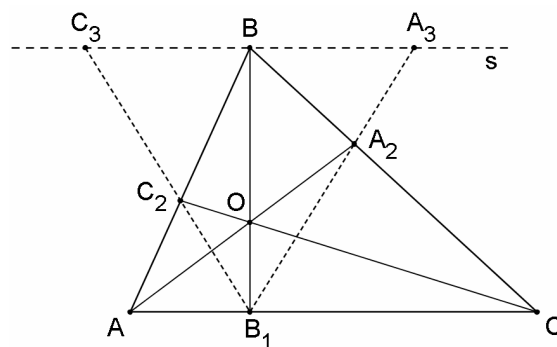
- Seega saame, et järgmised võrratused on samaväärsed:

$$\begin{aligned} c+h > a+b &\Leftrightarrow c + \frac{ab}{c} > a+b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c^2 - c(a+b) + ab > 0 \Leftrightarrow (c-a)(c-b) > 0. \end{aligned}$$

- Viimane võrratus on aga tõene sellepärast, et iga täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on suurem selle kolmnurga kaateti pikkusest.
- Tõestuse teiseks võimaluseks on lause 2.7.41. kasutamine. Kuna $a < c$ ning küljele a tõmmatud kõrgus on b , siis kohe saame, et $a+b < c+h$. \blacksquare

Ülesande 2.9.3. lahendus.

- Tõmbame läbi kolmnurga ABC tipu B sirge s paralleelselt alusega AC .



- Olgu sirge s lõikepunktid sirgetega B_1A_2 ja B_1C_2 vastavalt A_3 ja C_3 .

- Nurkade BB_1A_2 ja BB_1C_2 võrdsuse tõestamiseks piisab nüüd näidata, et $BA_3 = BC_3$. Tõepoolest, kui kehtib võrdus, siis B_1B on kolmnurga $A_3B_1C_3$ kõrgus ja mediaan, seega ka nurgapoolitaja.

- Kuna kolmnurgad BA_2A_3 ja CA_2B_1 on sarnased tunnuse NNN põhjal ($\angle BA_3A_2$ ja $\angle CB_1A_2$ ning $\angle A_3BA_2$ ja $\angle B_1CA_2$ on võrdsete põiknurkade paarid, $\angle BA_2A_3$ ja $\angle CA_2B_1$ on võrdsed tippnurgad), siis

$$\frac{BA_3}{CB_1} = \frac{BA_2}{CA_2},$$

millest $BA_3 = \frac{CB_1 \cdot BA_2}{CA_2}$.

- Analoogiliselt leiame kolmnurkade BC_2C_3 ja AC_2B_1 sarnasuse põhjal, et

$$BC_3 = \frac{AB_1 \cdot BC_2}{AC_2}.$$

- Teame, et Ceva teoreemi põhjal kolmnurga ABC tseviaanid AA_2 , BB_1 ja CC_2 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1.$$

- Kuna

$$\frac{BC_3}{BA_3} = \frac{AB_1 \cdot CA_2 \cdot BC_2}{CB_1 \cdot BA_2 \cdot AC_2} = 1,$$

siis $BA_3 = BC_3$, mida oligi tarvis tõestada. ■

Ülesande 2.9.4. lahendus.

Lahendus 1.

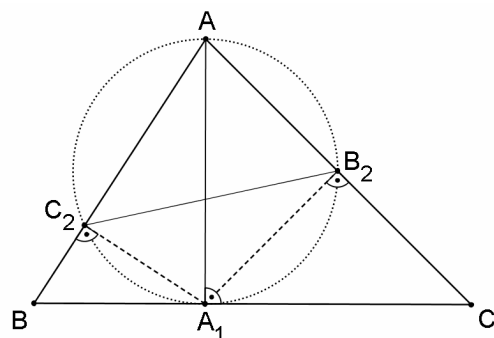
- Sellest, et nelinurga $AC_2A_1B_2$ vastasnurkade AC_2A_1 ja AB_2A_1 suurused on 90° , järeldub, et $AC_2A_1B_2$ on kõõlnelinurk.

- Seega

$$\angle B_2C_2A_1 = \angle B_2AA_1 = 90^\circ - \angle ACB.$$

- Näitame, et nelinurga BC_2B_2C vastasnurkade summa on 180° :

$$\begin{aligned} \angle B_2CB + \angle B_2C_2B &= \angle ACB + (\angle B_2C_2A_1 + 90^\circ) = \\ &= \angle ACB + (90^\circ - \angle ACB + 90^\circ) = 180^\circ. \end{aligned}$$



Lahendus 2.

- Olgu B_3 sirgete B_2A_1 ja AB lõikepunkt ning C_3 sirgete C_2A_1 ja AC lõikepunkt.

- Siis A_1 on tekkinud kolmnurga AB_3C_3 kõrguste B_3B_2 ja C_3C_2 lõikepunkt.

- Järelikult punktist A tõmmatud kõrgus asub sirgel AA_1 . See tähendab, et $AA_1 \perp B_3C_3$.

- Seega

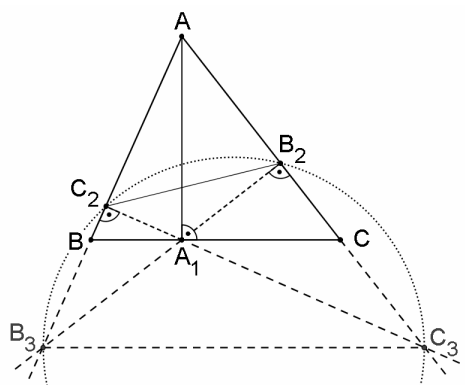
$$BC \parallel B_3C_3 \quad \text{ja} \quad \angle CBC_2 = \angle C_3B_3C_2.$$

- Nelinurk $B_3C_2B_2C_3$ on kõõlnelinurk, kuna täisnurgad $B_3C_2C_3$ ja $B_3B_2C_3$ toetuvad lõigule B_3C_3 (vt Teoreem 2.8.1. b)). Seega selle nelinurga vastasnurkade summa on 180° :

$$\angle CB_2C_2 + \angle C_3B_3C_2 = 180^\circ.$$

- Siis aga nelinurk BC_2B_2C on samuti kõõlnelinurk, kuna

$$\angle CB_2C_2 + \angle CBC_2 = \angle CB_2C_2 + \angle C_3B_3C_2 = 180^\circ.$$



Ülesande 2.9.5. lahendus.

- Kuna $\angle BC_1H$ on täisnurk, siis BH on kolmnurga A_1BC_1 ümberringjoone diameeter. Seega

$$\angle BOH = \angle BOB_2 = 90^\circ.$$

- Järelikult BB_2 on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Seega

$$\angle BAB_2 = \angle BCB_2 = 90^\circ.$$

- Viimane aga tähendab, et

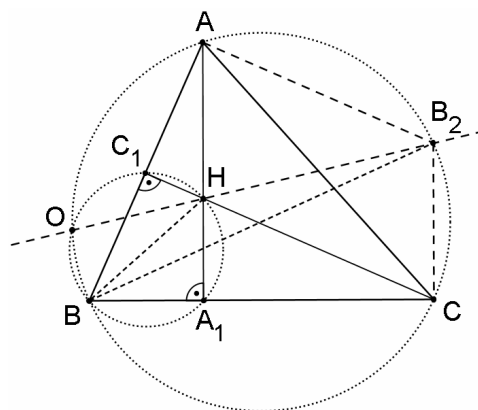
$$B_2C \perp BC \quad \text{ning} \quad B_2A \perp BA.$$

- Seega

$$B_2C \parallel AH \quad \text{ning} \quad B_2A \parallel CH$$

ehk nelinurk $AHCB_2$ on rööpkülik.

- Kuna rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis saamegi, et sirge OH poolitab külje AC . ■



Ülesande 2.9.6. lahendus.

- Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.

- Siis

$$\angle AHC_2 = \angle CHA_2 = \angle ABC$$

(nurk kõrguste vahel)

ning

$$\begin{aligned} \angle AC_2H &= \angle AC_2C = \\ &= \angle AA_2C = \angle HA_2C = \angle ABC \end{aligned}$$

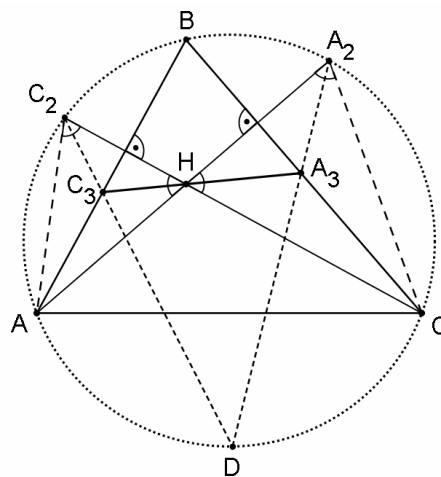
(toetuvad kaarele AC).

- Seega kolmnurgad HAC_2 ja HCA_2 on sarnased võrdhaarsed kolmnurgad.
- Sellest, et punktid A_3 ja C_3 paiknevad vastavalt võrdhaarsete kolmnurkade alustele tõmmatud kõrgustel, järelduvad lõikude võrdsused:

$$A_3A_2 = A_3H \quad \text{ja} \quad C_3C_2 = C_3H.$$

- Seega

$$\angle A_3A_2H = \angle A_3HA_2 \quad \text{ja} \quad \angle C_3C_2H = \angle C_3HC_2.$$



- Märgime, et nurgad AA_2D ja AC_2D on võrdsed, kuna toetuvad kaarele AD .
- Kokkuvõttes saame, et

$$\begin{aligned}\angle A_3HC &= \angle CHA_2 - \angle A_3HA_2 = \angle CA_2H - \angle AA_2D = \\ &= \angle AC_2H - \angle AC_2D = \angle AHC_2 - \angle C_3HA = \angle C_3HC_2.\end{aligned}$$

- Kuna punktid C , H ja C_2 asuvad ühel ja samal sirgel, siis nurgad A_3HC ja C_3HC_2 on tippnurgad ning seega punktid A_3 , H ja C_3 samuti asuvad ühel ja samal sirgel. ■

§ 10. Kolmnurga mediaani, nurgapoolitaja ja kõrguse vahelised seosed

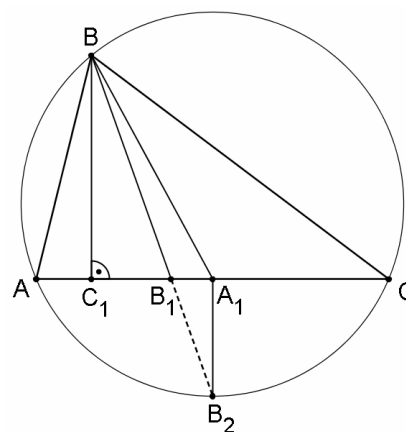
10.1. Põhitulemused

Tõestame esmalt teoreemi ühest ja samast tipust tõmmatud kolme põhitseviaani vastastikuse asendi kohta, mis on oluline õige joonise tegemise seisukohalt.

Teoreem 2.10.1. *Mis tahes isekülgse kolmnurga nurgapoolitaja asub samast tipust tõmmatud kõrguse ja mediaani vahel.*

Tõestus.

- Olgu A_1 , B_1 ja C_1 vastavalt kolmnurga ABC tipust B tõmmatud mediaani, nurgapoolitaja ja kõrguse aluspunktid.
- Olgu B_2 üle punkti B_1 tõmmatud nurgapoolitaja BB_1 pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt.
- Siis B_2 on kaare AC keskpunkt (vt Teoreem 2.5.1.) ja B_2A_1 on külje AC keskristsirge (vt Teoreem 2.2.1.).
- Kuna punktid B ja B_2 asuvad sirgest AC erinevatel pooltasanditel, siis lõigu BB_2 ja sirge AC lõikepunkt B_1 paikneb sirgele AC tõmmatud punktide B ja B_2 ristprojektsioonide vahel, st vastavalt punktide C_1 ja A_1 vahel. ■



Teoreem 2.10.2. *Kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui leidub külg, millele tõmmatud kõrgusest, mediaanist ja nurgapoolitajast vähemalt kaks ühtivad.*

Tõestus.

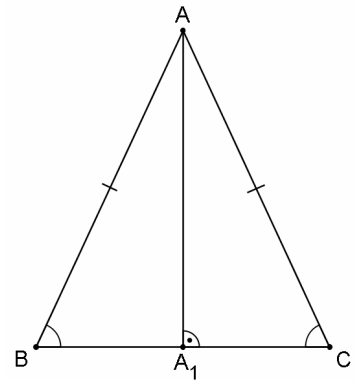
- Tõestame piisavuse. Kui kolmnurga küljele tõmmatud kõrgus ühtib kas mediaaniga või nurgapoolitajaga, siis ilmselt on kaks tekkinud täisnurkset kolmnurka võrdsed vastavalt tunnuse KNK või tunnuse NKN põhjal. Seega antud kolmnurga vaadeldava külje lähisnurgad on võrdsed ja kolmnurk on võrdhaarne.
- Kui ühtivad ühele küljele tõmmatud mediaan ja nurgapoolitaja, siis teised kaks külge on nurgapoolitaja põhiomaduse tõttu võrdsed, sest on võrdsed lõigud, milleks nurgapoolitaja jaotab vaadeldava külje. Seega ka siin on kolmnurk võrdhaarne.
- Ühtlasi on näidatud, et kahe vaadeldava põhitseviaani ühtimisel ühtib nendega ka kolmas samast tipust tõmmatud põhitseviaan.

- Tõestame tarvilikkuse. Olgu AA_1 võrdhaarse kolmnurga ABC alusele BC tõmmatud kõrgus.
- Kuna täisnurksete kolmnurkade BAA_1 ja CAA_1 vastavad hüpotenuusid BA ja CA on võrdsed ning nendel on ühine kaatet AA_1 , siis need kolmnurgad on võrdsed.
- Sellest, et võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad ja küljed on samuti võrdsed, saame

$$\angle BAA_1 = \angle CAA_1 \quad \text{ja} \quad BA_1 = CA_1$$

ehk AA_1 on nurga BAC poolitaja ja A_1 on külje BC keskpunkt. Teisisõnu, kõrgus AA_1 on ka kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja mediaan.

- Seega võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja ühtivad. ■



10.2. Täiendavaid seoseid kolmnurga kõrguse, mediaani ja nurgapoolitaja vahel

Uurime, kas ja millistel tingimustel on võimalik määrata vaadeldavate tseviaanide vahelisi nurki.

Teoreem 2.10.3. *Kui kolmnurk ABC rahuldab tingimust $AC \neq BC$, siis tipust C tõmmatud nurgapoolitaja poolitab samast tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse vahelise nurga parajasti siis, kui $\angle ACB = 90^\circ$.*

Tõestus.

- Olgu M külje AB keskpunkt. Lõikugu punktist C tõmmatud kõrguse, nurgapoolitaja ja mediaani pikendused kolmnurga ABC ümberringjoont vastavalt punktides A_2 , B_2 ja C_2 .

- Tõestame esmalt tarvilikkuse. Eeldame, et nurgapoolitaja CB_2 poolitab ka sirgete CA_2 ja CC_2 vahelise nurga. See tähendab, et CB_2 on nurga A_2CC_2 poolitaja ehk

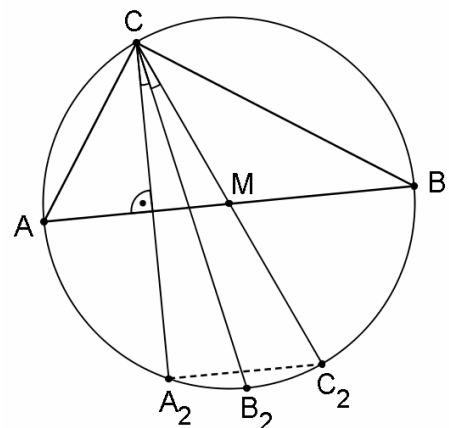
$$\angle A_2CB_2 = \angle B_2CC_2.$$

- Siis

$$\angle ACA_2 = \angle BCC_2.$$

- Seega kaared AA_2 ja BC_2 on võrdsed. Järelikult

$$AB \parallel A_2C_2 \quad \text{ja} \quad \angle CA_2C_2 = 90^\circ.$$



- See aga tähendab, et CC_2 on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter.
- Teame (vt Teoreem 2.5.1. ja Teoreem 2.2.1.), et punkt B_2 poolitab kaare AB ja B_2M on külje AB keskristsirge.
- Samuti teame, et kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunktiga (vt [1], *ümberringjoon*).
- Seega saame, et ühelt poolt punkt M asub kolmnurga ABC külje AB keskristsirgel ja teiselt poolt paikneb selle kolmnurga ümberringjoone diameetril CC_2 . Seega M on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.
- Järelikult AB on selle ringjoone diameeter ja $\angle ACB = 90^\circ$.
- Tõestame piisavuse. Olgu $\angle ACB$ täisnurk.
- Siis M on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja CC_2 on selle ringjoone diameeter.
- Järelikult

$$\angle CA_2C_2 = 90^\circ \quad \text{ja} \quad AB \parallel A_2C_2.$$

- Sellest aga kohe järeldeb kaarte AA_2 ja BC_2 ning nurkade ACA_2 ja BCC_2 võrdsus.
- Kuna CB_2 on nurga ACB poolitaja, siis ka

$$\angle A_2CB_2 = \angle B_2CC_2,$$

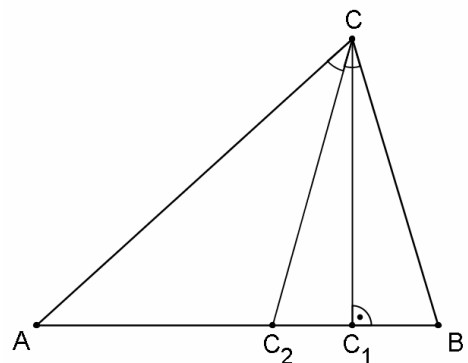
mis tähendabki, et tipust C tõmmatud nurgapoolitaja poolitab samast tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse vahelise nurga. ■

Lause 2.10.4. Kui CC_1 ja CC_2 on vastavalt kolmnurga ABC kõrgus ja nurgapoolitaja, siis

$$\angle C_1CC_2 = \frac{1}{2}|\angle ABC - \angle BAC|.$$

Tõestus.

- Kui kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega AB , siis väide muutub triviaalseks, kuna vaadeldava võrduse mõlemad pooled on võrdsed nulliga.
- Tõestame võrduse esialgu juhul, kui $AC \neq BC$ ning C_1 on külje AB sisepunkt.
- Üldisust kitsendamata eeldame, et $AC > BC$. Siis kiir CC_1 asub kiirte CB ja CC_2 vahel.



- Seega

$$\angle C_1CC_2 = \angle C_2CB - \angle BCC_1 = \frac{1}{2}\angle ACB - (90^\circ - \angle ABC) =$$

$$\frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) - (90^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle BAC).$$

- Analoogiliselt saab tõestada võrduse kehtivust nürinurkse kolmnurga ABC korral, kui C_1 asub külje AB pikendusel. ■

Teoreem 2.10.5. *Kui kolmnurga mis tahes tipust tõmmatud kõrgusest, nurgapoolitajast ja mediaanist ei saa moodustada kolmnurka, siis üks selle kolmnurga nurkadest on suurem kui 135° .*

Tõestus.

- Kuna mis tahes kolmnurga mediaan m ei ole lühem selle kolmnurga samast tipust tõmmatud nurgapoolitajast l ja ka kõrgusest h (vt Teoreem 2.10.1.), siis teoreemi eeldus, et lõikudest m , l ja h ei saa moodustada kolmnurka, on samaväärne tingimusega

$$m \geq l + h.$$

- Näitame, et kõikide vastavate mediaanide ja kõrguste vaheline nurk on siis suurem kui 60° .
- Oletame vastuväiteliselt, et mingi mediaani ja vastava kõrguse vaheline nurk ei ole suurem kui 60° .
- Siis nende poolt moodustatud täisnurksest kolmnurgast järeldub võrratus

$$m \leq 2h,$$

kusjuures võrdus leiab aset parajasti siis, kui selle kolmnurga teravnurgad on suurusega 60° ja 30° .

- Samas kehtib ka võrratus (vt Teoreem 2.10.1.)

$$l + h \geq 2h,$$

kusjuures võrdus leiab aset parajasti siis, kui kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan langevad kokku.

- Järelikult $l + h > m$, mis on vastuolus eeldusega.
- Seega tõestasime, et antud eeldusel on mis tahes mediaani ja vastava kõrguse vaheline nurk suurem kui 60° .
- Kuna ühegi kolmnurga väikseim sisenurk ei saa olla suurem kui 60° , siis vaadeldav kolmnurk ei saa olla teravnurkne ega ka täisnurkne.
- Vaatleme nürinurkset kolmnurka ABC ja oletame, et selle jaoks on teoreemi eeldus täidetud.
- Olgu $\angle BAC$ selle kolmnurga ABC nürinurk ning AA_1 ja AA_2 olgu vastavalt selle kolmnurga mediaan ja kõrgus.

- Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt A_1 on lõigu BA_2 sisepunkt.
- Äsja tõestatu põhjal

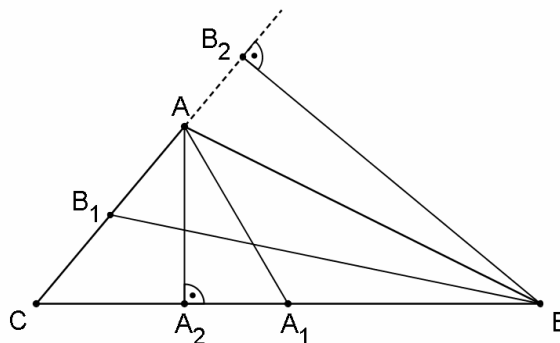
$$\angle A_1AA_2 > 60^\circ,$$

seega

$$\angle AA_1A_2 < 30^\circ.$$

- Kuna $\angle AA_1A_2$ on kolmnurga AA_1B välisnurk, siis

$$\angle AA_1A_2 = \angle ABA_1 + \angle BAA_1 < 30^\circ.$$



- On selge (vt Teoreemid 2.1.10. ja 2.1.39.), et kolmnurga nürinurga tipust tõmmatud mediaan on lühem kui pool vastaskülge (st $AA_1 < A_1B$). Siis

$$\angle ABA_1 < \angle BAA_1.$$

- Järelikult $\angle ABA_1 < 15^\circ$.
- Kui BB_1 ja BB_2 on samuti vastavalt kolmnurga ABC mediaan ja kõrgus, siis ka nende vaheline nurk on suurem kui 60° . Seega kõrguse BB_2 ja külje BC vaheline nurk on suurem kui 60° . Järelikult $\angle ACB < 30^\circ$.
- Kokkuvõttes saame, et

$$\begin{aligned} \angle BAC &= 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = \\ &= 180^\circ - \angle ACB - \angle ABA_1 > 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ. \end{aligned}$$

- Märgime, et antud teoreemi tingimusi rahuldavaks kolmnurgaks osutub näiteks kolmnurk, mille nurkade suurused on 175° , 3° ja 2° . ■

Vaatleme nüüd, millistel juhtudel võivad kolmnurga erinevatest tippudest tõmmatud erinevat liiki põhitseviaanid lõikuda.

Teoreem 2.10.6. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus, tipust B tõmmatud mediaan ja tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui kehtib võrdus

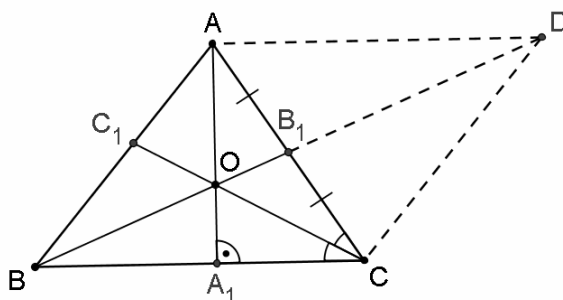
$$\frac{\sin \angle BAC}{\cos \angle ABC} = \tan \angle ACB.$$

Tõestus.

- Olgu a , b ja c vastavalt kolmnurga ABC külgede BC , AC ja AB pikkused, α , β ja γ vastavalt selle kolmnurga nurkade BAC , ABC ja ACB suurused ning AA_1 , BB_1 ja CC_1 vastavalt vaadeldava kolmnurga kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja.

- Tõestame tarvilikkuse. Olgu O kolmnurga ABC erinevatest tippudest tõmmatud kõrguse, mediaani ja nurgapoolitaja lõikepunkt.

- On selge, et nurgad β ja γ on teravnurgad. Tõepoolest, kui üks neist oleks nürinurk, siis kõrgus AA_1 asuks kolmnurgast ABC väljaspool ja ei saaks läbida kolmnurga sisepiirkonnas asuvat punkti O . Järelikult kõrguse aluspunkt A_1 on külje BC sisepunkt.



- Leiame, millises suhtes jaotavad mediaan ja nurgapoolitaja kõrguse AA_1 .
- Pikendame mediaani BB_1 üle punkti B_1 , et tekiks rööpkülik $ABCD$ (vt Teoreem 2.1.2.).
- Kasutades täisnurksete kolmnurkade BA_1O ja DAO sarnasust saame, et mediaan BB_1 jaotab kõrguse AA_1 suhtes

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{BA_1}{AD} = \frac{c \cos \beta}{a} = \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

- Nurgapoolitaja põhiomadust kasutades (vt Teoreem 2.4.4.) saame, et nurgapoolitaja CC_1 jaotab kõrguse AA_1 suhtes

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{CA_1}{CA} = \cos \gamma. \quad (2)$$

- Võrdustest (1) ja (2) saamegi vajaliku võrduse

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \tan \gamma.$$

- Tõestame nüüd piisavuse. Kehtigu võrdus

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \tan \gamma.$$

- Olgu O_1 kolmnurga ABC kõrguse AA_1 ja nurgapoolitaja CC_1 lõikepunkt ning O_2 kolmnurga ABC kõrguse AA_1 ja mediaani BB_1 lõikepunkt.
- Kuna nurk α rahuldab võrratust $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, siis ilmselt $\sin \alpha > 0$.
- Seega nurgad β ja γ on teravnurgad. Tõepoolest, kui $\cos \beta < 0$ ja $\tan \gamma < 0$, siis oleks kolmnurgas kaks nürinurka. Järelikult β ja γ on teravnurgad ning A_1 on külje BC sisepunkt.

- Analoogiliselt tarvilikkuses toodud tõestusele saame, et kehtivad võrdused

$$\frac{O_2 A_1}{O_2 A} = \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \alpha} \quad \text{ja} \quad \frac{O_1 A_1}{O_1 A} = \cos \gamma.$$

- Seega

$$\frac{O_1 A_1}{O_1 A} = \frac{O_2 A_1}{O_2 A}.$$

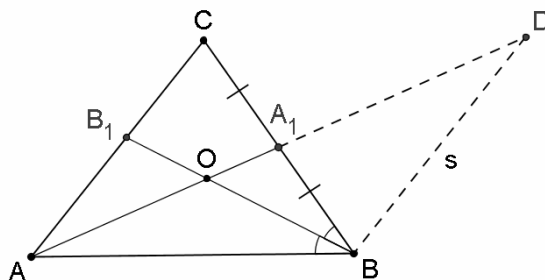
- Kuna punktid O_1 ja O_2 on kõrguse AA_1 sisepunktid, siis $O_1 = O_2$, mis tähendabki, et tipust A tõmmatud kõrgus, tipust B tõmmatud mediaan ja tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikuvad ühes punktis.
- Märgime, et antud teoreemi tingimusi rahuldavaks lihtsaimaks kolmnurgaks osutub näiteks võrdkülgne kolmnurk. ■

Teoreem 2.10.7. Kui kolmnurga ABC mediaan AA_1 ja nurgapoolitaja BB_1 lõikuvad punktis O , siis leiab aset võrdus

$$\frac{OB}{OB_1} - \frac{CB}{AB} = 1.$$

Tõestus.

- Tõmbame läbi punkti B küljega AC paralleelse sirge s . Olgu D mediaani AA_1 pikendamisel üle punkti A_1 saadud kiire ja sirge s lõikepunkt.
- Kuna $ABDC$ on rööpkülik, siis $BD = AC$.
- Kolmnurkade BOD ja B_1OA sarnasusest leiame, et



$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{BD}{B_1 A}.$$

- Arvestades sellega ja kasutades nurgapoolitaja põhiomadust, saame

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{BD}{B_1 A} = \frac{AC}{B_1 A} = \frac{AB_1 + B_1 C}{B_1 A} = 1 + \frac{CB_1}{AB_1} = 1 + \frac{CB}{AB}.$$

- Seega tõepoolest kehtib võrdus

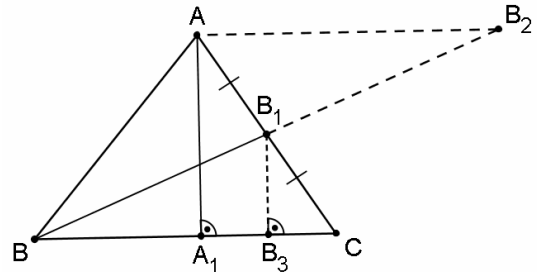
$$\frac{OB}{OB_1} - \frac{CB}{AB} = 1. \quad \blacksquare$$

Lause 2.10.8. Kui teravnurkse kolmnurga ABC pikim kõrgus AA_1 ja selle kolmnurga mediaan BB_1 on pikkuselt võrdsed, siis $\angle ABC \leq 60^\circ$.

Tõestus.

- Olgu B_2 punktiga B sümmeetriline punkt punkti B_1 suhtes.
- Kuna punktist B_1 küljele BC tõmmatud ristlõik B_1B_3 on kolmnurga ACA_1 kesklõik, siis

$$B_1B_3 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} BB_1.$$



- Kuna täisnurkses kolmnurgas BB_3B_1 hüpotenuusi pikkus on kaks korda suurem kaateti pikkusest, siis

$$\angle B_1BC = \angle B_1BB_3 = 30^\circ.$$

- Sellest, et AA_1 on kolmnurga ABC suurim kõrgus, järeldub, et BC on kõige lühem külg (vt Teoreem 2.7.14.). Seega kehtib võrratus

$$AB_2 = BC \leq AB.$$

- Nüüd saame, et

$$\angle ABB_2 \leq \angle AB_2B = \angle B_1BC = 30^\circ.$$

- Järelikult

$$\angle ABC = \angle ABB_2 + \angle B_1BC \leq 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ. \quad \blacksquare$$

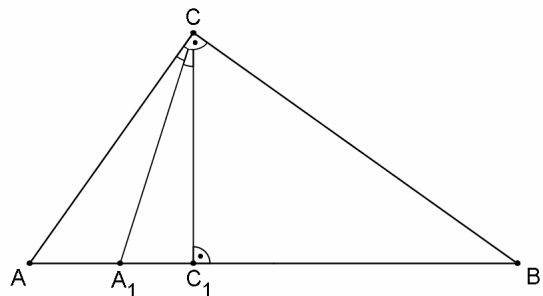
Leiame nüüd mõned seosed kolmnurkade võrdhaarsuse (võrdkülguse) ja erinevate tseviaanide omaduste vahel.

Lause 2.10.9. Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ja CA_1 on kolmnurga ACC_1 nurgapoolitaja, siis kolmnurk CBA_1 on võrdhaarne.

Tõestus.

- Tähistame $\angle BAC = \alpha$. Avaldame nurgad BCA_1 ja CA_1B nurga α kaudu.
- Kuna

$$\begin{aligned} \angle ACC_1 &= 90^\circ - \alpha, \\ \angle A_1CA &= \angle A_1CC_1 = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \\ \angle C_1CB &= \alpha, \end{aligned}$$



siis

$$\angle CA_1B = \alpha + \angle A_1CA = \alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

ja

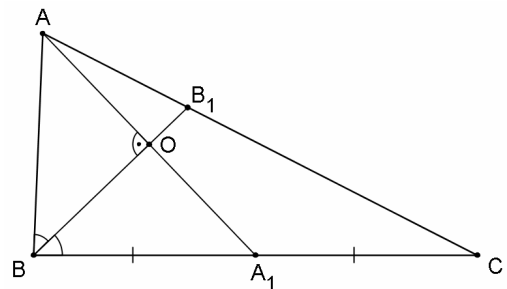
$$\angle BCA_1 = \angle C_1CB + \angle A_1CC_1 = \alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

millega on lause tõestatud. ■

Lause 2.10.10. Kui kolmnurga ABC mediaan AA_1 on selle nurgapoolitajaga BB_1 risti, siis kolmnurk ABA_1 on võrdhaarne.

Tõestus.

- Olgu O antud mediaani ja nurgapoolitaja lõikepunkt ning $AA_1 \perp BB_1$.
- Kuna kolmnurgas ABA_1 lõik BO on selle kolmnurga nurgapoolitaja ja samuti kõrgus, siis vaadeldav kolmnurk on võrdhaarne. ■



Teoreem 2.10.12. Kolmnurk ABC on võrdkülgne parajasti siis, kui ühest tipust tõmmatud mediaan, teisest tipust tõmmatud nurgapoolitaja ja kolmandast tipust tõmmatud kõrgus lõikuvad ühes punktis O ning on täidetud üks järgmistest tingimustest:

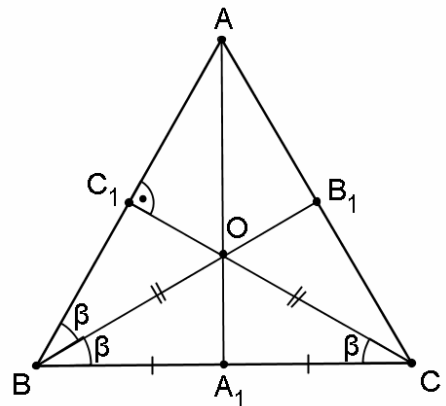
- vähemalt kaks lõikudest AO , BO ja CO on võrdse pikkusega;
- nurgapoolitaja on tõmmatud tipust, mille juures asub sisenurk suurusega 60° .

Tõestused.

- Kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis ilmselt kehtivad tingimused a) ja b).

Osa a) piisavuse tõestus.

- Lõikugu kolmnurga ABC mediaan AA_1 , nurgapoolitaja BB_1 ja kõrgus CC_1 punktis O ning kehtigu näiteks võrdus $BO = CO$.
- Siis kolmnurk BOC on võrdhaarne ja selle mediaan OA_1 osutub ka selle kolmnurga kõrguseks (vt Teoreem 2.10.2.), st mediaan AA_1 on ka kõrgus ning $AB = AC$.



- Järelikult on punkt O kolmnurga kõrguste lõikepunkt ning seda läbiv nurgapoolitaja BB_1 on risti küljega AC .

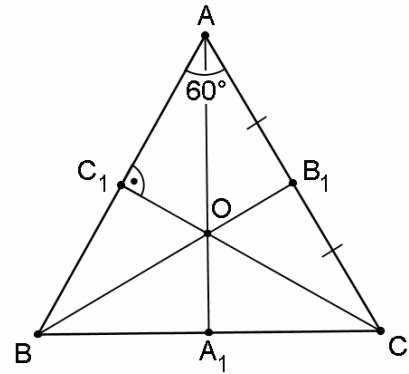
- Seega ka $BC = BA$.
- Oleme näidanud, et kolmnurk on võrdkülgne.
- Analoogiliselt jäeldub kolmnurga võrdkülgsus ka tingimustest $AO = CO$ ja $AO = BO$. ■

Osa b) piisavuse tõestus.

- Lõikugu kolmnurga ABC nurgapoolitaja AA_1 , mediaan BB_1 ja kõrgus CC_1 punktis O ning olgu $\angle BAC = 60^\circ$.
- Siis täisnurkses kolmnurgas CC_1A kaatet AC_1 asub nurga vastas, mille suurus on 30° . Seega

$$AC = 2AC_1.$$

- Kuna B_1 on külje AC keskpunkt, siis $AB_1 = AC_1$.
- Järelikult kolmnurgad AB_1O ja AC_1O on võrdsed tunnuse KNK põhjal (sest AA_1 on nurgapoolitaja).
- Seega nurk AB_1O on täisnurk ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgus.
- Sellest jäeldub, et kolmnurk ABC on võrdhaarne ($BA = BC$). Kuna võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 60° , siis tegemist on võrdkülgse kolmnurgaga. ■



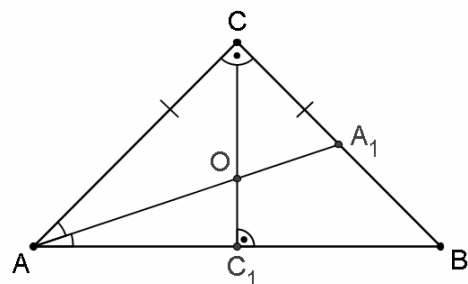
Teoreem 2.10.12. *Täisnurkne kolmnurk ABC on võrdhaarne parajasti siis, kui teravnurgast tõmmatud nurgapoolitaja jaotab täisnurgast tõmmatud kõrguse lõikudeks, mille suhe on $\sqrt{2}$.*

Tõestus.

- Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga ACB võrdhaarne (st $AC = BC$).
- Olgu O antud kolmnurga kõrguse CC_1 ja nurgapoolitaja AA_1 lõikepunkt.
- Siis kolmnurgast ACC_1 nurgapoolitaja põhiomaduse põhjal saame, et

$$\frac{OC}{OC_1} = \frac{AC}{AC_1}.$$

- Kuna võrdhaarses kolmnurgas alusele tõmmatud kõrgus langeb alusele tõmmatud mediaaniga kokku, siis $AB = 2AC_1$.



- Seega ühelt poolt saame, et

$$AB^2 = 4AC_1^2,$$

ja teiselt poolt Pythagorase teoreemi kasutades, saame, et

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2.$$

- Seega kehtib võrdus $AC = \sqrt{2}AC_1$. Kokkuvõttes saame, et

$$\frac{OC}{OC_1} = \frac{AC}{AC_1} = \sqrt{2}.$$

- Tõestame nüüd piisavuse. Eeldame, et täisnurkse kolmnurga ABC (täisnurgaga ACB) nurgapoolitaja AA_1 lõikab kõrgust CC_1 punktis O nii, et kehtib võrdus

$$\frac{OC}{OC_1} = \sqrt{2}.$$

- Kuna AO on täisnurkse kolmnurga ACC_1 nurgapoolitaja, siis kehtivad võrdused

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{OC}{OC_1} = \sqrt{2} \quad \text{ja} \quad AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2.$$

- Seega

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = \frac{1}{2}AC^2 + CC_1^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2CC_1^2.$$

- Järelikult täisnurkne kolmnurk AC_1C on võrdhaarne, sest

$$AC = \sqrt{2}AC_1 = \sqrt{2}CC_1,$$

ning seega nurkade ACC_1 ja C_1AC suurused on 45° .

- Viimane aga tähendab, et täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on võrdsed ehk kolmnurk ABC on võrdhaarne. ■

Lisame eelmistes paragrahvides tõestatud kolmnurkade võrdsuse tunnustele veel ühe tunnuse kolmnurkade erinevate tseviaanide abil.

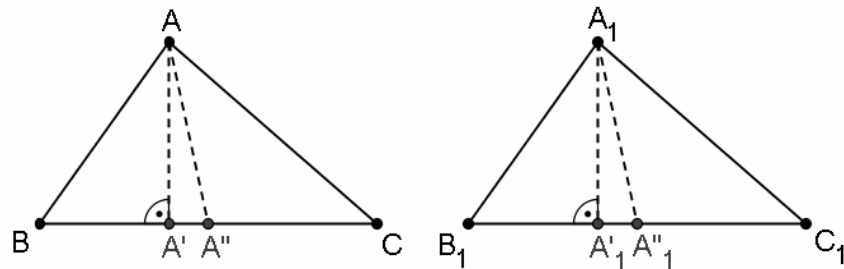
Teoreem 2.10.13. *Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga külj ja sellele tõmmatud kõrgus ja mediaan on vastavalt võrdsed teise kolmnurga küljega ja sellele tõmmatud kõrgusega ja mediaaniga.*

Tõestus.

- Olgu AA' ja AA'' vastavalt kolmnurga ABC kõrgus ja mediaan ning $A_1A'_1$ ja $A_1A''_1$ vastavalt kolmnurga $A_1B_1C_1$ kõrgus ja mediaan.

- Olgu vastavalt teoreemi eeldusele

$$BC = B_1C_1, \quad AA' = A_1A'_1 \quad \text{ja} \quad AA'' = A_1A''_1.$$



- Kuna täisnurksetes kolmnurkades $AA'A''$ ja $A_1A'_1A''_1$ on vastavad kaatedid AA' ja $A_1A'_1$ ning vastavad hüpotenuusid AA'' ja $A_1A''_1$ võrdsed, siis need kolmnurgad ise on võrdsed.
- Järelikult $A'A'' = A'_1A''_1$.
- Kuna A'' ja A''_1 on vastavalt kolmnurkade ABC ja $A_1B_1C_1$ mediaanide aluspunktid (ehk külgede BC ja B_1C_1 vastavad keskpunktid), siis

$$BA' = BA'' - A'A'' = B_1A''_1 - A'_1A''_1 = B_1A'_1.$$

- Sellest aga jäeldub täisnurksete kolmnurkade $AA'B$ ja $A_1A'_1B_1$ võrdsus tunnuse KNK põhjal. Seega on nende kolmnurkade hüpotenuusid võrdsed, st $AB = A_1B_1$.
- Analoogiliselt saab näidata, et
 - kehtib võrdus $CA' = C_1A'_1$;
 - täisnurksed kolmnurgad $AA'C$ ja $A_1A'_1C_1$ on võrdsed;
 - nende hüpotenuusid AC ja A_1C_1 on võrdsed.
- Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse KKK põhjal. ■

III Lisakonstruktsioonide meetod

§ 1. Meetodi kirjeldus

Geomeetriaülesannete lahendamisel ja tõestamisel on oluliseks lahendusideede allikaks sobiv joonis. Sellega seoses tekib lahendajal tavaliselt kaks küsimust.

1. Kas tehtud joonis on õige, st kas see vastab ülesandes kirjeldatud olukorrale?
2. Kas tehtud joonis on täielik, st kas olemasoleva konstruktsiooni põhjal saab leida vajalikke seoseid või tuleb sellele joonisele lisada sobivalt valitud kujundeid?

Selles peatükis vaatlemegi, milliseid lisakonstruktsioone on mõistlik teha konkreetse probleemi lahendamiseks. Kui probleemi on õnnestunud lahendada joonise täiendamise tulemusena, siis öeldakse, et on kasutatud *lisakonstruktsioonide meetodit*.

Lisakonstruktsioonide meetodiks nimetatakse protseduuri, mille käigus täiendatakse antud ülesande kohta tehtud joonist uute elementidega nii, et esialgu üsna raskesti märgatavad seosed ülesandes antud suuruste ja otsitavate suuruste vahel saavad selgemaks [35].

Töö teises peatükis esitatud materjali põhjal võime öelda, et joonise täiendamine uute elementidega on mõnede tõestusülesannete puhul ainsaks võimaluseks ülesandes püstitatud probleemi lahendamiseks. Enamikul juhtudel on aga lisakonstruktsioonide sisse toomine tõestuse oluliseks osaks.

Kasutatud lisakonstruktsioonide seas on selliseid, mis tekivad loomulikult ülesande andmete põhjal, aga on ka neid, mis ei ole nii ilmsed ning nõuavad lahendajalt leidlikkust ja niisugust tüüpi ülesannete lahendamise kogemust. Esimete lisakonstruktsioonide näideteks on uute elementide (lõikude, sirgete, ringjoonte jne) moodustamine joonisel olemasolevate punktide ühendamisel, lõikude pikendamine jne [9]. Teiste näideteks on antud lõikudega või sirgetega paralleelsete või ristuvate sirgete tõmbamine, sümmeetriliste punktide, lõikude või sirgete joonistamine jne. Kui esimesel juhul õnnestub lahendajal kasutada lisakonstruktsioonide meetodit isegi siis, kui ta seda ei mõista, siis teist liiki lisakonstruktsioonide tegemine eeldab selle meetodi tundmist ja teadlikku rakendamist.

Selle meetodi rakendamist geomeetriaülesannete lahendamisel saab kirjeldada järgmise algoritmi abil [9].

1. Proovi lahendada ülesannet lisakonstruktsioone tegemata.
2. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis jätkka.
3. Tee otstarbekad olemasolevate punktide ühendamisel saadud sirg- ja/või ringjoonelised lisakonstruktsioonid ja proovi nüüd lahendada ülesannet.
4. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis jätkka.
5. Kasuta mittestandardseid lisakonstruktsioone ja proovi nüüd lahendada ülesannet.
6. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis vaata kas punkti 2 või punkti 5 või küsi abi.

Kokkuvõttes võib öelda, et keerukamate geomeetriaülesannete lahendamisel on esmatähtis õige joonise tegemine ja pärast seda ülesandes antud ja otsitavate elementide vahelise seose leidmine lisakonstruktsioonide abil. Mõningaid tähtsamaid kolmnurga geomeetrias kasutatavaid lisakonstruktsioone vaatleme järgmistes paragrahvides.

§ 2. Kolmnurga tseviaanidega seotud lisakonstruktsioonid

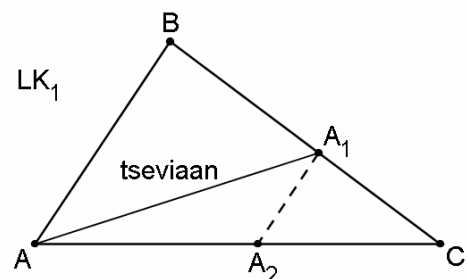
Lisakonstruktsioon 3.2.1. *Kui kolmnurgas on antud tseviaan, siis tõmbame selle tseviaani aluspunktist kolmnurga külgedega paralleelsed lõigud.*

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC tseviaan (sh mediaan, nurgapoolitaja või kõrgus).
- Kui A_2 on külje AC selline sisepunkt, et $A_1A_2 \parallel AB$, siis saame kasutada kiirteteoreemi: nurk ACB ning paralleelsed lõikajad AB ja A_1A_2 määravad seose

$$\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2A}{A_1B}.$$

- Kolmnurgad ABC ja A_2A_1C on sarnased.



Märkused.

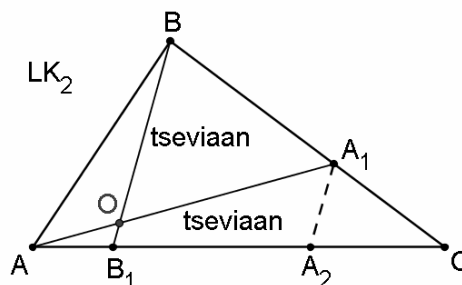
- a) Punktist A_1 tõmmatud lõik võib olla ka küljega AC paralleelne.
- b) Kui tseviaan AA_1 osutub kolmnurga mediaaniks, siis A_2 on lõigu AC keskpunkt ja lõik A_1A_2 on kolmnurga ABC kesklõik.

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.1.3. ja lause 2.4.41. tõestamisel ning ülesannete 2.3.1. ja 2.6.3. lahendamisel.

Lisakonstruktsioon 3.2.2. Kui kolmnurgas on erinevatest tippudest tõmmatud kaks tseviaani, siis ühe tseviaani aluspunktist tõmbame teise tseviaaniga paralleelse kiire.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC tseviaanid ning O nende lõikepunkt.
- Kui A_2 on külje AC selline sisepunkt, et $A_1A_2 \parallel BB_1$, siis tekib kaks kiirteteoreemi olukorda:



- a) nurk ACB ning paralleelsed lõikajad A_1A_2 ja BB_1 määravad seose

$$\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2B_1}{A_1B}$$

ning $\Delta A_1A_2C \sim \Delta BB_1C$.

- b) nurk A_1AC ning paralleelsed lõikajad A_1A_2 ja OB_1 määravad seose

$$\frac{AO}{AB_1} = \frac{OA_1}{B_1A_2}$$

ning $\Delta AA_1A_2 \sim \Delta AOB_1$.

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks teoreemi 2.1.3. tõestamisel ning järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Kolmnurga ABC külgedel BC ja AC on valitud vastavalt punktid A_1 ja B_1 nii, et kehtivad seosed

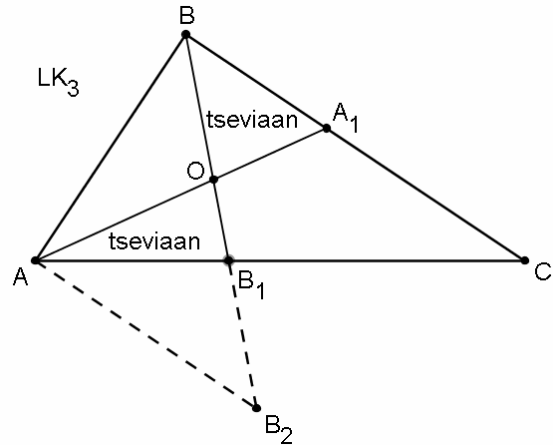
$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{p} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{q}.$$

Leida, millises suhtes jaotab tseviaanide AA_1 ja BB_1 lõikepunkt mõlemad tseviaanid.

Lisakonstruktsioon 3.2.3. Kui kolmnurgas on erinevatest tippudest tõmmatud kaks tseviaani, siis pikendame ühest tipust tõmmatud tseviaani üle selle aluspunkti kuni lõikumiseni sirgega, mis läbib teist tippu ja on paralleelne vastasküljega.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC mis tahes tseviaanid ning O nende lõikepunkt. Olgu B_2 läbi punkti A küljega BC paralleelse sirge ja tseviaani BB_1 pikenduse lõikepunkt.
- Siis on sarnased järgmised kolmnurgad:
 - a) $\triangle AOB_2 \sim \triangle A_1OB$;
 - b) $\triangle AB_1B_2 \sim \triangle CB_1B$.



Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks järgmise ülesande lahendamisel.

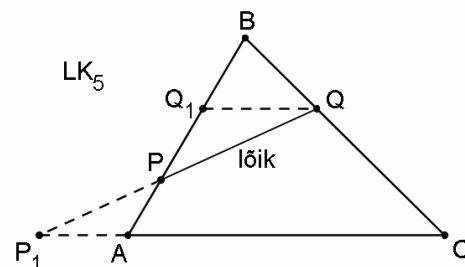
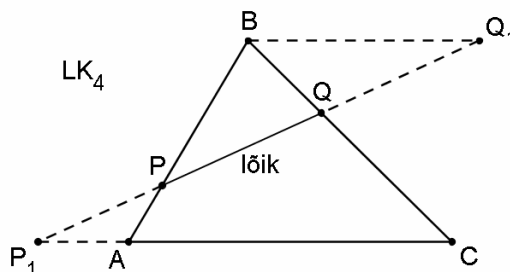
Ülesanne. Kolmnurga ABC külgedel AB ja AC on valitud vastavalt punktid C_1 ja B_1 nii, et kehtivad seosed

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{4}{5}.$$

Leida, millises suhtes jaotab tseviaan CC_1 tseviaani BB_1 .

Lisakonstruktsioon 3.2.4. Kui on antud kolmnurga kahe külje sisepunkte ühendav lõik, mis ei ole paralleelne küljega, siis võime pikendada seda lõiku ja leida selle pikenduse lõikepunkti kolmanda külje pikendusega ning

- a) leida lõikepunkti kolmanda küljega paralleelse ja selle vastastippu läbiva sirgega (vt LK₄);
- b) tõmmata lõigu otspunktidest kolmnurga külgedega paralleelseid lõike (vt LK₅).



Lisakonstruktsiooni tulemus.

- LK₄ juhul on sarnased järgmised kolmnurgad:

$$\triangle QBQ_1 \sim \triangle QCP_1 \quad \text{ja} \quad \triangle PBQ_1 \sim \triangle PAP_1.$$

- LK₅ juhul tekib kiirteteoreemi olukord: $\angle ABC$ ja lõikajad $QQ_1 \parallel AC$ ning tekivad ka sarnased kolmnurgad:

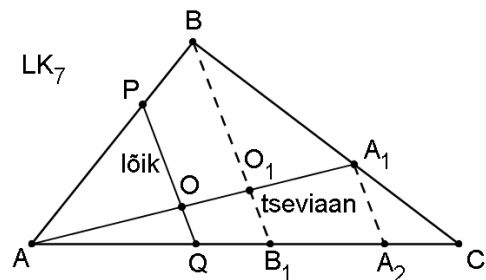
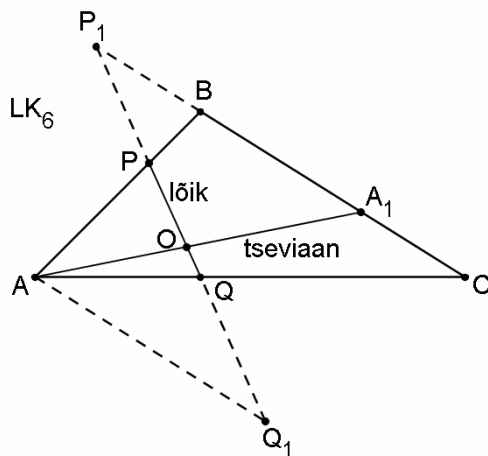
$$\triangle PQQ_1 \sim \triangle PP_1A \quad \text{ja} \quad \triangle BQQ_1 \sim \triangle BCA.$$

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Punkt C_1 on võetud kolmnurga ABC küljel AB nii, et $AB = 3AC_1$ ning punkt B_1 asub külje AC pikendusel üle tipu C ja rahuldab tingimust $AB_1 = 2AC$. Leida, millises suhtes jaotab sirge B_1C_1 külje BC .

Lisakonstruktsioon 3.2.5. Kui kolmnurga ühest tipust on tõmmatud tseviaan ja selle nurga lähiskülgedel asuvaid punkte ühendav kuid küljega mitteparalleelne lõik, siis võime

- pikendada seda lõiku ja leida selle pikenduse lõikepunktid kolmnurga kolmanda külje pikendusega ning selle külje vastastippu läbiva ja küljega paralleelse sirgega (vt LK₆);*
- tõmmata kolmnurga tippudest ja vaadeldava tseviaani aluspunktist antud lõiguga paralleelseid lõike (vt LK₇).*



Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu O antud tseviaani AA_1 ja lõigu PQ lõikepunkt, punkt P_1 lõigu PQ pikenduse ja külje BC pikenduse lõikepunkt ning asugu punkt Q_1 lõigu PQ pikendusel nii, et $AQ_1 \parallel BC$.
- LK₆ korral tekib kolm paari sarnaseid kolmnurki:

$$\triangle APQ_1 \sim \triangle BPP_1, \quad \triangle AQQ_1 \sim \triangle CQP_1, \quad \triangle AOQ_1 \sim \triangle A_1OP_1.$$

- LK₇ korral tekib päris mitmeid sarnaste kolmnurkade paare ning saab korduvalt rakendada ka kiirteteoreemi, näiteks tekib kaks põhilist kiirteteoreemi rakendamise võimalust:

$$\angle A_1AA_2 \text{ ja lõikajad } OQ \parallel O_1B_1 \parallel A_1A_2;$$

$$\angle BCB_1 \text{ ja lõikajad } A_1A_2 \parallel BB_1.$$

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Kolmnurga ABC külgedel AB , BC ja AC on võetud vastavalt punktid P , Q ja B_1 nii, et kehtivad võrdused

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{BQ}{QC} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{CB_1}{B_1A} = 3.$$

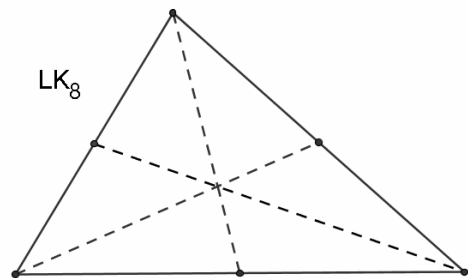
Leida, millises suhtes jaotab lõik PQ tseviaani BB_1 .

§ 3. Mediaanidega seotud lisakonstruktsioonid

Lisakonstruktsioon 3.3.1. Kui kolmnurgas on antud külgede keskpunktid, siis tõmbame mediaanid.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

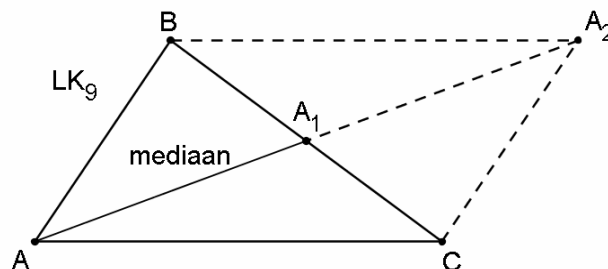
- Mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdpindseks kolmnurgaks ja kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks võrdpindseks kolmnurgaks.
- Mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1 kolmnurga tipust alates.



Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemide 2.1.10. ja 2.1.19. tõestamisel ning ülesande 2.3.2. lahendamisel.

Lisakonstruktsioon 3.3.2. Kui kolmnurgas on antud mediaan, siis pikendame seda mediaani üle aluspunkti mediaani pikkuse võrra.

Lisakonstruktsiooni tulemus.



- Olgu AA_1 kolmnurga ABC mediaan ning punkt A_2 saadud mediaani AA_1 pikendamisel üle punkti A_1 nii, et $AA_1 = A_1A_2$
- Siis
 - a) nelinurk ABA_2C on rööpkülik (vt Teoreem 2.1.2.);
 - b) kolmnurgad AA_1B ja A_2A_1C ning AA_1C ja A_2A_1B on vastavalt võrdsed tunnuse KKK põhjal;
 - c) lõigud A_2A_1 , BA_1 ja CA_1 on vastavalt kolmnurkade BA_2C , ABA_2 ja ACA_2 mediaanid.

Märkused.

- a) Kui kolmnurgas on antud kaks või kolm mediaani, siis analoogiliselt saab moodustada vastavalt kaks või kolm rööpkülikut.
- b) Vaadelda võib ka rööpkülikuid, mis tekivad kolmnurga mediaani pikendamisel üle aluspunkti kas $\frac{1}{3}$ või $\frac{2}{3}$ mediaani pikkuse võrra.

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks järelduse 2.1.6. kehtivuse kontrollimisel, teoreemide 2.1.23. ja 2.1.24. tõestamisel ning järgmise ülesande lahendamisel.

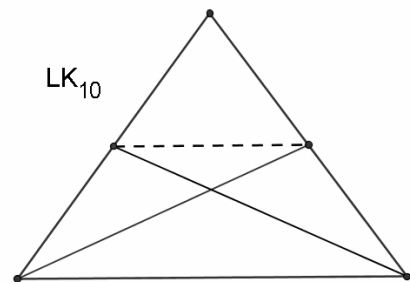
Ülesanne. Leida kolmnurga pindala, kui selle kolmnurga mediaanide pikkused on 12, 15 ja 21.

Lisakonstruktsioon 3.3.3. *Kui kolmnurgas on antud kaks mediaani, siis ühendame nende aluspunktid.*

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Mediaanide aluspunkte ühendav lõik osutub selle kolmnurga kesklõiguks, mille pikkus on pool selle külje pikkusest, mille otspunktidest on tõmmatud mediaanid.

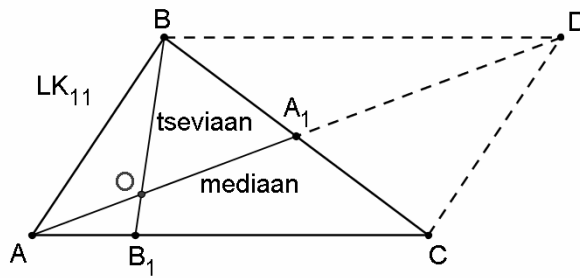
Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemide 2.1.3. ja 2.1.4. tõestamisel.



Lisakonstruktsioon 3.3.4. *Kui kolmnurgas on ühest tipust tõmmatud mediaan ja teisest tipust tõmmatud tseviaan (sh teine mediaan, nurgapoolitaja või kõrgus), siis pikendame mediaani nii, et tekiks rööpkülik.*

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu O kolmnurga ABC mediaani AA_1 ja mis tahes tseviaani BB_1 lõikepunkt ning punkt D selline, et $ABDC$ on rööpkülik.
- Siis kolmnurgad AOB_1 ja DOB on sarnased.



- Erijuhul, kui BB_1 on kolmnurga ABC teine mediaan, siis saame mediaanide põhiomaduse kujul

$$\frac{BO}{OB_1} = 2 = \frac{AO}{OA_1}.$$

- Kui BB_1 on näiteks kolmnurga ABC nurgapoolitaja, siis nurgapoolitaja põhiomadust kasutades saame, et

$$\frac{BO}{OB_1} = 1 + \frac{BC}{AB}.$$

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemide 2.10.6., 2.10.7. ja 2.10.8 ning lause 2.1.31. tõestamisel.

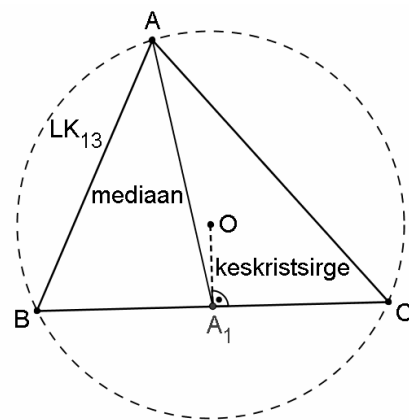
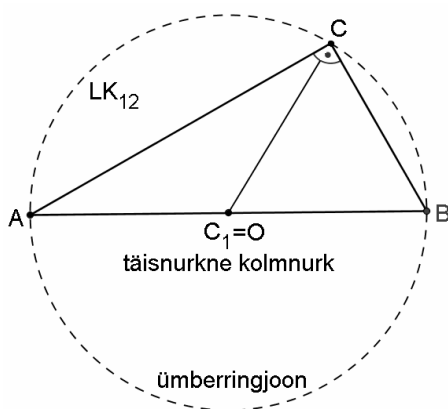
Lisakonstruktsioon 3.3.5. Kui täisnurkses kolmnurgas on hüpoteenusile tõmmatud mediaan, siis joonestame antud kolmnurga ümberringjoone.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Antud kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ühtib hüpoteenusile tõmmatud mediaani aluspunktiga (vt joonis LK_{12}).

Märkus. Võib toimida ka vastupidises suunas: kui on antud täisnurkne kolmnurk ja selle kolmnurga ümberringjoon oma keskpunktiga, siis ühendades täisnurga tipu ümberringjoone keskpunktiga saame kolmnurga mediaani.

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.1.39. tõestamisel.



Lisakonstruktsioon 3.3.6. Kui kolmnurgas on tõmmatud mediaan ja antud selle kolmnurga ümberringjoon oma keskpunktiga, siis ühendame mediaani aluspunkti ja ümberringjoone keskpunkti.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Mediaani aluspunkti ja ümberringjoone keskpunkti läbiv sirge osutub selle kolmnurga külje keskristsirgeks (vt joonis LK₁₃).

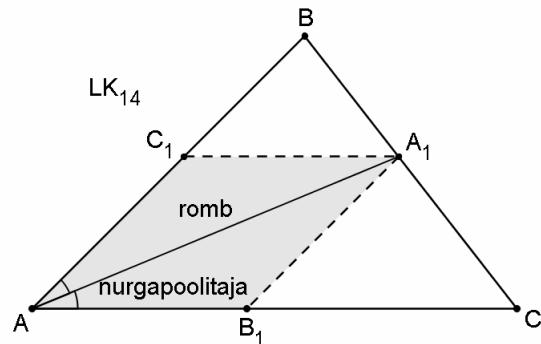
Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemide 2.2.1. ja 2.2.6. ning lause 2.2.8. tõestamisel.

§ 4. Nurgapoolitajatega seotud lisakonstruktsioonid

Lisakonstruktsioon 3.4.1. Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis läbi selle nurgapoolitaja aluspunkti tõmbame kolmnurga külgedega paralleelsed sirged.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja ning B_1 ja C_1 vastavalt külgede AC ja AB sellised punktid, et $A_1C_1 \parallel AC$ ja $A_1B_1 \parallel AB$.
- Siis nelinurk $AB_1A_1C_1$ on romb.



Märkused.

- Mõnikord on kasulikum vaadelda tekkinud võrdhaarset kolmnurka AC_1A_1 (või AB_1A_1).
- Märgime, et seejuures kolmnurgad ABC , C_1BA_1 ja B_1A_1C on sarnased.

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks ülesande 2.6.3. lahendamisel, lause 2.4.41. tõestamisel ning järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Kolmnurga ABC nurk ACB on 120° . Tõestada, et selle nurga vastasküljele tõmmatud nurgapoolitaja pikkus on $\frac{ab}{a+b}$, kui $BC = a$ ja $AC = b$.

Lisakonstruktsioon 3.4.2. Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis pikendame nurgapoolitajat üle selle aluspunkti kuni lõikumiseni sirgega, mis läbib selle kolmnurga teist tippu ja on paralleelne selle tipu vastasküljega.

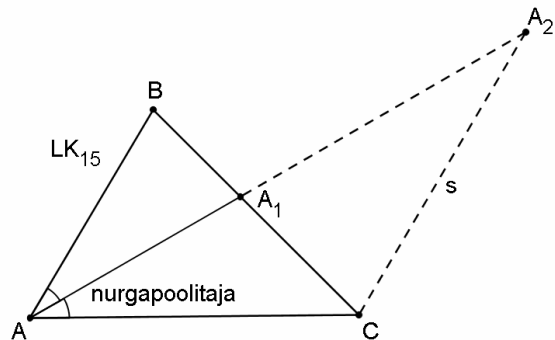
Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja. Olgu s punkti C (või punkti B) läbiv ja küljega AB (või küljega AC) paralleelne sirge. Olgu A_2 sirge s ja nurgapoolitaja AA_1 pikenduse lõikepunkt.

- Siis kolmnurk ACA_2 on võrdhaarne ja $\triangle ABA_1 \sim \triangle A_2CA_1$.

Seda lisakonstruktsiooni saab kasutada näiteks järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Kolmnurga kahe külje pikkused on a ja b ning nende külgede vahelise nurga poolitaja pikkus on l . Leida selle nurga suurus.

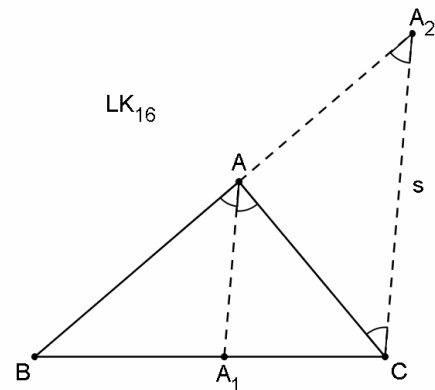


Lisakonstruktsioon 3.4.3. Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis üle selle nurga tippu pikendame ühte selle nurga lähiskülgedest ja läbi kolmanda tippu tõmbame nurgapoolitajaga paralleelse sirge.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja. Olgu s näiteks punkti C läbiv ja nurgapoolitajaga AA_1 paralleelne sirge. Olgu A_2 sirge s ja külje AB pikenduse lõikepunkt.
- Siis kolmnurk CAA_2 on võrdhaarne ja $\triangle ABA_1 \sim \triangle A_2CA_1$.

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.4.4. tõestamisel.

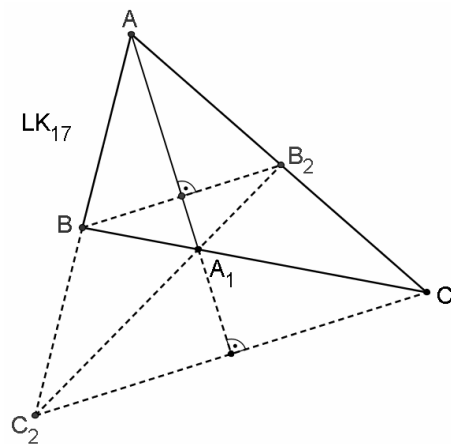


Lisakonstruktsioon 3.4.4. Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis leiame kolmnurga tippudega sümmeetrilised punktid antud nurgapoolitaja suhtes.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja. Olgu B_2 ja C_2 vastavalt punktidega B ja C sümmeetrilised punktid nurgapoolitaja AA_1 suhtes.
- Siis saame, et punktid B_2 ja C_2 asuvad vastavalt sirgetel AC ja AB . Seega tekivad sarnased võrdhaarsed kolmnurgad BAB_2 ja C_2AC .

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.4.4. tõestamisel.

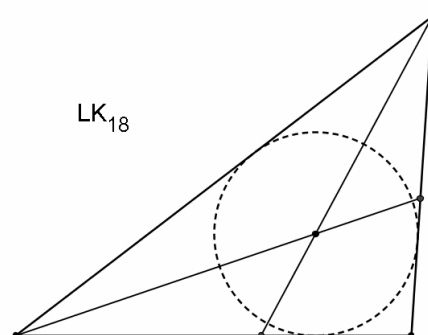


Lisakonstruksioon 3.4.5. Kui kolmnurgas on antud vähemalt kaks nurgapoolitajat, siis joonestame antud kolmnurga siseringjoone.

Lisakonstruksiooni tulemus.

- Antud kolmnurga siseringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktiga.

Märkus. Siin on võimalik ka vastupidine arutus: kui on antud kolmnurk ja selle siseringjoon oma keskpunktiga, siis siseringjoone keskpunkti ja mis tahes kolmnurga tippu läbiv sirge osutub antud kolmnurga sisenurga poolitajaks.

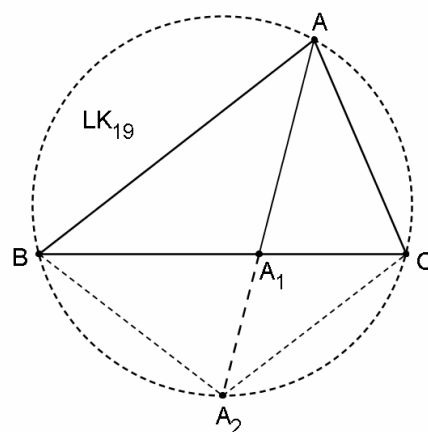


Seda lisakonstruksiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.5.8. osa a) tõestamisel.

Lisakonstruksioon 3.4.6. Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis joonestame selle kolmnurga ümberringjoone ja pikendame nurgapoolitajat lõikumiseni ümberringjoonega.

Lisakonstruksiooni tulemus.

- Olgu AA_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja ning A_2 nurgapoolitaja pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt.
- Siis punkt A_2 poolitab kaare BC ning $BA_2 = CA_2$ (vt Teoreem 2.5.1. ja Järeldus 2.5.2.).



Märkused.

- Kui O on ümberringjoone keskpunkt, siis OA_2 on kolmnurga külje BC keskristsirge.
- Ülaltoodud lisakonstruksioon annab meile idee nurgapoolitaja joonestamiseks. Kui on antud kolmnurk ja selle ümberringjoon, siis poolitades näiteks kaare BC või konstrueerides külje BC keskristsirge ja leides selle lõikepunkti ümberringjoonega, oleme leidnud nurgapoolitaja punkti A_2 .

Seda lisakonstruksiooni saab kasutada näiteks lause 2.4.34. ja teoreemide 2.4.43. osa b), 2.4.45., 2.5.10., 2.5.11., 2.10.1. ja 2.10.3. tõestamisel ning järgmise ülesande lahendamisel.

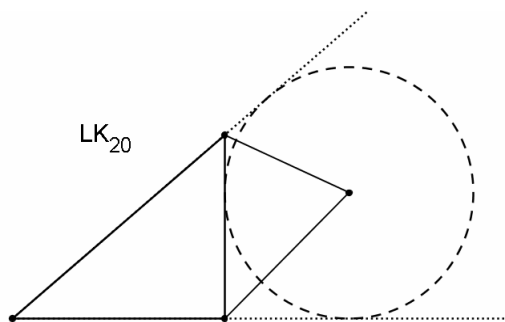
Ülesanne. Täisnurkses kolmnurgas täisnurga tipust tõmmatud mediaani ja nurgapoolitaja vaheline nurk on 10° . Leida antud kolmnurga teravnurgad.

Lisakonstruksioon 3.4.7. Kui kolmnurgas on antud kahe välisnurga poolitaja lõikepunkt, siis joonestame nende nurkade lähiskülje külgringjoone.

Lisakonstruksiooni tulemus.

- Antud kolmnurga külgringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga kahe vastava välisnurga poolitaja ja kolmanda nurga sisenurga poolitaja lõikepunktiga.

Seda lisakonstruksiooni on kasutatud näiteks teoreemide 2.4.20. ja 2.5.6. tõestamisel.



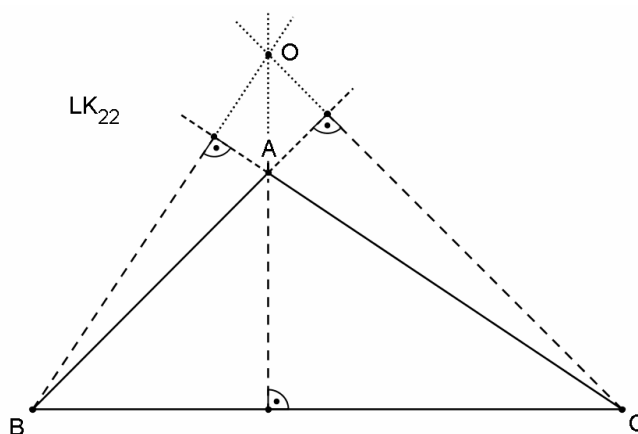
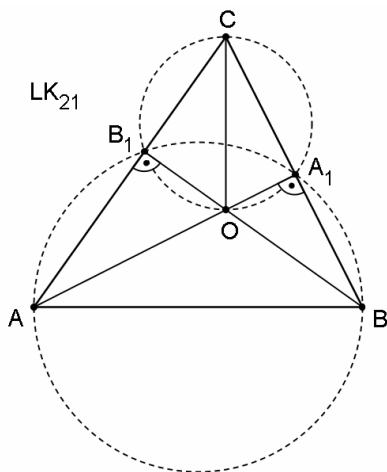
§ 5. Kõrgustega seotud lisakonstruksioonid

Lisakonstruksioon 3.5.1. Kui kolmnurgas on antud kahest tipust tõmmatud kõrgused, siis joonestame ringjoone läbi antud kõrguste aluspunktide ja kas läbi vaadeldava kahe tipu või läbi kõrguste lõikepunkti ja kolmnurga kolmanda tipu.

Lisakonstruksiooni tulemus.

- Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC kõrgused ning O nende lõikepunkt, siis esimesel juhul lõik AB ja teisel juhul lõik CO on (vt Teoreem 2.8.1.) joonestatud ringjoonte diameetrid (vt joonis LK₂₁).

Seda lisakonstruksiooni on kasutatud näiteks lause 2.7.21. ja teoreemi 2.8.1. tõestamisel ning ülesannete 2.9.4. ja 2.9.5. lahendamisel.



Lisakonstruktsioon 3.5.2. Kui nürinurkses kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis moodustame kolmnurga, mille tippudeks on esialgse kolmnurga teravnurkade tippud ja kõrguste lõikepunkt.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Olgu ABC nürinurkne kolmnurk nürinurgaga BAC ning O selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt.
- Siis punkt A on teravnurkse kolmnurga BOC kõrguste lõikepunkt. Seega ka kolmnurga BOC jaoks saab kasutada kõiki kõrguste omadusi.

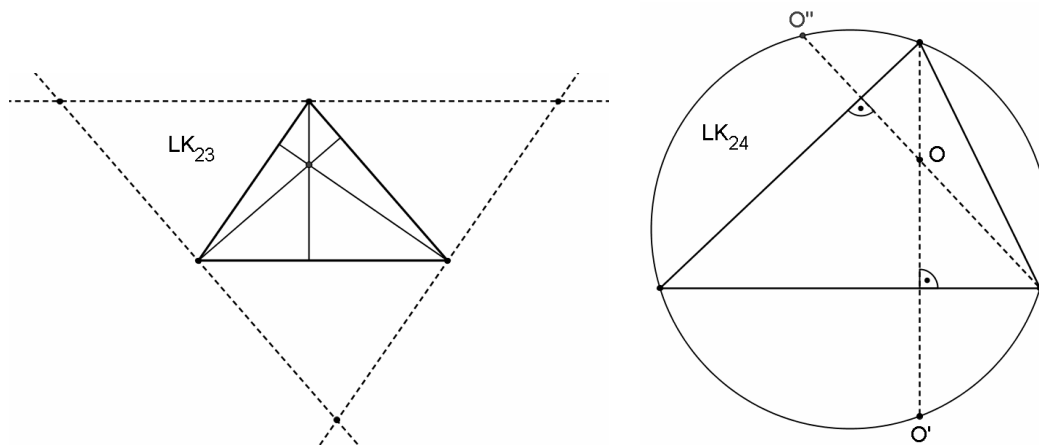
Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks järelduse 2.7.18. tõestamisel.

Lisakonstruktsioon 3.5.3. Kui kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis läbi kolmnurga tippude tõmbame vastaskülgedega paralleelsed sirged.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Kui antud kolmnurga korral tõmbame läbi kolmnurga tippude vastaskülgedega paralleelsed sirged, siis tekib suurem kolmnurk, mille külgede keskpunktideks on esialgse kolmnurga tipud, ning mille keskristsirgete lõikepunktiks on esialgse kolmnurga kõrguste lõikepunkt (vt joonis LK_{23}).

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.7.3. ja lause 2.8.11. osa b) tõestamisel.



Lisakonstruktsioon 3.5.4. Kui kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis joonestame selle kolmnurga ümberringjoone.

Lisakonstruktsiooni tulemus.

- Vastavalt teoreemile 2.8.3. osutub antud kolmnurga kõrguse pikenduse ja selle kolmnurga ümberringjoone lõikepunkt kõrguste lõikepunktiga sümmeetriliseks punktiks selle kolmnurga külje suhtes, millele vaadeldav kõrgus on tõmmatud (vt joonis LK_{24}).

Seda lisakonstruktsiooni on kasutatud näiteks teoreemi 2.8.3. tõestamisel.

Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö esimeses peatükis esitatud analüüs näitab, et Rahvusvahelistel Matemaatika Olümpiaadidel on Eesti võistkondade tõsisemaks probleemiks geomeetria (planimeetria) ülesannete lahendamine ning peaaegu puudub rahvusvahelisele tasemele vastav geomeetriaülesannete lahendusmeetodeid käsitlev eestikeelne kirjandus. Kõige levinumateks täiendavateks õppevahenditeks eesti keeles, lisaks ülesannete kogudele kooligeomeetrias, on O. Kärneri brošüür „Täiendavaid küsimusi planimeetriast IX klassile” (vt [7]) ja I. Šarõgini raamat põhikoolile „Tasandi geomeetria” (vt [16]), milles on tõestatud vaid põhitulemused geomeetriliste kujundite kohta ning on vähe mitmekesiseid näiteid olümpiaadide tasemel. Siinjuures tuleks tähelepanu pöörata ka järgmisele asjaolule: kui koolis isegi tõestatakse mingi tulemus, siis tavaliselt jääb analüüsimata, kas kehtib ka antud väite pöördteoreem, mille tundmine kuulub olümpiaadiülesannete lahendaja põhioskuste hulka.

Ülalöeldut arvestades, on autori poolt tehtud Rahvusvaheliste Matemaatika Olümpiaadide ja matemaatikavõistluste alase kirjanduse analüüs, mille eesmärgiks oli välja selgitada need baasteadmised, põhimeetodid ja ka matemaatilised ideed, mille tundmine on vajalik sellise matemaatilise mõtlemisviisi kujundamisele, mis tagaks ka edu matemaatikavõistlustel.

Geomeetriaülesannete temaatikat puudutav uurimus näitas, et viimaste RMO geomeetriaülesanneteid võib liigitada järgmiste alateemade järgi: nurgad ja meetrilised seosed ringi elementide vahel, geomeetrilised teisendused, meetrilised seosed kolmnurgas ja geomeetrilised võrratused.

Selle magistritöö teises peatükis on süstematiseeritud eeldatavad teadmised, oskused ja meetodid geomeetriaülesannete edukaks lahendamiseks. Selleks on eelnevalt läbi töötatud mahukas ülesannete kogum, millest on valitud või millest saadud ideede baasil on konstrueeritud teoreetilise sisuga ülesanded. Need on sõnastatud kas teoreemidena või lausetena ja varustatud tõestustega. Konstrueeritud ja ka tõestatud on üsna palju pöördülesandeid.

Töös esitatud tulemused kuuluvad nn kolmnurga geomeetria valdkonda. Vaatluse all on kolmnurga kolm põhitseviaani (mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus) ning kolmnurgaga seotud ringjooned. Iga põhitseviaani korral valitud materjal on jaotatud järgmisteks alateemadeks: põhitseviaani mõiste ja sellega seotud põhitulemuse erinevad tõestused, põhitseviaanide täiendavad omadused ja seosed kolmnurga elementidega, erinevad võimalused kolmnurga pindala leidmiseks, geomeetrilised võrdused ja võrratused, kolmnurkade võrdsuse tunnused põhitseviaane kasutades, tarvilikud ja piisavad tingimused kolmnurga liigi määramiseks põhitseviaanide abil. Sellega on kaetud enamuse rahvusvaheliste olümpiaadide geomeetriaülesannete temaatikast. Materjali kinnistamiseks on pakutud ka mõned teemaga sobivad võistlusülesanded.

Selleks, et anda täiendavaid vihjeid, kuidas on võimalik konkreetsest ülesandest lähtudes valida sobivat meetodit selle ülesande lahendamiseks, on autor töö kolmandas peatükis andnud nn lisakonstruktsioonide meetodi kirjelduse, mis seisneb uute elementide lisamises antud ülesande kohta tehtud joonisel. Selle meetodi näideteks on lihtsamal juhul olemasolevate punktide ühendamine lõigu või ringjoonega ja lõigu pikendamine ning keerulisematel juhtudel sümmeetriliste lõikude otsimine ja ristuvate või paralleelsete lõikude konstrueerimine või joonise täiendamine mingi geomeetrilise kujundiga. Antakse ka täiendavaid soovitusi sobiva lisakonstruktsiooni leidmiseks teatud liiki ülesannete korral. Lisakonstruktsioonid on antud koos selgitustega ja illustreeritud joonistega.

Töös kasutatavate jooniste tegemiseks ja teoreemide hüpoteeside püstitamiseks on kasutatud dünaamilise geomeetria programmi *GeoGebra*.

Käesoleva magistritöö osasid saab valikuliselt kasutada ka näitliku õppematerjalina, mille abil võib omandada nii geomeetriaülesannete lahendusmeetodite kasutamise oskust, kui ka tutvuda põhitõdedega erineva tasemega teoreemide tõestamisel.

Main results and methods of proving in geometry of line segments associated with a triangle

Maksim Ivanov

Summary

The analysis presented in Chapter I of the present Master's Thesis shows that the most serious difficulty of the Estonian teams participating in the International Mathematical Olympiads is solving problems in geometry (planimetry). At present there is not enough literature offering methods for solving geometrical problems at the level meeting the international standards published in the Estonian language. The most popular additional study aids in the Estonian language which have been published besides school textbooks in geometry are O. Kärner's „Additional issues of planimetry for Form 9“ (see [7]) and I. Sharygin's book „Plane geometry“ (see [15]) which the basic results concerning geometrical figures have been proved and which contain too few diverse examples for the Olympiad level. At the same time attention should be paid to the following circumstances: if some result is even proved at school, the analysis is not usually made whether the converse of a theorem is valid. This is one of the basic skills of the student who solves the Olympiad problems.

Considering the above said, the author of the Thesis has analyzed the literature concerning the materials of the International Mathematical Olympiads and mathematical contests with the purpose of revealing the basic concepts and methods of solution and also basic mathematical principles which must be known to develop the mathematical way of thinking which guarantees success at mathematical contests.

The research on the issues of geometrical problems showed that geometrical tasks at the last International Mathematical Olympiads can be divided into groups on the basis of the subthemes: angles and metric relations in circles, geometrical transformations, metric connections in the triangle and geometrical inequalities.

In Chapter II of the present Thesis systematized prior knowledge, skills and methods for the successful solution of geometrical problems have been given. A big collection of problems has been analyzed. A selection of ideas has been made on the basis of which theoretical tasks have been constructed. The tasks have been worded either as

theorems or lemmas supplied with proofs. Quite many converse problems have been constructed and proved.

The results presented in the Thesis belong to the so-called triangle sphere of geometry. The three basic cevians of the triangle (median, angle bisector and altitude) have been treated. Also, the circles connected with the triangle have been included. In the case of each basic cevian the selected material has been divided into subthemes: the notion of the basic cevian and the different proofs of the main result connected with it, additional properties of basic cevians and connections with the elements of the triangle, different possibilities for finding the area of the triangle, geometrical equalities and inequalities, the congruence theorems of triangles using basic cevians, necessary and sufficient conditions for determining the type of the triangle with the help of basic cevians. These themes cover the majority of issues of geometrical problems given to students at the International Mathematical Olympiads. To reinforce the obtained knowledge, some contest tasks related to these themes have been provided.

With the purpose of giving additional hints how to solve the problem selecting the proper method, the author of the Thesis, in Chapter III, has included the description of the method of extra constructions which involves the addition of new elements of the given task in a drawing. The simpler examples of the method are the connection of the given points with a straight line or a circle and the prolongation of a line. In the more complicated cases the search for symmetrical lines and the construction of crossing or parallel lines, or the perfection of the drawing with some geometrical figure. Also, recommendations are given for finding a suitable additional construction in the case of certain problems. The additional constructions have been given together with explanations and illustrations in the form of drawings.

To make the drawings used in the Thesis and for raising the hypotheses for theorems, the dynamic geometry program *GeoGebra* was used.

The parts of the present Master's Thesis can be used selectively as visual aids in teaching. With the help of these materials it is possible to obtain the skills of using the solution methods for geometrical problems and also to get acquainted with basic ideas for proving theorems of different levels.

Kasutatud kirjandus

- [1] Abel, E., Abel, M., Kaasik, Ü., *Koolimatemaatika entsüklopeedia*, Tartu, Ilmamaa, 1998.
- [2] Abel, E., Ivanov, M., *Eesti võistkondade tulemustest rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel*, Koolimatemaatika XXXII, TÜ kirjastus, Tartu, 2005.
- [3] Abel, E., Lepmann, L., Mitt, E., Olenev, G., *Matemaatika olümpiaadid Eestis III*, Tallinn, Valgus, 1991.
- [4] Abel, E., *Lühiülevaade matemaatikavõistluste ajaloost*, Koolimatemaatika XXX, Tartu, 2003, 10-17.
- [5] Abel, E., *Special Training of Students for Mathematical Olympiads*, Mathematical Education Research in Finland: Yearbook 1992-1993, Jyvaskyla, 1993, 103-113.
- [6] International Mathematical Olympiad – Competition results and exam problems, URL=<http://imo.math.ca>
- [7] Kärner, O., *Täiendavaid küsimusi planimeetriast IX klassile*, Tallinn, Koolibri, 1992.
- [8] Mathematik-Olympiaden e.V. – Internationale Olympiaden, URL=<http://www.mathematik-olympiaden.de>
- [9] Matsuda, N., Vanlehn, K., *GRAMY: A Geometry Theorem Prover Capable of Construction*, Journal of Automated Reasoning, 2004, 32, 3–33.
- [10] Meidla, E., *Viie kooli võistlused matemaatikas*, Tallinn, 1984.
- [11] Mitt, E., Printits, O., Velsker, K., *Matemaatikaolümpiaadid Eesti NSV-s*, Tallinn, Valgus, 1970.
- [12] Mitt, E., Raudsepp, A., *Matemaatikaolümpiaadid Eesti NSV-s II*, Tallinn, Valgus, 1985.
- [13] Perepjolkin, D. I., *Elementaargeomeetria kursus I*, Tallinn, Eesti riiklik kirjastus, 1951.
- [14] Polya, G., *Kuidas seda lahendada*, Tallinn, Valgus, 2001.
- [15] Rahvusvahelised matemaatika olümpiaadid (IMO), URL=<http://www.math.olympiaadid.ut.ee/html/imo.html>

- [16] Šarõgin, I., *Tasandi geomeetria*, Avita, 2000.
- [17] Taylor, P., Gourdeau, F., Kenderov, P., *The Role of Competitions in Mathematics Education*, Selected Papers of The 10th International Congress on Mathematical Education, Discussion Group 16, July 4 – 11, 2004, Copenhagen, Denmark.
- [18] Taylor, P., *Mathematics competitions and related activities: their role in the learning process*, Proceedings of the 2-nd International Conference „Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students“, Riga, Latvia, 2002, 93-97.
- [19] Willemson, J., *Geomeetria põhivara*, 19.05.2000,
URL= <http://www.math.olympiaadid.ut.ee/arhiiv/oppemat/jan/pohivara.pdf>
- [20] Агаханов, Н. Х., Подлипский, О.К., *О математических олимпиадах школьников*, Труды XLVIII научной конференции МФТИ, 25-26 ноября 2005.
- [21] Акулич, И., Жуков, А., *Однозначно ли определяется треугольник?*, „Квант“, 2003, 1, 29-31.
- [22] Берлов, С. Л., Иванов, С. В., Кохась, К. П., *Петербургские математические олимпиады*, Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2003.
- [23] Вальдман, И., *Методы и приемы решения учебных задач*, „Первое сентября, Математика“, 1999, 39.
- [24] Васильев, Н. Б., Гутенмахер, В. Л., Раббот, Ж. М., Тоом, А. Л., *Заочные математические олимпиады*, Москва, Наука, 1987.
- [25] Васильев, Н. Б., Егоров, А. А., *Задачи всесоюзных математических олимпиад*, Москва, Наука, 1988.
- [26] Гордин, Р. К., *Это должен знать каждый матшкольник*, 2-е изд., Москва, МЦНМО, 2003.
- [27] Гусев, В. А., Литвиненко, В. Н., Мордкович, А. Г., *Практикум по элементарной математике: Планиметрия*, Москва, Вербум-М, 2000.
- [28] Дубровский, В., *Шесть доказательств теоремы о медианах*, „Квант“, 1990, 1, 54-56.

- [29] Егоров, А., *Треугольники и неравенства*, „Квант”, 2005, 2, 32-35.
- [30] Задачник „Кванта”, Задачи по математике,
URL= <http://kvant.mcsme.ru>
- [31] Ивлев, Б., *Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе*, „Квант”, 1985, 2, 29-30.
- [32] Интернет-проект „Задачи”, URL= <http://www.problems.ru>
- [33] Информационно - поисковая система „Задачи”, Раздел „Планиметрия”,
URL= <http://zadachi.mcsme.ru>
- [34] Калейдоскоп „Кванта”, *Биссектрисы, вписанная и невписанные окружности треугольника*, 1989, 7, 40-41.
- [35] Капленко, Э., *Новый метод решения планиметрических задач*, „Первое сентября, Математика”, 2001, 39.
- [36] Капленко, Э., *Новый метод решения планиметрических задач*, „Первое сентября, Математика”, 2001, 40 (продолжение).
- [37] Коксетер, Г. С. М., Грейтцер, С. Л., *Новые встречи с геометрией*, Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
- [38] Коробов, А., *Семь решений задачи Штейнера*, „Квант”, 1996, 4, 38-40.
- [39] Кудин, А., *Некоторые малоизвестные факты из геометрии треугольника*, „Первое сентября, Математика”, 1999, 6.
- [40] Пак, Г. К., *Биссектриса*, Серия: Готовимся к математической олимпиаде, Владивосток, Изд-во Дальневосточного университета, 2003.
- [41] Правдин, А., *Еще раз о замечательных точках треугольника*, „Первое сентября, Математика”, 2000, 21.
- [42] Прасолов, В. В., *Задачи по планиметрии*, 5-е издание, Москва, МЦНМО, 2004.
- [43] Прасолов, В. В., *Задачи по планиметрии*, часть I и часть II, Москва, Наука, 1986.
- [44] Рафаилов, Э., *Медианы треугольника*, „Квант”, 1990, 7, 40-41.
- [45] Сергеев, И. Н., *Зарубежные математические олимпиады*, Москва, Наука, 1987.

- [46] Сефибеков, С., *Четыре доказательства теоремы о биссектрисе*, 1983, 8, 37.
- [47] Фомин, А. А., Кузнецова, Г. М., *Школьные олимпиады, Международные математические олимпиады*, Москва, Дрофа, 1998.
- [48] Шарыгин, И. Ф., *Биссектрисы треугольника, вписанная окружность*, „Квант”, 1994, 4, 43.
- [49] Шарыгин, И. Ф., *Вокруг биссектрисы*, „Квант”, 1983, 8, 32-36.
- [50] Шарыгин, И. Ф., Голубев, В. И., *Факультативный курс по математике: решение задач для 11 класса*, Москва, Просвещение, 1991.
- [51] Шарыгин, И. Ф., Гордин, Р. К., *Сборник задач по геометрии: 5000 задач с ответами*, Москва, АСТ, 2001.
- [52] Шарыгин, И. Ф., *Медианы треугольника*, „Квант”, 1994, 3, 39.
- [53] Шарыгин, И. Ф., *Факультативный курс по математике: решение задач для 10 класса*, Москва, Просвещение, 1989.