K. Putilov

FÜÜSIKA

I

Eesti Riiklik Kirjastus

AKH A-22359

K. PUTILOV

FÜÜSIKA

I

MEHHAANIKA. AKUSTIKA
MOLEKULAARFÜÜSIKA
TERMODÜNAAMIKA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

Originaali tiitel:

К. А. Путилов.

Курс физики.

Том I.

Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика.
Издание шестое, переработанное.
Государственное издательство технико-теоретической литературы,
Москва 1956.

Tõlkinud

H. Mihkelsoo, M. Jaagus, V. Paju.

Lubatud

NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt
õpikuna kõrgematele õppeasutustele.

Tartu Ülikooli Raamatukogu
ARHIIVKOGU

EESSÕNA

Käesolev kolmeköiteline füüsika kursus on määratud õpikuks laiendatud füüsika programmiga kõrgematele õppeasutustele.

Esimeses köites käsitletakse mehhaanika füüsikalisi aluseid, akustikat, molekulaarfüüsikat ja termodünaamikat, teises — elektriõpetust, kolmandas — optikat ja aatomifüüsikat.

Erilist tähelepanu on osutatud eksperimentaalfüüsika saavutuste valgustamisele, füüsika põhiseaduste selgitamisele ja füüsika tehniliste rakenduste iseloomustamisele. On esitatud ajaloolisi andmeid ja vaadeldud mõningaid füüsika-alaseid filosoofilisi küsimusi.

Käesoleva väljaande koostamisel on seal, kus see oli võimalik (kõige enam esimeses köites), kasutatud eelmiste Учпедгиз'i poolt kirjastatud väljaannete teksti. Kakskümmend aastat tagasi olid teose üheköitelises variandis mõned paragrahvid ja peatükid kirjutatud V. S. Grigorjevi, S. M. Iljašenko, P. V. Matorini, V. V. Furdujevi, J. V. Hodakovi jt. poolt. Hiljem on kogu materjal kaasautorite nõusolekul ja retsensentide soovitusel esituse ühtsuse kasuks kas minu poolt ümber töötatud või uuesti kirjutatud, optika osas aga prof. V. A. Fabrikanti poolt. Peatükis „Gaasi dünaamika" on §§ 143 ja 147 kirjutanud S. M. Iljašenko.

Kõik soovitused raamatu täiustamiseks võetakse vastu sügava tänulikkusega (Москва, ул. Горького, д. 43, кв. 30).

Prof. K. Putilov.

SISSEJUHATUS

Füüsika areng

Füüsika kuulub loodusteaduste hulka, mille ülesandeks on looduse uurimine selleks, et alistada teda inimesele.

Vanal ajal tähendas sõna „füüsika"[1] loodusteadust. Edaspidi jagunes loodusteadus reaks teadusteks: füüsikaks, keemiaks, astronoomiaks, geoloogiaks, bioloogiaks, botaanikaks jne.

Nende teaduste seas on füüsikal teatud määral eriline seisukoht, kuna tema uurimisobjektiks on kõige üldisemad ja lihtsaimad mateeria liikumise põhivormid.

Loodusnähtuste kohta kogunes teadmisi juba kaugel muinasajal. Oma praktilises tegevuses omandasid ürginimesed mõningaid teadmisi loodusest. Nad panid ümbritseva maailma nähtuste juures tähele sarnaseid ja erinevaid jooni. Kogutud teadmiste edaspidine süstematiseerimine viis teaduse tekkimisele.

Teadmisi loodusnähtuste kohta laiendati ning täpsustati inimeste praktilisteks vajadusteks *vaatluste* abil, kuid teaduse kõrgemal arenemisastmel — *katsete* abil (vaatlus on nähtuse tundmaõppimine tema looduslikus olukorras, katse on nähtuse reprodutseerimine kunstlikult tekitatud olukorras selleks, et avastada antud nähtuse iseärasusi, olenevalt loodud tingimustest).

Nähtuste seletamiseks loodi *hüpoteese.* Järeldusi vaatlustest, katsetest ja hüpoteesidest kontrolliti teaduse ja praktika mitmekesise koostööga; praktika näitas *teadusliku kogemuse* (vaatluste ja katsete) täpsustamise viise, parandas hüpoteese, rikastas teadust. Teadus rikastas omakorda praktikat.

Sedamööda, kuidas laienes teaduslike teadmiste rakendamine praktikasse, tekkis tarvidus nende teadmiste kasutamiseks sündmuste ennustamisel, ühe või teise mõju tulemuste arvestamiseks. See tegi vajalikuks luua lahusseisvate hüpoteeside asemele üldistavad ja põhjendatud *teooriad.*

Esmakordselt tekkis tarvidus teooria järgi ehituste ning seadmete püstitamisel, mis viis mehhaanika, esmajärjekorras tasa-

---

[1] Kreekakeelsest sõnast *physis* — l o o d u s.

kaaluõpetuse, arendamisele. Vanas Egiptuses ja Kreekas töötati välja kõvade kehade staatika ja hüdrostaatika. Aja määramise vajadus põllumajanduses ja suuna määramise vajadus meresõidul andsid tõuke astronoomia arendamisele. Terve rea teaduse osi põhjendas ja süstematiseeris vana-kreeka mõtleja Aristoteles. Tema „Füüsika" (kaheksas raamatus) määras kauaks ajaks kindlaks üldise füüsikalise maailmavaate.

Inimeste poolt omandatud teadmisi loodusest kasutasid valitsevad klassid tervikuna oma huvides; kauges minevikus oli teadus näiteks preestrite kätes ja oli tihedalt seotud religiooniga. Vana-Kreekas hakkasid teadusega tegelema juba ka teiste privilegeeritud ühiskonnakihtide esindajad. Parimad antiikaja loodusfilosoofia esindajad (Leukippos, Demokritos, Lucretius) panid aluse looduse *materialistlikule* mõistmisele ja, hoolimata faktilise materjali äärmisest kasinusest, jõudsid kujutluseni mateeria aatomilisest ehitusest.

Antiikühiskonna lagunemine pani teaduse arengu ajutiselt seisma.

Keskajal alistas feodaalkorra valitsevatele klassidele toetuv kristlik kirik erakordsete julmuste, inkvisitsiooni ja hukkamiste abil filosoofia jumalasõna eesmärkidele. Aristotelese füüsika oma dogmaatilise käsitlusega, mis eitas progressi võimalust, kohandati kiriku poolt pühakirja autoriteedi kindlustamiseks. Sel ajal säilisid teaduste elemendid, mis olid üle võetud kreeklastelt ja roomlastelt, eriti mehhaanikast, astronoomiast, matemaatikast ja geograafiast, ja arenesid teataval määral peamiselt araablaste juures, kes olid selleks ajaks loonud suured riigid ning pidasid elavat kaubavahetust kaugete maadega.

XV—XVI sajandil algas euroopa kaubanduse ja tööstuse hoogsa arendamise baasil esialgu mehhaanika ja astronoomia ning edaspidi ka tööstustehnika alust moodustavate teaduste — füüsika ja keemia — kiire kasvamine ja väljakujunemine. Koperniku, Kepleri, Galilei ja nende pooldajate tööd tegid teadusest kodanluse võimsa võitlusvahendi oma aja ära elanud feodaalse korra kantsi — religiooni vastu. Võitluses kiriku vastu tõsteti esile teaduslik printsiip: iga tõeline teadmine on põhjendatud kogemustega (vaatluste ja katsetega), mitte aga ühe või teise õpetuse autoriteediga.

XVII sajandil taotles suurkodanlus kompromissi feodaalkorra valitsevate klasside jäänustega. Vastavalt sellele olid teaduse esindajad sunnitud kompromissi otsima religiooniga. Geniaalsete teaduslike tööde kõrval kirjutas Newton tõlgenduse kirikuraamatule — apokalüpsisele. Descartes püüdis oma filosoofilistes teostes tõestada jumala olemasolu. Õpetlased toetasid ebaõiget ideed esimesest tõukest, mida universum oli vajanud selleks, et hakata liikuma.

Mehhaanika areng pani oma pitseri tolle aja teaduslikule teooriale. Õpetlased püüdsid vaadelda maailma mehhanismina ja selgitada kõiki nähtusi nende taandamisega mehhaanilistele nihetele.

Sellel loodusteaduse arenguperioodil rakendati väga laialdaselt jõu mõistet. Iga äsjaavastatud nähtuse juures mõeldi välja jõud, mis kuulutati nähtuse põhjuseks. Selle jäljed on füüsikas säilinud käesoleva ajani nimetustes (elektromotoorne jõud jm.).

Selle perioodi teaduslikud teooriad, mis käsitasid maailma muutumatult liikuva masinana, eitasid mateeria arenemist ja liikumise üleminekuid ühest vormist teise. Hoolimata edusammudest eksperimentaalse materjali laiendamisel jäi teadus *mehhanistliku maailmavaate* positsioonidele.

XVIII sajandil aimas Lomonossov õigesti ette kehade molekulaar-kineetilise ehituse pildi ja väljendas esmakordselt *mateeria ja tema liikumise jäävuse ühise seaduse sõnadega:* „...kõik looduses ettetulevad muutused toimuvad nii, et kui millelegi tuli midagi juurde, siis võetakse see millegi teise juurest ära... Kuna see on üleüldine looduse seadus, siis ta laieneb ka liikumise seadustele: keha, mis oma tõukega paneb teise liikuma, kaotab niisama palju oma liikumisest, kui palju ta annab edasi teisele, tema poolt liikuma pandule".

Samadel aastatel lükkas Kanti ja Laplace'i loodud päikesesüsteemi udukogust tekkimise teooria ümber esimese tõuke vajalikkuse idee.

XIX sajandil kiirenes teaduse progress erakordselt tööstuskapitalismi õitsenguperioodil toimuva tootlike jõudude kolossaalse kasvu baasil. Võimsa ja universaalse jõumasina vajadus tööstuse ja transpordi jaoks põhjustas aurumasina leiutamise, selle ilmumine aga andis õpetlastele tõuke soojuslike protsesside uurimiseks, mis viis termodünaamika ja molekulaar-kineetilise teooria arendamisele. Termodünaamika baasil osutus omakorda võimalikuks konstrueerida võimsamaid ja ökonoomsemaid jõumasinate tüüpe (auruturbiine, sisepõlemismootoreid). Me näeme sellest näitest, kuidas *praktika ergutab teadusliku teooria arenemist, kuid edaspidi saab teooria juhtiva osa praktika suhtes.*

Teiseks teooria ja praktika keerulise koostöö näiteks on elektriteooria ja elektrotehnika areng. Lünklikke teadmisi elektrinähtuste kohta oli juba ammu. Elektri uurimisele koondas füüsika oma tähelepanu aga alles pärast seda, kui avastati välgu elektriline loomus ja seejärel galvaani vool. Faraday, Maxwell, Lenz jt. töötasid välja kaasaegse elektrotehnika füüsikalised alused. Tööstus kasutas kiiresti teaduslikke avastusi ja avas tehnika laialdase arendamisega enneolematud võimalused teaduslikeks katseteks. Kehade molekulaarse ehituse uurimine avas molekulaarsete ja atomaarsete vastastikuste mõjude elektrilise loomuse, mis omakorda viis meie päevil mateeria liikumise atomaarse

vormi avastamisele, mis avab ääretud perspektiivid uuele tehnikale.

Rida avastusi — energia jäävuse ja muundumise seadus, elektromagnetiliste lainete teooria, elektronide ja radioaktiivsuse avastamine — kummutas põhjalikult õpetuse looduse muutumatusest. Mehhanitsismi tabas häving.

Uusi teaduslikke avastusi osutus võimalikuks õigesti hinnata ja mõista ainult Marxi ja Engelsi poolt loodud *dialektilise materialismi* filosoofia seisukohalt.

Dialektiline materialism on marksistlik-leninliku partei maailmavaade. Dialektiliseks materialismiks nimetatakse teda seepärast, et loodusnähtuste käsitlus, loodusnähtuste uurimise meetod, nende nähtuste tunnetamise meetod on tal *dialektiline*, aga loodusnähtuste tõlgitsemine, loodusnähtuste mõistmine, teooria — *materialistlik*.

Loodusnähtusi tuleb nende dialektilisel käsitlemisel vaadelda nende vastastikuses seoses, vastastikuses tingituses, vastastikuses sõltuvuses ja nende arenemises, arvestades seejuures, et kvantitatiivsed muutused viivad põhjalikele kvalitatiivsetele muutustele, et nähtuste arenemine kutsutakse esile nendes peituvate vastuolude võitluse poolt.

Loodusnähtuste dialektiline käsitlemine kindlustab reaalsuse moonutamata ja õige peegeldamise meie teadvuses. See dialektilise meetodi otsustav, absoluutne üleolek teistest loodusnähtuste uurimise käsitlemisviisidest seletub sellega, et dialektilist meetodit iseloomustavad põhijooned pole meelevaldselt välja mõeldud, ei sunni meie tunnetamisele peale kunstlikke, temale mitteomaseid surnud skeeme, vaid, vastupidi, reprodutseerivad täpselt looduse dialektika kõige üldisemaid seadusi.

Kõik teadused, eriti füüsika, kinnitavad iga faktiga kujukalt, et:

esiteks, iga nähtus toimub orgaanilises, *lahutamatus seoses* ümbritsevate nähtustega; soovides isoleerida nähtust, katkestada tema seost ümbritsevate nähtustega, me paratamatult moonutame nähtust;

teiseks, kõik olemasolev on allutatud seaduspärasele ja ammendamatule muutumisele, *arenemisele*, mis on omane asjade enda loomusele;

kolmandaks, pideva arenemise juures viib kvantitatiivsete muutuste kuhjumine katkendlikele, hüppekujulistele *kvalitatiivsetele* muutustele;

neljandaks, kõige olemasoleva arenemine toimub *vastandlike tendentside* igaveses võitluses, võitluses vana ja uue vahel, sureva ja sündiva vahel, iganeva ja areneva vahel.

Loodusnähtuste uurimise dialektiline meetod peegeldab neid üldisi objektiivseid seadusi, reprodutseerib tunnetamise printsiipi-

des objektiivse maailma dialektikat. Reaalsuse õige peegeldamine meie teadvuses loodusnähtuste dialektilisel käsitlemisel kohustab tunnistama dialektilist meetodit ainuõigeks loodusnähtuste uurimise meetodiks. Ainult dialektiline materialism on rangelt teaduslik maailmavaade[1]. Kõik muud filosoofilised vaated on ekslikud, tegelikkusest irdunud, metafüüsilised.

Siiski ei saa kodanlus oma klassihuvide tõttu omaks võtta proletariaadi filosoofiat — dialektilist materialismi. XIX sajandi õpetlased ei saanud oma teaduslikus töös jätta lähtumata uuritava välismaailma reaalsuse veendumusest; seepärast olid nad oma töös stiihilised materialistid, kuid oma maailmavaates nad peegeldasid valitseva klassi vaateid ja andsid ühel või teisel määral oma panuse idealismile, eriti filosoofiaga seotud küsimustes. Loodusteaduse tormiline kasv ja kodanliku filosoofia langus samal ajal põhjustasid XIX sajandi teoreetikutele iseloomuliku ideoloogilise segaduse ja umbusalduse filosoofia vastu.

Imperialismi saabumisel, XIX saj. lõpul ja XX saj. algul, võttis idealism *mahhismi* (selle õpetuse rajaja, austria füüsiku ja filosoofi Ernst Machi nime järgi) rafineeritud kuju. Mahhistid väitsid, et oma „kogemustes" meie ei tunneta mitte objektiivset reaalsust, vaid ainult oma isiklikke aistinguid. Tuleb silmas pidada, et mahhistid mõistavad sõna „kogemus" teisiti kui materialistid. Materialistid nimetavad kogemuseks välismaailma seaduspärasustest tehtud teoreetiliste järelduste kontrolli praktika abil; ühe või teise teadusliku teooria õigsuse, tema objektiivsele reaalsusele vastavuse otsustavaks mõõdupuuks on katse. Mahhistidel on kogemus meie aistingute kogu, teadus aga — nende korraldamine meie teadvuses.

Idealismi teisendiks on ka *agnostitsism*, mis väidab, et me tunnetame nähtusi, kuid mitte „asja iseendas", mis on tunnetamatu.

Mittevastavuse tagajärjel looduse kohta teadaolevate positiivsete faktiliste teadmiste kolossaalse kasvu ja nende idealistlike järelduste vahel, mida kodanlikud õpetlased püüavad teha nendest teadmistest, elas kaasaegne füüsika üle sügavat kriisi. V. I. Lenin ei paljastanud raamatus „Materialism ja empiriokrititsism" mitte ainult mahhismi, vaid andis ka füüsika kriisi sügava analüüsi.

Meie maa edusammud kommunismi ülesehitamisel kohutavad imperialiste ja äratavad samal ajal miljonite töötajate poliitilist aktiivsust kapitalistlikes ja eriti sõltuvates ning koloniaalmaades. See sunnibki kapitalistliku maailma tegelasi ükskõik missuguste vahenditega vastu töötama Nõukogude Liidu autoriteedi ja mõju

[1] Marksistliku dialektilise meetodi põhijoonte selgitused füüsika valdkonnast võetud näidete abil on toodud tekstis §§-s 1, 28, 46, 106, 117, 141 jt.

kasvamisele. Üheks imperialistide ideoloogilise võitluse meetodiks on teaduse arengu tõelise pildi võltsimine; vaikitakse surnuks ja varjatakse Nõukogude Liidu saavutusi ning vähendatakse vene õpetlaste osa teaduse arenemises.

Mis puutub nõukogude füüsika edusammudesse, siis annavad nendest kõige paremini tunnistust kaks fakti: esimene — meie maal on tehnika saavutanud seniolematu õitsengu, füüsika on aga tehnika teadusliku täiustamise aluseks; teine — Nõukogude armee näitas kogu maailmale oma relvastuse ainulaadset võimsust, füüsika aga, nagu teada, mängib tähtsat osa sõjatehnika täiustamises.

Iga aastaga avaldab kõigis maailma maades rahvamasside teadvusele ikka suuremat mõju dialektilise materialismi filosoofia. Püüdes sellele mõjule vastu töötada, ergutavad imperialistlike riikide tõelised peremehed heldelt kõikvõimalike idealistlike voolude hääletorusid teaduses.

Kaasaegse füüsika edusammud annavad silmanähtavalt tunnistust dialektilise materialismi võidust. Sellest hoolimata reklaamib kapitalistlike maade ajakirjandus ja viib moodi niisuguseid füüsikaliste teooriate variante, mis avavad oma ennenägematu formalismiga tee idealistlikele moonutustele. Pole juhuslik, et välismaised füüsika-alased teaduslikud ajakirjad annavad viimastel aastatel meelsasti ruumi mõnede neometafüüsiliste teooriate arutlemiseks. Näiteks püüavad silmapaistvad välismaised õpetlased järeldada füüsikalisest relatiivsusteooriast universumi lõplikkust ja välja arvutada maailma „raadiust" ning „vanust".

A. A. Ždanov näitas sõnavõtus filosoofilisel diskussioonil 1947. a., et moodsad välismaised idealistlikud füüsika moonutused mängivad kannupoisi osa välismaise reaktsiooni sõjakäigus marksismi vastu. „Võtame kas või inglise astronoomi Eddingtoni õpetuse maailma füüsikalistest konstantidest, mis otsejoones viib Pythagorase arvude müstikasse ja tuletab matemaatilistest valemitest säärased maailma „olulised konstandid" nagu apokalüptiline arv 666 jne. Mõistmata tunnetuse dialektilist käiku, absoluutse ja suhtelise tõe vahekorda, jõuavad paljud Einsteini pooldajad, kandes lõpliku, piiratud universumi osa liikumise seaduste uurimise tulemused üle kogu lõpmatule universumile, välja maailma lõplikkuse juurde, tema piiratuseni ajas ja ruumis, astronoom Milne aga on isegi „välja arvutanud", et maailm on loodud 2 miljardit aastat tagasi. Nende inglise teadusmeeste suhtes on vahest rakendatavad nende suure kaasmaalase, filosoof Baconi sõnad selle kohta, et nad muudavad oma teaduse jõuetuks laimuks looduse vastu.

Võrdsel määral toovad kaasaegsete kodanlike aatomifüüsikute kantiaanlikud väänamised neid järeldustele elektroni „tahtevaba-

dusest", püüdeile näidata mateeriat kui ainult teatud lainete kogumit, ja muule jampsile" (A. A. Ždanov).

Idealistlikud voolud välismaises teaduses on avaldanud mõju ka mõnedele nõukogude füüsikutele. Idealismi avalik jutlustamine on meil raskendatud, sest ta kohtab vastupanu teadusliku avaliku arvamuse poolt. Sellest hoolimata esinevad vahel mõned meie teoreetikud idealistlike kontseptsioonide aktiivse kaitsega varjatud, skolastilisel kujul. Nad püüavad tõestada, et kuigi Einstein, Eddington, Bohr, Heisenberg jt. osavalt pöörasid füüsika mahhismi poole, ei olevat nende poolt arendatud vaateid raske kooskõlastada dialektilise materialismiga, kui „kõrvale heita mahhistlik fraseoloogia" ja needsamad vaated varustada „dialektiliste selgitustega". Seda, meie kodumaa füüsikale äärmiselt hädaohtlikku positsiooni õigustatakse mõnikord püüdega mitte kaotada ühtedes või teistes füüsikalistes teooriates leiduvaid väärtuslikke matemaatilisi meetodeid. Seejuures unustatakse (või vaikitakse surnuks), et nende meetodite täiustamiseks on ammu küpsenud vajadus välja töötada nende rakendamise teistsugune metodoloogiline alus (vt. III köide).

Avaldused, nagu oleks mateeria iga „õige" teooria materialistlik, on petlikud. Valitsevad teooriad näisid kaasaegsetele alati „õigete teooriatena", kuid aja jooksul selgus, et nendes on ainult terake tõtt, aga palju sellest, mis oli sisse toodud teooriate autorite füüsikalis-filosoofiliste vaadetena, osutus ekslikuks. Nii avastas Sadi Carnot termodünaamika teise printsiibi, kuid kujutlus flogistonist, mis oli tema teooria aluseks, heideti alles kolmeneljakümne aasta pärast kõrvale. Ampère avastas mõned elektrodünaamika seadused, kuid Ampère'i elektrodünaamika metodoloogilised alused osutusid ekslikeks ja heideti kõrvale koos kujutlusega sellest, et elektril puudub inerts. Väljapaistvaimad saavutused optikas olid tehtud Huygens'i ja Fresnel'i poolt eetri mehhaaniliste võnkumiste kujutluste baasil, mis käesoleval ajal on kõrvale heidetud, jne.

Ei ole mingisuguseid põhjusi kaasaegsete füüsikaliste teooriate absolutiseerimiseks; on lubamatu kujutleda, et nad on igavesed, et järgnev füüsika areng ei täpsusta neid, ja mitte ainult üksikasjades, vaid ka mõnede lähteväidete osas.

Kahtlemata nõuab palju tööd ja talenti, et teaduse progressi jaoks ümber töötada ja ümber korraldada mõned füüsikalised teooriad, mis on nende autorite poolt välja arendatud mahhistlikus või idealistlikus vaimus. See ülesanne on raske, kuid on jõukohane nõukogude füüsikale, mis on juba näidanud oma küpsust ja jõudu.

Mateeria ja liikumine

Kõige lihtsamateks maailma tunnetamise vahenditeks on meie meeleorganid. Instrumentaalfüüsika on inimese silma ja kõrva täiendavaks varustuseks. Meie kuulmis- ja nägemistajud on subjektiivsed; meie tajume hääletoone, värvusevarjundeid, lõhnu jne. Objektiivne erinevus erineva tooniga häälte vahel seisneb häälevõnkumiste erinevas sageduses. Täpselt samuti vastab värvusevarjundite erinevusele objektiivselt valgusvõnkumiste sageduste erinevus. Meie sooja ja külma tajud on tingitud molekulaarliikumiste suuremast või väiksemast intensiivsusest. Hääleaisting, valguseaisting, maitsmis-, kompimis- ja haistmisaistingud kujutavad endast ainult neid tekitavate füüsikaliste nähtuste kajastust meie keha ja teadvuse poolt.

Niisuguseid sõnu, nagu „valgus", „värvus", „soojus", „hääl", „valgustugevus", „soojuse aste" jne., tarvitame me igapäevases elus ühes mõttes: meie paneme nendesse füsioloogilise sisu, oma aistingute sisu. Füüsikas tarvitame neidsamu sõnu teises mõttes: me tähistame nende sõnadega neid objektiivselt kulgevaid protsesse, mille poolt tekitatakse meie aistingud, või ka niisuguseid nähtusi, mis oleksid võimelised tekitama vastavaid aistinguid, kui meie meeleorganid oleksid täiuslikumad.

Meie aistingud on mitmesugused. Neid esile kutsuvad nähtused on äärmiselt mitmekesised. Vastavalt oma teadmiste kasvule märkame siiski, et paljudel nähtustel on tähtsaid ühiseid jooni. Veendume, et maailma õigeks mõistmiseks me peame välja töötama niisugused mõisted, mis laialdaselt üldistavad katsete tulemusi ja, mis peaasi, peegeldavad mingisuguse meie poolt uuritava nähtuste rea olemuse ühtsust.

Kõige üldisemateks ja põhilisemateks kategooriateks on m a t e e r i a ja l i i k u m i n e. *„Mateeria on objektiivne reaalsus, mis eksisteerib sõltumatult inimese teadvusest ja peegeldatakse tema poolt ... Mateeria on see, mis meie meeleorganitele mõjudes tekitab aistingu"* (Lenin). On selge, et aistingute kaudu me tunnetame mateeriat ainult tema konkreetsetes eri avaldustes; samuti ei ole meil ka teaduslikus ja praktilises tegevuses tegemist mateeriaga „üldse", vaid alati tema konkreetsete avaldustega.

Mateeria lahutamatuks omaduseks on liikumine. *Liikumine on mateeria olemise vorm.* Kui me räägime liikumisest, siis kujutleme alati mingit nihkumist, näiteks kehade, keskkonna, osakeste, ümberasetumist. Tuleb siiski silmas pidada, et liikumine ei taandu ainult nihkumisele. „Igasugune liikumine on seotud mingisuguse nihkumisega — taevakehade, maiste masside, molekulide, aatomite või eetri osakeste nihkumisega. Mida kõrgem on liikumise vorm, seda tähtsusetumaks muutub see nihkumine. Ta ei ammenda mingil viisil vastava liikumise olemust, kuid on temast lahuta-

matu. Seepärast on vaja uurida teda enne kõike muud" (Engels).

Liikumine filosoofilises mõttes on igasugune mateeria muutumine, igasugune looduses toimuv protsess: keemiline reaktsioon, elektromagnetiline kiirgamine, puu kasvamine, mõtlemine.

„Liikumine, käsitletuna sõna kõige üldisemas mõttes, s. t. mõistetuna kui mateeria olemise vorm, kui mateeriale seesmiselt omane atribuut, hõlmab endas kõik universumis toimuvad muutused ja protsessid, alates lihtsast nihkest ja lõpetades mõtlemisega" (Engels).

Mehhaanika uurib lihtsaimat liikumise vormi, ja nimelt kehade või osakeste nihkumist ruumis (mehhaaniline liikumine).

Mõningad füüsika-alased avastused XIX sajandil andsid võimaluse tervet rida täiesti erisugustena näivaid nähtusi justkui „taandada" mehhaanilisele liikumisele. Nii oli näiteks keha soojuslik olek justkui „taandatud" tema molekulide mehhaanilisele liikumisele. Sellel pinnal kindlustus oletus, et üldse kõik loodusnähtused kujutavad endast lõppude-lõpuks ainult mehhaanilist liikumist; püstitati loosung — taandada kogu loodusteadus mehhaanikale. Niisugune vaade kannab mehhanistliku maailmavaate nime.

See vaade on ekslik. Liikumise kõrgemate vormide olemus ei ole tegelikult taandatav mehhaanilisele liikumisele. Igal liikumise vormil on erilised jooned, mis moodustavad tema omapära (tema kvaliteedi). Soojusliikuminegi, kuigi ta moodustub molekulide mehhaanilisest liikumisest, ei ammendu sellega; soojusliikumise juures on molekulide nihked keskmiselt allutatud erilistele statistika seadustele, mis ei järeldu mehhaanika seadustest.

Mehhaanika seadused on tähtsad madalamate liikumise vormide mõistmiseks, kuid nad pole küllaldased kõrgemate (keerulisemate) vormide mõistmiseks. Juba molekulaarsetes liikumistes tulevad esile nähtused, mida ei saa seletada ja ennustada üksnes Newtoni seaduste abil. Nimelt need nähtused, mis ei allu ammendavale seletusele, kui lähtuda ainult nihetest, tungivad esiplaanile, kui me asume aatomisiseste, aga samuti ka elektriliste ja magnetiliste protsesside aluseks olevate liikumiste uurimisele. Niivõrd kõrgetes liikumise vormides, nagu bioloogilised protsessid ja mõtlemine, on nihetel kahtlematult teisejärguline osa, võrreldes nende protsesside muude omapäraste külgedega, mis ei ole taandatavad mehhaanilisele liikumisele. Loodus on keerulisem, kui seda arvavad mehhanistid.

Füüsika uurib liikumise lihtsaimaid vorme: 1) *mehhaanilist* liikumist (kulgevat, pöörlevat, lainelist, võnkuvat liikumist) ja mehhaanilise liikumisega seotud ülemaailmse gravitatsiooni avaldusi; 2) *molekulaarset soojus*liikumist ja molekulide vaheliste vastastikuste mõjude poolt tingitud protsesse (agregaatolekute

omadusi ja muutumisi, difusiooni ja lahustumist, soojuse levimist jms.); 3) *elektrilisi ja elektromagnetilisi* protsesse ja 4) *aatomisisest* liikumist ning kehade omadusi, mis on määratud aatomite ehitusega (eriti kehade optilisi omadusi, ainete tähtsaimate keemiliste omaduste päritolu, elementide muundumise kosmilisi ja laboratoorseid protsesse jms. kuni tuumaenergia vabastamiseni).

Füüsikaliste nähtuste teaduslikul uurimisel puutume rõhuvas enamikus kokku kõigi ülaltoodud mateeria liikumise vormide tihedaima vastastikuse seosega, vastastikuse põimumise ja muundumisega.

Tänapäeval on väga raske tõmmata piiri füüsika ja tema naaberteaduste, eriti keemia vahele.

Füüsikas uuritakse nii määratust hulgast molekulidest koosnevate kehade liikumist kui ka peenemaid mateeria liikumise vorme — molekulide, aatomite, nende tuumade ja elektronide liikumist. Vahel nimetatakse füüsika haru, mis tegeleb hiiglasuurt hulka aatomeid või molekule sisaldavate kehadega, *makrofüüsikaks;* füüsika haru, milles uuritakse üksikute väiksemate osakeste liikumisi ja vastastikuseid mõjusid, nimetatakse aga *mikrofüüsikaks.*

Keemia tegeleb samuti aatomite ja molekulidega, kuid ta uurib aine kvalitatiivseid iseärasusi, millele viivad kvantitatiivsed muutused aatomis olevate elektronide arvus ja molekulides olevate aatomite arvus ja liigis. Füüsika ja keemia vahelisel piiralal on välja arenenud mõningad distsipliinid: füüsikaline keemia, kolloidkeemia jt.

Füüsikaga külgnevad teadused, mis uurivad meid ümbritseva mateeria konkreetseid olekuid Maal (geofüüsika, meteoroloogia, hüdroloogia), taevakehades (astrofüüsika) ja elusorganismides (biofüüsika).

Füüsika, keemia, astronoomia, geoloogia ja bioloogia vaheline sügav seesmine seos on kindlustatud mateeria ehituse ühtsusega ja terviklusega kõigis tema konkreetsetes avaldustes. Kõige kaugemad tähed, Päike, maakoor ja elusorganismid on üles ehitatud ühtedest ja samadest keemilistest elementidest. Molekulaarjõududel, aatomite vahelistel keemilistel jõududel ja aatomite sisejõududel on põhiliselt elektriline loomus. Kõigi keemiliste elementide aatomid on teatud määral ühetüübiliselt ehitatud: positiivselt laetud massiivsetest aatomituumadest ja meile tuntud kergeimaist elementaarosakestest — elektronidest, mis mööda kinniseid orbiite ümber tuuma liikudes moodustavad nagu elektronkatte, mis ümbritseb tuuma. Kõigi aatomite tuumad on ehitatud *prootonitest* — positiivselt laetud vesiniku aatomite tuumadest, mille mass on 1836 korda suurem elektroni massist, ja massi poolest peaaegu niisama suurtest, kuid elektriliselt neutraalsetest osakestest — *neutronitest.*

Peale nende stabiilsete põhiosakeste avastati kosmilistes kiirtes vähepüsivate osakeste olemasolu. Need on: positiivsed elektronid — *positronid,* mille mass on niisama suur kui elektronidelgi, ja *mesonid,* mis on laengu poolest kolme liiki — negatiivsed, positiivsed ja neutraalsed, ning mõned teisendid massi suuruse poolest: mesonid, mille mass on umbes 210 korda suurem elektroni massist, ja mesonid, mille mass ületab elektroni massi umbes 280 korda.

Ruumis, kus leiduvad elektrilaengud, toimuvad varjatud, meile tundmatud mateeria liikumised, need ilmnevad elektriliste jõudude mõjus proovilaengule, mis on asetatud selle ruumi mistahes kohta, ja magnetiliste jõudude mõjus liikuvale laengule; seda liikuva mateeria erilist vormi (mis erineb osakestest, kuid tekitab elektriliselt laetud osakeste ja magnetiseeritud kehade vastastikuse mõju) nimetatakse elektri- ja magnet*väljaks.*

Erinevalt elektrist ei ole olemas vaba, polaarselt sidumata magnetismi: magneti pooluseid ei saa eraldada. Elektri- ja magnetenergia on jaotatud elektri- ja magnetväljas pidevalt. Kuid füüsika ühe põhiseadusena (mis on selgitatud III köites) on kindlaks tehtud, et seal, kus on energiat, on võrdelises koguses ka massi. Seega *elektri- ja magnetväljal on materiaalne baas — nendel on mass ja energia.*

Võib öelda, et kaasaja füüsikale on mateeria tuntud *kahes põhivormis,* mis kogu oma vastandlikkuse juures siiski on lahutamatult seotud: *aineosakestena* ja *väljadena.* Elektronid on nende kahe mateeria vormi kogum: elektron on osake ja samal ajal on ta tema poolt tekitatud ja tema energiat ja massi kandva elektromagnetilise välja tsentriks.

Neutronid (elektriliselt neutraalne osake, mille mass on võrdne vesinikutuuma massiga) kujutavad endast korpuskulaarse mateeriavormi kõige iseloomulikumat näidet. Mingisugune väli kuulub ka neutronile, kuid selle välja loomus ja ehitus on senini selgitamata.

Füüsikale on hästi tuntud ka teine äärmus — mateeria elektromagnetiline vorm. Selleks on valgus, soojuskiirgus ja üldse *kvantkiirgus,* mis kujutab endast lainelist elektromagnetilist välja, see eemaldub teda tekitanud laengutest ja levib maksimaalse liikumiskiirusega — valguse kiirusega. Elektromagnetilise välja eraldumine teda tekitanud laengutest toimub kvantseaduse järgi, mille põhjal energia ei kiirgu teisiti kui kindlates portsjonites, kogustes, mis on võrdsed suurusega $\varepsilon = h\nu$ või selle kordsed, kusjuures h on mingisugune universaalne konstant ja ν — kiiratud elektromagnetilise välja võnkesagedus. Neid kiirgusportsjone nimetatakse *footoniteks.*

Igale energia osale vastab temaga võrdeline mass: aatom, mis kiirgab footoni, kaotab koos energiaga ka kindla massi; selle

massi viib ära footon. Enne kiirgamist oli see laengute elektromagnetilise välja mõne osa mass, pärast kiirgamist muutus ta aga footonite massiks.

Mõnedes raamatutes esinevad arutlused massi muundumisest energiaks on kas lohakuse, esituse ebatäpsuse või ka ettekavatsetud füüsika idealistliku moonutamise tulemus. *Kunagi ei toimu mitte mingisugust massi muutumist energiaks.*

Jagamatuse ja massi olemasolu mõttes on footonid analoogilised osakestega, ja teatud juhtudel nad ka avalduvad kui osakesed, kuid samal ajal on footonid, millel ei ole struktuurselt eraldatud masskeskmeid ja energia keskpunkte, osakeste täielikuks vastandiks; footon — see on laengutest eemaldunud elektromagnetiline väli, mis aga säilitab oma tervikluse, vaatamata sellele, et ta on ruumis suuremal või vähemal määral laiali laotatud kui lainete rühm või kimp.

Mateeria kahe põhivormi (osakesed ja väli) asemel võib mateeria liikide detailsema klassifitseerimise juures käsitleda osakeste ja nende püsivate ühenduste iga liiki kui mateeria eri liiki. Sel viisil vaadeldakse füüsikas mateeriat järgmiselt:

erineva lainepikkusega *footonite* näol;

elementaarosakeste näol, nimelt: elektronide näol (elektronkate aatomis, elektrongaas metallis, elektronide vool, elektronkiired) ja tuumaosakeste näol (positronid, prootonid, neutronid, mesonid ja lihtsaimad aatomituumad, mis esinevad ka radioaktiivse lagunemise ja tuumareaktsioonide juures);

aatomite, ioonide, molekulide ja nende ühendite näol keemiliste *ainetena.*

Füüsikas uuritava mateeria liikumisvormide ja liikide ülaltoodud klassifikatsioon vastab tänapäeva füüsika arenguastmele. Sedamööda, kuidas süvenevad meie teadmised looduse ja mateeria ehituse kohta, tuleb neid klassifikatsioone alatasa täiustada ja parandada.

Füüsika arenemisel toimub füüsikaliste teooriate vahetamine, täpsustuvad ja täiustuvad füüsika seadused ja mõisted. Füüsika arenemisel toimub ka *füüsika uurimisobjekti* ja *maailma füüsikaliste uurimismeetodite* vahetamine.

Algul oli füüsika teadus loodusest, s. t. tema objekt oli, nagu näib, võrreldamatult laiem kaasaegsest, kus füüsikast on eraldunud ja iseseisvaks muutunud rohkearvulised loodusteadused: keemia, bioloogia, geoloogia jne. Siiski tuleb arvestada, et vanasti loodusteadusena mõistetud füüsika uurimisobjektiks oli tegelikult väike arv nähtusi, mis inimkonnale said tuntuks vähese hulga teadusest huvitatud inimeste poolt palja silmaga teostatud vaatluste kitsast ringist.

Juba keskajal, kui füüsikast eraldusid tekkinud keemia ja mõnede teiste loodusteaduste alged, ei kahanenud füüsika uuri-

misobjekt, vaid, vastupidi, kasvas (mis kutsuski esile mainitud teaduste eraldumise). Tõepoolest olid selleks ajaks inimeste teadmised kehade liikumisest ja tasakaalust, tahkete kehade ujumisest, soojusnähtustest, keemisest, lahustumisest, kristalliseerumisest, ilmastikunähetest jms. üsna palju laienenud. See *füüsika poolt uuritavate nähtuste valdkonna laienemine* oli esile kutsutud inimeste praktiliste tarviduste poolt seoses käsitöö ja kaubanduse laiendamisega ja toimus tänu vaatluste ning lihtsaimate katsete laiendamisele ning mõningatele täiustamistele.

Sedamööda, kuidas toimus tootmis- ja tehniliste vahendite kasv, toimus ka füüsika varustamine instrumentidega; füüsikalistel uurimistel hakati järk-järgult kasutama kaalusid, areomeetreid, termomeetreid, hügromeetreid, luupe, mikroskoope, optilisi prismasid, spektromeetreid ja teisi aparaate. Sellega kõrvuti arenesid *matemaatilised meetodid,* mis võimaldasid füüsikutel arvutuste teel tungida mõttes selliste nähtuste valdkonda, mis on kättesaamatud otseseks jälgimiseks füüsikaliste aparaatidega. Kõik see laiendas erakordselt füüsika uurimisobjekti; mehhaaniliste, soojus-, hääle- ja valgusnähtuste, samuti ka tahkete, vedelate ja gaasiliste kehade uurimisele lisandus elektriliste ja magnetiliste protsesside uurimine, molekulide ja aatomite maailma uurimine, hiljem aga ka aatomi ehituse avastamine.

Tehnika arenemine ja füüsika tugevasti kasvanud tähtsus tööstuses põhjustasid füüsikalaboratooriumide varustamise hulga täppisaparaatidega ja esmajärjekorras täiusliku optilise ja elektrimõõteaparatuuriga. Kehade keemilise koostise ja ehituse uurimise rangeid meetodeid — spektraalanalüüsi, mikroskoopiat ja röntgenostruktuurset analüüsi — täiendati veel peenemate meetoditega, kus valguse- ja röntgenikiired asendati aatom- ja elektronkiirtega. Leiti ka viisid, mis võimaldavad harilikest ainetest luua radioaktiivseid aineid ja teostada aatomite tuumareaktsioone, s. o. keemiliste elementide muundamist. Kokkuvõttes tõusis füüsika eksperimentaalsete ja teoreetiliste avastuste kaasaegsele astmele, mis viib tehnika uuele hoogsale täiustamisele ja ümberkujundamisele.

Oeldust on selge, et üheks *iseloomulikuks jooneks füüsika arengus* on järkjärguline ja plaanikindel ikka peenemate, varjatumate mateeria füüsikaliste liikumisvormide uurimine, kus *nihkuvad ikka väiksemad aineosakesed* ja kus osakeste geomeetriline nihe ise jääb teiste nähtustega võrreldes ikka enam tagaplaanile. Seda suunda füüsika ajaloolises arengus võib iseloomustada järgmise skeemiga: kehade *mehhaanilise* liikumise uurimine (tahkete, vedelate ja gaasiliste kehade mehhaanika), kehade *elastsete* liikumiste uurimine (elastsusteooria, akustika), *molekulaarse* soojusliikumise uurimine (kineetiline teooria, termodünaamika), *elektrilise* liikumise uurimine (elektrodünaamika),

molekulisiseste ja *aatomisiseste* liikumiste uurimine (füüsikaline keemia, optika), korpuskulaarsete kiirgusliikumiste ja *tuumasiseste* liikumiste uurimine (elektronfüüsika, õpetus radioaktiivsusest ja kosmilistest kiirtest, õpetus tuumade muundumistest).

Iseendast mõista lihtsustab see skeem asja nagu üldse igasugune skeem. Tegelikkuses on loetletud liikumise liigid omavahel niivõrd seotud, et paljudel juhtudel mõjuvad ühe liikumise liigi valdkonnas tehtud avastused tugevasti teiste liikumise liikide uurimisele. Seepärast ei saa täpselt ära märkida ajaloolisi etappe füüsika arengus, mis rangelt vastaksid toodud skeemile. Sellest hoolimata näitab see skeem õigesti *füüsika arenemise üldist suunda.*

Tähelepanu äratab teine iseloomulik joon füüsika arengus: pikka aega (XVII ning XVIII sajandil ja XIX saj. esimesel poolel) võttis liikumise eri liikide uurimisel endale olulise koha uutes füüsikalistes teooriates *jõu* mõiste; järgnevalt, XIX saj. teisel poolel, võttis endale põhilise koha füüsikalistes teooriates *energia* mõiste; XX sajandi füüsikas hõivab valitseva koha füüsikalistes teooriates *mõju* (energia ja aja korrutis) mõiste. See suund füüsika arengus tähendab füüsika vabastamist metafüüsiliste kujutluste mõju alt, mis õhutasid jõudu käsitlema kui liikumise „tekkimise põhjust"; füüsika avastas vajaduse asetada teooriates esikohale suurus, mis määrab kõige täielikumalt kindlaks *liikumise erinevate liikide vastastikuse muundumise;* algul oletati, et sääraseks suuruseks on energia, kuid osutus, et peaosa mängib mõju.

Objektiivse reaalsuse peegeldumine füüsikalistes teooriates

Materialistid ja idealistid käsitlevad füüsika eesmärgi ja sisu definitsiooni, füüsika seaduste ja teooriate tõepärasuse hindamist hoopis erinevatelt positsioonidelt. Tõe ja maailma füüsikalise uurimise abil tõe avastamise võimaluse mõistmine ise on materialistidel ja idealistidel vastupidine.

Praegu välismaal kõige enam levinud idealistliku koolkonna esindajad — Machi pooldajad — lähtuvad sellest, et meie teadmised loodusest kujunevad aistingute kaudu, ja väidavad, et selle tagajärjel ei saa maailma füüsikaline uurimine anda meile midagi enamat kui kõigi inimeste poolt üldtunnustatud seoste kindlaksmääramist aistingute faktide vahel. Mach kirjutas ühes oma teostest (1872. a.) otseselt, et füüsika ülesanne seisneb selles, et „avastada aistingute vaheliste seoste seadused".

Kõige järjekindlamad mahhistid loevad maailma tõelisteks elementideks nimelt aistinguid, mitte aga asju; teised, neokantiaanliku mõttelaadiga mahhistid, nõustudes materialistidega, et aistingute põhjuseks on objektiivselt eksisteerivad asjad, arva-

vad samal ajal vastupidi materialistidele, et meie teadmised piirduvad aistingutega, et asjad jäävad printsipiaalselt tunnetamatuteks.

Vastavalt sellele eitavad mahhistid absoluutse tõe avastamise võimalust. Nende arvamuse järgi pole absoluutset tõde olemas, ja kui ta ka oleks olemas, siis jääks ta alati väljapoole inimliku tunnetamise piire.

Kuid mis on *tõde?* Selle küsimuse on endale esitanud kõikidel aegadel kõik filosoofid ja on vastanud temale mitmesuguselt.

Religioossete vaadetega filosoofid otsisid edutult tõde usust, mõned filosoofid-idealistid nägid tõde inimese kõlbelises täiustamises, teised — tema subjektiivsetes kujutlustes, kolmandad — kogu looduse hingestamises, neljandad lugesid tõde tunnetamatuks jne. Mahhistide arvates ei saa inimese teadmised olla usaldusväärsed, ja seepärast on kõik tõed relatiivsed; objektiivset, absoluutset tõde pole olemas.

Vastandlikult idealismile, mis eitab maailma ja tema seaduspärasuste tunnetamise võimalust, mis ei usu meie teadmiste usaldusväärsust, ei tunnusta objektiivset tõde, ja arvab, et maailm on täis „asju iseendas", mida teadus kunagi ei suuda tunnetada, — lähtub marksistlik filosoofiline materialism sellest, et maailm ja tema seaduspärasused on täiesti tunnetatavad, et meie teadmised loodusseadustest, mis kogemuste, praktika poolt on järele proovitud, on usaldusväärsed teadmised, millel on objektiivsete tõdede tähendus; et maailmas pole tunnetamatuid asju, vaid on ainult asjad, mis on veel tunnetamata, kuid mis kõik avastatakse ja tunnetatakse teaduse ja praktika jõududega.

Mahhistide arvamuse järgi pole teaduse eesmärgiks mitte tõe avastamine, vaid faktide viimine niisugusesse süsteemi, mis kindlustaks mõtlemise suurima ökonoomia. Füüsikalised mõisted, seadused ja teooriad ei ava mahhistide arvamuse järgi asjade loomust, vaid kujutavad endast ainult täiesti tingliku „faktide kirjeldamise" sobivat vormi. „Faktide" all mõistavad mahhistid meie aistingute kompleksi.

Kuidas tuleb siis maailma füüsikalise uurimise sisu ja piire tegelikult mõista?

Kõigepealt tuleb märkida, et tegelikkuses toimub teaduse ajaloolise arengu kogu käik, samuti nagu ka iga üksiku teadusliku uurimuse käik, V. I. Lenini poolt järgmiste sõnadega formuleeritud dialektika seaduse järgi: „Elavalt kaemuselt abstraktsele mõtlemisele ja sellelt praktikale — niisugune on tõe tunnetamise, objektiivse reaalsuse tunnetamise dialektiline tee." Seega *teaduslik uurimine on teooria ja praktika ühtsus praktika otsustava ja teooria juhtiva osaga.*

Katse tulemus, mille korraldamisel uurija juhindub juba kindlast hüpoteesist, annab võimaluse kontrollida hüpoteesi, täpsus-

tada ja laiendada teda teooriaks, püstitada füüsika seadus, s. o. kindlaks määrata mitmesuguste füüsikaliste suuruste vahelise objektiivse sõltuvuse iseloom.

Kogemus (vaatlus, katse, praktika) on kõigi meie teadmiste allikaks. Kogemuse kõrval on aga *teoreetilisel mõtlemisel* juhtiv tähtsus teadmiste arendamisel. Ilma teoreetiliste üldistusteta, ilma teooria näpunäideteta katsete mõistlikuks suunamiseks on teaduse edasiliikumine võimatu.

Kaasaegse füüsika teoreetilised üldistused võtavad kokku kõik, mis on saavutatud juurdleva inimmõistuse poolt füüsikaliste nähtuste uurimise alal kogu kultuuri arenemise perioodi jooksul. Selleks et täpsustada üldistusi ja haarata loendamatut hulka fakte võrdlemisi väheste teoreetiliste mõistete ja valemite abil, osutus vajalikuks luua rida matemaatilisi teadusi: diferentsiaal- ja integraalarvutus, diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teooria, variatsioonarvutus, matemaatiline tõenäosusteooria, vektoranalüüs, matemaatiline korpuseteooria, tensoranalüüs jne. Pole kerge omandada seda laialdast *matemaatilist aparaati*. Kaasaegsete füüsikaliste teooriate õige kasutamise teel seisvad matemaatilised raskused hirmutavad vahel mõningaid füüsikuid-eksperimentaatoreid; sääraste füüsikute osaks on lame vulgaarne empirism, mis viib nende uurimused ummikusse.

Tihti juhtub, et üksikud füüsikud mõtlevad matemaatiliste raskuste tõttu kaasaegsete füüsikaliste teooriate õige kasutamise asemel välja oma erilisi, üpris lihtsustatud „laest võetud" hüpoteese, mis ei arvesta uuritud füüsikaliste faktide kogu keerulist kogumit, jäävad teadusest maha ja osutuvad seetõttu tavaliselt abituiks või koguni kahjulikeks.

Füüsika, rikastudes katsete abil, toetub oma arengus matemaatikale. Füüsika teatud matematiseerimine on tarvilik, kuid füüsikaliste teooriate liigne abstraktsus ja küsimuste ilma tegeliku vajaduseta matemaatiliselt keeruliseks tehtud esitus on hädaohtlik. Säärased liigse formalismi all kannatavad füüsikalised teooriad ei leia eksperimentaatorite poolt kasutamist ja kisuvad füüsika praktikast eemale.

On iseloomulik, et mittevajalik *matemaatilise aparaadi hüpertroofia* mõnedes füüsikalistes teooriates, mida on lubanud nende autorid matemaatilise „kunst kunsti pärast", on ilmseks kahjuks teooria füüsikalisele selgusele ja lihtsusele, hulga uute vähekasulike ja tarbetute sümbolite väljamõtlemine ainult armastusest sümboolika vastu, eriline kirglik kalduvus väljamõeldud abisuurustele ja nende tinglikele teisendamistele — kõik need ja nendega sarnased formalismi jooned on kõige enam omased füüsikutele-idealistidele.

Kui abstraktne teooria ka ei oleks, kui ta aga on õige ja on õigesti üles ehitatud, siis ei pea mitte ainult tema järeldused vas-

tama tegelikkusele, vaid ka *kõik teooria lülid, kõik mõisted ja suurused, millega ta opereerib, peavad samuti võimalikult täpsemalt peegeldama objektiivset reaalsust.*

Vaatleme lähemalt teoreetilise mõtlemise ja objektiivse reaalsuse normaalse vahekorra küsimust. Mõtlemise allikaks on kõigepealt meie *muljed.* Suure vene füsioloogi Setšenovi töödega tehti kindlaks, et mulje ja mulje tekitanud objektiivsete põhjuste vahel on alati mingi *vahepealne lüli.* Näiteks nägemismuljete juures on vahepealseks lüliks esemete kujutis silma võrkkestal. Vahepealne lüli, näiteks silmapõhjal saadud eseme kujutis, peegeldatakse teadvuse poolt närvikiudude ja peaaju koore tegevuse abil. Eriti tähtsad on Setšenovi veenvad tõestused, et esemete kujud ja omadused, nende asetus ruumis, nende ümberasetumised peegeldatakse õigesti, täielikus vastavuses tegelikkusega.

See Setšenovi järeldus on kooskõlas marksistlik-leninliku *peegeldusteooriaga:* meie teadvus ammutab muljeid aistingutest, mis on ühelt poolt välisesemete mõju tulemuseks meeleorganitele, aga teiselt poolt on lahutamatud mõttetegevusest; elavalt kaemuselt viib tunnetamisprotsess abstraktsele mõtlemisele, mis on kontrollitud praktika poolt, ja kokkuvõttes peegeldab inimese teadvus õigesti objektiivset reaalsust.

Mälu ja mõtlemine on suunatud nii faktide liigendamisele *(analüüs)* kui ka eristatava seostamisele üheks tervikuks — üldistamisele *(süntees)* eseme teisejärguliste omaduste või nähtuse vähetähtsate tunnuste kõrvalejätmise teel. Suure hulga faktide üldistamise tulemusena loob meie teadvus *kujutlused* ja *mõisted.* Seega opereerib abstraktne mõtlemine mõistetega, mis *peegeldavad täielikus vastavuses objektiivse reaalsusega* hulga sarnaste esemete tüüpilisi jooni ja üheliigiliste nähtuste iseloomulikke jooni. Peegeldus — see on kooskõla, vastavus taju või mõtte ja objektiivse reaalsuse vahel; peegeldus — see on objektiivse maailma kujutis, õigemini pilt või koopia.

Maailma füüsikalisel uurimisel kasutame kujutlusi ja mõisteid, mis on välja töötatud kõige näitlikuma, kõige käegakatsutavama liikumise vormi — mehhaanilise liikumise — uurimisel, selleks et avastada niisuguste liikumise vormide, nagu näiteks elektrinähtuste seaduspärasusi, millest me vahetult ei saa suurt hulka meelelisi tajusid. Nimelt nii toodi füüsikasse elektrijõu, elektri töö, magnetjõu ja magneti töö mõisted ning nendega seotud elektri- ja magnetväljade tugevuse, elektripotentsiaali jms. kujutlused. Meie teadmiste arenemisel liikumise keerulisematest vormidest tulid mõned ebaõnnestunult mehhaanikast füüsikasse toodud kujutlused ja mõisted kõrvale heita, sest et mitte ükski keeruline liikumise vorm pole täielikult taandatav lihtsamale liikumise vormile; teised mõisted säilisid oma põhiolemuses, kusjuures

detailides nad kujunesid ümber vastavalt uuritava liikumise vormi juures avastatud iseärasustele.

Sel viisil ei osutu füüsikalised mõisted ja kujutlused füüsikalistest suurustest üldse mitte meie mõtteloomingu viljaks või füüsikute poolt mõõtmiste unifitseerimise eesmärgil tehtud kokkulepete lihtsaks resultaadiks, nagu see paistab mahhistidele; *füüsikalised mõisted ja kujutlused füüsikalistest suurustest peegeldavad objektiivset reaalsust ja peegeldavad teda seda õigemini ja täielikumalt, mida kõrgem on füüsika arenemisaste.*

Kõik ekslik, mis tuuakse teadusse meie teadmiste vähesuse ja formalismi harrastamise tõttu, mis tihti risustab füüsikat kunstlike, ebaõigete kujutlustega, — kõik see tuleb järgnevas teaduse arenemises ilmsiks kui tõele mittevastav ja heidetakse kõrvale.

Füüsikalis-teoreetiliste kujutluste arenemine toimub ühtede, vananenud teooriate asendamise teel teiste, täielikumatega, mis uutmoodi ja täpsemalt selgitavad kasvanud uuritavate nähtuste ringi ja samal ajal *säilitavad endas kõik vanades teooriates olnud tõeterad.*

Kõrvuti selle teooriate vahetamisega, mis viib nende täiustamisele, s. o. reaalsuse täielikumale peegeldamisele, on füüsika arenemisel hiiglasuur tähtsus *füüsikaliste mõistete mõtte, sisu* järkjärgulisel, vahel aga hüppeliselt toimuval *ümberkujundamisel.*

Näiteks võib tuua ühe füüsika põhimõiste — aine *aatomi mõiste* — arenemine.

Vanad kreeklased pidasid aatomit äärmiselt väikeseks aine osakeseks, kõvaks nagu pisitilluke kivike, millel on kera, ovaalse või mingisuguse muu keha kuju ja mis on varustatud haagikujuliste nukkidega, mis aatomite liginemisel oma haakumisega üksteise taha põhjustavad keha tugevuse. XVII ja XVIII sajandil käsitati aatomit kui aine mehhaanilise ja keemilise jaotamise piiri, kui absoluutselt kõva inertset osakest, mis samal ajal on vastastikuste külgetõmbejõudude ja molekulaarsete kohesioonjõudude keskpunktiks. XIX saj. lõpul ja XX saj. algul hakati aatomit ette kujutama kui keerulist osakest, mis koosneb positiivse elektri pilvest ja mõningast arvust temas asetsevatest elektronidest, mis välismõjude tõttu nendele muudavad asukohta ja liiguvad klassikalise elektrodünaamika seaduste järgi. Veel pisut hiljem, XX saj. teise aastakümne alguses, selgus, et aatomi positiivne elekter on koondatud pisitillukesse massiivsesse aatomituuma; tuuma ümber tiirlevad tohutu kiirusega elektronid, mis püsivad ainult kindlatel statsionaarsetel orbiitidel ja millede liikumise olek muutub mitte klassikalise elektrodünaamika seaduste järgi, vaid hoopis teiste, kvantseaduste järgi. Tänapäeval me teame, et iga aatomi tuum on keeruline ja koosneb vesinikuaatomi tuumadest — prootonitest — ja massi poolest niisama suurtest neutraalsetest osa-

kestest — neutronitest; peale selle selgus, et aatomi ehitust kujutab tõele lähemalt mitte geomeetriline, vaid energeetiline pilt, mille meile avab lainemehhaanika (III k.).

Sügava, põhjaliku muutumise tegi läbi ka *elektroni mõiste*, mida füüsika veel hiljuti pidas väikseimateks, kerakese ruumalas ühtlaselt jaotatud või ka tema pinnale koondatud elektri tilgakesteks. Piisab, kui ütelda, et tänapäeval me kujutleme elektrone ja positrone kui osakesi, millel ei ole ainult elektrilised, vaid ka puhtmagnetilised omadused, mida põhjustab nagu nende osakeste pöörlemine oma telje ümber, kuid millel tegelikult on palju keerulisem päritolu; peale selle on teada, et elektronidel ja positronidel on, nagu üldse ka kõigil väikseimatel mateeria osakestel, mõned lainete omadused; lõpuks selgus, et teatud tingimuste juures võib elektron-positroni paar muunduda niinimetatud gamma-footoniks — materiaalseks elektromagnetiliste lainete kimbuks, justkui kiirgusosakeseks, millel on veel suurem läbistamisvõime kui röntgenikiirtel.

Säärasedki lihtsaina näivad mõisted nagu *kaal* ja *mass* tegid füüsika arenemisel läbi sügavaimad muutused.

Esimese kehade kaalu mõiste ümberkujundamise kutsus esile Maa kerasuse avastamine: kaalu mõiste tuli siduda raskusjõu suunaga Maa keskpunkti. Newtoni gravitatsiooniseadus võimaldas avastada keha kaalu ebaõige käsitamise, nagu oleks kaal keha muutumatu omadus; see laiendas kaalu mõistet ja lubas seda mõista vaadeldava keha ja Maa külgetõmbejõu avaldusena või ka mõne muu taevakeha vahelise külgetõmbe avaldusena, kui pidada silmas keha kaalu näiteks Kuu, mingisuguse planeedi, Päikese jne. suhtes. Seejuures selgus, et keha kaal Maal sõltub keha asukoha kõrgusest merepinnast. Kooskõlas nende mehhaanika seadustega ja asjaoluga, et Maa pöörleb oma telje ümber ning ei ole täpselt kerakujuline, ilmnes kaalu kui keha toele rõhumise keeruline sõltuvus koha geograafilisest laiusest. Veel enam laiendati kaalu mõistet Einsteini gravitatsiooniteoorias: siin käsitleti külgetõmmet, järelikult ka kaalu seotuna selle ruumi omadustega, milles asetsevad graviteeruvad massid.

Kujutluse massist kui mateeria hulgast kehas ja samal ajal kui inertsi mõõdust tõi füüsikasse Newton. Kaua aega käsitleti massi kui keha absoluutset, muutumatut omadust, mis üldse ei sõltu keha liikumise olekust, tema soojuse astmest, elektriseerumisest jne. Kui aga avastati ja uuriti elektrone, selgus, et nende mass on elektromagnetilise päritoluga. See omakorda viis keha massi ja tema liikumise kiiruse vahelise sõltuvuse avastamisele, see sõltuvus tuleb ilmsiks ainult väga suurte, valguse kiirusega võrreldavate kiiruste juures. See avastus näitas, et valguse kiirus tühjuses (eetris) on äärmine, suurim võimalik liikumise kiirus. Lõpuks tehti kindlaks, et keha *mass* ja keha *energia* on *kaheks mateeria*

mõõduks tema liikumises, ja et need kaks mõõtu: üks, mis määrab *mateeria hulga* — mass —, ja teine, mis määrab *liikumise ja vastastikuse mõju ulatuse* — energia —, on teineteisega täpselt võrdelised. Võrdetegur, millega tuleb korrutada grammides väljendatud keha massi, et saada tema energiat ergides, on võrdne valguse kiiruse *(cm/sek)* ruuduga tühjuses.

Füüsika arenemisprotsessis, nagu teada, muutusid kujutlused soojusest, magnetismist, valgusest, molekulaarjõudude loomusest jne. tundmatuseni. Iga uus, muutunud füüsikalise mõiste sisu peegeldab ikka sügavamalt, õigemalt ja täiuslikumalt objektiivset reaalsust.

Füüsika eesmärk on kaasa aidata looduse alistamisele inimese poolt ja seoses sellega avastada mateeria tõeline ehitus ja tema liikumise seadused.

ESIMENE OSA

MEHHAANIKA FÜÜSIKALISED ALUSED. AKUSTIKA

I PEATUKK

MEHHAANILINE LIIKUMINE (KINEMAATIKA PÕHIMÕISTED)

§ 1. Nähtuste vastastikusest seosest ja nende skematiseerimise lubatavatest piiridest füüsikas.

Rakendades mehhaanika seadusi loodusnähtuste uurimisel või tehnika ülesannete lahendamisel, oleme alati sunnitud uuritavaid protsesse mõttes lihtsustama, „skematiseerima". Mehhaanika seadused on väga täpsed. Siiski viib nende rakendamine kehade liikumise tegeliku pildi analüüsimisel sagedasti ebatäpsetele, mõnikord isegi täiesti ekslikele järeldustele. Nii juhtub seepärast, et alati ei ole kerge õigesti „skematiseerida" uuritavaid nähtusi.

Mingisuguse nähtuse mõistmine ja arvestamine osutub sageli võimatuks, kui mitte minna nähtuse teatava mõttelise lihtsustamise teed. Kuid teiselt poolt, rebides lihtsustamise eesmärgil nähtuse lahti tema seostest naabernähtustega, võib moonutada nähtuse tõelist olemust, mis jällegi teeb võimatuks nähtuse õige mõistmise.

Kõik loodusnähtused on niivõrd tihedalt üksteisega seotud, et ilma mõninga kõrvalekaldumiseta tegelikkusest on võimatu välja valida puhtmehhaanilisi protsesse, mis algusest lõpuni oleksid tervenisti seletatavad ainult mehhaanika seadustega. Analoogilise olukorraga puutume kokku ka teistes füüsika osades. Nähtuste teatud skematiseerimine nende uurimise võimaldamiseks on vältimatu. Ei tule aga kunagi unustada, et ettevaatamatu, järelemõtlematu skematiseerimine varjab endas ähvardavat tegelikkusest irdumise hädaohtu. Nähtuste tõelise pildi ebaõnnestunud lihtsustamine toob endaga kaasa jämedad vead teoreetilistes järeldustes, ükskõik kui täiuslikud säärase ebaõigelt ülesehitatud skeemi analüüsimisel rakendatud matemaatilised meetodid ka ei oleks. Tihtilugu on juhtunud, et nähtuste ülemäärane skematiseerimine on viinud kõige kompetentsemaidki õpetlasi teadusliku meetodi moonutamisele, füüsika asendamisele metafüüsikaga, skolastikaga.

Marksistliku dialektilise meetodi esimene põhijoon ütleb: „Vastandlikult metafüüsikale vaatleb dialektika loodust mitte kui üksteisest eemal asetsevate, üksteisest isoleeritud ja üksteisest sõltumatute asjade, nähtuste juhuslikku kogu, vaid kui sidestatud, ühtset tervikut, kus asjad, nähtused on üksteisega orgaaniliselt seotud, sõltuvad üksteisest ja tingivad üksteist.

Seepärast arvab dialektiline meetod, et looduses pole võimalik mõista ainsatki nähtust, kui võtta teda isoleeritud kujul, ümbritsevate nähtustega sidestamata, sest iga nähtuse võib igas looduse valdkonnas muuta mõttetuks, kui vaadelda teda sidestamatult ümbritsevate tingimustega, neist lahus, ja vastuoksa, iga nähtust võib mõista ning põhjendada, kui seda vaadeldakse lahutamata seoses ümbritsevate nähtustega, tema tingituses teda ümbritsevaist nähtustest."

Sellega ei eitata abstraheerimise kasulikkust nähtuse oluliste iseärasuste leidmisel ja põhiliste kvantitatiivsete suhete avastamisel. Nähtuste keerulisuse tõttu on tihti hädavajalik kujutleda uuritavat nähtust ühel või teisel määral abstraheerituna, minnes mööda nähtuse teisejärgulistest detailidest. Sel juhul me asendame nähtuse tema lihtsustatud s k e e m i g a. Ilma uuritavate nähtuste skematiseerimiseta ei saaks füüsika kasutada matemaatilist aparaati, ei omaks teooriat, ei saaks katsetele anda tarvilikku sihikindlust, seega osutuks jõuetuks ja kasutuks.

Nähtuse õige skeem ei katkesta aga selle nähtuse kõiki seesmisi seoseid teiste nähtustega. Vastuoksa, nähtuse õigesti koostatud skeem tõstab esile ja kriipsutab alla, valgustab sel kombel nähtuste v a s t a s t i k u s t p õ h i s e o s t, jättes kõrvale kõik mittepõhilised, mitte iseloomustavad vastastikused mõjud ja teisejärgulised mõjustused. Kui me nähtuse skeemi välja töötades määrame nähtuste vastastikuse põhiseose ebatäpselt, siis saab see viga saatuslikuks, ja kõik kujutlused, mis on rajatud säärasele skeemile, osutuvad kõlbmatuks.

Selgitame öeldut lihtsa näitega. Vaatleme nimelt suurtükimürsu lendamisel toimuvate nähtuste pilti.

Suurtükimürsu lennul sõltub mürsu trajektoor paljudest asjaoludest: püssirohulaengu suurusest ning omadustest ja suurtüki ehitusest, mürsu mõõtmetest, õhutakistusest, tuule suunast, mürsu kujust, mürsu pöörlemise kiirusest ümber oma telje jne.

Seda nähtust skematiseerides teeme kindlaks, et mürsu trajektoor sõltub kõige enam mürsu ja Maa vahelisest külgetõmbest ja pärast tema väljatulistamist inertsi mõjul toimuva liikumise kiirusest ja suunast. Selles esimeses elementaarses skeemis me vaatleme mürsku kui „materiaalset" ja jätame kõrvale kõik mõjutused peale kaalu ja algkiiruse. Niisugusel lihtsustamisel osutub mürsu trajektoori väljaarvutamise ülesanne lihtsaks; arvutamise tulemuseks saadakse parabool, nagu on näidatud paragrahvis 17.

Nähtuse täpsemat skeemi koostades võime arvestada ka õhutakistust. Arvutamine muutub nüüd keerulisemaks, kuid seda on võimalik teostada mehhaanika üldiste seaduste ja spetsiaalse mürsu liikumise kiiruse ja õhutakistuse vahelist seost määrava seaduse põhjal. Osutub, et mürsu trajektoor erineb paraboolist.

Edasi on tarvis arvestada, et mürsk hakkab liikumisel mööda suurtükitoru vintlõiget pöörlema. See pöörlemine annab mürsule stabiilsuse lennul. Kuna mürsk pöörleb, siis ei saa mürsu lendu vaadelda kui materiaalse punkti liikumist. Arvutust tuleb komplitseerida pöörleva liikumise dünaamika seaduste rakendamisega ja mürsu pöörlemise mõju arvestamisega õhutakistusele.

Võttes tarvitusele veel keerulisema, aga see-eest ka täpsema skeemi, võib kindlaks teha mürsul torusuudmest väljalendamisel oleva algkiiruse sõltuvuse püssirohulaengu suurusest ja omadusest, toru pikkusest jne. Seejuures me peame juba peale mehhaanika seaduste kasutama veel füüsika teisi osi kirjeldavaid seadusi.

Isegi täiesti täpnegi mürsu trajektoori ettearvutamine ei ammenda kaugeltki veel mürsu liikumisega kaasnevate nähtuste täielikku pilti. Mürsu metallist kest koosneb tihedalt asetsevatest metalli aatomitest (ioonidest). Liikumisel soojeneb mürsu kest hõõrde tagajärjel. Metalli pinnakihi aatomite olek muutub. Samal ajal toimuvad õhus keerulised nähtused: õhk paisatakse mürsu poolt kõrvale ja tiheneb, soojeneb, tekivad keerised. Õhus tekivad häälenähtused, mis kannavad kaugele teate mürsu lennust. Seega on nähtuste tegelik pilt mürsu lennul võrreldamatult rikkalikum kui mistahes arvutusteks sobiv nähtuse skeem.

Edaspidi vaatleme veel teisi näiteid, mis näitavad, missuguse ettevaatlikkusega on vaja füüsikas läheneda möödapääsmatule nähtuste skematiseerimisele. Veendume, et kõigil juhtudel, nagu ka läbiarutatud näites, on nähtuse õigesti koostatud skeemi tunnuseks selle nähtuse ja teiste nähtuste vaheliste põhiseoste, kõige iseloomulikumate seoste väljaeraldamine ja arvestamine. Alati, nagu ka mürsu lennu uurimisel, ilmneb, et ainuke tee tegelikkusele lähenemiseks peitub uuritavate skeemide järkjärgulises komplitseerimises.

Mehhaanilise liikumise uurimisel on eriti tähtis liikumist esilekutsuvate ja ühte või teist liiki liikumist tekitavate põhjuste väljaselgitamine. See on mehhaanika põhiülesanne; selle põhiülesande lahendamisele pühendatud mehhaanika osa kannab *dünaamika* nime. Teades liikumise põhjusi, võib ennustada, millistel tingimustel on uuritavad kehad tasakaalus. Seepärast järgneb kehade tasakaalu tingimuste uurimisega tegelev mehhaanika osa — *staatika* — loogiliselt dünaamikale, ja, nagu me näeme, võib tõepoolest kõiki staatika seadusi tuletada dünaamika seadustest. Kuna kehade tasakaalu uurimine on vähem keeruline kui liiku-

mise uurimine, siis on arusaadav, miks paljud staatika küsimused lahendati enne (ajalooliselt) dünaamika väljatöötamist.

Möödunud sajandi teisest poolest alates kujunes traditsiooniks tuua dünaamika käsitlemise ette õpetus, mis käsitleb liikumist sõltumatult teda tekitavatest põhjustest; see formaalne mehhaanika osa kannab *kinemaatika nime.*

§ 2. Orienteerumissüsteem.

Mehhaaniline liikumine on teatava kiirusega toimuv kehade või osakeste nihkumine ruumis. Selles lühikeses definitsioonis on varjul palju raskusi. Näiteks pole alati lihtne kindlaks teha keha asendi muutumist ruumis. Keha asendi muutumise kindlaksmääramiseks on vaja võrrelda keha asendit mingite teiste kehade või ka üheainsa keha asendiga, mida täiesti tingimisi loetakse liikumatuks. Meid huvitav liikumine võib paista mitmesugusena, sõltuvalt sellest, missuguse keha suhtes me määrame liikuva keha nihkumist. Näiteks jalgratta pedaali liikumine paistab jalgratturile toimuvat mööda ringjoont, samal ajal kui kõrvalseisvale vaatlejale see paistab toimuvat lainekujuliselt. Edasi on tarvis täpseid kauguste mõõtmise viise ja mastaape, mis ei sobi ainult üksteise suhtes liikumatute kehade vaheliste kauguste määramiseks, vaid ka mõõtmisteks liikuvate kehade juures. Lõpuks on liikumise kiiruse määramiseks vajalikud täpsed aja mõõtmise viisid.

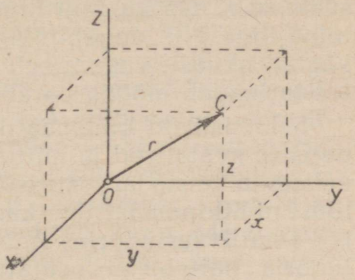
Kõikidel juhtudel, välja arvatud erakordselt kiired liikumised valguse kiirusele lähedase kiirusega, võib pidada ruumi ja aja mõõtmisi (pikkuste ja aja mastaape) sõltumatuiks liikumise kiirusest. Mõõtmiste küsimus on keerulisem, kui tuleb analüüsida liikumisi, mis toimuvad valguse kiirusele lähedaste kiirustega; katselised faktid näitavad, et valguse kiirus vaakuumis on looduses võimalik maksimaalne liikumise kiirus (piirkiirus); seoses sellega (nagu selgitatakse III köites relatiivsusteooria käsitlemisel) selgub, et on vaja täpsustada meie tavalisi kujutlusi ruumi ja aja mõõtmisest.

Tingimisi liikumatuid kehi, mille suhtes on otsustatud vaadelda liikuva keha asendi muutumist, nimetatakse arvestussüsteemiks ehk *orienteerumissüsteemiks* ehk, mis tähendab sedasama, *koordinaadistikuks.*

Füüsika tehnilistes rakendustes ja igapäevases elus seotakse koordinaadistikku kõige sagedamini Maaga, mida sellistel juhtudel loetakse liikumatuks, kuigi kõigile on väga hästi teada, et Maa on ööpäevases pöörlemises, tiirleb ümber Päikese ja liigub koos Päikesega.

Kolme vastastikku ristiolevat sirgjoont, mis on muutumatult seotud orientiiriks oleva kehaga, nimetatakse *Cartesiuse koordinaaditelgedeks;* liikuva keha mingi punkti *C* hetkelist asendit

iseloomustatakse nendele telgedele ehitatud risttahuka servade pikkusega, mille tipus on antud hetkel meid huvitav punkt C. Tavaliselt tähistatakse Cartesiuse koordinaaditelgi sümbolitega OX, OY, OZ, kus punkt O on koordinaatide algus. Mainitud risttahuka servade pikkusi ehk, nagu lühidalt öeldakse, punkti C koordinaate tähistatakse tähtedega x, y, z (joon. 1). Igaüks neist koordinaatidest on punkti C kauguseks ühest nendest kolmest koordinaattasapinnast, näiteks x on punkti C kaugus tasapinnast YOZ.



Joon. 1. Cartesiuse koordinaadistik (parema käe kruvi süsteem, mida kasutatakse käesolevas kursuses; kui vaadata telje OZ suunas, siis pööre 90° kellaosuti liikumise suunas viib telje OX ühtimisele teljega OY).

Samuti võib vaadeldava punkti C asendi kindlaks määrata, kui näidata koordinaatide algusest punkti C tõmmatud sirglõigu pikkus ja suund; see on niinimetatud *raadiusvektor* r. Joonisel 1 on see raadiusvektor risttahuka diagonaaliks. Kuna risttahuka servad on pikkusega x, y ja z, siis määratakse raadiusvektori absoluutväärtus valemiga

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

Sõnaga *vektor* tähistatakse üldse suurusi, mida ei saa iseloomustada ainult arvulise väärtusega, vaid mida tuleb iseloomustada ka suunaga, erinevalt *skalaarsetest* suurustest (näiteks tihedus, temperatuur jne.), mida iseloomustab ainult arvuline väärtus. Vektoreid kujutatakse nooltena, mille pikkus, mõõdetud kokkulepitud mastaabis, näitab vektoriaalse suuruse absoluutväärtust, noole suund aga näitab vektoriaalse suuruse suunda. Skaalaritest eraldamise eesmärgil on käesolevas raamatus vektorid laotud rasvase kirjaga; vektorite absoluutväärtused (ehk, nagu öeldakse, nende *moodulid*) on laotud tavalises kirjas; nii tähendab r raadiusvektorit, aga r — selle vektori *moodulit* (s. o. arvväärtust, antud juhul pikkust).

Pole raske ette kujutada, et Cartesiuse (Descartes) koordinaadid x, y, z kujutavad endast raadiusvektori r projektsioone koordinaaditelgedele.

Raadiusvektorit, nagu üldse iga vektorit, võib vaadelda kolme skalaarse suuruse — vektori *komponentide* — ehk, mis tähendab sedasama, vektori koordinaaditelgedele võetud projektsioonide kogumina.

Puhtkinemaatiliselt seisukohalt võib orienteerumissüsteemi valida meelevaldselt, aga liikuva keha trajektoor ja muud liiku-

mise karakteristikad (kiirus, kiirendus) on täiesti tinglikud kujutlused, millel on konkreetne sisu ainult valitud arvestussüsteemi suhtes. Ilmselt on keha C liikumisel keha K suhtes, millega me sidusime koordinaadistiku, üks iseloom, samal ajal kui sellesama keha C liikumisel teise keha K' suhtes (kui see teine arvestussüsteem K' ise kuidagi liigub esimese, K suhtes) võib olla hoopis teine ilme. Nii langeb mingi ese, mis on pillatud ühtlaselt liikuva vaguni aknast, vaguni suhtes piki sirget, kuna raudteetammi suhtes ta langeb mööda parabooli.

Sel viisil on kinemaatika seisukohalt kõik liikumise karakteristikad suhtelised ja mitte ühtki arvestussüsteemi ei saa kuidagi eelistada teiste arvestussüsteemide ees. Selline liikumiste analüüsi puhtkinemaatiline käsitlus on range järjekindlusega arendatud relatiivsusteoorias (mida selgitatakse III köites). Relatiivsusteooria näitab, et osutatud liikumiste uurimise kinemaatiline käsitlus tagab pikkuste ja aja mastaapide vastaval valikul ja gravitatsiooni teatud tõlgendamisel mistahes kiirusega toimuvate liikumiste täiesti täpse k i r j e l d a m i s e, kaasa arvatud ka kiirused, mis on lähedased looduses maksimaalselt võimalikule liikumise kiirusele (valguse kiirusele).

Tuleb siiski märkida, et näidatud puhtkinemaatiline lähenemine liikumiste analüüsile, kuigi see kindlustab liikumiste kirjeldamise täieliku täpsuse, jätab füüsikalis-filosoofiliselt seisukohalt palju soovida, sest sellisel käsitlusel me lahutame liikumise kirjeldamise tema tekkimise põhjuste uurimisest, mis enamjaolt tähendab liikumise kirjeldamise eraldatust reaalsest masside jaotusest. See aga kitsendab kunstlikult meie kujutluse tekkimist liikumisest kuni selle suhteliste kujutusteni.

Liikumise objektiivne olemus, s. o. liikumise pilt sõltumata meie poolt valitud orienteerumissüsteemist, osutub mõtte kaotanuks, justkui mõttest ilma jäetuks. Liikumiste analüüsi puhtkinemaatilises käsitluses ja väites, et orienteerumissüsteemi valik on meelevaldne, peitub printsipiaalne loobumine püüdest avastada liikumise tegelikku, objektiivset, tõelist pilti, mis ei olene vaatluse viisidest. Piiratud kinemaatilise seisukoha juhtivaks printsiibiks püstitamine on samaväärne füüsikalise relativismi[1] muutmisega filosoofiliseks relativismiks, s. t. viib ebaõigele järeldusele, et liikumise tinglike, suhteliste kujutluste taga pole mingisugust (meie vaatlustest sõltumatut) liikumise tõelist pilti.

Puudutatud küsimuste õige lahendus seisneb selle tunnustamises, et meie suhtelised liikumiste kujutused (erinevate orienteerumissüsteemide juures) ei ole kogu oma matemaatilise samaväärsuse juures füüsikaliselt samaväärsed: ühed on tõele lähemal, tei-

[1] Ladina k. *relativus* — s u h t e l i n e.

sed sellest kaugemal. Milline orienteerumissüsteem avab liikumise objektiivse pildi täielikumalt, see tehakse kindlaks liikumise põhjuste analüüsiga, mis on enamasti seotud masside reaalse jaotuse arvestamisega.

Niisiis, kui keegi pillab sügavasse kaevu kivi ja selsamal ajal viskab kõrvale kepi, mis lendab kukerpallitades eemale, siis, kui piirduda kivi liikumise kirjeldamisega kepi suhtes, võib muidugi valida mistahes orienteerumissüsteemi, kuid on kahtlematu, et füüsikaliselt, meie lähenemise seisukohalt liikumise tõelisele pildile, ei osutu nad samaväärseteks. Näiteks võib siduda koordinaadistiku kepiga ja saada, olgugi keerulise, kuid täiesti täpse kivi langemise kirjelduse. Kuid selles orienteerumissüsteemis näib kogu tähtede maailm kukerpallitavat kepi ümber, samal ajal kui ei ole kahtlust, et tegelikult kukerpallitab kepp. Me tuleme võrreldamatult ligemale liikumise tõelisele pildile, kui antud juhul võtame orienteerumissüsteemiks Maa.

§ 3. Materiaalne punkt ja tema nihe.

Keha nihke täpseks määramiseks on tarvis teada keha kõigi osakeste koordinaate enne ja pärast nihet. Kui aga keha osakesed säilitavad nihkel üksteise suhtes muutumatu asetuse ja liiguvad üksteisega paralleelselt, siis keha asendi niisuguse muutumise üle otsustamiseks on küllaldane jälgida keha mingi ühe punkti koordinaatide muutumist. See muidugi lihtsustab tunduvalt keha liikumise uurimist. Analoogiline lihtsustamine on üldse võimalik kõigil nendel juhtudel, kui on tähtis keha kui terviku liikumise ligikaudne pilt (nimelt kulgevast liikumisest ruumis, mitte aga pöörlemisest keha läbiva mingi telje ümber); mis aga puutub keha osakeste liikumistesse üksteise suhtes, siis võib juhtuda, et nad kas ei huvita meid üldse, või on siis ülesande iseloomu tõttu lubatav neid eraldi vaadelda. Niisugune liikumise uurimise käsitlemine on kohane eriti siis, kui keha mõõtmed on väga väikesed, võrreldes keha nihetega, mis meid huvitavad.

Osutatud mõttes ja näidatud juhtudel võib jätta kõrvale keha kuju ning tema osakeste või osade liikumise üksteise suhtes ja vaadelda keha kui mingit *materiaalset punkti*. Öeldust on selge, et ühtedel juhtudel võib materiaalse punkti all mõista väikseimat aineosakest, teistel juhtudel aga suurt, isegi kosmilist keha. Vurri liikumise põhiiseärasusi ei oleks võimalik selgitada, kui vaatleksime vurri liikumist kui materiaalse punkti liikumist; teiselt poolt on mõnedes taevamehhaanika ülesannetes täiel määral lubatav vaadelda Maa ja teiste planeetide liikumist ümber Päikese kui materiaalsete punktide liikumist.

Kui meid ei rahulda ligikaudne pilt keha kui terviku liikumi-

sest, siis võime keha jagada mõttes küllalt väikesteks osadeks, nii et iga osa kõigil elementidel oleks üksteisega sarnane liikumine. Iga sellist keha osa võime liikumise uurimise juures vaadelda materiaalse punktina. Sel viisil saab keha või kehade kogu liikumist uurida paljudel juhtudel küllalt täpselt kui *materiaalsete punktide süsteemi* („mehhaaniline süsteem") liikumist.

Tihti õnnestub mingisuguse mehhanismi liikumise analüüsimisel kujutada mehhanismi põhiliikumist kui mõnede (väheste) materiaalsete punktide liikumist mehhanismi lülide või muude enam või vähem suurte osade arvu järgi. Kui me aga soovime sama mehhanismi liikumist uurida sügavamalt, haarates kõiki temas tekkivaid kõrvalliikumisi, mis kaasnevad tema põhiliikumisega, nagu mehhanismi osade vibreerimised, hammaste kulumine jms., siis tuleb meil sama mehhanismi vaadelda kui määratu hulga materiaalsete punktide keerulist süsteemi. Tõepoolest võib sel juhul ülesande iseloomu enda tõttu oletada, et naaberosakeste liikumised on nendes aineterakestes sarnased ainult väikeste aineterakeste puhul, millest on valmistatud mehhanismi lülid. Iga niisugust aineterakest tuleb vaadelda kui materiaalset punkti. Kuid ka see mehhanismi mõtteline asendamine keerulise ja rohkearvuliste materiaalsete punktide süsteemiga osutub täiesti kõlbmatuks, kui me soovime uurida, mispärast mehhanismi osade hõõrdumisel ja kokkupõrkumisel toimub soojenemine, tekib hääl ning võib tähele panna kuivade nöör- ja rihmajamite elektriseerumist. Et asuda selle nähtuste valdkonna juurde, kus mehhaaniline liikumine muundub molekulaarseks soojusliikumiseks ja teisteks liikumisvormideks, tuleb materiaalsete punktide all mõista molekule, aatomeid või koguni neid osakesi, millest on ehitatud kõik aatomid: aatomituumi ja elektrone. Sel juhul läheneb ettekujutus kehast kui materiaalsete punktide süsteemist tõelisele pildile keha ehitusest aine elementaarosakestest, kuid just siin lõpeb meile harjunud mehhaanilise liikumise seaduste rakendatavuse piirkond ja hakkavad avalduma teiste, keerukamate liikumise vormide iseärasused.

Kinemaatika seisukohalt iseloomustatakse materiaalse punkti liikumist kolme vektoriga (nihkevektoriga, kiirusvektoriga ja kiirendusvektoriga), trajektoori kujuga ja tee pikkusega.

Trajektoor on joon, mille materiaalne punkt kirjeldab oma liikumisel. Teepikkus arvestatakse piki trajektoori. Teepikkust tähistame tähega *l*.

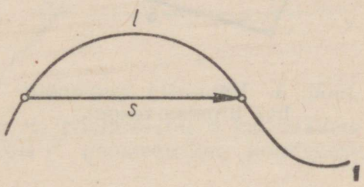
Nihkevektoriks nimetatakse sirglõiku, mis on tõmmatud asendit muutva ehk nihkuva punkti algasendist lõppasendisse. Materiaalse punkti sirgjoonelisel liikumisel on nihkevektor trajektoori lõiguks; kõverjoonelisel liikumisel suleb ta vaadeldava trajektoori osa (joon. 2). On selge, et eri ajavahemike puhul on nihkevektoritel üldiselt erinev suurus ja erinev suund. Lõpmata väi-

kese ajavahemiku puhul langeb nihkevektor kõverjoonelisel liikumisel suuna poolest piiril kokku liikumise trajektoori puutujaga (jutt on puutujast punktis, kus liikuv materiaalne punkt asetseb antud hetkel).

Punkti hetkeline asend määratakse tema koordinaatidega x, y, z; punkti nihkumine tähendab tema koordinaatide muutumist; on silmanähtav, et liikumise kogu pilt on täpselt määratud, kui meil on võrrandid, mis võimaldavad mistahes ajahetkel t arvutada punkti koordinaadid:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ \text{ja}\ z = f_3(t). \quad (2)$$

Niisuguseid võrrandeid nimetatakse *liikumise kinemaatilisteks võrranditeks.*



Joon. 2. Nihkevektor s ühe ajavahemiku jaoks kõverjoonelisel liikumisel; teepikkust l arvestatakse piki trajektoori.

Igal ajahetkel on materiaalsel punktil (antud liikumise juures) ruumis täiesti k i n d e l asend, see asend aga aja jooksul p i d e v a l t muutub. Vastavalt sellele peavad materiaalse punkti mistahes liikumise kinemaatilised võrrandid üheselt määrama punkti koordinaadid ja koosnema niinimetatud *pidevatest funktsioonidest.* Seda väidet, mida klassikalises mehhaanikas peetakse endastmõistetavaks, nimetatakse vahel *täpse lokaliseerimise*[1] *printsiibiks* (teisiti „mehhaanika võrrandite täieliku determineeritavuse[2] printsiip").

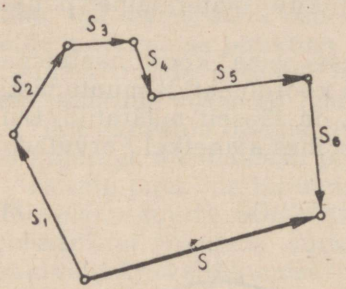
§ 4. Vektorite geomeetriline liitmine. Elementaarnihe.

Graafilisel kujutamisel joonestatakse vektorid nooltena, mille suund näitab vektoriaalse suuruse suunda, noole pikkus aga, mis on mõõdetud antud liiki vektorite jaoks meelevaldselt valitud mastaabis, määrab vektori arvulise väärtuse. Sel viisil kujutatakse üht liiki vektorite (näiteks nihkevektorite või muud liiki vektorite) graafikus võrdsed vektorid nooltena, millel on ühesugune suund ja ühesugune pikkus. Järelikult ei tähenda niisugustes abigraafikutes noole nihkumine paralleelselt iseendaga vektoriaalse suuruse muutumist. (On võimalikud juhud, ja nendega me ka kohtume, kus graafikute konstrueerimisel on vaja kitsendada vektoreid kujutavate noolte lubatavaid paralleelülekandeid.)

Kõiki vektoreid liidetakse sama reegli järgi, mille järgi toimub põhivektori — nihkevektori — liitmine. Kui materiaalne punkt

[1] Ladina k. *localis* — k o h a l i k, omane ainult kindlale kohale.
[2] Ladina k. *determino* — m ä ä r a n.

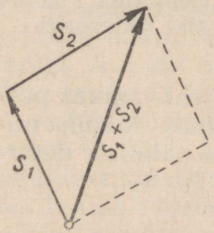
nihkus edasi s_1 võrra ja seejärel oma uuest algasendist edasi s_2 võrra, pärast s_3 võrra jne. (joon. 3), siis summaarne nihe (resultantnihe) s kujutab endast sirglõiku, mis suleb liidetavatele nihetele kui külgedele ehitatud hulknurga, kusjuures selle resultantnihke vektorit tuleb lugeda suunatuks punkti lähteasendist tema lõppasendisse.

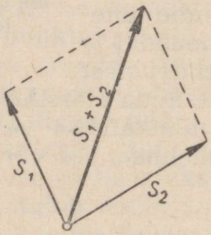


Joon. 3. Vektorite geomeetrilise liitmise reegel.

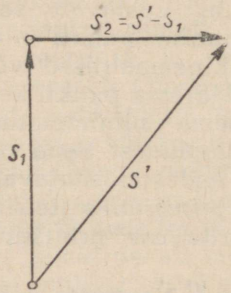
Seda liitmise viisi nimetatakse *geomeetriliseks liitmiseks* ehk *hulknurga reegliks.*

Tuleb pöörata tähelepanu sellele, et kahe vektori liitmisel on resultantvektoriks liidetavatele vektoritele kui rööpküliku külgedele ehitatud r ö ö p k ü l i k u d i a g o n a a l (joon. 4).





Joon. 4. Rööpküliku reegel.



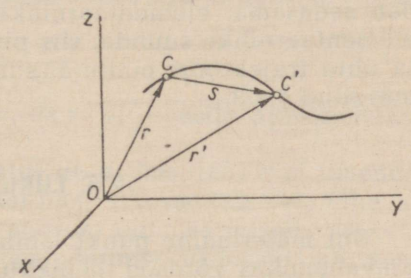
Joon. 5. Geomeetrilise lahutamise reegel.

Lahutamine on liitmise pöördtehe. Olgu antud kaks vektorit s_1 ning s' ja olgu tarvis leida nende geomeetriline vahe. Teisiti öeldes, on tarvis leida niisugune vektor $s_2 = s' - s_1$, mis vektoriga s_1 liidetult annaks vektori s'. Joon. 5 näitab, kuidas seda teha: joonestame mõlemad vektorid ühest punktist väljuvatena; nende geomeetriline vahe s_2 pole midagi muud kui selle kolmnurga alus, mille teised küljed moodustavad antud vektorid s' ja s_1; selleks et vektor s' oleks tõepoolest võrdne vektorite s_1 ja s_2 summaga, tuleb vektor s_2 lugeda väljuvaks lahutatava vektori s_1 lõpust.

Siin tuleb märkida, et üldse, kui s tähendab muutuvat suurust („muutujat") ja s_1 ning s_2 on selle muutuva suuruse kaks väärtust, siis vahe $s_1 - s_2$ tähistamiseks tarvitatakse tavaliselt sümbolit Δs (Δ on kreeka täht „delta"). Tähte Δ kasutatakse tavaliselt

sõna „juurdekasv" üleskirjutuse lühendamiseks, kusjuures sümbol Δ võib tähendada suurt või väikest juurdekasvu.

„Väga väikeste", täpsemalt — *lõpmata väikeste suuruste*[1] puhul tarvitatakse juurdekasvude tähistamiseks sümbolit d, kusjuures suurus ds, mida nimetatakse s diferentsiaaliks[2], väljendab praktiliselt täiesti täpselt „väga väikest" s juurdekasvu.



Joon. 6. Nihkevektor s kui raadiusvektori r geomeetriline juurdekasv.

Pole raske aru saada, et nihkevektor s on raadiusvektori r geomeetriline juurdekasv. Seda selgitab joon. 6. Siin on materiaalse punkti asend trajektooril kahel hetkel t ja t' märgitud tähtedega C ja C', ja raadiusvektorid nendel hetkedel — r ja r'; liites raadiusvektorile r, mis oli alghetkel t, geomeetriliselt ajavahemikul $(t' - t)$ toimunud nihke vektori s, saame raadiusvektori r', mis on lõpphetkel t'. Järelikult:

$$s = r' - r.$$

Elementaarnihet, s. o. nihkumist lõpmata väikeses ajavahemikus dt, tähistame sümboliga ds. Elementaarnihke arvuline väärtus on võrdne lõpmata väikese teepikkusega: $ds = dl$, kuna

$$ds = dr. \tag{3}$$

Kui punkt oma liikumisel nihkub ds võrra, siis punkti asendit määravad koordinaadid muutuvad suuruste võrra, mida me tähistame sümbolitega dx, dy, dz. Vektori ds arvuline väärtus avaldub

---

[1] *Lõpmata väikeseks suuruseks* nimetatakse iga muutuvat suurust, mille piirväärtus on võrdne nulliga. Täpselt tähendab see järgmist: vaadeldav muutuv suurus muutub nii, et kui ette anda kuitahes väike positiivne arv ε, siis saabub x-i muutumisel niisugune staadium, millest alates muutuja x absoluutväärtus jääb väiksemaks kui ε. Tuleb selgesti aru saada, et termin „lõpmata väike" käib ainult muutujate kohta.

[2] *Diferentsiaali* mõiste põhineb *tuletise* mõistel. Olgu meil funktsioon $y = f(x)$. Võtame sõltumatu muutuja mingisuguse väärtuse $x = x_0$. Vahet $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nimetatakse sõltumatu muutuja x_2 juurdekasvule Δx vastavaks funktsiooni juurdekasvuks punktis x_0. Kui juurdekasvu Δx lähenemisel nullile on suhtel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ olemas piirväärtus, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks punktis x_0 ja tähistatakse tavaliselt sümboliga $f'(x_0)$. Avaldist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaliks ja tähistatakse dy. Diferentsiaali definitsioonist järeldub, et $dx = \Delta x$ ja et $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

tema koordinaatide dx, dy, dz kaudu valemi (1) järgi, järelikult

$$dl = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (4)$$

See võrrand määrab teepikkuse elemendi dl, ehk, mis tähendab sedasama, elementaarnihke arvulise väärtuse. Mis puutub elementaarnihke suunda, siis piiril (kui dt läheneb nullile) langeb ta ühte trajektoori puutuja suunaga punktis C, nagu on juba märgitud §-s 3.

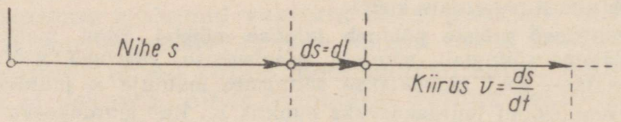
§ 5. Liikumise kiirus.

Kui materiaalne punkt läbib võrdsetes meelevaldselt võetud ajavahemikes võrdsed teepikkused, siis nimetatakse niisugust liikumist *ühtlaseks*, vaatamata tema liikumise trajektoorile (sirgjooneline või kõverjooneline).

Kui võrdsetes ajavahemikes läbitud teepikkused ei ole ühesuurused, siis nimetatakse liikumist *mitteühtlaseks*.

Igapäevases elus mõistetakse kiiruse all kõige sagedamini suurust, mis iseloomustab ainult liikumise „väledust" (arvulist väärtust), mitte aga tema suunda. Mehhaanikas defineeritakse kiirust kui vektorit, mis näitab nii liikumise „väledust" kui ka suunda. Seoses sellega on kiiruse mõiste mehhaanikas seotud kujutlusega elementaarnihkest, sest lõplik (mitteelementaarne) nihkumine kõverjoonelisel liikumisel ei võimalda otsustada liikumise suuna üle, nagu eespool on selgitatud.

Kui materiaalne punkt liigub oma algasendist sirgjooneliselt, siis on nihkevektoril kogu aeg üks ja sama, liikumise suunaga ühtiv suund. Kui materiaalne punkt seejuures liigub ühtlaselt, siis tema kiirus v on vektor, mis suuna poolest ühtib nihkevektoriga ja arvuliselt väärtuselt (vektorit v kujutava lõigu pikkuselt) on võrdne materiaalse punkti nihkega ühes sekundis. Järelikult sellel (ja ainult sellel) juhul ei erine kiirus millegi poolest keha nihkevektorist, mis näitab nihet 1 sekundi jooksul.



Joon. 7. Kiirusvektor sirgjoonelisel liikumisel.

Tuleb märkida (seda tuleb edaspidi silmas pidada), et kiirusvektorite graafilisel kujutamisel pole vajadust kasutada sedasama

mastaapi, mida kasutatakse nihkevektorite jaoks; vektorite graafilisel kujutamisel valitakse sobivaim mastaap.

Mitteühtlase sirgjoonelise liikumise puhul (joon. 7) mõistetakse kiirusena vektorit, mis on nihke suunaline ja mille arvuline väärtus

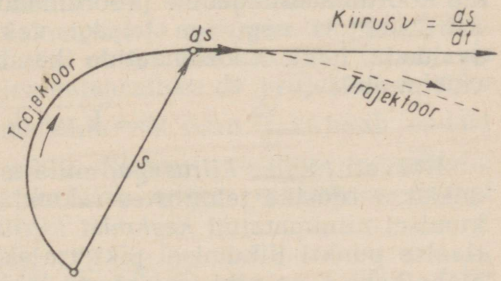
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dl}{dt},$$

kus dt on väga väike ajavahemik, $ds = dl$ — selle ajavahemiku jooksul läbitud teepikkus.

Märgime veel kord, et tähistustes dl, dt jms. täht d ei tähenda mingisugust suurust, vaid on märgiks, mis osutab, et tähe d järele asetatud tähega märgitud suurus on „äärmiselt väike". (See, mida me mõistame siin suuruse „äärmise väiksuse" all, vastab matemaatilises analüüsis diferentsiaali mõistele; sõnade „äärmiselt väike" asemel ütleme vahel „elementaarselt väike" või „diferentsiaal"[1].) Nii tähendab l teepikkust, aga dl tähendab teepikkuse diferentsiaali, ehk, mis tähendab sedasama, elementaarselt väikese nihke arvulist väärtust; t tähendab aega, aga dt tähendab elementaarselt väikest ajavahemikku.

Elementaarselt väikese ajavahemiku dt all võib mõista $\frac{1}{n}$ sekundit, kus n on „äärmiselt suur" arv; korrutades selle arvuga ülaltoodud valemis lugejat ja nimetajat (millest suhe muidugi ei muutu), saame nimetajaks 1 *sek* ja lugejaks n-kordse nihke ds, s. t. selle tee pikkuse, mille keha oleks läbinud ühe sekundi jooksul, kui ta oleks meid huvitavast hetkest alates liikunud ühtlaselt.

Liikumisel piki kõverjoonelist trajektoori üldiselt kiirusvektor ei ühti resultantnihke vektori suunaga, kuid definitsiooni järgi ühtib alati elementaarnihke vektoriga. Vaatleme näiteks joon. 8. Sellel tähendab s materiaalse punkti nihkevektorit aja t jooksul (resultantnihe). Elementaarselt väikese ajavahemiku dt jooksul nihkus materiaalne punkt ds võrra mingi nurga all vektoriga s. Vaadeldes joon. 8 on tarvis ette kujutada, et dt lõpmatul kahanemisel kahaneb lõpmatult ka vektor ds; piiril ühtib vektori ds suund trajektoori puutuja suunaga. Mate-



Joon. 8. Kiirusvektor kõverjoonelisel liikumisel.

[1] Vt. viide lk. 35.

riaalse punkti kiirusvektor on liikumise suunaline, s. t. on sama suunaga, mis vektor *ds:*

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{5}$$

See võrrand näitab, et kiirusvektor v, olles vektoriga ds samasuunaline, on temast arvuliselt väärtuselt nii mitu korda suurem, kui mitu korda on dt väiksem ühest sekundist (sisaldagu dt endas $\frac{1}{n}$ *sek,* kus n on mingi „äärmiselt suur" arv; on selge, et suuruse ds jagamine dt-ga on samaväärne suuruste ds ja n korrutamisega). Märgime, et vektori korrutamist skalaarse suurusega (antud juhul vektori ds korrutamist skalaarse suurusega $\frac{1}{dt} = n$) tuleb mõista kui vektori arvulise väärtuse vastavat muutmist tema muutumatu suuna juures.

Kiirusvektori arvuline väärtus on ka sellel üldjuhul võrdne teepikkuse elemendi dl ($= ds$) ja ajavahemiku dt suhtega:

$$v = \frac{dl}{dt}.$$

Kiirusvektori suund kõverjoonelisel liikumisel ühtib, nagu juba eespool näidati, igal ajahetkel trajektoori puutuja suunaga selles punktis, kus antud hetkel asetseb liikuv materiaalne punkt.

Kiiruse ühikuks võetakse 1 *cm/sek,* või 1 *m/sek,* või ka 1 *km/sek,* vahel 1 *km/h.*[1]

Tähistame *kiirusvektori komponendid,* s. t. tema projektsioonid koordinaaditelgedele (koordinaadid), sümbolitega v_x, v_y ja v_z. Kiirusvektori, nagu iga teisegi vektori arvulist väärtust saab avaldada tema koordinaatide kaudu valemiga (1) analoogilise valemi abil:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{6}$$

Kõrvuti *tõelise kiirusega,* mille mõistet selgitati eespool, vaadeldakse füüsika tehnilistes rakendustes sageli mitteühtlasel liikumisel niinimetatud *keskmist kiirust.* Kui ajahetkel t oli materiaalse punkti liikumisel piki trajektoori läbitud teepikkus l ja ajahetkeks t' on piki trajektoori läbi käidud tee l', siis liikumise keskmiseks kiiruseks nimetatakse suhet

$$v_{\text{keskm}} = \frac{l' - l}{t' - t}.$$

Väga ebaühtlasel liikumisel võib keskmine kiirus olla suuruselt erinevatel ajavahemikel väga erinev. Piirväärtus, millele

[1] Sümbol *h* tuleb ladinakeelsest *hora* — t u n d. (Tõlk.)

läheneb keskmine kiirus ajavahemiku lõpmatul vähenemisel, on tõelise kiiruse suurus ajahetkel t[1]:

$$v = \lim_{t' \to t} \left(\frac{l' - l}{t' - t} \right).$$

Matemaatilises analüüsis nimetatakse niisugust piirväärtust funktsiooni $l = f(t)$ *esimest järku tuletiseks.* Tuletist tähistatakse kas kriipsukesega funktsiooni märgi juures $[f'(t)]$, või kui diferentsiaalide suhet $\left[\frac{dl}{dt} \right]$:

$$v = \frac{dl}{dt}.$$

Kiirusvektori arvuline väärtus on võrdne teepikkuse esimest järku tuletisega aja järgi. Kui on teada teepikkus aja funktsioonina, s. o. kui $l = f(t)$, siis $v = f'(t)$.

Soovides arvestada kiirusvektori s u u n d a, peaksime teepikkuse diferentsiaali asemel vaatlema elementaarnihet ds, nagu seda tehti valemis (5).

Mida füüsikaliselt tähendab liikumise tõeline kiirus, s. o. keskmiselt liikumise kiiruselt piirile üleminek, kui $\Delta t \to 0$? See üleminek tähendab, et äärmiselt väikeste ajavahemike puhul võib mistahes liikumist vaadelda ligikaudu ühtlasena. Tõepoolest, mida lähemal on vahe $t' - t$ nullile, seda vähem erineb keskmise kiiruse avaldis $\frac{l' - l}{t' - t}$ oma piirväärtusest, ja seda suurema õigusega võime seda keskmist kiirust võtta tõelise kiiruse avaldisena väga väikese ajavahemiku jaoks.

Tuletame meelde tõelise kiiruse kui elementaarnihke vektori tuletisvektori definitsiooni [valem (5)] ja märgime, et punkti elementaarnihke ds puhul muutuvad punkti koordinaadid dx, dy, dz võrra; need suurused on elementaarnihke ds projektsioonideks koordinaaditelgedele; on silmanähtav, et suhe $\frac{dx}{dt}$ kujutab endast nihkumise kiirust telje OX sihis. *Kiiruse projektsioon mingile teljele (kiiruse komponent) kujutab endast nihkumise kiirust antud telje sihis.* Seega

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{7}$$

Niisiis *kiiruse komponendid on koordinaatide esimest järku tuletised aja järgi.*

[1] Sümbol *lim* tuleb ladinakeelsest sõnast *limit* — p i i r.

§ 6. Liikumise kiirendus.

Muutumatu kiirusega liikumine on erandjuhuks; enamasti kiirus muutub liikumisel nii suuruse kui ka suuna poolest. Seda liikumise kiiruse muutumist iseloomustatakse *kiirendusega*. Liikumise kiirendus määrab nii kiiruse kasvamise kiiruse kui ka kiiruse suuna muutumise. Seepärast mõistetakse füüsikas liikumise kiirenduse all erilist vektorit.

Mitteühtlase sirgjoonelise liikumise puhul nimetatakse keskmiseks kiirenduseks ajavahemikus $t' - t$ kiiruse juurdekasvu ja ajavahemiku suhet:

$$a_{\text{keskm}} = \frac{v' - v}{t' - t}.$$

Tõeline kiirendus ajahetkel t kujutab endast piirväärtust, millele läheneb keskmine kiirendus ajavahemiku lõpmatul kahanemisel:

$$a = \lim_{t' \to t} \frac{v' - v}{t' - t}.$$

See piirväärtus ei ole midagi muud, kui funktsiooni $v = f(t)$ tuletis; järelikult määratakse sirgjoonelise liikumise kiirenduse arvuline väärtus kiiruse esimest järku tuletisega aja järgi:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Kuna aga kiirus ise avaldub teepikkuse tuletisena aja järgi, siis on sirgjoonelise liikumise kiirenduse arvuline väärtus võrdne *teepikkuse teist järku tuletisega* aja järgi, mida tähistatakse järgmiselt:

$$a = \frac{d^2l}{dt^2}.$$

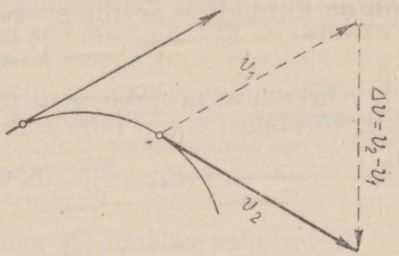
Isegi sirgjoonelisel liikumisel ilmneb kiirenduse vektoriaalne iseloom. Sel juhul võib kiirendusvektor olla liikumisega samasuunaline kiiruse kasvamisel, või siis liikumisega vastassuunaline kiiruse kahanemisel.

Kui sirgjoonelisel liikumisel kiirus kasvab ühtlaselt, siis nimetatakse kiirenduseks $\boldsymbol{a}$ vektorit, mis on antud juhul liikumisega samasuunaline ja mille arvuline väärtus on võrdne kiiruse juurdekasvuga ühe sekundi jooksul. Niisuguse *ühtlaselt kiirenev liikumise* (s. t. liikumise, mille juures kiirendus jääb suuruse ja suuna poolest muutumatuks) näiteks võib olla keha vaba langemine tühjuses raskusjõu toimel. Kui kiirus kahaneb ühtlaselt, siis loetakse kiirendust $\boldsymbol{a}$, mille arvuline väärtus on võrdne kiiruse vähenemisega ühe sekundi jooksul, negatiivseks suuru-

seks ($a < 0$), sest sel juhul on kiirendusvektor liikumisega vastassuunaline. Niisugune *ühtlaselt aeglustuv liikumine* on näiteks vertikaalselt ülesvisatud kivil.

Üldjuhul mõistetakse kiirenduse $\boldsymbol{a}$ all vektorit, millel on kiiruse lõpmata väikese *geomeetrilise* juurdekasvu $d\boldsymbol{v}$ suund ja mis on võrdne selle kiiruse juurdekasvu $d\boldsymbol{v}$ ja lõpmata väikese ajavahemiku dt suhtega, mille jooksul kiirus omandab osutatud juurdekasvu:

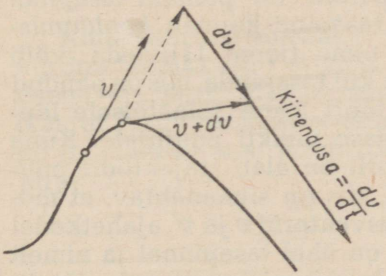
$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \qquad (8)$$



Joon. 9. Muutuva kiirusvektori $\boldsymbol{v}$ geomeetriline juurdekasv $\Delta\boldsymbol{v}$.

Olgu näiteks materiaalse punkti kiirus mingil ajahetkel $\boldsymbol{v}_1$ ja ühe sekundi pärast, muutudes nii suuruse kui ka suuna poolest, saagu kiirus võrdseks suurusega $\boldsymbol{v}_2$. On silmanähtav, et geomeetriline vahe $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ ei ole midagi muud, kui kiiruse juurdekasv ühe sekundi jooksul (joon. 9). Kui vaadelda ajavahemiku 1 *sek* asemel väga väikest ajavahemikku dt, siis vastav kiiruse geomeetriline juurdekasv $d\boldsymbol{v}$ ongi selleks suuruseks, mis on kiirendusvektorit määrava valemi (8) lugejaks.

Kui keha liigub ühtlaselt mööda kõverjoonelist teed, siis kiirus ei muutu suuruse poolest, kuid kiirusvektori suund muutub seda järsemalt, mida suurem on tee kõverus. Järelikult on ühtlasel liikumisel kiirendus võrdne nulliga ainult sirgjoonelistel teeosadel; kõverjoonelistel osadel on ta aga nullist erinev ja suure kõveruse puhul võib olla vägagi suur. Vaadeldes joonist 10 näeme, et ühtlasel liikumisel piki kurvi on kiirendusvektor $\boldsymbol{a}$ suunatud sinnapoole, kuhu trajektoor on pööratud oma nõgususega; on kerge aru saada, et kui liikumine piki kurvi oleks toimunud arvuliselt kasvava kiirusega (vektorit $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ kujutav nool oleks pikem vektorit $\boldsymbol{v}$ kujutavast noolest), siis kiirendusvektori $\boldsymbol{a}$ suund moodustaks liikumise suunaga teravnurga; samuti on kerge aru saada, et liikumise aeglustumisel (nool $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ on lühem noolest $\boldsymbol{v}$) kaldub kiirendusvektor $\boldsymbol{a}$ kõrvale, moodustades liikumise suunaga nürinurga.



Joon. 10. Ühtlasel liikumisel on kiirendusvektor kõverjoonelistes piirkondades seda suurem, mida suurem on kõverus.

Sõltuvalt võetud pikkusühikust on kiirenduse ühikuks kas 1 *cm/sek*^{2} või 1 *m/sek*^{2} või ka 1 *km/sek*^{2}.

Kiirendusvektori $\boldsymbol{a}$ suurust ja suunda võib määrata, teades tema komponente a_x, a_y, a_z. Analoogiliselt valemitega (1), (4) ja (6) on kiirenduse arvuline väärtus

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{9}$$

Kiirenduse projektsiooni mingisugusele teljele me mõistame kui *kiirendust antud telje suunas*. Seega

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10}$$

Arvestades valemit (7), saame:

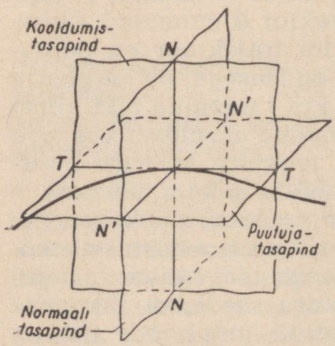
$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11}$$

Niisiis *kiirenduse komponendid on koordinaatide teist järku tuletised aja järgi.*

§ 7. Tangentsiaal- ja kesktõmbekiirendus.

Mehhaanilise liikumise uurimisel osutub sageli väga sobivaks lahutada punkti kiirendusvektor kaheks geomeetriliseks liidetavaks: kiirenduseks selle punkti trajektoori puutuja sihis ja kiirenduseks peanormaali sihis. Tõestame kõigepealt, et ei ole olemas kolmandat kiirendusvektori liidetavat kolmanda, eelmistega risti oleva telje (niinimetatud binormaali) sihis.

Kahel teineteisele järgneval elementaarnihkel $(d\boldsymbol{s})_1$ ja $(d\boldsymbol{s})_2$ on ühine punkt, mis on esimese nihke lõpuks ja teise alguseks. Kujutame ette, et läbi selle ühise punkti ja läbi vektori $(d\boldsymbol{s})_1$ alguspunkti ja vektori $(d\boldsymbol{s})_2$ lõpp-punkti on pandud tasapind. Niisugune tasapind kannab *kooldumistasapinna* nime (joon. 11); teda võib defineerida kui tasapinda, mis on pandud läbi trajektoori kahe teineteisele lõpmata lähedase punkti puutujate. Kuna kiirusvektoril on alati trajektoori puutuja suund, siis on silmanähtav, et mõlemad kiirusvektorid $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v}'$ ajahetkedel t ja $t + dt$ on ühel tasapinnal ja nimelt mainitud kooldumistasapinnal; järelikult on ka kiirendusvektori $\boldsymbol{a}$ suunda määrav kiiruse geomeetriline juurdekasv $d\boldsymbol{v}$ samal tasapinnal.



Joon. 11. *TT* — puutuja, *NN* — peanormaal, *N'N'* — binormaal.

Puutujaga ristiolevat ja puutepunkti läbivat tasapinda nimetatakse *normaaltasapinnaks*.

Lõpmatust normaalide hulgast, s. t. sirgetest, mis on risti puutujaga puutepunktis (kõik nad on normaaltasapinnal), märgime ära kaht: üks nendest asetseb kooldumistasapinnal, seda sirget nimetatakse *peanormaaliks;* teine on sellega risti, see on niinimetatud *binormaal* (joon. 11). Kuna kiirendusvektor asetseb kooldumistasapinnal ja binormaal lõikub selle tasapinnaga täisnurga all, siis on selge, et kiirendusvektori projektsioon binormaalile on alati võrdne nulliga. Siit järeldub, et *alati on võimalik kiirendusvektorit kujutada kahe tema komponendi — puutujasihilise kiirenduse ja peanormaali sihilise kiirenduse — geomeetrilise summana.*

Olgu M ja M' (joon. 12) materiaalse punkti asendid ja $\boldsymbol{v}$ ning $\boldsymbol{v}'$ tema kiirused kahel teineteisele lõpmata lähedastel ajahetkedel. Leiame kiiruse muutumise selle lõpmata väikese ajavahemiku dt jooksul. Selleks kanname vektori $\boldsymbol{v}'$ paralleelselt iseendaga üle punkti M (kujutades teda lõiguna MA) ja ühendame vektorite $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v}'$ otsad. Vektor $d\boldsymbol{v}$ kujutabki kiiruse geomeetrilist juurdekasvu aja dt jooksul.

Lahutame nüüd vektori $d\boldsymbol{v}$ kaheks komponendiks, nagu on näidatud joonisel 12. Saame rööpküliku, mille diagonaaliks on kiiruse muutus $d\boldsymbol{v}$; selle rööpküliku külgi tähistame sümbolitega $(d\boldsymbol{v})_\tau$ ja $(d\boldsymbol{v})_r$.

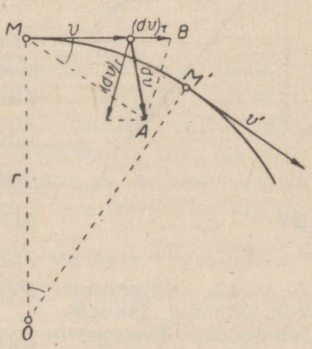
Vektor $(d\boldsymbol{v})_\tau$ iseloomustab kiiruse muutumist ainult s u u r u s e p o o l e s t; tema on arvuliselt võrdne kiiruse arvulise väärtuse juurdekasvuga $d\boldsymbol{v}$; suunatud on see vektor mööda trajektoori puutujat. Jagades $(\boldsymbol{v})_\tau$ ajavahemikuga dt, saame *tangentsiaalkiirenduse* a_τ

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} . \qquad (12)$$

Kuna kiiruse arvuline väärtus on võrdne teepikkuse l esimest järku tuletisega aja järgi, siis järeldub valemist (12), et *tangentsiaalkiirendus on võrdne teepikkuse teist järku tuletisega aja järgi:*

$$a_\tau = \frac{d^2l}{dt^2} . \qquad (13)$$

Vaatleme nüüd vektorit $(d\boldsymbol{v})_r$ (ehk, mis tähendab sama, lõiguga BA kujutatud vektorit). See vektor iseloomustab kiiruse *suuna* muutumist.



Joon. 12. Vektori $d\boldsymbol{v}$ lahutamine komponentideks $(d\boldsymbol{v})_\tau$ ja $(d\boldsymbol{v})_r$.

Läbi punktide M ja M' (joon. 12) tõmbame ristsirged kiirustele v ja v'. Nad lõikuvad mingis punktis O. Kõvera MM' lõpmata väikest kaart võib vaadelda kui ringjoone kaart raadiusega $OM = r$. Ringjoont, mille kaar ühtib kõvera elemendiga antud punktis (ringjoon on tõmmatud läbi kolme lõpmata lähedase punkti, mis asetsevad kõveral), nimetatakse *kõverusringiks;* selle ringi raadiust nimetatakse *kõverusraadiuseks* ja selle ringi keskpunkti — *kõveruskeskpunktiks.* On selge, et kõvera eri osade jaoks on ka kõverusraadius üldiselt erinev. (Märgime, et sirgjoone kõverusraadius on lõpmata suur ja ringjoone kõverusraadius on võrdne lihtsalt selle ringjoone raadiusega; sirgjoonel ja ringjoonel on kõigi osade jaoks konstantne kõverus.)

Võrdleme kolmnurki MOM' ja AMB. Need on sarnased, kuna mõlemad on võrdhaarsed ja nende tipunurgad on võrdsed, seepärast

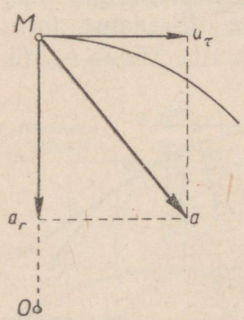
$$\frac{AB}{MM'} = \frac{MA}{OM}, \text{ ehk } \left|\frac{(dv)_\tau}{vdt}\right| = \frac{v'}{r}; \left|\frac{(dv)_\tau}{dt}\right| = \frac{v'v}{r}.$$

Piiril $v' = v$, seepärast

$$a_\tau = \frac{v^2}{r}, \tag{14}$$

kus a_τ tähendab $\frac{(dv)_\tau}{dt}$ piirväärtust, s. t. kiirendust, mis on määratud kiiruse muutumisega ainult suuna poolest.

Selgitame BA piirsuuna, tähendab ka kiirenduse a_τ piirsuuna. Kolmnurgas AMB läheneb nurk tipu M juures nullile ja järelikult on BA suund piiril risti vektoriga v, s. t. ühtib kõverusraadiuse sihiga. Seega on kiirenduse komponent suunatud peanormaali mööda kõveruskeskpunkti poole; see kiirenduse komponent kannab *kesktõmbekiirenduse* nime.



Joon. 13. Kiirenduse komponendid liikumisel mööda kõverjoonelist trajektoori.

Seega *materiaalse punkti liikumisel piki kõverjoonelist trajektoori saadakse kiirendusvektor, kui liidetakse geomeetriliselt* t a n g e n t s i a a l *kiirendus, mille arvuline väärtus* $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ *ja mis on suunatud mööda puutujat, ja* k e s k t õ m b e *kiirendus, mille arvuline väärtus* $a_r = \frac{v^2}{r}$ *ja mis on suunatud mööda peanormaali kõveruskeskpunkti poole* (joon. 13).

Järelikult võib kogukiirenduse arvulist väärtust avaldada valemiga

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{15}$$

§ 8. Nurkkiirus ja nurkkiirendus.

Kui klassifitseerida liikumist trajektoori kuju järgi, siis osutuvad liikumise lihtsaimateks vormideks sirgjooneline liikumine ja materiaalse punkti liikumine mööda ringjoont — *pöörlemine.*

Materiaalse punkti liikumisel mööda ringjoont on sobiv võtta koordinaadiks nurk φ, mille võrra pöördub punkti hetkelist asendit näitav raadius; pöördenurka φ nimetatakse teisiti *pöörlemise faasiks.* Pöörlemise kinemaatiline võrrand väljendab pöördenurga φ aja t mingi funktsioonina:

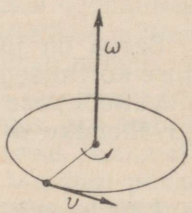
$$\varphi = f(t).$$

Kui pöörlemisel pöördenurk muutub võrdeliselt ajaga (see toimub, kui punkt liigub mööda ringjoont suuruselt muutumatu kiirusega), siis nimetatakse pöörlemist ühtlaseks. Sel juhul nimetatakse pöördenurga ja aja suhet ehk, teisiti öeldes, pöördenurga suurust ühes sekundis *nurkkiiruseks*; tavaliselt tähistatakse nurkkiirust kreeka tähega ω (oomega):

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Kui pöörlemine on mitteühtlane, siis mõistetakse nurkkiiruse all lõpmata väikese pöördenurga $d\varphi$ ja selle lõpmata väikese ajavahemiku dt suhet, mille jooksul punkt katab ringjoonel kaare, mis vastab nurgale $d\varphi$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (16)$$



Joon. 14. Joonkiiruse ja nurkkiiruse vektorite vastastikune asetus.

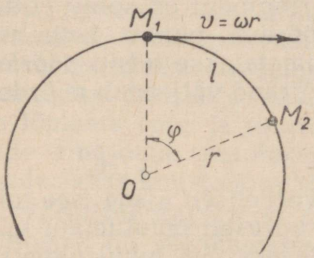
Nurkkiiruse ühikuks on niisugune ühtlase pöörlemise nurkkiirus, mille juures keha pöördub 1 *sek* jooksul nurga 1 radiaan[1] võrra. Seega nurkkiiruse ühikuks on $\frac{1}{sek} = sek^{-1}$.

On selge, et keha pöörleva liikumise täielikuks iseloomustamiseks peab olema peale nurkkiiruse arvulise väärtuse näidatud ka pöörlemistelg ja samuti pöörlemise suund ümber selle telje. Seepärast kujutatakse nurkkiirust sageli kui vektorit, mis on suunatud piki pöörlemistelge, s. t. on risti tasapinnaga, milles toimub pöörlemine, seejuures loetakse seda vektorit ω suunatuks sinna-

[1] Tuletame meelde, et nurk radiaanides avaldub ringjoone kaare pikkuse ja raadiuse suhtena, nimelt $\varphi = \frac{l}{r}$. Võttes siin $l = r$, saame: $\varphi = 1$, s. t. 1 radiaan on nurk, mille kaare pikkus on võrdne raadiusega. Võttes samas valemis $l = 2\pi r$ (ringjoone pikkus), saame $\varphi = 2\pi$, s. t. täispööre on mõõdetav nurgaga 2π radiaani. Teiselt poolt on täispööre mõõdetav nurgaga 360°, järelikult 1 radiaan $= \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 14' 44'', 806$.

poole, kuhupoole vaadatuna pöörlemine paistab toimuvat kella-osuti liikumise suunas (joon. 14).

Leiame seose joonkiiruse („ringkiiruse") v ja keha pöörlemise nurkkiiruse ω vahel.



Joon. 15. Joonkiirus on võrdne nurkkiiruse ja raadiuse korrutisega.

Olgu M_1 punkti asend mingil alghetkel ja M_2 tema asend t sek hiljem (joon. 15). Tähistades kaare M_1M_2 tähega l, ringjoone raadiuse tähega r ja pöördenurga M_1OM_2 tähega φ, võime radiaanides avaldatud pöördenurga, raadiuse ja kaarepikkuse vahelise seose põhjal kirjutada:

$$l = r \cdot \varphi.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled ajaga t ja arvestades, et $\frac{l}{t}$ on kiirus v ja $\frac{\varphi}{t}$ on nurkkiirus ω (ühtlase pöörlemise puhul), saame:

$$v = r \cdot \omega. \tag{17}$$

Seega on joonkiirus (ringkiirus) võrdne nurkkiiruse ja raadiuse korrutisega.

Mitteühtlase pöörlemise juhul võiksime elementaarselt väikese ajavahemiku dt jaoks kirjutada:

$$dl = r \cdot d\varphi.$$

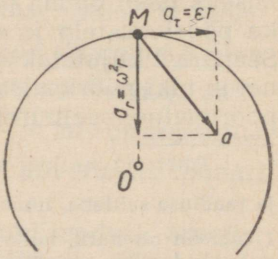
Jagades võrduse mõlemad pooled ajavahemikuga dt ja arvestades, et $\frac{dl}{dt}$ on joonkiirus v ning $\frac{d\varphi}{dt}$ on nurkkiirus ω, saaksime jälle sama võrrandi (17).

Kui pöörlemine toimub mitteühtlaselt, siis nurkkiirus järelikult aja jooksul muutub ja nurkkiiruse muutumise kiirust võib iseloomustada erilise suurusega, mida nimetatakse *nurkkiirenduseks*. Kui nurkkiirus muutus lõpmata väikese ajavahemiku dt jooksul $d\omega$ võrra, siis mõistetakse nurkkiirenduse all suhet

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{18}$$

Nurkkiirenduse ühikuks on $\frac{1}{sek^2} = sek^{-2}$, s. t. niisugune kiirendus, mille juures nurkkiirus kasvab igas sekundis ühe nurkkiiruse ühiku võrra.

Nurkkiirendust võib kujutada vektorina. Kui ringjoone (mida mööda



Joon. 16. Joonkiirenduse komponendid pöörlemisel.

toimub pöörlemine) asend ja raadius aja jooksul ei muutu, siis on nurkkiirenduse vektor ε suunatud kiireneva pöörlemise korral piki pöörlemistelge samale poole kui nurkkiiruse vektorgi, aeglustuva pöörlemise korral aga otse vastassuunas. Pöörlemise kui kõverjoonelise liikumise puhul võib joonkiirenduse lahutada kaheks komponendiks — tangentsiaalkiirenduseks $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ ja kesktõmbekiirenduseks (normaalkiirenduseks) $a_r = \frac{v^2}{r}$ (joon. 16). Asetades v asemele korrutise ωr, saame:

$$a_\tau = \varepsilon r, \quad a_r = \omega^2 r. \tag{19}$$

§ 9. Absoluutne, ülekantav ja relatiivne liikumine.

Looduses kõik liigub. Iga keha, mida me tingimisi loeme liikumatuks, liigub tegelikult. Mingi liikumine liitub teise liikumisega. Seepärast on väga tähtis teada, kuidas liituvad liikumised, kuidas liituvad mingi, üheaegselt mitmest liikumisest osavõtva keha kiirused ja kiirendused. Selleks et orienteeruda selles küsimuses, toome kõigepealt sisse niinimetatud absoluutse (tinglikus mõttes) liikumise, ülekantava liikumise ja relatiivse liikumise mõiste.

Üks ja sama liikumine paistab meile toimuvat erinevalt, sõltuvalt tema vaatlemise viisist. Kui raudteejaamas üks kahest kõrvutiseisvast rongist hakkab liikuma, siis näib teise, liikumatu rongi reisijatele, et hakkas liikuma nende rong. Muidugi piisab pilgu heitmisest jaamaplatvormile, et see illusioon kaoks. Jaamahooned mängivad sel juhul põhiorienteerumissüsteemi osa. Kui rongide sõit oleks täiesti sujuv ja jaamahooned ei oleks näiteks udu tõttu nähtavad, siis võiksid mõlema rongi reisijad otsustada rongide liikumise üle ainult teineteise suhtes, vaadeldes rongi valgustatud akende liikumist. Nad ei oleks võimelised lahendama küsimust, kumb rongidest hakkas liikuma ja kumb on liikumatu.

Kui me kujutaksime endale ette kaht vaatlejat, kes märkavad endi eemaldumist teineteisest ja kes asetsevad kuskil maailmaruumis, kus pole millegipärast näha tähti või mingisuguseid muid esemeid, mis võimaldaksid vaatlejatel mingil viisil orienteeruda oma liikumise iseloomus, siis nende jaoks kaotaks mõtte küsimus, kumb vaatlejatest on paigal ja kumb liigub. Kumbki neist oleks õigustatud lugema ennast paigalolevaks ja teist liikuvaks.

Seega on ilmne, et kinemaatika seisukohalt, s. t. kui kõrvale jätta liikumist tekitavad põhjused, tuleb iga liikumist vaadelda relatiivsena. Sellelt kinemaatika seisukohalt on kõik orienteerumissüsteemid võrdõiguslikud; igaüht neist võime meid huvitavate liikumiste uurimisel *tingimisi liikumatuks pidada*.

Niisugust tingimisi liikumatut süsteemi nimetatakse *põhiorienteerumissüsteemiks.* Liikumist põhiorienteerumissüsteemi suhtes nimetatakse *absoluutseks liikumiseks.*

Toodud näites kahe rongiga ei ole kinemaatika seisukohalt vajalik, et põhisüsteemiks oleks tingimata valitud jaamahooned. Liikuva rongi reisijal on õigus eelistada oma rongiga seotud orienteerumissüsteemi; lugedes seda põhisüsteemiks, nimetab ta jaamahoonete „näivat" liikumist absoluutseks liikumiseks.

Iga orienteerumissüsteemi, mis on mingisuguses liikumises põhisüsteemi suhtes, nimetame *liikuvaks orienteerumissüsteemiks.* Liikumist liikuva orienteerumissüsteemi suhtes nimetatakse *relatiivseks liikumiseks* ja liikuva orienteerumissüsteemi enda liikumist nimetatakse *ülekantavaks liikumiseks.* Kui näiteks ülaltoodud kahe rongi juhul põhiorienteerumissüsteemiks on valitud jaamahooned, siis liikuva rongiga seotud orienteerumissüsteem on liikuvaks orienteerumissüsteemiks; rongi ja selles oma kohtadel istuvate reisijate liikumine on ülekantav liikumine; mingi reisija jalutamine vaguni koridoris, vaadelduna teiste, oma kohtadel istuvate reisijate poolt, on relatiivne liikumine; seesama reisija jalutamine mööda koridori, vaadelduna jaamaplatvormilt, on absoluutne liikumine.

Kujutleme endale, et materiaalne punkt liigub liikuvas süsteemis. Tähistagu selle materiaalse punkti elementaarnihet põhiorienteerumissüsteemi suhtes $d\boldsymbol{s}_{\text{abs}}$, materiaalse punkti selle nihkumise põhisüsteemi suhtes, mis toimub liikuva süsteemi liikumise tõttu (s. t. teisiti öeldes, liikuva süsteemi selle koha nihke, kus materiaalne punkt asetseb antud hetkel), tähistame sümboliga $d\boldsymbol{s}_{\text{ülek}}$; lõpuks tähistagu sellesama punkti elementaarnihet, nagu see paistab liikuva süsteemiga seotud vaatlejale, $d\boldsymbol{s}_{\text{rel}}$.

Absoluutse kiiruse $\boldsymbol{v}$, *ülekantava kiiruse* $\boldsymbol{u}$ *ja relatiivse kiiruse* $\boldsymbol{w}$ all mõistetakse vektoreid:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{s}_{\text{abs}}}{dt}, \quad \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{s}_{\text{ülek}}}{dt}, \quad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{s}_{\text{rel}}}{dt}. \tag{20}$$

Absoluutse liikumise kiirus on võrdne ülekantava ja relatiivse liikumise kiiruste geomeetrilise summaga:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}.$$

Seda väidet, mida täieliku selgusega väljendas juba Galilei, nimetatakse *Galilei kiiruste liitmise seaduseks.* Kõige lihtsamatel juhtudel, eriti kui kõik kolm kiirust on suunatud mööda üht sirget ja nad ei muutu aja jooksul, paistab Galilei kiiruste liitmise seadus olevat iseendastmõistetav ja seda rakendatakse teadlikult või ebateadlikult kõigi poolt igapäevases elus toimuvate liikumiste hindamisel. Näiteks teab igaüks, et paadiga pärivett sõites me liigume veevoolu „kiiruse" suuruse võrra kiiremini kui seisvas vees.

§ 10. Kiirenduste liitmise seadus.

Absoluutse kiirenduse a_{abs} all mõistetakse materiaalse punkti kiirendust põhisüsteemi suhtes; *ülekantava kiirenduse* $a_{ülek}$ all mõistetakse liikuva süsteemi selle koha kiirendust, kus materiaalne punkt asetseb antud hetkel, ja *relatiivse kiirenduse* a_{rel} all kiirendust, mis on materiaalsel punktil liikuva süsteemiga seotud vaatleja suhtes. Absoluutne kiirendus on täielikult määratud absoluutse kiiruse geomeetrilise juurdekasvu ja ajaelemendi suhtega, kuid ülekantav ja relatiivne kiirendus ei ole alati niisama lihtsalt seotud ülekantava ja relatiivse kiirusega.

Kirjutame Galilei kiiruste liitmise seadust väljendava vektoriaalse võrrandi (21) kahe lõpmata lähedase ajahetke t ja $t+dt$ jaoks; lahutame geomeetriliselt teisest võrrandist esimese, siis saame:

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{w}. \tag{22}$$

Jagame selle võrrandi kõik liikmed ajavahemikuga dt. Suurus $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ on absoluutse liikumise kiirendus a_{abs}. Mis puutub aga suurusesse $\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}$, siis ei väljenda see alati relatiivse liikumise kiirendust a_{rel}.

Tõepoolest, kui liikumatu süsteemiga seotud vaatleja seisukohalt relatiivse liikumise kiirus $\boldsymbol{w}$ on muutumatu suuna ja arvulise väärtuse poolest, siis relatiivse liikumise kiirendus on null, samal ajal kui põhisüsteemiga seotud vaatleja poolt määratav suurus $d\boldsymbol{w}$ võib nullist erineda; nii juhtub, kui liikuv orienteerumissüsteem p ö ö r l e b põhisüsteemi suhtes; ühtlasel sirgjoonelisel relatiivsel liikumisel väljendab suurus $d\boldsymbol{w}$ relatiivse kiiruse geomeetrilist muutumist, mis toimub liikumatu süsteemi tähendatud pöörlemise tõttu. Näiteks kui inimene läheb laevalael otse ahtrist käilani ja laev pöördub samal ajal, siis ei ole see liikumine kaldal asetsevale vaatlejale enam sirgjooneline; kiirusvektor pöördub koos laevaga, säilitades laeva suhtes muutumatu orientatsiooni; teisiti öeldes relatiivne kiirus saab teatava geomeetrilise juurdekasvu, mida põhjustab laeva pöördumine.

Relatiivse kiiruse kogumuutust me vaatleme kahe komponendi geomeetrilise summana:

$$d\boldsymbol{w} = (d\boldsymbol{w})_{rel} + (d\boldsymbol{w})_{pöörd}. \tag{23}$$

Esimene vektor võrrandi paremal poolel annab siin pärast jagamist ajavahemikuga dt relatiivse kiirenduse

$$a_{rel} = \frac{(d\boldsymbol{w})_{rel}}{dt};$$

teine komponent $(d\boldsymbol{w})_{pöörd}$ kujutab endast relatiivse kiiruse muutumist, mida põhjustas liikuva süsteemi pöörlemine.

Samuti ei väljenda suurus $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ alati ülekantava liikumise kiirendust. Muidugi pole osutatud suurus mistahes punkti jaoks, mis on paigal liikuvas süsteemis, midagi muud kui ülekantava liikumise kiirendus. Kuid võrrandi (22) me saime, analüüsides materiaalse punkti nihet liikuvas süsteemis; kui liikuv süsteem pöörleb põhisüsteemi suhtes, siis ei ole ülekantav kiirus liikuva süsteemi eri osades ühesugune (näiteks on pöörlemise ülekantav kiirus arvuliselt seda suurem, mida kaugemal asetseb antud koht pöörlemisteljest). Kujutleme, et me paigutasime materiaalse punkti liikuvas süsteemis silmapilkselt ümber naaberasendisse mööda relatiivse liikumise trajektoori; ülekantava liikumise kiirenduse poolt esilekutsutav ülekantava kiiruse muutumine ei jõua veel avalduda, kuid suurus $d\boldsymbol{u}$ erineb nullist ja näitab, kuidas ülekantava liikumise kiirused relatiivse liikumise trajektoori naaberpunktides antud ajahetkel üksteisest geomeetriliselt erinevad.

Suuruse $d\boldsymbol{u}$ selle komponendi, mis sõltub koha vahetusest liikuvas süsteemis, tähistame sümboliga $(d\boldsymbol{u})_{\text{pöörd}}$; suuruse $d\boldsymbol{u}$ teine geomeetriline osa kujutab endast ülekantava liikumise kiirenduse poolt tekitatava ülekantava kiiruse muutumist; seda osa tähistame sümboliga $(d\boldsymbol{u})_{\text{ülek}}$. Seega

$$d\boldsymbol{u} = (d\boldsymbol{u})_{\text{ülek}} + (d\boldsymbol{u})_{\text{pöörd}}, \tag{24}$$

kusjuures

$$\boldsymbol{a}_{\text{ülek}} = \frac{(d\boldsymbol{u})_{\text{pöörd}}}{dt}.$$

Öeldust on selge, et liikuva süsteemi kulgeva liikumise juhul, kui ülekantaval liikumisel liikuva süsteemi iga koordinaattelg nihkub paralleelselt iseendaga (pöörlemist ei ole), on $(d\boldsymbol{w})_{\text{pöörd}} = 0$ ja $(d\boldsymbol{u})_{\text{pöörd}} = 0$. Sel juhul *liikuva süsteemi kulgeval liikumisel on absoluutse liikumise kiirendus võrdne ülekantava liikumise ja relatiivse liikumise kiirenduste geomeetrilise summaga:*

$$\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{a}_{\text{ülek}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}}. \tag{25}$$

Veel kitsamal erijuhul, kui liikuv süsteem liigub kulgevalt konstantse kiirusega (s. t. $\boldsymbol{a}_{\text{ülek}} = 0$), ühtivad absoluutse ja relatiivse liikumise kiirendused suuruse ja suuna poolest. Teisiti öeldes, *liikumise kiirendus on ühesugune teineteise suhtes kulgevalt ja konstantse kiirusega liikuvate vaatlejate jaoks.* Selles mõttes öeldakse, et orienteerumissüsteemid, mis liiguvad üksteise suhtes kulgevalt ja konstantse kiirusega, on „üheväärsed kiirenduse suhtes".

Üldjuhul, kui ülekantav liikumine on seotud liikuva süsteemi pöörlemisega põhisüsteemi suhtes, *on absoluutse liikumise*

kiirendus võrdne kolme liidetava — ülekantava liikumise kiirenduse, relatiivse liikumise kiirenduse ja niinimetatud *Coriolise kiirenduse geomeetrilise summaga:*

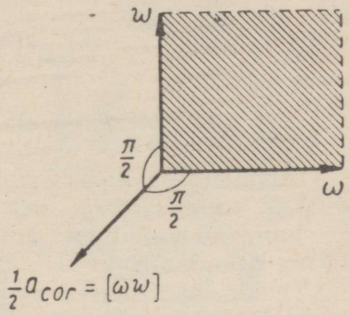
$$a_{abs} = a_{ülek} + a_{rel} + a_{cor}. \tag{26}$$

Eespool püstitatud tähistuste järgi

$$a_{cor} = \frac{(dw)_{pöörd} + (du)_{pöörd}}{dt}. \tag{27}$$

On tähelepanuväärne, et Coriolise kiirenduse mõlemad osad (osa, mis sõltub pöörlemise mõjust relatiivse kiiruse suunale, ja osa, mis sõltub ülekantavate kiiruste ebavõrdsusest relatiivse liikumise teel) on alati arvuliselt väärtuselt võrdsed ja samasuunalised:

$$\frac{(du)_{pöörd}}{dt} = \frac{(dw)_{pöörd}}{dt}.$$



Joon. 17. Vektorite w, ω ja a_{cor} vastastikune asetus.

Arvutused näitavad, et kumbki nendest Coriolise kiirenduse osadest on võrdne pöörde nurkkiiruse, relatiivse kiiruse ja vektorite ω ning w vahelise nurga α siinuse korrutisega:

$$^1/_2 a_{cor} = \frac{(dw)_{pöörd}}{dt} = \frac{(du)_{pöörd}}{dt} = \omega w \sin\alpha. \tag{28}$$

Vektorit, mille arvuline väärtus on võrdne mingi kahe vektori A ja B arvuliste väärtuste ning nendevahelise nurga siinuse korrutisega, ja mis on risti mõlema vektoriga, nimetatakse *vektoriaalseks korrutiseks* ja tähistatakse sümboliga $[AB]$[1]. Järelikult on vektoriaalse korrutise arvuline väärtus võrdne vektoriteleteguritele kui külgedele ehitatud rööpküliku pindalaga. Vektori $[AB]$ positiivseks suunaks loeme seda suunda, milles pööre vektorilt A vektorile B paistab kellaosuti liikumise suunas. On silmanähtav, et $[AB] = -[BA]$.

Eespoolöeldust järgneb, et Coriolise kiirendus a_{cor} on pöörde nurkkiiruse ja relatiivse kiiruse kahekordne vektoriaalne korrutis (joon. 17):

$$a_{cor} = 2[\omega w]. \tag{29}$$

[1] Samuti ka $A \times B$. *(Tõlk.)*

Tartu Ülikooli Raamatukogu
ARHIIVKOGU

II PEATÜKK

NEWTONI SEADUSED

§ 11. Mõned ajaloolised märkused. Mass ja kaal.

Mehhaanika kujunemine matemaatiliselt harmooniliseks teaduseks toimus XVII sajandil. See oli aeg, millal tööstuse ja kaubanduse vajadused andsid tõuke loodusteaduse täpsete meetodite arendamiseks.

Teised füüsikalised mateeria liikumise vormid peale mehhaanilise liikumise ei olnud siis veel tehnikas kodunenud. Vaatlused ja katsed näitasid, et mehhaaniline liikumine tekib ja kaob täiesti kindlatel tingimustel — jõudude toimel. Seoses sellega kujunes välja ja muutus pärast Newtonit valitsevaks kujutlus jõududest kui liikumist tekitavatest ja juhtivatest põhjustest. Alles järgnevatel sajanditel, kui füüsika poolt õpiti tundma teisi, mittemehhaanilisi liikumise vorme, hakkas järk-järgult ilmnema, et jõud ise ja jõudude poolt tehtav töö avalduvad ainult siis, kui liikumine muundub ühest vormist teiseks, nii et ainult väliselt näib mehhaanilise liikumise põhjuseks olevat jõud; tegelikult tekitatakse liikumist ainult liikumise poolt.

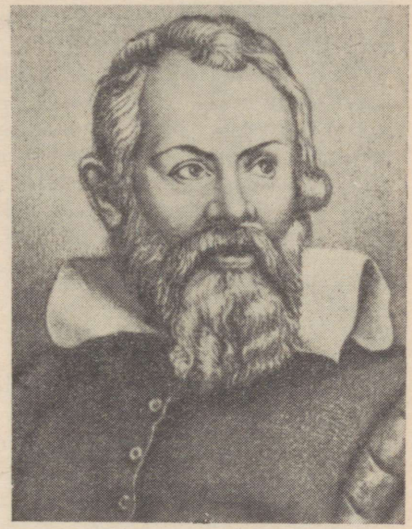
XVII sajandil peaaegu ei püstitatud jõudude loomuse ja päritolu küsimust. Liikumapaneva jõu mõistegi ei kujunenud välja korraga; alles Newton andis sellele mõistele formaalselt täieliku selguse; samal ajal aga just Newton, soovides vältida enneaegseid hüpoteese jõudude loomusest, aitas tahtmatult kaasa ebaõige kujutluse juurutamisele füüsikasse, nagu mõjuks jõud eemalt, läbi tühjuse.

XVII saj. algul avaldati Johannes Keplери ajaloolised tööd: „Uus astronoomia" (1609. a.), kus püstitati kaks seadust planeetide liikumise kohta, ja „Maailma harmoonia" (1619. a.), kus anti planeetide liikumise kolmas seadus.

Samadel, XVII saj. esimestel aastakümnetel ilmus rida Galileo Galilei töid.

Galilei kasutas aja täpseks mõõtmiseks tema enda poolt leiutatud pendlit, konstrueeris pikksilma ja võttis astronoomias kasu-

tusele teleskoopilise vaatlusmeetodi; Galilei avastas Veenuse faasid, Jupiteri kaaslased ja päikese laigud; vaadeldes päikese laike, avastas Galilei Päikese pöörlemise ümber oma telje. Galilei tegi palju täiustusi ja täpsustusi kinemaatikas, formuleeris liikumise relatiivsuse printsiibi, püstitas kiiruste liitmise seaduse ja avastas, et tühjuses peavad kõik kehad, sõltumata nende suurusest ja tihedusest, langema ühesuguse kiirendusega. Galilei uuris üksikasjaliselt kehade liikumist kaldpinnal, visatud kehade liikumist ja lahendas rea rakendusmehhaanika ülesandeid.



Galileo Galilei (1564—1642).

Üheks Galilei suurimaks teeneks oli osav ja visa Koperniku süsteemi kaitsmine. 1610. a. avaldas Galilei pealkirja all „Täheteataja" ülevaate oma astronoomilistest avastustest, mis kinnitasid Koperniku süsteemi õigsust.

1632. a. ilmus Galilei raamat „Dialoog kahest maailmasüsteemist", mis põhjustas tema tagakiusamise kiriku poolt. Selles tähelepanuväärses raamatus, kus on vaadeldud paljusid füüsikalisi ja astronoomilisi küsimusi, Galilei, pealesunnitud ettevaatlikkusega (nagu mitte ise, vaid kahe väljamõeldud isiku vahelises vestluses), ei lükka ümber mitte ainult Ptolemaiose süsteemi, vaid väljendab ka tollal valitsevale skolastikale põhiliselt vastupidiseid filosoofilisi vaateid. Näiteks: „Ma võiksin siin üsna põhjendatult asetada pealtnäha vaieldava küsimuse — kas looduses on üldse tsentrit, sest ei teie ega keegi muu ei ole tõestanud, et maailm on lõplik ja omab kindla kuju, mitte aga lõpmatu ja piiramatu." Või: „Ei või kuulda ilma imestuse ja seesmise vastupanuta, kui muutumatust, vastastikuste mõjude ja üleminekute puudumist omistatakse kehadele kui midagi suurepärast ja täiuslikku, vastandina muutlikkusele, tekkimisele, muundumisele." Selle raamatu eest Galilei vangistati ja saadeti, nagu öeldakse kohtuotsuses, „valjule katsumusele", s. t. piinamisele.

Elu lõpuks kirjutas Galilei veel ühe suurepärase töö — „Vestlused ja matemaatilised tõestused kahe uue teaduse kohta" —, kus on esitatud mehhaanika ja materjalide tugevusõpetuse alused.

Galilei kaasaegsed — inglise filosoof Bacon ja prantsuse filosoof ning matemaatik Descartes — võtsid skolastika hävi-

tava kriitika alla ja vastandasid temale maailma objektiivse, teadusliku uurimise printsiibid. Baconi ja Descartes'i teosed avaldasid XVII ja XVIII sajandil sügavat mõju teaduse ideelisele sisule ning meetoditele.

Baconi filosoofiline töö ilmus 1620. a. Selles paljastab Bacon vana, skolastilise teaduse viljatust, tema mahajäämist tehnikast ja elu nõuetest ja, avades selle mahajäämise põhjused, tõestab õige teadusliku meetodi tähtsust.

Bacon räägib sellest, et on hädavajalik „luua inimese mõistusele teed hästiseatud katsete abil", hoiatab ebaõigete teooriatega ja eelarvamustega pimestumise eest, analüüsib inimmõistuse kalduvusi, mis on teadusele hädaohtlikud, kui see ei ole distsiplineeritud õige teadusliku meetodiga. Bacon märgib, et inimesed kalduvad eeldama asjades ja nähtustes enam korda ja ühtlust, kui seda on tegelikkuses, välja mõtlema paralleele ja analoogiaid seal, kus neid ei ole, suurendama positiivsete argumentide tähendust, alahinnates negatiivsete argumentide tähtsust, ja, mis on peaasi, tõttama enneaegsetele, halvasti põhjendatud üldistustele.

„Need, kes tegelesid teadustega," kirjutab Bacon, „olid kas empiirikud või dogmaatikud. Empiirikud ainult koguvad sipelga moodi ja kasutavad kogutut. Ratsionalistid valmistavad ämbliku moodi kangast iseenda materjalist. Mesilane aga valib vahepealse viisi, ta võtab materjali aia- ja põllulilledest, kuid paigutab ja muudab seda omaenda oskusega."

Teaduse kohuseks on Baconi järgi kogemustest saadud ja mõistuse käsutusse analüüsimiseks antud materjali ümbertöötamine. Oma metodoloogia lähteväiteks kuulutas Bacon „kogemuse ja mõistuse liidu". Teaduse areng peab toimuma *induktsiooni* teel — üleminekuga üksikasjadelt üldistustele.

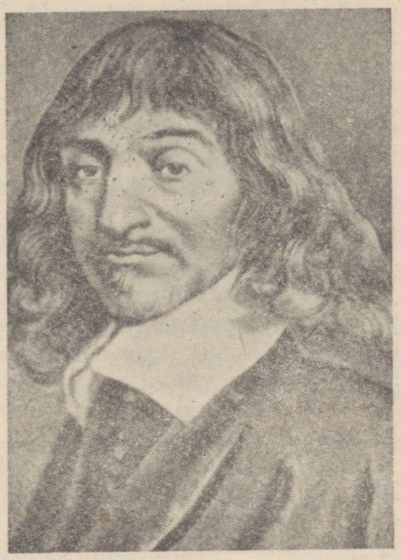
„Teadusele . . ." kirjutas Bacon, „tuleb oodata head ainult siis, kui me tõuseme mööda pidevat tõe treppi, mitte aga mööda katkendlikke üksikultseisvaid astmeid, tuleb minna üksikasjadelt väiksematele aksioomidele ja pärast keskmistele, üks kõrgem teisest, ja lõpuks kõige üldisematele." „Meie tee ja meie meetod . . ." kirjutas Bacon samuti, „seisneb järgmises: meie ei võta praktikat praktikast ja kogemust kogemustest (nagu empiirikud), vaid põhjused ja aksioomid praktikast ja kogemustest, ja põhjustest ning aksioomidest uuesti praktika ning kogemuse, nagu tõelised looduse seletajad."

Kõik need ideed olid XVII saj. teaduse jaoks uued, ebatavalised; olles esitatud elavalt ja veenvalt, õõnestasid nad skolastika juuri. Marx nimetas Baconit „inglise materialismi ja üldse tõeliseks uusima aja katseliste teaduste rajajaks".

1644. a. avaldati René Descartes'i (Cartesiuse) teos „Filosoofia alused". Selles teoses püüab Descartes selgitada maailma ehitust ja kehade omadusi, lähtudes mõnest mateeria liikumise üldisest

pildist. Descartes'i meetod seisneb järelduste tuletamises üldistatud väidetest, see on *deduktsiooni* meetod.

Igakülgne looduse uurimine, mis algas renessansiajastul, toetus ainult vaatlustele. Kuid see teaduse uus suund, mis hülgas keskaegse skolastika, kannatas juhtivate ideede puudumise all; ei olnud printsiipe, mis oleksid suunanud uurimusi ning ühendanud hajutatud vaatlused ja eraldiolevad hüpoteesid avaraks üldfüüsikaliseks teooriaks; veel enam, ei olnud leitud, põhjendatud ega ära proovitud füüsikaliste teooriate deduktiivse läbitöötamise meetod — teoreetilise füüsika meetod. Seepärast oligi Descartes'i teosel, kus oli esmakordselt füüsikas rangelt arendatud deduktiivne meetod liikumise üleüldsuse idee kindlal baasil, erakordne menu.



René Descartes (1596—1650).

Descartes'i poolt loodi laialdane plaan kõigi füüsikaliste nähtuste selgitamiseks „algmateeria" peenimate osakeste varjatud mehhaanilise liikumisega. Descartes'i kujutlused mateeria ehitusest paistavad kaasaegselt seisukohalt üsna primitiivsetena; nad on sarnased Demokritose kujutlustega aatomitest, mis on varustatud haakidega, tappidega jne. Kuid Descartes'i füüsikas ei olnud peamiseks mitte mateeria ehituse lihtsustatud mõistmine. Peamiseks ja uueks tolle aja teadusele oli Descartes'i poolt arendatud kujutlus liikumise üldsusest, jäävusest ja maailma isearenemisest.

Descartes'i õpetuse tähtsaks jooneks oli samuti väide, et maailmas ei ole olemas ruumi, mis ei oleks täidetud mateeriaga, s. t. ei ole olemas tühjust. Mateeria osakeste liikumist kujutles Descartes tsükliliselt toimuvatena: kui mingisugune osakene lahkub ruumi kohalt, kus ta oli, võtab mingisugune teine osakene samal ajal selle, esimese poolt mahajäetava ruumi koha enda alla, nii et tühjust ei teki.

Kõik kehade omadused ja kõik nähtused peavad Descartes'i järgi seletuma mateeria osakeste liikumisega, kokkupõrkumisega, pealesurumisega, mehhaanilise kokkuhaakumisega, murdumisega ja peenendumisega. Descartes arvas, et kõik kehade vastastikused

mõjud toimuvad keskkonna mehhaanilise mõjustuse, pealesurumise tagajärjel temas olevale kehale.

See kõigi füüsikaliste nähtuste mehhanistliku selgitamise niinimetatud kartesiaanlik programm oli füüsikute juures pikka aega kasutusel. Hilisemal ajal säilitati Descartes'i pooldajate poolt ainult füüsika kartesiaanliku käsitluse põhiidee, kuna teooriate sisu muutus vastavalt füüsika edusammudele, mateeria ehituse uurimisel.

XVIII sajandil muutusid füüsika juhtprintsiipideks Newtoni seadused. Analüütiliste mehhaanika meetodite arenemine ja nende meetodite rohkearvuliste rakenduste kasutamine kutsus füüsikute seas esile jahenemise füüsika ülesehitamise kartesiaanliku programmi vastu. Raskeim küsimus jõudude päritolust oli arutluselt võetud. Njuutonlased hakkasid erinevalt Newtonist endast pooldama vaadet kaugmõju (mõju läbi tühjuse) võimalikkusest — *actio in distans* printsiipi. Võrreldes mehhaanika täpsete analüütiliste meetoditega paistsid igasugused hüpoteesid gravitatsioonijõudude, elektri- ja magnetjõudude, elastsusjõudude jne. loomusest väljamõeldistena, mis ei vääri tähelepanu. Ja tõepoolest ei olnud eksperimentaalfüüsika käsutuses ei XVIII sajandil ega XIX saj. esimesel poolel veel andmeid jõudude loomuse kui liikumise varjatud vormide väljenduse avastamiseks. Üksnes M. V. Lomonossovi geenius nägi soojuse olemust osakeste liikumise varjatud vormides.

XVIII ja XIX sajandil andis ennast alatasa tunda kartesiaanliku õpetuse mõju. Eriti avaldus see visades ja arvukates katsetes üles ehitada eetri — maailmaruumi täitva peene materiaalse keskkonna — puhtmehhaanilist teooriat. XX saj. piiril kaitses John Joseph Thomson hüpoteesi, et aine elementaarosakesed kujutavad endast eetri keerisrõngaid; Heinrich Hertz püüdis luua mehhaanikat jõu mõistet kasutamata; N. A. Umov esines kartesiaanlike vastuväidetega Newtoni seaduste vastu jne.

Kaasaegses füüsikas eitatakse nagu Descartes'i õpetuseski absoluutse tühjuse kui mittemateriaalse ruumi olemasolu võimalikkust. See ei viinud siiski terminite „tühjus", „täiuslik vaakuum" tarvitamisest loobumiseni. Nende terminitega tähistatakse antud ruumi kohas mateeria korpuskulaarse kuju — molekulide, aatomite, elementaarosakeste — puudumist.

Pöördudes tagasi Descartes'i tähtsuse iseloomustamisele mehhaanika arendamisel, on vaja märkida, et Descartes püstitas inertsiseaduse ja liikumishulga jäävuse seaduse, tõsi küll, mitte küllalt täpselt (Descartes ei teadnud, et liikumishulka tuleb vaadelda kui vektorit). „Filosoofia alustes" ta kirjutas: „Kui mateeria osake ... hakkas ükskord liikuma, siis kestab see liikumine alati selle ajani, kuni teised teda ei peata või ei aeglusta tema liikumist ... Keha iga osake eraldi püüab jätkata liikumist mööda

sirgjoont." „Kui üks keha põrkab kokku teisega, võib ta sellele edasi anda ainult nii palju liikumist, kui palju ta ise samaaegselt kaotab, ja võtta temalt ainult nii palju, kui palju ta suurendab omaenda liikumist."

1673. a. avaldati Huygensi klassikaline töö võnkumistest, kus muuhulgas oli antud kesktõmbejõu seadus. Peaaegu samaaegselt, 1674. a., avaldati Hooke'i tähelepanuväärne teos, kus on arendatud ülemaailmse gravitatsiooni idee.

Enne Newtonit esitasid mehhaanika-alased teosed, mõnikord väga ulatuslikud, peamiselt mehhanismide arvestusse puutuvate üksikute ülesannete mitmesuguseid, enam või vähem õnnestunud lahendusviise. Ühtset füüsikaliselt põhjendatud meetodit mehhaanikas ei olnud, ja seepärast nõudis uute ülesannete lahendamine suuri andeid ning leidlikkust; paljusid tähtsaid ülesandeid ei saadud üldse lahendada. Newtoni-eelse perioodi mehhaanika-alastes teostes võib kohata põhjalikke, kuid ilma seesmise ühtsuseta küsimuste esitust *staatikast* — kehade tasakaaluõpetusest — ja *kinemaatikast* — puhtgeomeetrilisest liikumisõpetusest ilma liikumist muutvate jõudude analüüsita. *Dünaamika* — õpetus kehade liikumisest koos kehadele mõjuvate jõudude analüüsiga — oli oma arengu algstaadiumis, vaatamata sellele, et pärast Galilei töid võis ette näha, et dünaamika muutub kogu mehhaanika aluseks ja hakkab valitsema staatika üle.

1687. a. ilmus Newtoni surematu teos *„Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* („Loodusfilosoofia matemaatilised alused", mis kaasaegse terminoloogia järgi tähendab: füüsika matemaatilised alused). Selle teose kõik kolm osa on pühendatud Newtoni poolt väljatöötatud dünaamika esitamisele.

Newtoni poolt püstitatud põhiseaduste mõte on üldjoontes teada füüsika algkursusest. Üksikasjalisemalt selgitatakse nende seaduste sisu järgnevates paragrahvides. Siiski enne, kui üle minna nende seaduste esitamisele, peame selgitama, mis andis Newtonile võtme dünaamika ülesehitamiseks.

Newton vaatles õigesti *„massi"* kui inertsuse mõõtu ja samal ajal kui gravitatsiooni allikat ning objekti.

Enne Newtonit massi mõistet peaaegu ei kasutatud, vaadeldi ainult kehade *kaalu*. Kehade kaalu mõiste on hästi tuttav igale inimesele tema igapäevastest kogemustest. Ajalooliselt oli seepärast nimelt kaalu mõiste aluseks üldisema ning tähtsama — massi mõiste väljatöötamisel.

On teada, et eksisteerib kaks kehade kaalumise viisi: vedrukaalu abil ja kangkaalu abil. Need viisid on põhjalikult erinevad. Tõepoolest, kui kasutada v e d r u kaalu ja vastandada üksteisega ühe ning sama keha täpsete, Maa pinnast erisugustel kõrgustel teostatud kaalumiste tulemusi, siis võib märgata, et keha kaal kahaneb, kui teda viia maapinnast kõrgemale. See kaalu vähe-

nemine on väike, kuid tähtis on see, et ta on omane kõigile kehadele, ja nimelt ülestõstmisel muutub kaalu poolt põhjustatud vedru venitus iga kilomeetri kohta väiksemaks ligikaudu 0,0003 võrra oma algsuurusest; järelikult kahaneb niisama palju ka keha kaal. Edasi, kasutades vedrukaalu, võib näidata, et keha kaal muutub sõltuvalt koha geograafilisest laiusest: lähenemisel ekvaatorile kahaneb keha kaal. Iga keha, mis on üle viidud pooluselt ekvaatorile, kaotab ligikaudu 0,005 oma kaalust. On selge, et k a n g k a a l u kasutades ei ole võimalik avastada keha kaalu ülalmärgitud muutusi; kaks mingisugust keha, mis on asetatud kangkaalu kaussidele ja mis tasakaalustavad teineteist täpsel[1] kaalumisel mingis kohas, tasakaalustavad teineteist alati ka mistahes muus kohas ja mistahes kõrgusel merepinnast. Kaal jääb tasakaalu seepärast, et kahe võrdse raskusega keha kaal muutub alati ühepalju, kui nad viia üle teise kohta või teistsugusele kõrgusele merepinnast.

Seega kujutab vedrukaal endast seadist, mis on printsipiaalselt sobivam kehade tõelise kaalu määramiseks kui kangkaal. Siiski oli nimelt kangkaaludel väljapaistvam osa füüsika ajaloos kui vedrukaaludel. Kangkaalude kasutamine viis kehade tähtsaima lahutamatu omaduse — *massi* — avastamisele.

Keha massi all mõistetakse *mateeria hulka* selles kehas. Mass kujutab endast eri liiki suurust, mis erineb kaalust; massi mõõdetakse võrreldavate kehade tasakaalustamise teel kangkaalul; kehade kohta, mis tasakaalustavad teineteist kangkaalul, öeldakse, et nendel on võrdsed massid. On tähtis, et massi all mõistetakse seejuures suurust, mis jääb kaalust erinevalt muutumatuks keha ümberpaigutamisel mõnda teise kohta, millel on teine geograafiline laius või teine kõrgus merepinnast.

Kaal kujutab endast *jõudu*, millega keha rõhub toele Maa poole suunatud gravitatsiooni (külgetõmbe) tõttu. Kaalu sõltuvust koha geograafilisest laiusest põhjustab osaliselt Maa lapikus, kuid peamiselt tema ööpäevane pöörlemine; osa võttes Maa ööpäevasest pöörlemisest rõhub keha toele nõrgemini kui siis, mil Maa oleks liikumatu (§ 36). Keha kaalu vähenemine kõrguse suurenemisega Maa pinnast toimub vastavalt Newtoni poolt püstitatud *gravitatsiooniseadusele*. Gravitatsiooniseaduse järgi tõmbub mistahes keha iga osake Maa keskpunkti poole jõuga, mis on pöördvõrdeline selle osakese kauguse ruuduga Maa keskpunktist. Liitudes annavad kõik need keha eri osakestele rakendatud jõud resultantjõu, mis ongi keha kaaluks. Selle jõu rakenduspunkti nimetatakse *raskuskeskmeks*. Kuna Maa raadius on võrdlemisi suur ($R \approx 6400$ *km*), siis muutub kehade kaal väikestel tõusukõr-

[1] Et vältida keskkonna (õhu) mõju kaalumise tulemustele, võime endale ette kujutada, et kaal on paigutatud klaaskasti, millest õhk on eemaldatud.

gustel äärmiselt vähe. Kui meil aga oleks võimalus eemaldada mingit keha kuitahes kaugele Maast, siis muutuks selle keha kaal aegamööda kahanedes lõpmatul kaugenemisel võrdseks nulliga. Keha mass aga jääks seejuures muutumatuks.

Kui oleks võimalik mingit keha üle viia Maa pinnalt Kuu pinnale, siis selle keha kaal muutuks mitte ainult kvantitatiivselt, vaid ka kvalitatiivselt, nimelt tõmbuks ta nüüd peamiselt Kuu keskpunkti poole, samuti nagu ta enne tõmbus Maa keskpunkti poole. Kasutades gravitatsiooniseadust võib välja arvutada, et täiskasvanud inimese „raskus" Kuul (külgetõmbejõud Kuu keskpunkti poole) oleks ligikaudu 12 *kG*. Vastandina sellele kaalu muutumisele säilitaks mass maailmaruumi igas kohas ühe ja sama suuruse.

§ 12. Newtoni esimene seadus (inertsiseadus).

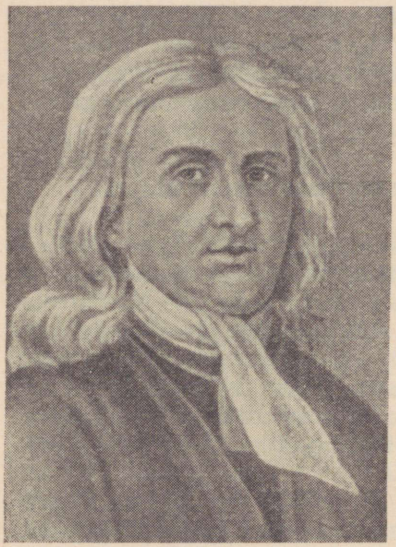
Inertsiseaduse idee väljendas Galilei XVII saj. algul. Galilei tõi esimesena füüsikasse kujutluse „ideaalsest liikumisest", s. o. liikumisest, mis on vaba igasugustest takistustest — sellistest, nagu hõõre ja õhutakistus. Galilei tuli õigele järeldusele, et ideaalsel juhul peab raskuse mõjust vabastatud keha *igavesti* liikuma muutumatu kiirusega. Descartes arendas seda järeldust ja näitas, et vaba keha püüab jätkata oma liikumist mööda sirgjoont. Newton võttis inertsiseaduse mehhaanika esimeseks seaduseks ja sõnastas selle järgmiselt:

Iga keha seisab paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt seni, kuni ja kuivõrd temale rakendatud jõud seda olekut ei muuda.

Näib iseendast arusaadavana, et keha, mis on paigal, jääb paigale niikaua, kuni teda sellest olekust mingisuguste jõudude mõjul välja ei viida. Täpselt samuti paistab selgena, et kui sirgjooneliselt liikuvale kehale ei mõju mingisuguseid jõude, siis pole põhjusi, mis võiksid keha sirgjoonelisest teest kõrvale kallutada (siin võiks toetuda sümmeetria kaalutlustele; jõudude puudumisel ei ole keha kõrvalekaldumine sirgjoonelisest teest ühele poole rohkem võimalik kui kõrvalekaldumine teisele poole; seepärast pole põhjust, et kõrvalekaldumine toimuks). Vähem silmanähtav on väide, et jõudude puudumisel keha kiirus jääb muutumatuks; igapäevases kogemuses paneme tähele vastupidist. Iga liikuv keha, kui tema liikumist mitte toetada jõu mõjuga, jääb varem või hiljem seisma, kuid teiselt poolt näitab seesama igapäevane kogemus meile, et peatumine toimub seda kiiremini, mida suuremad on olemasolevad liikumistakistused. Me oleme täiesti õigesti harjunud vaatlema takistusjõude kui liikumise aeglustumise põhjust; seepärast, kui me kujutame, et mingi keha liigub, kohtamata mingit takistust oma liikumisele, siis on loo-

mulik oodata, et keha kiirus nendes tingimustes jääb muutumatuks.

Üeldu tõttu vaadeldakse inertsiseadust vahel kui *aprioorset* tõde (s. o. kui tõde, mis on püstitatud puhtmõtteliselt ja mis ei vaja põhjendamist katse abil). See pole siiski õige. Kõik kolm Newtoni seadust (inertsiseadus ja kaks ülejäänud seadust, mida me vaatleme järgnevates paragrahvides) kujutavad endast tõdesid, mis on saadud *katselisel* teel. Selles on nende tähtsus. Selles, et inertsiseadus on tõepoolest võetud kogemusest, aga mitte saadud puhtmõttelisel teel, võib kõige kergemini veenduda, süvenedes sügavamalt inertsiseaduse mõttesse ja vastandades teda (mis on tehtud allpool) nende kujutlustega, mis eksisteerisid varem elektriliste masside liikumise seaduste kohta.



Isaac Newton (1642—1727).

Järgides Newtonit ei tule „inertsi all mõista ainult lihtsalt paigalseisu fakti või ühtlase liikumise fakti jõudude puudumisel, vaid mingisugust igale massile omast visa püüdu säilitada paigalseisu olekut ja samasugust visa püüdu ühtlase sirgjoonelise liikumise säilitamiseks. Niikaua, kui keha on jäetud omaette, niikaua, kui temale ei mõju mingid jõud, ei saa „inertsi visadus" arusaadavalt avalduda milleski muus kui selles, et keha püsib paigalseisu olekus või jätkab liikumist ühtlaselt ning sirgjooneliselt. Kui me aga viime keha paigalseisu olekust välja või sunnime teda kiiremini liikuma, või pidurdame teda, või kallutame teda kõrvale sirgjoonelisest teest, siis avaldub inertsi visadus keha poolt osutatava vastupanu näol, mis on suunatud kehale rakendatud jõudude vastu.

Selleks et rõhutada seda mõtet, mida me siin sobivamate sõnade puudumise tõttu püüdsime väljendada sõnadega „inertsi visadus", ütleb Newton, et igale kehale on omane selle keha massiga võrdeline „kaasasündinud vastupanujõud", ehk, mis tähendab sedasama, *inertsjõud*. See epiteet „kaasasündinud jõud" tekitab metafüüsilise idee mulje, kuid kõigest, mida Newton ütles inertsjõudude kohta, on selge, et selle mõningal määral ebaõnnestunud väljendusega tahtis Newton ainult alla kriipsutada, et

1) inerts on kõigi kehade lahutamatu omadus, mis on neile omane, sõltumata nende füüsilisest olekust ning keemilisest loomusest ning mis avaldub keha liikumise iseloomu kõigi muutuste juures, 2) inerts eksisteerib objektiivselt, teda ei määrata mistahes selle orienteerumissüsteemi valikuga, mille suhtes kehade liikumist uuritakse. Newton kirjutab: „Seda inertsjõudu avaldab keha ainult siis, kui temale rakendatud teine jõud tekitab muutuse tema liikumise olekus. Selle inertsjõu avaldust võib vaadelda kahesuguselt: nii omaenese vastupanuna kui ka survena; omaenese vastupanuna niivõrd, kuivõrd keha paneb vastu temale mõjuvale jõule, püüdes säilitada oma liikumise olekut; survena niivõrd, kuivõrd seesama keha, jäädes vaevaga alla temale vastupanevale takistusele, püüab muuta selle takistuse olekut."

Kui mingi keha hakkab mingite põhjuste tõttu kiiremini või aeglasemalt liikuma, siis see keha arendab (avaldab) inertsjõudu, kuid see inertsjõud on r a k e n d a t u d teistele kehadele, nimelt nendele, mis muudavad esimese keha liikumise olekut. Nii näiteks, kui me viskame kivi, siis kivi poolt arendatav inertsjõud on rakendatud meie käele: kivi rõhub käele. Kui me painduval laual seistes hüppame üles, siis painutab meie poolt arendatav inertsjõud lauda. Kui jalgrattur sõidab suure kiirusega rahvahulka, siis ta jätkab pedaalidele surumata mõnda aega liikumist inertsi tõttu, ümber lükates inimesi, kuid jalgratturi poolt kiiruse kaotuse tõttu arendatav inertsjõud pole arusaadavalt mitte rakendatud jalgratturile, vaid nimelt nendele inimestele, keda ta ümber lükkab.

Kas võib öelda, et see kujutlus inertsist, mis moodustabki mehhaanika esimese seaduse olemuse, on täiesti puhtmõttelise loomingu produkt, mitte aga tähelepandavate faktide üldistus? Muidugi mitte! Me võiksime ette kujutada, et mingi keha on ilma inertsita, et temale rakendatud jõu mõju kutsub esile ning toetab tema liikumist, aga kui rakendatud jõu mõju lakkab, siis keha peatub silmapilkselt. Nimelt seda seisukohta arendas Ampére elektrilaengutele rakendatult oma klassikalistes töödes elektrodünaamika alal; Ampére lähtus põhimõttest, et elekter on ilma inertsita. Lõpuks ilmnes, et see põhimõte on vale; elementaarsetel elektriliselt laetud osakestel — elektronidel — on mass, ja nad on inertsed. Valguselgi on inertne mass. Füüsika kaasaegsel arenemisastmel me ei tea ühtki mateeria avaldust, mis oleks ilma inertsita.

§ 13. „Paigalseisu" ja „ühtluse" mõistest.

Mehhaanika esimeses seaduses räägitakse „paigalseisust" ja liikumise „ühtlusest". Missugune tähendus on nendel sõnadel? Mille suhtes on siin paigalseisust jutt? Ei Maa ega Päike ega

niinimetatud „kinnistähedki" ei ole paigal; kõik taevakehad liiguvad.

Kas on olemas kas või üksainus keha, mis oleks täielikult (absoluutselt) paigal? Niisugust keha me ei tunne. Oletame, et keegi väidab, nagu oleks mingi keha absoluutselt paigal; kuidas otsustada: kas see väide on õige või vale? Näiteks üks inimene hakkab kinnitama, et nii- ja niisugune täht on täielikult paigal, kuna kõik teised tähed liiguvad, teine aga kinnitab, et paigal on mingi teine täht ja liigub esimese poolt osutatu. Kuidas teha kindlaks, kummal vaatlejatest on õigus?

Selleks et otsustada, kas mingi keha liigub täiesti ühtlaselt (absoluutselt muutumatu kiirusega), on vaja vaadelda selle keha liikumist, kasutades kella, mille kohta oleks kindlasti teada, et ta käib õieti. Kuid mida tähendab: „kindlasti teada"? Meile ei saa midagi olla „kindlasti" teada. Kui keegi ütleb, et just see kell näitab aega absoluutselt õigesti, kuidas siis otsustada, kas see väide on õige või vale?

Enne mehhaanika põhiseaduste sõnastust annab Newton järgmised definitsioonid:

„*Absoluutne ruum* oma olemuselt, olles sõltumata millestki välisest, jääb alati ühesuguseks ning liikumatuks. *Relatiivne ruum* on absoluutse ruumi, mida igapäevases elus võetakse liikumatu ruumina, mingisugune piiratud liikuv osa... Seega, kui vaadelda Maad liikuvana, siis on atmosfääriõhu ruum, mis jääb Maa suhtes alati üheks ning samaks, kord üheks, kord teiseks absoluutse ruumi osaks...

Koht on ruumi osa, mida keha enda alla võtab... *Absoluutne liikumine* on keha üleminek tema ühest absoluutsest kohast teise; *relatiivne liikumine* on keha üleminek tema ühest relatiivsest kohast teise relatiivsesse kohta.

Nii on purjetaval laeval keha relatiivseks kohaks see laeva osa, kus keha asetseb, näiteks see kiilruumi osa, mida keha täidab ja mis järelikult liigub koos laevaga. Relatiivne paigalseis on keha viibimine sellessamas laeva piirkonnas või samas kiilruumi osas. Laeva liikumisel koos kõige temas leiduvaga, liikumatus ruumis, on keha viibimine samas ruumi osas tõeline paigalseis. Sel viisil, kui Maa oleks tõepoolest paigal, siis keha, mis laeva suhtes on paigal, liiguks tegelikult sama absoluutse kiirusega, millega laev liigub Maa suhtes. Kui aga Maa ise liigub, siis keha tõeline absoluutne liikumine leitakse Maa tõelise liikumise järgi liikumatus ruumis, laeva relatiivse liikumise järgi Maa suhtes ja keha relatiivse liikumise järgi laeva suhtes...

Absoluutne, tõeline aeg iseendast ja oma olemuse poolest, ilma igasuguse suhteta millessegi välisesse, kulgeb ühtlaselt ja teda nimetatakse teisiti kestuseks... Absoluutne aeg erineb astronoomias tavalisest päikeseajast ajavõrrandi võrra; sest loomu-

likud päikese ööpäevad, mis võetakse igapäevases praktikas võrdseteks aja mõõtmise jaoks, ei ole tegelikult omavahel võrdsed; see ebavõrdsus parandatakse astronoomide poolt, selleks et kasutada taevakehade liikumiste mõõtmistel õigemat aega."

Me näeme, et need Newtoni definitsioonid põhiolemuselt ei kõrvalda eespoolloetletud raskusi.

Newtoni poolt toodud definitsioonidest järeldub, et: 1) ruum ja aeg kujutavad endast objektiivset reaalsust; see on õige; 2) ruum ja aeg pole orgaaniliselt seotud mateeriaga; see on vale. Niisugune ruumi ja aja mõiste käsitlus on metafüüsiline.

Newtoni mehhaanika õigeks mõistmiseks on väga tähtis silmas pidada, et Newtoni definitsiooni järgi on terminil *absoluutne liikumine* teine tähendus kui selle definitsiooni järgi, mille annab tänapäeva kinemaatika ja mida selgitati paragrahvis 11. Kinemaatikas võib iga orienteerumissüsteemi pidada tingimisi liikumatuks; liikumist sellise tingimisi liikumatu orienteerumissüsteemi suhtes on kokku lepitud nimetada absoluutseks liikumiseks, kuid Newtoni seisukohalt see liikumine ei osutu absoluutseks liikumiseks, kui meie poolt tingimisi liikumatuks loetav orienteerumissüsteem tegelikult liigub. Kui esituse käigus iseendast ei saa silmanähtavaks, millises tähenduses tarvitatakse terminit „absoluutne liikumine", siis tähistame selle termini kasutamist Newtoni mõttes sõnadega *tõeliselt absoluutne liikumine*.

Newtoni definitsioonidest me ei saa vastust küsimusele: milline füüsikaline tähendus on mehhaanika esimeses seaduses sõnadel „paigalseis" ja liikumise „ühtlus". Oleme muidugi õigustatud nõudma, et sellele „lihtsana" näivale küsimusele oleks antud täiesti selge vastus. Kuid tihti osutuvad just „lihtsad" küsimused lahendamiseks kõige raskemaks.

Mitte ükski füüsika põhimõistete olemusse puutuvatest küsimustest ei ole tegelikkuses „lihtne". Selles suhtes on füüsika mõisted hoopis keerulisemad matemaatilistest. Neid ei saa käsitleda nagu matemaatilisi mõisteid ja ei tule nõuda, et füüsikalise mõiste kogu sügavus, kogu tõeline tähendus oleks ammendatud tema definitsioonis; paljud küsimused, mis tekivad kohe pärast uue füüsikalise mõiste tekkimist, saavad selgeks järk-järgult, füüsika arenemisel. „Paigalseisu" ja „ühtluse" füüsikaline tähendus ei avane mitte Newtoni tööle eelnevates definitsioonides, vaid Newtoni mehhaanika lõppjäreldustes.

Kinemaatikas, kus me jätame kõrvale liikumist esilekutsuvad põhjused ja ei võta arvesse liikuva objekti massi, on ükskõik, millist orienteerumissüsteemi pidada tingimisi liikumatuks. Seepärast on loomulik, et kinemaatikalt dünaamikale üle minnes ilmnevad kohe sügavad raskused kinemaatiliste mõistete „paigalseis" ja „ühtlus" kasutamisel. Nendest raskustest oli Newton täiesti teadlik. Kohe eespooltoodud definitsioonide järel kirjutab

Newton: „Eri kehade tõeliste liikumiste äratundmine ja nende täpne eraldamine näivatest on väga raske, sest et selle liikumatu ruumi osad, millest räägiti ja milles toimuvad kehade tõelised liikumised, on meie meelte poolt tunnetamatud."

See asjaolu, et absoluutne ruum on meie meelte poolt tunnetamatu, ei kõigutanud siiski mingil määral Newtoni veendumust selles, et absoluutse ruumi mõiste (nagu ka absoluutse aja mõiste) peab võetama mehhaanika aluseks. Absoluutse ruumi ja absoluutse aja objektiivne reaalsus oli Newtonil väljaspool kahtlust, seepärast suhtus Newton ka mõistetesse „paigalseis" ja „ühtlus" kui mõistetesse, mis väljendavad objektiivset reaalsust, sõltumata sellest, kas meil on seda reaalsust kerge või raske tunnetada. Newton ütleb: „Võib osutuda, et looduses ei ole olemas paigalseisvat keha, mille suhtes oleks võimalik võrrelda ülejäänute kohti ja liikumisi . . . On võimalik, et looduses pole olemas sellist ühtlast liikumist, mille abil võiks aega mõõta täieliku täpsusega." Newton arvab, et neid küsimusi tuleb uurida ja tundma õppida. Peatumata mingisuguste raskuste ees näeb Newton mehhaanika ja füüsika ülesannet „ . . .kehade tõeliste liikumiste leidmises neid tekitavate põhjuste järgi, nende avaldumiste järgi ja näivate liikumiste erinevuste järgi . . ."

„Loodusfilosoofia matemaatiliste aluste" kolme köite sisust, eriti viimasest, maailmasüsteemile pühendatud raamatust, on selgesti näha, et Newton kui geniaalne füüsik-materialist püüdis ise visalt võitu saada enda poolt antud ruumi ja aja definitsioonide eespoolmärgitud metafüüsilisusest. Newton nägi, et metafüüsilisuse üle võidu saamiseks on hädavajalik kindlaks teha ruumi ja aja seos mateeriaga. Kolmandas raamatus („Maailmasüsteem") toob Newton esile absoluutse ruumi orgaanilise seose mateeriaga, kuid tolleaegsete kosmogooniliste teadmiste madala taseme tõttu ei olnud Newtoni järeldustel, mis oma olemuselt olid õiged, veel vajalikku avarust: selle, mis on õige kogu maailma kui terviku kohta, viib Newton ühendusse päikesesüsteemiga.

Newtoni mehhaanika õige ülesehitus aitas saada üle Newtoni poolt antud absoluutse ruumi esialgse definitsiooni metafüüsilisusest ja näitas, et ruum on orgaaniliselt seotud mateeriaga. See ruumi seos mateeriaga on antud maailma ehituses, on antud kosmogooniliselt.

Ruumi ja mateeria orgaaniline seos ilmneb, kui me läheme eri orienteerumissüsteemide objektiivse tähenduse hindamisel seda teed mööda, mis on ajalooliselt märgitud üleminekuga Ptolemaiose vaadetelt Koperniku-Galilei-Kepleri-Newtoni õpetusele ja edasi Koperniku-Newtoni ideede loomulikule ning möödapääsematule laiendamisele kõigile tähesüsteemidele, kogu maailmale tervikuna.

§ 14. Inertsiaalsüsteem. Relatiivsusprintsiip.

Inertsiseaduse sõnastuses ei öelda midagi selle kohta, millise koordinaadistiku suhtes keha, millele ei mõju jõude, säilitab inertsi tõttu oma paigaloleku või ühtlase sirgjoonelise liikumise. Astronoomilised vaatlused ja arvutused näitavad, et inertsiseadus osutub õigeks Päikesega seotud koordinaadistikus. Ligikaudselt osutub inertsiseadus õigeks ka Maaga suhendatud liikumiste kohta.

Materiaalset süsteemi, milles inertsiseadus osutub täieliku täpsusega õigeks, nimetatakse *inertsiaalsüsteemiks* (ehk teisiti *Galilei* süsteemiks). Selgitame inertsiaalsüsteemi mõistet näite varal.

Huvitagu meid palli liikumine, mis on raudteevagunis üles visatud ühe reisija poolt. Selleks et jälgida palli liikumist, võime koordinaaditasapindade süsteemiks valida näiteks vaguni põranda, külg- ja esiseina. Selle koordinaadistiku kõrval valime veel teise, Maaga seotud koordinaadistiku. Kui vagun seisab liikumatult, siis on vagunis ülesvisatud palli liikumine arusaadavalt ühesugune mõlema meie poolt valitud koordinaadistiku suhtes.

Vaatleme juhtu, kus vagun liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt; siis üks koordinaadistik liigub teise suhtes. Vaatlejale, kes seisab raudteetammi juures, paistab palli lend toimuvat teisiti kui vaatlejale, kes on vagunis. Viimane vaatleja ütleb, et kõik esemed tema vagunis on inertsi tõttu paigal; vaatleja, kes seisab raudteetammi juures, ütleb, et esemed vaguni sees liiguvad inertsi tõttu ühesuguse kiirusega. Üks vaatleja näeb mingit vaguni aknast pillatud rasket eset langevat mööda vertikaalset sirget; teine vaatleja näeb sedasama eset langevat mööda vaguni liikumise poole kallutatud kõverjoont (piki parabooli); uurinud seda eseme langemist, veendub ta, et lend piki parabooli tekib kahe liikumise — raskuse mõjul toimuva langemise ja inertsi tõttu toimuva ühtlase horisontaalse liikumise liitumisel. Kuivõrd inertsiseadus oli liikumatus vagunis õige (mingis lähendusastmes), sedavõrd on inertsiseadus õige ka ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuvas vagunis (samas lähendusastmes).

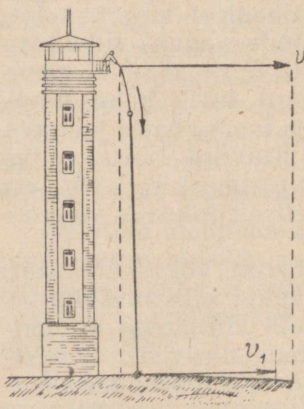
Kui vagun liigub kiirenevalt või aeglustuvalt, või ka ühtlaselt, kuid mööda kõverjoonelist teed, siis on vaguni sees ülesvisatud palli liikumisel hoopis teine iseloom; vaguni kiireneval liikumisel langeb vertikaalselt ülesvisatud pall teda ülesvisanud reisijast tahapoole; vaguni liikumisel mööda kõverjoonelist teed langeb ta viskajast kõrvale jne. Vaguni järsul pidurdamisel libisevad lauakesel liikumatult asetsenud esemed laualt maha ja langevad põrandale ettepoole, vaguni liikumise suunas. Seisvad reisijad püsivad suure vaevaga jalul. Reisijad, kes istuvad seljaga liikumise suunas, tunnevad, et nad järsku, vastu oma tahtmist rõhuvad pinkide seljatugedele. Inertsiseadus — tema sisu mõistmisel New-

toni järgi — lakkab (rakendatuna meid huvitavale koordinaadistikule) kehtimast. Tõepoolest, omandasid ju vagunis seinte ja põranda suhtes liikumatud esemed vaguni järsul pidurdamisel äkki vaguni suhtes kiirenduse ettepoole, vaatamata sellele, et nendele ei olnud väljastpoolt rakendatud mingisuguseid jõude, mis oleksid võinud neile seda kiirendust anda; vaguni sees mingi ühtlaselt liikuva keha kiirus vaguni pidurdamisel äkki muutub vaguniga seotud koordinaadistiku suhtes; kui vagun läbib teekurvi, siis reisija poolt vaguni seinaga paralleelselt visatud pall kas läheneb vaguni seinale või kaugeneb sellest.

On selge, et iga reisija teab, kuidas liigub vagun, ja oskab kergesti orienteeruda kõigis nähtustes, mis näivad ümber lükkavat inertsiseaduse vaguniga seotud süsteemile rakendatult.

Öeldust tuleneb järgmine järeldus, mille õigsuse me kohe tõestame: *kui mingi süsteem liigub sirgjooneliselt ja ühtlaselt mingi inertsiaalsüsteemi suhtes, siis on ka esimene süsteem inertsiaalsüsteem.* Kui aga esimene süsteem liigub teise, inertsiaalsüsteemi suhtes mittesirgjooneliselt või ka sirgjooneliselt, kuid mitteühtlaselt, siis ta ei ole inertsiaalsüsteem.

Toodud väited järelduvad inertsiseadusest ja kiirenduste liitmise seadusest. Tõepoolest, vastavalt kiirenduste liitmise seadusele (§ 10) on kaks teineteise suhtes ühtlaselt ning sirgjooneliselt liikuvat orienteerumissüsteemi *samaväärsed kiirenduse suhtes*, s. t. sellel juhul (ja ainult sellel juhul) on relatiivse liikumise kiirendus võrdne absoluutse liikumise kiirendusega. Järelikult, kui üks mainitud süsteemidest on inertsiaalsüsteem ja mingi keha, mis on vaba jõudude mõjust, liigub selle süsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt, teisiti öeldes, liigub kiirendusega, mis on võrdne nulliga, siis ka teise mainitud süsteemi suhtes toimub keha liikumine kiirendusega, mis on võrdne nulliga, s. o. ühtlaselt ning sirgjooneliselt. Aga see tähendabki, et teine vaadeldav süsteem on samuti inertsiaalsüsteem.



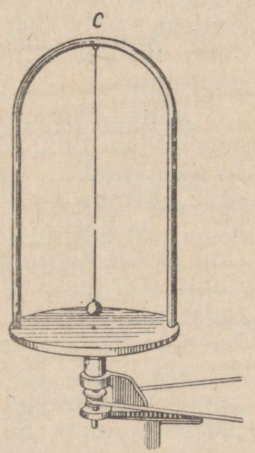
Joon. 18. Kõrgest tornist pillatud kivil on Maa ööpäevase pöörlemise tagajärjel maapinna suhtes horisontaalne kiirus $v_2 - v_1$.

Nagu juba mainiti, võib Päikesega siduda koordinaadistikku, mis on inertsiaalsüsteemiks. Selle süsteemi koordinaaditelgi tuleb mõelda lõikuvatena Päikese teatavas punktis (päikesesüsteemi *masskeskmes).* Kuna Maa oma tiirlemisel ümber Päikese liigub kindla kesktõmbekiirendusega, siis täpselt võttes ei osutu ükski Maaga seotud koordinaadistik inertsiaalsüsteemiks.

Kui aga arvestada, et 30 minuti jooksul kirjeldab Maa oma liikumisel ümber Päikese kaare, mis on ainult natuke suurem kui 1′ (see näitab, kuivõrd väike on Maa orbiidi kõverus), siis on Maa liikumise kõverjoonelisuse mõju Maaga seotud koordinaadistiku inertsiaalsetele omadustele äärmiselt väike.

Märksa suuremat, kuid ikkagi mitteolulist mõju avaldab Maa ööpäevane pöörlemine. Kui seda pöörlemist poleks, siis langeks tornist pillatud kivi täpselt mööda vertikaaljoont. Maa ööpäevase pöörlemise tagajärjel on igal maapinna punktil mingi horisontaalne — läänest itta — liikumise kiirus; torni tipu jaoks on see kiirus suurem kui tema vundamendi jaoks; seepärast ennetab kõrgest tornist pillatud kivi maapinna tema liikumises itta ja ei lange kivi algasendit läbiva vertikaali ja maapinna lõikepunkti, vaid kaldub sellest punktist pisut ida poole (joon. 18). See vertikaalist kõrvalekaldumine on 20-meetrise langemiskõrguse puhul ainult mõni millimeeter (keskmistel laiustel). Siit on näha, et maapinnaga seotud koordinaadistikku võib praktilisteks otstarveteks küllaldase täpsusega vaadelda kui inertsiaalsüsteemi.

Maa ööpäevase pöörlemise poolt põhjustatud kõrvalekaldumisi inertsiseadusest on kõige kergem tähele panna pendli võnkumistasapinda jälgides (Foucault' pendel). Selleks et nähtuse olemust endale näitlikumalt ette kujutada, kinnitame tsentrifugaalmasina teljele kaarega ketta ja sellesse kaare punkti, mis tuleb täpselt pöörlemisteljele, riputame šarniiri *C* abil pendli (joon. 19), mis võib väikese hõõrdega pöörelda kaare all. Kord võnkumapandud pendel säilitab oma esialgse võnkumistasapinna isegi kaare võrdlemisi kiirel pöörlemisel. See on arusaadav, sest pendlile ei mõju mingisuguseid jõude, mis võiksid muuta (pöörata) pendli võnkumistasapinda (see on vertikaaltasapind, milles toimub pendli esialgne hälve; pendli raskusjõud on alati selles tasapinnas ja ei moodusta sellega nurka; kui mitte arvestada tingimuse järgi väikesi hõõrdejõude ülesriputamispunktis, siis ei ole mingisuguseid muid pendlile mõjuvaid jõude).



Joon. 19. Tsentrifugaalmasina pöörlemisel jääb pendli võnke tasapind muutumatuks.

Muudame nüüd katse mastaapi: tsentrifugaalmasina asendame pöörleva Maaga, kaare — mingi toa lae ning seintega. Mõne minuti pärast märkame, et pendli võnkumistasapind justkui pöörduks „päikese järgi", s. t. idast lõunasse. Kujutame, et osutatud katse viiakse läbi Maa ühel poolusel. Siis oleks pendli võnkumistasapind, mis pöördub

maapealse vaatleja seisukohalt, tegelikult liikumatu inertsiaalse astronoomilise koordinaadistiku suhtes. Kui katse Foucault' pendliga teostatakse mingis teises Maa punktis, siis, kuna pendli võnkumistasapind läbib alati vertikaaljoone, ei pöördu see tasapind ainult maapealse vaatleja suhtes, vaid teatud piirides ka inertsiaalse astronoomilise koordinaadistiku suhtes.

Kirjeldatud katsetele võib vaadata kui Maa pöörlemise eksperimentaalsele tõestamisele. Täpseid vaatlusi langevate kehade vertikaalsihist kõrvalekaldumise kohta tehti Benzenbergi poolt aastatel 1802 ja 1804 ning korrati hiljem mitu korda erinevate uurijate poolt. Esimesena tegi katse pendliga Viviani 1661. a. Firenzes, pärast seda Bartolini 1833. a. ja Foucault aastatel 1850—1851 (oma eelkäijate katsetest Foucault ei teadnud). Foucault' katse tehti pendliga, mille pikkus oli 67 *m*; selle pendli vaskkera kaalus 28 *kG*.

Arutlused, mis on avaldatud eespool seoses väitega, et materiaalne süsteem, mis liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt inertsiaalsüsteemi suhtes, on samuti inertsiaalsüsteem, viivad meid järgmisele järeldusele:

mitte mingisugused mehhaanilised katsed ja vaatlused, mida tehakse inertsiaalsüsteemi sees, ei võimalda lahendada küsimust, kas see süsteem kui tervik on ühtlases sirgjoonelises liikumises või seisab paigal. See järeldus resümeerib kaalutlused, mida põhiliselt väljendas juba Galilei ja mida seepärast nimetatakse *Galilei relatiivsusprintsiibiks* (toodud sõnastus on antud Einsteini poolt). Sellest printsiibist tuleneb vahetult väide, et maailmas ei eksisteeri absoluutselt liikumatut keha; igasugune „paigalseis" on suhteline.

Galilei osutas relatiivsusprintsiibile, arutades küsimust, mil viisil Maa üldine kiire liikumine ei häiri tema pinnal toimuvaid üksikliikumisi. Galilei selgitab seda printsiipi järgmise näite abil: „Minge koos kellegi sõbraga saali mõne suure laeva teki all... ja käskige laev liikuma panna mistahes kiirusega. Ja näe (kui ainult liikumine on ühtlane), te ei märka kõikides nähtustes vähimatki muutust ning te ei suuda nende nähtuste järgi otsustada, kas laev liigub või seisab paigal: te hüppate põrandal sama kaugele kui seisval laeval, s. t. te ei tee seetõttu, et laev küllalt kiiresti liigub, laeva ahtri poole pikemaid hüppeid kui käila poole, kuigi hüppe ajal liigub teie all olev põrand hüppele vastupidises suunas. Seltsimehele mingit eset visates ei ole teil seda vaja suurema jõuga visata siis, kui ta seisab laeva käila juures, kui sel juhul, kui te seisaksite vastupidiselt; tilgad lakke riputatud veekruusist langevad vertikaalselt põrandale, mitte ükski tilk ei lange ahtri suunas, kuigi seni, kuni tilk on õhus, liigub laev edasi;... kärbsed jätkavad oma lende ükskõik kuhupoole,

ja kuidagi ei juhtu, et nad (justkui olles väsinud järgnemast laeva kiirele sõidule) koguneksid ahtri poole."

Galilei relatiivsusprintsiip fikseerib, et süsteemi sees teostatavate mehhaaniliste vaatluste ja katsetega ei saa avastada kogu süsteemi ühtlase sirgjoonelise liikumise eksisteerimist. Kuid see printsiip ei ütle midagi selle kohta, kas seda liikumist ei saaks avastada mingite muude, mittemehhaaniliste vaatluste ja katsete, näiteks optiliste katsete abil.

1905. a. laiendas A. Einstein Galilei relatiivsusprintsiipi väitega, et mitte ainult mehhaaniliste katsete ja vaatlustega, vaid üldse mitte mingisuguste füüsikaliste, eriti optiliste ja elektriliste katsetega ei saa kindlaks teha selle süsteemi ühtlast ja sirgjoonelist liikumist, milles neid katseid tehakse. Kui K on inertsiaalsüsteem, siis on iga K suhtes ühtlaselt ning pöörlemiseta liikuv süsteem K' samuti inertsiaalne; *loodusseadused avalduvad ühesuguselt kõigis inertsiaalsüsteemides.* See on *Einsteini relatiivsusprintsiip.*

Juhindudes sellest printsiibist ja sellega seotud väitest, et valguse kiirus vaakuumis on kõigis suundades ühesugune kõigi inertsiaalsüsteemide jaoks, töötas Einstein välja valguse kiirusele lähedaste kiirustega liikumiste mehhaanika — *relativistliku mehhaanika,* mis sai *relatiivsusteooria* nime (III köide). Märgime, et relativistlikus mehhaanikas asendatakse Galilei kiiruste liitmise seadus teise, keerulisema seadusega, mis valguse kiirusega võrreldes väikeste kiirustega toimuvate liikumiste jaoks siiski praktiliselt ei erine Galilei seadusest. Relativistlikus mehhaanikas arvestatakse ja saadakse järeldusena kogemuses kinnitust leidnud massi sõltuvus kiirusest, kuid see sõltuvus ilmneb samuti ainult valguse kiirusele lähedaste kiiruste puhul.

Tuginedes relatiivsusprintsiibile tehakse sageli *ebaõige* järeldus, et mehhaaniline liikumine eksisteerib ainult vaatleja suhtes, s. t. et igasugune mehhaaniline liikumine on nagu „füüsikalist tähendust mitteomav", ja järelikult justkui mitteeksisteeriv, kui pole määratud orienteerumissüsteemi, mille suhtes liikumist uuritakse. See on ebaõige seepärast, et mateeria liikumine eksisteerib objektiivselt, sõltumata selle vaatlemise viisidest. Reaalsed liikumisprotsessid muutuvad relatiivseiks, kui me neid uurime ühe või teise arvestussüsteemi suhtes. Me saame seejuures *reaalse, objektiivse liikumise relatiivsed peegeldused.*

Kinemaatika seisukohalt, mis lahutab liikumise materiaalsest baasist, on kõik arvestussüsteemid üheväärsed. Kuid absoluutselt inertsiaalset arvestussüsteemi ei ole üldse olemas. Selline süsteem võiks eksisteerida seal, kus pole gravitatsioonijõude, s. t. väljaspool reaalset maailma. Kõik tegelikult võimalikud, s. o. *ligikaudu inertsiaalsed* arvestussüsteemid on faktiliselt mitteüheväärsed, kuna nad on erineval määral, erisuguselt mitteinertsiaal-

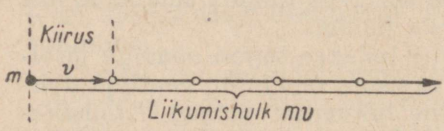
sed. Seepärast on kinemaatika väide inertsiaalsüsteemide täielikust üheväärsusest füüsikalis-filosoofilises suhtes sisutu.

Uurides mingi liikumise relatiivseid peegeldusi erinevates orienteerumissüsteemides, saame ligikaudse ettekujutuse liikumise objektiivsest pildist, ja peab ütlema, et mida vähem inertsiaalne on süsteem, mida suuremad on massid, millega süsteem on reaalselt seotud, seda lähemale me tavaliselt tuleme liikumise tõelisele pildile.

§ 15. Newtoni teine seadus.

Newtoni teises seaduses räägitakse liikumishulga muutumisest ja jõust. Mehhaanikas ja füüsikas nimetatakse *liikumishulgaks* massi m ja keha kiiruse v korrutist. Kui igapäevases elus räägitakse „liikumishulgast", siis asetatakse nendesse sõnadesse kõige sagedamini mõte, mis on analoogiline suurusega mv. Tõepoolest, kui mööda mingit inimtühja tänavat jookseb suure kiirusega üks inimene, siis ei ütle keegi, et liiklemine sellel tänaval on suur; kui tänaval on midagi ootavate inimeste liikumatu hulk, siis jällegi ei ütle keegi selle tänava kohta, et liiklemine temal on suur; tänavaliiklust mõõdame me kõik (vahel ise seda märkamata) tänaval liiklevate inimeste arvu ja nende liikumise keskmise kiiruse korrutisega.

Liikumishulk kujutab endast vektorit, millel on kiiruse suund, kuid mille absoluutväärtus on kiiruse absoluutväärtusest nii mitu korda suurem, kui mitu korda on keha mass m suurem massiühikust. Graafilisel kujutamisel võib liikumishulga vektorite pikkuse võtta m korda suuremana kiirusvektorite pikkusest (nagu see on näidatud joon. 20), kuid sagedamini on sobivam kasutada liikumishulga vektorite kujutamiseks sõltumatut mastaapi.



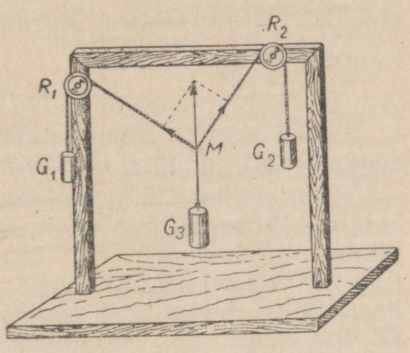
Joon. 20. Liikumishulga vektor, kui $m = 5\ g$.

Rangelt võttes on liikumishulga ülaltoodud definitsioon õige ainult materiaalse punkti jaoks; üldjuhul võivad liikuva keha eriosadel olla erisugused kiirused; siis vaadeldakse keha kui materiaalsete punktide kogumit ja liikumishulga all mõistetakse kõigi keha moodustavate materiaalsete punktide liikumishulkade geomeetrilist summat.

Tihti kasutatakse termini „liikumishulk" asemel suuruse mv tähistamiseks terminit *impulss*.

Jõud on samuti vektor. Jõudude üle otsustame esiteks nende staatilise avaldumise järgi (näiteks rõhumise järgi, mida keha avaldab toele; rõhumine võib painutada pinda, kokku suruda ved-

rut jne.), teiseks nende dünaamilise avaldumise järgi, s. t. kiirenduste järgi, mille keha saab jõu toimel. Esimesel juhul, staatilisel avaldumisel, võib jõu vektoriaalsust kergesti nähtavaks teha katse teel: nii näiteks võib joon. 21 kujutatud lihtsa seadise abil tõestada, et jõud nende staatilisel avaldumisel liituvad geomeetriliselt (rööpküliku reegli järgi, ja enam kui kahe jõu puhul — üldisema hulknurga reegli järgi[1]). Teisel juhul, jõu dünaamilisel avaldumisel, avab „liikumapaneva" jõu vektoriaalsuse mehhaanika teine seadus.



Joon. 21. Jõudude vektoriaalsuse katseline tõestus nende staatilisel avaldumisel.

Mehhaanika teine seadus seisneb järgmises väites (toome selle seaduse Newtoni sõnastuses):

Liikumishulga muutumine on võrdeline rakendatud liikumapaneva jõuga ja toimub piki sirget jõu mõjumise suunas.

Siin on jutt liikumishulga *geomeetrilisest* muutumisest *ajaühiku* jooksul, kusjuures ajaühikuks peab olema valitud piisavalt väike vahemik, ja nimelt niivõrd väike, et selle kestel võiks liikumishulga muutumist pidada ühtlaseks. Selleks et vabaneda sellest segavast tingimusest ajaühiku valikul, tuleb ülaltoodud teise seaduse sõnastuses asendada sõnad „liikumishulga muutumine" ... sõnadega „liikumishulga muutumine, mis toimub elementaarselt väikese ajavahemiku jooksul ja on jaotatud sellele ajavahemikule ...". Edasi lepime kokku mõõta teises seaduses mainitud suurusi niisugustes ühikutes, et oleks võimalik asendada sõna „võrdeline" sõnaga „võrdne". Siis, täielikult säilitades teise seaduse ülaltoodud Newtoni sõnastuse mõtte, võime väljendada seda seadust järgmiselt:

Liikumishulga geomeetriline muutumine, mis toimub elementaarselt väikese ajavahemiku jooksul ja on jaotatud sellele ajavahemikule, on võrdne rakendatud liikumapaneva jõuga ja toimub piki sirget jõu mõjumise suunas.

Järelikult, kui $\boldsymbol{F}$ on liikumapanev jõud, mis on rakendatud kehale (täpsemalt „materiaalsele punktile"), mille mass on m ja kiirus on $\boldsymbol{v}$, siis

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} . \qquad (1)$$

[1] Jõu kujutamist vektorina hakkas esimesena kasutama Stevin, üks staatika rajajatest (1600. a. ümber).

Kui mass on konstantne, siis toimub liikumishulga muutumine üksnes kiiruse muutumise tõttu: $\Delta(mv) = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = \Delta v$; seepärast, kui $m = const$, siis

$$F = m \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

ehk, kui a all mõista kiirendusvektorit, siis juhul, kui $m = const$,

$$F = ma. \tag{2 a}$$

Seda võrrandit silmas pidades sõnastatakse mehhaanika teist seadust tihti nii: *jõud on võrdne massi ja kiirenduse korrutisega.*

Märgime, et „liikumapaneva" jõu vektor on samasuguses vahekorras kiirendusega nagu liikumishulga vektor kiirusega; tõepoolest, liikumishulk ühtib suuna poolest kiirusega ja tema arvuline väärtus on võrdne massi ning kiiruse korrutisega; analoogiliselt ühtib jõud suuna poolest kiirendusega ja ta on arvuliselt võrdne massi ning kiirenduse korrutisega.

Tuletame meelde, et kiirendusvektori a projektsioonid koordinaaditelgedele on võrdsed koordinaatide teist järku osatuletistega aja järgi [§ 6, võrrand (11)]. Jõud F projektsioone koordinaaditelgedele (jõuvektori komponente) tähistame tähtedega X, Y, Z. Vektorvõrrand (2) on samaväärne kolme jõu komponendi skalaarvõrrandiga:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3}$$

Need on *Newtoni liikumise võrrandid.*

Juba Galilei tegi kindlaks, et Maa pinna juures langevad (õhuta ruumis) kõik kehad ühesuguse kiirendusega g, mis on keskmiste geograafiliste laiuste jaoks ligikaudu 9,8 m/sek^2. (Nagu näidatakse VI peatükis, on Galilei kehade vaba langemise seadus üheks Newtoni ülemaailmse gravitatsiooniseaduse järelduseks.) Seega *raskusjõud* P, mis staatiliselt avaldub keha kaalus, *avaldub dünaamiliselt kõigi kehade jaoks ühesuguses kiirenduses* g. Järelikult mehhaanika teise seaduse järgi

$$P = mg; \tag{4}$$

keha kaal on võrdeline keha massiga; võrdeteguriks on raskuskiirendus.

Newtoni teise seaduse mõte on võib-olla kõige selgemini mõistetav selle seaduse niisuguse sõnastuse puhul, kus kasutatakse jõuimpulsi mõistet. Kui jõud, mis mõjub materiaalsele punktile, on konstantne suuruse ja suuna poolest, siis mõistetakse *jõuimpulsi* all jõu ja tema mõjumisaja korrutist. Üldjuhul, kui jõu suurus ja suund on muutuvad, jaotatakse jõu kogu mõjumise aeg

nii väikesteks ajavahemikeks, et iga niisuguse ajavahemiku piirides võib jõu muutumise jätta arvestamata. Jõu ja selle mõjumise lõpmata väikese ajavahemiku korrutist nimetatakse *jõu elementaarimpulsiks;* elementaarimpulss kujutab endast lõpmata väikest vektorit $\boldsymbol{F}\,dt$, millel on mõjuva jõu suund. *Summaarse impulsi* all mõistetakse jõu elementaarimpulsside geomeetrilist summat.

Mehhaanika teise seaduse järgi

$$\boldsymbol{F}dt = d(m\boldsymbol{v}).$$

Järelikult võib jõuimpulsi mõistet kasutades sõnastada mehhaanika teist seadust järgmiselt: *liikumishulga muutumine mistahes lõpmata väikese ajavahemiku jooksul on võrdne jõu elementaarimpulsiga.*

Kujutame endale, et iga ajavahemiku jaoks on välja kirjutatud mehhaanika teise seaduse võrrand äsjatoodud kujul. Liidame kõik need vektorvõrrandid, s. t. ehitame kaks hulknurka; ühe hulknurga külgedeks on elementaarimpulsid, teise külgedeks lõpmata väikesed liikumishulga muutused. On silmanähtav, et kõigi vektorite $d(m\boldsymbol{v})$ geomeetriline summa (s. o. külg, mis suleb kõigist nendest vektoritest ehitatud hulknurga) ei kujuta endast midagi muud kui materiaalse punkti liikumishulga summaarset juurdekasvu vaadeldava ajavahemiku t jooksul; teiselt poolt on samuti silmanähtav, et liikumishulga summaarne juurdekasv aja t jooksul on võrdne materiaalsel punktil aja t lõpuks oleva liikumishulga ja temal alghetkel olnud liikumishulga geomeetrilise vahega. Seega

$$\text{jõuimpulss} = \Sigma\, \boldsymbol{F}\, dt = m\boldsymbol{v}_2 - m\,\boldsymbol{v}_1.$$

Siin Σ on summa märk, kusjuures antud juhul Σ tähendab geomeetrilist summat, kuna selle märgi järel seisab vektor.

Kui alghetkel oli materiaalne punkt paigal ($v_1 = 0$), siis on materiaalse punkti poolt aja t jooksul omandatud liikumishulk võrdne jõuimpulsiga. Seepärast kasutatakse suuruse $m\boldsymbol{v}$ tähistamiseks termini „liikumishulk" kõrval ka terminit impulss.

Laiendatud mõistmisel paigutatakse sõnasse „impulss" „tõuke", „tõuget andva" põhjuse tähendus. Jõuimpulsi mõistet kasutatakse eriti tihti, kui analüüsitakse lühiajaliste, niinimetatud „hetkeliste" jõudude mõju. Nimetades suurust $m\boldsymbol{v}$ impulsiks, peetakse silmas, et suurus $m\boldsymbol{v}$ näitab selle tõuke intensiivsust ja suunda, mida oleks tarvis anda materiaalsele punktile m selleks, et viia teda paigalseisust „silmapilkselt" liikuma kiirusega $\boldsymbol{v}$. Võib samuti öelda, et suurusega $m\boldsymbol{v}$ mõõdetakse tõuget, mida tekitaks materiaalne punkt, kui teda „silmapilkselt" pidurdada kuni seismajäämiseni.

Mehhaanika teine seadus sisaldab veel ka järgmise mõtte: *Kui kehale on üheaegselt rakendatud mitu jõudu, siis igaüks neist annab kehale teise seadusega määratava kiirenduse nii, nagu poleks teisi jõude olemas.*

Seda väidet nimetatakse vahel *jõudude mõju sõltumatuse printsiibiks.* Lahendades mehhaanika ülesandeid Newtoni meetoditega, tuleb seda printsiipi laialdaselt kasutada. Oskuslikul käsitlemisel võib selle printsiibi rakendamine osutuda erakordselt kasulikuks raskete ülesannete lahendamisel. Ka siis, kui kehale on rakendatud kõigest üks jõud, osutub sageli sobivaks lahutada see jõud kaheks või kolmeks liidetavaks, mille geomeetriliseks summaks oleks antud jõud. Nii näiteks kui keha peab oma liikumisel jääma mingile kõvale pinnale, siis osutub peaaegu alati kasulikuks lahutada kehale rakendatud jõud kaheks komponendiks: üheks, mis on suunatud mööda selle pinna puutujat, ja teiseks, mis on suunatud piki pinnanormaali; on selge, et teine komponent ei muuda keha liikumise kiiruse suurust ja avaldub rõhumises, millega keha oma liikumisel mõjub pinnale.

Jõu mõju ei avaldu sõltumatult ainult kehale rakendatud teiste jõudude mõjust, vaid sõltumatult ka sellest, kas keha oli enne paigal või liikus mingi kiirusega. Kehale rakendatud jõu poolt antav kiirus liitub geomeetriliselt keha inertsiaalse liikumise kiirusega. Selle näiteks võib olla visatud keha liikumine (tühjuses): iga ajahetke jaoks kujutab visatud keha kiirusvektor geomeetrilist summat algkiiruse (mis on kehale antud viskamisel) vektorist, mis on kehal inertsi tõttu, ja vertikaalselt allasuunatud keha langemiskiiruse vektorist (visatud keha liikumist vaadeldakse üksikasjaliselt paragrahvis 17).

Kuna teise seaduse võrrand ei käi üksiku materiaalse osakese kohta, vaid keha kui terviku kohta, siis tuleb tihti väga lihtsateski mehhaanika ülesannetes kokku puutuda juhuga, *kus keha mass ei jää liikumise ajal konstantseks.* Kujutame endale näiteks, et täiesti siledal ja libedal laevalael asetseb tross, mille üks ots on lastud vette; suuruselt muutumatu jõu — üle parda rippuva trossi osa raskuse — toimel libiseb tross tekilt alla; see liikumine on kiirenev; selleks et õigesti välja arvutada kiirendust, tuleb arvestada, et mass, millele antakse kiirendus, väheneb liikumise ajal. Tähtsaks liikumise näiteks, mille puhul mass ei jää konstantseks, on raketi lend.

Viimastel aastatel on seoses reaktiivtehnika arenemisega omandanud suure tähtsuse muutuva massiga kehade mehhaanika. Pioneeriks sellel alal oli Peterburi Ülikooli professor I. V. Meštšerski, kes avaldas 1897. a. monograafia „Muutuva massiga punkti dünaamika". Esmakordselt uuris üksikasjaliselt rakettide lennu seadusi teoreetiliselt vene õpetlane Konstantin Eduardovitš Tsiolkovski.

Tuleb silmas pidada, et Newtoni võrrand

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

käib muutuva massi puhul selle juhu kohta, kus massi m juurdekasv või kahanemine toimub massiosakeste, mis olid liikumatud (või muutusid liikumatuteks), liitumise (või eraldumise) arvel.

Kõige üldisemal juhul, kui massi muutumine toimub osakeste arvel, millel on teatav absoluutne kiirus v', viib Newtoni teise ja kolmanda seaduse ühendamine, nagu näitas Meštšerski, valemile

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + v' \frac{dm}{dt} . \qquad (1\,a)$$

Kahe funktsiooni korrutise diferentseerimise reegli järgi

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} ;$$

juhul, kui $v = v'$, koonduvad teised liikmed võrrandi (1a) vasakul ja paremal poolel. Järelikult kui liidetavad (või eraldatavad) massiosakesed ei olnud liikumatud (või ei muutunud liikumatuteks), vaid vastupidi, omasid liitumise (või eraldumise) hetkel sama kiirust, mis põhimass m (s. t. kui $v' = v$), siis võime sel erijuhul, vaatamata massi m muutuvusele, kasutada võrrandit

$$F = m \frac{dv}{dt} .$$

Võttes kasutusele liituvate (või eralduvate) masside relatiivse kiiruse

$$w = v' - v$$

(mis on kohane näiteks raketi liikumise analüüsimisel), saab kõige üldisema võrrandi (1a) taandada Newtoni teise seaduse „koolis kasutatavale sõnastusele" [võrrandile (2)]:

$$m \frac{dv}{dt} = F + F', \quad \text{kus } F' = w \frac{dm}{dt} .$$

Siin F' on „reaktsioonijõud", mis mõjub massile m massiosakeste eraldumise või liitumise tõttu temaga.

§ 16. Mehhaanika teise seaduse erinevad käsitused.

Newtoni teise seaduse käsitamisel ja tema tähtsuse hindamisel on lahkarvamusi.

E. Machi järele, kes 1883. a. avaldatud raamatus „Mehhaanika" üritas Newtoni mehhaanika põhiteeside radikaalse läbivaatamise katset, hakkasid paljud füüsikud käsitama Newtoni teist seadust kui massi või jõu mõiste definitsiooni, mitte aga kui vaatluste ja katsete üldistust.

Need füüsikud, kes käsitavad teist seadust kui jõu mõiste definitsiooni, loevad teist seadust nii: „jõuks nimetatakse massi ja kiirenduse korrutist". Sedaliiki käsitamisel kaotab teine seadus eraldi võetuna igasuguse füüsikalise sisu; meil on ju vabadus anda nimetusi äranägemise järgi. Olles nimetanud jõuks massi ja kiirenduse korrutise, me ei püstita seega mingit uut füüsikalist tõde ja arusaadavalt ei saa pretendeerida sellele, et seda kokkulepet termini „jõud" kohta vaadeldaks kui loodusseadust. Osutatud seisukohalt teine seadus ei ole seadus, vaid on lihtsalt justkui eessõnaks kolmandale seadusele.

Kolmandas seaduses tehakse kindlaks, et alati eksisteerib ainult kehade vastastikune mõju: erinevatele vastastikku mõjuvatele kehadele rakendatud jõud on paarikaupa võrdsed ning vastupidiselt suunatud; nad annavad vastastikku mõjuvatele kehadele suuruse poolest võrdsed, kuid märgi poolest vastupidised liikumishulga muutused. Seepärast ei saa kehadevaheline vastastikune mõju muuta nende kehade summaarset liikumishulka: kui palju kasvab mingi ühe keha liikumishulk, niisama palju kahaneb teiste, esimesega vastastikku mõjuvate kehade liikumishulk (liikumishulga jäävuse seadus). Kõigest sellest me räägime üksikasjalisemalt allpool. Praegu me mainisime seda ainult selleks, et vastandada teist seadust kolmandaga.

Füüsikud, kes käsitavad teist seadust kui jõu definitsiooni, arvavad, et mehhaanika tegelikuks printsiibiks (kogemusest ammutatud) on kolmas seadus. Seda kolmandat seadust oleks võinud sõnastada ka ilma jõu mõistet tarvitusele võtmata (vahetult liikumishulga jäävuse seaduse näol). Sel kombel võib tulla järeldusele, et jõu mõiste ei ole mehhaanika ülesehitamisel hädavajalik. Ja tõepoolest käsitavad paljud „jõudu" kui abimõistet; seejuures on mõnede poolt avaldatud arvamust, et jõu mõistet võib soovi korral kustutada füüsikast ilma olulise kahjuta füüsika sisule.

Newtoni seaduste asemel võib mehhaanika aluseks võtta teisi printsiipe, nagu on näidatud paljude õpetlaste poolt. Selliseid üldisi mehhaanika printsiipe, mis asendavad täielikult Newtoni seadusi ning on mõnikord laiemad, on avaldatud Hamiltoni, Lagrange'i, Jacobi, Gaussi jt. poolt.

Nendel printsiipidel (antud kursuse raamides neid ei saa esitada) ei ole üldiselt ülesannet kõrvaldada mehhaanikast jõu mõiste, kuid nad annavad sellele mõistele igal juhul tagasihoidlikuma osa, kui tal on Newtoni mehhaanikas. Hertz ehitas mehhaanika üles (lähtudes Gaussi poolt avaldatud printsiibist) põhiliselt jõu mõistet liikumiste analüüsil kasutamata. Ei tule aga unustada, et füüsika ülesanded on ulatuslikud; juba staatikas ja eriti materjalide tugevusõpetuses toob jõu mõiste hindamatuid teeneid; ta võimaldab esitada dünaamikat matemaatiliselt suurima lihtsusega; ta võimaldab anda suurt- näitlikkust elektrinähtuste kirjeldamisele ning analüüsile jne.

Mõned teised füüsikud käsitavad teist seadust analoogiliselt esimese rühmaga nagu definitsiooni, aga mitte kui jõu definitsiooni, vaid *kui massi mõiste definitsiooni;* nad loevad teist seadust nii: „inertseks massiks nimetatakse jõu ja selle jõu poolt tekitatava kiirenduse suhet". Erinevalt sellest „inertsest massist" nimetatakse gravitatsiooniseaduse põhjal defineerivat massi „raskeks" ehk graviteeruvaks massiks.

Enamik füüsikuid pooldab õigesti Newtoni seisukohta, mis hoopiski ei ühti kahe ülalesitatud vaatega.

Kahtlemata saab mehhaanikat üles ehitada, andes mõistetele erisuguseid definitsioone ja lähtudes ühtedest või teistest printsiipidest; ent kuna me mehhaanikat uurides võtame aluseks Newtoni seadused, peame endale täiesti täpselt ette kujutama seda tähendust, mille Newton andis enda poolt püstitatud väidetele. Ei ole kahtlust, et Newton avaldas oma teise seaduse kui aksioomi, mis üldistab kogemust, mitte aga kui mõistete „jõud" ja „mass" definitsiooni.

Newtoni teose vene keelde tõlkija — akadeemik A. N. Krõlov — märgib õigesti ühes oma märkustest „Loodusfilosoofia matemaatiliste aluste" esimese raamatu kohta: „Andes mõiste *liikumapanev jõud* definitsiooni, s. t. selle, mida praegu nimetatakse lihtsalt jõuks, pöörab Newton tähelepanu tema mõõtmise viisile ja nimelt *staatilisele* viisile — tasakaalustamine teise jõuga, mis takistab liikumist... Staatiliselt kaks korda suurem jõud annab ka kaks korda suurema liikumishulga... Newton ei ütle kuskil, et jõudu m õ õ d e t a k s e massi ja kiirenduse korrutisega..."

Newtoni järgi mõõdetakse nii jõudu kui ka massi s t a a t i l i s e l t: „Massi mõõdetakse kaalu järgi kangkaalu abil...; liikumapanevat jõudu saadakse teada temaga võrdse ja vastupidise jõu järgi, mis võiks takistada keha liikumise kiirenemist..." (Newtoni „Definitsioonidest", mis eelnevad „Liikumise aktsioomide" sõnastusele).

Niipea kui igaüks teise seadusse kuuluvast kolmest suurusest on määratud ning mõõdetud sõltumatult kahest ülejäänust,

omandab teine seadus silmanähtavalt katse teel kindlakstehtud fakti tähenduse. Kinni pidades eespoolnäidatud terminoloogiast, võib öelda:

teise seaduse füüsikaliseks sisuks on kogemusest võetud tõde, et keha „inertne mass" (s. t. jõu ja kiirenduse suhe) on alati võrdne sellesama keha „raske massiga".

Siis aga on selge, et ei ole tarvidust eraldada inertset massi raskest massist ja järelikult ei ole tarvidust sisse tuua neid kahte terminit; Newton ei tarvitanudki neid ja kasutas ikka üht terminit — *„quantitas materiae"* („mateeria hulk"), mis on samatähenduslik sõnaga „mass".

Inertse ja raske massi võrdsuse kohta ülaltehtud väite õigsuse esimese tõestuse annavad Galilei vaba langemise seadused, millest tuleneb raskuskiirenduse sõltumatus langeva keha erilisest valikust. Muidugi mõista võisid need katsed olla mitte küllalt täpsed. Seepärast kontrolliti eespoolavaldatud väite õigsust hiljem Newtoni poolt, pärast seda Besseli ja ungari füüsiku Eötvös'i poolt. Besseli järgi ei ületa inertse ja raske massi vahe igal juhul 1/20 000; Eötvös'i järgi ei või ta olla suurem kui 1/10 000 000. Sel kombel tuleb inertse ja raske massi võrdsuse väidet käsitada kui täpset loodusseadust. Newtoni mehhaanikas võetakse mõlema massi võrdsust kui eksperimentaalset fakti.

Vastu võttes Newtoni kui füüsiku seisukoha me lükkame siiski tagasi Newtoni kui filosoofi ideed; nõustudes jõu ja massi määramise mõistlikkusega nende mõõtmise staatilise viisi alusel, ja teist seadust sel kombel tunnustades kui katselist fakti, mitte aga kui definitsiooni, ei ole me üldse kohustatud käsitama jõudu kui mingit salapärast liikumiste algpõhjust, millele kaldus Newton oma filosoofilistes arutlustes. Liikumiste algpõhjuseks on liikumine ise; üks liikumise vorm läheb üle teisteks liikumise vormideks. Jõud on meile nende liikumiste ülemineku ja muundumise protsesside äratundmise ning uurimise vahendiks. Jõud eksisteerivad reaalselt oma avaldustes kui selle ülemineku vahepealne lüli, aga kui neid tahetakse käsitleda kui liikumiste algpõhjust, muutuvad nad fiktsiooniks.

„Kujutlus jõust on laenatud, nagu seda kõigi poolt tunnistatakse, ... inimese organismi tegevuse avaldustest teda ümbritseva keskkonna suhtes. Me räägime lihaste jõust, ... näärmete sekretsioonivõimest jne., ... mõtleme välja niisama palju jõude, kui palju on olemas erisuguseid nähtusi ..." (F. Engels, *Looduse dialektika*). Sel määral, kuidas kasvavad meie teadmised tundmaõpitavate nähtuste olemuses, astub kujutlus jõududest tagaplaanile, võrreldes teiste järk-järgult avastatavate suurustega, mis iseloomustavad mingit meid huvitavat nähtust täielikumalt.

Hinnates füüsika poolt Newtonist meie päevini läbitud teed, võib näha, et füüsika arenemise peajoon seisnes „loodusjõudude

ühtsuse" fakti avastamises; jõud, milledel näis olevat erinev päritolu, nagu näiteks molekulaarsed kohesioonijõud, keemilised, elektrolüütilised[1], osmootsed[2] jõud, absorbtsioonijõud[3], pindpinevusjõud ja paljud teised, osutusid üksteisega sugulasteks; lõppkokkuvõttes võis peaaegu *kõiki* füüsika poolt tundmaõpitavaid jõude taandada gravitatsiooni- ja elektrijõududeks ning molekulaarsete liikumiste ilminguteks. Seoses sellega ei mängi kujutlus jõududest kaasaegses füüsikas enam seda osa, mis Newtoni ajal, „jõud" loovutas oma valitseva koha füüsikas „energia" mõistele.

§ 17. Liikumine konstantse jõu mõjul.

Selleks et näidata, kuidas rakendatakse Newtoni seadusi dünaamika ülesannete lahendamisel, vaatleme kaht näidet: sirgjoonelist liikumist konstantse jõu mõjul ja visatud keha liikumist. Mõlemad juhud on iseendast tähtsad.

Kui kehale mõjuv jõud muutub keha liikumisel ja kui selle tagajärjel liikumine osutub keeruliseks, on sageli võimalik jõudu lühikestel ajavahemikel lugeda ligikaudu konstantseks, see võimaldab kasutada liikumise analüüsimiseks trajektoori üksikutes piirkondades allpooltuletatud lihtsaid valemeid.

Sirgjooneline liikumine konstantse jõu mõjul. Muutumatu suuruse ja muutumatu suuna puhul jõud ja silmanähtavalt ka kiirendus säilitavad kogu liikumise ajal nii *konstantse* arvulise väärtuse kui ka suuna; kui jõud seejuures mõjub liikumise suunas, siis kiirus kasvab (kiirendus a on positiivne) ja liikumist nimetatakse *ühtlaselt kiirenevaks;* kui aga jõud mõjub liikumisele vastupidises suunas, siis kiirus kahaneb (kiirendus a on negatiivne) ning liikumist nimetatakse *ühtlaselt aeglustuvaks.*

Ilma tõuketa lahtilastud (pillatud) kivi liigub ühtlaselt kiirenevalt mööda vertikaali allapoole konstantse raskusjõu mõjul. Vertikaalselt ülesvisatud kivi liigub algul ühtlaselt aeglustuvalt, aga pärast kõrgeima punkti saavutamist liigub allapoole ühtlaselt kiirenevalt.

Tehnikas kohtame tihti juhte, kus orienteerivatel arvestustel võib liikumist esimeses lähenduses pidada ühtlaselt kiirenevaks või ühtlaselt aeglustuvaks. Nii näiteks võib rääkida rongi ühtlaselt kiirenevast liikumisest tema väljumisel jaamast ja tema ühtlaselt aeglustuvast liikumisest tema pidurdamisel enne peatumist.

Vaatleme ühtlaselt kiirenevat või ühtlaselt aeglustuvat liiku-

[1] Jõud, mis põhjustavad mõnede vees lahustatud ainete molekulide lagunemise elektriliselt laetud osadeks.

[2] Osmoos — lahusti, näiteks vee tungimine läbi „poolläbilaskva" vaheseina, mis laseb läbi lahustit ja ei lase läbi lahustatud ainet.

[3] Absorbtsioon — imamine; näiteks gaaside imamine söe poolt.

mist ja leiame, kuidas muutuvad kiirus ja läbitud tee sedaliiki liikumistel.

Olgu punkti kiirus mingil alghetkel v_0. Kuna kiirendus a kujutab endast kiiruse muutumist ajaühiku jooksul, siis t sekundi pärast muutub kiirus suuruse $a \cdot t$ võrra, ja järelikult on momendil t kiirus

$$v = v_0 + at. \tag{5}$$

Selleks et arvutada aja t jooksul läbitud teed, märgime, et kuigi kiirus liikumise ajal kasvab või kahaneb, võime tema muutumise ühtluse tõttu pidada läbitud vahemaa arvutamiseks liikumist ajavahemikust 0-st t-ni toimuvaks mingi seda ajavahemikku iseloomustava *keskmise* kiirusega v_{keskm}. Selle väärtus on algkiiruse v_0 ja lõppkiiruse $v_0 + at$ aritmeetiline keskmise, ja nimelt:

$$v_{keskm} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Seega avaldub aja t jooksul läbitud tee korrutisega $v_{keskm} \cdot t$, s. o.

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{6}$$

See ongi *liikumise võrrand*, kui $a = const.$

Kui algkiirus $v_0 = 0$, siis valemid lihtsustuvad:

$$v = at, \; s = \frac{at^2}{2}.$$

Erilist huvi pakub kehade liikumine raskusjõu mõjul.

1. Kui keha on p i l l a t u d (ilma tõuketa lahti lastud), siis ta hakkab ühtlaselt kiirenevalt liikuma vertikaalselt allapoole. See liikumine on määratud valemitega

$$v = gt, \; s = \frac{gt^2}{2},$$

kus $g = 981$ *cm/sek*^{2} on raskuskiirendus. Nendest kahest valemist saab aja t elimineerimisel määrata keha lõppkiiruse langemisel kõrguselt h:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{7}$$

2. Kui keha on v i s a t u d vertikaalselt a l l a algkiirusega v_0, siis

$$v = v_0 + gt, \; s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

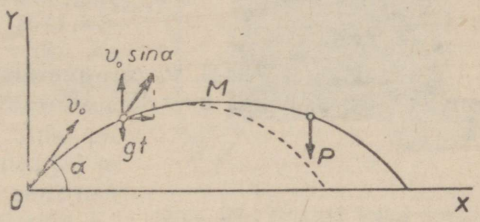
3. Kui keha on visatud vertikaalselt üles algkiirusega v_0, siis, lugedes suunda üles positiivseks ja alla — negatiivseks (nii et $a = -g$), saame:

$$v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Siit on kerge leida aega t', mis kulub kehal suurimale kõrgusele tõusmiseks, ja suurimat kõrgust s_{maks}. Tõepoolest, võttes $v = 0$, saame $t' = \frac{v_0}{g}$ ja, asetades selle väärtuse teise valemisse, saame:

$$s_{maks} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Visatud keha liikumine. Vaatleme mürsu lendu, mis on lastud algkiirusega v_0 nurga α all horisondiga (joon. 22). Suuname telje X horisontaalselt ja telje Y vertikaalselt ning lahutame algkiiruse v_0 horisontaalseks komponendiks $v_0 \cos\alpha$ ja vertikaalseks komponendiks $v_0 \sin\alpha$.



Joon. 22. Horisondi suhtes nurga α all lastud mürsu lend. Punktiiriga on näidatud ballistiline kõver.

Kuna raskusjõul P ei ole horisontaalset komponenti, siis horisontaalne kiirus v_x jääb konstantseks:

$$v_x = v_0 \cos\alpha.$$

Abstsiss x määratakse kui tee, mis on läbitud ühtlasel liikumisel kiirusega $v_0 \cos\alpha$:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t. \qquad (8)$$

Kiiruse vertikaalne komponent v_y muutub aja jooksul: ta kujutab endast ülespoole suunatud algkiiruse vertikaalse komponendi $v_0 \sin\alpha$ ja mürsu poolt raskusjõu toimel saadava allapoole suunatud kiiruse, mille absoluutväärtus on gt, vahet, s. t.

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Ordinaat y leitakse, kui lahutada nihkest, mis on toimunud ühtlasel liikumisel vertikaalselt üles kiirusega $v_0 \sin\alpha$ ja mille arvuline väärtus on $v_0 \sin\alpha \cdot t$, nihe, mis on toimunud ühtlaselt kiireneval liikumisel raskusjõu mõjul vertikaali mööda alla ja mille arvuline väärtus on $\frac{gt^2}{2}$, nii et

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (9)$$

Määrame kõige suuremale kõrgusele tõusmiseks kuluva aja t', maksimaalse kõrguse y_{maks} ja lennu kauguse x_{maks}. Kuna trajektoori kõrgeimas punktis M on kiiruse vertikaalne komponent null, siis v_y avaldisest saame:

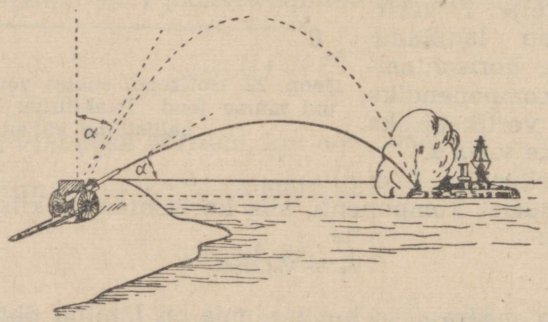
$$t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Asetades võrrandisse (9) $t = t'$ ja võrrandisse (8) $t = 2t'$, saame lennu kõrguse ja kauguse:

$$y_{maks} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \tag{10}$$

$$x_{maks} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{11}$$

Antud algkiirusel v_0 on avaldisel (11) suurim väärtus, kui $\sin 2\alpha = 1$, s. t. kui $\alpha = 45°$. Järelikult saadakse suurim mürsu



Joon. 23. Laskmine lameda ja järsu lennujoonega.

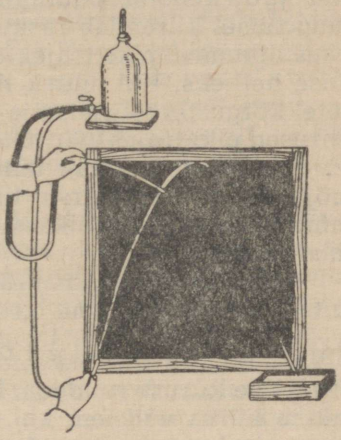
lennukaugus 45°-se tõusunurga juures. Edasi, kuna $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2(90° - \alpha)$, siis kaugus antud algkiirusel v_0 on üks ja sama nii viskenurga α kui ka $90° - \alpha$ juures, järelikult on olemas *kaks* trajektoori, mida mööda liikudes visatud keha langeb ühte ja samasse punkti. Üks nendest on lame, teine on järsk (joon. 23).

Elimineerides võrranditest (8) ja (9) aja, saame mürsu trajektoori võrrandi — *parabooli*:

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \tag{12}$$

(joon. 24).

Võrrandid on tuletatud eeldusel, et õhk ei takista visatud keha liikumist. Suurte algkiiruste puhul ei saa sellist eeldust teha, ja toodud võrrandites tuleb teha olulised parandused. Trajektoor ei ole enam parabool, tema langev haru on tunduvalt järsem tõusvast harust (niinimetatud ballistiline kõver, mis on kujutatud joon. 22 punktiiriga); lennu kõrgus ja kaugus vähenevad tunduvalt.



Joon. 24. Visatud keha trajektoori lihtsaim demonstreerimine.

Nagu näidati paragrahvis 7, võib kiirendust a alati lahutada kaheks komponendiks: tangentsiaalkiirenduseks a_τ (piki trajektoori puutujat) ja kesktõmbekiirenduseks a_r (piki kõverusraadiust). Vastavalt võib ka liikumapanevat jõudu $F = ma$ lahutada alati kaheks komponendiks: *tangentsiaalseks jõuks* F_τ, mis on suunatud piki trajektoori puutujat ja avaldub kiiruse arvulise väärtuse muutumises, ja *kesktõmbejõuks* F_r, mis on suunatud piki peanormaali kõveruskeskpunkti poole ning avaldub liikumise suuna muutumises, keha kõrvalekaldumises sirgjoonelisest trajektoorist, mida mööda keha püüab inertsi tõttu liikuda:

$$F_\tau = ma_\tau, \quad F_r = ma_r.$$

Tuletades meelde paragrahvis 7 tuletatud tangentsiaal- ja kesktõmbekiirenduse avaldisi, saame tangentsiaalse jõu ja kesktõmbejõu jaoks alljärgnevad valemid:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt}, \tag{13}$$

$$F_r = \frac{mv^2}{R}. \tag{14}$$

Kasutades nurkkiiruse ω mõistet (§ 8) ja arvestades, et $v = \omega R$, võib kesktõmbejõu valemit kirjutada järgmiselt:

$$F_r = m\omega^2 R. \tag{15}$$

Eespool vaadeldud visatud keha liikumise näites (mürsu lennul õhuta ruumis) on tangentsiaalseks jõuks mürsu raskusjõu projektsioon trajektoori puutujale (on arusaadav, et jutt on puutujast selles punktis, kus mürsk on antud momendil). Mürsu üleslennu ajal (s. o. kuni punktini M joon. 22) mõjub osutatud tangentsiaalne jõud vastupidises suunas liikumisele. Sel ajal liigub

mürsk piki trajektoori aeglustuvalt; algul tugeva aeglustumisega, pärast — lähenemisel trajektoori haripunktile — nõrgemaga (sest punktis M võtab trajektoori puutuja horisontaalse sihi ja raskusjõu projektsioon puutujale muutub võrdseks nulliga). Mürsu langemisel kiirendab raskusjõu tangentsiaalne komponent mürsu edasiliikumist piki trajektoori; kõige tugevamalt — mahalangemise hetkeks. Kui mürsk liiguks õhuta ruumis, siis oleksid võrdsetel kõrgustel tõusmise ja langemise juures mürsu edasiliikumise kiirused piki trajektoori ühesugused. Mürsu liikumisel atmosfääris on õhu poolt osutatav takistus samuti tangentsiaalseks jõuks ja mõjub kogu aeg mürsu liikumisele aeglustavalt. Seepärast on mürsul langemisel väiksem kiirus, kui tal oli samal kõrgusel tõusmise juures.

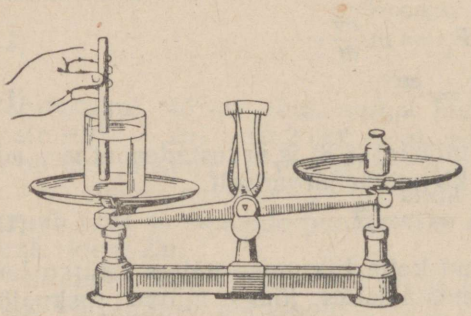
Projekteerides mürsu raskusjõu peanormaali sihile (trajektoori antud punktis), saame kesktõmbejõu. Valemist (14) ilmneb, et trajektoori kõrverus ($\frac{1}{R}$) on võrdeline kesktõmbejõuga ja pöördvõrdeline kiiruse ruuduga. Kuna langemisel on atmosfääris liikuva mürsu kiirus väiksem kui tõusmisel, siis on trajektoori kõverus langemisel suurem kui tõusmisel (ballistiline kõver joon. 22).

§ 18. Newtoni kolmas seadus.

Newtoni dünaamika kolmas seadus räägib, et jõudude poolt põhjustatud liikumiste muutuste juures, aga samuti ka jõudude staatilisel avaldumisel on alati tegemist kahe või enama keha vastastikuse mõjuga.

Newton sõnastas kolmanda seaduse järgmiselt:

Mõjule on alati olemas võrdne ja vastupidine vastumõju, teiste sõnadega — kahe keha mõjud teineteisele on alati võrdsed ja vastassuunalised.



Joon. 25. Vedelikku asetatud kehale mõjub vedeliku üleslükkejõud; vastumõju avaldub vedeliku kaalu näivas suurenemises.

Selle seaduse sisu selgitab ta järgmiste sõnadega: „Kui keegi rõhub sõrmega kivile, siis samuti rõhub kivi ka tema sõrme. Kui hobune veab köie otsa seotud kivi, siis, ümberpöördult, tõmmatakse ka hobust sama suure jõuga kivi poole, sest et pingule tõmmatud köis oma elastsusega põhjustab ühesugust jõupingutust hobusele kivi poolt ja kivile hobuse poolt...

Kui mingi keha, põrganud vastu teist keha, muudab mõnevõrra selle liikumishulka, siis ta enese liikumishulk muutub samavõrd, kuid vastassuunaliselt, kuna need mõlemad kehad rõhuvad alati teineteist võrdselt."

Kehad mõjuvad teineteisele alati vastastikku; nii tõmbab Maa enda poole kivi viimase raskusega võrdse jõuga, sellesama jõuga mõjub ka kivi Maale. Me ütleme: „kivi langeb Maa peale"; tegelikult toimub mõlemapoolne liikumine, kuid vastavalt mehhaanika teisele seadusele on Maa kiirendus võrreldamatult väike: ta on nii mitu korda väiksem kivi kiirendusest, kui mitu korda on kivi mass väiksem Maa massist.

Sattudes eksitusse, arutatakse mõnikord nii: kui mõjuv jõud kutsub alati esile suuruse poolest võrdse, kuid vastassuunalise vastumõju, siis resultantjõud oleks alati nagu võrdne nulliga; kuidas võib siis sellisel juhul jõu mõjul toimuda liikumise muutumine? Mida on tarvis silmas pidada, et mitte sattuda sellesse vasturääkivusse? Ainult seda, et mõju on jõud, mis on rakendatud *ühele* vastastikku mõjuvatest kehadest, aga vastumõju on jõud, mis on rakendatud *teisele* kehale, ja seepärast on kumbki kehadest ühe jõu mõju all, mis põhjustabki tema liikumise.

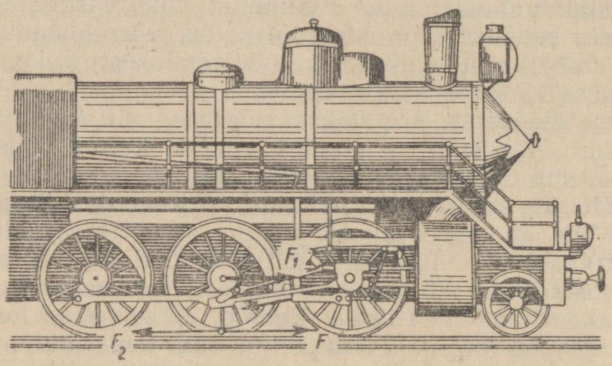
Kuna mõju ja vastumõju on alati vastassuunalised, siis on silmanähtav, et kaks keha ei saa mõlemad ühes ning samas suunas liikuma hakata üksnes vastastikuse mõju tõttu teineteisele. Kui on olemas mingi kahe teineteisele vastastikku mõjuva kokkukuuluva keha (näiteks hobuse ja vankri) kiirenev liikumine, siis jõud, mis annab nendele kehadele kiirenduse, on ikka mõni välisjõud, mis on rakendatud samaaegselt mõlemale nendest kehadest ja mis tekitatakse nendest kehadest ühe või mõlema vastastikuse mõju poolt mõnele kolmandale kehale, mille suhtes vaadeldavatel kehadel on kiirendus. Nii on juhul, kui hobune tõmbab vankrit, kui vedur paneb liikvele vagunid, kui üks kahest inimesest tirib teist enda taga, ületades teise vastupanu, liikumapanevaks jõuks hobuse või inimese ja maapinna vastastikune mõju, veduri rataste ja rööbaste vastastikune mõju (joon. 26), üldse — toe vastumõju (tähtis on vastumõju horisontaalne komponent).

Kõigil nendel juhtudel esineb toega kaks vastastikuse mõju liiki: esiteks toe vastumõju, teiseks hõõre.

Et toe vastumõju oleks kas või osaliseltki liikumapanevaks või pidurdavaks jõuks, peab ta suund moodustama tee pinnaga teravnurga, mitte aga täisnurga; mainitud juhtudel — hobuse ja vankri liikumine, rongi liikumine jne. — vastumõju vertikaalne komponent tasakaalustub kaaluga. Mis puutub vastumõju horisontaalsesse komponenti, siis võib ta eksisteerida ainult niivõrd, kuivõrd on olemas hõõre[1]. Kui hõõret ei ole, siis on vastumõju

[1] Seepärast nimetatakse toe vastumõju horisontaalset komponenti tihti *veohõõrdeks* erinevalt *pidurdavast* hõõrdest.

alati suunatud risti toe pinnaga, ja seepärast tä ei kutsu esile ega pidurda keha liikumist selle pinnaga paralleelses sihis. Ideaalselt siledal pinnal ei oleks inimene suuteline sammugi astuma; kiilasjää puhul, kui hõõrdumine on väike, ei suuda hobune veokit paigalt liigutada; kui ei oleks hõõret veduri veorataste ja rööbaste vahel, ei suudaks ka vedur rongi paigalt nihutada.



Joon. 26. Hõõre on alati vastassuunaline relatiivse liugumiskiirusega. Jõudude F_1 ja F_2 paar pöörab veduri veoratast ja püüab panna teda liuguma mööda rööbast. Seepärast on liughõõrde jõud F, mis on rakendatud ratta bandaažile, liikumise suunaline; ta tasakaalustab ühe pöörava jõupaari jõududest — jõu F_2. Jõupaari teine jõud ($F_1 = F$) liigutab telge. Veerehõõre pidurdab liikumist.

Selleks et panna ennast liikuma, peab olema tugi, millest oleks võimalik ennast eemale tõugata. Nii paneme parvel seistes parve liikuma, tõugates ennast ridva abil eemale kaldast või põhjast. Iga liiki takistust liikumisele võib kasutada enam või vähem kindla toena sedaliiki äratõukamiseks. Vesi avaldab üsna suurt takistust temasse sukeldunud kehade liikumisele, seepärast on meil võimalik paati liikuma panna, vajutades aerud vette ja tõmmates neid läbi vee vastassuunaliselt sellele suunale, kuhu me tahame paadiga sõita. Õhk avaldab samuti liikumisele teatavat takistust, ainult seepärast ongi võimalik lindude ja lennukite lendamine.

Newtoni kolmanda seaduse järgi ei saa mõju eksisteerida ilma vastumõjuta, seepärast ei või ükski masin iseendast arendada jõudu, mis paneb teda liikuma; tarvilik on veel vähemalt ühe (masina suhtes välise) keha osavõtt, mille vastumõju paneb masina liikuma[1].

[1] Rakettmootori puhul on liikumapanevaks jõuks väljapaisatavate gaaside poolt mootorile arendatav reaktiivne rõhumine.

Nende kahe vastassuunalise jõu samaaegne tekkimine tähendab vastavalt teisele seadusele, et mõlema vastastikku mõjuva keha juures esinevad võrdsed, kuid vastassuunalised liikumishulga muutused. Näiteks kui paat liigub edasi, siis vesi liigub aerude rõhumise tagajärjel tagasi. Paigalt liikumahakkav rong annab vastassuunas tõuke rööbastele, raudteetammile ja koos nendega kogu maakerale; on selge, et Maa suure massi tõttu saab ta tähtsusetult väikese kiirenduse, võrreldes selle kiirendusega, mille saab sellest vastastikusest mõjust rong.

Kolmanda seaduse kui avara füüsika printsiibi õigeks mõistmiseks on tähtis pöörata tähelepanu sellele, et selle seaduse eespooltoodud Newtoni sõnastuses ei ole viidet, kas mõju ja vastumõju on suunatud ühte sirget mööda; väidetakse ainult, et nad on vastassuunalised, s. t. et nad on antiparalleelsed.

Kolmandat seadust rakendatakse kahesuguselt: 1) seadusena, mis määrab kindlaks materiaalsete punktidena vaadeldavate kehade *vahetu vastastikuse mõju*, ja 2) seadusena, mis määrab kindlaks kehade *resultatiivse vastastikuse mõju*, mis toimub rea vahepealsete kehade või keskkonna kaudu.

Materiaalsete punktidena vaadeldavate kehade vahetu vastastikuse mõju puhul on mõju ja vastumõju suunatud peaaegu alati mööda ühte sirget, muidugi eri suundades. Tähtsaks erandiks on magnetite ja vooluga juhtide vastastikune mõju, kus mõju ja vastumõju (s. o. vooluelemendi mõju magnetpoolusele ja magnetpooluse mõju voolule) on suuruselt võrdsed ja suunatud eri suundades, kuid mitte mööda üht sirget, vaid mööda kaht paralleelset sirget.

Mis puutub kehade resulteerivasse vastastikusse mõjusse, siis kui see toimub materiaalsete lülide kaudu, mida võib täielikult ühendada ühega vastastikku mõjuvatest kehadest (s. t. ei ole vastastikust mõju kolmanda kehaga), siis ka sel juhul on ahela otsmistele lülidele rakendatud mõju ja vastumõju võrdsed ja suunatud piki ühte sirget vastassuunaliselt. Osutatud asjaolu lubab sageli selliste kehade puhul tarvitada võrrandeid, mis on tuletatud materiaalsete punktide liikumise jaoks. Tuleb siiski märkida, et kui resulteeriv mõju (nagu ka vastumõju) moodustub mitmest, oma päritolult sõltumatust jõust, siis, kuna mõju ja vastumõju rakenduspunktid on eraldatud vahepealsete materiaalsete lülide olemasoluga, on mõju ja vastumõju seotud komponendid võrdsed ja vastupidi suunatud, kuid üldiselt mitte mööda üht sirget, vaid mööda kaht paralleelset sirget. Nii on liikuva jalgratturi juures tema ja jalgratta ühisele raskuskeskmele rakendatud (kui kõrvale jätta hõõre) kaks jõudu: nende kogukaal ja toe vastumõju; tee kurvidel kallutab jalgrattur ennast koos jalgrattaga trajektoori nõgususe poole, et mitte kaotada tasakaalu; siis avaldub osutatud jõudude geomeetriline summa kesktõmbejõuna,

mis kindlustab jalgratta liikumise mööda tee kurvi. Rõhumine maapinnale suureneb seejuures, see moodustub jalgratta ja jalgratturi kogukaalust ning inertsi kesktõukejõust, kusjuures see inertsi kesktõukejõud on võrdne ja antiparalleelne kesktõmbejõuga. Analoogilist juhtu on vaadeldud paragrahvis 20 ja illustreeritud joonisega 35.

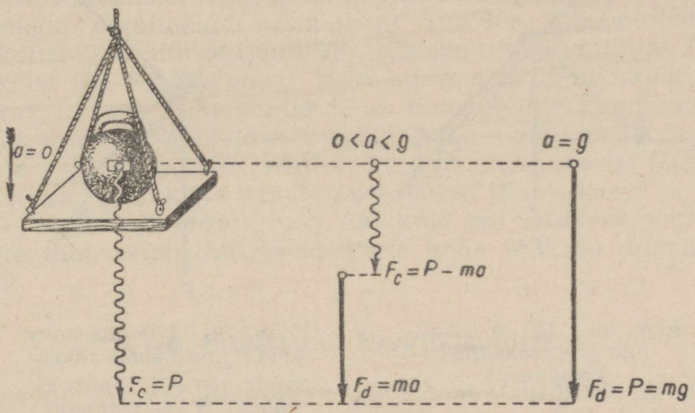
Praktiliste rakenduste jaoks on eriline tähtsus kehade resultatiivse vastastikuse mõju analüüsil nendel juhtudel, kus jõudude edasiandmisest võtavad osa erakordselt massiivsed kehad, mis on „tugipunktideks", ja kui selle tagajärjel resultatiivne mõju ja vastumõju võivad olla suuruselt erisugused ning suunatud teineteise suhtes mistahes nurga all. Nii ei ole plokkide ja kangide kasutamisel jõud, mida me rakendame koormise tõstmiseks, ja koormise vastumõju suunatud üht sirget mööda ja need võivad tugipunktide toimel moodustada mistahes nurga; näiteks võivad nad olla orienteeritud ühele poole mööda kaht paralleelset sirget, ja mittevõrdsete õlgadega kangide korral osutuvad peale selle ka nende arvulised väärtused erinevateks. Newton märgib oma „Loodusfilosoofia matemaatiliste aluste" esimese jao lõpus, et mehhanismides ja masinates ei ilmne mõju ja vastumõju vastupidine suunatus alg- ja lõpplüli jaoks mitte nende jõudude geomeetrilises suunas, vaid nende avaldumise otse vastupidises iseloomus. Tõepoolest on mõju ja vastumõju poolt tekitatud efektid alati vastupidised dünaamiliselt või siis energeetiliselt: need jõud kas kutsuvad esile vastassuunalise liikumise või siis vastastikku mõjuvate kehade ühise liikumise puhul üks nendest jõududest teeb tööd ja teine tarvitab tööd. Nagu me näeme, on selle järelduseks esiteks liikumishulga jäävuse seadus (§ 25) ja teiseks üldine printsiip, mis määrab tasakaalu tingimusest, et väikeste võimalike nihete ja nendele projekteeritud mõju ja vastumõju vektorite korrutiste summa on võrdne nulliga (§ 27).

§ 19. Jõudude staatiline ja dünaamiline avaldumine.

Teoreetilises mehhaanikas lepitakse tavaliselt kokku kujutada jõude ja jõudude mõju all olevaid kehi skematiseeritult, nimelt loetakse, et jõud on rakendatud kas materiaalsele punktile või absoluutselt kõvale kehale (absoluutselt kõva keha all mõistetakse keha, mis on täiesti kokkusurumatu ja kuju poolest täiesti muutumatu). Sedaliiki lihtsustuse puhul on jõu ainsaks avalduseks tema dünaamiline toime, s. t. tema poolt antav kiirendus. Kui mingil kehal kiirendust ei ole, siis järeldatakse sellest, et sellele kehale jõud ei mõju.

Laiemalt füüsikaliselt seisukohalt ei ole see lihtsustus alati kohane. Mingi platvormil asetsev koormis on kahe temal tasa-

kaalustuva jõu — raskusjõu ja sellega võrdse, kuid vastassuunalise toe vastumõju — mõju all. Koormise aine on nende jõudude poolt kokku surutud ja ta seisund erineb sellest, mis siis esineks, kui koormisele ei mõjuks mingisuguseid jõude. Selleks et rakendada teoreetilise mehhaanika järeldusi keha sisemuses eksisteerivate rõhumiste ja pingsuste uurimiseks, mis tekivad kahe võrdse, kuid vastassuunalise jõu tasakaalustumise tulemusena sellel kehal, on vaja vaadelda keha kui materiaalsete punktide kogumit, kuid selleks on tarvilik teha erilisi hüpoteese keha ehituse kohta.



Joon. 27. Kaalu staatiline (F_c) ja dünaamiline (F_d) ilming („kaalu kaotus" langemisel kiirendusega).

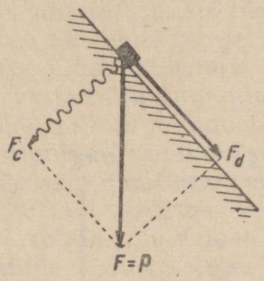
Silmas pidades üksnes absoluutselt kõvu kehi ja materiaalsete punktide süsteeme, võib jääda kujutluse juurde, et jõud on massi ja kiirenduse korrutis (arvestamata jõu staatilist toimet); siiski toob see kujutlus mehhaanikasse ainult puhtmatemaatilisi lihtsustusi; füüsika seisukohalt tuleb teda kasutada teatava ettevaatusega.

Newtoni käsituse järgi võib jõud avalduda kahesuguselt: *dünaamiliselt*, andes kehale kiirenduse, ja *staatiliselt*, põhjustades keha rõhumist teistele kehadele, mis takistavad vaadeldava keha liikumist. Et selgitada sellist jõu käsitamise erinevust tollest, mis arvestab ainult dünaamilist toimet, selleks vaatame mõlemalt seisukohalt mõnd lihtsat liikumise näidet.

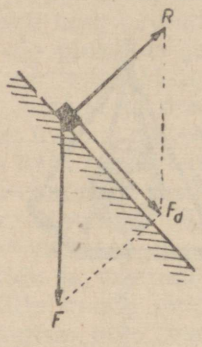
Teatav koormis on asetatud platvormile, mida hoitakse ülal köie abil (joon. 27). Koormisele on rakendatud tema raskus P. Kui platvorm on liikumatu, ja ka siis, kui platvormi lastakse alla konstantse kiirusega (ilma kiirenduseta), avaldub koormisele

rakendatud koguraskus staatiliselt rõhumises, mida koormis avaldab platvormile (sellel joonisel, nagu ka ülejäänutel antud paragrahvis, kujutab looklev nool jõu staatilist ilmingut).

Kui köit lastakse järele nii, et platvorm langeb kiirendusega, siis avaldub raskusjõud osaliselt dünaamiliselt, andes koormisele kiirenduse a, tema ülejäänud osa avaldub koormise staatilises rõhumises platvormile: $F_c = P - ma$. Järelikult rõhub koormis viimasel juhul platvormile väiksema jõuga kui siis, kui koormist lastakse alla ühtlaselt. Köit hoidva vaatleja seisukohalt kiirendu-



Joon. 28. Jõu F staatiline ja dünaamiline komponent.



Joon. 29. Liikumapanev jõud F_d on kehale rakendatud jõu F ja toereaktsiooni R — resultant.

sega allalastav koormis „kaotab kaalus" seda enam, mida suurema kiirendusega ta langeb. Kui koormis koos platvormiga langeb „vabalt" (s. t. kiirendusega g, mida on kehale võimeline andma tervikuna dünaamiliselt avalduv raskusjõud), siis koormis ei avalda mingisugust rõhumist platvormile ja köis pole hoopiski pingule tõmmatud.

Vaatleme sedasama koormise „mittevaba" langemise näidet teisiti. Arutleme nii. Raskusjõud annab koormisele kiirenduse g, mis on suunatud allapoole; kui köis on pingutatud koormise kogu raskusjõuga, siis platvormi rõhumine koormisele annab koormisele kiirenduse g, mis on suunatud ülespoole; kiirenduste geomeetriline summa (mida saab koormis) on null; järelikult jääb koormis liikumatuks. Kui koormis langeb g asemel kiirendusega a, siis tähendab see, et platvormi rõhumisega anti talle kiirendus $(g - a)$ ülespoole ja köie pingsus on järelikult $P - ma$. Koormis langeb kiirendusega g siis, kui platvorm ei avalda temale rõhumist, s. t. kui köis ei ole pingutatud.

Tavaliste mehhaanika ülesannete piirides on mõlemad seisukohad matemaatiliselt võrdõiguslikud.

Koormise mittevabal langemisel kutsub kaalu staatiline ilming, s. o. koormise rõhumine platvormile, kolmanda seaduse järgi esile platvormi vastumõju *(reaktsiooni)*. Kui koormis on liikumatu, siis reaktsioon tasakaalustab kaalu. Kui koormis langeb teatava kiirendusega, siis platvormi reaktsioon tasakaalustab koormise kaalu selle osa, mis avaldub staatiliselt; kaalu ülejäänud osa (mis on parajasti võrdne kehale rakendatud jõudude resultandiga) jääb tasakaalustamata ja annab koormisele kiirenduse.

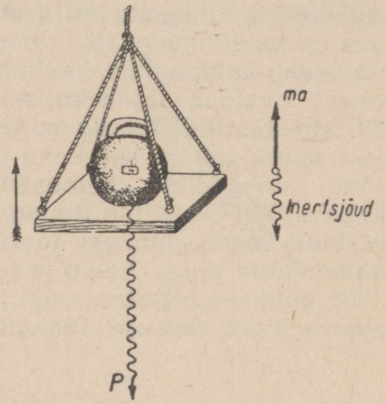
Kujutame endale, et täiesti siledale kaldpinnale on asetatud mingi keha. Kaalu komponent, mis on kaldpinnaga risti, avaldub staatiliselt rõhumises, mida keha avaldab kaldpinnale; kaalu teine kaldpinnaga paralleelne komponent avaldub dünaamiliselt: ta annab kehale kiirenduse (joon. 28). Jõu staatiline ilming on *kehale rakendatud* jõu *F* komponent, kuid samal ajal on see keha poolt *arendatav* ja *toele rakendatud* jõud; dünaamiline komponent on rakendatud ainult vaadetavale kehale. Jõu staatiline ilming kutsub esile suuruse poolest võrdse, kuid vastassuunalise toereaktsiooni. Keha liigub kahe temale rakendatud jõu — kaalu ja reaktsiooni — resultandi mõjul (joon. 29), kuid see resultant ongi jõud, mida me tähistasime kui vaadeldava keha raskuse dünaamilist ilmingut.

§ 20. Inertsjõud. Kesktõukejõud.

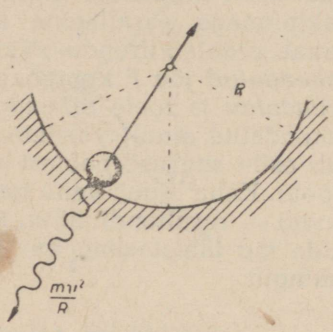
Kõige sagedamini avalduvad inertsjõud staatiliselt rõhumises, mida mingi inertsjõudu arendav keha avaldab teisele kehale, mis on esimese keha liikumise oleku muutumise põhjustajaks. Kiirenevalt ülestõstetav koormis avaldab platvormile inertsjõu tõttu täiendavat rõhumist (joon. 30). Köit tõmbavale vaatlejale näib, et koormis „suureneb kaalult" seda enam, mida suurema kiirendusega seda tõstetakse. Vastu seina visatud pall avaldab inertsjõuga rõhumist seinale. Kui me hästi tunneksime väikseimate aineosakeste vastastikuse mõju seadust ja kui me teataval ajahetkel kuidagimoodi oleksime fotografeerinud vastu seina põrkamisel kokkusurutud palli kummikesta kõigi osakeste paigutuse, siis me veenduksime, et palli poolt seinale avaldatav rõhumine on elastsusjõudude resultaadiks, mis tekkisid palli osakeste normaalse jaotuse rikkumise tõttu põrkamisel vastu seina. Ühe keha rõhumine teisele kujutab endast alati kas aineosakeste elastsete nihkumiste või siis molekulaarsete põrgete resultaati.

Kuid milline ka ei oleks jõu „mehhanism", millega üks keha rõhub teist või tõmbab teda enda järel, me nimetame seda jõudu inertsjõuks, kui see jõud t e k k i s vastastikku mõjuvatest kehadest kas või ühe keha liikumise oleku muutumise tagajärjel. Sel kombel me tähistame mehhaanikas füüsikalise olemuse poolest üht ja sama nähtust, olenevalt tema päritolust, ühtedel juh-

tudel kui inertsjõudu, teistel — lihtsalt kui jõu staatilist ilmingut. Nii ütleme näiteks nööri kohta, mida me hoiame ühest otsast ja mille teise otsa on seotud kaaluviht, mida me sama nööri abil tiirutame mööda ringjoont, et nöör on pingule tõmmatud kesktõmbe (inertsjõu) poolt. Selle jõu füüsikaline ilming on samasugune nagu siis, kui nööri oleks pingutanud mingi staatiline jõud.



Joon. 30. „Kaalu suurenemine" tõstmisel kiirendusega toimub keha poolt arendatava inertsjõu arvel.



Joon. 31. Kesktõmbejõud läbib kõveruskeskpunkti. Kesktõukejõud on temaga vastassuunaline ja on rakendatud toele.

Kui mingite kehade poolt avaldatud rõhumine või pingsus sunnib teatavat liikuvat keha kõrvale kalduma sirgjoonelisest teest, siis ütleme, et *sirgjoonelisest teest kõrvalekalduv keha arendab kesktõuke inertsjõudu,* mis on vastassuunaline kesktõmbejõuga, millega trajektoori kõverdumist põhjustanud kehad rõhuvad liikuvale kehale või tõmbavad teda (joon. 31). Mõju ja vastumõju võrdsuse seaduse järgi on nende kahe jõu arvulised väärtused alati võrdsed, seepärast määratakse inertsi kesktõuke inertsjõudu valemiga

$$F_r = \frac{mv^2}{R} \tag{16}$$

ehk, mis on seesama:

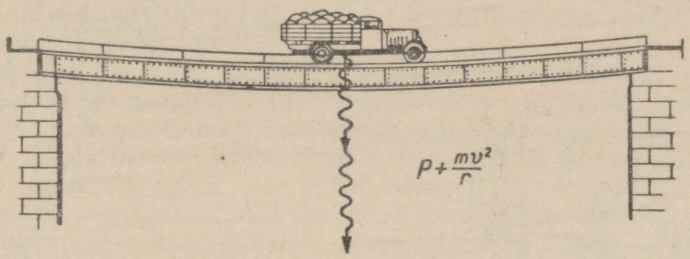
$$F_r = m\omega^2 R. \tag{17}$$

Kesktõmbejõud on alati suunatud kõveruskeskpunkti poole ja on rakendatud liikuvale kehale; kesktõukejõud on suuruse poolest võrdne kesktõmbejõuga, kuid on suunatud vastupidi, s. o.

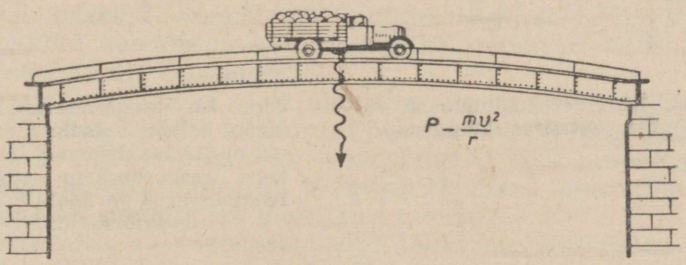
kõveruskeskpunktist trajektoori kumeruse poole, ja *on rakendatud kehadele, mis põhjustavad liikuva keha trajektoori kõverdumise.*

Massiivne kera, mis on riputatud tugeva niidi otsa, pingutab teda paigalseisu korral kera raskujõuga P, kuid võnkuma pandult pingutab ta niiti jõuga F, mis on tema poolt arendatava kesktõuke inertsjõu suuruse võrra suurem tema raskusest:

$$F = P + \frac{mv^2}{r}.$$



Joon. 32. Nõgusat silda mööda sõites rõhub auto sillale oma kaalust suurema jõuga.

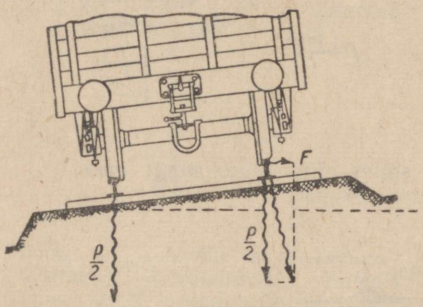


Joon. 33. Kumerat silda mööda sõites rõhub auto sillale oma kaalust väiksema jõuga.

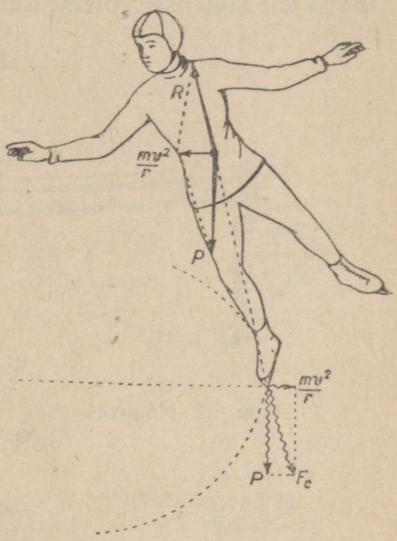
Kui auto sõidab sillal, mis tema raskuse all pisut paindub, siis ta rõhub sillale jõuga, mis ületab auto kaalu kesktõuke inertsjõu suuruse võrra (joon. 32). Seepärast on muude võrdsete tingimuste juures auto rõhumine nõgusale sillale seda suurem, mida suurem on auto liikumise kiirus. Selleks et vältida kesktõukejõudude mõju, tehakse sillad tavaliselt pisut kumerad (joon. 33). Sel juhul avaldub sillal kiiresti liikuvate autode kaal osalt dünaamiliselt, andes nendele allapoole suunatud kesktõmbekiirenduse; seepärast

on kumeral sillal kiiresti sõitvate autode rõhumine sillale nende kaalust väiksem.

Teekurvidel avaldavad rongi- või trammivagunite rattad välisele rööpale horisontaalset rõhumist vaguni poolt arendatava kesktõuke inertsjõu tõttu. Selleks et vagun ei paiskuks ümber, peab vaguni kaalu ja kesktõukejõu poolt moodustatav resultantrõhumine olema suunatud rööbaste vahele risti rööpa pinnaga; selleks asetatakse kurvidel väline rööbas seesmisest pisut kõrgemale (joon. 34).



Joon. 34. Kurvidel paigutatakse väline rööbas seesmisest kõrgemale.



Joon. 35. Ringjoone kaart kirjeldades kallutab uisutaja oma keha nii, et jää reaktsioon R läheks läbi keha raskuskeskme; siis annab reaktsiooni R ja kaalu P resultant kesktõmbejõu.

Analoogilistel põhjustel kallutab uisutaja, sõites ringjoonel, oma keha ringjoone keskpunkti poole (joon. 35). Märgime veelkordselt, et joonistel 34 ja 35, nagu see käesolevas teoses üldse on kokku lepitud, on laineliste nooltega näidatud jõudude (esimesel juhul — rööpale, teisel juhul — jääle rakendatud jõudude) staatilised ilmingud. Peale selle on joonisel 35 näidatud, kuidas toereaktsioon ja uisutaja kaal koos annavad kesktõmbejõu, mis on rakendatud uisutaja inertskeskmesse ja avaldub dünaamiliselt kesktõmbekiirenduses uisutaja liikumisel mööda ringjoone kaart. Täpselt samasuguse konstruktsiooniga võiks täiendada ka joonist 34. Kesktõmbekiirendus, mis tagab vaguni liikumise mööda tee kurvi, tekib välise rööpa õigel tõstmisel (nagu joon. 35 kuju-

tatud juhul) rööbaste reaktsiooni ja vaguni kaalu geomeetrilise summa arvel. Kuigi ka teetammi kallak ei kõrvalda rataste poolt rööbastele avaldatud rõhumise horisontaalset komponenti, vähendab ta ometi (õige kaldenurga juures — nullini) bandaažide külgrõhumist, mis on paralleelne liiprite tasapinnaga. Kui väline rööbas ei oleks kõrgemale tõstetud ja vagun sel kombel oleks kurvidel liikudes täiesti vertikaalne, siis peale ümberpaiskumise ohu tekiksid suured jõud, mis nihutaksid paigalt liipritele kinnitatud rööpad; sel juhul tekiks kesktõmbejõud tee kurvidel osutatud jõudude arvel, mis püüavad lahti kiskuda välist rööbast, kuna tammi õige kallaku puhul pole tammi tasapinnas mingisuguseid nihutavaid jõude, sest et kogurõhumine rööbastele on risti selle tasapinnaga.

Juhtudel, mis on sarnased joonisel 35 kujutatuga, on kesktõmbejõud rakendatud liikuva keha raskuskeskmesse, kuid kesktõukejõu rakenduspunktid määratakse geomeetriliste kokkupuutetingimustega liikuva keha ja selle keha vahel, millele on rakendatud kesktõukejõud ja mille vastumõju tagab trajektoori kõveruse; seepärast ei ole osutatud jõud, millel on küll võrdsed arvulised väärtused, üldiselt suunatud mööda ühte sirget, vaid on nagu mõju ja vastumõju antiparalleelseteks jõududeks (§ 18).

Pöörleva kõva keha aine on pinguldatud olekus, sest et pöörleva keha iga osake arendab kesktõuke inertsjõudu, mis on rakendatud keha nendele naaberosakestele, mis takistavad vaadeldaval osakesel eemalduda pöörlemisteljest. Piki raadiust keskpunktist eemalesuunatud inertsjõud püüavad väliseid aine kihte lahti rebida seesmisest.

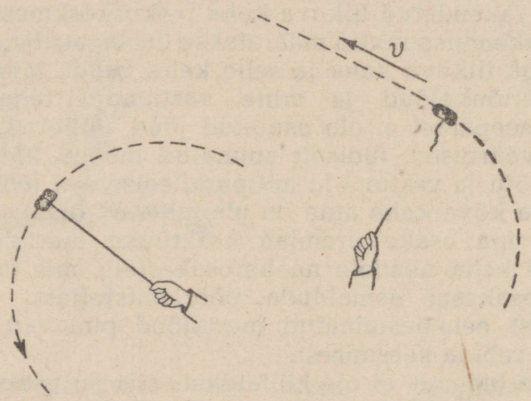
Kui aine tugevus ei ole küllaldane, siis purustavad kesktõuke inertsjõud suure pöörlemiskiiruse puhul keha, rebides ta osadeks. Taoliste avariide vältimiseks valmistatakse kõik kiiresti pöörlevad masinaosad (rootorid) ja kiirekäigulised hoorattad kõige tugevamatest metallidest (harilikult terasest).

Pöörlevates masinaosades võib tekkivate kesktõuke inertsjõudude suuruse üle otsustada järgmiste näidete järgi. Suure auriku kõikumise summutamiseks ettenähtud Sperry güroskoobi rootori diameeter on 4 *m*, see kaalub 110 *T* ja teeb 900 tiiru minutis. Mainitud tiirude arvu juures arendab mingi rootori piirdel asetsev mass kesktõukejõudu, mis on 2000 korda suurem selle massi kaalust. Anschütz gürokompassi rootor diameetriga 12 *cm* ja kaaluga 2,5 *kG* teeb 20 000 tiiru minutis. Tema piirdel mingisuguse massi poolt arendatav kesktõukejõud ületab selle massi kaalu 25 000 korda.

Tihti avaldavad inertsjõud purustavat toimet üksikutele masinaosadele. Kui ratas on asetatud teljele nii, et kogu tema mass on jaotatud sümmeetriliselt pöörlemistelje suhtes, siis tasakaalustuvad ratta eri osakeste poolt arendatavad kesktõuke

inertsjõud pöörlemisteljel ja avalduvad ainult ratta aine elastses pingsuses. Väga suurte kiiruste juures võib see pingsus ratta purustada. Kui aga ratta mass on jaotatud pöörlemistelje suhtes ebasümmeetriliselt, siis võivad sel juhul teljel tasakaalustamatud kesktõuke inertsjõud juba võrdlemisi väikeste kiiruste juures telje katki murda.

Veduri rataste juures võib ebasümmeetriline inertsjõudude jaotumine tekitada mitmetonnist ühepoolset rõhumist teljele; seoses sellega niisuguse ratta pöörlemisel ratta rõhumine rööpale kord kasvab (kui tasakaalustamata kesktõukejõudude resultant on suunatud alla), kord kahaneb (kui ta on suunatud üles) — rööbas on nagu raske vasara hoopide mõju all.



Joon. 36. Keha, mis on liikunud mööda ringjoont, liigub seoste kõrvaldamisel (inertsi tõttu) mööda ringjoone puutujat.

Mingi uue masina projekteerimisel tehakse detailne arvutus inertsjõudude kohta, mis võivad temas mitmesugustel töötingimustel tekkida. Tasakaalustamata inertsjõudude avaldumisega tuleb võidelda masside täpse jaotamise ning masina üksikosade liikumiste kooskõlastamise teel.

Kuid inertsjõude, eriti kesktõukejõude, kasutatakse tehnikas ka väga laialdaselt ja mitmekesiselt positiivses mõttes (vasarate töö, tsentrifugaalmasinad, tsentrifuugid jne.).

Märgime, et sõna „kesktõukejõud" pole täiesti õnnestunud; ta viib selle jõu ebaõigele mõistmisele. Sõna „kesktõukejõud" juhib meid mõtlema liikumisest, mis on suunatud pöörlemise

keskpunktist eemale piki raadiust. Kuigi kesktõukejõud mõjubki piki raadiust ja on suunatud keskpunktist eemale, *ei kutsu ta selles suunas esile mingisugust liikumist ja ei või esile kutsuda* seepärast, et ta *on rakendatud seostele*[1]. Kui seosed, mis hoiavad keha muutumatul kaugusel keskpunktist, järsku kõrvaldatakse (näiteks katkes nöör, mille otsa on seotud kivi, mida me keerutame mööda ringjoont, joon. 36), siis ei eemaldu mööda ringjoont liikunud keha ringjoone keskpunktist muidugi mitte mööda raadiust, vaid mööda ringjoone puutujat, sest et ta säilitab inertsi tõttu selle kiiruse suuna, mis tal oli seoste katkemise hetkel.

[1] Mehhaanikas mõistetakse seoste all vaadeldavate kehade liikumisvabaduse kitsendusi. Näiteks ratta pöia suhtes mängivad seoste osa kodarad, rongi kui terviku jaoks on seosteks rööpad jne.

III PEATÜKK.

TÖÖ JA ENERGIA.

§ 21. Töö, energia, võimsus. Töö element ja integraal.

Kujutlus tööst nagu jõustki on laenatud meie igapäevasest kogemusest. Tavalises elus me mõistame aga sõnadega „töö", „energia" ja „jõud" laiemat ning vähem piiritletud sisu kui füüsikas. Füüsikas on jõu, töö ja energia suuruste vahel püstitatud järgmine seos.

Tööd mõõdetakse kehale nihke suunas mõjuva jõu ja selle rakenduspunkti nihke suuruse korrutisega.

Energiat mõõdetakse tööga, mida keha võib teha.

Jõud ja töö avalduvad liikumise muundumisel. Kvantitatiivselt iseloomustatakse liikumise muundumist jõu impulsiga ja jõu tööga, ja nimelt:

Liikumishulga muutumist määratakse, nagu eespool selgitatud, jõu impulsiga, s. o. jõu ja jõu mõjumise aja korrutisega.

Liikumisenergia muutumist määratakse jõu tööga, s. o. jõu ja jõu suunas läbikäidud tee korrutisega.

Mehhaanikas eristatakse kineetilist ja potentsiaalset energiat. *Kineetilise energia* all mõistetakse keha mehhaanilise liikumise energiat, seda mõõdetakse tööga, mida keha on võimeline tegema keha pidurdamisel kuni täieliku seismajäämiseni. Potentsiaalse energia all mõistetakse liikumise varjatud vormide energiat, seda mõõdetakse tööga, mida keha on võimeline tegema, kui teda kiiruse muutuseta ruumis ümber paigutatakse ühest asendist teise asendisse (näiteks raskuse potentsiaalne energia).

Kineetilist energiat tähistatakse vahest ka sõnaga *„hoog"*. Potentsiaalset energiat nimetatakse teisiti *vastastikuse mõju energiaks* (mingi keha raskuse potentsiaalne energia on keha ja Maa vastastikuse mõju energia; ülemaailmse gravitatsiooni energia on vaadeldavate masside vastastikuse mõju energia).

Liikumise iga füüsikalist vormi iseloomustatakse ühe või teise energia liigiga. Kui me uurime soojusliikumist, siis on meil tegemist *siseenergiaga*. Elektri- ja magnetismiõpetuses puutume kokku *elektrienergiaga* ja *magnetenergiaga*.

Newtoni aegadel ei olnud energiast täpset kujutlust. See püstitati möödunud sajandi keskel, kui katselisel teel tõestati soojuse ja töö ekvivalentsus, s. o. nende vastastikune muunduvus püsiva proportsiooni säilimisega kulutatud töö ja saadud soojushulga vahel. Käesoleval ajal on kujutlus energiast füüsikas põhiliseks ja füüsika on oma õige suures osas õpetuseks erisuguste energialiikide vastastikuste muundumiste seadustest.

Energia on nagu masski hävitamatu ja loodamatu. See energia jäävuse seadus valitseb kõigi füüsika seaduste üle. Mehhaaniliste liikumiste ulatusliku klassi jaoks võib seda seadust tuletada Newtoni seadustest, kuid oma kõikehõlmavas tähenduses on ta füüsika poolt vastu võetud kui Newtoni seadustest sõltumatu, kogemuse teel püstitatud printsiip.

Töö ja soojusülekande protsesse tuleb vaadelda kui energia ülekandevorme ühelt kehalt teisele.

Energia kujutab endast võimaliku, kuid veel teostamata töö „tagavara"; erinevalt sellest on töö mõiste seotud kujutlusega jõu rakenduspunkti nihkumise *protsessist*[1]. Kui mingi keha teeb tööd, siis selle keha energia väheneb; seejuures on olemas alati mingi teine keha, millele kulutatakse (on suunatud) esimese keha töö ja mille energia seepärast kasvab. „Töö — see on liikumise vormi muutumine, mida vaadeldakse tema kvantitatiivsest küljest."[2]

Siin puudutatud küsimusi vaadeldakse üksikasjalisemalt peatükis, mis on pühendatud termodünaamika käsitlemisele.

Eespooltoodud definitsiooni järgi avaldub töö A, mida teeb nihkumise suunaga nurga α all suunatud jõud F teepikkusel l, järgmiselt:

$$A = F\cos\alpha \cdot l. \tag{1}$$

Jõud, mis on suunatud risti nihkega ($\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$), ei tee tööd; sellelt seisukohalt omandab jõu lahutamine tangentsiaalseks ja kesktõmbe komponendiks erilise füüsikalise tähenduse; kesktõmbejõu mõju avaldub ainult liikumise suuna muutuses, kuna tangentsiaalne jõud teeb tööd, mis ilmneb kas kiiruse suurenemises või siis takistusjõudude või hõõrde ületamises.

Võimsuseks N nimetatakse töö ja selle ajavahemiku suhet, mille jooksul töö tehti:

$$N = \frac{A}{t}, \text{ ehk täpsemalt } N = \frac{dA}{dt}. \tag{2}$$

[1] Mehhaanika poolt uuritavate küsimuste jaoks on eespooltoodud energia mõiste definitsioon küllaldane. Siiski üle minnes mehhaanilise liikumise tundmaõppimiselt teiste liikumise vormide tundmaõppimisele on tarvis energia mõiste definitsiooni laiendada, nagu näitab termodünaamika: energiat mõõdetakse töö ja soojuse summaga, mida keha võib ära anda: $U = A + Q$.

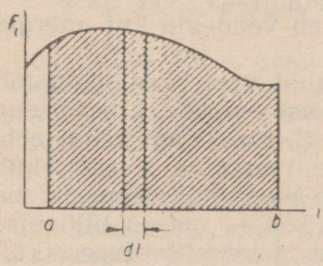
[2] Engels. Looduse dialektika, 1949, lk. 70 (vene keeles).

Järelikult, kui tööd tehakse ühtlaselt, s. o. võrdsete ajavahemike jooksul ühesuguses hulgas, siis mõõdetakse võimsust 1 *sek* jooksul tehtud tööga.

Kui jõud, jäädes konstantseks, läheb liikumise takistuste ületamiseks ja kui seoses sellega samuti ka liikumise kiirus v jääb konstantseks, siis järgneb võrrandist (2), et

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot l}{t} = F \cdot v.$$

Seega määrab jääva jõu puhul jõu ja aja korrutis liikumishulga, jõu ja tee korrutis määrab liikumisenergia, ja jõu ning kiiruse korrutis määrab võimsuse.



Joon. 37. Jõudiagramm. Kitsas, jämedalt viirutatud riba on töö element; kogu viirutatud pindala on töö integraal.

Õhu takistus lennuki liikumisele ja vee takistus laeva liikumisele osutuvad võrdelisteks kiiruse ruuduga. Seepärast lennuki- ja laevamootorite võimsused peavad olema võrdelised kiiruse kuubiga. Kui aurik, mille mootori võimsus on 100 *HJ*, arendas kiirust 15 *km/h*, siis kiiruse tõstmiseks kuni 30 *km/h* on tarvis mootorit võimsusega 800 *HJ*.

Nihkumise suunas või siis nihkumise suunaga muutumatu nurga all mõjuva konstantse jõu tööd võib kujutada ristküliku pindalaga, mille üheks küljeks on teepikkus ja teiseks — jõu projektsiooni suurus teesihile. Kui jõu rakenduspunkti nihkumisel jõu suurus või nurk, mida jõud moodustab nihke suunaga, muutub, siis võib tööd graafiliselt arvutada nii, nagu on näidatud joon. 37. Siin on abstsissteljele kantud teepikkus l ja ordinaatteljele — jõu F projektsiooni suurus nihke suunale. Lõpmata väikese teepikkuse dl jaoks avaldub *töö element* dA definitsiooni järgi valemiga

$$dA = F \cdot \cos(F, dl) \cdot dl, \qquad (3)$$

ehk

$$dA = F \cdot dl.$$

Joon. 37 on dA kujutatud lõpmata kitsa vertikaalse ribana laiusega dl ja kõrgusega F_l. Kogu töö teepikkusel l avaldub graafiliselt pindalana kõvera $F_l = f(l)$ all; joonisel on see pindala viirutatud. Sedaliiki lõpmata väikeste suuruste summat $\Sigma f(l) \cdot dl$ nimetatakse matemaatilises analüüsis *integraaliks*[1] ja tähistatakse

[1] Integraali mõiste püstitatakse järgmisel viisil. Oletame, et meile on

märgiga $\int$, mis asendab märgi Σ. Seepärast võib muutuva jõu tööd analüütiliselt avaldada valemiga

$$A = \int_b^a F_l \cdot dl. \tag{4}$$

Jõudu F võib vaadelda kui kolme, piki koordinaaditelgi suunatud vektori geomeetrilist summat. Nende vektorite algebralisi suurusi (jõu F komponente) tähistame X, Y, Z. Järelikult peab jõu F töö nihkel ds olema võrdne jõu komponentide tööde summaga samal nihkel ds. See võimaldab kasutada töö elemendi arvutamiseks valemi (3) kõrval veel niisugust valemit:

$$dA = X\cos(x, ds) \cdot ds + Y\cos(y, ds) \cdot ds + Z\cos(z, ds) \cdot ds.$$

Siin ei kujuta jõu komponentide kordajad endast midagi muud kui elementaarnihke ds projektsioone koordinaaditelgedele: $ds \cdot \cos(x, ds) = dx$ jne. Järelikult

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \tag{5}$$

Summaarne töö avaldub integraalina

$$A = \int_a^b (Xdx + Ydy + Zdz). \tag{6}$$

§ 22. Kineetiline energia ja potentsiaalne energia.

Keha kineetilist energiat mõõdetakse tööga, mida keha võib teha inertsi tõttu keha pidurdamisel kuni seismajäämiseni. Arvutame selle töö.

---

antud funktsioon $f(x)$ ja kaks muutuja x väärtust: $x = a$ ja $x = b$, ning olgu $a < b$. Paigutame a ja b vahele suvaliselt $n-1$ punkti: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; saame punktide jada

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Igaühes moodustatud vahemikest (x_{k-1}, x_k) valime punkti ξ_k ja moodustame summa $S = \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$.

Matemaatilises analüüsis tõestatakse, et teatavate eelduste puhul, mida funktsioon $f(x)$ peab täitma, liginevad need summad täiesti määratud piirväärtusele, kui ainult suurima osavahemiku pikkus läheneb nullile, ja et see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on valitud punktid ξ_k vahemiku (a, b) osavahemikes. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks a-st b-ni ja tähistatakse sümboliga

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

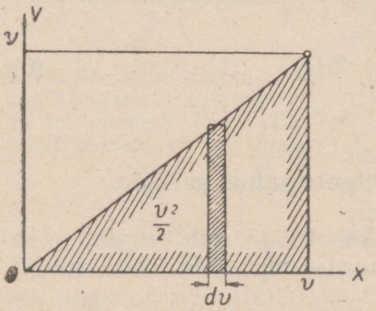
Liikuva keha poolt pidurdamisel arendatav inertsjõud teeb tööd, mis läheb liikumise takistuse ületamiseks. Inertsjõud mõjub liikumise suunas ($\cos\alpha = 1$) ja tema arvuline väärtus on $-m\frac{dv}{dt}$. Lõpmata väikese ajavahemiku jooksul, millal pidurdatav keha nihkub liikumise takistust ületades edasi ds võrra, teeb keha poolt arendatav inertsjõud töö

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt} \cdot ds,$$

ehk (teeme niisuguse teisenduse: $\frac{dv}{dt} \cdot ds = dv\,\frac{ds}{dt} = dv \cdot v$)

$$\delta A = -mv \cdot dv.$$

Siin seisab paremal poolel miinusmärk, kuid δA on positiivne suurus, sest et pidurdamisel $dv < 0$. Kiirusega v liikuva keha kineetiline energia kujutab endast tööde summat, mis tehakse inertsjõu poolt keha pidurdamisel kuni täieliku seismajäämiseni (s. o. selle ajavahemiku jooksul, millal keha kiirus kahaneb väärtusest v kuni nullini). Selle summa suuruse määrame graafiliselt.[1]



Joon. 38. Kineetilise energia arvutamise juurde.

Kujutame kiiruse arvulist väärtust lõiguga, mis on kantud mingile teljele OX, ja ka samasuguse lõigu pikkusega, mis on kantud teise telje OY suunas, mis moodustab esimese teljega täisnurga (joon. 38). On silmanähtav, et korrutise $v \cdot dv$ arvulist väärtust kujutab väga väikese vertikaalriba pindala, mille kõrgus on v ja laius on dv (kujutame endale suurust dv positiivsena, siis valemis δA jaoks tuleb miinusmärk muuta plussiks: $\delta A = mv \cdot dv$).

Eri ajahetkede jaoks on pidurdatava keha kiirusel v erinev suurus, ja samuti erinev suurus on mõnes kindlas ajavahemikus dt toimuval kiiruse arvulise väärtuse muutusel dv. Seepärast ei ole ka inertsjõu töö ühe ja sama ajavahemiku jooksul eri ajahetkede jaoks ühesugune (meie diagrammil on korrutist $v \cdot dv$ kujutavatel pindadel erinev kõrgus ja nad pole ühelaiused). Liites

[1] Kasutades integraalarvutust leitakse see summa kohe:

$$E_{kin} = \Sigma\delta A = -\int_{v}^{0} mv\,dv = \frac{mv^2}{2}.$$

inertsjõu poolt kogu pidurdamise aja jooksul tehtud tööd, võime sulgude ette tuua massi m suuruse, mis on igas elementaartöö avaldises. Mis aga puutub korrutiste $v \cdot dv$ summasse, siis pole raske taibata, et see väljendub meie diagrammil kõigi üksikute pindade (mis on sarnased joon. 38 viirutatuga) kogupindalana; see on järelikult $\frac{v^2}{2}$. Sel viisil me tuletasime teoreemi kineetilise energia kohta.

Töö, mida liikuv keha on võimeline tegema tema pidurdamisel, ei sõltu ei liikumise trajektoorist ega sellest, kuidas (missuguse kiirusega ja missugusel viisil) teostus pidurdamine. See töö — keha kineetiline energia — on võrdne massi ja kiiruse ruudu poole korrutisega[1]:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}. \tag{7}$$

Eespooltoodud arutluskäigu järgi on selge, et *süsteemi kineetiline energia on võrdne süsteemi moodustavate kehade (või materiaalsete punktide) kineetiliste energiate summaga:*

$$E_{kin} = \Sigma \frac{mv^2}{2}. \tag{8}$$

Potentsiaalset energiat mõõdetakse tööga, mida keha on võimeline tegema üleminekul lähteasendist mingisse teise asendisse. Järelikult on potentsiaalsel energial ainult siis kindel füüsikaline tähendus, kui on näidatud keha kaks teineteisega kõrvutatavat asendit.

Füüsika algkursusest on teada, et raskuse potentsiaalset energiat mõõdetakse keha kaalu ja tõstekõrguse korrutisega: $U = Ph$. Kui me mingis kohas, mis asetseb 10 m kõrgusel merepinnast, tõstame mõne keha 1 m kõrgusele maapinnast, siis on ta raskuse potentsiaalne energia merepinna suhtes, nagu on kerge aru saada, 11 korda suurem kui maapinna suhtes antud kohas. Sama keha potentsiaalne energia mingi mäetipu suhtes kujutab endast silmanähtavalt negatiivset suurust (keha ümberpaigutamiseks üles ei saada tööd, vaid seda tuleb kulutada).

Füüsikas on kokku lepitud vaadelda potentsiaalset energiat vastastikku mõjuvate kehade selle asendi suhtes, kus need on teineteisest lõpmata kaugel. Niisuguse käsitluse juures kujutab mingi kahe (või ka mitme) keha vastastikuse külgetõmbe potentsiaalne energia endast alati negatiivset suurust, sest et üleminek kehade mingilt etteantud asendilt sellele, kus nad on lõp-

[1] Kujutlus kineetilisest energiast on kasutusele võetud Leibnizi poolt (1686), kes kasutas väljendit „elavjõud" korrutise mv^2 jaoks. Hiljem hakati Coriolise ettepanekul elavjõuks nimetama suurust $\frac{1}{2}mv^2$.

mata kaugel teineteisest, ei anna tööd, vaid vastupidi, nõuab enda töökulu kehade vahel mõjuvate külgetõmbejõudude ületamiseks. Vastandina sellele kujutab tõukumise energia endast positiivset suurust.

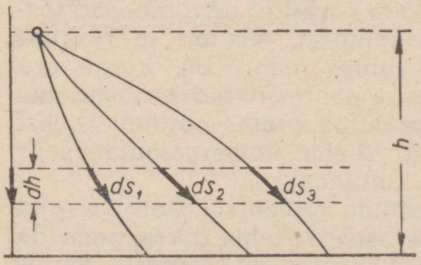
Teades kehade vastastikuse mõju seadust, s. o. teades, kuidas muutub kaugusega nende vastastikuse mõju jõud, saab kehade mistahes etteantud asendi jaoks alati välja arvutada nende potentsiaalset energiat (selleks on vaja, nagu juba selgitati, arvutada töö, mis tehakse vastastikuse mõju jõudude poolt vaadeldavate kehade eemaldumisel nende asenditest lõpmata kaugele teineteisest). Järgnevas tuleb meil korduvalt teostada niisuguseid arvutusi.

Vastastikuse mõju jõudude tööd võib potentsiaalse energiaga samastada ainult nendel juhtudel, kui vastastikuse mõju jõudude poolt tehtav töö ei sõltu trajektoori kujust, mida mööda vastastikku mõjuvad kehad nihkuvad algasendist lõppasendisse. On tarvis, et töö oleks üheselt määratud keha alg- ja lõppasendiga. Teisiti öeldes *töö peab olema ühesugune* kehade algasendist lõppasendisse *siirdumise kõigi teede jaoks.*

Näiteks ei sõltu ümberasetumise teest raskusjõu töö. Tõepoolest, kui P on keha kaal, siis valemi (4) järgi on raskuse töö nihkumisel nivoolt 1 nivoole 2

$$A = \int_1^2 P \cdot \cos \alpha \cdot ds,$$

kus α on elementaarnihke poolt vertikaaliga moodustatav nurk. Tähistame keha kõrguse merepinnast tähega h. On silmanähtav, et $ds \cdot \cos \alpha = dh$ (joon. 39). Edasi võime, lugedes raskusjõudu muutumatuks (mitte liiga suurte tõusukõrguste jaoks), tuua P kui kõigi liidetavate ühise teguri integraali märgi ette. Siis jääb integraali märgi alla lõpmata väike kõrguse juurdekasv dh, mis on täheldatav keha nihkumise ds juures mistahes trajektoori mööda. On silmanähtav, et kõigi nende lõpmata väikeste kõrguste muutuste algebraline summa $\int dh$ on ikka h, missugust teed mööda me ka ei nihutaks keha merepinnast kõrgusele h:



Joon. 39. Elementaarnihete ds_1, ds_2 ja ds_3 projektsioonid vertikaalsihile on võrdsed lõiguga dh.

$$U_2 - U_1 = A = P \cdot h.$$

Järelikult ei sõltu raskusjõu töö tõepoolest nihkumise teest.

Potentsiaalse energia all mõistetakse töö „tagavara", mida süsteem võib teha süsteemi kehade asendi muutumise arvel. Järe-

likult sedamööda, kuidas süsteem *teeb* tööd A, *kahaneb* tema potentsiaalne energia U. Seepärast

$$dA = -dU. \qquad (9)$$

§ 23. Mõõdusüsteemid. Mehhaaniliste suuruste dimensioonid.

Meetersüsteem võeti esmakordselt tarvitusele Prantsusmaal 1795. a. 80 aasta pärast (20. mail 1875. a.) seaduspärastati see Rahvusvahelise Kaalude ja Mõõtude Konventsiooniga enamikus maades. Põhiühikutena võeti vastu hoolikalt valmistatud meetri ja kilogrammi etaloonid, mida säilitatakse Rahvusvahelises Kaalude ja Mõõtude Kojas Sèvres'is (Prantsusmaal).

Definitsioonide järgi: *meeter on* mainitud etaloonile tehtud kahe märgi telgede vaheline kaugus 0° C juures; *kilogramm* kujutab endast etalooni massi, ja *liiter* on ühe kilogrammi puhta vee ruumala tema suurima tiheduse temperatuuril (4° C ümber) ja rõhul üks atmosfäär (hilisemad mõõtmised näitasid, et 1 l on 0,027 cm^3 võrra suurem ruumalast 1000 cm^3).

Sagedasti kasutatakse masside ja jõudude mõõtmiseks ühikuid, millel on ühesugune nimetus: näiteks kilogrammi massi (1 *kg*) jaoks ja jõu (1 *kG*) jaoks. Kui sõna „kilogramm" kasutatakse jõuühiku tähistamiseks, siis mõeldakse jõudu, millega mass 1 *kg* rõhub Maa külgetõmbe tõttu toele, mis on asetatud merepinna kõrgusele ja laiusele 45°.

Ühe sõna kasutamine kahe erisuguse ühiku — massiühiku ja jõuühiku — tähistamiseks võib põhjustada segadust. Selleks et kindlustada end eksimuste vastu, millesse võib kergesti sattuda sõna „kilogramm" (ja samuti ka „gramm") kahesuguse tähenduse tagajärjel, on hädavajalik orienteeruda asjaoludes, mis võivad arvestustes segadust tekitada.

Vastavalt mehhaanika teisele seadusele on massi m poolt jõu F toimel saadav kiirendus a võrdeline jõuga ja pöördvõrdeline massiga:

$$a = C\frac{F}{m},$$

kus C on võrdetegur, mis sõltub suuruste a, F ja m mõõtmiseks kasutatud ühikute valikust. Alati valitakse niisugused ühikud, et ei oleks vaja kirjutada ülaltoodud võrdetegurit, s. t. et $C = 1$.

Järelikult määrab antud juhul kahe ühiku (näiteks massi ja kiirenduse ühiku) valik kolmanda (jõu) ühiku. Kiirenduse ühik määratakse omakorda pikkuse ja aja ühikutega. Kui on tehtud kokkulepe (kokkuvõttes — kolme sõltumatu ühiku) valikus, siis öeldakse, et on püstitatud ühikute süsteem.

Absoluutne ühikute süsteem. Füüsikas on kokku lepitud mõõta pikkusi sentimeetrites (*cm*), aega — sekundites (*sek*) ja massi —

grammides (*g*). Seda süsteemi nimetatakse *absoluutseks ühikute süsteemiks* ehk *CGS*-süsteemiks[1]. Sõna „absoluutne" on väga ebaõnnestunud, sest see süsteem on püstitatud kokkuleppe teel, kusjuures valitud suurused ei kujuta üldse mingisuguseid suurusi, mille valik oleks ette määratud nende erilise füüsikalise osatähtsusega.

CGS-süsteemis on kiiruse ühikuks 1 *cm/sek*, kiirenduse ühikuks 1 *cm/sek*^{2}. Võttes eespooltoodud valemis $C = 1$, näeme, et *CGS-süsteemis peab jõuühikuks olema niisugune jõud, mille toimel mass* 1 *g saab kiirenduse* 1 *cm/sek*^{2}. Seda jõudu nimetatakse *düüniks*.

Tühjuses langevad kõik kehad ühe ja sama kiirendusega $g \approx 980$ *cm/sek*^{2}. Merepinnal, laiusel 45° on raskuskiirendus $g = 980{,}665$ *cm/sek*^{2}. Mass 1 *g* saab jõu 1 düün toimel kiirenduseks ainult 1 *cm/sek*^{2}. On silmanähtav, et igale massi grammile rakendatud raskusjõud on nii mitu korda suurem ühest düünist, kui mitu korda on raskusjõu poolt tekitatud kiirendus *g* suurem kiirendusest 1 *cm/sek*^{2}. Järelikult 1 *g massi kaal merepinna kõrgusel ja laiusel 45° on* 980,665 *düüni*. Sealsamas on 1 *kg* massi kaal 980 665 düüni, s. o. peaaegu miljon düüni. Jõudu, mis on võrdne 1 *kg* massi kaaluga merepinna kõrgusel ja laiusel 45°, tähistatakse 1 *kG*. Näeme, et 1 *kG* = 980 665 düüni.

Tehniline ühikute süsteem. Tehnikas mõõdetakse sagedasti pikkusi meetrites, aega — sekundites, jõuühikuks võetakse aga 1 *kG* (kilogramm-jõud) — see on niinimetatud *tehniline mõõtude süsteem* ehk, nagu teda lühidalt tähistatakse, *MkGS-süsteem*[2]. Selles on kiiruse ühikuks 1 *m/sek* ja kiirenduse ühikuks 1 *m/sek*^{2}.

Selleks et mehhaanika teises seaduses võrdetegur *C* oleks võrdne ühega, *on* silmanähtavalt tarvilik *tehnilist mõõtude süsteemi kasutades lugeda massiühikuks niisugust massi, mis saab jõu 1 kG toimel kiirenduse 1 m/sek*^{2}. Raskusjõu toimel saab mass 1 *kg*, nagu on juba öeldud, kiirenduse 9,8 *m/sek*^{2}. Kujutleme, et ideaalselt siledal horisontaalsel pinnal asetseb keha, mille mass on 1 *kg*. Kui me sellele kehale mõjume horisontaalses sihis (näiteks tõukame teda) jõuga 1 *kG*, s. o. jõuga, mis on võrdne keha kaaluga, siis see keha libiseb mööda horisontaalset pinda arvulise väärtuse poolest niisama suure kiirendusega, kui tal oleks raskusjõu mõju alla sattudes, s. o. kiirendusega 9,8 *m/sek*^{2}. Selleks et keha saaks jõu 1 *kG* toimel kiirenduseks ainult 1 *m/sek*^{2}, peab keha olema massiivsem. Olgu siledal horisontaalpinnal asetseva keha mass 9,8 *kg*; teda tõukava jõu 1 *kG* toimel hakkab ta libisema kiirendusega, mis on just 1 *m/sek*^{2}. Me näeme sel

[1] Sentimeeter-gramm-sekund-süsteem.
[2] Meeter-kilogramm(jõud)-sekund-süsteem.

viisil, et *tehnilises süsteemis peab massiühikuks olema mass* 9,8 *kg*.

Selleks et kergemini meeles pidada kõike öeldut ja et vabalt orienteeruda mõõtude valikus, tuleb alati silmas pidada kaalu ja massi vahel olevat seost. Tähendagu m mingi keha massi, P — tema kaalu ja g raskuskiirendust. Mehhaanika teise seaduse järgi $P = mg$.

Absoluutse mõõtude süsteemi kasutamisel on tähtis järgmine vahekord:

düünides avaldatud kaal $P = g\ [cm/sek^2] \cdot m[g]$. (a)

Tehnilise mõõtude süsteemi kasutamisel on tähtis vahekord: massi tehnilistes ühikutes avaldatud mass $m = \frac{P[kG]}{g[m/sek^2]}$.

Absoluutset mõõtude süsteemi tarvitades me peame energia väljendama ergides; *erg — see on jõu* 1 *düün poolt tehtav töö teepikkusel* 1 *cm*. Järelikult me peame potentsiaalse energia valemit $U = Ph$ kasutades ja absoluutset mõõtude süsteemi tarvitades avaldama keha kaalu P düünides [valemi (*a*) järgi]. Nii moodustab näiteks 1 *kg* kaaluva keha potentsiaalne energia tõusu iga meetri kohta $0{,}98 \cdot 10^6 \cdot 100 = 9{,}8 \cdot 10^7$ ergi = 9,8 džauli[1]. Tehnilises mõõtude süsteemis avaldub seesama suurus lihtsalt ühe *kilogramm-meetrina* (lühendatult *kGm*):

$$1\ kGm = 9{,}8 \text{ džauli.}$$

Absoluutse mõõtude süsteemi kasutamisel on see ebamugavus, et jõud, mis ülesande tingimuse järgi sagedasti on antud kilogrammides, tuleb tingimata avaldada düünides. Tehnilise ühikute süsteemi kasutamine on samuti seotud ebamugavusega: mass tuleb avaldada massi tehnilistes ühikutes.

Arvutame näiteks kiirusega 1 $\frac{m}{sek}$ liikuva 2 *kg* massiga keha kineetilise energia (ergides ja kilogramm-meetrites). Absoluutsetes ühikutes saame: $E = \frac{2000 \cdot 100^2}{2} = 10^7$ ergi = 1 džaul. Tehnilistes ühikutes: $E = \frac{2 \cdot 1^2}{9{,}8 \cdot 2} = \frac{1}{9{,}8}\ kGm$.

Kui kavatsetakse arvutusi teostada *absoluutses* mõõtude süsteemis, siis tuleb raskuse potentsiaalse energia valem ja kineetilise energia valem kirjutada järgmiselt:

$$U = mgh,\quad E = \frac{mv^2}{2};$$

eeldatakse, et mass m on avaldatud grammides, g — cm/sek^2, h — sentimeetrites, v — cm/sek; suurused U ja E saadakse siis ergides.

[1] Džaul on definitsiooni järgi 10 miljonit ergi.

Kui aga kavatsetakse arvutusi teostada *tehnilises* mõõtude süsteemis, siis kirjutatakse potentsiaalse ja kineetilise energia valemid massi sümbolit kasutamata:

$$U = Ph, \quad E = \frac{Pv^2}{2g};$$

eeldatakse, et kaal P on avaldatud kG-des, h — m-tes, g — m/sek^2 ja v — m/sek; suurused U ja E saadakse siis kilogramm-meetrites.

Võimsuse ühikuks on kõigis mõõtude süsteemides võimsus, mis on võrdne energiaühikuga 1 sekundis, ja nimelt: absoluutses mõõtude süsteemis on võimsuse ühikuks 1 erg sekundis; tehnilises süsteemis — 1 kilogramm-meeter sekundis. Osutatud võimsuse ühikute kõrval kasutatakse veel ühikut 1 džaul sekundis (see viimane võimsuse ühik kannab nimetust *vatt*, lühendatult W) ja niinimetatud *hobujõudu:*

$$1\ HJ = 75\ kGm/sek = 0{,}736\ kW.$$

Mehhaaniliste suuruste dimensioonid. Mingi suuruse dimensiooni all mõistetakse selle suuruse mõõtühiku sõltuvuse kuju põhimõõtühikutest. Teisiti öeldes näitab füüsikalise suuruse dimensioon, kuidas muutub antud füüsikalise suuruse mõõtmise tulemust väljendav arv kasutatavate ühikute mastaapide muutmisel. Nii, kui n korda suurendada pikkuseühikut, siis ruumala, mida nüüd tuleb lugeda ruumalaühikuks, on n^3 korda suurem endisest ruumalaühikust; sellel juhul öeldakse, et ruumala dimensiooniks on pikkuse kuup. Kui pikkuseühikut suurendada n korda ja ajaühikut suurendada m korda, siis kiirus, mida nüüd tuleb lugeda kiiruseühikuks, on $\frac{n}{m}$ korda suurem endisest kiiruseühikust; soovides seda fakti lühidalt väljendada, öeldakse, et kiiruse dimensiooniks on pikkuse ja aja suhe.

Suuruste dimensioone kirjutatakse üles kahel viisil (tabel 1).

Esimese viisi järgi (üleskirjutus nimetustega) kirjutatakse mingisuguse suuruse dimensioon, näidates põhiühikute nimetusi; näiteks on ruumala dimensiooniks cm^3, kiiruse dimensiooniks cm/sek.

Teise viisi järgi (üleskirjutus sümbolitega) kirjutatakse mingisuguse suuruse dimensioon üles põhimõõtühikute tingmärkide abil. Sagedasti kasutatakse niisuguseid sümboleid: pikkusühik L, ajaühik T, massiühik M. Siis on ruumala dimensiooniks L^3 („pikkuse kuup"); kiiruse dimensiooniks on $\frac{L}{T}$ ehk, mis on seesama, LT^{-1} („pikkuse ja aja suhe"). Niisugust sümboolset üleskirjutust loetakse tavaliselt lühendatult, näiteks „pikkuse kuup", kuid mõeldakse *„pikkusühiku* kuup". Selleks et suuruste dimen-

sioonide sümboleid mitte segamini ajada suuruste eneste tähistustega, on kokku lepitud panna dimensiooni sümboolne üleskirjutus nurksulgudesse, näiteks kiirenduse dimensioon on $\left[\frac{L}{T^2}\right]$ ehk $[LT^{-2}]$.

Tabel 1

Mõnede suuruste dimensioonid.

Suuruse nimi	Dimensioon	
	sümboolne üleskirjutus	üleskirjutus *CGS*-süsteemi ühikutes
Aeg	T	*sek*
Mass	M	*g*
Pikkus	L	*cm*
Pindala	L^2	cm^2
Ruumala	L^3	cm^3
Kiirus	$\frac{L}{T}$ ehk LT^{-1}	cm/sek
Kiirendus	$\frac{L}{T^2}$ ehk LT^{-2}	cm/sek^2
Jõud	$\frac{ML}{T^2}$ ehk MLT^{-2}	$g \cdot cm/sek^2$
Liikumishulk ja jõuimpulss	$\frac{ML}{T}$ ehk MLT^{-1}	$g \cdot cm/sek$
Töö ja energia	$\frac{ML^2}{T^2}$ ehk ML^2T^{-2}	$g \cdot cm^2/sek^2$
Võimsus	$\frac{ML^2}{T^3}$ ehk ML^2T^{-3}	$g \cdot cm^2/sek^3$
Nurkkiirus	$\frac{1}{T}$ ehk T^{-1}	$1/sek$
Nurkkiirendus	$\frac{1}{T^2}$ ehk T^{-2}	$1/sek^2$

Sümboolsel üleskirjutusel jäetakse lahtiseks küsimus, missugused suurused on nimelt võetud põhimõõtühikuteks (näiteks kas sentimeeter või meeter või isegi kilomeeter; L võib tähendada mistahes pikkusühikut; täpselt samuti võivad T ja M tähendada mistahes aja- ja massiühikuid).

Dimensioonide sümboolset üleskirjutust on kohane kasutada valemite kontrollimiseks: *valemi kõigi liikmete dimensioonid*

peavad alati olema ühesugused, sest et liita või lahutada ja võrrutada saab ainult ühesuguste nimetustega arve (ei saa suurusest 5 *cm* lahutada 2 *g*).

Mõnedel juhtudel saab suuruste dimensioonide kõrvutamisest teha mõningaid järeldusi selle kohta, kuidas need suurused on seotud funktsionaalse sõltuvuse mõttes. Selliseid niinimetatud „kvalitatiivse analüüsi" näiteid me kohtame edaspidi. See meetod on originaalselt välja arendatud monograafias „Kvalitatiivse füüsikalis-matemaatilise analüüsi alused" (1908. a.), mis kuulub andekale ja mitmekülgsele õpetlasele-revolutsionäärile Nikolai Aleksandrovitš Morozovile, kes oli tsarismi ajal 24 aastat vangis, sellest 21 aastat Schlüsselburgi kindluses.

IV PEATÜKK.

SÜSTEEMI DÜNAAMIKA.

§ 24. Mehhaaniline süsteem. Sise- ja välisjõud. Masskese.

Materiaalse punkti ja materiaalsete punktide süsteemi — *mehhaanilise süsteemi* — mõisteid selgitati I peatükis, § 3. Mehhaaniliste süsteemide näideteks võivad olla: rong (vedur, tender, vagunid); mistahes masin; päikesesüsteem (Päike ja planeedid); iga keha, kui teda vaadelda kui osakeste kogumit, jne.

Mehhaanilise süsteemi materiaalsetele punktidele või kehadele mõjuvad kahesuguse päritoluga jõud. Esiteks on iga keha vastastikuses mõjustuses süsteemi teiste kehadega (vagun teiste vagunitega, Päike planeetidega, masinaosad omavahel); niisuguse vastastikuse mõju jõude nimetatakse süsteemi *sisejõududeks*. Teiseks mõjuvad mehhaanilise süsteemi kehadele (materiaalsetele punktidele) jõududega kõrvalised, antud süsteemi mittekuuluvad kehad; niisuguseid jõude nimetatakse *välisjõududeks*. Rongi jaoks on säärasteks jõududeks raskusjõud, „veohõõre", liikumist pidurdav hõõre, õhutakistus.

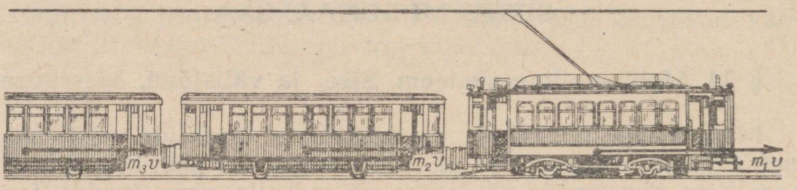
Mõisted „sise"- ja „välisjõud" on suhtelised. Nii on molekuli moodustavate aatomite vahelised vastastikuse mõju jõud välisjõududeks iga antud aatomi suhtes kui eri süsteemi suhtes, kuid need jõud muutuvad sisejõududeks, kui me kogu molekuli vaatleme ühtse süsteemina.

Kui mingi keha A mõjub kehale B mingi jõuga, siis mehhaanika kolmanda seaduse järgi mõjub ka keha B kehale A võrdse, kuid vastassuunalise jõuga; seepärast on *kõik* mehhaanilise süsteemi sisejõud paarikaupa võrdsed ja vastassuunalised. Rongis on jõud, millega iga vagun tõmbab järgmist, võrdne jõuga, millega too teda tagasi hoiab. Kui me geomeetriliselt liidame kõik sisejõud, mis on rakendatud mingi süsteemi kõigile kehadele, siis süsteemi iga kahe keha vastastikuse mõju jõud annavad summana nulli, ja seepärast *iga mehhaanilise süsteemi sisejõudude geomeetriline summa on null.*

Mingile mehhaanilisele süsteemile mõjuvaid välisjõude geomeetriliselt liites ei tohi me sellesse summasse sisse võtta vastu-

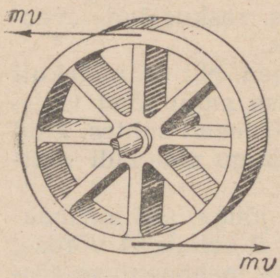
mõju jõude, sest need on rakendatud süsteemi koosseisu mittekuuluvatele kehadele. Seepärast on süsteemile mõjuvate välisjõudude summa üldjuhul nullist erinev.

Paragrahvis 15 oli juba juttu keha liikumishulga vektorist. *Mehhaanilise süsteemi liikumishulga all mõistetakse kõigi süsteemi kuuluvate kehade liikumishulkade geomeetrilist summat.* Joon. 40 on näiteks näidatud kolmevagunilise trammikoosseisu liikumishulga konstruktsioon.



Joon. 40. Trammikoosseisu liikumishulk on joonisel näidatud vektorite geomeetriline summa; mootorvaguni liikumishulk on suurem kui järelvagunitel, sest tal on suurem mass.

On võimalik juhus, kus süsteemi kõik kehad liiguvad, kuid üldine süsteemi liikumishulk on null. Sedaliiki näiteks on hooratta pöörlemine ümber liikumatu telje (joon. 41); hooratta mistahes kaks osakest, mis asetsevad sümmeetriliselt pöörlemistelje suhtes, liiguvad vastassuunaliselt, ja seepärast on nende liikumishulkade geomeetriline summa null; kui hooratta kogu mass on jaotatud sümmeetriliselt pöörlemistelje suhtes, siis saame kõigi hooratta osakeste liikumishulki geomeetriliselt liites kokkuvõttes nulli. Füüsikaliselt tähendab see, et hooratas kui tervik ei muuda asukohta; kui ta veereks ratta moodi, ei oleks tema liikumishulk null.



Joon. 41. Kogu liikumishulk hooratta pöörlemisel ümber liikumatu telje on null.

Mehhaanilise süsteemi iga üksiku keha liikumine määratakse kõigi temale mõjuvate jõudude, nii välis- kui ka sisejõudude kogumiga. Süsteemi kui terviku liikumisele mõjuvad aga ainult välisjõud, nagu me näeme allpool. Mida tuleb mõista „süsteemi kui terviku liikumise" all? Selle all mõistetakse süsteemi „masskeskme" nihkumist.

Füüsika algkursusest on tuntud keha *raskuskeskme* mõiste. Kui öeldakse, et kera raskuskese asetseb tema geomeetrilises

keskpunktis, või et kolmnurga raskuskese on tema mediaanide lõikepunktis, siis tahetakse sellega väljendada seda, et kera või kolmnurkse plaadi mis tahes asendi puhul maapinna suhtes mõjub keha kõigi osakeste kaalude resultant (keha kaal) piki vertikaalset sirget, mis läbib alati kera puhul tema keskpunkti ja kolmnurga puhul mediaanide lõikepunkti.

Selleks et keha oleks mis tahes asendi puhul tasakaalus, on vaja keha raskuskeskmesse rakendada jõud, mis tasakaalustab keha kaalu.

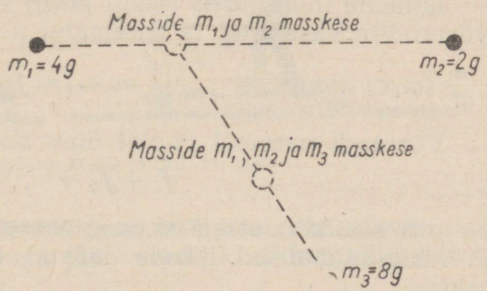
Raskuskeskme mõistet võib üldistada mitme keha kogumile (kehade süsteemile). Niisugune üldistus on täiesti loomulik: piisab, kui kujutleda endale kõiki antud kehi ühendatutena kõvade, kuid kergete (justkui kaaluta) varrastega; niisugusel viisil ühendatud kehad moodustavad ühe keha, mille raskuskeset nimetataksegi nende ühiseks raskuskeskmeks (*süsteemi raskuskeskmeks*). Kahe materiaalse punkti raskuskese asetseb neid ühendaval sirgel ja jaotab nendevahelise kauguse pöördvõrdeliselt nende massidega. *Deformeeruva massi* (näiteks vedeliku) *raskuskeskme* all me mõistame selle kõva keha raskuskeset, mille ta moodustaks, kõvastudes silmapilkselt antud seisangus.

Raskuskeskme mõiste on seotud kaaluga, aga kaal sõltub keha asendist maapinna suhtes. Iga keha lahutamatuks omaduseks on aga tema mass. Seepärast on üldisemaks ja tähtsamaks masskeskme mõiste.

Kahe materiaalse punkti *masskeskmeks* nimetatakse punkti, *mis jaotab nendevahelise kauguse pöördvõrdeliselt nende massidega*, sõltumata sellest, kas nad on raskusjõu mõju all või mitte. Kolme materiaalse punkti masskese jagab mingi kahe materiaalse punkti masskeskme ja kolmanda materiaalse punkti vahelise kauguse pöördvõrdeliselt esimese kahe massi summa ja kolmanda massiga (joon. 42). Samasugune on üleminek kolmelt materiaalselt punktilt neljale ja üldse mis tahes arvule. Järelikult on maapinnal asetseva mingi keha raskuskese samal ajal ka selle keha masskeskmeks.

Definitsioonist endast järgneb, et mingite materiaalsete punktide masskese asetseb kuskil nende vahel ja ei saa kuidagi olla väljaspool sfääri, mille sees asetsevad kõik antud massid.

Nimetust „masskese" saab õigustada järgmiste kaalutlustega. Kujutleme, et süsteemi moodustavate



Joon. 42. Kolme materiaalse punkti masskeskme leidmise näide.

kehade kõigi osakeste vahel mõjuvad aja jooksul lõpmata kasvavad külgetõmbejõud. Mehhaanika kolmanda seaduse järgi on kahele materiaalsele punktile rakendatud vastastikuse mõju jõudude arvulised väärtused võrdsed. Nende jõudude toimel teineteisele lähenedes, kui miski seda ei takista, liiguvad mõlemad materiaalsed punktid vastavalt mehhaanika teisele seadusele kiirendustega, mis on pöördvõrdelised nende massidega, ja algkiiruse puudumisel suhtuvad omavahel niisamuti nende poolt kuni kohtumiseni läbikäidud teed, s t. materiaalsed punktid satuvad kokku nende masskeskmes. Lisades kahele materiaalsele punktile juurde kolmanda, kolmele — neljanda jne., saame sama tulemuse iga mehhaanilise süsteemi jaoks. Sel kombel *mehhaanilise süsteemi masskese on see punkt, mille ümber koguneks erakordselt tiheda sfäärilise keha kujul kogu süsteemi mass, kui süsteemi materiaalsete punktide vahel mõjuksid aja jooksul lõpmata kasvavad külgetõmbejõud.*

§ 25. Liikumishulga jäävuse seadus ja masskeskme liikumise teoreem.

Kirjutame Newtoni teist seadust väljendava võrrandi n kehast koosneva mehhaanilise süsteemi iga keha jaoks; antud kehale rakendatud süsteemi sisejõudude resultandi tähistame vektoriga $\boldsymbol{f}$, temale rakendatud välisjõudude resultandi — vektoriga $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{d(m_1\boldsymbol{v}_1)}{dt} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{F}_1,$$

$$\frac{d(m_2\boldsymbol{v}_2)}{dt} = \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{F}_2$$

. . . . . .

$$\frac{d(m_n\boldsymbol{v}_n)}{dt} = \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{F}_n.$$

Liidame (hulknurga reegli järgi) vektorid, mis seisavad nende võrrandite vasakutel ja paremal pooltel:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots$$

Võrrandi paremal poolel olev sisejõudude summa

$$\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \boldsymbol{f}_n$$

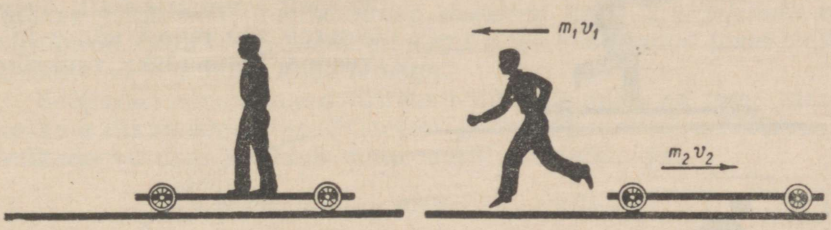
on null, sest kõik sisejõud on suuruse poolest paarikaupa võrdsed ja vastassuunalised. Järele jäävad ainult välisjõud. Seepärast saame:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (1)$$

Süsteemi liikumishulga geomeetriline muutus, mis toimub lõpmata väikese ajavahemiku jooksul ja on jaotatud sellele ajavahemikule, on võrdne süsteemile mõjuvate välisjõudude geomeetrilise summaga. Teiste sõnadega, süsteemi liikumishulga suuruse ja suuna muutumine aja jooksul määratakse süsteemile mõjuvate välisjõududega. *Sisejõud ei saa muuta süsteemi kui terviku liikumishulka.* Järelikult jääb süsteemis, millele välisjõud ei mõju või kui nende resultant on null, liikumishulk konstantseks.

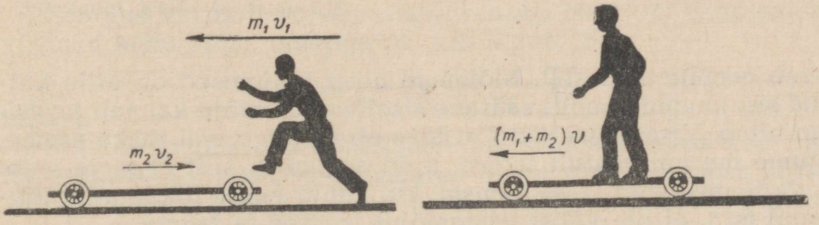
See liikumishulga jäävuse seadus on üheks tähtsamaks füüsika seaduseks. Toome mõne näite, mis selgitavad seda seadust.

Kui inimene, kes enne liikumatult seisis vankrikesel, hüppab ettepoole, siis vankrike veereb tahapoole, nii et nende summaarne liikumishulk, mis oli null, jääb võrdseks nulliga (joon. 43): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$.



Joon. 43. $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$.

Kui inimene jookseb vankrikesele (kergele ja aeglaselt liikuvale), mis veereb temale vastu, siis, jäänud vankrikesele seisma, liigub ta koos vankrikesega liikumishulgaga, mis on võrdne inimese ja vankrikese endiste liikumishulkade summaga (joon. 44): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$.

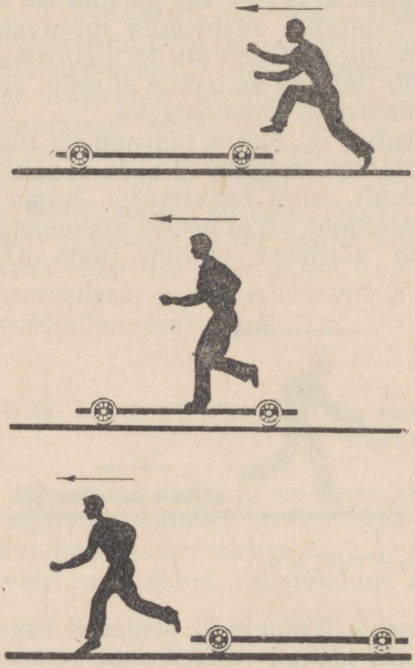


Joon. 44. $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$.

Kui inimene jookseb üle liikumatult seisva vankrikese, aeglustamata oma liikumiskiirust, jääb vankrike liikumatult seisma (joon. 45).

Šrapnelli lõhkemisel lendavad killud igale poole laiali, kuid mitte kunagi ei lenda kõik killud mürsu trajektoorilt ainult alla

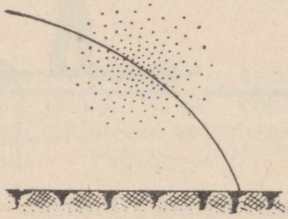
või ainult üles. Kildude liikumishulkade geomeetriline summa jääb pärast lõhkemist samasuguseks, nagu oli mürsu liikumishulk enne lõhkemist (joon. 46).



Joon. 45. Vankrike jääb liikumatuks, kui inimene jookseb temast üle muutumatu kiirusega.

Sisejõud ei avalda masskeskme liikumisele mõju. Sisejõud võivad aga esile kutsuda süsteemi kehade vastastikuse liikumise. Seejuures on kahe keha kiiruste muutused sisejõudude toimel suuruselt pöördvõrdelised nende massidega ja suunalt vastupidised.

Kui inimene hüppab maha kergelt vankrikeselt, siis veereb see tagasi suure kiirusega, kuna raske vankrike



Joon. 46. Igale poole laiali lendavate šrapnellikildude masskese jätkab liikumist piki trajektoori, mida mööda oleks liikunud mürsk, kui lõhkemist ei oleks toimunud.

veereb eemale aeglaselt. Mõlemad need liikumised on esile kutsutud sisejõudude poolt; säärane sisejõudude mõju kannab *tagasilöögi* nime. Visates uiskudel seistes ettepoole mingi raske eseme, liugume me vältimatult tagasi, kuid aeglaselt, sest et meie mass on võrdlemisi suur. Tulistamisel, kui kahur ei ole liikumatult kinnitatud (s. t. ei ole välist vastumõju), veereb ta tagasi.

Tagasilöögi nähtusega seletub raketi liikumine: rakett paiskab plahvatusega (sisejõud) tahapoole välja gaase; väljapaisatud gaasid ja rakett ise eemalduvad nende ühisest masskeskmest vastupidistes suundades.

Tõestame, et süsteemi masskese on süsteemi kogu liikumishulga kandjaks, kui kujutada endale ette, et temasse on koondatud kogu süsteemi mass.

Kujutleme, et süsteemi sees mõjuvad aja jooksul lõpmata kasvavad vastastikuse külgetõmbe jõud osakeste ja kehade vahel, aga välisjõude ei ole. Siis, jätkates oma ühist liikumist inertsi tõttu, lähenevad samaaegselt kõik süsteemi materiaalsed osakesed, ja nende kohtumispunktiks on masskese (§ 24). Edaspidi liiguvad nad koos nagu üks keha massiga

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n,$$

ja kuna välisjõudude puudumisel süsteemi liikumishulk ei saanud muutuda, siis peab ühinenud masside koosliikumise kiirus v rahuldama tingimust:

$$Mv = \text{süsteemi liikumishulgaga.}$$

Sellel järeldusel on suur printsipiaalne tähtsus, ja teda sõnastatakse järgmiselt: *mehhaanilise süsteemi kogu liikumishulk on niisugune, nagu oleks süsteemi kogu mass koondunud tema masskeskmesse ja liiguks koos temaga.*

Seepärast nimetatakse süsteemi liikumishulka ka tema masskeskme liikumishulgaks. Süsteemi ja tema masskeskme liikumishulkade võrdsus avaldub matemaatiliselt valemiga

$$Mv = m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots + m_nv_n, \qquad (2)$$

kus M on kogu süsteemi mass, v — tema masskeskme liikumise kiirus, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — süsteemi üksikute kehade (või materiaalsete punktide) massid ja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — nende kiirused.

Asendades võrrandis (1) süsteemi kehade liikumishulkade geomeetrilise summa süsteemi masskeskme liikumishulga vektoriga, saame:

$$\frac{d(Mv)}{dt} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n. \qquad (3)$$

See uus võrrand on samasugune nagu Newtoni teise seaduse võrrand keha jaoks massiga M, mis liigub jõu

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

toimel.

Siit teeme järelduse: *mehhaanilise süsteemi masskese liigub nii, nagu oleks temasse koondatud kogu süsteemi mass ja nagu mõjuks temale jõud, mis on võrdne kõigi süsteemi kehadele rakendatud välisjõudude geomeetrilise summaga.*

Seda teoreemi nimetatakse *masskeskme liikumise teoreemiks.*

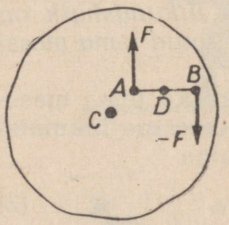
Erijuhul, kui välisjõud puuduvad või kui nende geomeetriline summa on null, liigub süsteemi masskese nagu isoleeritud keha, s. o. ühtlaselt ja sirgjooneliselt, või seisab paigal.

Jõudude mõju sõltumatusest järeldub masskeskme liikumise teoreemi rakendatavus liikumisele igas suunas eraldi. Matemaatiliselt avaldub see faktina, et vektorvõrrand (3) on samaväärne

kolme skalaarse võrrandiga nendesamade vektorite projektsioonide jaoks kolmele vastastikku ristiolevale teljele:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Mv_x) &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ \frac{d}{dt}(Mv_y) &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \\ \frac{d}{dt}(Mv_z) &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Juhindudes jõudude mõju sõltumatuse printsiibist ja uurides masskeskme liikumist mingis suunas, näiteks piki x-telge, võime vaadelda seda liikumist nii, nagu ei toimuks liikumist kahe ülejäänud telje sihis.



Joonis 47. Kuidas ka ei oleks rakendatud kehale jõudude F ja $-F$ paar, pöörab ta keha ümber telje, mis läbib masskeset C.

Näidetele, mis toodi eelmises paragrahvis liikumishulga jäävuse seaduse selgitamiseks ja mis samal ajal on masskeskme liikumise teoreemi kinnituseks, lisame veel ühe tähtsa näite. Kujutame endale, et paigalseisvale kõvale kehale hakkasid mõjuma kaks vastassuunalist paralleelset jõudu, mille arvulised väärtused on võrdsed (niinimetatud *jõupaar*). Kuidas hakkab keha liikuma? Esimesel pilgul paistab, et keha hakkab pöörlema ümber punkti D, mis asetseb jõupaari rakenduspunktide vahel selle keskkohas (joon. 47). See järeldus on aga ekslik (seda viga tehakse tihti ülesannete lahendamisel). Rakendatud välisjõudude F ja $-F$ geomeetriline summa on null. Järelikult masskeskme liikumine ei muutu. Ta oli paigal ja jääb paigale. Keha hakkab pöörlema ümber liikumatu masskeskme C.

Kui koormata lamedapõhjalise paadi keskpaik raskete kividega, mis on palju raskemad meie keha kaalust, ja sõuda kas paadi ninas või päras istudes ühe aeruga edasi, teisega tagasi, siis paat hakkab pöörduma ümber oma keskpaiga (ümber masskeskme). Kui laduda kivid ümber paadi ninasse, siis masskese ja koos sellega ka pöörlemiskeskpunkt asetuvad ümber paadi ninasse. Lõpuks, kui asetada kivid paadi pärasse, siis hakkab paat pöörduma ümber masskeskme, mis on ümber paigutatud pärasse.

[Rakendatult pöörlevale liikumisele saab liikumishulga jäävuse seadust teisendada niisugusele kujule, mis on kohasem pöörlevate liikumiste analüüsimiseks — *pöörlemishulga jäävuse seaduseks*. Pöörlemishulga (ehk, mis tähendab sedasama, pöördeimpulsi) mõistet ja pöörlemishulga jäävuse seadust kõva keha pöörlemisel selgitatakse VII peatükis.]

§ 26. Energia jäävuse seadus konservatiivsetes süsteemides. Potentsiaalse energia miinimum tasakaalu korral.

Raskusjõu töö ei sõltu keha ühelt nivoolt teisele ümberasetumise teest (nagu selgitati paragrahvis 22). Külgetõmbejõudude töö üldse ei sõltu ümberasetumise teest. Täpselt samuti ei sõltu ümberasetumise teest ka elektriseeritud kehade elektrostaatilise vastastikuse mõju jõudude töö.

Vastastikuse mõju jõude, mille töö ei sõltu kehade ümberasetumise teest, nimetatakse *konservatiivseteks jõududeks* (ladinakeelsest sõnast *conservare*, mis tähendab „säilitama").

Sellel nimetusel on järgmine tähendus: mehhaanilistes süsteemides, kus mõjuvad üksnes konservatiivsed jõud *(konservatiivsetes süsteemides)*, jääb kineetilise ja potentsiaalse energia summa alati muutumatuks. Teisiti öeldes võib konservatiivses süsteemis tema liikumisel toimuda kineetilise energia muundumine ainult potentsiaalseks energiaks või siis potentsiaalse energia muundumine kineetiliseks, kuid mitte mingiteks muudeks energia liikideks.

Sel viisil on konservatiivne süsteem sellise süsteemi näiteks, kus liikumine jääb alati mehhaaniliseks liikumiseks ja ei muundu keerulisemateks liikumise vormideks. Tegelikkuses mõjuvad kõigis mehhaanilistes süsteemides konservatiivsete jõudude kõrval ka mittekonservatiivsed jõud (näiteks hõõre). Peale selle ei tule unustada, et potentsiaalne energia kujutab endast liikumise varjatud vorme, mis on keerulisemad kui mehhaaniline liikumine. Seepärast ei ole mehhaanilise energia jäävuse seadusel konservatiivsetes süsteemides niisugust (üldist) tähtsust kui universaalsel energia jäävuse seadusel, mis osutab kõigi energia liikide muunduvusele üksteiseks.

Energia jäävuse seadust konservatiivsetes süsteemides saab tuletada Newtoni seadustest. Lähtume liikumise võrranditest

$$X = m\frac{dv_x}{dt}\,,\quad Y = m\frac{dv_y}{dt}\,,\quad Z = m\frac{dv_z}{dt}\,.$$

Kirjutame need võrrandid mehhaanilise süsteemi kõigi materiaalsete punktide jaoks. Korrutame esimese nendest võrranditest esimese materiaalse punkti jaoks suurusega dx_1; analoogilise võrrandi teise materiaalse punkti jaoks korrutame suurusega dx_2 jne.; iga teise võrrandi korrutame vastavalt suurustega dy_1, dy_2 jne.; iga kolmanda — suurustega dz_1, dz_2 jne. Liidame nüüd kõik need võrrandid; saame:

$$\Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = \Sigma\, m_i \left(\frac{dv_{x,i}}{dt}dx_i + \frac{dv_{y,i}}{dt}dy_i + \frac{dv_{z,i}}{dt}dz_i\right).$$

Siin tähendab Σ, et võetakse kõigi materiaalsete punktide $i = 1, 2, \ldots, n$ jaoks kirjutatud avaldiste summa. Iga paremal pool seisvat liiget teisendame järgmiselt:

$$\frac{dv_{x,i}}{dt}\,dx_i = dv_{x,i}\cdot\frac{dx_i}{dt} = v_{x,i}\cdot dv_{x,i}.$$

See korrutis kujutab endast suuruse $\frac{v^2_{x,i}}{2}$ diferentsiaali. Arvestades seda ja samuti tähele pannes, et

$$v^2_{x,i} + v^2_{y,i} + v^2_{z,i} = v^2_i,$$

võime eelneva võrrandi kirjutada järgmiselt:

$$\Sigma\,(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = \Sigma\, d\,(\frac{m_i v^2_i}{2}).$$

(Masse m_1, m_2 jne. loeme muutumatuteks; selle põhjal asendasime suurused $m_i d\,(\frac{\mathbf{v}^2_i}{2})$ suurustega $d\,(\frac{m_i v^2_i}{2})$; masside puhul, mis muutuvad aja jooksul, peaksime lähtuma võrranditest (1), kus diferentsiaali märgi all ei ole kiirus, vaid liikumishulk.)

Ülaltoodud võrrandi paremal poolel on meil süsteemi kineetilise energia muutus aja *dt* jooksul. Seepärast võime võrrandi paremat poolt tähistada dE_{kin}, kus E_{kin} on süsteemi kineetiline energia. Mis puutub võrrandi vasakusse poolesse, siis on see süsteemi kõigi materiaalsete punktide poolt aja *dt* jooksul tehtav töö *dA*. Kui kõik süsteemi jõud on konservatiivsed, siis määratakse see töö üheselt materiaalsete punktide asendiga enne ja pärast nihkumist aja *dt* jooksul, ja seetõttu võib seda avaldada kui potentsiaalse energia kahanemist. Seega omandab ülaltoodud võrrand konservatiivsete süsteemide jaoks järgmise kuju:

$$-dU = dE_{kin},$$

ehk

$$dE_{kin} + dU = 0,$$

ehk lõpuks, mis tähendab sama:

$$d(E_{kin} + U) = 0.$$

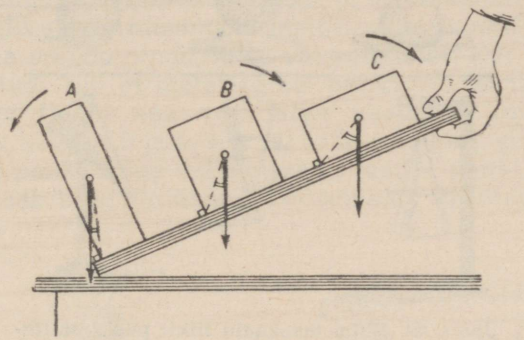
Niisiis on konservatiivse süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia summa muutus mis tahes lõpmata väikese ajavahemiku *dt* jooksul ja järelikult ka iga lõpliku ajavahemiku jooksul null. Teisiti öeldes *konservatiivse süsteemi koguenergia (kineetilise ja potentsiaalse energia summa) jääb süsteemi liikumisel muutumatuks:*

$$E_{kin} + U = const. \qquad (5)$$

Nii kahaneb näiteks mingi keha raskuse potentsiaalne energia keha langemisel selle võrra, mille võrra kasvab seejuures keha kineetiline energia. Ülesvisatud keha potentsiaalne energia kas-

vab keha tõusu jooksul suuruse võrra, mis on võrdne kineetilise energia kahanemisega. Ülesvisatud keha tõusmine lõpeb, kui kogu kineetiline energia on muundunud potentsiaalseks.

Pendli iga võnke juures muundub pendli kogu kineetiline energia potentsiaalseks, kui pendel saavutab maksimaalse hälbe; pendli vabal võnkumisel on pendli koguenergia kõigis tema asendites ühesugune.



Joon. 48. Kui läbi raskuskeskme tõmmatud püstjoon ei lähe läbi toetuspinna, siis on võimalik raskuskeskme madalam asend.

Pendli võnkumiste kustumised, samuti nagu ka õhus ülesvisatud keha poolt mõne osa kineetilise energia kaotamine tema langemisel esialgse nivooni, seletuvad hõõrdejõudude mõjuga, mille tõttu tegelikkuses ei ole ükski mehhaaniline süsteem täiesti konservatiivne. Siiski võib niisuguseid süsteeme, nagu näiteks päikesesüsteem (planeetide liikumine ümber Päikese), lugeda erakordselt suure täpsuseastmega konservatiivseteks süsteemideks.

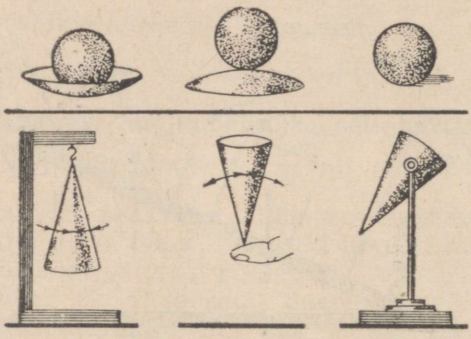
Tõestame väga tähtsa teoreemi, et *isoleeritud konservatiivse süsteemi püsiva tasakaalu olekuks on niisugune olek, kus süsteemi potentsiaalne energia on minimaalne.*

Energia jäävuse seaduse järgi peab konservatiivse süsteemi koguenergia, mis koosneb tema kineetilisest energiast E ja potentsiaalsest energiast U, jääma muutumatuks:

$$E_{kin} + U = const.$$

Kineetiline energia on alati *positiivne* suurus. Seepärast, kui alghetkel olid kõik kehad, mis moodustavad meie poolt vaadeldava süsteemi, *liikumatud*, siis võib liikumine tekkida ainult potentsiaalse energia *kahanemise* tagajärjel, kusjuures potentsiaalse energia kahanemine on võrdne kasvava kineetilise ener-

giaga. Kui aga alghetkel oli potentsiaalne energia *minimaalne* (mis on siis, kui kehade iga nihkumine nende uude asendisse viib potentsiaalse energia suurenemisele), siis silmanähtavalt ei saa sel juhul toimuda kineetilise energia kasvamist, ja liikumist, mis puudus alghetkel, ei teki kunagi; süsteem on *püsivas (stabiilses) tasakaalus*, millest teda saab välja viia ainult välisjõudude toimel.



Joon. 49. Kolm tasakaalu liiki: püsiv, mittepüsiv ja ükskõikne.

Erijuhul, kui on tegu mingi ühe kehaga, mis on raskusjõu mõju all, võib väita, et püsiva tasakaalu olekule vastab *keha raskuskeskme kõige madalam asend*; vastasel juhul ei oleks raskuse potentsiaalne energia minimaalne (joon. 48).

Võib esineda *mittepüsiva (labiilse) tasakaalu* olekut, kus potentsiaalne energia on maksimaalne, ja *ükskõikse (indiferentse) tasakaalu* olekut, kus potentsiaalne energia on ühesugune rea naaberasendite jaoks (joon. 49).

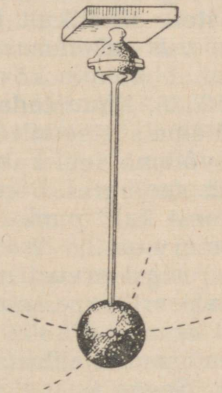
§ 27. Vabadusastmete arv ja seosjõudude töö. Võimalike nihete printsiip.

Süsteemi vabadusastmete arvuks nimetatakse *sõltumatute* mehhaaniliste *liikumiste* arvu, millest mehhaaniline süsteem saab samaaegselt osa võtta. Teisiti öeldes on vabadusastmete arv mehhaanilise süsteemi asendit (s. o. kõigi tema materiaalsete punktide asendit) määravate *sõltumatute koordinaatide* arv.

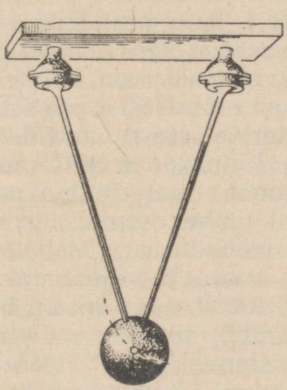
Ühe materiaalse punkti asend on määratud kolme koordinaadiga — x, y, z. Kui mehhaaniline süsteem koosneb n materiaalsest punktist, siis selleks, et saada täpset ettekujutust mehhaanilise süsteemi asendist ruumis, on tarvis teada nende punktide $3n$ koordinaati. Siiski on materiaalsete punktide liikumine üsna sage-

dasti kitsendatud ühtede või teiste tingimustega, mille tagajärjel kõik koordinaadid ei ole sõltumatud; teades osa koordinaate, saab teisi määrata tingimustest, mis piiravad materiaalsete punktide liikumisvabadust.

Materiaalsel punktil, mille liikumine *ei ole* kitsendatud mitte mingisuguste tingimustega, on ilmselt *kolm* vabadusastet. Kui materiaalse punkti liikumine on piiratud nii, et punkt saab nihkuda ainult mööda teatavat pinda $f(x, y, z) = 0$, siis piisab punkti kahe koordinaadi teadmisest, selleks et arvutada kolmandat koordinaati; järelikult on niisugusel materiaalsel punktil, mis on sunnitud liikuma *mööda pinda, kaks* vabadusastet. Kui aga liikumine on kitsendatud, nii et materiaalne punkt on sunnitud liikuma *mööda joont* [joont aga võib alati vaadelda kui mingi kahe pinna — $f_1(x, y, z) = 0$ ja $f_2(x, y, z) = 0$ — lõiget], siis sel juhul on materiaalsel punktil *üks* vabadusaste; teades punkti koordinaatidest ühte, saab kaht ülejäänud koordinaati arvutada joone võrrandite abil.



Joon. 50. Materiaalse punkti liikumine mööda pinda: kaks vabadusastet.

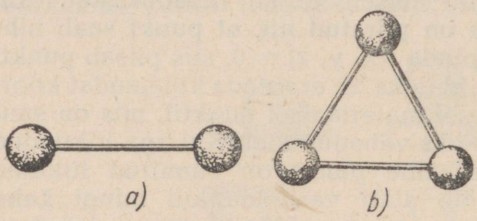


Joon. 51. Materiaalse punkti liikumine mööda joont: üks vabadusaste.

Liikumisvabaduse piiramised võivad olla väga mitmesugused. Näiteks võib liikumine olla kitsendatud sellega, et teatavate kehade vahel, mida me vaatleme kui materiaalseid punkte, on kerged, kuid kõvad vardad, mis seovad neid kehi, või siis painduvad, kuid mittevenivad niidid, jms. Igasuguseid liikumisvabaduse kitsendamise viise nimetatakse mehhaanikas *seosteks*.

Me vaatlesime seose liikide mõningaid näiteid, kui me rääkisime inertsjõududest, mis on alati rakendatud seostele (§ 20). Seose näiteks, mis põhjustab materiaalse punkti liikumise mööda

pinda, võib olla massiivse kera šarniir-ülesriputus kerge kõva varda abil (joon. 50): niisugune pendel võib võnkuda igas tasapinnas, kusjuures pendli masskese liigub mööda sfääri pinda. Sama kera, kui ta on üles riputatud kahe kõva varda abil, saab võnkuda ainult ühes tasapinnas (joon. 51); kera masskese liigub mööda joont.



Joon. 52. *a* — viie vabadusastmega süsteem, *b* — kuue vabadusastmega süsteem.

Arvutame, missugune on vabadusastmete arv kahel materiaalsel punktil, mis on seotud väga kerge, kuid kõva varda abil (joon. 52, *a*). Kui me ühe nendest punktidest kinnistame, siis me võtame sellega süsteemilt kolm vabadusastet; teine materiaalne punkt saab seejuures liikuda mööda sfääri pinda, s. t. jääb veel kaks vabadusastet. Järelikult *kahel kõva vardaga seotud materiaalsel punktil on viis vabadusastet.*

Koosnegu süsteem kolmest omavahel kolme kõva vardaga seotud materiaalsest punktist (joon. 52, *b*). Kinnistades ühe nendest materiaalsetest punktidest, me võtame süsteemilt kolm vabadusastet; kinnistades teise punkti, me võtame veel kaks vabadusastet; kolmas materiaalne punkt saab seejuures liikuda mööda ringjoont ümber varda, mis seob esimest kaht punkti, s. o. jääb veel üks vabadusaste. Vabadusastmete arv on $3 + 2 + 1 = 6$. Kui süsteem koosneb neljast või veel suuremast arvust materiaalsetest punktidest, mis kõik on üksteisega paarikaupa seotud kõvade varraste abil, siis, kui on kinnistatud esimesed kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti, pole ülejäänud materiaalsete punktide mingisugune liikumine enam võimalik. Seega *kolmel või enamal arvul omavahel kõvade varrastega seotud materiaalsel punktil on kuus vabadusastet.* Jõude, mis on rakendatud materiaalsetele punktidele seoste olemasolu tõttu, nimetame *seoste reaktsioonideks* ehk lihtsalt *seosjõududeks.*

Eelpool me ei eraldanud seosjõude teistest jõududest. Seoste poolt edasiantavad ja arendatavad jõud on tihti süsteemi sisejõududeks. Kui aga süsteemi liikumine on piiratud väliste kehade poolt, siis niisuguste seoste reaktsioone peame vaatlema kui välisjõude. Näiteks joon. 50 ja 51 kujutatud pendlitel on seoste reaktsioonid välisjõududeks. Rongi jaoks on rööbaste reaktsioonid samuti välisjõududeks, kuna vagunite ja puhvrite haakereaktsioonid on sisejõududeks.

Seosjõud ei ole eri kategooriasse eraldatud mingi printsipiaalse kaalutluse tõttu, vaid soovist lihtsustada ülesannete lahen-

damist. Võrdlemisi lihtsateski süsteemides on seosjõudude väljaarvutamisel tunduvaid raskusi. Samal ajal seosjõud ainult piiravad süsteemi liikumisvabadust, kuid erinevalt teistest jõududest ei avalda sügavat mõju süsteemi liikumisele, ja nimelt me veendume kohe, et *seosjõudude summaarne töö on null.* Seepärast saab paljudel juhtudel mehhaanilise süsteemi liikumist uurida täielikult, raiskamata aega seosjõudude väljaarvutamisele.

Nii sise- kui ka välis-seosjõud ei saa vahetult muuta ei süsteemi kineetilist ega potentsiaalset energiat. Kineetilise ja potentsiaalse energia vastastikusele muunduvusele võivad seosjõud mõjuda ainult kaudselt, luues liikumise kitsendusi (nii näiteks, kui joon. 50 kujutatud massiivne pendlikeha ei oleks varda abil üles riputatud, siis keha langeks alla ja ta raskuse potentsiaalne energia hakkaks muutuma kineetiliseks; varda reaktsioon hoiab keha langemisest ja lubab pendlil ainsa võimaliku liikumise — võnkumise).

Selle tõestamiseks, et seosjõudude summaarne töö on null, arutleme järgmiselt. Olgu meil mis tahes mehhaaniline süsteem, mille liikumisvabadus on piiratud teatavate seostega. Kujutleme, et süsteemi materiaalsetele punktidele ei mõju mingisuguseid jõude peale seosjõudude. Anname süsteemi materiaalsetele punktidele mis tahes suunas tõuke ja laseme nendel liikuda inertsi tõttu ja seosjõudude mõju all. Meie materiaalne süsteem kujutab endast mehhanismi, millel tingimuse järgi ei ole potentsiaalset energiat ja milles mis tahes jõudude puudumise tõttu peale seosjõudude kineetiline energia ei saa muunduda teisteks energialiikideks. Järelikult peab energia jäävuse seaduse põhjal niisuguse mehhanismi kineetiline energia jääma muutumatuks. Kui aga seosjõudude summaarne töö ei oleks null, siis kineetiline energia peaks muutuma selle töö suuruse võrra. Järelikult on seosjõudude summaarne töö null, missugune ka ei oleks seoste poolt lubatav materiaalsete punktide liikumine. See toob meid valemi juurde:

$$\Sigma\,(R_{xi}\,\delta x_i + R_{yi}\,\delta y_i + R_{zi}\,\delta z_i) = 0. \qquad (6)$$

Siin R_{xi}, R_{yi}, R_{zi} on selle jõu komponendid, millega seosed mõjuvad i-ndale materiaalsele punktile; suurused δx_i, δy_i, δz_i kujutavad endast i-nda materiaalse punkti koordinaatide lõpmata väikest muutust selle punkti mingisugusel nihkel, mida lubavad seosed (sümboliga δs on kokku lepitud tähistada iga *võimalikku* ehk, mis tähendab sedasama, *virtuaalset* nihet erinevalt sümbolist ds, mis tähistab faktiliselt toimuvat nihet).

Ülaltoodud valemi (6) põhjendamine näitab selgesti, et see valem on õige niivõrd, kuivõrd seoste realiseerimist võib lugeda i d e a a l s e k s; näiteks ei tohi seoseid realiseerivais varrastes ja niitides toimuda mehhaanilise energia „hajumist", s. o. tema

muundumist elastse deformatsiooni energiaks ja molekulaarse soojusliikumise energiaks.

Seosjõudude summaarse töö nulliga võrdsuse teoreem toob tunduvaid lihtsustusi staatika ja dünaamika ülesannete lahendamise meetoditesse.

On olemas mitmesuguseid staatika küsimuste käsitlemise võtteid, kuid kahtlemata kõige üldisem ja samal ajal lihtsaim staatika ülesannete lahendamise meetod peitub võimalike nihete printsiibi rakendamises. Seda meetodit rakendati juba Galilei poolt; tema tähtsust mõistis ja hindas Johann Bernoulli (1717. a.), kuid täielikult arendati see meetod välja hiljem Lagrange'i töödes (1788. a.). Kõige üldisemal kujul on võimalike nihete printsiip püstitatud ja oma rakendustes välja arendatud (möödunud sajandi keskel) tähelepanuväärse vene matemaatiku ja mehhaaniku Mihhail Vassiljevitš Ostrogradski töödes.

Nagu juba eelnevas paragrahvis öeldi, nimetatakse *võimalikuks nihkeks* keha või materiaalse punkti niisugust *lõpmata väikest nihet*, mida lubavad *süsteemi seosed*, s. o. süsteemi moodustavate kehade liikumisvabadusele pandud kitsendus. Nii näiteks võib ülesande tingimuse järgi olla antud, et keha peab oma nihkumisel jääma teatavale pinnale; järelikult on võimalikuks nihkeks nihe mööda seda pinda. Üldse mõistetakse võimalike nihete all ainult neid nihkeid, mis pole vastuolus vaadeldava ülesande tingimustega; seejuures peetakse silmas lõpmata väikesi nihkeid.

Võimalike nihete printsiip seisneb järgnevas.

Tarvilik ja piisav tasakaalu tingimus seisneb selles, et kõigi süsteemi kehadele rakendatud jõudude tööde summa peab süsteemi iga võimaliku nihke puhul olema null või nullist väiksem.

„Kinnihoidvate" (kahepoolsete) seoste poolt lubatavate nihete puhul peab tööde summa olema null; „mittekinnihoidvate" (ühepoolsete) seoste poolt lubatavate nihete puhul peab tööde summa olema nullist väiksem või null. Ühepoolsete seoste näiteks võib olla keha, mis asetseb mingil pinnal.

Kui süsteemi moodustavad kehad on seotud mingisuguste täiesti kõvade varrastega või pingutatud venimatute niitidega, siis ei ole võimalike nihete printsiipi rakendades vajadust vaadelda „seosjõude" (seoste poolt ülekantavat rõhumist ja pingutust ning seoste reaktsioone), sest et nende jõudude summaarne töö on igasuguse nihke puhul alati null, nagu tõestati eelnevas paragrahvis. See õigus ignoreerida kõvu (deformeerumatuid) seosjõude lihtsustab ülimal määral paljude staatika ülesannete lahendamist, võimaldades võimalike nihete printsiibi rakendamisel piirduda üksnes välisjõudude ja hõõrdejõudude vaatlemisega.

Jättes kõrvale seosjõudude töö, mille summa on kõigi materiaalsete punktide jaoks null, ja säilitades rakendatud jõukom-

ponentidele endised tähistused X, Y, Z, saab võimalike nihete printsiipi analüütiliselt avaldada järgmise valemiga:

$$\Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leqslant 0. \qquad (7)$$

Siin, nagu eespool märgiti, kuulub võrdusmärk „kinnihoidvate" (kahepoolsete) seoste juhu juurde, kuna „mittekinnihoidvate" (ühepoolsete) seoste jaoks võib võrdusmärgi kõrval esineda ka võrratuse märk.

Võrrand (7) on kõige üldisemaks tasakaalu võrrandiks.

Võimalike nihete printsiipi võib vaadelda kui järeldust energia jäävuse seadusest. Tõepoolest, kui kõik süsteemi kehad olid alghetkel liikumatud ja hakkasid liikuma hiljem, siis tähendab see, et kehadele rakendatud jõud tegid töö, mis on võrdne tekkinud kineetilise energiaga. Kineetilist energiat ei saa tekkida, ja järelikult jääb süsteem tasakaalu, kui igasuguse võimaliku nihke puhul kõigi kehadele rakendatud (sise- ja välis-) jõudude töö on null või nullist väiksem.

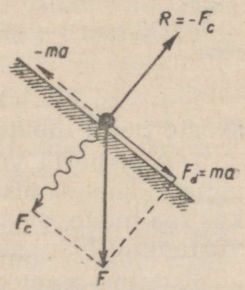
Võimalike nihete printsiip püstitati ammu enne seda, kui avastati ja üldiselt tunnustati energia jäävuse seadus; seepärast esitati omal ajal rida selle printsiibi õigsuse tõestusi, mis allutasid selle printsiibi teistele kogemuses kinnitust leidnud väidetele.

Edaspidi rakendame võimalike nihete printsiipi mõnede lihtmehhanismide tasakaalutingimuste arvutamiseks.

§ 28. D'Alembert'i printsiip.

Nagu näitas d'Alembert, saab dünaamika ülesannete lahendamiseks kunstlikult kasutada staatika meetodeid. Niisugune dünaamika ülesannete lihtsustamine saavutatakse sellega, et süsteemis *faktiliselt* mõjuvate jõudude kõrval vaadeldakse mõningaid *fiktiivseid*, s. t. mitteolemasolevaid, ettekujutatavaid jõude. Seda tehakse järgmisel viisil.

Olgu materiaalne punkt massiga m temale rakendatud jõu F, näiteks raskusjõu, mõju all (joon. 53). See materiaalsele punktile rakendatud jõud avaldub osalt (komponent F_d) dünaamiliselt, tekitades kiirenduse a, osalt (komponent F_c) staatiliselt rõhumises, mida materiaalne punkt avaldab seostele, või siis pingsuses, mida ta tekitab seostes. Rakendatud jõu staatiliselt avalduvat komponenti F_c nimetab d'Alembert *kaotatud jõuks*. Tõepoolest ei avalda materiaalsele punktile rakendatud jõu see geomeetriline osa mõju



Joon. 53. F_c — kaotatud jõud, $(-ma)$ — d'Alembert'i jõud.

materiaalse punkti kiirendusele, ja selles mõttes osutub ta „kaotatuks". Kuna materiaalne punkt mõjub seostele jõuga F_c, siis ka seosed mõjuvad Newtoni kolmanda seaduse järgi materiaalsele punktile võrdse, kuid vastassuunalise jõuga R; seda jõudu R nimetatakse *seose reaktsiooniks.* Sel kombel võime ühelt poolt lugeda, et kiirendus a tekitatakse rakendatud jõu dünaamilise komponendi poolt:

$$F_d = ma;$$

teiselt poolt võime lugeda, et seesama kiirendus a tekitatakse kõigi materiaalsele punktile mõjuvate jõudude poolt ühiselt, ja et materiaalsele punktile mõjub kogu rakendatud jõud F ja peale selle seoste reaktsioon R; järelikult

$$F + R = ma.$$

Me näeme, et *rakendatud jõu dünaamiline komponent kujutab endast rakendatud jõu ja seoste reaktsiooni resultanti.*

Viimast võrrandit saab kirjutada järgmiselt:

$$F - ma = R.$$

Kujutame endale, et sellised võrrandid on välja kirjutatud kõigi materiaalsete punktide jaoks. Korrutame igaühe nendest materiaalse punkti võimaliku nihkega ja selle nihke ning seoste reaktsiooni suundade vahelise nurga koosinusega. Liidame nüüd kõik sellised võrrandid, mis on välja kirjutatud kõigi materiaalsete punktide jaoks. Siis saame paremal poolel seosjõudude summaarse töö, mis on null, nagu tõestati paragrahvis 27. Järelikult on ka võrrandi vasaku poole liikmete summa samuti null. Me saame sel viisil d'Alembert'i võrrandi. Kasutades töö avaldist jõu komponentide kaudu [§ 21, valem (5)], saab selle kirjutada järgmiselt:

$$\sum \left[\left(X_i - m\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] = 0. \quad (8)$$

Siin δx_i, δy_i, δz_i on mis tahes *võimalike* nihete, s. o. süsteemi seoste poolt lubatavate nihete komponendid.

D'Alembert'i võrrand on sobiv dünaamika rakenduslike ülesannete lahendamiseks ja samal ajal on ta analüütilises mehhaanikas rea teiste, oma üldisuse poolest tähtsate ja praktikas kasulike võrrandite (näiteks Lagrange'i võrrandite) tuletamise aluseks.

Esitatud meetodi formuleeris d'Alembert printsiibi kujul, mis justkui taandaks dünaamika staatikale. Kõrvutades võrrandeid (7) ja (8) on kerge näha, et need kaks võrrandit — üks, mis on staatika aluseks, ja teine, mis väljendab dünaamika printsiipe —

on mitmes suhtes analoogilised. D'Alembert'i võrrandit saaks staatika võrrandiga sarnaseks teha, kui süsteemi materiaalsetele punktidele peale nendele tegelikult rakendatud jõudude mõjuksid jõud, mis on võrdsed massi ja kiirenduse korrutisega ja on vastassuunalised kiirendusega. Neid tegelikkuses mitteeksisteerivaid fiktiivseid jõude $-m_1\boldsymbol{a}_1$, $-m_2\boldsymbol{a}_2$ jne. nimetame *d'Alembert'i jõududeks.*

Nagu juba eespool öeldi, kujutab rakendatud jõu $\boldsymbol{F}$ dünaamiline komponent $m\boldsymbol{a}$ endast alati rakendatud jõu $\boldsymbol{F}$ ja seoste reaktsiooni $\boldsymbol{R}$ geomeetrilist summat (joon. 53). Seepärast, kui me materiaalsele punktile mõjuvatele jõududele lisaksime veel d'Alembert'i jõu, mis on võrdne suurusega $m\boldsymbol{a}$, kuid vastassuunaline, siis oleks jõudude $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{R}$ mõju kõrvaldatud ja punkt peaks liikuma inertsi tõttu või jääma paigale:

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + (-m_i\boldsymbol{a}_i) = 0.$$

Seepärast võib öelda, et mehhaanilise süsteemi liikumise juhul *d'Alembert'i jõudude lisamine reaalselt mõjuvatele jõududele lubab kõiki jõude süsteemis lugeda tinglikult tasakaalustatuks.*

Mõnedes raamatutes nimetatakse d'Alembert'i jõude *inertsjõududeks d'Alembert'i järgi* või isegi lihtsalt inertsjõududeks. Me kasutame sõna „inertsjõud" ainult Newtoni mõttes, s. o. reaalse jõu $m_i\boldsymbol{a}_i$ tähistamiseks, mis kujutab endast keha m_i poolt avaldatavat *vastumõju,* kui seosed või teised kehad muudavad tema liikumise olekut. On selge, et inertsjõud Newtoni käsituses erineb d'Alembert'i jõust sellega, et: 1) inertsjõud on reaalne jõud, aga d'Alembert'i jõud on väljamõeldis; 2) inertsjõud $m_i\boldsymbol{a}_i$ on rakendatud seostele või teistele kehadele, mitte aga kehale m_i, d'Alembert'i jõudu kujutletakse aga rakendatuna kehale m_i.

Niisiis Newtoni seisukohalt d'Alembert'i jõud mitte ainult et ei osutu inertsjõududeks, vaid ei eksisteeri üldse, kujutades endast fiktsiooni, väljamõeldist, mis ei vasta mitte mingisugusele reaalsusele. Relatiivsusteoorias on inertsi mõistele antud teine tõlgendus kui Newtoni mehhaanikas. See on loomulik, sest relatiivsusteoorias asetatakse suuruste *reaalsuse* küsimus teisiti. Seal räägitakse reaalsusest vaadeldavuse mõttes ja loetakse, et kõik meie poolt vaadeldav sõltub suurel määral vaatlemise viisist; kui Newtoni mehhaanika eristab tõelist vaadet asjadele asjade näivast tajumisest, siis relatiivsusteooria jaoks on kõik teatud matemaatilise eksami sooritanud näivad tajud võrdsel määral tõelised, kõik nad vastavad relativistlikult seisukohalt ühesuguselt reaalsusele; relatiivsusteoorias eitatakse vaatlemise viisist sõltumatu *absoluutse, objektiivse* reaalsuse olemasolu. Kui Newtoni mehhaanikas jõud, näiteks raskusjõud, on objektiivne reaalsus, ja d'Alembert'i jõud on fiktsioon, väljamõeldis, siis relatiivsusteoo-

rias tõlgendatakse nii raskusjõudu kui ka d'Alembert'i jõude kui ühesuguselt tinglikke mõisteid.

Siin tuleb paragrahvis 1 öeldule täienduseks märkida, et on tarvis eristada nähtuste põhilisi, objektiivselt õigeid skeeme kõrvalistest, väljamõeldud, tinglikest skeemidest. Võib tuua palju tinglike, väljamõeldud skeemide eduka kasutamise näiteid füüsikas. Selliseid skeeme kasutatakse kõige sagedamini selleks, et oleks mugavam läbi viia analoogiaid. Nii kasutatakse magnetjõudude väljaarvutamisel sageli kujutlust „magnetlaengutest", kusjuures õpetus selliste „magnetlaengute" vastastikusest mõjust osutub analoogiliseks elektrostaatikaga. Siiski pole tegelikkuses mitte mingisuguseid magnetlaenguid, see eristab põhiliselt magnetilisi nähtusi elektrilistest nähtustest.

Niisama *tingliku,* puhtmõttelise skeemi näiteks võib olla dünaamika ülesannete d'Alembert'i poolt väljamõeldud asendamine staatika ülesannetega mehhaanika võrranditesse fiktiivsete d'Alembert'i (erinevalt reaalsetest — Newtoni inertsjõududest) inertsjõudude sissetoomise teel.

Kõrvalised, v ä l j a m õ e l d u d skeemid, mida rakendatakse kitsastes piirides, võivad olla kasulikud. Kui aga unustatakse nende väljamõeldud iseloom ja pannakse neid p õ h i l i s t e skeemide kõrvale, mis *objektiivselt õigesti peegeldavad nähtuste vastastikust põhiseost,* siis viib see teaduse idealistlikele moonutustele.

Kõige paremategi skeemide kasutamine on alati seotud riskiga, et uuritavad nähtused osutuvad mitte lõpuni arusaaduteks, kunstlikult vaesunuiks, kärbituiks, oma tõelise mitmekesisuse kaotanuiks.

Nähtuse skematiseerimine, tema isoleerimine olemasolevatest mõjudest, kõrvalekaldumine iga nähtuse ammendamatust keerukusest on meile vajalikud ainult kui tunnetamise astmed. Skeem on kasulik seni, kuni ta mängib abistavat osa nähtuse analüüsimisel. Skeem muutub kahjulikuks, hädaohtlikuks, kui temaga tegelemisel lakatakse skeemi taga nägemast nähtuse kogu k e e r u l i s u s t, kui skeem pimestab ja varjab endaga nähtuse need küljed, mis pole tema poolt ette nähtud.

Teaduses vähekogenud inimesed tegelevad skeemidega tihti ülemäära, ja eriti tinglike skeemidega, „skeemidega analoogia järgi". See toimub nähtuste vastastikuse seose alahindamise tõttu ja võib põhjustada kalduvusi skolastikale. Kogenud inimesed osutuvad vastupidiselt tihti stiihilisteks dialektikuteks: vilumus avaldub kõigepealt oskuses õigesti mõista nähtuse kogu keerulisust, arvestamata tema konkreetseid iseärasusi.

Tuleb siiski märkida, et kogemused ei anna tarkust juurde mahhistlikele füüsikutele. Mahhistid eitavad absoluutse tõe olemasolu, nad eitavad tegelikkuse, nähtuste tõelise pildi täpse ja

täieliku tunnetamise võimalikkust. Nad peavad füüsika ülesannet printsipiaalselt piiratuks nähtuse skematiseeritud kirjeldamisega; seepärast tegelevad nad alati ainult skeemidega; nad ujutavad kaasaegse matemaatilise füüsika üle hulga kunstlike, skolastiliste skeemidega ja käsitlevad neid skeeme nagu talmudistid; nad näevad vaeva mistahes väheusutava skeemi arvutusliku väljatöötamise kallal, kui see skeem tõotab ainult „mõtlemise ökonoomiat", nagu neile näib; mahhiste ei huvita, kuhu viib nende kujutletava „mõtlemise ökonoomia" tagaajamine, — kas tõe avastamisele või tõe moonutamistele. Sellist küsimust nende jaoks ei eksisteeri, sest et nad on valmis iga skeemi „õigeks" kuulutama, kui nendele näib, et see skeem esitab mingisuguseid soodustusi matemaatilisel „faktide kirjeldamisel".

Mõnes füüsika-alases teoses võib vahel kohata väidet, nagu oleks „maitse asi", kas kasutada mehhaanikas d'Alembert'i inertsjõudude mõistet või siis inertsjõudude Newtoni käsitlust. Harilikult nihutatakse nendessamades teostes seejärel esiplaanile d'Alembert'i jõud, kuna inertsjõudude Newtoni käsitlus kuulutatakse kasutuks.

See on mahhistidele iseloomulik võte. Newtoni inertsjõudude objektiivselt õige mõiste niisugune asendamine väljamõeldud d'Alembert'i jõududega ei ole meile muidugi vastuvõetav. Siiski ei tähenda see seda, et me peame mahhistlike väänamiste kartuses täiesti loobuma fiktiivsete d'Alembert'i jõudude kujutluse kasutamisest seal, kus see on sobiv.

Eespool käesolevas paragrahvis ja paragrahvides 12 ning 20 me vaatlesime kaht inertsjõudude käsitlust: Newtoni järgi kui liikuva keha reaalset mõju seosele ja d'Alembert'i järgi kui fiktiivset suurust, mis lubab liikumist kirjeldada tasakaalu võrranditega. Peale nende kahe järsult erineva ja täiesti selge termini „inertsjõud" mõistmise võib teaduslikus kirjanduses ja õpikuteski kohata selle termini kasutamist vähem kindlas ja vahel täiesti ebaselges tähenduses. Kõige sagedamini on inertsjõudude küsimuse segase esitamise põhjuseks inertsjõudude kujutluse ebajärjekindel kasutamine kord Newtoni mõttes, kord d'Alembert'i mõttes ilma täpse osutamiseta, kumba nendest käsitlustest silmas peetakse. Sellise killustatuse tavaliseks põhjuseks on asjaolu, et enamiku mehhaanika küsimuste analüüsi juures avab Newtoni inertsjõudude arvestamine nähtuste füüsikalise olemuse, kuna relatiivsusteooria järjekindlaks esitamiseks osutub kohasemaks kasutada d'Alembert'i fiktiivsete inertsjõudude kujutlust. Seoses sellega tekkisid ettepanekud püstitada mõned inertsjõudude justkui kompromiss- ehk „laiendatud" käsitlused. Hiljuti (1952. a.) korrati niisugust ettepanekut ühes arutlemise korras väljaantud raamatus. Nendel ettepanekutel, mis on mõõdapääsmatult seotud mehhaanika põhjaliku läbivaatamisega, ei ole siiski objektiivset

alust, sest et eksperimentaalsetele andmetele tuginedes võib käesoleval ajal näidata ainult kaht valdkonda, kus Newtoni mehhaanika vajab täpsustamist; need on esiteks valguse kiirusele lähedaste kiirustega toimuvate liikumiste dünaamika ja teiseks mikroosakeste mehhaanika. Mistahes muud Newtoni mehhaanika subjektiivsed parandused ja ümberkorraldused jäävad väheõigustatuteks.

§ 29. Mehhaanika areng pärast Newtonit

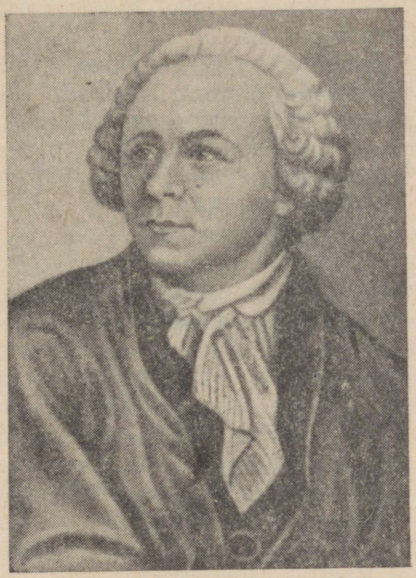
Newtoni mehhaanika arenemine XVIII sajandil langeb ajalooliselt kokku kapitalistliku tootmise hoogsa arenemise perioodiga Inglismaal, kaubandusliku õitsengu perioodiga Prantsusmaal ja Itaalias, kapitalismi tekkimise perioodiga Hollandis ja osaliselt ka teistes maades. See oli linnade hoogsa kasvu aeg, ookeanitaguste kaubanduslike kompaniide tekkimise aeg. See epohh esitas teadusele inseneriteaduste kiire arendamise nõude ehituse ja vabrikute ning laevade mehhaaniliste seadmete valdkonnas, meresõidu julgestamise ja armeede relvastuse valdkonnas jne. Koos sellega kergendas rahvusvaheliste sidemete tugevdamine õpetlastele teaduse arengu jaoks oluliselt tähtsat teoreetiliste ja katseliste tulemuste vahetamist.

Engels iseloomustab XVII sajandit ja XVIII saj. esimesi aastakümneid nii: „Peamine töö loodusteaduse arengu esimesel perioodil, mis nüüd algas, seisnes selles, et toime tulla olemasoleva materjaliga. Enamikel aladel tuli alustada *a*-st peale. Antiikajast oli jäänud päranduseks Eukleides ja Ptolemaiose päikesesüsteem, araablastelt — arvude kümnendsüsteem, algebra alged, numbrite kaasaegne kuju ja alkeemia, kristlik keskaeg aga ei jätnud järele midagi. Asjaolude sellise seisukorra juures oli mõõdapääsmatu, et esikoha võttis enda alla elementaarseim loodusteadus — maapealsete ja taevakehade mehhaanika, ja selle kõrval, selle teenistuses, matemaatiliste meetodite avastamine ning täiustamine. Siin saadeti korda suuri asju... Peajoontes püstitati tähtsaimad matemaatilised meetodid: analüütiline geomeetria — peamiselt Descartes'i poolt, logaritmid — Napier'i poolt, diferentsiaal- ja integraalarvutus — Leibnizi ja võib-olla Newtoni poolt... Lõpuks, Kepler avastas päikesesüsteemi astronoomias planeetide liikumise seadused, ja Newton formuleeris need üldiste mateeria liikumise seaduste vaatekohalt. Ülejäänud loodusteaduse harud olid kaugel isegi niisugusest esialgsest lõpuleviimisest... Füüsika ei väljunud veel sõna tõsises mõttes arengu kõige esimeste, algastmete raamidest, kui mitte arvestada optikat, mis tegi astronoomia praktiliste tarviduste tagajärjel läbi erakordse arengu. Keemia alles vabanes alkeemiast..."

Newton, lähtudes enda poolt sõnastatud seadustest (1687. a.),

ehitas mehhaanika üles kui täpse teaduse Eukleidese puhtgeomeetrilise meetodi järgi, mida ta täiendas lõpmata väikeste suurustega arvutamisega (samuti geomeetrilises esituses). Enda poolt avastatud gravitatsiooniseaduse baasil lõi Newton taevakehade liikumise teooria. Peale selle arendas Newton välja teooria kehade liikumisest takistavas keskkonnas ja põrketeooria.

Huvi dünaamika küsimuste vastu tõrjus sel ajal ja järgnevatel aastakümnetel tagaplaanile mehhaanika muud osad — staatika ja kinemaatika. Newtoni kaasaegse Varignon'i uurimused staatika alal (eriti jõudude hulknurga kohta) jäid unustusse kaheks sajandiks ja võeti alles palju hiljem grafostaatika aluseks.



Leonhard Euler (1707—1783).

Newtoni järel andis suurima panuse mehhaanika arengusse XVIII saj. keskel Peterburi akadeemik Leonhard Euler. Erinevalt Newtonist, kes mehhaanikas kasutas geomeetrilist meetodit, kuigi oli koos Leibniziga diferentsiaal- ja integraalarvutuse rajajaks, rakendas Euler juba oma esimestes mehhaanika-alastes teostes analüütilist meetodit ja täiustas hiljem seda meetodit pidevalt. Euleri tööd paistsid silma esituse täpsuse, matemaatiliste võtete rikkuse ja teemade mitmekesisuse poolest. Teaduslike uurimuste produktiivsus oli Euleril ebatavaline — ta kirjutas kokku 865 tööd. Euleri tööd võitsid üldise tunnustuse ülemaailmses teaduses ja määrasid kindlaks mehhaanika järgneva arengu.

Euler lõi variatsioonarvutuse, mis sai mehhaanika üldistatud printsiipide väljatöötamise aluseks. Euler lõi teoreetilise hüdrodünaamika. Klassikalisteks on Euleri uurimused taevamehhaanikas, pingete ja võnkumiste määramise alal elastsetes varrastes ja talades, akustikas, kõvade kehade liikumise teoorias, ballistikas jm.

Suur tähtsus mehhaanika arengule oli 1743. a. avaldatud d'Alembert'i teosel „Traktaat dünaamikast". Selles traktaadis oli esmakordselt dünaamika ja staatika ühendatud ühtseks meetodiks. Selleks tõi d'Alembert sisse kujutluse välisjõudude tasakaalustamisest fiktiivsete inertsjõududega ja seosjõududega.

Tähelepanuväärsed üldistused tegi Newtoni mehhaanikas XVIII saj. teisel poolel väljapaistev prantsuse matemaatik Lagrange. Lagrange taandas mehhaanika mistahes ülesannete lahendamise ühesugusel viisil püstitatavate ja ühest üldisest valemist — dünaamika universaalsest võrrandist — tulenevate võrrandite lahendamisele. Lagrange püstitas koguni kaks niisugust universaalset analüütilist meetodit mehhaanikas, mis on tuntud Lagrange'i I liiki võrrandite ja Lagrange'i II liiki võrrandite nime all.

XVIII saj. viiekümnendatel aastatel avaldas Maupertuis väikseima mõju printsiibi idee. Euler toetas seda ideed. Vastavalt sellele printsiibile teostub mehhaanilise süsteemi kõigist seoste poolt lubatud võimalikest liikumistest tegelikkuses see liikumine, mille jaoks teataval suurusel, mida nimetatakse „mõjuhulgaks", on väikseim väärtus.

Lagrange täpsustas 1760. a. väikseima mõju printsiipi, kuid alles XIX saj. neljakümnendatel aastatel formuleeris selle printsiibi täiesti täpselt ning arendas välja M. V. Ostrogradski ja temast sõltumatult Hamilton ja Jacobi.

Veel mõnda aega pärast seda vaatasid silmapaistvaimad matemaatilise füüsika esindajad (näiteks Poisson) väikseima mõju printsiibile kui mehhaanika seaduste kasutule teisendamisele. Kuid peatselt näitas W. Thomson (Kelvin) ja hiljem Helmholtz, et see printsiip on erakordselt viljakaks meetodiks hüdrodünaamikas ja elastsusteoorias.

Veel hiljem tuli ilmsiks, et väikseima mõju printsiip ei ole õige mitte ainult mehhaanilise liikumise jaoks, vaid on õige ka elektrilise ja soojusliikumise jaoks.

Energia jäävuse seadus püstitati samuti algul mehhaanilise liikumise jaoks (kineetilise energia summa ja konservatiivsete jõudude töö jäävuse teoreemina) ja üldistati alles hiljem kõigile liikumise liikidele.

Sel kombel lähendas mehhaanika analüütiliste meetodite väljatöötamine mehhaanikat füüsika teistele osadele.

Erilise suuna mehhaanika arengus moodustasid uurimused, mis püüdsid realiseerida maailma mehhanistliku seletamise programmi. See programm, mille esitas Descartes 1644. a. oma teoses „Filosoofia alused", taastati 140 aasta pärast Newtoni mehhaanika abil Lesage'i poolt. Mehhaanika kartesiaanliku suuna jaoks oli keskseks probleemiks eetri mehhaaniliste omaduste mõistatamine ja kõigi vastastikuse mõju liikide tõlgendamine keskkonna varjatud mehhaaniliste liikumiste avaldustena.

Eetri-teooria kõige viljakama arenduse andis Huygens aastatel 1670—1690 ja Fresnel aastatel 1815—1824 valgusnähtuste lainemehhaanilise tõlgenduse kujul.

Fresnel'i kaasaegsed Navier ja Cauchy töötasid välja mate-

maatilise elastsusteooria. Saavutused elastsusteoorias ja eetri lainemehhaanilise teooria edusammud viisid katsetele uurida eetri mehhaanilisi omadusi rangelt matemaatilisel kujul. Selliseid uurimusi tegi XIX saj. neljakümnendatel aastatel Green, Gauchy, Neumann, MacKellog. Selleks et otsida teid külgetõmbe- ja elektrijõudude loomuse mehhanistlikuks seletamiseks, töötasid Kelvin, Bjerknes ja N. A. Umov XIX saj. teisel poolel välja teoreemid selle kohta, et materiaalne keskkond tekitab keeriste ja pulseerivate kehade vastastikuse mõju.

Elektriõpetuses liitus mainitud mehhaanika suunaga idee seletada elektrilisi ja magnetilisi nähtusi elastsete pingetega ja keeriseliste liikumistega eetris. See idee oli suunajaks Faraday'le, Maxwellile, Hertzile, Lorentzile ja J. J. Thomsonile.

Tavaline mehhaanika ülesehitus jõudude mõiste laialdase kasutamisega paistis elektriliste nähtuste mehhanistliku tõlgendamise jaoks kõlbmatuna. Seepärast arendas Hertz mehhaanika ilma jõudude mõisteid kasutamata. Mehhaanika aluseks võttis ta Gaussi poolt väljendatud printsiibi teisendi (Gaussi poolt esitatud printsiipi nimetatakse „vähima jõukulutuse printsiibiks"; Hertz võttis aluseks „kõige otsema tee printsiibi"; „kõige otsema" tee mõiste kuulub materiaalsete punktide süsteemi liikumise juurde ja sel ei ole antud juhul lihtsat geomeetrilist tähendust).

Koos mehhaanika üldiste teoreemide väljatöötamisega kasvasid mehhaanika rohkearvulised spetsiaalsed valdkonnad — vedelike ja gaaside staatika ja dünaamika, õpetus võnkumistest ja lainetest ning akustika, rakendusmehhaanika (mehhanismide kinemaatika, masinate staatika ja dünaamika, üldine masinate teooria); sõrestike staatika, elastsusteooria, materjalide tugevusõpetus jne.

XIX ja XX saj. on tähistatud mehhaanika suurepäraste edusammudega kõigis eelnimetatud valdkondades. Tehnika stimuleerib teadust oma hoogsa arenguga ja kindlustab keeruliste ja täpsete katsete teostamise; teadus avab uusi teid tehnika arendamiseks, ennetades sõlmküsimustes tehnika nõudeid.

Üksikud kinemaatika teoreemid tõestati eri aegadel paljude autorite poolt, kuid alles 1834. a. näitas Ampère, et dünaamika käsitlemise ette on kasulik asetada puhtgeomeetriline liikumise teooria, mida ta nimetaski kinemaatikaks. Süstemaatilise kinemaatika käsitluse andsid Resal (1862. a.) ja prof. O. I. Somov (1872. a.) oma põhjalikes monograafiates Tšebõševi, Coriolise, Poinsot' ja Poncelet' uurimuste alusel.

Mõned probleemid, mis on mehhaanika eri harudes ühised, tõmbasid endale erilise tähelepanu. Näiteks käsitlesid paljudes praktilistes rakendustes tähtsat kõva keha ümber liikumatu punkti liikumise probleemi süstemaatiliselt aastakümnete jooksul XIX saj. ja osaliselt XX saj. silmapaistvaimad õpetlased: S. V. Kova-

levskaja, Poincaré, N. J. Žukovski, V. A. Steklov jt. Liikumise stabiilsuse uurimisele pühendasid oma klassikalised uurimused W. Thomson, N. J. Žukovski ja suur vene matemaatik — akadeemik Aleksander Mihhailovitš Ljapunov, kes andis 1892. a. liikumise stabiilsuse kõige üldisema teooria.

Masside vastastikuse mõju probleemi käsitleti gravitatsiooniseaduse järgi ühiselt koos elektrilaengute vastastikuse mõju probleemiga; selle valdkonna — „gravitatsioonivälja" ja „elektrivälja" klassikalist teooriat käsitleti XIX saj. algul Laplace'i, Greeni, Gaussi töödes ja sama sajandi teisel poolel Dirichlet' jt. uurimustes.

Newtoni mehhaanika baasil kasvas teoreetiline astronoomia juba XVIII sajandil laialdaseks teaduseks. Laplace'i mitmeköiteline „Taevamehhaanika", mis anti välja aastatel 1799—1826, koosnes 16 raamatust (Laplace'i päikesesüsteemi tekkimise teooria avaldati 1796. a., 41 aastat pärast Kant'i teose „Taeva üldine loomulik ajalugu ja teooria" ilmumist).

Mehhaanika arenemine XVIII ja XIX sajandil, mille põhjustasid tööstuse ja transpordi vajadused, avaldas sügavaimat mõju maailmavaate väljatöötamisele. Filosoofiliste voolude võitlus kajastas klasside võitlust, kelle kokkupõrked tugevnesid sel määral, kuidas arenesid tootlikud jõud. Newtoni aegadel avaldus Inglismaal kodanliku, kuid tolle aja kohta progressiivse filosoofi Locke'i mõju. Hiljem relvastusid konservatiivsed ringkonnad idealistide Berkeley' ja Hume'i teooriatega. Prantsusmaal omandasid XVIII saj. prantsuse valgustusajastu rajaja Voltaire'i järel, kes kaitses aktiivselt ja teravmeelselt isiksuse vabadust, ja Jean Jacques Rousseau' järel, kes kaitses demokraatiat feodalismi omavoli eest, mõju filosoofid-materialistid Diderot, Holbach, Helvetius ja La Mettrie. Need filosoofilised voolud avaldasid prantsuse revolutsiooni aastatel progressiivset mõju kaugele väljapoole Prantsusmaad.

XVIII saj. õhutasid mehhaanika ebatavalised edusammud filosoofe ja füüsikuid katsetele taandada kõik mateeria avaldused osakeste mehhaanilisele liikumisele. Selles kõigi nähtuste kui osakeste nihkumise tõlgendamise piiratuses, eelarvamuslikus looduse vaesumises, kvalitatiivsete muutuste ignoreerimises jäi materialistide-mehhanistide õpetus metafüüsiliseks.

XIX saj. teisel poolel, seoses molekulaarse soojusliikumise ja elektrilise liikumise uurimise edusammudega, said füüsikud aru mehhanistliku materialismi piiratusest. Sellest ajast peale hakkavad füüsikud oma uurimustes ikka sagedamini rakendama dialektilise materialismi teese (tihtilugu stiihiliselt, sellest mitte selgesti teadlik olles). Teaduse arenemine ise teeb neid sel kombel sugulaseks filosoofiaga, mis on loodud kõige progressiivsema klassi — proletariaadi — ideoloogide poolt.

V PEATÜKK.

JÕUDUDE JA ENERGIA MEHHAANILINE ÜLEKANNE (HÕÕRE, PÕRGE, TÕMME).

§ 30. Energia ja jõudude ülekanne.

Nähtused, mille juures toimub mehhaanilise energia ülekanne ühelt kehalt teisele, on ammendamatult mitmekesised. Jättes aga kõrvale nende teisejärgulised iseärasused ja rühmitades neid nähtusi nende peamiste, iseloomulike tunnuste järgi, eristatakse mehhaanikas kõigest nelja energiaülekande vormi: tõmmet, põrget, konvektsiooni ja ülekannet lainete kaudu.

Tõmme ja *põrge* on tehnika seisukohalt tähtsaimateks energiaülekande vormideks. Suur hulk mitmesuguseid masinaid on määratud energia ülekandmiseks tõmbe või põrke abil. Neid kahte energiaülekande vormi vaatleme antud peatükis seoses lihtmehhanismide analüüsimisega.

Konvektsiooniks nimetatakse energia ülekandmist aine kaudu. Keha iga liikumine teatava (mitte lõpmata väikese) kiirusega kujutab endast keha kineetilise energia konvektsiooni. Näiteks võib öelda, et kuuli lend kujutab endast kuuli kineetilise energia konvektsiooni. Mistahes energia liiki võib üle kanda konvektsiooni teel. Näiteks kujutab elektriseeritud keha edasiviimine endast elektrienergia konvektsiooni. Granaadi lend kujutab endast granaadis sisalduvate lõhkeainete keemilise energia konvektsiooni. Kütteaine vedamine on kütteaine keemilise energia konvektsioon. Konvektsiooni tehnilise kasutamise näiteks võivad olla hüdraulilised masinad ja suruõhuga töötavad masinad.

Elastsete deformatsioonilainete levimist tahkes, vedelas või gaasilises keskkonnas ehk teisiti öeldes *energia mehhaanilist ülekannet lainete kaudu* võib väga tihti tähele panna looduses, kuid võrreldes teiste energiaülekande vormidega leiab ta vähe kasutamist tehnikas. Seda nähtuste valdkonda vaatleme peatükkides, mis on pühendatud elastsusteooriale ja võnkumisõpetusele, ja samuti ka akustikale pühendatud peatükis (energia elektrilisest ülekandmisest lainete kaudu, mis on raadiotehnika aluseks, ja

teistest energiaülekande *elektrilistest* vormidest räägitakse raamatu teises köites).

Seadmeid, mis on määratud energia muundamiseks ühest liigist teise, energia ülekandmiseks ja töö tegemiseks, nimetatakse *masinateks*. Kõiki masinaid võib jaotada kahte klassi: jõumasinad ja töömasinad. *Jõumasinad* muundavad ühe energia liigi teiseks (näiteks kütuse energia kineetiliseks energiaks). *Töömasinad* kannavad energiat üle, suunates teda kehadele, mida on tarvis nihutada või töödelda. Töömasinaid, mis on ette nähtud koormiste nihutamiseks, nimetatakse *transportivateks* (vintsid, polüspastid, tõstekraanad, ekskavaatorid jms.). Töömasinaid, mis on määratud kivimite, metallide, puidu ja muude materjalide ning esemete töötlemiseks, nimetatakse *transformeerivateks* (lahtiraiumise vasarad, saed, pressid, tööpingid jms.).

Kui uuritakse mingi masina ehitust (skeletti) ja pööratakse peatähelepanu sellele, kuidas ühtede masinaosade liikumine määrab (suunab) teiste masinaosade liikumist ja kuidas toimub jõudude ümberkujundamine ning ülekandmine, siis nimetatakse masinat *mehhanismiks*. Teisiti öeldes on mehhanism kõigi masinas olevate seoste, s. o. masina kõigi üksikosade liikumist piiravate seadiste kogum. Mehhanismi naaberosi, millel on erinevad liikumised, nimetatakse *mehhanismi lülideks*.

Enamikul masinatest on üks (liikumise) vabadusaste. Mehhanismi mingi ühe lüli liikumisega määratakse rangelt kindlaks mehhanismi kõigi ülejäänud lülide liikumine. On olemas masinaid, millel on kaks ja kolm vabadusastet.

Masina poolt tehtava kasuliku töö ja masinale antava energiahulga suhet nimetatakse *masina kasuteguriks*. Kuna osa masinale antavast energiast kulutatakse mõõdapääsmatult hõõrdele masinas ja kuna veel mingi osa energiast võib mingisuguste iseärasuste tagajärjel mitte ülesande täitmiseks minna, siis on iga masina kasutegur väiksem ühest.

Teoreetilises mehhaanikas, mõnedes tema osades, näiteks kõvade kehade staatikas ja dünaamikas, ei vaadelda üldse, *kuidas toimub jõudude mehhaaniline ülekanne*. Kui mehhaanikas kasutatakse tegelikkusest kõrvale kaldudes absoluutselt kõva keha kujutlust, siis loetakse, et kaks niisugusele kehale rakendatud võrdset ja vastassuunalist jõudu, mis mõjuvad mööda üht sirget, ei tasakaalustu ainult vastastikku, vaid isegi hävitavad teineteise, nii et keha jääb jõudude mõjust vabaks. Tegelikkuses tasakaalustavad vastassuunalised jõud teineteist küll selles mõttes, et nad ei pane keha liikuma, kuid nad kas venitavad või suruvad keha.

Teoreetilise mehhaanika eriosas — elastsusteoorias — vaadeldakse küll jõu mehhaanilist ülekannet, kuid jõu ülekannet käsitletakse äärmiselt lihtsustatult. Tegelikkuses kujutab jõu mehhaa-

niline ülekanne endast väga keerulist nähtust, mille aluseks on molekulide vastastikune mõju. Kui me mõjume teatava jõuga, näiteks tõmbame enda poole kõva (ütleme terasest) varda üht otsa, mille teise otsa on tihedalt kinnitatud mingi koormis (näiteks on külge joodetud kaaluviht), siis kantakse jõud üle piki varrast molekulaarse kohesiooni tõttu. Nähtusi, mis kaasnevad jõu mehhaanilise ülekande selle liigiga, — *elastseid pingeid* — uuritakse elastsusteoorias ja tahkete kehade ehituse teoorias. Käesoleval ajal on saanud selgeks, et molekulaarsetel kohesioonjõududel on põhiliselt elektriline loomus. Silmanähtavalt samasugune on ka jõu mehhaanilise ülekande esimese liigi — elastse pinge — loomus.

Teoreetilises mehhaanikas, eriti staatikas, vaadeldakse kõvale kehale rakendatud jõudu lihtsuse mõttes kui *nihkuvat* vektorit, s. o. kui sellist vektorit, mille alguseks võib olla võetud mistahes punkt, mis asetseb kõva keha sees jõu mõjusirgel. Selles kujutluses jõust kui nihkuvast vektorist on formaalselt ja muidugi mõista ilma detailide arvestamiseta kajastatud jõu mõjumise sihis materjali elastse pinge olemasolu. Staatika kui teoreetilise mehhaanika osa jätab kõrvale küsimuse sellest, et elastne pinge materjalis on aine eriline seisund, mis on tingitud aine molekulaarse ehituse teatud muutustest.

Elastne pinge ei ole ainsaks jõudude mehhaanilise ülekande liigiks. Mitte vähem tähtis ei ole jõudude mehhaanilise ülekande teine liik — *hõõre*. Samuti kui elastne pingegi kujutab hõõre endast väga keerulist molekulaarse iseloomuga nähtust.

Hõõre võib avalduda staatiliselt ja dünaamiliselt. Staatilisel avaldumisel tasakaalustab hõõre jõu, mida me rakendame ühele kahest teineteisega kokkupuutuvast kehast, selleks et nihutada seda keha mööda teise keha pinda. Nii on näiteks selleks, et nihutada paigalt mingit horisontaalsel pinnal asetsevat eset, tarvis tõugata seda eset jõuga, mille horisontaalne komponent ületab hõõrdejõu. Dünaamiline hõõre avaldub kahe teineteisega kokkupuutuva keha suhtelisel liikumisel ja takistab seda liikumist. Mõlemal juhul on hõõrdejõud keha kokkupuutepinna iga elemendi jaoks suunatud tangentsiaalselt pinnaelemendiga.

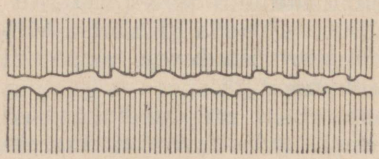
Kummalegi kahest kokkupuutuvast kehast mõjuvad võrdsed ja vastassuunalised hõõrdejõud. Kui me laual lebavale raamatule sõrmega rõhudes paneme käe horisontaalse liigutamisega selle raamatu liikuma mööda lauda, siis raamatu poolt sõrmeotsale rakendatud hõõre takistab sõrme libisemist mööda raamatu kaant või, kui libisemist võib täheldada, aeglustab seda; sama suur hõõrdejõud aga, mis on suunatud vastupidiselt, s. o. just käe liikumise suunas, mõjub sõrme poolt raamatule ja paneb selle liikuma mööda laua pinda. Nii toimub kokkupuutuvate kehade pinnaga tangentsiaalselt suunatud jõu ülekanne hõõrde kaudu.

Üksikasjaliselt käsitletakse hõõrdeseadusi ja -mehhanismi allpool; siin me mainime hõõret ainult selleks, et märkida hõõrde osa jõudude mehhaanilisel ülekandel. Jõu ülekanne hõõrde abil mängib suurt osa igapäevases elus ja tehnikas (kui ei oleks hõõret, libiseksid esemed meie käest; käimine, veokite, autode ja rongide liikumine oleks võimatu; paljud masinad osutuksid oma ülesande täitmiseks kõlbmatuteks). Tehnikas nimetatakse jõudude ülekannet hõõrde abil *friktsioonülekandeks.*

Võiks osutada veel kolmandale jõudude mehhaanilise ülekande liigile — niinimetatud *mehhaanilisele haakumisele.* Harilik ja kõige piltlikum näide on konksule asetatud ketilüli; kui me tõmbame konksust, siis kandub tõmbejõud üle ketile ja keti kaudu sellele esemele, mille külge kett on kinnitatud. Oma põhiolemuselt toimub jõuülekanne siin keti ja konksu elastse pinge tagajärjel, nii et võrreldes jõuülekande esimese liigiga ei sisalda mehhaaniline haakumine endas midagi uut. Keerulisemates mehhaanilise haakumise näidetes (hammasrattad, tiguülekanne jms.) toimub jõuülekanne samaaegselt elastse pinge ja hõõrde kaudu; üldjuhul kujutab „mehhaanilise haakumise jõud" endast kehade kokkupuutepinnaga risti suunatud rõhumise ja tangentsiaalselt suunatud hõõrdejõu resultanti.

§ 31. Hõõre. Tõmme.

Eristatakse kaht hõõrde liiki: *liugehõõre* ja *veerehõõre.* Reejalaste hõõrdumine vastu lund, uiskude hõõrdumine vastu jääd, noa või kirve hõõrdumine vastu puud — see on liugehõõre. Kui veereb vaguni, auto või jalgratta ratas, kui me veeretame ümmargusi palke või vaate maad mööda edasi, siis on tegemist veerehõõrdega. Ratta telje hõõrdumine vastu puksi on liugehõõre, sest et ratta veeremisel puksi pind libiseb mööda telje pinda.



Joon. 54. Pindade haakumine on hõõrde peapõhjuseks.

Liugehõõrde tekkimise peapõhjuseks on kokkupuutuvate esemete *makro-* ja *mikrokonarlikkus.* Joonisel 54 on suurendatud kujul kujutatud kahe kokkupuutuva pinna vältimata lohud ja nukid, kusjuures nad osaliselt lähevad üksteise sisse (makrokonarlikkus). Ühe pinna liikumisel mööda teist põrkuvad nende nukid üksteise vastu ja purunevad; hõõrduvate pindade aine pudeneb ehk, nagu öeldakse, *dispergeerub;* see juba tekitab teatava liikumist takistava jõu, mis on alati suunatud liikumisele vastu.

Niisuguseid tahkeid kehi, mille pind oleks ideaalselt sile, ei

ole olemas, seepärast läheb hõõrdejõudude ületamiseks kulutatav töö alati ühel või teisel määral hõõrduvate kehade pindkihtide dispergeerimiseks (pudendamiseks). Seejuures kulutatakse tunduv osa sellest pinna dispergeerimise tööst hõõrduvate kehade soojendamiseks, mida kutsub esile pinda mööda liuguvate pudendatud osakeste põrkumine üksteise vastu ja elastsete pingete energia üleminek molekulaarse soojusliikumise energiaks.

Hõõrdejõu teine osa on tingitud pinna mikrokonarlikkusest, s. o. pinna niisugustest ebatasasustest, mis on võrreldavad molekulide suurusjärguga. Kristallilise ehitusega tahketes kehades on molekulid paigutatud seaduspäraselt, teatud korras. Vahede tõttu molekulide vahel on isegi kristallide niinimetatud peegeltahk (s. o. niivõrd tasane pind, et ta peegeldab valgust nagu peegel) mikrokonarlik.

Kristalli ühe peegeltahu libisemisel mööda teist võib esineda „molekulaarne dispergeerumine", s. o. molekulide paigutuse loomuliku korrapärasuse rikkumine, mõnede molekulide lahtirebimine ja ümberpaigutamine. Peale niisuguse kristalli tahkude molekulaarse ehituse lõhkumise peab ühe kristalli libisemine mööda teise kristalli peegeltahku esile kutsuma mikrokonarlikkuse tagajärjel kristalli elementaarosakeste (molekulide, aatomite) võnkliikumise, õigemini tugevdama osakeste alati olemasolevat võnkumist, s. t. peab põhjustama kristalli soojenemise.

Mida siledamad on pinnad, seda suuremas arvus punktides puutuvad nad kokku teineteise vastu surumisel; seepärast oleks ekslik arvata, et mikrokonarlikkus mõjub hõõrde suurusele vähe, võrreldes makrokonarlikkusega.

Seadused, millele allub liugehõõre, püstitati prantsuse füüsiku Amontons'i poolt 1699. a. ja temast sõltumatult Coulomb'i poolt 1785. a. arendatumal kujul. Kui tähistada hõõrdejõudu tähega F ja jõudu, mille hõõrduvaid pindu surutakse teineteise vastu, tähega P[1], siis Amontons-Coulomb'i seaduse järgi

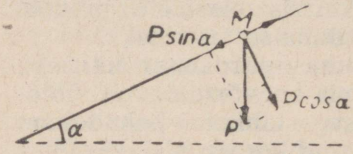
$$F = k_l \cdot P, \tag{1}$$

s. t. *hõõrdejõud on võrdeline jõuga, mis surub pindu kokku.* Siin k_l kujutab endast teatavat võrdetegurit, mida nimetatakse *liugehõõrde teguriks.* Valemist on näha, et liugehõõrde tegur on nimeta arv.

Üks lihtsamatest hõõrdeteguri mõõtmise viisidest seisneb tasapinna selle kalde määramises, mille juures kaldpinnal olev keha hakkab libisema mööda tasapinda raskusjõu mõjul. Lahutame kaldpinnale asetatud mingi keha raskusjõu P kaheks komponendiks: paralleelselt kaldpinnaga ja temaga risti (joon. 55). Kui kaldpinna ja horisontaalpinna vahel on nurk α, siis on esi-

[1] Väga tihti on pindu kokkusuruvaks jõuks lihtsalt keha kaal.

mene komponent $P \sin\alpha$ ja teine $P \cos\alpha$. Hõõrdejõud on võrdne keha vastu kaldpinda suruva jõu ja hõõrdeteguri korrutisega, s. t. on $k_l \cdot P\cos\alpha$. Kui see hõõrdejõud on suurem liikumapanevast jõust $P \sin\alpha$, siis keha jääb liikumatuks. Kui suurendada tasapinna kallet α, siis liikumapanev komponent $P \sin\alpha$ kasvab ja hõõrdejõud $k_l \cdot P \cos\alpha$ kahaneb; teatava kaldenurga α puhul hakkab keha liikuma ühtlaselt mööda kaldpinda alla. Sel juhul



Joon. 55. Hõõrdenurga määramise juurde.

$$P \sin\alpha = k_l \cdot P \cos\alpha,$$

millest

$$k_l = \tan\alpha. \qquad (2)$$

Nurka, mille puhul (raskusjõu toimel) keha liugub ühtlaselt mööda kaldpinda, nimetatakse *hõõrdenurgaks*. Hõõrdetegur on võrdne hõõrdenurga tangensiga.

Toome mõned *liugehõõrde tegurid:*

Teras mööda terast	0,17
„ „ malmi	0,17
Raud mööda rauda	0,34
„ „ messingit	0,2
„ „ malmi ja pronksi	0,18
Pronks mööda malmi	0,22
Messing mööda malmi	0,16
Tamm mööda tamme piki kiudu	0,4
„ „ „ risti kiudu	0,2
Nahkrihm mööda puitu	0,4
„ „ malmi	0,28
Telliskivi mööda telliskivi	0,7
Teras mööda jääd	0,02
„ „ kõva pinnast	0,2—0,4
Teras mööda pehmet pinnast	0,4—0,8
Kummi(rehv) mööda kõva pinnast	0,4—0,6
Puit(jalased) mööda jääd	0,035

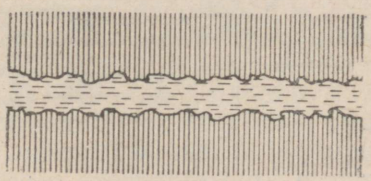
Sageli võib märgata, et hõõre eri liiki pindade vahel on väiksem kui sama liiki pindade vahel. Seda kasutatakse tihti tehnikas, kui on vaja vähendada hõõrde suurust. Nii tehakse näiteks laagrikausside vooder teisest metallist kui tapid (võlli otsad). Hõõrde suurusele avaldab mõju ka hõõrduvate pindade kõvadus; mida kõvemad on pinnad, seda väiksem on hõõre; laagrid kellamehhanismides valmistatakse väga kõvadest kividest (näiteks ahhaatidest ja teemantidest).

Coulomb oletas, et hõõrdetegur on konstantne suurus ega sõltu ei liikumiskiirusest, rõhu suurusest ega hõõrduvate pindade suurusest. Katselised uurimused näitasid siiski, et *liugehõõre väheneb liikumiskiiruse suurenemisega ja pisut suureneb rõhu suurenemisel.*

Suurte kiiruste juures ei jõua konarlike pindade kõik nukid ja lohud üksteise taha kinni haakuda (võrdleme vankri aeglast liikumist, kus rattad korralikult satuvad ühest sillutise august teise, vajudes nendes alla, kiire liikumisega, kus rattad hüppavad nendest aukudest üle). Hõõrde kiirusest olenevuse iseloomustamiseks toome näite, mis käib terasest vaguniratastе pidurdamise kohta malmklotside abil: rongi kiirusel 100 *km/h* on hõõre neli korda väiksem kui kiirusel 10 *km/h* ja viis korda väiksem kui rongi liikumise algul. Seepärast kasvab ka trammivaguni peatamisel, kui kiirus väheneb, piduriklotside-hõõre vastu rattaid tugevasti ja pidurdumine muutub järsemaks, nii et otse enne peatumist lülitatakse tõugete vältimiseks pidur vähehaaval välja.

Hõõrdeteguri sõltuvus rõhust avaldub ainult õige suurte rõhkude juures. Nii on raua hõõrdetegur mööda rauda 0,34 rõhkudel, mis ei ületa 18 kG/cm^2, nagu on näidatud eespooltoodud tabelis; rõhul 36 kG/cm^2 on ta 0,41. Rõhkudel, mille järk on 50 kG/cm^2, kahjustuvad hõõrduvad metallipinnad (raud, malm, messing) oluliselt. Edasisel rõhu suurendamisel väheneb hõõrdetegur uuesti. Nii on terase hõõrdetegur mööda malmi rõhkude juures, mille järk on 500 kG/cm^2, kõigest 0,12, s. t. ta on kolm korda väiksem kui keskmistel rõhkudel (15—50 kG/cm^2), kus ta on 0,4—0,3.

Paljudel juhtudel võib temperatuuri muutus avaldada tugevat mõju liugehõõrde tegurile. Metalli liugumisel mööda metalli mõjub temperatuur hõõrdele kahesugusel viisil: ühelt poolt muutub temperatuuri muutumisega hõõrduvate pindade kõvadus; teiselt poolt võib soojenemise tagajärjel tunduvalt kasvada pindade oksüdeerumine, mis teeb pinna konarlikumaks. Vaatlused näitasid, et raua liugumisel mööda malmi toob kuumutamine normaaltemperatuurilt kuni 1000° C endaga kaasa hõõrdeteguri kasvamise peaaegu neljakordseks, kui hõõrduvatelt pindadelt oksüüdi mitte eemaldada; kui aga oksüüd hoolikalt kõrvaldada, siis raua ja malmi mainitud kuumutamisel hõõrdetegur algul kasvab ja on 700° juures peaaegu kaks korda suurem kui normaaltemperatuuril, edasisel kuumutamisel aga kahaneb uuesti ja muutub 1000° juures niisama suureks nagu normaaltemperatuurilgi.

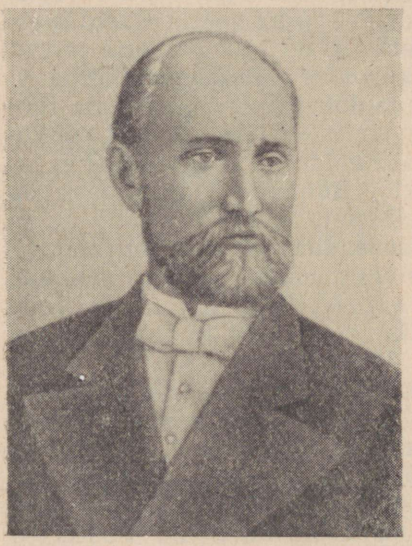


Joon. 56. Määre lahutab hõõrduvad pinnad.

Kõik eespoolöeldu kehtib niinimetatud *kuiva hõõrde* kohta, kus puudub hõõrduvate pindade *määrimine*. On teada, et määrimine vähendab hõõret tugevasti (keskmiselt 8—10 korda). Hõõrde vähenemise põhjus seisneb selles, et õli täidab kõik hõõr-

duvate pindade ebatasasused ja asetub õhukese kihina nende vahele nii, et pinnad justkui lakkavad teineteist puutumast (joon. 56), seejuures nihkuvad üksteise suhtes vedeliku eri kihid.

Määrimisega asendame kahe pinna vahetu hõõrde hõõrdega vedeliku sees, mida nimetatakse *sisehõõrdeks*. See sisehõõre on eri vedelike jaoks erinev. Kui näiteks võrrelda veega, siis osutub, et eetris on sisehõõre viis korda väiksem kui vees, määrdeõlides on ta ligikaudu 80 korda suurem ja glütseriinis 3° juures 2500 korda suurem kui vees. Vedelikke, millel on suur sisehõõre, nimetatakse *viskoosseteks*. Näib, et vesi oma väikese viskoossuse tõttu on ideaalseks määrdeaineks. Mispärast kasutatakse aga siis määrimiseks õlisid, mille viskoossus on umbes sada korda suurem vee viskoossusest? See seletub sellega, et määrimiseks on kõlblik ainult niisugune vedelik, mida ei suruta välja õhukesest vahest hõõrduvate pindade vahel, selleks peab määrdeks tarvitatav vedelik olema küllalt viskoosne. Muide, nagu teada, on vesi ree liikumisel mööda lund väga heaks määrdeks, sest et jalaste alt väljasurutava vee asemele tekib kogu aeg uus.



Nikolai Pavlovitš Petrov (1836—1920).

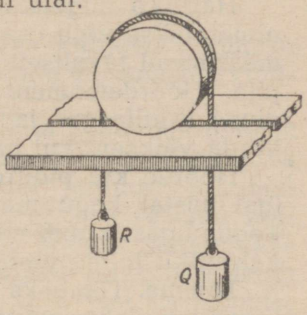
Mitmesuguste faktorite mõju hõõrdele määrimisel uuris esmakordselt põhjalikult Nikolai Pavlovitš Petrov. Ta tegi kindlaks, et hõõrdejõud määrimise puhul on võrdeline kiirusega ja hõõrduva pinna suurusega, pöördvõrdeline määrdekihi paksusega ja sõltub määrde füüsikalistest omadustest. Hõõrde sõltuvus määriva vedeliku füüsikalistest omadustest avaldub selles, et hõõrdejõud määrimise korral on võrdeline määriva vedeliku sisehõõrde teguriga (§ 59). Määrimise hüdrodünaamilist teooriat ja selle teooria kontrollimiseks ning täpsustamiseks ettevõetud katseid käsitleb N. P. Petrov oma neljas ulatuslikus monograafias „Hõõre masinates". Kokku pühendas N. P. Petrov hõõrde küsimustele aastatel 1882—1905 kahekümne töö ümber. Nendes töödes on üksikasjaliselt uuritud hõõrde sõltuvust määrimisel koormisest, kiirusest, määrde etteandmise režiimist, temperatuurist jne.

Rea hõõrde küsimusi määrimisel on vaadelnud Reynolds (1886. a.) ja Sommerfeld (1904. a.). Kõige täpsemal kujul arendasid määrimise teooria välja N. J. Žukovski ja S. A. Tšaplõgin töös „Määriva kihi hõõrdest" (1904—1906). Selles uurimuses oli arvestatud määrdekihi ebaühtlast paksust. Nagu näitas N. J. Žukovski juba 1886. a., on tappi laagris hoidva hüdrodünaamilise jõu tekkimine seotud sellega, et väljasurumise ja liikumise iseloomu tõttu on määrdekihi paksus all väiksem kui ülal.

Vaatleme nüüd *veerehõõrde* küsimust. Kui üle silindrilise rulli, mis asetseb kahel horisontaalsel prussil, panna nöör, mille otstes on raskused R ja Q (joon. 57), siis võib teatava vahe $Q - R$ puhul saavutada rulli ühtlase liikumise. On silmanähtav, et antud juhul on hõõrdejõud F võrdne liikumapaneva jõuga $Q - R$. Coulomb leidis, et veeremisel hõõrdejõud

$$F = k_v \cdot \frac{P}{r}, \qquad (3)$$

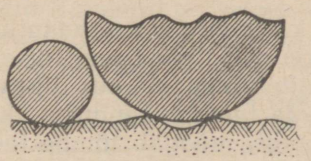
kus P on jõud, millega rull rõhub toele, r — rulli raadius, k_v — *veerehõõrdetegur.*



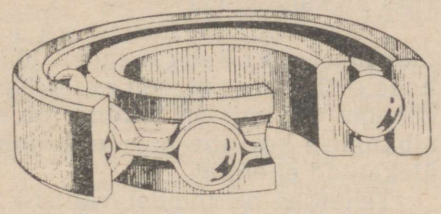
Joon. 57. Raskuste Q ja R kaalu vahe tasakaalustatakse veerehõõrde poolt.

Niisiis *veerehõõre on võrdeline kokkusüruva jõuga ja pöördvõrdeline rulli raadiusega.*

Veerehõõret ületava kummutava jõu „õlaks" on rulli raadius; mida pikem on see õlg, seda kergem on ületada rulli piirdele rakendatud hõõret. Vaatamata sellele, kui kõvad ka ei oleks alus ja rull, peavad nad ikkagi pisut muutma oma kuju — deformeeruma, ja seda enam, mida suurem on rulli rõhumine alusele;



Joon. 58. Suurtel ratastel on väiksem veeretakistus kui väikestel.



Joon. 59. Kuullaager.

teiselt poolt avaldavad ebatasasused rullile seda väiksemat mõju, mida suurem on tema raadius, nagu see on näha jooniselt 58.

Veerehõõre on tunduvalt väiksem liugehõõrdest. Seepärast kasutataksegi nii tihti kuullaagreid, milles telje liugehõõre vastu puksi asendatakse kuulide või rullide veerehõõrdega (joon. 59).

Valemist (3) on näha, et veerehõõrdetegur kujutab endast nimega arvu, mis on avaldatav pikkuseühikutes, näiteks sentimeetrites.

Toome mõned *veerehõõrdetegurid* (sentimeetrites):

Terasbandaažiga ratas mööda terasrööbast . .	0,05
Malmratas mööda terasrööbast	0,12
Puitrull mööda puitu	0,16

Hariliku liugelaagri jaoks on hõõrdejõud tapi pinnal (tapiks nimetatakse võlli osa, mis pöörleb liikumatus padjas) normaalsel määrimisel tavaliselt ligikaudu $F \approx 0{,}08\ P$, kus P on koormis tapile. (Hõõrdemoment ümber tapi telje on $F \cdot r$, kus r on tapi raadius.) Kuullaagri jaoks on hõõrdejõud tapi pinnal umbes 50 korda väiksem kui hariliku laagri jaoks, ligikaudu $F \approx 0{,}0015\ P$.

Hõõrde kui pidurdava jõu kahjulikud toimed on üldtuntud. Igal aastal kogu maailmas ärapõletatava 1500 milj. *t* kivisöe koguhulgast kulub nähtavasti umbes 50 milj. *t* sütt ainult hõõrde kahjuliku toime ületamiseks.

Tõmme. Tõmbeks nimetatakse enam või vähem sujuvat keha liikumise oleku muutust, mille kutsub esile teise keha poolt arendatav jõud, mis kantakse esimesele kehale üle mehhaaniliselt, s. o. vahepealsete kehade elastse pingega või siis hõõrdega. Kuigi igapäevases elus tõmbest rääkides peetakse silmas seda, et liikumapanev keha „tõmbab enda järel" liikumapandavat keha, on liikumapaneva ja liikumapandava keha vastastikune asetus tegelikult mitteoluline; näiteks kas vedur on haagitud vagunite ette või asetseb siis rongi sabas ja tõukab vaguneid enda ees — mõlemal juhul liigub rong veduri tõmbe tõttu. Tõmbe mõistele vastandatakse „rapsaku" mõistet, kuid põhiolemuselt kujutab rapsak endast põrget, millest liikumapandava ja liikumapaneva keha kõrval võtavad osa vahepealsed kehad, mis on jõu mehhaanilisteks ülekandjateks.

Tõmme kujutab endast nii jõu kui ka energia mehhaanilist ülekannet; üks keha arendab jõudu ja kannab tõmbe teel teisele kehale üle energiat; jõu rakenduspunkt nihkub edasi koos liikuva kehaga; töö, mis on võrdne jõu suuruse ja tema rakenduspunkti nihkumise korrutisega jõu mõjumise suunas, mõõdab tõmbe teel ülekantud energiat.

Tehnikas on tõmbel valitsev tähtsus. Hulk mehhanisme on määratud tõmbe realiseerimiseks mitmesugustes tingimustes ja mitmesugustel eesmärkidel.

Sobivaks masinate liikumiseks on pöörlev liikumine; seepärast *kasutatakse tõmmet tihti* ühe masina *võlli pöörlemise ülekandmiseks* teise masina võllile. Nagu teada, kinnitatakse selleks masinate võllide otsa *rihmarattad* ehk *seibid* (rattad, mille pöidade välispind on sile) ja ühendatavate masinate kahele rihmarattale tõmmatakse tihedalt *rihm*, mis on kokku õmmeldud rõngaks

(„lõputa" rihm). Siin kantakse jõud üle rihma ja hammasratta vahelise hõõrde ja rihma elastse pinge abil. Tõmbe erikujuks on *friktsioonülekanne:* masina võllile kinnitatakse *rull* (ratas) ja surutakse see teatava jõuga vastu samasugust rulli, mis on kinnitatud teise masina võllile; kui esimese masina võll pöörleb, paneb rullidevaheline hõõre pöörlema ka teise masina võlli. Nagu teada, kasutatakse analoogilisel eesmärgil hammasrattaid, kettülekannet ja muid mehhanisme.

Tõmbe näiteks koos edasi-tagasi toimuva kulgeva liikumise muundamisega pöörlevaks liikumiseks võib olla aurumasina *väntmehhanism.*

Niisugustes masinates nagu auto, traktor ja vedur *tekitatakse tõmme nende masinate ja maa vastastikuse mõjuga;* nagu juba selgitati paragrahvis 18 (joon. 26), on nendel juhtudel liikumapanevaks jõuks („tõmbejõuks") hõõre, mis ei lase ratastel libiseda mööda tee või rööbaste pinda; seda hõõret nimetatakse vahel *veohõõrdeks;* ta on rakendatud rataste pöidadele, nagu ikka, suhtelisele libisemisele vastassuunas, s. t. just sinnapoole, kuhu veerevad rattad.

Veohõõre on võrdeline jõuga, millega jõumasina poolt pöörlemapandud rattad surutakse vastu tee pinda või vastu rööpaid, s. t. on võrdeline veduri või auto kaalu selle osaga, mis langeb veoratastele, — see on niinimetatud *haakekaal* P_o. Kui k_l on liugehõõrdetegur rataste pinna ja teepinna või rööbaste vahel, siis veojõud

$$F_{veo} = k_l \cdot P_o$$

(tõmmete arvutamistes nimetatakse liugehõõrdetegurit k_l veorataste pinna ja teepinna vahel tihti haaketeguriks).

Veduri rataste terasbandaažide liugumisel mööda terasrööpaid on hõõrdetegur umbes $^1/_6$. Seepärast moodustab veduri veojõud ühe kuuendiku veduri haakekaalust. Harilikel teedel liikuvate traktorite jaoks võib rataste liugehõõrdetegur mööda teed muutuda piirides $^1/_5$ kuni $^4/_5$, seepärast moodustab traktori veojõud sõltuvalt teest ja rataste pinna kujust ühe, kaks, kolm ja koguni neli viiendikku traktori kaalust.

Hobuse veojõud on keskmiselt 0,1 hobuse kaalust ja ei ületa $^1/_5$ tema kaalust. Hobuse kaal on umbes 400 *kG,* seepärast on hobuse veojõud normaalselt umbes 40 *kG* ja maksimaalselt umbes 80 *kG.*

Rataste tavalisel läbimõõdul ja telgede normaalsel määrimisel on vankri veeretakistus keskmise kvaliteediga munakivisillutist mööda umbes $^1/_{20}$ vankri kaalust. Järelikult võib hobune horisontaalsel maanteel normaalselt enda järel vedada vankrit, mille kaal on 20 korda suurem hobuse veojõust, s. t. on kaks korda suurem hobuse kaalust (reel võib koorem olla kolm korda suurem hobuse kaalust).

Liikumiskiirusel 20—40 *km/h* võib raudteekoosseisu veeretakistuseks (telgede hõõrde arvestamisega normaalsel määrimisel) võtta umbes $^1/_{300}$. Järelikult võib vedur enda järel vedada horisontaalsel teel rongi, mille kaal on 300 korda suurem veduri veojõust, kuna aga veduri veojõud moodustab umbes $^1/_6$ veduri haakekaalust, siis rongi kaal (kaasa arvatud vedur) võib täiesti horisontaalsel teel olla 50 korda suurem veduri haakekaalust. Raudteed püütakse ehitada võimalikult horisontaalsena, sest et isegi väikese, poolekraadise tõusu puhul (see on tõus, mis magistraalidel tihti esineb) võib vedur enda järel vedada rongi, mille kaal on ainult 20 korda suurem veduri haakekaalust (näiteks seeria „Э" vedur kaaluga 80 *T* võib vedada 1500-tonnist rongi).

Tee tõusul koosneb takistus, mida avaldab rong ühtlase kiirusega toimuvale liikumisele, kahest osast: veeretakistusest ja rongi kaalu horisontaalsest komponendist.

Kui tee tõusunurk, mis on mõõdetud radiaanides, on α, siis on rongi kaalu horisontaalne komponent $P \cdot \sin\alpha$, ehk väikeste tõusunurkade puhul ligikaudu $P \cdot \alpha$ (tee tõuse on kokku lepitud mõõta „tuhandikes", s. t. näidata, mitu tuhandikku osa radiaanist on α; ühe tuhandiku üldtunnustatud tähistusviis on: $1\,^0/_{00}$[1]. Normaalselt ei ületa tõusud raudteemagistraalidel 8—9‰; raudtee kõrvalharudel tulevad ette tõusud kuni 40‰).

Veeretakistusele avaldab mõju veerehõõre ja hõõre telgedel. Telgede liugehõõre avaldab mõju seda vähem, mida suurem on ratta raadius *R* võrreldes telje (tapi) raadiusega *r*. Kokkuvõttes on rongi või veoki veeretakistus kogukaalu *P* juures:

$$F_{takis} = k_{\text{veeretak}} \cdot P,$$

kus

$$k_{\text{veeretak}} = \frac{k_v}{R} + \frac{k_{\text{määrit. telg}} \cdot r}{R}.$$

Tee tõusul kasvab takistus suuruse $P \cdot \sin\alpha$ võrra.

Toome *veokite veeretakistustegurid* mitmesugustel teedel (rataste tavalise raadiuse, telgede normaalse määrimise ja antud veoki liigi jaoks väikese liikumise kiiruse juures):

Vagunid mööda raudteerööpaid	0,003—0,005
Trammid mööda rööpaid	0,005—0,007
Raudrehvidega sõidukid mööda asfaltteed . . .	0,015
Kummirehvidega sõidukid mööda asfaltteed . .	0,025
Raudrehvidega sõidukid mööda kivisillutist . .	0,03—0,05
Raudrehvidega sõidukid mööda sillutamata teed	0,08—0,16

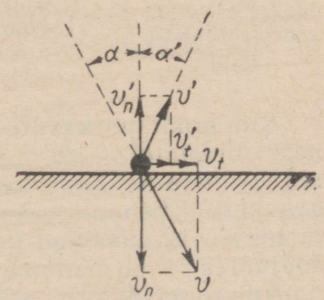
[1] $^0/_{00}$ — promill.

§ 32. Põrge.

Põrkeks nimetatakse keha liikumise oleku järsku muutust tema kokkupõrkamisel teise kehaga. Põrke ajal toimub mõlema kehaga kujumuutus (deformatsioon). Põrke olemus seisneb selles, et kokkupõrkavate kehade relatiivse liikumise kineetiline energia muundub lühikese aja jooksul elastse deformatsiooni energiaks ja ühel või teisel määral molekulaarse liikumise energiaks; põrge viib energia ülekandmisele ja üldiselt energia ümberjaotamisele kokkupõrkavate kehade vahel.

Põrkeprotsessi võib jaotada kahte faasi. Esimese faasi kestel toimub kehade lähenemine: mõlemad kehad teevad tööd reaktsioonijõudude vastu; nende üldine kineetiline energia väheneb; relatiivne kiirus (kohtumise hetkel see ei olnud null, muidu ei oleks põrget) väheneb nullini. Selle järel algab teine faas: kehad hakkavad teineteisest eemalduma, taastades oma algkuju, seejuures sooritavad reaktsioonid positiivse töö, süsteemi kineetiline energia kasvab, relatiivne kiirus kasvab absoluutväärtuse poolest, olles muutnud märgi, lõpuks kehad eralduvad ja sellega lõpeb põrkeprotsess.

Tähelepanekud näitavad, et relatiivne kiirus ei saavuta pärast põrget oma endist arvulist väärtust. See seletub sellega, et praktikas pole meil kunagi tegemist ideaalselt elastsete kehadega ja ideaalselt siledate pindadega. Vaatleme kerakese põrkamise näites vastu liikumatut tasast pinda kahe ülalnäidatud teguri mõju kiiruste suhtele enne ja pärast põrget. Joon. 60 kujutab v kerakese langemise kiirust v' — tema tagasipõrkamiskiirust tasaselt pinnalt, v_{n}, v_{t}, v'_{n} ja v'_{t} — vastavaid kiiruste normaalseid ja tangentsiaalseid komponente, α ja α' — vastavalt langemis- ja tagasipõrkumisnurka.



Joon. 60. Kerakese põrge vastu liikumatut siledat pinda.

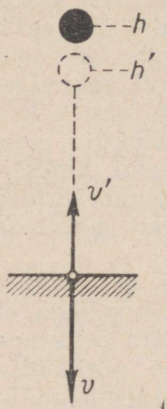
Ideaalsel juhul oleksid langemis- ja tagasipõrkumiskiiruse normaalsed komponendid nagu nende tangentsiaalsedki komponendid võrdsed ($v'_{n} = v_{n}$ ja $v'_{t} = v_{t}$), aga see tähendaks, et ka kiirused ise on võrdsed ja langemisnurk on võrdne tagasipõrkumisnurgaga ($v' = v$ ja $\alpha' = \alpha$).

Tegelikult aga on tagasipõrkumiskiiruse normaalne komponent mittetäieliku elastsuse tõttu väiksem langemiskiiruse normaalsest komponendist ($v'_{n} < v_{n}$) ja tagasipõrkumiskiiruse tangentsiaalne komponent on pinna mittetäieliku sileduse tõttu väiksem langemiskiiruse tangentsiaalsest komponendist ($v'_{t} < v_{t}$). Relatiivse

kiiruse normaalsel komponendil (kokkupuutepinna suhtes) pärast põrget oleva arvulise väärtuse ja algväärtuse suhe on Newtoni järgi füüsikaline konstant, mis iseloomustab kokkupõrkavate kehade loomust ega sõltu relatiivse kiiruse suurusest ja kehade massidest:

$$\frac{v'_n}{v_n} = \varepsilon.$$

Seda konstanti ε nimetatakse *taastumisteguriks*[1]. Tema arvuline väärtus on 0 ja 1 vahel ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$).



Joon. 61. ε määramise juurde kerakese tagasipõrkumise järgi.

Taastumistegurit saab kõige lihtsamalt määrata, jälgides kerakese tagasipõrkumise kõrgust. Langegu elastne kerake kõrguselt h elastsele horisontaalsele tasapinnale (joon. 61). Tema kiirus põrkehetkel leitakse valemi $v = \sqrt{2gh}$ järgi. Pärast põrget tõuseb ta teatavale kõrgusele h', mis on väiksem kui h. Kerakese vastava kiiruse v' pärast põrget leiame valemi $v' = \sqrt{2gh'}$ järgi. Siis

$$\varepsilon = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

Toome ε *väärtused mõnede materjalide jaoks* V. V. Raikovski täpsete mõõtmiste järgi (1952):

Alumiinium vastu alumiiniumi	0,23
Pronks vastu pronksi	0,4
Malm vastu malmi	0,6
Teras vastu terast	0,7
Plastmass polistorool vastu terast	0,95

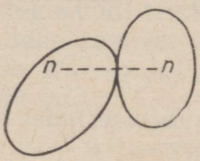
Kui kokkupõrkavate kehade jaoks $\varepsilon = 0$, siis niisuguseid kehi nimetatakse *absoluutselt mitteelastseteks*. Kogu põrkeprotsess selliste kehade jaoks seisneb ainult esimeses faasis: kui on saavutatud kehade maksimaalne lähenemine, siis kuju taastumist ei toimu, ja mõlemad kehad liiguvad edaspidi kui üks tervik; seejuures läheb kaduma teatav osa kineetilisest energiast, mis on kulutatud deformeerimise tööks.

Kui $\varepsilon = 1$, siis nimetatakse kokkupõrkavaid kehi *absoluutselt elastseteks*. Sel juhul kõrvaldatakse esimese faasi kestel tekkinud kujumuutus teises faasis täielikult; relatiivne kiirus saavu-

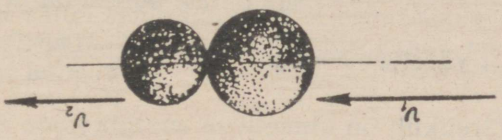
[1] Kiiruse tangentsiaalsete komponentide muutumise iseloomustamiseks põrkeaja jooksul kasutatakse vahel eri kordajat, niinimetatud *hetkelise hõõrde tegurit* $f = \frac{v_t'}{v_t}$; kuna aga hõõrde mõju on tunduvalt väiksem kui elastsuse mõju, siis enamasti määratakse põrget ainult taastumisteguriga.

tab endise arvulise väärtuse ja süsteemi kineetiline energia taastub täielikult.

Tegelikkuses on kõigi kehade jaoks kordaja ε väärtus 0 ja 1 vahel. Siiski näitab kogemus, et näiteks elevandiluu on omadustelt küllalt lähedal täielikult elastsele kehale, ja seatina — täiesti mitteelastsele kehale. Seepärast kujutavad absoluutselt elastsete ja mitteelastsete kehade põrke jaoks teostatud arvutused tihti suure täpsusega nähtuse käiku.



Joon. 62. Põrkejoon *nn*.



Joon. 63. Kerade tsentraalne otsepõrge.

Sirget *nn*, mis läheb läbi kehade kokkupuutepunkti (joon. 62) ja on risti nende kokkupuutepinnaga, nimetatakse põrkejooneks.

Kui põrkejoon läbib mõlemate kehade raskuskeskmed, siis nimetatakse põrget *tsentraalseks*. (Homogeensete kerade põrge on alati tsentraalne.)

Kui mõlemad kehad liikusid enne põrget mööda põrkejoont, siis on tegemist *otsepõrkega*; vastasel korral — *kaldpõrkega*.

Vaatleme tsentraalset otsepõrget (joon. 63). Tähistame tähtedega m_1 ja m_2 kokkupõrkavate kehade massid, tähtedega v_1 ja v_2 nende kiirused enne põrget, ja tähtedega v'_1 ja v'_2 nende kiirused pärast põrget. Siis võib liikumishulga jäävuse seadust (§ 25) rakendades kirjutada:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2.$$

See tähendab, et *kehade liikumishulkade summa pärast põrget on võrdne liikumishulkade summaga enne põrget.* (Põrke juures moodustavad mõlemad kehad ühe süsteemi, millele mõjuvad ainult sisejõud, ja seepärast jääb üldine liikumishulk muutumatuks.)

Absoluutselt mitteelastsete kehade põrge ($\varepsilon = 0$). Nagu ülemal näidati, lõpeb sel juhul kogu põrkeprotsess esimese faasiga, ja mõlemad kehad liiguvad pärast põrget nagu üks tervik ühe ja sama kiirusega. Tähistades seda mõlema keha jaoks ühist kiirust tähega u, saame liikumishulga jäävuse seaduse põhjal:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u + m_2u,$$

[1] Loeme kiirusi ja liikumishulki positiivseteks, kui nad on suunatud teatud suunas (näiteks paremale); vastassuunalisi loeme negatiivseteks.

millest

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Kuna mitteelastsete kehade põrkel need kehad deformeeruvad ja nende kuju ei taastu, siis kaotatakse osa kineetilist energiat: see läheb deformeerimise tööks. Enne põrget oli kineetiline energia $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$, aga pärast põrget on ta $\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$ ehk, asendades u väärtuse valemist (4): $\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

Järelikult on kineetilise energia kadu ehk *deformeerimise* töö:

$$E_{def} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{5}$$

Vaatleme üksikasjalisemalt deformeerimise tööd praktikas kõige sagedamini esineval juhul, ja nimelt kui üks kehadest, näiteks esimene, on enne põrget paigal. Põrkava keha kineetiline energia on $E = \frac{m_2 v_2^2}{2}$; kineetilise energia kao ehk deformeerimise töö saame valemist (5), võttes selles $v_1 = 0$:

$$E_{def} = E\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Kineetilise energia jääk $E_{jääk}$, s. t. töö, mida võivad teha liikuvad kehad pärast põrget, leitakse lihtsa lahutamise teel:

$$E_{jääk} = E - E_{def} = E\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Praktikas kasutatakse põrget kahte liiki töödel. Esimest liiki tööd seisnevad kehade kuju muutmises (deformeerimises), näiteks metalli tagumisel, vermimisel ja stantsimisel, kehade tükeldamisel jne. Toodud valemitest on näha, et sel juhul on kasulik, et liikumatu keha mass (m_1) oleks hoopi andva keha massist (m_2) suurem; siis on $E_{def} > E_{jääk}$ (seepärast tehaksegi alasid võimalikult massiivsemad).

Teist liiki tööd seisnevad kehade nihutamises põrke tagajärjel ja takistuste ületamises seejuures, näiteks vaiade maasse rammimisel, naelte ja kiilude sissetagumisel jne. Sel juhul on kasulik, et nihutatava keha mass oleks väike, võrreldes hoopi andva keha massiga, ja järelikult $E_{def} < E_{jääk}$ (seepärast peabki vasara mass olema palju kordi suurem naela massist; vaiade sisserammimisel peab nuia mass olema palju suurem vaia massist).

Absoluutselt elastsete kehade põrge ($\varepsilon = 1$). Elastsete kehade põrkel, samuti nagu mitteelastsel põrkelgi, saavad mõlema keha kiirused ühesugused väärtused põrke esimese faasi lõpuks, mida võib nimetada *kokkusurumisfaasiks*. Järelikult on esimese keha kiiruse muutus (algebraline juurdekasv) $u - v_1$, ja teisel kehal $u - v_2$. Kuna teise faasi *(taastamisfaasi)* jooksul on kehade vastastikuste reaktsioonide impulsid täieliku elastsuse ja deformatsiooni täieliku kadumise tagajärjel samasugused kui esimese faasi jooksulgi, siis on ka kehade kiiruste muutused (algebralised juurdekasvud) teise faasi vältel samasugused kui esimesegi jooksul. Seepärast on esimese keha kiiruse kogu juurdekasv põrke lõpuks $2(u - v_1)$, ja teisel kehal $2(u - v_2)$; kehade kiirused pärast põrget on:

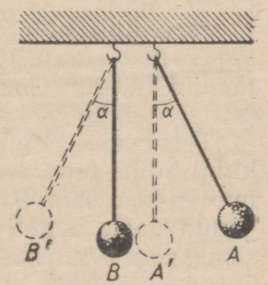
$$v'_1 = v_1 + 2(u - v_1) = 2u - v_1, \qquad v'_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2.$$

Asetades siia u asemele tema väärtuse valemist (4), saame:

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \qquad v'_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

Vaatleme kaht erijuhtu:

a) kui *mõlema keha massid on võrdsed* ($m_1 = m_2$), siis *pärast põrget nad vahetavad oma kiirused*, nagu see järeldub valemitest (6): $v'_1 = v_2$ ja $v'_2 = v_1$. Juhul, kui üks keha oli enne põrget paigal, siis keha, mis enne liikus, jääb pärast põrget seisma, ja keha, mis sai hoobi, hakkab liikuma selle keha kiirusega, mis andis hoobi. Nii näiteks, kui kaks elastset kerakest A ja B (joon. 64) riputada üles ühepikkuste niitide abil ja üks nendest, näiteks A, viia vertikaalist kõrvale nurga α võrra ning lasta lahti, siis ta annab langemisel hoobi teisele kerakesele B ja jääb ise seisma, kerake B aga kaldub kõrvale sama nurga α võrra.



Joon. 64. Ühesugused elastsed kerad vahetavad kokkupõrkamisel oma kiirused.

b) Kui ühe, paigaloleva keha mass *on võrratult suurem teise massist* (näiteks $m_1 \gg m_2$), siis liikumatu suur keha, mis sai hoobi, jääb paigale, aga väike keha, mis andis temale hoobi, põrkab temast eemale esialgse kiirusega vastassuunaliselt. Tõepoolest, võttes valemites (6) $m_1 = \infty$ ja $v_1 = 0$, on kerge saada, et $v'_1 = 0$ ja $v'_2 = -v_2$.

Kui arvutada valemeid (6) kasutades mõlema keha kineetiline energia pärast põrget, s. t. $\frac{m_1v'^2_1}{2} + \frac{m_2v'^2_2}{2}$, siis saame $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$.

Seega *täiesti elastsel põrkel jääb süsteemi kineetiline energia muutumatuks* ($E = E_0$).

Eespooltoodud põrkeseadusi rakendatakse sagedasti mitmesuguste ülesannete lahendamisel. Vaatleme kaht iseloomulikku näidet.

Langegu auruhaamer kaaluga 12 *T* kiirusega 5 *m/sek* alasile, mille kaal koos taotava rauatükiga on 250 *T*. Määrame haamri poolt raua muljumiseks tehtava töö ja aluse põrutamisele kaotatud energia. Selleks võime kasutada valemit (5). Tõepoolest võib auruhaamri lööki vastu alasil asuvat taotavat rauatükki pidada mitteelastseks põrkeks. Mitteelastsel põrkel kaotatakse osa kineetilist energiat ja silmanähtavalt läheb see antud juhul taotava rauatüki muljumiseks (milles seisnebki haamri kasulik töö) ja soojendamiseks. Haamri kineetilise energia kogu ülejäänud osa kulutatakse aluse põrutamiseks.

Valemis (5) viime indeksi 1 ühendusse alasi ja rauatükiga, indeksi 2 — auruhaamriga:

$$m_1 = 250\,000\ kg,\ v_1 = 0;\ m_2 = 12\,000\ kg,\ v_2 = 5\ m/sek.$$

Taotledes saada tööd kilogramm-meetrites, peame džaulides avaldatud töö jagama raskuskiirendusega $g = 9{,}81\ \frac{m}{sek^2}$;

$$E = \frac{12 \cdot 25}{9{,}81 \cdot 2} \cdot 10^3 kGm = 15\,300\ kGm,$$

$$E_{def} = \frac{12 \cdot 250 \cdot 25}{9{,}81 \cdot 2 \cdot 262} \cdot 10^3\ kGm = 14\,600\ kGm.$$

Järelikult kulutatakse auruhaamri kogu kineetilise energia tagavarast ainult 700 *kGm* ebatootlikult aluse põrutamisele, ülejäänud 14 600 *kGm* läheb taotava rauatüki muljumiseks (ja osaliselt soojendamiseks).

Teise iseloomuliku näitena arvutame, missuguse jõuga tuleb kinni hoida tenniseretketit, et tagasi lüüa palli massiga 100 *g*, mis lendab kiirusega 9,8 *m/sek*, kui kokku leppida, et pall, olles põrganud vastu reketit täisnurga all selle pinnaga, lendab tagasi samasuguse kiirusega ja et põrkeaeg on 1/20 *sek*. Põrkeaeg on antud; järelikult, kui me määrame jõuimpulssi, siis sellega teeme kindlaks ka jõu *F* otsitava väärtuse, millega on tarvis reketit kinni hoida põrke ajal. Jõuimpulss on võrdne liikumishulga muutusega, ja kuna me loeme põrget ideaalselt elastseks ning eeldame, et palli liikumise suund on risti reketi pinnaga, siis on liikumishulga muutus $2mv$ (enne põrget oli kiirus v, pärast põrget $-v$). Siit

$$F = \frac{2mv_2}{t}\ \text{düüni} = \frac{2mv_2}{980\,t}\ G.$$

Kui $m = 100\ g$, $v = 980\ cm/sek$, $t = \frac{1}{20}\ sek$, saame $F = 4\ kG$.

On arusaadav, et kui me paneme reketi kulgevalt liikuma pallile vastu, siis osutub jõud, millega tuleb reketit põrke ajal kinni hoida, palju väiksemaks, sest et palli liikumishulga muutus kompenseerub reketi liikumishulga muutusega põrke ajal. Sellelt seisukohalt peab tennisemäng liiga kergete reketitega olema niisama väsitav kui liiga raskete reketitega, mis on kasulikud löökide ajal, kuid on koormavad löökide vaheaegadel.

Teiste küsimuste seas, mis on seotud põrkega, pakub huvi ka kokkupõrkeaja (põrke kestuse) küsimus. Lähtudes elastsusteooriast esitas Hertz (1881. a.) kehade põrkel toimuva deformatsiooni kohta teooria, milles lahendatakse ka kokkupõrkeaja küsimus. Suurusjärgu iseloomustamiseks toome ühe arvutuse tulemuse: kahe messingist kerakese jaoks, mille diameeter on umbes $2^1/_2\ cm$, tuleb põrke kestuse järk relatiivse kiiruse juures umbes $7\ cm/sek$ kaks kümnetuhandikku sekundit, ja kiiruse puhul $7\ m/sek$ — umbes üks kümnetuhandik sekundit.

Katsed, mida teostasid Hamburger (1886. a.) ning vene uurijad Neljubov (1902. a.) ja Dinnik (1909. a.), andsid tulemused, mis hästi ühtisid Hertzi teooriaga teraskerade jaoks; väheelastsetele ja mitteelastsetele kehadele pole Hertzi teooria rakendatav.

Et illustreerida kerade massi ja suuruse mõju põrkeajale, on huvitav tuua ka niisugune võrdlus: sel ajal kui harilike katsetingimuste juures kahe teraskerakese kokkupõrkeaeg moodustab sekundi kümnetuhandikke osi, kestaks kahe maakera suuruse teraskera põrkeprotsess mitu tundi, kui nende algkiirus on 1 *km/sek*.

Ülemal vaadeldi absoluutselt mitteelastsete ja absoluutselt elastsete kehade põrkeseadusi. Mitte täiesti elastsete kehade põrkeseadused tuletatakse analoogiliselt eelnevaga, kui arutlusse sisse tuua taastumistegur ε.

Mida väiksem on taastumistegur, seda suurem osa kokkupõrkavate kehade kineetilisest energiast kaob põrkel, muundudes molekulaarsoojusliikumise energiaks. Mitte absoluutselt elastsete kehade põrkega kaasneb nähtavasti alati kokkupõrkavate kehade teatav „sisemine dispergeerumine" — kristallikeste murenemine, millest koosnevad tahked kehad. Kõik see teeb põrkenähtuse teataval määral sarnaseks hõõrdenähtusega selles mõttes, et mõlemal juhul — nii põrke kui ka hõõrde puhul — muundub osa makroskoopiliste kehade mehhaanilise liikumise energiast molekulaarse liikumise ja vastastikuse mõju energiaks, s. o. toimub, nagu öeldakse, *mehhaanilise energia hajumine*. Põrke ja hõõrde sarnasust väljendas Engels piltlikult järgmiste sõnadega: „Hõõret võib vaadelda kui rida väikesi põrkeid, mis toimuvad

üksteise järel ja üksteise kõrval; põrget võib vaadelda kui ühte kohta ja ühele hetkele kontsentreeritud hööret. Hööre — see on krooniline põrge, põrge — hetkeline hööre."

§ 33. Lihtmehhanismid ja kinemaatilised paarid.

On üldtuntud, kuivõrd mitmekesised ja sagedasti keerulised on inimese tööd kiirendavad, kergendavad ja asendavad mehhanismid. Sellest hoolimata kujutavad kõik, ka kõige keerulisemad mehhanismid, endast võrdlemisi väikese arvu lihtmehhanismide ühendust. Energialiikide muundamise seadiste kõrval on lihtmehhanismid kõigi masinate aluseks. Juba Archimedes püüdis antiikajal välja valida ja üksikasjaliselt tundma õppida lihtmehhanisme, millest kui põhielementidest saab üles ehitada kõik ülejäänud keerulisemad mehhanismid. XV saj. lõpul ja XVI saj. algul püstitas endale sama eesmärgi Leonardo da Vinci ja hiljem — Galilei. Uuelt vaatekohalt on seesama lihtmehhanismide väljavalimise ja tundmaõppimise ülesanne lahendatud möödunud sajandi lõpul kaasaegse mehhanismide teooria rajajate Reuleaux' ja P. L. Tšebõševi poolt.

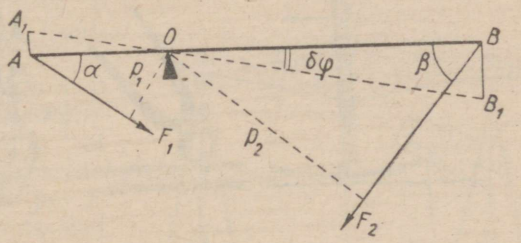
Leonardo da Vinci aegadel oli mehhanismide ehitamise kunst saavutanud juba kõrge taseme (Leonardo da Vinci eluloo kirjeldustes leidub viiteid, et see geniaalne kunstnik ja õpetlane oskas valmistada keerulisi automaate). Galilei püüdis kõiki mehhanisme taandada viiele lihtmehhanismile: *kangile, plokile, pöörale, kiilule* ja *kruvile.*

Need elementaarmehhanismid on tõesti suure hulga keeruliste mehhanismide tähtsaimateks osadeks; loetletud elementaarmehhanismid ja nende ühendused määravad endaga „võidu jõus", s. o. mehhanismile rakendatud jõudude ülekandmise ja muundamise seadused. Siiski ei ole mehhanismid määratud ainult jõudude muundamiseks jõu mehhaanilisel ülekandel, vaid samuti ka mingisuguse ühe liikumise (näiteks edasi-tagasi toimuva kulgeva liikumise) teiseks muundumiseks (näiteks pöörlevaks). Seepärast Galilei idee ei ammenda küsimust.

Reuleaux põhjendas iga mehhanismi lahutamise niinimetatud kinemaatilisteks paarideks. *Kinemaatiliseks paariks* nimetatakse üldse kahe keha ühendust, kus mõlemad kitsendavad vastastikku liikumist; kumbagi nendest kehadest nimetatakse *paari lüliks.* Eristatakse alamaid ja kõrgemaid kinemaatilisi paare, kusjuures *alamate* paaride all mõistetakse selliseid, mille lülid puutuvad kokku mööda mingit pinda, ja *kõrgemate* all neid, kus lülid puutuvad kokku mööda joont või ühes punktis.

Formaalselt on mehhanismide kinemaatiline liigitus Reuleaux' järgi kooskõlalisem kui Galilei ideele ehitatud liigitus. Siiski ei lahene kinemaatilise liigitamisega mehhanismi otstarbeka jaotamise ülesanne niisugusteks elementideks, mis ei osutuks ainult kinemaatika seisukohalt, vaid, mis on olulisem, ka dünaamika seisukohalt *tähtsaimateks* elementideks ja osutuksid selles mõttes tõesti iga keerulisema mehhanismi ülesehitamise aluseks.

Kang. Kangiks nimetatakse kõva keha, mis võib pöörelda ümber liikumatu telje. Vaatleme sirgjoonelist kangi AB pöörlemisteljega O (joon. 65); tema otstele A ja B mõjuvad jõud F_1 ja F_2 nurkade α ja β all. Anname kangile võimaliku nihke, ja nimelt pöörame teda lõpmata väikese nurga $\delta\varphi$ võrra. Siis punkt A nihkub $AA_1 = AO \cdot \delta\varphi$, ja punkt B $BB_1 = BO \cdot \delta\varphi$ võrra, kusjuures jõu F_1 poolt nihkega AA_1 moodustatav nurk on $90° + \alpha$ ja jõu F_2 poolt nihkega BB_1 moodustatav nurk on $90° - \beta$.



Joon. 65. Kangi tasakaalu tingimuste tuletamise juurde.

Võimalike nihete printsiibi järgi peab rakendatud jõudude tööde summa mistahes võimalikul nihkel olema tasakaalu korral null. Seepärast

$$F_1 \cdot AO \cdot \cos(90° + \alpha) \cdot \delta\varphi + F_2 \cdot BO \cdot \cos(90° - \beta) \cdot \delta\varphi = 0$$

ehk

$$-F_1 \cdot AO \sin\alpha + F_2 \cdot BO \sin\beta = 0.$$

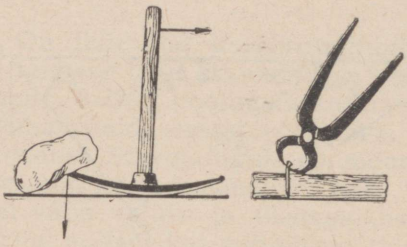
Tõmbame punktist O jõudude F_1 ja F_2 sihtidele ristsirged p_1 ja p_2; märgime, et $p_1 = AO \cdot \sin\alpha$ ja $p_2 = BO \cdot \sin\beta$. Järelikult saab kangi tasakaalu tingimust kirjutada järgmiselt:

$$F_1 \cdot p_1 = F_2 \cdot p_2. \tag{7}$$

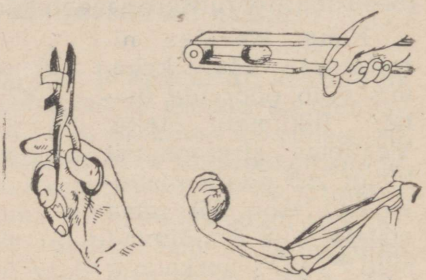
Nii selle võrrandi vasak kui ka parem pool kujutavad endast jõu korrutist tema vähima kaugusega pöörlemisteljest. Jõu (mis pöörab keha ja asetseb pöörlemisteljega risti oleval tasapinnal) korrutist vähima kaugusega pöörlemistelje ja selle sirgjoone vahel, mida mööda jõud mõjub, nimetatakse *jõumomendiks* (ristlõigud p_1 ja p_2 on *jõudude õlad*).

Seega *seisneb kangi tasakaalu tingimus selles, et kangi vastassuundades pöörava kahe jõu momendid peavad olema võrdsed.*

Ühes suunas (kellaosuti liikumise suunas) pööravate jõudude momente loetakse positiivseteks ja teises suunas (vastu kellaosuti liikumise suunda) pööravate jõudude momente negatiivseteks. Seepärast võib kangi tasakaalu tingimust sõnastada järgmiselt: *pöörlemiskeskpunkti suhtes võetud jõumomentide algebraline summa peab kangi tasakaalu korral olema null.*



Joon. 66. Kahepoolsete kangide näited.



Joon. 67. Uhepoolsete kangide näited.

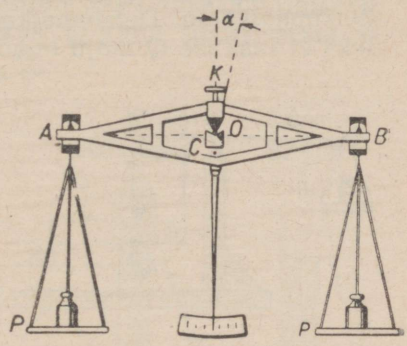
Harilikult kasutatakse kangi selleks, et kangi ühele otsale rakendatud jõuga ületada kangi teisele otsale rakendatud suurt jõudu. On silmanähtav, et kang annab seda suurema võidu jõus, mida pikem on selle jõu õlg, millega me mõjume kangile, võrreldes kangi abil ületatava jõu õlaga. Pole raske aru saada, et kõik, mis on eespool öeldud *kahepoolse kangi* kohta (pöörlemiskeskpunkt asetseb mõjuva jõu ja takistusjõu rakenduspunktide vahel, joon. 66), on õige ka *ühepoolse kangi* (pöörlemiskeskpunkt asetseb takistusjõu rakenduspunkti taga või siis selle jõu rakenduspunkti taga, millega me mõjume kangile, joon. 67) kohta. Pole samuti raske taibata, et me „kaotame" jõu rakenduspunkti nihetel pikkuses niisama palju kordi, kui mitu korda me „võidame" jõus; seepärast kang, nagu teisedki mehhanismid, ei võimalda töö suurendamist.

Kangkaal. Kangi üheks tähtsaimatest rakendustest on kangkaal, mille abil võrreldakse mitmesuguste kehade masse. Kangkaalu ehitus on üldtuntud, seepärast vaatleme kahte hea kaalu tähtsamat omadust — *õigsust* ja *tundlikkust.*

Et kaal õige oleks, on tarvis, et oleks täidetud järgmised tingimused: a) mõlemad kaalukangi õlad peavad olema omavahel võrdsed; b) kaalukangi raskuskese peab asetsema vertikaalil, mis läbib kaalukangi toetuspunkti, ja seejuures viimasest madalamal, mis on püsiva tasakaalu tingimuseks.

Kaalude tundlikkus peab olema võimalikult suur ja püsiv, s. t. sõltumatu koormise suurusest. Vaatleme nüüd neid faktoreid, mis määravad kaalude tundlikkuse.

Kujutagu *AB* (joon. 68) endast võrdõlgset kaalukangi, mis võib pöörelda ümber telje *O*, kusjuures *A* ja *B* tähistavad kaalukausside külgeriputamiseks määratud prismade ülemisi servi; kummagi kausi kaal koos koormisega olgu *P*. Punkt *C* on kaalukangi raskuskese. Temale on rakendatud kaalukangi raskusjõud *Q*. Nurk α, mille võrra kaalukang kaldub kõrvale lisakoormise *p* toimel, iseloomustab kaalude tundlikkust.



Joon. 68. Kangkaal.

Väikese lisakoormisega *p* koormatud kaalu tasakaalu analüüs näitab, et tundlikkus ei sõltu koormisest, kui kausside külgeriputamispunktid *A* ja *B* ning toetuspunkt *O* asetsevad ühel sirgel. Sel juhul

$$\tan \alpha = \frac{pL}{lQ}, \qquad (8)$$

s. t. kaalu tundlikkus kasvab kaalukangi raskuskeskme ja pöörlemistelje vahelise kauguse *l* vähenemisega ning kaalukangi pikkuse *L* ja tema raskuse suhte suurenemisega.

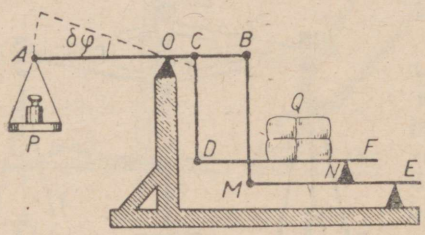
Praktiliselt on kasulikum teha kaale lühikeste ja kergete kangidega (kaalukangi pikkuse *L* suurendamine nõuab tugevuse vastavat tõstmist, ja seepärast tuleb kaalukangi kaalu *Q* suurendada enam, kui kasvab tema pikkus; selle tagajärjel väheneb suhe $\frac{L}{Q}$). Selleks et reguleerida *l* suurust, ühendatakse kaalukangiga mutriga kruvi *K* (joon. 68), mille keeramisega saavutataksegi tundlikkuse muutumine.

Praktiliseks tundlikkuse mõõduks võetakse selle lisakoormise suurus, mis tekitab antud üldkoormise juures kindla hälbe, mis on näiteks võrdne skaala ühe jaotisega. Parimatel kangkaaludel saab koormist 1 *kg* kaaluda täpsusega kuni 0,01 *mg* (üks miljondik protsenti).

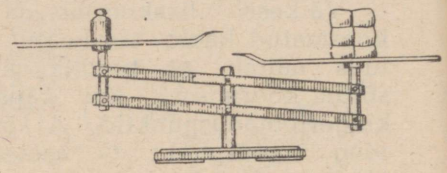
Täpsel kaalumisel ei vaadelda kaalukangi tasakaaluasendit, mis heade kaalude juures saabub alles pärast väga kaua kestvaid võnkumisi, vaid vaadeldakse võnkeid endid. Seepärast on kaalu kasutamisel tähtis võnkevälde, see ei tohi olla eriti suur. Tõstes kaalu tundlikkust kaalukangi raskuskeskme ja pöörlemistelje vahelise kauguse *l* vähendamisega ja kaalukangi pikkuse *L* suurendamisega, me suurendame seejuures võnkeperioodi. See räägib jälle lühema kaalukangi kasuks: kaotades pisut kaalude tundlikkuses me see-eest võidame kaalumise kiiruses, mis on samuti tähtis täpsete tulemuste saamiseks.

Painduva kaalukangiga kaalude võnketeooriat uuris igakülgselt D. I. Mendelejev. Ta töötas välja ka täpse kaalumise metoodika analüütilisel kaalul.

Kaupade jämedalt ligikaudseks kaalumiseks kasutatakse sagedasti margapuid (päsmreid), ja suurte raskuste kaalumiseks — detsimaalkaalu. Detsimaalkaalu ehitus selgub jooniselt 69. Selleks et raskuse Q mõju ei sõltuks tema asukohast platvormil DF,



Joon. 69. Detsimaalkaalu skeem.



Joon. 70. Roberval'i kaalu skeem.

on tarvis, et ta laskuks alla, jäädes iseendaga paralleelseks. Selleks peab olema täidetud järgmine suhe:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{ME}{NE} = n.$$

Tõepoolest, kui punkt C ja järelikult ka D laskub allapoole a võrra, siis punkt B laskub alla na võrra, punkt M laskub alla samuti na võrra ja punkt N a võrra. Seega laskuvad platvormi mõlemad otsad D ja N ühteviisi.

Selleks et kaalumisel saaks kasutada koormisest 10 korda kergemaid vihte, võetakse suhe $\frac{OA}{OC}$ võrdseks arvuga 10 („sajandikkaalude" jaoks aga võrdseks arvuga 100).

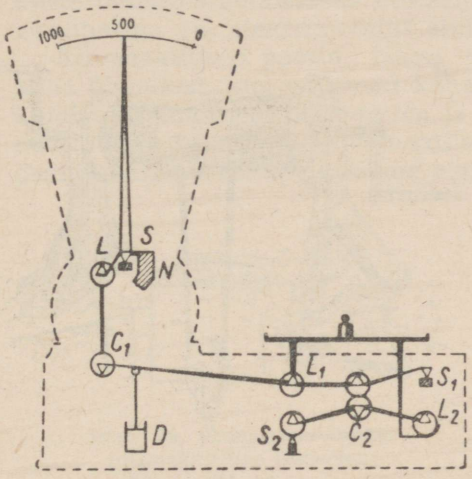
Väikeste esemete kiireks kaalumiseks kasutatakse sagedasti Roberval'i kaalu ja Béranger' kaalu.

Roberval'i kaalus (joon. 70) saavutatakse kaalumise sõltumatus raskuse asukohast kaalukausil niisuguse varraste süsteemi kasutamisega, et kaalukausid saavad nihkuda ainult iseendaga paralleelselt.

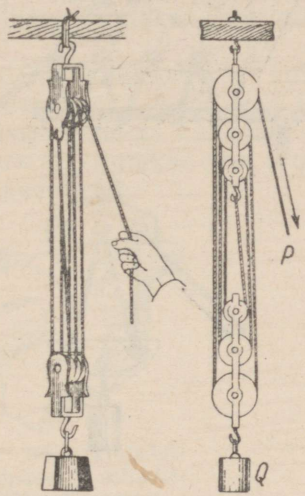
Viimasel ajal on laialdaselt levinud numbrilauaga kauplusekaalud, millel on see eelis, et nende kasutamisel jääb ära vihtide kokkuarvutamise vajadus. See kaal kujutab endast kahe kangkaalu ühendust. Joon. 71 selgitab nende ehitust. Kauba raskust mõõdetakse jõuga, millega kaalukauss rõhub alla laskudes prismale L_1; selle jõu suuruse üle võib otsustada nurga järgi, mille võrra kaldub kõrvale kaalukang vastukaaluga N. Õhkpiduri D

ülesandeks on katkestada kaalukausside võnkumine, et oleks kiiresti võimalik otsustada kaalu üle osuti asendi järgi numbrilaual.

Plokid ja plokkide süsteemid. Kui ploki hark on kinnitatud, võib plokki vaadelda kui võrdõlgset kangi, mis ei anna mingisugust võitu jõus ja mida kasutatakse ainult jõu suuna muutmiseks. Liikuva ploki kasutamisel ripub raskus Q kahe nööri otsas ja kumbki nendest on pingutatud jõuga $\frac{Q}{2}$.



Joon. 71. Numbrilauaga kauplusekaalu skeem.



Joon. 72. Harilikud talid.

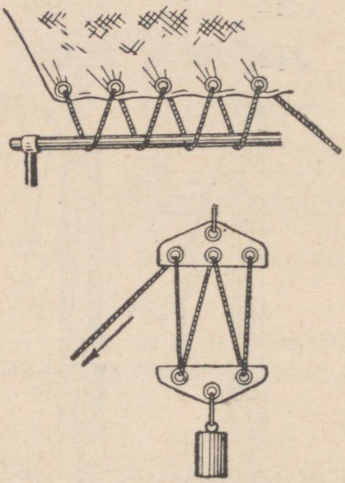
Selleks et saada suuremat võitu jõus, kasutatakse süsteemi mitmest liikuvast plokist, mis on ühendatud ühe või mitme liikumatu plokiga. Selliseid plokkide süsteeme nimetatakse *polüspastideks* ehk *talideks*.

Joon. 72 on kujutatud harilik tali, mis kujutab endast kahte eri harki suletud liikuvate ja liikumatute plokkide ühendust. Tavaliselt pannakse kõik liikuvad plokid ühele ühisele teljele, täpselt samuti nagu kõik liikumatudki plokid. Nöör on kinnitatud ülemise hargi külge ja haarab järjekorras kõiki plokke; nööri vabale otsale mõjub jõud P. Kuna raskus Q ripub n ploki puhul nööri n haru otsas, siis igaüks nendest ja järelikult ka nööri vaba ots oleks pingutatud jõuga $\frac{Q}{n}$, kui ei oleks hõõret ja nööride kalkust.

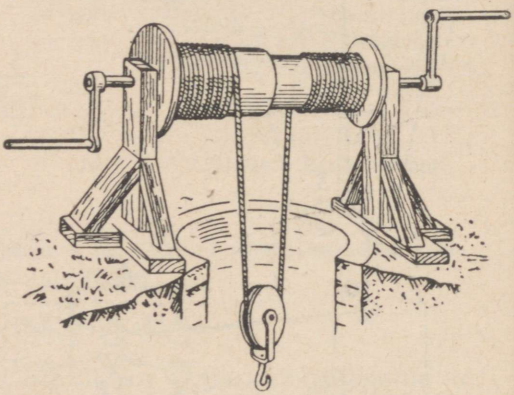
Tegelikult kasvab hõõrde ja nööride kalkuse tõttu võit jõus plokkide arvu suurendamisel väga aeglaselt. Seepärast tehakse tali harilikult ainult kahest või kolmest plokkide paarist.

Polüspaste (talisid) kasutatakse laialdaselt tõstekraanades ja üldse tõste- ning tõmbeseadeldistes. Sageli kasutatakse nööri asemel ketti ja asendatakse plokid hammasratastega, või siis tehakse plokid sälkudega, mis takistavad keti libisemist.

Sagedasti tarvitatakse lihtsustatud talisid ilma plokkideta. Presendi kinnitust metallkangi külge ja harilikku õmblust, mis liidab riiet, võib samuti vaadelda kui polüspasti põhimõtte kasutamist (joon. 73).



Joon. 73. Lihtsustatud talid.



Joon. 74. Hiina pöör.

Pöör. Pöör koosneb võllist, mille peale tema pöörlemisel keritakse nöör või kett, mis tõmbab raskust; võll pannakse pöörlema lihtsaimal juhul võlli külge kinnitatud kangide abil. Tasakaalu korral peavad jõumomendid olema võrdsed; järelikult saab pööra keerata jõuga, mis on nii mitu korda väiksem takistusest, kui mitu korda võlli raadius on väiksem vända pöörlemise raadiusest.

Hõõre tappidel ja nööri või keti kalkus vähendavad tunduvalt võitu jõus. Võlli raadiuse soovitaval vähendamisel võib peenike võll kergesti murduda; praktiliselt on piiratud ka vända pikkuse suurendamine.

Mainitud raskused on kõrvaldatud niinimetatud diferentsiaalpööras (hiina pöör), mis on kujutatud joon. 74. Siin jaotatakse koormuse kaal võrdselt nööri kahele otsale, kusjuures nööri üks ots keritakse koormuse tõstmisel maha väikese raadiusega *(r)* võllilt, nööri teine ots aga keritakse suure raadiusega *(R)* võllile. Lõpmata väikese nurknihke $\delta\alpha$ puhul avaldub nulliga võrdne tööde summa järgmiselt:

$$P \cdot L\delta\alpha + \frac{Q}{2} r\delta\alpha - \frac{Q}{2} R\delta\alpha = 0,$$

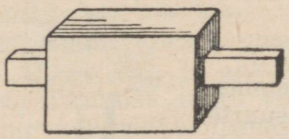
kus L on vända pikkus; siit

$$P = \frac{R - r}{2L} Q.$$

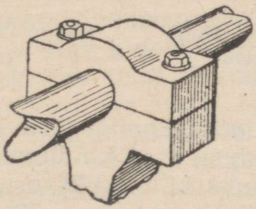
Sel kombel diferentsiaalpööra kasutamisel *võit jõus on võrdeline võllide raadiuste vahega,* mida saab teha väga väikeseks, ja järelikult võitu jõus suureks.

Sagedasti tarvitatakse pöörasid-vintse hammasratastega, mis on kinnitatud vända pöörlemisteljele ja pööra võllile. Suurte raskuste ümberpaigutamiseks ettenähtud vintse pannakse pöörlema aurumasina või elektrimootori abil.

Kinemaatilised paarid. Nagu juba öeldi, nimetatakse kahe keha ühendust, kus mõlemad kehad vastastikku kitsendavad liikumist, *kinemaatiliseks paariks* ja kumbagi nendest kehadest — *paari lüliks.* Mõningaid kinemaatilisi paare tarvitatakse eriti sagedasti mehhanismides. Loetleme nendest peamised.



Joon. 75. Translatsioonipaar prismakujulise liuguriga.



Joon. 76. Translatsioonipaar silindrikujulise liuguriga.

Kui nõutakse, et mehhanismi mingi lüli liiguks kulgevalt ja sirgjooneliselt, siis tarvitatakse *prismaatilist translatsioonipaari,* mis on kujutatud joon. 75 ja mis koosneb prismakujulisest liugurist ning juhtkehast. Kuna liugur ei saa täisnurkse lõike tõttu pöörelda juhtkeha avas, siis on sellisel paaril ainult üks vabadusaste.

Kui mehhanismi lüli peab liikuma kulgevalt ja samal ajal pöörlema ümber telje, mis ühtib kulgeva liikumise sihiga, siis kasutatakse *silindrilist paari,* mis koosneb silindrikujulisest liugurist ja ümmarguse avaga juhtkehast (joon. 76). On silmanähtav, et sellise paari liuguril on kaks vabadusastet — ta saab liikuda kulgevalt ja pöörlevalt.

Kui nõutakse mehhanismi mingi lüli liikumise piiramist pöörlemise või võnkumisega, siis tarvitatakse *rotatsioonipaari,* mis koosneb tapist (võlli osa) ja laagrist. Rotatsioonipaari nimetatakse *šarniiriks,* kui ta täidab ainult võnkumise, mitte aga täispöörde võrra pöörlemise kindlustamise otstarvet.

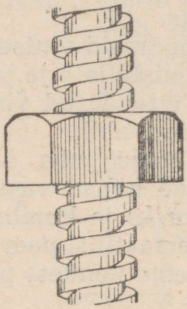
Kui osutub tarvilikuks tagada mehhanismi lülile võnkumine kahes ristiolevas tasapinnas, siis tarvitatakse *kuulliigendit* (joon.

77). Lõpuks, nagu juba mainiti, tarvitatakse sagedasti *kruvipaari* (joon. 78).

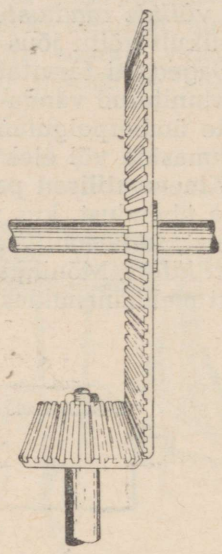
Ühes tasapinnas toimuva pöörlemise muundamiseks pöörlemiseks, mis toimub teises tasapinnas, saab väikeste kiiruste puhul



Joon. 77. Kuulliigend.



Joon. 78. Kruvipaar.

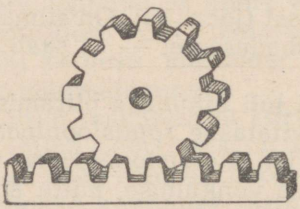


Joon. 79. Koonushammasratasülekanne.

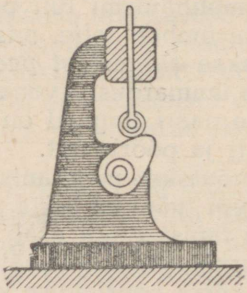
tarvitada *tiguülekannet* (kruvi ja hammasratta ühendus), kuid kindlamaks ja suurte kiiruste jaoks kõlblikuks osutub *koonushammasrataste paar* (joon. 79).

Edasi-tagasi kulgeva liikumise muundamist pöörlevaks (ja ümberpöördult) teostatakse väntmehhanismi abil, mis moodustatakse prismaatilisest translatsioonipaarist (liugur), rotatsioonipaarist (tema lüliks on vänt) ja kahest šarniirist — kepsupeast.

Pöörlemise muundamist pidevaks kulgevaks liikumiseks (ja ümberpöördult) saab teostada pööra abil, aga samuti *hammasratta* ja *hammaslati* abil (joon. 80).

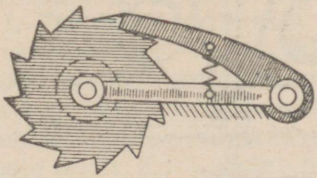


Joon. 80. Hammasratas ja hammaslatt.

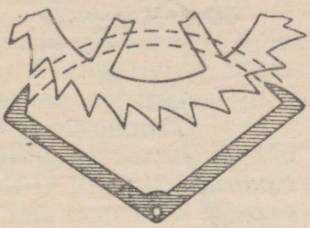


Joon. 81. Nukkmehhanism.

Laialdaselt rakendatakse keerulisemate mehhanismide koostisosana *nukkmehhanisme* ja šarniir-kangmehhanisme. *Nukiks* üldse nimetatakse liikuvat keha, mis paneb liikuma nuki pinda mööda libiseva teise keha. Üks lihtsamaist nukkmehhanismidest, mis



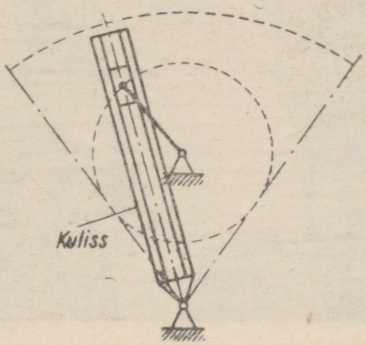
Joon. 82. Põrkmehhanism.



Joon. 83. Ankrumehhanism.

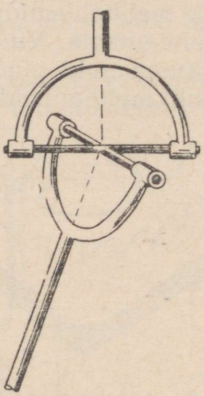
kujutab endast rotatsioonipaari, nuki ja translatsioonipaari ühendust, on kujutatud joonisel 81. Nukkmehhanismi erikujudeks on *põrkmehhanism,* mis lubab temaga seotud kinemaatilise süsteemi liikumist ainult ühes suunas ja takistab tema liikumist vastassuunas (joon. 82), ja *ankurmehhanism,* mis seob hammasratta pöörleva liikumise ankru võnkliikumisega (joon. 83).

Šarniir-kangmehhanismide näideteks võivad olla juba mainitud väntmehhanism ja ka kulissmehhanism. *Kulissiks* nimetatakse liikuvat keha, millel on soon, milles saab libiseda liugur. Joon. 84 on skemaatiliselt kujutatud kulissmehhanism, milles liugur, sooritades ringliikumist, paneb kulissi võnkuma. Sageli tarvitatakse šarniir-kangmehhanismide tähtsa lülina *Hooke'i šarniiri,* mis on skemaatiliselt kujutatud joonisel 85. Šarniir-kangmehhanismide tähtsaks näiteks on *tsentrifugaalregulaator* (Watt'i regulaator), mis on kujutatud joonisel 86. Regulaatori vertikaalsele vardale kandub pöörlemine edasi masina võllilt; kui masina käik muutub ülemäära kiireks, siis tõstab massiivsete kerade poolt arendatav ja liigestatud rööpkülikule mõjuv suurenenud kesktõuke inertsjõud rööpküliku alumises tipus asetseva muhvi, ja see paneb masina käiku automaatselt reguleeriva (aurumasinates näiteks aurule juurdepääsu tõkestamisega silindritesse) kangi ja siibri liikuma.

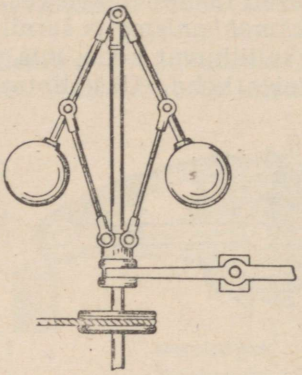


Joon. 84. Kulissmehhanism.

Vaatamata sellele et revolutsioonieelsel Venemaal oli masinaehitus nõrgalt arenenud, oli just

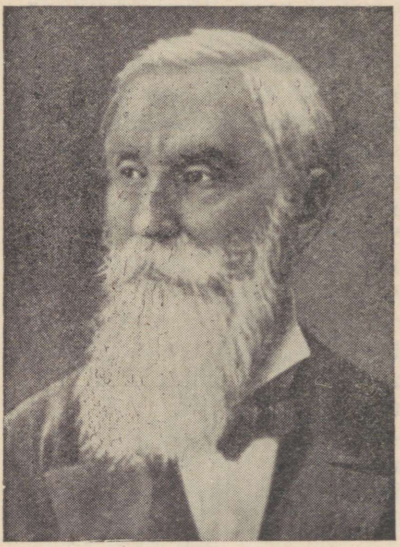


Joon. 85. Hooke'i šarniir.



Joon. 86. Watt'i regulaator.

vene õpetlastel juhtiv koht mehhanismide struktuuri matemaatiliselt põhjendatud teooria loomises. Sõltuvus lülide ja kinemaatiliste paaride hulga vahel tasapinnalistes mehhanismides anti esmakordselt maailmakirjanduses geniaalse matemaatiku akadeemik Pafnuti Lvovitš Tšebõševi poolt 1869. a. P. L. Tšebõševile kuuluvad rohkearvulised, sügavasisulised ja uurimismeetodilt originaalsed teaduslikud tööd peaaegu kõigis matemaatika ja rakendusmehhaanika valdkondades.



Pafnuti Lvovitš Tšebõšev (1821—1894).

P. L. Tšebõševi poolt on loodud üle 40 uue mehhanismi, sealhulgas suurepärane sammuv masin, sõudemehhanism, mehhanism juhtiva lüli katkendliku liikumisega jt. Mehhanismide konstrueerimine viis P. L. Tšebõševi matemaatika uue osa — funktsioonide polünoomidega parima lähendamise teooria — loomisele. Seda teooriat („Tšebõševi polünoomid") rakendatakse käesoleval ajal laialdaselt mitmesugustes füüsika ja tehnika küsimustes.

P. L. Tšebõševile oli omane kõigi parimate vene õpetlaste iseloomulik joon — oskus ühendada

teadust praktikaga. Ühes oma artiklis kirjutas P. L. Tšebõšev: „Teooria ja praktika lähendamine annab kõige viljastavamaid tulemusi, ja mitte üksnes praktika ei võida sellest; teadused ise arenevad tema mõju all, ta avastab nendele uusi objekte uurimiseks või uusi külgi ammutuntud objektides... Teadus leiab endale usaldatava juhi praktikas."

P. L. Tšebõševi uurimuste järel esitasid professorite Solovjovi, Somovi, Malõševi, Verhovski, Delone, Mertsalovi jt. silmapaistvad tööd mehhanismide teooria tunduvalt sügavamal ja täiuslikumal kujul kui mistahes välismaised koolkonnad.

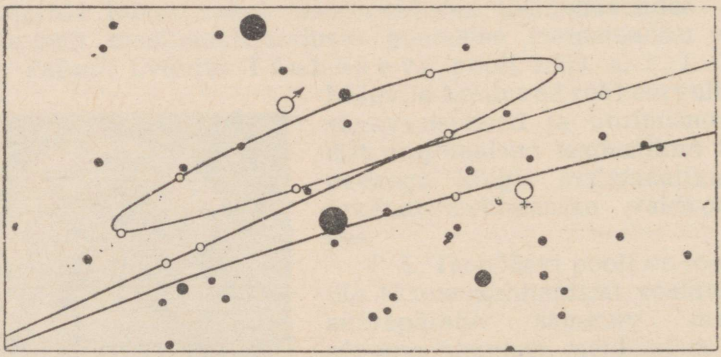
Mehhanismide parim kaasaegne liigitus on samuti loodud vene õpetlaste poolt. Kuni aastateni 1914—1917 liigitati harilikult mehhanisme mõnede eritunnuste alusel, mis sagedasti nõrgalt peegeldasid mehhanismide loomust. Vene õpetlase prof. L. V. Assuri klassikalise töö ilmumine nendel aastatel oli mehhanismide teaduses suursündmuseks, mis määras ette ära tema edasise arengu.

VI PEATÜKK.

ÜLEMAAILMNE GRAVITATSIOONISEADUS. TAEVAMEHHAANIKA ELEMENDID.

§ 34. Ajaloolisi andmeid. Kepleri seadused.

Juba kauges minevikus pandi taeva vaatlejate poolt tähele, et erinevalt muudest tähtedest, mis sajandite kestel säilitavad oma vastastikuse asetuse peaaegu muutumatuna, kirjeldavad planeedid[1] tähtede keskel keerulisi sõlmekujulisi trajektoore (joon. 87).



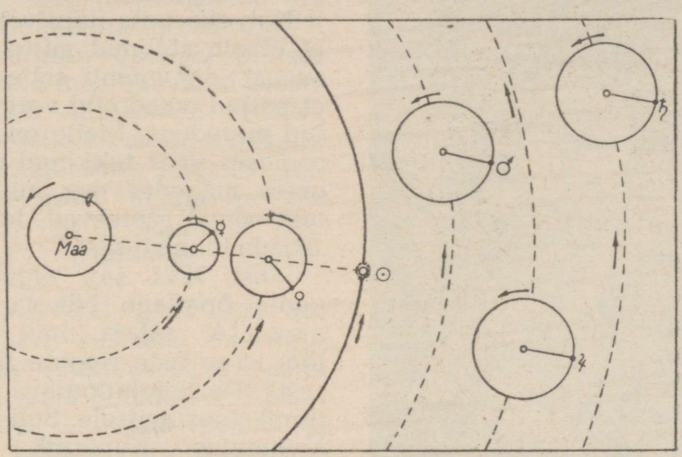
Joon. 87. Planeetide näiv liikumine „kinnistähtede" suhtes.
♂ — Marss, ♀ — Veenus.

Klaudios P t o l e m a i o s, vana-kreeka teaduse vaadete väljendaja maailma ehituse kohta, pidas Maad universumi keskpunktis olevaks. Maad ümbritsevad rida kontsentrilisi sfääre: õhusfäär, Kuu, Merkuuri, Veenuse, Päikese, Marsi, Jupiteri ja Saturni liikumise sfäärid ning kinnistähtede sfäär (joon. 88). Planeetide sõlmekujulise liikumise seletamiseks oletas Ptolemaios, et igaüks nendest planeetidest liigub mööda väikest ringi (epi-

[1] Kreeka k. *asteŕ planetes* — r ä n d a v t ä h t.

tsüklit), samal ajal aga epitsükli keskpunkt liigub ühtlaselt mööda teist, suurt ringi, mille keskpunktis asetseb Maa.

See Ptolemaiose *geotsentriline maailmasüsteem* valitses teaduses katoliku kiriku toetusel peaaegu poolteist tuhat aastat. Teooria ja hilisemate vaatlusandmete kooskõlastamiseks tuli Ptolemaiose järglastel kokku kuhjata keerulisi sekundaarsete epitsüklite süsteeme, mis erakordselt raskendas planeetide liikumise arvutamist ja tõi ilmsiks geotsentrismi ideede küündimatuse.



Joon. 88. Ptolemaiose süsteem. ☽ — Kuu, ☿ — Merkuur, ♀ — Veenus, ☉ — Päike, ♂ — Marss, ♃ — Jupiter, ♄ — Saturn.

XV ja XVI sajandil astusid üksikud kõige haritumad ja kõige andekamad inimesed ettevaatlikult, kartes kiriku tagakiusamisi, välja skolastika ja religioossetele väljamõeldistele rajatud valeõpetuste vastu.

Geniaalne kunstnik, väljapaistev insener ja õpetlane Leonardo da Vinci õpetas XV saj. lõpul ja XVI saj. esimesel kahel aastakümnel oma õpilastele, et ei tohi oma arvamusi põhjendada ebauskudega ning et on vaja juhinduda vaatlustest ja katsetest („tarkus on katse tütar", ütles ta). Oma suhtumise katsesse kui teaduste ja kunstide allikasse väljendas Leonardo da Vinci järgmiste sõnadega: „Loodusteaduse probleemide uurimisel ma teen kõigepealt mõned katsed, sest minu kavatsus on asetada probleemi katse alusel ja seejärel tõestada, mispärast kehad on sunnitud talitama näidatud viisil." „Katse ei peta kunagi: meid petavad ainult meie arutlused..." Samal ajal omistas Leonardo da Vinci hiiglasuurt tähtsust teooriale. Ta ütles: „Need, kes klee-

puvad praktika külge ilma teadmisteta, on meresõitja taolised, kes on ilma roolita ja kompassita; ta ei tea kunagi kindlasti, kuhu ta läheb. Praktika peab alati tuginema heale teooriale." Leonardo da Vinci näitas, et pole põhjusi kujutleda, nagu oleks Maa universumi keskpunktis; ta ütles, et universum ei ole piiratud, et kõik on allutatud muutustele ja et Maal on oma ajalugu, millest annavad tunnistust kivistised. Leonardo da Vinci kirjutas: „Kuna asjad on põlisemad kirjadest, siis pole imestusväärne, et ei ole säilinud mitte mingisugust dokumenti selle kohta, et paljud maad olid varem kaetud meredega. Meile on küllalt soolases vees tekkinud ja kõrgetes mägedes, mis nüüd merest eemal asetsevad, leitavate asjade tunnistusest."



Leonardo da Vinci (1452—1519).

Just XVI saj. algul asus poola õpetlane Nikolai Kopernik salaja oma kuulsa töö „Taevaste ringide tiirlemisest" (De revolutionibus coelestium) koostamisele. Selle tööga kummutas Kopernik Ptolemaiose süsteemi ja põhjendas heliotsentrilise süsteemi, näidates, et astronoomilised tähelepanekud seletuvad lihtsalt ja täpselt Maa nagu teistegi planeetide liikumisega ümber Päikese ja Maa ööpäevase pöörlemisega. Tuleb märkida, et juba Aristarchos Samosest (enam kui kaks sajandit enne meie ajaarvamist) avaldas arvamust, et Maa pöörleb, teda hõlmav taevas aga on paigal. See oletus keskajal unustati, ja enne Kopernikut ei suutnud keegi esitada Maa ööpäevase pöörlemise ja aastase tiirlemise tõestusi.

Koperniku töö hõlmab kuus raamatut ja kujutab endast üksikasjalist astronoomiat, sisaldades ka abitabeleid astronoomiliste arvutuste jaoks. Teiste õigete järelduste hulgas näitas Kopernik, et mida kaugemal Päikesest on planeet, seda aeglasemalt ta liigub. Kopernik tegi kindlaks, et Maa telg on kaldu Maa orbiidi tasapinna suhtes ja jääb liikumisel iseendaga paralleelseks, muutes oma sihti alles aastatuhandete vältel. „Universumi suurus," kirjutas Kopernik, „on niivõrd tohutu, et Maa kaugus Päikesest on hoopis tähtsusetu suurus, võrreldes kinnistähtede sfääriga."

Alles elu lõpuks, pärast kauakestnud kõhklusi ja kartusi, et tema teooria näib uskumatuna ja põhjustab tagakiusamisi kiriku poolt, otsustas Kopernik oma töö avaldada.

Kopernik suri 1543. a. Pärast tema surma vaatasid kõige haritumadki inimesed veel paljude aastakümnete jooksul Koperniku teooriale kui huvitavale fantaasiale. Koperniku töö tõestas aga heliotsentrilise süsteemi õigsuse ja võitis endale aegamööda ikka laialdasema inimeste ringkonna tunnustuse.



Johannes Kepler (1571—1630).

Koperniku õpetuse tähtsus teadusliku maailmavaate arenemises oli hiiglasuur. Kiriku autoriteedile oli antud tugevaim hoop. Nagu ütles Engels: „sellest ajast peale vabanes looduse uurimine oma olemuselt religioonist" („Looduse dialektika").

Niipea kui kirik sai aru Koperniku süsteemi antireligioossest tähendusest, tormas ta julmalt tema pooldajate, itaalia õpetlaste Giordano Bruno ja Galilei kallale. Giordano Bruno põletati elusana avalikult 1600. a. Roomas, pärast seitsmeaastast vangisolekut, inkvisitsiooni otsuse põhjal tema keeldumise eest loobuda Koperniku õpetusest. Galilei pandi Koperniku õpetuse propageerimise eest vangi ja teda piinati.

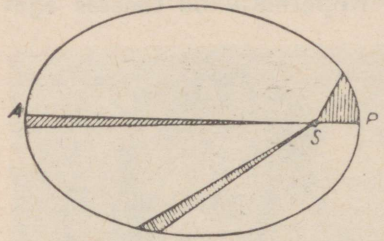
XVII saj. keskpaiku astus astronoomia kiire arenemise perioodi. Kiireks arenemiseks andis tõuke Koperniku õpetus ja teleskoobi leiutamine. Teleskoopi hakkas astronoomiliste vaatluste praktikas kasutama Galilei. Galilei kasutas aja mõõtmiseks juba pendlit, tema õpilane Viviani aga ühendas esimesena (1641. a.) pendli kellamehhanismiga. Tycho Brahe, kes paistis silma väsimatu tööarmastuse poolest, määras aasta kestuse täpsusega kuni 1 sek ja viis veel ilma teleskoobita läbi palju tähelepanuväärselt täpseid vaatlusi.

Galilei kaasaegne Johann Kepler (1571—1630) sõnastas planeetide tõelise liikumise seadused pärast peaaegu kakskümmend aastat kestnud arvutusi. Need seadused ta sõnastas alljärgnevalt (esimesed kaks 1609. a., kolmanda 1619. a.).

Kepleri esimene seadus: *planeedid tiirlevad ümber*

Päikese mööda tasapinnalisi kõveraid, mis kujutavad endast ellipseid, mille ühes fookuses asetseb Päike.

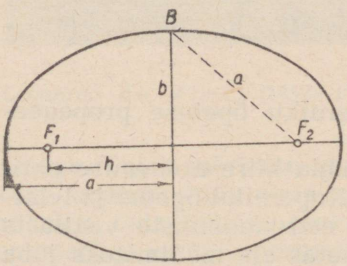
Kepleri teine seadus: *antud planeedi raadiusvektor katab võrdsetes aegades võrdsed pindalad, ehk teisiti — antud planeedi sektorkiirus on konstantne suurus.*



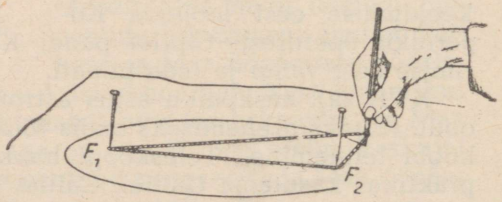
Joon. 89. Planeedid tiirlevad ümber Päikese nii, et Päikesest planeedini tõmmatud joon katab võrdsetes ajavahemikes võrdsed pindalad. *P* — perigee, *A* — apogee.

Planeedi tiirlemisel ümber Päikese muutub planeedi kaugus Päikesest; orbiidi punkti, mis asetseb Päikesele kõige lähemal, nimetatakse *perigeeks*, ja diametraalselt vastasasetsevat orbiidi punkti, mis on kõige kaugemal Päikesest, — *apogeeks*. Perigee juures on planeedi liikumise kiirus kõige suurem, kuna apogees on see kõige väiksem.

Joon. 89 selgitab Kepleri pindalade seadust graafiliselt. Tuleb siiski silmas pidada, et planeetide elliptilised orbiidid erinevad ringjoontest tegelikult võrratult vähem kui joonisel 89 kujutatud ellips. Ellipsi kuju üle otsustatakse tema ekstsentrisuse e järgi, mille all mõistetakse fookuse kauguse h (fookuse kaugus ellipsi keskpunktist) ja suure pooltelje a suhet (joon. 90): $e = \frac{h}{a}$.



Joon. 90. Ellipsi ekstsentrisus $e = \frac{h}{a}$.



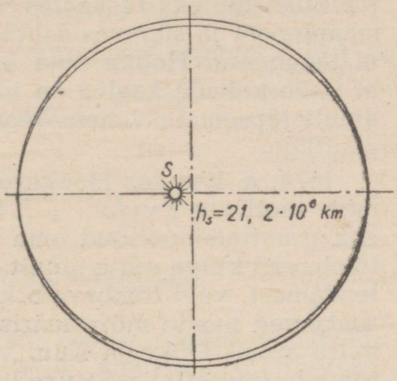
Joon. 91. Lihtsaim ellipsi joonestamise viis, punktid F_1 ja F_2 on fookused.

Joon. 91 selgitab lihtsaimat ellipsi joonestamise viisi. Pole raske aru saada, et kui ellipsi väikese pooltelje tipust B (joon. 90) joonestada ringjoon raadiusega, mis on võrdne suure pooltelje pikkusega a, siis selle ringjoone kaks lõikepunkti suure teljega

(punktid F_1 ja F_2 joon. 90) kujutavad endast ellipsi fookusi. Sellest konstruktsioonist järeldub, et

$$h = ae = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ millest } b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Kõigist planeetide orbiitidest on suurim ekstsentrisus Päikesest kõige kaugemal oleva planeedi Pluto orbiidil ($e = 0{,}248$), Päikesele kõige lähemal oleva planeedi Merkuuri orbiidil ($e = 0{,}206$) ja Marsi orbiidil ($e = 0{,}093$). Joon. 92 on kujutatud Marsi elliptiline orbiit; võrdluseks on samal joonisel tõmmatud ringjoon raadiusega, mille pikkus on võrdne suure poolteljega (kõik mastaabis $2 : 10^{13}$); kõverate erinevus on üsna tähtsusetu.



Joon. 92. Marsi elliptilise orbiidi kuju. Seesmine piirjoon on ellips, väline — ringjoon.

Kepleri kolmas seadus: *planeetide sideeriliste tiirlemisperioodide*[1] *ruudud on võrdelised nende orbiitide suurte pooltelgede kuupidega.*

Kui tähistada planeetide tiirlemisperioode vastavalt T_1, T_2, T_3 ja nende orbiitide suuri pooltelgi a_1, a_2, a_3, siis Kepleri kolmas seadus avaldub matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \text{const.}$$

Kepleri seadused olid aluseks ülemaailmse gravitatsiooniseaduse tuletamisel, mille kvantitatiivselt väljendas Newton.

Juba oma esimeses teoses („Uus astronoomia", 1609) arendab Kepler edasi kehade külgetõmbe üleüldisuse mõtet, mida enne teda väljendas Gilbert. „Raskus," kirjutas Kepler, „on vastastikune kalduvus sugulaskehade vahel, mis püüavad ühte liituda... Kui mingis kohas maailmas asetseksid kaks kivi teineteise lähedal ja väljaspool mistahes nende sugulaskeha mõjusfääri, siis need kivid püüaksid kahe magneti taoliselt ühineda teineteisega kuskil nende vahemaa keskel, ja teed, mis nendel tuleks läbida, oleksid pöördvõrdelised nende massidega."

Prantsuse matemaatik Pierre Fermat väitis, et raskus on kehade vastastikuse külgetõmbejõu resultaat, ja arvutas õigesti välja raskuse kahanemise liikumisel Maa sisemusse.

[1] Planeedi *sideeriliseks* ehk täheliseks tiirlemisperioodiks nimetatakse planeedi täistiiru väldet ümber Päikese, erinevalt *sünoodilisest* tiirlemisperioodist — ajavahemikust planeedi ja Maa kahe ühesuguse konfiguratsiooni vahel.

1666. a. ehitas Borelli üles Jupiteri kaaslaste teooria ja väljendas mõtte, et taevakehade liikumisi tekitab ja hoiab alal vastastikune külgetõmme, kuid ta ei suutnud oma teooriat matemaatiliselt põhjendada.

Newtoni kaasaegne ja vahetu eelkäija Robert Hooke püüdis uurida, kas raskus muutub kauguse muutumisega Maa keskpunktist, milleks ta kaalus ühe ja sama keha erineval kõrgusel maapinnast ja sügavas šahtis. Leidmata märgatavat vahet kaalus ei taganenud Hooke oma esialgsest oletusest, osutades sellele, et vahe kehade kaalus on niivõrd tühine, et seda saab avastada ainult täpsemate vahenditega. Ta kavatses läbi viia rea katseid pendliga.

1674. a. kirjutas Hooke oma töös „Katse tõestada Maa liikumist vaatluste kaudu": „... Kõigil taevakehadel on külgetõmbeehk gravitatsioonijõud oma keskpunkti poole, mille tõttu nad tõmbavad külge mitte ainult omaenda osi ja takistavad neid laiali lendamast, vaid tõmbavad külge ka kõiki teisi taevakehi, mis asetsevad nende mõjusfääris. Seepärast ei mõjuta Maa liikumist mitte ainult Päike ja Kuu, vaid samuti ka Merkuuril, Veenusel, Marsil, Jupiteril ja Saturnil on oma külgetõmbega tunduv mõju tema liikumistele... Külgetõmbavad jõud avalduvad seda tugevamini, mida lähemal mõjutsentrile asetseb keha, millele nad mõjuvad. Missugusel määral see suurenemine sõltub kaugusest, seda ma pole veel katse teel kindlaks teinud."

Newton näitas, et Kepleri seadustest koos dünaamika teise seadusega saab rangelt (ilma ühtki täiendavat eeldust tegemata) järeldada, et Päike tõmbab planeete *võrdeliselt planeetide massidega ja pöördvõrdeliselt kauguste ruutudega Päikesest.* Edasi näitas Newton, et needsamad Kepleri seadused juhivad Jupiteri ja Saturni kaaslaste liikumist nende planeetide ümber. See andiski Newtonile aluse järeldada, et gravitatsiooniseadus on üleüldiselt rakendatav. Enda poolt gravitatsiooniseaduses üldistatud Kepleri seadusi kontrollis Newton arvutustega komeetide liikumise kohta ja Kuu ümber Maa liikumise kohta, viimast komplitseerib Päikese mõju Kuule.

Kui planeedid liiguksid mööda ringjooni, mitte aga mööda ellipseid, siis saaks üksi Kepleri kolmandast seadusest kohe järeldada, et planeedid tõmbuvad Päikese poole pöördvõrdeliselt nende kauguse ruuduga Päikesest. Tõepoolest, tähistades kahe plaaneedi orbiitide raadiused tähtedega r_1 ja r_2, planeetide joonkiirused tähtedega v_1 ja v_2, kesktõmbekiirendused tähtedega a_1 ja a_2, pöörlemisperioodid tähtedega T_1 ja T_2 ning kesktõmbejõude tähtedega F_1 ja F_2, saame:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}, \quad a_1 = \frac{v^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2_1}$$

ja analoogilised suhted v_2 ja a_2 jaoks. Järelikult

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\left(\frac{F_1}{m_1}\right)}{\left(\frac{F_2}{m_2}\right)} = \frac{r_1}{T^2_1} : \frac{r_2}{T^2_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Kepleri kolmanda seaduse järgi suhtuvad kahe planeedi tiirlemisperioodide ruudud nagu nende kauguste kuubid: $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$. Järelikult $\frac{(F_1/m_1)}{(F_2/m_2)} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$, millest

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{r^2_1} \cdot \frac{m_2}{r^2_2}.$$

§ 35. Newtoni gravitatsiooniseadus.

Astronoomia esimesed edusammud, mis on seotud Koperniku õpetuse võiduga, valmistasid ette pinna ülemaailmse gravitatsiooniseaduse avastamisele Newtoni poolt. Ülemaailmne gravitatsiooniseadus andis omakorda veel võimsama tõuke astronoomia järgnevale arenemisele. See seadus seisneb järgmises.

Iga kahe materiaalse osakese vahel mõjub vastastikune külgetõmbejõud, mis on võrdeline mõlemate osakeste massidega (teisiti öeldes, võrdeline nende masside korrutisega) *ja pöördvõrdeline nende osakeste vahelise kauguse ruuduga.* Kui m ja m' on kahe, teineteisest kaugusel r asetseva osakese massid, siis avaldub nende vastastikune külgetõmbejõud F valemiga

$$F = f\frac{mm'}{r^2} \qquad (1)$$

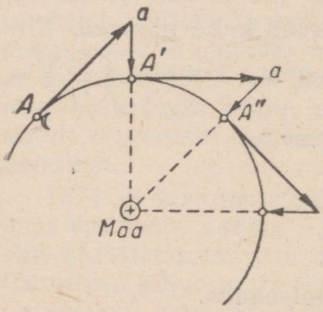
kus f on konstantne suurus, mis sõltub arvväärtuse poolest valemisse kuuluvate suuruste ühikute valikust. Suurus f kannab *gravitatsioonikonstandi*[1] nime. Kui massid m ja m' on mõõdetud grammides ja kaugus r — sentimeetrites, siis $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ (1 g massi tõmbab 1 cm kaugusel olevat massi 1 g jõuga $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ düüni). Gravitatsioonikonstant f määrati katseliselt; missugusel viisil, sellest räägitakse järgmises paragrahvis.

Maapinnal asetseva kivi iga osakest tõmbavad maakera kõik osakesed enda poole. Kõigi nende jõudude resultant põhjustab keha kaalu Maa suhtes. Täpselt samuti tõmbab Kuu iga osakest Maa iga osake enda poole; nende jõudude resultant kujutab endast Kuu ja Maa vahelist gravitatsioonijõudu. See jõud nimelt

[1] Ladina k. *gravitas* — raskus.

hoiabki Kuud Maa lähedal; kui see jõud järsku kaoks, siis Kuu eemalduks Maast, liikudes mööda sirget, mis on tema orbiidi puutujaks.

Kuu liikumist ümber Maa võib vaadelda kui kahe sõltumatu liikumise liitumise resultaati: 1) liikumine inertsi tõttu, mis peaks Kuu kaasa viima mööda sirget Aa, mis on tema orbiidi puutujaks (joon. 93); 2) Kuu „langemine" Maa poole, mis toimub gravitatsioonijõu toimel; selle ajavahemiku jooksul, mille kestel Kuu peaks inertsi tõttu liikudes nihkuma punktist A punkti a, läheneb ta Maa poole „langemise" tagajärjel Maale just selle kauguse aA' võrra, mille võrra ta oleks jõudnud selle aja jooksul Maast ainult inertsi mõjul liikudes eemalduda. Kokkuvõttes läbib Kuu tee AA', järgmise ajavahemiku jooksul tee $A'A''$ jne., s. o. liigub (ligikaudselt) mööda ringjoont ümber Maa.



Joon. 93. Kuu liigub ümber Maa inertsjõu ja Maa külgetõmbejõu toimel.

Täpselt samuti hoiab Maa ja Päikese vaheline gravitatsioonijõud Maad tema orbiidil liikumisel ümber Päikese. Seesama on õige ka kõigi teiste planeetide ja nende kaaslaste kohta. Gravitatsioonijõud tähtede vahel ei ole tähtede määratu suure kauguse tõttu üksteisest nii suur, et oleks kerge avastada tema mõju tähtede liikumisele.

Gravitatsioonijõud kahe mingisuguse keha vahel on nende kehade kõigi paarikaupa võetud koostisosakeste vaheliste külgetõmbejõudude r e s u l t a n t. Selle resultantjõu väljaarvutamine on mõnikord seotud suurte raskustega. Matemaatilises füüsikas on välja töötatud viisid taoliste ülesannete kiireks lahendamiseks (need viisid on rajatud matemaatilises füüsikas väga tähtsale „potentsiaaliteooriale" ja integraalarvutuse rakendamisele).

Mõnedel lihtsatel juhtudel saab külgetõmbe resultantjõudu kergesti kindlaks määrata. Nii näiteks osutub, et kaks kera (kui kummaski nendest on aine jaotatud ühtlaselt) tõmbavad teineteist külge nii, nagu oleks kogu nende mass koondatud nende keskpunktidesse. Järelikult saab sel juhul resultantjõu väljaarvutamiseks kasutada valemit (1), mõistes selles m ja m' all enam mitte üksikute osakeste masse, millest koosneb kerade aine, vaid kummagi kera kogu massi, ja arvestades, et r tähendab kaugust kerade keskpunktide vahel.

See arvutuse lihtsustamine ei põhjusta viga ka siis, kui kera (või koguni mõlema kera) aine on kera sees jaotatud erineva tihedusega erisugustel kaugustel kera keskpunktist, nii et kera koosneb reast kontsentrilistest erineva tihedusega kihtidest; täh-

tis on ainult, et aine oleks ühtlaselt jaotatud igas sellises kontsentrilises kihis. Seda nõuet rahuldab ligikaudselt nähtavasti Maa, Kuu, Päikese ja planeetide seesmine ehitus. Seepärast võib taevakehadevahelist gravitatsioonijõudu arvutada vahetult valemi (1) abil.

Newtoni gravitatsiooniseadusest saab tuletada Kepleri seadused planeetide liikumise kohta.

Tuleb märkida, et planeetidevaheline gravitatsioon on üsna väike, võrreldes planeetide gravitatsiooniga Päikese suhtes, sest Päikese mass on 750 korda suurem kõigi planeetide masside summast. Seepärast avaldab planeetidevaheline gravitatsioon vähe mõju planeetide tiirlemisele ümber Päikese ja, muutmata planeetide liikumise üldpilti, avalduvad ainult mõnedes iseärasustes, mille tundmaõppimisele on pühendatud taevamehhaanika eriosa, mis kannab „häirituse teooria" nime.

Kepleri seadused käivad selle orienteerumissüsteemi kohta, kus liikumatuks loetakse Päikese keskpunkt. Tegelikult tiirleb Päikese keskpunkt mööda ellipsit ümber päikesesüsteemi masskeskme. Kui lugeda liikumatuks päikesesüsteemi masskeset, siis tiirlevad planeedid samuti mööda ellipseid, mille fookuses asub päikesesüsteemi masskese. Seega on Kepleri seadus planeetide orbiitide elliptilise kuju kohta õige nii planeetide tiirlemise jaoks ümber Päikese keskpunkti kui ka planeetide tiirlemise jaoks ümber päikesesüsteemi masskeskme. Seevastu on Kepleri pindalade seadus õige ainult planeetide liikumise jaoks Päikese keskpunkti suhtes ja ei ole õige planeetide tiirlemise jaoks ümber päikesesüsteemi masskeskme.

Päikese mass ja mõõtmed on nii suured, et päikesesüsteemi masskese on Päikese keskpunktist kõigest 2,15-kordsel Päikese raadiuse kaugusel (Päikese raadius on 659 000 *km*; Päikese keskpunkti kaugus päikesesüsteemi masskeskmest on umbes 1 486 000 *km*).

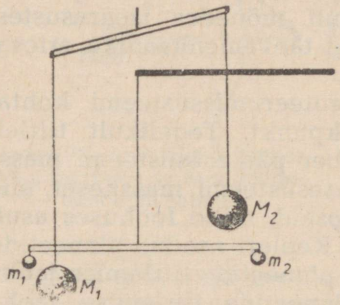
Kepleri esimese ja kolmanda seaduse range tuletamine gravitatsiooniseadusest viiakse läbi teoreetilise füüsika ja taevamehhaanika kursustes. Seejuures ilmneb, et liikumine gravitatsiooni toimel ei ole võimalik mitte ainult mööda ellipsit ja ringjoont, vaid samuti mööda parabooli ja hüperbooli. Näiteks liiguvad mõned komeedid (mis ei kuulu päikesesüsteemi, vaid on ajutiselt sellesse haaratud) Päikese läheduses mööda hüperbooli.

Mis puutub Kepleri kolmandasse seadusse, siis näitab selle seaduse range tuletamine gravitatsiooniseadusest, et see Kepleri seadus pole täiesti täpne, ja nimelt: Kepleri kolmanda seaduse järgi peaks orbiidi suure pooltelje kuubi a^3 ja tiirlemisperioodi ruudu T^2 suhe olema kõigi planeetide jaoks ühesuguseks suuruseks. Tegelikult saab seda suhet pidada ühesuguseks ainult seevõrd, kuivõrd osutub võimalikuks jätta tähele panemata planeedi

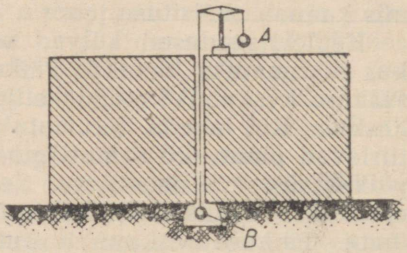
massi m, võrreldes Päikese massiga M; täpselt seadus aga väljendub järgmiselt:

$$\frac{a^3}{T^2} = f\frac{M}{4\pi^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Selleks et kasutada gravitatsiooniseadust arvutustel, on vaja teada gravitatsioonikonstandi f suurust, mis võrdetegurina kuulub valemisse (1). Selleks on silmanähtavalt tarvilik kas või üks kord täpselt mõõta mingi kahe tuntud massi m ja m', näiteks kahe, teineteisest täpselt mõõdetud kaugusele r asetatud kera vaheline gravitatsioonijõud; peale sellise mõõtmise teostamist on gravitatsioonikonstandi suurust kerge arvutada valemi (1) järgi, asetades sellesse m, m', r ja F väärtused.



Joon. 94. Cavendish'i keerdkaalud gravitatsioonikonstandi määramiseks.



Joon 95. Richards'i katsete skeem gravitatsioonikonstandi määramiseks.

Gravitatsioonikonstandi määras esmakordselt eksperimentaalselt 1798. a. Cavendish, kes mõõtis seatinast kerade vahelise gravitatsioonijõu seadise abil, mis kannab keerdkaalu nime; selle seadise peamine osa on skemaatiliselt kujutatud joonisel 94. Kindlale alusele asetatud ja temperatuuri kõikumiste eest kaitstud kastis oli kaane sisse pandud pööratava telje külge kinnitatud horisontaalne varras; selle varda otste külge oli riputatud kaks massiivset seatinast kera M_1 ja M_2. Teise varda otste külge oli riputatud veel kaks väikest seatinast kerakest m_1 ja m_2.

Pöörates raskete keradega varda telge, võis tähele panna, et raskete kerade lähenemisel kergetele pöördus kergete keradega varras teatava nurga võrra rasketele keradele vastu. Olles eelnevalt mõõtnud takistuse, mida avaldas keerdumisele kergete keradega varda ülesriputamiseks tarvitatud niit, oli Cavendish'il võimalik niidi keerdumisnurga järgi arvutada summaarne külgetõmbejõud $2F$ kerade M_1 ja m_1 vahel ning kerade M_2 ja m_2 vahel. Kerade keskpunktide vahelise kauguse täpne määramine ei olnud raske. Cavendish'i arvutatud gravitatsioonikonstandi väärtus erines ainult 1% võrra sellest, mis saadi järgnevate katsete põhjal.

1898. a. tarvitas Richards teist viisi gravitatsioonikonstandi väljaarvutamiseks (Jolly idee järgi). Richardsi katsete skeem on näidatud joon. 95. Kaalukangi otste külge on riputatud kaks kera *A* ja *B*, millel on (kui arvestada samuti ka niite, mille abil nad on üles riputatud), võrdsed massid. Need kerad peaksid teineteist tasakaalustama, kuid üks nendest — *A* — on 100-tonnise seatinaplaadi *kohal*, mis oma külgetõmbega suurendab selle kera kaalu, ja teine kera *B* asub seatinaplaadi *all*, mis oma külgetõmbega vähendab selle kera kaalu sama suuruse võrra; seepärast kaalukang kaldub — kera *A* kaalub enam. Kaalukangi kalde järgi võib otsustada külgetõmbejõu üle kerade ja seatinaplaadi vahel. Seda gravitatsioonikonstandi määramise viisi peetakse kõige täpsemaks.

On leitud, et (*CGS*-süsteemi ühikute puhul) $f = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$.

§ 36. Kaalu ja raskuskiirenduse sõltuvus koha kõrgusest ja geograafilisest laiusest.

Nagu teada, kujutab kaal endast jõudu, millega keha rõhub toele Maa gravitatsiooni tõttu.

Newtoni teise seaduse järgi on mingi keha kaal *P* seotud vaba langemise kiirendusega *g* ja selle keha massiga *m* võrduse kaudu.

$$P = mg \tag{2}$$

Keha kaalu põhjustab keha iga osakese ja Maa vaheliste kõigi külgetõmbejõudude resultant. Seepärast peab iga keha kaal olema võrdeline selle keha massiga, nagu see tegelikkuses ongi. Kui jätta kõrvale Maa ööpäevase pöörlemise mõju, siis määratakse kaal Newtoni gravitatsiooniseaduse järgi valemi

$$P = f\frac{Mm}{R^2} \tag{3}$$

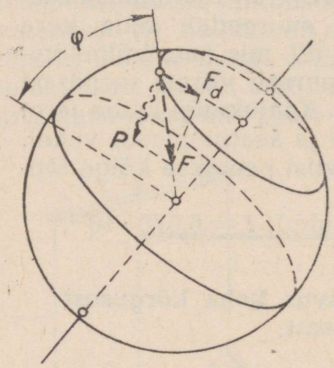
abil, kus *f* on gravitatsioonikonstant, *M* — Maa mass ja *R* — keha kaugus Maa keskpunktist. Valem (3) näitab, et keha kaal väheneb maapinnast kaugenemisel. Maa raadius on keskmiselt 6371 *km*, seepärast väheneb kaal 1 *km* võrra tõusmisel $\left(\frac{6371}{6371+1}\right) \approx 1 - \frac{2}{6371}$, s. o. 0,00032 võrra oma algsuurusest.

Kuna maakoor oma tiheduselt on mittehomogeenne, siis on raskusjõud nendes kohtades, mille all asetsevad maakoore sügavuses tihedad kivimid, veidi suurem kui nendes kohtades (samal geograafilisel laiusel), mille aluse moodustavad vähem tihedad kivimid. Mägede massiivid põhjustavad loe kaldumise mägede poole.

Kõrvutades võrrandid (2) ja (3), saame raskuskiirenduse jaoks avaldise, milles pole arvestatud Maa pöörlemise mõju:

$$g = f\frac{M}{R^2}. \qquad (4)$$

Igal kehal, mis on Maa pinnal paigal ja võtab osa Maa ööpäevasest pöörlemisest, on antud kohaga silmanähtavalt ühine kesktõmbekiirendus a_r, mis asub ekvaatoriga paralleelsel tasapinnal ja on suunatud pöörlemistelje poole (joon. 96). Jõud F, millega Maa tõmbab mingit tema pinnal paigalolevat keha, avaldub osaliselt staatiliselt rõhumises P, mida keha avaldab toele (seda komponenti $F_c = P$ nimetataksegi „kaaluks"); jõu F teine komponent F_d avaldub dünaamiliselt, andes kehale kesktõmbekiirenduse, mis tõmbab teda kaasa Maa ööpäevase pöörlemisega. Ekvaatori jaoks on see kiirendus kõige suurem; pooluste jaoks on ta null. Seepärast, kui viia mingi keha pooluselt üle ekvaatorile, siis ta pisut „kaotab oma kaalus".



Joon. 96. Maa pöörlemise tagajärjel on Maa külgetõmbejõul staatiline (kaal P) ja dünaamiline komponent.

Kui Maa oleks täpselt kerakujuline, siis ekvaatoril „kaotus" kaalus

$$\Delta P = F_d = \frac{mv^2}{R},$$

kus v on ringkiirus ekvaatoril. Tähendagu T sekundite arvu ööpäevas, siis

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{ja} \quad \Delta P = 4\pi^2 R\frac{m}{T^2}.$$

Siit leiame relatiivse kaotuse kaalus, arvestades et $P = mg$:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2} = 0{,}0034.$$

Järelikult kui Maa oleks täpselt kerakujuline, siis kaotaks iga kilogramm massi, mis on viidud Maa pooluselt ekvaatorile, kaalus umbes $3^1/_2$ G (seda saaks avastada vedrukaaluga kaalumisel). Tegelik kaalu kaotus on veel suurem (umbes $5^1/_3$ G), sest et Maal on pisut lapik kuju ja tema poolused on Maa keskpunktile lähemal kui ekvaatoril asetsevad kohad.

Ööpäevase pöörlemise kesktõmbekiirendus asub ekvaatoriga paralleelsel tasapinnal (joon. 96); ta on suunatud antud kohast Maa keskpunkti tõmmatud raadiusega, nurga φ all (φ on koha laius). Kesktõmbejõudu F_d vaatleme kui gravitatsioonijõu F üht komponenti, kaalu P kui sellesama jõu F teist komponenti. Järelikult ei ühti *püstjoone* siht üheski kohas peale ekvaatori ja pooluste Maa keskpunkti viiva sirge sihiga. Kuid nurk nende vahel on väike, seepärast et gravitatsioonijõu kesktõmbekomponent on

kaaluga võrreldes väike. Ööpäevase pöörlemise tagajärjel tekkinud Maa lapikus on just selline, et püstjoon (aga mitte Maa keskpunkti tõmmatud sirge) on kõikjal risti Maa pinnaga. Kujult on Maa *kolmeteljeline ellipsoid.*

Kõige täpsemad, prof. F. N. Krassovski juhendamisel arvutatud *Maa-ellipsoidi mõõtmed on järgmised:*

keskmine raadius (Maa-ellipsoidiga ruumvõrdse kera raadius) 6378,245 *km*
polaarne lapikus . . . . . 1 : 298,3
Maa ekvatoriaalne lapikus . . . . . 1 : 30 000

Raskuskiirenduse g arvutamiseks sõltuvalt koha geograafilisest laiusest φ ja järelikult ka kehade kaalu määramiseks merepinna kõrgusel $(P = mg)$ võeti rahvusvahelisel geodeesiakongressil 1930. a. vastu valem

$$g = 978{,}049\ (1 + 0{,}005288 \sin^2\varphi - 0{,}000006 \sin^2 2\varphi).$$

Toome raskuskiirenduse väärtused mitmesuguste laiuste jaoks (merepinna kõrgusel):

φ	g (*cm/sek*^{2})	φ	g (*cm/sek*^{2})
0°	978,05	50°	981,08
10	978,20	60	981,92
20	978,65	70	982,61
30	979,34	80	983,06
40	980,18	90	983,22

Laiusel 45° $g = 980{,}665$ *cm/sek*^{2} („normaalkiirendus").

Vaatleme, kuidas muutub raskusjõud liikumisel Maa sisemusse. Olgu R_0 Maa-sfäroidi keskmine raadius. Vaatleme gravitatsioonijõudu punktis K, mis asetseb Maa keskpunktist kaugusel $R < R_0$.

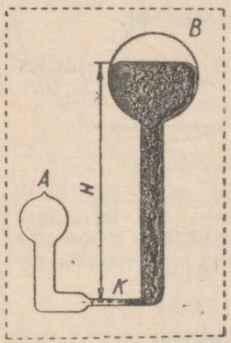
Külgetõmme selles punktis määratakse kera väliskihi paksusega $R_0 - R$ ja seesmise sfääri, mille raadius on R, summaarse mõjuga. Täpne matemaatiline arvestus näitab, et kera kiht ei avalda mingisugust mõju tema sees asetsevale materiaalsele punktile, sest et tema üksikute osade poolt tekitatavad külgetõmbejõud tasakaalustuvad vastastikku. Seega jääb järele ainult seesmise sfäroidiosa mõju, kuid selle osa raadius on $R < R_0$ ja tema mass on järelikult väiksem maakera massist.

Kui maakera oleks tiheduse poolest homogeenne, siis oleks sfääri sees olev mass määratud avaldisega $m = {}^4/_3\pi R^3\varrho$, kus ϱ on Maa keskmine tihedus. Sel juhul avaldub raskuskiirendus, mille arvuline väärtus on võrdne massiühikule gravitatsiooniväljas mõjuva jõu arvulise väärtusega, järgmiselt:

$$g = f\frac{m}{R^2} = {}^4/_3\pi f \cdot \frac{R^3}{R^2} \cdot \varrho = {}^4/_3\pi f \varrho \cdot R,$$

järelikult kahaneb Maa keskpunktile lähenemisel lineaarselt. Maa külgetõmbekiirendusel on maksimaalne väärtus Maa pinnal.

Kuid seetõttu, et Maa tuum koosneb rasketest metallidest (rauast, niklist, koobaltist) ja ta keskmine tihedus on üle 9 g/cm^3, maakoore keskmine tihedus on aga 2,5 g/cm^3, siis Maa pinna lähedal g algul isegi pisut kasvab sügavuse suurenemisel ja saavutab oma maksimaalse väärtuse umbes 40 km sügavuses, s. o. maakoore ja Maakera maak-kesta ülemiste kihtide piiril. Edasi hakkab raskusjõud Maa keskpunktile lähenemisel kahanema, kuid pisut aeglasemalt, kui seda nõuab lineaarne sõltuvus.



Joon. 97. Lomonossovi „universaalbaromeetri" skeem.

Suurt huvi pakub ühe raskuskiirenduse mõõtmiseks ettenähtud aparaadi ajalugu. 1940. a. vaadati rahvusvahelisel gravimetristide kongressil läbi saksa inseneri Haalck'i aparaat. Läbirääkimiste käigus selgus, et see aparaat ei erine printsipiaalselt mitte millegi poolest niinimetatud „universaalsest baromeetrist", mille konstrueeris Lomonossov ja mida ta üksikasjaliselt kirjeldas 1757. a. avaldatud töös „Mateeria hulga ja kaalu vahekorrast". Lomonossovi aparaadi ehitus oli järgmine (joon. 97).

Kerad A ja B on ühendatud kapillaartoruga K. Seadisesse on valatud elavhõbe nii, et keras B on elavhõbeda kohal tühjus, aga keras A — õhk atmosfääri rõhule lähedasel rõhul p (valmistamisel täidetakse seadis algul elavhõbedaga ava kaudu keras A, mis pärast kinni joodetakse). Seadis on pandud sulava jääga täidetud karpi, nii et õhurõhk keras A jääb konstantseks. Elavhõbedasamba kõrgus H määratakse avaldisega $H = \frac{p}{\varrho g}$. Samba kõrgus sõltub seega ainult vaba langemise kiirenduse g suurusest. Kera B diameetri ja kapillaari K diameetri suhte väga suure väärtuse ($\approx 20\,000$) tõttu kutsub isegi väike elavhõbeda nivoo alanemine keras B esile tugeva elavhõbeda piiri muutumise kapillaaris K, mis võimaldab arvestada üsna tähtsusetuid vaba langemise kiirenduse muutusi.

§ 37. Päikese, Maa ja planeetide massi arvutamine.

Päikese massi M saab leida tingimusest, et Maa ja Päikese vaheline gravitatsioon avaldub kesktõmbejõuna, mis hoiab Maad tema orbiidil (Maa orbiiti loeme lihtsuse mõttes ringjooneks):

$$f \cdot \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Siin m on Maa mass, r — Maa keskmine kaugus Päikesest. Tähistades aasta kestuse sekundites tähega T, saame $v = \frac{2\pi r}{T}$. Seega

$$f \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

millest f, T ja r arvulisi väärtusi kasutades ($r \approx 149\,500\,000\ km = 149{,}5 \cdot 10^{11}\ cm$), leiame Päikese massi:

$$M = \frac{4^2 r^3}{f \cdot T^2} = 1{,}98 \cdot 10^{33} g = 1{,}98 \cdot 10^{27}\ t.$$

Sama valemit saab kasutada ka mis tahes planeedi massi arvutamiseks, kui tal on kaaslane. Sel juhul on r kaaslase keskmine kaugus planeedist, T — tema tiirlemisperiood ümber planeedi, M — planeedi mass. Samuti võib ülaltoodud viisil määrata Maa massi Kuu ja Maa vahemaa ning kuupikkuse (sekundites) järgi.

Maa massi saab määrata ka, kui võrrutada mingi keha kaal selle keha ja Maa vahelise gravitatsiooniga, millest on maha arvatud gravitatsioonijõu see komponent, mis avaldub dünaamiliselt (viimane annab antud kehale, mis võtab osa Maa ööpäevasest pöörlemisest, vastava kesktõmbekiirenduse, vt. § 36). Osutatud parandust pole vaja teha, kui me niisugusel Maa massi arvutamisel kasutame seda raskuskiirendust, mida täheldatakse Maa poolustel ($g' = 983{,}22$). Siis saame, olles tähistanud tähega R Maa keskmise raadiuse ($R = 6371{,}2\ km$) ja tähega M — Maa massi, et

$$f \frac{mM}{R^2} = mg',$$

siit Maa mass

$$M = \frac{R^2 \cdot g'}{f} = 5{,}98 \cdot 10^{27}\ g = 5{,}98 \cdot 10^{21}\ t.$$

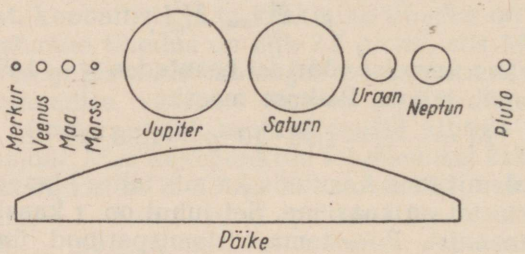
Kui maakera keskmist tihedust tähistada ϱ_{keskm}, siis silmanähtavalt $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \varrho_{keskm}$. Siit saame maakera keskmiseks tiheduseks $5{,}5\ g/cm^3$.

Maa ülemiste kihtide mineraalkivimite keskmine tihedus on umbes $2{,}5\ g/cm^3$. Järelikult peab maakera tuumal olema tihedus, mis ületab tunduvalt väärtuse $5{,}5\ g/cm^3$.

Maa tiheduse probleemi erinevatel sügavustel uuris Legendre. Tema tööd jätkasid paljud õpetlased. Gutenbergi ja Haalck'i uurimistulemuste põhjal (1924. a.) on Maa *tiheduse väärtused* erinevatel sügavustel umbes järgmised:

Maakera keskpunktis (sügavus 6370 *km*)	10 —11	g/cm^3
3000 *km* sügavusel	6 — 9	„
1200 *km* sügavusel	4 — 5	„
60 *km* sügavusel	3,1— 3,6	„
Pindkihis	2,5	„

Rõhk maakera sees, suures sügavuses on nähtavasti hiiglasuur. Paljud geofüüsikud arvavad, et juba 100 km sügavusel peab rõhk ulatuma 20 000 atmosfäärini. Maa tuumas, 3000 ja enam kilomeetri sügavusel, ulatub rõhk võib-olla 1—2 milj. atmosfäärini.



Joon. 98. Päikese ja planeetide suhtelised suurused.

Mis puutub temperatuurisse maakera sügavuses, siis on kindel, et see on üle 1100° *C* (laava temperatuur). Šahtides ja puuraukudes tõuseb temperatuur keskmiselt ühe kraadi võrra iga 33 m kohta. Arvatakse, et umbes 100 km sügavusel jõuab temperatuur kuni 1500—2000° ja jääb edasi muutumatuks.

Taevamehhaanikas esitatav planeetide liikumise täielik teooria võimaldab planeedi massi arvutada selle mõju järgi, mida antud planeet avaldab mingi teise planeedi liikumisele. Möödunud sajandi algul tunti planeete Merkuur, Veenus, Maa, Marss, Jupiter, Saturn ja Uuran. Pandi tähele, et Uurani liikumises esinevad teatavad „ebareeglipärasused", mis osutasid sellele, et Uurani taga peab asetsema tundmatu planeet, mis avaldab mõju Uurani liikumisele. 1845. a., uurides Uurani liikumist, arvutasid prantsuse õpetlane Leverrier ja temast sõltumatult inglane Adams selle planeedi massi ja asukoha, mida veel keegi ei olnud vaadelnud. Alles pärast seda leiti see planeet just selles taeva kohas, millele juhatasid arvutused. See planeet nimetati Neptuuniks.

1914. a. ennustas astronoom Lovell analoogilisel teel veel ühe, Päikesest veel kaugemal kui Neptuun oleva planeedi olemasolu. Alles 1930. a. leiti see planeet ja nimetati Plutoks.

Alljärgnevas tabelis on toodud põhiandmed päikesesüsteemi üheksa suure planeedi kohta. Joon. 98 illustreerib Päikese ja planeetide suhtelisi mõõtmeid.

Peale loetletud suurte planeetide on teada umbes 1300 väga väikest planeeti, niinimetatud asteroidi (ehk planetoidi). Nende orbiidid on peamiselt Marsi ja Jupiteri orbiitide vahel.

Põhiandmed suurte planeetide kohta.

Planeet	Kaugus Päikesest (orbiidi suur poolt elg) (km)	Tiirlemis-periood (aastates)	Planeedi mass, võrreldes Maa massiga[1]	Planeedi ruumala, võrreldes Maa ruumalaga	Planeedi raadius (ekvatoriaalne) (km)	Planeedi aine keskmine tihedus	Raskuskiirendus planeedi pinnal võrreldu na maa-pealsega
Merkuur	57 873 000	0,24	0,055	0,05	2 421	5,6	0,38
Veenus	108 141 000	0,61	0,817	0,88	6 096	5,16	0,89
Maa	149 504 000	1	1	1	6 378	5,53	1
Marss	227 798 000	1,88	0,107	0,15	3 392	3,95	0,38
Jupiter	777 841 000	11,86	318	1312	71 373	1,34	2,54
Saturn	1 426 097 000	29,46	95,0	762	60 399	0,71	1,06
Uuran	2 869 132 000	84,02	14,6	59	24 847	1,36	0,96
Neptuun	4 495 692 000	164,79	17,3	46	26 499	2,22	1,00
Pluto	5 899 051 000	247,7	0,94	1	6 400	5,2	0,94

§ 38. Potentsiaalne energia ja gravitatsiooni potentsiaal.

Missugune ka ei oleks vastastikuse mõju jõudude loomus (gravitatsioon, elektriline või magnetiline vastastikune mõju), mõõdetakse kehade (või osakeste) vastastikuse mõju potentsiaalset energiat kui vastastikuse mõju jõudude poolt tehtavat tööd kehade (või osakeste) süsteemi lahutamisel, s. o. nende eemaldamisel lõpmata suurele kaugusele üksteisest. Kuna gravitatsioonijõud ei tee graviteerivate kehade süsteemi lahutamisel tööd, vaid ümberpöördult, gravitatsioonijõudude vastu tuleb tööd teha, siis on silmanähtav, et gravitatsiooni potentsiaalne energia kujutab endast negatiivset suurust.

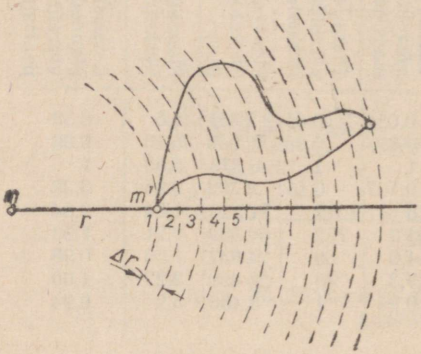
Arvutame, millega on võrdne kahe osakese, mille massid on m ja m' ja mis on teineteisest kaugusel r, vastastikuse mõju potentsiaalne energia. Newtoni seaduse järgi tõmbavad need massid teineteist jõuga $F = f\frac{mm'}{r^2}$. Peame arvutama töö, mis on vajalik osakeste eemaldamiseks lõpmata kaugele teineteisest.

Näitame kõigepealt, et see töö ei sõltu teest, mida mööda üht osakest eemaldatakse teisest.

Oletame, et üks osakestest, näiteks m, jääb liikumatuks; kujutleme, et selle liikumatu osakese kui keskpunkti ümber on asetatud loendamatu hulk sfääre raadiustega, mis kasvavad järk-jär-

[1] Maa mass ilma Kuuta on 333 432 korda väiksem Päikese massist. Maa mass koos Kuuga on 329 390 korda väiksem Päikese massist.

gult suuruselt r kuni lõpmatuseni (joon. 99). Missugune ka ei oleks trajektoori kuju, mida mööda osakest m' eemaldatakse osakesest m, jääb gravitatsioonijõud kogu aeg suunatuks piki raadiust massi m poole. Töö osakese m' nihutamiseks mööda mingit sfääri, mille keskpunktis asetseb m, on null, sest et sel juhul on gravitatsioonijõud risti tee elemendiga. Tööd gravitatsiooni vastu tuleb kulutada ainult siis, kui me viime osakese m' ühelt sfäärilt üle teisele, millel on suurem raadius.



Joon. 99. Gravitatsiooni töö ei sõltu ümberasetumise teest.

Osakese m' kõigi asendite puhul sfääril tõmmatakse seda osakest sfääri keskpunktis asetseva osakese m poole ühe ja sama jõuga; kontsentrilised sfäärid on kõikjal ühekaugusel teineteisest; seepärast on silmanähtav, et töö osakese nihutamiseks ühelt sfäärilt teisele ei sõltu raadiuse sihist, mida mööda me nihutame osakest m'.

Olgu lühim kaugus kahe naabersfääri vahel Δr; töö osakese m' nihutamiseks ühelt sfäärilt teisele mööda mingit raadiust on $F \cdot \Delta r$; kui me ei nihuta osakest m' mööda raadiust, vaid nurga α all raadiusega, siis on nihke pikkus $\frac{\Delta r}{\cos \alpha}$, ja jõud, mis mõjub nihke suunas, on $F \cdot \cos \alpha$, seega näeme, et ka sel juhul nihutamiseks tehtav töö on $F \cdot \Delta r$.

Iga trajektoori, mida mööda osakest m' eemaldatakse osakesest m, saab endale kujutada koosnevana kaht liiki lõpmata väikestest nihetest: nihetest mööda sfääre ja nihetest ühelt sfäärilt teisele. Esimest liiki nihetel on töö null; teist liiki nihetel on ta ühesugune, ükskõik missuguses kohas ja missuguses suunas me ka ei teostaks nihutamist ühelt sfäärilt naabersfäärile. Siit järeldame, et gravitatsiooni töö (või töö gravitatsiooni vastu) on kõigi trajektooride puhul ühesugune, missugust trajektoori mööda me ka ei viiks osakest m' ühest asendist m suhtes teise asendisse.

Mainitud töö sõltub ainult osakestevahelisest alg- ja lõppkaugusest ja ei sõltu teest, mida mööda osakesed nihkuvad ühest asukohast teise. Kui osakesed lähenevad, teeb gravitatsioon tööd; kui osakesed eemalduvad teineteisest, kulutatakse tööd gravitatsiooni vastu (gravitatsiooni töö on negatiivne); kui nihete üldkokkuvõttes osakesed on tagasi toodud esialgsele kaugusele teineteisest, siis gravitatsiooni poolt tee ühtedes piirkondades (kui osakesed lähenesid) tehtud töö osutub võrdseks teistes teepiir-

kondades (kui osakesed eemaldusid teineteisest) gravitatsiooni vastu kulutatud tööga; sel juhul on gravitatsiooni summaarne töö algebraliselt null.

Nagu on öeldud paragrahvis 26, nimetatakse vastastikuse mõju jõude, mille töö ei sõltu nihkumise teest, *konservatiivseteks jõududeks*. Näeme, et ülemaailmne gravitatsioon on konservatiivseks jõuks.

Niisiis võime osakeste m ja m' vastastikuse mõju potentsiaalse energia arvutamiseks valida osakese m' mis tahes lõpmatusse viiva trajektoori. Eemaldagu osake m' osakesest m nende osakeste algasendeid ühendava sirge sihis, siis on silmanähtav, et selleks vajalik töö, s. o. miinusmärgiga potentsiaalne energia, avaldub summana

$$-U = \sum_{r=r_0}^{r=\infty} f \frac{m \cdot m'}{r^2} \Delta r,$$

kus r omab summa eri liikmetes järkjärguliselt kasvava väärtuse, summa naaberliikmed on väga lähedased teineteisele ja liikmete üldarv on ($\Delta r = dr$ puhul) lõpmata suur. Nagu on juba mainitud (§ 21), nimetatakse sedaliiki summat integraaliks:

$$U = -\int_{r_0}^{\infty} f \frac{m \cdot m'}{r^2} dr.$$

Ulaltoodud summat saab määrata ka ilma integraalarvutust tarvitusele võtmata. Osakese m' nihutamiseks lõpmata väikese kauguse $\Delta r = r_2 - r_1$ võrra (joon. 99) kulutatud töö on võrdne gravitatsioonijõu keskmise väärtuse ja nihke pikkuse korrutisega; osutatud nihke juures kahaneb gravitatsioonijõud suuruselt $f\frac{mm'}{r_1^2}$ kuni suuruseni $f\frac{mm'}{r_2^2}$; keskmiselt võib piirkonnas Δr gravitatsioonijõuks võtta $f\frac{mm'}{r_1 r_2}$; järelikult võib tööd üles kirjutada järgmiselt:

$$f\frac{mm'}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = fmm'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Analoogiliselt on väikesele nihkele $r_3 - r_2$ kulutatav töö $fmm'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$ jne. On silmanähtav, et kui võtame kõigi nende tööde summa, siis koonduvad selles summas kõik vahepealsed liikmed; jäävad ainult esimene ja viimane liige, kui $r = \infty$, siis on viimane liige aga võrdne nulliga. Seega

$$-U = \sum^{r=\infty} f\frac{mm'}{r^2}\Delta r = f\frac{mm'}{r}$$

ja järelikult

$$U = -f \frac{mm'}{r}. \tag{5}$$

Kahe osakese gravitatsiooni potentsiaalne energia on pöördvõrdeline osakestevahelise kaugusega.

Olgu meil süsteem, mis koosneb mistahes arvust osakestest. Jõud, mis mõjub igale nendest osakestest ülejäänute poolt, liitub vektoriaalselt vaadeldava osakese ja kõigi ülejäänud osakeste vahel mõjuvatest gravitatsiooni jõududest. Antud juhul on meil sobivam vaadelda mitte resultanti, vaid üksikuid komponente. On silmanähtav, et töö, mida on tarvis kulutada selleks, et viia ühte osakestest lõpmatusse, on võrdne nende tööde algebralise summaga, mida kulutatakse selleks, et ületada selle osakese ja iga ülejäänud osakese vahelist gravitatsioonijõudu eraldi. Järelikult määratakse mingi osakese m potentsiaalne energia osakeste süsteemi suhtes valemiga

$$U = -\sum f \frac{mm_i}{r_i}, \tag{6}$$

kus liikmete arv summamärgi all on võrdne süsteemi ülejäänud liikmete arvuga, m on vaadeldava osakese mass, mille jaoks me arvutame potentsiaalset energiat, m_i — mis tahes teise osakese mass, r_i — vaadeldava osakese kaugus osakesest m_i. Kõigi summa liikmete jaoks ühiseid suurusi f ja m võib summamärgi ette tuua; seoses sellega võib valemit (6) kirjutada nii:

$$U = -fm \sum \frac{m_i}{r_i}. \tag{6'}$$

Nagu mainiti paragrahvis 35, tõmbuvad homogeensed kerad nii, nagu oleks kogu nende mass koondatud kera keskpunkti. Seepärast saab valemeid (5) ja (6) kasutada kerakujuliste kehade gravitatsiooni potentsiaalse energia arvutamiseks; sel juhul tähendab r kerade keskpunktide vahelist kaugust. Eriti võib tuletatud valemeid kasutada planeetide gravitatsiooni potentsiaalse energia arvutamisel Päikese suhtes.

Maa pinnal oleva mingi keha m potentsiaalne energia avaldub samuti valemiga (5). Nimelt

$$U = -f \frac{Mm}{R},$$

kus M on Maa mass ja R — Maa raadius.

Kui mingit keha tõstetakse Maa pinna kohal kõrgusele h merepinna suhtes, siis ta potentsiaalne energia, jäädes negatiivseks, kahaneb arvuliselt (nimetaja toodud valemis muutub suuremaks: R asemel $R + h$). Kui mingi negatiivne suurus arvuliselt kahaneb, siis see tähendab, et ta algebraliselt suureneb (—2 on suurem kui —3). Maa raadiusega võrreldes väikestel tõusukõrgustel on tõstetava keha potentsiaalse energia juurdekasv parajasti

võrdne keha kaalu ja tõusukõrguse korrutisega, nagu on kerge veenduda. Tõepoolest,

$$\Delta U = -f\frac{Mm}{R+h} - \left(-f\frac{Mm}{R}\right) = f\frac{Mm}{R}\cdot\frac{h}{R+h};$$

siit, kui h on väike võrreldes raadiusega R, siis

$$\Delta U \approx f\frac{Mm}{R^2}\cdot h = P\cdot h,$$

kus P on keha kaal.

Missugune on ülemaailmse gravitatsiooni põhjus? Sellel küsimusel pole käesoleva ajani niisugust lahendust, mida võiks pidada üldiselt vastuvõetavaks.

Füüsikas valitses pärast Newtonit peaaegu poolteise sajandi kestel[1] vaade ülemaailmsele gravitatsioonile kui mingile „materia kaasasündinud jõule", mis silmapilkselt mõjub eemalt ilma vahepeal oleva keskkonna osavõtuta. Seda metafüüsilist vaadet, mis hiljem kõigi poolt hüljati, nimetati kaugmõju teooriaks. Newton ei olnud sellise vaate pooldajaks. Kirjas Bentley'le kirjutas Newton: „Oletada, et ... keha võib teisele mõjuda eemalt läbi tühjuse, ilma millegi vahenduseta, mis kannaks mõju ja jõudu ühelt kehalt üle teisele, näib mulle niivõrd suure mõttetusena, et ma ei arva, et filosoofilises mõtlemises kompetentne inimene võiks seda kunagi teha."

Sellest hoolimata andis Newton ise, olles otsustavalt hoidunud gravitatsiooni põhjuste arutlemisest, põhjuse kaugmõju võimalikkuse idee sissetungimiseks füüsikasse. Andes oma osa valitsevale ajavaimule, arutles Newton oma töö lõpetamisel jumalast ja pillas siin fraasi, mis oli pikka aega lipukirjaks nendele, kes soovisid vältida füüsika printsipiaalsete filosoofiliste küsimuste arutamist: „Gravitatsiooni omaduste põhjust ei ole ma senini nähtustest suutnud järeldada, hüpoteese ma aga välja ei mõtle." Kuid tuleb märkida, et Newton ei seleta siin, et ta mõistab hüpoteesi all „kõike, mis pole tuletatav nähtustest". Nüüd nimetatakse hüpoteesiks oletusi nähtuste põhjuste ja olemuse kohta, mis on enam või vähem usutavalt tuletatavad vaatlustest ja katsetest.

Paljud mitmesugustel aegadel esitatud hüpoteesid gravitatsiooni põhjuste kohta ei leidnud faktide poolt kinnitust. Viimasel ajal on tähelepanu selle probleemi uurimiselt kõrvale juhitud gravitatsiooni tõlgendamisega Einsteini poolt ruumi enda geomeetriliste omaduste avaldusena (seda gravitatsiooni käsitlust esitatakse üldises relatiivsusteoorias ja teoreetilises füüsikas).

Jättes esialgu kõrvale küsimuse arutamise gravitatsiooni põhjustest ja samal ajal tagasi lükates kaugmõju idee kui metafüüsi-

[1] Kuni Faraday' uurimusteni, mis näitasid keskkonna tähtsust elektrilistes vastastikustes mõjustustes.

lise vaate, loeme, et gravitatsioon on seotud meile tundmatu, maailmaruumi täitva keskkonna erilise olekuga (mingisuguste varjatud liikumistega selles keskkonnas), või siis — Einsteini järgi — graviteerivaid masse sisaldava ruumi enda eriliste omadustega. Tähendatud mõttes, s. o. mõistes selle all keskkonna erilist olekut või siis ruumi erilisi omadusi, tarvitatakse füüsikas *dünaamilise välja* kujutlust. Vektoranalüüsis nimetatakse dünaamiliseks väljaks ruumi osa, kus avalduvad ühed või teised vastastikuse mõju jõud. Gravitatsiooni dünaamilist välja nimetatakse teisiti *gravitatsioonivälja*ks.

Dünaamilist välja iseloomustavateks põhisuurusteks on väljatugevus ja potentsiaal. Gravitatsioonivälja *tugevuse* all mõistetakse jõudu, mis mõjub massile 1 *g*. Selleks et välja igale punktile oleks võimalik omistada kindlat väljatugevuse vektorit, tuleb mainitud massi 1 *g* ette kujutada kui „punktmassi", s. o. kui kaduvväikese ruumalaga massi. Gravitatsioonivälja tugevuse dimensiooniks on jõu ja massi suhte dimensioon, s. t. kiirenduse dimensioon.

Dünaamilise välja *potentsiaaliks* nimetatakse üldse tööd, mida võib saada massiühiku (või siis elektrivälja puhul laenguühiku) ümberpaigutamisel vaadeldavast välja punktist lõpmatusse, kus välja ei ole. Seega on gravitatsiooni potentsiaal V võrdne vaadeldavasse välja punkti paigutatud punktmassi 1 *g* potentsiaalse energiaga[1].

On silmanähtav, et gravitatsiooni potentsiaal (nagu ka gravitatsiooni potentsiaalne energia) on alati negatiivne. Gravitatsioonijõud püüavad mingit eemalasuvat massi alati lähemale tuua gravitatsioonivälja moodustavatele massidele, seepärast ei ole võimalik 1 *g* massi ümberpaigutamisel vaadeldavast punktist lõpmatusse tööd saada, vaid ümberpöördult, niisuguse ümberpaigutamise jaoks tuleb teha tööd.

Kuna gravitatsiooni potentsiaal on alati negatiivne, siis on selge, et välja mingis punktis on gravitatsiooni potentsiaal algebraliselt seda väiksem (aga arvuliselt, aritmeetiliselt seda suurem), mida suuremat tööd on tarvis kulutada selleks, et välja antud punktist, k u i s e a l o l e k s 1 *g* massi, viia 1 *g* massi üle lõpmatusse, kus välja ei ole. Mingit massi gravitatsioonivälja lõpmatusse ümber paigutades me suurendame selle massi potentsiaali teatavast negatiivsest väärtusest kuni nullini.

---

[1] Potentsiaali mõiste on püstitatud Lagrange'i poolt (1777. a.) ja seda kasutas Green (1828. a.); sõna „potentsiaal" hakkas kasutama Gauss (1836. a.). Paljud autorid nimetavad gravitatsiooni potentsiaaliks suurust, mida arvuliselt määratakse nii, nagu meie poolt tekstis näidatud, kuid mis märgi poolest on vastupidine. Meie ei järgi seda traditsiooni, sest et ta viib gravitatsiooni potentsiaali ja elektrivälja potentsiaali mõisted kooskõlastamatusele.

Gravitatsiooni potentsiaali dimensiooniks on energia ja massi suhte dimensioon, s. o. kiiruse ruudu dimensioon. Gravitatsiooni potentsiaali ühikut tähistatakse vastavalt 1 *erg/g* ehk, mis on sama, 1 cm^2/sek^2.

Kui potentsiaal välja mingis punktis on V_1 ja mõnes teises punktis V_2, siis 1 *g* massi poolt tehtav töö nihkumisel esimesest punktist teise on silmanähtavalt võrdne potentsiaali kahanemisega $V_1 - V_2$.

Nihutades massi *m* potentsiaali kahanemise suunas, saame gravitatsioonijõudude poolt tehtava töö *A*:

$$A = m(V_1 - V_2). \tag{7}$$

Olgu potentsiaal välja mingis punktis V_1. On silmanähtav, et sellesse välja punkti paigutatud massi *m* potentsiaalne energia on nii mitu korda suurem kui V_1, kui mitu korda *m* on suurem kui 1 *g*, s. t. on võrdne potentsiaali ja massi korrutisega:

$$U = mV. \tag{8}$$

Kõrvutades seda võrrandit võrrandiga (5) näeme, et punktmassi *m* poolt tekitatud gravitatsioonivälja potentsiaali kaugusel *r* sellest massist määratakse valemiga

$$V = -f\frac{m}{r}. \tag{9}$$

Võrrandi (6′) järgi määratakse gravitatsioonivälja potentsiaal, mis on tekitatud ükskõik kuidas paigutatud punktmasside süsteemi poolt, valemiga

$$V = -f\sum\frac{m_i}{r_i}, \tag{10}$$

kus liikmete arv summamärgi all on võrdne kõigi gravitatsioonivälja tekitavate masside arvuga, ja r_i on kaugus sellest välja punktist, mille jaoks arvutatakse potentsiaali, üheni mainitud massidest.

Pinda, mille kõigis punktides potentsiaalil väärtus on ühesugune, nimetatakse *nivoopinnaks* ehk teisiti *ekvipotentsiaalpinnaks*. On silmanähtav, et ühe punktmassi poolt tekitatud gravitatsiooniväljas on ekvipotentsiaalpindadel kontsentriliste sfääride kuju.

Tiheduse poolest homogeensetest sfäärilistest kihtidest koosnev kera tõmbab välist keha külge nii, nagu oleks kogu kera mass koondatud kera keskpunkti. Seepärast määratakse raskusjõu potentsiaali Maa pinnal valemiga

$$V = -f\frac{M}{R},$$

kus *M* on Maa mass ($M \approx 6 \cdot 10^{21} t$) ja *R* — Maa raadius ($R = 6371$ *km*). Raskusjõu potentsiaali absoluutväärtus näitab tööd, mida tuleks kulutada selleks, et heita massi 1 *g* Maa pinnalt maailmaruumi: $|V| = 6394$ *kGm*.

Arvutus näitab[1], et minimaalne kiirus, mida on tulistamisel tarvis anda mürsule selleks, et mürsk jäädavalt lahkuks Maa pealt, on 11,2 *km/sek*, kui mitte arvestada õhutakistust. Õhutakistuse ületamiseks oleks taoliste liikumiskiiruste juures vajalik mürsu iga grammi massi kohta kulutada tööd umbes 1700 *kGm*. Järelikult selleks, et heita Maa pinnalt maailmaruumi 1 *g* massi, on üldsummas tarvis kulutada umbes 8000 *kGm* tööd, s. t. samapalju, nagu kulub Maa pinnal koormise 8 *T* tõstmiseks 1 *m* kõrgusele.

§ 39. Mõned teoreemid gravitatsiooni potentsiaali kohta.

Potentsiaali mõiste definitsioonist on selge, et välja toodud punktmassi nihutamine mööda ekvipotentsiaalpinda ei ole seotud ei töö kulutamisega ega saamisega. Siit järeldame, et *väljatugevuse vektor on kõigis välja punktides suunatud piki nivoopindade normaali* (vastasel juhul väljatugevuse projektsioon mingile elementaarnihkele mööda nivoopinda ei oleks null ja järelikult ei oleks nulliga võrdne ka mööda nivoopinda nihutamiseks kuluv töö).

Joon. 100 on näidatud kahe massiivse kera poolt tekitatud gravitatsioonivälja nivoopindade asetus ja väljatugevuse vektori suund. Tuleb pöörata tähelepanu sellele, et gravitatsioonivälja pilt on sarnane samanimeliste laengute elektrivälja pildiga; kuid ühetaolise väljapildi juures toimub elektriväljas samanimeliste laengute eemaletõukamine, gravitatsiooniväljas aga masside külgetõmbamine.

Teades potentsiaali väärtust gravitatsioonivälja kõigis punktides, pole raske arvutada väljatugevust. Kujutame endale, et läbi meid huvitava välja punkti on pandud ekvipotentsiaalpind $V_1 = const.$ Asetame selle kõrvale teise ekvipotentsiaalpinna $V_2 = V_1 + dV = const$, kus potentsiaal on lõpmata väikese suu-

[1] Mürsk lahkub Maa pealt jäädavalt, kui tema kineetiline energia ületab tema raskuse potentsiaalse energia absoluutväärtuse Maa suhtes:

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant f\frac{mM}{R},$$

kus R ja M on Maa raadius ja mass. Sisse tuues raskuskiirenduse $g = f\frac{M}{R^2}$ võib toodud võrratuse kirjutada järgmiselt:

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant mg \cdot R.$$

Siit järeldame, et väikseim kiirus, mida on tarvis anda mürsule selleks, et ta lahkuks Maa pealt jäädavalt (kui mitte arvestada õhutakistust),

$$v = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \ km/sek$$

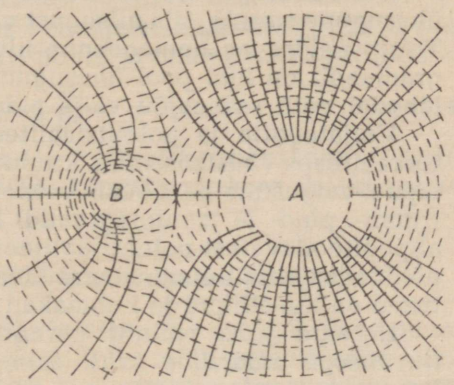
(kaasaegse kaugelaskekahurväe mürskude rekordiline algkiirus ei ulatu kiiruseni 2 *km/sek*).

ruse võrra väiksem ($dv < 0$). Olgu see teine ekvipotentsiaalpind vaadeldavast välja punktist eemal kauguse ds võrra (loetud esimese pinna normaali mööda). Väljatugevus on jõud, mis mõjub vaadeldavasse välja punkti paigutatud punktmassile 1 g, ja potentsiaali kahanemine ($V_1 - V_2$) on gravitatsiooni poolt massi 1 g nihutamisel tehtav töö; järelikult

$$\frac{F}{m} \cdot ds = -dV,$$

ehk

$$\frac{F}{m} = -\frac{dV}{ds}. \qquad (11)$$



Joon. 100. Kahe kera gravitatsiooniväli. Punktiiriga on kujutatud ekvipotentsiaali pindade jäljed, pidevad jooned näitavad väljatugevuse sihti. Suure kera mass on neli korda suurem väikese kera massist.

Potentsiaali tuletist nihke pikkuse järgi (nivoopinna normaali suunas) nimetatakse *potentsiaali gradiendiks*[1]. Potentsiaali gradienti vaadeldakse kui vektorit, mis on suunatud potentsiaali suurima kasvamise suunas. Me näeme, et *väljatugevuse arvuline väärtus on võrdne potentsiaali gradiendiga, kuid on potentsiaali gradiendiga vastassuunaline*, s. t. on suunatud potentsiaali kahanemise poole. Kui potentsiaali muutumine nihkumisel mööda nivoopinna normaali toimuks ühtlaselt, siis oleks väljatugevus võrdne potentsiaali kahanemisega, mis langeb pikkusele 1 *cm*.

Väljatugevuse üle välja eri punktides saab otsustada selle järgi, kui lähedal teineteisele asetsevad nivoopinnad, mille potentsiaalid erinevad potentsiaaliühiku võrra, s. o. 1 *erg/g* võrra. Tõepoolest, asetades valemisse (9) $\Delta V = 1$ *erg/g*, näeme, et *välja-*

[1] Sõna „gradient" pärineb ladinakeelsest sõnast *gradior* — a s t u n, t u l e n. Gradiendi mõistet võib tarvitada iga suuruse juures, mis sõltub punkti asendist ruumis (räägitakse näiteks tiheduse gradiendist, kui tihedus keha eri punktides on erinev; temperatuuri gradiendist, kui keha on erinevates punktides erinevalt soojendatud, jne.). Suuruse φ gradiendi all mõistetakse piirväärtust, millele läheneb suhe $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$, kui Δl lõpmatult kahaneb, kus Δl tähendab väikest nihet suuruse φ suurima kasvamise suunas ja $\Delta\varphi$ tähendab selle nihke juures tähelepandavat suuruse φ muutust; φ gradient l suunas on võrdne piirväärtusega $\left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right]_{\Delta l \to 0}$. Teiste sõnadega, gradiendiga mõistetakse *suuruse muutumise ruumilist kiirust* (mitte aga selle suuruse muutumise kiirust aja jooksul).

tugevus välja eri punktides on pöördvõrdeline nende nivoopindade vahelise kaugusega Δs, *mis erinevad potentsiaaliühiku võrra* (joon. 100).

Kui väljatugevusel on kõigis punktides üks ja sama suund ja ühesugune suurus, siis niisugust välja nimetatakse *homogeenseks*. Teisiti öeldes on homogeenne niisugune väli, milles potentsiaali gradiendil on igal pool ühesugune väärtus ja suund. Maa pinna lähedal võib raskusjõu välja pidada ligikaudselt homogeenseks.

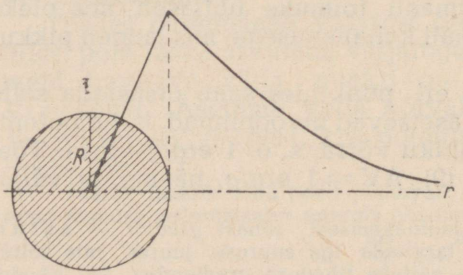
Väljateooria ja potentsiaaliteooria esitatakse üksikasjaliselt teoreetilises füüsikas. Siia kuuluvate küsimuste kooskõlaline ja täpne valgustamine nõuab vektoranalüüsi ja integraalarvutuse (ruum-, pind- ja joonintegraalid) laialdast kasutamist. Mõningaid allpooltoodavatest potentsiaaliteooria teoreemidest saab tuletada, põhinedes ainult elementaarmatemaatikale, kuid niisugused tõestused on kunstlikud ja kohmakad; seepärast me siin neid ei esita.

1. Nagu juba mainiti paragrahvis 35, tekitab *homogeense tihedusega sfääriline kiht, samuti ka homogeense tihedusega kera, gravitatsioonivälja, mis on kõigis väljispunktides niisugune, nagu oleks kogu mass koondatud sfäärilise kihi keskpunkti või kera keskpunkti.*

2. Õõnes, mis on ümbritsetud õhukese, tiheduselt homogeense sfäärilise kihiga, on potentsiaal kõikjal ühesugune:

$$V = -f\frac{M}{R} = const, \qquad (12)$$

kus M on sfäärilise kihi mass, R — sfäärilise kihi raadius. *Gravitatsioonivälja tugevus sfäärilise kihiga ümbritsetud õõnes on null* (sissepoole sfäärilist kihti viidud massile ei mõju mingit jõudu).



Joon. 101. Gravitatsioonivälja tugevuse suurus erinevatel kaugustel homogeense pideva kera keskpunktist (ordinaadi mastaap on tinglik).

3. Homogeense tihedusega *kera sees* potentsiaal kahaneb nihkumisel kera pinnalt keskpunkti poole; kera pinnal potentsiaal

$$V_{(R)} = -f\frac{M}{R},$$

kus M on kera kogu mass, R — kera raadius. Nihkumisel kera keskpunkti poole potentsiaal kahaneb poole võrra osutatud suurusest, s. t. kera keskpunktis potentsiaal

$$V_{(0)} = -\frac{3}{2}f\frac{M}{R}.$$

Mingis punktis homogeense tihedusega kera sees kaugusel r kera keskpunktist määratakse gravitatsiooni potentsiaal valemiga

$$V(r) = \frac{3}{2} f \frac{M}{R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right). \tag{13}$$

Gravitatsioonivälja tugevus homogeense tihedusega kera sees on kõikjal suunatud keskpunkti poole ja määratakse valemiga

$$\frac{F}{m} = \frac{Mr}{R^3}. \tag{14}$$

Järelikult *tõmmatakse kera iga osakest kera keskpunkti poole jõuga, mis on võrdeline osakese kaugusega kera keskpunktist* (joon. 101).

§ 40. Osakeste süsteemi potentsiaalne energia.

Valemid (6) ja (9) määravad süsteemi ühe osakese ja süsteemi ülejäänud osakeste vahelise vastastikuse mõju potentsiaalse energia. Selleks et arvutada süsteemi kui terviku potentsiaalset energiat, on tarvis liita töö, mida võivad „teha"[1] süsteemi osakesed nende eemaldumisel lõpmatusse.

Oletame, et süsteem koosneb kahest massist (osakesest) m_1 ja m_2, mis asetsevad punktides A_1 ja A_2, kus potentsiaalid on vastavalt V_1 ja V_2, kusjuures potentsiaal V_2 punktis A_2, kus asub mass m_2, on tekitatud massi m_1 poolt ja potentsiaal V_1 — massi m_2 poolt. Nende kahe massi vastastikuse mõju potentsiaalset energiat saab arvutada kahel viisil. Me võime endale kujutada, et teine mass jääb liikumatuks ja esimene eemaldub temast. Nihkudes kohast, kus potentsiaal on V_1, kohta, mis on niivõrd kaugel teisest massist, et välja potentsiaal on seal null, võib see esimene mass teha töö m_1V_1. Kui see esimene mass eemaldub lõpmata suurele kaugusele teisest, siis on silmanähtav, et nüüd muutub võimalikuks teist massi kuidas tahes ümber paigutada, kulutamata sellele ümberpaigutamisele mingisugust tööd. Sel kombel kujutab esimese massi eemaldamisel saadud töö m_1V_1 endast kahe massi vastastikuse mõju potentsiaalset energiat: $U = m_1V_1$. Samasuguse õigusega võiksime aga eeldada, et esimene mass jääb liikumatuks ja eemaldub teine mass. Siis jõuaksime järeldusele, et $U = m_2V_2$. Järelikult võib kirjutada:

$$U = \tfrac{1}{2}(m_1V_1 + m_2V_2).$$

Oletame, et süsteem koosneb kolmest massist (osakesest) m_1, m_2 ja m_3, mis asetsevad punktides, kus potentsiaalid on vastavalt

[1] Me räägime siin „töö tegemisest" algebralises mõttes. Nagu me teame, on gravitatsiooni potentsiaal V negatiivne suurus, sest massi eemaldamisel gravitatsioonivälјast tööd ei saada, vaid vastupidi, massi eemaldamiseks gravitatsioonivälјast tuleb tööd kulutada.

V_1, V_2 ja V_3. Jäägu massid m_1 ja m_2 liikumatuteks, aga mass m_3 eemaldugu lõpmatusse; seejuures tehakse (algebralises mõttes) töö m_3V_3; välja nende punktide jaoks, kuhu on paigutatud ülejäänud massid, tähistame potentsiaalid kolmanda massi puudumisel V'_1 ja V'_2; nagu näidati, on kahe ülejäänud massi vastastikuse mõju potentsiaalne energia

$$\tfrac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2).$$

Järelikult

$$U = \tfrac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2) + m_3V_3.$$

Nüüd arvutame nendesamade kolme massi vastastikuse mõju potentsiaalse energia teisel viisil, ja nimelt: oletame, et mass m_3 jääb liikumatuks ja eemalduvad kaks esimest massi, seejuures nii, et kahe eemalduva massi vastastikune asetus jääb muutumatuks. Seejuures tehakse töö $m_1(V_1 - V'_1) + m_2(V_2 - V'_2)$. Liites siia kahe eemaldatava massi vastastikuse mõju potentsiaalse energia, leiame, et

$$U = \tfrac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2) + m_1(V_1 - V'_1) + m_2(V_2 - V'_2).$$

Talitades analoogiliselt sellega, nagu kahe massi juhulgi, s. o. liites mõlemad U jaoks saadud avaldised ja jagades tulemuse kahega, leiame (peale silmanähtavaid koondamisi):

$$U = \tfrac{1}{2}(m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3).$$

Esitatud arutlust pole raske jätkata nelja, viie ja üldse mis tahes arvu masside jaoks. Üldjuhul

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma mV. \qquad (15)$$

Integraalarvutusele toetudes saab valemit (15) rakendada „pideva keha" potentsiaali arvutamiseks ta enese suhtes.

Homogeense tihedusega kera jaoks annab selline arvutus avaldise

$$U = -\frac{3}{5}f\frac{M^2}{R}, \qquad (16)$$

kus M on kera kogu mass, R — kera raadius. Järelikult töö, mida gravitatsioon võib teha kera moodustamisel lõpmata hõredast mateeriast, on pöördvõrdeline kera raadiusega.

Valem (16) oli aluseks Päikese ja tähtede hõõguvuse niinimetatud *kontraktsioonihüpoteesile*[1]. Oletuse järgi, mida esmakordselt väljendas Kant ja Laplace ja edasi arendas Helmholtz, tekkisid Päike ja planeedid hõreda mateeria aeglase tihenemise tagajärjel. Kui aine, millest tekkis päikesesüsteem, oli algul madala temperatuuriga ja äärmiselt hõre, siis pidi see aine, tõmbudes gravitatsiooni tõttu aeglaselt päikesesüsteemi masskeskme

[1] Ladinakeelsest sõnast *contractio* — kokkutõmbumine.

poole kokku, kuumenema tänu gravitatsiooni potentsiaalse energia (mis algebraliselt kahaneb aine tihenemisel) muundumisele osakeste soojusliikumise energiaks. On võimalik, et Päikese aine tihenemine jätkub tänini. Kontraktsioonihüpoteesi järgi täieneb energia kiirgamine Päikese poolt Päikese aeglase kokkutõmbumisega.

Teades Päikese massi ja raadiust ning kasutades valemit (16), saab arvutada, missugune hulk gravitatsiooni potentsiaalset energiat pidi muunduma osakeste liikumise energiaks ja kiirgusenergiaks kogu Päikese tekkimise ja olemasolu aja jooksul; selgub, et iga gramm Päikese massi pidi eraldama 120 milj. džauli energiat. Kui Päikese kiirgamine täieneks Päikese kokkutõmbumisega, siis peaks Päikese raadius veidi üle poolteise tuhande aasta möödumisel vähenema umbes ühe kümnetuhandiku võrra oma suurusest (Päikese raadius peaks igal aastal vähenema 36 m võrra). Varem oli Päikese kiirgamine kindlasti intensiivsem. Arvutus näitab, et kui Päikese kiirgamine täieneks ainult (või peamiselt) kokkutõmbumise arvel, siis oleks Päike pidanud jahtuma ja kustuma mitte enam kui 20 milj. aastat pärast oma tekkimist. Samal ajal osutab hulk fakte sellele, et tähed ja samuti ka Päike helenduvad võrratult kauem; nende iga väljendub biljonite (10^{10}) aastatega. Seepärast tunnustatakse, et kontraktsioonihüpoteesi põhjal saab seletada ainult tühise osa Päikese poolt kiiratava energia päritolu.

Teistest vastuväidetest planeetide tekkimise Kant-Laplace'i teooria esialgsele kujule on räägitud § 43.

VII PEATÜKK.

KÕVADE KEHADE PÖÖRLEVA LIIKUMISE DÜNAAMIKA.

§ 41. Kõvade kehade kulgev ja pöörlev liikumine. Jõumoment.

Mehhaanikas nimetatakse kõvaks kehaks materiaalsete punktide kogumit, millede vastastikune asetus jääb muutumatuks. Mehhaanika põhiseadused määravad kindlaks üksiku materiaalse punkti liikumise. Seepärast oleks sellise mittekõva keha, mille osakesed ei allu vastastikuse asetuse absoluutse muutumatuse tingimusele, liikumise täielikuks kirjeldamiseks vaja teada jõude, mis on rakendatud igale osakesele eraldi. Kõva keha jaoks ei ole selleks vajadust. Sel juhul võib iga liikumist esitada kahe elementaarliikumise kokkusobitamise tulemusena; esimene neist on *kulgev* liikumine, mille juures *keha osakesi ühendav iga mõtteline sirgjoon nihkub paralleelselt iseendaga,* ja teine neist *pöörlev liikumine,* mille juures *kõik keha punktid kirjeldavad ringjooni ümber mingi pöörlemistelje.* Mis tahes liikumise lahutamine kaheks liikumiseks — kulgevaks ja pöörlevaks — lihtsustab käsitlust tunduvalt ja võimaldab peale selle kõvade kehade pöörlevate liikumiste kohta kehtivaid seadusi sõnastada nii, et igaüks nendest seadustest osutub analoogiliseks ühega mehhaanika elementaarsetest seadustest.

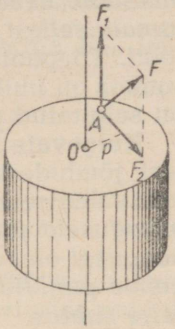
Kulgeva liikumise juures on keha kõigi punktide trajektoorid üksteisega paralleelsed ja punktide kiirused ühesugused. Seepärast saab mingi ühe punkti liikumist teades kindlaks teha kogu keha asendit ruumis mis tahes ajahetkel. Keha liigub kulgevalt nii, nagu oleks kogu tema mass koondatud masskeskmesse. Kulgeva liikumise näiteks võivad olla kehade vaba langemine raskusjõu toimel, kolvi liikumine soojusjõumasina silindris jms.

Pöörleval liikumisel on nurkkiirus ja nurkkiirendus igal antud ajahetkel keha kõigil osakestel ühesugused. Seoses osakeste vastastikuse asetuse muutumatusega on lineaarsed kiirused ja lineaarsed kiirendused võrdelised osakeste kaugusega pöörlemisteljest. Sellega selgub see erakordne tähtsus, mis on osakeste kaugusel pöörlemisteljest kõva keha pöörlevate liikumiste dünaa-

mikas: kaugus pöörlemisteljest r läheb varjatud kujul kõigisse pöörlevate liikumiste võrranditesse. Ilmsel kujul ta ei esine nendes võrrandites, kuid ta sisaldub nendes suurustes, mis asendavad siin jõu ja massi mõisteid. Pöörlevate liikumiste dünaamikas vaadeldakse jõudude ja masside asemel jõumomente ja inertsimomente.

Ajalooliselt tekkis kujutlus jõumomendist ja sai konkreetse iseloomu kõvade kehade staatikas ja dünaamikas; siin avaldus selgelt jõumomendi mõiste kasulikkus ja tähtsus.

Saagu teatav keha, näiteks silinder, pöörelda ümber telje, mis läbib punkti O, ja olgu temale punktis A rakendatud jõud F (joon. 102). Lahutame jõu F kaheks vastastikku risti olevaks komponendiks nii, et üks nendest, F_1, oleks teljega paralleelne ja teine komponent F_2 teljega risti oleval tasapinnal; komponent F_2 kujutab endast antud jõu F projektsiooni sellele tasapinnale. Esimene komponent F_1 ei saa anda mingisugust pöörlemisefekti (kui telg ei oleks kinnitatud, saaks F_1 ainult sundida keha libisema piki telge). Ainult teine komponent F_2 annab pöörlemisefekti, mis avaldub korrutisena F_2p, kus p on ristlõik, mis on tõmmatud punktist O projektsiooni sihile.



Joon. 102. Jõu F moment telje suhtes on arvuliselt F_2p.

Seepärast *jõumomendiks telje suhtes nimetatakse jõu projektsiooni (teljega risti olevale tasapinnale) ning jõu ja telje vahelise lühima kauguse korrutist.*

Jõumomenti telje suhtes vaadeldakse kui vektorit, mis on suunatud piki telge sinnapoole, kuhu on tarvis vaadata, et näha jõudu kellaosuti liikumise suunas pööratuna (s. t. joonisel 102 allapoole).

Vaatleme kahe võrdse, kuid vastassuunalise mitte ühel sirgel asetseva jõu mõju kõvale kehale. Kahte niisugust jõudu ei saa asendada ühe resultantjõuga. Nad ei saa põhjustada keha kulgevat liikumist mitte mingis suunas, kuid nad põhjustavad keha pöörlemise ümber teatava telje, mis on risti tasapinnaga, milles asetsevad mõlemad jõud.

Tõepoolest teevad need võrdsed ja vastassuunalised jõud keha mis tahes kulgeval nihkumisel (kui keha nihkub paralleelselt iseendaga) töö, mis on summas null; järelikult ei saa need jõud anda kehale kulgeva liikumise kineetilist energiat, ja seega nad ei saa ka seda liikumist tekitada. Pöörlemisel ei ole aga osutatud jõudude summaarne töö null, seepärast võivad nad panna keha pöörlema.

Seega kujutavad kaks võrdset, paralleelset ja vastassuunalist jõudu *(jõupaar)* endast täiesti erilist, ühele jõule taandamatut dünaamilist elementi.

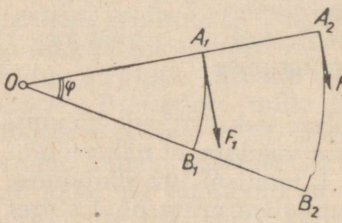
Nimetame lühimat kaugust jõupaari moodustavate jõudude mõjusihtide vahel jõupaari *õlaks.*

Jõupaari pöörlemapanevat mõju määratakse alati jõu ja õla korrutisega. Seda korrutist nimetatakse *jõupaari momendiks.* Jõupaari momenti vaadeldakse kui vektorit, mis on risti jõupaari tasapinnaga ja on suunatud sinnapoole, kuhu on tarvis vaadata, et näha jõude kellaosuti liikumise suunas pööratuna.

Vabale kõvale kehale mõjuv jõupaar pöörab keha ümber telje, mis läbib keha masskeskme ja on risti jõupaari tasapinnaga, sõltumata sellest, kus ka ei oleks rakendatud jõupaari moodustavad jõud. Tõepoolest, jõupaari moodustavate jõudude geomeetriline summa on null, seepärast peab keha masskese paigale jääma (see on selgitatud paragrahvis 25, joon. 47).

Kulgevate liikumiste dünaamikas domineeriv kujutlus võrdsetest jõududest loovutab pöörlevate liikumiste dünaamikas koha ekvivalentsete jõudude mõistele. *Ekvivalentseteks nimetame niisuguseid jõude, mis, mõjudes keha pöörlemisteljest erinevatel kaugusel olevatele materiaalsetele punktidele, teevad võrdse töö nende punktide nihutamisel ühe ja sama nurga võrra pöörlemistelje suhtes.*

Vaatleme, missugust tingimust peavad rahuldama ekvivalentsed jõud. Nihkugu kõva keha kaks punkti A_1 ja A_2 (joon. 103) ekvivalentsete jõudude F_1 ja F_2 toimel ühe ja sama nurga φ võrra pöörlemistelje O suhtes. Tähistame punktide kaugusi pöörlemisteljest vastavalt r_1 ja r_2. Nihkumisel nurga φ võrra läbib punkt A_1 tee $A_1B_1 = \varphi r_1$, järelikult avaldub jõu F_1 töö korrutisena $F_1\varphi r_1$. Punkti A_2 jaoks tuleb tee avaldis vastavalt φr_2 ja töö avaldub korrutisena $F_2\varphi r_2$.



Joon. 103. Ekvivalentsed jõud.

Ekvivalentsuse mõiste definitsiooni järgi peavad ekvivalentsed jõud sooritama ühesuguse töö nende rakenduspunktide nihkumisel ühe ja sama nurga võrra. Seepärast võib kirjutada:

$$F_1\varphi r_1 = F_2\varphi r_2$$

ehk

$$F_1 r_1 = F_2 r_2. \qquad (1)$$

F_1r_1 on aga jõu F_1 moment pöörlemistelje O suhtes ja F_2r_2 on jõu F_2 moment sellesama telje suhtes. Selle põhjal võime väljendada järgmise teoreemi:

Kaks jõudu on pöörlemise mõttes ekvivalentsed, kui nende momendid on võrdsed.

Mitme pöörleva jõu resultantmoment on võrdne üksikute jõumomentide algebralise summaga. See väide kannab Varignoni lause nime.

§ 42. Pöörleva liikumise kineetiline energia. Inertsimoment. Inertsiraadius.

Kui keha liigub kulgevalt, siis on kõigil tema punktidel üks ja sama kiirus v. Keha mingi osakese, mille mass on m_i, kineetiline energia on $\frac{m_i v^2}{2}$, ja kogu keha kineetiline energia E_{kin} leitakse kõigi selliste avaldiste summana, s. o.

$$E_{kin} = \sum \frac{m_i v^2}{2}.$$

Tuues ühise teguri $\frac{v^2}{2}$ summamärgi ette, saame:

$$E_{kin} = \frac{v^2}{2} \Sigma m_i = \frac{mv^2}{2},$$

kus $\Sigma m_i = m$ on antud keha mass. Järelikult avaldub keha kulgeva liikumise kineetiline energia samuti nagu materiaalse punkti juhul.

Kui keha pöörleb ümber mingi telje, siis on punktide joonkiirused võrdelised punktide kaugustega pöörlemisteljest:

$$v_i = \omega r_i,$$

kus ω on nurkkiirus.

Võtame pöörleva keha kõigi osakeste kineetiliste energiate summa:

$$E_{kin} = \sum \frac{m_i v^2_i}{2} = \sum \frac{m^2_i \omega^2 r^2_i}{2}.$$

Toome kõigi osakeste jaoks ühise teguri $\frac{\omega^2}{2}$ summamärgi ette:

$$E_{kin} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m_i r^2_i.$$

Sellele pöörleva keha kineetilise energia valemile saab anda kuju, mis on analoogiline kulgeva liikumise kineetilise energia avaldisega, kui kasutada keha niinimetatud *inertsimomendi* mõistet. Materiaalse punkti inertsimomendiks nimetatakse punkti massi korrutist tema kauguse ruuduga pöörlemisteljest. Keha inertsimoment I on keha kõigi materiaalsete punktide inertsimomentide summa[1]:

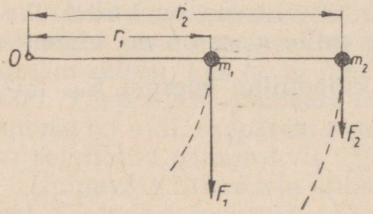
$$I = \Sigma m_i r^2_i. \qquad (2)$$

[1] Kui meil on lõpliku arvu n materiaalse punkti asemel pidev keha, siis võib teda jaotada elementaarmassideks dm; siis läheb lõpliku arvu liidetavate summa üle lõpmata suure arvu liidetavate summaks, ja inertsimoment avaldub integraalina $I = \int r^2 dm$.

Seega määratakse pöörleva keha kineetiline energia valemiga

$$E_{kin} = \frac{I\omega^2}{2} . \qquad (3)$$

Valem (3) erineb keha kineetilist energiat kulgeval liikumisel määravast valemist sellega, et keha massi m asemel tuleb siin sisse inertsimoment I ja kiiruse v asemel — nurkkiirus ω.



Joon. 104. Inertsimomentide teoreemi juurde.

Suure kineetilise energiaga pöörlevat hooratast kasutatakse tehnikas selleks, et säilitada masina käigu ühtlust järsku muutuva koormuse juures. Algul nõutakse masinalt suurt töökulu selleks, et panna suure inertsimomendiga hooratas pöörlema, kuid see-eest ei jää masin suure koormuse äkilisel sisselülitamisel seisma, vaid teeb tööd hooratta kineetilise energia tagavara arvel.

Eriti massiivseid hoorattaid kasutatakse valtsimismasinates, mis pannakse käima elektrimootori abil. Toome ühe niisuguse ratta kirjelduse: „Ratta diameeter on 3,5 *m*, ta kaalub 41 *T*. Normaalsel kiirusel 600 *tiiru/min* on ratta kineetilise energia tagavara selline, et ratas annab valtsimise hetkel masinale võimsuse 20 000 *HJ*. Hõõre laagrites on viidud miinimumini määrimisega rõhu all, ja kesktõuke inertsjõudude kahjuliku toime vältimiseks on ratas tasakaalustatud nii, et ratta piirdele paigutatud koormis 30 grammi viib ta paigalseisust välja."

Kui kulgevate liikumiste dünaamikas vaadeldakse võrdseid masse, siis pöörlevate liikumiste dünaamikas asenduvad need ekvivalentsete massidega, kusjuures *ekvivalentseteks massideks nimetatakse niisuguseid masse, mis ekvivalentsete pööravate jõudude toimel saavad võrdsed nurkkiirendused.*

Vaatleme masside ekvivalentsuse tingimust. Olgu kaks massi m_1 ja m_2 (joon. 104), mis asuvad pöörlemisteljest kaugustel r_1 ja r_2, ekvivalentsete (s. o. võrdsete momentidega) jõudude F_1 ja F_2 mõju all ja saagu nad ühesuguse nurkkiirenduse ε. Tähistades massi m_1 lineaarse kiirenduse a_{τ_1} ja massi m_2 kiirenduse a_{τ_2} ning rakendades jõu avaldist massi ja kiirenduse kaudu, saame:

$$F_1 = m_1 a_{\tau_1}, \quad F_2 = m_2 a_{\tau_2} ;$$

siin võib lineaarsete (tangentsiaalsete) kiirenduste suurused a_{τ_1} ja a_{τ_2} asendada vastavalt suurustega εr_1 *ja* εr_2. Tõepoolest, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$. Kuna $v = \omega r$, aga r loeme muutumatuks suuruseks, siis

joonkiiruse lõpmata väikese muutuse dv põhjuseks on nurkkiiruse lõpmata väike muutus $d\omega$. Järelikult

$$dv = r\,d\omega \text{ ja } a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{r\,d\omega}{dt},$$

ehk, kuna $\frac{d\omega}{dt}$ on nurkkiirendus ε, siis

$$a_\tau = \varepsilon r. \tag{4}$$

Seega võib ülaltoodud jõudude F_1 ja F_2 avaldisi kirjutada järgmiselt:

$$F_1 = m_1\,\varepsilon r_1,\ F_2 = m_2\,\varepsilon r_2.$$

Kuid tingimuse järgi olid jõud F_1 ja F_2 ekvivalentsed, järelikult

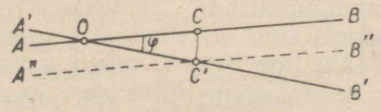
$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

ehk, asetades siia F_1 ja F_2 väärtused ja taandades suurusega ε, saame masside ekvivalentsuse tingimuse:

$$m_1 r^2_1 = m_2 r^2_2. \tag{5}$$

Nagu näeme, määrab pöörleval liikumisel keha inertsuse pöörleva liikumise suhtes suurus, mis avaldub massi korrutisena tema kauguse ruuduga pöörlemisteljest, seepärast nimetataksegi osutatud suurust *inertsimomendiks*. Näeme, et masside ekvivalentsuse tingimust saab väljendada nii: *kaks massi on ekvivalentsed pöörlemise mõttes, kui on võrdsed nende inertsimomendid.*

Steineri lause. Vaatleme inertsimomendi sõltuvust pöörlemistelje asukohast.



Joon. 105. Teoreemi $I_o = I_c + m(OC)^2$ tuletamise juurde.

Pöörelgu varras AB (joon. 105), mille raskuskese on punktis C, nurkkiirusega ω ümber telje O, mis on risti joonise tasapinnaga. Oletame, et ta teatava ajavahemiku jooksul nihkus asendist AB asendisse $A'B'$, kusjuures raskuskese kirjeldas kaare CC'. Seda varda nihet võib vaadelda nii, nagu oleks ta algul nihkunud kulgevalt (s. o. jäädes iseendaga paralleelseks) asendisse $A''B''$ ja seejärel pöördunud ümber C' asendisse $A'B'$. Tähistame OC (raskuskeskme kauguse pöörlemisteljest) tähega a ja nurga BOB' tähega φ. Varda liikumisel asendist AB asendisse $A''B''$ on iga tema osakese nihe samasugune raskuskeskme nihkega, s. t. ta on võrdne pikkusega CC' ehk pikkusega $a\varphi$. Selleks et saada varda tõelist liikumist, võime oletada, et mõlemad osutatud liikumised toimuvad samaaegselt. Vastavalt sellele saab ümber punkti O läbiva telje nurkkiirusega ω pöörleva varda kineetilist energiat jaotada kahte ossa. Esimene osa on varda kulgeva liikumise kineetiline energia; kõigil varda punktidel on seejuures üks ja sama

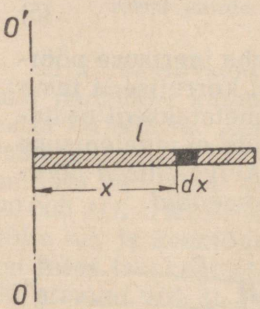
kiirus; varda ühe punkti ja nimelt punkti C kiirus on meile tuntud: see on $a\omega$, ja järelikult on see kineetilise energia osa $\frac{1}{2}m(a\omega)^2$, kus m on varda mass. Teine kineetilise energia osa on ümber varda raskuskeskme C nurkkiirusega ω toimuva pöörleva liikumise kineetiline energia. See on $\frac{1}{2} I_c \omega^2$, kus I_c on varda inertsimoment telje suhtes, mis läbib raskuskeskme ja on paralleelne läbi punkti O mineva teljega. Oletame nüüd, et I on varda inertsimoment läbi punkti O mineva telje suhtes; vaadeldes varda liikumist kui pöörlemist ümber telje O, võime väita, et varda kineetiline energia on $\frac{1}{2} I\omega^2$. Järelikult

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_c\omega^2 + \frac{1}{2} ma^2\omega^2.$$

Siit leiame, taandades kõik võrrandi liikmed suurusega $\frac{\omega^2}{2}$, et

$$I = I_c + ma^2. \tag{6}$$

Seega inertsimoment mis tahes pöörlemistelje suhtes on võrdne läbi raskuskeskme mineva paralleelse telje suhtes võetud inertsimomendiga, millele on liidetud keha massi korrutis keha raskuskeskme ruuduga pöörlemisteljest.



Joon. 106.

Mõnede kehade inertsimomendid. Kehade inertsimomente arvutatakse integraalarvutuse abil. Selleks et anda ettekujutust taoliste arvutuste käigust, leiame *varda* inertsimomendi vardaga risti oleva telje suhtes (joon. 106). Olgu q varda ristlõike pindala ja ϱ tihedus. Eraldame varda elementaarselt väikese osa, mille pikkus on dx ja mis asetseb pöörlemisteljest kaugusel x. Siin on ta mass $dm = \varrho q dx$. Kuna see asetseb pöörlemisteljest kaugusel x, siis on tema inertsimoment $dI = q\varrho x^2 dx$. Integreerime rajades nullist kuni varda pikkuseni l:

$$I = \int_0^l q\varrho x^2 dx = q\varrho \int_0^l x^2 dx = q\varrho \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^l = \frac{1}{3} q\varrho l^3 = \frac{1}{3} ml^2. \tag{7}$$

Toome (arvutusi teostamata) veel mõnede kehade inertsimomentide väärtused (eeldatakse, et igaühel nendest kehadest on kõigis tema osades ühesugune tihedus).

Ümmarguse peenikese *rõnga* inertsimoment telje suhtes, mis läbib ta keskpunkti ja on risti rõnga tasapinnaga (joon. 107):

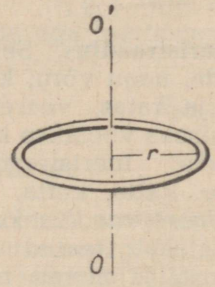
$$I = mr^2. \tag{8}$$

Ümmarguse *ketta* (või *silindri*) inertsimoment telje suhtes, mis läbib tema keskpunkti ja on risti ta tasapinnaga (ketta polaarne inertsimoment; joon. 108):

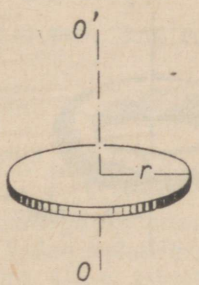
$$I = \frac{1}{2} mr^2. \tag{9}$$

Õhukese ümmarguse *ketta* inertsimoment telje suhtes, mis ühtib tema diameetriga (ketta ekvatoriaalne inertsimoment; joon. 109):

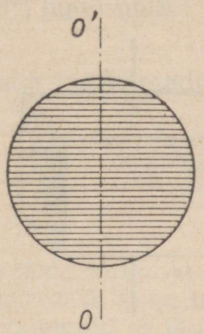
$$I = \tfrac{1}{4} mr^2. \qquad (10)$$



Joon. 107.



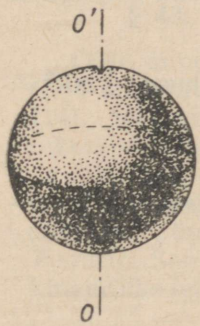
Joon. 108.



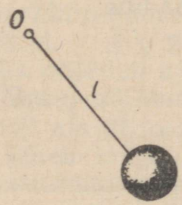
Joon. 109.

Kera inertsimoment telje suhtes, mis ühtib tema diameetriga (joon. 110):

$$I = \frac{2}{5} mr^2. \qquad (11)$$



Joon. 110.



Joon. 111.

Määrame inertsimomendi kera jaoks, mis on üles riputatud punktis O niidi abil pikkusega l ja mille mass on m ja raadius r („füüsikaline pendel", joon. 111). Kuna kera inertsimoment diameetri suhtes, teiste sõnadega raskuskeset läbiva telje suhtes on $\frac{2}{5} mr^2$ ja telgedevaheline kaugus on antud juhul $l + r$, siis valemi (6) põhjal otsitav inertsimoment:

$$I = \frac{2}{5} mr^2 + m(l + r)^2. \qquad (12)$$

Õhukese sfäärilise kihi, mille raadius on r, inertsimoment keskpunkti läbiva telje suhtes:

$$I = \tfrac{2}{3} mr^2. \qquad (13)$$

Paksu sfäärilise kihi (õõnsa kera, mille välispinna raadius on R ja õõne raadius on r) inertsimoment keskpunkti läbiva telje suhtes:

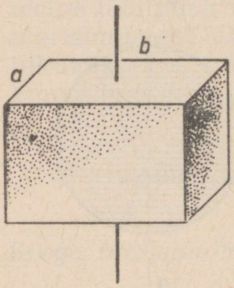
$$I = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}. \quad (14)$$

Risttahuka inertsimoment sümmeetriatelje suhtes (joon. 112):

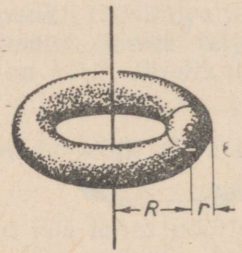
$$I = \tfrac{1}{2} m(a^2 + b^2). \quad (15)$$

Ringrõnga (rõngastoroidi) (joon. 113) inertsimoment:

$$I = m(R^2 + \tfrac{3}{4} r^2). \quad (16)$$



Joon. 112.



Joon. 113.

Inertsiraadius. Selliste kehade, nagu võru, ketas, kera ja ratas, veeremise uurimiseks võetakse kasutamisele inertsiraadiuse mõiste. Ratta, ketta, kera jms. *inertsiraadiuseks* r_i nimetatakse teatud võru raadiust, ja nimelt niisuguse võru raadiust, millel on samasugune mass m ja samasugune inertsimoment I nagu vaadeldaval kehalgi (mõeldakse inertsimomenti täieliku sümmeetriatelje suhtes).

Võru inertsimoment telje suhtes, mis on risti võru tasapinnaga ja läbib võru keskpunkti, on mr^2_i. Järelikult on definitsiooni järgi *iga keha inertsiraadius* r_i *seotud selle keha massiga* m *ja inertsimomendiga* I *võrdusega*

$$I = mr^2_i.$$

Homogeense ketta inertsimoment on $\frac{1}{2} mR^2$. Võrdusest $\frac{1}{2} mR^2 = mr^2_i$ leiame, et ketta inertsiraadius

$$r_i = R\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Homogeense kera inertsimoment on $\frac{2}{5} mR^2$ ja järelikult homogeense kera inertsiraadius

$$r_i = R\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Vaatame, kuidas on seotud tasapinda mööda (ilma libisemiseta) veereva keha pöörlemise energia selle keha kulgeva liikumise energiaga.

Veereva keha kulgeva liikumise energia on $\frac{mv^2}{2}$, kus m on keha mass ja v — kulgeva liikumise kiirus. Tähistagu ω veereva keha pöörlemise nurkkiirust ja R keha raadiust. On arusaadav, et ilma libisemiseta veereva keha kulgeva liikumise kiirus on võrdne keha joonkiirusega keha kokkupuutepunktides tasapinnaga (aja t jooksul, kui keha sooritab ühe pöörde $\omega t = 2\pi$, nihkub keha

raskuskese vahemaa $2\pi R$ võrra; järelikult on $v = \frac{2\pi R}{t} = \omega R$).

Seega

$$E_{kulg} = \frac{m\omega^2 R^2}{2}.$$

Pöörlemise energia

$$E_{pöörl} = \frac{I\omega^2}{2},$$

kuna aga inertsimoment $I = mr_i^2$, kus r_i on keha inertsiraadius, siis

$$E_{pöörl} = \frac{m\omega^2 r_i^2}{2},$$

järelikult

$$\frac{E_{pöörl}}{E_{kulg}} = \left(\frac{r_i}{R}\right)^2.$$

Niisiis *veereva keha pöörlemise energia ja tema kulgeva liikumise energia suhe on võrdne keha inertsiraadiuse ja keha tõelise raadiuse suhte ruuduga.* Olles kasutanud valemeid r_i jaoks, leiame, et:

a) veereva võru pöörleva liikumise energia on võrdne tema kulgeva liikumise energiaga;

b) veereva homogeense ketta pöörlemise energia on võrdne poolega kulgeva liikumise energiast;

c) veereva homogeense kere pöörlemise energia moodustab $^2/_5$ kulgeva liikumise energiast.

§ 43. Pöörleva liikumise dünaamika põhivõrrand.

Olgu mingile kehale, mis võib pöörelda ümber liikumatu telje O ja mille inertsimoment on I, rakendatud jõud F õlaga r (joon. 114). Määrame nurkkiirenduse ε, mille vaadeldav keha saab rakendatud jõu toimel.

Oletame, et keha pöördub aja dt jooksul nurkkiirusega nurga $d\varphi = \omega dt$ võrra, kusjuures jõu F rakenduspunkt kirjeldab kaare $ds = rd\varphi$. Jõu F poolt aja dt jooksul tehtud töö on Fds ehk teisiti $F \cdot r\omega dt$. See töö läheb keha pöörlemise kineetilise energia suurendamiseks, s. t.

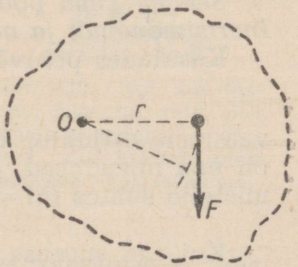
$$Fr\omega dt = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$

Kui keha inertsimoment ei muutu, siis:

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega d\omega.$$

Järelikult saame (taandades nurkkiirusega ω ja tuues sisse jõumomendi $M = Fr$):

$$M = I\frac{dt}{d\omega}. \qquad (17)$$



Joon. 114.

Näeme, et see *pöörleva liikumise dünaamika põhivõrrand* on oma väliskujult analoogiline kulgeva liikumise dünaamika põhivõrrandiga

$$F = m\,\frac{dv}{dt}.$$

Kuid, nagu võiski oodata, esineb võrrandis (17) jõu asemel jõumoment, massi asemel — inertsimoment ja lineaarse kiirenduse asemel — nurkkiirendus.

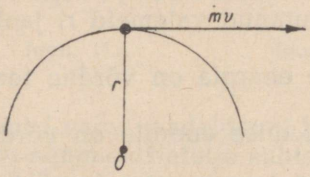
Arvestades keha inertsimomendi muutumise võimalust pöörlemise ajal, saaksime võrrandi (17) asemel võrrandi

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt}, \tag{18}$$

mis on analoogiline võrrandiga

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Võrrandisse (18) tuleb suurus $I\omega$. Selgitame selle füüsikalise tähenduse. Keha pöörleval liikumisel kirjeldab iga tema osake massiga m ringjoone raadiusega r, kusjuures tal seejuures on mingi kiirus v (joon. 115). Korrutis mv on antud osakese liikumishulk. Osakese liikumishulga korrutis osakese lühima kaugusega mingist teljest, s. t. suurus mvr on *pöörlemishulk L telje suhtes.* Pöörlemishulka telje suhtes vaadeldakse kui vektorit, mis on suunatud piki telge sinnapoole, kuhu on vaja vaadata selleks, et näha liikumist toimuvana kellaosuti pöörlemise suunas.



Joon. 115.

Võttes pöörlevat keha moodustavate kõigi osakeste pöörlemishulkade summa, saame antud keha kogu pöörlemishulga:

$$L = \sum mvr = \sum m\omega r\, r = \sum m\omega r^2$$

ehk, tuues summamärgi ette kõigi punktide jaoks ühise teguri ω ja tähele pannes, et $\Sigma\, mr^2$ on inertsimoment I, leiame:

$$L = \omega \sum mr^2 = I\omega. \tag{19}$$

Seega *keha pöörlemishulk pöörlemistelje suhtes on võrdne inertsimomendi ja nurkkiiruse korrutisega.*

Kasutades põhivõrrandit

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

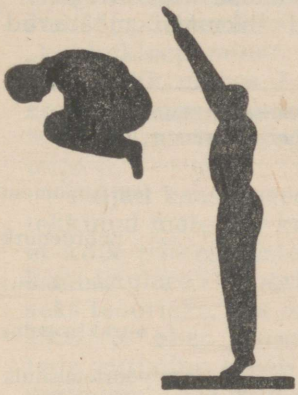
vaatleme erijuhtu, kus kehale kas üldse ei mõju välisjõude või on nad niisugused, et nende resultant ei anna momenti pöörlemistelje suhtes ($M = 0$). Siis

$$d(I\omega) = Mdt = 0.$$

Kui aga suuruse $I\omega$ muutus on null, siis järelikult jääb suurus $I\omega$ ise konstantseks:

$$L = I\omega = const. \tag{20}$$

Niisiis, *kui kehale ei mõju välisjõude* (või nende resultantmoment pöörlemistelje suhtes on null), *siis jääb keha pöörlemishulk pöörlemistelje suhtes muutumatuks.* See seadus kannab pöörlemishulga jäävuse seaduse nime.

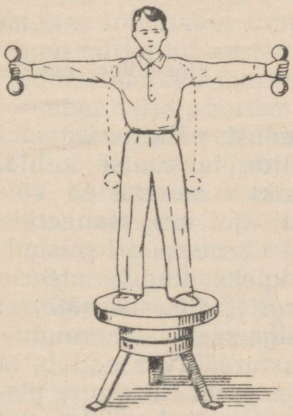


Joon. 116.

Toome mõned näited, mis illustreerivad pöörlemishulga jäävuse seadust.

Võimleja surub salto tegemise ajal (joon. 116) käed ja jalad kere vastu. Sellega ta vähendab oma inertsimomenti, aga kuna korrutis $I\omega$ peab muutumatuks jääma, siis pöörlemise nurkkiirus ω kasvab ja lühikese ajavahemiku jooksul, mil võimleja viibib õhus, jõuab ta teha täispöörde.

Kerake on seotud niidi külge, mis on pulgale keritav; sedamööda, kuidas väheneb niidi pikkus, väheneb kerakese inertsimoment ja järelikult kasvab nurkkiirus.



Joon. 117. Žukovski pingil seisva inimese pöörlemine kiireneb, kui ta laseb käed alla, ja aeglustub, kui ta tõstab nad üles.



Joon. 118. Kui liikumatul Žukovski pingil liigutada käsi ühes suunas, siis pöörduvad jalad koos platvormiga vastassuunas.



Joon. 119. Kui me tõstame jalgratta ratta pea kohale ja paneme ta pöörlema, siis hakkab pink pöörlema vastassuunas.

Rea huvitavaid katseid saab teha, astudes platvormile, mis pöörleb kuullaagreil (Žukovski pink). Joonistel 117—119 on kujutatud mõned sellistest katsetest.

Kõrvutades viimastes paragrahvides tuletatud võrrandeid sirgjoonelise kulgeva liikumise seadustega, on kerge märgata, et pöörlevat liikumist ümber liikumatu telje määravad valemid on analoogilised sirgjoonelise kulgeva liikumise valemitega.

Järgnevas tabelis on kõrvutatud neid liikumisi määravad põhisuurused ja -võrrandid:

Kulgev liikumine (sirgjooneline)		Pöörlev liikumine (ümber liikumatu telje)	
Mass	m	I	inertsimoment
Tee	s	φ	pöördenurk
Kiirus	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	nurkkiirus
Kiirendus	$a = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	nurkkiirendus
Liikumishulk	mv	$I\omega$	pöörlemishulk
Jõud	F	M	jõumoment
Põhivõrrand	$\begin{cases} F = ma \\ F = \frac{d(mv)}{dt} \end{cases}$	$\begin{cases} M = I\varepsilon \\ M = \frac{d(I\omega)}{dt} \end{cases}$	põhivõrrand
Töö	$F \cdot s$	$M\varphi$	töö
Kineetiline energia	$\frac{mv^2}{2}$	$\frac{I\omega^2}{2}$	kineetiline energia

Rakendades pöörlemishulga jäävuse seadust päikesesüsteemi kohta, saab teha tähtsaid järeldusi planeetide tekkimise kohta. Päikesesüsteemi kõigi planeetide mass kokku moodustab kõigest umbes $^1/_{700}$ Päikese massist. Samal ajal on planeetide pöörlemishulk ligikaudu 50 korda suurem Päikese pöörlemishulgast. Kui planeetide tekkimise põhjuseks oleks olnud mateeria tihenemine Kant-Laplace'i teooria järgi (§ 40), siis näib, et Päike oleks pidanud koos peamise osa massiga saama samasuguse valdava osa pöörlemishulgast. Osutatud vasturääkivus näitab, et Kant-Laplace'i teooriat tuleb mingil määral muuta. Niisuguse planeetide tekkimise muudetud teooria töötas välja umbes 30 aastat tagasi inglise astrofüüsik Jeans. Jeans oletas, et planeedid tekkisid häiriva mõjutuse tagajärjel, mida kunagi avaldas tihenevale Päikesele ta lähedalt möödalendava tähe külgetõmme. Nõukogude õpetlased selgitasid, et Jeans'i teooria, millel oli mõnda aega menu, on siiski ebaõige.

Viimastel aastatel lõi akad. Otto Juljevitš Šmidt planeetide meteoriitidest tekkimise teooria. On kindlaks tehtud, et tähtedevahelises ruumis on määratu suured tumeda tolmusarnase mateeria ja hõredate gaaside kogud. O. J. Šmidt oletab, et Päike

läbis kunagi sellise tumeda mateeria pilve ja haaras oma külgetõmbega kaasa osa sellest mateeriast. O. J. Šmidt näitas, et kaasahaaratud mateeria osakesed pidid hakkama pöörlema ligikaudu ühes tasapinnas, samas, milles paiknevad planeedid. Päikese ümber pöörlemisse kaasatõmmatud peente osakeste aeglane „kokkukleepumine" viis planeetide tekkimisele. Maa tekkimiseks oli vajalik umbes 7 miljardit aastat. O. J. Šmidti arvutused on kooskõlas rea päikesesüsteemi omadustega: tema ulatusega, pöörlemishulga jaotusega, planeetide pöörlemisega ümber oma telje jt.

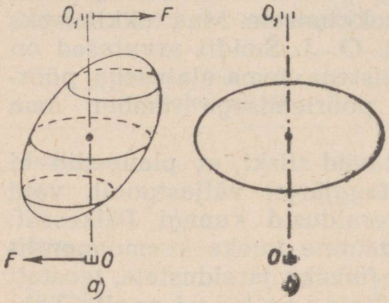
Paljud kaasaegsed õpetlased oletavad siiski, et planeedid ei tekkinud mateeria kaasahaaramise tagajärjel väljastpoolt, vaid et kõik päikesesüsteemi planeedid eraldusid kunagi Päikesest. Kant-Laplace'i teooria ümberkorraldamine uueks kosmogooniliseks teooriaks, mis toetub kaasaegse füüsika järeldustele, teostati 1939. a. akad. Vassili Grigorjevitš F e s s e n k o v i poolt. Tähtede uurimine lubab järeldada, et tähe elu moodustub mitmest perioodist. Aja jooksul muutub järsult tähe tihedus, temperatuur ja ekvatoriaalne pöörlemiskiirus. Katkematult toimub kiirgamine ja tähe massi ärakandumine. Nende protsesside intensiivsus on tähe olemasolu erinevatel perioodidel aga erinev. Nagu oletab V. G. Fessenkov, erinevad need perioodid tähe elus kõige enam tähes toimuvate tuumasiseste protsesside iseloomu poolest. Mõned miljardid aastad tagasi hakkas päike seoses tuumareaktsioonide iseloomu muutumisega kiiresti kokku tõmbuma ja tihenema ümber telje pöörlemise kiiruse suurenemisega. Pöörlemise kiirenemine pidi muljuma Päikese laperguseks ja ekvaatoril pidi tekkima kumerus (pirnitaoline kuju). Nagu geniaalne matemaatik A. M. Ljapunov ammu tõestas, on pöörleva massi pirnitaoline kuju ebapüsiv. Niisuguse kujuga Päikese küljest pidi eralduma massi osa, mis oli paiknenud ekvatoriaalsesse kumerusse, see viis endaga kaasa pöördeimpulsi ülejäägi, mis oli pöörlemise ebapüsivuse tekitajaks. Edaspidi tekkisidki nendest Päikesest eraldunud gaasilistest klompidest planeedid.

§ 44. Vabad teljed. Güroskoop.

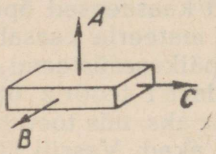
Kui mingi keha pöörleb ümber telje, mis läbib keha raskuskeset (joon. 120, *a*), põhjustab kesktõmbe jõudude tekkimise (mis on vajalikud ülal- ja allpool kesklõiget asuvate keha osade pöörlemiseks) laagrite O ja O_1 rõhumine teljele. Seepärast avaldab ka telg rõhumist laagritele. Kui anda kehale võimalus pöörduda ümber horisontaalse telje, siis ta võtab joon. 120, *b* näidatud asendi, mille puhul kõik kesktõmbejõud tasakaalustuvad ja teljele OO_1 ei mõju mingeid jõude. Sel juhul osutub ülemine laager täiesti ülearuseks; kui me eemaldame ülemise kinnituse, siis see ei avalda

absoluutselt mitte mingit mõju teljele. Sellist *telge, mille suhtes pöörleva keha kesktõmbejõud tasakaalustuvad, nimetatakse keha vabaks teljeks.* Kui kehal on täieliku sümmeetria telg, siis silmanähtavalt see sümmeetriatelg ongi vabaks teljeks.

Võib tõestada, et *igas kehas on kolm vastastikku risti olevat vaba telge.* Nii on näiteks joon. 121 kujutatud karbil vabadeks tel-



Joon. 120. Keha pöörlemine ümber suvalise (*a*) ja vaba (*b*) telje.



Joon. 121. *A*, *B* ja *C* on vabad teljed.

gedeks kolm vastastikku risti olevat sihti *A*, *B* ja *C*, mis läbivad tema raskuskeset. Seejuures on inertsimomendil telje *A* suhtes suurim väärtus, *C* suhtes — vähim ja telje *B* suhtes — vahepealne.

Pöörlemise püsivuse suhtes ei ole ükskõik, missugune vabadest telgedest nimelt on pöörlemisteljeks. Kogemus ja teooria näitavad, et pöörlemine ümber suurima ja ümber vähima inertsimomendiga telje osutub püsivaks, ja pöörlemine ümber keskmise inertsimomendiga telje — ebapüsivaks. Kui üles visata karp, olles pannud seejuures pöörlema ümber telje *A* või *C*, siis toimub see pöörlemine ühtlaselt, ilma kõikumiseta. Katse sundida karpi pöörlema ümber telje *B* viib alati kõikumistele.

Vaatame rea lihtsaid katseid, mis annavad näitliku kujutluse pöörlemise vabadest telgedest.

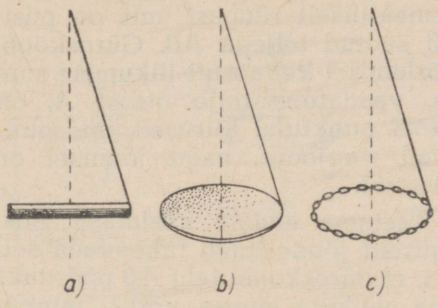
Kui riputada pulgake otsapidi niidi külge ja panna niidi teine ots kiiresti pöörlema tsentrifugaalmasina või sõrmede abil (joon. 122, *a*), siis hakkab pulgake horisontaaltasapinnas pöörlema ümber vertikaalse telje, mis on risti pulgakese pikkusega ja läbib tema keskkoha. See ongi pöörlemise vaba telg, kusjuures kepikese inertsimoment on telje niisuguse asendi juures maksimaalne.

Täpselt samasuguselt hakkab pöörlema horisontaaltasapinnas raske kartongist rõngas või kettake, mis on äärest üles riputatud (joon. 122, *b*).

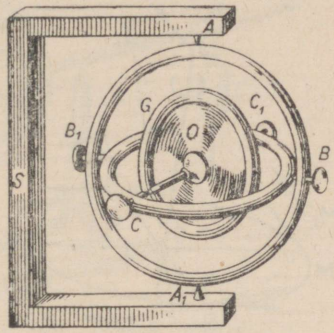
Otsapidi kokkuseotud ketike asetub taolisel katsel horisontaalse rõnga kujuliselt (joon. 122, *c*) ja käitub elastse kõva kehana. Isegi ketikese järsul liigutamisel niidiga üles või alla jääb rõnga horisontaaltasapind püsima.

Suur tähtsus on tehnikas pöörlemisel vaba telje mõistel.

Nimelt on vaja masina pöörlevaid osi sundida pöörlema ümber nende vabade telgede ehk, nagu öeldakse, on vaja neid hästi tsentreerida, muidu, eriti suurte kiiruste juures, võivad rõhumisel teljele olla kahjulikud tagajärjed ja isegi masina purunemine.



Joon. 122. Kepikese (*a*), kartongkettakese (*b*) ja ketikese (*c*) vabad teljed.



Joon. 123. Güroskoop gardaanrippes.

Güroskoobiks nimetatakse kõva keha, mis pöörleb suure nurkkiirusega ümber mingi telje, mis üldjuhul muudab oma asendit nii ruumis kui ka kehas endas. Harilikult kujutab güroskoop endast homogeenset kõva pöördkeha, mille raskuskese asetseb geomeetrilisel teljel. Tehnikas kasutatakse güroskoopi massiivse pöiaga hooratta näol.

Põhiküsimuseks güroskoobi teoorias on güroskoobile mõjuvate välisjõudude, tema telje asendi muutumise ja selle juures arendatavate inertsijõudude vahelise sõltuvuse kindlakstegemine.

Güroskoop, mis on pandud pöörlema ümber sümmeetriatelje (vaba telg), *püüab säilitada oma telje sihti ruumis* muutumatuna; güroskoop on seda püsivam, mida suurem on pöörlemise nurkkiirus ja mida suurem on güroskoobi inertsimoment pöörlemistelje suhtes.

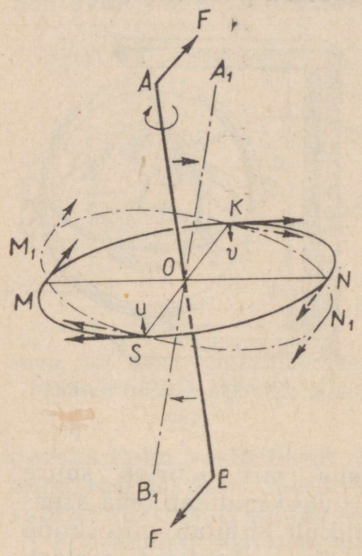
Seda saab näidata näiteks güroskoobi kui katseriista abil, milles on kasutatud niinimetatud *kardaanripet* (joon. 123). Toel *S* saab telje AA_1 ümber pöörelda väline rõngas, mille sees saab pöörelda teine rõngas ümber telje BB_1, mis on risti teljega AA_1. Selle rõnga sees pöörleb güroskoop *O* ümber telje CC_1, mis on risti teljega BB_1.

Selline seadeldis võimaldab güroskoobi teljel vabalt võtta mistahes asendit ruumis. Kui panna güroskoop nööri abil kiiresti ümber sümmeetriatelje pöörlema, siis jääb selle telje siht muutumatuks, missugune asend ka ei oleks antud toele *S*.

Kui aga rakendada pöörlevale güroskoobile jõupaar, mis püüab teda pöörata ümber telje, mis on risti güroskoobi pöörlemistel-

jega, siis hakkab ta tõepoolest pöörduma, kuid ainult ümber kolmanda telje, mis on risti esimese kahega.

Vaatleme seda esimesel pilgul hämmastavat nähtust ja selgitame teda tekitavad põhjused.



Joon. 124. Selleks et pöörata güroskoopi ümber telje *KS*, on vaja rakendada jõumomenti, mis pöörab teda ümber telje *MN*.

Olgu (joon. 124) *AB* güroskoobi teljeks ja kujutagu ringjoon *MKNS* skemaatiliselt rõngast, mis on püsivalt seotud teljega *AB*. Güroskoobi pöörlemisel kellaosuti liikumise suunas, vaadatuna telje otsast *A*, on *MKNS* punktidel kiirused, mis puutuvad ringjoont, nagu joonisel on näidatud.

Asetame endale küsimuse, missuguseid jõude tuleb rakendada selleks, et güroskoobi telg *AB* pöörduks väga väikese nurga võrra, minnes asendist *AB* üle asendisse A_1B_1. Siis pöördub samasuguse nurga võrra ka ringjoon, minnes asendisse M_1KN_1S, ja kõik tema punktid, välja arvatud punktid *M* ja *N*, muudavad oma kiiruste suundi. Punktid *K* ja *S* saavad mingid lisakiirused *v* ja *u*, mis on paralleelsed teljega *AB*. Poolringjoone *MSN* eri punktide lisakiirused on paralleelsed lisakiirusega *u* ning nende suurused on *O* ja *u* vahel. Täpselt samuti on poolringjoone *MKN* punktide lisakiirused paralleelsed lisakiirusega *v*, ja nende suurused on *O* ja *v* vahel. Nende lisakiiruste andmiseks on poolringjoone *MSN* punktidele vaja rakendada poolteljega *OA* paralleelselt suunatud jõude, ja poolringjoone *MKN* punktidele jõude, mis on suunatud paralleelselt poolteljega *OB*. Kogu nende jõudude kogumit võib asendada mingi jõupaariga, mille telg on *ON* sihiline. Kahte jõudu *F*, mis moodustavad selle jõupaari, võib rakendada güroskoobi mingitele punktidele, näiteks tema telje otstele *A* ja *B*.

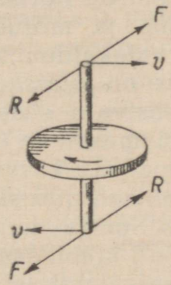
Seega jõuame järgmisele järeldusele: selleks et pöörata güroskoobi telge *AB* ümber mingi telje *KS*, mis on temaga risti, on güroskoobile tarvis rakendada jõumoment, mis pöörab teda ümber telje *MN*, mis on risti kahe esimesega.

Ümberpöördult, kui rakendada pöördemomenti, mis sunnib güroskoopi pöörduma ümber mingi telje, mis on risti güroskoobi pöörlemisteljega, siis ta pöördub ümber kolmanda telje, mis on risti kahe esimesega.

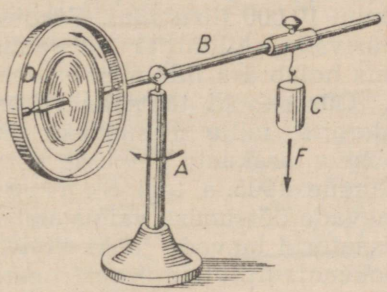
Oma liikumisel avaldab güroskoobi telg tugedele (või laagritele, millesse ta on suletud) rõhumisi, mis on võrdsed rakendatud jõududega *F*. Arenevad niinimetatud *güroskoopilised jõud*, kusjuures güroskoopiline moment on võrdne ja vastassuunaline rakendatud jõudude momendiga.



Joon. 125. Güroskoobi skeem.



Joon. 126.



Joon. 127. Fesseli güroskoop.

Joon. 126 on skemaatiliselt kujutatud güroskoop; noolega on näidatud tema pöörlemise suund; *F* on güroskoobile rakendatud aktiivsed jõud, *v* — nihkumise suund; *R* — güroskoopilised jõud.

Eespoolesitatust järgneb üldreegel: *güroskoop püüab asetada oma pöörlemistelge niimoodi, et ta moodustaks võimalikult väiksema nurga sunnitud pöörlemise teljega ja et mõlemad pöörlemised oleksid samasuunalised.*

See reegel aitab määrata ühtedel juhtudel güroskoobi telje pöördumise suunda ja teistel — güroskoopiliste jõudude suunda[1].

Kõike eespoolesitatut saab katseliselt näidata güroskoobi abil, mis on kujutatud joon. 127. Toele *A* on šarniiri abil kinnitatud varras *B*, mis võib pöörelda nii vertikaal- kui ka horisontaaltasapinnas. Vardal *B* on ühel pool liigutatav raskus *C* ja teisel — rõngas, millesse on paigutatud pöörlev ketas *D*. Kui raskus *C* tasakaalustab ketta, siis säilitavad seadise osad nendele antud asetuse, kuigi ketas pöörleks. Kui raskus on ülekaalus ja püüab pöörata süsteemi vertikaaltasapinnas allapoole teatava jõuga *F*, siis hakkab süsteem pöörlema horisontaaltasapinnas noolega näidatud suunas (kooskõlas eespooltoodud reegliga).

Güroskoobi leiutas Foucault 1852. a. Foucault püüdis güroskoopi kasutada Maa pöörlemise tõestamiseks. Pikka aega

[1] Esimesel juhul tuleb sunnitud pöörlemise teljeks lugeda jõupaariga *FF* risti olevat sihti, teisel juhul lisakiirustega *vv* risti olevat sihti. Pöörlemistelje positiivseks suunaks on see suund, kuhu on tarvis vaadata selleks, et näha pöörlemist kellaosuti liikumise suunas toimuvana (harilik parema käe puur pöördub sisse pöörlemistelje positiivses suunas).

vaadati güroskoobile kui lõbusale mänguasjale, kuid XX saj. tehti kindlaks palju kasulikke güroskoobi rakendusi teaduses ja tehnikas. Aubry (1898. a.) võttis ta põhiliseks osaks *miinide liikumise reguleerimise seadises.* Miini tagumises osas asetsev kardaanrippes güroskoop pannakse tulistamisel kiiresti pöörlema (kuni 10 000 tiiru/min). Güroskoobi telg on horisontaalne; jäädes püsivaks, säilitab ta tulistamise suuna ja mõjub rooliseadmele, mis hoiab ära liikumise suunast kõrvalekaldumise.

Güroskoobi tähtsaks rakenduseks on *güroskoopilised stabilisaatorid,* mille ülesandeks on ebapüsivate süsteemide viimine püsiva tasakaalu olekusse või juba olemasoleva tasakaalu parandamine. 1905. a. tegi Schlick ettepaneku kasutada güroskoopi laevade õõtsumise vaigistamiseks. Sellised güroskoopilised stabilisaatorid laevade jaoks konstrueeris Sperry; neid seatakse üles ookeaniaurikutele. Konstrueeriti samuti stabilisaatorid üheröõpaliste raudteede jaoks; üheröõpalise tee vagunisse paigutatud massiivne kiiresti pöörlev güroskoop takistab vaguni ümberpaiskumist. Rootorid güroskoopiliste stabilisaatorite jaoks valmistatakse kaaluga 1 kuni 100 ja enam tonni.

Anschütz konstrueeris *güroskoopilise kompassi* (gürokompass), mis on laialdaselt levinud, eriti sõjalaevastikus. Anschützi gürokompass kujutab endast kiiresti pöörlevat vurri (kolmefaasilise voolu mootor, mis teeb kuni 25 000 tiiru/min), mis erilisel ujukil ujub elavhõbeda nõus ja mille telg on paigutatud meridiaantasapinda. Antud juhul on välise pöördemomendi allikaks Maa ööpäevane pöörlemine ümber oma telje. Selle toimel püüab güroskoobi pöörlemistelje siht ühtida Maa pöörlemistelje sihiga ja kuna Maa pöörlemine mõjub güroskoobile pidevalt, siis güroskoobi telg võtabki lõpuks selle asendi, s. o. asetubki piki meridiaani ja jääb sellesse püsima täpselt samuti nagu harilik magnetnõel.

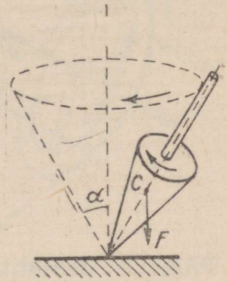
Hoolimata reast konstruktsiooni raskustest takistuste kõrvaldamisel, mis on tingitud laeva kõikumisest, asendavad gürokompassid edukalt magnetkompasse, mille näidud moonduvad tugevasti laeva raudosade ja laeva elektriseadmete mõjul.

Güroskoobi põhimõttel on ehitatud seadised, mis näitavad koha geograafilist laiust, ja ka seadised, mis võimaldavad kindlaks määrata horisontaaltasapinna asendit — *kunstlik horisont.* Güroskoopilisel kunstlikul horisondil on eriti suur tähtsus lennuki lendudel öisel ajal või udus.

Güroskoobi teooria töötasid ammendava matemaatilise täiuslikkusega ja täpsusega välja vene õpetlane A. Domogarov (1883. a.) ja saksa matemaatikud Felix Klein ning Sommerfeld (aastatel 1897—1910). Güroskoobi teooria põhjalik ja range esitus koos güroskoobi mitmesuguste tehniliste rakenduste arvutusliku põhjendamise läbitöötamisega on antud akad. Aleksei

Nikolajevitš K r õ l o v i poolt töös „Güroskoopide ja nende mõnede tehniliste rakenduste üldine teooria" (1931. a.).

Vaatleme veel vurri liikumist, mis on kujutatud joonistel 128 ja 129. Raskusjõu toimel langeb ta väga aeglaselt, kuid raskusjõu pöördemomendi tõttu kirjeldab ta telg ringkoonuse pinna. Vurri telje liikumist nimetatakse *pretsessiooniks* ja telje poolt kirjeldatavat koonust — *pretsessioonikoonuseks.* Mõlemad liikumised — vurri pöörlemine ümber sümmeetriatelje ja selle telje pretsessiooniliikumine — toimuvad ühes ja samas suunas. Vurri liikumise iseloomus pole raske orienteeruda, kui kasutada eespooltuletatud reeglit. Tõepoolest on sunnitud pöörlemise telg hetkel, mis on kujutatud joonisel 128, suunatud risti joonisega meist eemale. Vurri pöörlemistelg püüab saada temaga paralleelseks, aga kuna telje alumine ots on liikumatu, siis liigub ülemine ots risti joonisega, suunaga meie poole.



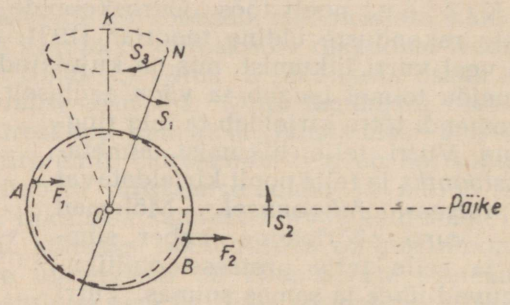
Joon. 128. Vurri liikumiste skeem.

Kui pretsessiooninurk α säilitab ühe ja sama väärtuse, siis nimetatakse pretsessiooni *täpseks.* Tavaliselt aga kaasnevad telje ülalkirjeldatud liikumisega pretsessiooninurga väikesed perioodilised muutused; seda liikumist nimetatakse *nutatsiooniks.*

Huvitavat pretsessiooniliikumise juhtu kujutab endast Maa telje liikumine. Kuna Maa ei kujuta endast kera, vaid ellipsoidile lähedast kujundit, siis annab Päikese külgetõmme resultandi, mis ei läbi Maa masskeset (nagu oleks kera juhul). Tõepoolest, osale *B* (joon. 130) mõjub nende suurema läheduse tõttu Päikesele tugevam külgetõmme kui osale *A,* ja seetõttu ei läbi F_1 ja F_2 resultant masskeset (punkti *O*) ning annab selle suhtes pöördemomendi, mis püüab Maad pöörata noolega S_2 näidatud suunas. Kui Maa ei pöörleks, langeks Maa telg *ON* paratamatult ühte sihiga *OK* (ristsirge Maa orbiidi tasapinnale), ja sel juhul läbiks jõudude F_1 ja F_2 resultant punkti *O.* Maa pöörlemise tagajärjel kirjeldab tema telg aga pretsessioonikoonuse noolega S_3 näidatud suunas, mida on ülalosutatud reeglit kasutades kerge kindlaks teha.


Joon. 129. Kaldasendis pöörlev vurr ei kuku maha; tema telg kirjeldab koonuse.

Maa telje pretsessiooni liikumine toimub väga aeglaselt — täiskoonuse kirjeldab ta umbes 25 800 aasta jooksul. Päikesega analoogiliselt mõjub ka Kuu, ja tema läheduse tõttu Maale on tema osatähtsus pretsessioonis isegi tunduvalt suurem



Joon. 130. Maa telje pretsessioon.

Päikese osatähtsusest. Kuna Päikese ja Kuu pretsessioonijõud muudavad alaliselt oma suurust, siis osutub pretsessiooninähtus väga keeruliseks.

§ 45. Coriolis'e inertsjõudude avaldumine.

Kõvade kehade pöörleval liikumisel avalduvad *kesktõuke-inertsjõud* ja mõnedel juhtudel niinimetatud *Coriolis'e inertsjõud.*

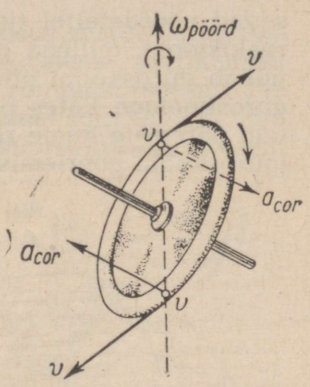
Rida kesktõuke inertsjõu avaldumise näiteid on meie poolt juba käsitletud paragrahvis 20.

Igasugune inertsjõud kujutab endast keha reaktsiooni, mis on rakendatud seostele ja mis tekib siis, kui kehale antakse seoste olemasolu tõttu mingi kiirendus. Erijuhul, kui kehale antakse Coriolis'e kiirendus (mille tekkimist vaatlesime paragrahvis 7), siis arendab keha *Coriolis'e inertsjõudu,* mis on võrdne keha massi ja Coriolis'e kiirenduse korrutisega, ja mis on vastassuunaline Coriolis'e kiirendusega ning on rakendatud seostele.

Güroskoopiline efekt, s. o. takistus, mida avaldab güroskoop, kui me pöörame ta pöörlemistelge, ei ole midagi muud kui güroskoobi poolt arendatava Coriolis'e inertsjõu avaldus. Selleks et veenduda güroskoopiliste jõudude ja Coriolis'e inertsjõudude samasuses, vaatleme veel kord uuelt seisukohalt põhjusi, mis tekitavad güroskoopilist efekti.

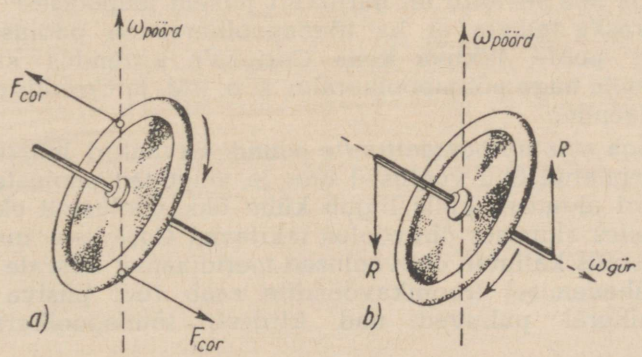
Oletame, et vaatleja hoiab kätes kiiresti pöörleva güroskoobi telge (telje laagreid) ja muudab pöördudes güroskoobi telje asendit ruumis, muutmata keha ja käte asendit güroskoobi suhtes. Võtame koordinaadistiku, mis on seotud mainitud vaatlejaga. Astronoomilise inertsiaalse koordinaadistiku suhtes on osutatud koordinaadistik liikuv; ülekantavaks liikumiseks on antud juhul vaatleja pööre. Oletame, et vaatleja pöördub nurkkiirusega ω. Joonisel 131 on telg, mille ümber pöörduvad üheskoos güroskoop,

vaatleja ja liikuv orienteerumissüsteem, kujutatud punktiirnoolega ja märgitud sümboliga $\omega_{pöörd.}$. Güroskoobi pöörlemise nurkkiirust ümber oma telje tähistame tähega ω', ja güroskoobi mingi osakese joonkiirust tähega $v = \omega' r$ (kus r on osakese kaugus güroskoobi teljest). On selge, et v tähendab antud juhul relatiivse liikumise kiirust (esimeses peatükis me tähistasime seda relatiivse liikumise kiirust tähega w). Vastavalt paragrahvis 10 öeldule on Coriolis'e kiirendus suunatud risti liikuva orienteerumissüsteemi pöördeteljega ja risti relatiivse kiirusega, kusjuures Coriolis'e kiirendus on suunatud sinnapoole, kuhu on tarvis vaadata selleks, et nihkumine pöördeteljest relatiivse kiiruse vektori poole paistaks kellaosuti liikumise suunas toimuvana. Järelikult on pöördeteljel asetsevatele osakestele mõjuv Coriolis'e kiirendus a_{cor} suunatud nii, nagu on näidatud joonisel 131.



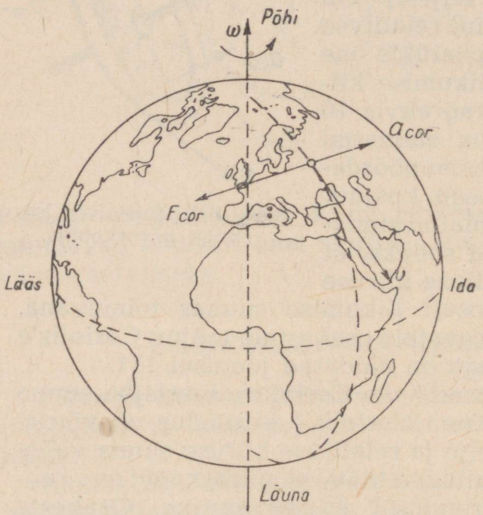
Joon. 131. Coriolis'e kiirendus güroskoobis.

Osutatud osakeste poolt arendatava Coriolis'e inertsjõu suund on näidatud joonisel 132, *a*. Kuna Coriolis'e kiirendus on võrdeline liikuva süsteemi pöördetelje ja relatiivse kiiruse suuna vahelise nurga siinusega, siis on silmanähtav, et güroskoobi eri osakeste jaoks on Coriolis'e kiirendusel erinev suurus. Osakeste jaoks, mille joonkiirus on antud hetkel paralleelne pöördeteljega, on a_{cor} null. Kui pidada silmas güroskoobi sümmeetriat, siis pole raske taibata, et güroskoobi kõigi osakeste poolt arendatavad summaarsed Coriolis'e inertsjõud annavad jõupaari, mis on orienteeritud niisamuti, nagu inertsjõud osakeste jaoks, mis aset-



Joon. 132. Coriolis'e jõud (*a*) ja reaktsioonijõud (*b*) güroskoobis.

sevad pöördeteljel (joon. 132, *a*). See jõupaar kujutabki endast reaktsiooni, millega güroskoobi telg mõjub vaatleja kätele, kes püüab güroskoopi pöörata (joon. 132, *b*); kui vaatleja pöördub güroskoobiga kätes paremalt vasakule, siis avaldab güroskoobi telg paremale käele rõhumist ülespoole ja vasakule — allapoole (güroskoobi pöörlemistelg püüab ühtida pöördeteljega).



Joon. 133. Coriolis'e jõud liikumisel mööda Maa pinda.

Maa ööpäevase pöörlemise tõttu avalduvad Coriolis'e inertsjõud liikumisel mööda Maa pinda. Maa ööpäevast pöörlemist, mis toimub läänest itta, võib kujutada nurkkiiruse vektoriga, mis on suunatud piki Maa telge lõunapooluselt põhjapooluse poole. Kui mingi keha liigub põhjapoolkeral piki meridiaani pooluse poolt ekvaatori poole, siis on selle keha Coriolis'e kiirendus suunatud Maa pinna puutujat mööda itta, ja järelikult on selle keha poolt arendatav Coriolis'e inertsjõud suunatud läände (joon. 133). Pooluse poolt ekvaatori poole voolava jõe poolt arendatav Coriolis'e inertsjõud on rakendatud jõe läänepoolsele kaldale, mis aja jooksul uhutakse õõnsaks ja mis seetõttu on harilikult järsem idapoolsest kaldast.

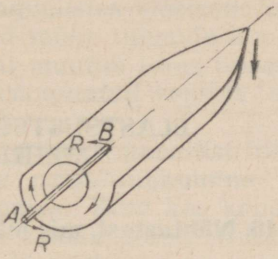
Pole raske taibata, et ka lõunapoolkeral on pooluse poolt ekvaatori poole liikuva keha Coriolis'e kiirendus suunatud samale poole nagu põhjapoolkeralgi, s. o. itta, ja Coriolis'e inertsjõud — läände.

Üelduga seletub *passaattuulte* suund. Ekvaatori juures tõusevad soojendatud õhu voolused üles ja valguvad pooluste poole. Atmosfääri alumises kihis liigub külm õhk poolustelt ekvaatori poole. Selles alumises õhuvoolus tekitavad Coriolis'e inertsjõud rõhumise, mis kallutab õhuvoolused meridiaanist kõrvale läände, nii et lähenemisel troopikavööndile saab tuul püsiva suuna: põhjapoolkeral puhuvad nad kirdest, lõunapoolkeral aga kagust.

Coriolis'e inertsjõud ja güroskoopilised jõud mängivad teatavat osa tehnika kõigil aladel, kus esinevad kiiresti pöörlevad

kettad, rattad, hoorattad jne. Raudteeasjanduses avaldavad güroskoopilised jõud tee kurvidel, suurendades rataste vertikaalset rõhumist välisele rööpale ja vähendades rõhumist seesmisele. Jalgratta liikumisel on güroskoopilistel jõududel suur tähtsus, nad on siin kasulikud, ja nimelt: pöörlevate rataste reaktiivne moment soodustab jalgratta stabiilsust.

Laevadel ülesseatud jõumasinad võivad tekitada suuri reaktiivseid momente nii laeva õõtsumise kui ka kursi muutmise juures. Joon. 134 on kujutatud laeva lõige, mille piki keret on paigutatud turbiin *AB*. Kiilõõtsumisel muudab turbiini telg oma asendit. Selle tagajärjel võivad telje rõhumised laagritele saavutada suuri väärtusi. Joon. 134 on kujutatud juht, kus laeva nina laskub alla. Tema tõusmisel on rõhumised suunatud vastupidiselt. Taolisi nähtusi me paneme tähele ka lennuki lennul, kusjuures güroskoobi osa mängivad siin propeller ja mootor. Kui propeller pöörleb kellaosuti liikumise suunas (lenduri poolt vaadatuna), siis lennuki pöördel paremale me saame reaktiivse momendi, mis kallutab lennuki eespoolse osa alla, aga pöördel vasakule — üles. Märgime, et lennukõrguse muutmisel pöördub lennuk vastavalt ümber vertikaalse telje.



Joon. 134. Piki laeva keret ülesseatud turbiin *AB* arendab õõtsumisel kasulikke güroskoopilisi jõude.

VIII PEATUKK.

ELASTSUSTEOORIA ELEMENDID JA KEHADE MEHHAANILISED OMADUSED.

§ 46. Nähtustest, mis määravad tahkete kehade elastsed omadused.

Looduses pole muutmatuid, absoluutselt kõvu kehi, millest lihtsuse tõttu räägitakse teoreetilises mehhaanikas. Iga keha *deformeerub* suuremal või vähemal määral jõudude toimel, mis tasakaalustuvad tema masskeskme ümber.

Deformatsiooniks nimetatakse keha osakeste nihkumist üksteise suhtes ja samuti keha osakeste vahelise keskmise kauguse muutumist. Selleks et otsustada deformatsiooni üle, jaotatakse tahke keha mõttes üksikuteks „kiududeks" või „kihtideks". Mõnikord joonistatakse deformatsiooni vaatlemiseks keha pinnale võrk ja avastatakse deformeerumine nende muutuste järgi, mille osaliseks saab samal ajal see keha pinnale joonestatud võrk.

Tähtsaimateks deformatsioonideks on: *igasuunaline surve ja igasuunaline tõmme; pikisurve ja pikitõmme; nihe; vääne; risti- ja pikipaine.* Kõiki neid deformatsioone, samuti kui mistahes teisigi, saab taandada kõigest *kahele põhideformatsioonile — pikitõmbele* ja *survele,* mis samaaegselt toimub mitmes suunas. Nagu näeme allpool, taandub paine varda kumera pinna kiudude tõmbele ja nõgusa pinna kiudude survele. Nihe taandub samaaegselt survele ja tõmbele kahes vastastikku risti olevas suunas.

Kui deformatsioon kaob pärast välisjõudude eemaldamist, siis nimetatakse keha *elastseks;* kui aga järele jääb märgatav „jääkdeformatsioon", nimetatakse keha *plastiliseks.* Elastsuse astet mõõdetakse deformeerivate jõudude järkjärgulise kadumise juures keha poolt teha võidava töö ja keha deformeerimiseks kulutatud töö suhtega.

Elastsuse all sõna laiemas tähenduses mõistetakse üldist kehadele omast tungi taastada välisjõudude poolt ajutiselt muudetud ruumala või ajutiselt kaotatud kuju. Eristatakse ruumelastsust ja kujuelastsust. *Ruumelastsus* on kõigi kehade universaalseks omaduseks, kaasa arvatud ka vedelikud ja gaasid, kuigi gaasid just selle poolest erinevadki vedelikest, et nende ruumelastsus on

ühekülgne; nad avaldavad vastumõju survele, kuid ei takista paisumist. *Kujuelastsus* on omane paljudele tahketele kehadele. Keha on plastiline, kui tema kujuelastsus avaldub nõrgalt.

Üks ja sama keha võib olla elastne või siis plastiline, sõltuvalt välistingimustest — temperatuurist ja rõhust. Sellised kehad, nagu teras, kummi, puit, on tavalistes tingimustes elastsed. Seatina, toorsavi ja vaha on plastilised. Kuid mõne tuhande atmosfäärilise rõhu all või kõrgel temperatuuril muutub teras niisama plastiliseks kui seatina; vedelas õhus külmutatud seatina aga omandab kõik elastse materjali omadused.

Kas võib elastsusnähtusi vaadelda kui puhtmehhaanilist liikumisvormi? Keha materiaalsete osakeste paigaltnihkumine on muidugi kõige olulisem keha deformeerumisel. Kuid kas kehade elastseid omadusi määravad nähtused on ammendatud osakeste mehhaanilise nihkumisega? Ei, *elastsus kujutab endast mitmesuguste nähtuste keerulist ühendust,* milledest mõnda ei saa kuidagi taandada mehhaanilisele liikumisvormile. Gaaside elastsuse põhjustab tervenisti gaasi molekulide soojusliikumine. Tahketes kehades on deformatsiooni juures tekkinud jõududel, mis püüavad keha paigaltnihutatud osakesi tagasi viia nende tasakaaluasenditesse, elektriline päritolu. Molekulaarjõud, millel on elektriline loomus, mõjuvad märgatavalt kokkusurutud gaaside elastsusele. Ühes sellega avaldab soojusliikumine otsustavat mõju tahkete kehade elastsusele. Seega on kehade elastsed omadused määratud mehhaaniliste, elektri- ja soojusnähtuste vastastikuse seosega.

Nähtuste teoreetilisel uurimisel tuleb neid tahtmatult mõttes lihtsustada. Õiget lihtsustamist peab aga teostama selliselt, et ei rikutaks nähtuste vastastikust põhiseost, nagu on selgitatud paragrahvis 1.

Oma loomult keeruliste elastsusnähtuste uurimisel kasutatakse kõige sagedamini lihtsaimat skeemi, mida tõi teadusse H o o k e ligi kolmsada aastat tagasi. Hooke'i järgi käsitatakse elastsust kui deformatsiooni ja pinge vahelist seost. Seejuures minnakse mööda kehade molekulaarsest ehitusest ja elastsusjõudude loomusest, soojusliikumise mõjust jne.

See elastsuse lihtsustatud käsitus ja *Hooke'i seadus,* mis teeb kindlaks, et väikesed deformatsioonid on võrdelised pingega, on võetud *matemaatilise elastsusteooria* aluseks. Selle lihtsustatud skeemi igakülgsele arendamisele on pühendatud erakordselt suur arv uurimusi. Matemaatiline elastsusteooria on määratu suure hulga inseneriarvutuste aluseks. Selle teooria rakendamine tehniliste probleemide juures põhjustas materjalide tugevusõpetuse, masinates ning ehitistes tekkivate vibratsioonide õpetuse ja teiste distsipliinide arenemise. Matemaatilisele elastsusteooriale on rajatud hääleõpetus. Peale selle etendasid matemaatilise elastsusteoo-

ria mõisted ja teoreemid ajalooliselt suurt osa optika ja elektriõpetuse väljatöötamisel.

Kuidas seletada äärmiselt lihtsustatud skeemile ülesehitatud teooria sellist edu? Kas ei seletu see mitte Hooke'i seaduse erilise täpsusega või tema rakendatavuse laiade piiridega? Ei, vastupidi, deformatsioonide suurus, mille jaoks Hooke'i seadus on õige, on üsna väike. Suurte deformatsioonide juures on see seadus täiesti rakendamatu.

Kahtlemata seletub matemaatilise elastsusteooria suur menu sellega, et Hooke'i seadus toob nähtavale, kuigi kitsastes piirides, aga täiesti õigesti, antud piirkonna jaoks põhilise universaalse seose elastse deformatsiooni ja elastse pinge vahel.

Seda pinge ja elastsuse seost iseloomustatakse *elastsusmoodulitega* — igasuunalise elastsuse, tõmbe- ja nihkeelastsuse moodulitega. Elastsusmoodulite suurust määravate nähtuste tundmaõppimiseks on tarvis pöörduda tahkete kehade selle, juba üksikasjalisema, elastsuse pildi juurde, mida annab meile kristallofüüsika.

Kristallofüüsikas tõlgendatakse elastsusnähtusi kristallvõre sõlmedesse paigutatud osakeste *vastastikuste elektriliste mõjustuste* tulemusena (§§ 118 ja 124). Kristallides olevate osakeste elektrilise vastastikuse mõju seaduste rakendamine võimaldas arvutada elastsusjõude ja nähtavale tuua nende sõltuvuse kristalli ehitusest ja osakeste elektropolaarsetest omadustest.

Kristalli osakesi siduvate jõudude elektriline teooria viis elastsusnähtuste mõistmist oluliselt edasi. See teooria osutus viljakaks. Ta avas tahkete kehade elastsuse ja kristalle tekitavate protsesside vahelise seose. See omakorda aga viis, sedavõrd kui arenes teoreetiline kristallokeemia (§ 119) mehhaaniliste omaduste sõltuvuse avastamisele kehade keemilisest ehitusest.

Siiski ei ole pilt osakeste rangelt korrapärasest paigutusest ruumis kristallvõre sõlmedesse ja nende elektrilisest vastastikusest mõjust veel täielik. Loomulikult oli tarvis arvestada osakeste soojusliikumise mõju. Sellel baasil arenes tahkete kehade *termodünaamiline elastsusteooria.*

Mainitud teooriate kõrvutamine katsetega näitas, et elastsusnähtused on tegelikkuses veel keerulisemad, ja nimelt ilmnes, et kehade mehhaanilised omadused sõltuvad suurel määral kehade *mosaiiksest struktuurist,* s. o. sellest ehitusest, mis kujuneb, kui korrapärase kristallvõre asemel tema sügavate kahjustuste tagajärjel tekib tihedalt paigutatud ja mitmesuguselt orienteeritud mikroskoopiliste kristallikeste ühendus. Tõestati, et kristalli mehhaanilised omadused sõltuvad suurel määral nendest mitteelastsetest (plastilistest, mittepööratavatest) deformatsioonidest, mille osaliseks kristall sai kunagi *varem.*

Seega selgus, et kehade elastsed omadused on määratud keha kristallilise ehitusega, osakeste seosjõududega kristallis, soojusliikumise olekuga, kristalli varasemate plastiliste deformatsioonide juures toimunud seesmise tükeldumise nähtustega jne.

Elastse deformatsiooni nähtustes, mis on peaaegu niisama levinenud looduses ja tehnikas kui mehhaaniline liikumine ja soojusnähtused, paneme ühelt poolt tähele deformatsiooni ennast, keha kohaldumist välismõjuga, keha j ä r e l e a n d l i k k u s t, mis on seotud tema osakeste enam või vähem kerge nihutatavusega. Teiselt poolt tulevad vastandina järeleandlikkusele esile keha poolt arendatavad elastse *vastupanu* jõud teostatava deformeerimise vastu. Nende vastandite kooseksisteerimises, nende ühtsuses peitubki elastsuse olemus.

Keha deformeerimise juures liikumahakanud osakeste inertsi tõttu tekivad kahe vastandliku tendentsi — järeleandlikkuse ja vastupanu — kokkupõrkumisest *elastsed võnkumised.* Need on mitmesugused (tõmbe- ja survevõnkumised, läbipainde võnkumised, torsioonvõnkumised jms.).

Mehhaanilised võnkumised, mis põhjustavad keskkonna perioodilisi tihenemisi ja nihkumisi, tekitavad keskkonnas elastsete võnkumiste lainete levimise. Õhus avalduvad vahelduvate tihenemiste ja hõrenemiste iseloomuga elastsed võnkumised häälena ja suurte sageduste juures — ultrahäälena. Õhu äkiliste suurte tihenemiste juures muutub pilt kvalitatiivselt: õhk annab edasi löökhäirituse, mis levib hääle kiirusest tunduvalt suurema kiirusega.

Tahketes kehades on elastsete võnkumiste levimise pilt keerulisem kui gaasides. Häälenähtused ei ole siin seotud ainult tiheduslainetega, vaid ka nihkelainetega.

Elastsete võnkumiste kustumine keskkonna sisehõõrde tõttu muundab deformatsiooni energia molekulaarse soojusliikumise energiaks. Protsessid, milles kulutatakse tööd deformeerimisele ja hõõrdele, peamiselt muundavadki mehhaanilise liikumise molekulaarseks soojusliikumiseks.

§ 47. Hooke'i seadus. Rõhu ja pinge mõõdud. Deformeeritud keha energia.

Deformatsiooni suurust hinnatakse keha mõõtme muutuse Δx ja tema esialgse mõõtme x suhtega ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}.$$

Seda nimeta arvu ε, mis näitab, missuguse osa võrra suurenesid või vähenesid keha mõõtmed, nimetatakse *suhteliseks (relatiivseks) deformatsiooniks.*

Igasuunalise tõmbe või surve juures tähendab x ruumala V ja Δx deformatsiooni poolt tekitatud ruumala suurenemist või vähenemist ΔV, ($\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$). Pikitõmbe või -surve puhul tähendab x pikkust l. Nihke puhul hinnatakse deformatsiooni nihkenurgaga Θ (vt. joon. 138, lk. 232).

Kui lõigata elastselt deformeeritud keha mõttes kaheks osaks, siis üks nendest osadest mõjub teisele teatavate jõududega, mis on jaotatud kogu lõikele. Neid jõude nimetatakse *sise-elastsusjõududeks.* Deformeeritud kehale mõjuvad välisjõud tasakaalustuvad sise-elastsusjõududega. Elastsusjõudude suurus ja suund sõltuvad deformatsiooni liigist. Keha paneb välismõjudele vastu nii kaua, kuni sisejõudude intensiivsus ei ületa teatud piiri, mille järel keha kas kaotab oma elastsed omadused või puruneb.

Elastsusjõudude intensiivsust iseloomustatakse jõu suurusega, mis mõjub lõike pindala ühikule, mis on võetud mõjuvate jõududega risti (normaalselt) või tangentsiaalselt. Neid suurusi nimetatakse deformeeritud keha *normaal-* ja *tangentsiaalpingeks.* Selleks et leida pinget p ühtlasel pingsuste jaotusel, on tarvis jagada jõud F ristlõike pindalaga S, millele see jõud on jaotatud:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{1}$$

Inglise füüsik Robert Hooke avastas juba 1675. a., et *deformeeritud keha pinge on võrdeline suhtelise deformatsiooniga:*

$$p = K\frac{\Delta x}{x}. \tag{2}$$

Kordajat K nimetatakse *elastsusmooduliks.*

Hooke'i seadus on õige ainult teatud piirides. Teatava pinge juures kaob pinge ja deformatsiooni vaheline võrdelisus. Seda pinget nimetatakse *proportsionaalsuse piiriks* (P_p).

Veidi suurema pinge juures, mida nimetatakse *elastsusepiiriks* (P_r), kaotab keha oma elastsed omadused; välisjõudude kõrvaldamisel ei taastu keha kuju täielikult; järele jääb niinimetatud *jääkdeformatsioon.*

Kui pinge muutub suuremaks teatavast väärtusest, mida nimetatakse *voolavuse piiriks* (P_s), jätkab deformatsioon kasvamist ilma koormise suurendamiseta.

Pinget, mille juures saabub materjali katkemine *(R),* nimetatakse *tugevuse piiriks* ehk *katkemistugevuseks.*

Kui kõik keha füüsikalised omadused, eriti elastsed omadused, on keha igas piirkonnas ühesugused kõigis suundades, siis nimetatakse keha *isotroopseks.* Klaasitaolised tahked kehad on harilikult isotroopsed. Kristallide juures on mõned füüsikalised omadused, eriti elastsus, erinevates suundades erinevad. Niisuguseid kehi nimetatakse *anisotroopseteks.*

Selleks et hinnata kehale mingi jõu poolt tekitatud deformatsiooni, ei ole tarvis teada ainult jõu suurust, vaid ka pinna suurust, millele see jõud on jaotatud. Jõudu, mis mõjub pindalaühikule, nimetatakse üldjuhul *pingeks;* kui aga jõud on suunatud pinnaga risti, siis sel juhul nimetatakse pindalaühikule mõjuvat jõudu *rõhuks.*

Rõhumine nagu iga muu jõudki võib tekkida ainult kahe keha vastastikuse mõju tulemusena. Näiteks on nõu seinte rõhumine vedelikule suuruse poolest võrdne ja suuna poolest vastupidine rõhumisega, mida vedelik avaldab nõu seintele. Vedeliku molekulid on kergesti liikuvad, seepärast ei saa paigalseisvas vedelikus tekkida jõudu, mis on suunatud tangentsiaalselt vedelikku asetatud keha pinnaga või nõu seinte pinnaga. Jõud, millega vedelik mõjub temaga kokkupuutuvale pinnale, on alati suunatud risti kokkupuutepinnaga.

Rõhumine on vahel ühtlaselt jaotatud pinnale. Sel juhul piisab rõhu arvutamiseks sellest, kui jagada antud pinnale mõjuv kogujõud F selle pinna pindala suurusega S.

Kui jõud on jaotatud keha pinnale ebaühtlaselt, siis võetakse kas keskmine rõhk sellele pinnale või näidatakse rõhk pinna erinevates punktides. Kui räägitakse rõhust või pingest mingis punktis, siis mõistetakse „punkti" all tingimisi pinna elementaarselt väikest piirkonda dS. Sellisel viisil valitud pinna piirkonna ülima väiksuse tõttu võib lugeda, et sellele piirkonnale mõjuv jõud dF on jaotatud piirkonnas dS pindalale ühtlaselt. Seepärast mõistetakse rõhu ja pinge all pinna punktis suhet

$$p = \frac{dF}{dS}.$$

Rõhu mõõtmiseks tarvitatakse mitmesuguseid ühikuid[1]. *GGS*-süsteemis on jõuühikuks 1 düün ja pindalaühikuks — 1 cm^2; seepärast on rõhuühikuks 1 *düün/cm²* — niinimetatud *baar*[2].

Tehnikas on rõhuühikuks sagedasti *1 kG/m²*.

Rõhuühikutena kasutatakse ka füüsikalist ja tehnilist atmosfääri. *Füüsikaline (normaal-) atmosfäär* on niisugune rõhk, mida tekitab oma kaaluga elavhõbedasammas kõrgusega 760 *mm*. Pole raske arvutada[3], et füüsikaline atmosfäär $\approx 76 \cdot 13{,}6 = 1033$ *G/cm²* $= 1{,}033$ *kG/cm²*. *Tehniliseks atmosfääriks* nimetatakse rõhku 1 *kG* 1 *cm²* kohta.

Välisjõudude töö muundub keha elastsel deformeerimisel deformeeritud keha potentsiaalseks energiaks.

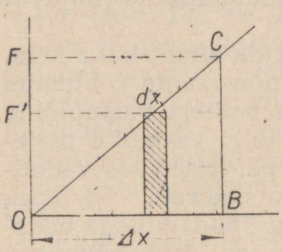
---

[1] Rõhu dimensioon: $[p] = [F/S] = ML/T^2L^2 = MT^{-2}L^{-1}$.

[2] Kreeka k. *báros* — raskus.

[3] Normaalatmosfäär on 76 *cm* kõrguse vertikaalse elavhõbedasamba rõhk tihedusel 13,5951 *g/cm³* (0° C juures) ja raskuskiirendusel 980,665 *cm/sek²* (laius 45°, merepinnal).

Deformatsiooni sõltuvust mõjuvast jõust kujutatakse Hooke'i seaduse rakendatavuse piirides graafiliselt sirgjoonega (joon. 135). Anname deformatsioonile elementaarselt väikese juurdekasvu dx; selleks on tarvis kulutada töö $F'dx$. Joon. 135 kujutab seda tööd viirutatud vertikaalriba pindala. Minnes järjestikku üle ühelt olekult lõpmata lähedasele olekule, saame arvutada kogu töö U, mis on tehtud deformeeriva välisjõu poolt tema muutumisel nullist suuruseni F. See töö, mis on kujutatud joonisel 135 kolmnurga OBC pindalana, avaldub järgmiselt:



Joon. 135. Deformeerimisel tehtud töö graafik.

$$U = \frac{F\Delta x}{2},$$

kus F on deformeeriv jõud ja Δx — selle poolt tekitatud mistahes liiki deformatsioon. Seda valemit kasutades on kerge arvutada potentsiaalse energia suurust iga deformatsiooni juhu jaoks.

Arvestades, et Hooke'i seaduse järgi on deformeeriv jõud F seotud elastsusmooduliga K võrduse $F = K\frac{\Delta x}{x}S$ kaudu, saame:

$$U = K\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 \cdot \frac{Sx}{2} \cdot \tag{3}$$

§ 48. Kompressioonimoodul. Kokkusurutavus.

Igasuunalisele survele või tõmbele allub keha sel juhul, kui keha pinnale on kõikidest suundadest rakendatud jõud ühe ja sama pingega p. Samasugune pinge mõjub ka igale pinnale, mis on mõtteliselt võetud keha sees. Selle pinge ja keha ruumala suhtelise muutuse absoluutväärtuse jagatist nimetatakse *kokkusurutavuse* ehk *kompressioonimooduliks*[1]:

$$K = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}}. \tag{4}$$

Kui $\frac{\Delta V}{V} = 1$, siis $K = p$. Seega, kui keha elastsed omadused jääksid igasuunalise tõmbe mistahes suuruse juures muutumatuteks, siis võiks igasuunaliselt tõmbav pinge K, mis on võrdne kompressioonimooduliga, suurendada keha ruumala kaks korda. Kõigi kehade jaoks on see pinge mitu korda suurem tugevuse

[1] Ladinakeelsetest *compressio* — kokkusurumine, *modulus* — mõõt.

piirist, seepärast katkeb keha ammu enne seda, kui tema ruumala kasvab kaks korda.

On kerge tõestada, et *ruumala suhteline suurenemine* (või *vähenemine*) $\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$ *on kolm korda suurem keha lineaarsete mõõtmete suhtelisest suurenemisest* (või *vähenemisest*). Saagu kuup, mille serv on l, igasuunalise ruumtõmbedeformatsiooni osaliseks. Kuubi iga serv pikeneb seejuures Δl võrra. Kuubi lõplik ruumala on $(l + \Delta l)^3$, ruumala suhteline suurenemine

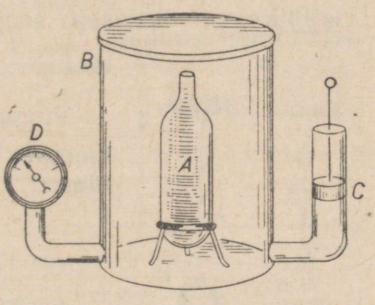
$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(l + \Delta l)^3 - l^3}{l^3} = 3\,\frac{\Delta l}{l} + 3\cdot(\frac{\Delta l}{l})^2 + (\frac{\Delta l}{l})^3.$$

Kaks viimast liiget selle võrrandi paremal poolel võib ära jätta suuruse $\frac{\Delta l}{l}$ väiksuse tõttu, seepärast

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 3\,\frac{\Delta l}{l}\,. \qquad (5)$$

Nagu juba märgiti, on ruumelastsed kõik kehad, nii tahked, vedelad kui ka gaasilised. Vedelike ja gaaside elastseid omadusi iseloomustab täielikult kompressioonimoodul.

Vedeliku molekulid on niivõrd kiires soojusliikumises, et kristallilistele kehadele omane molekulide ruumilise paigutuse korrapära on vedelikes kadunud. Kuid vedeliku tihedus erineb vähe samast ainest tahke keha tihedusest, seepärast *on molekulaarsed vastastikuse mõju jõud vedelikes peaaegu niisama suured kui tahketeski kehades.* Molekulide liikuvuse tõttu avaldab vedelik äärmiselt väikest takistust välismõjudele, mis muudavad tema kuju. Nende jõudude tõttu aga, mis seovad üksteise suhtes liikuvaid molekule, avaldab vedelik hiiglasuurt takistust mõjudele, mis püüavad muuta tema ruumala. Selleks et saada kujutlust sellest, kuivõrd suur on vedelike vastupanu kokkusurumisele, kujutame endale, et silindrisse, mille kõrgus on 1 *m* ja ristlõige 1 cm^2, on kallatud vesi; kui rõhuda kolvile, mis suleb vett ülaltpoolt, jõuga 220 *kG*, siis väheneb veesamba pikkus kõigest 1 *cm* võrra. Vedeliku kokkusurumist põhjustanud jõudude kõrvaldamisel võtab vedeliku ruumala tagasi endise suuruse.



Joon. 136. Seadis vedeliku kokkusurutavuse uurimiseks.

Vedeliku kompressioonimooduli mõõtmist on tarvis läbi viia sellistes tingimustes, et oleks kõrvaldatud selle nõu paisumise võimalus, milles on vedelik. Seepärast paigutatakse proovitav vedelik nõusse *A* (joon. 136), mis lõpeb gradueeritud torukesega;

nõu A on suletud suurde nõusse B, mis on ühendatud õhupumbaga C. Pump surub nõusse B õhku. Viimane rõhub vedelikule nõus A, ja vedeliku ruumala väheneb. Vaadeldes vedeliku nivoo alanemist gradueeritud torus ja märkides rõhku manomeetri D järgi, määratakse vedeliku kompressioonimoodul.

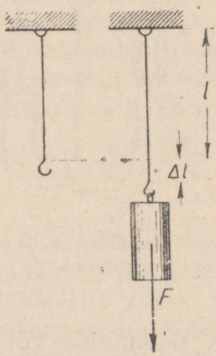
Kompressioonimooduli pöördväärtus (suurus $\frac{1}{K}$) kannab *kokkusurutavuse-* ehk *kompressioonitegur* ehk lihtsalt *kokkusurutavuse* nime.

Arvuliselt sõltub kompressioonitegur (samuti nagu kompressioonimoodulgi) sellest, missugustes ühikutes on mõõdetud rõhk. Kõige sagedamini mõõdetakse rõhku atmosfäärides; siis on kompressioonitegur $\frac{1}{K}$ arv, mis näitab, missuguse osa võrra oma esialgsest väärtusest väheneb keha ruumala rõhu suurenemisel 1 *at* võrra; nimelt see tähendus on allpooltoodavatel *mõnede vedelike kompressioonitegurite* arvulistel väärtustel toatemperatuuri juures:

Bensool	0,000088	Elavhõbe	0,0000039
Broom	0,000058	Väävelsüsinik	0,000089
Vesi	0,000046	Tärpentin	0,000079
Glütseriin	0,000025	Piiritus	0,000110
Petrooleum	0,000077	Toluool	0,000079
Oliiviõli	0,000063	Eeter	0,000183

§ 49. Young'i moodul, Poisson'i tegur, nihkemoodul ja nendevaheline seos.

Pikitõmbel (joon. 137) on tõmbejõud F jaotatud proovikeha ristlõikele S ühtlaselt, seepärast leiame pinge p lihtsa jagamise teel: $p = \frac{F}{S}$.



Joon. 137. Tõmbedeformatsioon.

Pinge p ja suhtelise pikenemise $\frac{\Delta l}{l}$ suhe E kannab *elastsusmooduli* ehk *Young'i mooduli* nime:

$$E = \frac{p}{\frac{\Delta l}{l}}. \tag{6}$$

Asetades siia $p = \frac{F}{S}$, saame:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}. \tag{7}$$

Pikenemine on võrdeline mõjuva jõuga ja proovikeha esialgse pikkusega ning pöördvõrdeline Young'i mooduliga antud materjali jaoks ja proovikeha ristlõike pindalaga.

Kui $\frac{\Delta l}{l} = 1$, siis $E = p = \frac{F}{S}$; järelikult on Young'i mooduliks niisugune koormis, mis mõjudes proovikehale ristlõike pindalaga $S = 1$, suurendaks tema pikkust kaks korda, kui materjali elastsed omadused jääksid seejuures muutumatuteks. Ainult kautšuk võib niisugust koormist välja kannatada. Kõik teised materjalid katkevad ammu enne seda, kui pinge saab võrdseks Young'i mooduliga. Young'i mooduli väärtused mitmesuguste materjalide jaoks on toodud tabelis lk. 242. Ühe ja sama materjali jaoks sõltub E suurus lisanditest ja töötlemisest. Kristallide ja kiuliste ainete juures sõltub E suurus tõmbe suunast.

Kui koormis on põhjustanud prussi pikenemise, võib tähele panna, et teatava ajavahemiku möödumisel kasvab pikenemine iseendast, ilma koormise suurendamiseta, teatava väikese suuruse võrra. Kui koormis on kõrvaldatud, siis võib tähele panna, et deformatsiooni täielikuks kadumiseks on elastsuse piirideski samuti tarvis teatavat ajavahemikku. Seda nähtust nimetatakse *elastsuse järelmõjuks.* Elastsuse järelmõju suurus metallides on tühine nende pingete juures, millega on tegemist tehnikas. Tavaliselt on elastsuse järelmõju seda väiksem, mida homogeensem on materjal.

Lattide tõmbedeformatsiooniga kaasneb nende ristkahanemine. Suhtelise ristkahanemise $\frac{\Delta d}{d}$ ja suhtelise pikenemise $\frac{\Delta l}{l}$ suhet nimetatakse *Poisson'i teguriks* μ (d on lati ristlõike mõõde). Sel kombel on suhteline ristkahanemine võrdne Poisson'i teguriga, mis on korrutatud suhtelise pikenemisega:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta l}{l} . \qquad (8)$$

Teades μ väärtust, saab otsustada prussi ruumala muutumise üle ta venitamisel proportsionaalsuse piirides.

Poisson'i tegur.

Materjal	μ	Materjal	μ
Teras	0,25—0,33	Tsink, valtsitud	0,21
Vask ja pronks	0,31—0,34	Klaas	0,25
Malm	0,23—0,27	Kautšuk	0,47

Nihkeks nimetatakse niisugust deformatsiooni, mille juures keha kõik kihid, mis on paralleelsed antud tasapinnaga, nihkuvad ilma paindumata ja mõõtmete poolest muutumata paralleelselt üksteisega (joon. 138). Lõiku $\Delta x = AA'$ nimetatakse *absoluutseks nihkeks* ja nurka Θ — *nihkenurgaks.* Väikese nihkenurga juures (kui Θ on avaldatud radiaanides)

$$\Theta \approx \tan \Theta = \frac{\Delta x}{x}, \tag{9}$$

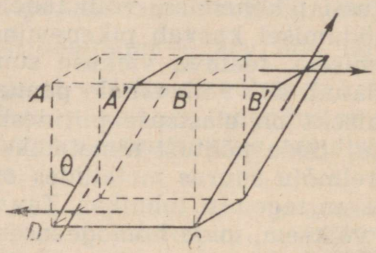
seepärast nimetatakse nurka Θ tihti *suhteliseks nihkeks.*

Harilikult tekitatakse nihe kahe jõupaari poolt, mis on rakendatud deformeeritava keha vastastahkudele, nagu on näidatud joon. 138.

Vastavalt Hooke'i seadusele peab suhteline nihe Θ olema võrdeline tangentsiaalpingega $T = \frac{F}{S}$:

$$T = G\Theta. \tag{10}$$

Kordaja G kannab *nihke-* ehk *torsioonimooduli*[1] nime.



Joon. 138. Nihkedeformatsioon.

Joon. 138 on selgesti näha, et deformeeritava proovikeha kõik kihid, mis on paralleelsed sihiga AC, lühenevad selles sihis, kuid sihiga BD paralleelsed kihid pikenevad BD sihis.

Nihke põhjuseks võib olla samaaegne surve diagonaali AC sihis ja tõmme temaga risti olevas sihis BD.

Saab näidata, et *proovikeha suhteline pikenemine või lühenemine suruvate või tõmbavate jõudude mõju sihis on võrdne poolega suhtelisest nihkest, mis on võetud nende jõududega nurga all 45°.*

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Theta}{2}. \tag{11}$$

Young'i moodul E, Poisson'i tegur μ, kompressioonimoodul K ja nihkemoodul G ei ole sõltumatud. Nad on üksteisega seotud kahe võrrandiga. Tuletame need võrrandid.

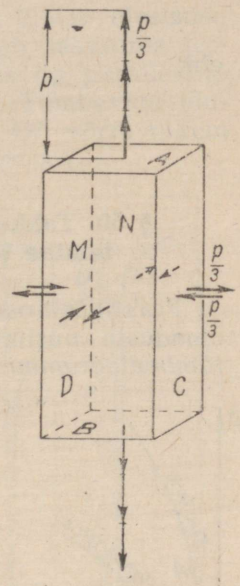
Kujutame endale risttahukakujulist varrast (joon. 139), mida tõmmatakse pikisuunas jõududega, nii et pinge on p. Varda suhteline pikenemine $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$. Varras saab ristkahanemise osaliseks, mis on võrdne Poisson'i teguriga ja suhtelise pikenemise korrutisega: $\frac{\Delta d}{d} = \mu\varepsilon$. Rakendame mõttes varda igale külgtahule kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu nii, et pinged on $\frac{p}{3}$. On selge, et need jõud kui jõud, mis teineteist vastastikku tasakaalustavad, ei tekita mingisuguseid deformatsioone, ja esialgne deformatsioon jääb muutumatuks. Lahutame varrast tõmbava pinge p, mis on rakendatud varda otstele, kolmeks võrdseks pingeks $\frac{p}{3}$, mis

[1] Ladinakeelsest *torsio* — p ö ö r a m i n e. (Tõlk.)

mõjuvad piki ühte sirget. Nüüd võime vardale mõjuvaid jõude rühmitada nii nagu vaja.

Tõmbavad pinged $-\frac{p}{3}$, mis mõjuvad varda kõigile tahkudele, tekitavad igasuunalise ruumtõmbedeformatsiooni $\frac{\Delta V}{V}=\frac{p}{3K}$, mis on ekvivalentne igasuunalise lineaarse suhtelise tõmbega $\frac{p}{9K}$.

Tõmbavad pinged $-\frac{p}{3}$, mis mõjuvad tahkudele A ja B, koos suruvate pingetega, mis mõjuvad tahkudele C ja D, tekitavad nihke $\Theta=\frac{p}{3G}$ (suunas, mis moodustab varda teljega nurga 45°), mis on ekvivalentne kaks korda väiksema pikenemisega varda telje sihis ja samasuguse ristkahanemisega $\frac{p}{6G}$.



Joon. 139.

Ülejäänud tõmbavad pinged, mis mõjuvad varda alustele, koos suruvate pingetega, mis mõjuvad kahele teisele külgtahule N ja M, tekitavad täpselt samuti nihke, mis on ekvivalentne pikenemisega $\frac{p}{6G}$ telje sihis ja samasuguse ristkahanemisega.

Seega on kogu suhteline pikitõmme

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{9K}+\frac{p}{6G}+\frac{p}{6G}=\frac{p}{E},$$

millest

$$\frac{1}{E}=\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}. \tag{12}$$

Suhteline ristkahanemine $\frac{\Delta d}{d}$, mis on risti tahkudega C ja D või M ja N, on

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\mu p}{E}=\frac{p}{6G}-\frac{p}{9K},$$

millest

$$\frac{\mu}{E}=\frac{1}{6G}-\frac{1}{9K}. \tag{13}$$

Võrrandit (12) kasutatakse kompressioonimooduli K arvutamiseks, lähtudes Young'i moodulist E ja nihkemoodulist G, mis on katselisel teel kergesti määratavad.

Liites (12) ja (13), saame võrrandi Poisson'i teguri arvutamiseks:

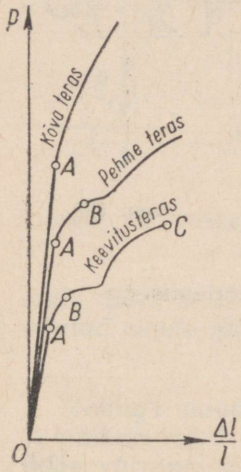
$$\frac{1}{E}(1+\mu)=\frac{1}{2G},$$

ehk

$$\mu=\frac{E}{2G}-1.$$

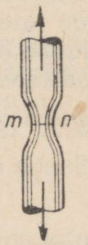
§ 50. Tahke keha mehhaaniliste omaduste iseloomustamine tõmbediagrammi kaudu. Kalestusnähtus.

Praktiliselt osutub kõige kohasemaks tahke keha mehhaaniliste omaduste uurimise viisiks keha proovimine tõmbamisega ja *tõmbediagrammi* konstrueerimine.



Joon. 140. Tõmbediagramm.

Ordinaaditeljele kantakse pinge p (koormis proovikeha ristlõike pindala ühikule) ja abstsissiteljele — suhteline pikenemine. Joonisel 140 on kujutatud tehnikas kõige sagedamini tarvitatavate materjalide — keevitusterase, pehme ja kõva terase — tõmbediagrammid. Kõigil kolmel kõveral on abstsissitelje suhtes järsult tõusev sirgjooneline piirkond, mille piirides materjalid alluvad täielikult Hooke'i seadusele. Punkt A vastab kõigil nendel kõveratel *proportsionaalsuse piirile* P_p, millega praktiliselt langeb ühte *elastsuse piir* P_r (§ 47). Proportsionaalsuse piiri taga hakkavad pikenemised kasvama kiiremini koormistest, ja niinimetatud „kriitilise" punkti (keevitusterase tõmmet kujutaval kõveral on selleks punkt B) ületamisel võib pikenemine kasvada ilma koormise suurendamiseta. Pinget, mis vastab kriitilisele punktile B, nimetatakse *voolavuse piiriks* P_s.

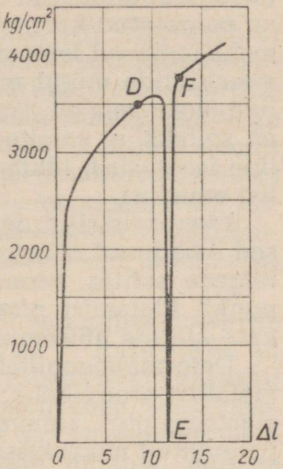


Joon. 141. Kael, mis tekib enne tõmmatava mudeli katkemist.

Edasisel koormamisel omandab materjal uuesti võime vastu panna tõmbele: kõver paindub ülespoole. Koormiste suurendamine jätkub niikaua, kuni prussil tekib kohalik ahenemine — kael mn (joon. 141). Nüüd keskendub deformatsioon ahenemise kohale. Pikenemine jätkub ka väheneva tõmbejõu juures, kuna ristlõike pindala on nüüd tunduvalt vähenenud, ja lõpuks, punktis C, varras katkeb. Katkemise hetkel mõjuvat koormist, mis on jagatud ristlõike e s i a l g s e pindalaga, nimetatakse *tugevuse piiriks* ehk *katketugevuseks* R.

Kui deformeeritud prussi, mille pinge pisut ületab elastsuse piiri, hakata koormisest vabastama, siis kujutab seejuures toimuvat deformatsiooni vähenemist sirgjoon, mis on paralleelne joone *OD* sirgjoonelise piirkonnaga (joon. 142). Tõmbavate jõudude täielikul kõrvaldamisel on pruss suuruse *OE* võrra pikem oma esialgsest pikkusest; *OE* on *jääkdeformatsioon.*

Enne proportsionaalsuse piiri ületamist (kui tõmmet teostatakse „adiabaatiliselt", s. o. ilma soojuse juurdevooluta või äraandmiseta) kaasneb tõmbega väike temperatuuri alanemine. Jääkdeformatsiooni tekkimisega kaasneb järsk temperatuuri tõus.



Joon. 142. Kalestusnähtust selgitav tõmbediagramm.

Paljude tahkete kehade (eriti metallide) tähelepanuväärne omadus seisneb selles, et *tahke keha avaldab korduvatel proovimistel teistsuguseid mehhaanilisi omadusi, mitte aga neid, mida avaldas see keha esimesel proovimisel.* Tahked kehad justkui säilitavad endas kõigi nendele tekitatud mehhaaniliste mõjustuste käigu. Jääkdeformatsioonid (mõnikord väga väikesed, silmaga märkamatud) muudavad oluliselt tahke keha mehhaanilisi omadusi — *tugevdavad* teda.

Väliselt seisab nähtus järgmises. Nagu eespool on öeldud, kui hakata deformeeritud prussi, mille pinge ületas elastsuse piiri, vabastama prussi tõmbavatest jõududest, siis deformatsiooni vähenemist kujutab sirge, mis on paralleelne esimese tõmbe diagrammi sirgjoonelise piirkonnaga (joon. 142). Selle esimese tõmbe käik säilib prussi pikenemises jääkdeformatsiooni suuruse *OE* võrra, mis säilib määramatult kaua koormise täielikul kõrvaldamisel. Kui nüüd korrata prussi mehhaaniliste omaduste proovimist, s. o. hakata teda uuesti tõmbama, ja kujutada graafiliselt pikenemise sõltuvust koormisest, siis osutub, et nüüd saavutatakse proportsionaalsuse piir tunduvalt suurema pinge juures kui esialgsel proovimisel: prussi elastsus on muutunud suuremaks. Joon. 142 kujutab proportsionaalsuse piiri nüüd punkt *F*. Eelnev proportsionaalsuse piiri ületamine „karastab" materjali. Seda nähtust nimetatakse *kalestuseks.*

Esialgseid elastseid omadusi saab kalestatud metallile tagasi anda lõõmutamisega, s. o. metalli hoidmisega küllalt kõrgel temperatuuril ja aeglase jahutamisega. Ühesuguse deformatsiooni juures tekivad kalestatud metallis suuremad pinged kui lõõmutatud metallis, ja seepärast katkeb kalestatud metall väiksemal

deformatsioonil kui lõõmutatud metall. Seejuures deformeerub kalestatud metall ühesuguste pingete juures lõõmutatust vähem. Seepärast on taotud, valtsitud ja pressitud metallid elastsemad, kuid see-eest hapramad kui lõõmutatud või valatud metallid.

Paljud tahked kehad, sealhulgas kõik metallid, koosnevad üksikutest väga pisikestest kristallidest („teradest"), mis on vahel üksteisest eraldatud teistsuguse koostisega ainega. Need kristallid on paigutatud korrapäratult, ja proovimiste tulemusena saadavad mehhaanilised iseloomustused ei kujuta endast midagi muud, kui vahekihtide mõjul muudetud keskmisi väärtusi üksikute kristallide jaoks, mis on paigutatud mitmesugustes suundades. Seepärast on selleks, et selgitada endale harilike *polükristalliliste* materjalide iseärasusi, tähtis tundma õppida *monokristallide*[1] mehhaanilisi omadusi.

Monokristallid on anisotroopsed: monokristallide mehhaanilised omadused sõltuvad koormise mõjusuunast kristallograafiliste telgede suhtes. Monokristalli tõmbamisel algab pärast kriitilise punkti ületamist *plastiline deformatsioon,* nimelt kristalli üksikute kihtide libisemine üksteise suhtes mööda kindlaid tasapindu.

Deformatsioonidel pisikristallides, millest koosneb tavaline metallist proovikeha, on samasugune iseloom. Kui pinge saavutab elastsuse piiri, algavad libisemised mõnedes kõige ebasoodsamalt paigutatud mikrokristallides.

Välisjõudude kõrvaldamisel ei taastu proovikeha kuju täielikult, sest et seda takistab plastiline deformatsioon mikrokristallides, milledes toimus libisemine. Seepärast jäävad proovikehasse alles teatavad sisepinged: need elastselt deformeeritud mikrokristallid, mis puutuvad kokku plastiliselt deformeeritud kristallidega, jäävad veidi venitatuteks. Korduval koormamisel saabub proovikeha voolamine suurema pinge juures kui esialgsel koormamisel (joon. 142, punkt *F*), sest et nüüd algab libisemine nende kristallide juures, mis esialgsel tõmbamisel kuni juba elastsuse piiri ületanud pingeni (joon. 142, punkt *D*) ainult deformeeriti elastselt. Sellega seletatakse kalestusnähtust.

§ 51. Plastilisus.

Ideaalne plastilisus (s. t. täielik järeleandlikkus kuju muutmisele, voolavus) on omane vedelikele, kuid peale harilike vedelike on olemas suur hulk reaalseid plastilisi kehi, mis voolavad ühtede või teiste tingimuste juures. Harilike venivate vedelike juures tekib voolamine (mida võib vaadelda kui mittepööratavaid nihkedeformatsioone) kõige väiksemate pingete juures. Elastsete tahkete kehadega toimuvad väikestel pingetel pööratavad elastsed

[1] Ladina k. *monos* — ühtne.

deformatsioonid. Sellised plastilised materjalid, nagu savid, värvid, vaseliin jms., saavad väikeste pingete juures ainult elastsete pööratavate deformatsioonide osaliseks, kuid voolavad suuremate jõudude toimel, mis ületavad „voolavuse piiri". Sel kombel säilitavad plastilised kehad oma kuju väikeste jõudude (näiteks raskusjõu) toimel, kuid deformeeruvad kergesti ja võtavad mis tahes kuju suuremate jõudude puhul.

Üldiselt on kõik reaalsed tahked kehad ühel või teisel määral plastilised, s. o. voolavad kindlates tingimustes. Nagu juba eelnevates paragrahvides on selgitatud, tulevad parimate terasesortide juures ilmsiks mittepööratavad jääkdeformatsioonid pikka aega mõjuvate suurte pingete puhul. Plastilist voolamist esineb samuti ka kivimite juures maakoores. Mägedes on hästi nähtavad käärud settekivimite lademetest, mis olid algul horisontaalsed, kuid hiljem paljude aastatuhandete jooksul voolasid aeglaselt tektooniliste[1] jõudude toimel, mille tulemusena moodustasid kummalisi kurde.

Monokristallide plastilise deformatsiooni aatomilise loomuse tundmaõppimiseks (kivisoola näitel) tarvitas A. F. Joffe (1918. a.) esmakordselt röntgenikiiri, vaadeldes fluorestseeruval ekraanil neid muutusi, mida teeb läbi kristalli röntgenogramm voolavusepiiri ületamisel. Ta tegi kindlaks, et plastilise deformatsiooni mehhanism seisneb üksikute kristalli piirkondade nihetes, millega kaasneb rida pöörlemisi (pöördeid). Need katsed olid aluseks uuele suunale kristallofüüsikas (plastilise deformatsiooni röntgenograafiline analüüs).

Üheks iseärasustest, mis on tüüpilised kristallide deformatsioonile erinevalt amorfsete kehade deformatsioonist, on *protsessi katkendlikkus*, mida esmakordselt märkas A. E. Joffe koostöös hollandi füüsiku P. Ehrenfestiga ja mida üksikasjaliselt uuris M. Klassen-Nekljudova (1927—1928). Prooviti kivisoolast, alumiiniumist ja messingist proovikehi kõrgetel temperatuuridel. Selgus, et deformeerumine toimub seejuures hüpetena, mis korduvad hämmastavalt võrdsete ajavahemike järel ja millega kaasneb kerge, kella tiksumisega sarnanev hääl. Niisuguse elementaarnihke suurusjärk on üks või mõni mikron. Koormise suurenemisel hüpped sagenevad, samuti nagu temperatuuri tõusmiselgi.

N. Davidenkovi poolt (1935. a.) teostati uurimus, mille juures tsingi monokristallist proovikeha deformeeriti lakkamatult konstantse kiirusega, mis ei ületanud 1 *mm* kuus, kusjuures proovikeha pikkuseks oli 25 *mm* (analoogia järgi metallide „roomavusega" kõrgel temperatuuril). Ilmnes, et deformeerumine toimus,

[1] Tektoonilisteks nähtusteks nimetatakse nähtusi, mis toimuvad maakoore nihkumiste juures: maavärisemised, nihked, kurdude moodustumised.

vaatamata sellistele väikestele kiirustele, endist viisi selgelt väljendatud hüpetega, mis kordusid väga suurte ajavahemike järel ja saavutasid õige suuri väärtusi (umbes 0,014 *mm*). Seega osutus katkendlikkus kristallide deformeerumise tõesti lahutamatuks iseärasuseks — vähemalt „roomavuse" temperatuuride piirkonnas.

Polükristalliliste tahkete kehade plastilisust, eriti metallide plastilisust on viimasel aastakümnel erilise põhjalikkusega uurinud prof. V. D. Kuznetsov ja M. A. Bolšanina. V. D. Kuznetsov andis põhjaliku (mitmeköitelise) ja maailmakirjanduses kõige täpsema ülevaate kõigist tähtsamatest uurimustest tahkete kehade füüsika alal.

Seoses mitmesuguste tööstusharude, millel on tegemist niisuguste materjalidega nagu värvid, keraamika, määrded, kautšuk, tselluloos, bituumenid, liimid jne., arvukate vajadustega tekkis viimasel ajal uus teadusharu — *reoloogia*[1]. Reoloogia uurib aine voolavuse küsimusi. Ta kujutab endast füüsikalise mehhaanika osa ja on hüdromehhaanika ja elastsusteooria naaberdistsipliiniks.

Reoloogias püütakse koostada selliste võrrandite süsteemi, mis seovad pinget, deformatsiooni ja deformeerumiste kiirusi ja mis oleks rakendatav kõigi reaalsete ainete voolamise vaatlemisel, kui voolamine on tekitatud mistahes viisil — tõmbega, survega, väändega, paindega jne. Niisugune üldine ülesanne ei ole veel lahendatud ja läbi on töötatud ainult üksikud erijuhud.

§ 52. Tugevus ja kõvadus.

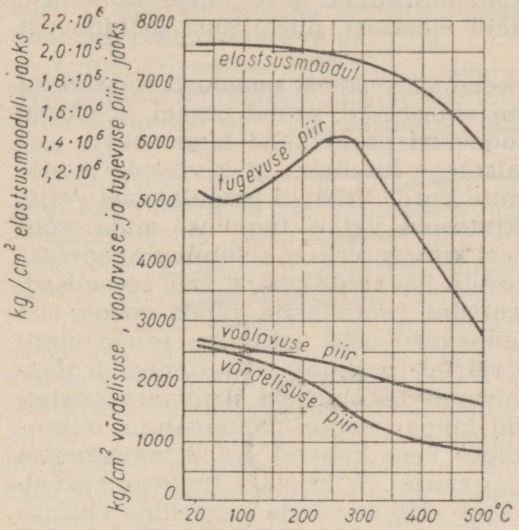
Kehade tugevust saab iseloomustada kahe suurusega: *vastupanuga nihkele (osakeste libisemisele) — nihketugevusega — ja vastupanuga osakeste eemaldamisele üksteisest — tõmbetugevusega. Kui nihketugevus moodustab üle poole*[2] *tõmbetugevusest, siis materjal on habras: tema katkemine toimub ilma plastilise deformatsioonita.* Kui aga nihketugevus on väiksem kui pool tõmbetugevusest, siis algab algul libisemine mööda tasapindu, mis on tõmbejõududega 45° all kaldu, ja katkemisele eelneb plastiline deformatsioon.

Nihketugevus on sarnane vedelike viskoossusega; ta *kasvab* nagu viskoossuski *temperatuuri alanemisel* ja deformeerimise kiiruse suurenemisel. Seevastu *tõmbetugevus sõltub vähe temperatuurist* ja deformeerimise kiirusest. Seepärast, kui mingi keha

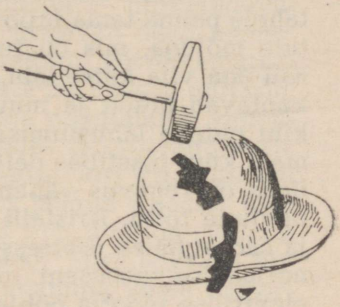
[1] Kreeka k. *rheos* — vool.

[2] Kui me tõmbame materjali, siis tekivad tasapindades, mis on orienteeritud nurga all 45° tõmbejõu suunaga, pinged, mis püüavad teostada materjali nihet; nende pingete (kihis pindalaühikule mõjuvate tangentsiaaljõudude) suurus on kaks korda väiksem tõmbavast pingest, kuna osutatud kihtide pindala on kaks korda väiksem kui tõmbejõuga risti olevatel kihtidel.

nihketugevus on normaalsel temperatuuril üle poole tõmbetugevuse suurusest ja keha on seepärast habras, siis temperatuuri tõusmisel nihketugevus kahaneb ja keha muutub plastiliseks. Ümberpöördult muutub iga plastiline keha temperatuuri küllaldasel alanemisel hapraks (joon. 143 ja 144), sest et nihketugevus, kasvades temperatuuri alanemisel, ületab lõppude lõpuks poole tõmbetugevusest. Seatina, mis on plastiline toatemperatuuril, muutub hapraks vedela õhu temperatuuril.



Joon. 143. Diagramm, mis kujutab terase mehhaaniliste omaduste sõltuvust temperatuurist.



Joon. 144. Vedelasse õhku kastetud pehme viltkaabu muutub hapraks.

Tõmbetugevus, nagu on öeldud, ei sõltu (või täpsemalt, sõltub vähe) deformeerimise kiirusest, samal ajal kui *nihketugevus kasvab küllalt kiiresti deformeerimise kiiruse suurenemisel.* Seepärast keha, mis on plastiline koormise aeglasel suurenemisel, muutub hapraks kiirel deformeerimisel. Nii on näiteks tsink koormise aeglasel suurenemisel plastiline ja kiirel deformeerimisel habras.

Nihketugevus on polükristallilistes kehades, eriti metallides, *seda suurem* (muude võrdsete tingimuste juures), *mida väiksem on terade suurus.* Terade suurenemine, mida võib saavutada metalli noolutamisega küllalt kõrgel temperatuuril, teeb metalli plastilisemaks. Metallisulatise kiirel kristalliseerumisel tekivad peened terad ja metall on vähem plastiline. Sulatise ülisuurel allajahutamisel saadakse jällegi jämedateraline metall.

Sulatise kristalliseerumisel kujunevate terade suurusele mõjuvad peale jahutamise kiiruse tugevasti kõrvallisandid. Lahustumatud lisandid sagedasti soodustavad peente terade tekkimist,

mis vähendab metalli plastilisust. Terade ühesuguse suuruse puhul aga iseloomustab metalli, mis sisaldab lahustumatuid lisandeid, kõrgenenud nihketugevus, ja seepärast on ta hapram kui puhas metall.

Tänu kalestusnähtusele ja mehhaaniliste omaduste sõltuvusele terade suurusest võimaldab metalli külma ja termilise töötlemise kombineerimine muuta metalli elastsust, plastilisust ja tugevust küllalt laiades piirides.

Tugevus ei sõltu ainult keha seesmistest omadustest, vaid ka keha pinna seisundist. Pinna vigastused, praod pinnal ja mõrad arusaadavalt vähendavad tugevasti proovikeha tugevust.

Akad. A. E. Joffe tegi katsetega kindlaks, et kivisoola monokristallide tugevus kasvab mitu korda kristalli paigutamisel vette. Need katsed näitasid, et kivisoola väike tugevus, mida võib tähele panna tema proovimisel kuivas olekus, seletub pinnadefektide mõjuga, mis on tugevusele hädaohtlikumad kui seesmised. Kui aga viia katse läbi, niisutades proovikeha pinda veega, siis kaotavad praod ja muud pinnavead oma kahjuliku toime pindkihi pideva lahustumise tagajärjel, ja proovikeha õnnestub tõmmata kuni plastilise deformatsiooni tekkimiseni. Kuivades kristallides on tugevus vähendatud hulga peente, nähtamatute mikropragude tõttu. Kristalli viibides vees kaovad praod lahustumise ja sadestumise protsesside tagajärjel, ja kristalli tugevus kasvab normaalse suuruseni, mida saab ette arvutada kristallide ehituse elektrilise teooria põhjal.

Juba ammu on tähele pandud, et sel juhul, kui metallile mõjuvad korduvad koormamised ja koormisest vabastamised või muutuva märgiga jõud, saabub katkemine pingel, mis on tunduvalt (kaks-kolm korda) väiksem tavalise staatilise proovimise teel määratud tugevuse piirist. See nähtus nimetati metallide *väsimuseks*. Väsimuse nähtust tuleb arvestada detailide projekteerimisel, mis on ette nähtud muutuva märgiga või perioodiliselt muutuva jõu talumiseks: väntvõllid, kepsud, kolvisõrmed jms.

Kõvadus. Kõvaduse mõistet pole veel täpselt defineeritud. Harilikult iseloomustatakse kõvadust vastupanu suurusega, mida keha avaldab mingi teise keha sissetungimisele temasse, kusjuures teisel kehal on kas teraviku kuju või üldse niisugune kuju, et kehade kokkupuutepindala on tühine.

Mineraloogias on levinud Mohs'i poolt esitatud kõvaduse määramise viis kriimustamismeetodi järgi. On koostatud „kõvaduse skaala", ja nimelt on valitud 10 mineraali, mis on paigutatud järgmisse ritta:

1. Talk
2. Kips
3. Lubjapagu
4. Sulapagu
5. Apatiit
6. Põllupagu
7. Kvarts
8. Topaas
9. Korund
10. Teemant

Selle skaala iga järgnev mineraal kriimustab iga eelnevat mineraali — tekitab sellele kriipsu —, kui esimese terava nurgaga tõmmata mööda teise pinda. Kõvadust märgitakse nende mineraalide järjekorranumbritega, mille vahel asub proovitav keha; näiteks tähendab märge 5—6 (ehk $5^1/_2$), et proovitav keha kriimustab apatiiti ja saab ise kriimustuse, kui mööda tema pinda tõmmata põldpao terava nurgaga.

Teine kõvaduse määramise viis — Brinelli järgi — põhineb lohu pindala mõõtmisel, mis on tekkinud karastatud terasest kuuli, mille diameeter on 1 *cm*, surumisel uuritava keha pinnasse jõuga 3000 *kG*.

Pole raske mõista, et kõvaduse mõõtmisel esimese meetodi järgi tuleb tegemist teha tõmbetugevusega (vastupanuga osakeste eemaldamisele). Teise meetodi järgi mõõtmistel — nihketugevusega (vastupanuga libisemisele), seepärast annavad need meetodid üldiselt võttes tulemused, mis on teineteisega võrreldamatud.

Akad. P. A. Rebinderi ja tema kaastööliste uurimused näitasid, et saab leida selliste ainete lahuseid, millega niisutamine vähendab kristalli „kõvadust". Need ained, tungides mikropragudesse, nähtavasti laiendavad neid pisut nendes osades, kus kristallilised pinnad, vaatamata pragude olemasolule, on jäänud tihedalt üksteise vastu surutuiks; tulemusena väheneb töö, mis on vajalik kristalli dispergeerimiseks (katkimurdmiseks). Süsinikterase lihvimisel vees vähendab naatriumiseebi lisandamine veele dispergeerimistööd $1^1/_2$ korda.

§ 53. Tähtsamate materjalide mehhaanilised omadused.

Tabelis 2 toodud arvud näitavad, et parimad mehhaanilised omadused, s. t. suur elastsus, tugevus ja võime taluda suuri deformatsioone, on mitmesugustel terastel — raua ja süsiniku sulamitel, mille erikaal on aga seejuures väga suur.

Terasel ei ole ainult tähelepanuväärne tugevus, vaid ka suur elastsus. Nii näiteks võib terasest proovikeha katkemise hetkeks pikendada kuni 34% esialgsest pikkusest. Seepärast võib terasdetaile õige palju elastselt deformeerida, kartmata nende murdumist. Teraste ainukesteks konkurentideks, mis kannatavad suuri elastseid deformatsioone, on kergete konstruktsioonide ehitamisel alumiiniumisulamid, milledel on head mehhaanilised omadused ja küllalt suur elastsus väga väikese erikaalu juures. Paljud lennukiosad tehakse alumiiniumisulamitest — duralumiiniumist või koltšugalumiiniumist. Siiski konkureerivad kõrgesordilised roostevabad terased lennukiehituses edukalt alumiiniumisulamitega, sest et nende teraste kõrged mehhaanilised omadused lubavad anda detailidele niivõrd väikesi mõõtmeid, et rooste-

MÕNEDE MATERJALIDE MEHHAANILISED OMADUSED

Tabel 2

Materjal ja töötlemise viis	Young'i moodul kG/mm^2	Nihke- moodul kG/mm^2	Tugevuse piir kG/mm^2	Voolavuse piir kG/mm^2	Elastsuse piir kG/mm^2	Väsimuse piir kG/mm^2	Pikenemine katkemise hetkeks %	Ristlõike ahenemine katkemise hetkeks %	Tihedus g/cm
Nikkelteras, valatud, lõõmutatud	20000—22000	8000—8300	65	39		34	12	14	7,84—7,85
Süsinikteras, töötlemata latt	20000—22000	8000—8300	53,5	34,6			34	58	7,84—7,85
Sama, karastatud			69,2			28	24	56	
" noolutatud 700° juures			58,2	40,8			33	68	
" valtsitud			48,7	32	25,7		20	59,5	
" tõmmatud kalestuse tekitamisega			96,6		57		3	23	
" taotud			44,6	21,5	18,6	20	33,5	53	
Kroomnikkelteras	20000—22000	8000—8300	147,5	137		80	9,5	30,5	7,84—7,85
Sama, lõõmutatud			67,5	33		34	27	53	
" karastatud			177	170		85	11	43	
Nikkel-vanaadiumteras, karastatud õlis			241,3	193,2			5	8	
Teras, noolutatud			97,7	72	58,3		19,5	48,5	
Raud, elektrolüütiline	19000—21000	7700—8300	30—44	18—36	4—7	8,8	19—42		7,9
" taotud, valatud			28—40	14,3		11	32	48	
Sama, tõmmatud			55,4	51	31,6	20	17	54	
Masinaehitusmalm	8000—10500	3500	12—22			8—15			7,8
Duralumiinium	6300—7200	2600	40	20		14	20		2,7
Sama, külmalt valtsitud			62	54		15—16	3		
Koltšugalumiinium, karastatud			36—42		19—23	12	15—22		
Sama, külmalt valtsitud			45—58		35—50		4—3		
Elektron, valatud (Mg sulam)			20—23	10	≈5	≈10	6—10	10—14	1,8
Vask, elektrolüütiline	11000		16—22			3—4	50—58	65—76	8,9
Seatina	500—700		1,25—1,80		0,25				11,3
Tamm, piki kiudu	1080	800	9—10		2,5				0,7
Mänd, " "	920		7—8						0,5

vabast terasest konstruktsiooni kaal ei osutu suuremaks duralumiiniumist konstruktsiooni kaalust, aga teraskonstruktsioonide mehhaanilised omadused ületavad duralumiiniumist konstruktsioonide omadused.

Üheks teraste väga olulistest väärtustest on nende võime taluda mistahes mehhaanilist või termilist töötlemist: treimist, hööveldamist, pressimist, tagumist, keevitamist, karastamist.

Puit on oma erakordselt väikese erikaalu ja suure elastsuse tõttu samuti väärtuslik ehitusmaterjal. Puitkonstruktsioonide puuduseks on nende lühiealisus ja kogukus. Puidu eelisteks, võrreldes teiste ehitusmaterjalidega, on töötlemise hõlpsus ja kõrged soojusisolatsiooni omadused (puidu soojusejuhtivus kihtidega risti olevas sihis moodustab umbes $^1/_6$ tellismüüritise soojusejuhtivusest ja $^1/_9$ betooni soojusejuhtivusest).

Sel juhul, kui konstruktsioon töötab survele, võib ehitusmaterjalidena kasutada edukalt väikese elastsusega aineid, kuid millel on küllaldane võime vastu panna survele, näiteks kivi, „elektron"[1] ja malm.

Masinate ja tööpinkide kered, mis on allutatud suruvatele koormistele, valatakse peaaegu alati malmist, millel ei ole ainult suur survetugevus, vaid mis laseb end ka väga hästi treida, hööveldada ja teostada muid mehhaanilise töötlemise liike.

Toome *survetugevuspiiri väärtused (kG/mm²)*:

Malm	50—80	Tsement, puhas . . .	2,5—2,7
„Elektron" . . .	20—30	Tsement 3 osa liivaga	1,6
Graniit	8—20	Mänd, piki kiudu . .	2,45
Paekivi	4—20	Tamm, piki kiudu . .	3,55
Telliskivi . . .	1,5—3		

Detaile, mis töö-, ülesseadmise või tootmise protsessis alluvad õige suurtele plastilistele deformatsioonidele, nagu näiteks elektrijuhtmeid, veevärgitorusid, kraane, mitmesuguste mehhanismide väikesi fassong-osi jms., peab tegema plastilistest materjalidest. Plastilisust iseloomustavad väike Young'i moodul, madal voolavuse piir ja proovikeha lineaarsete mõõtmete suured muutused katkemise hetkeks. Sellised omadused on puhtal raual, vasel ja seatinal, nagu on näha tabelist 2 (lk. 242).

Viimaste aastakümnete jooksul on kõige mitmekülgsemalt rakendatud uusi kunstlikke materjale — *plastmasse*. Plastmasside valmistamiseks tarvitatakse kõige sagedamini tõrvu — mõningaid looduslikke ja suurt hulka sünteetilisi. Näiteks valmistatakse purunematu klaas — *pleksiklaas* — sünteetilisest tõrvast, mille tootmiseks kasutatakse atsetooni, metüülpiiritust ja sinihapet. *Bakeliiti* ja plastmasse, mida valmistatakse kivisöetõrvade ümbertöötamise produktidest, tarvitatakse seinakattekilpide, plaadi-

[1] Kerge sulam, mille peamiseks koostisosaks on magneesium.

keste, elektriarmatuuri jne. materjalina. Mõned plastmassid valmistatakse *tselluloosist* — taimekiu peamisest koostisosast, mida sisaldub suurimal hulgal puuvillas (kuni 95%). On olemas ka plastmassid, mida valmistatakse kooritud piima ümbertöötamise produktidest.

Plastmassist tooteid valmistatakse pressimise teel hüdraulilistel pressidel rõhu all 100 kuni 300 kG/cm^2, temperatuuril umbes 120—170° C. Sagedasti rakendatakse ka valamist rõhu all.

Plastmassidel on tõmbetugevus umbes 3—6 kG/mm^2 ja kakskolm korda suurem survetugevus.

Väga väärtuslikeks osutusid paljudes ehitustehnika harudes materjalid, mida saadakse õhukestest puukiududest, paberist või riidest lehtedest plaatideks kokkupressimise ja plastmasside lahustega immutamise teel. Need on „lignofooli" (puidust), „tekstoliidi" (riidest) ja „getinaksi" (paberist) plaadid. Näidatud viisil saadakse kõrgendatud tugevusega materjalid; paindel on need materjalid suutelised välja kannatama koormist 2000—3000 kG/cm^2. Mõned sellistest kombineeritud materjalidest osutusid kõlblikeks tugevasti koormatud masinadetailide — hammasrataste, laagrite jt. — valmistamiseks.

Rühm insenere prof. I. I. Kitaigorodski juhtimisel lõi uue kõrgekvaliteedilise materjali — *vahtklaasi.* Vahtklaas valmistatakse harilikult klaasist, mis purustatakse peenikeseks pulbriks ja segatakse marmori ja kivisöe või muu aine pulbriga, mis on võimeline soojendamisel eraldama gaase. Vahtklaas on veest neli korda kergem. Vahtklaasil on suur mehhaaniline tugevus, ta on kergesti saetav, hööveldatav ja puuritav. Samal ajal on ta heaks soojusisolatsiooni materjaliks.

Teaduse ja tehnika suurepäraseks saavutuseks on mitmesuguste kunstlike kiudainete, eriti kunstsiidi ja kunstvilla tootmine.

Viimastel aastatel on enam levinud puukiu tselluloosist valmistatav viskoossiid. Tselluloosi molekulis tuhanded süsinikuaatomid, mis on seotud vesiniku- ja hapnikuaatomitega, on venitatud molekulaarseks niidiks. Tselluloos on lahustumatu. Selleks et saada temast ainet, mis oleks lahustuv lahjendatud leelissoolas, — *viskoosi,* allutatakse tselluloos niisugusele keemilisele töötlemisele, et tselluloosi iga molekulaarse niidiga ühinevad väävelsüsiniku ja sööbenaatriumi molekulid. Kunstsiidi valmistamiseks pressitakse viskoos läbi väga peente avade erilistes kuplikestes väävelhappe lahusesse, kus viskoosi joakestest tekivad niidid, mis koosnevad silmaga vaevalt nähtavatest puhta tselluloosi kiukestest (varem ühendatud molekulid taandatakse väävelhappega). Need niidid keritakse ketrusmasinate värtnatele[1]. Lähtetooraine

[1] Asendades ümmargused avad, millest viskoosi läbi pressitakse, pika piluga, saadakse *tsellofaan,* küllalt tugev mikroorganismidele läbitungimatu pakkimismaterjal.

odavuse tõttu ulatus viskoossiidi toodang maailmas juba 1948. a. $^1/_2$ milj. tonnini.

Viskoosniitide ketramine jämedamateks nöörikesteks, mis pärast lõigatakse mõne sentimeetri pikkusteks kiududeks, annab materjali, mis on saanud „staapelkiu" nime. Sellisest kiust, mida on erilisel viisil töödeldud temale pehmuse ja käharuse andmiseks, valmistatakse viskoosvilla.

Töödeldes puuvilla tselluloosi äädikhappe ja äädikhappeanhüdriidiga, saadakse niinimetatud atsetüültselluloos, mis võib lahustuda piirituses ja atsetoonis. Väga peened atsetüültselluloosi joakesed pressitakse pauna, kus nendele puhutakse kuuma õhku; piiritus ja atsetoon lenduvad ja tekkivad niidid keritakse värtnatele. Atsetoonsiidi niitide tõmbetugevus ületab sama ristlõikepindalaga terastraadi tugevuse.

Eriti peenikesi niite saadakse niinimetatud vaskammoniaaksiidi tootmisel. Tselluloosi vaskammoniaaklahuse joakesed pressitakse vette. Vesi võtab tselluloosi molekulidelt nendega varem ühinenud vase aatomid ja ammoniaagi molekulid. Nii saadakse umbes 2 mikroni jämedused niidid, kuna ämblikuvõrgu niidi jämedus on 3—5 mikronit.

Veel peenemad kiud saadakse *klaaskiu* tootmisel. Läbi avade erilises ahjus voolavad välja klaasijoakesed; tekkiv klaasniit keritakse kiiresti pöörlevale trumlile, mille tagajärjel niit venib pikemaks ja peeneneb. Tõmbamise kiirusel 2 *km/sek* saadakse umbes mikroni jämedused niidid — 50 korda peenemad inimese juuksekarvast. Klaaskiududest punutud köied on tugevamad samasuure ristlõikepindalaga terastrossidest. Tükeldatud klaaskiududest kedratakse niite tehniliste ja dekoratiivkangaste valmistamiseks, mis on tulekindlad, kergesti pestavad ja vastupidavad keemiliste ainete toimele.

Kõrgekvaliteedilist kiudainetest riiet valmistatakse tõrvainetest, mida sünteesitakse plastmasside tootmiseks. Fenooltõrvadest valmistatakse kaproonsiidi. Vinüültõrvadest saadakse vinüülkilet ja vinüülkiudu, mida kasutatakse keemiliselt vastupidavate kangaste tootmiseks. Tugevaid ja kergestivärvuvaid vinüülkilesid saab juurde lõigata, õmmelda ja kokku kleepida; see on uus mittekootud materjal, mis konkureerib kiuliste materjalidega.

IX PEATUKK.

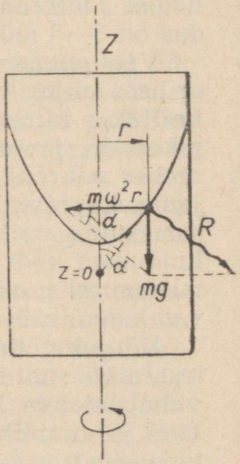
HÜDROMEHHAANIKA ALUSED.

§ 54. Pascali seadus.

Vedelikud peaaegu ei olegi kujuelastsed, kuid neil on suur ruumelastsus. Tehnilistes arvestustes loetakse vedelikku absoluutselt mittekokkusurutavaks. Hüdromehhaanika seadused on eriti lihtsad nn. *ideaalsete vedelike* puhul. Ideaalsetele vedelikele omistatakse järgmised omadused: 1) viskoossuse puudumine ja 2) absoluutne mittekokkusurutavus.

Osakeste kerge liikuvuse tõttu võib vedelik olla tasakaalus ainult sel juhul, kui temale mõjuvad jõud on suunatud risti vedeliku pinnaga. Seepärast on vedeliku pind väikeses anumas horisontaalne[1]. Suurte veekogude (merede ja ookeanide) pind on risti raskusjõu suunaga ja on seepärast ellipsoidi kujuline.

Vedeliku osakeste liikuvuse tõttu *vedelikule mõjuv välisrõhk antakse vedelikus edasi igas suunas ühteviisi.* Seda seadust nime-



Joon. 145. Vedelik pöörlevas silindris.

[1] Telje ümber pöörlevasse silindrisse valatud vedeliku pinnal on pöördparaboloidi kuju.

Tõepoolest, pöörleva vedeliku iga osakese kaal mg avaldub dünaamiliselt kesktõmbejõuna $m\omega^2 r$ ja staatiliselt rõhuna R, millega vaadeldav osake mõjub teistele vedeliku osakestele. Siin tähistab m osakese massi, r tema kaugust pöörlemisteljest ja ω nurkkiirust (joon. 145). Vedeliku pind peab olema risti vektoriga R. Joonisest 145 on näha, et

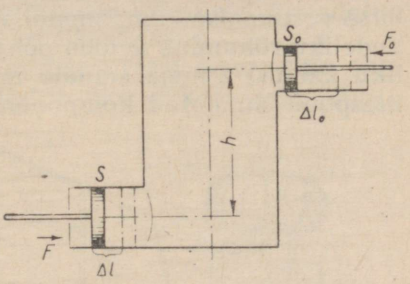
$$\tan\alpha = \frac{r}{z} = \frac{dr}{dz} = \frac{mg}{m\omega^2 r}, \text{ ehk } \frac{g}{\omega^2}\,dz = r\,dr.$$

Selline sõltuvus dz ja dr vahel vastab parabooli võrrandile

$$\frac{2g}{\omega^2}\,z = r^2 + C.$$

tatakse Pascali seaduseks. Kujutleme vedelikku, mis on kahe kolviga suletud kinnisesse nõusse. Kolbide pindalad on S ja S_0, neile mõjuvad jõud F ja F_0 (joon. 146). Kogu süsteem on tasakaalus. Kuna kolbide poolt tekitatud rõhud p peavad olema võrdsed, siis

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F_0}{S_0} \quad \text{ehk} \quad \frac{F}{F_0} = \frac{S}{S_0}. \tag{1}$$



Joon. 146. Pascali seaduse selgitamiseks.

Hüdrostaatika põhiseadusi, nende hulgas ka Pascali seadust, võib kergesti tuletada energia jäävuse seadusest. Olgu vedelikuga täidetud anum (joon. 146) suletud kahe kolviga. Kolbide pindalad olgu S ja S_0 ning nende raskuskeskmete kaugus vertikaali mööda mõõdetuna olgu h. Rõhk alumisele kolvile olgu p, ülemisele p_0. Kogu süsteem on tasakaalus. Liigutame esimest kolbi edasi väga väikese pikkuse Δl võrra. Vedeliku hulk ruumalaga $S\Delta l$ surutakse seejuures silindrisse, selle tulemusena liigub teine kolb edasi pikkuse Δl_0 võrra. Esimese kolvi töö $pS\Delta l$ ja teise kolvi töö $p_0S_0\Delta l_0$ vahe peab energia jäävuse seaduse põhjal olema võrdne kõrgusele h tõstetud ja ruumalaga $S_0\Delta l_0$ vedeliku potentsiaalse energiaga:

$$pS\Delta l - p_0S_0\Delta l_0 = \varrho g S_0 \Delta l_0 h$$

(siin ϱ on vedeliku ruumalaühiku mass (tihedus) ja g — raskuskiirendus).

Taandades võrdsed ruumalad $S\Delta l$ ja $S_0\Delta l_0$, saame:

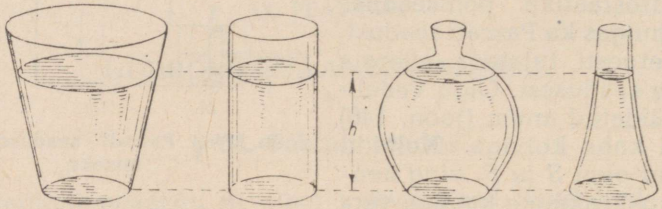
$$p = p_0 + \varrho g h. \tag{2}$$

See võrrand näitab, et *rõhk seisvas vedelikus sügavusel h on suurem vedeliku vabale pinnale mõjuvast rõhust kõrgusega h ja ristlõike pindalaga 1 cm² vedelikusamba kaalu võrra.*

Kuna rõhk vedelikus sügavuse suurenedes ühtlaselt suureneb, siis on kerge taibata, et *keskmine rõhk anuma külgseinale on võrdne vedeliku erikaalu ja selle seinaosa raskuskeskme ja vedeliku vaba pinna vahelise kauguse korrutisega.*

Pascali seaduse otseseks järelduseks on *anuma põhjale mõjuva rõhu sõltumatus anuma kujust.* Seda väidet, mis esimesel pilgul võib näida ootamatuna, nimetatakse mõnikord *hüdrostaatiliseks paradoksiks.* Kuid on selge, et jõud, millega vedelik rõhub anuma põhjale, on alati võrdne põhja tasapinnal mõjuva vedeliku rõhu ja põhja pindala korrutisega (joon. 147). Silindrikujulises anumas on vedeliku rõhumine anuma põhjale võrdne vedeliku kaaluga

(anuma põhjale altpoolt ja vedeliku vabale pinnale ülalt mõjuv väline atmosfääri rõhumine peaaegu tasakaalustub). Ülespoole laienevas anumas on vedeliku rõhumine anuma põhjale väiksem anumas oleva vedeliku kaalust anuma seinale mõjuva kogurõhumise vertikaalse komponendi võrra. Ülaltpoolt kitsenevas anumas vedeliku rõhumine anuma põhjale on suurem anumas oleva vedeliku kaalust anuma seinale mõjuva kogurõhumise (antud juhul ülespoole suunatud komponendi) võrra.



Joon. 147. Jõud, millega vedelik rõhub joonisel kujutatud anumate põhjadele, on ühesuurused (nivoode kõrgused ja põhjade pindalad on võrdsed).

Rõhu jaotumine liikumatus vedelikus, külgseinale mõjuva rõhu suurus, hüdrostaatiline paradoks ja paljud teised hüdrostaatika seadused olid tuntud juba ammu enne 1640.—1650. aastaisse kuuluvaid Pascali töid. Pascali teene seisneb selles, et ta andis hüdrostaatikale matemaatiliselt range esituse, laiendas hüdrostaatika järeldused liikumatule gaasile ja Torricelli katseid edasi arendades töötas välja õhurõhu mõõtmise viisid. Blaise Pascal ei olnud mitte ainult füüsik, vaid ka väljapaistev matemaatik (koonuslõikeid käsitleva traktaadi, tõenäosusteooriaalaste jt. tööde autor); jesuiitide vastu sihitud raamatu *„Provintslase kirjad"* autorina Pascal avaldas mõju progressiivse prantsuse kirjanduse arengule.

Pascali seadusest (1) ja valemist (2) järeldub, et *ühendatud anumais vedeliku nivood on samal kõrgusel.*

Lehtritaolistes orgudes, kus maapinnas on urbne kiht (veerkivi, liiv, kruus) kahe vett mitteläbilaskva savikihi vahel, tungivad sademed pinnasest läbi ja kogunevad urbsetes kihtides. Kui madalas kohas puurida auk vettsisaldava kihini, siis vesi tõuseb ja võib isegi puuraugust tugeva joana välja purskuda. Sellisel viisil ehitatud kaeve nimetatakse *arteesia kaevudeks.*

Kui ühendatud anumaisse on valatud erinevate tihedustega (ϱ_1 ja ϱ_2) mittesegunevad vedelikud, siis Pascali seaduse ja valemi (2) põhjal nende vedelike sammaste kõrgused h_1 ja h_2 peavad tasakaalu korral olema sellised, et kehtiks võrdus

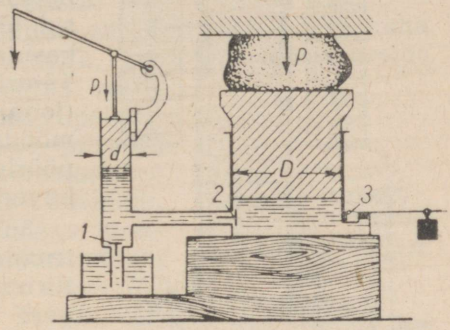
$$\varrho_1 g h_1 = \varrho_2 g h_2,$$

millest

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \tag{3}$$

s. t. *erineva tihedusega vedelike sammaste kõrgused ühendatud anumais on pöördvõrdelised vedelike tihedustega.*

Pascali seadusel põhineb *hüdraulilise pressi* (joon. 148) töötamine. Kaks toruga ühendatud silindrit, üks väikese, teine suure diameetriga, on täidetud veega või õliga. Väike silinder on varustatud kolviga, mis surub vedelikku suurde silindrisse. Klapp *1* on vedeliku imemiseks väikesesse silindrisse, klapp *2* takistab vedeliku tagasivoolu suurest silindrist. Kaitseklapp *3* avaneb siis, kui rõhk suures silindris ületab piiri, mille määrab klappi *3* allasuruval kangil olev raskus.



Joon. 148. Hüdraulilise pressi skeem.

Pascali seaduse põhjal suure ja väikese silindri kolbidele mõjuvate jõudude suhe on võrdne kolbide pindalade suhtega. Viimane suhe on võrdne kolbide diameetrite ruutude suhtega. Järelikult:

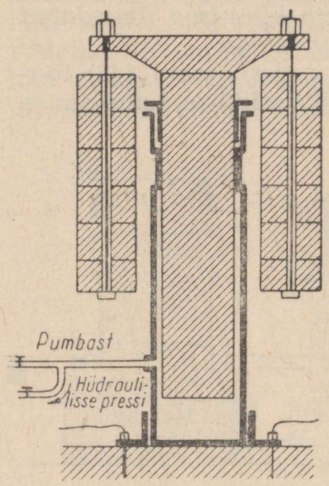
$$\frac{P}{p} = \frac{D^2}{d^2}. \tag{4}$$

Rõhku silindris saab tõsta 500 atmosfäärini ja kõrgemale, seepärast saab hüdraulilise pressiga tekitada väga suuri jõude (14 000 kuni 15 000 tonni). Seejuures on muidugi arusaadav, et mida rohkem me võidame jõus, seda rohkem me kaotame ka tee pikkuses: suur kolb läbib väikese kolvi liikumisega võrreldes niimitu korda lühema tee, kuimitu korda tema pindala on väikse kolvi pindalast suurem.

Hüdraulilist pressi kasutatakse väga mitmesugustes tehnika harudes. Metallitöötlemistööstuses kasutatakse hüdraulilisi presse suurte esemete sepistamisel ja paksuseinaliste raud- ning terasesemete valmistamisel.

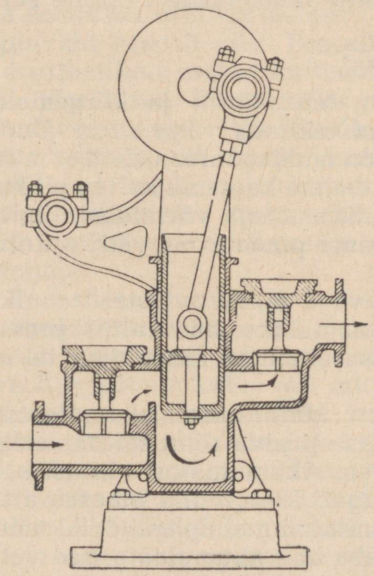
Pascali seadusel põhineb samuti *hüdraulilise akumulaatori* töötamine. Seda seadeldist kasutatakse püsiva rõhu säilitamiseks hüdraulilisi masinaid toitvais torudes. Akumulaatori ehitust selgitab joonis 149. Suures silindris liigub kolb, mille ülaosas asuvaile hõlmadele on koormusena kinnitatud malmplaadid. Akumulaatori „laadimiseks" surutakse pumba abil akumulaatorisse vett, mis tõstab kolbi koos koormisega. Akumulaatorist juhitakse vesi masinate juurde.

Lahtistes veehoidlates on rõhk vee pinnakihtides võrdne õhurõhuga, mis atmosfääri normaalse olukorra puhul tasakaalustatakse 760 mm kõrguse elavhõbedasamba kaaluga. See vastab ligikaudu 10 m kõrguse veesamba kaalule. Seda rõhku kasutatakse vee tõstmiseks *imevates kolbpumpades*, mida kasutati juba 3 sajandit e. m. a. Kahe klapiga kolbpumpi (joon. 150), milledes pärast imemist sisselaskeklapp automaatselt sulgub ja vesi surutakse survetorru, kasutatakse laialdaselt ka nüüdisajal. Täiuslikumad on tsentrifugaalpumbad (joon. 151). Neis toimub vee imemine mööda telgtoru *A* seetõttu, et kiiresti pöörleva trumli painutatud labad paiskavad vett survetorru *B*.

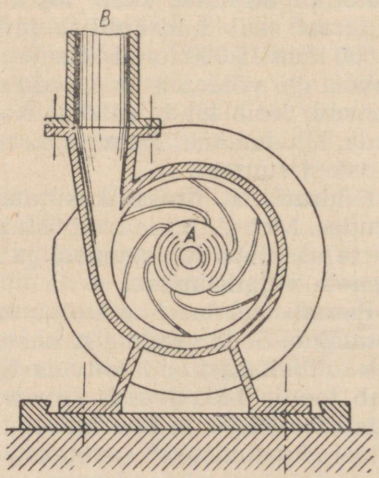


Joon. 149. Hüdrauliline akumulaator.

Võimsate tsentrifugaalpumpade trumlid pöörlevad kiirusega kuni 3000 tiiru minutis. Seejuures võib pump tõsta vett survetorus 40—80 m kõrgusele. Vee tõstmiseks suurele kõrgusele ühendatakse järjestikku mitu tavaliselt ühel teljel töötavat tsentrifugaalpumpa. Sellist pumpa nimetatakse *paljuastmeliseks*



Joon. 150. Vee kolbpump.



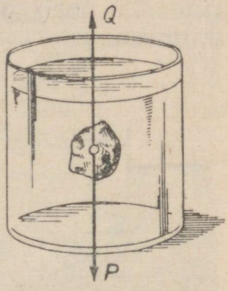
Joon. 151. Tsentrifugaalpump.

tsentrifugaalpumbaks. Nüüdisaegsed, kuni 20-astmelised seadmed, võimaldavad vett tõsta kuni 2 km kõrgusele, s. t. tekitavad rõhku kuni 200 at.

§ 55. Archimedese seadus.

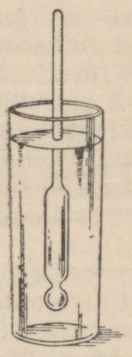
Rohkem kui 2150 aastat tagasi väitis Archimedes, et vedelikku asetatud keha nagu kaotaks oma kaalust niipalju, kuipalju kaalub keha poolt väljatõrjutud vedelik.

„Kaalukaotus" on seletatav järgmiselt. Vedelikus oleva keha kõikidele pinnaosadele rõhub vedelik, kusjuures kõigi nende jõudude resultant on alati suunatud vertikaalselt üles. Eraldame mõtteliselt paigalseisvas vedelikus mingi pinnaga piiratud ruumala ja kujutleme, et selles ruumalas olev vedelik tihedust muutmata äkki tahkestub. Endastmõistetavalt see ei muudaks tasakaalu. Järelikult eraldatud („tahkestunud") vedelikuosa kaalu tasakaalustab rõhumine eraldatud vedelikuosa pinnale. Teisiti väljendatult: vedeliku rõhumine vedelikus olevale meelevaldsele kinnisele pinnale on suuruselt võrdne ja vastassuunaline selle pinna poolt piiratud vedeliku kaaluga. Seega on selge, et *vedelikus olevale kehale mõjub üleslükkejõud, mis on võrdne tema poolt väljatõrjutud vedeliku kaaluga* (joon. 152).



Joon. 152. *P* — keha kaal, *Q* — keha poolt väljatõrjutud vee kaaluga võrdne üleslükkejõud.

Archimedese seaduse ülaltoodud tõestusviisi kasutas esmakordselt hollandi õpetlane Stevin oma traktaadis staatika aluseist, mis ilmus 1587. aastal. Stevini meetodit, mis põhineb arutlusel, et tasakaal vedelikus ei muutu, kui osa vedelikust tahkestuks tihedust muutmata, kasutatakse praegugi laialdaselt hüdromehhaanika mitmesuguste küsimuste lahendamiseks.


Joon. 153. Areomeeter — riist vedelike erikaalu määramiseks.

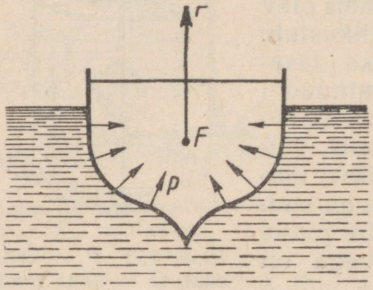
Archimedese seadusel põhineb üks lihtsamaid tahkete kehade *erikaalu* (1 cm^3 kaalu) määramise viise: uuritavat keha kaalutakse algul õhus, siis aga vees. Sel viisil määratud „kaalukaotus" võimaldab täpselt leida uuritava keha ruumala. Üks ja seesama ujuv keha vajub kergesse vedelikku sügavamale kui tihedamasse vedelikku. Archimedese seaduse sellel järeldusel põhineb vedelike erikaalu määramine *areomeetrite* abil. Areomeeter on ujuv keha, mille küljes on toru jaotustega. Jaotuste abil saab otsustada, kui sügavale vajub

areomeeter vedelikku (joon. 153). Vahest gradueeritakse areomeetreid tiheduse absoluutseis ühikuis, s. o. grammides cm^3 kohta, kuid enamikul juhtudel kasutatakse tinglikke tihedusskaalasid.

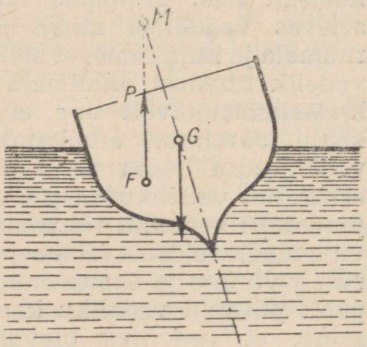
Archimedese seadus määrab laeva ujuvuse ja stabiilsuse tingimused.

Ujuva laeva tasakaalu puhul peab tema kaal olema võrdne väljatõrjutud vedeliku kaaluga. Väljatõrjutud vedeliku ruumala nimetatakse laeva *veeväljasurveks;* seda kasutatakse laeva, millel on antud süvis (veesistuvus), veepinnalseismisvõime mõõduna (ujuvuse mõõduna).

Laeva poolt väljatõrjutud vee ruumala peab olema jääv laeva mitmesuguste asendite puhul.



Joon. 154. Laeva kogu üleslükkejõud *P* on rakendatud rõhumistsentrisse *F*.



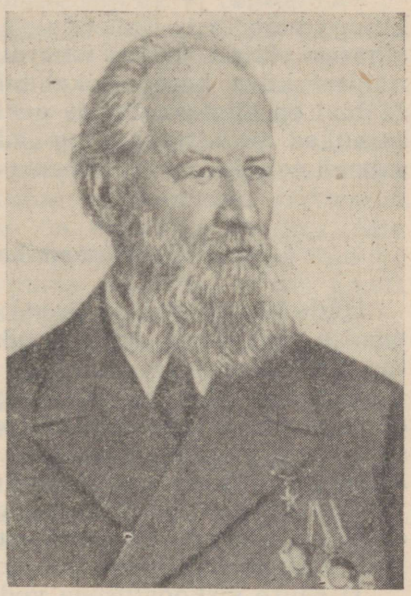
Joon. 155. Laev säilitab stabiilsuse joonisel kujutatud jõupaari mõjul. *G* — laeva raskuskese, *M* — metatsenter.

Üleslükkejõud on jaotatud kogu laeva veealusele osale (joon. 154). Igale laeva veealusele väikesele, elementaarsele pinnaosale mõjub elementaarne tõstejõud. Kõigi nende jõudude resultant *P* on laeva kogutõstejõud ehk *ujuvus.* Selle resultandi rakenduspunkti (joonisel 154 punkti *F*) nimetatakse *suurusekeskmeks (rõhumise tsentriks).* Suurusekese ühtib väljatõrjutud vedeliku raskuspunktiga. Laeva mitmesuguste asendite puhul nihkub tema poolt väljatõrjutud vedeliku raskuspunkt ehk teiste sõnadega suurusekese *F* (joon. 155).

Selleks et laev säilitaks stabiilsuse, on vajalik, et laeva suurusekese ja laeva raskuspunkt asuksid samal vertikaaljoonel. Laeva stabiilsuse iseloomustamiseks kasutatakse niinimetatud *metatsentri* mõistet. Metatsenter (joonisel 155 punkt *M*) on kahe joone lõikepunkt. Üks neist joontest läbib laeva raskuspunkti ja esialgset suurusekeskme asendit (kui laev ei ole kaldu); teine on vertikaaljoon, mis läbib suurusekeset laeva kaldasendi puhul.

Kui metatsenter asub raskuskeskmest kõrgemal, siis laeva kaal ja üleslükkejõud moodustavad laeva viltukaldumise puhul jõupaari (nagu seda näeme joonisel 155), mis viib laeva esialgsesse asendisse tagasi. Selle jõupaari moment on võrdeline metatsentri M kaugusega raskuspunktist G; seepärast loetakse laeva *stabiilsuse* mõõduks metatsentri ja raskuspunkti vahelist kaugust (lõik MG).

Laeva ujuvuse ja stabiilsuse õpetuse, arvestades lainetust ja õõtsumist, esitas L. Euler monograafias „Mereteadus" (1727. a.). Seda teadusharu arendas väljapaistev vene laevastikujuht S. O. Makarov (aastatel 1870—1900) ja täpsustas akadeemik A. N. Krõlov (1896 ja edaspidi).



Aleksei Nikolajevitš Krõlov (1863—1945).

Kui laeva tekib auk, siis kaob normaalne stabiilsus ja laev võib suureneva kallaku tõttu ümber minna ning hukkuda. Varemalt püüdsid laevaehitusinsenerid tagada laeva uppumatust, asetades temasse võimsaid pumpi ja suurendades vettläbilaskmatute vaheseinte (šottide) arvu laeva keres. Täiesti uue ja efektiivsema võitlusviisi laeva uppumise vastu esitas akad. Aleksei Nikolajevitš Krõlov, vene laevaehituse teadusliku kooli looja.

A. N. Krõlov lähtus sellest, et vee ärajuhtimisvahendid osutuvad sageli mittepiisavaiks. Ühe ruutmeetri suurusest august paiskub igas sekundis sisse mitu tonni vett, aukude suurus võib ulatuda aga kümnete ruutmeetriteni. Vigastatud laeva ohtliku kallaku kiireks vältimiseks tegi A. N. Krõlov ettepaneku lasta ka laeva vigastamata sektsioonidesse vett vastukaaluks sektsioonidele, mis täitusid veega vigastuse tõttu. Süvise suurenemise arvel laeva kallakus kaob ja laev võib jätkata liikumist.

Archimedese seadusele alluvat tõstejõudu õhus kasutatakse *aerostaatide* lendamisel. Esimese lennu maailmas („õhupallil" — primitiivsel soojusaerostaadil) teostas Krjakutnõi 1731. a. Rjazanis 52 aastat enne Prantsusmaal toimunud vendade Montgolfier'de lendu soojuslikul aerostaadil. Hiljem hakati aerostaatide täitmiseks kasutama valgustusgaasi, vesinikku ja heeliumi. Kinniseotud

lohekujulisi aerostaate kasutatakse sõja ajal vaatluspunktidena ja õhukaitses (õhutõkkeaerostaadid). Vabadel kerakujulistel aerostaatidel ja *stratostaatidel* (hermeetiliselt suletud gondlitega aerostaatidel) oli suur osatähtsus atmosfääri ülemiste kihtide uurimisel. 1933. ja 1934. aastail nõukogude lendurid tõusid stratostaatidel tolle aja kohta rekordilistele kõrgustele (kuni 22 km).

Mootoriga ja propelleriga varustatud ning voolujoonelise kujuga aerostaate nimetatakse dirižaabliteks. Käesoleva sajandi alguses ehitati ja kasutati dirižaableid, mille kergeist metallribidest kõva kere oli kaetud puuvillase lakitud riidega. Dirižaablid on hiiglasuured ja aeglase liikumisega, neid on raske ja keerukas valmistada ning juhtida. Seetõttu pärast käesoleva sajandi neljakümnendaid aastaid neid enam ei kasutata.

§ 56. Hüdrodünaamika põhimõisted ja -suunad.

Hüdrodünaamika uurib esiteks vedeliku liikumise seadusi ja teiseks neid jõude, millega liikuv vedelik mõjub temasse asetatud kehadele.

Vedelike liikumise tõelise pildi seletamisel mehhaanika seadustega on tarvis arvestada peale vedeliku osakeste inertsi ka sisehõõrdejõudude olemasolu (gaaside väga suurte liikumiskiiruste puhul peale selle ka kokkusurutavust).

Viskoossuseks e. püdeluseks nimetatakse vedelike ja gaaside omadust takistada oma osakeste suhtelist liikumist.

Mittetahkeid aineid võib jaotada kolmeks rühmaks järgmiselt:

1) suure viskoossusega vedelikud,
2) väikese viskoossusega vedelikud ja
3) gaasid.

Nende rühmade vahele ei saa mehhaanika seisukohalt tõmmata teravat piiri, üleminek ühest rühmast teise toimub pidevalt.

Viskoossed vedelikud (näiteks siirup, kingsepapigi, soojendatud asfalt) erinevad tahketest kehadest peamiselt nende kuju muuta püüdvatele välistele mõjudele erineva reageerimise poolest. Kui tahkete kehade deformatsioon on võrdeline mõjuva jõuga (Hooke'i seadus), siis viskoosse vedeliku deformatsioon sõltub mitte niivõrd jõu suurusest, kuivõrd jõu mõjumise ajast. Küllalt suure ajavahemiku vältel ükskõik kui väikene jõud võib tekitada viskoosse vedeliku kuitahes suure deformatsiooni: asfalt voolab aeglaselt vaadi avast; kork, mis on üle ujutatud kingsepapigiga, tõuseb aja jooksul tema pinnale, liivatera, mis on langenud siirupi pinnale, vajub aeglaselt sügavamale ja langeb põhja.

Viskoossuse ja kokkusurutavusega seoses olevad nähtused muudavad vedelike ja gaaside liikumise uurimise palju keerulisemaks. Orienteerumiseks küllaltki keerulises vedelike ja gaa-

side liikumise pildis on kasulik alguses vaadelda küsimust lihtsustatult, arvestamata viskoossuse ja kokkusurutavuse mõju. Nagu mainiti peatüki alguses, nimetatakse kujuteldavat vedelikku, mis on täiesti kokkusurumatu ja mitteviskoosne, *ideaalseks vedelikuks.*

Kuna erinevate ainete juures viskoossus ja kokkusurutavus ei esine võrdsel määral, siis on endastmõistetav, et teatud juhtudel nende omaduste esinemine võib olla oluline, teistel juhtudel aga mitteoluline. Näeme, et isegi kergesti kokkusurutavad gaasid mitte liiga suurte kiiruste puhul käituvad gaasis liikuva kõva keha suhtes analoogiliselt mittekokkusurutava vedelikuga.

Väikeste liikumiskiiruste puhul on peamiselt hõõre (viskoossus) tekkepõhjuseks jõududele, mis mõjuvad liikuvasse vedelikku asetatud kehale. Suurte kiiruste puhul on peamiseks põhjuseks nende vedelikuosakeste inerts, mis on sunnitud muutma oma liikumist, möödudes nende teele asetatud kehast. Nende jõudude (viskoossuse- ja inertsijõudude) suurus ja suund sõltub ainult vedeliku ja temas asetseva keha *suhtelisest* liikumisest.

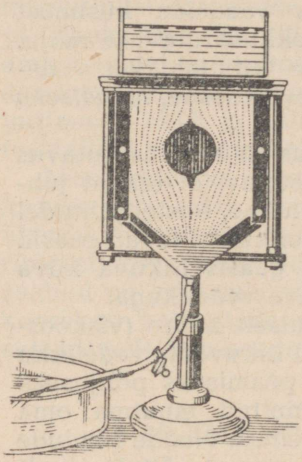
Vedelikumassi inertsist tingitud jõudude määramiseks on vajalik teada üksikute vedelikuosakeste trajektoore ning kiirusi enne ja pärast keha vedeliku voolu asetamist. Vedelikuosakeste kiirus mitmesugustes voolu osades on erinev. Täieliku kujutluse saamiseks kiiruse sihist igas voolu punktis kasutatakse seda voolu kujutaval joonisel jooni, mille siht igas punktis ühtib kiiruse suunaga. Neid jooni nimetatakse *voolujoonteks.* On kokku lepitud kujutada voolujooni selliselt, et nende t i h e d u s kujutaks määratud mastaabis k i i r u s e s u u r u s t mingis voolu osas (piirkonnas)[1].

Statsionaarse voolamise puhul jääb vedeliku kiirus erinevates voo punktides kogu aeg muutumatuks. Sel juhul voolujooned ühtivad üksikute vedelikuosakeste trajektooridega. Igast küljest voolujoontega piiratud voo osa nimetatakse *voolutoruks.*

Voolujooni võib teha nähtavaks, segades vedelikku alumiiniumpronksi pulbrit või lastes temasse värvi joa.

Joonisel 156 on kujutatud seadeldis, mida kasutatakse voolujoonte vaatlemiseks. See koosneb tasapinnalisest klaasanumast, mis üleval laieneb vertikaalse vaheseinaga poolitatud reservuaariks. Reservuaari üks pool täidetakse puhta veega, teine pool värvitud veega. Mõlemad reservuaarid on ühendatud väikeste avade kaudu anuma sisemusega. Eespoolasuva reservuaari avad on nihutatud tagumise reservuaari avade suhtes avade poole vahemaa võrra. Värvitud ja puhta vee joad voolavad vaheldumisi anuma tasapinnaliste klaasseinte vahele ja annavad vedeliku voolujoonte selge pildi.

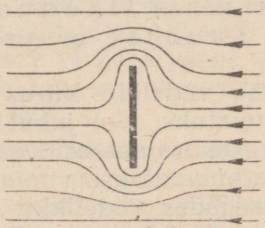
[1] Analoogiliselt kujutatakse *jõujoonte* abil elektri-, magnet- või gravitatsioonivälja tugevuse vektori sihti mistahes punktis.



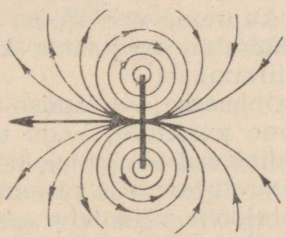
Joon. 156. Seadeldis voolujoonte vaatlemiseks.

Ülalpool kirjeldatud viisil voolujooni vaadeldes võib märgata, et vedeliku voolamise iseloom sõltub suurel määral anuma seinte lähedusest. Seinte lähedal mõjuvad kiiruste jaotusele hõõrdejõud ja voolu kuju. Seintest kaugemal on kiiruste jaotus tingitud ainult voolu kujust. Nimetame esimest keerulisemat juhtumit *hõõrdevoolamiseks*, teist *vabaks voolamiseks*.

Joonistel 157 ja 158 on kujutatud vaba statsionaarse voolu voolujooned, mis ümbritsevad vooluga risti asetatud õhukest plaati. Joonisel 157 on kujutatud pilt, mida näeb plaadi suhtes liikumatu vaatleja. Vedeliku osakesed, kohates plaadikest, kalduvad kõrvale esialgsest teest; plaadikese taga lähenevad mõlemast küljest plaadikest haaravad vedelikujoad jälle üksteisele. Joonisel 158 on kujutatud pilt, mida näeb vedeliku suhtes liikumatu vaatleja, kellest möödub plaadike: liikuva plaadikese poolt ette ja kõrvale paisatud vedeliku osakesed liiguvad ümber tema äärte ja tungivad plaadikese taga vabanenud ruumi.



Joon. 157. Vedeliku voolamine plaadikese ümber, vaadelduna plaadikese suhtes liikumatu vaatleja poolt.



Joon. 158. Sama voolamine, mis on kujutatud joonisel 157, vaadelduna vedeliku suhtes liikumatu vaatleja poolt.

Sel juhul voolujooned on väga sarnased tasapinnalise juhi jõujoontele, kui juht on ühelt poolt laetud positiivse, teiselt poolt negatiivse laenguga. Selle analoogia põhjal, mida võib kergesti matemaatiliselt arendada ja süvendada, *nimetatakse ilma makroosakeste* (s. o. ilma ruumielemendis oleva vedeliku) *pöörlemiseta vaba voolamist potentsiaalseks voolamiseks.*

Kui voolamisele kaasneb vedeliku makroosakeste pöörlemine, siis nimetatakse voolamist *turbulentseks*.

Hõõrde arvestamine teeb vedeliku liikumise võrrandid palju keerulisemaks. Peale selle, nagu selgitatakse allpool, tekitab viskoossus teatud liikumiskiiruste puhul omapärase liikumise püsivuse rikkumise (kogu voo nn. turbulentsuse). See teeb vedeliku seda liiki voolamise matemaatilise analüüsi eriti keeruliseks. Seepärast teoreetiline hüdrodünaamika oma esialgsel arenguperioodil piirdus ideaalse vedeliku liikumise uurimisega.

Teoreetilise hüdrodünaamika loojaks on ülemaailmselt tunnustatud Peterburi akadeemik Leonhard Euler[1]. Teoreetilise hüdrodünaamika osa, mis käsitleb turbulentset liikumist ideaalseis vedelikes, töötasid välja Helmholtz ja V. Thomson (Kelvin).

Lähtudes Euleri võrrandeist tõestas Helmholtz 1858. a., et ideaalses vedelikus kord tekkinud *turbulentne liikumine* ei saa kaduda. Keeriste tekkimine ja kadumine reaalseis vedelikes on tingitud viskoossusest. Ideaalses vedelikus, kus pole hõõret, kõik turbulentses liikumises olevad vedelikuosakesed liiguvad koos keerisega, kusjuures keerise ristlõike pindala tuletis pöörlemise kiiruse järgi on jääv piki keerise telge ja ei muutu keerise liikumisel vedelikus. Nendes Helmholtzi tähelepanuväärseis teoreemides avaldub liikumishulga momendi jäävuse seadus vedelikele rakendatuna. Tuleb märkida, et keerise poolt häiritud vedeliku liikumine väljaspool keerist ikkagi säilitab

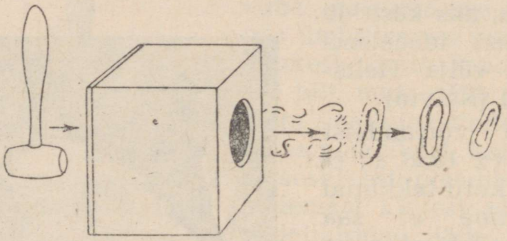


Joon. 159. Järvest tõstetud veega täidetud keeris (vesipüks) järve kohal.

[1] Euler paistis silma ebatavalise loomingulise aktiivsusega ja erakordse töövõimega. Peale selle oli ta matemaatikas geniaalselt andekas. Euleri teaduslikud traktaadid on väga suureks panuseks teadusesse. Tema neljakümne kolmes köites ilmunud teaduslike tööde esituse kompaktsus ja mitmekülgsus on imestamisväärne. Koos hüdrodünaamika rakendusliku suuna rajajatega Lomonossovi ja Daniel Bernoulliga Euler kindlustas Venemaale 18. sajandi esimesel poolel esikoha teaduslikus progressis. Eriti hüdrodünaamika alal osutuvad Euleri tööd klassikalisteks ja säilitavad oma juhtiva tähenduse praegugi. Ideaalse vedeliku voolamist Euler analüüsis matemaatiliselt 1755. aastal väljaantud monograafias „Vedelike liikumise üldised printsiibid".

potentsiaalse iseloomu, s. t. väljaspool keerist asuvad vedeliku makroosakesed ei võta osa pöördliikumisest.

Ideaalses vedelikus keerised võivad lõppeda ainult kas vedeliku piirpinnal (anuma seintel ja vabal pinnal) või sulguda rõngaks. Esimest liiki keerise näiteks on vesipüks (joon. 159). Ringikujulisi keeriseid võib demonstreerida, täites ümmarguse avaga kasti suitsuga ja lüües tagumisele elastsele kasti seinale vasaraga (joon. 160). Kui õhk paiskub välja avast, siis väljapaisatud õhumassi väline osa pöördub tagasi



Joon. 160. Riist õhus tekkivate keeriste demonstreerimiseks.



Joon. 161. Rõngakujulises keerises vedeliku liikumist selgitav mudel.

hõõrde tõttu vastu ava ääri. Samal ajal õhumassi sisemine osa liigub edasi, mis tekitabki keerise.

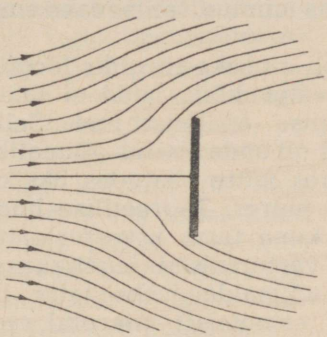
Kujutluse vedeliku liikumisest ringikujulises keerises võib saada järgmisel viisil. Kujutleme, et toru sisse on tihedalt asetatud ümmargune kummirõngas, mida läbib varras (joon. 161). Kui liigutada varrast toru sees, siis rõngas pöörleb libisemiseta, liikudes edasi varda liikumise poole kiirusega.

Näis, et viskoossuse esinemist võib kvantitatiivselt seisukohalt paljudel juhtudel arvestamata jätta (kuivõrd selliste vedelike nagu vesi ja seda enam gaaside viskoossus on väike). Kuid hüdrodünaamika areng näitas, et tavaliselt reaalsete vedelike liikumine põhiliselt erineb ideaalse vedeliku liikumisest.

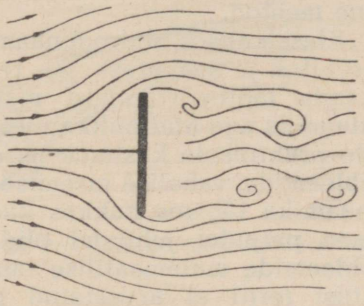
Viskoossus on keeriste tekkimise põhjuseks (eriti siis, kui vedeliku voos on „lahutuspind", kus kiirus muutub hüppeliselt) ja seepärast juba väikene viskoossus võib kvalitatiivselt muuta kogu vedeliku liikumist.

Näiteks joonisel 157 on näidatud, kuidas voolaks vedelik plaadikese ümber, kui vedelik oleks ideaalne ja ei esineks pidevuse katkemisi kiiruse muutumisel. Euler tõestas, et sel juhul voolu asetatud plaadikesele ei mõjuks summaarselt mingit jõudu, kuna rõhk tema eesmisele pinnale tasakaalustataks rõhuga tagumisele pinnale (sellest kõneldakse lähemalt hiljem, paragrahvis 62).

Kui oletada, et plaadikese äärtel on võimalik vedeliku kihistumine naaberkihtide kiiruse järsu hüppega, kuid voolamise potentsiaalse iseloomu säilimisega, siis voolujoontel on joonisel



Joon. 162. Mittepidev potentsiaalne voolamine plaadikese ümber.



Joon. 163. Voolu tõeline pilt plaadikese läheduses.

162 näidatud kuju. Sellisel juhul plaat osutaks liikumisele takistust, kuid 2,27 korda väiksemat kui tõeliselt. Tegelikult on voolujoontel joonisel 163 näidatud kuju. Kiiruse hüppelise muutuse tõttu plaadikese äärel vedeliku pinnakihtides avaldub intensiivselt vedeliku viskoossus, mille tulemusena tekivad keerised. Viimased vähendavad rõhku plaadikese tagumisele küljele.

Isegi väikese viskoossuse suur kvalitatiivne mõju vedeliku tegelikule liikumisele muutis Euleri ideaalsete vedelike hüdrodünaamika järeldused praktiliselt tähtsate küsimuste lahendamisel vähe kasutatavaiks. See ilmnes juba esimestel teoreetilise hüdrodünaamika arengu aastail. Seepärast rangete, kuid mõningal määral tegelikkusest lahkuminevate matemaatiliste meetodite arenemise kõrval arenes hüdrodünaamikas teine, matemaatiliselt vähem range rakenduslik suund — hüdraulika. Selle alused loodi samuti Venemaal, nimelt Daniel Bernoulli poolt, kes on 1738. a. ilmunud klassikalise traktaadi „Hüdrodünaamika" autoriks.



Daniel Bernoulli (1700—1782).

Järgmistel aastatel rakenduslik suund hüdromehhaanikas seadis oma ülesandeks võimalikult täieliku faktide tundmaõppimise, mis oma lihtsuse poolest oleksid sobivad arvutusteks inseneridele. Rakenduslikus hüdromehhaanikas muutus valitsevaks empiiriline meetod.

„Klassikalises hüdrodünaamikas oli ainsaks reegliks loogiline ülesehitus ja seepärast jäi temast välja kõik, mida ei saanud tuletada lähtevõrrandeist matemaatilise analüüsi teel. Sellele vastandina aga hüdraulika ülesandeks oli anda vastus võimalikult igale praktilisele küsimusele, seejuures mitte peatudes üksikute probleemide vahelise sisemise seose juures. Teoreetilise hüdrodünaamika tähtsus hakkas kaduma, kuna tema arvestuste tulemused paljudel juhtudel olid otse vastupidised tegelikkusele; probleemide matemaatilise uurimise võimaldamiseks tehti lihtsustusi (eriti ei arvestatud hõõrde esinemist), mis olid sageli lähendustena lubamatud. Teiselt poolt hüdraulika aga jagunes reaks üksikprobleemideks. Iga sagedamini esinevat probleemi lahendati spetsiaalsete eksperimentide abil ja koefitsientide kasutamisega, mida leiti nende eksperimentide põhjal. Hüdraulika muutus üha enam koefitsientide teaduseks.

19. sajandi lõpul ja 20. sajandi algul tekkis mõlemalt poolt kriitiline suhtumine sellisesse olukorda ning püüti lähendada ja ühendada mõlemaid teineteisest eemalduvaid teaduslikke suundi."[1]

Sellise sünteesi teostamist nõudis uute tööstusharude — turbiini- ja lennukiehituse — tekkimine.

Uuele sünteseerivale suunale hüdrodünaamikas panid aluse N. E. Žukovski (alates 1896. a.) ja Prandtli (alates 1904. aastast) tööd.

§ 57. Bernoulli võrrand.

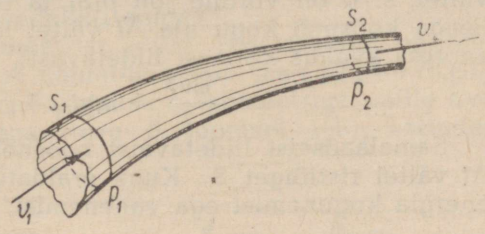
Jälgime vedeliku voolamist voolutorus. Voolutoru ristlõige erinevates kohtades võib olla erinev ja sellele vastavalt muutub voolu kiirus. Vedelikujuga ei katke kusagil. Lähtudes sellest joa pidevuse tingimusest on kerge tõestada, et *kokkusurumatu ja mitteviskoosse vedeliku kiiruse ja voolutoru ristlõike korrutis on jääv suurus.*

Tõepoolest, ühes sekundis ühest voolutoru otsast sissevoolava vedeliku ruumala peab olema võrdne teisest otsast väljavoolava vedeliku ruumalaga, sest vedelikuosakeste liikumine on kujutatav voolujoontega ja seepärast ei või olla voolu läbi voolutoru külgpinna; vedelik ei pidurdu voolutoru sees ja tema tihedus on jääv. Eraldame mõttes mingi voolutoru osa (joon. 164) ja tähis-

[1] О. Титьенс «Гидро- и аэродинамика, по лекциям проф. Л. Прандтля», М.—Л. ГТТИ, 1933, стр. 11—12.

tame voolutoru ristlõike pindala eraldatud osa alguses tähisega S_1 ja lõpus tähisega S_2; vedeliku kiirused nende lõigete kohal olgu v_1 ja v_2. Ühe sekundi jooksul läbi voolutoru vaadeldava osa voolab vedelik ruumalaga v_1S_1; vastasseisvast otsast voolab ühes sekundis läbi vedelik ruumalaga v_2S_2. Ülalöeldu põhjal

$$v_1S_1 = v_2S_2.$$



Joon. 164. Bernoulli võrrandi tuletamiseks.

See võrrand on õige voolutoru mis tahes kahe ristlõike puhul; järelikult vastavalt ülaltoodud teoreemile kehtib iga voolutoru ristlõike puhul seos

$$vS = const. \qquad (1)$$

Kitsamas voolutoru osas on vedeliku kiirus suurem kui laiemas. Sattudes voolutoru kitsasse kohta vedelik liigub kiirendatult; järelikult kitsasse voolutoru ossa voolavale vedelikule mõjub laias voolutoru osas olev vedelik mingi jõuga.

On silmanähtav, et see jõud tekib rõhu erinevusest voolutoru laiemas ja kitsamas kohas. Jõud on suunatud kitsama osa suunas; järelikult laiemates voolutoru osades on rõhk suurem kui kitsamates kohtades. Teiste sõnadega: *voolutoru kitsamates kohtades rõhk on väiksem.*

Voolaku aja Δt jooksul vedeliku mass m voolutoru eraldatud osa ühes otsas läbi ristlõike S_1. Tähistame voolu kiiruse selles toru osas v_1-ga ja rõhu p_1-ga. Sama ajavahemiku Δt vältel läbi voolutoru teise ristlõike S_2, kus vedeliku kiirus on v_2 ja rõhk p_2, voolab välja niisama suur vedeliku mass m. Statsionaarse voolamise puhul eraldatud voolutoru osas ei toimu energia suurenemist ega vähenemist. Järelikult energia, mis antakse edasi aja Δt vältel läbi ristlõike S_1, peab olema võrdne sama aja vältel läbi ristlõike S_2 voolava energiaga. Ajavahemiku Δt vältel voolab läbi ristlõike S_1 vedeliku hulk massiga m. Tema kineetiline energia on $\frac{mv_1^2}{2}$ ja potentsiaalne energia mgh_1 (g — raskuskiirendus, h_1 — ristlõike S_1 raskuspunkti kõrgus mingi nivoo, näiteks merepinna suhtes). Järelikult aja Δt vältel läbi ristlõike S_1 antakse konvektsiooni[1] teel edasi energia:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Peale energia edasiandmise konvektsiooni teel esineb sel juhul veel energia ülekanne surve tõttu. Nimelt tagapool asetsev

[1] Vt. § 30.

vedelik teeb tööd eespool asetseva vedeliku edasinihutamisel. Survega aja Δt vältel läbi ristlõike S_1 edasiantud energia on võrdne tööga, mida teeb ristlõike S_1 taga asetsev vedelik aja Δt vältel, s. t. on võrdne jõu p_1S_1 ja teepikkuse $v_1\Delta t$ korrutisega. Seega koosneb kogu aja Δt vältel läbi ristlõike S_1 edasiantava energia avaldis kolmest liidetavast:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1S_1v_1\Delta t.$$

Samalaadseist liidetavaist koosneb ka energia, mis läbib aja Δt vältel ristlõiget S_2. Kuna eraldatud voolutoru osas ei toimu energia kogunemist ega vähenemist, peab kehtima võrdus:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1S_1v_1\Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2S_2v_2\Delta t.$$

Vastavalt joa pidevuse tingimusele aja Δt vältel voolutorru sissevoolava vedeliku ruumala, s. t. $S_1v_1\Delta t$ on võrdne vedeliku ruumalaga, mis sama ajavahemiku vältel voolab voolutorust välja:

$$S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t.$$

Jagame eelmise võrrandi mõlemaid pooli nende võrdsete ruumaladega ja arvestame asjaolu, et vedeliku mass jagatud tema ruumalaga $\frac{m}{Sv\Delta t}$ on vedeliku tihedus ϱ. Saame Bernoulli võrrandi ehk teoreemi:

$$\frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 + \varrho gh_1 = \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2 + \varrho gh_2. \qquad (2)$$

Selles võrrandis rõhk p väljendatakse düün/cm^2-tes, kõrgus h — cm-tes, tihedus ϱ — g/cm^3-tes ja kiirus v — cm/sek-tes; $g = 981$ cm/sek^2.

Tehnilises ühikute süsteemis rõhk p väljendatakse kilogrammides ruutmeetri kohta või veesamba millimeetrites, kõrgus h meetrites, tihedus ϱ massi tehnilistes ühikutes kuupmeetri kohta (selleks ϱ, väljendatuna ühikutes kg/m^3, jagatakse 9,81-ga)[1], kiirus v väljendatakse m/sek-tes; $g = 9{,}81$ m/sek^2.

Vedeliku voolamisel mööda horisontaalset tasapinda vedeliku potentsiaalne energia jääb muutumatuks ja Bernoulli võrrand lihtsustub:

$$p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2}.$$

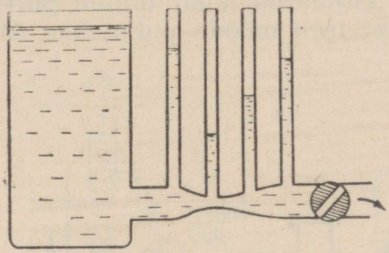
Rõhk p on *staatiline* rõhk (joon. 202). Ta sõltub toru ristlõikest (joon. 165). Suurust $\frac{\varrho v^2}{2}$ nimetatakse *dünaamiliseks* rõhuks. On kerge veenduda, et tal on samuti rõhu dimensioon. Näeme,

[1] Tuletame meelde, et sümbol *kG* tähendab kilogramm-jõudu, sümbol *kg* tähendab kilogramm-massi. Definitsiooni järgi massi tehniline ühik on selline mass, mis jõu 1 *kG* mõjul saab kiirenduse 1 *m/sek*^{2}. Seega 1 *mtü* = 9,81 *kg*. Järelikult tiheduse ϱ väljendamiseks massi tehnilistes ühikutes 1 *m*^{3} kohta on ühikuis *kg/m*^{3} väljendatud tiheduse väärtus ϱ tarvis jagada 9,81-ga (§ 23).

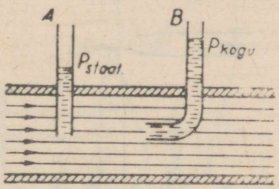
et vedeliku *horisontaalse voolamise puhul staatilise ja dünaamilise rõhu summa on jääv suurus.* Seda summat nimetatakse *kogurõhuks.*

Põhimõtteliselt tuleb staatilist rõhku mõõta manomeetri abil, mis on liikumatu voolava vedeliku suhtes.

Praktiliselt piisab manomeetrist, mille ava tasapind on asetatud joonisel 166 asendil *A* näidatud viisil paralleelselt voolujoontega. Kogurõhku mõõdetakse manomeetriga, mille ava asetseb risti voolujoontega (toru *B* joonisel 166); sattudes



Joon. 165. Kitsas kohas on staatiline rõhk Bernoulli võrrandi järgi väiksem kui toru jämedamas osas.



Joon. 166. Manomeetriliste torude asetus staatilise (*A*) ja kogurõhu (*B*) määramiseks.

avasse „kaotab" vedelik kiiruse; dünaamiline rõhk selles torus on võrdne nulliga, ülejäänud staatiline rõhk on võrdne voolava vedeliku staatilise ja dünaamilise rõhu summaga, järelikult manomeeter näitab kogurõhku. Joonisel 166 kujutatud toru *B* nimetatakse *Pitot' toruks.* Muidugi võib joonisel 166 kujutatud manomeetri torusid *A* ja *B* asendada torudega, mis ühendavad voolava vedeliku metallmanomeetriga.

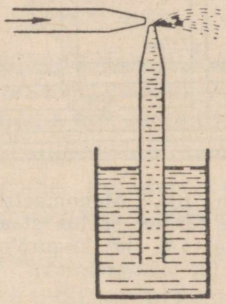
Bernoulli võrrandi tuletasime eeldusel, et vedeliku kineetilise ja potentsiaalse energia summa on jääv. Tegelikult osa sellest energiast kulub tööks hõõrdumisjõu ületamiseks. Seetõttu vedelik soojeneb ja vedeliku molekulaarse liikumise energia, mida lugesime konstantseks ja seepärast ei arvestanud, kasvab. Eeldasime ka, et vedeliku osakesed ei lähe läbi voolutoru külgpinna. Tegelikult aga soojuslik liikumine häirib vedeliku voolamist kindlat voolujoont mööda.

Seepärast ei saa Bernoulli võrrandit kasutada väga viskoossete vedelike puhul. Kuid selliste vedelike jaoks, nagu vesi, aga samuti ka õhu puhul, on Bernoulli võrrand küllalt täpne.

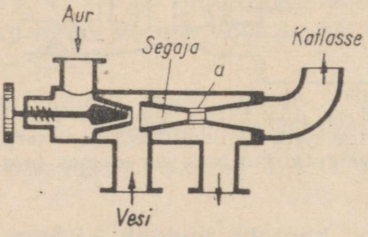
Riistad, mille tegevus põhineb Bernoulli võrrandil. Staatilise ja dünaamilise rõhu summa on jääv suurus, seepärast on voolavas vedelikus staatiline rõhk alati väiksem kui liikumatus vedelikus. Suurte kiiruste puhul võib staatiline rõhk muutuda koguni negatiivseks. Sel juhul toru kitsas osas voolav vedelik asetseb

igakülgse venituse olukorras; kuna aga vedeliku vastupidavus katkemisele on suur (§ 107), siis negatiivne rõhk võib muutuda võrdlemisi suureks. Tavaliselt siiski toimub vedeliku katkemine, kui rõhk langeb nullini — see on nn. *kavitatsiooni nähtus.* Kavitatsioon piirab kiirust, mida vedelik võiks omandada joa kitsenemise tõttu.

Kui rõhk toru jämedas osas on võrdne atmosfääri rõhuga, siis rõhk kitsas osas on atmosfääri rõhust väiksem. Sellel nähtusel põhineb paljude riistade tegevus, näiteks inžektori, veejoapumba, karburaatori ja ka joonisel 167 kujutatud laialt tuntud pulverisaatori töötamine. Horisontaalset toru mööda puhutakse õhku.



Joon. 167. Pulverisaator.



Joon. 168. Inžektor.

Kitsast avast väljuv juga imeb vertikaalsesse torru vett ja pihustab selle.

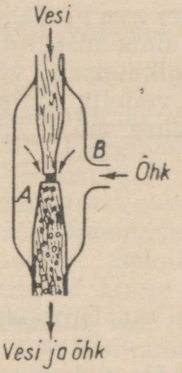
Inžektoriks nimetatakse aurujoapumpa, mida kasutatakse vee pumpamiseks vedurite, aurikute, aurumasinate jne. aurukateldesse. Joonisel 168 on kujutatud lihtsaim inžektor. Inžektorisse juhitakse katlast aur, mis düüsi läbides tungib suure kiirusega segajasse. Joa imeva mõju ja auru kondenseerumise tõttu rõhk segajas alaneb; temasse tungib vesi inžektori karbist. Suure kiirusega väljub veejuga segajast laienevasse difuusorisse ja kaotab oma kiiruse. Rõhk difuusoris tõuseb järsku, muutub suuremaks kui katlas, mille tõttu avaneb ventiil ja vesi tungib katlasse. Segaja ja difuusori vahele jäetakse pilu *a,* mille läbi inžektori käikulaskmisel väljub üleliigne vesi ja aur. Inžektori käikulaskmisel on vaja vähem auru kui tema töötamisel täie koormusega, seepärast on tema düüs varustatud reguleeriva nõelklapiga.

Samal printsiibil töötab veduri korstnas olev koonus, mis tekitab korstnas tugeva tõmbe.

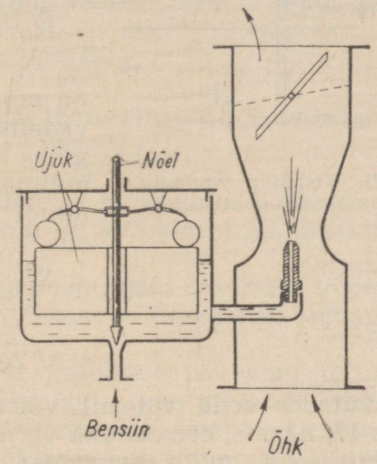
Veejoapumpi kasutatakse väikese hõrenduse saamiseks (joon. 169). Väljumisel pumbast on rõhk joas võrdne atmosfääri rõhuga;

seepärast joa kitsamas osas ja reservuaaris *A* tekib hõrendus. Toru *B* ühendatakse reservuaariga, millest tuleb õhk välja pumbata.

Veejoapumpi kasutatakse õhupumpadena auruturbiinide kondenseerimisseadeldiste juures, laboratooriumides jne. Nii vee- kui ka aurujoapumbad on väga töökindlad, kuid nende kasutegur on väga madal. Seepärast neid kasutatakse juhtudel, kui on olemas palju auru (töötanud auru) või vett, mida millegipärast ei saa kasutada ökonoomsemalt.



Joon. 169. Veejoapump.

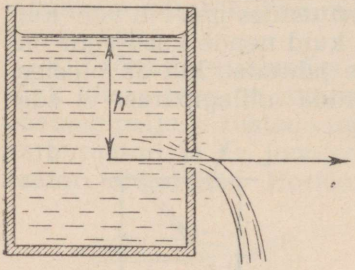


Joon. 170. Karburaator.

Karburaatoriks nimetatakse riista, mis toidab bensiiniga töötavat sisepõlemismootorit kütteseguga — kütteaine ja õhu seguga. Karburaatori ehitust kujutab joonis 170. Välisõhk imetakse läbi toru mootori silindrisse. Toru peenemas osas — difuusori alguses — tekitatakse alarõhk ja bensiin voolab ujukiruumist, kus rõhk võrdub atmosfääri rõhuga, läbi kalibreeritud düüsi (žikleri) difuusorisse ja aurub läbivoolavas õhus. Selleks et takistada bensiini isevoolu läbi žikleri, asub ujukiruumis ujuk, millega on ühendatud nõelklapp, mis sulgeb bensiini juurdevoolu paagist, kui tema tasapind tõuseb kõrgemale žikleri avast. Seguklapp reguleerib õhu kiirust, ja ühtlasi mootorisse sattuva bensiini hulka.

Vedeliku voolamine avast. Torricelli valem. Bernoulli teoreemi kasutades võib kergesti kindlaks teha, millise kiirusega voolab vedelik välja anuma külgseinas olevast avast, kas oma raskuse või vedeliku pinnale mõjuva püsiva rõhu mõjul. Joonisel 171 on kujutatud vedelik, mis voolab kiirusega *v* avast pindalaga *S*. Rõhku vedelikujoas võib lugeda võrdseks atmosfääri rõhuga *p*. Rõhku vedeliku vabale pinnale tähistame tähisega p_1; kui anum

on lahtine või ruum vedeliku vaba pinna kohal on ühendatud välisõhuga, siis sel erijuhul $p_1 = p$. Vedeliku pinna langemise kiirust anumas tähistame v_1-ga. Võtame voolutoru, mille üheks ristlõikeks on anuma horisontaalne lõige kõrgusel h avast, aga teiseks on joa ristlõige väljaspool anumat. Kirjutame selle toru nende kahe ristlõike kohta Bernoulli võrrandi:



Joon. 171. Vedeliku voolamine anuma seinas olevast avast.

$$p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} + \varrho g h = p + \frac{\varrho v^2}{2}.$$

Kui vedeliku vaba nivoo pindala on suur, võrreldes ava pindalaga, siis vedeliku pinna alanemise kiirust v_1 võib lugeda ligikaudselt võrdseks nulliga, ning kui vedelik voolab välja ainult oma raskuse mõjul ($p_1 = p$), siis

$$\varrho g h = \frac{\varrho v^2}{2},$$

millest:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{3}$$

Kõrvutades seda valemit võrrandiga (7), mis tuletati paragrahvis 17, näeme, et *vedeliku väljavoolamise kiirus v on võrdne selle kiirusega, mille omandaks vedeliku osakene, langedes vabalt nivoolt avani.*

Selle teoreemi püstitas Galilei õpilane Torricelli umbes 100 aastat enne seda, kui Bernoulli tuletas oma võrrandi.

§ 58. Hüdrauliline energia.

Vedeliku energiat nimetatakse hüdrauliliseks energiaks. Hüdraulilist energiat võib kasutada asetades voolava vedeliku teele vesiratta või kõverdatud töölabadega turbiini.

Düüsist väljavoolav juga, langedes labale kiirusega v_0, kaldub esialgsest suunast kõrvale ja voolab labalt ära kiirusega v'_0. Kui sekundis voolab mööda laba vedelikumass m, siis energia E, mis antakse ära igas sekundis, on võrdne vedeliku poolt sama aja jooksul kaotatud kineetilise energiaga:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv'^2_0}{2}. \tag{4}$$

Äraantav energia on suurim sel juhul, kui laba liigub kiirusega, mis on võrdne vedeliku liikumise poole kiirusega. Tõepoolest, kui laba on liikumatu, siis rõhk temale on suurim, kuid laba

ei liigu ja seepärast ei tee ka mingit tööd. Kui aga laba liigub vedeliku kiirusega, siis temale mõjuv hüdrodünaamiline rõhk on võrdne nulliga: töö on jällegi null. Tööd mõõdetakse jõu ja teepikkuse korrutisega; seepärast

laba poolt teostatud töö on suurim siis, kui laba liigub vahepealse kiirusega, mis on võrdne voolu poole kiirusega.

Ülalkirjeldatud viisil võib kasutada looduslikku vee-energiat: koskede, jõgede jt. energiat. Kui 1 sekundis langeb Q m^3 vett kõrguselt H, siis sellelt voolt võib teoreetiliselt 1 sekundis saada tööd 1000 QH *kGm*, või võimsust

$$P_{max} = \frac{1000\,HQ}{75}\,HJ.$$

Tegelik võimsus on väiksem teoreetiliselt arvutatust:

$$P = \eta P_{max} = \eta \frac{1000\,HQ}{75}\,HJ. \qquad (5)$$

Suurust η nimetatakse seadeldise *kasuteguriks*. Nüüdisaegsete hüdrauliliste seadmete kasutegur on 0,75 kuni 0,85, üksikjuhtudel ulatub ta 0,95-ni.

Vee-energiat elektrienergiaks muutvaid seadmeid nimetatakse hüdroelektrijaamadeks. Sobiv veesurve (langemiskõrgus) tekitatakse nendes tammide abil.

Tekitatud surve suuruse ja seadmete iseloomu järgi jaotatakse hüdroelektrijaamu madalrõhu- (vee nivoode vahe kuni 20 m), keskrõhu- (kuni 50 m) ja kõrgrõhujaamadeks (üle 50 m).

Igasuguse veejõumasina põhiosaks on tööratas, mille labadele mõjudes vesi paneb ratta liikuma. Kui selle juures kasutatakse voolava vee energiat, siis jõumasinat nimetatakse *vesiturbiiniks;* kui kasutatakse ainult vee kaalu, siis *vesirattaks.*

Surveturbiinide (joon. 172 ja 173) töötamisprintsiip on järgmine: vesi satub veealusesse kambrisse *A* suure rõhu all, kuid väikese kiirusega. Minnes läbi veealuse kambri kitsa osa ja *juhtratta 1*, vesi omandab suure kiiruse; tema potentsiaalne energia muutub kineetiliseks, mis antakse üle *töörattale 2*. Tööratta labad peavad olema ehitatud selliselt, et neid mööda liikudes vesi kaotaks võimalikult suure osa oma kiirusest.

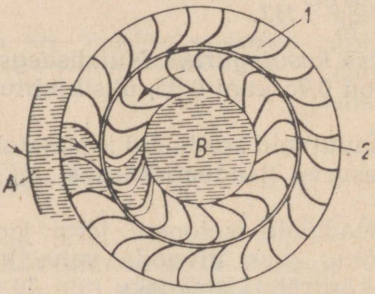
Surveturbiini tööratas on asetatud liikumatute labadega juhtratta sisse, mis juhivad vett risti tööratta teljele tema labade puutujate suunas. Kulgedes mööda tööratta labasid, voolab vesi välja tunduva kiiruse vähenemisega ratta telje suunas ja langeb imemistorru *B*.

Surveturbiinid on levinud väga laialdaselt. Neid kasutatakse väga mitmesuguste survete puhul (0,5 kuni 250 *m*). Nende kasutegur ulatub 94,5%-ni, võimsus aga ületab 100 000 HJ.

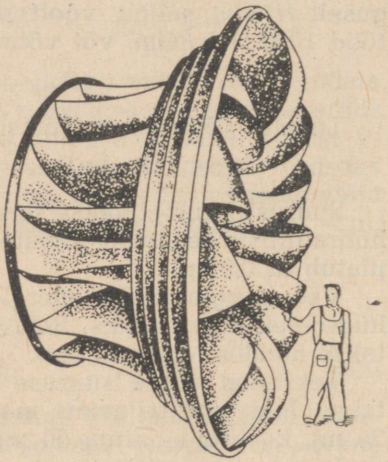
Väikese survega suurte veehulkade kasutamiseks tarvitatakse propellerturbiine, mille tööratas väliselt meenutab laeva kruvi. Propellerturbiinid tehakse liikuvate labadega, mis võimaldab iga-

suguse vee kulutuse puhul asetada labad sobivaimasse asendisse ja sellega suurendada turbiini kasutegurit.

Tavaliselt ühendatakse turbiinid vahenditult vahelduvvoolugeneraatoritega, sellepärast on vaja kindlustada turbiini tiirude arvu konstantsus mitmesuguste generaatori koormuste ja veesurvete puhul. See saavutatakse vee turbiini laskmise reguleerimisega. Selleks tehakse juhtlabad liikuvad. See võimaldab muuta turbiini sattuva vee hulka. Labasid reguleeritakse kas käsitsi või automaatseadmete abil, mis töötavad Watti regulaatori põhimõttel.



Joon. 172. *1* — surveturbiini juhtratas, *2* — tööratas.



Joon. 173. Surveturbiini tööratas.

Väikeste veehulkade kulutamisel ning suurte survete puhul kasutatakse vabajoaturbiine (joon. 174). Vesi langeb düüsist *H*, mille sees liigub vee juurdevoolu reguleeriv nõel, töörattale (joon. 175). Tööratas on varustatud koppadega, millel on sees niinimetatud nuga. Nuga poolitab veejoa, mis langeb kopale peaaegu rattapöia puutuja sihis. Vesi suundub kahele poole, kaotab kiiruse ja annab rattale oma kineetilise energia; selle arvel toimubki turbiini töö.

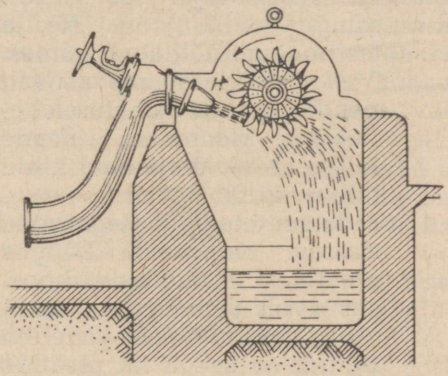
Vabajoaturbiine kasutatakse 100 m ja kõrgemate survete puhul. Nende võimsus ulatub 20 000 hobujõuni ja tiirude arv 200-ni minutis. Need turbiinid kasutavad ainult osa survest — vee ülemisest nivoost kuni töörattasse sisenemiseni, kuid suurte survete puhul väikesel kaol ei ole tähtsust.

Kogu maailma jõgede tööstuslikuks kasutamiseks sobiva veeenergia võimsust arvestatakse sadades miljonites kilovattides.

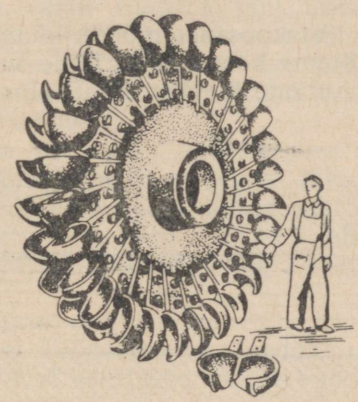
Vee hulk, mis igal aastal võtab osa ringkäigust, s. o. aasta jooksul aurub ja siis sajab vihma ning lumena, on umbes 520 000 km^3. Kui seejuures see veehulk oleks ühtlaselt jaotatud

kogu maakera pinnale, siis saaksime umbes 1 meetri paksuse veekihi. Kuid ainult $^1/_5$ sellest veehulgast langeb kuivale maale. Maismaalt aurub vett vähem, kui temale langeb: igal aastal kantakse kõikide jõgede poolt meredesse ja ookeanidesse 36 000 km^3 vett. See vastab kõikide jõgede ajaliselt keskmisele summaarsele „väljaminekule" umbes 1 miljon tonni vett sekundis.

Vee-energia — „valge söe" — tagavarade poolest on Nõukogude Liit maailmas esikohal. Kuid nende grandioossete ener-



Joon. 174. Vabajoaturbiini skeem.



Joon. 175. Vabajoaturbiini tööratas.

giaressursside laialdasele kasutamisele asus meie maa alles pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni seoses leninliku elektrifitseerimise plaaniga.

Revolutsioonieelsel Venemaal iga-aastane kõigi elektrijaamade elektrienergia kogutoodang ei ületanud kaht miljardit *kWh*. Viimase maailmasõja eel elektrienergia toodang NSV Liidus ületas 48 miljardit *kWh*.

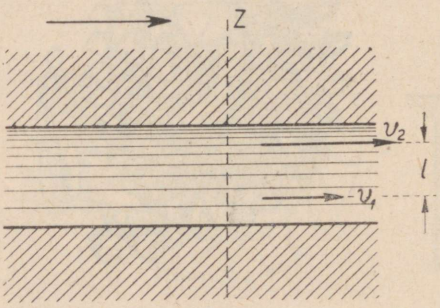
Esimestel aastatel pärast sõda olid meie rahva jõupingutused suunatud sõjas tekitatud purustuste kõrvaldamisele. Uuesti tuli püstitada Dneprogesi hüdroelektrijaam, mis oma võimsuse poolest (umbes pool miljonit kilovatti) oli kolmandal kohal maailmas. V. I. Lenini nimelise Dnepri hüdroelektrijaama taastamine teostati väga lühikese aja jooksul.

1950. aastal asus meie maa ehitama hiiglaslikke hüdroelektrijaamu: Kuibõševi hüdroelektrijaama Volgal võimsusega umbes 2 000 000 *kW*, Stalingradi hüdroelektrijaama võimsusega ca 1 700 000 *kW*, Kahhovka hüdroelektrijaama Dnepril, Tsimljanski hüdrosõlme jt. Tänu neile hiiglasuurtele ehitustele kasvab elektrienergia toodang aastas rohkem kui 20 miljardi *kWh* võrra. Nende

elektrijaamade grandioossete tammide ehitamine võimaldab niisutada põuastes rajoonides rohkem kui 14 000 000 *ha* viljarikast maad, mis on suurem kui Hollandi, Belgia, Taani ja Šveitsi pindala kokku. On alustatud eespoolnimetatutest veel võimsamate hüdroelektrijaamade ehitamist Siberi jõgedele. Ajalugu ei tunne sellist tööde ulatust.

§ 59. Viskoossus ja vedeliku voolamine hõõrdel.

Viskoossuse mõõdu leidmiseks kujutleme ette järgmist katset: võtame kaks plaati, mille vahel on mingi vedelik (joon. 176), ja nihutame ülemist plaati alumise suhtes noolega näidatud suunas.



Joon. 176. Vedelike sisehõõrde uurimiseks.

Vedeliku kihid, mis asuvad nende plaatide vahetus läheduses, kleepuvad nende külge. Kõik ülejäänud kihid nihkuvad, libisevad üksteisel seda suurema kiirusega, mida suurem on nende kaugus plaatidest. Vedeliku viskoossus avaldub selles, et tekib jõud, mis takistab vedeliku kihtide ja seega ka plaatide nihkumist.

Võtame z-telje risti kihtidega (s. t. ka risti kihtide liikumise kiirustega). Kihtide kiiruse tuletist $\frac{dv}{dz}$ nimetatakse *kiiruse gradiendiks*[1]. Kui kihtide kiirus koordinaadi z suurenemisel ühtlaselt kasvab, siis kiiruse gradient on jääv kogu vedeliku või gaasi massi kohta ja teda võib väljendada ka avaldise $\frac{v_2 - v_1}{l}$ kaudu, kus v_1 ja v_2 on mingi kahe õhukese kihi nihkumise kiirused ja l kihtide kaugus teineteisest (joon. 176).

Nii vedelikud kui ka gaasid takistavad kirjeldatud liikumist; seda takistust nimetatakse *viskoosseks takistuseks*, viskoossuseks ehk *sisehõõrdeks*.

Vedelike viskoossus on palju suurem gaaside viskoossusest. Omakorda selliste vedelike nagu mee, glütseriini ja kastoorõli viskoossus on tunduvalt suurem vee või piirituse viskoossusest. Newton leidis viskoossuse mehhaanilise põhiseaduse; sisehõõrde jõud F, mida on tarvis ületada selleks, et kaks vedeliku või gaasi naaberkihti nihkuksid teineteise suhtes, on võrdeline kihtide pind-

[1] Gradiendi mõistet selgitati § 29.

alaga S ja kiiruse gradiendiga $\frac{dv}{dz}$. Tähistades võrdetegurit tähega η, saame:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}, \tag{6}$$

kus suurust η nimetatakse *viskoossuse teguriks e. sisehõõrdeteguriks* (pöördväärtust $\frac{1}{\eta}$ nimetatakse *voolavusteguriks*).

Jõudu F võib vaadelda paljude jõudude summana, mis mõjuvad igasse „nihkepinna" elementaarsesse pinnaossa ds. „Nihkepinnaks" nimetame kahe teineteise vastu liiguva kihi ühist piiri S. Jõud F on vastassuunaline selle kihi suhtelisele kiirusele, millele ta on rakendatud. Seepärast sisehõõrdejõud püüab peatada kiiremini liikuvat kihti ja kiirendada aeglasemalt liikuvat kihti (analoogiliselt tahkete kehade hõõrdele).

Masina hõõrduvate osade vahele pannakse mitmesuguseid (tavaliselt vedelaid) määrdeaineid. Nende osade suhtelisel liikumisel määrdeaine kihis toimuvad ülalkirjeldatule sarnased suhtelised liikumised. Kuna vedelike sisehõõre on palju väiksem tahkete kehade liugehõõrdest, siis määrimine vähendab mehhaanilist takistust masinas.

Esimesena uuris igakülgselt sisehõõret vedela määrdeaine kihtides N. P. Petrov (§ 31). Olgugi et hõõrdeseaduse vedelikes avastas juba Newton, näisid siiski mõned vaatlused sellele vastu rääkivat. N. P. Petrov kulutas palju energiat katsetele, mis tõestasid, et sisehõõre vedelikes on võrdeline vedelikukihtide suhtelise kiirusega, nagu näitas Newton.

Katsetamisel N. P. Petrov lähtus eeldusest, et vedeliku ja tahke keha piiril esineb samuti hõõre, mida ta siiski ei avastanud. Hiljem näidati, et väga õhuke vedelikukiht kleepub tahke keha pinnale ja jääb vedeliku voolamisel liikumatuks.

N. P. Petrovi katsed andsid tõuke viskoossete vedelike hüdrodünaamika arenguks. N. P. Petrov ise kasutas oma arvukaid katseid ainult määrimise hüdrodünaamilise teooria väljatöötamiseks.

Vaatleme katset, mis illustreerib gaasilise keskkonna viskoossust. Väikene silindriline klaas asetatakse nii, et ta võib pöörelda oma sümmeetriatelje ümber. Selle klaasi sisse asetatakse niidi otsa teine väiksem klaas, mida eraldab esimesest kõikjal õhukiht. Kui väline klaas pannakse pöörlema, siis hakkab pöörlema ka sisemine. Siin välimise klaasi sisepinna küljes olev õhukiht mõjub sisehõõrdejõuga naaberkihile ja paneb selle liikuma; teine kiht mõjub kolmandale jne.; lõpuks sisemise klaasi välispinnal olev õhukiht paneb sellegi klaasi liikuma.

Sisehõõrdetegur[1] näitab jõu suurust düünides, mis paneb 1 *cm*

[1] Newtoni valemist on kerge leida sisehõõrdeteguri dimensiooni:

$$[\eta] = \left[\frac{f\triangle l}{S\triangle v}\right] = \frac{ML}{T^2}\,\frac{L}{L^2}\,\frac{T}{L} = ML^{-1}T^{-1}.$$

paksuse ja 1 cm^2 pindalaga vedelikukihi ülemise pinna liikuma alumise suhtes kiirusega 1 *cm/sek*. Viskoossuse ühikut 1 *düün sek/cm²* ehk 1 *g/cm sek* nimetatakse *puaasiks*[1].

Vedelike ja gaaside viskoossuse mõõtmiseks tarvitatavaid riistu nimetatakse *viskosimeetriteks*. Viskoossuse määramiseks vaadeldakse vedeliku voolamist läbi peene kapillaartoru (Pinkevitši viskosimeeter), kahe silindri, mille vaheline ruum on täidetud viskoosse keskkonnaga, suhtelist pöörlemist (Volarovitši viskosimeetrid) ja kuulikese langemist viskoosses keskkonnas.

Katse näitab, et sisehõõrdetegur on erinevatel ainetel muutuv laiades piirides ja sõltub temperatuurist. Allpool esitame mõnede vedelike ja gaaside sisehõõrdetegurid puaasides 18° C juures:

Kastoorõli	12	Eeter	0,0026
Glütseriin	11	Hapnik	0,0002
Piiritus	0,017	Õhk	0,00018
Vesi	0,0106	Vesinik	0,000088

Vedeliku voolamisel torus osa tema energiast kulub tööks hõõrdejõu ületamisel ja muutub molekulaar-soojusliku liikumise energiaks. Seepärast võib, arvestades paragrahvis 57 öeldut, kirjutada:

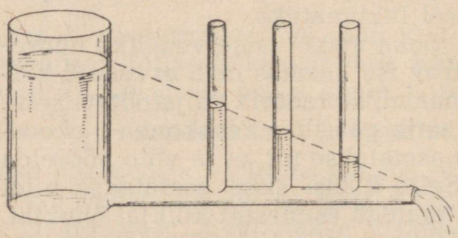
$$\left(\frac{mv_1^2}{2} + P_1S_1v_1\Delta t + mgh_1\right) - \left(\frac{mv_2^2}{2} + p_2S_2v_2\Delta t + mgh_2\right) =$$

= aja Δt vältel tehtud hõõrdumistöö.

Jagades mõlemaid pooli ruumalaga $S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t$ saame:

$$\left(\frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 + \varrho gh_1\right) - \left(\frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2 + \varrho gh_2\right) = const = \text{hõõrdumistöö}$$

ruumiühiku kohta ühes sekundis. (7)

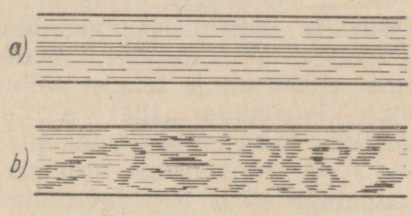


Joon. 177. Vedeliku voolamine torus. Rõhk on hõõrde tõttu toru lõpus väiksem kui alguses.

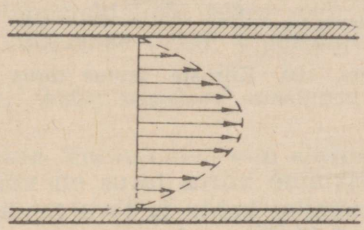
Kui vedeliku voolamise kiirus on ühesugune toru kogu ulatuses ja toru asetseb horisontaalselt, siis staatiline rõhk peab vähenema, sest sel juhul $p_1 - p_2 = const$. Rõhu vähenemist võib näha joonisel 177 kujutatud riista abil. Mida kitsam on toru ja mida suurem on vedeliku viskoossus, seda suurem on hõõrdetöö, ja seda kiiremini langeb rõhk. Surve langemine veevarustuse torudes kauguse suurenemisel veevarustuse jaamast seletub hõõrdega torus.

[1] Prantsuse füsioloogi ja füüsiku Poiseuille'i auks, kes esimesena uuris täpselt viskoossuse mõju vedeliku voolamisele kapillaartorus.

Voolamine hõõrdega on kas kihiline — *laminaarne*[1] või *turbulentne*[2]. Laminaarsel voolamisel vedelikukihid libisevad üksteisel seda suurema kiirusega, mida kaugemal nad asuvad anuma seintest. Eriti hästi saab vaadelda laminaarset voolamist peenes klaastorus (joon. 178-*a*). Torusse lastud värvijuga jääb teravalt piiritletuks seni, kuni voolamisel on kihiline iseloom. Kiiruse suurenemisel tekib moment, millal voolamine muutub turbulentseks: terav piir puhta ja värvitud vedeliku vahel kaob ja kogu toru osutub täidetuks korrapäratute keeriseliste liikumistega (joon. 178-*b*). Kiirust, mille puhul laminaarne voolamine muutub turbulentseks, nimetatakse *kriitiliseks kiiruseks.*



Joon. 178. Laminaarne (*a*) ja turbulentne (*b*) voolamine kapillaartorus.



Joon. 179. Kiiruste paraboolne jaotus torus laminaarse voolamise puhul.

Vedeliku statsionaarsel voolamisel kõikjal ühesuguse ristlõikega horisontaalses torus on kiirus suurim nendes voo ristlõike punktides, mis on kõige kaugemal toru seintest. Toru seintega vahetult kokkupuutuvad vedelikuosakesed jäävad liikumatuks. Joonisel 179 on näidatud, kuidas jaotub kiirus torus laminaarsel voolamisel. Kui toru raadius on r, siis kiirus v_x kaugusel x toru ristlõike keskpunktist

$$v_x = K(r^2 - x^2), \tag{8}$$

kus K on võrdetegur, mis sõltub rõhu vähenemisest ühe toru pikkusühiku kohta ja vedeliku viskoossusest ($K = {}^1/_4 \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{1}{\eta}$). Esitatud võrrand kujutab parabooli, mis on joonisel 179 kujutatud punktiirjoonega; seepärast kõneldakse, et *laminaarse voolamise puhul torus on kiirused jaotatud paraboolse seaduse järgi.*

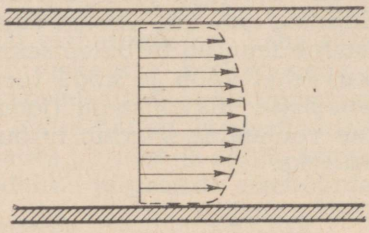
Katse näitab, et turbulentse voolamise (joon. 180) puhul on voolamiskiirus ligikaudu võrdeline seitsmenda astme juurega kaugusest seinast

$$v_x = K' \sqrt[7]{r - x}$$

(ebasileda seina puhul on juurenäitaja väiksem, näiteks 6 või 5).

[1] Ladina keeles *lamina* — plaadike.
[2] Ladina keeles *turbulentus* — rahutu.

Seintega vahetult kokkupuutuv ühe molekuli paksune vedeliku kiht jääb ka turbulentse voolamise puhul liikumatuks; õhukeses naaberkihis säilib vedeliku laminaarne liikumine.



Joon. 180. Kiiruste jaotus torus turbulentse voolamise puhul.

Praktiliselt on tähtis vedeliku keskmine voolamiskiirus torus. Võime kergesti veenduda selles, et ühe sekundi jooksul toru ristlõiget S läbiva vedeliku hulk Q on võrdne keskmise voolamiskiiruse ja ristlõike pindala korrutisega:

$$Q = vS.$$

Uurides katseliselt vedeliku voolamiskiirust torudes, leidis Hagen (1839. a.) ja temast sõltumatult Poiseuille (1841. a.), et vedeliku laminaarse voolamise keskmine kiirus torus on võrdeline rõhu langemisega toru pikkusühiku kohta ja toru raadiuse ruuduga ning pöördvõrdeline sisehõõrdeteguriga:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r^2}{8\eta}. \tag{9}$$

See on Hagen-Poiseuille'i seadus, mida kasutatakse arvutustes ja sisehõõrdeteguri määramises vedelikuhulga Q leidmise kaudu, mis voolab 1 sekundi jooksul läbi toru pikkusega l, kui toru otstes on konstantne rõhkude vahe $p_1 - p_2$. Kuna $Q = vS$ ja ümmarguse toru puhul $S = \pi r^2$, siis on kerge näha, et Hagen-Poiseuille'i seadust võib esitada kujul:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi r^4}{8\eta}.$$

Järelikult Poiseuille'i seaduse järgi ühe sekundi jooksul torust läbivoolanud vedelikuhulk teiste võrdsete tingimuste puhul on *võrdeline toru raadiuse neljanda astmega.*

Poiseuille'i seadust võib samuti teoreetiliselt tuletada Newtoni võrrandist (6).

Turbulentse voolamise puhul voolamiskiirus ei ole *võrdeline* mitte rõhu langemise esimese astmega, vaid *ruutjuurega rõhu langemisest:*

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda \frac{\varrho v^2}{2r}. \tag{11}$$

See on Chezy valem. Chezy valemis esinevat suurust λ nimetatakse *vedeliku voolamistakistuse teguriks.*

Chezy valemit võib kasutada mis tahes läbilõikega toru, aga ka lahtiste jõesängide puhul; sel juhul ülaltoodud Chezy valemis tuleb toru raadius r asendada niinimetatud *hüdraulilise raadiusega* r_h, mis on voo ristlõike pindala ja märgperimeetri suhe (märgperimeeter on voolu ristlõike pinna ääre pikkus ehk

ümbermõõt, kusjuures lahtise voo puhul vaba pinna laius ei kuulu märgperimeetrisse)[1].

Mõnikord kasutatakse Chezy valemit mitte ainult turbulentse, vaid ka laminaarse voolamise kohta selleks, et mitte kasutada kaht erinevat vedeliku voolamisseadust torus (Poiseuille'i seadust ja Chezy valemit). See on lubatud, kui lugeda voolamistakistuse teguri λ väärtuseks laminaarse voolamise puhul

$$\lambda = \frac{16\eta}{\varrho r v}.$$

On kerge veenduda, et selle λ avaldise asetamisel Chezy valemisse muutub Chezy valem Poiseuille'i seaduseks. Järelikult laminaarse voolamise puhul voolamistakistuse tegur väheneb kiiruse suurenemisel; turbulentse voolamise puhul λ peaaegu ei sõltu kiirusest.

§ 60. Piirkiht ja keeriste tekkimine. Turbulentse voo ehitus.

Kui mingil konkreetsel juhul võrrelda väikese viskoossusega vedeliku (näiteks vee või gaaside) tõelist voolamist voolamisega, mis esineks viskoossuse absoluutsel puudumisel, s. o. ideaalse vedeliku puhul, siis, nagu juba selgitati ülalpool (paragrahvis 56), tõeline voolamine on (seoses keeriste tekkimisega) oluliselt erinev ideaalse vedeliku voolamisest. Kuid peamine erinevus ei seisne mitte selles, et vedelikus on keerised; ideaalses vedelikus keerised mitte ainult ei või esineda, vaid keerised ideaalses vedelikus on ka sarnased väikese sisehõõrdumisega vedelikus tekkivate keeristega. Erinevus seisneb ainult selles, et esimesel juhul on keerised absoluutselt püsivad, teisel juhul nad pidurduvad aeglaselt ja nende energia muutub molekulaar-kineetiliseks energiaks.

Peamine erinevus seisneb tingimusis, mille tõttu tekivad keerised. Kui vähese sisehõõrdumisega vedelikus teatud kiiruste juures tekivad keerised, siis ideaalses vedelikus nad veel ei tekiks. Järelikult olgu vedeliku viskoossus kui tahes väikene, ikka on tahkele kehale lähedases vedeliku voolus sellised kohad, kus viskoossus ilmneb eriti tugevalt. Arusaadavalt võib selliseks kohaks olla ainult see koht, kus väga lähedaste vedelike kihtide kiirused oma suuruselt on järsult erinevad, kus kiiruse gradient

[1] Tehnilistes arvutustes kirjutatakse Chezy valemit tavaliselt järgmisel kujul:

$$v = C\sqrt{r_h i};$$

kus i on voolusängi kalle $i = \frac{h_1 - h_2}{l}$ (rõhu langemisega piki sängi on kalle seotud arusaadava seosega $p_1 - p_2 = \varrho g\ (h_1 - h_2)$. Avatud siledate kivisein-tega voolusängide puhul on $C \approx 80\ m^{\frac{1}{2}}/sek$, kui vee sügavus ulatub poolest meetrist mõne meetrini; muldseinte puhul $C \approx 30$ kuni $50\ m^{\frac{1}{2}}/sek$.

on väga suur ja kus seepärast ka hõõrdejõud on suur. Sellest järeldub, et küsimuse sisu seisneb vedeliku *piirkihi* olemuses — kihis, mis vedeliku voolus oleva kehaga kokku puutub.



Joon. 181. Mitmesugused keerise tekkimise staadiumid teravast nurgast möödumisel.

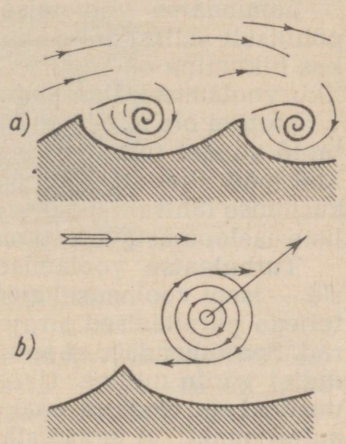
Ideaalses vedelikus peaks esinema vedeliku libisemine tahke keha pinnal. Tegelikult reaalse vedeliku osakesed jäävad väga õhukese (monomolekulaarse) kihina tahke keha pinnale kinni ja on vedeliku voolamisel liikumatud. Teisest küljest väikese viskoossusega vedeliku puhul juba tahkest kehast väga väikese kauguse puhul on vedeliku voolamiskiirused peaaegu sellised nagu ideaalse vedeliku puhul. Järelikult väga õhukeses piirkihis voolamiskiirus kasvab nullist tunduva suuruseni. Suur kiiruse gradient tekitab siin suure sisehõõrde. Kui õhuke piirkiht jääb kogu aeg ja kogu vooluga kokkupuutuva kehapinna külge, siis ümbritsevas vedelikus voolamine jääb sarnaseks ideaalse vedeliku voolamisega ja keeriseid ei teki. Kui aga piirkihis voolav vedelik eraldub keha pinnalt, siis see lahtikistud piirkiht paneb vedeliku keerlema. Piirkihi katkemiskohal tekkinud keerised kanduvad kaugele keha pinnast ja kogu voolamise iseloom muutub sellega täiesti erinevaks ideaalse vedeliku voolamisest.

Joonis 181 ülaval kujutab ideaalse vedeliku potentsiaalset voolamist, mis toimub keha terava nurga juures. Samasugune on voolamise pilt viskoossel vedelikul väikeste kiiruste juures, kui vedelik piirkihis kogu aeg kulgeb piki keha piirjooni. Suure voolamiskiiruse puhul piirkihis voolava vedeliku liikumise inertsi tõttu vedelik kistakse lahti teraviku tipust, nagu see on kujutatud samal joonisel; teraviku taga tekib vähenenud rõhu piirkond, kuhu imetakse ärarebitud piirkihi joad, mis tekitavadki keerise; vool kannab keerise edasi, kuid tema järel tekivad järjest uued keerised.

Joonis 182-*a* kujutab keeriste tekkimist voolus oleva keha ebatasasuste (konaruste) juures, kus inertsi tõttu tekib piirkihi lahtirebimine. Jooniselt 182-*b* näeme, et keerise pinnal, mis on keha pinnale kõige lähemal, pöörlemise joonkiirus on suunatud vastuvoolu; see tekitab voolamiskiiruse vähenemise ja järelikult Bernoulli võrrandi põhjal ka rõhu kohaliku suurenemise. Samal ajal keerise vastaspoolsel pinnal pöörlemiskiirus ühtib suuna poolest

voolamiskiirusega. See vedeliku kohalik kiirendatud liikumine tekitab Bernoulli võrrandi põhjal samas kohas rõhu alanemise. Kokkuvõttes mõjub keerisele rõhkude vahe, mis eemaldab tema sellest keha pinna piirkonnast, kus keeris tekkis.

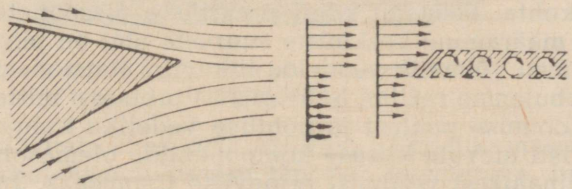
Joonis 183 selgitab, kuidas tekib keeriseline kiht keha tagaosas oleva teraviku järel. Ideaalse vedeliku puhul tekiks siin potentsiaalse voolamise lahutuspind. Kõige väiksemagi viskoossuse puhul selline lahutuspind asenduks lakkamatu kiiruse muutusega kihis, milles vedeliku makroosakesed hakkavad pöörlema, asenduks keeriselise kihiga.



Joon. 182. Keeriste tekkimist ja tekkekohast eemaldumist selgitav skeem.

Järgmises aerodünaamika alustele pühendatud peatükis on esitatud veel rida jooniseid, mis selgitavad keeriste tekkimise tingimusi piirkihi lahtikiskumise kohtadel ja lahutuspindadel. Paragrahvis 64 on esitatud seda küsimust puudutavad täiendavad andmed.

Vedeliku voolamist võib liigitada ühest küljest potentsiaalseks (vedeliku makroosakeste pöörlemist ei esine) ja keeriseliseks (makroosakesed pöörlevad), teisest küljest laminaarseks (kihiliseks) ja turbulentseks. Need kaks klassifitseerimisviisi puudutavad nähtuste erinevaid külgi. Mõnikord arvatakse ebaõigelt, et



Joon. 183. Keha tagaosas oleva teraviku järel kohtuvad erinevate kiirustega vedelikukihid. Tekib lahutuspind, kus esineb osakeste pöörlemine isegi väikese viskoossuse puhul.

laminaarne voolamine on potentsiaalne ja turbulentne voolamine on keeriseline. Tegelikult on laminaarne voolamine ühtedel juhtudel potentsiaalne, teistel keeriseline. Turbulentse voolamise puhul sageli põhiline vedelikku edasiviiv liikumine vastab potentsiaalsele voolamisele; siiski turbulentses voolus esinevad tavali-

selt ka keerised, mis liituvad põhivoolule ja tekitavad vedeliku segunemist.

Kas voolamine on keeristeta (potentsiaalne) või keeriseline, see sõltub sellest, kas esineb vedeliku makroosakeste pöörlemist.

Laminaarse voolamise vastandamine turbulentsele ei sõltu põhiliselt sellest liikumise karakteristikust, vaid tuleb vaadelda, kas liikumine on regulaarne, hästi korrastatud, kas esineb vedeliku voolamisel aine segunemist või mitte.

Meil ei ole nüüdisajal veel täiesti selget ja kõigi poolt tunnustatud vaadet turbulentse voo ehitusele. Autoriteetsed mehhaanikud (näit. Prandtl, Kármán, M. A. Velikanov jt.) ei tõlgenda selle küsimuse tähtsaid üksikasju ühesuguselt. Kuid turbulentsuse põhiliste iseloomustavate tunnuste osas olulisi eriarvamusi ei esine.

Turbulentse voolamise puhul „vedelikuosakeste trajektoorid — isegi voolamisel mööda sirget ümmargust toru — ei ole toru teljega paralleelsed sirgjooned, vaid keerukad ruumilised kõverad. See tähendab, et toru teljega risti olevad kiiruse komponendid ei võrdu nulliga. Ühes sellega on trajektoorid ajaliselt mittepüsivad — üksikud osakesed, mis läbivad järjest sisenemisava antud punkti, ei moodusta sugugi üksteisega ühtivaid kõverjooni. Seepärast kui fikseerida mingi ruumielement, siis tingimused temas pidevalt muutuvad, milline ka ei oleks protsessi olukord. Siiski vedelikuvoo puhul, mis liigub püsivate väliste jõudude mõjul, toimuvad muutused on mingi keskmise püsiva väärtuse ümber toimuva pulseeriva iseloomuga. Seepärast kui anda otsus sellise voo omadusist ajaliselt keskmiste väärtuste põhjal, siis võib vedeliku liikumist lugeda statsionaarseks.

Seega statsionaarse turbulentse voolamise mõiste osutub teatub määral tinglikuks. See on kehtiv ainult ajaliselt keskmiste suuruste kohta. Peaaegu kõigi praktiliste ülesannete puhul voo omaduste määramine keskmiste suuruste abil on piisav ja järelikult on täiesti võimalik vaadelda liikumist statsionaarsena.

See turbulentse režiimi iseärasus — protsessi mittestatsionaarsus oma loomuse poolest ja põhilise vedeliku kulgeva liikumissuunaga risti olevate kiiruse komponentide olemasolu — on oluliseks laminaarsest režiimist erinevuse tunnuseks. Just need kiiruse komponendid annavad turbulentsele voole kaootilisuse iseloomu, vastandina laminaarsele voole, mis kujutab täiesti organiseeritud (korrapärast) voolamise vormi."[1]

Joonisel 184 on näidatud turbulentse voo pilt torus, mille fotografeerimisel fotoaparaat liikus voo tuuma (s. o. voo keskmise osa) kiirusega; siin on näha mittestatsionaarsed keeriselised liikumised tuumas. Joonisel 185 on sama voog, fotografeeritud

[1] А. А. Гухман. Физические основы теплопередачи, т. I. Теория подобия и ее приложения, 1934.

aeglasemalt — piirkihi kiirusega liikuva fotoaparaadiga, on näha keeriste tekkimine piirkihis.

Need fotod näitavad, et turbulentse voolamise puhul toimub vedeliku naaberkihtide intensiivne segunemine.



Joon. 184. Turbulentne voolamine torus.

Seintega piiratud voo jaoks on iseloomustav, et keeriste tekkimine on suunatud piki liikumise suunda (nagu see on näha esitatud fotodel). Vaba voolamise puhul (turbulentses joas) keerised on tavaliselt risti liikumise suunaga.



Joon. 185. Liikumise pilt arenenud turbulentsuse puhul.

Prandtl kirjutab ühes oma artiklis: „Vedelikumasside segunemisega turbulentse liikumise täpseks uurimiseks on kohane kasutada segunemise tee pikkuse mõistet. Viimasel on vedelikumasside segunemisega turbulentse liikumise puhul sama tähendus nagu molekuli keskmisel vaba tee pikkusel gaaside molekulaarse difusiooni teoorias. Nii ühe kui ka teise liikumisliigi puhul tekivad puutepinged (õigemini öelda: näivad pinged) pideva impulsi ülekande ja vahetuse tõttu erinevaid kiirusi omavate vedelikukihtide vahel. Selle tegelikkuses küllalt keeruka nähtuse selgitamisel võib lähtuda järgmisest lihtsustatud kujutlusest.

Oletame, et teatud vedeliku mass kokkupõrgete mõjul naabermassidega hakkab liikuma üldisele voo kiirusele ristsuunas,

säilitades sama kiiruse voolu suunas, mis on sellel vedelikukihil, millest väljub vaadeldav vedelikumass. Oletame, et see mass läbib voolule ristsuunas kuni põrkumiseni või segunemiseni teiste vedelikumassidega teepikkuse l („segunemise tee"). Selline liikumine vedelikumasside vahetamise ja segunemisega toimub mõlemas suunas. Seepärast suurema liikumiskiirusega kihti satub kogu aeg vedelikku aeglasemalt liikuvaist kihtidest. Kiiremate kihtide liikumiskiirus seega väheneb ja vastupidi — kiiremast kihist aeglasemasse sattuv vedelik kiirendab aeglasema kihi liikumist. Kahe vedelikukihi mõju teineteisele on samasugune, nagu toimuks nende vahel vastastikune hõõrdumine."

X PEATÜKK.

AERODÜNAAMIKA ALUSED.

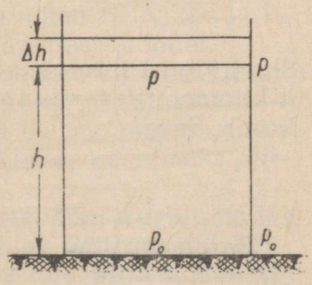
§ 61. Andmeid atmosfäärist. Baromeetriline valem.

Maakera ümbritsev atmosfäär (õhk) ei lenda maailmaruumi laiali, sest seda takistab raskusjõud. Maa mõjupiirkonnast lahkumiseks peaks atmosfääri ülemisel piiril asuva õhu molekuli kiirus olema üle 10 kilomeetri sekundis, õhu molekulide soojusliku liikumise keskmine kiirus on sellest aga tunduvalt väiksem.

Tõustes merepinnast kõrgusele h, väheneb ülalpool asetsevate atmosfääri kihtide kaalu poolt tekitatud õhurõhk vastavalt Pascali seadusele suuruse $\varrho\, gh$ võrra, kus ϱ on merepinna ja kõrguse h vahel asuva õhukihi keskmine tihedus.

1662. aastal Boyle ja 1676. a. Mariotte tõestasid katseliselt, et gaasi rõhu p korrutis ruumalaga V jääb gaasi kokkusurumisel või paisumisel muutumatuks gaasi jääva massi ja jääva temperatuuri T puhul:

$$pV = const, \text{ kui } T = const.$$



Joon. 186. Baromeetrilise valemi tuletamiseks.

Pascali seadusest ja Boyle-Mariotte'i seadusest järeldub, et kui õhu temperatuur oleks kogu atmosfääri kõrguses ühesugune, siis õhurõhk peaks sõltuma kõrgusest h kindla nn. *baromeetrilise* valemi kohaselt, mis tuletatakse järgmisel viisil.

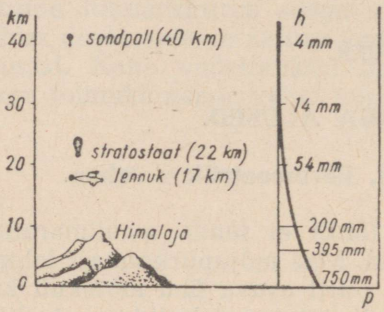
Olgu merepinnal rõhk p_o ja õhu tihedus ϱ_o, aga kõrgusel h — rõhk p ja tihedus ϱ (joon. 186). Kõrguse muutumisel mingi suuruse Δh võrra rõhk muutub (väheneb) Δp võrra. Kui kiht Δh on niivõrd õhuke, et õhu tihedust temas võib lugeda konstantseks, siis $dp = -g\varrho dh$. Siin ϱ on õhu tihedus kõrgusel h. Boyle'i seaduse põhjal

$$\varrho = \varrho_o \frac{p}{p_o}.$$

Järelikult

$$dp = -g\varrho_0 \frac{p}{p_0} dh.$$

Jagame võrduse mõlemaid pooli suurusega p ja integreerime võrrandit piirides mere pinnalt ($h = 0$) kõrguseni h ja vastavalt rõhust $p = p_0$ kuni rõhuni p:



Joon. 187. Õhurõhk mitmesugusel kõrgusel maapinnast.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -g \frac{\varrho_0}{p_0} \int_0^h dh.$$

Arvestades, et $\frac{dp}{p} = d\ln p$, saame[1]:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -g \frac{\varrho_0 h}{p_0},$$

järelikult

$$\frac{p}{p_0} = e^{-g \frac{\varrho_0 h}{p_0}}. \qquad (1)$$

Arvestades, et $-g\varrho_0 = 1{,}293\ kG/m^3$ ja $p_0 = 1{,}0333\ kG/cm^2 = 10333\ kG/m^2$, leiame, et

$$-g\frac{\varrho_0 h}{p_0} = -0{,}000125\ h.$$

Siin kõrgust h tuleb mõõta meetrites. Kui me väljendame kõrgust h kilomeetrites, siis tuleb kordajat tähe h ees suurendada 1000 korda. Seega

$$p = p_0 e^{-0{,}125h},$$

kus kõrgust h mõõdame kilomeetrites (joon. 187).

Baromeetriline valem oleks täpne, kui õhu temperatuur oleks erinevatel kõrgustel sama. Tegelikult atmosfääris ei ole soojuslikku tasakaalu — õhu temperatuur langeb kõrguse suurenemisel. Seoses sellega õhurõhu tiheduse muutumine kõrguse muutumisega ei ole tingitud mitte ainult ülalpool olevate õhukihtide kaalu vähenemisest, vaid ka õhu temperatuuri muutusest.

Õhu temperatuur ja tihedus võrdsel kõrgusel merepinnast ei ole Maakera erinevates kohtades ühesugused. Paljud maad, nende hulgas ka Nõukogude Liit, on võtnud võrdluseks kasutusele *atmosfääri standardsed parameetrid,* mis esitame tabelis.

---

[1] Logaritme alusega $e = 2{,}718\ldots$ (loomulikke logaritme) tähistame ln, aga alusega 10 (harilikke logaritme) tähisega log.

Atmosfääri standardsed parameetrid.

Kõrgus kilomeetrites	Rõhk $\frac{p}{p_0}$	Tihedus $\frac{\varrho}{\varrho_0}$	Temperatuur
0	1	1	15° C
1	0,887	0,907	8,5
2	0,784	0,822	2
3	0,692	0,742	—4,5
4	0,608	0,669	—11
5	0,533	0,601	—17,5
6	0,465	0,538	—24
7	0,405	0,481	—30,5
8	0,351	0,428	—37
9	0,303	0,381	—43
10	0,261	0,337	—50

Viimaseil aastakümneil on meie teadmised atmosfäärist tunduvalt laienenud. Õige ilmaennustuse hiiglasuur rahvamajanduslik tähtsus, kõrglennunduse, reaktiivse kõrgballistika ja raadioside areng muutsid hädavajalikuks kõigi atmosfääri iseärasuste ja merede ning ookeanide poolt meteoroloogilistele protsessidele avaldatava mõju üksikasjalise uurimise. Teostati suur hulk eksperimentaalseid ja teoreetilisi uurimusi, mille tagajärjel tekkisid uued füüsika harud: atmosfääri füüsika ja mere füüsika. Nende uute füüsikaharude loomisel oli tähtis osa akad. V. V. Šuleikini, prof. N. E. Kotšini jt. nõukogude õpetlaste töödel.

Kaasaegsete vaadete põhjal atmosfäär koosneb kolmest kihist: *troposfäärist, stratosfäärist* ja *ionosfäärist.* Kõige alumine kiht — troposfäär — ulatub 9—11 *km* kõrguseni ja on *meteoroloogiliste protsesside:* pilvede, tuulte, äikese jms. tekkimise *peamiseks piirkonnaks.*

Troposfääri soojenemine toimub peamiselt maapinnalt, mitte aga otsese päikese kiirguse neeldumise arvel. Soojenenud õhumassid tõusevad üles troposfääri ja paisuvad seejuures; tõusmisel õhu temperatuur paisumise tõttu väheneb iga kilomeetri kohta ca 6°. Keskmistel laiustel on suvel temperatuur maapinna lähedal +20—30°, kuid 3—4 *km* kõrgusel juba 0°, troposfääri ülemisel piiril (9—11 *km*) on temperatuur juba —40° kuni —50°.

Erinevalt troposfäärist, millele on iseloomustav temperatuuri vähenemine kõrguse suurenemisel, on stratosfääri alumises osas temperatuur igas kõrguses ühesugune. Keskmistel laiustel on stratosfääri temperatuur 45—55° allpool nulli; ekvaatori kohal on stratosfäär külmem (—70° kuni —80°), polaarrajoonides on stratosfäär aga kõige soojem. Stratosfääri temperatuuri määrab kiirguse tasakaal; siin ei toimu soojenemist õhu püstvoolude ja segunemise tõttu nagu troposfääris.

Stratosfääri uuritakse tänapäeval kõrgrakettide abil, mis üksikuil juhtudel on tõusnud kuni 400 *km* kõrguseni. Uusimad uurimused on näidanud, et *stratosfääri teises osas,* mis algab umbes 30 *km* kõrgusel, *hakkab temperatuur uuesti tõusma* ja saavutab umbes 60 *km* kõrgusel suurima väärtuse: ca + 73° C. Seejärele *stratosfääri kolmandas* osas, 60 kuni 100 kilomeetri kõrgusel, *temperatuur* langeb mõne kraadini allapoole nulli.

Kolmas atmosfääri kiht — *ionosfäär* — algab umbes 100 *km* kõrgusel ja ulatub üle 400 *km.* Õhk on siin suure elektrijuhtivusega (osa molekulidest on ioniseeritud) ja peegeldab seepärast raadiolaineid. Ionosfääris eristatakse 100 *km* kõrgusel „kihti *E*" ja 250—300 *km* kõrgusel „kihti *F*" (madalamal, 50—60 *km* kõrgusel, on nõrgalt peegeldav „kiht *D*", mis peegeldab ainult kõige pikemaid raadiolaineid — kilomeeterlaineid).

Ionosfääris ja atmosfääri kõige kõrgemais kihtides esineb kõrguse suurenemisel nähtavasti suur temperatuuri tõus kuni mõnesaja kraadini (mõnedel andmetel on 180 *km* kõrgusel temperatuur 350° C, aga 280 *km* kõrgusel kuni 750° C).

Õhurõhk ja õhu tihedus suurtel kõrgustel.

Kõrgus *km*	Rõhk *mm* Hg	Suhteline tihedus ϱ/ϱ_0	Temperatuur °C
10	200	0,34	—50
20	40	0,07	—56
30	8	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$	—56
60	0,3	$3 \cdot 10^{-4}$	+73
90	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0
120	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	+100
180	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-9}$	+350
250	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-10}$	+600

§ 62. Kehade liikumine õhus. Euleri paradoks.

Õhu liikumine on mitmes suhtes sarnane mitteviskoosse vedeliku voolamisega. Õhu iseärasuseks vedelikega võrreldes on tema suur kokkusurutavus. Arvestades seda iseärasust ja korrates neid arutlusi, millised on esitatud paragrahvis 57 Bernoulli võrrandi tuletamisel, võime saada teisendatud Bernoulli võrrandi, milles on arvestatud õhu kokkusurutavust (§ 143). Ilmneb aga, et mitte eriti suurte kiiruste puhul ei ole praktilist vajadust Bernoulli võrrandi täpsustamiseks. Selles veendumiseks vaatleme õhu voolamist, kui temasse on asetatud mingi keha. Tähistame õhu kiirust keha lähedal tähega v, aga küllalt suurel kaugusel

temast v_0-ga. Bernoulli teoreemi põhjal kiiruste erinevusest tingitud rõhkude vahe

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{\varrho}{2}(v^2 - v_0^2).$$

Olgu õhu kiirus kehast kaugel $v_0 = 0$, aga kiirus tema lähedal $v = 100$ *m/sek*. Siis rõhkude vahe

$$\Delta p = \frac{\varrho v^2}{2} = \frac{0{,}13 \cdot 100^2}{2} = 650 \text{ kG/m}^2.$$

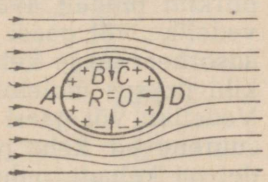
Kui rõhk p_0 häirimata voos on võrdne õhurõhuga 10333 kG/m^2, siis $\frac{\Delta p}{p} = 0{,}063$ ja Boyle'i seaduse põhjal on õhu kokkusurutavus sama suur. Järelikult viga, mida teeme, lugedes õhku mittekokkusurutavaks, on 6%. Kuid kiirus 100 *m/sek* = 360 *km/h*. Seega näeme, et paljudes ligikaudsetes arvestustes, näiteks aeglasemate lennukite liikumise arvutustes, võib õhu kokkusurutavuse arvestamata jätta ja kasutada Bernoulli võrrandi lihtsaimat kuju. Kuid sama näide näitab aga, et kiirlennukite lennu arvutuste puhul tuleb arvestada parandust õhu kokkusurutavuse tõttu. Seda enam on seda parandust tarvis arvestada ballistika (teadusharu, mis uurib mürskude lendu) ülesannetes, kus tuleb tegelda kiirustega suurusjärgus 1000 *m/sek*.

Aerodünaamika peamiseks ülesandeks on uurida jõude, mis mõjuvad õhus liikuvale kehale. Neid jõude nimetatakse *aerodünaamilisteks jõududeks*.

Eespool juba öeldi, et vedeliku või gaasi voos olevale kehale mõjuvad jõud võivad olla kas sisehõõrde- (viskoossus-) või inertsjõud. Sisehõõrdejõudude osas ühtib teooria hästi katsega.

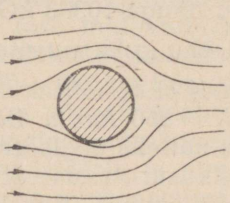
Kuid keha ühtlane liikumine mitteviskoosses vedelikus ei tekita voos mingeid muutusi: vedelikuosakeste kiirused mingil kaugusel keha taga jäävad sama suureks kui selle ees. Vedeliku liikumishulk ei muutu, järelikult ka keha liikumishulk peab samuti jääma muutumatuks. Tähendab, et kehale ei mõju vedelik mingite inertsjõududega. Seega jõuame paradoksaalse järeldusen, mis on vasturääkiv meie igapäevasele kogemusele: *ühtlasel liikumisel sisehõõrdevabas vedelikus kehale ei mõju takistust* (Euleri paradoks).

Selgitame lähemalt selle paradoksi sisu. Kohtudes keha pinnaga punktis *A* (joon. 188) on vedelikuosakesed sunnitud muutma oma esialgset sirgjoonelist liikumist kõverjooneliseks. Seoses sellega nad mõjuvad keha pinnale mingi jõuga, mistõttu piirkonnas *AB* rõhk keha pinnale suureneb. Joonisel 188 on kõrgenenud rõhu piirkonnad tähistatud plussmärgiga. Piirkonnas *BC* muutub uuesti vedelikuosa-

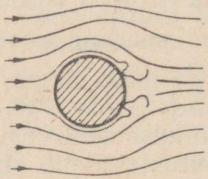


Joon. 188. Voolujoonte poolt ümbritsetud (haaratud) keha liigub mitteviskoosses vedelikus takistuseta.

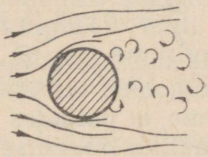
keste liikumise suund: nüüd püüavad vedelikuosakesed inertsi tõttu kehast eemalduda. Rõhk selles piirkonnas väheneb. Joonisel 188 on vähenenud rõhu piirkonnad tähistatud märgiga —. Piirkonnas *CD* vedelikuosakesed jälle rõhuvad keha pinnale. Analoogiline rõhkude jaotus esineb ka keha alumisel osal. On silmanähtav, et rõhu sümmeetrilisel jaotusel on resultantjõud võrdne nulliga.



Joon. 189. Voog, mis alles hakkas voolama silindri ümber. Keeriseid ei ole veel tekkinud.



Joon. 190. Voog, mis on silindri ümber vähe aega voolanud. Moodustus kaks keerist.



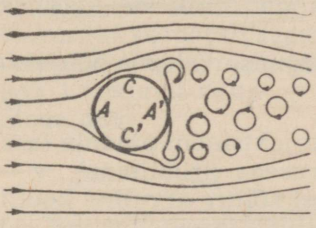
Joon. 191. Voog, mis on kaua aega silindri ümber voolanud. Keerised kistakse lahti ja vool kannabnad minema.

Niisiis mitteviskoosses vedelikus liikuvale kehale ei peaks mõjuma takistust. Kuid katse näitab, et *suurte kiiruste puhul on takistus suur isegi väikese viskoossusega gaasides.* Peamiseks takistuse tekkimise põhjuseks on liikumise pildi keerulisemaks muutumine, mis § 59 põhjal on seotud sisehõõrdega. Esitatud joonised 189, 190 ja 191 selgitavad küsimuse olemust. Märkame kohe, et liikumine ei ole sarnane joonisel 188 kujutatud liikumise pildile. Voolujooned siin keha taga ei sulgu, vaid keskkond (vedelik või gaas) hakkab keha taga liikuma keeriseliselt. Sel juhul rõhk keha esiosale ei tasakaalustu enam rõhuga tagapinnale ja tekib takistus *Q*.

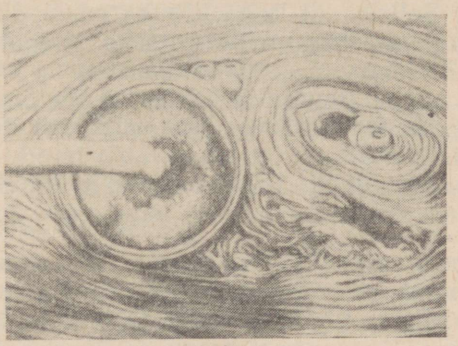
Paragrahvis 60 selgitatu põhjal on keeriste tekkimise põhjuseks piirkihi inertsiaalne lahtirebimine. Piirkihis (või täpsemalt: piirkihi pinnal) avaldub sisehõõrde mõju. Keha pinnale lähim vedeliku või gaasi kiht kleepub keha külge ehk teisiti öeldes adsorbeeritakse keha poolt ja jääb seepärast liikumatuks. Selle kihi paksus molekuli diameetriga võrreldes on kaduvalt väike. Vedeliku või gaasi lähedalolevad kihid liiguvad kiirustega, mis suurenevad keha pinnast kaugenedes. Seejuures väikeste mõõdetega kehade puhul keha pinnast mõne millimeetri kaugusel olevad kihid liiguvad juba peaaegu sellise kiirusega nagu kõik kaugemalasetsevad vaba voolu kihid.

Joonistel 192 ja 193 on näidatud, kuidas toimub voolamine silindrikujulise kehaga vahetult kokkupuutuvas kihis. Pinnaosade *C* ja *C′* läheduses vedelik voolab suurema kiirusega kui

häirimata voolus; siin rõhk väheneb. Rõhkude vahe tõttu on voolamine piirkihis suunatud A-st C ja C' poole (voolu suunas) ja A'-st C ja C' poole (voolule vastassuunas). Need piirkihi vastassuunalised voolud põrkuvad teineteisega kokku punktide C ja C' juures.



Joon. 192. Vedeliku liikumise skeem silindrilise keha taga.



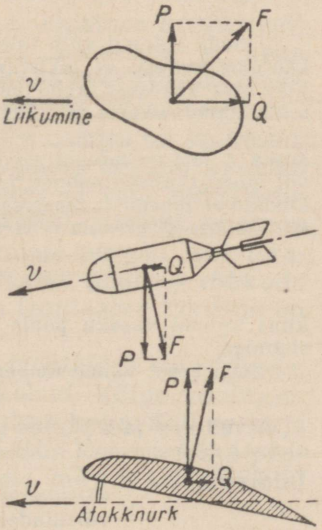
Joon. 193. Keeriste pilt silindrilise keha taga.

Piirkihis tekib väljaulatuv osa, mis keerdub möödavoolavate kihtide mõjul, eraldub keha pinnalt ja kandub keerise näol eemale. Keeriste piirkond seguneb järk-järgult ümbritseva õhuga, moodustades keha taga laieneva turbulentse tsooni ehk keeriste vööndi.

Jõudu, millega vedelik või gaas inertsi või viskoossuse tõttu mõjub keha pinnale, nimetatakse *aerodünaamiliseks jõuks*.

Väikeste liikumiskiiruste puhul on aerodünaamiliste jõudude tekkepõhjuseks ainult vedeliku viskoossus; kiiruse suurenemisel lisandub viskoossusele keeriste tekkimine, väga suurte (hääle kiirusest suuremate) kiiruste puhul aga veel nn. survelainete tekkimine (§ 144).

Üldiselt aerodünaamilise jõu F suund moodustab liikumise suunaga mingi nurga. Seetõttu võib jõudu F lahutada normaalseks komponendiks P ja tangentsiaalseks komponendiks Q (joon. 194). Tangentsiaalne komponent, mida nimetatakse *frontaalseks takistuseks* või lihtsalt *takistuseks*, on tavaliselt kahjulikuks jõuks. Normaalset komponenti P kasutatakse laialdaselt



Joon. 194. Aerodünaamilised jõud.

lennumasinate ja laevade ehitamisel: dirižaablit või allveelaeva vastavalt pöörates tekitatakse normaalne jõud, mis sunnib neid tõusma, langema või pöörduma. Lennuki tiiva liikumisel tekkiv normaalne komponent on *tõstejõud*, mis hoiab lennukit õhus.

Selleks et keha liiguks edasi õhus või vees, peame tegema tööd takistusjõu ületamiseks. See töö muutub keeriste kineetiliseks energiaks. Viskoossuse tõttu keerised pikkamööda hajuvad ja seega frontaalse takistuse ületamiseks kulutatud töö muutub lõpuks kaootiliseks (soojuslikuks) keskkonna osakeste liikumisenergiaks.

Frontaalset takistust võib arvutada järgmise valemi[1] põhjal:

$$Q = C_x \varrho S v^2, \tag{2}$$

kus ϱ on keskkonna tihedus, S — keha projektsiooni pindala tasapinnal, mis on risti häirimata voolu kiirusega (frontlõige), v — häirimata voolu kiirus ja C_x — keha kujust sõltuv arvuline koefitsient. Seda nimetatakse frontaalse takistuse koefitsiendiks ehk *kujuteguriks*.

Sageli mõeldakse selle nimetuse all koefitsienti c_x, mis on arvuliselt kaks korda suurem kui C_x. Sellisel juhul valem (2) kirjutatakse kujul:

$$Q = C_x \frac{\varrho v^2}{2} S.$$

Sellega rõhutatakse, et takistusjõud on võrdeline dünaamilise rõhuga, mis mõjub frontlõikele.

---

[1] Seda valemit võib tuletada järgmisel meetodil (arvestades dimensioone). Lähtume sellest, et takistusjõud peab kuidagi sõltuma vedeliku tihedusest, liikumise kiirusest, keha mõõdetest ja kujust. Oletame (see on õige ainult mitte liiga väikeste ja mitte liiga suurte kiiruste puhul), et

$$Q = C\varrho^x S^y v^z,$$

kus x, y ja z on mingid meile seni tundmatud positiivsed või negatiivsed, täis- või murdarvulised astmed ja C arvuline kordaja (nimeta arv). Tähistades pikkusühikut tähega L, massiühikut — M ja ajaühikut — T ning meenutades jõu Q, tiheduse ϱ, pindala S ja kiiruse v dimensioone, võime kirjutada:

$$\frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^x \left(L^2\right)^y \left(\frac{L}{T}\right)^z,$$

kuna valemi vasaku poole dimensioon peab võrduma parema poole dimensiooniga.

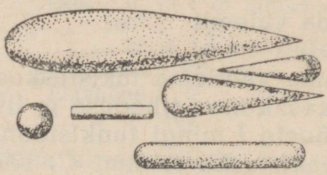
Seda seost võime ümber kirjutada järgmiselt:

$$MLT^{-2} = M^x L^{2y-3x+z} T^{-z}.$$

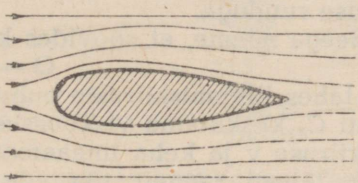
Arvud x, y ja z peavad olema sellised, et ühikute M, L ja T astmenäitajad oleksid mõlemal pool võrdusmärki võrdsed. Selle põhjal saame kolm järgmist võrrandit:

võrrutades ühiku M astmenäitajad: $1 = x$;
võrrutades ühiku L astmenäitajad: $1 = 2y - 3x + z$;
võrrutades ühiku T astmenäitajad: $-2 = -z$.
Siit $x = 1$, $z = 2$, $y = 1$.
Järelikult $Q = C\varrho S v^2$.

Valemi (2) esitas juba Newton. Arvestades, et keeriste poolt tekitatud frontaalne takistusjõud tekib keskkonna inertsi tõttu, võime ülaltuletatud valemi leida ka järgmise (mitterange) arutluse põhjal: vedelikus liikuv keha tõrjub oma teelt igas sekundis vedelikumassi, mis on võrdne vedeliku tiheduse ϱ ja ruumala Sv korrutisega. Kui lugeda, et kõigile tõrjutud vedelikuosakestele antakse kiirus, mis on keskmiselt võrdeline keha liikumiskiirusega v, siis järelikult kõrvaletõrjutud vedelikuosakestele antakse suurusega ϱSv^2 võrdeline liikumishulk. Mõju ja vastumõju võrdsuse seaduse põhjal peab vedelik mõjuma kehale takistusjõuga, mis on võrdne vedeliku liikumishulga juurdekasvuga 1 sekundi vältel, s. o. takistusjõuga, mis on võrdeline suurusega ϱSv^2.



Joon. 195. Mitmesugused kehad, millel on võrdne frontaalne takistus.



Joon. 196. Voolujoonelise kujuga keha.

Et võrdetegur C_x valemis (2) (frontaalse takistuse koefitsient) peab sõltuma keha kujust, see selgub, kui arvestada, et keha kuju võib soodustada või, vastupidi, raskendada keeriste tekkimist. Kui kehal on voolujooneline kuju, siis kiiruste erinevusest tingitult rõhu erinevused tema pinna erinevates osades on väikesed. Vastassuunaline vedelikukihtide liikumine pinna lähedal avaldub nõrgalt; joa katkemist ja keeriseid peaaegu ei teki ning keha liikumise takistus ei ole suur. Kui aga kehal, näiteks vooluga risti asetatud tasapinnalisel plaadil on teravad nurgad, siis teravaist nurkadest möödumisel kiiruse muutusest tingitud rõhkude vahed on suured, tekib palju keeriseid ja frontaalne takistus on suur[1].

Joonisel 195 on kujutatud ühesuguse frontaalse takistusega, kuid mitmesuguste mõõdete ja kujudega kehad. Kõige voolujoonelisemaks osutub väljavenitatud tilgakujuline keha. Selline kuju antakse näiteks kõigile lennukikeredele. Antud kujuga keha peaaegu ei tekita keeriseid (joon. 196); kehale mõjuv takistusjõud on tingitud peamiselt hõõrdejõududest.

[1] See arutlus õigustab võrdetegurit C_x nimetama kujuteguriks (tõlk).

§ 63. Reynoldsi arv. Kinemaatiline viskoossus.

Katse näitab, et Newtoni takistusjõu valem on kasutatav ainult teatud kiirusvahemikus.

Väikeste kiiruste puhul (õhus kuni 1 *m/sek*) on frontaalne takistus võrdeline mitte kiiruse ruuduga, vaid tema esimese astmega. Väikeste liikumiskiiruste puhul on peamisteks frontaalse takistuse põhjustajaiks mitte keerised, vaid vahetult keskkonna viskoossus. Teisiti öeldes — väikeste kiiruste puhul on inertsiaalse päritoluga jõud väikesed, võrreldes sisehõõrdest tingitud jõududega.

Suurte (hääle kiirusele lähedaste) kiiruste puhul frontaalne takistus kasvab nähtavasti võrdeliselt kiiruse kuubiga. Keha liikumisel hääle kiirusest suurema kiirusega on takistus jälle võrdeline kiiruse ruuduga.

Seega näeme, et soovides kasutada valemit

$$Q = C_x \varrho S v^2$$

mis tahes liikumiskiiruste puhul, peame vaatlema takistuskoefitsienti C_x keskkonna viskoossuse η, keskkonna tiheduse ϱ, liikumiskiiruse v ja keha lineaarsete mõõdete l mingi funktsioonina. Võib täiesti rangelt tõestada, et takistuskoefitsient C_x sõltub ainult suhte $\frac{\varrho l v}{\eta}$ arvulisest väärtusest. Miks see nii on, seda on kerge mõista: takistuskoefitsient C_x on nimeta arv; seepärast C_x funktsionaalne sõltuvus suurustest η, ϱ, l, v peab olema selline, et nende suuruste kombinatsioon on nimeta arv. On kerge veenduda, et suhe $\frac{\varrho l v}{\eta}$ ise on nimeta arv. Seda suhet nimetatakse *Reynoldsi arvuks.*

Seega *frontaalse takistuse koefitsient on Reynoldsi arvu* mingi seni veel mitte täielikult tuntud funktsioon:

$$C_x = f(Re), \text{ kus } Re = \frac{\varrho l v}{\eta}. \tag{3}$$

Sisehõõrde koefitsiendi ja keskkonna tiheduse suhet $\frac{\eta}{\varrho}$ nimetatakse *kinemaatiliseks viskoossuseks*[1] ja tähistatakse tähega ν:

$$\frac{\eta}{\varrho} = \nu. \tag{4}$$

Nagu on kerge näha valemist (2), mõjub mingi keha liikumisele teatud kiirusega erinevates vedelikes sama suur frontaalne takistus, kui vedelikkude kinemaatilised viskoossused ν on võrdsed. Teiste sõnadega: keskkonna sisehõõrdekoefitsiendi η vähenemisel n korda ning keskkonna tiheduse ϱ samaaegsel vähenemisel n korda frontaalse takistuse koefitsient ei muutu. Seepärast

[1] Kinemaatilise viskoossuse dimensioon on $\frac{L^2}{T}$. Kinemaatilise viskoossuse ühikut CGS-süsteemis nimetatakse stoksiks.

ei väljendata Reynoldsi arvu tavaliselt mitte sisehõõrdekoefitsiendi η, vaid kinemaatilise viskoossuse ν kaudu:

$$Re = \frac{lv}{\nu}. \tag{5}$$

On kerge näha, et *Reynoldsi arv on võrdeline inertsjõudude* $S\varrho v^2$ ja keha pinnale mõjuvate *sisehõõrdejõudude suhtega* $\eta S \frac{v}{l}$:

$$Re \approx \frac{S\varrho v^2}{\eta S \frac{v}{l}} = \frac{\varrho v l}{\eta}.$$

Toome mõned *kinemaatilise viskoossuse väärtused (cm²/sek):*

Vesi	0° juures	0,0178
„	20° „	0,010
„	50° „	0,0056
„	100° „	0,0030
Õhk	0° ja 1 *at* juures	0,133
„	100° „ „ „	0,245
„	0° ja 7,6 *mm* Hg juures	13,3
Glütseriin	20° juures	6,8
Elavhõbe	0° „	0,00125
„	100° „	0,00091

Kuna kinemaatilise viskoossuse avaldises keskkonna tihedus on nimetajas, siis õhul on suurem kinemaatiline viskoossus kui veel. Hõrendatud õhul 7,6 *mm* Hg rõhu juures (ja 0° juures) on kinemaatiline viskoossus kaks korda suurem kui glütseriinil.

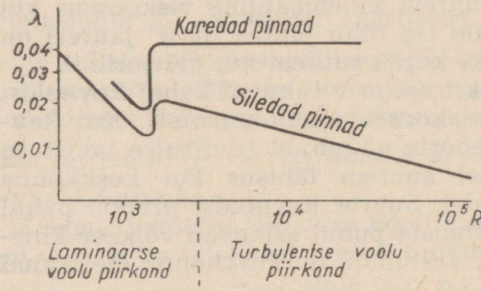
Valemi (5) põhjal mingil kiirusega v liikuval kehal Reynoldsi arv väheneb kinemaatilise viskoossuse suurenemisel. Kui Reynoldsi arv ei ole suur, siis teooria näitab, et frontaalse takistuse tekkimisel on hõõrdejõududel suurem tähtsus kui keskkonna inertsi tõttu tekkinud jõududel. Suurte Reynoldsi arvude puhul (millised teiste võrdsete tingimuste puhul esinevad väikese kinemaatilise viskoossuse puhul), vastupidi, on keskkonna inertsjõud tähtsamad hõõrdejõududest.

Õhu suur kinemaatiline viskoossus, võrreldes veega, ja vastavalt väikesed Reynoldsi arvud näitavad, et õhu väikese tiheduse tõttu hakkab õhu inerts frontaalses takistuses hõõret ületama tunduvalt suuremate kiiruste juures kui liikumisel vees. Näiteks dirižaabli lendamise puhul on frontaalne takistus tingitud tunduval määral hõõrdest. Kui õhu asemel oleks vesi, siis frontaalses takistuses inertsjõudude osa kasvaks tugevalt, võrreldes hõõrdega (inertsjõud kasvaksid võrdeliselt tihedusega, s. o. suurusjärguliselt peaaegu 1000 korda, vee viskoossus ületab ligikaudu ainult 100 korda õhu viskoossust).

Frontaalse takistuse koefitsiendi sõltuvus Reynoldsi arvust on kahjuks keeruline ja erinevate kujudega kehade puhul erinev. Sellest hoolimata teoreetilised ja eksperimentaalsed uurimused tõestasid näitlikult, et Reynoldsi arvude sissetoomine aero- ja hüdrodünaamilistesse arvutustesse lihtsustab neid tunduvalt. Rey-

noldsi arv on eriti tähtis seepärast, et tema kindlate väärtuste puhul toimub frontaalse takistuse järsk muutus, mis tunnistab liikuva keha ümber voolava keskkonna liikumispildi põhilist muutust.

Reynoldsi arv on tähtis ka vedeliku häirimata voo iseloomustamiseks. Nii näiteks näitab teooria, et torus või kanalis liikuva vedeliku niinimetatud *kriitiline kiirus* (s. o. kiirus, mille puhul rahulik laminaarne voolamine muutub äkki turbulentseks voolamiseks) peab vastama kindlale Reynoldsi arvule. Kõikide vedelike ja gaaside puhul, millised ka ei oleks nende tihedused ja viskoossused, peab toimuma laminaarse voolamise muutumine turbulentseks ühe ja sama Reynoldsi arvu puhul. Katse kinnitab seda järeldust; selle kontrollimine muutub aga keerulisemaks seetõttu, et laminaarse voolamise muutumisele turbulentseks mõjub tunduvalt sisenemisava kuju, mille kaudu vedelik voolab torusse või kanalisse. Kõige suurem Reynoldsi arv $Re = \frac{rv}{\nu}$ (kus r — toru raadius, ν — kinemaatiline viskoossus ja v — voolamise kiirus), mille puhul siledas torus võib toimuda laminaarne voolamine, on ligikaudu võrdne arvuga 20 000. Kui sisenemisava ei kindlusta vedeliku rahulikku voolamist torru, vaid, vastupidi, on selline, mis soodustab turbulentsuse tekkimist, siis laminaarse voolamise muutumine turbulentseks võib toimuda Reynoldsi arvu väärtuste puhul 1000—2000. Joonisel 197 on näidatud, kuidas mis tahes vedeliku puhul takistuskoefitsient λ sõltub vedeliku voolamisel torus (§ 59) Reynoldsi arvust.



Joon. 197. Takistuskoefitsiendi λ sõltuvus Reynoldsi arvudest vedeliku voolamisel torus.

Reynoldsi arvudel põhineb jõgede voolamise, lennuki õhus liikumise jne. laboratoorne uurimine. Selleks et laboratooriumis mudelitel saada jõgede voolamisest või lennuki ümber oleva õhu voolamisest õiget pilti, on tingimata tarvis katsetada vooluga, mida iseloomustab seesama Reynoldsi arv, mis on jäljendatavalgi voolul. Peale selle peab vool mudelis muidugi olema g e o m e e t r i l i s e l t s a r n a n e jäljendatava vooluga. Voolamist häirivad kehad peavad olema samuti geomeetriliselt sarnased. Kuid ka täieliku geomeetrilise sarnasuse puhul, kui Reynoldsi arvud erinevad, võivad liikumise pilt ja uuritavad takistuskoefitsiendid osutuda erinevaiks. Kui soovime, et Reynoldsi arv ei muutuks

voolu mõõdete vähendamisel *n* korda, siis peame ka kiirust suurendama *n* korda või asendama keskkonna teise keskkonnaga, mille kinemaatiline viskoossus on *n* korda väiksem [kõike seda võime kergesti järeldada valemist (5)].

Kehade, näiteks lennuki, õhus liikumise laboratoorset uurimist teostatakse aerodünaamilistes torudes geomeetriliselt sarnaste mudelite abil.

Aerodünaamiline toru kõige lihtsamal juhul on silinder, milles õhk pannakse liikuma ühes otsas oleva ventilaatori abil. Teise otsa lähedale asetatakse torusse katsetatav mudel, mille mõõted on toru sisemisest läbimõõdust mitu korda väiksemad. Aerodünaamiline toru peab tekitama mudeli suhtes samasugused tingimused, millistes viibib õhus liikuv lennuk. Õhuvool peab olema mudeli mitmesuguste osadeni jõudes ühesuguse kiirusega. Peale selle kõik õhujoad peavad liikuma üksteise suhtes paralleelselt, voos ei tohi olla keeriseid. Selle saavutamiseks on torudel eriline kuju.

Aerodünaamilistes otsevoolutorudes õhk pumbatakse ruumist, kuhu on asetatud toru, ja aetakse torust läbi. Mudelist möödumise järel paiskab ventilaator õhu teisest otsast välja. Teistes „suletud tüüpi" torudes ringleb töötamise ajal üks ja sama õhuhulk.

Ülalmainitud tingimus Reynoldsi arvu kohustusliku võrdumise kohta tekitab aerodünaamilistes mõõtmistes suuri raskusi. Mida väiksemad on uuritava mudeli mõõted *l*, seda suurem peab olema teiste võrdsete tingimuste puhul õhu voolamise kiirus *v*. Teame aga, et kiiruste puhul üle 100 *m/sek* ei või õhku lugeda enam mittekokkusurutavaks. Kui lennuki kiirus on 1000 *km/t* (umbes 280 *m/sek*), siis katsetamisel kolm korda väiksema mudeliga tuleks kasutada õhuvoolu kiirusega üle 840 *m/sek*, s. o. kiirusega, mis tunduvalt ületab hääle kiirust. Kuid üleminekul voolamisele, mille kiirus ületab hääle kiirust, muutub voolamine keha ümber tunduvalt. Seega ei saa lennukite puhul, mille kiirus on väiksem hääle kiirusest, teostada aerodünaamilistes torudes katsetamist vähendatud mudelitega. Loomuliku suurusega lennukitega tuleb katseid läbi viia osade kaupa või ehitada väga suured torud.

Jõgede voolamispildi ja laevade ujumise hüdrodünaamilisel uurimisel mudelite abil ei ole erilisi raskusi, sest tavaliselt sel juhul ei ole takistusi Reynoldsi arvude võrdsuse kindlustamiseks.

§ 64. Sisehõõrdetakistus (Stokesi seadus). Kriisinähtus.

Keeriste tõttu tekkiva takistuse suurust määrab peamiselt keskkonna inerts ja ta on ainult kaudselt seotud viskoossusega. Peale selle mõjuvad sisehõõrdejõud vedeliku- või õhuvoolu ase-

tatud kehale ka vahetult. Väikeste kiiruste ja keskkonna märgatava viskoossuse puhul (isegi väga väikeste Reynoldsi arvude puhul) vahenditu sisehõõrde esinemine ületab keskkonna inertsi mõju. Kui osutub võimalikuks inertsiaalse päritoluga jõude, võrreldes sisehõõrdejõududega, tähele panemata jätta, siis frontaalset takistust, mida sel juhul nimetatakse sisehõõrde e. *viskoossustakistuseks*, määrab Stokesi seadus:

Sisehõõrdetakistus on võrdeline keskkonna sisehõõrde koefiitsiendi, keha lineaarmõõdete ja liikumiskiiruse esimese astme korrutisega[1]. Kerakujulise keha puhul sisehõõrdetakistus

$$Q = 6\pi\eta r v. \tag{6}$$

Siin on nagu tavaliselt η — sisehõõrdekoefitsient, v — kiirus ja r — keha raadius.

Stokesi valemit saab kasutada paljudel juhtudel. Eriti kasutatakse Stokesi valemit viskoosses keskkonnas keha ühtlase vaba langemise kiiruse arvutamiseks. On kerge näha, et ühtlane langemine esineb sel juhul, kui liikumistakistus on võrdne keha näiva kaaluga keskkonnas (s. o. tema tõelise kaalu $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_1 g$, kus ϱ_1 on keha tihedus, ja üleslükkejõu $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_2 g$ vahega, kus ϱ_2 on keskkonna tihedus):

$$6\pi\eta r v_{\text{const}} = \frac{4}{3}\pi r^3 g\,(\varrho_1 - \varrho_2).$$

Siit järeldub, et keha ühtlase langemise kiirus viskoosses keskkonnas

$$v_{\text{const}} = \frac{2}{9}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\eta}\,g r^2. \tag{7}$$

Järelikult keha ühtlase langemise kiirus viskoosses keskkonnas on seda väiksem, mida suurem on keskkonna viskoossus ja mida väiksemad on keha mõõted.

Sageli kasutatakse valemit (7) tilkade või tolmukübemete raadiuse väljaarvutamiseks nende ühtlase õhus või vedelikus langemise vaatlustest leitud kiiruse põhjal. On kerge näha, et

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_{\text{const}}}{2(\varrho_1 - \varrho_2)g}}.$$

[1] Analoogiliselt valemile (2) võib ka selle valemi tuletada dimensioonmeetodil. Selleks tuleb lähtuda eeldusest, et väikestel kiirustel keskkonna sisehõõrdekoefitsient avaldab suuremat mõju kui keskkonna tihedus. Oletame, et

$$Q = K\eta^x S^y v^z,$$

kus K on dimensioonita koefitsient. Kui arutleda leheküljel 288 joone all esitatud viisil, siis selgub, et

$$x = z = 1 \text{ ja } y = \tfrac{1}{2}.$$

Kui valemisse (7) asetada õhu viskoossus ja tihedus normaaltingimustel, siis veetilkade ühtlase langemise kiiruse arvutamiseks saame avaldise:

$$v_{const} = 1{,}3 \cdot 10^6 \cdot r^2,$$

kus r on väljendatud sentimeetrites, aga v — *cm/sek*.

Stokesi seadus on õige juhtudel, kui Reynoldsi arv on ühest väiksem, näiteks $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ või isegi veel väiksem.

Reynoldsi arv $Re = \frac{2rv}{\nu}$ on antud kinemaatilise viskoossuse väärtuse ν puhul väike, kui keha mõõted ja liikumiskiirus on väikesed. Õhu kinemaatiline viskoossus ν on normaaltingimustel suurusjärguliselt võrdne $\frac{1}{10}$-ga. Seepärast on Stokesi seadus, rakendatuna liikumisele õhus, suhteliselt õige, kui keha raadiuse korrutis kiirusega (väljendatud vastavalt sentimeetrites ja *cm/sek*) ei ületa näiteks $\frac{1}{100}$. Mida väiksem on korrutis rv, seda õigem on Stokesi seadus. Vee kinemaatiline viskoossus on suurusjärguliselt $\frac{1}{100}$; seepärast Stokesi seadus on liikumisel vees suhteliselt õige, kui korrutis rv ei ületa $^1/_{1000}$.

Kõrvutame Stokesi valemi (6) Newtoni üldisema valemiga (2):

$$Q = 6\pi\eta rv = C_x \varrho S v^2.$$

Kera ristlõike pindala $S = \pi r^2$. Näeme, et kasutades Newtoni valemit (väikeste Reynoldsi arvude puhul) sisehõõrdetakistuse arvutamiseks, peab Stokesi järgi frontaalse takistuse koefitsienti C_x lugema võrdseks avaldisega

$$C_x = \frac{6\eta}{\varrho rv}. \tag{8}$$

Tavaliselt väljendatakse selle võrrandi paremat poolt Reynoldsi arvu kaudu $Re = \frac{2rv}{\nu} = \frac{2\varrho rv}{\eta}$.

Siis

$$C_x = \frac{12}{Re}. \tag{9}$$

Kui ei taheta rikkuda Newtoni valemit, siis järelikult Stokesi seadust tuleb formuleerida [asendades niiviisi võrrandi (6) võrrandiga (2)] järgmiselt.

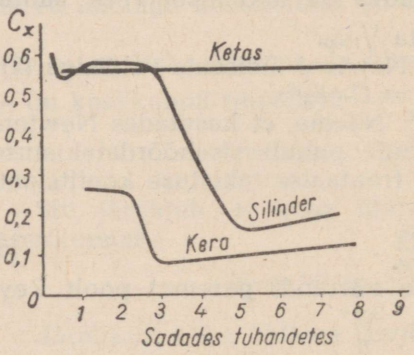
Kui Reynoldsi arv on väike, võrreldes ühega, siis frontaalne takistus on viskoossustakistus; sel juhul frontaalse takistuse koefitsient on pöördvõrdeline Reynoldsi arvuga Re ja on kera puhul $\frac{12}{Re}$. Kui Reynoldsi arv pole küllalt väike, siis on tingimata tarvilik viskoossustakistuse kõrval arvestada takistust, mis tekib keskkonna inertsi tõttu. Kui Reynoldsi arv on suurusjärguliselt lähedane ühele, siis kasutatakse Oseeni valemit:

$$C_x = \frac{12}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right). \tag{10}$$

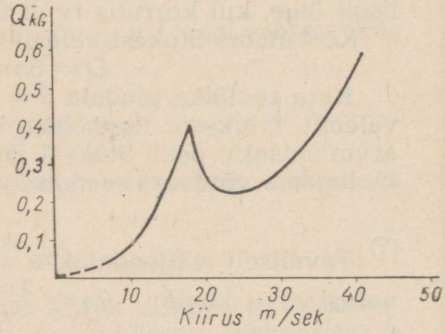
Seega ühega võrreldes väikeste Reynoldsi arvude puhul frontaalse takistuse koefitsient C_x Newtoni valemis määratakse Stokesi seaduse [valemi (9)] järgi, suurusjärguliselt ühega võrdsete Reynoldsi arvude puhul kasutatakse Oseeni valemit [valem (10)].

Reynoldsi arvu edasisel kasvamisel on frontaalses takistuses keskkonna inertsil ülekaalukas osa. Suurte Reynoldsi arvude puhul (suurusjärguliselt võrdsed tuhandega) võib sisehõõrdejõudude vahetut esinemist mitte arvestada, võrreldes keeriselise päritoluga jõududega, millised siiski kaudselt on seotud hõõrdega, nagu me nägime paragrahvis 59.

Reynoldsi arvude puhul, mis on väikesed, võrreldes ühega, Stokesi seaduse järgi frontaalse takistuse koefitsient C_x Reynoldsi arvu suurenemisel väheneb. Reynoldsi arvu edasisel kasvamisel frontaalse takistuse koefitsiendi vähenemine seoses keskkonna inertsi esinemisega järjest aeglustub. Kui Reynoldsi arv on suurusjärguliselt tuhat või kümme tuhat, siis frontaalse takistuse koefitsient jääb ligikaudu konstantseks (kuid erineva kujuga kehade puhul suuruselt mittevõrdseiks).



Joon. 198. Frontaalse takistuskoefitsiendi C_x sõltuvus Reynoldsi arvudest ketta, silindri ja kera puhul.



Joon. 199. 1/4-meetrise diameetriga kera frontaalne takistus õhus liikumise kiiruse funktsioonina. Kiiruse puhul 18—23 *m/sek* esineb kriis.

Kindlas Reynoldsi arvude piirkonnas (kera puhul *Re* väärtuste puhul 200 000—300 000; silindri puhul 400 000—500 000) toimub frontaalse takistuse koefitsiendi järsk vähenemine. Frontaalse takistuse koefitsient väheneb kolm, neli, viis korda, aga siis edasisel Reynoldsi arvu suurenemisel jääb uuesti peaaegu konstantseks (joon. 198). Frontaalne takistus tervikuna väheneb seejuures samuti järsku (joon. 199). Seda nimetatakse *kriisinähteks*.

Kriisinähe on seotud voolamise iseloomu järsu muutumisega vedeliku (või gaasi) kihis, mis liibub liikuva keha pinna vastu. Pöördume uuesti jooniste 189—193 juurde. Nendel joonistel on

näidatud, et „keeriste lahtirebimine" toimub liikuva kera kindlal kohal. Keeriste katkemiskohani on vool kera ümber kujutatud mainitud joonistel laminaarsena. Kriisi puhul see laminaarne voolamine keeriste katkemiskohani muutub turbulentseks; sellega seoses keeriste katkemiskoht nihkub tagasi ja frontaalne takistus väheneb järsku.

Kõik, mis aitab kaasa esialgse laminaarse voolamise muutumisele turbulentseks, mõjub kriisi tekkimisele. Näiteks pinna krobelisus, väikesed teravad kühmud pinnal jm. võivad nihutada kriisi tekkimist väiksemate Reynoldsi arvude suunas.

Keeriste katkemiskoht ja tekkivate keeriste suurus sõltub teiste võrdsete tingimuste juures keha kujust. Mida enam tahapoole on nihutatud keeriste katkemiskoht, seda väiksem on frontaalne takistus. Nagu juba mainiti, on kõige voolujoonelisem sigarikujuline keha, mis on nüüdisaegsetel dirižaablitel.

Allpool on toodud *frontaalse takistuse koefitsiendid* C_x mõnede kehade jaoks (Reynoldsi arvude puhul 100 000—200 000):

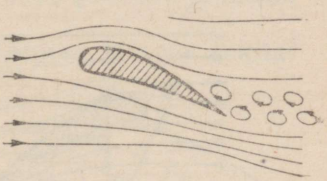
Ruudukujuline plaat, mis on risti voolu suunaga . .	0,64
Ketas, mis on risti voolu suunaga	0,56
Kera	0,25
Ellipsoid, mille suur telg on voolu suunas	0,035
Kõige voolujoonelisemad kehad (sigarikujulised, teravneva tagaotsaga), mille pikkus on neli korda diameetrist suurem ja mille telg on voolu suunas	0,013

§ 65. Tiiva tõstejõud ja lennuki veojõud.

Lennuk on nüüdisajal igaühele küllalt tuttav. Vaatleme lennuki tiiva osatähtsust

Tiiva ristlõikel on iseloomulik kuju, mida nimetatakse *Žukovski profiiliks* (joon. 200).

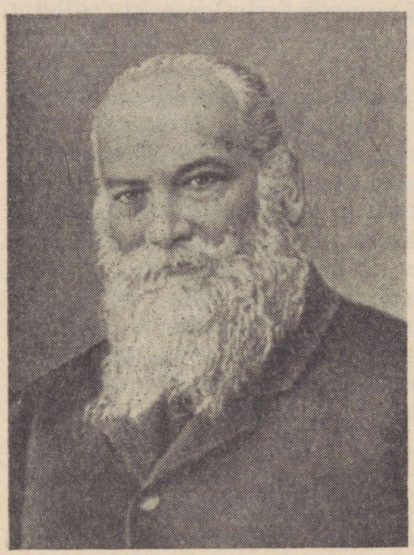
Liikumisel õhus mõjuvad tiivale tõstejõud ja frontaalne takistus. Kuid nagu me selgitasime paragrahvis 62, õhuvoolus kehale mõjuvad jõud võivad tekkida ainult liikuva keha ja selle poolt voolus tekitatud keeriste vastastikusel mõjul. Seega nii tõstejõud kui ka frontaalne takistus, mis mõjuvad tiivale, tekivad tiiva ja mingisuguste tiiva liikumise poolt esilekutsutud keeriste süsteemi koosmõju tagajärjel. Selliseid keeriste süsteeme on kolm:



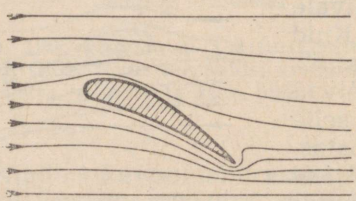
Joon. 200. Keeriste vöö kandepinna taga.

1. *Keeriste vöönd,* mis tekib tiiva või mis tahes keha taga (joon. 200). Selle keeriste vööndiga ja viskoossusjõududega on seletatav osa tiiva frontaalsest takistusest — nn. *profiilne takistus* Q_p.

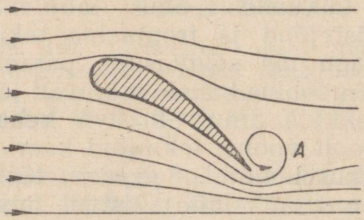
2. Tiiva teravast tagumisest servast mööduva voolu kiirus on väga suur (joon. 201), seepärast lennuki liikumise alguses tekib suure võimsusega keeris — nn. „hoovõtu keeris" (joon. 202), mille vool viib eemale. Pärast seda tekib tagumise serva juures ja katkemispunkt. Aga kuna suletud süsteemis (tiib-õhk) pöördemoment peab jääma konstantseks, siis *tekib tiiva ümber ringvool B* (õhu „tsirkulatsioon"), mille pöördemoment võrdub lisa- ehk hoovõtu keerise *A* pöördemomendiga (joon. 203). See tsirkuleeriv vool liitub õhuvooluga tiiva ümber, mille tagajärjel *õhu kiirus tiiva peal on suurem kui tiiva all* (joon. 204). Bernoulli teoreemi põhjal peab rõhk olema suurem seal, kus kiirus on väiksem. Seepärast *tiiva all tekib ülerõhu, tiiva peal alarõhu piirkond: tiivale mõjub teatav* tõstejõud, nn. aerodünaamiline üleslüke *P*. Joonisel 205 on kujutatud üle- ja alarõhkude piirkondade jaotus tiival. Sellest joonisest on näha, et tõstejõud ei ole niivõrd tingitud tiiva alumisele pinnale mõjuvast rõhust, kuivõrd õhu imevast mõjust kandepinna ülemisele pinnale.



Nikolai Jegorovitš Žukovski (1847—1921).



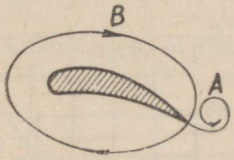
Joonis 201. Õhu kiirus on tiiva tagumise serva juures väga suur (joonisel on näidatud voolujoonte tihenemine).



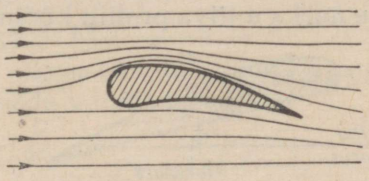
Joon. 202. Tagumise serva juures tekib liikumise alguses „hoovõtukeeris" *A*.

3. Tsirkulatsioon tiiva ümber — kandev keeris — ei lõpe tiiva tagaäärtel, vaid liigub neist eemale. Peale selle alarõhu tõttu tiiva peal voolab õhk tiiva alt üles, nagu näitab joonis 206.

See õhuvool, liitudes tiiva tagumiselt servalt eemalduva keerisega, tekitab tiiva taga nn. keeriste „vurrud". Selliste keeriste

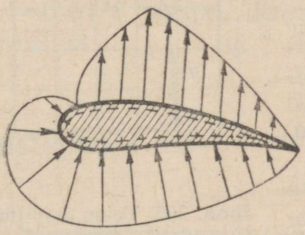


Joon. 203. Ringvool tiiva ümber (kaaskeeris).

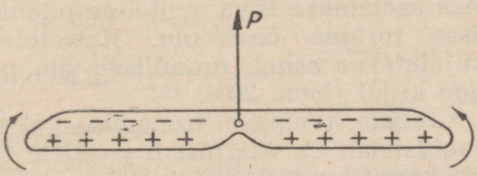


Joon. 204. Tsirkulatsiooni liitumine otsevoolule. Õhuvoolu kiirus, mis on võrdeline voolujoonte tihedusega, on tiiva peal suurem kui tiiva all.

tekitamiseks kuluv töö tingib lisatakistuse Q_i esinemist, mida nimetatakse *induktiivseks takistuseks* (joon. 207). Induktiivne



Joon. 205. Rõhu jaotus kandepinnal.



Joon. 206. Rõhkude erinevuse tõttu voolab õhk tiiva alt üles.

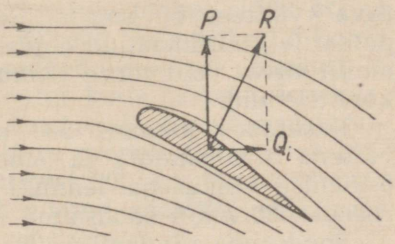
takistus on seda väiksem, mida suurem on tiiva pikkuse ja laiuse suhe, nn. tiiva pikkustegur.

Suurte liikumiskiiruste puhul kulub energiat lainete tekitamiseks — esineb *lainetustakistus*.

Teooria ja katse näitavad, et tõstejõud ja frontaalne takistus on võrdelised liikumiskiiruse v ruuduga, lennuki kandepinna pindalaga S ja õhu tihedusega ϱ:

$$P = C_y \varrho S v^2; \qquad (11)$$

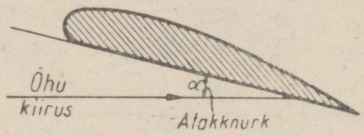
siin P tähistab tõstejõudu, koefitsienti C_y nimetatakse tõstejõukoefitsiendiks. Tiiva profiilne, indukiivne ja lainetustakistus tekitavad frontaalse takistuse Q:



Joon. 207. Normaalne takistus lahutatakse tõstejõuks ja induktiivseks takistuseks.

$$Q = Q_p + Q_i + Q_e = C_x \varrho S v^2. \qquad (12)$$

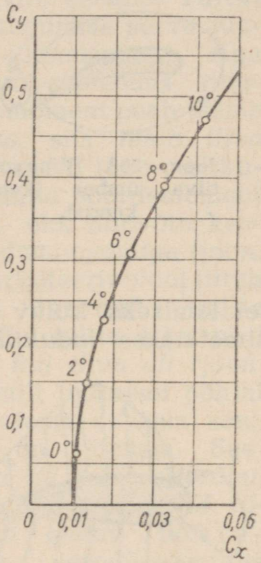
Koefitsient C_x on tiiva frontaalse takistuse koefitsient. Koefitsientide C_x ja C_y suurus sõltub tiiva kujust ja tema asendist voolu suhtes — ründe- ehk atakknurgast. *Ründenurgaks* nimetatakse nurka α tiiva profiili kõõlu ja voolu suuna vahel (joon. 208).



Joon. 208. Ründe- ehk atakknurk α

Teoreetiliselt võib takistuskoefitsienti C_x ja tõstejõukoefitsienti C_y arvutada erineva kujuga tiibade jaoks küllalt suure täpsusega valemite põhjal, mida esitasid Žukovski ja Tšaplõgin. Eksperimentaalsel teel määratakse koefitsiendid C_x ja C_y aerodünaamilistes laboratooriumides. Selleks asetatakse tiiva mudel aerodünaamilisse torusse õhuvoolu. Katsetulemusi kujutatakse sageli graafiliselt nn. *polaaride* kujul (joon. 209).

x-teljele kantakse frontaalse takistuse koefitsiendi C_x väärtused, y-teljele tõstejõu koefitsiendi C_y väärtused.



Joon. 209. Teise maailmasõja lõpul kasutatud hävituslennuki polaar.

Kõveral olevate punktide koordinaadid vastavad tõstejõu- ja frontaalse takistuse koefitsientidele mitmesuguste ründenurkade puhul. Kui meil on olemas polaar mingi tiiva jaoks, siis võime lennuki kiirust teades määrata tõstejõu, frontaalse takistuse ja ründenurga α, mille puhul suhe $\varepsilon = \frac{C_y}{C_x}$ — tiiva kvaliteet on suurim. Selleks piisab puutuja tõmbamisest polaarile koordinaatide algusest. Joonisel 209 C_x ja C_y on mitte ainult tiiva, vaid terve lennuki frontaalse takistuse ja tõstejõu koefitsiendid.

Kasutades joonisel 209 esitatud lennuki polaari, arvutame näitena tiiva pindala ja mootori võimsuse, mis on vajalikud 6-tonnise raskusega lennuki lendamiseks 8000 *m* kõrgusel kiirusega 630 *km/h* soodsaima ründenurga puhul.

Soodsaima ründenurga (s. o. sellise nurga, mille puhul tõstejõu ja takistuse suhe $\frac{P}{Q} = \frac{C_y}{C_x}$ on suurim) määramiseks tõmbame polaarile puutuja koordinaatide alguspunktist; on kerge näha, et see puutepunkt vastab suurimale suhte $\frac{C_y}{C_x}$ väärtusele.

Vaadeldaval juhul saame: $\alpha_3 = 6°$, $C_y = 0{,}31$, $C_x = 0{,}023$. Selle ründenurga puhul on tõstejõu ja takistuse suhe (seda suhet nimetatakse *lennuki kvaliteediks*)

$$\varepsilon = \frac{0{,}31}{0{,}023} = 13{,}5.$$

Arvestades, et tõstejõud peab olema võrdne lennuki kaaluga, s. o. $P = G = 6000$ *kG*, leiame tiibade vajaliku pindala:

$$S = \frac{G}{C_y \varrho v^2} = \frac{G}{2C_y q},$$

kus q on dünaamiline rõhk ($q = \frac{\varrho v^2}{2}$) ~ 8000 *m* kõrgusel, õhu tihedus $\gamma = 0{,}525$ *kG*/*m*^{3}; lennukiiruse $v = 630$ *km*/*t*. $= 175$ *m*/*sek* puhul dünaamiline rõhk

$$q = = \frac{\varrho v^2}{2} = \frac{\gamma v^2}{2g} = \frac{0{,}525 \cdot 175^2}{19{,}6} = 820 \text{ kG/m}^2$$

ja järelikult tiiva pindala S peab olema $\frac{6000}{2 \cdot 0{,}31 \cdot 820} = 12$ *m*^{2}.

Kui tiiva pindala on teada, siis võib takistust leida valemi $Q = C_x \varrho v^2 S$ põhjal. Kuna aga eespool juba oli leitud lennuki kvaliteet

$$\varepsilon = \frac{P}{Q} \text{ ja et } P = G,$$

siis võime Q leida otseselt suhtest $Q = \frac{G}{\varepsilon}$:

$$\frac{6000}{13{,}5} \approx 450 \text{ kG}.$$

Mootori võimsus peab olema vähemalt selline, et ta igas sekundis suudaks teha töö, mis on võrdne ületatava takistuse Q ja sekundi vältel lennuki poolt läbitud tee pikkuse korrutisega. Järelikult peab mootori võimsus propelleri kasuteguri $\eta = 70\%$ korral olema järgmine:

$$N = \frac{Qv}{75\eta} = \frac{450 \cdot 175}{75 \cdot 0{,}7} \approx 1500 \text{ HJ}.$$

Sellise võimsusega kolbmootor kaalub umbes 1500 *kG* ja kulutab 500—600 *kg* bensiini tunnis. Kiiruse tõstmiseks 1,5 korda (945 kilomeetrini tunnis) tuleks suurendada mootori võimsust ja kaalu $(1{,}5)^3 = 3{,}37$ korda. Selline mootor koos propelleriga kaaluks peaaegu sama palju kui kogu lennuk. Suure võimsustarviduse ja kolbmootorite suure kaalu tõttu propellermootoriga lennukid ei suuda kunagi saavutada kiirust 800 *km* tunnis. Suuremate kiiruste saavutamine on raskendatud seetõttu, et kiiruse suurenemisel propelleri kasutegur väheneb.

Propeller tekitab veojõu seetõttu, et *ta paiskab tagasi teatud õhumassi. Propelleri veojõud on seejuures võrdne õhu impulsi muutusega ühes sekundis:* $F = m\Delta v$. Propelleri töötamise tõttu tekib tema ees rõhu alanemine, tema taga suurenemine. Õhk, mis imeb propelleri esiosa ja tõukab tema tagakülge, omandab

poole lisakiirusest propelleri ees, poole tema taga. Seepärast propelleri ümber voolanud õhu kiirus on $v + f\frac{\Delta v}{2}$, kus v on propelleri kulgeva liikumise kiirus ja Δv on lisakiirus, mille propeller annab õhule.

Propelleri poolt kasutatud võimsus on võrdne propelleri veojõu F ja tema poolt ühe sekundi vältel läbitud teepikkuse korrutisega:

$$N = F\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right).$$

Osa sellest võimsusest, nimelt Fv, mida nimetatakse *kasulikuks võimsuseks*, kulutatakse propelleri kulgeva liikumise tekitamiseks. Osa võimsusest, nimelt $F\frac{\Delta v}{2}$ — nn. *kaotatav võimsus*, kulub eemalepaisatud õhule kineetilise energia andmiseks.

Kasuliku ja koguvõimsuse suhe on propelleri kasutegur η:

$$\eta = \frac{Fv}{F\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{v}}.$$

Teatud veojõu tekitamiseks peab propeller igas sekundis paiskama tahapoole kas suure õhumassi M väikese kiirusega Δv_1 või väikese massi m suure kiirusega Δv_2. (Siis veojõud $F = M\Delta v_1 = m\Delta v_2$.) On kerge näha, et esimesel juhul on õhule antud kineetiline energia $\frac{M\Delta v_1^2}{2}$ väiksem kui teisel juhul ($\frac{m\Delta v_2^2}{2}$). Seepärast *on otstarbekam kasutada suurema diameetri ja suurema sammuga propellereid.*

Propelleri töö sõltub ka propelleri laba kujust. Aerodünaamilisest vaatepunktist on kõige kasulikum suure diameetri ja kitsa labaga propeller, mis pöörleb suure kiirusega. Kuid materjali vastupidavus ei luba õhus töötavate propellerite ehitamisel minna selles suunas liiga kaugele.

Propelleri veojõudu kasutatakse mõne lennuaparaadi puhul ka tõstejõuna. Selliseid aparaate nimetatakse *helikopteriteks.* Viimaste aastate jooksul on loodud rida häid helikopteri konstruktsioone, mille propellerid pannakse liikuma kolb-, gaasiturbiin- või reaktiivmootorite abil. Helikopterid võivad õhku tõusta või maanduda vertikaalselt ja ei vaja seepärast erilisi maandumisväljakuid. Neid kasutatakse lendudeks väikestele kaugustele, sidepidamiseks raskesti läbitavates rajoonides, õhudessantide puhul, ülesõitudel jne.

Ka ilma mootorita on võimalik lennukil lennata. Sellist lendamist nimetatakse *planeerimiseks* ja mootorita lennukit *plaaneriks.* Lennu alustamiseks on tarvis plaanerile anda teatav hoog. Plaaner asetatakse künka või mäe tippu või mäe küljele täpselt vastu tuult. Lendur istub oma kohale, 3—4 inimest stardimees-

konnast hoiavad plaanerit sabakonksust ühe- või kahekaupa mõlema tiiva juures. 6—8 inimest tõmbavad kahe köie abil plaaneri ninas oleva konksu taha kinnitatud jämeda kummiköie pingule. Kui köis on küllaldaselt välja venitatud, siis käskluse järel lastakse plaaner lahti ning pinguletõmmatud kummiköie mõjul plaaner, liikudes maas 10—12 *m*, tõuseb üles. Samal ajal köis ise vabaneb konksust. Sageli kinnitatakse plaanereid trosside abil lennuki külge ja pukseeritakse nende abil vajalikule kõrgusele, siis haagitakse tross lahti ja plaaner jätkab iseseisvalt lendu. Lennukitega õhku pukseeritud raskeid veoplaanereid kasutatakse laialdaselt õhudessantide ja varustuse transportimisel.

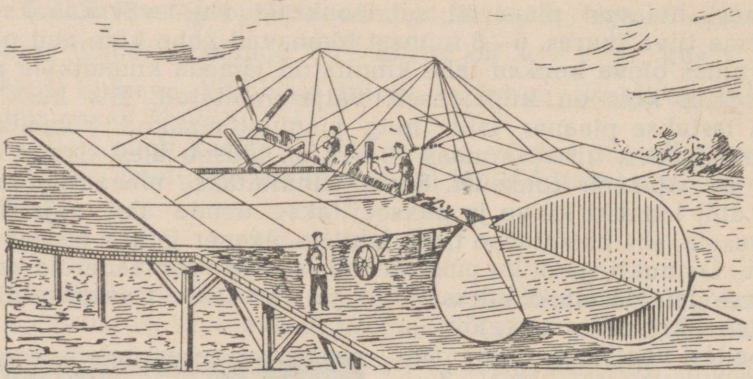
Lennuki tiiva tõstejõu ja propelleri veojõu teooriale pani aluse Nikolai Jegorovitš Žukovski. Tema püstitas tõstejõu suurust määrava põhiteoreemi ja leidis tõstejõu sõltuvuse tiiva profiili geomeetrilisest kujust. Tõstejõu teooria mittestatsionaarse liikumise puhul lõi samuti meie kaasmaalane — akad. Sergei Aleksejevitš Tšaplõgin; tema on ka liittiibade teooria looja. Tšaplõgin töötas esimesena (1902. aastal) välja meetodi õhu kokkusurutavuse mõju arvestamiseks.



Sergei Aleksejevitš Tšaplõgin (1869—1942).

Žukovski ja Tšaplõgini uurimustel oli juhtiv osa teoreetilise aerodünaamika arengus. Žukovski oli samal ajal vene eksperimentaalse aerodünaamika laialdase koolkonna loojaks. Tema juhtimisel ehitati aerodünaamilised laboratooriumid Moskva Ülikoolis (1902. a.) ja Kõrgemas Tehnikakoolis (1909. a.) ning loodi Aero-hüdrodünaamiline Keskinstituut (ЦАГИ, 1918. a.). Žukovski initsiatiivil 1913. a. organiseeritud lennuväeohvitseride kursustest kujunes hiljem N. E. Žukovski nimeline Sõja-lennuväe Akadeemia.

Maailma esimese lennuki projekteeris, ehitas ja katsetas 1882. a. Vene mereväe kapten Aleksander Fjodorovitš Možaiski. Peamiseks takistuseks lennuki ehitamisel oli tol ajal küllalt kergete ja võimsate mootorite puudumine. Možaiski projekti järgi ehitas Peterburi Balti tehas tema lennukile tolle aja kohta rekordilise kergusega aurumasina, mille kaal koos katlaga



Joon. 210. A. F. Možaiski lennuk (1882. a.).

oli alla 5 *kG* hobujõu kohta. Možaiski lennuk oli oma konstruktsiooni poolest kaasaegsetele sarnasem kui 20 aastat hiljem ameeriklaste vendade Wrightide poolt ehitatud lennuk. Možaiski lennukil olid kõik nüüdisaegse lennuki põhiosad: täisnurksed tiivad, lootsikutaoline kere ratastega varustatud šassiil, horisontaalsed ja vertikaalsed stabilisaatorid, kõrgus- ja pöördetüürid.

XI PEATUKK.

VÕNKUMISE DÜNAAMIKA.

§ 66. Harmooniline võnkumine.

Igapäevases elus ja tehnikas puutume võnkliikumisega kokku igal sammul: seinakella pendel sooritab vertikaalasendi lähedal perioodilisi võnkumisi; kiiresti pöörleva turbiini alus vibreerib peavõlli tiirude taktis; raudteevaguni kere kõigub vedrudel roopa liitekohti ületades jne.

Paljudel juhtumitel on mitmesugustel võnkliikumistel ühiseks tunnuseks mingi *püsiva seisundi* olemasolu, milles võnkuv keha on enne ja pärast võnkumist ja milles ta võib viibida määramata pika aja vältel, seni kui väline jõud teda sellest seisundist välja ei vii. Pendlile on selliseks püsivaks seisundiks vertikaalasend, masinaalusele ja vedrudele paigutatud vagunile — seisund, mis vastab teatavale masina või vaguni raskusest tingitud alalisele deformatsioonile.

Kui keha viiakse tema püsivast asendist välja, siis tekib alati jõud, mis püüab teda algasendisse *tagasi viia*. Selle jõu päritolu võib olla mitmesugune. Pendlil on selleks raskusjõud, vagunikerel — vedrudeks liidetud elastselt deformeerunud teraslattide reaktsioon.

Reaktsioonjõu olemasolu pole veel küllaldaseks võnkliikumise tekke tingimuseks. Tõepoolest, kui pendel peale kõrvalekallutamist algasendisse tagasi jõudes liikumise lõpetaks, siis ei olekski võnkliikumist, mida iseloomustab pendli vahelduv liikumine kord ühele, kord teisele poole tasakaaluasendit. On silmanähtav, et võnkliikumise puhul peab esinema peale tagasiviiva jõu ka veel teine tegur, mis ei lase võnkuval kehal algasendisse jõudmisel kohe peatuda. Selleks teguriks on võnkuva keha *inerts*.

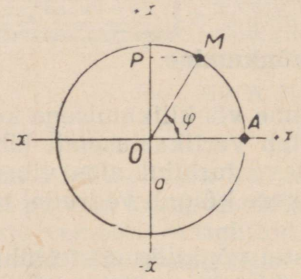
Eriti lihtne on võnkliikumine sel juhul, kui *reaktsioonjõud kasvab võrdeliselt võnkuva keha kaugusega tasakaaluasendist*, s. o. võrdeliselt hälbega. Vaatame algul seda juhtu puhtkinemaatiliselt.

Kujutleme punkti M (joon. 211), mis liigub ringjoonel raadiusega a jääva nurkkiirusega ω, ja vaatleme selle punkti *projektsiooni* P liikumist vertikaalsel diameetril. Oletame, et ajamomendil t raadius OM pöördus algasendist OA nurga φ võrra; siis punkti P hälve x, mis on võrdne lõiguga OP, määratakse lihtsa avaldisega:

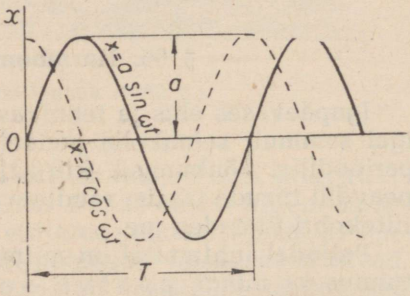
$$x = a \sin \varphi.$$

Nurka φ nimetatakse punkti P *võnkefaasiks*[1]; teades nurkkiirust[2]

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Joon. 211. Punkti M ühtlasel liikumisel mööda ringjoont tema projektsioon P võngub harmooniliselt.



Joon. 212. a — harmoonilise võnkumise amplituud, T — periood.

(kus T on aeg, mille vältel punkt M teeb täistiiru, aga 2π — ringjoone pikkus nurkühikutes), pole raske leida faasi φ:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t.$$

Järelikult

$$x = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1)$$

Vaadeldes punkti M projektsiooni liikumist horisontaalsel teljel, saame analoogiliselt:

$$x = a \cos \omega t = a \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1')$$

Võrranditega (1) ja (1′) väljendatud liikumise võnkuv iseloom saab eriti selgelt nähtavaks selle graafilisel kujutamisel (vt. joon. 212).

Võnkliikumist, mida väljendatakse siinus- või koosinusfunkt-

[1] Kreeka keeles *phasis* — ilmumine.

[2] Edaspidi (võnkliikumise puhul) nimetame suurust ω tavakohaselt mitte nurkkiiruseks, vaid nurk- ehk ringsageduseks.

sioonina, nimetatakse harmooniliseks[1] *võnkumiseks;* see on täielikult iseloomustatav järgmiste suurustega (tunnustega):

1. suurima hälbega — *amplituudiga*[2] *a.*

2. *võnkeperioodiga T,* s. o. ajaga, mille vältel võnkuv punkt (või keha) teostab võnkliikumise täistsükli, liikudes alguses ühele, siis teisele poole algasendit ja jälle temasse tagasi jõudes.

Võnkeperioodi asemel võib kasutada *võnkesagedust* ν, mida defineeritakse, kui *sekundi jooksul toimuvate täisvõngete arvu.* Sageduse ühikut — üks võnge sekundis — nimetatakse *hertsiks* (*Hz*). On kerge näha, et periood ja sagedus on teineteise pöördarvud:

$$T = \frac{1}{\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{T}. \tag{2}$$

Nurksagedus ω määratakse üheselt perioodiga või sagedusega:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3}$$

On silmanähtav, et ω tähendab 2π *sekundi jooksul toimunud täisvõngete arvu.*

Siirdume jõudude vaatlemisele, mille mõjul võib tekkida harmooniline võnkumine. Kasutades võrrandit (1), leiame selleks alguses harmooniliselt võnkuva punkti kiiruse v ja kiirenduse a:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega a \cos \omega t \tag{4}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 a \sin \omega t = -\omega^2 x. \tag{5}$$

Viimane avaldis tähendab, et igal antud ajamomendil on *kiirendus a võrdeline punkti hälbega x;* miinusmärk näitab, et kiirendus on alati vastassuunaline hälbega. Kiirendus on võrdeline ja samasuunaline teda põhjustava jõuga; tähendab jõud, millest oleneb võnkuva keha kiirendus, on suunatud samuti vastassuunaliselt hälbega ja on võrdeline hälbe suurusega. See jõud ongi reaktsioonjõud.

Korrutades võrrandi (5) mõlemaid pooli võnkuva materiaalse punkti massiga m, saame *harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrandi:*

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -cx, \tag{6}$$

kus

$$c = m\omega^2. \tag{6'}$$

Võrrandil (6) on lihtne füüsikaline mõte: vasakpoolses osas seisab võnkuva punkti massi ja kiirenduse korrutis, millega määratakse vastavalt Newtoni teisele seadusele punktile mõjuv reaktsioonjõud — cx. Niiviisi väljendab võrrand (6) teist mehhaanika

[1] Kreeka keeles *harmoso* — korda seadma (korraldama).
[2] Ladina keeles *amplitudo* — laius.

põhiseadust, kasutatuna materiaalse punkti jaoks, mis on hälbega võrdelise jõuga seotud tasakaaluasendiga. Vastupidi, hälbega võrdelise reaktsioonjõu olemasolu korral on keha lihtsas harmoonilises võnkumises, mida väljendavad võrrandid (1) või (1').

Harmooniliste võnkumiste teoorial on füüsikas oma tähtsuse poolest täiesti erandlik osa. Õpetust harmoonilistest võnkumistest rakendatakse kõigis füüsika harudes: elastsusteoorias, akustikas, optikas, õpetuses elektrist, aine kineetilises teoorias, aatomiteoorias. Millega seletub see harmooniliste võnkumiste õpetuse universaalne rakendatavus?

Selle õpetuse erandlik osa seletub kahe asjaoluga. Harmooniline võnkumine on liikumine, mida põhjustav jõud kasvab võrdeliselt hälbega x tasakaaluasendist. Olgu jõu sõltuvus hälbest milline tahes, seda sõltuvust võib alati esitada Taylor'i lõpmatu reana; esimeseks liikmeks selles reas on quasielastne jõud (s. o. jõud, mis on võrdeline hälbega x), teised rea liikmed on võrdelised järjekindlalt kasvavate x-i astmetega. Kui hälve x on väike, võib jätta kaugemaid rea liikmeid tähele panemata — see ongi harmoonilise võnkumise juhtum. Suuremate hälvete puhul tuleb arvestada teist, kolmandat ja järgmisi rea liikmeid (sel juhul on võnkumised mitteharmoonilised). Amplituudi suurenemisel võnkliikumine harilikult järjest enam erineb harmoonilisest võnkumisest. Aga ka sel juhul alati, kui võnkuv süsteem läheneb tasakaaluasendile, langeb kaugemate Taylor'i rea liikmete mõju üksteise järele ära ja tasakaaluasendi lähedal määrab liikumist juba ainult quasielastne jõud. Sellepärast on harmooniliste võnkumiste teooria esimeseks ja möödapääsmatuks sammuks peaaegu kõikide perioodiliste protsesside uurimisel.

Teine asjaolu, mis muudab harmooniliste võnkumiste teooria väga tähtsaks mitmesugustele füüsika harudele, seisneb selles, et paljud võnkesüsteemid välise perioodilise mõjutuse puhul resoneerivad sellistele perioodilistele võnkumistele, mille sagedus on lähedane süsteemi omasagedusele (§ 71).

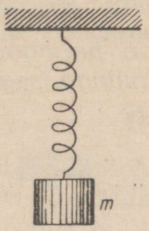
§ 67. Harmooniliste võnkumiste energia ja omasagedus.

Võnkuvad süsteemid (s. o. niisugused omavahel seoses olevate kehade süsteemid, mis on võimelised võnkuma) on välimuse ja ehituse poolest väga mitmesugused. Vaatleme lihtsaimat võnkuvat süsteemi: viht massiga m on riputatud küllaldase tugevusega spiraalvedru otsa (joon. 213); kui viht on tasakaaluasendist välja viidud, siis mõjub temale vedru jõuga F, mis on hälbega x võrdeline ja vastassuunaline:

$$F = -cx$$

(lihtsuse mõttes jätame tähele panemata vihi raskusest tingitud vedru väikese väljavenitatuse). Võrdtegurit c, mis arvuliselt on võrdne üheühikulist hälvet esilekutsuva jõu suurusega, nimetatakse *reaktsioonjõu koefitsiendiks.*

Tasakaaluasendist väljaviidud mass m hakkab selle asendi ümber harmooniliselt võnkuma; kui sisemine hõõre ja õhutakistus puuduvad, siis kestab see võnkumine määramata kaua. Algtõukel süsteemile antud energia muundub perioodiliselt: elastselt deformeeritud vedru potentsiaalne energia muutub liikuva vihi kineetiliseks energiaks ja ümberpöördult. Energia jäävuse seaduse järgi jääb kineetilise ja potentsiaalse energia[1] summa konstantseks:



Joon. 213. Lihtsaim võnkesüsteem.

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = const.$$

Sel momendil, kui viht läbib tasakaaluasendit ($x = 0$), on süsteemil ainult kineetiline energia ja kiirusel on maksimaalne väärtus v_{max}; vastupidi, mõlemates äärmistes asendites ($x = \pm a$) muutub süsteemi energia täielikult potentsiaalseks. Seepärast:

$$\varepsilon = \frac{mv^2_{max}}{2} = \frac{ca^2}{2}. \qquad (7)$$

Kuid kiiruse maksimaalne väärtus võrrandi (4) alusel on võrdne võnkumise nurksageduse ω ja amplituudi a korrutisega:

$$v_{max} = \omega a.$$

Seda eelmisse võrrandisse paigutades saame kooskõlas võrrandiga (6′):

$$m\omega^2 = c.$$

Siit määrame nurksageduse:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (8)$$

s. t. harmooniliste võnkumiste nurksagedus on võrdne ruutjuurega reaktsioonjõu koefitsiendi ja keha massi jagatisest.

On kerge näha, et selle väga tähtsa valemi (8) saame ka võnkliikumise diferentsiaalvõrrandist $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$. Asetades sellesse $x = a \sin \omega t$ ja teise tuletise x-ist t järgi, s. o. $-\omega^2 a \sin \omega t$, ning siis taandades mõlemaid võrrandi pooli suurusega $a \sin \omega t$, saame samuti $m\omega^2 = c$.

Avaldis (8) võimaldab leida võnkesagedust ja -perioodi:

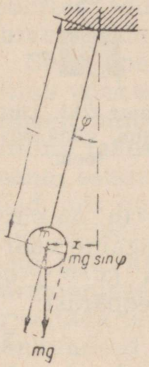
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (9)$$

[1] Uldvalemi järgi, mis on tuletatud § 47, on elastse hälbe (deformatsiooni) potentsiaalne energia: $\frac{Fx}{2} = \frac{cx^2}{2}$.

Avaldistest (7), (8) ja (9) tuletuvad võnkumise energia kohta järgmised valemid:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2} m\,\omega^2 a^2,\\ \varepsilon &= 2\pi^2\, m\,\nu^2\, a^2,\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

s. o. *harmoonilise võnkumise energia on võrdeline amplituudi ruuduga, sageduse ruuduga ja võnkuva keha massiga.*



Joon. 214. Matemaatilise pendli võnkeperioodi arvutamiseks.

Vaatleme näitena lihtsat pendlit, mis koosneb väikesest kehast massiga m ning on riputatud mitteveniva niidi külge, mille pikkus on l (joon. 214). Oletame, et pendli hälbed on niivõrd väikesed, et neid võib mõõta mööda ristsirget, mis on tõmmatud pendli raskuspunktist niidi vertikaalasendiga ühtivale sirgele.

Reaktsioonjõuks on see raskusjõu mg komponent (g — raskuskiirendus), mis on niidiga risti ja suunatud algasendi poole; komponent, mis on suunatud piki niiti, tasakaalustub niidi reaktsiooniga. Joonisest 214 on näha, et meid huvitav pendli raskuse komponent on $mg \sin\varphi$, et aga $\sin\varphi = \frac{x}{l}$, siis reaktsioonjõud

$$F = -\frac{mg}{l}\,x.$$

Järelikult on reaktsioonjõu koefitsient $\frac{mg}{l}$. Kasutades üldist valemit (9) leiame pendli võnkeperioodi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11)$$

Valem (11) näitab, et *pendli võnkeperiood ei olene tema massist.* See asjaolu võib esimesel pilgul näida ootamatuna. Kui aga meenutada, et pendli kaalu tõttu tekkiv reaktsioonjõud on võrdeline tema massiga, siis on arusaadav, mispärast suurus m ei esine lõpptulemuses.

Eespool me vaatlesime niisuguseid võnkumisi, mille juures võnkuv keha liigub mööda sirgjoont. Aga juba pendli näite juures oleks, rangelt lähtudes, tulnud arvestada, et antud juhul massi m raskuspunkt ei liigu mitte sirgel, vaid ringi kaarel raadiusega l. Piirdudes ainult väikeste võnkumistega, võisime ringi kaare vahetada sirgjoone lõiguga ja hälvet mõõta mitte mööda kaart, vaid piki ristsirget, mis on tõmmatud pendli raskuspunktist pendli kinnituspunkti läbivale vertikaalsirgele. Pendli väikeste võngete puhul ei ületa sellest tingitud viga protsendi murdosa.

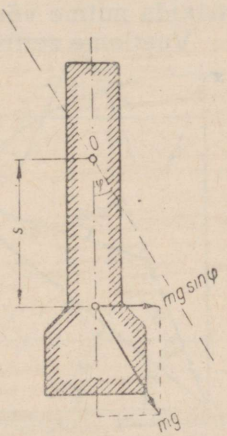
Tervel real juhtudel, kas või näiteks hariliku taskukella pendli puhul, ei liigu võnkuv keha aga mitte translatoorselt, vaid pöörlevalt. Selliste võnkumiste hulka kuuluvad niinimetatud

keerdvõnkumised. Lihtsaim süsteem, mis on võimeline keerlevalt võnkuma, on võllile asetatud ketas, mille külge on kinnitatud vedru niiviisi, et ketta pööramisel vedru deformeerimisest tekkiv reaktsioonjõud takistab ketta pööramist. Olgu I ketta inertsmoment võlli suhtes, aga M reaktsioonjõu moment, mida loeme võrdeliseks ketta pöördenurgaga φ; $M = D\varphi$. Niisuguse võnkesüsteemi võnkeperioodi määrab valem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \tag{12}$$

mis on analoogiline valemiga (9) selle erinevusega, et massi kohal on inertsmoment, aga reaktsioonjõu koefitsiendi asemel — reaktsioonmomendi koefitsient. Valemit (12) võib saada sama mõttekäiguga, millega saadi valem (9).

Pendel, mille kohta valem (11) rangelt kehtib, kujutab endast kaaluta niidile riputatud ainepunkti. Ometi tõeline pendel (mida nimetame eespool vaadeldud „matemaatilisest pendlist" eraldamiseks *füüsikaliseks pendliks*) on mingi kindla kaaluga keha, mis ripub kinnitatuna raskuskeskmega mitte ühtelangevas punktis. Füüsikalise pendli võnkeperioodi on võimalik leida valemi (12) abil.



Joon. 215. Füüsikalise pendli võnkeperioodi arvutamiseks.

Tähistame endiselt I-ga pendli inertsmomenti tema pöörlemistelje[1] suhtes, D-ga — reaktsioonmomendi koefitsienti. Tähendagu s kaugust keha raskuspunktist pöörlemisteljeni (joon. 215). Reaktsioonjõud, mis tekib pendli pööramisel nurga φ võrra, on $mg \sin\varphi$, aga tema moment $M = mg \sin\varphi s$. Kui pendli võnked ei ole väga suured, siis võib asendada $\sin\varphi = \varphi$; sel juhul

$$M = D\varphi = mg\,s\varphi,$$
$$D = mgs.$$

Kasutades nüüd valemit (12) leiame:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{g}}, \tag{13}$$

kus $I' = \frac{I}{ms}$. Suurust I' nimetatakse *füüsikalise pendli taandatud (redutseeritud) pikkuseks.* Selle termini mõte seisneb selles, et

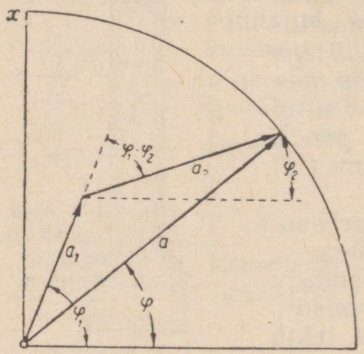
[1] Tuletame meelde (§ 42), et kui I_s on inertsmoment raskuskeset läbiva telje suhtes, siis pöörlemistelje O suhtes määratakse inertsmoment võrrandiga
$$I = I_s + ms^2,$$
kus s on kaugus raskuspunktist pöörlemisteljeni.

füüsikalise pendli redutseeritud pikkusega võrdse pikkusega matemaatiline pendel on sama võnkesagedusega kui antud füüsikaline pendel.

§ 68. Võnkumiste interferents.

Materiaalne punkt võib võtta üheaegselt osa mitmest harmoonilisest võnkumisest. Sel juhul vaatleme mingil ajamomendil hälbeid, mis on punktil, kui ta võtab osa igast üksikust võnkumisest eraldi. Nende hälvete geomeetriline (vektoriaalne) summa määrabki punkti hälbe vaadeldaval ajamomendil. Üheaegselt mitmest võnkumisest osavõtva punkti liitliikumine osutub komplitseeritud liikumiseks, ometi osutub see resultantliikumine enamiku praktiliselt huvitavate juhtumite puhul võnkliikumiseks. Nii võib rääkida mitme võnkumise liitmisest üheks resultantvõnkumiseks.

Vaatleme sellisest võnkumiste liitmisest mõnda näidet.



Joon. 216. Kahe ühesuguse sagedusega võnkumise liitmise vektordiagramm.

Algul vaatleme kahe samasuunalise võnkumise liitmist. Sel juhul hälbed, mis punktil on mõlemas võnkumises, liituvad algebraliselt. Edasi oletame, et mõlemad võnkumised toimuvad sama nurksagedusega ω (s. o. *sama perioodiga*), aga erinevate algfaasidega φ_1 ja φ_2. Vastavalt valemitele (1) ja (3) kirjutame võnkliikumiste võrrandid järgmisel kujul:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Resultantvõnkumise võrrandi tuletamiseks esitame kahe vaadeldava võnkumise vektordiagrammid (joon. 211) ühisel diagrammil (joon. 216). Resultanthälve $x = x_1 + x_2$ saadakse amplituud-vektorite a_1 ja a_2 projekteerimisel vertikaalsele diameetrile, s. o. igal ajamomendil on ta võrdne samale teljele projekteeritud vektoriga a, mis kujutab a_1 ja a_2 geomeetrilist summat. Seega resultantvõnkumise võrrand on

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(\omega t + \varphi), \tag{14}$$

kus, nagu järeldub joonisest 216,

$$\tan \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}, \tag{15}$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{16}$$

Vaadeldud ühesuguste sagedustega ja ühesuunaliste hälvetega harmooniliste võnkumiste liitmise juhtumit nimetatakse *võnkumiste interferentsiks.*

Harmoonilise võnkumise energia, nagu nägime [valem (10)], on võrdeline amplituudi ruuduga, seepärast on liitvõnkumise energia ainult sel juhul võrdne liidetavate võnkumiste energiate summaga, kui

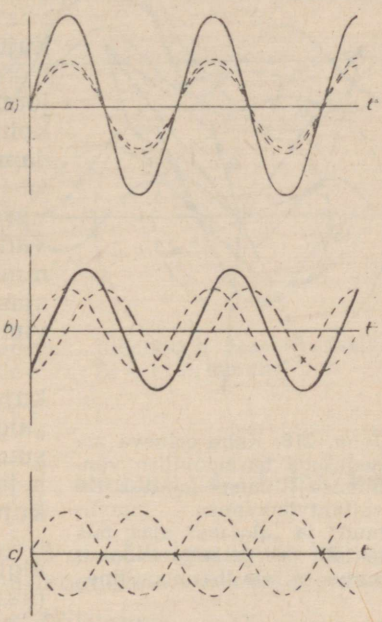
$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Niisugune seos esineb, nagu näitab valem (16), liitvõnkumise amplituudi ja liidetavate võnkumiste amplituudide vahel ainult siis, kui liidetavate võnkumiste faasid erinevad teineteisest suuruste $\frac{\pi}{2}$ või $3\frac{\pi}{2}$ või üldiselt $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ võrra, kus n on null või mingi täisarv.

Kui faaside vahe $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ või üldiselt $(2n + 1)\pi$, siis öeldakse, et võnkumised on *vastupidistes faasides.* Tõepoolest sel juhul

$$|a| = |a_1 - a_2|.$$

Kui liidetavate võnkumiste faasid on vastupidised ja amplituudid võrdsed ($a_1 = a_2$), siis võnkumiste liitmise tulemuseks on paigalolek ($a = 0$).



Joon. 217. Ühesuguste amplituudidega võnkumiste interferents ühesuguste (*a*), erinevate (*b*) ja vastupidiste (*c*) faaside puhul.

Kui faaside vahe $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ või üldiselt $2n\pi$, kus n on mingi täisarv, siis öeldakse, et võnkumiste *faasid ühtivad.* Sel juhul valemist (16) järeldub, et

$$a = a_1 + a_2.$$

Faaside ühtimise ja amplituudide võrdsuse puhul ($a_1 = a_2$) kahekordistub liitvõnkumise amplituud ja järelikult energia on 4 korda suurem ühe liidetava võnkumise energiast.

Joonisel 217 on näidatud kolm võrdsete amplituudidega, aga erinevate faasidega võnkumiste interferentsi juhtu (resultantvõnkumise sinusoid on saadud liidetavate sinusoidide algebralise liitmise teel).

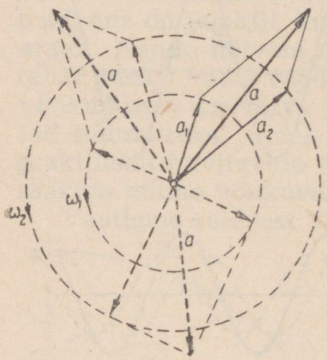
§ 69. Võnkumiste liitmine.

Kui liidetavad võnkumised on samasuunalised, aga erineva perioodiga, siis liitvõnkumine üldiselt pole harmooniline.

Et mõista, milline on materiaalse punkti liitvõnkumine antud juhul, pöördume jälle vektordiagrammi juurde. Kuid nüüd, põhjustatuna liidetavate võnkumiste erinevast võnkesagedusest, saab vektordiagrammi joonisel 216 esitatud kujul kasutada ainult algajamomendi $t = 0$ kohta. Soovides vektordiagrammi joonestada mingi teise ajamomendi kohta, peame nurgad φ_1, φ_2 ja φ asendama nurkadega $\omega_1 t + \varphi_1$, $\omega_2 t + \varphi_2$ ja $\omega t + \varphi$. Kuna antud juhul $\omega_1 \neq \omega_2$, siis nurk nende vektorite vahel, mis kujutavad liidetavate võnkumiste amplituude, nimelt nurk $(\omega_1 - \omega_2)\, t + (\varphi_1 - \varphi_2)$ on ajas muutuv suurus. Järelikult, kui soovime liitvõnkumist esitada funktsiooni

$$x = x_1 + x_2 = a\sin(\omega t + \varphi)$$

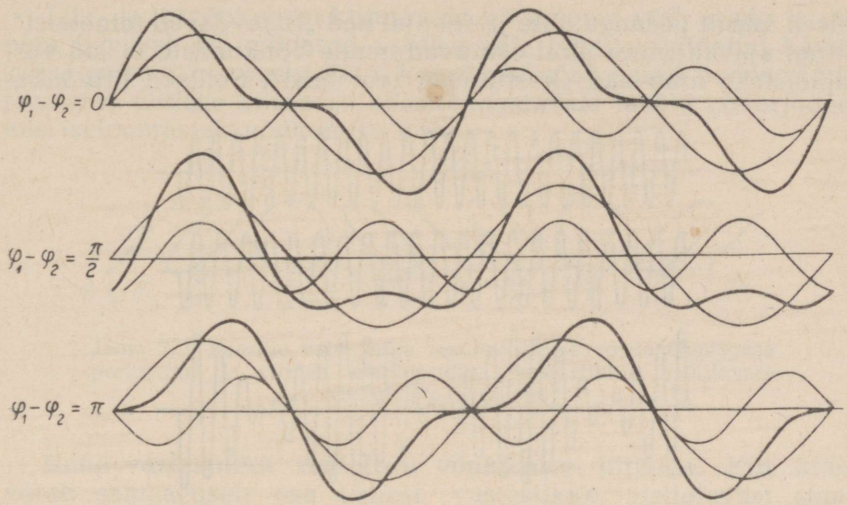
kujul, siis peaksime „amplituudi" a ja „algfaasi" φ lugema ajas muutuvateks suurusteks (joon. 218). Kuidas suurused a ja φ ajaga muutuvad, sellest võime kujutluse saada, kui mõtleme, et vektorid a_1 ja a_2 pöörlevad koordinaatide alguse ümber nurkkiirustega ω_1 ja ω_2 (nurk nende vektorite vahel muutub kiirusega $\omega_1 - \omega_2$).



Joon. 218. Kahe erineva sagedusega harmoonilise võnkumise liitmisel muutub resultantvõnkumise „amplituud" ja „algfaas" ajas, mis näitab, et resultantvõnkumine ei ole harmooniline.

Väga tähtsad on kaks erijuhtu, nimelt kordsete perioodidega võngete liitmine ja väga vähe erinevate perioodidega võngete liitmine.

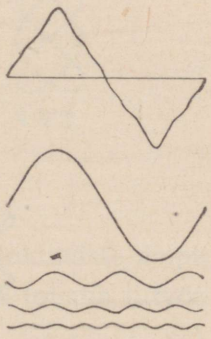
Kordsete perioodidega võngete liitmine. Iga võnkumist iseloomustab kõigepealt võnkumise *kuju*. Võnkumise kuju all mõistetakse hälbe x ja aja t vahelist vastastikust olenevust kujutatuna graafiliselt (näiteks joonistel 212 ja 217). Pole raske veenduda, et harmooniliste (sinusoidaalsete ja koosinusoidaalsete) võnkumiste liitmine annab resultantvõnkumise, mille kuju oluliselt sõltub liidetavate võnkumiste perioodide ja faaside vahekorrast. Lihtsaim viis liitvõnkumise kuju määramiseks on graafikul (x, t) liidetavaid võnkumisi kujutavate kõverate ordinaatide algebraline liitmine. Joonisel 219 on jämedate joontega kujutatud kahe sinusoidaalse võnkumise liitvõnkumine, liidetavate võnkumiste perioodide suhe on 1 : 2. Jooniselt on näha, kuidas muutub liitvõnkumise kuju olenevalt liidetavate võnkumiste faaside vahest (ülemine kõverjoon käib juhu kohta, kus $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$,



Joon. 219. Resultantvõnkumise kuju olenevus liidetavate faaside suhtest („oktaavi", s. o. perioodide suhte $T_1 : T_2 = 1 : 2$ puhul).

keskmine juhu kohta, kus $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, alumine juhu kohta, kus $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$).

Fourier' poolt tõestatud teoreemi järgi võib igasuguse kujuga võnkumist perioodiga T kujutleda harmooniliste võnkumiste summana perioodidega $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{T}{4}$ jne. Niisugust mis tahes perioodilise funktsiooni lahutamist sinusoidaalseteks funktsioonideks nimetatakse *harmooniliseks analüüsiks.*

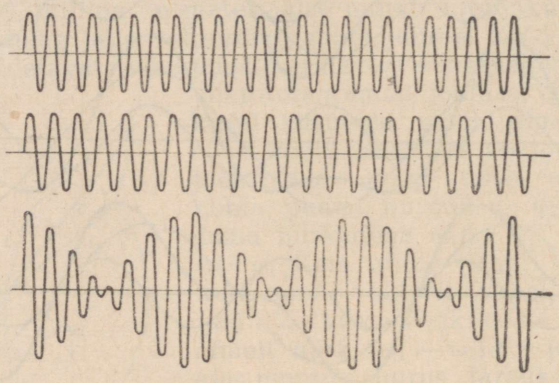


Joon. 220. Murdjoone lahutamine neljaks sinusoidiks.

Joonisel 220 on näidatud kolmnurgakujulise perioodilise funktsiooni lahutamist neljaks sinusoidiks perioodidega $T, \frac{T}{3}, \frac{T}{5}$ ja $\frac{T}{7}$. Teades perioodilise funktsiooni $x = f(t)$ kuju, võib Fourier' poolt väljatöötatud meetodiga alati leida nende sinusoidide, milliste liitmisel võib saada antud funktsiooni, perioode ja faase (Fourier' meetod esitatakse analüüsi kursuses).

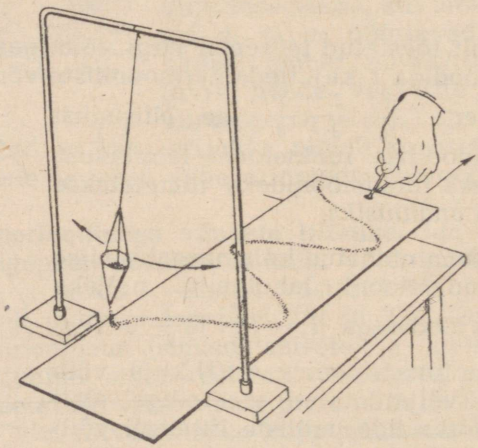
Lähedaste perioodidega võnkumiste liitmine (tuiklemised). Kui liidetavate võnkumiste sagedused ω_1 ja ω_2 erinevad vähe teineteisest, siis mingi ajavahemiku järel langevad need võnku-

mised faasilt peaaegu ühte ja sel ajal nad „tugevdavad teineteist". Mingi ajavahemiku järel osutuvad nende võnkumiste faasid vastupidisteks ning nad „kustutavad teineteist". Sellised liitvõnku-



Joon. 221. Tuiklemised; alumine kõver kujutab kahe ülemise kõvera liitmise resultaati.

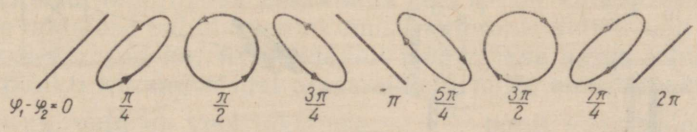
mise tugevnemised ja nõrgenemised järgnevad vaheldumisi üksteisele sagedusega, mis on võrdne liidetavate võnkumiste sageduste vahega. Seda nähtust nimetatakse *tuiklemiseks.* Joonisel



Joon. 222. Seadis võnkumiste kuju demonstreerimiseks.

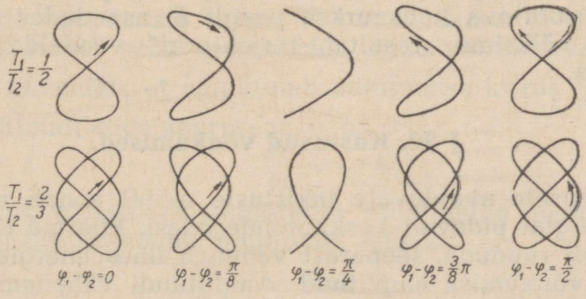
221 on näidatud tuiklemiste tekkimine kahe võrdse amplituudiga harmoonilise võnkumise puhul. Perioodide suhe antud näite juures on 7 : 6.

Liht- ja liitvõnkumisi kujutavaid kõverjooni võib saada ja jälgida joonisel 222 näidatud seadise abil. Niidile riputatud kausikesse puistatakse peent liiva; kausikese võnkumisel pudenev liiv joonistab ühtlase kiirusega edasitõmmatavale lauale kõverjoone, mis iseloomustab võnkumise kuju.



Joon. 223. Faaside vahe mõju resultanttrajektoorile ühesuguse perioodiga ja võrdse amplituudiga vastastikku ristiolevate võnkumiste liitmisel.

Kahe vastastikku ristioleva võnkumise liitmine. Kui keha võtab samaaegselt osa kahest vastastikku ristiolevast sama perioodiga võnkumisest, siis resultantliikumine toimub mööda elliptilist trajektoori. Selle ellipsi kuju oleneb võnkefaaside vahest; erandjuhtumeil võib ellips kujuneda ka sirgjooneks (joon. 223).

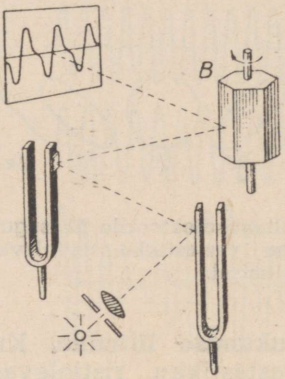


Joon. 224. Lissajous' kujundid.

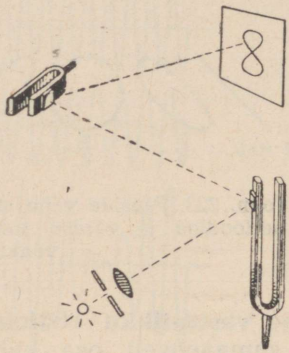
Kui faaside vahe on $\frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$, kusjuures võnkumiste amplituudid on teineteisega võrdsed ($a_1 = a_2 = a$), siis toimub liitvõnkumine ringjoont mööda.

Tunduvalt keerukamaid trajektoore saadakse siis, kui liidetavate võnkumiste perioodid ei ole võrdsed. Olenevalt liidetavate võnkumiste perioodide, amplituudide ja algfaaside vahekorrast on liitvõnkumiste trajektooridel keerulised kujud. Neid kujusid nimetatakse Lissajous' kujunditeks (neid uurinud prantsuse füüsiku Lissajous' auks). Joonisel 224 on näidatud mõni neist kuju-

dest. Lissajous' demonstreeris võnkumiste liitmist valguslaigu abil, lastes valgust peegelduda kahelt võnkuvalt helihargilt. Seda võnkumiste liitmise demonstreerimise meetodit on selgitatud joo-



Joon. 225. Ühesuunaliste võnkumiste liitmise demonstreerimine.



Joon. 226. Vastastikku ristiolevate võnkumiste liitmise demonstreerimine.

nistel 225 ja 226 (kui juhtumil, mis kujutatud joonisel 225, kõrvaldaksime pöörleva kuusnurkse peegli *B*, asendades seda ekraaniga, siis võiksime „resultant-trajektoori" vaadelda vertikaalse vööndina).

§ 70. Kustuvad võnkumised.

Liikumisele avalduvate takistuste mõjul annab võnkuv süsteem energiat pidevalt keskkonnale edasi. Energia on võrdeline amplituudi ruuduga, seepärast väheneb ühes energia vähenemisega ka võnkumise amplituud. Amplituudi vähenemise seaduse määrab süsteemi energia vähenemise kiirus.

Võnkuv süsteem võib kulutada oma energiat kahel teel: hõõrde- ja kiirgamise tagajärjel, s. o. lainete kujul väliskeskkonda andmise teel.

Enamikul juhtumeil esinevad mõlemad energia kao allikad. Energia kulu kiirgusele on harilikult kasulik kulutus (terve rea võnkesüsteemide ülesanne); energia kadu hõõrdele on aga ebatootlik.

Et süsteemi pikemat aega võnkumises hoida, on tarvis talle väljastpoolt energiat juurde anda; sel juhul kunstlikult toetatud võnkumiste amplituud saab sellise ulatuse, mille juures energia juurdetulek kompenseerib energia kaod ja süsteem töötab tema energeetilise bilansi seisukohalt kasuta ja kahjuta.

Enamikul tehniliselt huvitavatel juhtumitel on energiakulu tingitud *takistusest, mille suurus on võrdeline võnkuva massi kiirusega*: $R = -r\frac{dx}{dt}$, kus miinusmärk tähendab, et takistus R vähendab liikumise kiirust, aga suurus $r = const.$ on *takistuse koefitsient.* Selline on näiteks sisehõõrdetakistus, aga ka võnkuvat süsteemi ümbritseva keskkonna reaktsioon kiirgamisele. Niisuguse takistuse puhul on võnkumiste diferentsiaalvõrrand keerukam kui võrrand (6). Arusaadavalt määratakse antud juhul võnkuva punkti kiirendus igal ajamomendil mitte ainult reaktsioonjõu — cx, vaid ka veel takistuse — $r\frac{dx}{dt}$ poolt. Võrrutades ainepunkti massi ja tema kiirenduse korrutist punktile mõjuvate jõudude summaga, saame diferentsiaalvõrrandi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - cx. \qquad (17)$$

Seda võrrandit ei rahulda enam harmoonilise võnkumise valem, mida, nagu teame, iseloomustab amplituudi jäävus. Ümberpöördult: võnkumiste amplituud peab energia kao tõttu aja jooksul vähenema. Väheneva amplituudiga võnkumisi nimetatakse *kustuvateks.*

Seega võrrand (17) on kustuvate võnkumiste diferentsiaalvõrrand.

Kustuvate võnkumiste valemi leiame eeldades, et võnkumiste amplituud kahaneb seda aeglasemalt, mida väiksemaks ta jääb. See eeldus tähendab, et amplituudi muutumise kiirus $\frac{da}{dt}$ on võrdeline amplituudi enda suurusega, s. o.

$$\frac{da}{dt} = -\delta a$$

(märk miinus näitab, et amplituudi muutumine toimub vähenemise suunas). Eraldades muutujad, leiame:

$$\frac{da}{a} = -\delta dt,$$

millest integreerides saame:

$$\ln a = -\delta t + C.$$

Võttes $C = \ln a_0$, leiame, et

$$a = a_0 e^{-\delta t}.$$

Siin $e = 2,71\ldots$ on loomulikkude logaritmide alus, a_0 — amplituud algmomendil ($t = 0$). Suurust δ nimetatakse sumbuvusteguriks. Kustuva võnkliikumise võrrand on:

$$x = a_0 e^{-\delta t}\sin\omega t. \qquad (18)$$

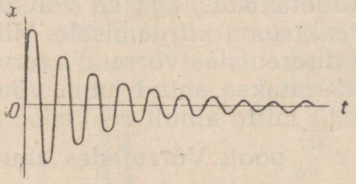
Asetades funktsiooni (18) ja tema tuletised aja järgi diferentsiaalvõrrandisse (17), võib leida sumbuvusteguri δ ja nurksageduse ω väärtused:

$$\delta = \frac{r}{2m}, \qquad (19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \qquad (20)$$

Võrrandi (18) graafik on esitatud joonisel 227.

Valemist (20) näeme, et võnkumiste sagedus väheneb sumbuvuse tõttu. Kuid enamiku praktiliste juhtumite puhul on see vähenemine üsna väike.



Joon. 227.

Valemist, mis väljendab võnkumiste amplituudi vähenemise seadust, võib veenduda, et teineteisest üheperioodilise intervalli T võrra erinevate amplituudide suhe on jääv kogu sumbuvuse protsessi vältel. Tõepoolest, üheperioodilise intervalli võrra erinevate võnkumiste amplituudid väljenduvad avaldisega

$$a_1 = a_0 e^{-\delta t} \quad \text{ja} \quad a_2 = a_0 e^{-\delta(t+T)}.$$

Nende amplituudide suhe

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0 e^{-\delta t}}{a_0 e^{-\delta(t+T)}} = \frac{1}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}.$$

Sumbuvuse mõõduks võetakse tihti selle suhte loomulikku logaritmi Δ:

$$\Delta = \delta T. \qquad (21)$$

Seda suurust nimetatakse sumbuvuse *logaritmiliseks dekremendiks* ühe perioodi vältel.

§ 71. Sundvõnkumised. Resonants.

Eespool nägime, et kui paneme süsteemi algtõukega võnkuma ja teda pärast enam ei mõjuta, siis süsteem võngub kustuvalt mingi kindla sagedusega, mis oleneb ainult süsteemi enda omadustest: tema massist, reaktsioonjõust ja takistusest. Neid võnkumisi nimetatakse *vabadeks* ja nende sagedust vabade võnkumiste sageduseks. Sumbuvuse puudumisel nimetatakse vabu võnkeid *omavõngeteks*, aga nende sagedust *omasageduseks*. Nii näiteks klahvile vajutamisel haamrikese löögist ergutatud klaverikeel sooritab omavõnkumist, andes seejuures heli, mida nimetame keele omatooniks, hoolimata väikesest sumbuvusest.

Kuid terve rea juhtumite puhul on asi teisiti: süsteem võngub mingi v ä l i s j õ u mõjul, mis hõõrdele ja kiirgamisele kuluvat energiat perioodiliselt täiendab; seejuures ei olene võnkumise sagedus nähtavasti mitte süsteemi enda omadustest, vaid teda mõjutava välisjõu muutuste sagedusest. Sel juhul pole meil enam tegemist vaba võnkumisega, vaid *sundvõnkumisega* — võnkumisega, mis on meie süsteemile välise jõu poolt peale sunnitud.

Sundvõnkumisi sooritavaks süsteemiks on näiteks kolbmootori alus. Suurte masside sirgjoonelisest edasi-tagasi liikumisest tekkinud perioodiliste jõudude mõjul väriseb mootori alus ja vibreerib mootori peavõlli tiirude arvuga võrdse sagedusega. Just samuti võngub valjuhääldaja membraan elektromagnetilise mehhanismi poolt talle pealesunnitud sagedusega, mis omakorda on määratud elektromagneti poolist läbilastava voolu perioodiga.

Süsteemile rakendatud välisel perioodilisel jõul on kahesugune ülesanne: ta paneb süsteemi võnkuma ja järjest täiendab kulutatavat energiat, toetades sellega võnkliikumist.

Välisjõu poolt juhitav süsteem võngub selle sagedusega, millega tegutseb väline jõud. Kuid sundvõnkumised pealesunnitud sagedusega ei teki silmapilkselt. Esimesel momendil saab süsteem mingi tõuke (või alghälbe), mis paneb süsteemi sundvõnkumiste kõrval ka vabalt võnkuma.

Niiviisi, vähemalt võnkumise algstaadiumis, sooritab süsteem ka vabu võnkumisi, millele liituvad sundvõnkumised. Kui sumbuvustegur ei ole väga suur, siis võib vabavõnkumise sagedust ω_0 arvutada valemi (8) järgi:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ja v a b a d e võnkumiste võrrand kujuneb järgmiseks:

$$x_1 = a_0 e^{-\delta t} \sin\omega_0 t.$$

Oletame, et väline jõud muutub ajas siinuse seaduse järgi nurksagedusega ω:

$$P = P_0 \sin\omega t,$$

siis s u n d v õ n k u m i s t e võrrand on järgmine:

$$x_2 = A \sin(\omega t - \psi). \qquad (22)$$

Suurus ψ näitab, et *süsteemi võnkumised järgnevad välisjõu võnkumistele teatava hilinemisega,* s. t. esineb faasivahe ψ. Kuna vabade võnkumiste amplituud aja jooksul järjest väheneb, siis mõninga lühikese ajavahemiku järel (mida nimetatakse režiimi teostumise perioodiks) lakkab vabavõnkumine täiesti ja jäävad püsima ainult sundvõnkumised, millised määrab võrrand (22).

Millest oleneb sundvõnkumise amplituud A? Miks võnkliikumine jääb faasi poolest maha teda väljakutsuvast jõust ja kui suur on faasi vahe ψ?

Et neile küsimustele vastata, vaatleme lähemalt võnkuva liikumise tekkimist perioodilise välise jõu mõjul.

Algmomendil olgu võnkuv süsteem paigalolekus ja sundiv jõud P võrdne nulliga. Sel momendil hakkab jõud tegutsema, tehes positiivset tööd ja nihutades võnkuvat massi ikka kaugemale ja kaugemale algasendist. Jõu muutumise veerandperioodi

järel hälve ja süsteemile rakendatud välisjõud saavutavad maksimumi. Nüüd hakkab väline jõud nõrgenema; samal ajal tõmbab reaktsioonjõud massi tagasi algasendi poole. Kui välist jõudu ei oleks, siis süsteemi veerand-omaperioodi järel tuleks mass uuesti algasendisse tagasi. Tegelikkuses aga välise jõu mõju kestab, kuigi ta väheneb, ainult nüüd jõud p i d u r d a b massi liikumist, s. o. teeb negatiivset tööd. Seejuures aeglustub võnkuva massi liikumine, süsteemi võnkumised hakkavad jõu muutustest m a h a j ä ä m a ehk teisiti öeldes: *jõud ennetab* hälbe.

Siirdume nüüd ühe väga tähtsa erijuhtumi vaatlemisele. Oletame, et *jõu muutumise sagedus* ω *langeb ühte süsteemi omasagedusega* ω_0, kusjuures mingil ajamomendil jõud ennetab hälbe täpselt veerandperioodi võrra. Meie arutluste konkretiseerimiseks oletame, et võnkliikumine toimub piki horisontaaljoont ja vaadeldaval ajamomendil asub võnkuv mass äärmises pahempoolses seisundis. Kui *jõud ennetab hälvet veerandperioodi võrra,* siis sel momendil ta just läbis nullasendi ja mõjub paremale poole, tõugates massi algasendi poole ja aidates kaasa reaktsioonjõule. Kui mass läbib nullasendit, saavutab väline jõud maksimumi ja hakkab vähenema, säilitades ikkagi oma suunda ja, tähendab, soodustades massi liikumist äärmisse parempoolsesse asendisse. Kui mass sellesse äärmisse seisundisse jõuab, muutub jõud jälle nulliks, pärast seda aga hakkab reaktsioonjõule kaasa aidates massi tagasi tõukama. Kuivõrd sagedused ω ja ω_0 ühtivad, sedavõrd kord juba jalule seatud veerandperioodiline ennetamine jääb ka edaspidi püsima, tähendab, välise jõu töö on vaadeldaval juhul alati positiivne. Niisiis sel juhul on energia juurdevool süsteemile maksimaalne ja järelikult võnkumise amplituud saavutab suurima talle antud tingimustes võimaliku väärtuse. Seda juhtumit nimetatakse resonantsiks[1]; resonantsi tingimuseks on ilmselt oma- ja sundvõnkumise sageduste võrdsus.

Kui sagedused ω ja ω_0 ei ühti, siis mõningal sundvõnkumise perioodi osal on jõu töö negatiivne; järelikult saab süsteem vähem energiat ja võnkumiste amplituud vastavalt väheneb. Seejuures jõud ei enneta hälvet mitte enam veerandperioodi võrra, vaid mingi oma veerandperioodist suurema või väiksema ajavahemiku võrra.

Muidugi, milline ka ei oleks oma- ja sundsageduse vahekord, on võnkumiste amplituudi kasvamine piiratud sellega, et ühes tema kasvamisega suureneb ka võnkliikumise kiirus; kiiruse suurenemisega kasvab ka takistus *(R)* ja seetõttu amplituudi kasvamisega hakkab süsteem intensiivsemalt energiat kulutama. Niiviisi võtab amplituud endale igakord täiesti automaatselt sel-

[1] Ladina keeles *resone* — h ü ü a n v a s t u (helisen kaasa).

lise väärtuse, mille juures energia juurdevool täpselt kompenseerib tema kulutust hõõrde või kiirguse tõttu.

Määrame nüüd matemaatiliselt sundvõnkumiste amplituudi suuruse.

Lihtsuse mõttes oletame alguses, et *sumbuvust ei ole* ($\delta = 0$). Siis mõjuvad süsteemile kaks jõudu: reaktsioonjõud $F = -cx$ ja välisjõud $P = P_0 \sin \omega t$.

Võrrutame nende jõudude summa võnkuva massi ja tema kiirenduse korrutisega. Kuna kiirenduse suurus on $-\omega^2 x$, nagu nähtub funktsiooni (22) kahekordsest diferentseerimisest, siis saame võrrandi

$$m\omega^2 x = P_0 \sin \omega t - cx,$$

kust

$$x = \frac{P_0}{c - m\omega^2} \sin \omega t.$$

Jagades lugejat ja nimetajat m-ga, saame:

$$x = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{23}$$

(kuna $\frac{c}{m} = \omega_0^2$). Võrrand (23) näitab, et sundvõnkumiste amplituud

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{23'}$$

oleneb oma- ja sundvõnkumiste sageduste vahest; kui ω läheneb ω_0-le, siis kasvab amplituud lõpmatult, kuna sumbuvuse puudumisel süsteemi energia resonantsi puhul ($\omega = \omega_0$) pidevalt kasvab. On iseenesest mõistetav, et praktiliselt ei saa amplituud piiramatult kasvada, sest igal reaalsel võnkuval süsteemil on alati mingisugune sumbuvus.

Analoogiline arvestus, mis on teostatud *kiirusega võrdelise sumbuvuse puhul*, annab mõnevõrra keerukama avalduse sundvõnkumiste amplituudi kohta, millest valem (23') tuletub kui erijuhtum:

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{24}$$

Resonantsi puhul on sundvõnkumiste amplituud suurim. Järelikult resonants esineb välisjõu sellise võnkumissageduse ($\omega = \omega_{res}$) juures, millise puhul nimetaja valemis (24) on minimaalne. Selle resonantssageduse arvutamiseks võrrutame valemi (24) nimetajas radikaali all oleva avaldise tuletise nulliga. Saame:

$$2(\omega_0^2 - \omega_{res}^2) \cdot 2\omega_{res} + 8\delta^2\omega_{res} = 0$$

ehk

$$(\omega_0^2 - \omega_{res}^2) + 2\delta^2 = 0,$$

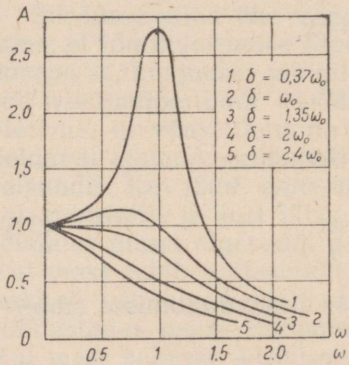
millest

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (24')$$

Meenutame, et v a b a d e võnkumiste sagedus avaldub valemite (19) ja (20) põhjal

$$\omega_{vaba} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Näeme, et sumbuvuse olemasolu korral *resonants tekib sellise sundvõnkumiste sageduse korral, milline on väiksem omavõnkumiste ja vabade võnkumiste sagedusest.* Nende kolme sageduse erinevused on seda väiksemad, mida väiksem on sumbuvus.



Joon. 228. Sundvõnkumiste amplituudi olenevus sumbuvusest.

Et määrata resonantsi amplituudi, asetame resonantssageduse väärtuse vastavalt valemile 24′ valemisse 24. Saame:

$$A_{res} = \frac{\frac{P_0}{m}}{2\delta\omega_{vaba}}, \qquad (24'')$$

kus ω_{vaba} on vabade võnkumiste sagedus.

Jooniselt 228 on näha, kuidas oleneb sundvõnkumiste amplituud omaja sundsageduste vahekorrast, erinevad kõverjooned sellel joonisel vastavad erinevatele sumbuvusteguri δ väärtustele. Näeme, et mida väiksem on sumbuvus, seda enam suureneb amplituud resonantsile lähenedes.

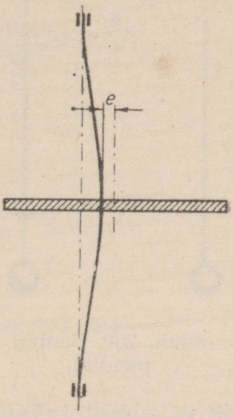
Real juhtudel võib resonants muutuda kardetavaks nähtuseks ja amplituudi üleliigse kasvamise tõttu võnkuva süsteemi purustada.

Juba esimestel kiirekäiguliste masinate ehitamise aastatel märgati, et võllide terviklust ähvardav korratu käik esineb teatava kindla tiirude arvu juures. See asjaolu andiski tõuke otsida esinevatele võllide murdumistele põhjust resonantsi nähtest. *Kriitilise kiiruse* või *kriitilise tiirude arvu* mõiste leiti alguses katselisel teel ja alles hiljem, masinaehituse arengu protsessis, jõuti selle kvalitatiivse ja kvantitatiivse seletuseni.

Et mõista, kuidas pöörlevate võllide resonantsvõnkumised tekivad, kujutleme turbiini rootorit (pöörlevat osa) teljele asetatud kettana. Kui täpselt ka ketas on valmistatud, kui hästi ta ka teljele on tsentreeritud, võivad paratamatud pisimadki kõrvalekaldumised väljatöötluses põhjustada seda, et pöörlemistelg ei läbista täpselt raskuskeset. Niiviisi on võllile asetatud kettal

enamikul juhtudel mingi „raskuse" *ekstsentrilisus*[1], mida võib määrata kui kaugust e raskuskeskme ja pöörlemistelje vahel. On selge, et ketta pöörlemisel see ekstsentrilisus tekitab kesktõukejõu, mis püüab võlli painutada. Seega pöörleb ketas painutatud telje ümber, nagu see on skemaatiliselt kujutatud joonisel 229.

Võlli pöörlemisel muudab kesktõukejõud perioodiliselt oma suunda võlli telje suhtes ja toimib niiviisi nagu võnkuv koormis. Mingi kindla pöörete arvu juures, mida nimetatakse kriitiliseks, langeb jõu suunamuutmise sagedus kokku võlli omavõnkesagedusega ja amplituudi kasvamine resonantsi tõttu võib masina purustada.



Joon. 229. Halvasti tsentreeritud ketta raskuse ekstsentrilisus.

Kuid *ometi töötavad nüüdisaegsed auruturbiinid hästi ka niisuguse pöörete arvuga minutis, mis mitmekordselt ületab kriitilist pöörlemise kiirust*[2]. Alles pärast sellise turbiini ehitamist selgus, et kiire kriitilisest kiirusest üleminek — nii kiire, et võll ei jõua veel võnkuma hakata — edaspidise kiiruse tõusu juures kõrvaldab avarii võimaluse. See seletub sellega, et pärast kriitilise kiiruse ületamist resonantsinähet enam ei esine. Ekstsentriliselt võllile asetatud ratta raskuskese otsib ise geomeetrilise pöörlemise telje ning peab sellest püsivalt kinni; võll pöörleb mõnevõrra painutatuna.

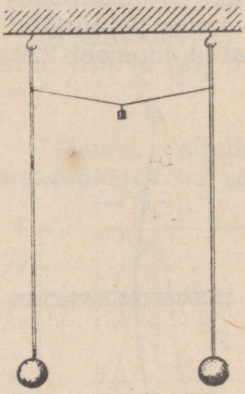
§ 72. Seotud võnkumised.

Võnkesüsteeme võib üksteisega „siduda", mistõttu nende võnkumised viiakse mõnevõrra omavahelisse sõltuvusse. Sel juhul nimetatakse neid võnkumisi seotud võnkumisteks. Näitena vaatleme joonisel 230 kujutatud kahe pendli võnkumisi; kumbki näidatud pendlitest koosneb niidi otsa riputatud kuulist; mõlemate pendlite niidid on ühendatud kolmanda niidiga, mille keskel ripub väike raskus. Kui me ühe nendest pendlitest tasakaalu-

[1] Ladina keeles ex — väljas ja *centrum* — keskkoht, tsenter.

[2] Turbiini ökonoomne kasutegur saavutab maksimumi siis, kui turbiini välise osa joonkiirus on $\frac{1}{2}$ auru- või veejoa kiirusest (§ 58). Langeva vee kiirus on isegi tugeva rõhu puhul suhteliselt väike, aga auru väljumise kiirus 15—20 *at* rõhu alt on umbes 1 *km/sek*, s. o. ületab kuuli lennukiiruse. Soovides konstrueerida rahuldava kasuteguriga turbiini, tõi Lavel tehnikasse pöörlemiskiiruse 20 000 tiiru minutis (hariliku 100—150 asemel).

asendist välja viime ja talle võnkumise võimaluse anname, siis hakkab varsti võnkuma ka teine pendel.



Joon. 230. Seotud pendlid.

Seotud süsteemide üldiseks tähelepandavaks omaduseks on see, et *nende sagedused ühenduse tõttu mõnevõrra muutuvad, võrreldes sagedustega, mis neil oleks olnud ilma sidemeta,* kusjuures mõlema süsteemi võnkumised kujutavad kahe erineva sagedusega võnkumise liitmist ja *on tuiklemise iseloomuga.* Nendel tuiklemistel on muude võrdsete tingimuste juures seda lühem periood, mida „tugevam" on side süsteemide vahel.

Kui sidumata süsteemide omasagedused on ν_1 ja ν_2, siis pärast nende ühendamist saab esimene süsteem võnkliikumise, mis on kahe võnkumise (sagedustega ν_1' ja ν_2') liitmise tulemus. Teine süsteem liigub analoogiliselt nendesamade sagedustega ν_1' ja ν_2' võnkumiste liitmise tulemusena. Neid mõlemale seotud süsteemile ühiseid võnkesagedusi ν_1' ja ν_2' nimetatakse seotud võnkumiste *normaalseteks sagedusteks.* Seotud võnkumiste sagedustest väiksem sagedus on alati väiksem mõlemast omasagedusest; suurem seotud võnkumise sagedus on alati suurem mõlemast omasagedusest. Seega:

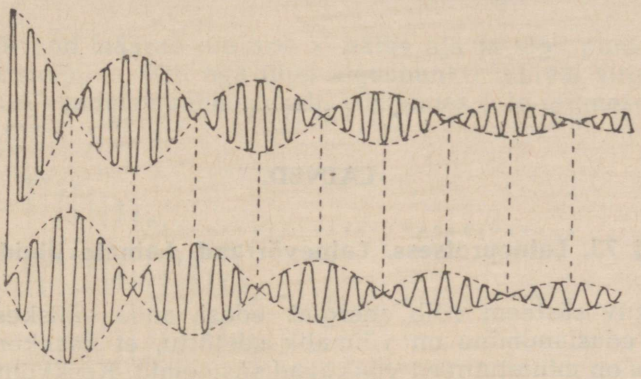
$$|\nu_1' - \nu_2'| > |\nu_1 - \nu_2|$$

(püstjooned tähendavad, et siin vaadeldakse sageduste vahede aritmeetilisi, aga mitte algebralisi väärtusi).

Kõik öeldu kehtib ka sel juhul, kui süsteemide omasagedused on võrdsed. *Kumbki sellistest süsteemidest hakkab seotult võnkuma sagedusega, mille saame kahe võnkumise sageduste liitmisel, kusjuures üks liidetavaist sagedustest on omasagedusest väiksem ja teine suurem.* Mõlemate süsteemide võnkumised omandavad tuiklemiste iseloomu, kusjuures vastastikuse resonantsi mõju tõttu esimese süsteemi tuiklemised ennetavad teise tuiklemisi veerandperioodi võrra (joon. 231). Selletõttu *võnkumise energiat justkui „pumbatakse" tuiklemiste sagedusega ühest süsteemist teise ja tagasi.*

Vaatleme näitena juhtumit pendlitega, mis on kujutatud joonisel 230. Olgu vihid võrdsed ja neid kandvad niidid ühepikkused (et pendlite omasagedused oleksid võrdsed). Näeme, kuidas esimese pendli võnked teist võnkuma ergutades nõrgenema hakkavad ja esimene pendel seisatub, kui teise amplituud saavutab maksimumi; selle järel hakkab teine pendel esimest võnkumisele ergutama jne. Kui selleks katseks võtta ühekilogrammised

vihid, riputades neid 2 *m* pikkuste niitide otsa teineteisest 0,5 *m* kaugusele ja ühendades neid 70 *cm* pikkuse niidiga, mille keskel ripub raskus 50 *G*, siis annab esimene pendel umbes 10 võnke



Joon. 231. Kahe ühesuguse omasagedusega seotud süsteemi võnkumiste graafik.

järel energia teisele ja seisatub, mille järel teine pendel järgmise 10 võnke jooksul energia jälle esimesele üle annab jne. Kui ühendaval niidil olevat raskust kahekordseks (100 *G*) suurendada, siis toimub energia ülekanne iga 5 võnke järel.

XII PEATÜKK.

LAINED.

§ 73. Laineprotsess. Lainevõrrand. Lainete liigid.

Võnkuv süsteem võib energiat edasi anda väliskeskkonda. Energia edasiandmine on võimalik seetõttu, et keskkonna osakesed ise on miniatuursed võnkuvad süsteemid. Keskkonna molekulid on ühendatud jõududega, millede seadused on teataval määral sarnased elastsete jõudude seadustega. Kui üks osakene on tasakaaluasendist välja viidud, siis sunnivad naaberosakeste poolt mõjuvad jõud teda algasendi poole tagasi minema. Jõudude mõju ja vastumõju seaduse järgi viiakse naaberosakesed omakorda tasakaaluasendist välja. Niiviisi kandub *iga häire, mis kord mingis keskkonna piirkonnas tekib, järk-järgult edasi*, haarates endaga kaasa häire tekkekohast ikka kaugemal ja kaugemal asetsevaid osakesi.

Mingis keskkonnas, näiteks õhus asudes mõjub võnkesüsteem oma vahetus läheduses asuvatele osakestele. Võnkudes tekitab ta enese ümber perioodilise häirete rea, s. o. mõjub oma naabruses olevatele osakestele nagu mingi perioodiline välisjõud. Iseenesest mõistetavalt paneb see jõud ümbruse osakesi võnkuma mõjuva jõu sagedusega. Võnkuvate osakeste vastastikusel mõjul levib võnkeprotsess keskkonnas mingi lõpliku kiirusega, mille suurusest räägime allpool.

On ilmne, et keskkonna osakene, mis häire tekkepunktist asub kaugusel y, hakkab alles siis võnkuma, kui keskkonnas leviv võnkeprotsess temani jõuab. Märgime *võnkeprotsessi levimiskiiruse* u-ga. Võnkeprotsess jõuab vaadeldava osakeseni pärast ajavahemikku

$$\tau = \frac{y}{u}.$$

Kui süsteemi võnkliikumist väljendatakse võrrandiga:

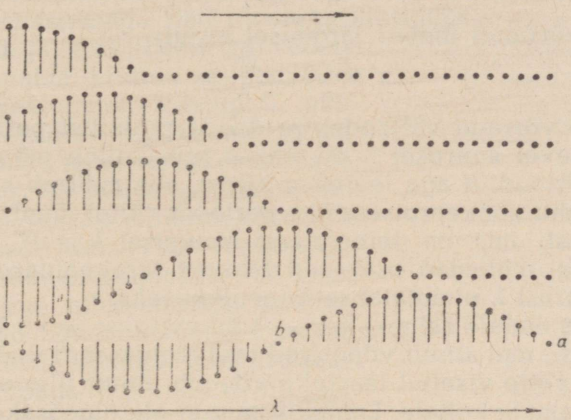
$$x = a \sin \omega t,$$

siis toimuvad meie poolt vaadeldava osakese võnkumised sama

sinusoidaalse seaduse järgi, kuid mingi ajavahemiku τ võrra hiljem. Järelikult selle osakese võnkumist iseloomustab võrrand

$$x' = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - \frac{y}{u}). \quad (1)$$

See võrrand määrab osakese x' hälbe aja ja alguspunkti kauguse funktsioonina. Kui aga ühel alguspunkti läbival sirgel asuvaid punkte vaadelda samaaegselt, siis andes y-le mitmesuguseid



Joon. 232. Keskkonna osakeste hälbed ristvõnkumiste levimisel viiel erineval ajamomendil.

väärtusi, võime võrrandi (1) abil leida hälvete jaotust piki meie poolt valitud sirget. Sel juhul vaatleme x-i ainult y funktsioonina *(t = const)*. Joonis 232 selgitab, kuidas algab ja toimub võnkliikumise edasiandmine keskkonnas, kui selle osakesed võnguvad ristsuunas liikumise levimisega. Näeme, et see protsess on perioodiline mitte ainult ajas, vaid ka ruumis. Selle nähte sarnasuse tõttu ühe tema erijuhuga (nimelt lainetusega veepinnal) nimetatakse seda protsessi *laineprotsessiks* ja keskkonnas levivat perioodilist (kas või lühiajalistki) häiret *laineks*. Võrrand (1) on x-teljest positiivses suunas levivate *lainete võrrand.*

Kui tahame suurema selgusega näidata, et võrrand (1) väljendab perioodilist protsessi nii ajas kui ruumis („laineid"), siis võime toimida järgmiselt.

Vaadeldes algul protsessi kulgemist mingis teatavas keskkonna punktis *(y = const)*, võime kujutleda koordinaatide algust just selles punktis; siis $y = 0$ ja võrrandi kuju on järgmine:

$$x' = A \sin \omega t.$$

See võrrand on keskkonna meie poolt valitud osakese võngete võrrand; ta määrab laineprotsessi perioodilisuse ajas.

Tundes huvi hälvete ruumilise jaotuse vastu mingil kindlal ajamomendil *(t = const)*, võime just selle momendi valida algmomendiks, s. o. $t = 0$; siis

$$x' = A \sin \omega \frac{y}{u} = A \sin \frac{2\pi}{uT} y.$$

Võttes kasutusele suuruse λ, mida defineerime avaldisega

$$\lambda = uT, \tag{2}$$

kirjutame võrrandi ümber järgmisel kujul:

$$x' = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} y.$$

Viimane võrrand väljendab protsessi ruumilist perioodilisust. Temas esineval suurusel λ on lihtne füüsikaline mõte. Kuna T on võnkeperiood, u aga levimise kiirus, siis määrab korrutis uT kauguse, kuhu võnkeprotsess ühe perioodi vältel jõuab. Järelikult kaks osakest, mis on teineteisest kaugusel $\lambda = uT$, võnguvad samas faasis; mõlemad osakesed läbivad tasakaaluasendi samaaegselt. Suurust λ nimetatakse *lainepikkuseks*.

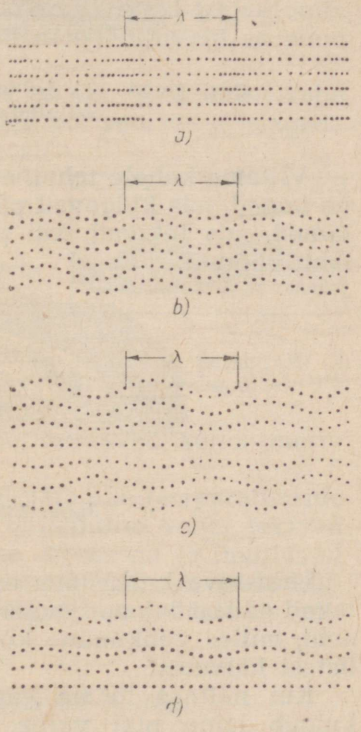
On tähtis endale selgeks teha, et liikuv laine ei vii keskkonna osakesi edasi; nad ainult võnguvad tasakaaluasendi ümber. Mittevoolavasse vette visatud laastuke võngub ainult üles-alla, jäädes veepinnal samale kohale. Lainekiirus u ei ole aineosakeste edasiliikumise kiirus — see on osakeste võnkumist tekitava impulsi levimise kiirus.

Esimesel pilgul võib olla ebaselge, miks *laine levib ainult ühes suunas*, aga mitte kahes vastupidises. Et üksiklaine ühesuunalises levimises selgusele jõuda, vaatleme uuesti joonist 232. Sellel joonisel on kujutatud keskkonna mingi piirkonna punktide hälbed erinevatel ajamomentidel. Kui me asetaksime osakeste hälbed niiviisi, nagu on näidatud joonise 232 alumisel real, ning kui algmomendil kõik tasakaaluasendist väljanihutatud osakesed paigal seisaksid, siis aga neile võimaluse anname tasakaaluasendi poole liikumiseks, siis sarnane deformatsioon hakkaks lainekujuliselt paremale ja vasakule poole levima. Kulgeva laine puhul on olukord siiski teistsugune: siin on kõigil tasakaaluasendis mitteolevatel osakestel, välja arvatud nendel, millel on maksimaalne hälve, mingi liikumise kiirus kas tasakaaluasendi poole või sealt eemale. Laine ees olevat osakest *a*, mis seisis paigal, tõmbavad tema ees olevate osakeste hälbed ülespoole. Osakene *b* laine keskel jõudis vaadeldaval ajamomendil ülevalt alla liikudes tasakaaluasendisse ja liigub inertsi mõjul allapoole (tema naaberosakeste mõju kompenseerub vastastikku, kuna eelmised tõmbavad teda üles, tagumised aga samasuguse jõuga alla). Laine lõpus oleva osakese *c* kiirus on vastassuuna-

line naaberosakeste mõjule. Tõepoolest, osakene *c* oli allpool tasakaaluasendit ja liikus enne vaadeldavat momenti ülespoole, ületades naaberosakeste mõju, mis püüdsid teda alla kiskuda. Seetõttu jõuaks osakene *c* vaadeldaval momendil kiirust kaotades tasakaaluasendisse ja jääks seisma, kui esimesele lainele teisi ei järgneks.

Keskkonnas levivate *lainete liik* sõltub oluliselt keskkonna elastsetest omadustest. Et selle olenevuse iseloomu selgitada, jagame keskkonna mõttes reaks õhukesteks üksteist puudutavaiks laine levimissuunaga risti olevaiks kihtideks.

Gaasid ja praktiliselt ka vedelikud ei avalda kihtide nihutamisele elastset vastupanu. Vastupidi, püüdes naaberkihte teineteisele lähendada või neid teineteisest eemaldada, tekivad surve- ja tõmbeformatsiooni takistavad reaktsioonjõud. Osakeste võnkumised toimuvad reaktsioonjõudude suunas; sellepärast on keskkonnas, kus nihkeelastsus puudub, võimalikud ainult niisugused lained, kus osakeste võnked laineprotsessi levimissuunaga ühtivad; teisiti öeldes: gaasides ja vedelikkudes võib elastne laine levida ainult osakeste võnkliikumise suunas. Niisuguseid laineid nimetatakse *pikilaineteks* (longitudinaallaineteks), kuna neis aineosakeste liikumised toimuvad piki lainet (laine levimise sihis).



Joon. 233. Lainete liigid: *a)* pikilained, b) ristlained, c) paisumislained, d) pinnalained.

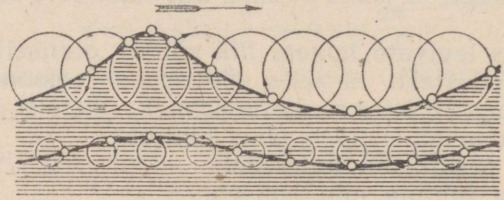
Pikilained kujutavad endast *tihenduste* ja *hõrenduste* vahelduvat rida, mille juures lainepikkus selle mõiste mõtte põhjal on kahe naabruses oleva tihenduse või hõrenduse vaheline kaugus (joon. 233-*a*). Tüüpilisiks pikilainete näiteiks on häälelained vedelikes ja gaasides. Pikilained võivad levida muidugi ka tahketes kehades.

Tahkes kehas kutsub nihkedeformatsioon esile laine, mis levib risti osakeste hälvete suunaga. Lainet, milles võnkliikumine toimub risti võnkliikumiste levimissuunaga, nimetatakse rist- ehk transversaallaineks (joon. 233-*b*).

Nagu eespool nägime, ei saa ristlained tekkida vedelates ega gaasilistes keskkondades; tahketes kehades aga võivad levida

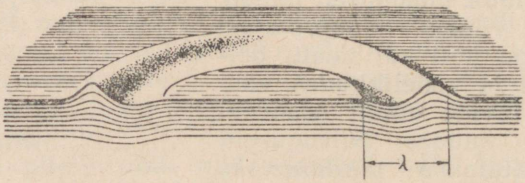
nii rist- kui ka pikilained. Puht-ristlaines ei esine keskkonna tihendusi ega hõrendusi.

Pikilained on mahtdeformatsiooni lained, ristlained aga nihkedeformatsiooni lained.



Joon. 234. Lainetava vedeliku osakesed liiguvad ringjoonelistel trajektooridel.

Viitame kahele tehniliselt huvitavale ristlainete näitele: need on lained, mis kulgevad piki sirgu tõmmatud pillikeelt, ja keerdlained, mis tekivad, kui pikka varrast otsast keerdu ja uuesti lahti pöörata.



Joon. 235. Laine profiil veepinnal.

Lainetava keskkonna osakeste piki- ja ristvõnkumised kujutavad endast laineprotsessi erijuhtumeid. On olemas ka teisi laineid, milles võnkumine koosneb samaaegselt piki- ja ristsuunalistest hälvetest.

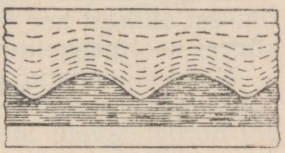
Kui näiteks lööme vasaraga ümmarguse varva otsale, siis kulgeb laine piki varba, kusjuures puhtal kujul toimub põhivõnkumine ainult piki varva telge. Mida enam pinnale lähemale, seda enam kasvavad varva osakeste ristvõnkumiste amplituudid (joon. 233-*c*). Niisuguseid laineid võib nimetada *paisumislaineteks;* nad tekivad näiteks painduvate seintega torudesse suletud vedelikes (ja ka gaasides). Paisumislainete tekkimise tingimuseks on osakeste nihkumise võimalus pinnale ristsuunas.

Tähtsaks lainelise liikumise liigiks on *pinnalained* (joon. 233-*d*). Kõigile on hästi tuntud lained vee pinnal. Muide tuleb tähendada, et pinnalainete seadused on keerukamad kui muudel lainete liikidel. Pinnalaine levimisest osavõtvate osakeste võnke-

trajektoorid ei ole sirgjoonelised; osakesed liiguvad mööda suletud kõveraid või elliptilisi orbiite (joon. 234).

Lihtsad sinusoidaalsed lained võivad esineda veepinnal ainult amplituudide puhul, mis on lainepikkusega võrreldes väikesed. Sellised on näiteks tõusulained meres, mille lainepikkus võib ulatuda sadade kilomeetriteni. Harilikkudel lainetel, näiteks lainetel, mida on tekitanud laev või vette visatud kivi, on sinusoidist tugevasti erinev profiil: pikad lamedad lainepõhjad ja teravad harjad (joon. 235). Suure amplituudiga pinnalaine viib võnkuvad osakesed endaga kaasa, osakesed kujutavad sel juhul mitte enam ringjoonelisi, vaid hoopis keerulisemaid trajektoore. Just sellepärast heidavadki suured lained neil ujuvaid esemeid kaldale.

Lained ei teki ainult vedeliku vabal pinnal, vaid üldse kahe vedeliku lahutuspinnal, näiteks õli ja vee või soolase ja mageda vee, aga ka kahe erineva tihedusega gaasi hajutatud piiril. Joonisel 236 on kujutatud laineid õli ja vee piirpinnal: õlivaba pind on sel juhul peaaegu vaikne.



Joon. 236. Lained õli ja vee vahepinnal.

Lainete tekkimisega soolase ja mageda vee piirpinnal seletub väga huvitav nähe — niinimetatud „surnud vesi", mida pannakse tähele jõesuudmete lähedal, eriti Skandinaavia fjordides. Sissetulevad laevad pidurduvad äkki selle tõttu, et sattudes soolase ja mageda vee piirpinnale, tekitavad sellel merepinnalt nähtamatuid laineid.

Atmosfääri kokkupuutuvatel kihtidel võib olla temperatuuride vahe tõttu erinev tihedus. Niisuguste õhukihtide vahel tekivad tihti lained, mis liiguvad väga väikese kiirusega ja muutuvad nähtavaks perioodilisest veeauru kondenseerumisest, mida külmema õhukihi lained oma harjale tõstavad, moodustades niinimetatud „lainelisi" pilvi.

§ 74. Lainete interferents. Seisvad lained.

Väga tihti levib keskkonnas mitte üks, vaid mitu laineprotsessi; näiteks siis, kui samaaegselt saadavad laineid välja mitu võnkesüsteemi. Seejuures iga sellisesse keerukasse *lainevälja* sattunud keskkonna osakese võnkumine on kõigi nende laineprotsesside poolt antud punktis tekitatud võnkumiste resultant.

Keskkonna osakese resultanthälve on võrdne igal mis tahes ajamomendil kõigi liidetavate võnkeprotsesside poolt eraldi tekitatud hälvete geomeetrilise summaga. Seega iga samaaegselt toimuv laineprotsess levib keskkonnas nii, nagu poleks mingeid teisi samaaegseid protsesse olemaski. Seda võnkumiste või lai-

nete liitmise seadust nimetatakse harilikult *superpositsiooni*[1] *printsiibiks* (laine- või võnkeprotsesside üksteisest s õ l t u m a t u liitmise printsiibiks).

Tähtsa näite võngete sõltumatust liitmisest annavad helilained, mis levivad mitmest heli tekkeallikast. Kuulates orkestri mängu või koorilaulu võime tähelepanu keskendades eraldada iga üksikut pilli, iga laulja häält. Kui superpositsiooni printsiip ei oleks õige ja liidetavad võnkumised keerukas resultantprotsessis üksikult ei eksisteeriks, poleks võimalikud ei kõne ega muusika.

Kujutleme kahte sama keskkonna punkti läbivat laineprotsessi, mis on *sama sagedusega ja osakeste hälbe ühise suunaga;* kui mõlema protsessi levimiskiirus on ühesugune ja mõlemad protsessid on kõigiti sarnased, siis on neil protsessidel meie poolt valitud keskkonna punktis *konstantne faasivahe.*

Füüsikaliselt on kõik need tingimused täidetud sel juhul, kui *mõlemate laineseeriate allikaks on üks ja seesama võnkesüsteem.* Ühisest allikast kahte laineseeriat võib saada näiteks otsese laine kõrval veel peegelduva laine kasutamise teel.

Nagu tähendatud paragrahvis 68, nimetatakse niisugust mitme võnkumise liitumist (kusjuures need teineteist kas tugevdavad või nõrgendavad) *interferentsiks*[2]. Lainete interferentsi tingimusteks on ühesugune sagedus, osakeste hälvete ühesugune siht ja faasivahe konstantsus, s. o. füüsikaliselt — interfereeruvate võnkumiste ü h i n e allikas (niinimetatud lainete *koherentsus*[3]).

Kahe (üldisemal juhul mitme) laine interferentsi matemaatilisel vaatlemisel jõuame meile juba tuntud võnkumiste liitmist käsitlevate valemite juurde.

Olgu võnkeallikatest S_1 ja S_2 leviva kahe koherentse laine nurksagedus ω; siis punktis P, mis on allikatest S_1 ja S_2 vastavalt kaugusel y_1 ja y_2, kaks võnkumist liituvad:

$$x_1 = a_1 \sin \omega \left(t - \frac{y_1}{u}\right),$$

$$x_2 = a_2 \sin \omega \left(t - \frac{y_2}{u}\right).$$

Tuues nendesse võrranditesse võnkumiste algfaasid

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{u} y_1 \text{ ja } \varphi_2 = -\frac{\omega}{u} y_2,$$

kirjutame võnkliikumiste võrrandid meile juba tuntud kujul:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Nende võnkumiste liitumine tekitab (§ 68) resultantvõnkumise amplituudiga

[1] Ladina k. *super* — ü l e, ü l i ja *positio* — a s e n d, s e i s.
[2] Prantsuse k. *interferer* — v a s t a s t i k k u m õ j u m a.
[3] Ladina k. *cohaerere* — s e o s e s o l e m a.

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

kuna

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega}{u}(y_2 - y_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(y_2 - y_1),$$

siis

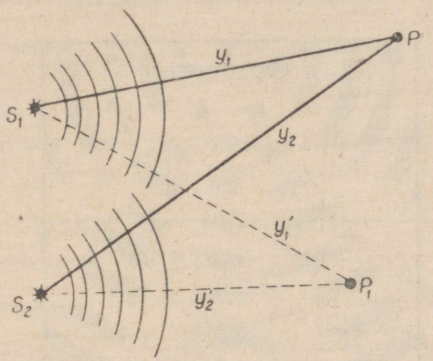
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}}, \qquad (3)$$

kus

$$\delta = y_2 - y_1$$

on interfereeruvate lainete *käiguvahe*.

Valem (3) väljendab järgmist huvitavat nähet: interfereeruvate lainete väljas muutub võnkumiste amplituud asukohast sõltuvalt, olenedes suuruse δ muutustest. Seejuures muutub ka võnkumiste energia, suurenedes lainevälja ühtedes kohtades teistes kohtades toimuva vähenemise arvel. Energia jäävuse seaduse põhjal peab see energia ümberpaigutumine toimuma nii, et kogu energiahulk seejuures ei muutuks.



Joon. 237. Kahest punktilisest allikast väljunud lainete interferentsi arvutamiseks.

Kui vaadeldavas punktis P (joon. 237) interfereeruvate lainete käiguvahe kindlustab võnkefaaside ühtimist ($\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ või $\varphi_1 - \varphi_2 = n.2\pi$, kus n on mis tahes täisarv), siis resultantvõnkumise amplituud on võrdne interfereeruvate lainete amplituudide a_1 ja a_2 summaga. Erijuhul, kui $a_1 = a_2$, resultantvõnkumise amplituud $a = 2a_1$ ja järelikult võnkumise energia, mis on võrdeline amplituudi ruuduga, on interferentsi tõttu kaks korda suurem interfereeruvate võnkumiste summaarsest energiast. Kuid selle energia suurenemise kõrval lainevälja ühtedes kohtades esineb teistes kohtades (näiteks punktis P') võnkumise nõrgenemine või koguni kadumine. Kui lainete käiguvahe on selline, et võngete faasid on vastupidised [$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n-1)\pi$], siis nendes kohtades resultantamplituud on võrdne amplituudide a_1 ja a_2 vahega; kui aga $a_1 = a_2$, siis võnkumised vastastikku hävitavad teineteist.

Nagu näitab valem (3), esineb suurim võnkumiste tugevnemine seal, kus lainete käiguvahe δ rahuldab seost

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = n \cdot 2\pi \text{ ehk } \delta = 2n\,\frac{\lambda}{2} \qquad (3')$$

(n on mingi täisarv).

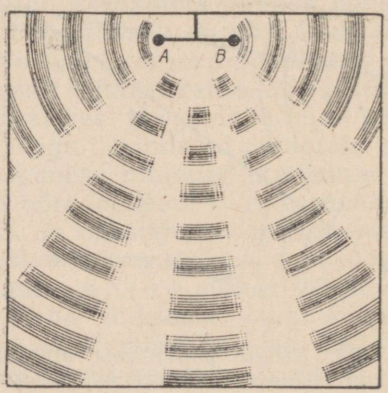
Suurim võnkumiste nõrgenemine toimub neis lainevälja kohtades, kus

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2n - 1)\,\pi, \qquad (3'')$$

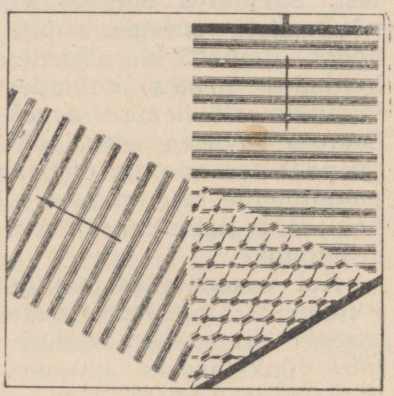
s. o.

$$\delta = (2n - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Niisiis, kui ühe kulgevate lainete vooluga (mis tekitavad järjestikku kõigis vaadeldava lainevälja osa punktides ühesuguseid võnkeid) liitub teine koherentne samasuguste lainete vool (mis tekitab lainevälja vaadeldavas osas samasuure amplituudiga võnkumisi), siis nende lainete liitumisel (interferentsil) jaotub laineväli *stabiilselt* (s. o. ajaliselt muutumatult) *kahesugusteks vahelduvateks piirkondadeks* (ja ruumilisteks kihtideks nende vahel,



Joon. 238. Kahest punktilisest allikast väljunud lainete interferents.

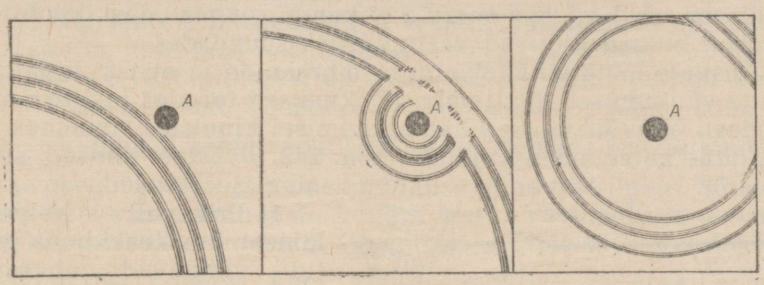


Joon. 239. Langevate ja peegeldunud lainete interferents.

mis on vahepealsed ka energeetilises suhtes): 1) interferentsilise tugevnemise piirkondadeks, kus võnkumised toimuvad interfereeruvate võnkumiste energia summast kaks korda suurema energiaga, ja 2) interferentsilise nõrgenemise piirkondadeks, kus võnkumised vastastikku hävivad. Nende piirkondade geomeetriline asend määratakse lainete käiguvahede põhjal. Kui käiguvahe võrdub *paarisarvu poollaine pikkusega,* siis võnkumine on tugevaim. Kui käiguvahe on *paaritu arv poollaine pikkusi,* siis on tegemist võnkumiste interferentsilise nõrgenemise piirkonnaga.

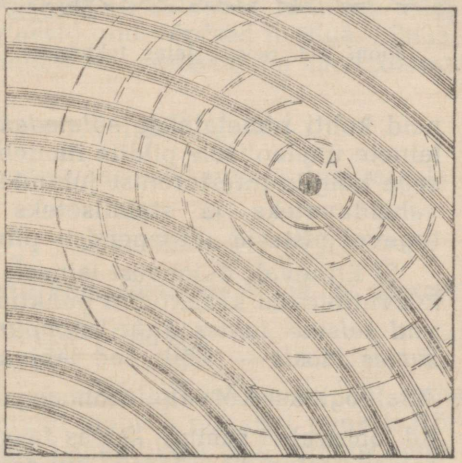
Joonisel 238 on skemaatiliselt kujutatud interfereeruvate lainete pilt vedeliku pinnal; niisugust pilti võime jälgida, kui tekitada laineid vertikaalselt asetatud kepikestega *A* ja *B*, mis on ühise tugipunktiga ning laskuvad vette ja tõusevad veest sünkrooniliselt väikese mootorikese jõul. Joonis 239 annab skemaati-

lise pildi saabuvate ja peegeldunud lainete interferentsist (antud puhul on lained vedeliku pinnal tekkinud plaadikese võnkliikumisest).



Joon. 240. Kepiga veepinna puutumisest tekitatud laine hajumine; kolm joonist vastavad kolmele üksteisele järgnevale ajamomendile.

Kui veepinnal tekitatud ringlainete teele paigutada väike takistus (liikumatu varras *A* joonistel 240 ja 241), siis muutub see takistus ise, olgugi väiksemate, aga selgesti märgatavate ringlainete allikaks. Seda nähet nimetatakse *lainete hajumiseks.* Ka hajumise juures on märgata kulgevate ja hajutatud lainete interferentsi.



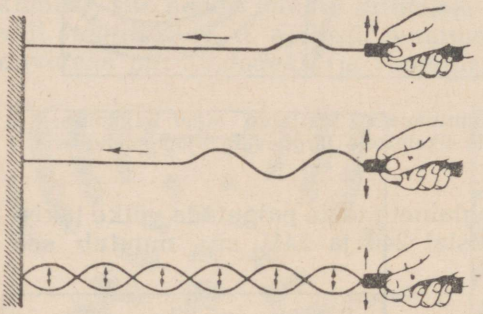
Joon. 241. Varras *A* hajutab laineid, mis on veepinnal tekitatud harmooniliselt võnkuva vardakesega.

Interferentsi saab hästi jälgida valguskiirte puhul. Otseste ja peegelduvate kiirte teatava käiguvahe juures võivad nad teineteist „kustutada", langedes samale ekraani punktile. See hämmastav efekt seletub lainete interferentsiga ja tõendab ühes paljude teiste nähtustega valguse levimisprotsessi lainelist loomust. Interferentsi saab vaadelda näiteks kas või üht otsa pidi kinni seotud köie juures, mida käega teisest otsast võnkuma paneme. Mööda köit kulgev laine peegeldub kinnisest otsast tagasi ja liigub vastassuunas (joon. 242). Mõlemad lained — otsene ja peegeldunud — interfereeruvad, kusjuures need köie punktid, kus otsese ja peegeldunud võnkumise faasivahe on null, võnguvad

kõige suurema amplituudiga, aga need punktid, kus faasivahe on pool perioodi, jäävad paigale. Niisugust lainet nimetatakse *seisvaks*, sest kui lihtsaimal juhul otsese ja peegeldunud laine amplituudid on võrdsed, siis energia ei kandu ruumis edasi, kuna tema võrdsed hulgad liiguvad vastupidistes suundades.

Seisvate lainete näiteks on membraanide ja otstest kinnitatud keelte võnkumised, õhusamba võnkumised torudes (näiteks oreliviledes), õhuvõnkumised hääle levimisel kinnistes ruumides jms.

Lihtne katse, mida kujutab joon. 242, avastab tähtsad seisva laine iseärasused.



Joon. 242. Seisva laine tekkimine.

1) Erinevalt kulgevast lainest, kus keskkonna punktid võnguvad ühesuguse amplituudiga, pole seisva laine puhul võnkumiste amplituudid ühesugused: ühtedes kohtades (mille kaugus teineteisest on $\frac{\lambda}{2}$) on võnkumiste amplituud maksimaalne; neid kohti nimetatakse *paisudeks;* teistes ei toimu üldse mingit võnkumist (amplituud on null); neid kohti nimetatakse *sõlmedeks.* Niiviisi vastupidi kulgevate lainete ühetaolisele pildile ilmneb seisvates lainetes erilise selgusega kõigile interferentsi juhtudele iseloomulik lainevälja jaotus vahelduvateks ja stabiilseteks võnkumiste interferentsiliste tugevnemiste ja nõrgenemiste piirkondadeks.

2) Erinevalt kulgevast lainest, kus igal mis tahes ajamomendil kõrvutiolevad keskkonna punktid on erinevates faasides, *võnguvad seisvas laines kahe sõlmpunkti vahel olevad punktid kõik samas faasis* — kõik nad läbivad samaaegselt tasakaaluasendi. Analoogilises kõrvalpiirkonnas pikkusega $\frac{\lambda}{2}$ võnguvad kõik punktid omavahel samuti samas faasis, aga naaberpiirkonnaga võrreldes vastupidises faasis: kui esimesed lähenevad tasakaaluasendile ülevalt, siis teised alt.

3) Seisva laine tekkimisel moodustub tema otstel sõlm (nagu joonisel 242) või teiste *äärtingimuste* puhul pais. Kui katsetingimuste tõttu lõpp-punktides võnkumised ei ole võimalikud („otsad kinnitatud" nagu joonisel 242), siis asetsevad arusaadavalt neis kohtades sõlmed. Kui aga otstel on võnkumised võimalikud või koguni kergendatud (selliseid näiteid vaatleme akustikas), võivad seisva laine otstel esineda paisud. Kui joonisel 242 näidatud juhul peale köie võnkumapanemist jätame käe seisma, siis teki-

vad köie mõlemal otsal seisva laine sõlmed; kui aga seisva laine rütmi tabades jätkame käe võnkliikumist, siis lõpeb seisev laine käe juures oleval köie otsal paisuga.

4) Kui lainete peegeldumine toimub *tihedama keskkonna* piirilt, siis muutub faas peegeldumise kohalt *poollaine kaotamisega* hüppeliselt vastupidiseks. Joonisel 242 näidatud juhtum kujutab seda üldist seadust. Tõepoolest, kinnituspunkti lähim sõlm asetseb $\frac{\lambda}{2}$ kaugusel kinnituspunktist, s. o. kohast, kus toimub otselaine peegeldumine ja vastassuunalise laine tekkimine. Sõlmes on otseste ja vastassuunaliste lainete faasid vastupidised (seepärast nad hävitavadki teineteist). Otsene laine läbib meie vaadeldavast eelviimasest sõlmest kuni kinnituspunktini kauguse $\frac{\lambda}{2}$, samal ajal peegeldunud laine läbib sama kauguse $\frac{\lambda}{2}$. Näeme seega, et kui peegeldumise juures ei läheks poolperioodi kaduma, siis peaksid otsese ja peegelduvlaine faasid eelviimases sõlmpunktis olema ühtivad, aga mitte vastupidised.

Tuletame *seisva laine võrrandi.* Koordinaatide alguseks valime sellise punkti, kus kohtuvad lained on samades faasides. Aega arvestame momendist, mil algfaasid olid võrdsed nulliga. Lihtsaimal juhul, nimelt kui amplituudid on võrdsed, on meil otseste lainete võrrand

$$x_1 = A \sin \omega \left(t - \frac{y}{u}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right),$$

aga peegelduvate, y negatiivsete väärtuste suunas levivate lainete võrrand:

$$x_2 = A \sin \omega \left(t + \frac{y}{u}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{\lambda}\right).$$

Resultanthälve on mõlemate komponentide x_1 ja x_2 summa:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \omega t. \qquad (4)$$

Viimasest valemist näeme, et resultanvõnkumine on sama sagedusega ω, aga tema amplituud muutub punktist punkti. Kõigis neis punktides, mille kaugus laineallikast (või mingist punktist, kus faasid ühtivad) on võrdne veerandlainete paarisarvkordse pikkusega (s. o. poollainete mis tahes täisarvkordsega), on võnkumise amplituud kaks korda suurem üksiklaine amplituudist; neid punkte nimetatakse seisva laine *paisudeks.* Vastupidi, kõigis punktides, kus y on võrdne veerandlainete paarituarvkordsega, on resultantvõnkumise amplituud null, s. o. neis punktides võnkumist ei toimu; neid punkte nimetatakse seisva laine *sõlmedeks.*

Mittevõrdsete amplituudide puhul on paisudes resultantamplituud võrdne mõlema komponendi amplituudi summaga, aga sõlmedes nende vahega.

§ 75. Lainete faasi- ja grupikiirus.

Laineprotsesside tundmaõppimiseks eespool avaldatud võrrandite abil (§ 73) on vaja teada lainete levimiskiirust u. Levimiskiirus oleneb keskkonna omadustest. Tihedamas (ja seega inertsemas) keskkonnas lained levivad aeglasemalt kui vähem tihedas, rohkem elastses keskkonnas levivad lained kiiremini kui vähem elastses keskkonnas.

Arvutus annab järgmise tulemuse[1]: *pikilainete* (joon. 233-*a*) levimiskiirus

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}, \tag{5}$$

aga *ristlainetel* (joon. 233-*b*)

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}, \tag{6}$$

kus K on ruumelastsuse moodul (kui ruumala muutumisel ei ole soojuse juurde- ega äravoolu). G on nihkemoodul ja ϱ — keskkonna tihedus.

Tahketes kehades pikilained ennetavad ristlaineid, sest enamikul juhtudel on ruumelastsuse moodul tunduvalt suurem nihkemoodulist. Näiteks rauas on $u_{\parallel} = 5170$ *m/sek*, $u_{\perp} = 2550$ *m/sek*.

Vedelike pinnal oleneb lainete levimiskiirus vedeliku sügavuse ja lainepikkuse suhtest. Kõige üldisemal juhul väljendub laine levimiskiirus üsna keeruka valemiga. Kuid nende lainete puhul, mille lainepikkus on sügavusega võrreldes väga suur või ka väga väike, lihtsustub nimetatud valem tunduvalt.

Meretõusu lainetel (mis on tingitud Kuu ja Päikese külgetõmbejõududest) ulatub lainepikkus sadadesse kilomeetritesse, s. o. osutub meresügavusega võrreldes väga suureks. Seetõttu oleneb tõusulainete levimiskiirus praktiliselt ainult meresügavusest h ja määratakse valemiga

$$u = \sqrt{gh}, \tag{7}$$

kus g on raskuskiirendus.

Harilikkudel merelainetel on lainepikkus sügavusega võrreldes väga väike. Sellega seoses oleneb nende lainete levimiskiirus ainult lainepikkusest ja määratakse valemiga

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{8}$$

kus λ on laine pikkus.

Väga lühikeste, nõndanimetatud *kapillaarsete* lainete puhul on peamise tähtsusega osakestevahelised jõud, aga mitte raskusjõud. Kapillaarlainete levimiskiirust määrab valem

$$u = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\varrho\lambda}}, \tag{9}$$

kus α on pindpinevus ja ϱ vedeliku tihedus.

[1] Lainete kiiruse valemi tuletuskäik on esitatud paragrahvis 144.

Esitatud valemid näitavad, et elastsete piki- ja ristlainete puhul laineprotsessi kiirus ei olene lainepikkusest. Olukord on teistsugune merelainete puhul. Meie nägime, ja seda pole raske vaatlusega kinnitada, et merelaine kiirus on seda suurem, mida pikem on laine; pikad lained jõuavad lühematele järele, tõstavad neid enda turjale ja jõuavad neist ette. Kapillaarlaine kiirus on, vastupidi, seda suurem, mida lühem on laine.

Pinnalainete levimiskiiruse valemeid (8) ja (9) võib teisendada, sidudes laine levimiskiirust u võnkeperioodiga T. Arvestades, et $\lambda = uT$, tõstes mõlemad valemi (8) osad ruutu ja koondades u, saame merelainete kiiruse avaldiseks valemi (8) asemel:

$$u = \frac{gT}{2\pi}.$$

$T = 10$ *sek* puhul levib merelaine kiirusega 15,6 *m/sek*, s. o. 56 *km* tunnis. 20-sekundilise perioodi puhul ulatub merelaine kiirus kuni 112 kilomeetrini tunnis.

Tuleb märkida, et siin vaatlesime lainete niinimetatud *faasikiirust*. Pinnalainete energia ülekandmine teostub lainete grupi liikumisega ja toimub (nagu selgitame allpool) merelainete puhul kiirusega, mis on kaks korda väiksem ja kapillaarlainete puhul poolteist korda suurem faasikiirusest.

Lainete levimiskiiruse muutumist sõltuvalt lainepikkusest nimetatakse dispersiooniks[1]. Valguse levimisega seotud laineprotsessi iseloomustab kiiruse selgesti väljendatud sõltuvus sagedusest — valguse dispersioon.

Häälelained levivad kiirusega, mis on erineva pikkusega lainetele praktiliselt ühesugune. Ainult selliste sageduste juures, kus keskkonna molekulaarse ehituse tõttu elastsed lained kiiresti kustuvad, on märgata suuremat või väiksemat lainete levimiskiiruse sõltuvust nende pikkusest.

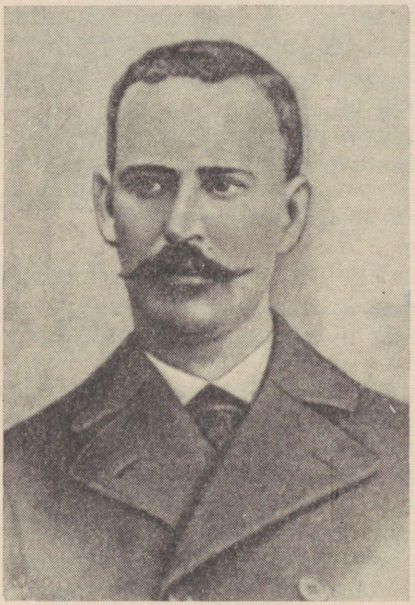
Maavärinate puhul levivad elastse deformatsiooni lained mööda maakera; neid laineid nimetatakse *seismilisteks*. Need koosnevad piki-, rist- ja pinnalainetest. On kindlaks tehtud, et ristlained, s. o. nihkelained, ei tungi sügavamale kui 2900 *km*. Maa tuum koosneb nähtavasti vedelikusarnasest hõõguvast keskkonnast, mis nihkedeformatsioone edasi ei anna.

Maa koores antakse maavärina poolt tekitatud nihked edasi kiirusega umbes 4,5 *km/sek*; 1000 *km* sügavuses on seismiliste ristlainete kiirus ligi 6 *km/sek*. Seismilised pikilained jõuavad ristlainetest ette ja liiguvad pinnakihtides kiirusega 8 *km/sek*, 1000 *km* sügavuses aga kiirusega 11 *km/sek*.

Seismiliste lainete dispersiooni uuris esimesena akad. B. B. Golitsõn (aastail 1906—1910); tema tööd ja täpseimad aparaadid andsid maavärinate teaduse arengule uue suuna. Tänapäeval

[1] Ladina k. *dispergo* — h a j u t a n.

teostab kogu maailmas ligi 500 seismilist jaama maavärinate registreerimist ja seismiliste lainete uurimist.



Boris Borisovitš Golitsõn.

Lainete grupikiirus. Lainetus on ruumiline energia edasikandmise protsess; energia levik toimub elastse deformatsiooni impulsside edasiandmise teel ühest keskkonna osast teise. Näib, nagu peaks seega energia edasikandmise kiirus ühtuma laine levimiskiirusega. Tegelikult sellist ühtumist alati ei esine. Nagu kohe näeme, levib energia laine levimise kiirusega edasi ainult dispersiooni puudumisel või ainult mingi kindla sagedusega üksiku lainete rea puhul.

Kujutleme, et keskkonnas levib samaaegselt ja samas suunas mitu lainete rida, mille sagedused veidi erinevad; peale selle eeldame veel, et lainete kiirus oleneb sagedusest, s. t. et esineb dispersioon. Mitmesuguse pikkusega lainete erineva levimiskiiruse tõttu tulevad need lained mingisse lainevälja punkti üldiselt erinevate faasidega ja igal antud ajamomendil oleneb meie valitud punkti resultanthälve üksikute võnkumiste faaside suhtest. Kui need faasid on peaaegu vastupidised, siis resultantvõnkumine pole kuigi suur. Kuid kohal, kus üksikute võnkumiste faasid antud momendil ühte langevad, liituvad kõik võnkumised ja annavad interferentsi tõttu suurima võimaliku amplituudiga resultantvõnkumise. Seejuures on selles punktis energia tihedus maksimaalne. Kuid järgmisel ajamomendil faaside vahekord tingimata muutub ja sellega ühenduses väheneb selles punktis ka energia tihedus. Nimetame kõige suurema energia tihedusega punkti lainegrupi *energiatsentriks*. On ilmne, et energiatsenter kandub üksikute võnkumiste faaside muutuvate vahekordade mõjul ruumis edasi. Interferentsi tõttu on lähedaste sagedustega lainegruppide levimisel joonisel 243 näidatud kuju. Hälvete amplituud on kõige suurem energiatsentris; selle ees ja taga summutavad lained üksteist.

Määrame energiatsentri edasiliikumise kiiruse. Selleks oletame, et mingil ajamomendil t asub energiatsenter punktis koor-

dinaadiga y. Hälvet, mis vastaks igale üksikule võnkele, võib määrata lainevõrrandi järgi:

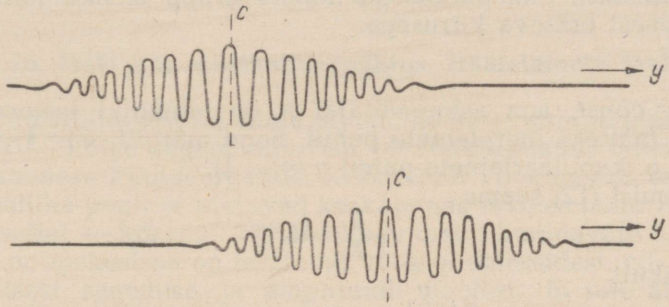
$$x = A \sin \varphi,$$

kus faas

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{y}{u}\right),$$

või kui asendada nurksagedus ω tema lainepikkuse kaudu väljendatud avaldisega ($\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{u}{\lambda}$), siis:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{u}{\lambda} t - \frac{y}{\lambda}\right).$$



Joon. 243. Lähedaste sagedustega lainetegrupi laineväli ja energiatsentri C edasikandumine.

Lainegrupi energiatsentri asukohal lähedase lainepikkusega võnkumised tugevdavad teineteist. Teisiti öeldes, *energiatsentris erineva, aga lähedase pikkusega lainete võnkefaasid langevad ühte.* Järelikult energiatsentris võnkefaas ei olene lainepikkusest ja seega faasi tuletis lainepikkuse järgi on null:

$$\frac{dy}{d\lambda} = 2\pi \left(t \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} + y \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.$$

Seda võrrandit, mis iseloomustab energiatsentri asukohta tema koordinaadiga y ajamomendil t, võib kirjutada ümber järgmiselt:

$$y = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} \cdot t = vt. \qquad (10)$$

Seega näeme, et lainegrupi energiatsentri asukoht, mida määratakse energiatsentri koordinaadiga y, muutub aja jooksul, ja nimelt: valemi (10) mõttest on selge, et energiatsenter kandub ruumis edasi kiirusega v, kusjuures

$$v = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda}. \qquad (11)$$

Kiirus v on lainegrupi *energiatsentri edasikandumise kiirus;* seda kiirust nimetatakse *grupikiiruseks,* kuna üksiku laine levimise kiirust nimetatakse faasikiiruseks.

Kerge on näha, et kui puudub dispersioon, s. o. $\frac{du}{d\lambda} = 0$, siis $v = u$. See tähendab, et juhul, kui erineva pikkusega lained levivad ühesuguse kiirusega, siis lainegrupp liigub ja kannab energiat edasi üksiku laine levimiskiirusega.

Häälelainetel grupikiirus praktiliselt ühtub faasikiirusega.

Pinnalainete, näiteks merelainete jne. puhul on erineva lainepikkusega lainetel erinev faasikiirus. Seepärast levib neil juhtudel lähedase lainepikkusega lainete grupp üksiku laine levimiskiirusest erineva kiirusega.

Olgu

$$u = k\lambda^n, \tag{12}$$

kus $k = const$, aga astmenäitajal n on laineliiki iseloomustav väärtus (näiteks merelainete puhul, nagu märgiti, $n = \frac{1}{2}$; virvenduse, s. o. kapillaarlainete puhul $n = -\frac{1}{2}$).

Valemist (12) saame

$$\frac{u}{\lambda} = k\lambda^{n-1}$$

ja järelikult

$$\frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} = (n-1)\, k\lambda^{n-2}.$$

Korrutades selle võrrandi mõlemaid pooli λ^2-ga ja vahetades parempoolses osas $k\lambda^n$ u-ga, leiame kooskõlas valemiga (11), et

$$v = (1-n)\, u. \tag{13}$$

Seega näeme, et merelainete grupp ($n = \frac{1}{2}$) levib keskkonnas väiksema kiirusega kui üksik laine:

$$v = \tfrac{1}{2} u.$$

Kui tormi ajal merelainete periood on 20 *sek* ja nad liiguvad vastavalt valemile $u = \frac{gT}{2\pi}$ kiirusega 112 *km/h,* siis lainetuse levimise puhul esimesed lained kustuvad ja lainegrupp kandub edasi kiirusega 56 *km/t.*

Virvendus — kapillaarlainete grupp — levib suurema kiirusega kui üksiklaine. Tõepoolest on sel juhul valemis (12) astmenäitajaks $n = -\frac{1}{2}$ ja sellepärast valemi (13) põhjal

$$v = \frac{3}{2} u.$$

Märgime, et grupikiiruse üldvõrrandit (11), kui suhet $\frac{u}{\lambda}$ diferentseerida võrrandis näidatud viisil, võib kirjutada ka järgmisel kujul:

$$v = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \tag{14}$$

XIII PEATÜKK.

AKUSTIKA.

§ 76. Hääl kui füüsikaline nähtus. Häälelainete levimine.

Spetsiifiline aisting, mida tajume häälena, osutub elastse keskkonna — kõige sagedamini õhu — võnkliikumise mõju tagajärjeks inimese kuuldeorganile. Keskkonna võnkumised tekitatakse hääleallika poolt ja ulatuvad keskkonnas levides meie vastuvõtuaparaadini — kõrvani. Niiviisi kogu meile kuuldavate häälte lõpmatu mitmekesisus on tekitatud võnkeprotsessidest, mis erinevad üksteisest sageduse ja amplituudi poolest. Ei tule ära segada sama nähtuse kahte külge: hääl kui füüsikaline protsess on võnkliikumise erijuhtum; psühho-füsioloogilise nähtena on hääl mingi eriline aisting, mille tekkimise mehhanism on meie ajal üsna põhjalikult uuritud.

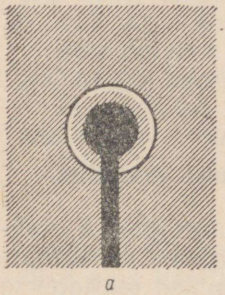
Nähtuse füüsikalisest küljest rääkides iseloomustame häält temaga ühenduses olevate võnkeprotsesside *intensiivsuse (tugevuse), koostise* ja *sageduse* järgi; silmas pidades aga hääle aistmist, kõneleme tema *valjusest, tämbrist (kõlast)* ja *kõrgusest.*

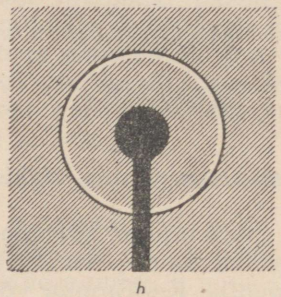
Tahketes kehades võib hääl levida nii piki- kui ka ristlainetena. Kuivõrd vedelikel ja gaasidel nihkeelastsus puudub, on arusaadav, et gaasilistes ja vedelates keskkondades saab hääl levida ainult pikilainete kujul. Gaasides ja vedelikes esinevad häälelained keskkonna vahelduvate *tihenduste* ja *hõrenduste* näol, mis hääleallikast teatava kindla, igale keskkonnale vastava kiirusega eemalduvad. *Häälelaine pinnaks* on ühesuguse võnkefaasiga keskkonna osakeste geomeetriline koht. Häälelainete pinnad võime näiteks nii võtta, et naaberlainete pindade vahel asetuksid tiheduste ja hõrenduste kihid. Lainepinnaga ristiolevat suunda nimetatakse *kiireks.*

Gaasilises keskkonnas võib häälelaineid fotografeerida. Selleks asetatakse hääleallika taha fotoplaat, millele eestpoolt suunatakse elektrisädemest valguskiirte kimp nii, et silmapilksel sähvatusel tekkinud valguskiired langeksid fotoplaadile, läbistades heliallikat ümbritsevat õhku. Joonistel 244—247 on esitatud selli-

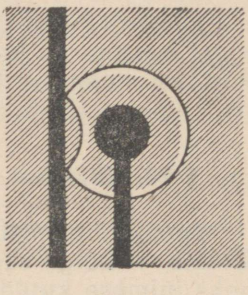
sel viisil saadud häälelainete ülesvõtted. Hääleallikas oli fotoplaadist eraldatud toe otsas oleva ekraaniga.

Joonisel 244-*a* näeme, et häälelaine on just ekraani tagant väljunud; joonisel 244-*b* on toodud sama laine tuhandik sekundit hiljem. Lainepinnaks on käesoleval juhtumil sfäär. Ülesvõttel saadakse laine kujutus ringina, mille raadius aja jooksul suureneb.





Joon. 244. Häälelaine fotograafiline ülesvõte kahel ajamomendil.



Joon. 245. Häälelaine peegeldumine.

Joonisel 245 on esitatud tasaselt seinalt tagasipeegeldatud sfäärilise häälelaine ülesvõte. Siin tuleb tähelepanu juhtida sellele, et peegeldatud laine osa nagu väljuks peegeldava pinna tagusest hääleallikaga võrdsel kaugusel asetsevast punktist. On üldiselt tuntud, et häälelainete peegeldumisega seletub *kaja* tekkimine.

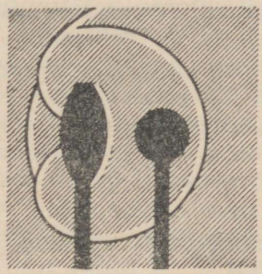
Joonisel 246 on näidatud lainepinna muutus häälelaine läbimisel läätsekujulisest vesinikuga täidetud kotikesest. See hääle lainepinna muutus on helikiirte *murdumise* (refraktsiooni) tagajärg: kahe keskkonna, milles laine levimiskiirused on erinevad, lahutuspinnal muutub laine levimise suund.

Joonis 247 kujutab häälelainete ülesvõtet, mille leviku teele on asetatud nelja piluga ekraan. Pilusid läbistanud lained painduvad ekraani taha. Nähtust, mille puhul lained painduvad eesolevate takistuste taha, nimetatakse *difraktsiooniks.*

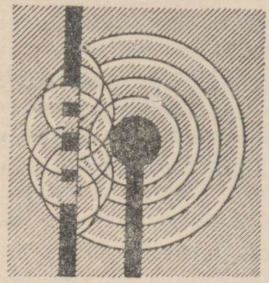
Häälelainete levimise, peegeldumise, murdumise ja difraktsiooni seadusi on võimalik tuletada lähtudes Huygensi printsiibist, mille põhjal iga võnkumapandud keskkonna osakest võib vaadata kui uut lainetustsentrit (laineallikat); kõikide nende lainete interferents annab tegelikkuses vaadeldava laine (Huygensi printsiibi kasutusviis esitatakse kolmandas köites valguslainete näite puhul).

Häälelainetega kandub edasi teatav impulss, mistõttu nad avaldavad eesolevatele takistustele rõhumist.

Selle fakti selgitamiseks vaatleme joonist 248. Sel joonisel on punktiiriga kujutatud keskkonna osakeste hälvete sinusoid pikilaine keskkonnas levimise mingil ajamomendil. Nende osakeste kiirusi vaadeldaval ajamomendil kujutatakse koosinusoidiga, ehk mis on seesama: hälvete sinusoidi veerandperioodi ennetava sinusoidiga (joonisel 248 pidev joon). Pole raske mõista,

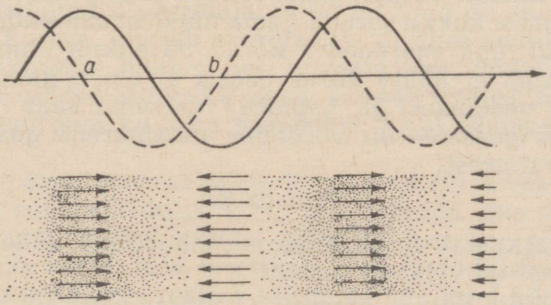


Joon. 246. Häälelaine murdumine.



Joon. 247. Häälelainete difraktsioon.

et keskkonna tihendused esinevad seal, kus antud momendil osakeste hälbed on võrdsed nulliga või selle lähedased ja kus kiirus on laine levimise suunaline[1]. Vastupidi, keskkonna hõrendu-



Joon. 248. Kulgeva häälelaine tihendustes liiguvad osakesed edasi.

[1] Joonisel 248 kujutatud hälvete sinusoid näitab, et keskkonna osakesed, mis asuvad *a* naabruses ja *a*-st vasakul, on nihkunud tasakaaluasendist paremale, mis asuvad aga *a*-st paremal — vasakule, s. o. teineteisele vastu. Keskkonna osakesed, mis asuvad *b* naabruses ja vasakul *b*-st, on nihkunud tasakaaluasendist vasakule, mis aga paremal *b*-st — paremale, s. o. teineteisest kaugemale.

sed esinevad seal, kus ka osakeste hälbed on võrdsed nulliga või selle lähedased, aga kus kiirus on laine levimise suunale vastupidiselt suunatud. Niisiis, tihendustes liiguvad osakesed edasi, hõrendustes — tagasi. Kuid tihendatud kihtides on rohkem osakesi kui hõrendatud kihtides. Nii ületab edasiliikuvate osakeste hulk hääle pikilainetes igal ajamomendil mõnevõrra tagasiliikuvate osakeste hulka. Selle tagajärjel kannab häälelaine endaga edasi teatavat impulssi, mis avaldubki rõhuna ettepuutuvatele takistustele.

Katseliselt on *hääle rõhku* uurinud R a y l e i g h ja Pjotr Nikolajevitš L e b e d e v.

Teoreetiliselt määratakse hääle kiirust Laplace'i valemiga [§ 75, valem (5)]:

$$C = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}, \qquad (1)$$

kus K on ruumelastsuse moodul (kui surve toimub ilma soojusvahetuseta) ja ϱ — tihendus.

Kui keha kokkusurumine toimub nii, et keha temperatuur jääb konstantseks, siis saadakse elastsusmooduli suurused väiksemad kui kokkusurumisel ilma soojuse juurdesaamiseta ja äraandmiseta. Termodünaamikas tõestatakse, et need kaks ruumelastsuse mooduli väärtust suhtuvad nii nagu keha soojusmahtuvus jääva rõhu juures ja keha soojusmahtuvus jääva ruumala juures.

Mitte liiga kokkusurutud gaaside isotermiline ruumelastsuse moodul on lihtsalt võrdne gaasi rõhuga p. Kui ilma temperatuuri muutmata gaasi kokku suruda (tema tihedust suurendada) n korda, siis ka gaasi rõhk suureneb n korda. Järelikult ilmneb Laplace'i valemi põhjal, et hääle kiirus gaasis ei olene gaasi tihedusest.

Gaaside seadustest ja Laplace'i valemist saab järeldada, et hääle kiirus gaasides on võrdeline ruutjuurega gaasi absoluutsest temperatuurist:

$$C = \sqrt{g \varkappa RT}, \qquad (2)$$

kus g on raskuskiirendus, $\varkappa$ soojusmahtuvuste suhe ($\varkappa = C_p / C_v$) ja R — gaasi universaalkonstant.

Hääle kiirus kuivas õhus 0° C juures $c_0 = 332$ *m/sek*; keskmistel temperatuuridel ja keskmise niiskuse puhul loetakse hääle kiiruseks õhus 340 *m/sek*. Hääle kiirus vesinikus 0° C juures on 1280 *m/sek*.

Vees on hääle kiirus 1450 *m/sek*, klaasis 5600 *m/sek*, rauas 5170 *m/sek*.

Tuleb märkida, et plahvatuste või laskeriistade poolt tekitatud hääle survelained levivad alguses tunduvalt kiiremini normaalsest hääle kiirusest antud keskkonnas. Tugeva plahvatuse poolt tekitatud tihenduslaine ületab hääleallika juures mitmekordselt

normaalse hääle levimise kiiruse õhus, kuid juba mõnekümne meetri kaugusel plahvatuskohast väheneb see normaalse suuruseni.

Nagu juba paragrahvis 75 mainisime, on erineva pikkusega häälelainetel praktiliselt ühesugune kiirus. Erandi moodustavad need sageduste piirkonnad, mille omaduseks vaadeldavas keskkonnas levimisel on eriti kiire elastsete lainete sumbuvus. Harilikult asuvad need sagedused kaugel väljaspool kuuldavuse piirkonda (gaasides on atmosfäärilise rõhu puhul selline omadus lainetel sagedusega suurusjärguliselt 100 000 võnget sekundis). Teoreetiline analüüs näitab, et häälelainete dispersioon ja neeldumine (absorptsioon) on seotud sellega, et energia ümberjaotumiseks molekulide kulgeva ja võnkuva liikumise vahel on vaja teatavat, olgugi lühikest aega. Sellest tuleneb, et pikemad, kuuldavuse piirkonna lained liiguvad mõnevõrra aeglasemalt kui väga lühikesed „mittekuuldavad" lained. Nii on süsihappegaasis atmosfääri rõhul 0° *C* juures hääle kiirus 268 *m/sek*, kuna aga väga lühikesed „mittekuuldavad" lained levivad kiirusega 280 *m/sek*.

Keskkonnas levival häälelainel võib olenevalt hääleallika mõõdetest ja kujust olla mitmesugune kuju. Tehniliselt kõige enam huvitavatel juhtudel on hääleallikaks (kiirgajaks) mingi võnkuv pind — sellised on näiteks telefoni membraan või valjuhääldaja difuusor. Kui selline hääleallikas levitab häälelaineid lahtisesse ruumi, siis häälelaine kuju sõltub oluliselt kiirgaja suhtelistest mõõtudest; kiirgaja, mille mõõdud on suured, võrreldes lainepikkusega, levitab energiat ainult ühes suunas — nimelt oma võnkliikumise suunas. See kiirgaja aga, mille mõõdud on väikesed, võrreldes lainepikkusega, kiirgab hääleenergiat igasse suunda. Lainefrondi kuju on kummalgi juhul silmanähtavalt erinev.

Vaatleme algul esimest juhtu. Kujutleme võrreldes lainepikkusega küllalt suuremõõdulist kõva tasast pinda, mis võngub oma normaali suunas. Liikudes edasi, moodustab selline pind enda ees tihenduse, mis keskkonna elastsuse tõttu levib hääleallika hälbe suunas. Tagasi liikudes tekitab kiirgaja enda järel hõrenduse, mis kandub keskkonnas edasi algtihenduse järel. Kiirgaja kestval võnkumisel paneme mõlemal pool kiirgajat tähele häälelainet, mis on iseloomulik selle poolest, et kõik võnkuvast pinnast võrdsel kaugusel olevad keskkonna osakesed (kusjuures kaugust loeme pinnast normaali suunas) võnguvad sünfaasiliselt (s. o. ühtelangevate faasidega) ühesuguse amplituudiga. Niisugust lainet nimetame *tasalaineks*. Lihtsaima tasalaine võrrand on meile juba tuttav (§ 73); kirjutame selle siin järgmisel kujul:

$$\xi = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (3)$$

Selles võrrandis on kasutatud järgmisi tähistusi: ξ — keskkonna osakese hälve; a — osakese võnkeamplituud; ω — võnkumiste nurksagedus, s. o. võngete arv 2π sekundi vältel; t — aeg; x — osakese kaugus võnkuvast pinnast normaali suunas; c — hääle kiirus.

Arvutused näitavad, et lisarõhu amplituud p_0 on võrdne osakeste kiiruse amplituudi ωa, keskkonna keskmise tiheduse ϱ ja hääle levimiskiiruse c korrutisega:

$$p_0 = c\varrho\omega a. \tag{4}$$

Keskkonna keskmise tiheduse ja hääle levimiskiiruse korrutist $c\varrho$ nimetatakse *keskkonna akustiliseks takistuseks.*

Akustiline takistus $c\varrho$ (20° C juures).

Aine	c m/sek	p g/cm³	$c\varrho$ g/cm² · sek
Raud	5 170	7,8	4 000 000
Betoon	2 200	2,2	480 000
Puit	5 000	0,5	250 000
Vesi	1 440	1,0	144 000
Kork	430	0,3	13 000
Kummi	60	1,0	6 000
Õhk	340	0,0013	44

Vaatleme nüüd *sfääriliste* lainete juhtumit. Kui võnkuva pinna mõõdud jäävad laine pikkusega võrreldes väikeseks, siis kõverdub lainefront tunduvalt. See tuleb sellest, et võnkumiste energia levib hääleallikast igas suunas.

Nähtust võib kõige paremini mõista järgmise lihtsa näite abil. Kujutleme, et vee pinnale langes pikk palk. Sellest tekkinud lained kaugenevad mõlemal pool palki paralleelsete ridadena. Teisiti on asi siis, kui vette visata väike kivi — sel juhul levivad lained kontsentriliste ringidena. Palk on veepinnal tekkivate lainete pikkusega võrreldes suur; temast eemalduvad paralleelsed lainete read kujutavad näitlikult tasalainet. Kivi on aga väike; tema kukkumise kohalt eemalduvad lained esitavad näitlikult sfäärilisi laineid. Sfäärilise laine levimisel kasvab laine frondi pind võrdeliselt tema raadiuse ruuduga. Hääleallika konstantse võimsuse juures on sfäärilise laine (raadius r) iga ruutsentimeetrit läbistav energia pöördvõrdeline raadiuse r ruuduga. Kuna võnkumise energia on võrdeline amplituudi ruuduga, siis on selge, et sfäärilise laine puhul peab võnkumise amplituud vähenema võrdeliselt heliallika kauguse esimese astme pöördväärtusega. Järelikult sfäärilise laine võrrand on järgmine:

$$\xi = \frac{a}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{5}$$

§ 77. Hääle tugevus (intensiivsus).

Hääle tugevuseks ehk intensiivsuseks nimetatakse kulgeva (s. o. mitteseisva) laine puhul *energia hulka, mis ühes sekundis läbistab ühe ruutsentimeetri suurust laine levimissuunaga risti olevat pinda.*

Hääle tugevust (intensiivsust) mõõdetakse ühikutes $erg/cm^2 \cdot sek$ või 10 korda suuremate ühikutega $\frac{\mu W}{cm^2}$ (mikrovatt on miljondik osa vatist).

Arvutused näitavad, et hääle tugevus I on võrdne lisarõhu amplituudi ruudu ja kahekordse keskkonna akustilise takistuse suhtega:

$$I = \frac{p_o^2}{2c\varrho}. \tag{6}$$

See kehtib nii tasapinnaliste kui ka sfääriliste lainete kohta. Tasapinnaliste lainete korral, kui mitte arvestada sisehõõrdest tingitud kadusid, ei peaks hääle tugevus kauguse tõttu muutuma. Sfääriliste lainete puhul kahanevad osakeste hälvete, kiiruste ja lisarõhu amplituudid võrdeliselt hääleallika kauguse esimese astme pöördväärtusega. Järelikult väheneb hääle tugevus sfääriliste lainete puhul pöördvõrdeliselt hääleallika kauguse ruuduga.

Hääle tugevuse mõõtmiseks kasutatakse harilikult mikrofone, millede ehitust kirjeldatakse kursuse teises köites elektrilisi võnkumisi käsitlevas peatükis. Hääle tugevuse mõõtmiseks kasutatakse ka *Rayleigh' ketast* — see on väike õhukene ketas (valmistatud vilgukivi 0,02—0,03 *mm* paksusest lehest) läbimõõduga 2—5 *mm*, mis on riputatud väga peenikese niidi otsa. Häälelainete väljas mõjub kettale jõupaar, mille moment on võrdeline hääle tugevusega ja ei olene hääle sagedusest. See jõupaar püüab ketast nõnda pöörata, et tema pind oleks risti hääle lainete levimissuunaga. Harilikult riputatakse Rayleigh' ketas hääleväljas 45° all laineleviku suunaga ja hääle tugevust mõõdetakse ketta pöördenurka määrates.

Hääle tugevuse määramiseks võib mõõta ka rõhku p, mida avaldavad häälelained kõvale seinale. See rõhk on võrdeline hääletugevusega:

$$p = \frac{\varkappa + 1}{2c} I;$$

siin $\varkappa$ on jääva rõhu ja jääva ruumala juures leitud keskkonna erisoojuste suhe, c — hääle kiirus.

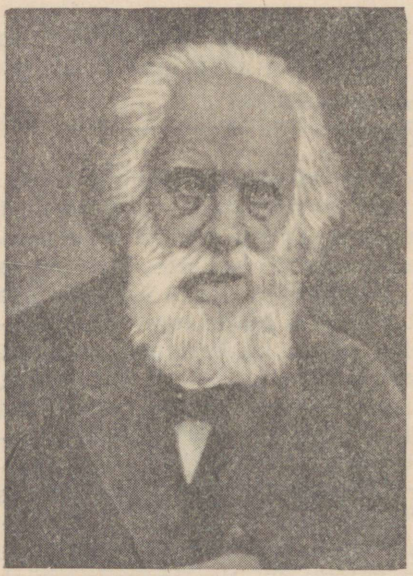
Toodud valemit valemiga (6) kõrvutades, näeme, et häälelainete poolt kõvale pinnale avaldatud rõhk on võrdeline lisarõhu amplituudi ruuduga ja pöördvõrdeline keskkonna tihedusega.

Käesoleva paragrahvi alguses antud hääle tugevuse määramine kaotab mõtte s e i s v a l a i n e puhul. Tõepoolest, kui kul-

geva ja peegelduva laine rõhkude amplituudid on võrdsed, siis risti laine teljega asetatud pinda läbivad vastastikustes suundades võrdsed energiahulgad. Sellepärast on seda pinda läbiva energia resultantvoog võrdne nulliga. Sellisel juhul iseloomustatakse hääle tugevust *hääleenergia tihedusega*, s. o. energiaga, mida sisaldab häälevälja 1 cm^3.

Tasapinnalise kulgeva laine hääleväljas oleva hääleenergia tiheduse arvutamiseks kujutleme silindrikujulist ruumi, mille läbimõõt on 1 cm^3 ja pikkus on arvuliselt võrdne hääle kiirusega c; silindri telg asetsegu laine levimise suunas. On selge, et silindris sisalduv energiahulk on arvuliselt võrdne hääle tugevusega I. Teisest küljest, 1 cm^2 ristlõike pindala juures on silindri maht arvuliselt võrdne c-ga; seega hääleenergia tihedus

$$E = \frac{I}{c}. \qquad (7)$$



Nikolai Aleksejevitš Umov (1846—1915)

Kujutluse energia liikumisest ja praegusel ajal väga tähtsad mõisted energia tihedusest keskkonna punktis ning energia liikumise kiirusest tõi 1874. a. teadusse N. A. Umov oma doktoridissertatsioonis, kus on antud ka valemi (7) range põhjendus. Kümmekond aastat hiljem arendas Umovi ideid inglise füüsik Pointing, kohaldades neid elektro-magnetilistele lainetele.

Selgitame, kuidas arvutada hääle intensiivsust peegeldunud häälelaine ja murdunud laine juures.

Häälelainete peegeldumis- ja murdumisseadused on analoogilised valguse peegeldumis- ja murdumisseadustega. Häälelaine peegeldumise puhul nurk, mis jääb lainesuuna ja peegeldava pinna normaali vahele (langemisnurk), on võrdne nurgaga, mis jääb peegeldunud laine suuna ja sellesama normaali vahele (peegeldumisnurgaga).

Häälelaine üleminekul ühest keskkonnast teise langemisnurk Θ_1 ja murdumisnurk Θ_2 rahuldavad järgmist võrret:

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

kus c_1 ja c_2 on hääle kiirused esimeses ja teises keskkonnas.

Kui I_1 on hääle intensiivsus esimeses keskkonnas ja lained langevad piirpinnale risti, siis intensiivsus I_2 teises keskkonnas

$$I_2 = \beta I_1.$$

Rayleigh tõestas, et hääle *läbitungivuse koefitsiendi* määrab valem

$$\beta = 4 \frac{\frac{c_1\varrho_1}{c_2\varrho_2}}{\left(\frac{c_1\varrho_1}{c_2\varrho_2} + 1\right)^2}.$$

On silmanähtav, et *peegeldumiskoefitsient* on võrdne vahega $(1-\beta)$. Rayleigh' valemist näeme, et mida enam erinevad keskkondade akustilised takistused $c_1\varrho_1$ ja $c_2\varrho_2$, seda väiksem osa hääleenergiast läbistab keskkondade piirpinda. Pole raske mõista, et kui esimese keskkonna akustilise takistusega võrreldes teise keskkonna akustiline takistus on väga suur, siis

$$\beta \approx 4 \frac{c_1\varrho_1}{c_2\varrho_2}.$$

Selline juhtum esineb hääle üleminekul õhust vette, betooni või puitu; nende keskkondade akustiline takistus on õhu omast mitu tuhat korda suurem. Järelikult normaalsel hääle langemisel õhust vee, betooni või puu massiividele ei tungi neisse keskkondadesse üle tuhandiku osa hääle intensiivsusest. Sellegipärast betoon- või puitsein, kui ta on õhuke, võib hästi häält juhtida; sel juhul sein võtab vastu ja annab edasi elastseid võnkeid nagu suur membraan. Eeltoodud valem pole niisugusel juhul kasutatav.

Atmosfääri õhu üksikud kihid võivad olla erineva temperatuuri tõttu mitmesuguse akustilise takistusega; selliste õhukihtide piirpinnal toimub hääle peegeldumine. Sellega seletub, miks hääle kuuldavuse kaugus atmosfääris tugevasti kõigub. Kuuldavuse kaugus võib olenevalt õhu homogeensuse astmest muutuda kümme ja rohkem korda. Ilmastik (vihm, lumi, udu) ei mõjuta õhu helijuhtivust. Nii selgel päeval kui ka tihedas udus võib kuuldavus olla ühesugune. Ja vastupidi, päevadel, mil ilmastik paistab ühesugune olevat, võib õhu helijuhtivus olla väga mitmesugune, kui õhukihtide homogeensuse aste on erinev.

Üheks akustika tähtsaks ülesandeks on tingimuste väljaselgitamine, mis mõjustavad akustiliste kiirgajate hääle intensiivsust. Kui võnkuv keha annab hääleenergiat väliskeskkonda, siis see keha teeb tööd *hääle välja reaktsiooni* vastu, s. o. jõudude vastu, mis on tingitud lisaõhust kiiratavas laines ja mis pidurdavad kiirgaja võnkliikumist.

Arvutus näitab, et kui hääleallika mõõdud on lainepikkusega võrreldes suured, siis temast väljub tasapinnaline laine, kusjuures häälekiirguse võimsus on võrdne kiirgaja võnkliikumise kii-

ruse amplituudi $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$, kiirgaja pinna S ja keskkonna akustilise takistuse poole korrutisega:

$$N = \tfrac{1}{2}\dot{\xi} \cdot c\varrho_0 S.$$

Kui hääleallikas on lainepikkusega võrreldes väike, siis ta tekitab sfäärilisi laineid, kusjuures kiirguse võimsus määratakse nüüd valemiga

$$N = \tfrac{1}{2}\dot{\xi} \cdot \frac{\varrho_0}{2\pi c}\,\omega^2 S^2.$$

Mingisuguse antud suurusega hääleallika jaoks (näiteks võnkuvale kettale pinnaga S) määrab esimene ülaltoodud võimsuse valemitest kõrgete sageduste (lühilainete), teine madalate sageduste (pikkade lainete) kiirgamise võimsuse.

Tihti on nõutav, et kõrgete, keskmiste ja madalate sageduste piirkonnas hääleallikal oleks võrdne võimsus (see omadus peab olema grammofonide membraanidel ja valjuhääldajate difuusoritel). Kuid võnkliikumise antud amplituudi juures on väikesed hääleallikad, omades rahuldavat kõrgete häälte kiirgusvõimsust, väga väikese võimsusega madalate häälte kiirgamisel. See teeb neid muusikalises mõttes mittetäisväärtuslikeks.

Üeldust selguvad väikeste kiirgajate puudused. Suurtel kiirgajatel on see oluline puudus, et nende mass on küllalt suur ja järelikult nende võnkuma panemiseks vajaliku amplituudiga tuleb rakendada väga suurt jõudu. Seepärast on tehnilisest vaatepunktist soovitav asetada väikesemõõduline kiirgaja võimalikult parematesse akustilise režiimi tingimustesse.

Seda ülesannet saab lahendada spetsiaalse seadisega, mis ühendab kiirgajat ümbruskonnaga, nimelt ruupori abil. Ruupor on laienev toru, mille kitsas otsas (kurgus) võngub kiirgaja. Ruupori kõvad seinad ei lase häälelaineil külgedele laiali valguda. Nii säilib laine front enam-vähem tasapinnalisena, mille tõttu on võimalik kasutada esimest eespool antud valemit kiirgusvõime arvutamisel mitte ainult kõrgete, vaid ka madalate sageduste puhul.

Hääle intensiivsuse uurimist tuleb harilikult teostada kinnistes ruumides. Hääle uurimine kinnistes ruumides on tähtis auditooriumide, teatrite, kontserdisaalide jms. projekteerimiseks ning akustiliste defektide parandamiseks ruumides, mis on ehitatud ilma eelneva akustilise arvutuseta. Nende küsimustega tegelevat tehnikaharu nimetatakse arhitektuuriliseks akustikaks.

Kinnistes ruumides on akustiliste protsesside põhiliseks iseärasuseks hääle mitmekordne peegeldumine piiravatelt pindadelt (seinad, lagi). Enne kui häälelaine energia keskmise suurusega toas väheneb kuuldeläveni, peegeldub laine mitusada korda. Suurtes ruumides võib küllaldase tugevusega hääl pärast hääleallika väljalülitamist olla veel mõnikümmend sekundit kuuldav

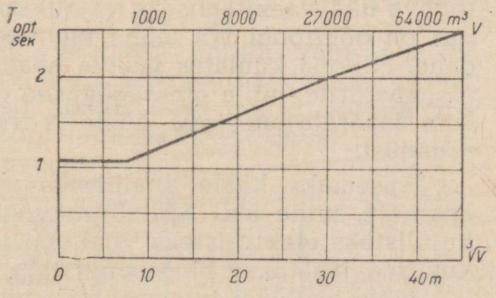
peegelduvate lainete toimel, mis liiguvad kõigis võimalikes suundades. On täiesti arusaadav, et hääle niisugune aeglane kustumine on ühest küljest isegi kasulik, kuna ta peegeldunud lainete energia arvel tugevneb; teisest küljest aga liiga aeglane kustumine võib tunduvalt halvendada seotud häälte (kõne, muusika) tajumist, kuna iga uut osa seotud kontekstist (näiteks iga uut silpi kõnest) katavad veel mitte kustunud eelmised hääled. Juba neist põgusatest arutlustest selgub, et auditooriumis hea kuuldavuse loomiseks peab olema kajal mingi optimaalne kestus.

Iga peegeldumise juures osa energiat kaob neeldumise tõttu. Neeldunud ja langeva hääleenergia suhet nimetatakse hääle *neeldumiskoefitsiendiks.* Toome järgnevalt neeldumiskoefitsiendi mõned väärtused.

Avatud aken	1,00
Krohvitud telliskivisein	0,025
Hariliku paksusega klaas	0,027
Lubi krohvimattidel	0,034
Linoleum	0,12
Vaip	0,20
Vilt (2,5 *cm* paksune 8 *cm* kaugusel seinast)	0,78
Parkett	0,06
Betoon	0,015

On silmanähtav, et mida suurem on mingi ruumi seinte hääle neeldumiskoefitsient ja mida väiksemad on selle ruumi mõõdud, seda lühem on kaja kestus.

Kaja kestus, mille vältel hääle intensiivsus väheneb kuuldeläveni, ei olene ainult ruumi omadustest, vaid ka hääle algtugevusest. Auditooriumide akustiliste omaduste arvutamisse ühtluse loomiseks on hakatud (täiesti tinglikult) arvestama *aega, mille vältel hääleenergia tihedus väheneb kuni ühe miljondikuni algväärtusest.* Seda aega nimetatakse standardse reverberatsiooni ajaks ehk lihtsalt *reverberatsiooniks.*

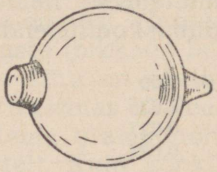


Joon. 249. Mitmesuguse suurusega ruumide optimaalne reverberatsioon.

Optimaalse reverberatsiooni aja suurust, mille juures kuuldavus oleks kõige parem, on katseliselt määratud palju kordi. Väikestes ruumides (ruumalaga mitte üle 350 m^3) osutub optimaalseks reverberatsiooniks 1,06 *sek.* Edasisel ruumi suurenemisel suureneb ka optimaalne reverberatsioon võrdeliselt kuupjuurega ruumalast $\sqrt[3]{V}$, nagu on kujutatud joonisel 249.

§ 78. Häälte sagedus ja koostis.

Keskkonna akustiliste harmooniliste võnkumiste juhul meie hääle *kõrguse* aistingule vastab objektiivselt võnkumiste *sagedus*. Kui häälelised keskkonna võnkumised on mitteharmoonilised, siis Fourier' teoreemi kasutades võib selliseid võnkumisi kujutada kui kordsete sagedustega harmooniliste võnkumiste summat. Sel juhul kõige väiksema sagedusega ν harmoonilise võnkumise komponenti nimetatakse *põhitooniks*, aga kõiki teisi *ülemtoonideks* (esimene ülemtoon omab sageduse 2ν, teine 3ν jne.).



Joon. 250. Helmholtzi resonaator.

Akustilise resonantsi nähe lubab katseliselt analüüsida mitteharmoonilisi keerukaid akustilisi võnkumisi, s. o. määrata põhitooni sagedust ja ülemtoonide suhtelist tugevust. Sellist hääle analüüsi saab teostada Helmholtzi resonaatorite kogu abil, mis koosneb mitmesuguse suurusega õõnsatest klaasist või messingist keradest (joon. 250), millel on kaks ava: suurem, mille kaudu õhuvõnkumised kera sisemusse pääsevad, ja väiksem katsetaja kõrva asetamiseks. Igasugune hääl tekitab Helmholtzi resonaatoris omavõnkumisi, mis olenevad resonaatorisse suletud õhu ruumalast. Kuid need õhu omavõnkumised omandavad ainult siis tugeva hääle tekitamiseks vajalikku amplituudi, kui nende sagedus on põhitooni või mõne tugevama ülemtooni sageduse lähedane. Niiviisi kuulates mõnda häält läbi mitmesuguses suuruses resonaatorite, mille omasagedused on teada, saab hõlpsasti kindlaks määrata uuritava hääle ja tema tugevamate ülemtoonide sagedust.

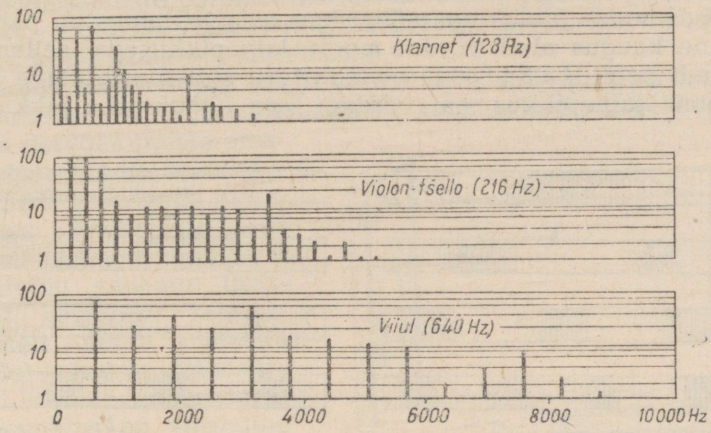
Täpsemaks hääle analüüsiks rakendatakse elektroakustilisi aparaate, mille abil häälelised võnkumised muundatakse samakujulisteks elektrilisteks võnkumisteks ja need elektrilised võnkumised jagatakse harmoonilisteks komponentideks.

Hääle analüüsi tulemusi väljendatakse tihti graafiliselt *akustilise spektri* kujul: abstsissteljele kantakse sagedused, ordinaatteljele harmooniliste komponentide (põhi- ja ülemtoonide) suhtelised tugevused väljendatuna protsentides kõige intensiivsema komponendi tugevusest; harilikult esitatakse ordinaadid logaritmilises mõõtkavas. Joonisel 251 on esitatud mõne muusikariista poolt tekitatud heli akustiline spekter (põhitooni sagedus on igal spektril näidatud instrumendi nimetuse kõrval). Püstjoonte asetus näitab analüüsitava hääle harmooniliste komponentide sagedust, aga nende joonte kõrgus määrab komponentide suhtelist tugevust. Toodud spektritest nähtub, kui komplitseeritud on iga muusikariista poolt tekitatud heli.

Sellise keeruka heli põhitooni sagedust meie tajume kui hääle

kõrgust; ülemtoonide arv, tugevus ja hääle tugevnemise iseloom määravad aga hääle *tämbri*.

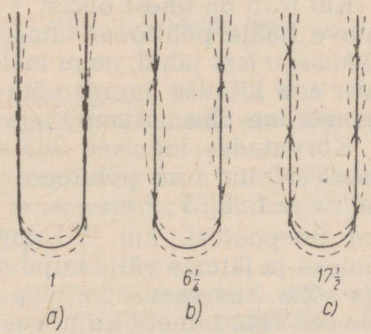
Kõige „puhtamat" häält (s. o. väheste ja nõrkade ülemtoonidega) võib saada helihargi (kammertoni) abil, kui tõmmata viiuli-



Joon. 251. Akustilised spektrid.

poognaga ettevaatlikult mööda helihargi harude vabu otsi. Et see hääl oleks selgesti kuuldav, asetatakse helihark teisest otsast avatud kastikesele (selle kasti pikkus peab olema võrdne ühe neljandikuga helihargi põhitooni lainepikkusest õhus).

Kammertoni harud võnguvad nii, et tekib *seisev laine*, see laine on kujutatud punktiiriga joonisel 252, *a*. Sellele põhitoonile vastavale võnkumisele lisanduvad võnkumised, mis tekitavad ülemtoone, kusjuures tunduvalt tugevamad on need harmoonilised võnkumised, mille sagedus ületab põhitooni sagedust $6^1/_4$ ja $17^1/_2$ korda.

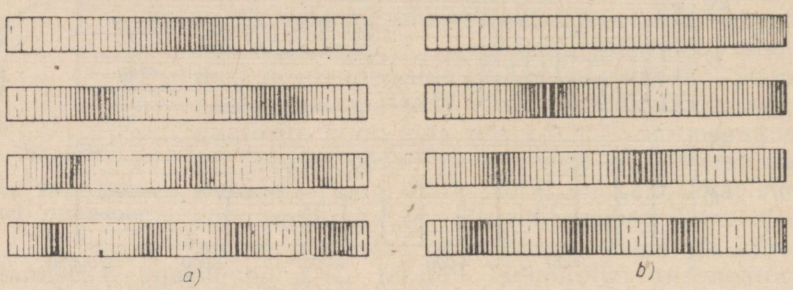


Joon. 252. Kammertoni põhi- ja lisatoonid.

Kui helihargi haru mööda tõmmata poognaga altpoolt keskpaika, siis on domineerivaks võnkumiseks see, mida näeme joonisel 252, *b*. Sel juhul annab kammerton väga puhta esimese ülemtooni, mille sagedus on $6^1/_4$ korda suurem põhitooni sagedusest.

Muusikalise toru (näiteks flöödi, klarneti, fagoti jt.) poolt

tekitatud helide põhitooni sagedus oleneb õhusamba pikkusest, mille resonantsvõnkumised torus tekitatud häält tugevdavad. Selles õhusambas tekivad seisvad häälelained. Kui toru on avatud mõlemast otsast, siis toru otstel asuvad seisva laine paisud; kui aga toru on avatud ainult ühest otsast, siis lahtise otsa juures on pais, kinnise juures aga sõlm. Igas seisvas laines on paisudevaheline kaugus alati võrdne poole lainepikkusega, sellepärast mõlemalt poolt lahtiste otstega toru abil tugevdatava hääle põhitooni lainepikkus on võrdne toru *kahekordse* pikkusega.



Joon. 253. Õhu võnkumised kahe lahtise otsaga (*a*) ja ühe lahtise otsaga (*b*) torus.

Samaaegselt selle põhivõnkumisega võivad mõlemast otsast avatud torus tekkida võnkumised *kõikide kordsete sagedustega* (joon. 253).

Kui toru on ühest otsast suletud, siis selle toru abil tugevdatava hääle põhitooni lainepikkus on võrdne *toru neljakordse pikkusega* (sel juhul, nagu mäletame, asub toru lahtise otsa juures pais, aga kinnise juures sõlm; kaugus paisu ja sõlme vahel on aga võrdne ühe neljandikuga laine pikkusest).

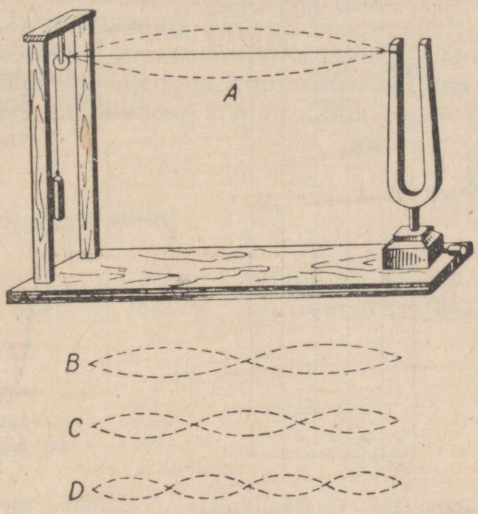
Kõrvutades joonised 253 *a* ja *b*, pole raske mõista, et ühest otsast suletud toru põhitooni ja ülemtooni võngete arvud suhtuvad nagu 1 : 3 : 5 : 7 jne.; s. o. *paarisarvulised ülemtoonid puuduvad* (tõepoolest, kui lõikame joon. 253, *a* ülevalt alla keskelt pooleks ja jätame välja kujundid, kus toru keskele jääb pais, mitte aga sõlm, siis saame kõikide ühest otsast kinnises torus võimalike seisvate lainete kujutused, s. o. saame joonise 253, *b*).

Pillikeele võnkumisel tekkiva hääle sageduslik koostis oleneb keele pikkusest, massist ja pingsusest, aga ka keele võnkumiste tekitamise viisist. Keelelt saadava hääle põhi- ja ülemtoonid vastavad keele ristvõnkumiste seisvatele lainetele.

Keelte seisvaid laineid uuris Melde (1860), kelle katsete skeem on kujutatud joonisel 254. Melde kasutas keele võnkuma-

panemiseks heliharki, mille ühe haru külge oli kinnitatud keele üks ots, kuna keele teine ots oli üle ploki heidetud ja raskusega koormatud. Nimetatud võngete tekitamise viis on huvitav selle poolest, et antud juhul kammertoni poolt keelele piki keelt antavad impulsid tekitavad keele ristvõnkumisi. See on nõndanimetatud võnkumiste *parameetrilise tekitamise* juhtum (sõnast parameeter — suurus; võnkuva helihargi mõju keelele seisneb perioodilises keele pingsuse muutmises).

Melde katse puhul keele võnkumiste seisvad lained tekivad ja ilmnevad teravalt väljendatuina kammertoni võngete arvu ja keele ristvõnkumiste omasageduse kindla suhte puhul. Seda resonantsi nimetatakse *parameetriliseks resonantsiks*; ta tekib, kui välismõju sagedus (helihargi sagedus) täisarvkordselt ületab süsteemi (keele) võngete omasagedust. Keele ristvõngete omasagedus on võrdeline keele pingsuse ruutjuurega. Sooritades Melde katset, pole raske leida keele pingsuse tekitamiseks niisugust vihti, et keele võnkumiste omasagedus oleks kaks korda väiksem helihargi võngete arvust. Sel juhul tekib seisev laine, mis on kujutatud joonisel 254, *A*. Neli korda kergema vihi puhul tekib sõlm keset keelt (joon. 254, *B*); kui vähendada vihi kaalu 9, 16, 25 jne. korda, siis sõlmede arv suureneb iga kord ühe võrra.



Joon. 254. Melde katse.

Keelte võnkumise seadused avastas Mersenne (1636). Neid seadusi üldistas Taylor (1713) teoreetiliselt tuletatud valemis:

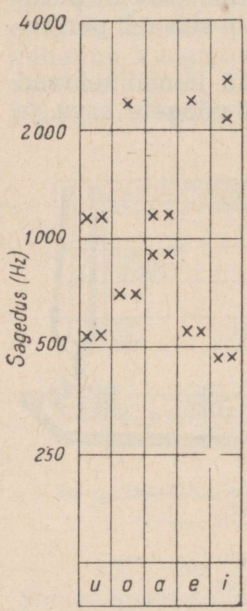
$$\nu_i = \frac{1 + n_i}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}}; \qquad (8)$$

siin ν_i (kui $n_i = 0$) tähendab keele põhitooni sagedust; kui $n_i = 1, 2, 3, 4$ jne., siis tähendab ν_i vastava ülemtooni sagedust; L on keele pikkus; T — keele pingsus; m — keele pikkusühiku mass.

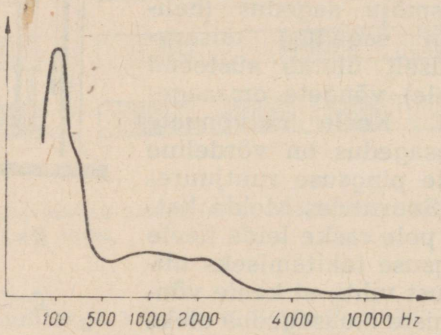
Ülemtoonide suhteline tugevus oleneb sellest, kuidas keeles võnkeid tekitatakse. Kui näiteks tõmmata poognaga ettevaatlikult keele keskkohalt, kus asub esimese ülemtooni seisva laine sõlm, siis tekib hääl, mis peaaegu ei sisaldagi esimest ülemtooni.

Kõnehäälikud tekitatakse häälepaelte poolt, millede võnkumistel on väga keerukas iseloom. Kõriõõne ja peamiselt suuõõne resonantsi tõttu muutub häälepaelte tekitatud hääle iseloom tunduvalt: üksikud komponendid, mille sagedused on lähedased resonantsõõnte omasagedustele, tugevnevad, ja just neile koondubki tekitatava hääle maksimaalne energia. Kuna õõne omasagedus oleneb tema suurusest ja kujust, siis on arusaadav, et maksimaalselt tugevdatud komponentide olukord oleneb suuõõnele selle või teise kõnehääliku väljendamisel antavast kujust.

Igapäevastest kogemustest teame, et igale kõnehäälikule vastab teatav suuõõne kuju, mida määrab keele ja



Joon. 255. Täishäälikutele iseloomulikud sageduspiirkonnad (täishäälikute formandid).



Joon. 256. Bunseni gaasipõleti müra spekter.

huulte asetus; järelikult igale kõnehäälikule vastab üks või mitu iseloomulikku sageduste piirkonda, mis asuvad resonantsõõnte omasageduste lähedal. Nimelt see hääleenergia kontsentreerumine kindlatesse (täishäälikutele üsna kitsastesse) sageduspiirkondadesse annabki meile võimaluse kõnehäälikuid üksteisest eraldada. Neid, igale kõnehäälikule iseloomulikke piirkondi nimetatakse *formantideks*. Erinevate täishäälikute formantide asendid on esitatud joonisel 255: kahe ristiga on märgitud põhilised (peamised) formandid, ühe ristiga teisejärgulised, mis iseloomustavad peamiselt tämbri individuaalseid erinevusi.

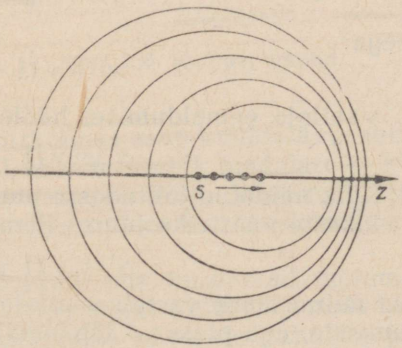
Kaashäälikuid, mis oma olemuselt lähenevad müradele, iseloomustavad samuti formandid. Siin on aga formantide piirkonnad **laiemad** kui täishäälikutel, nad haaravad tunduvalt laiema

sageduste piirkonna. Tuleb tähendada, et üksikute kaashäälikute tekitamise protsessis on kaastegevad mitte ainult häälepaelad, vaid ka resonantsõõned, näiteks kaashääliku „s" hääldamisel surutakse õhuvool läbi keele ja hammaste vahe; sellest tuleb tema susisev iseloom. Mõnede kaashäälikute formandid asuvad üsna kõrgete sageduste piirkonnas (näiteks „s" spekter ulatub 13 000 hertsini).

Erinevalt muusikalistest häältest (helidest), mis koosnevad reast kindla sagedusega harmoonilistest võnkumistest, on *mürad* sellised hääled, mis on tekitatud aja vältel muutuvate sagedustega ja amplituudidega protsesside poolt. Nagu selgitasime eespool, on muusikalistele häältele iseloomulik akustiline joonspekter. Müras, kui püüda teda lahutada harmoonilisteks võnkumisteks, leiduvad võnkumised kõigi sagedustega kuni väga kõrgete sagedusteni: 13 000—14 000 hertsini. Joonisel 256 on näitena esitatud Bunseni põleti müra spekter.

§ 79. Doppler'i efekt.

Kui oleme raudteejaamas, millest parajasti rong mööda sõidab, siis on kerge tähele panna vedurivile järsku tooni madaldumist, mis tunnistab hääle sageduse vähenemist. Tooni muutus tekib sel momendil, kui vedur, jõudnud vaatlejani, hakkab temast kaugenema. Kirjeldatud nähtust nimetatakse Doppler'i efektiks, tema põhjus seisneb selles, et mingi laineallika lähenemisel saabub meie juurde rohkem laineid sekundis kui selle kaugenemisel. Sellest tingituna võtab meie kõrv hääleallika lähenemisel vastu ühes sekundis rohkem võnkumisi kui selle eemaldumisel.



Joon. 257. Liikuva hääleallika lained.

Liikugu hääleallikas S (joon. 257) vaatleja poole kiirusega v *m/sek.* Hääleallikas tekitab võnkumisi sagedusega ν. Järelikult $\frac{1}{\nu}$ sekundi jooksul saadab hääleallikas välja ühe laine, mis levib mingi kiirusega c. Aja vältel $\frac{1}{\nu}$ allikas S läheneb vaatlejale $v \cdot \frac{1}{\nu}$ meetrit. Seepärast järgmise, allikast $\frac{1}{\nu}$ sek. pärast väljuva laine lõpp asub ruumis eelmise laine lõpust mitte $\lambda = \frac{c}{\nu}$ (laine-

pikkuse) kaugusel, nagu see oleks hääleallika paigalseisu puhul, vaid lähemal:

$$\lambda' = \frac{c}{\nu} - \frac{v}{\nu} = \frac{c - v}{\nu}.$$

Selle tulemusena kuuleb vaatleja väiksema lainepikkusega (λ') häält. Vastav sagedus

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{9}$$

Analoogiliselt on kerge tuletada, et hääleallikast eemaldumisel kiirusega v vaatleja poolt vastuvõetav sagedus

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}. \tag{9'}$$

Kui uurida *vaatleja liikumist* hääleallika poole, siis sagenevate „kohtumiste" tõttu laineharjadega suureneb tajutav võnkumiste sagedus.

Liikugu vaatleja kiirusega v *m/sek* hääleallika poole. Siis hääle kiirus vaatleja suhtes on $c + v$, ja vaatlejast möödub ajaühiku jooksul ν' lainet, kusjuures, nagu harilikult,

$$\nu' = \frac{c + v}{\lambda};$$

kuid

$$\nu = \frac{c}{\lambda};$$

seega

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right). \tag{10}$$

Vaatleja eemaldumisel hääleallikast saame vastavalt:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{10'}$$

Kõik näidatud juhtudesse puutuvad valemid muutuvad kiiruse v väikeste väärtuste juures identseteks. Nimelt

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{11}$$

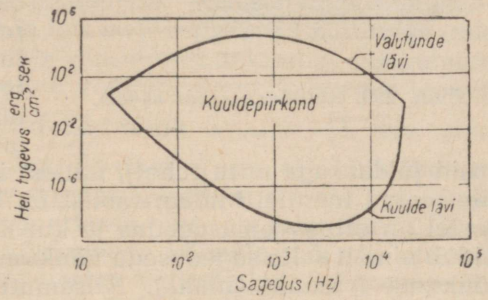
kus miinusmärk vastab vaatleja ja hääleallika üksteisest eemaldumisele, aga pluss — lähenemisele kiirusega v.

§ 80. Hääl kui psühho-füsioloogiline nähtus. Hääle tajumise mehhanism.

Vaatleme hääle subjektiivse tajumise küsimust. Kõigepealt tuleb märkida, et mitte iga kõrvani ulatuv võnkeprotsess ei ole võimeline hääleaistingut esile kutsuma, selleks on tarvis, et protsessi sagedus ja hääle tugevus ei väljuks teatavatest (tõsi küll, üsna laiadest) piiridest. Sageduse alumiseks piiriks osutub sagedus umbes 20 võnget sekundis (20 *Hz*), ülemine piir asub 16 000 ja 20 000 *Hz* vahel. Need piirid ei ole kõigi inimeste jaoks

ühesugused; nad võivad eri juhtudel kõikuda individuaalselt üsna tugevasti. Mainitud piiride vahelist sagedust nimetatakse *häälesageduseks*. Samasugused piirid on ka kõrvaga tajutavate häälte tugevusel. Selleks et häälesagedusega laine tekitaks hääleaistingu, on vajalik, et hääletugevus ületaks mingi minimaalse suuruse, mida nimetatakse *kuuldeläveks*. Hääl, mille tugevus asub allpool kuuldeläve, jääb kõrva poolt tajumata. Kuuldelävest väiksema tugevusega hääl on tajumiseks liiga nõrk. Väga suure tugevusega (sadadesse tuhandetesse *erg/cm² sek.* ulatuvad) hääled pole samuti kõrva abil häälena tajutavad. Mõjudes kõrvale, tekitavad niisugused hääled ainult surve- ja valutunnet. Suurimat hääletugevust, mida kõrv ilma valutundeta vastu võtab, nimetatakse *valutunde läveks*.

Mõlemate (kuulde- ja valutunde) lävede kõrgus on mitmesugustes sageduste piirkondades erinev. Kõrv on kõige tundlikum keskmiste sageduste (1000—3000 *Hz*) piirkonnas: kuuldelävi on siin 10^{-8} *erg/cm² sek.* Sellise hääletugevuse juures on õhuosakeste võnkumiste amplituud ainult 10^{-10} *cm*, s. o. sadu kordi väiksem molekulide läbimõõdust.



Joon. 258. Kuuldepiirkond.

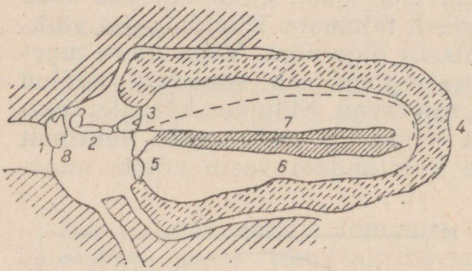
Madalate ja kõrgete sageduste piirkonnas asub kuuldelävi tublisti kõrgemal, s. t. kõrv on tunduvalt vähem tundlik madalate ja kõrgete häälte vastu. Valutunde lävi asetseb kõige kõrgemal keskmiste sageduste piirkonnas, alanedes mõnevõrra madalamate ja ka kõrgemate sageduste poole.

Joonisel 258 on esitatud kõverad, mis kujutavad mõlemate lävede olenevust sagedusest. Ülemine kõver käib valutunde läve, alumine — kuuldeläve kohta. Mõlemate kõverate vaheline piirkond mahutab kõikide kõrvaga tajutavate häälte sagedusi ja tugevusi, seepärast nimetatakse seda piirkonda *kuuldepiirkonnaks*.

Kõrv on hääle vastuvõtuaparaat, mis töötab väga laial sageduste ja amplituudide diapasoonil. Suur kuuldepiirkonna laius (ei tule unustada, et joon. 258 koordinaaditeljed on ruumi kokkuhoiu mõttes üles ehitatud logaritmilise mõõtkava järgi) oleneb küllaltki keerukast kuuldeaparaadi ehitusest. Piirdume siin väga lihtsustatud skeemi kirjeldamisega (joon. 259).

Häälelaine jõudes kõrvalestani satub väliskuulmekäiku 1, mille lõpus asub trummikile ehk *kuulmenahk* 8. Kuulmenahk võngub perioodiliselt muutuva häälelaine surve all, sooritades sund-

võnkumisi tajutava hääle sagedusega. Kuulmenaha võnkumised antakse edasi kangi põhimõttel töötava kuulmeluukeste liigessüsteemi 2 — vasara, alasi ja jaluse — kaudu niinimetatud ovaalsele aknale 3, mis katab kõrva labürindi sisemist õõnt. Kõrva labürint selles osas, kus asuvad mehhaanilise ärrituse vastu tundlikud kuuldenärvi otsad, on täidetud peaaegu mittekokkusurutava vedelikuga — *endolümfiga;* endolümf annab ovaalse akna võnkumised edasi ümmargusele aknale 5, kusjuures ta oma liikumisega sunnib võnkuma teatud osa niinimetatud *põhimembraanist* 6. Põhimembraan osutub peamiseks ja kõige huvitavamaks osaks kuuldeorganis; ta kujutab endast rida mitmesuguses pikkuses kiudusid (üldarvuga mitu tuhat), millest igaüks on häälestatud mingile teatud toonile. Midagi taolist on klaveri keeltesüsteem: igal keelel on erinev omasagedus ja kui keelteni tulevas häälelaines leidub nimelt selle sagedusega võnkumisi, siis vastav keel hakkab võnkuma (resonantsinähe). Niisamuti ka endolümfi liikumised põhjustavad nende põhimembraani kiudude võnkumisi, mis on häälestatud vastuvõetavas hääles leiduvatele sagedustele. Sellejuures närvide otsad (niinimetatud karvrakud) puudutavad põhimembraaniga rööpset *tektoriaalmembraani* 7, millega tekitatakse spetsiifiline närvide ärritus.



Joon. 259. Kuuldeaparaadi skeem.

Siin esitatud pilt kuuldetaju mehhanismist on välja töötatud möödunud sajandil Helmholtzi poolt (kuulmise resonantsteooria). Helmholtzi teooriale on tekkinud ka terve rida vastuväiteid. Vaatamata resonantsteoorias esinevatele küllaltki suurtele raskustele, loetakse siiski kuni viimase ajani, et ta on oma nüüdisaegsel kujul kõigist teistest teooriatest paremini kooskõlas kuuldeorgani anatoomia ja füsioloogia poolt saadud andmetega.

Eespool antud kuuldetaju mehhanismi kirjeldusest selgub, et kõrv on võimeline eraldama komplitseeritud hääle (näiteks akordi) erikomponente. Nägemisorganil silmal mitmesuguste sagedustega võnkumiste (näiteks liitvärvuse) üheaegsel vastuvõtmisel ei ole aga spektraalaparaadi omadusi; ta ei lahuta liitvõnkumist lihtkomponentideks. Ümberpöördult, kuuldeorgan analüüsib võnkeprotsessi, lahutades seda lihtsateks harmoonilisteks võnkumisteks; niiviisi, füüsikalisest vaatepunktist kõrv esineb nagu valik resonaatoreid, milledel on selgelt väljendatud valitavuse omadused.

Tuleb märkida, et nende resonaatorite olemuse kohta võib teha oletusi, mis sügavalt erinevad Helmholtzi teooriast. 1948. aastal esitas J. I. Frenkel uue relaksatsioonilise kuuldeteooria. Frenkel kirjutas:

„Füüsikutel on juba ammu teada, et kõrvuti resonantsi nähtega, mis on tingitud süsteemi mõjutavate võnkumiste (välisjõu) ühtelangemisest vastuvõtva süsteemi oma (ehk vabade) võnkumistega, eksisteerib teatava astmeni analoogiline nähe sel juhul, kui vastaval süsteemil üldse ei ole elastsust, s. o. kui tema võnkumiste omasagedus on null, aga kui tema liikumisele mõjub kiirusega võrdeline hõõrdejõud. Seda hõõrdejõudu võib iseloomustada mingi *relaksatsiooniajaga* τ, s. o. ajaga, mis läheb süsteemile vaja mõjuvate jõudude kõrvaldamise järele süsteemi tagasiviimiseks normaalsesse (liikumatusse) seisundisse." Seesugustes süsteemides, milledel ei ole elastsust ja mis iseloomustavad hõõrdega (mis on võrdeline kiirusega), osutub välismõjust tekitatud võnkumine maksimaalseks siis, kui sunnitud võnkumiste nurksagedus langeb kokku relaksatsiooniaja pöördväärtusega ($\omega_{sund} = \frac{1}{\tau}$), mis nagu vastabki resonantsinähtele. J. I. Frenkel arvab, et „kõik bioloogilised süsteemid (sealhulgas mitmesugused, eriti närvi- ja lihaskoed) kuuluvad selliste kategooriasse, mis on kas täiesti ilma elastse iseloomuga vabade võnkumiste võimeta või siis on neil seda minimaalsel määral (mis vastab välisjõudude võnkesagedusega võrreldes väga väikese omavõnkesageduse suurusele). Nii näiteks harilikul kummil toatemperatuuril relaksatsiooniaeg $\tau = 10^{-7}$ sek., kui väikese kummitüki vabade võnkumiste periood ei ületa $^1/_{50}$ sek. Kasutades seda printsiipi inimese ja teiste kõrgemate loomade kuuldeaparaadi puhul, võime avaldada hüpoteesi, et kammitaoliselt harunevate kuuldenärvide otsi ei iseloomusta mitte erinevad omavõnkesagedused (kõiki neid sagedusi võib tegelikult lugeda võrdseks nulliga), vaid erinevad relaksatsiooniajad. Viimased on tõenäoliselt lihtsas seoses närvikiudude pikkusega, nimelt: mida pikem on kiud, seda pikem on relaksatsiooniaeg, mis iseloomustab tema käitumist viskoosses vedelikus, millega on täidetud sisekõrv."

Hääle tugevuse taju ehk valjus vastab hääle intensiivsusele (tugevusele). On arusaadav, et hääle intensiivsus ja valjus ei ole samatähenduslikud mõisted. Hääle intensiivsus iseloomustab füüsikalist protsessi objektiivselt, vaatamata sellele, kas seda tajutakse kuulaja poolt või mitte; hääle valjus aga osutub puhtsubjektiivseks omaduseks; seepärast pole kvantitatiivne mõõtkava rangelt võttes tema puhul kasutatav. Siiski, kui asetame sama hääle valjusi intensiivsusega samas suunas kasvava reana ja lähtume kõrvaga tajutavatest hääle valjuse astmetest (järkjärgulise hääle tugevdamisega), siis leiame, et hääle valjus suureneb tunduvalt

aeglasemalt kui intensiivsus. Tuntud Weber-Fechner'i psühho-füüsikalise seaduse järgi kõrv, nagu kõik tundeorganid, hindab välisärrituse intensiivsust logaritmilise mõõtkava järgi: *aistingu tugevuse juurdekasv on võrdeline kahe võrreldava ärrituse suhte logaritmiga.*

Hääle valjuste skaala valimisel tuleb seda logaritmilist seadust arvestada. Lepime kokku lugeda kuuldelävel valjust võrdseks nulliga; Weber-Fechner'i seaduse järgi mingi hääle valjus on võrdeline selle hääle tugevuse (intensiivsuse) I ja sama hääle kuuldelävel oleva tugevuse I_0 logaritmide suhtega:

$$L = k \log \frac{I}{I_0}. \qquad (12)$$

Selles võrdsuses L väljendab mingit abstraktset hääle valjust iseloomustavat suurust, kui tugevus on võrdne I-ga; k on võrdetegur. Suurust L nimetatakse harilikult *hääletasemeks.* Võrdeteguri k valik on üldiselt täitsa meelevaldne. Kui teda võtta võrdseks ühega, siis hääletase avaldub bellides:

$$L = \log \frac{I}{I_0} \text{ belli.}$$

Praktikas osutus kohasemaks kasutada 10 korda väiksemaid ühikuid *detsibelle.* Koefitsient k valemis (12) seejuures ilmselt peab olema:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ detsibelli.} \qquad (12')$$

Detsibellist konkreetsema kujutluse saamiseks märgime, et minimaalne valjuse kasv, mida inimkõrv tajub, võrdub ligikaudu 1 detsibelliga. Alltoodud tabel annab orienteerumisvõimaluse hääletaseme suuruse kohta mitmesuguste häälte puhul.

Mitmesuguste häälte tasemed

Hääl	Tase detsibellides	Hääle tugevus[1] $erg/cm^2\ sek.$	Efektiivrõhk $düün/cm^2$
Kella tiksumine . . .	20	1.10^{-4}	$6{,}4.10^{-2}$
Tasane rääkimine . .	40	1.10^{-2}	$6{,}4.10^{-1}$
Keskmise kõne valjus	60	1	6,4
Karjumine	80	1.10^{2}	6,4.10
Suure orkestri fortissimo	100	1.10^{4}	$6{,}4.10^{2}$
Valutunne	120	1.10^{6}	$6{,}4.10^{3}$

[1] Arvud lahtrites „Hääle tugevus" ja „Efektiivrõhk" on arvutatud keskmise sagedusega häälte kohta (umbes 1000 *Hz*) ja on orienteeruva iseloomuga.

S. N. Rževkini jt. viimastel aastatel teostatud uurimused näitasid, et Weber-Fechner'i seadus kujutab puudulikult valjuse kasvu olenevalt hääle intensiivsusest. Kuuldeläve lähedal kaotab see seadus üldse maksvuse, seepärast väga nõrkade häälte valjuse tase ei anna arvulist kujutlust nende subjektiivsest valjusest.

Kui (suure sagedusega) häält tajume parema ja vasaku kõrvaga erineva tugevusega, siis tekib aju kuulmiskeskmes kujutlus häälelainete levimissuunast (see on niinimetatud *binauraalefekt*). Madalsagedusliku hääle puhul on binauraalefekt tingitud parema ja vasaku kõrvaga kuuldava hääle faaside vahe tajumisest. Kui ühe kõrvani jõuab hääl 3.10^{-5} sek. võrra varem või hiljem kui teiseni, on see juba märgatav ja tundub, nagu oleks hääleallikas umbes 3° võrra otsesuunast kõrvale kaldunud.

§ 81. Hääle kõrgus ja tämbr.

Nagu juba mainitud, vastab sinusoidaalsete häälevõngete sagedusele hääle kõrguse tajumine. Komplitseeritud mittesinusoidaalsete võnkumiste puhul hindab kõrv hääle kõrgust põhitooni kõrguse järgi (põhitooni periood ühtub analüüsitava hääle perioodiga). Ülemtoonid mõjutavad vähe hääle kõrguse tajumist isegi nende suhteliselt suure tugevuse juures.

Et saada kujutlust muusikas kõige rohkem kasutatavate häälte kõrgusest, tähendame, et klaveri kõige madalama keele heli vastab sagedusele 27 *Hz*, aga kõige kõrgema — 4184 *Hz*.

Rida hääli, mis võngete arvu poolest erinevad 2 korda, s. o. moodustavad oktaavi, tajutakse kui kõrguse poolest võrdsete vahedega teineteisest eraldatud helide rida. Niiviisi häälte sageduse geomeetriline progressioon vastab subjektiivse helikõrguse hindamisel aritmeetilisele progressioonile.

Muusikalised hääled (ehk helid) moodustavad kaheksa oktaavi: subkontra oktaav (16—32 *Hz*), kontra oktaav (32—65,5 *Hz*), suur oktaav (65,5—131 *Hz*), väike oktaav (131—262 *Hz*), esimene oktaav (262—523 *Hz*; füüsikas nimetatakse seda oktaavi kolmandaks), teine (523—1046 *Hz*), kolmas (1046—2092 *Hz*) ja neljas oktaav (2092—4184 *Hz*).

Lauljate hääli iseloomustavad järgmised põhitoonide sagedused ja neile vastavad lainepikkused.

	Sagedus *Hz*	Lainepikkus õhus sentimeetrites 15° *C* juures
Bass	90—340	380—100
Bariton	110—440	310—77
Tenor	130—520	260—65

	Sagedus *Hz*	Lainepikkus õhus sentimeetrites 15° *C* juures
Kontraalt	200—780	170—44
Sopran	220—880	155—39
Mezzosopran	260—1050	130—32
Koloratuursopran	—1390	—25

Kõrv ei suuda hääle kõrgust hinnata, kui hääle kestus on vähem kui $^1/_{20}$ *sek.* Kõige madalamate tajutavate helide puhul toimub selle (heli kõrguse hindamiseks vajaliku) aja jooksul 1—2 võnget, kõige kõrgemate kuuldavate häälte puhul aga kuni 1000 võnget.

Kahe sageduselt teineteise lähedase hääle korraga kõlades tajutakse nende kõrgust eraldi, kui nende sagedused erinevad vähemalt 2—3%, s. o. kui

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 0{,}02.$$

Ülaltoodust vähema erinevuse puhul kuuldub üksainus keskmise kõrgusega liitheli.

Teineteisele sageduselt lähedaste helide üheaegselt kõlades tekivad *tuiklemised* (kiiresti vahelduvad hääle nõrgenemised ja kõvenemised), mis on eriti ebameeldivad, kui tuiklemiste arv tõuseb kolmekümne kolmele ühes sekundis.

Kahe suure hääletugevusega tooni korraga kõlades (nagu ka üldse mingi keha võnkliikumisel kahe suure amplituudiga perioodilise jõu mõjul, kui on häiritud võrdelisus hälbe ja mõjutavate jõudude vahel) muutuvad võnkumiste liitmise seadused komplitseerituiks. Helmholtz näitas, et sel juhul annab kahe sundiva perioodilise jõu (sagedustega ν_1 ja ν_2) koosmõju niisuguse kujuga resultantvõnkumise, et seda võib pidada koosnevaks neljast harmoonilisest võnkumisest sagedustega ν_1, ν_2, $\nu_1 - \nu_2$ ja $\nu_1 + \nu_2$. Viimaseid kahte nimetatakse *kombinatsioonvõnkumisteks* (vaheliseks ja summaarseks). Kombinatsioonvõnkumised võivad tekkida meie kuuldeorganis (võrdelisusest kõrvalekaldumise tõttu jaluse hälbe ja kudede elastsete jõudude vahel). Harilikult on vahelised kombinatsioontoonid selgesti kuuldavad, mis puutub aga summaarsetesse, siis need on vaevaltmärgatavad.

Muusikalisteks eesmärkideks on tähtsam mitte absoluutne, vaid *suhteline helikõrgus.* Helide muusikalise järjestuse — m e l o o d i a loomise juures, aga samaaegselt ka kõlavate helide ühendis — helide h a r m o o n i a s — kasutatakse peamiselt selliseid sageduste intervalle, mille juures helisageduste suhted $\frac{\nu_1}{\nu_2}, \frac{\nu_2}{\nu_3}$ jne. väljenduvad murdudega $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ jne. Igale niisugusele helisageduste suhtega määratud *muusikalisele intervallile* on antud eri nimetus:

Kooskõlade nimetus	Sageduste suhe	Kooskõlade nimetus	Sageduste suhe
Unisoon (priim)	1 : 1	Suur terts	4 : 5
Oktaav	1 : 2	Väike terts	5 : 6
Kvint	2 : 3	Duodetsiim	1 : 3
Kvart	3 : 4	Suur sekst	3 : 5

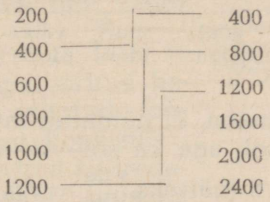
Loetletud kõige meeldivamalt kokkukõlavaid intervalle nimetatakse üldiselt *konsonantsideks*[1]. Tarvitusel on ka vähemmeeldiva kõlaga intervallid — *dissonantsid*[2].

Kooskõlade nimetus	Sageduste suhe	Kooskõlade nimetus	Sageduste suhe
Suur sekund (suur toon)	8 : 9	Suur septiim	8 : 15
Väike sekund (väike toon)	9 : 10	Väike septiim	5 : 9
		Suur pooltoon	15 : 16
		Väike pooltoon	24 : 25

Iga intervalli, mis on vähem väikesest pooltoonist, nimetatakse *komaks*, kuid harilikult mõistetakse selle nimetuse all niisuguste helide intervalli, mille sageduste suhe on 80 : 81.

Tähelepanuväärivon see, et muusikas ei kasutata intervalle, mida määrav murd sisaldab arvu 7. See arv nagu lahutaks konsonantsid dissonantsidest (konsonantse määravatel murdudel on lugejas ja nimetajas arve, mis on seitsmest väiksemad).

Konsonantsi täiuslikkus on nähtavasti seoses mõlema heli ühiste ülemtoonide arvuga. Võtame näiteks kaks oktaavi moodustavat tooni sagedustega 200 ja 400 hertsi ning kirjutame välja nende viie madalama ülemtooni sagedused:

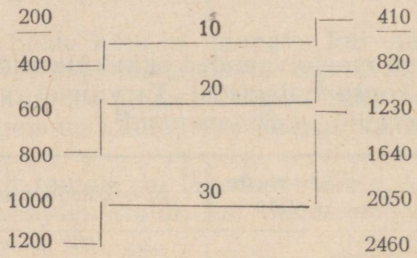


Näeme, et kahel oktaavi moodustaval helil on viiest alumisest

[1] Ladina k. sõnast *consonare* — kokku kõlama, kooskõlas olema.
[2] Ladina k. sõnast *dissonare* — segaselt helisema, mitte kooskõlas olema.

ülemtoonist kaks ühised ja madalama heli esimene ülemtoon on sama, mis kõrgema põhitoon.

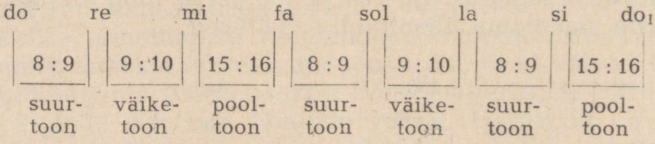
Dissonants kõlab seda ebameeldivamalt, mida rohkem tekib tuiklemisi (sagedusega 10—50 *Hz*) helide ülemtoonide ja kombinatsioonide vahel. Vaatleme näiteks veidi „häälest ära" oktaavi: kaht heli — sagedusega 200 ja 410 *Hz:*



Näeme, et sel juhul tekivad tuiklemised sagedustega 10, 20 ja 30 *Hz*. Peale selle annavad nende helide põhitoonid vahepealse kombinatsiooni sagedusega 210, mille liitumisel madalama heli põhitooniga tekib samuti 10 *Hz* sagedusega tuiklemine.

Prof. S. N. Rževkin avastas, et kahe heli mõlema kõrvaga eraldi kuulamisel dissonantsi ja konsonantsi tajumine täielikult kaob; järelikult tekib dissonantsi ja konsonantsi taju perifeersetes kuuldeorganites, mitte aga kesknärvisüsteemis.

Kolme või suurema arvu helide kooskõla nimetatakse *akordiks.* Kõige meeldivama kõlaga akordi — *mažoorkolmkõla* — saame, kui põhitoonide sageduste suhe on: 4 : 5 : 6. Selle akordi kordumisele on ehitatud *loomulik mažoorheliredel:*



Tõesti, pole raske näha, et näidatud intervallide juures helide sagedused: do—mi—sol, aga ka sol—si—re ja fa—la—do suhtuvad nagu arvud 4 : 5 : 6 (näiteks $\frac{\nu\ do}{\nu\ mi} = {}^8/_9 \cdot {}^9/_{10} = {}^8/_{10} = {}^4/_5$).

Mažoorkolmkõla on mingi sagedusega ν heli kooskõla tema suure tertsiga ($^5/_4\ \nu$) ja kvindiga ($^3/_2\ \nu$), mis vastab sageduste suhtele $1 : {}^5/_4 : {}^3/_2 = 4 : 5 : 6$. Väga meeldivakõlaline on ka *minoorkolmkõla,* mis kujutab endast mingi sagedusega ν heli kooskõla tema väikse tertsiga ($^6/_5\ \nu$) ja kvindiga ($^3/_2\ \nu$); see vastab sage-

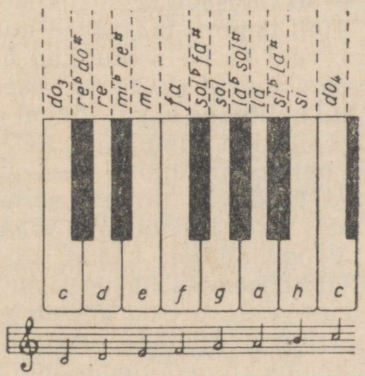
duste suhtele $1 : {}^{6}/_{5} : {}^{3}/_{2} = 10 : 12 : 15$. Minoorkolmkõla kordumisele on rajatud *loomulik minoorheliredel*:

do	re	mi♭	fa	sol	la♭	si♭	do₁
	8 : 9	15 : 16	9 : 10	8 : 9	15 : 16	8 : 9	9 : 10
	suur-toon	pool-toon	väike-toon	suur-toon	pool-toon	suur-toon	väike-toon

(märki ♭ nimetatakse *bemolliks* ja see tähendab heli madaldamist poole tooni, s. o. ${}^{16}/_{15}$ võrra. Heli kõrgendamist poole tooni võrra tähistatakse märgiga ♯ — *diees*). Näidatud intervallidega heliredelist tulenevad minoorkolmkõlad: do—mi♭—sol, aga ka sol—si♭—re₁ ja fa—la♭—do₁ (näiteks $\frac{\text{v do}_1}{\text{v mi}^{\flat}} = {}^{8}/_{9} \cdot {}^{15}/_{16} = {}^{10}/_{12}$).

Kõrvuti näidatud minoorheliredeliga, mida muusikas kasutatakse kui „allatulevat" heliredelit, rakendatakse ka „ülesminevat" minoorheliredelit, mis erineb mažoorheliredelist ainult heli mi madaldamisega mi-bemolliks. Harmoonias rakendatakse minoorheliredelit, mis erineb mažoorheliredelist helide madaldamisega: mi — mi-bemolliks ja la la-bemolliks (si aga võetakse madaldamata — ilma bemollita).

Nagu nähtub ülaltoodud mažoor- ja minoorheliredelite skeemidest, pole neis kõrvuti asetsevate helide intervallid võrdsed. See põhjustab olulisi ebamugavusi, mille kõrvaldamiseks on lepitud kokku, ohverdades absoluutset muusikalist puhtust, rakendada niinimetatud *tempereeritud heliredelit*, milles oleks oktaavi ulatuses 12 võrdset intervalli, nii et iga kõrvuti oleva heli sagedus ületaks eelmise oma $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$ korda. Tempereeritud heliredeli skeem on esitatud joonisel 260. Tähtsamad konsonantsid jäävad tempereeritud heliredelis peaaegu rikkumata; unisoon ja oktaav, mõistagi, jäävad muutumatuks; kvart ja kvint väljendatakse tempereeritud heliredelis suhetega $1 : 2^{\frac{5}{12}} = 1{,}3348$ ja $1 : 2^{\frac{7}{12}} = 1{,}4983$, kuna loomulikkudes heliredelites kvart ja kvint väljendatakse suhetega ${}^{4}/_{3} = 1{,}3333$ ja ${}^{3}/_{2} = 1{,}5000$.



Joon. 260. Heliredel klaveril (nootide nimetused).

Rahvusvahelise (1936. a.) kokkuleppe kohaselt on heli la_3 (la-viiuli teine keel) sagedus võetud 440 *Hz*. Tabelis on antud ka teiste tempereeritud heliredeli häälte sagedused.

Heli (noodi) nimetus	Sagedus tempereeritud heliredelis	Laine pikkus (*cm*-tes) õhus 15° *C* juures ($c \sim 340$ *m/sek*)
do_3	261,6	130
re_3	293,7	115,7
mi_3	329,6	103,2
fa_3	349,2	97,4
sol_3	392	86,7
la_3	440	77,3
si_3	493,9	68,8
do_4	523,2	65,0

Nagu juba eespool (§ 78) mainiti, oleneb heli tämbr ülemtoonide arvust ja suhtelisest tugevusest. Sama muusikariista ülemtoonide suhteline tugevus oleneb heli tekitamise viisist. Näiteks võib keele tämbrit suurtes piirides muuta erinevaid ülemtoone esile tõstes (selleks tuleb heli tekitamise puhul keelel soovitava ülemtooni paisu kohalt poognaga tõmmata).

Keelpillide tämbr oleneb tugevasti mitmesuguste (eriti puidust) üksikosade konstruktsioonist ja omadustest.

Heli tämbrit määravad mitte ainult ülemtoonide hulk ja tugevus, vaid ka iseloomulikud *heli tugevnemise ja muutumise protsessid*. Stumpf (1926) ja teised uurijad tegid katseliselt kindlaks, et kui helitekke algstaadiumi mitte kuulda lasta (alustada kuulmist alles siis, kui mingi tooni helisemine on muutunud juba püsivaks), siis helitämbr tundub isesugusena, kusjuures eri muusikariistade helid tunduvad niivõrd sarnastena, et isegi kogenud muusikud tämbri järgi instrumente määrates tihti eksivad.

Poogenpillidel kestab iga heli tugevnemine umbes $^1/_{10}$ *sek*. Sellel helisemise algstaadiumil pole heli muutuv mitte ainult amplituudi poolest, vaid kestab ka iseloomulik hääle helisagedusliku koostise muutumine. Heli tugevnemise esimesel momendil on ülekaalus kõrged ülemtoonid (sagedustega 3000—5000 *Hz*) ja alles nimetatud tugevnemise staadiumi lõpuks põhitooni suhteline tugevus on suurem ülemtoonide tugevusest. Meie tajume heli tugevnemise protsessi koos järgneva püsiva helisemisega ja algstaadiumis tekitatud mulje säilib kui heli mingi värving. Headel instrumentidel annab helitekke staadium meeldiva tämbri mulje; rangelt püsiv heli, mille algosa me ei kuule, jätab monotoonse mulje ja on vähem meeldiv. Klaveri helide tämbr oleneb klahvide allalöömise kiirusest (mis sõltub teatud määral löögi tugevusest).

Enamikul puhkpillidest mõjub helitekke staadium heli tämbrile vähem kui keelpillidel. See seletub osalt sellega, et paljudel puhkpillidel on helitekke algosa väga lühikene: oboel $^1/_{100}$ *sek*, klarnetil $^1/_{20}$ *sek*. Kuid flöödil on helitekke staadium võrdlemisi pikk ($^2/_{10}$—$^3/_{10}$ *sek*), ja see rikastab tunduvalt flöödi helide tämbrit.

Laulja hääle muusikaliste omaduste hindamisel pole hea tämbr kindlasti vähema tähtsusega kui hääle tugevus. Hea laulja hääle heli on ebastatsionaarne: kiiresti üksteisele järgnevate ajavahemikkude jooksul (umbes 6 korda sekundis) muutub akustiline spekter nii, et alguses on ühed ülemtoonid ülekaalus, pärast teised. Headel lauljatel avaldab see tämbrit rikastav hääle värisemine (vibraato) vähe mõju hääle valjusele, mis jääb ühtlaseks.

§ 82. Ultrahääl.

Meie nägime eespool (§ 80), et kuuldavuse piirkonda kuuluvad võnkumised sagedusega 20 hertsist kuni 20 000 hertsini; selles piirkonnas olevate sagedustega võnkumised, mõjudes kõrva kuulmekilele, tekitavad hääleaistingu. Aga ka väljaspool neid piire võivad toimuda võnkeprotsessid, mis füüsikaliselt millegagi ei erine helivõngetest ja -lainetest. Niisugused protsessid tekitavad mittekuuldavaid hääli.

Viimasel ajal on põhjalikult uuritud akustilisi võnkumisi ja laineid, mida iseloomustavad väga suured sagedused (kümnete ja sadade tuhandete hertsideni). Selliseid võnkumisi ja laineid on hakatud nimetama ultrahääleks (-helideks).

Võrdlemisi väikese sagedusega ultraheli võib saada Galtoni vile abil, mis on miniatuurne õhuvoolu läbipuhumisest häälttekitav toru. Liikuva kolvi abil võnkuvat õhusammast lühendades võib vile heli järk-järgult kõrgendada, kuni ta lõpuks muutub kuuldamatuks, vilest väljuv laine saavutab siis ultrahelile vastava sageduse. Galtoni vile ja sellesarnaste seadiste abil ei õnnestu aga saada kuigi intensiivseid ultrahelisid; peale selliste helitekitajate väikese võimsuse on siin väga oluline veel see, et kõrgete sagedustega võnked kustuvad õhus väga kiiresti.

Piesoelektriliste nähete avastamisega ja võimsate elektriliste kõrgsagedusvõnkumiste generaatorite ehitamisega osutus võimalikuks väga suure intensiivsusega ulrahelide saamine. Selleks et saada aru ultrahelide tekitamise viisist, on tarvis lühidalt selgitada piesoelektriliste nähete olemust (põhjalikumalt kõneldakse neist teises köites).

Kui asetada kvartskristallist (SiO_2) väljalõigatud plaat kahe metallplaadi vahele, millele anname vahelduvat elektripinget, võib seda pinge muutmise taktis võnkuma sundida. Nimelt, andes kvartsplaadi vastaskülgedele isenimelised elektrilaengud, tõmbub plaat kokku või paisub (piesoelektriline efekt). Metallplaatide

vahele surutud kvartsplaadi võnkumine muutub eriti intensiivseks, kui rakendatud vahelduva pinge sagedus langeb ühte kvartsplaadi omavõnkesagedusega (resonantsvõnkumine). Valides plaadi suuruse vastavalt kasutatava pinge sagedusele, võib saada tugevaid ultraheli sagedusega võnkumisi.

Praktiliselt asetatakse selleks kvartsplaat koos metallplaatidega õlisse ja sunnitakse vahelduva pinge andmisega võnkuma. Siis levivad õlis võimsad ultraheli võnkumised.

Õli ja vee akustiline takistus ϱu on ligi 3000 korda suurem kui õhu akustiline takistus; seepärast, kui sama kvartsplaati sundida õhus sama amplituudi ja sagedusega võnkuma, on kiiratav energia 3000 korda väiksem.

Piesokvartsist ultraheli-generaatorite abil saavutatakse võnkesagedusi mõnekümne tuhandest hertsist mõnekümne miljoni hertsini. Kasutades kvartsi asemel turmaliinplaati (ka turmaliinil on piesoelektrilisi omadusi) ja tekitades plaadi võnkumisi mitte plaadi omavõnkesageduse põhitooni, vaid ülemtoonide sagedusega, võib saada ultrahelisid, mille sageduse suurusjärk on 300 miljonit hertsi.

Ultraheli lainete energia, mida kiirgavad võimsad piesokvartsgeneraatorid, on väga suur; ultraheli energiavoo intensiivsus õlis või vees võib tõusta 10 W/cm^2, see on 10 000 korda võimsam suure orkestri hääle maksimaalsest tugevusest õhus (10^{-3} W/cm^2).

Tuleb märkida, et väga suure ultraheli intensiivsuse puhul (umbes 10 W/cm^2) osakeste hälvete amplituudid ja nende kiiruste amplituudid ei ole suhteliselt suured, kuid väga suur on kiirenduste amplituud. Kiirenduste amplituud võib ületada raskuskiirendust kümneid ja sadu tuhandeid kordi. Rõhkude amplituudi suurus võib olla mitu atmosfääri.

Ultraheli lained põhjustavad väga huvitavaid füüsikalisi ja füsioloogilisi nähteid. Nii näiteks mitteseguneveste vedelikkude kogumid, millele on mõne minuti vältel mõjunud kõrgsageduslik ultraheli, muutuvad emulsioonideks. See vedelikkude emulsiooniks muutmise meetod töötati välja S. N. Rževkini (1935. a.) jt. poolt. Paigutades katseklaasi vee ja elavhõbedaga õlisse, milles levib ultraheli, on võimalik jälgida, kuidas vesi järjest tumeneb elavhõbeda pihustumise tõttu peenimateks tilgakesteks, mis hõljuvad vees. Õlisse pistetud termomeetrit ei tohi käega puutuda: ultrahelisagedusega võnkumise tõttu klaas kõrvetab kätt, kuigi termomeeter näitab üsna väikest temperatuuri. Elavad olevused (kalad, konnad), keda kiiritatakse ultraheliga, surevad mõne minuti jooksul. Õli ise, milles levib ultraheli, otsekui keeb kvartsplaadikese kohal.

Ultrahelisid kasutatakse nüüdisajal mitmekülgselt. Viitame näiteks *akustilisele signaliseerimisele* vee all ja *akustilisele* sügavuste mõõtmisele (kajalood). Ultraheli otstarbekus nendel juhtu-

del on tingitud sellest, et väga väikeste lainepikkuste juures on võimalik energiat kiirata kitsa, suunatud kimbuna.

On kindlaks tehtud, et gaaside „läbipaistvus" ultraheli mitmesugustele sagedustele on väga erinev: ultrahelide sumbuvus mingis gaasis on mõnes sageduse piirkonnas sadu kordi suurem kui samas gaasis teiste sageduste puhul. Siin ilmneb ultraheli perioodi kokkulangevus mõningate molekulidevaheliste protsesside (väga lühikese) toimumise ajaga, mille uurimine viis akustika eriharu — *kvantide akustika* — loomisele.

Veealuseks signalisatsiooniks kasutatavate ultrahelide sumbuvus on õhus 1000 korda suurem kui vees.

On avastatud, et suure intensiivsusega ultrahelid avaldavad tunduvat mõju kehade kristalliseerumisele ja kiirendavad mõnd keemilist reaktsiooni.

Ultrahelist põhjustatud bioloogilistest nähetest äratab tähelepanu mõnede taimede viljakuse tõus, kui nende seemneid varem ultraheliga kiiritada.

Intensiivses ultrahelide voolus hukkuvad paljud üherakulised organismid, stafülokokid ja punased verelibled. Selle põhjuseks on nähtavasti mehhaaniline rebenemine.

Tänapäeval kasutatakse praktikas laialdaselt mõnede sulfidiini-tüüpi arstimite emulgeerimist ultrahelide abil. Tähtis südamehaiguste ravim — kamper on vees lahustamatu, seepärast polnud võimalik teda vahetult haige vereringvoolu kanda; see on muutunud aga võimalikuks tänu nõukogude õpetlaste poolt väljatöötatud kampri peenima emulgeerimise meetodile. Peenima emulsiooni näol võib kamprit mitte naha alla, vaid vahetult haige verre süstida; sel juhul ta jõuab kiiremini südameni, mis mõningatel juhtudel võib haige elu päästa.

Viimasel aastakümnel on prof. S. J. Sokolov saavutanud suuri tagajärgi ultrahelide abil metallesemetes defektide (lõhede ja koostise ebaühtluste) avastamisel. Selleks otstarbeks kaetakse metallese õlikorraga ja asetatakse ultraheli levimise teele. Praod ja vigastused metalli sisemuses põhjustavad ultraheli osalist peegeldumist ja hajumist, mida saab märgata eset katva õlikorra võnkumise astme järgi. Niisuguseid seadeldisi nimetatakse *ultraheli-defektoskoopideks.*

Küllaldase võimsusega ultraheli levimisel vedelikus on vedeliku tiheduse muutused piki lainet nii tunduvad, et mõjuvad vedeliku optilistele omadustele. Vedelik muutub mittehomogeenseks valguskiirte kimbu suhtes, mis tungib vedelikku risti ultraheli levimissuunale. Seda nähet, mis avastati Debye' ja Sears'i poolt käesoleva aastasaja kolmekümnendail aastail, rakendasid G. S. Landsberg ja L. J. Mandelštam väga huvitavate ja kasulikkude riistade: *ultraheliliste valgusmodulaatorite* — valgus-

releede — ehitamiseks. Üksikasjalisemalt jutustatakse sellest kolmandas köites.

Viimaseil aastail on NSV Liidu Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige A. S. Predvoditelev rakendanud ultraheli edukalt vedelikkude, aurude ja gaaside tähtsaimate molekulaarsete omaduste uurimiseks („ultraakustilise interferomeetri meetod").

On huvitav märkida, et nahkhiired kasutavad pimedas lennates orienteerumiseks ultraheli. Nahkhiirte omadus pimedas orienteeruda äratas alati looduseuurijate imetlust. Aga alles hiljuti (1945. a.) avastati, et nahkhiired pimedas orienteerumiseks kasutavad viisi, mis on analoogiline raadiolokatsioonile ja mida võib nimetada *ultrahelilokatsiooniks*. Nimelt tekitavad nahkhiired lennul lühikesi, sajandik sekundi pikkusi ultraheli impulsse sagedusega 35 000—70 000 hertsi. Nahkhiire kõrvad võtavad vastu („kuulevad") ultraheli sagedusega kuni 100 000 hertsi. Aja järgi, mis möödub nahkhiire poolt väljasaadetud ultrahelilise „hüüde" takistustelt tagasi peegelduva kaja vastuvõtmiseni, määrab nahkhiir eksimatult takistuse kauguse.

TEINE OSA.

MOLEKULAARFÜÜSIKA JA TERMODÜNAAMIKA.

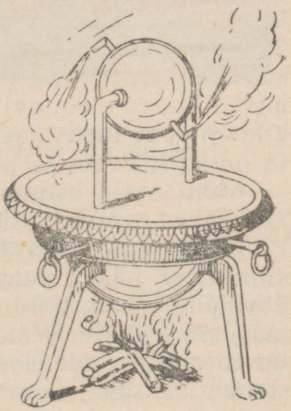
XIV PEATÜKK

MOLEKULAAR-SOOJUSLIK LIIKUMINE.

§ 83. Ajaloolisi andmeid.

Kapitalismi levimine XVIII sajandil ja vabrikutööstuse kiire kasv seadis tehnikale ülesandeks jõumasinate loomise. Tööstuslikeks eesmärkideks küll juba kasutati vesi- ja tuulerattaid, aga nende võimsus polnud küllaldane ja nende rakendamine oli raske linnadesse vabrikute ehitamisel.

Sobiva võimsa ja ökonoomse jõumasina leiutamine tõotas au ja rikkust. Paljusid leiutajaid meelitas unistus ehitada igavene iseliikuv masin — „perpetuum mobile". Esitati palju fantastilisi projekte. Mõeldi välja kõige kavalamaid keerulisi kombinatsioone kangidest, plokkidest, raskustest, ratastest jms. Leiutajate muutumatuks meelehärmiks need seadised mitte ainult ei andnud soovitud liikumapanevat jõudu, vaid nõudsid ise hõõrde tõttu enda liikuma panemiseks välist jõudu. Nende paljude ebaõnnestunud püüete tulemusena hakkas kujunema arusaamine sellest, et jõumasina loomiseks, mis pole ühenduses tuule- või veejõu kasutamisega, tuleb üldse väljuda mehhaanilise liikumise piiridest, tuleb pöörduda teiste mittemehhaaniliste nähete — soojusnähete, „tule liikumapaneva jõu" poole.



Joon. 261. Heroni auruvurr.

Võimalust saada tööd kütteaine põletamise teel tunti juba vanal ajal. Näiteks joonisel 261 on näidatud seadis, mida Heron Aleksandriast kirjeldas juba 2000 aastat tagasi. Katlas keeb vesi, tekkiv aur tungib mööda torukujulisi jalgu õõnsasse kerasse ja

sealt kõveraks painutatud torusid kaudu välja; kera pöörleb väljatungiva auru reaktsiooni mõjul.

Kolvi abil aurujõu rakendamist töö saamiseks teostas esmakordselt Huygensi assistent Papin XVII sajandi lõpul (1690. a.). Papini ehitatud seadeldises valati vesi töötavasse silindrisse, mis täitis seega ka aurukatla ülesannet. Silindri põhja soojendati tulel, vesi hakkas keema ja tekkiv aur surus kolvi üles. Kolvi tagasilaskmiseks võeti tuli silindri alt ja jahutati silindrit, et aur jälle veeks muutuks.

Kahe aastakümne pärast (1711. a.) muutis inglise tööline Newcomen Papini masina ekspluatatsioonikõlblikuks sel teel, et pritsis vett perioodiliselt kolvi alla, mitte aga ei valanud lihtsalt silindrisse nagu Papin. Newcomeni masinat kasutati kogu XVIII sajandi jooksul kaevandustes šahtidest vee väljapumpamiseks. Vabrikutes kasutamiseks polnud see masin aga kohane, kuna ta ei taganud vajalikku liikumiskiirust, oli väikse võimsusega ja ebaökonoomne — kulutas kuni 25 kg sütt tunnis iga hobujõu kohta.

Esimese universaalse, s. o. mitmesugusteks otstarveteks kasutatava automaatse aurujaotamisega ja kahe silindriga aurumasina leiutas ja ehitas andekas Uraali mehhaanik Ivan Ivanovitš Polzunov (leiutatud 1763. a., tööle rakendatud kolm aastat hiljem Barnaulis). Polzunovi masin töötas hästi, kuid mitte kaua — ainult 2 kuud. Kaotanud tervise Jekaterina II tšinovnikute hoolimatusega võideldes, suri Polzunov mõni päev enne masina käikulaskmist. Pärast Polzunovi surma jäi masin asjatundmatutesse kätesse. Olgugi et ta tasus oma ehituskulud ja andis ka suurt tulu, heideti ta ometi kõrvale ja jäeti unustusse.

Mõni aasta hiljem (1769—1784. a.) konstrueeris inglise insener Watt aurumasina, mis leidis laialdase kasutuse tööstuses. Watt'i masinates kasutati automaatset aurujaotamist, kasutati auru silindrisse pääsu sulgemist teatavast kolvi asendist alates, et kasutada mitte ainult auru silindrisse tungimise, vaid ka auru paisumise jõudu. Watt'i masinad olid varustatud jahutajatega töötanud auru kondenseerimiseks, väliskestadega silindrite auruga soojendamiseks, automaatsete pöörete arvu regulaatoritega.

Watt teostas oma täiendusi, uurides aurumasina tööd omaleiutatud seadise (indikaatori) abil, mis mõõtis auru rõhku töötava masina silindris kolvi mitmesuguste asendite puhul. Soojustehnika teaduslikkude aluste asendamisel oli indikaatoril niisama suur tähtsus kui kaaludel keemias või teleskoobil astronoomias.

XIX sajandi esimestel aastakümnetel hakkasid Watt'i aurumasinad valitsevat seisundit võitma mitte ainult vabrikutes, vaid ka transpordis.

Inglane Fitch ehitas 1775. a. esimese aurupaadi; Fulton (1807. a.) ehitas labadega varustatud ratastega aurulaeva ja

Wessel (1829. a.) — vindiga aurulaeva. Laevadel rakendatavate aurumasinate arv ja võimsus kasvasid aastast aastasse ülima kiirusega. Samasuguse kiirusega laienes ka aurumasina kasutamine raudteedel pärast seda, kui Stephenson 1829. a. ehitas leektorudega lokomotiivi (seega Trevetiku poolt 1804. a. ehitatud lokomotiivi põhjalikult täiendades).

Aurumasinate tõttu hakkas samadel aastatel arenema kõige mitmesugusemate masinate ja pinkide ehitus, mis ühenduses raudteede ja jõe- ning meretranspordi arenguga viis sellisele tööstuse ja kaubanduse ümberkujunemisele, mis miljoneid inimesi asetas olenevusse kapitalistidest. Seega mõjus aurumasina leiutamine lõpptulemusena ka sotsiaalsetele vahekordadele.



Mihhail Vassiljevitš Lomonossov (1711—1765).

See kõik mõjus ka teaduslike uurimuste suunale, kus peahuvi pöördus nüüd loomulikult soojusprotsessidele.

Kujutlust soojusest kui liikumise liigist väljendasid üksikud õpetlased juba ammu: XVII sajandi algul filosoof Bacon, sama sajandi lõpul Huygens ja Newton, XVIII sajandi esimesel poolel Voltaire, Daniel Bernoulli ja Lomonossov.

Ometi ükski geniaalse vene õpetlase Mihhail Vassiljevitš Lomonossovi eelkäijatest ei kaitsnud õiget mõistet soojusest sellise energia ja järjekindlusega, nagu seda tegi Lomonossov oma suurepärastes töödes, mis ennetasid tolleaegset teadust rohkem kui sajandi võrra.

Oma dissertatsioonis „Sooja ja külma põhjusest" (1744. a.) lükkas Lomonossov ümber tol ajal valitseva teooria soojusaine kohta ja kinnitas, et „kehade soojus seisneb nende sisemises liikumises". Rea näidete varal tõendas ta veenvalt, et nähtav kehade liikumine muutub näiteks hõõrdumisel tema osakeste nähtamatuks liikumiseks. „Kui taguda haamriga külma rauda . . .," kirjutas Lomonossov, „siis suureneb hõõre rauatüki ärritatud osakeste vahel, kasvab osakeste pöördliikumine, mille tagajärjel raud võib mõnikord isegi tulipunaseks muutuda."

Analüüsides soojuslikke ja keemilisi nähteid, leidis Lomonossov üldise seaduse mateeria ja soojuse igavesest kestusest.

Poolsada aastat enne Lavoisier'd, kes eksperimentaalselt tõestas aine säilivuse seaduse keemilistes reaktsioonides, andis Lomonossov selle seaduse õige mõiste ja rakendas seda keemiliste protsesside seletamisel. Lomonossovi töödes antud mõisted keemilistest elementidest, molekulidest ja aatomitest ühtuvad XIX sajandil kehtinud kujutlustega.

Lomonossovi kaasaegsed — Daniel Bernoulli ja filosoof Voltaire — jõudsid gaaside elastsuse molekulaar-kineetilise mõistmiseni. Lomonossov arendas neid vaateid ja seletas õigesti Bernoulli katsetes kõvasti kokkusurutud gaasidega ilmnenud kõrvalekaldumised Boyle'i seadusest.

On tähelepandav, et metafüüsiliste teooriate (flogistoni, soojusaine jt.) valitsemise epohhil Lomonossov nägi ette paljude probleemide metafüüsilistest kujutlustest vabad rangelt teaduslikud lahendused. Tema töid läbis mõte, et „liikumist ei saa olla ilma mateeriata", et „ei või eitada liikumist seal, kus silm teda ei näe".

Paistab, et Lomonossovi töödes põhjendatud molekulaar-soojusliku liikumise pildi põhjal oleks füüsika XVIII sajandi teisel poolel pidanud soojusõpetuse arengus suuri edusamme tegema. Ometi seda ei sündinud. Veel terve sajandi jätkas soojusaine teooria võimutsemist. Alles 1850.—1860. aastatel (pärast seda kui Robert Mayer põhjendas soojuse ja töö ekvivalentsuse) võtsid Joule ja Krönig molekulaar-kineetilise teooria uuesti kasutusele. Seda arendasid edasi Clausius ja Maxwell.

Soojusaine teooriat tunnustati üldiselt kuni XIX sajandi keskpaigani. See teooria vaatles soojust kui erilist väga peent ainet (fluidumit), mida kehad temperatuurist olenevalt kas rohkem või vähem endasse imevad nagu vamm vett.

Arusaamatuna paistab, kuidas võis see teooria nii kaua õpetlaste mõistust valitseda. Tol ajal aga ei tundunudki see nii naiivsena, nagu see meile praegu näib, kuna me oleme harjunud soojusnähetele vaatama kui liikumise seisundile. Tol ajal paistis, et sellega saab palju küsimusi lihtsalt ja näitlikult ära seletada.

Seda, et ühesuguste massidega ja temperatuuridega keemiliselt erinevate kehade soojendamiseks võrdse kraadide arvu võrra on tarvis erinevaid soojushulki, seletati kehade erineva soojusaine vastuvõtlikkusega. Siin rakendati analoogiat asjaoluga, et kehadel on erinev võime vett endasse imeda. Kujutlusele kehade hügroskoopsusest vastas soojusaine teoorias kehade *soojusmahtuvuse* mõiste. (Nüüdisajal see termin oma väära näitlikkusega ainult raskendab arusaamist, et iga keha juures on tegemist rea suuruselt erinevate soojusmahtuvustega: soojusmahtuvus

konstantse ruumala puhul, konstantse rõhu all, mis tahes konstantse parameetri puhul.)

Kehade soojenemist hõõrdel seletas soojusaine teooria sellega, et hõõre paigutab soojusainet ümbritsevast keskkonnast hõõrutavasse kehasse ümber, kusjuures oletati, et hõõrde ületamiseks tehtud töö kulutati soojusaine ümberpaigutamiseks madalama temperatuuriga kehast kõrgema temperatuuriga kehasse. Aurumasinate poolt tehtavat tööd seletati soojusaine langemisega kõrgemalt temperatuuri tasemelt madalamale, seega samuti nagu me praegu vesiturbiinide tööd seletame.

Alles XIX sajandi alguseks avastati faktid, mis rääkisid ilmselt vastu soojusaine teooriale. Jälgides suurtükitorude puurimist tõestas Rumford 1798. a., et hõõrdel tekkiva soojuse hulk on ammendamatu, kuivõrd piiramatult toimub töö kulutus, kusjuures mingit ümbritseva õhu jahenemist ei toimu (mis lükkas ümber kujutluse, nagu läheks soojusaine hõõrdel ümbritsevast keskkonnast hõõrutavatesse kehadesse üle). Aasta hiljem (1799. a.) kinnitas Davy, tekitades hõõret kahe jäätüki vahel õhutühjas ja päiksekiirte eest varjatud ruumis, Rumfordi tehtud järeldust, et soojus tekib hõõrdel tehtud töö arvel. Rumfordi ja Davy katsed said kuulsaks. Väiteid soojusaine teooria vastu toetasid Young (1807. a.) ja Ampére (1821. a.).

Kuid termodünaamika rajaja Sadi Carnot pidas veel kinni soojusaine teooriast; alles oma viimastel eluaastatel (ta suri 1832. a.) veendus Carnot selle teooria ekslikkuses ja andis selge formuleeringu soojuse ja töö ekvivalentsuse printsiibile, kuid need tema kirjutised avaldati alles mitu aastakümmet pärast tema surma. Clapeyron, kes esimesena rakendas graafilist meetodit termodünaamikas, jätkas (1834. a.) soojusaine teooriast kinnipidamist.

Soojusaine teooria kestva valitsemise põhjuseks oli osalt asjaolu, et see teooria oli tihedas ühenduses niinimetatud „kalorimeetrilise aksioomiga" (aksioomiga soojuse hävinematusest), millest oli raske lahti ütelda, kuna sellel põhjenesid tol ajal kõik soojuslikud arvutused. Carnot kirjutas oma memuaaris „Mõtteid tule liikumapanevast jõust ja masinatest, mis on kohased seda jõudu tekitama" (Pariis, 1824. a.): „...kui keha mõne muutuse või muunduste rea järel jõuab tiheduse ja temperatuuri poolest oma esialgsesse seisundisse, siis on tal sama hulk soojust, mis tal oli alguses... See seisukoht pole kunagi kahtlust äratanud; seda... on kinnitanud paljud kalorimeetrilised mõõtmised. Seda eitada — tähendaks kogu sellel seisukohal põhineva soojuse teooria hävitamist."

Alles siis kui kujunes ja tugevnes õpetus energia jäävusest, selgus, et kalorimeetrilist aksioomi tuleb mõista teisiti, kui seda mõisteti varem (§ 132).

Pööret õigele suunale soojusõpetuse ja energiaõpetuse arengus valmistasid ette rohkem aurutehnika kui füüsika saavutused. Möödunud sajandi neljakümnendatel ja viiekümnendatel aastatel hakkas üha suurema selgusega ilmnema, et saades tööd soojuse arvel või soojust töö arvel, siis ühele kilokalorile soojusele vastab täiesti kindel tööhulk kilogramm-meetrites. Seda *soojuse mehhaanilist ekvivalenti* ei õnnestunud mõõta aurumasina juures, kus kaod moodustavad tarvitatud soojusest suurema osa. Kuid spetsiaalsetes katsetes, mida tegid alates 1843. a. Joule ja hiljem Hirn, mõõdeti soojuse mehhaanilist ekvivalenti rahuldava täpsusega (Joule sai alguses 422 *kGm* ühe kilokalori kohta, hiljem 424 praegusel ajal kindlakstehtud suuruse 427 asemel).

Vastastikuse kvantitatiivse suhte soojuse ja töö vahel üldistas esmakordselt soojuse ja töö vastastikuse muundumise printsiibiks Robert Mayer (1842. a.). Selle printsiibi tõestamisel olid otsustava tähtsusega E. K. Lenz'i katsed elektrivoolu töö soojuseks muundumise uurimisel (1844. a.), Joule'i katsed ja Helmholtzi uurimus „Jõu jäävusest" (1847. a.).

Soojuse ja töö vastastikuse muundumise printsiip kukutas metafüüsilise soojusaine kontseptsiooni ja avas arenemistee õpetusele energiast. Kuid Mayer (elukutselt arst) ei leidnud argumente tema kaasaegsete füüsikute veenmiseks. Mayeri arutlustes domineerivad filosoofilised kujutlused, bioloogilised tähelepanekud ja hüpoteesid võeti halvustamistega vastu. Mayer kulutas oma jõu poleemikale, millel oli tihti temale solvav kuju. Mayerit ümbritsevad inimesed ja tema sugulased pidasid teda fantasööriks ja suhtusid temasse pilkega; ajalehtedes ilmusid jämedad mõnitavad kallaletungid Mayerile. Selline olukord viis Mayeri 1850. a. enesetapmiskatseni; sugulased paigutasid ta range režiimiga vaimuhaiglasse. Ja kuigi ta mõne aasta pärast sealt vabanes, ei suutnud ta ometi elu lõpuni oma endist jõudu taastada.

Teistsugune, kiiresti avalduv mõju soojusõpetuse arengule oli Helmholtzi uurimusel, milles soojuse ja töö ekvivalentsuse printsiibi arendamine energia jäävuse seaduseks oli teostatud füüsikutele arusaadavas matemaatilises vormis, arutluste kaudu, mis toetusid vaieldamatutele faktidele. Ometi, erinevalt Mayerist, kes õigesti nägi uue kvalitatiivselt erinevate liikumisvormide (mehhaaniliste, soojuslikkude jt.) vastastikuse muundumise printsiibi peatähtsust, kitsendas Helmholtz selle seaduse tõlgendamist, valgustades ainult puhtkvantitatiivset külge — energiahulga summaarset jäävust. See tekitas füüsikas uue laine mehhaanilisi (asjade loomule vastukäivaid, s. o. sisuliselt jällegi metafüüsilisi) arvamusi, mis püüdsid kõiki keerulisemaid liikumise vorme (soojus, elekter jt.) mehhaanilise liikumise seadustele allutada.

Printsiipi, mille oli esitanud Carnot oma klassikalises, aga esialgu peaaegu tähelepanemata jäetud monograafias „Mõtteid tule liikumapanevast jõust", arendas ja üldistas aastatel 1851 ja 1852 William Thomson (Kelvin). Thomson näitas, et printsiipi, mille Carnot formuleeris soojusmasinate kohta, on võimalik esitada universaalse printsiibina, mis iseloomustab kõikide soojusnähete iseärasusi, võrreldes mehhaaniliste nähetega. Thomson rajas sellele printsiibile absoluutse temperatuuri skaala. Seejuures ta ei puudutanud soojuse füüsikalise olemuse küsimust ega näinud põhjust nende kohtade parandamiseks Carnot' arutlustes, kus räägiti soojusainest.

Energia jäävuse seaduse ja Carnot-Thomsoni printsiibi ühendamise loogiliselt kooskõlastatud termodünaamika süsteemi teostas Clausius varsti pärast Thomsoni tööde ilmumist.

Samadel aastatel arendati välja ka molekulaar-kineetiline teooria. 1856. aastal ilmus trükist Krönigi teos „Gaaside teooria põhialused"; järgmisel aastal ilmus Clausiuse klassikaline töö gaaside teooria kohta, kus paljud molekulaar-kineetilise teooria küsimused juba olid õigesti lahendatud, vaatamata lihtsustatud eeldusele, et kõik gaasi molekulid kindla temperatuuri juures liiguvad teatud ühtlase kiirusega. 1860. aastal avaldas Maxwell oma suurepärase füüsikalisele statistikale põhjapaneva töö „Selgitused gaaside dünaamilise teooria juurde", mis pani aluse füüsikalisele statistikale. Maxwelli ja Clausiuse poolt soojuse kui liikumise liigi mõistmise alusel antud selgitus gaaside omadustest põhjustas hulgaliselt eksperimentaalseid ja arvutuslikke töid, mis kinnitasid Maxwelli ja Clausiuse väiteid.

Molekulaar-kineetilise teooria võit avaldas suurimat mõju kõigi füüsikaharude, keemia ja eriti kõigi füüsika ja keemia vahepealsete õpetuste — lahuste, kolloidide, keemiliste reaktsioonide toimumise kiiruse, elektrokeemiliste protsesside õpetuste arenemisele. Need füüsikalise keemia harud said molekulaar-kineetilise teooria üldistest seadustest ja termodünaamikast kindla aluse paljude kitsapiirilisemate seaduspärasuste selgitamiseks.

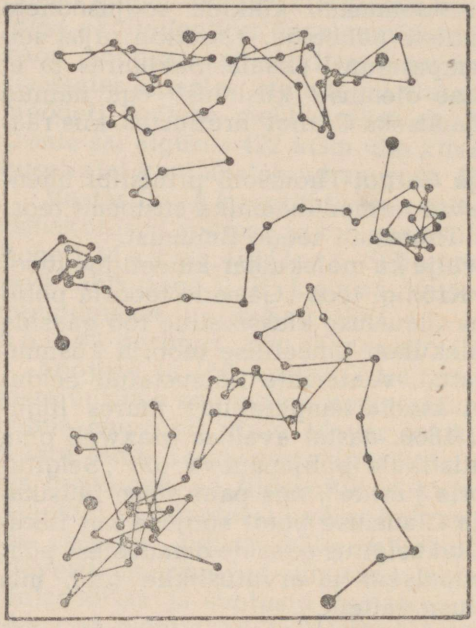
Aastal 1869 tehti keemias avastus, mis omakorda hiljem füüsika arengule sügavat mõju avaldas: Dimitri Ivanovitš Mendelejev avastas elementide perioodilisuse süsteemi.

§ 84. Molekulaar-soojusliku liikumise pilt.

Mis tahes keha molekulid ei püsi paigal, vaid on väga kiires liikumises. See liikumine on korrapäratu ja muutub seda kiiremaks, mida kõrgem on keha temperatuur.

Mõningatel juhtudel võib seda liikumist kaudselt vaadelda mikroskoobi abil. Kui vette segada mikroskoopilisi tahkeid kehakesi või mingi rasva peenimaid tilgakesi (milleks jätkub veele

mõne tilga piima lisamisest) ja tilk sellist segu asetada mõnisada korda suurendava mikroskoobi alus- ja katteklaasi vahele, siis näeme järgmist iseloomulikku nähet: iga vees ujuv tahke kehake või vedel tilgake hüppab kogu aeg siia-sinna, nagu saades mingeid tõukeid või põrgates tagasi nähtamatutelt takistustelt (joon. 262). Mida väiksem on kehakene, seda elavamad on ta hüpped. Kui võrdleme kahe kõrvuoleva kehakese liikumist hüpete pikkuse või suuna poolest, siis me ei leia nende liikumiste vahel midagi ühist: selles ilmneb nähtuse kaootilisus, korrapäratus. Seda nähet nimetatakse Browni liikumiseks teda 1827. a. avastanud inglise botaaniku Browni nime järgi.



Joon. 262. Browni liikumise pilt. Mustade ringikestega on tähistatud Browni osakese asendid iga 30 sekundi järel.

Browni liikumise põhjus seisneb selles, et vedelikus hõljuv kehakene saab igal momendil arvutuid lööke teda ümbritseva vedeliku molekulidelt. Need löögid tekitavad mingi resultantjõu; kehake liigub selle resultandi suunas. Kui molekulid oleksid meile nähtavad, siis nende liikumise pilt sarnaneks Browni liikumisele. Molekulide läbimõõt on aga umbes 1000 korda väiksem kui Browni kehakeste oma; molekulide liikumine on samuti palju kiirem Browni liikumisest.

Gaasides, vedelikkudes ja kristallides on molekulaarsetel liikumistel väga erinev iseloom. Selle erinevuse põhjus seisneb selles, et külgetõmbejõud, mis mõjuvad lähestikku olevate molekulide vahel, esinevad aine erineva agregaatoleku[1] puhul erineva intensiivsusega. Need jõud on seda intensiivsemad, mida tihedamas olekus on kehad, s. o. mida väiksem on keskmine vahemaa naabermolekulide vahel.

Gaasides asetsevad molekulid üksteisest (keskmiselt) kõige kaugemal. Gaasi küllaldase hõrenduse puhul võib lugeda, et mole-

[1] ladina keeles *aggrego* — l i i t m a, liituma, ühinema.

kulid vastastikust külgetõmbejõudu üldse ei avalda. Seepärast toimub siin iga molekuli liikumine inertsi mõjul, nii et molekuli raskuskese liigub sirgjooneliselt ja ühtlaselt[1]; seda sirgjoonelisust ja ühtlust rikuvad ainult molekulide kokkupõrked üksteisega või põrked gaasi sisaldava nõu seinte vastu. Ükskõik millisel antud momendil liigub piki meelevaldselt võetud sirget ühesugune arv molekule; võib ütelda, et *molekulaarses liikumises ei ole ükski suund teistest eelistatum.* See kehtib iga väikese ruumiosa kohta, mille gaasis mõtteliselt eraldame. Selles seisneb peamine molekulaarliikumiste kaootilisuse, korrapäratuse tunnus.

Mõnesuguse ettekujutuse molekulide translatoorse liikumise kiirusest gaasides annavad hääle levimiskiirus gaasides ja suurtüki- ning püssikuulide algkiirus. Kuna gaasi molekulide vahel ei ole peaaegu mingit ühendust, siis oleneb hääle levimine gaasis nähtavasti vahetult molekulaarsetest liikumistest, ja järelikult nende liikumiste kiirus peab ligikaudu vastama hääle levimiskiirusele gaasides, s. o. peab ulatuma mõnesaja meetrini sekundis. On teada, et temperatuuri tõstmisel hääle levimiskiirus gaasides suureneb võrdeliselt absoluutse temperatuuri ruutjuurega; samasugune olenevus temperatuurist kehtib ka gaasi molekulide translatoorse kiiruse kohta. Suurtüki- või püssikuuli väljalend laskeriistast toimub gaasi molekulide surve all, mis on tekkinud püssirohu kiirest põlemisest; mürsk või kuul saab oma algkiiruse gaasi molekulidelt ja kuna ta kiirus on mõnisada meetrit sekundis, siis on ka molekulaarse translatoorse liikumise kiirus ligikaudu sama suurusjärguga.

Molekulaarse liikumisega seletub hulk nähteid gaasides: gaasi rõhk, tema võime piiramatult paisuda, difusiooni[2], s. o. ühe gaasi teises levimise võime jt. Difusiooni puhul võib tekkida küsimus: miks vaatamata molekulide suurele kiirusele ühe gaasi levimine teises (segunemine teisega) toimub võrdlemisi aeglaselt? Vastus on: sellepärast, et igal molekulil toimub omal teel määratu arv kokkupõrkeid teiste molekulidega; seepärast ta rohkem „tammub kohapeal", kui liigub edasi.

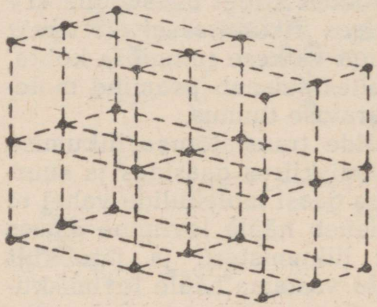
Eespool on näidatud, et gaasi üksikute molekulide liikumissuundadel puudub igasugune korrapärasus. Ei ole olemas mingit korrapärasust ka molekulide paiknemisel ruumis mis tahes antud momendil. Teisiti on olukord tahketes (kristalsetes) kehades; siin on üksikute osakeste korrapäratu liikumise juures siiski teatav kord nende paiknemises ja nimelt: siin iga osake justkui võngub mingit keerulist trajektoori kujutades keskme ümber, millel on ruumis kindel asend — mingi „keskmise asendi" ümber.

---

[1] Raskusjõu mõju molekulide liikumisele on kaduvalt väike. Peale translatoorse liikumise võib molekulidel esineda ka rotatoorne liikumine.

[2] Ladina k. *diffusio* — levimine.

Kristalli osakesed on asetatud korrapäraste ridadena piki kolme (üldiselt kaldnurkset) koordinaatide telge, moodustades niinimetatud *ruum-* ehk *kristallvõre* (joon. 263). Mõnedes kristallides asetsevad ruumvõre sõlmpunktides molekulid („molekulaarsed võred"); teistes kristallides, näiteks teemandis, asetsevad ruumvõre sõlmedes aatomid („homöopolaarsed võred"); paljudes kristallides, näiteks kivisoolas, asetsevad ruumvõre sõlmedes ioonid, s. o. aatomid või aatomgrupid, mis on laetud positiivse või negatiivse elektrilaenguga („heteropolaarsed võred").



Joon. 263. Ruumvõre näide.

Vedelikkude molekulaarne struktuur pole veel täiesti välja selgitatud. Võib nähtavasti oletada, et see on midagi gaasi ja kristalli struktuuri vahepealset.

Molekulaarsete (translatoorsete ja pöörlevate) liikumiste tagajärjel on igal kehal mingi molekulaar-kineetilise energia tagavara. Kuivõrd molekulide vahel tegutsevad vastastikused külgetõmbe- ja tõukejõud, liitub siia veel molekulaarpotentsiaalse energia tagavara. Aatomid võivad kehas sooritada võnkliikumisi mõnede keskmete ümber; sel juhul annab võnkliikumiste kineetiline ja potentsiaalne energia veel energiavaru ühe kehas peituva komponendi. Järgmisteks selle varu komponentideks on keemiline energia — aatomite ja ioonide vaheliste sisemolekulaarsete mõjude energia (aatomi siseenergia) ja ka aatomi tuuma energia (tuumasisene energia).

Aatomite kiirgusvõime juhib lõpuks sellele, et ruum keha sees on täidetud elektromagnetilise kiirgusega. Kiirguse hulk on küll üsna väike, kuid tal on siiski tähtis osa, kuna ta tagab keha sisemuses „soojuslikku tasakaalu" keha üksikute osade vahel. Osakeste (molekulide, aatomite, aga ka aatomi osade — elektronide, aatomituumade) kineetiline ja potentsiaalne energia ühes kiirgusenergiaga moodustab *siseenergia.*

Molekulaarsete liikumiste näitlikuks iseloomustamiseks gaasis anname rea andmeid õhu kohta 0° *C* ja hariliku rõhu juures.

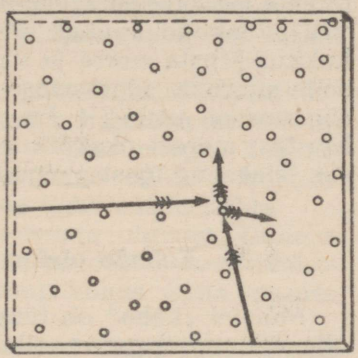
Igas kuupsentimeetris õhus (ja ka igas teises gaasis) on nende „normaalsete" tingimuste juures $2{,}7 \cdot 10^{19}$ molekuli. Kui kõik need molekulid oleksid ühtlaselt laiali asetatud 1 cm^3 ruumis, siis asuks igaüks neist kuubis, mille serv oleks pisut pikem kui $3 \cdot 10^{-7}$ *cm*. Keskmine õhu molekulide translatoorse liikumise kiirus on normaaltingimustes ligi 450 *m/sek.* Molekuli läbimõõt on umbes kaks-kolm sajamiljondikku sentimeetrit ($3 \cdot 10^{-8}$ *cm*). Sekundi

vältel iga õhu molekul põrkub 7,5 miljardit korda kokku teiste molekulidega, seepärast on tema „vaba tee pikkus", s. o. keskmine kahe kokkupõrke vahel läbitav teepikkus, äärmiselt väike; see võrdub jagatisega

$$\frac{450\ m}{7{,}5 \cdot 10^9} = 6 \cdot 10^{-6}\ cm = \frac{1}{16}\text{mikronit.}$$

Molekulaar-kineetilisest teooriast õigesti arusaamiseks on tähtis endale eespool esitatud arve ette kujutada näitlikult.

Joonis 264 on nagu momentülesvõte molekulidest, mis asetsevad väga õhukeses rööptahukakujulises gaasikihis; pildi lineaarsed mõõtmed on tõeliselt umbes miljon korda suuremad. Joonisel on näidatud kahe molekuli kokkupõrget; nooled näitavad molekulide kiiruste suundasid enne ja pärast nende kokkupõrget.



Joon. 264. Õhukese normaalse tihedusega gaasikihi pilt (suurendatult umbes 1 miljon korda).

Pildi saamiseks sellest, kuivõrd väikesed on molekulid ja kui suur on nende arv igas õhu kuupsentimeetris, soovitas William Crookes kujutleda järgmist katset. Võtame täpselt 1 cm^3 mahuga ampullikese (väikese hermeetiliselt suletud klaasikese). Oletame, et see ampull on täiesti tühi ja järelikult ei sisalda sugugi õhku. Mingil viisil (näiteks elektrisädeme abil) lööme ampulli seina ülipeenikese augu ja just niisuguse, mille läbi tungiks ampulli ühes sekundis 100 miljonit õhumolekuli. Küsime, kui pika aja jooksul täitub ampull õhuga normaalse tiheduseni ($2{,}7 \cdot 10^{19}$ molekuli ühes cm^3), kui tema täitmine toimub kogu aeg näidatud kiirusega. Arvutus näitab, et seda momenti tuleb oodata 9000 aastat[1]. Kogu selle aja jooksul kasvab õhurõhk ampullis (kooskõlas eespool antud tingimustega) ühtlaselt iga 12 aasta möödudes 1 *mm* Hg võrra.

Kui võtta normaaltingimustes ühes kuupsentimeetris sisalduvate molekulide arvule võrdne arv telliseid, siis nendega võiks tihedalt laotuna katta kogu maakera maismaa pinna 120 meetri kõrguselt, s. o. kõrgusega, mis ületab neljakordselt seitsmekorruselise maja kõrguse.

O. D. Hvolson kirjutas: „Kui ühes õhu kuupsentimeetris sisalduvad molekulid asetada ühte ritta külg külje vastu, siis saaksime niidi, mille pikkus ulataks 375 korda ümber maakera (ekvaatori

[1] Aastas on $3{,}15 : 10^7 sek.$ $\dfrac{2{,}7 \cdot 10^{19}}{100 \cdot 10^6 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7} = 9000$ aastat.

kohal). Molekuli suurus suhtub hariliku haavlitera suurusega nagu kuupsentimeeter kogu maakera suurusega." Hvolson soovitas ka sellele tähelepanu pöörata, et vaatamata oma tühiselt väikestele mõõtmetele ühes õhu kuupsentimeetris sisalduvate molekulide määratu arvu tõttu kataks nende läbilõikepind üle $1^1/_2$ ruutmeetri suuruse pinna.

Toome veel ühe illustratsiooni selle arvu suuruse kohta. Võtame väikese veetilga mahuga $^1/_{12}$ mm^3 (selles tilgas sisalduvate molekulide arv on ligikaudu võrdne õhu kuupsentimeetris sisalduvate molekulide arvuga). Kujutleme, et saime selles tilgas olevad molekulid kuidagi ära märkida. Oletame nüüd, et see tilk kukkus Musta merre ja tema molekulid segunesid ühtlaselt kogu selle suurima sügavusega mere veega (Musta mere keskmine sügavus on umbes 1 km, pindala 400 000 km^2). Kui nüüd võtta Mustast merest ükskõik kust kohast ja kui sügavalt pang vett, siis leiaksime igast pangest sada märgitud molekuli.

§ 85. Kehade oleku termodünaamiline karakteristika.

Mõistel „keha" on füüsikas (ja eriti termodünaamikas) võib-olla vastandtähendus sellele, mida temale annab geomeetria. Kui termodünaamikas või statistikas räägitakse „kehast", siis mõeldakse asja, mille välimus, kuju ja värvus pole meile olulised; meie märgime selle sõnaga *ainet, mis täidab mingit ruumala,* seome sellega mitte nägemis-, nagu geomeetrias, vaid pigem kompimismuljet.

Sõna „keha" all me mõistame vett, õhku, rauda, soola, elavhõbedat või mõnda muud ainet, mida on võetud kindla ruumala suuruses ja mida iseloomustatakse elastsusega, tihedusega, temperatuuriga ja teiste vahetult või kaudselt kindlaks määratud füüsikaliste tundemärkidega, millel on objektiivsed mõõdud. Kui kõik need tundemärgid kõigis keha osades on ühesugused, siis ütleme keha kohta, et ta on *füüsikaliselt ühtlane* ehk *homogeenne.* Keha võib olla füüsikaliselt ebaühtlane ehk *heterogeenne* tiheduse, elastsuse, temperatuuri, elektriseerituse ning magnetiseerituse astme jne. poolest.

Kui keha koosneb mitme aine s e g u s t (nimelt segust, aga mitte keemilisest ühendist), siis olgu see segu kui tahes peen, olgu ta koguni lahus või sulam, ütleme, et see keha on *keemiliselt* heterogeenne. Nii on õhk keemiliselt heterogeenne, kuna ta koosneb hapniku segust lämmastikuga, argooniga ja teiste gaasidega. Vesi on keemiliselt ühtlane, kuna ta küll koosneb vesinikust ja hapnikust, aga need on siin keemilise ühendina, mitte seguna.

Kõiki tundemärke, mis iseloomustavad keha ja millel on objektiivne mõõt, nagu tihedus, elastsus, temperatuur, elektri-

seerituse aste, mitmesuguste ainete segu protsentuaalne vahekord jne., nimetatakse *keha oleku termodünaamilisteks parameetriteks.* Kui neist tunnustest ükski muutub kas või ühes väikeses kehaosas, öeldakse, et keha olek muutub. Niiviisi määrab kõigi millegagi teistest erinevaid kehaosasid iseloomustavate tunnuste (parameetrite) kogu *keha termodünaamilise oleku.* Keha olekut[1] võib muuta soojendamine, jahutamine, kokkusurumine, kuju muutmine (kui keha takistab kuju muutmist), elektriliste ning magnetiliste jõudude mõju jne. Raudlati termodünaamiline olek muutub, kui teda karastada, painutada, venitada, magnetiseerida või lihtsalt üks ots pista külma vette.

Kehtestades vajalikud tingimused parameetrite mõõduühikute ja mõõtmisviiside suhtes, saame võimaluse keha oleku iseloomustamiseks nimetatud parameetrite arvuliste väärtustega, kusjuures keha oleku täielikuks määramiseks tuleb näidata kõikide parameetrite arvulised väärtused kõikide keha osade kohta.

Eristatakse tasakaalus ja tasakaalustamata olekuid. Ütleme, et keha *olek on tasakaalus,* kui kõik teda iseloomustavad tunnused (ilma mingite välisprotsesside mõjuta) kõigis keha osades jäävad muutmatuks ükskõik kui kauaks.

Siin on järelikult kaks nõuet, mis peavad olema samaaegselt täidetud. Esiteks: keha olekut iseloomustavad parameetrid peavad aja vältel muutumatuks jääma; teiseks: peavad puuduma protsessid (protsessid, aga mitte jõud), mis väljastpoolt seda parameetrite muutumatust toetaksid. Kui üksainuski neist nõuetest on täitmata, siis öeldakse, et keha olek on tasakaalustamata.

Seega peame muutuvate parameetrite puhul keha olekut nimetama *tasakaalustamatuks.* Peame olekut nimetama tasakaalustamatuks ka siis, kui parameetrid jäävad küll muutumatuks, aga nende muutumatus püsib mingi väljaspool keha toimuva protsessi mõjul. Näiteks võib raudlati termodünaamilist olekut, mille üht otsa soojendatakse, teist jahutatakse, pidada „statsionaarseks" (muutumatuks), aga seda ei saa pidada tasakaalus olevaks.

Füüsikaliselt homogeenset keha või mitme ühesuguse koostisega keha kogumit, mis on ühesugustes tasakaalustatud olekutes, nimetatakse termodünaamikas lühidalt faasiks[2]. Seejuures eeldatakse, et iga keha sellest kogumist on homogeenne oma oleku kõigi parameetrite poolest (tihedus, elastsus, temperatuur jne.).

Järelikult me nimetame keha faasiks, kui oleme kindlad, et jagades keha ükskõik millisel viisil paljudeks osadeks (mitte liiga pisikesteks), leiame kõigi osade olekute samasuse.

---

[1] Edaspidi tarvitame tihti „keha termodünaamilise oleku" asemel lihtsalt „keha olek".

[2] Sama sõna „faas" kasutatakse õpetuses võnkumistest hoopis teises tähenduses.

Võtame vee, milles ujub jäätükk. Antud juhul on meil kaks faasi. Kui vees ujub mitu jäätükki, siis mõiste „tahke faas" käib kõikide jäätükkide kohta.

Sama aine, näiteks vesi, võib esineda mitmes tahkes faasis, mis erinevad üksteisest kristallstruktuuri poolest. Tuntakse seitset jää modifikatsiooni. Muutes jää temperatuuri ja suurendades seejuures rõhku kuni tuhandete ja kümnete tuhandete atmosfäärideni, võib järjest saada kõiki neid modifikatsioone.

Tähtsamateks keha oleku parameetriteks on keha tihedus (või tiheduse vastandsuurus — eriruumala), rõhk ja temperatuur.

Põhilised füüsikalised ja keemilised omadused ei olene keha mõõtmetest (kui jätta kõrvutamata üliväga väikesi aine osakesi). Seepärast pole kehade k o g u m a s s termodünaamikas oluline; kujutluse asemel keha kogumassist, mis on põhiline mehhaanikas, kasutatakse termodünaamikas tiheduse[1] mõistet.

Füüsikas on tihti tegemist tiheduse muutumisega kui rõhumise, soojendamise jne. tagajärjega. Seejuures jääb tavaliselt uuritava keha mass katse puhul muutumatuks ja tihedus muutub ainult ühenduses keha ruumala muutumisega. Aga kuna tihedus on keha massi ja ruumala suhe, siis oleneb näidatud juhtudel tiheduse muutus selle suhte nimetaja muutumisest. Seepärast on sobivam vaadelda mitte tihedust, vaid tema vastandsuhet — keha ruumala ja massi suhet. Seda suurust, mida mõõdetakse massiühiku ruumalaga, nimetatakse eriruumalaks ja tähistatakse harilikult tähega v.[2]

Tihti mõõdetakse aine hulka gramm-molekulides. *Gramm-molekuliks* nimetatakse ainehulka, mis sisaldab nii mitu grammi ainet, kui suur on tema molekulkaal.[3]

Näiteks vee gramm-molekul sisaldab 18 g vett, kuna vee molekulkaal on 18. Gramm-molekuli on hakatud lühidalt nimetama *mooliks*. Ühe mooli ruumala nimetatakse *moolruumalaks*.

Termodünaamikas uuritakse peamiselt protsesse, mis toimuvad liikumatutes kehades ja liikumatutes kehade süsteemides. Liikumatutele kehadele mõjuvad jõud peavad keha raskuskeskmes tasakaalustuma. Jõudude poolt avaldatav mõju võib sel juhul seisneda järelikult ainult kehade deformeerimises, seepärast mõõdetakse termodünaamikas ja statistilises mehhaanikas, nagu

---

[1] Keha *tiheduseks* nimetatakse, nagu teada, keha massi suhet tema ruumalaga ehk teiste sõnadega massi, mida sisaldab üks ruumalaühik. Näiteks on raua tihedus 7,8 g/cm^3 (normaalse temperatuuri puhul).

[2] Eriruumala arvuline väärtus on võrdne tiheduse pöördväärtusega. Tavaliselt määratakse eriruumala kuupsentimeetrite arvuga, mida täidab 1 gramm massi; näiteks raua eriruumala $v = 0{,}128\ cm^3/g$.

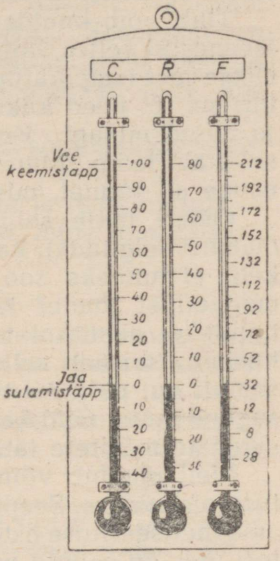
[3] Aine molekulkaaluks nimetatakse selle aine molekuli massi ja $^1/_{16}$ hapniku aatomi massi suhet (sellest nähtub, et molekulkaal on nimeta arv).

ka elastsusteoorias väliste jõudude pinget rõhuga, mida jõud avaldavad keha pinnaühikule. Märgime rõhku, millega keha mõjub oma välispinnale, tähega p. Rõhk p on algebraline suurus; ta on positiivne, kui keha on surve all ja järelikult rõhk on suunatud väljapoole; ta on negatiivne, kui keha on igasse külge välja venitatud ja järelikult keha poolt rakendatud jõud tema väljavenitatud välispinnale on suunatud sissepoole.

Keha soojusliku oleku tähtsamaks parameetriks on temperatuur (temperatuuride vahe). Temperatuur kui suurus võlgneb oma olemasolu eest tänu mikrofüüsikas kehtivale suurte arvude seadusele (§ 87). See seadus reguleerib soojuslike nähete käiku ja tingib erilise tasakaalu liigi — kehade *soojusliku tasakaalu.*

Temperatuuride vaheks nimetame kehade omavahelisest soojuslikust tasakaalust kõrvalekaldumise määra. Tuleb eristada empiirilist temperatuuri t ja absoluutset temperatuuri T.

Empiiriliseks temperatuuriks nimetame keha kõrvalekaldumise määra atmosfäärilise rõhu all oleva sulava jää soojuslikust tasakaalust. Rahvusvahelise mõõtude ja kaalude komitee kokkuleppega 1877. aastast määrati empiirilise temperatuuri suurus võrdeliseks rõhu suurenemisega vesinikus, mille ruumala soojendamisel (või jahutamisel) hoitakse rangelt muutumatu[1]. Selle kokkuleppega määrati kindlaks niinimetatud empiirilise temperatuuri *normaalskaala.*



Joon. 265. Celsiuse, Reaumuri ja Fahrenheiti skaalad.

Temperatuuri ühikuks on võetud 1 Celsiuse kraad, mis on määratud tingimusega, et atmosfäärilise rõhu all oleva jää sulamistemperatuuri tähistatakse $0°\,C$ ja sama rõhu all oleva vee keemistemperatuuri — $100°\,C$ (joon. 265). Erinevus absoluutse temperatuuri (millest pikemalt räägime allpool) ja empiirilise temperatuuri vahel seisneb kõigepealt selles, et absoluutset temperatuuri loetakse (samuti Celsiuse kraadides) alates kõige *madalamast võimalikust temperatuurist* — niinimetatud *absoluutsest nullist,* mis asub $273{,}16°$ allpool jää sulamistemperatuuri. Umbes sajandiku ja mõnes vahemikus kümnendiku kraadi täpsusega

[1] Nimetatud kokkuleppe kohaselt võetakse muutumatuks tiheduseks selline vesiniku tihedus, mille puhul jää sulamispunktis vesiniku rõhk oleks 1000 *mm* Hg.

temperatuuri ümberarvutamisel normaalselt empiiriliselt skaalalt absoluutsele võib kasutada järgmist lihtsat valemit[1]

$$T \approx t + 273{,}16. \qquad (1)$$

Esimesena tõi teadusesse absoluutse nulli mõiste Lomonossov. Lomonossov avaldas mõtte, et kui osakeste kiiruse suurenemine on piiritu, s. o. kui temperatuur võib tõusta piiramatult, siis kiiruste vähenemisel on piir — null, millele vastab mingi kõige madalam võimalik temperatuur.

Tihti võib kuulda väidet, et temperatuur on keha soojusaste. Iseenesest selles väites eksimust ei ole, kui soojusastme all mõeldakse just temperatuuri, s. o. kui vaadeldakse toodud fraasi avaldusena, et need kaks terminit on samatähenduslikud (identsed), ja muud midagi. Kuid kahjuks paljud kujutlevad, et see fraas selgitab temperatuuri mõistet; selle juures mõeldakse soojusastme all tunnet, mis tekib eset puudutades.

Ometi tekib selline küsimus (küsimus, mis võimaldab asja olemust selgitada): kas võiksime temperatuuri mõõta, kui inimese keha ei tunneks sooja ega külma, nagu ei tunne elektrilisi ja magnetilisi jõude? Kahtlemata võiksime. Veel enam, miski ei muutuks olemasolevates temperatuuri mõõtmisviisides. Kogu küsimus seisneb selles, et sõnadel „temperatuur", „soojusaste", samuti kui paljudel teistel, näiteks „hääl", „valgus" jt., on kahesugune mõte: neid kasutatakse samaaegselt füsioloogiliste ja füüsikaliste mõistete tähistamiseks.

Meil puudub võime kehade elektriseerituse ja magnetiseerituse aistmiseks. Seepärast ka väljendused „elektriseerituse aste", „magnetiseerituse aste" ei tekita kelleski ega saagi tekitada kujutlusi, mis on seotud meie tajumuste intensiivsusega. Aga kui jutt pöördub temperatuurile ja soojusastmele, võib kergesti neid termineid harjumuslikult mõista puhtfüsioloogilises mõttes. Seda tuleb arvestada ja füüsikaliste küsimustega tegeldes sundida end loobuma subjektiivsest temperatuuri mõistmisest.

Kui ei eksisteeriks soojusliku tasakaalu fakti, siis poleks ka temperatuuri kui füüsikalist suurust. Siis muutuks kehade soojuslik olek meile sarnaseks nende lõhnale ja maitsele, s. o. me võiksime tema üle otsustada tuginedes ainult sooja ja külma aistingule, nagu otsustame praegu kehade magususe ja mõruduse üle, nende lõhnavuse astme üle jne.

Füüsika vaatleb tasakaalu mitmesuguseid liike, näiteks kehade tasakaalu raskusväljas, elektrilaengute tasakaalu juhtmete pinnal jne. Kehade tasakaaluolekust kõrvalekaldumise astme iseloomustamiseks kasutame tasemete (nivoode) vahe mõistet. Sel mõistel

[1] Nulli ja 100° C juures on valem (1) gradueerimise tingimuste kohaselt täpne. Vahemikus 0—100° C skaalade T ja $t + 273{,}16$ vahe ei ületa 0,001°. 1000° C juures erinevad need skaalad umbes 0,1°. Madalate temperatuuride juures on valem (1) vähem täpne; — 200° juures ulatub vahe 0,25 kraadini.

on mõnikord geomeetriline mõte (kõrguste vahe), sagedamini aga energeetiline (potentsiaalide vahe) mõte.

Mõiste „tasemete vahe" osutub universaalseks, aga tema konkreetne sisu pole mitmesuguste tasakaalu liikide juures ühesugune. Soojusliku tasakaalu juhul on „tasemete vaheks" temperatuuride vahe. Seepärast on temperatuuril mõningaid ühiseid jooni potentsiaaliga. Kuid soojuslik tasakaal on oma olemuselt (oma statistikalise põhialuse poolest) erinev teistest tasakaalu liikidest ja tal on täiesti erandlik koht füüsikas. Seepärast on sarnasus temperatuuri ja potentsiaali vahel väline. Kõik tõeliselt tähtsad ja huvitavad temperatuuri omadused algavad sealt, kus see sarnasus lõpeb.

Kujutlusele temperatuuriskaalast on rajatud soojushulga mõõtmine *kalorites*[1].

Kolm põhilist parameetrit — rõhk, ruumala ja temperatuur — ei ole sõltumatud. Need on seotud võrrandiga, mida nimetatakse *olekuvõrrandiks:*

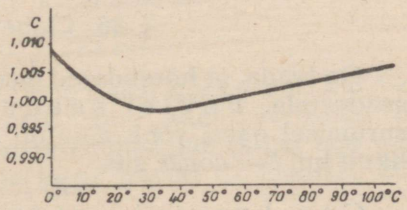
$$f(p, v, t) = 0. \qquad (2)$$

Nende parameetrite vahelise funktsionaalse sõltuvuse kuju otsitakse iga antud aine kohta katseliselt. See on raske ülesanne. Peab tunnistama, et isegi nende ainete kohta, millel on suur tähtsus tehnikas, pole vaatamata suurearvulistele laboratoorsetele katsetele olekuvõrrandit senini veel leitud. See on teada ainult

[1] *Kalor* — on soojushulk, mis antuna ühele grammile veele soojendab seda ühe kraadi võrra, ja nimelt tõstab vee temperatuuri 19,5 C kraadilt 20,5 C kraadini. See soojushulk kannab nimetust kahekümnekraadine *kalor.* 1000 korda suuremat soojushulka, mis suudab soojendada 1 *kg* vett 1° võrra, nimetatakse *kilokaloriks.* Soojushulka, mis soojendab 1 *t* vett 1° võrra, nimetatakse *termiaks:*

1 termia *(th)* = 1000 *kcal* = 10^6 *cal.*

Kokkulepe kalorite arvestamisel ses suhtes, et soojendamine toimuks 19,5 ja 20,5° C vahel, on põhjustatud sellest, et soojushulk, mis on vajalik vee massi ühiku 1° võrra soojendamiseks (vee soojusmahtuvus), oleneb paljude katsete põhjal temperatuurist (joon. 266). Siiski ei ole see olenevus kuigi suur ja praktilistes arvutustes võib teda arvestamata jätta. Harilikult on küllaldaseks täpsuseks lugeda, et *n* kalorit soojendavad 1 *kg* vett *n* kraadi võrra.



Joon. 266. Vee soojusmahtuvuse olenevus temperatuurist.

Rahvusvaheline soojustehniline konverents otsustas 1934. aastal defineerida kilokalorit kui $\frac{1}{860}$ osa kilovatt-tunnist:

$$1 \text{ kilokalor} = \frac{1}{860} \text{ kilovatt-tundi.}$$

hõrendatud olekus gaaside kohta ja ligikaudselt mõne kokkusurutud gaasi kohta.

Katselisel teel on saadud laialdane arvuline materjal, mis iseloomustab vedelikkude ja tahkete kehade eriruumala muutust soojendamisel ja rõhumisel. Kuid neis arvude ridades pole veel korda läinud märgata lihtsaid seaduspärasusi.

Füüsikas on ammu (juba üle 100 aasta tagasi) püstitatud ülesanne aine ehituse kujutlustest lähtudes leida gaasiliste, vedelate ja tahkete kehade olekuvõrrand. See ülesanne on alles lahendamata. Tema praktiline tähtsus on tehnilistes arvestustes määratu suur. Selle probleemi vastu on paljud huvi tundnud. On olemas pikk rida katseid, mis on teostatud suurimate õpetlaste poolt, kuid kahjuks ilma oluliste tulemusteta.

See ülesanne lahendub ainult ühel juhul võrdlemisi kergesti — juhul kui keha üksikute molekulide vahed on nii suured, et nende omavaheline mõju avaldub ainult kokkupõrke momendil. Sellised on hõrendatud gaasid. Hõrendatud gaasi kohta on olekuvõrrand leitud (kui gaasi temperatuur ei ole mitte liiga madal, siis kehtib Clapeyron'i võrrand, mida vaatleme järgmises paragrahvis).

Kuid kui gaasi tihendamisel ja tema kondenseerumisel vedelikuks hakkab ilmnema molekulide vastastikune mõju (trajektooride kõverdumine), siis muutub ülalsõnastatud ülesanne niivõrd komplitseerituks, et näib olevat võimatu teda lahendada ilma kahtlaste, kalkulatsiooni lihtsustavate oletuste appi võtmiseta. Pole õnnestunud saavutada isegi ligikaudu rahuldavat küsimuse lahendust (Van der Waalsi võrrand ja teised osutuvad ebatäpseteks).

§ 86. Clapeyron'i võrrand.

On teada, et hõrendatud gaasid alluvad Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadustele. Boyle'i seadus ütleb, et isotermilisel kokkusurumisel gaasi rõhk muutub pöördvõrdeliselt ruumalaga. Järelikult kui $t = const$, siis

$$pv = const.$$

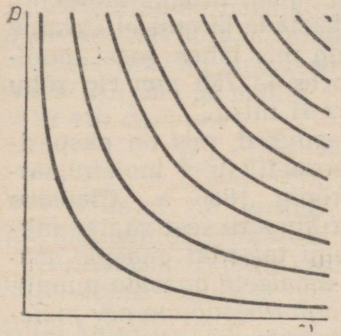
Gay-Lussac'i seaduse[1] järgi põhjustab gaasi soojendamine jääval rõhul 1° C võrra tema paisumist $\frac{1}{273{,}16}$ osa võrra sellest ruumalast, mis tal on sama rõhu all 0° C juures.

Järelikult kui v'_0 on ruumala, mis on täidetud gaasiga 0° C ja rõhu p juures, aga v on gaasi ruumala t° C ja sama rõhu p all, siis

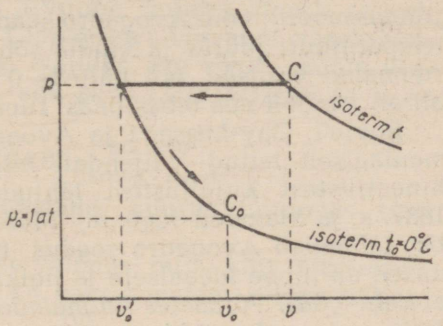
[1] See seadus, mille 1802. a. katsete põhjal sõnastas prantsuse füüsik Gay-Lussac, oli juba mitu aastat varem oletusena väljendatud teise prantsuse õpetlase Charles'i poolt. Seepärast nimetatakse teda tihti Charles'i seaduseks.

$$v - v'_0 = \frac{v'_0}{273{,}16}\, t.$$

Kokkuleppeliselt kujutame gaasi olekut pv-diagrammil punktiga; mingi punkti koordinaadid sellel diagrammil näitavad rõhu p ja 1 g või 1 mooli gaasi ruumala arvulisi väärtusi; joonisel 267 on esitatud jooned, mille puhul $pv = const$, — need on gaasi isotermid[1].



Joon. 267. Gaasi isotermid Boyle'i seaduse põhjal.



Joon. 268. Diagramm, mis selgitab Clapeyron'i võrrandi tuletamist Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadustest.

Kujutleme, et gaas on võetud mingis meelevaldselt valitud olekus C, kusjuures tema temperatuur oli t, rõhk p ja ruumala v. Jahutame teda ilma rõhku p muutmata kuni 0° C (joon. 268). Gay-Lussac'i seaduse põhjal võib kirjutada, et

$$v = \frac{v'_0}{273{,}16}(t + 273{,}16).$$

Hoides temperatuuri 0° C, surume gaasi kokku või, kui vaja, laseme paisuda seni, kuni tema rõhk saab võrdseks ühe füüsikalise atmosfääriga. Seda rõhku tähistame p_0-ga, aga gaasi ruumala $p_0 = 1\ at$ ja 0° C juures v_0-ga (punkt C_0 joonisel 268). Boyle'i seaduse põhjal

$$pv'_0 = p_0 v_0.$$

Korrutades esimest võrdust liikmeti teisega ja taandades v_0-ga, saame:

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273{,}16}(t + 273{,}16). \qquad (3)$$

Selle võrrandi tuletas esmakordselt väljapaistev prantsuse insener B. Clapeyron, kes töötas 1820.—1830. a. Venemaal

[1] Need jooned kujutavad hüperboole. Mida kõrgem on temperatuur, seda suurem on korrutis pv ja seda kaugemal koordinaatide alguspunktist asetseb vastav isoterm.

Teedeinstituudis professorina. Konstantset suurust $\frac{p_0 v_0}{273{,}16}$ nimetatakse *gaasikonstandiks.*

Itaalia õpetlase Avogadro poolt 1811. a. avastatud seaduse põhjal on kõikidel gaasidel, olenemata nende keemilisest koosseisust, ühesuuruse rõhu all sama ruumala, kui neid on võetud nende molekulkaaludega arvuliselt võrdsetes kogustes. Kasutades massi ühikuna mooli (ehk mis on sama: gramm-molekuli, gramm-mooli), võib Avogadro seadust sõnastada järgmiselt: kindla temperatuuri juures ja kindla rõhu all on mis tahes gaasi moolruumalad võrdsed. Nii näiteks 0° *C* juures ja 760 *mm* Hg rõhu all on 1 mooli mis tahes gaasi ruumala 22,41 liitrit.

Boyle'i, Gay-Lussac'i ja Avogadro seadused, mis on eksperimentaalselt leitud, väljendati hiljem teoreetilistest molekulaar-kineetilistest kujutlustest lähtudes (Krönig 1856. a., Clausius 1857. a. ja Maxwell 1860. a.). Molekulaar-kineetilisest vaatepunktist tähendab Avogadro seadus (mis nagu teisedki gaaside seadused on täpne ideaalsete ja ligikaudne reaalsete gaaside puhul), et kahe *gaasi võrdsetes ruumalades sisaldub ühesugune arv molekule, kui need gaasid on sama temperatuuri juures ja sama rõhu all.*

Olgu m_0 hapniku aatomite mass grammides, m — mingi aine molekulide mass, M selle aine molekulikaal: $M = \frac{m}{\frac{1}{16} m_0}$.

On silmanähtav, et mingi aine moolis sisalduvate molekulide arv

$$N = \frac{M \cdot 1\,g}{m} = \frac{16\,g}{m_0},$$

s. o. *mis tahes aine mool sisaldab sama arvu molekule.* See arv võrdub $6{,}02 \cdot 10^{23}$, teda nimetatakse *Avogadro arvuks.*

D. J. Mendelejev näitas 1874. aastal, et Avogadro seaduse tõttu Clapeyron'i võrrand, mis sünteesib Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadusi, omandab suurima ühtsuse siis, kui teda viiakse ühendusse mitte hariliku kaaluühikuga (gramm, kilogramm), vaid gaasi mooliga. Tõepoolest, kuna iga gaasi mooli ruumala 0° *C* ja rõhu 1 *at* juures on 22,41 liitrit, peab gaasikonstandi arvuline väärtus $\frac{p_0 v_0}{273{,}16}$ olema ühesugune, olenemata gaaside keemilisest olemusest[1].

[1] Clapeyron'i võrrandit gaasi ühe mooli kohta nimetatakse mõnikord Mendelejev-Clapeyron'i võrrandiks (ajakirja „Успехи физич. наук", 1951, декабрь ettepanek). Tuleb aga märkida, et selleks ajaks (40 aastat pärast Clapeyron'i publikatsiooni), kui Mendelejev esimesena hakkas süstemaatiliselt teostama arvutusi gaasi mooli kohta, olid kõik gaaside seadused juba teoreetiliselt tuletatud. Keemias ja termodünaamikas valitses mõnda aega traditsioon käsitada neid seadusi empiiriliselt, aga füüsikud nägid neis ainult gaaside kineetilise teooria põhivõrrandi järeldust, mida algusest peale rakendati nii

Gaasikonstanti 1 mooli gaasi kohta märgitakse harilikult tähega R ja nimetatakse *universaalseks gaasikonstandiks:*

$$R = \frac{p_0 v_0}{273{,}16},\ \text{kus}\ p_0 = 1\ at\ \text{ja}\ v_0 = 22{,}41\ l. \tag{4}$$

Kui ruumalas v (ja tähendab ka v_0-s) sisaldub mitte 1 mool gaasi, vaid ν mooli, siis nähtavasti

$$pv = \nu RT. \tag{5}$$

Universaalse gaasikonstandi arvuline suurus oleneb sellest, millistes ühikutes on mõõdetud Clapeyron'i võrrandi vasakpoolses osas seisvad suurused p ja v. Näiteks, kui rõhku mõõta ühikutes kG/cm^2 ja mahtu cm^3-tes, siis $p_0 = 1{,}033\ kG/cm^2$ ja $v_0 = 22\,410\ cm^3$; siit

$$R = \frac{1{,}033 \cdot 22\,410}{273{,}16} = 84{,}80\ \frac{kG \cdot cm}{kraad \cdot mool}.$$

Tabelis 3 on antud gaasikonstandi suurus mitmetes tihti rakendatavates ühikutes.

Kui gaasikonstanti kasutatakse valemis, mille kõik liikmed on väljendatud kalorites, siis peab ka gaasikonstant olema väljendatud kalorites; sel juhul $R \approx 2\ \frac{cal}{kraad \cdot mool}$, täpsemalt

$$R = 1{,}987\ \frac{cal}{kraad \cdot mool}.$$

Gaasi universaalkonstandi arvutamine põhineb, nagu näeme, Avogadro seadusel, mille järgi kõikide gaaside ruumala on olenematult nende keemilisest olemusest $0^\circ C$ ja $p = 1\ at$ puhul

$$v_0 = 22{,}41\ l. \tag{6}$$

Tegelikult gaasi ühe mooli ruumala normaaltingimustes pole suurema osa gaaside puhul mitte päris täpselt 22,41 l (näiteks hapniku ja lämmastiku puhul on ta pisut väiksem, vesiniku puhul veidi suurem). Kui seda R arvutamisel arvesse võtta, siis ilmneb R arvuliste väärtuste vahel teatav erinevus mitmesuguse keemilise koostisega gaaside puhul. Nii saame hapniku puhul $8{,}315 \cdot 10^7$ $erg/kraad \cdot mool$ asemel $8{,}312 \cdot 10^7$, lämmastiku puhul $8{,}314 \cdot 10^7$, vesiniku puhul $8{,}316 \cdot 10^7$. Selline kõrvalekaldumine on seoses

kaalulistes kui ka ruumalaühikutes, eelistades tihti nagu Mendelejevgi just ruumalaühikuid. Maxwell märkis, et paljudeks rakendusteks „kõige tähtsam dünaamilise teooria järeldus seisneb selles, et iga gaasi kuupsentimeeter jääva temperatuuri ja rõhu puhul sisaldab ühesuguse arvu molekule". Juba Clausius (teose „Soojuse mehhaaniline teooria" teine peatükk § 8) soovitas gaaside arvestusi ühendada mitte gaasi kaaluühikutega, vaid ühesuguste gaasi ruumaladega ja rõhutas, et sel puhul Clapeyron'i valemist saadavad võrrandid muutuvad üldisteks kõigi gaaside kohta, vaatamata nende keemilisele olemusele. Tuleb märkida, et võrrand (3) kannab Clapeyron'i nime mitte ainult seepärast, et ta on Clapeyron'i poolt esitatud enne, kui ta teoreetilistest kaalutlustest saadi, vaid peaasjalikult seepärast, et Clapeyron sellele võrrandile toetudes tõi termodünaamikasse graafilise meetodi, mis termodünaamika arengus suurt osa etendas.

Tabel 3

Gaasikonstandi $R = \frac{p_0 v_0}{273{,}16}$ arvulised väärtused väljendatuna mitmesugustes ühikutes.

Rõhu mõõduühik	Ruumala mõõduühik	p_0, väljendatult esimeses lahtris näidatud ühikutes	1 mooli gaasi ruumala normaaltingimustes, väljendatult teises lahtris näidatud ühikutes	R	
düün/cm²	*cm³*	1 013 250	21 410	$8{,}315 \cdot 10^7$	$\frac{erg}{kraad \cdot mool}$
kG/cm²	*cm³*	1,0333	22 410	84,80	$\frac{kG \cdot cm}{kraad \cdot mool}$
kG/m²	*m³*	10,333	0,02241	0,848	$\frac{kG \cdot m}{kraad \cdot mool}$
at	*cm³*	1	21 410	82,06	$\frac{at \cdot cm^3}{kraad \cdot mool}$
at	*l*	1	22,41	0,08206	$\frac{at \cdot l}{kraad \cdot mool}$
mm Hg	*cm³*	750	21 410	$6{,}237 \cdot 10^4$	$\frac{mm\ Hg \cdot cm^3}{kraad \cdot mool}$

asjaoluga, et kõik gaasid hariliku tiheduse puhul üldiselt ei allu mitte päris täpselt Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadustele.

Tehnilistes arvutustes mõõdetakse gaasi massi harilikult moolide asemel kilogrammidega. Olgu ruumalas v n *kg* gaasi. Koefitsient ν Clapeyron'i võrrandis tähendab moolide arvu ruumalas v, s. o. antud juhul n kilogrammis gaasis. Kuna moolis on M *g* (kus M on gaasi molekulkaal), siis ilmselt gaasi ühes grammis on $\frac{1}{M}$ moolist ja järelikult n *kg* gaasis on

$$\nu = n \cdot \frac{1000}{M} \text{ mooli.}$$

Järelikult tehnilisteks arvutusteks kilogrammides võib Clapeyron'i võrrandit kirjutada nii:

$$pv = n \cdot BT, \tag{7}$$

kus $B = \frac{1000}{M} R$.

Muutumatut suurust B nimetatakse gaasi *eri-* (ehk *karakteristlikuks*) konstandiks.

Tihti kirjutatakse Clapeyron'i võrrandit ka järgmiselt:

$$p = B \cdot \varrho T, \tag{8}$$

kus $\varrho = \frac{n}{v}$ on tihedus $\frac{kg}{m^3}$ (on kergesti mõistetav, et tiheduse arvulised väärtused, mis väljendatud ühikutes kg/m^3, on tuhat korda suuremad sama tiheduse arvulisest väärtusest, mis on väljendatud ühikuis g/cm^3).

Kuivõrd kõik reaalsed gaasid kalduvad ühel või teisel määral (ja sealjuures mitte ühteviisi) Avogadro seadusest kõrvale ja ei ole normaaltingimusis mitte päris identsete ruumaladega, kasutatakse täpsemate arvutuste puhul karakteerseid gaasikonstante, mis pole saadud mitte universaalsest gaasikonstandist, vaid arvutatud vahetult gaaside tihedustest normaaltingimustes valemi järgi

$$B = \frac{p_0 v_0}{273{,}16}, \tag{9}$$

kus $p_0 = 1$ *at* ja v_0 on 1 *kg* gaasi ruumala 1 *at* ja 0° *C* juures. Nendel gaasidel, mille puhul juba üsna väikeste surveastmete juures esineb tunduv kõrvalekaldumine Clapeyron'i võrrandist, arvutatakse karakteerse konstandi väärtust graafilise ekstrapolatsiooni meetodi järgi.

Tabelis on antud karakteersete gaasikonstantide väärtused juhul, kui rõhk Clapeyron'i võrrandis on väljendatud kilogrammides ruutmeetrile, ruumala aga kuupmeetrites.

Aine	Keemiline valem	*B*	Aine	Keemiline valem	*B*
Õhk	—	29,27	Süsihappegaas	CO_2	19,14
Vesinik	H_2	422,6	Väävlishapend	SO_2	13,15
Hapnik	O_2	26,47	Metaan (soogaas)	CH_4	52,95
Lämmastik	N_2	30,13	Etüleen	C_2H_4	30,26
Lämmastikoksüüd	NO	28,19	Veeaur	H_2O	47,06
Lämmastikoksüduul	N_2O	19,20	Piirituse aur	C_2H_6O	18,42
Süsinikoksüüd	CO	39,26	Bensooli aur	C_6H_6	10,86

Clapeyron'i võrrand on ligikaudu õige mitte ainult keemiliselt homogeensete gaaside kohta, vaid ka gaaside segu puhul. Karakteersed gaasikonstandid on, nagu nägime, pöördvõrdelised gaasi molekulkaaluga. Teades gaasi keemilist valemit, võib aatomkaalude tabeli põhjal lihtsa summeerimisega alati molekulkaalu määrata, aga järelikult ka grammide arvu, millest koosneb 1 mool antud gaasi.

Asi on nii lihtne siiski ainult keemiliselt homogeensete gaaside puhul. Mitme gaasi segu puhul saab rääkida ainult keskmisest molekulkaalust, see mõiste on oma olemuselt keemiale võõras, kuid füüsikas siiski mitte kasutu.

Keemiliselt heterogeensete ainete (gaaside, lahuste sulamite) *keskmiseks molekulkaaluks* nimetatakse molekulkaalu, mida see

aine omaks, kui ta, olles keemiliselt homogeenne, koosneks molekulidest, mille mass on sama suur nagu keskmine faktiliselt segus sisalduvate molekulide mass.

Koosnegu 1 g segu q_1 grammiosast mingist esimesest ainest molekulkaaluga M_1, q_2 grammiosast teisest ainest molekulkaaluga M_2 jne. Kuna gramm-molekulis on Avogadro arvuga võrdne hulk molekule, siis 1 g esimest ainet sisaldab $\frac{N}{M_1}$ molekuli; tähendab q_1 grammiosa sellest ainest sisaldab $\frac{q_1}{M_1} N$ molekuli, q_2 grammiosa teist ainet sisaldab $\frac{q_2}{M_2} N$ molekuli jne. Järelikult antud segu ühes grammis on $(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots) N$ molekuli.

Olgu M segu keskmine molekulkaal. Ühes segu gramm-molekulis on Avogadro arv molekule, tähendab molekulide arv segu ühes grammis on $\frac{N}{M}$. Järelikult,

$$\frac{N}{M} = \left(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots\right) N$$

või

$$M = \frac{1}{\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots,} \qquad (10)$$

kus $q_1 + q_2 + \ldots = 1$.

Selle valemi järgi arvutatakse keskmine molekulkaal, kui on antud segu kaaluline koostis.

Näiteks õhus on kaaluliselt (ligikaudu) 76% lämmastikku, 23% hapnikku ja 1% argooni. Võtame molekulkaaluks ümardatult lämmastikul 28 ja argoonil 40.

Keskmise molekulkaalu leiame valemi järgi

$$M_{\text{õhk}} = \frac{1}{\frac{0{,}76}{28} + \frac{0{,}23}{32} + \frac{0{,}01}{40}} = 28{,}9.$$

Tähendab õhu 1 gramm-mool on 28,9 g.

On kasulik märkida, et kui segu keskmine molekulkaal oleks ainete molekulkaalude aritmeetiliseks keskmiseks (arvutatud segus nende aine hulka arvestades), siis kehtiks järgmine valem:

$$M = q_1 M_1 + q_2 M_2 + \ldots + q_n M_n \text{ (ebaõige valem!).}$$

Nägime, et tegelikult on keemiliselt mittehomogeense keha keskmine molekulkaal koostisainete molekulkaalude keskmine harmooniline, mille leidmisel muidugi tuleb arvestada nende hulka segu koostises:

$$\frac{1}{M} = \frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots + \frac{q_n}{M_n} \text{ (õige valem).}$$

XV PEATÜKK.

MOLEKULAAR-KINEETILISE TEOORIA ALUSED.

§ 87. Statistiline meetod füüsikas.

Kuivõrd füüsikalised kehad koosnevad üliväikeste osakeste määratust hulgast, mis pealegi liiguvad ülikiiresti, on füüsikul ainult harvadel juhtudel eriliste seadeldiste abil võimalik mõne teatud üksiku osakese liikumist jälgida. Peale nende juhtude tulevad küsimused füüsikaliste kehade pisimate osakeste (molekulide, aatomite, elektronide) liikumisest lahendada erilise matemaatilise meetodi — nõndanimetatud *statistilise meetodi* abil. Statistilist meetodit rakendatakse üldse „massiliste" nähete uurimiseks, s. o. niisuguste nähete uurimiseks, mis koosnevad määratust hulgast lihtsamatest „individuaalsetest" nähetest (üksiknähetest), kusjuures need individuaalsed nähted on oma omaduste poolest sarnased ja (kas või teatava määrani) üksteisest sõltumatud. Massilise nähte näiteks võib olla gaasiline olek: teame, et gaas koosneb määratust hulgast molekulidest, mis liiguvad üksteisest olenematult; iga üksiku molekuli liikumist võib vaadelda kui individuaalset nähet.

Kui individuaalne nähe on teatava määrani läbi uuritud, siis võime, rakendades statistilist meetodit ja sellest arenenud üldist massiliste nähete matemaatilist teooriat (nõndanimetatud tõenäosusteooriat), leida ka massiliste nähete seadusi. Gaaside teoorias uuritakse individuaalset nähet, s. o. üksiku molekuli lendu, mehhaanika seaduste alusel; siit tuletatakse tõenäosusteeoria abil gaasilise oleku seadusi ja gaasilistes ainetes ilmnevate mitmesuguste nähete (viskoossuse, soojusjuhtivuse, difusiooni) seadusi.

Tõenäosusteooria harilik lähenemine tema abil uuritavatele füüsikalistele nähetele seisneb mingi sündmuse niinimetatud *tõenäosuste* ehk teiste sõnadega arvu leidmises, mis näitab, mitmel viisil antud sündmus saab toimuda.

Kui gaas on tasakaalus ja teda ei mõjuta välisjõud, siis on tema tihedus igal pool ühesugune; see tähendab, et kui jaotame mõtteliselt gaasi ruumala väikesteks (kuid mitte liiga väikesteks)

elementideks ehk rakukesteks, siis leiame igas sellises rakukeses võrdse arvu molekule.

Ometi võib ka selles seaduses erandeid märgata. Tõepoolest pole „ideaalse" gaasi molekulid sugugi üksteisega seotud, nende liikumine on täiesti kaootiline; seepärast kas poleks näiteks võimalik, et mingi osa anumast, milles asub gaas, osutub mõneks silmapilguks tühjaks, kuna samal ajal kõik molekulid kogunevad teise ossa? Ammendava seletuse annab sellele küsimusele tõenäosusteooria.

Mõtteliselt osadeks jaotatud gaasiga täidetud ruumala gaasi molekulide võimalikkude jaotuste arvu leidmine näitab, et *mida ühtlasemalt* on molekulid rakkude vahel jaotatud, *seda suurem on võimalikkude jaotuste arv.* Kõige suurema võimalikkude jaotuste arvu saab siis, kui molekulide arv igas rakus on võimalikult võrdne. Kokkuvõte näitab, et sel juhul võimalikkude jaotuste arv on määratu suur, võrreldes kõikide teiste jaotuste koguarvuga. Aga kuna kõik individuaalsed jaotused on üheõiguslikud, siis on määratu tõenäosus selle poolt, et faktiliselt toimub igal momendil *jaotus, mis vastab gaasi ühesugusele tihedusele kõigis kohtades.* Võime ütelda, et selline tiheduste jaotuse tõenäosus on „lähedane tõelisusele". Ometi on võimalikud ka jaotused, mis ühtlase tiheduse tingimustest kõrvale kalduvad, kuid mida suuremad on need kõrvalekaldumised, seda vähem tõenäone on nende toimumine. Boltzmann märkis, et anumasse suletud ja omapead jäetud gaas võib kõik koguneda selle anuma ühe poole sisse, kusjuures teine pool jääb tühjaks; aga sellise sündmuse tõenäosus on palju kordi väiksem kui tõenäosus, et samal päeval üksteisest olenemata tekiks suure linna kõigis majades tulekahju.

Gaasi molekulide ruumilise jaotuse küsimuse lahendusega on harilikult seotud veelgi keerukam küsimus molekulaarsete kiiruste jaotusest tasakaalus olevas gaasis. Ka siin on võimalikud jaotuse tüübid, mis on väga väikese teostumise tõenäosusega, kuna nende toimumine on võimalik ainult võrdlemisi vähestel viisidel.

Näiteiks võivad olla: 1) selline jaotus, kus vaadeldaval momendil iga molekuli kiirus on suunatud piki üht täisnurkse koordinaadi telge; 2) selline jaotus, kus vaadeldaval momendil kõikidel molekulidel on ühesugune kiirus; 3) selline jaotus, kus vaadeldaval momendil gaasiga täidetud ruumi ühes osas grupeeruvad suurte kiirustega molekulid, kuna ülejäänud ruumi osades on väiksemate kiirustega molekulid. Teisest küljest näitab statistiline teooria, et on olemas üks molekulaarsete kiiruste jaotuse tüüp, *mille tõenäosus on ülekaalukalt suur, võrreldes* kõigi teiste tüüpide tõenäosusega, ja millist seepärast *tegelikult arvestatakse kui reeglit;* see on see tüüp, milles molekulide arv, mis omavad seda või teist kiiruse suurust, määratakse Maxwelli seadusega,

mida selgitame järgmises paragrahvis; peale selle mingit kiiruse suurust omavad molekulid on jaotatud ruumis ühtlaselt ja lõppeks, igas antud rakus on nende molekulide kiirused jaotatud võrdselt kõikide suundade vahel. See on niinimetatud *Maxwelli* jaotus, mis iseloomustab *molekulaarset kaost.*

On tarvis rõhutada, et siin näidatud järeldused molekulide endi või nende kiiruste jaotuse kohta kehtivad ainult sel juhul, kui molekulide arv on väga suur, sest ainult siis kehtib *suurte arvude seadus,* mis on statistilise meetodi aluseks[1].

Üheks statistilise meetodi võtteks on mitmesuguste individuaalsetele kõikuvustele alluvate suuruste *keskmiste väärtuste* arvutamine. Nii puutume kokku molekulide keskmise kiirusega ja üksiku molekuli kulgeva liikumise keskmise energiaga.

Enamiku gaaside molekulid koosnevad mitmest aatomist. Iga aatom koosneb positiivselt laetud tuumast ja negatiivsetest tuuma ümber tiirlevatest elektronidest, kusjuures sama elektron võib asetseda kord ühel, kord teisel orbiidil. Aatomite molekuliks liitumisel alluvad nende koostisosad kahtlemata mingile ümberpaigutusele, mida me kõigil juhtudel veel ei tunne, seepärast võime vähe rääkida sellest, milline on enamiku gaaside molekulide ehitus. Peamine, mida teame, on see, et molekuli välises osas on elektronid, tuumad asetsevad sees (keskel). Iga kord kui kaks ühesugust molekuli lähedaselt kokku puutuvad, hakkavad nende vahel mõjuma tõukejõud, mis on tingitud samanimeliste laengute vastastikusest mõjust. Ometi pole meile täiesti teada, milliste seaduste järgi need laengud kõige lähemates kaugustes teineteisele mõjuvad. Molekulide keeruka ehituse tõttu raskendub küsimus kokkupuutuvate molekulide vastastikuse mõju suurusest veelgi rohkem. Seejuures on viljakaks statistilise meetodi rakendamiseks isegi gaaside puhul oluliselt tähtis teada, millise seaduse järgi tõukuvad üksteisele lähenevad molekulid üksteisest eemale. Suureks õnneks teadusele ilmneb, et siin võib teha kaks hüpoteesi, mis on kahtlemata väga jämedad, aga sellest hoolimata annavad paljude küsimuste puhul väga rahuldavaid lahendusi. Need mõlemad hüpoteesid loodi juba siis, kui õpetlastel molekulide ehituse keerukusest veel mingit aimu polnud. Esimene neist, mille rohkem kui 200 aasta eest esitas Daniel B e r n o u l l i

[1] Suurte arvude seadus sõnastatakse nii: küllalt suure arvu sõltumatute katsete juures tuleb arvata tõenäosusega, mis on kui tahes lähedane tõelisusele, et sündmuste esinemiste arvu ja katsete arvu suhe on kui tahes lähedane sündmuse tõenäosusele.

Esitame lihtsa näite selle seaduse selgituseks. Olgu meil ühtlasest materjalist kuup, mille küljed on märgitud numbritega 1 kuni 6. Kuupi visatakse üles, kuidas juhtub, mille järel ta kukub lauale. Tõenäosus, et kuup kukub mingi soovitud küljega ülespoole (näiteks sellega, millel on number 4), väljendub suhtega 1 : 6. Teisest küljest, kui kuupi visata selliselt palju kordi, siis külje 4 esinemise („sündmuse") ja visete („katsete") arvu suhe on 1 : 6.

ja mis on seni kõige laialdasemat rakendust leidnud, seisneb selles, et lähenevad molekulid tõukavad üksteist, nagu oleksid nad ideaalselt elastsed kerakesed. Teine hüpotees, mida arendas 1860. a. Maxwell ning viimasel ajal tunduvalt täiendas Chapmann, oletab, et molekulid mõjuvad vastastikku jõududega, mis on pöördvõrdelised nendevahelise kauguse mingi astmega (Maxwellil — viienda astmega).

Seega väga keeruka loodusnähte asemel, mis on teaduslikule analüüsile seni veel kättesaamatu, tuuakse mingi konkreetne mudel, mis on loodud sellise arvestusega, et tema omadused laias piirkonnas ligikaudu ühtiksid katsetel vaadeldud faktidega. Rõhutame, et ilma niisuguste konkreetsete kujutlusteta poleks teadusel võimalik läbi saada; kui näiteks tahaksime loobuda kujutlusest molekulidest kui elastsetest kehakestest, või nagu jõudude keskmetest, mis on pöördvõrdelised kauguse n astmega, siis tuleks meil kogu gaaside kineetiline teooria teadusest välja heita. Need hüpoteesid on ligikaudselt õiged ja peegeldavad ligikaudu õigesti objektiivset reaalsust; nende õigsuse kriteeriumiks on praktika, eksperiment.

Niisuguste mudelite rakendamisel on aga ka mõningaid miinuseid. Kuivõrd mudel on ebatäiuslik, niivõrd on ka resultaadid, mis tulenevad tema rakendamisest, mitte päris täpsed; et neid parandada, tuleb ka mudelit keerulisemaks muuta, mis kaotab seetõttu oma esialgse lihtsuse. Näide: kahe kokkupõrkuva molekuli kineetiline energia kulub nende deformatsiooniks; kui see deformatsioon saavutab ülima suuruse, siis asetsevad mõlemate molekulide masskeskmed kõige väiksemal kaugusel teineteisest ja on arusaadav, et deformatsioon on seda suurem, väikseim keskmetevaheline kaugus seda väiksem, mida suurem on molekulide kulgeva liikumise kiirus, s. o. mida kõrgem on gaasi temperatuur. Järelikult tehes hüpoteesi, et molekulid on elastsed ja kerakujulised, peame neile kerakestele omapärase erinevuse omistama: nende läbimõõt peab gaasi temperatuuri tõusmisel vähenema (kuna kõige väiksem kokkupõrkavate molekulide keskmete kaugus ongi see, mida meil mudeli puhul nimetatakse molekuli läbimõõduks). Kuivõrd me kasutame seda uut konkreetset vormi, sedavõrd on ka saadavad tagajärjed suuremas kooskõlas katsetega.

Mudelite kasutamisel on ka veel see eelis, et teooria muutub matemaatiliselt lihtsamaks. Näiteks kui me päris täpselt teaksime, kuidas muudavad kahe molekuli koostisosad molekulide kokkupõrkel oma asendit, siis oleks kõiki neid muutusi matemaatiliselt arvestada muidugi väga raske; elastsete kerakeste hüpotees päästab meid sellest raskusest. Niiviisi toome sagedasti (eriti orienteeruvates arvutustes) teadlikult teooriasse faktiliselt ebaõigeid oletusi, et lihtsustada arutlusi, mis annavad ligikaudseid (mõni-

kord isegi üsna jämedalt ligikaudseid), aga siiski väärtuslikke tulemusi.

Hüpoteesi suhtes, et molekulide kokkupõrked toimuvad ideaalselt elastsete kerakeste seaduste järgi, tuleb veel seda märkida: kasutamiseks on küllaldane, et see hüpotees õigustuks keskmiselt. Mis aga puutub üksikute molekulide kokkupõrgetesse, siis on kindlaks tehtud, et kõrvuti ideaalselt elastsete kokkupõrgetega, kus ühesugused molekulid kiirusi vahetavad, tuleb ette ka mitte päris elastsete põrgete juhte, kus molekulide kineetiline energia osaliselt muutub aatomisiseseks energiaks ja sellega ühenduses toimub elektronide ümberpaigutusi ühtedelt orbiitidelt teistele; selliseid põrkeid nimetatakse mitteelastseteks *esimest liiki põrgeteks.* Teistel juhtudel on põrge „rohkem kui elastne", s. o. molekuli liikumisenergia kasvab kokkupõrkel aatomisisese energia teatava vähenemise arvel — *teist liiki põrge.* On leitud, et mitteelastsed põrked energia muundumisega molekulide liikumisenergiast aatomisiseseks või aatomisisesest molekulide liikumisenergiaks toimuvad tegelikult alatasa.

Gaas, mis on suletud mingisse soojusest isoleeritud anumasse ja millel ei ole ühendust välisilmaga, ei soojene ega jahtu iseenesest. Siit võib järeldada, et esimese ja teise liigi põrgete puhul molekulaar-kineetilise energia muundumine aatomisiseseks ja vastupidine energia muundumine keskmiselt vastastikku kompenseeruvad. Seepärast võib paljudel juhtudel jätta mitteelastseid põrkeid tähele panemata; hüpotees, et kõik molekulide kokkupõrked alluvad ideaalselt elastsete kerakeste seadustele, ei ole küll õige, kuid osutub sellest hoolimata seaduslikuks (ei tekita mingeid vigu) gaaside molekulaar-soojuslikku liikumist iseloomustavate mitmesuguste suuruste keskmisi väärtusi arvutades.

§ 88. Maxwelli seadus molekulaarsete kiiruste jaotusest gaasis.

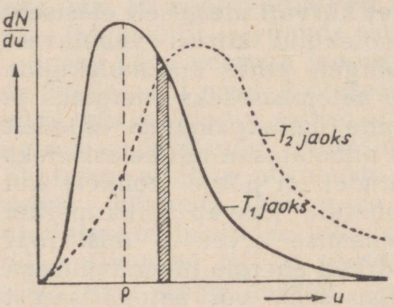
Eespool on rohkem kui üks kord rõhutatud molekulaarsete liikumiste korrapäratust, kaootilisust. Ometi leidis inglise füüsik Maxwell 1860. a. täpse seaduse, millele alluvad antud gaasilise aine molekulide kiirused (kusjuures eeldatakse, et kõik selle gaasi molekulid on ühesugused ja temperatuur on kõigis gaasi osades sama). Seda seadust kujutab joonis 269. Sellel on abstsisstеljele kantud mitmesugused üksikule gaasimolekulile võimalikud kiiruste väärtused nullist kuni mingi maksimaalse suuruseni ja ordinaatteljele molekulide hulk, mis omavad antud abstsissile vastavat kiiruse väärtust[1]. See hulk jääb muutmatuks, tema koos-

[1] Kui u ja $u + du$ on kaks teineteisele väga lähedast abstsissi väärtust, aga $\frac{dN}{du}$ — vastav ordinaadi keskmine väärtus, siis $\frac{dN}{du} \cdot du = dN$ (graafiku elementaarvöö pind) on molekulide arv, mille kiirused on vahemikus (u, u + du).

tis aga muutub kogu aeg molekulidevaheliste kokkupõrgete tagajärjel (kuna kokkupõrkavate molekulide kiirus muutub järsku iga põrke puhul).

Graafik ja tabel 4 näitavad järgmist:

1) väikese kiirusega molekulide arv on gaasimolekulide üldarvuga võrreldes väga väike;



Joon. 269. Maxwelli molekulaarsete kiiruste jaotuse seadus kahe temperatuuri T_2, T_1 kohta.

2) väga väike on ka väga suurte kiirustega molekulide arv;

3) on olemas üks kiiruse väärtus, mis esineb sagedamini kõigist teistest kiiruste väärtustest, niinimetatud *tõenäoseim kiirus* ϱ; sellele väärtusele vastab jaotuskõvera maksimum;

4) suurel protsendil kõigist molekulidest on kiirused, mis ei erine kuigi palju tõenäosemast kiirusest (tabel 4), seepärast mõnedes lihtsustatud orienteeruvates arvutustes võib lähtuda oletusest, et kõikidel molekulidel on ligikaudu sama kiirus.

Analüütiliselt väljendub Maxwelli molekulaarsete kiiruste jaotuse seadus järgmise valemiga:

$$dN = N \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u}{\varrho}\right)^2 \cdot e^{-\left(\frac{u}{\varrho}\right)^2} \cdot d\left(\frac{u}{\varrho}\right); \qquad (1)$$

siin N on antud gaasi massis olevate molekulide üldarv, dN molekulide arv, mille kiirused on vahemikus $(u,\ u + du)$, ϱ on molekulide tõenäoseim kiirus.

Joonisel 269 näitab teine punktiirjoonega kujutatud aeglasema langusega kõver kiiruste jaotust Maxwelli seaduse järgi kõrgema temperatuuri puhul kui see temperatuur, millele vastab esimene kõver. Nende kahe kõvera kõrvutamine selgitab näitlikult Maxwelli võrrandi (1) omadusi. Näeme, et temperatuuri tõstmise puhul kasvab tõenäoseim kiirus (jaotuskõvera maksimum nihkub paremale); see vastab sellele olukorrale, et molekulide kiirused temperatuuri tõstmisel üldse kasvavad. Maxwelli kõver muutub temperatuuri tõusmisel vähem järsuks: see tähendab, et temperatuuri tõstmisel molekulide kiiruste jaotus muutub mõnevõrra ühtlasemaks. Mida kõrgem temperatuur, seda kõrgemale tõuseb kõvera parempoolne haru ja seda madalamale langeb pahempoolne; see tähendab, et temperatuuri tõusmisel järjest enam suureneb nende molekulide osatähtsus, mille kiirused ületavad tõenäoseimat kiirust, ja väheneb väikeste kiirustega molekulide arv.

Tabel 4

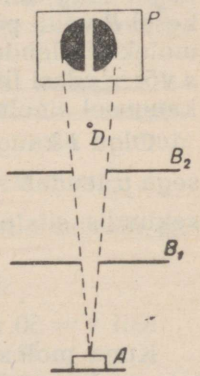
Lämmastiku molekulide kiiruste jaotus Maxwelli seaduse järgi toatemperatuuril.

Kiiruste piirkond *m/sek*	Protsent molekulide üldarvust, mille kiirus on näidatud piirides.
$0 < u < 100 \ldots$	1
$100 < u < 300 \ldots$	25
$300 < u < 500 \ldots$	42
$500 < u < 700 \ldots$	24
$700 < u < 900 \ldots$	7
$900 < u \quad \ldots$	1

Molekulide kiiruste jaotuse seadus esitab tüüpilist *statistilise seaduse* juhtu. Sedalaadi seadustes esitatakse väiteid, millel on väga suur tõenäosus, aga millele ei või vaadata kui täiesti kindlatele. Statistiline iseloom on omane igale nähtele, mis toimub suure arvu indiviidide keskkonnas. Tänapäeval on statistiline meetod saanud üheks füüsika põhiliseks meetodiks.

Tähtis on märkida, et Maxwelli seadus kehtib rangelt ainult sel juhul, kui keha on makroskoopiliselt paigalseisus[1].

Viimase kümne aasta jooksul on teostatud katseid, mis lasevad vahetult vaadelda gaasimolekulide liikumist ja mõõta selle liikumise kiirust.

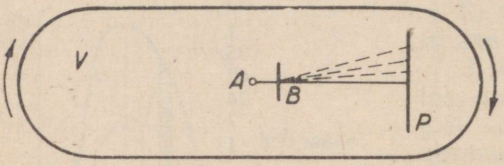


Joon. 270. Skeem katsest molekulide kimbuga.

Kui gaasiga täidetud anumast molekulid väikese augu kaudu täiesti tühja ruumi lendavad, siis on nende liikumine sirgjooneline ja ühtlane. Selle liikumise jälge saab vaadelda järgmiselt (Dunoyer, 1911. a.; joon. 270); äärmiselt hõrendatud ruumi asetatakse molekulide allikas *A* (Dunoyer' katsetes oli selleks tükk naatriumi, mis tekitas vaakuumis auru); B_1 ja B_2 on kaks ümmarguste avadega vaheseina, mis eraldavad koonilise lendavate osakestega täidetud piirkonna. Kui osakesed tõepoolest lendavad sirgjooneliselt, siis peab ekraanil *P* tekkima ringikujuline naatriumikiht. Seda oli ka tõepoolest näha. Kui molekulide kimbu teele asetada mingi takistus (näiteks traat *D*), siis tekib ekraanil selle takistuse „vari" (joonisel on ekraan *P* kujutatud oma tõelisest seisundist 90° võrra ärapööratuna).

[1] Terminit makroskoopiline (kreeka keeles *macros* — suur) vastandatakse terminile *mikroskoopiline*. Kui liikumist või paigalseisu nimetatakse makroskoopiliseks, siis tähendab see seda, et kõneldakse mateeria tunduva, väga palju molekule sisaldava osa liikumisest või paigalseisust. Molekulide korrapäratu liikumine ei häiri makroskoopilist paigalseisu.

Eriti huvitav oli eksperimentaalselt leida, kas molekulikimbu kiirus ühtib tema teoreetilise väärtusega. Vastava katse korraldas Štern (1920. a.). Katse idee on selgitatud joonisel 271: V on anum, milles on kõrgvaakuum. Anumas asetseb molekulide allikas A (hõbetatud plaatinatraat, mida kuumutatakse elektrivooluga). Hõbeda auru osakesed lendavad mööda sirgeid trajektoore ümbritsevasse ruumi keskmise kiirusega, mis vastab traadi temperatuurile. Ühe või mitme aukudega vaheseina B abil eraldatakse hajuv molekulide kimp, mis tekitab hõbedakihi klaasist plaadikesel P (hõbeda osakestel on omadus juba toatemperatuuris klaasile sattudes selle külge kinni jääda). Vaheseintes olevatele augukestele on antud selline kuju, et saadav jälg oleks sirgjoone kujuline. Kui kogu seadis panna pöörlema telje ümber, mis on risti molekulide kimbu suunaga (ja risti ka joonise tasapinnaga) ning läheb läbi punkti A, siis nihkub hõbeda jälg plaadikesel P veidi pöörlemisele vastassuunas. Tõepoolest: kuni hõbeda molekulid lendavad A-st plaadini P, jõuab viimane mingi kauguse s võrra edasi liikuda, nii et molekulidest jäetud jälg asetseb samal kaugusel s eelmisest jäljest.



Joon. 271. Šterni katse skeem.

Olgu l kaugus A ja P vahel; aeg, mille vältel molekul kiirusega u lendab A-st kuni P-ni, on $t = \frac{l}{u}$. Kui seadis teeb tiiru ühes sekundis, siis plaadikene käib aja t jooksul läbi tee:

$$s = 2\pi l \cdot vt = 2\pi \frac{l^2 v}{u}.$$

Kui $v = 50\ sek^{-1}$, $l = 10\ cm$, $u = 500\ m/sek$, siis $s = 6\ mm$.

Kuna molekulide kiirused jaotuvad Maxwelli seaduse järgi, siis on ka s väärtustel teatud „jaotus", mille tõttu joon tuleb mõnevõrra laialivalguv. Ümberpöördult võiks ka kihi paksuse jaotuse järgi tuletada molekulide kiiruste jaotuse seadust.

Molekulide kiiruste jaotuse teoreetilist põhjendust analüüsis põhjalikult vene füüsik N. N. Pirogov reas töödes, mis ilmusid 1886.—1891. a. Pirogov näitas, et vastupidiselt molekulide kokkupõrgetele (põrked tekitavad kiiruste jaotust vastavalt Maxwelli seadusele) avaldavad gaasi piiravad seinad molekulide kiirustele ühtlustavat mõju — püüavad viia kõikide molekulide kiirusi ühesuurusteks.

Gaaside kaal vaadelduna molekulaar-kineetilisest vaatepunktist. Igal antud momendil puutub anuma seinte ja põhjaga kokku

ainult väike osa gaasi molekulidest. Teiste molekulide raskus ei saa sel momendil anuma põhjale mõjuda, kuna ei ole vastastikku mõjuvaid jõude. Tekib küsimus: millega seletub asjaolu, et kuigi suurem osa molekule igal antud momendil otseselt kaalude tasakaalule ei mõju, ometi gaasi kaal võrdub kõikide tema molekulide kaalu summaga?

Gaasi raskuseks nimetame tema ülerõhku anuma põhjale, s. o. alumisele ja ülemisele põhjale mõjuvate rõhkude vahet. See ülerõhk tekib kiirenduse tagajärjel, mille molekulid saavad raskusväljas. Arutluse lihtsustamiseks kujutleme, et kuubikujulises kastis, mille kaks põhja asetsevad horisontaalselt, liigub üks gaasi molekul. Jagame mõttes molekuli kiirusvektori kolmeks vastastikku risti olevaks komponendiks: üheks vertikaalseks, mida tähistame u-ga, ja kaheks horisontaalpinnal asetsevaks. Need viimased meid ei huvita: nad põhjustavad molekuli rõhku anuma külgedele ja raskusväli nendele ei mõju. Kui molekul põrkub vastu alumist või ülemist seina, siis tema kiiruse vertikaalne komponent muudab märki ja järelikult: liikumishulga geomeetrilise muutusega võrdne iga põrke impulss mu— (—mu) = 2 mu. Tähistame molekuli kiiruse vertikaalset komponenti ülemise seina juures tähisega u_1 ja alumise seina juures u_2. Siis tekib molekuli iga ülemisest seinast alumiseni käigu tagajärjel rõhkude vahe nende seintele, mis võrdub $2\,mu_2 - 2\,mu_1$.

Olgu t aeg, mille vältel molekul liigub ülemisest seinast alumiseni, ja n molekuli põrgete arv mõlema seina vastu ühes sekundis. Kuna põrge kummagi seina, näiteks ülemise vastu toimub ajavahemikul, mille kestus on 2 t, siis silmanähtavalt $n = \frac{1}{2t}$.

Rõhk alumisele seinale on $2\,mu_2 n$, rõhk ülemisele seinale on $2\,mu_1 n$, nende vahe

$$p_2 - p_1 = 2\,m\,(u_2 - u_1)\,n = m\,\frac{u_2 - u_1}{t}.$$

Kuna g on raskuskiirendus, siis on silmanähtav, et

$$u_2 = u_1 + gt,$$

kust

$$p_2 - p_1 = mg.$$

Järelikult gaasi iga molekul tekitab anuma põhjale ülerõhu, mis on võrdne selle molekuli kaaluga.

Toodud arutlustest tekib küsimus: kui iga molekul oma liikumisel ülevalt alla saavutab mingi kiirenduse, siis kas ei tähenda see seda, et gaasi soojuslik tasakaal raskusväljas iseloomustub molekulide keskmise kiiruse ebaühtlase väärtusega ülemistes ja alumistes gaasikihtides? Esimesel pilgul võib näida, et keskmine kiirus all on suurem kui ülemistes kihtides. Ometi ei ole see nii. Asi on selles, et raskusväli ei mõjuta ainult moleku-

lide kiiruste vertikaalset komponenti, vaid ka molekulide tiheduse jaotust. Gaasi soojusliku tasakaalu puhul muutub tihedus raskusväljas olevas gaasis baromeetrilise seaduse järgi. Ruumalaühikus olevate molekulide arv, mille kiirus on u, on alumistes gaasikihtides suurem kui ülemistes. Seepärast, nagu näitab täpne arvutus, on kiiruse väärtus ülemistes ja alumistes kihtides ühesugune. Analoogiliselt: kui mingis linnas teatud eas olevate elanike arv on kaks korda suurem samaealiste elanike arvust teises linnas ja sama suhe kehtib iga vanuse kohta, siis on elanike keskmine vanus mõlemas linnas ühesugune.

Et õigesti mõista eespool puudutatud probleemi (mida kõige enne uuris Maxwell ja mis on tuntud *Maxwelli paradoksi* nime all), on vaja mõista, et baromeetriline rõhu muutumine ja raskusvälja tõttu toimuv ideaalse gaasi molekuli kiiruse vertikaalse komponendi muutumine — need on kaks sama fakti väljendusviisi. Ülemisest kihist alumisse ja alumisest ülemisse liikuvate molekulide kiiruse vertikaalse komponendi muutus tekitab raskusväljast põhjustatud rõhkude vahe kahes teineteise peal asuvas horisontaalses gaasikihis. Samal põhjusel toimub alumiste gaasikihtide tihenemine, millega kindlustatakse ka keskmiste kiiruste võrdsus.

Näeme seega, et gaaside kaalu võime ühesuguse õigusega vaadelda kui molekulide allaliikumisel saavutatava kiirenduse tagajärge või nagu baromeetriliste rõhkude vahe avaldust.

§ 89. Gaaside kineetilise teooria põhivõrrand.

Tuletame väga tähtsa võrrandi, mis esitab seose gaasi rõhu p, ruumala v ja molekulide kulgeva liikumise kineetilise energia E vahel.

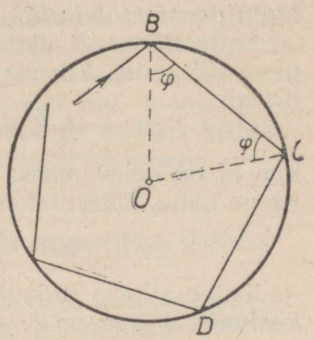
Tuletuskäigu lihtsustamiseks oletame, et anum, millesse gaas on suletud, on kerakujuline, raadiusega R; võrrandi lõplik õigsus ei olene aga sellest, milline kuju on anumal ja kas teda üldse on.

Teeme järgmise oletuse: vaadeldav gaas on niivõrd hõre või jälle tema molekulid niivõrd väiksed, et nende kokkupõrked ei toimu kuigi sagedasti, nii et iga molekul põrkab mitu korda anuma seina vastu, enne kui ta põrkab vastu teist molekuli. (Me teeme selle oletuse ainult arutluste lihtsustamise eesmärgil; selle võib ka tegemata jätta, kokkuvõttes jõuaksime ikkagi samade tulemusteni, kuid keerulisemate arvutuste kaudu.)

Kokkupõrgete kohta oletame, et need toimuvad täiesti elastsete kerade põrgete seaduste järgi.

Vaatleme üksiku molekuli liikumist anuma sisemuses. Olgu molekuli mass m ja tema kiirus u. Põrkugu ta punktis B vastu seina. Joonis 272 kujutab kerakujulise anuma läbilõiget, mis läbib kera keskpunkti O ja molekuli liikumise trajektoori. On kerge

mõista, et vaadeldav molekul liigub selle läbilõike pinnal seni, kuni ta ei põrka kokku teise molekuliga, et tema tee koosneb võrdsetest kõõludest *BC*, *CD* jne. ja et tema põrkenurgad vastu seina ja tagasipõrkenurgad on iga kord sama suurusega φ.



Joon. 272. Gaaside kineetilise teooria põhivõrrandi tuletamiseks.

Meie ülesandeks on arvutada gaasi rõhku p, s. o. seda jõudu, millega molekulid mõjuvad löökide kaudu anuma seina pinna ühikule. Selleks määrame kõigepealt impulsi, mille sein annab molekulile iga põrke puhul. See impulss on võrdne molekuli liikumishulga juurdekasvuga ja kuna põrke puhul seina vastu muutub ainult normaalne molekuli liikumishulga komponent, siis on näidatud impulss võrdne järelikult vahega $mu \cos \varphi - (-mu \cos \varphi) = 2mu \cos \varphi$. Newtoni kolmanda seaduse alusel annab molekul sama suure impulsi iga löögi puhul ka seinale. Kuna molekuli poolt ühe sekundi jooksul läbikäidud tee on u ja kuna molekul ühest põrkest vastu seina kuni teiseni käib ära tee $2R \cos \varphi$ (võrdse kõõlule), siis antud molekuli põrgete arv ühes sekundis on $\frac{u}{2R \cos \varphi}$; seega on vaadeldava molekuli poolt ühes sekundis seinale antav impulss kokkuvõttes:

$$2mu \cos \varphi \frac{u}{2R \cos \varphi} = \frac{mu^2}{R}.$$

Kuid k õ i g i molekulide poolt sekundis seinale antav koguimpulss on $\frac{1}{R} \Sigma mu^2$, kusjuures summeeritakse üle kõigi molekulide (mitmesugused molekulid on erineva kiirusega, nad võivad olla ka erineva massiga: meie gaas võib olla gaaside segu).

Nüüd on juba kerge leida gaasi rõhku. See pole midagi muud kui seina pinnaühikule ühes sekundis antav koguimpulss ja nimelt:

$$p = \frac{\Sigma mu^2}{R \cdot 4\pi R^2} = \frac{\Sigma mu^2}{4\pi R^3} = \frac{{}^1/_3 \Sigma mu^2}{{}^4/_3 \pi R^3} = \frac{{}^2/_3 \Sigma \frac{mu^2}{2}}{{}^4/_3 \pi R^3}.$$

Kuid $\Sigma \frac{mu^2}{2}$ on gaasi molekulide kulgeva liikumise kineetiline energia E, ja ${}^4/_3 \pi R^3$ on gaasi ruumala v, seepärast kirjutatakse viimane valem ümber:

$$p = \frac{{}^2/_3 E}{v}, \qquad (2)$$

mis tähendab: *gaasi rõhk on arvuliselt võrdne kahe kolmandikuga gaasi ruumalaühikus olevate molekulide translatoorse lii-*

kumise energiast. Leitud võrrand ongi gaaside kineetilise teooria põhivõrrand. Teda võib kirjutada ka nii:

$$pv = {}^2/_3 E, \tag{3}$$

s. o. gaasi rõhu ja ruumala korrutis on võrdne kahe kolmandikuga gaasi molekulide kulgeva liikumise energiast.

Selle võrrandi abil on kerge teha järeldust molekulide kulgeva liikumise kiiruse suuruse kohta. Teisendame seda võrrandit nii:

$$pv = {}^1/_3 \Sigma mu^2 = {}^1/_3 mN \cdot \frac{1}{N} \Sigma u^2 = {}^1/_3 Mc^2,$$

kus M on gaasi mass, aga c — ruutkeskmine kiirus, mida, nagu kerge näha, määratakse valemiga:

$$c = \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots}{N}}. \tag{4}$$

Tuleb silmas pidada, et ruutkeskmine kiirus c ei ole võrdne *keskmise kiirusega* $\bar{u}$*:*

$$\bar{u} = \frac{|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots}{N}. \tag{5}$$

Keskmine kiirus on gaasi molekulide kiiruste aritmeetiliste suuruste keskmine väärtus, kuna ruutkeskmine kiirus esitab suurust, mille ruut on võrdne gaasi molekulide kiiruste ruutude keskmise väärtusega.

Ülaltoodud võrrand näitab, et teades gaasi rõhku, ruumala ja massi, on võimalik arvutada ruutkeskmist kiirust valemi

$$c = \sqrt{3 \frac{pv}{M}} \tag{6}$$

järgi.

Maxwelli kiiruste jaotuse seaduse alusel võib näidata, et keskmine kiirus on võrdeline ruutkeskmise kiirusega, ja nimelt

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot c; \tag{7}$$

tõenäoseim kiirus ϱ on samuti võrdeline ruutkeskmise kiirusega:

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot c. \tag{8}$$

Kuna $3\pi > 8$, siis näeme, et ruutkeskmine kiirus c veidi (umbes 8% võrra) ületab keskmist kiirust u, aga viimane omakorda on suurem (1,22 korda) kui tõenäoseim kiirus ϱ:

$$c > \bar{u} > \varrho.$$

Gaaside kineetilise teooria põhivõrrandi tuletas esmakordselt Peterburi akadeemik Daniel Bernoulli 1738. aastal (s. o. 110 aastat varem kui teadusse toodi energia mõiste; Bernoulli leidis õige suhte gaasi rõhu, tema tiheduse ja molekulide liikumise ruutkeskmise kiiruse vahel).

Et gaasi rõhk koostub impulssidest, mida üksikud gaasimolekulid tekitavad nende liikumissuuna muutmisel, seda on täie kindlusega näidanud mitmesuguste võrrandi (2) järelduste ühti-

mine katseliste faktidega. Peale selle näitavad mõned eksperimendid vahetult, kuidas tekib gaasi rõhk. Selliste eksperimentide hulgast paistavad silma idee lihtsuse ja läbiviimise hoolikuse poolest katsed, mida 1928. aastal teostas prof. A. S. Predvoditelev. A. S. Predvoditelev kattis kerge plaadikese, mis oli niidi abil vaakuumi riputatud, ühe külje soola hüdraatidega. Kristalliseerimisvesi aurus soolast. Iga aurumise akti puhul andis veemolekul plaadikese pinnalt lahkudes plaadile impulsi mu (nagu püssi tagasilöök tulistamisel). Selle tagajärjel plaadike kaldus kõrvale mingi nurga võrra, mida mõõdeti ja kõrvutati arvutustega.

§ 90. Absoluutse temperatuuri molekulaar-kineetiline mõiste.

Nagu juba eespool näidati, allub ideaalne gaas kineetilise teooria põhivõrrandile. Kirjutame selle võrrandi ühe mooli kohta:

$$pv = \tfrac{2}{3}E.$$

Siin

$$E = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2$$

on gaasi ühes moolis sisalduvate molekulide kulgeva liikumise energia.

Teisest küljest allub ideaalne gaas Clapeyron'i võrrandile:

$$pv = RT.$$

Mõlemate võrrandite kõrvutamine annab:

$$E = \frac{3}{2}RT.$$

Jagame selle võrduse mõlemad pooled ühe mooli molekulide arvuga, s. o. $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$; siis võrrandi vasak pool kujutab ühe molekuli kulgeva liikumise keskmist energiat:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}kT,$$

kus

$$k = \frac{R}{N} = 1{,}38 \cdot 10^{-16}\ erg/kraad \cdot mool.$$

Võrdetegurit k, mis on universaalne gaasikonstant üksiku molekuli kohta, nimetatakse *Boltzmanni konstandiks.*

Näeme, et absoluutne temperatuur T ainult konstantse teguri k poolest erineb *Maxwelli ideaalse gaasi* ühe molekuli keskmisest kulgeva liikumise energiast. Tuletuskäigu mõttest on silmanähtav, et võrdetegur k jääb samaks üheaatomiliste ja mitmeaatomiliste gaaside puhul. Võib öelda, et absoluutse temperatuuri mõõduks on Maxwelli ideaalse gaasi molekuli kulgeva liikumise energia.

Oeldust järeldub näitlik kujutlus temperatuuri absoluutsest nullist. Absoluutne null (mis vastab 273,16° *C*) on see temperatuur, mille juures molekulide kulgev liikumine Maxwelli ideaalses gaasis lakkab.

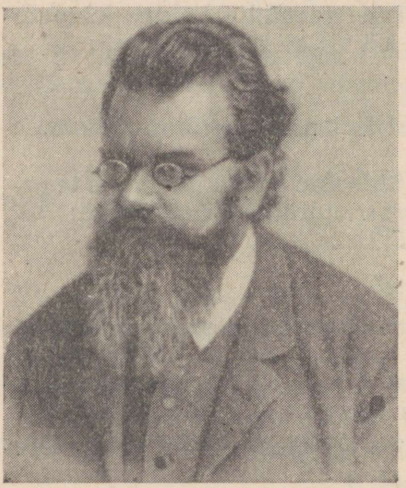
Mitmesuguste gaaside kulgeva liikumise ruutkeskmise kiiruse arvutamiseks pöördume valemi (9) juurde:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{3}{2}kT; \tag{10}$$

siin on m — molekuli mass, k — Boltzmanni konstant. Korrutame selle valemi mõlemad pooled Avogadro arvuga N.

Arvestades, et korrutis mN esitab gaasi molekulkaalu, korrutis kN aga on võrdne universaalse gaasikonstandiga R, leiame, et

$$c = \sqrt{3\frac{RT}{M}}. \tag{11}$$



Ludvig Boltzmann (1844—1906).

Atomaarse vesiniku kiiruseks 0° C juures saame ($M = 1$, $R = 8{,}315 \cdot 10^7$ *erg/mool · kraad*, $T = 273{,}16$):

$$c = \sqrt{3 \cdot 8{,}315 \cdot 10^7 \cdot 273{,}16} = 2{,}6 \cdot 10^5 \text{ cm/sek} = 2600 \text{ m/sek}.$$

Niisiis, 0° C juures on atomaarse vesiniku kulgeva liikumise ruutkeskmine kiirus 2600 *m/sek*. Sama temperatuuri juures on mis tahes teise gaasi ruutkeskmine kiirus $\sqrt{M}$ korda väiksem (M — molekulkaal); seega hariliku molekulaarse vesiniku puhul ($M = 2$)

$$c = \frac{2600}{\sqrt{2}} = 1840 \text{ m/sek};$$

hapniku puhul ($M = 32$) saame $c = 461$ *m/sek*.

Kiiruste aritmeetiline keskmine $\bar{u}$, nagu mainiti paragrahvis 89, on ruutkeskmisest kiirusest umbes 8% väiksem:

$$\bar{u} = 0{,}92\ c;$$

tõenäoseim kiirus on veel väiksem:

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, c \approx 0{,}815\ c,$$

järelikult

$$\frac{m\varrho^2}{2} = kT. \tag{12}$$

Olgu ruumalas v gaaside 1, 2, 3 jne. segu.

Kuna gaasisegu rõhk p on kõikide segu molekulide põrgete mõju summaarne resultaat, siis võime kirjutada:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots, \tag{13}$$

kus p_1, p_2, p_3 jne. on rõhud, mida iga *komponendi*[1] molekulid

[1] Komponendiks (ladina k. *compono* — panen kokku) nimetatakse segu keemiliselt individuaalset koostisosa.

eraldi avaldavad. See võrrand väljendab seadust, mille leidis eksperimentaalselt inglise õpetlane Dalton 1802. aastal: *iga komponendi rõhk on selline, nagu täidaks vaadeldav komponent üksinda kogu ruumala, s. o. nagu ei oleks teisi komponente olemaski.*

Rõhkusid p_1, p_2, p_3 jne. nimetatakse *partsiaalseteks*[1] rõhkudeks (osarõhkudeks).

Daltoni seadus järeldub gaaside kineetilise teooria põhivõrrandist. Tõepoolest, gaaside segu molekulide kulgeva liikumise energia (sedavõrd kui oletatakse, et molekulide vahel pole tunduvaid vastastikuseid jõudusid) on võrdne segu koostisse kuuluvate gaaside energiate summaga:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

Segu kohta tervikuna kehtib võrrand

$$pv = \tfrac{2}{3}E.$$

Seesama võrrand kehtib muidugi ka iga gaasi kohta eraldi võetuna; kui neist gaasidest igaühte võtame selles hulgas, nagu see gaas kuulub segu koostisse, selle sama temale kuuluva energia väärtustega E_1 või E_2 jne. ja laseme tal enda alla võtta ruumala v, siis oleme õigustatud kirjutama niisugust võrrandite süsteemi:

$$p_1 v = \tfrac{2}{3}E_1,$$
$$p_2 v = \tfrac{2}{3}E_2$$

jne.

Liites need võrrandid, kasutades ülalpool kirjutatud võrdust segusse kuuluvate gaaside energiate summa kohta ja taandades niiviisi saadud võrrandit ruumalaga v, saame Daltoni seaduse:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$

§ 91. Absoluutse temperatuuri täpsustatud (termodünaamilisest) mõistest.

Mitteküllaldaselt hõrendatud gaasid ei allu päris rangelt Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadustele; tugevasti kokkusurutud gaaside puhul ei kehti Clapeyron'i võrrand. Clapeyron'i võrrandi ebatäpsus seletub sellega, et gaasi molekulide vahel eksisteerivad vastastikku mõjuvad jõud; vastastikku mõjuvad jõud rikuvad molekulide liikumiste ühtlust ja sirgjoonelisust; samuti molekulide endi ruumala vähendab vaba ruumi, milles molekulide liikumine võib takistamatult toimuda.

Kujutletavat gaasi, mille molekulide vahel üldse pole vastastikuseid külgetõmbejõude, tõukejõud aga mõjuvad nii, nagu oleksid aatomid lõpmata väiksed elastsed kerakesed, nimetatakse *ideaalseks gaasiks.*

[1] Partsiaalne (ladina k. *pars* — o s a) — osaline.

Statistilise mehhaanika kiire ja edukas areng on näidanud, et kujutlus ideaalsest gaasist osutub üsna täpseks reaalsete hõrendatud gaaside mudeliks. Ometi on viimastel aastatel selgunud, et kujutlus ideaalsest gaasist vajab mingit printsipiaalselt vajalikku täiendust. Nimelt olenevad gaasi omadused sellest, millise seaduse järgi gaasi molekulide kiirused on jaotatud, kui gaas viibib tasakaaluolekus. Meie nimetame *Maxwelli ideaalseks gaasiks* sellist ideaalset gaasi, mille kohta Maxwelli kiiruste jaotuse seadus kehtib gaasi iga (kui tahes madala ja kui tahes kõrge) temperatuuri ja igasuguse tiheduse juures. On alust arvata, et reaalsetel mitte väga hõrendatud gaasidel absoluutse nulli lähedaste temperatuuride juures molekulide kiirused on jaotatud mitte Maxwelli, vaid teiste seaduste järgi: mõnedel gaasidel Bose poolt tuletatud seaduse järgi, teistel Fermi poolt tuletatud seaduse järgi. Aatomi tuumade ehitusest olenevalt võib kehtida kas Bose või Fermi seadus; mis aga puutub Maxwelli seadusse, siis oletatakse, et absoluutse nulli lähedaste temperatuuride juures see ei peaks kehtima. Vastavalt ideaalse gaasi kolmele molekulide kiiruste jaotuse seadusele me eristame kolme ideaalse gaasi teisendit: *Maxwelli ideaalset gaasi, Bose ideaalset gaasi* ja *Fermi ideaalset gaasi.*

Molekulide kiiruste jaotus Bose ja Fermi seaduste järgi erineb Maxwelli jaotusest ainult väga madalate temperatuuride juures; harilike ja ka kõrgete temperatuuride juures kõik kolm molekulide kiiruste jaotuse seadust praktiliselt ühtivad. Järelikult peavad kolm nimetatud ideaalse gaasi teisendit harilike ja kõrgete temperatuuride juures olema ühesuguste omadustega, kuid väga madalate temperatuuride juures on nende omadused erinevad.

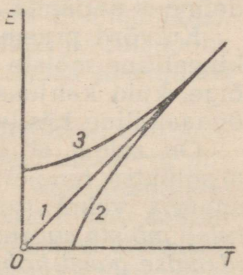
Statistilises mehhaanikas tõestatakse, et Clapeyron'i võrrand osutub Maxwelli ideaalse gaasi täpseks olekuvõrrandiks. Ometi selleks, et Clapeyron'i võrrand oleks päris täpseks ideaalse gaasi olekuvõrrandiks, tuleb temperatuuri mõõta mitte vesinikutermomeetriga, vaid termomeetriga, milles oleks Maxwelli ideaalne gaas. Olgugi et sellist termomeetrit pole võimalik ehitada, võimaldab termodünaamika arvutada, millised oleksid selle termomeetri näidud, kui ta oleks olemas. Temperatuuri, mida arvutatakse termodünaamiliselt niiviisi, et ta ühtiks temperatuuri lugemisega absoluutsest nullist kujutletava Maxwelli ideaalset gaasi sisaldava termomeetri järgi, nimetatakse *absoluutseks temperatuuriks* ja märgitakse T-ga. Nagu ülal nimetati, mõeldakse absoluutse nulli all madalate temperatuuride piiri; absoluutse nulli juures mis tahes jäävas ruumalas jahutatud Maxwelli ideaalse gaasi rõhk muutub võrdseks nulliga.

Gaaside kineetilise teooria põhivõrrandi tuletamisel ei tulnud meil oletusi teha selle üle, millise seaduse järgi on molekulide

kiirused jaotatud. Seepärast kehtib võrrand $pv = \frac{2}{3} E$ kõigi kolme ülalmainitud (Maxwelli, Bose ja Fermi) ideaalse gaasi teisendi kohta. Ideaalsete gaaside kohta kehtib võrrand $pv = \frac{2}{3} E$ kui tahes madalate temperatuuride puhul kuni absoluutse nullini. Mis puutub Clapeyron'i võrrandisse, siis see on absoluutse nulli lähedal kehtiv ainult Maxwelli ideaalse gaasi kohta, aga mitte Bose ja Fermi ideaalsete gaaside kohta. Statistilises mehhaanikas tõestatakse, et kiiruste jaotuse puhul Bose seaduse järgi (kui gaasi jahutamisel ruumala on jääv) absoluutse nulli lähedal ideaalse gaasi rõhk väheneb kiiremini gaasi temperatuurist ja saab nulliga võrdseks nullist erineva temperatuuri juures $(pv<RT)$. Fermi ideaalsel gaasil on vastupidine omadus: absoluutse nulli lähedal (kui gaasi jahutamisel ruumala on jääv) rõhk väheneb aeglasemalt, kui temperatuur alaneb $(pv > RT)$, ja absoluutse nulli juures on gaasil veel mingi nullist erinev rõhk, mis on pöördvõrdeline eriruumala $^5/_3$ astmega. Olekute piirkonda, milles avalduvad Maxwelli, Bose ja Fermi ideaalsete gaaside erinevad omadused, nimetatakse *gaasi mandumispiirkonnaks.*

Bose ja Fermi statistilistele teooriatele ei ole otsest katsetel põhjenevat kinnitust, kuid arvatakse, et need mõlemad teooriad on õiged: esimene — paljude hõrendatud gaaside kohta, teine mõnede teiste hõrendatud gaaside ja eriti nõndanimetatud *elektrongaasi* kohta, millest räägime edaspidi.

Kuivõrd gaasi mandumispiirkonnas Bose ja Fermi gaasid ei allu Clapeyron'i võrrandile (Clapeyron'i võrrand asendatakse siin väga keeruka olekuvõrrandiga), kusjuures kineetilise teooria põhivõrrand $pv = \frac{2}{3} E$ jääb kehtivaks, siis on silmanähtav, et gaasi mandumispiirkonnas Bose ja Fermi gaasi molekulide keskmine kulgeva liikumise energia ei osutu absoluutse temperatuuriga võrdeliseks (joon. 273). Bose ideaalse gaasi molekulide kulgeva liikumise energia kaob enne, kui temperatuur saab võrdseks absoluutse nulliga; vastupidi, Fermi gaasi molekulid säilitavad teatava kulgeva liikumise energia ka absoluutse nulli juures (seda energiat nimetatakse *nullpunkti energiaks;* ta on pöördvõrdeline eriruumala $\frac{2}{3}$ astmega).



Joon. 273. Ideaalse gaasi molekuli kulgeva liikumisenergia olenevus absoluutsest temperatuurist:
1 — Maxwelli järgi,
2 — Bose järgi,
3 — Fermi järgi.

Molekulaar-kineetiline mõiste absoluutsest temperatuurist kui suurusest, mis mõõdab molekulide keskmist kulgeva liikumise kiirust, osutus omal ajal väga produktiivseks ja mängis ajalooliselt tähtsat osa teoreetilise füüsika arengus. Ometi on ülalöeldust selge, et isegi hõrendatud gaaside puhul mainitud molekulaar-

kineetiline mõiste absoluutsest temperatuurist osutub praegusel ajal kasutatavaks ainult suurte reservatsioonidega; vedelates ja tahketes kehades on küsimus, nagu edaspidi näeme, veel keerukam.

Absoluutne temperatuur on niivõrd tähtis suurus, et ei või muidugi leppida ükskõik millise ebatäpsusega selle suuruse käsitamisel.

Kuni kvantide teooria tekkimiseni näis küsimus absoluutse temperatuuri füüsikalisest olemusest palju lihtsam, nüüd osutub see küsimus aga üheks kõige keerukamaks. Kui selgus, et klassikaline molekulaar-kineetiline teooria sisaldab mõningaid vasturääkivusi faktidega (neist vasturääkivustest, mis puudutavad eriti soojusmahtuvusi, räägime allpool), ja kui nende põhjal tekkisid uued kvantstatistilised teooriad (eriti ülalnimetatud Bose ja Fermi teooriad), osutus veendumus absoluutse temperatuuri lihtsasse molekulaar-kineetilisse mõistesse õõnestatuks.

Ühes sellega pole ühtki „näitlik-molekulaarset" kujutlust absoluutsest temperatuurist senini üles seatud. On võimalik, et uue näitliku ja täielikuma kujutluse absoluutsest temperatuurist saame siis, kui paremini õpime tundma aine ja kiirguse vastastikuse mõju mehhanismi (allpool vaatleme üht kiirgamise põhilist seadust, Stefan-Boltzmanni seadust, mille järgi energia, mida kiirgab välja niinimetatud absoluutselt must keha, on rangelt võrdeline T neljanda astmega).

Kuivõrd praegusel ajal absoluutse temperatuuri molekulaar-kineetiline mõiste on kõigutatud, omandab erilist tähtsust täiesti õige, kuid kahjuks mittenäitlik absoluutse temperatuuri termodünaamiline käsitus.

On selge, et juba küsimuse ülesseadmine seose otsimisest absoluutse temperatuuri ja ideaalse gaasi molekulide liikumise energia vahel (joon. 273) näitab, et *absoluutse temperatuurina tuleb mõista suurust, mille mõiste on sõltumatu meie kujutlustest ideaalse gaasi kohta.*

Esimesena põhjendas William Thomson (Kelvin) 1848. a. termodünaamika teise põhiseaduse põhjal absoluutse temperatuuri mõiste ja näitas, kuidas ainult seda suurust on võimalik mõõta ilma gaasitermomeetrit rakendamata. Seda meetodit arendati edasi Clausiuse poolt. Tungimata üksikasjadesse, mida siin on võimatu kirjeldada, tähendame, et absoluutse temperatuuri õigeks mõistmiseks tuleb ületada suuri raskusi. Küsimus on selles, et absoluutse temperatuuri mõiste on tihedalt seotud teise, mitte vähem tähtsa, kuid kahjuks samuti raskelt omandatava mõistega „entroopia" (millest räägime allpool). Rangelt teaduslik tee seisneb järgmises: kõigepealt tuleb selgitada termodünaamika teise põhiseaduse olemus ja selle alusel, kasutamata gaaside seadusi ja absoluutse temperatuuri mõistet, fikseerida entroopia mõiste;

siis on vaja näidata, *kuidas entroopia mõistest järeldub kujutlus absoluutsest temperatuurist,* ja selgitada, kuidas seda suurust saab mõõta ilma gaasitermomeetrita ja mispärast mitte liiga madala temperatuuri puhul ta on ligikaudu võrdne gaasitermomeetri näiduga loetuna absoluutsest nullist. Seejuures on tarvis kujutlust absoluutsest nullist anda ilma gaasi molekulaar-kineetilise pildi kasutamiseta.

Näidatud suunas vajalik teaduslik rangus ja üldistus on antud Kelvini ja Clausiuse meetodile hilisemate autorite poolt. Üht entroopia ja absoluutse temperatuuri mõistete põhjendamise viisi näitas 1909. a. Caratheodory, kes arendas prof. N. N. Schilleri poolt 1896. a. avaldatud ideid; teisiti käsitles küsimust 1937. a. K. A. Putilov.

§ 92. Soojuslik tasakaal ja energia jaotus vabadusastmete järgi.

Kuivõrd mingi kahe keha temperatuuri vahe on nende kehade omavahelisest soojuslikust tasakaalust kõrvalekaldumise määr, on silmanähtav, et näitlik molekulaar-kineetiline soojusliku tasakaalu mõiste on tihedas seoses molekulaar-kineetilise temperatuuri mõistega. Kui eraldada väga madalate temperatuuride piirkond, kus klassikaline teooria pole rakendatav (ja kui jätta kõrvale mõned printsipiaalsed raskused statistilises mehhaanikas), siis, nagu näitas Maxwell, *kehade soojuslik tasakaal on niisugune olek, mille juures neil kehadel molekulide liikumise keskmised energiad ühe vabadusastme kohta on võrdsed.*

Meenutame, et vabadusastmete arvu all mõeldakse sõltumatute liikumiste arvu (ehk mis on sama: koordinaatide arvu, mis määravad keha või osakese asendi ruumis). Üheaatomilistel gaasidel, s. o. sellistel, mille molekul sisaldab ainult ühe aatomi (sellised on argoon, heelium, metallide aurud), võib igal molekulil olla kolm sõltumatut liikumist piki kolme vastastikku ristiolevat koordinaaditelge; seega tal on kolm vabadusastet. Kaheaatomilise gaasi molekulil (siia kuuluvad: vesinik H_2, lämmastik N_2, hapnik O_2, süsinikoksüüd CO jt.) on viis vabadusastet, kuna ta peale kolme kulgeva liikumise võib veel pöörelda kahe vastastikku ristioleva telje ümber, mis moodustavad täisnurga kaht aatomit ühendava joonega. Kaheaatomilise molekuli pöörlemist selle viimase joone ümber ei tule arvestada. Formaalselt ei tule seda arvestada seepärast, et pöörlemisel selle telje ümber, mis osutub sümmeetriateljeks, molekuli geomeetrilise kontuuri asend ruumis ei muutu. Füüsikalisest vaatepunktist aga ei tule seda arvestada seepärast, et väikese inertsimomendi tõttu molekuli pöörleva liikumise energia selle telje ümber on väike. Samal põhjusel ka üheaatomilise gaasi molekuli vabadusastmete määramisel ei

võeta arvesse tema pöörlevat liikumist. (Kaasaegsed teoreetilised kujutlused lubavad täielikumat ja rangemat seletust anda, miks ei tule molekulide pöörlemisi nende sümmeetriatelgede ümber arvestada; seda on selgitatud III köites.)

Kolmeaatomilise gaasi molekulidel (kui kolme aatomi keskmed ei ole asetatud ühele sirgele) on kuus vabadusastet: neist kolm kulgeva liikumise ja kolm pöörleva liikumise vabadusastet. Need kuus vabadusastet on ka igal teisel molekulil, mille aatomite arv on üle kolme.

Kui kahe- või üldiselt mitmeaatomiline molekul lendab eriti suure kiirusega, siis kokkupõrkel ta võib saada tugevaid lööke. Sellisel juhul aatomid, millest molekul koosneb, hakkavad võnkuma oma keskmiste asendite ümber. Seetõttu tekivad uued vabadusastmed. On arusaadav, et temperatuuri tõusmisel selliste lisa-vabadusastmeid saavate molekulide arv suureneb.

Maxwell avastas järgmise seaduse energia ühtlase jaotuse kohta vabadusastmete järgi: *igal vabadusastmel (olenematult liikumise iseloomust ja aine keemilisest olemusest) on keskmiselt kindel energiahulk* ε, *mis on võrdeline keha absoluutse temperatuuriga.* Võrdeteguriks on pool Boltzmanni konstandi väärtusest. Seega

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} kT. \tag{14}$$

Kuna iga gaasi molekulil on kolm translatoorset vabadusastet, siis järeldub Maxwelli seadusest, et gaasi iga molekuli keskmine kulgeva liikumise energia on $\frac{3}{2} kT$. Selle tulemuse saime paragrahvis 90, lähtudes gaaside kineetilise teooria põhivõrrandist ja gaasi seadustest.

Tähistame tähega i ühe molekuli vabadusastmete arvu. Üheaatomilise gaasi puhul $i = 3$, kaheaatomilisel $i = 5$ ja kolmeaatomilisel $i = 6$. Maxwelli seaduse põhjal on kerge tuletada molekulaar-kineetilise energia E avaldist gaasi 1 mooli kohta (arvestades molekulide pöörlemisenergiat):

$$E = Ni\,\tfrac{1}{2} kT = \tfrac{i}{2} NkT = \tfrac{i}{2} RT;$$

siin R on universaalne gaasikonstant.

Kui energiat mõõdame kalorites, siis tuleb võtta $R \approx 2$, ja saame:

$$E = iT \; cal/mool. \tag{15}$$

Reaalse gaasi siseenergia koosneb põhiliselt molekulaar-kineetilisest ja molekulaar-potentsiaalsest energiast. Arvatakse, et molekulide vastastikune mõju gaasides ei muuda molekulide liikumise vabadusastmete arvu ja selle põhjal rakendatakse valemit (15) mitte ainult hõrendatud, vaid ka kokkusurutud gaaside kohta; seejuures molekulaar-potentsiaalset energiat arvutatakse mitmesuguste ligikaudsete valemite abil.

Koos gaasi temperatuuri tõusmisega tekivad molekulisiseste aatomite võnkumised (vibreerimised). Maxwelli seadust rakendades tuleb sel puhul arvestada vabadusastmete arvu suurenemist. Teades molekuli ehitust ja nähes ette võimalikke molekulisiseseid aatomite võnkumisi, võiks arvutada täiendavalt tekkivaid vibreerimiste vabadusastmeid. Küsimus muutub aga keerulisemaks seetõttu, et molekulisisesed aatomite võnkumised ei teki mitte kõigis molekulides korraga mingi kindla temperatuuri juures, vaid järkjärgult, algul väikese arvu molekulide puhul ja temperatuuri tõusuga järjest suuremas arvus molekulides.

Molekulaarse liikumise pilt vedelikes pole veel küllaldaselt välja selgitatud, seepärast ei või teha kindlaid järeldusi vedeliku molekulide vabadusastmete arvu kohta. Igal juhul ei saa vedelikes enam arvestamata jätta molekulide sõltuvuse mõju molekulide liikumisvabaduse piiramisele.

Tahketes kehades molekulid võnguvad. Ainepunkti sirgjoonelise võnkliikumise täpseks kirjeldamiseks peab olema näidatud kaks koordinaati: üks neist määrab võnkumiste keskme asendi sirgjoonelisel trajektooril, teine määrab võnkuva punkti hälbe. Seepärast on sirgjooneliselt võnkuval ainepunktil kaks vabadusastet. Harmoonilise võnkliikumise puhul on kineetilise energia ajaliselt keskmine väärtus võrdne potentsiaalse energia keskmise väärtusega. Sellega ühenduses arvestatakse leppeliselt, et harmoonilise võnkumise puhul ühe vabadusastme energia on potentsiaalne, teise vabadusastme energia — kineetiline.

Paljudes tahketes (kristallilistes) kehades võngub iga aatom iseseisvalt, kusjuures ta sooritab üheaegselt kolm sirgjoonelist võnget kolme vastastikku ristioleva telje ümber. Siit järgneb, et iga tahke keha aatomil on kuus vabadusastet ($i = 6$). Rakendades energia ühtlase jaotuse seadust, leiame, et aatomivõngete energia tahke aine 1 gramm-aatomi[1] kohta väljendub valemiga

$$U = iT \; cal/gramm\text{-}aatom. \tag{16}$$

Pool sellest energiast on molekulaar-kineetiline energia. Ometi tuleb märkida, et tegelikult aatomite võnked tahkes kehas (nagu ka aatomite sisemolekulaarsed võnkumised gaasi molekulides) ei osutu harmoonilisteks võnkumisteks ja seepärast pole ka võnkumiste keskmine potentsiaalne energia võrdne keskmise kineetilise energiaga. Sellega seoses on õigem valemi (16) asemel kasutada valemit

$$E = \frac{i}{2} T \; cal/g\text{-}aatom, \tag{17}$$

kui $i = 6$. Võnkumiste potentsiaalne energia on väiksem E-st suuruse võrra, mis oleneb sellest, kui palju aatomite võnkumised erinevad harmoonilistest võnkumistest.

[1] 1 gramm-aatom lihtainet on aine hulk, mis sisaldab nii mitu grammi, kui suur on antud aine aatomkaal.

Kui kristallvõre sõlmedes asetsevad mitte üksikud aatomid, vaid molekulid või aatomite grupid, siis mittekõrgete temperatuuride juures igaüks neist gruppidest võngub nagu tervik oma tasakaaluasendi suhtes. Temperatuuri tõstmisel tekivad aatomite võnkumised aatomitegrupi sisemuses; vabadusastmete arv i suureneb järk-järgult.

Näeme, et Maxwelli ühtlase energia jaotuse seadusel vabadusastmete järgi on see oluline puudus, et mis tahes reaalse keha molekulaarsete vabadusastmete arv ei jää soojendamisel või jahutamisel püsivaks, vaid muutub ühes keha oleku muutumisega.

On kindlaks tehtud, et kui järk-järgult soojendada gaasi, mis oli jahutatud absoluutse nulli lähedase temperatuurini, siis isegi pöörlevad vabadusastmed ei avaldu kõigi gaasi molekulide juures korraga. Äärmiselt madala temperatuuri juures kaob molekulide pöörlemine ja kõik mitmeaatomilised gaasid käituvad nagu üheaatomilised, s. o. nende molekulidel on ainult kolm kulgeva liikumise vabadusastet ja pole mitte ühtki pöörlemise vabadusastet. Analoogilist pilti näeme mis tahes tahke keha järkjärgulisel soojendamisel, mis oli absoluutse nulli lähedase temperatuurini jahutatud: normaalne aatomite võnkliikumise vabadusastmete arv tasakaaluasendite suhtes kristallvõre sõlmedes ei ilmu korraga; kui kasutada valemit (17), siis madalate temperatuuride juures pole i võrdne kuuega, vaid on kuuest väiksem ja seda väiksem, mida madalam on keha temperatuur.

Selle asemel, et lugeda vabadusastmete arvu muutlikuks suuruseks, vaadeldakse praegusel ajal üldiselt Maxwelli energia ühtlase jaotuse seadust vabadusastmete järgi kui *piirseadust*, mis kehtib ainult nende vabadusastmete kohta, mis (nagu on hakatud väljendama) osutuvad täiesti lahti sulatatuiks. Võnkliikumise kahe vabadusastme keskmist energiat määratakse Maxwelli seaduse $\varepsilon = kT$ asemel Planck'i kvantvalemiga:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}, \tag{18}$$

kus ε_0 on konstant, mis iseloomustab antud võnkliikumist (suurus ε_0 on võrdeline võnkesagedusega); k on Boltzmanni konstant.

Küllalt kõrge temperatuuri puhul, kui kT ületab tunduvalt ε_0 ja kui järelikult suhe $\frac{\varepsilon_0}{kT}$ on ühega võrreldes väike, läheb Planck'i valem, nagu kerge märgata, üle Maxwelli seaduseks. Tõepoolest on sel juhul

$$e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} \approx 1 + \frac{\varepsilon_0}{kT}$$

ja järelikult

$$\varepsilon \approx kT.$$

Planck'i valemist on näha, et energia jaotus „mitte täiesti lahtisulatatud" vabadusastmete vahel osutub ebaühtlaseks; suure sagedusega võngetel (sel juhul on Planck'i valemi nimetaja suur) on keskmiselt temperatuuri T juures väiksem energia kui väiksema sagedusega võngetel.

Kristallilises kehas oleneb aatomite võnkesagedus kvasielastsest jõust, mis mõjutab tasakaaluasendist kõrvale kaldunud aatomit. Muude ühtlaste tingimuste juures on see kvasielastne jõud seda suurem, mida väiksem on kristallvõre sõlmede vahe, seepärast kristalli tugev kokkusurumine või väljavenitamine peab mõjuma võnkesagedusele ja järelikult ka võnkumise keskmisele energiale. Järelikult Planck'i valemi järgi ühe võnke keskmine energia muutub mitte ainult olenevalt temperatuurist, vaid võib muutuda ka püsiva temperatuuri juures sõltuvalt rõhust, kui rõhk on küllalt suur.

§ 93. Maxwelli gaasi soojusmahtuvuste teooria.

Katsed, mida teostati möödunud sajandi neljakümnendatel aastatel Joule'i, Hirni ja Thomsoni (Kelvini) poolt, näitasid, et gaaside siseenergia, kui gaas ei ole liiga tugeva surve all, sõltub ainult temperatuurist, s. o. $U = f(T)$. Nende katsete olemus (me ei puuduta siin mõningaid asja keerulisemaks tegevaid momente) seisneb selles, et soojuslikult isoleeritud gaasile anti võimalus paisuda tühjusesse. Selle juures gaas ei sooritanud tööd, ei saanud ega andnud ära soojust, seepärast jäi tema siseenergia muutmata; katsed näitasid, et ka gaasi temperatuur jääb sel juhul muutmatuks.

Samade Joule'i ja Thomsoni (Kelvini) katsete abil avastati, et tugevasti kokkusurutud gaaside siseenergia ei olene ainult temperatuurist, vaid ka tihedusest: $U = f(T, v)$. Seepärast siseenergia jäävuse puhul gaasi tiheduse muutumine — soojuslikult isoleeritud gaasi laienemine tühjusesse — põhjustab temperatuuri muutumist (Joule—Thomsoni efekt).

Tehnilistes arvutustes omistatakse sagedasti ideaalse gaasi omadusi reaalsetele gaasidele, s. o. mööndakse lihtsuse mõttes, et gaasi molekulide vahel ei ole üldse külgetõmbejõude ja tõukejõud avalduvad ainult molekulide kokkupõrke momentidel. Eeldades, et molekulide kokkupõrked toimuvad ideaalselt elastsete kehade põrkumisseaduste järgi, võib arvestada, et molekulide vastastikuse mõju energia ideaalses gaasis on võrdne nulliga. Siis gaasi siseenergia U on võrdne molekulaar-kineetilise energiaga E, mida, nagu on juba näidatud, väljendatakse lihtsa valemiga

$$U = E = \frac{i}{2} RT, \tag{19}$$

kus i on gaasi vabadusastmete arv. Meenutame, et üheaatomilise

gaasi puhul $i = 3$, kaheaatomilisel $i = 5$ ja mitmeaatomilisel $i = 6$, kui mitte arvestada temperatuuri tõstmise juures ilmnevaid täiendavaid aatomi võnkumiste vabadusastmeid.

On teada, et soojusmahtuvus jääva ruumala juures C_v on soojushulk, mis tuleb kehale anda selleks, et teda soojendada 1° võrra, kui keha ruumala jääb muutumatuks. On silmanähtav, et gaasi jääva ruumala puhul kogu energia, mida ideaalsele gaasile antakse soojuse näol, läheb gaasi siseenergia suurendamiseks. Kui gaasi temperatuur T tõuseb 1° võrra, siis, nagu kergesti näeme valemist (19), suureneb 1 mooli siseenegia $\frac{i}{2} R \approx i$ kalori võrra. Järelikult ideaalse gaasi mooli soojusmahtuvus ehk moolsoojus jääva ruumala puhul:

$$C_v = \frac{i}{2} R \approx i \frac{cal}{kraad \cdot mool}, \tag{20}$$

s. o. klassikalise teooria järgi ideaalse gaasi soojusmahtuvus peab olema konstantne suurus, mis ei olene gaasi keemilisest olemusest ja on arvuliselt (ühe mooli kohta kalorites) võrdne gaasi molekuli vabadusastmete arvuga:

üheaatomilise	gaasi puhul	$C_v \approx 3$ *cal*	1 mooli kohta
kaheaatomilise	„ „	$C_v \approx 5$ *cal*	1 mooli „
mitmeaatomilise	„ „	$C_v \approx 6$ *cal*	1 mooli „

See järeldus Maxwelli teooriast vastab lähedalt tegelikkusele, kui seda rakendada nõrgalt kokkusurutud gaaside kohta, millel ei ole mitte väga madal ega mitte ülemäära kõrge temperatuur. Kõrgete temperatuuride puhul mitte ainult ei sula võnkumiste vabadusastmed lahti, vaid algab gaasi dissotsieerumine[1], s. o. mõned molekulid lagunevad kaheks või rohkemaks arvuks väiksemateks molekulideks[2]. Soojusmahtuvuse olenevus temperatuurist muutub seetõttu keerukamaks. Väga madalate temperatuuride juures, nagu juba öeldi, ei ole energia vabadusastmete järgi ühtlase jaotuse seadus ja järelikult ka valem (20) rakendatavad.

Kuivõrd gaasi soojusmahtuvus jääb muutumatuks, on näha, et soojushulk, mis on vajalik gaasi ühe mooli soojendamiseks absoluutsest nullist temperatuurini T, on C_vT tingimusel, et gaasi ruumala hoitakse muutumatuna (sel puhul gaas ei tee tööd ega tema peale ei kulutata tööd; seepärast on gaasi siseenergia võrdne kogu gaasile antud soojusega), s. o.

$$U = C_vT. \tag{21}$$

Kui teha arvestust mitte ühe mooli, vaid 1 *g* kohta, siis saame analoogilise valemi:

$$U_{1\,g} = c_vT,$$

[1] Ladina k. *dissociatio* — eraldumine, lahutamine.
[2] või ioonideks (tõlk).

kus c_v on soojusmahtuvus ühe grammi kohta ehk erisoojus jääva ruumala juures.

Võrrandit (21) nimetatakse harilikult Joule'i seaduseks. Reaalsetele gaasidele rakendatuna on Joule'i seadus samal määral ebatäpne nagu Clapeyron'i võrrandki, kuid ligikaudsetes arvestustes ja eriti tehnilistes arvutustes kasutatakse Joule'i seadust laialdaselt ja saavutatakse sageli rahuldav kooskõla katsetulemustega. Rakendades Joule'i seadust kõrgete temperatuuride piirkonnas, tuleb silmas pidada, et kõrgete temperatuuride juures toimub soojusmahtuvuse C_v kasv ühenduses aatomite võnkumiste ilmumisega ja osalise molekulide lagunemisega aatomiteks.



Robert Mayer (1814—1878)

Kui keha soojendades jäetakse talle võimalus paisumiseks, hoides survet kehale muutmatuna, siis kulub osa kehale antavast soojusest paisumistöö tegemiseks. Seepärast on soojusmahtuvus konstantse rõhu juures suurem kui soojusmahtuvus konstantse ruumala juures ($C_p > C_v$).

Kujutleme, et 1 mool gaasi on suletud silindrisse, mis on pealt kaetud kolviga. Gaasi rõhu tasakaalustamiseks on kolb koormatud vihiga. Soojendamisel gaas paisub ja teeb töö, mis on võrdne $p\,(v_2 - v_1)$. Clapeyron'i võrrandi järgi $p\,(v_2 - v_1) = R\,(T_2 - T_1)$. Siit näeme, et kui võtta üks mool gaasi, mida soojendada jääva rõhu all 1° võrra ($T_2 - T_1 = 1°$), siis gaasi paisumistöö on täpselt võrdne gaasi universaalse konstandiga. Väljendatult soojusühikutes on see töö võrdne 2 kaloriga. See on ühesugune üheaatomiliste, kaheaatomiliste ja mitmeaatomiliste gaaside kohta. Ühe mooli gaasi siseenergia juurdekasv tema soojendamisel 1° võrra on C_v. Järelikult soojus, mis on vajalik ühe mooli gaasi soojendamiseks 1° võrra jääva rõhu juures — *gaasi moolsoojus jääva rõhu all:*

$$C_p = C_v + R, \tag{22}$$

või arvestades, et: R on ligikaudu 2 cal:

$$C_p \approx C_v + 2\ cal/kraad \cdot mool.$$

Võrrandit (22) nimetatakse Robert Mayeri võrrandiks. Selle võrrandi abil, teades R suurust kilogramm-meetrites ja C_p ning C_v suurusi kilokalorites, määras Mayer esimesena (1842. a.) töö hulga, mis on ekvivalentne 1 *kcal* soojusega.

Asetades Robert Mayeri võrrandisse C_v väärtuse, näeme, et moolsoojus kindla rõhu all C_p on üheaatomilisel gaasil 5 *cal*, kaheaatomilisel 7 *cal* ja mitmeaatomilisel 8 *cal*. Siit leiame, et mainitud moolsoojuste suhe $\frac{C_p}{C_v}$, mis harilikult märgitakse kreeka tähega $\varkappa$ (kapa), on üheaatomiliste gaaside puhul $\frac{5}{3} = 1{,}67$, kaheaatomiliste gaaside puhul $\frac{7}{5} = 1{,}40$ ja mitmeaatomiliste puhul $\frac{8}{6} = 1{,}33$. Soojusmahtuvuste suhe $\varkappa = \frac{C_p}{C_v}$ on tähtis suurus kehade termodünaamilisel iseloomustamisel.

Gaas	C_v	C_p	C_p/C_v
Üheaatomiline	3	5	1,67
Kaheaatomiline	5	7	1,40
Kolmeaatomiline	6	8	1,33

Teooria mainitud järeldused on normaalsete (mitte liiga kõrgete ega liiga madalate) temperatuuride piirkonna puhul katsete tulemustega hästi kooskõlas. Seda võib näha järgnevas tabelis antavast kõrvutamisest:

Gaas	C_p/C_v		Gaas	C_p/C_v	
	mõõtmise järgi	arvutuse põhjal		mõõtmise järgi	arvutuse põhjal
Argoon	1,67	1,67	Hapnik	1,40	1,40
Vesinik	1,41	1,40	Veeaur	1,31	1,33
Lämmastik	1,41	1,40	Metaan	1,30	1,33

Gaaside puhul, mille molekulid koosnevad paljudest aatomitest, erinevad Maxwelli soojusmahtuvuse teooria järeldused katsete tulemustest; nende juures avalduvad juba normaalse temperatuuri juures tugevasti aatomite sisemolekulaarsed võnkumised, assotsieerunud molekulide lagunemised ja teised nähted. Nii näiteks on etüülpiirituse C_2H_6O aurudel jääva ruumala puhul 6 asemel $C_v = 18{,}9$; neil $\varkappa = 1{,}1$ 1,33 asemel. Kloroformi aurudel $C_v = 15{,}2$; metüülpiiritusel $C_v = 13$.

Erinevusi katsetulemuste ja Maxwelli soojusmahtuvuse teooria järelduste vahel ilmneb ka mõne kaheaatomilise gaasi juures,

milledel esinevad tunduvad sisemolekulaarsed võnkumised juba normaalse temperatuuri juures. Näiteks, kloori kaheaatomilistel aurudel $C_v = 6$ 5 asemel, joodi aurude soojusmahtuvus on aga normaaltemperatuuril veel suurem: $C_v = 6{,}6$.

Tunduval temperatuuri tõstmisel suureneb kõikide kahe- ja mitmeaatomiliste gaaside soojusmahtuvus tunduvalt. See seletub sellega, et tekivad molekulisisesed aatomite võnkumised, edasisel temperatuuri tõstmisel toimub osaline molekulide lagunemine — termiline dissotsiatsioon. Joonisel 274 on näidatud iseloomulikku gaaside (vesiniku ja süsihappegaasi) soojusmahtuvuse muutumise käiku.

Temperatuuride puhul 0-st kuni 2000° C määratakse soojusmahtuvuse muutust rahuldava (1—2%) täpsusega paraboolse sõltuvuse (olenevuse) abil:

$$C_v = C_v^\circ + \alpha t + \beta t^2. \qquad (23)$$

Vesiniku puhul

$C_v^\circ = 4{,}85$
$\alpha = 0{,}0007$
$\beta = 0$

Hapniku, lämmastiku ja õhu puhul

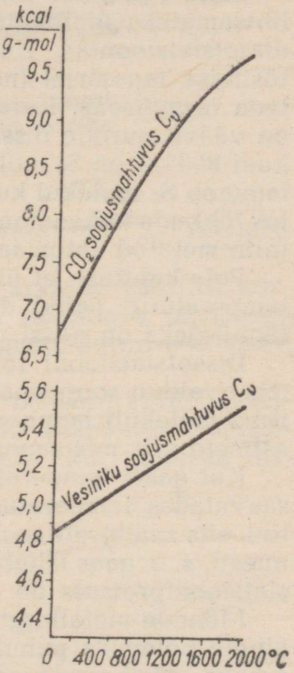
$C_v^\circ = 4{,}97$
$\alpha = 0{,}00017$
$\beta = 0{,}000\,000\,31$

Süsihappegaasi puhul

$C_v^\circ = 6{,}70$
$\alpha = 0{,}0045$
$\beta = 0{,}000\,00102$

Ammoniaagi puhul

$C_v^\circ = 6{,}65$
$\alpha = 0{,}004\,65$
$\beta = 0{,}000\,00135$



Joon. 274. Vesiniku ja süsihappegaasi moolsoojuste sõltuvus temperatuurist.

Esitatud (C_v°, α ja β) suurused gaaside soojusmahtuvuste kohta on soovitatud spetsiaalse gaasi soojusmahtuvuste standardväärtuste väljatöötamise komisjoni poolt ja vastu võetud üleliidulise soojustehnilise kongressi poolt 1928. a.

Termiline dissotsiatsioon. Energia ühtlase jaotuse seaduse järgi tuleb gaasis iga vabadusastme kohta keskmiselt energiahulk $\frac{1}{2}kT$. Mitmeaatomiliste molekulidega gaasides, kus peale molekulide kulgeva ja pöörleva liikumise toimuvad veel molekuli

aatomite võnkliikumised, kasvab nende võnkumiste energia temperatuuri tõstmisel võrdeliselt temperatuuriga. Seepärast mitmeaatomilise gaasi temperatuuri küllaldase tõstmise juures teatav osa tema molekulidest osutub lagunenuks lihtsamateks molekulideks. Nii näiteks lämmastikanhüdriidi N_2O_4 molekul laguneb temperatuuri tõstmisel kaheks lämmastikkahelishapendi NO_2 molekuliks: molekulide arvu suurenemine gaasis annab end kohe tunda tema tiheduse muutusega standardse gaasi (õhu või vesiniku) suhtes.

Aine keemilise koostise muutumist, mis on tema molekulide lihtsamateks molekulideks lagunemise tagajärjeks, nimetatakse *dissotsiatsiooniks*. Kuivõrd dissotsiatsioon toimub temperatuuri tõstmise tagajärjel (nagu juhtumil ühendiga N_2O_4), nimetatakse teda *termiliseks*. Karakteerseks termilise dissotsiatsiooni juhuks on väävli aurude dissotsiatsioon; väävli aurudes temperatuuril kuni 800° *C* on S_6 molekulid, sellest kõrgemates temperatuurides laguneb S_6 molekul kolmeks S_2 molekuliks. Kaarleegi abil õnnestus lõhkuda kaheaatomilisi vesiniku molekule H_2 üheaatomilisteks (niinimetatud „atomaarne vesinik").

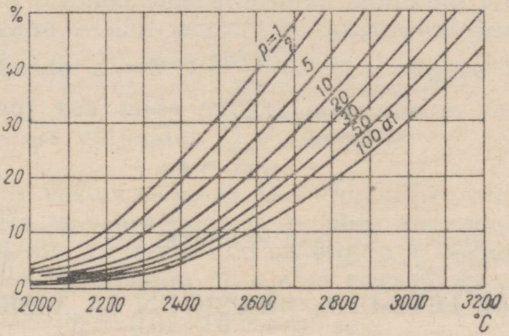
Pole kahtlust, et üldse iga mitmeaatomiline gaas küllalt kõrge temperatuuri puhul dissotsieerub; üheks selle dissotsieerumise tagajärjeks on gaasi moolsoojuse C_v muutumine.

Dissotsiatsiooni toimumiseks on nõutav soojuse juurdevool, mis avaldub soojusmahtuvuse suurenemises. Teisest küljest, keeruka molekuli lagunemisel lihtsamateks muutub järsult vabadusastmete arv, mis samuti põhjustab soojusmahtuvuse muutust.

Kui gaasi temperatuuri tõstes ja sellega tema dissotsiatsiooni saavutades temperatuuri uuesti aegamööda alandame algpunktini, siis esialgsete molekulide lõhutud osad ühinevad järk-järgult uuesti, s. o. gaas läheb algolekusse tagasi. See tähendab, et dissotsiatsiooniprotsess on „pööratav".

Mõnede metallurgiliste reaktsioonide ja kõrgesordiliste kütteainete põlemise puhul karburaatoriga mootorites on suure tähtsusega süsihappegaasi termiline dissotsiatsioon hapnikuks ja süsinikoksüüdiks, aga ka veeauru dissotsiatsioon hapnikuks ja vesinikuks. Mõlematel juhtudel *dissotsiatsiooniaste* α, s. o. lagunenud molekulide arvu suhe molekulide algarvuga, oleneb rõhust. Umbes 0,1 *at* rõhu all on lagunevate molekulide arv ligikaudu kaks korda suurem kui samal temperatuuril 1 *at* rõhu all.

CO_2 ja H_2O dissotsiatsioon on märgatav ainult väga kõrgete temperatuuride juures. Normaalse rõhu (1 *at*) all ja 1800° *C* lähedasel temperatuuril nimetatud gaaside dissotsiatsioon ulatub umbes 1%-ni. Edasisel temperatuuri tõstmisel CO_2 dissotsiatsiooniaste tõuseb kiiresti; temperatuuril umbes 2800° *C* on ligikaudu pool süsihappegaasist lagundatud hapnikuks ja süsinikoksüüdiks (joon. 275). Veeauru dissotsiatsiooniaste kasvab aeglasemalt. Tem-



Joon. 275. CO_2 dissotsiatsiooni aste (protsentides) mitmesuguse temperatuuri ja rõhu puhul.

peratuuril 3000° *C* on dissotsieeritud arvatavasti $^1/_5$ veeauru molekulidest.

Tuleb märkida, et dissotsiatsiooniastme arvulisi väärtusi kõrgetel temperatuuridel on raske mõõta või rahuldava täpsusega välja arvutada; seepärast lähevad mitmesuguste autorite andmed oluliselt lahku.

Põlemisproduktide dissotsiatsiooni tõttu bensiini aurude plahvatuse puhul sisepõlemismootorites osutub plahvatuse maksimaalne temperatuur umbes 200° madalamaks, kui ta oleks dissotsiatsiooni puudumisel.

XVI PEATUKK.

SOOJUSE LEVIMINE, DIFUSIOON JA VISKOOSSUS.

§ 94. Soojuskiirgus (Stefani ja Newtoni seadused).

Keha on soojuslikus tasakaalus siis, kui temperatuur keha kõikides punktides on ühesugune. Kui see tingimus ei ole täidetud või kui on olemas põhjus, mis muudab temperatuuri kas või ainult keha välispinnal, siis ei ole tegemist tasakaaluga; sellisel juhul toimub soojuse levimine kõrgema temperatuuriga kohtadest madalama temperatuuriga kohtadesse.

Vaatleme konkreetset juhtu. Asugu raudkatlas külm vesi. Väljastpoolt aga ümbritsegu katelt põlevad küttegaasid. Osa nende gaaside siseenergiast kandub üle katla raudseintele; osa katla seinte siseenergiast kandub omakorda üle veele. Vees tekib lõpuks vee osakeste liikumisega kaasuv intensiivne energia ülekandumine ühtedest kohtadest teistesse.

Me kohtume siin mitmesuguste energia levimisviisidega: 1) energia levimisega „kiirguse" teel (peamiselt nii toimub katla seinte soojendamine leegi poolt), 2) „soojusjuhtivuse teel" (nii toimub energia ülekandumine läbi katla seinte) ja 3) konvektsiooni teel (konvektsiooni puudumisel soojendaksid katla seinad vett väga aeglaselt). Need kolm energia ülekandeviisi sisaldavad endast üht mõistet: *energia levimine soojuse näol.*

Kõrgetel temperatuuridel on kõikide kehade aatomitel tugev kiirgamisvõime, s. o. nad saadavad välja niinimetatud kvantide kujul suure hulga energiat — *kiirgusenergiat.* Iga kvant kujutab endast lainete süsteemi, mida iseloomustab kindel sagedus. Selle lainete süsteemi levimine ruumis ja tema vastastikune mõju aatomitega toimub siiski nii, nagu kujutaks kvant endast kindla massiga materiaalset osakest. Selline kaksikolemus (dualism) on kvandi iseloomulikuks omaduseks. Pidades silmas neid omadusi, mis kuuluvad kvandile kui materiaalsele osakesele, nimetatakse kiirguskvanti (s. o. valgusosakest) *footoniks*[1].

[1] Kreeka keelest *phos (photos)* — valgus.

Footon liigub (ruumis, mis ei sisalda molekule või mis sisaldab neid väga vähe — näit. nõrgalt kokkusurutud gaasides) sirgjooneliselt kiirusega $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sek}$ (s. o. „valguse kiirusega"). Footoni tee ongi see, mida optikas nimetatakse valguskiireks. Ühe kvandi energia väljendub alati valemiga:

$$\varepsilon = h\nu, \qquad (1)$$

kus ν on kvandile vastav sagedus ja *h Planck'i konstant*. Kui väljendada ε ergides ja ν hertsides (s. o. ühes sekundis toimuvate võngete arvuna), siis h dimensioon on ergide ja sekundite korrutis (suurusi, mille dimensioon on aja ja energia korrutis, nimetatakse *mõjudeks*):

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sek.$$

Langedes mingi keha pinnale võib kvant sellelt tagasi põrkuda (peegelduda). Kui aga see pind ei osutu peegelpinnaks, siis on kõige tõenäosem, et kvant neelatakse keha pinnal asuvate aatomite poolt ja et ta läheb keha siseenergia suurendamiseks. Suure kvantide hulga neelamist keha poolt näitab tavaliselt keha temperatuuri tõus.

Iga kord kui kehadel, mis on eraldatud üksteisest suurema või väiksema vahemaaga, on erinevad temperatuurid, toimub nende vahel energia vahetus kiirguse teel; soojem keha kaotab energiat, külmem keha saab seda juurde. Selline protsess on tegelikult vastastikune. Ka külmem keha kiirgab. Tema poolt väljasaadetud kvandid, mis langevad soojemale kehale, neelatakse viimase poolt. Kuid üldkokkuvõttes soojem keha kaotab energiat, kuna külmema keha energia kasvab.

On olemas väga tähtis teoreetiliselt tuletatud ja katseliselt kontrollitud seadus, mis võimaldab arvutada keha poolt kiiratud energia hulka. See seadus väljendub valemiga:

$$\mathscr{E} = \sigma T^4, \qquad (2)$$

kus T on kiirgava keha absoluutne temperatuur, $\mathscr{E}$ — ühe ruutsentimeetrise pinna poolt ühes sekundis kiiratud energia hulk (ergides) ja σ — konstantne suurus (*Stefani konstant*):

$$\sigma = 5{,}73 \cdot 10^{5} \frac{\text{erg}}{cm^2 \cdot sek \cdot kraad^4}.$$

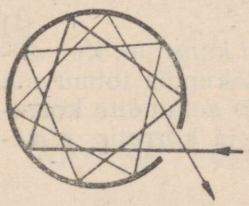
Kui kiirgusenergiat $\mathscr{E}$ mõõta mitte ergides, vaid kalorites, siis

$$\sigma = 1{,}36 \cdot 10^{-12} \frac{cal}{cm^2 \cdot sek \cdot kraad^4}.$$

Vastavalt valemile (2) *kiirguse intensiivsus on võrdeline absoluutse temperatuuri neljanda astmega.* See tõsiasi kannab Stefan-Boltzmanni seaduse nime.

Stefan-Boltzmanni seadus osutub täpseks loodusseaduseks ainult sel juhul, kui kiirgamist põhjustab keha soojendamine, aga mitte mingisugune muu asjaolu (näiteks elektrilahendus), ja kui kiirgav keha on *absoluutselt must* (s. o. sel juhul, kui kehal on

omadus neelata kogu temale väljastpoolt langev kiirgusenergia, ilma et ta kõige väiksematki osa sellest tagasi peegeldaks või endast läbi laseks). Praktiliselt on absoluutselt mustaks kehaks mingist kõvast ainest valmistatud õõnsa, väikese avaga varustatud kuuli mustaks värvitud sisepind (joon. 276). Valguse kiir, langedes läbi väikese ava õõnsa kuuli mustaks värvitud sisepinnale, peab palju kordi kuuli seinalt peegelduma, enne kui ta väljub. Kuna iga kord peegeldub kiire energiast ainult osa, teine osa aga neelatakse seinte poolt, siis selle tulemusena osutub peaaegu kogu energia neelatuks (meenutagem järgmist igapäevasest elust tuntud fakti: vaadates päeval kaugelt läbi lahtise akna sellisesse tuppa, millel on ainult üks aken, näeme selle toa sisemust tumedana, peaaegu mustana).



Joon. 276. Absoluutselt musta keha mudel.

Stefani seadust võib rakendada mitte üksi absoluutselt musta keha, vaid ükskõik millise keha poolt kiiratud energia arvutamiseks. Sellisel juhul tuleb aga võrdust (2) korrutada niinimetatud *soojusneeldumise koefitsiendiga A*. Soojusneeldumise koefitsient on erinevatel kehadel erinev (mida on väga tähtis meeles pidada) ja *sõltub temperatuurist*.

$$E = A \cdot \sigma T^4, \tag{3}$$

siin tähendab E sellise keha ühe ruutsentimeetrise pinna poolt ühes sekundis kiiratud energiat, mille soojusneeldumise koefitsient on A (absoluutselt mustal kehal $A = 1$ ja $E = \mathscr{E}$; kõikidel teistel kehadel on A ühest väiksem).

Tehnikas kasutatakse sageli soojusneeldumise koefitsiendi A teatavaid keskmisi väärtusi. Toome järgnevalt ära tabeli, kus on

Oksüdeerunud pindadega metallid	A	Mitmesugused ained	A	Ehitusmaterjalid	A
Raud[1]	0,9	Tahm	0,95	Sile puu	0,8
Teras	0,8	Klaas	0,90	Siledad kivid	0,4—0,7
Malm	0,6	Vesi	0,67	Kivimüür	0,9
Vask[2]	0,5	Jää	0,64	Liiv	0,75
Tsink	0,2	Paber	0,80	Krohv	0,8
Valgevask	0,6	Vill, siid	0,76	Kriit	0,85
Seatina	0,6	Puuvillane riie	0,73		
Alumiinium	0,1				
Nikkel	0,4				

[1] Läikiva poleeritud raua pinna jaoks $A = 0{,}3$.
[2] Läikiva poleeritud vase pinna jaoks $A = 0{,}13$.

antud mõningate kehade soojusneeldumise koefitsientide ligikaudsed väärtused, mis on rakendatavad temperatuuride vahemikus 0—200° C. Metallide soojusneeldumise koefitsient on värske lõikepinna puhul (madalatel, s. o. mõnesajakraadistel temperatuuridel) väike, oksüdeerunud pinna puhul aga tunduvalt suurem. Kuna praktikas tuleb tegemist teha just oksüdeerunud metallipindadega, siis on tabelis antud soojusneeldumise koefitsiendid just selle juhu jaoks.

Kujutleme, et meil on kaks teineteise vastas asuvat pinda, kumbki pindalaga S. Üks nendest on soojem ja tema absoluutne temperatuur on T, teine aga on külmem, tema absoluutne temperatuur on T_0. Eespoolöeldu põhjal kiirgab esimene pind aja dt jooksul $A\sigma T^4 Sdt$ ergi. Kuna ta teiselt pinnalt sama aja vältel saab ligikaudu[1] $A\sigma T_0^4\, Sdt$ ergi, siis esimese pind kaotab lõpptulemusena aja dt jooksul järgmise hulga energiat:

$$\delta Q = A\sigma\,(T^4 - T_0^4)\,Sdt. \qquad (4)$$

Sama valem väljendab siseenergia kahanemist keha pinna kaudu ka siis, kui keha temperatuur on T ja kui keha ümbritseb gaasiline keskkond temperatuuriga T_0. See valem kannab *Stefan-Boltzmanni jahtumisseaduse* nime.

Kui kiiratava energia voog on s t a t s i o n a a r n e (mis leiab aset sel juhul, kui temperatuuride T ja T_0 väärtused on ajas muutumatud), siis võib valemit (4) rakendada ka lõpliku ajavahemiku t kohta. Tehnilistes arvutustes väljendatakse tavaliselt energiakulu kilokalorites, pindala S mõõdetakse m^2-tes ja t all mõistetakse tundide (mitte sekundite) arvu. Nendes ühikutes Stefani konstant

$$\sigma = \frac{1{,}36 \cdot 10^{-12}}{1000} \cdot 100^2 \cdot 60 \cdot 60 = 4{,}90 \cdot 10^{-8}\ \frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot kraad^4}.$$

Mugavuse mõttes kirjutatakse valem kiirgamisel aset leidnud statsionaarse energiakao arvutamiseks järgmiselt:

$$Q = A \cdot 4{,}9\left[\left(\frac{T}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4\right] St\ kcal \qquad (5)$$

(siin t on tundide arv ja S on väljendatud m^2-tes).

Kui temperatuuride vahe $T - T_0 = \Delta T$ on väike, võib Stefan-Boltzmanni jahtumisseadust lihtsustada. Sellisel juhul:

$$\delta Q = A\sigma\,[(T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4]\,Sdt =$$
$$= A\sigma\,[4T_0^4 \cdot \Delta T + 6T_0^2 \cdot (\Delta T)^2 + 4T_0 \cdot (\Delta T)^3 + (\Delta T)^4]\,Sdt.$$

Kuna sulgudes esinev iga järgmine liige on tunduvalt väiksem eelnevast, siis:

$$\delta Q = A \cdot 4\sigma T_0^3\,(T - T_0)Sdt. \qquad (6)$$

[1] Täpsemal arvutamisel tuleks silmas pidada, et teise keha poolt kiiratud energia sõltub selle (s. o. teise) keha soojusneeldumise koefitsiendist; kui pindadevaheline kaugus ei ole väike või kui pinnad ei ole ühesuurused, siis tuleb arvestada veel seda, milline osa teise keha poolt kiiratud energiast langeb esimese keha pinnale.

See seadus kannab *Newtoni jahtumisseaduse* nime. Newtoni jahtumisseadus väidab, et keha ja ümbritseva keskkonna temperatuuride väikestel erinevustel on ühe sekundi jooksul kulutatud energiahulk võrdeline temperatuuride vahega. Lähtudes sellest seadusest võib integreerimise teel leida keha temperatuuri ja aja vahelise sõltuvuse. See sõltuvus väljendub järgmiselt:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{-\alpha t}, \qquad (7)$$

kus T_1 on keha algtemperatuur, t — jahtumise algusest möödunud aeg ja α — konstantne suurus.

§ 95. Soojusejuhtivus (Fourier' seadus).

Vaatleme siseenergia ülekandumist ühelt kehalt teisele, näiteks küttekolde tulistelt gaasidelt aurukatla veele. Raudkatelt ümbritsevate tuliste gaaside siseenergia antakse edasi katla seintele peamiselt kiirgusenergia kujul. Kuid osalt toimub siin energia ülekanne veel teisel teel. Gaasi molekulid, millel on keskmiselt väga suur kineetiline energia, annavad katla seintega põrkudes neile üle osa oma energiast. Seega seinte väliskihis olevad molekulid saavad endisega võrreldes vastu suurema energia: ühelt poolt neelatud kvantide arvel, teiselt poolt kineetilise energia mehhaanilise ülekande arvel. Mõlema ülekandeviisiga, kuid nüüd juba peamiselt teisega neist, antakse energiat üle ka kaugemale, ikka sügavamal ja sügavamal asuvatele seinte kihtidele. Tõepoolest, raua aatom, olles neelanud kvandi, annab selle kindlasti teatava (väga lühikese) ajavahemiku jooksul mõnele teisele aatomile. Peale selle on võimalikud ka ühtede aatomite põrked teistega, mille tulemusena kiiremad aatomid üldiselt kaotavad energiat, aeglasemad aga saavad energiat juurde. Ja kuna seinte välispind on kõrgema temperatuuriga kui sisepind, siis energia seinte sees kogu aeg levib. Energia voog levib selles suunas, milles leiab aset järkjärguline temperatuuri alanemine. Antud juhul langeb see suund ühte seinte normaali suunaga.

Selline energia järkjärgulise edasiliikumise protsess, mis leiab aset temperatuuride erinevuse tõttu keha kahel pinnal, võib toimuda nii tahkes, vedelas kui ka gaasilises aines. Kirjeldatud protsessi nimetatakse *soojusejuhtivuseks.* Soojusejuhtivuse nähtust kirjeldab kvantitatiivselt F o u r i e r' poolt avastatud järgmine seadus: *ajaelemendi dt jooksul energia levimise suunda määrava joonega l risti olevast pinnast dS läbivoolanud energia hulk* (mida harilikult nimetatakse soojushulgaks) δQ *on võrdeline ajaga dt, pindalaga dS ja temperatuuri T „gradiendiga"* $\frac{dT}{dl}$[1].

[1] Temperatuuri gradienti võib defineerida energia levimise suunas võetud 1 *cm* pikkuse lõigu otste temperatuuride vahena. Üksikasjalisemalt on käsitletud gradiendi mõistet § 39.

Kui võrdeteguri tähistame tähega k, siis soojusejuhtivuse seadus avaldub järgmiselt[1]:

$$\delta Q = k \cdot \frac{dT}{dl} \cdot dS \cdot dt. \tag{8}$$

Kordajat k nimetatakse *aine seesmise soojusejuhtivuse koefitsiendiks* ehk lihtsalt soojusejuhtivuse koefitsiendiks. Toodud valemist nähtub, et soojusejuhtivuse koefitsienti võib defineerida kalorite arvuna, mis vaadeldavas aines temperatuuri gradiendi väärtusel 1 kraad pikkusühiku kohta voolab ühe ajaühiku jooksul läbi (energia levimise suunaga ristioleva) ühe pinnaühiku suuruse pinna. Aineid, milledel k väärtus on suur, nimetatakse headeks soojusejuhtideks, ja neid, milledel k väärtus on väike, halbadeks soojusejuhtideks. Kõige paremateks soojusejuhtideks on metallid; halvemini juhivad soojust puu, klaas, loomsed ja taimsed koed. Halbadeks soojusejuhtideks on veel gaasid ja vedelikud (välja arvatud vedelad metallid).

Tehnilistes arvutustes kasutatakse harilikult teist ühikute süsteemi ja statsionaarse energiavoo puhul (ajas muutumatu temperatuuri gradiendi korral) kirjutatakse soojusejuhtivuse seadus sellisel kujul:

$$Q = K \cdot \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot S \cdot t \quad kcal. \tag{9}$$

Q tähendab siin kilokalorites väljendatud soojushulka, mis t tunni jooksul voolab läbi seina pindalaga S m^2 ja paksusega l m, kui seina vastaspindade temperatuuride vahe on $T_2 - T_1$.

On kerge aru saada, et sel juhul, kui valemis (8) on δQ väljendatud kalorites, temperatuuri gradient kraadides 1 cm kohta, pindala dS ruutsentimeetrites ja aeg dt sekundites, siis selles valemis esinev koefitsient k on seotud valemis (9) esineva koefitsiendiga K järgmiselt:

$$k = \frac{K}{360}.$$

Üheks kõige paremaks soojustisoleerivaks materjaliks on klaasvilt. Ühesugustel tingimustel on klaasvildi soojusejuhtivus asbesti soojusejuhtivusest 3,5 korda väiksem, telliskivimüüri omast aga 20 korda väiksem.

Paragrahvi algul toodud näites esineb veel üks siseenergia levimise viis.

Läbi katla seina levinud energia saab endale vesi. Soojuse ülekandmisel enam soojenenud katla seintelt vähem soojenenud

[1] Soovitame lugejal pöörata tähelepanu formaalsele analoogiale soojusejuhtivuse seaduse ja Ohmi seaduse vahel. Ohmi seadus avaldub kujul: $q = k\frac{V}{l} St$, kus q on elektrihulk, mis aja dt jooksul potentsiaalide vahe V mõjul voolab mööda juhet pikkusega l, ristlõike pindalaga S ja elektrijuhtivusega k.

Soojusejuhtivuse koefitsiendid.

	K (*kcal/m · h · kraad*)	k (*cal/cm · sek · kraad*)
Raud	40—60	0,11—0,17
Vask	260—340	0,7—0,95
Telliskivi	0,3—0,4	—
Puit	0,1—0,4	—
Kork, saepuru	0,05	—
Vesi, klaas	0,5	0,0014
Gaasid	0,02—0,04	$5 \cdot 10^{-5}$—10^{-4}

veele mängivad peamist osa molekulide põrked. On arusaadav, et kõigepealt suureneb nende kihtide siseenergia varu (järelikult tõuseb ka nende temperatuur), mis vahetult külgnevad seintega. Temperatuuri tõus toob endaga kaasa enam soojenenud veeosade paisumise ja kerkimise üles. Nende asemele asuvad ülalt tulnud külmemad veeosad. Toimub vee ringkäik, mis soodustab vee temperatuuri ühtlustumist. Samal ajal temperatuur järk-järgult tõuseb. Näeme, et siin toimub siseenergia levimine koos nende vedeliku osade ümberpaigutumisega, millel on suurem siseenergia, võrreldes vedeliku teiste osadega. Sellist siseenergia levimisviisi nimetatakse konvektsiooniks.

On arusaadav, et konvektsioon võib toimuda ainult vedelates ja gaasilistes kehades. Samuti on arusaadav, et konvektsioon esineb ainult sel juhul, kui vedelikku või gaasi soojendatakse alt ja jahutatakse ülalt (erandiks on siin vesi, mille temperatuur on madalam kui 4° *C*). Vee soojendamisel katlas antakse teatud hulk siseenergiat vee kaudu edasi ka soojusejuhtivuse teel; kuid see on konvektsiooni teel edasiantud energiahulgaga võrreldes väike.

Erinevalt kõikidest teistest vedelikest on vedelal heeliumil, niinimetatud „II vedelal heeliumil" väga madalatel temperatuuridel (allpool 2,19° *K*) a n o m a a l s e l t suur soojusejuhtivus, nimelt 190 $cal \cdot kraad^{-1}\, cm^{-1}\, sek^{-1}$. P. L. Kapitsa mõõtmised näitavad, et II vedelal heeliumil on ka erakordselt väike viskoossus (II vedela heeliumi viskoossus on 10 korda väiksem kui gaasilisel vesinikul). II vedela heeliumi suurt soojusejuhtivust võib seletada sellega, et tema väikese viskoossuse tõttu tekivad kergesti konvektsioonivood, mis osutuvadki soojuse edasikandjateks.

§ 96. Difusioon (Fick'i seadus).

Eelmistes paragrahvides vaadeldi molekulaar-soojusliku liikumise iseloomulikke jooni, soojuslikku tasakaalu ja protsesse, mis toimuvad siis, kui soojuslik tasakaal on rikutud (kiirgus, soo-

jusejuhtivus ja konvektsioon). Kõik see ei anna siiski veel täielikku kujutlust molekulaar-soojuslikust liikumisest. Peame vaatlema veel difusiooninähtust — nähtust, mis sunnib meid soojusliku tasakaalu mõistelt üle minema termodünaamilise tasakaalu mõistele.

Difusiooniks nimetatakse molekulide kaootilisest liikumisest põhjustatud protsessi, kus toimub kahe teineteisega külgneva aine järkjärguline mõlemapoolne sissetungimine teineteisesse. Ühe esimestest difusiooni uurimise katsetest tegi saksa füüsik Loschmidt. Ta võttis kaks poole meetri pikkust ja 2,5 *cm* läbimõõduga klaastoru, mille ühed otsad olid suletud. Ühe toru täitis ta süsihappegaasiga ja teise vesinikuga. Ta asetas torud vertikaalselt nii, et nende avatud otsad puutusid kokku. Seejuures oli süsihappegaasiga täidetud toru allpool (viimane oli vajalik selleks, et mõlema gaasi segunemine toimuks ainult molekulide liikumise tõttu, aga mitte nende gaaside erineva raskuse tõttu). Torude sisu uuriti poole tunni pärast. Selgus, et ülemisse torusse tungis alumisest 37% süsihappegaasi.

Kui gaasi molekulid üldse kokku ei põrkuks, siis oma suurte kiiruste tõttu nad liiguksid juba sekundi väikese murdosa jooksul sirgjooneliselt küllaltki kaugele. Seetõttu toimuks kahe üksteisega külgneva gaasi segunemine erakordselt ruttu. Loschmidti katse näitab, et tegelikult gaasi difusioon ei toimu eriti kiiresti. Seda on näha juba igapäevasest elust: kui avada näiteks ühes toa nurgas lõhnaõli pudelike, siis kulub küllalt palju aega, enne kui tunneme lõhnaõli lõhna toa vastasnurgas.

Difusiooniprotsessi suhteliselt aeglane kulgemine on molekulidevaheliste põrgete tulemus. Molekulaarsete põrgete tõttu võib molekul tagasi paiskuda samasse külge, kust ta tuli. Teame, et põrgete tulemusena molekul kirjeldab erakordselt keerulise siksakilise trajektoori. Seda trajektoori mööda liikudes läbib molekul ühe sekundi jooksul mitusada meetrit ja ikkagi võib olla lähteasendile väga lähedal. Seetõttu kulgeb gaaside difusiooni protsess seda aeglasemalt, mida suurem on molekuliga ühes sekundis toimunud põrgete arv ehk, teiste sõnadega, mida väiksem on molekuli poolt kahe järjestikuse põrke vahel läbitud tee (niinimetatud *vaba tee*[1]). Näiteks vesiniku jaoks on temperatuuril 0° *C* ja rõhul 760 *mm* Hg vaba tee keskmiseks pikkuseks 0,000011 *cm*. Kuna aga vesiniku molekuli keskmine kiirus 0° *C* juures on $1692 \frac{m}{sek}$, siis temperatuuril 0° *C* ja rõhul 760 *mm* Hg toimub 1 *sek* jooksul vesiniku molekuliga $1692 \cdot \frac{100}{0{,}000011}$ ehk umbes 10^{10} põrget.

[1] Muidugi on erinevate molekulide vaba tee ja isegi ühe molekuli vaba tee erinevatel ajamomentidel erineva suurusega. Difusiooniprotsessi jaoks omab määravat tähtsust vaba tee keskmine väärtus.

Kaks kokkupuutuvat gaasi difundeeruvad alati teineteisesse (välja arvatud see juht, kui nad väga kiiresti keemiliselt ühinevad). Ilma teatavate reservatsioonideta seda vedelike kohta öelda ei saa. Kaks vedelikku difundeeruvad teineteisesse piiramatult ainult sel juhul, kui nad on võimelised omavahel segunema. Seetõttu toimub näiteks vee ja piirituse, vee ja eetri, petrooleumi ja taimeõli vastastikune difusioon. Kuid on vedelikke, mis teineteisega täielikult ei segune. Selliste vedelike kokkuvalamisel esineb algul difusioon; kui aga teatav hulk esimest vedelikku on lahustunud teises vedelikus ja teatav hulk teist vedelikku esimeses, siis difusioon katkeb ja ükskõik kui kaua need vedelikud oleksid kokkupuutes, nende keemiline koosseis enam ei muutu. Mõned vedelikud lahustuvad teineteises nii vähe, et ühe vedeliku difusiooni teisesse praktiliselt ei esine (näiteks vesi ja elavhõbe).

Vedelike difusioon on eriti kergesti jälgitav sel juhul, kui üks vedelikest on värvitu, teine aga värviline. Difusiooni demonstreerimiseks võib näiteks kasutada vett ja vasevitrioli vesilahust. Klaassilinder täidetakse poolenisti veega ja seejärel valatakse pika toru külge kinnitatud lehtri abil silindri põhja veest raskemat vasevitrioli lahust. Mõlema vedeliku vaheline piir, mis on algul terav, hakkab järk-järgult ähmasemaks muutuma. Vedelike täielikuks segunemiseks kulub aga mitu kuud. See näitab, et molekuliga toimuvate põrgete arv on vedelikus palju kordi suurem kui gaasilises keskkonnas. Põhjus seisneb siin muidugi selles, et vedeliku ruumalaühikus on palju rohkem molekule kui gaasi ruumalaühikus.

Vedelike difusiooni seaduse (mis kehtib ka gaasilise keskkonna kohta) leidis saksa füüsik Fick. See seadus väljendub valemiga:

$$m = D\frac{c_1 - c_2}{l}St, \qquad (10)$$

kus m on difundeeruva aine (näiteks vasevitrioli) hulk, mis aja t jooksul läbib S cm^2 suurust aine liikumise suunaga risti olevat pinda[1]; c_1 ja c_2 on difundeeruva aine kontsentratsioonid[2] kahes kihis, mis asuvad teineteisest kaugusel l; D on *difusiooni koefitsient*. See koefitsient sõltub keskkonnast, difundeeruvast ainest ja tingimustest, milles asuvad keskkond ja difundeeruv aine (vedelikkude puhul temperatuurist, gaaside puhul temperatuurist ja tihedusest). Seejuures eeldatakse, et kontsentratsioon vedeliku- või gaasisambas muutub võrdeliselt samba pikkusega, s. o.

[1] Mõlemas eespool kirjeldatud katses tuleb seda pinda mõelda muidugi horisontaalsena.

[2] Antud keskkonnale juurdelisatud aine kontsentratsiooni mõõdetakse ruumalaühikus sisalduva aine hulgaga.

$\frac{c_1 - c_2}{l} = const$, ja et sammas on statsionaarses olekus, s. t. samba igas ristlõikes kontsentratsioon ajas ei muutu.

Üldisemal kujul võib Fick'i seadust väljendada valemiga:

$$\delta m = D \frac{dc}{dl} dSdt, \tag{11}$$

s. t. *aja dt jooksul difusiooni suunda määrava joonega l risti oleva pinna dS läbi difundeerunud aine hulk δm on võrdeline ajavahemikuga dt, pindalaga dS ja kontsentratsiooni gradiendiga* $\frac{dc}{dl}$.

Esitatud valemitest on kerge näha, et difusiooni koefitsient D on arvuliselt võrdne ajaühiku jooksul üht pindalaühikut läbinud difundeerunud aine hulgaga tingimusel, et kahel, teineteisest ühe pikkusühiku kaugusel oleval pinnal on kontsentratsioonide vahe võrdne ühikuga.

On lihtne aru saada, et difusiooni koefitsiendi dimensioon $[D] = L^2T^{-1}$. Absoluutses ühikute süsteemis mõõdetakse difusiooni koefitsienti $\frac{cm^2}{sek}$-tes. Normaaltingimustel on erinevate gaaside difusiooni koefitsientide väärtused ligikaudu 0,1 kuni 1 $\frac{cm^2}{sek}$, vedelikel $D \approx 1 \frac{cm^2}{ööpäev}$ (s. o. 10^5 korda väiksem kui gaasidel).

Võrreldes Fick'i seaduse avaldist valemitega, mis väljendavad Fourier' soojusejuhtivuse seadust ja Ohmi elektrivoolu seadust, on kerge leida, et kõik kolm on üksteisega analoogilised. Difusiooniprotsessis mängib kontsentratsioon sedasama osa, mida temperatuuride vahe mängib soojusejuhtivuse juures ja potentsiaalide vahe elektrivoolu juures.

Fick'i seaduse range eksperimentaalse kontrolli teostas N. A. U m o v (1888—1891). Umov näitas, et Fick'i seadus on täpne ainult sellistel juhtudel, kui keskkond on täiesti isotermiline ja lahuste kontsentratsioonid on väikesed.

Igas homogeenses gaasilises või vedelas aines üks osa aine molekulidest difundeerub pidevalt aine teise ossa. Seda nähtust nimetatakse o m a d i f u s i o o n i k s. Viimasel ajal on omadifusiooni uuritud eksperimentaalselt. Selleks pannakse aine mingisse ossa väike hulk sama aine radioaktiivset isotoopi ja jälgitakse radioaktiivsete omaduste levimist üle kogu ainehulga.

Nagu Maxwell teoreetiliselt kindlaks tegi, on gaasi omadifusiooni koefitsient võrdne molekulide keskmise kiiruse ja nende keskmise vaba tee korrutise ühe kolmandikuga:

$$D = {}^1/_3 \bar{u} \lambda. \tag{12}$$

Selle valemi tuletamiseks võiks rakendada samasuguseid lihtsaid arutlusi, nagu seda on tehtud hiljem (paragrahvides 99 ja 100)

soojusejuhtivuse ja gaaside sisehõõrdetegurite valemite tuletamisel. Kuid füüsika rakendustes ei ole harilikult tegemist omadifusiooniga, vaid ainete vastastikuse difusiooniga. Sel juhul on teoreetiline arutlus keerulisem. Selle tulemusena aga selgub, et gaaside vastastikuse difusiooni koefitsienti võib arvutada mõlema gaasi omadifusiooni koefitsientidest „segamise reegli" abil. See toimub järgmiselt: kui D_{11} on esimese gaasi omadifusiooni koefitsient, D_{22} teise gaasi omadifusiooni koefitsient, n_1 ja n_2 — segu moodustavate gaaside molekulide arvud ühes ruumalaühikus (selles kohas, kus meid huvitab vastastikuse difusiooni käik), siis

$$D_{12} = \frac{n_1 D_{11} + n_2 D_{22}}{n_1 + n_2}.$$

See võrrand on õige ainult siis, kui teineteisesse difundeeruvad gaasid on sama rõhu $p = (n_1 + n_2)\, kT = const$ all. Sel juhul on difusiooni voog statsionaarne ning mõlemate gaaside kontsentratsioonide summa segu erinevates osades on ühesugune ja ajas muutumatu, s. o. $n_1 + n_2 = const$. Mainitud tingimusel on difusiooni koefitsient esimese gaasi difundeerumisel teisesse võrdne difusiooni koefitsiendiga teise gaasi difundeerumisel esimesse: $D_{12} = D_{21}$.

Omadifusiooni ja vastastikuse difusiooni koefitsiendid sõltuvad gaasi tihedusest täpselt samuti nagu molekuli vaba teegi. Vaba tee on pöördvõrdeline gaasi tihedusega (§ 98), järelikult on ka difusiooni koefitsient pöördvõrdeline gaasi tihedusega. Kui D_0 on difusiooni koefitsient rõhul p_0 ja absoluutsel temperatuuril T_0, siis rõhul p ja temperatuuril T difusiooni koefitsient:

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Mis puutub difusiooni koefitsiendi sõltuvusse gaaside segu protsentuaalsest koostisest (suhtest $\frac{n_1}{n_2}$), siis katsed (olles kooskõlas täpsema teooriaga) näitavad, et segu protsentuaalse koostise muutudes difusiooni koefitsient muutub vähe.

Mõnede gaaside omadifusiooni ja vastastikuse difusiooni koefitsiendid normaalrõhul ja normaaltemperatuuril ($p = 1$ *at* ja $0°$ *C*) on toodud allpool esitatud tabelites.

Gaaside omadifusiooni koefitsiendid D $\frac{cm^2}{sek}$ -tes.

Vesinik	1,29
Hapnik	0,19
Vingugaas	0,17
Süsihappegaas	0,11
Veeaur (100° C juures)	0,13

Vastastikuse difusiooni koefitsiendid $\frac{cm^2}{sek}$-tes.

Vesinik — hapnik	0,70	Hapnik — õhk	0,18
Vesinik — lämmastik	0,67	Süsihappegaas — õhk	0,14
Vesinik — süsihappegaas . .	0,55	Veeaur — õhk	0,22
Hapnik — lämmastik	0,18	Eetriaur — õhk	0,078
Hapnik — süsihappegaas . .	0,14	Naftaliini aur — õhk	0,051

Vedelike difusiooni koefitsientide väärtused, nagu juba varem mainitud, on gaaside omadest sadu tuhandeid kordi väiksemad. Keedusoola difusiooni koefitsient vee suhtes temperatuuril 10° C on näiteks:

$$D = 1{,}08 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{sek} = 0{,}93 \ \frac{cm^2}{ööpäev}.$$

Suhkru difusiooni koefitsient vee suhtes on umbes kolm korda väiksem kui keedusoola difusiooni mainitud koefitsient. Vesiniku difusiooni koefitsiendil vee suhtes on suurim väärtus — umbes 4 $\frac{cm^2}{ööpäev}$ (temperatuuril 10° C).

Võrreldes vedelikes ja gaasides toimuvaid difusioone, tuleb märkida, et vedelates lahustes saadakse sageli väga suured kontsentratsiooni gradiendid. Seetõttu ei osutu difusioonivoo intensiivsus vedelikes sageli sugugi nii väikeseks, nagu seda võiks oodata, otsustades difusiooni koefitsiendi väikese väärtuse järgi.

Difusiooninähtus etendab looduses ja tehnikas väga tähtsat osa. Taimede juured võtavad põhjaveest taimele vajalikke aineid juurtes toimuva difusiooni tõttu. Juurtes esineva difusioonivoo tugevus jääb muutmatuks seetõttu, et juurtes leiduvad taimele vajalikud ained kiiresti „omandatakse", s. o. muudetakse keemiliselt ümber, nii et nende ainete kontsentratsioon osutub juurte pinnal kogu aeg vähendatuks. See kutsubki esile taimele vajalike ainete difusiooni ümbritsevast mullast juurtesse. Mis puutub taimele kasututesse ja kahjulikkudesse ainetesse, siis neid taim teisteks aineteks ümber ei tööta ja seetõttu nende kontsentratsioon juurtes ja juurte pinnal võrdsustub kiiresti ümbritsevas mullas leiduvate samade ainete kontsentratsiooniga. See katkestab aga nende juurdevoolu difusiooni teel. Seega difusioon aitab taimel teostada „valikut" ja tuua mullast välja neid aineid, mis on taimele vajalikud tema rakkude ülesehitamiseks.

Analoogiliselt kasutavad difusiooni organismile vajalike toitainete „valikuks" ja eraldamiseks loomade ja inimese seedesüsteemi koed. Maos ja soolestikus toit lahustub ja organismile vajalikud ained difundeeruvad läbi seedetrakti seinte.

Tehnikas kasutatakse difusiooni alaliselt mitmesuguste ainete ekstraktimiseks, näiteks suhkru väljatoomiseks toorest peedist. Samuti kasutatakse difusiooni parkainete, värvide ja mitme-

suguste ainete (tšiili salpeetri, sööbenaatriumi jt.) keemilisel tootmisel.

A. Einstein, kasutades tema poolt leitud Brown'i liikumise võrrandit ja rakendades Stokes'i seadust (§ 64) lahustatud aine molekulide liikumise kohta, arendas 1905. a. vedelike difusiooni teooria. See viis Einsteini valemile

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r},$$

kus D on lahustatud aine difusioonikoefitsient, η — lahuse sisehõõrdetegur, k — Boltzmanni konstant, T — absoluutne temperatuur ja r — difundeeruva aine molekuli teatav efektiivne raadius.

Einsteini valem määrab D suuruse rahuldavalt selliste ainete lahuste jaoks, mille molekulid on lahusti molekulidega võrreldes suured.

Teine vedelike difusioonikoefitsiendi valem on selgitatud paragrahvis 111.

Difusiooninähtus esineb ka tahketes kehades. Kui näiteks rauatükk ajada sütel hõõguma, siis süsi difundeerub rauda. Söe difusiooni rauas kasutatakse *tsementiitimisel* (raudesemete pinna küllastamisel süsinikuga) selleks, et pärast karastamist saada kõva väliskihiga, kuid elastse südamikuga esemeid (tsementiitimisel kuumutatakse raud- või terasesemeid tahmas, puidusütes või koksis, või paigutatakse ese gaasilisse süsinikoksüüdi temperatuuril 600—1000°).

Difusioonikoefitsient tahketes metallides on suurusjärgult 1 000 000 korda väiksem kui vedelikes, mistõttu tahkete kehade difusiooni võib nimetada „igaveseks protsessiks" (sellele vaatamata muudab difusioon oluliselt selliste tahkete metallide omadusi, mis koosnevad keemilise koostise poolest erinevatest terakestest).

§ 97. Termodünaamiline tasakaal ja Boltzmanni *e*-lause.

Soojusliikumine avaldab molekulide jaotusele vastupidist mõju, võrreldes molekulaarsete ja teiste jõudude mõjuga. Soojusliikumise tõttu ilmneb molekulidel tendents h a j u d a, s. o. paigutuda võimalikult suuremasse ruumalasse, ja molekulaarse tiheduse (ruumalaühikus asuvate molekulide arvu) ühtlustumise püüe. Molekulaarsete jõudude, raskusjõu ja teiste jõudude mõju seevastu aga piirab molekulide hajumist, soodustab molekulide k o n t s e n t r e e r u m i s t ja nende jagunemist ebaühtlase tihedusega.

Näitena võib tuua Maa atmosfääri. Gaasi molekulid, milledest Maa õhkkond koosneb, peaksid soojusliikumise tõttu hajuma laiali maailmaruumi. Seevastu Maa külgetõmme peaks esile kut-

suma nende langemise maapinnale. Nende kahe vastassuunalise mõju tulemusena kujuneb kindlaks mingisugune püsiv, ebaühtlane õhkkonna tiheduse jaotus. Kui see nähtus ei muutuks päiksekiirguse, maapinna kiirguse ja õhumasside tsirkuleerimise tõttu keerukamaks, siis oleks temperatuur õhkkonna erinevates kihtides ühesugune ja atmosfääris kehtiks õhu tiheduse ja rõhu baromeetriline jaotus, nagu seda selgitati paragrahvis 61, kus on tuletatud „baromeetriline seadus"[1]:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}}.$$

ΔU on siin kõrgustel h ja h_0 asuvate molekulide energiate vahe ja k ($k = \frac{R}{N_{AB}}$) *Boltzmanni konstant.*

Teiseks väga tähtsaks, võib isegi öelda universaalseks, jõudude välja ja soojusliikumise vastupidiste mõjude näiteks on mingi aine molekulide jagunemine mitme sellise keskkonna vahel, kus molekulidel on erinev potentsiaalne energia. Üheks lihtsamaks niisuguseks juhuks on molekulide jagunemine auru ja vedeliku vahel, kus antud molekuli ja teiste molekulide vahelise vastastikuse mõju potentsiaalne energia on aurus väga väike, vedelikus aga väga suur.

Mingi aine lahustumisel vees või mõnes teises vedelikus sõltub kogu protsessi iseloom ja lahuse suurim võimalik kontsentratsioon energiast, mille arvel lahustuva aine molekulid siirduvad molekulaarsete tõmbejõudude mõjul lahustavasse keskkonda. Mida suurem on see tõmbejõududest tingitud energia, seda intensiivsemalt toimub lahustumisprotsess. Kui lahustatava aine molekulide omavahelised tõmbejõud on suuremad kui nende (s. o. lahustatava aine) molekulide ja lahusti molekulide vahelised tõmbejõud, siis lahustumist peaaegu ei toimugi.

---

[1] § 61 on e astendaja esitatud kujul:

$$-g\frac{\varrho_0(h-h_0)}{p_0},$$

kusjuures h_0 on võetud võrdseks nulliga. Kuid $p_0 = \frac{RT}{V}$, kus V on gaasi moolruumala, mis on võrdne gramm-mooli massi ($N_{AB} \cdot m$) korrutisega ühe massiühiku ruumalaga, s. o. gaasi tiheduse ϱ_0 pöördväärtusega:

$$V = \frac{N_{AB} \cdot m}{\varrho_0}.$$

Järelikult

$$g\frac{\varrho_0(h-h_0)}{p_0} = \frac{gm(h-h_0)}{\frac{R}{N_{AB}} \cdot T}.$$

$\frac{R}{N_{AB}}$ on siin Boltzmanni konstant ja gmh kõrgusel h asuva molekuli potentsiaalne energia.

Kõikidel sellistel juhtudel saabub soojusliikumise ja molekulaarsete jõudude vastupidiste mõjude tulemusena nõndanimetatud termodünaamiline tasakaal, mille puhul eksisteerivad koos kaks eespoolmainitud vastandlikku tendentsi. See tasakaal on *statistiline* ja kujutab endast kahe vastassuunalise difusioonivoo võrdsust üheaegselt võrdsel temperatuuril.

Kokkupuutes olevad kehad, millede keemiline koostis on algul erinev, omandavad difusiooni tõttu aja jooksul sellise koostise, mis edaspidi enam ei muutu. Antud juhul, samuti nagu erinevate temperatuuridega kehade kokkupuute korralgi, saabub lõpuks („iseenesest") mingisugune tasakaal. Temperatuuride ühtlustumine toob endaga kaasa soojusliku tasakaalu, difusioon (koos samaaegselt toimuva temperatuuride ühtlustumisega) viib aga keha termodünaamilisse tasakaalu. Kahe või enama keha kohta öeldakse, et nad on aine *A* suhtes *termodünaamilises tasakaalus* siis, kui kehade olek ei muutu kui tahes pika aja jooksul, olgugi et nende kehade vahel on soojusvahetuse võimalus ja samuti ka võimalus difundeeruda ainega *A*. (Sellele termodünaamilise tasakaalu mõiste definitsioonile tuleb juurde lisada nõue, et keha oleku muutumatus ajas ei jää püsima süsteemi suhtes väliseks osutuva protsessi kestel. Kui vaadeldava kehade süsteemi olek ei muutu näiteks seetõttu, et konstantse tugevusega difusioonivoog toob süsteemi ühte ossa ainet juurde ja viib teisest süsteemi osast sedasama ainet ära, siis sellist olekut nimetatakse *statsionaarseks*. Seda olekut ei saa aga lugeda termodünaamilise tasakaalu olekuks.)

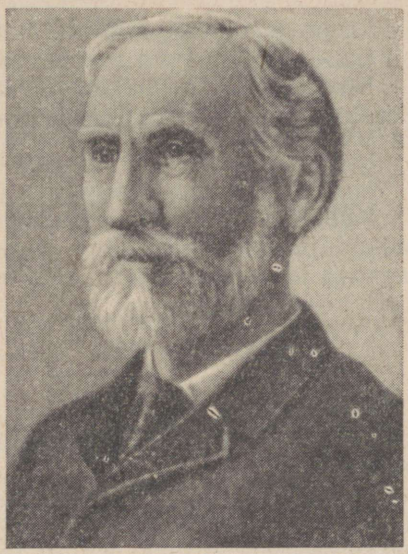
Kahe aine täielikul lahustumisel teineteises (mis on omane kõikidele gaasidele ja mõningatele vedelikele) saabub termodünaamiline tasakaal siis, kui kokkupuutuvate kehade keemilised koostised on muutunud ühesugusteks. Enamasti esineb aga mittetäielik lahustumine. Neil juhtudel nimetatakse kehade termodünaamilise tasakaalu koostist *küllastunud lahuseks*. Nii näiteks vedela fenooli ja vee korral moodustub fenooli küllastunud lahus vees (sisaldades temperatuuril 20° *C* umbes 8% fenooli) ja vee küllastunud lahus fenoolis (temperatuuril 20° *C* lahustub fenoolis umbes 28% vett).

Nagu juba ülalpool on mainitud, tuleb termodünaamilist tasakaalu vaadelda statistilise tasakaaluna. Näiteks vee ja fenooli segamisel saadud kahe vedela faasi (ühes faasis domineerib vesi, teises aga fenool) kokkupuutumisel difusiooni näiliselt enam ei toimu. Tegelikult aga jätkavad nii vee kui ka fenooli molekulid liikumist läbi faaside lahutuspinna. Selles mõttes difusioon jätkub. Kuna ühest faasist lahkub sama palju molekule, kui palju neid sinna teisest faasist sama ajavahemiku jooksul juurde tuleb, siis selline difusioon ei riku tasakaalu.

Homogeenses aines vastab termodünaamiline tasakaal selli-

sele juhule, kui omadifusioon läbi vabalt valitud pinna ühes suunas on võrdne omadifusiooniga vastassuunas.

Kehade oleku soojuslikust tasakaalust kõrvalekaldumise mõõduks on teatavasti nende kehade temperatuuride vahe. Kehade oleku termodünaamilisest tasakaalust kõrvalekaldumise mõõduks aga on niinimetatud *keemiliste potentsiaalide* erinevus. Õpetus keemilistest potentsiaalidest, mis on välja töötatud Gibbsi poolt, etendab tänapäeva termodünaamikas ja statistilises mehhaanikas tähtsat osa. Keemiline potentsiaal on temperatuuri kõrval üheks tähtsaimaks molekulaarsoojuslikku liikumist iseloomustavaks suuruseks.



Josia Willard Gibbs (1839—1903).

Ranged statistilised meetodid molekulide kontsentratsiooni arvutamiseks termodünaamilise tasakaalu puhul on keerulised. Ligikaudu võib aga molekulide kontsentratsioone arvutada, laiendades molekulaarsetele väljadele neid printsiipe, mis moodustavad gaaside kineetilise teooria põhialuse. Sellistel arvutustel ei tohi aga siiski lähtuda Maxwelli molekulaarsete kiiruste jaotuse seadusest, vaid selle seaduse vastavasuunalisest üldistusest, mis avastati möödunud sajandi lõpul Ludvig Boltzmanni poolt.

Maxwelli molekulaarsete kiiruste jaotuse seadust võib väljendada järgmise valemiga:

$$n_0 = \frac{4N}{V\sqrt{\pi}\varrho^3} e^{-\frac{u^2}{\varrho^2}} \cdot u^2 \Delta u,$$

kus N on molekulide arv ühes ruumalaühikus; n_0 — nende molekulide arv ühes ruumalaühikus, millede translatoorse liikumise kiirus on vahemikus u *kuni* $u + \Delta u$; ϱ — tõenäoseim kiirus.

Maxwelli seadus on õige ainult siis, kui gaasi molekulidele ei mõju mingisuguseid muid jõude peale molekulide põrkumisel tekkiva jõu. Boltzmann üldistas Maxwelli seadust nendele juhtudele, kui gaasi molekulid on pidevalt jõudude, näiteks raskusjõu mõju all. Seaduse üldistatud kujus sisaldub e astendajas translatoorse

liikumise kiiruse ruudu kõrval veel väliste jõudude potentsiaal, näiteks raskusjõu potentsiaal χ.

Boltzmanni kiiruste jaotust võib väljendada valemiga:

$$n = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\varrho^3} e^{-\frac{u^2+2\chi}{\varrho^2}} \cdot u^2 \Delta u,$$

kus n on nende molekulide arv ruumalaühikus, millede kiirused on vahemikus u kuni $u + \Delta u$ ja χ potentsiaal.

Meenutame, et tõenäoseim kiirus ϱ on seotud absoluutse temperatuuriga ja Boltzmanni konstandiga järgmiselt (§ 90):

$$\frac{m\varrho^2}{2} = kT.$$

Asetades siit ϱ avaldise Maxwelli ja Boltzmanni valemites e astendajatesse, tähistades ühe molekuli potentsiaalset energiat $m\chi = \varphi$ ja jagades Boltzmanni valemit Maxwelli valemiga, saame

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{\varphi}{kT}}. \tag{13}$$

See võrrand näitab, kui suurel osal molekulidest on potentsiaalne energia φ. Seda võrrandit nimetatakse sageli „Boltzmanni e-lauseks".

Kui meil on tegemist gravitatsiooniväljaga, siis e-lause taandub baromeetrilisele valemile. Boltzmanni seadus (13) on rakendatav ükskõik milliste väliste jõudude välja puhul.

Tõmbejõudude korral ($\varphi < 0$) nähtub võrrandist (13), et kui potentsiaalse energia absoluutväärtus kasvab aritmeetilises progressioonis, siis molekulide suhteline kontsentratsioon $\frac{n}{n_0}$ kasvab geomeetrilises progressioonis. Neis ruumi piirkondades, kus mõjuvad tõukejõud ($\varphi > 0$), toimub sama (s. o. geomeetrilise progressiooni) seaduse järgi ühes ruumalaühikus leiduvate molekulide arvu kahanemine.

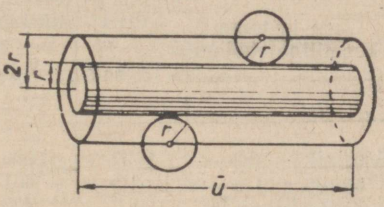
Vedelikud erinevad gaasidest selle poolest, et neis mõjuvad molekulide vahel suured tõmbejõud; iga molekul asub teiste molekulide poolt tekitatud jõudude väljas. Seetõttu kasutatakse vedelikkude molekulaarse jaotuse küsimuste lahendamisel sageli Boltzmanni e-lauset. Kuna e-lause kehtib rangelt ainult välisjõudude välja kohta, siis selle rakendamine vedelikele ei ole alati põhjendatud.

Rangemaks ja täpsemaks molekulaarsete jõudude väljade mõju arvestamiseks molekulide kontsentratsioonile, nagu ülalpool mainitud, tuleb molekulide potentsiaalse energia asemel vaadelda keemilisi potentsiaale ning lähtuda mitte Boltzmanni seadusest, vaid Gibbsi poolt tuletatud üldisematest seadustest.

§ 98. Gaasi molekulide keskmine vaba tee pikkus.

Gaaside soojusliikumise iseloomustamiseks on paljudel juhtudel vaja teada molekulide *vaba tee pikkust*, s. o. molekuli poolt kahe teineteisele järgneva põrke vahel läbitava teepikkuse keskmist väärtust ja ühe sekundi jooksul ühe molekuliga toimuvate *põrgete keskmist arvu.*

Vaba tee pikkuse arvutamiseks arutleme järgmiselt. Liikuv molekul põrkub ühe sekundi jooksul kokku kõikide selliste molekulidega, millede tsentrid asuvad antud molekuli liikumisel kirjeldatud silindris, mille raadius on kaks korda suurem molekuli raadiusest (joon. 277). Silindri ruumala on seega $\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}$ ja selliste molekulide arv, mille tsentrid asuvad silindris, on $n\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}$, kus n on ühes kuupsentimeetris leiduvate molekulide keskmine arv. Niisiis, kui kõik molekulid peale vaadeldava molekuli oleksid paigal, siis viimase poolt ühe sekundi jooksul sooritatud põrgete arv ν avalduks järgmiselt:



Joon. 277. Molekuli keskmise vaba tee arvutamiseks.

$$\nu = n\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}.$$

Kuna teised molekulid põrkuksid vaadeldava molekuliga kokku isegi sel juhul, kui viimane on kogu antud sekundi paigal, siis keskmine põrgete arv peab olema tegelikult suurem. Täpsed arvutused näitavad, et meie poolt saadud tulemust tuleb korrutada $\sqrt{2}$-ga. Seega

$$\nu = 4\sqrt{2}\pi r^2 n\bar{u}.$$

Kui tähistada vaba tee pikkust λ-ga, siis

$$\nu = \frac{\bar{u}}{\lambda}.$$

Võrreldes seda valemit eelmise valemiga leiame, et

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}.$$

Kui ruumi osas ν on N molekuli, siis $n = \frac{N}{\nu}$. Pannes siit n avaldise viimasesse valemisse ja tähistades molekulide omaruumala b'-ga

$$(b' = \frac{4}{3}\pi r^3 N),$$

saame:

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\nu}{b'} \approx 0{,}24\,\frac{\nu}{b'} \approx \frac{\nu}{4b'}. \qquad (14)$$

Seega näeme, et *vaba tee pikkuse ja raadiuse suhe on võrdne gaasi poolt enda alla võetud koguruumala ja neljakordse molekulide omaruumala suhtega.*

Allpooltoodud tabel sisaldab mõningaid arvulisi, normaaltingimustel kehtivaid andmeid rea gaaside kohta.

Mõningaid molekulaarseid karakteristikuid rea gaaside kohta temperatuuril 0° *C* ja rõhul p = 1 *at*.

Gaas ja tema keemiline valem	Keskmine kiirus $\bar{u}\ \frac{m}{sek}$	Keskmine ruutkiirus $c\ \frac{m}{sek}$	Keskmine vaba tee pikkus λ *cm*	Ühe molekuli keskmine põrgete arv *sek*-s miljardites	Vaba tee läbimiseks kuluv aeg sekundites	Molekuli diameeter *cm*
Vesinik — H_2 .	1692	1840	$11{,}2 \cdot 10^{-6}$	15,1	$0{,}66 \cdot 10^{-10}$	$2{,}3 \cdot 10^{-8}$
Hapnik — O_2 .	425	461	6,5	6,55	1,52	2,9
Lämmastik — N_2	454	493	6,0	7,55	1,32	3,1
Argoon — Ar .	381	414	6,35	6,02	1,66	2,8
Heelium — He .	1204	1305	18	6,9	1,45	1,9
Vingugaas — CO	454	493	5,8	7,8	1,28	3,2
Süsihappegaas — CO_2	362	393	4	9,05	1,10	3,2
Veeaur — H_2O .	566	615	4	14,1	0,71	2,6

Normaalrõhul ja temperatuuril 0° *C* on vesiniku molekuli vaba tee pikkus ligikaudu üks kümnetuhandik millimeetrit. Valemi (14) järgi kasvab vaba tee pikkus võrdeliselt eriruumalaga, s. o. muutumatu temperatuuri korral pöördvõrdeliselt rõhuga. Järelikult rõhul 0,0001 *at* = 0,76 *mm* Hg on vesiniku molekuli vaba tee pikkus 1 *mm*, rõhkudel suurusjärgus 0,001 *mm* Hg on aga vaba tee pikkus võrdne mitme sentimeetriga. Toome järgnevalt ära õhumolekulide vaba tee pikkused normaaltemperatuuril ja mitmesugustel rõhkudel:

Rõhk *mm* Hg	Vaba tee λ *cm*
760	$6{,}5 \cdot 10^{-6}$
1	$5 \cdot 10^{-3}$
0,01	0,5
10^{-4}	50
10^{-6}	5000

Võrreldes mingi gaasi molekulide vaba tee pikkusi võrdsetel rõhkudel, kuid erinevatel temperatuuridel, võib valemi (14) põhjal öelda, et vaba tee pikkus kasvab võrdeliselt temperatuuriga (kuivõrd eriruumala konstantsel rõhul on võrdeline temperatuuriga).

Siin tuleb siiski meenutada seda, et molekulide raadius on teatud määral kokkuleppeline suurus (vt. § 87): mida tugevamad

on molekulide löögid põrkumisel, seda enam lähenevad teineteisele kokkupõrkuvate molekulide tsentrid ja seda väiksem on molekuli „efektiivne raadius". Molekulide põrkumisel kõverduvad molekulaarsete tõmbejõudude tõttu nende molekulide trajektoorid (analoogiliselt komeedile, mis Päikesele läheneb hüperbooli üht haru mööda ja eemaldub teist haru mööda). Vaadeldes molekule väikeste kerakestena ja asendades seega molekulide tõukumise ja tõmbumise tõelise pildi, mis on keeruline, väga lihtsustatud kujutlusega, peame temperatuuri tõusul lugema molekulide efektiivset raadiust teataval määral vähenevaks.

Nagu näitas 1893. a. Cesarland, võib gaasi temperatuuri mõju molekulide efektiivsele raadiusele väljendada järgmise valemiga:

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{C}{T}},$$

kus C on mingi gaasile omane konstant. Õhul $C = 119$, lämmastikul $C = 138$, vesinikul $C = 83$ ja süsihappegaasil $C = 240$.

Tähistades λ_0-ga vaba tee seda väärtust, mis on valemi (14) järgi arvutatud vastavalt molekuli efektiivse raadiuse suurimale väärtusele $r = r_0 = const$, siis vaba tee pikkus temperatuuril T (tingimusel, et $v = const$, s. o. konstantsel tihedusel) avaldub Cesarlandi valemi põhjal järgmiselt:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{C + T}.$$

Seega molekuli vaba tee pikkus sõltub temperatuurist kahesuguselt: eriruumala kaudu ja, nagu seda äsja selgitasime, molekuli efektiivse raadiuse kaudu. Selle tulemusena kasvab gaasimolekuli vaba tee pikkus seoses temperatuuri suurenemisega konstantsel rõhul kiiremini kui temperatuur. Teatud temperatuurivahemikus on vaba tee ligikaudu võrdeline $T^{\frac{3}{2}}$-ga. Sel juhul on omadifusiooni koefitsient ($D = \frac{1}{3} \bar{u} \lambda$), samuti ka vastastikuse difusiooni koefitsiendid, võrdelised T^2-ga, nagu see on märgitud § 92.

On selge, et molekulaarsete põrgete juhuslikkuse tõttu võivad gaasimolekulide tõelised vabad teed olla väga mitmesugused — kord suuremad, kord väiksemad kui keskmine vaba tee λ. Clausius näitas, et selliste osakeste keskmine arv n, milledel õnnestub põrkumata läbida tee x, moodustab osakeste koguarvust n_0 järgmise osa:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Kui $x = \lambda$, siis Clausiuse valemis $\frac{n}{n_0} = \frac{1}{e}$, s. o. umbes $\frac{1}{3}$. Järelikult gaasis domineerivad sellised vabad teed, mis on väiksemad kui keskmine vaba tee pikkus λ. Umbes $\frac{1}{3}$ molekulidest liigub ilma põrgeteta suurema vaba tee pikkuse kui λ.

§ 99. Gaaside soojusejuhtivuse molekulaarteooria.

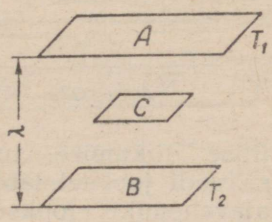
Gaaside soojusejuhtivuse, samuti ka viskoossuse selgitamiseks aine molekulaarse ehituse seisukohalt on väga kasulik rakendada Joule'i poolt kasutusele võetud gaaside kineetilise teooria lihtsustatud võtet, mis seisneb järgnevas. Selle asemel, et gaasi molekule lugeda kõikides suundades väga mitmesuguste kiirustega liikuvateks, oletame, et kõikide molekulide translatoorse liikumise kiirused on ühesugused ja nimelt võrdsed keskmise kiirusega $\bar{u}$. Edasi oletame, et kogu gaas jaguneb kuueks võrdseks molekulide vooluks, mis liiguvad kolmes üksteisega vastastikku ristiolevas suunas; seega, kui kujutleme gaasis sobivalt orienteeritud kuubi, ruumalaga 1 cm^3, siis selle kuubi iga tahku läbib kaks vastassuunalist molekulide voogu. Ajaelemendi dt jooksul on iga molekulide vool nihkunud edasi lõigu $\bar{u}dt$ võrra. Selle ajavahemiku kestel kuubi üht tahku läbinud molekulid võtavad enda alla ruumala 1 $cm^2 \times \bar{u}dt\ cm = \bar{u}dt\ cm^3$. Kui gaasi tihedus on ϱ, siis igale molekulide voolule vastav tihedus on $\frac{\varrho}{6}$ ja aja dt jooksul läbib kuubi tahku gaasihulk, mille mass on $\frac{\varrho \bar{u} dt}{6}$. Seega ühe sekundi jooksul üht pindalaühikut läbinud gaasi mass on $\frac{\varrho \bar{u}}{6}$.

Joule'i võte ei arvesta molekulaarsete põrgete mõju. Järelikult võib seda rakendada ainult neil juhtudel, kus molekulide põrked ei etenda mingisugust osa. Joule'i võtet võib rakendada näiteks õhukese gaasikihi kohta, kui kihi paksus ei ületa molekulide keskmist vaba tee pikkust.

Selleks et selgitada, millistest teguritest sõltub gaaside soojusejuhtivuse koefitsient, tuletame gaaside kineetilise teooria põhjal Fourier' võrrandi (§ 95). Kui gaasi eri osadel on erinev temperatuur, siis soojema osa (keskmiselt suurema energiaga) molekulid satuvad külmemasse ossa ja külmema osa (keskmiselt väiksema energiaga) molekulid soojemasse ossa, mille tulemusena keskmised energiad, järelikult ka temperatuurid, ühtlustuvad. Selles seisnebki gaaside soojusejuhtivuse protsess. Analoogiliselt difusiooniprotsessile kulgeb see molekulaarsete põrgete tõttu aeglaselt. Samuti nagu difusiooni korralgi, etendab ka siin tähtsat osa keskmine vaba tee pikkus ja molekulide translatoorse liikumise keskmine kiirus.

Kujutame gaasis tasapinna A (joon. 278), mille kõikides punktides temperatuur on T_1, ja temaga paralleelse tasapinna B_1, mille kõikides punktides temperatuur on T_2. Tasapindade vaheline kaugus olgu võrdne keskmise vaba tee pikkusega λ ja T_1 olgu veidi suurem kui T_2. Kujutleme tasapindade A ja B vahele nende tasapindadega paralleelse 1 cm^2 pindalaga pinnatüki C. Võime

eeldada, et piirkonnas AB ei toimu molekulide põrkeid. Seetõttu võime rakendada Joule'i meetodit. Ühe sekundi jooksul ülevalt alla, s. o. kohtadest temperatuuriga T_2, liikunud ning pinnatükki C läbinud molekulide kogumass on $\frac{\varrho\bar{u}}{6}$. Kui gaasimass $\frac{\varrho\bar{u}}{6}$ lihtsalt jahtuks temperatuurilt T_1 temperatuurini T_2, siis ta annaks ära soojusenergia $\frac{1}{6}\varrho\bar{u} \cdot c_v (T_1 - T_2)$, kus c_v on gaasi erisoojus konstantsel ruumalal. Antud juhul aga kandub selline energiahulk ülevalt alla läbi pinnatüki C. On kerge näha, et vastassuunaline molekulide voog, mis kannab väiksema energiaga molekule alt üles, annab samasuguse efekti nagu esimene voogki. Seega ühes sekundis ühe cm^2 pinda C läbinud soojushulk avaldub järgmiselt:



Joon. 278. Gaasi soojusjuhtivuse koefitsiendi valemi tuletamiseks.

$$\delta Q = \frac{2}{6}\varrho\bar{u}c_v(T_1 - T_2).$$

Võrreldes seda võrrandit Fourier' soojusejuhtivuse seaduse tavalise kujuga

$$\delta Q = k\frac{(T_1 - T_2)}{\lambda},$$

kus k on gaasi soojusejuhtivuse koefitsient ja $\frac{(T_1 - T_2)}{\lambda}$ temperatuuri gradient vaadeldud juhul, leiame, et

$$k = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}c_v\lambda. \qquad (15)$$

See võrrand seob gaasi soojusejuhtivuse koefitsiendi gaasi tihedusega ϱ, erisoojusega konstantsel ruumalal c_v, molekulide translatoorse liikumise keskmise kiirusega $\bar{u}$ ja vaba tee pikkusega λ.

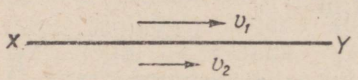
Nagu eespool näidatud, keskmine vaba tee λ on võrdeline gaasi eriruumalaga, s. o. pöördvõrdeline temperatuuriga. Seega vastavalt valemile (15) *gaasi soojusejuhtivuse koefitsient ei sõltu* (teatud piirides) *tihedusest*. Keskmine kiirus kasvab võrdeliselt temperatuuri ruutjuurega. Ka gaasi soojusmahtuvus temperatuuri tõustes tegelikult suureneb. Järelikult valemi (15) põhjal *gaasi soojusejuhtivus peab suurenema teatud määral kiiremini kui absoluutse temperatuuri ruutjuur*. Need teoreetilised järeldused leiavad üldjoontes katselist kinnitust.

Gaaside soojusejuhtivuse koefitsiendid temperatuuril 0° C $\frac{cal}{cm \cdot sek \cdot kraad}$

Vesinik	$38{,}1 \cdot 10^{-5}$	Vingugaas . . .	$5{,}15 \cdot 10^{-5}$
Hapnik	$5{,}55 \cdot 10^{-5}$	Õhk	$5{,}33 \cdot 10^{-5}$
Lämmastik . . .	$5{,}45 \cdot 10^{-5}$	Veeaur temperatuuril 100° C .	$5{,}20 \cdot 10^{-5}$
Süsihappegaas . .	$3{,}28 \cdot 10^{-5}$		

§ 100. Gaaside viskoossuse molekulaarteooria.

Olgu meil tasapind („liugetasapind") (joon. 279), mis on liikuvasse gaasi paigutatud nii, et tasapinna peal ja all asuvad gaasi osad liiguvad sellega paralleelselt ühes ja samas suunas, kuid erinevate kiirustega. Oletame, et gaasi ülemine osa liigub alumisest kiiremini ($v_1 > v_2$). Sel juhul on ülemise osa molekulide keskmine liikumishulk suurem kui alumise osa molekulide oma. Molekulide kaootilise liikumise tulemusena läheb osa molekulidest ühe sekundi jooksul läbi pinna XY alumisest osast ülemisse. Sama ajavahemiku jooksul läheb sama arv molekule gaasi ülemisest osast alumisse. Seetõttu ühe sekundi jooksul gaasi ülemise osa liikumishulk veidi väheneb; samapalju suureneb aga alumise osa liikumishulk. Keha liikumishulga muutus ühes ajaühikus on võrdne sellele kehale mõjuva jõuga. Me näeme, et vaadeldud gaasi osad mõjutavad teineteist võrdsete ja vastassuunaliste jõududega, mis asuvad liugetasapinnas XY. Gaasi alumisele osale mõjuvad jõud on samasuunalised kiirusega v_2 ja kiirendavad selle osa liikumist; kuna gaasi ülemisele osale mõjuvad jõud on vastassuunalised kiirusega v_1, siis need aeglustavad ülemise osa liikumist. Meil ei ole siin tegemist millegi muuga kui sisehõõrdejõududega. Nende jõudude tekkimise põhjuseks on liikumishulga ülekanne liugetasapinda XY läbivate molekulide poolt.



Joon. 279.

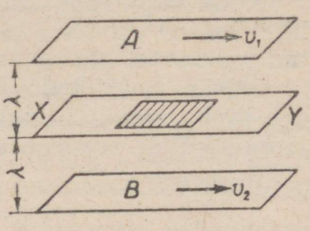
Tuletame gaasi sisehõõrde teguri valemi. Valime gaasis, mis liigub nii, nagu see on kujutatud joonisel 279, mingi liugetasapinna XY. Kujutame sellele kaks paralleelset tasapinda A ja B, mis on XY-st vaba tee λ kaugusel (joon. 280).

Olgu tasapinna A läheduses gaasi liikumise kiirus v_1 ja tasapinna B läheduses v_2. Konkreetsuse mõttes eeldame, et $v_1 > v_2$. Seega kiiruse gradient on $\frac{(v_1 - v_2)}{2\lambda}$. Tasapinna XY lähedal on gaasi liikumise kiirus $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

Eraldame tasapinnal XY pinnatüki $S = 1\ cm^2$ ja arvutame molekulide poolt ühe sekundi jooksul läbi selle pinnatüki kantud liikumishulga. Selleks rakendame Joule'i võtet (mida on selgitatud eelmise paragrahvi algul) kõigepealt ruumi osa $A\,X\,Y$ ning seejärel ruumi osa $B\,X\,Y$ kohta. Molekulide kogu, mis liigub ühe sekundi jooksul ruumist $A\,X\,Y$ läbi pinna (ülevalt alla), mass on $\frac{1}{6}\varrho\bar{u}$ ja liikumishulk $\frac{1}{6}\varrho\bar{u}v_1$; molekulide kogu, mis liigub alt üles, on sama massi ja liikumishulgaga: $\frac{1}{6}\varrho\bar{u}\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Selle tulemusena gaasi ülemine osa kaotab (1 *sek* jooksul 1 cm^2 pinna kohta) liikumishulga:

$$\frac{\varrho\bar{u}}{6}\left(v_1 - \frac{v_1+v_2}{2}\right) = \frac{\varrho\bar{u}}{6}\cdot\frac{v_1-v_2}{2}.$$

See avaldis annab ka gaasi ülemise osa liikumist aeglustava jõu ühe cm^2-se pinna kohta. Vastumõju seaduse järgi mõjub sama suur jõud ka gaasi alumisele osale, kiirendades viimase liikumist. Kui teostame analoogilise arvutuse ruumi osa BXY kohta, siis leiame, et molekulide liikumine selles ruumi osas toob endaga kaasa veel kahe samasuguse jõu tekkimise. Seega ülemise osa iga cm^2 kohta mõjuv kogujõud $F = \frac{1}{6}\varrho\bar{u}(v_1-v_2)$; sama suur vastassuunaline jõud mõjub gaasi alumisele osale. Võrreldes F avaldist Newtoni viskoossuse valemiga (§ 59), saame:



Joon. 280. Gaasi sisehõõrde teguri valemi tuletamiseks.

$$F = \frac{1}{6}\varrho\bar{u}(v_1-v_2) = \eta\cdot 1\cdot\frac{v_1-v_2}{2\lambda},$$

millest järgneb:

$$\eta = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}\lambda. \qquad (16)$$

Nagu juba mainitud, korrutis $\varrho\lambda$ ei sõltu gaasi tihedusest. Samuti ei sõltu gaasi tihedusest ka keskmine kiirus $\bar{u}$. Järelikult valemi (16) järgi *gaasi sisehõõrde tegur ei sõltu gaasi tihedusest* (Maxwelli seadus).

Üheks gaaside viskoossuse avalduseks on näiteks see tõsiasi, et gaasilisse keskkonda asetatud pendli võnkumised vähehaaval sumbuvad. Boyle teostas katseid pendliga, mis oli asetatud erinevate tihedustega gaasilistesse keskkondadesse, ja leidis, et pendli võnkumise aeg on alati ühesugune. See tulemus on täielikult kooskõlas Maxwelli seadusega.

Gaaside sisehõõrde teguri mõõtmised erinevatel rõhkudel näitavad, et rõhu vähenemisel mõnisada korda sisehõõrde tegur ei muutu rohkem kui mõne protsendi võrra. Nii näiteks rõhul $p = 1$ *at* süsihappegaasi sisehõõrde tegur $\eta = 1{,}5\cdot 10^{-4}\frac{g}{cm\cdot sek}$ ja rõhul $p = 0{,}001$ *at* $\eta = 1{,}4\cdot 10^{-4}\frac{g}{cm\cdot sek}$.

Kui õhurõhk on võrreldes normaalrõhuga 500 korda vähenenud, siis õhu sisehõõrdetegur on vähenenud kõigest 4% võrra.

Joonise 280 põhjal on kerge aru saada, et η ei sõltu gaasi tihedusest. Kui gaasi tihedus on kaks korda vähenenud, siis λ on kasvanud kahekordseks. Järelikult on kaks korda suurenenud ka AXY ja BXY ruumalad. Molekulide arv ruumalaühikus on aga kaks korda vähenenud; järelikult selliste molekulide arv ruumi

osas AB, mis kannavad liikumishulka läbi pinna XY, ei ole muutunud. See arutlus jääb aga kehtima ainult seni, kuni ruumi osa AB piirav pind ei ole veel ulatunud gaasi poolt enda alla võetud anuma seinteni. Kui see moment on saabunud, siis gaasi edasisel hõrendamisel λ enam ei suurene ja seega η hakkab vähenema.

Kuna väga tugevasti kokkusurutud gaaside (samuti ka vedelike) korral vaba tee pikkuse mõistel ei ole mõtet, siis ülalesitatud teooria ei ole neil juhtudel rakendatav.

Niisiis, gaasides, mis ei ole väga suurel määral hõrendatud ega liiga tugevasti kokku surutud, sõltub η ainult temperatuurist ja molekulide suurusest. Millise iseloomuga on siin sõltuvus temperatuurist? Avaldises $\eta = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}\lambda$ tegur $\bar{u}$ kasvab temperatuuri suurenedes nii nagu $\sqrt{T}$. Tegur $\varrho\lambda$, nagu nähtub valemist (14), kasvab molekulide diameetrite vähenedes; järelikult kasvab ta ka temperatuuri tõusul. Seega *gaaside sisehõõrde tegurid kasvavad temperatuuri tõusul kiiremini kui* $\sqrt{T}$.

(Vedelikes temperatuuri tõusul η, vastupidi, kiiresti kahaneb — ligikaudu nii, nagu $\frac{1}{T^3}$ või isegi veel kiiremini. Siit võib järeldada, et sisehõõrde molekulaarne mehhanism on vedelikel teistsugune kui gaasidel.)

Kuivõrd täpselt valem $\eta = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}\lambda$ määrab sisehõõrdeteguri sõltuvuse temperatuurist, on näha järgmisest tabelist, kus mõõtmistest saadud õhu sisehõõrdeteguri väärtused on kõrvutatud arvutatud väärtustega.

t° C	$\eta_{mõõtm} \cdot 10^5$	$\eta_{arvut} \cdot 10^5$
—21	16,4	16,2
+15	18,1	18,1
99	22,0	22,0
182	25,6	25,5
302	29,9	29,9

Tuletasime gaasi soojusejuhtivuse koefitsiendi jaoks valemi:

$$k = \frac{1}{3\varrho}\bar{u}c_v\lambda.$$

Võrreldes seda valemit avaldisega

$$\eta = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}\lambda,$$

saame:

$$k = \eta c_v.$$

Täpsemad arvutused näitavad, et

$$k = \varepsilon\eta c_v, \qquad (17)$$

kus ε on arvuline kordaja, mis ei ole kõikide gaaside jaoks täiesti ühesugune, ja mis teooria tulemuste põhjal on järgmine:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\left(9\frac{c_p}{c_v} - 5\right).$$

See tähtis seos gaasi soojusejuhtivuse koefitsiendi, sisehõõrdeteguri, ja erisoojuse vahel leiab täielikku katselist kinnitust, mis nähtub teooria põhjal arvutatud ε väärtuste võrdlemisest k, η ja c_v mõõtmise tulemusena saadud ε väärtustega:

	Argoon	Heelium	Vesinik	Lämmastik	Hapnik	Dilämmastikoksüüd	Etüleen
Katseandmete põhjal $\frac{k}{\eta c_v} =$	2,5	2,4	1,9	1,9	1,9	1,7	1,5
Teooria järgi $\frac{k}{\eta c_v} = \frac{1}{4}\left(9\frac{c_p}{c_v} - 5\right) =$	2,4	2,4	1,9	1,9	1,9	1,7	1,5

Nägime, et gaaside difusioonil, viskoossusel ja soojusejuhtivusel on palju ühist. Esiteks, kõik need nähtused on põhjustatud mingi suuruse ülekandest: difusiooninähtus massi ülekandest, soojusejuhtivus energia ülekandest ja viskoossuse nähtus liikumishulga ülekandest. Teiseks, kõikide nende nähtustega kaasub energia hajumine. Kolmandaks, kõigi nende kolme nähtuse mehhanismis etendab olulist osa molekulide keskmine vaba tee pikkus.

Tabel gaaside difusiooni, viskoossuse ja soojusejuhtivuse nähtuste võrdlemiseks.

Nähtus	Ülekantav suurus	Ülekande võrrand	Koefitsiendi (teguri) valem
Difusioon	Mass	$\delta m = D\frac{dc}{dl}\,dSdt$	$D = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda$
Soojusejuhtivus	Soojusenergia	$\delta Q = k\frac{dT}{dl}\,dSdt$	$k = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}c_v\lambda$
Sisehõõre	Liikumishulk	$\delta P = \eta\frac{dv}{dl}\,dSdt$	$\eta = \frac{1}{3}\varrho\bar{u}\lambda$
		$\left(F = \eta\frac{dv}{dl}\,dS\right)$	

Suuruse λ katseliseks määramiseks võib kasutada soojusejuhtivuse, difusiooni või viskoossuse nähtust. Tavaliselt arvutatakse

λ sisehõõrde teguri järgi, mille katseline määramine valmistab kõige vähem raskusi.

Kui mingi gaasi jaoks on arvutatud λ, siis valemi (14) põhjal võib leida ka molekulide suuruse.

§ 101. Vaakuum. Manomeetrid.

Õli-, molekulaar- ja difusioonpumbad.

Tugevasti hõrendatud gaaside omadused erinevad normaalse tihedusega gaaside omadustest mitmes suhtes. Erinevus seletub sellega, et mida „kõrgem" on vaakuum, seda suurem on molekuli vaba tee pikkus. Kõrgvaakuumis on vaba tee vaakuum-anuma lineaarmõõdetest suurem.

Harilikult mõistetakse füüsikas vaakuumi all niisugust hõrendust, mille korral gaasi molekulide keskmine vaba tee pikkus on anuma mõõdetega samas suurusjärgus. Rõhkudel 10^{-3} — 10^{-4} *mm* Hg ulatub vaba tee pikkus mõnest sentimeetrist mõnekümne sentimeetrini. Sellist ja suuremat hõrendust nimetataksegi harilikult vaakuumiks. Kehade väikestes poorides jõustuvad vaakuumi seadused vastavalt väiksematel hõrendusastmetel ja, juhul kui pooride mõõted on suurusjärgus 10^{-5} *cm*, isegi atmosfäärile lähedastel rõhkudel.

Parimas käesoleval ajal saavutatud vaakuumis on gaasi rõhk 10^{-9} *mm* Hg, s. o. umbes 10^{-12} *at*. Seejuures jääb veel igasse kuupsentimeetrisse kümneid miljoneid molekule. Kuid keskmine vaba tee pikkus on siin erakordselt suur (kümneid kilomeetreid).

Vastupidiselt gaasi soojusliikumise pildile harilikul rõhul, kõrgvaakuumis gaasi molekulid, liikudes sirgjooneliselt ja pommitades anuma seinu, põrkuvad omavahel harva kokku.

Kujutame endale ette, et meil on kaks gaasiga täidetud anumat, mis on omavahel ühendatud toruga. Oletame, et üks anum on soe, teine aga külm. Anumate erinevad temperatuurid jäägu muutumatuks. Kui gaas ei ole üleliia hõrendatud, siis kujuneb kindlaks statsionaarne olek, mille korral gaasi rõhk on mõlemas anumas ühesugune ja järelikult (Gay-Lussac'i seaduse põhjal) gaasi tihedus pöördvõrdeline anumate absoluutsete temperatuuridega:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Seejuures osutub, et anumaid ühendavas torus toimub kogu aeg gaasi liikumine: toru seinte lähedal gaas voolab külmemast anumast soojemasse, toru telge mööda aga vastupidises suunas, s. o. soojemast anumast külmemasse.

Kõrgvaakuumi korral, kui vaba tee pikkus on toru diameetrist suurem, ei ole statsionaarse oleku saabumise tunnuseks gaaside rõhkude võrdsus anumates. Statsionaarne olek saabub siis, kui ühe sekundi jooksul ühest anumast teise lendavate molekulide

arvud on võrdsed. On selge, et ühe sekundi jooksul lendab külmemast anumast soojemasse seda suurem arv molekule, mida suurem on gaasi tihedus külmas anumas ja mida suurem on molekulide keskmine kiirus. Sedasama võib öelda soojast anumast külmemasse lendavate molekulide kohta. Seega

$$\varrho_1 \bar{u}_1 = \varrho_2 \bar{u}_2,$$

kust

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1}.$$

Kuna molekulide keskmine kiirus on võrdeline ruutjuurega absoluutsest temperatuurist, siis

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \tag{18}$$

Järelikult, kui vaba tee pikkus on võrreldes toru diameetriga suur, siis statsionaarne olek saabub tihedustel, mis on pöördvõrdelised absoluutsete temperatuuride ruutjuurtega. Seega ühendatud anumates gaasi rõhud ei ole ühesugused. Võrreldes võrrandit (18) Clapeyron'i võrrandiga $\varrho = \frac{p}{RT}$, näeme, et

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}, \tag{18'}$$

s. t. statsionaarses olekus jääb rõhk soojas anumas suuremaks kui külmas anumas. See nähtus (temperatuuride vahe tõttu statsionaarse rõhkude vahe tekkimine vaakuumis) kannab *termilise efusiooni* nime. Termilise efusiooni nähtust uuris üksikasjaliselt K n u d s e n (1910. a.). Knudsen tuletas valemi, mis kehtib juhul, kui vaba tee pikkus on suur, kuid mitte veel küllaldane selleks, et võiks rakendada valemit (18'). See valem on järgmine:

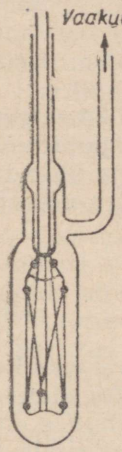
$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{3}{8} \frac{K}{1 + \frac{2r}{\lambda}} \frac{\Delta T}{T}}{}; \tag{19}$$

Δp on siin statsionaarne rõhkude vahe toru kahe sellise koha vahel, millede temperatuuride vahe on ΔT; p ja T on gaasi rõhu ja temperatuuri keskmised väärtused torus; r — toru raadius; λ — vaba tee; K — arvuline koefitsient, mis teatud määral sõltub suhtest $\frac{2r}{\lambda}$. Kui vaba tee pikkus on toru raadiusega võrreldes suur, siis $K = \frac{4}{3}$.

Hõrendatud gaasi kihis toimuvate molekulaar-kineetiliste nähtuste teooria, juhul kui gaasi kiht külgneb gaasi suhtes liikuva tahke keha pinnaga, töötas välja prof. A. K. T i m i r j a z e v (1911—1913). Sel juhul leiab aset gaasi „liugumine" keha pinna suhtes. „Temperatuuri hüpe" on seda suurem, mida suurem on liugumine. Temperatuuri hüppe avastas S m o l u h h o v s k i, sise-

hõõret hõrendatud gaasides seoses liugumise nähtusega uurisid eksperimentaalselt A. K. Timirjazev jt.

Kui gaasi anumasse paigutada vilgukivist tiibadega veskike, mille tiibade üks külg on mustaks värvitud, ja suunata sellele veskikesele valguskiirte kimp, siis anumas oleva gaasi küllalt suure hõrenduse korral hakkab veskike pöörlema. Seda nähtust nimetatakse *radiomeetriliseks efektiks*. Veskike pöörleb nii, nagu rõhuks valgus tiivakeste mustaks värvitud külgedele. Tegelikult, nagu Knudsen ja Lorentz näitasid, ei seletu veskikese pöörlemine valguse rõhuga[1]. Pöörlemise põhjus seisneb järgnevas. Tiivakeste mustaks värvitud küljed soojenevad kõrgema temperatuurini kui mustaks värvimata küljed. Mustaks värvitud pinnale langevad molekulid põrkavad tagasi suurema kiirusega ja neil on suurem liikumishulk kui molekulidel, mis põrkavad vastu mustaks värvimata pinda. Seetõttu on gaasi rõhk tiivakeste mustaks värvitud küljele suurem kui mustaks värvimata küljele. Kui gaas ei ole küllalt hõre ja molekuli vaba tee on väike, siis molekulidevahelised põrked võrdsustavad tiivakeste mõlematele külgedele avalduvad rõhud ja veskike ei pöörle.



Joon. 281. Perrin-Galle manomeeter.

Radiomeetrilisel efektil põhineb *Knudseni manomeetri* ehitus. Selles manomeetris on riputatud kerge plaadike, mille üks külg on mustaks värvitud ja teine mustaks värvimata, niidi otsa. Niidi pöördenurga järgi mõõdetakse hõrendatud gaasi poolt plaadikese külgedele avaldatavate rõhkude vahet. Lähtudes mõõdetud rõhkude vahest, arvutatakse gaasi hõrenduse aste.

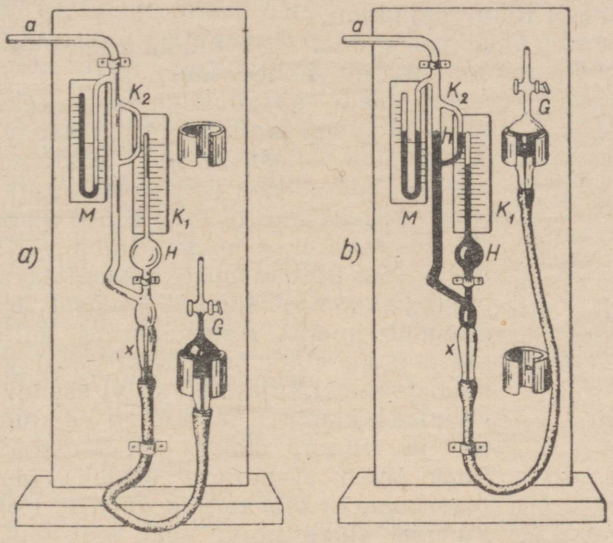
Nagu märgitud § 99, gaasi tiheduse muutumisel teatavates piirides gaaside soojusejuhtivuse koefitsient ei sõltu tihedusest. Kui aga vaba tee on suurusjärgult võrdne anuma lineaarmõõdetega, siis gaasi tiheduse edasisel vähendamisel soojusejuhtivuse koefitsient väheneb.

Tugevasti hõrendatud gaaside soojusejuhtivuse koefitsiendi sõltuvusel gaasi tihedusest põhineb *Perrin-Galle manomeetri* ehitus. See manomeeter (joon. 281). sarnaneb toruga varustatud hõõglambile. Toru ühendab manomeetri ballooni vaakuum-anumaga. Perrin-Galle manomeetri metallist (plaatinast) niiti soojendatakse konstantse tugevusega elektrivooluga. Soojusejuhtivuse koefitsiendi vähenemise tõttu gaasi hõrendamisel väheneb soojuse ärajuhtimine. Seetõttu balloonis oleva gaasi hõrendamisel niidi temperatuur suureneb. Niidi temperatuuri tõusmine avaldab

[1] Valguse rõhk on tegelikult olemas. Seda küsimust käsitletakse optikas (III köide).

mõju niidi elektrilisele takistusele. Seega, mõõtes niidi elektrilise takistuse, võib selle takistuse suuruse põhjal otsustada niidi temperatuuri üle ja samuti rõhu üle vaakuumis.

Rõhu mõõtmiseks kõrgvaakuumis kasutatakse sageli *Mac-Leod'i manomeetrit.* Hõrendatud gaas, mille rõhku soovitakse mõõta, surutakse selles manomeetris tugevasti kokku. Kui gaas on mingi kindel arv kordi kokku surutud, siis mõõdetakse selle rõhku kinnise manomeetri põhimõttel.



Joon. 282. Mac-Leod'i manomeeter. *a* — elavhõbeda-reservuaar on alla lastud; *b* — reservuaar on üles tõstetud.

Mac-Leod'i manomeetri ehitus on kujutatud joonisel 282. Sellel joonisel on toodud klaastorude süsteem, mille üks ots *a* on ühendatud ruumiga, kus mõõdetakse rõhku. Teine ots *x* on ühendatud kummitoru abil klaasreservuaariga *G*, millesse on valatud elavhõbedat. Manomeetri torud *M* ja K_1 on ülalt kinni sulatatud. Rõhu mõõtmisel lastakse elavhõbeda-anum *G* algul alla, nagu näidatud joonisel 282, *a*, ja seejärel tõstetakse asendisse, mis on näidatud joonisel 282, *b*. Reservuaari *G* langetamisel elavhõbe eemaldub torudest ja balloonist *H*. Balloon *H* koos toruga K_1 täitub gaasiga, mille rõhku *p* soovitakse mõõta. Tähistame ballooni *H* ja toru K_1 ruumala tähega *V*. Kui reservuaari *G* tõsta, siis elavhõbe tõuseb mööda torusid ja surub balloonis *H* ja torus K_1 olnud gaasi väikesse ruumalasse *v*. Pärast kokkusurumist mõõtub torus K_1 oleva gaasi rõhk elavhõbeda nivoode vahega *h* torudes K_1 ja K_2,

kusjuures torus K_2 pealpool elavhõbedat oleva gaasi, s. o. vaakuumi rõhu võime torus K_1 elavhõbeda kohal asuva gaasi rõhuga võrreldes jätta arvestamata. Boyle'i seaduse järgi

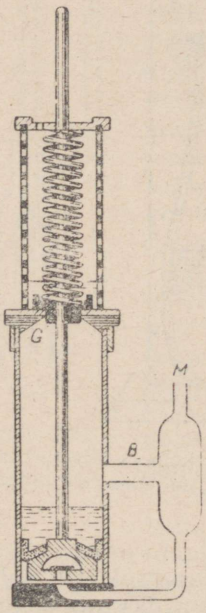
kust

$$pV = hv,$$

$$p = h\frac{v}{V}.$$

Niisiis, mõõtes rõhku h torus K_1 ja teades ruumalasid V ja v, võib arvutada rõhu vaakuumis.

Mac-Leod'i manomeetri abil võib mõõta rõhke suurusjärgus üks miljondik millimeetrit elavhõbedasammast.



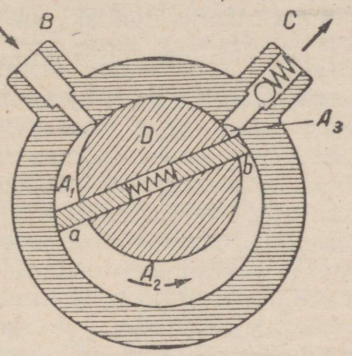
Joon. 283. Õli-kolbpumba skeem.

Väikeste vaakuumide saamiseks kasutatakse õlipumpi (kolbpumpi ja rotatsioonpumpi). Kolbpumba kasutamisel vaakuumpumbana peab silinder olema välisõhust hoolikalt isoleeritud. Selleks kasutatakse suure viskoossusega õli, mis valatakse paksu kihina väljalaskeklapile. Gaasi hõrendamiseks kasutatava õli-kolbpumba skeem on toodud joonisel 283. Toru *M* ühendab pumpa reservuaariga, millest soovitakse õhku või mõnda teist gaasi välja pumbata. Joonisel kujutatud kolvi asendi korral on väljalaskeklapp *G*, millele on valatud õli, suletud ja silindri õõnsus on täidetud gaasiga. Gaas tuleb silindrisse tühjaks pumbatavast reservuaarist läbi torude *M* ja *B*. Kolvi üleslii-kumisel suleb kolvi peal olev õlikiht ava *B*. Sellega takistatakse gaasi tagasiminek tühjendatavasse reservuaari ja silindris olev gaas surutakse kolvi abil kokku. Kui kolb läheneb äärmisele ülemisele asendile, siis kolvile valatud õli tõstab klapi *G* üles ja kokkusurutud õhk väljub mullikestena läbi õlikihi. Koos õhumullikestega pressitakse välja osalt ka õli. Kolvi allaliikumisel tekib kolvi kohal hõrendatud ruum, mis täidetakse tühjendatavast anumast toru *B* kaudu tulevate uute gaasihulkadega. Alumine toru, mis lõpeb kolvi all, on tehtud selleks, et kolb ei kleepuks silindri põhja külge.

Vaakuumi saamiseks rakendas kolbpumpa esimesena Guericke (XVII saj.). Seetõttu ka kaasaegseid õhu hõrendamiseks kasutatavaid õlikolbpumpi nimetatakse *Guericke pumpadeks.* Sageli ühendatakse kaks sellist pumpa järjestikku, nii et üks pump pumpab gaasi vaakuumist reservuaari (*eelvaakuumi*), milles gaasi rõhk on vahepealne, ja teine pump pumpab gaasi eelvaakuumist

atmosfääri. Kahe Guericke pumba selline kombinatsioon võimaldab saada hõrendusi kuni 0,05 *mm* Hg.

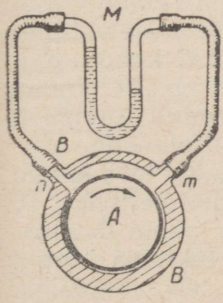
Täiuslikumateks pumpadeks osutuvad *õli-rotatsioonipumbad*. Sellise pumba põhiosade ehituse skeem on kujutatud joonisel 284. Massiivne silinder *D* pöörleb ümber oma telje, kusjuures ta on kogu aeg surutud vastu silindrilise õõnsuse ülemist seina. Piki silindri *D* ühte diameetrit tehtud avausse on asetatud kaks labidakest *a* ja *b*, nende vahele on pandud vedru. Vedru surub labidakesed vastu silindrilise õõnsuse seinu nii, et õõnsus jaguneb kolmeks üksteisest isoleeritud kambriks A_1, A_2 ja A_3. Kolme kambri täielikuks üksteisest isoleerimiseks surutakse labidakesed ja silinder *D* tihedalt vastu seinu, mis on kogu aeg kaetud õlikihiga. Sellise labidakeste asendi korral, mis on näidatud joonisel 284, on kamber A_1 toru *B* kaudu ühendatud tühjendatava anumaga. Silindri *D* pöörlemine vastu kellaosuti liikumise suunda suurendab selle kambri A_1 ruumala ja tühjendatavast anumast imetakse kambrisse gaasi. Kambrites A_2 ja A_3 on juba gaas, mis sinna imeti varem, kui vastav kamber oli ühenduses toruga *B*. Silindri pöörlemine vastu kellaosuti liikumise suunda vähendab kambri A_3 ruumala ja temas olev gaas surutakse kokku. Kokkusurutud gaas tõstab kerge kerakujulise klapi ja tungib mööda toru *C* läbi õlikihi atmosfääri või eelvaakuumisse.



Joon. 284. Õli-rotatsioonipump.

Uusimad õli-rotatsioonpumbad annavad hõrendusi kuni tuhandikud *mm* Hg. Kolm järjestikku ühendatud pumpa annavad hõrendusi kuni $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ *mm* Hg.

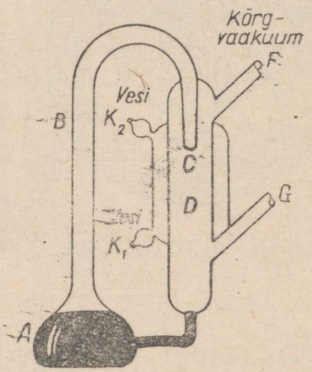
Kõrgema vaakuumi saavutamiseks kasutatakse spetsiaalse ehitusega pumpi. Väga laialdaselt rakendatakse niinimetatud *molekulaarpumpi*. Molekulaarpumba töötamise põhimõtet selgitatakse joonisel 285 (molekulaarpump leiutati 1912. a. Gaede poolt; tänapäeval kasutatakse täiuslikumaid Hollwegi molekulaarpumpi, millede töötamise printsiip on samasugune nagu Gaede pumpadelgi). Õõnsa silindri *B* sees pöörleb trummel *A*. Gaasi molekulid, mis põrkavad pilu laiemas osas *mn* vastu trum-



Joon. 285. Molekulaarpumba skeem.

lit *A*, omandavad trumli pöörlemissuunalise lisakiiruse. Ülejäänud kohtades (s. o. välja arvatud ala *mn*) on trumli *A* ja silindri *B* vaheline pilu nii kitsas, et tema kaudu gaasi läbitungimine on raskendatud. Seetõttu gaas paiskub torusse *m*; torus *n* aga tekib hõrendus. Mida lähedasem on trumli *A* pinna pöörlemise kiirus gaasi molekulide keskmisele kiirusele, seda suurema hõrenduse annab pump.

Hollwegi pumpades on trumli ja silindri vahelise pilu laius 0,03 *mm*. Trummel diameetriga 15 *cm* teeb 4000 pööret minutis. Pumba tühjendamiskiirus (hõrenduse tekitamisel algrõhult 0,1 *mm* Hg kuni lõpprõhuni 0,01 *mm* Hg) on 2300 $\frac{cm^3}{sek}$. See ületab peaaegu 20 korda tühjendamiskiiruse, mida sama alg- ja lõpprõhu korral omavad rotatsioonipumbad.



Joon. 286. Langmuir'i pumba skeem.

Kõrgvaakuumi saavutamiseks on molekulaarpumba kogu pöörlev osa koos liikumatu silindriga ja elektrimootoriga suletud metallkapslisse, mis ühendatakse eelvaakuumiga. Kui rõhk eelvaakuumis on küllalt suur, siis tühjendamiskiirus on väike. Rõhu vähenemisel eelvaakuumis tühjendamiskiirus kasvab ja saavutab maksimumi siis, kui molekulide vaba tee pikkus on saanud suurusjärgult võrdseks imemispilude mõõdetega. Suurim hõrendus, mida molekulaarpumbaga võib saada, on 10^{-7} *mm* Hg.

Parimateks kõrgvaakuumpumpadeks on niinimetatud *Langmuir'i difusioonpumbad*. Joonisel 286 on näidatud skemaatiliselt sellise difusioonpumba ehitus. Kolbi *A* valatud elavhõbe kuumendatakse elektriahju abil kuni keemiseni. Elavhõbeda-aur tõuseb mööda toru *B* üles (elavhõbeda-auru jahtumise vältimiseks kaetakse see toru asbestiga) ja läheb düüsi *C* kaudu anumasse *D*, mille seinu uhutakse väljastpoolt külma veega (külma vee juurde- ja äravool toimub torude K_1 ja K_2 kaudu). Anuma *D* külmadel seintel elavhõbeda-aur kondenseerub ja elavhõbe valgub tilkadena anuma alumisse ossa, mis on ühendatud toru kaudu kolviga *A*. Anum, milles elavhõbeda-aurud kondenseeruvad, on ühendatud kahe toruga. Ülemise toru *F* kaudu on anum *D* ühendatud tühjakspumbatava ruumiga (kus on vaja tekitada kõrget vaakuumi); alumine toru *G* ühendab anumat *D* eelvaakuumiga. Kui elavõbeda-auru joa dünaamiline rõhk on suurem gaasi rõhust eelvaakuumis, siis düüsist *C* tulnud elavhõbeda-aur levib anumas *D* lehvikukujuliselt allapoole ja, nagu eespool öeldud, kon-

denseerub selle anuma külmadel seintel. On oluline, et sel juhul elavhõbeda-aurud peaaegu üldse ei lange anuma *D* ülemisele (s. o. ülevalpool düüsi asuvale) osale ja seega ei tungi peaaegu üldse torusse *F*, mis suubub tühjaks pumbatavasse anumasse. Väike hulk elavhõbeda-auru, mis siiski on tunginud torusse *F*, kondenseeritakse toru *F* intensiivse jahutamisega.

Elavhõbeda ringkäigul, mida me kirjeldame, on järgmine otstarve. Gaas, mis tuleb tühjendatavast anumast toru *F* kaudu anuma *D* ülemisse ossa, difundeerub pidevalt elavhõbeda-auru joas. Gaas tõmmatakse elavhõbeda-auru joa poolt endaga kaasa ja juhitakse torusse *G*, mille kaudu see läheb eelvaakuumisse. Eelvaakuumis hoitakse rõhk mingi teise pumba abil suurusjärgus 0,1 *mm* Hg. Gaasi vastassuunalist difundeerumist eelvaakuumist kõrgvaakuumi takistab elavhõbeda-auru juga: gaasi molekulid, mis põrkuvad vastu elavhõbeda-auru molekule, paisatakse tagasi anuma *D* alumisse ossa. Nagu Langmuir'i arvutused näitavad, pääseb 10^{20} molekulist ainult üks molekul elavhõbeda-auru joa kaudu eelvaakuumist kõrgvaakuumisse. Seega Langmuir'i pumba abil saadav hõrendus ei sõltu praktiliselt rõhust eelvaakuumis (kui ainult gaasi rõhk eelvaakuumis ei ületa elavhõbeda-auru joa dünaamilist rõhku). Kui Langmuir'i pumpa tuleb rakendada halva eelvaakuumi korral (2—3 *mm* Hg), siis tehakse anuma *D* ülemise osa ja düüsi *C* vaheline pilu tunduvalt kitsam.

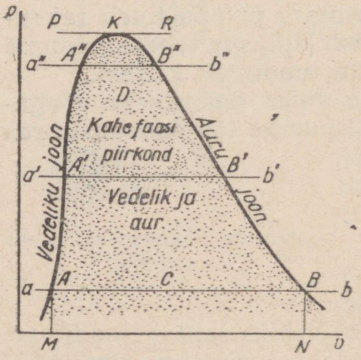
Kui düüsi *C* diameeter on 1 *cm* ja düüsi ümbritseva rõngakujulise pilu laius $\frac{1}{2}$ *cm*, siis Langmuir'i pumba tühjendamiskiirus on ligikaudu 2000—3000 $\frac{cm^3}{sek.}$

XVII PEATUKK.

REAALSETE GAASIDE JA AURUDE FÜÜSIKA. VAN DER WAALS'I VÕRRAND.

§ 102. Küllastavad ja ülekuumendatud aurud. Andrews'i diagramm.

Kõige olulisem erinevus reaalsete gaaside ja kujutletavate ideaalsete gaaside vahel seisneb selles, et iga reaalne gaas on ülekuumendatud aur ehk teisiti öeldes: iga reaalne gaas *kondenseerub*, kui tema temperatuuri vajalikul määral madaldada, s. o. muutub vedelikuks või kristallideks.



Joon. 287. Graafik aurustumisprotsessi analüüsimiseks.

Olgu meil 1 *kg* vett, mis ei sisalda õhku ja mis on valatud suurde (hea soojusejuhtivusega ainest valmistatud) silindrisse. Vesi olgu tihedalt suletud kolviga, mis puutub vastu veepinda. Olgu vee algtemperatuur 0° *C* ja algrõhk 1 *at*. Hoiame edaspidi rõhu konstantse. Seega meie poolt vaadeldav protsess on isobaariline[1], s. o. kulgeb konstantsel rõhul. Joonisel 287, kus abstsisstseljele on kantud ruumalad ja ordinaatteljele rõhud, kujutab punkt *a* ühe kilogrammi vee algolekut. Punkt *a* on valitud nii, et tema abstsiss on (ligikaudu) 0,001 m^3 ja ordinaat 1 *at*.

Andes veele soojust hakkab vee temperatuur tõusma. Ruumala esialgu natuke väheneb, kuid hakkab seejärel kasvama. Sealjuures liigub vee olekut kirjeldav punkt *C* mööda isobaari (s. o. mööda horisontaaljoont) paremale. Lõpuks temperatuur saavutab väärtuse 100° *C*. Sel momendil on vaadeldava veehulga ruumala ligikaudu 4% võrra suurem kui algruumala. Kujutame kokkuleppeliselt[2] seda vee olekut punktiga *A*.

[1] Kreekakeelsetest sõnadest *isos* — võrdne ja *baros* — raskus, kaal.

[2] Kokkuleppelisus seisneb siin selles, et joonisele ei ole kantud mastaapi.

Olgu märgitud, et vaadeldava protsessi kestel vee poolt neelatud soojushulk (ligikaudu) $q = 100$ *kcal*. Osa sellest soojusest kulub välisrõhu ületamisel tehtavaks tööks, ülejäänud osa aga suurendab vee siseenergia varu. Võrreldes teise osaga on esimene osa väga väike. Seetõttu võime arvestada, et kogu soojushulk q kulub vee siseenergia suurendamiseks.

Jätkame alustatud protsessi, lisades veele uuesti soojust. Vesi hakkab muutuma auruks; auru ja vee poolt enda alla võetud ruumala hakkab kiiresti kasvama. Aur oma otseses tähenduses on gaas, silindris asuva vee peal olevas ruumis tekib aga gaasilise vee ja aurustumisel kaasatõmmatud väga väikeste vedela vee tilgakeste segu (sellist segu nimetatakse tehnikas niiskeks auruks ehk *„märjaks auruks"*, erinevalt *kuivast aurust*, mis ei sisalda veetilku). Üks sellistest olekutest on diagrammil kujutatud punktiga *C*. Mida suurem osa vedelikust aurustub, seda enam kasvab süsteemi ruumala; punkt *C* jätkab liikumist paremale. Süsteemi temperatuur jääb seejuures võrdseks 100°-ga.

Lõpuks saabub moment, millal kogu vedelik on kuni viimase tilgani aurustunud. Sel momendil on meil silindris kuiv küllastav aur. Temperatuur on ikkagi veel 100° *C*. Süsteemi olekut kujutab nüüd punkt *B* (seda punkti *B* nimetatakse *aurupunktiks*, punkti *A* aga *vedelikupunktiks*).

On tähtis märkida, et lõigu *AB* ulatuses on meil protsess mitte üksi isobaariline, vaid ka isotermiline: niikaua, kuni silindris on ühe ja sama aine kaks faasi — vedelik ja aur, jääb mõlemate faaside temperatuur konstantseks ja võrdseks ühest faasist teise „üleminekuks vajaliku temperatuuriga". Tõepoolest: rõhul 1 *at* ja temperatuuril $t = 100°$ *C* võib vesi (kui sellele lisada soojust) aurustuda; samuti võib ka aur (kui sellelt soojust ära võtta) kondenseeruda vedelikuks.

1 *kg* vee aurustumiseks vajalikku soojushulka nimetatakse *latentseks (varjatud) aurumissoojuseks* ja tähistatakse tähega *r*. Kui $t = 100°$ *C*, siis $r = 539$ *kcal*. Sellest soojushulgast kulutatakse 41 *kcal* süsteemi paisumisega seotud oleva välistöö sooritamiseks; ülejäänud 498 *kcal* põhjustab aga 1 *kg* kuiva küllastava (100-kraadise temperatuuriga) auru siseenergia kasvu, võrreldes vedela vee siseenergiaga[1].

Seda osa latentsest aurumissoojusest, mis läheb süsteemi siseenergia suurendamiseks, nimetatakse *sisemiseks latentseks aurumissoojuseks* ja tähistatakse tähega ϱ; välistöö sooritamiseks minevat osa nimetatakse *väliseks latentseks aurumissoojuseks*. Väline aurumissoojus on võrdne paisumisel sooritatud tööga $p\,(v_2 - v_1)$, kus p on küllastava auru rõhk ning v_2 ja v_1 vastavalt

[1] Suurem osa sellest energiast muutub molekulide potentsiaalseks energiaks, mis on seotud molekulide tunduva kaugenemisega üksteisest vedeliku muutumisel auruks.

ühe kilogrammi auru ja ühe kilogrammi vee ruumalad. Kui diagramm oleks koostatud õiges mastaabis, siis aurustumise töö $p\,(v_2 - v_1)$ väljenduks graafiliselt pindalaga *ABMN*.

Jätkame isobaarilist protsessi, lisades süsteemile uusi soojushulki. Seejuures aur lakkab otsekohe olemast küllastav ning muutub *ülekuumendatuks* (ehk „mitteküllastavaks") auruks. Tema temperatuur hakkab järk-järgult kasvama. Ka siin läheb osa neelatud soojusest siseenergia suurendamiseks, osa aga välistöö sooritamiseks. Ülekuumenemise protsessi kujutab graafikul lõik *Bb*. Seda protsessi võib jätkata ükskõik kui kõrgete temperatuurideni.

Peamine erinevus küllastavate ja ülekuumendatud aurude vahel seisneb selles, et küllastav aur võib ükskõik kui kauaks jääda oma vedelikuga tasakaalu, kuna aga ülekuumendatud auru korral on see võimatu: kui ülekuumendatud aur viia ühte ruumi oma vedelikuga, siis vedelik hakkab aurustuma.

Võib esile kutsuda ka vastupidist protsessi, mis kulgeb mööda joont *bBAa*; selle protsessi osas *AB* toimub auru kondenseerumine vedelikuks. Protsessiga kaasub järkjärguline soojuse eraldumine süsteemist. Eralduv soojus saadakse osalt süsteemi siseenergia kahanemise arvel, osalt aga välisrõhu poolt sooritatud töö arvel.

Jälgisime aurumisprotsessi, mis toimub rõhul 1 *at*. See protsess kulgeks samasuguselt ka teistel, ühest atmosfäärist suurematel või väiksematel rõhkudel. Nagu kirjeldatud juhulgi, oleks algtemperatuur ka siin 0° *C*; ülejäänud suuruste väärtused oleksid aga erinevad. Joonisel 287 on pealpool isobaari *aABb* toodud veel kaks isobaari, mis vastavad kõrgematele rõhkudele.

Me näeme diagrammilt järgmisi muutusi, mis toimuvad sõltuvalt rõhu *p* muutumisest.

1. Mida kõrgemal asub isobaar, seda suurem on vedelikupunkti (A', A'' jne.) abstsiss. See tähendab, et mida suurem on süsteemile mõjuv rõhk, seda enam paisub vedelik, enne kui ta hakkab keema. Selle põhjus on täiesti ilmne: selleks et vedelik hakkaks keema kõrgemal rõhul, tuleb teda soojendada kõrgema temperatuurini, mistõttu ta ka rohkem paisub.

2. Mida kõrgemal asub isobaar, seda väiksem on aurupunkti (B, B', B'') abstsiss. See tähendab, et rõhu (järelikult ka temperatuuri) kasvamisel 1 *kg* küllastavat auru võtab enda alla üha väiksema ruumala (ehk teiste sõnadega: auru tihedus suureneb).

Öeldust nähtub, et rõhu (temperatuuri) kasvamisel vedelikupunkt ja aurupunkt lähenevad teineteisele, ning et isobaar (AB, $A'B'$, $A''B''$, ...) muutub järjest lühemaks. Katsed näitavad, et rõhu ja temperatuuri suurendamisel vedelikupunkt ja aurupunkt langevad lõpuks kokku. Kokkulangemine toimub punktis *K* — niinimetatud *kriitilises punktis*. Aine temperatuuri kriitilises punktis nimetatakse *kriitiliseks temperatuuriks*; sellele punktile

vastavat rõhku ja ruumala nimetatakse *kriitiliseks rõhuks* ja *kriitiliseks ruumalaks*. Igal ainel on temale omased kriitiliste suuruste väärtused: vee kriitiline temperatuur on 374,2° *C*, kriitiline rõhk 225,7 *at* ja kriitiline ruumala 3,20 $\frac{cm^3}{g}$.

Vedelikupunkti ja aurupunkti ühtelangemine kriitilises punktis näitab, et *kriitilises punktis kaob aine vedela ja aurulise oleku vaheline erinevus*. Kui me laseme protsessil kulgeda mööda isobaari *PKR*, siis latentne aurumissoojus osutub võrdseks nulliga. See on ka täiesti arusaadav: kuna punktis *K* ei ole vedeliku ja auru vahel mingit erinevust, siis siin ei tule ka kulutada soojust vedeliku muutmiseks auruks.

Kõikide vedelikupunktide (*A*, *A'*, *A''* jne. kuni punktini *K*) kogu määrab kõvera, mida nimetatakse „vedelikukõveraks". Täpselt samuti määravad aurupunktid „aurukõvera" *KB''B'B*. Need kaks kõverat, puutudes kokku punktis *K*, moodustavad *piirkõvera*. See kõver eraldab meie diagrammil aine erinevatele olekutele vastavaid piirkondi. Ükskõik millises seespool piirkõverat valitud punktis *C*, *D* jne. on meil tegemist kahe oleku ehk faasi — vedela ja aurulise — seguga. Vasakul pool piirkõverat on aine vedelas olekus, paremal pool piirkõverat aga aurulises olekus.

Vedeliku muutumine auruks ja ümberpöördult, millega kaasub järsk ruumala muutus ning soojuse eraldumine, võib aset leida ainult seespool piirkõverat. Kuid ka ülevalpool piirkõverat võib toimuda protsess, millele vastav algruumala on väike ja lõppruumala suur, s. o. mis algab vedela oleku piirkonnast ja lõpeb gaasilise oleku piirkonnas.

On selge, et sellise protsessi vältel me kunagi ei puutu kokku järsu üleminekuga vedelikust gaasiks, järelikult toimub selline üleminek *pidevalt*.

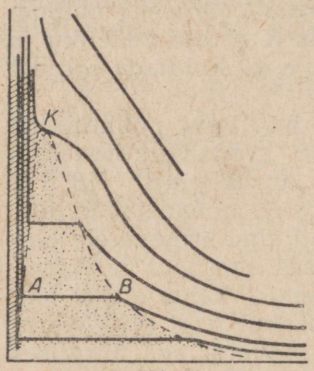
Vedela ja gaasilise oleku pidevuse tegi katseliselt kindlaks inglise füüsik Andrews 1866. a. Andrews'i arvamise järgi läbib aine sellises protsessis olekuid, mida ei saa lugeda vedelateks ega ka gaasilisteks.

Kõik joonisel 287 kujutatud piirkõvera horisontaalsed kõõlud on isotermi lõikudeks. Püstitame endile küsimuse: millise kujuga on nende isotermide pikendused aurulise oleku ja vedela oleku piirkondades?

Sellele küsimusele annab vastuse joonis 288. Auru (või reaalse gaasi) isotermid sarnanevad ideaalse gaasi hüperboolsetele isotermidele; vedeliku isotermid tõusevad peaaegu vertikaalselt üles (sest et vedeliku ruumala tühiseks vähendamiseks tuleb rakendada väga suurt rõhku). Joonisel 288 on ära toodud ka kriitiline isoterm ja kaks isotermi, mis vastavad kriitilisest temperatuurist kõrgematele temperatuuridele.

Joonisel 288 kujutab viirutatud ala vedeliku piirkonda. Teine, varjutatud ala, mis asub allpool kriitilist punkti K ning mida piirab ühelt poolt vedelikukõver AK ja teiselt poolt aurukõver BK, kujutab auru ja vedeliku segu piirkonda. Jooniselt on näha, et kriitiline punkt K on kriitilisele temperatuurile vastava isotermi käänupunktiks.

Meie poolt vaadeldud Andrews'i diagrammi, mis kujutab vedeliku, auru ja nende segu eksperimentaalsete andmete põhjal saadud isoterme, põhjendas molekulaarkineetilise kujutluse seisukohalt lähtudes van der Waals 1873. a. (seda käsitletakse paragrahvis 104; Andrews'i diagrammi võrreldakse seal van der Waals'i poolt teoreetiliselt leitud diagrammiga).



Joon. 288. Isotermide tegelik kuju (Andrews'i diagramm).

Kriitilise temperatuuri olemasolu ennustas esmakordselt ette D. I. Mendelejev 1860. a. Uurides vedeliku pindpinevuse sõltuvust temperatuurist tuli Mendelejev järgmisele järeldusele: peab olema selline temperatuur, mille juures antud vedeliku pindpinevuse koefitsient on võrdne nulliga, ja mille puhul seega vedeliku menisk ning vedeliku ja küllastava auru vaheline erinevus kaovad. Seda temperatuuri, mis ei ole midagi muud kui kriitiline temperatuur, nimetas Mendelejev „absoluutseks keemispunktiks". Mõned aastad hiljem Andrews'i katsed tõestasid täielikult Mendelejevi ideede õigsuse.

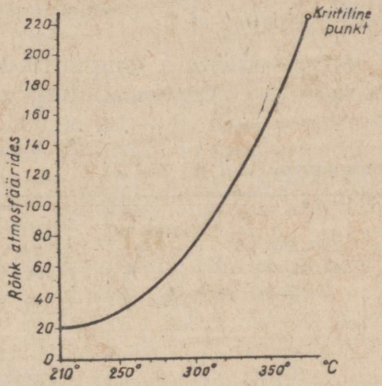
Esimesena uurisid kõige ulatuslikumalt ja põhjalikumalt rea ainete kriitilisi parameetreid Mihhail Petrovitš Avenarius ja tema õpilased Kiievi ülikooli füüsika laboratooriumis aastatel 1873—1895.

Ainete omadusi kriitilises olekus uuriti samuti igakülgselt väljapaistva vene füüsiku Moskva ülikooli professori Aleksander Grigorjevitš Stoletovi poolt. Stoletov töötas läbi ja üldistas terve rea teoreetilisi oletusi ja katseandmeid, eraldades usaldatava kaheldavast. Ta tõi täie selguse kriitilise oleku küsimusse ning tema tööd kinnitasid Andrews'i ja van der Waals'i poolt saadud tulemuste õigsust.

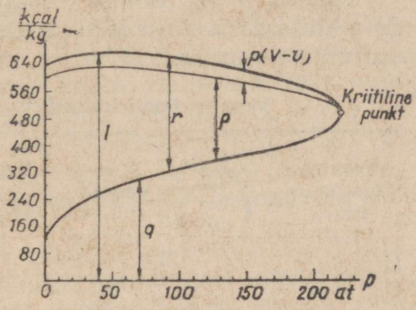
Viimasel ajal (aastatel 1947—1950) on ainete kriitilise oleku probleemi laiendanud ja täpsustanud Moskva ülikooli professor V. K. Sementšenko. V. K. Sementšenko pööras muuhulgas tähelepanu ka sellele, et kriitilisele olekule (s. o. olekule, kus vedeliku ja gaasi omadused saavad ühesugusteks) vastav temperatuur võib tegelikult mitte päris täpselt ühtida selle temperatuu-

riga, mille juures vedeliku ja auru vaheline nähtav piir kaob, vaid võib olla sellest veidi kõrgem. Seetõttu tekib kriitilise temperatuuri lähedal pärast meniski kadumist (kuid enne vedeliku ja auru identseks muutumist) omapärane vedeliku ja gaasi dispersne segu. Seda kinnitavad aine sogastumise ja opalestsentsi nähtused, mida kirjeldasid juba Avenarius, Nadeždin ja teised.

Kriitilisele olekule on iseloomulikud anomaalselt suured soojuspaisumise koefitsiendi ja soojusmahtuvuse väärtused.



Joon. 289. Küllastava veeauru rõhk temperatuuri funktsioonina.



Joon. 290. Vee latentse aurustumissoojuse sõltuvus rõhust.

Vedeliku üleminekut auruks, auru üleminekut vedelikuks jne. nimetatakse *esimest liiki faasimuutusteks.* Selliseid üleminekuid iseloomustab ruumala ja energia muutumine, s. t. üleminekuks vajalik soojushulk.

Üleminekuid, millede puhul ei muutu ruumala ega ka energia, vaid selle asemel toimuvad varjatud iseloomuga kvalitatiivsed muutused (näiteks järsk soojusmahtuvuse muutus üleminekupunkti lähedal), nimetatakse *teist liiki faasimuutusteks.* V. K. Sementšenko vaatleb vedeliku muutumist gaasiks kriitilises punktis teist liiki faasimuutusena ning toob esile analoogia kriitilise oleku ja mitmesuguste teiste teist liiki faasimuutuste (vedelike segunemise, kristallides toimuvate muutuste) vahel.

Andrews'i diagramm näitab, et auru ja vedeliku tasakaalu korral vastab igale temperatuurile kindel rõhk, mis on seda suurem, mida kõrgem on temperatuur, ja seda väiksem, mida madalam on temperatuur. Teisiti öeldes: küllastatud auru rõhk ja temperatuur suurenevad või vähenevad üheskoos. Kõveral, mis väljendab küllastava auru rõhu ja temperatuuri vahelist sõltuvust (joon 289), on küllaltki iseloomulik kuju: kriitilises punktis

ta katkeb. On kindlaks tehtud, et alates 1—2-atmosfäärilisest rõhust kuni peaaegu kriitilise punktini on paljude ainete küllastava auru rõhk ja temperatuur seotud valemiga:

$$p = (a + bt)^4, \qquad (1)$$

kus a ja b on konstandid.

Vee jaoks tuleb seda valemit teatud määral muuta; kuid teatud piirides kehtib ka siin (ehkki väga jämedalt) seos:

$$p = \left(\frac{t}{100}\right)^4.$$

Tabelis 5 on toodud vastavalt mitmesugustele temperatuuridele küllastava auru rõhk, vedeliku ja auru eriruumalad ning vee aurumissoojus r.

Tabel 5

Vesi ja tema küllastav aur temperatuuridel 0—374° C.

Aurumis-temperatuur t (° C)	Rõhk p $\left(\frac{kG}{cm^2}\right)$	Ühe kg vedeliku ruumala liitrites	Ühe kg auru ruumala m^3	Ühe kuupmeetri auru mass kg	Vedeliku soojus q $\left(\frac{kcal}{kg}\right)$	Aurumis-soojus $\left(\frac{kcal}{kg}\right)$
0	0,006	1,000	206,3	0,005	0	597,2
25	0,032	1,003	43,41	0,023	25,02	583,2
50	0,126	1,012	12,05	0,083	49,95	569,0
75	0,393	1,026	4,14	0,242	74,94	554,4
100	1,033	1,044	1,67	0,600	100,04	538,9
125	2,367	1,065	0,77	1,300	125,3	522,4
150	4,854	1,090	0,39	2,548	150,9	504,6
175	9,101	1,121	0,22	3,617	176,9	485,2
200	15,857	1,157	0,13	7,857	203,5	463,5
225	20,007	1,199	0,08	12,75	230,8	438,7
250	40,56	1,251	0,05	19,98	259,2	409,8
275	60,66	1,317	0,03	30,57	289,2	375,6
300	87,61	1,404	0,02	46,24	321,0	335,1
325	122,95	1,529	0,01	70,68	356,5	283,9
350	168,63	1,747	0,008	113,6	398,6	213,0
374	225,2	2,79	0,003	274	488	35

Joonisel 290 on näidatud vee aurumissoojuse (kogu aurumissoojuse r ja sisemise aurumissoojuse ϱ) sõltuvus rõhust. Sellel joonisel määravad alumise kõvera ordinaadid vedeliku soojuse q; ülemise kõvera ordinaadid määravad summa $q + r$, mida nimetatakse auru *soojussisalduvuseks*.

Olgu märgitud, et veeauru massi ühe ruumalaühiku kohta nimetatakse *absoluutseks niiskuseks*. Tabeli 5 viiendas tulbas esinevad arvud annavad küllastusolekule vastava absoluutse niiskuse kilogrammides kuupmeetri kohta. Tavaliselt väljendatakse absoluutne niiskus grammides kuupmeetri kohta. Toome

küllastusolekule vastava absoluutse niiskuse täpsemad väärtused vastavalt temperatuuride keskmisele meteoroloogilisele intervallile.

Küllastav absoluutne niiskus küllastusoleku korral.

Temperatuur (° C)	—20	—15	—10	—5	0	5	10	15	20	25	30
Veeauru mass grammides 1 m^3 kohta	0,89	1,4	2,2	3,0	4,84	6,76	9,33	12,7	17,1	22,8	30,0

Meteoroloogias ja tehnikas kasutatakse sageli *relatiivse niiskuse* mõistet. Relatiivse niiskuse all mõistetakse õhus leiduva veeauru hulga ja samal temperatuuril ruumi küllastamiseks vajaliku veeauru hulga protsentuaalset suhet. Nii näiteks, kui 1 m^3 õhku sisaldab temperatuuril 0° *C* 2,42 *g* veeauru, siis relatiivne niiskus on 50% (nagu nähtub ülaltoodud tabelist, moodustab õhusoleva auru tihedus poole temperatuurile 0° *C* vastavast küllastava auru tihedusest).

Mõnikord iseloomustatakse õhu niiskust *kastepunktiga*. Kastepunktiks nimetatakse seda temperatuuri, mille juures õhus leiduv veeaur, ilma et ta tihedus muutuks, saab õhu jahtumise tõttu küllastavaks auruks. Ülaltoodud näites, kus temperatuurile 0° *C* vastav küllastav niiskus on 50%, on kastepunkt, nagu seda näitab absoluutse niiskuse tabel, —10° *C*.

Kastepunkt määratakse kindlaks *hügromeetriga*. Hügromeetri põhiliseks osaks on poleeritud metallipind, mille temperatuuri mõõdetakse ja mida kergesti võib jahutada. Veeaurude kondensatsiooni alguse üle otsustatakse selle pinna uduseks (higiseks) muutumise järgi. Veel sagedamini kasutatakse õhu niiskuse mõõtmiseks aga *psühromeetrit*, mis kujutab endast kahe termomeetri — kuiva ja märja — kombinatsiooni. Rea füüsikute poolt on teoreetiliste kaalutluste alusel tuletatud valem, mille abil võib kuiva ja märja termomeetri näitude vahe järgi leida relatiivset niiskust. Selle valemi ja rea täiendavate katsete põhjal koostatakse „psühromeetrilised tabelid", mida kasutatakse relatiivse niiskuse määramisel psühromeetri näitude järgi.

§ 103. Gaaside kondenseerumine.

Iga gaas kujutab endast mingi vedeliku ülekuumendatud auru ja võib seetõttu üle minna vedelasse (samuti ka tahkesse) olekusse.

Selleks et mingi (keemiliselt individuaalse) gaasi veeldamine oleks võimalik, tuleb tema temperatuur muuta madalamaks krii-

tilisest temperatuurist. Kui temperatuur on kriitilisest temperatuurist ainult natuke madalam, siis gaasi veeldamiseks tuleb gaasile rakendada rõhku, mis on kriitilisest rõhust ainult natuke väiksem. Gaasi temperatuuri langemisega väheneb ka gaasi veeldamiseks vajalik rõhk, nagu see nähtub joonistest 287 ja 288.

Alljärgnevas tabelis on toodud mitmesuguste ainete kriitilised temperatuurid ja kriitilised rõhud. Tabeli andmed on paigutatud kriitiliste temperatuuride tõusmise järjekorras.

Kriitilise oleku parameetrid.

Aine	Kriitiline temperatuur		Kriitiline rõhk (at)	Kriitiline ruumala $\left(\frac{cm^3}{mool}\right)$
	°C	°K		
Heelium	—267,9	5,2	2,26	58
Vesinik	—239,9	33,2	12,8	65
Lämmastik	—147,1	126,0	33,5	90
Vingugaas	—140,2	133,0	34,5	93
Argoon	—122,4	150,7	48,0	75,5
Hapnik	—118,8	154,3	49,7	74,3
Metaan	—82,5	190,7	45,7	95
Etüleen	+9,5	282,6	50,9	130
Süsihappegaas	31,0	304,2	72,9	96
Etaan	32,1	305,2	48,8	137
Atsetüleen	35,8	309,0	61,7	113
Ammoniaak	132,4	405,5	111,5	72,4
Kloor	144	417,1	76	124
Väävlishapend	157,2	430,3	77,7	123
Heksaan	234,0	507,1	25,9	367
Bensool	278,5	561,6	47,7	256
Oktaan	296,3	569,3	24,6	490
Vesi	374,2	647,3	218,2	57,6

Tabelist nähtub, et rakendades mõnekümne atmosfäärilist rõhku võib süsihappegaasi veeldada juba tavalisel temperatuuril. Selleks et muuta vedelikuks etüleeni, tuleb seda jahutada alla 10° *C*; kuid hapniku veeldamiseks on vaja, et temperatuur oleks madalam kui —118,8° *C*, vesiniku puhul aga madalam kui —240° *C*.

Kui ühelt poolt gaaside veeldamise tingimuseks on madal temperatuur, siis teiselt poolt veeldatud või tahkeks kehaks muudetud gaas on ise veelgi madalama temperatuuri allikaks. Nii näiteks ammoniaagi veeldamiseks toatemperatuuril tuleb see panna 7—8 atmosfäärilise rõhu alla; kui aga vedela ammoniaagi rõhku vähendada kuni ühe atmosfäärini (pannes teda näiteks lahtisesse välisõhku), siis see hakkab keema (samuti nagu õhupumba kupli alla paigutatud vesigi) ja tema temperatuur langeb kuni —33° *C*. Üldiselt rääkides, *kui muuta gaasi kondenseerumisel tekkinud*

vedeliku rõhku, siis aurustumiseks kuluva soojuse tõttu *vedeliku temperatuur järsult alaneb*. Kasutades seda nähtust töötas prantsuse füüsik Pictet 1877. a. välja lihtsaima gaaside veeldamise võtte. Üha madalamate temperatuuride saamiseks kasutas Pictet jahutajatena kergemini veeldatavaid gaase, mis võimaldas omakorda veeldada raskemini kondenseeruvaid gaase *(Pictet' meetod)*.

Teine gaaside veeldamise meetod *(Linde meetod)* töötati välja XIX sajandi lõpul inglise füüsiku ja keemiku Dewar'i poolt ja temast sõltumatult ning veelgi edukamalt saksa inseneri Linde poolt. Dewar ja Linde rakendasid gaaside veeldamisel Joule-Thomsoni efekti.

See nähtus (mida mainitakse paragrahvis 93) seisneb järgnevas: kui soojuslikult isoleeritud gaas läheb üle kõrgema rõhu alt madalama rõhu alla, siis sellega seoses oleva paisumisega kaasub gaasi temperatuuri muutus. Kõrgematel temperatuuridel paisuv gaas soojeneb, *madalatel temperatuuridel paisuv gaas aga jahtub*. Soojenemise ja jahtumise piirkondi eraldavat temperatuuri nimetatakse *inversioontemperatuuriks*[1]. Paisumisel rõhult 100 atmosfääri rõhuni 1 atmosfäär on õhu inversioontemperatuur +248° *C*, lämmastikul +232° *C* ja vesinikul —80° *C*.

Temperatuuri muutus paisumisel on väga suur. Kui näiteks õhk, temperatuuriga —100° *C*, paisub rõhult 136 *at* rõhuni 1 *at*, siis temperatuur alaneb 93° võrra, mis on küllaldane selleks, et ta veelduks (rõhul 1 *at* on vedela õhu temperatuur —190° *C*).

Gaaside veeldamine tekitas omal ajal sensatsiooni ja äratas üldist huvi. Oma artiklis, mis oli määratud väga laialdasele lugejaskonnale, kirjutas professor A. G. Stoletov 1878. a. järgmist: „Möödunud aasta algas hämmastamapaneva saavutusega füüsikaliste teaduste alal: maailmas nähti esmakordselt tahket vesinikku. Vesinik, mis on kergeim kõigist gaasidest ja kõige raskemini veeldatav, hakkas voolama vedelikujoana ja sadama raheteradena. Mitte kaua enne seda õnnestus veeldada ja külmutada hapnikku ja lämmastikku, s. o. õhu koostisosi." Need edusammud gaaside veeldamisel saavutati ülalkirjeldatud meetodeist esimese, s. o. Pictet' meetodi rakendamisel. Esialgne jahtumine saadi harilikult väävlishapendi intensiivsel aurustumisel, kusjuures väävlishapend ümbritses spiraaltoru, mida mööda juhiti kõrge rõhu all olevat süsihappegaasi. Süsihappegaasi aurustumine teises anumas kutsus analoogiliselt esile kokkusurutud hapnikuga täidetud torude jahtumise.

Kuna vesiniku inversioontemperatuur on liiga madal (—80° *C*), siis tema veeldamiseks ei ole võimalik otseselt kasutada Dewar-Linde meetodit. Kui aga vesinikku eelnevalt vedela õhuga jahu-

[1] Ladina keelest *inversio* — ümberpööramine.

tada ülalmärgitud temperatuurist madalama temperatuurini, siis tema veeldamine Linde meetodil ei paku enam erilisi raskusi.

Gaaside kondenseerimise alal oli kõige tõsisemaks raskuseks heeliumi veeldamine ja tahkestamine. Vedelat heeliumi sai 1908. a. hollandi füüsik Kamerlingh Onnes, kes organiseeris Leydeni ülikooli juures (umbes 1890. a.) laboratooriumi, mis oli spetsiaalselt määratud madalate temperatuuride saavutamiseks. Onnes rakendas Pictet' ja Linde meetodite kombinatsiooni.

Heeliumi inversioontemperatuur on —258° *C*. Keedes normaalrõhu all, omandab ta temperatuuri —269° *C* (s. o. natuke enam kui 4°, loetuna absoluutsest nullist). Lastes vedelat heeliumi aurustuda väga väikesel rõhul (0,013 *mm* Hg), jäi Onnesil absoluutsest nullist puudu veidi alla 0,9°. Ka nendel tingimustel jäi heelium vedelaks. Heeliumi tahkestamine õnnestus alles pärast Onnesi surma tema kaastöölisel Kusomil. Kusom ei rakendanud vedela heeliumi edasise jahutamise, vaid rõhu suurendamise võtet.

Vedel vesinik ja vedel heelium paistavad silma oma väikese tiheduse poolest. Vedela vesiniku tihedus normaalrõhul on 0,07 $\frac{g}{cm^3}$ (s. o. 14 korda väiksem kui veel); vedela heeliumi tihedus on umbes seitse korda vee tihedusest väiksem.

Kamerlingh Onnesi poolt kasutatud meetodil õnnestus saada temperatuure 0,7° *K* ümbruses. Veel madalamaid temperatuure realiseeriti teisiti. Samuti nagu reaalse gaasi paisumine (inversioonpunktist madalamal temperatuuril) ja vedeliku aurustumine kutsuvad esile jahtumise, nii ka magnetiseeritud kehade *kiire demagnetiseerimine kutsub samuti esile jahtumise*. Kiire demagnetiseerimisega väga madalatel temperatuuridel õnnestus saada temperatuure, mis erinevad absoluutsest nullist alla ühe kahesajandiku kraadi. Kõik jahutamise meetodid võimaldavad temperatuuri madaldada ainult mõne osa võrra esialgsest temperatuurist. Sellise temperatuuri saavutamine, mis oleks täpselt võrdne absoluutse nulliga, on võimatu.

Peale Pictet' ja Linde meetodite võib õhu veeldamiseks edukalt kasutada veel kolmandat meetodit, mis on välja töötatud prantsuse füüsiku Claude'i poolt. Kui Linde meetodis etendab madala temperatuuri saamisel peamist osa „sisemine töö", mida tehakse molekulidevaheliste tõmbejõudude ületamiseks molekulide kauguse suurenemisel, siis Claude'i meetodi rakendamisel saadakse madal temperatuur peamiselt „välistöö" arvel. Claude'i meetodil töötavaid masinaid, milledes paisuv õhk teeb välistööd ja seetõttu jahtub, nimetatakse *detanderiteks*. Kolb-detanderid on oma ehituselt sarnased kolb-aurumasinatega, kuid nad ei tööta mitte auruga, vaid tugevasti kokkusurutud (kuni 200 *at*) õhuga. Kõige täiuslikumates Heilandi detanderites jahtub õhk tema

poolt tehtud välistöö tõttu 150° võrra. Tänu reale täiustustele, mida nõukogude füüsik P. L. Kapitsa on teinud Claude'i meetodile, võetakse kasutusele turbo-detanderid: õhk, mis on siin kokku surutud kõigest 4—5 atmosfäärini, pannes pöörlema turbiini, jahtub niivõrd, et osa (5—6%) temast võib veelduda. Ühesuguse tootlikkuse korral on Kapitsa turbo-detanderi veeldamisseadmed viis korda väiksemad kolb-detanderi vastavatest seadmetest.

§ 104. Van der Waals'i võrrand ja mõningaid teisi olekuvõrrandeid.

Kokkusurutud gaaside ja aurude täpse olekuvõrrandi koostamine on väga keeruline ja nõuab suure hulga mõõtmiste korraldamist. Seejuures ei õnnestu tavaliselt erinevate aurude omadusi väljendada lihtsate ja ühetüübiliste võrranditega. Kui piirduda aurude termodünaamiliste omaduste kvalitatiivse iseloomustamisega, siis väärib erilist tähelepanu 1873. a. hollandi füüsiku van der Waals'i poolt esitatud võrrand:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \qquad (2)$$

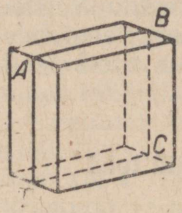
See võrrand erineb Clapeyron'i võrrandist kahe parandusliikme — *ruumala parandusliikme b* ja niinimetatud *siserõhku iseloomustava parandusliikme* $\frac{a}{v^2}$ — poolest. Van der Waals'i arvamise järgi on a ja b konstandid, mis ei sõltu temperatuurist, tihedusest ja rõhust. Erinevate keemiliste koostistega ainete a ja b väärtused on erinevad.

Clapeyron'i võrrandisse tuleval *ruumala parandusliikmel* on tähtsust sel juhul, kui keha ruumala ei ole nii suur, et sellega võrreldes võib arvestamata jätta molekulide poolt endi alla võetud ruumala. Tavalistel tihedustel on gaasi molekulidevaheline keskmine kaugus umbes mõnikümmend korda suurem kui molekulide diameeter. Seetõttu on ruumala parandusliikmel oluline tähtsus ainult tugevasti kokkusurutud gaaside ja vedelike korral.

Sama võib öelda ka molekulide vastastikusest külgetõmbest tingitud *siserõhu* $\frac{a}{v^2}$ kohta. Kui gaasi molekulid asuvad üksteisest kaugustel, mis ei ületa üht kümnemiljondikku sentimeetrit (10^{-7} *cm*), siis nendevahelised tõmbejõud ei ole peaaegu üldse märgatavad; kui aga gaasi kokkusurumisel gaasi naabermolekulide vaheline kaugus saab väiksemaks kui 10^{-7}*cm*, siis hakkab mõju avaldama molekulidevaheline vastastikune külgetõmme. Vaatleme selle külgetõmbe mõju lähemalt.

Kujutleme gaasi sees 1 cm^2 suurust pinda (pind *ABCD* joonisel 291). Vastavalt Pascali seadusele kandub sellele pinnale üle

välisrõhk p. Seega pinnale $ABCD$ mõjub normaali suunas jõud, mis on arvuliselt võrdne välisrõhuga p. See aga ei ole veel pinnale mõjuv kogujõud. Kujutame kaht prismat nii, et nende ühiseks aluseks on pind $ABCD$. Olgu kummagi prisma kõrgus 10^{-7} cm.



Joon. 291.

Ühes prismas asuvad molekulid tõmbavad külge teises prismas asuvaid molekule. Selle külgetõmbe tulemusena tekib pinnaga $ABCD$ risti olev resultantjõud, mis suurendab hüdrostaatilise rõhu p mõju. Kujutleme, et ühes prismas suureneb molekulide arv kaks korda. On selge, et sel juhul pinnale $ABCD$ avalduv resultantjõud kahekordistub. Kui molekulide arv kahekordistub mitte üksi ühes, vaid mõlemas prismas, siis pinnale $ABCD$ avalduv resultantjõud peab suurenema neli korda. Järelikult, molekulide vastastikusest mõjust tingitud siserõhk on võrdeline keskkonna tiheduse ruuduga ehk, teisiti öeldes, pöördvõrdeline keskkonna eriruumala ruuduga.

Gaasi molekulide vastastikusest külgetõmbest tingituna on gaasil potentsiaalse energia varu. Lähtudes sellest, et siserõhujõudude poolt tehtud töö on võrdne potentsiaalse energia kahanemisega, võime leida matemaatilise avaldise selle energia jaoks[1]:

$$d\Pi = \frac{a}{v^2}\,dv,$$

kust pärast integreerimist saame:

$$\Pi = -\frac{a}{v} + const.$$

Loeme kokkuleppeliselt molekulide potentsiaalset energiat sel juhul võrdseks nulliga, kui molekulid paiknevad ruumis lõpmatult hõredalt; see tähendab, kui $v = \infty$, meie loeme $\Pi = 0$. Selle kokkuleppe kohaselt on igale lõplikule ruumalale vastav molekulide potentsiaalne energia negatiivne ja võrdub $-\frac{a}{v^2}$-ga. Niisiis, van der Waals'i järgi väljendub reaalse gaasi siseenergia valemiga:

$$U = C_v T - \frac{a}{v}. \qquad (3)$$

Esimene liige on siin sama, mis ideaalse gaasi korralgi. See väljendab molekulide kineetilist energiat (eeldusel, et võnkevabadusastmed puuduvad). Teine liige $\left(-\frac{a}{v}\right)$ väljendab molekulide potentsiaalset energiat.

---

[1] Suurus $\frac{a}{v^2}$ on 1 cm^2 pinnale mõjuv jõud. Pinnale S mõjuv jõud F on $\frac{a}{v^2}\,S$. Kui ruumala dv muutub, siis võib kujutleda, et pind S liigub edasi lõigu dl võrra, kusjuures selle lõigu pikkus on määratud seosega: $dv = Sdl$. Seejuures sooritatakse töö $Fdl = \frac{a}{v^2}\,Sdl = \frac{a}{v^2}\,dv$.

Vedelikes ulatub siserõhk tuhandete ja isegi kümnete tuhandete atmosfäärideni. Siserõhu suurus sõltub pinna kujust (nõgusate pindade korral on ta väiksem, kumerate pindade korral suurem). Nagu selgitatakse järgmises peatükis, seletuvad siserõhu sõltuvusega pinna kujust mõningad kapillaarsuse nähtused. Vedeliku aurustumiseks vajalik soojushulk on seda suurem, mida suurem on siserõhk. Kaheldamatult sõltub vedeliku siserõhk ka vedeliku küllastava auru rõhust. Vedeliku siserõhk etendab üldse väga tähtsat osa kõige mitmekesisemates nähtustes.

Hõrendatud gaaside korral (s. o. juhul, kui siserõhule vastav parandusliige $\frac{a}{v^2}$ on väike, võrreldes p-ga, ja kui b on väike, võrreldes v-ga) ühtib van der Waals'i võrrand Clapeyron'i võrrandiga. Kokkusurutud gaaside jaoks on van der Waals'i võrrand õige ainult vähestel juhtudel; tavaliselt osutub ta ebatäpseks. Rahuldavalt kirjeldab van der Waals'i võrrand süsihappegaasi ja etüleeni isotermide käiku.

Süsihappegaasi (CO_2)	jaoks	$a = 0{,}0139$	ja $b = 0{,}00616$
Etüleeni (C_2H_4)	„	$a = 0{,}00786$	ja $b = 0{,}0024$
Õhu	„	$a = 0{,}0037$	ja $b = 0{,}0026$

(Need a ja b väärtused kehtivad siis, kui ruumalaühikuks on valitud rõhul 1 *at* ja temperatuuril 0° *C* gaasi poolt enda alla võetud ruumala; sel juhul $R = \frac{1}{273{,}16} = 0{,}00369$.)

Van der Waals'i võrrand ei ole vedelikkudele rakendatav; tavaliselt annab ta katselistest andmetest jämedalt erineva tulemuse. Selleks et saada katsetega kooskõlas olevaid tulemusi ja samaaegselt säilitada van der Waals'i võrrandi kuju, tuleb erinevates temperatuuri ja tiheduste piirkondades anda suurustele a ja b erinevad väärtused. Järelikult tuleb neid suurusi lugeda temperatuuri ja ruumala funktsioonideks. Selle küsimuse põhjalik uurimine van Laar'i poolt näitas, et a ja b sõltuvus temperatuurist ja ruumalast on väga keeruline. Seetõttu ei ole van der Waals'i võrrandi praktiline tähtsus suur. Tema peamine väärtus seisneb selles, et ta ei kaota kvalitatiivselt oma mõtet aine üleminekul vedelasse olekusse ja peegeldab väga lihtsas vormis paljusid tähtsaid seaduspärasusi.

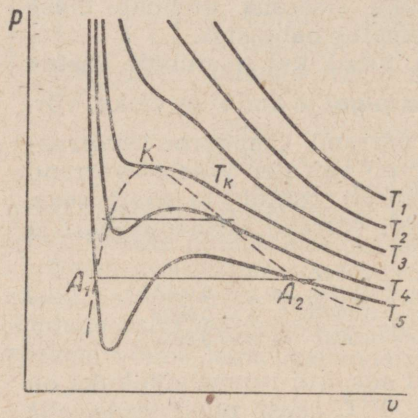
Van der Waals'i võrrand etendas ajalooliselt väga tähtsat osa meie teadmiste arengus ainete termodünaamilistest omadustest. Tema põhjal loodi õpetus termodünaamiliselt mittepüsivatest olekutest ja tehti kindlaks kriitiliste parameetrite tähtis osa aine iseloomustamisel. Ta oli ka aluseks vastavate olekute teooria väljakujunemisel.

Vaatleme esimest nendest küsimustest lähemalt.

Joonisel 292 on vastavalt van der Waals'i võrrandile kujutatud gaasi ja vedeliku isotermid. Kõrgematel temperatuuridel nad

(näiteks isotermid T_1 ja T_2) erinevad vähe (eriti piirkonnas, kus v on suur) hüperboolidest. Temperatuuri alanemisel (isoterm T_3) on märgata kõverdumist, mis kriitilisel temperatuuril läheb üle käändeks kriitilises punktis K.

Kõikidel T_k-st madalamatele temperatuuridele vastavatel isotermidel, mis on joonestatud van der Waals'i võrrandi põhjal, esineb looge. See looge on seda järsem, mida madalam on temperatuur, ja on lainekujuline (näiteks isotermil T_5 on laine kuju vahemikus A_1A_2).



Joon. 292. Isotermid van der Waals'i võrrandi järgi.

Siin esineb omapärane vastuolu van der Waals'i võrrandi ja katseandmete vahel. See vastuolu seisneb selles, et katseandmete põhjal on lainelise osa asemel sirglõik.

Punktiiriga piiratud ala joonisel 292 on vedeliku ja küllastava auru tasakaalu piirkonnaks. Nagu eespool on selgitatud, vedeliku ja auru tasakaalu piirkonnas ühtivad tõelised isotermid isobaaridega (vrd. jooniseid 288 ja 292). Tekib küsimus: milline mõte on siis lainelisel lookmel van der Waals'i võrrandi põhjal joonestatud isotermi selles piirkonnas. Van der Waals'i idee järgi kujutab isotermi laineline osa A_1A_2 mittepüsivaid, niinimetatud *metastabiilseid* olekuid. See idee on seotud hüpoteesiga, mis väidab, et teoreetilise isotermi lainelise osa poolt kujutatav protsess tähendab vedeliku üleminekut gaasilisse olekusse, ilma ei aine *kihistuks* kahte faasi (olgugi et sellist protsessi ei ole kunagi õnnestunud vaadelda). Seda vaatekohta kinnitab teatud määral auru ja vedeliku metastabiilsete olekute tegelik olemasolu. Katsed näitavad, et *vedelikku võib enne aurumist üle kuumendada ja enne külmumist alla jahutada.* Isegi veel enam: võib öelda, et antud rõhule vastaval temperatuuril muutub vedelik auruks või jääks ainult siis, kui on loodud tingimused, mis kergendavad seda üleminekut; vastasel korral vedelik hakkab keema kõrgemal ja külmuma madalamal temperatuuril. Vee sogastumine liivateradega, samuti ka anuma poorsus (poorse anuma seinad sisaldavad tavaliselt absorbeerunud õhku) soodustavad keemisprotsessi. Mehhaanilistest lisanditest hoolikalt puhastatud vett võib normaalrõhul kuumutada kuni 140° C ja isegi veel kõrgema temperatuurini, pärast seda hakkab vesi keema järsu plahvatusega.

Ülalmärgitud keemispunkti nihkumine kehtib ainult keemise algmomendi kohta; kui keemine on juba alanud, siis temperatuur langeb kiiresti selle väärtuseni, mis normaalselt vastab katse ajal säilitatavale rõhule.

Selleks et siduda metastabiilsete olekute ideed van der Waals'i isotermide kujuga, tuleb kujutleda, et isotermist T_5 kõrgemal, tema vahetus läheduses, on kujutatud veel terve rida isoterme. Kuna kõigil neil on lainekujuline osa, mis on analoogiline joonisel punktiirjoonega kujutatud kõverale, siis endastmõistetavalt lõikavad nad punkti A_1 poolses osas sirget A_1A_2 kaks korda. Järelikult van der Waals'i võrrandi järgi peavad punkti A_1 läheduses sirglõigu A_1A_2 punktid vastama kõrgemale temperatuurile kui T_5 ja punkti liikumine mööda seda sirglõiku (lõigu algosas) peab tähistama vedeliku ülekuumenemist.

Olekud, mida kujutab punktist A_2 paremal pool olev van der Waals'i isotermi osa, erinevad küllastavast aurust (A_2) suurema tiheduse ja kõrgema rõhu poolest. See näitab, et tegelikult võib eksisteerida ka *ülekküllastav aur*. Tõepoolest: katsed kinnitavad, et kui küllastavas aurus puuduvad „kondensatsioonituumad", milledeks enamikul juhtudel on mikroskoopilised tolmukübemekesed ja ioniseeritud gaasimolekulid, siis võib auru tihedust kergesti suurendada, ilma et seejuures aurus tekiks vedeliku tilku.

1899. a. Dieterici pani ette muuta teataval määral van der Waals'i võrrandit, näidates, et on alust lugeda siserõhku võrdseks $\frac{a}{v^{5/3}}$ -ga, mitte aga $\frac{a}{v^2}$ -ga, nagu seda tegi van der Waals.

Üks kaalutlustest, mis viib välja van der Waals'i poolt leitud siserõhu avaldisele, seisneb järgnevas. Ükskõik milline molekulide vastastikuse mõju seadus ka ei oleks, aine pinnakihi rõhk seesmistele kihtidele peab olema võrdeline „külgetõmbavate molekulide" arvuga, s. o. nende molekulide arvuga, mis püüavad iga pinnakihis asuvat molekuli tõmmata keha sisemusse; seega ta on võrdeline tihedusega. Teiseks peab siserõhk olema võrdeline pinnakihis asuvate „külgetõmmatavate molekulide" arvuga, s. o. ta peab olema veel kord võrdeline tihedusega. Järelikult lõpptulemusena peab siserõhk olema võrdeline tiheduse ruuduga ehk, teisiti öeldes, pöördvõrdeline moolruumalaga (või eriruumalaga).

Sellesse arutlusse tõi Dieterici sisse paranduse. Eelkõige pööras ta tähelepanu ruum-, pind- ja joontiheduse mõistete erinevusele. Joontihedus, mis on võrdeline piki joont paigutatud molekulide arvuga, võrdub kuupjuurega ruumtihedusest. Pindtihedus, olles võrdeline pinnal asuvate molekulide arvuga, võrdub ruumtiheduse kuupjuure ruuduga. Dieterici näitas, et tiheduse ja siserõhu vahelise sõltuvuse kindlaksmääramisel tuleb keha sisemuses paiknevate „külgetõmbavate molekulide" arvu lugeda võrdeliseks

ruumtihedusega, pinnakihis asuvate „külgetõmmatavate molekulide" arvu aga võrdeliseks pindtihedusega. Kui mõista „külgetõmmatavate molekulide" kihi all monomolekulaarset pinnakihti, s. o. kihti, mille paksus ei ületa molekuli diameetrit, siis see on õige. Seega $\frac{a}{v^2}$ asemel saadakse siserõhu avaldiseks $\frac{a}{v^{5/3}}$.

Van der Waals'i võrrandi ruumala parandusliikme jättis Dieterici muutmatuks ja andis olekuvõrrandile järgmise kuju:

$$(p + \frac{a}{v^{5/3}})(v - b) = RT.$$

Selle võrrandi järgi joonestatud isotermid erinevad vähe van der Waals'i võrrandi järgi joonestatud isotermidest.

Ülaltoodud kaalutlused siserõhu sõltuvuse kohta tihedusest on jämedalt orienteeriva iseloomuga. Lähemal vaatlusel selgub, et see protsess on palju keerulisem. Seejuures sõltub siserõhk mitte üksi tihedusest, vaid kindlasti ka temperatuurist. Võttes arvesse, et siserõhk temperatuuri tõusul üldiselt kahaneb, esitas D. Berthelot järgmise olekuvõrrandi:

$$(p + \frac{a}{v^2}\frac{1}{T})(v - b) = RT. \qquad (4)$$

Nõrgalt kokkusurutud gaaside korral on see katseandmetega paremas kooskõlas kui ükski teine võrrand. Kuid surveastme tõusmisel, eriti üleminekul vedelasse olekusse, osutub ta täielikult mitterahuldavaks.

Mitmesuguste autorite poolt on esitatud üle seitsmekümne olekuvõrrandi.

Vaatleme siin veel ühte olekuvõrrandit, mis on esitatud Kamerlingh Onnes'i poolt ja on mõeldud katsetulemuste täpseks kirjeldamiseks. See võrrand on empiiriline. Empiirilise võrrandi ebameeldivaks omaduseks on vajadus teda peaaegu iga aasta uuendada ja täiustada. Katsete täpsus kasvab kiiresti ja seetõttu tekib pidevalt vajadus viia vanadesse empiirilistesse valemitesse sisse parandused. Juhul kui need valemid ei võimalda paranduste abil täpsustusi teha, tuleb vanade asemel leida uued valemid. Kamerlingh Onnes'i võrrand on koostatud sellise arvestusega, et selle kooskõlla viimiseks katseandmetega võib alati piirduda ainult täiendavate liikmete juurdekirjutamisega, kusjuures võrrandi kuju jääb muutumatuks. See võrrand on järgmine:

$$pv = A\left\{1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right\},$$

kus $A = RT$. Koefitsiente $B, C, \ldots, F$ nimetatakse *viriaalkoefitsientideks* ja avaldatakse hulkliikmetena, mis on reastatud T^{-1} kasvavate astmete järgi:

$$B = b_1 + \frac{b_2}{T} + \frac{b_3}{T^2} + \frac{b_4}{T^3} + \frac{b_5}{T^4}.$$

Analoogiliselt avalduvad ka C, D, E ja F.

Võrrand sisaldab seega 25 konstanti, millede väärtused saadakse katsetulemuste põhjal. Kamerlingh Onnes'i võrrand on näitlik kahes suhtes: tema 25 konstanti iseloomustavad kujukalt tänapäeva eksperimendi täpsust; valemi kohmakas kuju annab aga kujutluse nendest raskustest, mis on seotud olekuvõrrandi probleemiga.

§ 105. Vastavad olekud.

Kõige tähtsam van der Waals'i võrrandi omadus seisneb selles, et konstandid a ja b, nagu seda näidatakse allpool, on seotud kriitilise oleku parameetritega p_k, v_k ja T_k.

Van der Waals'i võrrand on ruumala v suhtes kolmanda astme võrrand. Kirjutame ta järgmisel kujul:

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right) v^2 + \frac{a}{p} v - \frac{ab}{p} = 0 \qquad (A)$$

ja vaatleme moolruumala v suurusena, mis etendab põhimuutuja osa; rõhku ja ruumala vaatleme aga suurustena, mis koos konstantidega a ja b määravad võrrandi *(A)* koefitsientide arvulised väärtused.

On selge, et ülaltoodud võrrandil on üldiselt kolm lahendit (V_1, V_2 ja V_3), mille väärtused sõltuvad koefitsientide väärtustest. Kriitilisest temperatuurist kõrgematel temperatuuridel on kaks lahendit komplekssed ja ainult üks reaalne. Selles gaasilise olekute piirkonnas vastab igale rõhu ja temperatuuri väärtuste paarile mingi täiesti kindel moolruumala väärtus, mis graafiliselt tähendab seda, et iga isoterm lõikab iga isobaari ainult ühes punktis.

Me juba nägime, et allpool kriitilist isotermi asub vedeliku ja auru tasakaalu piirkond, kus van der Waals'i võrrandi järgi konstrueeritud isotermid lõikuvad tasakaalule vastavate isobaaridega kolmes punktis. Järelikult siin on vaadeldud võrrandi kõik kolm lahendit, mis vastavad mingile temperatuuri ja rõhu väärtuste paarile, reaalsed ja üksteisest erinevad. Kriitilise oleku lähedal lahendite arvulised väärtused erinevad vähe üksteisest; kriitilises punktis nad langevad kokku.

Algebrast on teada, et kolmanda astme võrrandit, mille kuupliikme kordaja on üks, võib kirjutada järgmise korrutise kujul:

$$(v - v_1)\,(v - v_2)\,(v - v_3) = 0.$$

Kriitilise oleku korral, kui $v_1 = v_2 = v_3 = v_k$, saame:

$$(v - v_k)^3 = 0$$

või

$$v^3 - 3\,v_k v^2 + 3\,v_k^2 v - v_k^3 = 0. \qquad (B)$$

Võrrand *(B)* on identne võrrandiga *(A)*, kui viimasesse panna T asemel T_k ja p asemel p_k.

Võrrutades ülalöeldu põhjal nendes võrrandites v samade astmete kordajad, saame:

$$3v_k = \frac{RT_k}{p_k} + b,$$

$$3v_k^2 = \frac{a}{p_k},$$

$$v_k^3 = \frac{ab}{p_k}.$$

Edasi jääb üle lahendada see võrrandsüsteem v_k, p_k ja T_k suhtes. Seda võib teha järgmiselt: jagades kolmest võrrandist viimase keskmise võrrandiga, saame v_k; asetades saadud v_k väärtuse teise võrrandisse, saame p_k; asetades saadud v_k ja p_k väärtused esimesse võrrandisse, saame T_k. Seega leiame, et

$$v_k = 3b,\ p_k = \frac{a}{27b^2},\ T_k = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}. \tag{5}$$

Ei ole raske veenduda, et nendest võrdustest järgneb:

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{8}{3} = 2{,}67. \tag{6}$$

Rangelt Clapeyron'i võrrandile alluva gaasi puhul peaks see suhe võrduma ühega. Järelikult võib öelda, et van der Waals'i võrrandi järgi peab iga aine kriitilises olekus võtma enda alla ruumala, mis on 2,67 korda väiksem sellest ruumalast, mida aine võtaks samadel temperatuuri ja rõhu väärtustel enda alla siis, kui ta oleks Boyle'i ja Gay-Lussac'i seadustele rangelt alluv gaas. Siin, samuti nagu paljudel teistelgi juhtudel, on van der Waals'i võrrand kvalitatiivselt lähedal tõele; kvantitatiivselt läheb ta aga sellest lahku. Paljude ainete kohta tehtud arvutused näitavad, et tegelikult on ülalmainitud suhte keskmine väärtus 3,7, s. o.

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} \approx 3{,}7.$$

Eri ainete kohta see suhe kõigub küllaltki laiades piirides, nagu seda võib näha alljärgnevast tabelist.

	Vesinik	Haphnik	Süsihappegaas	Atsetüleen	Väävlishappend	Etüülpiiritus	Vesi	Metüülpiiritus	Sinihape	Äädikhape
$\frac{RT_k}{p_k v_k} =$	3,28	3,42	3,58	3,63	3,8	4,0	4,35	4,54	5,55	6,8

Väljendame van der Waals'i võrrandis esinevad konstandid a ja b aine kriitilise oleku parameetrite kaudu. Valemi (5) põhjal saame:

$$b = \frac{1}{3} v_k,$$

$$a = 3p_k v_k^2.$$

Valemi (6) põhjal võime gaaside universaalkonstandi R avaldada samade parameetrite kaudu:

$$R = \frac{8}{3}\frac{p_k v_k}{T_k}.$$

Asetame meie poolt leitud a, b ja R väärtused van der Waals'i võrrandisse:

$$\left(p + 3\frac{p_k v_k^2}{v^2}\right)\left(v - \frac{1}{3}v_k\right) = \frac{8}{3} p_k v_k \frac{T}{T_k}. \qquad (7)$$

Toome sisse nn. *taandatud parameetrite* mõisted, mis kujutavad endast antud parameetri muutuva suuruse ja selle kriitilise väärtuse suhteid:

$$\frac{p}{p_k} = \pi \text{ — taandatud rõhk,}$$

$$\frac{v}{v_k} = \omega \text{ — taandatud ruumala,}$$

$$\frac{T}{T_k} = \tau \text{ — taandatud temperatuur.}$$

Van der Waals'i võrrand saab siis järgmise kuju:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \qquad (8)$$

See võrrand kannab *taandatud van der Waals'i võrrandi* nime.

Võrrandi (8) põhjal võib teha tähtsa üldistuse: kui võtta kaks keemiliselt erinevat keha, millede temperatuurid on vastavad ja millede rõhud on vastavad, s. o. *kui nende taandatud temperatuurid (T) on võrdsed* (ühe keha temperatuuri ja kriitilise temperatuuri suhe $\frac{T_1}{T_{k_1}}$ on võrdne teise keha vastava suhtega $\frac{T_2}{T_{k_2}}$) *ja taandatud rõhud* (π) *on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka nende kehade vastavad ruumalad.*

Osutus, et see nn. vastavate olekute seadus on katseandmetega üldjoontes rahuldavas kooskõlas ja on van der Waals'i võrrandist igal juhul (ka siis, kui viimane on avaldatud kujul (8)) täpsem.

Vastavate olekute seaduse avastamine andis tõuke uue füüsika osa — *võrdleva füüsika* — arenemisele. Selle füüsika haru ülesandeks on ainete termodünaamiliste omaduste ja keemilise ehituse vahelise seose uurimine. Võrdleva füüsika rajajateks olid belgia füüsik de Heen (esimesed monograafiad võrdlevas füüsikas 1882. a. ja 1888. a., milledes de Heen'i ja tema eelkäijate poolt avastatud seadused ei olnud vastavate olekute seaduse põhjal süstematiseeritud) ja vene teadlane A. I. Nadeždin. A. I. Nadeždin on autoriks sisukale monograafiale „Этюды по сравнительной физике" (1888. a.), kus juba aluseks on võetud vastavate olekute teooria.

Viimastel aastatel on võrdleva füüsika küsimustele pühendatud suur hulk uurimusi. Vastavalt eksperimentaalsete faktide

kogunemisele ilmnesid uued, sageli ootamatud seosed ainete omaduste ja nende ainete keemilise ehituse vahel. Vaatamata sel alal (füüsikute ja keemikute ühiste pingutuste tulemusena) tehtud edusammudele, tuleb konstateerida, et viimastel aastakümnetel on võrdlev füüsika oma saavutuste poolest tunduvalt maha jäänud uute ainete sünteesi ja ainete termodünaamilisi omadusi iseloomustavate suuruste mõõtmise aladel tehtud laboratoorsete uurimuste tormilisest arengust.

Toome võrdleva füüsika seadustest alljärgnevad näited.

Moolruumalade aditiivsuse reegel. On kindlaks tehtud, et vastavates olekutes võetud vedelike võrdlemisel (tavaliselt võrreldakse kriitilisi olekuid) keemilise liitkoostisega vedeliku moolruumala avaldub tinglike suuruste (mida võiks nimetada gramm-aatom-ruumalaks) ja vaadeldava vedeliku molekuli koostisse kuuluvate antud elemendi aatomite arvu korrutiste summana.

Taandatud aurumissoojuste reegel. Vastavatel temperatuuridel võetud vedelike mool-aurumissoojuste ja absoluutsete temperatuuride jagatised (s. o. niinimetatud taandatud aurustumissoojused) on kõikide vedelike jaoks võrdsed.

Vähemtäpsel kujul — vedelike võrdlemisel normaalrõhule vastavatel keemistemperatuuridel T_s — avastati see reegel P i c t e t' (1876. a.) ja T r o u t o n'i (1884. a.) poolt. Reegli kontrollimisega tegelesid mitmed autorid. Eriti täpselt tehti seda V. J. K u r b a t o v i poolt, kes leidis, et paljudel juhtudel kehtib seos:

$$\frac{r}{T_s} \approx 21. \tag{9}$$

A s s o t s i e e r u n u d vedelikkudel, s. o. sellistel, mille molekulidest on osa liitunud (kahe või enama molekuli kaupa), on konstandi väärtus tavaliselt suurem kui 21; näiteks veel on 25,8, etüülalkoholil — 24,0. Normaalsete vedelike (s. o. vedelike, mis ei ole dissotsieerunud) konstandid erinevad 21-st vähem kui ühe võrra. Ligikaudselt kehtivat võrdust (9) nimetatakse tavaliselt T r o u t o n'i r e e g l i k s.

Tuleb märkida, et normaalrõhul on paljude vedelike keemistemperatuur umbes $^2/_3$ kriitilisest temperatuurist. Seega selliste vedelike võrdlemine normaalsetel keemistemperatuuridel ei erinegi väga palju tegelikult õigemaks osutuvast vedelike võrdlemisest vastavatel olekutel.

Mathias'i reegel. Nagu 1900. a. prantsuse teadlane M a t h i a s näitas, on vedeliku ja tema küllastava auru taandatud tiheduste summa taandatud temperatuuri universaalne lineaarne funktsioon:

$$\frac{\varrho_{ved} + \varrho_{aur}}{2\varrho_k} \approx 2 - \frac{T}{T_k}. \tag{10}$$

Mathias'i reegel (mida sageli nimetatakse „diameetrite seaduseks") paistab silma suure täpsuse poolest.

1910. a. tegi Dimitri Aleksandrovitš Goldhammer kindlaks, et taandatud tiheduste vahe kohta kehtib analoogiline seos:

$$\frac{\varrho_{ved} - \varrho_{aur}}{\varrho_k} = m\sqrt[3]{1 - \frac{T}{T_k}}. \qquad (11)$$

§ 106. Kvalitatiivsetest muundumistest soojuslikes protsessides.

Õppides tundma molekulaar-soojuslikke nähtusi, puutume pidevalt kokku kehade põhiliste, kvalitatiivsete muundumistega, mis toimuvad järsku rõhu ja temperatuuri teatud kindlatel väärtustel (sulamis- ja keemispunktidel, kristallide lahusest väljalangemise temperatuuridel jne.). Need on erijuhud üldisest seaduspärasusest, mille järgi nähtuste areng toimub selliselt, et väikestelt ja varjatud kvantitatiivseilt muutustelt toimub üleminek avalikele muutustele, põhjalikele muutustele, kvalitatiivseile muutustele, kus kvalitatiivsed muutused ei saabu aegamööda, vaid kiiresti, äkki, hüppelise üleminekuna ühest olekust teise olekusse, kus need muutused ei saabu juhuslikult, vaid seaduspäraselt, saabuvad märkamatute ja aeglaste kvantitatiivsete muutuste kuhjumise tagajärjel.

Kvantitatiivsed karakteristikud kuuluvad ainete ja nähtuste muutuvate omaduste hulka — kvaliteedi all aga mõistetakse seevastu asjade põhiliste ja nendest lahutamatute omaduste kogu, s. o. seda oluliste tunnuste kompleksi, mis antud asja teistest asjadest eristab ja võimaldab seda teiste asjade hulgast eraldada. Kvaliteedi muutumine tähendab asja ümberkujunemist täiesti teiseks asjaks. Kuid mingi üksiku omaduse muutumine või isegi selle täielik kadumine ei tähenda asja muundumist. Nii näiteks jääb kõveraks painutatud nael ikkagi naelaks ja magnetiseeritud raud rauaks.

Kvaliteet väljendab asjade suhtelist püsivust ja tema põhiliste eriomaduste säilivust. Kvantiteet aga väljendab asjade omaduste muutuvust ja määrab kindlaks antud asja suhte teiste asjadega. Seetõttu — kvantitatiivsed muutused on järkjärgulised ja võivad osutuda tähtsusetuteks, märkamatuteks ja varjatuteks; kvalitatiivsed muutused on aga katkendlikud, järsud ja ilmsed.

Füüsikas võib igal sammul leida näiteid kvantitatiivsete muutuste üleminekutest kvalitatiivseteks muutusteks. Andes mingile kehale soojust või võttes temalt ära soojust, muutuvad keha omadused — temperatuur, tihedus, viskoossus jt. — teatud piirides pidevalt. Kuid pärast seda, kui nende pidevate muutuste tulemu-

sena saavutatakse mingi kindel olek, muutub järsku teatud kindel rühm omadusi hüppeliselt. See kutsub esile keha põhilise ja kvalitatiivse muundumise. Nii näiteks, soojenemisel või jahtumisel iga vedelik, mis on saavutanud mingi kindla temale iseloomuliku (katse korraldamise ajal valitsevast rõhust sõltuva) temperatuuri, muutub auruks või kristalliseerub. Analoogilisteks kvalitatiivseteks muundumisteks on gaasi kondenseerumine vedelikuks, tahke keha sulamine, kristallide väljalangemine lahusest või sulamist nende jahtumisel jne.

Engels märkis, et paljud füüsika konstandid kujutavad endast „sõlmpunkte", kus kvantitatiivsete muutuste kuhjumine toob endaga kaasa kvalitatiivseid muutusi.

Ühest olekust teise „üleminekutele vastavad punktid" (üleminekupunktid), näiteks vedeliku keemispunkti või auru kondenseerumispunkti, määrab ära aine molekulaarne ehitus ja molekulide vahel valitsevate jõudude intensiivsus. Vedeliku ülekuumenemine ja üleküllastava auru tekkimine näitavad, et vedeliku üleminek auruks ja auru üleminek vedelikuks on keerulised protsessid. Keemise ja kondenseerumise algmomente, samuti ka nende protsesside iseloomu ei määra ära ainult temperatuur ja rõhk. Millal ja kuidas hakkab vedelik keema või aur kondenseeruma — see sõltub teataval määral kõikidest konkreetsetest tingimustest, milledes katse toimub, eriti aga kõrvaliste lisandite olemasolust, anuma seinte iseloomust ja seisundist, vedelikus lahustunud ja seinte poolt neelatud õhu hulgast, vedelikus hõljuvate tolmuübemete loomusest, hulgast, suurusest jne. Teatud kindlatel tingimustel aurub vesi nii, et tema pind jääb peegelsiledaks; teistel tingimustel hakkab vesi tormiliselt keema. Õliga kaetud veetilga ülekuumendamisel vesi teatud momendil plahvatab.

Veel keerukamad ja mitmekesisemad on kristallisatsiooniprotsessid. Sõltuvalt katse tingimustest võib saada oma iseloomult väga erinevaid kristalle. Kristallisatsiooni tingimustest sõltuvad ka kristallide kuju ja mõõted. Kristall võib kasvuprotsessis väga kummaliselt oma kuju muuta, peegeldades kristallisatsiooni tingimuste kõige väiksemaidki muutusi.

Mõnede vedelike ettevaatlikul jahutamisel nagu õnnestuks mööduda kristallisatsioonipunktist ja saada amorfne (mittekristalne) tahke keha. Selliselt tahkestub klaas.

Kvalitatiivsete muundumiste suurt mitmekesisust võib täheldada vedelikkude segudes (teatud tingimustel vedelikkude homogeensed segud kihistuvad), liitlahustes, kus ühes lahustis on lahustatud mitu ainet, ja teistes mitmekomponendilistes termodünaamilistes süsteemides.

Kõik keemilised reaktsioonid, neid on aga loendamatu hulk, kujutavad endast kvalitatiivseid muundumisi. Nii näteks, kui

kütuse aurudest ja õhust koosneva küttesegu kokkusurumise tõttu saabub teatud kindel temperatuur, siis küttesegu plahvatab ja muundub põlemisproduktideks. Keemiliste protsesside, samuti nagu teistegi üleminekuprotsesside käik sõltub oluliselt välistest asjaoludest. Mõnikord võib kõrvaliste, reaktsioonist mitte osavõtvate ainete (katalüsaatorite) olemasolu tohutult reaktsiooni kiirendada või, juhul kui reaktsiooni ei toimu, seda isegi esile kutsuda.

Näiteks vesinikust ja hapnikust koosnev küttesegu plahvatab soojenemisel siis, kui temperatuur on tõusnud umbes 550 kraadini. Peeneks jahvatatud marmori või klaasi lisamisel tekib plahvatus temperatuuril 350° C, peene kullapulbri mõjul aga temperatuuril 55° C. Tahmavabasse leeki asetatud suhkrutükk ei sütti, vaid hakkab sulama ja muutub voolavaks. Kui aga suhkru pind kokku määrida paberossituhaga, on suhkrut kerge põlema süüdata. Tähtsusetud tuhajäljed on seejuures küllaldased selleks, et tagada suure suhkrutüki põlemist. Reaktsiooni protsessis katalüsaator ei muundu ja tema hulk ei vähene. Katalüsaatorite mõjumine reaktsiooni käigule näitab, et iga keemiline muundumine on erakordselt keeruline.

Ka nende nähtuste hulgast, milliseid tavaliselt loetakse mehhaanikasse kuuluvateks, võib tuua palju näiteid kvalitatiivsetest muundumistest. Kui tahke keha deformeerimisel, näiteks metallvarva painutamisel, deformeerivat jõudu järk-järgult suurendada, siis teatud momendil elastne deformatsioon kvalitatiivselt muutub ja läheb üle plastiliseks deformatsiooniks, mis erinevalt elastsest deformatsioonist ei kao deformeeriva jõu mõju lakkamisel. Monokristallides toimub see nähtus järskude nihetena.

Kvalitatiivsete muundumiste teise liigi näitena võib mainida vedeliku voolurežiimi järsku muutumist. Torus voolava vedeliku kiiruse järkjärgulisel suurendamisel vaikne kihiline voolamine muundub kiiruse teataval kriitilisel väärtusel äkki kvalitatiivselt täiesti teistsuguseks — turbulentseks voolamiseks.

Kõigist neist näidetest selgub, et temperatuuri, rõhu ja teiste suuruste järkjärguline muutumine valmistab ette kvalitatiivset hüpet. Kvalitatiivne muundumine, mis lõpuks saabub, võib aga toimuda väga erinevalt, sõltuvalt eksperimendi üksikasjadest. Peaaegu märkamatud mõjud, mida avaldavad teisejärgulistena näivad tegurid, sageli kiirendavad, aeglustavad ja muudavad kvalitatiivsete muundumistega kaasuvaid nähtusi.

Looduses esinevad kvalitatiivsed erinevused põhinevad kas keemiliselt erineval koostisel, erineval kehade seesmisel ehitusel või erinevatel energianormidel ja -hulkadel — kõige sagedamini aga rajanevad nad erineva koostise, erineva ehituse ja erineva energiatevahekorra ühendatusel.

Keemilise koostise muutmisega kaasneb paratamatult nii energia muutumine keemilise aktiivsuse energia võrra kui ka liitunud või eraldunud osakeste aatomisisese energia võrra. Kui keha osakeste ümberpaigutumise tõttu muutub tema ehitus nii, et keha keemiline koostis jääb muutumatuks, siis kaasneb sellega kas osakeste vastastikuse mõju ja osakeste liikumise energiate summa muutumine või ühe siseenergia liigi vähenemine ja teise siseenergia liigi suurenemine sama arvu võrra. Seetõttu on võimatu muuta keha kvaliteeti, ilma et me kvantitatiivselt muudaksime kehale kuuluvaid energialiike.

XVIII PEATUKK.

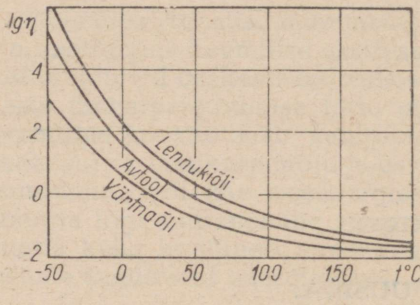
VEDELIKE FUUSIKA.

§ 107. Vedelike mehhaanilised ja termodünaamilised omadused.

Põhiline erinevus vedelike ja gaaside vahel seisneb selles, et vedelik võtab enda alla kindla lõpliku ruumala, kuna gaas levib üle kogu selle ruumi, millesse ta on paigutatud. Vedelike omadus võtta endi alla ainult piiratud ruumi osa seletub kahe põhjusega: 1) molekulidevaheliste tõmbejõudude olemasoluga, mis tekitavad siserõhu ja, nagu allpool näidatakse, põhjustavad vedeliku vastupidavuse katkemisele tema igasuunalisel venitamisel; 2) molekulide liikumise kiirus ei saavuta nii suurt väärtust, et molekulid võiksid tõmbejõudude mõju ületada; ainult väikesel osal molekulidest on vedeliku all olevast ruumi osast lahkumiseks küllaldane kiirus; temperatuuri tõusuga selliste molekulide arv kasvab, millest annab tunnistust vedeliku aurumiskiiruse kasv.

Vedelikukihtide nihkumisel avalduv takistus on erakordselt väike, mistõttu vedelikku võib kergesti jaotada osadeks ja pihustada tilkadeks. Sellest aga oleks ekslik järeldada, et vedelik käitub alati kehana, millel ei ole tugevust. *Osakeste eraldamiseks vajalik jõud on vedelike korral suur* (sellest annab tunnistust tavaliselt suur aurumissoojus). Seetõttu peaksime oletama, et vedelik ilmutab suurt tugevust sellistel deformatsioonidel, kus täielikult on kõrvaldatud vedelikukihtide nihkumise võimalus; niisuguseks deformatsiooniks on igasuunaline tõmme. Allpool-toodud katse kinnitab seda järeldust.

Ühest otsast kinnisulatatud klaastoru oli täidetud veega temperatuuril 28° *C*. Selleks et torusse läheks väike õhumull, jahutati toru kuni 18°-ni ja sulatati avatud ots kinni. Temperatuuri tõusul, millega kaasnes rõhu suurenemine, lahustus õhk vees. Osutus, et kogu toru oli veega täidetud. Uuel jahutamisel kuni 18°-ni jäi toru kogu aeg veega täidetuks; järelikult allus vesi igasuunalisele tõmbele. On ilmne, et antud juhul oli suhteline deformatsioon võrdne esialgu torus olnud veemulli ruumala ja vee ruumala jagatisega. Teades aine ruum-elastsuse moodulit



Joon. 293. Määrdeõlide viskoossuse olenevus temperatuurist.

võis välja arvutada vees eksisteeriva pinge. Jätkates jahutamist torus oleva veesamba katkemiseni, osutus võimalikuks kindlaks teha vee katkemispinget. See oli suurusjärgus $50 \frac{kG}{cm^2}$, s. o. ainult 12 korda väiksem männipuu katkemispingest.

Üheks vedelike põhiliseks omaduseks on *viskoossus*. Viskoossuse ehk sisehõõrde osa hüdrodünaamikas on käsitletud X peatüki esimeses osas. Peatume siin vedelike viskoossuse sõltuvusel oleku parameetritest ja vedelike viskoossuse molekulaar-kineetilise teooria järeldustel.

Viskoossus on ainukeseks selliseks vedelike parameetriks, mille väärtus *muutub* rõhu ja temperatuuri muutumisel küllalt laiades piirides *miljoneid kordi*. Joonisel 293 on M. P. Volarovitši (1943. a.) andmete järgi kujutatud logaritmilises mastaabis määrdeõlide viskoossuse kõverad temperatuuri intervallis 175° *C* kuni —50° *C*. Nagu joonisest nähtub, muutub nende õlide sisehõõrde tegurite väärtus (väljendatuna puaasides) 10^5—10^7 korda. Tavaliste vedelike, näiteks vee, temperatuuri alandamine ainult 10° *C* võrra kutsub esile viskoossuse suurenemise 20—30% võrra. Bridgmani katsetest selgub, et rõhu suurenemisel kuni 20 000 *at* võib vedeliku viskoossus suureneda 10^5—10^6 korda. Seoses hüdrodünaamika, füüsika, keemia ja tehnika praktiliste nõuetega on vedelike viskoossuse sõltuvus rõhust, eriti aga temperatuurist, hästi läbi uuritud.

Vedeliku viskoossuse molekulaarteooriale andis esmakordselt põhjenduse Moskva ülikooli professor Aleksei Jossifovitš Batšinski 1913. a. Ta tegi kindlaks, et vedelike viskoossus η sõltub eriruumalast v järgmise seaduse järgi:



Aleksei Jossifovitš Batšinski (1877—1944).

$$\eta = \frac{c}{v - \omega}. \qquad (1)$$

Batšinski seaduses kujutab konstant ω endast aine molekulide poolt endi alla võetud ruumala; seega $v - \omega$ on vaba ruumala. Eksperimentaalselt on kindlaks tehtud, et suurus ω on lähedane van der Waals'i võrrandi konstandile a ja iseloomustab seega vedeliku molekulide vahelisi vastastikuse mõju jõude.

A. I. Batšinski kontrollis valemi (1) kehtivust väga paljude vedelike korral; seejuures tegi ta kindlaks ω ja c sõltuvuse aine keemilisest olemusest. Kui kanda graafiku ordinaatteljele vedeliku eriruumala ja abstsissteljele voolavus $\frac{1}{\eta}$, siis vastavalt Batšinski seadusele saame sirgjoone (joon. 294).

Rea vedelike viskoossuse sõltuvus temperatuurist väljendub järgmise valemiga:

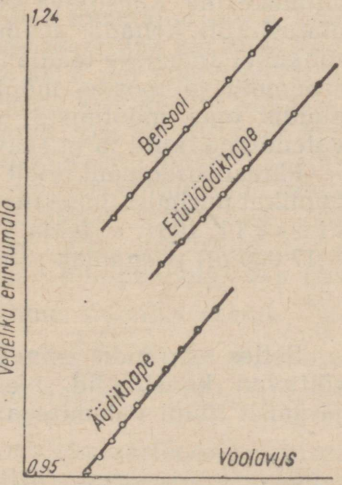
$$\eta = Ae^{\frac{U}{RT}}, \qquad (2)$$

kus T on absoluutne temperatuur, A konstant, R gaasikonstant ja U mingi vedelikke iseloomustav energia (§ 112). Võrrandit (2), mille esmakordselt teoreetiliselt tuletas J. I. Frenkel, on täiustanud ja muutnud oma töödes mitmed teadlased.

Ühed autorid väidavad, et valemis (2) esinev energia U vastab aine sulamissoojusele. Teatud hulga vedelike korral võib tõepoolest tähele panna nende kahe suuruse head kokkusattuvust. Teised uurijad on seisukohal, et energia U on teatud osa aurumissoojusest.

Vedelike omadusi iseloomustavaid termodünaamilisi suurusi uuriti möödunud sajandi jooksul väga suure hulga teadlaste poolt. Eriti palju töid pühendati vedelike kokkusurutavusele, vedelike paisuvusele soojendamisel ja vedelike soojusmahtuvusele. Ilmnes, et põhiliste termodünaamiliste parameetrite — nimelt eriruumala, rõhu ja temperatuuri — vaheline sõltuvus on väga keerulise iseloomuga ja on erinevatel vedelikel erinev. Seetõttu väljendatakse kuni käesoleva ajani mõõtmistulemused peamiselt empiiriliste valemitega, milledel on tavaliselt hulkliikme kuju. Näiteks *vedeliku eriruumala sõltuvus temperatuurist* (konstantsel rõhul) väljendub järgmise valemiga:

$$\frac{v}{v_0} = 1 + at + bt^2 + ct^3. \qquad (3)$$



Joon. 294. Batšinski seadus.

Üldiselt vedeliku eriruumala temperatuuri tõustes kasvab. Sellel reeglil on üksikuid erandeid, milledest üldtuntud on vee ruumala kahanemine vee soojendamisel temperatuurilt 0° *C* kuni temperatuurini 4° *C*. Ülaltoodud valemis esinevate konstantide *a*, *b* ja *c* väärtused on erinevatel vedelikel erinevad. Kuni käesoleva ajani ei ole õnnestunud leida lihtsat sõltuvust nende konstantide väärtuste ja aine keemilise koostise vahel. Enamikul vedelikel on kõik kolm konstanti positiivsed.

Vedeliku eriruumala sõltuvust temperatuurist uurisid möödunud sajandi lõpul erakordselt laialdaselt ja üksikasjaliselt vene teadlased B. F. Luginin ja D. I. Mendelejev. Mendelejev tegi kindlaks, et vedeliku eriruumala sõltuvust temperatuurist võib ligikaudselt väljendada valemiga

$$v = \frac{v_0}{1 - kT}, \tag{4}$$

millest vedelikud umbes samasuguselt kõrvale kalduvad nagu gaasid Gay-Lussac'i seadusest. Valemis (4) esineva suuruse *k* väärtus on eri vedelikel 0,0008-st kuni 0,0015-ni.

Valemis (3) esinevad konstandid osutuvad tegelikult rõhust sõltuvateks suurusteks, kusjuures eri vedelikel on see sõltuvus erisugune.

Vedeliku *tiheduse sõltuvust rõhust* uuris möödunud sajandi lõpul ja käesoleva sajandi algul eksperimentaalselt väga suure täpsusega prantsuse akadeemik E. Amagát, korraldades katseid paljude vedelikega. Aparatuur, mida ta oma katsetes kasutas, võimaldas rõhu viia kuni 3000 atmosfäärini. Katsetulemused näitasid, et erineva iseloomuga vedelike käitumine on väga mitmekesine. Käesoleva sajandi 20—40-ndatel aastatel uuris väga ulatuslikult kehade, sealhulgas ka vedelike käitumist kõrgetel rõhkudel ameerika teadlane P. V. Bridgman. Ta täiustas katseseadmeid ja teostas mõõtmisi kuni rõhuni 45 000 *at*. Bridgman püüdis oma mõõtmiste tabeli-andmeid väljendada empiiriliste valemitega, kuid ta ei saavutanud sel alal edu.

Pärast Bridgmani poolt saadud eksperimentaalsete materjalide hoolikat uurimist õnnestus meie väljapaistval teadlasel A. J. Batšinskil 1931. a. leida valem, mis laias rõhu piirkonnas (500—17 000 *at*) peegeldab rahuldavalt katsetulemusi:

$$p + K = \frac{L}{v^7}. \tag{5}$$

Selles võrrandis esinevad suurused *K* ja *L* on temperatuurist sõltuvad konstandid. Nende sõltuvus temperatuurist väljendub järgmist tüüpi valemitega:

$$K = K_0 + kt.$$

Ülaltoodud Batšinski võrrand kehtib teatava hulga ainete kohta suure täpsusega.

Erinevate vedelike kokkusurutavuse koefitsiendid, s. o. suurused $-\frac{1}{v}\left(\frac{\delta v}{\delta p}\right)_{t\text{-const}}$, on kõrvutatud § 48 toodud tabelis.

Samuti nagu tiheduse mõõtmise tulemusi, tuleb ka vedelike soojusmahtuvuse mõõtmise tulemusi enamikul juhtudel väljendada järgmist tüüpi võrranditega:

$$c = c_0 + at + bt^2. \qquad (6)$$

1887. a. näitas Schiff, et tervel real ainetel on konstantide c_0 ja a väärtused ühised. Nii näiteks bensoolil, toluoolil, metaksüloolil ja paraksüloolil

$$c = 0{,}3834 + 0{,}001043 \cdot t;$$

äädikhappel, propioonhappel ja võihappel

$$c = 0{,}4440 + 0{,}001418 \cdot t.$$

Eriti keeruline on termodünaamiliste suuruste vaheline sõltuvus lahuste korral. Sellele küsimusele on pühendatud väga suur hulk uurimusi, mida tänapäeval tavaliselt loetakse füüsikalise keemia valdkonda kuuluvateks.

§ 108. Pindpinevus.

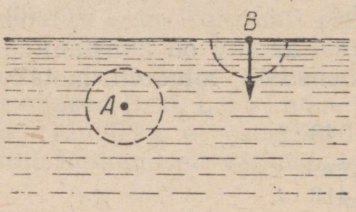
Füüsika elementaarkursusest on teada rida vaatlusi ja katseid, mis väga veenvalt tõestavad, et vedela keha õhuke pinnakiht on erilises, pingule tõmmatud kummikelme olekut meenutavas seisundis.

Siinjuures tuleb arvesse võtta, et analoogiliselt sellega, kuidas pingule tõmmatud niidi igas punktis mõjub niidisuunaline jõud (pinge), mõjub samasugune jõud ka pingule tõmmatud lindis, kuid mitte enam rakendatuna ühte punkti, vaid jaotatuna üle kogu lindi laiuse. Seega on endastmõistetav mõõta selle jõu pingutusvõimet 1 *cm* laiuse lindi osa kohta tuleva pingega. Kui meil ei ole tegemist lindiga, vaid kelme või membraaniga, mis on ühtlaselt igas suunas pingule tõmmatud, siis igale membraani pinnal ükskõik millises suunas võetud 1 *cm* pikkusele lõigule mõjub jõud, mille suurus iseloomustab membraani pinguloleku astet. See jõud mõjub risti selle 1 *cm* pikkuse lõiguga, mille punktides ta on rakendatud. Niisugust jõudu nimetatakse pindpinevusjõuks ehk lihtsalt pindpinevuseks. Pindpinevuse dimensiooniks saame $\frac{düün}{cm}$ või (korrutades lugejat ja nimetajat *cm*-ga) $\frac{erg}{cm^2}$. Seega pindpinevust võib vaadelda kui mingit ühe pinnaühiku kohta tulevat energiat.

Selgitame pindpinevuse nähtust molekulaarteooria alusel. Kõikide ainete aatomid koosnevad positiivsetest ja negatiivsetest elektrilaengutest. Ühe molekuli laengud, olles vastastikuses mõjutuses teise molekuli laengutega, annavad mingisuguse summaarse

mõju. See ühe molekuli summaarne mõju teisele molekulile kahaneb kiiresti molekulidevaheliste kauguste suurenemisega ja muutub märkamatuks siis, kui molekulidevaheline kaugus on ligikaudu 10^{-7} *cm* (molekulide mõjuraadius).

Peab märkima, et mitmesuguste vedelike molekulide vaheline kaugus on enamikul juhtudel vahemikus $3 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-8}$ *cm*. Molekulide mõjuraadius on seega natuke suurem kui vedeliku molekulide vaheline keskmine kaugus.



Joon. 295. Pindpinevuse mõiste selgitamiseks.

Kujutleme molekuli *A* (joon. 295), mis asub allpool vedeliku pinda ja on pinnast sügavamal kui 10^{-7} *cm*. Molekul *A* liigub translatoorselt ja pöörlevalt; seejuures on ta kõikidest külgedest ümbritsetud teiste molekulidega. Teiste molekulide mõju molekulile *A* taandub igal antud ajamomendil teatud summaarsele efektile. Kui me aga arvestame seda summaarset efekti mingi lõpliku ajavahemiku (näiteks ühe sekundi) kohta, siis saame tulemuseks peaaegu nulli, sest lõpliku ajavahemiku jooksul mõjutati meie pöörlevat molekuli igas suunas peaaegu täiesti ühesuguselt. Hoopis teistsugune lugu on aga vedeliku pinnal asuva molekuliga *B*: sellele molekulile avaldavad mõju ainult need molekulid, mis asuvad tema kõrval või temast sügavamal. On selge, et kui vaadeldav molekul ei lange lõpliku ajavahemiku jooksul sügavamale pinnakihi alla, siis hakkab temale mõjuma jõud, mis püüab teda tõmmata sügavamale ehk, teiste sõnadega: molekulile hakkab mõjuma vedeliku pinna normaali suunaline jõud.

On selge, et mingi molekuli ümberpaigutamiseks vedeliku seest pinnale kulub molekulaarse välja jõudude ületamisel umbes sama palju energiat kui molekuli eemaldamiseks vedeliku pinnalt. Niisiis, *kui leiame vedeliku aurumissoojuse ühe molekuli kohta ja võtame saadud suurusest poole, siis saame ligikaudse ettekujutuse sellest, kui palju on pinnakihis asuva molekuli energia suurem vedeliku sees asuva molekuli energiast.*

Vedeliku pinnal asuval molekulil *B* on keskmiselt küllaltki kindel orientatsioon: ta on pööratud vedelikumassi poole ühega nendest oma külgedest, mis kõige enam alluvad ülejäänud vedelikumassi külgetõmbe mõjule. See kehtib iga molekuli kohta, mis asub vedeliku pinnal. Järelikult, umbes 10^{-7} *cm* paksusega pinnakihis peavad molekulid üldiselt olema paigutatud üksteisega paralleelselt (muidugi, molekulide kaootiline liikumine sunnib kord üht, kord teist molekuli minema vedeliku sisse, kusjuures tema koha võtavad enda alla vedeliku seest tulevad teised molekulid).

Seega me näeme, et umbes 10^{-7} *cm* paksune vedeliku pinnakiht on erilises olekus. Samuti nagu tahketes kehadeski on sellises pinnakihis molekulid paigutatud teatud korrapärasusega. Pinnakiht ongi selleks kohaks, kus mõjuvad pindpinevusjõud. Meile teadaolevate andmete põhjal võime isegi hinnata pindpinevusjõu suurust. Teame (§ 104), et molekulide vastastikune tõmbumine tekitab rõhu suurusega umbes 1000 *at* ehk $10^9 \frac{dn}{cm^2}$ (selline on van der Waals'i võrrandi põhjal väljaarvutatud siserõhu suurusjärk). Kujutame pinnakihi normaallõike ja võtame selles normaallõikes ristküliku laiusega 10^{-7} *cm* ja pikkusega 1 *cm*. Selle ristküliku poolt piiratud pinnale, mille suurus on 10^{-7} cm^2, mõjub molekulaarsest külgetõmbest tingitud normaali suunaline jõud suurusega $10^9 \frac{dn}{cm^2} \cdot 10^{-7}$ $cm^2 = 100$ *dn*. See jõud, arvestatuna ühe sentimeetri pikkuse lõigu kohta, annabki ligikaudse ettekujutuse pindpinevuse suurusest. Tegelikult on pindpinevus näiteks elavhõbedal 490 $\frac{dn}{cm}$, veel 73 $\frac{dn}{cm}$, etüülalkoholil 22 $\frac{dn}{cm}$ (toatemperatuuril). Nagu näeme, määrab meie jäme kaalutlus õigesti pindpinevuse suurusjärgu.

Temperatuuri tõusul pindpinevus väheneb ja saab kriitilisel temperatuuril nulliks.

1921. a. tegi A. I. Batšinski kindlaks, et pindpinevus on võrdeline vedeliku ja tema küllastava auru tiheduste vahe neljanda astmega:

$$\alpha = C\,(\varrho_v - \varrho_a)^4, \tag{7}$$

kus C on võrdetegur.

On huvitav märkida, et pindpinevuse sõltuvust vedeliku ja auru tiheduste vahest uuris kõigepealt Laplace ja seejärel van der Waals. Esimene sai astmenäitajaks arvu 2, teine arvu 3. Kuid nagu Batšinski näitas, on katseandmetega kooskõlas ainult neljaga võrdne astmenäitaja.

Batšinski võrrand on rakendatav väga laias temperatuuride intervallis[1].

Erinevate vedelike pindpinevus kahaneb temperatuuri tõustes üht ja sama tüüpi seaduse järgi:

$$\alpha = \frac{K}{v^{2/3}}\,(T_k - T). \tag{8}$$

v tähendab siin vedeliku moolruumala, T_k kriitilist temperatuuri ja K konstanti, mis mõnede mitteassotsieeruvate vedelike jaoks on lähedane arvule 2,1.

[1] Kaks aastat pärast seda, kui Batšinski avaldas oma uurimused, kus ta tegi kindlaks valemi (7) kehtivuse, leidis sama seose ja avaldas selle Mac Leod, kelle nimega mõningates välismaistes raamatutes ebaõigesti nimetatakse Batšinski valemit.

Märgime veel, et antud vedeliku pindpinevuse väärtus muutub teataval määral sõltuvalt sellest, kas vedeliku kohal on tema enda küllastav aur, mingi muu kõrvaline gaas või tühi ruum.

Kahe mitteseguneva vedeliku lahutuspinna jaoks on pindpinevuse väärtus oluliselt erinev kummagi vedeliku pindpinevusest. Nii näiteks on pindpinevus vee ja bensooli lahutuspinnal $33{,}6\frac{dn}{cm}$, kuna ta veel on $73\frac{dn}{cm}$ ja bensoolil $29\frac{dn}{cm}$.

Mõnede vedelike pindpinevused temperatuuril 18° C.

Vedelik	$\alpha\left(\frac{dn}{cm}\right)$	Vedelik	$\alpha\left(\frac{dn}{cm}\right)$
Vesi	73	Piiritus	22,5
NaCl vesilahus — 26%	82	Tärpentin	26
Piirituse vesilahus — 40%	30	Bensool	29
" " 10%	50	Oliiviõli	34
Vesi — bensool	33,6	Kastoorõli	37
Vesi — eeter	12,2	Glütseriin	65
Eeter	16,5	Elavhõbe	490
		Elavhõbe — vesi	427

Vedelate soolade (NaCl, KBr, KNO_3 jt.) pindpinevus temperatuuridel 800—900° *C* on suurusjärgus 90—110 $\frac{dn}{cm}$.

Eriti suur on sulametallide pindpinevus. Temperatuuridel, mis on natuke kõrgemad kui keemistemperatuurid, on sula seatina, vase ja kulla pindpinevus umbes 500—600 $\frac{dn}{cm}$. Sula hõbedal on pindpinevus $800\frac{dn}{cm}$, raual üle $1000\frac{dn}{cm}$ ja plaatinal umbes $1700\frac{dn}{cm}$.

On endastmõistetav, et veeldatud gaaside pindpinevus on nõrga molekulidevahelise vastastikuse mõju tõttu väike. Nii näiteks vedelal lämmastikul on pindpinevus $8\frac{dn}{cm}$ (temperatuuril —190° *C*), vedelal vesinikul umbes $3\frac{dn}{cm}$ (temperatuuril —259° *C*) ja vedelal heeliumil vähem kui $1\frac{dn}{cm}$.

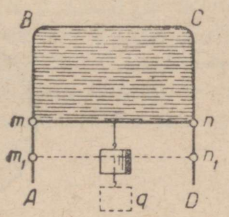
Vedeliku pinna vabaenergia. Traatraami *ABCD* (joon. 296) üks külg *mn* on väga kerge ja vabalt liikuv: tema otstes on aasad, mistõttu ta võib libiseda mööda raami külgi *AB* ja *CD*. Tekitame *BC* ja *mn* vahele vedelikukile (näit. seebikile). Kui me traati *mn* millegagi ei koorma, siis vedelikukile tõmbub kokku (samuti nagu väljavenitatud kummimembraangi) ja tõmbab endaga kaasa traati *mn*. Tegemist on siin pindpinevuse väga näitliku ilminguga kahes pindkihis, milledest üks asub ühel pool, teine aga teisel pool kilet[1].

[1] Erinevalt kummimembraanist tõmbab vedelikukile traati *mn* kogu aeg ühesuuruse jõuga.

Selleks et tasakaalustada pindpinevusjõudu, riputame traadi *mn* külge mingi koormuse (mida on kõige parem koostada mitmest traatkonksukesest). Kui raam on kogu aeg vertikaalses asendis, siis meie tasakaalu tingimus omandab järgmise kuju:

$$2\alpha l = q.$$

α on siin pindpinevus; l — traadi *ab* pikkus; αl — jõud, millega pindkihi üks külg tõmbab traati *ab*; $2\alpha l$ — kogujõud, s. o. jõud, millega kile mõlemad küljed mõjuvad traadile, q — traadi ja selle külge kinnitatud koormuse kaal.



Joon. 296. Vedeliku pindpinevus on tasakaalustatud raskusega q.

Kui suurendada jõudu q väga väikese suuruse võrra, siis traat *ab* koos koormusega hakkab aeglaselt liuguma allapoole. Laseme teda liikuda lõigu d võrra kuni asendini m_1n_1.

Vaadeldud protsessis tegi raskusjõud tööd $qd = 2\alpha ld$, kusjuures ld on võrdne ristküliku mnm_1n_1 pindalaga ja $2\alpha ld = \Delta S$ on vedeliku pinna juurdekasv meie protsessi kestel. Me näeme, et *välisjõudude poolt tehtud töö vedela keha pinna suurendamisel* on $\alpha\Delta S$, *s. o. pindpinevuse ja pindala juurdekasvu korrutis.* See teoreem on üldise iseloomuga.

Kui meie süsteem oleks puhtmehhaaniline, siis välisjõudude töö kuluks süsteemi siseenergia suurendamiseks. Antud juhul on aga asi keerulisem[1]. Energiat, mida meie kile sai suurenedes $\alpha\Delta S$ võrra, tuleb tähistada erilise terminiga — terminiga *vabaenergia.* Süsteemi vabaenergia defineeritakse nii, et tema juurdekasv võrdub välisjõudude poolt tehtud tööga tingimusel, et süsteemi temperatuur oleks konstantne. *Süsteemi vabaenergia kahanemine määrab seevastu kindlaks süsteemi poolt isotermilises protsessis tehtud töö suuruse.*

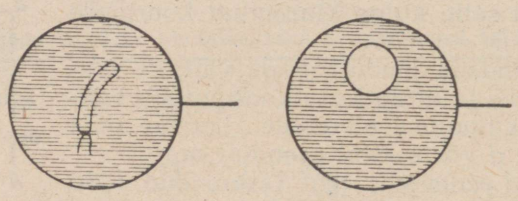
Kuna vedeliku pinna vabaenergia juurdekasv on $\alpha\Delta S$, siis sellise pinna kogu vabaenergia on αS. Seega vedeliku pinna vabaenergia on võrdne pindpinevuse α ja pinna suuruse S korrutisega.

Termodünaamikas tõestatakse, et vabaenergia (samuti nagu mehhaaniliste süsteemide potentsiaalne energia) püüab saavutada miinimumi. Siinjuures on eeldatud, et temperatuur jääb konstantseks.

Vedela keha püüe saavutada võimalikult väikest vabaenergia

[1] Vaadeldud juhu keerulisus seisneb selles, et siin esinevad peale mehhaaniliste nähtuste veel soojuslikud nähtused. Kui kile suurenemine oleks toimunud kiiresti, siis oleks see jahtunud ja seetõttu oleks α olnud muutuv Selle vältimiseks me laseme protsessi kulgeda aeglaselt: kile temperatuur jääb seejuures konstantseks soojuse tõttu, mida kile neelab ümbritsevast õhust vastavalt vajadusele. Seega meie poolt vaadeldud vedelikukile suurenemise protsess osutub isotermiliseks.

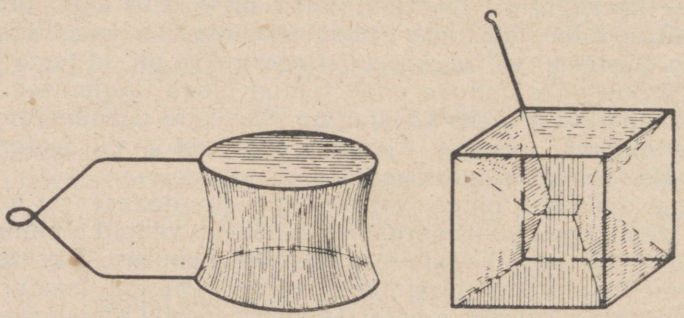
väärtust ilmneb paljudes katsetes. Väliste jõudude mõjust isoleeritud vedelikutilgad võtavad kera kuju. Selle põhjuseks on asjaolu, et kõikidest võrdse ruumalaga kehadest on keral kõige väiksem pindala; kuna S on sel korral kõige väiksema väärtusega, siis on ka αS väärtus kõige väiksem. Samuti on gaasi- ja vedelikumullidel kera kuju; siin on jälle tegemist gaasi ja vedeliku piirpinna miinimumiga.



Joon. 297. Tasakaaluolekus on vedeliku pind minimaalne.

Deformeerides klaaspulga abil seebimulli ja jättes ta seejärel omaette, võtab mull endise kuju.

Katame traatrõnga poolt piiratud pinna seebivee kilega ja viskame sellele kilele märja siidniidist silmuse (joon. 297). See-



Joon. 298. Vedelikukiled traadist karkassidel.

järel purustame silmuse sees oleva kile osa (puudutades kuuma traaditükiga kilet). Näeme, et silmus võtab ringi kuju. Siin vähenesid kile pindala ja vabaenergia minimaalse võimaliku väärtuseni.

Paigutades seebivette mitmesuguseid traadist kujundeid, me saame nendel kindla ja väga ilusa geomeetrilise kujuga vedelikukilede kogu (joon. 298).

§ 109. Laplace'i valem. Kapillaarsus ja märgamine.

Kummipall ja seebimull võivad jääda tasakaalu ainult tingimusel, et õhu rõhk nende sees oleks kindla suuruse võrra suurem välise õhu rõhust. Arvutame välja, kui palju sisemine rõhk ületab välisrõhu.

Olgu seebimulli raadius R ja olgu rõhk mulli sees välisrõhust suurem p võrra. Et suurendada mulli ruumala v kaduvväikese suuruse dv võrra, tuleb teha tööd pdv (§ 127). See töö kulub mulli pinna vabaenergia suurendamiseks ja on võrdne $2\alpha dS$, kus α on seebikelme pindpinevus ja S mulli ühe pinna suurus (sisemise ja välimise pinna raadiuste erinevuse jätame lihtsuse mõttes arvestamata). Seega saame võrrandi

$$pdv = 2\alpha dS.$$

Kuna

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

siis

$$dv = 4\pi R^2 dR.$$

Teiselt poolt on teada, et

$$S = 4\pi R^2,$$

millest saame:

$$dS = 8\pi R dR.$$

Pannes dv ja dS avaldised ülaltoodud võrrandisse, saame:

$$p \cdot 4\pi R^2 dR = 2\alpha \cdot 8\pi R dR,$$

millest järgneb:

$$p = \frac{4\alpha}{R}.$$

Rõhk, mida avaldab mullile selle sees olev õhk, on vastumõju seaduse põhjal niisama suur.

Kui kaht pindkihti omava mulli asemel vaadelda tilka, millel on ainult üks pind, siis jõuame tulemusele, et pindkiht avaldab tilga sisemusele rõhku

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

kus R on tilga raadius.

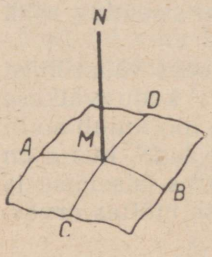
Vedeliku pindkihi kõveruse tõttu tekib üldiselt lisarõhk, mis on kumera pinna all positiivne ja nõgusa pinna all negatiivne. Seega kõveruse olemasolu korral muutub vedeliku pindkiht sellise jõu allikaks, mis on suunatud kihi kumeralt küljelt nõgusa poole.

Lisarõhu p jaoks andis valemi L a p l a c e. See valem on rakendatav juhtudel, kui vedeliku pinnal on ükskõik milline kuju, mida võimaldab omandada vedela oleku füüsikaline olemus.

Laplace'i valem on järgmine:

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{10}$$

kus R_1 ja R_2 on järgmise tähendusega. Vedeliku pinna mingis punktis M (joon. 299) võib kujutada normaali MN ja läbi selle normaali panna kaks ristuvat tasapinda, mis lõikuvad vedeliku pinnaga mööda kõveraid AMB ja CMD. Nende kõverate kõverusraadiused punktis M tähistamegi tähtedega R_1 ja R_2.



Joon. 299. Laplace'i valemi tuletamiseks.

On kerge näha, et Laplace'i valemist saadakse tasase vedelikupinna jaoks $p = 0$, sfäärilise vedelikupinna jaoks aga, nagu me varem nägime, $p = \frac{2\alpha}{R}$.

Kui pind oleks olnud „sadulakujuline", siis oleksid kõverad AMB ja CMD asunud teine teisel pool puutujatasapinda, mis on kujutatud läbi punkti M, ja raadiused R_1 ja R_2 oleksid olnud erinevate märkidega. Geomeetrias tõestatakse, et niinimetatud *minimaalsetel pindadel*, s. t. niisugustel, millel on antud kontuuri korral väikseim võimalik pindala, on summa $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ igal pool võrdne nulliga. Seebikelmel, mis katab mingisugust traadist kontuuri, ongi selline omadus.

Vaht on ühiste seintega mullide kogu. Selliste seinte kõverus (mis on määratud avaldisega $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$) on võrdeline rõhkude vahega mõlemal pool seinu.

Kui puhta klaaspulgakese ots kasta puhtasse vette ja seejärel pulgake välja võtta, siis näeme, et selle otsas ripub veetilk. On ilmne, et vee molekulid tõmbuvad klaasi molekulidega tugevamini kui üksteisega.

Samuti võib tõsta vaskpulgakesega elavhõbedatilka. Sellisel juhul öeldakse, et *vedelik märgab* tahket keha.

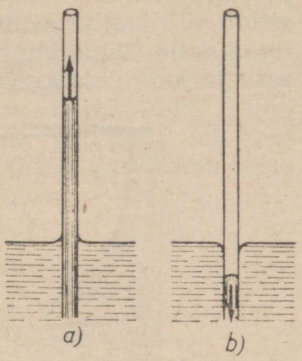
Olukord on teistsugune, kui kastame puhta klaaspulgakese puhtasse elavhõbedasse või kui kastame rasvaga kaetud klaaspulgakese vette: vedelikust väljavõetud pulgakese küljes ei ole siin vedelikutilka. Sellisel juhul öeldakse, et vedelik *ei märga* tahket keha.

Kui panna peenike puhas klaastoru vette, siis torus tõuseb vesi raskusjõust hoolimata teatud kõrgusele (joon. 300, *a*). Peenikesi torusid nimetatakse kapillaartorudeks ehk *kapillaarideks*[1]; nähtus ise kannab *kapillaarsuse* nimetust. Vedelikud, mis märgavad kapillaartoru seinu, tõusevad kapillaartorus üles. Vedelikud, mis ei märga kapillaartoru seinu (näiteks elavhõbe klaastorus), langevad aga kapillaartorus allapoole, nagu see on näidatud joo-

[1] Ladina keeles *capillus* — juus.

nisel 300, *b*. Kapillaarne tõus või langus on seda suurem, mida kitsamad on kapillaarid.

Kapillaarset tõusu ja langust põhjustab vedeliku pinna kõverdumise tõttu tekkiv lisarõhk. Tõepoolest: torus, mis märgab vedelikku, moodustab vedelik nõgusa *meniski*[1]. Eelmises paragrahvis käsitletu kohaselt avaldab sellise meniski pind alt üles suunatud jõudu. Vaatamata raskusjõu mõjule hoiab see jõud vedelikusammast torus üleval.



Joon. 300. Noolega on näidatud jõu suund, millega pinnakiht mõjub enda all olevale vedelikusambale.

Torus, mida vedelik ei märga, saadakse seevastu kumer menisk, mis tekitab allapoole suunatud jõu ja alandab järelikult vedeliku nivood.

Tuletame seose vedeliku pindpinevuse α, vedeliku tiheduse ϱ, toru raadiuse r ja torus oleva vedeliku samba kõrguse h vahel. Olgu meil tegemist vedelikuga, mis toru seinu „täielikult märgab" (nagu vesi klaastoru). Sellisel juhul on vedeliku pind toru ja vedeliku kokkupuute kohal toru seina puutujaks. Vedelik puutub toru seina mööda kontuuri, mille pikkus on $2\pi r$. Pindpinevuse tõttu kontuur arendab jõudu $2\pi r\alpha$. See jõud on rakendatud sambale ja tasakaalustab samba raskusjõu, mis on $\pi r^2 h\varrho g$, kus g on raskuskiirendus.

Seega
$$2\pi r\alpha = \pi r^2 h\varrho g,$$
millest järgneb:
$$h = \frac{2\alpha}{r\varrho g}, \tag{11}$$
s. t. *kapillaarse tõusu kõrgus on võrdeline pindpinevusega ning pöördvõrdeline toru raadiusega ja vedeliku tihedusega.*

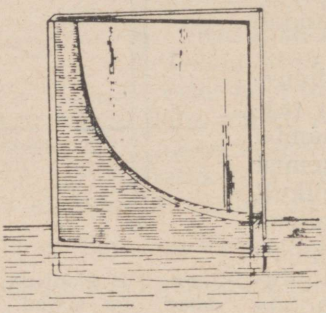
Sellesama võrrandi (11), mis kirjeldab kapillaarset tõusu, võib saada järeldusena Laplace'i valemist (10) või (vaadeldud juhul on pind sümmeetriline) valemist (9). Võib arutleda nii. Nõgusa pinna all on rõhk vedelikus $\frac{2\alpha}{r}$ võrra väiksem. Seetõttu tasakaaluolekus, kus rõhk anumasse valatud vedeliku vaba pinna tasemel on võrdne vedeliku rõhuga kapillaaris sellelsamal tasemel, peab vedelikusammas kapillaaris olema nii kõrge, et tema rõhk ϱgh tasakaalustaks nõgusa pinna poolt tekitatud rõhu puudujäägi. Järelikult $\varrho gh = \frac{2\alpha}{r}$, kust saamegi valemi (11). Analoogiliselt kaalutledes veendume, et kui vedelik kapillaari seinu „üldse

[1] Kreeka keeles *meniscos* — kuukujuline ese.

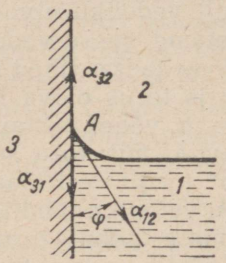
ei märga", siis tasakaalu korral vedeliku nivoo kapillaaris on vedeliku vabast nivoost selle lõigu võrra madalam, mis on määratud sama valemiga (11).

Kapillaarse tõusu mõõtmine on suuruse α määramise üheks kõige lihtsamaks meetodiks.

Joonisel 301 on kujutatud vedeliku kapillaarne tõus kahe plaadi vahel, mis moodustavad kahetahulise nurga. On kerge aru saada, et plaatide vahel olev vedelik on ülalt piiratud hüperbooliga. Selle hüperbooli asümptootideks on kahetahulise nurga serv ja joon, mis asub anumas oleva vedeliku nivool.



Joon. 301. Vedeliku kapillaarne tõus kahe plaadi vahel, mis moodustavad kahetahulise nurga.



Joon. 302. Vedelik märgab tahket keha.

Vaatleme tahke seinaga kokkupuutuva vedeliku tasakaalu tingimust (joon. 302). Tähime vaakuumi või gaasiga 2 külgneva tahke keha 3 pinna iga ruutsentimeetri vabaenergia α_{32}-ga. Kui mingisuguse vedeliku *1* kiht märgab tahke keha pinda ja valgub seda mööda laiali, siis tahke keha ja gaasi lahutuspind asendub tahke keha ja vedeliku lahutuspinnaga, kusjuures selle uue pinna vabaenergia on juba teistsugune — α_{31}. On ilmne, et tahke keha pinna iga ruutsentimeetri kohta tulev vabaenergia vähenemine $\alpha_{32}—\alpha_{31}$ on võrdne nende jõudude tööga, mille mõjul 1 *cm* pikkune vedelikukile piirjoone osa nihkub selle piirjoonega ristiolevas suunas 1 *cm* võrra. Järelikult võib vahet $\alpha_{32}—\alpha_{31}$ vaadelda jõuna, mis mõjudes piki tahke keha pinna puutujat on rakendatud vedelikukile piirjoone 1 *cm* pikkusele osale ja sunnib vedelikku mööda tahke keha pinda üles tõusma. Kuid vedeliku ülesvalgumine mööda tahke keha pinda on seotud vedeliku *1* ja vaakuumi või gaasi *2* vahelise pinna suurenemisega, mida takistab vedeliku pindpinevus α_{12}. Üldjuhul, kui vedelik tahket keha märgab mittetäielikult, on jõud α_{12} (nagu see on näidatud joonisel 302) suunatud tahke keha pinna suhtes teatava nurga φ all. Seda nurka

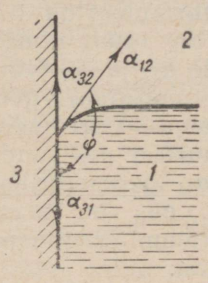
nimetatakse *äärenurgaks*. Seega näeme, et tahke kehaga piirnev vedelik on tasakaalus siis, kui

$$\alpha_{12}\cos\varphi = \alpha_{32} - \alpha_{31}.$$

Siit leiame, et äärenurk, mille all tasakaalu korral vedeliku vaba pind puutub kokku tahke keha pinnaga, on määratud valemiga:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_{32} - \alpha_{31}}{\alpha_{12}}, \qquad (12)$$

Valemi (12) tuletamiskäigust on näha, et see valem kehtib kasel juhul, kui vedelik tahket keha ei märga (joon. 303). Siis äärenurk φ on nürinurk. Märgamise puudumine tähendab, et $\alpha_{32} < \alpha_{31}$ (s. o. tahke keha vabaenergia tema ja vaakuumi või gaasi lahutuspinnal on väiksem kui vabaenergia sama keha ja vedeliku lahutuspinnal ehk, teisiti rääkides: sel juhul, kui vedelik liikumisel mööda tahke keha pinda tööd ei tee, vaid, vastupidi, selleks et niisugune vedeliku liikumine esineks, tuleb tööd teha välisjõududel).



Joon. 303. Vedelik ei märga tahket keha.



Joon. 304. Märgava vedeliku tilk.



Joon. 305. Mittemärgava vedeliku tilk.

Täieliku märgamise korral äärenurk $\varphi = 0°$, märgamise täielikul puudumisel aga $\varphi = \pi$.

Äärenurk sõltub kokkupuutuvatest ainetest ja temperatuurist. Kui anuma seina kallutada, siis äärenurk seetõttu ei muutu.

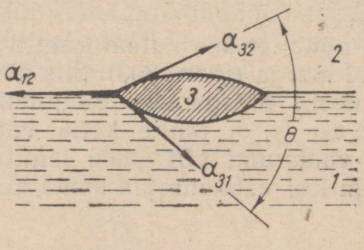
Valem (12) selgitab horisontaalsel tasapinnal olevate tilkade kuju. Tahkel alusel, mida vedelik märgab, omandab tilk joonisel 304 näidatud kuju. Kui vedelik alust ei märga, siis saadakse joonisel 305 näidatud kujuga tilk, kus äärenurk on nürinurk.

Täiesti puhast klaasi märgab ($\varphi = 0°$) vesi, etüülpiiritus, metüülpiiritus, kloroform ja bensool.

Puhtal klaasil moodustab elavhõbe äärenurga suurusega 52° (äsjamoodustunud tilgal on äärenurk 41°), tärpentin 17° ja eeter 16°.

Kui vedelik märgab alust täielikult, siis tilka ei teki ja vedelik valgub laiali üle kogu pinna. See juhtub näiteks veetilgaga absoluutselt puhtal klaasplaadil. Harilikult on aga klaasplaat natuke määrdunud, mis takistab tilga laialivalgumist ja tekitab lõpliku suurusega äärenurga.

Kaalutlusi, mille põhjal saadi valem (12), võib rakendada ka sel juhul, kui meil tahke keha asemel on teine vedelik, näiteks, kui õlitilk ujub vee pinnal (joon. 306). Sel juhul ei ole aga jõudude α_{32} ja α_{31} suunad enam vastupidised. Vedeliku kokkupuutumisel tahke kehaga on pindpinevuse α_{12} normaalkomponent tasakaalustatud tahke seina vastumõjuga; kuid vedeliku kokkupuutumisel vedelikuga see nii ei ole. Seetõttu tuleb antud juhul tasakaalu tingimus formuleerida teisiti: kogu jõud α_{12} tuleb nimelt võrrutada jõudude α_{32} ja α_{31} (võetult vastupidise märgiga) geomeetrilise summaga. Võrrutades selle asemel suuruse α_{12} ruudu suuruste α_{32} ja α_{31} geomeetrilise summa ruuduga, mis on arvutatud (vektoritele α_{32} ja α_{31} ehitatudu) parallelogrammi diagonaali määramiseks kasutatava tuntud võtte abil, saame:



Joon. 306. Õlitilk vees.

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2 - 2\alpha_{32}\alpha_{31}\cos\Theta.$$

Siit saame valemi vedelikutilga *sisemise äärenurga* Θ määramiseks:

$$\cos\Theta = \frac{\alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2 - \alpha_{12}^2}{2\alpha_{32}\alpha_{31}}. \qquad (13)$$

Sellest valemist (ja ka vahetult jooniselt 306) järgneb, et kui $\alpha_{12} > \alpha_{32} + \alpha_{31}$, siis ujuva tilga jaoks tasakaalu ei ole ja vedeliku *3* tilk valgub laiali mööda vedeliku *1* pinda. Võrratus $\alpha_{12} > \alpha_{32} + \alpha_{31}$ tähendab seda, et vedeliku *1* pinna vabaenergia ületab tilga laialivalgumisel moodustuvate uute eralduspindade *3—2* ja *3—1* vabaenergiate summa. Tõsiasi, et sel juhul tilk voolab laiali, on järeldus üldisest termodünaamika seadusest (§ 138), mis ütleb, et kõikides iseenesest toimuvates isotermilistes protsessides süsteemi summaarne vabaenergia alati väheneb ja tasakaal saabub siis, kui süsteemi vabaenergia on minimaalne.

Kui näiteks veepinnal ujub oliiviõli, siis $\alpha_{12} = 73\frac{düün}{cm}$, $\alpha_{32} = 32\frac{düün}{cm}$ ja $\alpha_{31} = 20\frac{düün}{cm}$. Niisiis, antud juhul on pindpinevus vee ja õhu piiril suurem kui nende pindpinevuste summa, mis õlil on õhu ja vee suhtes. Seetõttu on meil tegemist tilga piiramatu laialivalgumisega. Õlikihi paksus võib väheneda kuni ühe molekuli läbimõõduni (umbes 10^{-8} *cm*), ja seejärel hakkab kiht lagunema. Kuid juhul, kui vesi ei ole puhas, siis tema pindpinevus muutub väiksemaks ja pärast seda, kui vesi on kattunud väga õhukese õlikihiga, võib veepinnale jääda suur õlitilk.

Vedelik, mis molekulaarsete jõudude mõjul on tunginud kahe tahke keha pinna vahelisse õhukesse vahemikku, mõjub nendele

pindadele *kleepivalt*. Eksperimentaalselt tõestas õhukeste kihtide *kleepivat toimet* osavate katsetega prof. B. V. Derjagin, kes töötas välja ka selle nähtuse teooria ja seletas kleepiva toime põhjal Rebinderi efekti (§ 52).

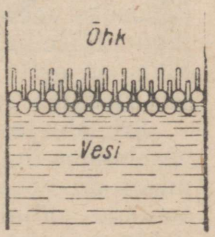
§ 110. Pindaktiivsed ained.

Nagu eespool on selgitatud, vedeliku pinna vabaenergia püüab omandada võimalikult väiksemat väärtust. See vabaenergia, nagu me nägime, väljendub pindpinevuse ja pinna suuruse korrutisena. Kumbki neist teguritest püüab väheneda, kui see on võimalik. Paragrahvis 108 tõime näiteid pinna vähenemise kohta; nüüd vaatleme aga juhte, kus pindpinevus väheneb.

Veel on küllaltki suur pindpinevus (toatemperatuuril umbes 70 $\frac{dn}{cm}$); teiste vedelike pindpinevus on tunduvalt väiksem (umbes 20—40 $\frac{dn}{cm}$). Oletame, et me segasime veega mingit teist vedelikku, mille pindpinevus on väiksem. Siis selle teise vedeliku molekulid asendavad pinnakihis vee molekule. Pinnakiht koosnebki peamiselt (võib olla ka, et täielikult) juurdelisatud aine molekulidest. On selge, et sel juhul vabaenergia tunduvalt väheneb.

Ainet, mis segatult mingi vedelikuga vähendab selle vedeliku pindpinevust, nimetatakse antud vedeliku suhtes *pindaktiivseks*.

Kõige tavalisemaks pindaktiivse aine näiteks on seep. Vesi, milles on lahustunud seepi, kattub täielikult seebimolekulidest koosneva kilega. Seebikelmed, millega võib korraldada palju ilusaid katseid, koosnevad õhukesest veekihist; veekihi mõlemad küljed on kaetud õhukeste seebimolekulide kihtidega. See annabki niisugusele kilele suure vastupidavuse.



Joon. 307.

Seebimolekulil on küllaltki keeruline keemiline koostis (näiteks $C_{18}H_{35}KO_2$). Ta koosneb pikast süsinikuaatomite ahelast, mis on kogu tema pikkuse ulatuses ümbritsetud vesinikuaatomitega ja lõpeb ühes otsas väikese kolmest vesinikuaatomist koosneva kimbuga, teises otsas aga hapniku- ja kaaliumaatomite (või naatriumaatomite) rühmaga. Kumbki neist otstest käitub teiste aatomite või molekulide suhtes erinevalt: vesinikuaatomitest koosnev ots on väga „nõrk" — teda ei tõmba teised aatomid märgatavalt külge; hapniku- ja kaaliumiaatomitest (või naatriumiaatomitest) koosnev ots on seevastu väga „tugev" — ta tõmbub energiliselt külge näiteks vee koostisse kuuluvatele vesinikuaatomitele.

Osutub, et selle tulemusena seebimolekul nii öelda püsib veepinnal, olles sukeldunud oma „tugeva" ehk, nagu öeldakse, *polaarse* otsaga vette. Seebi molekulidest koosneva pindkihi paksus on võrdne ühe molekuli pikkusega (umbes 10^{-7} *cm*). Pindkihi sellise ehituse avastas L a n g m u i r; see on kujutatud skemaatiliselt joonisel 307.

Vastandina pindaktiivsetele ainetele paljud ained (suhkur, mitmesugused soolad) suurendavad vee pindpinevust. Ujugu puhta vee pinnal kerge pulber, mida vesi ei märga (talk, lükopoodium), või tuletiku kild. Kui puudutame selle lähedalt veepinda suhkrutükiga, siis ujuvad kehakesed tõmbuvad suhkrutüki külge; seda nähtust põhjustab asjaolu, et suhkrulahuse pindpinevus on suurem puhta vee pindpinevusest (kui me aga suhkru asemel kasutaksime puudutamisel seebitükki, siis ujuvad kehakesed tõukuksid sellest eemale).

Pindpinevust vähendavate ja pindpinevust suurendavate ainete vastandlikkus viib selleni, et pindaktiivse aine vesilahusele lisatud teise kategooria aine tõukab üha uusi pindaktiivse aine hulki pinnale. Seetõttu lisatakse seebikeetmise tehnikas seebilahusele soola, mis eraldab lahusest välja seebi (sellist operatsiooni nimetatakse „väljasoolamiseks"). Etüül-eeter on väga väikese pindpinevusega (toatemperatuuril 16 $\frac{dn}{cm}$) ja on seega vee suhtes pindaktiivne. Kui lisada veele küllaldane hulk eetrit, siis kõigepealt tõukab vesi pinnale eetrimolekulide kihi. Kuna eetri ja vee molekulide vaheline külgetõmme on nõrk, siis eetri eraldamiseks veest ei ole siin vaja rakendada väljasoolamist: vedelik jaguneb ise kaheks teravalt piiristatud kihiks, kusjuures ülemises kihis on eeter, sisaldades väikese hulga vett, ja alumises vesi, mis sisaldab väikese hulga eetrit.

Eri ainete molekulide külgetõmbejõudude erinevusel (mis muuhulgas ilmneb mitmesuguste tahkete kehade erinevas märgumises eri vedelike poolt), samuti ka mitmesuguste lahustatud soolade mõjul, mida need avaldavad lahusti pindpinevusele, põhinevad *flotatsiooniprotsessid*[1]. Need protsessid etendavad väga tähtsat osa mitmesuguste maakide rikastamisel ja erinevate metallide üksteisest eraldamisel.

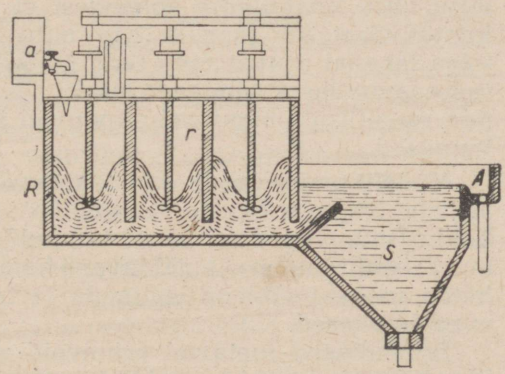
Flotatsiooni põhiskeemi annab järgmine katse. Tuleb võtta kaks väikest õõnsat klaaskera, mis on natuke raskemad nende poolt väljasurutavast veest; üks kera on teisest natuke raskem. Raskema kera pind tuleb katta õhukese rasvakihiga (on küllalt, kui veeretada kera sõrmede vahel). Lastes seejärel selle kera veeklaasi, milles olev vesi sisaldab küllalt palju lahustunud gaasi (sobib soodavesi), hakkab kerale hulgaliselt sadestuma gaasi-

[1] Prantsuse keelest *flotter* — u j u m a.

mulle. Need mullid tõstavad lõpuks kera veepinnale. Teine, kergem kera tuleb seebiga puhtaks pesta; kui see paigutada samasse vette, siis jääb ta kogu aeg põhja püsima.

Praktikas toimub flotatsiooniprotsess järgmiselt. Maak, mis koosneb osalt hinnalistest metallidest ja metallide ühenditest teiste elementidega (nagu püriit FeS_2, seatinaläik PbS jne.), osalt aga täiesti väärtusetutest kivimitest (lubjakivist, kvartsiidist), peenestatakse pulbriks (terade läbimõõt 0,1—0,01 *mm*). Seejärel segatakse see (mehhaanilise segaja või õhujoa abil) veega ja väikese hulga õliga, mis ei lahustu vees.

Segamisel kogub see segu endasse õhumulle, mis koos segu vedela koostisosaga moodustavad vahu. See vaht on ühtlaselt segunenud tahkete osakestega. Kui jätta nüüd vahulelöödud segu seisma, siis kivimiosakesed ja metalliosakesed käituvad täiesti erinevalt. Esimesi märgab vesi paremini kui õli; seetõttu sadestuvad nad vahuanuma põhja. Metalliosakesi märgab aga õli paremini kui vesi. Tänu neid osakesi katvale õlikilele kleepuvad nad tugevasti õhumullide külge ja tõusevad, vaatamata oma suurele erikaalule, koos õhumullidega veepinnale. Maagiosakesed on seega eraldatud.



Joon. 308. Flotatsiooniaparaadi skeem.

Kui eraldatav maak sisaldab mitmeid metalle, siis, viies vanni väike hulk üht või teist keemilist ainet, võib saavutada seda, et pinnale tõusevad ainult mingit kindlat metalli sisaldavad osakesed. Sel teel on kerge lahutada segu osadeks, milledest igaüks sisaldab ainult ühte metalli.

Flotatsiooni rakendatakse ka mittemetalliliste ainete eraldamiseks segust.

Üks flotatsiooniaparaatidest on skemaatiliselt kujutatud joonisel 308. Kambris *R* segatakse pulpi (s. o. veega segatud peenestatud kivimit) kiiresti pöörlevate kruvisegajatega *r*, mis imevad pulpi palju õhku. Tekkinud vaht läheb lehtrikujulisse anumasse *S*, kus kivim võib vabalt sadestuda põhja. Pinnal ujuvad maagiosakesed lähevad järk-järgult *A* kaudu setteanumasse. Nõu *a* kaudu toimub õli ja keemiliste ainete juurdevool.

§ 111. Vedelike ehitus.

Molekulaar-soojusliku liikumise pilt vedelikes on senini veel vähem läbi uuritud kui gaasides ja tahketes kehades.

Paljude aastate jooksul arvati, et osakeste paigutus vedelikes on täiesti korrapäratu iseloomuga (vastupidiselt kristallidele, milledes osakesed jäävad kristallvõre sõlmede lähedale).

Osakeste kaootilise paigutuse mõttes vaadeldi vedelikku väga tugevasti kokkusurutud gaasina. Kuid viimaste aastakümnete uurimused näitasid siiski, et vedelikes — kui mitte alati, siis vähemalt teatud ajavahemiku jooksul — säilib molekulide enam-vähem korrapärane paigutus. Sellele järeldusele tuli esimesena A. I. Batšinski oma uurimustes vedelikes toimuva assotsiatsiooni nähtuse kohta.

Kui me mingil ajamomendil fikseeriksime kõikide vedelikumolekulide paigutuse ruumis, siis saaksime nähtavasti pildi, mis on teataval määral sarnane polükristallilise keha ehitusega; kuid oluliseks erinevuseks oleks siiski see, et oma suure kõrvalnihkumise tõttu kristallvõre sõlmedest ei määraks vedelikumolekulid kristallvõret nii rangelt. Kui mitu mingile vedelikumolekulile väga lähedal asuvat ning teda ümbritsevat molekuli on paigutatud enam-vähem sümmeetriliselt, siis kaugemal asuvate molekulide ruumilisel paigutusel puuduvad juba igasugused sümmeetria tunnused.

Vedelikumolekulide momentaanse paigutuse pilt meenutab selliste väga väikeste kristalliliste terakeste kogumit, mille kokkupuutepinnad on „ära uhtunud"; peale selle osutub iga selline kristalliline terake nähtavasti ka ajaliselt mittepüsivaks; mõne hetke jooksul võib ta laguneda ja tema asemel võivad tekkida uued terakesed.

Eriteadlased toetavad erinevaid vedelike molekulaar-soojusliku liikumise mehhanismide käsitlusi. Erilist tähelepanu on osutanud sellele vaidlusalusele küsimusele prof. J. I. Frenkel, kes esmakordselt töötas peensusteni välja „vedelike pseudokristallilise ehituse" pildi.

Ühes oma artiklitest kirjutas J. I. Frenkel:

„Aatomite soojuslik liikumine sulametallis, samuti nagu tahkes metalliski, seisneb põhijoontes teatud tasakaaluasendite ümber toimuvates väikestes võngetes.

Kuivõrd vedelikel puudub korrapärane kristallstruktuur, peab soojusliikumise seisukohalt lähtudes vedelike ja tahkete kehade vaheline erinevus taanduma ainult sellele, et vedelike korral need tasakaaluasendid ei moodusta korrapärast kristallvõret. Vedelates kehades osakesed ei jää igavesti seotuks ühtede ja samade tasakaaluasenditega, vaid nad hüppavad aeg-ajalt üle ühest asendist naaberasendisse. Mingis asendis viibimise aeg (τ)

on seda suurem, mida madalam on vedeliku temperatuur. Temperatuuri tõusul väheneb see aeg erakordselt kiiresti, väga madalatel temperatuuridel võib ta aga ulatuda väga suurte väärtusteni.

Niisiis, igal antud ajamomendil vaadelduna ei erine vedelik oma olemuselt tahketest kehadest millegi poolest peale osakeste korrapäratu paigutuse või, õigemini öeldes, peale nende ajutiste tasakaaluasendite, mille ümber molekulid võnguvad. Tekib küsimus: kuidas siis selle seisukoha abil on võimalik seletada vedeliku voolavust ja vastupanu puudumist nendele jõududele, mis püüavad vedeliku kuju muuta? Sellele küsimusele võib vastata järgmiselt. Kui jõud, mis püüab muuta vedeliku kuju — s. o. vedelikuosakeste asetust, mõjub ühes ja samas suunas küllalt kaua, võrreldes osakese mingis kindlas asukohas püsimise ajaga (τ), siis selle aja jooksul jõuavad osakesed korduvalt muuta oma asendeid, nihkudes sealjuures peamiselt mõjuva jõu suunas. Need diskreetsed elementaarsed nihked, järgnedes kiiresti üksteisele, sulavad vaatleja jaoks praktiliselt kokku pidevaks voolamiseks.

Kui vedelikele mõjuvad sellised jõud, millede suund võngub nii kiiresti, et see osakese antud kohas püsimise aja jooksul jõuab muutuda mitu korda, siis nende jõudude suhtes käitub vedelik teataval määral nii nagu tahke keha ja ei osutu voolavaks. Siit on selge, et vedeliku omaduseks ei ole mitte üksi voolavus, vaid ka kõvadus, mis tavalistes tingimustes on ainult maskeeritud voolavusega. Vedelike kõvadus võib ilmneda ainult kiiresti muutuvate jõudude korral, millede võnkeperiood on väiksem molekuli antud kohas püsimise ajast. Viimast tingimust võib täita mitte üksi väliste jõudude võnkeperioodi lühendamisega (näiteks ülekuga väga kõrge sagedusega ultraheli-võnkumistele), vaid samal määral ka vedeliku temperatuuri madaldamisega, mis, nagu eespool öeldud, kutsub esile osakeste antud kohas viibimise aja järsu suurenemise.

Seega keha, mis käitub kõrgematel temperatuuridel kiiresti võnkuvate jõudude suhtes vedelikuna, käitub madalamatel temperatuuridel nendesamade jõudude suhtes tahke kehana ning tema voolavus tuleb ilmsiks ainult selliste jõudude suhtes, mis võnguvad tunduvalt aeglasemalt või mõjuvad püsivalt ühes ja samas suunas.

Kõvadus ja voolavus ei ole teineteist väljalülitavad omadused. Nad võivad väga hästi koos eksisteerida, kusjuures nad tavaliselt maskeerivad teineteist. Jättes arvestamata aine ehituse korrapärasuse või mittekorrapärasuse ja piirdudes ainult amorfsete kehade vaatlemisega, võib teatud mõttes öelda, et tahkete ja vedelate kehade vaheline erinevus sõltub ainult ajaühikute valikust. Kui võtta ajaühikuks molekuli ühes ja samas asendis viibimise aeg, siis sõltuvalt sellest, kas vaadeldavale kehale mõjuvad lühiajalised või pikaajalised jõud (s. o. kas need jõud

mõjuvad ühes ja samas suunas lühikest või pikka aega, võrreldes osakeste antud kohas püsimise ajaga), võib vaadeldavat keha lugeda vedelaks või tahkeks."

Seda aega τ nimetatakse *relaksatsiooniajaks.* Frenkel leidis, et relaksatsiooniaeg ja selle soojusliku võnkliikumise periood τ_0, mida vedeliku molekulid sooritavad oma ajutiste tasakaaluasendite ümber, on omavahel seotud järgmiselt:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{kT}}, \qquad (14)$$

kus k on Boltzmanni konstant, T absoluutne temperatuur ja U suurus, mis iseloomustab antud ainet ja tema termodünaamilist olekut ning on määratud ühest kristallvõre sõlmede vahelisest ajutisest tasakaaluasendist (ühest „sõlmedevahest") naaberasendisse üleminekuks vajaliku energiaga. Normaalsetel temperatuuridel on τ_0 suurusjärgus 10^{-13} *sek.*

Frenkeli poolt arendatud teooria kohaselt määrab vedeliku difusioonikoefitsiendi järgmine valem:

$$D = \frac{a^2}{6\tau},$$

kus a on kahe naabersõlme vaheline keskmine kaugus (a on suurusjärgus 10^{-8} *cm*).

Sisehõõrdetegur avaldub Frenkeli järgi järgmiselt:

$$\eta = N\tau.$$

Selles valemis esinev suurus N iseloomustab vedeliku kõvadust, mis on maskeeritud tema voolavuse poolt (N on oma füüsikalise mõtte ja suurusjärgu poolest analoogiline tahkete kehade nihkemooduliga).

Möödunud aastatel valitses arvamus, et liitaine molekulid säilitavad ka vedelas olekus oma pöörleva liikumise, mis on sarnane nendesamade ainete gaasilises faasis toimuva pöördliikumisega. Nagu D e b y e väidab, tuleb nüüd see vaade asendada kujutlusega „molekulide pöörlevast õõtsumisest ümber teatud suundade, mis on enam-vähem ebakorrapäraselt (või ümberpöördult: enam-vähem korrapäratult) jaotunud ja mis aeg-ajalt järsult muutuvad".

Vedelike soojusliikumise pilt, mida me kirjeldasime, on ikka veel teadusliku arutluse staadiumis; on võimalik, et ta selle tulemusena oluliselt muutub.

§ 112. Aurustumise kineetika. Küllastava auru rõhu sõltuvus vedeliku pinna kõverusest. Thomsoni-Schilleri valem.

Aurustugu pidevalt mingi lahtises õhus asuv kogus vett või mõnd teist vedelikku. See tähendab, et vedeliku molekulid tungivad läbi vedeliku pinna ning, difundeerudes õhus, segunevad õhu

molekulidega. Kuid me teame, et vedeliku molekulide vahel mõjuvad küllaltki suured tõmbejõud. Selleks et mingi molekul *A* võiks lahkuda teiste molekulide mõjusfäärist ja vedelikust välja lennata, peab tema kiiruse vedelikupinna normaali suunaline komponent olema eriti suur; selle aja jooksul kui vedeliku molekul *A* läheneb pinnale ja läbib lõpuks selle, tema kiirus tunduvalt väheneb (vedelikust lahkuva molekuli liikumine on seega sarnane kahurimürsu liikumisele, mis lastakse sel eesmärgil üles, et ta ületaks Maa tõmbejõu ja ei pöörduks enam tagasi Maale; sellise mürsu algkiirus peab olema väga suur). Niisiis, läbi oma vaba pinna aurustuv vedelik kaotab oma kõige kiiremad molekulid, mistõttu aurustumise kestel tema molekulide keskmine kineetiline energia väheneb ja vedelik jahtub.

Teoreetiliselt osutub siiski kõige tähtsamaks see juht, kus aurumine toimub kinnises ruumis (mille ruumala võib ka muuta) ja on seejuures isotermiline, s. o. selle ruumi temperatuur, mille võtab enda alla vedelik ja vedeliku kohal olev gaasiline keskkond, hoitakse konstantsena (ülalöeldu põhjal on selge, et selleks tuleb vedelikule anda soojust — seda soojust nimetatakse latentseks aurumissoojuseks).

Me teame (§ 102), et antud vedeliku küllastava auru rõhk on antud temperatuuril täiesti kindel suurus (Daltoni seaduse järgi see suurus peaaegu ei sõltu sellest, kas aur on segunenud kõrvaliste gaasidega või ei; siinjuures on eeldatud, et gaas keemiliselt ei reageeri vedelikuga ja ei lahustu selles liiga suurel hulgal). Antud temperatuuril on samuti täiesti kindel suurus küllastava auru tihedus, tähendab, et ka auru molekulide arv ruumalaühikus on antud temperatuuril täiesti kindel.

Kui veidi suurendada auru ja vedeliku poolt endi alla võetud ruumala (nagu see toimub näiteks kolvi liikumisel aurumasinas, kui aur tuleb katlast silindrisse), siis algul auru molekulide arv ühes ruumalaühikus veidi kahaneb (aur eemaldub veidi küllastusolekust). Kuid otsekohe lähevad uued molekulide hulgad vedelikust vedeliku peal asuvasse ruumi ja küllastusolek taastub. Tekib vedeliku ja auru tasakaal. Sellel tasakaalul on siiski eriline iseloom: ta ei ole staatiline, vaid *statistiline* ehk, nagu seda teisiti väljendatakse, *liikuv*. Asi seisneb selles, et koos vedeliku molekulide väljalendamisega aurulisse keskkonda leiab aset ka selle nähtuse pöördprotsess — molekulide langemine aurulisest keskkonnast vedelikku. Mingi molekul *B*, mis on jõudnud vedeliku pinna lähedale ja mis liigub väga aeglaselt, võib vedeliku molekulide külgetõmbe tõttu vedelikus neelduda (samal ajal kui teine molekul *C*, liikudes vedeliku pinna poole suure kiirusega ning paiskudes sellelt elastse põrke seaduste järgi tagasi, väldib sellist „vangisattumist").

Mida kõrgem on vedeliku temperatuur, seda suurem on tema

molekulide keskmine kineetiline energia ja seda enam leidub selliseid molekule, mis oma suure kiiruse tõttu võivad hüpata läbi vedeliku ja auru lahutuspinna. Siit on selge, et temperatuuri tõusul küllastava auru rõhk suureneb ja samuti suureneb ka küllastava auru tihedus.

Igapäevase elu tähelepanekud näitavad, et eri vedelikel on väga erinev *lenduvus:* piiritus on näiteks enam lenduv kui vesi ja eeter enam lenduv kui piiritus. Asi taandub sellele, et toatemperatuuril (20° *C*) on küllastava veeauru rõhk ainult 17,4 *mm*, kuna piirituse oma on 44 *mm* ja eetri oma 440 *mm*. Kui vedelik antud temperatuuril annab suure hulga auru, siis see tähendab omakorda, et tema molekulide vahelised tõmbejõud on suhteliselt nõrgad; vee molekulide vastastikused tõmbejõud on suured, piiritusel on need väiksemad ning eetril veel väiksemad.

Eespool eeldasime, et pind, mis eraldab vedelat faasi gaasilisest faasist, on tasapind. Tasapinna korral kulutab ühest faasist teise minev molekul, mis lendab näiteks vertikaalsuunas, pindkile läbimiseks alati ühesuuruse energiahulga, sõltumata sellest, kas molekul läheb vedelikust auru või aurust vedelikku. Teisiti on aga lugu siis, kui vedeliku pind on nõgus või kumer. Asi seisneb selles, et igast kõverast pinnast läbitungimiseks tuleb kulutada erinev hulk tööd, sõltuvalt sellest, kas läbilöök jõud on suunatud pinna kumera külje poolt nõgusa külje poole või nõgusa külje poolt kumera poole. On kerge aru saada, et teisel juhul on vajalik töö palju väiksem kui esimesel juhul[1].

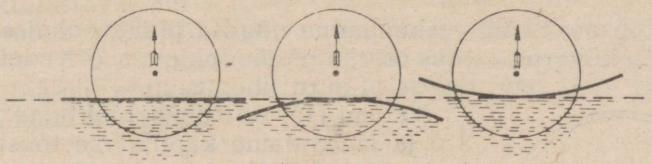
E d s e r seletab seda järgmiselt:

„Vedeliku pinnalt eraldunud molekul võib minema lennata ainult sel juhul, kui tema energia on küllaldane selleks, et viia molekuli välja „vedeliku külgetõmbesfäärist", vastasel korral langeb ta uuesti vedelikku tagasi. Mingis oma tee punktis tõmmatakse molekul nende molekulide poolt, mis asuvad tema külgetõmbesfääri sees, vedeliku pinnale tagasi; järelikult, antud kaugusel vedeliku pinnast sõltub molekuli tagasitõmbav jõud vedeliku pinna kujust (joon. 309). Sellise pinna korral, mis on vedeliku poolt nõgus, s. o. väljastpoolt kumer, on see jõud väiksem, väljastpoolt nõgusa pinna korral aga suurem kui tasapinna korral. Seetõttu on arusaadav, et teatud kindla kiirusega, mille kor-

[1] On kerge tuua näiteid mitmesugustest nähtustest, mis toimuvad (olgugi et teistel põhjustel, kui see esineb molekulaarsete jõudude korral) ülaltoodud reegli järgi. Võlv talub väga suurt koormust, ilma et ta satuks purunemise ohtu; sedasama võlvi võib aga kergesti purustada seestpoolt väljapoole suunatud jõuga, s. o. jõuga, mis mõjub nõgusa pinna poolt kumera pinna poole. Munakoore purustamiseks rõhume sellele kõva eseme abil küllaltki suure jõuga; kuid vastsündinud kanapoeg purustab sama munakoore oma nõrga pehme nokaga kergesti seetõttu, et ta mõjub sellele seestpoolt.

ral molekul on võimeline eemalduma tasapinnalt, ta ei ole võimeline eemalduma väljastpoolt nõgusalt pinnalt; kiirusega, mis on liiga väike selleks, et molekul võiks eemalduda tasapinnalt, võib ta aga kumeralt pinnalt eemalduda.

Vedeliku pinnalt väljalendavate molekulide hulgale avaldab selle pinna kõverus veel teist tähtsamat mõju. Vedeliku molekulid



Joon. 309. Molekuli vedelikku tagasitõmbava jõu suurus oleneb pinna kujust, on suurem nõgusa pinna korral ja väiksem kumera pinna korral.

liiguvad keskmiselt konstantse kiirusega, mis sõltub ainult vedeliku temperatuurist; kuna vedeliku kokkusurumine peab vähendama molekuli poolt kahe teineteisele järgneva põrke vahel läbitud tee pikkust, siis vedeliku kokkusurumisel põrgete keskmine sagedus suureneb. Kuid mida suurem on molekulaarsete põrgete sagedus, seda sagedamini läbivad molekulid vedeliku vaba pinda. Kumera pinna korral siserõhk surub vedeliku kokku ja suurendab väljalendavate molekulide arvu; nõgusate pindade korral sisemise venituse tagajärjel aga vedelik paisub ja väljalendavate molekulide arv väheneb."

Niisiis, kui vedel faas on piiratud meniskiga, mis on väljastpoolt nõgus, siis molekulide üleminek vedelikust auru on raskendatud, molekulide üleminek aurust vedelikku on aga seevastu hõlbustatud. Seetõttu *väljastpoolt nõgusa vedelikupinna kohal on küllastava auru rõhk väiksem, kui ta seda oleks samal temperatuuril tasase pinna kohal; mida suurem on nõgusa pinna kõverus, seda enam langeb auru rõhk.*

Kumera vedelikupinna kohal (näiteks juhul, kui vedel faas kujutab endast tilka või mitut ühesuurust tilka) on auru rõhk endastmõistetavalt *suurem* kui tasase vedelikupinna kohal; mida väiksem on tilga raadius, seda suurem on auru rõhk.

Väga huvitav on selline juht, kus vedel faas koosneb erineva raadiusega tilkadest. *Väikeste tilkade kohal on auru rõhk suurem kui suurte tilkade kohal.* Seetõttu aur läheb üle väikeste tilkade juurest suurte tilkade juurde; suurtel tilkadel ta kondenseerub, väikestel tilkadel tekib teda aga uuesti juurde. Selle tulemusena suured tilgad kasvavad väikeste tilkade arvel.

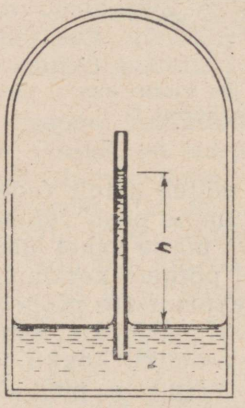
Seda nähtust on kerge vaadelda. Selleks tuleb hingata külmale klaasplaadile ja seejärel jälgida (palja silmaga või luubi abil)

tekkinud tilkade käitumist. Analoogiline nähtus toimub looduses õhu niiskuse kondenseerumisel.

Küllastava auru rõhu sõltuvuse vedelikupinna kõverusest tegi esimesena kindlaks 1870. a. W. Thomson (Kelvin), kes näitas, et

$$\Delta p = \frac{\varrho_a}{\varrho_v - \varrho_a} \cdot \frac{2\alpha}{r}, \tag{15}$$

kus Δp on auru rõhu vähenemine nõgusa pinna kohal sel juhul, kui pinna kõverusraadius on r; α on pindpinevus, ϱ_v vedeliku tihedus ja ϱ_a auru tihedus.



Joon. 310. Termodünaamilise tasakaalu korral küllastava auru rõhk tasase vedelikupinna peal on kõrgusel n asuva meniski nõgusa pinna kohal suurem selle vedelikusamba kõrguse võrra.

Valemi (15) tuletamisel lähtume joonisest 310 ja meenutame kapillaarse tõusu valemi [valem (11) § 109] tuletamist. Kapillaarse tõusu h valemi tuletamisel me ei võtnud arvesse väga väikest õhurõhkude erinevust kõrgusel h. Lähtusime järgmisest kaalutlusest: kui vedelik märgab kapillaartoru, mille raadius on r, siis ümbermõõdu $2\pi r$ ulatuses mõjuv pindpinevusjõud hoiab üleval vedelikusammast, mille kõrgus on h ja ristlõike pindala πr^2. Lugesime selle samba kaalu võrdseks $h\pi r^2 \varrho_v g$-ga, s. o. meie ei arvestanud seda, et õhus ja ka küllastavas aurus peab mõjuma üleslükkejõud. Seega tõeline vedelikusamba kaal on $h\pi r^2 (\varrho_v - \varrho_a) g$. Juhul, mis on kujutatud joonisel 310, s. o. sel juhul, kui vedeliku pinna kohal on küllastav aur, on kapillaarse tõusu valemil järgmine kuju:

$$h = \frac{2\alpha}{r(\varrho_v - \varrho_a) g}.$$

On selge, et termodünaamilise tasakaalu korral küllastava auru rõhk vahetult tasase vedelikupinna kohal on auru rõhust kõrgusel h asuva meniski nõgusa pinna kohal suurem sellise vedelikusamba kaalu võrra, mille kõrgus on h, s. o. suuruse

$$\Delta p = h\varrho_a g$$

võrra.

Asetades sellesse valemisse ülaltoodud h avaldise, saame valemi (15).

Kui kapillaartoru raadius on äärmiselt väike ja sellele vastavalt vedelikusamba kõrgus väga suur, siis oleks õigem arvestada, et raskusväljas peab auru tihedus kahanema baromeetrilise seaduse (§ 97) järgi. Sel juhul me saame Thomsoni valemi täpsemal kujul:

$$RT\ln\frac{p_r}{p} = \pm\frac{2\alpha v}{r}, \qquad (16)$$

kus p on küllastava auru rõhk tasapinna kohal; p_r on küllastava auru rõhk vedelikupinna kohal, mille meniski kõverusraadius on r, ning v on vedeliku moolruumala; plussmärk vastab väljastpoolt kumerale pinnale ($p_r > p$), miinusmärk nõgusale pinnale.

Vee kohta temperatuuril 0° *C* annab valem (16) järgmise tulemuse: küllastava auru rõhk tilkade kohal, mille raadius on 10^{-7} *cm*, ületab 3,32 korda auru rõhu tasapinna kohal; kui tilkade raadius on 10^{-6} *cm*, siis nende rõhkude suhe on 1,13; 10^{-5} *cm* raadiusega tilkade küllastava auru rõhk ületab aga rõhu tasapinna kohal kõigest 1% võrra.

§ 113. Auru rõhu vähenemine lahuse kohal ja lahuse keemistemperatuuri tõus. Raoult'i seadused.

Kui lahustada vees mingisugust mittelenduvat tahket või vedelat ainet ja mõõta veeauru rõhku lahuse kohal, siis osutub, et *auru rõhk lahuse kohal on alati väiksem, kui ta seda on samal temperatuuril puhta vee kohal.*

Nii näiteks temperatuuril 70° *C* on puhta vee kohal veeauru rõhk 233,7 *mm* Hg. Kui aga valmistada lahus 100 *g* veest ja 53 *g* suhkrust, siis temperatuuril 70° *C* on küllastava auru rõhk sellise lahuse kohal ainult 228 *mm* Hg, s. o. 5,7 *mm* Hg väiksem kui puhta vee kohal.

Olukord on niisugune, nagu takistaksid lahustunud aine molekulid lahusti molekulidel (näiteks vee molekulidel) lahusest gaasilisse keskkonda väljalendamist.

Nõrkade lahuste jaoks leidis prantsuse füüsik Raoult 1886. a. järgmise seaduse: *auru rõhu vähenemine lahuse kohal antud temperatuuril on võrdeline ühes ruumiühikus leiduvate lahustunud aine molekulide arvuga ja ei sõltu nende molekulide keemilisest koostisest.*

Sageli väljendatakse seda seadust nii: *auru rõhu vähenemine lahuse kohal antud temperatuuril on võrdeline lahuse kontsentratsiooniga ja ei sõltu lahustunud aine keemilisest olemusest.* Lahuse kontsentratsiooni all mõistetakse harilikult lahustunud aine moolide arvu ühes liitris lahuses. Nõrkade lahuste jaoks väljendub see seadus järgmise valemina:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{N'} \qquad (17)$$

kus p_0 on rõhk antud temperatuuril puhta lahusti kohal, p — rõhk samal temperatuuril lahuse kohal, n — lahustunud aine moolide arv lahuse ruumalaühikus, N — lahusti moolide arv samas ruumalaühikus.

Auru rõhu vähenemise sõltumatus lahustunud aine keemilisest olemusest on väga märkimisväärne. Selle nähtuse põhjust selgitatakse paragrahvis 114.

Vaatleme ühte nähtust, mis seletub auru rõhu vähenemisega. Kui võtta aine, mis lahustub vees suurtes hulkades, ja valmistada sellest kange lahus, siis auru rõhk lahuse kohal võib kergesti osutuda väiksemaks veeauru rõhust ümbritsevas õhus. Sel juhul õhu kätte jäetud lahus mitte ainult ei aurustu, vaid, vastupidi, vee hulk lahuses suureneb õhus oleva niiskuse arvel. Puhastamata keedusool sageli „sulab", nii nagu tõmbaks ta endasse niiskust õhust. See seletub kloormagneesiumi $MgCl_2$ olemasoluga soolas, millel ongi ülalkirjeldatud omadus.

Kvalitatiivselt on Raoult'i seadus kehtiv mitte ainult vesilahuste jaoks, vaid ta kehtib üldiselt kõikide lahuste jaoks, sõltumata lahustist ja lahustatavast ainest. Valem (17) on aga täpne ainult väga lahjade, s. o. väikese kontsentratsiooniga lahuste korral. Elektrit juhtivad lahused (elektrolüüdid) ei allu valemile (17) isegi väikese kontsentratsiooni korral.

Auru rõhu vähenemine lahuse kohal on seotud lahuse keemistemperatuuri tõusuga. Tõepoolest, soojendame lahust temperatuurini T, mille juures puhas lahusti hakkaks keema. Kuna auru rõhk lahuse kohal ei omanda seda väärtust, mis vastab küllastavale, siis keemine ei alga. Selleks et lahus hakkaks keema, tuleb tema temperatuuri tõsta kuni temperatuurini $T + \Delta T$. Näiteks, kui 7,5-protsendilist kloorkaaliumi vesilahust soojendada kuni 100°, siis auru rõhk lahuse kohal on ainult 734,1 *mm* Hg (puhta vee kohal oleks 760 *mm* Hg). Et antud lahus hakkaks normaalrõhul keema, peab teda soojendama peaaegu kuni 101°.

Lahuse keemispunkti tõus antud rõhul on võrdeline ruumalaühikus sisalduvate lahustunud aine molekulide arvuga ja ei sõltu lahustunud aine keemilisest olemusest (selle seaduse püstitas samuti Raoult ja ta kehtib ainult nõrkade lahuste korral):

$$\Delta T = K\frac{n}{N}. \qquad (18)$$

Konstant K on erinevate lahustite jaoks erinev, kuid ei sõltu lahustunud ainest.

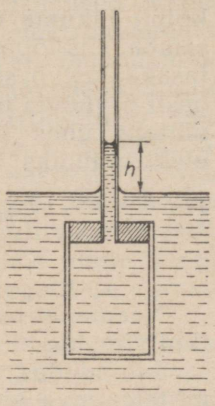
Auru rõhu vähenemisega lahuste kohal on seotud ka *lahuste külmumispunkti alanemine* (§ 122).

§ 114. Osmootne rõhk. Van't Hoff'i seadus.

Kui kuiv kortsus rosin visata vette, siis ta paisub ja muutub kerakujuliseks; ta tõmbub pingule nagu kummipalli kest. Marja sisu jääb kestasse, peale selle tuleb sinna aga veel (ilmselt teatava rõhu all) vesi. Antud juhul marja kest kujutab endast membraani, mis on vee suhtes läbilaskev ja suhkru ning teiste marjas

sisalduvate ainete suhtes vähe läbilaskev. Selliseid membraane või vaheseinu nimetatakse *pool-läbilaskvateks*. Pool-läbilaskvaid membraane kohtame sageli taime ja loomariigis, kus nende tähtsus on väga suur. Neid võib ka kunstlikult valmistada.

Oletame, et meil on pool-läbilaskvate seintega anum, mille seinad lasevad läbi lahusti (näiteks vee) molekule, kuid ei lase üldse läbi lahustunud aine (näiteks suhkru) molekule. Anum on suletud korgiga, mida läbib klaastoru. Täidame anuma suhkru vesilahusega ja paneme ta puhtasse vette (joon. 311). Teatava aja pärast näeme, et vedelik torus tõuseb kuni mingi kindla tasemeni. Tõusnud sammas avaldab lahusele muidugi teatud rõhku. Näeme, et *lahus, mis on puhtast lahustist eraldatud lahustunud aine suhtes mitteläbilaskva, kuid lahusti suhtes läbilaskva vaheseinaga, peab selleks, et temasse ei tungiks uusi puhta lahusti hulki, olema teatava rõhu all. Seda rõhku nimetatakse osmootseks*[1] *rõhuks.*



Joon. 311. Osmootse rõhu selgitamiseks.

Osmootse rõhu mõõtmine viis erakordselt huvitavale tulemusele. Kui tähime osmootse rõhu tähega π, tähega v sellise lahusehulga ruumala, mis sisaldab 1 mooli lahustunud ainet, tähega R universaalse gaasikonstandi ja tähega T lahuse absoluutse temperatuuri, siis (mitte liiga kangete lahuste korral) kehtib seos

$$\pi v = RT . \qquad (19)$$

Toodud võrrand on formaalselt identne Clapeyron'i võrrandiga. Järelikult, *väikese kontsentratsiooni korral lahustunud aine peab ennast ülal nii nagu ideaalne gaas;* osmootne rõhk π ei ole midagi muud kui lahustunud aine partsiaalrõhk. Selle seaduse püstitas 1886. aastal hollandi teadlane (hiljem Berliini akadeemik) v a n't H o f f[2].

[1] Termin *osmoos* (kreekakeelsest sõnast *osmos* — t õ u g e) tähendab üldiselt kahe teineteisest vaheseinaga eraldatud vedeliku segunemist.

[2] V a n't H o f f'i seaduse selgitamiseks on kasulik vaadelda näitena gaaside segu. Gaaside segu võib vaadelda „gaasi lahusena gaasis". Pallaadiumist vahesein on lämmastiku suhtes mitteläbilaskev, kuid vesiniku suhtes läbilaskev. Kujutame ette suletud silindrit, mis on kergestiliikuva pallaadiumist kolvi abil jagatud kaheks osaks, kusjuures ühel pool kolbi on lämmastik, teisel pool vesinik. Vesinik tungib läbi kolvi. Selle tulemusena hakkab kolb liikuma lämmastiku poolt vesiniku poole. Kolvi tasakaalustamiseks tuleb talle rakendada lämmastiku poole suunatud jõudu, mis on võrdne lämmastiku partsiaalrõhuga (seejuures vesinik jaguneb ühtlaselt üle kogu silindri, sest Daltoni seaduse põhjal on lämmastiku atmosfäär vesiniku jaoks samaväärne tühjusega). Vesinik on analoogiline lahustile, lämmastik lahustunud ainele. Kolbi tasakaalustav jõud kujutab endast lämmastiku partsiaalrõhku, mida võib vaadelda osmootse rõhuna.

Oeldu põhjal saab seletada vedelikusamba tõusmist osmoosi katses (joon. 311). Lahustunud aine molekulid, käitudes samuti nagu gaasi molekulid, põrkuvad nende suhtes mitteläbilaskva vedeliku samba pindkelme vastu ja peegelduvad sellelt tagasi. Sellest tingituna tekib jõud, mis sunnib seda kelmet (samuti nagu kolbi) liikuma üles. Kuna kelme tõmbab endaga kaasa kogu samba, siis lõppude lõpuks lahustunud aine molekulide rõhumine tasakaalustub samba kaaluga. Võrrandi $\pi v = RT$ abil võib kergesti arvutada ükskõik millise vedeliku osmootse rõhu. Sisaldugu näiteks ühes liitris 0,1 mooli lahustunud ainet, mis ei osutu elektrolüüdiks (näiteks suhkrut). Temperatuur olgu 23° *C*. Sel juhul v on 10 $\frac{l}{mool}$ ja osmootne rõhk

$$\pi = \frac{RT}{v} = \frac{0{,}082 \cdot 300}{10} = 2{,}46 \text{ at.}$$

Näeme, et osmootne rõhk ei sõltu lahusti ega lahustunud aine (kui viimane ei osutu elektrolüüdiks) keemilisest olemusest.

Juhindudes van't Hoff'i seadusest saab auru rõhu vähenemist mittelenduva aine lahuse kohal seletada järgmiselt. Lahustunud aine molekulid, põrkudes vastu pindkelmet ja peegeldudes sellelt tagasi, kohtavad lahusti molekule, mis liiguvad neile vastu, s. o. kelme suunas. Osa neist molekulidest võiks murda läbi pindkelme ja lennata aurulisse keskkonda, kuid, kohtudes lahustunud aine molekulidega, paiskuvad nad tagasi alla. Seetõttu auru molekulide hulk, järelikult ka auru rõhk, väheneb.

Kuna auru rõhu vähenemine lahuse kohal ja osmootne rõhk on tingitud ühest ja samast põhjusest, siis osmootse rõhu suuruse ja lahuse kohal toimunud auru rõhu vähenemise vahel peab olema kvantitatiivne seos. Tõepoolest, katsed näitavad, et *lahjade lahuste suhteline auru rõhu vähenemine, keemistemperatuuri tõus ja külmumispunkti langus on võrdelised osmootse rõhuga.*

§ 115. Elektrolüütiline dissotsiatsioon. Ostwaldi seadus.

Täiesti puhas vesi ei juhi elektrit. Kloorvesinik HCl (nagu gaasid üldiselt) on samuti mittejuht. Kui aga lahustada vees teatud hulk kloorvesinikku, siis saadud lahus juhib elektrit hästi. Toodud näites võib kloorvesinikku asendada mingi teise (tahke, vedela või gaasilise), niinimetatud elektrolüütide[1] klassi kuuluva ainega.

Elektrolüütideks nimetatakse selliseid aineid (sooli, happeid või aluseid), mis vees lahustunult muudavad vee elektrit juhtivaks. Elektrolüüdi lahust läbiv elektrivool kutsub lahuses esile

[1] Kreeka keelest *lyo* — lahutan osadeks.

elektrolüüsi, s. o. elektrolüüdi koostisosade eraldumise elektroodidel.

Elektrolüütide õpetuse tekkimine ja arenemine etendas suurt osa meie teadmiste süvendamisel loodusest ja mateeria ehitusest. Seetõttu me puudutame siin mõningaid ajaloolisi andmeid.

Möödunud sajandil panid Grothussi uurimused Venemaal ja Davy uurimused Inglismaal aluse elektrokeemiale. Juba esimeste selliste katsete põhjal, nagu vee lagundamine elektrivooluga hapnikuks ja vesinikuks ning mõnede ühendite elektrolüüs, püstitas Grothuss hüpoteesi, et elektrolüütides lagunevad lahustunud aine molekulid kaheks *iooniks*, s. o. elektriliselt laetud osakeseks. XIX sajandi 30-ndatel aastatel avastas Faraday elektrolüüsi kvantitatiivsed seadused, mis kinnitasid, et elektrolüütides on voolu kandjateks negatiivsed ja positiivsed ioonid. Katoodi poole liikuvaid positiivseid ioone hakati nimetama *katioonideks*, anoodi poole liikuvaid negatiivseid ioone aga *anioonideks*.

Faraday ja samuti Hittorf, kes 50-ndatel aastatel jätkas Faraday uurimusi ja määras esimesena ioonide liikuvust, oletasid, et molekulide lagunemine ioonideks toimub elektroodidelt lähtuvate jõudude mõjul. Varsti aga selgus, et elektrolüüti läbivad ükskõik kui nõrgad voolud. See on ilmselt vastuolus seletusega, mida andis Faraday molekulide ioonideks lagunemise kohta. Tõepoolest: kuna ioone ühendavad molekulideks suured keemilise afiinsuse jõud, siis ioonide eraldamiseks peaks elektroodide potentsiaalide vahe olema suur.

Uurides osmootset rõhku lõi van't Hoff 1886. a. lahuste gaasilise teooria, mille kohaselt tuleb endale ette kujutada, et lahustunud aine molekulid hõljuvad lahusti molekulide vahel, nad ei ühine lahusti molekulidega ja liiguvad nii nagu tühjas ruumis. Kui lahuse kontsentratsioon on väike, siis võime gaasi ja lahuse analoogilisuse põhjal rakendada lahusele ideaalsete gaaside seadusi. Võrreldes lahuseid, mis on saadud erinevate ainete lahustamisel ühes ja samas lahustis, näitas van't Hoff, et lahustel, mis on ühesuuruse osmootse rõhuga, peab olema ka ühesuurune auru kokkusurutavus ning ühesugused keemis- ja tahkestumispunktid. Van't Hoffi ja (eksperimentaalselt) Raoult'i poolt kindlaks tehtud seadused võimaldasid laboratoorses praktikas kasutusele võtta kaht uut molekulaarkaalu määramise meetodit: külmumispunkti määramisel põhinevat *krüoskoopilist*[1] meetodit ja keemispunkti määramisel põhinevat *ebullioskoopilist*[2] meetodit.

Rootsi füüsik Svante Arrhenius pööras 80-ndate aastate lõpul tähelepanu sellele, et paljudel juhtudel elektrolüüdid kaldu-

[1] Kreeka keelest *kryos* — külmus ja *skopeo* — vaatan.

[2] Ladina keelest *ebulliere* — ära keema ja kreeka keelest *skopeo* — vaatan.

vad kõrvale nendest seadustest, milledele ülejäänud nõrgad lahused alluvad võrdlemisi täpselt. Raoult'i ja van't Hoffi seadustest kõrvalekaldumise järgi tegi Arrhenius kindlaks, et elektrolüütilistel lahustel on keskmine molekulaarkaal väiksem, kui ta tohiks olla. See näitas, et *osa elektrolüüdi molekule on lõhustunud ehk dissotsieerunud olekus.*

Arrhenius pani ette võtta faktina seda, et lahusti ja lahustunud aine molekulide vastastikune mõju avaldub ioniseerivate jõudude tekkimises, mille mõjul elektrolüüdi molekulid lagunevad ioonideks. Nõrgad elektrolüüdid, mille molekulid dissotsieeruvad osadeks, ei allu sellele dissotsiatsioonile täielikult. Tekkinud vabade ioonide kõrvale jääb lahusesse alati teatud hulk elektrolüüti, mis ei ole lagunenud. Iioonid ei ole liikumatud, vaid nad põrkuvad omavahel kokku, mille tulemusena (neil juhtudel kui põrkumine toimub elektriliselt polaarsete molekulide vahel) tekivad uuesti molekulid. Seda protsessi nimetatakse *molisatsiooniks.* Lahuses kehtib dünaamiline tasakaal.

Elektrolüütiliste lahuste vahelistes reaktsioonides on reageerivateks rühmadeks ioonid. Nii näiteks, vees lahustunud vasevitriol dissotsieerub Cu- ja SO_4-ioonideks, s. o. just nendeks rühmadeks, mis on põhiradikaalideks selle soola vesilahuse reageerimisel hapetega, metallidega ja teiste sooladega. Elektrolüütide vahel toimuvate reaktsioonide tundmaõppimine taandub ioonide individuaalsete omaduste uurimisele.

Mõisted *sool, hape, leelis* ja *happe tugevus* said ioonteooria valgusel täiesti uue sisu, võrreldes oma endise sisuga. Ioonteooria seisukohalt lähtudes *võib hapeteks nimetada selliseid elektrolüüte, mis eraldavad vesilahuses vesinikuioone* (H^+). *Alust iseloomustab hüdroksüüli-ioonide* (OH^-) *moodustumine.* Sool annab katioonina metalliaatomi ja anioonina happejäägi. Terminid happe ja aluse „tugevus", mis varem olid väga ebamäärased, omandasid täiesti kindla sisu. Hape ja alus on seda „tugevamad", mida enam nad vees lahustunult kalduvad ioonideks lagunema. Siit järgneb, et tugevate hapete ja aluste vesilahused peavad paremini elektrit juhtima kui nõrkade hapete ja aluste lahused.

Tugevateks elektrolüütideks nimetatakse üldiselt selliseid aineid, mis vees lahustunult peaaegu täielikult dissotsieeruvad ioonideks; aineid, millede lahustumisel vees ainult osa molekulidest laguneb ioonideks, nimetatakse *nõrkadeks elektrolüütideks.*

Oleks vale arvata, et ioonid tekivad ainult siis, kui elektrolüüt (näiteks mingi soola kristall) satub vette. Paljude tahkete kehade kristallvõre sõlmedes on ioonid, mitte aga molekulid. Keemilistes reaktsioonides ioonide tekkimine kaasneb elektronide vahetusega aatomite vahel. *Elektronide vahetamisel* ühed aatomid annavad elektrone ära ja muunduvad positiivseteks ioonideks, teised aga saavad neid juurde ja muunduvad negatiivseteks ioo-

nideks; elektriliste tõmbejõudude tõttu tekivad seejärgi mõlemat liiki ioonidest elektropolaarsed molekulid. Mingi aine aatomi poolt äraantud või juurdevõetud elektronide hulk on määratud *valentsiga*.

Lahusti osa seisneb ainult selles, et ta lahutab molekuli nendeks ioonideks, mis on juba varem molekulis olemas. Molekul laguneb iooniks järgmise skeemi kohaselt.

Happed dissotsieeruvad vesiniku-ioonideks *(prootoniteks)* ja happejäägi-ioonideks. Näiteks:

$$HNO_3 \rightleftarrows H^+ + NO_3^-.$$

Seejuures H^+-ioonid *hüdrateeruvad*, s. o. ühinevad veemolekulidega, andes komplitseeritud („komplekssеid") H_3O^+-ioone — niinimetatud *hüdrooniumi*-ioone. Hapete vesilahuste happeliste omaduste kandjateks ongi just hüdrooniumi-ioonid (mitte aga vesiniku-ioonid).

Leelised dissotsieeruvad metalli- ja *hüdroksüüli*-ioonideks. Näiteks:

$$NaOH \rightleftarrows Na^+ + OH^-.$$

Soolad dissotsieeruvad metalli- ja happejäägi-ioonideks. Näiteks:

$$NaNO_3 \rightleftarrows Na^+ + NO_3^-.$$

Ka vesi dissotsieerub teataval määral järgmise võrrandi järgi:

$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-.$$

Selle purustava mõju põhjuseks, mida vesi avaldab (elektrolüüdi) molekulidele, on vee omadus vähendada teatud kindel arv korda elektrostaatilise välja tugevust; see arv võrdub *dielektrilise konstandiga* (vee jaoks $\varepsilon = 81$). Dielektriline konstant, seega ka dissotsiatsioonivõime, on veel suurem kui ükskõik millisel teisel tuntud vedelikul. Viimastest on võrdlemisi suure dielektrilise konstandiga glütseriin, metüülalkohol, etüleenglükool ja viinpiiritus (etüülalkohol). Enamiku vedelike dielektriline konstant on ainult veidi suurem ühest, s. o. need vedelikud peaaegu üldse ei „ekraneeri" elektrilisi jõude (dielektriline konstant on näiteks bensoolil 2,3; bensiinil on ta veel väiksem). Seetõttu soolad, happed ja alused neis vedelikes peaaegu üldse ei lahustu ega dissotsieeru ioonideks.

Kui lahuses valitseb tasakaal, siis nende ioonide arv, mis tekivad ühes ajaühikus vastasnimeliste ioonide kokkupõrgete tõttu, on võrdne sama ajavahemiku jooksul lagunenud molekulide arvuga. Tähistame tähega N ühes ruumalaühikus leiduvate lahustunud aine molekulide koguarvu. *Dissotsiatsiooniastme*, s. o. ioonideks lagunenud molekulide arvu ja lahustunud aine molekulide koguarvu suhte, märgime tähega α. Nende molekulide arv,

mis ei ole ioonideks lagunenud, on arusaadavalt $(1 - \alpha)N$; positiivsete ioonide arv on N ja sama suur on ka negatiivsete ioonide arv (loomulikult ainult sel juhul, kui dissotsieerumisel molekulid lagunevad ainult kaheks iooniks).

Tõenäosus mingi negatiivse iooni kokkupõrkumiseks ühega positiivsetest ioonidest on võrdeline positiivsete ioonide arvuga αN. Põrgete koguarv, seega ka ajaühikus tekkinud molekulide arv, on esiteks võrdeline tõenäosusega selleks, et antud negatiivne ioon kohtuks mingi positiivse iooniga; teiseks on ta võrdeline negatiivsete ioonide arvuga. Seega põrgete koguarv on võrdeline korrutisega $\alpha N \cdot \alpha N$. Tähistades arvulise kordaja tähega K_1, võime me kirjutada, et ajaühikus tekkivate molekulide arv on $K_1\alpha^2N^2$.

Teiselt poolt on selge, et nende molekulide arv, mis lahusti ionieeriva mõju tõttu osadeks lagunevad, on seda suurem, mida suurem on (juhul kui ülejäänud tingimused on samad) lagunemata jäänud molekulide arv. Tähistades antud juhule vastava võrdeteguri K_2-ga, võime kirjutada, et ühes ajaühikus ioonideks lagunenud molekulide arv on

$$K_2(1 - \alpha)N.$$

Kuna tasakaalu korral dissotsiatsiooni ja molisatsiooni protsessid teineteist täielikult kompenseerivad, siis

$$K_1\alpha^2N^2 = K_2(1 - \alpha)N,$$

kust saame:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} N = const. \tag{20}$$

See võrrand on tuntud *Ostwaldi seaduse* nime all.

Eespooltoodud arutlustes me ei arvestanud temperatuuri mõju molisatsiooni- ja dissotsiatsiooniprotsessi intensiivsusele. Seetõttu viimase võrrandi paremat poolt, mida me lugesime konstantseks, võib tegelikult muutumatu suurusena vaadelda ainult siis, kui lahuse temperatuur on konstantne. Ostwaldi seadus seob seega dissotsiatsiooni astet α ühes ruumalaühikus leiduvate lahustunud aine molekulide arvuga N, s. o. lahuse kontsentratsiooniga, kuid ei määra dissotsiatsiooni astme sõltuvust temperatuurist.

Ei ole raske näha, et kui Ostwaldi seaduses N kahaneb, siis $\frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$ peab kasvama ja järelikult α peab lähenema ühele. See tähendab, et *lahuse lahjendamisel dissotsiatsiooni aste kasvab.* Piirjuhul, s. o. juhul, kui lahuse kontsentratsioon on lõpmatult väike, peab dissotsiatsiooni aste olema võrdne ühega, s. o. lahustunud aine kõik molekulid peavad olema dissotsieerunud ioonideks. Lahjas lahuses asuvad molekulid üksteisest kaugemal ja dissotsieerumata molekulide tekkimise võimalus on seetõttu väiksem.

Eeldades, et lahustunud aine molekulid ja ioonid ei mõjuta lahuses üksteist, võib Ostwaldi seadust tuletada ka termodünaamiliselt. Kui see eeldus molekulide kohta enam-vähem kehtib, siis ioonide kohta on ta ilmselt vale. Ioonide vastastikust mõju võib arvestamata jätta ainult väga lahja lahuse korral, s. o. juhul, kui ioonid on üksteisest küllalt kaugel. Seega Ostwaldi seadus on oma iseloomult piirseadus. Ostwaldi seadus on rakendatav nõrkadele elektrolüütidele, tugevate elektrolüütide dissotsiatsiooni võib aga lugeda peaaegu täielikuks.

Tugevate elektrolüütide teooria ehitasid üles Debye ja Hückel 1923. a. ja järgnevatel aastatel. Debye ja Hückeli teooria aluseks on kujutlus sellest, et iga lahustunud aine ioon on lahuses ümbritsetud teatava arvu vastasmärgiliste ioonidega, mida hoiavad paigal elektrostaatilised tõmbejõud ja mis moodustavad nii-öelda *ioonatmosfääri*. Seda ioonatmosfääri ei tule vaadelda täiesti püsiva moodustisena; see võib kergesti laguneda ja uuesti tekkida.

Debye-Hückeli teooria arenes matemaatiliselt detailseks teooriaks ja seletas tugevate elektrolüütide mitmesuguseid kõrvalekaldumisi nõrkade elektrolüütide seadustest. Kuid mõningaid fakte Debye-Hückeli teooria ei haara, mis on arvatavasti lahustunud aine ja lahusti molekulide vahelise vastastikuse mõju alahindamise tulemuseks.

Dimitri Ivanovitš Mendelejevi terava pilgu eest ei jäänud kõrvale see fakt, et lahusti ja lahustatava aine vaheline vastastikune mõju on keemilise iseloomuga. Lahustunud aine ja lahusti (näiteks väävelhappe ja vee) molekulid võivad lahuses moodustada ebastabiilseid keemilisi ühendeid *(hüdraate)*. D. I. Mendelejevi poolt näidatud keemiline lähenemine lahustele omandab üha suuremat tähtsust.

Arvatakse, et lahustunud aine ioon tõmbab külge lahusti molekule; need molekulid ümbritsevad teda ja moodustavad nagu mingi katte, mida nimetatakse *solvaatkatteks* — vesilahuste korral aga *hüdraatkatteks*.

Väga suure kontsentratsiooniga lahustes toimuvad nähtused on veel keerulisemad. Ioonide sagedased kohtumised ja kokkupõrkumised põhjustavad siin, samuti ka tugevate elektrolüütide korral, suure arvu dissotsieerumata molekulide olemasolu ja isegi kahest lahustunud aine molekulist koosnevate *liitmolekulide* tekkimise. Ioonide ühinemise tõttu dissotsieerumata molekulidega võivad siin peale selle tekkida keerulised *kompleks-ioonid*.

§ 116. Absorptsioon. Henry seadus.

Gaas, mis vedelikule keemilist toimet ei avalda, võib vedelikuga kokku puutudes sellele vaatamata temas neelduda. Seda nähtust nimetatakse *absorptsiooniks*[1].

Konkreetsuse mõttes kujutame endale ette, et kinnise anuma põhjas on vesi ja vee kohal gaasiline hapnik. Mõned hapnikumolekulid tungivad vette ja hakkavad veemolekulide vahel rändama. Teised hapnikumolekulid lendavad seevastu vedelikust välja vedeliku kohal olevasse gaasilisse keskkonda. Kui vesi ja hapnik on tasakaalus, siis ajaühikus gaasilisest faasist vedelasse faasi üleläinud molekulide arv on võrdne sama aja jooksul vedelast faasist gaasilisse faasi üleläinud molekulide arvuga.

Kui hapniku rõhku suurendada kahekordseks, siis selliste hapnikumolekulide arv, millel on šansse vedelikus neelduda, suureneb samuti kahekordseks (kui varem neeldunud gaasimolekulide hulk ei ole nii suur, et see takistaks gaasi edasist neeldumist).

Siit järgneb seadus, mille avastas inglise füüsik Henry 1803. a. *Kui rõhk ei ole väga suur, siis absorbeerunud gaasi hulk (antud temperatuuril) on võrdeline gaasi rõhuga.*

On kerge aru saada, et nendes piirides, kus Henry seadus kehtib, antud temperatuuril antud vedeliku hulgas absorbeerunud gaasi ruumala väljendub igasugusel rõhul ühe ja sama arvuga. Näiteks üks ruumiosa vett neelab temperatuuril 15° *C* ühe ruumiosa süsihappegaasi, 0,03 ruumiosa hapnikku, 0,014 ruumiosa lämmastikku jne. Neid arve nimetatakse *absorptsiooni koefitsientideks.*

Seoses süsihappegaasi suhteliselt suure neelduvusega vees oletati kuni hilise ajani, et veetaimed hingavad hapnikku, mida nad omandavad vees neeldunud süsihappegaasist. Kuid 1940. a. nõukogude teadlased Vinogradov ja Teiss näitasid, et vees olevad rohelised taimed hingavad vee hapnikku, mitte aga süsihappegaasi hapnikku.

Kuna hapniku lahustumisel vees absorptsioonikoefitsient, s. o. lahustuvus, on kaks korda suurem kui lämmastiku absorptsioonikoefitsient, siis vees lahustunud õhu koostis erineb oluliselt atmosfääri õhu koostisest. Atmosfääri õhk sisaldab ruumala järgi 78% lämmastikku ja 21% hapnikku; veest eraldunud õhk sisaldab 63% lämmastikku ja 36% hapnikku. Vees lahustunud õhu rikkalikul hapnikusisalduvusel on nähtavasti suur bioloogiline tähtsus.

Nii nagu vedeliku ja tema küllastava auru süsteemis temperatuuri tõus soodustab molekulide üleminekut vedelast faasist gaasilisse, nii ka vedeliku ja tema poolt absorbeeritud gaasi süsteemis temperatuuri tõus soodustab gaasi molekulide üleminekut vede-

[1] Ladina keeles *absorbtio* — neeldumine.

likust gaasilisse faasi. See tähendab, et temperatuuri tõustes absorptsioonikoefitsient väheneb. Paljud metallid on selle reegli suhtes eranditeks.

Vee võimet madalatel temperatuuridel ja suurtel rõhkudel absorbeerida suuri süsihappegaasi hulki kasutatakse laialdaselt jookide valmistamiseks.

On teada, et vee järkjärgulisel soojendamisel temast eraldub üha rohkem ja rohkem gaasimulle. See on absorptsiooni koefitsiendi vähenemise tulemus. Keetmisega võib vett tema poolt absorbeeritud gaasidest täielikult vabastada.

Vedelik neelab gaaside segust iga gaasi niisuguse hulga, mis vastab selle gaasi partsiaalrõhule. Seetõttu näiteks vees neeldunud süsihappegaasi hulk ei kasva siis, kui ruumi, mida süsihappegaas vee kohal enda alla võtab, pumbatakse õhku juurde.

Isegi tahketel kehadel on võime neelata gaase. Kõrgetel temperatuuridel plaatina, raud ja teised metallid neelavad vesinikku. Raud neelab kergesti isegi süsinikoksüüdi CO. Need gaasid jäävad metallidesse ka viimaste jahtumisel (seda nähtust nimetatakse *oklusiooniks*[1]).

Rangelt võttes mõistetakse absorptsiooni all ainult niisugust gaaside neeldumist, mille juures neelatav gaas lahustub terves neelavas keskkonnas (kas vedelas või tahkes). Gaaside neeldumisel peeneteralistes või urbsetes tahketes kehades suur osa gaasist ei lahustu terves neelavas keskkonnas, vaid gaas paikneb küllalt suure tihedusega pooridele ja terakestele; taolist neeldumist nimetatakse *adsorptsiooniks* (§ 125). Seega absorptsioon on gaasi lahustumine, adsorptsioon aga gaasi tihenemine mikropinnalistele kehadele. Tuleb märkida, et gaaside neeldumisel metallides, mis on mikroteralise ehitusega, ei ole võimalik kunagi absorptsiooni ja adsorptsiooni vahele kindlat piiri tõmmata.

§ 117. Vastandlike protsesside kokkupõrge molekulaar-soojuslikes nähtustes.

Füüsika annab ammendamatu hulga selliseid näiteid, mis illustreerivad dialektilise materialismi seisukohti. Molekulaar-soojuslikke nähtusi uurides märkame, et nende nähtuste kõik eri kujud (difusioon, aurumine, kondensatsioon, lahustumine jne.) kujutavad endast kahe vastassuuna võitlust nähtuste arengus. Siin tuleb ilmsiks see üldine looduse dialektika seadus; looduse esemeile ja nähtustele on omased sisevastuolud, sest neil kõigil on oma eitav ja jaatav külg, oma minevik ja tulevik, oma iganev ja arenev, et nende vastandite võitlus, võitlus vana ja uue vahel, väljasureva ja sündiva vahel, iganeva ja areneva vahel, moodus-

[1] Ladinakeelsest sõnast *occludere* — sisse sulgema.

tab arenemisprotsessi seesmise sisu, kvantitatiivsete muutuste kvalitatiivseiks muutumise seesmise sisu.

Sellepärast dialektiline meetod väidab, et arenemisprotsess madalamalt kõrgemale ei toimu nähtuste harmoonilise arenemise teel, vaid esemeile ja nähtustele omaste vastuolude avamise teel, nende vastuolude alusel toimivate vastandlike tendentside „võitluse" teel.

Lenin rõhutab, et vastandite ühtsus omab suhtelist, ajalist iseloomu, erinevalt püsivast kokkupõrkest ja ammendamatust vastandite võitlusest. „Vastandite ühtsus (kokkusattuvus, identsus, võrdmõjulisus) on tinglik, ajutine, mööduv ja relatiivne. Üksteist vastastikku väljasulgevate vastandite võitlus on absoluutne, samuti nagu on absoluutne areng ja liikumine." (Lenin, „Filosoofilised vihikud".)

See, kes läheneb loodusnähtustele mehhanistlikult, kas ei näe, kuidas vastandite võitlus kutsub esile nähtuste iseärenemise, või käsitleb vastandeid lihtsalt jõududena, mis on suunatud erinevalt ja ilmutavad oma näilist „ühtsust" selles, et võrdsuse ja otsese antagonismi juures nad vastastikku tasakaalustuvad.

Kui tahame vastandite võitlust illustreerida mehhaanika valdkonnast võetud lihtsa näitega, siis ei tule valida jõudude tasakaalu juhtu, vaid mehhaanika kolmanda seaduse sisu. Mehhaanika kolmas seadus on ühtlasi üheks kõige üldisemaks füüsika seaduseks. *Mõju* tekitab alati *vastumõju*. See seadus jaatab mõju ja vastumõju täielikku lahutamatust, kindlat kooseksisteerimist ja selles mõttes ühtsust. Mõju ja vastumõju on kehade vastastikuse mõju kaks lahutamatut külge. Kuna mõju ja vastumõju on rakendatud erinevatele, teineteist vastastikku mõjustavatele kehadele, mitte aga ühele kehale, siis ilmselt ei saa ka mingisugusest mõju ja vastumõju tasakaalustumisest juttu olla. Kui on olemas üks mõju ja vastumõju, s. o. üks vastastikune mõju, siis on tasakaal täiesti võimatu. Siin hakkavad mõlemad teineteist vastastikku mõjutavad kehad paratamatult liikuma. Tasakaal tekib ainult sellistel erijuhtudel, kus on olemas vähemalt kaks võrdset ja antagonistlikku vastastikust mõju. Näiteks magneti ja rauatüki vastastikune tõmbumine juhul, kui nad on täiesti lähestikku, tekitab teineteise vastu surutud magneti ja raua pindade elastse deformatsiooni, mis omakorda kutsub esile magneti ja raua vahel elastse vastastikuse tõukumise. Antud juhul magnetiline vastastikune mõju tasakaalustub elastse vastastikuse mõjuga.

Molekulaar-soojuslikud nähtused annavad meile looduses eriti iseloomulikke vastandite võitluse ja ühtsuse näiteid. Kõikides molekulaar-soojuslikes nähtustes toimub kahe vastassuunalise protsessi kokkupõrge, kusjuures esialgu on neist üks ülekaalus. See nähtus areneb senikaua, kuni vastandprotsessid saavutavad võrdse intensiivsuse. Siis saabub süsteemis termodünaamiline

tasakaal, mis oma olemuselt kujutab statistilist tasakaalu (§ 112).

Vaatleme näiteks gaasi omadifusiooni (§ 96). Eraldame mõttes välja gaasiga täidetud ruumist teatava osa. Sellest ruumiosast difundeeruvad gaasimolekulid igas suunas laiali. Kuid ümbritsevast ruumist difundeerub ka sinna molekule juurde. Üks protsess seisneb siin molekulide hajumises meie poolt vaatluse alla võetud ruumiosast, teine molekulide kontsentreerumises. Termodünaamilise tasakaalu korral need protsessid kompenseerivad teineteist. Kui aga väljaeraldatud ruumiosas oleks algul tegemist molekulide suhtelise kuhjumisega, siis sellest ruumiosast lahkuvate molekulide arv oleks suurem kui sellesse tulevate molekulide arv. Seetõttu molekulide ülejääk leviks kuhjumiskohast järk-järgult üle kogu ruumi.

Samuti difundeerub üks gaas teises gaasis. Difundeeruva gaasi molekulid, mis on kontsentreerunud ühte ruumiossa, hajuvad teistesse ruumiosadesse laiali, need aga, mis varem olid teistes ruumiosades, liiguvad vastupidi, s. o. kontsentreeruvad.

Vedeliku aurustumisprotsess koosneb samuti kahest molekulide voost: üks molekulide voog on suunatud vedelikust auru ja teine molekulide voog aurust vedelikku. Kui ülekaalus on esimene voog, siis toimub aurustumine, kui ülekaalus on teine voog, toimub kondenseerumine. Kui need vood on võrdsed, siis valitseb vedeliku ja tema küllastava auru vahel tasakaal.

Analoogiliselt toimuvad molekulaarsed protsessid tahke keha sublimeerumisel ja sulamisel, kristalli lahustumisel vedelikus jne. Kõikide nende, niinimetatud faasimuutuste juures nähtus areneb kahe vastassuunalise molekulide voo konflikti tõttu.

Nähtustes, kus soojuse levimine toimub soojusjuhtivuse ja kiirguse teel, on alati kaks *vastassuunalist* energia (molekulaarse võnkumise energia, kiirguse energia) voogu. Kui üks neist voogudest on ülekaalus, siis toimub soojusenergia ülekanne vastavalt Fourier' ja Stefani-Boltzmanni seadustele.

Ka keemilistes reaktsioonides areneb kahe vastassuunalise protsessi võitlus: lähteained omavahel keemiliselt reageerides muutuvad reaktsiooni produktideks ja tekkinud reaktsiooni produktid omavahel reageerides muutuvad tagasi lähteaineteks. Reaktsiooni lõpuks need kaks vastassuunalist protsessi tasakaalustavad teineteist. Selleks ajaks saavutatakse lähteaine ja produkti vahel kindel temperatuurist ja rõhust sõltuv proportsioon. Mõnel juhul on otsene protsess pöördprotsessi suhtes niivõrd ülekaalus, et reaktsioon kulgeb seni, kuni lähteaine on praktiliselt täielikult muutunud reaktsiooni produktkis.

Molekulide termilise ja elektrokeemilise dissotsiatsiooni nähtustes toimub võitlus molekulide lagunemise ja taastamise protsesside vahel. Suhteline liikuv tasakaal nende protsesside vahel määrab dissotsiatsiooni astme, nagu seda näidati paragrahvis 115.

Uurides gaasi jaotust raskusväljas, lahustunud aine jaotust kahe teineteisega kokkupuutuva lahusti vahel ja teisi sedaliiki nähtusi, me näeme molekulide soojusliku hajumise protsessi ja raskusväljas molekulide kontsentreerumisprotsessi vahelist võitlust. Liikuv tasakaal nende vastassuunaliste protsesside vahel määratakse Boltzmanni *e*-lausega (§ 97), mis on üheks kõige tähtsamaks molekulaar-soojusliku liikumise seaduseks.

Molekulaar-soojuslikud protsessid on üldised. Aurumine, kondensatsioon, lahustumine, molekulide dissotsiatsioon, molekulide ümberjaotumine, keemilised reaktsioonid, soojusvahetus jne. — kõik need nähtused kuuluvad väga keeruliste geoloogiliste, bioloogiliste ja füsioloogiliste protsesside koosseisu. Sellistes väga keerulistes loodusnähtustes ja ka kõikides tehnoloogilistes protsessides areneb samuti vastandite võitlus. Kuid on arusaadav, et paljude nähtuste ühinemisel üheks keerulisemaks nähtuseks muutub selle keerulisema nähtuse arengus komplitseeritumaks ka vastandlike aluste olemus.

XIX PEATÜKK.

TAHKETE KEHADE FÜÜSIKA.

§ 118. Kristallide ehitus.

Käesoleval ajal kasutatakse terminit *tahke keha* kristalse ehitusega kehade tähistamiseks. Amorfseid (mittekristalseid) kehi — klaasi, vaiku, pigi jt. vaadeldakse ülejahutatud vedelikena. Tõepoolest, amorfsete kehade omadused on üldiselt väga sarnased viskoossete vedelike omadustega, kuna kristalse ehitusega kehade omadused on neist sügavalt erinevad.

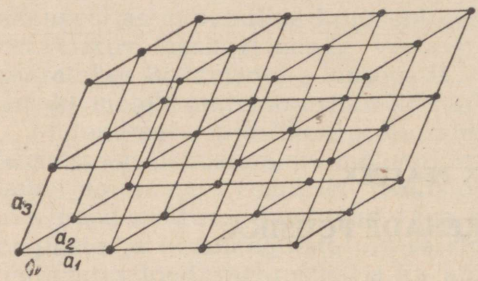
Vedelikud ja amorfsed kehad on *isotroopsed,* s. t. et nende kehade füüsikalised omadused on kõikides suundades ühesugused. Kristalsete kehade peamine erinevus amorfsetest kehadest seisneb nende *anisotroopsuses,* s. t. et kristallide füüsikalised omadused on eri suundades isesugused. Kristallide anisotroopsus avaldub osaliselt ka selles, et mõnes tasapinnas võib kristall kergesti puruneda (neid tasapindu nimetatakse *lehisuse tasapindadeks),* kuna teistes suundades võib kristalli murdetugevus olla väga suur. Kristall ilmutab erinevat elastsust tema venitamisel risti tahkudega ja nurga all. Kristallis on olemas suurima ja väikseima elastsuse suunad. Kristalli soojusjuhtivus on samuti erinevates suundades erinev.

Mõnedel kristalse ehitusega kehadel, näiteks metallidel, ei ole anisotroopsus alati teravalt väljendatud. Lähemal vaatlemisel selgub, et sellised kehad koosnevad paljudest väikestest kristallidest *(kristalliitidest* ehk *teradest),* mis on paigutatud ebakorrapäraselt. Erinevalt *monokristallidest*[1] nimetatakse selliseid kehi *polükristallideks*[2]. Valtsitud ja traadikstõmmatud metallis võib märgata teatud korrapärasust kristallide asetuses ja seoses sellega, vaatamata polükristallilisele ehitusele, ilmneb metalli anisotroopsus.

Monokristallide teravalt väljendatud anisotroopsus on tingitud sellest, et kristalli osakesed on korrapäraselt paigutunud *kristall-*

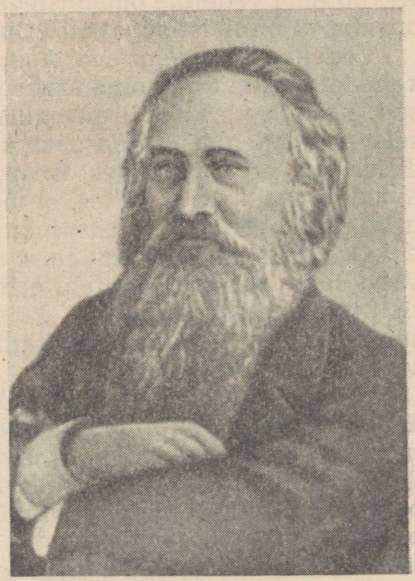
[1] Kreekakeelsest sõnast *monos* — üks.
[2] Kreekakeelsest sõnast *poly* — palju, paljud. Vt. § 50.

võre (§ 84) sõlmedesse. Kristallvõre koosneb *rakkudest*. Raku all mõistetakse kristallvõre sellist osa, mille ümberpaigutamisel tema endaga paralleelselt (joon. 312) on võimalik saada kogu kristallvõre.



Joon. 312. Raku iseendaga paralleelsel ümberpaigutamisel saadakse tuumvõre.

Kujutlus osakeste korrapärasest paigutusest kristallides väljendus Bravaisi poolt 1848. a. püstitatud hüpoteesis. Kristallograafia viidi esmakordselt rangelt teaduslikku süsteemi silmapaistva vene teadlase Jevgraf Stepanovitš Fjodorovi töödes, kes lõi matemaatilise õpetuse sümmeetriast ja uuris kõiki mõeldavaid kristalliosakeste ruumilisi paigutusi, lähtudes sellest, et ruumi tihe täitmine rakkudega on võimalik ainult teatud kujuga rakkude puhul. 1881. a. Fjodorov ja pärast teda (samal aastal) Schönflies töötasid välja kristalliosakeste võimalike korrapäraste paigutuste süstemaatika, lähtudes sümmeetria kaalutlustest. Fjodorovi ja Schönfliesi poolt tehti kindlaks, et on võimalik 230 erineva „ruumilise rühma" olemasolu, mis on sümmeetria tunnuste järgi koondatud 32 sümmeetria klassi.

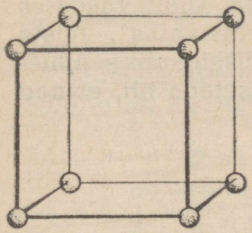


Jevgraf Stepanovitš Fjodorov (1853—1917).

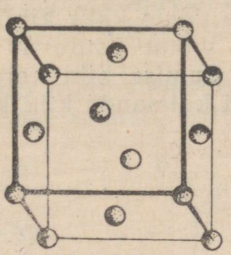
1913.—1914. a. valgustasid inglise teadlased U. G. ja U. L. Bragg'id ja vene teadlane Juri Viktorovitš Vulf kristalle röntgenikiirtega (Laue ja Debye poolt esitatud meetodeil) ja tõestasid, et hüpotees kristallvõredest osutus õigeks. Nad panid aluse *röntgeno-struktuursele analüüsile*, mis tänapäeval lubab veendunult rääkida osakeste paigutustest kristallides (röntgeno-struktuurse analüüsi meetodit selgitatakse kursuse teises köites).

Kristallide uurimine röntgenikiirte abil näitas, et mõned kristallvõrede tüübid esinevad looduses eriti sageli. Kolm väga tähtsat võrede tüüpi on näidatud joonistel 314—316.

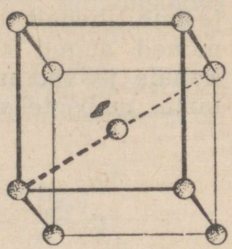
Võre, mis on toodud joon. 314, erineb lihtsast kuubilisest võrest (joon. 313) selle poolest, et sõlmedeks ei ole mitte ainult



Joon. 313. Kuubiline võre.

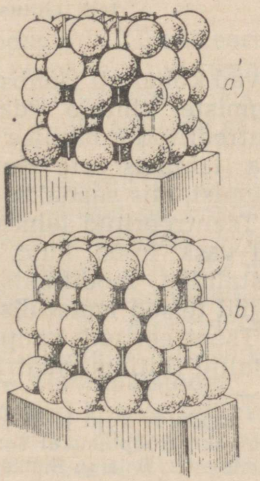


Joon. 314. Tsentreeritud tahkudega kuubiline võre.

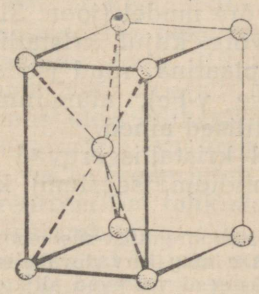


Joon 315. Tsentreeritud kuupidega võre.

kuubi tipud, vaid ka kuubi iga tahu keskpunkt (tsenter). Sellepärast nimetataksegi ülaltoodud võret *tsentreeritud tahkudega kuubiliseks võreks*. Joon. 315 on näidatud juht, kus osakesed on paigutatud elementaarsete kuupide tippudesse ja iga kuubi keskpunkti. See on *tsentreeritud kuupidega võre*. Mõnikord nimetatakse sama võret ka *ruumiliselt tsentreeritud kuubiliseks võreks*.



Joon. 317. *a* — tsentreeritud kuupidega võre, *b* — heksagonaalne võre.

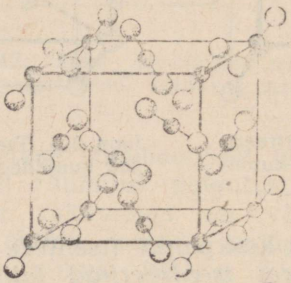


Joon. 316. Heksagonaalne võre.

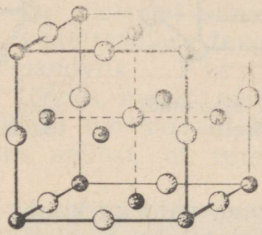
Joon. 316 on näidatud juht, kus osakesed on paigutatud rööptahukate tippudesse; peale selle asub üks osake iga rööptahuka kohta

sellise neljatahulise püramiidi tipus, mille aluseks on pool rööptahuka alumisest tahust. Sellist võret nimetatakse *heksagonaalseks võreks*[1].

Kuubiline ruumiliselt tsentreeritud ja heksagonaalne võre on märkimisväärsed selle poolest, et mõlemad need võred saadakse kerade tihedaimal paigutusel (pakkimisel). Kujutleme, et me asetasime tihedalt üksteise peale kaks kihti kerasid. Ülalt vaadates mõned augud kerade vahel osutuvad „läbipaistvaiks", teiste kohale jäävad mõned alumise kihi kerad (selliseid auke nimetame „umbseteks"). Kui kolmanda kihi kerad asetada nii, et nad



Joon. 318. Süsihappe kristalli ehitus.



Joon. 319. NaCl kristallvõre.

jäävad kohakuti „umbsete" aukudega, ja sellisel printsiibil jätkata järgmiste kihtide edasist ladumist, siis saadakse ruumiliselt tsentreeritud kuubilise võre mudel. Kui kolmanda kihi kerad asetada „läbipaistvate" aukude kohale ja nii jätkata ülemiste kihtide ladumist, siis saadakse heksagonaalse võre mudel (joon. 317).

Tsentreeritud tahkudega kuubilise võre kujul kristalliseeruvad vask, hõbe, kuld, seatina, nikkel, plaatina, raud (seda raua kristallilist modifikatsiooni tähistatakse γ-Fe), alumiinium ja paljud teised metallilised ja mittemetallilised ained.

Tsentreeritud kuupidega võre kujul kristalliseeruvad leelismetallid (liitium, naatrium, kaalium, rubiidium, tseesium), kroom,

[1] Rakkude kuju järgi eristatakse seitset kristallograafilist süsteemi. Tähistame raku (rööptahuka) servi tähtedega *a*, *b* ja *c* ning servadevahelisi nurki tähtedega α, β ja γ. Seitse kristallograafilist süsteemi vastavad alljärgnevate rakkude kujule:

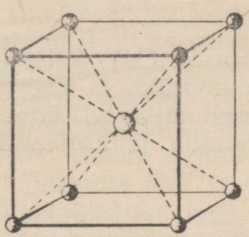
1) kuubiline	$a = b = c$;	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$.
2) tetragonaalne	$a = b \neq c$;	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$.
3) rombiline	$a \neq b \neq c$;	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$.
4) romboeedriline	$a = b = c$;	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$.
5) heksagonaalne	$a = b \neq c$;	$\alpha = \beta = 90°$; $\gamma = 60°$.
6) monokliinne	$a \neq b \neq c$;	$\alpha = \gamma = 90°$; $\beta \neq 90°$;
7) trikliinne	$a \neq b \neq c$;	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$.

molübdeen, volfram, raud (seda raua modifikatsiooni tähistatakse α-Fe), paljud sulamid ja paljud teised ained.

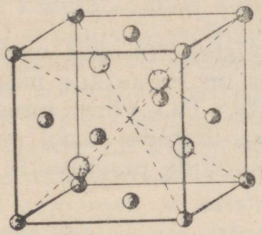
Heksagonaalse võre kujul kristalliseeruvad magneesium, tsink, teised metallid ja paljud sulamid.

Metallidel asuvad kristallvõre sõlmedes positiivsed metalli-ioonid (katioonid). Nende vahel hõljuvad elektronid, moodustades nagu *elektrongaasi*, mis täidab kristallvõre metalli-ioonide vahelise ruumi.

Mõnede ainete kristallvõrede sõlmedes paiknevad molekulid. Selline on näiteks süsihappe kristalli ehitus. Süsihappe molekuli



Joon. 320. CsCl kristallvõre.



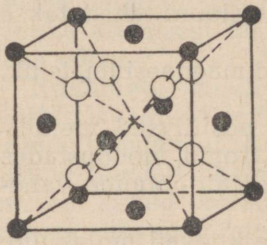
Joon. 321. ZnS kristallvõre.

koostisse kuuluvad süsiniku aatomid moodustavad tsentreeritud tahkudega kuubilise võre; hapniku aatomid on paigutatud süsiniku aatomite mõlemale küljele — nad asuvad sirglõikudel, mis on teatud kindlal viisil orienteeritud elementaarkuubi servade suhtes (joon. 318).

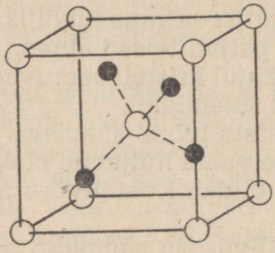
Enamikul keemilistel (anorgaanilistel) ühenditel on kristallvõre sõlmedesse paigutunud ioonid. Selline ehitus on enamikul mineraalidel. Joon. 319 on näidatud looduses laialdaselt levinud kivisoola NaCl kristalli ehitus. Naatriumi-ioonid (joon. 319 märgitud mustade kuulikestega) moodustavad tsentreeritud tahkudega kuubilise võre; analoogiliselt on paigutatud ka kloori-ioonid. Seega NaCl võre kujutab endast kahe nagu teineteise vahele pandud tsentreeritud tahkudega kuubilise võre kombinatsiooni.

Tseesiumkloriidi (CsCl) kristallid koosnevad kahest teineteise vahele pandud lihtsast kuubilisest võrest (joon. 320). CsCl võret võib vaadelda ühte liiki ioonide (näiteks tseesiumi) kuubilise võrena, mis on ruumiliselt tsentreeritud teist liiki ioonidega (kloori-ioonidega).

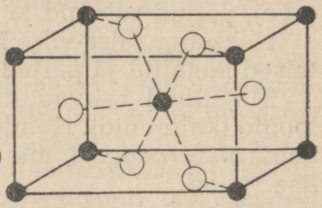
Veidi keerulisem on tsinkläigu ZnS võre. Siin moodustavad ühte liiki ioonid tsentreeritud tahkudega kuubi; teist liiki ioonid on paigutatud kuubi neljale diagonaalile ja igaüks neist asub võrdsetel kaugustel neljast temale kõige lähemal asuvast vastasmärgilisest ioonist (joon. 321).



Joon. 322. CaF_2 kristallvõre.



Joon. 323. Cu_2O kristallvõre.



Joon. 324. TiO_2 kristallvõre.

Joonistel 322—324 on näidatud fluoriidi CaF_2 kristallide ehitus, mis on kristallide maailmas väga levinud, ja kupriidi Cu_2O ning rutiili TiO_2 võred (mustad kuulikesed näitavad esimesel juhul kaltsiumi-ioonide, teisel juhul vase-ioonide ja kolmandal juhul titaani-ioonide paigutust).

§ 119. Kristallokeemia mõiste.

Varem oletati, et osakeste korrapärase paigutuse põhjuseks kristallides on aatomite endi anisotroopsus. Arvati, et aatomitevaheline vastastikune mõju sõltub suurel määral aatomite vastastikusest orientatsioonist. Veel 25—30 aastat tagasi leidis „aatomite jõuvälja anisotroopsuse" hüpotees küllalt laialdast tunnustust. Siiski osutus, et kristalliosakeste korrapärase paigutuse peamine põhjus on lihtsam — selleks on *tihedaima paigutuse* („pakkimise") *printsiip*. Vastastikuse tõmbejõu tõttu püüavad osakesed asetuda võimalikult üksteisele lähemale, kuid liigsel lähenemisel ilmnevad tõukejõud. Seetõttu võib iga osakest võrrelda teatud raadiusega läbitungimatu kerakesega. Ühte liiki osakeste puhul saadakse sageli, nagu eelmises paragrahvis selgitatud, kerade tihedaima paigutusega võre (tsentreeritud kuupidega ja heksagonaalne võre). Kerade kõige tihedamal paigutamisel kuulub antud ruumalast 26% keradevahelistele tühimikkudele.

Keemiliste ühendite kristallides võib positiivseid ja negatiivseid ioone vaadelda *erinevate raadiustega* kerakestena. Sel juhul vastab tihe kerade pakkimine (olenevalt negatiivsete ja positiivsete ioonide raadiuste suhtest) ühele või teisele kristallvõre tüübile. Tuginedes uusimatele andmetele ioonide raadiustest, näitas norra teadlane Goldschmidt, et tihedaima pakkimise reegel võimaldab, lähtudes aine keemilisest valemist, teoreetiliselt ette näha aine kristallilist ehitust.

Goldschmidti ja tema eelkäijate Kosseli ja Magnuse uurimised põhjustasid uue teadusharu — *kristallokeemia* tekki-

mise ja selle kiire arengu. Kristallokeemia aluseks on geomeetrilised kujutlused sellest, milliseid kristallvõrede liike on võimalik saada erinevate raadiustega kerakeste tihedal pakkimisel ühel või teisel viisil. Ioonide jõuvälja anisotroopsus avaldub esiteks selles, et ühtedel juhtudel teostub aatomite tihe pakkimine ühel viisil, teistel juhtudel aga teisel viisil; teiseks avaldub see mõnedes seaduspärastes kõrvalekaldumistes tiheda pakkimise printsiibist.

Kristallokeemias kasutatav aatomite ja ioonide samastamine kokkusurumatute kerakestega on muidugi tinglik. See on aatomitevaheliste vastastikuste mõjude „mudel", dünaamilise iseloomuga nähtuste geomeetriline kujutamine. Aatomite ja ioonide tõelised raadiused on kristallokeemias kasutatavatest väiksemad. Tegelikult kristalli aatomid (või ioonid) ei puutu üksteisega kokku ja ei ole liikumatud, vaid võnguvad kristallvõre sõlmedes tasakaaluasendite suhtes. Seoses kristalli soojuspaisumisega tuleb arvestada, et aatomi kristallokeemiline raadius temperatuuri tõusul kasvab. Lisaks sellele tuleb arvestada, et kristallokeemias mõnedel juhtudel ühe ja sama aatomi mõõteid ei tule lugeda täiesti ühesugusteks. See on tingitud asjaolust, et kristallokeemias aatomi raadius kujutab endast geomeetriliselt mitte ainult naaberaatomite vastastikuse mõju efekti, vaid ka kõigi aatomite vastastikuse mõju summaarset efekti.

Goldschmidti uurimised näitasid, et kristallide tähtsaimaks füüsikalise süstemaatika tunnuseks on nende lähimate ühekaugusel asuvate osakeste arv, mis ümbritsevad mingit kristalli osakest. Seda arvu nimetatakse *võre koordinatsiooniarvuks* ehk *anturaažiks*. Mõiste „anturaaž"[1] selgitamiseks vaatleme joon. 314, kus on kujutatud tsentreeritud tahkudega kuubiline võre. Kujutleme, et ruumis puutub üksteise vastu rida selliseid rakke, mis on näidatud joon. 314. Ei ole raske aru saada, et mainitud võres iga aatom on ümbritsetud kaheteistkümne võrdsel kaugusel asuva naabriga ehk, teisiti öeldes, antud võret iseloomustab anturaaž 12. Vaadeldes teiste võrede jooniseid, ei ole raske veenduda alljärgneva anturaaži tabeli õigsuses:

Võre koordinatsiooniarv (anturaaž)	Võre tüüp
12	Tsentreeritud tahkudega kuubiline
8	Tihedaim heksagonaalne
	Ruumiliselt tsentreeritud kuubiline tseesiumkloriidi CsCl võre
6	Lihtne kuubiline
	Kivisoola NaCl võre

[1] Prantsuskeelne sõna *entourage* — ümbritsemine, keskkond.

Võre koordinatsiooni-arv (anturaaž)	Võre tüüp
4	Tsinkläigu ZnS võre
8 ja 4	Fluoriidi CaF_2 võre
6 ja 3	Rutiili TiO_2 võre
4 ja 2	Kupriidi Cu_2O võre
3 ja 1	Molekulaarsed võred, näiteks CO_2 võre

Kristallokeemiliste seaduspärasuste iseloomu selgitamiseks toome näitena ühe lihtsamaist kristallokeemilistest reeglitest, mis puudutab sellist tüüpi ühendeid, milledega füüsikas tuleb kõige sagedamini tegelda, nimelt binaarseid ühendeid: AX ja AX_2 (kus harilikult A on metall ja X metalloid). Võttes aluseks Magnuse tiheda pakkimise tingimuste geomeetrilised arvutused, püstitas Goldschmidt alltoodud reegli ja kontrollis seda arvukate näidetega.

Kui ioonide raadiuse suhe

$$\left(\frac{R_A}{R_X} \text{ või } \frac{R_X}{R_A}\right)$$

siis võre anturaaž on

on piirides	
0,225—4,45	4
0,415—2,4	6
0,732—1,37	8
1—1	12

Näiteks 16 järgmisest ühendist

MgO	CaO	SrO	BaO
MgS	CaS	SrS	BaS
MgSe	CaSe	SrSe	BaSe
MgTe	CaTe	SrTe	BaTe

15 loetletud ühendil (välja arvatud MgTe) on ioonide raadiuse suhe 0,41—1,06 piirides. Vastavalt ülaltoodud reeglile see tähendab, et 15 nimetatud ühendit peavad kristalliseeruma võres anturaažiga 6, s. t. NaCl tüüpi võres. Ja tõepoolest, arvukate kristallide röntgenograafiline uurimine näitas, et kõigil neil on kivisoola struktuur. MgTe magneesiumi-iooni ja telluuri-iooni raadiuse suhe on 0,37. Ülaltoodud Goldschmidti reegli järgi MgTe peab kristalliseeruma võres anturaažiga 4, s. t. CsCl tüüpi võres. Ja tõepoolest, on tehtud kindlaks, et MgTe omab CsCl struktuuri.

Ülaltoodud reegel, nagu teisedki kristallokeemilised reeglid, võimaldab mõningaid erandeid. Enamikul juhtudel on neid erandeid siiski siis võimalik ette näha, kui peale tiheda pakkimise printsiibi pöörata tähelepanu „ioonide polaarsuse" õpetusele (sellest on juttu teises köites).

Geomeetrilisi kujutlusi, milledega Goldschmidt pani aluse kristallokeemiale, täiendas 1933. a. prof. Anatoli Fjodorovitš Kapustinski mõnede energeetika järeldustega. Goldschmidti ja Kapustinski poolt püstitatud kristallokeemilised seaduspärasused leidsid laialdast kasutamist akad. Aleksander Jevgenjevitš Fersmani poolt (1934.—1944. aastatel) geokeemia uue suuna loomisel. (Geokeemia on teadus keemiliste elementide ajaloost ja nende levikust maakoores.)

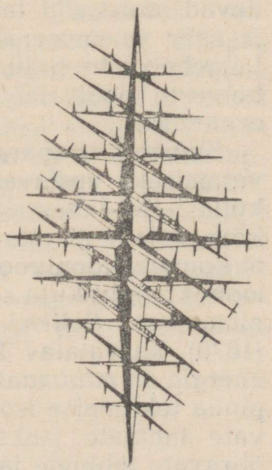
Kaasaegse kristallokeemia meetodid olid samuti aluseks teoreetilise keemia eri suuna uurimisel, mida arendas viimaste aastakümnete kestel prof. Juri Vladimirovitš Hodakov. J. V. Hodakov näitas, et võimalike keemiliste ühendite ja mõnede nende omaduste ennustamiseks võib kasutada printsiipe, milledes anturaaži vormikujundav osa on kooskõlastatud keemilise keskkonna mõju arvestamisega.

§ 120. Kristallide kuju ja kasv.

Sageli võib näha sümmeetrilisi, korrapäraste tahkudega kristalle. Siiski sagedamini leidub kristalle, milledel on ebasümmeetriline kuju — kristalle, milledel ühtede tahkude liigne arenemine viib teiste tahkude sümmeetria kahanemisele. Kristalli väline kuju sõltub tema kasvutingimustest. Siiski, milline ka ei *oleks kristalli väliskuju, tahkudevahelistel nurkadel on antud kristalli tüübi jaoks alati täiesti kindel väärtus.* See kristallisatsiooni põhiseadus — *kristalli tahkude vaheliste nurkade konstantsuse seadus* — tehti esmakordselt kindlaks juba 1669. a. taanlase Stenoni poolt ja avastati ning tõestati 100 aasta pärast uuesti pranstlase Rome poolt.

Kristallide eksperimentaalse uurimise metoodikat täiustas suurel määral E. S. Fjodorov, kes esimesena võttis kasutusele universaalse goniomeetri ja kahe ning kolme pöördeteljega lauakesed. (Olles väljapaistev teoreetik, tegi Fjodorov oma eksperimentaalsete uurimistega palju ära Venemaa mineraalide ja maakide rohkuse väljaselgitamiseks.)

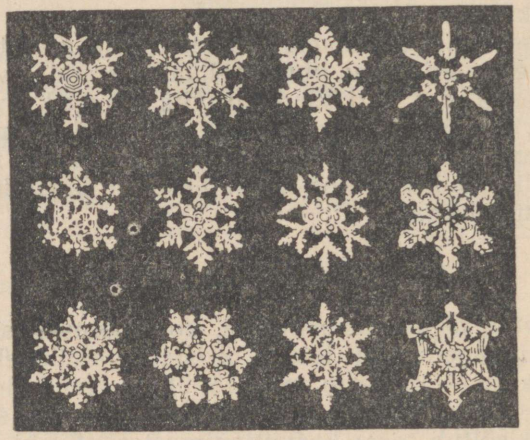
Selleks et saada normaalselt arenenud korrapäraste hulktahukate kujulisi kristalle, tuleb kristallisatsioonil lasta kulgeda aeglaselt ja ettevaatlikult, hoidudes kristalliseeritava lahuse või sulami tugevast ülejahutamisest. Aine vedela faasi tugeval ülejahutamisel kasvavad kristallid keeru-



Joon. 325. Malmi dendriit.

liselt kokkupõimunud niitide või nõelte kujuliseks (selliseid kristalle nimetatakse *dendriitideks* (joon. 325 ja 326).

Lumehelveste ehitus näitab, et veeauruga küllastunud õhu ülejahtumisel lumehelbed kasvavad kiiresti selliste kiirte suunas, mis vastavad jääkristallide heksagonaalsele kujule, ja kõrvalharudena, mis moodustavad nimetatud kiirtega nurga 60°. Kui

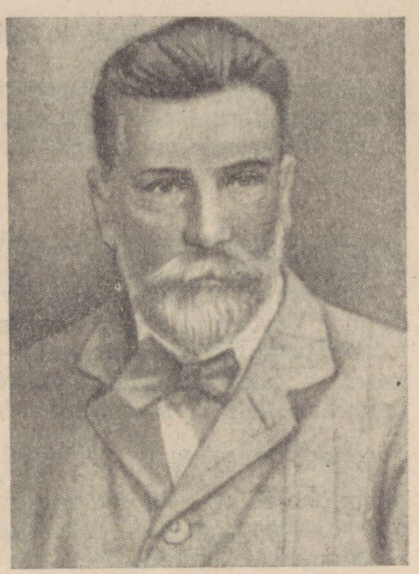


Joon. 326. Lumehelveste kollektsioon.

lumehelves langemisel satub väiksema auru tihedusega või kõrgema temperatuuriga õhukihti, siis kõrvalharude tippudest rebenevad molekulid lahti (toimub sublimatsioon), harud lühenevad ja selle tulemusena võib toimuda tsentraalse osa paksenemine. Lumehelveste kuju ammendamatu mitmekesisus tuleneb lumehelveste poolt läbitavate õhukihtide atmosfäärsete tingimuste erinevusest.

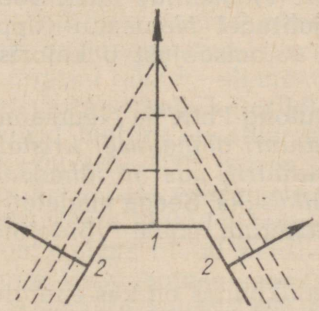
Suurte korrapäraste hulktahukakujuliste monokristallide kasvatamiseks vastavast lahusest riputatakse väike kristalli „idu" küllastatud lahusesse ja aurutatakse lahust väga aeglaselt. Kui kõik vajalikud ettevaatusabinõud on kasutusele võetud selleks, et konvektsioonivoolud ei moonutaks kristalli kasvu, siis kasvava monokristalli kuju sõltub ainult kristalliseeritava aine keemilisest olemusest. Sellisel juhul, nagu tõestas teoreetiliselt G i b b s (1878), kasvatatav kristall saab kuju, mille juures tema *pinnaenergia on minimaalne*. Ühe ja sama aine pinnaenergia (ehk 1 cm^2 pinna tekitamise isotermiline töö) omab üht väärtust kuupi piiravate tahkude jaoks, teist väärtust oktaeedrit (kaheksatahukat) piiravate tahkude jaoks ja kolmandat väärtust mingi teise korrapärase hulktahuka tahkude jaoks jne. Gibbs näitas, et juhindudes

pinnaenergia miinimumi printsiibist ja teades iga liiki tahkude pinnaenergia suurust, on võimalik ette ennustada kasvava kristalli kuju. Analoogilised kujutlused kristallide kasvust leidsid edasiarendamist P. Curie (1885) ja vene teadlase J. V. Vulfi (1895. a.) poolt. Sellepärast nimetatakse sageli mainitud kristalli pinnaenergia miinimumi printsiipi Gibbs-Curie'-Vulfi printsiibiks.



Juri Viktorovitš Vulf (1863—1925).

Kristalli mingisuguse tahu kasvamise kiirus (selle tahu endaga paralleelselt ümberpaigutuse kiirus kristalliseerumisel) on, nagu näitas Vulf, seda suurem, mida suurem on selle tahu pinnaenergia. Vaatleme joonist 327, kus pideva joonega on skemaatiliselt kujutatud kristalli lähte-kontuurid (kusjuures tahu *1* pinnaenergia väärtus on suurem kui tahkude *2* oma). On kerge aru saada, et kristalli kasvamisel arenevad suuremal määral aeglaselt kasvavad tahud, mida iseloomustab väike pinnaenergia, kuna kiirelt kasvavad tahud „kasvavad kinni". Tuginedes sellele esitas Vulf järgmise viisi kristalli normaalse kuju leidmiseks: tahkude normaalidele, mis on tõmmatud ühest punktist, paigutatakse sellest punktist lähtuvad lõigud, mis on võrdelised tahkude pinnaenergiaga; läbi saadud lõikude otste tõmmatakse normaalidele risttasapinnad. Üksteisega lõikumisel moodustavad need tasapinnad punkti ümber hulktahuka, mis osutub Gibbs-Curie-Vulfi printsiibi järgi normaalse kujuga kristalliks.



Joon. 327. Kristalli kasvamisel arenevad suuremal määral aeglaselt kasvavad tahud.

§ 121. Tahkete kehade soojusmahtuvus.

Energia ühtlasel jaotusel vabadusastmete järgi peab tahke keha siseenergia see osa, mis sõltub temperatuurist, olema vastavalt § 92 toodud selgitustele võrdne järgmise avaldusega:

$$U = \frac{i}{2} kNT, \tag{1}$$

kus N on osakeste arv, k Boltzmanni konstant ja i vabadusastmete arv.

Iga osake, mis asub kristallvõre sõlmes, on võimeline võnkuma kolmes vastastikku risti olevas suunas. Kuna iga võnkumist iseloomustab kaks vabadusastet, siis järelikult iga tahke keha osakesel on kuus vabadusastet. Seega *gramm-aatomi soojusmahtuvus (aatomsoojus)* C_v *peab igal tahkes olekus oleval lihtainel olema võrdne 6 kaloriga* ($\frac{6}{2} kN = 3R \approx 6cal$) ja ühe *gramm-molekuli keemilise liitaine soojusmahtuvus (moolsoojus)* C_v *peab võrduma 6 n kaloriga, kus n on aatomite arv molekulis.*

Enamikul tahketel keemilistel lihtainetel on harilikul temperatuuril aatomsoojus (C_v) tõepoolest 6 kalori lähedal. See fakt on füüsikutele tuntud juba 135 aastat ja kannab Dulong-Petit' seaduse nimetust.

Tahkete keemiliste ühendite kohta on kehtiv seadus, mis avastati 1831. a. Neumanni ja hiljem (1864. a.) hoolikalt kontrolliti Koppi poolt: *tahkes olekus oleva keemilise ühendi moolsoojus on võrdne selle ühendi koostises olevate elementide aatomsoojuste summaga.* Siiski tuleb paljudel juhtudel Neumann-Koppi seaduse rakendamisel lugeda elemendi aatomsoojust 6 kalorist erinevaks.

Madalatel temperatuuridel ei osutu Dulong-Petit' ja Neumann-Koppi seadused täiesti õigeiks. *Temperatuuri alanemisel kristallide soojusmahtuvus väheneb ja temperatuuril, mis on lähedane absoluutsele nullile, muutub ta kaduv-väikeseks.* Seega madalatel temperatuuridel ei ole tahke keha siseenergia enam võrdeline absoluutse temperatuuriga T.

Järelikult madalate temperatuuride valdkonnas on kas energia ühtlase vabadusastmete järgi jaotuse printsiip ebaõige või muutuvad (vähenevad) vabadusastmete arvud. Mõlemad need võimalused kutsuvad esile klassikalise statistika revideerimise vajaduse. See revideerimine viidi esmakordselt läbi Einsteini poolt 1907. a. Planck'i kvantteooria alusel ja hiljem paljude teiste autorite poolt. Suurt edu saavutas Debye, kes tegi muuhulgas kindlaks, et äärmiselt madalatel temperatuuridel tahke keha siseenergia on võrdeline temperatuuri T neljanda astmega, kusjuures temperatuur T on loetud absoluutsest nullist, s. o.

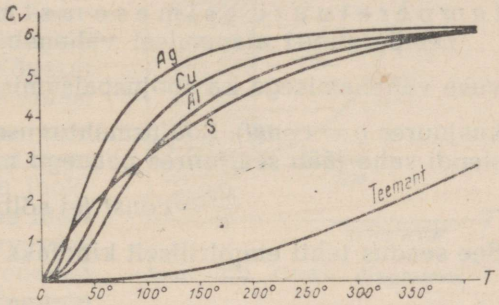
$$U = aT^4, \tag{2}$$

kus a on konstantne kordaja.

Soojusmahtuvuse C_v väljaarvutamiseks tuleb leida elementaarselt väikesele temperatuuri juurdekasvule dT vastav siseenergia juurdekasv dU ja jagada dU dT-ga; saame:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 4aT^3. \tag{3}$$

Seega äärmiselt madalatel temperatuuridel soojusmahtuvus C_v on võrdeline absoluutse temperatuuri kuubiga. Siit näeme, et absoluutse nulli lähedal on tahke aine soojusmahtuvus äärmiselt väike; seetõttu tahkele kehale kõige väiksemagi soojushulga lisamine kutsub siin esile keha temperatuuri väga suure tõusu.



Joon. 328. Soojusmahtuvuste olenevus temperatuurist.

Debye kuupide seadus [valem (3)] annab soojusmahtuvuse sõltuvust temperatuurist õigesti edasi ainult väga madalatel temperatuuridel, s. o. temperatuuridel, mis on lähedased absoluutsele nullile. Nernst'i uurimused näitasid, et soojusmahtuvuse sõltuvus temperatuurist on keeruline. Joonisel 328 on toodud mõnede elementide jaoks kõverad $C_v = f(T)$, mis on joonestatud Nernst'i katsete andmetel. Ordinaatteljele on märgitud tahkete elementide aatomsoojused (iga jaotus sellel teljel vastab ühele kalorile) ja abstsissteljele on märgitud temperatuurid, loetuna absoluutsest nullist. Me näeme, et ainult absoluutse skaala 250—300° juures, s. t. ainult 0° C ligiduses läheneb aatomsoojus sellele väärtusele (6 *cal*), mis tal oleks pidanud muutumatult olema kõikidel temperatuuridel, kui kõikide temperatuuride kohta oleks olnud kehtiv Maxwelli energia ühtlase vabadusastmete järgi jaotuse seadus.

Tahkete kehade soojusmahtuvuse teoreetilisel uurimisel saavutas suurt edu prof. Vassili Vassiljevitš Tarassov (1945—1950. aastatel). Tarassov tegi kindlaks, et soojusmahtuvuse temperatuurilised muutused madalatel temperatuuridel sõltuvad oluliselt kristalli dünaamiliselt anisotroopsetest omadustest. Ja nimelt, kihilise ehitusega kristallidel (kus ühes tasapinnas olevad osakesed on seotud omavahel suurte tõmbejõududega; nende osakeste ja naaberkihtide osakeste vastastikune mõju on aga võrdlemisi nõrk) on soojusmahtuvuse sõltuvus temperatuurist

teistsugune kui tavalise ehitusega kehadel. Äärmiselt madalatel temperatuuridel saadakse kihilise struktuuriga kehade juures Tarassovi teooria järgi Debye kuupide seaduse asemel soojusmahtuvuse võrdelisus absoluutse temperatuuri ruuduga. Tarassovi ruutude seadus osutus õigeks grafiidi, galliumi jt. kehade juures. Tahketel kehadel, milledel domineerib osakeste ahelseos, nagu näiteks seleeni kristallides (keerdahelad), HF, BiO_3, $MgSiO_3$ ja klaasitaolise $NaSiO_3$ kristallides, saadakse Tarassovi tulemuste järgi soojusmahtuvuse sõltuvuseks temperatuurist, mis on viidud absoluutse nulli lähedale, võrdeliselt soojusmahtuvuse temperatuuri esimese astmega.

Temperatuuri alanemisel väheneb paralleelselt soojusmahtuvuse vähenemisega ka soojuspaisumise koefitsient α ($\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$, kusjuures $\varrho = const$). Soojusmahtuvuse ja soojuspaisumise koefitsiendi suhe jääb sealjuures peaaegu muutumatuks:

$$\frac{C_v}{\alpha} = const \text{ (ei sõltu } T\text{-st)}.$$

See seadus tehti empiiriliselt kindlaks Grüneiseni poolt.

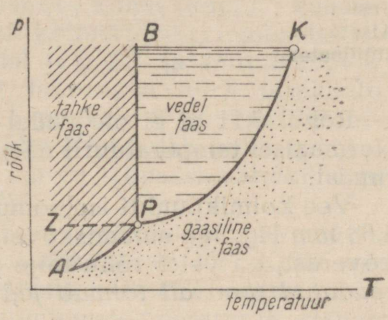
§ 122. Tahkete kehade sublimatsioon. Kolmikpunkt. Lahuste kristallisatsioon.

On palju tahkeid kristallilisi aineid, mis lahtise õhu käes kiiremini või aeglasemalt lenduvad. Üldtuntud näideteks sellest on naftaliin ja kamper. Sellised omadused on ka jääl. Kui märg pesu riputada külma kätte, siis ta alguses jäätub, mõne aja pärast aga kuivab — jää muutub auruks. Naftaliini, kamperi ja jää auru rõhk on tahke aine kohal kergesti mõõdetav. Teisest küljest, paljud tahked ained ei lendu märgatavalt ja nende auru rõhk ei ole mõõdetav; kuid siiski on meil täielik alus oletada, et igas tahkes aines molekulide või aatomite kaootiline liikumine viib selleni, et aeg-ajalt kord üks, kord teine aatom rebeneb keha pinnalt lahti ja lendab teda ümbritsevasse gaasilisse atmosfääri (aga mõnikord ka, vastupidi, püütakse ta tahke keha poolt sellest gaasilisest atmosfäärist kinni).

Tahke aine aurustumine kannab *sublimatsiooni*[1] nime. Sublimatsiooni seadused on täiesti analoogilised vedeliku aurumise seadustega. Sublimatsioonisoojus vastab sulamissoojuse ja aurumissoojuse summale. Samuti nagu aurumisprotsessile vastab vastupidine protsess — auru kondenseerumine vedelikuks, vastab ka sublimatsioonile vastandprotsess — auru kondenseerumine tahkeks aineks.

[1] Ladinakeelsest sõnast *sublimis* — kõrgele tõstetud.

§ 112 selgitati vedelikust ja aurust koosneva süsteemi liikuva tasakaalu molekulaarset mehhanismi. Sellise süsteemi tasakaal on võimalik mitmesuguste temperatuuride juures, mis siiski ei tohi ületada kriitilist temperatuuri. Mida kõrgem on temperatuur, seda suurem on küllastava auru rõhk ning tihedus ja seega ka ajaühiku jooksul läbi vedelikku või gaasi piirava pinna ühiku lendavate molekulide arv. Märkides teatud aine jaoks abstsissteljele temperatuuri T ja ordinaatteljele rõhu p (joon. 329), saame selliste punktide geomeetrilise koha, mis vastavad vedeliku ja auru tasakaalule, kõvera PK kujul, kusjuures K on kriitiline punkt. Kõverat PK nimetatakse *aurumiskõveraks.*



Joon. 329. Oleku diagramm.

Vaatleme ühe ja sama aine tahke ja vedela faasi vahelist tasakaalu (siin jällegi ajaühiku jooksul tahkest faasist vedelasse faasi üleminevate molekulide arv võrdub sama aja jooksul vedelast faasist tahkesse faasi üleminevate molekulide arvuga). Vedela ja tahke faasi tasakaalu punktide geomeetriliseks kohaks on kõver BP, mida nimetatakse *sulamiskõveraks.* Kuna selleks, et temperatuur veidi muutuks, peab rõhku tugevasti muutma, siis sulamiskõver tõuseb peaaegu vertikaalselt üles. Aurumiskõver ja sulamiskõver puutuvad kokku punktis P.

Kõver AP on *sublimatsioonikõver,* s. t. tahkele ja aurulisele faasile vastavate punktide geomeetriline koht. Ta läheb läbi punkti P. Punkt P on ülaltoodud kõverate ainuke ühine punkt; teda nimetatakse *kolmikpunktiks,* sest et ainult siin on meil tegemist kolme faasi tasakaaluga. Mis puutub punktiiriga kujutatud kõverasse PZ, mis on aurumiskõvera PK jätkuks, siis see vastab ülejahtunud vedeliku ja tema auru vähepüsivale tasakaalule.

Kuna sulamiskõver on peaaegu vertikaalne, siis on silmanähtav, et *kolmikpunkti temperatuur erineb vähe normaalrõhule vastavast sulamistemperatuurist.* Vedelate ja tahkete faaside eriruumalad erinevad kolmikpunktis samuti väga vähe hariliku sulamistemperatuuri ruumaladest. Kõige iseloomustavamaks osutub kolmikpunkti rõhk — küllastatud auru rõhk vedelate ja tahkete faaside kohal nende tasakaalu korral. Nagu toodud tabelist nähtub, *kolmikpunkti rõhk on enamikul juhtudel märgatavalt madalam atmosfääri rõhust.*

Süsihappe kolmikpunkt asub atmosfääri rõhust kõrgemal:

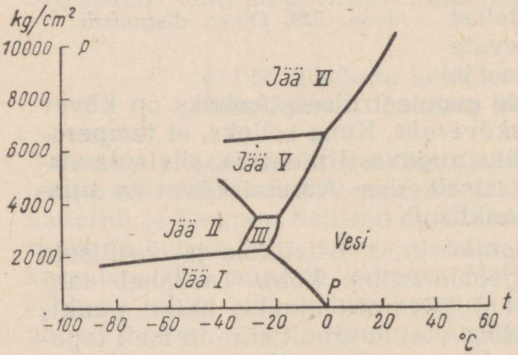
$$t_k = -56{,}6^\circ\ C \text{ ja } p_k = 5{,}11\ at.$$

Mõnede ainete kolmikpunktid.

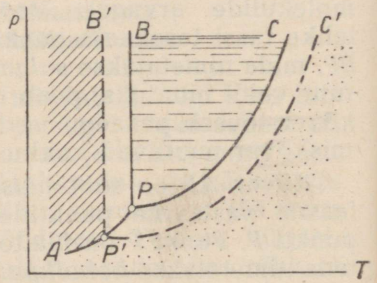
Aine	Absoluutne temperatuur kolmikpunktis (° *K*)	Rõhk kolmikpunktis (*at*)
Süsihape	216,5	5,11
Süsinikoksüüd	66,1	≈0,12
Ammoniaak	195,4	$6 \cdot 10^{-2}$
Vääveldioksüüd	204,4	$2{,}15 \cdot 10^{-2}$
Vesi	273,1	$6{,}02 \cdot 10^{-3}$
Atsetoon	178,9	$2{,}2 \cdot 10^{-5}$
Etüüleeter	152,9	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$

Rõhul 5,11 *at* ei ole vedel süsihape võimeline eksisteerima. Normaalsel temperatuuril näeme süsihappe „kuiva jää" sublimeerumist.

Vee kolmikpunkti iseloomustab temperatuur 0,0075° C ja rõhk 4,58 *mm* Hg. Jää sulamiskõver, erinevalt enamiku ainete sulamiskõverast, on veidi rõhu telje poole kaldu. See tähendab, et *suurendatud rõhu all toimub jää sulamine palju madalamal tempe-*



Joon. 330. H_2O oleku diagramm.



Joon. 331. Puhta aine (*P*) ja lahuse (*P'*) kolmikpunktide asukohtade võrdlus.

ratuuril; rõhul 1500 *at* sulab jää temperatuuril — 14,1° C. Joonisel 330, kus on esitatud vee ja jää oleku diagramm, ei ole aurumiskõver kujutatud, sest et alates punktist *P*, (rõhu antud mastaabi korral) ulatub ta vaevalt abstsissteljest kõrgemale.

On olemas mitu jää *kristallilist modifikatsiooni.* Vesi ja kristallilised modifikatsioonid jää I ja jää III võivad olla tasakaalus rõhul 2175 *at* ja temperatuuril —22° C. Sulamiskõveral on murdekohad, mis vastavad jää erinevatele kristallilistele modifikatsioonidele. Rõhul üle 2175 *at* sulamiskõvera kallak muutub rõhu telje suhtes vastassuunaliseks, nagu see esineb kõikidel normaal-

setel ainetel. See vastab sulamistemperatuuri tõusule rõhu suurendamisel. Rõhul 20 000 *at* tõuseb jää sulamistemperatuur kuni +80° *C* (s. o. võib olla olemas ka „kuuma jääd").

Kui võrrelda mingi keemiliselt puhta aine kolmikpunkti asendit lahuse (sellessamas aines mingi teise aine lahuse) kolmikpunkti asendiga, siis osutub, et lahuse kolmikpunkt on alati nihkunud väiksemate temperatuuride ja rõhkude poole. See fakt on seotud auru rõhu vähenemisega lahuse kohal (Raoult'i seadus § 113]. Joonisel 331 on *P* puhta lahusti kolmikpunkt; temas ühinevad sublimatsioonikõver *AP*, sulamiskõver *BP* ja aurumiskõver *CP*. Olgu lahuse aurumiskõver (s. t. lahuse ja auru tasakaalu kõver) näiteks *C'P'*. Seega ta kohtub punktis *P'* sublimatsioonikõveraga. Siit järeldub, et lahuse jaoks *P'* etendab kolmikpunkti osa; siin on tasakaalus lahus, tema aur ja lahusest väljakülmuv puhas lahusti (vesilahuste puhul jää[1]).

Siit järeldub edasi, et jää ja lahuse tasakaal peab vastama kõverale, mis läbib punkti *P'*, s. t. teatud kõverale *B'P'*. Kuna aga see kõver asub kõverast *BP* vasemal, siis näeme, et antud rõhul lahuse sulamistemperatuur (ehk külmumistemperatuur) alaneb võrreldes puhta lahusti sulamistemperatuuriga (külmumistemperatuuriga). Seega lahustatava aine juuresolek nagu segab külmumist (näiteks merevesi külmub palju madalamal temperatuuril kui mage vesi).

Nõrkade lahuste kohta leidis Raoult 1884. a. järgmise seaduse: *lahuse külmumistäpi alanemine on võrdeline lahuse ühes ruumalaühikus sisalduvate lahustatava aine molekulide arvuga ja ei sõltu selle aine keemilisest olemusest.* Lahuste külmumistäpi alanemisel põhineb külmutussegude valmistamine. Nii näiteks, lisades peeneksjahvatatud jääle küllaldase koguse keedusoola, on võimalik segu temperatuuri madaldada isegi kuni —21°.

Tabel 6

Mõnede kristalliliste ainete sublimatsioonisoojus 18° C juures.

Aine	r kcal/mool	Aine	r kcal/mool
	Metallid		
Naatrium	25,9	Vask	81,2
Tsink	27,4	Raud	94
Seatina	47,5	Plaatina	127
Alumiinium	55	Molübdeen	160
Hõbe	68	Volfram	210

[1] Enamiku lahuste külmumisel eraldunud kristallid koosnevad puhtast lahustist.

Ioonsed kristallid

Kaaliumkloriid	52	Baariumoksüüd	93
Naatriumkloriid	57,1	Kaltsiumoksüüd	123
Hõbekloriid	56,8	Alumiiniumoksüüd	120

Kovalentsed kristallid

Teemant	170	Ränikarbiid	283
Räni	85	Ränidioksüüd	405

Molekulaarsed kristallid

Jää	12	Kloor	6,0
Süsihape	8,2	Hapnik	1,7
Ammoniaak	6,3	Lämmastik	1,5

Nõrkade vesilahuste külmumistäpi alanemine on Raoult'i seaduse järgi määratud valemiga

$$\Delta T = 18{,}4\,\frac{g}{M}, \qquad (4)$$

kus g on 100 grammis vees lahustunud aine grammide arv ja M lahustatud aine molekulkaal.

Konstanti Raoult'i seaduses (vee jaoks 18,4) nimetatakse *krüoskoopiliseks* konstandiks. Nõrkades lahustes on krüoskoopiline konstant: bensoolis 49, nitrobensoolis 70, bensoolfenoolis 95 ja etüleenbromiidis 125.

Tabelis 6 on toodud mõnede tahkete kehade sublimatsioonisoojused kilokalorites 1 gramm-aatomi või gramm-molekuli kohta. Näeme, et sublimatsioonisoojus on eriti suur raskeltsulavatel metallidel, aga isegi sellistel kristallidel, kus kristallvõre sõlmedesse paigutatud osakesed on seotud keemiliste jõududega: ioonide vahel mõjuvate *elektrovalentsete* ja neutraalsete aatomite vahel mõjuvate niinimetatud *kovalentsete* jõududega, (teemant, räni jt.). Kui kristallvõre sõlmedesse on paigutatud molekulid, siis sublimatsioonisoojus on tunduvalt väiksem.

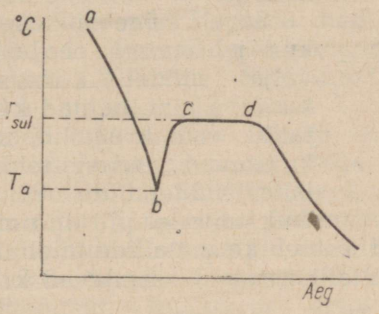
§ 123. Sulamisdiagrammid.

Eelmises paragrahvis selgitatud Raoult'i seadusel põhineb väga tähtis sulamite *füüsikalis-keemilise analüüsi meetod.* Mõõtmise teel määratakse sulamite kristallisatsioonitemperatuurid seoses sulami koostisega ja mõõtmistulemused kujutatakse graafiliselt niinimetatud *sulamisdiagrammide* kujul.

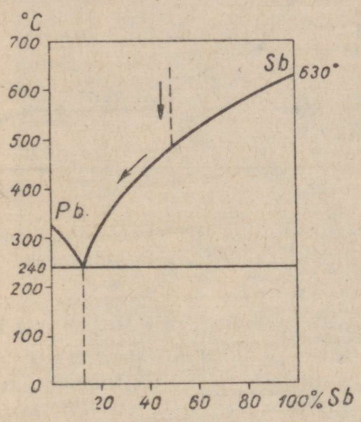
Sulami kristallisatsioonitemperatuuri määramiseks jälgitakse sulami temperatuuri langemist aeglasel jahtumisel. Ka need vaatlused kujutatakse graafiliselt, kandes abstsissteljele aja ja ordinaatteljele temperatuuri. Saadud kõveraid nimetatakse *jahtumiskõverateks.* Joonisel 332 on näidatud tüüpilise jahtumiskõvera kuju. Kõvera osa *ab* vastab vedela sulami jahtumisele. Tempera-

tuuril T_{sul} oleks pidanud algama kristallisatsioon, kuid peaaegu alati ilmneb sulami teatud ülejahtumine (joonisel 332 — kuni temperatuurini T_a). Ajamomendil, mis vastab punktile *b*, algab kristallisatsioon ja temperatuur tõuseb kiiresti tagasi T_{sul} tasemele, kus ta püsib kuni kristalliseerumise lõppemiseni (osa *cd*).

Ühe sulamisdiagrammi (näiteks süsteemi seatina-antimon sulamisdiagrammi) konstrueerimiseks saadakse rida erineva koostisega sulamite jahtumiskõveraid (puhtal seatinal, sulamil 5%-lise, 10%-lise jne. antimoni sisaldusega kuni puhta antimonini). Leitud kristallisatsioonitemperatuurid kantakse ordinaatteljele,



Joon. 332. Jahtumiskõver.



Joon. 333. Seatina ja antimoni sulami sulamisdiagramm.

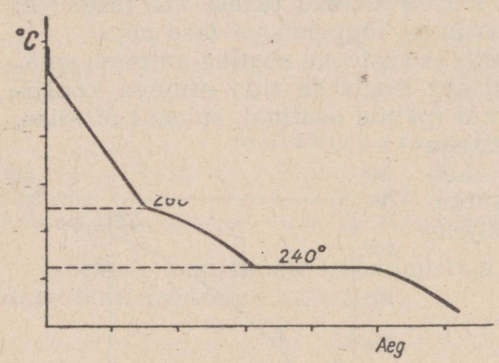
sulami protsendiline koostis (võetud sulami kontsentratsioon) aga abstsisseteljele.

Joonisel 333 on näidatud seatina-antimoni sulami sulamisdiagramm. Puhta seatina kristallisatsioonitemperatuur (ehk sulamistemperatuur) on 327° *C*. Antimoni lisamine alandab seatina kristallisatsioonitemperatuuri peaaegu võrdeliselt antimoni kontsentratsiooniga. Puhta antimoni kristallisatsioonitemperatuur võrdub 630° *C*. Seatina lisamine antimonile alandab antimoni kristallisatsioonitemperatuuri. Sulami teatud koostise juures (ligikaudu 14% antimoni) antimoni lisandusega seatina kristallisatsioonitemperatuur on võrdne seatina lisandusega antimoni kristallisatsioonitemperatuuriga (240° *C*). Sellise koostisega sulam kristalliseerub peenikeste seatina ja antimoni kristallikeste segu kujul ja seda nimetatakse *eutektikaks*[1].

Joonisel 334 on näidatud üks seatina-antimoni sulami (10% Sb) jahtumiskõveratest. Temperatuuril 260° *C* algab seatina kristallikeste väljalangemine ja järelejäänud sulam rikastub antimoniga.

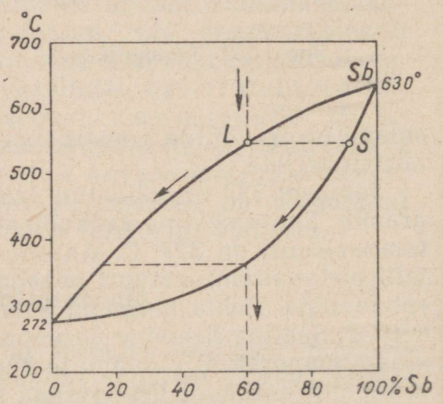
[1] Kreekakeelsest sõnast *eu* — h ä s t i ja *tekstos* — s u l a n u d.

Kui seatina järkjärgulise kristallisatsiooni tulemusena sulami koostis vastab eutektikale, siis kristalliseerub kogu sulam. Sellest tingituna on jahtumiskõveral 240° *C* juures sirgjooneline osa. Kui algsulam sisaldab antimoni rohkem, kui see on vastav eutektikale, siis langevad jahtumisel välja antimoni kristallikesed ja järelejäänud sulam rikastub järkjärgult seatinaga. Rikastumine kestab seni, kuni on saavutatud eutektika koostis.



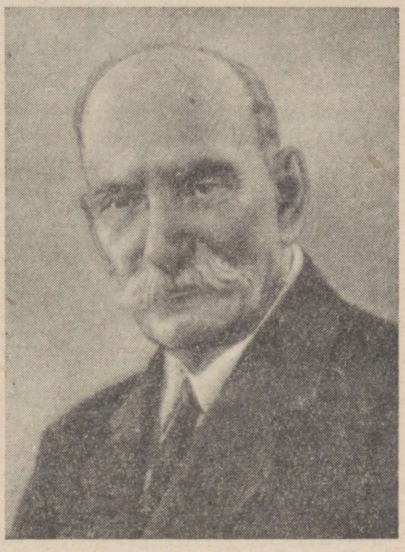
Joon. 334. 10% antimonilisandiga seatina jahtumiskõver.

Sageli esineb juhuseid, kus jahtumisel ei lange välja sulami koostisse kuuluva aine puhtad kristallid, vaid kristallid, mis kujutavad endast tahket lahust. Metallide võime moodustada tahkeid lahuseid on enamikul juhtudel piiratud mõningate protsentidega, kuid siiski esineb ka metallide täielikku lahustumist tahkes olekus: ühe metalli aatomid asendavad kristallvõres teise metalli aatomeid igas proportsioonis. Tahkes olekus täielikule lahustumisele vastav lahustuvusdiagramm on toodud joonisel 335. Ülemine kõver määrab siin sulami kristallisatsioonitemperatuuri ja sulami koostise vahelise sõltuvuse. Alumine kõver annab tahkete lahuste kristallisatsioonitemperatuuri ja koostise vahelise sõltuvuse. Kui me võtame näiteks sulami, mis sisaldab 40% antimoni ja 60% vismutit ja laseme teda aeglaselt jahtuda, siis temperatuuril umbes 530° hakkavad välja langema kristallikesed, mis kujutavad endast tahket lahust — 8% vismuti lahust antimonis. (Selle tahke lahuse koostis on joonisel 335 määratud punkti *S* abstsissiga, kuna vedela faasi koostis samal temperatuuril on määratud punkti *L* abstsissiga.) Tahkest lahusest kristallikeste väljalangemisel rikastub järele-



Joon. 335. Vismuti ja antimoni sulami sulamisdiagramm.

jäänud sulam tahke lahuse vähese vismuti sisalduse tõttu järk-järgult vismutiga. Seoses sellega kristallisatsioonitemperatuur alaneb; punkt, mis iseloomustab sulami olekut, liigub ülemist kõverat mööda allapoole. Temperatuuri alanemisel väljalangevate kristallikeste koostis muutub vastavalt alumise kõvera punktide abstsissidele. Kui kristallisatsioonitemperatuur alaneb niivõrd, et tahke lahuse koostis on selline nagu sulami algkoostis, siis kogu lahus kristalliseerub. Viimastel aastakümnetel on füüsikalis-keemilise analüüsi meetodit laiendatud mineraalidele. Seda meetodit on sügavalt põhjendanud akad. Nikolai Semjonovitš Kurnakov ja tema koolkond oma teoreetiliste ja eksperimentaalsete uurimustega.



Nikolai Semjonovitš Kurnakov (1872—1942).

Sulamite füüsikalis-keemiline ja röntgenoloogiline uurimine näitas, et paljud metallid moodustavad *intermetallilisi* ühendeid, kusjuures selliste ühendite kristalliline ehitus allub mõnedele lihtsatele reeglitele. Nii näiteks kui vasele lisada niipalju tsinki, et tsingi hulga atomaarne sisaldus ei ületa 36%, esineb tsink vasekristallide koostises tahke lahusena. Tsingi sisaldumisel 45 kuni 48% moodustub sulam, mis kristalliseerub CsCl tüüpi võres, kusjuures vase aatomid paiknevad kuubi tippudes, tsingi aatomid aga kuubi keskpunktides. Seda sulamit nimetatakse β-messingiks (valgevaseks).

Kui tsingi atomaarne kontsentratsioon ulatub 62—68%, siis moodustub niinimetatud γ-messing, mille kristalliline ehitus on võrdlemisi keeruline (iga algrakk koosneb 52 aatomist).

79—85% tsingisisalduse juures moodustub teine intermetalliline ühend, mis kristalliseerub lihtsaimas (heksagonaalses) võres. Lõpuks, tsingisisaldusel üle 98% tekib vase tahke lahus tsingi kristallides.

Täiesti samasuguses järjekorras tekivad intermetallilised ühendid hõbeda ja tsingi, aga samuti ka vase ja tina või vase ja alumiiniumi jt. sulamites.

Kui võrrelda tingimusi, milledes tekib β-faas (analoogiline β-messingile), siis ilmneb, et tema tekkimise tingimuseks on

metalli vabade elektronide arvu ja metalli aatomite arvu suhte võrdumine arvuga $\frac{3}{2}$. Selle seaduse püstitas 1926. a. Hume-Rosary. Allpooltoodud tabel selgitab Hume-Rosary reeglit (tuleb märkida, et „ülemineku metallide" — raua, koobalti ja nikli valentsi tuleb lugeda praktiliselt võrdseks nulliga).

β- faasi koostis.

	Valentselektronide arv	Elektronide arvu ja aatomite arvu suhe
CuZn	1 + 2	3 : 2
AgZn	1 + 2	3 : 2
Cu_3Al	3 · 1 + 3	6 : 4 = 3 : 2
Cu_5Sn	5 · 1 + 4	9 : 6 = 3 : 2
FeAl	0 · 1 + 3	3 : 2

Analoogiliselt tekib γ-faas siis, kui metalli elektronide arvu ja aatomite arvu suhe on 21 : 13. See nähtub järgmistest näidetest:

γ- faasi koostis.

	Valentselektronide arv	Elektronide arvu ja aatomite arvu suhe
Cu_5Zn_8	5 · 1 + 8 · 2	21 : 13
Cu_9Al_4	9 · 1 + 4 · 3	21 : 13
$Cu_{31}Sn_8$	31 · 1 + 8 · 4	21 : 13
Fe_5Zn_{21}	5 · 0 + 21 · 2	42 : 26 = 21 : 13
Co_5Zn_{21}	5 · 0 + 21 · 2	42 : 26 = 21 : 13

Tiheda paigutusega heksagonaalses võres tekib kristalliline faas elektron-atomaarsel kontsentratsioonil $\frac{7}{4}$, mis vastab $CuZn_3$, $AgZn_3$, Cu_3Sn, Au_5Al_3 jt. koostisele.

§ 124. Sidejõud kristallides.

Molekulaarsete vastastikuse mõju jõudude üle gaasides me võime peamiselt otsustada gaasi tõeliste omaduste ideaalse gaasi seadustest kõrvalekaldumise iseloomu ja suuruse järgi. Sellise piiratud materjali alusel on raske avada molekulaarsete jõudude maailma olemust. Mis puutub vedelikesse, siis nende ehitust on selleks liiga vähe uuritud, et nende omadustest võiks teha kindlaid järeldusi osakeste vastastikuse mõju seaduste kohta. Seevastu kristalle on aga tänu röntgenikiirte rakendamisele viimase 3—4 aastakümne kestel uuritud väga üksikasjaliselt. Seetõttu on meie teadmised osakeste vastastikuse mõju jõududest kõige rohkem rajatud kristallofüüsika tulemustele.

Millised tahkete kehade füüsikalised omadused võivad anda ettekujutuse kristalliosakeste sidejõududest? Näib, nagu tuleb siin

esimesele kohale asetada keha tugevuse suurus. Kuid keha tugevus, nagu on näidatud § 52, on määratud kahe teise suurusega: osakeste vastupanuga rebenemisele ja liugetakistusega, kusjuures viimane sõltub väga suurel määral kristalliterakeste vastastikusest asendist ja suurusest. Metallide tugevus kasvab tunduvalt nende korduval plastilisel deformeerimisel („neetimisel" — § 50). Rabedate kehade tugevus sõltub suurel määral nende pinnal olevatest mõradest (§ 52). Kõigil neil põhjustel ei või keha tugevuse suurus olla kristallvõre sõlmedes paiknevate osakeste vahel mõjuvate jõudude vahetuks kriteeriumiks.

Kui tuletada meelde seda, mis § 52 on öeldud kõvaduse mõõtmise tinglikkuse kohta, siis tuleb tunnistada, et ka kõvadus võib anda ainult kaudse ettekujutuse seosjõududest kristallides.

Kõige kindlamaid tulemusi nende jõudude kohta võib saada mõnede lihtsate arvutuste abil mahtelastsusmooduli väärtusest ja temale vastupidise suuruse — kokkusurutavuse — väärtusest.

Õige iseloomustuse osakeste sidemetest kristallides annab sublimatsioonisoojus kõige madalamal võimalikul temperatuuril, mille korral kogu see soojus läheb osakeste vastastikuse mõju ületamiseks ja molekulidevahelist mõju ei komplitseeri temperatuursed nähtused. Kui kristallvõre sõlmedes ei paikne molekulid, vaid ioonid, siis nende vastastikuse mõju tõeline energia — *kristalli energia* — on arusaadavalt sublimatsioonisoojusest sellise energiahulga võrra suurem, mis kulub aurumolekuli dissotsieerimiseks ioonideks.

Kristallide kõrvutamine nende ehituse, energia ja kokkusurutavuse järgi näitab, et on olemas nagu mitu sidejõudude „liiki":

1) ioonide vastastikune mõju Coulomb'i elektrilaengute seaduse järgi;

2) keemiline valentsside neutraalsete aatomite vahel;

3) molekulide vastastikune mõju, mis on tingitud nende asümmeetrilisest elektrilisest ehitusest (dipoolne vastastikune mõju);

4) osakeste tõmbumine, mis on tingitud nende vastastikusest mõjust nende sisemises ehituses (dispersne efekt);

5) igasuguste osakeste — molekulide, aatomite, ioonide — vastastikune tõukumine, mis põhjustab kujutluse, et need osakesed on üksteise suhtes läbitungimatud;

6) eriline osakeste seose liik metallides, kus samanimelise laenguga positiivsed metalliioonid tõmbuvad nende vahel hõljuvate elektronide poole.

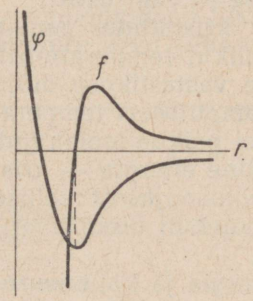
Iga aatom või ioon kujutab endast keerulist elektrilist süsteemi, milles tuumaga seotud elektronide käitumine on määratud teoreetilise füüsika uusima haru — kvantmehhaanika — seadustega. Osakestevahelise vastastikuse mõju väljaarvutamiseks kvantmehhaanika võrrandite järgi võib vastastikust mõju jaotada „sidemete liikideks" mitmeti; see on teatud määral kunstlik.

Määratu suurel hulgal kristalsetel ainetel, mis kuuluvad kivimite koostisse, on iseloomulik ioonide ehitus. Ioonidest koosnevad kristallid paistavad välja oma väikese kokkusurutavusega, suure kõvadusega ja rabedusega. Nende kristallide suur elastsus ja kõvadus, kõrge sulamistemperatuur ja suur sublimatsioonienergia seletub tihedal pakkimisel ioone siduvate elektrostaatiliste jõudude püsivusega. Mida suurem on ioonide laeng, s. t. mida suurem on nende valents, ja mida väiksem on nende raadius, seda kõvem on kristall, seda kõrgem on tema sulamistemperatuur ja seda suurem on tema sublimatsioonienergia.

Ioonide vastastikuse mõju energiat võib määrata valemiga:

$$\varphi = \pm \frac{e_+ e_-}{r} + \frac{A}{r^9}. \qquad (5)$$

Esimene liige on siin erinimeliste ioonide elektrilise tõmbumise (märk miinus) või samanimeliste ioonide tõukumise (märk pluss) „kulooniline" energia; e_+ ja e_- on ioonide elektrilaengud ja r ioonide keskpunktide vaheline kaugus. Teine liige kujutab endast ioonide elektronkihtide vastastikuse tõukumise energiat.



Joon. 336. Isenimeliste ioonide potentsiaalse energia (φ) ja tõmbejõu (f) sõltuvus kaugusest r.

Joonisel 336 on näidatud valemi (5) järgi toimuv isenimeliste ioonide potentsiaalse energia muutumine sõltuvalt kaugusest. Ioonide tasakaaluasendile vastab φ miinimum. Samal joonisel on näidatud ka tõmbejõudude muutumine sõltuvalt kaugusest: $f = \frac{d\varphi}{dr}$.

Valem (5) etendas tähtsat osa kristallide õpetuse arenemisel. Lähtudes nimetatud valemist, kuid jättes algul tõukumist väljendavas liikmes lahtiseks r astendaja küsimuse, seletas Grüneisen (1912. a.) tahkete kehade mõningaid omadusi. Seejuures elastsusmooduli väljaarvutamisel ilmneski, et *osakeste tõukumisenergia on pöördvõrdeline ligikaudu kauguse üheksanda astmega.* Andekas füüsik Sergei Anatoljevitš Boguslavski (1915. a.) kasutas valemit (5) kristallides toimuva soojusliikumise iseloomu analüüsimisel. Boguslavski meetodit arendas detailselt edasi Born.

Ioonidest koosnevate kristallvõrede energia väljaarvutamiseks liidetakse iga kristalliosakeste paari kohta võrrandid (5). Selline tähtsaimate kristallvõrede süsteemide energia väljaarvutamise viis rakendati ellu Madelung'i jt. poolt.

Kui U on kristalli summaarne energia ja N molekulide arv, siis kristallis ühe molekuli kohta tulev energia avaldub järgmiselt:

$$\frac{U}{N} = -\alpha \frac{n_+ n_- e^2}{r_0} + \beta \frac{A}{r_0^9}.$$

n_+ ja n_- on siin kristalli moodustavate positiivsete ja negatiivsete ioonide valents, e elektroni laeng, r_0 väikseim kaugus kahe isenimelise iooni vahel ja α ning β kristalli ehitust iseloomustavad *Madelung'i konstandid*. Kuna tõukumisenergia kauguse suurenemisega väga kiiresti väheneb, siis liitmisel võib piirduda antud iooni ja tema lähimate naabrite vastastikuse mõju vaatlemisega. Seetõttu võetakse harilikult β võrdseks anturaažiga.

Madelung'i konstandid mõningat tüüpi kristallidel.

Madelung'i konstandid	Kristallid				
	NaCl	CsCl	CaF_2	ZnS^-	CuO_2
α	1,75	1,76	2,52	1,64	2,06
β	6	8	8	4	8

Iooni energia muutumist kristallis sõltuvalt ioonidevahelisest keskmisest kaugusest kujutab kõver, mis oma kujult on analoogiline joon. 336 toodud φ joonega. Ioonidevaheline tasakaalukaugus vastab potentsiaalse energia miinimumile. Selline kaugus saavutatakse absoluutsel nullil. Temperatuuri tõusmisel toimub kristalli soojuspaisumine ja potentsiaalne energia kasvab. Suure rõhu all kokkusurumisel kristalli energia suureneb järsku. *f* joon joonisel 336 näitab kvasielastset jõudu, mis mõjub ioonile siis, kui ioonidevaheline tasakaal on rikutud, näiteks kristalli soojuspaisumise tulemusena. Võib oletada, nagu näitas V. V. Tarassov (1927. a.), et kui ioonidevaheline kaugus vastab kvasielastse jõu maksimumile, siis kristall sulab. Selline oletus viib järeldusele, et *kristalli keskmine soojuspaisumise koefitsiendi ja sulamistemperatuuri korrutis on ühesuguse ehitusega kristallidel ühesugune.* See seadus on tegelikult tuntud Pictet' reegli nime all.

Ioonsete kristallide teooria, mis põhineb valemil (5), on leidnud kasutamist kõige mitmekesisemate füüsika ja füüsikalise keemia küsimuste lahendamisel.

Kuna valemi (5) kasutamisel on väga tähtis teada konstandi A suurust erinevate ioonipaaride jaoks, siis pühendati, kuigi erilise eduta, rida teoreetilisi uurimusi selle küsimuse väljaselgitamiseks. Võrreldes katseandmeid, näitas K. A. Putilov (1926. ja 1932. a.), et konstant A, mis on määratud aatomite elektronkihtide tõukeenergiaga, on võrdeline aatomite elektronide arvude korrutisega.

Viimasel ajal kasutatakse sageli kauguse üheksandat astet sisaldava tõukeenergia liikme asemel avaldist:

$$\varphi_{\text{tõuk}} = Ae^{-\frac{r}{\varrho}}. \qquad (6)$$

Ollakse seisukohal, et see avaldis sobib paremini kokku kvantmehhaanika järeldustega, olgugi et ka tema ainult ligikaudselt asendab oletatavaid tõukeseadusi. Suurused A ja ϱ kujutavad endast konstante, mis valitakse nii, et valem (6) väljendaks ligikaudselt $\varphi_{\text{tõuk}}$ ja r vahelist sõltuvust; r saadakse palju tööd nõudvate ja siiski veel mitte täiesti rangete teoreetiliste arvutuste abil. Sidejõud ioonsetes kristallides on oma olemuselt keemilised elektrovalentsed jõud. Mida suurem on ioonide valents, seda suurem on kristalli energia, nagu seda võib näha allpooltoodud tabelist.

Kristallide sideenergia — ioonsete kristallide ioonideks lõhustumise energia.

Aine	U $\frac{kcal}{mool}$	Aine	U $\frac{kcal}{mool}$
M^+R^- KCl	164	$M^{++}R^{--}$ PbS	731
NaCl	183	ZnS	851
LiCl	198	ZnO	972
NaF	215	BaO	747
AgCl	207	CaO	842
AgF	223	MgO	940
CuCl	226	$M_2^{+++}R_3^{--}$ Al_2O_3	3617
		Cr_2O_3	3627

Mõnedel, suhteliselt vähestel kehadel, näiteks teemandil, ränil ja booril, paiknevad kristallvõre sõlmedes elektriliselt neutraalsed aatomid ja sidejõududeks osutuvad siin keemilised kovalentsed jõud. Süsinik on neljavalentne ja sellele vastavalt on teemandis iga aatom ümbritsetud nelja süsinikuaatomiga. Ühekordne side süsinikuaatomite vahel C — C paistab orgaanilistes ühendites silma suure tugevusega. Selle lõhkumiseks on tarvis (molekulide Avogadro arvu järgi arvutades) ligikaudu 70 *kcal* energiat. Sama tugev on süsinikuaatomite vaheline side teemandi kristallides. Sellest annab tunnistust teemandi erakordne kõvadus ja suur sublimatsioonisoojus. Veel suurema tugevusega keemiline side on räni hapnikuühendil. See väljendub ränidioksüüdi erakordselt suures sublimatsioonisoojuses (ligikaudu 400 *kcal/g-mol*).

Iseloomulik on fakt, et tugevate keemiliste sidemetega aatomilised võred ei moodustu mingisuguste teiste elementidega peale süsiniku, räni ja boori. Need elemendid paistavad silma keemiliste ühendite ebatavalise rohkuse ja mitmekesisuse poolest.

Enamikul kehadel, eriti orgaanilistel ühenditel, paiknevad kristallvõre sõlmedes molekulid. Sellistele kristallidele on iseloomulik

suhteliselt nõrk osakestevaheline side, mis avaldub ioonsetest ja kovalentsetest kristallidest palju madalamas kõvaduses, madalas sulamistemperatuuris ja väikeses sublimatsioonisoojuses.

Molekulidevahelised tõukejõud on samasugused nagu aatomite- ja ioonidevahelised tõukejõud. Molekulidevahelised tõmbejõud peavad van der Waals'i teooria järgi tekitama tiheduse ruuduga võrdelise siserõhu, mis vastab potentsiaalsele energiale $\frac{a}{v}$. Van der Waals'i molekulaarsete jõudude käsitus (§ 104) jättis lahtiseks küsimuse molekulidevaheliste tõmbejõudude muutumisest sõltuvalt nendevahelisest kaugusest. See külg van der Waals'i teoorias põhjustas alati vastuväiteid.

K e e s o m näitas 1912. a., et molekulaarne tõmbumine, mis on seletatav siserõhuga $\frac{a}{v^2}$, toimub peamiselt molekulide elektrilise asümmeetrilisuse tõttu. Kui molekul koosneb ioonidest, siis kõikide tema positiivsete laengute „masskese" — positiivsete laengute *poolus* — ei lange ühte negatiivsete laengute „masskesk-mega" — negatiivse poolusega. Need poolused asuvad teatud kaugusel λ, mis kõige lihtsama molekulide tüübi A^+B^- korral on võrdne ioonidevahelise kaugusega. Molekuli elektrilaengu (tema positiivsete ja negatiivsete laengute aritmeetilise summa) ja mainitud poolustevahelise kauguse λ korrutist nimetatakse molekuli *elektriliseks* dipoolmomendiks μ.

$$\mu = (\Sigma e_+)\lambda.$$

Vaatamata sellele et molekul tervikuna on elektriliselt neutraalne ($\Sigma e_+ = \Sigma e_-$), hakkab ta oma elektrilise asümmeetria tõttu teiste samasuguste dipoolsete molekulidega vastastikust elektrilist mõju avaldama. On arusaadav, et samanimeliste poolustega üksteise poole pööratud molekulid tõukuvad: nende molekulide samanimeliste pooluste kulooniline tõukumine domineerib kaugemate (kaugusel λ asuvate) erinimeliste pooluste tõmbumise üle. Seevastu molekulid, mis on pööratud üksteise poole erinimeliste poolustega, tõmbuvad. Arvutus näitab, et mõlemal juhul vastastikuse mõju energia kasvab võrdeliselt molekulide elektriliste momentide korrutisega ja väheneb pöördvõrdeliselt molekulidevahelise kauguse kuubiga. Vahepealse paigutuse puhul, kui molekulide elektrilised teljed moodustavad teineteisega mingi nurga, mis võib olla 0—180°, vastastikuse mõju jõud sõltub samuti selle nurga trigonomeetrilistest funktsioonidest.

Kaks omaette jäetud polaarset molekuli pöörduvad teineteise poole alati isenimeliste poolustega, sest et sellisel asetusel on nende potentsiaalne energia minimaalne. Molekulid lähenevad teineteisele niikaua, kuni kauguse vähenemisega kiiresti kasvavad tõukejõud nende dipoolse tõmbejõu tasakaalustavad. Eri-

nimeliste poolustega teineteise poole pööratud dipoolsete molekulide vastastikuse mõju energia väljendub valemiga:

$$\varphi = -\frac{2\mu_1 \cdot \mu_2}{r^3}. \qquad (7)$$

Molekulidevahelise keskmise kauguse kuup vastab eriruumala esimesele astmele. Seega molekulide dipoolsel tõmbumisel potentsiaalne energia väljendub nagu van der Waals'i teooriaski suurusega

$$\Pi = -\frac{a}{v},$$

kusjuures konstant a peab olema võrdeline dipoolmomendi ruuduga.

Soojusliikumine muudab molekulide tõmbumiseks soodsat orientatsiooni. Keesom näitas, et soojusliikumise tõttu dipoolsete molekulide vastastikuse mõju potentsiaalne energia väljendub küllalt kõrge temperatuuri juures võrrandi (7) asemel võrrandiga

$$\varphi = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mu_1\mu_2^2}{r^3}\right)\frac{1}{kT}. \qquad (8)$$

Siin k on Boltzmann'i konstant ja T absoluutne temperatuur.

Valem (7) on kehtiv madalatel temperatuuridel, s. o. kui $\frac{\mu_1\mu_2}{r^3} \gg kT$; vastandina sellele kehtib valem (8) juhul, kui $kT \gg \frac{\mu_1\mu_2}{r^3}$.

Dipoolse vastastikuse mõju sõltuvuse tõttu molekulide orientatsioonist nimetatakse seda vastastikuse mõju liiki *orientatsiooniliseks*.

Poolustevaheline kaugus dipoolsetes molekulides on mõõdetav molekuli mõõdetega, s. t. on suurusjärgus 10^{-8} *cm*; molekulide elektriline asümmeetrilisus avaldub harilikult valentselektronide ümberpaigutuses, elektroni laeng $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostaatilist laenguühikut; sellepärast on paljude molekulide dipoolmoment suurusjärgus 10^{-18} elektrostaat. ühik $\times$ *cm*. Dipoolmomendid arvutatakse dielektriliste konstantide ja mõnede optiliste suuruste (II k. § 24) mõõtmise kaudu.

Mõnede polaarsete molekulide dipoolmomendid.

Aine	Valem	$\mu \cdot 10^{18}$	Aine	Valem	$\mu \cdot 10^{18}$
Vesi	H_2O	1,84	Metüülpiiritus . .	CH_3OH	1,65
Kloorvesinik . . .	HCl	1,04	Atsetoon	C_3H_6O	2,75
Vesinikperoksüüd .	H_2O_2	2,1	Äädikhape	$C_2H_4O_2$	1,73
Ammoniaak . . .	NH_3	1,46	Fenool	C_6H_6O	1.56
Etüülpiiritus . . .	C_2H_5OH	1,70	p-nitrofenool . . .	$C_6H_6NO_3$	5,02
			Nitrobensool . . .	$C_6H_6NO_2$	3,95

Suure hulga ainete dipoolmoment ei ole määratav või on väga väike. Näiteks süsinikoksüüdi (CO) molekulidel on kümme korda väiksem dipoolmoment kui kloorvesiniku (HCl) molekulidel. Süsinikdioksüüdi (CO_2) molekulidel ei ilmne aga üldse dipoolmomenti. Püsivat dipoolmomenti ei ole ka kaheaatomilistel lämmastiku, hapniku, vesiniku, kloori, broomi ja joodi molekulidel, samuti ka CS_2, $AlCl_3$, PCl_5, CH_5 CCl_4, C_6H_6 jt. molekulidel.

Dipoolmomendi puudumine ainetel, mida sel põhjusel nimetatakse mittepolaarseteks, ei tähenda siiski veel seda, et nende ainete molekulid alati, s. t. iga mõjutuse puhul, jääksid elektriliselt sümmeetrilisteks. Kui mingisugune mittepolaarne molekul on elektrilise jõu F mõju all, siis elektrilaengud paiknevad kiiresti ümber ja ta omandab niinimetatud *indutseeritud dipoolmomendi:*

$$\mu = \alpha F.$$

Võrdetegurit α nimetatakse molekuli aatomi või iooni *polariseeruvuseks.* Nagu selgub II köites, sõltub keskkonna dielektriline konstant ja valguse murdumisnäitaja keskkonna osakeste polariseeruvuse suurusest ja nende püsivast dipoolmomendist (kui see on olemas).

Kaks molekuli, millel puudub dipoolmoment, kuid polariseeruvus on suur, võivad juhuslikul lähenemisel vastastikuse mõju tõttu omandada indutseeritud dipoolmomente, mis põhjustab nende vastastikust tõmbumist. Analoogiline tõmbumine tekib veel suuremal määral püsivate dipoolmomentidega molekulide lähenemisel.

Nagu Debye 1920. a. näitas, on molekulide *indutseeritud vastastikuse mõju energia* määratud võrranditega:

$$\varphi = -\frac{2\alpha\mu^2}{r^6}, \tag{9}$$

$$\varphi = -\tfrac{2}{3}\frac{\alpha\tau^2}{r^8}. \tag{10}$$

Esimene neist võrrandeist kehtib püsiva dipoolmomendiga μ molekulide puhul; sel juhul võrrandiga (9) avalduv indutseeritud vastastikune mõju täiendab võrrandiga (8) avalduvat orientatsioonilist vastastikust mõju. Temperatuuri tõusuga orientatsiooniline vastastikune mõju väheneb. Indutseeritud vastastikune mõju temperatuurist ei sõltu.

Võrrand (10) kehtib molekulide kohta, millel ei ole oma püsivat dipoolmomenti, kuid mis omavad sellist elektrilist sümmeetriat, mida võib kujutleda skeemi $\pm\mp$ järgi, s. o. kahe võrdse, kuid vastupidiselt suunatud ja tihedalt teineteise lähedal paikneva dipoolina. Sellist ehitust nimetatakse *kvadrupoolseks.*

Võrrandis (10) esinev suurus τ kujutab endast molekuli kvadrupoolmomenti.

Omal ajal paljud füüsikud oletasid, et Debye teooria selgitab rahuldavalt mittepolaarsete ainete molekulaarset tõmbumist. Siiski ilmnes, et indutseeritud vastastikuse mõju energia on kümneid ja isegi sadu kordi väiksem vaadeldavast molekulaarse tõmbumise energiast.

Lähtudes kvantmehhaanikast, näitas 1930. a. F. London, et paljudel juhtudel etendab väga tähtsat osa molekulaarse vastastikuse mõju eriline liik, mis tekib samuti molekulide polarisatsiooni tõttu, kuid sellise polarisatsiooni tõttu, millel on kiire võnkumise — pulseerumise — iseloom. Asi seisneb selles, et igal aatomil on teatav võnkumisenergia, mis ei kao absoluutse nulliga võrdsel temperatuuril. Seda energiat nimetatakse *nullenergiaks*. Nullenergia

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2} h\nu_0,$$

kus h on Planck'i konstant (§ 94). Elektriline pulseerumine sagedusega ν_0 kutsub naaberaatomites esile faasi poolest rangelt kooskõlastatud elektrilisi nihkeid, s. t. suuruselt ja suunalt vaheldavaid dipoolmomente. See tekitab aatomite- ja molekulidevahelise tõmbumise, kusjuures tõmbeenergia, nagu London kindlaks tegi, on võrdeline polariseeruvuse ruuduga ja võnkesagedusega ning pöördvõrdeline osakestevahelise kauguse kuuenda astmega:

$$\varphi = -\tfrac{3}{4} \frac{h\nu_0\alpha^2}{r^6}. \qquad (11)$$

Kui erisugustel osakestel on erinev polariseeruvus α_1 ja α_2 ning võnkesagedus ν_1 ja ν_2, siis nende osakeste vaheline vastastikune mõju on määratud samasuguse valemiga, milles aga siiski α^2 asemele on paigutatud korrutis $\alpha_1\alpha_2$ ja sageduse ν_0 asemele — keskmine harmooniline sagedus:

$$\varphi = -\frac{3}{2} \frac{h \dfrac{\nu_1\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\alpha_1\alpha_2}{r^6}. \qquad (12)$$

Need valemid muutuvad keerulisemaks, kui iga molekuli kohta tuleb arvestada mitmesuguste, antud molekulile iseloomulike sagedustega võnkumisi. Siin tuleb arvesse võtta neid sagedusi, mis ilmnevad vaadeldavatest molekulidest koosneva keskkonna optilistes omadustes. Dispersioon (valguse lagunemine keskkonnas erineva kiirusega levivateks ja erineva sagedusega laineteks) kutsutakse esile samade molekulidevaheliste elektriliste võnkumistega, mis ilmnevad osakeste ülalmainitud tõmbumises. Sellepärast nimetas London seda molekulaarse vastastikuse mõju liiki *dispersseks vastastikuseks mõjuks*.

Tuleb märkida, et ülesande molekulide vastastikusest mõjust kui nende elektromagnetiliste võnkumiste kooskõlastatuse resultaadist lahendas esimesena vene teadlane B. B. Golitsõn

1894. a., seega ammu enne kvantmehhaanika tekkimist. Golitsõn tegi kindlaks, et võnkumiste koordineeritust peab esile kutsuma molekulidevaheline tõmbumine, mille suurus on pöördvõrdeline kauguse kuuenda astmega.

Allpool on toodud tabel, kus on näidatud, millise osa üldisest molekulide sideenergiast moodustab orientatsiooniline, indutseeritud ja dispersioonne vastastikune mõju.

Kolm molekulaarse vastastikuse mõju komponenti (protsentides)

Aine	Orientatsiooni efekt	Dispersiooni efekt	Induktsiooni efekt
Vesi	77	19	4
Ammoniaak	45	50	5
Kloorvesinik	15	81	4
Süsinikoksüüd	—	100	—

Näeme, et indutseeritud vastastikune mõju (Debye valemi järgi) on kõikidel juhtudel väike. Polaarsete ainete molekulaarsete kristallide seoseenergiast on $\frac{3}{4}$ või $\frac{1}{2}$ püsivate (neid nimetatakse ka „kõvadeks") dipoolide vastastikuse mõju energia. Mittepolaarsetel ainetel kujutab molekulaarsete seoste energia endast praktiliselt dispersse vastastikuse mõju energiat.

Ioonsetel kristallidel moodustab dispersioonse vastastikuse mõju energia, nagu näitavad arvutused, 1—5% kristalli energiast.

Metallide kõrged mehhaanilised omadused (nende suur elastsus ja murdetugevus), paljude metallide kõrge sulamistemperatuur ja suur sublimatsioonisoojus annavad tunnistust metallide sidejõudude intensiivsusest. Sidejõududel on siin peaaegu samasugune olemus nagu ioonsetes kristallideski. Sidejõududeks on antud juhul kulooniline isenimeliste elektrilaengute tõmbumine. Erinevalt ioonsetest kristallidest ei esine metallidel siiski kristallvõre sõlmedesse paiknevate laengute märgivahetust. Metallidel paiknevad võre sõlmedes samanimeliselt laetud positiivsed ioonid. Dispersne tõmbumine nende vahel on tähtsusetu, võrreldes nende kuloonilise tõukumisega ja nende elektronkihtide tõukumisega valemi (6) järgi. Positiivsete metalli-ioonide vahel on tihe side tagatud nende tõmbumisega ioonide vahel liikuvate elektronide poole.

Välised (perifeersed) metalli valentselektronid, mida on naatriumil ja kaaliumil üks, baariumil ja tsingil kaks ja alumiiniumil kolm, kaotavad metallilises kristallis oma kuuluvuse ühele ioonile ja liiguvad, hüpates ühe iooni mõjupiirkonnast teise iooni mõjupiirkonda, suurte kiirustega kogu kristalli ruumala ulatuses. Need „vabad" elektronid tagavadki metallide kõrge elektri-

juhtivuse ja nende liikuvus põhjustab samuti metallide suurt soojusjuhtivust.

Isegi positiivsete metalli-ioonide tihedal pakkimisel, mis leiab aset kristallilises vases ja hõbedas, domineerib elektronide ja ioonidevaheline tõmbumine ioonide tõukumise üle, sest et elektronide orbiidid haaravad lähedalt ioone.

Absoluutse nulliga võrdsel temperatuuril säilib elektronide kiire liikumine metallis, nagu see leiab aset ka elektronide liikumisel aatomites mööda nende häirimatuid orbiite. Tänu elektronide kiirele liikumisele on metalli-ioonide vahelises ruumis negatiivse laengu keskmine tihedus ligikaudu ühesugune kogu selle ruumala jaoks, kus ei asu ioone. Ioonivõre on laetud „hajutatud" negatiivse laenguga, mis püüab ioonide ümber kondenseeruda ja seob tihedalt ioone. Seetõttu on kindlustatud suur sideenergia — 1 gramm-aatomil suhteliselt kergesti sulavatel metallidel ligikaudu 30—60 *kcal* ja raskestisulavatel metallidel ligikaudu 100—200 *kcal* (seda võib näha sublimatsioonisoojuse tabelist § 122).

§ 125. Adsorptsioon.

Adsorptsiooni[1] nähtused seisnevad (enamikul iseloomulikel juhtudel) selles, et kui tahke keha on ümbritsetud gaasilise keskkonnaga, siis tema pinnal moodustub väga õhuke kondenseerunud gaasi kiht, mis on nagu kleepunud keha külge. Kui kehal on palju väikesi poore (näiteks puusüsi) või kui ta kujutab endast peenikest pulbrit, siis adsorbeeritava gaasi hulk keha ühe massiühiku kohta võib olla väga suur. Nii neelab pukspuu süsi ammoniaagi koguse, mille ruumala ületab 90-kordselt tema enda ruumala; ta neelab 55 ruumiosa väävelvesinikku ja 9 ruumiosa hapnikku. Äsjavalmistatud tuhkpuu süsi (kasutatakse püssirohu valmistamiseks), olles pulbriks hõõrutud, süttib sageli iseenesest. Põhjus seisneb selles, et söe poolt adsorbeeritava hapniku molekulaarsed tõmbejõud teevad tööd, kusjuures potentsiaalne energia muutub molekulaar-kineetiliseks energiaks. Sellega kaasneb temperatuuri tõus, mis on küllaldane süttimiseks[2].

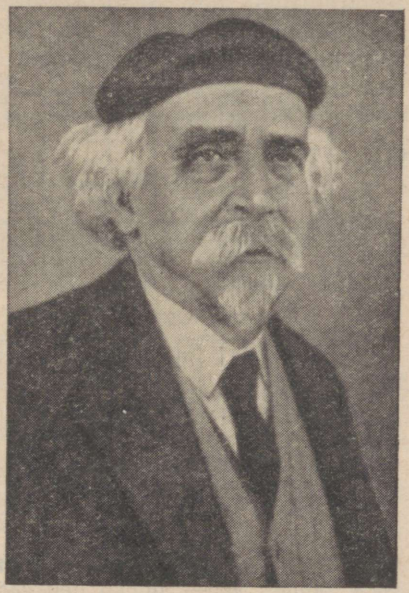
Äsjavalmistatud pulbrikujulise söe omadust adsorbeerida ahnelt gaase kasutatakse vaakuumtehnikas tühjadest seadeldistest viimaste õhujääkide eemaldamiseks.

Puusöe adsorptsioonivõime kasvab tugevasti tema erilisel töötlemisel, näiteks tugeval kuumutamisel veeaurus. Sellist sütt

[1] Ladinakeelsetest sõnadest *ad* — juurde ja *sorbeo* — neelan.

[2] Sellisel viisil seletatakse mõnede tolmustunud ainete, näiteks jahutolmu isesüttimist, kui teda on õhus suurel hulgal (selliseid juhuseid on esinenud suurtes veskites).

nimetatakse „aktiveeritud" söeks. Teda kasutatakse nii tehnikas kui sõjaasjanduses gaasitorbikute valmistamiseks. Gaasitorbikud loodi Esimese maailmasõja aastatel akad. Nikolai Dmitrijevitš Zelinski poolt. Gaaside ja aurude adsorbeerimist aktiviseeritud söe poolt ja söe aktiviseerimise meetodeid on uuritud paljude teadlaste poolt (A. Titov, Mac Ben). Väga täielikult ja üksikasjaliselt on neid küsimusi viimastel aastatel uurinud akad. M. M. Dubinin.



Nikolai Dimitrijevitš Zelinski (1861—1953).

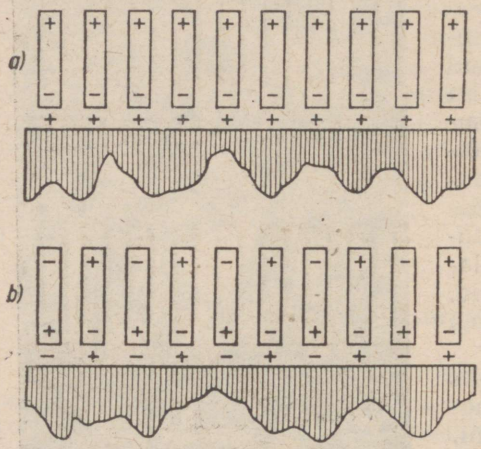
Süsi on võimeline adsorbeerima ka vedelaid ja lahustunud aineid. Filtreerides vedelikku läbi puusöe pulbri (või loksutades teda söega segi), on võimalik eemaldada sellest orgaanilisi värvaineid, nagu näiteks indigot ja lakmust. Puusüsi adsorbeerib samuti joogivees lahustunud orgaanilisi aineid, kuid ta kaotab kiiresti oma aktiivsuse.

Adsorptsiooni selgitamiseks on esitatud mitu teooriat (Langmuir'i, Eucken'i, B. V. Iljini, Polány poolt). Üks neist teooriatest, mida arendasid Langmuir ja Iljin, seisneb järgnevas. Samuti nagu vedelikul, on ka tahkel ainel rida osakesi, mis asuvad pinnal ja on eriolukorras seetõttu, et neil ühel pool ei ole naabreid. Iga positiivne elektrilaeng, mis kuulub mingisuguse aatomi koostisse, osutub jõujoonte allikaks, iga negatiivne laeng aga nende joonte lõppemiskohaks. Jõujoon, mille üks ots on keha sisemuses paiknevas aatomis, omab tingimata teist mingisuguses naaberaatomis asuvat otsa. Kuid pindmiste aatomitega on lugu teisiti: siin on mõned jõujooned „mitteküllastatud", s. t. nende teine ots ei ühine ühegi antud keha aatomiga. Sellised jõujooned on nagu õngedeks, mille abil keha püüab ümbritsevast gaasilisest keskkonnast üksikuid molekule (millest igaühel on positiivseid ja negatiivseid elektrilaenguid) ja tõmbab neid ligi, paigutades neid nii, et pindmiste laengutega puutuks vahetult kokku juurdetõmmatud molekuli vastupidine laeng.

Joonisel 337 on skemaatiliselt näidatud adsorbeeritud gaasi kiht tahke keha pinnal. See pind on viirutatud. Märkidega + ja —

on näidatud pinnal asuvate aatomite laengud. Gaasimolekule vaadeldakse lihtsuse mõttes „dipoolidena", s. t. loetakse, et igal molekulil on ainult kaks laengut ehk „poolust".

Tõmmates gaasimolekule tahke aine pinnale, teevad elektrilised jõud tööd, mille tulemusena süsteemis eraldub ekvivalentne hulk soojust. See on niinimetatud *adsorptsioonisoojus*. See soojus on võrdlemisi suur: ta on adsorbeeritud gaasi iga gramm-molekuli kohta mõni tuhat kalorit.



Joon. 337. Adsorbeeritud gaasi kiht tahke keha pinnal: *a* — pinnal lebavad aatomite laengud on samamärgilised; *b* — aatomite laengute märgid vahelduvad.

Äsjatoodud elektrostaatiliste kujutluste alusel püstitas V. V. Tarassov valemi, mis seob adsorptsiooni moolsoojust adsorbeeritava gaasi dielektrilise konstandiga. Selgub, et ühe nende suuruste suurenemisel suureneb ka teine. Sellist sõltuvust kinnitavad katsed.

Kui tahke keha paikneb küllalt kaua atmosfäärses gaasis, siis püsib adsorbeeritava ja vaba gaasi vahel statistiline (liikuv) tasakaal. Adsorbeeriva keha tõelise pinna iga ruutsentimeetri kohta adsorbeeritav gaasi hulk Γ sõltub temperatuurist ja rõhust. Rõhu suurenemisel adsorbeeritava gaasi hulk suureneb (siiski suureneb ta aeglasemalt, kui seda võiks järeldada Henry seaduse järgi). Temperatuuri tõusul adsorbeeritava gaasi hulk väheneb kiiresti (joon. 338).

Adsorptsiooni sõltuvus gaasi rõhust allub ligikaudu *Langmuir'i valemile* („adsorptsiooni isoterm"):

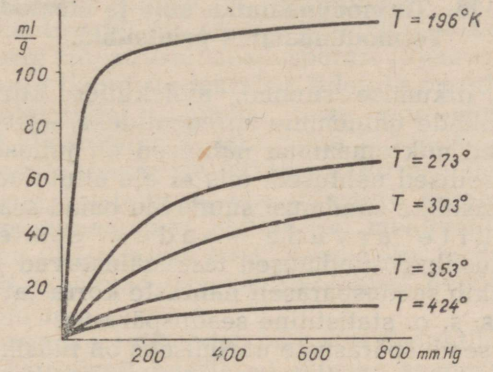
$$\Gamma = \Gamma_\infty \frac{p}{p+b}. \qquad (13)$$

Sellest valemist järeldub, et väikesel rõhul $p \ll b$ kehtib Henry seadus $\Gamma = \frac{\Gamma_\infty}{b} p$, suurel rõhul $p \gg b$ saavutatakse mingisugune adsorptsiooni piir $\Gamma = \Gamma_\infty = const$.

Teades 1 cm^2 pindalal adsorbeerunud gaasi hulka Γ, on võimalik määrata adsorbeeriva keha tõelist pindala. Sellisel viisil on leitud, et 1 *g* söel (mida kasutatakse tehnikas adsorbeeriva ainena) on tema suure poorsuse tõttu tõeline pindala, mis võrdub ligikaudu 10^5 cm^2.

Polány teooria näeb ette võimalust adsorbeeritud gaasi veeldamiseks tahke keha mikroskoopilistes poorides, kus (nagu kapillaarides, millede seinad märguvad vedelikuga) küllastava auru rõhk peab olema seda väiksem, mida väiksem on poori läbimõõt (§ 112). Mainitud *kapillaarne kondenseerumine* on küll võimalik (alla kriitilist temperatuuri), kuid kui gaasilise faasi rõhk on küllastava auru rõhust kaugel, siis osutub ta nähtavasti tähtsusetuks.

L o n d o n (tuginedes lainemehhaanikale) näitas, et adsorptsiooni potentsiaal, mis iseloomustab gaasilisi molekule tahke keha



Joon. 338. Süsihappe adsorptsiooni isoterm.

pinnale tõmbavaid jõude ja määrab adsorptsioonisoojuse suuruse, väheneb pöördvõrdeliselt kauguse kuubiga tahke keha pinnast ja sõltub vähe temperatuurist.

Gaaside adsorptsioonile on pühendatud suur hulk teaduslikke uurimusi, kuid sellele vaatamata ei ole senini täielikku selgust ühes tähtsamas selle ala probleemis — adsorptsiooni nähtustes kui katalüüsi vahendeis (katalüüs — keemiliste reaktsioonide kiirendamine), millel on tööstuses määratu suur praktiline tähtsus.

Tahke keha asetamisel lahusesse harilikult lahustunud aine adsorbeerub tema pinnal. Seda kasutatakse ära mitmesugustes keemilis-tehnoloogilistes protsessides. Näiteks erilise töötlemise abil valmistatakse sütt, mis adsorbeerib happeid ja ei adsorbeeri leelisi. Valmistatakse isegi sellist sütt, mis adsorbeerib ainult leelisi. Lahustunud ainete adsorbeerimine poorsete ja peeneteraliste kehade poolt on teoreetiliselt tähtis mitmesuguste nähtuste mõistmiseks, mis moodustavad erilise teadusala — dispersete süsteemide füüsikalise keemia — uurimise aine.

XX PEATUKK.

TERMODÜNAAMIKA ESIMENE PRINTSIIP.

§ 126. Termodünaamika aine ja meetod. Termodünaamika printsiibid.

Molekulide liikumise suunad, molekulide kiirused, nende kokkupõrked, nende ühinemine agregaatideks, agregaatide lagunemine ja teised mikromaailma nähtused on juhuslikud. Looduses puuduvad sellised nähtused, mis ei ole allutatud seaduspärasustele. Ka juhuslikke sündmusi suunavad omad seadused ja eelkõige just suurte arvude seadus. Suurtes molekulide kogumikes juhuslikud sündmused tasakaalustuvad ja mikromaailma kaosest tekib seaduspäraselt nähtuste korrastatud kulgemine makromaailmas, s. o. statistiline seaduspärasus.

Statistiliste seaduspärasuste uurimiseks on füüsikas kolm teed.

Esimene tee: kujutletakse mikromaailmas toimuvate sündmuste pilte ja mehhaanika ning tõenäosusteooria täpsete seaduste alusel ennustatakse arvutuste (mis kahjuks on keerulised) abil ette, kuidas mikromaailma korrastamatus peegeldub nende nähtuste käigus, mis on vahetult vaadeldavad. Selline on *statistilise mehhaanika* tee.

Teine tee kujutab endast teooria pidevat ühendamist katsetega. Kasutades hüpoteese leitakse füüsika ja keemia katsete alusel seaduspärasused, milledel on statistiline mõte; edasi leitakse nende seaduspärasuste lihtsad „mudelilised seletused" ja selliselt loodud ajutiste ning kaugeltki veel mitte teaduslike hüpoteeside alusel planeeritakse varem leitud seaduspärasuste täpsustamiseks ja uute faktide avastamiseks uued katsete seeriad. Seda teed mööda läheb *molekulaarfüüsika.*

Kolmas tee on omapärane. See kuulub *termodünaamikale*[1]. Suurest hulgast katseliselt avastatud tõdedest valitakse

[1] Sõna „termodünaamika" tuleneb kreekakeelsetest sõnadest *therme* — soojus ja *dünamis* — jõud. Võttes arvesse sõna „termodünaamika" päritolu, tuleb seda lahti mõtestada järgmiselt: „Õpetus soojusega seotud olevatest jõududest" (kuid sugugi mitte soojuse liikumist; soojusjuhtivuse nähtuste ja soojuse liikumise seaduste tundmaõppimine ei ole termodünaamika ülesandeks).

välja ainult kaks-kolm, mis aga on kõige usaldatavamad ja oma tähtsuse ning üldsuse poolest kõige põhilisemad; kasutades seejärel rangelt loogilist meetodit järelduste tuletamiseks nendest tõdedest, leitakse konkreetsetel erijuhtudel kehtivate selliste seaduspärasuste kogu, mis võimaldavad täpselt ette näha mitmesuguste protsesside käiku ja erinevate ainete omadusi.

Ajalooliselt tekkis termodünaamika soojustehnika poolt füüsikale esitatud nõuete tulemusena. Ta on aga juba ammu välja kasvanud nende nõuete raamidest. Olgugi et mõisted „soojus" ja „töö" etendavad ka nüüd termodünaamikas tähtsat osa, ei määra nad siiski mingil määral termodünaamika ainet.

Termodünaamika aineks on need füüsika ja keemia faktid (objektid ja nähtused), mis kujutavad endast mikromaailmas toimuvate nähtuste statistiliselt seaduspärast tulemust. Termodünaamikas uuritavate tüüpiliste faktide näideteks on difusioon ja üldse ühe aine molekulide tungimine teise aine molekulide hulka (lahustumine, absorptsioon); jahtumine ja kuumenemine, millega kaasneb elementaarosakeste liikumise kiiruse muutus; keemilised reaktsioonid, kristallisatsioon, sulamine, auramine jne.

Seega termodünaamikal, statistilisel mehhaanikal ja molekulaarfüüsikal on üks ja sama aine. Need kolm teadust on sugulasteadused; nad arenevad paralleelselt, kuid nende meetodid on sügavalt erinevad.

Termodünaamika ammendab oma sisu deduktiivsete meetodite abil mõnest katseliselt avastatud füüsika seadusest, mida võib täielikult usaldada. Termodünaamika tulemused on seega samavõrd usaldatavad kui tema alusseadusedki (loomulikult tingimusel, et arutluskäigus ei ole tehtud loogilist või arvutusviga).

Tänapäeval koosneb termodünaamika empiiriline baas kahest põhilisest ja ühest täiendavast seadusest. Termodünaamika tekkis iseseisva teadusena siis, kui avastati tema kaks põhilist seadust. Me nimetame neid *termodünaamika printsiipideks.* Kolmas seadus (niinimetatud N e r n s t i s o o j u s l a u s e), mis avastati alles hiljuti, on aluseks ainult mõningatele termodünaamika peatükkidele. Termodünaamika esimest ja teist printsiipi võib formuleerida järgmiselt.

E s i m e n e p r i n t s i i p. *Energia tekkimine või hävimine ei ole võimalik.*

T e i n e p r i n t s i i p. *Selline protsess, mille ainsaks tulemuseks on soojuse muundumine tööks, ei ole võimalik.*

Selleks et juba kohe saaks selgeks termodünaamika printsiipide tähtsus tehnikas, formuleerime need teisiti. Sel eesmärgil toome sisse e s i m e s t j a t e i s t l i i k i i g a v e s t i t ö ö t a v a j õ u m a s i n a *(perpetuum mobile)* mõiste.

Jõumasinat, mis korrates ükskõik mitu korda üht ja sama protsessi oleks võimeline väljastpoolt saadava energiahulgaga

võrreldes rohkem tööd sooritama — teiste sõnadega: jõumasinat, mis toodaks energiat — nimetatakse esimest liiki perpetuum mobileks[1].

Teist liiki perpetuum mobile all mõistetakse sellist soojusjõumasinat, mis korrates ükskõik mitu korda üht ja sama protsessi oleks võimeline täielikult tööks muutma kogu selle soojuse, mida ta võtab mingilt kehalt või kehadelt, s. o. soojusallikatelt (teist liiki *perpetuum mobile* ei vaja seega teisi kehi, kuhu võiks ära voolata soojus, mis ei ole muundunud tööks).

Kui meil oleks näiteks võimalik ehitada sellist aurumasinat, mis muudaks kogu katlalt võetud soojuse tööks ja ei vajaks seega jahutajat ega mingit jahutaja osa etendavat muud keha[2], siis see jõumasin oleks teist liiki *perpetuum mobile*.

Mõlemad need masinad on inimeste vajaduse seisukohalt väga ahvatlevad. Kui oleks konstrueeritud esimest liiki *perpetuum mobile*, siis kogu inimkonnal ei oleks enam vaja muretseda kütteainet, mille keemiline energia muundub sisepõlemismootorites või aurukateldes mehhaaniliseks energiaks, ja ei oleks vaja ehitada hüdroseadmete jaoks jõgedele tamme.

Kui oleks konstrueeritud teist liiki *perpetuum mobile*, siis oleksid meie käsutuses ammendamatud looduslikud soojusallikad. Lihtne arvutus näitab, et muutes ookeaniveest saadavat soojust tööks me võiksime teist liiki *perpetuum mobile* abil tööle rakendada kõikide maailma maade tehastes leiduvad masinad ja alles 1700 aasta pärast me märkaksime ookeanivee temperatuuri alanemist ühe sajandiku kraadi võrra.

On tehtud loendamatu hulk igavese jõumasina ehitamise katseid. Need ei ole kellelgi õnnestunud. Kas siin ei ole tegemist juhuslikkusega? Kas ei tuleks neid katseid jätkata ja suurendada selleks jõupingutusi?

Nendele küsimustele annavad vastuse kaks termodünaamika printsiipi.

Esimene printsiip ütleb: *esimest liiki perpetuum mobile on võimatu.*

Teine printsiip ütleb: *teist liiki perpetuum mobile on võimatu.*

Ülalkirjeldatud omadustega jõumasinad võivad eksisteerida ainult meie fantaasias; reaalses maailmas ei ole neil kohta. Nende ehitamise katsed on määratud nurjumisele. Jõupingutusi ei tule rakendada nende masinate konstrueerimiseks, vaid eelkõige selleks, et mõista, miks kirjeldatud omadustega masinate ehitamine on võimatu.

Termodünaamika rakendatavus on piiratud uuritavate kehade

---

[1] Ladina keelest *perpetuum mobile* — igavene jõumasin.

[2] Aurumasinatel on jahutajaks kondensaator või (vähem ökonoomsetel masinatel) välisõhk.

suurusega: uuritavad kehad peavad olema küllalt suured selleks, et oleks kindlustatud mikromaailmas toimuvate juhuslike nähtuste tasandumine. Kuna juba ühes nööpnõelapeas on rohkem molekule, kui seda on veeämbritäite arv Kaspia meres, siis rahuldavad seda nõuet isegi sellised kehad, mis meie vaatepunktist lähtudes on väga väikesed. Siiski katsetehnika progressi (mikroskoobid, ultramikroskoobid jne.) tõttu on meil uurimiseks kättesaadavad ka sellised ainekübemed, mis koosnevad võrdlemisi väikesest arvust osakestest. Kui võtta iga sellist ainekübet eraldi, siis arusaadavalt ei ole tema omaduste kirjeldamiseks statistika meetodid enam rakendatavad. Seetõttu ei ole niisugustele ainekübemetele rakendatavad ka termodünaamika seadused (mis tulenevad teisest printsiibist).

Suure osakeste kogumi omadused („terviku" omadused) ei ole üksikute molekulide omaduste lihtsaks summaks. Kogumi osakeste arvu kasvamise teatud astmel tekib uus „kvaliteet". Termodünaamika (teisest printsiibist tulenevad) seadused, mis ei ole rakendatavad üksikutele molekulidele ja ultramikroskoopilistele osakestele, kaotavad aineosakeses leiduvate molekulide teatud arvu korral oma õigsuse.

Niisiis, termodünaamika uurib ainult lõplike mõõdetega kehades (s. o. kehades, mis ei ole elementaarselt väikesed) toimuvaid nähtusi.

§ 127. Termodünaamilised protsessid. Siseenergia.

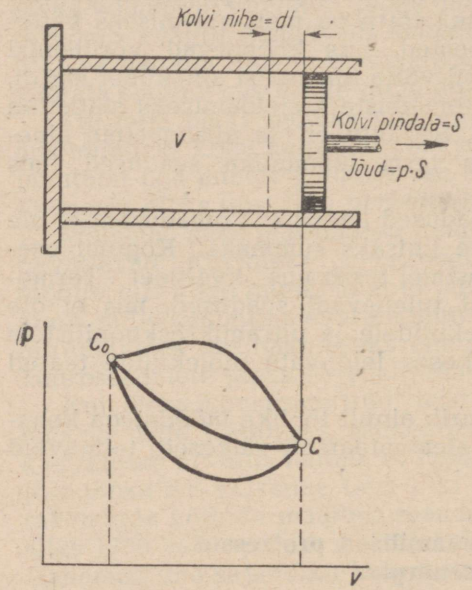
Võtame mingisuguse keha, näiteks gaasi. Sulgeme selle gaasi silindrisse, mis soojust ise läbi ei lase, kuid millel on soojust juhtiv põhi. Silindri põhja võib katta ka soojust mittejuhtiva siibriga (joon. 339). Kui keha on tasakaaluolekus, siis peab kolvile väljast mõjuv jõud võrduma gaasi rõhu p ja kolvi pindala s korrutisega. Kolvile väljast mõjuvat jõudu suurendades võib sundida gaasi kokku tõmbuma; kui kolvile väljastpoolt mõjuvat jõudu vähendada, siis gaas paisub.

Kuna silindri põhja võib siibri nihutamisega teha soojust juhtivaks või soojust mitteläbilaskvaks, siis soovi korral võib gaasi mõjutada kas ainult mehhaaniliselt (töö kulutamisega või töö võitmisega) või ainult termiliselt (soojuse äraandmisega või soojuse võtmisega) või samaaegselt nii mehhaaniliselt kui ka termiliselt. Leppides kokku lasta protsessil kulgeda väga aeglaselt, muudame järk-järgult rõhku ja temperatuuri. Siis meie poolt võetud keha läbib rea üksteisele väga lähedasi tasakaaluolekuid, millest igaühte kujutab pv-diagrammil punkt. Kogu protsessi kujutab joon, mis ühendab algolekut C_0 lõppolekuga C. Igale erinevalt kulgevale protsessile (mehhaaniliste ja termiliste mõjutuste

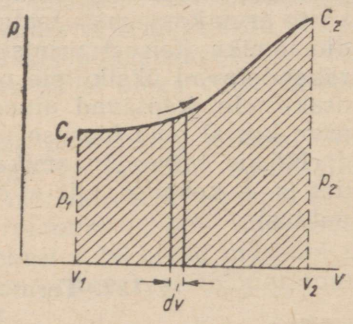
erinevale kombinatsioonile) vastab erinev punktide C_0 ja C vahele tõmmatud joon.

Keha (näiteks gaasi) poolt paisumisel tehtud elementaarne töö on võrdne kolvile mõjuva jõu, s. o. suuruse $p \cdot s$, ja kolvi lõpmatult väikese nihke dl korrutisega. Korrutis sdl ei ole aga midagi muud kui gaasi poolt enda alla võetud ruumala juurdekasv: $sdl = dv$. Elementaarne töö δA on järelikult võrdne rõhu p ja ruumala juurdekasvu korrutisega:

$$\delta A = pdv. \qquad (1)$$



Joon. 339. Paisumise elementaarne töö on pdv.



Joon. 340. Keha tasakaalupaisumisel tehtava töö graafiline kujutis.

pv-diagrammil ordinaat kujutab rõhku p ja abstsissi juurdekasv ruumala juurdekasvu dv. Lõpmatult kitsa riba pindala kujutab seega keha poolt tehtud elementaarset tööd (joon. 340).

Töö, mida keha teeb paisumisel algolekule C_1 vastavast ruumalast kuni antud olekule C_2 vastava ruumalani, väljendub analüütiliselt määratud integraalina:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdv, \qquad (2)$$

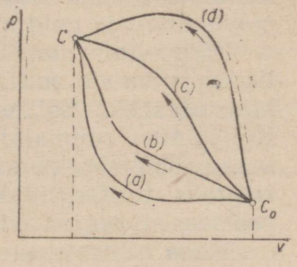
kus p on v funktsioon, mille kuju sõltub „ülemineku teest", s. o. mehhaaniliste ja termiliste mõjutuste vaheldumise järjekorrast.

Graafiliselt väljendab seda tööd pindala, mis on piiratud ülalt keha üleminekule algolekust lõppolekusse vastava joonega, külgedelt kahe ordinaadiga p_1 ja p_2 ning alt abstsisstelje lõiguga.

Kui keha ülemineku teed kujutaval joonel eristada kahte suunda, siis mainitud pindala võib vaadelda algebralise suurusena.

Positiivseks loeme suunda ruumalade kasvu poole (joone all olev pindala on positiivne, keha paisub ja teeb tööd) ja negatiivseks suunda ruumalade vähenemise poole (sel juhul joone all olevat pindala loeme negatiivseks; keha kokkusurumiseks kulutatakse tööd).

Selleks et näha, kui suurel määral töö ($-A$), mida kulutatakse keha üleviimiseks algolekust C_0 antud olekusse C, sõltub ülemineku teest, on küllalt, kui pidada silmas antud seletust ja heita pilk joonisele 341.

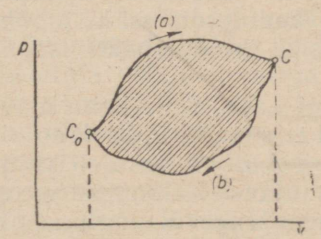


Joon. 341. Mitmesugused olekust C_0 olekusse C mineku teed. Pindalad kõverate *a*, *b*, *c* ja *d* all ei ole võrdsed, järelikult pole võrdsed ka vastavateks üleminekuteks kulutatud tööd.

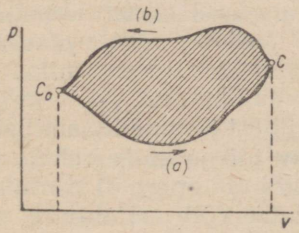
Kalorimeetriliste mõõtmiste abil on kerge veenduda selles, et ka soojushulk, mida keha võib ära anda, sõltub suurel määral jahtumise teest.

Oletame, et me rea mehhaaniliste ja termiliste mõjutuste abil sundisime keha sooritama mingisuguse *ringprotsessi* (termodünaamilise tsükli), mis koosneb kahest protsessist ja nimelt: paisumisprotsessist (tähistame seda sümboliga $C_0 \rightarrow (a) \rightarrow C$) ja kokkusurumisprotsessist, mis toob keha tagasi algolekusse (seda teist protsessi tähistame sümboliga $C_0 \leftarrow (b) \leftarrow C$).

Oletame, et paisumisprotsessi kujutav joon (*a*) asub kokkusurumisprotsessi kujutava joone (*b*) peal (joon. 342). See tähendab, et töö, mida keha paisumisel tegi, on suurem sellest tööst, mida keha kokkusurumisel neelas. Nende tööde suurust iseloomusta-



Joon. 342. Otsene tsükkel.



Joon. 343. Pöördtsükkel.

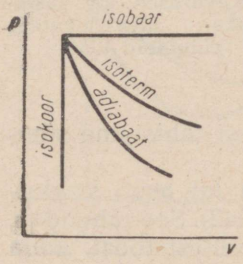
vate pindalade vahe on ilmselt võrdne tsükli kontuuri poolt piiratud pindalaga.

Võib juhtuda, et paisumisprotsessi kujutav joon (*a*) asub kokkusurumisprotsessi kujutava joone (*b*) all (joon. 343). Sel juhul kujutab tsükli poolt piiratud pindala tsükli sooritamiseks kulunud tööd.

Tsüklid, mille sooritab „töötav aine" (aur või gaas) soojusjõumasinates, kuuluvad esimesse tüüpi (paisumisjoon asub kokkusurumisjoonest kõrgemal) ja neid nimetatakse *otsesteks tsükliteks.* Tsüklid, mille sooritab „töötav aine" külmutusmasinates, kuuluvad teise tüüpi (paisumisjoon asub kokkusurumisjoonest madalamal) ja neid nimetatakse *pöördtsükliteks.*

Kõige lihtsamateks termodünaamilisteks protsessideks on sellised protsessid, millede kulgemise kestel jääb üks parameetritest konstantseks. Selliseid protsesse nimetatakse *isoprotsessideks.* Konstantsel ruumalal kulgevaid protsesse nimetatakse *isokoorilisteks* protsessideks, konstantsel rõhul kulgevaid protsesse *isobaarilisteks* protsessideks ja konstantsel temperatuuril kulgevaid protsesse *isotermilisteks* protsessideks.

Väga tähtsate termodünaamiliste protsesside hulka kuuluvad ka need protsessid, millede kulgemisel keha on soojuslikult täiesti isoleeritud, s. o. mis kulgevad ilma soojuse juurde- ja äravooluta. Neid protsesse nimetatakse *adiabaatilisteks* protsessideks. Eriti tähtsat osa etendab termodünaamikas keha adiabaatilise paisumise või kokkusurumise tasakaaluprotsess. Seda protsessi kujutavat joont nimetatakse *adiabaadiks* (joon. 344).



Joon. 344. Isoprotsesside graafiline kujutamine.

Analüüsides hiljem termodünaamika teise printsiibi sisu, me näeme, et igale kehale on omane teatud suurus, mis analoogiliselt temperatuurile eksisteerib molekulide korrastamatuse ja sisemolekulaarse liikumise tõttu. Seda suurust nimetatakse *entroopiaks.* Adiabaatilistes tasakaaluprotsessides jääb entroopia muutumatuks. Seetõttu nimetatakse adiabaatilist tasakaaluprotsessi ka *isoentroopiliseks* protsessiks ja adiabaati *isoentroobiks.*

Võtame mingi keha. Selle keha üleviimiseks ühest termodünaamilisest olekust teise tuleb üldiselt sooritada teatav töö ja anda kehale teatav soojushulk, s. t. tuleb kulutada teatav hulk energiat. Sõltuvalt oleku muutuse iseloomust see energia hulk võib erijuhtudel olla ka negatiivne või võrdne nulliga. Kui energiat aga tõepoolest kulutati, siis kas võib öelda, et kulutatud energia hävis? Ei. Me peame arvesse võtma, et *kehale antav energia muundub keha siseenergiaks.* Seda, et antud juhul tõepoolest ei ole tegemist energia tekkimisega ega hävimisega, vaid kehale antud mingite energialiikide muundumisega siseenergiaks, näitab samal ajal toimuv keha termodünaamilise oleku muutus.

Siseenergia, samuti nagu iga teine energia, on s u h t e l i n e suurus. See tähendab, et mingis olekus võetud keha siseenergiast

võib rääkida ainult keha oleku ja sama keha mingi teise oleku — „algoleku" — võrdlemise mõttes.

Mingis olekus võetud keha siseenergia algoleku suhtes mõõtub selle töö ja selle soojushulga summaga, mida on vaja kulutada või vastavalt kehale lisada selle keha viimiseks algolekust C_0 antud olekusse C.

On selge, et summeerimisel peavad töö ja soojus olema väljendatud ühesugustes ühikutes: kas mehhaanilistes ühikutes (ergides, džaulides, kilogramm-meetrites jne.) või kalorites.

Kui keha viibib muutumatult ühes ja samas tasakaaluolekus, siis endastmõistetavalt ei kulutata selle aja jooksul energiat. Võtame aga mingi keha ja allutame selle mitmesugustele mehhaanilistele ja termilistele mõjutustele. Tekib küsimus: kas sel juhul, kui me oleme viinud keha algolekusse tagasi, keha siseenergia omandab esialgse väärtuse? Teiste sõnadega — tekib küsimus: kas mehhaaniline ja termiline töötlemine võib jätta kehasse sellist „jälge", mis seisneks ainult keha siseenergia muutuses ja ei ilmneks milleski muus, s. o. ei oleks seotud ühegi ülejäänud, keha termodünaamilist olekut iseloomustava parameetri arvulise väärtuse muutusega?

Kui tsükli sooritamiseks kulunud energia ei oleks võrdne nulliga, siis peaksime loomulikult ütlema, et energia kulus „ei millekski", sest lõpptulemusena keha olek ei ole muutunud. Teiste sõnadega öeldes, me peaksime tunnistama, et energia hävis, või kui tsükli sooritamiseks kulutatud töö ja soojuse summa on negatiivne, siis peaksime tunnistama, et energiat tekkis. Kuid termodünaamika esimese printsiibi põhjal ei ole energia tekkimine ega hävimine võimalik.

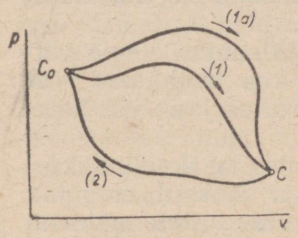
Järelikult, *ükskõik millise termodünaamilise tsükli sooritamiseks kulutatud soojuse ja töö summa on võrdne nulliga.* Keha siseenergia omandab seega tsükli lõpuks esialgse väärtuse ehk, teiste sõnadega öeldes, *keha siseenergia on termodünaamilise oleku ühene funktsioon.*

Kui U on keha siseenergia ja $x, y, z \ldots$ parameetrid, millede kogu määrab üheselt keha oleku, siis $U = f(x, y, z \ldots)$. f tähendab siin ühese funktsiooni sümbolit. Funktsiooni f kuju ei saa kindlaks määrata ainult termodünaamika seaduste põhjal. See tuleb leida katseliselt või keha molekulaarse struktuuri tundmaõppimise kaudu.

Toimugu keha üleminekul olekust C_0 olekusse C protsess, mille me tähistame numbriga 1, ja üleminekul olekust C olekusse C_0 protsess, mille me tähistame numbriga 2 (joon. 345). Eespool on selgitatud, et ringprotsessi sooritamiseks kulutatud soojuse ja töö summa on null; sealjuures ei ole oluline, kas protsess on tasakaaluprotsess või ei. Siit järgneb, et protsessi 2 sooritamisel

saadud soojushulga ja tööhulga summa võrdub protsessi 1 sooritamiseks kulunud soojushulga ja tööhulga summaga.

Pöörame nüüd tähelepanu sellele, et me valisime protsessid 1 ja 2 täiesti meelevaldselt. Asendame protsessi 1 mingi teise protsessiga, mille me tähistame tähisega 1*a*, ja sooritame äsja vaadeldud tsükli asemel tsükli $C_0 \rightleftarrows^{(1a)}_{(2)} C$. Analoogiliselt eespooltoodule me võime väita, et protsessi 2 sooritamisel saadud soojushulga ja tööhulga summa on võrdne protsessi 1*a* sooritamiseks kulutatud soojushulga ja tööhulga summaga.



Joon. 345. Summaarne energia ja töökulu ei sõltu ülemineku teest.

Siit järgneb (arvestades, et kui kaks suurust on võrdsed kolmanda suurusega, siis nad on võrdsed ka omavahel), et protsesside 1 ja 1*a* sooritamiseks kulutatud tööhulkade ja soojushulkade summad on võrdsed. Kuna aga need protsessid olid valitud täiesti meelevaldselt, siis võime arutluse lõpuks öelda, et *summaarne soojuse- ja töökulu on ühesugune kõikide selliste protsesside (tasakaalu- ja mittetasakaaluprotsesside) jaoks, mis viivad keha mingist kindlast algolekust antud olekusse*, s. o. summaarne energia- ja töökulu ei sõltu „ülemineku teest".

§ 128. Mõistete „soojus" ja „töö" termodünaamiline sisu.

Kolmel suurusel — energial, soojusel ja tööl — on ühesugune dimensioon (nad mõõtuvad ühtedes ja samades ühikutes); nende suuruste taga peituvad mõisted ei ole aga kaugeltki identsed.

Kõigepealt tuleb vahet teha ühelt poolt mõiste „energia" ja teiselt poolt mõistete „soojus" ja „töö" vahel.

Rääkides tööst me peame silmas protsessi; rääkides energiast me kujutleme võimalikku, kuid senini veel sooritamata töö varu. Tekib küsimus: mis on termodünaamika seisukohalt soojus — kas protsess või varu?

Sellele küsimusele tuleb anda järgmine vastus: ainult protsess ja mitte mingil juhul varu. Teist vastust ei luba anda termodünaamika esimene printsiip. Kui me ütleme sõna soojus, siis kunagi valitsenud ja füüsikasse väga sügavalt juurdunud soojusaine teooria mõjul me siiski sageli kaldume kujutlema mingit varu, mitte aga protsessi.

Väga paljudes raamatutes märgitakse, et soojus on keha molekulaar-kineetiline energia. Soojuse samastamises molekulaar-

kineetilise energiaga on peidetud lõpuni avaldamata täiesti ekslik mõte, nagu oleks suurim energiahulk, mida keha võib jahtumisel ära anda, võrdne keha osakeste kaootilise liikumise energiaga. Jahtumisel keha poolt äraantud soojushulk sõltub tegelikult aga suurel määral sellest, millistes tingimustes toimub keha jahtumine. Näiteks kondenseerumisel annab gaas soojust ära molekulaar-potentsiaalse energia, mitte aga molekulaar-kineetilise energia varu kahanemise arvel.

Termodünaamika ei tunne mingisuguseid „soojusvarusid". Kui ei ole soojuse ülekande protsessi, siis ei saa termodünaamikas juttu olla soojusest, samuti nagu mehhaanikas sellise protsessi puudumisel, mis seisneb kehale mõjuvate jõudude rakenduspunkti nihkumises, ei saa olla juttu tööst. Tuleb meeles pidada, et iga energialiik on keha oleku üheseks funktsiooniks. Energia ei sõltu teest, mida mööda keha läheb ühest olekust teise. Töö ja soojus ei ole energia liigid.

Soojus ja töö kujutavad endast kaht ainuvõimalikku energia ülekande vormi energia üleminekul ühelt kehalt teisele; tööhulk ja soojushulk kujutavad aga endast selle energia mõõtu, mis kandub üle kahes ainuvõimalikus vormis — töö ja soojuse vormis.

Alati, kui tehakse tööd, on olemas vähemalt kaks keha: üks, mis arendab tööd sooritavaid jõude, ja teine, millele need jõud on rakendatud. Esimene keha, mis teeb tööd, a n n a b energiat ära; teine keha, millega tööd tehakse, s a a b energiat juurde. Tööprotsess on seega energia ülekandumine ühelt kehalt teisele.

Kui on tegemist soojusega, siis täpselt samuti on olemas kaks keha: üks keha, mis annab energiat ära, ja teine keha, mis saab energiat juurde.

Ühelt kehalt teisele ülekandunud energia mõõduks on, sõltuvalt ülekandevormist, üks kahest teineteisega ekvivalentsest suurusest: kas tööhulk või soojushulk.

Milles seisneb mõistete „soojus" ja „töö" kvalitatiivne erinevus? Selles, et soojus on niisugune ülekande vorm, mis kujutab endast mikrofüüsikaliste protsesside kogu (energia vahetus molekulide kokkupõrkumisel, valguskvantide kiirgumine jne.). Töö on makrofüüsikaline energia ülekande vorm.

Erinevalt termodünaamikast eristab mehhaanika nelja energia ülekande vormi: tõmmet, põrget, konvektsiooni ja laineid. Termodünaamika ülesannete lahendamisel ei ole see klassifikatsioon oluline. Tõmbe korral võib hõõre põhjustada energia osalist ülekannet soojuse vormis. Makroskoopiliste kehade põrke korral etendab analoogilist osa kehade mittetäielik elastsus. Energia ülekanne, mis esineb molekulide kaootilisel põrkumisel, kuulub muidugi täielikult soojuse mõistesse. Konvektsiooni all selle sõna laiemas mõttes mõistetakse ükskõik millise energialiigi ülekandumist koos ainega. Kui mingit liiki energia (mitte ainult siseenergia)

konvektsioon toimub nii suurte kehade ümberpaigutuse teel, et nende liikumist on võimalik reguleerida, siis see protsess kuulub töö mõistesse; sellisteks protsessideks on näiteks elektriseeritud keha ümberpaigutus ühest elektriseeritud kehade süsteemist teise, magnetiseeritud kehade analoogiline ümberpaigutus jne. Kui aga konvektsioon kulgeb väliste jõudude puudumisel stiihiliselt, nagu see esineb näiteks elektriseeritud või magnetiseeritud kolloidosakeste difundeerumisel, siis see on soojuse ülekanne. Keha siseenergia on ainukeseks energialiigiks, millel on statistiline alus. Seetõttu tuleb siseenergia konvektsiooni alati vaadelda soojuse ülekandena. Raadiolained kujutavad endast üht näidet töö vormis toimuvast energia ülekandest; seda tööd teeb saatejaam elektrivoolude tekitamiseks vastuvõtujaama antennis. Valguslained (või valguskvandid) on üheks näiteks energia ülekandest soojuse vormis.

Soojus ja töö on e k v i v a l e n t s e d energia ülekande vormid. Alati, kui soojus muundub tööks (näiteks soojusjõumasinates), annab iga tööks muundunud kilokalor 427 *kGm* tööd. Ühe kilokaloriga ekvivalentse tööühikute arvu (kilogramm-meetrite, džaulide, kilovatt-tundide või teiste tööühikute arvu) nimetatakse üldiselt *soojuse mehhaaniliseks ekvivalendiks.* Kõige täpsemate kaasaegsete mõõtmiste järgi on *kalori mehhaaniline ekvivalent* 4,186 *J.*

Siit järgneb, et kilokalori mehhaaniline ekvivalent on ligikaudu 427 *kGm.* Alati, kui töö muundub soojuseks, eraldub iga kilogramm-meetri töö arvel ligikaudu $\frac{1}{427}$ kilokalorit soojust. Kalorite arvu, mis on ekvivalentne ühe tööühikuga (1 *kGm*-ga, 1 džauliga või mõne teise tööühikuga) nimetatakse üldiselt *töö termiliseks ekvivalendiks.* Ühe džauli termiline ekvivalent on 0,239 *cal*[1].

Soojus ja töö e i o l e s a m a v ä ä r s e d energia ülekande vormid. Nad ei ole samaväärsed eelkõige sellepärast, et töö arvel võib täiendada ükskõik millise energialiigi (raskusväljast tingitud potentsiaalse energia, elektrilise ja magnetilise energia jne.) varu, kuna soojust, muutmata seda vahepeal tööks, võib rakendada ainult keha siseenergia täiendamiseks. See, et soojus ja töö ülalmainitud mõttes ei ole samaväärsed, järgneb juba nende mõistete definitsioonidest. Kui oleks võimalik ilma igasuguste raskusteta muuta soojust tööks, siis arusaadavalt ei oleks töö ja soojuse mittesamaväärsus oluline. *Soojuse kompenseerimata üleminek*

[1] Sageli vaadeldakse soojuse mehhaanilist ekvivalenti ja töö termilist ekvivalenti arvudena, milledel on teatud (murruline) dimensioon. Selleks ei ole mingit vajadust. Energiat võib sama õigusega mõõta nii töö- kui ka soojuseühikutes. Meie loeme soojust ja tööd sellisteks suurusteks, mis on ühe ja sama dimensiooniga.

tööks ei ole aga termodünaamika teise printsiibi põhjal võimalik. Seega kahe teineteisega mitte-samaväärse energia ülekande vormi — soojuse ja töö — piiritlemise tähtsus ja nende mõistete osa termodünaamikas saab selgeks ainult termodünaamika teise printsiibi baasil.

Termodünaamika teise printsiibi ja tema otseste järelduste range käsitlemine ei ole sugugi kerge ülesanne. Kui termodünaamika teine printsiip määraks kindlaks, nagu seda sageli arvatakse, ühe energialiigi teiseks energialiigiks muundumise, siis tema käsitlemises raskusi ei esineks. Tegelikult see printsiip teatud kindlal viisil piirab energia ühe ülekandevormi muundumist teiseks ülekandevormiks, s. o. soojuse muundumist tööks. Seetõttu tuleb termodünaamika teise printsiibi olemuse selgitamisel alati koos vaadelda vähemalt kolme keha: esimene neist annab teisele energiat soojuse vormis ja kolmas saab teiselt energiat töö vormis. Kui on nõutav, et protsessi lõpuks oleks üks keha (nimelt just teine, niinimetatud töötav keha) viidud tagasi algolekusse, siis tuleb teatavasti vaatluse alla võtta veel neljas keha — jahutaja. Mis aga puutub sellesse, milliste energialiikide (molekulaar-kineetilise, molekulaar-potentsiaalse, kiirgusenergia) täiendamiseks soojus kulus, samuti ka sellesse, milliste energialiikide täiendamiseks töö kulus, siis termodünaamika teise printsiibi ja tema otseste järelduste käsitlemisel see ei ole oluline.

Suhtudes küsimusse äärmiselt pinnapealselt ja kergemeelselt võib näida, et soojuse defineerimine energia ülekande vormina on vastuolus Engelsi tööde põhjal dialektilise materialismi süsteemi kuuluva vaatega. See ei ole nii. Otse vastupidi: ükski teine soojuse käsitlus ei vasta paremini dialektika seisukohtadele. (Engelsit lugedes tuleb meenutada, et Engels ei kasutanud veel terminit „siseenergia", mis tänapäeval on üldtuntud; ta kasutas terminit „soojus" esiteks suuruse Q tähistamiseks, teiseks siseenergia U tähistamiseks ja kolmandaks molekulaar-soojusliku liikumise tähistamiseks. Need terminid diferentseerusid hiljem.)

Arusaamine tööst kui energia ülekande vormist järgneb otseselt „Looduse dialektikas" toodud töö mõistet käsitlevast Engelsi artiklist. Engels kirjutab: „Vaadelduna kvantitatiivsest küljest on töö liikumise vormi muutus."

Kuna neil aastatel termodünaamiliste suuruste statistiline interpreteerimine ei olnud sellisel tasemel nagu nüüd, siis on arusaadav, et me Engelsi töödes leiame vähe selgitusi selle kohta, et soojus on niisugune energia ülekande vorm, mis erinevalt tööst koosneb mikrofüüsikaliste protsesside kogust. Kuid selleks, et märgata, kui lähedale juba Engels jõuab sellisele soojuse käsitlusele, on küllalt, kui süveneda „Looduse dialektikas" soojusele pühendatud Engelsi artikli kahe esimese lõigu sisusse. Seal on muuhulgas öeldud: „Nagu me nägime, on olemas kaks mehhaa-

nilise liikumise kadumise vormi. Esimeseks vormiks on tema muundumine mehhaaniliseks potentsiaalseks energiaks, näiteks mingi koormuse tõstmise teel... Teine mehhaanilise liikumise kadumise vorm leiab aset hõõrde ja põrke korral... Siin kaduv mehhaaniline liikumine kaob kui niisugune. Ta ei ole esialgu iseeneseks uuesti taastatav. Protsess ei ole vahetult pööratav." Me näeme siin töö selget vastandamist hõõrde ja mitteelastse põrke soojusele ja selle tõsiasja rõhutamist, et „mehhaanilise liikumise kadumise teise vormi" iseärasuseks on tema mittepööratavus, mis viitabki „teise vormi" väljaeraldamisele selle tunnuse järgi, et erinevalt tööle vastavast juhust on siin tähtis mikrofüüsikaliste protsesside kogu. Loomulikult ei avaldanud Engels oma märkustes soojuse kohta juhuslikult seda mõtet. Engels seob liikumise vormi muutuse liikumise ülekandega järgmiselt: „Liikumise vormi muutus on alati vähemalt kahe keha vahel kulgev protsess; üks kehadest kaotab teatud kindla kvaliteediga liikumishulga (näiteks soojust); teine kehadest aga saab vastava, mingi teise kvaliteediga liikumishulga..." Seetõttu võib arvata, et kui neil aastatel oleksid termodünaamika statistilised alused olnud küllaldaselt arenenud, siis Engels ise oleks formuleerinud soojuse kohta selle definitsiooni, mis on esitatud eespool.

Mõned vaidlevad vastu soojuse käsitlemisele energia ülekande erilise vormina, mis koosneb mikrofüüsikalistest protsessidest, kuid nad ei ole siiski võimelised esitama mingit teist termodünaamika alustega kooskõlas olevat soojuse definitsiooni.

Mõningaid viib nähtavasti segadusse järgmine asjaolu: sõnaga „töö" me oleme harjunud tähistama nii tööprotsessi kui ka töö hulka; seevastu sõna soojuse all me oleme harjunud mõistma ainult soojuse hulka; soojuse vormis toimuvat energia ülekande protsessi oleme harjunud nimetama teise sõnaga — sõnaga „soojusvahetus". Siin me puutume kokku kunagi valitsenud soojusaine-teooria iganditega. Alludes sellele harjumusele (mille kultiveerimiseks ei ole küll siiski alust), võib soojuse kohta eespool toodud definitsiooni ümber sõnastada järgmiselt: *tööprotsess ja „soojus-protsess" on termodünaamika seisukohalt kaks ainuvõimalikku energia ülekande vormi, kuna tööhulk ja soojushulk on nendes vormides ülekandunud energiahulkade mõõtudeks.*

§ 129. Termodünaamika esimese printsiibi võrrand. Isobaarilise ja isotermilise paisumise töö valemid.

Võtame mingi keha. Mingu see keha teatavate (ükskõik milliste) mõjutuste tõttu ühest termodünaamilisest olekust C_1 teise olekusse C_2. Olgu olekus C_1 keha energia U_1 ja olekus C_2 — U_2

Energiat võib kehale või kehade süsteemile anda kahes ainuvõimalikus vormis: t ö ö vormis ja s o o j u s e vormis. Seega võib väita, et ükskõik millised ka oleksid protsessi konkreetsed iseärasused, *süsteemi koguenergia juurdekasv* ($U_2 - U_1$) *peab kindlasti olema võrdne kulutatud töö ja süsteemile antud soojushulga summaga.*

Toome suuruse k u l u t a t u d t ö ö asemel sisse vastasmärgilise suuruse s ü s t e e m i p o o l t s o o r i t a t u d t ö ö. Ülalesitatud väidet võib ümber sõnastada järgmiselt: *süsteemile antud soojus kulub süsteemi energia juurdekasvuks ja süsteemi poolt sooritatud tööks.*

Lepime kokku, nagu seda tavaliselt tehakse, tähistada kirjutusviisi lühiduse mõttes juurdekasvu sümboliga Δ:

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Soojushulka, mis antakse süsteemile selle üleminekul olekust C_1 olekusse C_2, tähistame tähega Q; selle protsessi kestel süsteemi poolt sooritatud tööd tähistame tähega A. Sel juhul

$$Q = \Delta U + A. \tag{3}$$

Kõik võrrandis (3) esinevad suurused tuleb endastmõistetavalt väljendada ühtedes ja samades energiaühikutes. Kui me kavatseksime soojust Q ja energiat U mõõta kalorites, kuid tööd A tööühikutes, siis peaksime võrrandisse (3) A ette kirjutama tegurina tööühiku termilise ekvivalendi; sellist kirjutusviisi kasutatakse sageli. Kuna varem ei saa ette öelda, kas vastavalt ülesande füüsikalisele sisule tuleb valemis esinevad suurused väljendada kalorites või, ütleme näiteks, džaulides, siis praktikas ei oma selline valemi kuju mingit eelist.

Selleks et valemeid mitte koormata üleliigsete tähistega, me ei kirjuta kuhugi tööühiku termilise ekvivalendi ja soojusühiku mehhaanilise ekvivalendi sümboleid. Seega jätame lahtiseks küsimuse, millistes ühikutes on väljendatud Q, U ja A — kas kalorites või tööühikutes. Tuleb ainult meeles pidada, et arvuliste väärtuste asetamisel võrrandisse peab kasutama üht ja sama energiaühikut (kui Q ja U väljendatakse kalorites, siis tuleb ka A väljendada kalorites; kui A väljendatakse džaulides, siis tuleb ka Q ja U väljendada džaulides jne.).

Nagu paragrahvis 127 on näidatud, tuleb üldjuhul, kui keha paisumisel rõhk muutub, keha poolt paisumisel tehtud tööd arvutada järgmise valemi järgi:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dv.$$

Kui soojendamine ja sellega seotud paisumine on isobaariline, s. o. toimub konstantsel rõhul, siis see valem omandab

väga lihtsa kuju. Sel juhul võib p kui konstantse suuruse tuua integraalimärgi ette:

$$A = p(v_2 - v_1). \tag{4}$$

Keha poolt isobaarilisel paisumisel tehtud töö on võrdne rõhu ja ruumala juurdekasvu korrutisega.

Seda valemit tuleb kõige sagedamini rakendada keha poolt agregaatoleku muutumisel, s. o. keemisel ja sulamisel, sooritatud töö arvutamiseks. Neil juhtudel jääb rõhk konstantseks seni, kuni kogu vedelik on ära keenud või kui kogu tahke keha on sulanud.

Isobaarilise töö valemi rakendamise näitena arvutame sellise aurumasina võimsuse, mille töötamisel teatud kolvi asendi korral auru juurdevoolu silindrisse ei katkestata, s. o. mis töötab „auru äralõikamiseta". Olgu auru rõhk silindris 3 *at* võrra suurem välisrõhust; silindri ruumala olgu 10 *l*, võlli nurkkiirus 200 $\frac{pööret}{min}$ ja võimsuse kadu hõõrdele 10%.

Selleks et saada tööd kilogramm-meetrites, väljendame rõhu $\frac{kG}{m^2}$-tes ja ruumala kuupmeetrites. On kerge näha, et 3 $at = 30\,000$ $\frac{kG}{m^2}$ ja 10 $l = \frac{1}{100}\,m^3$. Valemi $A = p(v_2 - v_1)$ järgi, kus antud juhul $v_2 - v_1$ on silindri ruumala ja p auru töörõhk, leiame, et kolvi iga käiguga teeb masin tööd $30\,000 \cdot \frac{1}{100}\,kGm = 300\,kGm$. Arvestades võimsuse kadu hõõrdele, võib masina poolt 1 *sek* jooksul tehtud tööd lugeda võrdseks $0{,}9 \cdot 300 \cdot \frac{200}{60}\,kGm = 900$ *kGm*-ga. Kuid ühe sekundi jooksul sooritatud töö on võimsus: $W = \frac{A}{t} = 900\,\frac{kGm}{sek}$. Selleks et saada masina võimsus *HJ*-des, tuleb saadud arv jagada 75-ga; seega leiame, et masina võimsus on 12 *HJ*.

Keha isotermilise paisumise töö arvutamiseks üldise valemi

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

järgi tuleb teada, kuidas konstantsel temperatuuril rõhk muutub sõltuvalt ruumalast.

ν mooli ideaalse gaasi rõhk $p = \nu \frac{RT}{v}$. Asetame selle avaldise ülaltoodud valemisse ja, arvestades, et T on protsessi isotermilisuse tõttu konstantne, toome νRT integraalimärgi ette. Siis jääb meil integraalimärgi alla naturaallogaritmi diferentsiaal: $\frac{dv}{v} = d\ln v$. Ideaalse gaasi isotermiline töö võrdub seega:

$$A = \nu RT \ln \frac{v_2}{v_1}. \tag{5}$$

Seda valemit rakendatakse väga laialdaselt ligikaudsetes termodünaamilistes arvutustes ja seetõttu on ta üheks tähtsamaks termodünaamika valemiks. Kuna isotermilise protsessi korral $pv = const$, siis selles valemis võib ruumalade suhet $\frac{v_2}{v_1}$ asendada vastupidise rõhkude suhtega $\frac{p_1}{p_2}$:

$$A = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \tag{6}$$

Kui tööd väljendada kilogramm-meetrites, siis tuleb ka valemites (5) ja (6) esinev gaasikonstant väljendada kilogramm-meetrites ($R = 0{,}848\ kGm$); kui R on väljendatud kalorites või ergides, siis väljendub ka A vastavalt kalorites või ergides.

Vastavalt Joule'i seadusele ideaalse gaasi siseenergia ei muutu selle gaasi isotermilisel paisumisel või kokkusurumisel. See tähendab, et *kogu soojus, mida gaasile antakse isotermilisel paisumisel, kulub töö sooritamiseks; kogu töö, mida kulutatakse gaasi isotermiliseks kokkusurumiseks, antakse gaasi poolt edasi soojuse vormis;* kui $t = const$, siis ideaalse gaasi jaoks

$$Q = A. \tag{7}$$

Seega ülaltoodud valemeid võib võrdsel määral rakendada nii gaasi poolt sooritatud isotermilise töö kui ka gaasi isotermiliseks paisumiseks vajaliku soojushulga, s. o. isotermilise paisumise „latentse soojuse", arvutamiseks.

§ 130. Gaasi paisumise töö molekulaar-kineetilise teooria seisukohalt.

Molekulaar-kineetilise teooria seisukohalt lähtudes teeb paisuv gaas tööd selle arvel, et *vastu eemalduvat kolbi põrkuvad gaasimolekulid annavad kolvile osa oma kineetilisest energiast.* Seevastu gaasi kokkusurumisel gaasimolekulid, põrkudes vastu nende poole liikuvat kolbi, saavad teatud lisaenergia.

Liikugu kolb gaasi paisumisel kiirusega w. Mingi gaasimolekul, mis paigalseisvate seinte suhtes kiirusega u liigub eemalduva kolvi suunas, lendab vastu kolbi kiirusega $u - w$ ja põrkub sellelt eemale niisama suure, kuid vastassuunalise kiirusega, s. t. pärast tagasipõrkumist on molekuli kiirus liikumatute seinte suhtes $u - 2w$. Seega kiirusega u liikuv gaasimolekul, mis põrkub vastu kiirusega w eemalduvat kolbi (kus $u \gg w$), annab ära iga põrkega järgmise osa oma kineetilisest energiast:

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{m(u-2w)^2}{2} \approx 2muw.$$

Kui kõigil molekulidel oleks suuruse poolest üks ja sama kiirus, kuid liikumise suuna järgi jaguneksid kuude võrdsesse mole-

kulide voogu (kaks vastassuunalist voogu iga koordinaaditelje sihis), siis aja Δt jooksul langeks igale seinte ja kolvi pindala ühikule $\frac{1}{6} nu\,\Delta t$ molekuli, kus n on ühes ruumalaühikus leiduvate gaasimolekulide arv. Sellise väga lihtsa skeemi järgi tekitaks molekulide iga põrge liikumatutele seintele rõhu $2mu$ ja ajavahemiku $\Delta t = 1$ *sek* jooksul seinale langevad molekulid rõhu

$$p = \frac{1}{3} nmu^2.$$

Kui u all mõista molekulide ruutkeskmist kiirust, siis see võrrand ühtib gaaside kineetilise teooria põhivõrrandiga.

Nagu eespool on märgitud, iga molekul, mis põrkub vastu kiirusega w eemalduvat kolbi, tõukab teda ja annab temale seejuures üle energia $2muw$. Aja dt jooksul põrkub vastu kolbi, mille pindala on s, $\frac{s}{6} nudt$ molekuli ja kolb saab nendelt energia:

$$2muw \cdot \frac{s}{6} nudt = \frac{1}{3} nmu^2 \cdot swdt.$$

Rakendades eespooltoodud rõhu valemit ja arvestades, et aja dt jooksul kolb nihkub edasi lõigu $dl = wdt$ võrra, võime gaasimolekulide poolt kolvile üleantud energiat avaldada järgmiselt:

$$p \cdot s \cdot w \cdot dt = psdl = pdv.$$

Seega me näeme, et gaasi poolt paisumisel tehtav töö tehakse tõepoolest vastu kolbi lendavate gaasimolekulide poolt äraantava energia arvel.

Vastu kolbi põrkuvate gaasimolekulide kogu poolt kaotatud energia ei sõltu kolvi liikumise kiirusest (kui see ei ole väga suur). Tõepoolest: kui kolvi kiirus on k korda väiksem kui w, siis energia, mida iga molekul vastu kolbi põrkudes ära annab, on samuti k korda väiksem; see-eest kulub aga kolvi edasiliikumiseks lõigu dl võrra k korda rohkem aega ning selle aja jooksul põrkub vastu kolbi k korda rohkem molekule. Lõpptulemusena on gaasimolekulide poolt kaotatud energia ikkagi pdv, s. o. võrdne gaasi paisumise tööga.

Kirjeldatud protsessiga, kus gaas teeb tööd, peab ilmselt kaasnema vastu kolbi puutuva gaasikihi jahtumine. Kuid molekulaarne liikumine ja molekulide põrked ühtlustavad temperatuuri kogu gaasimassi ulatuses. Selleks et töötava gaasi temperatuur jääks paisumisel muutumatuks, tuleb ilmselt gaasi energiat täiendada, s. o. hoolitseda, et gaasi voolaks soojust juurde. Sel juhul teeb paisuv gaas tööd juurdeantava soojuse arvel.

Ideaalse gaasi isotermilisel paisumisel jääb gaasimolekulide kineetiline energia konstantseks ja gaasile antud kogu soojushulk muundub ülalkirjeldatud viisil paisumise tööks.

Gaasi isobaarilisel paisumisel tuleb gaasi rõhu konstantsena hoidmiseks tõsta soojendamise teel gaasi temperatuuri; vastasel

korral, seoses gaasi tiheduse vähenemisega, rõhk kahaneb. Seega väljastpoolt juurdeantav soojushulk ei pea antud juhul mitte üksi kompenseerima gaasimolekulide kineetilise energia kao, mis on võrdne gaasi paisumise tööga:

$$A = p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1) = Q_1,$$

vaid peale selle peab see soojushulk garanteerima molekulaar-kineetilise energia kasvu, mis vastab gaasi soojendamisele temperatuurilt T_1 kuni temperatuurini T_2:

$$\Delta E = C_v(T_2 - T_1) = Q_2.$$

Järelikult, isobaarilisel paisumisel gaasile antavast soojushulgast

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_p(T_2 - T_1)$$

muutub selline osa, mis väljendub suhtega $\frac{R}{C_p}$, gaasi paisumise tööks.

Vaatleme veel gaasi paisumist tühjusse. Oletame, et anumas olev gaas voolab teise anumasse, kus oli tühjus. Sel juhul gaas ei tee välistööd. Kui mõlemad anumad on väliskeskkonnast soojuslikult isoleeritud ja kui gaas on oma omadustelt lähedane ideaalsele gaasile, siis, nagu Joule'i katsetest (§ 93) on teada, protsessi lõpul (kui on saabunud tasakaal) on gaasi temperatuur võrdne gaasi temperatuuriga protsessi algul.

Kuid seni, kuni voolamisprotsess veel kulgeb, liigub gaas rõhkude vahe tõttu kiirendusega vaakuumanuma poole; kiirenduse saab gaas selle töö arvel, mida teeb esimesse anumasse jäänud gaas tema väljatõrjumiseks. Selleks momendiks, kui gaasi temperatuur mõlemas anumas on omandanud enam-vähem võrdse väärtuse, on esimeses anumas gaasi temperatuur veidi alanenud; teises anumas, kus oli vaakuum, on gaasi temperatuur algtemperatuurist kõrgem.

Gaasi poolt voolamisel omandatud kineetiline energia on väike, võrreldes gaasi kogu molekulaar-kineetilise energiaga. Seetõttu ei ole sellised temperatuuri-efektid suured. Kui summaarse energia muutumatus on garanteeritud, siis protsessi lõppstaadiumis gaasi temperatuur ühtlustub ja omandab mõlemas anumas algväärtuse.

§ 131. Poisson'i võrrand ja gaasi adiabaatilise paisumise töö.

Kujutleme sellist katseseadet, kus toimub gaasi adiabaatiline, s. o. ilma soojuse juurde- ja äravooluta toimuv tasakaalupaisumine või -kokkusurumine. On arusaadav, et antud juhul gaasi paisumisel rõhk väheneb ja seoses sellega, et osa gaasi siseenergiast kulub töö tegemiseks, gaasi temperatuur alaneb. Sellise protsessi graafikut (näiteks pv-diagrammis kujutatult), nagu seda

on mainitud paragrahvis 127, nimetatakse *adiabaadiks*. Ideaalse gaasi adiabaadi võrrandi andis Poisson (1823. a.); tuletame selle võrrandi.

Üldjuhul kulub kehale antud soojushulk Q keha siseenergia suurendamiseks ja töö A tegemiseks. Lõpmatult väikese oleku muutuse korral $\delta A = pdv$ ja

$$\delta Q = dU + pdv.$$

Kuna ideaalsete gaaside jaoks $U = \nu C_v T$, siis

$$\delta Q = \nu C_v dT + pdv.$$

Kui gaasi tasakaalupaisumine või -kokkusurumine toimub adiabaatiliselt (ilma soojuse juurde- või äravooluta), s. o. kui $\delta Q = 0$, siis on selge, et temperatuuri ja ruumala muutus allub järgmisele võrrandile:

$$\delta Q = \nu C_v \partial T + p\partial v = 0.$$

Selle võrrandi integreerimiseks tuleb eraldada muutujad, mida on kerge teha, asendades $p = \nu \frac{RT}{v}$ ja jagades kõiki liikmeid T-ga:

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_v \frac{\partial T}{T} + \nu R \frac{\partial v}{v} = 0.$$

Võttes arvesse, et $\frac{dx}{x}$ on $\ln x$ diferentsiaal, me näeme, et selle võrrandi parema poole me saame, kui esiteks võtame täisdiferentsiaali järgmisest funktsioonist:

$$S = \nu(C_v \ln T + R \ln v + a), \tag{8}$$

kus $a = const$, ja teiseks *loeme selle funktsiooni adiabaatilisel tasakaalupaisumisel või -kokkusurumisel muutumatuks* ($dS = 0$). See funktsioon S on *ideaalse gaasi entroopia*.

Potentseerides leitud seost, mis valitseb T ja v vahel gaasi adiabaatilisel tasakaalupaisumisel või -kokkusurumisel, saame ühe mooli jaoks ($\nu = 1$):

$$T \cdot v^{\varkappa - 1} = const = e^{\frac{S-a}{S_V}}, \tag{9}$$

kus seetõttu, et selle valemi võrdlemine järgnevate valemitega oleks mugav, on toodud sisse tähis $\varkappa = \frac{C_p}{C_v}$; seega $\varkappa - 1 = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{R}{C_v}$.

Siit me näeme, et adiabaatilisel tasakaalupaisumisel temperatuur kahaneb pöördvõrdeliselt ruumala ($\varkappa - 1$) astmega. Kõige kiiremini kahaneb seega üheaatomiliste gaaside temperatuur. See on nii sellepärast, et ühesugustel temperatuuridel on üheaatomiliste gaaside siseenergia varu väiksem kui mitmeaatomiliste gaaside oma.

Adiabaatilise tasakaaluprotsessi korral T ja v vahel valitsev seos, mille me tuletasime, kujutab endast ühte Poisson'i võrranditest. Gaasi adiabaadi kaks ülejäänud võrrandit (Poisson'i võrrandit) määravad sõltuvuse p ja v vahel ja T ja p vahel. Vastavalt sellele võib ka gaasi entroopiat kujutada nende parameetrite funktsioonidena.

Paigutame ülaltoodud entroopia valemis logaritmimärgi alla ruumala asemele tema Clapeyron'i võrrandi järgi leitud avaldise $v = \nu \frac{RT}{p}$. Logaritmides saame kolm liiget. Esimese neist, $R\ln\nu R$, ühendame konstandiga a ja tähistame nende summa tähisega a_1. Teise liikme $R\ln T$ ühendame võrrandi esimese liikmega $C_v \ln T$; toome $\ln T$ sulgude taha ja võtame arvesse, et $C_v + R = C_p$. Seega saame:

$$S = \nu(C_p \ln T - R\ln p + a_1), \tag{10}$$

kus

$$a_1 = a + R\ln\nu R = const.$$

Potentseerides saame siit teise Poisson'i võrrandi:

$$p^{\frac{T}{\varkappa - 1}{\varkappa}} = const = e^{\frac{S - a_1}{C_p}}, \tag{11}$$

kus endiselt

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_v} \text{ ja } \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{R}{C_p}.$$

Pöördume tagasi entroopia esimese valemi [valemi (8)] juurde ja asendame selles absoluutse temperatuuri tema avaldisega, mis on leitud Clapeyron'i võrrandi järgi, s. o. teeme asenduse $T = \frac{pv}{\nu R}$. Pärast logaritmimist saame kolm liiget: esimene neist on $C_v \ln p$; ühendame teise liikme $C_v \ln v$ liikmega $R\ln v$, toome $\ln v$ sulgude taha ja võtame arvesse, et $C_v + R = C_p$; kolmanda liikme $C_v \ln \nu R$ ühendame konstandiga a ja tähistame nende summa tähisega a_2. Seega saame:

$$S = \nu(C_v \ln p + C_p \ln v + a_2), \tag{12}$$

kus

$$a_2 = a - C_v \ln \nu R = const.$$

Potentseerides saame Poisson'i kolmanda võrrandi, mis määrab gaasi adiabaadi pv-diagrammis:

$$pv^{\varkappa} = const = e^{\frac{S - a_2}{C_v}}. \tag{13}$$

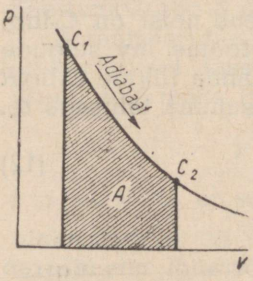
Kuna alati $\varkappa > 1$, siis, võrreldes seda gaasi adiabaatide võrrandit Boyle'i isotermide võrrandiga $pv = const$, me näeme, et pv-*dia-*

grammis adiabaadid langevad ruumalatelje poole järsemini kui isotermid.

Poisson'i võrrandi rakendamise mugavuse mõttes toome ära tabeli, kus on antud Poisson'i võrrandis astmenäitajatena esinevate suuruste $\varkappa$, $\varkappa - 1$ ja $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$ arvulised väärtused. Selle tabeli viimases veerus on toodud $\frac{1}{\varkappa - 1}$ väärtused; see suurus näitab, mitu korda ühe mooli gaasi soojusmahtuvus on suurem universaalsest gaasikonstandist[1].

	$\varkappa$	$\varkappa - 1$	$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\varkappa - 1} = \frac{C_v}{R}$
Uheaatomiline gaas	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$
Kaheaatomiline gaas	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{2}$
Mitmeaatomiline gaas . . .	$\frac{8}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$

Poisson'i võrrandi tuletuskäigust nähtub, et see võrrand on rakendatav ainult adiabaatilistele tasakaaluprotsessidele. Kiire (s. o. mittetasakaalulise) adiabaatilise kokkusurumise või paisumise arvutamiseks Poisson'i võrrandit ei saa rakendada. Gaasi silindrisse sulgeva kolvi koormuse järsul suurendamisel me kulutame gaasi kokkusurumiseks rohkem tööd, kui see oleks vajalik koormuse ettevaatlikul, järkjärgulisel suurendamisel; seoses sellega kasvab gaasi temperatuur kiiremini, kui see järgneb Poisson'i võrrandist. Paisumisel, mis ei ole tasakaaluprotsess, teeb gaas vähem tööd, kui ta on võimeline sooritama, ja seetõttu langeb temperatuur aeglasemalt.



Joon. 346. Viirutatud pindala kujutab siseenergia kahanemist.

Selliste adiabaatiliste protsesside arvutamiseks, mis ei ole tasakaaluprotsessid (s. o. kiiresti kulgevate protsesside arvutamiseks), kasutatakse valemeid, mis on oma kujult identsed Poisson'i valemitega. Need erinevad aga oluliselt Poisson'i valemitest selle

[1] Jagades Robert Meyer'i võrrandi $C_p = C_v + R$ liikmeid C_v-ga, saame: $\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v}$ ehk $\varkappa - 1 = \frac{R}{C_v}$, millest järgneb $C_v = \frac{1}{\varkappa - 1} R$.

poolest, et suurust $\varkappa$, mis Poisson'i valemites tähendab soojusmahtuvuste suhet $\frac{C_p}{C_v}$, vaadeldakse siin lihtsalt empiirilise konstandina ja antakse temale selline väärtus, mille korral need, nii-öelda mitteseaduspärased valemid on parimas kooskõlas katsetulemustega.

Kui gaasi paisumisel ei toimu soojuse juurde- ega äravoolu, siis sõltumatult sellest, kas meil on tegemist tasakaaluprotsessiga või ei, teeb keha tööd oma siseenergia kahanemise arvel (joon. 346):

$$A = U_1 - U_2. \tag{14}$$

Gaasi adiabaatilise t a s a k a a l u p a i s u m i s e või -kokkusurumise kas või ainult ligikaudseks realiseerimiseks tuleb keha soojuslikult isoleerida teda ümbritsevatest kehadest. Selleks võib keha paigutada näiteks „halvast soojusjuhist" valmistatud kestaga kaetud silindrisse või, mis on veel parem, paigutada keha sellisesse silindrisse, mis on riputatud teise silindri sisse nii, et silindreid eraldab õhutühi ruum.

Palju kergem on realiseerida sellist adiabaatilist paisumist või kokkusurumist, mis ei ole tasakaaluprotsess. Äärmiselt kiirel kokkusurumisel ei jõua keha ümbritsevale keskkonnale ära anda kuigi suurt soojushulka ja seetõttu võib väga kiiret kokkusurumist lugeda adiabaatiliseks protsessiks. Sel põhjusel võib adiabaatilise töö valemit [valemit (14)] rakendada näiteks küttesegu kokkusurumisele sisepõlemismootori silindris.

Gaaside adiabaatilise paisumise tööd võib leida temperatuuri languse järgi. J o u l e'i seaduse põhjal kehtib ν mooli gaasi kohta seos: $U_1 - U_2 = \nu C_v(T_1 - T_2)$. Seega

$$A = \nu C_v(T_1 - T_2). \tag{15}$$

Kui gaasi adiabaatiline paisumine või kokkusurumine on tasakaaluprotsess, siis Poisson'i võrrandite põhjal peab gaasi parameetrite algolekule ja lõppolekule vastavate väärtuste vahel kehtima seos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}.$$

Kasutades seda seost saame kaks valemit, mida praktikas sageli rakendatakse gaasi adiabaatilise paisumise töö arvutamiseks. Sel eesmärgil toome avaldises $A = \nu C_v(T_1 - T_2)$ T_1 sulgude taha ja asendame C_v avaldisega $\frac{R}{\varkappa - 1}$. Absoluutsete temperatuuride suhte $\frac{T_1}{T_2}$ asemele paigutame rõhkude või ruumalade suhte vastava astme. Seega saame kaks ν mooli gaasi kohta kehtivast seost:

$$A = \nu \frac{RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}\right], \tag{16}$$

$$A = \nu \frac{RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \qquad (17)$$

Need valemid kehtivad ideaalse gaasi tasakaalupaisumise ($A > 0$) ja tasakaalukokkusurumise ($A < 0$) korral. Andes konstandile $\varkappa$ väärtusi, mis on kooskõlas katseandmetega, rakendatakse neid valemeid praktikas ka reaalsetele gaasidele ja arvutatakse nende põhjal kiire adiabaatilise (s. t. mittetasakaalu-) paisumise või kokkusurumise tööd. Neid valemeid rakendatakse laialdaselt näiteks gaasiga töötavate jõumasinate arvutamisel.

§ 132. Termokeemilised võrrandid.

Keemiliste protsessidega käib harilikult kaasas ka soojuse eraldumine või soojuse neeldumine. Selliseid protsesse, mille korral süsteem eraldab soojust, nimetatakse *eksotermilisteks*[1] ja selliseid, mille korral süsteem neelab väljastpoolt juurdeantavat soojust, nimetatakse *endotermilisteks*[2].

Sõltuvalt nendest tingimustest, milledes keemiline reaktsioon kulgeb, võib soojuse eraldamise või neelamise kõrval süsteem ühtedel juhtudel teha tööd, teistel juhtudel võib aga ilmneda, et keemilise protsessi jätkamiseks tuleb kulutada tööd. Sellistel juhtudel, kui tekivad gaasilised reaktsiooni produktid, võib süsteem teha tunduval hulgal tööd. Niisugune reaktsioon toimub näiteks püssirohu plahvatusel. Paljusid reaktsioone võib „elektrifitseerida" galvaani elementide abil; galvaani elementides toimuvate keemiliste protsesside arvel saadakse tööd, mis kulub elektrivoolu tekitamiseks. Vastupidist näidet kujutavad endast elektrolüüsil toimuvad reaktsioonid; keemilise protsessi tekitamiseks tuleb siin tööd kulutada.

Süsteemi siseenergia kadu nimetatakse termokeemias reaktsiooni soojusefektiks. Tegelikult antakse siseenergia kadu ära osalt soojuse vormis, osalt töö vormis. Milline osa siseenergia kaost antakse ära soojuse vormis ja milline töö vormis, see sõltub tunduval määral nendest tingimustest, milles keemiline süsteem asub. Tuleb meeles pidada, et suurus, mida termokeemias tavaliselt nimetatakse reaktsiooni soojusefektiks, ühendab endas mõlemad need osad: nii süsteemi poolt äraantud soojuse, kui ka süsteemi poolt tehtud töö (tööd mõõdetakse muidugi samades ühikutes nagu soojustki; harilikult kalorites).

Siseenergia juurdekasvu tähistame sümboliga ΔU, siis

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

---

[1] Kreekakeelsest sõnast — exō — väljas.
[2] Kreekakeelsest sõnast — *endon* — sisse.

Vastupidise märgiga suurus kujutab endast siseenergia k a d u ja reaktsiooni soojusefekt on seega $-\Delta U$. Termokeemilised võrrandid kirjutatakse tavaliselt järgmise skeemi kohaselt: vasakule pannakse lähteainete siseenergia U_1, paremale reaktsiooni produktide siseenergia U_2 ja reaktsiooni soojusefekt:

$$U_1 = U_2 + (-\Delta U).$$

Ühe mooli mingisuguse aine siseenergia sellisel temperatuuril ja rõhul, mille jaoks on üles kirjutatud termokeemiline võrrand, väljendatakse tavaliselt aine keemilise valemiga. Termokeemilises võrrandis näiteks O_2 tähistab 32 *g* hapniku siseenergiat, CO_2 tähistab 44 *g* süsihappegaasi siseenergiat jne. (Termokeemilised võrrandid kirjutatakse sageli mitte gramm-molekuli, vaid kilogramm-molekuli jaoks; sel juhul O_2 tähistab 32 *kg* hapniku siseenergiat.) Näiteks võrrand

$$C_{(tahke)} + O_{2(gaas)} = CO_{2(gaas)} + 97\,000\ cal$$

tähendab, et kui põlemisel 1 gramm-aatom (12 *g*) tahket süsinikku ühineb 1 mooli (32 *g*) gaasilise hapnikuga, siis saadakse 1 mool (44 *g*) süsihappegaasi ning soojuse ja töö vormis eraldub 97 000 *cal*.

On olemas reaktsioone, millede soojusefekti vahetu katseline mõõtmine osutub teatud põhjustel võimatuks. Selliste reaktsioonide soojusefekt arvutatakse paljudel juhtudel termokeemiliste võrrandite abil.

Kuna süsiniku põlemisel tekib alati teatav hulk süsihappegaasi CO_2, siis katselisel teel ei saa määrata näiteks tahke süsiniku vingugaasiks CO põlemise soojust; vingugaasi süsihappegaasiks põlemise soojus on aga mõõdetav:

$$CO_{(gaas)} + \tfrac{1}{2}O_{2\,(gaas)} = CO_{2\,(gaas)} + 68\,000\ cal.$$

On kerge näha, et kui lahutada see võrrand ülaltoodud võrrandist, siis saadakse parajasti otsitav süsiniku vingugaasiks põlemise soojus:

$$C_{(tahke)} + \tfrac{1}{2}O_{2\,(gaas)} = CO_{(gaas)} + 29\,000\ cal.$$

Konstantsel ruumalal kulgevate reaktsioonide soojusefekt Q_v on täpselt võrdne siseenergia kaoga. Konstantsel rõhul kulgeva reaktsiooni soojusefekt on võrdne niinimetatud „soojussisalduvuse" (suurus, mida selgitatakse hiljem, § 139) kahanemisega.

Kuna siseenergia (samuti nagu „soojussisalduvuse") muutus on määratud süsteemi lõpp- ja algolekuga ja ei sõltu protsessi vahepealsetest staadiumidest, siis ilmselt ka *reaktsiooni soojusefekt ei sõltu sellest, milliseid vahepealseid staadiume reaktsioon läbib.* Selle termokeemia põhiseaduse avastas Peterburgi akadeemik

Hess 1840. a., s. o. mõni aasta enne seda, kui Robert Mayer ja Helmholtz formuleerisid energia jäävuse seaduse.

Termokeemias toimitakse kõige sagedamini järgmiselt: katseliselt määratakse mitmesuguste *elementide ja nende ühendite põlemise soojus.* Mingisuguse ühendi põlemise soojusest lahutatakse seda ühendit moodustavate elementide põlemise soojuste summa; sel teel leitakse nende elementide *ühinemisreaktsiooni soojusefekt.* Oletame näiteks, et meid huvitab tahke süsiniku ja väävli väävelsüsinikuks ühinemise soojusefekt:

$$C_{(tahke)} + 2S_{(tahke)} = CS_{2\,(gaas)} + x\ cal.$$

Selleks et määrata x, kasutame 1 mooli väävelsüsiniku, 1 gramm-aatomi tahke süsiniku ja 2 mooli tahke väävli põlemise soojusi, mis on saadud termokeemilistest katsetest.

$$CS_{2(gaas)} + 3O_{2\,(gaas)} = CO_{2\,(gaas)} + 2SO_{2\,(gaas)} + 208\,000\ cal,$$

$$C_{(tahke)} + O_{2\,(gaas)} = CO_{2\,(gaas)} + 97\,000\ cal,$$

$$2S_{(tahke)} + 2O_{2\,(gaas)} = 2SO_{2\,(gaas)} + 140\,000\ cal.$$

Lahutades esimesest võrrandist kaks viimast või, teisiti öeldes, lahutades väävelsüsiniku põlemise soojusest C ja 2S põlemise soojuste summa, saamegi süsiniku ja väävli ühinemisreaktsiooni soojusefekti:

$$C_{(tahke)} + 2S_{(tahke)} = CS_{2\,(gaas)} - 29\,000\ cal.$$

Näeme, et see reaktsioon on endotermiline: tema soojusefekt on negatiivne.

Esimeseks teadlaseks, kes püstitas küllaltki kõrgetasemelisi kalorimeetria probleeme, oli Lomonossovi kaastööline ja sõber, Peterburgi Teaduste Akadeemia adjunkt Richman. Lomonossov tõi teadusesse erisoojuse mõiste ja avas sellega tee kalorimeetria arengule. Kasutades esimesena soojusliku tasakaalu võrrandit, andis Richman rohkem kui sada aastat enne energia jäävuse seaduse lõplikku võitu segamismeetodi alused.

Hinnatava panuse andis kalorimeetriale möödunud sajandi lõpul ja käesoleva sajandi algul vene füüsik Vladimir Fjodorovitš Luginin. Luginini ja tema laboratooriumi (Moskva ülikoolis) katsetulemused põlemise soojuste, erisoojuste, sulamissoojuste ja aurumissoojuste määramise alal paistsid silma oma täpsuse tõttu ja need läksid rahvusvahelistesse käsiraamatutesse.

XXI PEATÜKK.

TERMODÜNAAMIKA TEINE PRINTSIIP.

§ 133. Jahutaja ja temperatuurivahede osa soojuse tööks muundumise tsüklilistes protsessides.

Termodünaamika teine printsiip kõlab järgmiselt[1]: *protsess, mille ainsaks tulemuseks oleks soojuse muundumine tööks, on võimatu.*

Erilist tähelepanu tuleb siin pöörata sõnadele „ainsaks tulemuseks". Nende mõte seisneb järgnevas.

Kui on juttu soojuse muundumisest tööks, siis meil on tegemist vähemalt kahe kehaga: üks neist annab energiat ära soojuse vormis ja seetõttu me nimetame seda *soojusallikaks;* teine keha saab esimeselt energiat soojuse vormis ja annab energiat ära töö vormis, mistõttu me seda nimetame *töötavaks kehaks.* Soojuse tööks muundumise protsess seisneb kõigepealt selles, et seoses soojuse äraandmisega soojusallika siseenergia kahaneb ja sellele vastavalt muutub tema termodünaamiline olek (näiteks temperatuur alaneb), ja teiseks selles, et töötava keha poolt tehtava töö arvel kasvab teatud kehade (ükskõik millised need ka ei oleks) mingit liiki energia varu. Kui me tahaksime kujutleda protsessi, mille ainsaks tulemuseks oleks soojuse muundumine tööks, siis peaksime selle all mõistma neid, ja ainult neid, muutusi (s. o. kahte muutust) koos vaadelduna (joon. 347).

---

[1] Erinevad autorid formuleerivad termodünaamika teist seadust erinevalt. Toome mõned formulatsioonid.

Carnot: Soojusmasina maksimaalne kasutegur ei sõltu töötava keha liigist ja on täielikult määratud piirtemperatuuridega, millede vahel masin töötab.

Clausius: Soojus ei või iseenesest üle minna külmemalt kehalt soojemale kehale.

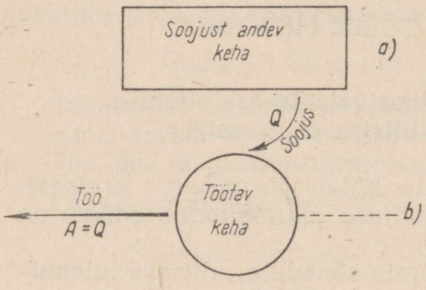
Clausius: Iga isoleeritud süsteemi entroopia püüab saavutada maksimumi.

Thomson (Kelvin): Ühegi keha soojus ei saa muunduda tööks nii, et teisi muutusi peale selle keha jahtumise ei esineks.

Ostwald: Teist liiki perpetuum mobile on võimatu.

Planck: On võimatu ehitada selline perioodiliselt töötav masin, mis ei teeks midagi muud peale raskuse tõstmise ja soojusreservuaari jahutamise.

Termodünaamika teine printsiip ütleb, et soojuse tööks muundumise protsess on võimalik ainult sel juhul, kui soojuse muundumine tööks (seega ka soojusallika jahtumine) ei ole selle protsessi ainsaks tulemuseks: peab eksisteerima veel mingisuguseid t e i s i tulemusi. See tähendab, et soojendaja jahtumise kõrval peab tingimata toimuma veel vähemalt ühe või ka mitme protsessist osavõtva keha termodünaamilise oleku mingi muutus.



Joon. 347. Soojuse tööks muutumise mittevõimaliku protsessi skeem.
a — termodünaamiline olek muutub.
b — termodünaamiline olek protsessi lõpul on endine.

Soojuse tööks muundumise protsesse võib looduses kohata sama tihti nagu töö soojuseks muundumise protsessegi. Tuuled, vihmad, jõed ja kosed teevad maakera pinnal lakkamatult tööd Päikeselt saadava soojuse arvel. Seetõttu ei või töö soojuseks muundumise protsessi vaadelda üldreeglina ja soojuse tööks muundumise protsessi erandina. Nende protsesside vaheline erinevus, mille määrab kindlaks termodünaamika teine printsiip, ei seisne selles. Piltlikult öeldes: loodusel on ühesugune kalduvus nii ühtedeks kui ka teisteks protsessideks. Kui töö muundub soojuseks, siis selle protsessi tulemuste seisukohalt võib siiski asi piirduda ainult soojust neelava keha termodünaamilise oleku muutusega (näiteks hõõrdumisel esineva soojenemisega); seevastu *alati, kui soojus muundub tööks, toimub soojusallika jahtumise kõrval tingimata veel ühe või mitme keha termodünaamilise oleku muutus.*

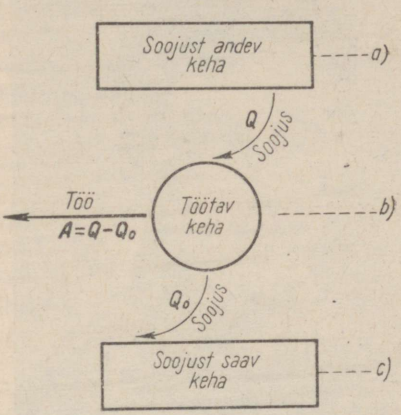
Pidades silmas ülaltoodud asjaolu, räägitakse, et soojuse muundumine tööks on ainult siis võimalik, kui see üleminek k o m p e n s e e r i t a k s e protsessist osavõtvate kehade termodünaamilise oleku teatud kindla muutusega. *Soojuse mittekompenseeritud üleminek tööks ei ole võimalik.*

Kompensatsiooni all mõistetakse siin kas töötava keha või mingi kolmanda (või mitme) protsessist osavõtva keha oleku muutust.

Näiteks võib kergesti muundada töö soojuseks, kui me töötavat keha soojendades anname talle võimaluse paisuda ja sunnime teda seejuures ületama temale avalduvat rõhku. Soojuse üleminek tööks kompenseeritakse sel juhul töötava keha poolt enda alla võetava ruumala muutusega.

Soojustehnika seisukohalt on kõige tähtsam järgmine juht. Töötavale kehale antakse soojust ja kasutatakse tema poolt pai-

sumisel tehtavat tööd; seejärel tuuakse töötav keha esialgsesse termodünaamilisse olekusse tagasi. Seda tsüklit korratakse ikka uuesti ja uuesti. Töötava keha tagasitoomiseks esialgsesse termodünaamilisse olekusse tuleb teda kokku suruda ja kulutada selleks tööd. Kui me hakkaksime töötavat keha kokku suruma selsamal temperatuuril, mille juures ta paisus, siis tuleks selleks ära kulutada kogu paisumisel saadud töö; lõpptulemusena me ei oleks üldse muundanud soojust tööks. Selleks et kokkusurumiseks kulutatud töö oleks väiksem paisumisel saadud tööst, on vaja, et vähemalt mingi osa kokkusurumisprotsessist kulgeks esialgsest madalamal temperatuuril. Järelikult tuleb kokkusurumisel töötavat keha jahutada. Seega tuleb protsessi tuua (peale soojust vastuvõtva töötava keha) veel kolmas keha, mis etendab *jahutaja* osa. Sellise tsükli (otsene tsükkel, joon. 342) tulemusena me saame soojuse arvel tööd. Tööks muundub ainult osa sellest soojusest, mida töötav keha võtab soojendajalt; ülejäänud osa annab töötav keha jahutajale. Antud juhul kompenseeritakse soojuse tööks muundumine jahutaja soojenemisega (joon. 348).



Joon. 348. Soojuse kompenseeritud muutumine tööks. *a* — termodünaamiline olek muutub; *b* — termodünaamiline olek endine; *c* — termodünaamiline olek muutunud.

Seega me näeme, et kaks ainuvõimalikku energia ülekande vormi — soojus ja töö — e i o l e v õ r d v ä ä r t u s l i k u d.

Termodünaamika esimene printsiip väidab (selles seisnebki tema olemus), et eksisteerib kaks teineteisega e k v i v a l e n t s e t energia ülekande vormi — soojus ja töö.

Termodünaamika teine printsiip väidab (selles seisnebki tema sisu), et vaatamata soojuse ja töö ekvivalentsusele ei ole need võrdväärtuslikud.

Kas soojusjõumasin võib muuta kogu temale antava soojuse tööks? Kas soojusjõumasina kasutegur[1] võib olla võrdne ühega?

On kerge leida selliseid juhte, kus kogu soojus muundub tööks. Ideaalse gaasi siseenergia sõltub ainult temperatuurist; seetõttu jääb ideaalse gaasi isotermilisel tasakaalupaisumisel siseenergia muutumatuks ning gaasile antav kogu soojus muundub paisuva gaasi poolt tehtud tööks.

[1] Jõumasina kasuteguri all mõistetakse jõumasina poolt tehtud töö ja selle aja jooksul jõumasinale antud energia suhet.

Kui me aga soovime gaasi kasutada töötava kehana jõumasinas, siis me peame ta pärast paisumist uuesti kokku suruma. Selleks tuleb ebatootlikult ära kulutada osa gaasi poolt tehtud tööst. Seejuures tuleb protsessi tuua veel kolmas keha — jahutaja, millele osa gaasi kokkusurumiseks tehtud tööst antakse üle soojuse vormis. Selle tulemusena läheb osa soojendaja poolt äraantud soojushulgast jahutajale ja ainult ülejäänud (võrdlemisi väike, nagu me hiljem veendume) osa muundub tööks.



Sadi Carnot (1796—1832).

Muutes soojusjõumasina abil (näiteks kivisöe või nafta põlemisel tekkinud) soojuse tööks, me peame alati leppima sellega, et seda protsessi kompenseerib jahutaja soojenemine. Jahutajaks on mõnedel juhtudel välisõhk (näiteks äratöötanud gaasi või auru väljalaskmisel atmosfääri), mõningatel juhtudel aga vesi, s. t. jahutuskondensaator, kus äratöötatud aur veeldub.

Seega *soojusjõumasina kasutegur*, isegi sel juhul, kui see masin on ideaalse konstruktsiooniga (kui ei esine hõõrdekadu), *ei või kunagi olla üks.*

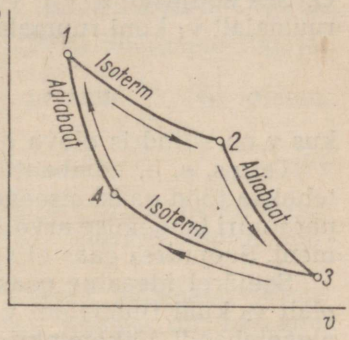
Soojusjõumasin peab olema kohandatud kestvaks töötamiseks. Soojusjõumasinas toimuvad protsessid peavad seega sulguma perioodiliselt korduvateks kinnisteks tsükliteks. Räägitakse, et tsüklil on üks või teine kuju. Selle all mõistetakse jõumasina töötava aine (auru või gaasi) rõhu, temperatuuri ja teiste suuruste vaheldumise järjekorda, kujutatuna graafiliselt. Soojusjõumasina kasutegur sõltub tsükli kujust. Kõige rohkem sõltub ta aga temperatuuripiiridest, millede vahel masina töötav aine sooritab tsükli. Mida kitsam on soojusallika antud temperatuuri korral nendele piiridele vastav temperatuuri intervall, seda väiksem on kasutegur. Töötava aine füüsikaline ja keemiline olemus ei avalda kasutegurile mingit mõju. Iga töötava aine korral annab kõige suurema kasuteguri tsükkel, mille leidis esimesena termodünaamika rajaja Sadi Carnot.

Carnot' tsüklis (joon. 349) töötav aine paisub algul isotermiliselt ja seejärel adiabaatiliselt (mille tulemusena tema temperatuur

langeb); pärast seda surutakse see kokku samas järjekorras, s. o. algul isotermiliselt ja seejärel adiabaatiliselt (mistõttu ta omandab algtemperatuuri ja algrõhu). Termodünaamiline arutlus (mis on toodud järgmises paragrahvis) näitab, et Carnot' tsükli järgi töötava soojusmasina kasutegur avaldub järgmiselt:

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T}, \qquad (1)$$

kus T on töötava aine temperatuur tema isotermilisel paisumisel (näiteks silindrisse juhitava auru temperatuur) ja T_0 töötava aine temperatuur tema isotermilisel kokkusurumisel (näiteks auru veeldumistemperatuur; seega auru juhtimisel välisõhku $T_0 = 100 + 273{,}1 = 373{,}1°\ K$). Carnot' masina kasutegur on antud temperatuuriradade T ja T_0 korral maksimaalne. Praktikas võib Carnot' tsüklit realiseerida ainult ligikaudselt. Seetõttu soojusmasinate termodünaamiline kasutegur on tegelikult alati väiksem kui $\frac{T - T_0}{T}$. Tunduvad soojuskaod küttekoldes ja soojuskaod hõõrdele vähendavad veelgi soojusjõumasina kogukasutegurit.



Joon. 349. Carnot' tsükkel.

Mõningates õpikutes samastatakse Carnot' valemis esinev madalam temperatuur T_0 keskkonna temperatuuriga. Sellise käsitluse korral loetakse ekslikult vähisõhku jahutajana kasutava aurumasina jaoks T_0 võrdseks 273° (373° asemel), mis annab ebaõige kasuteguri väärtuse. Kui T_0 võrrutada keskkonna temperatuuriga sisepõlemismootori korral, siis tekib veelgi jämedam viga.

Carnot' valemis esinev temperatuur T_0 kujutab endast tegelikult töötava aine temperatuuri paisumise lõpul. Aurumasina korral on see peale selle veel auru veeldumistemperatuur (atmosfäärirõhul 100° C, s. o. 373° K; auru väljalaskmisel kondensaatorisse T_0 alaneb vastavalt kondensaatoris valitsevale rõhule). Hinnates Carnot' valemi abil „ideaalse" sisepõlemismootori või gaasiturbiini kasutegurit, tuleb T_0 all mõista töötava aine temperatuuri väljalaske momendil, s. o. sel momendil, kui paisumine katkeb väliskeskkonna vasturõhu tõttu.

§ 134. Carnot' tsükkel ja teoreem taandatud soojuste summa kohta.

Termodünaamika rajaja Sadi Carnot, uurides soojusmasinate kasuteguri tõstmise probleemi, avastas termodünaamika teise printsiibi.

Carnot' järgi *soojusmasina maksimaalne kasutegur ei sõltu töötava keha liigist ja on täielikult määratud piirtemperatuuridega, mille vahel masin töötab.* Tõestame, et toodud väide järeldub teist liiki *perpetuum mobile* võimatusest. Selleks arvutame kõigepealt niisuguse soojusmasina kasuteguri, milles ideaalne gaas sooritab kahe adiabaadiga ja kahe isotermiga piiratud tsükli (Carnot' tsükli, joon. 349).

Esimeses, s. o. isotermilise paisumise staadiumis (kõver 1—2) soojusallikas annab ära ja ideaalne gaas saab juurde soojushulga Q. See soojushulk on võrdne tööga, mida gaas teeb, paisudes ruumalalt v_1 kuni ruumalani v_2:

$$Q = \nu RT \ln \frac{v_2}{v_1},$$

kus ν on silindris oleva gaasi moolide arv.

Teises, s. o. adiabaatilise paisumise staadiumis (kõver 2—3) tehakse tööd gaasi siseenergia kahanemise arvel, s. o. gaasi temperatuuri langemise arvel soojusallika tasemelt kuni jahutaja tasemeni. Seejuures gaas ei saa soojust juurde ega anna seda ka ära.

Seejärel ideaalne gaas surutakse isotermiliselt kokku ruumalalt v_3 kuni ruumalani v_4, mis on määratud jahutaja isotermi ja algadiabaadi lõikepunktiga. Sellel gaasi kokkusurumisel (kõver 3—4) tuleb kulutada tööd, mis protsessi isotermilisuse tõttu muundub täielikult soojuseks Q_0. Selle soojuse annab gaas jahutajale:

$$Q = \nu RT_0 \ln \frac{v_3}{v_4}.$$

Tsükkel lõpeb gaasi adiabaatilise kokkusurumisega kuni algruumalani v_1; kokkusurumisel tehtav töö kulub gaasi temperatuuri tõstmiseks kuni algväärtuseni, s. t. kuni soojusallika tasemeni.

Tsükli vältel gaas saab soojuse Q ja annab ära soojuse Q_0. Kuna tsükli lõpuks gaas tuleb tagasi oma algolekusse, siis järelikult soojuste vahe $Q - Q_0$ muutub gaasi poolt tsükli vältel tehtud tööks. Definitsiooni kohaselt on kasutegur tehtud töö ja soojusallikalt töötavale kohale (antud juhul gaas) antud soojuse suhe:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q}.$$

Olgu märgitud, et Poisson'i võrrandi [§ 131, valem (9)] järgi ideaalse gaasi adiabaati iseloomustab korrutise $Tv^{\varkappa-1}$ jäävus. Ruumalad v_2 ja v_3 asuvad ühel adiabaadil, kusjuures ruumala v_2 vastab temperatuurile T ja ruumala v_3 temperatuurile T_0. Järelikult

$$Tv_2^{\varkappa-1} = T_0 v_3^{\varkappa-1}.$$

Kuna ruumalad v_1 ja v_4 asuvad samuti ühel adiabaadil ja vastavad samadele temperatuuridele T ja T_0, siis võib ka nende jaoks kirjutada analoogilise võrrandi:

$$Tv_1^{\varkappa-1} = T_0 v_4^{\varkappa-1}.$$

Jagades esimese võrrandi teisega (seejuures temperatuurid taanduvad) ja võttes mõlemast saadud suhtest $\varkappa$—1 astme juure, leiame, et:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}.$$

Arvestades seda seost, paneme eespool leitud soojuste Q ja Q_0 väärtused kasuteguri avaldisse $\eta = \frac{Q - Q_0}{Q}$ ja taandame lugejat ja nimetajat võrdsete suurustega $vR\ln \frac{v_1}{v_2}$ ja $vR\ln \frac{v_3}{v_4}$. Nii leiame, et

$$\eta = \frac{T - T_0}{T}, \qquad (1')$$

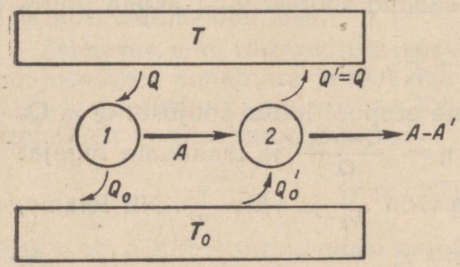
s. o. *ideaalse gaasiga töötava masina jaoks on Carnot' tsükli kasutegur võrdne soojusallika ja jahutaja temperatuuride vahe ja soojusallika absoluutse temperatuuri suhtega.*

Clausiuse arutlus kahest ühendatud Carnot' masinast. Vaatleme koos selle masinaga, mille töötavaks kehaks on ideaalne gaas (esimene masin), veel teist masinat, mille töötavaks kehaks on meelevaldne aine, näiteks mingisugune aur või vedelik. Soojusallikas ja jahutaja on mõlemal masinal ühised. Laseme esimest masinat võtta soojusallikalt soojuse Q, anda jahutajale Q_0 ja teha tööd $A = Q - Q_0$. Tema kasutegur on siis järgmine:

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}.$$

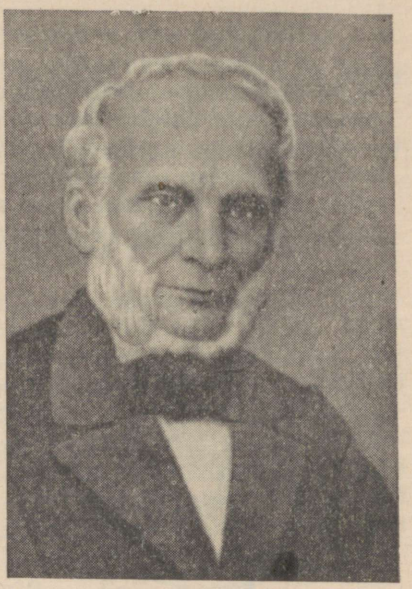
Mis puutub teise masinasse, siis selle masina mõõted võimaldagu tema töörežiimi allutada järgmisele tingimusele: soojushulk Q', mille teine masin iga tsükli kestel võtab soojusallikalt, olgu võrdne selle soojushulgaga, mille esimene masin võtab soojusallikalt: $Q' = Q$. Kui sellise tingimuse juures teise masina poolt tsükli vältel tehtud töö on võrdne esimese masina poolt tsükli vältel tehtud tööga ($A' = A$), siis on võrdsed ka nende kasutegurid ($\eta' = \frac{A'}{Q'} = \eta = \frac{A}{Q}$) ja samuti on võrdsed masinate poolt jahutajale antud soojused (kuna $A' = Q' - Q_0'$ ja $A = Q - Q_0$, siis juhul kui $Q' = Q$ võrdus $A' = A$ toob endaga kaasa võrduse $Q_0' = Q_0$). Oletame aga, et meie masinate kasutegurid ei ole võrdsed. Seega ei ole siis võrdsed ka nende poolt ühe tsükli kestel tehtud tööd ega nende poolt jahutajale antud soojused. Oletame näiteks, et esimese masina kasutegur on teise masina kasutegurist suurem: $\eta > \eta'$ ja järelikult $A > A'$. See tähendab, et esimene masin muudab tööks soojusallikalt võetud soojusest suu-

rema osa kui teine masin ja annab seega jahutajale soojust vähem kui teine: $Q_0 < Q_0'$. Nüüd toimime järgmiselt: kasutame esimese masina poolt tehtud tööd selleks, et sundida teise masina töötavat keha kirjeldama Carnot' tsüklit vastupidises suunas [seejuures paisumise tõttu temperatuuril T_0 ta võtab jahutajalt soojuse Q_0 ja kokkusurumise tõttu temperatuuril T ta annab soojendajale soojuse Q (joon. 350)]. Teisiti öeldes, esimest masinat kasutame jõumasinana ja teist sunnime töötama külmutusmasinana, mis iga tsükliga kasutab tööd A' ja kannab külmemalt kehalt soojemale üle soojuse Q_0' (siinjuures see soojem keha, mis esimesele masinale on soojusallikaks, saab peale soojuse Q_0' veel soojust tehtud töö arvel; kogu tsükli vältel saab ta soojuse $Q' - Q$). Joonisel 350 on toodud kahe ülalkirjeldatud viisil ühendatud Carnot' masina skeem. Vastavalt tehtud oletusele esimese masina poolt tsükli kestel tehtud töö A on suurem teise masina poolt kulutatud tööst A'. Järelikult mõlemad masinad koos annavad iga tsükli tulemusena töö, mis on võrdne positiivse vahega $A - A'$, jahutaja aga kaotab selle tööga $A - A'$ ekvivalentse soojuse (tõepoolest, esimeselt masinalt jahutaja saab soojuse Q_0, teine aga võtab ära suurema soojushulga Q_0'; seetõttu jahutaja kaotab soojuse $Q_0' - Q_0$, kusjuures $A = Q - Q_0$ ja $A' = Q' - Q_0'$; kuna $Q = Q'$, siis $Q_0' - Q_0 = A - A'$). Mis puutub soojusallikasse, siis tema olek ei muutu, sest esimene masin võtab temalt niisama palju soojust, kui palju ta teiselt masinalt saab. Seega mõlemad masinad koos teevad iga tsükli vältel jahutajalt võetud soojuse arvel töö $A - A'$. Soojuse muundumisel tööks ei esine siin mingisugust kompensatsiooni. Kahe Carnot' masina kirjeldatud kombinatsioon kujutab endast teist liiki *perpetuum mobilet*. Jõudsime vasturääkivusse termodünaamika teise seadusega, mis näitab, et meie poolt tehtud eeldus kasutegurite mittevõrdsuse kohta ei ole õige. Täpsemalt öeldes, me veendusime senini ainult selles, et ideaalse gaasiga töötava esimese masina kasutegur ei saa olla suurem (nagu me seda algul oletasime) kui teise masina kasutegur. Kuid võibolla on ta teise masina omast väiksem? Oletame, et see on nii. Kasutame nüüd ideaalse gaasiga töötavat masinat külmutusmasinana, mis tahes ainega töötavat masinat aga jõumasinana. Kogu esitatud arutlus kehtib ka antud juhul, ainult teist masinat me nimetame nüüd esimeseks ja ideaalse gaasiga töötavat masinat



Joon. 350. Clausiuse arutluse juurde.

teiseks. Jõuame jällegi vasturääkivusse termodünaamika teise printsiibiga. Järelikult, *ideaalse gaasiga töötava masina kasutegur ei või olla suurem ega väiksem kui niisuguse analoogilise masina kasutegur, mis töötab samade piirtemperatuuride vahel, kuid mille töötavaks kehaks ei ole ideaalne gaas, vaid ükskõik milline aine.*



Rudolf Clausius (1822—1888).

Näeme seega, et Carnot' poolt sõnastatud printsiipi võib vaadelda kui järeldust teist liiki *perpetuum mobile* võimatusest. Carnot' printsiip etendas soojustehnika teaduslike aluste arengus juhtivat osa. Selle printsiibi põhjal sai selgeks, et soojusmasinate kasutegurite tõstmiseks tuleb laiendada temperatuuri piire, mille vahel keha sooritab tsükli; ühe töötava aine vahetamine teise ainega ei anna iseenesest mingit kasu. Tsükli kuju avaldab üldiselt mõju kasuteguri väärtusele, kusjuures *Carnot' tsükkel annab suurema kasuteguri kui ükski teine pööratava masina poolt sooritatud tsükkel.*

Mõnede tsüklite kuju võimaldab ühte ja sedasama vahepealse temperatuuriga keha kasutada tsükli ühe poole vältel soojusallikana, aga tsükli teise poole vältel jahutajana. Selline *soojuse regeneratsioon*[1] tõstab tsükli kasutegurit ja oma omadustelt lähendab tsüklit Carnot' tsüklile.

Taandatud soojuste summa. Vaatleme uuesti joonist 349. Sellel joonisel kujutatud tsükli ülemist ja alumist isotermi võime vaadelda ülemineku teedena, mis ühendavad üht adiabaati teisega. Soojus, mida tuleb kehale anda selleks, et seda viia olekust 1 olekusse 2 mööda ülemist isotermi, ei ole võrdne soojusega, mida tuleb kehale anda tema üleviimiseks esimeselt adiabaadilt teisele mööda alumist isotermi ($Q \neq Q_0$).

Eespooltuletatud seosest

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}$$

[1] Ladinakeelne sõna *regeneratio* — taastamine.

järgneb, et

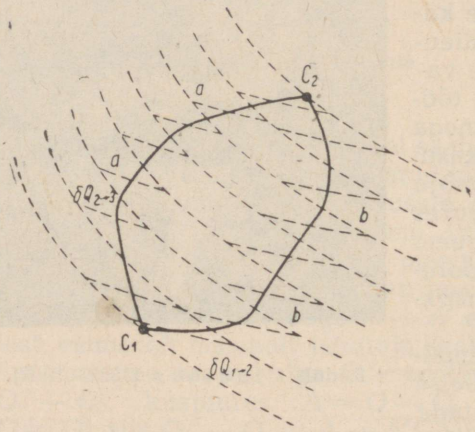
$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{T_0}{T}$$

ja seega

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}, \tag{2}$$

s. t. *tasakaaluüleminekul ühelt adiabaadilt teisele isotermilise soojuse ja sellele üleminekule vastava absoluutse temperatuuri suhe on kõikide temperatuuride jaoks ühesugune ja sõltub seega ainult vaadeldavate adiabaatide vahelisest kaugusest.*

Isotermilise soojuse ja selle soojuse üleandmisprotsessile vastava absoluutse temperatuuri suhet nimetatakse *taandatud soojuseks.* Valemi (2) järgi *kahe mingisuguse adiabaadi vahel kulgevate kõikvõimalikkude isotermiliste üleminekute taandatud soojused on ühesugused.*



Joon. 351. Taandatud soojuste summa ei sõltu protsessi teest.

Võtame ükskõik millise keha ja seame vastavusse tema kaks mingisugust olekut C_1 ja C_2. Keha võib viia esimesest olekust teise mitmesuguste protsessidega, mida graafiliselt oleku diagrammil kujutavad erinevad kõverad. Võrdleme kahte üleminekut teed *a* ja *b* (joon. 351). Soojus, mis tuleb kehale anda selleks, et viia keha olekust C_1 olekusse C_2 mööda teed *a*, ei ole üldiselt võrdne mööda teed *b* üleminekuks vajaliku soojusega $Q^{(a)} \neq Q^{(b)}$. Lõikame mõlemaid ülemineku teid tiheda adiabaatide võrguga nii, nagu see on näidatud joonisel 351. Vahetame protsessid *a* ja *b* vaheldumisi kulgevate isotermiliste ja adiabaatiliste oleku muutustega. On kerge aru saada, et juhul, kui C_1 ja C_2 vahelt läbi juhitud adiabaatide arv on lõpmatult suur, siis selline vahetus protsesse *a* ja *b* peaaegu üldse ei muuda. Seetõttu võib soojusi $Q^{(a)}$ ja $Q^{(b)}$ vaadelda adiabaadilt adiabaadile kulgevatele isotermilistele üleminekutele vastavate soojuste summana:

$$Q^{(a)} = \delta Q^{(a)}_{1\to 2} + \delta Q^{(a)}_{2\to 3} + \delta Q^{(a)}_{3\to 4} + \ldots,$$

$$Q^{(b)} = \delta Q^{(b)}_{1\to 2} + \delta Q^{(b)}_{2\to 3} + \delta Q^{(b)}_{3\to 4} + \ldots,$$

kusjuures valemi (2) põhjal saame nende summade kõikide vastavate liikmete jaoks võrdused

$$\frac{\delta Q^{(a)}_{1\to 2}}{T^{(a)}_1} = \frac{\delta Q^{(b)}_{1\to 2}}{T^{(b)}_1}; \qquad \frac{\delta Q^{(a)}_{2\to 3}}{T^{(a)}} = \frac{\delta Q^{(b)}_{2\to 3}}{T^{(b)}_2} \text{ jne.}$$

Olgugi et $Q^{(a)} \neq Q^{(b)}$, kehtib siiski seos:

$$\left(\sum' \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{mööda teed } a} = \left(\sum' \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{mööda teed } b}, \tag{3}$$

s. o. *erinevalt soojuste summast taandatud soojuste summa ei sõltu tasakaaluprotsessi teest.*

§ 135. Entroopia. Termodünaamika põhivõrrand.

Tasakaalupaisumise elementaarne töö võrdub rõhu ja ruumala juurdekasvu korrutisega: $\delta A = pdv$. Üldisemal juhul keha võib paisumise töö kõrval sooritada veel mingisuguseid teisi tööliike. Näiteks vedelikutilga jaotamisel väiksemateks tilkadeks tuleb tööd teha pindpinevusjõudude ületamiseks. See töö väljendub järgmiselt: $\delta A = \alpha dq$, kus q on pinna suurus ja α pindpinevus. Kui kehaks on potentsiaalini φ laetud elektrijuht, siis tema elektrilaengu e suurendamiseks de võrra tuleb teha tööd $\delta A = \varphi de$. Üldjuhul võib tasakaaluprotsessi tööd alati väljendada järgmist tüüpi korrutisena:

$$\delta A = Hdh.$$

Tegur H kannab *töö intensiivsusteguri* nime (seda nimetatakse ka „üldistatud jõuks") ja tegur h töö *ekstensiivsusteguri*[1] nime (seda nimetatakse ka „üldistatud koordinaadiks"). Keha ruumala v_1, tema pindala q ja laeng e on ekstensiivsustegurid; rõhk p, pindpinevus α ja potentsiaal φ on intensiivsustegurid (üldistatud jõud).

Summaarne töö sõltub suurel määral „protsessi teest":

$$A = \int_1^2 Hdh.$$

Kui meie ei tea, kuidas keha läheb üle olekust C_1 olekusse C_2 (s. o. kui me ei tea funktsiooni $H = f(h)$ kuju), siis me ei või midagi öelda keha poolt tehtud töö A kohta. Sõltuvalt „protsessi

[1] Valemis $\delta A = Hdh$ ja üldse antud paragrahvis (erinevalt teistest paragrahvidest) me kasutame sümbolit A ühtedel juhtudel keha poolt tehtud töö, teistel juhtudel aga meie poolt kulutatud töö tähistamiseks. Sellele vastavalt on ka h kas keha poolt sooritatud töö ekstensiivsustegur või meie poolt kulutatud töö ekstensiivsustegur.

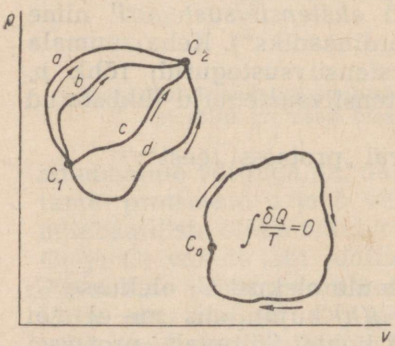
teest" võib see töö olla kas suur või väike. *(H; h)*-diagrammis väljendub keha poolt tehtud töö alati selle pinna suurusega, mis asub allpool protsessi teed iseloomustavat kõverat ning on paremalt ja vasakult piiratud vastavalt ordinaatidega H_1 ja H_2.

Kõike seda me mainisime järgmisel eesmärgil. Oletame, et meid huvitab töö ekstensiivsusteguri, s. o. suuruse h juurdekasv. See juurdekasv on ilmselt võrdne vahega $h_2 - h_1$ ja ei sõltu sellest, millist teed mööda keha läheb üle olekust C_1 olekusse C_2. On arusaadav, et ükskõik milline ka ei oleks protsessi tee, summaarne juurdekasv $h_2 - h_1$ on elementaarselt väikeste juurdekasvude dh summa, kusjuures igaüks neist elementaarselt väikestest juurdekasvudest on võrdne keha poolt tehtud elementaarse töö ja intensiivsusteguri H jagatisega:

$$dh = \frac{\delta A}{H}, \quad h_2 - h_1 = \int_1^2 \frac{\delta A}{H}.$$

Leppides kokku nimetada suhet $\frac{\delta A}{H}$ „taandatud tööks", me võime öelda, et taandatud tööde $\frac{\delta A}{H}$ summa ei sõltu protsessi teest; iga sellise tasakaaluprotsessi korral, mis viib keha olekust C_1 olekusse C_2, on taandatud tööde summa võrdne töö ekstensiivsusteguri juurdekasvuga.

Arendades edasi Carnot' poolt soojusjõumasina kasuteguri kohta püstitatud ideid, tegi Clausius möödunud sajandi viiekümnendatel aastatel kindlaks, et *absoluutset temperatuuri T võib vaadelda soojuse äraandmisprotsessi intensiivsustegurina ja et seoses sellega taandatud soojuste summa* $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ *ei sõltu protsessi teest.* See Clausiuse poolt termodünaamika teise printsiibi põhjal tõestatud teoreem, mille järgi kõikidele sellistele tasakaaluprotsessidele, mis viivad keha üle olekust C_1 olekusse C_2, vastavad taandatud soojuste summad on ühesugused, osutub üheks tähtsaimaks termodünaamika teoreemiks (Clausiuse tõestus mõningate lihtsustustega on toodud kolmes eelmises paragrahvis).



Joon. 352. Entroopia muutus $S_2 - S_1$ on võrdne taandatud soojuste summaga mis tahes tasakaalu ülemineku $C_1 \rightarrow C_2$ juures (näit. tee *a* juures, teeb *b* jne. juures).

Clausius nimetas kehale antavate taandatud soojuste summat *entroopiaks* ehk, täpsemini öeldes, *entroopia juurdekasvuks* (joon. 352). Entroopiat tähistatakse tava-

liselt tähega S. Entroopia, samuti nagu energia, on suhteline suurus; mingis olekus C_2 võetud keha entroopiast võib rääkida ainult selle antud oleku C_2 võrdlemise mõttes mingi teise olekuga C_1, mis on meie poolt valitud lähteolekuks (algolekuks). Kui räägitakse: „keha entroopia olekus C_2 oleku C_1 suhtes", siis selle all mõistetakse sedasama suurust, mille kohta võib teisiti öelda „entroopia juurdekasv keha üleminekul olekust C_1 olekusse C_2":

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (4)$$

Ülalesitatu põhjal *entroopia kujutab endast soojuse äraandmisprotsessi ekstensiivsustegurit.* Kõikide tööliikide ekstensiivsustegureid võib vahetult mõõta ja seetõttu ei ole vajadust kasutada seost, mis määrab töö ekstensiivsusteguri kasvu taandatud tööde summana. Teisiti on aga lugu entroopiaga. Meie käsutuses ei ole mõõtmisviisi entroopia vahetuks määramiseks ja seetõttu me oleme sunnitud entroopiat arvutama kehale antud taandatud soojuste summana.

Tuleb meeles pidada, et siin ei ole kogu aeg juttu ainult tasakaaluprotsessidest. Selliste protsesside korral, mis ei ole tasakaaluprotsessid, näiteks kiirel soojendamisel ja jahutamisel, muutub keha temperatuuri suhtes mittehomogeenseks; erinevate keha osade temperatuur omandab erineva väärtuse. Selleks et ka antud juhul säilitada taandatud soojuste $\frac{\delta Q}{T}$ mõistet, tuleb täiendavalt kokku leppida selle üle, millise temperatuuriga me kavatseme kehale antud soojushulka jagada.

Ei saa öelda, et entroopia defineerimine taandatud soojuste summana avaks kohe entroopia füüsikalise sisu. Selle suuruse füüsikalist sisu on võimalik avada ainult statistiliste kujutluste põhjal, millest on juttu edaspidi (§ 136). Kuid endastmõistetav on soov, et ka puhttermodünaamiline entroopia definitsioon oleks võimalikult arusaadavam, lihtsam ja konkreetsem. Füüsikas defineeritakse paljud suurused koefitsientidena. See on õigupoolest matemaatiline võte, mis samuti täiesti konkreetselt ei ava defineeritava suuruse füüsikalist sisu. Kuid koefitsiendi mõistet võib siduda mõõtmisprotsessiga, mõõtmisprotseduuri on aga kerge kujutleda konkreetselt. Sellega tagataksegi konkreetne kujutlus defineeritavast suurusest. Kahjuks ei ole selline konkretiseerimine võimalik entroopia mõiste defineerimisel. Võttes arvesse, et entroopia mõiste on tegelikult keeruline, konkretiseerime entroopia termodünaamilise definitsiooni teisel teel.

Entroopiat tuleb vaadelda keha siseenergia väärtusetuse mõõduna. Mida see tähendab?

Me juba rääkisime, et vaatamata töö ja soojuse kvantitatiivsele ekvivalentsusele, ei ole nad teineteisega kvalitatiivselt võrd-

väärtuslikud. Energia ülekandumisel soojuse vormis hakkavad mõju avaldama seadused, mis valitsevad suurt hulka mikromaailmas toimuvaid nähtusi, s. o. statistilise mehhaanika seadused. Nende seaduste mõju ilmneb muuhulgas ka selles, et energia ülekandel soojuse vormis temperatuurid ühtlustuvad. Kehade siseenergia on samuti allutatud statistika seadustele. Nähtavasti võib öelda, et keha siseenergia suhtes statistika seadused ei jõustu keha erinevate olekute jaoks ühesugusel määral. Sellega on seotud järgmine asjaolu: kui me soovime mingi keha siseenergiat kasutada võimalikult palju töö vormis, kuid hoidume seejuures väga madala temperatuuriga jahutajate rakendamisest, siis ilmneb, et teatud osa siseenergiat võib kätte saada ainult soojuse vormis.

Võib näidata, et mingi keha entroopia olekus 2 (S_2) oleku 1 suhtes, s. o. $S_2 - S_1$ on minimaalne soojushulk, mida kehalt tuleb ära võtta selleks, et viia keha tasakaaluliselt olekust 2 olekusse 1, võttes soojust ära mitte madalamatel temperatuuridel, kui seda on mingi universaalne (kõikide kehade jaoks ühesugune) temperatuurinivoo T_0, mis võetakse võrdseks temperatuuriskaala ühikuga (s. o. $T_0 = 1° K$).

Olgugi et me vaatleme ülaltoodud definitsioonis entroopiat mingi soojushulga miinimumina, kasutame me selle miinimumi määramiseks siiski kujutlust jahutaja madalaimast temperatuurinivoost T_0 ($= 1° K$). Selle tulemusena osutub entroopia dimensioon võrdseks soojushulga ja temperatuuri suhtega.

Seega võib öelda, et entroopiaga mõõtuv siseenergia väärtusetus ilmneb järgnevas: kui jahutajate temperatuuride kohta kehtib ülalmärgitud kitsendus, siis keha võib teatud osa oma siseenergiast ära anda ainult soojuse (mitte aga töö) vormis. See osa on üldiselt väike. Kui me aga jahutajate temperatuurinivood ei piira nii madala temperatuuriga, nagu seda on $1° K$, vaid temperatuuriga $T° K$, siis siseenergia soojuslik osa ei ole enam võrdne $S_2 - S_1$, vaid $(S_2 - S_1)T$.

Veidi hiljem me näitame, et kujutluses entroopiast kajastub termodünaamika teise printsiibi olemus, analoogiliselt sellele, nagu kujutluses siseenergiast kajastub esimese printsiibi olemus.

Tuletame võrrandi, mis seob entroopia elementaarset juurdekasvu dS siseenergia elementaarse juurdekasvuga dU. Seda võrrandit nimetatakse termodünaamika põhivõrrandiks.

Entroopia definitsioonist järgneb, et

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (5)$$

Teiselt poolt on teada, et vastavalt termodünaamika esimesele printsiibile kehale antud soojushulk δQ kulub keha siseenergia juurdekasvuks dU ja töö δA sooritamiseks:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Järelikult

$$dS = \frac{dU + \delta A}{T}. \tag{6}$$

See ongi *termodünaamika põhivõrrand.* Tuletuskäigust nähtub, et δA tähendab siin keha poolt tasakaaluprotsessi vältel tehtud tööd.

Kui keha teeb ainult ühte liiki tööd — paisumistööd, siis

$$\delta A = pdv$$

ja

$$dS = \frac{dU + pdv}{T}. \tag{7}$$

Sellest lihtsast termodünaamika võrrandist tuleneb palju järeldusi mitmesuguste füüsikaliste suuruste — soojusmahtuvuste, latentsete soojuste, elastsusmoodulite, paisumiskoefitsientide, rõhukoefitsientide jne. — vahel valitsevate seoste kohta. Rakendades termodünaamika põhivõrrandit aurumisele, sulamisele, paisumisele, keemilistele reaktsioonidele jne., teeb termodünaamika teine printsiip kindlaks rea seaduspärasusi, muuhulgas ka paljud nendest seaduspärasustest, mida on selgitatud molekulaar-kineetilise teooria põhjal eelnevates peatükkides.

Ideaalse gaasi entroopia. Arvutasime ideaalse gaasi entroopia paragrahvis 131. Leidsime seal, et ühe mooli gaasi entroopia avaldub järgmiselt:

$$S = C_v \ln T + R \ln v + a. \tag{8}$$

Kui meil on ν mooli gaasi, siis $U = \nu C_v T$, kus C_v tähistab moolsoojust (ühe gramm-molekuli gaasi soojusmahtuvust) ja $p = \nu \frac{RT}{v}$. Seega ν mooli gaasi entroopia

$$S = \nu C_v \ln T + \nu R \ln v + \nu a.$$

ν mooli gaasi entroopia on ν korda suurem ühe mooli gaasi entroopiast. Arvestades seda asjaolu, räägitakse, et gaasi entroopia, samuti nagu gaasi siseenergiagi, on aditiivne suurus. Reaalsete kehade siseenergiat ja entroopiat võib tavaliselt samuti lugeda aditiivseteks suurusteks, välja arvatud ainult neil juhtudel, kui me soovime arvestada pindpinevusjõududega seotud olevaid efekte.

Entroopia dimensioon on samasugune nagu soojusmahtuvuse dimensioongi, s. o. energia ja temperatuuri suhe. Seetõttu on entroopia kaloriliseks ühikuks 1 $\frac{cal}{kraad}$. Võttes arvesse, et füüsikas on üldkasutatavaks temperatuuriühikuks 1° C, võib lihtsuse mõttes temperatuuri lugeda abstraktseks arvuks ja väljendada

entroopiat ning soojusmahtuvust lihtsalt energiaühikutes, esmajoones just kalorites. Selleks et koduneda ideaalse gaasi entroopia valemiga, rakendame teda kahele erijuhule.

Kujutleme, et 1 mool kaheaatomilist gaasi (näiteks 22,4 liitrit õhku, mille temperatuur on 0° *C* ja rõhk 1 *at*) soojeneb konstantsel ruumalal absoluutselt temperatuurilt T_1 kuni absoluutse temperatuurini T_2. Entroopia juurdekasv on siis

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ kus } C_v = 5 \text{ } cal.$$

Siit näeme, et kui ühe mooli kaheaatomilise gaasi temperatuur kasvab isokoorsel soojendamisel 2,72 korda (arv 2,72 on ligikaudselt naturaallogaritmi alus; $\ln 2{,}72 \approx 1$), siis selle gaasi entroopia kasvab 5 *cal* võrra.

Paisugu üks mool ükskõik millist üheaatomilist, kaheaatomilist või mitmeaatomilist gaasi isotermiliselt ruumalalt v_1 kuni ruumalani v_2. Siis entroopia juurdekasv

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1}, \text{ kus } R = 2 \text{ } cal.$$

Siit näeme, et kui ühe mooli gaasi ruumala suureneb isotermiliselt 2,72 korda, siis selle gaasi entroopia kasvab 2 *cal* võrra. On kerge välja arvutada, et ühe mooli gaasi ruumala isotermiline kasvamine 1,65 korda toob endaga kaasa selle gaasi entroopia suurenemise 1 *cal* võrra.

Paragrahvis 131 me saime gaasi entroopia avaldise ka T ja p funktsioonina:

$$S = C_p \ln T - R \ln p + a_1 \tag{9}$$

$$(a_1 = a + R \ln R)$$

ja p ja v funktsioonina:

$$S = C_v \ln p + C_p \ln v + a_2 \tag{10}$$

$$(a_2 = a - C_v \ln R).$$

§ 136. Entroopia statistiline mõte.

Vastupidiselt esimesele printsiibile on termodünaamika teisel printsiibil statistiline alus. Mikromaailma sündmused (molekulide põrked, aatomite soojuskiirgus) alluvad juhuslike sündmuste jaotuse seadusele, niinimetatud suurte arvude seadusele; see avaldub asjaolus, et soojus ei ole tööga võrreldes täisväärtuslik energia ülekandevorm, ehk selles (mis on sama), et soojuse üleminek tööks ei ole ilma kompensatsioonita võimalik.

Termodünaamika teine printsiip ei ole rakendatav üksikule molekulide või väikesele molekulide kogumile. Mõnikord öeldakse, et termodünaamika teine printsiip on neil juhtudel ebaõige. See ei ole täiesti nii. Termodünaamika teine printsiip

oleks siis ebaõige, kui ta sisaldaks endas mingi väite, mis puudutaks üksikut molekuli. On kerge näha, et termodünaamika teine printsiip ei ütle midagi selle kohta, kuidas peab käituma üksik molekul või väike molekulide rühm: ta ei ütle antud juhul midagi sel lihtsal põhjusel, et üksiku molekuli kohta ei ole rakendatav soojuse mõiste. Mõistetel soojus, temperatuur ja entroopia on mõte ainult küllalt suure molekulide hulga korral.

Termodünaamika teise printsiibi mõte on avatud täie selgusega Boltzmann'i ja Gibbs'i töödes. Boltzmann tegi kindlaks, et entroopia mõte on molekulaar-kineetilise kujutluse seisukohalt järgmine.

Loodus püüab üle minna vähem tõenäolistelt olekutelt tõenäolisematele olekutele.

Kõige tõenäolisem on molekulide ühtlane jaotumine keha ruumalas. Kõige tõenäolisem on mingi täiesti kindel molekulide kiiruste jaotus — Maxwell'i kiiruste jaotus. Kui süsteemi molekulid on jaotunud ruumis ebaühtlaselt või kui nad kalduvad kõrvale Maxwell'i kiiruste jaotuse seadusest, siis väliste mõjutuste puudumisel tekivad süsteemis iseenesest protsessid, mis lõpuks viivad süsteemi kõige tõenäolisemasse olekusse. Makroskoopilisest vaatekohast lähtudes seisnevad need protsessid tiheduste, temperatuuride, rõhkude, niinimetatud keemiliste potentsiaalide ja teiste suuruste ühtlustamiseks.

Sõltuvalt tingimustest, milles keha asub, võib nii üks kui ka teine olek osutuda kõige tõenäolisemaks. Näiteks raskusväljas on kõige tõenäolisem mingi täiesti kindel molekulide jaotus; gaasi korral vastab see rõhu muutuse baromeetrilisele seadusele.

Kui me paigutame kehas molekule ümber nii, et me mingi ühe molekuli asetame teise molekuli asemele ning teise esimese molekuli asemele, ja kui me samasuguselt vahetame molekulide kiirused, siis on selge, et selle tulemusena keha termodünaamiline olek ei muutu. Oletame, et me loendasime kõikide selliste ümberpaigutuste arvu, s. o. niisuguste ümberpaigutuste arvu, mis ei muuda keha termodünaamilist olekut. See arv ei ole üldiselt ühe ja sama keha erinevate termodünaamiliste olekute jaoks ühesuurune. Seda arvu nimetataksegi keha oleku *termodünaamiliseks tõenäosuseks.*

Ülaltoodust selgub, et keha entroopia ja oleku tõenäosuse vahel on seos: kui isoleeritud süsteem sooritab mittepööratava protsessi, siis mõlemad need suurused kasvavad (§§ 134, 135). Tuginedes entroopia ja oleku tõenäosuse kõige lihtsamatele omadustele, võib leida nende kahe suuruse vahel valitseva seose (gaasi jaoks). Sel eesmärgil on vaja ainult vaadelda nende kahe suuruse muutumise sõltuvust aine hulgast aine termodünaamilise oleku muutumatuse korral. Meenutagem, et gaasi entroopia on võrdeline gaasi hulgaga. Võtame mingi kindla hulga gaasi ja

jagame selle ettevaatlikult, jättes muutumatuks gaasi oleku, kaheks osaks. On selge, et kogu võetud gaasi entroopia on võrdne tema kahe osa entroopiate summaga:

$$S = S_a + S_b.$$

Küsime nüüd endilt: millega on võrdne kogu võetud gaasi termodünaamiline tõenäosus, kui tema kummagi osa termodünaamilised tõenäosused on W_a ja W_b? Sellele küsimusele õige vastuse andmiseks tuleb silmas pidada seda, et mingi liitsündmuse tõenäosus on võrdne üksikute sündmuste tõenäosuste korrutisega. Olgu näiteks loteriipiletiga võitmise tõenäosus P_1. Oletame, et meil on veel mingi teine loteriipilet, millega võitmise tõenäosus on P_2. Tõenäosus selleks, et me võidaksime ühega nendest, on $P_1 + P_2$; tõenäosus selleks, et mõlemad piletid võidaksid korraga, on aga P_1P_2. Analoogiliselt on kogu võetud gaasi oleku tõenäosus W võrdne tema üksikute osade tõenäosuste korrutisega:

$$W = W_aW_b.$$

Entroopiate liitmine vastab seega termodünaamiliste tõenäosuste korrutamisele. Niisugune seos esineb kahe suuruse vahel siis, kui esimene suurus S on võrdeline teise suuruse W logaritmiga. Järelikult, gaasi entroopia on võrdeline gaasi oleku termodünaamilise tõenäosuse logaritmiga[1]:

$$S = k\ln W + const. \tag{11}$$

Boltzmann näitas, et ühe mooli gaasi jaoks on võrdetegur k võrdne universaalse gaasikonstandi ja ühes moolis leiduvate molekulide arvu jagatisega:

$$k = \frac{R}{N} = 1{,}371 \cdot 10^{-16}\ \frac{erg}{kraad}.$$

§ 137. Pööratavad ja mittepööratavad protsessid. Tasakaaluprotsessid ja mittetasakaaluprotsessid.

Võttes lühidalt kokku termodünaamika teise printsiibi sisu, võib öelda, et soojuse mittekompenseeritud üleminek tööks ei ole võimalik. Ühe protsessi soojuse mittekompenseeritud tööks ülemineku võimatusest järgneb loendamatu hulga protsesside võimatus; *kõik sellised protsessid, millede koostisosaks on soojuse mittekompenseeritud muundumine tööks, on võimatud.*

See toob endaga kaasa kõigi tegelikkuses kulgevate protses-

[1] Paljud väidavad, et toodud valem, mis seob entroopiat termodünaamilise tõenäosusega, on õige mitte üksi gaaside jaoks, vaid ka tahkete kehade jaoks. Selle küsimuse lahendamist raskendab asjaolu, et siin tuleb arvestada pindpinevusjõude. Pindpinevusjõudude tõttu on näiteks võimatu jaotada vedelikutilka kaheks osaks nii, et vedeliku termodünaamiline olek jääks täiesti muutumatuks.

side jaotumise kahte klassi — *pööratavateks* ja *mittepööratavateks* protsessideks.

Termineid protsessi „pööratavus" ja „mittepööratavus" saab rakendada ainult sellise protsessi kohta, millest võtab osa i s o l e e r i t u d süsteem tervikuna.

Isoleeritud süsteemi all me mõistame selliste kehade kogu (koos nendele kehadele mõjuvate mehhanismidega), *mis ei allu mingisugustele välistele energeetilistele mõjutustele,* mis on eraldatud välistest kehadest soojust mitteläbilaskva kestaga *ja mille koguenergia seetõttu ei suurene ega ei vähene.*

Kui isoleeritud süsteem sooritab mingi protsessi, mida võib sümboolselt tähistada järgmiselt:

$$A \rightarrow B$$

(süsteem läheb üle olekust A olekusse B), siis võib esineda kaks ja ainult kaks juhtu.

Esiteks võib ilmneda, et süsteemi vastassuunaline üleminek olekust B olekusse A, mille korral süsteemi ümbritsevates kehades ei toimuks mingit muutust, on seetõttu võimatu, et üleminekul tuleks ilma kompensatsioonita muuta tööks teatud hulk soojust. Sel juhul me nimetame isoleeritud süsteemis toimunud protsessi ($A \rightarrow B$) *mittepööratavaks.*

Teiseks võib ilmneda, et süsteemi (vastassuunaline) üleminek olekust B olekusse A on võimalik, ilma et sealjuures toimuks mingisuguseid muutusi süsteemi ümbritsevates kehades. Sel juhul me nimetame isoleeritud süsteemis kulgevat protsessi ($A \rightarrow B$) *pööratavaks.*

Teisiti öeldes:

iga protsess, mis viib isoleeritud süsteemi olekust A olekusse B, on siis pööratav, kui on võimalik selline protsess, mille ainsaks tulemuseks on keha üleminek olekust B olekusse A;

iga protsess, mis viib isoleeritud süsteemi olekust A olekusse B, on siis mittepööratav, kui on võimatu selline protsess, mille ainsaks tulemuseks on keha üleminek olekust B olekusse A.

Sõnadel „ainsaks tulemuseks" on siin sama mõte, mis neil oli teise printsiibi formulatsiooni juures, s. o. väliste (süsteemi mittekuuluvate) kehade termodünaamilise oleku igasuguste muutuste keelamise mõte.

Tüüpiliseks mittepööratava protsessi näiteks on hõõre. Ükskõik millised ka oleksid hõõrdeprotsessi konkreetsed iseärasused, hõõrdejõudude ületamisel tehtud töö kulub algul hõõrduvate pindade soojendamiseks ja seejärel (soojusjuhtivuse tõttu) hõõrduvate kehade sügavamate ainekihtide ja väliste kehade soojendamiseks. Kuna soojuse mittekompenseeritud muundumine tööks ei ole võimalik, siis on iga selline protsess, millega kaasneb hõõre, mittepööratav.

Teiseks tüüpiliseks mittepööratava protsessi näiteks on soojusvahetus lõpliku temperatuuride vahe korral. Niisugune protsess on mittepööratav seetõttu, et *ei ole võimalik realiseerida protsessi, mille ainsaks tulemuseks on soojuse pööratav üleminek külmemalt kehalt kuumemale.*

Asjaolu, et soojuse üleminek külmemalt kehalt soojemale ei või tekkida ega kulgeda iseseisvalt, peetakse endastmõistetavaks ja see järgneb vahetult temperatuuri mõistest. On tähtis teada, et ilma kompensatsioonita ei või seda protsessi mingil juhul ka kunstlikult esile kutsuda.

Tõepoolest, selleks et kanda soojust üle külmemalt kehalt soojemale, ilma et seejuures välistes kehades toimuks mingit muutust, oleks vaja: võtta külmemalt kehalt soojust (see on võimalik), ilma kompensatsioonita muuta see tööks (see on võimatu) ja kulutada saadud töö soojema keha siseenergia suurendamiseks (see on võimalik). Kuna selle protsessi koostisosaks peaks olema soojuse mittekompenseeritud muundumine tööks, mis tegelikult on võimatu, siis on ka kogu protsess tervikuna võimatu. See tähendab, et soojuse ülekandmisprotsess on lõpliku temperatuuride vahe korral mittepööratav.

Vaatleme veel ühte tüüpilist mittepööratava protsessi näidet — paisumist, mis ei ole tasakaaluprotsess. Kujutleme isoleeritud süsteemi, mis koosneb soojust mitteläbilaskvast ainest silindrisse paigutatud kehadest (näiteks gaasist). Silinder olgu suletud liikuva kolviga. Oletame, et kolb ise on kaaluta, kuid on koormatud vihtidega. Võetagu järsku kolvilt koormus ära; keha paisub, kusjuures see paisumine ei ole tasakaaluprotsess. Kuna keha ei tee tööd, siis tema energia jääb muutumatuks. Kas see protsess on pööratav? Küsimus taandub sellele, et kas on võimalik protsess, mille ainsaks tulemuseks on gaasi kokkusurumine muutumatu siseenergia korral. Keha kokkusurumiseks tuleb kulutada tööd. Selleks et keha siseenergia ei suureneks, tuleb temalt ära võtta ekvivalentne hulk soojust ja lõpuks selleks, et välises keskkonnas ei oleks toimunud mingisugust muutust, tuleb see kehalt äravõetud soojushulk ilma kompensatsioonita muuta tööks, mis on võimatu. Tähendab, et selline paisumine, mis ei ole tasakaaluprotsess, on mittepööratav.

Tasakaaluprotsessid ja mittetasakaaluprotsessid. *Tasakaaluprotsessiks me nimetame sellist protsessi, mis täidab järgnevaid tingimusi: 1) süsteem, milles protsess toimub, läbib rea üksteisele pidevalt järgnevaid tasakaaluolekuid ja 2) süsteem, milles nimetatud protsess toimub, saavutab suurima töö, mida ta on võimeline sooritama antud tasakaaluolekute pideva rea läbimisel.*

Siin, nagu alatigi, me räägime „töö tegemisest" algebralises mõttes; võib osutuda, et suurim töö, mida süsteem on antud tingimustel võimeline tegema, on negatiivne.

See tähendab, et protsess võib vajaduse korral olla seotud ka töö kulutamisega. Selleks et ta oleks tasakaaluline, on vaja, et töö kulutus oleks minimaalne.

Vaatleme neid tingimusi, mida tuleb silmas pidada selleks, et protsessi tasakaalulisus oleks kindlustatud.

Esimene tingimus seisneb selles, et on keelatud *järskude* hüpete kaupa muuta süsteemile avalduvat mõju — näiteks on keelatud järsku muuta rõhku, keskkonna temperatuuri jne. Selle tingimuse kohaselt peab tasakaaluprotsess koosnema võimalikult suurest hulgast elementaarsetest astmetest.

Teine tingimus seisneb selles, et protsess peab kulgema äärmiselt *aeglaselt*. See tingimus on vajalik seetõttu, et protsessi iga elementaarse astme jaoks, mis viib süsteemi ühest tasakaaluolekust naaber-tasakaaluolekusse, kulub lõplik, mitte aga elementaarselt väike ajavahemik. Protsessi üksikute astmete arv on aga tohutult suur ja seetõttu protsess tervikuna kulgeb väga kaua.

Olgu meile antud mingisugune kehade isoleeritud süsteem. Selle sees võib toimuda rida protsesse, mille tulemusena süsteem läheb aja jooksul üle olekust A olekusse B. Võib tõestada, et kui kas või ainult üks süsteemis kulgevatest protsessidest ei osutu tasakaaluprotsessiks, siis süsteemi üleminek A—B tervikuna on mittepööratav. *Tarvilik ja piisav protsessi pööratavuse tingimus seisneb selles, et kõik süsteemis kulgevad protsessid osutuksid tasakaaluprotsessideks*[1].

Mida vähem tasakaaluline on protsess, seda hoogsamalt ta kulgeb ja seda suurem on tema mittepööratavuse aste. Kõik looduses ja tehnikas toimuvad protsessid on ühel või teisel määral mittetasakaalulised ja seetõttu ka mittepööratavad. Sellele vaatamata on meie poolt idealiseeritud pööratavate protsesside uurimine tähtis: see võimaldab termodünaamiliste meetoditega avastada selliseid seaduspärasusi, milliseid teisel teel oleks raske kindlaks teha.

§ 138. Teoreem entroopia kasvamisest ja teoreemid tasakaalust.

Määrasime kindlaks protsessi mittepööratavuse tunnuse; selleks tunnuseks on protsessi mittetasakaalulisus. On arusaadav, et seda tunnust võib rakendada ainult sel juhul, kui on täpselt teada protsessi kulgemise käik.

[1] Sel põhjusel kasutatakse termineid „pööratav" ja „mittepööratav" sageli seal, kus rangelt võttes tuleks kasutada termineid „tasakaalu-" ja „mittetasakaalu-". Ainult sellise protsessi kohta, mis kujutab endast isoleeritud süsteemi üleminekut ühest olekust teise, võib öelda, et see on pööratav või mittepööratav. Kui on juttu süsteemist, mis ei ole isoleeritud, siis tuleb rakendada termineid „tasakaalu-" ja „mittetasakaalu-".

Kuid juba mõiste „mittepööratavus" definitsioonist endast järgneb, et selle küsimuse lahendamiseks, kas mingi antud protsess, mis viib isoleeritud süsteemi olekust A olekusse B, on pööratav või mittepööratav, ei ole üldse vaja teada protsessi kulgemise käiku. On küllalt teada protsessi alg- ja lõppolekut. Võrreldes neid olekuid, võib välja selgitada, kas selline protsess, mille ainsaks tulemuseks on süsteemi tagasipöördumine algolekusse, on võimalik või ei: kui ei ole võimalik, siis protsess $A \rightarrow B$ on mittepööratav protsess; kui on võimalik, siis protsess $A \rightarrow B$ kujutab endast pööratavat protsessi.

Siit tuleb teha järeldus, et peale mittepööratavuse ülalvaadeldud tunnuse, mis on leitud protsessi kulgemise iseloomu järgi, peab protsessi mittepööratavuse kohta olema veel mingi tunnus, mis põhineb isoleeritud süsteemi lõppoleku võrdlemisel algolekuga.

Protsessi mittepööratavus peab jätma mingi jälje süsteemi kuuluvate kehade termodünaamilise oleku muutusele. Seega on võimalik leida mittepööratavusele kvantitatiivset mõõtu. Selleks mittepööratavuse kvantitatiivseks mõõduks on isoleeritud süsteemi entroopia kasv. Osutub (seda tõestatakse termodünaamikas), et

kui isoleeritud süsteemi poolt sooritatud protsess on pööratav, siis selle süsteemi entroopia jääb muutumatuks; kui isoleeritud süsteemi poolt sooritatud protsess on mittepööratav, siis süsteemi entroopia kasvab. Seega *isoleeritud süsteemi entroopia ei saa mingil juhul kahaneda.*

Öeldust selgub, et kui soojust oleks võimalik mittekompenseeritult muundada tööks, siis kõik protsessid oleksid pööratavad. Sooritagu isoleeritud süsteem protsessi $A \rightarrow B$. Selle protsessi mittepööratavuse loomulikuks mõõduks on väikseim soojushulk, mis selleks, et sooritada protsessi, mille ainsaks tulemuseks on süsteemi tagasipöördumine algolekusse, tuleb mittekompenseeritult muundada tööks. Termodünaamiline analüüs näitab, et seda minimaalset soojushulka on siiski raske välja arvutada. Ülesanne lihtsustub tunduvalt, kui me selle minimaalse soojushulga defineerimisel lepime kokku kasutada jahutajatena ainult selliseid kehi, mille temperatuur ei ole madalam kui üks absoluutse skaala kraad (1° K). *Minimaalne soojushulk, mida protsessi $A \rightarrow B$ „täielikuks pööramiseks"*[1] *tuleks mittekompenseeritult muundada tööks, on selle kokkuleppe põhjal täpselt võrdne süsteemi entroopiaga olekus B oleku A suhtes.*

[1] Siin jutumärkidesse võetud sõnade „täielikuks pööramiseks" all tuleb mõista selle lühidat tähistamist, et me tahame süsteemi, mis on sooritanud mittepööratava protsessi, tuua esialgsesse olekusse tagasi nii, et välises keskkonnas ei toimuks seejuures mingisugust muutust.

Kuna me vaatleme isoleeritud süsteemi, siis mõlemates võrreldavates olekutes *A* ja *B* on süsteemil üks ja sama energia. Kvantitatiivselt ei ole siseenergia muutunud. Kuid kas meie ei pea siseenergia kvantitatiivse defineerimise kõrval rääkima veel siseenergia kvaliteedist. Jah, peame. Siseenergia hulga muutumatuse korral võib siseenergia kvalitatiivselt muutuda.

Soojus ei ole tööga võrreldes täisväärtuslik. See toob endaga kaasa fakti, et siseenergia ei ole teiste energiavormidega võrreldes täisväärtuslik. Näiteks erinevalt gravitatsioonienergiast siseenergia varu[1] tervikuna me tavaliselt ei või kasutada töö vormis: mingi osa siseenergiast peame vastu võtma soojuse vormis.

Milline osa siseenergiast antakse üle soojuse, mitte aga töö vormis — see sõltub keha termodünaamilisest olekust ja meie käsutuses olevatest võimalustest soojust vastuvõtva keha temperatuuri valikul.

Kui keha paigutada keskkonda, millest ta on soojuslikult tasakaalus, ja kui meie käsutuses ei ole väga madala temperatuuriga kehasid, siis see minimaalne osa siseenergiast, mida tuleb tingimata ära anda soojuse (mitte aga töö) vormis, on võrdne keha absoluutse temperatuuri ja keha entroopia korrutisega (Helmholtz nimetas seda suurust *(TS) seotud energiaks*).

Entroopia on siin siseenergia mittetäisväärtuslikkuse (täisväärtusetuse) mõõduks. Entroopia kasvab mittepööratavate protsesside korral seetõttu, et protsessi mittepööratavus muudab veel suurema osa siseenergiast väärtusetuks.

Olgu märgitud, et sõnade siseenergia „mittetäisväärtuslikkus" ja „väärtusetus" asemel räägitakse sageli siseenergia „hajumisest", „degradatsioonist" ja „entroopilisusest". Kõik need terminid tähistavad ühte ja sama mõistet.

Teoreemid termodünaamilise süsteemi tasakaalust. Isoleeritud süsteemi poolt sooritatud protsess võib olla pööratav või ka mittepööratav. Esimesel juhul jääb isoleeritud süsteemi entroopia muutumatuks, teisel juhul kasvab. Siit selgub, et *kui süsteemi entroopia on saavutanud maksimumi, siis isoleeritud süsteem on püsiva tasakaalu olekus.* Sellest olekust võib teda välja viia ainult väliste mõjutuste abil.

Võtame näiteks klaasi vett, isoleerime selle soojuslikult välismaailmast ja viskame klaasi võrdlemisi suure vasevitriolitüki. Osa vasevitriolist lahustub ja vee temperatuur seejuures langeb (paljude teiste ainete lahustumine kutsub seevastu esile tempera-

[1] Termini „siseenergia varu" kasutamine põhineb keha antud oleku võrdlemisel mingi algolekuga. Siin me oletame, et algolekuks on võetud selline olek, millele vastav siseenergia on minimaalne (deformeerimata kristalli olek absoluutsel nullil).

tuuri tõusu). Lahustumine lakkab siis, kui süsteemi entroopia — antud juhul vasevitrioli ja tema vesilahuse entroopiate summa — saavutab maksimumi.

Praktikas tuleb sageli tegelda süsteemidega, mis ei ole soojuslikult isoleeritud, vaid on seevastu paigutatud niisugustesse tingimustesse, kus vaatamata süsteemis kulgevatele protsessidele jääb temperatuur enam-vähem konstantseks.

Pöördudes tagasi ülaltoodud näite juurde, võime väita, et sel juhul (vee temperatuuri konstantsusel) lahustub vees suurem hulk vasevitrioli. Tasakaaluolek on nüüd teistsugune; see ei vasta enam vasevitrioli ja tema vesilahuse entroopiate maksimumile. Loomulikult võib ka antud juhul rakendada teoreemi entroopia maksimumist. Selleks tuleb jälle tundma õppida isoleeritud süsteemi, millesse nüüd kuulub mitte ainult klaas vasevitrioli lahusega, vaid ka keskkond, milles klaas asub. Kuid see teeb asja keeruliseks. Silmas pidades asjaolu, et termodünaamika püstitab isotermiliste protsesside tähtsa juhu jaoks erilise tasakaalukriteeriumi[1], ei ole selle võtte rakendamiseks vajadustki.

Meenutagem seda, mida oli öeldud eespool suuruse TS kohta. See suurus (Helmholtz'i terminoloogia järgi *seotud energia*) kujutab endast seda osa keha siseenergiast, mida me võime saada a i n u l t soojuse vormis, eeldades, et soojuse äravõtmine ei toimu madalamal temperatuuril kui T. Ülejäänud, s. o. t ä i s v ä ä r t u s l i k k u osa siseenergiast $U—TS$ võib nendel samadel tingimustel saada t ö ö v o r m i s. Seda täisväärtuslikku osa nimetatakse *vabaenergiaks* ja tähistatakse tavaliselt tähega F.

Mingu süsteem i s o t e r m i l i s e l t üle olekust C_1 olekusse C_2. Süsteemi entroopia juurdekasv on võrdne selle protsessi taandatud soojusega: $S_2 - S_1 = \frac{Q_{T=\text{const}}}{T}$. $Q_{T=\text{const}}$ on siin süsteemile antud soojus; soovides ära märkida seda, et temperatuur jääb muutumatuks, nimetatakse suurust $Q_{T=\text{const}}$ sageli latentseks soojuseks: latentseks sulamissoojuseks, latentseks aurumissoojuseks jne. Latentset soojust tähistatakse sageli tähega r ($Q_{T=\text{const}} = r$). Me näeme, et isotermilise protsessi latentne soojus kulub siseenergia v ä ä r t u s e t u osa suurendamiseks.

$$r = T\,(S_2 - S_1). \qquad (12)$$

Tähistame tööd, mida süsteem teeb isotermilise protsessi vältel, sümboliga $A_{T=\text{const}}$. Süsteem teeb tööd siseenergia kahanemise ($U_1 - U_2$) ja süsteemile antud soojuse Q arvel. Järelikult, $A_{T=\text{const}} = U_1 - U_2 + TS_2 - TS_1$. Ühendades selle võrrandi paremal pool esinevad keskmised liikmed ning äärmised liikmed ja võttes arvesse, et $U_1 - TS_2$ on süsteemi vabaenergia sel juhul,

[1] K r i t e e r i u m — tunnus; kreeka keelest *kritein* — e r a l d a m a, l a h u t a m a (lad. k. *criterium*).

kui süsteem on olekus C_1, ja $U_2 - TS_2$ süsteemi vabaenergia sel juhul, kui süsteem on olekus C_2, me näeme, et isotermilise protsessi korral süsteem teeb tööd vabaenergia kahanemise arvel:

$$A_{T = \text{const}} = F_1 - F_2. \tag{13}$$

Näiteks galvaani elemendi poolt tehtud töö (elektrivoolu töö) on võrdne elemendis keemiliselt reageerivate ainete vabaenergia kahanemisega. Isotermilisel vedeliku pihustamisel tilkadeks me kulutame tööd pindpinevusjõudude ületamiseks; see meie poolt kulutatud töö on võrdne vedeliku vabaenergia juurdekasvuga (§ 108).

Üks tähtsamaid termodünaamika teoreeme ütleb järgmist: kui süsteemi temperatuuri ja ruumala hoida konstantsena, siis süsteemis toimuvad ainult sellised protsessid, millede korral vabaenergia kahaneb või (tasakaaluprotsessi korral) ei muutu. *Kui katsetingimused garanteerivad temperatuuri ja ruumala konstantsuse, siis püsiva tasakaalu olek vastab vabaenergia miinimumile.*

§ 139. Gibbs-Helmholtz'i ja Clapeyron-Clausius'e võrrandid.

Tähtsaks termodünaamika ülesandeks on aine kvantitatiivse muutumise protsesside uurimine. Sellisteks protsessideks on näiteks aine üleminek ühest agregaatolekust teise, keemilised reaktsioonid, aine lahustumine jne. Neil juhtudel isotermiline soojus kujutab endast aine kvantitatiivse muundumise latentset soojust: latentset aurumissoojust, latentset sulamissoojust, latentset lahustumissoojust jne. Loeme need latentsed soojused antuna ühe mooli kohta.

Olgu v_v ühe mooli vedeliku ruumala temperatuuril T ja rõhul p ja v_a 1 mooli küllastava auru ruumala samal temperatuuril ja samal rõhul. Keemisprotsess kulgeb konstantsel temperatuuril ja konstantsel rõhul. Keemine on seega *isotermiline ja samal ajal ka isobaariline protsess.* Siinjuures süsteemi poolt tehtud töö on võrdne rõhu ja ruumala juurdekasvu korrutisega:

$$A = p\,(v_a - v_v).$$

Iga selline soojushulk, nagu latentne aurumissoojus, sulamissoojus jt., läheb siseenergia juurdekasvuks ja paisumistöö sooritamiseks:

$$r = (U_a - U_v) + p\,(v_a - v_v). \tag{14}$$

Arvutuste lihtsustamiseks siseenergia sageli ühendatakse korrutisega pv ja nende suuruste summat nimetatakse kokkuleppeliselt *soojussisalduvuseks* (mõned autorid nimetavad seda suurust *entalpiaks*). Soojussisalduvust tähistatakse sageli tähega I.

$$I = U + pv.$$

Aurumissoojus kujutab endast küllastava auru ja vedeliku soojussisalduvuste vahet:

$$r = I_a - I_v. \tag{15}$$

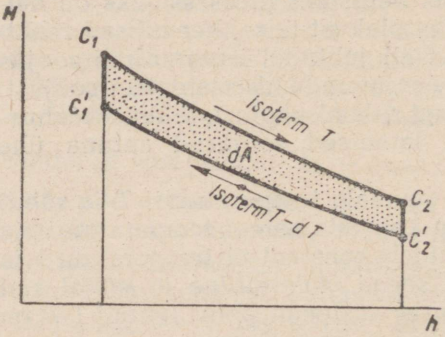
Analoogiline võrdus kehtib ka sulamissoojuse kohta ja keemilisel reaktsioonil, näiteks põlemisel, eralduva soojuse kohta sel eeldusel, et reaktsioon kulgeb konstantsel rõhul.

Keemine ja aurumine kulgevad samal ajal nii isobaariliselt kui ka isotermiliselt. Seetõttu võib latentset aurumissoojust ja latentset sulamissoojust arvutada ka valemi (12) abil:

$$r = T\,(S_a - S_v).$$

Tuletame nüüd võrrandi, mille abil saab isotermilise protsessi latentse soojuse r suuruse järgi leida, kuidas muutub isotermiline töö $A_{T=\text{const}}$ sel juhul, kui isotermiline protsess kulgeb kõrgemal või madalamal temperatuuril.

Kujutame endale ette, et absoluutsel temperatuuril T mingi keha sooritab isotermilise protsessi ja, tehes seejuures tööd $A_{T=\text{const}}$, läheb olekust C_1 olekusse C_2 (joon. 353; koordinaaditelgedeks on sellel joonisel võetud töö intensiivsustegur H ja ekstensiivsustegur h, erijuhul võivad need olla rõhk ja ruumala).



Joon. 353. Gibbs-Helmholtz'i võrrandi tuletamiseks.

Tõmbame läbi kahe äärmise oleku C_1 ja C_2 ordinaadid ja isotermilise protsessi $C_1 \to C_2$ kõrval vaatame nende samade ordinaatide vahel analoogilist isotermilist protsessi, mis kulgeb veidi madalamal temperatuuril $T - dT$. Sel juhul keha läheb olekust C_1' olekusse C_2' ja teeb tööd, mida võib tähistada järgmiselt:

$$A_{T=\text{const}} - d\,(A_{T=\text{const}}).$$

Kui me laseksime sooritada tsükli $C_1 \to C_2 \to C_2' \to C_1' \to C_1$, siis selle elementaarse tsükli[1] kasutegur oleks võrdne temperatuuride vahe dT ja absoluutse temperatuuri suhtega. Selle tsükli kestel tehtud töö oleks võrdne $d\,(A_{T=\text{const}})$-ga ja soojendajalt võetud soojus, mis kujutab endast isotermilise protsessi $C_1 \to C_2$ latentset soojust, oleks r. Tsükli kasutegur on tsükli töö, antud

[1] Vaadeldav elementaarselt väike tsükkel erineb Carnot' tsüklist teist järku lõpmatult väikeste suuruste poolest.

juhul $d\,(A_{T=\text{const}})$, ja soojendajalt võetud soojuse, antud juhul r, suhe. Seega

$$\frac{d\,(A_{T=\text{const}})}{r} = \frac{dT}{T}\,. \tag{16}$$

See ongi *Gibbs-Helmholtz'i võrrand,* mis näitab, et juhul, kui isotermilise protsessi sooritamiseks tuleb kulutada soojust ($r>0$), siis temperatuuri tõustes isotermiline töö $A_{T=\text{const}}$ kasvab. Kui aga vaadeldav isotermiline protsess kulgeb soojuse eraldumisega ($r<0$), siis temperatuuri tõustes isotermiline töö väheneb.



Hermann Helmholtz (1821—1894).

Gibbs-Helmholtz'i võrrand antakse harilikult veidi teisel kujul. Meenutame, et iga, sealhulgas ka isotermilise protsessi juures kehale antud soojus kulub keha siseenergia suurendamiseks ja välistöö sooritamiseks: $r = (U_2 - U_1) + A_{T=\text{const}}$. Kui siseenergia suurenemise $(U_2 - U_1)$ asemel tahame vaadelda siseenergia vähenemist $(U_1 - U_2)$, siis tuleb öeldu ümber sõnastada järgmiselt: tööd tehakse siseenergia arvel ja lisaks sellele teine osa tööst, mis on võrdne $A - (U_1 - U_2)$, tehakse kehale antud soojuse arvel: $r = A - (U_1 - U_2)$.

Kirjutame Gibbs-Helmholtz'i võrrandi ümber nii, et võrduse vasakul pool seisaks isotermilise protsessi latentne soojus r ja siis asendame r keha poolt tehtud töö ja siseenergia vähenemise vahega. Saame:

$$A_{T=\text{const}} - (U_1 - U_2) = T\,\frac{d\,(A_{T=\text{const}})}{dT}\,. \tag{17}$$

Gibbs-Helmholtz'i võrrandist, mida sageli ülaltoodud kujul rakendatakse, järgneb, et sõltuvalt võrduse paremal pool seisva korrutise märgist võib isotermiline töö olla siseenergia vähenemisest suurem või väiksem. Tuleb meeles pidada, et tuletuskäigu idee järgi mainitud korrutises esinev suurus $d\,(A_{T=\text{const}})$ tähendab isotermilise töö algebralist suurenemist, mis on tingitud ainult temperatuuri tõusust dT võrra, mitte aga mingist muust põhjusest. Suurus $A_{T=\text{const}}$ sõltub süsteemi alg- ja lõppruumalast (ja teistest

töö ekstensiivsusteguritest). Sellepärast juhul, kui soovime võrrelda temperatuuril $T + dT$ ja temperatuuril T kulgevaid isotermilisi protsesse, tuleb mõlemal juhul lähtuda ühesugustest algruumaladest (ja teistest töö ekstensiivsusteguritest) ja viia süsteem ühesuguste lõppruumaladeni (ja teiste töö ekstensiivsusteguriteni; kui vaadeldakse näiteks pindpinevust, siis pinna pindaladeni, kui vaadeldakse elektrokeemiliste jõudude tööd, siis ülekantud laenguteni jts.).

Meenutame, et isotermilist tööd tehakse vabaenergia arvel: $A_{T=\text{const}} = F_1 - F_2$. Pannes Gibbs-Helmholtz'i võrrandisse $A_{T=\text{const}}$ asemele vabaenergia, saame selle tähtsa termodünaamika võrrandi kolmanda, samuti sageli kasutatava kuju:

$$(F_1 - F_2) = (U_1 - U_2) + T \frac{d(F_1 - F_2)}{dT}. \tag{18}$$

Rakendame Gibbs-Helmholtz'i võrrandit sulamis- ja keemisprotsessile. Selleks kirjutame võrrandi (16) järgmisel kujul:

$$r = T \frac{d(A_{T=\text{const}})}{dT}.$$

Antud juhul isotermiline töö $A_{T=\text{const}}$ kujutab endast samal ajal ka isobaarilise paisumise tööd, mida tehakse paisumisel ühe mooli vedeliku ruumalalt kuni ühe mooli auru ruumalani. Keemistemperatuur sõltub rõhust: rõhu suurenemine dp võrra toob endaga kaasa keemistemperatuuri tõusu dT võrra. Siinjuures paisumise töö kasvab suuruse $d(A_{T=\text{const}}) = (v_a - v_v)\,dp$ võrra.

Pannes selle $d(A_{T=\text{const}})$ avaldise Gibbs-Helmholtz'i võrrandisse, saame:

$$r = (v_a - v_v)\, T \frac{dp}{dT}. \tag{19}$$

Seda võrrandit nimetatakse *Clapeyron-Clausius'e võrrandiks.* Selle võrrandi abil saab arvutada aurumissoojuse. Selleks on tarvis teada küllastava auru rõhu sõltuvust temperatuurist ehk, mis on samaväärne, keemispunkti sõltuvust rõhust. Praktikas nii tehaksegi: küllastava auru rõhku mõõdetakse mitmesugustel temperatuuridel. Saadud andmetest määratakse tuletise $\frac{dp}{dT}$ väärtus erinevatel temperatuuridel ja Clapeyron-Clausius'e võrrandi abil leitakse, kui suur on erinevatel keemistemperatuuridel latentne aurumissoojus r. Teades r temperatuuri funktsioonina võib eelmises paragrahvis toodud valemite (12) ja (15) abil arvutada küllastava auru entroopia ja soojussisalduvuse (entalpia) kõikvõimalikel keemistemperatuuridel.

Suuruste r, S ja I sellisel teel koostatud tabeleid vee, süsihappe, ammoniaagi ja teiste vedelikkude jaoks kasutatakse laialdaselt soojustehnikas.

Tuletuskäigust nähtub, et Clapeyron-Clausius'e võrrand on rakendatav mitte üksi vedeliku keemisprotsessile, vaid ka sulamisele, lahustumisele, isotermilistele reaktsioonidele jt. On arusaadav, et neil juhtudel võrrandi paremal pool esineva vahe $(v_a - v_v)$ asemel on süsteemi alg- ja lõppruumalade vastav vahe; p ja T tähendavad tasakaalu (kui näiteks r tähendab latentset sulamissoojust, siis aine tahke ja vedela faasi tasakaalu) rõhku ja temperatuuri.

Paljudel juhtudel saab Clapeyron-Clausius'e võrrandit lihtsustada. Näiteks vähe aurustuvate vedelikkude latentse aurumissoojuse arvutamisel, tahke keha sublimatsioonisoojuse (aurumissoojuse) arvutamisel, halvasti lahustuvate ainete lahustumissoojuse arvutamisel ja üldse kõikidel sellistel juhtudel, kus gaasilise faasi tihedus on väga väike, võib teha järgmised lihtsustused: esiteks, kondenseerunud faasi moolruumala suuruse võib auru moolruumala suurusega võrreldes jätta arvestamata; sel põhjusel võrrandi parempoolses osas ruumalade vahe asemel kirjutatakse lihtsalt auru ruumala; teiseks, vaatluse all olevatel juhtudel võib arvestada, et küllastava auru moolruumala on määratud gaasi oleku võrrandiga $v_a = \frac{RT}{p}$. Võttes arvesse, et $\frac{dp}{p} = d\ln p$, saame Clapeyron-Clausius'e võrrandi alljärgneval lihtsustatud (ligikaudsel) kujul, millisena teda rakendatakse laialdaselt füüsikalises keemias:

$$r \approx RT^2 \frac{d\ln p}{dT}. \qquad (20)$$

See ligikaudne valem on mugav selles suhtes, et tema kasutamiseks ei ole tarvis teada küllastava auru moolruumala.

Termodünaamika valemite rakendusala iseloomustamiseks tuleb märkida, et XIX s. oli termodünaamika peamiseks ülesandeks *soojusmasinate teooria* väljatöötamine, mis oli aluseks aurumasinate, sisepõlemismootorite, auruturbiinide, külmutusmasinate jne. projekteerimisel ja mis näitas teaduslikult põhjendatud tee nende masinate täiustamiseks. Seoses sellega oli põhimeetodiks ringprotsesside meetod, termodünaamika peamiseks sisuks oli aga: 1) erinevate tsüklite uurimine nende kasuteguri seisukohalt, 2) gaaside ja aurude omaduste uurimine, 3) soojustehnikas praktiliste arvutuste jaoks tähtsate termodünaamika diagrammide konstrueerimine ja 4) seoses auruturbiinis toimuvate protsessidega auru voolamise ja väljavoolamise uurimine.

Tervikuna kogu see esimene termodünaamika arengujoon kujutab endast niinimetatud *tehnilist termodünaamikat.*

XIX s. ja eriti XX s. algul termodünaamika eesmärgid oluliselt laienesid ja uurimisaineks said uued objektid.

XX s. on termodünaamikale iseloomulikud järgmised uurimisained: 1) vedelike ja tahkete kehade termodünaamilised omadused, 2) faaside tasakaal ja faaside muutused, 3) elektriliste ja eriti elektrokeemiliste nähtuste termodünaamiline uurimine, 4) keemilised reaktsioonid. Need termodünaamika arengujooned ühendatakse harilikult *keemilise termodünaamika* nime all. Keemilise termodünaamika ühe haru rajajaks oli Gibbs ja teise haru rajajaks van't Hoff. Kuigi Gibbs'i klassikalised tööd ilmusid trükis aastatel 1873—1878, kuulusid nad oma sisu ja stiili poolest, aga peamiselt mõju tõttu, mis nad avaldasid teistele autoritele, tervikuna XX sajandi termodünaamikasse.

Nernst (aastatel 1906—1911) lisas kahele termodünaamika printsiibile kolmanda printsiibi, mis etendab põhilist osa termodünaamika keemilistes rakendustes. Tänu Nernsti seadusele on entroopia väljaarvutamise ülesanne praktiliselt taandatud soojusmahtuvuse ja temperatuuri vahelise sõltuvuse uurimisele. Seetõttu on „soojusmahtuvuse probleem" omandanud kaasaegses füüsikas väljapaistva koha.

Kaasaegses keemilises termodünaamikas on silmapaistev koht Lewis'i *aktiivsuseteoorial*. Lewis tõi termodünaamikasse kaks uut suurust — *f* ja *a*, mida saab kindlaks määrata nii eksperimentaalselt kui ka teoreetiliselt. Kui neid kahte suurust kasutada rõhu *p* ja tiheduse $\frac{1}{v}$ (kus *v* tähendab eriruumala) asemel, siis saab ideaalsete gaaside termodünaamika võrrandeid üldistada igasugustele reaalsetele süsteemidele.

Mainitud kaks suurust, mida Lewis nimetas *lenduvuseks (f)* ja *aktiivsuseks (a)* on valitud nii, et gaaside kohta kehtivaid valemeid saab üldistada reaalsetele kehadele, ilma et me seejuures muudaksime oluliselt valemite kuju. Lenduvusel *f* on efektiivse rõhu tähendus ja aktiivsusel *a* on efektiivse tiheduse $\frac{1}{v}$ ehk efektiivse kontsentratsiooni tähendus.

Aktiivsuse koefitsiendi all mõistetakse suurust, mida tuleb korrutada tihedusega või kontsentratsiooniga, selleks et saada aktiivsust, või mida tuleb korrutada rõhuga, selleks et saada lenduvust.

Kaasaegse termodünaamika eri osaks on *kiirgusenergia termodünaamika*. Seoses kiirgusenergia termodünaamika arenguga lõi Planck käesoleva sajandi algul kvantteooria. 1913. a. Niels Bohr pani kvantteooria põhjal aluse nüüdisaegsele aatomi ehituse õpetusele. Kahekümnendatel aastatel Schrödinger ja Heisenberg lõid kvantteooria baasil elementaarosakeste ja väikeste osakeste mehhaanika — kvantmehhaanika.

Kvantteooria põhjal püstitatud printsipiaalselt uus vaade energia jaotuse kohta vabadusastmete järgi põhjustas paljude termodünaamiliste suuruste — siseenergia, soojusmahtuvuse, entroopia jt. — molekulaar-kineetilise käsituse (õigemini öeldes, sellele käsitusele tuginevate arvutusmeetodite) põhilise muutumise. Seoses sellega omandasid viimastel aastakümnetel suure tähtsuse ja hakkasid arenema *termodünaamika kvantstatistilised meetodid,* mis lähendasid termodünaamika edusamme kvantoptika edusammudele. Kvantstatistilised meetodid andsid meile teadmisi aatomite ja molekulide ehitustest ja muutustest, mis toimuvad aatomite ja molekulidega soojusliikumise intensiivsuse kasvamisel.

§ 140. Nernsti soojuslause.

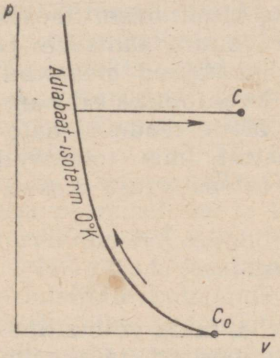
Kujutame endale ette veel kord sellist keha, mida võib silindris, mis on väliskeskkonnast soojuslikult isoleeritud, tasakaaluliselt kokku suruda. Sellise adiabaatilise tasakaalukokkusurumise juures keha temperatuur kasvab. Mispärast? Seepärast, et keha molekulid, mis põrkavad vastu nende poole liikuvat kolbi, lendavad eemale suurema kiirusega; selle tulemusena kokkusurumisel keha molekulaar-kineetiline energia kasvab. Tuleb kujutleda, et kolb liigub lõpmatult aeglaselt, mingisugune molekul, mis põrkub vastu kolbi, omandab kiiruse lõpmatult väikese juurdekasvu, kuid enne kui kolb läbib märgatava vahemaa, jõuab ta see-eest põrkuda vastu kolbi loendamatu arvu kordi ja selle tulemusena saab ta tunduva kineetilise energia juurdekasvu.

Oletame, et algmomendil asub kolvi all absoluutse nullini jahutatud kristall. Kas see kristall soojeneb tasakaalulise, s. t. lõpmatult aeglase, adiabaatilise kokkusurumise tõttu? Kui absoluutsel nullil molekulid on liikumatud (aatomisisene liikumine meid aga antud juhul ei huvita), siis lõpmatult aeglaselt liikuv kolb, ületades ettevaatlikult molekulidevahelisi tõukejõude, ainult surub molekule, ja ei ole näha, et ta võiks anda molekulidele mingisugust võnkliikumise kiirust[1]. Siit võime järeldada, et absoluutsel nullil alanud kristalli adiabaatiline tasakaalukokkusurumine ei kutsu esile kristalli soojenemist. Jõuame seega huvitavale ja esimesel hetkel ootamatule järeldusele, et *absoluutse nulli isoterm ühtib adiabaadiga* (joon. 354).

Me vaatlesime siin kristalli kokkusurumise protsessi. Ei ole

[1] Kui kolb liigub lõpmatult aeglaselt, siis kolvi mõju kristalli osakestele ei tule tingimata vaadelda löögina, mis võib viia varem liikumatud kristalli osakesed võnkliikumisse. Tõepoolest, võib kujutleda, et algmomendil kristalli pinnaga kokkupuutes olev kolb oli liikumatu. Loeme, et jõud, mis panid kolvi, aga seega ka kristalli osakesed, liikuma, kasvavad nullist alates ühtlaselt ja lõpmatult aeglaselt; sellistel tingimustel ei esine põrget.

põhjust arvata, et mingisuguse teise tasakaaluprotsessi juures olukord oleks teistsugune. Seetõttu võib püstitada järgmise üldisema väite: *ükski adiabaatiline tasakaaluprotsess, mis algab absoluutsel nullil, ei vii süsteemi soojenemisele.* Arvestades seda, et entroopia oma definitsiooni kohaselt jääb iga adiabaatilise tasakaaluprotsessi juures muutumatuks, võib püstitatud väite väljendada järgmiselt: *absoluutsel nullil kõik tasakaaluprotsessid kulgevad entroopia muutuseta.* Selles väites sisaldub N e r n s t i seaduse füüsikaline olemus. Nernst avastas oma seaduse aastatel 1906—1911 madalatel temperatuuridel teostatud soojusmahtuvuste mõõtmise põhjal[1].



Joon. 354. Nernsti soojuslause juurde.

Meenutame, et entroopia kujutab endast suhtelist suurust samuti nagu energiagi. Entroopial on füüsikaline mõte siis, kui on näidatud algolek, millega keha antud olekut võrreldakse. On lepitud kokku, et kondenseeritud olekut (kristalli) absoluutsel nullil vaadeldakse algolekuna; teisiti öeldes, *kondenseeritud keha (kristalli) entroopiat absoluutsel nullil loetakse võrdseks nulliga* ja mingisuguses teises olekus mõistetakse keha entroopia all taandatud soojuste summat, mis tuleb kehale anda selleks, et tasakaaluprotsessi abil viia keha mainitud algolekust antud olekusse. Sel viisil arvutatud entroopia väärtust nimetatakse sageli entroopia a b s o l u u t v ä ä r t u s e k s.

Kuidas saab entroopiat kõige lihtsamalt arvutada? Kõige kergem on võib-olla mõõta keha soojusmahtuvust konstantsel rõhul (C_p). Näitame nüüd, tuginedes Nernsti lausele, et entroopia absoluutväärtuse arvutamiseks tuleb katseliselt määrata, kuidas muutub suurus C_p sõltuvalt temperatuurist kuni kõige madalama temperatuurini. Olgu keha, mille entroopiat on tarvis arvutada, antud olek C iseloomustatud absoluutse temperatuuriga T ja rõhuga p. Kujutleme, et me võtsime selle sama keha temperatuuril $T = 0$ ja rõhul $p = 0$. Selles olekus (algolekus) C_0 tema entroopia $S = 0$. Surume keha adiabaatiliselt kokku (tasakaalukokkusurumine) senikaua, kuni keha rõhk saab võrdseks antud väärtusega p. Nernsti lause järgi nulladiabaat langeb ühte absoluutse nulli isotermiga (joon. 354) ja seega keha entroopia ja temperatuur jäävad võrdseks nulliga. Nüüd hakkame keha soojendama, hoides

[1] Matemaatiliselt võib Nernsti seadust formuleerida mitmesuguselt; üheks selliseks formulatsiooniks on antud paragrahvi lõpus toodud valem entroopia arvutamiseks.

rõhu konstantsena; soojendame seni, kuni tema temperatuur saavutab väärtuse T. Kui keha soojendatakse konstantsel rõhul, siis selleks, et keha temperatuur tõuseks dT võrra, tuleb kehale iga kord anda soojushulk $C_p dt$. Keha entroopia kasvab seejuures $dS = \frac{C_p dT}{T}$ võrra. Nende suuruste summa (integraal), mis on võetud üle terve temperatuuri-intervalli 0-st kuni T-ni, kujutab endast entroopia absoluutväärtust:

$$S = \int_0^T \frac{C_p\, dT}{T} \tag{21}$$

(integreerida tuleb konstantsel rõhul).

Siin on kõige tähtsam see, et entroopia absoluutväärtuse arvutamiseks on küllaldane teada, kuidas muutub keha soojusmahtuvus C_p sõltuvalt temperatuurist, ja ei ole tarvis teada, kuidas see sõltub keha rõhust (või tihedusest)[1].

[1] Nernsti teoreemi sisu on põhiliselt kvantiseloomuga. Antud paragrahvis esitatud arutlus adiabaatilisest tasakaalukokkusurumisest absoluutsel nullil ei välju puhtklassikaliste vaatekohtade raamidest ja sellele vaatamata ta võimaldab püstitada Nernsti lauset. Kuidas seletada, et see puhtklassikaline uurimine viib tulemustele, millede sisu on tegelikult kvantiseloomuga? Selle põhjuse kohta tuleb märkida mõned asjaolud.

Eelkõige tuleb nimelt pöörata tähelepanu meie poolt vaadeldud probleemi (aine omadustest absoluutsel nullil) klassikalise käsituse sisulisele vasturääkivusele. Tõepoolest, kõrvuti toodud arutlusega võib tuua teise, mis lähtub klassikalisest seadusest energia ühtlase jaotuse kohta vabadusastmete järgi. Sel juhul jõuame tulemusele, et soojusmahtuvus peab jääma kuni kõige madalamate temperatuurideni konstantseks, mis on vasturääkivuses Nernsti lausega.

Seega kahest klassikalisest arutlusest, millel on, nagu näib, ühesugused alused, üks viib Nernsti lausele, aga teine on Nernsti lausega vasturääkivuses. Selline sisemine vasturääkivus on klassikalisele teooriale tüüpiline neil aladel, kus ta tuleks asendada kvantteooriaga.

Edasi on oluline märkida, et mainitud arutelu kristalli adiabaatilisest tasakaalukokkusurumisest õnnestub ainult temperatuuril absoluutne null, mitte aga absoluutse nulli lähedastel temperatuuridel. Tõepoolest, vaadeldes kristalli adiabaatilist kokkusurumist juhul, kui kristalli temperatuur on lähedane absoluutsele nullile (kui ei ole võrdne sellega), me ei või kokkusurumise molekulaarse pildi põhjal enam ette aimata, et sel juhul kokkusurumine peaaegu ei põhjusta temperatuuri tõusu.

Lõpuks tuleb märkida ka seda, et me ei võtnud arvesse nullenergiat. Lähtudes rangelt klassikaliselt vaatekohalt, me lugesime, et absoluutsel nullil kõik aatomid on paigal (kvantteooria aga näitab, et tahketel kehadel ja nähtavasti ka gaasidel on kõdunud olekus absoluutsel nullil teatav jääkenergia).

Vaatamata loetletud asjaoludele, mis probleemi oluliselt komplitseerivad, vastab ülaltoodud arutelu keha adiabaatilisest tasakaalukokkusurumisest absoluutsel nullil nähtavasti siiski ligikaudu Nernsti lause füüsikalisele sisule.

§ 141. Niinimetatud „maailma soojussurmast" ja loodusnähtuste lõpmatust isearenemisest.

Sageli võib tähele panna, et täppisteaduste järeldused, mis on täiesti usaldatavad selles piirkonnas, mille jaoks nad on mõeldud, tungivad filosoofiasse ja saavad aluseks väga julgetele ja mitteveenvatele üldistustele. Selle näitena võib tuua niinimetatud maailma „soojussurma" probleemi. Vaatamata sellele, et juba probleemi seade ise on täiesti ekslik, on filosoofide ja füüsikute poolt pühendatud mainitud probleemile suurt tähelepanu.

Termodünaamika teoreemidest, millede põhjal (mittepööratavate protsesside korral) isoleeritud süsteemi entroopia kasvab, tehti ettevaatamatult järeldus, et maailma entroopia püüab saavutada mingit maksimumi. Kui see maksimum on saavutatud, siis entroopia edasine kasvamine on võimatu, kõik protsessid lakkavad ja maailm satub „soojussurma" olekusse. Me näeme pidevalt, et iseenesest tekkivad protsessid kulgevad alati temperatuuride ühtlustumise suunas või sageli rõhkude ja teiste intensiivsustegurite ühtlustumise suunas. „Soojussurma" oleku all mõistetakse sellist maailma olekut, mille kehtimisel temperatuur on kõikides maailma osades saanud ühesuguseks ja rõhkude ning teiste intensiivsustegurite jaotus osutub selliseks, et edaspidi ei ole enam põhjusi, mis oleksid võimelised ükskõik millist protsessi esile kutsuma.

Püüame välja selgitada selle metodoloogilise vea olemuse, mis tekitas maailma „soojussurma" väära probleemi.

Alati, kui me tahame teha mingit üldistust, peame eelkõige kaalutlema, kas see üldistus on põhjendatud ja kas meie üldistust tehes ei ületa seda piiri, kus kvantiteet läheb üle kvaliteediks. Nii näiteks teoreem entroopia kasvamisest on õige nii suurte kui ka väikeste kehade kohta, kuid ta kaotab oma mõtte siis, kui teda rakendada liiga väikestele aineosakestele, s. o. aineosakestele, mille suurused on võrreldavad molekulide omadega; selliste aineosakeste jaoks puudub entroopia mõistel igasugune sisu. Niisugustele osakestele ei saa termodünaamika teist printsiipi rakendada sel lihtsal põhjusel, et nende jaoks soojuse ja töö mõistete vaheline erinevus kaob.

Kui me läheme üle makrofüüsikalistelt nähtustelt mikrofüüsikalistele nähtustele, siis mõningate füüsikaliste mõistetega ja seadustega toimub sügav kvalitatiivne muutus. Nende kvalitatiivsete muutuste alahindamine viis omal ajal klassikalise füüsika vastuollu kvantteooriaga. Teatud analoogiaga on meil tegemist ülemineku makrofüüsikalistelt protsessidelt kosmilise mastaabiga (suprafüüsikalistele) protsessidele.

„Soojussurma" probleemi seades esineva metodoloogilise vea olemus seisneb entroopia kasvamist käsitlevas teoreemis esine-

vate kõigi põhiliste mõistete kvalitatiivsete muutuste ignoreerimises (termodünaamika laiendamisel maailmale tervikuna). Nendeks mõisteteks on isoleeritud süsteem, entroopia ja tasakaaluolek.

Kui me termodünaamikas räägime isoleeritud süsteemist, siis me peame silmas sellist kehade kogu, mis ei allu välistele mehhaanilistele ja soojuslikele mõjutustele; kuid termodünaamikas kasutatavate tõestuskäikude jaoks on vaja, et me soovi korral võime süsteemi sellistele mõjutustele allutada. Termodünaamikas on isoleeritud süsteem „osa", mitte aga „tervik". Termodünaamika seisukohalt süsteemi entroopia kujutab endast suurust, mis teatud viisil määrab kindlaks süsteemi vahekorra teiste, süsteemi mittekuuluvate kehadega — ta on nimelt taandatud soojuste summa. Teisiti öeldes: entroopia on väikseim soojushulk, mida süsteemilt tuleb ära võtta (väline mõju) selleks, et viia süsteemi vaadeldavast olekust algolekusse (loobudes seejuures niisuguste jahutajate kasutamisest, millede temperatuur on madalam kui üks absoluutse skaala kraad). Entroopia statistiline käsitus sisaldab endas tarviliku tingimusena süsteemile välise mõju avaldumise võimalust (entroopia statistilisel defineerimisel võrreldakse olekuid, mis on adiabaatiliselt saavutamatud). See näitab, et isoleeritud mõiste tähistab ka statistikas „osa", mitte aga „tervikut". Kuid kogu tähtede maailm kujutab endast mingit tervikut; ta on „isoleeritud süsteem" filosoofilises, mitte aga termodünaamilises mõttes; ta on selline isoleeritud süsteem, mis juba oma olemuse poolest ei saa kunagi soojust ära anda ega vastu võtta. Seega tähtede maailmale tervikuna ei saa kuidagi rakendada termodünaamilise süsteemi mõistet; juba üksi sellepärast ei või tähtede maailmale kui tervikule laiendada termodünaamika teoreeme.

Selleks et aru saada mõistete „tasakaaluolek" ja „entroopia" kvalitatiivsest muutumisest, vaatleme lihtsat, kuid õpetlikku võrdlust. Järgnedes fantaasialennule, kujutleme, et ääretust kaugusest me võime oma pilguga haarata tervet tähtede maailma. Kujutleme, et me kaugelt vaadatuna näeme tähtede maailma ainetihendina, samuti nagu me näeme klaasis olevat vett. Meie ei saaks eristada üksikuid tähti. Tähtede maailm näiks meile mingi pideva suprakosmilise kehana. Rakendades temale analoogia põhjal tasakaaluoleku mõistet, me võib-olla jõuaksime otsusele, et tähtede maailm asub juba mingis supratasakaalu olekus. Siis mingi „tähtedetaguse termodünaamika" seisukohalt tähtede maailm, vaatamata oma elu kogu rikkusele, näiks meile juba „soojussurmas" olevana. Nii ka tavalise termodünaamika seisukohalt vee tasakaaluolek, olgugi et vee molekulid on igaveses liikumises, näib meile vääralt „soojussurma olekuna".

Entroopia on suurus, mis sõltub termodünaamilistest parameetritest — temperatuurist, rõhust, tihedusest jne. Keha kui terviku

liikumist, s. o. tema ümberpaigutumist ruumis, termodünaamikas ei vaadelda ja kui ka arvestatakse, siis termodünaamika järelduste ja mehhaanika seaduste ühendamise teel. Tervikuna liikuva keha kiirus ei kuulu igal juhul entroopia avaldisse.

Taevakehad hõljuvad maailmaruumis sarnaselt gaasimolekulidele. Maailma elus on esmajärguline tähtsus taevakehade jaotusel ruumis ja taevakehade kiiruste suunal. Kuid just need suurused ei kuulu suurusesse „taevakehade entroopia"; nad ei kuulu isegi taevakehade entroopia summasse.

Samal ajal on arusaadav, et tähekogumite iseloomustamisel on tähtsad just need suurused — taevakehade liikumise kiirused ja taevakehade jaotus ruumis. Kui juba luua maailma entroopia mõiste, siis ülalöeldu tõttu oleks ebaõige vaadelda seda suurust taevakehade entroopiate summana. Termodünaamika statistiline käsitus näitab, et selline suurus nagu maailma entroopia peaks eelkõige sõltuma „astraalsest temperatuurist" (s. o. taevakehade liikumise keskmisest kiirusest) ja „astraalsest tihedusest" (s. o. tähtede arvust kosmilises ruumalaühikus), mitte aga tähtede temperatuurist ja tihedusest. Peale selle peaks niisuguses suuruses — maailma entroopias — kajastuma kõik tähtede maailma iseärasused: tähtede kuhjumine sellisteks hiiglaslikeks süsteemideks, nagu seda on Galaktika; hiiglasuurte tähekogumite translatoorne ja pöörlev liikumine; tegurid, mis määravad uute tähekogumite tekkimise jne. Seega, kui eksisteerib selline suurus, mis pälviks maailma entroopia nime, siis see on mingi täiesti eriline suurus, mingi supraentroopia, millel ei ole midagi ühist maailma koosseisu kuuluvate taevakehade summaarse makroentroopiaga, ja igal juhul ta ei ole viimasega võrdne.

Taevakehade makroentroopia kasvamise termodünaamiline seadus näitab kätte taevakehade sisemuses ja pinnal toimuvate protsesside suuna. Kuid see seadus ei saa meile midagi öelda maailma kui terviku saatuse kohta. Suprakosmilistest protsessidest võtavad osa miljardid tähed ja nende protsesside jaoks on täiesti ebaoluline, kus ja millal mingi täht kustub ja kus tekib uus täht.

Kõigist öeldust järgneb, et termodünaamikast ei või naiivselt teha järeldusi, mis ulatuvad üle tema rakendatavuse piiride.

Maailma „soojussurma" probleemi seades endas esineva väga jämeda vea tõttu ei paku see väär probleem kõige väiksematki huvi.

Tänapäeva teadus eitab otsustavalt väljamõeldise maailma „soojussurma" võimalikkusest. Kõik inimkonna poolt omandatud teadmised kinnitavad, et maailm on lõpmatu, ning et tema arenemine on kestnud ja kestab igavesti.

On kerge aru saada, miks idealistid haarasid kinni maailma „soojussurma" väljamõeldisest. Neil ei olnud raske kasutada seda väljamõeldist religioosse propaganda jaoks. Tõepoolest — kui

tähtede maailmal tuleb kunagi minna „soojussurma" olekusse, siis tekib küsimus, et miks siis maailm ei ole läinud sellesse olekusse juba varem. Sellele küsimusele püütakse vastata järgmiselt: järelikult, maailm ei ole eksisteerinud igavesti, kuid kui maailm ei ole eksisteerinud igavesti, siis ta on kunagi tekkinud; kui ta on aga kunagi tekkinud, siis kerkib küsimus: kes on tema looja? Nii leiavad idealistid „tõestuse" jumala olemasolule.

Samasuguseid spekulatsioone kasutavad idealistid selleks, et „põhjendada" maailma tardumuse metafüüsilist vaatekohta ja maailma arenemise võimatust ilma „jumaliku vahelesegamiseta".

Algul valitsenud surnud rahu ja tardumus, kõigi selle muutumatus, mis nüüd on olemas, „jumalike tõugete" loomisvõime, looduse võimetus isearenemiseks — kõik need teesid on olnud eri kallakuga idealistidel ühised. Siin on alati toimunud võitlus idealistide ja materialistide vahel, võitlus, mis jaotas füüsikud kahte vaenulikku, lepitamatusse leeri. Materialistid ei saavutanud kohe võitu. See võit saavutati dialektilise materialismi poolt järkjärgult.

Teadmiste areng, mis põhjustas dialektilise materialismi tekkimise, näitas, et metafüüsikute igasugused väljamõeldised — kujutlused maailma tardumusest ja looduse isearenemise võimatusest ilma „jumala abita" — lükatakse teaduse poolt ümber igal sammul. Seevastu ilmneb ning on füüsika, geoloogia, bioloogia ja kosmoloogia poolt tõestatud, et looduse isearenemine on looduse üldine seadus.

Vastupidiselt metafüüsikale ei käsita dialektika loodust liikumatuse ja püsimise, seisaku ja muutumatuse seisundina, vaid lakkamatu liikumise ja muutumise, lakkamatu uuenemise ja arenemise seisundina, kus alati miski tekib ja areneb, miski hävineb ja läheneb oma elupäevade lõpule.

Sellepärast nõuab dialektiline meetod, et nähtusi ei vaadeldaks ainult nende vastastikuse seose ja tingituse seisukohalt, vaid ka nende liikumise, nende muutumise ja nende arenemise seisukohalt, nende tekkimise ja väljasuremise seisukohalt. Arenguprotsessi ei tule mõista liikumisena mööda ringi, läbikäidu lihtsa kordumisena, vaid edasiliikumisena, liikumisena tõusujoones, üleminekuna vanast kvalitatiivsest olekust uude kvalitatiivsesse olekusse, arenemisena lihtsalt keerulisele, madalamalt kõrgemale.

XVII ja XVIII sajandil oli füüsika suurel määral metafüüsiliste kontseptsioonide mõju all. Loodust ja looduse elemente vaadeldi muutumatutena ja alati sellisteks jäävatena, nagu nad olid. Kehade omaduste muutusi, mis selgelt ilmnevad soojenemisel, keemilistes reaktsioonides, elektriseerumisel jne., käsitati sel perioodil muutumatute fluidumite — soojusvedeliku, flogistoni, elektrivedeliku jt. — üleminekuna ühest kehast teise.

Avastused näitasid, et kõik muutub, kõik liigub, kõik on lakkamatus arengus. Nende avastuste survel füüsika järk-järgult vabanes liikumatuse ja looduse ning tema elementide muutumatuse metafüüsilistest kontseptsioonidest.

Pärast njuutonliku mehhaanika erakordseid edusamme, pärast füüsika rikastumist elektriõpetusega, pärast seda, kui oli loodud õpetus energialiikide vastastikusest muunduvusest, ja pärast molekulaar-kineetilise teooria katselist kinnitamist oli võimatu mitte tunnustada seda, et liikumine on üldine ja igavene. Oma ulatuslikul edasiliikumisel looduse dialektilise käsituse suunas jäi füüsika XIX sajandil siiski poolele teele. Uute vaadete süsteemis, kus tees liikumise üldsusest oli juba saanud põhiliseks, ei olnud metafüüsilised muutumatuse kontseptsioonid — nüüd juba kui ideed liikumisest ilma arenemiseta, kui ideed liikumisest mööda ringi — veel välja juuritud. Füüsikud säilitasid harjumuse rajada oma maailmavaade ainult füüsika järeldustele, mitte aga kõikidele teadustele tervikuna; seoses sellega nad ei teinud järeldusi mõningatest tähtsatest avastustest, mis kujundasid ümber loodusteaduse kogu ilme. Kant-Laplace'i teooria planetaarsete süsteemide tekkimisest udukogudest ja Darwini teooria lõid sügava lõhe looduse paigaloleku ja muutumatuse metafüüsikalistesse kontseptsioonidesse. Hakkas ilmnema, et nii surnud kui ka elavas looduses kõik mitte ainult liigub ja muutub, vaid et see liikumine on arenemise ja komplitseerumise iseloomuga.

„Loodus," ütleb Engels, „on dialektika katsekivi ja kaasaegne loodusteadus, mis pakub selleks katsetuseks äärmiselt rikkalikku, iga päevaga rohkenevat materjali, on seega tõestanud, et looduses toimub kõik lõppeks dialektiliselt, mitte aga metafüüsiliselt, et ta ei liigu igavesti üht ja sama ning alatasa korduvat ringi mööda, vaid elab läbi tõelise ajaloo. Siin tuleb eelkõige mainida Darwinit, kes andis metafüüsilisele loodusekäsitusele tugevaima hoobi, tõestades, et kogu praegune orgaaniline loodus, taimed ja loomad, ja järelikult ka inimene on miljoneid aastaid kestnud arenemisprotsessi produkt."

Maakoore uurimine tegi geoloogilise ja bioloogilise arenemise kaheldamatuks ning vaieldamatuks. Udukogude ja tähtede astrofüüsikaline uurimine näitas selgesti kosmilise arengu üldsust. Lõppeks radioaktiivsuse avastamine tegi mateeria isearenemise täiesti silmanähtavaks.

Vaatamata kõigele sellele näis füüsikutele (mõnedele näib ka praegu) ikkagi veel, et füüsikalised ja keemilised nähtused kui kõige lihtsamad, olles aluseks kõikidele ülejäänud, keerulisematele liikumisvormidele, kulgevad alati absoluutselt ühesuguselt, kordavad täpselt iseennast ja et seega füüsikalised kehad, mis on omaette jäetud, mis ei allu selgelt ilmnevatele välistele mõjustustele, on võimetud igasugusteks, ka kõige väiksemateks muutus-

teks ja peavad igavesti jääma muutumatuks. Selliste vaadete aluseks on füüsikaliste kehade näilik muutumatus nende vaatlemise ja uurimise tingimuste täpsel taastamisel. Seejuures unustatakse, et kui kasutada selliseid hiiglasuuri ajavahemikke, mis on kosmiliste protsesside mõõduks, siis võib omaduste muutumatus osutuda näivaks. On kaheldamatu, et mateeria keemilise evolutsiooni protsessid, mateeria isearenemine ja isemuundumine toimuvad alati ja kõikjal — tähtedevahelises ruumis, tähtede sisemuses, Päikese sisemuses ja maapõues. Kas võib väita, et needsamad protsessid ei toimu mingi, võib-olla väiksema kiirusega igas kehas, igas aines, mille omadused näivad meile vaatlusaja piiratuse tõttu muutumatutena? Kosmilistes nähtustes, mateeria keemilise evolutsiooni isearenemise nähtustes tuhandeaastased ajavahemikud kujutavad endast lühikesi perioode, mille kestel muutusi vaevalt ilmneb.

Võtame mingi füüsikalise keha — vee, raua või kivi, mis on tasakaaluolekus (homogeensel temperatuuril, rõhul ja üldse tingimustel, mis ei põhjusta keha oleku muutust). Me teame, et ükskõik millise keha aine ei ole surnud, ei ole ilma liikumiseta, et ainult välisel vaatlemisel, ilma meie mõttepilgu tungimiseta aine sisemisse ehitusse, ta tundub olevat tardunud ja liikumatu. Tegelikult aga aineosakesed (molekulid ja aatomid) on hoogsas ja keerulises soojusliikumises; veel hoogsamalt ja veel keerulisemas vastastikuses mõjutuses liiguvad aatomites elektronid ja aatomituumad; aatomituumades liiguvad meie poolt veel vähe uuritud elementaarosakesed, millest tuumad koosnevad; aatomid vahetavad footonite kujul elektromagnetilist kiirgust, kiirgavad footoneid, neelavad, löövad neid tagasi (põrge), elektronid eraldatakse aatomitest ja haaratakse teiste aatomite poolt kaasa jne.

Kas see keeruline sisemine liikumine igavesti ainult kordub ja kunagi ei kutsu esile keha omaduste kõige väiksematki muutust või ilmneb ka sisemises liikumises isearenemine, mis algul avaldub liikumise pildi märkamatus muutuses, kuid aja jooksul, võib-olla tuhandete aastate pärast, ilmutab end keha omaduste muutumises?

Väga lihtsa ja jämeda soojusliikumise skeemi järgi vaadeldakse molekule ja aatomeid ilma struktuurita kerakestena. Selle skeemi teoreetiline analüüs näitab, et isegi liikumispildi sellisel lubamatul lihtsustamisel peavad vahetevahel toimuma mingid spontaansed, s. o. just nagu iseenesest tekkivad, kõrvalekaldumised soojusliikumise detailide ja seoses sellega ka keha omaduste kohta kehtivatest normidest. Molekulaar-soojusliku liikumise isearenemine kutsub vältimatult esile oma päritolult juhuslikke, kuid oma ulatuse ja esinemise sageduse poolest seaduspäraseid tiheduse fluktuatsioone, lokaalseid ülekuumenemisi ja teisi fluktuatsioone.

Fluktuatsioonid, tekkides ja kadudes, muutes oma märki ja kujutades endast võnkumist ühe ja sama muutumatu normi ümber, ei anna kuhjuvaid muutusi; kuid fluktuatsioonid kindlasti ei ammenda mateeria võimalikku isearenemist. Kui fluktuatsioonide teoorias oleks arvestatud aatomisiseseid ja teisi protsesse, siis fluktuatsioonilistes muutustes ilmneks tendents, mis on iseloomulik kindla koostise ja ehitusega ainele.

Selliste kehade kogu jaoks, mille vahel on rikutud soojuslik, difusiooniline või keemiline tasakaal, kujutab sisemiste liikumiste isearenemine endast tuntud fakti. Keemilised reaktsioonid, aine muundumine ühest olekust teise, lahustumine, kristallisatsioon, soojusjõumasinate tööprotsessid, paljud keemilis-tehnoloogilised protsessid jne. — kõik need on näideteks sellistest nähtustest, mille isearenemise määravad termodünaamika seadused.

Seniajani termodünaamika seadused määravad kindlaks ainetes toimuvate sisemiste liikumiste isearenemise ainult kuni soojusliku, difusioonilise ja keemilise tasakaalu saavutamiseni. Mida lähemal on süsteem mainitud tasakaaluliikidele, seda aeglasemalt ja aeglasemalt toimuvad temas muundumised. Võib arvata, et kui isearenemise termodünaamilised stiimulid on ammendatud, siis järgnev isareng, aeglustudes sajandeid kestva kosmiliste nähtusteni, on määratud spontaansete aatomisiseste ja teiste senini veel mittetuntud muundumistega, mis mingil ajamomendil võivad erisuguste kehade keerulise süsteemi uuesti kaugele paisata varem saavutatud soojuslikust tasakaalust.

Kuni käesoleva ajani ei ole veel avastatud termodünaamilise tasakaalu korral kehades toimuvate sisemiste liikumiste isearenemise tõelist pilti. See andis idealistidele ettekäände püstitada kõige mõttetumat väljamõeldist, et kogu maailm läheb kunagi „soojussurma" olekusse — maailma moodustava kogu, oma liikumatusse surnud mateeria tasakaalu olemusse. Selliste järelduste vastuolulisust teadusega on korduvalt paljastatud. Selliste, termodünaamika väljapoole oma rakendamise piire laiendavate üldistuste ekslikkus on silmanähtav. Sellele vaatamata spekulatsioonid niisugusel pinnal jätkuvad. Idealistid püüavad kasutada seda, et füüsika käsutuses ei ole veel senini usaldusväärseid andmeid maailma kui terviku kosmilise arenemise kohta.

Viimastel aastatel tehtud avastused näitavad selgelt, et kosmiliste nähtuste isearenemises kuulub juhtiv osa spontaansetele aatomisisestele protsessidele. Kui alles hiljuti radioaktiivsed muundumised tundusid eranditena, siis praegu me teame, et keemiliste elementide (isotoopide, isomeeride) 1068 eriliigist umbes 620-ga toimuvad, enamasti kiired, radioaktiivsed muundumised. On võimalik ja tõenäone, et ka kõigi teiste isotoopidega toimuvad radioaktiivsed, kuid võrratult aeglasemad muundumised.

Kui avastati eriliiki kiirgus, mis avaldub aatomituuma jagunemises kaheks peaaegu võrdseks osaks, tekkis füüsika arengus uus epohh. Sel juhul osutus nimelt võimalikuks realiseerida tingimusi, mille juures üheaegselt lagunevate aatomite arvu tormilise kasvamise tõttu aatomituumade lagunemine muundub aatomiplahvatuseks, millega kaasneb tohutute energiahulkade eraldumine.

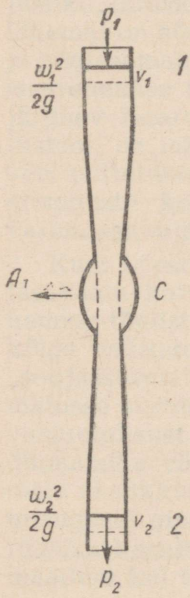
Maakoore koostisse kuuluvates ja kunstlikult saadud ainetes ei leidu jälgi selle kohta, et kergemad elemendid võiksid spontaanselt muunduda raskemateks elementideks. On võimalik, et see ülesehitusprotsess, mis on vastassuunaline radioaktiivse lagunemisega, toimub tähtede sisemuses rõhkude ja temperatuuride erakordselt kõrgetel väärtustel, ja on võimalik, et just nimelt sellest toob meile teateid senini veel oma tekkimise päritolult mõistatuslik ja omadustelt hämmastamapanev kosmiline kiirgus.

XXII PEATÜKK.

GASODÜNAAMIKA.

§ 142. Gasodünaamika põhivõrrand. Adiabaatiline soojuslangus.

Gaaside ja gaasidesse paigutatud kehade liikumise uurimiseks tuleb paljudel juhtudel (eriti suurtel kiirustel, kui ei või arvestamata jätta gaasi kokkusurutavust) ühendada mehhaanika seadused termodünaamika seadustega. Uut teaduslikku distsipliini, mis tekkis aerodünaamika täpsustamisel ja edasiarendamisel termodünaamika seaduste alusel, hakati nimetama *gasodünaamikaks*.



Joon. 355.

Gasodünaamika järeldused omandasid juhtiva tähtsuse tänapäeva suurte kiiruste lennuasjanduses, auru- ja gaasiturbiinide projekteerimisel, reaktiivtehnikas ja samuti ka sise- ja välisballistikas (s. o. õpetustes, mis käsitlevad mürsu liikumist relva rauas ja atmosfääris).

Vaatleme gaasijoas toimuvaid protsesse termodünaamika seaduste seisukohalt lähtudes.

Kujutleme statsionaarset gaasijuga, millest üks väljaeraldatud osa on kujutatud joonisel 355. Toru „profiil" (s. o. tema ristlõike muutumise iseloom) võib olla meelevaldne; arutluse lihtsustamiseks aga oletame, et tema väljaeraldatud tüki alg- ja lõpposa on silindrikujulised. Gaasijoa teel võib leiduda seadeldisi, mis muundavad joa energia tööks (näiteks turbiini liikuvad labad) või mis annavad gaasijoale välistöö arvel energiat (näiteks kompressori liikuvad labad); joonisel 355 on sedaliiki seadeldis märgitud tähega *C*.

Kuna gaasijuga on statsionaarne, siis joa oleku parameetrid jäävad joa iga ristlõike ulatuses ajas konstantseks; erinevate ristlõigete jaoks võivad nad muidugi olla erinevad. Olgu joa algosas gaasi rõhk p_1, eriruumala v_1 ja gaasi kiirus w_1; joa lõpposas olgu aga nendesamade parameetrite väärtused vastavalt p_2, v_2 ja w_2.

Jälgime väljaeraldatud gaasijoa liikumist sellise ajavahemiku vältel, mille jooksul läbi joa iga ristlõike voolab 1 *kg* gaasi (formaalselt rangem oleks kasutada arutluses lõpmatult väikest ajavahemikku dt, mille kestel iga ristlõiget läbib Gdt *kg* gaasi, kus G on „gaasi kulu" ühe sekundi kohta; kuid see ei muuda oma olemuselt alljärgnevaid tulemusi, vaid vabastab meid ainult sellest eeldusest, et joa alg- ja lõpposa on silindrikujulised).

Termodünaamika esimese printsiibi põhjal on süsteemile (antud juhul gaasijoa kogu väljaeraldatud osale ülalmainitud ajavahemiku jooksul) juurdeantud soojushulk võrdne koguenergia kasvu (antud juhul võrdub see gaasi siseenergia ja kineetilise energia kasvude summaga) ja tehtud töö (mis antud juhul omakorda võrdub väljaeraldatud gaasijoa otspindadele mõjuvate rõhumisjõudude töö A_p, seadeldises C tehtud tehnilise töö A_{tehn} ja hõõrdetöö $A_{hõõrd}$ summaga) summaga. Seega

$$Q = \Delta U + \Delta E_k + A_p + A_{tehn} + A_{hõõrd}.$$

Vastavalt tehtud oletusele on see võrrand mõeldud rakendamiseks niisuguse ajavahemiku kohta, mille kestel läbi iga ristlõike voolab 1 *kg* gaasi. Seega joa vaadeldavas osas esinev siseenergia muutus on põhjustatud sellest, et gaasi hulk joa algosas (mille termodünaamiline olek on tähistatud indeksiga *1*) väheneb 1 *kg* võrra, kuna gaasi hulk lõpposas (mille termodünaamiline olek on tähistatud indeksiga *2*) suurenes 1 *kg* võrra (joa statsionaarsuse tõttu on toru kõikides ülejäänud osades $U = const$).

Seega

$$\Delta U = u_2 - u_1,$$

kus u_1 ja u_2 on gaasi erisiseenergiad.

Analoogilistel kaalutlustel

$$\Delta E_k = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g},$$

kus $\frac{w^2}{2g}$ on 1 *kg* gaasi kineetiline energia.

Mis puutub joa väljaeraldatud osa otsmistele pindadele mõjuvate rõhumisjõudude töösse, siis osas *1* kujutletav kolb (või pind, mis eraldab tagapool asuvaid gaasikihte) kirjeldab ruumala v_1 (1 *kg* gaasi ruumala) ja seega siin kulutatakse töö p_1v_1; osas *2* sooritatakse aga töö p_2v_2. Seega võime kirjutada:

$$A_p = p_2v_2 - p_1v_1.$$

Järelikult

$$Q = i_2 - i_1 + \left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right) + A_{tehn} + A_{hõõrd}, \qquad (1)$$

kus $i = u + pv$ on 1 *kg* gaasi soojussisalduvus (§ 139).

See võrrand osutub gasodünaamikas põhiliseks. Võrrand (1) näitab, et gaasijoa termodünaamilisel iseloomustamisel ja selle töö määramisel, mida võib gaasijoalt saada, etendab peamist osa gaasi soojussisalduvus. Gaasi soojussisalduvus, mis agregaatoleku muutuste ja faasimuutuste korral (nagu selgitati § 139) on seotud faasimuutuse latentse soojusega (näiteks aurumissoojusega, sulamissoojusega jne.), määrab meie poolt praegu vaadeldud gaaside liikumisel, samuti ka soojusmasinate tööprotsessides, gaasi töövõime. Tõepoolest, kui gaasi voolamine on adiabaatiline ja samuti masina C (ükskõik millise — kolb-masina või turbiini) tööruumis kulgevad protsessid on adiabaatilised, s. o. kui $Q = 0$, siis

$$A_{\text{tehn}} + A_{\text{hõõrd}} = -\Delta i + \left(\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g}\right), \qquad (2)$$

kus Δi on soojussisalduvuse kahanemine: $-\Delta i = i_1 - i_2$, kuna valemi parema poole teine liige kujutab endast kineetilise energia kahanemist.

Niisiis, soojuse juurde- ja äravoolu puudumisel gaasijuga teeb tööd kineetilise energia kahanemise ja soojussisalduvuse kahanemise arvel. Paljudes soojusmasinates (sisepõlemismootorites, kolb-aurumasinates, mõningatel juhtudel ka turbiinides) äratöötanud gaaside või auru kineetilist energiat võib soojussisalduvuse muutusega võrreldes arvestamata jätta, samuti nagu võib arvestamata jätta gaasi või (katlas) auru kineetilise energia algväärtuse; kõikidel neil juhtudel *suurim tehniline töö, mida võib saada gaasi või auru adiabaatilisel paisumisel, on määratud soojussisalduvuse kahanemisega ehk, nagu öeldakse, adiabaatilise soojuslangusega* ($-\Delta i$); kui $w_1 = w_2$ ja $A_h = 0$, siis võrrandi (2) põhjal saame:

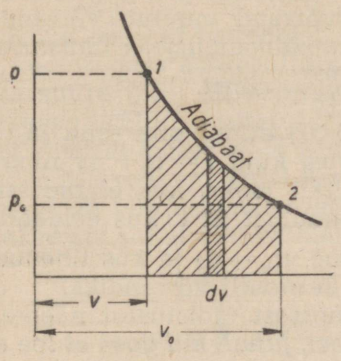
$$A_{\text{tehn}} = -\Delta i = i_{\text{alg}} + i_{\text{väljalaske}}.$$

Kuna on teada, et adiabaatilise paisumise absoluutne töö on võrdne siseenergia (§ 131), mitte aga soojussisalduvuse, kahanemisega, siis see järeldus vajab veel selgitamist:

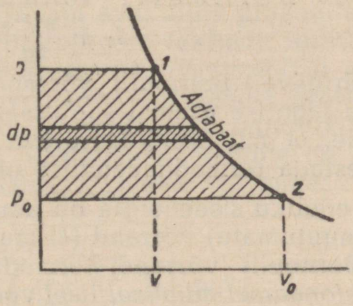
$$A_{\text{abs}} = -\Delta u.$$

Joonisel 356 viirutatud pindala kujutab gaasi või auru adiabaatilise paisumise absoluutset tööd. Kuid ühelt poolt, nimetatud töö tehniliseks kasutamiseks ükskõik millise konstruktsiooniga aurumasinas tuleb ületada vasturõhku, mis mõjub masina kolvile või gaasijoale; selleks kulutatakse töö (arvestatult 1 kg gaasi või auru kohta) $p_0 v_0$, kus v_0 on äratöötanud gaasi või auru eriruumala. Teiselt poolt, töötava gaasi või auru pideval juurdetulekul silindrisse (näiteks kolbmasina silindri täitmisel katlas tekkinud auruga) võib peale paisumistöö kasutada ka „täitumistööd" (sisepõlemismootorites — kütuse isobaarilise põlemise tööd): see töö on pv, kus v on gaasi või auru eriruumala paisumise algul.

Kui pöörduda uuesti joonise 356 juurde ja kujutleda, et adiabaatilise paisumise absoluutset tööd kujutav viirutatud pindala on suurendatud nelinurga pv pindala võrra ja vähendatud p_0v_0 pindala võrra, siis saame adiabaatilise tehnilise töö graafilise kujutise, mis on toodud joonisel 357. Pindala, mis on joonisel 356 viirutatud, määrab siseenergia kao; sellesama adiabaadi all olev pindala, mis on võetud rõhu telje suhtes (joon. 357), määrab aga soojussisalduvuse kao ($u - u_0 + pv - p_0v_0 = i - i_0$).



Joon. 356. Adiabaatilise paisumise absoluutne töö.



Joon. 357. Adiabaatilise paisumise tehniline töö.

Adiabaatilise paisumise absoluutne töö

$$A_{abs} = -\Delta u = \int_1^2 pdv,$$

mis graafiliselt interpreteerituna tähendab seda, et me vaatleme joonisel 356 kujutatud viirutatud pindala lõpmatult suure arvu elementaarselt väikeste ribade pdv summana.

Vaadeldes analoogiliselt joonisel 357 toodud adiabaatilise töö graafilist kujutist elementaarselt väikeste horisontaalsete ribade summana, ilmneb et

$$A_{tehn} = -\Delta i = -\int_1^2 vdp. \qquad (3)$$

Seda valemit, mille me põhjendasime graafiliselt, ei ole raske saada ka analüütiliselt. Tõepoolest: $di = d(u + pdv) = du + pdv + vdp$; siin paremal pool esineva esimese kahe liikme summa on δQ, kui $\delta Q = 0$, s. o. adiabaatilisel muutusel,

$$di = vdp,$$

millest järgneb valem (3).

§ 143. Gaasi adiabaatiline voolamine ja väljavoolamine.

Paljudes gasodünaamika tehnilistes rakendustes on suur tähtsus gaasi sellisel voolamisel ebaühtlase ristlõikega torudes, mille juures ei esine soojuse juurde- ning äravoolu ja gaas ei tee tööd. Sel juhul, kui $Q = 0$ ja $A_{tehn} = 0$ (lihtsuse mõttes eeldame, et ka $A_{hõõrd} = 0$), gasodünaamika põhivõrrand muutub võrrandiks, mis on Bernoulli võrrandi *termodünaamiliseks üldistuseks:*

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + \frac{w_2^2}{2g} = const. \qquad (4)$$

Erinevalt Bernoulli võrrandist (§ 57) esineb siin rõhu ja tiheduse jagatise asemel soojussisalduvus; kuid $i = u + pv$ ning on ilmne, et mittekokkusurutava vedeliku jaoks, kus ei ole tarvis arvestada termodünaamilise oleku muutust (s. t. kus eeldatakse, et vedeliku siseenergia on konstantne, $u_1 = u_2$ ja kus tihedus $\frac{1}{v}$ on muutumatu) võrrand (4) muutub Bernoulli võrrandiks.

Bernoulli võrrandi termodünaamilisest üldistusest näeme, et *statsionaarsel adiabaatilisel voolamisel, juhul kui gaas ei tee seejuures tööd, on gaasijoa soojussisalduvuse ja kineetilise energia summa kõikidel joa ristlõigetel ühesugune.*

Voolamist, mille juures gaasi kiirus väheneb, tihedus, rõhk ja temperatuur aga kasvavad, nimetatakse voolamiseks *kokkusurumisega.* (Tuleb alla kriipsutada, et sõna „kokkusurumine" käib siin joa termodünaamilise oleku kohta, gaasi eriruumala kohta, aga hoopiski mitte toru ristlõike pindala kohta; mitte liiga suurtel algkiirustel gaas laienevas torus pidurdub, tema kineetiline energia väheneb, temperatuur ja tihedus aga kasvavad, s. t. esineb voolamine kokkusurumisega.)

Voolamist, mille juures joa kineetiline energia kasvab, tihedus, rõhk ja temperatuur aga vähenevad, nimetatakse voolamiseks *paisumisega.* Vaatleme mõlemat voolamise juhtu eraldi.

Voolamine paisumisega esineb näiteks auru väljavoolamisel katlast või gaasi väljavoolamisel reaktiivmootori põlemiskambrist.

Adiabaatilisel voolamisel paisumisega põhjustab kineetilise energia kasvu $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$ soojussisalduvuse vähenemine $i_1 - i_2$ ja temperatuuri langemine:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 = c_p(T_1 - T_2). \qquad (5)$$

Temperatuuri langemine kaasneb rõhu p ja gaasi tiheduse v vähenemisega. Kui gaas paisub tasakaaluliselt, siis võib kasutada Poisson'i võrrandit

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\varkappa-1}.$$

Seega

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = c_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \quad (6)$$

Vastavalt Mayeri võrrandile siin $c_p = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}$.

Kujutleme, et balloonist, kus gaasi rõhk on p_1 ja temperatuur T_1, voolab gaas adiabaatiliselt välja läbi ava, mille pindala on S, üsna suure rõhu all reservuaari, milles võib tekitada igasuguse suurusega rõhu p_0 (vasturõhu). *Väikesel rõhulangusel* (kui p_1 on p_0-st suurem ainult mõni protsent või mõni kümnendik protsenti, kuid mitte rohkem kui 1,8—1,9 korda) *gaasi rõhk väljavoolavas joas* p_2 *on võrdne vasturõhuga* p_0. Vastavalt võrrandile (6) määratakse sel juhul väljavoolamise kiirus järgmise valemiga:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2g\varkappa RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + w_1^2}. \quad (7)$$

w_1, p_1 ja T_1 tähendavad siin gaasi kiirust, rõhku ja ruumala enne väljavoolamist, p_2 tähendab staatilist rõhku väljavoolavas joas. Avarast reservuaarist väljavoolamisel võib võtta $w_1 = 0$.

Gaasi kaaluline kulu G ($\frac{kG}{sek}$-tes) on võrdne ava ristlõike pindala (m^3-tes), väljavoolamise kiiruse ($\frac{m}{sek}$-tes) ja väljavoolava gaasi tiheduse ($\frac{kG}{m^3}$-tes) korrutisega:

$$G = \gamma_2 w_2 S.$$

Vasturõhu p_0 vähenemisel väheneb väljavoolava joa rõhk p_2; vastavalt Poisson'i seadusele väheneb koos sellega adiabaatiliselt ka väljavoolava gaasi tihedus; väljavoolu kiirus kasvab.

Gaasi kaaluline kulu läbi antud ava S on määratud kahe suurusega: gaasi tihedusega ja voolamiskiirusega. Esimene neist suurustest, γ_2, vasturõhu langedes väheneb, teine, w_2, aga seevastu kasvab. Gaasi kulu vasturõhu p_0 vähenemisega esialgu kiiruse kiire kasvu arvel suureneb; seejärel hakkab gaasi kulu tiheduse märgatava vähenemise arvel vähenema ja lõpuks saab konstantseks: kui väike ka ei oleks vasturõhk, gaasi kulu on üks ja seesama.

Sel viisil selgub, et kui vasturõhk moodustab ligikaudu poole balloonis olevast rõhust (täpsem vahekord on antud allpool), siis edasine vasturõhu vähendamine ei suurenda voolamise kiirust ja gaasi kulu. Gaasijoas kujunevad kindlaks gaasi voolamiskiiruse, rõhu, temperatuuri ja tiheduse niinimetatud kriitilised väärtused, mis enam ei muutu — ükskõik kuidas me ka edaspidi vasturõhku

ei vähendaks. Kui selle momendini väljuvas gaasijoas, nagu ülal märgitud, rõhk jääb võrdseks vasturõhuga ($p_2 = p_0$), siis kõne all olevast momendist alates gaasi voolamisel kriitilise kiirusega jääb väljumisaval püsima rõhu hüpe ($p_2 > p_0$), sest p_0 vähenemine ei kutsu enam esile p_2 vähenemist.

Olgu näiteks gaas suletud ballooni 80-atmosfäärilise rõhu all; seda gaasi võib sealt välja lasta tühjusesse, atmosfääri või teise ballooni, kus rõhk ulatub mõne atmosfäärini; kõikidel neil juhtudel gaasi kulu ning tema väljavoolamise kiirus ja rõhk väljavoolavas joas on ühesugused ja jäävad konstantseteks seni, kuni vasturõhk ei ulatu 42 atmosfäärini (edasisel vasturõhu kasvamisel kulu ja väljavoolamiskiirus vähenevad).

Võib tõestada (vt. märkus järgmisel lk.), et enne väljavoolamist balloonis valitseva rõhu ja joa *kriitilise rõhu* suhe:

$$\frac{p_1}{p_k} = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \text{ kus } \varkappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{8}$$

(õhu jaoks $\frac{p_1}{p_k} = 1{,}89$).

Avast või kitsenevast torukesest väljavoolava gaasi kiirus ei saa olla suurem *kriitilisest kiirusest:*

$$w_k = \sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa + 1} T_1}. \tag{9}$$

Kriitilisel voolamisel gaasijoas esinev temperatuuri langus on vastavalt Poisson'i võrrandile ja valemile (8) määratud seosega:

$$\frac{T_k}{T_1} = \left(\frac{p_k}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{2}{\varkappa + 1}.$$

Seega $T_1 \frac{2}{\varkappa + 1} = T_k$ ja järelikult võib valemi (9) ümber kirjutada järgmiselt:

$$w_k = \sqrt{g\varkappa R T_k}.$$

Kriitiline kiirus on võrdne kiirusega, millega levib hääl, kui joas temperatuur on T_k. Ükskõik kui suur rõhk balloonis ka ei oleks, gaas ei saa avast väljuda hääle kiirusest suurema kiirusega.

Kui rõhk joas on võrdne kriitilise rõhuga, väljavoolamiskiirus aga võrdne hääle kiirusega, siis gaasi kulu G on maksimaalne, mis on võimalik balloonis oleva gaasi termodünaamiliste parameetrite antud algväärtuste korral.

Arvutused näitavad, et *maksimaalne gaasi kulu* kriitilisel voolamisel on määratud järgmise valemiga:

$$G = S\sqrt{\frac{g\varkappa}{R}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}} \cdot \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Kuna õhu korral $\varkappa = 1{,}4$ ja $R = 29{,}3$, siis õhu jaoks $G \approx 0{,}4\frac{S_2 p_1}{\sqrt{T_1}}$.

Et aru saada füüsikalistest põhjustest, mis väljavoolavas gaasijoas kutsuvad esile kriitiliste parameetrite olemasolu, kujutleme, et välisrõhk äkki tugevasti langeb (kas või nullini). Kui väljavoolamiskiirus on juba enne seda saavutanud hääle kiiruse, siis tekkiva hõrendushäälelaine abil väljuvale gaasijoale sellest sündmusest „teadet" edasi ei anta ja seega häälelaine levimiskiirusega väljavoolava gaasi termodünaamilises olekus see sündmus ei peegeldu[1].

[1] Selleks et tuletada võrrandit (8) ja (9), mis määravad rõhu ja kiiruse kriitilised väärtused, avaldame gaasi kulu joas valitseva rõhu suhtelise muutuse $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ funktsioonina; seejuures eeldame, et $w_1 = 0$:

$$G = S\gamma_2 w_2 = S\gamma_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa-1} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}.$$

Olekuvõrrandi põhjal $\gamma = \frac{p_1}{RT_1}$. Pärast teisendamist saame:

$$G = Sp_1 \sqrt{\frac{2g\varkappa}{(\varkappa-1)RT_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}.$$

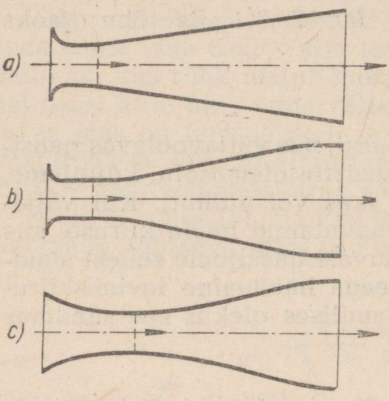
Selleks et leida rõhu suhtelist vähenemist $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, mille korral gaasi kulu on maksimaalne, võrrutame nulliga gaasi kulu G esimest järku tuletise π järgi:

$$\frac{dG}{d\pi} = 0.$$

Arvestades, et p_1 ja T_1 π-st ei sõltu, saame:

$$\frac{dG}{d\pi} = \pi_k^{\frac{2}{\varkappa}} - \pi_k^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} = 0.$$

Reguleerides gaasi voolamise režiimi toru profiili teatud valikuga, võib kasutada lisarõhku, mis tekib joas kriitilisel väljavoolamisel, ja realiseerida voolu kiirust, mis ületab hääle kiiruse. Füüsikaliselt seisneb see ülesanne selles, et leida tingimused, mille juures hääle kiirusega liikuvas gaasis kaootiline molekulaar-soojuslik liikumine muuta osalt korrastatud liikumiseks ja anda seega gaasimassile voolamise kriitilisest kiirusest suuremat kiirust. Sel eesmärgil Laval, Stanton ja nõukogude füüsik Frankel töötasid välja düüsid, mille esimene osa kitseneb ja teine osa laieneb. Düüsid tehti sellise arvestusega, et gaasi juga saavutas hääle kiiruse *kõige kitsamas ristlõikes.* Sel juhul düüsi laienevas osas lisarõhk läheb gaasi kiirendamiseks ja väljavoolamise kiirus saab suuremaks hääle kiirusest antud kohas (joon. 358).



Joon. 358. *a* — Lavali düüs; *b* — Stantoni düüs; *c* — Frankeli düüs.

Läbi väljumisdüüsi iga ristlõike on gaasi kaaluline kulu ühesugune:

$$w_1 S_1 \gamma_1 = w_2 S_2 \gamma_2. \qquad (10)$$

See on *kokkusurutava gaasijoa pidevuse võrrand.* Siit võib leida seose düüsi mis tahes kahe ristlõike vahel.

Gaasi rõhk düüsi väljapääsule lähenemisel langeb nii, nagu see on näidatud joonisel 359. Rõhu vähenemisel (alla kriitilist väärtust) väljavoolamise kiirus kasvab aeglasemalt, kui tihedus väheneb; seetõttu peab kiiruse kasvu kindlustama düüsi laienemine: väljumisristlõige on kriitilisest ristlõikest suurem.

Tuleb pöörata tähelepanu erinevusele, mis kriitilisest rõhulangusest suurema rõhulanguse korral esineb mittekokkusurutava vedeliku voolamise ja gaasi voolamise vahel: mittekokkusurutava vedeliku kiirus (samuti nagu ka gaasi kiirus kriitilisest rõhust väiksemal rõhul) suureneb k i t s e n e v a t e s torudes; seevastu kriitilisest rõhulangusest suurema rõhulanguse korral *gaasi kii-*

Sellest võrrandist saame valemi (8):

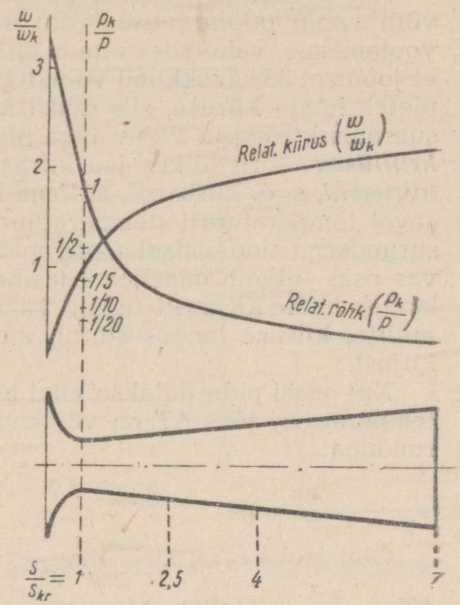
$$\pi_k = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

Pannes selle π_k väärtuse valemisse (7), saame valemi (9).

rus pärast hääle kiiruse ületamist suureneb laienevates düüsides.

Lavali düüsis gaasi kiirus pidevalt kasvab: kitsenevas düüsi osas kiirus kasvab nullist kuni hääle kiiruseni (joon. 359); laienevas düüsi osas kiirus kasvab hääle kiirusest suuremaks.

Laienevaid düüse kasutatakse auru- ja gaasiturbiinides, reaktiivmootorites ja mõnedes teistes seadeldistes. Turbiindüüside koonilisuse nurk on harilikult väike: 7—15°. Reaktiivmootorite düüside pilunurk ulatub kuni 60°.



Joon. 359. Õhu liikumiskiiruse ja rõhu mõõtmine düüsis.

Voolamist kokkusurumisega iseloomustab gaasijoa kiiruse vähenemine ja gaasi tiheduse, rõhu ning temperatuuri kasv. Vastavalt võrrandile (4) põhjustab kineetilise energia vähenemist $\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$ soojussisalduvuse kasv $i_2 - i_1$ ja temperatuuri tõus:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1). \qquad (11)$$

Võttes arvesse, et $c_p = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}$, saame leida temperatuuri suhtelise tõusu adiabaatilisel voolamisel kokkusurumisega:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} \frac{w_1^2 - w_2^2}{g \varkappa R T_1}.$$

Kuid avaldis $g\varkappa RT_1$ ei ole midagi muud, kui hääle kiiruse ruut temperatuuril T_1 ($c_1^2 = g\varkappa RT_1$).

Seega *temperatuuri suhteline tõus sõltub ainult nende kiiruste, mis gaasil on enne ja pärast pidurdumist, ja hääle esialgse kiiruse suhetest.*

Voolamiskiiruse ja hääle kiiruse suhet (millest sõltub gaasi parameetrite muutumine kokkusurumisel) nimetatakse *Mach'i arvuks* (aga isegi ka *Maijevski arvuks* ja *Berstowi arvuks*) ja tähitakse sümboliga **M**:

$$\mathbf{M} = \frac{w}{c} = \frac{w}{\sqrt{g \varkappa RT}}.$$

Tuues selle tähise eelmisse võrrandisse, saame:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2}(M_1^2 - M_2^2 \frac{T_2}{T_1}). \qquad (12)$$

Kõike, mis oli eespool öeldud paisumisega voolamise kohta, võib *voolu pööratavuse* tõttu rakendada ka kokkusurumisega voolamisele, vahetades ainult kiiruse märgi (s. t. lugedes näiteks, et joonisel 359 keskkond voolab paremalt vasakule). Kui algkiirus ületab hääle kiiruse, siis düüsi kitsenevas osas hääle kiirusest suurema kiirusega liikuv juga pidurdub. Düüsi kõige kitsamas — *kriitilises* — ristlõikes joa kiirus kahaneb kuni hääle *kohaliku kiiruseni*, s. o. kiiruseni, millega hääl levib antud ristlõikes valitseval temperatuuril (temperatuur kriitilises ristlõikes on kokkusurumisega voolamisel algtemperatuurist suurem). Düüsi laienevas osas toimub gaasijoa edasine pidurdumine, kusjuures kiirus langeb hääle kiiruselt teatud väärtuseni, mõnikord väga lähedale nullile; kiiruse langus sõltub düüsi pikkusest ja geomeetrilisest kujust.

Kui gaasi pidurdatakse kuni täieliku peatumiseni ($w_2 = 0$), siis temperatuuri tõus ΔT on võrrandi (11) järgi võrdeline algkiiruse ruuduga:

$$\Delta T = \frac{w_1^2}{2gc_p}.$$

Õhu jaoks $c_p \approx 0{,}24 \frac{kcal}{kg \cdot kraad} \approx 102 \frac{kGm}{kg \cdot kraad}$; seega $\Delta T \approx \frac{w_1^2}{2000}$. Temperatuuri tõusu sõltuvus algkiirusest on antud järgmise arvude reaga.

$w \frac{m}{sek}$-tes =	50	100	200	500	1000
$\Delta T°$ =	1,25	5	20	125	500

(Tuleb arvestada, et temperatuuri suurenemisel kasvab gaasi soojusmahtuvus c_p, mistõttu väga suurte algkiiruste korral temperatuuri kasv on natuke väiksem, kui siin on näidatud.)

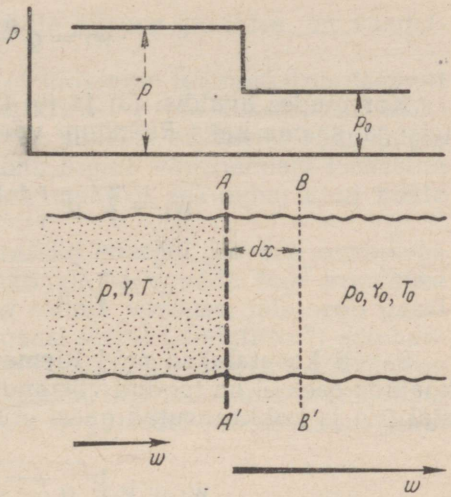
§ 144. Lööklained ja tihendushüpped. Hugoniot' adiabaat.

Adiabaatilised protsessid on tegelikult alati ühel või teisel määral mittetasakaalulised (mittepööratavad). Gaasi järskudel adiabaatilistel kokkusurumistel tekivad *lööklained. Lööklaine kujutab endast keskkonna füüsikaliste omaduste pidevuse katkemise pinda.* Lööklained tekivad: pommide plahvatamisel, mil plahvatusreaktsioonis tekkivad gaasilised ained kutsuvad esile ümb-

ritseva õhu tihenemise; plahvatusekujulisel põlemisel (detonatsioonilained), mil põlemissaadused kutsuvad esile küttesegu tihenemise; gaasi igasugusel kiirel ja tugeval kokkusurumisel. Lööklained tekivad samuti mürskude lendamisel ja üldse hääle kiirusest suurema kiirusega liikuva gaasi voolamisel vastu mingit takistust (sel juhul nimetatakse lööklainet tihendushüppeks).

Lööklained levivad kiirusega w_l, mis on alati suurem hääle kiirusest c. Lööklainete tekkimine ja levimine on seotud kokkusurutud gaasi liikumisega lainefrondi järel, kusjuures gaas liigub sinnapoole, kuhupoole laine levib; kokkusurutud gaasi liikumiskiirus w on alati väiksem lööklaine frondi liikumiskiirusest.

Lööklaine levimise algkiirus on seda suurem, mida suurema rõhu muutuse poolt on laine esile kutsutud. Tuginedes massi ja liikumishulga jäävuse seadustele, näitas 1860. a. saksa teadlane Riemann, et igal ajamomendil lööklaine on määratud rõhu ja tiheduse hüpetega laines.



Joon. 360. Riemanni valemi tuletamiseks.

Olgu, nagu see on näidatud joonisel 360, AA' lööklaine front ajamomendil t, BB' frondi asend pärast ajavahemiku dt möödumist ja S lainefrondi vaadeldava osa ristlõike pindala. Tähistame lainefrondi ees oleva „häirimata" gaasi rõhu ja erikaalu sümbolitega p_0 ja γ_0 ja „häiritud" gaasi, s. o. lainefrondi taga asuva gaasi, vastavad suurused sümbolitega p ja γ. Aja dt jooksul pindade AA' ja BB' vaheline kiht, mille paksus on dx, tihenes. Gaasi hulk selles kihis suurenes $dG = (\gamma - \gamma_0)\, Sdx$ võrra. See gaasikogus dG liikus vaadeldavasse kihti aja dt jooksul (vasakult paremale läbi pinna AA'), omades kiirust w. Seega $dG = \gamma Swdt$. Niisiis, rakendades massi jäävuse seadust, saame:

$$(\gamma - \gamma_0)\, Sdx = \gamma Swdt.$$

Kuid $\frac{dx}{dt}$ on lööklaine levimiskiirus. Seega

$$w_l = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_0} w. \qquad \text{(a)}$$

Algul paigal olnud gaas omandas aja dt jooksul liikumishulga $w\frac{\gamma_0}{g}Sdx$, mis tekitati jõuimpulsi $(p-p_0)\,Sdt$ poolt:

$$w\frac{\gamma_0}{g}Sdx=(p-p_0)\,Sdt.$$

Siit saame lööklaine kiiruse jaoks teise võrrandi:

$$w_1=g\frac{p-p_0}{\gamma_0}\frac{1}{w}. \tag{b}$$

Korrutades avaldisi (a) ja (b) ning seejärel jagades ühe neist teisega, saame kaks *Riemanni võrrandit:*

$$w_1=\sqrt{g\frac{p-p_0}{\gamma-\gamma_0}\frac{\gamma}{\gamma_0}}, \tag{13}$$

$$w=\sqrt{g\frac{p-p_0}{\gamma_0}\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma}}. \tag{14}$$

Sageli kasutatakse neid Riemanni võrrandeid kujul, kus erikaalude asemel on toodud võrranditesse häirimata gaasi eriruumalal (v_0) ja kokkusurutud gaasi eriruumala (v):

$$w_1=v_0\sqrt{g\frac{p-p_0}{v_0-v}}, \tag{13}$$

$$w=(v_0-v)\sqrt{g\frac{p-p_0}{v_0-v}}. \tag{14}$$

Rõhu väga väikeste hüpete korral valem (13) läheb piiril üle hääle kiiruse (Laplace'i) võrrandiks. Tõepoolest: rõhu elementaarselt väikese juurdekasvu dp ja ruumala suhtelise vähenemise (s. o. $\frac{\vartheta v}{v}$) suhe ei ole midagi muud kui elastsusmoodul igakülgsel kokkusurumisel ja suurus $gv=\frac{g}{\gamma}=\frac{1}{\varrho}$, kus ϱ on keskkonna tihedus. Seetõttu võrrandit (13) võib häälelainete jaoks anda valemi (5) § 75 kujul: $c=\sqrt{\frac{K}{\varrho}}$. K on siin adiabaatiline (mitte isotermiline) elastsusmoodul; ta on isotermilisest elastsusmoodulist nii mitu korda suurem, kui mitu korda isobaariline erisoojus on suurem isokoorilisest erisoojusest[1]: $K_s=\frac{c_p}{c_v}K_T$.

[1] Et veenduda selles, kujutame kehale antava soojuselemendi kehale isobaarilises ja isokoorilistes protsessides antavate soojuste summana:

Gaaside jaoks järgneb Clapeyron'i võrrandist $p = \frac{RT}{v}$, et $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{v^2}$ ja seega $K_T = \frac{RT}{v} = p$.
Seetõttu

$$c = \sqrt{\frac{K_s}{\varrho}} = \sqrt{g\frac{c_p}{c_v} vK_T} = \sqrt{g\varkappa vp} = \sqrt{g\varkappa RT}.$$

Seda avaldist, mis määrab hääle kiiruse gaasides, on vaadeldud § 76.

Riemanni valemid näitavad, et lööklaine levimiskiirus (samuti ka lainefrondi taga liikuva gaasi kiirus) ei ole konstantne: lööklaine kiirus on seda suurem, mida suurem on laines rõhu hüpe, mis hoiab alal laine levimise; rõhu hüppe vähenemisel lööklaine kiirus väheneb (mõnelt tuhandelt meetrilt sekundis) kuni hääle kiiruseni.

Kui ühendada Riemanni võrrandid energia jäävuse seadusega (või gasodünaamika põhivõrrandiga), nagu seda tegi prantsuse insener Hugoniot 1888. a., siis saame võrduse, mis seob gaasi termodünaamilisi parameetreid gaasi järsul („löögilisel") adiabaatilisel kokkusurumisel. Pöördume uuesti tagasi joonise 360 juurde ja kujutleme, et lööklaine levib gaasis, mis tervikuna liigub sama kiirusega $w_1 = w_l$ vastassuunas, s. o. joonisel 360 näidatud juhul

---

$$\delta Q = \left.\frac{\delta Q}{\partial v}\right|_p dv + \left.\frac{\delta Q}{\partial p}\right|_v dp = \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp = c_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv +$$
$$+ c_v\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp.$$

Vaadeldes seda avaldist tasakaaluprotsessi korral, kui $\delta Q = 0$ (kui entroopia on konstantne), saame:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\frac{cp}{cv}\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v}.$$

Teiselt poolt, temperatuuri täisdiferentsiaali võrrandist

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp,$$

kui $T = const$, järgneb, et selle võrduse paremas pooles esinevate osatuletiste suhe võrdub $-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$. Seega $v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ ehk $K_s = \varkappa K_T$, kus $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$.

paremalt vasakule. Siis kogu nähtus näib meile häiritud gaasi liikumisena liikumatust lainepinnast AA' vasakule kiirusega $w_2 = w_1 - w$. Asetades kiiruste w_2 ja w_1 need väärtused võrrandisse (4) ja tähistades häirimata gaasi soojussisalduvuse i_0 ($i_1 = i_0$) ja häiritud gaasi soojussisalduvuse i ($i_2 = i$), saame:

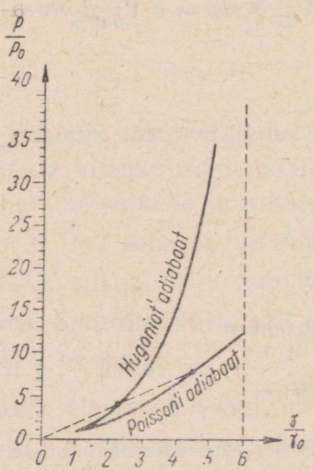
$$i - i_0 = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{(w_1 - w)^2}{2g}.$$

Asendades selles valemis w_1 ja w nende suuruste avaldistega Riemanni valemitest (13) ja (14) ja arvestades, et võrrandi parempoolsesse ossa tekkivat tegurit, mis sisaldab eriruumalasid, võib esitada kujul $v_0^2 - [v_0 - (v_0 - v)]^2 = v_0^2 - v^2 = (v_0 - v)(v_0 + v)$, saame Hugoniot' valemi, mis kehtib igasuguse keskkonna löögilise adiabaatilise kokkusurumise kohta:

$$i - i_0 = \tfrac{1}{2}(p - p_0)(v + v_0). \qquad (15)$$

Selleks et võrrelda gaaside järsul adiabaatilisel kokkusurumisel esinevat rõhu muutumist sõltuvalt tihedusest (Hugoniot' järgi) tasakaalukokkusurumisel esineva rõhu muutumisega (Poisson'i järgi), asetame võrrandisse (15) i asemele $\frac{pv}{\varkappa - 1}$ ja i_0 asemele $\frac{p_0 v_0}{\varkappa - 1}$. Pärast lihtsaid teisendusi saame Hugoniot' adiabaadi võrrandi gaaside jaoks:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\frac{p}{p_0} + 1}{\frac{p}{p_0} + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}. \qquad (16)$$



Joon. 361. Poisson'i ja Hugoniot' adiabaadid. Punktiirjoon vastab gaasi pidurdumisele $M_0 = 2$ juures.

Löögilisel kokkusurumisel kasvab rõhk tiheduse suurenedes tunduvalt kiiremini kui tasakaalukokkusurumisel. Selle põhjuseks on asjaolu, et löögilisel kokkusurumisel suur hulk kulutatud energiast muundub soojuseks ja rõhk kasvab rohkem temperatuuri tõusu kui tiheduse suurenemise arvel. Joonis 361 näitab, mitu korda Hugoniot' adiabaat on järsem kui Poisson'i oma.

Plahvatuselisel põlemisel teatud tingimustes tekib eriliiki lööklaine, mida sel juhul (Berthelot' ettepaneku järgi, kes avastas nimetatud nähtuse a. 1881) nimetatakse *detonatsioonilaineks*. Levides küttesegus, kutsub detonatsioonilaine esile temperatuuri sellise tõusu, mis on küllaldane küttesegu süttimiseks, või lõhkeaine rõhu sellise suurenemise, mis on küllaldane plahvatusreakt-

siooni tekkimiseks. Detonatsioonilaine puudumisel leegi levimiskiirus ei ole suur ja mõõtub meetritega sekundis; detonatsiooni korral aga leegifront levib sadasid ja tuhandeid korda suurema kiirusega, s. o. detonatsioonilaine levimiskiirusega: gaasilistes ainetes 2000—3000 $\frac{m}{sek}$, kondenseeritud plahvatavates ainetes 4000—6000 $\frac{m}{sek}$. Temperatuuri hüpe detonatsioonilaines on gaasilistes küttesegudes 3000—4000° ja rõhu hüpe mõõtub tuhandete atmosfääridega. Tahketes plahvatavates ainetes on rõhu hüpe detonatsiooni korral tohutult suur ja mõõtub kümnete tuhandete atmosfääridega.

Termodünaamiliste parameetrite hüpped detonatsioonilaines on määratud Hugoniot' võrrandiga (15), antud juhul tuleb aga selle võrrandi paremat poolt täiendada liidetavaga, mis on võrdne 1 *kg* plahvatava aine kohta eraldunud reaktsiooni soojusega *Q*.

Detonatsioonilainete oluline erinevus tavalistest lööklainetest seisneb selles, et leegifrondi detonatsiooniline levimine toimub alati kindla kiirusega $w_l = w_{det}$, mis on iseloomulik gaasisegule või lõhkeainele. Keskkond liigub detonatsioonilaine järel kiirusega *w*. Selle edasiliikuva gaasilise keskkonna (mis sisaldab plahvatussaadusi) suhtes liigub detonatsioonilaine kiirusega, millega hääl levib häiritud keskkonnas:

$$w_{det} = c + w. \tag{17}$$

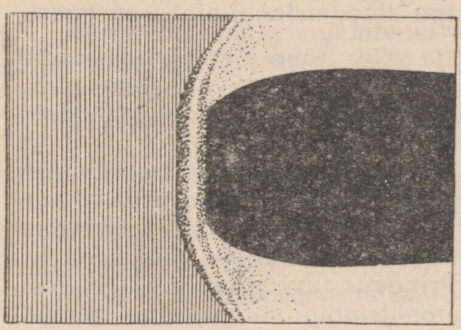
See võrrand avastati J o u g e t' poolt 1906. a. ja seda nimetatakse J o u g e t' **võrrandiks**.

Nagu eespool juba mainiti, tekivad lööklained *(tihendushüpped)* alati hääle kiirusest suurema kiirusega liikuva gaasijoa sattumisel vastu mingit takistust. Isegi õigesti arvestatud düüsides ei õnnestu saavutada häälest kiiremini leviva gaasijoa tasakaalulist pidurdumist, sest gaasi sattumisel väljumisavasse tekib juba tihendushüpe.

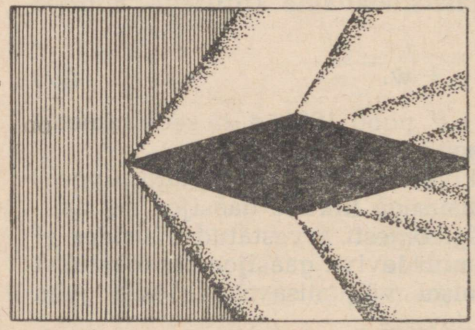
Joa, sealhulgas ka hääle kiirusest suurema kiirusega joa pidurdumisel temperatuuri tõus tekib joa kineetilise energia gaasi siseenergiaks muundumise arvel ja seetõttu suhteline temperatuuri tõus ei sõltu sellest, kas pidurdumine on tasakaaluline või ei. Nii tasakaalulisel kui ka löögilisel joa pidurdumisel tekkinud tihenenud gaasi temperatuuri tõusu võib välja arvutada valemi (12) järgi; joa täielikul pidurdumisel tekkinud temperatuuri tõus sõltub ainult arvu **M** algväärtusest. Kuid gaasi rõhu ja tiheduse muutused on joa löögilisel ja tasakaalulisel kokkusurumisel tunduvalt erinevad. Joa tasakaalulisel pidurdumisel kiiruselt, mida väljendab arv $\mathbf{M}_0$, kuni kiiruseni, mida väljendab arv **M**, gaasi rõhk kasvab tunduvalt enam kui joa löögilisel pidurdumisel arvu **M** muutumisel samades piirides. Üks ja sama temperatuuri suhte-

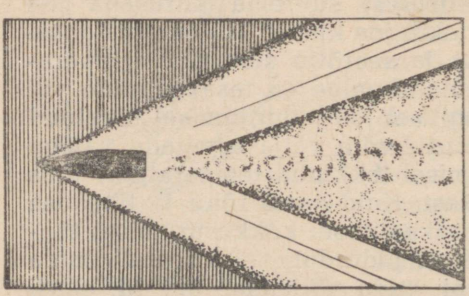
line tõus $\frac{T}{T_0}$ tekitab löögilisel pidurdumisel seoses entroopia kasvuga tunduvalt suurema gaasi tihenemise ja seetõttu palju väiksema rõhu suurenemise kui joa mittelöögilisel, pööratavai pidurdumisel.

Kuna Clapeyron'i võrrandi järgi gaasi igale olekule vastav rõhk on võrdeline absoluutse temperatuuri ja gaasi tiheduse korrutisega, siis ei ole raske aru saada, et joonisel 361 toodud diagrammil ühesugustele temperatuuri suhtelistele tõusudele vastavad gaasi olekud on sirgel, mis läbib koordinaatide algust ja on abstsissteljega kaldu sellise nurga all, mille tangens on $\frac{T}{T_0}$. Kui hääle kiirusest suurema kiirusega levivale joale vastab arvu **M** algväärtus $\mathbf{M}_0 = 2$, siis joa täielikul pidurdumisel temperatuuri suhteline tõus on valemi (12) järgi 1,8; sellele juhule vastav sirge on joonisel 361 toodud punktiiriga. Selle sirge lõikumisel Hugoniot' ja Poisson'i adiabaatidega tekkinud lõikepunktide järgi me näeme, et löögiline pidurdumine kutsub tihendushüppes esile rõhu 3,8-kordse suurenemise ja gaasi 2,2-kordse tihenemise, kuna aga sellesama joa tasakaaluline pidurdumine põhjustab rõhu kahekordse suurenemise ja gaasi 4,4-kordse tihenemise.



Joon. 362. Otsene tihendushüpe difuusori ava ees.



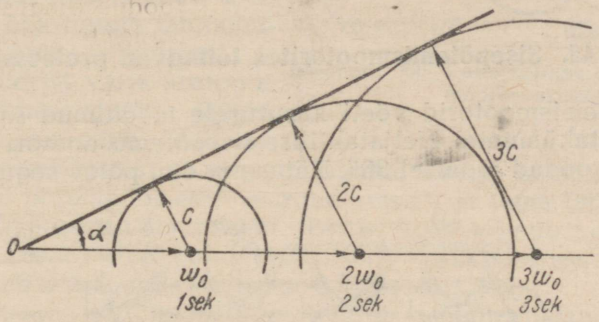


Joon. 363. Kaldtihedushüpe.

Joonistel 362 ja 363 on kujutatud tihendushüpped, mis lendavad difuusori ava ees, mürsu lendamisel (joa suhtelisel kiirusel $\mathbf{M} = 2{,}5$) ja teravaotsalise keha ees ($\mathbf{M} =$

$\leqq 1{,}7$). Mürskude, rakettide ja lennukite lendamisel tekitavad tihendushüpped lisarõhu, mida nimetatakse lainerõhuks. Neil juhtudel ühtib lööklaine levimiskiirus w_l keha liikumiskiirusega w_0.

Kui keha liigub kiirusega, mis on hääle kiirusest väiksem, siis keskkonna elastsed deformatsioonid (häiritused), mida kutsub esile keskkonna põrkumine vastu keha esipinda, levivad igas suunas hääle kiirusega ja jõuavad seega kehast ette. Seevastu keha liikumisel kiirusega, mis on hääle kiirusest suurem, elastsed deformatsioonid ei jõua kehast ette ja keskkonna tihendus



Joon. 364. Machi koonus.

(tihendushüpe) liigub koos kehaga ja tõmbab keskkonda endaga kaasa; keskkond liigub lainefrondi järel kiirusega w, mis on väiksem hääle kiirusest.

Selle pinna kuju, millel esineb tihendushüpe, on määratud tekkinud lööklaine intensiivsusega ja sõltub keha liikumiskiirusest ning kujust (joon. 362 ja 363). Kõige rohkem energiat hajub *otseste tihendushüpete* korral. *Kaldsete tihendushüpete* korral on energia hajumine väiksem ja sellele vastavalt on väiksem ka keha lainetakistus. Seetõttu antakse hääle kiirusest suurema kiirusega lendavatele mürskudele, rakettidele ja lennukitele teravaotsaline kuju ja tiivad tehakse noolekujulised ning terava esiservaga.

Liikumissuuna ja tihendushüppe tasapinna vaheline nurk on otseste hüpete jaoks 90°; kaldhüpete jaoks on see nurk väiksem kui 90°, kuid suurem teatud nurgast α, mis on määratud seosega:

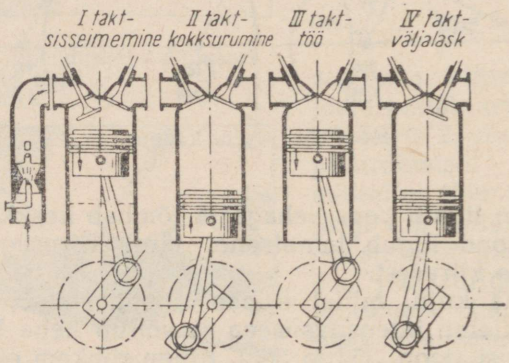
$$\sin \alpha = \frac{c}{w_0} = \frac{1}{M_0}. \qquad (18)$$

Selleks et selgitada hüppe kaldenurga suuruse kohta öeldut, pöördume joonise 364 poole. Keha liikumisel keskkonnas hääle kiirusest suurema kiirusega w_0 levib keha otsa poolt tekitatud häiritus kõikides suundades seda suurema kiirusega, mida suurem

on rõhu lõögiline kasv. Rõhu väikestel kasvudel levib häiritus hääle kiirusega c ja need väikesed häiritused jäävad kogu aeg koonusesse, mida nimetatakse *Machi koonuseks*. Aja τ jooksul keha läbib tee $w_0\tau$ ja häiritus läbib tee $c\tau$. Kõik häiritused liituvad üksteisega ja moodustavad koonilise pinna, mis osutubki häiritud ja häirimata keskkonna lahutuspinnaks, s. o. lööklaine pinnaks. Joonisest 364 selgub, et $c\tau$ ja $w_0\tau$ suhe kujutab endast koonuse tipu juurde tekkiva nurga α siinust: $\sin\alpha = \frac{c\tau}{w_0\tau}$; siit järgnebki seos (18).

§ 145. Sisepõlemismootorites toimuvad protsessid.

Sisepõlemismootorid võeti kasutusele möödunud sajandi viimastel aastakümnetel. Neljataktilise sisepõlemismootori töötamise skeem on toodud joonisel 365. Kütuse ja õhu põlev segu imetakse

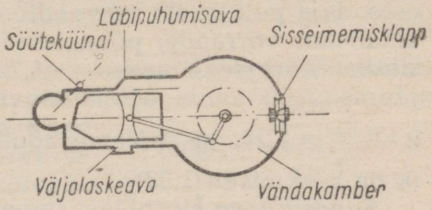


Joon. 365. Neljataktilise sisepõlemismootori töötamise skeem.

karburaatori kaudu mootori silindrisse ja süüdatakse seal vajalikul momendil elektrisädemega või siis õhu kokkusurumisprotsessi ajal pritsitakse vedelkütust läbi pihusti suure rõhu all silindrisse, kus see õhu kõrge temperatuuri tõttu ise süttib (parema pihustumise tagamiseks kasutatakse kütuse pritsimisel mitmesaja-atmosfäärilist rõhku).

Neljataktiliste mootorite kõrval hakati XX sajandi algul kasutama *kahetaktilisi* mootoreid, millede ehituse printsiip on kujutatud joonisel 366. Kahetaktilistes mootorites õõnsus, kus toimub vända pöörlemine, on hermeetiliselt suletud; seda õõnsust nimetatakse v ä n d a k a m b r i k s. Töötakti ajal kolb, mida tõugatakse paisuvate põlemissaaduste poolt, kulutab osa tehtavast

tööst vändakambris oleva õhu kokkusurumiseks. Kolvi liikumisel paremale (vastavalt joonisele 366) kolvi vasakpoolne ots jõuab silindri seinas oleva avani — „väljalaskeavani". Kolvi edasiliikumisel paiskuvad äratöötanud gaasid läbi selle väljalaskeava välja ja rõhk silindris langeb. Natuke hiljem, kolvi liikumisel samas suunas, avab kolvi vasakpoolne ots „läbipuhumisava"; vändakambris olev kokkusurutud õhk tungib läbipuhumisava kaudu silindrisse ja tõrjub silindrist välja äratöötanud põlemissaaduste jäägid. Silindri vabanemine äratöötanud põlemissaadustest ja tema täitumine kestab seni, kuni kolb on jõudnud parempoolsesse „surnud seisu", ja tema tagasikäigul kuni väljalaskeava sulgumiseni. Pärast seda toimub kokkusurumine, mis kestab kuni kolvi jõudmiseni vasakpoolsesse „surnud seisu"; põleb uus kogus kütust ja tsükkel kordub.



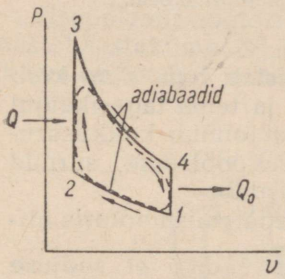
Joon. 366. Kahetaktilise sisepõlemismootori skeem.

Põlemissaaduste tööpaisumine toimub sisepõlemismootoris niivõrd kiiresti ($1500\,\frac{pööret}{min}$ korral sajandik sekundit), et soojuse ülekandumist hõõguvatelt põlemissaadustelt silindri jahutatavatele seintele ja kolvile ei jõua toimuda. Kui seda soojuse ülekandumist üldse ei esineks, siis kokkusurumine ja paisumine silindris oleksid adiabaatilised protsessid. Kadude olemasolu ja protsesside mittetasakaalulisust arvestatakse sellega, et Poisson'i võrrandis esineva astendaja $\varkappa$ väärtus loetakse tema teoreetilisest väärtusest ($\frac{c_p}{c_v}$) erinevaks ning see astmenäitaja määratakse katseliselt. Võrrandit $pv^n = const$ empiirilise astmenäitajaga $n \neq \varkappa$ nimetatakse *polütroobi võrrandiks.*

Paisumisel energia kaotustega, mida põhjustab soojuse äraandmine, langeb polütroop ruumalade telje poole järsemalt kui adiabaat, sest rõhu vähenemine toimub mitte ainult paisumise, vaid ka gaasi täiendava jahtumise tõttu, mida põhjustab soojuse äraandmine; seetõttu $n_{pais} > \varkappa$ ja vahet $n_{pais} - \varkappa$ võib lugeda soojuskao mõõduks. Kuid sisepõlemismootorites tööpaisumise algstaadiumis kütteaine jätkuv põlemine säilitab kõrge temperatuuri. Sel põhjusel tööpaisumise algstaadiumis moodustab polütroop suurema kallaku kui adiabaat (paisumise algstaadiumis on polütroobi võrrandis esinev astendaja 0,1—0,2 võrra väiksem adiabaadi võrrandis esinevast astendajast). Tööpaisumise järgmises staadiumis põlemissaaduste jahtumise tõttu nende kokkupuutumisel silindri seintega ja kolviga lõikab paisumispolütroop

adiabaati ja langeb ruumalade telje suhtes järsemalt kui adiabaat (selles staadiumis polütroobi võrrandis esinev astendaja on 0,1—0,2 võrra suurem adiabaadi võrrandis esinevast astendajast). Kui vaadelda kogu paisumisprotsessi tervikuna, siis keskmine astendaja polütroobi võrrandis on ligikaudu sama, mis astendaja adiabaadi võrrandis põlemissaaduste kõrgel temperatuuril (bensiinimootori jaoks on $n_{pais} = 1{,}24$, kusjuures temperatuuril suurusjärgus 2000° on soojusmahtuvuste c_p ja c_v suurenemise tõttu $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}24$; sisepõlemismootori kokkusurumisprotsessi jaoks n_k on keskmiselt 1,33).

Sundsüütega sisepõlemismootori *idealiseeritud tsükkel* (neljataktilise ja kahetaktilise mootori idealiseeritud tsüklitel vahet ei ole) — niinimetatud Otto tsükkel — on kujutatud joonisel 367. Tegelikult sisepõlemismootoris toimuvad protsessid ei moodusta suletud tsüklit, sest põlemisproduktid pärast nende väljapaiskumist ja jahtumist ei ole muidugi identsed kütteaine ja õhu esialgse töötava seguga. Kuid võib näidata, et mootori efektiivsuse termodünaamilistes arvutustes mainitud asjaolul ei ole suurt tähtsust: mootori kasutegur oluliselt ei muutuks, kui mootoris oleks töötavaks aineks ideaalne gaas, mis väga lühikese ajavahemiku jooksul saaks väljast kütteaine põlemisel tekkiva soojusega võrdse soojuse ja pärast tööpaisumist ja isokoorilist jahtumist pöörduks tagasi lähteolekusse.



Joon. 367. Otto tsükkel.

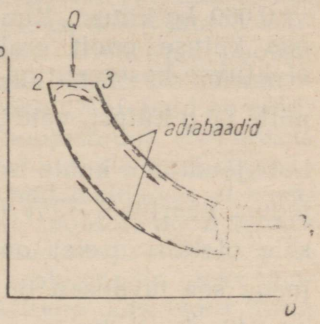
Otto tsükli seisukohalt, samuti nagu ka hiljem vaadeldava Dieseli tsükli seisukohalt, väga tähtsaks suuruseks on küttesegu *surveaste:* $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$, kus v_1 ja v_2 on ruumalad survetakti algul ja lõpul. Surveaste määrab kütuse põlemisel tekkiva soojuse kasutamise efektiivsuse. Mootorites, mille tsükkel on lähedane Otto tsüklile, juhitakse õhu ja kütuse segu silindrisse karburaatori abil enne survetakti (punkt 1) või siis teistes konstruktsioonides pritsitakse kütus silindrisse survetakti ajal. Survetakti lõpuks (punkt 2), millal silindris peab toimuma plahvatus, on silindrisse juhitud kütus oma õhuga intensiivse segunemise ja temperatuuri tõusu tõttu kiireks põlemiseks juba küllalt hästi ette valmistatud. Nii ettevalmistatud segu süüdatakse elektrisädemega. Segu põleb nii ruttu, et põlemisprotsess kulgeb *peaaegu muutumatult ruumalal* (joon. 2—3). Küttesegu enneaegse isesüttimise vältimiseks tuleb Otto tsükli järgi töötavates mootorites piirduda väikese surveastmega ($\varepsilon = 4$—8). Pärast põlemissaaduste tööpaisu-

mist (joon 3—4) järgneb väljalasketakt. Tegelik protsessi käik on kujutatud joonisel 367 punktiiriga.

Arvutused, mida on kerge teha Clapeyron'i ja Poisson'i võrrandite abil, näitavad, et Otto tsükli termodünaamiline kasutegur

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}, \qquad (19)$$

kus idealiseeritud tsükli jaoks $\varkappa$ on adiabaadi võrrandis esinev astendaja. Antud lihtsat valemit, juhul, kui sinna on pandud $\varkappa$ asemele empiiriline astendaja n, kasutatakse sageli orienteeruvates arvutustes niinimetatud *indikaatorkasuteguri* määramiseks. Indikaatorkasuteguri ja mootori *mehhaanilise kasuteguri* korrutis annab *efektiivse kasuteguri* η_e (mehhaaniline kasutegur arvestab kadu, mis kulub hõõrde ületamiseks ja abimehhanismide tööks; need kaod harilikult ei ületa 15—20% ja seetõttu efektiivse kasuteguri hindamisel sageli võetakse $\eta_e = 0{,}8\,\eta_i$).



Joon. 368. Dieseli tsükkel.

Karburaator- ja gaasimootorite efektiivne kasutegur on kõige sagedamini 24—28%.

Diiselmootorites, mis töötavad D i e s e l i t s ü k l i järgi (joon. 368), täidetakse silinder survetakti ajal (joon 1—2) puhta õhuga ja kütus pritsitakse silindrisse natuke aega enne survetakti lõppu (punkti 2 lähedal), kui 30—34 atmosfäärini kokkusurutud õhu temperatuur silindris juba tunduvalt ületab töösegu isesüttimise temperatuuri. Vedelkütus jõuab silindrisse peenekspihustatud olekus, süttib iseenesest ja põleb *peaaegu konstantsel rõhul* (joon 2—3). Edasi järgnevad tööpaisumine (joon 3—4) ja väljalasketakt (joon 4—1). Kõrge surveaste ($\varepsilon = 12$ kuni $\varepsilon = 20$) kindlustab diiselmootoritele kõrge kasuteguri. Nende mootorite efektiivne kasutegur ulatub 30—35%-ni. Kõige kõrgem kasutegur (kuni 38%) on niinimetatud k o m p r e s s o r i t a diiselmootoritel, millel töösegu põlemise algstaadium kulgeb peaaegu muutumatul ruumalal, järgnev põlemise staadium aga jätkub vähe muutuval rõhul.

Sisepõlemismootorite põhiliseks kütuseks on nafta destilleerimissaadused: bensiin, ligroiin, petrooleum, gasool ja solaarõli, mida saadakse masuudi eraldamisel rasketest nafta jääkidest. Nafta ümbertöötamisel rakendatakse laialdaselt nafta *krakkimist* — nafta süsivesinikkude termilist lahutamist lihtsamateks süsivesinikkudeks kuumuse kuni 500—650° mõjul ja rõhkudel, mis sageli ulatuvad kuni mõnekümne atmosfäärini; krakkimisel saadakse umbes kaks korda rohkem bensiini kui lihtsal destilleerimisel. Looduslike naftavarude hulga poolest on Nõukogude Liit

esimesel kohal maailmas: meie käsutuses on rohkem kui pool maailma naftavarudest.

Bensiini, petrooleumi ja solaarõli põlemisel eraldub iga *kg* kütuse kohta 10 000—11 000 *kcal* soojust. Töö üks hobujõudtund on ekvivalentne 634 *kcal*-ga. Järelikult, kui 1 *kg* kütuse ärapõlemisel eraldub 10 500 *kcal* soojust (seda arvu loetakse kütuse standardsoojusväärtuseks), siis soojuse 100-protsendilisel muundumisel tööks tuleks töö 1 hobujõudtund saamiseks kulutada $\frac{634}{10\,500} = 0{,}060$ *kg* kütust. Kuna tegelikult muundub tööks ainult selline osa kütuse poolt eraldatud energiast, mis on võrdne mootori efektiivse kasuteguriga, siis töö 1 hobujõudtund saamiseks kulub mitte 60 *g* kütust, vaid $\frac{1}{\eta_e}$ korda enam. Seega kütuse erikulu ühe hobujõudtunni kohta on $\frac{60}{\eta_e}\frac{g}{HJh}$. Siit järgneb, et efektiivse kasuteguri väärtusel 33% ($\eta_e = 0{,}33$ vastab diiselmootorite keskmisele efektiivsusele) on kütuse erikulu $180\frac{g}{HJh}$; kui $\eta = 0{,}25$ (nagu see tavaliselt on karburaatormootoritel), siis kütuse kulu on $240\frac{g}{HJh}$ ja kui $\eta = 0{,}2$, siis kütuse kulu on $300\frac{g}{HJh}$.

1 *kg* bensiini, petrooleumi või diiselkütuse põlemiseks on vaja 15 *kg* õhku. Umbes sellises proportsioonis juhitaksegi õhku karburaatormootori silindrisse. Diiselmootorites saavutatakse raskema kütuse tilkade hea põlemine aga tunduvalt suurema õhuhulga juurdevooluga; see õhuhulk on (mootori täielikul koormamisel) ülalmärgitust 1,5—2 korda suurem (mootori alakoormamisel aga veelgi suurem). Seoses sellega erineb diiselmootorite temperatuurirežiim tunduvalt karburaatormootorite omast. Nii näiteks, bensiini põlemistemperatuur lennukimootorites ulatub 2400—2500° *C*, põlemissaaduste temperatuur väljalaskel (mis mootori väikeste gabariitide juures suure võimsuse saavutamiseks toimub lisarõhul 4—5 *at*) jääb aga siiski väga kõrgeks ja on 1200—1400°. Diiselmootorite iseloomulikumaks põlemistemperatuuriks on 1600—1700° ja väljalasketemperatuuriks 500—700°.

Analüüsides sisepõlemismootorite soojusbilanssi, ilmneb kohe, et soojus, mis ei ole tööks muundunud, koosneb peamiselt põlemissaaduste poolt väljalaskel ärakantud soojusest ja soojusest, mis antakse läbi silindri seinte edasi jahutavale keskkonnale. Kui väljalase toimub väikesel lisarõhul (see on realiseeritav ainult statsionaarsetes mootorites, kus ei ole vajadust püüda saavutada mootori äärmist kompaktsust), siis põlemissaaduste poolt väljalaskel ärakantud soojushulk osutub termodünaamiliselt vältimatuks kaoks ja teda võib ainult kaudselt kasutada mingisugustel soojendamise eesmärkidel. Kui lisarõhk väljalaskel on suur (nagu see on lennukimootorites), siis osa väljalaskegaaside soojussisal-

duvusest võib kasutada täiendava töö saamiseks; sel eesmärgil suunatakse väljalaskegaasid gaasiturbiini, mis paneb pöörlema mootorisse suunatavat õhku kokkusuruva kompressori.

Mis puutub soojusesse, mille põlemissaadused annavad läbi silindri seinte üle jahutavale keskkonnale (näiteks jahutusveele), siis sellele vaatamata, et see soojus on sageli $^1/_3$ kütuselt saadud energiast, ei suurenda selle soojuse ülekandumise kõrvaldamine kuigi palju mootori poolt tehtavat tööd. Tõepoolest: umbes pool sellest soojusest antakse üle jahutusveele pärast väljalaskeklapi avamist; kui see soojuse üleandmine puuduks, siis vastava soojuse viiksid endaga kaasa väljalaskegaasid. Ülejäänud poolest soojusest umbes $^2/_3$ antakse jahutavale keskkonnale üle paisumistakti lõpul, kui gaaside ja silindri seinte kokkupuutepind on suur. Seoses gaaside madala rõhuga on selle soojushulga efektiivsus väga väike. Seega ainult ligikaudu $^1/_6$ jahutavale keskkonnale antud soojusest võib enam-vähem efektiivselt (eeldades, et kasutegur on 40%) muundada tööks. Järelikult, mootori poolt tehtav töö kasvaks ainult $^1/_{15}$ võrra jahutajale antud soojushulgast, s. o. juhul kui soojuse üleandmine jahutavale keskkonnale oleks täielikult kõrvaldatud, kasvaks mootori efektiivne kasutegur mitte enam kui 2—4%. Sama tulemuse saaksime, kui laseksime mootori jahutusvee keema minna ja kasutaksime seda lisa-aurumasinas.

Ülalöeldust selgub, miks sisepõlemismootorite täiustamisel on peamine tähelepanu pööratud: 1) tööpaisumise algstaadiumis (kui rõhk ja seega ka töövõime on suured) esinevate kadude kõrvaldamisele; 2) kütuse võimalikult täielikuma põlemise kindlustamisele (mis raskeltlenduvate mootorikütuste korral põhjustabki diiseltsükli kasutuselevõttu kompressorita diisli variandis); 3) väljalaskerõhu kasutamisele mootori gaasiturbiiniga ühendamiseks; 4) mootorite mõõdete ja kaalu vähendamisele (lennukimootorite kaalu on õnnestunud viia ligikaudu kuni $^1/_2$ kilogrammini võimsuse 1 *HJ* kohta).

Sisepõlemismootorite tähtsuse õigeks hindamiseks on küllalt, kui meenutada, et sisepõlemismootorid tõid endiga kaasa autode laialdase kasutamise, kindlustasid lennuasjanduse arengu ja võimaldasid mehhaniseerida põllumajanduse: 1954. a. töötas NSV Liidu põldudel üle miljoni traktori (ümberarvestatult 15-hobujõulisteks) ja sadasid tuhandeid iseliikuvaid põllumajanduslikke masinaid; diiselmootoreid hakati laialdaselt rakendama elektrijaamades, laevades (mootorlaevades), vedurites (mootorvedurites), tankides, ekskavaatorites ja mujal.

§ 146. Aurumasinates ja auruturbiinides toimuvad protsessid.

Kolb-aurumasinad on teatavasti kõige vanemateks soojusjõumasinateks. Nad võeti tehastes laialdaselt kasutusele XVIII sa-

jandi lõpul ja raudteel ning laevastikus XIX sajandi algul. Esimene ekspluatatsiooniks kõlblik auruturbiin konstrueeriti prantsuse inseneri L a v a l'i poolt 1885. a. Kuna aurujõuseadmed võimaldavad kasutada odavate kütuseliikide, nagu kivisöe, turba, masuudi ja puu põlemisel saadavat soojust, siis vaatamata (sisepõlemismootoritega võrreldes) madalale kasutegurile on nendel endiselt tähtis koht tööstuses ja transpordis.

Nende kütuseliikide reservid ja toodang on hiiglasuured. NSV Liidus on aastane söetoodang 300 miljonit tonni. Juba üksi NSV Liidu turbavarud on soojusväärtuse poolest samaväärsed 150 miljardi tonni naftaga (kuna kogu maailma naftavarud ei ületa 10 miljardit tonni). See määrabki aurujõuseadmete praktilise tähtsuse. Paljud suured elektrijaamad ja võimsad sõjalaevad on varustatud auruturbiinidega, millede võimsus on kümneid (ja isegi sadasid) tuhandeid hobujõude; raudteel, väikestes elektrijaamades, tööstusettevõtetes ja väikestes laevades rakendatakse väga mitmesuguse (peamiselt mitmesaja- ja -tuhandehobujõulise) võimsusega kolb-aurumasinaid.

Kolb-aurumasinate kasutegur on tavaliselt 10—12%. Aurumasina madala kasuteguri põhjuseks ei ole mitte mingisugused konstruktsioonilised puudused, vaid esiteks see, et nende *temperatuuride vahe, millede vahel kulgeb aurumasina tsükkel, on väike* ja teiseks *vältimatud soojuskaod küttekoldes.*

Ükskõik millise soojusmasina maksimaalne kasutegur ei või ületada seda kasutegurit, mis antud temperatuuripiiride korral on omane Carnot' tsüklile:

$$\eta = \frac{T - T_0}{T}.$$

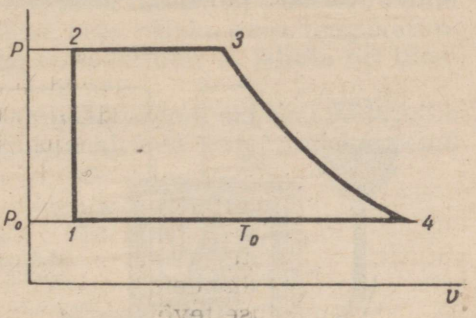
Aurumasina korral on T auru temperatuur katlas. Kui rõhk $p = 12$ *at*, siis $T = 460°$. T_0 on äratöötanud auru kondenseerumistemperatuur; äratöötanud auru väljalaskmisel välisõhku $T_0 = 373°$; äratöötanud auru juhtimisel kondensaatorisse, kus valitseb rõhk $\frac{1}{10}$ *at*, $T_0 = 318°$. Mainitud tingimustel (kui rõhk katlas on 12 *at* ja kui aur juhitakse kondensaatorisse) $\eta \cdot 100 = 31\%$. See tähendab, et veele antud soojusest ei saa rohkem muunduda tööks kui 31%. Kuid ainult ligikaudu 70% kütuse põlemisel tekkinud soojusest kulub vee soojendamiseks; ülejäänud osa viivad endaga kaasa suitsugaasid; kuni 10%-ni ulatuvad hõõrdekaod; seega mainitud tingimustel aurumasina efektiivne kasutegur ei saa olla suurem kui 20%[1].

Kui auru rõhk katlas on 9 *at*, siis aurumasina kasutegur ei ole suurem kui 16%.

Tavaliselt püütakse aurumasina tsüklit lähendada niinimetatud

[1] $0{,}31 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}2$.

R a n k i n e'i tsüklile, mis on kujutatud joonisel 369. Joonisel 369 punkt 1 vastab katlasse mineva vee termodünaamilisele olekule. Joon 1—2 kujutab katlas oleva vee soojenemisprotsessi kuni keemistemperatuurini T ja rõhuni p (punkt 2). Isoterm-isobaar 2—3 kujutab aurustumisprotsessi; tekkiv aur lükkab edasi kolbi ning täidab töösilindri. Tööd, mida seejuures kolb teeb, kujutab pindala, mis asub punkte 2 ja 3 läbivate isotermide vahel ja mida ülalt piirab joon 2—3. Seda tööd nimetatakse *täitumistööks*. Kui osa silindrist on täidetud auruga, siis katkestatakse auru juurdepääs silindrisse. Seda nimetatakse auru *äralõikamiseks*. Järgnevalt aur paisub ligikaudu adiabaatiliselt seni, kuni auru rõhk on langenud kondensaatoris valitseva rõhuni p_0. Punkt 4 kujutab auru termodünaamilist olekut kondensaatoris (rõhul p_0 ja temperatuuril T_0).

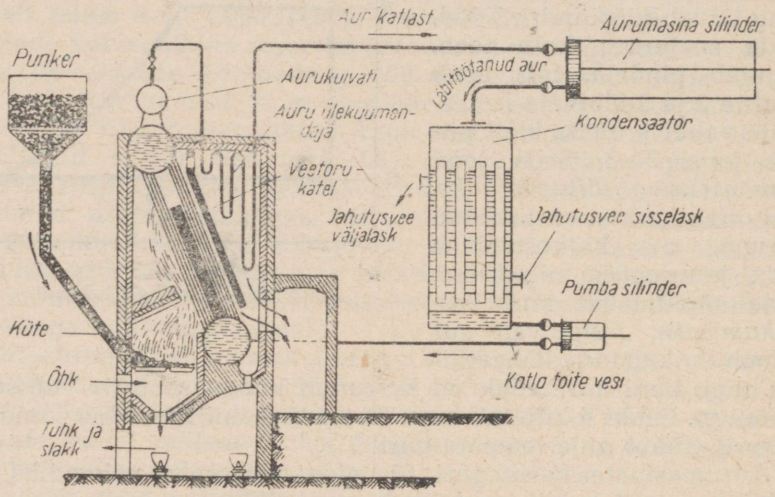


Joon. 369. Rankine'i tsükkel.

Aurumasinate kasuteguri tõstmise esimeseks vahendiks on tsükli *temperatuuripiiride laiendamine*. Sel eesmärgil püütakse tõsta vee keemistemperatuuri katlas. Tavaliselt on rõhk katlas 10—16 *at*, mis vastab keemistemperatuurile 180°—200° *C*. Üha laialdasemalt hakatakse kasutama kõrgrõhu aurukatlaid, kus rõhk on 60—120 *at*; see vastab keemistemperatuurile 275—322°. Äratöötanud auru veeldumistemperatuuri madaldamiseks juhitakse aur mitte välisõhku, vaid kondensaatorisse, kus valitseb rõhk umbes 0,1 *at* ja kus seetõttu aur veeldub temperatuuril 45° *C*, mitte aga temperatuuril 100°, nagu see esineks auru juhtimisel välisõhku.

Oma tähtsuse poolest teiseks aurumasina kasuteguri tõstmise vahendiks on *võitlus auru kondenseerumise vastu silindris*. Tsükli lõpul auru väljalaskmisel kondensaatorisse silindri seinad ja kolb jahtuvad, mistõttu uue aurukoguse juhtimisel katlast silindrisse osa aurust veeldub ja langeb veetilkadena silindri seintele ning kolvi sisepinnale. Auru äralõikamisele järgneva paisumise ajal veeldub paisumisega kaasneva temperatuuri languse tõttu veel osa auru. Kuna aurumasin teeb tööd auru poolt kolvile avaldatava rõhu tõttu ja kuna veeldunud aur enam seda rõhku ei avalda, siis on arusaadav, et kogu enneaegselt veeldunud osa aurust kujutab endast täiesti samasugust ebatootlikku auru kulu, nagu seda on auru otsene läbivoolamine sel põhjusel, et kolb ei liibu küllalt tihedalt vastu silindrit.

Kõige tõhusamaks abinõuks auru enneaegse kondenseerumise vastu on auru *ülekuumendamine*. Teekonnal katlast silindrisse juhitakse aur läbi auru ülekuumendaja torude, mida soojendatakse küttegaasidega (joon. 370). Küllastav aur muutub ülekuumendatud auruks. Tavaliselt tekitatakse ülekuumenemine 150—200°



Joon. 370. Auruseadise skeem.

võrra. Olgugi, et ka sellise auru juhtimisel silindrisse temperatuur teataval määral langeb, jääb aur ikkagi veel ülekuumendatuks ja paisumise ajal silindri seinad peaaegu üldse ei niisku[1].

Auru enneaegse kondenseerumise vältimiseks küllastava auruga töötavates masinates soojendatakse silindri välisseinu kuuma auruga vastava seadise abil, mida nimetatakse *aurusärgiks*.

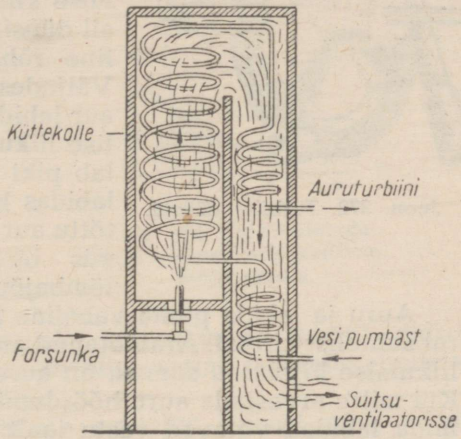
Mida laiemad on tsükli temperatuuripiirid, seda järsemini jahtub iga uus katlast silindrisse lastav aurukogus. Seega kõrgrõhu rakendamine (auru tugev ülekuumendamine katlas) ühelt poolt tõstab tsükli kasutegurit, teiselt poolt aga suurendab auru enneaegse kondenseerumisega seotud olevaid kadusid. See annab

[1] Esimesel pilgul võib näida, et ülekuumendamine peab aurumasina kasutegurit suurendama mitte üksi seetõttu, et sel teel kõrvaldatakse auru enneaegse kondenseerumisega seotud olevad kaod, vaid ka seetõttu, et ülekuumendamine laiendab tunduvalt tsükli temperatuuripiire. Osutub siiski (termodünaamika võimaldab seda ette näha), et tsükli kuju muutub seejuures ebasoodsas suunas ja sellepärast tsükli temperatuuripiiride laiendamine ülekuumendamise teel ei oleks peaaegu üldse efektiivne (kasuteguri tõstmise mõttes), kui puuduks ülekuumendamise teine, tähtsam mõju, mis seisneb auru enneaegse kondenseerumise vältimises.

põhjuse mitme (tavaliselt kahe) töösilindriga aurumasinate ehitamiseks; aur läbib nende silindreid järjestikku ja paisub igas silindris järjest madalamal temperatuuril. Sellega saavutatakse igas silindris silindrisse tuleva värske auru ja äratöötanud auru temperatuuride väiksem vahe. Seetõttu iga silindri seinad, millel pärast äratöötanud auru väljalaset pole värske auru temperatuuriga võrreldes mitte väga madal temperatuur, ei jahuta nii tugevasti värsket auru.

Joonisel 370 on kujutatud aurujõuseadme skeem, mida võib lahti mõtestada skeemile tehtud kaaskirjade järgi. Sellel skeemil on näidatud kahe trumliga tavaline veetorukatel.

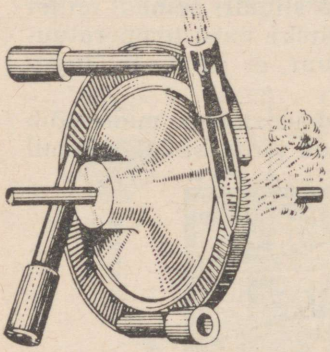
Suur eelis on L. K. Ramzini tüüpi *otsevoolukateldel*. Sellise katla skeem on kujutatud joonisel 371. Ramzini katlas puuduvad kohmakad trumlid, mis tavaliselt on vee loomuliku ringlemise kindlustamiseks ja auru kogumiseks. Tavalistes loomuliku ringlemisega kateldes tõuseb aur ja auru ja vee segu mööda ühte torude süsteemi üles ning vesi laskub mööda teisi torusid alla. Enne kui vesi muutub auruks, tsirkuleerib ta mitmekordselt mööda neid torusid. Tavalise loomuliku ringlemise asemel kasutatakse Ramzini kateldes sunnitud ringlemist. Vesi pumbatakse suure rõhu all pikka spiraaltorusse. Spiraaltoru esimeses osas soojendavad äravoolavad gaasid vee kuni keemiseni; spiraaltoru teises osas, mida ümbritseb leek, vesi keeb ja muutub kõrgrõhu all (üle 120 *at*) olevaks auruks; spiraaltoru kolmandas osas toimub auru ülekuumenemine.



Joon. 371. Otsevoolukatel.

Auruturbiinides muudetakse mehhaaniliseks tööks auru kineetiline energia. Katlast tulev aur läheb suure rõhu all turbiini suunamisseadistesse (düüsidesse; joon. 372) ja saavutab nendes rõhu languse arvel suure väljavoolamiskiiruse (umbes $1000\frac{m}{sek}$). Selleks et düüsis muunduks võimalikult suur osa auru siseenergiast kineetiliseks energiaks, antakse düüsile *väljumisava poole laieneva kanali kuju* (§ 143). Suunamisseadistest lahkunud aur langeb turbiini ratta labidatele, avaldab nendele rõhku ja paneb turbiini tööratta pöörlema.

Eristatakse auru turbiinilabidatele mõjumise kahte printsiipi: a k t i i v s e t ja r e a k t i i v s e t. Nende printsiipide selgitamiseks on toodud skeemid joonistel 373 ja 374.



Joon. 372. Turbiini düüsid.

Joonisel 373 on kujutatud auru poolt turbiinilabidatele avaldatava *aktiivse mõju* skeem. Turbiinilabidad on kinnitatud tööketta külge, mis omakorda on kinnitatud turbiini võlli külge; tööketas pöörleb joonise tasapinnaga ristiolevas tasapinnas; u tähendab ketta ringliikumise kiirust. Aur tuleb katlast rõhu p_1 all düüsi, kiireneb selles ja tema staatiline rõhk langeb kuni väärtuseni p_2. Väljudes düüsist kiirusega c_1, langeb aur labidatele; w_1 tähendab seda suhtelise liikumise kiirust, millega aur voolab piki labidaid. Kõveraks painutatud labidas kallutab aurujoa kõrvale; seetõttu aur rõhub turbiinilabidatele jõuga, mis on labidatele mõjuvaks kesktõmbejõuks.

Auru ja labida pinna vaheline hõõre vähendab teataval määral suhtelist kiirust. Äratöötanud auru suhtelise kiiruse w_2 ja ringliikumise kiiruse u summa on auru absoluutne väljumiskiirus c_2. Kui mitte arvestada auru hõõrdumisel tekkivaid kadusid, siis töö, mida labidad võtavad vastu igalt läbi turbiini tööratta voolava auru kilogrammilt, mõõtub auru kineetilise energia kahanemisega: $\left(\frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g}\right)$ *kGm*, kus c on väljendatud $\frac{m}{sek}$-tes ja g $\frac{m}{sek^2}$-tes.

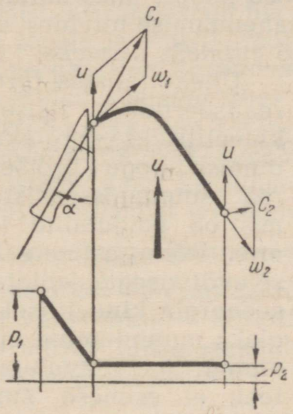
Analüüsitud juhule on iseloomulikud järgmised nähtused:

1) Auru siseenergia muundumine kineetiliseks energiaks toimub ainult liikumatutes suunamisseadistes (düüsides). 2) Düüsist väljumisel (langemisel labidatele) on auru rõhk vähenenud keskkonna vasturõhu väärtuseni; seega auru voolamisel piki labidaid jääb rõhk konstantseks. 3) Kuna auru rõhk labidatele on muutumatu, siis *ketta naaberlabidate poolt moodustatavate kanalite suubumis- ja väljumisavad tehakse ühesugused.*

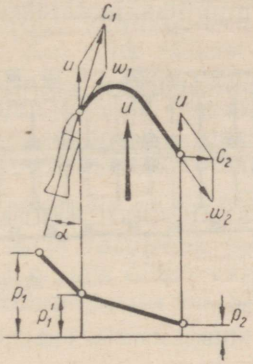
Turbiine, milledes on rakendatud auru aktiivse mõju printsiip, nimetatakse sageli v õ r d r õ h u turbiinideks.

Joonisel 374 on kujutatud auru poolt turbiini labidatele avaldatava *reaktiivse mõju* skeem. Sel juhul ei paisu aur düüsi läbimisel täielikult, vaid ainult osaliselt. Düüsist lahkumisel on tema rõhk p_1' suurem kui keskkonna vasturõhk p_2. Seetõttu auru absoluutne kiirus c_1 auru väljavoolamisel labidatele ei vasta sel juhul rõhu kogu langusele, vaid ainult rõhkude vahele $p_1 - p_1'$. Labidad on kõveraks painutatud ja paigutatud kettale nii, et *labidate-*

vaheline ruum kujutab endast kasvava ristlõikega kanaleid. Voolamisel labidate vahel auru paisumine jätkub ja väljumisel langeb auru rõhk keskkonna vasturõhuni p_2. Seega antud juhul auru



Joon. 373. Turbiinilabidatele avaldatava aktiivse mõju skeem.



Joon. 374. Turbiinilabidatele avaldatava reaktiivse mõju skeem.

siseenergia kineetiliseks energiaks muundumine toimub düüsis ainult osaliselt ja lõpeb alles turbiini rattal labidatevahelistes laienevates kanalites.

Auru piki labidaid voolamise suhtelist kiirust võib saada samuti nagu joonisel 373 kujutatud juhulgi absoluutse kiiruse komponentideks lahutamisega ringliikumise kiiruse sihis ja labida pinna puutuja sihis. Auru paisumise tõttu labidatevahelistes kanalites kasvab suhteline kiirus väärtuselt w_1 kuni väärtuseni w_2. *Aur saab kiirenduse ja avaldab seetõttu turbiini labidatele joa kõrvalekaldumisest tingitud rõhu kõrval veel joa reaktsiooni rõhku.*

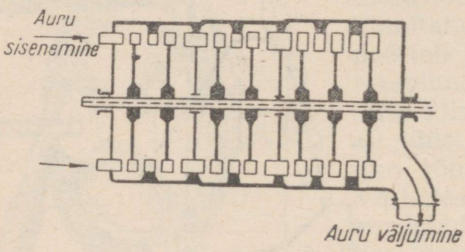
Reaktiivturbiine nimetatakse sageli ü l e r õ h u - turbiinideks.

Suurema kasuteguri saamiseks on vaja, et turbiini labidate ringliikumise kiirus u moodustaks aktiivturbiini korral umbes poole sellest kiirusest, millega aur düüsist väljub, ja et reaktiivturbiini korral turbiini ringliikumise kiirus oleks peaaegu võrdne auru väljumiskiirusega; ehk täpsemalt: aktiivturbiini jaoks on vaja, et $u = \frac{1}{2} c_1 \cos \alpha$, ja reaktiivturbiini jaoks, et $u = c_1 \cos \alpha$. Väljumisnurk α valitakse võimalikult väike ja seetõttu cos α väärtus ei erine palju ühest.

Isegi keskmiste rõhu languste korral on auru düüsist väljavoolamise absoluutne kiirus suurusjärgus 1200 $\frac{m}{sek}$ (see on palju suurem kui kuuli kiirus).

Aktiivturbiini ketta ringliikumise kiirus peab seega olema umbes 600 $\frac{m}{sek}$. Kui tööratta diameeter on 1 *m*, siis vastab sellisele ringliikumise kiirusele võlli 11 500 pööret ühes minutis.

Turbiini pöörete arvu niisuguse vähendamise huvides, et kasutegur ei muutuks, jaotatakse auru töö *mitmeks astmeks*.



Joon. 375. Mitmeastmelise turbiini skeem.

Ühekettalistes turbiinides realiseeritakse siseenergia kineetiliseks energiaks muundumise kogu protsess ühe rea suunamisseadiste abil, mis on paigutatud tööketta ette. Rõhu astmete kasutuselevõtmisega jaotatakse siseenergia kineetiliseks energiaks muundumine mitmesse etappi. See saavutatakse sel teel, et esimese suunamisseadiste rea ja esimese tööketta taha paigutatakse veel teine suunamisseadiste rida ja teine tööketas jne. (joon. 375). Sellise mitmeastmelise turbiini iga tööratas kasutab ainult osa meie käsutuses olevast rõhu kogu langusest, järgmise osa sellest kasutab teine ratas jne. P a r s o n s'i poolt kasutuselevõetud rõhu astmed võimaldavad aurul labidate liikumapanemiseks tööd teha nii aktiivse kui ka reaktiivse printsiibi järgi.

Aktiivturbiinides kasutatakse veel teist, K e r t i s s'i poolt sissetoodud turbiini pöörete arvu vähendamise viisi — *kiiruse astmeid*. Kiiruse astmete kasutamisel annab aur oma kineetilise energia ära mitte ühele, vaid mitmele töökettale. Esimese ketta labidatelt väljunud aur läheb liikumatutele vahepealsetele suunamislabidatele. Viimaste ülesandeks on muuta auru liikumise suunda nii, et auru oleks võimalik juhtida teise pöörleva ketta labidatele, kus aur annab järjekordselt ära osa oma kineetilisest energiast. Sellele töökettale järgnevad uuesti suunamislabidad jne.

Auru kõrge algrõhk ja suhteliselt kõrge vaakuum kondensaatoris tagavad auruturbiinidele kõrge kasuteguri, mis (katlas kulutatud kütuse energia suhtes) on 25—28%. Auru erikulu, mis kolbmasinates on 8 ja enam kilogrammi auru tunnis 1 *HJ* kohta, on auruturbiinides võrdne 4—4½ $\frac{kg}{HJ}$ tunnis.

Võimsad auruturbiinid ehitatakse paljude (16—40) astmetega; turbiinirataste labidate koguarv väljendub mõne tuhandega; turbiini kaal on 2—4 *kG* 1 *HJ* kohta. Sellise turbiini rootor, mille võimsus on 100 000 *kW* ja mis teeb 3000 $\frac{pööret}{min}$, kaalub umbes 30 tonni.

§ 147. Reaktiivmootorid.

Gaasijoas esinev rõhu vähenemine kutsub esile gaasi kiireneva liikumise muutuva ristlõikega torus ja gaasi väljavoolamisel düüsist. Kiirendusega liikuv gaasijuga avaldab vastumõju, mis tekitab torule ja düüsile mõjuva *reaktiivjõu*; see jõud on vastassuunaline gaasijoa kiirendusele ja võrdub *väljavoolava gaasijoa liikumishulga kasvuga ühes sekundis.* Kui rõhk düüsist väljuvas joas ületab keskkonna vasturõhu, siis gaasijoa reaktsioonile lisandub nende mittetasakaalustatud rõhumisjõudude impulss.

Tähistame gaasi kaalulise kulu ühes sekundis G, gaasi kiiruse enne väljavoolamist w_1 ja gaasi kiiruse pärast väljavoolamist w_2; siis liikumishulga juurdekasv ühes sekundis on $G\frac{w_2 - w_1}{g}$. Kui keskmine rõhk väljumisristlõikes on p_2 ja vasturõhk (gaasi voolamisel välisrõhku — atmosfäärirõhk) p_0, siis düüsi väljumisristlõikele mõjuv mittetasakaalustatud rõhumisjõud on $S_2(p_2 - p_0)$. Gaasijoa kogureaktsioon

$$R = G\frac{w_2 - w_1}{g} + S_2(p_2 - p_0). \tag{20}$$

Gaasi hääle kiirusest suurema kiirusega voolamise saavutamiseks kasutatakse laienevaid düüse; õigesti arvestatud düüside korral on joa väljumisel rõhk joas võrdne keskkonna vasturõhuga: $p_2 = p_0$. Kui seejuures kambris asuv kokkusurutud gaas enne väljavoolamist oli kambri seinte suhtes liikumatu (nagu see esineb rakettmootorites), siis reaktiivjõu valem lihtsustub:

$$R = \frac{Gw_2}{g}.$$

Väljavoolamiskiirus w_2 ja gaasi kulu G sõltuvad mitte ainult gaasi algrõhust, vaid samuti ka gaasi algtemperatuurist T_1. *Gaasijoa reaktsioon sõltub siiski ainult algrõhust* p_1. Gaasi olemusest ja gaasi algtemperatuurist gaasijoa reaktsioon ei sõltu. Tõepoolest: nagu § 143 on näidatud, väljavoolamiskiirus on võrdeline korrutise RT_1 ruutjuurega, kus R on gaasi karakteristlik konstant; gaasi kulu on aga pöördvõrdeline selle sama korrutise ruutjuurega. Gaasi molekulaarne ehitus avaldab gaasijoa reaktsioonile mõju ainult niivõrd, kuivõrd ta määrab adiabaadi võrrandis esineva astendaja, s. o. soojusmahtuvuste suhte $\frac{c_p}{c_v}$.

Gaasijoa reaktsiooni kasutatakse reaktiivturbiinides (sellest oli juba juttu eelmises paragrahvis) ja reaktiivmootorites. Reaktiivmootorid jagunevad kahte rühma. Esimesse rühma kuuluvad *püssirohuraketid* ja *vedeliku-reaktiivmootorid,* mis kannavad endaga kaasas mitte üksi kütuse-, vaid ka hapendajavaru. Vedeliku-reaktiivmootorites kasutatakse sageli kütusena piiritust ja hapendajana vedelat hapnikku või aniliini, kütusena petrooleumi

ja hapendajana lämmastikhapet; samuti kasutatakse ka aineid, millede molekulid sarnaselt püssirohule sisaldavad üleliigset hapnikku, näiteks nitrometaani. Teise reaktiivmootorite rühma moodustavad *õhu-reaktiivmootorid,* mis kannavad endaga kaasas ainult kütust ja kasutavad põlemiseks v ä l i s õ h k u; see moodustab põhilise osa väljaheidetavatest gaasidest. Õhu-reaktiivmootorites ületab õhu kulu kaaluliselt 15—60 korda kütuse kulu; kütusena kasutatakse siin kõige sagedamini bensiini, petrooleumi ja teisi mootorikütuseid.

Veojõudu, mis tekib juhul, kui igas sekundis põleb ära 1 *kg* kütust, nimetatakse *eriveojõuks* ehk *ühikimpulsiks F:*

$$F = \frac{R}{G}.$$

Mida suurem on ühikimpulss F, seda ökonoomsem on mootor.

Kui $p_2 = p_o$, siis $F = \frac{w}{g}$, s. o. kui rakettmootor või vedeliku-reaktiivmootor töötab nii, et gaaside väljumisel puudub lisarõhk, siis ühikimpulss on võrdne väljavoolamiskiiruse ja raskuskiirenduse jagatisega.

Musta püssirohuga töötavatel rakettidel $w = 1000 \frac{m}{sek}$ ja $F \approx 100$; püroksüliin-püssirohuga töötavatel rakettidel ja vedeliku-reaktiivmootoritel $w \approx 2000 \frac{m}{sek}$ ja $F \approx 200$—250; õhu-reaktiivmootoritel (F ja w vaheline sõltuvus on siin keerulisem) $F = 400$—4000.

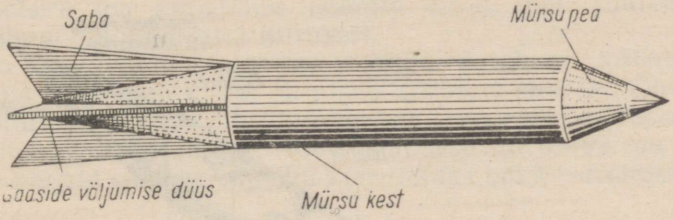
Ühikimpulss võimaldab otsustada reaktiivmootori töötamise maksimaalse kestuse üle; juhul kui mootor arendab esialgse kütusevaru kaaluga võrdset tõmbejõudu, siis töötamise maksimaalne kestus on võrdne ühikimpulsiga ($t = \frac{R}{G} = F$). Tegelikult, eriti just lendamisel kiirendusega, ületab vajalik veojõud kütusevaru kaalu; seetõttu püroksüliin-püssirohuga täidetud ja vedeliku-reaktiivmootoritega rakettide töötamise kestus ei ole tavaliselt suurem kui kaks minutit.

Püssirohu-reaktiivmootoreid rakendatakse laialdaselt reaktiivsuurtükiväes reaktiivmürskude liikumapanemiseks. Reaktiivmürsk on lõhkev mürsk, mis pannakse liikuma reaktiivmootori (tavaliselt püssirohu-reaktiivmootori) poolt (joon. 376).

Reaktiivmürsu väljalaskmisel puudub tagasilöök suunamisaparaatidele, sest et gaasijoa väljavoolamine mürsu liikumise vastassuunas ei ole millegagi takistatud. Seetõttu võib reaktiivmürskudega tulistada kergetest seadeldistest (õhukeseseinalistest torudest, juhtrööbastelt või -liistudelt), mis võivad olla paigutatud lennukitele, väikestele laevadele või autodele. Üldtuntuiks on saanud meie kaardiväe miinipildujad „katjušad", mis tulistavad reaktiivmürskudega.

Reaktiiv-suurtükiväe eelisteks on kergus, liikuvus ja peamiselt just suur tulevõimsus. Tema põhilisteks puudusteks on väike tabavus ja väiksem läbilöögivõime, kui see on kahurimürskudel.

Vedeliku-reaktiivmootor koosneb pihustitega ja süüteküünaldega varustatud põlemiskambrist, laienevast väljumisdüüsist, seadeldistest, mis annavad põlemiskambrisse küttesegu, ning kütuse ja hapendaja reservuaaridest. Suurte mootorite põlemiskambri seinad ja väljumisdüüs tehakse jahutatavad.



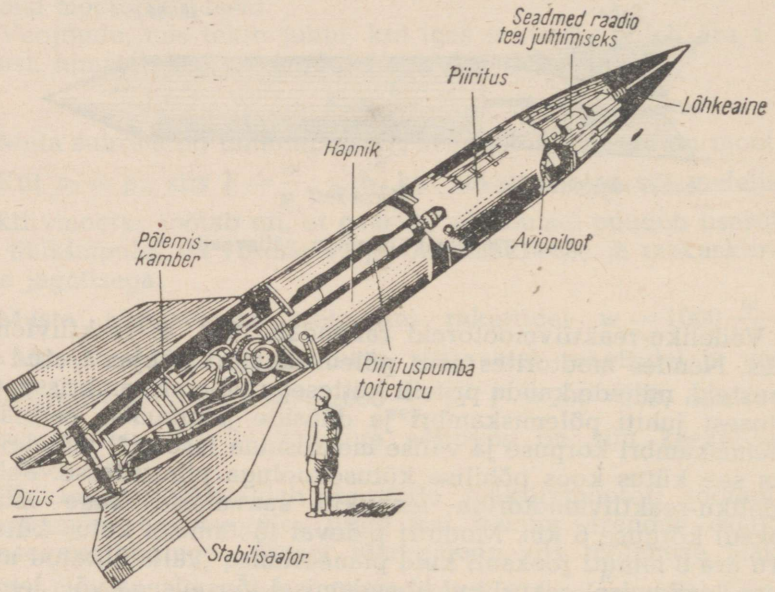
Joon. 376. Reaktiivmürsu välisvaade.

Vedeliku-reaktiivmootoreid rakendati 1944. a. reaktiivlennukites. Nendes mootorites asus põlemiskambri põhjas teatud arv pihusteid, millede kaudu pritsiti küttesegu põlemiskambrisse. Osa kütusest juhiti põlemiskambri ja düüside jahutamise eesmärgil põlemiskambri korpuse ja välise metallseina („särgi") vahele; siit läks see kütus koos põhilise kütusevooluga pihustitesse. Sellise vedeliku-reaktiivmootoriga lennukid saavutasid kahe minuti jooksul kõrguse 6 *km*. Mootori pideval töötamisel kulus kütusevaru ära 8 minuti jooksul; kuid planeerimise (väljalülitatud mootoriga lendamise) oskuslikul ühendamisel tõusmisega võis lennuk õhus püsida ühe tunni piirides.

Kütuse juurdevoolu vähenemisel vedeliku-reaktiivmootori veojõud endastmõistetavalt langeb. Lennuki vedeliku-reaktiivmootorid ehitatakse mitme põlemiskambriga ja veojõudu reguleeritakse nende kambrite sisse- ja väljalülitamisega. Tavaliselt lennatakse suurem osa teekonnast väikese kiirusega, lastes töötada ühel kambritest, ja ainult lühikeseks ajaks, peamiselt õhkutõusmisel, lülitatakse sisse kõik põlemiskambrid ja antakse seega mootorile täisvõimsus. Kütuse kaal moodustab suure ($\frac{1}{2}$ ja enam) osa lennuki kaalust. Nüüdisaegsed hääle kiirusest suurema kiirusega lendavad lennukid tõusevad õhku kiirusega, mille vertikaalsuunaline komponent on 15 $\frac{km}{min}$, ja horisontaalsel lendamisel stratosfääris arendavad kiirust ligikaudu 2600 $\frac{km}{h}$. Kütusevaruga 3—4 tonni lendava vedeliku-reaktiivmootoriga lennuki lennukaugus on piiratud tegevusraadiusega 200—250 *km*.

Vedeliku-reaktiivmootoreid rakendatakse laialdaselt ka võimsate reaktiivmürskude ja kaugelaskerakettide liikumapanemiseks.

Näiteks kaugelaskerakett „*V*-2" (joon. 377), mille pikkus on 13,6 *m*, kaal 12 *T* ja lõhkelaeng 1000 *kg*, pandi liikuma vedeliku-reaktiivmootori abil, mis arendas tõmbejõudu 26 000 *kG* ja kulutas 130 *kg* kütust sekundis. Mootor töötas 1 minut; ülejäänud aja lendas rakett inertsi mõjul.



Joon. 377. Saksa kauglennurakett.

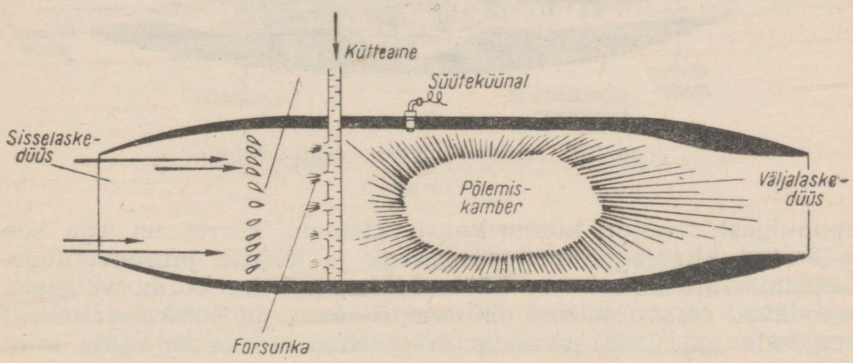
Ajakirjanduses avaldatud teadete põhjal võib väita, et mitmesugustes maades töötatakse välja selliste isesihtivate kaugelaske õhutõrjemürskude konstruktsioone, mis on varustatud vedeliku-reaktiivmootoritega ja millede esiosas on radiolokatsiooniseadeldis (II köide, § 103), selline mürsk plahvatab tulistatava objekti lähedal. Tagasipeegeldunud raadiosignaal paneb tööle relee ja pöörab roole; sel teel mürsk muudabki vajalikus suunas oma lennu trajektoori. Mürsu vahetu kokkupuude tulistatava objektiga ei ole vajalik; mürsk on varustatud sütikuga, mis hakkab tööle tulistatavast objektist sellisel kaugusel, et mürsk võib objekti kahjustada kildudega.

Kõrglennuraketid, mida kasutatakse tänapäeval kõrgete atmosfäärikihtide uurimiseks, on liitraketid: algul töötab raketi kõige massiivsema osa vedeliku-reaktiivmootor; kui aga kogu

kütus on ära tarvitatud, siis hakkab tööle teise, raketi vähem massiivsema osa mootor, kusjuures esimese osa kogu kest koos kütusepaakidega ja mehhanismidega visatakse automaatselt ära (nii on saavutatud tõusu kõrgus 300—400 *km*)[1].

Õhu-reaktiivmootori töötamise printsiip on järgmine: vastu mootorit voolav õhk satub sisenemisavasse ja kaotab oma kiiruse, kusjuures rõhk kasvab. Otsevoolulise õhu-reaktiivmootorites (joon. 378) õhk surutakse kokku ainult (suhtelises liikumises) vastuvoolava joa kineetilise energia arvel; rõhu suurenemine sõltub õhuvoolu esialgsest kiirusest.

Rõhu kasv voolu kineetilise energia arvel on küllalt suur ainult siis, kui lennu kiirus on hääle kiirusest suurem. Õhu-reaktiivmootorites, mis on mõeldud lendamiseks hääle kiirusest suurema kiirusega ja hääle kiirusele lähedase kiirusega, on tavaliselt ette nähtud seadeldised õhu kunstlikuks kokkusurumiseks.



Joon. 378. Otsevooluline õhu-reaktiivmootor.

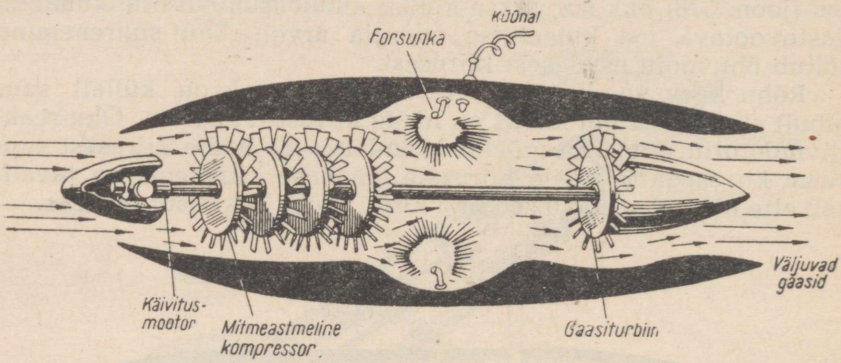
Turbokompressor-õhureaktiivmootorid on mootorisse tungiva õhu surveastme suurendamiseks varustatud *kompressoritega,* millede mõjul rõhk suureneb mitu korda.

Otsevoolulistes õhu-reaktiivmootorites õhk, mis omandab pidurdumise tõttu sisenemisdüüsides kõrgema rõhu, seguneb kütusega ja läheb põlemiskambrisse. Põlemiskambris gaasi temperatuur tõuseb, gaasi eriruumala kasvab ja seoses sellega suureneb gaasijoa kiirus. Väljaheidetava õhu (mis on segatud põlemissaadustega) arvel tekibki reaktiiv-veojõud. Kuna otsevoolulisel õhu-reaktiivmootoril puuduvad seadeldised õhu kokkusurumiseks, siis on selge, et see mootor *ei saa liikumatus õhus arendada veo-*

[1] 4. okt. 1957. a. anti meil rakettmootori abil 58 *cm* läbimõõduga kehale niisugune kiirus, et, tõusnud umbes 900 *km* kõrgusele, muutus ta Maa kaaslaseks. Praegu on rakettmootorite abil orbiidile viidud meie maal kokku kolm Maa kunstlikku kaaslast.

jõudu: otsevoolulise õhu-reaktiivmootoriga varustatud lennukid ja mürsud vajavad *sundkäivitamist,* näiteks startimis-vedeliku-reaktiivmootorite või püssirohurakettide abil.

Ühikimpulsi suurus, järelikult ka otsevoolulise õhu-reaktiivmootori ökonoomsus, muutub laiades piirides, sõltuvalt õhu survest survedüüsis ja sellest, kui palju on mootorisse tunginud õhuhulk suurem kütuse täielikuks põlemiseks vajalikust

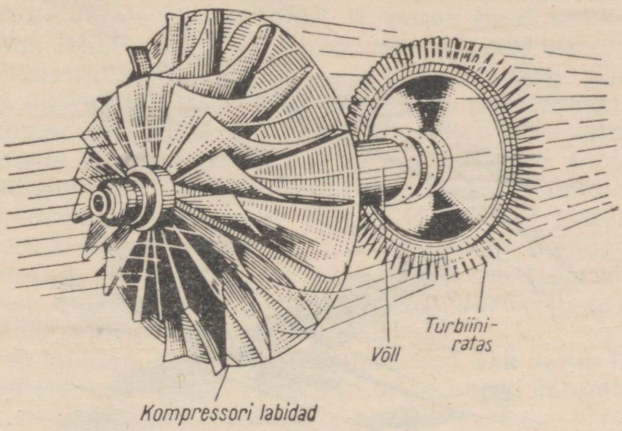


Joon. 379. Turbokompressor-reaktiivmootor.

õhuhulgast; mootori kindla konstruktsiooni korral on aga see määratud kiirusega, lennukõrgusega ja kütuse juurdevooluga. Lendamiskiirusel, mis on hääle kiirusest kaks korda väiksem, arendavad otsevoolulised õhu-reaktiivmootorid 400-kilogrammist veojõudu iga ühes sekundis ärapõlenud kütuse *kg* kohta, s. o. ületavad juba oma ökonoomsuse poolest vedeliku-reaktiivmootoreid. Kuid sellistel kiirustel on propellermootoriga seadmed võrratult ökonoomsemad. Lendamiskiirustega, mis on lähedased hääle kiirusele või ületavad veidi hääle kiirust, on kõige ökonoomsemad allpoolkirjeldatud *turbo-reaktiivmootorid,* mis erinevalt otsevoolulistest mootoritest kindlustavad ka lennuki õhkutõusmise. Lendamiskiiruse suurenemisel siiski turbokompressor-õhureaktiivmootorite ökonoomsus väheneb, kuna aga otsevooluliste õhu-reaktiivmootorite ökonoomsus kiiruse suurenemisel kasvab. Seetõttu ilmneb, et *lendamiskiirustel, mis kaks korda ületavad hääle kiiruse, osutuvad otsevoolulised õhu-reaktiivmootorid kasulikumateks kui turbo-reaktiivmootorid.*

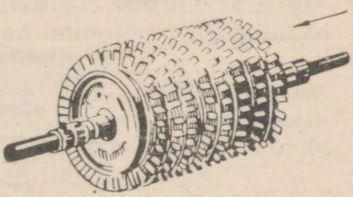
Turbokompressor-reaktiivmootori ehk *turbo-reaktiivmootori* töötamise printsiip on kujutatud joonisel 379. Õhk imetakse sisse rotatsioonkompressori poolt ja surutakse kokku nii, et selle rõhk kasvab 4—7 korda. Kokkusurutud õhk läheb põlemiskambrisse. Kütuse põlemine kulgeb siin samuti nagu otsevoolulistes reaktiivmootoriteski konstantsel rõhul; gaasi eriruumala suureneb ja

seetõttu kasvab gaasijoa kiirus. Liikudes väljumisdüüsi poole, läbib gaasiliste põlemissaaduste ja ülejäänud õhu segu turbiini, mille ülesandeks on kompressori ringiajamine. Nagu § 142 on selgitatud, mõõtub iga kilogrammi gaasi töö rõhu languse ja eri-



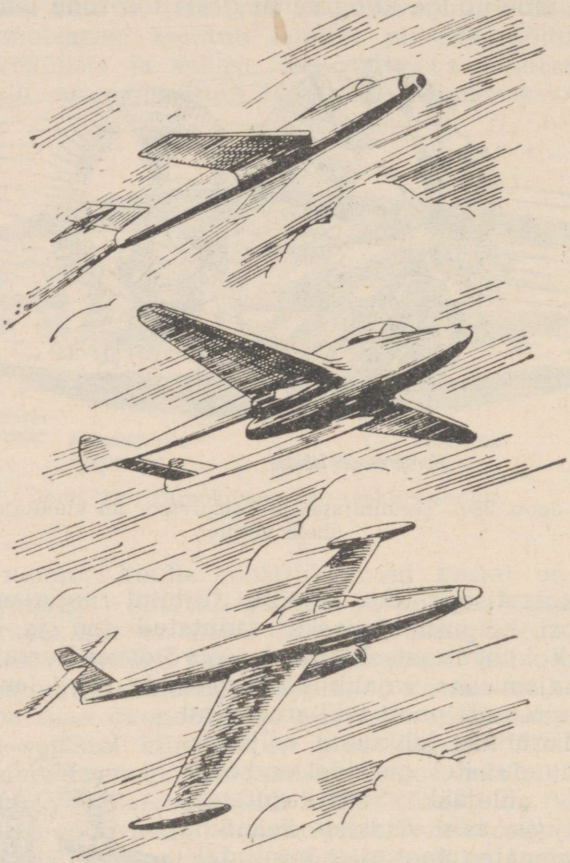
Joon. 380. Turbiiniratas ja kompressor on kinnitatud ühele võllile.

ruumala korrutisega $v\Delta p$. Seetõttu turbiini ringiajamiseks, s. o. kompressori käigushoidmiseks, kulutatud töö ja kompressori poolt õhu kokkusurumisel tehtava töö võrdsuse korral osutub turbiini ringiajamiseks vajalik põletisgaaside rõhu langus väiksemaks kompressori poolt tekitatud rõhu kasvust. Turbiinist lahkunud väljumisavasse suunduvatel gaasidel on seega teatav rõhu „ülejääk". Seda kasutatakse (turbiini taga toimuvat) kütuse järelpõlemist, mis uuesti suurendab gaaside eriruumala ja kutsub seega esile väljumisdüüsist väljapaiskuvate gaaside kiiruse veel suurema kasvu, kui seda on kiiruse kasv siis, kui kütuse mainitud järelpõlemist, s. o. „mootori forsseerumist" ei toimu. Kütuse järelpõlemine turbiini ja väljavooludüüsi vahel asuvates lisa-põlemiskambrites on seda enam oluline, et raske on valmistada selliseid turbiinilabidaid, mis taluksid küllalt kaua temperatuuri üle 1000° C; seetõttu (eespool turbiini asuvates) põhi-põlemiskambrites tuleb tahtmatult piirduda kütuse väikse juurdevooluga.



Joon. 381. Telgkompressori tiivakesed.

Ehitatakse ka selliseid turbokompressor-mootoreid, milledes turbiini ringiajamiseks kasutatakse ära kogu olemasolev rõhu langus; sel juhul turbiin arendab poolteist kuni kaks korda suuremat



Joon. 382

võimsust, võrreldes kompressori ringiajamiseks vajaliku võimsusega. Võimsuse ülejääk kasutatakse ära propelleri pöörlemapanemiseks. Selliselt on ehitatud *gaasiturbiin-mootorid*, mida rakendatakse lennukites ja gaasimootoriga kaatrites. Gaasiturbiin-mootorid kaaluvad kaks-kolm korda vähem kui lennukites kasutatavad tavalised sisepõlemismootorid, kuid seniajani on nad vähem ökonoomsed.

Turboreaktiiv- ja gaasiturbiin-mootorites rakendatakse tsentrifugaal-, telg- ja kombineeritud kompressoreid.

Tsentrifugaal-kompressori (joon. 380) tööratas kujutab endast labidatega varustatud ketast. Tööratta pöörlemiskiirus võib ulatuda kuni 400—500 $\frac{m}{sek}$. Ratta labidate vahel asuv ja nende poolt kaasatõmmatav õhk rõhub liikumise inertsi tõttu pöörlemisteljest kaugemal asuvatele õhukihtidele ja surub need kokku; kokkusurutud õhk läheb kollektori laienevatesse kanalitesse, mis paiknevad mööda ratta ringi puutujat, ja pidurdub seal; rõhk kasvab seejuures seda enam, mida suurem on ratta pöörlemiskiirus.

Telgkompressor (joon. 379 ja 381) koosneb liikumatute suunamislabidatega varustatud kestast ja teatud arvu töölabidatega varustatud rootorist. Labidate profiil on sarnane propelleri tiibade profiiliga. Rootori pöörlemisel rootori töölabidad lõikavad õhku ja, töötades kruvidena, paiskavad ta tahapoole. Labidate all õhu rõhk suureneb. Rõhu kasv ühe töölabidate rea taga sõltub labidate kujust, atakknurgast ja ringliikumise kiirusest; ta võib ulatuda kuni 20%-ni.

Esimese labidate rea poolt edasipaisatud õhk satub liikumatutele labidatele, mis suunavad ta piki telge uuesti järgmisesse astmesse, s. o. järgmisele töölabidate reale.

Kombineeritud kompressorid koosnevad teatavast arvust telgkompressori astmetest ja ühest tsentrifugaalastmest.

Turbo-reaktiivmootoritega lennukeid ehitatakse alates 1944. a. Hääle kiirusele lähedase kiiruse korral on turbo-reaktiivmootori veojõud ühes sekundis kulutatud kütuse iga *kg* kohta 12—15 korda suurem vedeliku-reaktiivmootori veojõust. Turboreaktiivsete reisilennukite lennukaugus kiirusel üle 800 $\frac{km}{h}$ on suurem kui 4000 *km*. Reisilennukeid ja „lendavaid kindlusi" ehitatakse mõnikord lennukaaluga 100—200 tonni. Sellised lennukid varustatakse kaheksa või isegi kümne turbo-reaktiivmootoriga.

Joonisel 382 on näidatud reaktiivlennuki kuju. Hääle kiirusest suurema kiirusega lendavatel lennukitel on iseloomulikud noolekujulised tiivad. Reaktiivmootorid paigutatakse sageli tiibade sisemusse. Kütusepaagid asuvad mõnikord tiibade otstes.

Lennukiirustel, mis ületavad kaks korda hääle kiiruse, tõuseb rõhk vastuvoolava õhu kiirusest tingitud surve tõttu enam kui seitse korda, s. o. kõrgemale kui turbo-reaktiivmootorite kompressoris. Nagu juba eespool on mainitud, on sellistel kiirustel ökonoomsemad otsevoolulised õhu-reaktiivmootorid, mis tulevikus tõenäoliselt omandavad esimese koha ülikiires lennuasjanduses ja võimaldavad lennata kiirusega kuni 3000 $\frac{km}{h}$; sellised kiirused ületavad isegi neid kiirusi, mida tänapäeval võib saavutada väheökonoomsete vedeliku-reaktiivmootorite rakendamisega ainult väga lühikeseks ajaks.

INDEKS.

Aatom 14, 22
absoluutne aeg 62, 64
absoluutne liikumine 48, 62, 63, 66
absoluutne kiirendus 49
absoluutne kiirus 48
absoluutne niiskus 470
absoluutne null 391, 474
absoluutne ruum 62, 64
absoluutne temperatuur 383, 391, 416—418
absoluutne ühikute süsteem 105—106
absoluutselt elastne keha 150
absoluutselt kõva keha 88, 138
absoluutselt mitteelastne keha 150
absoluutselt must keha 431—432
absorptsioon 524
absorptsiooni koefitsient 524
Adams 184
adiabaatiline protsess 570, 581—584
adsorptsioon 525, 560—563
adsorptsiooni isoterm 562
adsorptsioonisoojus 562
aerodünaamilised jõud 285, 287
aerodünaamiline toru 293
aerodünaamiline üleslüke 298
aerostaat 253
akord 370
aktiviseeritud süsi 560—561
akustiline resonants 356
akustiline spekter 356
akustiline takistus 353
Ampère 11, 61, 135, 381
Amagàt 492
amorfne keha 529
Amontons 141
Amontons-Coulomb'i seadus 141
amplituud 307
Andrews 467
anioonid 519
anisotroopsus 226, 529
ankrumehhanism 165
Anschütz 216
anturaaž 535
apogee 172
Archimedes 156, 251
Archimedese seadus 251
areomeeter 251
arhitektuuriline akustika 354
Aristarchos 170
Aristoteles 6
Arrhenius 519
arteesia kaev 248
Assur 167
asteroidid 184
atakknurk 300
atmosfääri standardsed parameetrid 282—283
atsetoonsiid 245
Aubry 216
aurumasin 653—657
aurumasina kasutegur 654
aurumissoojus 614, 616
aurupunkt 465
auruturbiin 657—660
auru äralõikamine 655
Avenarius 468, 469
Avogadro 396
Avogadro arv 396
Avogadro seadus 396, 397

Baar 227
Bacon 379
ballistika 285
ballistiline kõver 83

baromeetriline valem 281
Bartolini 68
Batšinski 490, 492, 495, 508
Batšinski seadus 491
bell 366
Benzenberg 68
Beranger' kaal 160
Bernoulli 126, 259, 379, 380, 403, 412
Bernoulli võrrand 262, 284
Bernoulli võrrandi termodünaamiline üldistus 634
Berthelot 480
Bessel 78
binauraalefekt 367
Bjerknes 135
Boguslavski 552
Bohr 11, 618
Bolšanina 238
Boltzmann 445, 605, 606
Boltzmanni e-lause 446, 528
Boltzmanni kiiruste jaotus 446
Boltzmanni konstant 413, 443
Borelli 174
Born 552
Bose 416
Boyle 281, 453
Boyle-Mariotte'i seadus 281, 394
Bragg 530
Bravais 530
Brown 384
Browni liikumine 384
Bridgman 490, 492
Bruno 171

Caratheodory 419
Carnot 11, 381, 383, 589, 592, 593
Carnot' tsükkel 592—593
Chapmann 404
Cartesiuse koordinaadid 28, 29
Cauchy 134
Cavendish 178
Cesarland 449
Cesarlandi valem 449
Charles 394
Charles'i seadus 394
Chezy valem 274
Clapeyron 381, 395
Clapeyron-Clausius'e võrrand 616—617
Clapeyron'i võrrand 394—395, 396, 397, 517
Claude 474
Clausius 380, 383, 396, 397, 418, 449, 589, 595, 597, 600
Coriolise inertsjõud 218
Coriolise kiirendus 51
Coulomb 141, 142
Crookes 387
Curie, P. 539

D'Alembert 127, 133
d'Alembert'i jõud 129
d'Alembert'i printsiip 127
d'Alembert'i võrrand 128
Dalton 415
Daltoni seadus 415
Davidenkov 237
Davy 381, 519
Debye 375, 510, 523, 530, 540, 541, 557, 558
Debye' kuupide seadus 541
deformatsioon 222
de Heen 483
Delone 167
Derjagin 505
detander 474
detsibell 366
detsimaalkaal 160
Dewar 473
dendriit 538
Descartes 6, 53, 54, 55, 132, 134
detonatsioonilaine 644—645
Dieseli tsükkel 650, 651
Dieterici 479
diferentsiaal 35
diferentsiaalpöör 162
difraktsioon 346
difusioon 437—442
difusiooni koefitsient 438—440, 510
dimensioon 108
Dinnik 155
dipoolmoment 555

Dirichlet 136
dirižaabel 254
dispersioon 342, 558
dispersne vastastikune mõju 558
dissonants 369
dissonatsioon 428, 520—521
Domogarov 216
Doppleri efekt 361
džaul 107
Dubinin 561
Dulong-Petit' seadus 540
Dunoyer 407
dünaamika 27, 57
dünaamiline rõhk 262
düün 106
dünaamiline väli 190
düüs 638

Ebullioskoopiline meetod 519
Eddington 11
Edser 512
Ehrenfest 237
Einstein 11, 68, 69, 189, 422, 540
Einsteini valem 442
Einsteini relatiivsusprintsiip 69
eksotermiline protsess 586
ekvivalentsed jõud 200
ekvivalentne mass 202—203
elastsus 222
elastne pinge 139
elastne põrge 153
elastsuse järelmõju 231
elastsusmoodul 224, 226, 228, 230
elastsed võnkumised 225
elastsuspiir 226
elektriline dipoolmoment 555
elektrolüüt 518, 520
elektron 14, 23
elektrongaas 533
elektrotehnika 7
elementaarnihe 35
empiiriline temperatuur 391
endotermiline protsess 586
energia 18, 23—24, 98, 99
energia jaotus vabadusastmete järgi 420, 541
energia jäävuse seadus 99, 119, 134
energiatsenter 342
energia ülekanne 137, 146
energia ülekanne lainete kaudu 137
entalpia 470, 613, 631—633
entroopia 418—419, 570, 582, 583, 600—601, 603—604, 605—606, 610, 611—612, 620—621
erg 106
erikaal 251, 390
eriruumala 390
eriveojõud 662
Euler 133, 253, 257, 258
Euleri paradoks 285
Eucken 561
eutektika 547
Eötvös 78

Faas 389
faasikiirus 341
faasimuutus 469
Faraday 7, 135, 519
Ferm 416
Fermat 173
Fersman 537
Fessenkov 211
Fick 438
Fick'i seadus 438—439
fiktiivsed jõud 127
Fitch 378
Fjodorov 530, 537
flotatsioon 506—507
footon 430
formant 360
Foucault 68, 215
Foucault' pendel 67
Fourier 315, 434
Fourier' seadus 434—435, 450, 527
Frankel 638
Frenkel 365, 491, 508, 510
Fresnel 11, 134
friktsioonülekanne 140, 147
frontaalne takistus 287
Fulton 378
füüsikaline atmosfäär 227
füüsikaline pendel 311
füüsikaline relativism 30

Gaasi erikonstant 398
gaasi kaal 408—409
gaaside kineetilise teooria põhivõrrand 411—412, 580
gaasi kriitiline kiirus 636
gaasi mandumispiirkond 417
gaasi sisehõõrde tegur 453—455
gaasi voolamine 634—640
Gaede 461
Galilei 6, 48, 52, 57, 59, 68—69, 72, 78, 126, 156, 171
Galilei relatiivsusprintsiip 68
gasodünaamika 630
gasodünaamika põhivõrrand 631
Gauss 76, 77, 135, 136
Gay-Lussac 394
Gay-Lussac'i seadus 394
geotsentriline maailmasüsteem 169
Gibbs 445, 538, 605, 618
Gibbs-Helmholtzi võrrand 615
Gilbert 173
Goldhammer 485
Goldschmidt 534, 535, 536, 537
Golitsõn 341, 558
gradient 193
grafostaatika 133
gramm-molekul 390
gravitatsioon 57, 58
gravitatsioonikonstant 175, 178
gravitatsioonipotentsiaal 190, 192
gravitatsiooniseadus 58, 59, 77, 133, 173, 175
gravitatsiooniväli 190
Green 135, 136
Grothuss 519
grupikiirus 341—344
Grüneisen 542, 552
Guericke 460
Guericke pump 460
Gutenberg 183
güroskoop 213
güroskoopiline jõud 215
güroskoopiline kompass 216
güroskoopiline moment 215
güroskoopiline stabilisaator 216
Haakekaal 147
Haalck 182, 183
Hagen 274
Hagen-Poiseuille'i seadus 274
Hamburger 155
Hamilton 76, 134
harmooniline analüüs 315
harmooniline võnkumine 307
harmooniliste võnkumiste teooria 308
Heilandi detander 474
Heisenberg 11, 618
helikopter 302
Helmholtz 134, 196, 257, 364, 368, 382, 588, 611
Helmholtzi resonaator 356
Henry 524
Henry seadus 524
Heron 377
Hertz 56, 77, 135, 155
Hess 587—588
heterogeenne keha 388
Hirn 328, 423
Hittorf 519
hobujõud 108
Hodakov 537
Hollweg 461
homogeenne keha 388
homogeenne väli 194
hoog 98
Hooke 57, 165, 174, 223, 226
Hooke'i seadus 223, 224, 226, 228
Hooke'i šarniir 84, 85
Hugoniot 643
Hugoniot' adiabaat 644
Hugoniot' valem 644, 645
hulknurga reegel 34
Hume-Rosary 550
Huygens 11, 57, 134, 379
Huygensi printsiip 346
Hvolson 387
hõõre 139
hõõrdetegur 141, 142, 143
hõõrdevoolamine 256
hääl 345
hääleenergia tihedus 352
hääle kiirus 348

hääle rõhk 348
häälesagedus 363
hääle tugevus 351
Hückel 523
hüdraulika 259—260
hüdrauliline akumulaator 249
hüdrodünaamiline rõhk 262—263
hüdroelektrijaam 269—270
hüdrostaatiline paradoks 247
hüdrostaatiline rõhk 246—247, 262—263
hüdrauliline press 249
hüdrauliline raadius 274
hügromeeter 471

Ideaalne gaas 415—416
ideaalne liikumine 59
ideaalne vedelik 246
Iljin 561
impulss 70, 73
induktiivne takistus 299
indutseeritud dipoolmoment 577
inertne mass 61, 77, 78
inertsiaalsüsteem 65, 66, 68
inertsimoment 201, 204
inertsiraadius 206
inertsiseadus 56, 59—60, 65
inertsjõud 60—61, 91—97, 102, 129, 131, 218
integraal 101
interferents 334
intervall 369
inversioontemperatuur 473
inžektor 264
ionosfäär 284
isobaariline protsess 570
isokooriline protsess 570
isoleeritud süsteem 607
isoprotsessid 570
isoterm 570
isotermilised protsessid 395, 570, 579
isotroopsus 226, 529

Jacobi 76, 134
jahutaja 591
Jeans 219
Joffe 237, 240
Jouget 645
Jouget' võrrand 645
Joule 380, 382, 423, 450, 581
Joule'i seadus 424—425
Joule-Thomsoni efekt 423, 473
jõud 7, 18, 53, 56, 58, 70, 76, 78, 79, 85, 88, 89, 139
jõu elementaarimpulss 73
jõuimpulss 72—73, 98
jõumasin 138
jõu summaarne impulss 73
jõumoment 157, 199
jõudude mõju sõltumatuse printsiipi 74
jõupaar 118, 199
jõupaari moment 200
jääkdeformatsioon 226, 235

Kaal 23, 57—58, 158—161
kaalu olenevus geogr. laiusest ja kõrgusest 179—182
kaja 346
kaldpind 91
kaldpõrge 151
kalestus 235
kalor 393
kalorimeetriline aksioom 381
Kamerlingh Onnes 474
kang 157—158
Kant-Laplace'i teooria 196—197, 210
kaotatud jõud 127
kapillaarne kondenseerumine 563
kapillaarne laine 340
kapillaarsus 500
Kapitsa 436, 475
Kapustinski 537
karburaator 265
kardaanripe 213
Kármán 278
kastepunkt 471
kasutegur 138
katioonid 519
katkemistugevus 226
kavitatsioon 264
keemiline potentsiaal 445
keemiline termodünaamika 618

keerdvõnkumised 311
keerised 256—258, 275—280, 285—286, 297—299
Keesom 555, 556
keha 388
keha oleku termodünaamilised parameetrid 389, 390
keha termodünaamiline olek 389
Kepler 6, 52, 132, 171
Kepleri seadused 171—175
Kertiss 660
keskkonna akustiline takistus 350
keskmine kiirus 38
keskmine molekulkaal 399—400
kesktõmbejõud 83, 84, 92, 99
kesktõmbekiirendus 44
kilogramm-meeter 108
kinemaatilised paarid 163—167
kiirendus 40
kiirenduste liitmise seadus, 49—51, 66
kiirgusenergia 430
kiirgusenergia termodünaamika 618
kiirus 36
kiiruse gradient 270
kiiruste liitmise seadus 69
kinemaatika 28, 57
kineetiline energia 98, 101—103
kinemaatiline paar 156, 163
kinemaatiline viskoossus 290
Kitaigorodski 244
klaaskiud 245
Klassen-Nekljudova 237
Klein 216
Knudsen 457, 458
Knudseni manomeeter 458
kogurõhk 263
koherentsus 334
koht 62
kokkusurutava gaasijoa pidevuse võrrand 638
kokkusurutavus 230
kolbpump 250
kolmikpunkt 543
koma 369
kompressioonimoodul 228
kompressioonitegur 230
kompressorid 669
kondenseerumine 471—475
konservatiivsed jõud 119, 187
konservatiivne süsteem 119
konsonants 369
kontraktsioonihüpotees 196
konvektsioon 137, 436
kooldumistasapind 42
koordinaadistik 28
Kopernik 6, 170
Kopp 540
Kossel 534
Kotsin 283
Kovalevskaja 135—136
Krassovski 181
kriisinähtus 296
kriitiline kiirus 273, 292
kriitiline punkt 466
kriitiline ruumala 467
kriitiline rõhk 467
kriitiline temperatuur 467
kristalli energia 551
kristalli kuju ja kasv 537—542
kristallograafilised süsteemid 532
kristallokeemia 534—535
kristallvõre 386, 529—530
kristallvõre tüübid 531—533
Krjakutnõi 253
Krõlov 217, 253
Krönig 380, 383, 396
krüoskoopiline konstant 546
krüoskoopiline meetod 519
kujuelastsus 223
kujutegur 288
kulissmehhanism 165
kunstlik horisont 216
Kurbatov 484
Kurnakov 549
Keeson 474
kustuvad võnkumised 319
Kuznetsov 238
kuuldelävi 363
kuuldepiirkond 363
kvadrupoolmoment 557
kvantide akustika 375
kõnehäälik 360

kõvadus 240
kõvaduse skaala 240—241
kõva keha 198
küllastunud lahus 444

Lagrange 76, 126, 134
laine 329
lainepikkus 330
lainete hajumine 337
lainetustakistus 229
lainevõrrand 329
lahused 515
laminaarne voolamine 273, 277
Landsberg 375
Langmuir 463, 506, 561
Langmuir'i difusioonpump 462
Langmuir'i valem 562
Laplace 136, 495, 499
Laplace'i valem 348, 499
latentne aurumissoojus 465, 511
Laval 638, 654
Lavoisier 380
Laue 530
Lebedev 348
Legendre 138
lenduvus 512
lennuk 288, 297—304
lennuki kvaliteet 301
lennuki polaar 300
Lenz 7, 382
Leonardo da Vinci 156, 169
Lewis 618
Lewis'i aktiivsuseteooria 618
Lesage 134
Leverrier 184
lihtmehhanismid 156
liikumine 12, 13
liikumishulga jäävuse seadus 56, 88, 115
liikumishulk 70, 73, 85, 87, 98, 112, 114—115
liikuv orienteerumissüsteem 48, 50
liiter 105
Linde 473
Lissajous 317
Lissajous kujundid 317
liugehõõre 140
Ljapunov 136, 211
Lomonossov 7, 56, 182, 379—380, 392, 588
Lomonossovi universaalbaromeeter 182
London 558, 563
Lorentz 135, 458
Loschmidt 437
Lovell 184
Luginin, 492, 588
lõpmata väike suurus 35
lõõmutamine 235
lööklaine 640, 641

Maa atmosfäär 281—284
Maa mass 183
Maa tihedus 183
Maa mõõtmed 183, 191
Maa kuju 180
maailma soojussurm 622—629
Mac Ben 561
Mach 9, 18, 76
Machi arv 639
Machi koonus 648
Mac Kellog 135
MacLeod 495
Mac Leod'i manomeeter 459—460
Madelung 552
Madelungi konstandid 553
magnetenergia 98
Magnus 534
Makarov 253
makrofüüsika 14
Malõšev 167
Mandelštam 375
margapuu 160
Mariotte 281
masin 138
mass 23, 57, 78
masskese 66, 112, 113
masskeskme liikumise teoreem 117
mažoorheliredel 370
mažoorkolmkõla 370
mateeria 12, 55, 56, 64
mateeria aatomiline ehitus 6

mateeria põhivormid 15, 16
materiaalne punkt 31
matemaatiline elastsusteooria 223
matemaatiline pendel 310—311
Mathias 484
Maupertuis 134
Maxwell 7, 135, 349, 380, 383, 396, 404, 405, 419, 420
Maxwelli kiiruste jaotuse seadus 402—403, 405—408, 445, 605
Maxwelli paradoks 410
Mayer 380, 382, 426, 588
Mayeri võrrand 426
meetersüsteem 105
mehhaanilise energia hajumine 155
mehhaaniline haakumine 140
mehhaaniline liikumine 13, 28, 55
mehhaaniline süsteem 32, 111—112
mehhaanika I seadus 59—61
mehhaanika II seadus 71, 105, 307—308
mehhaanika III seadus 84, 256
mehhanism 138
Melde 358
meloodia 368
Mendelejev 160, 383, 396, 468, 492, 523
menisk 501
merelaine 340
meretõusu laine 340
Mersenne 359
Mertsalov 167
Meštšerski 74, 75
metallide väsimus 240
metatsenter 252
mikrofüüsika 14
Milne 10
minoorheliredel 371
minoorkolmkõla 370
mitteelastne põrge 151
mittepööratavad protsessid 607, 609—610
mitteühtlane liikumine 36
Mohs 240
molekulaarjõud 14
molekulaar-kineetiline teooria 383
molekulaar-soojuslik liikumine 380
molekulaarpump 461—462
molekulkaal 390
molisatsioon 520
monokristallid 529
Montgolfier 253
mool 390
moolruumala 390, 396
moolruumalade aditiivsuse reegel 484
Morozov 110
Možaiski 303
muusikaline intervall 368
mõju 18, 84, 431
märgamine 500
märgperimeeter 274
müra 361

Nadeždin 469, 483
nafta krakkimine 651
Neljubov 155
Nernst 541, 618
Nernsti seadus 565, 620
Neumann 134, 540
Neumann-Kopp'i seadus 540
Newcomen 378
Newier 134
Newton 6, 52, 56, 57, 62, 63, 64, 129, 131, 132, 133, 173, 175, 189, 270, 379
Newtoni jahtumisseadus 434
Newtoni liikumise võrrandid 72
nihe 12, 28, 31
nihke- (torsioon-) moodul 232
nihkevektor 32
nukkmehhanism 165
nullenergia 558
nurkkiirendus 46
nurkkiirus 45, 306, 309
nurksagedus 306, 309
nutatsioon 217

Oklusioon 525
oleku diagramm 543
oleku tõenäosus 402—403
omadifusioon 439
omasagedus 320

omavõnkumine 320
olekuvõrrand 393—394
orienteerumissüsteem 28
Oseeni valem 295
osmootne rõhk 517
Ostrogradski 126, 134
Ostwald 589
Ostwaldi seadus 522
otsepõrge 151
otsevoolukatel 657
Otto tsükkel 650

Paisumislaine 332
Papin 378
parameetriline resonants 359
Parsous 660
partsiaalne rõhk 415
Pascal 247—248
Pascali seadus 246, 281
perigee 172
perpetuum mobile 377, 565—566, 596
Perrin-Galle manomeeter 458
Petrov 144, 271
Pictet 473, 484
Pictet' reegel 553
piesoelektriline efekt 373—374
piirkiht 275—276
piirkiirus 28
pikilaine 331
pindaktiivne aine 505—507
pindpinevus 493—496
pinge 227
pinnaenergia miinimumi printsiip 538—539
pinnalained 332, 341
Pirogov 408
Pitot' toru 263
plaaner 302
Planck 540, 589, 618
Planck'i valem 422
planeedid 169—175, 182—185, 210—211
plastilisus 236—238, 243
plastmass 243
pleksiklaas 243
plokid 161
Poincare 136
Poiseuille 274
Poisson 134, 582
Poisson'i adiabaat 583—584, 644
Poisson'i tegur 231
Poisson'i võrrandid 582—584, 634
polaar 300
Polany 561, 563
polariseeruvus 557
Polzunov 378
polükristallid 529
polüspast 161
polütroobi võrrand 649
potentsiaal 190
potentsiaali gradient 193
potentsiaalne energia 98, 103
potentsiaalne voolamine 256
Prandtl 278, 279, 206
Predvoditelev 376, 413
pretsessioon 217
pretsessioonikoonus 217
propellerturbiin 267
proportsionaalsuse piir 226
psühhromeeter 471
Ptolemaios 168
puaas 272
pulverisaator 264
pumbad 250, 264—265, 460—462
Putilov 419, 553
põhiorienteerumissüsteem 48
põhitoon 356
põrge 137, 149
põrkejoon 151
pöör 162
pööratavad protsessid 607
pöörlemine 45
pöörlemise faas 45
pöörlemise mõttes ekvivalentsed massid 200
pöörlemishulga jäävuse seadus 118, 209
pöörlemishulk 208

Quasielastne jõud 308

Raadiusvektor 29
radiomeetriline efekt 458

raketid 661—662
Ramzin 657
Rankine'i tsükkel 654—655
Raoult 515, 519, 545
Raoult'i seadus 515—516
raske mass 77, 78
raskuskese 58, 112
raskuskiirendus 72, 106, 179—182
Rayleigh 348, 353
Rayleigh' ketas 351
reaalne gaas 464
reaktiivjõud 661
reaktiivmootor 661—669
reaktsioonijõu koefitsient 309
Rebinder 241
Rebinderi efekt 505
relaksatsiooniaeg 365, 510
relaksatsiooniline kuuldeteooria 365
relatiivne liikumine 47, 48, 62, 66
relativistlik mehhaanika 69
relatiivne niiskus 471
relatiivne ruum 62
relatiivsusteooria 30, 69, 129
reoloogia 238
Resal 135
resonants 322
reverberatsioon 355
Reuleaux 156
Reynolds 145
Reynoldsi arv 290
Richards 179
Richman 588
Riemann 641
Riemanni võrrandid 642
ringprotsess 569—570, 591, 614
ristlaine 331
Roberval'i kaal 160
Rome 537
Rževinkin 367, 370, 374
Rumford 381
ruumelastsus 222
ruumvõre 386, 529—530
ruupor 354
rõhk 227
rõhk vedeliku sees 247
rõhumise tsenter 252
röntgeno-struktuurne analüüs 530
ründenurk 300

Schiff 493
Schiller 419
Schlick 216
Schönflies 530
Schrödinger 618
Sears 375
seisev laine 338
seismilised lained 341
Sementšenko 468, 469
seosed 123
seosjõud 124—125
seoste reaktsioon 128
seotud energia 611, 612
sidejõud 551
sise-elastsusjõud 226
siseenergia 98, 386, 423, 570—571, 586—587, 611, 632
sisehõõre 144, 244, 254, 270, 490
sisehõõrde tegur 271, 510
sisejõud 111, 115
sisepõlemismootor 648—649
sisepõlemismootori kasutegur 651
skaalar 29
skematiseerimine 25—26, 130
Smoluhhovski 457
Sokolov 375
soojusaine teooria 379, 383
Solovjov 167
Sommerfeld 145, 216
Somov 135, 167
soojusallikas 589
soojusejuhtivus 434
soojusejuhtivuse koefitsient 435
soojusliikumine 13, 56
soojuse mehhaaniline ekvivalent 382, 574
soojuse regeneratsioon 597
soojusjõumasina kasutegur 592, 594—595
soojusneeldumise koefitsient 432
soojuslik tasakaal 391, 430
soojussisalduvus 470, 613, 631—633
Sperry 216

staapelkiud 245
staatika 27, 57
staatiline rõhk 262
Stanton 638
statistiline meetod 401—405
Stefan-Boltzmanni jahtumisseadus 433
Stefan-Boltzmanni seadus 431, 527
Stefani konstant 431, 433
Steklov 136
Stenon 537
Stephenson 379
Stevin 251
Stokes'i seadus 294
Stoletov 468, 473
stratosfäär 283
stratostaat 254
Stumpf 372
sublimatsioon 542
sublimatsioonisoojus 542
suhteline deformatsioon 225
sulamisdiagramm 546—549
sumbuvuse logaritmiline dekrement 320
sumbuvustegur 319
sundvõnkumine 320
sundvõnkumise amplituud 321
superpositsiooni printsiip 334
surveturbiin 267
suuruskese 252
suurte arvude seadus 403
süsteemi kineetiline energia 103

Šmidt 210
Štern 408
Šuleikin 283

Zelinski 561

Žikler 265
Žukovski 136, 145, 260, 300, 303
Žukovski profiil 297

Taandatud soojus 598
taevakehade mass 182—185
tagasilöök 116
tahke keha 529
tahke lahus 548
tangentsiaalkiirendus 42
tangentsiaalne jõud 83, 99
tali 161
Tarassov 541, 553, 562
Tarassovi ruutude seadus 542
tasakaaluolek 389
tasakaaluprotsess 608
tasakaal 121—122, 127
tasakaalustamata olek
tasalaine 349
Taylor 359
tehniline atmosfäär 227
tehniline termodünaamika 617
Teiss 524
tektoonilised jõud 237
temperatuuri gradient 434
temperatuuri skaala 391
tempereeritud heliredel 371
teooria 5, 16, 22
termia 393
termiline dissotsiatsioon 428
termiline efusioon 457
termodünaamika 7, 564—565
termodünaamika I printsiip 565, 566
termodünaamika II printsiip 565, 566, 574—575, 589—590
termodünaamika põhivõrrand 602—603
termodünaamiline tasakaal 444
termodünaamiline tõenäosus 605
Thomson (Kelvin) 56, 134, 135, 257, 383, 418, 423, 514, 589
tihendushüpe 641, 646—647
Timirjazev 457, 458
Titov 561
Torricelli 266
Torricelli valem 265—266
trajektoor 32
transformeeriv masin 138
transportiv masin 138
Trevetik 379
troposfäär 283
Trouton 484
Troutoni reegel 484
tsementiitimine 442
tsentraalne põrge 151

tsentrifugaalpump 250
Tsiolkovski 74
töömasin 138
tsükkel 569—570, 591, 614
Tšaplõgin 145, 300, 303
Tšebõšev 156, 166
tugevus 238, 239
tugevuse piir 234
tuiklemine 316, 368
turbulentne voolamine 257, 273, 277—278
tõeline kiirus 38
tõenäoseim kiirus 406, 414
tõmbediagramm 234
tõmme 137, 146
tõstejõud 288, 298
tämbr 357, 372
täpse lokaliseerimise printsiip 33
töö 98, 99, 100
töö ekstensiivsustegur 599
töö element 100
töö integraal 100—101
töö intensiivsustegur 599
töötav keha 589
töö termiline ekvivalent 574
Tyho Brahe 171

Ujuvus 252
ultraheli-defektoskoop 375
ultrahelilokatsioon 370
ultraheliline valgusmodulaator 375
ultrahääl 373
Umov 56, 135, 352, 439
universaalne gaasikonstant 397

Vaakuum 456
vaakuumpumbad 460—462
vabadusaste 122, 419
vabaenergia 497, 612, 613
vabajoaturbiin 268
vaba langemine 72
vaba tee pikkus 437, 447
vaba telg 212
vaba voolamine 256
vaba võnkumine 320
vahtklaas 244
valentsus 521, 556, 559
valutunde lävi 363
van der Waals 468, 475, 495, 555, 556
van der Waals'i võrrand 475—477, 483
van Laar 477
van't Hoff 517, 519, 618
Varignon 133
Varignoni lause 201
vaskammoniaaksiid 245
vastavate olekute seadus 483
vedelike ehitus 489—493
vedelikupunkt 465
vedrukaalud 57, 58
veejoapump 264—265
Velikanov 278
veerehõõre 140, 145
veeväljasurve 252
vektor 29
vektordiagramm 312
vektorkorrutis 51
veohõõre 147
veojõud 147
Verhovski 167
vesiratas 267
vesiturbiin 267
Vinogradov 524
vinüülkiud 245
viriaalkoefitsient 480
visatud kehade liikumine 80—81
viskoossus 144, 244, 254, 270, 490
viskoossuse tegur 271, 510
viskoossustakistus 294
viskosimeeter 272
Viviani 68, 171
Volarovitš 490
Voltaire 379, 380
voolamine 256
voolavuse piir 226, 234
voolavustegur 271
voolujooned 255
voolutoru 255
võnkumiste sumbuvuse logaritmiline dekrement 320
võrdlev füüsika 483
Vulf 530, 539

võimalike nihete printsiip 125—127
võimsus 99
võnkeamplituud 307
võnkefaas 306
võnkeperiood 307
võnkesagedus 307
võnkumiste interferents 312—313
vähima jõukulutuse printsiip 135
väikseima mõju printsiip 134
välisjõud 111—112
välja potentsiaal 190

Watt 378
Watt'i indikaator 378
Weber-Fechneri seadus 366
Wright 304
Wessel 379

Õli-rotatsioonipump 461

Äärenurk 503

Ühikute süsteem 105—107
ühtlane liikumine 36, 62
ühtlaselt aeglustuv liikumine 79
ühtlaselt kiirenev liikumine 79
ülekantav kiirendus 49
ülekantav liikumine 48
ülekuumendatud aur 466, 656
ülemtoon 356

Young 381
Young'i moodul 224, 226, 228, 230

SISUKORD

Eessõna 3
Sissejuhatus 5

ESIMENE OSA

MEHHAANIKA FÜÜSIKALISED ALUSED. AKUSTIKA

I peatükk

Mehhaaniline liikumine (kinemaatika põhimõisted)

§ 1. Nähtuste vastastikusest seosest ja nende skematiseerimise lubatavatest piiridest füüsikas 25
§ 2. Orienteerumissüsteem 28
§ 3. Materiaalne punkt ja tema nihe 31
§ 4. Vektorite geomeetriline liitmine. Elementaarnihe 33
§ 5. Liikumise kiirus 36
§ 6. Liikumise kiirendus 40
§ 7. Tangentsiaal- ja kesktõmbekiirendus 42
§ 8. Nurkkiirus ja nurkkiirendus 45
§ 9. Absoluutne, ülekantav ja relatiivne liikumine 47
§ 10. Kiirenduste liitmise seadus 49

II peatükk

Newtoni seadused

§ 11. Mõned ajaloolised märkused. Mass ja kaal 52
§ 12. Newtoni esimene seadus (inertsiseadus) 59
§ 13. „Paigalseisu" ja „ühtluse" mõistetest 61
§ 14. Inertsiaalsüsteem. Relatiivsusprintsiip 65
§ 15. Newtoni teine seadus 70
§ 16. Mehhaanika teise seaduse erinevad käsitused 76
§ 17. Liikumine konstantse jõu mõjul 79
§ 18. Newtoni kolmas seadus 84
§ 19. Jõudude staatiline ja dünaamiline avaldumine 88
§ 20. Inertsjõud. Kesktõukejõud 91

III peatükk

Töö ja energia

§ 21. Töö, energia, võimsus. Töö element ja integraal 98
§ 22. Kineetiline energia ja potentsiaalne energia 101
§ 23. Mõõdusüsteemid ja mehhaaniliste suuruste dimensioonid . . 105

IV peatükk

Süsteemi dünaamika

§ 24. Mehhaaniline süsteem. Sise- ja välisjõud. Masskese 111
§ 25. Liikumishulga jäävuse seadus ja masskeskme liikumise teoreem 114
§ 26. Energia jäävuse seadus konservatiivsetes süsteemides. Potentsiaalse energia miinimum tasakaalu korral 119
§ 27. Vabadusastmete arv ja seosjõudude töö. Võimalike nihete printsiip 122
§ 28. D'Alembert'i printsiip 127
§ 29. Mehhaanika areng pärast Newtonit 132

V peatükk

Jõudude ja energia mehhaaniline ülekandmine (hõõre, põrge, tõmme)

§ 30. Energia ja jõudude ülekandmine 137
§ 31. Hõõre. Tõmme 140
§ 32. Põrge 149
§ 33. Lihtmehhanismid ja kinemaatilised paarid 156

VI peatükk

Ülemaailmse gravitatsiooni seadus ja taevamehhaanika elemendid

§ 34. Ajaloolised teatmed. Kepleri seadused 168
§ 35. Newtoni gravitatsiooniseadus 175
§ 36. Kaalu ja raskuskiirenduse sõltuvus koha kõrgusest ja geograafilisest laiusest 179
§ 37. Päikese, Maa ja planeetide massi arvutamine 182
§ 38. Potentsiaalne energia ja gravitatsiooni potentsiaal 185
§ 39. Mõned teoreemid gravitatsiooni potentsiaali kohta 192
§ 40. Osakeste süsteemi potentsiaalne energia 195

VII peatükk

Kõvade kehade pöörleva liikumise dünaamika

§ 41. Kõvade kehade kulgev ja pöörlev liikumine. Jõumoment . . 198
§ 42. Pöörleva liikumise kineetiline energia. Inertsimoment. Inertsiraadius 201
§ 43. Pöörleva liikumise dünaamika põhivõrrand 207
§ 44. Vabad teljed. Güroskoop 211
§ 45. Coriolis'e inertsjõudude avaldumine 219

VIII peatükk

Elastsusteooria elemendid ja kehade mehhaanilised omadused

§ 46. Nähtustest, mis määravad tahkete kehade elastsed omadused . 222
§ 47. Hooke'i seadus. Rõhu ja pinge mõõdud. Deformeeritud keha energia 225
§ 48. Kompressioonimoodul. Kokkusurutavus 228

§ 49. Young'i moodul, Poisson'i tegur, nihkemoodul ja nendevaheline seos 230
§ 50. Tahke keha mehhaaniliste omaduste iseloomustamine tõmbediagrammi kaudu. Kalestusnähtus 234
§ 51. Plastilisus 236
§ 52. Tugevus ja kõvadus 238
§ 53. Tähtsamate materjalide mehhaanilised omadused 241

IX peatükk

Hüdromehhaanika alused

§ 54. Pascali seadus 246
§ 55. Archimedese seadus 251
§ 56. Hüdrodünaamika põhimõisted ja -suunad 254
§ 57. Bernoulli võrrand 260
§ 58. Hüdrauliline energia 266
§ 59. Viskoossus ja vedeliku voolamine hõõrdumisel 270
§ 60. Piirkiht ja keeriste tekkimine. Turbulentse voo ehitus 275

X peatükk

Aerodünaamika alused

§ 61. Andmeid atmosfäärist. Baromeetriline valem 281
§ 62. Kehade liikumine õhus. Euleri paradoks 284
§ 63. Reynolds'i arv. Kinemaatiline viskoossus 290
§ 64. Sisehõõrdumistakistus (Stokes'i seadus). Kriisinähtus 293
§ 65. Tiiva tõstejõud ja lennuki veojõud 297

XI peatükk

Võnkliikumise dünaamika

§ 66. Harmooniline võnkumine 305
§ 67. Harmooniliste võnkumiste energia ja omasagedus 308
§ 68. Võnkumiste interferents 312
§ 69. Võnkumiste liitmine 314
§ 70. Kustuvad võnkumised 318
§ 71. Sundvõnkumised. Resonants 320
§ 72. Seotud võnkumised 325

XII peatükk

Õpetus lainetest

§ 73. Laineprotsess. Lainevõrrand. Lainete liigid 328
§ 74. Lainete interferents. Seisvad lained 332
§ 75. Lainete faasi- ja grupikiirus 340

XIII peatükk

Akustika

§ 76. Hääl kui füüsikaline nähtus. Häälelainete levimine 343
§ 77. Hääle intensiivsus 351
§ 78. Hääle sagedus ja koostis 356
§ 79. Doppleri efekt 361
§ 80. Hääl kui psühho-füsioloogiline nähtus 362
§ 81. Hääle kõrgus ja tämbr 367
§ 82. Ultrahääl 373

TEINE OSA

MOLEKULAARFÜÜSIKA JA TERMODÜNAAMIKA

XIV peatükk

Molekulaar-soojuslik liikumine

§ 83. Ajaloolised andmed 377
§ 84. Molekulaar-soojusliku liikumise pilt 383
§ 85. Kehade oleku termodünaamiline karakteristika 388
§ 86. Clapeyron'i võrrand 394

XV peatükk

Molekulaar-kineetilise teooria alused

§ 87. Statistiline meetod füüsikas 401
§ 88. Maxwelli seadus molekulaarsete kiiruste jaotusest gaasis . . . 405
§ 89. Gaaside kineetilise teooria põhivõrrand 410
§ 90. Absoluutse temperatuuri molekulaar-kineetiline mõiste . . . 413
§ 91. Absoluutse temperatuuri täpsustatud (termodünaamilisest) mõistest 415
§ 92. Soojuslik tasakaal ja energia jaotus vabadusastmete järgi . . 419
§ 93. Maxwelli gaasi soojusmahtuvuste teooria 423

XVI peatükk

Soojuse levimine, difusioon ja viskoossus

§ 94. Soojuskiirgus (Stefani ja Newtoni seadused) 430
§ 95. Soojusejuhtivus (Fourier' seadus) 434
§ 96. Difusioon (Fick'i seadus) 436
§ 97. Termodünaamiline tasakaal ja Boltzmanni *e*-lause 442
§ 98. Gaasimolekulide keskmine vaba tee pikkus 447
§ 99. Gaaside soojusejuhtivuse molekulaarteooria 450
§ 100. Gaaside viskoossuse molekulaarteooria 452
§ 101. Vaakuum. Manomeetrid. Õli-, molekulaar- ja difusioonpumbad . 456

XVII peatükk

Reaalsete gaaside ja aurude füüsika. Van der Waals'i võrrand

§ 102. Küllastavad ja ülekuumendatud aurud. Andrews'i diagramm . . 464
§ 103. Gaaside kondenseerumine 471
§ 104. Van der Waals'i võrrand ja mõningaid teisi olekuvõrrandeid . . 475
§ 105. Vastavad olekud 481
§ 106. Kvalitatiivsetest muundumistest soojuslikes protsessides . . . 485

XVIII peatükk

Vedelike füüsika

§ 107. Vedelike mehhaanilised ja termodünaamilised omadused . . . 487
§ 108. Pindpinevus 493
§ 109. Laplace'i valem. Kapillaarsus ja märgamine 499
§ 110. Pindaktiivsed ained 505
§ 111. Vedelike ehitus 508
§ 112. Aurustumise kineetika. Küllastava auru rõhu sõltuvus vedeliku pinna kõverusest. Thomson-Schilleri valem 510
§ 113. Auru rõhu vähenemine lahuse kohal ja lahuse keemistemperatuuri tõus. Raoult'i seadused 515
§ 114. Osmootne rõhk. Van't Hoff'i seadus 516
§ 115. Elektrolüütiline dissotsiatsioon. Ostwaldi seadus 518
§ 116. Absorptsioon. Henry seadus 524
§ 117. Vastandlike protsesside kokkupõrge molekulaar-soojuslikes nähtustes 525

XIX peatükk

Tahkete kehade füüsika

§ 118. Kristallide ehitus 529
§ 119. Kristallokeemia mõiste 534
§ 120. Kristallide kuju ja kasv 537
§ 121. Tahkete kehade soojusmahtuvus 540
§ 122. Tahkete kehade sublimatsioon. Kolmikpunkt. Lahuse kristallisatsioon 542
§ 123. Sulamisdiagrammid 546
§ 124. Sidejõud kristallides 550
§ 125. Adsorptsioon 560

XX peatükk

Termodünaamika esimene printsiip

§ 126. Termodünaamika aine ja meetod. Termodünaamika printsiibid . 564
§ 127. Termodünaamilised protsessid. Siseenergia 567
§ 128. Mõistete „soojus" ja „töö" termodünaamiline sisu 572
§ 129. Termodünaamika I printsiibi võrrand. Isobaarilise ja isotermilise paisumise töö valemid 576
§ 130. Gaasi paisumise töö molekulaar-kineetilise teooria seisukohalt . 579
§ 131. Poisson'i võrrand ja gaasi adiabaatilise paisumise töö 581
§ 132. Termokeemilised võrrandid 586

XXI peatükk

Termodünaamika teine printsiip

§ 133. Jahutaja ja temperatuurivahede osa soojuse tööks muundumise protsessis 589
§ 134. Carnot' tsükkel ja teoreem taandatud soojuste summa kohta . . 593
§ 135. Entroopia. Termodünaamika põhivõrrand 599
§ 136. Entroopia statistiline mõte 604
§ 137. Pööratavad ja mittepööratavad protsessid. Tasakaaluprotsessid ja mittetasakaaluprotsessid 606
§ 138. Teoreem entroopia kasvamisest ja teoreemid tasakaalust . . . 609
§ 139. Gibbs-Helmholtz'i ja Clapeyron-Clausius'e võrrandid 613
§ 140. Nernsti soojuslause 619
§ 141. Niinimetatud „maailma soojussurmast" ja loodusnähtuste lõpmatust isearenemisest 622

XXII peatükk

Gasodünaamika

§ 142. Gasodünaamika põhivõrrand. Adiabaatiline soojuslangus . . . 630
§ 143. Gaasiadiabaatiline voolamine ja väljavoolamine 634
§ 144. Lööklained ja tihendushüpped. Hugoniot' adiabaat 640
§ 145. Sisepõlemismootorites toimuvad protsessid 648
§ 146. Aurumasinates ja auruturbiinides toimuvad protsessid . . . 653
§ 147. Reaktiivmootorid 661

Indeks 670

Константин Анатольевич Путилов
КУРС ФИЗИКИ
Том I
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja R. Siirak
Tehniline toimetaja M. Aardma
Korrektorid E. Toots ja H. Nassar

Ladumisele antud 29. X 1957. Trükkimisele antud 2. IX 1958. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 43. Arvutuspoognaid 46,14. Trükiarv 2000. Tell. nr. 1716. Trükikoda «Punane Täht», Tallinn, Pikk t. 54/58.

Hind rbl. 14.85

6—7

Trükivigu

Lk.	Rida	On	Peab olema
117	16. alt	$\frac{d(M^{v})}{dt} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$	$\frac{d(Mv)}{dt} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$
151	17. alt	v_2 nende kiirused enne põrget,	$v_2^{\prime}$ nende kiirused enne põrget,
179	9. alt	$\left(\frac{6371}{6371+1}\right) \approx 1 - \frac{2}{6371}$,	$\left(\frac{6371}{6371+1}\right)^2 \approx 1 - \frac{2}{6371}$,
275	1. alt	$C \approx 30$ kuni 50 $m^{\frac{1}{2}}/sek$	$C \approx 30$ kuni 50 $m^{\frac{1}{2}}/sek$
275	2. alt	$C \approx 80\ m^{\frac{1}{2}}/sek$,	$C \approx 80\ m^{\frac{1}{2}}/sek$,
406	20. alt	$dN = N \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u}{\varrho}\right)^2 \cdot e^{-\left(\frac{u}{\varrho}\right)^2} \cdot d\left(\frac{u}{\varrho}\right)$;	$dN = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u}{\varrho}\right)^2 \cdot e^{-\left(\frac{u}{\varrho}\right)^2} \cdot d\left(\frac{u}{\varrho}\right)$;
479	21. alt	seks $\frac{a}{v^{5/2}}$-ga,	seks $\frac{a}{v^{5/3}}$-ga,
480	5. ülalt	$\frac{a}{v^{5/3}}$	$\frac{a}{v^{5/3}}$
480	8. ülalt	$(p + \frac{a}{v^{5/3}})(v - b) = RT.$	$(p + \frac{a}{v^{5/3}})(v - b) = RT.$
556	15. ülalt	$\varphi = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mu_1\mu_2^2}{r^3}\right)\frac{1}{kT}.$	$\varphi = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}\right)^2 \frac{1}{kT}.$
582	17. ülalt	$\frac{\delta Q}{T} = vC_v\frac{\partial T}{T} + vR\frac{\partial v}{v} = 0$	$\frac{\delta Q}{T} = vC_v\frac{\partial T}{T} + vR\frac{\partial v}{v} = 0$
583	3. alt	$pv^{\varkappa} = const = e^{\frac{S-a_2}{C_v}}$	$pv^{\varkappa} = const = e^{\frac{S-a_2}{C_v}}$
599	3. ülalt	$\frac{\delta Q^{(a)}_{2\to3}}{T^{(a)}} = \frac{\delta Q^{(b)}_{2\to3}}{T_2^{(b)}}$ jne.	$\frac{\delta Q^{(a)}_{2\to3}}{T_2^{(a)}} = \frac{\delta Q^{(b)}_{2\to3}}{T_2^{(b)}}$
646	1. alt	Joon. 363. Kaldtihedushüpe	Joon. 363. Kaldtihendushüpe

Rbl. 14.85