EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

TÖÖJUHENDID KAUGÕPPEKESKKOOLIDE ÕPILASTELE

MATEMAATIKA

VII klass

TALLINN 1967

Задания для учащихся заочной средней школы

Математика. VII класс

На эстонском языке

Министерство просвещения Эстонской ССР
Таллин, Тынисмяги, II

Trükitud PI "Kommunaalprojekti" rotaprindil.
Tell. nr. 383-67.
Äratrükk. TRÜ rotaprint 1968. Paljundamisele antud
20.VIII 1968. Trükipoognaid 3,25. Tingtrükipoognaid
2,96. Arvestuspoognaid 2,73. Trükiarv 1200.
Paber 30 x 42. 1/4. Tell. nr. 497.
Hind 9 kop.

ÕPPEVAHEND

E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass.

Hiljemalt 5 päeva enne arvestuse sooritamise tähtaega tuleb esitada tööjuhendis nimetatud mahuga kodutöö. Kodutöö õigsus ja korralikkus mõjutavad arvestuse hinnet.

ARVESTUS NR. 1

Korrata. Arvude geomeetriline kujutamine arvteljel. Arvu absoluutväärtus ja vastandarvud. Ratsionaalarvude liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine. Üksliikme definitsioon, nende sarnasus, liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine. Hulkliikme definitsioon, tema liikmed, liikmete sarnasus, koondamine, liitmine ja lahutamine. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega. Korrutamise abivalemid:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

Hulkliikme tegureiks lahutamine ühise teguri sulgude ette toomise, liikmete rühmitamise ja valemite kasutamise võttega.

Hulkliikme teguriteks lahutamine mitme võtte abil.

Esimese arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) tehted ratsionaalarvudega;

b) algebraline avaldis; üksliikmed ja hulkliikmed; nende liitmine ja lahutamine (VII klassi õpikust I peatükk)

c) üksliikmete korrutamine, jagamine, astendamine; ja algtegurid VII klassi õpikust § 3, p. 1);

d) hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega VII klassi õpikust § 3, p. 2);

e) hulkliikme tegureiks lahutamine teguri sulgude ette toomise ja rühmitamise võttega (VII klassi õpikust § 4 ja § 5);

f) hulkliikme tegureiks lahutamine abivalemite kasutamise võttega (VII klassi õpikust § 6);

g) hulkliikme tegureiks lahutamine mitme võtte abil (VII klassi õpikust § 7).

MÄRKUSI 1. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Õppeaasta alguses tuleb hoolikalt korrata tehteid ratsionaalarvude, üksliikmete ja hulkliikmetega ning 6. klassi programmi kuuluvaid abivalemeid. Selle kordamise tulemusena peavad õpilased hästi tundma ja oskama rakendada järgmisi reegleid:

1) *kui liita ühesuguste märkidega ratsionaalarve* (sarnaseid üksliikmeid, hulkliikmete sarnaseid liikmeid), *siis on summal sama märk ja summa absoluutväärtus võrdub liidetavate* (sarnaste üksliikmete kordajate, hulkliikmete sarnaste liikmete kordajate) *absoluutväärtuste summaga*;

N ä i t e i d.

$$(-4)+(-2)+(-7)=-13$$
$$(+3)+(+5)+(+4)=+12$$
$$4+9+6=+19$$
$$-2-7-5=-14$$
$$3ab^2+2ab^2+6ab^2=11ab^2$$
$$(3au^3-2x^2y)+(5au^3-3x^2y)=8au^3-5x^2y$$

2) *kui liita erinevate märkidega ratsionaalarve* (sarnaseid üksliikmeid, hulkliikmete sarnaseid liikmeid), *siis on summal see märk, mis on suurema absoluutväärtusega liidetaval* (kordajal), *ja summa absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste*

(hulkliikmete sarnaste liikmete kordajate absoluutväärtuste) *vahega;*

N ä i t e i d.

$$(+4)+(-7)=-3$$
$$(-2)+(+8)=+6=6$$
$$8-5=+3=3$$
$$-6+2=-4$$
$$(+5a^2b^3)+(-3a^2b^3=+2a^2b^3=2a^2b^3$$
$$(-4u^3b^5)+(+2u^3b^5)=-2u^3b^5$$
$$(6a-3a^2u)+(5a^2u-2a)=2a^2u+4a$$
$$(8u^3a^2-5b^3x)+(2b^3x-4u^3a^2)=4u^3a^2-3b^3x$$

3) *ratsionaalarvude* (sarnaste üksliikmete, hulkliikmete sarnaste liikmete) *lahutamiseks tuleb vähendatavaga* (vähendatava kordajaga) *liita lahutatava* (lahutatava kordaja) *vastandarv;*

N ä i t e i d.

$$(+4)-(-2)=(+4)+(+2)=6$$
$$(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8$$
$$(-6)-(-9)=(-6)+(+9)=3$$
$$3a^2x^4-(+2a^2x^4)=3a^2x^4+(-2a^2x^4)=a^2x^4$$
$$-5u^3a^2-(-2u^3a^2)=-5u^3a^2+2u^3a^2=-3u^3a^2$$
$$(3xy^2-2a^3b)-(5a^3b-2xy^2)=3xy^2-2a^3b-5a^3b+2xy^2=$$
$$=5xy^2-7a^3b$$

4) *kahe ühesuguste märkidega ratsionaalarvu* (üksliikme) *korrutis ja jagatis on positiivne:,*

N ä i t e i d.

$$(+4)\cdot(+5)=20$$
$$(-2)\cdot(-8)=16$$
$$(-2a^3)\cdot(-5a^4)=10a^7$$
$$(+6u^3x^2)\cdot(+3u^2x^4)=18u^5x^6$$
$$(-20):(-5)=4$$
$$(+16):(+8)=2$$
$$(-15a^4x^2):(-3a^2x^2)=5a$$
$$(+30a^6):(+6a^2)=5a^4$$

5) *kahe erinevate märkidega ratsionaalarvu* (üksliikme) *korrutis ja jagatis on negatiivne;*

N ä i t e i d.

$$(+30):(-3)=-10$$
$$(-20):(+5)=-4$$
$$(-6)\cdot(+3)=-18$$

$$(+40a^3b^6):(-5ab^4)=-8a^2b^2$$
$$(-60a^4u^2):(+12a^2u^2)=-5a^2$$
$$(-4a^3)\cdot(+3a^4)=-12a^7$$
$$(+5u^3x^2)\cdot(-3u^5x^6)=-15u^8x^8$$

6) *hulkliikme korrutamisel* (jagamisel) *üksliikmega korrutatakse* (jagatakse) *hulkliikme iga liige selle üksliikmega ja tulemused liidetakse;*

Näiteid.

$$(24a^4x^3-60a^2x^2+48a^3x^4):(12a^2x^2)=\frac{24a^4x^3}{12a^2x^2}-\frac{60a^2x^2}{12a^2x^2}+\frac{48a^3x^4}{12a^2x^2}=$$
$$=2a^2x-5+4ax^2$$
$$(3a^2u-5a^3u^2+4au^3)\cdot(-4a^2u^3)=-12a^3u^4+20a^4u^5-16a^3u^6$$

7) *hulkliikme korrutamisel hulkliikmega tuleb ühe hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita;*

Näide.

$$(x^2-2x+3)(x+4)=x^3-2x^2+3x+4x^2-8x+12=$$
$$=x^3+2x^2-5x+12$$

8) *kuna astendamisel tuleb astendatav võtta nii mitu korda teguriks, kui suur on astendaja, siis vea ärahoidmiseks kirjutatagu korrutis pikalt välja;*

Näiteid.

$$3^3=3\cdot3\cdot3=27$$
$$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$$
$$a^3a^2=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)=a^5$$
$$u^6:u^2=\frac{u\cdot u\cdot u\cdot u\cdot u\cdot u}{u\cdot u}=u^4$$
$$(u^3)^2=u^3u^3=(u\cdot u\cdot u)\cdot(u\cdot u\cdot u)=u^6$$

9) *abivalemis «kahe arvu vahe ja nendesamade arvude summa korrutis võrdub esimese arvu ruudu ja teise arvu ruudu vahega» tuleb meeles pidada, et arvude järjekord loetakse vahe järgi;*

Näiteid.

$$(5-a)(5+a)=25-a^2$$
$$(a-6)(6+a)=a^2-36$$
$$(a+4)(4-a)=16-a^2$$

10) *summa ruudu (kuubi) ja vahe ruudu (kuubi) valemid tuleb meeles pidada järgmises sõnastuses, et vältida vigu:*

a) *kahe arvu summa (vahe) ruut võrdub esimese arvu ruuduga, pluss (miinus) kahekordne esimese ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut;*

b) *kahe arvu summa (vahe) kuup võrdub esimese arvu kuubiga, pluss (miinus) esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, pluss teise arvu ruudu ja esimese arvu kolmekordne korrutis, pluss (miinus) teise arvu kuup;*

Näiteid.

$$(3+a)^2=9+2\cdot 3\cdot a+a^2=9+6a+a^2$$
$$(a-5)^2=a^2-2\cdot a\cdot 5+25=a^2-10a+25$$
$$(4+a)^3=4^3+4^2\cdot a\cdot 3+a^2\cdot 4\cdot 3+a^3=$$
$$=64+48a+12a^2+a^3$$
$$(a-2)^3=a^3-a^2\cdot 2\cdot 3+2^2\cdot a\cdot 3-2^3=a^3-6a^2+12a-8$$

11) *kuna tehete sooritamisel üksliikmete ja hulkliikmetega, samuti abivalemite abil arvutamisel saadakse samasusi, siis kujuneb nende kontrollimine kergeks, kui anname tähtedele väikesi täisarvulisi väärtusi, sest samasuse mõlemate poolte arvulised väärtused peavad olema võrdsed.*

Näiteid.

a) $(2a-3b)^2=4a^2-12ab+9b^2.$

Kontroll. Olgu $a=2$ ja $b=3$, siis vasaku poole arvuline väärtus on $(2\cdot 2-3\cdot 3)^2=(4-9)^2=(-5)^2=25$ ja parema poole arvuline väärtus $4\cdot 2\cdot 2-12\cdot 2\cdot 3+9\cdot 3^2=16-72+81=25.$

Mõlema poole arvuliste väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

b) $(3a^2-2b)^3=27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3.$

Kontroll. Olgu $a=2$ ja $b=3$, siis vasaku poole arvuline väärtus on $(3\cdot 2^2-2\cdot 3)^3=(12-6)^3=6^3=216$ ja parema poole väärtus

$$27\cdot 2^6-54\cdot 2^4\cdot 3+36\cdot 4\cdot 9-8\cdot 27=1728-2592+$$
$$+1296-216=3024-2808=216.$$

Mõlema poole arvuliste väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

c) $(3a-4b+2)(2a+5)=6a^2-8ab+4a+15a-20b+$
$$+10=6a^2-8ab+19a-20b+10.$$

Kontroll. Olgu $a=2$ ja $b=3$, siis vasaku poole arvuline väärtus on $(3\cdot 2-4\cdot 3+2)(2\cdot 2+5)=-4\cdot 9=-36$ ja parema poole väärtus

$$6\cdot 2^2-8\cdot 2\cdot 3+19\cdot 2-20\cdot 3+10=6\cdot 4-48+38-60+10=$$
$$=72-108=-36$$

Võrduse mõlema poole arvuliste väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Märkus. Tähtedele, mille astendaja on ühest suurem, väärtust «üks» anda ei tohi, sest see ei võimalda avastada vigaseid astendajaid. Olgu näiteks arvutamisel saadud $(a+b)^2=a^3+2a^2b+b^2$. Kui $a=1$ ja $b=2$, siis on vasaku poole arvuline väärtus $(1+2)^2=3^2=9$ ja parema poole väärtus $1^3+2\cdot1^2\cdot2+2^2=1+4+4=9$. Vead jäävad avastamata, sest mõlema poole arvulised väärtused on võrdsed.

Kui aga $a=3$ ja $b=2$, on vasaku poole arvuline väärtus $(3+2)^2=5^2=25$ ja parema poole väärtus $3^3+2\cdot3^2\cdot2+2^2=27+36+4=67$. Mõlema poole arvuliste väärtuste erinevus sunnib viga otsima. Tuleb arvestada, et viga võib tekkida mitte ainult ülesande lahendamisel, vaid ka kontrollimisel.

Avaldise lahutamine tegureiks

Et edukalt õppida tegureiks lahutamist, tuleb korrata 2-, 3- ja 5-ga jaguvuse tunnuseid ja arvu algtegureiks lahutamist.

Hulkliikmeid on soovitatav tegureiks lahutada järgmiselt:

1) *kõigepealt tuleb sulgude ette tuua hulkliikme liikmete kõik ühised tegurid;*

Näiteid.

$$5a^2-10b^2=5(a^2-2b^2)$$
$$6a^3-2a^4=2a^3(3-a)$$

2) *kui sulgudesse jääb kaksliige (binoom), tuleb võimaluse korral leida, milliste avaldiste ruudud on kaksliikme liikmed ja rakendada ruutude vahe valemit;*

Näiteid.

$$5a^4-5a^2b^2=5a^2(a^2-b^2)=5a^2(a-b)(a+b)$$
$$16-4x^2=4(4-x^2)=4(2-x)(2+x)$$

3) *kui sulgudesse jääb kolmliige (trinoom), tuleb võimaluse korral leida, millised hulkliikme liikmed on ruudud, milliste avaldiste ruudud nad on, kas kolmas hulkliikme liige on nende avaldiste kahekordne korrutis ja jaataval korral rakendada kahe arvu summa või vahe ruudu valemit;*

Näiteid.

$$3x^2+6xy+3y^2=3(x^2+2xy+y^2)=3(x+y)^2$$
$$27a-18a^2+3a^3=3a(9-6a+a^2)=3a(3-a)^2$$

4) *kui sulgudesse jääb neliliige, tuleb võimaluse korral leida, millised hulkliikme liikmed on kuubid, milliste avaldiste kuubid nad on, kas üks hulkliikme ülejäänud liikmetest võrdub ühe leitud avaldise ruudu ja teise avaldise kolmekordse korrutisega ja kas viimane hulkliikme liige võrdub teise leitud avaldise ruudu ja esimese avaldise kolmekordse korrutisega ning jaataval korral rakendada kahe arvu summa või vahe kuubi valemit;*

Näiteid.

$$2u^4+6au^3+2a^3u+6u^3a=2u(u^3+3au^2+a^3+3u^2a)=$$
$$=2u(u+a)^3$$
$$45a^4-5a^5-135a^3+135a^2=5a^2(9a^2-a^3-27a+27)=$$
$$=5a^2(3-a)^3$$

5) *kui sulgudesse jäänud neliliige ei võrdu kahe arvu summa või vahe kuubiga, tuleb teguriteks lahutamisel kasutada rühmitamise võtet, pidades meeles, et korrutise saamiseks peab igasse rühma jääma sulgudesse sama tegur, mida sulgude ette võetakse.*

Näiteid.

1) $24+8a+12b+4ab=4(6+2a+3b+ab)=$
$=4[2(3+a)+b(3+a)]=4(3+a)(2+b)$

2) $3a^3-12a+3ab^2+6a^2b=3a[a^2-4+b^2+2ab]=$
$=3a[(a^2+2ab+b^2)-4]=3a[(a+b)^2-4]=$
$=3a(a+b-2)(a+b+2)$

Kontroll. Olgu $a=3$ ja $b=2$, siis samasuse vasaku poole arvuline väärtus on $3\cdot3^3-12\cdot3+3\cdot3\cdot2^2+6\cdot3^2\cdot2=81-36+36+$ $+108=189$ ja parema poole väärtus $3\cdot3(3+2-2)\cdot(3+2+2)=$ $=9\cdot3\cdot7=189$. Mõlemate arvuliste väärtuste võrdsus kinnitab teguriteks lahutamise õigsust.

Kodutöö nr. 1. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. Ülesanded: 41 (2. tulba 1. ja 2.); 42 (1. tulba 4. ja 2. tulba 4.); 49 (3.); 50 (3); 51 (2. tulba 3. ja 4.); 56 (9., 13., 14., 18.); 65 (4., 8., 9.); 66 (3. tulba 2. ja 3.); 71 (2. tulba 4. ja 5.); 77 (2. tulba 3. ja 4.); 78 (3. ja 4.); 79*(2. tulba 3. ja 4.); 94.

ARVESTUS NR. 2

Korrata. Harilike murdude, täisarvude ja segaarvude liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine.

Algebralise murru mõiste ja põhiomadus. Murdude liikmete märkide muutmine, taandamine, ühenimelisteks teisendamine, liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine.

Teise arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) algebralise murru mõiste ja põhiomadus; murru liikmete märkide muutmine ja murru taandamine (§ 8—§ 11);

b) algebraliste murdude ühenimelisteks teisendamine, liitmine ja lahutamine (VII klassi õpikust § 12 ja § 13)

c) algebraliste murdude korrutamine ja astendamine (VII klassi õpikust § 14);

d) algebraliste murdude jagamine (VII klassi õpikust § 15).

MÄRKUSI 2. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Eelkõige on vaja hästi korrata tehteid murdude ja segaarvudega ning arvu lahutamist algtegureiks. Õppides tehteid algebraliste murdudega, tuleb iga kord lähtuda sama tehte sooritamisest harilike murdudega.

Näiteid. 1) Laienda murd $\frac{2}{5}$ 2-ga: $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot2}{5\cdot2}=\frac{4}{10}$.

Laienda murd $\frac{a}{b}$ 3-ga: $\frac{a}{b}=\frac{3a}{3b}$.

Laienda murd $\frac{a}{b}$ m-ga: $\frac{a}{h}=\frac{ma}{mb}$.

2) Taanda murd $\frac{8}{12}$:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \text{ (taandasime 4-ga)}$$

Taanda murd $\frac{3a}{6b}$:

$$\frac{3a}{6b}=\frac{a}{2b} \text{ (taandasime 3-ga)}.$$

Taanda murd $\frac{7m+14}{7m-21}$ (lahutame enne lugeja ja nimetaja tegureiks):

$$\frac{7m+14}{7m-21}=\frac{7(m-2)}{7(m-3)}=\frac{m-2}{m-3} \text{ (taandasime 7-ga)}$$

Tuleb meeles pidada, et **taandada saab ainult ühiseid tegureid, mitte liidetavaid.**

Näiteid. a) $\frac{8+4}{5\cdot4}$ (ei tohi taandada neljasid).

Arvuta nii: $\frac{8+4}{5\cdot4}=\frac{12}{5\cdot4}=\frac{3}{5}$.

b) $\frac{27-6}{5\cdot 3}$ (ei tohi taandada 6 kolmega või 27 kolmega)

Arvuta nii: $\frac{27-6}{7\cdot 3}=\frac{21}{5\cdot 3}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$.

c) $\frac{8a+a}{5a}$ (ei tohi taandada a-ga).

Arvuta nii: $\frac{8a+a}{5a}=\frac{9a}{5a}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

3) Korruta murrud $\frac{3}{4}$ ja $\frac{4}{9}$ ning taanda, kui võimalik:

$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 9}=\frac{1}{3}$ (taandasime 3-ga ja 4-ga).

Korruta murrud $\frac{3a}{5b}$ ja $\frac{5u}{9x}$ ning taanda, kui võimalik:

$\frac{3a}{5b}\cdot\frac{5u}{9x}=\frac{3a\cdot 5u}{5b\cdot 9x}=\frac{au}{3bx}$ (taandasime 3-ga ja 5-ga).

Korruta murrud $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ ja $\frac{3a+3b}{5a-5b}$.

Lugeja ja nimetaja tuleb lahutada tegureiks ning taandada, kui võimalik:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{3a+3b}{5a-5b}=\frac{(a^2-b^2)(3a+3b)}{(a^2+2ab+b^2)(5a-5b)}=\frac{(a+b)(a-b)3(a+b)}{(a+b)^2\cdot 5(a-b)}=\frac{3}{5}.$$

Taandasime $(a+b)^2$-ga ja $(a-b)$-ga.

M ä r k u s. Kuna tegemist on samasusega, saab arvutamist kontrollida järgmiselt. Olgu $a=3$ ja $b=2$, siis on samasuse vasaku poole arvuline väärtus

$$\frac{3^2-2^2}{3^2+2\cdot 3\cdot 2+2^2}\cdot\frac{3\cdot 3+3\cdot 2}{5\cdot 3-5\cdot 2}=\frac{9-4}{9+12+4}\cdot\frac{9+6}{15-10}=\frac{5\cdot 15}{25\cdot 5}=\frac{3}{5}$$

(taandasime $5\cdot 5$-ga). Võrdsus parema poolega kinnitab arvutuse õigsust.

Eriti põhjalikult tuleb läbi töötada väikseima ühiskordse leidmine.

Antud üksliikmete väikseim ühiskordne (VÜK):

1) *on suurima kordajaga üksliige siis, kui ta jagub jäägita antud üksliikmetega:*

N ä i d e. Üksliikmete $14a^3b^3x^4$, $42a^5bx^2$ ja $84a^5b^3x^6$ väikseim ühiskordne on $84a^5b^3x^6$, sest see üksliige jagub jäägita antud üksliikmetega:

$$84a^5b^3x^6 : 14a^3b^3x^4 = 6a^2x^2$$
$$84a^5b^3x^6 : 42a^5bx^2 = 2b^2x^4$$
$$84a^5b^3x^6 : 84a^5b^3x^6 = 1$$

2) *võrdub korrutisega, mille tegureiks on kõik antud üksliikmetes esinevad tegurid, kusjuures iga tegur tuleb võtta kõige kõrgemas esinemisastmes.*

Näide.

$$36u^6b^2 = 2^2 \cdot 3^2u^6b^2$$
$$24a^2b^5 = 2^3 \cdot 3a^2b^5$$
$$10a^4u^3 = 2 \cdot 5a^4u^3$$

VÜK on $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5a^4u^6b^5 = 8 \cdot 9 \cdot 5a^4u^6b^5 = 360a^4u^6b^5$, sest antud üksliikmetes esinevad ainult tegurid 2, 3, 5, a, b ja u, kusjuures arvu 2 suurim astendaja on 3 (teises üksliikmes), arvu 3 suurim astendaja on 2 (esimeses üksliikmes), arvu 5 suurim astendaja on 1 (kolmandas üksliikmes), a suurim astendaja on 4 (kolmandas üksliikmes), b suurim astendaja on 5 (teises üksliikmes) ja u suurim astendaja on 6 (esimeses üksliikmes).

Erilist tähelepanu tuleb pühendada vastandarvude väikseima ühiskordse leidmisele.

Näiteid. a) Avaldiste $a-b$ ja $b-a$ väikseim ühiskordne on $a-b$, sest $(a-b) : (a-b) = 1$ ja $(b-a) : (a-b) = \frac{-1(a-b)}{a-b} = -1$.

Väikseimaks ühiskordseks võib olla ka $b-a$, sest

$$(a-b) : (b-a) = \frac{a-b}{-1(a-b)} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ ja } \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

b) $3a-2b$ ja $2b-3a$ väikseim ühiskordne on $3a-2b$, sest $(3a-2b) : (3a-2b) = 1$ ja $\frac{2b-3a}{3a-2b} = \frac{2b-3a}{-1(2b-3a)} = \frac{1}{-1} = -1$.

Väikseimaks ühiskordseks võib olla ka $2b-3a$, sest $(2b-3a) : (2b-3a) = 1$ ja $\frac{3a-2b}{2b-3a} = \frac{3a-2b}{-1(3a-2b)} = \frac{1}{-1} = -1$.

c) $a-b-c$ ja $b-a+c$ väikseim ühiskordne on

$a-b-c$, sest $(a-b-c) : (a-b-c) = 1$ ja $\frac{b-a+c}{a-b-c} =$

$$= \frac{b-a+c}{-1(b-a+c)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Siit näeme, et mõnel juhul saab pealtnäha erinevaid tegureid muuta võrdseteks -1 sulgude ette võtmisega.

Ühenimeliste murdude liitmisel (lahutamisel) tuleb liita (lahutada) nende murdude lugejad ja tulemus jagada nimetajaga. Kui murdude lugejais esinevad sulud, siis tuleb need avada, seejärel koondada ja lõpuks taandada, kui võimalik. Isenimelised murrud tuleb aga enne tehete sooritamist teha ühenimelisteks ja alles siis toimida eespool antud juhendi kohaselt. Murdude liitmisel ja lahutamisel on kasulik lahutada ka nimetaja tegureiks ja teda kogu aeg kirjutada korrutisena taandamise hõlbustamiseks.

Algebraliste murdude korrutamisel, jagamisel ja astendamisel on soovitatav lugejale ja nimetajale anda taandamise võimaldamiseks korrutise kuju.

Näiteid. 1) $\frac{7a-b}{5a+5b}+\frac{2(b-a)}{5a+5b}-\frac{2(a-b)}{5a+5b}=\frac{7a-b+2b-2a-2a+2b}{5(a+b)}=$

$$=\frac{3a+3b}{5(a+b)}=\frac{3(a+b)}{5(a+b)}=\frac{3}{5}.$$

2) $\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{3-2x}+\frac{2x+15}{4x^2-9}=\frac{2}{2x+3}+\frac{-3}{2x-3}+\frac{2x+15}{(2x-3)(2x+3)}=$

$$=\frac{2(2x-3)-3(2x+3)+2x+15}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{4x-6-6x-9+2x+15}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{0}{(2x-3)(2x+3)}=0.$$

3) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}:\frac{3x^2+3y^2}{x+y}\cdot\frac{6x-6y}{5x}=\frac{(x^2+y^2)(x+y)\cdot 6(x-y)}{(x-y)(x+y)3(x^2+y^2)5x}=\frac{2}{6x}.$

Kui ülesandes esineb sulgavaldisi, siis tuleb need eelkõige asendada murdudega ja alles siis sooritada tehted eespool nimetatud järjekorras:

$$\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)=\frac{(a-1)^2-(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a-a^2-1}{4a}=$$

$$=\frac{a^2-2a+1-(a^2+2a+1)}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{-1(a^2-2a+1)}{4a}=$$

$$=\frac{(a^2-2a+1-a^2-2a-1)\cdot(-1)(a-1)^2}{(a+1)(a-1)4a}=\frac{(-4a)(-1)(a-1)^2}{(a+1)(a-1)4a}=$$

$$=\frac{4a(a-1)}{4a(a+1)}=\frac{a-1}{a+1}.$$

Seda ülesannet võib lahendada ka ruutude vahe valemit kasutades.

$$\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)=\frac{(a-1)^2-(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a-a^2-1}{4a}=$$

$$=\frac{(a-1+a+1)(a-1-a-1)(-1)(a-1)^2}{(a+1)(a-1)4a}=\frac{2a\cdot(-2)(-1)(a-1)}{(a+1)4a}=$$

$$=\frac{4a(a-1)}{4a(a+1)}=\frac{a-1}{a+1}.$$

Kodutöö nr. 2. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. Ülesanded: 108; 109 (1.); 110 (1.); 115 (2. 3.); 126 (1.,2.); 156 (3.,4.,5.); 165 (1.,2. 3.,5.).

ARVESTUS NR. 3

Definitsioon. Kõrvunurgad. Tippnurgad. Kahe sirge lõikumine kolmanda sirgega. Lausete õigsuse põhjendamine loogilise arutluse teel. Teoreem. Teoreemi koostis. Aksioom. Paralleelsete sirgete definitsioon. Paralleelsuse aksioom, järeldus sellest. Sirge paralleelsuse tunnused. Kahe paralleelse sirge lõikumine kolmandaga. Kolmnurga välisnurk. Kolmnurga sisenurkade summa. Kolmnurga kesklõik. Trapetsi kesklõik. Vastavalt paralleelsete ja ristuvate haaradega nurgad.

Kolmanda arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) matemaatilised laused, nurkade erinimetused (§ 16—§ 23);
b) paralleelsed sirged (§ 24 — § 26);
c) kolmnurga nurgad ja kesklõik (§ 27—§ 28);
d) paralleelsete ja ristuvate haaradega nurgad (§ 29)

MÄRKUSI 3. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Eriti hästi tuleb endale selgeks teha matemaatiliste lausete mõisted. Ühed neist — definitsioonid — selgitavad mõiste sisu, teised — aksioomid — on põhitõed, mis on ilmselt õiged, kolmandad aga — teoreemid — on laused, mille õigsust saab põhjendada loogilise arutluse teel tuntud tõdede abil. Definitsioonidest peab oskama välja lugeda kõik nõuded, mis on vajalikud õigeks arusaamiseks mõistest; ühtlasi tuleb osata defineerida täpselt ja kompaktselt. Esmajärjekorras selgitatagu uue mõiste sisu varemõpitud mõistete abil (liigiomadus) ja siis öeldagu erinevused või lisatingimused.

N ä i t e i d. 1. *Algarv on arv* (liigiomadus), *mis jagub ainult ühega ja iseendaga* (lisatingimused).

2. *Kolmnurga kõrgus on ristlõik* (liigiomadus), *mis on tõmmatud kolmnurga tipust vastasküljele* (lisatingimused) *või selle pikendusele.* Stiililt parem on sõnastus: *kolmnurga kõrgus on kolmnurga tipust vastasküljele või tema pikendusele tõmmatud ristlõik.*

3. *Korrapäraseks hulknurgaks nimetatakse hulknurka* (liigiomadus), *millel kõik küljed on võrdsed ja nurgad on võrdsed* (lisatingimused).

4. *Nürinurk on nurk* (liigiomadus), *mis on täisnurgast suurem, kuid sirgnurgast väiksem* (lisatingimused).

5. *Defineerimine on mõiste sisu nimetamine, s. o. definitsiooni andmine.*

6. *Binoom on hulkliige* (liigiomadus), *millel on ainult kaks liiget* (lisatingimused)

Aktsioome saab teoreemidest eraldada küsimusele vastamisega: kas lausega väljendatav tõde on niivõrd arusaadav, et tema õigsust pole vaja põhjendada?

Näiteid. 1. *Tervik on osast suurem.* Arusaadav on, et terve leib (kartul, õun, kook jne.) on poolest leivast, kolmandikust leivast (kartulist, õunast, koogist jne.) suurem. Seega on see lause aksioom.

2. *Kahī punkti saab läbida ainult üks sirge.* Kuna selle mõtte õigsuse juures kahelda ei saa, siis on ta aksioom.

3. *Nürinurk on teravnurgast suurem.* See on teoreem, sest teadmine, et nürinurk on täisnurgast suurem ja teravnurk on täisnurgast väiksem, võimaldab järeldada lause õigsust. See lühikene mõttekäik on tõestus, mis on rajatud kahele varemõpitud definitsioonile.

4. *Kahest negatiivsest arvust on suurem see, mille absoluutväärtus on väiksem.* Selle lause õigsust saab tõestada tuginedes lausele «Kahest ratsionaalarvust on suurem see arv, millele vastav punkt asetseb arvteljel paremal».

Teoreemi tõestamiseks tuleb ta eelkõige hästi tähelepanelikult läbi lugeda, et teada, mis on antud (eeldus) ja mida väidetakse (väide), ning need matemaatilises sümboolikas kirja panna. Lugedes õpikust teoreemi tõestust, tuleb üheaegselt joonisel üles otsida kõne all olevad punktid, lõigud, nurgad jne., läbi lugeda tõestuses nimetatud definitsioonid, aksioomid ja teoreemid ning hästi lahti mõtestada tõestuse käik. Hiljem on soovitatav sulgeda raamat, valmistada joonis ja tõestada teoreem. Lubamatu on iga tekkinud raskuse puhul kohe raamatust abi otsida. Ainult siis, kui mõtlemisega tekkinud raskusest üle ei saa, võib raamatust järele vaadata. Samuti pole soovitatav tõestuse käiku mõttes «läbi lennata», vaid tõestada kuuldavalt nagu vastamisel.

Hästi tehtud joonis võimaldab kiiresti aru saada tõestuse üksikutest etappidest ja leida õige tee ülesannete lahendamiseks. Seepärast tuleb joonise tegemise korralikkusele ja selle näitlikkusele pöörata suurt tähelepanu. Värviliste pliiatsite kasutamine teeb joonise näitlikumaks ja võimaldab kiiresti ja kergesti orienteeruda. Näiteks võib kaht sirget lõigata kolmandaga ja joonisele kirjutada alla «kaasnurgad» ning igat kaasnurkade paari märkida samavärvi kaarega või kahe kaarega. Niisugusel juhul tuleb igale nurgaliigile teha erijoonis. Kui joonisele märkida ainult üks nurkade paar igast liigist ja nurga nimetus kirjutada sama värvi pliiatsiga mis kaaredki, siis võimaldab see joonis peaaegu momentaanselt meelde tuletada, milliseid nurki kuidas nimetatakse.

Tõestuste ja ülesannete juurde kuuluvate jooniste ülevaatlikkust suurendab võrdsete suuruste (lõigud, nurgad jne.) joonestamine samavärvilistena.

Teoreemide puhul tuleb erilist tähelepanu pöörata paralleelsuse tunnustele, kolmnurga ja hulknurga nurkade summade, kolmnurga külgede ja nurkade vahelistele seostele ja paralleelsete ning ristuvate haaradega nurkadele. Viimaste kohta peetagu meeles, et nad on võrdsed, kui mõlemad on nürinurgad, ja et nende summa on 180°, kui üks neist on teravnurk ja teine nürinurk. Tarvis on veel teada, et igale nurgale on võimalik joonestada neli paralleelsete ja neli ristuvate haaradega nurka, millede ühine tipp asub etteantud punktis. Neid nurki tuleb osata joonestada pikema mõtlemiseta.

Ülesandeid hakatagu lahendama alles siis, kui teoreetiline materjal on täielikult omandatud.

Näiteid. 1. Kui suur on nurk, mis oma kõrvunurgast on 42° võrra suurem?

Kui vähendada antud nurka 42° võrra, siis oleksid nurk ja kõrvunurk, s. o. mõlemad niisama suured, kui on kõrvunurk. Et kõrvunurkade summa on 180°, siis on nende summa pärast antud nurga vähendamist 42° võrra $180-42=138°$; kõrvunurk on pool sellest, s. o. $138:2=69°$ ja antud nurk $69+42=111°$.

Antud nurga vähendamise asemel oleks võinud kõrvunurka suurendada, siis oleks mõlemate summa $180+42=222°$, antud nurk $222:2=111°$ ja kõrvunurk $111-42=69°$.

2. Kui suur on nurk, mis oma kõrvunurgast on 4 korda suurem?

Et nurk on oma kõrvunurgast 4 korda suurem, siis tuleb kõrvunurkade summa jagada viiega (1 osa kõrvunurgale ja 4 niisama suurt osa nurgale endale), et leida antud nurga kõrvunurka: $180°:5=36°$; nurk on $4\cdot36=144°$.

3. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad on võrdelised arvudega 2, 3 ja 4?

Suhtearvud näitavad, mitu osa tuleb igale nurgale. Kui tähistame ühe osa x-ga, siis on nurgad $2x$, $3x$ ja $4x$. Et kolmnurga nurkade summa on 180°, siis

$$2x+3x+4x=180;$$
$$9x=180;$$
$$x=\frac{180}{9}=20^\circ.$$

Esimene nurk on $2x=2\cdot20=40^\circ$, teine nurk $3x=3\cdot20=60^\circ$ ja kolmas nurk $4x=4\cdot20=80^\circ$.

4. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 27° võrra väiksem. Leia kolmnurga sisenurgad ja tipunurga välisnurk.

Kuna tipunurk on igast alusnurgast 27° võrra suurem, siis kolmnurga nurgad muutuvad võrdseteks, kui tipunurka vähendada 27° võrra. Nurkade summa on sel korral $180-27=153^\circ$ Kumbki alusnurk on $153:3=51^\circ$ ja tipunurk $51+27=78^\circ$.

Teine lahendusviis. Tähistame alusnurga suuruse x-ga, siis on tipunurga suurus $x+27$. Et kolmnurga nurkade summa on 180°, siis saame koostada võrrandi

$$x+x+x+27=180;$$
$$3x=180-27,$$
$$x=153:3=51^\circ \text{ (alusnurk)}.$$

Tipunurk on $51+27=78^\circ$.

Kuna tipunurga välisnurk on tema kõrvunurgaks, siis on välisnurk $180-78=102^\circ$.

5. Korrapärase hulknurga välisnurk on 12°. Leia hulknurga külgede arv, sisenurkade summa ja ühe sisenurga suurus.

Kuna korrapärase hulknurga välisnurgad on võrdsed ja nende summa on 360°, siis on külgede arv $360:12=30$. Kuna välis- ja sisenurk on kõrvunurgad, siis võrdub sisenurk $180-12=168^\circ$ ja sisenurkade summa on $168\cdot30=5040^\circ$.

Hulknurka saab jaotada ühest tipust väljuvate diagonaalidega kolmnurkadeks, mille arv on külgede arvust kahe võrra väiksem. Et kolmnurga sisenurkade arv on 180° ja kolmnurkade arv 28, siis on $28\cdot180=5040^\circ$ sisenurkade summa.

Kodutöö nr. 3. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. «Kodune kontrolltöö nr. 5» (lk. 103 ja 104).

ARVESTUS NR. 4

Täpsed ja ligikaudsed arvud. Ligikaudsete arvude tekkimine, liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine.

Korrutamine ja jagamine arvutuslükatil. Ligikaudsete andmetega mitme tehtega ülesanded.

Neljanda arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) täpsed ja ligikaudsed arvud; arvude ümardamine; ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine (§ 30—§ 34);

b) arvutuslükati ja selle põhiskaalad; võrde lahendamine lükati abil (§ 35—§ 36);

c) ligikaudsete arvude korrutamine ja jagamine (§ 37);

d) ligikaudsete andmetega mitme tehtega ülesanded (§ 38).

MÄRKUSI 4. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Enne arvestusmaterjali õppimisele asumist tuleb hästi selgeks teha ümardamine liiaga ja puuduga ning ümardamise reegel «Arv ümardatakse liiaga, kui esimene ärajääv number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja puuduga, kui esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3 või 4.»

Teema läbitöötamisel tuleb selgeks teha ülem- ja alamtõkke, ümardamisvea ülemmäära, varunumbri, arvu tüve ja tüvenumbri mõiste ning järgmised arvutusreeglid:

a) *ligikaudsete arvude summa (vahe) tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis kõikides antud arvudes on teada; selleks tuleb liitmist (lahutamist) alustada varunumbritest ja arvutuse tulemuses varunumber ära jätta ümardamisreegli kohaselt;*

b) *kahe ligikaudse arvu korrutisel (jagatisel) on nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga antud arvus;*

c) *kui kahe arvu korrutamisel või jagamisel on üks arv täpne, teine aga ligikaudne, siis on tulemuses niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses arvus.*

d) *ligikaudseid arve saadakse mõõtmistel* (raskus-, pikkus-, pindala, ruumalamõõtarvud), *suure hulga või oma asukohta muutvate esemete loendamisel, meelespidamise hõlbustamiseks, diagrammide valmistamiseks või ligikaudseks võrdlemiseks ümardamisel ja ligikaudsel jagamisel.*

Tekstülesannete lahendamisel tehtagu iga antud arvu kohta kindlaks, kas ta on täpne või ligikaudne, et arvutamisel kasutada õiget reeglit.

N ä i t e i d. 1) On vaja liita neli ligikaudset arvu:

$$\begin{array}{r} 36{,}2493 \\ 126{,}5 \\ +\ 38{,}483 \\ 217{,}87 \\ \hline 419{,}19 \approx 419{,}2 \end{array}$$

Antud arvude kõige madalamaks ühiseks järguks on kümnendikud, nende varunumbriteks sajandikud (kümnendikest paremal pool esimesel kohal). Liitmist alustame viimastest ja tulemuse ümardame kümnendikeni. Et esimene ärajääv number on 9 (viiest suurem), siis tuleb kümnendike kohal olevat arvu (1) suurendada ühe võrra.

2) On vaja liita neli ligikaudset arvu:

$$\begin{array}{r} 5{,}3462 \\ 17{,}426 \\ +\quad 9{,}53 \\ 426{,}2032 \\ \hline 458{,}505 \approx 458{,}51 \end{array}$$

Antud arvude kõige madalamaks ühiseks järguks on sajandikud, nende varunumbriteks on tuhandikud (sajandikest paremal pool esimesel kohal). Liitmist alustame viimastest ja tulemuse ümardame sajandikeni. Et esimene ärajääv number on 5, siis tuleb sajandike kohal olevat arvu (0) suurendada ühe võrra.

3) Lahuta järgmised ligikaudsed arvud:

$$\begin{array}{r} 304{,}236 \\ -\quad 73 \\ \hline 231{,}2 \approx 231 \end{array}$$

Antud arvude kõige madalamaks ühiseks järguks on ühelised, nende varunumbriteks on kümnendikud (ühelistest paremal pool esimesel kohal). Lahutamist alustame viimastest ja tulemuse ümardame ühelisteni. Et esimene ärajääv number on 2 (väiksem viiest), siis jääb üheliste kohal olev number muutmatuks, s. o. üheks.

4) Lahuta järgmised ligikaudsed arvud:

$$\begin{array}{r} 63627 \\ -\quad 32500 \\ \hline 31127 \approx 31100 \end{array}$$

Antud arvude kõige madalamaks ühiseks järguks on sajalised, nende varunumbriteks on kümnelised (sajalistest paremal pool esimesel kohal). Lahutame terved tervetest ja tulemuse ümardame sajalisteni. Et esimene ärajääv number on 2 (väiksem viiest), siis jääb sajaliste arv (1) muutmatuks ja kümneliste ning üheliste kohad tuleb täita nullidega, sest muidu väheneks arv 100 korda (311 pro 31 100).

5) Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutis:

$$
\begin{array}{r}
3,2574 \\
0,832 \\
\hline
65148 \\
97722 \\
260592 \\
\hline
2,7101568 \approx 2,71
\end{array}
$$

Korrutades antud arve kui täisarve ja eraldades korrutises täisosa koma abil (kümnendmurdude korrutamise reegli põhjal), saame 2,7101568. [Esimeses teguris on murd kirjutatud nelja numbriga (2574), teises kolmega (832), seepärast tuleb korrutises kirjutada murd 4+3=7 numbriga (7101568)]. Et arvus 0,832 on 3 tüvenumbrit, s. o. vähem kui arvus 3,2574 (viis tüvenumbrit), siis peab korrutises olema 3 tüvenumbrit. Seepärast tuleb korrutis ümardada sajandikeni. Saame 2,71, sest tuhandike arv on väiksem viiest (0).

Seda ülesannet saab lahendada ratsionaalsemalt, ümardades enne korrutamist arvu 3,2574, s. o. suurema tüvenumbrite arvuga tegurit nii, et selleks oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui arvus 0,832, s. o. väiksema tüvenumbrite arvuga teguris. Et arvus 0,832 on 3 tüvenumbrit, siis tuleb teine tegur ümardada 3+1=4 tüvenumbriga arvuks: 3,2574≈3,257. Number 7 jäi muutmatuks, sest ärajäetud number 4 on viiest väiksem.

$$
\begin{array}{r}
3,257 \\
0,832 \\
\hline
6514 \\
9771 \\
26056 \\
\hline
2,709824 \approx 2,71
\end{array}
$$

Esimene ärajäetud number 9 on viiest suurem, seepärast tuleb sajandike arvu ühe võrra suurendada.

6) Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutis:

$$
\begin{array}{r}
43,29 \\
3,6 \\
\hline
25974 \\
12987 \\
\hline
155,844 \approx 160
\end{array}
$$

Korrutades antud arve kui täisarve ja eraldades korrutise täisosa koma abil (kümnendmurdude korrutamise reegli põhjal), saame 155,844. [Esimeses teguris on murd kirjutatud kahe numbriga (29), teises ühega (6), seepärast tuleb korrutises kirjutada murd 2+1=3 numbriga (844)]. Et arvus 3,6 on 2 tüvenumbrit, s. o. vähem kui arvus 43,29 (neli tüvenumbrit), siis peab korrutises olema neid 2. Seega saame tüvenumbritega täita ainult sajaliste ja kümneliste kohad ning nulliga üheliste koha, et arv ei väheneks 10 korda. Ümardamisreegli kohaselt toimides leiame, et korrutis on 160.

Seda ülesannet saab lahendada ratsionaalsemalt, ümardades enne korrutamist arvu 43,29, s. o. suurema tüvenumbrite arvuga tegurit nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui arvus 3,6, s. o. väiksema tüvenumbrite arvuga teguris. Et arvus 3,6 on 2 tüvenumbrit, siis tuleb teine tegur ümardada 2+1=3 tüvenumbriga arvuks: 43,29≈43,3. Kümnendike arvu 2 suurendati ühe võrra, sest esimene ärajäetud number 9 on viiest suurem.

$$\begin{array}{r} 43{,}3 \\ 3{,}6 \\ \hline 2598 \\ 1299 \\ \hline 155{,}88 \approx 160 \end{array}$$

Tüvenumbritega saame täita sajaliste ja kümneliste kohad. Et korrutis ei väheneks 10 korda, peame üheliste kohale kirjutama nulli. Ümardamisreegli kohaselt toimides leiame, et korrutis on 160.

7) Leia ligikaudsete arvude 67,345 ja 2,8 jagatis

Esimene võimalus.

$$67{,}354 : 2{,}8 = 673{,}54 : 28 = 24{,}0 \approx 24$$
$$\begin{array}{r} 56 \\ \hline 113 \\ 112 \\ \hline 15 \end{array}$$

Jagamisel kümnendmurruga korrutame jagatavat ja jagajat niisuguse arvuga, et jagaja muutuks täisarvuks (käesoleval juhul korrutame kümnega). Et jagaja tüvenumbrite arv (2) on väiksem jagatava tüvenumbrite arvust (5), siis peab jagatise tüvenumbrite arv olema võrdne jagaja tüvenumbrite arvuga, s. o. 2-ga.

Esimese jagamisvõtte kohaselt jagame nii, et jagatise tüvenumbrite arv oleks jagaja tüvenumbrite arvust ühe võrra suurem (varunumber), ja ümardame teda siis ümardamisreegli kohaselt.

Teine võimalus. $67{,}354 : 2{,}8 = 673{,}54 : 28 = 24$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \hline 113 \\ 112 \\ \hline 1 \end{array}$$

Jagame, kuni oleme jagatises saanud nõutava arvu tüvenumbreid (käesoleval juhul kaks, s. o. 24), ja võrdleme siis saadud jääki poole jagajaga (28:2), s. o. 14-ga. Et jääk 1 on väiksem kui 14, siis saaksime jagamisel viiest väiksema arvu, mis ümardamisreegli kohaselt viimast kirjutatud numbrit ei muuda (viiest väiksem). Jagatis jääb 24.

8) Leia ligikaudsete arvude 2,84 ja 37,689 jagatis.

Esimene võimalus.

$2{,}84 : 37{,}689 = 2840 : 37689 = 0{,}07535 \approx 0{,}0754$

$$\begin{array}{r} 284000 \\ 263823 \\ \hline 201770 \\ 188445 \\ \hline 133250 \\ 113067 \\ \hline 201830 \\ 188445 \\ \hline 13385 \end{array}$$

Jagamisel kümnendmurruga korrutame jagatavat ja jagajat niisuguse arvuga, et jagaja muutuks täisarvuks (käesoleval juhul korrutame kümne tuhandega). Et jagatava tüvenumbrite arv (3) on väiksem jagaja tüvenumbrite arvust (5), siis peab jagatise tüvenumbrite arv olema võrdne jagaja tüvenumbrite arvuga, s. o. 3-ga.

Esimese jagamisvõtte kohaselt jagame nii, et jagatise tüvenumbrite arv oleks jagatava tüvenumbrite arvust ühe võrra suurem (varunumber), ja ümardame teda siis ümardamisreegli kohaselt.

Teine võimalus: $2{,}84 : 37{,}689 = 2840 : 37689 = 0{,}0753\ldots \approx 0{,}0754$

$$\begin{array}{r} 284000 \\ 263823 \\ \hline 201770 \\ 188445 \\ \hline 133250 \\ 113067 \\ \hline 20183 \end{array}$$

Jagame, kuni oleme saanud jagatises nõutava arvu tüvenumbreid (käesoleval juhul kolm, s. o. 0,0753), ja võrdleme siis saadud jääki poole jagajaga (37689 : 2), s. o. 18894,5-ga. Et jääk 20183 on 18894,5 suurem, siis saaksime jagamisel 5 või viiest suurema arvu, mis ümardamisreegli kohaselt viimast kirjutatud numbrit (3) ühe võrra suurendab. Jagatis peab olema 0,0754. Juba kirjutatud numbrit (3) maha kriipsutada ja 4 asemele kirjutada pole sobiv (määrimine), samuti ei tohi kirjutada 0,0753≈0,0754 (väär). Seepärast tuleb neil juhtudel, kus viimast kirjutatud numbrit tuleb ühe võrra suurendada, märkida jagatise taha kolm punkti ja alles siis kirjutada ligikaudse võrdsuse märk ja lõppvastus (0,0753. . . ≈0,0754).

Märkus. 7. ja 8 näite ülesandeid saab lahendada ratsionaalsemalt, ümardades enne jagamist suurema tüvenumbrite arvuga antud arvu nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga antud arvus.

Ülesanded muutuksid siis järgmisteks:

a) 67,3 : 2,8 = 673 : 28 ≈ 24

```
673 : 28 ≈ 24
56
---
113
112
---
  1
```

Jääk 1 on väiksem poolest jagajast, s. o. 28 : 2 = 14-st.

b) 2,84 : 37,68 = 284 : 3768 = 0,0753. . . ≈0,0754

```
284 : 3768 = 0,0753... ≈ 0,0754
 28400
 26376
 -----
  20240
  18840
  -----
   14000
   11304
   -----
    2696
```

Jääk 2696 on suurem poolest jagajast, s. o. 3768 : 2 = 1884-st.

9) Kolhoosniku perekond töötas aasta jooksul välja 856 normipäeva. Kui palju teravilja sai see perekond, kui iga normipäeva kohta arvestati 8,3 kg?

Siin on arv 856 normipäeva täpne arv, 8,3 kg aga ligikaudne, seepärast on ka korrutis ligikaudne ja temas on niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses arvus, s. o. 2.

```
  856
  8.3
-----
 2568
6848
------
7104,8 ≈ 7100 kg
```

10) 18 ühesugust detaili kaaluvad 5,93 kg. Kui raske on iga detail?

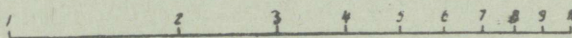
Siin on arv 18 detaili täpne arv, 5,93 kg aga ligikaudne arv, seepärast on jagatis ligikaudne ja temas on niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses arvus, s. o. 3.

$$
\begin{array}{l}
5{,}93 : 18 \approx 0{,}329 \text{ kg} \\
\underline{54} \\
\ \ 53 \\
\ \ \underline{36} \\
\ \ 170 \\
\ \ \underline{162} \\
\ \ \ \ \ 8
\end{array}
$$

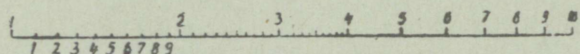
Et jääk 8 on väiksem poolest jagajast, s. o. 18 : 2 = 9-st, siis jääb jagatis muutmatuks.

Korrutamine ja jagamine arvutuslükatil

Arvutuslükati koosneb korpusest, keelest ja korpusel liuglevast aknast (ka märkija). Viimasele on arvude märkimiseks kantud peenike kriips — märkija niit. Põhiosale ja keelele on kantud skaala, mille järjestikuste arvudega märgitud kriipsude vahed pole võrdsed, vaid järjest vähenevad (muutuvad lühemaks).



Kriipsudevahelised jaotised on jagatud veel omakorda kümneks mittevõrdseks osaks.



Vahemik 1-st 2-ni on jaotatud peenemas trükis kirjutatud arvudega 1,1; 1,2; 1,3; . . .; 1,8; 1,9 kümneks osaks (mõnedel lükatitel on jaotuskriipsude juurde kirjutatud arvud 1, 2, 3, . . ., 8, 9; sel juhul tuleb neile vaadata kui kümnendike numbritele).

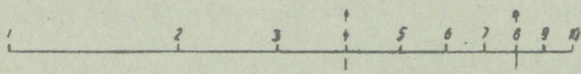
Skaala vahemikud 2-st kuni 3-ni, 3-st kuni 4-ni jne., 9-st kuni 10-ni on samuti jaotatud kümneks osaks, kusjuures viiendad kriipsud on teistest kriipsudest pisut pikemad, et oleks kergem nende märkimisel ja lugemisel orienteeruda. Nende jaotuskriipsude juures numbrid puuduvad

Sajandikjaotused esinevad lükatil ainult 1 ja 1,1, 1,1 ja 1,2 jne. kuni 1,9 ja 2 vahel, viiendad kriipsud on teistest kriipsudest pisut pikemad lugemise ja märkimise hõlbustamiseks.

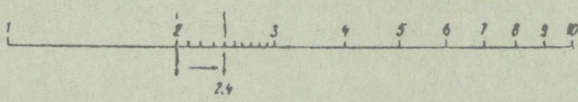
Skaalal on 2-st kuni 4-ni sajandikjaotised kahekaupa, s. o. 2,02, 2,04, ..., 3,98, 4; 4-st kuni 10-ni viiekaupa, s. o. 4,05 4,10, ... 9,95, 10. Sajandikjaotuse kriipsud on lühemad kümnendikjaotuse kriipsudest.

Arvude kiire ja täpne pealeasetamine ning nende lugemine lükati skaaladel on käesoleva teema õppimisel esmajärguliseks ülesandeks. Niikaua, kui lükati skaalade ehitus pole selge, ei saa ka lükatiga töötada.

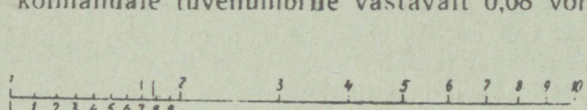
N ä i t e i d. 1) Peetagu hästi silmas, et ühekohaliste arvude märkimisel tuleb märkija niit nihutada arvutuslükati skaalal sellise jaotuskriipsu kohale, mis on varustatud märgitavale arvule vastava numbriga (suured numbrid).



2) Kahekohalise arvu (2,4) märkimisel nihutatakse märkija niit algul (1. näite kohaselt) esimesele tüvenumbrile (2) vastavalt ja sealt edasi teisele tüvenumbrile vastavalt 0,4 võrra.



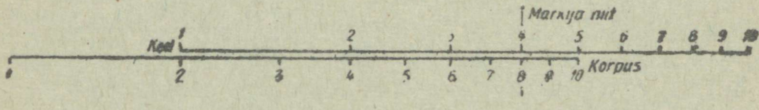
3) Kolmekohalise arvu (1,78) märkimisel nihutame märkija niiti algul (1. näite kohaselt) esimesele tüvenumbrile (1) vastavalt, sealt edasi teisele tüvenumbrile vastavalt 0,7 võrra ja sealt veel edasi kolmandale tüvenumbrile vastavalt 0,08 võrra.



4) Rohkem kui kolmekohalised arvud tuleb eelnevalt ümardada kolmekohalisteks (1,5372≈1,54) ja siis toimida 3. näite kohaselt

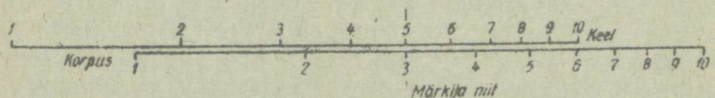
Alles siis, kui arvu märkimine ja lugemine lükatilt on selge, võib alustada korrutamise ja jagamisega. Arvutusoskuse omandamiseks tuleb läbi võtta 8 erinevat juhust.

N ä i d e 1. Leia kahe arvu korrutis, kui kumbki arv pole 1-st väiksem ja nende korrutis on kuni 10, näiteks 2 · 4.



Üks tegur (näiteks 2) tuleb märkida korpusele (põhiosale) keele alguspunkti nihutamisega korpuse 2-le; siis nihutada märkija niit keele 4-le ja niidi kohalt lugeda korpuselt vastus «8».

N ä i d e 2. Leia kahe arvu korrutis, kui kumbki pole 1-st väiksem ja nende korrutis on 10-st suurem, näiteks 5 · 6.

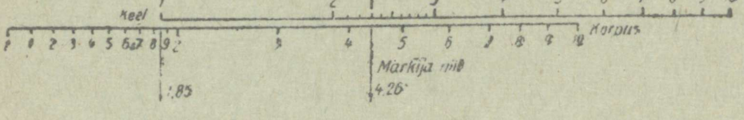


Üks tegur (näiteks 6) tuleb märkida korpusele (põhiosale) keele lõpp-punkti nihutamisega korpuse 6-le; siis nihutada märkija niit keele 5-le, niidi kohalt lugeda korpuselt 3, mida suurendada: 3 · 10 = 30.

Iga kord kui keel liigub korrutamisel vasakule poole, tuleb korpuselt loetud arvu s u u r e n d a d a 10 k o r d a.

N ä i d e 3. Leia kahe arvu korrutis, kui kumbki on 1-st suurem ja vähemalt ühel neist on tervete osa kirjutatud vähemalt kahe numbriga, näiteks 185 · 23.

Et ülesannet lahendada 1. või 2. näite eeskujul, kirjutame korrutise nii: 185 · 23 = 1,85 · 100 · 2,3 · 10 = 1,85 · 2,3 · 1000. Nüüd käsitseme lükatit 1. näite kohaselt ja korrutame lükatilt loetud korrutist tuhandega



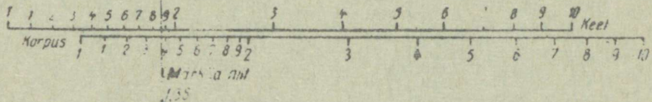
Teguri 1,85 märgime korpusele keele alguspunkti nihutamisega korpuse 1,85-le, siis nihutame märkija niidi keele 2,3-le. Niidi kohalt korpuselt loeme arvu 4,26, mida suurendame 1000 korda. Saame 4260.

N ä i d e 4. Leia kahe arvu korrutis, kui vähemalt üks neist on 1-st väiksem, näiteks $0{,}075 \cdot 18{,}5$.

Kirjutame korrutise nii:

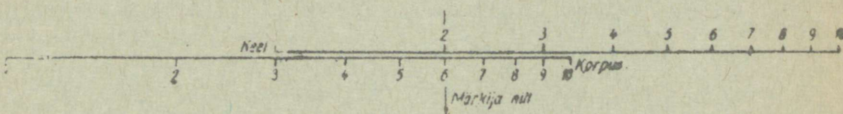
$$0{,}075 \cdot 18{,}5 = \frac{7{,}5 \cdot 1{,}85 \cdot 10}{100} = 7{,}5 \cdot 1{,}85 : 10$$

Nüüd käsitseme lükatit 2. näite kohaselt ja jagame lükatilt loetud korrutise kümnega.



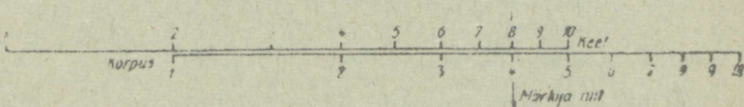
Korpusel märgime 7,5 keele lõpp-punktiga (korrutis on kümnest suurem), nihutame märkija niidi keele 1,85-le, loeme korpuselt niidi kohalt vastuse 1,38. See ongi otsitav korrutis, sest keele vasakule poole nihutamise tõttu tuleb 1,38 korrutada kümnega ja eespool olev arvutus nõuab tulemuse jagamist kümnega.

N ä i d e 5. Arvuta lükatil 6 : 2.



Nihutame märkija niidi korpuse 6-le, nihutame keele 2 niidi alla ja loeme keele alguspunktis korpuselt vastuse 3.

N ä i d e 6. Arvuta lükatil 4 : 8.



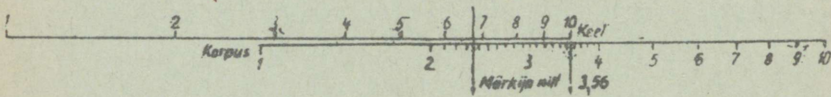
Nihutame 5. näite eeskujul märkija niidi korpuse 4-le, keele 8 aga niidi alla ja loeme keele lõpp-punktis korpuselt vastuse 5. Seda arvu peame vähendama 10 korda, sest keel nihkus vasakule.

Iga kord kui keel liigub jagamisel vasakule poole, tuleb korpuselt loetud arvu v ä h e n d a d a 10 k o r d a.

N ä i d e 7. Leia kahe arvu jagatis, kui mõlemad on 1-st suuremad ja vähemalt ühel neist on tervete osa kirjutatud kahe numbriga, näiteks 235 : 66.

Et ülesannet lahendada eespool esitatud ülesannete eeskujul, kirjutame jagatise nii:

$$235 : 66 = \frac{2,35 \cdot 100}{6,6 \cdot 10} = \frac{2,35}{6,6} \cdot 10$$

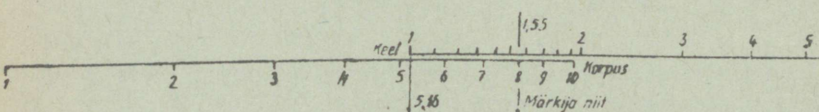


Nihutame 5. näite eeskujul korpuse 2,35 ja keele 6,6 kohakuti ja loeme keele lõpp-punktis korpuselt vastuse 3,56. Seda arvu peame keele vasakule poole nihutamise pärast 10-ga jagama, eespool olev arvutus aga nõuab 10-ga korrutamist. Seega jääb korpuselt loetud vastus 3,56 jagatiseks.

N ä i d e 8. Leia kahe arvu jagatis, millest vähemalt üks on 1-st väiksem, näiteks 0,08 : 155.

Et jagada eelmiste ülesannete eeskujul, kirjutame jagatise nii:

$$0,8 : 155 = \frac{8}{100 \cdot 1,55 \cdot 100} = \frac{8}{1,55} : 10000$$



Nihutame 5. näite eeskujul korpuse 8 ja keele 1,55 kohakuti. Loeme keele alguspunktis korpuselt 5,16, mida jagame eespool oleva arvutuse kohaselt 10 000-ga. Saame 0,000516.

Kodutöö nr. 4. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. «Kodune kontrolltöö nr. 6» (lk. 143 ja 144)

ARVESTUS NR. 5

Ringjoon ja temaga seoses olevaid mõisteid. Kõõl ja temaga ristuv diameeter. Ringjoone määramine. Kolmnurga ümberringjoon. Kolmnurga kõrguste lõikumine. Punkti ja ringjoone, sirge ja ringjoone vastastikune asend. Ringjoone puutuja ja selle omadused. Kolmnurga siseringjoon. Piirdenurk. Thalese teoreem. Ring ja korrapärane hulknurk. Ringjoone pikkus, mõõtmine ja arvutamine. Kaare pikkus. Ringi ja sektori pindala.

Viienda arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) ringjoon ja temaga seoses olevaid mõisteid; ringjoone määramine; kolmnurga ümberringjoon (§ 39—§42);

b) punkti ja ringjoone, sirge ja ringjoone vastastikune asend; puutuja; kolmnurga siseringjoon (§ 43—§ 45);

c) piirdenurk; korrapärane hulknurk (§ 46 ja § 47);

d) ringjoone ja kaare pikkus (§ 48—§ 50);

e) ringi ja sektori pindala (§ 51—§ 53)

MÄRKUSI 5. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Kõigepealt tuleb veel kord läbi lugeda märkused 3. arvestuse materjali kohta ja korrata kolmnurkade võrdsust.

Peab teadma:

1) kolmnurkade võrdsuse definitsiooni (*Kolmnurgad on võrdsed, kui neid saab paigutada nii, et nad teineteist täiesti katavad)*

2) kolmnurkade võrdsuse tunnuseid:

a) *kolmnurgad on võrdsed, kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega;*

b) *kolmnurgad on võrdsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga;*

c) *kolmnurgad on võrdsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja selle lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga ühe külje ja selle lähisnurkadega;*

d) *kolmnurgad on võrdsed, kui kaks külge ja suurema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja suurema külje vastasnurgaga.*

3) järeldusi kolmnurkade võrdsuse tunnustest:

võrdsetes kolmnurkades on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad ja võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed;

kolmnurkade võrdsuse jaoks on vaja kolme võrdse elemendi tundmist, nende hulgas peab olema vähemalt üks joonelement.

Need laused võimaldavad tõestada:

a) *kõõlu ristdiameeter poolitab kõõlu ja selle otspunkte ühendavad kaared*;

b) *lõigu keskristsirge iga punkt on lõigu otspunktidest samal kaugusel* (see lause võimaldab leida ümberringjoone keskpunkti ning joonestada ümberringjoont);

c) *nurgapoolitaja iga punkt on nurga haaradest samal kaugusel* (see lause võimaldab leida kolmnurga siseringjoone keskpunkti ja joonestada siseringjoont).

Eriti hästi peab läbi töötama ja läbi mõtlema nurgakraadide ja kaarekraadide mõisted. Tuleb meeles pidada, et üks kaarekraad on $\frac{1}{360}$ ringjoonest. Sellest järgneb, et 1-kaarekraadised kaared ei ole ühepikkused. 1-sentimeetrise raadiusega ringjoonest eraldatud 1-kaarekraadine kaar $\left(\frac{1}{360}\text{ ringjoonest}\right)$ on lühem 1-meetrise raadiusega ringjoonest eraldatud 1-kaarekraadisest kaarest $\left(\frac{1}{360}\text{ ringjoonest}\right)$, sest $\frac{1}{360}$ ei ole alati sama — ta sõltub hulgast, millest $\frac{1}{360}$ eraldatakse. Näiteks on $\frac{1}{360}$ 360-st õunast 1 õun, kuid $\frac{1}{360}$ 3600-st õunast 10 õuna ja $\frac{1}{360}$ 36 000-st õunast 100 õuna.

Ühe nurgakraadi suurused nurgad on alati võrdsed, sest üks nurgakraad on kesknurk, mis toetub $\frac{1}{360}$ ringjoonest, s. o. ringjoone osale, mida joonestab sirkel, tehes $\frac{1}{360}$ täispöördest. Siin võetakse $\frac{1}{360}$ mitte erinevatest hulkadest, vaid ikka samast täispöördest.

Et kaarekraad ei võrdu nurgakraadiga, siis tuleb öelda, et nurka mõõdetakse (mitte võrdub) poole kaarega, kaarte poolsummaga, kaarte poolvahega jne.

Kodutöö nr. 5. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. Ülesanded: 456; 468; 473; 485; 496; 519; 521; 537; 541; 559; 568; 577 (*a*); 588.

ARVESTUS NR. 6

Silinder; tema pinnalaotus, pindala ja ruumala. Koonus; tema pinnalaotus, pindala ja ruumala. Kera; tema pindala ja ruumala.

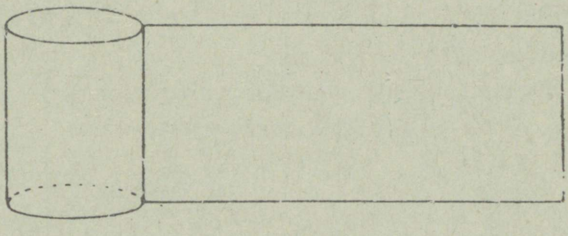
Kuuenda arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:
a) silinder (§ 54—§ 56);
b) koonus (§ 57—§ 59);
c) kera (§ 60—§ 62).

MÄRKUSI 6. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Nimetatud teemade läbitöötamisel:

1) juhinduda 3. arvestuse materjali kohta antud nõuandeist teoreemide tõestamiseks ja jooniste valmistamiseks;

2) teha läbi kõik vajalikud katsed õpikus kirjeldatud ruumiliste kehade pindala ja ruumala reeglite tuletamise kohta;

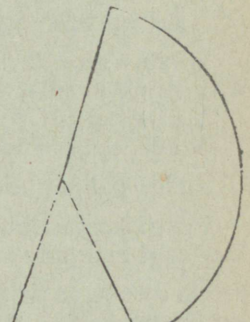


3) näitlikustamise ja ülevaatlikkuse suurendamiseks kasutada värvilisi pliiatseid või kriite:

a) pinnalaotuse joonestamisel märgitagu võrdsed elemendid nii ruumilisel joonisel kui ka pinnalaotusel samal viisil või sama värvi;

b) ülesannete lahendamiseks vajalike jooniste mõõtmed olgu võrdelised antud mõõtmetega, et saada õiget ettekujutust geomeetrilisest kujundist;

c) ülevaatlikkuse tõstmiseks on soovitatav joont ja tema mõõtarvu märkida sama värviga.



Ülesannete lahendamise näiteid

Ülesanne 1. Arvuta rõnga pindala, kui tema väline läbimõõt on 15 cm ja sisemine 12 cm.

Lahendus. Lahutame rõnga pikema piirjoonega piiratud ringi pindalast lühema ringjoonega piiratud ringi pindala:

$$\pi 15^2 - \pi 12^2 = \pi(15^2 - 12^2) = \pi(15+12)(15-12) = \pi 27 \cdot 3 =$$
$$= 81 \cdot 3{,}14 = 254{,}34 \approx 254 \text{ cm}^2.$$

Ülesanne 2. Kui palju kaalub 80 m vasktraati, kui ta läbimõõt on 1,2 mm ja erikaal 8,9 $\frac{kG}{dm^3}$?

Lahendus. Kaal võrdub ruumala ja erikaalu korrutisega. Ruumala leidmiseks tuleb ristlõike pindala (see vastab silindri põhja pindalale) korrutada traadi pikkusega (see vastab silindri kõrgusele). Arvutamiseks tuleb kõik pikkusühikutes antud mõõtarvud teisendada detsimeetriteks, sest traadikera kaal avaldub kilogrammides (erikaal on võrdne 1 dm^3 kaaluga kilogrammides).

Traadi ristlõike raadius on $\frac{1{,}2}{2}$ mm, $= 0{,}6$ mm $= 0{,}006$ dm.

Traadi pikkus on 80 m = 800 dm.

Traadi ruumala on silindri ruumala valemi järgi:

$$3{,}14 \cdot 0{,}006^2 \cdot 800 \approx 0{,}09 \text{ dm}^3$$

1) $800 \cdot 3{,}14 = 2512$

2)
$$\begin{array}{r} 2512 \\ \times\ 0{,}000036 \\ \hline 15072 \\ 7536 \\ \hline 0{,}090432 \approx 0{,}09 \text{ dm}^3 \end{array}$$

Kaal on $0{,}09 \cdot 8{,}9 = 0{,}801 \approx 0{,}8$ kg.

Ülesanne 3. Klaaspurgi läbimõõt on 20 cm ja kõrgus 25 cm. Mitu liitrit keedist mahutab purk?

Lahendus. Kuna 1 l = 1 dm^3, siis on tarvis kõik pikkused avaldada detsimeetrites.

Purgi põhja raadius on $\frac{20}{2}$ cm = 10 cm = 1 dm.

Purgi kõrgus on 25 cm = 2,5 dm.

Purgi ruumala on $3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 2{,}5 = 7{,}85$ l.

Ülesanne 4. Silindrikujulise purgi põhja läbimõõt on 16 cm ja kõrgus 12 cm. Kui kõrgele tõuseb vesi purgis, kui sinna valada 0,75 l vett? Kas vesi voolab üle purgi ääre, kui purki kallata 1,5 l vett? Põhjenda vastust.

Lahendus. Kuna silindri läbimõõt on sentimeetrites, ruumala aga liitrites, s. o. dm^3, siis tuleb viimane muuta kuupsentimeetriteks:

$$0{,}75 \text{ l} = 0{,}75 \text{ dm}^3 = 750 \text{ cm}$$

Põhja pindala on $3{,}14 \cdot \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 3{,}14 \cdot 8^2 = 3{,}14 \cdot 64 = 200{,}96 \approx 201$ cm².

Et teada saada, kui kõrgele tõuseb vesi, selleks peame ruumala jagama põhja pindalaga. Kõrgus on

$$\begin{array}{l} 750 : 201 \approx 3{,}7 \text{ cm} \\ \underline{603} \\ 1470 \\ \underline{1407} \\ 63 \end{array}$$

Kuna 1,5 l on 0,75 liitrist 2 korda rohkem $(1{,}5 : 0{,}75 = 150 : 75 = 2)$, siis peab vesi purgis tõusma $2 \cdot 3{,}7 = 7{,}4$ cm võrra. Kuna purgi kõrgus on 12 cm, s. t. suurem kui veepinna tõus, siis vesi üle ei voola.

Ülesanne 5. Kui kõrge peab olema 1 liitrise mahuga silindrikujuline nõu, kui ta põhja läbimõõt on 8,6 cm?

Lahendus. Et põhja läbimõõt on antud sentimeetrites, siis tuleb ruumala muuta kuupsentimeetriteks. 1 liiter on 1000 cm³. Põhja pindala on $3{,}14 \cdot \left(\frac{8{,}6}{2}\right)^2 \approx 58$ cm².

1) $\left(\frac{8{,}6}{2}\right)^2 = 4{,}3^3 = 18{,}5$ cm² (vt. ruutude tabelist).

2)
$$\begin{array}{r} \times\, 18{,}5 \\ \underline{3{,}14} \\ 740 \\ 185 \\ \underline{555} \\ 58{,}090 \end{array} \approx 58 \text{ cm}^2$$

Veepinna kõrguse saame, kui ruumala jagame põhja pindalaga.

$$\begin{array}{l} 1000 : 58 = 17{,}2 \text{ cm} \\ \underline{58} \\ \underline{420} \\ \underline{406} \\ 140 \\ \underline{116} \\ 24 \end{array}$$

Vastus. Silindri kõrgus peab olema 17,2 cm.

Ülesanne 6. Kui suur on koonuse põhja raadius, kui ta pinnalaotus on sektor, mille raadius on 20 cm ja kesknurk 50°?

L a h e n d u s. Sektori kaare pikkus on

$$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 50}{360} = 314 : 18 \approx 17 \text{ cm}.$$

$$\begin{array}{r} \underline{18} \\ 134 \\ \underline{126} \\ 8 \end{array}$$

Kokku keerates moodustab kaar põhja ümbermõõdu, mis on 17 cm pikk. Et leida põhja läbimõõtu, selleks tuleb ümbermõõt jagada π-ga (3,14-ga):

$$17 : 3{,}14 = 1700 : 314 = 5{,}4 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} \underline{1570} \\ 1300 \\ \underline{1256} \\ 44 \end{array}$$

V a s t u s. Raadius on $5{,}4 : 2 = 2{,}7$ cm.

Ü l e s a n n e 7. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on **12,5 m ja kõrgus 1,8 m. Mitu tonni kartuleid on selles kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?**

L a h e n d u s. Raadiuse leidmiseks jagame ümbermõõdu 2π-ga:

$$12{,}5 : 6{,}28 = 1250 : 628 = 2.$$

Koonuse ruumala on $3{,}14 \cdot 2^2 \cdot \frac{1{,}8}{3} = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 0{,}6 = 12{,}56 \cdot 0{,}6 = 7{,}436 \text{ m}^3 = 74{,}36 \text{ hl}.$

Kartulid kaaluvad

$$\begin{array}{l} \underline{74{,}36 \cdot 72} \\ \;\;14872 \\ \underline{52022} \\ 5350{,}92 \text{ kg} \approx 5{,}35 \text{ tonni}. \end{array}$$

V a s t u s. Kuhjas on 5,35 t kartuleid.

Ü l e s a n n e 8. Kuubist treiti võimalikult suur kera. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi? Mitu protsenti on kaotsiläinud materjal kera ruumalast?

L a h e n d u s. Olgu kera raadius r, siis

1) kera ruumala on $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$;

2) kuubi serv $2r$;

3) kuubi ruumala $2r \cdot 2r \cdot 2r = 8r^3$;

4) puitu on maha treitud

$$8r^3 - \frac{4 \cdot 3{,}14r^3}{3} = 8r^3 - 4{,}19r^3 = 3{,}8r^3;$$

5) kaotsiläinud materjal protsentides on

$$\frac{3{,}81r^3\,100}{8r^3} = 381 : 8 = 47{,}625\,\%;$$

$$\begin{array}{r}
\underline{32}\\
61\\
\underline{56}\\
50\\
\underline{48}\\
20\\
\underline{16}\\
40\\
\underline{40}
\end{array}$$

6) kaotsiläinud materjali hulk treitud kerast protsentides on

$$\frac{3{,}81r^3 \cdot 100}{4{,}19r^3} = 381 : 4{,}19 = 38100 : 419 \approx 90{,}9.$$

$$\begin{array}{r}
\underline{3771}\\
3900\\
\underline{3771}\\
129
\end{array}$$

Vastus. Materjalist treiti maha 47,625%. Mahatreitud materjali ruumala on 90,9% kera ruumalast.

Kodutöö nr. 6. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. "Kodune kontrolltöö" nr. 7 (lk. 209 ja 210).

ARVESTUS NR. 7

Samasus ja võrrand. Võrrandi põhiomadused. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite koostamine ja lahendamine. Murdvõrrandite lahendamine. Täheliste kordajatega võrrandid.

Seitsmenda arvestuse materjal jaguneb järgmisteks alateemadeks:

a) samasus ja võrrand; võrrandi põhiomadused; täisarvuliste kordajatega võrrandite lahendamine [§ 63 – § 66 (1)];

b) lineaarvõrrandite koostamine; murruliste kordajatega võrrandite ja murdvõrrandite lahendamine [§ 66 (2., 3. ja 4.)];

c) täheliste kordajatega võrrandid [§ 66 (5.), ülesanded kuni nr. 783].

MÄRKUSI 7. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Eelkõige tuleb endale selgeks teha mõisted *samasusteisendus, võrdus, samasus, võrrand* ja *võrre*. Samuti peab oskama määrata kas võrdus on samasus või võrrand. Järgnevad definitsioonid võimaldavad seda:

a) *samasus on võrdus, mis jääb kehtima temas esinevate tähtede asendamisel vabalt võetud arvudega;*

b) *võrrand on võrdus, mis jääb kehtima temas esineva tähe (tähtede) asendamisel ainult teatud arvudega.*

N ä i t e i d. 1) Määra, kas $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ on samasus või võrrand.

Andes tähtedele vabalt võetud väärtusi $a=3$ ja $b=2$, omandab võrduse vasak pool väärtuse $(3+2)^2=5^2=25$ ja parem pool väärtuse $3^2+2\cdot3\cdot2+2^2=9+12+4=25$. Võrreldes tulemusi leiame, et need on võrdsed (25). Kuna võrduse mõlema poole väärtused jäävad võrdseteks, siis on võrdus samasus.

2) Määrata, kas $a^2=3a-2$ on samasus või võrrand.

Kui $a=2$, on võrduse vasaku poole väärtus $2^2=4$ ja parema poole väärtus $3\cdot2-2=4$, s. o. sama. Kui aga $a=5$, on võrduse vasaku poole väärtus $5^2=25$ ja parema poole väärtus $3\cdot5-2=$ $=15-2=13$. Käesoleval juhul võrduste mõlema poole väärtused erinevad, mistõttu see on võrrand.

Näidete varal tuleb endale hästi selgeks teha võrrandite põhiomadused ja viimaste alusel tehtud järeldused.

1. Võrrand jääb kehtima, kui tema mõlema poolega liita või lahutada sama avaldis, kusjuures antud ja saadud võrrandil on samad lahendid (nad on samaväärsed).

2. Võrrand jääb kehtima, kui tema mõlemat poolt korrutada või jagada nullist erineva tundmatuid mittesisaldava avaldisega, kusjuures saadud ja antud võrrandil on samad lahendid (nad on samaväärsed).

N ä i t e i d. a) Kui liidame võrrandi $5x-4=18+3x$ mõlema poolega $4-3x$, siis saame:

$$5x-4+4-3x=18+3x+4-3x.$$

Kui võrrandi vasakul poolel koondada -4 ja $+4$ ning paremal poolel $+3x$ ja $-3x$, siis omandab võrrand kuju: $5x-3x=18+4$.

Kui võrrelda antud võrrandit saadud võrrandiga, selgub, et algvõrrandi parempoolne liige $+3x$ asub saadud võrrandi vasakul poolel miinusmärgiga (vastandarv) ja algvõrrandi vasakpoolne liige -4 saadud võrrandi paremal poolel plussmärgiga (vastandarv).

I järeldus. *Võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.*

b) Kui liidame võrrandi $5x-4+2x=15+2x-4$ mõlema poolega $4-2x$, siis saame:

$$5x-4+2x+4-2x=15+2x-4+4-2x.$$

Kui koondada võrrandi mõlemalt poolelt -4 ja $+4$ ning $+2x$ ja $-2x$, siis omandab võrrand kuju: $5x=15$. Kui võrrelda saadud võrrandit antud võrrandiga, siis selgub, et algvõrrandi mõlemal poolel olnud liikmed -4 ja $+2x$ on koondunud.

II järeldus. *Võrrandi mõlemal poolel olevad võrdsed ja samamärgilised liikmed koonduvad.*

c) Lahenda võrrand: $\frac{(3x-28)}{4}=\frac{x}{12}+1.$

Korrutame võrrandi mõlemat poolt võrrandi liikmete ühise nimetajaga, s. o. 12-ga:

$$12\cdot\frac{3x-28}{4}=\frac{12x}{12}+1\cdot 12.$$

Taandades võrrandi esimest ja teist liiget, saame:

$$3\cdot(3x-28)=x+12.$$

Avame sulud:

$$9x-84=x+12.$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele:

$$9x-x=12+84;$$
$$8x=96;$$
$$x=\frac{96}{8}=12.$$

Kontrollimiseks asendame algvõrrandis x 12-ga, siis omandab võrrandi parem pool väärtuse $\frac{12}{12}+1=2$ ja vasak pool väärtuse $\frac{36-28}{4}=\frac{8}{4}=2$. Et väärtused on võrdsed, siis järgneb, et lahend on õige.

d) Lahenda võrrand: $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{20}{x^2-25}$.

Antud võrrandi ühiseks nimetajaks on $(x-5)(x+5)$, sest kolmas nimetaja $x^2-25=(x-5)(x+5)$. Korrutame igat liiget ühise nimetajaga, s. o. $(x-5)(x+5)$-ga.

$$\frac{(x+5)(x-5)(x+5)}{x-5}-\frac{(x-5)(x+5)(x-5)}{x+5}=\frac{20(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+5)}.$$

Taandame võrrandi esimest liiget $(x-5)$-ga, teist liiget $(x+5)$-ga ja kolmandat liiget $(x-5)$-ga ja $(x+5)$-ga:

$$(x+5)(x+5)-(x-5)(x-5)=20.$$

Arvu korrutamine iseendaga on ruutu tõstmine:

$$(x+5)^2-(x-5)^2=20.$$

Rakendame abivalemit:

$$x^2+10x+25-(x^2-10x+25)=20.$$

Rakendame lahutamisreeglit:

$$x^2+10x+25-x^2+10x-25=20.$$

Koondame:

$$20x=20;$$
$$x=1.$$

Kontrollimiseks asendame algvõrrandis x 1-ga. Siis omandab võrrandi vasak pool väärtuse

$$\frac{1+5}{1-5}-\frac{1-5}{1+5}=\frac{6}{-4}-\frac{-4}{6}=-\frac{3}{2}+\frac{4}{6}=-\frac{9}{6}+\frac{4}{6}=-\frac{5}{6}$$

ja võrrandi parem pool väärtuse

$$\frac{20}{1-25}=\frac{20}{-24}=\frac{20}{24}=-\frac{5}{6}.$$

Et väärtused on võrdsed, siis on lahend õige.

e) Lahenda võrrand: $3x-2=4$.

Lahendus.

$$3x=2+4;$$
$$3x=6;$$
$$x=2.$$

Kontrollimisel omandab võrrandi vasak pool väärtuse

$$3\cdot2-2=6-2=4.$$

Et võrrandi mõlema poole väärtused on võrdsed, on ka lahend õige.

3) Kui korrutame võrrandi mõlemat poolt nulliga, siis saame:

$$(3x-2)\cdot 0=4\cdot 0.$$

Siit järgneb, et võrrand kehtib iga x väärtuse juures, sest korrutis on null, kui üks ta teguritest võrdub nulliga. Võrrandi mõlema poole korrutamisel nulliga saadi võrrand, mida rahuldab iga arv ja tõelist lahendit pole võimalik määrata.

III järeldus. *Võrrandi mõlemat poolt võib korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga (avaldisega).*

IV järeldus. *Nimetaja kaotamiseks võrrandist tuleb tema kõik liikmed korrutada võrrandi liikmete ühise nimetajaga.*

1) Lahendada võrrand:

$$\frac{(4-x)x}{x-2}=6x+\frac{2x}{x-2}.$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled arvuga $x-2$, saame võrrandi

$$(4-x)x=6x(x-2)+2x,$$

mille lahendamisel saame:

$$4x-x^2=6x^2-12x+2x;$$
$$-7x^2+14x=0.$$

Võtame x sulgude ette:

$$x(-7x+14)=0.$$

Et korrutis on null, kui üks tegureist on null, siis saame kaks lahendit $x_1=0$ ja $-7x+14=0$, millest $x_2=2$.

Et kontrollida lahendite õigsust, paneme algvõrrandisse otsitava asemele tema väärtuse.

Kui $x=0$, on võrrandi vasaku poole väärtus

$$\frac{(4-0)0}{0-2}=\frac{0}{-2}=0$$

ja parema poole väärtus

$$6\cdot 0+\frac{2\cdot 0}{0-2}=0+\frac{0}{-2}=0.$$

Nagu näeme, on $x=0$ antud võrrandi lahendiks. $x=2$ antud võrrandi lahendiks olla aga ei saa, sest sel juhul võrduks tundmatut sisaldava murru nimetaja nulliga, mis pole aga võimalik (nulliga ei saa jagada).

V järeldus. *Kui võrrandi mõlemat poolt korrutada avaldisega, mis sisaldab tundmatut, siis võime saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui antud võrrandil. Neid lahendeid nimetatakse* *võõrlahenditeks ning nad tuleb saadud lahendite hulgast kõrvaldada.*

g) Lahenda võrrand: $10x-15=15-5x$.

Jagame võrrandi mõlemat poolt 5-ga:

$$2x-3=3-x,$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele:

$$2x+x=3+3.$$

Koondame:

$$3x=6;\ x=\frac{6}{3}=2.$$

Kontrollimiseks asendame võrrandis x 2-ga, siis omandab võrrandi vasak pool väärtuse $10\cdot2-15=20-15=5$ ja võrrandi parem pool väärtuse $15-5\cdot2=15-10=5$. Väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

h) Lahenda võrrand: $-3x-15=-9x+3$.

Jagame võrrandi kõik liikmed -3-ga:

$$x+5=3x-1.$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele ja tuntud liikmed võrrandi teisele poolele: $x-3x=-5-1$.

Koondame ja avaldame x:

$$-2x=-6;\ \ x=\frac{-6}{-2}=3.$$

Kontrollimiseks asendame võrrandis x 3-ga, siis omandab võrrandi vasak pool väärtuse

$$-3\cdot3-15=-9-15=-24$$

ja võrrandi parem pool väärtuse

$$-9\cdot3+3=-27+3=-24$$

Väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

VI järeldus. *Võrrandi kõiki liikmeid võib jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.*

VII järeldus. *Võrrandi kõiki liikmeid võib asendada nende vastandarvudega* (vastab korrutamisele -1-ga).

Rakendades võrrandi põhiomadusi ja nende järeldusi tuleb võrrandeid lahendada järgmises järjestuses (uuele tüübile minna üle alles pärast seda, kui eelmine on selge):

a) arvuliste kordajatega sulgavaldisteta ja murdudeta võrrandid;

b) arvuliste kordajatega sulgavaldistega võrrandid;

c) arvuliste kordajatega murdvõrrandid;

d) täheliste kordajatega võrrandid, milles ei esine sulgavaldisi ega murde;

e) täheliste kordajatega ja sulgavaldistega võrrandid;

f) täheliste kordajatega murdvõrrandid.

Näiteid. 1) $2x+3-4(x-2)=7-(3x-5)+4x$.
Avame sulud: $2x+3-4x+8=7-3x+5+4x$.
Viime tundmatuid sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja tuntud liikmed teisele poolele:

$$2x-4x+3x-4x=7+5-3-8.$$

Koondame:

$$-3x=1.$$

Avaldame x:

$$x=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

Kontroll. Kui $x=-\frac{1}{3}$, on algvõrrandi vasaku poole väärtus

$$2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3-4\left(-\frac{1}{3}-2\right)=-\frac{2}{3}+3+\frac{4}{3}+8=11\frac{2}{3}$$

ja algvõrrandi parema poole väärtus

$$7-\left[3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-5\right]+4\left(-\frac{1}{3}\right)=7-(-1-5)-\frac{4}{3}=$$

$$=7+1+5-1\frac{1}{3}=13-1\frac{1}{3}=11\frac{2}{3}.$$

Algvõrrandi mõlema poole väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. $x=-\frac{1}{3}$.

2) Lahenda võrrand $\frac{s+3}{5}=8-\frac{s-1}{4}$.
Korrutame võrrandi liikmed 20-ga:

$$\frac{20(s+3)}{5}=20\cdot 8-\frac{20\cdot(s-1)}{4}.$$

Taandame esimest murdu 5-ga ja teist 4-ga:

$$4(s+3)=160-5(s-1).$$

Avame sulud:

$$4s+12=160-5s+5.$$

Viime tundmatuid sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja tuntud liikmed teisele poolele:

$$4s+5s=160+5-12.$$

Koondame:

$$9s=153.$$

Jagame s kordajaga:

$$s=\frac{153}{9}=17.$$

Kontroll. Kui $s=17$, on algvõrrandi vasaku poole väärtus $\frac{17+3}{5}=4$ ja algvõrrandi parema poole väärtus

$$8-(17-1):4=8-\frac{16}{4}=8-4=4.$$

Saadud väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. $s=17$.

3) Lahenda võrrand $\frac{u}{u-2}-\frac{u-2}{u+2}=\frac{2}{u^2-4}$

Korrutame võrrandi kõiki liikmeid murdude ühise nimetajaga $(u-2)(u+2)$:

$$\frac{u(u-2)(u+2)}{u-2}-\frac{(u-2)(u-2)(u+2)}{u+2}=\frac{2(u-2)(u+2)}{(u-2)(u+2)}$$

Taandame võrrandi esimest murdu avaldisega $u-2$, teist avaldisega $u+2$ ja kolmandat avaldisega $(u-2)(u+2)$, saame:

$$u(u+2)-(u-2)^2=2.$$

Avame sulud:

$$u^2+2u-u^2+4u-4=2.$$

Koondame:

$$6u=2+4.$$

Jagame u kordajaga:

$$u=\frac{6}{6}=1.$$

Kontroll.

$$\frac{u}{u-2}-\frac{u-2}{u+2}=\frac{1}{1-2}-\frac{1-2}{1+2}=\frac{1}{-1}-\frac{-1}{3}=-\frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{n^2-4}=\frac{2}{1-4}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}.$$

Algvõrrandi mõlema poole väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. $u=1$.

4) Lahenda võrrand x suhtes:

$$x+a=3(x+b),$$

Lahendus.

$$x+a=3x+3b;$$
$$x-3x=3b-a;$$
$$-2x=3b-a;$$
$$x=\frac{3b-a}{-2}=\frac{a-3b}{2}.$$

Kontroll.

$$x+a=\frac{a-3b}{2}+a=\frac{a-3b+2a}{2}=\frac{3a-3b}{2}=1,5a-1,5b;$$

$$3(x+b)=3\left(\frac{a-3b}{2}+b\right)=3\cdot\frac{a-3b+2b}{2}=\frac{3\cdot(a-b)}{2}=$$
$$=1,5(a-b)=1,5a-1,5b.$$

Algvõrrandi mõlema poole väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. $x=\frac{a-3b}{2}$.

5) Lahenda võrrand x suhtes:

$$\frac{a-x}{b-x}=\frac{a+x}{b+x}.$$

Korrutame avaldisega $(b-x)(b+x)$:

$$\frac{(a-x)(b-x)(b+x)}{b-x}=\frac{(a+x)(b-x)(b+x)}{b+x}.$$

Taandame esimest murdu avaldisega $b-x$ ja teist avaldisega $b+x$:

$$(a-x)(b+x)=(a+x)(b-x);$$
$$ab+ax-bx-x^2=ab-ax+bx-x^2.$$

Võrrandi mõlemal poolel olevad võrdsed liikmed ab ja $-x^2$ koonduvad.

Viime tundmatuid sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele:

$$ax-bx+ax-bx=0.$$

Koondame:

$$2ax-2bx=0$$

Toome x sulgude taha

$$(2a-2b)x=0;$$
$$x=\frac{0}{2a-2b}=0.$$

Kontroll.

$$\frac{a-x}{b-x}=\frac{a-0}{b-0}=\frac{a}{b}; \qquad \frac{a+x}{b+x}=\frac{a+0}{b+0}=\frac{a}{b}.$$

Algvõrrandi mõlema poole väärtuste võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. $x=0$.

Kodutöö nr. 7. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. Ülesanded 719 (5.—8.); 728; 736; 742; 749; (3. ja 4.); 754 (8.); 755 (3. ja 4.).

ARVESTUS NR. 8

Võrde lahendamine. Võrdeline jaotamine. Ülesannete lahendamine võrrandi abil (784—859).

MÄRKUSI 8. ARVESTUSE MATERJALI ÕPPIMISEKS

Ülesannete lahendamisel võrrandi abil on soovitatav tundmatu arv tähistada mingi tähega. Kui ülesandes esineb mitu tundmatut, siis tuleb ülesannet lugeda teistkordselt ja üles otsida need laused või lause osad, kus on öeldud, kuidas teised tundmatud sõltuvad tähistatud tundmatust, ja sellele vastavalt need avaldada. Lõpuks tuleb veel kord ülesanne tähelepanelikult läbi lugeda, et leida lause või lause osa, mis võimaldab koostada võrrandi. Kui seda ülesandes ei leidu, siis tuletatagu varemõpitust meelde mõni lause, mille põhjal saab võrrandi koostada.

Näiteid.

Ülesanne 1. Jüri on Reinust 2 aastat vanem, Maret aga Jürist 3 aastat noorem. Kokku on Reinu, Jüri ja Mareti vanus 37 aastat. Kui vana on Rein?

Ülesande lõpus olevale küsimusele (Kui vana on Rein?) vastame: Rein on x aastat vana. Lause osa «Jüri on Reinust 2 aastat vanem», annab õiguse tähistada Jüri vanuse avaldisega $x+2$. Lause osa «Maret aga Jürist 3 aastat noorem» annab õiguse tähistada Mareti vanuse avaldisega $(x+2-3)=x-1$ (s. o. 3 aasta võrra vähendatud Jüri vanus). Lause «Kokku on Reinu, Jüri ja Mareti vanus 37 aastat» annab õiguse laste vanuste summa võrdsustada 37-ga:

Reinu vanus + Jüri vanus + Mareti vanus = 37;

$$x+(x+2)+(x-1)=37.$$

Ülesanne 2. Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda teisest suurem. Leia kummagi nurga suurus.

Küsitakse kummagi nurga suurust. Tähistame ühe neist tähega x. Olgu see väiksem. Sõnad «Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda teisest suurem» annab õiguse teist nurka (suuremat) tähistada avaldisega $4x$. Võrrandi võimaldab koostada ülesandes esinev väide, et nurgad on kõrvunurgad ja varemõpitud teoreem kõrvunurkade summast.

$$\text{nurk} + \text{kõrvunurk} = 180°;$$
$$x + 4x = 180.$$

Võrrandi lahendi põhjal saame määrata otsitavad. Lahendite õigsuse kontrollimiseks lahendame antud ülesande aritmeetiliselt. Kui seejuures vastuolusid ei teki, on lahendid õiged.

Näiteid. a) Ülesande nr. 1 lahendamisel saame $x=12$. Sellest järgneb: Reinu vanus on $x=12$ aastat, Jüri vanus on $(x+2= =12+2)=14$ aastat ja Mareti vanus $(x-1=12-1)=11$ aastat. Kuna vanuste summa on $12+14+11=37$, nagu ülesandes öeldud, siis on lahendus õige.

b) Ülesande nr. 2 lahendamisel saame $x=36$. Sellest järgneb: üks kõrvunurkadest on 36° ja teine $(4x=4 \cdot 36)=144°$. Et nende summa on $36+144=180°$, nagu teoreemis öeldud, siis on lahendus õige.

Ülesanne 3. Jagades tundmatu arvu 4-ga ja suurendades saadud jagatist 13 võrra, saame arvu, mis on pool endisest tundmatust arvust. Leida see arv.

Tähistame tundmatu arvu tähega x. 4-ga jagamisel saame $\frac{x}{4}$. Kui seda suurendame 13 võrra, saame $\frac{x}{4}+13$. Kuna saadud arv peab võrduma antud arvu poolega, siis saame võrrandi: $\frac{x}{4}+13= =\frac{x}{2}$.

Võrrandi lahendamiseks korrutame võrrandi igat liiget 4-ga:

$$\frac{4x}{4}+4 \cdot 13=\frac{4x}{2}.$$

Taandame esimest murdu 4-ga ja viimast 2-ga:

$$x+52=2x.$$

Viime esimese liikme võrrandi paremale poolele:

$$52=2x-x;$$
$$52=x.$$

Kontroll.

1) $52:4=13$; 2) $13+13=26$; 3) $52:2=26$.

Teise ja kolmanda tehte võrdsus kinnitab lahendi õigsust.

Vastus. Tundmatu arv on 52.

Ülesanne 4. Kolmnurga ümbermõõt on 180 cm. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 9, 11 ja 16. Leida kolmnurga iga külje pikkus.

Suhtearvud näitavad mitmest osast iga külg koosneb. Tähistame ühe osa pikkuse x-ga, siis on esimese külje pikkus $9x$, teise külje pikkus $11x$ ja kolmanda külje pikkus $16x$.

1. külje pikkus + 2. külje pikkus + 3. külje pikkus = ümbermõõt;

$$9x+11x+16x=180.$$

Võrrandi lahendamiseks koondame:

$$36x=180, \text{ millest } x=\frac{180}{36}=5.$$

Esimese külje pikkus on $9x=9\cdot5=45$. Teise külje pikkus on $11x=11\cdot5=55$. Kolmanda külje pikkus on $16x=16\cdot5=80$. Et külgede pikkuste summa $(45+55+80=180)$ võrdub ülesandes antud ümbermõõduga, siis on lahendid õiged.

Vastus. Külgede pikkused on 55 cm, 45 cm ja 80 cm.

Ülesanne 5. Kolme järjestikuse täisarvu summa on 48. Leida need arvud.

Tähistame esimese arvu tähega x. Et järgnev arv on eelmisest ühe võrra suurem, siis on teine arv $x+1$ ja kolmas arv $x+1+1=$ $=x+2$.

Esimene arv + teine arv + kolmas arv $=48$;

$$x+(x+1)+(x+2)=48.$$

Võrrandi lahendamiseks avame sulud ja koondame. Saame

$$3x=48-2-1;$$
$$3x=45;$$
$$x=\frac{45}{3}=15.$$

Esimene arv on 15, teine $15+1=16$ ja kolmas $15+2=17$. Et nende summa $(15+16+17=48)$ võrdub ülesandes nimetatud summaga, siis on lahendid õiged.

Vastus. Arvud on 15, 16 ja 17.

Ülesanne 6. Üks masinakirjutaja võib käsikirja ümber kirjutada 8 tunniga, teine 7 tunniga. Kui kiiresti võivad nad selle töö lõpetada koos töötades?

Tähistame käsikirja ümberkirjutamiseks kuluva aja x-ga. Kuna esimene kirjutaja kirjutab üksi töötades käsikirja ümber 8 tunniga, siis ühe tunniga kirjutab ta $\frac{1}{8}$ kogu käsikirjast ja x tunniga $\frac{x}{8}$ osa käsikirjast. Teine kirjutaja üksi töötades kirjutab käsikirja ümber 7 tunniga, ühe tunniga $\frac{1}{7}$ käsikirjast ja x tunniga $\frac{x}{7}$ käsikirjast. Et mõlemad töötasid koos, siis kirjutasid nad selle ümber x tunniga. Seepärast peab olema $\frac{x}{8}+\frac{x}{7}=1$ (üks käsikiri). Võrrandi lahendamiseks korrutame võrrandi iga liiget 56-ga

$$\frac{56x}{8}+\frac{56x}{7}=56.$$

Taandame esimest murdu 8-ga ja teist 7-ga:

$$7x+8x=56.$$

Koondame:

$$15x=56.$$

Siit

$$x=\frac{56}{15}=3\frac{11}{15} \text{ tundi} = 3 \text{ tundi } 44 \text{ min.}$$

Kontroll. Koos töötades kirjutaksid masinakirjutajad ühe tunniga $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=\frac{7}{56}+\frac{8}{56}=\frac{15}{56}$ käsikirjast. Terve käsikirja kirjutamiseks kuluks

$$1:\frac{15}{56}=\frac{56}{15}=3\frac{11}{45} \text{ tundi.}$$

Vastus. Käsikirja kirjutamiseks kuluks 3 t. 44 min.

Ülesanne 7. Sõiduks Tallinnast Tartu ja tagasi kulus autol kokku 10 tundi. Mitu kilomeetrit on maanteed mööda Tallinnast Tartu, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 km tunnis ja tagasisõidul 40 km tunnis ning Tartus peatuti 2 tundi?

Tähistame Tallinnast Tartu viiva maantee pikkuse arvuga x. Tartu sõiduks kulus $\frac{x}{60}$ tundi, tagasisõiduks $\frac{x}{40}$ tundi. Kuna Tartu sõitmise aeg, peatuse pikkus ja tagasisõidu aeg kokku võrdub 10 tunniga, siis saame võrrandi:

$$\frac{x}{60}+2+\frac{x}{40}=10.$$

Korrutame igat liiget arvuga 120:

$$\frac{120x}{60}+2\cdot120+\frac{120x}{40}=10\cdot120.$$

Taandame esimest murdu 60-ga ja teist 40-ga:

$$2x+3x=1200-240;$$
$$5x=960;$$
$$x=\frac{960}{5};$$
$$x=192.$$

K o n t r o l l. Tartu sõitmiseks kulus $192:60=3\frac{1}{5}$ tundi, tagasisõiduks $192:40=4\frac{4}{5}$ tundi, sõit kestis $3\frac{1}{5}+2+4\frac{4}{5}=10$ tundi.

V a s t u s. Tallinnast Tartu on 192 km.

Kodutöö nr. 8. E. Luht, A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass. «Kodune kontrolltöö nr. 10» (lk. 247 ja 248).

RAUDVARA

(Eriti hästi peab tundma «raudvara».)

Õpikud: J. Kallak, A. Leps, E. Luht. Matemaatika töölisnoorte koolidele. V ja VI klass.
E. Luht ja A. Telgmaa. Matemaatika töölisnoorte koolidele. VII klass.

1. 1 km = 1000 m, 1 hl = 100 l,
   1 m = 100 cm, 1 l = 1 dm^3,
   1 cm = 10 mm, 1 t = 1000 kg,
   1 km^2 = 1 000 000 m^2, 1 ts = 100 kg,
   1 ha = 10 000 m^2, 1 kg = 1000 g
   1 a = 100 m^2,
   (vaata 5. kl. õpikust lk. 3, 8 ja 11).
2. Arvude ümardamisreegel (7. kl. õpikust § 31).
3. Tehteid ligikaudsete arvudega.
   a) liitmine (7. kl. õpikust § 34),
   b) lahutamine (7. kl. õpikust § 34),
   c) korrutamine (7. kl. õpikust § 37),
   d) jagamine (7. kl. õpikust § 37),
   e) korrutise ja jagatise leidmine lükati abil. (7. kl. õpikust § 37).
4. Tehte järjekord avaldise väärtuse arvutamisel (6. kl. õpikust nr. 69).
5. Liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise õigsuse kontrollimise võtted (5. klassi 2. arvestuse tööjuhend).

6. Arvu kujutamine arvteljel (6. kl. õpikust nr. 815).
7. Tehted ratsionaalarvudega:
  a) liitmine (6. kl. õpikust nr. 842),
  b) lahutamine (6. kl. õpikust nr. 855),
  c) korrutamine (6. kl. õpikust nr. 864),
  d) jagamine (6. kl. õpikust nr. 878),
  e) astendamine (6. kl. õpikust nr. 891).
8. Tehted üksliikmetega (6. kl. õpikust nr. 1075, 1105, 1118).
9. Tehted hulkliikmetega (6. kl. õpikust nr. 1079, 1093, 1097, 1131, 1137 ja 1148).
10. Korrutamise abivalemid:
  a) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (6. kl. õpikust nr. 1153),
  b) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (6. kl. õpikust nr. 1162),
  c) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (6. kl. õpikust nr. 1171),
  d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (6. kl. õpikust nr. 1179),
  e) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (6. kl. õpikust nr. 1184).
11. Hulkliikmete tegureiks lahutamine (7. kl. tööjuhendi I arvestuse materjali õppimise kohta käivate märkuste lõpposa).
12. Tehted kümnendmurdudega:
  a) liitmine (5. kl. õpikust nr. 293),
  b) lahutamine (5. kl. õpikust nr. 325),
  c) korrutamine (5. kl. õpikust nr. 443),
  d) jagamine (5. kl. õpikust nr. 465 ja 491).
13. Tehted harilikkude murdudega ja segaarvudega:
  a) liitmine (6. kl. õpikust nr. 324 ja 327),
  b) lahutamine (6. kl. õpikust nr. 324 ja 328),
  c) korrutamine (6. kl. õpikust nr. 369, 393, 442. 448, 469, 475),
  d) jagamine (6. kl. õpikust nr. 383, 409, 494, 506, 516, 536, 546).
14. Kümnendmurru teisendamine harilikuks murruks (6. kl. õpikust nr. 580—583).
15. Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks (6 kl. õpikust nr. 609—611).
16. Tehted algebraliste murdudega:
  a) liitmine (7. kl. õpikust § 13),
  b) lahutamine (7. kl. õpikust § 13),

c) korrutamine [7. kl. õpikust § 14 (1. ja 2.)]
d) astendamine [7. kl. õpikust § 14 (3. ja 4.)]
e) jagamine (7. kl. õpikust §15).

17. Protsendi leidmine antud arvust
(6. kl. õpikust nr. 680).

18. Arvu leidmine antud protsendi järgi
(6. kl. õpikust nr. 712).

19. Kahe arvu suhte arvutamine
(6. kl. õpikust nr. 559, 560).

20. Kahe arvu suhte väljendamine protsentides
(6. kl. õpikust nr. 744).

21. Võrrandi mõiste ja põhiomadused
(7. kl. õpikust nr. 63, 65).

22. Esimese astme võrrandi lahendamine:

a) täisarvuliste kordajatega võrrand (7. kl. õpikust § 66-1),
b) murdarvulistekordajatega võrrand (7. kl. õpikust § 66-3),
c) murdvõrrand (7. kl. õpikust § 66-4),
d) täheliste kordajatega võrrand (7. kl. õpikust § 66-5),
e) võrrandi lahendamine võrde abil (7. kl. õpikust § 67-2),
f) võrrandi koostamine (7. kl. õpikust § 66-2, § 67-3).

23. Definitsioon, teoreem, aksioom
(7. kl. õpikust § 17, § 19—§ 21),

a) nurga definitsioon, mõõtmine ning liigid
(5. kl. õpikust nr. 587, 619),
(7. kl. õpikust § 17, § 18, § 29),
b) piirdenurk (7. kl. õpikust § 46),
c) paralleelsed sirged (7. kl. õpikust § 22, § 24, § 25),
d) ringjoon ja temaga seoses olevad mõisted
(7. kl. õpikust § 39, § 40, § 44),
e) ringjoone ja kaare pikkus
(7. kl. õpikust § 48, § 50),
f) kolmnurk ja ta liigid (5. kl. õpikust nr. 628, 629, 632),
g) kolmnurga nurgad ja kesklõik
(7. kl. õpikust nr. 27, 28),
h) kolmnurga ümber- ja siseringjoon
(7. kl. õpikust nr. 41, 45),
i) rööpkülik ja ta omadused
(5. kl. õpikust nr. 652, 654, 658 ja 659),
j) ristkülik (5. kl. õpikust nr. 662).

k) ruut (5. kl. õpikust nr. 665),
l) romb (5. kl. õpikust nr. 667, 658),
m) trapets (5. kl. õpikust nr. 680).

24. Kolmnurkade võrdsuse tunnused
(6. kl. õpikust nr. 990, 993—995, 1003):

25. Konstruktsioonid:

a) nurga ülekandmine (6. kl. õpikust nr. 953),
b) nurga ja kaare poolitamine
(6. kl. õpikust nr. 1006),
c) lõigu poolitamine (6. kl. õpikust nr. 1020),
d) joonestada ristsirge antud punktist antud sirgele
(6. kl. õpikust nr. 1025),
e) lõigu jagamine võrdseteks osadeks
(7. kl. õpikust lk. 95 joonis 56).

26. Geomeetriliste kujundite pindalad:

a) ristkülik (5. kl. õpikust nr. 685),
b) rööpkülik (5. kl. õpikust nr. 687),
c) kolmnurk (5. kl. õpikust nr. 699),
d) trapets (5. kl. õpikust nr. 713),
e) korrapärane hulknurk
(5. kl. õpikust nr. 740),
f) ringi ja sektori pindala
(7. kl. õpikust § 51, § 53),
g) püstprisma (5. kl. õpikust nr. 760, 762, 767, joonised 92, 94, 96, 100 ja 101),
h) püramiid (6. kl. õpikust nr. 1046),
i) silindri pindala (7. kl. õpikust § 55),
k) koonuse pindala (7. kl. õpikust § 58),
l) kera pindala (7. kl. õpikust § 62),

27. Geomeetriliste kujundite ruumalad:

a) püstprisma ruumala (6. kl. õpikust nr. 788),
b) püramiidi ruumala (6. kl. õpikust nr. 1055),
c) silindri ruumala (7. kl. õpikust § 56),
d) koonuse ruumala (7. kl. õpikust § 59),
e) kera ruumala (7. kl. õpikust § 61).
