

9-5986

OSKAR PERLI

RUUMI
ALGÕPETUS

I ANNE

TEINE ÜMBERTÖÖTATUD TRÜKK



1 9 2 3

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS'

A-5986

ARH^A

A_59863

56083

OSKAR PERLI

RUUMI ALGÕPETUS

I ANNE

TEINE ÜMBERTÖÖTATUD TRÜKK

11692

1923

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

OSAR PIRRI

2



Tallinna Eesti Kirjastus-Ühisuse trükikoda, Pikk tän. 2.

A 5986 I

L15852362

ARHIIVKOOGU

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUSE TRÜKIKODA

Saateks.

Ruumi algõpetuse I anne läheb teist korda trükki. Olen aine ümbertöötanud nii, et seda raamatut omaks tööks loen ja Nathingi nime pealkirjast ära jätan. Nathingi mõju võib tunduda küll ainult üldises kavas; kuid niipalju ühist on sel raamatul suurema osa õpperaamatutega. Peale I-ses trükis juba sissetoodud sümmeetria mõiste ja katse funktsionaalsuse mõistet sisse tuua olen siin kat sunud veel liikumise meetodi tarvitada. Ülesanded on, peale mõne üksiku, teised kui Nathingil ja nende korraldus teine. Olen katsunud neid anda iga „lause“ järele, kus aga võimalik oli, ja nii neid ära jaotada terve kursuse peale võimalikult ühetasaselt.

Esimese trükiga võrreldes olen ma aine hulka vähendanud: ühe osa välja jätnud, teda algkoolis läbivõetuks lugedes, teise osa ülesannetesse mahutanud. I-se trüki paragrahvid on siin paragrahvi numbritele klambris juure lisatud.

Oskussõnades olen käinud „Matemaatika sõnastiku“ III-nda trüki järele, ainult „puutuja“ asemel tarvitan, nagu ennegi, sõna „riivaja“ teda täpsamaks pidades, sõnadele, „paralleelne“, „parallelogramm“, „romb“ olen eesõiguse annud sõnade „rööbik“, „rööpkülik“, „kaldruut“ ees. Õpetajal ei tohiks raske olla neid sõnu oma maitse järele tarvitusele võtta.

Joonised on uued. Nende valmistamise eest ütlen sooja tänu hra ins. Ludwig Sapotzkyle.

Ka kirjastaja on lahkesti vastu tulnud ja kõik teinud, et raamatu meeldivat välimust anda.

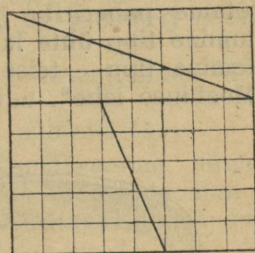
Loodan, et see raamat uuesti sündinud kujul niisama lahket vastuvõttu leiab, nagu 1-ne trükk.

Tartus, 4. aug. 1923.

Oskar Perli.

Sissejuhatus.

1. (5) Võtame ruudu, mille külg on 8 pikkuse üksust ja jagame ta ruutüksusteks; siis saame 8×8 ruutüksust. Lõikame selle ruudu 4-ks osaks, nagu näitab joonis 1. ja seame temast kokku püstküliku, nagu näitab joonis 2. Selle püstküliku pikkus on $8 + 5 = 13$ pikkuse üksust ja laius 5 pikkuse üksust; sellega tema pind on $5 \times 13 = 65$ ruutüksust.



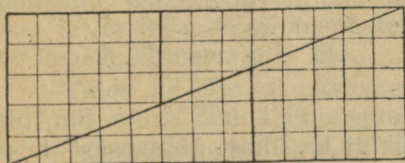
Joon 1

Nii tuleb välja, et $8 \times 8 = 65$. Me teame, et see õige ei ole. Milles seisab viga? Viga seisab selles, et sirge nurkjoone asemel peab olema õige kitsas parallelogramm (rööpkülik).

Sellest näitest selgub, et kujude geomeetrislike omaduste leidmiseks on meie silma-

nägemine puudulik abiriist, mida me mitte alati küllalt usaldada ei või, vaid me peame teravamalt, täpsamat abiriista tarvitama.

Meie kõige teravamaks ja täpsamaks abiriistaks on meie mõistus.



Joon 2

teldes, tehes ühe või mitme juba tunnustatud tõe põhjal uusi järeldusi, ehitame **põhimõistete, definitsioonide** ja **aksioomide** peale terve ruumkujundite omaduste süsteemi üles.

Oma mõtlemise tagajärgi ehk saavutusi väljendame **teoreemidena** ehk **lausetena**.

2. (1) Meie arusaamise järele on **ruum** ilmotsatu: ei ole tal algust, ei lõppu, „ei äärt kusagil, ja keskkohal igalpool“. Niisuguse arusaamise ruumist andis Itaalia mõttetark Giordano Bruno (surnud tuleriidal 17. veebr. 1600).

Ruum laotab end laiali kolmes peasihis 1) üles- ja allapoole, 2) paremale ja vasakule poole, 3) ette- ja tahapoole: **Ruumil on 3 mõõdet**.

Ilmotsatut ruumi me vaadelda ei jaksa, vaid me vaatleme ainult ruumi osasid.

Ruumi igalt poolt piiratud osa nim. **geomeetriseliseks kehaks**.

Kehal on 3 mõõdet—pikkus, laius ja kõrgus; igähte neist võib tarviduse järele nimetada ka sügavuseks või paksuseks.

Piiri, mis ühte ruumiosa teisest lahutab, nim. **pinnaks**.

Kui pinnast kõneldakse, siis võetakse arvesse ainult 2 mõõdet.

Piiri, mis ühte pinnaosa teisest lahutab, nim. jooneks.

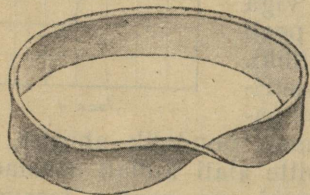
Kui joonest kõneldakse, siis võetakse arvesse ainult 1 mõõde—pikkus.

Piiri, mis ühte jooneosa teisest lahutab, nim. punktiks.

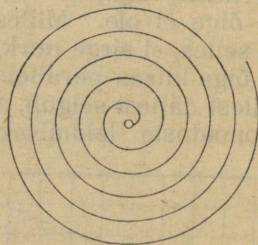
Punktil ei ole ühtegi mõõdet.

3. Pinnal on kaks külge ehk poolt, neid nim. sagedasti paremaks ja pahemaks küljeks ehk pooleks. Üks külg on pöördud ruumi ühe osa poole, teine külg — teise osa poole. Ruumi ühest osast ei pääse teise mitte teisiti, kui pinnast läbi tungides.

Siiski on olemas ka ühe poolega pind, n. n. „**Moebiose leht**“. Võtame pabeririba ja kleebime tema otsad nii kokku, et ühe otsa alumine tipp ühte langeb teise otsa ülemise tipuga ja esimese otsa ülemine tipp — teise otsa alumise tipuga, siis saame pinna, n. n. „**Moebiose lehe**“, millel eelpool nimetatud omadusi ei ole.



Joon 3.



Joon 4.

Pinna peal ei pääse meie harilikult ka ühest pinnaosast teise mitte teisiti, kui joonest üle minnes, joont lõigates. On aga ka jooni olemas, mis pinda nii ei lahuta, näit. **spiraal**. Ka on olemas ruumisjooni. Nii siis, mitte iga pind ei ole piir kahe ruumiosa vahel ja mitte iga joon ei ole piir kahe pinnaosa vahel. Pind ja joon on iseseisvad mõisted ja suurused.

Keha, pind, joon ja punkt on geomeetrilised põhimõisted, põhikujundid.

4. (2) Geomeetrilisi põhimõisteid võib vaadelda ka ümberpööratud järjekorras:

1) **Punktil**, nagu öeldud, ei ole ühtegi mõõdet; tal on olemas asend ehk koht.

2) Kui punkt liigub, siis tekib selle liikumise jäljena **joon**. See liikumine annab joonele ühe mõõde — pikkuse.

Märkus: (9) Kui 3 punkti A, B ja C asuvad mõne joone peal nii, et A poolt C poole liikudes me enne kohtame B^d ja siis alles C^d, siis öeldakse:

„Punkt B on A ja C **vahel**, punkt C on AB **pikenduse peal**, punkt A on CB **pikenduse peal**.“

3) Kui joon lapiti edasi liigub, siis tekib selle liikumise jäljena **pind**. See liikumine annab pinnale teise mõõde — laiuse.

4) Kui pind lapiti edasi liigub, siis tekib selle liikumise jäljena **keha**. See liikumine annab kehale kolmanda mõõte — paksuse (kõrguse, sügavuse).

5. (3, 4) Punkte, jooni, pindu, kehi ja nende igasuguseid kogusid nim. ühise nimega **kujunditeks**.

Keha ja igalt poolt piiratud pinnaosa nim. geom. „**kujuks**“.

Ühtivateks nim. kahte kujundit (ehk kuju) mis pealepaigutamisel või sissemahutamisel ühte langevad.

Ühtelangevaid punkte, jooni, nurki nim. **vastavateks**.

Ühtivates kujundites on vastavad jooned ja nurgad võrdsed. Jooned on **sirged** ja **kõverad**; pinnad on **tasased** ja **kõverad**.

Sirget joont nim. lühidalt — „**sirgeks**“, ja tasast pinda lühidalt — „**tasapinnaks**“.

Mõiste „sirgest joonest“ ehk „sirgest“ on põhimõiste.

6. (5) **Definitsioon** ehk mõiste kindlaksmääramine sünnib sel teel, et nimetatakse sellele mõistele lähema üldmõiste nimi ja temale lisatakse juure defiinitava (kindlaks määratava) mõiste liiki iseloomustav omadus.

Aksioom (ehk põhilause) on tõde, mis teiste tõdede peal ei põhjene. Ta on nii lihtne, et ta ühelt poolt iseenesest arusaadav on, ja et teda, teiselt poolt, teiste tõdede abil seletada ei saa, sest et temast lihtsamaid ei ole.

Tuleb ka ette, et aksioomidena tarvitatakse niisuguseid tõdesid, mis ainult üht ülalnimetatud tingimust täidavad.

Aksioomidena tarvitame edaspidi järgmisi tõdesid:

1) Ühe suuruse asemele võidakse panna temaga võrdne suurus.

2) Kui kahest suurusest on kumbki eraldi võrdne kolmandaga, siis on nad võrdsed ka ise keskes.

3) Tervik on suurem kui ükski tema osadest.

4) Tervik on kõigi oma osade summa.

5) Kui võrdsed suurused liita võrdsete suurustega, siis saame võrdsed suurused.

6) Kui võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis jäävad järele võrdsed suurused.

7) Kui võrdsed suurused liita võrratute suurustega, siis saame võrratud suurused, nimelt see summa on suurem, milles üks liidetav on suurem.

8) Kui võrratutest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis on jäägid võrratud; nimelt, kus enam oli, seal jääb ka enam järele.

9) Kui võrdsetest suurustest lahutada võrratud suurused, siis on jäägid võrratud: seal jääb enam järele, kust vähem ära võeti.

7. (5) **Lause** ehk **teoreem** on tõde, mis põhjeneb teiste tõdede peal.

Rida arutusi, mille abil lause maksvus ära näidatakse, on lause **tõendus**.

Järeldus on lause, mille maksvus järgneb otsekohe eelminevast tõest.

Sisuliselt seisab lause koos **oletusest** ja **väitest**. **Väide** sisaldab tõendatavat tõde, tõde, mille maksvust kindlaks teha „väidatakse“; **oletus** sisaldab neid tingimusi, mis täidetud peavad olema, et väide õige oleks.

Näide. Oletus: „Kui arvu ristsumma on 3-ga jagatav,“

Väide: „siis on ka arv ise 3-ga jagatav.“

Kui me teatavas lauses teeme väite oletuseks ja oletuse väiteks, siis saame n. n. **ümberpööratud lause**; esialgset lauset nim. niisugusel korral **otselauseks**.

Et lause oletusel kui ka väitel võib olla mitu osa, siis tuleb ümberpööratud lause saamiseks ära vahetada ühepalju oletuse ja väite osasid.

Kui me teatavas lauses tema oletust ja väidet eitame, siis saame selle lause **vastalause**. Näide:

I. Otselause: „Kui arvu ristsumma on 3-ga jagatav, siis on ka arv ise 3-ga jagatav.“

II. Ümberpööratud lause: „Kui arv on 3-ga jagatav, siis on tema ristsumma 3-ga jagatav.“

III. Otselause vastalause: „Kui arvu ristsumma ei ole 3-ga jagatav, siis ei ole arv ise ka 3-ga jagatav.“

IV. Ümberpööratud lause vastalause: Kui arv ei ole 3-ga jagatav, siis ei ole ka tema ristsumma 3-ga jagatav.“

Neist 4-st lausest on IV-as I-se järeldus (kuidas nii?) ja III-as II-se järeldus (kuidas nii?), seepärast on nendest tarvis tõendada ainult 2, kas I ja II, või I ja III.

Planimeetria.

I-ne peatükk: Sirge ja nurgad.

a) Sirge.:

8. (6) Aksiom: Kahe punkti läbi on võimalik ühtainust sirget tõmmata.

Sellest järgneb: 1) Kui kahel sirgel on kaks ühist punkti, siis langevad nad ühte tervel omal ulatusel.

2) Kaks punkti määravad sirge asendi ruumis.

Ülesanne 1) Antud on 3, 4, 5, n punkti, millest ükski 3 ühel sirgel ei asu. Nendest sirged läbi tõmmata! Mitu sirget saab?

9. (7) Sirget joont võime mõelda mõlemale poole otsatu pikendatuks.

Sel korral nim. sirget joont **otsatu sirgeks** ehk lihtsalt **sirgeks**.

On sirge ühelt poolt piiratud, siis nim. teda **kiireks**.

Mõlemalt poolt piiratud sirget nim. **sirglõiguks**.

Sirget tähistame kahe suure ladinakeelse tähega, millest kumbki tähistab mingisugust punkti sellel sirgel; kiirel on üks ja sirglõigul mõlemad tähed otsapunktidel. Sirget võib tähistada ka ühe väikese tähega. Kui sirglõiku tähistada ühe väikese tähega, siis on see täht ühtlasi sirglõigu nimeks ja mõõtaruks.

10. (7) Kahe punkti kaugust teineteisest arvatakse neist punktidest läbiminevat sirget mööda ja selleks kauguseks loetakse nende punktide vahel olevat sirglõiku. Sel põhjal väljendatakse eelmist **aksiomi** [8] sagedasti ka järgmisel kujul:

Sirge on kõige lühem tee kahe punkti vahel.

Ülesanded. 2) Joonestada 2 sirglõiku ja võrrelda neid!

3) Antud sirglõik asetada antud sirge peale antud punktist alates.

4) Joonestada sirglõik $x = a + b$, kus a ja b on antud sirglõigud.

5) " " $y = a - b$, kus a ja b on antud sirglõigud.

6) " " $z = 6c$, kus c on antud sirglõik.

7) " " $x = 3a + b - 2c$, kus a , b , ja c on antud sirglõigud.

8) Sirglõigu AB keskkoh on M . Tuleb äranäidata, et CM on kauguste CA ja CB poolvahe, kui C on võetud AB peal, ja et CM on kauguste CA ja CB poolsumma, kui C on võetud AB pikenduse peal.

9) Kuidas võiks eelmise ülesande väidet ühe võrdsuse abil kirjutada, kui arvesse võtta sirglõikude sihti?

11. (14) Kahe sirge vastastikkune asend. 1) Kui kahel sirgel on 2 ühist punkti, siis on neil kõik punktid ühised ja nad langevad ühte tervel omal ulatusel [8,1].

2) Kui kahel sirgel on 1 ühine punkt, siis **lõikuvad** nad; ühine punkt on nende **lõikepunkt** ehk ühe sirge **alus** teise peal.

3) Kui kahel sirgel ei ole ühtki ühist punkti, kui kaugele me neid ka ei pikendaks ja on mõlemad ühel tasapinnal, siis on nad **paralleelsed** ehk **rööbikud**.

Ülesanne. 10) Mitmes punktis võivad lõikuda 8 sirget? n sirget?

12. (3) Tasapind. Definiitsioon. Tasapinnaks nim. niisugust pinda, millega ühte langeb iga sirge, mille temaga kaks ühist punkti on.

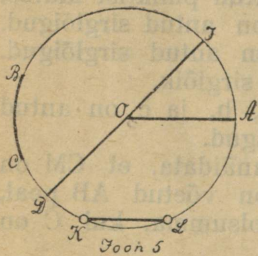
Seda omadust teistel pindadel ei ole. Näit. silindri- või koonuspinnal võib ka sirgeid tõmmata, mis selle pinnaga ühte langevad, aga mitte igas sihis; võib sirgeid leida, millel on silindripinnaga või koonuspinnaga kaks ühist punkti, aga enam ühiseid punkte ei ole.

Aksiom: Üht tasapinda võib teise tasapinna peale paigutada nii, et esimese tasapinna iga meelevaldne punkt ühte langeb teise tasapinna iga meelevaldse punktiga; selle juures ei ole esimese tasapinna asend teise suhtes veel kindlaks määratud selles mõttes, et esimest tasapinda võib teise peal valitud punkti ümber pöörata kuhu poole ja kui palju me tahame. Pealegi võib pealepaigutatavat tasapinda enne pealepaigutamist teise poole peale pöörda. Kõige enam sarnadust selles mõttes tasapinnaga on kerapinnal, aga teda ei saa teise poole peale pöörda.

Seda geomeetria osa, mis vaatlleb tasapinnalisi kujundeid, nim. **planimeetriaks**; seda osa, mis vaatlleb ruumkujundeid, nim. **stereomeetriaks**.

13. (15) Ring. Kui üks tasapind pöörduv teise tasapinna peal teatud punkti ümber, siis kujutab esimese tasapinna iga punkt, hoides ennast ikka omal esialgsel kaugusel võetud kindlast punktist, teise tasapinna peal (ja teise tasapinna punkt esimese tasapinna peal) joone, mille kõik punktid on ühevõrra kaugel sellest punktist, mille ümber pöörduv tasapind.

Definiitsioon. Ringiks ehk ringjooneks nim. kõverat joont, mille kõik punktid on ühevõrra kaugel ühest teatavast punktist. Seda teatavat punkti nim. ringi **keskpunktiks** (O) ehk **tsentriks**. Ringjoonega piiratud tasapinna osa nim. **ringiks**. Ringjoone punkti kaugust keskpunktist nim. **raadiuseks** (OA). Sama ringi raadiused on ühepikkused. Ringjoone osa nim. **kaareks** (BC). Seda sirglõiku, mis

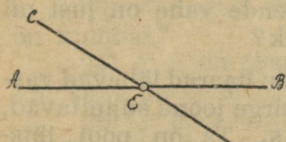


ühendab kahte ringjoone punkti, nim. **kõõluks** (KL). Keskpunktist läbiminevat kõõlu nim. **diameetriks** ehk **läbimõõduks** (DJ). Läbimõõd otsustab koos kahest raadiusest. Kõik sama ringi läbimõõdud on ühepikkused. Selge on, et:

Ringi sees oleva punkti kaugus keskpunktist on vähem kui raadius;
 „ peal „ „ „ „ „ „ „ raadius;
 ringist väljaspool oleva p. „ „ „ „ „ „ „ suurem kui raadius
 — ja ümberpöörduvalt.

b) Nurgad.

14. (17) Nurga mõiste. Kui kaks sirget lõikuvad ja me ühe sirge sihi valime algsihiks, siis määrab teise sirge sihi kindlaks nende sirgete vahel olev **nurk**.



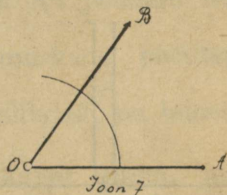
Joon 6

Kui meie kiirt pöörame tema otsapunkti ümber ühes sihis, kuni ta oma algasendis tagasi tuleb, siis ütleme, et kiir tegi **täie pöörde**. Meie arusaamise järele on **kõik**

täispöörded ühesuurused.

Seepärast on võimalik ühe kiire asendit või sihti teise kiire suhtes määrata näit. täispöörde jagude abil.

Definitsioon. Kui kaks kiirt ühest punktist välja lähevad, siis nim. nendest kiirtest sünnitatud nurgaks seda pöörde suurust, mille abil võib üht kiirt teise kiire asendisse viia.



Joon 7

Märkus: On olemas vaateid, mille järele „nurk on kahe lõikuva sirge ja nende lõikepunkti moodustatud kujund“ ehk „nurk on kahe lõikuva sirge vahel olev tasapinna määramatu osa“.

Mõlemad nurka sünnitavad kiired on nurga **haarad** ja nende ühine otsapunkt on nurga **tipp**. Seda tasapinna osa, millest kiir omal pöördumisel üle libiseb, nim. nurga **sisemiseks vallaks**, teist osa — **välimiseks**. Sisemine vald märgitakse harilikult kaarega. Sõna „nurk“ kirjutatakse lühemalt märgiga \sphericalangle ehk \sphericalangle .

Nurka tähistatakse mitmet viisi; tähistades nurka kolme suure tähega peab tipu täht teiste tähtede vahel kirjutatama ja loetama. Nurga mõõtudeks on: täispöörde, täispöörde pool = sirge nurk, täispöörde neljandik = täisnurk, täispöörde 360-nes jagu = kraad.

1 kraad = 60 minutit, 1 minut = 60 sekundit [$1^\circ = 60'$; $1' = 60''$].

Ülesanded. 11) Joonestada 2 nurka ABC ja DEF ja võrrelda neid! (3 juhust.)

12) Antud sirge peal antud punkti M juures konstruuda antud nurga ABC suurune nurk.

13) Kaks antud nurka liita!

14) Leida kahe antud nurga vahe! (2 juhust.)

15) Konstruuda nurk, mis kolm korda nii suur on, kui antud nurk ABC.

16) Kahe nurga summa on 137° ; üks nurk on teisest 25° võrra suurem; kui suur on kumbki nurk?

17) Kahe nurga summa on 148° ; üks nurk on kolm korda nii suur kui teine. Kui suur on kumbki?

18) Kolme nurga summa on 180° . Kaks nendest on ühesuured ja kumbki nendest on 2 korda nii suur kui kolmas nurk. Kui suur on iga nurk?

19) Kolme nurga summa on 180° . Kahe esimese nurga summa on 3 korda nii suur kui kolmas nurk ja nende vahe on just nii suur, kui kolmas nurk. Kui suur on iga nurk?

15. (21) Nurkade liigid. 1) Nurka, mille haarad lähevad vastassihis ja nõnda siis sirge joone sünnitavad, nim. **sirgeks nurgaks**. Ta on pool täispöördest, sellega 180° suur, näit. \sphericalangle ABC.

Kõik sirged nurgad on isekeskis võrdsed.

2) Täispöörde neljandikku ehk sirge nurga poolt nim. **täisnurgaks**, näit. \sphericalangle DEF. Ta on 90° suur.

Kõik täisnurgad on isekeskis võrdsed.

Täisnurga haare nim. **perpendikulaarideks ehk ristjoonteks**: $EF \perp ED$.

3) Nurka, mis vähem on kui täisnurk, nim. **teravnurgaks**.

4) Nurka, mis suurem on kui täisnurk ja vähem kui sirge nurk, nim. **nürinurgaks**.

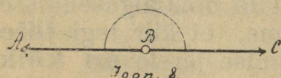
5) Nurka, mis suurem on kui sirge nurk, nim. **ülinürinurgaks**.

Teravnurka ja nürinurka nim. ühise nimega **kaldnurkadeks** ja nende haare — **kaldjoonteks**.

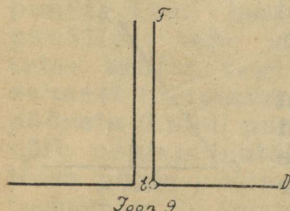
6) Kahte nurka, millel on ühine tipp ja ühine haar, ja mille teised haarad sünnitavad sirge joone, nim. **kõrvnurkadeks**, näit. \sphericalangle KLM ja \sphericalangle NLM. Joonestusest on näha, et **kõrvnurkade summa on sirge nurk**:

$$\sphericalangle KLM + \sphericalangle MLN = \sphericalangle KLN.$$

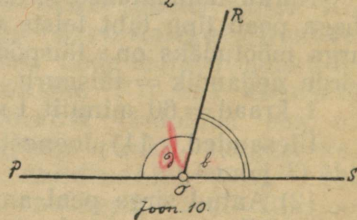
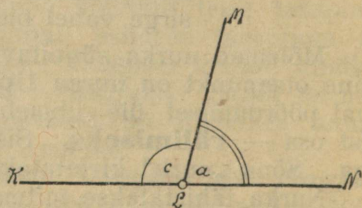
Ümberpöörduvalt: Kui kahel nurgal on ühine tipp ja ühine haar ja nende summa on sirge nurk, siis sünnitavad teised haarad sirge joone.



Joon 8



Joon 9



Joon 10

Järeldused: a) On kõrvunurgad võrdsed, siis on kumbki nendest täisnurk; on nad võrratud, siis on üks nendest teravnurk ja teine on nürinurk.

b) Võrdsete nurkade kõrvunurgad on isekeskis võrdsed, sest: kui võrdsetest suurustest — sirge $\angle NLK =$ sirge $\angle SOP$ — lahutada võrdsed suurused $\angle a = \angle b$ (antud nii), siis jäävad järele võrdsed suurused $\angle c = \angle d$. M.t.o.t.*)

Ülesanded. 20) Antud on $\angle ABC$; joonestada tema kõrvunurk!

21) $\sphericalangle a = 47,4$; kui suur on tema kõrvunurk?

22) $\sphericalangle b$ on omast kõrvunurgast $28^{\circ}36'$ võrra suurem. Kui suur on kumbki?

23) $\sphericalangle c$ on 4 korda nii suur, kui tema kõrvunurk. Kui suur on kumbki?

24) $\sphericalangle a$ on niisama suur, kui $\sphericalangle b$; \sphericalangle -ga b kõrvunurk on 75° ; kui suur on $\sphericalangle a$?

25) $\sphericalangle b = \sphericalangle c$; \sphericalangle -rga c kõrvunurk on 127° ; kui suur on \sphericalangle -rga b kõrvunurk?

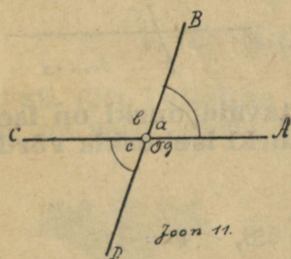
26) Sirge OP jagab $\sphericalangle AOB = 82^{\circ}$ pooleks; sirge OR jagab $\sphericalangle AOB$ kõrvunurga pooleks; kui suur on $\sphericalangle ROP$?

27) Sirge AV poolitab $\sphericalangle BAC = a^{\circ}$; sirge AT poolitab tema kõrvunurga; kui suur on $\sphericalangle VAT$?

28) Kui suure nurga sünnitavad kõrvunurkade poolitajad isekeskis?

29) Tõendada lause: Kõrvunurkade poolitajad on teineteisega risti.

7) Kahte nurka, mida sünnitavad kaks lõikuvat sirget, mille ühiseks tipuks on nende sirgete lõikepunkt ja millel ühist haara ei ole, nim. **tippnurkadeks**, näit. $\sphericalangle a$ ja $\sphericalangle c$. **Tippnurgad on ühesuurused**, $\sphericalangle a = \sphericalangle c$, sest seesama pööre, mis OB viib kiire OA asendisse, viib ka OD kiire OC asendisse.



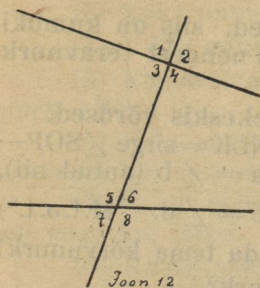
Ülesanded. 30) Kui suure nurga sünnitavad tippnurkade poolitajad?

31) Punktist O väljaminevad 8 kiirt sünnitavad niisugused nurgad, millest iga järgmine on 10° võrra suurem, kui eelmine — alates teisest nurgast ja lõpetades viimasega. Kui suured on need nurgad?

32) OM on nurga EOB poolitaja. Kiir OP läheb nurga EOB tippnurga välimist valda mööda. Näidata, et $\sphericalangle MOP$ võrdub \sphericalangle -de EOP ja BOP poolsummaga või poolvahega. [V. ül. 8, 9.]

16. (22) Kui kaks sirget läbi lõigata kolmandaga, siis tekivad 8 nurka. Me rühmitame need 12-ks paariks ja nimetame:

*) Mis tarvis oligi tõendada.



Joon 12

1) vastavateks nurkadeks:

$\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 5$,
 $\sphericalangle 2$ ja $\sphericalangle 6$,
 $\sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 7$,
 $\sphericalangle 4$ ja $\sphericalangle 8$.

2) põiknurkadeks:

$\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 8$,
 $\sphericalangle 2$ ja $\sphericalangle 7$,
 $\sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 6$,
 $\sphericalangle 4$ ja $\sphericalangle 5$.

3) rindnurkadeks:

$\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 7$,
 $\sphericalangle 2$ ja $\sphericalangle 8$,
 $\sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 5$,
 $\sphericalangle 4$ ja $\sphericalangle 6$.

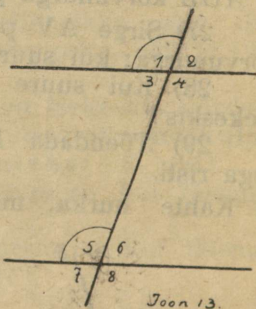
- Ülesanded. 33) $\sphericalangle 1 = 68^\circ$ ja $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 2$. Kui suur on iga teine nurk?
 34) $\sphericalangle 2 = 109^\circ$ ja $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 3$. Kui suured on teised nurgad?
 35) $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 8 = 180^\circ$ ja $\sphericalangle 3 = 122^\circ$. Kui suured on teised nurgad?
 36) $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$ ja $\sphericalangle 4 = 78^\circ$. Kui suured on teised nurgad?

17. (23) Lause. Kui üks paar vastavaid nurki on isekeskis võrdsed, siis on iga paar vastavaid nurki isekeskis võrdsed.

Tõendus: Olgu antud, et $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$; siis on ka $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$, kui võrdsete \sphericalangle -ade, $\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 5$, kõrvunurgad;

siis on ka $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$, kui võrdsete \sphericalangle -ade, $\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 5$, kõrvunurgad;

siis on ka $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$, kui võrdsete \sphericalangle -ade, $\sphericalangle 2$ ja $\sphericalangle 6$, kõrvunurgad.



Joon 13.

18. (23) Lause. Kui üks paar vastavaid nurki on isekeskis võrdsed, siis on iga paar põiknurki isekeskis võrdsed [Joon. 13].

Antud: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$.

Tõendada: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 7$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5$.

Tõendus:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ antud, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$ vast.n. $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$ vast.n. $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1$ tippn.
 $\sphericalangle 8 = \sphericalangle 5$ tippn. $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 6$ tippn. $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 7$ tippn. $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 1$ antud.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8$ [6,2]. $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 7$. $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$. $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5$.

19. (23) Lause. Kui üks paar vastavaid nurki on isekeskis võrdsed, siis on iga rindnurga-paari summa sirge nurk.

Antud: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$. Tõendada: $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$; $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 8 = 180^\circ$;
 $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$; $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 6 = 180^\circ$.

Tõendus: 1) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = 180^\circ$, kui kõrvunurgad; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$, kui vastav. n.; paneme $\sphericalangle 3$ asemele temaga võrdse $\sphericalangle 7$, siis saame: $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$. M. t. o. t.

2) $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 = 180^\circ$, kui kõrvunurgad, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$, kui vastavad n.; paneme $\sphericalangle 4$ asemele temaga võrdse $\sphericalangle 8$, siis saame: $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 8 = 180^\circ$. M. t. o. t.

3) $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 1 = 180^\circ$, kui kõrvunurgad. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$, see on antud; paneme $\sphericalangle 1$ asemele temaga võrdse $\sphericalangle 5$, siis saame: $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$. M. t. o. t.

4) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$, kui kõrvunurgad; $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$, kui vastavad n.; paneme $\sphericalangle 2$ asemele temaga võrdse $\sphericalangle 6$, siis saame: $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 6 = 180^\circ$. M. t. o. t.

20. (23) Lause. Kui üks paar põiknurki on isekeskis võrdsed, siis on:

- 1) iga paar vastavaid nurki isekeskis võrdsed,
- 2) iga paar põiknurki isekeskis võrdsed,
- 3) iga rindnurga-paari summa on sirge nurk. [Joon. 13.]

Tõendus: Kui $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$, siis on ka $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ kui võrdsete nurkade kõrvunurgad. Sellest järgnevad lausete 17, 18 ja 19 põhjal kõik teised võrdsused. M. t. o. t.

21. (23) Lause. Kui ühe paari rindnurkade summa on sirge nurk, siis on:

- 1) iga paar vastavaid nurki isekeskis võrdsed,
- 2) iga paar põiknurki isekeskis võrdsed,
- 3) iga rindnurga-paari summa on sirge nurk.

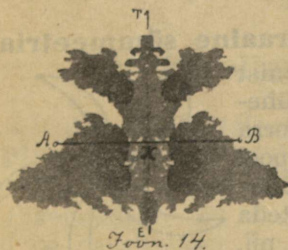
Tõendus: Olgu antud, et $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$; } [6,2];
Peale selle teame, et $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$.

järjelikult $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 7 = \sphericalangle 5 + \sphericalangle 7$. Kui võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siin on jäägid võrdsed. Lahutame mõlemalt poolt $\sphericalangle 7$, siis jääb:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$. Sellest järgnevad kõik teised võrdsused. M. t. o. t.

c) Kujude sümmeetria.

22. (24) Teljeline sümmeetria. Kui tasapinnalist kuju võimalik on mingit sirget mööda kahekorra murda nii, et ühel pool sirget asuv osa ühtib teisel pool sirget asuva osaga, siis öeldakse, et **kuju on selle sirge suhtes sümmeetriline** ehk **kujul on teljeline sümmeetria**.



Seda sirget nim. sümmeetria teljeks. Kahekorra murdmisel ühtivaid punkte, jooni, nurki nim. **sümmeetrilisteks**. Igal punktil on antud telje kohta oma sümmeetriline punkt, ja nimelt üksainus, sest tasapinna kahekorra murdmisel telge

mööda langeb see punkt ikka ühte mõne teisel pool telge oleva punktiga ja ei saa ühtlasi ka teiste punktidega ühtida.

23. (25) Lause. Sümmeetria telg poolitab sümmeetrilisi punkte ühendavat sirglõiku ja on temaga risti. [Joon. 14.]

Antud: A ja B on sümmeetrilised TE kohta.

Tõendada: $KA = KB$. $TE \perp AB$.

Tõendus: Kahekorra murdmisel TE-d mööda ühtib punkt A punkti B-ga, sest nad on sümmeetrilised TE suhtes; järjekult ühtib ka sirge KA sirgega KB ja $\sphericalangle TKA$ ühtib $\sphericalangle TKB$. S. t. et $KA = KB$ ja sirge nurk AKB on jagatud kaheks täisnurgaks TKA ja TKB. Seepärast on ka $TE \perp AB$. M. t. o. t.

24 (26) Lause. Antud punktist võib antud sirgele üheainsa ristjoone tõmmata.

1-ne juhus: punkt C on antud sirgjoone AB peal.

Tõendus: Kui läbi C minev sirge AB jagab C ümber oleva täispöörde pooleks, siis on olemas üksainus sirge DCF, mis selle täispöörde jaotab neljaks täisnurgaks, s. t. läbi C on AB-le olemas üksainus ristjoon.

2-ne juhus: punkt C on antud väljapool sirget AB.

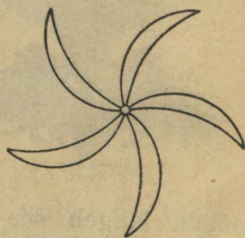
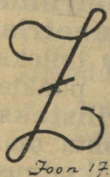
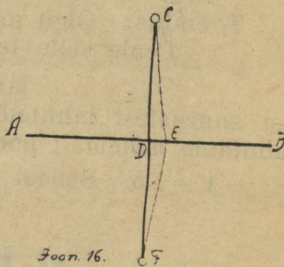
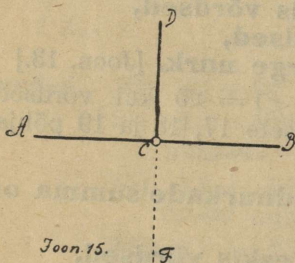
Tõendus: Leiame C-le AB suhtes sümmeetrilise punkti F ja ühendame C ja F sirge abil, siis on $CF \perp AB$ [23 põhjal]. Olgu võimalik punktist C tõmmata AB-le veel üks ristjoon CE. Siis on $\sphericalangle CEB$ täisnurk. Ühendame E F-ga. $\sphericalangle FEB$ on sümmeetriline $\sphericalangle CEA$ ja sellepärast ka täisnurk. Järjel. on $\sphericalangle CEF$ sirgenurk ja joon CEF on sirge joon [15,6]. Läbi C ja F on juba üks sirge CDF olemas ja teist sirget olla ei või [8]. Seepärast ei saa punktist C teist ristjoont AB peale olla. M. t. o. t.

Ülesanne. 37) Ühelt pool sirget MN on kaks punkti A ja B. Leida kõige lühem tee A-st B-sse MN kaudu!

25. (27) Keskümmeetria (Tsentraalne sümmeetria).

Vaadeldes kõrvalseisvat joonist nr. 17 leiame temas ka midagi ühetalulist, sümmeetrilist, aga kahekorra teda murda ei saa nii, et üks pool ühtiks teisega. Selle asemel võime temas leida punkti, mille ümber teda võib pöörata sirge nurga võrra nii, et ta iseendaga ühte langeb.

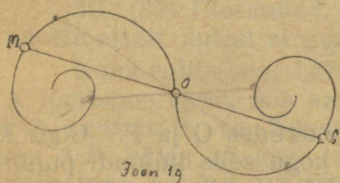
Kui tasapinnalist kuju on võimalik mingi punkti ümber pöörata teatava nurga võrra nii, et ta ühtib iseendaga, siis on see kuju sümmeetriline selle punkti suhtes, ehk sellel kujul on (tsen-



traalne sümmeetria) kesksümmeetria. Punkti, mille ümber kaju pöördakse, nimetatakse pöörtsentriks ehk **sümmeetria keskpunktiks (tsentriks)**; nurka, mille võrra kaju pöördada tuleb, nim. **pöörnurgaks**. Pöörnurkade arvu täispöördes nim. **sümmeetria järguks**. Joonisel nr. 17 — tähel Z — on teise järgu ehk kahekordne kesksümmeetria, joonisel nr. 18 on viienda järgu ehk viiekordne kesksümmeetria. Pööramisel ühtivaid punkte, jooni, nurki nim. sümmeetrilisteks antud punkti suhtes. Selge on, et sümmeetrilised punktid on keskpunktist samakaugel.

26. (28) Lause. Sirglõik, mis ühendab sümmeetrilisi punkte kahekordse kesksümmeetriaga kujus, läheb läbi sümmeetria keskpunkti ja jaguneb seal pooleks.

Tõendus: Ühendame sümmeetrilised punktid M ja L sümmeetria keskpunktiga O. Et punktidel M ja L on O suhtes kahekordne kesksümmeetria, siis on \sphericalangle MOL — sirge nurk, tema haarad OM ja OL sünnitavad sirge joone MOL [15,6] ja sirge ML langeb ühte sirgega MOL nii, et sirge ML läheb läbi keskpunkti



O. Et sümmeetrilised punktid on samakaugel keskpunktist, siis on $OM = OL$. M. t. o. t.

Ülesanne. 38) Kahekordse kesksümmeetriaga joonises leida antud punktile sümmeetriline punkt.

Lahendamine. Niisugune punkt on olemas, sest kui me terve kaju pöörame sümmeetria keskpunkti ümber sirge nurga võrra, siis ühtib antud punkt ikkagi mingi punktiga. Et seda punkti leida, tõmbame läbi antud punkti ja sümmeetria keskpunkti sirge ja asetame teisele poole sümmeetria keskpunkti antud punkti kauguse sümmeetria keskpunktist.

39) Konstruuda kaju, millel on antud kujuga kahekordne kesksümmeetria antud punkti suhtes.

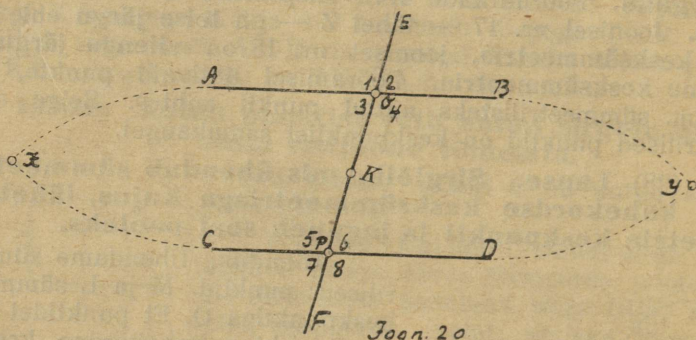
d) Paralleeljooned (rööpjooned).

27. (29) Definiitsioon. Kahte sirget, mis asuvad samal tasapinnal ja mis ei lõiku, kui kaugetele me neid ka ei pikenda, nim. **paralleeljoonteks (rööpjoonteks)**. Märk „||“.

Pikendamise teel ei ole aga võimalik kindlaks teha, kas antud sirged on paralleelsed (rööbikud) või mitte. Sirgete paralleelsuse (rööbikuse) peatunnust, ühtlasi ka paralleeljoonte (rööpjoonte) olemasolemise võimalust avaldab **paralleeljoonte (rööpjoonte) pealause: Kui kahe sirge lõikumisel kolmandaga tekivad võrdsed põiknurgad, siis on need kaks sirget paralleelsed rööbikud).**

Antud: $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$, [järj. $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5$].

Tõendada: $AB \parallel CD$.



Tõendus: EF lõikab AB^d ja CD^d punktides O ja P . Olgu K lõigu OP keskkoht: $KO = KP$. Pöörame kogu selle kujundi punkti K ümber sirge nurga võrra. Siis läheb KF KE sihis ja KE läheb KF sihis; P ühtib O -ga ja O ühtib P -ga sest et $KO = KP$, PD läheb OA^d mööda ja OA läheb PD^d mööda, sest et $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$; PC läheb OB^d mööda ja OB läheb PC^d mööda, sest et $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5$. Järjekult on sellel kujundil kahekordne kesksümmeetria ja K on tema sümmeetria keskpunkt.

Kui nüüd mõelda, et AB ja CD lõikuvad ühel pool EF^d näit. vasakul pool, punktis X , siis peavad nad lõikuma ka X^le sümmeetrilises punktis Y , s. o. paremal pool EF^d . Et aga kahel mitteühtival sirgel kaht ühist punkti olla ei saa, siis ei või sirgetel AB ja CD ühtki ühist punkti olla, s.t. $AB \parallel CD$. M. t. o. t.

1-ne järeldus: Kui kahest sirgest kumbki on risti kolmandaga, siis on nad isekeskis paralleelsed.

2-ne järeldus: Kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikumisel kolmandaga tekivad võrdsed vastavad nurgad või kui tekkinud rindnurkade summa on sirge nurk.

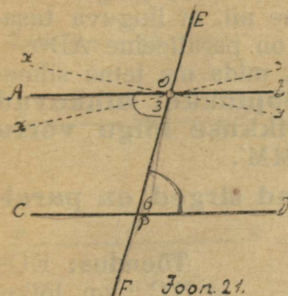
28. (30) Paralleel- (rööp-) joonte aksioom. Väljaspool sirget oleva punkti läbi on võimalik tõmmata üksainus sirge, mis on esimesega paralleelne, näit. kõigist läbi O minevatest sirgetest on üksainus $AB \parallel CD$ ja mitte ükski [teine [Joon. 21].

29. (31) Ümberpööratud lause. Kahe paralleel- (rööp-) joone lõikumisel kolmandaga tekkinud 1) põiknurgad on isekeskis võrdsed, 2) vastavad nurgad on isekeskis võrdsed, 3) rindnurkade summa on sirge nurk.

Antud: $AB \parallel CD$.

Tõendada: $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$.

Tõendus: Kui $\sphericalangle 3$ ei oleks niisama suur kui $\sphericalangle 6$, siis võiksime läbi O tõmmata sirge XY nii, et ta sünnitaks EF^{ga} $\sphericalangle XOF = \sphericalangle 6$. Siis oleks läbi O tõmmatud CD^{le} kaks paralleeljoont — $AB \parallel CD$ oletuse järele ja $XY \parallel CD$, sest et $\sphericalangle XOF = \sphericalangle 6$, mis aga võimatu [28]. Järj. on ainult võimalik, et $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$. Sellest järgnevad kõik teised lause osad [20]. M. t. o. t.



30. (32) Ülesanded. (40). Läbi antud punkti tõmmata sirge paralleelselt antud sirgega.

Konstruksioon. Läbi antud punkti A tõmbame sirge, mis antud sirget lõikab punktis B; siis konstruime A juures AB külge \sphericalangle -gaga ABD võrdse põiknurga BAE. $EF \parallel CD$, sest et $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABD$.

41) Missugune on põiknurkade poolitajate vastastikkune asend? *paralleelselt*

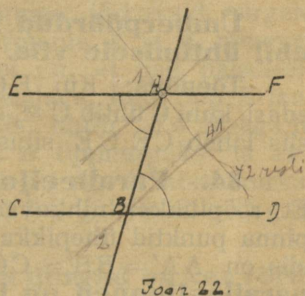
42) Kuidas seisavad rindnurkade poolitajad vastastikku? [V. ül. 29.] *risti*

31. Rööplüke. Olgu meil tasapind R paigutatud tp. P peale; kui tp. P jääb liikumata paigale, kuna tp. R liugub tp-da P^d mööda nii, et tema peal olev kindlaks määratud sirge BC kogu aeg ühtib tp-al P liikumatult paigal oleva sirgega AD, siis öeldakse, et tp-na R liikumine tp-na P suhtes on **rööplüke** ja sünnib rööbiti AD^{ga} ehk AD^d mööda.

Näit. kui kummuti laegast või kirjutuslaua laegast välja tõmmatakse, siis jäävad kummuti ja kirjutuslaua külglauad ja põhiliistud paigale, kuna laeka külglauad ja põhi neid mööda liuguvad, mille juures kummuti või kirjutuslaua külglauad ja põhiliistude sünnitatud serv on paigalejäävaks sirgeks ja laeka serv on teda mööda liikuvaks või liuguvaks sirgeks.

Joonestamise juures tarvitatakse paralleeljoonte ja ristjoonte tõmbamiseks peajasjalikult rööplüket.

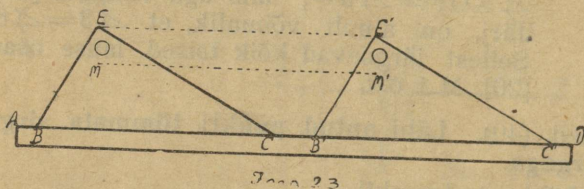
Joonestamise lauale kinnitatakse paberileht ja selle peal hoitakse liineal liikumata kinni. Paberilehte mööda liugub kolmnurk nii, et üks tema serv liineali serva mööda liigub. Paberi pind on paigalejäävaks pinnaks P, kolmnurga alumine külk on liikuvaks tasapinnaks R; liineali serv on paigalolevaks sirgeks AD ja tema külge litsutud kolmnurga serv on liikuvaks sirgeks BC.



32. Et „rööplüke sünnib paralleelselt (rööbiti) paigal oleva sirgega AD ehk AD^d mööda“ seda mõistame nii, et liuguva tasapinna R iga punkt kujutab sirge joone, mis on paralleelne AD^{ga} .

Rööplükke silmapaistvam omadus, mida me tema silmapaistvuse pärast ei tõendagi, on see, et rööplükkel nihkuvad kõik liikuva tasapinna punktid samapikkuse lõigu võrra edasi, näit joon. 23 on $BB' = CC' = EE' = MM'$.

33. Lause: Rööplükke abil ühtivad sirged on paralleelsed.



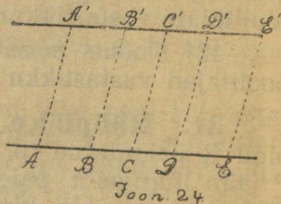
Tõendus: $EC \parallel E'C'$ ja $E'C' \parallel AD$ on lõikejooneks AD ja vastavad nurgad ECB ja $E'C'B$ on võrdsed; järj. $EC \parallel E'C'$.
M. t. o. t.

Ümberpööratud lause: Paralleeljooni võib rööplükke abil ühtimisele viia.

Tõendus: Kui $EC \parallel E'C'$ ja me lükame teda AD^d mööda edasi, kuni C ühtib C'^{ga} , siis ühtib CB $C'B'^{ga}$. Et $\sphericalangle ECB = \sphericalangle E'C'B'$, siis läheb CE $C'E'$ sihis ja CE ühtib $C'E'^{ga}$. M. t. o. t.

34. Paralleeljoonte peomadus.

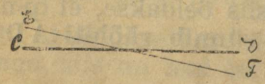
Et rööplükkel nihkuvad kõik liikuva tasapinna punktid ühepikkuse lõigu võrra edasi, siis on $AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$; s. t. **paralleeljooned on igas punktis teineteisest ühekaugel, ükskõik mis sihis seda kaugust arvata.** Harilikult arvatakse teda ristjoone sihis.



Ülesanne. 43) Rööplükke abil tõmmata antud sirgele paralleeljoon läbi antud punkti.

35. (33) Lause: Kui sirge lõikab üht paralleeljoont, siis lõikab ta ka teist.

Tõendus: Vastasel korral oleks läbi lõikepunkti tõmmatud AB^le kaks paralleeljoont, mis võimatu.



Joon 25.

36. (34) Lause: Kui sirge on risti ühe paralleeljoonega, siis on ta risti ka teisega.

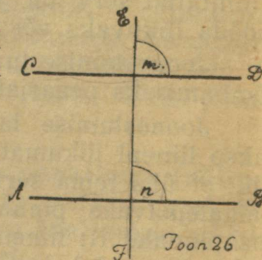
Tõendus: Et $AB \parallel CD$, siis on

$$\sphericalangle n = \sphericalangle m, \text{ kui vast. nurgad;}$$

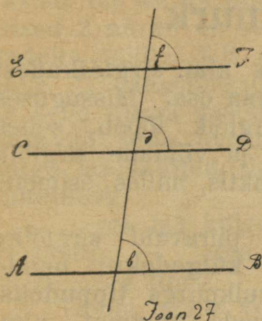
et $EF \perp CD$, siis on $\sphericalangle m = 90^\circ$.

$$\sphericalangle n = 90^\circ; \text{ s. t. } EF \perp AB.$$

M. t. o. t.



Joon 26



Joon 27

37. (35) Lause: Kui sirge on paralleelne ühe paralleeljoonega, siis on ta paralleelne ka teisega.

Tõendus: Lõikame kõik 3 joont läbi neljandaga.

Et $AB \parallel CD$, siis on $\sphericalangle b = \sphericalangle d$, kui vast. nurgad;
et $EF \parallel CD$, „ „ $\sphericalangle f = \sphericalangle d$, „ „ „

$$\sphericalangle b = \sphericalangle f \quad [6,2],$$

$$EF \parallel AB \quad [27,2] \text{ M. t. o. t.}$$

38. Lause. Paralleelsete haardega nurgad on kas võrdsed või nende summa on sirge nurk.

Antud: $ED \parallel BA$, $EF \parallel BC$.

Tõendada: $\sphericalangle d = \sphericalangle b$, $\sphericalangle e = \sphericalangle b$;
 $\sphericalangle f + \sphericalangle b = 180^\circ$, $\sphericalangle g + \sphericalangle b = 180^\circ$.

Tõendus: Lükame lõikuvaid sirgeid ED ja EF läbi tippude E ja B minevat sirget mööda edasi nii, et nad paralleelseteks jäävad iseendaga, kuni tipp E langeb tippu B; siis ühtib $\sphericalangle d$ \sphericalangle -aga b, $\sphericalangle e$ saab \sphericalangle -rga b tippnurgaks ja $\sphericalangle f$ ning $\sphericalangle g$ saavad \sphericalangle -rga b kõrvunurkadeks.

Järj. on siis $\sphericalangle d = \sphericalangle b$, $\sphericalangle e = \sphericalangle b$, $\sphericalangle f + \sphericalangle b = 180^\circ$, $\sphericalangle g + \sphericalangle b = 180^\circ$. M. t. o. t.

39. (37) Vastastikku risthaaradega nurgad on kas võrdsed, või nende summa on sirge nurk.

Antud: $ED \perp BA$, $EF \perp BC$.

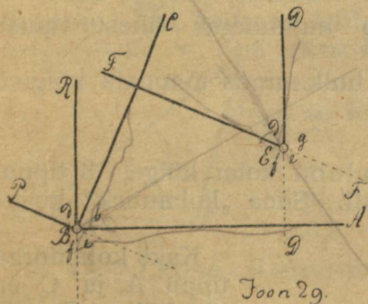
Tõendada: $\sphericalangle d = \sphericalangle b$, $\sphericalangle e = \sphericalangle b$;
 $\sphericalangle f + \sphericalangle b = 180^\circ$, $\sphericalangle g + \sphericalangle b = 180^\circ$.

Tõendus: Lükame lõikuvaid sirgeid ED ja EF läbi tippude E ja B minevat sirget mööda edasi nii, et nad jäävad paralleelseteks iseendaga kuni tipp E langeb tippu B. Siis jääb $ED \perp BA^{ga}$ ning EF jääb $\perp BC$ ja $\sphericalangle DEF$ aseneb \sphericalangle -ga RBP kohale. Pöörame nüüd \sphericalangle -rka RBP (ehk $\sphericalangle DEF$) tippu B ümber täisnurka võrra; siis

ühtib $\sphericalangle d$ \sphericalangle -gaga b, $\sphericalangle e$ saab \sphericalangle -rga b tippnurgaks ja $\sphericalangle f$ ning $\sphericalangle g$ saavad \sphericalangle -rga b kõrvunurkadeks. Järj. on siis: $\sphericalangle d = \sphericalangle b$, $\sphericalangle e = \sphericalangle b$, $\sphericalangle f + \sphericalangle b = 180^\circ$, $\sphericalangle g + \sphericalangle b = 180^\circ$. M. t. o. t.

Ülesanded. 44) Kuidas seisavad vastastikku paralleelsete haardega nurkade poolitajad?

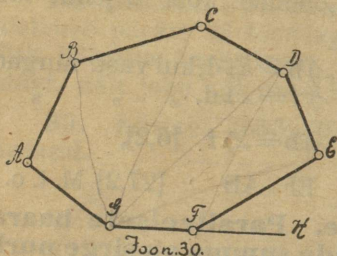
45) Kuidas seisavad vastastikku risthaaradega nurkade poolitajad?



Joon 29.

II-ne peatükk. Kolmnurk.

40. (38.) **Definitsioonid.** Hulknurgaks nim. sirglõikudest



piiratud tasapinna osa. Missuguses punktis üks sirglõik lõpeb, selles algab järgmine ja viimane sirglõik lõpeb selles punktis, milles esimene algab.

Hulknurka piiravad sirglõike nim. hulknurka külgedeks; nende otsapunkte — hulknurka tippudeks. Hulknurka külgede summat nim. übermõõduks ehk perimeetriks; nim. tema piirdeks („piire“). Hulknurka tipu juures olevat nurka, mille avaus on pööratud hulknurka sisemise valla poole, nim. hulknurka sisenurgaks, näit. \sphericalangle EFG. Sisenurga kõrvunurka nim. välisnurgaks, näit. \sphericalangle EFH.

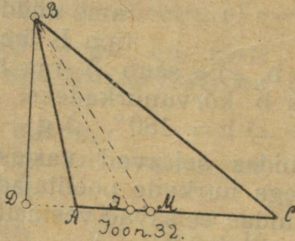
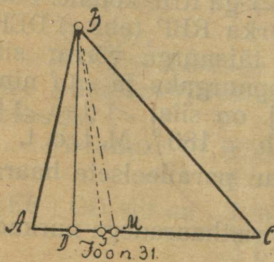
Hulknurka diagonaaliks (nurkjooneks) nim. seda sirglõiku, mis ühendab kahte hulknurka mitte järjes olevat tippu, näit. AC, AD, AF.

Et iga külje otsapunkt on järgneva külje alguspunkt ja et iga tipu juures on üks sisenurk, siis on hulknurgal niipalju nurki ja tippe, kui palju külgi. Külgede arvu järele on olemas kolmnurgad, nelinurgad, viisnurgad jne. Harilikus kõnes kolmnurki ja nelinurki hulknurkadeks ei nimetata.

Hulknurka nim. kumeraks, kui tal ühtki ülinürinurka ei ole. Me vaatleme ainult kumeraid hulknurki, mille küljed teineteisega ei lõiku.

- Ülesanded.
- 46) Mitu diagonaali võib hulknurgas ühest tipust tõmmata? *Külgede arv n, siis n-3 diagonaali.*
- 47) Mitu diagonaali võib hulknurgas tõmmata kõigist tippudest ühtekokku? $\frac{n(n-3)}{2}$

41. (39) **Kolmnurk.** Kolmnurgal on kolm külge, 3 tippu, 3 nurka, aga tal ei ole ühtki diagonaali. Sõna „kolmnurk“ kirjutatakse lühendatult märgiga „ \triangle “.



Kaks kolmnurga tippu A ja C on ühe külje AC otsapunktid ja kolmas tipp B on selle külje vastas, on külje AC vastastipp, kuna külge AC on selle tipu B vastaskülge. Nurk B, mille tipp on antud külje

vastas, on ise ka antud külje AC vastas, on külje AC vastasnurk, teised 2 nurka on selle külje juures ja neid nim. tema lähisnurkadeks, näit. $\sphericalangle B$ on külje AC vastasnurk ja $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle C$ on külje AC lähisnurgad. Külj, mille vastas on antud nurk, on ise ka selle nurga vastas, on selle nurga vastaskülj; teised 2 külje piiravad seda nurka, on seda nurka piiravad küljed ehk selle nurga lähisküljed, ja nurk on nende kahe külje vahel, on nende vahelnurk.

\triangle -rga iga külge võidakse \triangle -rga aluseks võtta; siis on tema vastastipp — \triangle -rga tipp. Näit. kui me AC aluseks võtame, siis on B \triangle -ga tipp.

Tipust aluse või tema pikenduse peale tõmmatud ristjoon on \triangle -rga kõrgus, näit. BD.

Sirglõik, mis \triangle -rga tippu vastaskülje keskkohaga ühendab, on selle külje poolitaja ehk mediaan, näit. BM. Kui nurgapoolitajast ehk bissektorist kõneldakse \triangle -rgas, siis mõeldakse seda nurgapoolitaja lõiku, mis ulatab nurgatipust kuni vastasküljeni, näit. BJ. Et iga külge võidakse \triangle -rga aluseks võtta, siis on \triangle -rgal 3 kõrgust, 3 küljepoolitajat ehk mediaani ja 3 nurgapoolitajat ehk bissektori.

\triangle -rga tippe tähistame suurte tähtega; iga tipu juures olevat nurka vastava greekakeelse väikese tähega; vastaskülge — vastava ladinakeelse tähega; kõrgust — tähega h, mediaani — tähega m, juure lisades indeksina selle külje tähistust, mille peale kõrgus või mediaan on tõmmatud; nurga poolitajat tähistame n-ga, tarvitades indeksina selle nurga tähistust, mida ta poolitab. Külje a peale tõmmatud kõrgus h_a jagab selle külje lõikudeks p ja q, kus p on külje b lähislõik ja q on külje c lähislõik.

42. (49, 50) Lause. Kolmnurgas on kahe külje summa suurem, kui kolmas külj ja kahe külje vahe on väiksem, kui kolmas külj.

Tõendus: $AC + CB > AB$, sest sirge joon on kõige lühem tee kahe punkti vahel [10].

Kui selles võrratuses mõlemalt poolt ära võtta CB, siis saame tuntud aksioomi [6,8] põhjal: $AC > AB - CB$ ehk $AB - CB < AC$. M. t. o. t.

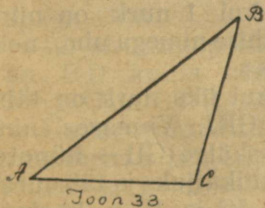
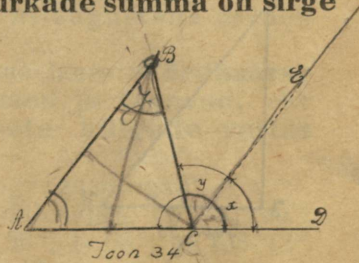
43. Lause. Kolmnurkade sisenurkade summa on sirge nurk.

Tõendus: Pikendame külge AC ja tõmbame $CE \parallel AB$. Siis on:

$$\begin{aligned} \sphericalangle A &= \sphericalangle x \quad | \quad \sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle x + \sphericalangle y = \\ \sphericalangle B &= \sphericalangle y \quad | \quad = \sphericalangle BCD. \\ \sphericalangle C &= \sphericalangle C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C &= \sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle c = \\ &= \text{sirge nurk ACD.} \end{aligned}$$

M. t. o. t.



1-ne järeld: \triangle -rgas võib olla ainult 1 täisnurk või 1 nürinurk.

2-ne „ Kui \triangle -rgas 2 nurka teada on, siis on ka kolmas teada.

3-as „ Kui 2 \triangle -rka ühte sünnivad kahe nurga poolest, siis sünnivad ühte ka kolmandate nurkade poolest.

Et $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle BCD$, siis saame lause: \triangle -rga välisnurk on temaga mitte kõrvoolevate sisenurkade summa.

Sellest lausest saame järelduse: \triangle -rga välisnurk on suurem, kui ükski temaga mitte kõrvoolev sisenurk.

Ülesanded. 48) \triangle -rgas on $\sphericalangle A = 48^\circ$, $\sphericalangle B = 79^\circ$. Kui suur on kolmas?

49) \triangle -rgas on antud 2 nurka; joonestamise teel leida kolmas?

50) \triangle -rga nurgad suhtuvad nagu 1:2:3. Kui suur on iga nurk?

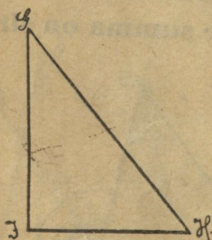
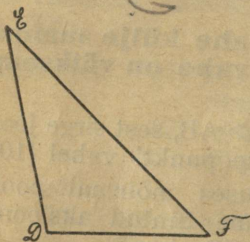
51) \triangle -rga nurk on 108° ; teised on isekeskis võrdsed. Kui suur on kumbki?

52) \triangle -rga üks nurk on antud; teised on isekeskis võrdsed. Leida need nurgad joonestamise teel!

53) Kui suured nurgad tekkivad \triangle -rga kõrguste paari kaupa lõikumisel, kui \triangle -rga nurgad on α , β ja γ ?

54) Tõendada (arvutamise teel), et tipust aluse peale tõmmatud nurgapoolitaja ja kõrguse vahel olev nurk on pool aluse lähisnurkade vahest.

44. (42) Kolmnurkade liigid. A. Nurkade järele nim. \triangle -rka



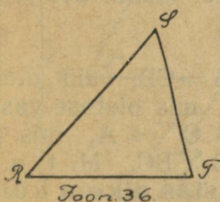
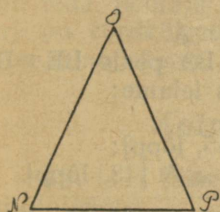
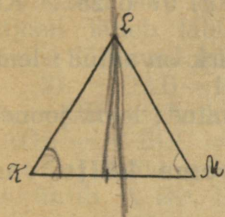
Foon. 35.

- 1) teravnurkseks, kui kõik 3 nurka on teravad, näit. $\triangle RST$;
- 2) nürinurkseks, kui 1 nurk on nürinurk, näit. $\triangle DEF$; ühise nimega nim. neid kaldnurkseteks;
- 3) täisnurkseks, kui üks nurk on täisnurk, näit. $\triangle GHJ$. Viimases nim. täisnurga vastaskülge GH — hüpotenuusiks ehk kaldküljeks ja täisnurka piiravaid külgi JG ja JH — kaateti-teks ehk ristkülgedeks. Täisnurkses \triangle -rgas on teravnurkade summa täisnurk. Täisnurga tippu tähistame A -ga ja hüpotenuusi a -ga.

B. Külgede järele nim. \triangle -rka:

- 1) võrdkülgsel, kui kõik 3 külge on ühepikkused, näit. $\triangle KLM$;
- 2) võrdhaarseks, kui 2 külge on ühepikkused, kolmas külge aga ei ole nende pikkune, näit. $\triangle NOP$;

3) isekülgseks, kui igal küljel on isesugune pikkus, näit. $\triangle RST$.



Võrdhaarses \triangle -rgas nim. aluseks; seda külge, mis teistega ühepikkune ei ole; tema vastastipp on \triangle -rga tipp; mõlemaid võrdseid külgi nim. haaradeks. Võrdhaarses \triangle -rgas tähistame tipu A^{ga} , aluse a^{ga} , tipunurga α^{ga} ; haar on b ja aluse lähisnurk on β .

Ülesanne. 55) Täisnurkses \triangle -rgas on antud $\sphericalangle B = 57^{\circ} 17' 45''$. Leida teised nurgad! Arvutada ja joonestada!

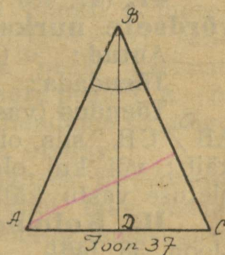
Võrdhaarne kolmnurk.

45. (47, 56) Lause. Võrdhaarsel kolmnurgal on olemas sümmeetria telg, milleks on tipunurga poolitaja; ta poolitab ka aluse ja on alusega risti.

Antud: $BC = BA$,
 $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD$.

Tõendada: 1) BD on süm. telg; 2) $AD = DC$;
 $BD \perp AC$.

Tõendus: Murrame \triangle -rga ABC BD^d mööda kahekorra; siis läheb BC BA^d mööda, sest $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD$; C ühtib A^{ga} , sest et $BC = BA$



ja D jääb paigale.

Seepärast ühtib DC DA^{ga} , $\sphericalangle C$ ühtib \sphericalangle -gaga A ja $\triangle DBC$ ühtib \triangle -rgaga DBA .

Järjel. nurgapoolitaja BD on \triangle -rga ABC süm. telg ja A ning C on BD kohta sümmeetrilised punktid. Sellest järgneb [23]: $AD = DC$ ja $BD \perp AC$. M. t. o. t.

Ümberpöördud laused: Võrdhaarses \triangle -rgas langeb sümmeetria teljega ühte 1) aluse mediaan — sest läbi kahe punkti B ja D on võimalik üksainus sirge tõmmata [8], 2) kõrgus-, 3) aluse keskristjoon, sest antud punktist võib antud sirgele üheainsa ristjoone tõmmata [24], ja niisugustena esineb juba sümmeetria telg BD .

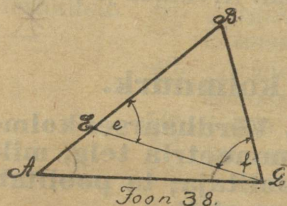
Et $\sphericalangle C$ ühtis \sphericalangle -rgaga A , siis saame lause: Võrdhaarse \triangle -rga aluse lähisnurgad on ühesuurused ja teravad, ehk teiste sõnadega: kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Ülesanded. 56) Kui suured on võrdkülgse \triangle -rga nurgad?

57) Võrdhaarse \triangle -rga aluse lähisnurk on: a) 40° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 72° ; e) 36° ; f) 68° ; g) $108^{\circ} 12'$.
Kui suured on teised nurgad?

- 58) Võrdhaarse \triangle -rga tipunurk on: a) 90° ; b) 120° ; c) 30° ; d) 60° ; e) 80° ; f) 75° ; g) $97^\circ 6' 28''$. Kui suured on teised nurgad?
- 59) Võrdhaarse \triangle -rga aluse lähisnurk on antud; leida joonestamise teel teised nurgad!
- 60) Võrdhaarse \triangle -rga tipunurk on antud; leida joonestamise teel teised nurgad!

46. (48) Lause. Kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk.



Antud: $AB \rhd BD$.

Tõendada: $\sphericalangle D \rhd \sphericalangle A$.

Tõendus: Asetame BA peale $BE = BD$ ja ühendame E D^{ga}. Siis leiame:

$\sphericalangle D \rhd \sphericalangle f$ [6 a];

$\sphericalangle f = \sphericalangle e$ [45, lõpp];

$\sphericalangle e \rhd \sphericalangle A$ [43, lõpp].

Järj. $\sphericalangle D \rhd \sphericalangle A$. M. t. o. t.

47. (47, 48) Ümberpöördud laused. I. Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed. (Joon. 37. [45]).

Antud: $\sphericalangle C = \sphericalangle A$.

Tõendada: $AB \sphericalangle CB$.

Tõendus (vastuväiteline): Kui ei oleks $AB = CB$, vaid oleks $AB \rhd CB$, siis oleks ka [46] järele, $\sphericalangle C \rhd \sphericalangle A$, mis oletuse vastu käib; või kui oleks $AB \sphericalangle CB$, siis oleks ka $\sphericalangle C \sphericalangle \sphericalangle A$, mis ka oletuse vastu käib. Jääb ainus võimalus, et $AB \sphericalangle BC$. M. t. o. t.

II. Kolmnurgas on suurema nurga vastas pikem külg. (Joon. 38, [46]).

Antud: $\sphericalangle D \rhd \sphericalangle A$.

Tõendada: $AB \rhd DB$.

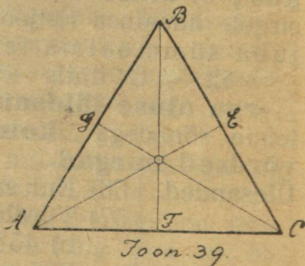
Tõendus (vastuväiteline): Kui ei oleks $AB \rhd DB$, vaid oleks $AB = DB$, siis oleks ka [45] järele, $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, mis oletuse vastu käib; või kui oleks $AB \sphericalangle DB$, siis oleks ka $\sphericalangle D \sphericalangle \sphericalangle A$ [46 järele], mis ka oletuse vastu käib. Jääb ainus võimalus, et $AB \rhd DB$. M. t. o. t.

Järeldus: Hüpoteenus on kõige pikem külg täisnurkses \triangle -gas.

48 (57). Võrdkülgse kolmnurga sümmeetria. Lause: Võrdkülgtsel kolmnurgal on 3 sümmeetria telge; nad lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on võrdk. \triangle -rga sümmeetria keskpunkt ja võrdk. \triangle -rgal on kolmekordne kesk-sümmeetria.

Tõendus: 1) Võrdk. \triangle -rgas võib võib iga külge võrdhaarse \triangle -rga aluseks võtta; seepärast on tal 3 süm. telge.

2) Lõikugu süm. teljed AE ja CG punktis O.*)



Punkt O on joonisel 39 tähistamata.

$\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = 30^\circ$; seepärast on $OA = OC$ ja $\triangle AOC$ on võrdhaarne; niisama ka $\triangle ABC$. Nende ühise aluse AC keskristjoon läheb läbi tippude O ja B ja ühtib sümm. teljega BF . Nii viisi lõikuvad kõik 3 sümm. telge ühes punktis O .

3) $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OCA = \sphericalangle OAC = 30^\circ$; $OA = OB = OC$, kui \triangle -rga võrdsete \sphericalangle -kade vastasküljed. [47, I.]; $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 120^\circ$.

Kui nüüd pöörata \triangle -rka ABC punkti O ümber 120° võrra, siis ühtib A B^{ga} , B C^{ga} , C A^{ga} , ja $\triangle ABC$ ühtib iseendaga. Nii võib teda pöörata 3 korda, kuni ta oma algasendisse tagasi tuleb. Järj. on võrdkülgisel \triangle -rgal ABC kolmekordne kesksümmeetria ja O on tema sümm. keskpunkt. M. t. o. t.

Kolmnurkade ühtivuse laused.

49. (44) Ülesanne (61). Konstruuda \triangle kahest küljest ja nende vahelnurgast.

Konstruksioon: Meelevaldsel sirgel vabalt võetud punkti C juures konstruime \sphericalangle -rga $C = \sphericalangle \gamma$; selle nurga ühe haara peale asetame $CB = a$ ja teise haara peale $CA = b$. Punktid B ja A ühendame sirglõigu abil. $\triangle ABC$ on otsitav.

Ükskõik missuguses järjekorras me \triangle -rga konstruime, ikka saame kuju ja suuruse poolest samasuguse \triangle -rga. Seda tõendab **esimene ühtivuse lause**:

Kaks kolmnurka on ühtivad, kui nad ühte sünnivad kahe külje ja nende vahelnurga poolest.

Antud: $DF = AC$, $DE = AB$, $\sphericalangle D = \sphericalangle A$.

Tõendada: $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

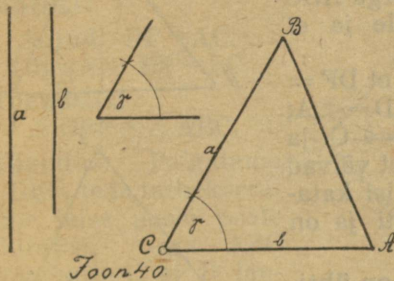
Tõendus: Paigutame $\triangle DEF$ \triangle -rga ABC peale nii, et 1) D langeks A peale ja 2) DF läheks AC^d mööda.

Siis 1) läheb DE AB^d mööda, sest $\sphericalangle D = \sphericalangle A$; 2) F langeb C peale, sest $DF = AC$; 3) E langeb B peale, sest $DE = AB$ ja 4) EF langeb ühte BC^{ga} , sest nende otsapunktid langesid ühte ja kahe punkti vahel on üksainus sirge võimalik.

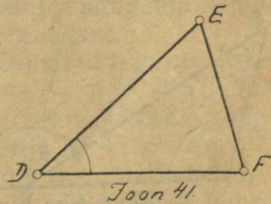
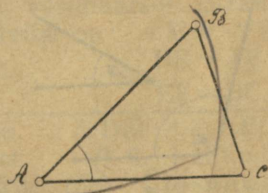
Nii viisi katavad need \triangle -rgad teineteist täiesti ja on seepärast ühtivad. M. t. o. t.

Järeldus: \triangle -ga määravad kaks külge ja nende vahelnurk.

Ülesanne. (62) Konstruuda võrdhaarne \triangle haarast ja tipunurgast.



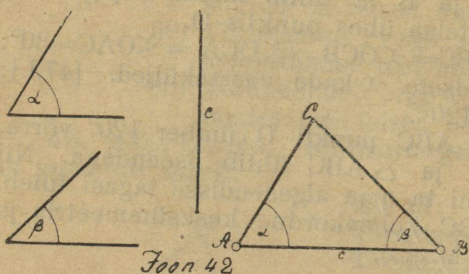
Joon 40



Joon 41



50. (45) Ülesanne (63). Konstruuda \triangle küljest ja tema lähisnurkadest.



vad, kui nad ühte sünnivad ühe külje ja tema lähisnurkadest.

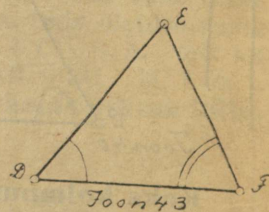
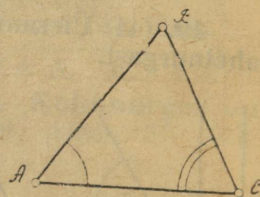
Antud: $DF = AC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, $\sphericalangle F = \sphericalangle C$.

Tõendada: $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

Tõendus: Paigutame $\triangle DEF$ \triangle -rga ABC peale nii, et 1) D langeks A peale ja et 2) DF läheks AC^a mööda.

Siis 1) langeb F C peale, sest et $DF = AC$; 2) DE läheb AB sihis, sest $\sphericalangle D = \sphericalangle A$; 3) FE läheb CB sihis, sest $\sphericalangle F = \sphericalangle C$ ja 4) E langeb B peale, sest kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis. Niiviisi katavad need \triangle -rgad teineteist täiesti ja on seepärast ühtivad. M. t. o. t.

1-ne järeldus: Kaks \triangle -rka on ühtivad, kui nad ühte sünnivad ühe külje ja kahe vastava nurga poolest.

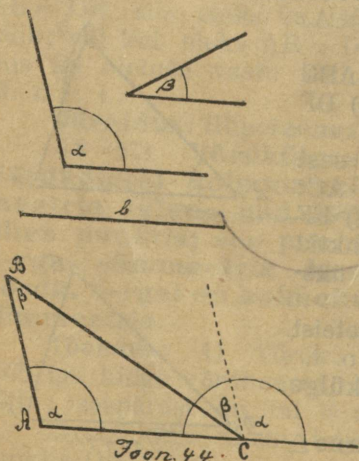


2-ne järeldus: \triangle -ga määravad üks külg ja tema lähisnurgad või üks lähisnurk ja vastasnurk.

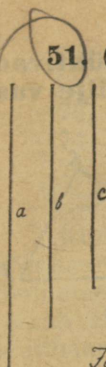
Ülesanded (64) (46). Konstruuda \triangle ühest küljest, tema lähisnurgast ja vastasnurgast.

Konstruksioon: Meelevaldse sirge peale asetame antud külje $AC = b$; tipu A juures konstruime antud lähisnurga $\sphericalangle A = \alpha$; tipu C juures olevast sirgest nurgast lahutame antud nurgad α ja β , siis jääb järele teine lähisnurk ACB. \sphericalangle -ga A ja \sphericalangle -rga ACB haarad lõikuvad tipus B. $\triangle ABC$ on otsitav, sest $\sphericalangle B = \sphericalangle \beta$ [29].

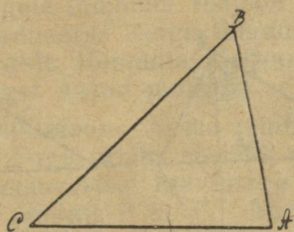
65). Konstruuda võrdhaarne \triangle alusest ja tema lähisnurgast.



51. (51) Ülesanne. (66) Konstruuda \triangle kolmest küljest.



Joon 45



Konstruktioon: Meelevaldse sirge peale asetame ühe antud külje $AC=b$. Tipust C tõmbame raadiusega a kaare ja tipust A raadiusega c kaare. Need kaks kaart lõikuvad tipus B. $\triangle ABC$ on otsitav.

Märkus. Et kaared lõikuksid ja oleks võimalik \triangle -rka konstruuda, peab olema kahe külje summa suurem ja nende vahe väiksem kui kolmas külj:

$$a + c > b \text{ ja } a - c < b.$$

Kolmas ühtivuse lause:

Kaks kolmnurka on ühtivad, kui nad ühte sünnivad kõige kolme külje poolest.

Antud: $DF=AC$,
 $DE=AB$, $EF=BC$.

Tõendada:

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

Tõendus: Paigutame $\triangle DEF$, teda tarbekorral enne teise poole peale pöörates, \triangle -rga ABC külge nii, 1) et D langeks A peale, 2) et DF läheks AC sihis ja 3) et $\triangle DEF$ langeks allapoole AC^d. Siis langeb F C peale, sest $DF=AC$, ja $\triangle CEF$ aseneb \triangle -rga AJC kohale.

Ühendame nüüd B J-ga, siis saame kaks võrdhaarset \triangle -rka. \triangle -rgas BAJ on: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$, sest $AJ=AB$; Niiviisi on: $\sphericalangle E = \sphericalangle B$
 \triangle -rgas BCJ on: $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$, sest $CJ=CB$. $DE=AB$

$$\sphericalangle E = \sphericalangle I = \sphericalangle B$$

$$EF=BC.$$

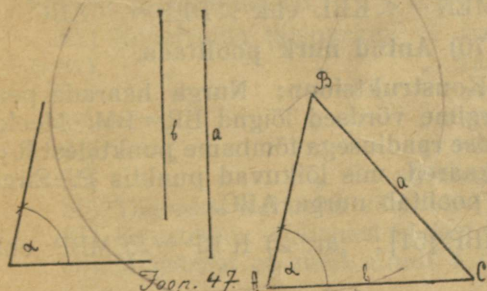
Järeldus: \triangle -rga määravad tema 3 külge. $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

Ülesanne. 67) Võrdkülgne \triangle konstruuda küljest. [I. ü.1.] M.t.o.t.

52. (53) Ülesanne

(68). Konstruuda \triangle kahest küljest ja suurema külje vastasnurgast.

Konstruktioon: Konstruime $\sphericalangle A = \sphericalangle a$; ühe haara peale asetame vähe-
ma külje $AC=b$. Tipust C raadiusega a tõmbame kaare, mis lõikab teist haara punktis B. Ühendame B ja C. $\triangle ABC$ on otsitav.



Joon 47

Neljas ühtivuse lause: Kaks kolmnurka on ühtivad, kui nad ühte sünnivad kahe külje ja suurema külje vastasnurga poolest.

Antud:

$$\begin{aligned} DF &= AC, DE = AB, \\ AC &\sphericalangle AB, DF \sphericalangle DE, \\ \sphericalangle E &= \sphericalangle B. \end{aligned}$$

Tõendada:

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

Tõendus: Paigutame $\triangle DEF$, teda tarbekorral enne teise poole peale

pöörates, \triangle -rga ABC külge nii, 1) et D langeks A peale, 2) et DF läheks AC sihis ja 3) et $\triangle DEF$ langeks allapoole AC^d . Siis langeb F C peale, sest $DF=AC$, ja $\triangle DEF$ aseneb \triangle -rga AJC kohale.

Ühendame B J^ga , siis saame võrdhaarse $\triangle BAJ$.

Antud on: $\sphericalangle J = \sphericalangle E = \sphericalangle B$;

Niiviisi on: $DE = AB$

$\triangle BAJ$: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$;

$EF = BC$

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$

$FD = CA$ [ehk $\sphericalangle E = \sphericalangle B$.]

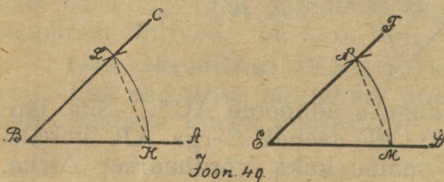
$BC = CJ = EF$.

$\triangle DEF \cong \triangle ABC$. M.t.o.t.

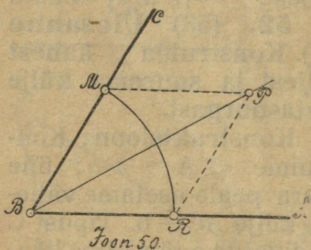
Järeldus: \triangle -ga määravad kaks külge ja suurema külje vastasnurk.

53. (52) Konstruimisülesanded.

69) Antud nurk asetada antud sirge külge antud punkti juures.



avausega, punktist K punkti L , ja asetame tema teise kaare peale tõmmates punktist M raadiusega KL uue kaare, mis lõikab endist kaart punktis N . Läbi E ja N tõmbame kiire EF . Siis on $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$.



Tõendus: $\triangle MEN \cong \triangle KBL$ [51], järj. $\sphericalangle MEN = \sphericalangle KBL$ ehk $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$.

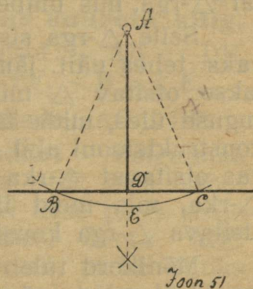
70) Antud nurk poolitada.

Konstruksioon: Nurga haarade peal märgime võrdsed lõigud $BR = BM$. Meelevaldse raadiusega tõmbame punktidest R ja M kaared, mis lõikuvad punktis P . Sirge BP poolitab nurga ABC .

Tõendus $\triangle RBP \cong \triangle MBP$ [51]; jär. $\sphericalangle RBP = \sphericalangle MBP$ ehk $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBP$.

- 71) Sirge nurk pooleks jagada.
 72) Konstruuda täisnurk antud sirgel antud punkti juures.
 73) Sirgele tõmmata ristjoon selle sirge peal antud punktist.
 74) Võrdhaarse \triangle -rga tipunurk poolitada.
 75) Sirgele tõmmata ristjoon väljaspool sirget antud punktist.

Konstruksioon: Antud punkti A võtame võrdhaarse \triangle -rga tipuks seeläbi, et me temast tõmbame meelevaldse raadiusega kaare, mis õikab MN punktis B ja C. Nüüd poolitame võrdhaarse \triangle -rga tipunurga A, tõmmates Bst ja Cst võrdsete raadiustega kaared, mis lõikuvad punktis E. \times -rga A poolitaja $AD \perp MN$.



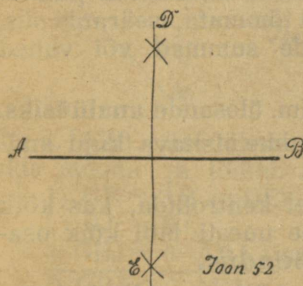
76. Sirglõik poolitada.

Konstruksioon: Kummagist otsapunktist A ja B tõmbame võrdsete raadiustega kaared, mis lõikuvad punktides D ja E. Sirge DE poolitab AB.

Tõendus. $\triangle ADB$ on võrdhaarne ja DE tema tipunurga poolitaja.

77) Sirglõigule tema keskkohast ristjoon tõmmata. [V.76.]

78) Konstruuda täisnurkne \triangle hüpotenuusist ja teravnurgast.



Konstruksioon: Konstruime antud nurga suuruse $\times B = \beta$; selle ühe haara peale asetame antud hüpotenuusi $BC = a$; leitud tipust C tõmbame ristjoone $\times B$ teise haara peale: $CA \perp A$. $\triangle BAC$ on otsitav.

Kuidas võiks seda \triangle veel konstruuda?

79) Konstruuda võrdhaarne \triangle haarast ja aluse lähisnurgast.

80) Konstruuda võrdhaarne \triangle alusest ja tipunurgast.

81) Konstruuda täisnurkne \triangle kaatetitest.

82) " " " kaatetist ja tema teravastlähisnurgast.

83) " " " kaatetist ja tema vastasnurgast.

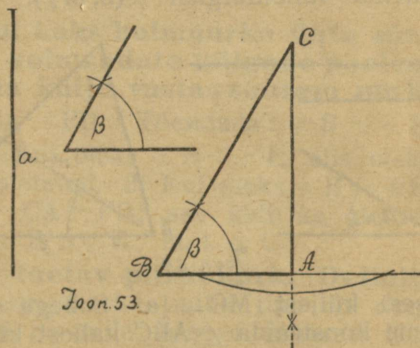
84) " " " hüpotenuusist ja kaatetist.

85) " " " võrdhaarne \triangle hüpotenuusist.

86) Täisnurk kolmeks võrdseks jaoks jagada.

87) Konstruuda \triangle kahest küljest ja vähema külje vastasnurgast.

88) Mispärast on meil ainult 4 ühtivuslauset?



54. (65, 67) Kui konstruimisülesandes põhielementide, s. t. külgede ja nurkade asemel on antud teise järgu elemendid, näit. kõrgused, mediaanid, nurgapoolitajad jne., siis joonestame silma varal \triangle -rga, mis umbes võiks vastata otsitavale.

Selle \triangle -rga sisse joonestame antud elemendid, neid silmapaistvaks tehes näit. jämedama joonega või kriipsuga. Niiviisi jagatakse otsitav \triangle mitmeks \triangle -rgaks; viimaste hulgast otsime niisuguse üles, mida ühe põhielementide järele konstruuda saab. Selle konstruktsiooni abil leiame mõne uue elemendi, mis meile võimaldab kas otsitavat \triangle -rka ennast konstruuda, või konstruuda mõnda teist \triangle -rka, mis meid lähendab põhielementide leidmisele ja sellega otsitava \triangle -rga konstruimisele.

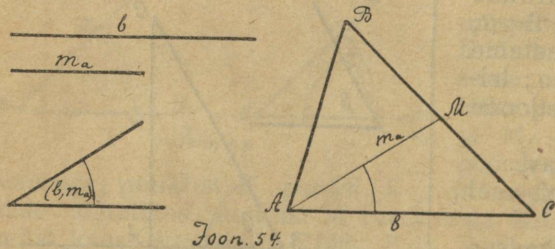
Mõnikord tuleb konstruutava \triangle -rga saamiseks antuid ja otsitavaid elemente sündsals kombel rühmitada, mitte ühendatud punkte ühendada, paralleeljoon või mõni teine abijoon tõmmata, iseäranis siis, kui lihtelementide asemel on antud külgede summad või vahed või mõni teine joon.

Ülesande lahendamiseviisi ülesotsimist nim. ülesande **analüüsiks**.

On konstruimise viis leitud, siis konstruime otsitava kuju andmetest. See on ülesande **konstruktsioon**.

Pärast konstruimist tuleb meil teda veel kontrollida, kas kõik andmed on nõutud kohal. Selleks vaatame uuesti läbi kõik osakonstruktsioonid. See on konstruktsiooni **tõendus**.

Näide: (89). Konstruuda \triangle küljest b , külje a poolitajast m_a ja nende vahelnurgast $\sphericalangle(b, m_a)$.



Analüüs: Joonises on näha 3 \triangle -rka: $\triangle ABC$, $\triangle ABM$ ja $\triangle AMC$. Nendest saame konstruuda $\triangle AMC$ kahest küljest b ja m_a ja nende vahelnurgast (b, m_a) . Selle läbi leiame otsitava \triangle -rga ABC nurga C ja poole

teisest küljest $MC = \frac{1}{2}a$. Sellega on ka külge $a = CB$ leitud ja me võime konstruuda $\triangle ABC$ kahest küljest ja nende vahelnurgast.

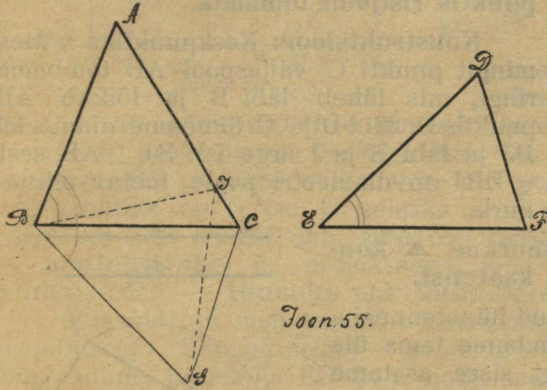
Ülesanded: Konstruuda täisnurkne \triangle , kui antud on (andmete tähistus v. 41, 44): 90) b, h ; 91) b, p ; 92) h, p ; 93) h, β ; 94) p, γ .

Konstruuda võrdhaarne \triangle , kui antud on: 95) a, h_a ; 96) b, h_a ; 97) h_a, β ; 98) a, h_b ; 99) h_a, α ; 100) h_b, α ; 101) h_b, β .

Konstruuda \triangle , kui antud on: 102) p, q, h_a ; 103) a, c, m_c ; 104) $a, \gamma, n\gamma$; 105) a, b, q ; 106) $b, \gamma, \alpha - \beta$; 107) α, β, q ; 108) $a, n\beta, \alpha + \gamma$; 109) $n\alpha, \alpha, \gamma$; 110) $h_a, q, n\beta$; 111) h_a, h_c, q ; 112) h_c, m_a, β ; 113) $n\alpha, \alpha, h_a$; 114) $n\alpha, n\beta, a$.

Juhatus: 114 ül. lahendamiseks tuleb tarvitada rööpluket.

55. Kolmnurkade ühtimatuse lause: Kui kaks kolmnurka ühte sünnivad kahe külje poolest, nende vahelnurkade poolest aga ühte ei sünni, siis on suurema nurga vastas suurem külj.



Toon. 55.

Antud: $AB = DE$,
 $BC = EF$, $\sphericalangle B > \sphericalangle E$.

Tõendada: $AC > DF$.

Tõendus: Paigutame \triangle -rga DEF, teda tarbekorral teise poole peale pöörates, \triangle -rga ABC külge nii, et EF ühtiks BC-ga, mis võimalik, sest $EF = BC$, ja et $\triangle DEF$ ase-neks \triangle -rga BGC kohale.

Poolitame \sphericalangle -rga ABG.

Et $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CBG$ (ehk $\sphericalangle DEF$), siis läheb \sphericalangle -rga ABG poolitaja \sphericalangle -rga ABC sisemist valda mööda ja lõikab AC^d punktis J. Ühendame G ja J.

$$1) \begin{aligned} GB &= AB (=DE), \\ BJ &= BJ, \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} \triangle\text{-rgas } GJC \text{ on } GJ + JC &> CG \\ \text{aga } GJ &= AJ \text{ ja } CG = DF \end{aligned}$$

$$\sphericalangle GBJ = \sphericalangle ABJ \text{ (jagatud).}$$

$$\triangle GBJ \cong \triangle ABJ$$

$$GJ = AJ$$

$$\frac{AJ + JC > DF}{\text{ehk } AC > DF. \text{ M. t. o. t.}}$$

Ümberpööratud lause: Kui kaks kolmnurka ühte sünnivad kahe külje poolest, aga kolmandate külgede poolest ühte ei sünni, siis on suurema külje vastas suurem nurk.

Antud: $AB = DE$, $BC = EF$, $CA < FD$. Tõendada: $\sphericalangle B > \sphericalangle E$.

Tõendus (vastuväiteline): 1) Kui oleks $\sphericalangle B < \sphericalangle E$, siis oleks ka $CA < FD$. See ei ole aga nii oletatud. 2) Kui oleks $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, siis oleks ka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja $CA = FD$; see käib ka oletuse vastu. Jääb ainuke võimalus, et $\sphericalangle B > \sphericalangle E$. M. t. o. t.

56. (59) Diameetri peale toetav piirdenurk. Defini-

sioon: Nurka, mille tipp on ringi peal ja mille haarad lähevad läbi sama diameetri otsapunktide, nim. diameetri peale toetavaks piirdenurgaks.

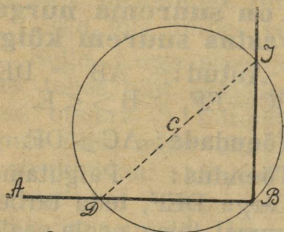
Lause. Diameetri peale toetav piirdenurk on täisnurk.

Tõendus: Ühendame A keskpunk-tiga O, siis on:

$$\begin{aligned} \triangle\text{-rgas } BOA: OB &= OA; \text{ seepär. } \sphericalangle B = \sphericalangle x; \\ \triangle\text{-rgas } COA: OC &= OA; \text{ „ } \sphericalangle C = \sphericalangle y. \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle\text{-rgas } BOA: OB &= OA; \\ \triangle\text{-rgas } COA: OC &= OA; \end{aligned}} \right\} +$$

$$\sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle A.$$

Et $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, siis saame $\sphericalangle B + \sphericalangle C$ asemele pannes $\sphericalangle A: 2 \sphericalangle A = 180^\circ$, ehk $\sphericalangle A = 90^\circ$. M. t. o. t.



Joon 57.

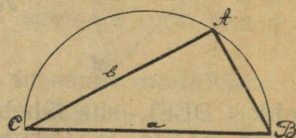
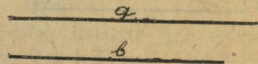
Ülesanne 115. Sirglõigule tema otspunktis ristjoon tõmmata.

Konstruksioon: Keskpunktiks võttes mingit punkti C väljaspool AB tõmbame ringi, mis läheb läbi B ja lõikab AB punktis D; läbi D ja C tõmbame diameetri DJ ja läbi B ja J sirge BJ. $BJ \perp AB$, sest $\sphericalangle DBJ$ on diameetri peale toetav piirde-nurk.

Ülesanne 116. Täisnurkne \triangle konstruuda hüpotenuusist ja kaatetist.

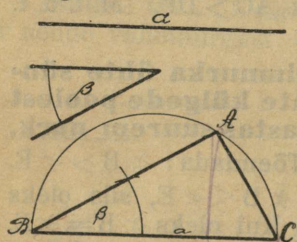
Konstruksioon: Antud hüpotenuusi a võtame diameetriks ja tõmbame tema üle poolringi. Selle poolringi sisse asetame kõõluna diameetri otsapunkti C alates antud kaateti $CA = b$. $\sphericalangle CAB = 90^\circ$, kui diameetri peale toetav piirdenurk.

$\triangle CAB$ on otsitav.



Joon 58.

Ülesanne 117. Täisnurkne \triangle konstruuda hüpotenuusist ja teravnurgast.



Joon 59.

Konstruksioon: Antud hüpotenuusi $CB = a$ võtame diameetriks ja tõmbame tema üle poolringi. CB peal konstruime B juures antud teravnurga $B = \beta$, mille teine haarpoolringi punktis A lõikab. $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ja sellega on $\triangle BAC$ otsitav.

Ülesanded. Näidata, et täisnurkses \triangle -rgas.

118) hüpotenuusi peale tõmmatud kõrguse ja mediaani vahelnurk võrdub teravnurkade vahega;

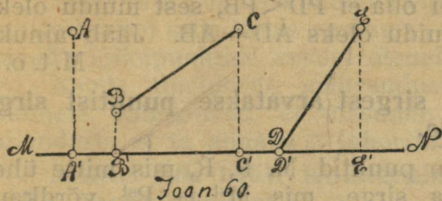
119) täisnurga poolitaja poolitab ka hüpotenuusi peale tõmmatud kõrguse ja mediaani vahelnurga;

120) hüpotenuusi poolitaja on niisama pikk, kui pool hüpotenuusi.

121) Täisnurkset \triangle -rka on võimalik jagada 2-ks võrdhaarseks \triangle -rgaks.

Ristjoon (perpendikulaar) ja kaldjooned.

57. Projektsiooni mõiste. Definiitsioonid. Punkti A projektsiooniks sirge MN peale nim. A -st MN peale tõmmatud ristjoone alust A' .



Joon 60.

Kui punkt ise, näit. D, selle sirge peal on, mille peale teda projektitakse, siis langeb projektsioon projektitava punktiga ühte.

Sirglõigu BC projektsiooniks sirge MN peale nim. selle sirge MN lõiku

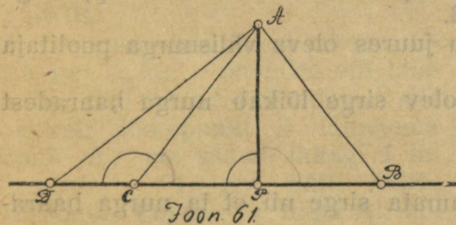
B' C', mis otsapunktide projektsioonide vahel on.

Kui projektitava sirglõigu üks ots D sirge MN peal on, siis on lõigu DE projektsiooniks sirge MN peale lõik DE', mille üheks otsapunktiks on D ise ja teiseks — E projektsioon E' MN peale. Sirglõiku DE^d ennast nim. **projektitavaks**, perpendikulaari EE'^d — **projektijaks** ja projektitava ning projektsiooni sünnitatud nurka EDE'^d — **tõusuks** ehk **kallakuseks**.

Edaspidi on meil tegemist peasjalikult projektsiooni viimase erijuhusega. Siin on selge, et projektitav DE on täisnurkse Δ -rga hüpotenuus, projektija EE' ja projektsioon DE' on kaatetid.

58. (62) Lause. Kui väljaspool sirget asuvast punktist sellele sirgele on tõmmatud ristjoon ja kaldjooned, siis:

- 1) on ristjoon lühem kui ükski kaldjoon;
- 2) võrdsetele projektsioonidele vastavad võrdsed kaldjooned;
- 3) pikemale projektsioonile vastab pikem kaldjoon.



Joon 61.

Antud:	Tõendada:
$AP \perp MN$	$AP < AB$
$PC = PB$	$AC = AB$
$PD > PB$	$AD > AB$

Tõendus: 1) Täisnurkses Δ -rgas APB on kaatet $AP <$ hüpotenuus AB [46 järeld.];
2) $\triangle APC \cong \triangle APB$,

sest $AP = AP$, $PC = PB$, $\sphericalangle APC = \sphericalangle APB$; järj. $AC = AB$.

3) Et $AP \perp MN$, siis on $\sphericalangle p = 90^\circ$, $\sphericalangle c > 90^\circ$ kui $\triangle APC$ välisnurk; et \triangle -gas ACD $\sphericalangle c > 90^\circ$, siis on $\sphericalangle d < 90^\circ$ ja $\sphericalangle c > \sphericalangle d$; järj. $AD > AC$ [46 järeld.] ehk $AD > AB$.
M. t. o. t. *

Ümberpööratud laused: Kui väljaspool sirget asuvast punktist sellele sirgele tõmmata igasugused sirged, siis:

- 1) kõige lühem nendest on risti selle sirgega;
- 2) võrdsetel kaldjoontel on võrdsed projektsioonid;
- 3) pikemal kaldjoonel on pikem projektsioon.

Tõendus: 1) Kui ei oleks see kõige lühem joon $AP \perp MN$, vaid mingi teine joon oleks $\perp MN$, siis peaks viimane lühem olema, kui kõige lühem joon AP, mis ometi võimatu on.

2) Kui $AC = AB$ ja $AP \perp CB$, siis on $\triangle CAB$ võrdhaarne ja $PC = PB$ [45].

3) Kui $AD > AB$, siis ei või olla ei $PD < PB$, sest muidu oleks $AD < AB$; ega $PD = PB$, sest muidu oleks $AD = AB$. Jääb ainuke võimalus: $PD > PB$.
M. t. o. t.

Järeldus. Punkti kaugust sirgest arvatakse punktist sirge peale tõmmatud ristjoont mööda.

Ülesanded. 122) Antud on punktid M, P, R, mis mitte ühel sirgel ei asu. Läbi R tõmmata sirge, mis M^{st} ja P^{st} võrdkaugel on.

123) Näidata, et punktide A ja B kauguste summa sirgest, mis sirglõiku AB^d ei lõika, on 2 korda nii suur, kui AB keskkoha K kaugus samast sirgest.

124) Tõendada, et võrdhaarsetes \triangle -gas on aluse iga punkti kauguste summa haaradest niisama pikk, kui haara peale tõmmatud kõrgus.

125) Tõendada, et võrdkülgse \triangle -rga sisemise punkti kauguste summa kõigist külgedest võrdub selle \triangle -rga kõrgusega.

59. Ülesanded. I. Tõendada laused:

126) Kui \triangle -rga sisemist punkti ühendada tippudega, siis on ühendusjoonte summa vähem, kui \triangle -rga übermõõt ja suurem kui pool übermõõtu.

127) Kumera nelinurga diagonaalide lõikepunkt on tasapinna niisugune punkt, mille kauguste summa tippudest on kõige väiksem.

128) Kui \triangle -rga sees olevat punkti P ühendada tippudega A ja B, siis on $\sphericalangle APB > \sphericalangle ACB$.

129) Võrdhaarsete \triangle -rga tipu juures oleva välisnurga poolitaja on alusega paralleelne.

130) Nurga poolitajaga ristiolev sirge lõikab nurga haaradest ühepikkused tükid ära.

II. Konstruimisülesanded:

131) Läbi antud punkti tõmmata sirge nii, et ta nurga haaradest võrdsed tükid ära lõikab.

132) Nurga sisemises vallas on antud kaks punkti E ja F.

Leida kõige lühem tee $E^{\text{st}} F^{\text{sse}}$, mis läheb mõlema haara kaudu.
[V. ül. 37.]

133) \triangle -ga sees on antud 2 punkti E ja F. Kuidas läheb kõige lühem tee $E^{\text{st}} F^{\text{sse}}$, mis puudutab \triangle -rga iga külge?

134) Nelinurga sees on antud 2 punkti E ja F. Kuidas läheb kõige lühem tee $E^{\text{st}} F^{\text{sse}}$, mis puudutab nelinurga iga külge?

60. (118) Konstruimisülesande uurimine.

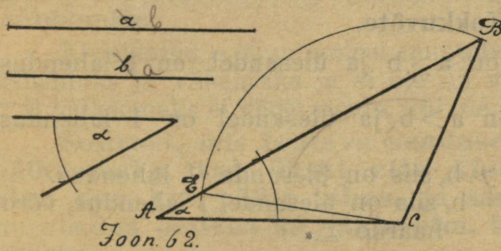
Iga kuju leidmine konstruimise teel taandub punktide leidmiseks, näit. \triangle -rga leidmine taandub tema 3 tipu leidmiseks.

Punktid saabuvad meil aga joonte lõikumisel. Kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis, sirge ja ring — kahes, ja kaks ringi ka ainult kahes punktis [11, 90, 102, 103].

Seepärast peame niihästi konstruimisel kui ka konstruktsiooni kontrollimisel seda järele vaatama, mitmes punktis meie jooned lõikuvad; lõikepunktide arvust oleneb ka lahenduste arv.

Nende tingimuste määramine, missugustele vastama peavad andmete vahekorrad, et ülesanne oleks võimalik, et ta annaks 1 lahenduse, et ta annaks 2 lahendust, nim. ülesande uurimiseks.

Näide (ül. 135). Konstruuda \triangle kahest küljest ja ühe külje vastasnurgast.



\triangle -rka, $\triangle ABC$ ja $\triangle AEC$, mis mõlemad nõuetele vastavad.

Uurimine: I. Kui $a > b$, siis läheb C^{st} raadiusega a tõmmatud kaar tipu A tagant mööda ja lõikab haara AB^d ühes punktis B_0 , sest võetud raadius on pikem kui tipu C kaugus haarast AB : $a > h_c = CP$ [91, järeld.]. Lahendusena esineb 1 kolmnurk — $\triangle ACB_0$.

a peab iseenesest pikem olema kui b , kui a on nüri- või täisnurk. Kui me a^d vähendame, siis hakkab lõikepunkt B lähenema tipule A ; me saame ikkagi 1 lahenduse, — 1 \triangle -rga, näit. $\triangle ACB_1$, nii kaua, kui $a > b$, nagu ül. 68.

II. Kui a saab sama pikaks kui b , $a = b$, siis ilmub ka teine lõikepunkt, nimelt kaar läheb tipust A läbi: lahendusena esineb aga ikkagi veel 1 \triangle , nimelt võrdhaarne $\triangle ACB_2$.

III. Kui me edasi vähendame a^d , nii et $a < b$, siis hakkab B , liikudes AD^d mööda, lähenema A^{le} ja teine lõikepunkt E — kaugenema A^{st} , sellega teineteisele ja punktile P lähenedes. Selle juures on olemas 3 võimalust:

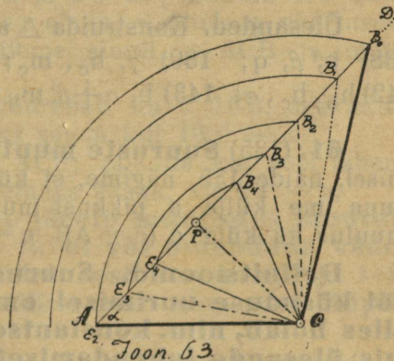
- 1) $b > a > h_c$; 2) $b > a = h_c$; 3) $b > a$ ja $a < h_c$ ehk $b > h_c > a$.

Niikaua kui $a > h_c$, saame lahendusena 2 \triangle -rka:

$\triangle ACB_3$ ja $\triangle ACE_3$, nii et

$$\begin{aligned} AC &= AC & \sphericalangle A &= \sphericalangle A (= \sphericalangle \alpha) \\ CE_3 &= CB_3 & \sphericalangle AE_3C &= 180^\circ - \sphericalangle AB_3C, \text{ sest } \sphericalangle B_3E_3C = \sphericalangle CB_3E_3 \\ AE_3 &= AB_3 - E_3B_3 & \sphericalangle ACE_3 &= \sphericalangle ACB_3 - \sphericalangle E_3CB_3. \end{aligned}$$

Konstruktsioon:*) Nagu ül. 68 konstruime $\sphericalangle A = \alpha$; ühe haara peale asetame ühe külje $AC = b$ ja saadud tipust C tõmbame raadiusega a kaare. Kui $a < b$, siis lõikab see kaar teist haara kahes punktis B ja E . Ühendades kumbagi C^{ga} , saame lahendusena kaks



*) Joonises 62 peaks tähistatud olema pikem sirg lõik b_{ga} ja lühem ag_{aa} .

2) Kui a väheneb niipalju, et saab $a = h_c$ ($= CP$), siis on punktid B ja E teineteisele niikaugele lähenedud, et nad ühte langetavad punktis P; kaar, mis keskpunktist C tõmmatakse raadiusega a , ei lõika enam AD^d , vaid riivab teda ainult [91], ja lahendusena saame 1 täisnurkse \triangle -ga ACP.

3) Kui a^d edasi vähendada, siis kaob nurga haaral AD^\perp ja kaarel ühine punkt ära, kaar ei ulatagi haarani AD ja me ei saagi \triangle -ka — ülesanne on võimatu.

Kokkuvõtte.

A. Kui $\alpha > 90^\circ$, siis on $a > b$ ja ülesandel on 1 lahendus, nürinurkne \triangle .

B. Kui $\alpha = 90^\circ$, siis on $a > b$ ja ülesandel on 1 lahendus, täisnurkne \triangle .

C. Kui $\alpha < 90^\circ$ ja I. $a > b$, siis on ülesandel 1 lahendus.

„ II. $a = b$, siis on ülesandel 1 lahendus, võrdhaarne \triangle .

„ III. $a < b$, seejuures aga:

1) $a > h_c$, siis — 2 lahendust, millest 1 nürinurkne;

2) $a = h_c$, „ — 1 „ \triangle on täisnurkne;

3) $a < h_c$, „ — 0 „ ülesanne võimatu.

Ülesanded. Konstruida \triangle andmetest: 136) c, β, m_a ; 137) b, γ, h_c ; 138) b, β, q ; 139) γ, h_c, m_c ; 140) a, h_a, h_b ; 141) c, h_c, m_c ; 142) h_b, h_c, α ; 143) $b, \alpha + \beta, m_b$; 144) $b, n_\gamma, \sphericalangle(c, n_\gamma)$; 145) h_a, q, m_c .

61. (135) Suuruste muutumine. I. Konstruimisülesande uurimisel, näide 135, nägime, et külge b ja nurk α jäid meil muutmata, kuna me külge a pikkust muutsime. Ühes külje a muutumisega muutus ka külge c ($c = AB, c = AE$), nurk C ja nurk B.

Definitsioonid. Suurust, mis ülesande lahendamisel või küsimuse uurimisel omal ühe ja sellesama väärtuse alles hoiab, nim. konstantseks ehk muutumatuks; suurust, mis ülesande lahendamisel või küsimuse uurimisel mitu väärtust omandab, nim. muutujaks.

II. Külge a väärtusi muutsime meie ise, oma tahtmise ja heaksarvamise järele, kuna nurgad B ja C ja külge c muutusid iseenesest, külge a muutumise tagajärjena.

Niisugust suurust, mille muutumine ei olene ühestki teisest suurusest, mille väärtusi me ise oma heaksarvamise järele valime, nim. rippumatuks (olenematuks) muutujaks. Niisugust suurust, mille väärtuste muutumine on mingi teise suuruse muutumise tagajärg, mis oleneb mingi teise suuruse muutumisest, nim. olenevaks ehk rippuvaks muutujaks ehk rippumatu muutuja funktsiooniks.

III. Võetud näites, ül. 135, võime külje a võtta nii pika, kui me iganes soovime, me võime teda suurendada, kui palju tahame; ei ole nii pikka sirglõiku olemas, millest pikemaks meie a^d valida ei võiks ja ülesanne ei kaota ikkagi oma mõtet, oma lahendust. Niisugusel korral on a n. n. lõpmata suurenev suurus.

Suurust, mis teatava seaduse järele muutudes saab suuremaks, kui ükski ette kindlaks määratud suurus, olgu see kui suur tahes, ja sama seaduse järele edasi muutudes selleks ka jääb, nim. lõpmata suurenevaks suuruseks.

Kirjeldatud a muutumisel muutub ka $\sphericalangle B$; ta saab aga ikka vähemaks ja vähemaks ja ei ole nii väikest nurka olemas, millest $\sphericalangle B$ väiksemaks ei võiks saada, kui me a^d küllalt suurendame.

Suurust, mis teatava seaduse järele muutudes saab väiksemaks, kui ükski ette kindlaks määratud suurus, olgu see kui väike tahes, ja sama seaduse järele edasi muutudes selleks ka jääb, nim. lõpmata vähenevaks suuruseks.

Külje a muutumisel võib $\sphericalangle C$ omandada ka 2 väärtust korraga. Kõneldakse: niikaua kui $a > b$, muutub $\sphericalangle C$ „üheselt“, ta muutumine on „ühene“, s. t. ühele a väärtusele vastab üksainus $\sphericalangle C$ väärtus; niikaua kui $a < b$ ja $a > h_c$, muutub $\sphericalangle C$ „kaheselt“, ta muutumine on „kahene“, s. t. ühele a väärtusele vastavad kaks $\sphericalangle C$ väärtust. Vaatleme ainult $\sphericalangle ACB$ ja mitte $\sphericalangle ACE$.

Kui a suureneb piiramatult, suureneb ka $\sphericalangle ACB$, aga mitte piiramatult; $\sphericalangle ACB$ ei või suuremaks saada kui $180^\circ - \alpha$.

Kui a väheneb, väheneb ka $\sphericalangle ACB$; niikaua kui veel lahendus olemas on, ei või $\sphericalangle ACB$ väiksemaks saada, kui $90^\circ - \alpha$.

Suurust, mis teatud seaduse järele muutudes muutub kindlates piirides, s. t. nii, et ta ei või omandada väärtusi, mis ühest konstantsest väärtusest suuremad ja teisest konstantsest väärtusest väiksemad on, nim. lõplikuks.

IV. Olgu $a = h_c$. Võtame kiire, mis välja läheb C^{st} P sihis; ta lõikub AD^{ga} punktis P, nii et $a = CP$ ja lõpupunkt B langeb ühte P^{ga} . Et a^d suurendada, pöörame kiirt C ümber päri päeva. Selle juures jookseb lõikepunkt AD^d mööda D sihis ja CB^d mööda B sihis, ilma et ta ühtegi punkti vahele jätaks; a on omandanud kõik väärtused CP^{st} kuni CB^{ni} .

Kõneldakse: a on kulgenud kõik väärtused CP^{st} kuni CB^{ni} ja a on muutunud nendes piirides pidevalt. **Suurus muutub pidevalt piirides a^{st} kuni b^{ni} , kui ta a^{st} b peale üle minnes kulgeb kõik a ja b vahel olevad väärtused ja ühe väärtuse järele teise, esimesele otsekohe järgneva väärtuse omandab, ennast lõpmata väheneva suuruse võrra muutes.** Suurus võib muutuda ka hüpetega — omandades mitu

väärtust, aga nende vahelolevaid väärtusi mitte omandades, näit. õpilaste arv klassis võib muutuda ainult hüpetega, omandades ainult täisarvulisi ja vahele jättes murrulisi väärtusi. Peale selle võib suurus omal muutmisel **katkeda**.

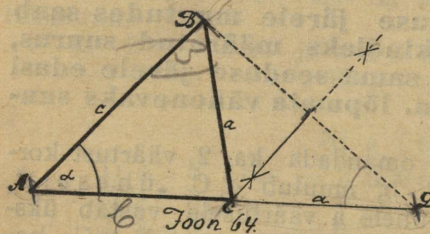
Ülesanded: 146) Jälgida ül. 135 külje c muutumist. Missugune on tema muutumise põhjus, ulatus ja iseloom?

147) Ül. 136—145 jälgida kõigi suuruste muutumise põhjust, iseloomu ja ulatust.

62. (67) Konstruimisülesannete lahendamine, kui antud on külgede summa või vahe.

1-ne näide: (ül. 148) Konstruida \triangle , kui antud on $a+b, c, \alpha$.

Analüüs: \triangle -rgas ABC asetame $AC=b$ pikenduse peale $CB=a$ nii, et $AD=b+a$ (ehk $a+b$).

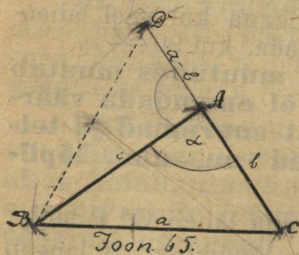


Ühendame D B ga, siis saame $\triangle ABD$, milles teada on $AD=b+a$, $AB=c$, $A=\alpha$ ja mida me konstruuda saame kahest küljest ja nende vahelnurgast. Selle läbi leiame võrdhaarse \triangle -ga BCD aluse BD ja tema lähisnurga D ($=\frac{1}{2}\gamma$). Tipu C leidmiseks tõmbame BD le keskristjoone.

Uurimine. Et kõik osakonstruktsioonid üheselt lahendatavad on, siis on ülesandel 1 lahendus, kui vaid võetud on $a+b > c$.

2-ne näide: (ül. 149) Konstruida \triangle , kui antud on $a-b, c, \alpha$.

Analüüs: Asetades lühema külje b pikema a peale näeme, et



meil praegusel juhusel korda ei lähe konstruitavat \triangle -rka saada. Asetame aga pikema külje $BC=a$ lühema külje $AC=b$ peale, saame nende „negatiivse“ vahe $AD=a-b$ väljaspool \triangle -rka ABC . Ühendades D B ga saame $\triangle ADB$, milles meil teada on $AD=a-b$, $AB=c$, $\sphericalangle DAB = 180^\circ - \alpha$. Selle \triangle -rga ADB konstruimise läbi leiame võrdhaarse \triangle -rga BCD aluse BD ja tema lähisnurga. Tema tipu C leidmiseks tõmbame BD le keskristjoone.

Märkus: Mõnikord tuleb tarvitada positiivset, mõnikord negatiivset vahet.

Konstruida \triangle , kui antud on:

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 150) $b+c, a, \gamma$; | 151) $b-c, a, \gamma$; | 152) $b+c, a, \alpha$; |
| 153) $b-c, a, \alpha$; | 154) $b+c, \alpha, \beta$; | 155) $b-c, \alpha, \beta$; |
| 156) $a+b, \alpha, \beta$; | 157) $a-b, \alpha, \beta$; | 158) $a, b+c, \alpha=90^\circ$; |
| 159) $a-b, \beta, \alpha=90^\circ$; | 160) $a+b+c, \alpha, \beta$; | 161) $a+b+c, h_a, \gamma$; |
| 162) $b+c, \alpha, \gamma$; | 163) $b-c, \alpha, \gamma$; | 164) $b+c, h_c, \alpha$; |

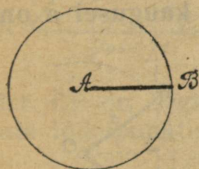
- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 165) $b - c, h_c, \alpha;$ | 166) $b \perp c, a, \beta;$ | 167) $b - c, a, \beta;$ |
| 168) $a \perp b, h_a, \beta;$ | 169) $a - b, h_a, \beta;$ | 170) $a \perp c, b, \alpha;$ |
| 171) $a - c, b, \alpha;$ | 172) $b \perp c, a, h_b;$ | 173) $b - c, a, h_b;$ |
| 174) $b \perp c, a, h_c;$ | 175) $b - c, a, h_c;$ | 176) $a \perp c, b, h_c;$ |
| 177) $a - c, b, h_c,$ | | |

Geomeetiline koht.

63. (63) Geomeetiline koht. Ülesanne (178). Leida punkt, mis punktist A r kaugusel on.

Lahendamine. A^{st} tõmbame kiire ja selle peale asetame $AB=r$.

Punkt B täidab ülesande nõuet. Kiire võime tõmmata mõnes teises sihis, siis saame teise punkti, mis ka ülesande nõudele vastab. Neid punkte saame palju, saame terve joone täie; kõik punktid, mis on A^{st} raadiusega r tõmmatud ringi peal, on A^{st} r kaugusel; ringi sees olevad punktid on A^{le} lähemal kui r ja väljaspool ringi olevad punktid on A^{st} kaugemal kui r. Ring on see koht — geomeetiline koht — kus asuvad kõik niisugused



Joon. 66

punktid ja ainult nemad asuvad.

Definitsioon. Punkti geomeetriliseks kohaks nim. joont, mille peal olevad punktid kõik alluvad ühele ja samale seadusele ja millest väljaspool olevad punktid sellele seadusele ei allu.

Seepärast, et tõendada, et leitud joon on teatud punkti geomeetriliseks kohaks, tuleb ära näidata, 1) et kõik selle joone punktid alluvad mainitud seadusele ja 2), et punktid väljaspool seda joont mainitud seadusele ei allu.

I-ne geom. koht: Antud punktist A antud kaugusel r oleva punkti geomeetriliseks kohaks (g. k.) on ring, mis tõmmatakse antud punktist A antud raadiusega r.

II-ne geom. koht. Kahest punktist samakaugel oleva punkti geom. kohaks on neid punkte ühendava sirglõigu keskristjoon.

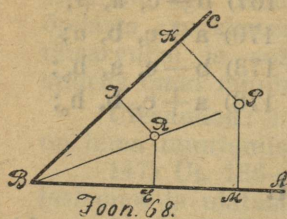
Tõendus: Olgu A ja B antud punktid, KR — sirglõigu AB keskristjoon, P meelevaldne punkt KR peal ja V — meelevaldne punkt väljaspool KR. Siis on: 1) $PA=PB$, sest et $KA=KB$ ja võrds. projekts. vastavad võrdsed kaldjooned; s. t. P on samakaugel A^{st} ja B^{st} .

2) $VA=VR+RA=VR+RB>VB$; järj. $VA>VB$ — s. t. V ei ole sama kaugel A^{st} ja B^{st} . M. t. o. t. (Mis maksab meelevaldse punkti kohta, on maksev iga punkti kohta).



Joon. 67

III-as geom. koht. Nurga haaradest samakaugel oleva punkti geom. kohaks on selle nurga poolitaja.



Tõendus: 1) Olgu $\sphericalangle RBA = \sphericalangle RBC$ ja $RE \perp BA, RJ \perp BC$. Siis on $\triangle EBR \cong \triangle JBR$ [50,1]; järj. $RE = RJ$; s. t. nurga poolitaja peal olevad punktid on samakaugel haaradest.

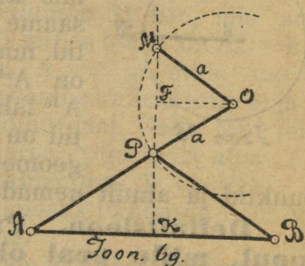
2) Olgu $PM \perp BA, PK \perp BC$ ja $PM = PK$. Siis on $\triangle PMB \cong \triangle PKB$ [52];

järj. $\sphericalangle MBP = \sphericalangle KBP$; s. t. et BP on \sphericalangle -rga ABC poolitaja. Et nurga haaradest samakaugel olev punkt on nurga poolitaja peal, siis väljaspool nurga poolitajat ei leidu punkte, mis nurga haaradest sama kaugel oleks.

M. t. o. t.

64. Ülesanne. 179) Punkt leida, mis kahest antud punktist A ja B ühekaugel ja kolmandast antud punktist O kaugusel a on.

Analüüs: Ühelt poolt peab otsitav punkt A^{st} ja B^{st} ühekaugel olema; tema geomeetriseliseks kohaks on siis sirglõigu AB keskristjoon. Teiselt poolt peab ta O^{st} kaugusel a olema; tema geom. kohaks on siis O ümber raadiusega a tõmmatud ring. Nende joonte lõikepunkt on siis otsitav punkt.



Uurimine: 1) Ring O lõikab KP^d kahes punktis M ja P niikaua, kui $a > OF \perp KP$ [91 j.]. 2 lahendust.

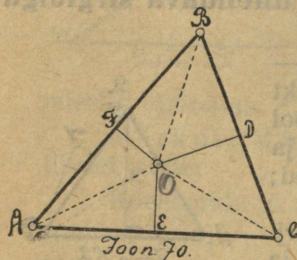
2) Ring O riivab KP^d ühes punktis, kui $a = OF$ 1 lahendus.

2) Ringil O ja KP^d ei ole ühist punkti, kui $a < OF$ ülesan. võimatu.

✓ **Ülesanded.** 180) Leida punkt, mis oleks antud sirgest kaugusel a ja antud punktist kaugusel b.

✓ 181) Leida punkt, mis oleks antud nurga haaradest ühekaugel ja antud punktist kaugusel b.

65. (127) Lause. Kolmnurga külgede keskristjooned lõikuvad kõik ühespunktis; see punkt on kõigest kolmest tipust ühekaugel.



Tõendus: Külje AB keskristjoone FO *) punktid on A^{st} ja B^{st} ühekaugel; külje AC keskristjoone EO punktid on A^{st} ja C^{st} ühekaugel. Nende keskristjoonte lõikepunkt on siis kõigest kolmest tipust ühekaugel: $OB = OA = OC$.

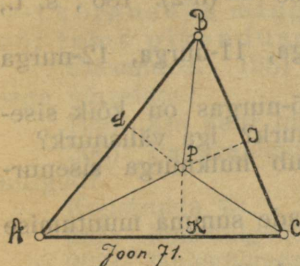
Et $OB = OC$, siis on $\triangle BOC$ võrdhaarne, BC tema alus ja O tema tipp. See pärast läheb ka külje BC keskristjoon teiste külgede keskristjoonte lõikepunktist O läbi.

M. t. o. t.

Ülesanded. 182) Nürinurkse \triangle -rga külgede keskristjoonte lõikepunkt leida!

*) Lõikepunkt O ei ole joonisel 70 tähistatud.

183) Täisnurkse \triangle -rga külgede keskristjoonte lõikepunkt leida!
66. Lause. (128) Kolmnurga nurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on kõigest kolmest küljest ühekaugel.



Tõendus: Nurga A poolitaja AP punktid on AB^{st} ja AC^{st} ühekaugel; nurga B poolitaja BP punktid on BA^{st} ja BC^{st} ühekaugel. Nende nurgapoolitajate lõikepunkt P on siis kõigest kolmest küljest ühekaugel: kui $PL \perp AB$, $PK \perp AC$, $PJ \perp BC$, siis on $PK = PL = PJ$.

Ühendame tipu C P_{ga} ja vaatleme \triangle -rki KPC ja JPC.

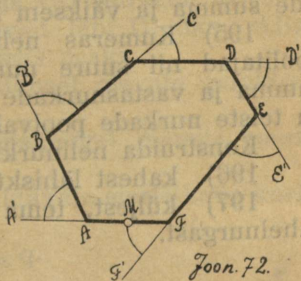
$PK = PJ$, $PC = PC$, $\sphericalangle PKC = \sphericalangle PJC = 90^\circ$; järj. $\triangle PKC \cong \triangle PJC$; järj. $\sphericalangle KCP = \sphericalangle JCP$

S. t. CP on \sphericalangle -ga C poolitaja ja ta läheb ka teiste nurkade poolitajate lõikepunktist läbi. M. t. o. t.

III-as peatükk: Nelinurk.

67) (70) Lause. Hulknurga välisnurkade summa on täispööre.

Tõendus: Hulknurga piire on kinnine murtud joon. Olgu ta punkti liikumise jälg. Algagu punkt M oma liikumist külje FA pealt ja liikugu ta FAA' sihis. Jõudes tippu A muudab punkt M järsku oma sihti AA' pealt ABB' peale, pöördudes esimese välisnurga $A'AB$ võrra. Jõudes tippu B muudab punkt M jälle järsku oma liikumise sihti BB' pealt BCC' peale, pöördudes teise välisnurga $B'BC$ võrra. Nii käib liikuv punkt M kõige piirde läbi, igas tipus muutes järsku oma sihti ja pöördudes seal tolle tipu juures oleva välisnurga võrra. Kui punkt jõuab tippu F, siis muudab ta jälle järsku oma sihti FF' pealt FAA' peale, pöördudes viimase välisnurga $FF'A$ võrra. Sellega on liikumise siht ennast pööranud esialgse sihiga võrreldes kõigi hulknurga välisnurkade summa võrra ja ühtlasi tuli ta oma esialgse sihi juure tagasi. See tähendab — tegi täispöörde. M. t. o. t.



Ülesanded: 184) Missuguste suuruste liiki kuulub hulknurga välisnurkade summa?

185) Viisnurgas on kõik välisnurgad ühesuurused. Kui suur on iga välisnurk? iga sisenurk?

68. (69) Lause. Hulknurga sisenurkade summa on nii mitu sirget nurka, mitu tippu on hulknurgal ilma 2-ta: (n-2). 180° .

Tõendus: (Joon. 72) Iga sisenurk ühes sama tipu juures oleva välisnurgaga annavad ühe sirge nurga. Niisuguseid kõrvunurkade paare on nii mitu, kui mitu tippu on; s. t. me saame nii mitu sirget nurka, mitu tippu on: $n \cdot 180^\circ$. Sellest summast lahutades välisnurkade summa 360° , saame: $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$, s. t., $(n-2)$ sirget nurka. M. t. o. t.

Ülesanded. 186) Kui suur on 7-nurga, 11-nurga, 12-nurga sisenurkade summa?

187) 8-nurgas, 9-nurgas, 10-nurgas, 15-nurgas on kõik sisenurgad ühesuurused. Kui suur on iga sisenurk? iga välisnurk?

188) Missuguste suuruste hulka kuulub hulknurga sisenurkade summa?

189) Missugune on hulknurga sisenurkade summa muutumise põhjus, ulatus ja iseloom?

190) Mitu diagonaali saab ühest tipust hulknurgas tõmmata?

191) Mitmeks \triangle -rgaks jagavad hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid?

192) Kui suur on ühtekokku nende \triangle -rkade sisenurkade summa, milleks jagavad hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid?

193) Mitu diagonaali üldse on võimalik hulknurgas tõmmata?

Tõendada laused:

194) Kumera nelinurga ümbermõõt on suurem, kui diagonaalide summa ja väiksem kui nende kahekordne summa.

195) Kumeras nelinurgas lõikuvad ühe külje lähisnurkade poolitajad nii suure nurga all, kui suur on teiste nurkade poolsumma ja vastasnurkade poolitajad — niisuure nurga all, kui suur on teiste nurkade poolvahe.

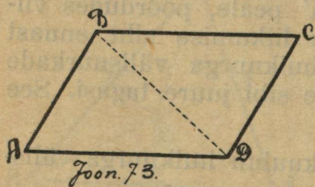
Konstruuda nelinurk:

196) kahest lähisküljest, diagonaalidest ja nende vahelnurgast.

197) küljest, tema lähisnurkadest, diagonaalidest ja nende vahelnurgast.

Parallelogrammid (rööpkülikud).

69. (71, 72, 73) **Definitsioon.** Parallelogramm (rööpkülik) on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed (rööbikud).



Par-grammi märk on #.

Definitsioonist järgneb:

1) lause: Par-grammi vastasküljed on võrdsed — ||-joonte peaomaduse põhjal [34];

2) lause: Diagonaal jagab par-grammi kaheks ühtivaks kolmnurgaks, nimelt $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ II. ü. l. põhjal, sest $BD = BD$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ ja $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$. M. t. o. t.

Märkus I. Viimasest lausest võib iseseisvalt järeldada, et $\#$ -i vastasküljed on võrdsed ja \parallel -jooned on igal kohal teineteisest ühekaugel.

Märkus II. Üks $\#$ -i külg võetakse aluseks; siis on $\#$ -i kõrguseks mingist vastaskülje punktist selle aluse või tema pikenduse peale tõmmatud ristjoon.

Ülesanded. 198) Kui suured on $\#$ -i vastasnurgad teineteisega võrreldes?

199) Kui suur on $\#$ -is ühe külje lähisnurkade summa?

200) Par-grammis on üks nurk 90° . Kui suured on teised nurgad?

Konstruida $\#$:

201) lähiskülgedest ja nurgast;

202) lähiskülgedest ja kõrgusest;

203) lähiskülgedest ja diagonaalist;

204) küljest, diagonaalist ja nurgast;

205) küljest, kõrgusest ja diagonaalist;

206) küljest ja kahest kõrgusest;

207) ühest diagonaalist ja kahest kõrgusest.

208) Antud nurga haarade vahele mahutada antud sirglõik antud sihis.

209) Olgu ABC võrdkülgne \triangle , BD ja CD nurkade B ja C poolitajad. Tõendada, et sirged, mis lähevad läbi D, üks \parallel ABga ja teine \parallel ACga, jagavad BC kolmeks võrdseks osaks.

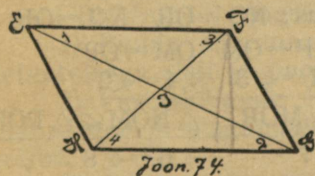
210) Leida antud sirgest antud kaugusel olevate punktide geom. koht.

211) Leida kahest antud sirgest samakaugel olevate punktide geom. koht.

212) Antud punkti ja sirge vahel mõeldavate sirglõikude keskohtade geom. koht leida.

213) Konstruida \triangle andmetest h_a, m_b, q .

70. (74) Par-grammi diagonaalid poolitavad teineteist.



Tõendus:

$EF = GH, \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2, \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ (põikn.);

järj. $\triangle EJO \cong GHO$.

Järj. $EJ = GO, FO = HO$. M.t.o.t.

Ülesanded. Konstruida $\#$:

214) diagonaalidest ja nende vahelnurgast;

215) diagonaalidest ja küljest;

216) diagonaalidest ja kõrgusest;

217) küljest, kõrgusest, diagonaalist;

218) küljest, diagonaalist ja diagonaalide vahelnurgast.

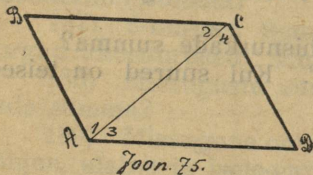
219) Konstruida \triangle kahest küljest ja kolmanda külje poolitajast.

220) Nurga sees antud punkti läbi tõmmata sirge nii, et see punkt poolitaks sirglõiku, mis nurga haarade vahel on.

221) Missugune sümmeetria on $\#$ -il ja kus asuvad piirde sümmeetrilised punktid? [27.]

222) Tõendada, et kui ühe $\#$ -mi tipud teise $\#$ -mi külgedel asuvad, siis on neil ühine sümmeetria keskpunkt.

71. (77) Ümberpööratud lause. Kui nelinurga vastasküljed on paarikaupa võrdsed, siis on nad ka paralleelsed.



Joon. 75.

Tõendus: Kui $AB=CD$, $BC=DA$; iseenesest on $AC=AC$; siis on

$$\triangle ABC \cong \triangle CBD \text{ [III. ü. l.]}$$

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4 \text{ ja } \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3.$$

$$AB \parallel CD \quad CB \parallel AD.$$

s. t. ABCD on $\#$. M. t. o. t.

72. (76) Ümberpööratud lause. Kui nelinurgas on üks paar vastaskülgi isekeskis paralleelsed ja võrdsed, siis on ka teine paar vastaskülgi isekeskis paralleelsed ja võrdsed.

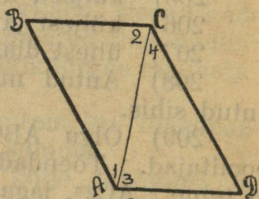
Tõendus: Kui $AB=CD$ ja $AB \parallel CD$, siis on $AB=CD$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ (põikn.), $AC=AC$

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ [I. ü. l.]}$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3, \quad CB=AD.$$

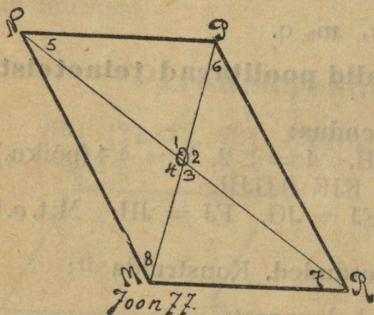
$$CB \parallel AD.$$

M. t. o. t.



Joon. 76.

73. (78) Ümberpööratud lause. Nelinurk, mille diagonaalid teineteist poolitavad, on parallelogramm.



Joon. 77.

Antud: $NO=OR$, $MO=OP$.

Tõendada: $NP \parallel RM$, $MN \parallel PR$.

Tõendus: $NO=OR$ $NO=OR$

$$OP=OM \quad OM=OP$$

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \quad \sphericalangle 4 = \sphericalangle 2$$

$$\triangle NOP \cong \triangle MOR \quad \triangle NOM \cong \triangle POR$$

$$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 7 \quad \sphericalangle 6 = \sphericalangle 8$$

$$NP \parallel RM$$

$$MN \parallel PR$$

Isesugused parallelogrammid (rööpkülikud).

74. (74) Definiitsioon. Püstkülik on nelinurk, mille nurgad kõik on täisnurgad.

Lause: Püstküliku diagonaalid on ühepikkused.

Tõendus: Et $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$, siis on $AB \parallel CD$, $BD \parallel DA$; s. t. ABCD on . Seepärast on $AB = CD$; $AD = DA$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$; järjel. $\triangle ABD \cong \triangle DCA$. Järjel. $BD = CA$. M. t. o. t.

Ülesanded. 223) Konstruuda püstkülik küljest ja diagonaalide vahelnurgast.

224) Konstruuda püstkülik diagonalist ja diagonaalide vahelnurgast.

225) Missugune sümmeetria on püstkülikul ja kuidas on asendatud piirde sümmeetrilised punktid? [I. trükk § 80].

75. (82) **Definitsioon. Romb ehk kaldruut on nelinurk, mille küljed kõik on ühepikkused ja nurgad ei ole täisnurgad.** Järj. romb on # [71].

Lause: Rombi (kaldruudu) diagonaalid on vastastikku risti ja poolitavad tema nurki.

Tõendus: Et $AB = BC = CD = DA$, siis on ABCD #; $\triangle ABC$ on võrdhaarne, AC on tema alus ja $AO = OC$. Seepärast on $BO \perp AC$, ehk $BD \perp AC$ ja $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ [45,1]. M. t. o. t.

Järeld. Rombi (kaldruudu) diagonaalid on tema sümmeetria teljed.

Ülesanded. 226) Kirjeldada täielikult rombi sümmeetriat.

Konstruuda romb: 227) küljest ja kõrgusest; 228) küljest ja diagonalist; 229) diagonalist ja kõrgusest; 230) diagonaalidest.

231) Püstküliku keskohti järjekorras ühendavad sirged on rombi küljed.

76. (83) **Definitsioon. Ruut on nelinurk, mille nurgad kõik on täisnurgad ja mille küljed on kõik ühepikkused.**

S. t. ruudul on ühtlasi kõik püstküliku ja rombi (kaldruudu) omadused:

1) Ruudu diagonaalid on ühepikkused, on teineteisega risti ja poolitavad ruudu nurki.

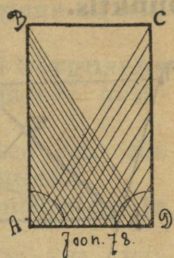
2) Vastaskülgede keskohtadest läbiminevad sirged ja diagonaalid on ruudu sümmeetria teljed.

3) Ruudu 4 sümmeetria telge lõikuvad ühes punktis, mis on ruudu neljakordse sümmeetria keskpunktiks.

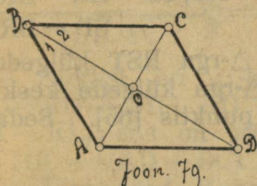
Ülesanded. Tõendada laused:

232) Kui ruudu tippudest alates iga külje peale asetada samas sihis ühepikkused lõigud ja saadud punktid järjekorras ühendada, siis tekib uus ruut.

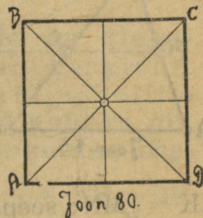
233) Püstküliku nurkade poolitajad sünnitavad ruudu; paragrammi (rööpküliku) nurkade poolitajad sünnitavad püstküliku.



Joon. 78.

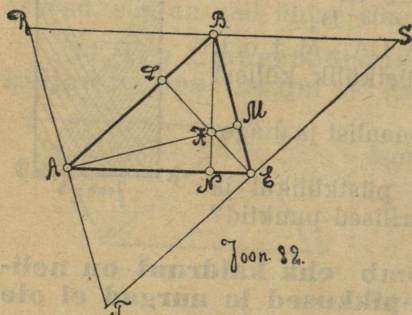


Joon. 79.



Joon. 80.

77. (129) Lause. Kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.



Antud: $BN \perp AE$, $AM \perp BE$,
 $EL \perp AB$.

Tõendada: BN , AM , EL lõikuvad ühes punktis.

Tõendus: Tõmbame iga tipu läbi \parallel -jooned vastasküljele. Need lõikuvad ja sünnitavad uue $\triangle RST$.

Et $BR \parallel EA$, $RA \parallel BE$; $AT \parallel BE$, $TE \parallel AB$; $ES \parallel AB$, $SB \parallel EA$.

[69] $BR = EA$, $RA = BE$; $AT = BE$, $TE = AB$; $ES = AB$, $SB = EA = BR$.

$RA = AT$

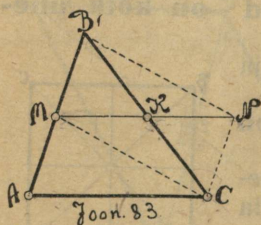
$TE = ES$

$SB = BR$.

Järg. on antud \triangle -rga ABE tipud uue \triangle -rga RST külgede keskkohad, ja antud \triangle -rga kõrgused on uue \triangle -rga külgede keskristjooned; niisugustena lõikuvad nad ühes punktis [65]. Seda punkti nim. **ortotsentriks**.

T r a p e t s.

78. (84) Lause. Kolmnurgas on kahe külje keskkohiti ühendav sirglõik pool osa kolmandast küljest ja temaga paralleelne.



Antud: $AM = MB$, $CK = KB$.

Tõendada: $MK \parallel AC$, $MK = \frac{1}{2}AC$.

Tõendus: Asetame MK pikenduse peale $KN = MK$; ühendame NB^{ga} ja C^{ga} ja $C M^{ga}$

Et $BK = KC$ ja $MK = KN$, siis on $MBNC \#$ [73]. See tähendab: $NC \parallel BM$, $NC = BM$. Et MA on BM pikendus ja $MA = BM$, siis on ka: $NC \parallel MA$, $NC = MA$. Järjel. [72] $MN \parallel AC$ ja $MN = AC$. Aga

$MK = \frac{1}{2}MN$; seepärast: $MK \parallel AC$ ja $MK = \frac{1}{2}AC$. M. t. o. t.

Ülesanded: Tõendada laused:

234) \triangle -rga küljed on 13 cm., 14 cm., 15 cm. Kui pikad on nende külgede keskkohiti ühendavad sirglõigud? Tehke joonis!

235) Nelinurga külgede keskkohad on niisuguse $\#$ -i tipud, mille küljed on pool diagonaalidest ja diagonaalidega paralleelsed.

236) Püstküliku külgede keskkohad on rombi tipud.

237) Rombi külgede keskkohad on püstküliku tipud.

79. (85) Definiitsioonid. Trapets on nelinurk, mille üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja teine paar ei ole paralleelsed.

Paralleelseid külgi nim. trapetsi **alusteks**; trapetsi **kõrguseks** nim. aluste kaugust teineteisest. Mitteparalleelsete külgede keskohti ühendavat sirglõiku nim. **keskjoneks**.

Kui trapetsi mitteparalleelsed küljed ühepikkused on, siis nim. seda trapetsi **võrdhaarseks** ja neid külgi **haaradeks**.

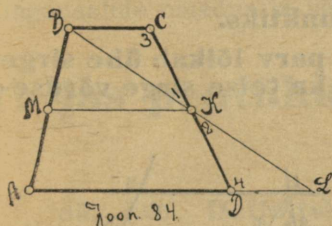
Lause: Trapetsi keskjoon on alustega paralleelne ja on aluste poolsumma.

Antud: $BC \parallel AD$, $AM = MB$, $CK = KD$.

Tõendada: $MK \parallel AD \parallel BC$,

$$MK = \frac{1}{2} (AD + BC).$$

Tõendus: Tõmbame läbi B ja K sirge, mis AD pikendust L-is lõikab. Siis on: $CK = KD$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$; järj. $\triangle BCK \cong \triangle LDK$. Järj. $DL = BC$ ja $BK = KL$.



Niiviisi on \triangle -gas ABL punkt K külje BL keskoht ja $AL = AD + DL = AD + BC$. Et aga \triangle -gas ABL on $AM = MB$ ja $BK = KL$, siis on $MK \parallel AL$ ja $MK = \frac{1}{2} AL$ [78], ehk $MK \parallel AD \parallel BC$ ja $MK = \frac{1}{2} (AD + BC)$. M. t. o. t.

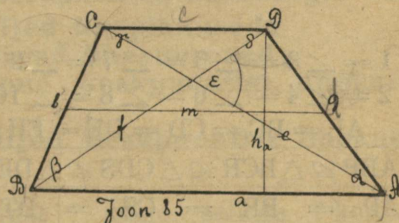
Ülesanded: Konstruuda trapets, kui antud on:

- 238) a, b, c, d; 239) a, b, m, e;
240) a, f, α , ε ; 241) a, c, h, f;
242) b, h, f, e; 243) b, d, δ , f;
244) c, d, α , m; 245) d, f, m, δ .

246) Tõendada, et võrdhaarses trapetsis on aluse lähisnurgad ühesuurused, diagonaalid ühepikkused ja aluste keskohti ühendav sirge on sümmeetria telg.

247) Tõendada, et võrdhaarses trapetsis on diagonaali projektsioon aluse peale niisama pikk, kui keskjoon.

80. (130) Lause. Kolmnurga mediaanid (küljepoolitajad) lõikuvad ühes punktis ja jagunevad seal kaheks nii, et tipupoolne osa on 2 korda nii pikk kui küljepoolne osa.

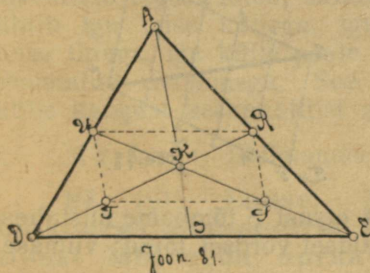


Antud: $EJ = JD$, $DU = UA$, $AR = RE$.

Tõendada: EU, DR, AJ lõikuvad ühes punktis;

$$EK = 2 KU, DK = 2 KR, AK = 2 KJ.$$

Tõendus: Mediaanid EU ja DR lõikuvad punktis K. Poolitame EK punktis S ja DK punktis T ja ühendame järjekorras R, S, T, U, R.



\triangle -rgas EDK on: ES=SK,
DT=TK.

\triangle -rgas EDA on: ER=RA,
DU=UA.

ST \parallel ED, ST = $\frac{1}{2}$ ED [78];

RU \parallel ED; RU = $\frac{1}{2}$ ED [78].

ST \parallel RU; ST = RU, s. t. RSTU on #.

ES = SK = KU; DT = TK = KR.
ehk EK = 2 KU ja DK = 2 KR.

Niisama lõikuvad ka EU ja AJ. See tähendab, et ka AJ läheb läbi punkti K, mis EU jagab kaheks nii, et EK = 2 KU ja jaguneb seal ise ka kaheks osaks nii, et AK = 2 KJ.

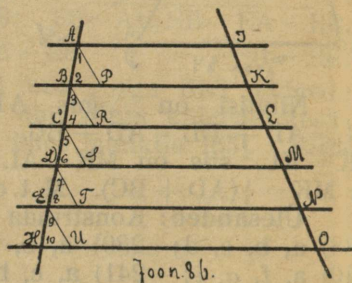
Seda punkti K nim. \triangle -rga raskuspunktiks.

81. (87) Lause. Kui rööpjoonte parv lõikab ühe sirge võrdseteks lõikudeks, siis lõikab ta ka teise sirge võrdseteks lõikudeks.

Antud: AJ \parallel BK \parallel CL \parallel DM \parallel EN \parallel HO
AB=BC=CD=DE=EH.

Tõendada: JK = KL = LM = MN = NO.

Tõendus: Läbi lõikepunktide A,B,C,D, E tõmbame JO^{le} \parallel rööpjooned, siis on



$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = \angle 9$ kui vastavad n.

$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = \angle 10$ " " "

AB = BC = CD = DE = EH oletuse järele.

$\triangle ABP \cong \triangle BCR \cong \triangle CDS \cong \triangle DET \cong \triangle EHU$. [II. ü. l.]

AP = BR = CS = DT = EU

AP = JK

BR = KL

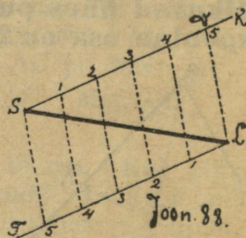
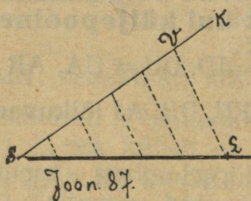
CS = LM

DT = MN

EU = NO

JK = KL = LM = MN = NO. M. t. o. t.

82. (87) Ülesanne (248). Antud sirglõik n võrdseks jaoks jagada.



Konstrueerimine: Sirglõigu ühest otsast S tõmbame mistahes kiire SK; selle peale asetame n meelevaldset võrdset lõiku; viimase

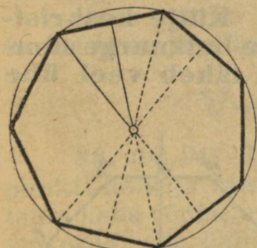
jaotuspunkti V ühendame teise otsapunktiga L ja läbi jaotuspunktide tõmbame VL^{le} -jooned. Ehk: Mõlematest otsadest tõmbame paralleelsed kiired $SK \parallel LT$, kummagi peale asetame otsapunktidest alates, n võrdset lõiku: Sirged, mis vastavaid jaotuspunkte ühendavad, jagavad SL n võrdseks jaoks.

Ülesanded: 249) Tõendada: Kui R ja S on parallelogrammi ABCD külgede AB ja CD keskkohad, siis jagavad DR ja BS diagonaali AC kolmeks.

250) Antiparallelogrammiks ehk deltoidiks nim. nelinurka, mille lähisküljed on paarikaupa võrdsed. Leida antiparallelogrammi diagonaalide omadus ja sümmeetria.

IV-jas peatükk. Korrapärased hulknurgad.

83. (90) Definiitsioon. Hulknurka nim. korrapäraseks, kui tal on nii mitmekordne (tsentraalne) kesksümmeetria, mitu külge tal on. Sümmeetria keskpunkti nim. hulknurga keskpunktiks (tsentriks). Näit. võrdkülgne \triangle on korrapärasene; ruut on korrapärasene nelinurk.



Joon. 89.

Lause: Korrapärases hulknurgas on:

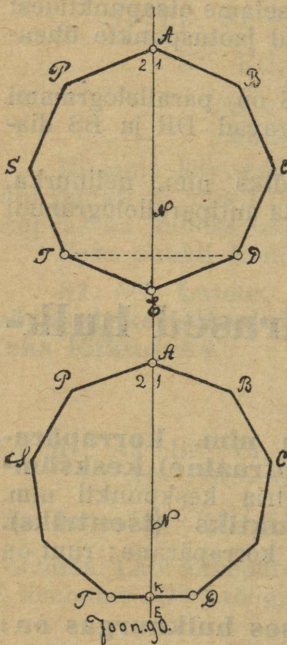
- 1) kõik küljed ühepikkused;
- 2) kõik nurgad ühesuurused;
- 3) kõik tipud keskpunktist ühekaugel;
- 4) kõik küljed keskpunktist ühekaugel.

Tõendus: Olgu me hulknurgal 7 külge, sellega 7-kordne kesksümmeetria. Pöörame h-nurga keskpunkti ümber $\frac{1}{7}$ täispöörde võrra, siis langeb ta iseendaga ühte. Selle juures ühtib iga külge, iga nurk, iga tipp, iga külje peale tõmmatud ristjoon teise järjekorras oleva küljega, nurgaga, tipuga, külje peale tõmmatud ristjoonega. Ühe täispöörde jooksul, kuna hulknurk oma esimesse asendisse tagasi tuleb, sünnib see ühtimine 7 korda, nii et iga külge ühtib iga teise küljega, iga nurk iga teise nurgaga, iga tipp iga teise tipuga, iga külje peale tõmmatud ristjoon iga teise külje peale tõmmatud ristjoonega. See tähendab seda, m. t. o. t. Hulknurga külje kaugust keskpunktist nim. **apoteemiks**.

Märkus: Üldistamise otstarbeks võib võtta „7“ asemel „n“.

84. (91) Lause. Nurgapoolitaja on korrapärase hulknurga sümmeetria teljeks; ta läheb veel ühe nurga tipust läbi seda nurka poolitades, kui hulknurgal on

paarisarv külgi, või läheb ühe külje keskkohast läbi risti selle küljega, kui hulknurgal on paaritu arv külgi.



Tõendus: Murrame hulknurga nurgapoolitajat AN mööda kahekorra; siis läheb AB AP sihis, sest $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; B langeb P peale, sest $AB = AP$; BC läheb PS sihis, sest $\sphericalangle B = \sphericalangle P$; C langeb S peale, sest $BC = PS$ jne. kuni viimaks D langeb T peale. Et D ja T sümmeetrilised on AN suhtes, siis on $AN \perp DT$ ja AN jagab DT pooleks. On h-nurgal paarisarv külgi ja tippe, siis on peale D ja T veel üks tipp E olemas, mis paaris on A^{ga} ja mis D^{ga} ja T^{ga} võrdhaarse \triangle -ga sünnitavad, mille aluseks on DT ja tipuks E. Et $AN \perp DT$ ja jagab DT pooleks, siis läheb AN ka tipust E läbi ja poolitab $\sphericalangle E$.

On h-rgal paaritu arv külgi, siis on D ja T viimased tipud ja DT viimane külj; seepärast on lihtsalt $AN \perp DT$ ja AN jagab DT pooleks.

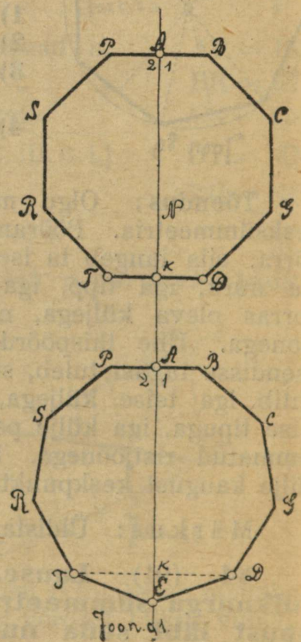
85. (91) Lause. Külje keskristjoon on korrapärase hulknurga sümmeetria teljeks; ta läheb veel ühe külje keskkohast läbi risti

selle küljega, kui hulknurgal on paarisarv külgi, või ta läheb ühe nurga tipust läbi seda nurka poolitades, kui hulknurgal on paaritu arv külgi.

Tõendus: Olgu $AN \perp BP$ ja $AB = AP$. Murrame hulknurga AN mööda kahekorra. Siis läheb AB AP sihis, sest $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 90^\circ$; B langeb P peale, sest $AB = AP$; BC läheb PS sihis, sest $\sphericalangle B = \sphericalangle P$; C langeb S peale, sest $BC = PS$ jne., kuni viimaks D langeb T peale. Et D ja T sümmeetrilised on AN kohta, siis on $AN \perp DT$ ja $TK = KT$. Kui h-rgal on paarisarv külgi ja tippe, siis on D ja T viimased tipud, DT—viimane külj ja lause on tõendatud.

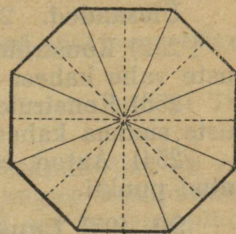
On h-rgal paaritu arv külgi ja tippe, siis on veel üks üksik tipp E olemas, ja veel üks paar külgi $DE = ET$ nii, et $\triangle EDT$ on võrdhaarne ja AN tema aluse keskristjoon. Seepärast läheb AN tipust E läbi ja poolitab $\sphericalangle E$.

M. t. o. t.



86. (91) Lause. Kõik sümmeetria teljed (nurgapoolitajad ja külgede keskristjooned) lõikuvad ühes punktis, nimelt sümmeetria keskpunktis.

Tõendus: Läheks süm. telg süm. keskpunktist mööda, siis oleks süm. keskpunktile telje kohta sümmeetriline punkt ka süm. keskpunkt; aga meie tunnistame aksioomina õigeks, et igal kujul võib ainult üks süm. keskpunkt olla. Seepärast lähevad kõik süm. teljed süm. keskpunktist läbi ja seal nad lõikuvadki.



Joon. 92.

87. (91) Lause. Korrapärasel hulknurgal on nii mitu sümmeetria telge, mitmekordne on tema kesksümmeetria.

Tõendus: Kui h-rgal on n külge ja sellega n -kordne kesksümmeetria, siis on tal n nurgapoolitajat ja n külje keskristjoont.

On n paarisarv, siis on iga nurgapoolitaja veel ühe teise nurga poolitaja ja iga külje keskristjoon on veel ühe teise külje keskristjoon; sellega on niisugusel korrapärasel h-rgal $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ sümmeetria telge.

On n paaritu arv, siis on iga nurgapoolitaja ühtlasi ühe külje keskristjoon ja sellega on niisugusel h-rgal n sümmeetria telge M. t. o. t.

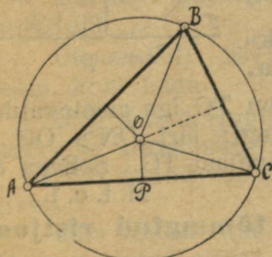
V-es peatükk. Ring.

88. (93, 94) Ring on antud ehk määratud, kui antud on keskpunkti koht ja raadiuse pikkus, sest kui me teineteise peale paigutame kaks võrdsete raadiustega ringi nii, et nende keskpunktid ühte langevad, siis ühtivad ka ringjooned seepärast, et nende punktid kõik on samakaugel keskpunktist. Selsamal põhjusel võib ütelda:

1) iga diameeter on ringi sümmeetria telg ja

2) ringil on (tsentraalne) kesksümmeetria ning sümmeetria järk on lõpmatus, sest kui väikse või suure nurga võrra me ringi ka pöörame tema keskpunkti ümber, ta liugub ikka ainult iseennast mööda.

89. (96) Lause. Läbi kolme punkti, mis mitte ühel sirgel ei asu, on võimalik ring tõmmata ja nimelt üksainus.



Joon. 93.

Tõendus: Olgu A, B ja C \triangle -rga ABC tipud. Siis lõikuvad külgede keskristjooned kõik ühes punktis O, mis on samakaugel kõigist kolmest punktist A, B ja C: $OA = OB = OC$ [65]. Niiviisi on meil üksainus keskpunkt ja üksainus raadius, sellega ka üksainus ring. Seepärast, kui O keskpunktiks võtta ja raadiusega $OA = OB = OC$ ring tõmmata, siis läheb see ring läbi A, B ja C.

Järeldus: Kolm punkti, mis samal sirgel ei asu, määravad ringi.

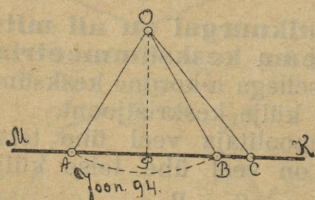
Ülesanded. 251) On olemas ring; leida tema keskpunkt.

252) Konstruuda ring, mille keskpunkt on antud ja mille kauguste vahe kahest antud punktist A ja B on antud.

253) Konstruuda ring, mille keskpunkt on antud ja mille kauguste summa kahest antud punktist M ja K on antud.

254) Antud raadiusega ring tõmmata, mis läheb läbi kahe antud punkti.

90. (95) Lause. Ringil ja sirgel ei või üle kahe ühise punkti olla.



Tõendus: Olgu O ringi keskpunkt ja $OP \perp MK$. Oleks ringil O sirgega MK 3 ühist punkti A, B ja C, siis oleks $OA = OB = OC$, kui raadiused ja $PA = PB = PC$, kui nende projektsioonid [58], mis aga silmnähtavalt õige olla ei saa, kui C ühte ei lange B^{ga}.

1-ne järeldus: Läbi 3-e punkti, mis ühe sirge peal asuvad, ei ole võimalik ringi tõmmata.

2-ne järeldus: Ükski ringi osa ei saa sirgega ühtida.

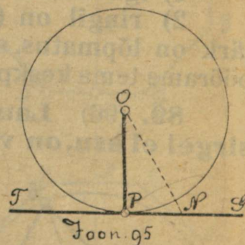
Definitsoonid. Sirget, mille ringiga 2 ühist punkti on, nim. **lõikajaks**; sirget, mille ringiga 1 ühine punkt on, nim. **riivajaks** ja ühist punkti — **riivaspunktiks**.

Riivaja.

91. (105) Lause. Sirge, mis on risti raadiusega tema otsapunktis, on riivaja.

Tõendus: Kui OP on raadius ja $OP \perp TG$, siis on iga meelevaldne TG peal asuv punkt N Ost kaugemal, kui P on Ost: $ON > OP$. Sellega on N väljaspool ringi ja P on sirge TG ja ringi O ainuke ühine punkt, s.t. TG on O riivaja.

M. t. o. t.



Ümberpööratud laused: I. Riivaspunkti tõmmatud raadius on risti riivajaga.

Tõendus: Et TG on ringi O riivaja, siis on TG iga meelevaldne punkt N, peale riivaspunkti P, väljaspool ringi; järj. $ON > OP$ ja OP on keskpunkti O kõige lühem kaugus riivajast TG. Sellega on $OP \perp TG$ [58].

M. t. o. t.

II. Keskpunktist riivaja peale tõmmatud ristjoon läheb riivaspunkti.

Tõendus: Keskpunktist O riivaja TG peale tõmmatud ristjoonena esineb riivaspunkti tõmmatud raadius OP ja teist tõmmata ei ole võimalik [24].

III. Riivaspunkti riivajale tõmmatud ristjoon läheb läbi ringi keskpunkti.

Tõendus: Riivaspunktis on juba $PO \perp TG$; teist ristjoont TG^le punktis P tõmmata ei ole võimalik [24].

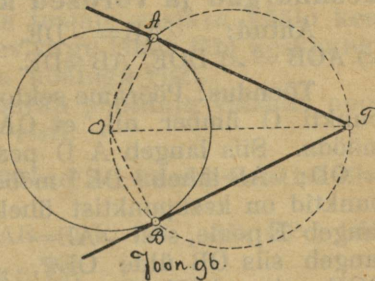
Järeldus. Kui sirge kauguseks ringi keskpunktist on raadius, siis riivab see sirge ringi; on sirge kaugus keskpunktist lühem kui raadius, siis lõikab sirge ringi; on see kaugus pikem kui raadius, siis ei ole sirgel ja ringil ühtegi ühist punkti.

92. (106) Ülesanne. (255) Ringi peal antud punktis ringile riivaja tõmmata.

Konstruksioon: Antud punkti tõmbame raadiuse ja sellele tema otsapunktis ristjoone.

Ülesanne. (256) Väljaspool ringi antud punktist ringile riivaja tõmmata.

Konstruksioon: Ühendame T keskpunktiga O ; OT -d diameetrikaks võttes tõmbame ringi, mis lõikab ringi O kahes punktis A ja B . Läbi T ja A ning T ja B tõmmatud sirged TA ja TB on otsitud riivajad, sest $\sphericalangle OAT = 90^\circ$ ja $\sphericalangle OBT = 90^\circ$, kui diameetri peale toetavad piirdenurgad.



Lause: Ühest punktist ringi külge tõmmatud riivajad on võrdsed ja sirge, mis seda punkti keskpunktiga ühendab, jagab riivajate nurga pooleks.

Tõendus:

$$\triangle OBT \cong \triangle OAT, \text{ sest et } OT = OT, OB = OA, \sphericalangle B = \sphericalangle A = 90^\circ.$$

$$TB = TA, \sphericalangle OTB = \sphericalangle OTA.$$

Järeldus: TO on selle kujundi sümmeetria telg.

Märkus: Riivaja pikkust mõeldakse ikka lähtepunktist riivaspunktini.

Ülesanded: 257) Antud ringi võrdsete riivajate lähtepunkti geom. koht leida.

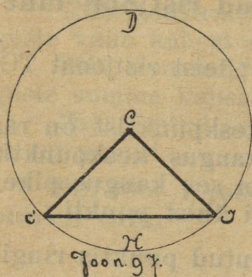
258) Antud ringile tõmmata riivaja nii, et tema pikkus riivaspunkti ja antud sirge vahel oleks a .

✓ 259) Antud raadiusega tõmmata ring, mis kaht antud sirget riivab.

260) Antud raadiusega tõmmata ring, mis läbi antud punkti läheb ja antud sirget riivab.

Kaar, kõõl ja kesknurk (tsentrinurk).

- 93. (97) Seletused.** Nurka, mille tipp on keskpunktis, nim. **kesknurgaks (tsentrinurgaks)**. Igale kaarele vastab üks kesknurk ja üks kõõl; igale kesknurgale vastab üks kõõl ja üks kaar, mille peale ta **toetab**; aga igale kõõlule (EJ) vastavad kaks erilist kaart (EHJ ja EDJ) ja kaks erilist kesknurka, millest üks suurem ja teine vähem on kui poolringi või sirge nurk. Kui kõneldakse kõõlust ja temale vastavast kaarest või kesknurgast, siis mõeldakse harilikult vähemat.



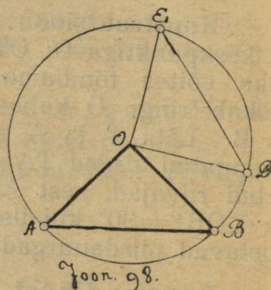
Sektor on kahe raadiusega ja kaarega piiratud ringi osa, näit. EDJCE.

Segment on kõõluga ja kaarega piiratud ringi osa, näit. EJHE.

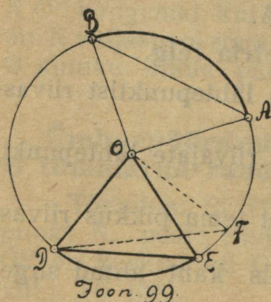
- 94. (98) Lause. Võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kesknurgad ja võrdsed kõõlud.**

Antud: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE$, $AB = DE$. Tõendada: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE$, $AB = DE$.

Tõendus: Pöörame sektori AOB keskpunkti O ümber nii, et OA läheb OD^d mööda. Siis langeb A D peale, sest $OA = OD$; $\sphericalangle AB$ läheb $\sphericalangle DE$ ^d mööda, sest ringi punktid on keskpunktist ühekaugel, ja B langeb E peale, sest $\sphericalangle AB = \sphericalangle DE$. Sellega langeb siis OB ühte OE^{ga}, $\sphericalangle AOB \sphericalangle gaga$ DOE, ning kõõl AB kõõluga DE, sest nende otsapunktid langesid ühte. Järj. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE$ ja $AB = DE$. M t. o. t.



- 95. (99) Lause. Suuremale kaarele vastab suurem kesknurk ja suurem kõõl, kui kaared poolringist suuremad ei ole.**



Antud: $\sphericalangle AB > \sphericalangle DE$.

Tõendada: $\sphericalangle AOB > \sphericalangle DOE$; $AB > DE$.

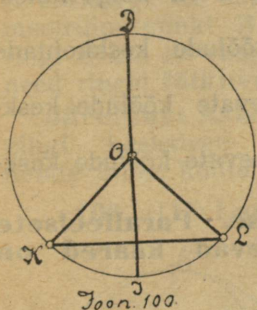
Tõendus: 1) Pöörame sektori AOB O ümber nii, et OA läheb OD^d mööda. Siis langeb A D peale, sest $OA = OD$; $\sphericalangle AB$ läheb $\sphericalangle DE$ sihis, sest ringi punktid on kõik keskpunktist ühekaugel, ja B langeb $\sphericalangle DE$ pikenduse peale, näit. punkti F, sest $\sphericalangle AB > \sphericalangle DE$. Seepärast läheb OB \sphericalangle -rga DOE välistmist valda mööda OF sihis. Järj. on $\sphericalangle AOB > \sphericalangle DOE$.

2) Vaadeldes $\triangle AOB$ ja $\triangle DOE$ leiame: $OA = OD$, $OB = OE$ $\sphericalangle AOB > \sphericalangle DOE$; järj. [55] külj $AB >$ külj DE . M. t. o. t.

Ülesanne: 261) Lausetele 94 ja 95 vormuulida ümberpööratud laused ja tõendada. Juhatus: Võib tõendada kas vastuväiteliselt või otseteel järeldades.

Kõõlud.

96. (100) Lause. Kõõlu ristraadius või — diameeter poolitab kõõlu, temale vastavad kesknurgad ja kaared.



Tõendus: $\triangle KOL$ on võrdhaarne ja et $OJ \perp KL$, siis on OJ ehk DJ \triangle -rga KOL ja ühtlasi ka ringi O sümmeetria telg ja K ja L on sümmeetrilised punktid. Seepärast: jagab DJ kõõlu KL pooleks; $\angle KOJ = \angle LOJ$; $\angle KOD = \angle LOD$; $\overset{\frown}{KJ} = \overset{\frown}{LJ}$; $\overset{\frown}{KD} = \overset{\frown}{LD}$. M. t. o. t.

Ülesanne: 262) Tõendada (sümmeetria abil) ümberpööratud laused:

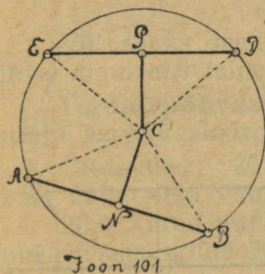
1) Kõõlu kesknurk läheb läbi keskpunkti.

2) Kaare ja temale vastava kõõlu keskkohast läbiminev sirge läheb läbi keskpunkti.

3) Kõõlu poolitaja raadius on kõõluga risti.

4) Kaart poolitaja ja 5) kesknurka poolitaja raadius poolitab ka vastava kõõlu ja on temaga risti.

97. (101) Lause. Võrdsed kõõlud on keskpunktist ühekaugel.



Antud: $AB = DE$, $CN \perp AB$, $CP \perp DE$.

Tõendada: $CN = CP$.

Tõendus: $\triangle ACB \cong \triangle DCE$ [III. ü. l.]
 $CN = CP$.

[Ühtivates \triangle -rkades on vastavad osad võrdsed.]

98. (102) Lause. Pikem kõõl on keskpunktile ligemal.

Antud: $AB > EF$, $OR \perp AB$, $OD \perp EF$.

Tõendada: $OR < OD$.

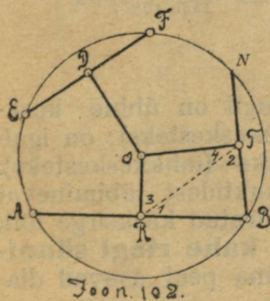
Tõendus: Asetame kõõlu EF kõõlu BN kohale nii, et $BN = EF$ ja tõmbame $OT \perp BN$: siis on [97] $OT = OD$ ja $AB > BN$. Ühendame R T -ga.

Siis on \triangle -rgas RBT : $\angle BTO = \angle BRO = 90^\circ$
 $RB > BT$, sest $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} BN$ $\angle 2 > \angle 1$

$\angle 2 > \angle 1$.

$\angle 4 < \angle 3$ [6,9].

\triangle -rgas ROT : $OR < OT$ ehk $OR < OD$. M. t. o. t.



Ümberpöördud laused :

- 1) Keskpunktist ühekaugel olevad kõõlud on võrdsed.
- 2) Keskpunktile ligem kõõl on pikem. [Võib tõendada otse-teel või vastuväiteliselt.]

Järeldus :

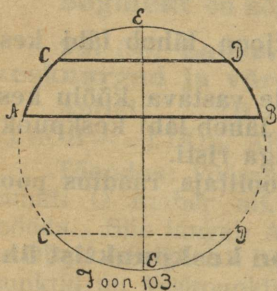
Diameeter on kõige pikem kõõl.

Ülesanded: (263) Missugune kõõl ringis O on kõige lühem neist, mis läbi antud punkti A lähevad?

√264) Antud ringis antud pikkusega kõõlude keskkohdade geom. koht leida!

265) Ringi peal antud punktist väljaminevate kõõlude keskkohdade geom. koht leida!

266) Ringi sees antud punkti A läbi minevate kõõlude keskkohdade geom. koht leida!



99. (103) Lause. Paralleelsete kõõlude vahel olevad kaared on võrdsed.

Antud: $CD \parallel AB$ Tõendada: $\sphericalangle AC = \sphericalangle BD$.

Tõendus: Tõmbame diameetri $EE' \perp AB$.

Siis on [90] $\sphericalangle AE = \sphericalangle BE$ ja [36] $EE' \perp CD$;

järj. $\sphericalangle CE = \sphericalangle DE$.

$\sphericalangle AC = \sphericalangle BD$.

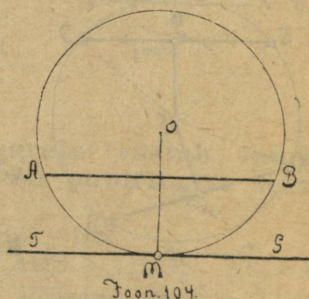
100. Lause: Kõõluga paralleelne riivaja jagab kõõlule vastava kaare pooleks.

Tõendus: $TG \parallel AB$

$OM \perp TG$

$OM \perp AB$

$\sphericalangle AM = \sphericalangle MB$ [96].

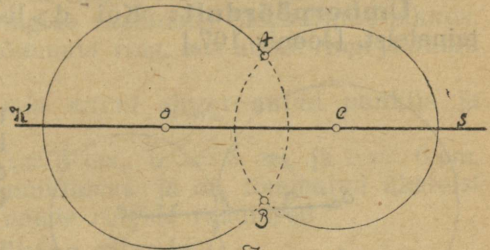


Kaks ringi.

101. (113) Seletused. Kui kahel ringil on ühine keskpunkt, siis nim. neid **ühistsentristeks** (ühiskeskesteks); on igal ühel oma keskpunkt, siis — **ekstsentristeks** (lahkkeskesteks). Kahe ekstsentriise (lahkkeskesese) ringi keskpunktidest läbiminevat sirget nim. **kesksirgeks** ja keskpunktidega piiratud kesksirge lõik on **keskpunktide kaugus**. **Kesksirge on kahe ringi sünnitatud kujundi sümmeetria telg**, sest tema peal asuvad diameetrid on kumbki oma ringi sümmeetria telg.

102. (104) Lause. On kahel ekstsentriseel (lahkkeskesel) ringil üks ühine punkt väljaspool kesksirget, siis on neil ka teine ühine punkt väljaspool kesksirget.

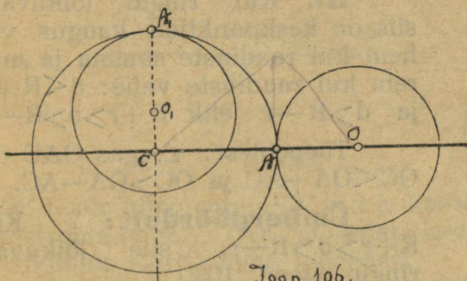
Nimelt esimesele punktile A kesksirge KS suhtes sümmeetriline punkt B asub nii ringi O kui ka ringi C peal; need ringid lõikuvad.



Joon 105.

Järeldus: Kahe lõikuva ringi kesksirge poolitab nende ühise kõõlu ja on temaga risti [23].

103. (115) Lause. On kahel ringil kesksirge peal ühine punkt, siis neil teist ühist punkti ei ole, nad riivavad teineteist.



Joon 106.

Tõendus: Oleks ringidel C ja O peale kesksirgel asuva punkti A veel üks ühine punkt väljaspool kesksirget, siis oleks neil ka veel teine niisugune ühine punkt [102], seega kokku 3 ühist punkti ja nad ühtiksid.

Või asuks see teine ühine punkt kesksirge peal, siis oleks ta ühise diameetri teine otsapunkt ja ringid ühtiksid jällegi.

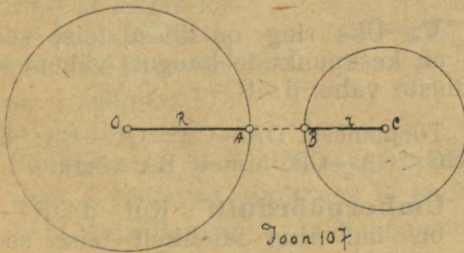
Ümberpöördud lause: Kahe teineteist riivava ringi riivaspunkt asub kesksirge peal. [102, 103.]

Ütesanded: 267) Kõige lühem ja kõige pikem sirglõik leida, mida kahe ringi vahel võimalik on tõmmata.

268) Antud punktist ühistsentristele ringidele tõmmatud riivajate riivaspunktide geom. koht leida!

104. (116) Kahe ringi vastastikune asend. Tähistame

ühe ringi raadiuse R_{ga} , teise ringi raadiuse r_{ga} ja keskpunktide kauguse d_{ga} . Kaks ringi võivad teineteise suhtes järgmiselt asendatud olla:

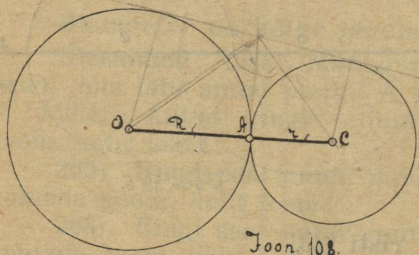


Joon 107

I. Kumbki ring on väljaspool teist ringi: Siis on nende keskpunktide kaugus suurem kui raadiuste summa: $d > R + r$.

Tõepoolest: $OC = OA + AB + BC$ ja OC on suurem kui $OA + BC$, nimelt AB võrra.

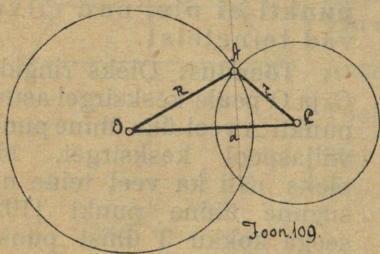
Ümberpöördult: Kui $d > R + r$, siis on ringid väljaspool teineteist. [Joonis 107.]



Joon 108.

II. Ringid riivavad teineteist väljastpoolt. Siis on nende keskpunktide kauguseks raadiuste summa: $d = R + r$ ehk $OC = OA + AC$.

Ümberpöördult: Kui $d = R + r$, siis riivavad ringid teineteist väljaspoolt. [Joonis 108.]



Joon 109.

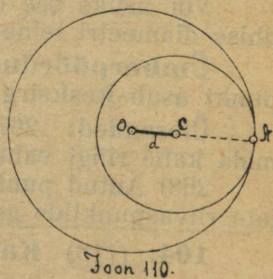
III. Kui ringid lõikuvad, siis on keskpunktide kaugus vähem kui raadiuste summa ja suurem kui raadiuste vahe: $d < R + r$ ja $d > R - r$ ehk $R + r > d > R - r$.

Tõepoolest: \triangle -rgas OAC on $OC < OA + AC$ ja $OC > OA - AC$.

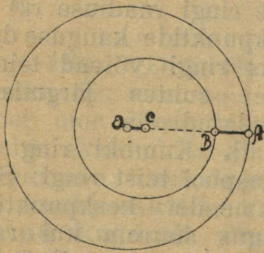
Ümberpöördult: Kui $R + r > d > R - r$, siis lõikuvad ringid. [Joon. 109.]

IV. Kui ringid riivavad teineteist seestpoolt, siis on keskpunktide kauguseks raadiuste vahe: $d = R - r$. Tõepoolest: $OC = OA - CA$.

Ümberpöördult: Kui $d = R - r$, siis riivavad ringid seestpoolt teineteist. [Joon. 110.]



Joon 110.



Joon 111.

V. Üks ring on täiesti teise sees. Siis on keskpunktide kaugus vähem kui raadiuste vahe: $d < R - r$.

Tõepoolest: $OA - CB = OC + BA$; järj. on $OC < OA - CB$, nimelt BA võrra.

Ümberpöördult: Kui $d < R - r$, siis on üks ring täielikult teise sees. [Joon. 111.]

Märkus: Kõik ümberpööratud laused tõendatakse vastuväiteliselt pärast otsekoheste lausete tõendamist.

✓ **Ülesanded.** 269) Leida antud ringi riivajate ringide keskpunktide geom. koht nii, et nende ringide raadiustel oleks antud pikkus.

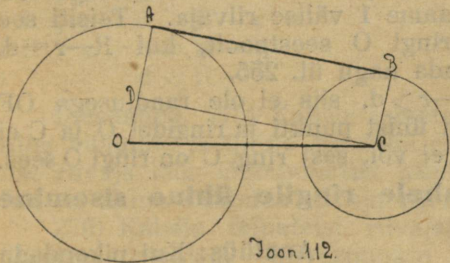
✓ 270) Antud raadiusega tõmmata ring, mis antud ringi ja antud sirget riivab.

271) Konstruuda ring, mis antud sirget antud punktis ja antud ringi riivab.

272) \triangle -rga küljed on $a = 3$ cm., $b = 5$ cm. ja $c = 6$ cm. Tema tipud on võetud keskpunktideks ja on tõmmatud üksteist riivavad ringid. Kui pikad on nende ringide raadiused?

105. (119) Kahe ringi ühine riivaja.

I-ne ülesanne. (273) Kahele ringile tõmmata ühine välimine riivaja.



Analüüs. Olgu AB otsitav riivaja. Riivaspunktidesse tõmmatud raadiused on riivajaga risti: $OA \perp AB$; $CB \perp AB$. Järj. $OA \parallel CB$. Trapetsis OABC on teada nurgad $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ja küljed $OA = R$, $CB = r$, $OC = d$. Kui tõmmata $CD \parallel BA$, siis on täisnurkses \triangle -rgas,

ODC teada hüpotenuus $OC = d$ ja kaatet $OD = R - r$. Seepärast võime konstruuda enne $\triangle ODC$ ja seeläbi leida $DC = AB$; pärast konstruime püstküliku ABCD tema külgedest.

Konstruktioon: 1) Jagame OC pooleks punktis M.

2) Raadiusega $MO = MC = \frac{1}{2} OC$ tõmbame OC ümber ringi.

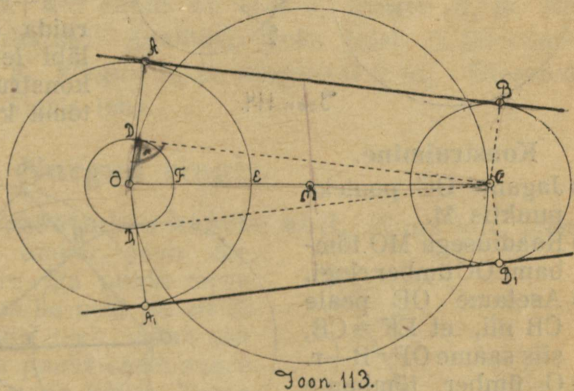
3) Asetame EO peale CB nii, et $EF = CB$, siis saame $OF = R - r$.

4) O ümber tõmbame raadiusega $OF = R - r$ ringi, mis ringi M lõikab kahes punktis D ja D_1 .

5) Läbi D ja D_1 tõmbame raadiused OA ja OA_1 .

6) Punktidest A ja A_1 tõmbame raadiusega $DC = D_1C$ kaared, mis ringi C lõikavad punktides B ja B_1 .

7) Läbi A ja B ning A_1 ja B_1 tõmmatud sirged AB ja A_1B_1 on otsitavad riivajad.



Tõendus:	$OA = R$	$DA = CB$	$\sphericalangle ODC = 90^\circ$	$OA \perp AB$
	$OD = R - r$	$AB = DC$	$AB \parallel DC$	$CB \parallel OA$
	$DA = r = CB$	$DA \parallel CB$	$\sphericalangle OAB = 90^\circ$	$CB \perp AB$
		$AB \parallel DC$		

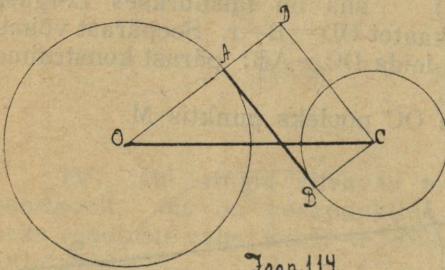
Et $AB \perp OA$ ja $AB \perp CB$ nende otsapunktides, siis on ta ringide O ja C ühine riivaja.

Urimine. 1) Raadiusega OF tõmmatud ring lõikab ringi M 2-es punktis niikaua, kui on $OF < OC$ ehk, teistes tähistustes, niikaua kui on $R - r < d$. See tähendab: kui ringid O ja C on teine teisest väljaspool, või kui nad riivavad teineteist väljastpoolt või lõikuvad, siis on neil 2 ühist välist riivajat.

2) On $OF = OC$, s. t. on $R - r = d$, siis riivab raadiusega OF tõmmatud ring ringi M ja me saame 1 välise riivaja. Teisiti see olla ei või, sest ring C riivab ringi O seestpoolt, kui $R - r = d$. Riivaja tõmbamisel tuleb toimetada nagu ül. 255.

3) On $OF > OC$, s. t. on $R - r > d$, siis ei ole raadiusega OF tõmmatud ringil ringiga M ühtegi ühist punkti ja ringidel O ja C ei ole ühist riivajat. Teisiti see olla ei või, sest ring C on ringi O sees.

II-ne ülesanne. (274) Kahele ringile ühine sisemine riivaja tõmmata.

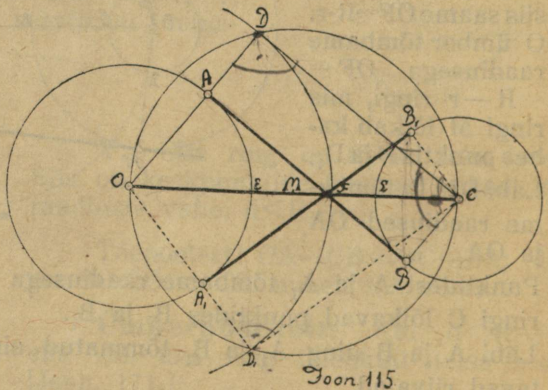


Joon. 114.

Analüüs: Kui pikendada OA^d ja tõmmata $CD \parallel AB$ kuni ta lõikab OA pikendust punktis D , siis on täisnurkses \triangle -rgas ODC teada hüpoteenus $OC = d$ ja kaatet $OD = R + r$. Seepär. võime konstruuda enne $\triangle ODC$ ja see läbi leida $DC = AB$. Pärast konstruime püstküliliku $ABCD$ tema külgedest.

Konstruimine.

- 1) Jagame OC pooleks punktis M .
- 2) Raadiusega MO tõmbame OC ümber ringi.
- 3) Asetame OE peale CB nii, et $EF = CB$, siis saame $OF = R + r$.
- 4) O ümber tõmbame raadiusega $OF = R + r$ ringi, mis ringi M lõikab punktides D ja D_1 jne., nagu ül. 273.



Joon 115

Uurimine. 1) Raadiusega OF tõmmatud ring lõikab ringi M 2-es punktis niikaua, kui on $OF < OC$, ehk teistes tähistustes, niikaua kui on $R+r < d$, s. t. kui ringid O ja C on väljaspool teineteist.

2) On $OF = OC$, s. t. on $R+r = d$, siis riivab raadiusega OF tõmmatud ring ringi M ja me saame 1 sisemise riivaja. Teisiti see olla ei või, sest ringid O ja C riivavad teineteist.

3) On $OF > OC$, s. t. on $R+r > d$, siis ei ole raadiusega OF tõmmatud ringil ringiga M ühtegi ühist punkti enam ja ringidel O ja C ei ole ühist sisemist riivajat. Teisiti see olla ei või, sest ringid O ja C lõikuvad.

Kokkuvõtte:

1) $R+r < d$	2 sisemist ja 2 välimist riivajat
2) $R+r = d$	1 sisemine ja 2 " "
3) $R+r > d > R-r$	0 " " 2 " "
4) $R+r > d = R-r$	0 " " 1 välimine riivaja
5) $d < R-r$	0 " " 0 " "

Ülesanded. 275) Kahele teineteist riivajale ringile on tõmmatud ühine välimine ja ühine sisemine riivaja, mis lõikuvad. Ühise sisemise riivaja lõik lõikepunktist kuni riivaspunktini on 4 cm. Kui pikk on ühine välimine riivaja riivaspunktide vahel?

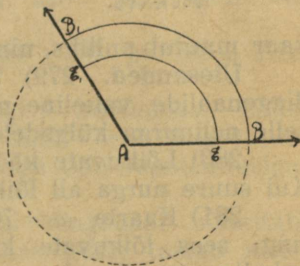
276) Kahele teineteist riivajale ringile on tõmmatud ühised välimised riivajad. Riivaspunkte ühendav kõõl ühes ringis on $a = 3$ cm. ja teises $b = 1,4$ cm. Kui pikk on ühine riivaja?

277) Kahele teineteist riivajale ringile on tõmmatud ühine välimine riivaja. Kummagis ringis on riivaspunkt keskjoone peale projektitud ja projektiivate pikkus on vastavalt $e = 3,8$ cm. ja $f = 6,2$ cm. Kui pikk on ühine riivaja?

278) Konstruuda \triangle , kui antud on alus a , kõrgus h_a ja ühe külje poolitaja m_b . Juhatus: Analüüsi jaoks tuleb \triangle täiendada #-iks, mille alus on a , kõrgus h_a ja diagonaal $2 m_b$. Ülesanne tuleb uurida ja vastav joonis teha.

Nurgad ringis.

106. Nurkade mõõtmine kaarte abil. Kuna kiir, pöördues oma otsapunkti ümber, teeb täie pöörde, kriipsutab kiire iga punkt terve ringi, näit. punkt B, mille peal on sirkli kirjutaja ots. Kuna kiir teeb mõne osa täispöördest, kriipsutab punkt sama suure osa terve ringist—vastava kaare. Terve ring jagatakse ka, nagu täispöõregi, 360-ks jaoks; iga 360-ndik on 1 kraad — kaare kraad. Mitme nurga-kraadi võrra pöörduub kiir, nii mitme kaare-kraadilise kaare kriipsutab punkt.



Joon 116.

Otsapunktile ligemal seisvad punktid kriipsutavad väiksema, lähema ringi, kaugemal seisvad punktid kriipsutavad suurema, pikema ringi. Sama ringi kraadid—360-ndikud—on kõik ühesuurused, ühtivad; ise ringide kraadid ei ole ühesuurused, neid ei saagi teineteise peale paigutada. Ehk küll ise ringide kaari me teineteise peale paigutada ei saa, siiski võib kraadide arv nendes üks ja seesama olla; see arv ütleb ainult, mitu 360-ndikku jagu omast ringist on iga kaar, näit. kaar BB_1 ja kaar EE_1 . Sellele kraadide arvule vastab nurga-kraadide arv, mis peitub pöörde suuruses, mille võrra pöördus kiir AB , mille otsapunkt A on ringide keskpunktiks. Lühemalt:

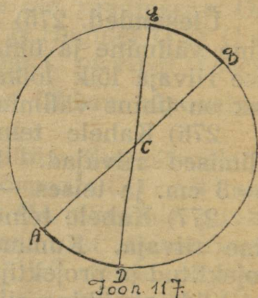
Mitu kaare-kraadi on kaares, nii mitu nurga-kraadi on vastavas kesknurgas, ehk: kesknurka mõõdab temale vastav kaar.

Tegelikult mõõdetaksegi nurki kaarte abil. Nurgamõõtja riist, näit. mall, asendatakse nii, et kaare keskpunkt aseneb nurga tippu, ja siis loetakse haarade vahel oleva kaare kraadide arv malli pealt.

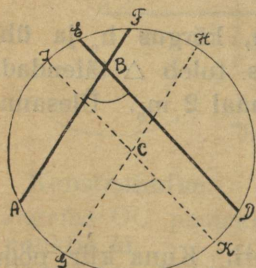
107. (111) Lauset „kesknurka mõõdab temale vastav kaar“ võib väljendada teisel kujul: „**Kesknurka mõõdab nende kaarte poolsumma, mille peale toetab see nurk ja tema tippnurk.**“ (Joon. 117.) Näit. $\angle ACD$ mõõdab

$$\sim AD = \frac{1}{2}(\sim AD + \sim EB).$$

See lause jääb maksvaks ka siis, kui nurga tipp üldse ringi sees on.



Joon. 117.



Joon. 118.

Lause: Nurka, mille tipp on ringi sees, mõõdab nende kaarte poolsumma, mille peale toetab see nurk ja tema tippnurk (Joon. 118).

Tõendus: Läbi keskpunkti C tõmbame $GH \parallel AF$ ja $JK \parallel ED$. Siis on $\angle ABD = \angle GCK$ [38]. \angle -rka GCK , järj. ka $\angle ABD$, mõõdab $\frac{1}{2}(\sim GK + \sim JH) = \frac{1}{2}(\sim GK + \sim JE + \sim EF + \sim FH) = \frac{1}{2}(\sim GK + \sim KD + \sim AG + \sim EF) = \frac{1}{2}(\sim AD + \sim EF)$ [99]. M. t. o. t.

See lause jääb maksma ka siis, kui üks kaar muutub nulliks, nimelt kui tipp B nihkub ringi seest ringi peale.

Ülesanded. 279) Täisnelinurga tipud on ringi peal. Tema diagonaalide vaheline nurk on 115° . Kui suured kaared vastavad selle nelinurga külgedele?

280) Lõikuvate kõõlude vahel on kaared $\alpha = 57^\circ$ ja $\beta = 113^\circ$. Kui suure nurga all lõikuvad need kõõlud?

281) Kaarte $\alpha = 76^\circ,8$ ja $\beta = 144^\circ,7$ otsapunktid on ühendatud ringi sees lõikuvate kõõlude abil. Kui suur on nende kõõlude vaheline nurk?

Lause: Iga kolmnurga sisse on võimalik ring joonestada.

Tõendus: Nurkade poolitajate lõikepunkt on sissejoonestatud ringi keskpunkt ja selle punkti kaugus küljest on raadius. V. 66. Kui selle raadiusega ring tõmmata, siis riivab ta iga külge.

Ülesanded. 305) Võrdkülgse \triangle -rga sissejoonestatud ringi raadius on 2 cm. (a cm). Kui pikk on tema ümberjoonestatud ringi raadius?

306) \triangle -rga küljed on 5 cm., 6 cm., 7 cm. Selle \triangle -rga ümber on joonestatud ring ja tippudest on tõmmatud diameetrid. Diameetrite teised otsapunktid on ühendatud üksteisega. Kui pikad on uue \triangle -rga küljed?

113. (122) Lause. Sissejoonestatud nelinurga vastasnurkade summa on sirge nurk.

Tõendus. \sphericalangle -ka A mõõdab $\frac{1}{2}$ \sphericalangle BCD; \sphericalangle -ka C mõõdab $\frac{1}{2}$ \sphericalangle BAD. Nende summat mõõdab $\frac{1}{2}$ tervest ringist, s. o. 180° . Järj. $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ ehk sirge nurk. M. t. o. t.

Ümberpööratud lause: Kui nelinurga vastasnurkade summa on sirge nurk, siis võib selle nelinurga ümber ring joonestada. (Tõendatakse vastuväiteliselt.)

Järeldus: Ruudu, püstküliku, võrdhaarse trapetsi ja täisnurkse antiparallelogrammi ümber võib ring joonestada.

Ülesanded. 307) Nelinurga ABCD nurkade poolitajad lõikuvad punktides K, L, M, S. Kui suur on KLMS vastasnurkade summa?

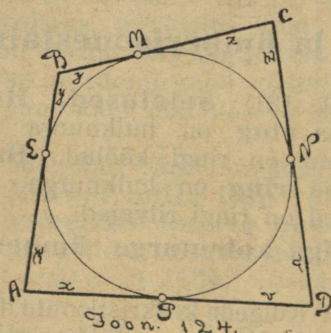
308) Tõendada, et: Nelinurga nurkade poolitajad lõikuvad niisuguse nelinurga tippudes, mille ümber võib ring joonestada.

114. (123) Lause. Ümberjoonestatud nelinurgas on ühe paari vastaskülgede summa niisama suur, kui teise paari vastaskülgede summa.

Tõendus: „Ühest punktist tõmmatud riivajad on võrdsed“ [92]; seepärast:

$$\begin{array}{l}
 AB \left\{ \begin{array}{l} AL = AP \\ BL = BM \end{array} \right. \\
 CD \left\{ \begin{array}{l} CN = CM \\ DN = DP \end{array} \right.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} BC \\ AD \end{array} \right)$$

$$AB + CD = AD + BC.$$



Ehk: Need summad seisavad koos neljast vastavalt võrdsest liidetavast sirglõigust $x + y + z + v$.

Ümberpööratud lause: Kui nelinurgas ühe paari vastaskülgede summa on niisama suur, kui teise paari vastaskülgede summa, siis on võimalik selle nelinurga sisse ring joonestada.

Järeldus: Ruudu, rombi ja antiparallelogrammi sisse on võimalik ring joonestada.

115. (124) Lause. Iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse on võimalik ring joonestada — sest hulknurga keskpunkt on ühekaugel kõigist tema tippudest ja ühekaugel kõigist tema külgedest [83, 3. 4.]. Ümberjoonestatud ringi raadiuseks on tipu kaugus keskpunktist ja sissejoonestatud ringi raadiuseks on apoteem.

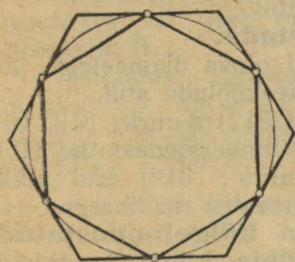
116. (125) Lause. Kui ring jaotada mitmeks — n -võrdsesks jaoks ja

I. jaotuspunktid ühendada kõõlude abil või

II. läbi jaotuspunktide tõmmata riivajad, siis saame

I. korrapärase sissejoonestatud hulknurga,

II. korrapärase ümberjoonestatud hulknurga.

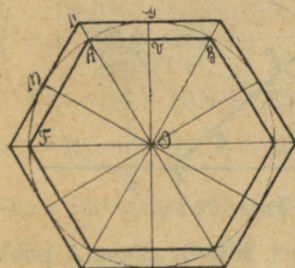


Joon 125.

Tõendus: Pöörame ringi tema keskpunkti ümber $\frac{1}{n}$ -diku täispöörde võrra, siis libiseb ring seennast mööda ja iga jaotuspunkt langeb ühte teise järjekorras oleva jaotuspunktiga, sest kõik nende vahel olevad kaared on isekeskis võrdsed. Järj. ühtivad ka neid ühendavad kõõlud, sest kõõlude otsapunktid langesid ühte, ja nende läbi tõmmatud riivajad, sest jaotuspunktidesse tõmmatud raadiustele on

igaühele tema otsapunkti üksainus ristjoon võimalik.

117. Lause. Kui me ringile tõmbame riivajad, mis paralleelsed on sissejoonestatud korrapärase hulknurga külgedega, siis saame korrapärase ümberjoonestatud hulknurga.



Joon 126.

Tõendus: Kõõluga paralleelne riivaja jagab kõõlule vastava kaare pooleks [100], seepärast:

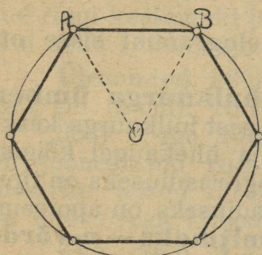
$\sphericalangle FM = \sphericalangle MA = \sphericalangle AG = \sphericalangle GB = \dots$ Järj.

$\sphericalangle MG = \sphericalangle AB = \frac{1}{n}$ tervest ringist, ja

$$\sphericalangle MOG = \frac{360^\circ}{n}.$$

Järeldus: Selle ümberjoonestatud h -rga nurkade poolitajad langevad ühte sissejoonestatud h -rga vastavate nurkade poolitajatega — näit. NO ja AO on kumbki \sphericalangle -rga GOM poolitaja.

118. (126) Ülesanded. (309) Antud ringi sisse korrap. kuusnurk joonestada.



Joon. 127

Analüüs: Olgu AB korrap. 6-nurga kül; siis on \sphericalangle AB $1/6$ -ndik tervest ringist ja \sphericalangle AOB = 60° .

Et OA = OB, siis on

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Järj. \triangle AOB on võrdnurkne, sellega ka võrdkülgne: OA = AB = BO ehk $a_6 = R$ (valem).

S. t. sissejoonestatud korrap. 6-nurga kül on niisama pikk kui raadius.

Konstruktioon: Asetame raadiuse ringi sisse kõõluna — ta mahub just 6 korda.

310) Antud ringi sisse korrapärane kolmnurk joonestada.

Konstruktioon: Jagame ringi kuueks [ül. 309] ja ühendame kõõludega jaotuspunktid, ikka üht vahele jättes.

311) Antud ringi sisse ruut joonestada.

Konstruktioon: Kahe vastastikku risti oleva diameetriga jagame ringi neljaks ja jaotuspunktid ühendame kõõlude abil.

Konstruuda korrapärane sissejoonestatud 312) 8-nurk; 313) 16-nurk; 314) 12-nurk. Konstruuda korrapärane ümberjoonestatud 315) 3-nurk; 316) 12-nurk; 317) 8-nurk; 318) 4-nurk; 319) Kui pikk on korrap. ümberjoonestatud ruudu kül võrreldes raadiusega?

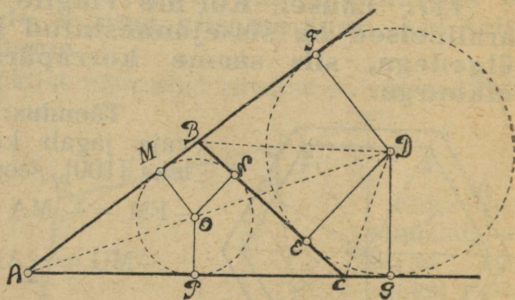
119. (131) Definiitsioon. Kolmnurga külgejoonestatud ringiks nim. ringi, mis riivab kolmnurga ühte külge ja teiste külgedele pikendusi.

Lause. Kolmnurga ühe sisenurga ja tema vastaskülje juures olevate välisturkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, nimelt selle vastaskülje külgejoonestatud ringi keskpunktis.

Tõendus: \sphericalangle -rga FBC ja \sphericalangle -rga GCB poolitajad lõikuvad punktis D, mis on võrdkaugel BF-st, BC-st ja CG-st: DF = DE = DG.

Sellega on D võrdkaugel AF-st ja AG-st; järj. läheb \sphericalangle -ga A poolitaja D-st läbi. (63, III.)

Kui D-st raadiusega DG = DE = DF tõmmata ring, siis riivab see ring BF-i, BC-d ja CG-d. M. t. o. t.



Joon. 128.

120. (132) Lause. Kui kolmnurga ABC [joon. 128] sisse on joonestatud ring O ja tema külje BC külge on joonestatud ring D, siis:

1) tipust A väljaminev sissejoonestatud ringi riivaja on kolmnurga poolperimeetrist vastaskülje a võrra vähem, ja

2) külgejoonestatud ringi riivaja võrdub poolperimeetriga;

3) tipust B väljaminev külgejoonestatud ringi riivaja võrdub tipust C väljamineva sissejoonestatud ringi riivajaga;

4) riivaspunktide kaugus teineteisest selle külje peal, mille külge ring D joonestatud ei ole, võrdub küljega BC, mille külge ring D on joonestatud;

5) riivaspunktide kaugus teineteisest selle külje peal, mille külge ring D on joonestatud, võrdub kahe teise külje vahega;

6) nurk ADC, mille all paistab külgejoonestatud ringi keskpunktist kolmnurga külge AC, mille külge ring D joonestatud ei ole, on pool nii suur, kui selle külje vastasnurk B.

Tõendus: Tähistame ettetulevad sirglõigud järgmiselt

$$\begin{array}{lll} BC = a & AM = AP = x & AG = AF = x' \\ AC = b & BM = BN = y & BE = BF = y' \\ AB = c & CN = CP = z & CE = CG = z' \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{array} \right.$$

$a + b + c = 2p$. Siis on joon. näha, et: $2x + 2y + 2z = 2p$;

$$x + y + z = p.$$

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{array}{l} x + y + z = p \\ y + z = a \\ x = p - a. \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + z = b \\ y = p - b. \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + y = c \\ z = p - c. \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) \begin{array}{l} BE + CE = y' + z' = a \\ AG - CG = x' - z' = b \\ AF - BF = x' - y' = c. \end{array} \end{array}$$

$$2x' = 2p; \quad x' = p.$$

$$\begin{array}{lll} 3) \begin{array}{l} x' - y' = c [x' = p] \\ p - y' = c \\ y' = p - c \\ y' = (x + y + z) - (x + y) \\ y' = z \end{array} & \begin{array}{l} x' - z' = b \\ p - z' = b \\ z' = p - b \\ z' = (x + y + z) - (z + x) \\ z' = y \end{array} & \begin{array}{l} 4) \begin{array}{l} PG = AG - AP \\ PG = x' - x \\ PG = p - (p - a) \\ PG = a = BC = MF \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$BE = CN.$$

$$BF = CP$$

$$CE = BN$$

$$CG = BM$$

$$5) NE = BC - (BN + CE)$$

$$NE = BC - 2BN [CE = BN]$$

$$NE = a - 2(p - b) = a - 2p + 2b$$

$$NE = a - (a + b + c) + 2b = b - c.$$

$$6) \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCG - \sphericalangle DAG$$

$$\sphericalangle ADC = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle A}{2} - \frac{\sphericalangle A}{2}$$

$$\sphericalangle ADC = \frac{\sphericalangle B}{2}$$

Ülesanne 320). Kolmnurga küljed on 5 cm., 6 cm., 7 cm. pikad. Selle \triangle -rga sisse ja külge on joonestatud ringid. Leida riivaspunktide kohad külgedele ja nende pikenduste peal.

Shu 2

ARH A-5986

TÜ R A M A T J K O G U
10300015760715

A *

5986

56083A