Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Rainer Bõkov

Lõikajate meetod kordse lahendi korral

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Evely Kirsiaed

Tartu 2024

LÕIKAJATE MEETOD KORDSE LAHENDI KORRAL

Bakalaureusetöö

Rainer Bõkov

Lühikokkuvõte

Sarnaselt Newtoni meetodiga, koondub lõikajate meetod kordse lahendi korral aeglaselt. Koonduvuskiiruse tõstmiseks asendatakse sel puhul Newtoni meetod Newton-Schröderi meetodiga. Käesolevas töös uuritakse kahte lõikajate meetodi modifikatsiooni, mille korral säilib lõikajate meetodi koonduvusjärk. Numbrilised katsed näitlikustavad teoreetilisi tulemusi.

CERCS teaduseriala: P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine (automaatjuhtimisteooria).

Märksõnad: Lõikajate meetod, kordne lahend, koonduvuskiirus.

A SECANT METHOD IN CASE OF MULTIPLE ROOTS

Bachelor thesis

Rainer Bõkov

Abstract

Similar to the Newton method, the secant method converges slowly in the case of multiple roots. In order to increase the convergence rate, the Newton-Schroeder method is used instead. This work investigates two modifications of the secant method that maintain the convergence order of the secant method. Numerical experiments illustrate the theoretical results.

CERCS research specialisation: P170 Computer science, numerical analysis, systems, control.

Key Words: Secant method, multiple root, order of convergence.

Sisukord

Sissejuhatus

Mittelineaarsete võrrandite lahendamisel ja funktsiooni nullkohtade leidmisel kasutatakse enamasti iteratiivseid meetodeid. Üks tuntumaid ja enim kasutatavaid on Newtoni meetod. Teadupärast on Newtoni meetod suhteliselt üldistel eeldustel ja ühekordse lahendi korral ruutkoonduvusega. Kordse lahendi puhul koondub Newtoni meetod aga geomeetrilise progressiooni kiirusega. Kui lahendi kordsus on teada või esimeste iteratsioonisammude käigus hinnatud, saab olukorra parandamiseks kasutada Newton-Schröderi meetodit. Küllalt üldistel eeldustel on Newton-Schröderi meetod ruutkoonduvusega, nagu Newtoni meetod.

Lõikajate meetod on ühekordse lahendi korral astmelise koondumisega, kuid koonduvuse järk on võrreldes Newtoni meetodiga madalam. Samas on lõikajate meetodil Newtoni meetodi ees selge eelis – lõikajate meetod kasutab vaid funktsiooni väärtusi, Newtoni meetodi rakendamiseks on vaja teada ka tuletise väärtusi. Kordse lahendi korral on lõikajate meetod sarnaselt Newtoni meetodiga lineaarse koondumisega, st sammul tehtav viga kahaneb geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Antud bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida, kas lõikajate meetodi jaoks leidub sarnaseid modifikatsioone nagu Newton-Schröderi meetod, mis säilitaks kordse lahendi korral algse meetodi koonduvusjärgu.

Töö esimeses osas defineeritakse vajalikud mõisted iteratsioonimeetodite koonduvuse uurimiseks. Teises peatükis on toodud Newtoni ja Newton-Schröderi meetodi kirjeldused ning koonduvuskiiruse kohta käivad tulemused koos tõestustega. Kolmandas osas esitatakse lõikajate meetodi kirjeldus, tuletatakse koonduvuskiiruse hinnangud nii ühekordse kui ka kordse lahendi korral. Neljandas peatükis uuritakse kahte lõikajate meetodi modifikatsiooni, kus lõikajate meetodit rakendadakse algse funktsiooni asemel selle teisendatud versioonile. Viimases osas on ära toodud numbrilised katsed teoreetilises osas esitatud tulemuste näitlikustamiseks.

Antud bakalaureusetöö on referatiivne ning ei sisalda uusi matemaatilisi tulemusi.

1 Iteratiivsete meetodite koondumisest

Mittelineaarsete võrrandite $f(x) = 0$ korral kasutatakse lahendi ligikaudseks leidmiseks iteratiivseid meetodeid. Iteratiivse meetodi korral valitakse üks või mitu alglähendit ning leitakse järjestikuste lähendite jada $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Olgu võrrandi täpseks lahendiks x^*. Meetodi koonduvuse uurimisel analüüsitakse iteratsioonisammul tekkinud vigade $x_n - x^*$, $n = 0, 1, \ldots$, jada.

Definitsioon 1. Öeldakse, et iteratsioonimeetod koondub, kui

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0.$$

Definitsioon 2. Öeldakse, et iteratsioonimeetod on p-järku koondumisega, kui leidub konstant $\lambda \geq 0$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lambda.$$

Konstanti λ nimetatakse asümptootilise vea konstandiks.

Kui $p = 1$, siis leiab koondumine aset vaid juhul $\lambda < 1$ ning räägitakse lineaarsest koondumisest ehk koondumisest geomeetrilise progressiooni kiirusega. On selge, et sellisel juhul leidub konstant $q \in (0, 1)$ nii, et alates mingist kohast $N \in \mathbb{N}$, kui $n > N$, siis

$$|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|.$$

Astmeline koondumine ($p > 1$) on kiirem igast lineaarsest koondumisest.

Numbriliste meetodite kursuselt on teada (vt [4]), et üldistel eeldustel ja ühekordse lahendi korral on Newtoni meetod ruutkoonduvusega ($p = 2$) ning lõikajate meetod sellest aeglasem, kuid siiski astmelise koonduvusega ($p = 1.618$).

2 Newtoni meetod

Teises peatükis anname lühiülevaate Newtoni meetodist, koonduvuskiirusega seotud tulemustest ning meetodi modifikatsioonist, mis võimaldab kordse lahendi korral koonduvuskiirust suurendada.

2.1 Meetodi kirjeldus

Võrrandi

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

lahendamiseks Newtoni meetodiga, valitakse üks alglahend x_0 ning järgnevad lähendid leitakse valemiga

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots. \tag{2}$$

Newtoni meetodi rakendamiseks on tarvilik, et funktsioon f oleks diferentseeruv ja iga n korral $f'(x_n) \neq 0$.

Geomeetriliselt tähendab Newtoni meetod seda, et kohal x_n leitakse funktsioonile f puutuja

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

ning järgmine lähend x_{n+1} on selle puutuja lõikepunkt x-teljega.

2.2 Meetodi koonduvuskiirus ühekordse lahendi korral

Iteratsioonimeetodite korral, milleks on ka Newtoni meetod, tekib lähenditest lõpmatu jada $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Koondugu see jada võrrandi (1) lahendiks x^*.

Definitsioon 3. Öeldakse, et võrrandi $f(x) = 0$ lahend x^* on m-kordne, kui $f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

Seega ühekordse lahendi x^* korral $f(x^*) = 0$ ja $f'(x^*) \neq 0$.

Lause 1. Kui funktsioon f on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis ühekordse lahendi korral on Newtoni meetod ruutkoonduvusega.

Tõestus. Lahutame võrduse (5.2) mõlemast poolest lahendi x^* ning kasutame lugejas Taylori arendist punktis x^*, saame

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - x^* - \frac{f(x^*) + f'(x_n)(x_n - x^*) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_n - x^*)^2}{f'(x_n)} \\ &= -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - x^*)^2, \quad \xi_n \in (x_n, x^*). \end{aligned}$$

Kuna f' ja f'' on pidevad, $f'(x^*) \neq 0$, n kasvades $x_n \to x^*$ ja $\xi_n \to x^*$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|.$$

Seega Newtoni meetodi korral on asümptootilise vea konstandiks $\lambda = \left| \dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|$.

□

Lause 1 eeldusi saab mõnevõrra leevendada, kehtib järgmine lause.

Lause 2. Kui funktsioon f on pidevalt diferentseeruv ja f' rahuldab Lipschitzi tingimust

$$\exists L > 0\colon \left| f'(x) - f'(y) \right| \leq L \left| x - y \right| \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

siis ühekordse lahendi korral on Newtoni meetod ruutkoonduvusega.

Tõestus on leitav aine Numbrilised meetodid konspektist (vt [4], lk 16).

Lause 2 eeldused ei pea kehtima kogu reaalteljel, piisab, kui nad kehtivad lahendi mingis ümbruses. Ka sel juhul on meetod ruutkoonduvusega. Lause 2 eeldustel ei ole aga võimalik anda asümptootilise vea konstandile ülaltoodud kuju, selleks peab lahendi ümbruses eeldama kaks korda pidevalt diferentseeruvust.

2.3 Meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

Osutub, et kordse lahendi korral koondub Newtoni meetod suhteliselt aeglaselt. Eeldame, et funktsioon f ja alglähend on sellised, et meetod koondub.

Lause 3. Kui f on m korda pidevalt diferentseeruv, siis m-kordse lahendi korral koondub Newtoni meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille teguriks on $1 - \frac{1}{m}$.

Tõestus. Kasutame Taylori arendisi punktis x^*,

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x^*)(x_n - x^*)^{m-1} \\
&+ \frac{1}{m!} f^m(\xi_n)(x_n - x^*)^m, \quad \xi_n \in (x_n, x^*), \\
f'(x_n) &= f'(x^*) + f''(x^*)(x_n - x^*) + \ldots + \frac{1}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x^*)(x_n - x^*)^{m-2} \\
&+ \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\eta_n)(x_n - x^*)^{m-1}, \quad \eta_n \in (x_n, x^*),
\end{aligned}$$

ning arvestame, et x^* on m-kordne lahend, seega

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi_n)(x_n - x^*)^m, \quad \xi_n \in (x_n, x^*), \\
f'(x_n) &= \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\eta_n)(x_n - x^*)^{m-1}, \quad \eta_n \in (x_n, x^*).
\end{aligned}$$

Newtoni meetodi vea sammul $n+1$ saame esitada kujul

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - \frac{\frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi_n)(x_n - x^*)^m}{\frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\eta_n)(x_n - x^*)^{m-1}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\eta_n)}\right)(x_n - x^*).
\end{aligned}$$

Eelduse kohaselt meetod koondub, seega n kasvades leiavad aset koondumised $x_n \to x^*$, $\xi_n \to x^*$ ja $\eta_n \to x^*$. Funktsiooni $f^{(m)}$ pidevuse tõttu $f^{(m)}(\xi_n) \to f^{(m)}(x^*) \neq 0$

ja $f^{(m)}(\eta_n) \to f^{(m)}(x^*) \neq 0$ ning

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\eta_n)}\right) = 1 - \frac{1}{m}.$$

Niisiis koondub Newtoni meetod kordse lahendi korral geomeetrilise progressiooni kiirusega, asümptootilise vea konstandiks on $\lambda = 1 - \dfrac{1}{m}$. □

2.4 Newton-Schröderi meetod

Olukorra parandamiseks kasutatakse kordse lahendi korral Newton-Schröderi meetodit, kus valitakse alglähend x_0 ning järgnevad lähendid leitakse valemiga

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Siin on m lahendi kordsus. Kuna lahendi kordsus ei ole teada, siis tuleks seda esmalt hinnata leides esimesed lähendid Newtoni meetodiga. Newtoni meetodi korral

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \to 1 - \frac{1}{m}$$

(vt [4], lk 18). Seega pärast mingi koguse sammude tegemist on võimalik Newtoni meetodilt üle minna Newton-Schröderi meetodile.

Lause 4. Kui f on $m+1$ korda pidevalt diferentseeruv, siis m-kordse lahendi korral on Newton-Schröderi meetod ruutkoonduvusega.

Tõestus. Kui lahend x^* on m-kordne ehk $f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^{(m)}(x^*) \neq 0$, siis Taylori arendisi kasutades saame

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}(x_n - x^*)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi_n)}{(m+1)!}(x_n - x^*)^{m+1}, \quad \xi_n \in (x_n, x^*),$$
$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!}(x_n - x^*)^{m-1} + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m!}(x_n - x^*)^m, \quad \eta_n \in (x_n, x^*).$$

Newton-Schröderi meetodi viga sammul $n+1$ esitub kujul

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - x^* - m\,\frac{\frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(\xi_n)}{(m+1)!}(x_n - x^*)}{\frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!} + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m!}(x_n - x^*)}\,(x_n - x^*) \\
&= x_n - x^* - \frac{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\xi_n)}{m+1}(x_n - x^*)}{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m}(x_n - x^*)}\,(x_n - x^*) \\
&= \left(1 - \frac{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\xi_n)}{m+1}(x_n - x^*)}{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m}(x_n - x^*)}\right)(x_n - x^*) \\
&= \frac{\frac{1}{m}f^{(m+1)}(\eta_n) - \frac{1}{m+1}f^{(m+1)}(\xi_n)}{f^{(m)}(x^*) + \frac{1}{m}f^{(m+1)}(\eta_n)(x_n - x^*)}\,(x_n - x^*)^2 \\
&= \frac{\frac{1}{m(m+1)}f^{(m+1)}(\eta_n) + \frac{1}{m+1}\big(f^{(m+1)}(\eta_n) - f^{(m+1)}(\xi_n)\big)}{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m}(x_n - x^*)}(x_n - x^*)^2.
\end{aligned}$$

Peame siingi eeldama, et meetod koondub, siis piirile minnes $x_n \to x^*$, $\xi_n \to x^*$ ja $\eta_n \to x^*$. Funktsiooni $f^{(m+1)}$ pidevuse tõttu $f^{(m+1)}(\xi_n) \to f^{(m+1)}(x^*)$ ning $f^{(m+1)}(\eta_n) \to f^{(m+1)}(x^*)$ ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{m(m+1)}f^{(m+1)}(\eta_n) + \frac{1}{m+1}\big(f^{(m+1)}(\eta_n) - f^{(m+1)}(\xi_n)\big)}{f^{(m)}(x^*) + \frac{f^{(m+1)}(\eta_n)}{m}(x_n - x^*)} \right| \\
&= \left| \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{m(m+1)\cdot f^{(m)}(x^*)} \right|.
\end{aligned}$$

Oleme näidanud, et Newton-Schröderi meetod on ruutkoonduvusega ning selle asümptootilise vea konstant on $\lambda = \left| \dfrac{f^{(m+1)}(x^*)}{m(m+1)\cdot f^{(m)}(x^*)} \right|$. □

3 Lõikajate meetod

Selles peatükis anname ülevaate lõikajate meetodist funktsiooni nullkohtade leidmisel, esitame detailse tõestuse koonduvuskiiruse kohta ühekordse ja kordse nullkoha korral.

3.1 Meetodi kirjeldus

Vaatleme võrrandit $f(x) = 0$. Lõikajate meetod on sarnane Newtoni meetodiga, kus Newtoni meetodi eeskirjas $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ asendatakse tuletis $f'(x_n)$ diferentssuhtega

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Lõikajate meetodi eeskiri esitub kujul

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \\ &= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Meetodi rakendamiseks valitakse kaks alglähendit x_0, x_1, $x_0 \neq x_1$, järgnevad lähendid leitakse valemi (3) põhjal.

Geomeetriliselt tähendab lõikajate meetod, et läbi punktide $\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big)$ ja $\big(x_n, f(x_n)\big)$ tõmmatakse sirge ehk lõikaja ning selle sirge ja x-telje lõikepunkt on järgmine lähend x_{n+1}.

3.2 Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Koonduvuskiiruse uurimiseks eeldame, et meetod koondub vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega. Selle peatüki tulemused ja nende tõestused tuginevad artiklile [1].

Lause 5. Olgu funktsioon f kaks korda pidevalt diferentseeruv, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, see tähendab, x^* on ühekordne lahend, eeldame veel, et $f''(x^*) \neq 0$. Olgu lähendid x_n leitud valemit (3) rakendades ning $x_n \to x^*$ vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega. Siis lõikajate meetod koondub hinnanguga

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathrm{const}|x_n - x^*|^{1,618}.$$

Tõestus. Tähistame $\varepsilon_n = x_n - x^*$. Lähtudes valemist (3) kirjutame välja vea sammul $n + 1$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} = \frac{x_n - x^*}{f[x_{n-1}, x_n]}\left(f[x_{n-1}, x_n] - \frac{f(x_n)}{x_n - x^*}\right) \\
&= \frac{x_n - x^*}{f[x_{n-1}, x_n]}\left(f[x_{n-1}, x_n] - f[x^*, x_n]\right) \\
&= \frac{(x_n - x^*)(x_{n-1} - x^*)}{f[x_{n-1}, x_n]} \cdot \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_n, x^*]}{x_{n-1} - x^*} = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \frac{f[x_{n-1}, x_n, x^*]}{f[x_{n-1}, x_n]}.
\end{aligned}$$

Siin kasutasime esimest järku diferentssuhte

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad x_i \neq x_j,$$

ning teist järku diferentssuhte tähist

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}, \quad x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_i.$$

Numbriliste meetodite kursusest on teada (vt [4], lk 55), et kui $f \in C^n[a, b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Erijuhul $n = 1$ on tegemist Lagrange'i keskväärtusteoreemiga

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi).$$

Kasutades ülaltoodud diferentssuhte esitusi, oleme näidanud, et lõikajate meetodis

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)},$$

kus $\xi_n \in \big(\min\{x_{n-1}, x_n, x^*\}, \max\{x_{n-1}, x_n, x^*\}\big)$, $\eta_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Kuna $x_n \to x^*$, f' ja f'' on pidevad, $f'(x^*) \neq 0$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)},$$

st $\varepsilon_{n+1} \asymp a\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}$, kus $a = \dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$. (Siin märk $\asymp$ tähendab asümptootilist võrdust, st $y_n \asymp z_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{z_n} = 1$.) Eesmärgiks on leida võrdusest $\varepsilon_{n+1} \asymp a\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}$ koonduvusjärk p nii, et $|\varepsilon_{n+1}| \asymp \lambda|\varepsilon_n|^p$, kus λ on asümptootilise vea konstant. Kuna ka $|\varepsilon_n| \asymp \lambda|\varepsilon_{n-1}|^p$, siis

$$|\varepsilon_{n+1}| \asymp \lambda|\varepsilon_n|^p \asymp \lambda\big(\lambda|\varepsilon_{n-1}|^p\big)^p = \lambda^{1+p}|\varepsilon_{n-1}|^{p^2}, \tag{4}$$

teiselt poolt

$$|\varepsilon_{n+1}| \asymp |a||\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}| \asymp |a|\big(\lambda|\varepsilon_{n-1}|^p\big)|\varepsilon_{n-1}| = \lambda|a||\varepsilon_{n-1}|^{p+1}. \tag{5}$$

Võrdusi (4) ja (5) kombineerides saame $\lambda^p|\varepsilon_{n-1}|^{p^2-p-1} \asymp |a|$, millest $p^2 - p - 1 = 0$ ning $p = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Koondumine $\varepsilon_n \to 0$ leiab aset vaid juhul $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Lisaks on $\lambda = |a|^{\frac{1}{p}}$.

Oleme näidanud, et lõikajate meetod koondub ühekordse lahendi korral hinnanguga

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathrm{const}|x_n - x^*|^{1{,}618},$$

kusjuures asümptootilise vea konstant

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^{1{,}618}} = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|^{0{,}618}.$$

$\square$

Lause 6. Kui f on $m \geq 2$ korda pidevalt diferentseeruv, siis m-kordse lahendi korral koondub lõikajate meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille asümptootilise vea konstant on $\lambda \in (0, 1)$, mis rahuldab tingimust $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$.

Tõestus. Olgu x^* m-kordne lahend, siis $f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^{(m)}(x^*) \neq 0$ ning Taylori valemit kasutades

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(x^*)\varepsilon_n^m + o\big(|\varepsilon_n|^m\big), \\ f(x_{n-1}) &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(x^*)\varepsilon_{n-1}^m + o\big(|\varepsilon_{n-1}|^m\big). \end{aligned}$$

Esitusest (3) saame

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - x^* = \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{\varepsilon_{n-1}\frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)\varepsilon_n^m + \varepsilon_{n-1}o\big(|\varepsilon_n|^m\big) - \varepsilon_n\frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)\varepsilon_{n-1}^m - \varepsilon_n o\big(|\varepsilon_{n-1}|^m\big)}{\frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)(\varepsilon_n^m - \varepsilon_{n-1}^m) + o\big(|\varepsilon_n|^m\big) - o\big(|\varepsilon_{n-1}|^m\big)} \\ &= \frac{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n^m - \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}^m + o\big(|\varepsilon_{n-1}|^{m+1}\big)}{\varepsilon_n^m - \varepsilon_{n-1}^m + o\big(|\varepsilon_{n-1}|^m\big)}. \end{aligned}$$

Kasutasime siin eeldust, et meetod koondub vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega, siis $|\varepsilon_n| \leq \mathrm{const}|\varepsilon_{n-1}|$ ning $\alpha = o\big(|\varepsilon_n|^m\big)$ korral $\alpha = o\big(|\varepsilon_{n-1}|^m\big)$.

Kahekordse lahendi korral $m = 2$ ning

$$\varepsilon_{n+1} \asymp \frac{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n^2 - \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}^2}{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_{n-1}^2} = \frac{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}.$$

Kirjutame viimase võrduse pöördväärtuse abil

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \asymp \frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{\varepsilon_{n-1}},$$

kust näeme, et $\dfrac{1}{\varepsilon_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, on Fibonacci jada, mille kohta on teada, et

$\frac{1}{\varepsilon_n} \asymp \varphi \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}$, kus $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (vt Märkus 1). Seega kahekordse lahendi korral koondub lõikajate meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille asümptootilise vea konstant on

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - x^*|}{|x_{n-1} - x^*|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618.$$

Ka $m > 2$ korral saame eeldada vaid lineaarset koondumist

$$\varepsilon_{n+1} \asymp \lambda \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

kusjuures konstant λ on määratav seosest

$$\varepsilon_{n+1} \asymp \frac{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n^m - \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}^m}{\varepsilon_n^m - \varepsilon_{n-1}^m}. \tag{7}$$

Asendades võrduse (6) võrdusesse (7) saame

$$\lambda^2 \varepsilon_{n-1} \asymp \frac{\lambda^m \varepsilon_{n-1}^{m+1} - \lambda \varepsilon_{n-1}^{m+1}}{\lambda^m \varepsilon_{n-1}^m - \varepsilon_{n-1}^m}$$

ehk $\lambda^2 = \frac{\lambda^m - \lambda}{\lambda^m - 1}$, millest

$$\lambda^2(\lambda^m - 1) - (\lambda^m - \lambda) = 0,$$
$$\lambda(\lambda^{m+1} - \lambda - \lambda^{m-1} + 1) = 0,$$
$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1) = 0$$

ning λ on määratud võrdusega

$$\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

□

Võrrandi $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$ saab $m > 2$ korral lahendada kasutades mingit iteratsioonimeetodit, näiteks Newtoni meetodit.

Märkus 1. Vaatleme Fibonacci jada (F_n), kus $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ning näitame, et $F_n \asymp \varphi F_{n-1}$. Tähistame $x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Seosest $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ saame, et $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}$, millest $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ ehk $x^2 - x - 1 = 0$. Seega $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ning et $\dfrac{F_n}{F_{n-1}} > 1$, siis $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ ja $F_n \asymp \varphi F_{n-1}$.

Järgnevas tabelis on välja toodud Newtoni ja lõikajate meetodi asümptootilise vea konstandid koonduvuskiiruse hinnangus kordsete lahendite puhul (tabel 1). Kordse lahendi korral on mõlemad meetodid lineaarse koondumisega, kuid Newtoni meetod on pisut kiirem.

Tabel 1: Asümptootilise vea konstandid lahendi erinevate kordsuste korral.

Kordsus (m)	Newtoni meetod (λ)	Lõikajate meetod (λ)
2	0,5	0,618
3	0,667	0,755
4	0,75	0,819
5	0,8	0,857
...	...	...
m	$1 - \dfrac{1}{m}$	$0 < \lambda < 1$ nii, et $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$

4 Lõikajate meetodi modifikatsioon kordse lahendi korral

Neljandas peatükis uurime kirjanduses välja pakutud lõikajate meetodi modifikatsioone kordse nullkoha leidmisel. Peatükk põhineb peamiselt allikatel [2, 3].

On teada, et kui x^* on funktsiooni f kordne nullkoht, siis funktsioonil $F = \dfrac{f}{f'}$ on punktis x^* ühekordne nullkoht (vt [5], p 102). Seega võib lõikajate meetodit (3) rakendada funktsiooni f asemel funktsioonile F. Saame järgmise meetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{LF}$$

kus $F(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Selle meetodi puuduseks on fakt, et igal sammul on vaja arvutada lisaks funktsiooni väärtusele ka tuletise väärtus.

Lisaks vaatleme meetodit, kus tuletis $f'(x)$ on asendatud diferentssuhtega

$$f\big[x - f(x), x\big] = \frac{f\big(x - f(x)\big) - f(x)}{\big(x - f(x)\big) - x} = \frac{f\big(x - f(x)\big) - f(x)}{-f(x)}.$$

See tähendab, et funktsiooni F asemel rakendatakse lõikajate meetodit (3) funktsioonile

$$G(x) = \frac{f(x)}{f\big[x - f(x), x\big]} = \frac{-f^2(x)}{f\big(x - f(x)\big) - f(x)}$$

ning saame meetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{G(x_n) - G(x_{n-1})} G(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{LG}$$

Näitame järgnevas, et mõlema modifikatsiooni korral on meetodi koonduvusjärk $p = 1{,}618$, st säilib lõikajate meetodi koonduvuskiirus.

Olgu x^* funktsiooni f m-kordne nullkoht, see tähendab, et f esitub kujul

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x), \quad g(x^*) \neq 0.$$

Nüüd

$$F(x^*) = \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{(x - x^*)^m g(x)}{m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x)}\bigg|_{x=x^*}$$
$$= \frac{(x - x^*) g(x)}{m g(x) + (x - x^*) g'(x)}\bigg|_{x=x^*} = 0,$$

see tähendab, et x^* on F nullkoht. Lisaks

$$F'(x^*) = \frac{\big(g(x) + (x - x^*) g'(x)\big)\big(m g(x) + (x - x^*) g'(x)\big)}{\big(m g(x) + (x - x^*) g'(x)\big)^2}$$
$$- \frac{(x - x^*) g(x)\big(m g'(x) + g'(x) + (x - x^*) g''(x)\big)}{\big(m g(x) + (x - x^*) g'(x)\big)^2}\bigg|_{x=x^*}$$
$$= \frac{m g^2(x) + (x - x^*)^2\Big(\big(g'(x)\big)^2 - g(x) g''(x)\Big)}{\big(m g(x) + (x - x^*) g'(x)\big)^2}\Bigg|_{x=x^*} = \frac{1}{m} \neq 0,$$

mistõttu on x^* funktsiooni F ühekordne nullkoht. Seega funktsioonile F rakendatud lõikajate meetodi (LF) korral on tegemist astmelise koonduvusega, hinnanguga

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathrm{const} |x_n - x^*|^{1{,}618}$$

ning Lause 5 tõestuse põhjal

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^{1{,}618}} = \left| \frac{F''(x^*)}{2F'(x^*)} \right|^{0{,}618}.$$

Leiame ka $F''(x^*)$, selleks diferentseerime ülaltoodud $F'(x)$ avaldist ning lihtsustame

$$F''(x^*) = \frac{2m\,g(x^*)\,g'(x^*)\,m^2\big(g(x^*)\big)^2 - m\big(g(x^*)\big)^2\,2m\,g(x^*)\big(m\,g'(x^*)+g'(x^*)\big)}{m^4\,\big(g(x^*)\big)^4}$$
$$= -\frac{2\,g'(x^*)}{m^2\,g(x^*)}.$$

Seega saame meetodi (LF) korral esitada asümptootilise vea konstandi kujul

$$\lambda = \left|\frac{F''(x^*)}{2F'(x^*)}\right|^{0{,}618} = \left|\frac{g'(x^*)}{m\,g(x^*)}\right|^{0{,}618},$$

kus $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x-x^*)^m}$.

Funktsiooni G korral arendame $f\big(x-f(x)\big)$ Taylori ritta

$$f(x-f(x)) = f(x) - f'(x)f(x) + \frac{1}{2}f''(x)f^2(x) - \frac{1}{6}f'''(x)f^3(x) + \dots$$
$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^n(x).$$

Siis

$$G(x) = \frac{-f^2(x)}{f\big(x-f(x)\big) - f(x)}$$
$$= \frac{-f^2(x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^n(x)}$$
$$= \frac{-f(x)}{-f'(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-1}(x)}$$
$$= \frac{-\frac{f(x)}{f'(x)}}{-1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x) \frac{f(x)}{f'(x)}}$$
$$= \frac{-F(x)}{-1 + F(x)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x)},$$

ning kuna $F(x^*) = 0$, siis $G(x^*) = 0$. Lisaks

$$\begin{aligned}
G'(x^*) = &\frac{-F'(x) \cdot \left(-1 + F(x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x)\right)}{\left(-1 + F(x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x)\right)^2} \\
&+ \left.\frac{F(x) \cdot \left(F(x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x)\right)'}{\left(-1 + F(x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x) f^{n-2}(x)\right)^2}\right|_{x=x^*} \\
&= F'(x^*) = \frac{1}{m} \neq 0.
\end{aligned}$$

Seega on x^* funktsiooni G ühekordne juur ning meetod (LG) astmelise koonduvusega, mille järk on $p = 1{,}618$ ning asümptootilise vea konstant

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^{1{,}618}} = \left|\frac{G''(x^*)}{2G'(x^*)}\right|^{0{,}618}.$$

Ülaltoodud G' avaldist diferentseerides on võimalik avaldada (vt [2])

$$G''(x^*) = F''(x^*) + \left(F'(x^*)\right)^2 f''(x^*) = -\frac{2}{m^2} \frac{g'(x^*)}{g(x^*)} + \frac{1}{m^2} f''(x^*),$$

seega

$$\lambda = \left|-\frac{1}{m} \frac{g'(x^*)}{g(x^*)} + \frac{1}{2m} f''(x^*)\right|^{0{,}618},$$

kus $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x - x^*)^m}$.

Paneme tähele, et kui $f''(x^*) = 0$, st tegemist on vähemalt kolmekordse nullkohaga, siis on meetodite (LF) ja (LG) asümptootilise vea konstandid võrdsed.

5 Numbrilised katsed

Viimases peatükis ilmestame teoreetilisi tulemusi numbriliste katsetega. Testfunktsioonidena kasutame funktsioone

$$f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4) \tag{8}$$

ja

$$f(x) = x(x-2)^5. \tag{9}$$

Esimesel juhul leiame erinevate meetoditega selle 2-kordse nullkoha $x^* = 1$, teisel juhul 5-kordse nullkoha $x^* = 2$. Nullkohtade leidmisel kasutame Newtoni, Newton-Schröderi, lõikajate ja modifitseeritud lõikajate meetodeid (LF) ning (LG). Iga meetodi korral näitame ära praktiliste arvutuste ja teoreetiliste koonduvushinnangute kooskõla. Kõigi iteratsiooniprotsesside korral on lõpetamise tingimuseks $|x_n - x^*| < 10^{-8}$. Praktikas sellist lõpetamise tingimust kasutada ei saa, kuid käesolevas teoreetilises uurimuses, kus x^* on teada, on sel moel võimalik kõiki meetodeid ühtsetel alustel võrrelda. Allolevad arvutused on tehtud Pythonis koostatud programmidega (Lisa 1 ja 2).

5.1 Näide 2-kordse nullkoha leidmisest

Kordse lahendi korral on Newtoni meetod lineaarse koondumisega, mille asümptootilise vea konstant 2-kordse lahendi korral on $\lambda = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (Tabel 1). Funktsiooni (8) nullkoha leidmine Newtoni meetodiga on toodud Tabelis 2. Saadud koonduvushinnang on kooskõlas teoreetilise tulemusega, igal sammul viga väheneb ligikaudu kaks korda.

Tabel 2: Newtoni meetod funktsiooni $f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4)$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\frac{\lvert x_n - x^* \rvert}{\lvert x_{n-1} - x^* \rvert}$
0	0.6	0.08152407	-0.4	
1	0.92696953	0.00475421	-0.07303047	0.18257618
2	0.96572225	0.00111334	-0.03427775	0.46936231
3	0.98333600	0.00027051	-0.01666400	0.48614611
4	0.99177854	0.00006673	-0.00822146	0.49336698
5	0.99591599	0.00001657	-0.00408401	0.49675018
6	0.99796456	0.00000413	-0.00203544	0.49839102
...	...	...	...	...
24	0.99999999	0.00000000	-0.00000001	0.49999997

Kui eelnevalt ära hinnata lahendi kordsus (kasutatud lihtsa testfunktsiooni korral on see teada), saab kasutada Newton-Schröderi meetodit $m = 2$ korral. Ruutkoonduvusega Newton-Schröderi meetod leiab sama funktsiooni piisavalt täpse lähendi kordades kiiremini (Tabel 3). Newton-Schröderi meetodi asümptootilise vea konstant koonduvuskiiruse hinnangus (vt Lause 4) on $\lambda = \dfrac{f'''(x^*)}{6f''(x^*)} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Ka siin on praktiline arvutus kooskõlas teoreetilise tulemusega.

Tabel 3: Newton-Schröderi meetod funktsiooni $f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4)$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\frac{\lvert x_n - x^* \rvert}{\lvert x_{n-1} - x^* \rvert^2}$
0	0.6	0.08152407	-0.4	
1	1.25393906	0.09715804	0.25393906	1.58711912
2	1.04518222	0.00219171	0.04518222	0.70066200
3	1.00155217	0.00000242	0.00155217	0.76033113
4	1.00000189	0.00000000	0.00000189	0.78444420
5	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.78113646

Lõikajate meetodil toimub kordse lahendi korral koondumine geomeetrilise progressiooni kiirusega (Tabel 4). Võrreldes Newtoni meetodiga on koondumine aeglasem, igal sammul tehtav viga on ligikaudu $\lambda = 0{,}618$ korda väiksem võrreldes eelmise veaga (Tabel 1).

Tabel 4: Lõikajate meetod funktsiooni $f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4)$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\frac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert}$
0	0.6	0.08152407	-0.4	
1	0.7	0.08152407	-0.3	
2	0.90913116	0.00715532	-0.09086884	0.30289614
3	0.94030825	0.00324375	-0.05969175	0.65690007
4	0.96616258	0.00108568	-0.03383742	0.56686936
5	0.97916926	0.00041995	-0.02083074	0.61561260
6	0.98737403	0.00015628	-0.01262597	0.60612168
7	0.99223733	0.00005953	-0.00776267	0.61481830
8	0.99522946	0.00002259	-0.00477054	0.61454811
9	0.99705907	0.00000861	-0.00294093	0.61647853
...	...	...	...	...
36	0.99999999	0.00000000	-0.00000001	0.61803398

Modifikatsiooni (LF) korral, kus funktsiooni f asemel rakendatakse lõikajate meetodit funktsioonile $F(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, kulub sobiva lähendi leidmiseks vähe samme (Tabel 5). Asümptootilise vea konstant

$$\lambda = \left| \frac{F''(x^*)}{2F'(x^*)} \right|^{0{,}618} = \frac{\pi}{4}^{0{,}618} \approx 0{,}861$$

on kooskõlas saadud numbrilise katse tulemustega.

Tabel 5: Lõikajate meetodi modifikatsioon (LF) funktsiooni $f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4)$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\frac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert^{1{,}618}}$
0	0.6	0.08152407	-0.4	
1	0.7	0.05515207	-0.3	
2	0.86573654	0.01457592	-0.13426346	0.94187535
3	0.96265141	0.00131539	-0.03734859	0.96220606
4	0.99594401	0.00001635	-0.00405599	0.82833360
5	0.99988079	0.00000001	-0.00011921	0.88405017
6	0.99999962	0.00000000	-0.00000038	0.84757483
7	1.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.86991703

Teise modifikatsiooni (LG) korral, mis rakendab lõikajate meetodit funktsioonile $G(x) = \frac{-f^2(x)}{f(x-f(x))-f(x)}$, on koondumiskiirus eelmise meetodiga sarnane (Tabel 6). Mõlemad modifikatsioonid on astmelisega koondumisega ($p = 1{,}618$), aga Newton-Schröderi meetodist ($p = 2$) aeglasemad. Meetodi (LG) korral asümptootilise vea konstant

$$\lambda = \left|\frac{G''(x^*)}{2G'(x^*)}\right|^{0{,}618} = \left|\frac{F''(x^*) + \left(F'(x^*)\right)^2 f''(x^*)}{2F'(x^*)}\right|^{0{,}618} = \left|\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2}{2 \cdot \frac{1}{2}}\right|^{0{,}618} \approx 1{,}168$$

pigem on praktiliste arvutustega kooskõlas. Meetodi (LG) rakendamisel on oluline arvutused läbi viia mingi stabiilse algoritmi abil ning lisaks suurendada arvutuste täpsust (vt [2], lk 324). Käesolevas töös kasutatud testfunktsioonide korral piisas arvutustäpsuse suurendamisest.

Tabel 6: Lõikajate meetodi modifikatsioon (LG) funktsiooni $f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4)$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\frac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert^{1{,}618}}$
0	0.6	0.08152407	-0.4	
1	0.7	0.05515207	-0.3	
2	0.83306390	0.02137424	-0.16693610	1.17107804
3	0.94418515	0.00285348	-0.05581485	1.01085738
4	0.99312248	0.00004679	-0.00687752	0.73321793
5	0.99983632	0.00000003	-0.00016368	0.51655473
6	0.99999966	0.00000000	-0.00000034	0.45410799
7	1.00000000	0.00000000	0.00000000	2.84988577

5.2 Näide 5-kordse nullkoha leidmisest

Leiame nüüd funktsiooni (9) 5-kordse nullkoha $x^* = 2$ samade meetodite abil. Antud funktsiooni korral on konstant Newtoni meetodi koonduvuskiiruse hinnangus $\lambda = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (Tabel 1), mis näitab, et lahendi suurema kordsuse korral toimub koondumine aeglasemalt. Funktsiooni (9) nullkoha leidmine on esitatud Tabelis 7.

Tabel 7: Newtoni meetod funktsiooni $f(x) = x(x-2)^5$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\dfrac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert}$
0	1.0	-1.0	-1.0	
1	1.25	-0.29663086	-0.75	0.75
2	1.42045455	-0.09286774	-0.57954545	0.77272727
3	1.54666218	-0.02961456	-0.45333782	0.78222997
4	1.64297579	-0.00953058	-0.35702421	0.78754562
5	1.71762493	-0.00308361	-0.28237507	0.79091293
6	1.77601996	-0.00100114	-0.22398004	0.79320049
7	1.82197508	-0.00032580	-0.17802492	0.79482493
8	1.85828972	-0.00010620	-0.14171028	0.79601371
9	1.88707074	-0.00003466	-0.11292926	0.79690242
10	1.90993019	-0.00001132	-0.09006981	0.79757726
11	1.92811567	-0.00000370	-0.07188433	0.79809569
12	1.94260054	-0.00000121	-0.05739946	0.79849751
...	...	...	...	...
82	1.99999999	0.00000000	0.00000000	0.80000034

Newton-Schröderi meetod on ruutkoonduvusega ning 5-kordse lahendi korral on $\lambda = \dfrac{f^{(6)}(x^*)}{30f^{(5)}(x^*)} = 0{,}1$ (Tabel 8).

Tabel 8: Newton-Schröderi meetod funktsiooni $f(x) = x(x-2)^5$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\dfrac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert^2}$
0	1.0	-1.0	-1.0	
1	2.25	0.00219727	0.25	0.25
2	2.00543478	0.00000000	0.00543478	0.08695652
3	2.00000294	0.00000000	0.00000294	0.09967497
4	2.00000000	0.00000000	0.00000000	0.10036995

Kui Newtoni meetodil kulub funktsiooni lähendi leidmiseks aega, siis lõikajate meetod jõuab piisava täpsuseni veel aeglasemalt, sest asümptootilise vea konstant $\lambda \approx 0{,}857$ on Newtoni meetodi omast suurem (Tabel 1 ja 9).

Tabel 9: Lõikajate meetod funktsiooni $f(x) = x(x-2)^5$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\dfrac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert}$
0	1.0	-1.0	-1.0	
1	1.1	-0.64953900	-0.9	
2	1.28533845	-0.23961807	-0.71466155	0.79406838
3	1.39367750	-0.11420384	-0.60632250	0.84840509
4	1.49233245	-0.05032254	-0.50766755	0.83728964
5	1.57004798	-0.02306816	-0.42995202	0.84691651
6	1.63582652	-0.01047801	-0.36417348	0.84700957
7	1.69056998	-0.00479563	-0.30943002	0.84967752
8	1.73677053	-0.00219490	-0.26322947	0.85069147
9	1.77576182	-0.00100678	-0.22423818	0.85187337
10	1.80880163	-0.00046218	-0.19119837	0.85265750
11	1.83684151	-0.00021238	-0.16315849	0.85334665
12	1.86068161	-0.00009766	-0.13931839	0.85388384
13	1.88097568	-0.00004493	-0.11902432	0.85433312
14	1.89826983	-0.00002068	-0.10173017	0.85470074
15	1.91301994	-0.00000952	-0.08698006	0.85500747
16	1.92560917	-0.00000439	-0.07439083	0.85526301
17	1.93636033	-0.00000202	-0.06363967	0.85547740
18	1.94554623	-0.00000093	-0.05445377	0.85565762
...	...	...	...	...
119	1.99999999	-0.00000000	-0.00000001	0.85667488

Modifikatsioon (LF) leiab võrrandi $f(x) = 0$ lahendi märgatavalt kiiremini kui lõikajate meetod (Tabel 10). Teoreetiline asümptootilise vea konstant on siin

$$\lambda = \left|\frac{F''(x^*)}{2F'(x^*)}\right|^{0{,}618} = 0{,}1^{0{,}618} \approx 0{,}241.$$

Tabel 10: Lõikajate meetodi modifikatsioon (LF) funktsiooni $f(x) = x(x-2)^5$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\dfrac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert^{1,618}}$
0	1.0	-1.0	-1.0	
1	1.1	-0.64953900	-0.9	
2	1.71875000	-0.00302465	-0.28125000	0.33352601
3	1.94784288	-0.00000075	-0.05215712	0.40616320
4	1.99824887	-0.00000000	-0.00175113	0.20832879
5	1.99999061	-0.00000000	-0.00000939	0.27095087
6	2.00000000	-0.00000000	-0.00000000	0.22432382

Lõikajate meetodi modifikatsioon (LG), mis oma arvutustes funktsiooni tuletisi ei kasuta, jõuab sobiva lähendini mõni samm hiljem (Tabel 11). Asümptootilise vea konstant on siin

$$\lambda = \left|\frac{G''(x^*)}{2G'(x^*)}\right|^{0,618} = \left|\frac{F''(x^*) + (F'(x^*))^2 f''(x^*)}{2F'(x^*)}\right|^{0,618} = \left|\frac{-\frac{1}{25} + \frac{1}{25}\cdot 0}{2\cdot\frac{1}{5}}\right|^{0,618} \approx 0,241.$$

Tabel 11: Lõikajate meetodi modifikatsioon (LG) funktsiooni $f(x) = x(x-2)^5$ korral.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x^*$	$\dfrac{\lvert x_n - x^*\rvert}{\lvert x_{n-1} - x^*\rvert^{1,618}}$
0	1.0	-1.0	-1.0	
1	1.1	-0.64953900	-0.9	
2	1.28675310	-0.23751700	-0.71324690	0.84581828
3	1.42896483	-0.08676325	-0.57103517	0.98656498
4	1.62242753	-0.01244993	-0.37757247	0.93482021
5	1.83110171	-0.00025167	-0.16889829	0.81668223
6	1.97605393	-0.00000002	-0.02394607	0.42556197
7	1.99947409	-0.00000000	-0.00052591	0.22047809
8	1.99999872	-0.00000000	-0.00000128	0.25787196
9	2.00000000	-0.00000000	-0.00000000	0.23114620

Kokkuvõte

Iteratsioonimeetodid võimaldavad ligikaudselt leida võrrandi $f(x) = 0$ lahendeid. Iteratsioonimeetodi korral valitakse üks või mitu alglähendit ning leitakse järjestikuste lähendite jada $x_0, x_1, x_2, \dots$.

Olgu võrrandi täpseks lahendiks x^*. Öeldakse, et iteratsioonimeetod on p-järku koondumisega, kui leidub konstant $\lambda \geq 0$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lambda.$$

Kui $p = 1$, siis räägitakse lineaarsest koondumisest. Lineaarne koondumine on aeglasem astmelisest koondumisest $p > 1$. Sama järku koondumise puhul on kiirem see, mille korral asümptootilise vea konstant λ on väiksem.

Piisavalt sileda funktsiooni korral on Newtoni meetod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

ruutkoonduvusega, asümptootilise vea konstandiga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|,$$

kuid kordse lahendi puhul lineaarse koondumisega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = 1 - \frac{1}{m},$$

kus m on lahendi kordsus. Koonduvuse kiirendamiseks kasutatakse m-kordse lahendi korral Newton-Schröderi meetodit

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

mis on taas ruutkoonduvusega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \left| \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{m(m+1) \cdot f^{(m)}(x^*)} \right|.$$

Lõikajate meetod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

on aeglasem kui Newtoni meetod. Ühekordse lahendi puhul on tegu astmelise koonduvusega, mille järk on $p = 1{,}618$. Kordse lahendi korral koondub lõikajate meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille asümptootilise vea konstant $\lambda \in (0, 1)$ rahuldab võrrandit $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks oli uurida, kas lõikajate meetodi jaoks leidub sarnaseid modifikatsioone, mis säilitaks kordse lahendi puhul algse meetodi koonduvusjärgu.

Lõikajate meetodi koonduvuskiiruse parandamiseks kordse lahendi korral rakendasime lõikajate meetodit funktsioonidele

$$F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{ja} \quad G(x) = \frac{f(x)}{f\big[x - f(x), x\big]} = \frac{-f^2(x)}{f\big(x - f(x)\big) - f(x)}$$

ning näitasime, et mõlema modifikatsiooni puhul säilib lõikajate meetodi koonduvusjärk $p = 1{,}618$.

Saadud teoreetilised tulemused on kooskõlas praktiliste arvutustega. Numbriliste katsetena rakendasime Newtoni, Newton-Schröderi, lõikajate ja modifitseeritud lõikajate meetodeid testfunktsioonidele

$$f(x) = (x-1)^2 \tan(\pi \cdot x/4) \quad \text{ning} \quad f(x) = x(x-2)^5.$$

Kasutatud allikad

[1] Diez, P. (2003). A note on the convergence of the secant method for simple and multiple roots. *Applied Mathematics Letters*, **16.8**, 1211–1215.

[2] King, R, F. (1977). A secant method for multiple roots. *BIT Numerical Mathematics*, **17**, 321–328.

[3] Kioustelidis, J, B. (1979). A derivative-free transformation preserving the order of convergence of iteration methods in case of multiple zeros. *Numerische Mathematik*, **33**, 385–389.

[4] Oja, P. (2017). Numbrilised meetodid, loengukonspekt. URL: https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.005/2023_spring/uploads/Main/NM2017est.pdf (viimati vaadatud 29.05.2024).

[5] Трауб, Дж. (1985). *Итерационные методы решения уравнений.* Мир.

Lisa 1. Programmikood Newtoni ja Newton-Schröderi meetodi korral

```python
from sympy import *

x = Symbol('x')
#f = (x-1)**2*tan(pi*x/4)
f = x*(x-2)**5
f_tuletis = f.diff(x)

print("Newtoni meetod")
#x0 = 0.6
#lahend = 1.0
x0 = 1.0
lahend = 2
n = 1
hinnang = 1e-8

print("0 & " + str(f'{(x0): .8f}') + " & " + str(round(f.subs(x, x0),8)) + " & " + str(f'{(x0-lahend): .8f}') + " & \\\\")

while True:
    x1 = round(x0 - f.subs(x, x0)/f_tuletis.subs(x, x0),15)
    konstant = abs(x1-lahend) / abs(x0-lahend)
    print(str(n) + " &" + str(f'{(x1): .8f}') + " & " + str(f'{round(f.subs(x, x1),8): .8f}') + " & " + str(f'{(x1-lahend): .8f}') + " &" + str(f'{(konstant): .8f}') + " \\\\")
    if abs(x1-lahend) < hinnang:
```

```
        print()
        break
    x0 = x1
    n += 1

print("Newton-Schr deri meetod")
#x0 = 0.6
#kordsus = 2
x0 = 1.0
kordsus = 5
n = 1
alpha = 2

print("0 & " + str(f'{(x0): .8f}') + " & " + str(round(f.subs
                               (x, x0),8)) + " & " + str(f'{(
                               x0-lahend): .8f}') + " & \\\\"
                               )
while True:
    x1 = round(x0 - kordsus*f.subs(x, x0)/f_tuletis.subs(x,
                                   x0),15)
    konstant = abs(x1-lahend) / abs(x0-lahend)**alpha
    print(str(n) + " &" + str(f'{(x1): .8f}') + " & " + str(f
                                   '{round(f.subs(x, x1),8):
                                   .8f}') + " & " + str(f'{(
                                   x1-lahend): .8f}') + " &"
                                   + str(f'{(konstant): .8f}'
                                   ) + " \\\\")
    if abs(x1-lahend) < hinnang:
        break
    x0 = x1
    n += 1
```

Lisa 2. Programmikood lõikajate meetodi ja tema kahe modifikatsiooni korral

```
import numpy as np
from decimal import *

getcontext().prec = 50

def f(x):
    return (x-1)**2*np.tan(np.pi*x/4)
    #return x*(x-2)**5

def f_tuletis(x):
    return np.pi*(x-1)**2*(np.tan(np.pi*x/4)**2+1)/4+(2*x-2)*
                                        np.tan(np.pi*x/4)
    #return 5*x*(x-2)**4+(x-2)**5

def F(x):
    return f(x)/f_tuletis(x)

def G(x):
    return -f(x)**2/(f(x-f(x))-f(x))

print("Loikajate meetod")
x0 = 0.6
x1 = 0.7
lahend = 1
#x0 = 1.0
#x1 = 1.1
#lahend = 2
n = 0
alpha = 1
```

```
eps = 1e-8

print("0 &" + str(f'{(x0): .8f}') + " & " + str(f'{round(f(x0
                                    ),8): .8f}') + " & " + str(f'{
                                    (x0-lahend): .8f}') + " & \\\\
                                    ")
print("1 &" + str(f'{(x1): .8f}') + " & " + str(f'{round(f(x1
                                    ),8): .8f}') + " & " + str(f'{
                                    (x1-lahend): .8f}') + " & \\\\
                                    ")

while True:
    x2 = x1 - f(x1)*(x1-x0) / (f(x1)-f(x0))
    konstant = abs(x2-lahend) / abs(x1-lahend)**alpha
    print(str(n+2) + " &" + str(f'{round(x2,8): .8f}') + " &
                                        " + str(f'{round(f(x2),8):
                                         .8f}') + " & " + str(f'{
                                        round(x2-lahend,8): .8f}')
                                         + " &" + str(f'{round(
                                        konstant,8): .8f}') + "
                                        \\\\")
    n += 1
    x0 = x1
    x1 = x2
    if abs(x1-lahend) < eps:
        break
print("Iteratsioonide arv" ,n)
print()


print("Loikajate meetodi modifikatsioon F(x)")
x0 = 0.6
x1 = 0.7
```

```
#x0 = 1.0
#x1 = 1.1
alpha = (1+np.sqrt(5))/2
n = 0

print("0 &" + str(f'{(x0):.8f}') + " & " + str(round(f(x0),8)) + " & " + str(f'{(x0-lahend):.8f}') + " & \\\\")
print("1 &" + str(f'{(x1):.8f}') + " & " + str(round(f(x1),8)) + " & " + str(f'{(x1-lahend):.8f}') + " & \\\\")

while True:
    x2 = x1 - F(x1)*(x1-x0) / (F(x1)-F(x0))
    konstant = abs(x2-lahend) / abs(x1-lahend)**alpha
    print(str(n+2) + " &" + str(f'{(x2):.8f}') + " & " + str(f'{round(f(x2),8):.8f}') + " & " + str(f'{(x2-lahend):.8f}') + " &" + str(f'{(konstant):.8f}') + " \\\\")
    n += 1
    x0 = x1
    x1 = x2
    if abs(x1-lahend) < eps:
        break
print("Iteratsioonide arv" ,n)
print()


print("Loikajate meetodi modifikatsioon G(x)")
x0 = 0.6
x1 = 0.7
```

```python
alpha = (1+np.sqrt(5))/2
#x0 = Decimal(1.0)
#x1 = Decimal(1.1)
#alpha = Decimal((1+np.sqrt(5))/2)
n = 0

print("0 &" + str(f'{(x0): .8f}') + " & " + str(f'{f(x0): .8f}') + " & " + str(f'{(x0-lahend): .8f}') + " & \\\\")
print("1 &" + str(f'{(x1): .8f}') + " & " + str(f'{f(x1): .8f}') + " & " + str(f'{(x1-lahend): .8f}') + " & \\\\")

while True:
    x2 = x1 - G(x1)*(x1-x0) / (G(x1)-G(x0))
    konstant = abs(x2-lahend) / abs(x1-lahend)**alpha
    print(str(n+2) + " &" + str(f'{(x2): .8f}') + " & " + str(f'{round(f(x2),8): .8f}') + " & " + str(f'{(x2-lahend): .8f}') + " &" + str(f'{(konstant): .8f}') + " \\\\")
    n += 1
    x0 = x1
    x1 = x2
    if abs(x1-lahend) < eps:
        break
print("Iteratsioonide arv" ,n)
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rainer Bõkov,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Lõikajate meetod kordse lahendi korral", mille juhendaja on Evely Kirsiaed, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rainer Bõkov
10.06.2024