Duplum

A. Vihman

ALGEBRA ÕPIK

Gümnaasiumi I klassile

NÕUKOGUDE EESTI TRÜKIKOJA TARTU OSAKOND

Tartu Eesti Kirjastus

E-14949 II

Duplum

A. VIHMAN

ALGEBRA
ÕPIK

GÜMNAASIUMI I KLASSILE

34410

NÕUKOGUDE-EESTI TRÜKK
TARTUS, KASTANI

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.

Bibliotheca Universitatis Tartuensis
(1943: 0160)
A-56773

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.

K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.

K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Arro.

AfV nr. I/0043. Trükiarv: 4150 eks. Paber: ETK paberivabrik, Tallinn; paberi kaust 56 × 79 cm. Trükk ja brošeerimine „Noor-Eesti" trüki- ja köitekoda, Tartu. Ilmunud augustis 1943. Hind Rmk. 2.—.

SISUKORD.

		Lk.
Peatükk	I. **Algebralise sümboolika alged**	5—58
§ 1.	Algebra nimi	5
§ 2.	Täht arvu tähisena	5
§ 3.	Matemaatilised sümbolid	12
§ 4.	Algebraline avaldis	14
§ 5.	Kordaja	14
§ 6.	Arvu ruut. Arvu kuup	18
§ 7.	Aste	18
§ 8.	Sulud	21
§ 9.	Avaldise numbriline väärtus	25
§ 10.	*n*-es paarisarv ja *n*-es paaritu arv. *a* kümmet ja *b* ühte sisaldava arvu üldine kuju	30
§ 11.	Arvude kujutamine sirgel	32
§ 12.	Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine	34
§ 13.	Valem	37
§ 14.	Üksliige. Hulkliige. Hulkliikme koondamine	41
§ 15.	Algebralised teisendused	46
§ 16.	Täht tundmatu arvu tähisena	47
§ 17.	Võrrand	50
§ 18.	Ülesandeid kordamiseks	55
Peatükk	II. **Arvutamise põhiseadused**	59—83
§ 19.	Loendamise tulemuse ühesus	59
§ 20.	Liitmise põhiseadused	60
§ 21.	Lahutamise põhiseadused	65
§ 22.	Korrutamise põhiseadused	69
§ 23.	Jagamise põhiseadused	76
§ 24.	Ülesandeid kordamiseks	81
Peatükk	III. **Positiivsed ja negatiivsed arvud**	84—112
§ 25.	Vastassuunalised suurused	84

Lk.

§ 26. Positiivsed ja negatiivsed arvud 86
§ 27. Suunaga arvude järjestus suuruse järgi . . . 88
§ 28. Suunaga arvude astmik 89
§ 29. Suunaga arvude liitmine 90
§ 30. Suunaga arvude lahutamine 93
§ 31. Suunaga arvude korrutamine 98
§ 32. Suunaga arvude astendamine 103
§ 33. Suunaga arvude jagamine 104
§ 34. Arvutamise põhiseadused positiivsete arvude vallas 106
§ 35. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega . 107
§ 36. Ülesandeid kordamiseks 110

Peatükk IV. **Täisavaldised** . . . . . 113—128
§ 37. Üksliikmete korrutamine 113
§ 38. Üksliikmete jagamine 115
§ 39. Üksliikmete astendamine 118
§ 40. Hulkliikmete korraldamine 120
§ 41. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine 121
§ 42. Hulkliime korrutamine ja jagamine üksliikmega 123
§ 43. Ülesandeid kordamiseks 126

Peatükk V. **Võrrand** . . . . . 129—159
§ 44. Võrdus. Võrratus 129
§ 45. Samasus 131
§ 46. Võrrand 132
§ 47. Võrduse ja võrratuse põhiomadused 134
§ 48. Võrrandite teisendamise lause 137
§ 49. Lineaarvõrrand 139
§ 50. Üldkujulise lineaarvõrrandi lahend 140
§ 51. Lineaarvõrrandi lahendamine 141
§ 52. Lineaarvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid . 144
§ 53. Ülesandeid kordamiseks 148

Peatükk I.

Algebralise sümboolika alged.

§ 1. Algebra nimi.

Nimetus algebra on tekkinud IX sajandi algusest pärineva tähtsa araabiakeelse matemaatika õpperaamatu nimest „Chisāb al-džabr wa'l-mukābala".

Sõna al-džabr tähendab eesti keeles võrdlemist.

Meie ajal nimetatakse algebraks matemaatika osa, mis käsitleb arvude omadusi ja vahekordi üldiste sümbolite abil.

§ 2. Täht arvu tähisena.

Lauset „ristküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega" saame hoopis lühemalt avaldada, kui selles lauses esinevaid arvusid, mis väljendavad pindala, alust ja kõrgust, tähistame tähtedega S, a ja b. Eelmise lause võime kirjutada siis lühidalt

$$S = a \cdot b.$$

Me ütleme, et ristküliku pindala lause on väljendatud nüüd algebra lühikirjas.

Et algebras sagedasti arvusid tähistatakse tähtedega, siis tuntakse algebrat ka tähtarvutuse nime all.

Kui ülesandes arvud on tähistatud tähtedega, siis ülesande lahendamisel saame tehtemärkide abil ainult näi-

data, missugused tehted ülesande lahendamiseks tuleb teha — arvutusi teostada, nagu see toimub arvudega, ei saa me sel juhul mitte.

Näitena lahendame mõned ülesanded, kus arvude tähistena esinevad tähed.

Ülesanne 1. Arvuta summa

$$24 + a, \text{ kui } a = 16.$$

Lahendus. Kui $a = 16$,

$$\text{siis } 24 + a = 24 + 16 = 40.$$

Ülesanne 2. Klassis on tööl t õpilast; haiguse tõttu puudub h õpilast. Mitu protsenti õpilasist on haiged?

Lahendus. Tervete õpilaste arv on t,

haigete „ „ „ h,

seega kõikide õpilaste arv kokku on $t + h$.

Et teada saada, mitu protsenti õpilasist on haiged, jagame esiteks arvu h arvuga $t + h$, saame

$$\frac{h}{t+h},$$

ning korrutame saaduse 100-ga:

$$\frac{h}{t+h} \cdot 100 = \frac{100 \cdot h}{t+h}.$$

Vastus. Haigeid õpilasi on $\frac{100 \cdot h}{t+h}$ %.

Ülesanded.

1. Arvuta järgmised summad:

1. $1 + a$, kui $a = 3$
   $3 + a$, kui $a = 5$
   $5 + a$, kui $a = 11$
   $13 + a$, kui $a = 27$
   $19 + a$, kui $a = 81$

2. $b + 4{,}2$, kui $b = 0{,}8$
   $b + 0{,}1$, kui $b = 4{,}7$
   $b + 7{,}4$, kui $b = 6{,}6$
   $b + 11{,}8$, kui $b = 5{,}8$
   $b + 37{,}3$, kui $b = 27{,}7$

2. Arvuta järgmised vahed:

1. $c - 7$, kui $c = 7$
   $c - 3$, kui $c = 4$
   $c - 10$, kui $c = 13$
   $c - 17$, kui $c = 22$
   $c - 33$, kui $c = 41$

2. $7 - c$, kui $c = 6{,}4$
   $8 - c$, kui $c = 0{,}8$
   $10 - c$, kui $c = 2{,}9$
   $11 - c$, kui $c = 9{,}7$
   $35 - c$, kui $c = 29{,}5$

3. Arvuta järgmised korrutised:

1. $4 \cdot m$, kui $m = 3$
   $7 \cdot m$, kui $m = 7$
   $9 \cdot m$, kui $m = 1$
   $13 \cdot m$, kui $m = 0$
   $17 \cdot m$, kui $m = 10$

2. $m \cdot 1{,}5$, kui $m = 8$
   $m \cdot 0{,}9$, kui $m = 9$
   $m \cdot 2{,}4$, kui $m = 0$
   $m \cdot 7{,}5$, kui $m = 12$
   $m \cdot 3{,}6$, kui $m = 5$

4. Arvuta järgmised jagatised:

1. $\frac{x}{4}$, kui $x = 1{,}2$
   $\frac{x}{5}$, kui $x = 0$
   $\frac{x}{10}$, kui $x = 0{,}1$
   $\frac{x}{16}$, kui $x = 6{,}4$
   $\frac{x}{25}$, kui $x = 1{,}0$

2. $\frac{6}{x}$, kui $x = 3$
   $\frac{8}{x}$, kui $x = 8$
   $\frac{12}{x}$, kui $x = 60$
   $\frac{5{,}2}{x}$, kui $x = 1{,}3$
   $\frac{7{,}5}{x}$, kui $x = 0{,}75$

5. Kirjuta algebra lühikirjas:
arvu a ja seitsme summa;
kümne ja arvu b vahe;
kolme ja arvu c korrutis;
üheksa kümnendikku arvust d;
arvu e ja kaheksa jagatis.

6. Aasta nädalad jagunevad koolis töönädalaiks ja puhkenädalaiks. Olgu esimeste arv t, teiste arv p; kokku on neid aastas 52. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

7. Kauba netokaal N koos taarakaaluga T annab kauba brutokaalu B. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

8. Kauba müügil saadud kasu k leitakse, lahutades kauba müügihinnast m kauba omahind h. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

9. Püramiidil on N tippu. Püramiidi põhja tippude arv n on tippude koguarvust 1 võrra väiksem. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

10. Ringi diameeter d on raadiuse r kahekordne. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

11. Prisma põhjal on s serva; kõiki prisma servi on u; kõiki prisma servi on kolm korda rohkem kui neid on põhjal. Avalda see tõsiasi algebra lühikirjas.

12. Ühiskoolis õpib p poeglast ja t tütarlast. Mitu õpilast on selles koolis?

13. Kahes paralleelklassis on kummaski p õpilast. Et üks klass on ruumilt teisest klassist suurem, siis viiakse teisest klassist esimesse q õpilast üle. Mitu õpilast on nüüd ühes ja mitu teises klassis?

14. Klassi õpilaste nimekirjas seisab n õpilast. Kui palju on neid klassis, kui puudub 2 õpilast? — kui puudub 7 õpilast? — kui puudub m õpilast?

15. Olen praegu v-aastane. Kui vana olen ma viie aasta pärast? — Kui vana a aasta pärast? — Kui vana olin b aasta eest?

16. Olgu n täisarv. Missugune arv seisab tema järel täisarvude reas? — tema ees?

17. Kell on m minuti pärast 23. Mitu minutit on jäänud keskööni?

Kell on n minuti pärast 13. Mitu minutit on möödunud keskpäevast?

18. Kirik on v aastat vana. Mitme aasta eest oli ta u aastat vana?

19. Võistluskatse sooritas rahuldavalt $k\%$ katsele ilmunud kandidaatidest. Mitu % kandidaatidest ei sooritanud katset rahuldavalt?

20. Leia p protsenti arvust a.

21. Mitu protsenti moodustab arv a arvust b?

22. m protsenti otsitavast arvust on n. Kui suur on otsitav arv?

23. Kolmetahuse püramiidi tahkudeks on võrdkülgsed kolmnurgad, mille külje pikkus on k cm. Avalda selle lõigu pikkus, millest parajasti saaks murda kõik püramiidi servad.

24. Mitu minutit on a tundi? Mitu minutit on b sekundit?

25. Töömehe kaheksatunnise tööpäeva teenistus on t marka. Kui suur on tema nädalateenistus? — tema kuuteenistus? — tema töötunni tasu?

26. Isa maksab iga päev ilmuva päevalehe numbri eest s penni ja kord nädalas ilmuva nädalalehe eest t penni. Kui palju maksab isa nende ajalehtede eest nädalas?

27. Nädala esimesel viiel tööpäeval on ametniku töötundide arv päevas t, laupäeval aga s. Kui suur on ametniku töötundide arv nädalas?

28. Mitu päeva on n nädalas ja p päevas?

29. Mitu penni on a marka? Mitu penni on a marka ja b penni? $100a + b$

30. Uue jalgratta hind on 130 marka. Iga aastaga kaotab ta oma algväärtusest 20 marka. Kui suur on jalgratta hind n aasta pärast?

31. Mitu sekundit on m minutit ja s sekundit?

32. Munapaar maksab n penni. Kui palju maksab m paari mune?

33. Rong sõidab v kilomeetrit tunnis. Mitu kilomeetrit sõidab rong t tunniga?

34. Tomativäljal on p peenart. Avalda tomatitaimede koguarv, teades, et igal peenral kasvab t taime.

35. Tööline teenis tunnis 25 penni. Ta töötas m päeva, n tundi päevas. Kui palju teenis tööline selle aja jooksul?

36. Maja osteti m marga eest ja müüdi edasi $p\%$-se kasuga. Mitu marka saadi kasu?

37. Kirjuta 1% arvust a, 7% arvust b, $p\%$ arvust c.

38. Talu osteti t marga eest ja müüdi $q\%$-se kahjuga edasi. Mitu marka kahju saadi talu müügist?

39. Piletiautomaadi kaudu on müüdud m tükki a-penniseid pileteid ja n tükki b-penniseid pileteid. Mitu penni on kogunenud automaati nende piletite müügist?

40. Poest ostetakse k kg leiba hinnaga h penni kg. Maksmisel antakse margane raha. Mitu penni saab tagasi?

41. Kaks lennukit stardivad Tallinnast ühel ajal lennuks Riiga. Üks lendab kiirusega a km minutis, teine kiirusega b km minutis (a on suurem kui b). Kui suur on nende kaugus teineteisest c minuti pärast?

42. Kirjutussulg maksab s penni. Mitu sulge saab osta 1 marga eest?

43. Automatkal sõideti s km; seejuures kulus b liitrit bensiini. Mitu liitrit bensiini kulus ühe kilomeetri sõitmisel?

44. Rong kulges kahe jaama vahelise tee s km t tunniga. Missuguse kiirusega ta liikus?

45. Taksiauto kiirusemõõtja näitab kiirust v km tunnis. Kilomeetripostilt on näha, et sõidu lõpukohani jääb veel s kilomeetrit. Kui palju aega kulub sihtkohale jõudmiseks, kui edasisõit toimub endise kiirusega?

46. 400 grammi kohvi eest maksti s penni. Mitu penni maksab selle kohvi kilogramm? Mitu marka see on?

47. Sprotlasel kulus n meetri ujumiseks aega s sekundit. Mitu meetrit ta ujub keskmiselt sekundis? Kui palju ta jõuab edasi 1 minutiga?

48. a kg jahu maksab b marka. Kui palju maksab c kg sedasama jahu?

49. r kg rauast saab valmistada n naela. Mitu samasugust naela saab valmistada s kg rauast?

50. Masinakirjutaja lõpetab käsikirja ümberkirjutamise t päevaga, töötades iga päev h tundi. Mitme päevaga lõpetaks ta selle töö, töötades iga päev i tundi?

51. Klassile ostetud 20 õpiku eest maksti N marka. Mitu marka maksab õpik? Mitu penni see on?

52. Mitu jardi on j jalga t tolli, kui 1 jard on 3 jalga ehk 36 tolli?

53. Vennal on a sulge ja õel b sulge. Nad jaotavad suled endi vahel nii, et kumbki saab ühepalju. Mitu sulge on nüüd kummalgi?

54. Raamatukaupmees müüs n raamatut a marga eest; raamatud maksid tal enesel b marka. Kui palju teenis kaupmees keskmiselt raamatu pealt?

55. Korterisisustise hinnast, h margast, makstakse ostmisel k marka, kohustudes tasuma võlgu jääva summa m-margaste kuumaksudega. Mitme kuuga on võlg tasutud?

56. Klassis on n õpilast, neist m edasijõudvat. Mitu protsenti õpilastest jõuab edasi?

57. Kaup osteti K marga eest ja müüdi edasi $p\%$-se kasuga. Kui suure summa eest müüdi kaup?

58. Klassis oli aasta lõpul N õpilast. Neist läks $p\%$ järgmisse klassi üle. Avalda klassikursuse mittelõpetanud õpilaste arv.

59. Kaupmees sai saadetise sisuga:

a kg kuivatatud õunu hinnaga f marka kg
b „ „ pirne „ g „ „
c „ „ ploome „ h „ „

Mitu marka maksis saadetis?

60. Toa pikkus on a meetrit, laius b meetrit ja kõrgus c meetrit. Kui suur on toa ruumala?

61. Kahe karbi mõõtmed on detsimeetrites:
suuremal sisemised mõõtmed a, b, c,
väiksemal välimised mõõtmed f, g, h.
Kui palju jääb suuremasse karpi vaba ruumi, kui temasse paigutada sinna mahtuv väiksem?

§ 3. Matemaatilised sümbolid.

Matemaatilised sümbolid on tähised, mis asendavad kirjutatud sõnu; nii kirjutame

sõnade asemel	tähise
seitse	7
mingi arv	$a, b, H, N, \ldots$
on, on võrdne, võrdub	$=$
liita, pluss	$+$
lahutada, miinus	$-$
korrutada, korda	$\cdot$
jagada	$\frac{\quad}{\quad}$
või	$:$
ei ole võrdne	$\neq$
on ligikaudu võrdne	$\approx$
on suurem kui	$>$
on väiksem kui	$<$

Punkt korrutamismärgina kirjutatakse poole rea kõrgusele.

Kahe tähe vahel, sageli ka numbrilise teguri ja tähe vahel jäetakse korrutamispunkt ära.

Nii tähendab Nx sama, mis $N \cdot x$, ja $3{,}8u$ sama, mis $3{,}8 \cdot u$.

Ülaltoodud matemaatiliste sümbolite kogu täiendame hiljemini vajaduse kohaselt.

Sümbolid 7, $a, b, H \ldots$ on arvtähised.

Märkus. Sümboleid kirjutiste lühendamiseks kasutame ka igapäevases elus; nii kirjutame

sõnade asemel	tähise
meeter	m
gramm	g
riigimark	*RM*
naelsterling	£
dollar	$

§ 4. Algebraline avaldis.

Algebraliseks avaldiseks nimetame kogu arvtähiseid, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega.

Näiteks on

$$t + p, \qquad 12k, \qquad \frac{7}{22}u, \qquad 2n - 1,$$

algebralised avaldised.

Ka üksikarve, nagu 7, a, $\frac{3}{4}$, N, loeme algebralisteks avaldisteks.

§ 5. Kordaja.

Korrutises esinevat numbrilist tegurit nimetame kordajaks.

Tavaliselt kirjutatakse kordaja teiste tegurite ette. Nii on avaldistes $12k$, $3n$, $\frac{7}{22}u$ kordajaiks arvud 12, 3 ja $\frac{7}{22}$.

Kordaja 1 jäetakse kirjutamata.

Nii kirjutame avaldise $1 \cdot bc$ asemel lihtsalt bc.

Tähendagu a mingit arvu. Lühiduse otstarbel kirjutame siis

summa	$a + a$	kujul	$2 \cdot a$ ehk $2a$
„	$a + a + a$	„	$3 \cdot a$ „ $3a$
„	$a + a + a + a + a$	„	$5 \cdot a$ „ $5a$
„	$a + a + a + b + b$	„	$3a + 2b$

Selle eeskujul mõistame kirjutist $100a$ summana, milles arv a on võetud liidetavana 100 korda.

Avaldistes $\frac{7}{22}u$ ja $0{,}72a$ on kordajad murdarvulised.

Täisarvuline kordaja näitab, mitu korda kordajale järgnevat avaldist

tuleb võtta liidetavana; murdarvuline kordaja näitab, missugune osa tuleb võtta kordajale järgnevast avaldisest.

Ülesanded.

62. Kirjuta järgmised avaldised kordajateta:

1.	2.	3.
$5a$	$3cx$	$2d + 5c$
$3p$	$4fy$	$3ab + 4xy$
$4n$	$5mn$	$5pq + 3rs$
$6d$	$2cpt$	$3uv + 2ke$
$2h$	$3cdx$	$4ax + by + 3cz$

63. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $a + a + a + a$
   $b + b + b + b + b + b + b$
   $m + m + m + m + n + n + n$
   $x + x + x + y + y + y$
   $u + u + u + v + v + v + v$

2. $ab + ab + ab$
   $bc + bc + bc + bc + bc$
   $ax + ax + by + by + by + by$
   $mn + mn + mn + mn + pq$
   $kl + kl + ab + ab + ab$

64. Märgi matemaatiliste sümbolitega:

arvu a seitsmekordne;
arvu b kümnekordne;
arvu c pool;
arvu d kolm kümnendikku;
arvu e seitsekümmend kuus sajandikku.

65. Kirjuta sõnadeta:
arvude m ja n korrutise kahekordne;
arvude p ja q jagatise viiekordne;
arvude $2s$ ja $3t$ summa;
arvude $4u$ ja $17v$ vahe;
arvude $2x$ ja $9z$ jagatis.

66. Märgi matemaatiliste sümbolite abil:
arvu x ja arvu y kahekordse summa;
arvu u kolmekordse ja arvu v vahe;
arvu a kahekordse ja arvu b kolmekordse summa;
arvu m neljakordse ja arvu n seitsmekordse vahe;
arvu p poole ja arvu q kolmandiku summa.

67. Märgi matemaatiliste sümbolite abil:
arvude x ja y korrutise kolmekordne;
arvude a ja b jagatise kolm viiendikku;
arvude m ja n korrutise neljakordse ja arvu z seitsmekordse summa;
arvude p ja q jagatise ja arvu z kolmekordse vahe;
arvude r ja s korrutise kahekordse ja samade arvude jagatise vahe.

68. Sõnasta nõuded, mis allpool kirjutatud algebra lühikirjas:

1.	2.	3.
$a + b$	$\frac{4}{3}d$	$3a + 7b$
$a + b + c$	$5{,}8b$	$a - \frac{1}{3}b$
$6a$	$0{,}4c$	$0{,}5a + 2{,}1b$
$9b$	$a + 3b$	$12a - 1{,}2c$
$\frac{1}{3}c$	$4a + c$	$0{,}12a + 0{,}88b$

69. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $2a - a$
   $5b - 2b$
   $7c - 3c$
   $10d - 9d$
   $13e - 4e$

2. $7k - k - k$
   $11m - m - m$
   $16n - 2n - n$
   $23p - p - 4p$
   $30q - 10q - q$

3. $13s - s - s - s$
   $21t - 5t - t - t$
   $29u - u - u - 7u$
   $34v - 5v - 3v - v$
   $41w - 21w - 19w$

4. $ab + ab + ab - 2ab$
   $3cd + cd - 3cd$
   $5fg - fg - fg$
   $9hk - hk - hk - hk$
   $12mn + 3mn - 2mn - mn$

5. $p + p + p - q$
   $r + 2r + 3r - 4s$
   $s + s + s - 2s - 1$
   $5t - t - 2t - 2t + 3$
   $2u + u + u - 3u - u$

70. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $2a + a$
   $4x + x$
   $6m + m$
   $3n + n + n$
   $8p + p + p + p$

2. $3q + 2q$
   $5r + 5r$
   $8s + 3s$
   $10t + t + t$
   $7u + u + u + u$

3. $f + 4f$
   $2g + g + 4g$
   $h + h + 3h$
   $3i + 2i + i$
   $k + k + 7k$

71. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$
   $\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b$
   $1{,}2a + 5{,}6a - 5{,}8a$
   $\frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4}$
   $1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}x$

2. $\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b$
   $\frac{2}{5}y + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}y$
   $0{,}2x + 1{,}8x - x$
   $\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t}{2}$
   $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4a}{3}$

3. $\frac{n+n}{3}$
   $\frac{2a+a}{4}$
   $0{,}2b - 0{,}2b$
   $\frac{3x+4x}{9}$
   $\frac{c+c+c}{2}$

§ 6. Arvu ruut. Arvu kuup.

N ä i d e 1. Ruudukujuline põrand kaetakse malelaua sarnaselt ruudukujuliste parkettkividega. Mahtugu nii põranda pikkusse kui ka laiusse a kivi. Siis mahub põrandale

$$a \cdot a \text{ ehk } aa$$

kivi. Korrutise aa kirjutame kujul a^2.

Üldiselt: kui ruudu küljesse pikkusühik mahub a korda, siis ruudu pindala on a^2 vastavat ruutühikut.

Selletõttu avaldist a^2 loetakse a r u u t.

N ä i d e 2. Mahtugu kuubi servasse a pikkusühikut. Täidame kuubi k u u p ü h i k u t e g a, see on kuupidega, mille serva pikkus on 1 pikkusühik. Kuubi põhi kattub siis $a \cdot a$ ruutühikuga; sellel põhjal asetsevas kihis on seega $a \cdot a$ kuupühikut; kihte on a, seega on kuubis kuupühikuid kokku

$$a \cdot a \cdot a = a \cdot a^2.$$

Korrutise $a \cdot a \cdot a$ ehk $a \cdot a^2$ kirjutame kujul a^3.

Niisiis: kui kuubi servasse pikkusühik mahub a korda, siis kuubi ruumala on a^3 vastavat kuupühikut.

Sellepärast avaldist a^3 loetakse a k u u p.

§ 7. Aste.

Ülal kirjutasime

korrutise $a \cdot a$	ehk aa	lühemalt a^2
ja korrutise $a \cdot a \cdot a$	ehk aaa	lühemalt a^3.

Kirjutame selle eeskujul

korrutise $a \cdot a \cdot a \cdot a$ ehk $aaaa$ lühemalt a^4 ja üldiselt n võrdsest tegurist koosneva korrutise $a \cdot a \cdot a \ldots a$ ehk $aaa \ldots a$ lühemalt a^n.

Arve a^2, a^3, a^4, ... a^n nimetame arvu a teiseks, kolmandaks, neljandaks, ... n-daks astmeks. Seega:

arvu a n-es aste on korrutis, milles on n võrdset tegurit a.

Arv a^1 on arvu esimene aste; me loeme ta võrdseks arvu a enesega.

Astendaja 1 jäetakse kirjutamata.

Avaldises a^n nimetame arvu a astendatavaks ehk astme aluseks, arvu n — astendajaks.

Astendaja näitab, mitu korda alus on võetud tegurina.

Astme leidmist nimetame astendamiseks.

Ülesanded.

72. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

1. $8 \cdot 8$ $\quad 10 \cdot 10$ $\quad a \cdot a$ $\quad b \cdot b$ $\quad x \cdot x$
2. $25 \cdot 25$ $\quad 40 \cdot 40$ $\quad c \cdot c$ $\quad y \cdot y$ $\quad t \cdot t$
3. $2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad 6 \cdot 6 \cdot 6$ $\quad m \cdot m \cdot m$ $\quad k \cdot k \cdot k$ $\quad u \cdot u \cdot u$
4. $5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad n \cdot n \cdot n$ $\quad p \cdot p \cdot p$ $\quad r \cdot r \cdot r$

5. $2 \cdot 2$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
6. $5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ $\quad d \cdot d \cdot d \cdot d$ $\quad a \cdot a \cdot a$
7. $0{,}2 \cdot 0{,}2$ $\quad x \cdot x$ $\quad b \cdot b \cdot b \cdot b$ $\quad c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$ $\quad 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$

73. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$ $\quad \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$ $\quad \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$

74. Arvuta järgmised astmed:

1. 2^5 $\quad 3^3$ $\quad 10^4$ $\quad 12^3$ $\quad 60^2$
2. 2^{10} $\quad 4^3$ $\quad 10^4$ $\quad 25^2$ $\quad 60^3$
3. $0{,}8^2$ $\quad 0{,}1^4$ $\quad 0{,}01^3$ $\quad 1^{13}$ $\quad 0^2$
4. $0{,}08^2$ $\quad 0{,}3^2$ $\quad 0{,}001^2$ $\quad 1^{10}$ $\quad 0^5$

75. Arvuta järgmised astmed:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ $\left(\frac{7}{10}\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ $\left(\frac{5}{8}\right)^3$ $\left(\frac{9}{10}\right)^3$

76. Kirjuta järgmised avaldised astendajateta:

1.	2.	3.	4.
2^2	e^3	$0{,}6^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$
3^3	x^5	$0{,}8^2$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$
4^4	y^2	$1{,}2^2$	$\left(\frac{2}{7}\right)^4$
5^3	k^4	$0{,}4^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$
2^5	z^3	$0{,}1^5$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$

77. Kirjuta järgmised avaldised astendajateta:

1.	2.	3.
$2^3 + 2^3$	$2^2 + 2^2 + 2^2$	$1^2 + 2^2 + 2^2$
$2^4 + 2^4$	$2^3 + 2^3 + 2^3$	$2^3 + 3^2 + 3^2$
$3^2 + 3^2$	$3^2 + 3^2 + 3^2$	$4 + 4^2 + 4^3$
$3^3 + 3^3$	$1^4 + 1^4 + 1^4$	$5^2 + 5^2 + 5^3$
$5^2 + 5^2$	$10^3 + 10^3 + 10^3$	$7^2 + 7^3 + 7^4$

78. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1.	2.
$c \cdot c + c \cdot c$	$aa + aa + aa$
$m \cdot m \cdot m + m \cdot m \cdot m + m \cdot m \cdot m$	$bbb + bbb$
$a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$	$xx + xx + xx + xx$
$a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b + a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$	$abb + abb$
$a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$	$aaaxx + aaaxx$

79. Kirjuta järgmised avaldised kordajateta ja astendajateta:

1.	2.	3.	4.
$3a$	$5c$	$4a$	$2m$
b^3	d^5	a^2	n^3
$2mm$	$4aa$	$2a^3$	$3x^2$
$x^2 + x^2 + x^2$	$b^3 + b^3$	$3b^3$	$2t^3$
$3nnn$	$2vvv$	$4x^2$	$3y^3$

80. Kirjuta algebra lühikirjas järgmised käsud:

1. võta arvu x teine aste ja korruta saadus 3-ga;
   võta arvu a kolmas aste ja korruta saadus 8-ga;
   liida arvu m ruut arvu n ruudu kahekordsega;
   lahuta arvu p ruudu kolmekordne arvu q ruudu viiekordsest;
   lahuta arvu M kuubist arvu N kuubi kahekordne.

2. korruta arvu a kolmekordne arvu b ruuduga;
   korruta arvu c kuup arvu d kuubi neljakordsega;
   jaga arvu m kahekordne arvu n ruuduga;
   jaga arvu p kuup arvu q ruudu neljakordsega;
   jaga arvu x neljas aste arvu a kuubi kümnekordsega.

§ 8. Sulud.

Ülesanne. Avalda üldkujul kahe järjestikuse täisarvu korrutis.

Lahendus. Tähistame väiksema kahest kõnesolevast täisarvust tähega N; sellele järgnev täisarv on siis $N + 1$. Kui kirjutaksime need arvud kõrvuti ja paigutaksime punkti korrutamismärgina nende vahele, saaksime

$$N \cdot N + 1.$$

Lugedes kirjutatut näeme, et esimeseks tehteks on korrutamine, teiseks liitmine; kirjutatud avaldis nõuab seega esmalt arvu N korrutamist arvuga N ja arvu 1 liitmist saadusega. Et ülesande lahenduses ära märkida nõuet esmalt toimetada arvude N ja 1 liitmist ja siis alles saaduse korrutamist arvuga N, võtame summa $N + 1$ sulgudesse ja kirjutame nõutava korrutise kujul

$$N \cdot (N + 1).$$

Erijuhul, kui N on näiteks arv 7, tähendab
avaldis $N \cdot (N + 1)$ arvu $7 \cdot 8$ ehk 56,
„ $N \cdot N + 1$ „ $7 \cdot 7 + 1$ „ 50.
Sellest arutlusest näeme, et

sulud on sümbolid, millega märgitakse tehete järjekorda.

Et ära hoida kahtlust selle kohta, missuguses järjekorras sooritada avaldises märgitud tehted, on kokku lepitud järgmiselt:

Kui avaldises sulgusid ei esine, tuleb esmalt sooritada astendamised, siis korrutamised ja jagamised, ning viimaks liitmised ja lahutamised selles järjekorras, milles esinevad märgid pluss ja miinus. Kui avaldises esineb sulgusid, tuleb kõigepealt sooritada need tehted, mida nõuavad sulgudes olevad tehtemärgid; kui see on toimunud, tuleb edasi käia eespool-toodud juhise järgi.

Näide. Avaldisest

$$a + bc^2 - \frac{m}{n}$$

loeme käsku: „Leia arvu c ruut; korruta saadus arvuga b; jaga arv m arvuga n; liida korrutis arvuga a; lahuta tulemusest varemini-saadud jagatis."
Seevastu avaldises

$$a + b\,(c^2 - \frac{m}{n})$$

näeme nõuet: „Leia arvu c ruut; jaga arv m arvuga n; lahuta esimesest saadusest teine; korruta tulemus arvuga b; liida saadus arvuga a."

Viimaks avaldis

$$(a + bc)^2 - \frac{m}{n}$$

ütleb meile: „Korruta arvud b ja c; liida saadud korrutis arvuga a; arvuta leitud summa ruut; jaga arv m arvuga n; lahuta jagatis eelmisest tulemusest."

Sulgudest on tarvitusel

ümmargused sulud	( )
nurgelised sulud	[ ]
loogelised sulud	{ }

Mõnedes küsimustes osutub vajalikuks kasutada kaht või isegi kolme liiki sulgusid. Näitena arvutame ühe sulgavaldise väärtuse:

$$6 - [14 - 2 \cdot (5 + 1)] = 6 - [14 - 2 \cdot 6] = 6 - 2 = 4.$$

Ülesanded.

81. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1. $20 + 3 \cdot 4 - 2$

$(20 + 3) \cdot (4 - 2)$

$20 + (3 \cdot 4 - 2)$

$(20 + 3) \cdot 4 - 2$

$20 + 3 \cdot (4 - 2)$

2. $39 - 4 \cdot 7 - 3$

$(39 - 4) \cdot (7 - 3)$

$39 - (4 \cdot 7 - 3)$

$(39 - 4) \cdot 7 - 3$

$39 - 4 \cdot (7 - 3)$

3. $(47 + 9) \cdot 4 + 9 \cdot 4$

$(47 + 9 \cdot 4 + 9) \cdot 4$

$47 + 9 \cdot (4 + 9 \cdot 4)$

$47 + 9 \cdot (4 + 9) \cdot 4$

$(47 + 9) \cdot (4 + 9) \cdot 4$

4. $8 \cdot \frac{192 - 67}{50}$

$\frac{209 + 416}{25} \cdot \frac{1}{17 - 12}$

$\frac{240}{4 + 8} : \frac{38 + 32}{29 - 15}$

$\frac{2 \cdot (4 + 6)}{37 - 12} - \frac{4}{8 - 3}$

$\frac{24 + 36}{(9 - 8) \cdot 5} - \frac{6 \cdot (101 - 92)}{(13 + 14) \cdot 2}$

5. $20 - [3 \cdot 4 - (2 - 1)]$
$20 - [3 \cdot (4 - 2) - 1]$
$20 - 3 \cdot [4 - (2 - 1)]$
$(20 - 3) \cdot [(4 - 2) - 1]$
$[(20 - 3 \cdot 4) - 2] - 1$

82. Vihik maksab m penni. Tosina vihikute ostmisel lubatakse hinnaalandust 1 penn vihikult. Kui palju maksab tosin vihikuid?

83. Avalda ristküliku ümbermõõt u tema pikkuse p ja laiuse l kaudu võimalikult väheste tehetega.

84. Arv n on täisarv. Avalda selle arvu ja täisarvude reas temale järgneva arvu korrutis.

85. Olgu ristküliku pool ümbermõõtu p sentimeetrit, üks ristküliku külgedest x sentimeetrit. Avalda ristküliku pindala.

86. Arv n on täisarv. Avalda nende kahe arvu korrutis, mis seisavad täisarvude reas üks arvu n ees ja teine tema järel.

87. Koolitöö kestab aastas N nädalat; muu osa aastast on puhkeaeg. Töö ajal saab õpilane taskuraha a marka nädalas, puhkeajal aga b marka nädalas. Kui suure summa saab õpilane taskuraha aastas?

88. Kaks matkajat alustavad ühtaegu teekonda ühest ja samast kohast ja liiguvad ühes ja samas suunas, esimene kiirusega m kilomeetrit tunnis, teine kiirusega n kilomeetrit tunnis. Kui kaugel on nad teineteisest t tunni pärast?

89. Õpik maksab a marka. Ostes N eksemplari, lubatakse hinnaalandust b penni õpikult. Mitu penni tuleb maksta N õpiku eest? Mitu marka see on?

90. Akna kõrgus on a meetrit ja b sentimeetrit; akna laius x sentimeetrit. Avalda akna pindala.

91. Sõnasta nõuded, mis matemaatilises lühikirjas avalduvad järgmiselt:

1.	2.	3.
$2(a-1)$	$a(2a+3)$	$(a+1)^2$
$7(b+2)$	$b:(a+2c)$	$2(b-5)^2$
$a(b+c)$	$c:(c-d)$	$(a+7b)^3$
$\frac{1}{3}(a-c)b$	$ab:(2a+b)$	$b(a+b)^2$
$\frac{a(a+b)}{4}$	$\frac{a}{b}\cdot(4a+5b)$	$c^3(a-b)$

§ 9. Avaldise numbriline väärtus.

Ülesanne 1. Kui suur on ringi pindala, kui ringi raadius on 10 sentimeetrit?

Lahendus. Ring, mille raadius on r sentimeetrit, omab pindala

$$\pi r^2$$

ruutsentimeetrit. Kõnesoleval juhul on $r = 10$, seega otsitav pindala on

$$\pi \cdot 10^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 314$$

ruutsentimeetrit.

Arv 314 on avaldise πr^2 numbriline väärtus tähe r väärtusel 10.

Ülesanne 2. Kui suur on kolmnurga pindala, kui tema alus on 16 sentimeetrit ja kõrgus on 28 sentimeetrit?

Lahendus. Kolmnurk, mille alus on a sentimeetrit ja kõrgus on h sentimeetrit, omab pindala

$$\frac{1}{2}ah$$

ruutsentimeetrit. Kõnesoleval juhul on $a = 16$, $h = 28$, seega otsitav pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 28 = 8 \cdot 28 = 224$$

ruutsentimeetrit.

Arv 224 on avaldise $\frac{1}{2}ah$ numbriline väärtus, kui $a = 16$ ja $h = 28$.

Ülesanne 3. Määra avaldise

$$\frac{2pq}{(p+q)^2}$$

numbriline väärtus, kui $p = 1{,}2$ ja $q = 5{,}6$.

Lahendus. Kirjutame avaldises tähtede asemele antud arvud, siis saame

$$\frac{2pq}{(p+q)^2} = \frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 5{,}6}{(1{,}2+5{,}6)^2}.$$

Lihtsuse mõttes arvutame eraldi lugeja ja nimetaja:

$$2 \cdot 1{,}2 \cdot 5{,}6 = 2{,}4 \cdot 5{,}6 = 13{,}44$$
$$1{,}2 + 5{,}6 = 6{,}8$$
$$6{,}8^2 = 46{,}24.$$

Seega

$$\frac{2pq}{(p+q)^2} = \frac{13{,}44}{46{,}24} = \frac{1344}{4624} = \frac{84}{289} \approx 0{,}29.$$

Kokkuvõttes:

selleks et saada avaldise numbrilist väärtust temas esinevate tähtede antud väärtustel, asetame avaldisse need väärtused tähtede asemele ja toimetame nendega tehted, mida avaldises seisvad tehtemärgid ette kirjutavad.

Ülesanded.

92. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $a + 2\frac{1}{2}$, kui $a = 1$
   $\frac{3}{4} + c$, kui $c = \frac{1}{4}$
   $q + q$, kui $q = 0{,}4$
   $z - 10$, kui $z = 10{,}1$
   $L - L$, kui $L = 5$

2. $5x$, kui $x = 3$
   $2\frac{1}{2}f$, kui $f = 4$
   $11N$, kui $N = 11$
   $0{,}7p$, kui $p = 10$
   $9D$, kui $D = 0$.

93. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $\frac{4B-1}{3}$, kui $B = 4$
   $\frac{10-2g}{12}$, kui $g = 1$
   $\frac{m+10}{25}$, kui $m = 20$

2. $\frac{Q-2}{Q}$, kui $Q = 2$
   $\frac{21+5r}{r}$, kui $r = 3$
   $\frac{7u-10}{u}$, kui $u = 2$

94. Arvuta:

1. a^2, kui $a = 3$
   f^3, kui $f = 4$
   H^4, kui $H = 0$
   u^2, kui $u = \frac{1}{2}$
   X^3, kui $X = \frac{3}{4}$

2. l^5, kui $l = 2$
   p^3, kui $p = 0{,}4$
   R^3, kui $R = 1{,}8$
   t^4, kui $t = \frac{3}{10}$
   w^5, kui $w = \frac{6}{7}$

95. Arvuta:

1. $3A^2$, kui $A = 4$
   $\frac{d^4}{10}$, kui $d = 5$
   $\frac{22R^2}{7}$, kui $R = 14$

2. $\frac{100}{f^2}$, kui $f = 8$
   $\frac{1000}{s^3}$, kui $s = 10$
   $\frac{2}{5u^2}$, kui $u = 0{,}1$

96. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$a + 2b$, kui $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$

$3f - 4g$, kui $f = 3$ ja $g = 1$

$mn - 10$, kui $m = 5$ ja $n = 7$

$7pq + 2$, kui $p = 0$ ja $q = 1$

$0{,}2uv - 1$, kui $u = 2$ ja $v = 10$.

97. Allpool on toodud 10 avaldist. Arvuta nende numbrilised väärtused tähtede antud väärtustel:

1. $\begin{cases} 3c + d \\ c = 0{,}3;\ d = 0{,}5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3(c + d) \\ c = 0{,}3;\ d = 0{,}5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} am - n \\ a = 7;\ m = 7; \\ n = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a(m - n) \\ a = 7;\ m = 7; \\ n = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{p + q}{p - q} \\ p = 2{,}7;\ q = 2{,}5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} v^2 + s^2 \\ v = \frac{1}{2};\ s = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3p^2 - 2q^3 \\ p = 1;\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

8. $\begin{cases} a(c^2 - a) \\ a = 0{,}5;\ c = 1{,}2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{u^2}{1 + v^2} \\ u = 5;\ v = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - a^2} \\ x = 3;\ a = 2 \end{cases}$

Sageli on tarvis teada ühe ja sama avaldise numbrilisi väärtusi tähe mitmel eriväärtusel. Sel puhul korraldame kogu arvutamistöö kindla plaani ehk **skeemi** järgi. See hõlbustab tööd, aitab hoiduda vigadest ja kergendab tunduvalt tulemuste kontrollimist. Selle selgitamiseks olgu järgmine näide.

Näide. Arvutame avaldise

$$\frac{1+2n}{(n-1)^2}$$

väärtused n-i täisarvuliste väärtuste jaoks vahemikus 2-st 8-ni. Saadused anname sajandikeni.

Töö korraldame nii, nagu allpool-seisvast skeemist näha; skeemi täidame veergude kaupa.

n	$2n$	$1+2n$	$n-1$	$(n-1)^2$	$\frac{1+2n}{(n-1)^2}$
2	4	5	1	1	5,00
3	6	7	2	4	1,75
4	8	9	3	9	1,00
5	10	11	4	16	0,69
6	12	13	5	25	0,52
7	14	15	6	36	0,42
8	16	17	7	49	0,35

Ülesanded.

98. Arvuta avaldise $12-t$ numbrilised väärtused, mis vastavad t täisarvulistele väärtustele 6-st 12-ni. Töö korralda kaheveerulise skeemi järgi.

99. Arvuta avaldise $3x-2$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 1-st 8-ni. Töö korralda kohase skeemi järgi.

100. Arvuta avaldise $2(x-1)$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 1-st 5-ni. Töö korralda kohase skeemi järgi.

101. Sõnasta eeskirjad, mille järgi tuleb arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $10(x + 5)$
   $\frac{3}{4}(1 - u)$
   $N(N + 2)$
   $(n - 1)^2$
   $\pi(R + a)^2$

2. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$
   $(n - 1)\ (n + 2)$
   $(c + 2h)\ (c - 2h)$
   $180 - (A + B)$
   $10d - (7d + 4)$

102. Teades, et

$$a = 24,\ b = 4,\ c = 5,\ d = 2 \text{ ja } h = 1,$$

leia järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $a - (bc - d) - h$
   $a - b(c - d) - h$
   $(a - b)c - d - h$
   $a - (bc - d - h)$
   $a - b(c - d - h)$

2. $a - [bc - (d - h)]$
   $a - [b(c - d) - h]$
   $a - b[c - (d - h)]$
   $(a - b)[(c - d) - h]$
   $[(a - bc) - d] - h$

§ 10. *n*-es paarisarv ja *n*-es paarituarv. *a* kümmet ja *b* ühte sisaldava arvu üldine kuju.

Ülesanne 1. Linnades nummerdatakse majad tänava ühel poolel paarisarvuliste numbritega 2, 4, 6, . . . , tänava teisel poolel paarituarvuliste numbritega 1, 3, 5, . . . Missugust numbrit kannab *n*-es maja tänava ühel poolel, missugust numbrit *n*-es maja tänava teisel poolel?

Lahendus. Tänava ühel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas . . .	maja
numbrit	2	4	6 . . .	
ehk	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$ . . .	

Seega n-es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n.$$

Tänava teisel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas . . .	maja
numbrit	1	3	5	. . .
ehk	$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$	. . .

Seega n-es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n - 1.$$

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

n-es paarisarv on $2n$,
n-es paarituarv on $2n - 1$.

Ülesanne 2. Kirjutusmaterjali ostuarve tasutakse a kümnepennise ja b ühepennise rahaga. Kui suur on ostuarve?

Lahendus.

1 kümnepennine on väärt 10 penni,
a kümnepennist on väärt $a \cdot 10$ penni,
ehk, muutes tegurite järjekorda, $10 \cdot a$ penni.

Kokku a kümnepennist ja b ühepennist raha on väärt

$$10 \cdot a + b$$

penni. Seega on ostuarve suurus leitud.

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

arv, mis koosneb a kümnest ja b ühest, avaldub kujul $10a + b$.

Ülesanded.

103. Kui suur on

8-s paarisarv?
13-s paarisarv?
10-s paarituarv?
25-s paarituarv?
30-s paarisarv?

104. Kirjuta alljärgnevad arvud kujul $10a + b$:

25	234
32	567
17	3456

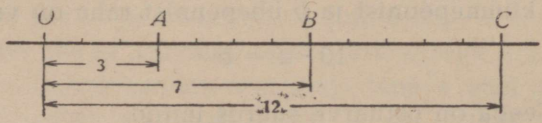
§ 11. Arvude kujutamine sirgel.

Kujutame arvud

3 7 12

sirgjoonel. Selleks võtame sirge joone (joonis 1), valime temal mõne punkti, märgime selle kriipsukesega ja kirjutame selle kriipsu vastu tähe *O*. Valime sobiva pikkusühiku, näiteks 5 mm, ja kanname sirgele, lähtudes punktist *O*, järgmised lõigud:

$OA = 3 \cdot 5$ mm $OB = 7 \cdot 5$ mm $OC = 12 \cdot 5$ mm



Joonis 1.

Lõigud *OA*, *OB* ja *OC* kujutavad antud arve 3, 7 ja 12. Neil lõikudel on ühine algus-punkt *O*. Seega on igaüks neist lõikudest määratud

niipea, kui on teada tema l õ p p - p u n k t. Et punktid A, B ja C määravad lõike OA, OB ja OC ja need lõigud kujutavad arve 3, 7 ja 12, siis ütleme ka, et

p u n k t i d	A	B	C
k u j u t a v a d a r v e	3	7	12

ehk teisiti:

a r v u d 3, 7 j a 12 o n k u j u t a t u d p u n k t i d e g a A, B ja C.

Sirget, millel kujutame arve, nimetame a r v t e l j e k s.
Kujutamiseks valitud pikkusühikut nimetame k u j u t a m i s - ü h i k u k s.

Kokkuvõttes:

selleks et kujutada joonisel arvu x, võtame mõne sirge arvteljeks; valime sellel teljel mõne punkti O alguseks; valime sobiva kujutamisühiku; kanname, lähtudes algusest, teljele lõigu OX, mille pikkus on x ühikut; punkt X kujutab siis arvu x.

Ülesanded.

105. Kujutamisühik on 10 mm. Kui pikk lõik kujutab arvu

2 5 7 12 19?

106. Kujutamisühik on 20 mm. Kui pikk lõik kujutab arvu

$2\frac{1}{2}$ $3\frac{3}{4}$ $4\frac{4}{5}$ 5,6 7,2 10,9?

107. Kujutamisühik on 1000 mm. Kui pikk lõik kujutab arvu

0,008 0,026 0,072 0,160?

108. Joonesta astmik ühikuga 20 mm ja kujuta sellel arvud $3\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 0,5; $1\frac{3}{4}$.

109. Joonesta püstsihis astmik ühikuga 12 mm ja kujuta sellel arvud

9; 4; 6; 8,2; 14; $5\frac{3}{4}$; 7; 13; 0; 1.

110. Kujutamisühik on 2 mm. Missugust arvu kujutab lõik

82 mm 137 mm 168 mm 226 mm?

111. Kujutamisühik on 100 mm. Missugust arvu kujutab lõik

13 mm 47 mm 98 mm 128 mm?

112. Kujutamisühik on 240 mm. Missugust arvu kujutab lõik

100 mm 150 mm 200 mm 300 mm?

113. Arvu 382 soovitakse kujutada lõiguna. Kasutada on selleks 200 mm pikkune riba paberit. Kui pikk tuleb valida kujutamisühik?

114. Arvu 0,0825 soovitakse kujutada lõiguna. Kasutada on selleks 150 mm pikkune riba paberit. Kui pikk tuleb valida kujutamisühik?

§ 12. Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine.

Ülesanne. On antud avaldis

$$\frac{1}{2}x\,(x-1).$$

Arvuta ja kujuta selle avaldise numbrilised väärtused x-i täisarvuliste väärtuste puhul 1-st 6-ni.

L a h e n d u s. Kõnesolevate numbriliste väärtuste arvutamise toimetame allseisvas skeemis:

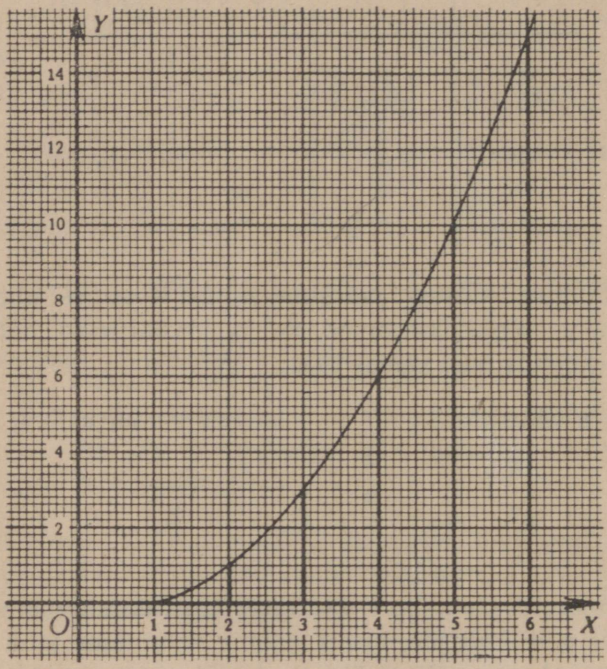
x	$x-1$	$x(x-1)$	$\frac{1}{2}x(x-1)$
1	0	0	0
2	1	2	1
3	2	6	3
4	3	12	6
5	4	20	10
6	5	30	15

Lühiduse mõttes märgime antud avaldise üheainsa tähega y. Kokkukuuluvad x- ja y-väärtused leiduvad meie skeemis ikka samas reas:

x-väärtusele 1 vastab y-väärtus 0
„ „ 2 „ „ „ 1
„ „ 3 „ „ „ 3
jne.

Kõnesolevate x- ja y-väärtuste kokkukuuluvust saame esitada näitlikult järgmiselt (joonis 2): võtame lehe millimeeter-paberit; valime ühe seal leiduvaist sirgeist x-teljeks; valime sellel mõne punkti O alguseks; valime sobiva pikkusühiku, näiteks 1 cm, ja kujutame x-i väärtused tuntud viisil punktidena x-teljel; punktid tähistame numbritega 1, 2, 3, 4, 5, 6. Punktis O tõmbame sirge risti x-teljega; selle sirge nimetame y-teljeks. Punktidest 1, 2, 3, 4, 5, 6 tõmbame sirged rööbiti y-teljega; valime paraja pikkusühiku, näiteks 0,5 cm, ja kanname praegunimetatud sirgeile lõigud 0, 1, 3, 6, 10, 15. Need lõigud kujutavad antud avaldise numbrilisi väärtusi, mis vastavad avaldises esineva tähe antud väärtustele. Saa-

dud lõikude lõpp-punktid ühendame kõveraga. See kõver kujutab avaldise y-i väärtuse muutumist x-i muutudes.



Joonis 2.

Kokkuvõttes:

Selleks et kujutada avaldise *y*-i väärtuse muutumist *x*-i muutudes, võtame mõne sirge *x*-teljeks ja märgime sellel teljel alguse O. Sellest punktist tõmbame sirge risti eelmisega ja nimetame selle sirge *y*-teljeks. Valides kohase pikkusühiku kujutame *x*-väärtused *x*-teljel punktidena; saadud punktidest tõmbame sirged rööbiti *y*-teljega; valides sobiva pikkusühiku kujutame neil sirgeil *y*-väärtused lõikudena; läbi saadud lõikude lõpp-punktide joonistame kõvera; see kõver kujutab avaldise *y*-i väärtuse muutumist *x*-i muutudes.

Ülesanded.

115. Kujuta graafiliselt avaldise $2x + 1$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i väärtustele 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 ja 12.

116. Kujuta graafiliselt avaldise $\frac{x+3}{x}$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 1-st 5-ni.

117. Kujuta graafiliselt avaldise $\frac{x+2}{x-1}$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 2-st 10-ni.

118. Kujuta graafiliselt avaldise $3x - 3$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i väärtustele 1; $1\frac{1}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$; 3; $3\frac{1}{2}$; 4; $4\frac{1}{2}$ ja 5.

119. Kujuta graafiliselt avaldise $12 - 0{,}5x^2$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 0-st 4-ni.

120. Kujuta graafiliselt avaldise $x(10 - x)$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 0-st 10-ni.

121. Kujuta graafiliselt avaldise $\frac{1}{2}x(x - 1)$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele 1-st 5-ni.

§ 13. Valem.

Valemiks nimetame matemaatilisis sümboleis kirjutatud juhist, mille järgi ülesande andmeist arvutatakse otsitav.

Näiteks juhise „et arvu p saada, tuleb arv h korrutada 100-ga, arvud t ja h liita ja esimene saadus jagada teisega" kirjutame valemina kujus

$$p = \frac{100\ h}{t + h}.$$

Seda loeme lühidalt nii: „p on võrdne murruga, mille lugejaks on sada h ja nimetajaks arvude t ja h summa."

Valem koosneb ikka kahest osast: vasakul pool võrdusmärki seisab otsitava tähis; paremal pool võrdusmärki seisavad andmete tähised, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega; need märgid näitavad, mida peab andmetega tegema, et otsitavat saada.

Eriti sageli puutume valemitega kokku kaudse mõõtmise küsimusis.

Pikkuste mõõtmisel loendame, mitu pikkusühikut või selle osa mahub mõõdetavasse lõigusse. Säärast mõõtmisviisi nimetame otseseks. Enamik teisi mõõtmisi, näiteks pindala, ruumala ja aine erikaalu mõõtmised, toimuvad kaudsel viisil: mõõdetakse otseselt mõned vajalikud andmed ning otsitav suurus saadakse neist andmeist alles arvutamise teel.

Ülesanne. Kolmnurga poolt ümbermõõtu tähistatakse tähega p; kolmnurga küljed on a, b ja c.

Anna valem kolmnurga poole ümbermõõdu arvutamiseks.

Lahendus. Leiame esiteks kolmnurga ümbermõõdu, selleks arvutame külgede summa:

$$a + b + c.$$

Poole ümbermõõdu leidmiseks jagame külgede summa arvuga 2, saame

$$\frac{a + b + c}{2}.$$

Vastus. Kolmnurga poole ümbermõõdu valem on

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

122. Olgu kolmnurga ümbermõõt märgitud tähega u; olgu kaks kolmnurga külge a ja b. Anna valem kolmnurga kolmanda külje arvutamiseks.

123. Kolmnurga nurkade summa on 180°. Olgu kolmnurga üks nurk kraadides α, teine nurk β. Anna valem kolmnurga kolmanda nurga arvutamiseks.

124. Mööblikauplusest ostetakse laud, hinnaga l marka, ja 12 tooli, hinnaga t marka tool. Anna ostuarve valem.

125. Rong koosneb vedurist ja n vagunist. Vedur kaalub P tonni, vagun Q tonni. Anna valem rongi kogukaalu arvutamiseks.

126. Ristkülikukujulisele ehituskrundile, mille mõõtmed on u ja v meetrit, ehitati maja, põhipindalaga a ruutmeetrit. Anna valem õue ja aia jaoks kasutada jäänud maa pindala arvutamiseks.

127. Taluperemees müüs a kg rukist, hinnaga b penni kg, ja c kg nisu, hinnaga d penni kg. Anna valem rahasumma arvutamiseks, mille taluperemees sai vilja müügist.

128. Raamatu lehekülje mõõtmed on p cm ja l cm ning kirjaga kaetud pindala mõõtmed on k cm ja n cm. Anna valem raamatu lehekülje tekstivaba pindala arvutamiseks.

129. Ristkülik mõõtmetega p ja q meetrit on oma diagonaaliga lõigatud pooleks. Anna valem tekkinud kolmnurkade pindalade arvutamiseks.

130. Kuubi serva pikkus on a cm. Anna kuubi täispindala valem.

131. Tuleta valem liimvärvi hulga arvutamiseks, mis tarvilik toa seinte värvimiseks, teades, et põranda mõõtmed on p ja l meetrit, toa kõrgus k meetrit ja 1 m^2 värvimiseks kulub v liitrit värvi. Akende ja uste pindalad jäta maha arvamata.

132. Risttahukakujulise veepaagi põhja mõõtmed on a ja b meetrit. Veepind seisis esiti h cm allpool normaalset taset ja tõusis pumba töötades k cm üle normaalse taseme. Anna valem paaki pumbatud veehulga arvutamiseks.

133. Raamat on p millimeetrit paks; kaane paksus on q millimeetrit. Raamatus on n lehte. Anna raamatu paberi paksuse valem.

134. Allpool on toodud valemid mõnede suuruste arvutamiseks ja selleks vajalikud andmed. Leia need suurused.

1. $\begin{cases} P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot k \\ a = 15,\ k = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot h \\ P = 6,\ h = 2\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} l = \frac{K}{V} \\ K = 222{,}5,\ V = 25 \end{cases}$

4. $\begin{cases} P = \pi \cdot r^2 \\ \pi = \frac{22}{7},\ r = 10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ \pi = 3{,}14,\ r = 5,\ h = 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} Q = \frac{a+b}{2} \cdot k \\ a = 4,\ b = 8,\ k = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ \pi = 3{,}14,\ r = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) \\ \pi = 3\frac{1}{7},\ r = 6,\ h = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} G = \frac{T^2}{4\pi^2 l} \\ T = 1,\ \pi = 3{,}14,\ l = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} h = \frac{V}{\pi a^2} \\ V = 10,\ \pi = \frac{22}{7},\ a = 2 \end{cases}$

135. Paberossikestade-karpi, mille sisemised mõõtmed on a, a ja b sentimeetrit, paigutatakse 3 tikukarpi, mille välimised mõõtmed on l, m ja n sentimeetrit. Anna valem esimeses karbis vabaks jääva ruumala arvutamiseks.

136. Ametniku aastatulu on a marka. Sellest summast on b marka tulumaksust vaba, muult osalt tuleb tasuda $p\%$ tulumaksu. Anna valem ametniku tulumaksu arvutamiseks.

§ 14. Üksliige. Hulkliige. Hulkliikme koondamine.

Üksliikmed on niisugused avaldised, milles viimane tehe ei ole liitmine ega lahutamine.

Üksliikmed on näiteks avaldised:

$$a^2 \qquad 3a^2b \qquad 0{,}7a \cdot 0{,}5cx^2 \qquad N \cdot (N+1)$$

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^3 \qquad \frac{0{,}5\,n}{7\,x^2} \qquad \frac{a+2}{5\,m} \qquad \frac{n^2}{(n+5)^3}$$

Üksliikmetest koostatud summad ja vahed kannavad ühist nimetust h u l k l i i g e. Seega:

hulkliikmed on niisugused avaldised, milles viimane tehe on kas liitmine või lahutamine.

Seega ainult viimane tehe avaldises määrab, kas avaldis on üksliige või hulkliige.

Üksliiget nimetame korrutiseks, astmeks või jagatiseks sedamööda, kas viimane tehe temas on korrutamine, astendamine või jagamine.

Hulkliiget nimetame summaks või vaheks sedamööda, kas viimane tehe temas on liitmine või lahutamine.

Hulkliikmed on näiteks avaldised

$$a + 2b \qquad 3m^2 + n^2 \qquad 7cd + 4f^2$$
$$f^2g - h^3 \qquad (N + 1)^2 - 7 \qquad pq - \pi r^2$$
$$x^2 - 3x + 4 \qquad x^3 + px + q.$$

Hulkliiget, mis koosneb ainult kahest üksliikmest, nimetame kaksliikmeks ehk binoomiks; hulkliiget, mis koosneb kolmest üksliikmest, nimetame kolmliikmeks ehk trinoomiks.

Näiteks hulkliikmed

$$1 + x \qquad 2a + b \qquad 4a^2 - x^2$$

on binoomid, seevastu hulkliikmed

$$1 + x + x^2 \qquad 3u^2 - 2u + 1 \qquad az^2 + bz + c$$

on trinoomid.

Iga üksliige, mis esineb hulkliikme avaldises kas liidetavana või lahutatavana, on selle hulkliikme liikmeks.

Näiteks on hulkliikme $5p^2 + 6pq - 1\frac{2}{3}q^2$ liikmeiks avaldised

$$5p^2 \qquad 6pq \qquad 1\frac{2}{3}q^2.$$

Üksliikmeid, mis erinevad ainult kordajailt, nimetame sarnaseiks.

Niisugusteks on näiteks üksliikmed

$$a^3b^2c \qquad \frac{1}{2}a^3b^2c \qquad 10a^3b^2c,$$

samuti

$$5\frac{p^2}{mn} \qquad 0{,}6\frac{p^2}{mn} \qquad \frac{1}{2}\frac{p^2}{mn}.$$

Kui hulkliikmes esineb sarnaseid liikmeid, siis on võimalik hulkliiget koondada, asendades mitme sarnase liikme summa või kahe sarnase liikme vahe üheainsa liikmega. Nii on

$$15a - 4a + a = 11a + a = 12a.$$

Toimingu üksikuid samme loeme nii: viisteist a miinus neli a on üksteist a; üksteist a pluss üks a on kaksteist a.

Toimingut, millega hulkliikmes mitme sarnase liikme summa või kahe sarnase liikme vahe asendatakse üheainsa liikmega, nimetame hulkliikme koondamiseks.

Näited.

1. $9cx - 5cx + 8cx - 9cx = 3cx.$
2. $10Nh^2 + Nh^2 - 7Nh^2 - 3Nh^2 = Nh^2.$
3. $\left(\frac{a}{x}\right)^3 + 2\frac{a^2}{x} + 3\frac{a^2}{x} - \left(\frac{a}{x}\right)^3 - 7 = 5\frac{a^2}{x} - 7.$
4. $5ab + 3ab + 7cd - 2ab - 4cd = 6ab + 3cd.$

Ülesanded.

137. Allpool on antud rida avaldisi. Nimeta iga avaldise puhul viimasena esinev tehe; määra, kas avaldis on summa, vahe, korrutis, jagatis või aste, ja otsusta, kas avaldis on üksliige või hulkliige.

1.	2.	3.
$a + bc$	$r - (s + t)$	$\frac{a+b}{m-n}$
$a(b + c)$	$fg - hk$	$\frac{h(c-d)}{p+q}$
$pq - r$	$l : m + n$	$(a + 2)^2$
$(a - b)c$	$\frac{a+x}{c}$	$a^3 - 5a$
$l : (m + n)$	$7(ab + uv)$	$a^3 - c(b^2 - d^2)$

138. Allpool järgneb rida avaldisi. Selgita, missugused neist on üksliikmed, missugused on hulkliikmed.

1.	2.	3.
$3m + 11$	$n(4m + n^2)$	$\frac{t-g}{M}$
$4pq$	$u^2 - v^2$	$\frac{100p}{q+p}$
$\frac{3a+b}{2c}$	$(ab + cd)^2$	$\frac{h}{k} - l$
$x^2 + 6x$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$x^2 - 5x + 9$
$4f - g$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$a^2 - mnb^2$

139. Liida järgmised avaldised ja kirjuta saadus üksliikmena:

1.	2.
$4b$ ja $7b$	m, $2m$ ja $7m$
$8{,}1c$ ja $5{,}4c$	$0{,}9n$, $3n$ ja $5{,}4n$
$\frac{3}{7}d$ ja $1\frac{1}{7}d$	$\frac{1}{3}p$, $\frac{3}{8}p$ ja $1\frac{7}{12}p$
$4\frac{5}{6}g$ ja $\frac{29}{30}g$	$3q$, $\frac{3}{2}q$ ja $\frac{2}{3}q$
$\frac{3}{4}h$ ja $0{,}25h$	$\frac{1}{2}r$, $3r$ ja $6\frac{5}{6}r$

140. Lahuta esimesest avaldisest teine ja kirjuta saadus üksliikmena:

1.	2.
$4u$; $2\frac{7}{8}u$	x; $0{,}75x$
$3\frac{4}{5}v$; $1\frac{1}{3}v$	$4y$; $3{,}42y$
$10w$; $\frac{7}{10}w$	$7{,}85z$; $0{,}99z$
N; $\frac{7}{12}N$	$3\frac{1}{3}i$; $2\frac{1}{2}i$
$7\frac{1}{2}h$; $6\frac{4}{5}h$	$5\frac{4}{5}m$; m

141. Koonda järgmised hulkliikmed:

1. $2a + 4a + 6a$
   $3d + 5d + 4d$
   $8x + 4x + 3x$
   $9k + 3k + k$
   $17e + 3e + 8e$

2. $9p - 6p + 2p$
   $6r - 4r + 5r$
   $8a - 3a - 4a$
   $4y + 5y - 7y$
   $7t - 6t + t$

3. $0{,}7m + 0{,}6m$
   $3{,}2p + 2{,}3p + 1{,}5p$
   $0{,}5s + 8s + 0{,}8s$
   $1{,}5t + 2{,}3t + 0{,}4t$
   $8q + 3{,}4q + 5{,}7q$

4. $4{,}4b + 3{,}1b - 7b$
   $2{,}7z - 2{,}5z - 0{,}1z$
   $3d - 1{,}8d - 1{,}1d$
   $5{,}6h + 3{,}3h - h$
   $k + 0{,}2k - 0{,}8k$

142. Koonda järgmised hulkliikmed:

1. $a + 5a - 2a + 7b + 3b$
   $16x - 11x + t + 3t - 2t$
   $15s + 13r + 7r - 9s - 9r$
   $12p - 3p + 8q - 3q + p$
   $13y + 19z - 4z - 7y - 5z$

2. $7a + a + 2$
   $4c - 3c + 1$
   $6r + 3r + 1$
   $3b + 3 + 12b$
   $4d + 1 - 3d$

143. Koonda järgmised hulkliikmed:

1. $a^2 + a^2$
   $a^2 + a^2 + a^2$
   $a^3 + a^3$
   $x^3 + x^3 + x^3$
   $x^2 + x^2 + x^2 + x^2$

2. $a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2$
   $n^3 + m^3 + n^3 + m^3 + n^3 + m^3$
   $m^2 + m^3 + m^3 + m^3 + m^3$
   $x^2 + y^3 + x^2 + y^3 + y^3 + x^2$
   $u^3 + u^3 + v^4 + v^4 + v^4$

3. $8x^3 + x^3$
   $2{,}5z^2 + 0{,}5z^2$
   $7y^3 - 4y^3$
   $2\frac{1}{3}e^3 - 1\frac{2}{3}e^3$
   $1{,}7c^2 - 1{,}3c^2$

4. $4a^2 + 6a^2 + 5a^3 + 3a^3$
   $8b^3 + 6b^2 + 7b^3 + 4b^2$
   $9x^2 + 5y^2 + 3x^2 - 4y^2$
   $3m^2 + m^2 - 1 - 3m^2$
   $7r^3 - 3r^3 + r^3 + 9$

5. $8ab + 3ab - 7ab$

$12mn + 11mn - 6mn$

$9pq - 5pq - 3pq$

$3rs + 5rs - 7rs$

$4ik - 3ik + ik$

6. $7\frac{m}{n} + 2\frac{m}{n} - 8\frac{m}{n}$

$4\frac{rs}{t} - 3\frac{rs}{t} + 2\frac{rs}{t}$

$0{,}1\frac{k^2}{p} + 0{,}8\frac{k^2}{p} - 0{,}9\frac{k^2}{p}$

$5\frac{x}{u} + 2\frac{x}{u} + 4\frac{z}{v} + 3\frac{z}{v}$

$9\frac{a}{b} + 4\frac{a}{b} + 8\frac{b}{a} + 7\frac{b}{a}$

144. Koonda järgmised hulkliikmed:

1. $6ab - 1{,}7ab + 2{,}8ab - 5{,}3$

$7cd + 7cd + 7cd - 12cd$

$4gh + 9gh - 11gh + gh + 24$

$5a^2 + 7a^2 - 6a^2 - a^2 - 5a^2 + 17$

$pq^2 + 7pq^2 - 7{,}4pq^2 + 0{,}6pq^2$

2. $2x^2 + 1{,}8x^2 + 5{,}3xy - 0{,}1x^2$

$6z^3 + 10z^3 - 7z^3 - 7z^3 - 12$

$x^2 + 13z^3 + 5x^2 - 9z^3 - 3x^2 + 1$

$\frac{pq}{r} + 4\frac{pq}{r} - 0{,}7\ \frac{pq}{r}$

$8\ \frac{x^2}{z} + 8{,}8\ \frac{x^2}{z} - 0{,}8\ \frac{x^2}{z}$

§ 15. Algebralised teisendused.

Hulkliikme koondamisel muutub hulkliikme väline kuju, mitte aga hulkliikme numbriline väärtus: igasuguse väärtuse asetamisel tähe asemele hulkliikme algkujusse ja hulkliikme koondatud kujusse saame ikka ühe ja sellesama tulemuse. Asetades näiteks võrduses

$$15a - 4a + a = 12a$$

tähe a asemele väärtuse 4, saame

$$15a - 4a + a = 15 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 4 = 60 - 16 + 4 =$$
$$44 + 4 = 48$$

ja samuti $12a = 12 \cdot 4 = 48$.

Toiminguid, mille puhul muutub küll algebralise avaldise kuju, mitte aga tema numbriline väärtus, nimetame algebralisteks teisendusteks.

Teisenduse tulemuse kontrollimine toimub sel teel, et me nii avaldise lähtekujusse kui ka teisendatud kujusse asetame tähtede asemele ühed ja samad arvud; kui tulemused on võrdsed, siis võib arvata, et teisendus on sooritatud õieti.

Algebraliste avaldiste teisendamise peaeesmärgiks on nende avaldiste lihtsustamine. Näites

$$15a - 4a + a = 12a$$

nõuab avaldise algkuju numbrilise väärtuse arvutamine 4 tehet, avaldise lõppkuju numbrilise väärtuse arvutamine toimub üheainsa tehtega.

§ 16. Täht tundmatu arvu tähisena.

Tundmatu arvu märkimine tähega on aluseks kõigile üldisile võtteile, mida algebra pakub ülesannete lahendamiseks.

Näide. Ärimehed Kask ja Mänd asutavad ettevõtte, kusjuures Mänd paigutab sellesse 2 korda suurema summa kui Kask. Ettevõte põleb maha. Kindlustusselts tasub kindlustussumma 4800 marka. Kui palju langeb sellest summast Kasele?

Me lahendame ülesande järgmiselt: tähistame Kasele langenud, esiotsa tundmatu markade arvu mingi tähega, näiteks tähega s. Et Männi osakapital oli 2 korda suurem Kase osakapitalist, siis peaks temale langema kindlustussummast ka 2 korda suurem osa kui Kasele, seega $2s$ marka. Kokku mõlemale langes $(s + 2s)$ marka; see summa on aga teada, nimelt 4800 marka. Tähendab

$$s + 2s = 4800,$$

ehk

$$3s = 4800.$$

Selles võrduses s on tundmatu ehk otsitav.

Meie võrdus ütleb, et kolm s on 4800; üks s on kolm korda väiksem, seega

$$s = 1600.$$

Niisiis langeb Kasele 1600 marka.

Märkus. Tundmatuid tähistatakse tavaliselt tähestiku viimaste tähtedega, näiteks x, z, u, s. Tundmatu tähisena on aga võimalik kasutada ka iga teist tähte, näiteks a, f, N, Q.

Ülesanne 1. Suurendades arvu 12 korda saan 84. Leia arv.

Lahendus. Tähistades otsitava arvu tähega a, võib ülesande kirjutada lühidalt järgmiselt:

$$12 \cdot a = 84.$$

Arvu a leidmiseks jagame 84 12-ga, saame

$$a = \frac{84}{12} = 7.$$

Vastus. Otsitav arv on 7.

Ülesanne 2. Missugune peab olema tähe x väärtus, et kehtiks võrdus

$$x - 10 = 15?$$

Lahendus. Võrdusest näeme, et kui arvust x lahutada 10, siis saame 15. Seega arv x on 15-st 10 võrra suurem:

$$x = 15 + 10 = 25.$$

Vastus. $x = 25$.

Ülesanded.

145. Allpool järgneb rida ülesandeid. Tähista otsitav arv mingi tähega. Kirjuta selle tähe abil ülesanne sõnadeta ja leia vastus.

1. Korrutades arvu arvuga 7 saan 28. Leia arv.
   Jagades arvu arvuga 13 saan 3. Leia arv.
   Lahutades arvust arvu 9 saan 9. Leia arv.
   Liites arvuga arvu 11 saan 11. Leia arv.
   Lahutades arvu arvust 13 saan 1. Leia arv.

2. Suurendades arvu 5 korda saan 20. Leia arv.
   Suurendades arvu 5 võrra saan 13. Leia arv.
   Vähendades arvu 8 võrra saan 9. Leia arv.
   Vähendades arvu 8 korda saan 9. Leia arv.
   Vähendades arvu 4 võrra saan 7. Leia arv.

146. Missuguste tähe x väärtuste puhul on kehtivad alljärgnevad võrdused?

1.	2.	3.
$3x = 9$	$8x = 72$	$14x = 0$
$2x = 12$	$11x = 121$	$2x = 2$
$5x = 5$	$12x = 3$	$12x = 6$
$4x = 20$	$21x = 7$	$6x = 15$
$6x = 0$	$10x = 1$	$16x = 36$

147. Missuguste z väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused?

1. $\frac{1}{5}z = 6$; $\frac{1}{2}z = 7$; $\frac{1}{3}z = 5$; $\frac{1}{6}z = 8$; $\frac{1}{10}z = 1$
2. $\frac{z}{7} = 3$; $\frac{z}{4} = 6$; $\frac{z}{8} = 7$; $\frac{z}{15} = 0$; $\frac{z}{12} = 5$
3. $\frac{1}{2}z = 0{,}1$; $\frac{1}{7}z = 0{,}7$; $\frac{1}{12}z = 1$; $\frac{1}{20}z = 1{,}5$; $\frac{1}{16}z = 3{,}5$

148. Missuguste sümboli u väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused?

1. $u + 2 = 7$; $u + 7 = 15$; $u + 5 = 9$; $u + 3 = 4$; $u + 8 = 12$
2. $3 + u = 9$; $8 + u = 16$; $6 + u = 11$; $3 + u = 5$; $9 + u = 17$
3. $15 = 9 + u$; $u = 15 + 11$; $23 = 18 + u$; $19 + u = 32$; $17 = 10 + u$

149. Missuguste tähe s väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused?

1. $s - 6 = 3$; $s - 2 = 9$; $s - 3 = 1$; $s - 5 = 3$; $s - 4 = 6$
2. $5 - s = 1$; $9 - s = 7$; $8 - s = 5$; $2 - s = 2$; $7 - s = 6$
3. $17 - s = 0$; $8 = 9 - s$; $10 = s - 11$; $15 - s = 6$; $9 = 16 - s$

§ 17. Võrrand.

Otsitava tegelik määramine toimus eelmises näites võrduse abil

$$s + 2s = 4800.$$

Võrdust, mille kaudu määratakse otsitav, nimetame võrrandiks.

Igal võrrandil on v a s a k p o o l ja p a r e m p o o l; esimene seisab võrdusmärgi eel, teine võrdusmärgi järel.

Otsitava arvutatud väärtust nimetame võrrandi l a h e n d i k s. Võrrandi lahendi leidmist nimetame võrrandi l a h e n d a m i s e k s.

Leitud lahendi kõlblikkuse proovimiseks — l a h e n d i k o n t r o l l i m i s e k s — asetame selle lahendi otsitava asemele nii võrrandi vasakusse kui ka paremasse poolde; kui tulemused on võrdsed, on tegemist õige lahendiga, vastasel korral mitte. Esimesel juhul ütleme, et asetatav arv r a h u l d a b võrrandit, teisel juhul, et ta võrrandit e i r a h u l d a. Nii näeme, et

võrrandil	on lahend	sest
$\frac{2u}{u-1}=\frac{8}{3}$	$u=4$	$\frac{2\cdot 4}{4-1}=\frac{8}{3}$.

V õ r r a n d i l a h e n d a m i s e n ä i t e i d.

N ä i d e 1. Lahendame võrrandi

$$3u-2=7.$$

Exlibris

Arutame küsimust nõnda: $3u-2=7$, tähendab $3u$ on 2 võrra suurem kui 7, seega ta on $7+2$ ehk 9; niisiis $3u=9$; ü k s u on 3 korda väiksem, seega $u=3$.

Kontroll: kui $u=3$, siis $3u-2=3\cdot 3-2$ ehk $9-2$ ehk 7, nagu peab olema.

N ä i d e 2. Lahendame võrrandi

$$\frac{2}{5}t+13=21.$$

Näeme: $\frac{2}{5}t + 13 = 21$, järelikult $\frac{2}{5}t$ on 13 võrra 21-st väiksem, seega $21 - 13$ ehk 8; niisiis $\frac{2}{5}t = 8$. Kui $\frac{2}{5}$ arvust on 8, siis arv on $8 : \frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$. Seega

$$t = 20.$$

Kontroll: kui $t = 20$, siis $\frac{2}{5}t + 13 = \frac{2}{5} \cdot 20 + 13$ ehk $8 + 13$ ehk 21, nagu peab olema.

Ülesanded.

150. Lahenda järgmised võrrandid:

1.	2.	3.
$0{,}4y = 12$	$0{,}31y = 0{,}93$	$0{,}4y = 0{,}04$
$0{,}7y = 35$	$0{,}17y = 6{,}8$	$0{,}6y = 0{,}54$
$0{,}1y = 28$	$4{,}2y = 0{,}21$	$0{,}9y = 2{,}7$
$0{,}8y = 24$	$5{,}3y = 0{,}106$	$3{,}7y = 22{,}2$
$0{,}6y = 18$	$6{,}5y = 1{,}3$	$0{,}01y = 0{,}1$

151. Lahenda järgmised võrrandid:

1.	2.	3.
$\frac{2}{3}x = 6$	$\frac{5}{2}y = 35$	$1\frac{4}{7}z = 22$
$\frac{4}{5}x = 8$	$\frac{7}{3}y = 56$	$6\frac{1}{5}z = 93$
$\frac{3}{4}x = 9$	$\frac{12}{5}y = 24$	$7\frac{3}{8}z = 0$
$\frac{8}{11}x = 32$	$\frac{9}{4}y = 45$	$9\frac{1}{4}z = 185$
$\frac{5}{13}x = 5$	$\frac{10}{7}y = 60$	$2\frac{2}{5}z = 48$

152. Lahenda järgmised võrrandid:

1.	2.	3.
$x + 2{,}2 = 9$	$y + 0{,}4 = 3{,}1$	$3 + z = 4{,}7$
$x + 0{,}6 = 6$	$1{,}9 - y = 1{,}5$	$7 - z = 1{,}2$
$x - 11{,}6 = 2$	$4{,}1 - y = 4{,}1$	$0{,}4 - z = 0{,}2$
$x - 5{,}7 = 9$	$7{,}5 + y = 9{,}2$	$z + 4{,}1 = 8{,}3$
$x - 3{,}4 = 1{,}6$	$8{,}4 - y = 5{,}9$	$z - 2{,}9 = 3{,}1$

153. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $3n + 1 = 4$
   $7n - 5 = 30$
   $11n + 7 = 51$
   $4n - 19 = 17$
   $5n - 2 = 8$

2. $6p + 17 = 17$
   $8p - 2 = 22$
   $10p - 19 = 81$
   $7p + 5 = 47$
   $17p + 12 = 80$

3. $7q + 8 = 8$
   $2q + 1 = 3$
   $8q - 5 = 11$
   $10q - 9 = 1$
   $6q - 11 = 7$

154. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2x + 4x + 5x = 33$
   $x + 9x - 2x = 32$
   $4x + 7x + x = 72$
   $x + 3x - 2x = 32$
   $14x - 8x - x = 35$

2. $5x - 2x + 7x + 2 = 32$
   $x + 9x - 5x + 11 = 41$
   $3x - x + 4x - 8 = 4$
   $2{,}7x + x - 1{,}3x + 4{,}2 = 9$
   $1{,}7x + 2{,}9x - 5{,}2 = 4$

155. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $5x + 2x - 4x = 36$
   $4x - x + 19x = 22$
   $63 = 2x + 3x + 4x$
   $121 = 3x + 7x + x$
   $10x + x + 24x = 105$

2. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + x = 19$
   $x + 3x + 1{,}5x = 55$
   $\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x = 18$
   $4x + 0{,}75x + 2{,}25x = 112$
   $2{,}04x + 0{,}68x + 1{,}28x = 100$

156. Pärand 2400 marka jaotati poja ja tütre vahel nõnda, et poeg sai kaks korda suurema osa kui tütar. Mitu marka sai tütar?

157. Leitud 5622 marka jaotatakse omaniku ja leidja vahel nõnda, et omanik saab kaks korda suurema osa kui leidja. Mitu marka saab leidja?

158. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui üks on teisest 2 korda suurem?

159. Kino reklaamlehtede levitamise eest said kaks tüdrukut kokku 1,80 marka. Üks neist levitas 700, teine 500 lehte. Kui palju raha sai esimene tüdruk?

160. Kahele ametnikule määrati eriliselt hoolsa teenistuse eest autasu kokku 100 marka. Vanem ametnik sai 20 marka enam kui noorem. Mitu marka sai noorem ametnik?

161. Ristsõnamõistatuse tabelis on 144 ruutu, valgeid ruute 10 tükki enam kui musti. Mitu musta ruutu on tabelis?

162. Seltsi esimehe kohale oli üles seatud 2 kandidaati; valimisel sai üks neist 12 häält enam kui vastaskandidaat. Äraantud hääli oli kokku 77, neist 3 kehtivusetut. Mitu häält sai vastaskandidaat?

163. Pudel rohtu maksab 1,10 marka. Rohi on marga võrra pudelist kallim. Kui palju maksab rohi?

164. Kolme järjestikuse täisarvu summa on 87. Milline on kõige väiksem neist kolmest arvust?

165. Poja sündimisel oli isa 24 aastat vana. Praegu on isa pojast 3 korda vanem. Kui vana on praegu poeg?

166. Jootemetall koosneb 2 osast inglistinast ja 1 osast seatinast. Kui palju tuleb võtta inglistina, et saada 1 kg jootemetalli?

167. Rooste sisaldab raua iga 7 kaaluosa kohta 3 kaaluosa hapnikku. Kui palju hapnikku on 1 kilogrammis roostes?

168. Kaks poissi võtsid 1,40 marga eest puhastada lumest kinnituisanud kõnnitee. Töö lõpul selgus, et esimene oli puhastanud kõnniteed 11, teine 17 sammu pikkuselt. Kui palju raha peab saama esimene poiss?

169. Tee kodukohast kooli vastumäge nõuab käimiseks kaks korda rohkem aega kui tee allamäge koolist koju. Tee edasi-tagasi käimiseks kulub 30 minutit. Kui palju aega nõuab tee käimine kodust kooli?

§ 18. Ülesandeid kordamiseks.

170. m kilogrammist vasest saab valmistada s meetrit traati. Mitu kilogrammi vaske on vaja r meetri traadi valmistamiseks?

171. Petrooleumi tagavarast jätkub mootorile t päevaks, kui ta töötab a tundi päevas. Mitmeks päevaks jätkub samast tagavarast, kui mootor töötab b tundi päevas?

172. Kui palju tuleb maksma ringikujulise peegli hõbetamine, kui peegli läbimõõt on d sentimeetrit ja 5 ruutsentimeetri hõbetamine maksab 1 penn?

173. Äri vähendab oma teenijate palku $n\%$ võrra. Kui palju palka saab nüüd äriteenija, kelle senine palk oli P marka?

174. Maja pikkus on a ja kõrgus b meetrit. Maja esiküljel on 8 akent mõõtmetega c ja d meetrit. Anna valem selle värvihulga arvutamiseks, mis vajalik maja esikülje värvimiseks, kui ruutmeetri värvimiseks kulub $\frac{1}{2}$ kilogrammi värvi.

175. Kuubikujulises karbis on 10 puust kuupi. Karbi serva pikkus on a sentimeetrit, puust kuubi serva pikkus on x sentimeetrit. Mitu kuupsentimeetrit vaba ruumi on karbis?

176. Kirjuta matemaatiliste sümbolite abil arv, milles on

a kümmet;

b sada;

c kümmet ja 3 ühte;

f sada ja g kümmet;

p sada, q kümmet ja r ühte.

177. Arvu numbrid on b ja a (vasakult paremale lugedes). Avalda see arv.

Missuguse arvu saame, kui muudame numbrite a ja b järjekorra?

178. Arv p on paarisarv. Missugused 2 arvu seisavad tema järel paarisarvude reas? Missugused 2 arvu seisavad tema ees?

179. Sirges joones seisab N telegraafiposti; kahe järjestikuse posti vahe on a meetrit. Kui suur on kaugus esimese ja viimase telegraafiposti vahel?

180. Sõnasta nõuded, mis avaldatud algebra lühikirjas järgmiselt:

1.	2.	3.
$1{,}3as + 2{,}4c$	a^2	$3a^3$
$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{5}bc$	$3a^2$	$2a^3 - 5b^3$
$2ac - \frac{1}{3}bd$	$a^2 + 2b^2$	$a^3 - \frac{1}{2}b^3$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$	$b^2 - a^2$	$0{,}5a^3 + 0{,}25b^2$
$3\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$	$5a^2 + 4b^2$	$3a^3 - 7ab^2$

181. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $3c + 1$, kui $c = 2$
   $4 + 2D$, kui $D = 5$
   $\frac{1}{2}f - 1$, kui $f = 10$
2. $5h - \frac{5}{7}$, kui $h = \frac{1}{7}$
   $0{,}3M + 0{,}5$, kui $M = 10$
   $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$, kui $x = 7$

182. Olgu ringi läbimõõt d. Siis on ringi pindala

$$S = \frac{11}{14}d^2.$$

Arvuta selle valemi järgi grammofoniplaadi pindala, teades, et plaadi läbimõõt on 25 cm.

183. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

ab^2, kui $a = 0{,}1$ ja $b = 7$
$3p^2q$, kui $p = 2$ ja $q = \frac{1}{4}$
$0{,}1F^2G^2$, kui $F = 4$ ja $G = 5$
$\frac{3}{4}c^2u^3$, kui $c = 2$ ja $u = \frac{1}{2}$
$\frac{7P}{11D^2}$, kui $P = 10$ ja $D = 3$

184. Milliseid arve tähendavad avaldised

$3x^2 - a^2$ $\quad$ $(3x - a)^2$
$(3x)^2 - a^2$ $\quad$ $3(x - a)^2$,

kui $x = 5$ ja $a = 4$?

185. Koonda järgmised avaldised:

1. $4a + 3b - 1{,}9a + 0{,}5b - 1{,}6b$
   $3{,}4m + 0{,}4n - 0{,}1n - 1{,}8m + 0{,}3n$
   $1{,}8k + 7i + 1{,}9k - 3{,}5i$
   $5{,}1f + 4{,}5g - 3{,}5g - 4{,}1f$
   $2{,}8s + 1{,}9t - 1{,}8s + 0{,}1t - 2t$

2. $1\frac{1}{3}c + c + 4d + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}c$

$l + 1\frac{3}{4}l + m - 2\frac{1}{4}l - \frac{1}{2}m$

$2\frac{5}{6}p + q + 3\frac{1}{6}q - \frac{2}{3}p - 1\frac{1}{2}q$

$4 + 2s + 7s - 9s - \frac{3}{5}t$

$3u - u + 7 - 1\frac{7}{8}u - 6$

3. $7a^2 + 3bc + 3a^2 - 2cb - 9a^2$

$10m^3 - 3m^2 + 5m + 7m - 11m$

$9n^3 + 5np - 3pn - n + 1$

$13r^2s - 10r^2s - 2sr^2 - sr^2$

$17t^3 - 13t^2t - 4tt^2 + ttt$

4. $9\frac{1}{2}a^2bx + 7\frac{1}{3}ab^2x - \frac{1}{2}xa^2b - 3\frac{1}{3}xab^2$

$7cdu - 3ucd + dcu - cud$

$10m^2np + 5mn^2p + mnp^2 - 9m^2np$

$5\frac{a}{2x} + 3\frac{a}{2x} - 7\frac{a}{2x} - \frac{a}{2x}$

$1 + \frac{c^2}{u} + 5\frac{c^2}{u} - 6\frac{c^2}{u}$

186. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{1}{4}x = 3$

$\frac{y}{14} = 0{,}5$

$z + \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$

$16 - u = 3$

$2\frac{4}{9} - v = 1\frac{1}{3}$

2. $\frac{3}{4}m = 18$

$1\frac{3}{8} - n = \frac{3}{4}$

$\frac{2}{11}p = 0$

$0{,}6q = 42$

$0{,}3r = 1{,}8$

3. $5H + 3H = 1$

$13k - 9k = 0$

$6D - D = 5$

$\frac{m}{2} + \frac{m}{3} = 4$

$m + \frac{m}{2} = 0$

Peatükk II.

Arvutamise põhiseadused.

§ 19. Loendamise tulemuse ühesus.

Nii kogu arvutamine kui ka algebraliste avaldiste teisendamine tugineb vähestele tõdedele, mille üldnimeks on arvutamise põhiseadused. Nende seaduste käsitlemise rajame silmanähtavale tõsiasjale, et

antud kogus olevate esemete loendamise tulemus ei olene esemete loendamise viisist,

kui loendamisel pole ühtki eset vahele jäetud ega ole ühtki eset arvestatud enam kui üks kord.

Seda tõsiasja nimetame lühidalt loendamisaksioomiks.

Esemete arv mingis kogus on ikka täisarv. Et selles peatükis me tegeleme ainult esemete kogudega, siis siin kõik arvutähised a, b, c, ... m, n, ... tähendavad ikka täisarve.

Kõik täisarvud moodustavad täisarvude rea

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, n + 1, n + 2, \ldots$$

Täisarvude real pole lõppu.

Aritmeetika õpetab, kuidas antud arvudest a ja b saada võimalikult vähese vaevaga nende summat, vahet, korrutist ja jagatist, see on arve

$$a + b, \qquad a - b, \qquad a \cdot b \qquad \text{ja} \qquad a : b.$$

Põhiliku tähtsusega tehnilisteks abinõudeks nende arvude määramisel on liitmistabel ja korrutamistabel.

Arvude

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b \text{ ja } a:b$$

leidmist andmeist a ja b nimetame lühidalt arvutamiseks.

Arvutamise üksiksammude põhjendamine toimub arvutamise põhiseaduste varal.

§ 20. Liitmise põhiseadused.

Ülesanne 1. II^a klassis on a õpilast, II^b klassis on b õpilast. Õpilaste vähesuse tõttu kummaski klassis ühendatakse need üheksainsaks II klassiks. Kui suur on õpilaste arv selles klassis?

Lahendus. Nõutava arvu võime leida kahel viisil: kas liites a õpilasega b õpilast, see annab

$$a+b$$

õpilast, või liites b õpilasega a õpilast, see annab

$$b+a$$

õpilast. Et mõlemal juhul on loendatud ühed ja samad õpilased, siis on loendamisaksioomi järgi

$$a+b=b+a.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

summa ei olene liidetavate järjekorrast.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame liidetavate vahetuvuse seaduseks (ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise kommutatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 2. Perekonnapea surma puhul pärib perekond kindlustussumma a marka ning sellele lisaks pangas oleva hoiusumma b marka ühes juurdekasvanud intressiga c marka. Kui suur on pärandi koguväärtus?

Lahendus. Nõutava väärtuse võime arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame kogu pangast saada oleva raha, see on markades

$$b + c,$$

ja liidame selle kindlustussummaga; see annab markades

$$a + (b + c);$$

teiseks võime pärandi koguväärtuse arvutada sel teel, et kindlustussummaga liidame hoiusumma, see annab markades

$$a + b,$$

ja tulemusega liidame hoiusumma intressi, see annab markades

$$(a + b) + c.$$

Et kumbki pärandi arvutuse viis loendamisaksioomi järgi annab sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nõnda:

selle asemel et arvuga liita kahe teise arvu summa, võib selle arvuga liita esimese liidetava ja tulemusega teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa liitmise seaduseks (ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise assotsiatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 3. Hääletamisel saab kandidaat ühes hääletamisjaoskonnas a häält, mis kõik kehtivaks loetakse, teises hääletamisjaoskonnas b häält, millest aga

c häält kehtivusetuks loetakse rikutud hääletamissedelite tõttu. Kui palju on kandidaat saanud kehtivaid hääli?

L a h e n d u s. Nõutava häältehulga võib arvutada kahel viisil: loendades kehtivad hääled teises jaoskonnas, neid on $b - c$, ja liites need esimeses jaoskonnas saadud häältega, leiame

$$a + (b - c);$$

või jälle: loendades k õ i k antud hääled, neid on $a + b$, ja lahutades neist c kehtivusetut häält, leiame

$$(a + b) - c.$$

Et kehtivate häälte hulga loendamise tulemus ei olene häälte loendamise viisist, siis peab olema

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

selle asemel et arvuga liita kahe teise arvu vahe, võib selle arvuga liita vähendatava ja tulemusest lahutada lahutatava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame v a h e l i i t m i s e s e a d u s e k s.

Avaldises $(a + b) + c$ sulud märgivad sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises $a+b+c$; samuti avaldises $(a + b) - c$ sulud märgivad sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises $a+b-c$. Seepärast võime kirjutada, et

$$a + (b + c) = a + b + c$$

ja

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Kokkuvõttes:

sulgudes seisva summa või vahe liitmisel võib sulud ära jätta.

Sulgude ärajätmist avaldises nimetatakse ka s u l g u d e a v a m i s e k s.

Liitmise põhiseaduste rakendamise näited.

1. $8 + 3 + 67 = 67 + 3 + 8 = 70 + 8 = 78.$
   vahetuvuse seaduse põhjal
2. $573 + 65 = 573 + (60 + 5) = 633 + 5 = 638.$
   summa liitmise seaduse põhjal
3. $899 + 4175 = 4175 + 899 = 4175 + (900 - 1) =$
   vahetuvuse seaduse põhjal
   $= 4175 + 900 - 1 = 5075 - 1 = 5074.$
   vahe liitmise seaduse põhjal
4. $3n + (m - 2n) + (n - m) = 3n + m - 2n + n - m = 2n.$

Ülesanded.

187. Määra järgmised summad kõige kergemal viisil:

1. $7 + 9 + 51$
   $1 + 2 + 19$
   $37 + 7 + 3$
2. $279 + 8 + 1$
   $3 + 8 + 197$
   $135 + 18 + 5$
3. $9 + 8 + 91$
   $(1 + 5) + 144$
   $12 + 18 + 134$

188. Arvuta peast järgmised summad, valides selleks kohaseim tee, ja põhjenda iga oma samm vastavate liitmise põhiseadustega:

1. $462 + 37$
   $43 + 136$
   $30 + 574$
2. $39 + 0 + 171$
   $17 + 34 + 126$
   $2{,}33 + 4{,}67$
3. $\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$
   $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
   $\frac{3}{8} + 4\frac{5}{8} + 3\frac{1}{4}$

189. Arvuta peast järgmised summad, valides selleks kohaseim tee, ja põhjenda iga oma samm vastavate liitmise põhiseadustega:

1. $634 + 99$
   $98 + 768$
   $3454 + 197$
2. $596 + 1379$
   $78 + 824$
   $395 + 5367$
3. $693 + 2747$
   $1408 + 398$
   $996 + 998$

190. Ava sulud järgmistes avaldistes ja anna saadustele võimalikult lihtne kuju:

1. $a + (a + 2)$
   $a + (3a + 1)$
   $4a + (5 + a)$
   $5a + (17a + 4a)$
   $15a + (1 + 16a)$

2. $63 + (7x + 11) + 19x$
   $(3x + 8x) + 14 + 5x$
   $(10 + x) + (5x + 11)$
   $(x + 12) + (16x + 1)$
   $3x + (9 + x) + 6x$

191. Ava sulud järgmistes avaldistes ja anna saadustele võimalikult lihtne kuju:

1. $2a + (a + b)$
   $5f + (3f + 2g)$
   $h + (9h + 4i)$
   $7k + (l + 3k)$
   $12m + (3n + 8m)$

2. $4b + (b + 9)$
   $3d + (4d + e)$
   $11i + (5i + 4)$
   $H + (1 + 7H)$
   $3p + (16 + 6p)$

192. Ava sulud järgmistes avaldistes ja anna saadustele võimalikult lihtne kuju:

1. $5a + (3a - 8)$
   $a + (4 - a)$
   $3a + (8a - 5a)$
   $(7a - 9a) + 4a$
   $(10a - a) + 3a$

2. $(1 + 6x) + (12x - 7x)$
   $(4x + 9) + (7x - 3)$
   $(17x + 5) + (1 - 13x)$
   $(11x + 8) + (12x - x)$
   $(19x - 3x) + (13x - 7x)$

193. Kirjuta järgmised avaldised sulgudeta ja koonda tulemused:

1. $(5x + 4) + 4x$
   $(7a - 2b) + a$
   $5 + (4 + 3c)$
   $(2a + 3b + c) + 8a$
   $4f + (8f - g)$

2. $(a + b) + (3a + 2b) + a$
   $(4 + c) + (5c - 2) + c$
   $(4{,}2D + 0{,}8) + (1{,}2 - 0{,}7D)$
   $(1\frac{1}{2}h + \frac{3}{4}k) + (2\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}k)$
   $(m - 0{,}5p) + (m - 1{,}5p)$

194. Ava sulud järgmistes avaldistes ja anna saadustele võimalikult lihtne kuju:

1. $5a + (a - b)$
   $3b + (4b - 2c)$
   $c + (9c - 3d)$
   $8d + (e - d)$
   $7f + (5e - 3f)$

2. $a + (2a - 3x)$
   $3b + (b - 15y)$
   $2c + (5c - 12z)$
   $7d + (2u - d)$
   $9f + (4v - 2f)$

§ 21. Lahutamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Ametniku palgast a marka peetakse kinni tasumata tulumaks b marka ja viivitusraha c marka. Kui suur summa kuulub väljamaksmisele?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et tulumaksu ja viivitusraha liidame, see annab $(b + c)$ marka, ja tulemuse lahutame palgast; nii saame markades

$$a - (b + c).$$

Teiseks võiksime palgast kõigepealt lahutada tulumaksu, see annab $(a - b)$ marka, ja tulemusest veel lahutada viivitusraha; nii saame markades

$$(a - b) - c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksioomi järgi saame sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Viimase võrduse sõnastame nii:

selle asemel et arvust lahutada kahe teise arvu summa, võib sellest arvust lahutada ühe liidetava ja tulemusest lahutada teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa lahutamise seaduseks.

Ülesanne 2. Kiirarvutuse testil hinnatakse parima ja nõrgima töö tulemused vastavalt a ja b punktiga ($a > b$); viimasest b punktist kustutatakse töö välise külje puudulikkuse tõttu veel c punkti. Mitme punkti võrra ületab parim töö nõrgima?

Lahendus. Nõutava arvu võib määrata kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame nõrgima töö lõpphinnangu, see on $(b - c)$ punkti, ja lahutame selle parima töö hinnangust; nii saame

$$a - (b - c);$$

teine tee nõutava arvu saamiseks on see, et eeskätt leiame esialgsete hinnangute vahe, see on $a - b$ punkti; pannes tähele, et siin oleme lahutanud liigselt c punkti, parandame varemini leitud vahet selle c punkti liitmisega; see annab

$$(a - b) + c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksioomi järgi saame sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Selle võrduse võime sõnastada nii:

selle asemel et arvust lahutada kahe teise arvu vahe, võib sellest arvust lahutada vähendatava ja liita tulemusega lahutatava.

Praegu sõnastatud tõsiasja nimetame vahe lahutamise seaduseks.

Avaldis $(a - b) - c$ tähendab sedasama, mis avaldis $a - b - c$; samuti tähendab avaldis $(a - b) + c$ sedasama, mis avaldis $a - b + c$. Seega võime kirjutada:

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Kokkuvõttes:

summa või vahe lahutamisel võib sulud ära jätta, kui muuta sulgudes olevate liikmete ees märgid vastupidisteks, see on kirjutada märgi + asemele märk — ja märgi — asemele märk +.

Lahutamise põhiseaduste rakendamise näited.

1. $483 - 56 = 483 - (50 + 6) = (483 - 50) - 6 =$
summa lahutamise seaduse põhjal
$= 433 - 6 = 427.$

2. $1347 - 298 = 1347 - (300 - 2) =$
vahe lahutamise seaduse põhjal
$= 1347 - 300 + 2 = 1047 + 2 = 1049.$

3. $5p - (2p - 3q) - (3p + q) = 5p - 2p + 3q - 3p - q = 2q.$

Ülesanded.

195. Ava sulud järgmistes avaldistes ja anna saadustele võimalikult lihtne kuju:

1. $2y - (y + 3)$
$4y - (13 + 3y)$
$15y - (3y + 7y)$
$16 + 18y - (10y + 5)$
$8y + 9 - (4 + 8y)$

2. $12x - (12z + 8x)$
$7 - (3x + 2z)$
$14x + z - (z + x)$
$(13x + 2) - (9x + z)$
$23x + 17z - (22x + 15z)$

196. Anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

1. $3a - (a + b)$
$9b - (4b + 2a)$
$6c - (2c + 3d)$
$12e - (3e + 5f)$
$7g - (4h + 2g)$

2. $3a + 1 - (2a + 7)$
$10 + 5b - (2b + 3)$
$4m - (3 + 2m) - m$
$4n - (20 + 2n) + 20$
$10p - 1 - (3 + 5p)$

197. Anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

1. $6p - (p - 1)$
   $p - (3 - 4p)$
   $2p + 3 - (2p - 3)$
   $1 + 6p - (5p - 4)$
   $7 + p - (p - 3)$

2. $12q - (9q - q)$
   $(8q + 2) - (7q - 2)$
   $3p + 2q - (2q - p)$
   $10 + 4p + 7q - (10 - 5q)$
   $(q - 1) - (q - 1) + 2p$

198. Anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

1. $4a - (b - a)$
   $5b - (2b - 3c)$
   $8c - (4c - 7d)$
   $5d - (e - d)$
   $10f - (g - 2f)$

2. $12m - (8m - 3) - 4m$
   $4n - (3n - 11) - 10$
   $32p - (15p - 5) - 17$
   $3q + 10 - (8 - 2q)$
   $14 - (6r - 10) - 17$

199. Lihtsusta järgmised avaldised, tuginedes liitmise ja lahutamise põhiseadustele:

1. $2{,}5 + (1{,}4a - 0{,}7)$
   $4{,}2b - (3{,}7b - 1{,}6)$
   $c + 7{,}7 + (3{,}5c + 2{,}8)$
   $4d + 1 - (0{,}3d + 0{,}9)$
   $(2{,}3f + 3{,}8) - (0{,}1f - 4{,}2)$

2. $g + \left(\frac{1}{2}g - \frac{1}{3}\right)$
   $\left(h + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{8}h - \frac{1}{3}\right)$
   $\frac{4}{5}k - 2 + \left(4\frac{1}{5}k - h\right)$
   $\frac{13}{16}u + 1 + \left(1\frac{1}{8}u - \frac{5}{8}\right)$
   $(v - 1) - \left(\frac{5}{6}v - 1\right)$

200. Ava sulud järgmistes näidetes ja koonda saadused:

1. $5-1\frac{1}{4}a+\left(2-2\frac{1}{3}a\right)$ 2. $7+\left(3h+1\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}h$

$7\frac{1}{4}b+\left(1\frac{2}{5}b+1\right)-6\frac{7}{10}b$ $1\frac{5}{6}i+\left(3-\frac{8}{9}i\right)+4$

$2\frac{1}{3}c-\left(1\frac{2}{3}c+2\right)+\frac{1}{3}c$ $4\frac{1}{5}k-4-\left(3\frac{7}{10}k-1\right)$

$3\frac{1}{2}d-\left(1\frac{2}{3}d+1\right)-d$ $\left(\frac{3}{4}l+5\right)-\left(2-3\frac{1}{2}l\right)$

$\left(4\frac{5}{9}l-1\right)-\left(2+2\frac{2}{3}l\right)$ $\left(1\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}n\right)-\left(\frac{5}{6}m-n\right)$

§ 22. Korrutamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Ruudulise paberi leheküljel leiame lehe pikkusel a ruutu, lehe laiusel b ruutu. Mitu ruutu on leheküljel?

Lahendus. Nõutava ruutude arvu saab määrata kahel viisil: esiteks nii, et me ruute loendame ridade viisi: igas reas b ruutu, ridu on a, seega ruutude arv on

$$a \cdot b;$$

teiseks võime aga ruute loendada ka veergude viisi: igas veerus a ruutu, veerge on b, seega ruutude arv on

$$b \cdot a.$$

Et kummalgi viisil loendamisaksioomi järgi saame sama arvu ruute, siis peab olema õige võrdus:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

See tähendab, et

korrutis ei olene tegurite järjekorrast.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame tegurite vahetuvuse seaduseks (ehk korrutamise kommutatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 2. Telliskivid on laotud üksteise ligi virna, mille pikkuses b kivi, laiuses c kivi, kõrguses a kivi. Kui suur on kivide arv virnas?

Lahendus. Nõutava arvu saab määrata esiteks sel viisil, et me kive loendame rõhtsate kihtide viisi: kihis on $b \cdot c$ kivi, kihte on a, seega kõiki kive on

$$a \cdot (b \cdot c).$$

Teiseks võime kive loendada aga ka laiuti — ridade viisi: reas c kivi, ridu on $a \cdot b$, seega kõiki kive on

$$(a \cdot b) \cdot c.$$

Et nii üks kui teine kivide arvu määramise viis annab loendamisaksioomi põhjal sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Kokkuvõttes:

selle asemel et korrutada arvu kahe arvu korrutisega, võib arvu korrutada ühe teguriga ja saaduse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame korrutise korrutamise seaduseks (ehk korrutamise assotsiatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 3. Kaupmehel on tasuda oma kaubavarustajale Rootsis kaks arvet a krooni ja b krooni suuruses. Kui palju läheb kaupmehel maksma nende arvete tasumine markades, kui kroon maksab c marka?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil; esiteks võib määrata kogu võla suuruse kroonides, see on

$$a + b,$$

ja hiljemini arvutada see summa ümber markadesse, see annab

$$(a + b) \cdot c.$$

Teiseks võib määrata kummagi arve suuruse markades, see annab

$$a \cdot c \quad \text{ja} \quad b \cdot c,$$

ja siis mõlemad tulemused liita; see annab kokku markade arvu

$$a \cdot c + b \cdot c.$$

Et kummagi arvutusviisi puhul loendamisaksioomi järgi saame sama rahasumma, siis peab olema õige võrdus:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

ehk, muutes tegurite järjekorra,

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Oma arutluse tulemuse võime sõnastada nõnda:

selle asemel et summa korrutada mõne arvuga, võib korrutada sama arvuga eraldi iga liidetava ja liita saadused.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa korrutamise seaduseks (ehk korrutamise distributiivsuse seaduseks).

Ülesanne 4. Ametniku kuupalk on a marka, millest maha arvatakse b marka pensionimaksu. Kui suur on c kuu eest ametnikule väljamakstud teenistustasu?

Lahendus. Nõutava tasu võime arvutada kahel viisil. Esiteks sel teel, et leiame ametnikule tegelikult väljamakstava kuupalga, see on markades

$$a - b,$$

ja selle vahe korrutame kuude arvuga; see annab markades

$$c \cdot (a - b).$$

Teiseks võiksime määrata kogu c kuu jooksul teenitud palga, see on markades

$$c \cdot a,$$

siis leida sama aja kohta mahaarvatava pensionimaksu, see on markades

$$c \cdot b,$$

ja viimaks esimesest korrutisest lahutada teise; see annab markades

$$c \cdot a - c \cdot b.$$

Et nii üks kui teine arvutusviis annab loendamisaksioomi järgi sama tulemuse, siis peab olema

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b.$$

See võrdus ütleb:

selle asemel et vahe korrutada mingi arvuga, võib selle arvuga korrutada eraldi vähendatava ning lahutatava ja lahutada esimesest saadusest teine.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame vahe korrutamise seaduseks.

Korrutamise põhiseaduste rakendamise näited.

1. $27 \cdot 5 = 5 \cdot 27 = 5 \cdot (20 + 7) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = 135.$
   tegurite vahetuvuse seaduse põhjal; summa korrutamise seaduse põhjal
2. $38 \cdot 14 \cdot 5 = 5 \cdot 14 \cdot 38 = 70 \cdot 38 = 2660.$
   tegurite vahetuvuse seaduse põhjal; korrutise korrutamise seaduse põhjal
3. $46 \cdot 98 = 46 \cdot (100 - 2) = 46 \cdot 100 - 46 \cdot 2 =$
   vahe korrutamise seaduse põhjal
   $= 4600 - 92 = 4508.$
4. $3a \cdot 4b \cdot 2a = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b = 3 \cdot 8 \cdot a^2 \cdot b = 24a^2b.$
5. $p(p + q) + p(p - q) = (p^2 + pq) +$
   $+ (p^2 - pq) = p^2 + pq + p^2 - pq = 2p^2.$

Ülesanded.

201. Arvuta järgmised korrutised, otstarbekohaselt kasutades tegurite vahetuvuse seadust ja korrutise korrutamise seadust:

1. $2 \cdot 378 \cdot 5$
   $346 \cdot 5 \cdot 4$
2. $5 \cdot 321 \cdot 6$
   $17 \cdot 18 \cdot 5$
3. $8 \cdot 147 \cdot 5$
   $12 \cdot 5 \cdot 94$

202. Rakendades korrutise korrutamise seadust anna järgmised korrutised võimalikult lihtsal kujul:

1. $2 \cdot (5 \cdot 17)$
   $4 \cdot (25 \cdot 39)$
   $3 \cdot (3\frac{1}{3} \cdot 7{,}5)$
   $4 \cdot (0{,}75 \cdot 9)$
   $8 \cdot (12\frac{1}{2} \cdot 0{,}08)$
2. $2 \cdot (3 \cdot a)$
   $3 \cdot (5 \cdot x)$
   $7 \cdot (4 \cdot m)$
   $12 \cdot (5 \cdot n)$
   $25 \cdot (6 \cdot p)$
3. $\frac{4}{5} \cdot (20 \cdot a^2)$
   $\frac{7}{8} \cdot (32 \cdot c^2)$
   $1\frac{5}{13} \cdot (52 \cdot a \cdot x^2)$
   $3\frac{7}{15} \cdot (\frac{5}{13} \cdot b^2 z)$
   $\frac{9}{16} \cdot (2\frac{2}{3} \cdot h^2 u^2)$

203. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult vä heste sümbolitega:

1. $a \cdot a^2$
   $a^2 \cdot a$
   $a \cdot a^3$
   $a^3 \cdot a$
   $a^2 \cdot a^2$
2. $2a \cdot a^2$
   $5b^2 \cdot b^2$
   $7c \cdot 4c^2$
   $3\frac{1}{2}d^3 \cdot 4d$
   $8e^3 \cdot \frac{3}{4}e^2$
3. $(2x) \cdot (5x)$
   $(5y) \cdot (7y)$
   $(4z) \cdot (15z)$
   $(6u) \cdot (6u)$
   $(2\frac{1}{2}v) \cdot (4v^2)$

204. Arvuta peast järgmiste avaldiste väärtused, andes neile enne arvutamiseks sobiv kuju:

1. $18 \cdot 6 + 7 \cdot 6$
   $4{,}6 \cdot 7 + 5{,}4 \cdot 7$
   $11{,}8 \cdot 12 + 0{,}2 \cdot 12$
2. $3{,}7 \cdot 0{,}5 + 5{,}3 \cdot 0{,}5$
   $2{,}7 \cdot 7{,}5 + 3{,}3 \cdot 7{,}5$
   $0{,}82 \cdot 0{,}6 + 0{,}68 \cdot 0{,}6$

205. Rakendades korrutamise põhiseadusi kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1.	2.	3.
$5a \cdot 4b$	$s \cdot 12 \cdot 5q \cdot a$	$7di \cdot 3cb$
$v \cdot 2wu$	$4k \cdot 25h \cdot 3i$	$14 \cdot lr \cdot \frac{1}{7} mg$
$p \cdot q \cdot 7n \cdot 12m$	$ny \cdot 8 \cdot 5mx \cdot \frac{1}{2}$	$0{,}81ax \cdot 5b \cdot 12c$
$5 \cdot (4 \cdot 6a)$	$x \cdot (ax)$	$4n^2 \cdot (0{,}5m^2 \cdot n)$
$12 \cdot (7a \cdot b)$	$7p \cdot (4p^2 \cdot q)$	$15az \cdot (\frac{1}{5} az \cdot z)$

206. Arvuta peast järgmiste avaldiste väärtused, andes neile enne arvutamiseks kohane kuju:

1.	2.
$18 \cdot 6 - 9 \cdot 6$	$9{,}35 \cdot 0{,}5 - 3{,}35 \cdot 0{,}5$
$17{,}6 \cdot 7 - 5{,}6 \cdot 7$	$0{,}73 \cdot 0{,}8 - 0{,}18 \cdot 0{,}8$
$12{,}7 \cdot 8{,}5 - 2{,}7 \cdot 8{,}5$	$12{,}46 \cdot 1{,}25 - 4{,}46 \cdot 1{,}25$

207. Arvuta peast järgmised korrutised ja põhjenda arvutamise üksikud sammud korrutamise põhiseadustega:

1.	2.	3.
$17 \cdot 15$	$39 \cdot 13$	$275 \cdot 31$
$44 \cdot 12$	$125 \cdot 88$	$63 \cdot 105$

208. Arenda järgmised korrutised:

1.	2.	3.
$6 \cdot (3 + \frac{1}{3})$	$8(a + 3)$	$10(0{,}3k + 1)$
$4 \cdot (2 + \frac{1}{2})$	$9(1 + b)$	$7(3 + 0{,}2m)$
$5 \cdot (1 + \frac{2}{5})$	$4(c + 2)$	$9(5 + 1{,}7n)$
$9 \cdot (2 + \frac{1}{3})$	$6(d + 3)$	$2(9p + p)$
$4 \cdot (3 + \frac{1}{4})$	$5(1{,}2 + e)$	$7(0{,}1 + 0{,}3q)$

209. Arenda järgmised korrutised:

1. $8 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right)$ $6 \cdot \left(5 - \frac{2}{3}\right)$ $10 \cdot \left(7 - \frac{3}{5}\right)$ $12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ $15 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)$

2. $6(x - 1)$ $3(y - 4)$ $8(7 - z)$ $16\left(u - \frac{1}{2}\right)$ $20\left(\frac{3}{4} - v\right)$

3. $2(6a - x)$ $9(2b - 3y)$ $18(2c - 7)$ $6(7d - 1{,}5u)$ $4(2{,}5v - 1{,}25w)$

210. Ava sulud järgmistes avaldistes:

1. $a \cdot (3b + 2)$ $a \cdot (7 - b)$ $x \cdot (a - 5b)$ $x \cdot (3a - 4b)$ $a \cdot (6b + a)$

2. $a(2a - 1)$ $x(4x - 7a)$ $x(17a + 13x)$ $2a(3b - 2)$ $3a(a - 5b)$

3. $5x(3a - 2b)$ $\frac{1}{3}x(3a - 9b)$ $\frac{4}{5}u(7 - 0{,}2u)$ $1{,}8v(0{,}2v - 0{,}5w)$ $0{,}1w(w - \frac{1}{2}w)$

211. Rakendades summa korrutamise seadust korruta:

1. summa $x + 3$ arvuga 4
   vahe $2z - 4$ arvuga 5
   summa $4x - 3z$ arvuga 3
   summa $5x + z$ arvuga 9
   vahe $x - 7z$ arvuga 7

2. vahe $5 - 3x$ arvuga 3
   summa $1 + \frac{1}{3}x$ arvuga 6
   summa $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}z$ arvuga 12
   vahe $5x - 2z$ arvuga 0,4
   vahe $0{,}5z - 1{,}8x$ arvuga 0,5

§ 23. Jagamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Klassile on tarvis osta a poognat paberit hinnaga b penni poogen. Mitu penni on maksta igal õpilasel, kui klassis on c õpilast?

Lahendus. Ulesande võime lahendada kahel viisil. Esiteks nii, et arvutame, kui palju maksab paber kokku, selleks korrutame arvud a ja b, saame ab.

Saadud pennide arvu ab jagame klassi õpilaste arvuga c. Nii leiame, et pennide arv, mis igal õpilasel tuleb maksta, on

$$\frac{ab}{c}.$$

Selle ülesande võime lahendada aga ka nii, et arvutame esiteks, mitu poognat paberit saab iga õpilane. See poognate arv on

$$\frac{a}{c}.$$

Et nüüd teada saada, mitu penni tuleb igal õpilasel maksta, selleks korrutame poogna hinna b penni poognate arvuga $\frac{a}{c}$, saame, et igal õpilasel on maksta

$$\frac{a}{c} \cdot b$$

penni.

Esimese arvutuse tulemus on $\frac{ab}{c}$ penni, teise arvutuse tulemus on $\frac{a}{c} \cdot b$ penni.

Et need tulemused väljendavad üht ja sama pennide arvu, mis tuleb maksta igal õpilasel, siis peab kehtima võrdus

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

Selles võrduses peituva lause sõnastame lühidalt nii:

selle asemel et jagada korrutis mingi arvuga, võib jagada selle arvuga korrutise ühe teguri ja tulemuse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat lauset nimetame korrutise jagamise seaduseks.

Ülesanne 2. Asutise ametkond otsustas saata rindesõdureile a marga eest raamatuid ja b marga eest ajakirju. Mitu marka tuleb maksta igal ametnikul, kui ametnike arv asutises on c?

Lahendus. Küsime esiteks, kui palju maksavad raamatud ja ajakirjad kokku; leiame, et

$$a + b$$

marka. Nüüd küsime, kui palju on maksta igal ametnikul. Selle arvutamiseks jagame markade arvu $a + b$ ametnike arvuga c, ning saame

$$\frac{a+b}{c}.$$

Selle ülesande võime lahendada veel teisiti, nimelt küsime esmalt, mitu marka on igal ametnikul maksta raamatute eest. Leiame, et

$$\frac{a}{c}$$

marka. Nüüd arvutame, mitu marka on igal ametnikul maksta ajakirjade eest, saame

$$\frac{b}{c}$$

marka.

Igal ametnikul on siis kokku maksta

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

marka.

Et arvutamise viis ei saa mõjustada arvutamise tulemust, siis peavad nii ühel kui teisel viisil saadud tulemused olema võrdsed, seega

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Analoogilise arutlusega leiame, et

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Mõlemad viimased võrdused võime kirjutada lühemalt ühe võrdusena

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Eelmises võrduses peituvad laused:

selle asemel et jagada summa mõne arvuga, võib jagada selle arvuga kummagi liidetava ja liita tulemused;

selle asemel et jagada vahe mõne arvuga, võib jagada selle arvuga vähendatava ning lahutatava ja lahutada esimesest tulemusest teine.

Praegu sõnastatud tõsiasju nimetame vastavalt s u m m a ja v a h e j a g a m i s e s e a d u s t e k s.

Ü l e s a n n e 3. Rannakaitse sai a kahurimürsku. Rannas on b patareid, igas patareis c kahurit. Mitu mürsku jätkub saadetisest igale kahurile?

L a h e n d u s. Rannakaitse b patareil on kokku $b \cdot c$ kahurit.

Jagades mürskude arvu a korrutisega bc, leiame, et iga kahur saab

$$\frac{a}{bc}$$

mürsku.

Sama ülesande võime lahendada veel teisel viisil, nimelt arutledes nõnda:

Saadetis sisaldab a mürsku, siis saab iga patarei

$$\frac{a}{b}$$

mürsku.

Igas patareis on c kahurit, siis jätkub igale kahurile

$$\frac{a}{b} : c$$

mürsku.

Tulemused peavad olema võrdsed, seega

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c.$$

Viimast võrdust nimetame korrutisega jagamise seaduseks, mida võib sõnastada nõnda:

selleks et jagada arvu korrutisega, võib arvu jagada esimese teguriga ja saaduse teise teguriga.

Näited.

1. $$\frac{700}{25} = \frac{7 \cdot 100}{25} = 7 \cdot \frac{100}{25} = 7 \cdot 4 = 28.$$

korrutise jagamise seaduse põhjal

2. $$\frac{4575}{15} = \frac{4500 + 75}{15} = \frac{4500}{15} + \frac{75}{15} =$$

summa jagamise seaduse põhjal

$$= \frac{45 \cdot 100}{15} + 5 = \frac{45}{15} \cdot 100 + 5 = 3 \cdot 100 + 5 = 305.$$

korrutise jagamise seaduse põhjal

3. $$\frac{2400}{120 \cdot 4} = \frac{2400}{120} : 4 = \frac{20}{4} = 5.$$

korrutisega jagamise seaduse põhjal

Eespool oleme näidanud arvutamise põhiseaduste kehtivust täisarvude vallas. Hiljemini näeme, et need seadused jäävad kehtima ka murdarvude puhul. Näiteks

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{3}{4}(12+28)=\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{3}{4}\cdot 28.$$

Iga arvutamise põhiseadust on võimalik avaldada k a h e l viisil: üks kord eespooltoodud võrdusega, teine kord vahetades selles võrduses pooled; näiteks ühtaegu võrdusega

$$a-(b-c)=a-b+c$$

on kehtiv võrdus

$$a-b+c=a-(b-c);$$

ühtaegu võrdusega

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

on kehtiv võrdus

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Arvutamise põhiseadused on aluseks nii numbrilisele arvutamisele kui ka avaldiste teisendamisele.

Ülesanded.

212. Anna järgmised jagatised võimalikult lihtsal kujul:

1.	2.	3.
$(237\cdot 6):3$	$(8\cdot a):4$	$7m:m$
$(16\cdot 125):4$	$(15\cdot b):3$	$ab:b$
$(21\cdot 47):7$	$(24\cdot c):8$	$cd:c$
$(28\cdot 98):14$	$(6\cdot d):6$	$3fg:f$
$(18\cdot 5\frac{1}{2}):9$	$(23\cdot e):23$	$10hk:k$

213. Rakendades summa ja vahe jagamise seadust arvuta järgmised jagatised võimalikult lihtsalt:

1. $(5 \cdot 6 + 4 \cdot 6) : 6$
   $(8 \cdot 7 + 9 \cdot 8) : 8$
   $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 9) : 2$
   $(7 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{2}) : 7$
   $(22 \cdot 0{,}5 + 11 \cdot 0{,}4) : 11$

2. $(4 \cdot 7 - 3 \cdot 7) : 7$
   $(5 \cdot 23 - 15 \cdot 5) : 5$
   $(8 \cdot 11 - 8 \cdot 3) : 8$
   $(10 \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2}) : 5$
   $(12 \cdot 0{,}9 - 8 \cdot 0{,}2) : 4$

3. $(8a + 12) : 4$
   $(15b + 45) : 15$
   $(3{,}5 + 7c) : 7$
   $(1{,}6 + 2d) : 8$
   $(8e + 6{,}4) : 16$

4. $(21p - 14) : 7$
   $(18 - 6q) : 6$
   $(3r - 20) : 4$
   $(4s - 18) : 8$
   $(4t - 3) : 12$

5. $(3{,}5 - 1{,}4h) : 0{,}7$
   $(0{,}6k - 1{,}6) : 0{,}2$
   $(7{,}5 - 4{,}5e) : 0{,}5$
   $(2{,}4m - 5{,}4) : 9$
   $(0{,}2 - 2{,}6n) : 2$

6. $(\frac{1}{2}x + 7) : 2$
   $(\frac{1}{3}y - 3) : 3$
   $(3{,}2 - \frac{1}{2}z) : 8$
   $(\frac{3}{4}u - 4{,}2) : 6$
   $(3\frac{1}{3}v - 20) : 10$

§ 24. Ülesandeid kordamiseks.

214. Määra järgmised summad, vahed, korrutised ja jagatised kõige kergemal viisil:

1. $27 + 4 + 96$
   $\frac{7}{12} + 1\frac{1}{12} + \frac{5}{12}$
   $993 + 10 + 997$
   $8 \cdot 19 \cdot 25$
   $0{,}5 \cdot 33 \cdot 40$

2. $12(\frac{3}{4} \cdot 7 + \frac{3}{4} \cdot 9)$
   $(0{,}6 \cdot 13 - 0{,}6 \cdot 9) \cdot \frac{1}{4}$
   $(42 \cdot 3\frac{1}{3}) : 7 - (56 \cdot 2\frac{1}{7}) : 8$
   $(19 \cdot \frac{4}{5} - 13 \cdot \frac{4}{5}) : 6$
   $(24 \cdot 0{,}7 - 17 \cdot 0{,}7) : 0{,}7$

215. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1. $6ab + a(5 - 3b)$
   $5cd - c(2d + 4e)$
   $m(3n - 5p) - 2mp$
   $4pq - q(5 - 4p)$
   $r(8s - 3t) + rt$

2. $2\frac{2}{5}g - 2(1\frac{1}{5}g - \frac{3}{5}f)$
   $12\frac{3}{4}h - 3(2\frac{1}{2} - \frac{5}{12}h)$
   $1\frac{3}{5}k - 3(1 - \frac{4}{15}k)$
   $2\frac{1}{3} - 5(1\frac{2}{5} - 3l)$
   $4\frac{1}{5}m + \frac{4}{5}(2m + 1\frac{1}{2})$

3. $a(3 + 2b) + b(5 + 3a)$
   $x(7 + 5a) - a(3x + 4)$
   $m(2n - 3) - n(5 - 4m)$
   $r(3 - 4s) - s(7 + 2r)$
   $p(8 - 3x) - x(3 - p)$

4. $0{,}4(0{,}4h + 1) - 0{,}2(0{,}2 - 2{,}6h)$
   $0{,}3(0{,}3 - 4k) - 0{,}2(0{,}1 - 6k)$
   $0{,}8(5n + 2) + 0{,}7(0{,}1 - n)$
   $0{,}1(8c + 1) - 0{,}6(2 - 0{,}5c)$
   $0{,}5(3i - 2) - 0{,}4(3i - 5)$

216. Lihtsusta järgmised avaldised niipalju kui võimalik:

1. $15 + 3(a - 4)$
   $4(a + 3) - 2a + 7$
   $6a - 5(a - 4)$
   $7(3a - 1) - 5(a - 3)$
   $11a + 4(6a + 2) - 3(2a - 1)$

2. $2(3x + 5) + 3(x - 4) - 2x$
   $6(2x - 3y) + 4(2x + 5y)$
   $7(x + 3) - 5(x - y) - 14$
   $8(3p + 2q + 1) - 6(2p + q - 2)$
   $5(p + 2q + 6) + 5(3p - q - 5)$

217. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $3(2x + 5) = 27$
   $4(y - 2) + 3y = 13$
   $8(2 + z) + 3(5 + 4z) = 31$
   $25u - 6 - (15u + 4) = 0$
   $5v - (14 - 2v) = 35$

2. $9m - (6m - 14) - (m + 5) = 19$
   $7(4n - 6) - 5(5n - 12) = 36$
   $6p + [17 - (3p + 8)] = 27$
   $2q + 6[5 - (3 - q)] - 4 = 16$
   $7[6(r - 1) + 9] = 105$

3. $4s + [19 + (2s - 7)] = 15$
   $23 - [6t - (8 - 9t)] = 16$
   $19u - [16 - (7u + 10) + 11u] = 7$
   $(7 + 10v) + [3v - (13 - 15v) + 6] = 0$
   $4w - [5 - (9w - 12)] - (7w - 16) - 8 = 0.$

Peatükk III.

Positiivsed ja negatiivsed arvud.

§ 25. Vastassuunalised suurused.

N ä i d e. Õpilase tulude-kulude raamatus leiame järgmised märkmed möödunud nädalal olnud tulude ja kulude kohta:

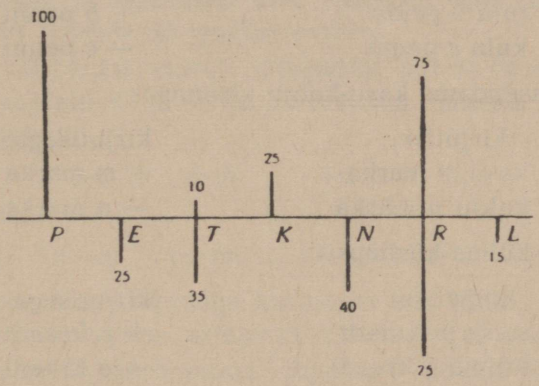
Päev	P	E	T	K	N	R	L
Tulu penni	100		10	25		75	
Kulu penni		25	35		40	75	15

Esitame need andmed näitlikult joonisel.

Üks võimalikkudest viisidest selleks on järgmine: võtame vabalt mõne sirgjoone (joonis 3), märgime sellel võrdsete vahemikkude järel rea punkte ja valime need nädalapäevade kujutisteks, tähistades neid järjest tähtedega *P*, *E*, *T*, ... Neist punktest tõmbame püstsirged ja kujutame viimaseil kohaselt valitud mõõdus tulud näiteks ü l e s p o o l e suunatud lõikudena, kulud aga vastassuunas, see on a l l a p o o l e suunatud lõikudena. Töö tulemusena esineb joonisel kujutatud pilt. Selles peegeldub õpilase tulude-kulude käik kõigis üksikasjus: sealt näeme esimesel pilgul, mis päevadel esines vaid tulu, mis päeva-

del vaid kulu, mis päeval tulu oli kuluga tasakaalus, mis päevadel kulu oli ülekaalus.

Suurusi, nagu tulu ja kulu, varandus ja võlg, kahju ja kasu, välja- ja sisseveetud kauba hulgad, nimetame **vastassuunalisteks suurusteks**. Sääraste suurustena esinevad ka alakaal ja ülekaal, temperatuuri sooja- ja külmakraadid, kõrgused ülalpool ja allpool merepinda, aastaarvud enne ja pärast Kristuse sündimist.



Joonis 3.

Kõik eespool-nimetatud suurused on **suunaga suurused**; nende vastandina olgu nimetatud **suunata suurused**, nagu näiteks: linna elanikkude arv, ringjoone pikkus, keha kaal.

Ülesanded.

218. Allpool on nimetatud rida suunaga suurusi. Nimeta suurused, mis nende suhtes on vastassuunalised.

1. Kasu
   Võit
   Kulu
   Juurdekasv
   Aastaarv e. Kr.
2. Kõrgus üle merepinna
   Geograafiline lõunalaius
   Kellaaeg e. l.
   Geograafiline idapikkus
   Temperatuur alla nulli

§ 26. Positiivsed ja negatiivsed arvud.

Olgu kassas mingi rahasumma. Kui sellele lisanduks tulu b penni, siis oleks kassas endisest summast b penni enam; kui kassas olevast rahast tuleks kanda kulu c penni, siis oleks kassas endisest summast c penni vähem. Sel põhjusel asendame edaspidi tulu-kulu küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
tulu b penni	$+b$ penni
kulu c penni	$-c$ penni

samuti asendame kasu-kahju küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
kasu m marka	$+m$ marka
kahju n marka	$-n$ marka

ja sooja-külma küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
sooja p kraadi	$+p$ kraadi
külma q kraadi	$-q$ kraadi

Neis kirjutisis märk pluss asendab meil sõnu tulu, kasu, sooja; märk miinus aga sõnu kulu, kahju, külma. Järelikult sümbolid $+$ ja $-$ ei ole siin tehtemärgid, nagu tavaliselt, vaid suuruse suuna tähised.

Me ütleme, et sümbolid nagu

$$+5 \qquad +7\frac{1}{2} \qquad +11{,}4$$

kujutavad positiivseid arve; seevastu sümbolid nagu

$$-8 \qquad -3\frac{3}{5} \qquad -12{,}7$$

kujutavad negatiivseid arve.

Kui positiivse või negatiivse arvu kirjutises jätame ära suunda näitava märgi, saame selle arvu absoluutväärtuse.

Näiteks arvu $+7\frac{1}{2}$ absoluutväärtus on $7\frac{1}{2}$

„ $-3{,}8$ „ „ $3{,}8$.

Lühemalt kirjutame viimaseid sõnastusi nii:

$$|+7\tfrac{1}{2}| = 7\tfrac{1}{2}$$
$$|-3{,}8| = 3{,}8.$$

Positiivseid ja negatiivseid arve nimetame ühise nimetusega relatiivseteks arvudeks ehk suunaga arvudeks.

Kui võimaliku valesti mõistmise pärast on vaja näidata, et märgid + ja — on arvu suuna tähised, siis võetakse sümbolid

$+b$ $-c$ $+m$ $-n$ $+p$ $-q$

sulgudesse:

$(+b)$ $(-c)$ $(+m)$ $(-n)$ $(+p)$ $(-q)$.

Kirjutusviisi sulgudega kasutame igal juhul, kui märgid pluss ja miinus esinevad kõrvuti, üks kord tehtemärgina, teine kord suuna tähisena. Näiteks kirjutises

$$-7 + (+3) + (-2) - (+5) - (-1)$$

teine ja neljas pluss ning esimene, teine ja viies miinus on suuna tähised; seevastu esimene ja kolmas pluss ning kolmas ja neljas miinus on tehtemärgid.

Ülesanded.

219. Kirjuta järgmised suurused matemaatiliste sümbolitega:

1. Kaks kraadi sooja
   Kolmsada meetrit üle merepinna
   Sada marka kasu
   Kümnemargane võit
   Aasta 47 e. Kr.
2. Viis kraadi külma
   Nelikümmend meetrit allpool merepinda
   Viis marka kahju
   Üheksamargane kaotus
   Aasta 1938 p. Kr.

3. Kolmeprotsendine juurdekasv

Seitseteist marka kulu
Kaks tundi enne kesköödi
Põhjalaius 60 kraadi
Läänepikkus 27 kraadi

4. Kaheprotsendine kadu

Kaksteist marka tulu
Viis tundi pärast kesköödi
Lõunalaius 20 kraadi
Idapikkus 13 kraadi

§ 27. Suunaga arvude järjestus suuruse järgi.

Ülesanne. Laskevõistlusel saavutas õpilane Karu 15 punkti alla klassi keskmist,
„ Mänd 4 „ üle klassi keskmise,
„ Väli klassi keskmise,
„ Susi 18 punkti üle klassi keskmise,
„ Kask 7 „ alla klassi keskmist.

Järjesta need õpilased nende laskeosavuse paremuse järgi.

Lahendus. On selge, et kasvava paremuse järjekord on see:

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
15 p. alla keskmist	7 p. alla keskmist	ei üle ega alla keskmist	4 p. üle keskmise	18 p. üle keskmise

Märgime Välja taseme, mille suhtes punktid on loetud üle ja alla olevateks, sümboliga 0. Tarvitame alla-keskmise sümboliks märki —, üle-keskmise sümboliks märki +. Siis saame kõnesolevad võistlustulemused kirjutada lühidalt kujul:

Karu	Mänd	Väli	Susi	Kask
—15	+4	0	+18	—7

või järjestatult kasvava paremuse järjes

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
—15	—7	0	+4	+18

Seega tuleb lugeda kehtivaks võrratuste rida:

$$-15 < -7 < 0 < +4 < +18.$$

Üldistades eelmist mõttekäiku ütleme nõnda:

iga negatiivne arv on väiksem igast positiivsest; kahest positiivsest arvust on see suurem, millel on suurem absoluutväärtus; kahest negatiivsest arvust on see suurem, millel on väiksem absoluutväärtus; null on suurem igast negatiivsest arvust ja väiksem igast positiivsest arvust.

Ülesanded.

220. Järjesta allantud arvud nende suuruse järgi, alates kõige väiksemaga:

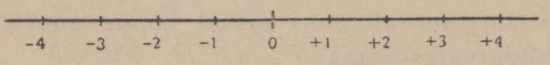
1. $+4;\ +7;\ 0;\ +12;\ +1;\ +0{,}5;\ +9\frac{1}{2};\ +14;\ +2;\ +20$
2. $-12;\ -15;\ -7;\ -8;\ -9;\ 0;\ -1;\ -4{,}6;\ -14{,}2;\ -11$
3. $+4;\ -5;\ +6;\ -7;\ -8;\ +15;\ -3{,}7;\ +2;\ +3{,}6;\ -11$
4. $0;\ 4;\ 6;\ -18;\ -4\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -2;\ -1{,}5;\ -3{,}7$
5. $8;\ -3;\ -5;\ 7{,}2;\ 13;\ -4\frac{3}{4};\ +6;\ -12;\ 0;\ -1$

§ 28. Suunaga arvude astmik.

Eriti ülevaatliku pildi suuruse järgi järjestatud positiivsetest ja negatiivsetest arvudest saame järgmisel viisil: võtame arvtelje (joonis 4), valime temal mõne punkti nullpunktiks ning sellest punktist lähtudes kanname teljele kujutamisühiku 1, 2, 3, ... korda nii pare-

male kui ka vasakule poole. Saadud lõikude lõpud märgime kriipsukestega ning viimased tähistame märgistega $+1$, $+2$, $+3$, ... nullist paremale poole liikudes ja märgistega -1, -2, -3, ... vasakule poole liikudes. Saadud joonist nimetame positiivsete ja negatiivsete arvude skaalaks ehk astmikuks. Seda astmikku vaadeldes näeme, et arvude suurem-väiksem-olemise tunnust võime nüüd sõnastada lühidalt nii:

kahest arvust on see suurem, millele vastav kriips astmikul asetseb teise omast paremal pool.



Joonis 4.

Positiivsete ja negatiivsete arvude astmiku tuntuimaks näiteks on termomeetri skaala. See seisab harilikult püsti. Kahest temperatuurist on see kõrgem, millele vastav kriips termomeetri skaalal asetseb kõrgemal.

Ülesanded.

221. Kujuta järgmised arvud arvteljel:

1. -10; -8; -6; -4; -2; 0; $+2$; $+4$
2. $+0{,}4$; $+0{,}3$; $+0{,}2$; $+0{,}1$; $-0{,}1$; $-0{,}2$; $-0{,}3$
3. $+5$; -2; -1; $+3$; $+2{,}5$; $-0{,}5$; -4; -5
4. $+2{,}5$; $+2$; $+1{,}5$; $+1$; $+0{,}5$; $-0{,}5$; -1; $-1{,}5$

§ 29. Suunaga arvude liitmine.

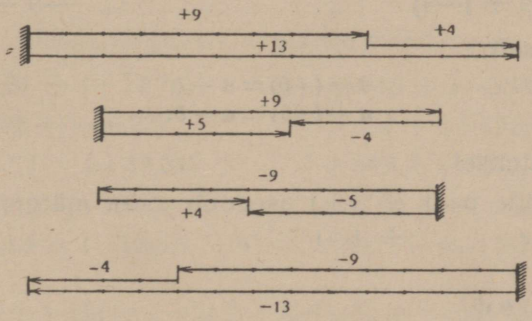
Ülesanne. Mängitakse õnnemängu. Lõppegu esimene voor võiduga 9 penni ja liitugu selle võiduga teisel voorul võit 4 penni. Kui suur on kogu võit?

Lahendus. On selge, et kogu võit on $9 + 4$ ehk 13 penni: võit 9 penni koos võiduga 4 penni on sama, mis võit 13 penni.

Samal viisil võiksime kirjutada, et võit 9 penni koos kaotusega 4 penni on sama, mis võit 5 penni, ja edasi, et kaotus 9 penni koos võiduga 4 penni on sama, mis kaotus 5 penni, ning lõpuks, et kaotus 9 penni koos kaotusega 4 penni on sama, mis kaotus 13 penni.

Kirjutades need laused matemaatilises lühikirjas saame:

$$(+9) + (+4) = (+13)$$
$$(+9) + (-4) = (+5)$$
$$(-9) + (+4) = (-5)$$
$$(-9) + (-4) = (-13).$$



Joonis 5.

Jättes mitte-hädavajalikud sulud lühiduse mõttes ära, kirjutame ülaltoodud summade veeru nii:

$$+9 + (+4) = +13$$
$$+9 + (-4) = +5$$
$$-9 + (+4) = -5$$
$$-9 + (-4) = -13.$$

Kujutades andmed suunatud lõikudena võiksime need tulemused ka kohe jooniselt ära lugeda (joonis 5).

Andmete päritolu arvestamata sõnastame tulemuse üldkujul nõnda:

kahe sama märgiga arvu summal on sama märk, mis liidetavailgi; summa absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste summa;

kahe erineva märgiga arvu summal on selle liidetava märk, millel on suurem absoluutväärtus; summa absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste vahe.

Sooritades arvude liitmist graafiliselt joonisel 5, näeme, et kirjutis

$+9 + (+4)$ tähendab sedasama, mis $+9 + 4$
$+9 + (-4)$ „ „ „ $+9 - 4$
$-9 + (+4)$ „ „ „ $-9 + 4$
$-9 + (-4)$ „ „ „ $-9 - 4$,

ehk üldiselt:

$$a + (+b) = a + b$$
$$a + (-b) = a - b.$$

Seega liitmisel

märkide paar $+ (+)$ asendub ainsa märgiga $+$,
„ „ $+ (-)$ „ „ „ $-$.

Näited.

1. $+19 + (+7) = +19 + 7 = +26.$
2. $-31 + (-9) = -31 - 9 = -40.$
3. $-4x + (-13x) = -4x - 13x = -17x.$

Ülesanded.

222. Arvuta järgmised summad:

1. $+3 + (+5)$
   $+4 + (+3)$
   $+7 + (+2)$
   $+13 + (+6)$
   $+8 + 0$

2. $-2 + (-5)$
   $-7 + (-4)$
   $-1 + (-5)$
   $-2 + (-7)$
   $-11 + (-1)$

3. $+5 + (-9)$
$+7 + (-7)$
$-10 + (+3)$
$-10 + (+12)$
$-12 + (-8)$

4. $+3 + (-4)$
$-1 + (-5)$
$+3 + (-7)$
$-2 + (+5)$
$0 + (-6)$

5. $-4 + (-6)$
$+2 + (-2)$
$+9 + (-7)$
$-4 + (+5)$
$-2 + (+10)$

6. $-7 + (-6)$
$-4 + (+9)$
$+6 + (+10)$
$+9 + (-9)$
$-7 + 0$

223. Määra järgmiste avaldiste väärtused:

1. $-23{,}81 + (+14{,}75)$
$+7{,}49 + (-6{,}23)$
$+15{,}87 + (+18{,}34)$
$-5{,}62 + (-1{,}96)$
$-53{,}14 + (-13{,}67)$

2. $-9345 + (-6583)$
$+534 + (+1765)$
$+643 + (-379)$
$-3194 + (+2439)$
$-645 + (-1237)$

3. $-14 + (-8) + (+2)$
$+7 + (+9) + (-4)$
$+15 + (-18) + (+3)$
$-23 + (-42) + (-17)$
$-19 + (+21) + (-50)$

4. $-18 + (-12) + (-4)$
$+8 + (+10) + (-3)$
$+14 + (-19) + (+2)$
$-24 + (-46) + (+18)$
$-20 + (+22) + (-37)$

§ 30. Suunaga arvude lahutamine.

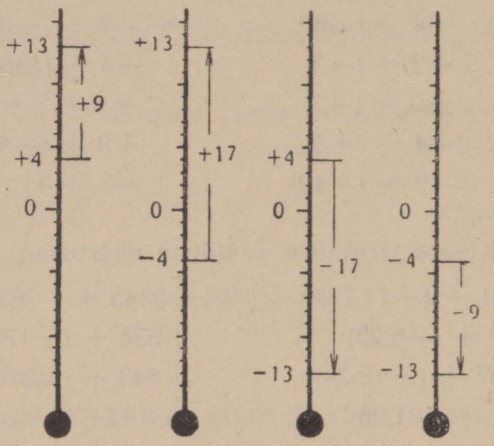
Ülesanne. Maapinnal näitab termomeeter $+13^0$, lennukil õhus aga kõigest $+4^0$. Kui suur on esimese ja teise temperatuuri vahe?

L a h e n d u s. Otsitav vahe on

$$+13 - (+4)$$

kraadi. Küsimus nõuab niisuguse arvu x leidmist, mis +4-ga liites annaks +13:

$$+4 + x = +13.$$



Joonis 6.

Proovimise teel leiame, et otsitavaks arvuks on +9: tõepoolest $+4 + (+9) = +13$. Seega:

$$+13 - (+4) = +9.$$

Samale tulemusele jõuame eriti kergelt, kui vaatleme termomeetri skaalat (joonis 9); tõepoolest

$$+13 - (+4) = +9.$$

Analoogiliselt leiame termomeetri skaalal, et

$$+13 - (-4) = +17$$

ja edasi, et

$$-13 - (+4) = -17$$

$$-13 - (-4) = -9.$$

Suunaga arvude vahet saame määrata ka mehhaaniliselt teel.

Olgu a ja b kaks suunaga arvu. Nõutagu lahutada arvust a arv b. Võtame kaks ühesugust võrdsete jaotustega skaalat, paigutame nad teineteise alla nõnda, et skaalade suunad oleksid vastupidised, ja nihutame neid, kuni ülemise skaala a-kriipsu vastas seisab alumisel skaalal 0. Siis leiame alumise skaala b kriipsu vastas ülemisel skaalal nõutava vahe $a - b$.

Näiteks leiaksime, et

$$+13 - (+4) = +9 \quad \text{ja} \quad +13 - (-4) = +17.$$

Sooritades arvude lahutamist mehhaaniliselt kahe skaala abil näeme, et kirjutis

$+13 - (+4)$ tähendab sedasama, mis $+13 - 4$
$+13 - (-4)$ „ „ „ $+13 + 4$
$-13 - (+4)$ „ „ „ $-13 - 4$
$-13 - (-4)$ „ „ „ $-13 + 4$,

ehk üldiselt:

$$a - (+b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b.$$

Seega lahutamisel
märkide paar — (+) asendub ainsa märgiga —,
„ „ — (—) „ „ „ +.

Näited.

1. $+25 - (+17) = +25 - 17 = +8.$
2. $-31 - (-16) = -31 + 16 = -15.$
3. $-4 + 7 - 2 - 3 + 8 = 7 + 8 - 4 - 2 - 3 =$
   $= 15 - 9 = 6$
4. $-4N^2 - (-5N^2) = -4N^2 + 5N^2 = N^2.$
5. $3a + 5a - 4a - 3a + 7a - 9a =$
   $= 3a + 5a + 7a - 4a - 3a - 9a =$
   $= 15a - 16a = -a.$

Vahetades võrduses

$$a + (-b) = a - b$$

pooled, saame

$$a - b = a + (-b).$$

See tähendab, et negatiivsete arvude kasutamisele võtmisel

arvu lahutamist saab ikka asendada vastassuunalise arvu liitmisega,

teiste sõnadega,

iga vahet võib vaadelda summana.

See tõsiasi võimaldab tunduvat kokkuhoidu lausete sõnastusis, sest kaob vajadus summa ja vahe juhu eristamiseks.

Kõiki hulkliikmeid vaatleme edaspidi summadena; esinevaid märke pluss ja miinus loeme liikme juurde kuuluvaiks.

Selle kokkuleppe põhjal on hulkliikme

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 7$$

liikmeiks avaldised

$$+x^3 \qquad -5x^2 \qquad +6x \qquad -7.$$

Ülesanded.

224. Arvuta järgmised vahed:

1.
$+5 - (+2)$
$+3 - (+1)$
$+7 - 0$
$+8 - (-1)$
$+10 - (-3)$

2.
$-3 - (+3)$
$-7 - (+2)$
$-1 - (-3)$
$-2 - (-7)$
$-11 - (-5)$

3.
$+12 - (-7)$
$+8 - (-11)$
$-12 - (-12)$
$-10 - (+6)$
$+12 - (+4)$

4.
$+3 - (-4)$
$-1 - (-6)$
$+3 - (-7)$
$-2 - (+5)$
$0 - (-2)$

5. $-6-0$
$-4-(-6)$
$+9-(-7)$
$-4-(+5)$
$-2-(+11)$

6. $-7-(-8)$
$-4-(+9)$
$+6-(+10)$
$-9-(-9)$
$0-0$

225. Määra järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2-5-1+4-8+0$
$-3+3+5-7-1-9$
$0-4+9-17-3+8$
$7-13-5-1+20+1$
$-2+8-10-11+7+2$

2. $-8-4+15+6-11-4$
$10+1-15-8+10+7$
$-5+15+2-13+8+10$
$-11+15+9-2-3-4$
$3-10-6+11+7-8$

226. Koonda järgmised avaldised:

1. $2x-x+4x$
$-3x+6x-x$
$7y-8y-y$
$3+y-9y$
$z-12z+5z$

2. $w+14w-15$
$-8+7w-3w$
$1{,}5p-2{,}9p+3{,}7p$
$p-8{,}9p+4{,}5p$
$-q+4{,}7q-1{,}6q$

3. $z-z-3z$
$0-5u-4u+9u$
$-u-13u+11u$
$8v+5v-17v$
$4-7v+3v$

4. $+2{,}1q-9{,}5q-7{,}5q$
$-4+3m-7u-5m+8u$
$h+15k-9k-22k+14h$
$7s-t-8s+3t-10$
$x+2y+3z-3x-2y-x$

5. $2x - 3x + 7x - 4y + y$
$x - 9x + 12x + 11y - 5y$
$4x - 3x + 1{,}5x + 2z - 2z$
$1{,}6x - 0{,}8x + z + 3{,}7z - 6{,}4z$
$3x - 2x - x - z - 3z + 4z$

227. Määra järgmiste avaldiste väärtused:

1. $+7631 - (+898)$
$+4925 - (-2163)$
$-310 - (+1934)$
$-9999 - (+4837)$
$-1846 - (-879)$

2. $+16{,}23 - (+12{,}73)$
$+45{,}6 - (-14{,}51)$
$-23{,}00 - (-13{,}87)$
$-74{,}8 - (+17{,}16)$
$+56{,}69 - (+9{,}81)$

3. $+5 - (+3) + (-8)$
$+5 - (-3) + (+7)$
$-2 - 0 + (-6)$
$+7 + 0 - (-8)$
$-11 - (+9) + (+4)$

4. $+12 - (-7) + (+2)$
$-10 + (-6) - (+4)$
$0 - (+8) - (-7)$
$0 - (+5) + (-19)$
$+12 + (-7) - (-2)$

228. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $x + (+3) = +7$
$y - (-5) = -12$
$z - (-7) = +3$
$u + (-1) = -14$
$v + (+13) = -2$

2. $t + (-4) = 0$
$H - (+16) = -11$
$I + (-5) = -5$
$K + (-19) = +19$
$N - (+8) = +8$

§ 31. Suunaga arvude korrutamine.

Ülesanne 1. Kell jääb 5 sekundit tunni kohta järele, seega tema käigu parandus on $+5$ sekundit tunni kohta. Keskpäeval kell näitas parajasti õiget aega. Missuguse paranduse peab lisandama kella hilisemale näitamisele, ütleme kell $+4$, et saada õiget aega?

L a h e n d u s. Arutame nõnda:

Näidates keskpäeval õiget aega ja jäädes järgneva 4 tunni jooksul järele kokku $4 \cdot 5$ ehk 20 sekundit, näitab osuti kella 4 ajal 20 sekundit v ä h e m kui tarvis. Seega on otsitav parandus 20 sekundit, mis tuleb kella näitamisele l i s a n d a d a. Seepärast kirjutame nõutava paranduse sekundeis kujul

$$+20.$$

Sellest kirjutisest pole aga näha paranduse s a a m i s l u g u: ta on koostunud p o s i t i i v s e 4 tunni jooksul võrdseist üksiktunni parandusist $+5$ sekundit. Et seda asjaolu nähtavale tuua, kirjutame kõnesoleva paranduse kujul

$$(+4) \cdot (+5),$$

mõistes selle kirjutisega arvu $+20$:

$$(+4) \cdot (+5) = +20.$$

Küsime edasi, missuguse paranduse peab lisandama kella v a r a s e m a l e näitamisele, ütleme kell 4 tundi e n n e keskpäeva ehk kell —4, et saada õiget aega?

Arutame nõnda:

Jäädes keskpäevale eelneval 4 tunnil järele kokku $4 \cdot 5$ ehk 20 sekundit, näitas osuti keskpäeval õiget aega. Tähendab, kella —4 ajal näitas osuti 20 sekundit e n a m kui tarvis. Seega on otsitav parandus 20 sekundit, mis tuleb kella näitamisest l a h u t a d a. Seepärast kirjutame nõutava paranduse sekundeis kujul

$$-20.$$

Selle paranduse saamislugu on järgmine: ta on koostunud 4 n e g a t i i v s e tunni jooksul võrdseist üksik-

tunni parandusist +5 sekundit. Et seda asjaolu nähtavale tuua, kirjutame kõnesoleva ajaparanduse kujul

$$(-4) \cdot (+5),$$

mõistes selle kirjutisega arvu —20:

$$(-4) \cdot (+5) = -20.$$

Ülesanne 2. Kell ruttab 5 sekundit tunni kohta ette, seega tema käigu parandus on —5 sekundit tunni kohta. Keskpäeval kell näitas õiget aega. Missuguse paranduse peab lisandama kella hilisemale näitamisele, ütleme kell +4, et saada õiget aega?

Lahendus. Arutades eespool-näidatud viisil näeme, et otsitav parandus on sekundeis —20. Kirjutame selle paranduse, märkides ühtlasi tema saamislugu, kujul

$$(+4) \cdot (-5),$$

nii et

$$(+4) \cdot (-5) = -20.$$

Küsime edasi, missuguse paranduse peab lisandama kella varasemale näitamisele, ütleme kell —4, et saada õiget aega?

Arutades jälle eespool-näidatud viisil näeme, et otsitav parandus on sekundeis +20. Kirjutame selle paranduse, märkides ühtlasi tema saamislugu, kujul

$$(-4) \cdot (-5),$$

nii et

$$(-4) \cdot (-5) = +20.$$

Jättes kõrvale andmete päritolu mõistame edaspidi ikka

avaldist	arvuna
$(+4) \cdot (+5)$	$+20$
$(-4) \cdot (+5)$	-20
$(+4) \cdot (-5)$	-20
$(-4) \cdot (-5)$	$+20$

Üldiselt sõnastame seda nii:

korrutis on positiivne, kui tegurid on ühe ja sama märgiga arvud; korrutis on negatiivne, kui tegurid on erinevate märkidega arvud; korrutise absoluutväärtus on võrdne tegurite absoluutväärtuste korrutisega.

Suunaga arvude korrutise märkimisel asetame tegurid alati sulgudesse. Korrutamise tulemuse kirjutises jätame sulud ära.

Näited.

1. $(-2) \cdot (-10\frac{1}{2}) = +2 \cdot \frac{21}{2} = +21.$
2. $(+0{,}05) \cdot (-7{,}2) = -0{,}36.$
3. $(-a) \cdot (+a^2) = -a^3.$
4. $(-b) \cdot (+2b) \cdot (-4b^2) \cdot (-b^3) =$
   $-(b \cdot 2b \cdot 4b^2 \cdot b^3) = -8b^7.$

Ülesanded.

229. Arvuta järgmised korrutised:

1.	2.	3.
$(+3) \cdot (+2)$	$(+3) \cdot (-5)$	$(-1) \cdot (+2)$
$(+3) \cdot (+4)$	$0 \cdot (-7)$	$(-1) \cdot (-3)$
$(+5) \cdot (+2)$	$(+4) \cdot (-2)$	$(-4) \cdot (-7)$
$(+7) \cdot 0$	$(+5) \cdot (-4)$	$(-3) \cdot (+5)$
$(+1) \cdot (+8)$	$(+7) \cdot (-8)$	$(-7) \cdot (+6)$

4. $(-4) \cdot (-6)$
$(+2) \cdot (+5)$
$(-7) \cdot (-1)$
$(+3) \cdot (-9)$
$(-3) \cdot (-3)$

5. $(-8) \cdot (-9)$
$(+5) \cdot (-7)$
$(+7) \cdot (+7)$
$(-11) \cdot (-4)$
$(-8) \cdot (-8)$

6. $0 \cdot (-10)$
$(+8) \cdot 0$
$(-5) \cdot (-7)$
$(-1) \cdot (-1)$
$(-1) \cdot 0$

230. Määra järgmiste avaldiste väärtused:

1. $(+2) \cdot (+3) \cdot (-4)$
$(+3) \cdot (-5) \cdot (-1)$
$(-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$
$(-7) \cdot (-2) \cdot (-3)$
$(-2) \cdot (+4) \cdot (+9)$

2. $-5 \cdot (-7) \cdot 8$
$-10 \cdot (-8) \cdot 4$
$5 \cdot (-6) \cdot 0$
$-4 \cdot 8 \cdot (-7)$
$-9 \cdot 0 \cdot (-15)$

3. $\left(-\frac{1}{2}\right) (-2) (-1)$
$(-3) (+4) (-1)$
$(-1) (-1) (-1) (+1)$
$(+2) (+2) (-2)$
$(-1) (-1) (-1) (-1)$

4. $(-2) (-2) (-2)$
$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (-4)$
$(-5) (-2) (-1) \cdot 0$
$(-15) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2)$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) (-2)$

5. $\left(+\frac{3}{5}\right) (-10) \left(-\frac{1}{10}\right)$
$(-2) \cdot 0{,}5 \cdot (-1)$
$(-3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) (-1)$
$(-5) (-1) (+1) (-1)$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-8) (-1)$

6. $(-3) \left(-\frac{1}{3}\right) (-4)$
$0{,}01 (-0{,}1) (-1)$
$(-3) (+6) \left(-\frac{1}{6}\right) (-2)$
$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6a$
$\frac{1}{3} \cdot (-6) (-2y)$

§ 32. Suunaga arvude astendamine.

Eelmises paragraafis öeldu põhjal saame, et

$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$

$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = (+25) \cdot (+5) = +125$

$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = +81$

$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (+16) \cdot (-4) = -64$

$(+a)^2 = +a^2 \qquad (-a)^2 = +a^2$

$(+a)^3 = +a^3 \qquad (-a)^3 = -a^3.$

Eriti leiame, et

$(-1)^2 = +1 \qquad (-1)^3 = -1$

$(-1)^4 = +1 \qquad (-1)^5 = -1$

ja üldiselt, et

$(-1)^{2n} = +1 \qquad (-1)^{2n-1} = -1.$

Samuti leiame, et iga astendaja n puhul on

$$(+a)^n = a^n$$

ja

$(-a)^{2n} = a^{2n}$

$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$

Näeme, et

positiivse arvu aste on positiivne; negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne; negatiivse arvu paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Ülesanded.

231. Arvuta järgmised astmed:

1. $(+11)^4$	**2.** $(-6)^5$	**3.** $(+10)^1$	**4.** $(-1)^6$
$(-38)^2$	$(-1)^7$	$(-13)^3$	$(+1)^{10}$
$(-0{,}7)^4$	$(+1{,}3)^3$	$(-0{,}5)^4$	$(-1{,}1)^5$
$\left(+3\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(-\frac{4}{9}\right)^3$	$\left(+1\frac{1}{6}\right)^4$	$\left(-7\frac{1}{3}\right)^3$
$\left(-1\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(+\frac{11}{12}\right)^2$	$\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(+4\frac{1}{2}\right)^3$

232. Arvuta järgmised astmed:

1.	2.	3.	4.
$(-3)^2$	$(-8)^2$	$(-0{,}9)^2$	$(-1{,}1)^2$
$(-4)^3$	$(+5)^3$	$(-1{,}3)^2$	$(+0{,}11)^2$
$(+6)^2$	$(-10)^1$	$(+0{,}2)^4$	$(-2{,}1)^3$
$(-7)^3$	$(-4)^5$	$(-3{,}5)^2$	$(+2{,}01)^2$
$(-1)^4$	0^6	$(-4{,}1)^2$	$(-5{,}2)^2$

233. Arvuta järgmised avaldised:

1.	2.	3.
$(-2)^3 \cdot 3^2$	$0{,}07^4 \cdot 10^2$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 8^2$
$4^3 \cdot 10^5$	$(-0{,}1)^7 \cdot 8^5$	$\left(-1\frac{3}{7}\right)^4 \cdot 49^2$
$(-2)^{10} \cdot 10^4$	$0{,}3^4 \cdot 0{,}4^3$	$\left(-3\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(4\frac{1}{6}\right)^3$

4. $(-3)^2 - (-2)^3 + (-1)^{10}$
$5^2 + (-8)^2 - (-1)^9$
$-3^2 - 2^3 + (-4)^3$
$-2 \cdot (-1)^3 + (-0{,}1)^3 \cdot 3$
$(-5)^2 \cdot 4^2 - (0{,}2)^2 \cdot (-0{,}3)^2$

5. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$
$0{,}02^3 \cdot (-10)^3 - (-10)^4$
$\left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2\frac{1}{4}\right)^2$
$7^{10} \cdot 0 - (-5)^9 \cdot 0$
$0{,}5^3 + 0{,}25^2 - 0{,}75^2$

§ 33. Suunaga arvude jagamine.

Olgu a ja b kaks suunaga arvu. Nende jagatisena mõistame niisugust arvu x, mis korrutamisel arvuga b annab arvu a, teiste sõnadega, arvu x, mille puhul

$$b \cdot x = a.$$

Arvu x märgi peab valima nõnda, et korrutis bx saaks arvu a märgi: kui b ja a on ühe ja sama märgiga, peab x olema märgiga +, vastasel korral märgiga —.
Seega

jagatis on positiivne, kui jagatav ja jagaja on ühe ja sama märgiga arvud; jagatis on negatiivne, kui jagatav ja jagaja on erinevate märkidega arvud;

jagatise absoluutväärtus on jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatis.

Suunaga arvude jagatise märkimisel jagamismärgiga „:" asetame jagatava ja jagaja alati sulgudesse; jagatise märkimisel murrujoone abil pole sulud vajalikud. Jagamise tulemuse kirjutises jätame sulud ära.

Näited.

$(+35) : (+7) = +5$ $\quad (+35) : (-7) = -5$

$(-35) : (+7) = -5$ $\quad (-35) : (-7) = +5$

$\frac{-7}{+10} = -0{,}7$ $\quad \frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$ $\quad \frac{-12}{-28} = +\frac{3}{7}$.

Ülesanded.

234. Arvuta järgmised jagatised:

1.
$(+6) : (+3)$
$(+7) : (+1)$
$(+72) : (+9)$
$(+18) : (+6)$
$0 : (+5)$

2.
$(-4) : (+2)$
$(-12) : (+3)$
$(-18) : (+9)$
$(-20) : (-4)$
$(-48) : (-6)$

3.
$(+63) : (-7)$
$(-1) : (-1)$
$(+24) : (-4)$
$(-12) : (+12)$
$(-49) : (+7)$

4.
$(-81) : (-9)$
$0 : (-7)$
$(+1) : (-1)$
$(-27) : (+3)$
$(-40) : (+5)$

5.
$(-1) : (+1)$
$0 : (-10)$
$(-56) : (-8)$
$(-96) : (+12)$
$(-30) : (+6)$

6.
$0 : (-1)$
$(-15) : (+3)$
$(-33) : (-11)$
$(-42) : (+7)$
$(-52) : (-13)$

235. Arvuta järgmised jagatised:

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{+16}{-4}$	$\frac{+18}{-2}$	$\frac{-121}{11}$	$\frac{72}{-8}$	$\frac{-91}{-13}$
$\frac{-24}{+3}$	$\frac{-35}{-7}$	$\frac{15}{-1}$	$\frac{-100}{-25}$	$\frac{-39}{13}$
$\frac{-63}{-9}$	$\frac{-32}{-16}$	$\frac{-64}{-10}$	$\frac{0}{15}$	$\frac{45}{-15}$

236. 1. Õhu temperatuur oli talvehommikul -12^0 ning tõusis keskpäevaks 4^0 võrra. Kui kõrge oli temperatuur keskpäeval?

2. Õhtul oli temperatuur -15^0 ning langes öö jooksul 5^0 võrra. Milline oli temperatuur hommikul?

3. Inimese keha temperatuur on umbes $+37^0$. Kõige madalam temperatuur, mis looduses üldse võib olla, on -273^0.

Arvuta inimese keha temperatuuri ja madalaima temperatuuri vahe.

4. Elavhõbe tahkub temperatuuril 39^0 alla nulli, piiritus aga temperatuuril 112^0 alla nulli. Kui suur on elavhõbeda ja piirituse tahkumistemperatuuride vahe?

5. Kevadisel päeval mõõdeti temperatuuri iga tunni tagant ja saadi järgmised andmed:

$-4{,}5^0$; $-3{,}2^0$; $-1{,}2^0$; $-0{,}4^0$; $+0{,}1^0$; $+1{,}2^0$; $+1{,}6^0$; $+1{,}4^0$; $+0{,}8^0$; $+0{,}2^0$; $-0{,}4^0$.

Arvuta selle päeva keskmine temperatuur.

§ 34. Arvutamise põhiseadused positiivsete arvude vallas.

Eespool-antud tehtejuhiste järgi käies leiame, et

$$+3 + (+8) = +8 + (+3),$$
$$[(+2) \cdot (+3)] \cdot (+7) = (+2) \cdot [(+3) \cdot (+7)],$$
$$(+2) \cdot [+3 + (+5)] = (+2) \cdot (+3) + (+2) \cdot (+5).$$

Neil ja teistel niisugustel näidetel veendume, et arvutamise põhiseadused, mis kehtivad suunata arvude vallas, kanduvad muutumatult üle positiivsete arvude valda.

Kui vaatleme positiivseid arve ja tehteid nendega, siis näeme, et need arvud oma omadustelt milleski ei erine meile varemini tuntud märgita ehk suunata arvudest.

Näiteks on

$+3 < +5$ ja rööbiti sellega $3 < 5$,

$+7 - (+4) = +3$ „ „ „ $7 - 4 = 3$,

edasi

$(+30) : (+5) = +6$ „ „ „ $30 : 5 = 6$,

samuti

$(+3)^4 = +81$ „ „ „ $3^4 = 81$.

Järelikult pole põhjust arvutamisel vahet teha arvude $+3$ ja 3, arvude $+7\frac{1}{2}$ ja $7\frac{1}{2}$ ning arvude $+9{,}4$ ja $9{,}4$ vahel. Seepärast jätame positiivse arvu kirjutamisel märgi pluss ära, kui seda märki pole tarvis eriti rõhutada miinus-märgi vastandina. Nii kirjutame võrduse

$$+7 + (-3) = +4$$

asemel lühemalt

$$7 + (-3) = 4$$

ja võrduse

$$(-9)^2 = +81$$

asemel lühemalt

$$(-9)^2 = 81.$$

§ 35. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega.

Pole raske veenduda, et positiivsete arvude vallas kehtivad arvutamise põhiseadused kehtivad ka positiiv-

sete ja negatiivsete arvude vallas, kui aga mõista seal summat, vahet, korrutist ja jagatist nii, nagu neid eespool seletasime.

Näited.

1. $$-7 + (+13) = -7 + 13 = +6$$
$$+13 + (-7) = +13 - 7 = +6.$$

Seega

$$-7 + (+13) = +13 + (-7),$$

tähendab, näite puhul kehtib liidetavate vahetuvuse seadus.

2. $$(-7) \cdot [(-5) \cdot (+3)] = (-7) \cdot (-15) = +105$$
$$[(-7) \cdot (-5)] \cdot (+3) = (+35) \cdot (+3) = +105.$$

Seega

$$(-7) \cdot [(-5) \cdot (+3)] = [(-7) \cdot (-5)] \cdot (+3),$$

tähendab, näite puhul kehtib korrutise korrutamise seadus.

3. $$(-4) \cdot [+13 - (+7)] = (-4) \cdot [13 - 7] =$$
$$= (-4) \cdot (+6) = -24$$
$$(-4) \cdot (+13) - (-4) \cdot (+7) = -52 - (-28) =$$
$$= -52 + 28 = -24.$$

Seega

$$(-4) \cdot [+13 - (+7)] = (-4) \cdot (+13) - (-4) \cdot (+7),$$

tähendab, näite puhul kehtib vahe korrutamise seadus.

Neist näiteist näeme, et arvutamise põhiseadused, mis valitsevad positiivsete arvude vallas, on muutumatult kehtivad ka positiivsete ja negatiivsete arvude vallas. Oeldu põhjal võime vaadelda negatiivseid arve mitte mingi omaette arvuliigina, vaid positiivsete arvude valla loomuliku laiendina. Positiivsed ja negatiivsed arvud moodustavad koos *suunaga arvude valla*.

Suunaga arvude valda kuuluvaks loeme ka arvu 0. Oma omadustelt ta erineb tunduvalt kõigist teistest arvudest. Leiame kõigepealt, et igasuguse arvu a puhul

$$a + 0 = a \qquad a - 0 = a$$
$$0 + a = a \qquad 0 - a = -a.$$

Olgu nüüd a mõni täisarv. Siis korrutamise definitsiooni järgi

$$a \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{a \text{ liidetavat}},$$

ehk

$$a \cdot 0 = 0.$$

Siit järeldub, et

$$0 : a = 0.$$

Olgu a murdarv $\frac{m}{n}$. Võttes nullist ühe n-diku ja siis m niisugust, näeme, et võrdus

$$a \cdot 0 = 0$$

jääb kehtima ka murdarvulise a puhul. Samuti jääb tehtud eeldusel kehtima võrdus

$$0 : a = 0.$$

Avaldisel $0 \cdot a$ korrutamise definitsiooni järgi pole mõtet. Lepime kokku mõista selle sümboliga sedasama, mis sümboliga $a \cdot 0$. Siis oleks tegurite vahetuvuse seadus kehtiv ka nulli puhul ja oleks

$$0 \cdot a = 0.$$

Küsime lõpuks, mida tähendab sümbol

$$a : 0 ?$$

Jagamise definitsiooni järgi sümbol $a : 0$ nõuab niisuguse arvu x leidmist, mis korrutamisel nulliga annaks

arvu a. Niisugust arvu x aga ei leidu: tõepoolest, missuguse väärtuse ka annaksime x-le, ikka on

$$0 \cdot x = 0$$

ja mitte a, nagu nõutakse. Sellest järeldub, et sümbolil $a : 0$ pole mõtet ja seepärast

nulliga jagada ei saa.

§ 36. Ülesandeid kordamiseks.

237. Joonista astmik ühikuga 20 mm ja kujuta sellel arvud

$$+2\tfrac{1}{2} \qquad -1{,}5 \qquad +\tfrac{3}{4} \qquad -0{,}7 \qquad -3\tfrac{1}{4}.$$

238. Arvuta järgmised astmed:

1. $(-0{,}4)^2 \qquad -(-93)^2 \qquad -29^2 \qquad \left(-1\tfrac{4}{5}\right)^2$
2. $-(-1)^4 \qquad -(+4)^3 \qquad \left(-3\tfrac{1}{2}\right)^2 \qquad -\left(1\tfrac{1}{4}\right)^3$

239. Anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

1. $21u - 18(u - 7)$
   $(-15)\ (8v - 2) + 120v$
   $(-48)\ (1 - st) - 22$
   $32p + (-2)\ (18p - 4)$
   $18q - (3 - 7q)\ (-2)$
2. $6(3i - 4k) + (-2)\ (3i - 6k)$
   $(-2)\ (7k - 9i) + 4(7i - 9k)$
   $8(6i + 12m) + (-5)\ (4m + 27i)$
   $(2m - 9n) \cdot 3 + (5m - 7n) \cdot 4$
   $(10n - 17p)\ (-2) - (9 + 6n) \cdot 8$

240. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$-3R + (-12R)$
$-5h^2 + (-27h^2) + (-11h^2)$
$-2abx + (-abx) + (-14abx)$
$-7Q - (-10Q) - (+8Q)$
$3uv - (+13uv) - (-7uv) - (+uv)$

241. Koonda järgmised avaldised:

$a^2z^3 + a^2z^3 - 4c^4z - a^2z^3 - 3c^4z$
$2Q^4 + 5Q^3 + Q^2 - 1 - Q^4 - 7Q^3 - Q^2$
$3\frac{1}{2}mv^2 + 2\frac{1}{3}n^2u - 2\frac{1}{2}mv^2 + 1\frac{2}{3}n^2u - n^2u$
$abc + 2a^2 + 6b^3 + c^2 - abc - 2a^2 - 5b^3 - c^2 - a$
$h^2g^3x + 3hg^2x^2 - 7hg^2x^2 - h^2g^3x + hgx^3$

242. Arvuta avaldise $4 - 0{,}25x^2$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele -8-st $+8$-ni. Saadud väärtused kujuta graafiliselt.

243. Arvuta hulkliikme $x^2 + x - 20$ numbrilised väärtused, mis vastavad x-i täisarvulistele väärtustele -5-st $+4$-ni. Saadud väärtused kujuta graafiliselt.

244. Lahenda järgmised võrrandid:

1.
$x + 2 = 1$
$x + 7 = 12$
$5 + x = 2$
$8 + x = 7$
$4 + x = 4$

2.
$x + 6 = 0$
$x - 3 = -1$
$x - 11 = -5$
$x - 15 = -17$
$x - 13 = 0$

3.
$x - 17 = 58$
$x - 5 = 0$
$x + 59 = 104$
$x + 9 = 0$
$5 + x = 12$

4.
$1 = 1 - x$
$83 = x + 75$
$3 = 2 - x$
$0 = x + 2{,}5$
$3{,}8 - x = -0{,}5$

5. $5x + 4 = 19$

$7 - 2x = 5$

$-1 = 7x + 6$

$8x - 5 = 0$

$\frac{x}{2} + 2 = 10$

6. $4x + 3 = 3x + 3$

$22x = 23x - 11$

$1 = -\frac{2}{3}x - 7$

$\frac{1}{4}x = -2 + 1$

$37 = 25 + \frac{6}{11}x$

7. $\frac{1}{3}x = -1$

$\frac{x}{5} = -5$

$\frac{x}{-2} = -3$

$\frac{-x}{4} = -2$

$-\frac{x}{10} = -1$

8. $\frac{-3}{4}x = -3$

$-\frac{5}{7}x = 15$

$\frac{8}{-13}x = -8$

$\frac{1}{10}x = -18$

$-\frac{7}{15}x = -14$

9. $-x = 0$

$-\frac{3}{4}x = -\frac{2}{3}$

$\frac{-4}{5}x = \frac{1}{-2}$

$\frac{3}{-4}x = \frac{5}{-8}$

$\frac{-11}{12}x = \frac{-3}{8}$

10. $x - 4(2{,}5x - 2) + 3(2x + 4) + 6 = 5$

$9(7x - 6) + 7(8x - 5) - 6(9x - 8) - 11 = 0$

$0 = 2(3 + 4x) - (13 + 4x) + [9x + 3(9 - 5x)]$

$5x - [(2x - 0{,}5) - 7(x + 0{,}5)] + 3(7x - 6) - 13 = 0$

$3(13 - x) - [0{,}5(3x - 14) + 2(10 - x)] = 0$

245. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$3p - \frac{15}{q}$, kui $p = 0$ ja $q = -3$

$a^2 - x^2$, kui $a = 1$ ja $x = 10$

$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$, kui $m = 2$ ja $n = -3$

$h^2 - kh + k^2$, kui $h = 4$ ja $k = -3$

$2P^2 - 3Q^2$, kui $P = 3$ ja $Q = -2$

Peatükk IV.

Täisavaldised.

§ 37. Üksliikmete korrutamine.

Olgu antud korrutada kaks ühe ja sama arvu astet, näiteks avaldis a^m avaldisega a^n. Tuletades meelde nende avaldiste tähendust saame

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tegurit}}.$$

Paremal pool seisvate tegurite koguarv on $m + n$; seega võib nende tegurite korrutist kirjutada lühemalt kujul a^{m+n}; järelikult

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näeme, et

ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Näited.

1. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.
2. $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$.
3. $u \cdot u^2 \cdot u^3 = u^{1+2+3} = u^6$.

Olgu antud korrutada üksliikmed $5a^2x^3$ ja $-7ax^4$. Nõutav korrutis on

$$5a^2x^3 \cdot (-7ax^4).$$

Tegurite vahetuvuse seaduse põhjal võime seda kirjutada ka nii:

$$5 \cdot (-7) \cdot a^2 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^4$$

ja edasi korrutise korrutamise seaduse põhjal:

$$[5 \cdot (-7)] \cdot [a^2 \cdot a] \cdot [x^3 \cdot x^4]$$

ehk

$$(-35) \cdot (a^3) \cdot (x^7)$$

ehk lühemalt

$$-35a^3x^7.$$

Uldistades võime tulemuse lühidalt sõnastada nõnda:

üksliikmete korrutamisel tuleb nende kordajad korrutada ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liita.

Näide.

$$(-3abx^2) \cdot (-2\tfrac{1}{3}a^2x^3) = (-3) \cdot (-2\tfrac{1}{3}) \cdot a^3bx^5 =$$

$$= (3 \cdot \tfrac{7}{3})\, a^3bx^5 = 7a^3bx^5.$$

Ülesanded.

246. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

1. $4 \cdot 5c$	2. $7A \cdot AB$	3. $p \cdot 2p \cdot 3q$
$f \cdot 9f$	$3cD \cdot 8DE$	$12pqr \cdot \frac{3}{4}qr$
$2h \cdot 7k$	$3r^2 \cdot 0{,}2s^2$	$6f^2h \cdot 8fh^2$
$3pq \cdot q$	$0{,}9hk^2 \cdot 2h$	$3ax \cdot 2bx \cdot cx$
$3uv \cdot 5v$	$4N^2 \cdot 9Nu$	$u^2v \cdot v^2w \cdot w^2u$
4. $x^2 \cdot x$	5. $x^3 \cdot x^3$	6. $x^5 \cdot x^4$
$y \cdot y^2 \cdot y^4$	$y^2 \cdot y \cdot y^3$	$y^3 \cdot y \cdot y$
$2z^2 \cdot 3z^3$	$3z \cdot 7z^3$	$7z^2 \cdot z^7$
$8u^3 \cdot 8u^3$	$0 \cdot u^2 \cdot 14$	$6u^3 \cdot 4u^4$
$a^2v^3 \cdot a^3v$	$av^3 \cdot a^4v^2$	$a^2v^3 \cdot av$

247. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidal kujul:

1. $(-3a)\ (-4b^2)\ (-a)$
   $2a^2 \cdot (-a)\ (-b)$
   $(-a)\ (-b)\ (-2a)$
   $(+x)\ (-3b)\ (-2c)$
   $(-2)\ (-3a)\ (-4b)$

2. $(-\frac{2}{3}x)\ (-\frac{3}{2}y)$
   $(-x) \cdot 0 \cdot (-5x^2)$
   $(-4x^2)\ (-7x) \cdot \frac{1}{7}y$
   $(0{,}3x^2)\ (-\frac{1}{3}x)$
   $(-0{,}4y^2) \cdot 5y^2$

3. $0{,}3a \cdot 0{,}3a \cdot (-\frac{1}{100}b)$
   $(-0{,}5a)\ (-0{,}2a) \cdot 10ab^2$
   $(-4x)\ (-\frac{1}{2}y)\ (-\frac{1}{4}xy^3)$
   $(-3x)\ (+3x)\ (-3x^2)$
   $(-0{,}5a)\ (+2ab)\ (-c)$

4. $0{,}5x^3 \cdot 0{,}5x^3$
   $(-0{,}3a)\ (-b)\ (-c)$
   $(+1{,}2x)\ (-5)\ (-y)$
   $(-\frac{2}{3}a)\ (+\frac{2}{3}b)\ (-9ab)$
   $(-\frac{1}{2})\ (-\frac{1}{2}x)\ (+\frac{2}{3}z)$

248. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $12h^2 \cdot \frac{3}{4}h$
   $\frac{1}{2}n \cdot 16nx^3$
   $16c^3z^2 \cdot cz^3$
   $0{,}1a^2s \cdot 10as^4$
   $0{,}1k^3t^2 \cdot 0{,}1kt^3$

2. $1\frac{1}{2}h^3 \cdot \frac{2}{3}h$
   $6n^3x^2 \cdot \frac{1}{3}n^2x$
   $0{,}5c^2 \cdot 3cz^2$
   $1{,}3as^4 \cdot 0{,}2as^4$
   $2{,}5kt^2 \cdot 4k^2t^3$

3. $3\frac{1}{3}h \cdot \frac{3}{10}h^4$
   $1\frac{3}{4}n^4x \cdot 1\frac{1}{7}nx^6$
   $0{,}2c^3 \cdot 0{,}3cx^4$
   $0{,}8a^3s^3 \cdot 2{,}5a^2s$
   $0{,}9k^2t \cdot 9{,}1k^3t^2$

§ 38. Uksliikmete jagamine.

Olgu antud jagada kaks sama alusega astet, näiteks avaldis a^m avaldisega a^n. Olgu astendaja m suurem astendajast n ehk sümbolites: $m > n$. Siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tõepoolest, korrutades kontrolliks jagatist jagajaga, saame

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m,$$

nagu peab olema.
Seega: kui $m > n$, siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tulemuse võime lühidalt sõnastada nõnda:

ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas.

Jagatis $a^m : a^m = 1$ igasuguse astendaja m puhul.

Olgu antud jagada üksliige $-28a^5b^3x$ üksliikmega $-4a^2b^3$. Rakendame korrutisega jagamise juhist:

jagame jagatava eeskätt jagaja esimese teguriga -4; saame $7a^5b^3x$; jagame saaduse teise teguriga a^2; see annab $7a^3b^3x$; jagame selle saaduse kolmanda teguriga b^3; see annab lõppsaadusena $7a^3x$.

Üldistades võime üksliikmete jagamise juhise sõnastada lühidalt nõnda:

üksliikmete jagamisel tuleb nende kordajad jagada ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad lahutada.

Näide.

$$3cN^2u^5 : (-4N^2u^3) = -\frac{3}{4}cu^2.$$

Ülesanded.

249. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1.	2.	3.
$a^4 : a^2$	$q^6 : q^4$	$f^{12} : f^7$
$c^3 : c^3$	$N^8 : N^5$	$i^{15} : i^{11}$
$x^4 : x$	$u^{10} : u^9$	$T^{21} : T^{12}$

250. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $12a^2 : 3$
   $28b^3 : b$
   $32c^2 : 8c^2$
   $18t^4 : 6t^3$
   $6{,}4u^5 : 1{,}6u^3$

2. $21p^2q^3 : 7pq^2$
   $5a^2u^3 : 5au^2$
   $pq^2r^3 : qr^2$
   $30i^3m^5n^3 : 10i^2m^3$
   $63N^3c^5u^7 : 9Nc^3u^5$

251. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsal kujul:

1. $18m : 6$
   $85h : 17$
   $576g : 24$
   $26u^2 : 13$
   $42z^3 : 7z$

2. $39n^5 : 3n$
   $a^3 : a^3$
   $28f^2 : 14f$
   $0 : 19k$
   $25i : 5i^2$

3. $112mv : 7m$
   $36ax : 9a$
   $80rR^2 : 24rR$
   $27mn^2 : 3mn$
   $18p^3q : 36p^2q$

4. $3uvw : 12uw$
   $11a^3b^2z : 66ab^2$
   $25h^2k^3l : 10hk^2$
   $16c^3d^2u : 32c^3du$
   $0{,}2k^3l^4m^2 : 0{,}5k^3l^3m$

252. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidal kujul:

1. $\frac{x^6}{x^2}$
   $\frac{a^4}{a^4}$
   $\frac{-z^{12}}{z^8}$

2. $\frac{a^2b}{ab}$
   $\frac{-28u^2}{42u}$
   $\frac{14a^2x^2}{196a^2x}$

3. $\frac{5c^2v}{10c^2v}$
   $\frac{0}{4d^2w}$
   $\frac{7N^2u^3}{35N^2u^2}$

4. $\frac{-27ab^2c^3}{18bc^2}$
   $\frac{48c^3d^4}{-16c^2d^2}$
   $\frac{-72a^4h^5}{56a^3h}$

§ 39. Üksliikmete astendamine.

Olgu antud astendada avaldis a^m arvuga n.
Astme definitsiooni kohaselt kirjutame

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ tegurit}}.$$

Meelde tuletades, et ühe ja sellesama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse, leiame, et

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\ldots+m}.$$

Summa $m + m + m + \ldots + m$, kus esineb n võrdset liidetavat ja iga liidetav on m, võime kirjutada lühemalt nm. Seega

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:

astme astendamisel astendajad korrutatakse.

Näited.

$$(x^2)^3 = x^6 \qquad (u^3)^5 = u^{15}$$

Olgu antud astendada korrutis ab arvuga n.
Astme definitsiooni järgi on

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \ldots ab}_{n \text{ tegurit}}.$$

Rakendades tegurite vahetuvuse ja korrutise korrutamise seadust näeme, et

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{n \text{ tegurit}}$$

ehk

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:

korrutise astendamisel astendame iga tema teguri.

Näide. Leida üksliikme $-3ab^2c^3$ neljas aste. Eelmist juhist rakendades saame

$$(-3ab^2c^3)^4 = (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = \\ = +81 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12},$$

ehk lühemalt

$$(-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}.$$

Ülesanded.

253. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1.	2.	3.	4.
$(2^2)^3$	$(a^2)^3$	$(-s^2)^3$	$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^2$
$(1^5)^4$	$(b^3)^2$	$-(-t^3)^2$	$\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^2$
$[(-1)^2]^3$	$-(c^4)^2$	$(+u^3)^4$	$[-0{,}6^2]^3$
$[(-5)^2]^2$	$(d^2)^5$	$(-\frac{v}{2})^2$	$[(-1{,}2)^2]^2$
$[(-3)^2]^3$	$-(e^3)^3$	$-(-\frac{w}{10})^3$	$[-2{,}6^2]^2$

254. Kirjuta järgmised astmed võimalikult lühidal kujul:

1.	2.	3.	4.
$(2a)^2$	$(ac)^3$	$(5x^3)^2$	$(-6h)^2$
$(3b)^3$	$(mn)^4$	$(3y^2)^3$	$(-k^2)^3$
$(0{,}2c)^2$	$(2pq)^2$	$(2z^3)^5$	$(-3i^2)^2$
$(1{,}5d)^3$	$(3rst)^2$	$(4u^3)^3$	$(-4m)^3$
$(7{,}1e)^2$	$(0{,}5uv)^2$	$(6v^4)^2$	$(-7n^3)^2$

255. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidal kujul:

1.	2.	3.
$(x^2)^2$	$(x^3)^4$	$(x^2)^5$
$(-u)^2$	$(-u^2)^3$	$(-u)^2$
$(3v^2)^3$	$(-4v^3)^2$	$(-2v^3)^3$
$-(-7z^4)^2$	$(-10z^2)^3$	$(-2z^2)^5$
$(Q^2q)^4$	$(-Qq^3)^2$	$(-2Q^2q^4)^3$

256. Kirjuta järgmised avaldised sulgudeta:

1. $(2a^2b)^3$ $(4mn^2)^2$ $(3p^2q^3)^4$ $(rst^2)^5$ $(7a^2x^5)^2$
2. $(3h^4k)^3$ $(-4k^5l)^5$ $(2i^4m^3)^4$ $(-0{,}5m^5n^2)^2$ $(-0{,}4pq^2)^3$
3. $(0{,}9a^3x^4)^2$ $(0{,}2b^2z)^3$ $(0{,}5cu^2)^4$ $(-0{,}3d^2v^3)^5$ $(-1{,}2iw^4)^2$

§ 40. Hulkliikmete korraldamine.

Hulkliikmeist omavad erilist tähtsust need, mis koosnevad ühe ja sama arvu astmeist. Neid hulkliikmeid nimetatakse võõrkeelse nimetusega polünoomideks.

Näiteks järgmised avaldised on polünoomid:

$$2x - 1, \quad N^2 - 3N, \quad 5u^2 + 2u - 7, \quad h^3 + h + 1.$$

Ülevaatlikkuse otstarbel on viisiks kirjutada polünoome nii, et neis liikmed esineksid kas kasvavate või kahanevate astendajate järjekorras. Ülaltoodud näiteis on polünoomid korraldatud kahanevate astendajate järjekorras.

Näiteis

$$1 + \frac{1}{2}z, \quad H - 3H^2 + H^3, \quad w + 2w^3 + 3w^5 - w^7$$

on polünoomid korraldatud kasvavate astendajate järjekorras.

Märkus. Korraldatud polünoomidena esinevad meile kõik kümnendsüsteemis kirjutatud arvud. Näiteks tähendab kirjutis

25371

õieti polünoomi

$$2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1.$$

Lühiduse otstarbel on arvude märkimisviisis ära jäetud kümne astmed ja tehtemärgid. Missuguse kümne astme juurde kuuluvad kirjutises 25371 kordajad 2, 5, 3, 7, 1, seda näitab nende kordajate k o h t arvu 25371 kirjutises: paremalt vasakule poole seisavad esimesel kohal ühed, teisel kohal kümned (10^1), kolmandal kohal sajad (10^2), neljandal kohal tuhanded (10^3) jne.

Ülesanded.

257. Korralda järgmised polünoomid temas esineva tähe kasvavate astendajate järgi:

1. $x^2 + 4 - 4x$
   $2y + 1 + y^2$
   $5 - 9z^2 - 6z$
   $8u^2 - 5u + 12$
   $N^3 - 4N + 1$

2. $1 - 11v^3 + v + 3v^2$
   $-7p + 24p^3 - p^2 - 10$
   $-13q^2 - 4q + 6 + 5q^3$
   $r^3 - 3r - 3r^2 + 1$
   $m^4 - m^2 + 1 - 7m$

258. Korralda järgmised polünoomid esiteks temas esineva tähe kahanevate astendajate järgi, teiseks sellesama tähe kasvavate astendajate järgi:

1. $1 + 3x^2 - 2x$
   $8y - 6 + y^2$
   $z^2 + 7 - 3z$
   $-1 + 15u^2 - 7u$
   $10 - t + 4t^3$

2. $-4v - 9v^3 + 5v^2 + 1$
   $5p - 3 + 8p^2 - 7p^3$
   $4q^3 + q - 12q^2 - 2$
   $r^3 + r - 13 - 3r^2$
   $-2s^5 + 3s^3 - 7s + 2$

§ 41. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine.

Hulkliikmete liitmine ja lahutamine tugineb liitmise ja lahutamise põhiseadustele. Nende tehete sooritamise viis on näha järgmisist näiteist.

Näited.

1. $(x^3 + 2x^2 + 5x - 1) + (x^3 - 2x^2 - 2x + 1) =$
$= x^3 + 2x^2 + 5x - 1 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1 =$
$= 2x^3 + 3x.$

2. $(u^3 - 5u + 7) - (u^3 - 3u^2 + 6) = u^3 - 5u +$
$+ 7 - u^3 + 3u^2 - 6 = 3u^2 - 5u + 1.$

3. $(5ax^2 + 3bz^2 - 7abc) + (bz^2 - 5ax^2 + 6abc) =$
$= 5ax^2 + 3bz^2 - 7abc + bz^2 - 5ax^2 + 6abc =$
$= 4bz^2 - abc.$

Siit saame hulkliikme liitmiseks ja lahutamiseks järgmised juhised:

1. **Hulkliikme liitmiseks mingi arvuga kirjutatakse selle arvu juurde liidetava hulkliikme liikmed koos nende liikmete märkidega.**
2. **Hulkliikme lahutamiseks mingist arvust kirjutatakse selle arvu juurde lahutatava hulkliikme liikmed vastupidiste märkidega.**

Nii esimesel kui ka teisel juhul saadud tulemus, kui võimalik, koondatakse.

Mõnikord on otstarbekohasem kirjutada liidetavad ja lahutatavad hulkliikmed üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid s a m a s v e e r u s. Puuduvate astmete koht jäetakse tühjaks. Võte on sama, mida rakendame arvude liitmisel ja lahutamisel, selle vahega, et ära jäävad ülekanded ja laenamised.

Näited.

1.
$$\begin{array}{r} 4035 \\ +\ 720 \\ 43 \\ \hline 4798 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4k^3 + 3k + 5 \\ +\ 7k^2 + 2k \\ 4k + 3 \\ \hline 4k^3 + 7k^2 + 9k + 8 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 75938 \\ -\ 30708 \\ \hline 45230 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7k^4 + 5k^3 + 9k^2 + 3k + 8 \\ -\ 3k^4 + 7k^2 + 8 \\ \hline 4k^4 + 5k^3 + 2k^2 + 3k \end{array}$$

Ülesanded.

259. Lihtsusta järgmised avaldised:

$(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + y^2)$
$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)$
$(Q^3 + Q^2q + Qq^2) - (Q^2q + Qq^2 + q^3)$
$(ny^2 + 2nyz + z^2) - (ny^2 + 2nyz + ny^2)$
$(x^3 + 3cx^2 + c^3) - (x^3 - 3c^2x + c^3)$

260. Liida järgmised polünoomid ja koonda saadus:

1. $x^2 + 5x + 6$
   $x^2 - 5x + 12$
   $x - 18$

2. $y^2 - 13y - 30$
   $3y^2 + 16y + 29$
   $4y + 7$

3. $7z^2 - 22z + 11$
   $z^2 - 8z + 9$
   $5z^2 + 27z - 13$

4. $4u^2 - 17u + 32$
   $-4u^2 + 14u - 18$
   $-u^2 - 14u - 15$

5. $v^5 - 3v^3 + 2$
   $2v^3 - 2v + 1$
   $v^3 + 2v - 3$

261. Lahuta igas reas teises veerus seisev polünoom vastavast esimeses veerus seisvast ja koonda saadused:

$2x^2 - 5x - 37$	$x^2 + 4x - 13$
$7y^2 - 35y + 18$	$-7y^2 - 27y + 15$
$z^3 - 3z^2 + 4z + 2$	$-4z^2 - 2z + 11$
$u^3 + 6u - 7$	$u^3 - u^2 + 5u - 1$
$v^5 + 3v^3 - 2v^2 + 1$	$3v^4 + 3v^3 - 2v^2 + 6$

§ 42. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega.

Hulkliikmete korrutamine üksliikmega taandub summa korrutamise seaduse rakendamisel üksliikmete korrutamisele.

Hulkliikmete jagamine üksliikmega taandub summa jagamise seaduse rakendamisel üksliikmete jagamisele.

Näited.

1. $(+5x^2) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) =$
$= 5x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 5x^2.$

2. $(-4ab^2x) \cdot (5a^2x + 3bx^2 - 7ab) =$
$= -20a^3b^2x^2 - 12ab^3x^3 + 28a^2b^3x.$

3. $(35Nu^3 - 14N^2u^2 + 7N^3u) : (-7Nu) =$
$= -5u^2 + 2Nu - N^2.$

Kokkuvõttes võime sõnastada järgmise juhise:

hulkliikme korrutamiseks üksliikmega korrutame selle üksliikmega eraldi hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Analoogiline eeskiri kehtib hulkliikme jagamise kohta üksliikmega:

hulkliikme jagamiseks üksliikmega jagame selle üksliikmega eraldi hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Näited.

1. $(4ax^3 + 12abx^2 - 8abcx) : 4ax =$
$= x^2 + 3bx - 2bc.$

2. $(2\frac{4}{5}N^4u^4 + 10\frac{1}{2}N^3u^3 - 16\frac{1}{3}N^2u^2) : 7Nu^2 =$
$= \frac{2}{5}N^3u^2 + 1\frac{1}{2}N^2u - 2\frac{1}{3}N.$

Ülesanded.

262. Ava sulud järgmistes avaldistes:

1. $5a \cdot (4a^2 + 2)$
$7b \cdot (b^2 - x)$
$Q^2 \cdot (2q - Q)$
$6y \cdot (2y^2 - ab)$
$3h \cdot (h^3 - a^2h)$

2. $\frac{1}{2}u^2(6v + 2u)$
$1{,}4v(5v^2 - 1)$
$0{,}6(8cz^2 + z^3)$
$10mn(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{5}ng^2)$
$14p^2(\frac{3}{7}pq^2 - \frac{1}{2}q^2v)$

263. Ava sulud järgmistes avaldistes:

1. $(a + b + c) \cdot (-ab)$
   $(2a - 3b - 4c) \cdot (+2c)$
   $(-x^3 + 2x^5 - 3x^7) \cdot (-3x^2)$
   $(x^2 - 5x + 6) \cdot 0{,}2x^3$
   $(m^2 - 3mn + n^2) \cdot (-mn)$

2. $(2ax + 3by - 4cz) \cdot (-1)$
   $(x^2 + y^2 - xy) \cdot (-ax^2)$
   $(m - mn + np) \cdot (-3mnp)$
   $(2au + 3bv - 4cw) \cdot \frac{5}{12}abc$
   $(0{,}1hx^2 + 10h^2x) \cdot 0{,}1hx$

264. Arenda järgmised jagatised:

1. $(6Q - 4) : 2$
   $(15z - 12) : 3$
   $(28u + 21v) : 7$
   $(7pq + 7) : 7$
   $(81r^2 + 63) : 9$

2. $(m + 2mn) : m$
   $(5x^2 - 2x) : x$
   $(4n^2 + 3cn) : n$
   $(y^3 + y^2 + y) : y$
   $(4z^4 - 2z^2 + z) : z$

265. Arenda järgmised jagatised:

1. $(6hg - 3g^2) : 3g$
   $(12ax - 20a^2) : 4a$
   $(18x^2 - 6x) : 6x$
   $(2Q^3 - Qq) : 2Q$
   $(3r^4 - 4r) : 4r$

2. $(13m^2n - 3mn^2) : mn$
   $(15h^3k - 25hk^2) : 5hk$
   $(z^5 + z^3 + z^2) : z^2$
   $(14c^5 + 98c^4d) : 14c^3$
   $(35u^4 - 20u^2) : 5u^2$

266. Arenda järgmised jagatised:

1. $(m^2 - m) : (-m)$
   $(hk - kl) : (+k)$
   $(9x^2 - 6x) : (-3x)$
   $(14y^2 - 42y) : (-7y)$
   $(18w^3 - 45w) : (-9w)$

2. $(2z^3 - 3z^2) : (-4z^2)$
$(u^4 - 2u^3 - 3u^2) : (+0{,}5u^2)$
$(av^4 - bv^4) : (-v^3)$
$(20ap^2q^3 - 12bpq^2) : (-4pq^2)$
$(32N^2u^3 - 40N^3u^2) : (-8N^2u^2)$

§ 43. Ülesandeid kordamiseks.

267. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $n \cdot n^2 \cdot n^3$
$T^3 \cdot T^4 \cdot T^2$
$q^2 \cdot q^4 \cdot q^6$
$R^2 \cdot R^2 \cdot R^2$
$x^4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x$

2. $8a^2b \cdot 7bc^2$
$6p^5q \cdot 7q^5$
$2hu \cdot 3hu^2 \cdot 4hu^3$
$4F^2G^3 \cdot 4F^2G^3$
$3ax^2 \cdot 3ax^2 \cdot 3ax^2$

268. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidal kujul:

1. $b \cdot (-a) \cdot (-a)$
$-3c \cdot (-c) \cdot 2c^2$
$(-2b) \cdot (-d)$
$(-d) \cdot (-3d^2) \cdot 2d$
$h \cdot (-h^2k) \cdot kl$

2. $(-4n^2) \cdot 3n^3 \cdot (-n^2)$
$(-7m^3) \cdot (+2mn) \cdot (-m^2n)$
$2R^2 \cdot (-3r) \cdot 5r \cdot R$
$-9ay^3 \cdot (-a^2y) \cdot (-1)$
$-0{,}1p^2q \cdot (-10pq^2) \cdot (-pq)$

269. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsal kujul:

1. $(-212a) : 4$
$(-16b) : 4$
$(-36cd) : 9$
$(-56u) : (+8u)$
$(-72gh) : (-18g)$

2. $(-75ay^2) : (-15ay)$
$(+217a^2v) : (-7a^2)$
$(-91p^2q^2) : 13pq$
$(-5z^4) : (-5z^4)$
$(+a^3b^2c) : (-5a^2b)$

270. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsal kujul:

1. $-(-3p^3)^3$
   $(-13)^2(-q)^4$
   $(-1)\ (-2r^2)^6$
   $(-1)^3 \cdot (-3s)^2$
   $(-2)^4 \cdot (-5t^2)^2$

2. $(-2u)^3\ (-u^2v)^4$
   $-(+1\frac{2}{3})^2\ (-\frac{1}{3}pq^2)^2$
   $(-0{,}7)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (0{,}2ax)^2$
   $(+0{,}1)^2 \cdot (-1)^4 \cdot (100by)^2$
   $(+0{,}2)^3 \cdot (-10c^2z)^3$

271. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $(-N) \cdot 3N^2$
   $a^{13} : a^9$
   $(-4m)^3$

2. $(\frac{3}{4}u^4)^2$
   $(3D^3)^2$
   $(7f^2)^2 : 49f^3$

3. $4x^4 \cdot 5x^2 \cdot (-2x^6)$
   $(0{,}3v^2)^5$
   $(-2cw)^3 : (-w)^2$

272. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised ning koonda saadused:

1. $7h^2 + [3h^2 - (2h + 1)]$
   $15f^3 + [-10f^3 + (3f^2 - 2)]$
   $[4H^2 - (2H^3 + H)] - [4H^3 + (6H^2 + H - 5)]$
   $[Q^3 - 2Q^2 + (12Q - 7)] - [(20Q^2 - 11Q) + 3]$
   $7r^3 - [6r^3 - (r^2 - 2r + 3)]$

2. $u^3 - [(u^3 - 1) - (u^2 - 5u + 1)]$
   $(3v^4 - v^2 - 1) - 3[(v^4 - v^2) + 1]$
   $2(x^5 - 3x^3 + 1) - 3[1 - (x^3 - x)]$
   $y^4 - [y^3 - (2y^2 - 1)] - (2y^2 - 1)$
   $7z^5 - \{z^4 - [z^3 - 2(z - 1)]\}$

273. Arenda järgmised korrutised:

1. $(2a + b) \cdot 3b$

   $(4a - 3b)\ (-4a^2)$

   $(2a + 7b)\ (+2ab)$

   $(4a - 6) \cdot \frac{1}{6}ab$

   $(a^2 - 8b) \cdot (-\frac{3}{4}ab^2)$

2. $(x^2 - x + 1)\ (-3x)$

   $(x^2 - 6x - 5)\ (+0{,}4x)$

   $(5x^2 + 7x - 12)\ (-0{,}5ax)$

   $(3x^2 - x + 4)\ (-\frac{1}{2}x^2)$

   $(10x^2 - 5x + 1)\ (-\frac{3}{10}ax^3)$

274. Kirjuta järgmised avaldised sulgudeta ja murrujoonteta:

1. $(x^2 - xy) : x$

   $(x^5 - 7x^3) : x^3$

   $(34a^3x^2 - 51a^2x^3) : 17ax$

   $(15c^2x^4 - 20cx^5) : 5cx^4$

   $(21d^3u^5 - 28d^5u^3) : 7d^3u^3$

2. $(36x^2 - 60ax + 84a^2) : 12$

   $(12a^2b - 6a^2b^2 + ab^3) : 3ab$

   $(15h^5 + 4h^4 - 2h^3) : 5h^3$

   $(10N^3 + N^2) : 5N^2$

   $(21u^3 - 35u^2) : (-7u^2)$

Peatükk V.

Võrrand.

§ 44. Võrdus. Võrratus.

Kui kaks avaldist on **võrdsed**, siis märgime seda võrdusmärgiga nende avaldiste vahel. Näiteks kirjutame:

$$5 \cdot 13 - 7 \cdot 4 = 3 \cdot 9 + 10$$

$$\frac{2 \cdot 7 + 1}{3 \cdot 7 - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3x(a - 4c) = 3ax - 12cx.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame **võrdusteks**. Kui kaks avaldist **pole** võrdsed, kasutame selle tõsiasja märkimiseks sümboleid

$$\neq \qquad > \qquad <.$$

Näiteks kirjutame:

$$5^2 - 3^2 \neq (5 - 3)^2$$

$$7^3 > 8^2 + 9$$

$$0{,}5^2 < 1 - 0{,}5.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame **võrratusteks**.

Iga võrdus koosneb kahest osast; neid osi nimetame lühidalt võrduse **vasakuks pooleks** ja **paremaks pooleks**. Samu nimetusi kasutame ka võrratuste puhul.

Ülesanded.

275. Missugune kahest sümbolist $=$ või $\neq$ kuulub järgmiste ühes ja samas reas seisvate avaldiste vahele:

1. $7 \cdot 8$ ja $5 \cdot 11$
   2^2 ja $2 \cdot 2$
   $9 \cdot 5 + 3$ ja $7^2 + 1$
   $3^2 - 1$ ja $5^2 + 1$
   $12 \cdot 7 - 1$ ja $13 \cdot 6 + 2$

2. $4 \cdot 5 - 1$ ja $3^2 + 2^3$
   $2 \cdot 3 \cdot 4^2$ ja $(3^2 - 2) \cdot 4$
   $(1 - \frac{4}{5}) \cdot 25$ ja $(4 - 1)\,(3 - 1)$
   $\frac{5}{2^3 + 1}$ ja $\frac{3 \cdot 2 - 1}{4^2 - 7}$
   $\frac{1 + 4^3}{13}$ ja $\frac{1}{2^2 + 1}$

276. Missugune kahest sümbolist $>$ või $<$ kuulub esimese ja teise avaldise vahele:

$10^2 - 8$	ja	$9^2 + 12$	$8 \cdot 7^2 + 9$	ja	$17 \cdot 25 - 20$
$7(13 - 4)$	ja	$(7 + 1)^2$	$\frac{5 \cdot 2^3}{3^2 + 5}$	ja	$\frac{7 \cdot 9 - 3 \cdot 19}{6^2 - 11}$
$5^3 - 5^2$	ja	$9 \cdot 11 + 3$	$5 \cdot \frac{10^2 - 8 \cdot 11}{9^2 - 3}$	ja	$\frac{3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 13}{2(3^2 + 5)}$

277. Otsusta, kas all-antud avaldiste numbrilised väärtused tähtede antud väärtuste puhul on isekeskis võrdsed või mittevõrdsed, ja kirjuta nende avaldiste vahele vastav märk.

$2a + 5$ ja $4a - 3$, kui $a = 4$
$x^2 - 4x + 3$ ja $x^2 - x - 6$, kui $x = 3$
$4m - 5n - 8$ ja $3m - 2n - 1$, kui $m = 3$, $n = -2$
$(p + q)\,(p - q)$ ja $(p + q)^2$, kui $p = 3$, $q = -3$
$5(x - 1)^3$ ja $x^3 - x + 17$, kui $x = 3$.

§ 45. Samasus.

Võrdust nimetame samasuseks, kui ta kehtib temas esineva tähe või tähtede igal väärtusel.

Näide. Olgu antud võrdus:

$$(x-1)\,(x-2) = x^2 - 3x + 2.$$

Asetame võrduse kummaski pooles tähe x asemele näiteks arvud

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad -1,\quad -2,\quad \frac{1}{2},\quad 0{,}8$$

ja korraldame tulemused tabelisse. Saame

x	0	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	0,8
$(x-1)\,(x-2)$	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24
x^2-3x+2	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24

Näeme, et iga kasutatud x-väärtuse puhul nii üks kui teine avaldis omab üht ja sama väärtust. Sedasama näeme, andes tähele x veel teisi väärtusi. Seega antud võrdus on s a m a s u s.

Samaselt võrdumise tähiseks on $\equiv$.

Üeldu põhjal võime antud võrduse kirjutada kujul:

$$(x-1)\,(x-2) \equiv x^2 - 3x + 2.$$

Samaselt võrduvad avaldised tähendavad üht ja sedasama, erinedes üksteisest vaid väliselt kujult.

Kõik avaldiste teisendused, mis otseselt või kaudselt tuginevad arvutamise põhiseadustele, ei muuda avaldise numbrilist väärtust, vaid muudavad ainult tema välist kuju; niisuguste teisenduste tulemus on seega alati samaselt võrdne lähteavaldisega.

Näide.

$$6x(2x - a) + a(6x - 4a) \equiv 12x^2 - 6ax + 6ax - 4a^2 \equiv$$
$$\equiv 12x^2 - 4a^2 \equiv 4(3x^2 - a^2).$$

Märkus. Sümbolit $\equiv$ tarvitatakse ainult siis, kui on tarvis eriti rõhutada asjaolu, et võrdumine on kehtiv samaselt. Muidu tarvitatakse sümboli $\equiv$ asemel harilikku võrdusmärki $=$, nagu me seda seni olemegi teinud kõigi teisenduste puhul.

Ülesanded.

278. Otsusta, kas järgmised võrdused on samasused või mitte:

1. $5a + 3a - 7a = a + 1$
   $3x + 7c - x - 4c = 2x + 3c$
   $u^2u + uu^2 - u^3 = 2u^3$
   $hhh + 3h^3 = 4h^3$
   $N \cdot N + 1 = N(N + 1)$

2. $7N \cdot 7N = 7N^2$
   $3p + 3p + 3p \cdot 3p = 6p + 9p^2$
   $10(a + x) = 10a + 11x$
   $5f \cdot f = f \cdot 5f - 1$
   $21a \cdot 10x = 15x \cdot 14a$

§ 46. Võrrand.

Olgu antud võrdus $x^2 = 3x + 28$. See võrdus ei ole samasus. Tõepoolest, asetades tähe x asemele näiteks arvu 4, saame vasakul poolel 4^2 ehk 16, paremal poolel aga $3 \cdot 4 + 28$ ehk 40. Tulemused pole võrdsed.

Võib küsida, kas ehk siiski leidub x-i väärtusi, mille puhul mõlemad avaldised omavad üht ja sama väärtust, tähendab, x^2 saab võrdseks avaldisega $3x + 28$.

Asetades x-i asemele arvu 7 näeme, et esimene avaldis omab väärtust 7^2 ehk 49 ja teine väärtust $3 \cdot 7 + 28$, seega ka 49. Tähendab:

$$\text{kui } x = 7, \text{ siis on } x^2 = 3x + 28.$$

Võrdust, mis sisaldab mingit tähte ja ei ole samasus, nimetame võrrandiks.

Näited. Võrdused

$$2x - 10 = 17 - x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^3 = 3x + 2$$

on võrrandid, sest asetades x-i asemele näiteks nulli, saame võrduste vasakul poolel ja paremal poolel vastavalt

$$-10 \text{ ja } 17, \quad 6 \text{ ja } 0, \quad 0 \text{ ja } 2;$$

seejuures

$$-10 \neq 17, \quad 6 \neq 0, \quad 0 \neq 2.$$

Arvu kohta, mis asetamisel otsitava asemele võrrandi kummassegi poolde annab võrdsed tulemused, ütleme, et ta rahuldab võrrandit.

Näiteks rahuldab võrrandit

$$x^2 = 7x - 12$$

x-i väärtus 3, sest $3^2 = 9$ ja ka $7 \cdot 3 - 12 = 9$.

Võrrandit rahuldavat arvu nimetame võrrandi lahendiks.

Näiteks arv —2 on võrrandi

$$x^3 = 3x^2 - 20$$

lahendiks.

Võrrandi lahendi leidmiseks vajalikkude teisenduste ja tehete sooritamist nimetame võrrandi lahendamiseks.

Üks võrrandi lahendamise viisidest tugineb proovimisele.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $7x = x^2 - 44$.
Asetades x-i asemele arvud

$$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2,$$

saame vasakul poolel

$$-49 \quad -42 \quad -35 \quad -28 \quad -21 \quad -14,$$

paremal poolel seevastu

$$+5 \quad -8 \quad -19 \quad -28 \quad -35 \quad -40.$$

Näeme, et arv —4 annab asetamisel kummalgi poolel võrdsed tulemused, nimelt —28; seega arv —4 on antud võrrandi lahendiks.

Algebra rakendamisel tegeliku elu poolt seatud küsimustes on esimeseks püüdeks avaldada need küsimused lühikirjas võrrandite näol. Algebra tähtsamaid ülesandeid on võtete leidmine võrrandite lahendamiseks.

§ 47. Võrduse ja võrratuse põhiomadused.

Igal võrdusel on 4 põhilise tähtsusega omadust, mis silmanähtavalt kehtivad ja tõestamist ei vaja. Sõnastame need võrduse omadused järgmiste aksioomidena:

1. Liitmisaksioom. Kui kahe võrdse arvuga liita üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $a + m = b + m$.

2. Lahutamisaksioom. Kui kahest võrdsest arvust lahutada üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $a - m = b - m$.

3. Korrutamisaksioom. Kui kaks võrdset arvu korrutada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $ma = mb$.

4. Jagamisaksioom. Kui kaks võrdset arvu jagada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

Siin arvuks m ei saa olla null.

Ülaltoodud 4 aksioomi moodustavad aluse, millele tugineb kogu võrrandite teisendamine ja lahendamine.

Näide. Lahendame võrrandi $\frac{3}{4}x - 1 = 8$.

Teisendame selle võrrandi järk-järgult: liites kummagi poolega arvu 1, saame liitmisaksioomi põhjal võrrandi

$$\frac{3}{4}x = 9;$$

jagades siin kummagi poole arvuga $\frac{3}{4}$ saame jagamisaksioomi põhjal

$$x = 12,$$

millega otsitav lahend on leitud.

Kõik võrrandid, mis saame mõnest lähtevõrrandist ülaltoodud 4 aksioomi rakendamisel, on lähtevõrrandi teisendid. Lähtevõrrand ja tema teisendid omavad kõik samu lahendeid. Seepärast nimetame kõiki neid võrrandeid üksteisega samaväärseiks ehk ekvivalentseiks.

Rööbiti ülaltoodud võrduste omadustega on kehtivad järgmised võrratuste omadused:

1. Kui $a > b$, siis $a + m > b + m$. Kui $a < b$, siis $a + m < b + m$.

2. Kui $a > b$, siis $a - m > b - m$.

   Kui $a < b$, siis $a - m < b - m$.

3. Kui $m > 0$ ja $a > b$, siis $ma > mb$.

   Kui $m > 0$ ja $a < b$, siis $ma < mb$.

Seevastu:

   Kui $m < 0$ ja $a > b$, siis $ma < mb$.

   Kui $m < 0$ ja $a < b$, siis $ma > mb$.

4. Kui $m > 0$ ja $a > b$, siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

   Kui $m > 0$ ja $a < b$, siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Seevastu:

   Kui $m < 0$ ja $a > b$, siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

   Kui $m < 0$ ja $a < b$, siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Märgime lõpuks veel järgmise tõsiasja: kui $m = 0$, siis igasuguste a ja b puhul

$$ma = mb.$$

Seepärast: kui $m = 0$, siis võrdusest

$$ma = mb$$

ei s a a järeldada, et ka

$$a = b.$$

Ülesanded.

279. Missugused täisarvud arvude —5 ja 0 vahel rahuldavad võrrandit

$$x^2 - 3x - 10 = 0\,?$$

280. Missugused täisarvud arvude —5 ja +4 vahel rahuldavad nõuet

$$x^2 + x - 12 = 0\,?$$

281. Missugused arvudest

1 2 3 4 5 6

rahuldavad võrrandit

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0\,?$$

282. Allpool on antud rida võrdusi. Otsusta igaühe kohta, kas ta on samasus või võrrand.

1. $a + 1 = 1 + a$
   $5c = 3c + c + c$
   $7f = 14$
   $5h + 3 = 3 + 5h$
   $8k - 1 = 15$

2. $m \cdot m^2 \cdot m^3 = m^3 \cdot m^3$
   $a^2 \cdot a^2 = (a^2)^2$
   $\frac{mx + n}{m} = x + \frac{n}{m}$
   $7(a + 2x) = 7a + 15$
   $a - (b + 2c) = a + b - 2c$

§ 48. Võrrandite teisendamise lause.

Võrrandi iga liiget võib kanda üle ühelt võrrandi poolelt teisele, muutes seejuures liikme märgi vastupidiseks.

Tõepoolest, olgu tegemist näiteks võrrandiga

$$x^3 + 19x = 10x^2 - 30.$$

Lühiduse mõttes kirjutame ta kujul

$$A + B = C - D,$$

kus A, B, C ja D tähendavad avaldisi x^3, $19x$, $10x^2$ ja 30.

Tahetagu siin üle viia liige B vasakult poolelt paremale poolele. Selleks lahutame võrrandi kummastki poolest liikme B; lahutamisaksioomi põhjal on seejuures tekkivad vahed võrdsed; seega

$$A + B - B = C - D - B$$

ehk lühemalt

$$A = C - D - B.$$

Näeme nüüd liiget B vastupidise märgiga seismas võrrandi paremal poolel.

Tahetagu algvõrrandis üle viia paremalt poolelt vasakule poolele liige $-D$. Selleks liidame võrrandi kummagi poolega arvu D; liitmisaksioomi põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$A + B + D = C - D + D$$

ehk lühemalt

$$A + B + D = C.$$

Näeme nüüd liiget D vastupidise märgiga seismas võrrandi vasakul poolel.

Näide 1. Olgu antud võrrand

$$5x + 1 = 8x - 20.$$

Praegu tõestatud lause lubab selle võrrandi kirjutada kujul $5x + 21 = 8x$ või $1 = 3x - 20$ või $0 = 3x - 21$. Kõik need 4 võrrandit on samaväärsed. Kõiki neid 4 võrrandit rahuldab arv 7.

Näide 2. Olgu antud võrrand $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Praegu tõestatud lause lubab sama võrrandit kirjutada kujul $x^2 + 5x = 6$ või $x^2 = -5x + 6$ või $x^2 - 6 = -5x$ või $5x = 6 - x^2$. Kõik need võrrandid on samaväärsed. Kõiki neid võrrandeid rahuldavad arvud -6 ja 1.

§ 49. Lineaarvõrrand.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks n u l l; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole.

Kui peale koondamist otsitav esineb võrrandis ainult esimesel astmel, siis nimetame seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk l i n e a a r v õ r r a n d i k s.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile.

Näiteks on

$2x = 7 \qquad 3x - 4 = 19 \qquad 7x - 1 = \frac{1}{2}x + 29$

lineaarvõrrandid.

Seevastu

$$x^2 = x + 3 \qquad \frac{1}{x} - 2x = 10$$

pole lineaarvõrrandid.

Lineaarvõrrandis peab leiduma liige otsitava esimese astmega; kirjutame selle liikme kujul ax. Kõrvu sellega võib leiduda otsitavast vaba liige; märgime selle tähega b. Seega

lineaarvõrrandi üldkuju on $ax + b = 0$.

Järgmised ülesanded selgitavad lineaarvõrrandi lahendamise käiku.

Ü l e s a n n e 1. Lahenda võrrand $12x = 21$.

L a h e n d u s. Jagades võrrandi kummagi poole 12-ga, saame jagamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{21}{12},$$

ehk, taandades,

$$x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand $x + 8 = 13$.

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 8, saame lahutamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = 13 - 8,$$

ehk

$$x = 5.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand $4x + 7 = 3$.

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 7, saame lahutamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$4x = 3 - 7,$$

ehk

$$4x = -4.$$

Jagades kummagi poole 4-ga, saame jagamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{-4}{4},$$

ehk

$$x = -1.$$

§ 50. Üldkujulise lineaarvõrrandi lahend.

Olgu antud lahendada võrrand

$$ax + b = 0.$$

Kummastki poolest arvu b lahutades saame lahutamisaksioomi põhjal

$$ax = -b;$$

kumbagi poolt arvuga a jagades saame jagamisaksioomi põhjal

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Et võrrand $ax + b = 0$ oleks tõesti esimese astme võrrand, selleks peab a olema nullist erinev: $a \neq 0$. Sel eeldusel on murrul $-\frac{b}{a}$ kindel ühene väärtus. Seega

lineaarvõrrandil on üks ja ainus lahend.

§ 51. Lineaarvõrrandi lahendamine.

Aja ja vaeva kokkuhoiu mõttes on otstarbekohane lineaarvõrrandi lahendamist toimetada järgmiselt:

1. avame sulud, kui võrrandis esineb suluavaldisi, ja koondame;
2. kanname kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik otsitavast vabad liikmed võrrandi teisele poolele;
3. koondame;
4. jagame mõlemad pooled otsitava kordajaga ja taandame saaduse.

Leitud lahendit kontrollime, asetades selle algvõrrandisse otsitava asemele.

Ülesanne. Lahenda võrrand

$5(x - 4) - 2(3x + 7) - 14 = 9(2x + 5) - x - 21.$

Lahendus. Avame sulud:

$5x - 20 - 6x - 14 - 14 = 18x + 45 - x - 21;$

koondame kummagi poole:

$$-x - 48 = 17x + 24;$$

võtame otsitavaga liikmed vasakule poolele, otsitavast vabad liikmed paremale poolele:

$$-x - 17x = 24 + 48;$$

koondame nii vasaku poole kui ka parema poole:

$$-18x = 72;$$

jagame kummagi poole —18-ga:

$$x = \frac{72}{-18};$$

taandades saame lõpuks

$$x = -4.$$

Kontrollime leitud lahendit.

Leitud x-väärtuse puhul antud võrrandi vasak pool on:

$$5 \cdot (-4 - 4) - 2 \cdot [3 \cdot (-4) + 7] - 14 =$$
$$= 5 \cdot (-8) - 2 \cdot (-12 + 7) - 14 =$$
$$= -40 - 2 \cdot (-5) - 14 = -40 + 10 - 14 = -44;$$

sama x-väärtuse puhul võrrandi parem pool on

$$9 \cdot [2 \cdot (-4) + 5] - (-4) - 21 =$$
$$= 9 \cdot [-8 + 5] + 4 - 21 = 9 \cdot (-3) + 4 - 21 =$$
$$= -27 + 4 - 21 = -48 + 4 = -44.$$

Et kummalgi poolel saime sama tulemuse, siis arv —4 tõepoolest rahuldab võrrandit.

Kontrollimisel tuleb leitud lahend asetada otsitava asemele võrrandi a l g k u j u kummassegi poolde, mitte aga juba teisendatud võrrandi pooltesse. Vastasel korral asetamine ei ilmutaks viga, mis ehk on juhtunud juba võrrandi teisendamisel.

Ülesanded.

283. Lahenda järgmised võrrandid:

1.
$25 - 3y = 13$
$7 = 14 - 7x$
$-7z + 14 = 17$
$2w - 7 = 23$
$-3v - 6 = -8$

2.
$3x - 2 = 4x$
$x + 4 = -6 - 1$
$3x + 7 = -3 + x$
$2x + 8 = 19 + x$
$8 = 3x + 9 - 2$

3.
$15 = 3h - 12$
$14 = 12 - 6k$
$5k - 4 = 4k$
$3m + 7 = 6m$
$14 - 7n = 15$

4.
$z + 3 = 4z - 5$
$z - 5 = 5 - 4z$
$3z - 2 = 7 + 2z$
$2 + 6P = 3 + 3P$
$3 + 5Q = -1 - Q$

5. $6x + 5 = 5x + 12$
$2 + 3x = 12 + 2x$
$3 + 4x = 10 + 3x$
$6 + 5x = 4x + 15$
$5x + 8 = 4x + 16$

6. $6y - 2 = 5y + 8$
$3y - 4 = 2y + 7$
$y + 2 = 2y - 7$
$3w - 5 = 2w + 5$
$z + 8 = 2z - 4$

7. $2p + 4 = 8 + p$
$3q + 7 = 16 + 2q$
$r + 5 = 16$
$5 + s = 12$
$2t + 9 = 3t$

8. $4x - 3 = 3x + 9$
$x - 9 = 4$
$x + 14 = 2x + 5$
$4x - 9 = 3x + 4$
$5x + 6 = 4x + 10$

284. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $7x - 5x + x - 9 = 6$
$8y - 3y + 10 - 2y = 28$
$7z + 15 - 2z + z = 81$
$3v - v + 4v - 30 = 50 - 7 - 1$
$11s - 16 + s - 9s = 35 - 12$

2. $33 - 5t + 2 = 9t - 7t$
$5u - 3u + 5 - 3 = 5 + 3u - 15 + u$
$4p + 37 + 6p - 49 = 7p - 9$
$150q + 70 - 45q - 105 = 94 + 44q - 68$
$4r + 5 + 6r + 7 = 4 + 5r + 6 + 7r$

285. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2(x - 3) + 15(x + 5) = 273$
$4x + 5 - 3(x - 2) = 21$
$13(x + 11) - 5(x + 6) = 177$
$3(2z + 14) = 2(8z - 14)$
$z + 7 = 0{,}5(5z - 4)$

2. $5(z-2)+3(z+7)=3(2z+7)$
$z-7+3(4+z)=2(3z-2)+0{,}5(5z-18)$
$3(z-2)+8(9-2z)=2(z+5)+3(4-z)+8$
$5(z-12)+3(11-5z)=7(3-z)-9(4z-3)$
$(1-z)+2(2-z)+3(3-z)+4(4-z)=50$

286. Lahenda järgmised võrrandid:

$x+(9-15x)=10+6x+39$
$13x-(70+25x)=62-16+17x$
$0=(24-17x)-13-40+12x-9$
$15-3(2x-1)=16(x+1)-2(x-1)$
$5(2x-7)-14(3x+2)-x-1=-196$

§ 52. Lineaarvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid.

Ülesanne. Süstasõitja aerutab pärivoolu kiirusega $4\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ja tagasitulekul vastuvoolu $3\frac{\text{km}}{\text{t}}$. Tal kulus vastuvoolu tagasi tulekuks 1 tund rohkem aega kui aerutamiseks pärivoolu.

Mitu tundi kestis süstasõit?

Lahendus. Oletame, et sõit pärivoolu kestis x tundi, siis kestis sõit vastuvoolu $x+1$ tundi.

Tee pikkus pärivoolu aerutamisel on $4x$ km,

tee pikkus tagasi aerutamisel on $3(x+1)$ km.

Et tee pikkused sinna ja tagasi on võrdsed, siis võime kirjutada võrrandi

$$4x=3(x+1).$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$4x=3x+3$$
$$4x-3x=3$$
$$x=3.$$

Näeme, et sõit pärivoolu kestis 3 tundi; sõit vastuvoolu kestis 1 tunni võrra rohkem, seega kestis sõit vastuvoolu 4 tundi, sõidu kestus oli siis kokku 7 tundi.

Kontroll. Aerutaja jõudis lähtekohast pärivett aerutades $3 \cdot 4$ km, s. o. 12 km kaugusele. Vastuvett tagasi aerutamiseks peaks selleks kuluma 1 tunni võrra rohkem aega, kui sinna aerutamiseks, s. o. 4 tundi: tõesti, $12 : 3 = 4$.

Tulemused sobivad andmetega, seega on arvutus õige.

Vastus. Süstasõit kestis 7 tundi.

Ülesanded.

287. Leia kolm järjestikust täisarvu, mille summa on 72.

288. Võru ja Munamäe vahel ühendust pidav auto tarvitab 1 tund 45 minutit edasi-tagasi sõiduks ja 15-minutiliseks peatuseks Munamäel. Mitu minutit kulub sõiduks Võrust Munamäele ja mitu minutit sõiduks tagasi, kui tagasisõiduks kulub 20 minutit vähem aega kui sinnasõiduks?

289. Spordiseltsi aastane tulu liikmemaksudest on 286 marka. Tegevliikmed maksavad igaüks 5 marka, toetajad liikmed igaüks 3 marka aastas. Tegevliikmeid on 2 korda rohkem kui toetajaid liikmeid. Kui suur on spordiseltsi liikmete arv?

290. Talunik laskis kaevata kraavi ja maksis töö eest kokku 40,80 marka. 240 meetrit sellest kraavist tuli kaevata liivasesse maasse ja 180 meetrit kruusasesse maasse. Jooksva meetri kaevamine kruusases maas oli 1,5 korda kallim kui liivases maas. Kui palju maksis kummagi kraaviosa jooksva meetri kaevamine?

291. Koer ajab jänest taga; viimane on koerast 150 jalga ees. Jänese hüpped on 7 jalga pikad, koera omad 9 jalga, kuna hüpete kestused on võrdsed. Mitme hüppega on koer jänese kannul? (Ühest vanast ülesannete kogust.)

292. Ia klassis oli 28 õpilast, Ib klassis 42. Klassiruumide ümberkorraldamisel viidi Ib klassist mõned õpilased üle Ia klassi, nii et lõpuks oli kummaski ühepalju õpilasi. Kui palju õpilasi viidi Ib klassist Ia klassi?

293. Matkaja kohtab õpilaste rühma ja küsib, mitu neid on. Temale vastab rühma juht: „Võta meie arv kahekordselt, korruta siis 3-ga ja jaga 4-ga; kui veel minu juurde arvad, saab kokku parajasti sada." Mitu õpilast oli rühmas? (A l c u i n, a. 735—804.)

294. Linnavanema valimisest võtsid osa 1248 hääleõiguslikku linnaelanikku. Kahest valitavast kandidaadist tuli esimene võitjaks 394 hääle enamusega, kusjuures 22 sedelit kehtivusetuks loeti. Mitu häält sai kumbki kandidaat?

295. Ühel õpilasel oli 180 penni, teisel 216 penni. Esimene kulutas iga päev 5 penni, teine 8 penni. Mitme päeva pärast oli neil ühepalju raha?

296. Valisin arvu, liitsin temaga 7, korrutasin saaduse 5-ga ja sain 95. Mis arvu ma valisin?

297. Kahe arvu vahe on 10. Väiksema kolmekordse ja suurema viiekordse summa on 858. Leia need arvud.

298. Kahel vennal on kummalgi oma rahakorjamiskarp, millesse isa iga päev paigutab 1 penni. Praegu on ühe venna karbis 82 penni, teise venna karbis 54 penni. Millal oli esimesel vennal teisest kaks korda rohkem raha?

299. Valisin arvu. Kui teda suurendan nelja võrra ja saaduse korrutan 3-ga, saan sama resultaadi, mille saan, kui teda suurendan kolme võrra ja saaduse korrutan 4-ga. Mis arvu ma valisin?

300. Isa on 50 aastat vana, poeg 24 aastat. Mitme aasta eest oli isa 3 korda vanem kui poeg?

301. Jaota arv 13 kahte ossa nii, et nende osade vahe oleks 4.

302. Raudteejaamas ostetakse 36 piletit, neist 25 lähema väljasõidu-kohani ja 11 sinna ning tagasi, maksmaks kõigi piletite eest 10,65 marka. Kui kallid olid piletid sinna ja piletid sinna ning tagasi, kui viimased on 15 penni kallimad esimestest?

303. Õpperaamatu trükkimine pidi lõpetatama koolitöö alguseks, milleni oli veel 35 tööpäeva aega. 3 laduja töötamisel oleks töö parajasti õigel ajal valmis saanud. 10 päeva pärast töö algust tekkis tehniline töötakistus, mis kestis 6 päeva. Mitu ladujat tuleb juurde võtta, et tööga õigel ajal valmis saada?

304. Ülesande lahendamisel on jõutud arvuni, millega tuleb veel liita 13 õige vastuse saamiseks. Lahendaja teeb aga kogemata vea — liitmise asemel lahutab 13. Tulemus on kolm korda väiksem õigest. Leia õige vastus.

305. Kaupmees tellis 500 apelsini, hinnaga 15 penni tükk. Mis hinnaga ta pidi müüma apelsini, kui 50 apelsini läksid rikki ja kaupmees kogu kaubalt tahtis teenida 20%?

306. Hoiusummalt makstakse 8% intressi. Kui pika aja jooksul saab 480 margalt 64 marka intressi?

307. Ühel talvisel päeval puudusid suure külma tõttu koolitöölt 42 õpilast ehk 24% kogu õpilaste arvust. Kui palju oli selles koolis õpilasi?

308. Kui suur kapital, olles hoiul 4-%ga, kasvab 2 aastaga 432 margaks?

§ 53. Ülesandeid kordamiseks.

309. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $7x = -1$
   $-5x = -15{,}5$
   $-12x = 6$
   $-x = -7$
   $-0{,}4x = -3{,}2$

2. $-0{,}25x = 10$
   $\frac{1}{3}x = 7$
   $\frac{3}{8}x = 3$
   $0{,}3x = 0{,}9$
   $-0{,}5x = 7$

3. $\frac{5}{7}x = 1{,}5$
   $\frac{9}{10}x = 0$
   $\frac{7}{10}x = 7$
   $-\frac{6}{13}x = -1$
   $\frac{x}{0{,}1} = 100$

310. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2y + 7 = 5$
   $4y - 7 = -15$
   $6 - y = 1$
   $8 - 4x = -6$
   $-1 - 3x = -16$

2. $0 + 6x = -42$
   $3 + \frac{1}{2}x = -3$
   $-1 + \frac{1}{3}x = 10$
   $0{,}7x - 2{,}3 = -1{,}6$
   $-2{,}6x + 9{,}3 = 4{,}1$

3. $x + 9 - 2x + 1 = 0$
   $3 + 2x - 6x = -5$
   $5x + 7 = 13x + 23$
   $1 = x - 5 + 8x - 21x$
   $0 = -6x + x + 18 - x$

4. $5(3x - 3) = 3(x + 3)$
$3(x - 8) + 5 = 4(10 - x) + 4$
$2(3x + 7) + 17 = 9(x + 5) - 2$
$13 - 4(11 - x) = 6(x - 6) - 13$
$1 - 5(x - 6) = 3(x + 5)$

311. Kolme järjestikuse paarituarvu summa on 63. Mis arvud need on?

312. Pank maksab tähtajalisel arvel olevate hoiusummade pealt $4\frac{1}{2}$ % intressi. Missugune summa tuleb paigutada poja sünnipäeval panka, et järgmiseks sünnipäevaks võidaks talle sealt välja maksta 100 marka?

313. Kompanii sõdurid on paigutatud kasarmusse nii, et ühes toas on 36 meest ja igas teises toas 28 meest. Neid võiks aga paigutada ka nii, et ühes toas on 27 meest ja igas teises 31 meest. Mitu sõdurite tuba on kasarmus?

314. Ülesande lahendamisel on viimase tehte puhul, selle asemel et lahutada 7, eksikombel 7 liidetud. Eksituse tagajärjel osutus tehte saadus 2 korda suuremaks tema õigest väärtusest. Missugune oli saaduse õige väärtus?

315. Rukkisaagi äpardumise tõttu tõusis leivahind eelmise aasta hinnaga võrreldes 3 penni kilogrammilt. Selle tagajärjel maksab nüüd 4-kilogrammine leib niisama palju kui möödunud aastal 5-kilogrammine. Kui kallis on 4-kilogrammine leib praegu?

316. Arv 96 on lahutatud kaheks isesuguseks osaks. Kui väiksemat osa suurendada 6 võrra, suuremat aga niisama palju vähendada, siis saame võrdsed arvud. Missugusteks osadeks on lahutatud arv 96?

317. Kapitalid k marka ja c marka on hoiul sama intressimääraga. Mitme kuu jooksul k-margane kapital annab niisama palju intressi, kui c-margane t kuu jooksul?

318. n töölist lõpetavad töö a päevaga. Mitu sama jõudlusega töölist võib lõpetada selle töö b päevaga?

319. Arv koosneb c sajalisest, b kümnelisest ja a ühelisest. Avalda see arv.

320. Missugused kolm arvu on paarituarvude reas paarituarvu k järel? — paarituarvu k ees?

321. Saunas kaotab inimene higistamise läbi harilikult $5\,^0/_{00}$ oma kaalust. Mitu grammi jääb saunas kergemaks inimene, kes sauna minnes kaalub K kg?

322. Veduri veoratta läbimõõt on D meetrit. Ratas teeb N tiiru sekundis. Kui kiiresti sõidab rong?

323. Arv a on jaotatud kahte ossa, millest üks on x. Avalda nende osade vahe.

324. Avalda üldkujul paarisarvu ja sellele järgneva paarituarvu korrutis.

325. Avalda üldkujul kahe teineteisele järgneva paarituarvu korrutis.

326. Avalda ringi veerandi pindala s ringi läbimõõdu d kaudu.

327. Kaupmees ostis n kg kaupa, hinnaga 25 penni kg. Turuseisukorra muutumisel on ta sunnitud selle kauba müüma 120-pennise kahjuga. Mis tähendus on suurusel

$$\frac{25n - 120}{n}\ ?$$

328. Ruudukujuline osa kooliesisest platsist kaetakse tsementplaatidega. Olgu platsi külg k meetrit, plaadi mõõtmed f ja g meetrit; olgu juba kohale asetatud plaatide arv 15. Mis tähendus on avaldisel $k^2 - 15fg$?

329. Avalda mingi kolme järjestikuse
täisarvu summa;
paarisarvu summa;
paarituarvu summa.

330. Sõnasta nõuded, mis avalduvad algebra lühikirjas järgmiselt:

1.	2.	3.
ab	$3\frac{a}{b} + 4c$	$a^2 - 0{,}7b^2$
$3ab + c$	$a - \frac{1}{3}\frac{b}{c}$	$\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}a^2$
$2ac + 4b$	$0{,}1ab - 1{,}7\frac{a}{c}$	$a^2 + 5ac$
$7a + 3bc$	$5\frac{a}{c} - 4\frac{d}{b}$	$\frac{3}{4}a^3 - \frac{1}{6}ab^2$
$0{,}5ac$	$\frac{ac}{b} - \frac{1}{4}d$	$1{,}3ac^2 - 0{,}4ab^2$

331. Koonda järgmised avaldised:

$(m + 2) + (m + 2) + (m + 2) + (m + 2)$

$\frac{n}{g} + 3\frac{n}{g} - \frac{n}{g}$

$(a^2 - bc) + 5(a^2 - bc) - 3(a^2 - bc)$

$a(n + 1) + 4a(n + 1) + 2a(n + 1) - 12$

$8(c^2 - ab^3) - 3(c^2 - ab^3) - (c^2 - ab^3) + 6(c^2 - ab^3)$

332. Kolme merimehe päralt olev mootorpurjekas hukkus tormis. Kuidas tuleb jaotada nende vahel purjeka kindlustussumma 8500 marka, kui purjeka hinnast oli maksnud esimene 4200 marka, teine 3600 ja kolmas 2400?

333. Kolmnurga kolmest küljest on teine esimesest kaks korda pikem ja kolmas esimesest 16 sentimeetrit pikem; kolmnurga ümbermõõt on 108 sentimeetrit. Kui pikad on kolmnurga küljed?

334. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $5(N+6)$, kui $N=2$ — $\frac{2}{3}(w^2-10)$, kui $w=5$ — $\frac{x}{2}(2x+1)$, kui $x=6$ — $(A^2-7)-2$, kui $A=4$

2. $3(2+5R^3)$, kui $R=0$ — $10(8-\frac{h}{3})$, kui $h=6$ — $\left(\frac{2m}{m-3}\right)^2$, kui $m=5$ — $\frac{(2q+1)^2}{5q}$, kui $q=4$

335. Arvuta järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

1. $2D-15$, kui $D=3$ — $\frac{3-8u}{8}$, kui $u=-1$ — $\frac{10}{x}-7$, kui $x=-2$

2. z^2+z-12, kui $z=-4$ — $a(a-10)$, kui $a=-10$ — $\frac{(1-N)^2}{N^3}$, kui $N=-2$

336. Olgu $a=3$, $b=-5$. Arvuta neil andmeil järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$$\frac{2ab}{(a+b)^2} \qquad \frac{3a^2b}{2(a+b)^2} \qquad \frac{4a^3b^2}{(2a+2b)^2} \qquad \frac{2a+b}{(2a+b)^2}$$

337. Lahuta hulkliige $a^3-5a^2x+4ax^2-x^3$ hulkliikmest $a^3+a^2x-8ax^2+x^3$.

338. Lihtsusta avaldised:

$$(4a^3+3a^2)-(4a^2-3a)+(-4a+3)$$
$$(5x^3-4x^2)-(3x^2-2b)+(-5b+2)$$
$$5a+[4a-(a-b)]-[(3a+2b)+(2a-3b)]$$
$$1-\{1-[1-m^2]\}$$
$$[p^2-(1-q^2)]-\{p^2-[-3p^2-(4q^2-1)]\}$$

339. Missuguse hulkliikme peaks liitma hulkliikmega $5x^2 - 7x + 2$, et saada $7x^2 - 1$?

340. Lahuta trinoomi $5a - 7b + c$ ja binoomi $3b - 9a$ summa binoomist $c - 4b$.

341. Lahuta avaldiste $a^2 - b^2$ ja $a^2 + ab + 3b^2$ summa avaldiste $a^2 - 2ab + b^2$ ja $2a^2 + 2ab + b^2$ summast.

342. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

1. $5a^3x^2 \cdot 2ax \cdot 7a^2x^4$
   $(2ax^2)^2$
   $(-0{,}1)^2 \cdot 10(ax)^3$

2. $28ax^2 : 196ax$
   $0 : 4ax^2$
   $12(a^2x)^3 : (2ax)^2$

343. Lahenda järgmised võrrandid:

$2(x + 7) - 3(x - 9) = 5(x - 1) - 2$
$3x - x - (x - 2) - 4 = 2(x - 6)$
$2(x - 3) - 3(x + 6) + 5(x + 3) = 15$
$9(x + 3) - 11(x + 2) + 13(x + 1) + 15x = 5$
$3[4(x - 1) - (x - 8)] - 7(x + 6) = 4(x + 2)$

344. Kartaago linna vallutamisel roomlaste poolt hukkus 55 000 elanikku, mehi 15 000 rohkem kui naisi. Mitu inimest hukkus kummastki soost? (H e m e l i n g, a. 1600.)

345. Kg kuivatatud õunu maksab 2 marka, kg kuivatatud ploome 2,5 marka. Osteti õunu ja ploome, kokku 400 grammi. Ploomid maksid 85 penni. Kui palju maksti õunte eest?

346. Laenu-hoiuühing maksab jooksval arvel olevatelt hoiusummadelt 4% intressi. Missugune summa kasvab aasta kestel 100 margaks?

347. Valisin arvu. Kui ma selle korrutan kümnega ja liidan saadusega 15, saan täpselt sama arvu, mis siis, kui valitud arvu korrutan kaheteistkümnega ja lahutan saadusest 9. Mis arvu ma valisin?

348. Leia kolm üksteisele järgnevat täisarvu nii, et suurema kolmekordne on võrdne kahe väiksema summa kahekordsega.

349. Isa on 36 aastat, poeg 10 aastat vana. Mitme aasta pärast isa on pojast 2 korda vanem?

350. Koolil kulub nädalas 10 karpi tahvlikriiti, x kriiti karbis. Kui kriit oleks pakitud $(x + 6)$ tükki karbis, oleks nädalane kriidikulu kõigest 5 karpi. Mitu kriiti on karbis?

351. Kui kumbagi kahest järjestikusest täisarvust vähendada 1 võrra, siis nende korrutis väheneb 20 võrra. Mis arvud need on?

352. Kahel linnaosal oli elanikke vastavalt 900 ja 2500. Kahe aasta pärast toimetatud rahvaloendus näitas mõlemal osal elanikkude arvu ühesuurust kasvu, ühtlasi aga ka, et teises osas oli elanikke kaks korda rohkem, kui esimeses. Mitme inimese võrra oli kasvanud elanikkude arv kummaski linnaosas?

353. Töökotta toodi raudvarras, millest oli tarvis valmistada määratud arv neetisid. Meister leidis, et võttes needi pikkuseks 12 mm, jääb 10 mm pikkune tükk raudvarrast järele; kui aga needi pikkuseks võtta 10 mm, siis saab valmistada 2 neeti rohkem kui tarvis. Kui pikk oli raudvarras?

354. Kui hernepeenral paigutada kepid iga 25 cm tagant, siis tuleks puudu 57 keppi; kui neid paigutada 35 cm tagant, jääks neid üle 19. Arvuta peenra pikkus.

355. Perekond tarvitas kuu jooksul m kilovatt-tundi elektrienergiat, hinnaga n penni kilovatt-tund. Kui suur oli kuu elektriarve, kui mõõtja kuuüür on r penni?

356. Veskiomanik ehitas veski juurde elektrijaama. Voolu juhtimiseks sealt oma tallu tuli tal ehitada liin; selleks oli muretsetud poste kohale just niipalju, et saaks ehitada liini postivahedega 40 meetrit. Veskiomanik ehitas aga liini postivahega 45 meetrit ja nii jäi tal 4 posti üle. Kui kaugel on jõujaam talust?

357. Arvu 20 suurendati $x\%$ võrra ja saadi $x\%$ arvust 70. Kui suur on x?

358. Lahenda järgmised võrrandid x-i suhtes, teades, et a, b ja c on tuntud arvud.

1. $x + a = b$
   $a + x = 2a$
   $x - b = a$

2. $x + 3b = 5b$
   $x + 3a = 3a$
   $x - 5c = 5c$

3. $a - x = a + b$
   $4b - x = 3b$
   $5a - x = c - 5a$

4. $x - a = 12$
   $m - x = n$
   $m - n + x = 0$

5. $x + a - b = a$
   $a - x = a - 9$
   $a + x = b - x$

6. $n + x = 3n - x$
   $3x - a = 2a$
   $2x + s = 4s - x$

359. Lapse sünniajal saab isa v aastat vanaks. Mitme aasta pärast on isa oma lapsest kaks korda vanem?

360. Kahe arvu summa on s. Mis arvud need on, kui üks on a võrra teisest suurem?

361. Anna üldine avaldis paarituarvu ruudu jaoks.

362. Kui suur on avaldise $(6k - i)^2 \cdot (k^2 - i)$ numbriline väärtus, kui $k = -7$ ja $i = -12$?

363. Lahenda võrrand

$$5(x - 2) + 7(x - 5) = 3(2x - 7).$$

364. Missugust arvu peab tähendama täht a, et võrrandil

$$5(x - a) + 6(2x - a) = 7$$

oleks lahend $x = 3$?

365. Olgu teada, et

$$f = g - kv^3.$$

Avalda siit g.

366. Arvu a soovitakse kujutada lõiguna. Selleks on kasutada p mm pikkune riba paberit. Kui suure võib ülimalt valida kujutamisühiku?

367. Lahenda võrrand

$$2(x + 1) + 3(2x + 3) = 4(8x + 1).$$

368. Liida hulkliikmed $a^3 - 5a^2x + 4ax^2 - x^3$ ja $a^3 + a^2x - 8ax^2 + x^3$.

369. Kirjuta võimalikult lühidalt avaldis

$$4a^3x^2 \cdot 2a^2x \cdot 5ax^3.$$

370. Lahenda x-i suhtes võrrand

$$a - x = c - 2a.$$

371. Ristküliku külgede pikkused on 5 cm ja 3 cm. Lühemat külge pikendatakse a cm võrra. Kui palju suureneb ristküliku pindala?

372. Kui suur on avaldise $\frac{4a^2}{b + c}$ numbriline väärtus, kui $a = -12$, $b = -14$ ja $c = -6$?

373. Lahenda võrrand

$$2x(4x - 3) + 6 = x(8x - 5).$$

374. Leia hulkliikmete

$$5a^2 - 1 \text{ ja } 5a^2 - 2a - 1$$

vahe.

375. Kirjuta võimalikult lühidalt

$$(4ab^2)^3 : 32a^3b^5.$$

376. Kaup, mille omahind on h marka, müüakse n-protsendise kasumiga. Kui suur on kauba müügihind?

377. Avalda üldkujul paarituarvu ja sellele järgneva paarisarvu jagatis.

378. Lahenda võrrand

$$3[8(x - 1) + 12] = 60.$$

379. Arvuta valemi $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ järgi suurus S, kui $a = 8$, $b = 6$ ja $h = 5$.

380. Lihtsusta avaldis

$$a(4 + 3b) + 2a(3 + 4b).$$

381. Lahenda võrrand

$$x + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}.$$

382. Märgi algebra sümbolite abil arvu a kolmekordse ja arvu b vahe.

383. Sõnasta nõue, mis algebra lühikirjas on avaldatud järgmiselt:

$$5m^2 + 2n.$$

384. Lihtsusta avaldis

$$x - \left\{\frac{197}{280}x - \left[\frac{13}{40}x - \left(\frac{3}{8}x - \frac{5}{7}x\right)\right]\right\}.$$

385. Aleviku elanikkude arv kasvab iga aastaga $n\%$. Mitu elanikku oli alevikus aasta tagasi, kui praegune elanikkude arv on E?

386. Kirjuta avaldis

$$x\{x[x(x-3)-2]-5\}-4$$

sulgudeta.

387. Lihtsusta avaldis

$$5a-3a-2a-b-3b+2b.$$

388. Arvuta avaldise $(x-2a)^2$ numbriline väärtus, kui $x=2$ ja $a=3$.

389. Lahenda võrrand

$$15(x-2)+2(x-5)=7.$$

390. Raadioäri ostab vabrikust raadioaparaate hinnaga h marka tükk. p aparaati müüb äri kasumiga $m\%$, ülejäänud q aparaati kasumiga $n\%$. Kui suur on äri kogukasum müüdud aparaatidelt?

391. Lahenda võrrand

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-3\right)-3\right]-3\right\}-3=0.$$

392. Arvuta väärtus, mida omab polünoom

$$3+2a+5a^2+7a^3,$$

kui $a=0{,}1$.

393. Arvuta avaldise

$$\frac{a\,(b^2-c^2)}{b\,(a^2-c^2)}$$

numbriline väärtus, kui $a=31{,}4$, $b=28{,}5$ ja $c=11{,}8$. Saadus anna sajandikeni.

394. Annetis 1320 marka jaotatakse 12 mehe, 15 naise ja 20 lapse vahel nii, et iga naine saab 0,4 sellest rahasummast, mille saab iga mees, ja iga laps saab 0,5 sellest rahasummast, mille saab iga naine. Kui suure rahasumma saab iga mees, naine ja laps?

395. Anna korrutisele

$$(3ar)^3 \cdot (4a^2r)^2 \cdot 6a^3r$$

võimalikult lihtne kuju.

396. Lahenda x-i suhtes võrrand

$$5a - x = 2a.$$

397. Kahe arvu summa on S. Leia need arvud, kui üks on teisest b võrra suurem.

398. Kirjuta avaldis

$$24(a^3b^2)^3 : (2ab)^3$$

võimalikult lihtsalt.

399. Isa maksab oma pojale iga saadud rahuldava, hea ja väga hea hinde puhul 5 penni, nõuab aga pojalt tagasi 7 penni iga mitterahuldava hinde puhul. Kuu kokkuvõte näitab, et poeg on saanud kokku 17 hinnet ja temal on isa käest saada 25 penni. Mitu mitterahuldavat hinnet sai poeg kuu jooksul?

400. Bruto on B kg; taara on $p\%$ brutost. Avalda neto kilogrammides.