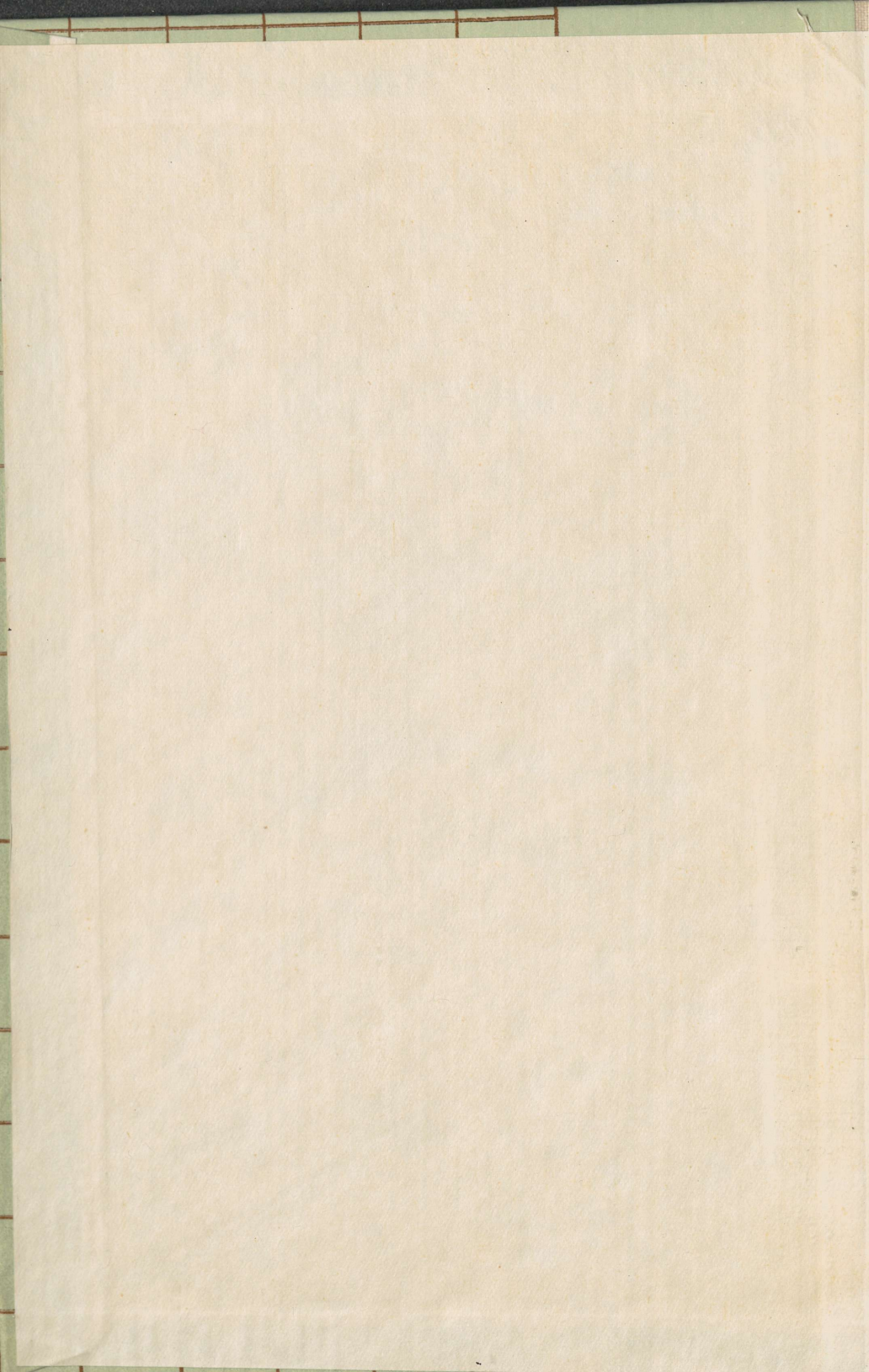
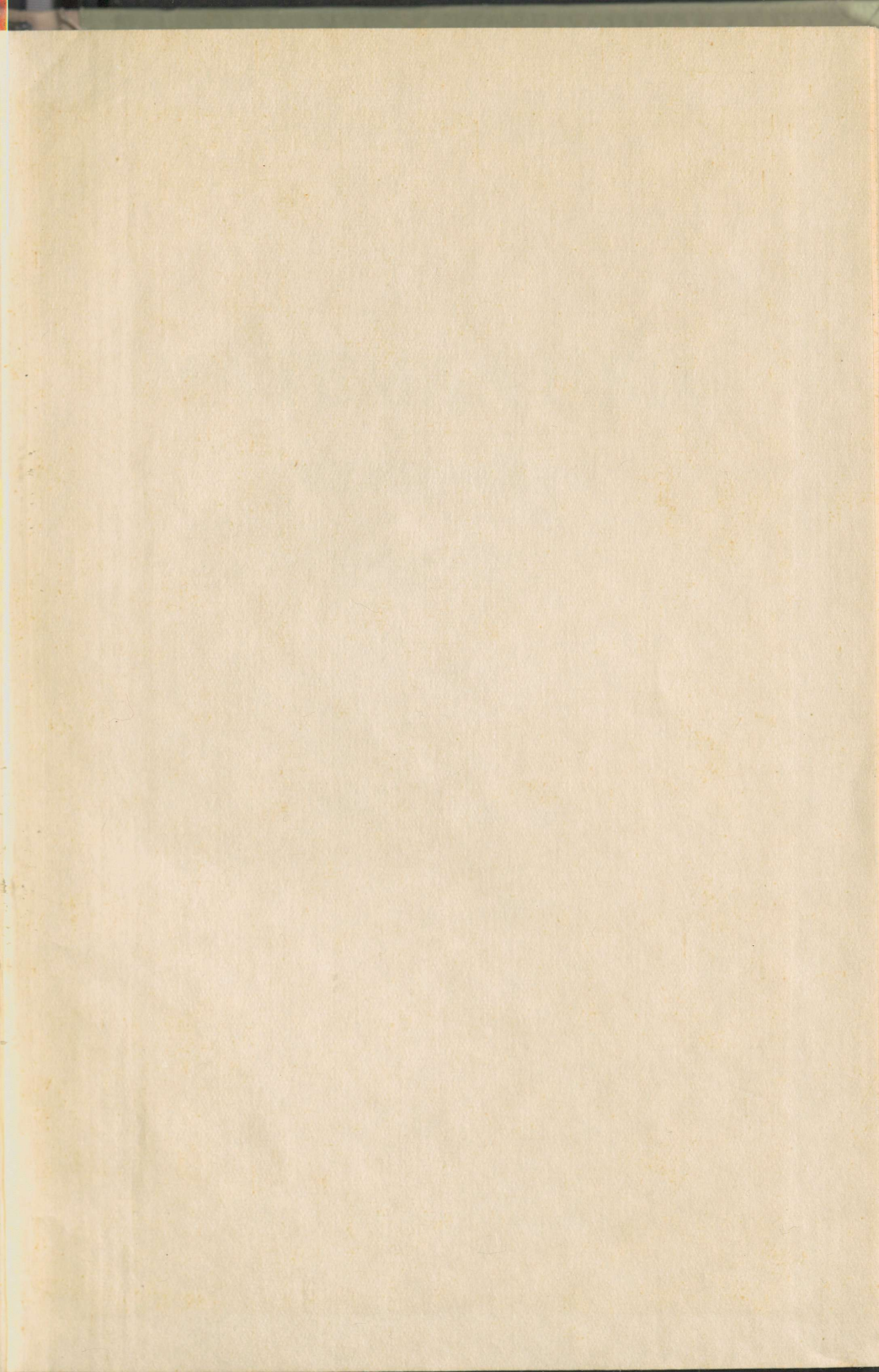
The book cover features a green background with a brown grid pattern. A large, stylized white triangle is drawn on the grid. Overlaid on this are two yellow geometric instruments: a compass on the left and a protractor on the right. The authors' names are printed in white at the top right. The title and grade level are printed in brown on a white banner at the bottom.

E. ETVERK
A. VIHMAN

Matemaatika

VII KLASSILE





A-29851

E. ETVERK, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VII KLASSILE

9. parandatud ja
täiendatud trükk

KIRJASTUS «VALGUS» · TALLINN 1969

51
E 95

Kunstiliselt kujundanud V. Vare

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

1. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS.

1. Kirjuta arvude a ja b summa. Arvuta see summa, kui

1) $a = 716$ 2) $a = 1\frac{5}{8}$ 3) $a = 7,5$ 4) $a = -4\frac{1}{2}$

$b = 284$ $b = 2\frac{1}{2}$ $b = 2,95$ $b = 3\frac{3}{4}$

2. Kirjuta arvude m ja n vahe ja arvuta see vahe, kui

1) $m = 1701$ 2) $m = 4,08$ 3) $m = 6\frac{5}{18}$ 4) $a = -13,4$

$n = 601$ $n = 3,9$ $n = 1\frac{11}{24}$ $b = -28,6$

3. Kirjuta kordaja abil lühemalt.

1) $ab + ab + ab + ab + ab$

2) $mx + mx + mx + mx + mx + mx$

4. Kirjuta astendaja abil lühemalt.

1) $aaaaa$ 2) $mmmmmm$

5. Kirjuta lühemalt.

1) $aaann + aaann + aaann + aaann$

2) $a + a + a + aaa + aaa + aaa + aaa + aaa$

3) $xxxxy + xxxyy + xxyyy + xxyyy + xxyyy$

6. Kumb on suurem, kas

4^2 või 2^4 ; 2^3 või 3^2 ; 5^3 või 3^5 ; 3^4 või 4^3 ?

7. Arvuta.

1) $4a$ ja a^4 , kui $a = 3$ 4) $3x$ ja x^3 , kui $x = 1\frac{1}{2}$

2) b^3 ja $3b$, kui $b = 5$ 5) $4n$ ja n^4 , kui $n = -2$

3) $2m$ ja m^2 , kui $m = 10$ 6) $5y$ ja y^5 , kui $y = -1$

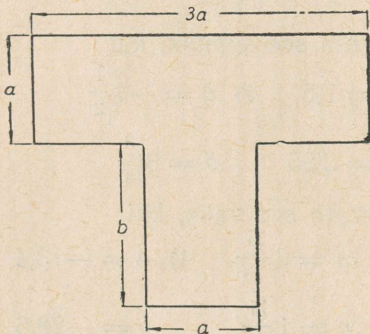
8. Arvuta.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 4) $(0,1)^3$ 5) $(0,5)^2$

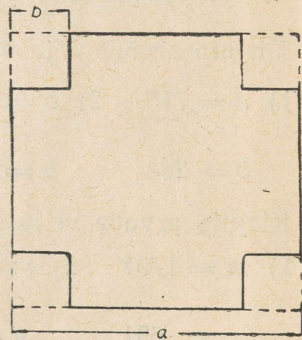
9. Arvuta.

1) $2^4 \cdot 5^2$ 2) $8^2 \cdot 5^3$ 3) $2^3 \cdot 5 + 8^2$ 4) $6 + 3 \cdot 2^5$

10. Koosta valem joonisel 1 esitatud kujundi ümbermõõd arvutamiseks.



Joon. 1.



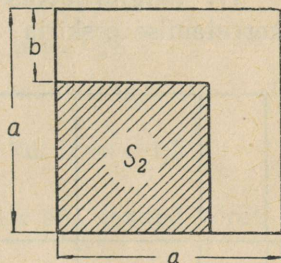
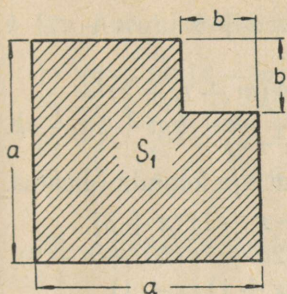
Joon. 2.

11. Ruudukujulisest kartongitükist, mille külje pikkus on a cm, valmistati servi üles pöörates pealt lahtine karp. Selleks lõgati lehe nurkadest välja ruudud külje pikkusega b cm. Avald saadud karbi ruumala V .

12. Kirjuta algebraline avaldis, mida loetakse järgmiselt:

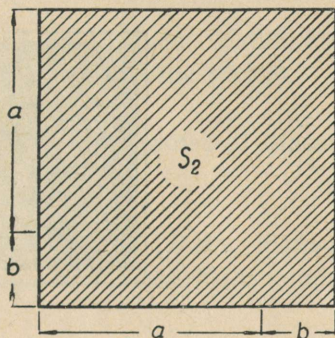
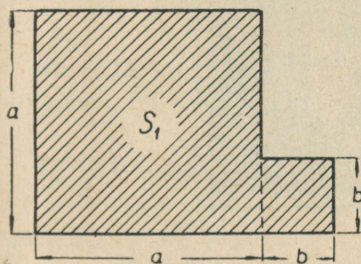
- 1) arvude a ja b summa ruut;
- 2) arvude m ja n ruutude summa;
- 3) arvude a ja b summa kuup;
- 4) arvude a ja b kuupide summa;
- 5) arvude x ja y vahe ruut;
- 6) arvude x ja y ruutude vahe;
- 7) arvude c ja d vahe kuup;
- 8) arvude u ja v kuupide vahe.

13. Avalda joonisel 3 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2 . Arvuta S_1 ja S_2 , kui $a = 3$ m ja $b = 1$ m.



Joon. 3.

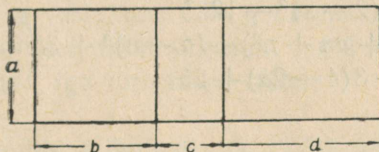
14. Avalda joonisel 4 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2 . Arvuta need pindalad, kui $a = 1,2$ m ja $b = 0,6$ m.



Joon. 4.

15. Põhjenda joonise 5 abil üksliikme ja hulkliikme korrutamise eeskirja

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$



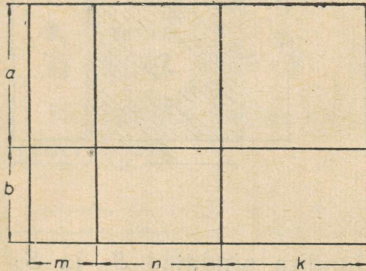
Joon. 5.

16. Korruta

a) hulkliige $2a^3 - 5a + 1$ üksliikmega $-3a^4$;

b) hulkliige $15x^2 - 7x - 25$ üksliikmega $11x^2$.

17. Selgita joonise 6 põhjal hulkliikmete $a + b$ ja $m + n + k$ korrutamise eeskirja



Joon. 6.

$$(a + b)(m + n + k) = am + an + ak + bm + bn + bk.$$

18. Korruta ja koonda tulemus.

- a) $(2x^2 - x + 1)(x + 3)$
- b) $(a^2 - 2a + 3)(3a^2 + a - 2)$
- c) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$
- d) $(a^2 + 2a + 3)(3a^2 + a - 2)$

19. Sõnasta alljärgnevad valemid.

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

Joon. 7.

20. Lihtsusta.

- 1) $(3 + a)^2 + (a - 3)^2 - 18$
- 2) $2n^2 + (5 + n)(5 - n) - (5 - n)^2$
- 3) $(2 + x)^3 + (2 - x)^3 - 12x^2$
- 4) $(a - n)(a^2 + an + n^2) + (a - n)^3 + 3an^2$
- 5) $2(3a - b) + 3(4 - 2a) + 2b$

21. Lihtsusta.

- 1) $(4 + b)^2 + (b - 4)^2 - 32$
- 2) $(3 + a)(3 - a) - (3 - a)^2 + 2a^2$
- 3) $(1 + y)^3 + (1 - y)^3 - 6y^2$
- 4) $(b - x)(b^2 + bx + x^2) - (b - x)^3 + 3bx^2$
- 5) $2(10 - 5x) + 5(2x - a) + 5a$

22. Arvuta avaldise väärtus, lihtsustades enne avaldist.

1) $(4 + m)(4 - m) + (4 + m)^2 - 32$, kui $m = 1,25$

2) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$, kui $x = 15$

3) $(a + 2)^3 - (a - 2)^3 - 16$, kui $a = 5$

4) $(1 + x)(1 - x + x^2) - (1 + x)^3 + 3x^2$, kui $x = -1,5$

23. Lihtsusta võrduse vasakut poolt ja leia siis saadud võrdusest x .

1) $4(2x + 3) + 6(x - 2) = 42$

2) $(7 + x)^2 + (8 + x)(8 - x) = 127$

3) $(x + 1)^2 - x^2 = 2$

4) $2x^2 - 2(x - 3)^2 = 27$

24. Ristküliku ja ruudu ümbermõõdud on võrdsed. Ristküliku pikkus on a meetrit ja laius b meetrit. Leia ruudu külje pikkus.

25. Klassis on 22 tüdrukut ja 18 poissi. Mitu protsenti klassi õpilastest on tüdrukud?

26. Risttahukakujulise siloaugu sügavus on 1,9 m, pikkus 3,4 m ja laius 3,1 m. Silo täidab 85% augu ruumalast. Mitu kuupmeetrit silo on augus?

27. Kauba hinda 220 rubla alandati 10% võrra. Järgmisel aastal alandati selle kauba hinda veel 15% võrra. Kui palju makstab see kaup pärast teistkordset hinnaalandamist?

28. 14-grammise söetüki analüüsimisel selgus, et selles oli 10,4 g süsinikku, 1 g vesinikku, 0,84 g hapnikku, 0,56 g lämmastikku ja peale selle veel mitmesuguseid muid aineid. Mitu protsenti sisaldas söetükk iga nimetatud ainet?

29. Klassist puudus 4 õpilast ehk 12,5% klassi õpilaste üldarvust. Leia klassi õpilaste arv.

30. Nimeta kõik x täisarvulised väärtused, mis rahuldavad tingimusi

1) $-5 < x < 2$; 2) $-1007 < x < -1002$; 3) $|x| < 4$.

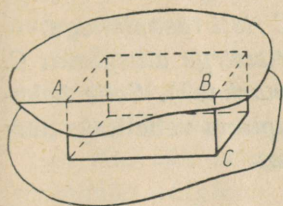
31. Arvuta ja täida tühjad lahtrid alljärgnevas tabelis.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	3	-8	12	$\frac{5}{18}$	-16	-0,3	-5	824
b	6	4	-3	$-\frac{7}{24}$	-8	0,12	-10	-376
$a + b$								
$a - b$								
$a \cdot b$								
$a : b$								
$\frac{a + b}{a - b}$								
$\frac{a - b}{a \cdot b}$								

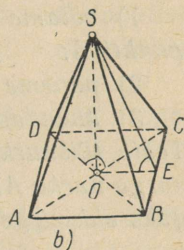
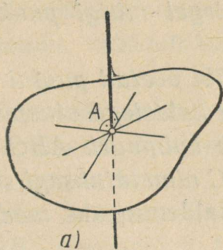
32. Täida alljärgnev tabel.

a	18	10	13	-11	-9	-23	750	-123
b	15	-8	-23	3	17	-17	750	-48
$a - b$								
$b - a$								

33. a) Laiendame risttahuka kaht vastastahku igas suunas (joon. 8). Nii saame kaks tasapinda, millel pole ühtki ühist punkti. Kuidas nimetatakse kaht sellist tasapinda? Too veel näiteid **paralleelsetest tasapindadest**. Kuidas asetsevad teineteise suhtes korrapärase kuusnurkse prisma põhjade tasapinnad? Kas selle prisma külgtahu tasapind ja põhja tasapind on paralleelsed või lõikuvad?



Joon. 8.



Joon. 9.

b) Võtame risttahuka ülemise tahu tasapinnal mingi serva, näiteks serva AB (joon. 8), ja pikendame seda mõlemas suunas. Kas saadud sirgel ja alumise tahu tasapinnal võib leiduda ühist punkti?

Kui sirgjoonel ja tasapinnal ei ole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et nad on paralleelsed.

Too näiteid sirgjoonest ja tasapinnast, mis on paralleelsed. Kuidas asetseb rõhtsirge rõhttasapinna suhtes?

34. a) Vaatleme rõhttasapinda ja mingit püstsirget, näiteks telefoniposti rõhtsal tasasel maapinnal. Võtame sel tasapinnal mõned sirged läbi antud sirge ja tasapinna lõikepunkti A (joon. 9, a). Kui suured on nurgad antud sirge ja tasapinnal võetud sirgete vahel?

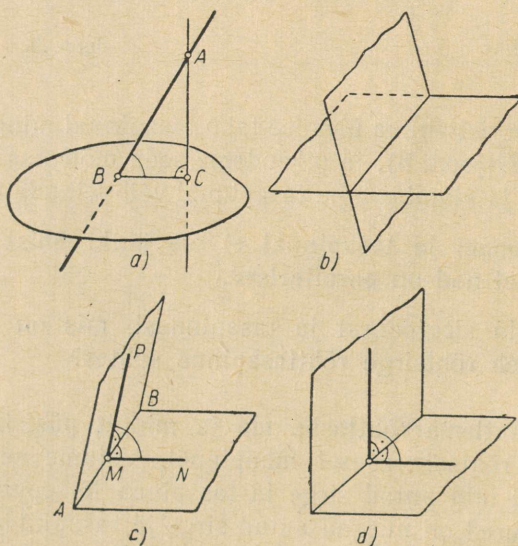
Kui sirgjoon moodustab täisnurga kõigi tasapinnal asetsevate sirgetega, mis läbivad sirgjoone ja tasapinna lõikepunkti, siis öeldakse, et sirgjoon on risti tasapinnaga.

b) Pikendame risttahuka külgserva BC (joon. 8). Kuidas sirge BC asetseb risttahuka põhja tasapinna suhtes? Kuidas asetseb püramiidi kõrgus SO (joon. 9, b) püramiidi põhja tasapinna $ABCD$ suhtes?

c) Nimeta jooniselt 9, b täisnurki, mis püramiidi kõrgus moodustab põhja tasapinnal asetsevate sirgetega.

35. a) Vaatleme tasapinda ja selle mingit kaldsirget AB (joon. 10, a), s. o. sirget, mis ei asetse tasapinnal, pole tasapinnaga risti ega ka paralleelne. See sirge moodustab tasapinnaga nurga, mille leiame järgmiselt:

- 1) võtame sirgel mingi punkti väljaspool tasapinda, näiteks punkti A ;
- 2) paneme läbi võetud punkti A sirge AC risti tasapinnaga;
- 3) ühendame kaldsirge aluspunkti B ja ristsirge aluspunkti C . Tekib täisnurkne kolmnurk ABC (miks täisnurkne?). Selle kolmnurga nurka ABC nimetataksegi sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks ehk sirge kaldenurgaks tasapinna suhtes.



Joon. 10.

b) Nimeta jooniselt 9, b püramiidi külgservade kaldenurki põhja tasapinna suhtes. Kas need nurgad on võrdsed või mitte?

c) Kahe tasapinna lõikudes tekib neli kahetahulist nurka (joon. 10, b). Näita raamatu kaante abil kahetahulist nurka, suurenda seda nurka, vähenda teda. Leia püramiidi juures (joon. 9, b) kahetahulisi nurki.

Ka kahetahulise nurga suurust saab mõõta. Selleks võetakse nurga serval (s. o. tasapindade lõikesirgel) AB mingi punkt M ja joonestatakse sellest punktist kaks kiirt MN ja MP , mis on risti kahetahulise nurga servaga ja millest üks läheb mööda üht tahku, teine mööda teist tahku: $MN \perp AB$ ja $MP \perp AB$ (joon. 10, c).

Saadud nurka NMP ristsirgete vahel nimetatakse kahetahulise nurga joonnurgaks ja selle kaudu mõõdetaksegi kahetahulise nurga suurust.

d) Näita, et korrapärase püramiidi apoteemi ja põhja apoteemi vahel olev nurk ($\angle SEO$ joonisel 9, b) ongi püramiidi külgtahu ja põhitahu vahelise nurga joonnurk.

e) Kui üks tasapind läbib teise tasapinna ristsirget (näiteks risttahuka külgtahu tasapind ABC joonisel 8 läbib põhja tasapinna ristsirget BC), siis nende tasapindade vahel olevate nurkade joonnurgad on täisnurgad (joon. 10, d). Sel juhul öeldakse, et need tasapinnad ristuvad. Näiteks joonisel 9, b tasapind ASC ristub tasapinnaga ABCD, sest esimene tasapind läbib teise tasapinna ristsirget OS.

Näita, et risttahuka külgtahu tasapind on risti põhja tasapinnaga.

2. HULGAD.

HULK JA SELLE ELEMENT.

36. *Matemaatikas vaadeldakse sageli mitmesuguseid hulki, mis koosnevad kas arvudest, geomeetristest kujunditest või ka muudest objektidest.*

Näiteid. 1) Arvu 10 jagajate hulk koosneb arvudest 1, 2, 5 ja 10.

2) Kolmnurga ABC tippude hulk koosneb punktidest A, B ja C, külgede hulk aga lõikudest AB, BC ja AC.

3) Avaldises $\frac{3x-5}{6}$ esinevate tehete hulk koosneb korrutamise, lahutamise ja jagamisest.

4) Meie tänava majade hulk koosneb kümnest elumajast, ühest koolimajast ja kahest kauplusehoonest.

Objekte, millest hulk koosneb, nimetatakse selle hulga elementideks.

Mis on naturaalarvude hulga elementideks? täisarvude hulga elementideks? klassi õpilaste hulga elementideks?

Leia arvust 10 väiksemate algarvude hulga elemendid.

37. *Mõnele hulgale on antud eri nimetus, näiteks teatud inimestehulka nimetatakse perekonnaks, teatud lastehulka kooliklassiks, teatud puudehulka metsaks jne. Kuidas iseloomustada neid hulki?*

Mis on linnuparv? küla? eesti keele tähestik? Eesti NSV kala-laevastik?

38. *Hulki tähistatakse suurte ladina tähtedega, nagu A, B, M₁, M₂ jne. Lauset «Hulga A elementideks on arvud 1, 2, 3 ja 4» kirjutatakse lühidalt kujul*

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Kõigi naturaalarvude hulka märgitakse tähega N ja kirjutatakse kujul

$$N = \{1, 2, 3, \dots\},$$

kus punktid ... märgivad, et naturaalarvude hulk on lõpmatu, s. t. et igale naturaalarvule järgneb veel naturaalarve. Kui hulk pole lõpmatu, siis on ta lõplik.

Kirjuta üles iga järgnev hulk ja otsusta, kas ta on lõplik või lõpmatu:

- 1) paaritute arvude hulk P_1 ; 2) paarisarvude hulk P_2 ;
- 3) arvu 12 jagajate hulk J_{12} ; 4) naturaalarvude ruutude hulk H ;
- 5) naturaalarvude ruutude viimaste numbrite hulk M .

39. Täisarvude hulka tähistame tähega T ja kirjutame kujul

$$T = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Selle kirjutusega tahetakse näidata, et täisarvude hulga elemendid lähevad elemendist 0 kahes vastassuunas: positiivses suunas ja negatiivses suunas (nagu seda näeme arvsirgel). Kuid sama hulka võib kirjutada ka kujul

$$T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

sest elementide järjekord hulgas pole oluline.

40. Hulga H elementideks on täisarvud, mille ruudud on väiksemad kui 10. Kirjuta see hulk tema elementide kasvavas järjekorras, kahanevas järjekorras.

41. Eespool vaatlesime hulki, mis olid antud nende elementide loetlemise teel. Hulki võib anda veel nende elementide mingi iseloomustava tunnuse abil, näiteks hulka

$$M = \{2, 3, 5, 7\}$$

võib anda ka kujul

$$M = \{\text{ühekohalised algarvud}\}.$$

42. Anna elementide loetlemise teel järgmised hulgad:

$A = \{\text{Eesti metsade tähtsamad okaspuuliigid}\};$

$B = \{\text{maailmajaod}\};$

$C = \{\text{kahekohalised arvu 17 kordsed}\};$

$D = \{\text{kolmnurga liigid nurkade järgi}\}.$

43. Anna elementide iseloomustava tunnuse abil järgmised hulgad:

$$K = \{5, 10, 15, \dots, 90, 95\};$$

$$L = \{\text{kask, lepp, haab}\};$$

$$M = \{\text{kana, kukk, part, hani}\}.$$

44. Lauset «Arv 5 kuulub naturaalarvude hulka N » kirjutatakse lühidalt järgmiselt:

$$5 \in N.$$

Märk \in on elemendi hulka kuuluvuse märk. Hulka mittekuuluvuse märgiks on \notin . Näiteks

$$2 \in N, \text{ kuid } -2 \notin N, \text{ küll aga } -2 \in T.$$

45. Olgu G algarvude hulk. Kirjuta lühidalt, missugused arvudest

$$7, 9, 17, 27, 29, 37, 39$$

on hulga G elementideks, missugused mitte.

46. Koosta arvu 24 jagajate hulk J_{24} . Märgi lühidalt, missugused arvudest 2, 3, 9, 12, 15, 24 on selle hulga elemendid, missugused mitte.

47. Leia arvu 2860 algtegurite hulk A . Missugused arvudest 3, 5, 7, 11, 13 kuuluvad hulka A , missugused mitte?

HULK JA SELLE OSAHULK.

48. Vaatleme kaht hulka $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Paneme tähele, et hulga A iga element kuulub ka hulka B :

$$1 \in B, 3 \in B, 5 \in B.$$

Kui ühe hulga iga element kuulub teise hulka, siis esimest hulka nimetatakse teise osaks ehk osahulgaks.

Siin siis hulk A on hulga B osahulk. Seda asjaolu märgitakse lühidalt kujul

$$A \subset B$$

ja loetakse kujul: A on osa hulgast B . Märk \subset väljendab teatud seost kahe hulga vahel, nimelt seda, et kui element $a \in A$, siis ka $a \in B$.

Näide. $N \subset T$, s. t. naturaalarvude hulk on täisarvude hulga osahulk, sest kui $a \in N$, siis $a \in T$.

Kui hulga A mõni element pole hulga B elemendiks, siis A ei ole B osahulk. Viimast asjaolu märgitakse kujul $A \not\subset B$ (loetakse: A ei ole osa hulgast B).

49. On antud hulgad $A = \{3, 6\}$, $B = \{6, 5, 3\}$, $C = \{1, 3, 6\}$ ja $D = \{3, 5, 6, 8\}$. Kirjuta iga kahe antud hulga kohta, kas nende vahel kehtib seos \subset või seos $\not\subset$.

50. Tähistame arvu a algtegurite hulga tähega A_a , näiteks $A_{12} = \{2, 2, 3\}$. Näita, et $A_{15} \subset A_{45}$.

51. Mida võib öelda hulkade A ja C kohta, kui $A \subset B$ ja $B \subset C$?

52. Kui $A \subset B$ ja ka $B \subset A$, siis hulga A iga element on hulga B elemendiks ja ka ümberpöörduvalt, hulga B iga element on hulga A elemendiks. Sellest nähtub, et need hulgad koosnevad samadest elementidest.

Samadest elementidest koosnevaid hulki nimetatakse võrdseteks.

Hulkade A ja B võrdsust märgitakse kujul $A = B$ ja mittevõrdsust kujul $A \neq B$.

Näiteks naturaalarvude hulk N ja positiivsete täisarvude hulk T_+ on võrdsed: $N = T_+$.

53. Näita, et arvu 81 tegurite hulk (ilma tegurita 1) on võrdne sajast väiksemate arvu 3 astmete hulgaga.

54. Leia neli sõna, mille tähtede hulk on võrdne hulgaga $\{r, a, e, k\}$.

55. On antud hulgad $A = \{1, 5, 7, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 10, 12\}$ ja $C = \{5, 10, 7, 1\}$. Missugused seostest $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset A$, $B \subset C$, $C \subset A$, $C \subset B$ on õiged, missugused mitte?

56. Kui hulk A on hulga B osahulk, s. t. $A \subset B$, kuid $A \neq B$, siis hulgas B leidub vähemalt üks element, mida ei leidu hulgas A . Näiteks, kui $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, siis $2 \in B$, kuid $2 \notin A$ ja samuti $4 \in B$, kuid $4 \notin A$.

Hulga B need elemendid, mis ei kuulu tema osahulga A , moodustavad hulga, mida nimetatakse hulga A täiendiks hulga B ja tähistatakse sümboliga A'_B (loe: A täiend hulga B).

Ülalantud näite puhul $A'_B = \{2, 4\}$.

57. Koosta hulga $P = \{3, 6, 9\}$ täiend hulga $Q = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

58. Mis on 7. klassi tütarlaste hulga täiendiks selle klassi õpilaste hulga?

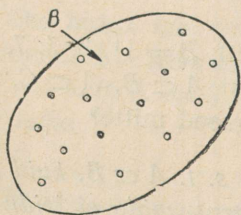
59. Kirjuta naturaalarvude hulga N täiend täisarvude hulga T .

60. Leia arvu 4 jagajate hulga täiend arvu 12 jagajate hulga.

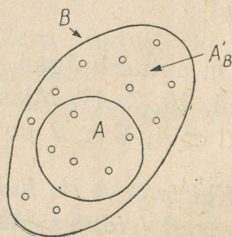
61. Mis on paarisarvude hulga täiendiks naturaalarvude hulga?

62. Hulga B ja tema osahulga A vahelise seose näitlikuks kujutamiseks saab kasutada järgmist diagrammi.

Joonestame mingi kinnise joone ja kujutame antud hulga elemente seespool seda joont olevate punktidenä. Kui hulk B koosneb näiteks viieteistkümnest elemendist, siis tema näitlikuks kujutiseks kõlbab järgmine diagramm (joon. 11). Kui seespool esimest joont joonestada teine kinnine joon, mille sisse jäävad mõned hulga B elemente kujutavad punktid (joon. 12), siis saame hulga B ühe osahulga A kujutise. Punktihulk, mis jääb nende kahe joone vahele, on hulga A täiend hulga B .



Joon. 11.



Joon. 12.

63. Kujuta täisarvude ja naturaalarvude hulga seos diagrammina, kirjutades mõned arvud näidetena diagrammi sisse.

64. Missuguses seoses on võrdkülgsete kolmnurkade hulk K ja võrdhaarsete kolmnurkade hulk H ? Kujuta see seos diagrammina.

65. Kui ring B joonisel 12 kujutab kooli kõigi klasside hulka ja ring A klasside hulka 1-st 4-nda klassini, mida kujutab siis piirkond kahe ringjoone vahel? Kuidas joonestada need ringjooned, kui koolis polegi 4. klassist kõrgemaid klasse?

66. Kui $A \subset B$ ja ühtlasi $A = B$, siis hulga A täiend hulgani B ei sisalda ühtki elementi ehk hulga A täiend hulgani B on tühi hulk. Tühja hulga tähiseks on sümbol \emptyset . Niisiis, kui $A \subset B$ ja $A = B$, siis $A'_B = \emptyset$. Näiteks kümnest väiksemate kahekohaliste arvude hulk on tühi hulk.

Missugune on Kuul elavate inimeste hulk? Üle 100 kg kaaluvate 1. klassi õpilaste hulk? 100 m alla 10 sekundit jooksvate õpilaste hulk?

67. Hulgal on üldiselt palju osahulki. Vaatleme näiteks hulga $M = \{a, b, c\}$ osahulki. Kui võtame hulga M elemente ühekaupa, siis saame antud hulga ühelised osahulgad

$$M_1 = \{a\}, \quad M_2 = \{b\}, \quad M_3 = \{c\}.$$

Võttes elemente kahekaupa, saame hulga M kahelised osahulgad

$$M_4 = \{a, b\}, \quad M_5 = \{a, c\}, \quad M_6 = \{b, c\}.$$

Võttes elemente kolmekaupa, saame ainsa kolmelise osahulga

$$M_7 = \{a, b, c\}.$$

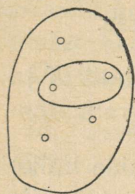
Lõpuks, tühi hulk loetakse iga hulga osahulgaks:

$$M_8 = \emptyset.$$

Antud hulgal M on seega kokku 8 osahulka.

68. Moodusta hulga $A = \{a, b, c, d\}$ kõik osahulgad. Kui palju neid on?

69. Kui hulgast, milles on 5 elementi, eraldada osahulk, milles on 2 elementi (joon. 13), siis jääb üle eraldatud osahulga täiend antud hulgani, s. o. antud hulga üks osahulk, mis sisaldab kolm



Joon. 13.

elementi. Nii on igal kahelisel osahulgal täiendiks üks kolmeline osahulk, ja ümberpöördult, igal kolmelisel osahulgal on täiendiks üks kaheline osahulk. Seega on viiest elemendist koosneval hulgal kahelisi osahulki niisama palju kui kolmelisi osahulki. Samuti on tal ühelisi osahulki niisama palju kui neljalisi osahulki.

70. Hulk koosneb 8 elemendist. Missuguseid osahulki on tal ühepalju?

71. Hulk koosneb n elemendist. On moodustatud tema osahulgad 1-, 2-, 3-, 4- ja 5-kaupa ning osahulgad $(n - 1)$ -, $(n - 2)$ -, $(n - 3)$ -, $(n - 4)$ - ja $(n - 5)$ -kaupa. Missuguseid neist osahulkadest on ühepalju?

72. Peep andis endast sõpradele informatsiooni oma toa aknale väljapandud lipukeste hulga abil. Tal oli kasutada kolm lipukest: sinine, punane ja valge. Lipukeste puudumine aknal (tühi hulk) tähendas, et Peep pole kodus, sinine lipukene tähendas, et Peep õpib jne. Mitu erinevat lauset sai Peep niiviisi edasi anda? Koosta valik selliseid lauseid. Anna see «salakiri» järgmisel kujul:

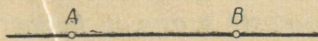
∅	Peep pole kodus
Sinine	Peep õpib
Punane
.....

73. Mitmel erineval viisil saab neljast erinevast lillest teha kingituse, mis koosneb kahest lillest?

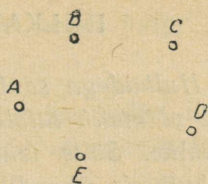
74. Mitmel erineval viisil saab kuue erineva värvipliatsi hulgast välja valida kaks pliatsit?

75. Läbi kahe punkti A ja B saab joonestada ühe ja ainult ühe sirge, nimelt sirge AB (joon. 14). Seepärast öeldakse, et kaks punkti määravad sirge.

Mitu sirget on määratud kolme punktiga, mis ei asetse ühel sirgel?



Joon. 14.



Joon. 15.

76. Joonisel on antud 5 punkti, mille hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel (joon. 15). Kirjuta üles kõik sirged, mis on määratud nende viie punktiga. Tee joonis vihikusse ja joonestast kõik need sirged. Kui palju neid on?

77. Eelmises ülesandes nõutud sirgete arvu saab leida järgmise arutluse teel. Olgu antud n punkti, mille hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel. Kui mingi ühe punkti neist (näiteks punkti A) ühendame iga ülejäänud punktiga, siis saame $n - 1$ sirget, sest ülejäänud punkte on parajasti $n - 1$ ja iga punkti-paar annab uue sirge. Kui iga punkt antud n punkti hulgast on niiviisi ühendatud ülejäänud punktidega, siis on saadud $n(n - 1)$ ühendussirget, kuid iga sirge on seejuures arvestatud kaks korda, näiteks sirge AE on arvestatud siis, kui punkti A ühendasime ülejäänud punktidega, ja ka siis, kui punkti E ühendasime ülejäänud punktidega. Seega on otsitav sirgete arv

$$p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Kontrolli tulemuse õigsust, kui $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

78. Arvuta, mitu sirget saab joonestada läbi 8 (15) punkti, kui nende hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel.

79. Klassis on 30 õpilast. Mitmel viisil saab klass valida kaheliikmelise esinduse?

80. Mitu kahest elemendist koosnevat osahulka leidub hulgal, millel on 25 erinevat elementi?

HULKADE ÜHEND JA ÜHISOSA.

81. Hulkadega saab teostada tehteid, s. t. kahest antud hulgast on võimalik tuletada uusi hulki. Lihtsaim tehe on hulkade ühendamine. Selle tehte tulemust, s. o. uut hulka nimetatakse antud hulkade ühendiks. Tehte selgitamiseks võtame järgmise näite.

Klassis leidub teatud hulk õpilasi, kes vabal ajal tegelevad kehakultuuriga, ütleme hulk

$$A = \{\text{Anne, Malle, Tiina, Riina, Olev, Sulev, Kalev}\},$$

ja teatud hulk õpilasi, kes tegelevad malega, ütleme hulk

$$B = \{\text{Mari, Tiina, Jaak, Olev}\}.$$

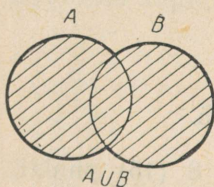
Tuleb koostada nimestik õpilastest, kes tegelevad kehakultuuriga või malega.

Sellesse nimestikku kantud õpilased moodustavad ühe uue hulga

$$C = \{\text{Anne, Malle, Mari, Tiina, Riina, Jaak, Olev, Sulev, Kalev}\}.$$

Seda uut hulka nimetamegi antud hulkade A ja B ühendiks. Seega

kahe antud hulga ühendiks nimetatakse hulka, mille elementideks on antud hulkade kõik elemendid ja ainult need.



Joon. 16.

Kui antud hulkadel on ühiseid elemente (nagu Tiina ja Olev ülalantud näites), siis ühendhulgast esinevad need ainult üks kord (sest pole ju näiteks kahte Tiinat!) Kahe hulga A ja B ühendit kujutame joonisel 16 esitatud diagrammina.

Hulkade ühendamise märkimiseks kasutatakse märki \cup . Niisiis

$$C = A \cup B$$

tähendab, et hulk C on hulkade A ja B ühend. Kui x on mingi element, siis $x \in A \cup B$ siis ja ainult siis, kui $x \in A$ või $x \in B$.

82. Moodusta hulkade A ja B ühend $A \cup B$, kui

- 1) $A = \{a, b, c, d\}$ ja $B = \{b, f, k, d\}$;
- 2) $A = \{1, 5, 10, 15, 20\}$ ja $B = \{1, 10, 20\}$;
- 3) $A = \{\text{paarisarvud}\}$ ja $B = \{\text{paaritud arvud}\}$;
- 4) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ ja $B = \{5, 10, 15, \dots\}$.

83. Teiseks tehteks hulkadega on kahe antud hulga ühisosa moodustamine.

Kahe antud hulga ühisosaks nimetatakse hulka, mille elementideks on antud hulkade ühised elemendid ja ainult need.

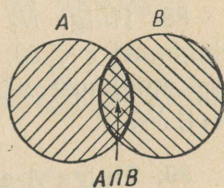
Näiteks, kui $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ja $B = \{3, 4, 6, 7\}$, siis A ja B ühisosaks on $C = \{4, 6\}$. Hulkade A ja B ühisosa C kujutab joonisel 17 kaks korda viirutatud ala.

Hulkade A ja B ühisosa märgitakse sümboliga $A \cap B$. Ülaltoodud näites seega $C = A \cap B$, mida loeme: C on A ja B ühisosa. Kui x on mingi element, siis

$$x \in A \cap B$$

siis ja ainult siis, kui $x \in A$ ja ühtlasi $x \in B$.

Mis on ülesandes 81 antud hulkade A ja B ühisosa?

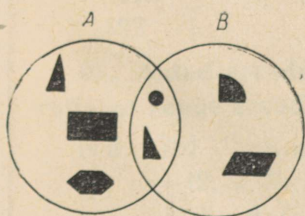


Joon. 17.

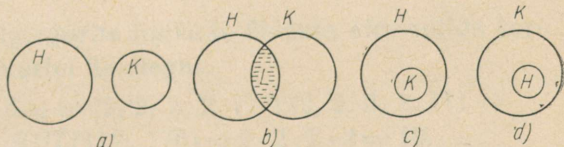
84. On antud hulgad P ja Q . Leia hulk $R = P \cap Q$:

- 1) $P = \{a, b, d, e, f, g, h\}$ ja $Q = \{c, d, e, h, k\}$;
- 2) $P = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ ja $Q = \{\text{algarvud}\}$;
- 3) $P = \{5\text{-ga jaguvad arvud}\}$ ja $Q = \{\text{paarisarvud}\}$;
- 4) $P = \{\text{Eesti NSV mereäärsed linnad}\}$ ja $Q = \{\text{Eesti NSV linnad, millest voolab läbi jõgi}\}$;
- 5) $P = \{\text{võrdhaarsed kolmnurgad}\}$ ja $Q = \{\text{täisnurksed kolmnurgad}\}$.

85. Joonisel 18 on antud kaks hulka A ja B . Avalda elementide loeteluna hulk A , B , $A \cup B$ ja $A \cap B$.



Joon. 18.



Joon. 19.

86. Joonisel 19 on diagrammina kujutatud kahe hulga H ja K seos sõltuvalt nende ühisosast. Kirjelda seda seost juhtudel a , b , c ja d ning avalda need seosed sümbolite abil. Mis on H ja K ühendiks igal antud juhul?
87. Hulgad A ja B on kujutatud ringidena, mille raadiused on vastavalt 3 cm ja 2 cm ning keskpunktidevaheline kaugus on esimesel juhul 1 cm, teisel juhul 3 cm, kolmandal juhul 6 cm. Joonesta need ringid ja leia hulkade ühisosa kujutis igal antud juhul.
88. Hulga N_1 elementideks on naturaalarvud x , mis täidavad tingimust $x < 30$, ja N_2 elementideks naturaalarvud x , mis täidavad tingimust $x > 25$. Leia hulga $N_1 \cap N_2$ elemendid. Mis on $N_1 \cup N_2$?
89. Hulga A elementideks on 50-st väiksemad arvu 6 kordsed ja hulga B elementideks 50-st väiksemad arvu 9 kordsed. Leia $A \cap B$ ja $A \cup B$.
90. Mis on arvu 6 kordsete hulk K arvu 3 kordsete hulga L suhtes? Kirjuta hulga K täiend hulgani L .
91. On antud ringjoon ja selle keskpunkti läbiv sirge. Olgu ringjoone punktide hulk R ja sirgjoone punktide hulk S . Mis on $R \cap S$?
92. On antud ringjoon keskpunktiga O koos kahe diameetriga AB ja CD . Olgu diameetri AB punktide hulk M_1 , diameetri CD punktide hulk M_2 ja ringjoone punktide hulk M_3 . Selgita, mis on
 1) $M_1 \cap M_2$, 2) $M_1 \cap M_3$, 3) $M_1 \cup M_3$, 4) $(M_1 \cup M_3) \cap M_2$,
 5) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$.

3. RATSIONAALAVALDISED.

ÜKSLEIKMETE SUURIM ÜHISTEGUR JA VÄHIM ÜHISKORDNE

93. Arvu 324 algtegurite hulk $A_{324} = \{2, 2, 3, 3, 3, 3\}$. Kirjuta $A_{36}, A_{40}, A_{54}, A_{63}, A_{81}, A_{82}, A_{102}, A_{121}, A_{510}, A_{484}$.

94. Kirjuta järgmiste arvude algtegurite hulgad:

42	64	86	86	144	720
45	72	92	92	150	1050
49	77	96	96	169	1001

95. Üksleikme algtegereiks loeme tema kordaja algtegurid ja üksleikmes esinevad tähed. Näiteks üksleikme $M = 60ax^2y^3$ algtegurite hulk on

$$A_M = \{2, 2, 3, 5, a, x, x, y, y, y\}.$$

Kirjutades üksleikme $60ax^2y^3$ tema algtegurite korrutisena, saame

$$60ax^2y^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5ax^2y^3.$$

Kirjuta üksleikmete $N = 15a$ ja $L = 12a^3bc$ algtegurite hulgad!

96. Kirjuta üksleikme tema algtegurite korrutisena.

a) $8x$	b) $3b^2$	c) $120ab^3$	d) $18a^2b^2c^2$
$14b$	$36x^2$	$57x^2y^3$	$8a^5b$
$24a$	$26y^3$	$210ax^2y^3$	$20a^4b^2$
392	$17x^4$	$4a^4b^3x$	$27a^2xy$

97. Antud arvude algtegurite hulkade ühisosa elementide korrutis on nende arvude suurim ühistegur.

Näited. 1. $A_{112} \cap A_{176} = \{2, 2, 2, 2, 7\} \cap \{2, 2, 2, 2, 11\} = \{2, 2, 2, 2\}$; $SÜT(112, 176) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

2. $A_6 \cap A_{12} \cap A_{20} = \{2, 3\} \cap \{2, 2, 3\} \cap \{2, 2, 5\} = \{2\}$; $SÜT(6, 12, 20) = 2$.

Leia järgmiste arvude algtegurite hulkade ühisosa ja arvuta nende arvude SÜT:

10 ja 15	15 ja 35	9, 18 ja 45
21 ja 14	39 ja 52	7, 14 ja 21

98. Arvuta järgmiste arvude SÜT:

a) 112 ja 176	b) 121, 154 ja 165
132 ja 364	102, 136 ja 170
308 ja 392	144, 162 ja 198
468 ja 624	264, 360 ja 600
360 ja 450	104, 525 ja 712

99. Antud üksikliikmete suurima ühisteguri arvutamiseks leiame üksliikmete algtegurite hulgad, kirjutame nende hulkade ühisosa ja seejärel leiame ühisosasse kuuluvate algtegurite korrutise.

Näide. Leiame üksliikmete $M = 3a^2b^3$, $N = 12a^3bc$ ja $L = 18a^2b^2c^2$ SÜT.

$$A_M = \{3, a, a, b, b, b\};$$

$$A_N = \{2, 2, 3, a, a, a, b, c\};$$

$$A_L = \{2, 3, 3, a, a, b, b, c, c\};$$

$$A_M \cap A_N \cap A_L = \{3, a, a, b\};$$

$$SÜT(M, N, L) = 3 \cdot a \cdot a \cdot b = 3a^2b.$$

Ühistegurita üksliikmete SÜT on 1.

100. Leia kahe üksliikme SÜT.

a) a ja $2a$	b) $6a$ ja 8	c) $14ax^2$ ja $21a^2x$
ab ja b	$7ab$ ja $12ac$	$44cy^3$ ja $77c^2y^2$
$3x$ ja $6x$	a^4 ja a^2	$30m^2p^3q$ ja $65mp^2q^3$
x ja x^2	$14y^3$ ja $7y$	$22a^2b^3c^2$ ja $121a^3bc$
a ja b	$18abc$ ja $12ac$	$42ax^2y^3$ ja $35bx^2$

101. Leia kolme üksliikme SÜT.

a) $15ab^2$	b) $16x^3y^2z$	c) $12mn$	d) $26p^3q^2$
$21a^2b$	$24xy^2z^3$	$18n^2$	$65a^2p^2q^3$
$12ab$	$6x^2y^2z^2$	$30mn^2$	$39p^2q^3$

102. Kui antud arvude ühiskordse algtegurite hulgas on kõik antud arvude algtegurid ja ainult need, siis see ühiskordne on antud arvude vähim ühiskordne (VÜK).

Seega, antud arvude VÜK algtegurite hulk on antud arvude algtegurite hulkade ühend.

$$\text{Näiteks } A_{12} \cup A_{15} = \{2, 2, 3\} \cup \{3, 5\} = \{2, 2, 3, 5\};$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60; \quad VÜK(12, 15) = 60.$$

Antud arvude vähima ühiskordse leidmiseks korrutame nende arvude algtegurite hulkade ühendi elemendid.

Sellest reeglist nähtub, et

kui antud arvudel ühiseid algtegureid pole, siis nende arvude VÜK on võrdne nende arvude korrutisega.

Kui ühe arvu algtegurite hulk on teise arvu algtegurite hulga osahulgaks, siis teine arv on nende arvude VÜK.

Näide 1. Leiame arvude 8, 12 ja 15 VÜK.

$$A_8 \cup A_{12} \cup A_{15} = \{2, 2, 2\} \cup \{2, 2, 3\} \cup \{3, 5\} =$$

$$= \{2, 2, 2, 3, 5\}; \quad VÜK(8, 12, 15) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Näide 2. $VÜK(10, 11, 21)$?

$$A_{10} \cup A_{11} \cup A_{21} = \{2, 5\} \cup \{11\} \cup \{3, 7\} =$$

$$= \{2, 5, 11, 3, 7\};$$

$$VÜK(10, 11, 21) = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 = 2310.$$

Näide 3. $VÜK(72, 36, 18) = 72$.

103. Leia peast arvude väikseim ühiskordne (VÜK).

a) 8 ja 12

b) 3; 5 ja 11

12 ja 15

4; 10 ja 16

21 ja 14

5; 12 ja 18

33 ja 22

9; 15 ja 25

24 ja 100

7; 10 ja 21

104. Arvuta arvude VÜK.

a) 12; 18; 96 ja 144

b) 240; 810 ja 6300

14; 20; 28 ja 30

42; 56 ja 98

12; 28; 35 ja 40

54; 72 ja 126

12; 20; 36 ja 54

504; 686 ja 1890

18; 24; 32 ja 48

720; 945 ja 3969

105. Antud üksliikmete vähima ühiskordse leidmiseks leiame nende üksliikmete algtegurite hulkade ühendi ja arvutame selles ühendis leiduvate kõikide algtegurite korrutise; see korrutis ongi antud üksliikmete VÜK.

Näide. Üksliikmete $M = 40m^2n^3p$ ja $N = 84mnq^2$ VÜK leiame järgmiselt:

$$A_M \cup A_N = \{2, 2, 2, 5, m, m, n, n, n, p\} \cup \\ \cup \{2, 2, 3, 7, m, n, q, q\} = \\ = \{2, 2, 2, 5, 3, 7, m, m, n, n, n, p, q, q\};$$

$$VÜK(M, N) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7mmnnnpqq = \\ = 840m^2n^3pq^2.$$

Uhistegurita üksliikmete VÜK on nende korrutis. Näiteks $3a^2$ ja $5b$ VÜK on $15a^2b$.

Kui antud üksliikmetest üks jagub kõigi teiste üksliikmetega, siis on ta antud üksliikmete VÜK.

Näiteks üksliikmete $18a^2b$, $54a^2b^2x$ ja $9ab^2$ VÜK on $54a^2b^2x$, sest

$$54a^2b^2x : 18a^2b = 3bx,$$

$$54a^2b^2x : 9ab^2 = 6ax.$$

106. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

- | | | | |
|-----------|------------|-----------|--------------|
| 1) $a; 7$ | 2) $2y; y$ | 3) $a; b$ | 4) $ab; ac$ |
| $2a; 8$ | $10x; 5x$ | $2a; 2b$ | $ab; 5ac$ |
| $8a; 2$ | $12b; 4b$ | $2a; 5b$ | $4ab; 16ac$ |
| $12x; 16$ | $2a; 3a$ | $14a; 3b$ | $24ab; 6a$ |
| $51y; 34$ | $6b; 8b$ | $15a; 3b$ | $36ab; 48ac$ |

107. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

- | | | | |
|---------------|--------------|-----------------|---------------|
| 1) $abc; bcd$ | 2) $a^2; a$ | 3) $a^2b; a$ | 4) $a^3; b^3$ |
| $8abc; bcd$ | $a^2; 7a$ | $a^2b; 2a$ | $a^3; ab^3$ |
| $9abc; bc$ | $3a; 7a^2$ | $3a^2b; 6b$ | $a^3; a^2b^3$ |
| $8xyz; 3xy$ | $5a; 15a^2$ | $18a^2b; 54a^2$ | $a^2b; ab^2$ |
| $8xyz; 32xz$ | $28a^2; 35a$ | $45a^2b; 18b^2$ | $ab^2; a^3b$ |

108. Leia iga üksliikmete paari SÜT ja VÜK.

- | | | |
|--------------|-----------------|----------------------|
| 1) $6x; 3x$ | 2) $4np; 2pz$ | 3) $12a^4; 27a^6$ |
| $k^2; 7k$ | $6a^2b; 9b^2$ | $18x^2y^4; 12x^3y^5$ |
| $cv; v$ | $7t^2; 3t^2$ | $15a^2x^3; 35a^3x$ |
| $x^2y; xy^2$ | $12r; 18rp$ | $24x^3y^2; 30xy^4$ |
| $2m^2; 3mn$ | $7abc^2; 14abc$ | $16am^2n; 15am^3n^2$ |

ALGEBRALISE MURRU MÕISTE.

109. 75 cm³ õli kaalub 60 g. Arvuta, kui palju kaalub 1 cm³ seda õli.

110. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis? Arvuta auto kiirus, kui $m = 200$ ja a väärtuste hulk on $\{4, 5, 6, 8\}$.

111. Paberi paksuse määramiseks võeti pakk paberit, milles oli n lehte. Paki paksus oli p millimeetrit. Kui paks oli paber? Arvuta paberi paksus, kui $n \in \{50, 80, 100\}$ ja $p = 8$.

112. Laua mõõtmed on m meetrit ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

113. Ruudukujulise põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$, kui a on põranda pikkus meetrites?

114. Murdu, mille liikmetes esineb tähti, nimetatakse algebra-
liseks murruks.

Algebraalises murrus $\frac{a}{b}$ tähed a ja b võivad tähendada mis-
tahes arvusid, ainsaks erandiks on, et b ei või olla null. Miks?

Algebralisi murde ja täisarvade nimetatakse ratsionaalaval-
disteks. Need avaldised on koostatud arvudest (mis on kirjutatud
tähtede või numbrite abil) liitmise, lahutamise, korrutamise ja
jagamise teel.

115. Murdu $\frac{a}{b}$ võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. See-
tõttu $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

Iga arvu võib kirjutada murruna, näiteks $x = \frac{x}{1}$.

116. Kirjuta murruna järgmised arvud:
5; 0; a ; b ; a^2 ; a^2b ; $2a^3b$.

117. Arvuta murru väärtus, kui temas esinevate tähtede väärtused on antud.

1) $\frac{3a}{5b}$; $a = 15$; $b = 9$.

- 2) $\frac{6ab}{7c}$; $a = 14$; $b = 7$; $c = 12$.
- 3) $\frac{4a}{3bc}$; $a = 6$; $b = -2$; $c = 12$.
- 4) $\frac{ax^2}{5b}$; $a = 10$; $x = -2$; $b = 24$.
- 5) $\frac{a+b}{a-b}$; $a = 2,6$; $b = 2,4$.
- 6) $\frac{3a+2b}{2a-3b}$; $a = 5$; $b = 3$.

118. Millist väärtust ei või omada murru nimetajas esinev täht igas alljärgnevas murrus:

$$\frac{m}{n}; \frac{3}{n}; \frac{5}{1-x}; \frac{a}{x-2}; \frac{5}{2+a}; \frac{m}{x+3}?$$

119. Leia iga alljärgneva murru jaoks kaks niisugust muutuja x väärtust, mille korral murd on naturaalarv.

1) $\frac{18}{x+4}$; 2) $\frac{x-12}{10}$; 3) $\frac{20}{2x+5}$.

120. Missuguste muutuja x väärtuste korral on järgmised murrud võrdsed nulliga:

1) $\frac{3x}{x+1}$; 2) $\frac{x-2}{x}$; 3) $\frac{3x-9}{x+1}$; 4) $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-16}$?

121. Kirjuta algebraline murd, mille nimetajas esineb muutuja x ja millel pole arvu tähendust, kui

1) $x \in \{-1, 1\}$; 2) $x \in \{1, 2, 3\}$; 3) $x \in \{-1, 0, 1\}$.

MURRU PÕHIOMADUS.

122. Murd $\frac{a}{b}$ on arvude a ja b jagatis. Jagatise omadustest on teada, et jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat suurendada või vähendada üks ja sama arv korda. Sellest järeldub, et murru $\frac{a}{b}$ väärtus jääb endiseks, kui ta lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Miks ei või murru lugejat ja nimetajat korrutada nulliga? jagada nulliga?

123. Eelmisest ülesandest järeldub algebralise murru põhiomadus:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$$

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

124. Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse murru laiendamiseks. Arvu, millega murru laiendamisel lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse laiendajaks.

Laiendame näiteks 3-ga murdu $\frac{a}{5}$; saame

$$\frac{a}{5} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 5} = \frac{3a}{15}$$

125. Laienda

4-ga murdu $\frac{1}{2}$; 2-ga murdu $\frac{a}{b}$; 8-ga murdu $\frac{a}{3}$;

5-ga „ $\frac{1}{3}$; 7-ga „ $\frac{a}{2}$; 3-ga „ $\frac{x}{5}$;

6-ga „ $\frac{1}{4}$; 12-ga „ $\frac{3}{x}$; 4-ga „ $\frac{2x}{7}$;

3-ga „ $\frac{3}{4}$; 10-ga „ $\frac{2a}{3b}$; 3-ga „ $\frac{1}{2a}$;

8-ga „ $\frac{7}{8}$; 4-ga „ $\frac{5x}{6y}$; 4-ga „ $\frac{5}{6a}$.

126. Laienda

b -ga murdu $\frac{5}{9}$; 5-ga murdu $\frac{3a}{4c}$;

a -ga „ $\frac{8}{13}$; $3n$ -ga „ $\frac{12m}{7n}$;

c -ga „ $\frac{7}{13}$; $2n$ -ga „ $\frac{12m}{17n}$;

$3k$ -ga „ $\frac{7}{12}$; $5x$ -ga „ $\frac{24xy}{25z}$;

$10x$ -ga $\frac{2}{3}$; $3xy^2$ -ga „ $\frac{24xy}{25z}$.

127. Murru laiendamiseks antud nimetajani leiame esmalt laiendaja, mille saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga. Saadud jagatisega laiendame antud murdu.

Näiteid. 1) Laienda murd $\frac{2}{37}$ nimetajani 111.

$$111 : 37 = 3; \quad \frac{\overset{3}{2}}{37} = \frac{6}{111}$$

2) Laienda murd $\frac{2m}{13n}$ nimetajani $52m^2n$.

$$52m^2n : 13n = 4m^2; \quad \frac{\overset{4m^2}{2m}}{13n} = \frac{8m^3}{52m^2n}$$

Kui võimalik, siis laiendaja leitakse peast.

Mis on laiendaja algtegurite hulk antud murru nimetaja algtegurite hulga ja laiendamisel saadud murru nimetaja algtegurite hulga suhtes?

128. Laienda murd

$\frac{3a}{4b}$	nimetajani $20b$;	$\frac{a}{n}$	nimetajani bn^2
$\frac{5m}{4n}$	” $24n$;	$\frac{3}{4}$	” 259 ;
$\frac{14x}{45y}$	” $180xy^2$;	$\frac{b}{x}$	” $2ax$;
$\frac{a}{b}$	” $4a^2b^2$;	$\frac{a}{4b}$	” $12ab^2$;
$\frac{12}{13}$	” 169 ;	$\frac{3m^2n}{4xy}$	$12m^2xy$.

MURRU TAANDAMINE.

129. Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse murru taandamiseks.

$$\frac{\overset{3}{12}abc}{\underset{2}{8}abc} = \frac{3}{2c}; \quad \frac{\overset{1}{4}m^2n}{\underset{2}{8}m^2n} = \frac{1}{2n}$$

130. Missugust murdu nimetatakse taandumatuks? Millega peab murdu taandama, et saada taandumatu murd?

131. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{16}{40}$	2) $\frac{12}{64}$	3) $\frac{14}{35}$	4) $\frac{24}{66}$	5) $\frac{28}{72}$	6) $\frac{21}{63}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{27}{72}$
$\frac{40}{88}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{35}{63}$	$\frac{88}{121}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{24}{70}$
$\frac{27}{63}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{39}{91}$	$\frac{60}{84}$	$\frac{42}{72}$	$\frac{84}{220}$
$\frac{57}{243}$	$\frac{115}{320}$	$\frac{117}{130}$	$\frac{132}{143}$	$\frac{112}{176}$	$\frac{308}{392}$

7) $\frac{2 \cdot 6}{42}$	8) $\frac{-12}{6 \cdot 5}$	9) $\frac{72 \cdot 6}{-36}$	10) $\frac{3 \cdot 12}{18 \cdot 24}$
$\frac{3}{2 \cdot 3}$	$\frac{-8 \cdot 5}{12}$	$\frac{22}{-33 \cdot 9}$	$\frac{-15 \cdot 20}{45 \cdot 30}$
$\frac{4}{3 \cdot 8}$	$\frac{5 \cdot 16}{-32}$	$\frac{17 \cdot (-2)}{-51}$	$\frac{-3 \cdot 8 \cdot 36}{-2 \cdot 9 \cdot 48}$
$\frac{6}{3 \cdot 10}$	$\frac{3 \cdot (-12)}{40}$	$\frac{-36}{-5 \cdot (-24)}$	$\frac{-4 \cdot (-7) \cdot 15}{3 \cdot 7 \cdot 50}$
$\frac{3 \cdot 4}{9}$	$\frac{-36 \cdot 5}{-96}$	$\frac{-75 \cdot 3}{-50}$	$\frac{2 \cdot (-6) \cdot 32}{45 \cdot 5 \cdot (-6)}$

132. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{6a}{4}$	2) $\frac{12}{6a}$	3) $\frac{ab^2}{abc}$	4) $\frac{a^2b}{abc}$
$\frac{6}{2a}$	$\frac{5a}{10}$	$\frac{9ax}{15a^2}$	$\frac{8a^2}{12ax}$
$\frac{8b}{4a}$	$\frac{9a}{3b}$	$\frac{15ax^2}{35bx^3}$	$\frac{9ax^3}{6bx^2}$
$\frac{3a}{5a}$	$\frac{5c}{7c}$	$\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$	$\frac{18a^2b^3y}{24a^2b^3x}$
$\frac{b}{2b}$	$\frac{n}{3n}$	$\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$	$\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$

$$\begin{array}{r}
 5) \frac{15a^2}{35ab} \\
 \hline
 \frac{26ab^2}{65a^2b} \\
 \hline
 \frac{48a^2bc}{78abc^2} \\
 \hline
 \frac{33m^2nx}{48mnx} \\
 \hline
 \frac{74p^2q^4}{37npq^3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6) \frac{96m^2n^2}{72m^3n^3} \\
 \hline
 \frac{144mn^2p^3}{192m^2np} \\
 \hline
 \frac{169m^4n^3}{195m^2np^2} \\
 \hline
 \frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5} \\
 \hline
 \frac{105x^2z^2}{360x^3z}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7) \frac{ab \cdot 5ab}{10ab^2 \cdot 4b^2} \\
 \hline
 \frac{21x^3 \cdot 6y^3}{7xy \cdot 18xy} \\
 \hline
 \frac{38mp^2 \cdot 4n^2p}{26mn \cdot 7np} \\
 \hline
 \frac{32u^2 \cdot 49v^2}{56uv \cdot 28uv} \\
 \hline
 \frac{18x^2 \cdot 32y}{32x^2 \cdot 45y^3}
 \end{array}$$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

133. Milliseid murde nimetatakse isenimelisteks? Milliseid murde nimetatakse ühenimelisteks? Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui nimetajad on ühistegurita?

Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui üks nimetajaist jagub teistega?

Mis võetakse antud isenimeliste murdude ühiseks nimetajaks?

134. Teisenda ühenimelisteks murrud ja võrdle neid märkide $>$ ja $<$ abil.

$$\begin{array}{l}
 1) \frac{2}{3} \text{ ja } \frac{3}{5} \\
 \frac{5}{7} \text{ ja } \frac{4}{15} \\
 \frac{2}{7} \text{ ja } \frac{5}{8} \\
 \frac{1}{2} \text{ ja } \frac{7}{11} \\
 \frac{6}{11} \text{ ja } \frac{7}{12}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2) \frac{5}{7} \text{ ja } \frac{5}{21} \\
 \frac{3}{5} \text{ ja } \frac{7}{15} \\
 \frac{3}{5} \text{ ja } \frac{8}{45} \\
 \frac{3}{55} \text{ ja } \frac{10}{11} \\
 \frac{13}{144} \text{ ja } \frac{7}{12}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3) \frac{5}{26} \text{ ja } \frac{1}{51} \\
 \frac{11}{63} \text{ ja } \frac{13}{126} \\
 \frac{13}{54} \text{ ja } \frac{7}{81} \\
 \frac{1}{81} \text{ ja } \frac{49}{135} \\
 \frac{34}{35} \text{ ja } \frac{54}{55}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4) \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \text{ ja } \frac{5}{7} \\
 \frac{3}{5}, \frac{5}{7} \text{ ja } \frac{4}{15} \\
 \frac{23}{24}, \frac{7}{8} \text{ ja } \frac{59}{60}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5) \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11} \text{ ja } \frac{1}{2} \\
 \frac{6}{11}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13} \text{ ja } \frac{9}{14} \\
 \frac{11}{50}, \frac{23}{125}, \frac{29}{150} \text{ ja } \frac{34}{225}
 \end{array}$$

135. Näide. Teisenda murrud $\frac{a}{3b}$ ja $\frac{b}{4c}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Et antud murdude nimetajad on ühistegurita, siis ühiseks nimetajaks on antud nimetajate korrutis:

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Vastavad laiendajad on $4c$ ja $3b$.

Seega

$$\frac{a}{3b} = \frac{a \cdot 4c}{3b \cdot 4c} = \frac{4ac}{12bc};$$

$$\frac{b}{4c} = \frac{b \cdot 3b}{4c \cdot 3b} = \frac{3b^2}{12bc}.$$

136. Näide. Teisenda murrud

$$\frac{7c}{12abx}, \quad \frac{13x}{20ab^2} \quad \text{ja} \quad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algteguriteks, saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \quad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \quad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3 = 60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$

$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$

$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

137. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{b}$

2) $\frac{a}{3b}$

3) $\frac{a}{a^2}$

4) $\frac{p}{a^2}$

$\frac{c}{d}$

$\frac{c}{4d}$

$\frac{3}{b}$

$\frac{q}{2ab}$

5) $\frac{2a^2}{x}$	6) $\frac{4x}{a^2}$	7) $\frac{2m}{3a^3}$	8) $\frac{p}{4m^2n}$
$\frac{3b}{y}$	$\frac{3y}{2b^2}$	$\frac{n}{12a^2b}$	$\frac{3p^2}{2mn^3}$
$\frac{4c}{z}$	$\frac{5y}{4ab}$	$\frac{5n}{18ab^2}$	$\frac{5}{14m^3n^2}$
9) $\frac{x}{a}$	10) $2b$	11) $\frac{2p}{3m^2}$	12) $\frac{5b}{24a^2c^3}$
a^2	$\frac{a}{3x^2}$	$\frac{5p^2}{6m^2n^2}$	$5d$
$\frac{y}{3a^3b}$	$\frac{3ab}{5xy}$	$3mn$	$\frac{7a}{36c^2}$
13) $\frac{5}{a}$	14) x	15) 2	16) $\frac{1}{x}$
$\frac{4}{a^2}$	$\frac{1}{2a}$	9	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5x^2}$	$\frac{1}{x^3}$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

138. Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate summa ja nimetajaks on liidetavate nimetaja:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a + b + c}{n}$$

139. Liida murrud.

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

$\frac{4}{a} + \frac{5}{a}$

$\frac{-p}{q} + \frac{2p}{q}$

$\frac{8}{15} + \frac{2}{15}$

$\frac{3a}{k} + \frac{a}{k}$

$\frac{r}{10s} + \frac{1}{10s}$

$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$

$\frac{5u^3}{b} + \frac{u^3}{b}$

$\frac{-3u}{-5v} + \frac{2u}{5v}$

$\frac{4R}{9} + \frac{R}{9}$

$\frac{7}{2h} + \frac{k}{2h}$

$\frac{92a^2}{35y} + \frac{8ab}{35y}$

$\frac{p^2}{4} + \frac{3p^2}{4}$

$\frac{4m^2}{3n} + \frac{1}{3n}$

$\frac{a}{a^2} + \frac{1}{a^2}$

140. Murru $\frac{1}{2}$ vastandaruks on $-\frac{1}{2}$ ja murru $\frac{a}{b}$ vastandaruks $-\frac{a}{b}$.

Kirjuta järgmiste arvude vastandaruks:

$$-\frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5}; \quad -\frac{a}{b}; \quad -\frac{m}{4}; \quad -\frac{5}{n}.$$

141. 1) Teades, et murd $\frac{a}{b}$ tähendab arvu, mille korrutamisel nimetajaga b saadakse lugeja a , võime kirjutada:

$$\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot b = -\frac{a}{b} \cdot b = -a.$$

Avaldades siit esimese teguri, saame

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

Laiendades paremal seisvat murdu arvuga -1 , saame

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Seega

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru ees ja murru ühes liikmes.

2) Laiendades murdu $\frac{a}{b}$ arvuga -1 , saame

$$\frac{a}{b} = \frac{(-1) \cdot a}{(-1) \cdot b} = \frac{-a}{-b}, \text{ seega}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru mõlemas liikmes.

142. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4}; \quad -\frac{a}{2}; \quad -\frac{m}{n}; \quad -\frac{-3}{m}; \quad -\frac{a}{-2}.$$

143. Kirjuta järgnevad murrud miinuskärgita murru liikmete ees:

$$\frac{-2}{-5}; \quad \frac{-x}{2}; \quad \frac{a}{-b}; \quad \frac{5}{-n}; \quad \frac{n}{-3}.$$

144. Murru lahutamisel liidame lahutatava murru vastand-arvu.

Selgita järgmist sümbolites kirjutatud arutlust:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} &= \frac{a}{n} + \left(-\frac{b}{n}\right) + \left(-\frac{c}{n}\right) = \\ &= \frac{a}{n} + \frac{-b}{n} + \frac{-c}{n} = \frac{a + (-b) + (-c)}{n} = \frac{a - b - c}{n}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a - b - c}{n}}$$

145. Liida murrud ja kui võimalik, siis taanda tulemus.

1) $\frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{7}{15}$

2) $\frac{3}{10} - \frac{9}{10} + \frac{1}{10}$

$\frac{5}{18} + \frac{11}{18} - \frac{7}{18}$

$\frac{3}{28} + \frac{9}{28} - \frac{5}{28}$

$\frac{4}{9} - \frac{5}{9} + \frac{4}{9}$

$\frac{11}{12} - \frac{1}{12} - \frac{7}{12}$

3) $\frac{7a}{10} - \frac{3a}{10}$

4) $\frac{15x}{16y} - \frac{7x}{16y}$

$\frac{5g}{16} + \frac{3g}{16}$

$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$

$\frac{2m}{3n} + \frac{m}{3n}$

$\frac{2ab}{5x} + \frac{ab}{5x}$

146. Arvuta.

1) $\frac{a}{3b} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b}$

2) $\frac{2a + 5}{6} + \frac{3a + 2}{6}$

$\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{4c^2}{3}$

$\frac{4m + 8}{3} + \frac{2m - 8}{3}$

$\frac{a}{x} + \frac{3a}{x} + \frac{5a}{x}$

$\frac{7n + 12}{8} - \frac{3n + 12}{8}$

$\frac{10x}{9a} - \frac{5x}{9a} + \frac{x}{9a}$

$\frac{14x - 9}{10} - \frac{6x + 2}{10}$

$\frac{9}{10a^2} - \frac{3}{10a^2} - \frac{1}{10a^2}$

$\frac{m + n}{2} + \frac{m - n}{2}$

Näide.

$$\frac{16x-3}{7} - \frac{2x-3}{7} = \frac{16x-3-(2x-3)}{7} = \frac{16x-3-2x+3}{7} = \frac{14x}{7} = 2x.$$

147. Arvuta.

$$1) \quad \frac{m+n}{4p} - \frac{m-n}{4p} \\ \frac{24x-6y}{7} - \frac{10x-48y}{7} \\ \frac{7m+8n}{3m} - \frac{3m-5n}{3m} \\ \frac{20a-9}{6b} - \frac{8a-9}{6b} \\ \frac{7x+5}{2y} + \frac{7x-5}{2y}$$

$$2) \quad \frac{3a}{a+b} + \frac{5a}{a+b} + \frac{7a}{a+b} \\ \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{a-b} \\ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \\ \frac{a}{x} - \frac{b+c+d}{x} \\ \frac{2a+3b}{a-b} - \frac{a+4b}{a-b}$$

$$3) \quad \frac{4a+b}{8} + \frac{2a-b}{8} \\ \frac{a+b}{10} + \frac{a-b}{10} \\ \frac{a+y}{3m} + \frac{2a-y}{3m} \\ \frac{5c-3u}{6n^2} + \frac{7c+3u}{6n^2} \\ \frac{2r-t}{s^2} + \frac{t-r}{s^2}$$

$$4) \quad \frac{5a+b}{4} - \frac{a+b}{4} \\ \frac{c+nd}{2} - \frac{c-nd}{2} \\ \frac{6x-32}{2R^2} - \frac{4x-32}{2R^2} \\ \frac{58a^2-81}{27D^2} - \frac{58a^2}{27D^2} \\ \frac{19N-23}{8h^3} - \frac{1+19N}{8h^3}$$

148. Isenimeliste murdude algebralisel liitmisel

- 1) leiame nende murdude ühise nimetaja, võttes selleks antud nimetajate VÜK;
- 2) leiame igale antud murrule laiendaja, milleks jagame leitud VÜK iga nimetajaga;
- 3) laiendame iga antud murdu leitud laiendajaga;
- 4) arvutame saadud ühenimeliste murdude summa;
- 5) kui võimalik, siis koondame saadud murru lugejat;
- 6) kui võimalik, siis taandame saadud murdu.

Näiteid. 1) Leiame summa

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2}.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2} = \\
 & = \frac{2a+\overset{b}{b}}{2ab} - \frac{2a}{b^2} + \frac{2a}{b^2} = \\
 & = \frac{2ab+b^2}{2ab^2} - \frac{2a^2+2ab}{2ab^2} + \frac{2a^2}{2ab^2} = \\
 & = \frac{2ab+b^2-(2a^2+2ab)+2a^2}{2ab^2} = \\
 & = \frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2} = \\
 & = \frac{b^2}{2ab^2} = \frac{1}{2a}.
 \end{aligned}$$

1) Ohiseks nimetajaks on $2ab^2$.

2) Laiendajad on:
 $2ab^2 : 2ab = b$;
 $2ab^2 : b^2 = 2a$.

3) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga.

4) Liidame lugejad.

5) Koondame lugeja.

6) Taandame.

2) Arvuta summa $2a + \frac{b^3}{5c^2}$.

Lahendus. $2a + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{2a}{1} + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{10ac^2 + b^3}{5c^2}$.

149. Arvuta.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	3) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{3y}$	4) $1 + \frac{a}{3}$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$	$\frac{1}{5a} + \frac{1}{7b}$	$5 + \frac{b}{5}$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{x}$	$\frac{1}{4m} + \frac{1}{5n}$	$1 + \frac{z}{x}$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{b} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{8u}$	$4 + \frac{3}{x}$

5) $a + \frac{b}{c}$	6) $m + \frac{2m+3n}{2}$	7) $\frac{9}{25} - \frac{8}{45}$
$3 + \frac{a}{b}$	$4 + \frac{a+x}{4}$	$\frac{1-2x}{6} + \frac{1+x}{3}$
$ab - \frac{2}{d}$	$8 + \frac{a-x}{4}$	$\frac{2b}{15a} + \frac{b}{5a}$
$3a - \frac{a}{2}$	$2a + \frac{2a+3b}{2b}$	$\frac{x}{3a} - \frac{1}{3a^2}$

150. Arvuta.

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{1}{m} - \frac{1}{n} & 2) \frac{2}{3x} - \frac{3}{2y} & 3) 1 - \frac{a}{3} & 4) 5 - \frac{a+x}{3} \\
 \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \frac{4}{5a} - \frac{6}{7b} & 5 - \frac{b}{5} & 7 - \frac{a-x}{6} \\
 \frac{3}{a} - \frac{1}{2a} & \frac{a}{b} - \frac{c}{d} & 1 - \frac{2}{x} & 3m - \frac{4m+5n}{3} \\
 \frac{5}{a} - \frac{2}{3a} & \frac{1}{a} - \frac{2}{b} & 4 - \frac{3}{x} & 3a - \frac{8a+3c}{2b} \\
 \frac{y}{z} - \frac{z}{mx} & \frac{2}{b} - \frac{3}{ab} & 3 - \frac{2}{a} & 4 - \frac{2+a}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 5) a - b - \frac{a^2 - b^2}{a} & 6) a^2 - \frac{3b^3 + a^3}{a} & 7) 3a + 2b - \frac{2a^2 - b^2}{a} \\
 a + b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{a} & \frac{a^2 + b^2}{a + b} + a - b & \frac{x^2 + y^2}{x + y} + 3(x - y) \\
 1 + \frac{a}{1 - a} & \frac{a^2 + b^2}{a - b} - (a + b) & x^2 + xy + y^2 + \frac{y^3}{x - y} \\
 1 - \frac{a}{1 + a} & a^2 - ab + b^2 - \frac{b^3}{a + b} & \frac{n^3}{n^2 - 2n + 4} + n + 2
 \end{array}$$

151. Arvuta.

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{1}{4} + \frac{3}{8} & 2) \frac{a}{4} + \frac{a}{12} & 3) \frac{2m}{ar} - \frac{u}{r} & 4) \frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab} \\
 \frac{8}{15} + \frac{2}{5} & \frac{c}{3} - \frac{c}{6} & \frac{b}{a^2} + \frac{c}{a} & \frac{m}{x^2y} - \frac{n}{xy^2} \\
 \frac{5}{8} - \frac{1}{2} & \frac{1}{p} + \frac{1}{3p} & \frac{5u}{6a^2} - \frac{u}{3a} & \frac{3x}{4a^2b} + \frac{5y}{6ab^2} \\
 \frac{9}{10} - \frac{5}{4} & \frac{5}{4q} - \frac{3}{2q} & \frac{5}{a^2} - \frac{4}{a^2b^2} & \frac{5n}{6m^2} - \frac{7p}{6mn^2} \\
 \frac{5}{6} + \frac{7}{12} & \frac{1}{a} + \frac{2}{ab} & \frac{7}{4x^3} + \frac{3}{x^2} & \frac{3ab}{10c^2d} + \frac{2c}{15d^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 5) \frac{a+4}{2} + \frac{a+5}{3} & 6) \frac{am+bn}{ab} + \frac{am+cn}{ac} \\
 \frac{x+7}{4} + \frac{x-21}{12} & \frac{a^2-1}{2a} - \frac{a-1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x-1}{6} + \frac{x+4}{21} \\ \frac{p+2q}{3} - \frac{5p+16q}{24} \\ \frac{5a-7b}{14} - \frac{a-3b}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{m^2+n^2}{mn} + \frac{1-n}{m} \\ \frac{p^2+q^2}{pq} - \frac{p-1}{q} \\ \frac{1}{a} - \frac{b+1}{ab} \end{array}$$

152. Näide. Teisendame murru $\frac{a}{m-n}$ murruks nimetajaga $n-m$.

Seda saame teha kahel viisil (vt. ülesanne 141):

$$\frac{a}{m-n} = \frac{-a}{n-m} = -\frac{a}{n-m}.$$

153. Näide. Leiame summa

$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m}.$$

Saame

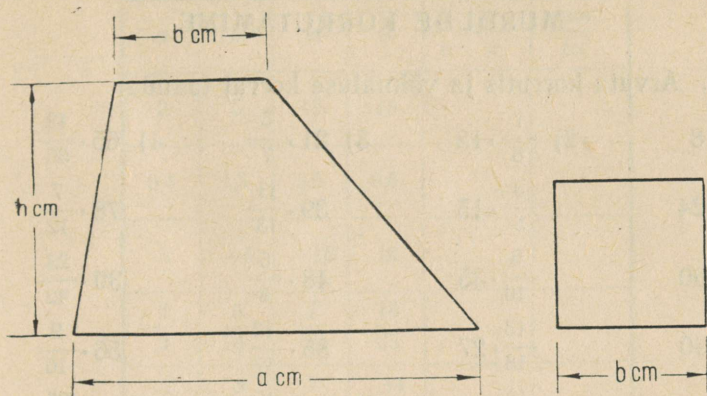
$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m} = \frac{a}{m-n} + \frac{-b}{m-n} = \frac{a-b}{m-n}.$$

154. Arvuta.

$$\begin{array}{l} 1) \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{-3} \\ \frac{2}{a} - \frac{1}{-a} \\ \frac{4}{3a} + \frac{1}{-3a} \\ \frac{1}{a+x} - \frac{1}{-a-x} \\ \frac{1}{a-x} + \frac{2}{x-a} \end{array} \qquad 2) \quad \frac{1}{a-1} - \frac{a}{1-a} \\ \frac{m^2}{m-n} - \frac{n^2}{n-m} \\ \frac{n}{n-2} + \frac{n}{2-n} \\ \frac{2a}{a-x} + \frac{a}{x-a} \\ \frac{a}{x-a} + \frac{x}{x-a}$$

155. Uhe kolmnurga pindala on $\frac{3h}{2}$ cm², teise pindala on $\frac{5h}{2}$ cm². Kui suur on nende kolmnurkade pindalade summa?

156. Arvuta joonisel 20 kujutatud kahe nelinurga pindalade vahe. Esimese nelinurga pindala leidmiseks tükelda ta rööpkülikuks ja kolmnurgaks. Teine nelinurk on ruut.



Joon. 20.

157. Prisma kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{6}$ cm² ja külgpindala $\frac{m^2}{3}$ cm². Kui suur on prisma täispindala?
158. Püramiidi põhja pindala on $\frac{a^2}{2}$ cm² ja külgpindala $\frac{am}{3}$ cm². Kui suur on püramiidi täispindala?
159. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?
160. Kooli esimese klassi õpilastest puudus ühel päeval $\frac{m}{n}$ protsenti; selles klassis puudus teisel päeval $\frac{2m}{3n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsendi võrra oli teisel päeval puudujaid vähem kui eelmisel päeval?

MURDUDE KORRUTAMINE.

161. Arvuta korrutis ja võimaluse korral taanda.

1) $\frac{3}{4} \cdot 8$	2) $\frac{7}{8} \cdot 12$	3) $21 \cdot \frac{5}{7}$	4) $65 \cdot \frac{19}{30}$
$\frac{5}{6} \cdot 24$	$\frac{3}{5} \cdot 15$	$39 \cdot \frac{11}{13}$	$78 \cdot \frac{7}{12}$
$\frac{7}{12} \cdot 60$	$\frac{9}{10} \cdot 35$	$48 \cdot \frac{5}{8}$	$30 \cdot \frac{23}{42}$
$\frac{11}{15} \cdot 90$	$\frac{13}{18} \cdot 27$	$85 \cdot \frac{12}{17}$	$56 \cdot \frac{9}{16}$
$\frac{9}{17} \cdot 102$	$\frac{11}{24} \cdot 32$	$95 \cdot \frac{15}{19}$	$63 \cdot \frac{25}{27}$

5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	6) $\frac{7}{12} \cdot \frac{24}{35}$	7) $1 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{14}$	8) $\frac{11}{12} \cdot 4 \frac{4}{5}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{55}$	$3 \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$	$\frac{5}{16} \cdot 7 \frac{1}{9}$
$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{11}{13} \cdot \frac{65}{33}$	$2 \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{22}$	$\frac{7}{10} \cdot 3 \frac{1}{3}$
$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}$	$\frac{17}{15} \cdot \frac{25}{6}$	$7 \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$	$\frac{8}{13} \cdot 3 \frac{1}{4}$
$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{18}{35} \cdot \frac{77}{24}$	$9 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$	$\frac{11}{17} \cdot 5 \frac{2}{3}$

9) $2 \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{1}{2}$	10) $1 \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{12}$	11) $-3 \cdot \frac{2}{3}$	12) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$
$4 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{1}{3}$	$2 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7}$	$(-6) \cdot \left(-12 \frac{1}{4}\right)$	$\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$
$7 \frac{3}{5} \cdot 1 \frac{6}{19}$	$3 \frac{3}{8} \cdot 1 \frac{1}{9} \cdot 5 \frac{1}{2}$	$\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{-6}$	$-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{8}$
$8 \frac{1}{4} \cdot 1 \frac{5}{11}$	$7 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25}$	$-4 \cdot \frac{5}{6}$	$-\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$
$10 \frac{4}{5} \cdot 4 \frac{4}{9}$	$5 \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{29} \cdot 4 \frac{3}{4}$	$2 \frac{1}{3} \cdot \frac{-3}{5}$	$-2 \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(-8 \frac{4}{5}\right)$

162. Kontrolli valemi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$$

õigsust, täites järgneva tabeli.

a	b	m	n	$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$	$\frac{am}{bn}$
3	5	15	18		
0,4	1,5	0,5	0,6		
3	-5	-15	18		
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{25}$		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{14}{25}$		

Murdude korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks on antud murdude nimetajate korrutis.

163. Esitades täisavaldise murruna, mille nimetajaks on 1, tuleta valemi $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$ põhjal valem $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$.

164. Arvuta korrutis ja kui võimalik, siis taanda.

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{5}{9} \cdot 21 & 2) 12 \cdot \frac{5}{9} & 3) \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} & 4) 1 \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{3}{7} a^2 n^2 \\
 \frac{3}{x} \cdot a & 6 \cdot \frac{a}{3b} & \frac{4}{7} \cdot \frac{a}{n^2} & 2 \frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{x} \cdot \frac{11x^2}{3c^2} \\
 \frac{c}{u^2} \cdot 2u & 7m \cdot \frac{5}{u^2} & \frac{4a}{b} \cdot \frac{3c}{8a} & \frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{21c} \cdot \frac{7c}{4a} \\
 \frac{h}{ab} \cdot a & 20c \cdot \frac{4ab}{5c} & \frac{ab}{6} \cdot \frac{3a}{4b} & \frac{8a^2}{21b^2} \cdot \frac{14b}{15c} \cdot \frac{c}{4a^2} \\
 \frac{4f}{g^2h} \cdot fgh & 9hx^2 \cdot \frac{a}{hx^2} & \frac{x^2 u^3}{7} \cdot \frac{14}{a^2 u} & 1 \frac{3}{4} N^2 u^2 \cdot \frac{8u}{15N^2}
 \end{array}$$

$$5) (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$nx \cdot \left(-\frac{x}{n}\right)$$

$$(-15m^3p) \cdot \left(-\frac{3x}{10m^2p}\right)$$

$$6) \frac{5a}{16b^2} \cdot (-32ab^2c)$$

$$\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$$

$$\left(-\frac{N}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{5N^3}$$

$$(-4at) \cdot \left(-\frac{5a^2u}{8t^2}\right)$$

$$\frac{-a^2x^3}{13} \cdot \frac{52c}{-ax}$$

$$\left(-\frac{3q\omega}{r}\right) \cdot q\omega r$$

$$\frac{h}{5u^2} \cdot \left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$$

165. Korruta kahel viisil:

a) teostades enne sulgudes näidatud tehted;

b) korrutades sulgavaldised, kasutades hulkliikmete korutamise eeskirja.

Võrdle tulemusi.

$$1) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(2 + \frac{3}{a}\right)$$

$$6) \left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$$

$$2) \left(2 + \frac{a}{3}\right) \left(3 - \frac{a}{2}\right)$$

$$7) \left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$$

$$3) \left(5 - \frac{3}{x}\right) \left(4 + \frac{2}{x}\right)$$

$$8) \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$$

$$4) \left(7 - \frac{2}{a}\right) \left(7 - \frac{2}{a}\right)$$

$$9) \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$$

$$5) \left(5 + \frac{a}{x}\right) \left(5 - \frac{a}{x}\right)$$

$$10) \left(\frac{2}{a} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{b}\right)$$

$$\text{Näide. } 1) \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right) = \frac{3x+2}{x} \cdot \frac{3x-2}{x} = \\ = \frac{(3x+2) \cdot (3x-2)}{x \cdot x} = \frac{9x^2-4}{x^2}.$$

$$2) \left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right) = 3^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \overset{x^2}{9} - \frac{4}{x^2} = \frac{9x^2-4}{x^2}.$$

166. Teosta tehted.

$$1) \frac{a+b}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$2) \left(\frac{x}{4a} - \frac{y}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{5a} + \frac{y}{5}\right)$$

$$\frac{m+4}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$\frac{a+b}{7} \cdot \frac{a-b}{14}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a-b)$$

$$\frac{m+n}{5} \cdot \frac{m-n}{16}$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \cdot (p+q)$$

$$\left(\frac{p}{6} - \frac{q}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{9} + \frac{q}{3}\right)$$

$$\frac{a+2}{3} \cdot \frac{a+3}{4}$$

$$\left(\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{4}\right)$$

MURRU ASTENDAMINE.

167. Et aste on võrdsete tegurite korrutis, siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Oldiselt

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}} = \frac{a^n}{b^n}$
--

Murru n -es aste on murd, mille lugejaks on antud murru lugeja n -es aste ja nimetajaks antud murru nimetaja n -es aste.

168. Astenda.

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2$
$\left(\frac{b}{3}\right)^2$
$\left(\frac{2x}{9}\right)^2$
$\left(-\frac{a}{2}\right)^2$
$\left(-\frac{a}{2}\right)^3$ | 2) $\left(-\frac{5a^2}{6b^3}\right)^2$
$\left(\frac{3x^2}{10y^2}\right)^3$
$\left(-\frac{y^3}{6x^2}\right)^3$
$\left(\frac{a^3}{3b^2}\right)^2$
$\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^3$ | 3) $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2$
$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2$
$\left(\frac{x+1}{4}\right)^3$
$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$
$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$ |
| 4) $\left(\frac{4a}{5}\right)^2$
$\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$
$\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$
$\left(\frac{9d}{10}\right)^3$
$\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$ | 5) $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$
$\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$
$\left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^3$
$\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$
$\left(-\frac{1}{2m^2x}\right)^3$ | 6) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$
$\left(\frac{a}{2} - 2\right)^2$
$\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2$
$\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b\right)^2$
$\left(\frac{a}{n} - 1\right)^3$ |
| | | 7) $\left(2 + \frac{a}{2}\right)^3$
$\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2}\right)^3$
$\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}n\right)^3$
$\left(m + \frac{3}{4}\right)^3$
$\left(\frac{2}{5} - \frac{2n}{3}\right)^3$ |

MURDUDE JAGAMINE.

169. Arvuta.

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1) $\frac{12}{35} : 6$
$\frac{14}{15} : 7$
$\frac{27}{48} : 9$
$\frac{36}{55} : 12$
$\frac{65}{72} : 13$ | 2) $\frac{3}{5} : 5$
$\frac{6}{7} : 3$
$\frac{3}{8} : 7$
$\frac{7}{16} : 2$
$\frac{5}{21} : 4$ | 3) $\frac{15}{16} : 10$
$\frac{28}{33} : 35$
$\frac{63}{50} : 14$
$\frac{52}{105} : 12$
$\frac{84}{95} : 60$ | 4) $28 : \frac{7}{10}$
$16 : \frac{8}{13}$
$20 : \frac{4}{5}$
$64 : \frac{16}{17}$
$80 : \frac{10}{11}$ |
| 5) $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$
$\frac{3}{5} : \frac{6}{11}$
$\frac{5}{16} : \frac{5}{7}$
$\frac{9}{14} : \frac{11}{35}$
$\frac{7}{12} : \frac{31}{24}$ | 6) $\frac{5}{24} : \frac{35}{12}$
$\frac{27}{55} : \frac{3}{22}$
$\frac{24}{65} : \frac{12}{91}$
$\frac{4}{9} : \frac{8}{27}$
$\frac{1}{3} : \frac{7}{30}$ | 7) $1 \frac{14}{15} : \frac{29}{45}$
$5 \frac{11}{14} : \frac{-18}{35}$
$3 \frac{5}{12} : \frac{5}{-16}$
$-9 \frac{3}{8} : \frac{-15}{24}$
$-2 \frac{3}{5} : \frac{13}{-15}$ | 8) $-2 \frac{3}{5} : 6 \frac{1}{2}$
$4 \frac{3}{8} : \left(-2 \frac{5}{8}\right)$
$5 \frac{4}{9} : \left(-4 \frac{2}{3}\right)$
$7 \frac{7}{8} : 5 \frac{1}{4}$
$-8 \frac{1}{4} : \left(-3 \frac{2}{3}\right)$ |

170. Murru $\frac{a}{b}$ pöördarv on $\frac{b}{a}$, sest

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Mis on murru $-\frac{a}{b}$ pöördarvuk?

Nimeta murdude

$$\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{m}{n}, -\frac{m}{n}, a, -b, \frac{1}{a}$$

pöördarvud.

171. Jagada murd $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{m}{n}$ tähendab leida niisugune arv, mille korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ saame jagatava $\frac{a}{b}$.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$$

Selleks on tarvis näidata, et võrduse parema poole korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ saame jagatava $\frac{a}{b}$.

Korrutame:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{an}{bm} \cdot \frac{m}{n} = \frac{anm}{bmn} = \frac{a}{b}.$$

Seega

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}}$$

Murru jagamisel murruga korrutame esimese murru teise murru pöördarvuga.

172. Esitades arvu a murruna ja kasutades murdude jagamise eeskirja, tõesta võrdused:

$$a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \quad \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}.$$

173. Arvuta.

1) $\frac{a}{5} : 5$

2) $2\frac{1}{4}a : 3$

3) $\frac{2a}{5} : a$

$\frac{2x}{5} : 4$

$6\frac{1}{2}b^2 : 2b$

$\frac{ab}{8} : b$

$-\frac{6m}{5} : 2$

$-3\frac{1}{3}xy : (-10)$

$3\frac{1}{5} : 8a$

$-\frac{3n}{8} : (-27)$

$4\frac{1}{6}x^2y : 50$

$\frac{12xy}{17} : 3x$

$\frac{8p}{9} : 16$

$1\frac{1}{2}m^3 : 15$

$\frac{42pq}{5} : 21p$

4) $\frac{x}{5} : 2\frac{1}{3}$

5) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{b}$

6) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b}$

$\frac{2a}{9} : 3\frac{1}{9}$

$\frac{x}{8} : \frac{x^2}{4}$

$\frac{a^2}{b^2} : \frac{b}{a}$

$\frac{a}{10} : 1\frac{2}{5}$

$\frac{3q^3}{4} : \frac{16q}{15}$

$\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{3}u : 6\frac{2}{3}$$

$$6\frac{2}{3}a^3 : 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{18p}{5} : \frac{27p^3}{35}$$

$$\frac{m^2}{2} : \frac{m^2}{10}$$

$$\frac{2x}{3y} : \frac{2y}{3x}$$

$$\frac{x}{y} : \frac{x}{y^2}$$

174. Arvuta.

$$1) \frac{b^2}{a} : 3a$$

$$\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$$

$$\frac{16b}{a^2} : 4b^3$$

$$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$$

$$\frac{2c^2}{5x} : (-14c^3x)$$

$$3) \frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$$

$$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$$

$$\frac{x^2}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$$

$$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$$

$$2) \left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$$

$$\left(\frac{-a}{b}\right) : 7ac^2$$

$$\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$$

$$\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$$

$$\left(\frac{8c^2n}{3f}\right) : (-4cf)$$

$$4) \frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$$

$$\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$$

$$\left(-\frac{156a^4b^3}{17m}\right) : \left(-\frac{12a^2b}{17m}\right)$$

$$\frac{72u^5}{v^2} : 84\frac{u^3}{v^2}$$

$$\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$$

175. Näide. Lihtsusta mitmekordset murdu

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}}$$

jagamise teel.

Lahendus.

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{25} : \frac{14}{15} = \frac{7 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{3}{10}$$

176. Näide. Lihtsusta mitmekordset murdu

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. Laiendades antud murdu cx -ga, saame

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}} = \frac{acx + bx^2}{1} = acx + bx^2.$$

177. Lihtsusta järgmised murrud.

1) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{9}}$

2) $\frac{1}{\frac{1}{a}}$

3) $\frac{x - \frac{x}{3}}{2x}$

4) $\frac{a - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{c}}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{2}{2}}$$

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{c}$$

$$\frac{2b + \frac{b}{a}}{b - \frac{a}{b}}$$

$$\frac{\frac{3x}{8y^2}}{\frac{5x^2}{12y}}$$

$$\frac{-\frac{b^2}{a}}{-\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{\frac{1}{c}}$$

$$\frac{\frac{2a}{1+a}}{1 - \frac{1}{a}}$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{5}}$$

$$\frac{-\frac{b^2}{a}}{b}$$

$$m + \frac{1}{4}$$

$$m - \frac{b}{a}$$

$$m + \frac{1}{6}$$

$$\frac{m}{a+b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

$$\frac{\frac{16b}{a^2}}{4b^3}$$

$$2 + \frac{1}{a}$$

$$x + \frac{y}{z}$$

$$3 + \frac{1}{a}$$

$$z + \frac{y}{x}$$

KORDAMISEKS.

178. Taanda murrud:

a) $\frac{-12a^3b^4c^5}{-36a^4b^4c^5}$;

b) $\frac{-72a^3b^4c^5x^6y^7}{-9a^3b^2c}$;

c) $\frac{0,75a^5x^2y}{0,25a^4xy}$.

179. Arvuta korrutis

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right)$$

kahel viisil ja võrdle tulemusi.

180. a) Kirjuta hulkliige

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

astmena.

b) Kirjuta hulkliige

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

astmena.

181. a) Tõesta, et võrdus

$$(-a + b)(-a - b) = (a + b)(a - b)$$

on õige.

b) Tõesta, et võrdus

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

on õige.

182. Tõesta, et võrdus

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$

on õige.

183. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a - b)^2$, et tulemus oleks võrdne avaldisega $(a + b)^2$?

184. Millise avaldise peab lahutama arvude a ja b summa kuubist, et tulemus oleks võrdne a ja b kuupide summaga?

185. Avalda x antud võrdest:

$$\text{a) } \frac{x}{m} = \frac{5n}{2m}; \quad \text{b) } \frac{ab}{cd} = \frac{a^2b^2}{x}$$

186. Teisenda murd

$$-\frac{-x^2 - x + 1}{2}$$

murruks, mille ees ei ole miinusmärki.

187. Teisenda murd $\frac{-a + b}{-x - y}$ niisuguseks murruks, milles lugeja ega nimetaja esimese liikme ees ei ole miinusmärki.

188. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

189. Toa pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja laius $\frac{b}{3}$ meetrit. Avalda toa põranda pindala.

190. Kolmnurga alus on $\frac{2a}{5}$ cm ja kõrgus $\frac{b}{2}$ cm. Leia pindala.

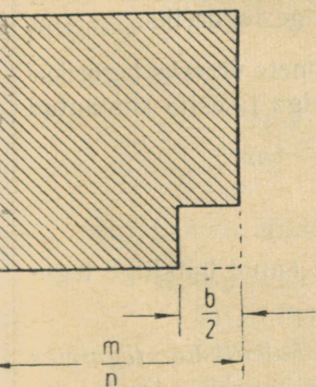
191. Kolmnurga küljed on $\frac{a}{2}$ cm, a cm ja $\frac{b-a}{14}$ cm. Leia kolmnurga übermõõt.

192. Rööpküliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{3}$ cm ja $\frac{2a-b}{3}$ cm. Leia rööpküliku übermõõt.

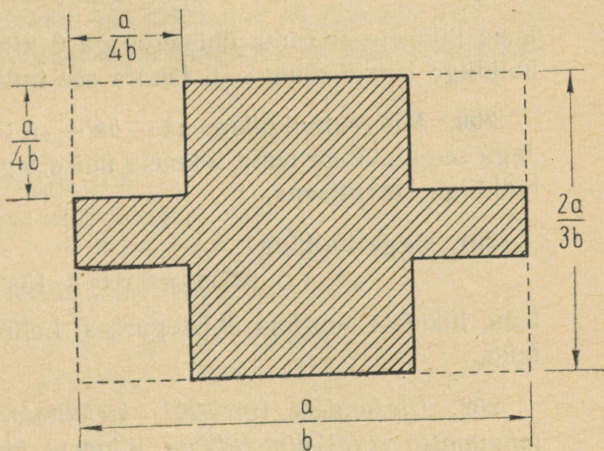
193. Plekist ruudu külje pikkus on a mm. Soojenedes paisus ruudu külg 1 mm võrra. Leia pindala, mille võrra plekist ruudu pindala suurenes soojenedes.

194. Vasest kuubi serv, mille pikkus on b mm, paisus kuumenemisel 1 mm võrra. Leia, mille võrra suurenes kuubi ruumala.

195. Arvuta joonisel 21 antud kujundi pindala.



Joon. 21.



Joon. 22.

196. Arvuta joonisel 22 antud kujundi pindala.

197. Hulga A elementideks on arvud 1, 3, 7, 9, 11 ja 15, hulga B elementideks arvud 3, 4, 7, 9, 10, 12 ja 15. Leia hulgad $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B)'_B$ ja $(A \cap B)'_A$.

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE ÜHISE TEGURI SULGUDE ETTE TOOMISEGA.

198. Jagades hulkliikme

$$am + bm - cm$$

arvuga m , saame

$$(am + bm - cm) : m = a + b - c.$$

Et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis

$$am + bm - cm = m(a + b - c).$$

Nii on hulkliige $am + bm - cm$ teisendatud korrutiseks $m(a + b - c)$. Selle kohta öeldakse, et hulkliige on lahutatud tegureiks.

Hulkliikme teisendamist korrutiseks nimetatakse hulkliikme tegureiks lahutamiseks.

199. Jaga hulkliige

$$12x^2 - 18x + 30$$

tema liikmete suurima ühisteguriga 6 ning kirjuta seejärel antud hulkliige korrutisena, s. t. lahuta see hulkliige tegureiks.

200. Mis on hulkliikme $ak - bk - ck$ liikmete ühiseks teguriks? Jaga see hulkliige tema liikmete ühise teguriga ja esita siis antud hulkliige korrutisena.

201. Jaga hulkliige

$$9a^5x^2 - 6a^3x^3 + 15a^2x^5$$

tema liikmete suurima ühisteguriga. Lahuta antud hulkliige tegureiks.

202. Ülesandeis 198–201 kirjeldatud hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse liikmete ühise teguri sulgude ette toomise võtteks.

Antud hulkliikme lahutamisel tegureiks liikmete ühise teguri sulgude ette toomise võttega toimime järgmiselt:

- 1) leiame hulkliikme liikmete SÜT ja kirjutame selle tegurina sulgude ette;
- 2) sulgudesse kirjutame teise teguri, milleks on antud hulkliikme ja sulgude ees seisva teguri jagatis.

Näide. $12a^2b - 18a^3b^2 - 24a^4b^3 = 6a^2b(2 - 3ab - 4a^2b^2)$,
 sest $12a^2b : 6a^2b = 2$,
 $-18a^3b^2 : 6a^2b = -3ab$,
 $-24a^4b^3 : 6a^2b = -4a^2b^2$.

203. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3a + 3b$	2) $6a - 3x$
$3a + 6$	$7x - 14a$
$9a - 6$	$15x + 3a$
$12 - 4a$	$16a - 24x$
$21 - 35a$	$72x - 9a$

3) $mn + mx$	4) $16r^3 - 24r^2$
$Q^2 - PQ$	$4u^3 - u^4$
$mv^2 - gv$	$pq^2 - 3p^2q$
$2st - 6at^2$	$m^3 + 5am^2$
$14N^2 - 7Nc$	$15h^2k^3 - 9h^2k$

204. Kui antud hulkliikme üks liikmetest on liikmete SÜT, siis saab tuua selle liikme sulgude ette. Sulgudes on sel korral üheks liikmeks $+1$ või -1 .

Näiteid.

$$3a + 3 = 3(a + 1)$$

$$2ab - a = a(2b - 1)$$

205. Lahuta alljärgnevad kaksliikmed tegureiks:

1) $6ax - 6a$	2) $x^2 + 2ax^2$
$5a^2 - 10ab$	$12a^2 - 4a^2x$
$6ax - 12a^2$	$10ax - 15bx$
$9x^2 - 18ax$	$12ax^2 - 10a^2x$
$3a^2b + 3b$	$a^2b^2 - ab$

206. Too -2 sulgude ette.

1) $-6a - 4b$

$-2x^2 + 10x - 12$

$-8a^2 - 6a - 2$

2) $-4a^2 + 2a - 2$

$-10 - 2x - 4x^2$

$-2 + 2a + 2a^2$

207. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $6ax - 9bx + 21cx$

$42a^2y - 35ay^2 + 7ay$

$9cz^4 - 21c^2z^3 - 15c^3z^2$

$-12ax^2 - 9ax - 6a$

$-5 + 10x - 15x^2$

2) $12ab - 18bc + 24bd$

$33a^2x - 22ax - 11x$

$77a^2b + 42ab^2 - 14ab$

$-27a^2 - 18a - 36$

$-63x^2 + 126x + 189$

208. Jagades hulkliikme

$$7u(3a - 2) + 5(3a - 2)$$

tema liikmete ühise teguriga $3a - 2$, saame

$$[7u(3a - 2) + 5(3a - 2)] : (3a - 2) = 7u + 5.$$

Siit järeldame, et

$$7u(3a - 2) + 5(3a - 2) = (3a - 2)(7u + 5).$$

Sellest näeme, et kui antud hulkliikme liikmetel on hulkliikmeline ühistegur, siis võib tuua selle sulgude ette, kirjutades ta omakorda sulgudesse.

209. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$a(3m + n) + b(3m + n)$

$5(x - 2y) + a(x - 2y)$

$(a + b)(2x + y) + a(2x + y)$

$m(u + 2) - n(u + 2)$

$2(3b - v) - 3v(3b - v)$

210. Lahutame hulkliikme

$$m(1 + a + a^2) - (1 + a + a^2)$$

tegureiks. Liikmete ühiseks teguriks on kolmliige $1 + a + a^2$. Kirjutame selle sulgude ette esimeseks teguriks; et ta on hulkliikmeline tegur, siis peame ta kirjutama sulgudesse.

Nii saame

$$m(1 + a + a^2) - (1 + a + a^2) = (1 + a + a^2)(m - 1),$$

sest

$$\frac{m(1 + a + a^2)}{1 + a + a^2} = m \quad \text{ja} \quad \frac{-(1 + a + a^2)}{1 + a + a^2} = -1.$$

211. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$$\begin{aligned} & a(1+x) - (1+x) \\ & a(1+x+x^2) - (1+x+x^2) \\ & x(a^2 - a + 1) - 2(a^2 - a + 1) \\ & m(5x-1) - (n+2)(5x-1) \\ & (3a+2b)(m+3c) - (2a+b)(m+3c) \end{aligned}$$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE VALEMITE KASUTAMISEGA.

212. Kui hulkliige on kahe arvu ruutude vahe, siis tema tegureiks lahutamisel saab kasutada valemit

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Näiteid.

a) $16a^2 - 81b^2 = (4a)^2 - (9b)^2 = (4a+9b)(4a-9b).$

b) $(2x+3y)^2 - (2x-3y)^2 =$
 $= [(2x+3y) + (2x-3y)] \cdot [(2x+3y) - (2x-3y)] =$
 $= 4x \cdot 6y = 24xy.$

213. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks:

1) $x^2 - 1$	2) $1 - x^2$	3) $4x^2 - 9y^2$
$y^2 - 4$	$a^2 - 9$	$0,16a^2 - 0,09b^2$
$25 - y^2$	$64u^2 - v^2$	$9a^2 - (2x-1)^2$
$49 - 9x^2$	$x^2 - \frac{9}{25}$	$(3a+b)^2 - (a-3b)^2$
$0,04 - c^2$	$a^2 - 0,49$	$(a+b)^2 - (a-b)^2$

214. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) $ax^2 - ay^2$	2) $2a^2 - 2b^2$	3) $8a^3 - 8ab^2$
$a^3 - ax^2$	$8 - 18x^2$	$5x - 20a^2x$
$3R^2 - 3r^2$	$2R^2 - 2r^2$	$4a^3m - am^3$
$27a^2 - 12b^2$	$50a^2 - 98b^2$	$3a^3 - 75ab^2$
$s^3t^2 - s$	$9a^3x^2 - a$	$50x^3 - 2a^2x$

Näide. $18a^3m^2 - 50a = 2a(9a^2m^2 - 25) =$
 $= 2a[(3am)^2 - 5^2] = 2a(3am+5)(3am-5).$

215. Valemist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

järeldame võrduse poolte vahetamise teel, et

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Samal viisil järeldame valemist

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

et

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Neist valemist näeme, et kui kolmliikme kaks liiget on kahe arvu ruudud ja üks liige on nende arvude kahekordne korrutis, siis selle kolmliikme saab kirjutada nende arvude summa või vahe ruuduna, s. t. selle kolmliikme saab lahutada teguriteks.

- a) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a + 3b)^2.$
 b) $36m^2 - 60mn + 25n^2 = (6m)^2 - 2 \cdot 6m \cdot 5n + (5n)^2 = (6m - 5n)^2.$

216. Lahuta järgmised hulkliikmed võimaluse korral tegureiks:

- | | | |
|-------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $x^2 + 4x + 4$ | 2) $25 - 10y + y^2$ | 3) $25 + 10x + x^2$ |
| $x^2 - 2x + 3$ | $1 + 2z + z^2$ | $a^2 - 12a + 36$ |
| $x^2 + 14x + 49$ | $4u + 8 + u^2$ | $9 + 18m + m^2$ |
| $x^2 - 8x + 16$ | $v^2 - 2v - 1$ | $b^2 - 4b + 8$ |
| $x^2 - 18x + 72$ | $t^2 - 16t + 64$ | $b^2 - 8b + 16$ |

- | | | |
|--|--|----------------------------|
| 4) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$ | 5) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ | 6) $1 - x + \frac{x^2}{4}$ |
| $4f^2 + 4f + 1$ | $16g^2 - 16g + 4$ | $r^2 + 2r + 1$ |
| $x^2 - 0,2x + 0,01$ | $h^2 - 6ah + 9a^2$ | $1 - 2n + n^2$ |
| $x^2 - 2,4x + 1,44$ | $c^2 - 4ck + 4k^2$ | $u^2 - 22u + 121$ |
| $x^2 - 0,6x - 0,09$ | $25m^2 - 30mn + 9n^2$ | $9a^2 + 30a + 25$ |

217. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------------|
| 1) $3a^2 - 6a + 3$ | 2) $6a^2 + 12a + 6$ | 3) $am^2 + 2am + a$ |
| $5a^2 + 10a + 5$ | $50y^2 + 20y + 2$ | $nx^2 - 2nx + n$ |
| $ax^2 + 4ax + 4a$ | $av^2 - 2av + a$ | $9u^2 - 18u + 9$ |
| $7x^2 - 14x + 7$ | $3m^2 - 48m + 192$ | $2t^2 + 4t + 2$ |
| $2x^2 - 16x + 32$ | $5 + 10z + 5z^2$ | $2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2$ |

218. Lahuta järgnevad kolmliikmed tegureiks:

$$1) \begin{aligned} & -a^2 - 8a - 16 \\ & -x^2 + 10x - 25 \\ & 2x - x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} & -x^2 - 4x - 4 \\ & 2ab - a^2 - b^2 \\ & -x^2 + 6x - 9 \end{aligned}$$

Näide. $10a - a^2 - 25 = -(-10a + a^2 + 25) =$
 $= -(a^2 - 10a + 25) = -(a - 5)^2.$

219. Valemeist

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ja $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

saame järeldada, et

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

ja $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$

Neid valemeid saab hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada siis, kui hulkliikmes on neli liiget, millest kaks on kahe arvu kuubid, üks on kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis ning üks on kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis.

Näide. $a^3 + 12a^2 + 48a + 64 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 4 + 3 \cdot a \cdot 4^2 + 4^3 =$
 $= (a + 4)^3.$

220. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks:

$$1) \begin{aligned} & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ & 8 - 12a + 6a^2 - a^3 \\ & c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ & -a^3 - 30a^2 - 300a - 1000 \\ & y^3 + 2y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{8}{27} \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} & 1 - 3a + 3a^2 - a^3 \\ & a^3 + 6a^2 + 12a + 8 \\ & 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27 \\ & 8a^3 - 36a + 54a - 27 \\ & x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$3) \begin{aligned} & x^3 + 18x^2 + 108x + 216 \\ & 1 + 0,03p + 0,0003p^2 + 0,000001p^3 \\ & 125 - 75z + 15z^2 - z^3 \\ & 8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3 \\ & 125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3 \end{aligned}$$

221. Valemeist

ja $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

saame järeldada, et

ja $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Neist valemeist näeme, et kui hulkliige on kahe arvu kuupide summa või kuupide vahe, siis saab seda hulkliiget lahutada tegureiks, kirjutades üheks teguriks nende arvude summa (või vahe) ja teiseks teguriks nende arvude vahe (või summa) mittetäieliku ruudu.

Näide. $8a^3 - 27b^3 = (2a)^3 - (3b)^3 =$
 $= (2a - 3b)[(2a)^2 + 2a \cdot 3b + (3b)^2] =$
 $= (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2).$

222. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) $a^3 + 125$
 $64 - x^3$

2) $250p^3 + 54q^3r^3$
 $x^3 - 0,008$

3) $3a^2 - 3$
 $2x^2 - 12x + 18$

$8x^3 + 1$

$\frac{1}{8} - 8a^3$

$4n^2 + 8n + 4$

$27a^3 - 8b^3$

$125u^3 + 216$

$5a^3 + 40$

$z^3 + 0,001$

$128a^3b^2 - 432b^2c^3$

$3y^3 + 6y^2 + 7y + \frac{8}{9}$

**HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE
LIIKMETE RÜHMITAMISE VÕTTEGA.**

223. Hulkliikme

$m(a + b) + n(a + b)$

tegureiks lahutamisel saame kasutada ühise teguri sulgude ette toomise võtet, sest hulkliikme liikmetel on ühiseks teguriks $(a + b)$. Tuues selle ühise teguri sulgude ette, saame

$m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n).$

Hulkliikme

$m(a + b) + n(a + b)$

võib anda ka kujul

$$ma + mb + na + nb.$$

Kui seda hulkliiget hakata lahutama tegureiks, siis näeme, et kõikidel tema liikmetel ei ole ühist tegurit, kuid esimesel kahel liikmel on ühiseks teguriks m , kahel viimasel aga n .

Rühmitades selle hulkliikme liikmeid nii, et igas rühmas oleks ühise teguriga liikmed, siis saame

$$(ma + mb) + (na + nb).$$

Kummaski rühmas saab nüüd tuua ühise teguri sulgude ette. Seega saame

$$(ma + mb) + (na + nb) = m(a + b) + n(a + b).$$

Sel viisil oleme saanud hulkliikme niisugusel kujul, et kõikidel liikmetel on ühine tegur $(a + b)$, mille võime tuua sulgude ette. Nii saame lõpuks:

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= (ma + mb) + (na + nb) = \\ &= m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n). \end{aligned}$$

Niisugust hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse liikmete rühmitamise võtteks.

Lahuta hulkliige

$$ma + mb + na + nb$$

tegureiks, rühmitades liikmeid nii, et esimeses rühmas oleks liikmed ühise teguriga a , teises rühmas liikmed ühise teguriga b . Võrdle tulemust eespool saadud tulemusega.

224. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks liikmete rühmitamise võttega:

1) $ax + ay + 2x + 2y$	2) $2ax - au + 4bx - 2bu$
$n^2 + nz + 5n + 5z$	$5Nc - 5Nd + 7c^2 - 7cd$
$u^2 + 7u + au + 7a$	$z^2 - hz + 11z - 11h$
$3a^2 + 2ab + 3ab + 2b^2$	$8x^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 4y^3$
$6x^2 - 13x + 6xy - 13y$	$ax^2 - bx^2 + ax - bx$

3) $t^2 - at - 3t + 3a$	4) $x^3 + x^2 + x + 1$
$8m^2 - 4mn - 6m + 3n$	$x^3 - 3x^2 - 2x + 6$
$16pq - 12q - 8pr + 6r$	$3x^3 - 7x^2 - 9x + 21$
$20ab - 4b - 5a + 1$	$x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
$5z^2 - 5hz + ah - az$	$5x^3 - 35x^2 + x - 7$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE MITME VÖTTEGA.

225. Hulkliikmete tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, kui saadud korrutises hulkliikmeline tegur on omakorda veel tegureiks lahutuv. Näiteks, kui hulkliige

$$3ax^2 - 3ay^2$$

on ühise teguri $3a$ sulgude ette toomisega teisendatud korrutiseks

$$3a(x^2 - y^2),$$

siis tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, sest teine tegur on omakorda veel tegureiks lahutuv:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Hulkliikme tegureiks lahutamine on lõpetatud siis, kui ta on teisendatud niisuguseks korrutiseks, mille ükski hulkliikmeline tegur ei ole enam tegureiks lahutuv.

Tegureiks ei ole lahutuvad näiteks järgmised hulkliikmed:

$$\begin{array}{lll} a + b; & a - b; & a^2 + ab + b^2; \\ a^2 - ab + b^2; & a - b^2; & 2x - 4y + 3xy. \end{array}$$

N ä i d e.

$$3ax^2 - 3ay^2 = 3a(x^2 - y^2) = 3a(x + y)(x - y).$$

Siin on tegureiks lahutamine lõpetatud, sest kumbagi hulkliikmelist tegurit ei saa enam tegureiks lahutada.

Hulkliikme tegureiks lahutamisel vaatame kõigepealt, kas kõigil liikmetel on ühine tegur; kui on, siis toome selle sulgude ette. Seejärel vaatame, kas sulgudes olevat avaldist saab veel tegureiks lahutada kas valemite kasutamise või liikmete rühmitamise võttega; kui see on võimalik, siis tuleb seda teha.

N ä i d e.

$$\begin{aligned} 6ax^2 - 12ax - 9bx^2 + 18bx &= 3x(2ax - 4a - 3bx + 6b) = \\ &= 3x[(2ax - 4a) - (3bx - 6b)] = \\ &= 3x[2a(x - 2) - 3b(x - 2)] = 3x[(x - 2)(2a - 3b)] = \\ &= 3x(x - 2)(2a - 3b). \end{aligned}$$

226. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3x^2 - 6x + 3$
 $6 - 24p^2q^2$

2) $7a^2b^2 - 7c^4$
 $245Q^2 - 140Q + 20$

$$5y^2 - 1445$$

$$11x^2 - 66x + 99$$

$$u^2 - 121$$

$$121a^2b^2 - 100c^2d^2$$

$$24x^2 + 72x + 54$$

$$4f^2 - \frac{9}{25}$$

3) $3a^3 - 12a$
 $4a^4 + 4ab^3$
 $x^2 - a^2 - 2ab - b^2$
 $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
 $5ax^3 - 40ax^2 + 80ax$

4) $a^4 - ab^3$
 $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$
 $a^2 - b^2 - a - b$
 $2a - 3b - 4a^2 + 9b^2$
 $3k^4 - 6k^3 + 3k^2$

HULKLIIKMETE SUURIMA ÜHISTEGURI LEIDMINE.

227. Antud hulkliikmete SÜT leidmiseks lahutame need hulkliikmed tegureiks ja moodustame siis kõikide ühiste tegurite korraldise.

Missuguses seoses on see ühiste tegurite hulk antud hulkliikmete tegurite hulkadega?

Näide. Leiame hulkliikmete

$$15h^2 - 15h,$$

$$9h^3 - 9h \text{ ja}$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h$$

suurima ühisteguri.

Lahendus.

$$15h^2 - 15h = 15h(h - 1) = 3 \cdot 5 \cdot h(h - 1);$$

$$9h^3 - 9h = 9h(h^2 - 1) = 3^2 \cdot h(h + 1)(h - 1);$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h = 24h(h^2 - 2h + 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot h(h - 1)^2.$$

$$SÜT = 3h(h - 1).$$

228. Leia iga järgmise avaldisepaari SÜT:

1) $8mn^2$ $12m^2np - 4mn^2p$	2) $a^2x + ax^2$ $a^2x - ax^2$	3) $6x + 2ax$ $6x - 2ax$
4) $15pq - 5p$ $10p^2 + 15p$	5) $7a^2 - 21ab$ $5a - 15b$	6) $5x - 10a$ $6ax - 6a^2$
7) $a^2 - 1$ $a + 1$	8) $5(a + x)^2$ $10(a^2 - x^2)$	9) $14a + 7x$ $42a + 21x$
10) $N^2 - 9$ $N^2 - 6N + 9$	11) a^3 $a^2x + ax^2$	12) $a^3 - 2a^2b$ $a^3x + a^2bx$

$$13) \begin{aligned} m^2n^2 - 1 \\ 5mn^2 + 5n \end{aligned}$$

$$14) \begin{aligned} u^3 - c^2u \\ u^3 - 2u^2c + uc^2 \end{aligned}$$

$$15) \begin{aligned} 3a^3 + 3x^3 \\ 3a^2 - 3x^2 \end{aligned}$$

229. Leia iga järgmise avaldisekolmiku SÜT:

$$1) \begin{aligned} x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 1 \\ 5x - 5 \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} 9 - x^2 \\ x^2 + 6x + 9 \\ 2x + 6 \end{aligned}$$

$$3) \begin{aligned} x^2 - 9 \\ 2ax - 6a \\ 3x^2 + 18x + 27 \end{aligned}$$

$$4) \begin{aligned} 25 - 36x^2 \\ 5 + 6x \\ 36x^2 - 60x + 25 \end{aligned}$$

$$5) \begin{aligned} 2a - 5 \\ 10 - 4a \\ 6a - 15 \end{aligned}$$

$$6) \begin{aligned} 12x - 8 \\ 9x^2 - 4 \\ 15x - 10 \end{aligned}$$

$$7) \begin{aligned} 4(a + 1)^2 \\ 6a^2 - 6 \\ 2a^2 + 4a + 2 \end{aligned}$$

$$8) \begin{aligned} a^2 - b^2 + a - b \\ 3a^2 - 6ab + 3b^2 \\ 5a^2 - 5b^2 \end{aligned}$$

$$9) \begin{aligned} a^3 - x^3 \\ a^2 - x^2 + a - x \\ 8a^2 - 8x^3 \end{aligned}$$

HULKLIIKMETE VÄHIMA ÜHISKORDSE LEIDMINE.

230. Antud hulkliikmete VÜK leidmiseks lahutame kõik need hulkliikmed tegureiks, misjärel moodustame korrutise, mille tegureiks on ühe hulkliikme kõik tegurid ning teiste hulkliikmete tegurite hulgast need, mis võetud hulkliikme tegurite hulgast ei esine.

Missuguses seoses on VÜK tegurite hulk antud hulkliikmete tegurite hulkadega?

Näide. Leiame hulkliikmete $4N^2x - 4N^2$, $6N(x^2 + 2x + 1)$ ja $20Nx^2 - 20N$ väikseima ühiskordse.

Lahendus.

$$\begin{aligned} 4N^2x - 4N^2 &= 4N^2(x - 1) = 2^2 \cdot N^2(x - 1); \\ 6N(x^2 + 2x + 1) &= 6N(x + 1)^2 = 2 \cdot 3 \cdot N(x + 1)^2; \\ 20Nx^2 - 20N &= 20N(x^2 - 1) = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{VÜK} &= 2^2 \cdot N^2(x - 1) \cdot 3 \cdot (x + 1)^2 \cdot 5 = \\ &= 60N^2(x - 1)(x + 1)^2. \end{aligned}$$

231. Leia järgmiste avaldisepaaride VÜK:

$$1) \begin{aligned} 5 \\ 5a - 5x \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} 12 \\ 12a + 5b \end{aligned}$$

$$3) \begin{aligned} m \\ m^2 + m \end{aligned}$$

$$4) \begin{aligned} Ny \\ N^2 - N \end{aligned}$$

$$5) \begin{aligned} 4a + 4n \\ 5a - 5n \end{aligned}$$

$$6) \begin{aligned} a^3 - aR^2 \\ 6a - 6R \end{aligned}$$

$$7) \frac{x^2 - u^2}{7x + 7u} \quad 8) \frac{1 - x^2}{(x - 1)(x + 2)} \quad 9) \frac{(v - 9)^2}{(18 - 2v)^2}$$

232. Leia iga järgmise kolme hulkliikme VÜK:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{(b - 7)^2}{b^2 - 7b} & 2) \frac{ax}{a^2 + ax} & 3) \frac{3x^2 - 48}{3x - 12} \\ & & \frac{5b}{ax + x^2} & \frac{(x + 4)^2}{(x + 4)^2} \\ 4) \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 9} & 5) \frac{3(n^2 - 1)}{(n - 1)(n^2 + 1)} & 6) \frac{2(x - 1)^2}{7(x + 1)^2} \\ & & & \frac{5x - 15}{n^3 + n} & \frac{14(x^2 - 1)}{14(x^2 - 1)} \\ 7) \frac{a(a + b) + a^2 - b^2}{4a^2 - 4ab + b^2} & 8) \frac{a^2 - 4}{a^3 + 8} & & & \\ & & & & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2a + 4} \\ 9) \frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} & 10) \frac{8ab + 16b^2}{a^2b + 4ab^2 + 4b^3} & & & \\ & & & & \frac{a^4 - 1}{a^3} \end{array}$$

HULKLIKMELISTE LIIKMETEGA MURRUD.

MURRU TAANDAMINE.

233. Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis sellise murru taandamiseks lahutame tema lugeja ja nimetaja tegureiks. Juhul kui lugejal ja nimetajal on ühiseid tegureid, siis nende ühiste teguritega taandame murdu.

Näiteid.

$$1. \text{ Taanda murd } \frac{3ab + 3b}{6b + 6ab}.$$

$$\text{Lahendus. } \frac{3ab + 3b}{6b + 6ab} = \frac{3b(a + 1)}{6b(1 + a)} = \frac{3b(a + 1)}{6b(a + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ Taanda murd } \frac{(x + 3)(x + 2) + 2(x - 3)}{x^2 + 14x + 49}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 2) + 2(x - 3) &= x^2 + 5x + 6 + 2x - 6 = \\ &= x^2 + 7x = x(x + 7); \\ x^2 + 14x + 49 &= (x + 7)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{(x + 3)(x + 2) + 2(x - 3)}{x^2 + 14x + 49} = \frac{x(x + 7)}{(x + 7)^2} = \frac{x}{x + 7}.$$

$$3. \text{ Taanda murd } \frac{2ab - 2b}{8b - 8ab}.$$

Lahendus.

$$\frac{2ab - 2b}{8b - 8ab} = \frac{2b(a - 1)}{8b(1 - a)} = \frac{a - 1}{4(1 - a)} = -\frac{1 - a}{4(1 - a)} = -\frac{1}{4}.$$

234. Taanda võimaluse korral iga järgmine murd.

$$1) \frac{9m + 18}{9m - 27} \quad 2) \frac{7h + 14}{7h - 35} \quad 3) \frac{3abc - 7abu}{3ac - 7au}$$

$$\frac{ab - ac}{ad + ac} \quad \frac{2e - 1}{2e + 3} \quad \frac{ns + nt}{sv + tv}$$

$$\frac{a^2 - a}{ab + a} \quad \frac{n + n^2}{1 + n} \quad \frac{a^2 - az}{ab - bz}$$

$$\frac{2x - 2}{2x + 7} \quad \frac{ar + a^2r^2}{a + ar} \quad \frac{Q^3 + Q^2}{Q^3 - Q}$$

$$\frac{a - ax}{n - nx} \quad \frac{6u^3 - 6u^2}{u - 1} \quad \frac{5z^3 - 6z}{15z^2 - 18}$$

$$4) \frac{4x^2 - 4x + 1}{10x - 5} \quad 5) \frac{ay^2 - 2ay + a}{y - 1} \quad 6) \frac{x - a}{a - x}$$

$$\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^3 - z} \quad \frac{u^3 - 2u^2 + u}{2u - 2} \quad \frac{5nz - 15}{3 - nz}$$

$$\frac{25 - 10v + v^2}{25a - av^2} \quad \frac{4x^2 - 1}{4x + 2} \quad \frac{15a^2 - 20ab}{21am - 28bm}$$

$$\frac{9p^2 - 16q^2}{6p + 8q} \quad \frac{4n^2 + 25}{16n^4 - 625} \quad \frac{1 - h^2}{ch^2 - c}$$

$$\frac{gh^2 - gf^2}{kh + kf} \quad \frac{1 - Q^4}{Q^2 + 1} \quad \frac{ab - bc}{ad - dc}$$

$$7) \frac{by - b}{1 - y} \quad 8) \frac{a^2 - 1}{1 + a} \quad 9) \frac{c^2 - 16}{4 - c}$$

$$\frac{x^2 + xy}{xy + y^2} \quad \frac{d^2u^2 - 9d^2}{du - 3d} \quad \frac{(\omega + 1)^2}{\omega^2 - 1}$$

$$\frac{2a - 5b}{15b - 6a} \quad \frac{(nz + 1)^3}{n^2z^2 - 1} \quad \frac{m^3n - mn^3}{mn^2 - m^2n}$$

$$\frac{abd^2 - abc}{abc - abd^2} \quad \frac{a - x}{a - x} \quad \frac{a - b}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} \quad \frac{6 - x}{x^2 - 36} \quad \frac{3h - k}{k^2 - 9h^2}$$

$$10) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{m^2 - 2mn + n^2}{n - m} \cdot \frac{u^2 - 2uv + v^2}{u^2 - v^2} \cdot \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3} \cdot \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$11) \frac{9 - p^2}{p + 3} \cdot \frac{-p - q}{p^2 + 2pq + q^2} \cdot \frac{9a^2 - 16b^2}{9a^2 - 24ab + 16b^2} \cdot \frac{x^2 - y^2 - (x + y)z}{x^2 - y^2 + xz + yz} \cdot \frac{m^4 - m}{m^4 - m^2}$$

235. Lihtsusta avaldist

$$\frac{2a^3 + 3a^2 - 20a - 30}{4a^2 - 9}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $a = 11$.

236. Lihtsusta avaldist

$$\frac{8x^2 + 16x + 32}{x^3 - 8}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $x = 3$.

237. Näita, et murru

$$\frac{n^2 - nx + n - x}{n^2 - nx - n + x}$$

väärtus ei sõltu muutuja x väärtusest.

238. Näita, et murru

$$\frac{m^2 + 2m - mx - 2x}{m^2 + 3m - mx - 3x}$$

väärtus ei sõltu muutuja x väärtusest.

MURRU LAIENDAMINE.

239. Laienda murd $\frac{11}{17}$ nimetajani 51. Millega pead antud murru nimetajat korrutama, et saada uueks nimetajaks 51? Kui suur on laiendaja?

240. Näide. Laienda murd $\frac{2a-b}{a+3b}$ nimetajani $a^2 + 6ab + 9b^2$
Lahendus.

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2.$$

Laiendaja on $a + 3b$.

$$\frac{2a-b}{a+3b} = \frac{(2a-b)(a+3b)}{(a+3b)(a+3b)} = \frac{2a^2 + 6ab - ab - 3b^2}{a^2 + 6ab + 9b^2} = \frac{2a^2 + 5ab - 3b^2}{a^2 + 6ab + 9b^2}.$$

241. Laienda järgmised murrud antud nimetajani:

- 1) $\frac{1}{a+b}$ nimetajani $a^2 - b^2$
- 2) $\frac{a-b}{a+b}$ „ $a^2 + 2ab + b^2$
- 3) $\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2 - 2xy + y^2$
- 4) $\frac{m+n}{m-n}$ „ $m^2 - n^2$
- 5) $\frac{a+b}{a-b}$ „ $a^3 - b^3$
- 6) $\frac{m-n}{m+n}$ „ $m^3 + n^3$
- 7) $\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $9a^2 - 6a + 1$
- 8) $\frac{2x-3}{5x+7}$ „ $25x^2 + 70x + 49$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

242. Tuleta meelde, kuidas teisendatakse murde ühenimelisteks.

Teisenda ühenimelisteks murrud

$$\frac{5}{54}, \quad \frac{7}{81} \quad \text{ja} \quad \frac{19}{135}.$$

243. Näide. Teisenda murrud

$$\frac{a-b}{a^2 + 2ab + b^2} \quad \text{ja} \quad \frac{2ab}{a^2 - b^2} \quad \text{ühenimelisteks.}$$

Lahendus. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\hline VÜK = (a + b)^2(a - b).$$

Esimese murru laiendaja on

$$(a + b)^2(a - b) : (a^2 + 2ab + b^2) = a - b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a + b)^2(a - b) : (a^2 - b^2) = a + b.$$

$$\frac{a - b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a - b)}{(a^2 + 2ab + b^2)(a - b)} = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2(a - b)};$$

$$\frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2ab(a + b)}{(a^2 - b^2)(a + b)} = \frac{2ab(a + b)}{(a + b)(a - b)(a + b)} = \frac{2ab(a + b)}{(a + b)^2(a - b)};$$

244. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

$$1) \frac{a}{a + b} \text{ ja } \frac{b}{a - b} \quad 4) \frac{2ab}{a^2 - b^2} \text{ ja } \frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$2) \frac{m}{m - n} \text{ ja } \frac{n}{m + n} \quad 5) \frac{b}{a(a + b)}, \frac{a}{b(a - b)} \text{ ja } \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$3) \frac{a - b}{a + b} \text{ ja } \frac{a + b}{a - b} \quad 6) \frac{c + d}{d(c - d)}, \frac{c - d}{d(c + d)} \text{ ja } \frac{cd}{c^2 - d^2}$$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

245. Kuidas toimub isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine?

Teosta tehted:

$$\frac{12}{35} + \frac{29}{42} - \frac{61}{70}.$$

246. Näide. Teosta tehted:

$$\frac{m - 2n}{m^3 + n^3} - \frac{m - n}{m^2n - mn^2 + n^3} - \frac{1}{mn + n^2}.$$

Lahendus.

1) Lahutame nimetajad tegureiks ja leiame nimetajate VÜK, mis on antud murdude ühiseks nimetajaks:

$$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$m^2n - mn^2 + n^3 = n(m^2 - mn + n^2)$$

$$mn + n^2 = n(m + n)$$

$$\text{VÜK} = (m + n)(m^2 - mn + n^2)n.$$

2) Jagades leitud VÜK iga murru nimetajaga, leiame iga murru laiendaja:

$$n, m + n \text{ ja } m^2 - mn + n^2.$$

3) Laiendame iga murdu vastava laiendajaga ja liidame laiendatud murrud:

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{m-2n}^n}{m^3+n^3} - \frac{\overbrace{m+n}^{m+n}}{m^2n-mn^2+n^3} - \frac{\overbrace{m^2-mn+n^2}^1}{mn+n^2} = \\ & = \frac{n(m-2n) - (m+n)(m-n) - (m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n} = \\ & = \frac{mn - 2n^2 - m^2 + n^2 - m^2 + mn - n^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}. \end{aligned}$$

4) Koondame lugeja, saame

$$\frac{2mn - 2n^2 - 2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}.$$

5) Kui võimalik, siis taandame. Taandamise võimaluse selgitamiseks lahutame lugeja tegureiks:

$$\begin{aligned} \frac{2mn - 2n^2 - 2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n} &= \frac{-2(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n} = \\ &= \frac{-2}{(m+n)n} = -\frac{2}{n(m+n)}. \end{aligned}$$

Vastus.

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3} - \frac{m+n}{m^2n-mn^2+n^3} - \frac{1}{mn+n^2} = -\frac{2}{n(m+n)}.$$

Aja ja ruumi kokkuhoidmiseks teostame punktides 1 kuni 5 esitatud teisendused edaspidi ühes võrduste reas, nagu on näidatud järgmises näites.

247. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2+a-2}{a^2-1}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2+a-2}{a^2-1} &= \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+1}{a-1} - \frac{1}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{2a+2}{(a+1)(a-1)} = \frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{a-1}. \end{aligned}$$

248. Teosta järgmised tehted:

$$1) \quad \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a-b}$$

$$\frac{2a+3b}{2a-3b} - \frac{2a-3b}{3b-2a}$$

$$\frac{7b-8a}{3a-2b} - \frac{b-4a}{2b-3a}$$

$$\frac{3a-4b}{a^2-b^2} - \frac{3b-2a}{b^2-a^2} + 1$$

$$\frac{2b^3-2a^3}{a^3-b^3} - \frac{1}{b-a} + 1$$

$$2) \quad \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{5x-6y}{x-y} - \frac{3x-2y}{y-x}$$

$$\frac{7a+8}{5a-5} + \frac{8+4a}{4-4a}$$

$$\frac{4}{x-y} + \frac{5x+5y}{2y^2-2x^2} - 2$$

$$\frac{2b^2-ab}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{ab-a^2-b^2} - 1$$

$$3) \quad \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{4-3a}{a-1} - \frac{4a-5}{1-a}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{x}{2x-c} + \frac{c}{2x}$$

$$\frac{x-y}{x+3y} - \frac{x+y}{3y}$$

$$4) \quad \frac{1}{2u-v} - \frac{1}{2u+v}$$

$$\frac{5}{3x-3} - \frac{3}{2x-2}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{4a-b}{a^2+ab}$$

$$\frac{1}{1-c} - \frac{1}{c+1}$$

$$\frac{7n}{5m^2-m} - \frac{2n}{10m-2}$$

$$5) \quad \frac{4}{x-1} + \frac{3}{1-x}$$

$$\frac{3}{2x-1} + \frac{7}{2x+1} - \frac{4-20x}{1-4x^2}$$

$$\frac{5}{5+3n} + \frac{3}{5-3n} - \frac{3n-35}{9n^2-25}$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{4a+x}{4a-x} + \frac{4a-x}{x-4a}$$

$$6) \quad \frac{2}{1-a^2} - \frac{2}{a-1}$$

$$\frac{2a+3x}{2a-3x} - \frac{2a-3x}{3x-2a}$$

$$\frac{x}{x-y} + \frac{3x}{x+y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{3-2x} + \frac{2x+15}{4x^2-9}$$

$$\frac{2x-19}{3x-4} - \frac{5x}{6x-8} - \frac{1}{2}$$

$$7) \quad \frac{2}{a+b} + \frac{3}{a-b} + \frac{4a+8b}{a^2-b^2}$$

$$\frac{2}{2a+3} + \frac{3}{3-2a} + \frac{2a+15}{4a^2-9}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b-2a} - \frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{2}{(a-1)(3-a)} + \frac{1}{(a-1)(a-2)} \\
 & \frac{n}{n^2-1} + \frac{n^2+n-1}{n^3-n^2+n-1} + \frac{n^2-n-1}{n^3+n^2+n+1} + \frac{2n^3}{n^4-1} \\
 8) & \frac{a-2b}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \frac{1}{ab+b^2} \\
 & \frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2} \\
 & \frac{2}{4+a} - \frac{a-3}{16-4a+a^2} - \frac{a^2-9a}{64+a^3} \\
 & \frac{1}{2m-3n} - \frac{2m+3n}{4m^2+6mn+9n^2} - \frac{6mn}{8m^3-27n^3} \\
 & \frac{a+1}{2a-2} + \frac{a^2+3}{2-2a^2} + \frac{2a-3}{a+1}
 \end{aligned}$$

249. Näide. Kirjuta avaldis

$$a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b}$$

murruna.

Lahendus.

$$a - b = \frac{a-b}{1} = \frac{b(a-b)}{b} = \frac{ab - b^2}{b};$$

seega

$$\begin{aligned}
 a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} &= \frac{ab - b^2}{b} - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} = \\
 &= \frac{ab - b^2 - a^2 + b^2 - ab}{b} = \frac{-a^2}{b} = -\frac{a^2}{b}.
 \end{aligned}$$

250. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

1) $1 + \frac{a}{1-d}$

4) $\frac{b}{b+x} + 1$

2) $1 + n + \frac{n^2}{1-n}$

5) $x - 3 + \frac{7}{x+3}$

3) $a - b - \frac{a^2 - b^2}{a}$

6) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} - 2 - \frac{x-1}{2-x}$

251. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutiline läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse v liitrit vett?

252. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõe-
voolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal k
meetri ujumiseks vastuvoolu rohkem kui sama vahemaa ujumi-
seks päri voolu?

Kui palju aega kulub ujujal k meetri edasi-tagasi ujumiseks?

MURDUDE KORRUTAMINE.

253. Korruta.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad 3 \cdot \frac{5}{6} & 2) \quad \frac{9}{16} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{28}{45} \\
 14 \cdot \frac{2}{7} & \frac{17}{18} \cdot \frac{27}{34} \cdot \frac{9}{16} \\
 3a \cdot \frac{b}{6a} & \left(\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2} \\
 \frac{a}{10b} \cdot 5b & \left(-\frac{2a}{3b}\right) \cdot \left(-\frac{6c}{4a}\right) \cdot 2b
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3) \quad \frac{113}{355} \cdot 1 \frac{2}{113} \\
 1 \frac{1}{3} \cdot 20 \frac{1}{4} \\
 \left(1 + \frac{a+b}{a-2b}\right) \cdot \left(2 - \frac{3a}{2a-b}\right) \\
 \left(1 - \frac{a-2b}{2a+b}\right) \cdot \left(2 - \frac{5b}{a+b}\right)
 \end{array}$$

254. Näide. Leia korrutis

$$(4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2+a}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned}
 (4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2+a} &= \frac{(4 - a^2) \cdot 3a}{2+a} = \frac{3a(2+a)(2-a)}{2+a} = \\
 &= 3a(2-a) = 6a - 3a^2.
 \end{aligned}$$

255. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\frac{x^2 - 4u^2}{x+u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x+2u}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 4u^2}{x+u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x+2u} &= \frac{(x^2 - 4u^2)(x^2 - u^2)}{(x+u)(x+2u)} = \\
 &= \frac{(x+2u)(x-2u)(x+u)(x-u)}{(x+u)(x+2u)} = (x-2u)(x-u).
 \end{aligned}$$

256. Korruta.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{y}{x^2 + xy} & (2x - 2a) \cdot \frac{c}{x - a} \\
 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a - 4b}\right) & \frac{m+n}{7m} \cdot \frac{5m}{2m+2n}
 \end{array}$$

$$2) \frac{a^2 + ab}{3bc} \cdot \frac{12c}{a^2 - b^2} - \frac{10b^2 - 10a^2}{a^2} \cdot \left(\frac{b^2 + a^2}{5a + 5b} \right)$$

$$(x + 1) \cdot \frac{3}{x^2 - 1} - \frac{4n + 1}{6 - 10n} \cdot (5n - 3)$$

$$3) \frac{m}{n - 1} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{m + mn} - \frac{x + 7u}{x - 7u} \cdot (x^2 - 49u^2) - \frac{x^2 - u^2}{2a + 2b} \cdot \frac{a + b}{3x + 3u} - \frac{x^2 - 1}{4} \cdot \frac{12}{x - 1} - \frac{u^2 - 4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u - 4v}$$

$$4) \frac{4ax - 4x}{a + 1} \cdot \frac{1}{4(a - 1)} - \frac{x + a}{x - a} \cdot \frac{3a}{x^2 - a^2} - \frac{9 - z^2}{3z} \cdot \frac{d}{3 + z} - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{5x}{x^2 - 1} - \frac{s^2 - 3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2 - 9}$$

$$5) \frac{5p(p - q)}{3r(p + q)} \cdot \frac{3(p^2 + q^2)}{5(p^2 - q^2)} - \frac{4r^2 + 8r}{3r + 9} \cdot \frac{15r + 45}{14r^2 + 28r} - \frac{3a + 3}{a^2 + 6a + 9} \cdot \frac{6a + 18}{a^2 - 1} - \left(\frac{a}{a - b} \cdot \frac{1}{c} - \frac{b - a}{c} \right) - \frac{ab + ac}{cd - bd} \cdot \frac{ab - ac}{bd + cd}$$

$$6) \frac{ad - ab}{bc + cd} \cdot \frac{ab + ad}{bc - cd} - \frac{a^2 + 4a + 4}{3a + 6} \cdot \frac{6a - 12}{a^2 - 4} - \frac{9 - 6b + b^2}{3 + b} \cdot \frac{9 + 6b + b^2}{3 - b} - \frac{7a^2 + 28a + 28}{21a^2 - 189} \cdot \frac{3a^2 - 18a + 27}{a^2 - 4} - \frac{3a^2 - 3}{2a^2 + 8a + 8} \cdot \frac{a^2 - 4}{6a^2 - 12a + 6}$$

MURDUDE JAGAMINE.

257. Leia jagatished.

$$1) \frac{39}{67} : \frac{52}{134}$$

$$2) \frac{22}{35} : \frac{33}{70}$$

$$3) \frac{a^2}{b^2} : \frac{5}{a}$$

$$4) -\frac{2x}{3y} : \left(-\frac{2y}{3x} \right)$$

$$26 : \frac{13}{15}$$

$$7 : \frac{14}{15}$$

$$\frac{6a^2}{25b^2} : \frac{3a}{5b}$$

$$\frac{8m^2n}{15k} : \frac{2mn^2}{3k}$$

$$\frac{15}{16} : 5$$

$$-\frac{5}{8} : 15$$

$$a^2b : \frac{ab^2}{n}$$

$$-m^2 : \left(-\frac{2m}{a^2} \right)$$

$$12 \frac{1}{2} : 7 \frac{1}{2}$$

$$13 \frac{1}{3} : 4 \frac{4}{9}$$

$$\frac{4ax}{b} : 8ax^2$$

$$\frac{8c^2n}{3a} : 4ac$$

258. Näide. *Leia jagatis*

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) \dots$$

Lahendus. *Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame*

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \frac{3a+2}{2(9a^2-4)} = \frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} = \frac{1}{2(3a-2)}.$$

259. Näide. *Leia jagatis*

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördarvuga, saame

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} = \frac{6(a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} = \frac{3(a+x)}{1} = 3(a+x).$$

260. *Leia järgmised jagatised:*

$$1) \frac{a+b}{c} : (a+b)$$

$$2) \frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$$

$$\frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$$

$$\frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$$

$$\frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{a-1} : (4a^2-1)$$

$$c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$$

$$(2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$$

$$(x+2y) : \left(\frac{x+2y}{4n} \right)$$

$$(a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$$

$$(14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$$

$$(a^3-n^3) : \frac{a^2+an+n^2}{a-n}$$

261. Näide. *Leia jagatis*

$$\frac{a^2-4}{x} : \frac{a+2}{x^2-x}$$

Lahendus. *Lahutades esimese murru lugeja tegureiks, saame:*

$$a^2-4 = (a+2)(a-2).$$

Lahutades teise murru nimetaja tegureiks, saame:

$$x^2-x = x(x-1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöördarouga ning taandades, saame:

$$\frac{a^2-4}{x} : \frac{a+2}{x^2-x} = \frac{(a+2)(a-2)x(x-1)}{x(a+2)} = (a-2)(x-1).$$

262. Leia järgmised jagatised:

$$1) \frac{x^2-ax}{4a} : \frac{x}{8a^2} \qquad 2) \frac{2x-4}{5a} : \frac{x-2}{15a^2}$$

$$\frac{a^2-x^2}{ax} : \frac{a+x}{a^2x^2} \qquad \frac{(m+n)^2}{4m-4n} : \frac{6m+6n}{m-n}$$

$$\frac{p^2+pq}{rx+sx} : \frac{p^3+p^2q}{rx^3+sx^3} \qquad \frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$$

$$\frac{105f^2}{gh-1} : \frac{84fg}{1-gh} \qquad \left(\frac{Q}{2} - \frac{2}{Q}\right) : \frac{Q+2}{4Q}$$

$$\left(R^2-2+\frac{1}{R^2}\right) : 3\left(R-\frac{1}{R}\right) \qquad \frac{2a}{x-2} : \frac{4}{2-x}$$

KÕIK TEHTED MURDUDEGA.

263. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2-4).$$

Lahendus. Sulgudes olevate murdude ühiseks nimetajaks on $(a-2)(a+2)$. Vastavad laiendajad on $a+2$ ja $a-2$. Niisiis

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overbrace{a+2}}{a-2} + \frac{\overbrace{a-2}}{a+2}\right) \cdot (a^2-4) &= \frac{(a+2)(a+2) + (a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} (a^2-4) = \\ &= \frac{(a^2+4a+4+a^2-4a+4)(a^2-4)}{a^2-4} = 2a^2+8. \end{aligned}$$

264. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a} \qquad 2) \left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$$

$$3) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right) : (x+3) \qquad 4) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$5) \left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}\right) \cdot (a^2-1) \qquad 6) \left(\frac{a-3}{a+3} + \frac{a+3}{a-3}\right) \cdot (a^2-9)$$

265. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\frac{2 + \frac{2}{a-2}}{2 - \frac{2}{a+2}}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{2 + \frac{2}{a-2}}{2 - \frac{2}{a+2}} &= \left(2 + \frac{2}{a-2}\right) : \left(2 - \frac{2}{a+2}\right) = \frac{2(a-2)+2}{a-2} : \frac{2(a+2)-2}{a+2} = \\ &= \frac{2a-4+2}{a-2} : \frac{2a+4-2}{a+2} = \frac{2a-2}{a-2} : \frac{2a+2}{a+2} = \frac{(2a-2)(a+2)}{(a-2)(2a+2)} = \\ &= \frac{2(a-1)(a+2)}{(a-2) \cdot 2(a+1)} = \frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+1)} = \frac{a^2+a-2}{a^2-a-2}. \end{aligned}$$

266. Näide. Lihtsusta mitmekordset murdu

$$\frac{1 - \frac{1}{a+1}}{1 + \frac{1}{a+1}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. Korrutades lugejat ja nimetajat avaldisega $a+1$, saame:

$$\frac{1 - \frac{1}{a+1}}{1 + \frac{1}{a+1}} = \frac{a+1-1}{a+1+1} = \frac{a}{a+2}.$$

267. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{x + \frac{x}{2}}{x - \frac{x}{2}}$

2) $\frac{a + \frac{1}{3}}{a - \frac{1}{2}}$

3) $\frac{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}$

4) $\frac{1 - \frac{b}{a}}{a + b}$

5) $\frac{1 - \frac{p}{q}}{\frac{q-p}{r}}$

6) $\frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$

7) $\frac{1+c}{1+\frac{1}{c}}$

8) $\frac{\frac{5m}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$

$$9) \frac{1 + \frac{1}{m-1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

$$10) \frac{a + \frac{5}{6}b}{a - \frac{4}{9}b} - 1$$

268. Teosta tehted.

$$1) \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$6) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$2) \left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} \right) : (a - b)$$

$$7) \frac{x^4 - y^4}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$$

$$3) \left(\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$8) \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{y} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{y} \right)$$

$$4) \left(\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2} \right) : (m + n)$$

$$9) \left(\frac{1-x}{1+x} - \frac{4x}{x^2-1} \right) \cdot \frac{1-x}{2x}$$

$$5) \left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a} \right) \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2}$$

$$10) \frac{a^2-1}{b-1} : \frac{1-a^4}{1-b^2}$$

269. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right] =$$

ja arvuta ta väärtus, kui $a = 2\frac{1}{2}$ ja $b = 3\frac{1}{2}$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right] = \\ & = \frac{(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{(a-b)^2 + ab}{ab} = \\ & = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{a^2 - 2ab + b^2 + ab}{ab} = \\ & = \frac{a^3 + b^3}{3ab} : \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} = \frac{(a^3 + b^3)ab}{3ab(a^2 - ab + b^2)} = \\ & = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{3(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a+b}{3}. \end{aligned}$$

Kui $a = 2\frac{1}{2}$ ja $b = 3\frac{1}{2}$, siis $\frac{a+b}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

270. Lihtsusta avaldis ja arvuta ta väärtus.

$$1) \left(1 + a - \frac{a^2+3}{a+1} \right) \cdot \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}a \right)^2 \right], \text{ kui } a = \frac{1}{2};$$

$$2) \left[\frac{a^2 + ax}{2x} : (a^2 - x^2) \right] \cdot \left[\frac{(a+x)^2}{4ax} - 1 \right], \text{ kui } a = 4 \text{ ja } x = -2;$$

$$3) \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right), \text{ kui } a = 1 \frac{1}{2};$$

$$4) \frac{a^3 + 27}{a^3 - 27} \cdot \frac{a-3}{a^2 - 3a + 9}, \text{ kui } a = 2;$$

$$5) \frac{a+2}{a^2} - \frac{a-3}{3a} - \frac{3a+2}{a^2} + \frac{5}{6}, \text{ kui } a = \frac{1}{4};$$

$$6) \frac{2a+3b^2}{4b^2} + \frac{6-15a}{20a} - \frac{a^3-2b^3}{2a^2b^2} - \frac{4}{5a}, \text{ kui } a = b = -1;$$

$$7) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right), \text{ kui } a = 5 \frac{1}{2} \text{ ja } b = 3 \frac{2}{3};$$

$$8) \left(3a - \frac{12a^2 - b^2}{4a - 2b} \right) : \frac{\frac{b}{6} - a}{\frac{1}{3}}, \text{ kui } a = -\frac{1}{2} \text{ ja } b = \frac{1}{3};$$

$$9) \left(\frac{x-4}{x+1} - \frac{x-5}{x^2-1} \right) : \frac{x-3}{2x^2-2}, \text{ kui } x = -2 \frac{1}{2};$$

$$10) \frac{2-x}{2x^2+4x} + \frac{2}{3x+6} - \frac{2}{3x^2+12x+12} - \frac{4}{3x(x+2)^2}, \text{ kui } x = \frac{1}{6};$$

$$11) \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m-2} + \frac{m}{4-m^2} - \frac{4}{m^3-4m}, \text{ kui } m = 0,1;$$

$$12) \left[x+2 : \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right] \cdot \frac{x+2}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}, \text{ kui } x = 2 \frac{1}{2};$$

$$13) \frac{a^3-8}{a+2} : \left[a+2 : \left(1 + \frac{a}{2} \right) \right] - \frac{a-2}{2}, \text{ kui } a = 1 \frac{1}{2};$$

$$14) \left(\frac{3a+2b}{4b} - 2 \right) : \left(1 \frac{5}{6}a - \frac{5b+3a}{3} \right), \text{ kui } b = 0,9;$$

$$15) \frac{x^4+x^3-x-1}{1-y^2} \cdot \frac{y^2-1}{x^2+x} \cdot \left(1 - \frac{x}{x-1} \right), \text{ kui } x = 1 \frac{2}{3};$$

$$16) \left(2m + \frac{m^2+n^2}{n} \right) : \left(m + \frac{n^2}{m+2n} \right) - \frac{m}{n} \left(n+1 + \frac{2n}{m} \right),$$

$$\text{kui } m = -\frac{1}{2};$$

$$17) \left[m - \frac{1}{m} : \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \right] \cdot \frac{1-m^2}{m^4+m}, \text{ kui } m = -\frac{2}{3};$$

$$18) \left(\frac{4n^2+2n+1}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{8n^3-1} + \frac{1}{2-4n} \right) : \frac{2n+1}{4n-2} - \frac{2}{(2n+1)^2}, \text{ kui } n = \frac{1}{2};$$

- 19) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} - \frac{a - b}{a + b}$, kui $a = 15$ ja $b = 14$;
- 20) $\frac{38(a^2 - 3a + 9)}{11a} : [95(a^3 + 27)]$, kui $a = \frac{2}{11}$;
- 21) $\frac{18(x^3 - 8)}{4(x + 2)} : [42(x^2 + 2x + 4)]$, kui $x = -2$;
- 22) $\frac{a - x}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) : \left[\frac{a^2 + x^2}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)\right]$, kui $a = 0,7$ ja $x = 5$;
- 23) $\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right) : \left(a^2 - a - 1 + \frac{1}{a}\right)$, kui $a = 24$.

KORDAMISEKS.

271. Näita, et

1) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

2) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

272. Lahuta kahel viisil tegureiks.

1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 3) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

2) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 4) $27 - 27a + 9a^2 - a^3$

273. Kontrolli, kas kumbki alljärgnev võrdus on õige:

a) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 - 3x + 1)^2$

b) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

274. Arvuta x võrdest:

1) $\frac{a + 1}{x} = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$

6) $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^3} = \frac{a - b}{x}$

2) $\frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{a + 1}{x}$

7) $\frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{x}{a - b}$

3) $\frac{x}{n - 1} = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}$

8) $\frac{3a - 6b}{x} = \frac{a - 2b}{4}$

4) $\frac{x}{a^2 - a + 1} = \frac{a + 1}{a^3 + 1}$

9) $\frac{nb}{x} = \frac{b(n + b)}{b + n}$

5) $\frac{n - 1}{n^3 - 1} = \frac{x}{n^2 + n + 1}$

10) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{a^3 - b^3}{x}$

275. Arvuta x võrdusest:

1) $(x + 1)(x - 1) - x(x - 1) = 4$ 3) $(x + 2)(x - 2) - (x - 1)^2 = 11$

2) $(x + 3)^2 - x^2 = 21$ 4) $(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = 20$

- 5) $(x + 3(x^2 - 3x + 9)) - (x - 1)^3 - 3x^2 = 1$
 6) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x + 1)^3 + x(3x + 4) = 1$
 7) $x(x - 2)^2 - (x + 1)(x^2 - x + 1) + 4x^2 = 15$

276. Lihtsusta avaldised.

- 1) $\frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2} + \frac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}$
 2) $\frac{\frac{a(a-b) - b(a+b)}{a} - \frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$
 3) $\left[\frac{(a-x)^2}{ax} + 1 \right] : \left[\frac{(a+x)^3}{3ax} - a - x \right]$
 4) $\frac{x^4 - x - 3x^3 + 3x^2}{x^3y - y^4} : \frac{x^4 + x^2 - 2x^3}{x^2y^2 + xy^3 + y^4}$
 5) $\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} : \frac{x^3y + xy^3 + 2x^2y^2}{x^4 - y^4}$
 6) $\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3}$
 7) $1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2}$
 8) $\left[\frac{1}{(b-a)^2} : \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{a+b} \right] : \frac{2a^2}{a^2 - b^2}$
 9) $\left(\frac{1}{b^2 - a^2} : \frac{a^2}{a^3 - b^3} + \frac{1}{a+b} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1+b} \right)$
 10) $\frac{2a^2b}{(a-b)^3} - \frac{b^2}{(a-b)^2} + \frac{a}{a-b}$

277. Taanda murrud.

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{a^5 - a^4 - a^3 + a^2}{a^6 - 2a^4 + a^2}$ | 5) $\frac{(x^2 - x - 7)^2 - 25}{(x^2 - x - 6)^2 - 36}$ |
| 2) $\frac{9a^2 - 16b^2}{9a^2 - 24ab + 16b^2}$ | 6) $\frac{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}{b^2 - 2bc + c^2 - a^2}$ |
| 3) $\frac{a^2 - 2ab + b^2 - am + bm}{a^2 - am - b^2 - bm}$ | 7) $\frac{a^2 - 2a + 1}{b - ab}$ |
| 4) $\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}{x^4 - 2x^3 + 8x - 16}$ | 8) $\frac{8a^3 + b^3}{2a + b}$ |

$$9) \frac{(a^2 + b^2)(y - x)^2}{(x^2 - y^2)(a^4 - b^4)}$$

$$10) \frac{3a^4c + 5a^3bc - 2a^3c^2}{2ab^2c^2 - 3a^2b^2c - 5ab^3c}$$

$$11) \frac{x^5 - 2x^3 + x}{x^5 - x^4 + x^2 - x}$$

$$12) \frac{x^5 + x^2y^2 + y^4}{x^6 - y^6}$$

278. Teosta tehted.

$$1) \frac{a^2 + b^2}{a + b} + 2(a - b)$$

$$2) \frac{x^2 + y^2}{x + y} + 3(x - y)$$

$$5) \frac{m^3 + n^3}{(m - n)^3} + \frac{mn}{(m - n)^2} - \frac{m + n}{m - n}$$

$$6) \frac{5}{4x + 4y} + \frac{3}{x - y} - \frac{13x + 7y}{4(x^2 - y^2)}$$

$$7) \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} - \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} + \frac{2y^3 - y^2 + x^2}{x^2 - y^2}$$

$$3) \frac{1 - a}{3b^2 - 12a^2} \cdot \frac{6a + 3b}{a^2 - 1}$$

$$4) \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 + 2a + 4} \cdot \frac{a^3 + 8}{a^3 - 8}$$

279. Et antud arvu korrutada 100-ga ja siis tulemusega liita mingi kahekohaline arv, selleks tuleb ainult antud arvu lõppu kirjutada see kahekohaline arv.

Näide.

$$100 \cdot 37 + 46 = 3746$$

Arvuta peast:

$$100 \cdot 58 + 12$$

$$100 \cdot 375 + 39$$

$$100 \cdot 8 + 34$$

280. Peast saab kergesti korrutada kahte kahekohalist arvu, mille algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10.

Olgu ühe arvu numbrid a ja b , teise numbrid a ja c , kusjuures $b + c = 10$.

$$\begin{aligned} \text{Korrutades need arvud, saame } & (10a + b) \cdot (10a + c) = \\ & = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 100a^2 + 10a(b + c) + bc = \\ & = 100a^2 + 10a \cdot 10 + bc = 100a^2 + 100a + bc = \\ & = 100a(a + 1) + bc. \end{aligned}$$

Seega

$$(10a + b) \cdot (10a + c) = 100 \cdot a(a + 1) + bc$$

Selleks et korrutada kahte kahekohalist arvu, mille algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10, tuleb nende arvude algusnumber korrutada 1 võrra suurema arvuga ning tulemusele kirjutada lõppu lõpunumbrite korrutis.

$$83 \cdot 87 = \underline{72} \underline{21}$$

Märkus. Kui antud arvude lõpunumbrid on 1 ja 9, siis tuleb algusnumbri ja 1 võrra suurendatud arvu korrutisele kirjutada juurde 09. Miks?

281. Korruta peast.

1) $72 \cdot 78$

2) $36 \cdot 34$

3) $49 \cdot 41$

$56 \cdot 54$

$23 \cdot 27$

$48 \cdot 42$

$71 \cdot 79$

$88 \cdot 82$

$94 \cdot 96$

$17 \cdot 13$

$22 \cdot 28$

$77 \cdot 73$

$57 \cdot 53$

$24 \cdot 26$

$38 \cdot 32$

282. 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmine taandub kahe võrdse arvu korrutamisele, mille algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10. Seega saame 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmiseks järgmise eeskirja:

et leida 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruutu, tuleb selle arvu esimene number korrutada 1 võrra suurema arvuga ja tulemusele kirjutada lõppu 25.

Näide.

$$35^2 = 1225.$$

283. Arvuta peast järgmised ruudud.

75^2

95^2

55^2

25^2

45^2

$8,5^2$

$6,5^2$

$7,5^2$

$3,5^2$

$5,5^2$

4. MATEMAATILISED LAUSED.

DEFINITSIOON.

284. Eraldame mingist hulgast tema ühe osahulga, näiteks naturaalarvude hulgast

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

algarvude hulga

$$G = \{2, 3, 5, 7, \dots\},$$

ja küsime, kuidas selle osahulga elemente iseloomustada antud hulga elementide kaudu.

Me teame, et algarv on naturaalarv, millel on kaks ja ainult kaks erinevat jagajat: arv 1 ja see arv ise.

Sellest nähtub, et arv üks ei ole algarv, sest tal pole kaht erinevat jagajat. Ka arv 4 ei ole algarv, sest temal on rohkem kui kaks erinevat jagajat. Küll on aga näiteks arv 7 algarv, sest tal on kaks ja ainult kaks erinevat jagajat.

Seega tuleb osahulga G elementide iseloomustamiseks öelda sellele osahulgale vastava üldisema hulga N elementide nimetus («naturaalarv») ja lisada sellele osahulga G elementide eritunnus («kaks ja ainult kaks erinevat jagajat»). Niiviisi koostatud lause annab täpse vastuse küsimusele «Mis on algarv?»

285. a) Mis on kordarv? Mis on paarisarv? Mis on kahe arvu vähim ühiskordne? Mida nimetatakse kahe arvu suurimaks ühisteguriks?

b) Mis on rööpkülik? Mida nimetatakse kolmnurga kõrguseks? Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Missugust kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, missugust nürinurkseks?

286. Lauset, mis selgitab mingi uue mõiste sisu, nimetatakse selle mõiste definitsiooniks.

Definitsioon on seega vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele «Mis see on?».

Definitsiooni andmine on defineerimine.

Näiteks lause «Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed» on definitsioon, sest selle lausega selgitatakse mõiste «rööpkülik» sisu.

Definitsiooni saab alati anda niisugusel kujul, et selles esineb sõna «nimetatakse». Näiteks rööpküliku definitsiooni saab anda ka kujul «Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed».

287. Anna järgmiste mõistete definitsioonid: teravnurk, sirg-nurk, võrdkülgne kolmnurk, kaarekraad, ring, võrdsed kujundid.

AKSIOOM JA TEOREEM.

288. Lauseid, mis väljendavad geomeetriliste kujundite (või arvude) omadusi, on kaht liiki: aksioomid ja teoreemid.

Teoreem on niisugune lause, mille õigsust saab põhjendada varem tundma õpitud lausete abil.

Teoreemi põhjendamist varem tundma õpitud lausete abil nimetatakse teoreemi tõestamiseks.

Aksioom ehk põhilause on niisugune lause, mida loetakse õigeks ilma tõestuseta.

Näiteks sirgjoone omadustest kasutame aksioomina lauset kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

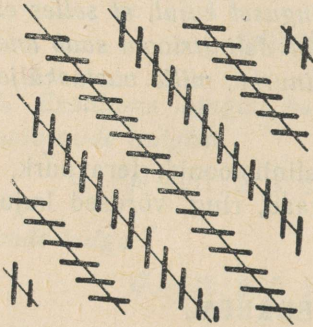
Seevastu lause

kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis

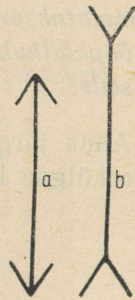
on teoreem, sest tema õigsust saab põhjendada eelmise aksioomi abil. Tõepoolest, kui kaks sirgjoont lõikuksid kahes punktis, siis neid punkte läbiks kaks sirgjoont. Kuid seda antud aksioomi järgi ei saa olla. Selle tõttu tuleb õigeks lugeda väide, et kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis.

289. Geomeetriliste kujundite omadusi õpitakse sageli tundma vaatluste ja mõõtmiste teel. Sel teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatlus võib anda ebaõigeid tulemusi, selles saame veenduda jooniste 23 kuni 26 vaatlemisel.

a) Joonisel 23 kaldu läbikriipsutatud sirged ei näi olevat paralleelsed. Kontrolli nende vastastikust asendit rööplükke abil (vt. joon. 39).

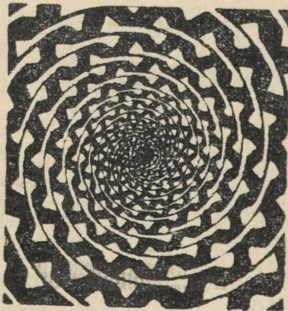


Joon. 23.

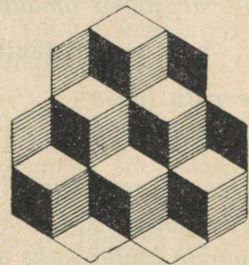


Joon. 24.

- b) Kumb lõikudest a ja b joonisel 24 on pikem?
 c) Kas joonis 25 kujutab spiraale või ühise keskpunktiga ringjooni? Kontrolli oma arvamist sirkli abil.
 d) Mitu kuupi on kujutatud joonisel 26? Pööra joonist 180° võrra ja vaata uuesti. Missuguses kuupide reas kuupide arv lehe pööramisel näib muutuvat ja kui palju?



Joon. 25.



Joon. 26.

290. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad kahe kolmnurga võrdsuse tingimusi.

291. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad võrdhaarse kolmnurga omadusi.

292. Tuleta meelde teoreem

- a) ristküliku pindalast;
- b) kolmnurga pindalast;
- c) korrapärase hulknurga pindalast.

293. Tuleta meelde teoreem, mis väljendab,

- a) milline arv jagub 9-ga;
- b) milline arv jagub 5-ga;
- c) milline arv jagub 2-ga.

TEOREEMI KOOSTIS.

294. Iga teoreemi saab sõnastada nii, et üks osa temast algab sõnaga «kui» ja teine osa sõnaga «siis».

Näiteks teoreemi «Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed» saab sõnastada ka nii: «Kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema alusnurgad on võrdsed.»

Seda osa teoreemist, mis algab sõnaga «kui», nimetatakse teoreemi eelduseks, ja seda osa, mis algab sõnaga «siis» — teoreemi väiteks.

Teoreemi eeldus ütleb, mis vaadeldava kujundi (või arvu) kohta on teada ehk mis tema kohta on antud, ja väide ütleb, mis eeldusest järeldub selle kujundi (või arvu) kohta. Näiteks ülalantud teoreemi eeldus ütleb, et vaadeldav kujund on võrdhaarne kolmnurk, ja väide ütleb, et siis kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

295. Leia iga alljärgneva teoreemi eeldus ja väide ning sõnasta iga teoreem nii, et temas esineksid sõnad «kui» ja «siis»:

- a) võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks;
- b) korrapärase kuusnurga külg on võrdne tema ümberringjoone raadiusega;
- c) nulliga lõppev arv jagub 10-ga.

296. Kui tähistada teoreemi eeldus mingi tähega, näiteks tähega p , ja väide tähega q , siis teoreemi saab skemaatiliselt kirjutada kujul

kui p , siis q .

Seda lauset võib kirjutada veel lühemalt kujul

$p \rightarrow q$,

kus märk \rightarrow on järeldamismärk. Seda kirjutust loetakse kas kujul «kui p , siis q » või kujul «lausest p järeldub lause q ».

Mida tähendab $p \rightarrow q$, kui p tähendab lauset «Arvu ristsumma jagub 3-ga» ja q lauset «Arv jagub 3-ga»?

297. Sõnasta teoreem, mille eeldus ja väide on allpool kõrvuti antud.

Eeldus.

Väide.

- | | |
|--|--|
| a) Arvu ristsumma jagub 9-ga. | Arv jagub 9-ga. |
| b) Kolmnurga kaks külge on võrdsed. | Kolmnurga kaks nurka on võrdsed. |
| c) Kolmnurk on täisnurkne. | Kolmnurga kahe teravnurga summa on täisnurk. |
| d) Hulknurk on korrapä-rane. | Hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega. |
| e) Kahest arvust a ja b suurem arv jagub väiksemaga. | Suurem arv on arvude a ja b väikseim ühiskordne. |
| f) Jagatav ja jagaja on ühesuguste märkidega. | Jagatis on positiivne. |

298. Sõnasta teoreem, mille eeldus on antud.

- Korrutise üks tegur võrdub nulliga.
- Ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega.
- Antud kaks suurust on võrdelised.
- Jagatav ja jagaja on erinevate märkidega.
- Jagatav on 0 ja jagaja on nullist erinev arv.

JÄRELDAMISHARJUTUSI.

299. Antud tõdedest uute tõdede tuletamist ainult mõtlemise teel nimetatakse **järeldamiseks**. Kui on näiteks teada, et lõik a ei ole suurem lõigust b ega võrdne lõiguga b , siis saame järeldada, et lõik a on väiksem lõigust b .

Mis järeldub lõikude a ja b kohta, kui on teada, et $a \neq b$?

300. Kuidas saab kolmnurki liigitada nende nurkade järgi? Mis järeldub kolmnurga kohta, kui on teada, et

- a) kolmnurk ei ole teravnurkne ega nürinurkne?
- b) kolmnurk ei ole nürinurkne?
- c) kolmnurk ei ole täisnurkne?

301. Mida saab öelda arvu kohta,

- a) mis ei ole negatiivne ega null?
- b) mis ei ole positiivne?
- c) mis ei ole positiivne ega negatiivne?

302. a) Mida saab öelda kahe suuruse kohta, kui nad on võrdsed ühe ja sama kolmanda suurusega?

b) On antud kaks võrdset suurust a ja b . Kummagi suurusega on liidetud üks ja sama suurus c . Mis saab öelda saadud summade $a + c$ ja $b + c$ kohta?

c) On antud võrratus $a < b$. Selle kummastki poolest lahutatakse üks ja sama arv c . Mis saab öelda vahede $a - c$ ja $b - c$ kohta?

303. Tee järeldus antud eeldustest ja anna eeldus ning järeldus ühe lausena.

- a) $a = b$ ja $b = c$
- b) $a < b$ ja $b < c$
- c) $a = b$ ja $b \neq 8$
- d) Antud murru lugeja on 3 korda väiksem kui nimetaja.
- e) Summa $a + b$ kumbki liidetav jagub 5-ga.

304. Otsusta, mida saab järeldada igast allpool antud lausest.

- a) Arv x ei ole negatiivne.
- b) Arv a ei ole suurem kui 12.

- c) VII klassis ei ole üle 30 ega alla 29 õpilase.
 d) Kumbki lõikudest a ja b ei ole teisest pikem.
 e) Arvu x absoluutväärtus on väiksem kui 1.

305. Tee järeldus igast järgnevast eelduste paarist:

- 1) $a = b$ 2) $a > b$ 3) $x = a + b$ 4) $s = a + b$
 $b < c$ $b > c$ $x = a + c$ $b = a$

306. Otsusta, kas järgnevad väited on õiged või mitte.

- a) Kui $x = 4$, siis $3x - 10 > 4$.
 b) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.
 c) Iga võrdhaarne kolmnurk on võrdkülgne.
 d) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.
 e) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 4-ga, siis summa jagub 8-ga.
 f) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.
 g) Kui koolis on 370 õpilast, siis seal leidub vähemalt kaks õpilast, kelle sünnipäev on ühel ja samal päeval.

307. Otsusta, kas järgmised järeldused on õiged või väärad:

- a) $m > n \rightarrow n < m$
 b) $xy = 0 \rightarrow x = 0$ või $y = 0$
 c) $ab > 0 \rightarrow a > 0$
 d) $(x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 2$ või $x = -2$
 e) $a^2 > 0 \rightarrow a > 0$

308. Märk \geq tähendab «on suurem või võrdne» ehk «ei ole väiksem» ja märk \leq vastavalt «on väiksem või võrdne» ehk «ei ole suurem».

Näiteks $5 \leq 7$ (sest 5 on nimelt väiksem kui 7) ja $8 \leq 8$ (sest 8 on nimelt võrdne 8-ga).

Otsusta, missugused järgmistest lausetest on õiged, missugused väärad:

- a) $5 < 5$; b) $5 \leq 5$; c) $5 \geq 5$; d) $3 \leq 3$; e) $3 \leq 4$.

309. Otsusta, kas järgmised järeldused on õiged või väärad:

- a) $x = y \rightarrow x \leq y$ c) $u < v \rightarrow u \leq v$
 b) $x \leq y$ ja $x \geq y \rightarrow x = y$ d) $a \leq b \rightarrow b > a$

TEOREEM JA PÖÖRDTEOREEM.

310. Olgu antud teoreem $p \rightarrow q$. Kui selles teoreemis eeldus ja väide ümber vahetada, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse antud teoreemi pöördteoreemiks. See pöördteoreem on: $q \rightarrow p$.

Näide 1. Teoreem: kui kolmnurgas kaks külge on võrdsed, siis on võrdsed ka kaks nurka.

Pöördteoreem: kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka kaks külge.

Paneme tähele, et mõlemad teoreemid on õiged.

Näide 2. Teoreem: kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.

Pöördteoreem: kui arv jagub 3-ga, siis arvu ristsumma jagub 9-ga.

Paneme tähele, et esimene teoreem on õige, kuid tema pöördteoreem on väär: näiteks arv 15 jagub 3-ga, kuid tema ristsumma 6 ei jagu 9-ga. Seega pöördteoreemi õigsus (ehk kehtivus) ei järeldu otsese teoreemi õigsusest, seda tuleb eraldi tõestada.

311. Moodusta järgmiste teoreemide pöördteoreemid ja otsusta, kas nad on õiged või väärad.

- Kui arv lõpeb 5-ga, siis see arv jagub 5-ga.
- Kui arvu ristsumma jagub 3-ga, siis arv jagub 3-ga.
- Kui arv on suurem kui 2, siis tema ruut on suurem kui 4.
- Kui kumbki kahest liidetavast jagub 7-ga, siis ka nende summa jagub 7-ga.
- $a = b \rightarrow a^2 = b^2$.
- $a < b \rightarrow a + 3 < b + 3$.
- Kui kolmnurk on täisnurkne, siis ta pole nürinurkne.

312. Kui antud (ehk otsene) teoreem on õige ja ka selle pöördteoreem on õige, s. t. kui

$$p \rightarrow q \text{ ja ka } q \rightarrow p,$$

siis öeldakse, et laused p ja q on samaväärsed. Näiteks laused «Kolmnurga kaks külge on võrdsed» ja «Kolmnurga kaks nurka on võrdsed» on samaväärsed, sest esimesest järeldub teine ja, ümberpöörduvalt, teisest esimene.

Kahe lause p ja q samaväärsust märgitakse kujul

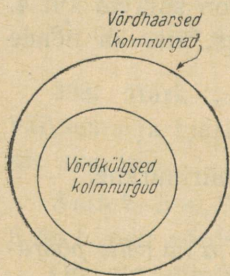
$$p \Leftrightarrow q.$$

Märki \Leftrightarrow loetakse «on samaväärne» ehk ka «siis ja ainult siis, kui». Näiteks «Arv jagub 9-ga \Leftrightarrow arvu ristsumma jagub 9-ga» tähendab, et «Arv jagub 9-ga siis ja ainult siis, kui arvu ristsumma jagub 9-ga».

313. Uuri, kas järgnevate lausete p ja q vahel kehtib seos $p \rightarrow q$ või $q \rightarrow p$ või kehtivad mõlemad seosed, s. t. $p \Leftrightarrow q$. Sõnasta kõik siit tulenevad õiged teoreemid.

- Lause p : x ja y on naturaalarvud; lause q : $x + y$ on naturaalarv.
- Lause p : x on naturaalarv; lause q : $x + 7$ on naturaalarv.
- Lause p : $x + y$ on paarisarv; lause q : x on paarisarv ja y on paarisarv.
- Lause p : $x + y$ jagub 5-ga; lause q : x jagub 5-ga ja y jagub 5-ga.
- Lause p : x ja y on ühistegurita arvud; lause q : $VÜK(x, y) = xy$.
- Lause p : $xy > 0$; lause q : $\frac{x}{y} > 0$.

314. Teoreemi «Kui kolmnurk on võrdkülgne, siis ta on võrdhaarne» saame sõnastada ka nii: «Iga võrdkülgne kolmnurk kuulub võrdhaarsete kolmnurkade hulka». Sama mõtet saame väljendada veel lausega (joon. 27). «Võrdkülgsete kolmnurkade hulk on võrdhaarsete kolmnurkade hulga osahulk.»



Joon. 27.

Sõnasta järgmised laused mõiste «hulk» ja «osahulk» abil. Tee hulkadevaheliste seoste kohta vastavad joonised.

- Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga.
- Kui antud arv on täisarv, siis ta on ratsionaalarv.
- Kui arv lõpeb 2-ga, siis on ta paarisarv.
- Kui kolmnurgad on võrdsed, siis ka nende pindalad on võrdsed.
- Kui kujund on rööpkülik, siis ta on nelinurk.
- Kui sirged ristuvad, siis nad ka lõikuvad.

315. Tähistame ülesandes 314 sõnastatud teoreemi eelduse «kolmnurk on võrdkülgne» tähega p ja võrdkülgsete kolmnurkade hulga sümboliga M_p . Edasi tähistame väite «kolmnurk on võrdhaarne» tähega q ja võrdhaarsete kolmnurkade hulga sümboliga M_q . Nüüd saame kirjutada teoreemi esialgse sõnastuse lühidalt kujul $p \rightarrow q$ ja viimase sõnastuse kujul $M_p \subset M_q$. Need sõnastused on aga samaväärsed, sest esimesest järeldub teine ja ümberpöörduvalt. Tähendab:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow M_p \subset M_q.$$

Nii näeme, et teoreem $p \rightarrow q$ tähendab ikka seda, et eelduses vaadeldavate objektide hulk on väites kõne all olevate objektide hulga osahulk: $M_p \subset M_q$.

316. Oletame, et koos vaadeldava teoreemiga kehtib ka selle pöördteoreem, s. t. $p \rightarrow q$ ja $q \rightarrow p$, ehk lühemalt

$$p \Leftrightarrow q.$$

Olgu eelduses kõne all olevate objektide hulk endiselt M_p ja väites kõne all olevate objektide hulk M_q . Otsene teoreem ütleb siis, et $M_p \subset M_q$, ja pöördteoreem, et $M_q \subset M_p$. Sellest näeme, et need hulgad on võrdsed:

$$M_p = M_q.$$

Need hulgad koosnevad samadest objektidest, kuid neid on iseloomustatud kahel viisil.

Näiteid. 1) Kahe nulliga lõppev arv \Leftrightarrow 100-ga jaguv arv.

2) Kahe võrdse küljega kolmnurk \Leftrightarrow kahe võrdse nurgaga kolmnurk.

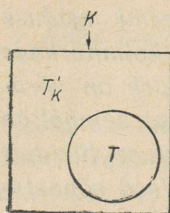
3) $(x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ või $x = 2$.

Koosta neist samaväärsetest lausetest teoreem ja selle pöördteoreem. Too veel selliseid näiteid.

TEOREEM JA VASTANDTEOREEM.

317. Kui lauses «Kolmnurk on täisnurkne» asendame sõna «on» sõnadega «ei ole», siis saame lause «Kolmnurk ei ole täisnurkne», mida nimetatakse antud lause eituseks.

Märgime vaadeldava kolmnurga tähega x , kõigi mõeldavate



kolmnurkade hulga tähega K ja täisnurksete kolmnurkade hulga tähega T . Siis mittetäisnurksete kolmnurkade hulk tuleb tähistada sümboliga T'_K , sest nimetatud hulk täiendab täisnurksete kolmnurkade hulga T kõigi kolmnurkade hulgaks K . Need hulgad on seotud järgmiselt (joon. 28).

Joon. 28.

$$T \cup T'_K = K \text{ ja } T \cap T'_K = \emptyset.$$

Nüüd saame antud lauset kirjutada lühidalt kujul

$$x \in T,$$

selle eitust aga kujul $x \notin T$ ehk

$$x \in T'_K.$$

Moodusta järgmiste lausete eitused.

- Antud arv jagub 7-ga.
- Antud arv on algarv.
- Antud kolmnurk ei ole täisnurkne.
- Antud avaldis ei ole teguriteks lahutuv.
- Kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

Kirjelda, kuidas neist lausetest said nende eitused.

318. Võta mingi arv või kujund, ütle selle kohta mingi lause ja moodusta viimase eituse. Kumb neist lausetest on õige, kumb väär? Kas lause ja tema eituse saavad mõlemad olla korraga õiged või mõlemad väärad?

Näide. Vaatleme ruutu. Võtame lause «Ruudu diagonaal võrdub ruudu küljega». Moodustame selle lause eituse «Ruudu diagonaal ei võrdu ruudu küljega». Lause on väär, tema eituse on õige.

319. Lause p eituse tähistame sümboliga \bar{p} (loeme: mitte- p). Näiteks kui p tähendab lauset «Antud arv on paarisarv», siis \bar{p} tähendab lauset «Antud arv ei ole paarisarv». Kui viimast lauset omakorda eitada, siis saame lause «Ei ole õige, et antud arv ei ole paarisarv». Kuid lihtsamalt on see ju lause «Antud arv on paarisarv». Seega kahekordne eituse annab lähtelause: $\bar{\bar{p}} = p$.

Mis on \bar{p} ja mis $\bar{\bar{p}}$, kui p tähendab järgmist lauset:

- Pärnu on Eesti NSV suurim suvituslinn?
- Soos on tänavu palju marju?
- Ei ole õige, et rändlinnud on juba lahkunud?

d) Ei ole õige, et hüpoteenus ei ole täisnurkse kolmnurga kõige pikem külj?

e) $x > 5$? f) $x \leq -1$? g) $x \geq 2$?

320. Vaatleme mingit teoreemi $p \rightarrow q$ ja tuletame sellest eelduse ja väite eitamise teel uue teoreemi $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$.

Lähtume teoreemist «Kui arv lõpeb paarisnumbriga, siis ta jagub 2-ga». Kui selles teoreemis eeldust ja väidet eitame, siis saame teoreemi «Kui arv ei lõpe paarisnumbriga, siis ta ei jagu 2-ga». Saadud teoreemi nimetatakse lähteteoreemi **vastandteoreemiks**. See vastandteoreem on õige nagu lähteteoreemgi.

Kuid iga õige teoreemi vastandteoreem ei ole õige. Näiteks õige teoreemi «Kui kumbki kahest liidetavast jagub 5-ga, siis ka nende summa jagub 5-ga» vastandteoreem on «Kui kumbki kahest liidetavast ei jagu 5-ga, siis ka summa ei jagu 5-ga». Viimane teoreem aga pole õige, sest näiteks 7 ei jagu 5-ga ja ka 8 ei jagu 5-ga, kuid nende summa $7 + 8 = 15$ jagub 5-ga. Sellest näeme, et ka vastandteoreem vajab omaette uurimist ja tõestamist.

321. Tuleta järgmiste teoreemide vastandteoreemid ja otsusta, missugused neist on õiged, missugused väärad.

a) Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga.

b) Kui arvu viimased kaks numbrit moodustavad 4-ga jaguva arvu, siis arv jagub 4-ga.

c) Kui kuusnurk on korrapärane, siis tema külj võrdub ümberingjoone raadiusega.

d) Kui $x \geq 3$, siis $x^2 \geq 9$.

322. Vastandteoreemi saab tuletada mitte ainult antud teoreemist, vaid ka selle pöördteoreemist. Rakendades pöördteoreemi ja vastandteoreemi moodustamise võtet, saab igast teoreemist tuletada kolm uut teoreemi. Näiteks teoreemist «Kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasnurgad» saame tuletada järgmised teoreemid:

1) kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasküljed (pöördteoreem);

2) kui kolmnurga kaks külge ei ole võrdsed, siis ei ole võrdsed ka nende vastasnurgad (vastandteoreem);

3) kui kolmnurga kaks nurka ei ole võrdsed, siis ei ole võrdsed ka nende vastasküljed (pöördteoreemi vastandteoreem ehk vastandteoreemi pöördteoreem).

Kõik need neli teoreemi on õiged.

323. Tuleta igast järgnevast teoreemist kolm uut teoreemi ja otsusta, missugused neist on õiged, missugused väärad.

a) Kui kaks arvu on ühesuguste märkidega, siis nende korutis on positiivne.

b) Kui arv lõpeb 4-ga, siis ta jagub 2-ga.

c) Kui $x = -2$, siis $|x| = 2$.

d) Kui $x \geq 1$, siis $x^2 \geq 1$.

Missugused kaks teoreemi on üheaegselt õiged või väärad?

324. Paigutame antud teoreemi $p \rightarrow q$ ja sellest tulenevad kolm teoreemi järgmisesse skeemi, kus kõrvuti asetsevad teineteise pöördteoreemid ja kohakuti teineteise vastandteoreemid:

Teoreem $p \rightarrow q$		Pöördteoreem $q \rightarrow p$
Vastandteoreem $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$		Pöördteoreemi vastandteoreem $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$

Oletame nüüd, et teoreem $p \rightarrow q$ on õige, ja näitame, et siis on õige ka pöördteoreemi vastandteoreem $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$.

Väljend «Teoreem on õige» tähendab, et õige eelduse p puhul on ka väide q õige. Oletame nüüd, et lause \bar{q} on õige. Siis peab õige olema ka lause \bar{p} , sest kui ta poleks õige, siis oleks õige tema eituse $\bar{\bar{p}} = p$, millest otsese teoreemi põhjal järelduks, et q on õige.

Kuid see on vastuolus tehtud eeldusega, et \bar{q} on õige. Seega $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$.

Niisamuti saaksime tõestada, et pöördteoreemi õigsusest järeldub vastandteoreemi õigsus ja ümberpöörduvalt. Seega on ülalantud skeemis diagonaalselt paigutatud teoreemid üheaegselt õiged või väärad, teisiti, nad on samaväärsed:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

$$(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

Seda teoreemide samaväärsust kasutatakse teoreemide tõestamisel: otsese teoreemi asemel võib tõestada pöördteoreemi vastandteoreemi, kui selle tõestamine on lihtsam, ja pöördteoreemi asemel vastandteoreemi, kui viimase tõestus osutub lihtsamaks. Ühest tõestatud teoreemist järeldub siis temaga samaväärse teoreemi õigsus.

Otsese teoreemi tõestust pöördteoreemi vastandteoreemi kaudu nimetatakse vastuväiteliseks tõestuseks.

325. Oletame, et ruut joonisel 29 kujutab naturaalarvude hulka N , selles viirutamata piirkond 5-ga lõppevate arvude hulka M_p ja viimast piirkonda sisaldav ovaalse joonega piiratud ala 5-ga jaguvate arvude hulka M_q . Et 5-ga lõppevate arvud hulk on 5-ga jaguvate arvude hulga osahulk, siis

$$M_p \subset M_q,$$

millest tuleneb teoreem

$$p \rightarrow q,$$

s. t. kui arv lõpeb 5-ga, siis ta jagub 5-ga.

Selgita: a) missuguseid arve kujutab rõhtjoontega viirutatud ala?

b) missuguseid arve kujutab püstjoontega viirutatud ala?

c) kumb neist piirkondadest on teise osapiirkond?

d) järelda eelnevast, et

$$(M_q)'_N \subset (M_p)'_N$$

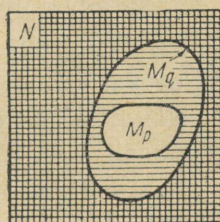
ehk

$$M_{\bar{q}} \subset M_{\bar{p}},$$

mis tähendab, et 5-ga mittejaguvate arvude hulk on 5-ga mitte lõppevate arvude hulga osahulk.

e) missuguse teoreemina saab sõnastada viimast tulemust?

326. Loeme õigeks lause «Kui kass peseb silmi, siis tuleb külalisi». Näita, et siis tuleb õigeks lugeda ka lause «Kui ei tule külalisi, siis kass ei pese silmi». Kas järeldub neist lauseist midagi lausete «Kui tuleb külalisi, siis kass peseb silmi» ja «Kui kass ei pese silmi, siis ei tule külalisi» kohta?



Joon. 29.

Kasuta joonist 29 siin toodud lausete kujutamiseks. Selleks mõista N all kõigi mõeldavate kodude hulka, tähe p all lauset «Kass peseb silmi» ja tähe q all lauset «Tuleb külalisi». Leia nüüd jooniselt piirkond, mis kujutab

- a) nende kodude hulka, kus kass parajasti peseb silmi;
- b) nende kodude hulka, kus parajasti on tulemas külalisi;
- c) nende kodude hulka, kus parajasti on tulemas külalisi, kuid kass ei pese silmi;
- d) nende kodude hulka, kus kass ei pese silmi;
- e) nende kodude hulka, kus kass ei pese silmi ega ole tulemas külalisi.

Avalda kõik need hulgad tähtede N , M , p ja q abil.

327. Olgu õige lause «Kui koer sööb rohtu, siis tuleb järgmisel päeval vihma».

Näita, et siis on õige ka lause «Kui järgmisel päeval ei tule vihma, siis koer ei söö rohtu».

Kas järeldub neist lauseist lause «Kui järgmisel päeval tuleb vihma, siis koer sööb rohtu»?

5. SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS.

PUNKT JA SIRGJOON.

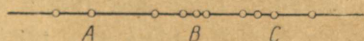
328. a) Meie kujutluse järgi leidub sirgjoone iga punkti ees, iga punkti järel ja iga kahe punkti vahel veel uusi punkte (joon. 30). Seetõttu öeldakse, et sirgjoon polegi midagi muud, kui sirge punktide rida, s. t. teatud punktide hulk. Kui sirgjoont tähistame tähega s ja tema punkte tähtedega A, B, C, \dots , siis eelneva põhjal võime kirjutada:

$$s = \{A, B, C, \dots\}.$$

Et sirgjoon s on määratud oma mistahes kahe punktiga, näiteks punktidega A ja B , siis võime kirjutada ka, et

$$s = AB.$$

b) Iga punkti M ja iga sirge s kohta on õige üks kahest väitest: kas punkt M kuulub sirge s punktide hulka või ta ei kuulu. Esimesel juhul kirjutame, et $M \in s$, ja ütleme, et punkt M asetseb sirgel s , teisel juhul, et $M \notin s$ ja punkt M ei asetse sirgel s .



Joon. 30.



Joon. 31.

c) Kahel sirgel s ja t võib leiduda ühiseid punkte. Kui neid leidub ainult üks, ütleme punkt L , siis öeldakse, et sirged s ja t lõikuvad punktis L , ja kirjutatakse

$$L = s \cap t,$$

sest punkt L on ju punktihulkade s ja t ühisosa.

Kui sirgetel s ja t ühist punkti ei leidu, siis $s \cap t = \emptyset$, s. t. nende ühisosa on tühi hulk.

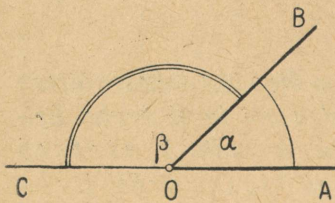
Kui sirgetel s ja t leidub kaks ühist punkti, siis neil on kõik punktid ühised ja $s = t$.

KÖRVUNURGAD.

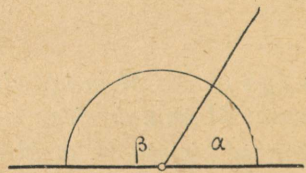
329. Kahe sirge lõikumisel tekib mitu nurka, sest sirgete lõikepunkt jaotab kummagi sirge kaheks kiireks ja iga kaks kiirt, mis väljuvad sellest lõikepunktist, moodustavad ühe nurga (joon. 31). Nurki tähistatakse tavaliselt kolme tähe abil, milledest keskmine tähistab nurga tippu ja äärmised kummagi haara mingit punkti, näiteks $\angle ALC$ (joon. 31).

Nimeta kõiki nurki jooniselt 31.

Nurki tähistatakse sageli ka väikeste kreeka tähtedega α (alfa), β (beeta), γ (gamma), δ (delta) jne. See täht kirjutatakse nurga sisse (joon. 32). Selle tähise ette nurga märki ei kirjutata, näiteks $\alpha = 75^\circ$, mitte $\angle \alpha = 75^\circ$.



Joon. 32.



Joon. 33.

330. Joonesta mingi nurk α ja pikenda tema üht haara üle nurga tippu O (joon. 32). Siis nurga α kõrvale tekib uus nurk β ehk $\angle BOC$. Nurki α ja β nimetatakse teineteise kõrvunurkadeks.

Kaht nurka nimetatakse kõrvunurkadeks, kui neil on ühine tipp ja üks ühine haar, kuna teised haarad moodustavad sirgjoone.

Leia jooniselt 32 nurkade α ja β ühine tipp ja ühine haar. Misguse joone moodustavad nende nurkade teised haarad?

331. Joonesta kaks lõikuvat sirget AB ja CD , tähista nende lõikepunkt ja selle juures tekkinud nurgad. Nimeta nüüd joonise järgi seal esinevad kõrvunurkade paarid ja iga paari puhul nurkade ühine haar.

332. Missuguse nurga saab, kui liita kõrvunurgad, s. o. kõrvaldada nende ühine haar (joon. 33)?

Kõrvunurkade summa võrdub sirgningaga.

Sümbolites:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

333. Avalda

a) α tema kõrvunurga β kaudu;

b) β tema kõrvunurga α kaudu.

334. Kui suur on nurk, mis on võrdne oma kõrvunurgaga? Kuidas saaks täisnurka defineerida kõrvunurga mõiste abil?

335. Mis liiki on teravnurga kõrvunurk, nürinurga kõrvunurk?

VÖRRAND.

336. Ülesanne. *Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 26° võrra väiksem?*

Lahendus. Oletame, et otsitav nurk sisaldab x kraadi. Siis tema kõrvunurk sisaldab $x + 26$ kraadi ja nende summa sisaldab $x + (x + 26)$ ehk $2x + 26$ kraadi. Et kõrvunurkade summa on sirgning, siis

$$2x + 26 = 180.$$

Saadud võrdusest järeldub (kuidas?), et

$$2x = 180 - 26$$

ehk

$$2x = 154,$$

seega

$$x = 77.$$

Kontroll. Kui nurk on 77 kraadi, siis tema kõrvunurk peab olema $180 - 77 = 103$ kraadi. Lahutades sellest 77 kraadi, näeme, et saadud nurk on oma kõrvunurgast tõepoolest 26 kraadi võrra väiksem.

Vastus. Otsitav nurk on 77° .

337. Eelmise ülesande lahendamisel märkisime otsitava nurga suuruse tähega x ja koostasime võrduse, milles see täht oli muutujaks. Koostatud võrdus on muutuja mõne väärtuse juures õige, mõne juures väär. Otsitav nurga suurus on niisugune muutuja väärtus, mille puhul koostatud võrdus on õige.

Muutujat sisaldavat võrdust, mille kaudu otsitakse tundmatut arvu, nimetatakse võrrandiks.

Muutuja need väärtused, mille asetamisel võrrandisse saame õige võrduse, on võrrandi lahendid.

Võrrandi lahendite leidmine on võrrandi lahendamine.

Ülesande lahendamine võrrandi abil algab otsitava suuruse tähistamisest mingi tähega. Sellele järgneb võrrandi koostamine ühes tarviliku selgitusega ja võrrandi lahendamine. Saadud lahendit tuleb kontrollida. Lahendi kontrollimine peab toimuma ülesande teksti, mitte koostatud võrrandi põhjal, sest viimane võib sisaldada juba viga. Lahendi kontrollimise järel tuleb anda ülesande vastus.

Võrrandisse nimetusi arvude juurde ära kirjuta.

Lahenda järgnevad ülesanded võrrandi abil.

338. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 34° võrra suurem?

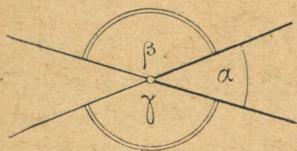
339. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 15° võrra väiksem?

340. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 3 korda suurem?

341. Kui suur on kumbki kõrvunurkadest, kui nende vahe on 9 korda väiksem nende summast?

TIPPNURGAD.

342. Joonesta mingi nurk α (joon. 34) ja pikenda tema mõlemat haara üle nurga tipu.



Joon. 34.

Kummagi haara pikendamisel üle nurga tipu (joon. 34) tekib nurgale α kõrvunurk: α ja β on kõrvunurgad, samuti α ja γ on kõrvunurgad. Nurki β ja γ nimetatakse teineteise suhtes tippnurkadeks.

Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui neil leidub ühine kõrvunurk.

Mitu tippnurkade paari tekib kahe sirge lõikumisel?

343. Olgu β ja γ tippnurgad ning α nende ühine kõrvunurk (joon. 34). Siis

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ ja } \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Avaldades neist võrdustest tippnurgad β ja γ , saame

$$\beta = 180^\circ - \alpha \text{ ja } \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

Seega

$$\beta = \gamma.$$

Nii oleme tõestanud teoreemi

tippnurgad on võrdsed.

344. Joonesta kaks lõikuvat sirget ja tähista tekkinud nurgad ringjärjekorras tähtedega $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Nimeta kõik tekkinud tippnurkade paarid ja kõik tekkinud kõrvunurkade paarid.

345. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on üks 78° . Kui suured on teised nurgad?

346. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on kahe nurga summa 128° . Leia iga tekkinud nurga suurus.

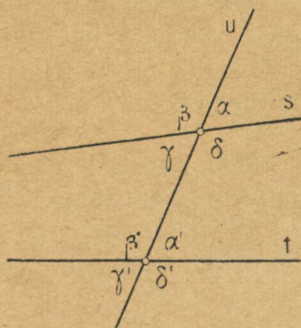
347. Kahe tippnurga summa on $158^\circ 20'$. Kui suur on nende ühine kõrvunurk?

KAHE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

348. Lõikame kaht sirget s ja t mingi kolmanda sirgega u (joon. 35). Tähistame sirgete u ja s lõikumisel tekkinud nurgad tähtedega α, β, γ ja δ , sirgete u ja t lõikumisel tekkinud nurgad aga tähtedega $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (loe: alfa prim jne.).

Kuidas nimetatakse nurki α ja γ , β' ja δ' , γ ja δ , α' ja γ' , γ' ja β' joonisel 35?

349. Nurkadest, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga ja asetsevad eri lõikepunktide juures, on mõnele paarile antud erinimetused.



Joon. 35.

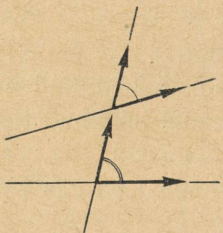
1) Kaht nurka, mis asetsevad ühel

pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad ühtepidi, nimetatakse **kaasnurkadeks** (joon. 36).

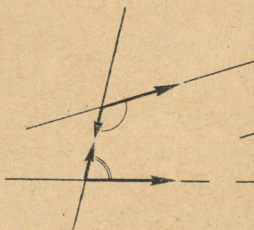
Joonisel 35 on kaasnurkadeks α ja α' , β ja β' , γ ja γ' , δ ja δ' .

2) Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse **lähisnurkadeks** (joon. 37). Joonisel 35 on lähisnurkadeks γ ja β' , δ ja α' .

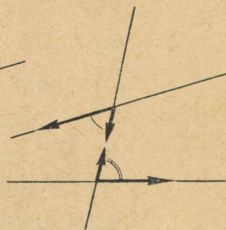
3) Kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse **põiknurkadeks** (joon. 38). Joonisel 35 on põiknurkadeks γ ja α' , δ ja β' .



Joon. 36.



Joon. 37.



Joon. 38.

350. Arvuta joonisel 35 esinevad nurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui $\alpha = 54^\circ$ ja $\beta = \beta'$.

351. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe kaasnurga summa on 153° ja üks neist on 70° .

352. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega on tekkinud üks paar võrdseid kaasnurki, näiteks $\alpha = \alpha'$ (joon. 35). Mis saab öelda siis teiste kaasnurkade kohta? põiknurkade kohta? lähisnurkade kohta?

353. Joonisel 35 $\gamma = \alpha'$. Mida saab öelda nurkade δ ja α' , α ja α' , β ja β' kohta?

KAHE SIRGE PARALLEELSUS.

354. Kaht ühel ja samal tasapinnal asetsevat sirget, mis ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks.

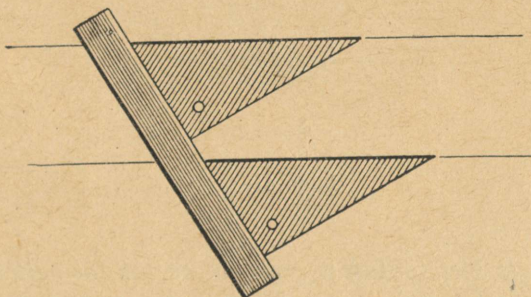
Kahe sirge u ja v paralleelsust märgitakse nii: $u \parallel v$.

Too näiteid paralleelsetest sirgetest.

355. *Paralleelseid sirgeid oleme joonestanud rööplükke abil (joon. 39). See joonestamise võtte põhineb järgmisel teoreemil:*

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid kaasnurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Mis on rööplükke puhul selleks lõikajaks sirgeks ja missugused nurgad on võrdseteks kaasnurkadeks (joon. 39)?



Joon. 39.

Sümbolites kirjutame sõnastatud teoreemi kujul (joon. 40)

$$\alpha = \beta \rightarrow u \parallel v.$$

Tõestus. Leiame lõigu AB keskpunkti C ja pöörame kogu joonise selle punkti ümber 180° võrra (joon. 41). Siis

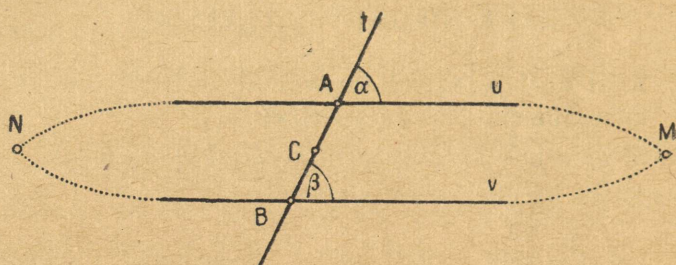
1) *punkt A satub sinna, kus enne oli punkt B , ja punkt B sinna, kus enne oli punkt A , sest lõigud CA ja CB on võrdsed;*

2) *nurk α satub sinna, kus enne oli nurga β tippnurk, ja nurk β sinna, kus enne oli nurga α tippnurk (need nurgad on võrdsed);*

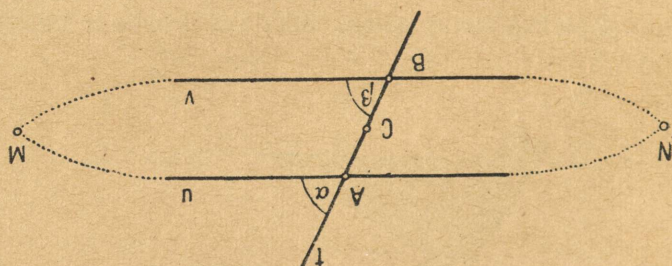
3) *sirgete u ja v asukohad vahetuvad.*

Nii näeme, et kogu joonis ühtib oma endise asendiga.

Kui sirged u ja v lõikuksid ühel pool sirget t (näiteks paremal



Joon. 40.



Joon. 41.

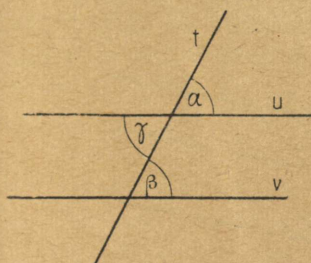
punktis M), siis kirjeldatud pööramine näitab, et neil leiduks veel teine lõikepunkt teisel pool sirget t (punkt N). Et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis, siis u ja v ei või lõikuda, s. t. $u \parallel v$.

Seda teoreemi nimetame kahe sirge paralleelsuse esimeseks tunnuseks.

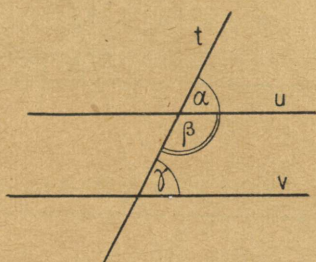
356. Valmista endale õppevahend eelmise teoreemi tõestamiseks. Selleks tee joonis 40 paksemale paberile, kopeeri siis sealt läbipaistvale paberile (kalkale) ja kinnita need joonised punktis C nõõpnõela või peenikese naela abil.

Näita selle mudeli abil, kuhu satub nurk α pärast ühe lehe pööramist 180° võrra, kuhu nurk β .

357. a) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis paar võrdseid põiknurki γ ja β (joon. 42). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja β on võrdsed ja seega $u \parallel v$.



Joon. 42.



Joon. 43.

Kahe sirge paralleelsuse teine tunnus.

Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed:

$$\gamma = \beta \rightarrow u \parallel v.$$

b) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis üks paar lähisnurki β ja γ , mille summa on sirgnurk (joon. 43). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja γ on võrdsed ja seega $u \parallel v$.

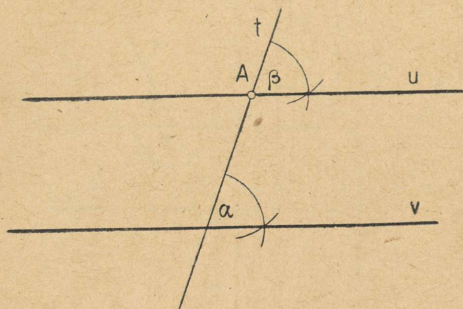
358. Joonestame antud sirgele v paralleelse sirge läbi antud punkti A , kasutades ainult sirklit ja joonlauda. Selleks võtame läbi A vabalt mingi sirge t , mis lõikab antud sirget v , ja ehitame punkti A juurde sirgete t ja v vahelise nurgaga α võrdse kaasnurga β (joon. 44).

Kui ehitatud nurga β teist haara pikendada üle nurga tipu A , siis saame sirge u , mis läbib punkti A ja on paralleelne sirgega v . Millest see järeldub?

Teosta see konstruktsioon, võttes vabalt sirge ja väljaspool sirget ühe punkti.

359. Rakendades sirgete paralleelsuse tunnuseid, näita, et kaks sirget u ja v , mis on risti ühe ja sama sirgega t , on paralleelsed.

360. Läbi antud punkti (punkt A joonisel 44) saab antud sirgele (sirge v joonisel 44) joonestada paralleelse sirge mitmel viisil. Kogemused näitavad, et sõltumatult ehitamisviisist saame



Joon. 44.



Joon. 45.

läbi antud punkti ikka ainult ühe paralleeli sirgele v . Seda tõsi-
asja väljendab järgmine nn. paralleelide aksioom:

läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, ei lähe
rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

361. Paralleelide aksioomist tuleneb hulk järeldusi. Märgime
neist kaks tähtsamat.

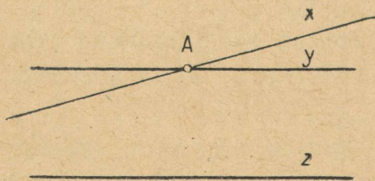
a) Kui kumbki kahest sirgest on paralleelne ühe ja sama
sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Sümbolites (joon. 45):

$$(x \parallel z; y \parallel z) \rightarrow x \parallel y.$$

Tõestus. Kui x ja y ei oleks paralleelsed, siis nad lõikuksid
mingis punktis P . Seda punkti läbiks siis kaks sirgega z paralleel-
set sirget, nimelt x ja y . Kuid see on vastuolus paralleelide aksioo-
miga, tähendab $x \parallel y$.

b) Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis
lõikab ta ka teist.



Joon. 46.

Sümbolites (joon. 46):

$$\left. \begin{array}{l} y \parallel z \\ x \cap y = A \end{array} \right\} \rightarrow x \cap z \neq \emptyset$$

Tõestus. Kui sirge x ei lõi-
kaks sirget z , siis oleks ta sellega
paralleelne ja seega läbi sirgete x
ja y lõikepunkti A läheks kaks

sirget (x ja y), mis oleksid paralleelsed sirgega z . Kuid paralleelide aksioomi järgi pole see võimalik. Tähendab, sirge x lõikab ka sirget z .

KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

362. Joonesta kaks paralleelset sirget, lõika need mingi sirgega, mōõda tekkinud nurgad ja kirjuta tulemused joonisele. Mida paned tähele: a) iga kahe kaasnurga kohta; b) iga kahe pōiknurga kohta; c) iga kahe lähisnurga kohta?

Kontrolli tehtud tähelepanekuid mingi teise lõikaja puhul.

Neist mōõtmistest nähtub, et

kui kahte paralleelset sirget lõigata mingi kolmanda sirgega, siis

- 1) iga kaks kaasnurka on võrdsed,
- 2) iga kaks pōiknurka on võrdsed,
- 3) iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk.

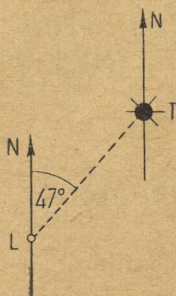
Sōnasta nende teoreemide pōõrdteoreemid.

363. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 57° . Kui suured on teised nurgad?

364. Näita, et kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

365. Kaks laeva sõidavad paralleelsete kurssidega, üks läänest itta, teine idast läände. Esimeselt laevalt paistab teine parajasti kirdesuunas. Mis suunas paistab sel momendil teiselt laevalt esimene?

366. Kaks lennukit lendavad paralleelsete kurssidega, üks lõunast põhja, teine põhjast lõunasse. Esimeselt lennukilt paistab teatud momendil teine lennuk suunas, mis on põhjasuunast 35° ida pool (lühemalt, suunas $N35^\circ E$). Mis suunas paistab sel momendil teiselt lennukilt esimene?



Joon. 47.

367. Laevalt L peiliti tuletorni T suunas $N47^\circ E$ (joon. 47). Mis suunas paistis sel momendil tuletornist laev? Kui suur on $\angle LTN$?

368. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kahe sirgega nii, et tekkinud nelinurga kaks vastasnurka on 73° ja 127° . Kui suured on selle nelinurga ülejäänud nurgad?

369. a) On antud kaks paralleelset sirget s ja t . Sirgel s on võetud kaks punkti A ja B , millest on tõmmatud ristlõigud AC ja BD sirgele t . Tõesta, et need ristlõigud on võrdsed, s. t. punktid A ja B on sirgest t võrdsetel kaugustel.

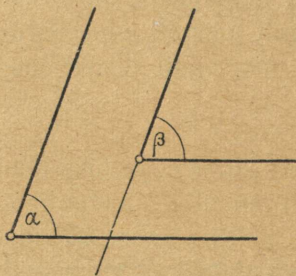
Näpunäide. Ühenda punktid C ja B ning vaatle tekkinud kolmnurki.

Kahe paralleelse sirge vahelise ristlõigu pikkust nimetame nende sirgete vaheliseks kauguseks. See kaugus on igal pool üks ja sama.

b) Joonesta antud sirgega paralleelne sirge, mis asetseb sellest antud kaugusel. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

370. a) Joonesta mingi terav- või nürinurk α , võta selle nurga sees punkt ja tõmba sellest punktist kaks kiirt, mis on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised nurga α haaradega. Tõesta, et nende kiirte vaheline nurk β võrdub nurgaga α .



Joon. 48.

Näpunäide. Pikenda nurga β üht haara üle nurga tipu nii, et ta lõikaks nurga α haara, ja võrdle nurki α ja β sellel pikendamisel tekkinud ühe nurgaga (joon. 48).

b) Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes nurga β tipu nii, et üks nurk ei asetseks teise sees.

Kui ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised teise nurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

c) Missugused nurgad saab vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurkadest, kui ühe nurga tipp võtta teise haaral?

371. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega nurka ja võrdle neid teineteisega.

Näpunäide. Võta abiks ühe nurga tippnurk.

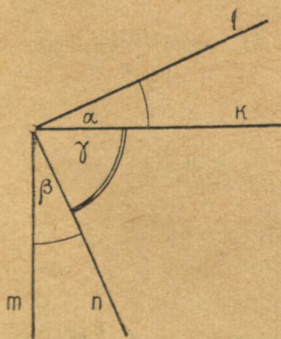
372. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka, mille ühed haarad on samasuunalised ja teised vastassuunalised.

Missugune seos valitseb nende nurkade vahel?

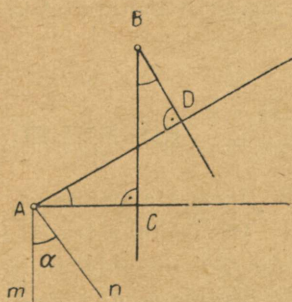
Näpunäide. Võta abiks ühe nurga kõrvonurk.

VASTAVALT RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

373. Joonesta mingi teravnurk α , mille haarad olgu k ja l , ning tõmba selle nurga tippust kaks uut kiirt m ja n nii, et need oleksid vastavalt risti nurga α haaradega ja moodustaksid teravnurga, ütleme β (joon. 49): $m \perp k$; $n \perp l$; $\beta < 90^\circ$. Mõõda nurgad α ja β . Näita, et need nurgad on alati võrdsed. Selleks pane tähele, et joonisel 49 $\alpha + \gamma = 90^\circ$ (miks?) ja ka $\beta + \gamma = 90^\circ$ (miks?). Mis saad, kui esimesest võrdusest avaldad α ja teisest β ? Mis nähtub saadud avaldistest?



Joon. 49.



Joon. 50.

374. Joonesta kaks erinevate tippudega teravnurka CAD ja CBD (joon. 50) nii, et ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega. Tõesta, et $\angle CAD = \angle CBD$.

Näpunäide. Ülesande lahendamiseks tõmba punktist A kaks kiirt m ja n , mis on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised nurga B haaradega. Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga B kohta? Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga CAD kohta? Mis sellest järeldub nurkade CAD ja CBD kohta?

Kui ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

375. Täisnurkses kolmnurgas ABC on täisnurga tipust C joonestatud kõrgus CD . Näita, et nurgad ACD ja CBD on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Mis sellest järeldub nende nurkade suuruse kohta?

376. Võrdhaarses kolmnurgas ABC , mille alus on BC , on joonestatud kõrgused AD ja BE . Näita, et nurgad CAD ja EBC on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Järelda siit, et võrdhaarse kolmnurga haarale joonestatud kõrguse ja kolmnurga aluse vaheline nurk on pool kolmnurga tipunurgast.

377. Joonesta mingi teravnurk, võta selle sees punkt ja tõmba sellest kaks kiirt, mis on vastavalt risti võetud nurga haaradega. Leia nende kiirte vahelise nurga suurus, kui võetud teravnurga suurus on α .

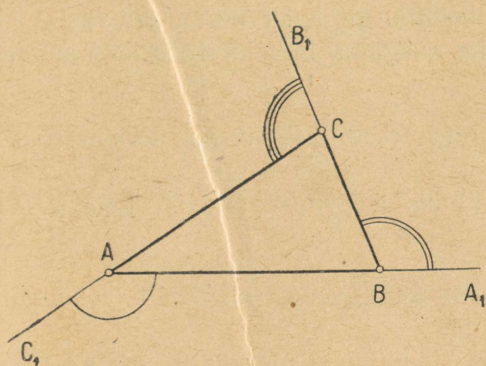
378. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B on joonestatud kolmnurga kõrgused, mille vaheline teravnurk on 67° . Leia

- 1) kolmnurga nurga C suurus;
- 2) tipust A tõmmatud kõrguse ja külje AC vahelise nurga suurus.

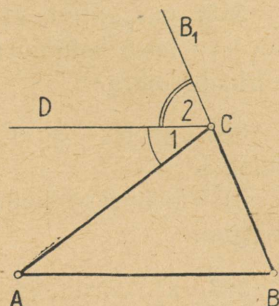
KOLMNURGA NURKADE SUMMA.

379. Joonesta kolmnurk ja selle kolmnurga mingi nurga kõrvunurk. Mis selleks teha? Joonesta ka kolmnurga teiste nurkade kõrvunurgad, pikendades iga külge ainult üks kord.

Kolmnurga nurga kõrvunurka nimetatakse kolmnurga välisnurgaks.



Joon. 51.



Joon. 52.

Mitu välisnurka on igal kolmnurgal? Nimeta neid jooniselt 51. *Eristamiseks välisnurkadest nimetame kolmnurga nurki mõnikord tema sisenurkadeks.*

380. Joonesta kolmnurk ABC ja tema välisnurk, mille tipuks on punkt C (joon. 52). Selleks et näha, kuidas välisnurga suurus on seotud sisenurkadega, joonesta läbi C sirge CD , mis on paralleelne nurga C vastasküljega AB . Mis toimub välisnurgaga? Missuguse nurgaga võrdub $\angle 1$, missugusega $\angle 2$ (joon. 52) ja miks? Millega võrdub siis välisnurk ACB_1 ? Mida saaks samal viisil tõestada tipu A juures oleva välisnurga kohta, mida tipu B juures oleva välisnurga kohta?

Kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

381. Tõesta eelmises ülesandes sõnastatud teoreem tipu B juures oleva välisnurga kohta.

382. Kolmnurga üks sisenurk on $38^\circ 40'$ ja teine sisenurk $56^\circ 20'$. Kui suur on kolmanda tipu juures olev välisnurk?

383. Mis tuleb liita kolmnurga tipu C juures oleva välisnurgaga, et saada kolmnurga kõikide sisenurkade summa? Kui suur on see summa?

Kolmnurga nurkade summa võrdub sirgnurgaga.

384. Miks kolmnurgas ei saa olla kaht täisnurka ega kaht nürinurka? Kas leidub kolmnurk, mille üks nurk on täisnurk ja teine nürinurk? Miks?

385. On antud, et ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga. Mis järeldeb kolmandate nurkade kohta?

386. a) Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

b) Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 28° . Leia välisnurgad.

387. a) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52^\circ 10'$. Kui suured on kolmnurga välisnurgad?

b) Võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurk on 138° . Kui suured on sisenurgad?

388. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$? Lahenda võrrandi abil.

389. Kolmnurga kaks välisnurka on 81° ja $117^\circ 40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

390. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 18° suurem. Leia kolmnurga sise- ja välisnurgad. Lahenda võrrandi abil.

KUMER HULKNUURK.

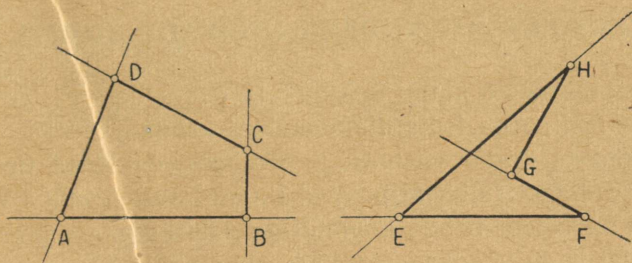
391. Tähistä tasapinnal neli punkti nii, et nende hulgas ei leiduks kolme punkti, mis asetseksid ühel sirgel. Ühenda need punktid järjestikku lõikude abil ja nimeta saadud nelinurka, tema tippe ja külgi.

392. Võta eelmise ülesande eeskujul viis punkti ja ühenda need viisnurgaks.

393. Kuidas nimetatakse kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. ühise nimega?

394. Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga külje pikendamisel saadakse sirge, millest hulknurga teised küljed on kõik ühel ja samal pool.

Näiteks joonisel 53 kujutatud nelinurk $ABCD$ on kumer (miks?), kuid nelinurk $EFGH$ ei ole kumer, sest pikendades vii-



Joon. 53.

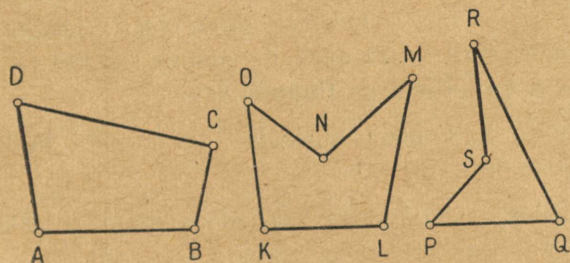
mase külge FG saame sirge, millest selle nelinurga külge EF on ühel pool, külge GH aga teisel pool.

Missugused joonisel 54 esitatud hulknurkadest ei ole kumerad ja miks?

Kas kolmnurk saab olla mittekumer?

395. Lõiku, mis ühendab hulknurga kaht tippu ja ei ole tema küljeks, nimetatakse hulknurga diagonaaliks.

Mitu diagonaali on nelinurgal, mitu viisnurgal?



Joon. 54.

396. Mitu diagonaali saab tõmmata viisnurga, seitsenurga, kümmenurga ühest tipust?

Näpunäide. Leia enne, mitmesse tippu diagonaali ei saa tõmmata.

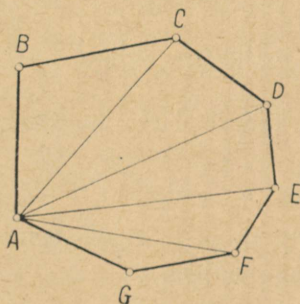
397. Edaspidi vaatleme ainult kumeraid hulknurki. Kumera hulknurga iga nurk (ehk sisenurk) on väiksem kui sirgnurk, kuna aga mittekumeral hulknurgal võib see olla sirgnurgast suurem, nagu nurk FGH joonisel 53.

Hulknurga nurga kõrvaunurka nimetatakse tema välisnurgaks.

KUMERA HULKNURGA NURKADE SUMMA.

398. a) Joonesta mingi nelinurk ja leia selle nurkade summa, tükeldades nelinurga tema diagonaaliga kolmnurkadeks.

b) Joonesta mingi viisnurk ja tõmba tema ühest tipust kõik võimalikud diagonaalid. Mitmeks kolmnurgaks tükeldus viisnurk? Kui suur on kokku nende kolmnurkade nurkade summa? Kuidas selle põhjal leida viisnurga nurkade summat?



Joon. 55.

399. Kui hulknurgal on n tippu, siis selle hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga $n - 2$ kolmnurgaks, sest selle tipu vastas on hulknurgal $n - 2$ külge, millest igaüks saab ühe kolmnurga üheks küljeks (joon. 55). Nende kolmnurkade nurkade summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Nii-sama suur on ka hulknurga nurkade summa, sest hulknurga nurgad on kas kolmnurkade nurkadeks või koosnevad neist ja ainult neist. Seega,

kumera hulknurga nurkade summa võrdub $(n - 2) \cdot 180^\circ$, kus n on hulknurga tippude arv.

400. Arvuta hulknurga nurkade summa, kui hulknurga tippude arv on 4; 6; 9; 12.

401. Missuguse hulknurga nurkade summa on 900° ; 12 täisnurka; 5 sirgnurka; 2340° ? Lahendada võrrandi abil.

402. Kui suur on hulknurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa? Kui suur on siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa kokku?

Hulknurga välisnurkade summa saamiseks lahuta sise- ja välisnurkade kogusummast sisenurkade summa ja näita, et
iga kumera hulknurga välisnurkade summa võrdub 360° .

403. Korrapärase hulknurga sisenurgad on teatavasti võrdsed. Mis sellest järeldub välisnurkade kohta? Kui suur on korrapärase hulknurga välisnurk, kui hulknurga tippude arv on 3; 5; 6; 8?

Kuidas leida korrapärase hulknurga sisenurga suurust, kui välisnurga suurus on teada?

Näita, et korrapärase n -nurga välisnurk võrdub $360^\circ : n$ ja sisenurk võrdub $180^\circ - 360^\circ : n$.

Anna avaldisele $180^\circ - 360^\circ : n$ murru kuju.

404. a) Arvuta korrapärase 15-nurga sisenurk ja välisnurk.
b) Missuguse korrapärase hulknurga välinurk on 15° ?
c) Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135° ?

405. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv kasvab kolme võrra? viie võrra?

KOLMNURGA KAHE KÜLJE SUMMA JA VAHE VÖRDLEMINE KOLMANDA KÜLJEGA.

406. Joonesta mingi kolmnurk ABC ja tähistä tema külgede pikkused tähtedega a , b ja c , nagu näidatud joonisel 56. Näita mõõtmise teel, et

kolmnurga iga külge on väiksem kui kahe teise külje summa.

Külje AB ehk c kohta saab seda lauset kirjutada kujul

$$AB < BC + AC \text{ ehk } c < a + b.$$

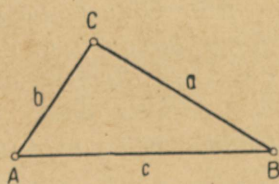
Kirjuta vastavad võrratused ka teiste külgede kohta.

407. Võtame kolm lõiku a , b , ja c kord nii, et kõige pikem neist, ütleme a , on suurem kahe teise summast, teine kord nii, et ta võrdub nende summaga:

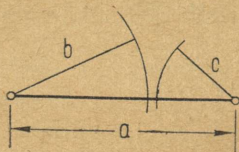
$$a > b + c \text{ või } a = b + c.$$

Proovime ehitada kolmnurka, mille küljed võrduvad lõikudega a , b ja c . Selleks joonestame esmalt lõigu pikkusega a ja siis tema otspunktide ümber ringjooned, mille raadiused on vastavalt b ja c . Selgub, et kolmnurga joonestamine ei õnnestu, sest selleks tarvilikud abiringjooned raadiustega b ja c ei lõiku (joon. 57 ja 58). Kolmnurk tekib alles siis, kui külgi b ja c (või ühte neist) pikendada nii, et $a < b + c$ (joon. 59). Sellest selgub, et

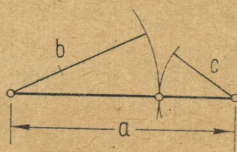
antud kolm lõiku saavad olla kolmnurga külgedeks ainult siis, kui suurim lõik on väiksem kahe teise lõigu summast.



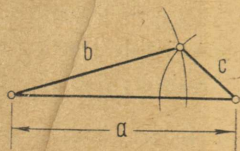
Joon. 56.



Joon. 57.



Joon. 58.



Joon. 59.

Näiteks lõikudest $a = 15$ cm, $b = 27$ cm ja $c = 12$ cm ei saa ehitada kolmnurka, sest suurim lõik b ei ole väiksem lõikude a ja c summast.

408. Otsusta, kas leidub kolmnurk, mille küljed on pikkusega
- 5 m, 7 m ja 10 m;
 - 1,5 dm, 4 dm ja 2,5 dm;
 - 7,4 dm, 3,7 dm ja 2,9 dm;
 - 35 cm, 18,9 m ja 19,2 m.

409. Otsusta, kas leidub võrdhaarne kolmnurk, millel
- alus on 15 cm ja haar on 7 cm;
 - alus on 7 cm ja haar on 15 cm;
 - alus on 7,8 m ja haar on 3,9 m;
 - ümbermõõt on 6 m ja haar on 12 dm.

410. Olgu antud kolmnurga kahe külje pikkused, näiteks a ja b , kusjuures $a > b$. Varem leidsime, et siis kolmanda külje pikkus $c < a + b$. Summat $a + b$, millest c on väiksem, nimetame külje c pikkuse ülemtõkkeks. Näitame nüüd, et kolmas külge c ei saa olla kuitahes väike, vaid ta peab olema suurem kahe teise külje vahest, s. t. $c > a - b$. Selleks kasutame juba leitud tõsiasja, et

$$a < b + c.$$

Kui vähendada selle võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama suuruse b võrra, siis vasak pool jääb ikkagi paremast väiksemaks, s. t.

$$a - b < b + c - b$$

ehk

$$a - b < c.$$

Lugedes seda võrratust paremalt vasakule, saame

$$c > a - b.$$

Nüüd oleme saanud külje c pikkuse alamtökke, s. o. arvu, millest külje c pikkus on suurem. Tulemust saab üles märkida järgmiselt:

$$a - b < c < a + b.$$

Seda loetakse nii: c on suurem a ja b vahest ning väiksem a ja b summast.

Näide. Kui $a = 4$ cm ja $b = 1,5$ cm, siis
 4 cm $- 1,5$ cm $< c < 4$ cm $+ 1,5$ cm
 $2,5$ cm $< c < 5,5$ cm.

Kolmnurga iga külj on suurem kahe teise külje vahest ja väiksem nende summast.

411. Leia kolmnurga kolmanda külje x tüked, kui kaks antud külge on järgmised:

- a) 5,7 cm ja 6,3 cm; b) 18 dm ja 7 dm;
 c) 3,5 m ja 8,4 m; d) $8\frac{3}{4}$ m ja $6\frac{2}{3}$ m.

412. Kolmnurga kahe lühema külje pikkused on 35 cm ja 47 cm. Missugused on kolmanda külje tüked?

413. Missugused on kolmnurga lühima külje tüked, kui kaks pikemat külge on 7,8 dm ja 13,1 dm?

KOLMNURGA KÜLGEDE JA NURKADE VAHELISED SEOSSED.

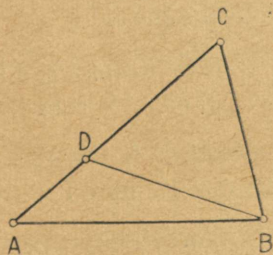
414. Joonesta mingi kolmnurk, mõõda tema kaks mittevõrdset külge ja nende vastas asetsevad nurgad. Missuguse külje vastas asetseb suurem nurk?

415. Tõestame, et kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus. Kolmnurgas ABC külj $AC > BC$ (joon. 60).

Väide. $\angle ABC > \angle CAB$.

Tõestus. Märgime küljel AC punkti D nii, et $DC = BC$, ja ühendame punktid D ning B . Siis kolmnurgas BCD nurgad CDB ja DBC on võrdsed (miks?). Et $\angle CDB$ on kolm-



Joon. 60.

nurga ABD välisnurk, siis on ta suurem kui temaga mitte kõrvuti asetsev sisenurk A (miks?).

Seega $\angle CDB > \angle CAB$. Et $\angle CDB = \angle DBC$, siis ka $\angle DBC > \angle CAB$. Kuid $\angle DBC$ on osa nurgast ABC , mistõttu ka $\angle ABC > \angle CAB$. Sellega on väide tõestatud.

416. Tõestame, et on õige ka eelmise teoreemi pöördteoreem, kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus. Kolmnurgas ABC (joon. 60) $\angle ABC > \angle CAB$.

Väide. $AC > BC$.

Tõestus. Külgede AC ja BC kohta on õige üks kolmest väitest:

$$AC < BC \text{ või } AC = BC \text{ või } AC > BC.$$

Neist esimene väide ei saa olla õige, sest eelmise teoreemi järgi peaks siis olema $\angle ABC < \angle CAB$, mis on vastuolus eeldusega. Samal põhjusel ei saa ka teine väide olla õige, sest sellest järelduks, et nurgad ABC ja CAB on võrdsed. Nii jääb püsima ainult kolmas väide, s. t. $AC > BC$.

Ühendades ülesannete 409 ja 410 tõestatud teoreemid, saame (joon. 60):

$$(AC > BC) \Leftrightarrow (\angle ABC > \angle BAC).$$

417. Kolmnurga ABC kohta on teada, et $\angle A = 78^\circ$ ja $\angle B = 37^\circ$. Järjesta kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

418. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on $\angle A$ ja $\angle B$. Nimeta pikem kaatet, kui $\angle A = 34^\circ$.

419. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45° . Mida saab öelda kaatetite kohta?

420. Missugune külg on täisnurkses kolmnurgas kõige pikem? Missugune külg on nürinurkses kolmnurgas kõige pikem?

421. Kolmnurga küljed on $AB = 7,8$ cm, $BC = 9,4$ cm ja $AC = 5,6$ cm. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

422. Võrdhaarse kolmnurga alus on $8,4$ dm ja übermõõt 23 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?

423. Kolmnurga KLM kohta on teada, et $\angle L > \angle M$ ja $LM > MK$. Missugune on kolmnurga suurim nurk?

424. Kolmnurga ABC külgede kohta on teada, et $BC > AC > AB$. Missugused nurgad on selles kolmnurgas teravnurgad? Mida saab öelda kolmanda nurga suuruse kohta?

425. Tõesta, et

täisnurkses kolmnurgas 30° -se nurga vastaskaatet võrdub poole hüpotenuusiga.

Tõestuseks joonest võrdkülgne kolmnurk ja jaota see kõrgusega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Vaatle üht neist. Kui suur on selles väiksem teravnurk ja kui pikk on tema vastaskaatet?

426. Joonesta sirkli ja joonlaua abil täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk võrdub 60° ja hüpotenuus võrdub antud lõiguga.

427. Kui pikk on telefoniposti tugi, mis moodustab postiga nurga 30° , kui posti ja toe vaheline kaugus mööda maapinda on 1,8 m?

428. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 60° ja hüpotenuusi ning väiksema kaateti summa on 24 dm. Kui pikk on hüpotenuus?

KORDAMISEKS.

429. Teisenda murruks avaldis:

$$\text{a) } x + 6 - \frac{x^2 - 40}{x - 6}; \quad \text{b) } a^2 + 2a + 4 - \frac{a^2 - 10}{a - 2}.$$

430. Taanda murd:

$$\text{a) } \frac{3u^2 - 27}{u^3 - 27}; \quad \text{b) } \frac{(x - 3)^2 + 3x}{x^3 + 27}.$$

431. Arvuta kuubi täispindala, kui kuubi serv on 0,8 dm.

432. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 14 cm ja kõrgus on 18 cm.

433. Üks kõrvunurkadest on teisest 4 korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

434. Kahe vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurga summa on $135^\circ 20'$. Kui suur on kummagi nurga kõrvunurk?

435. Kolmes korvis on kokku 155 õuna. Teises korvis on 3 korda rohkem õunu kui esimeses ja kolmandas korvis on 10 õuna rohkem kui esimeses. Mitu õuna on igas korvis? Lahenda võrrandi abil.

436. Kolmnurga ümbermõõt on 37 cm. Teine külg on esimesest kaks korda pikem ja kolmas on teisest 3 cm lühem. Kui pikad on küljed? Lahenda võrrandi abil.

437. Missugust lauset nimetatakse definitsiooniks, missugust teoreemiks, missugust aksioomiks? Nimeta mingi definitsioon, teoreem, aksioom.

438. Mis on põhjasuuna vastassuund? kagusuuna vastassuund? suuna S8°E vastassuund?

439. Missugune on põhja—lõuna sihi ristsiht? kagu—loode sihi ristsiht? püstsihi ristsiht?

440. Lihtsusta avaldised:

a) $(3x - 7y)^2 - (3x + 7y)^2$;

b) $(5a - 4b)(6a - 3b) - (2a + 9b)(15a - 4b)$.

441. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x = -0,2$.

$$\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x-1}{2x-1} - \frac{10x}{4x-2}$$

442. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x = -0,5$.

$$\frac{2x-7}{4x^2-28x+49} + \frac{2x+7}{4x^2+28x+49}$$

6. TELJELINE SÜMMEETRIA.

SÜMMEETRILISTE KUJUNDITE KONSTRUEERIMINE.

443. Geomeetrilise kujundi omaduste uurimisel on sageli vaja kujund viia tasapinnal teise kohta või teise asendisse mingi antud kujundi suhtes.

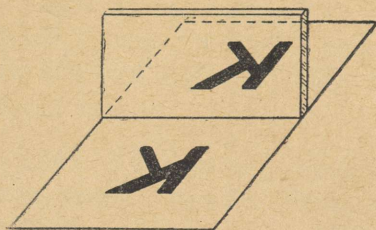
Üheks kujundi teise asendisse viimise võtteks on tasapinna kokkumurdmine tema mingit sirget mööda. Kui paberilehele teha tindiga joonis või kanda mõned tinditilgakased ja murda leht kahekorra enne, kui tint on kuivanud, siis lehe avamisel näeme teisel pool murdejoont uut joonist, mis meenutab endist, kuid pole nagu



Joon. 61.

päris endine (joon. 61). Saadud joonist nimetatakse antud joonisega sümmeetriliseks paberilehe murdejoone suhtes. See omadus — olla sümmeetriline — on vastastikune, s. t. ka antud joonis on saadud joonisega sümmeetriline sama murdejoone suhtes. Täsapinna murdejoont nimetatakse nende kahe sümmeetrilise kujundi sümmeetriateljeks.

Antud kujundist temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilise kujundi saamist võime kujutleda veel kui tasapinna pööramist ter- vikuna selle sirge ümber sirgnurga võrra. Sellel pööramisel näi- teks püstsirge ümber sirgest vasakul asetsev pooltasapind satub



Joon. 62.

sirgest paremale ja paremal asetsev pooltasapind satub sirgest vasakule ning kogu tasapinda näeme teisest küljest. Igale kujundile ühel pooltasapinnal vastab temaga võrdne, kuid muutunud asendis kujund teisel pooltasapinnal.

Antud kujundiga sirge suhtes sümmeetrilist kujundit võib näha peeglist, kui asetada peegel joonise pinnaga risti (joon. 62, 62a). Sümmeetriateljeks on siis joonise tasapinna ja peegli tasapinna lõikejoon.

Seetõttu nimetatakse antud kujundiga sümmeetrilist kujundit antud kujundi peegelduseks antud sirgest.

.I.Ü.Š Ɛ0002 NO 200DE SÜLL
UTĚĚE3I ƐMUT III I2VĚT200R 2I2I NO 2AK
? UTĚĚE3M VĚT2UM III UJAV TJA AAM BĚTAAV IŮV
2TIU2 VAT2U@

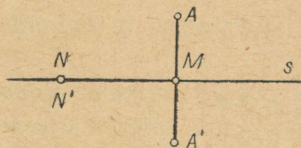
Joon. 62a.

444. a) Mis on punktiga sümmeetriliseks kujundiks? Mis on lõiguga sümmeetriliseks kujundiks? Mis on nurgaga sümmeetriliseks kujundiks?

b) Mis võib öelda antud lõiguga sümmeetrilise lõigu pikkuse kohta? antud nurgaga sümmeetrilise nurga suuruse kohta?

c) Mis on antud kolmnurgaga sümmeetriliseks kujundiks?

445. Selleks et ilma tasapinna kokkumurdmiseta saada mistahes antud kujundiga sümmeetrilist kujundit antud sirge suhtes, vaatleme esmalt punktiga sümmeetrilise punkti saamist.



Joon. 63.

Olgu (joon. 63) punktid A ja A' sümmeetrilised sirge s suhtes. Märgime punkti $AA' \cap s$ tähega M ja sirge s mistahes muu punkti tähega N . Kui tasapinna kokkumurdmisel mööda sirget s punktid A ja A' ühtivad, siis ühtivad lõigud AM ja $A'M$ ning nurgad AMN

ja $A'MN$, sest punktid M ja N jäävad tasapinna kokkumurdmisel endisele kohale. Sellest näeme, et

$$AM = A'M \text{ ja } \angle AMN = \angle A'MN.$$

Et võrdsed nurgad AMN ja $A'MN$ on kõrvunurgad, siis kumbki neist on täisnurk, seega $s \perp AA'$.

Umberpöördult, kui $AA' \perp s$ ja $AM = A'M$, siis tasapinna kokkumurdmisel mööda sirget s punktid A ja A' ühtivad. Tähendab, nad on sirge s suhtes sümmeetrilised.

Kui antud punkt asetseb sümmeetriateljel, siis ta on iseendaga sümmeetriline.

Lepime kokku kirjutada lauset «Punkt A' on sirge s suhtes sümmeetriline punktiga A » lühidalt kujul

$$A' = s(A).$$

Analoogiliselt, kui k ja k' on kaks mistahes kujundit, siis kirjutus

$$k' = s(k)$$

tähendab, et need kujundid on sirge s suhtes sümmeetrilised.

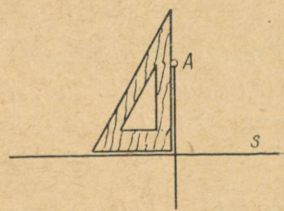
Sümmeetriliste punktide definitsiooni saame nüüd anda järgmiselt:

$$A' = s(A) \Leftrightarrow (AA' \perp s \text{ ja } AM = A'M, \text{ kus } M = AA' \cap s).$$

Punktid A ja A' on sirge s suhtes sümmeetrilised siis ja ainult siis, kui sirge s on risti lõiguga AA' ja poolitab selle lõigu.

Kirjelda, kuidas leida punkti $A' = s(A)$ nurklauda ja sirkli abil, kui sirge s ja punkt A on antud (joon. 64).

446. a) Võta vabalt sümmeetriatelje ja kaks punkti. Leia võetud punktidega sümmeetrilised punktid, kasutades nurklauda ja sirklit.



Joon. 64.

b) Joonesta antud lõiguga antud telje suhtes sümmeetriline lõik.

c) Sõnasta lause $P' = s(P)$, kui P ja P' on kaks punkti ja s on sirge.

d) Mis võib öelda punktide K ja K' kohta, kui t on antud sirge, $KK' \perp t$, $KL = K'L$ ja $L = KK' \cap t$?

e) Kirjuta üksikasjalikult sümbolites, mida tähendab kirjutus $P' = t(P)$, kui P' ja P on kaks punkti ja t on sirge?

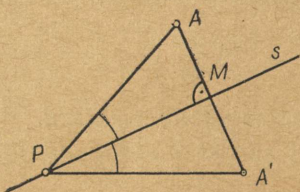
447. a) Ühendame kaks sirge s suhtes sümmeetrilist punkti A ja A' telje mingi punktiga P (joon. 65).

Tasapinna kokkumurdmisel mööda sirget s punktid A ja A' ühtivad, kuna punkt P jääb endisele kohale. Sellest nähtub, et

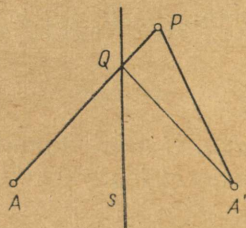
$$AP = A'P \text{ ja } \angle APM = \angle A'PM.$$

Kahe sümmeetrilise punkti ühendamisel telje mingi punktiga saadakse võrdsed lõigud, mis moodustavad teljega võrdsed nurgad.

Kirjuta see teoreem sümbolites, kasutades märki \rightarrow .



Joon. 65.



Joon. 66.

b) Viimane teoreem ütleb, et kui $A' = s(A)$ ja $P \in s$, siis $AP = A'P$. Tõestame, et on õige ka selle vastandteoreem:

kui $A' = s(A)$ ja $P \notin s$, siis $AP \neq A'P$.

Tõestuseks ühendame punkti $P \notin s$ punktidega A ja A' (joon. 66). Üks saadud lõikudest (joonisel 66 lõik AP) lõikab telje mingis punktis Q . Otseste teoreemi järgi $AQ = A'Q$. Seda teades saame, et

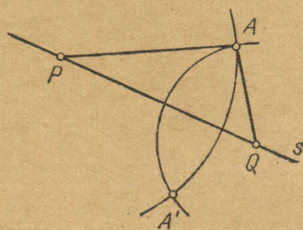
$$AP = AQ + QP = A'Q + QP > A'P,$$

sest igas kolmnurgas kahe külje summa on suurem kui kolmas külj. Tulemus $AP > A'P$ ütlebki, et $AP \neq A'P$, mida oligi vaja tõestada.

Niisiis, ainult sümmeetriatelje punkt asetseb kahest sümmeetrilisest punktist võrdsel kaugusel:

$$(A' = s(A) \text{ ja } P \in s) \Leftrightarrow AP = A'P.$$

c) Punktist P ühel ja samal kaugusel olevad punktid A ja A' asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on P ja raadius PA . See tõsiasi võimaldab leida punktiga A antud sirge suhtes sümmeetrilist punkti ainuüksi sirkli abil (joon. 67). Selleks võtame sümmeetriateljel vabalt kaks punkti P ja Q , joonestame nende kui keskpunktide ümber ringjooned, mis läbivad punkti A , ja leiame nende ringjoonte teise lõikepunkti A' . See ongi otsitav punkt: $A' = s(A)$.



Joon. 67.

Põhjenda, miks nimelt ringjoonte teine lõikepunkt on punktiga A sümmeetriline sirge s suhtes.

448. Võta vabalt sümmeetriatelg ja sellest ühel pool mingi lõik. Joonesta võetud lõiguga sümmeetriline lõik, kasutades eelmises ülesandes kirjeldatud võtet.

449. a) Joonesta antud kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

b) Võrdle antud kolmnurga tippude A, B, C, A ja peegeldatud kolmnurga tippude A', B', C', A' ringjärjestust: kumb neist ühtib kella osuti liikumise suunaga, kumb vastassuunaga?

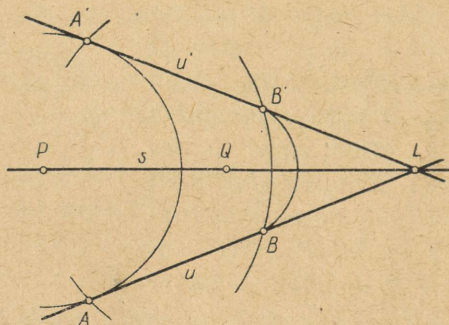
Kujundi tippude ringjärjestuse suunda nimetatakse kujundi orientatsiooniks.

Peegeldamisel sirgest muutub kolmnurga orientatsioon vastupidiseks.

c) Kujutle end liikuvana ümber kolmnurga ABC ja $A'B'C'$ tippude järjestusega antud suunas. Kummale poole jääb sinust $\triangle ABC$, kummale poole $\triangle A'B'C'$?

450. Sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge, sest vastasel juhul nad tasapinna kokkumurdumisel ei ühtiks. Antud sirgega u sümmeetrilise sirge u' joonestamiseks võtame antud sirgel kaks punkti, joonestame nendega sümmeetrilised punktid ja tõmbame viimastest läbi sirge (joon. 68).

Kui sirge u lõikab telge mingis punktis L , siis sirge u' lõikab telge samas punktis, sest punkt L kui telje punkt on sümmeetriline iseendaga.



Joon. 68.

See asjaolu võimaldab joonestada sirgega sümmeetrilist sirget üheainsa punkti järgi, kui antud sirge ja telje lõikepunkt on joonise piirkonnas.

Kui sirge u on teljega paralleelne, siis on seda ka sirge $u' = s(u)$.

451. Antud on sirglõik ja selle ühe otspunktiga sümmeetriline punkt antud telje suhtes. Joonesta antud lõiguga sümmeetriline lõik, kasutades ainult nurklauda (ilma mõõtmiseta).

452. Kasutades ainult nurklauda, joonestatakse (ilma mõõtmiseta) antud kolmnurgaga antud telje suhtes sümmeetriline kolmnurk, mille üks tipp on antud. Lahenda ülesanne kahel juhul: a) kui telg lõikab kolmnurka, b) kui telg ei lõika kolmnurka.

453. Antud on ringjoon keskpunktiga K ja raadiusega r ning sümmeetriatelg, mis ei lõika ringjoont. Joonesta antud ringjoonega sümmeetriline kujund. Mis on selleks ja miks?

454. Antud on ringjoon keskpunktiga K ja raadiusega r ning sümmeetriatelg, mis lõikab ringjoont punktides L_1 ja L_2 . Joonesta ringjoonega sümmeetriline ringjoon, kasutamata punkte L_1 ja L_2 .

455. Lahenda eelmine ülesanne uuesti, kasutades antud ringjoone ja telje lõikepunkte L_1 ja L_2 (joon. 69).

Antud. 1) Ringjoon keskpunktiga K ja raadiusega r ;

2) sirge s , mis lõikab antud ringjoont punktides L_1 ja L_2 .

Lahendus. 1) Joonestame ringjoone keskpunktiga L_1 ja raadiusega r .

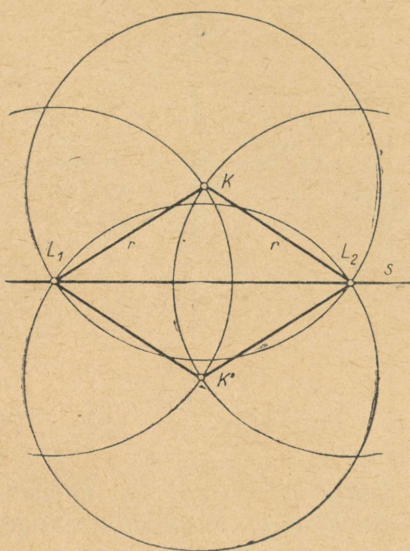
2) joonestame ringjoone keskpunktiga L_2 ja raadiusega r ;

3) leiame joonestatud ringjoonte teise lõikepunkti K' ;

4) joonestame ringjoone keskpunktiga K' ja raadiusega r .

Viimane ringjoon ongi sümmeetriline antud ringjoonega sirge s suhtes, sest tema keskpunkt on sirge s suhtes sümmeetriline antud ringjoone keskpunktiga ja raadius on võrdne antud ringjoone raadiusega.

Põhjenda, miks $K' = s(K)$.



Joon. 69.

PÕHIKONSTRUKTSIOONID.

456. Viimase ülesande lahendamisel valminud joonis, mis sisaldab 4 võrdsete raadiustega ringjoont keskpunktidega K , L_1 , L_2 ja K' , näitab, kuidas sirkli ja joonlaua abil lahendada mitmeid tähtsaid konstruktsioonülesandeid. Nende ülesannete lahendamisel tehakse seesama joonis kas täielikult või osaliselt, kuid lähtudes mõnevõrra erinevatest andmetest.

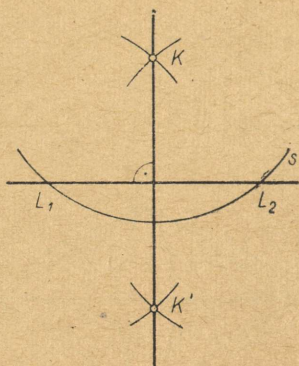
Ülesande 455 lahendamisel kasutasime ringide keskpunkte järjekorras K , L_1 , L_2 , K' .

457. Ehita antud sirgele ristsirge läbi antud punkti väljaspool antud sirget.

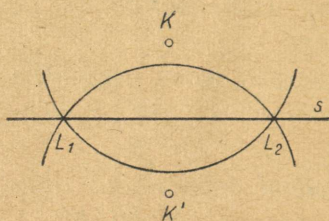
Antud: sirge s ja punkt $K \notin s$.

Leida: sirge $t \perp s$ nii, et $K \in t$.

Lahendus. Joonestame ringjoone keskpunktiga K ja vabalt võetud raadiusega r nii, et ringjoon lõikaks sirget s kahes punktis L_1 ja L_2 . Edasi joonestame sama raadiusega kaks ringjoont, mille keskpunktideks on punktid L_1 ja L_2 . Lõpuks joonestame sirge läbi



Joon. 70.



Joon. 71.

viimase kahe ringjoone lõikepunktide K ja K' (joon. 70). Sirge $t = KK'$ ongi otsitav, sest 1) $K \in t$ ja 2) $t \perp s$, kuna sümmeetriliste punktide ühendussirge on risti nende punktide sümmeetriateljega.

458. Joonesta antud kahe punkti sümmeetriatelg.

Antud: punktid K ja K' .

Leida: sirge s nii, et $K' = s(K)$.

Lahendus. Joonestame vabalt võetud raadiusega $r > \frac{KK'}{2}$ kaks ringjoont, mille keskpunktideks on antud punktid K ja K' (joon. 71). Need ringjooned lõikuvad kahes punktis L_1 ja L_2 . Konstruktsiooni tõttu $L_1K = L_1K'$ ja $L_2K = L_2K'$, tähendab, punktid L_1 ja L_2 asetsevad punktide K ja K' sümmeetriateljel s (vt. ül. 447, b). Seega $s = L_1L_2$.

459. Poolita antud lõik.

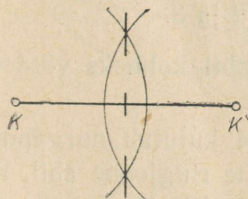
Antud: lõik KK' .

Leida: punkt M nii, et $KM = MK'$ ja $M \in KK'$.

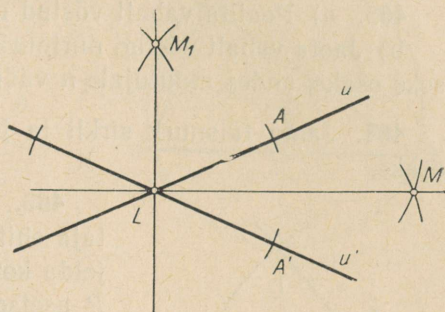
Lahendus. 1) Joonestame punktide K ja K' sümmeetriatelje s (vt. ül. 458).

2) Leiame punkti $M = KK' \cap s$ (joon. 72).

Punkt M on otsitav, sest sümmeetriatelg s poolitab selle telje suhtes sümmeetriliste punktide K ja K' ühenduslõigu.



Joon. 72.



Joon. 73.

460. Kahe punkti sümmeetriatelge nimetatakse ka neid punkte ühendava lõigu keskristsirgeks, sest see sirge läbib lõigu keskpunkti ja on lõiguga risti. Sümmeetriatelje punktide omaduse tõttu

lõigu keskristsirge on lõigu otspunktidest võrdsel kaugusel asetsevate punktide hulk.

Kui k on lõigu AB keskristsirge, siis

$$P \in k \Leftrightarrow PA = PB.$$

461. Jaota vabalt võetud lõik sirkli ja joonlaua abil 2^n võrdseks osaks, andes muutujale n väärtused 1, 2 ja 3.

462. On antud kaks lõikuvat sirget u ja u' . Joonesta kujundi $u \cup u'$ sümmeetriatelg.

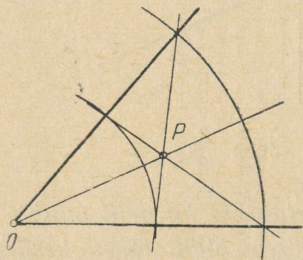
Lahendus. Teatavasti kaks mingi sirge suhtes sümmeetrilist sirget u ja u' lõikuvad sümmeetriateljel, kui nad pole paralleelsed. Järelikult on otsitavast teljest üks punkt $L = u \cap u'$ teada. Telje teise punkti leidmiseks võtame sirgetel u ja u' kaks punkti A ja A' nii, et $LA = LA'$, ja leiame siis punkti M nii, et $AM = A'M$ (joon. 73). Sirge LM ongi otsitav sümmeetriatelg, sest punktid A ja A' on sümmeetrilised LM suhtes.

Kui punkt A' sirgel u' võtta teisel pool punkti L , siis saame ülesandele teise lahenduse — sümmeetriatelje LM_1 , mis asetseb sirgete u ja u' poolt moodustatud teise tippnurkade paari nurkades.

Kumbki kahest sümmeetriateljest LM ja LM_1 on sirgete u ja u' poolt tekitatud tippnurkade poolitaja.

463. a) Poolita vabalt võetud nurk sirkli ja joonlaua abil.
 b) Jaota vabalt võetud nürinurk sirkli ja joonlaua abil 2^n võrdseks osaks, andes muutujale n väärtused 1, 2 ja 3.

464. Jaota täisnurk sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks.



Joon. 74.

465. Joonis 74 kujutab nurgapoolitaja ehitamist kahe ringjoone abil. Kirjelda konstruktsiooni ja tõesta, et punkt P asetseb tõepoolest nurgapoolitajal.

466. Tõesta, et nurga ja tema kõrvunurga poolitajad on teineteisega risti.

467. Joonesta sirkli ja joonlaua abil antud sirgele ristsirge läbi sirgel antud punkti.

468. Missuguses järjekorras ja milliseid ringjooni ja sirgeid tuleb jooniselt 69 joonestada, et

- ehitada sirgele s ristsirge läbi punkti K ;
- saada punktide K ja K' sümmeetriatelg;
- poolitada lõik L_1L_2 ;
- poolitada nurk KL_1K' ;
- ehitada sirgele s ristsirge läbi lõigu L_1L_2 keskpunkti?

Iga ülesande lahendamisel tuleb eeldada, et joonisest 69 on antud ainult ülesandes nimetatud elemendid.

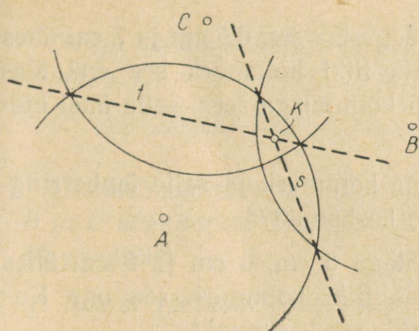
KOLMNURGA ÜMBERRINGJOON.

469. a) On antud kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A , B ja C . Leia punkt K , mis asetseb antud punktidest võrdsel kaugusel.

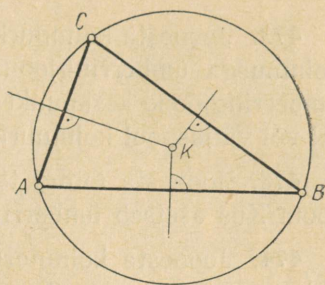
Lahendus. Antud kolmest punktist A , B ja C (joon. 75) võrdsel kaugusel asetsev punkt K on võrdsel kaugusel ka punktidest A ja B , tähendab, ta peab asetsema nende sümmeetriateljel s . Samal põhjusel peab punkt K asetsema punktide A ja C sümmeetriateljel t . Kui sirged s ja t lõikuvad, siis

$$K = s \cap t.$$

Kui $s \cap t = \emptyset$, siis ülesandel lahend puudub.



Joon. 75.



Joon. 76.

b) Kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A , B ja C määravad kolmnurga ABC . Eelmise ülesande lahendamisel kasutatud sirged s ja t on kolmnurga ABC külgede AB ja AC keskristsirged ja K on nende kahe keskristsirge lõikepunkt. Et see punkt on võrd- sel kaugusel ka punktidest B ja C , siis külje BC keskristsirge peab läbima sama punkti K (joon. 76). Selline punkt K on alati olemas, sest sirged s ja t kui nurga A haarade ristsirged lõikuvad alati (kui nad oleksid paralleelsed, siis nurga A haarad peaksid asetsema ühel sirgel või olema paralleelsed).

Eelnevast nähtub, et

kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

c) Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt K on tippudest võrd- sel kaugusel, tähendab, ringjoon, mille keskpunktiks on K ja raadiuseks on lõik punktist K kolmnurga ühe tipuni, läbib kolmnurga kolme tippu. Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks.

Igal kolmnurgal leidub üks ja ainult üks ümberringjoon.

Tulemust võib sõnastada ka järgmiselt:

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks ringjoon.

470. Võta kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja joonesta neid läbiv ringjoon.

471. Joonisel on antud ringjoon, kuid ilma keskpunktita. Kuidas leida keskpunkti?

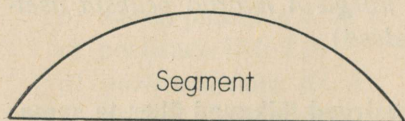
472. Joonesta kolmnurk külgedega 5,5 cm, 6,5 cm ja 7 cm ühes kolmnurga ümberringjoonega. Mis liiki kolmnurk see on? Kas ümberringjoone keskpunkt asetseb kolmnurga sees, selle ühei küljel või väljaspool kolmnurka?

473. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk ja selle ümberringjoon. Kus asetseb ümberringjoone keskpunkt?

474. Joonesta kolmnurk külgedega 5 cm, 6 cm ja 9 cm ühes kolmnurga ümberringjoonega. Mis liiki kolmnurk see on? Kus asetseb selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt?

475. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 120° ja haara pikkus a ühikut. Kui pikk on selle kolmnurga ümberringjoone raadius?

476. Joonesta võrdkülgne kolmnurk, mille ümberringjoone raadius on 4 cm. Kui pikk on selle kolmnurga apoteem? Kui suur on kolmnurga kõrgus?



Joon. 77.



Joon. 78.

477. Joonis 77 kujutab ringi segmenti. Millega on piiratud segment? Kuidas joonestamise teel leida segmendi kaare raadiust?

478. Ümmargusest esemest on säilinud joonisel 78 kujutatud tükike. Kuidas teha kindlaks, kui suur oli eseme läbimõõt?

ROMB.

479. Sümmeetrilise lõikava ringjoonega sümmeetrilise ringjoone joonestamisel (joon. 69) saime joonise, milles leidis neli võrdsete raadiustega ringjoont. Ühendades nende ringjoonte keskpunktid, saame võrdsete külgedega nelinurga. Urime selle kujundi omadusi.

Võrdsete külgedega nelinurka nimetatakse rombiks.

Olgu nelinurk $ABCD$ (joon. 79)
romb, s. t.

$$AB = BC = CD = AD.$$

Rombi vastastippe A ja C ning
 B ja D ühendavad lõigud on rombi
diagonaalid.

Rombi tähtsam omadus on:

romb on oma diagonaali suhtes iseendaga sümmeetriline.

Tõepoolest, kui näiteks tippude B ja D sümmeetriatelge mär-
kida tähega s , siis $A \in s$ ja $C \in s$, sest $AB = AD$ ja $CB = CD$.
Seega

$$s = AC.$$

Niisamuti saame näidata, et tippude A ja C sümmeetriateljeks on
diagonaal BD . Tee seda!

480. Kasutades rombi sümmeetriat, tõesta järgmised teoree-
mid:

- rombi diagonaalid on teineteisega risti;
- rombi diagonaalid poolitavad teineteist;
- rombi diagonaal poolitab rombi nurga;
- rombi vastasnurgad on võrdsed.

481. Kasutades rombi vastasnurkade omadust, et rombi diago-
naal poolitab rombi nurga, ja sirgete paralleelsuse teist tunnust,
tõesta, et

rombi vastaküljed on paralleelsed.

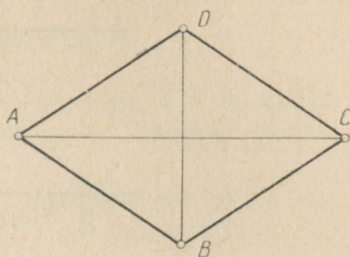
482. a) Joonesta romb, mille külje pikkus on 5 cm ja ühe dia-
gonaali pikkus on 8 cm.

b) Joonesta romb, mille külje pikkus on 6,5 cm ja üks nurk
on 45° .

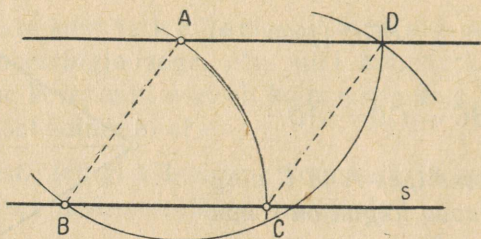
c) Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

483. Joonesta romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga.

484. Rombi külg on 15 cm ja üks nurk on 60° . Kui pikk on
rombi lühem diagonaal?



Joon. 79.



Joon. 80.

485. Rombi kõrgus, mis on tõmmatud tema ühest tipust, poolitab külje. Leia, kui suured on rombi nurgad.

486. Rombi joonestamisega saab kergesti lahendada mitmeid konstruktsioonülesandeid sirkli ja joonlaua abil. Lahendame näiteks järgmise ülesande: joonestada antud sirgega paralleelne sirge, mis läbib antud punkti väljaspool antud sirget.

Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt A (joon. 80). Joonestame meelevaldse raadiusega AB ringjoone, mille keskpunktiks on punkt A ja mis lõikab sirget s kahes punktis (üks neist on B). Muutmata sirkli haaret märgime sirgel s lõigu $BC = BA$ ja joonestame sama raadiusega kaare ümber punkti C . Punktide A ja C ümber joonestatud kaarte lõikepunkti D ühendame punktiga A . Sirge AD ongi otsitav.

Mis kujund on $ABCD$? Miks $AD \parallel s$?

487. Näita, et antud sirgele s ristsirge joonestamine läbi antud punkti A sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel, asetsegu antud punkt väljaspool antud sirget või sellel sirgel. Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

488. Näita, et antud lõigu poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel. Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

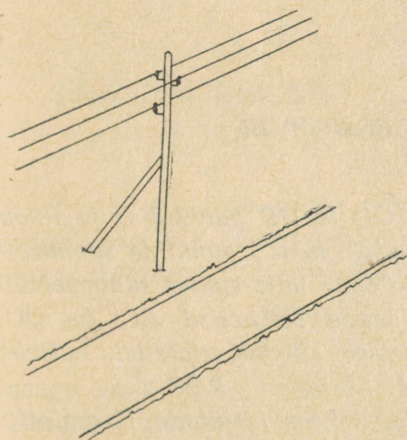
489. Näita, et nurga poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel. Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

KOLMNURGA SISERINGJOON.

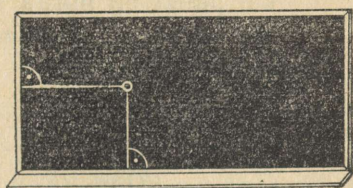
490. a) Mida tähendab lause: telefonipost on 3 m kaugusel maanteest? Missugusest punktist milleni seda kaugust mõõta (joon. 81)?

b) Kuidas leida klassitahvilil punkti, mille kaugus tahvli alumisest äärest on 5 dm ja vasakust äärest 7 dm (joon. 82)?

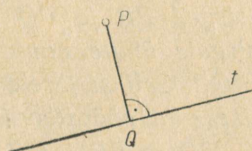
c) Punkti kauguseks sirgest nimetatakse punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust.



Joon. 81.



Joon. 82.



Joon. 83.

Nii on joonisel 83 punkti P kauguseks sirgest t lõigu PQ pikkus, kui $PQ \perp t$.

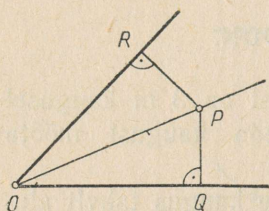
491. Võta vabalt kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A , B ja C ning leia iga punkti kaugus ülejäänud kaht punkti läbivast sirgest. Mis on need kaugused kolmnurga ABC suhtes?

492. a) Tõesta, et

nurga poolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

Sümbolites (joon. 84):

$$\left. \begin{array}{l} \angle POQ = \angle POR \\ PQ \perp OQ \\ PR \perp OR \end{array} \right\} \rightarrow PQ = PR.$$



Joon. 84.

Tõestus. Et nurga poolitaja on nurga sümmeetriatelg, siis nurga ROQ kokkumurdmisel mööda sirget OP ühtib punkt Q kiire OR ühe punktiga Q'. See punkt peab olema R, sest vastasel juhul oleks punktist P tõmmatud sirgele OR kaks ristlõiku, PR ja PQ', mis on võimatu. Sümmeetriast järeldub, et $PQ = PR$.

b) Tõesta eelmise teoreemi pöördteoreem:

kui punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel, siis ta asetseb nurga poolitajal.

Sümbolites (joon. 84):

$$\left. \begin{array}{l} PQ \perp OQ \\ PR \perp OR \\ PQ = PR \end{array} \right\} \rightarrow \angle POQ = \angle POR.$$

Tõestus. Kahe lõikuva sirge OQ ja OR punktid Q ja R on punktist P võrdsel kaugusel, tähendab, nende punktide sümmeetriatelg läbib punkti P. Kuid siis on selle telje suhtes sümmeetrilised ka sirged PR ja PQ ning nende ristsirged RO ja QO. Nende sirgete ühine punkt O asetseb sümmeetriateljel, milleks on seega OP. Sellest järeldubki, et $\angle POQ = \angle POR$.

c) Otsese ja pöördteoreemi saame koos kirjutada järgmiselt: kui $PQ \perp OQ$ ja $PR \perp OR$, siis

$$\angle POQ = \angle POR \Leftrightarrow PQ = PR.$$

Tulemuse võime sõnastada nii:

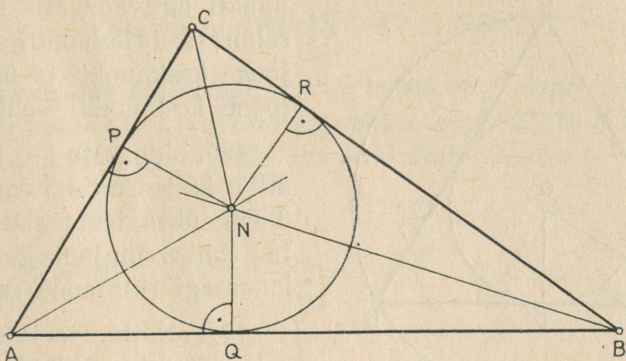
nurga poolitaja on nurga haaradest võrdsel kaugusel asetsevate punktide hulk.

d) Märkus. Kõigis selles ülesandes saadud teoreemides tuleb nurga all mõista sirgurgast väiksemat nurka.

493. a) Joonesta kolmnurk külgedega 7 cm, 8 cm ja 9 cm ühes tema kahe nurga poolitajaga. Leia nurgapoolitajate lõikepunkti kaugused kolmnurga külgedest. Mida paned tähele?

b) Tõesta, et

kolmnurga kolm nurgapoolitajat lõikuvad ühes ja samas punktis.



Joon. 85.

Sümbolites (joon. 85):

Kui n_A , n_B ja n_C on vastavalt nurkade A , B ja C poolitajad, siis

$$(n_A \cap n_B) \in n_C.$$

Tõestus. Joonestame kolmnurga mingi kahe nurgapoolitaja, näiteks n_A ja n_B lõikepunktist N ristlõigud NP , NQ ja NR kolmnurga külgedeni. Siis (põhjenda, miks?)

$$\left. \begin{array}{l} NP = NQ \\ NR = NQ \end{array} \right\} \rightarrow NP = NR,$$

seega punkt $N = n_A \cap n_B$ asetseb ka nurga C haaradest võrdsel kaugusel. Kuid siis $N \in n_C$, tähendab, kõik kolm nurgapoolitajat lõikuvad punktis N .

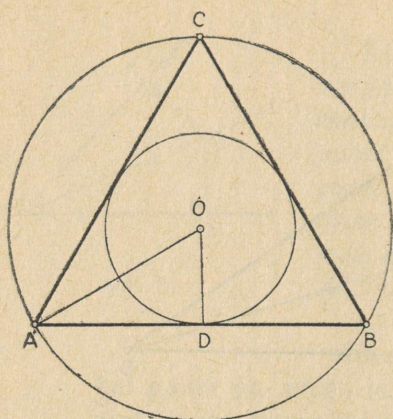
c) Joonesta ringjoon, mille keskpunktiks on kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt N ja radiuseks selle punkti kaugus kolmnurga mingist küljest. See ringjoon läbib punkte P , Q ja R , puudutades kolmnurga külgi neis punktides. Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga siseringjooneks.

Et kolmnurga nurgapoolitajad alati lõikuvad ja nimelt ühes punktis, siis

igal kolmnurgal leidub üks ja ainult üks siseringjoon.

494. Joonesta kolmnurk külgedega 10,6 cm, 7,3 cm ja 9,5 cm ühes kolmnurga siseringjoonega. Mõõda saadud ringjoone läbimõõt.

495. Mis on kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks, mis siseringjoone keskpunktiks? Missugusel kolmnurgal need kaks



Joon. 86.

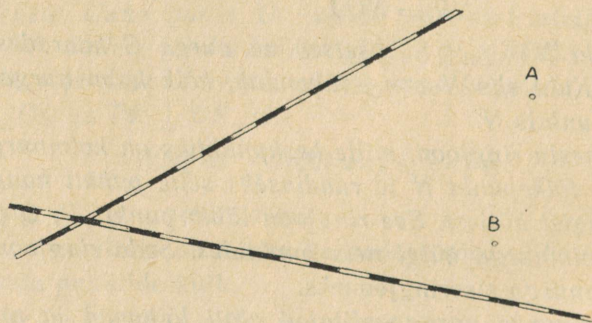
punkti ühtivad? Mis sellest järeldeb selle kolmnurga siseringjoone keskpunkti ja ümberringjoone keskpunkti kohta?

496. Joonesta kolmnurk, mille küljed on 4,5 cm, 5 cm ja 8 cm, ühes tema siseringjoone ja ümberringjoonega. Mõõda kummagi ringjoone raadius.

497. Näita, toetudes joonisele 86, et võrdkülgse kolmnurga ABC siseringjoone raadius OD on pool ümberringjoone raadiusest OA .

498. Leia vabalt võetud kolmnurga ABC küljel BC punkt, mis on kahest ülejäänud küljest võrdsetel kaugustel.

499. Joonis 87 kujutab kaht raudteed ühes kahe külaga A ja B . Kuidas leida 1) kolhoosi keskuse rajamiseks niisugune koht,

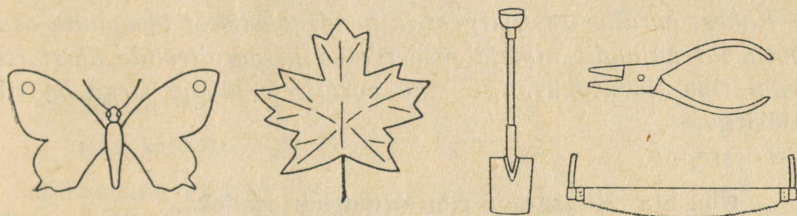


Joon. 87.

mis asetseks võrdsetel kaugustel mõlemast raudteest ja võrdsetel kaugustel küladest A ja B ? 2) peatuskohad raudteel, mis oleksid rajatavale kolhoosikeskusele võimalikult lähedal?

SÜMMEETRILINE KUJUND.

500. a) Leidub kujundeid, mis on mingi sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga, s. t. kujundi tasapinda saab sirget mööda nii viisi kokku murda, et kujundi üks pool ühtib teisega.



Joon. 88.

- b) Leia joonisel 88 esitatud kujundite sümmeetriateljed.
 c) Nimeta mõnda tuntud kujundit, mis on sümmeetriline iseendaga.
 d) Mitu sümmeetriatelget on rombil?

501. a) Põhjenda väidet, et (joon. 89)

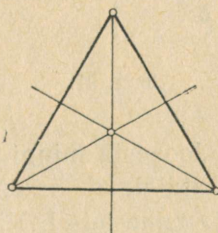
võrdhaarne kolmnurk on sümmeetriline oma tipunurga poolitaja suhtes.

Kui AD on võrdhaarse kolmnurga tipunurga A poolitaja, millest järeldub siis, et tipud B ja C on sümmeetrilised sirge AD suhtes?

b) Missugused võrdhaarse kolmnurga omadused järelduvad tema sümmeetriast?



Joon. 89.



Joon. 90.

c) Mitu sümmeetriatelge on võrdkülgisel kolmnurgal? Mis sa tead nende telgede lõikumisest? Mis punktiks on sümmeetriatelgede lõikepunkt võrdkülgises kolmnurgas (joon. 90)?

502. a) Joonesta kaks paralleelset sirget ja ühele neist rist-sirge. Kuidas viimane asetseb teise paralleeli suhtes?

*Kahest paralleelsest sirgest ja nendevahelisest tasapinna osast koosnevat kujundit nimetatakse **ribaks** ja paralleelide ühist rist-sirget **riba ristsirgeks**. Iga muu paralleele lõikav sirge on **riba kaldsirge**.*

Tõesta, et

riba iga ristsirge on riba sümmeetriateljeks.

b) *Riba ristsirge lõiku paralleelide vahel (lõik AB joonisel 91) nimetatakse **riba laiuseks**.*

Riba laius on igal pool üks ja seesama.

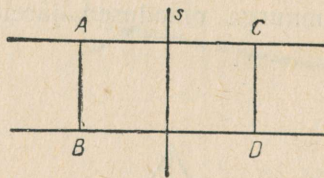
Näiteks (joon. 91) $AB = CD$, sest kui riba sümmeetriateljeks võtta lõigu BD keskristsirge s , siis AB ja CD on sümmeetrilised, seega ka võrdsed lõigud.

c) *Ribal leidub peale ristsirgete kui sümmeetriatelgede veel üks sümmeetriatelg. Selleks on paralleelide u ja v (joon. 92) vahelise ristlõigu PQ keskristsirge t ehk **riba kesksirge**.*

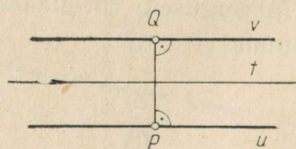
Põhjenda väidet, et

riba kesksirge on riba sümmeetriatelg,

s. t. kui $Q = t(P)$, siis ka $v = t(u)$.

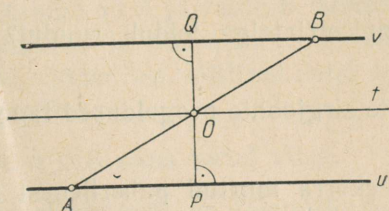


Joon. 91.



Joon. 92.

503. a) Joonesta mingi riba ühes selle kesksirgega ja mõned selle riba **kaldlõigud**, s. o. lõigud, mille üks otspunkt on ühel paralleelil ja teine teisel. Näita mõõtmise teel, et kesksirge poolitab kõik need lõigud.



Joon. 93.

b) Tõesta, et
riba kesksirge poolitab iga lõigu paralleelide vahel.

Tõestus. Võtame riba $u \parallel v$ ühes kesksirgega t ja mingi kaldlõiguga AB (joon. 93). Joonestame läbi punkti $O = t \cap AB$ riba ristlõigu PQ . Siis sümmeetria tõttu $OP = OQ$, s. t. kesksirge poolitab ristlõigu paralleelide vahel. Vaadeldes kolmnurki AOP ja BOQ , näeme, et tunnuse NKN põhjal (näita seda üksikasjalikult!)

$$\triangle AOP = \triangle BOQ.$$

Kolmnurkade vastavate külgede võrdsusest järeldubki, et $AO = BO$, s. t. kesksirge poolitab ka kaldlõigu paralleelide vahel.

Ümberpöördult, kui punkt O on paralleelidevahelise lõigu AB keskpunkt, siis riba kesksirge läbib seda punkti.

504. Näita, et ristkülik on kahe ristuva riba ühisosa. Leia ristküliku sümmeetriateljed. Mis on nendeks telgedeks?

505. Näita, et korrapärasel kuusnurgal on kuus sümmeetriatelge. Mis on nendeks sümmeetriatelgedeks?

KORDAMISEKS.

506. Missugustel suurtest trükitähedest leidub sümmeetriatelg ja mitu nimelt?

507. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Millal need kaks ringjoont ühtivad?

508. Missuguse kujundi moodustab võrdkülgne kolmnurk koos tema aluse suhtes sümmeetrilise kolmnurgaga?

509. Missuguse kujundi moodustab täisnurkne kolmnurk koos tema kaateti suhtes sümmeetrilise kolmnurgaga?

510. Mitu sümmeetriatelge leidub ruudul? Mis on nendeks telgedeks?
511. Missuguste sirgjoonte peegeldused langevad ühte samade sirgetega?
512. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetri-line puulehe kujutis.
513. Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia voltimise teel kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.
514. Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk (kui-das?) ja leia voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.
515. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõi-gatakse ära täisnurkne kolmnurk. Mida kujutab see äralõigatud leheosa avatult?
516. On antud kaks ristuvat sirget s ja t ning nendega mitte-paralleelne lõik AB . Joonesta lõik $A'B' \equiv s(AB)$ ja $A''B'' \equiv t(A'B')$.
517. On antud riba $s \parallel t$ ja väljaspool seda mingi kolmnurk k . Joonesta kolmnurk $k' \equiv s(k)$ ja kolmnurk $k'' \equiv t(k')$.
518. Ühel pool sirgest t on antud punktid A ja B (erinevatel kaugustel sirgest t). Leia punkt $X \in t$ nii, et lõikude summa $AX + XB$ oleks võimalikult väike.
519. Ühel pool sirgest t on antud punkt A ja teisel pool sel-lega sirge t suhtes mittesümmeetriliselt asetsev punkt B . Leia punkt $X \in t$ nii, et sirge t poolitaks nurga AXB .
520. Ühel pool sirgest t on antud punktid A ja B (erinevatel kaugustel sirgest t). Leia punkt $X \in t$ nii, et teravnurgad, mis lõigud AX ja BX moodustavad sirgega t , oleksid võrdsed.
521. Sõnasta teoreemi «Kui punkt asetseb nurga poolitajal, siis ta on nurga haaradest võrdsetel kaugustel» pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Millised neist on õiged?
522. Sõnasta teoreemi «Tippnurgad on võrdsed» pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Millised neist on õiged?

523. Teoreemi eeldus on A ja väide B . Sõnasta teoreem, pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Kirjuta need teoreemid sümbolites. Millised neist on üheaegselt õiged või üheaegselt väärad?

524. Ütle lause $x > 5$ eitus kahel viisil.

525. Ütle lause «Kolmnurk on täisnurkne» eitus kahel viisil.

526. Ütle mingi definitsioon. Missugusest kahest osast koosneb definitsioon?

527. Kui arvu x kohta ei ole õige, et $3 \leq x \leq 10$, mis on siis õige?

528. Kui arvu a kohta ei ole õige, et $-2 < a < 2$, mis on siis õige?

529. Kui A tähistab hulka, mis koosneb täisnurksetest kolmnurkadest, ja B hulka, mis koosneb võrdhaarsetest kolmnurkadest, mida tähistab siis $A \cap B$, mida $A \cup B$?

7. ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA.

ARVUDE ÜMARDAMINE JA SELLEST TEKIV VIGA.

530. Arvu 1254 saab ümardada sajalisteni kahel viisil, nimelt võttes 1254 asemel 1200 või 1300. Esimest ümardamist nimetatakse ümardamiseks **puuduga**, teist aga ümardamiseks **liiaga**.

Vastavalt sellele on arv 1200 arvu 1254 ligikaudne väärtus **puuduga** ja arv 1300 arvu 1254 ligikaudne väärtus **liiaga**.

Arvu ja tema ligikaudse väärtuse kohta öeldakse, et nad on **ligikaudu võrdsed**. Seda võrdsust märgitakse sümboliga \approx , mida loetakse «on ligikaudu võrdne», näiteks

$$1254 \approx 1300.$$

Asendades antud arvu ükskõik kummaga nendest ligikaudsetest väärtustest, teeme vea, mida nimetatakse **ümardamisveaks**. Puuduga ümardamise juhul on siin ümardamisvea 1254—1200, s. o. 54, liiaga ümardamise puhul 1300—1254, s. o. 46.

Täisarvude ümardamisel asendatakse iga ärajääv number nulliga, kümnendmurdude ümardamisel jäetakse aga lõpunumbrid lihtsalt ära.

Näide. 1685 \approx 1700 (ümardatult sajalisteni);

37,658 \approx 37,7 (ümardatult kümnendikeni).

531. Maakera läbimõõt poolusest pooluseni on 12713,8 km. Anna maakera läbimõõdu ligikaudne väärtus tuhandetes kilomeetrites. Kui suure vea teed, kui ümardad selle arvu tuhandeliste puuduga? liiaga?

Kummal juhul on viga väiksem?

532. Euroopa pindala on 9 439 926 km². Ümarda see arv tuhandeliste nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

533. Ringjoone pikkuse ja ringi läbimõõdu suhe on 3,141592653... Ümarda see arv sajandikeni nii puuduga kui ka liiga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

534. *Selleks et ümardamisviga oleks võimalikult väike, on kokku lepitud*

ümardada liiga, kui esimene ärajääv number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja puuduga, kui see on 0, 1, 2, 3 või 4.

Järgnevat esimeses ümarda ikka selle reegli järgi.

535. Ümarda kümnelisteni arvud

37,4; 182; 1645; 5,6; 2049; 305.

Määra ümardamisvead ning leia nende hulgast suurim.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnelisteni?

Näide. $716,4 \approx 720$; ümardamisviga on 3,6.

536. Ümarda kümnendikeni

3,78; 4,348; 6,85; 29,391; 36,54; 0,259.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnendikeni?

537. Ümarda täismetriteks

2,7 m; 16,3 m; 28,5 m; 39,4 m; 128 dm; 365 dm; 894 dm; 191 cm; 236 cm; 3799 cm; 5830 cm.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui mingi pikkuse ümardame täismetriteks?

538. Suurimat võimalikku ümardamisviga nimetatakse ümardamisvea ülemmääraks.

Ümardades kümnelisteni on vea ülemmäär 5 (vt. ül. 535), ümardades kümnendikeni on vea ülemmäär 0,05 (vt. ül. 536) jne. Üldiselt:

arvude ümardamisel on ümardamisvea ülemmääraks pool selle järgu ühikust, milleni ümardati.

Ümardades arve näiteks tuhandelisteni, on ümardamisvea ülemmääraks pool tuhandest, s. o. 500.

539. Kui suur on vea ülemmäär, kui arv ümardati sajalisteni? sajandikeni? ühelisteni? kümnelisteni? tuhandikeni?

540. Ümarda järgmised arvud

a) tuhandikeni:	b) sajandikeni:	c) kümnendikeni:
0,2096	19,407	48,805
27,0607	8,095	4,83
4,00852	5,5428	0,754
6,90049	11,1065	127,896
1,82171	1,009	6,695
15,0999	2,999	14,051

Märkus. Kui kümnendmurru ümardamisel esimene allesjääv number on 0, siis seda nulli ei kustutata. Miks?

Näide. Ümardatult sajandikeni $1,997 \approx 2,00$, ümardatult kümnendikeni $1,997 \approx 2,0$ ja ümardatult ühelisteni $1,997 \approx 2$.

541. Ümarda järgmised arvud nii, et ümardamisvea ülemäär oleks 5.

1237,698; 75,6789; 465,5664; 791,1243; 65,0075.

542. Ümarda eelmise ülesande arvud nii, et ümardamisvea ülemäär oleks: a) 0,5; b) 50; c) 0,005; d) 0,05.

543. Ümarda järgmised arvud

- a) sajandikeni: 0,2093; 27,0605; 4,00202;
- b) ühelisteni: 1,23; 0,746; 19,507; 8,09; 2,103;
- c) tuhandikeni: 0,7385; 9,2297; 16,3776; 9,999;
- d) kümnelisteni: 18,1; 96,2; 15,099; 19,101; 85,5;
- e) tuhandelisteni: 817,8; 1511; 3690; 12723; 999;
- f) kümnendikeni: 2,53; 0,95; 6,678; 0,6099.

544. Ümarda järgmised arvud kümnelisteni ning määratud ümardamisviga: 503; 817; 4305; 21 658; 21 814.

545. Ümarda järgmised arvud tuhandelisteni ning määratud ümardamisviga: 23 458; 13 709; 100 998; 365 651.

546. Ümarda järgmised arvud ühelisteni ning määratud ümardamisviga: 0,8; 3,7; 15,5; 0,379; 1,813; 2,972.

547. Teisenda kümnendmurruks $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{55}$ täpsusega 0,005, s. t. nii, et saadud kümnendmurru ümardamisel tekkiv viga oleks väiksem kui 0,005.

Näide. $\frac{7}{15} = 0,466\dots \approx 0,47$.

548. Ümarda järgmised tulemused tuhandikeni:

a) $2,496 : 0,48$ b) $32,204 : 7,1$ c) $1,8 : 0,288$

ARVU ALAMTÖKE JA ÜLEMTÖKE.

549. Olgu mingi arvu x ümardamisel sajalisteni saadud 2700, s. t. $x \approx 2700$. Kui ümardamine on toimunud ülesandes 534 antud reegli kohaselt, siis arv x , mille täpne väärtus ei ole teada, peab olema väiksem kui 2750, kuid suurem kui 2650 (mõnikord ka viimasega võrdne):

$$2650 < x < 2750.$$

Arve 2650 ja 2750 nimetame tundmatu arvu x tõketeks, nimelt on 2650 tema alamtöke ja 2750 tema ülemtöke.

550. Eesti NSV pindala p on sadade ruutkilomeetriteni ümardatult $45\,100 \text{ km}^2$. Anna pindala p tõkked.

551. Tervete meetriteni ümardatult on koolimaja pikkus $p \approx 42 \text{ m}$ ja laius $l \approx 14 \text{ m}$. Anna suuruste p ja l tõkked.

552. Olgu tundmatu arvu x ümardamisel saadud tema ligikaudseks väärtuseks a , kusjuures selle ligikaudse väärtuse vea ülemmäär on v . Siis on arvu x ülemtöke $a + v$ ja alamtöke $a - v$:

$$a - v < x < a + v.$$

Seega

arvu ülemtöke võrdub selle arvu ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära summaga, alamtöke võrdub ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära vahega.

Näide. Kui $x \approx 15,4$ ja $v = 0,05$,
siis

$$15,4 - 0,05 < x < 15,4 + 0,05$$

ehk

$$15,35 < x < 15,45.$$

Nimeta tundmatu arvu x kolm võimalikku väärtust. Kas on võimalik, et $x = 15,3$? $x = 15,4$?

553. Ümardamisel kümnendikeni saadi arvud:

$a = 53,8$; $b = 14,3$; $c = 187,6$; $d = 48,5$; $e = 5,0$.

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke? Vastus anna kujul:

$$53,75 < a < 53,85.$$

554. Ümardamisel sajandikeni saadi arvud:

$$a = 1,07; b = 0,12; c = 19,36; d = 187,05; e = 40,00.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

555. Ümardamisel tuhandikeni saadi arvud:

$$a = 16,825; b = 4,791; c = 63,559; d = 191,099; e = 0,030.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

556. Anna järgmiste suuruste tõkked nende suuruste ligikaudsete väärtuste põhjal:

$$a = 0,8; b = 6,5; c = 1,25; d = 12,683; e = 79; f = 6300; \\ g = 48\ 000; h = 6795; i = 21.$$

557. Kui kirjutatakse, et klassi pikkus on 12,0 m, siis tahtakse sellega öelda, et viga mõõtmisel ei ületa 0,05 meetrit.

Kui suur on klassi pikkuse alam- ja ülemtõke? Kuidas mõjuks nulli kustutamine arvu lõpust vea ülemmäärale?

558. Missugune on vea ülemmäär ning ülem- ja alamtõke, kui kirjutatakse, et mingi raskus on 16,0 t? 9,00 t? 25,000 kg? 0,030 t?

TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD.

559. Igasugune arvutamine tähendab antud arvude kaudu otsitavate arvude leidmist. Antud arvud on võetud sageli igapäevasest elust, on saadud seega mõõtmise, loendamise ja arvutamise teel, kusjuures need andmed on sageli ümardatud.

Kõik ümardamise teel saadud arvud on ligikaudsed.

560. Missuguse vea ülemmääraga saab mõõta pikkusi mõõdupuu abil, millel pole a) detsimeetritest peenemaid jaotusi, b) sentimeetritest peenemaid jaotusi, c) millimeetritest peenemaid jaotusi?

Kõik mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

Mõõtmisel saadud arve kirjutatakse tavaliselt nii, et mõõtmisviga poleks suurem kui pool arvu viimase järgu ühikut. Seega

tuleb mõõtmisel saadud ligikaudseid arve mõista ja kirjutada niisamuti nagu ümardamisel saadud ligikaudseid arvegi.

Näiteid. 1) Kui tänava laius $l \approx 8,4$ m, siis see tähendab, et

$$8,35 \text{ m} < l < 8,45 \text{ m}.$$

2) Kui laua pikkus $p \approx 1,20$ m, siis see tähendab, et

$$1,195 \text{ m} < p < 1,205 \text{ m}.$$

3) Kui rauatüki kaalumisel saadi $k \approx 73,0$ g, siis see tähendab, et

$$72,95 \text{ g} < k < 73,05 \text{ g}.$$

561. a) Loendamise tulemus on ligikaudne arv, kui loendata-
vaid esemeid on palju, kui nad loendamise ajal muudavad oma
asukohta, on paigutatud korrapäraselt jne.

Kuigi loendamise tulemus on mõnikord täpne arv, tuleb see
arvutamise ja meelespidamise hõlbustamiseks asendada ümarda-
misel saadava ligikaudse arvuga. Kui näiteks linna elanike arvuks
saadi rahvaloendusel 271 826 inimest, siis ümardatakse see hari-
likult arvuks 272 000.

b) Ligikaudsed arvud võivad tekkida ka arvutamise tulemu-
sena. Olgu näiteks vaja jaotada 24 m traati 7-ks võrdseks osaks.
Siis iga osa pikkus meetrites on

$$24 : 7 = 3,42857 \dots$$

Tulemuse kasutamiseks peame selle ümardama. Nii saame
jagatiseks ligikaudse arvu 3 või 3,4 või 3,43 jne.

Kui suure vea ülemmääraga on antud need jagatised?

562. Asudes lahendama ükskõik millist ülesannet, on kõige-
pealt vaja endale selgeks teha, missugused selles ülesandes esi-
nevad andmed on ligikaudsed ja missugused täpsed.

Näiteks ülesandes «Korrapärase kaheksanurga külje pikku-
seks saadi mõõtmisel 5,7 m. Kui suur on selle kaheksanurga
ümbermõõt?» esinev arv 8 on täpne arv, 5,7 aga ligikaudne arv,
kuna see on saadud mõõtmise tulemusena.

563. Otsusta, kas alltoodud arvud väljendavad suuruse täp-
set või ligikaudset väärtust.

a) Kooli õpilaste arv on nimekirja järgi 791.

b) Linnas on 72 000 elanikku.

- c) Tööline sai kassast 82 rubla palka.
- d) Rong sõitis Tallinnast Moskvasse 23 tundi.
- e) Isa, ema ja poja vanus on kokku 112 aastat.
- f) Muuseumi külastas kuu jooksul 2500 inimest.
- g) Kauplusest müüdi nädala jooksul 450 paari jalatseid.
- h) Raamatukogu raamatute arv on 25 000.
- i) Raudteerööpa pikkus on 10,35 m.
- j) Jalgratta ratta kõrgus on 0,63 m.
- k) Bensiinivaadi maht on 125 l.

Määra iga ligikaudse arvu vea ülemmäär.

564. a) Kui ligikaudse arvu vea ülemmäär ei ole pool selle arvu viimase järgu ühikut, siis tuleb vea ülemmäär eraldi näidata. Näiteks, kui mingi pikkuse mõõtmisel saadi 126 mm veaga alla 2 mm, siis selle pikkuse x kirjutame millimeetrites järgmiselt:

$$x = 126 (\pm 2).$$

Arvu x tõkked on nüüd

$$124 < x < 128.$$

Üldiselt, kui arvu x ligikaudne väärtus on a ja selle vea ülemmäär on v , siis kirjutame, et

$$x = a (\pm v).$$

See kirjutus tähendab sama, mis

$$a - v < x < a + v.$$

b) Kui ligikaudse arvu tõkked $a - v$ ja $a + v$ on teada, siis arvu ligikaudse väärtuse leidmiseks arvutame tõkete poolsumma, sest

$$\frac{(a - v) + (a + v)}{2} = \frac{2 \cdot a}{2} = a,$$

ja vea ülemmäära leidmiseks arvutame tõkete poolvahe:

$$\frac{(a + v) - (a - v)}{2} = \frac{2 \cdot v}{2} = v.$$

Näiteks, kui

$$4,36 < x < 4,38,$$

siis

$$x = \frac{4,36 + 4,38}{2} \left(\pm \frac{4,38 - 4,36}{2} \right)$$

ehk

$$x = 4,37 (\pm 0,01).$$

565. Teadlased on leidnud, et planeet Merkuuri pöörlemis-periood on $58,4 (\pm 0,6)$ päeva. Missuguste tükete vahel asetseb Merkuuri pöörlemisperiood?

566. a) Kuu tiirlemisel ümber Maa tema kaugus Maast muu-
tub. See kaugus on avaldatav kujul

$$t = 381\,600 (\pm 25\,200) \text{ km.}$$

Leia tüked, mille vahel asetseb Kuu kaugus Maast.

b) Päikese ja Maa vahelise kauguse k tüked on

$$147,1 \text{ milj. km} \leq k \leq 152,1 \text{ milj. km.}$$

Avalda siit Päikese kaugus Maast.

LIGIKAUDSE ARVU RELATIIVSE VEA ÜLEMMÄÄR.

567. Sageli on vaja võrrelda kahe ligikaudse arvu täpsust. Kui kahe arvu ligikaudsed väärtused on võrdsed, nende vea ülemmäärad aga erinevad, siis täpsemaks tuleb lugeda see arv, mille vea ülemmäär on väiksem. Näiteks, kui

$$x = 12 (\pm 0,7) \text{ ja } y = 12 (\pm 0,2),$$

siis arv y on täpsemalt teada kui arv x , sest ühesuguse ligikaudse väärtuse juures on teise arvu vea ülemmäär tunduvalt väiksem esimese omast. Niisamuti $5,0$ on täpsem kui $5 (\pm 0,2)$, sest esimese arvu vea ülemmäär on $0,05$, teise oma aga $0,2$.

568. Otsusta, kumb kahest ligikaudsest arvust on täpsem:

$$52 \text{ ja } 52 (\pm 0,6)$$

$$240 \text{ ja } 240 (\pm 0,5)$$

$$7,8 \text{ ja } 7,8 (\pm 0,1)$$

$$3,14 \text{ ja } 3,14 (\pm 0,002)$$

569. Ruumi pikkuse mõõtmisel saadi $8,0$ m. Kui suur on mõõtmisvea ülemmäär pikkuse iga meetri kohta?

L a h e n d u s: $8,0$ m kohta on mõõtmisviga alla $0,05$ m;

$$1 \text{ m} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{0,05}{8} \approx 0,006 \text{ m.}$$

570. Keha kaalumisel saadi $36,4 (\pm 0,2)$ grammi. Kui suur kaalu vea ülemmäär tuleb keha kaalu iga grammi kohta?

571. Ligikaudsete arvude täpsuse võrdlemiseks kasutatakse ligikaudse arvu vea ülemmäära ja selle arvu ligikaudse väärtuse jagatist. Mida väiksem on see jagatis, seda täpsem on ligikaudne arv.

Ligikaudse arvu vea ülemmäär ja arvu ligikaudse väärtuse jagatist nimetatakse ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmääraks.

Relatiivse vea ülemmäär avaldatakse tavaliselt protsentides.

Näide. Kui $a = 25 (\pm 0,6)$ cm, siis arvu a relatiivse vea ülemmäär on

$$\frac{0,6}{25} = 0,024 = 2,4\%$$

Relatiivse vea ülemmäär arvutatakse tavaliselt kuni protsendi kümnendikeni ja ümardatakse ikka liiaga.

Arvu vea ülemmäär nimetame edaspidi sageli **absoluutse vea ülemmääraks**, et vältida tema äravahtamist relatiivse vea ülemmääraga. Absoluutse vea ülemmäär on harilikult nimega arv, nagu arvu ligikaudne väärtuski, kuid relatiivse vea ülemmäär on ikka nimeta arv, sest ta väljendab kahe ühenimelise suuruse suhet.

Ülaltoodud näites on absoluutse vea ülemmäär 0,6 cm, relatiivse vea ülemmäär aga 2,4%.

Täpse arvu relatiivse vea ülemmäär on 0, sest tema absoluutse vea ülemmäär on 0.

572. Arvuta järgmiste ligikaudsete arvude relatiivse vea ülemmäärad.

8 ($\pm 0,2$) cm	5,40 dm	3700
15 ($\pm 0,7$) g	12,0 dm	5,80
256 ($\pm 3,5$) sek.	4650 km	3,14 ($\pm 0,002$)

573. Kahest ligikaudsest arvust on see arv täpsem, mille relatiivse vea ülemmäär on väiksem, sest selles on ühiku kohta tulev absoluutse vea ülemmäär väiksem.

Näide. Kui $a = 6 (\pm 0,1)$ kg ja $b = 140 (\pm 3)$ g, siis arvu a relatiivse vea ülemmäär on

$$\frac{0,1}{6} = 0,017 = 1,7\%,$$

arvu b relatiivse vea ülemmäär on

$$\frac{3}{140} = 0,022 = 2,2\%.$$

Seega arv a on täpsem.

574. Maatüki pikkuse mõõtmisel saadi 148 m ja laiuse mõõtmisel 23 ($\pm 0,1$) m. Kumb neist mõõtmistulemustest on täpsem?

575. Keha kaal on 48 ($\pm 0,2$) grammi ja ruumala 15,4 cm³. Kumb neist andmetest on täpsem?

576. Koolimajast kaupluseni on 120 meetrit ja raudteejaamani 2,5 kilomeetrit. Kumb kaugus on täpsemalt teada?

577. Õpiku paksus on 15 mm, pikkus 24 ($\pm 0,2$) cm ja laius 15 cm. Missugune neist andmetest on kõige täpsem?

578. Pliiatsi pikkus on 18 cm relatiivse veaga mitte üle 1%. Leia absoluutse vea ülemmäär.

579. Keha kaal on 650 g relatiivse veaga mitte üle 0,4%. Kui suur on kaalu absoluutse vea ülemmäär?

580. a) Ristküliku pikkus on 20 ($\pm 0,4$) cm ja laius ligikaudu 8 cm. Kui suure vea ülemmääraga peaks olema teada laius, et mõlemad andmed oleksid ühesuguse täpsusega?

b) Õpilane jooksis 200 meetrit ajaga 38 ($\pm 0,2$) sekundit. Kui suure vea ülemmääraga peaks olema mõõdetud jooksuraja pikkus, et mõlemad andmed oleksid ühesuguse täpsusega?

581. Laeval kulub ühest teatud sadamast teise sõitmiseks tavaliselt 3 t. 20 min. relatiivse veaga mitte üle 8%. Leia tõkkel, millede vahel asetseb laeva sõiduaeg.

582. Tee järgnev tabel vihikusse ja täida selle tühjad kohad.

Arvu ligik. väärtus	Absol. vea ülemmäär	Relat. vea ülemmäär	Alamtõke	Ülemtõke
24	0,3			
3,5	0,02			
12,0				
750		0,8%		
6,25		0,5%		
15,4			4,35	4,45
			32,6	32,8
	6	2%		
	0,4	0,4%		

LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE.

583. Õpilased mõõtsid jaama kaugust koolimajast. Seda teostati osade kaupa. Saadi järgmised tulemused: koolimajast sidekontorini on 229 m, sidekontorist apteegini 198 m ja apteegist raudteejaamani 377 m. Kui kaugel asetseb raudteejaam koolimajast?

○ ————— ○ ————— ○ ————— ○
 Koolimaja Sidekontor Apteek Raudteejaam

Liites need aroud, saame:

$$\begin{array}{r} 229 \\ + 198 \\ \hline 377 \\ \hline 804 \end{array}$$

Ulesande andmed on saadud mõõtmise teel ja on seega ligikaudsed. Järelikult on ligikaudne ka saadud summa. Kuidas tuleb see summa ümardada?

Sellele küsimusele vastuse saamiseks leiame otsitava summa **alamtõkke**, liites liidetavate alamtõkked, ja **summa ülemtõkke**, liites liidetavate ülemtõkked.

Summa alamtõkke:

$$\begin{array}{r} 228,5 \\ 197,5 \\ 376,5 \\ \hline 802,5 \end{array}$$

Summa ülemtõkke:

$$\begin{array}{r} 229,5 \\ 198,5 \\ 377,5 \\ \hline 805,5 \end{array}$$

Seega teame otsitavast kaugusest x järgmist:

$$802,5 < x < 805,5.$$

Võrdleme otsitava summa ligikaudset väärtust, tema alam- ja ülemtõket omavahel.

804
802,5
805,5

Kõigis kolmes arous esineb üks ja sama sajaliste ning üks ja sama kümneliste number (8 ja 0). Üheliste numbrid on erinevad: 4, 2 ja 5. Lepime kokku kirjutada ligikaudsete arvudega arutamisel tulemusi nii, et kõik nendes esinevad numbrid oleksid õiged, peale viimase, mis võib õigest erineda. (Selleks viimaseks numbriks ei tohi olla muidugi mingi juhuslikult võetud number, vaid arutamisel või ümardamisel saadud number.) Selle

kokkuleppe kohaselt võtame otsitava summa ligikaudseks väärtuseks 804. Seda pole enam vaja ümardada, sest ta vastab ülaltoodud kokkuleppele.

Vastus. Raudteejaama kaugus koolimajast on 804 m.

584. Arvutamisel ligikaudsete arvudega ei ole tulemuse vea ülemmäär enam pool ligikaudse arvu viimase järgu ühikust, nagu on andmete vea ülemmäär. Lahutades eelmises ülesandes vaadeldud summa ülemtökkest 805,5 selle ligikaudse väärtuse 804, saame 1,5. Sama tulemuse saame, kui ligikaudsest väärtusest 804 lahutame alamtökke 802,5. Tähendab, ligikaudse arvu 804 vea ülemmäär on juba 1,5. Kui ligikaudse arvu vea ülemmäär ei ole pool tema viimase järgu ühikust, siis märgitakse vea ülemmäär arvu järele sulgudesse:

$$x \approx 804 (\pm 1,5).$$

585. Kaalumise teel määrati kindlaks, et tühi pudel kaalub 239,2 g ja kork 5,24 g. Pudelissee valati 25 g vett. Kui palju kaalub nüüd pudel koos vee ja korgiga?

Alamtöke	Ligikaudne väärtus	Ülemtöke
239,15	239,2	239,25
5,235	5,24	5,245
24,5	25	25,5
<hr/> 268,885	<hr/> 269,44	<hr/> 269,995

Õigeid numbreid, nagu nende kolme summa kõroutamine näitab, on saadud summas ainult kaks: 2 ja 6 (sajalised ja kümnelised). Sel põhjusel on õige ümardada summa ühelisteni:

$$269,44 \approx 269.$$

Vastus. Pudel koos korgi ja veega kaalub 269 g.

586. Missugused arvu järgud on antud eelmise ülesande esimeses liidetavas? teises liidetavas? kolmandas liidetavas?

Missugune on kõige madalam järk, mis kõikides andmetes on antud?

Missuguse järguni tuli ümardada ligikaudsete arvude summa?

Ligikaudsete arvude summa tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis kõikides liidetavates on teada.

Märkus. Kui mõni liidetav on täpne arv, siis selle järgu määramisel, milleni summat ümardada, seda liidetavat ei arves-

tata. Näiteks, kui ülesandes 585 oleks 25 täpne arv, siis tuleks summa ümardada esimese ligikaudse liidetava järgi, s. o. küm-
nendikeni.

587. Tee kindlaks, millise järguni tuleb ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirja põhjal ümardada iga järgmine ligikaudsete arvude summa:

- a) $29,594 + 3,7 + 0,9009$; d) $444,4 + 2,22 + 111,111$;
b) $0,00825 + 0,002 + 0,87$; e) $0,2093 + 27 + 4,008$;
c) $9,4 + 2,7327 + 7,26$; f) $0,08 + 0,10023 + 0,7$.

588. Ümarda järgmised summad vastavalt ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjale:

- a) $57,028 + 0,3 + 84 = 141,328 \approx \dots$
b) $0,2 + 49,35 + 0,069 = 49,619 \approx \dots$
c) $40 + 0,91 + 51,7 = 92,61 \approx \dots$

589. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa ning ümarda see:

- a) $137\,000 + 680 + 31\,200 + 1700$;
b) $395 + 710 + 2900 + 3600$;
c) $478\,000 + 6750 + 4781 + 5400$.

590. Olgu vaja liita neli ligikaudset arvu:

$$3,5 + 6,7837 + 4,257 + 0,07896.$$

Liidame need:

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ 6,7837 \\ 4,257 \\ 0,07896 \\ \hline 14,61966. \end{array}$$

Ligikaudsete arvude summa ümardamise reegli kohaselt tuleb saadud tulemuses säilitada ainult üks koht pärast koma (miks?).

$$14,61966 \approx 14,6.$$

Kolme viimase liidetava suurem täpsus osutus siin kasutuks ja ülearused kohad pärast koma nõudsid tarbetut tööd.

Seda tööd saab vältida, kui enne liitmist suurema täpsusega liidetavad ümardada nii, et neis jääks üks koht (varunumber) koma järel rohkem, kui on kõige väiksema täpsusega liidetavas.

Ümardame kolm viimast liidetavat ühe varunumbriga ning liidame uuesti:

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ 6,78 \\ 4,26 \\ 0,08 \\ \hline 14,62 \approx 14,6. \end{array}$$

Saime endise tulemuse.

Suurema täpsusega antud liidetava ümardamine enne liitmist kergendab arvutamist. Rakenda seda kergendavat võtet.

591. Ümarda eelmises ülesandes antud ligikaudsed arvud kümnendikeni (nagu on antud väikseima täpsusega liidetav 3,5) ja liida siis. Missuguse tulemuse saad? Miks on liidetavate ümardamisel vaja säilitada üks varunumber?

592. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa:

- a) $0,52 + 0,079 + 12$; b) $1,038 + 12,5$;
c) $4,8 + 0,475 + 3,5691$; d) $12,57 + 0,617 + 32$;
e) $0,72 + 0,6482 + 0,01686$; f) $15,240 + 2,6463 + 0,81418$.
g) $52,3 + 432 + 250 + 26,47$;

593. Turist käis 94 km jalgsi, sõitis 895,6 km rongiga ja 240 km laevaga. Kui pikk oli kogu teekond?

594. Uhes tükis on 17,25 m nõõri, teises 19 m ja kolmandas 21,3 m. Mitu meetrit nõõri on kolmes tükis kokku?

595. Kolmnurga külgede mõõtmisel saadi pikkused 20,7 m, 14,53 m ja 21 m. Arvuta kolmnurga übermõõt.

596. Kollase vase valmistamiseks võeti 64,1 kg punast vaske, 32,75 kg tsinki ja 2,863 kg tina. Kui palju kaaluvad võetud metallid kokku?

597. Nelinurkse aia ümber ehitati tara. Aia üks külg oli 20 m, teine külg 16,8 m, kolmas 184 dm ja neljas 22,75 m. Kui pikk on kogu tara?

598. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe numbriga koma järel ja leia summa S .

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{11}{12} + \frac{11}{15}.$$

Kontrolli saadud tulemuse õigsust, sooritades tehted harilike-murdudega ning teisendades siis tulemuse kümnendmurruks.

599. Teisenda liidetavad kümnendmurdudeks kahe kohaga koma järel ning leia tulemus.

$$a) 4\frac{1}{7} + 5\frac{4}{9} + 3\frac{5}{11} \qquad c) 11\frac{15}{309} + 111\frac{17}{412} + 1\frac{1}{206}$$

$$b) 10\frac{5}{9} + 6\frac{9}{11} + \frac{4}{7} \qquad b) 4\frac{5}{63} + 5\frac{1}{79} + \frac{11}{51}$$

600. Ristkülikukujulise maatüki pikkus on 1240 m ja laius 236 m. Leia selle maatüki übermõõt.

601. Maja ehitamiseks vajatakse 1 532 000 punast tellist ja 325 500 silikaatkivi. Mitu kivi on vaja selle maja ehitamiseks?

602. Kolhoosi maa-alast on põldude all 1550 ha, metsa all 640 ha, heinamaa all 1360 ha ning muuks otstarbeks kasutatakse 345 ha. Kui palju maad on sellel kolhoosil?

LIGIKAUDSETE ARVUDE LAHUTAMINE.

603. Olgu vaja leida ligikaudsete arvude 22,8 ja 1,248 vahe. Lahutades saame:

$$\begin{array}{r} 22,8 \\ - 1,248 \\ \hline 21,552. \end{array}$$

Millise järguni ümardada saadud vahet?

Leiame vahe alamtõkke, lahutades vähendatava alamtõkkest lahutatava ülemtõkke, sest vahe on seda väiksem, mida väiksem on vähendatav ning mida suurem on lahutatav:

$$\begin{array}{r} 22,75 \\ - 1,2485 \\ \hline 21,5015. \end{array}$$

Vahe ülemtõkke leidmiseks lahutame vähendatava ülemtõkkest lahutatava alamtõkke, sest vahe on seda suurem, mida suurem on vähendatav ja mida väiksem on lahutatav:

$$\begin{array}{r} 22,85 \\ - 1,2475 \\ \hline 21,6025. \end{array}$$

Seega teame otsitavast vahest x järgmist:

$$21,5015 < x < 21,6025.$$

Võrdleme leitud vahet tema alam- ja ülemtõkkega.

21,552
21,5015
21,6025

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama kümne-
liste ning üks ja sama üheliste number (2, 1). Küm-
nendike numbris on erinevusi: 5, 5 ja 6. Vastavalt
arutamise tulemuste kirjutamise kokkuleppele
peame ümardama:

$$21,552 \approx 21,6.$$

Tulemusest saame teha sama järelduse mis liitmisegi puhul:

ligikaudsete arvude vahe tuleb ümardada kõige mada-
lama järguni, mis on teada nii vähendatavas kui ka lahu-
tatavas.

604. Tee arvatamata kindlaks, mitu numbrit saame koma järel
vastavalt vahe ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete
arvude vahes:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| a) 276,1 — 69,8943; | d) 0,75958 — 0,6; |
| b) 97,8 — 0,8594; | e) 7,8004 — 2,23; |
| c) 784,4908 — 35,3; | f) 3,5 — 0,789. |

605. Ümarda järgmised vahed vastavalt vahe ümardamise
eeskirjale:

- a) $10,7 - 0,532 = 10,168 \approx \dots$
b) $15,348 - 8,3 = 7,048 \approx \dots$
c) $2 - 1,221 = 0,779 \approx \dots$

606. Teosta järgmiste erineva täpsusega ligikaudsete arvude
lahutamise: 1) tavalisel viisil; 2) ümardades suurema täpsusega
ligikaudset arvu enne lahutamist ühe varunumbrini.

- a) $14,8 - 2,3651$;
b) $29,3785 - 7,6$.

Ümarda saadud tulemused eespool toodud ligikaudsete arvude
vahe ümardamise reegli kohaselt. Võrdle saadud tulemusi. Millise
järelduse võid sellest teha?

Rakenda seda arutamist kergendavat võtet ligikaudsete
arvude lahutamisel.

607. Lahuta järgmised ligikaudsed arvud:

1) 9 — 0,85	2) 81 — 0,09	3) 5,6 — 2,367
17 — 0,24	48 — 28,58	17,993 — 8,4
15 — 13,351	30 — 18,86	29,72 — 8,643
500 — 14,275	8,65 — 7	4,153 — 2,9

608. Leia järgmiste ligikaudsete arvude vahe:

1) 377 — 2,35	2) 8,1 — 5,906	3) 74,38 — 27
58,41 — 55,7	738 — 69,465	115,25 — 49
12 — 1,18	895,1 — 386,472	4,195 — 2,5
684,42 — 36,8	85 — 68,642	98 — 10,75
4,7 — 0,522	0,2 — 0,057	60 — 21,40

609. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbriga koma järel ning arvuta alltoodud arvude vahe:

a) $\frac{9}{18} - \frac{1}{15}$

d) $\frac{11}{18} - \frac{11}{90}$

b) $\frac{15}{27} - \frac{1}{18}$

e) $\frac{13}{85} - \frac{11}{17}$

c) $\frac{25}{27} - \frac{10}{21}$

f) $\frac{17}{70} - \frac{11}{35}$

Kontrolli saadud tulemuste õigsust, teostades tehted harilike murdudega ning teisendades vahe kümnendmurruks.

610. Kahe ligikaudse arvu summa on 120,4. Üks liidetavatest on 50,98. Leia teine liidetav.

611. Auto, sõites kiirusega 68,7 km tunnis, möödub teisest samas suunas sõitvast autost, mille kiirus on 49 km tunnis. Kui kaugel olid need autod teineteisest üks tund enne kohtumist?

612. Sulatati 64,85 kg vaske, 32,755 kg tsinki ja 2,1 kg tina. Metalli kadu sulamisel oli 2215 g. Leia saadud sulami kaal.

613. Linnas A on ligikaudu 175 000 elanikku, linnas B aga 89 500 elanikku. Kui palju on linnas A elanikke enam?

614. Sovhoosi metsas kasvas ligikaudu 5200 puud. Aasta jooksul raiuti maha ligikaudu 860 puud. Mitu puud on veel sovhoosi metsas?

615. Kütteleadu sai $15\,500\text{ m}^3$ puid. Sellest on laos järel 210 m^3 . Kui palju puid on müüdnud?

616. Pudel koos petrooleumiga kaalub $1,42\text{ kg}$, pudel kaalub $0,543\text{ kg}$. Kui palju kaalub pudelis olev petrooleum?

617. Korterite põranda pindala on $79,43\text{ m}^2$, sellest on ahjude all $5,325\text{ m}^2$. Kui palju on vaba põrandapinda?

618. Mensuuris on $62,0\text{ cm}^3$ vett. Mensuuri lasti tinatükk, mille järel veepind tõusis $94,35\text{ cm}^3$ -ni. Kui suur on tinatüki ruumala?

619. Kauba brutokaal on $1,23\text{ t}$, taarakaal $0,150\text{ t}$. Kui palju kaalub kaup?

620. Leia järgmised vahed, kui üks arvudest on ligikaudne ja teine täpne arv (täpne arv on antud jämedas kirjas):

a) $0,96 - 0,5$; b) $3,2 - 0,12$; c) $3,27 - 0,2$;

d) $8,065 - 0,0035$.

Märkus. Täpset arvu vahe ümardamisel ei arvestata (vt. ül. 586).

LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE.

621. Arvutame korrutise $7 \cdot 0,052$, milles esimene tegur on täpne ja teine ligikaudne arv, ning küsime, missuguse järguni tuleb tulemus ümardada.

Korrutades antud arvud, saame

$$7 \cdot 0,052 = 0,364.$$

Et teise teguri vea ülemmäär on $0,0005$, siis võib arvutatud korrutis õigest tulemusest erineda juba kuni

$$7 \cdot 0,0005 = 0,0035$$

võrra. Seega ei ole arvutatud korrutise viimasel järgunumbri 4 mingit mõtet ja me ümardame korrutise sajandikeni:

$$7 \cdot 0,052 = 0,364 \approx 0,36.$$

622. Eelmises ülesandes toodud näite eeskujul saaksime:

$$70 \cdot 0,052 = 3,6;$$

$$0,7 \cdot 0,052 = 0,036;$$

$$7 \cdot 0,0052 = 0,036;$$

$$0,07 \cdot 5200 = 360.$$

Selleks et sõnastada siit silmanähtavat ümardamisreeglit, jätame nii ligikaudses teguris (0,052; 0,0052; 5200) kui ka korrutises (0,36; 3,6; 0,036; 360) koma ja nullid arvu kirjutise alguses ja lõpus ära ning vaatleme siis saadud numbrite rühmi 52 ja 36. Esi-
mest numbrite rühma (52) nimetatakse teguri **tüveks** ja teist (36) korrutise **tüveks**. Arvu tüves esinevad numbrid on arvu **tüvenumbrid**.

Ligikaudse täisarvu tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui arvu lõpus olevad nullid ära jätame.

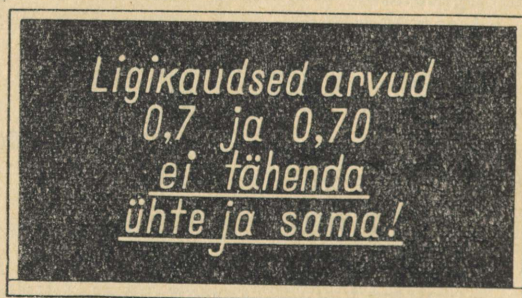
Ligikaudse kümnendmurru tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui koma ja arvu alguses olevad nullid ära jätame.

Erandina kuulub 0 täisarvu lõpus mõnikord tüvenumbrite hulka (vt. ül. 624).

Näiteid.

- a) 5200, tüvi 52;
- b) 360, tüvi 36;
- c) 0,07, tüvi 7;
- d) 0,070, tüvi 70.

Nagu näeme, on eespool saadud korrutistes niisama palju tüvenumbreid, kui palju neid on ligikaudses teguris.



Joon. 94.

Seega

täpse arvu ja ligikaudse arvu korrutis tuleb ümardada nii, et korrutises oleks niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses teguris.

623. Kirjuta järgmiste ligikaudsete arvude tüved:
250; 7500; 0,07; 1,005; 0,070; 0,3009; 3,090.

Märkus. Kümnennumru lõpus olevad nullid kuuluvad tüvenumbrite hulka.

624. Nullidega lõppev ligikaudne täisarv, mille kohta me ei tea, millise järguni ta ümardati, loetakse ümardatuks selle madalaima järguni, milles esineb veel nullist erinev number.

Näiteks loetakse ligikaudne arv 2400 ümardatuks sajalisteni, ligikaudne arv 10 030 ümardatuks kümnelisteni, ligikaudne arv 13 000 ümardatuks tuhandelisteni jne.

Nullid selliste ligikaudsete täisarvude lõpus tema tüvenumbrite hulka ei kuulu.

Kui aga on teada, missuguse järguni nullidega lõppev ligikaudne täisarv on ümardatud, ja kui selles järgus, milleni arv ümardati (võib olla ka kõrgemates järkudes), leidub nulle, siis kuuluvad need nullid tüvenumbrite hulka.

Näide.

2501 \approx 2500 (ümardatud kümnelisteni) \rightarrow 3 tüvenumbrit (2,5,0).

Arv ümardati kümnelisteni. Selles järgus asub null. See null kuulub tüvenumbrite hulka.

2500,3 \approx 2500 (ümardatud ühelisteni) \rightarrow 4 tüvenumbrit (2,5,0,0).

Nullid, mis asuvad selles järgus, milleni arv ümardati, ja sellest kõrgemates järkudes, kuuluvad tüvenumbrite hulka.

250 300 \approx 250 000 \rightarrow 3 tüvenumbrit (2,5,0). Missuguse järguni see arv ümardati? Miks kuulub esimene null tüvenumbrite hulka, kolm viimast aga mitte?

Tüvenumbrite hulka kuuluvad nullid ligikaudses täisarvus määrgime edaspidi, kus see teisiti pole selge, väikese kriipsukesega nulli all. Näiteks: arv 1700 on ümardatud kümnelisteni, järelikult on selles arvus 3 tüvenumbrit.

625. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes:
12 000; 12 000; 12 000; 12 000?

626. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes:
24; 356; 502; 7004; 20604; 250; 3100; 2050; 302 400;
5 003 000?

627. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises kümnelisteni ümardatud ligikaudses arvus: 230; 480; 1040; 20 050; 11 700?

628. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises ligikaudses arvus: 8,5; 0,42; 0,703; 6,05; 1,003; 201,03; 0,03; 0,004; 2,60; 8,240; 8,040; 0,070; 0,2080; 0,300; 2,500; 603,100; 2004,50; 9800; 83 000; 75 000; 8500; 490; 300 200; 1010?

629. Missugune erinevus on kirjutustel: «temperatuur on 37°» ja «temperatuur on 37,0°»?

630. Arvuta võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkuse mõõtmisel saadi 0,73 m.

631. Arvuta ruudu ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 5,8 dm.

632. Arvuta korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 13,6 cm.

633. Arvuta järgmised korrutised, kui esimene tegur on täpne arv ja teine ligikaudne arv:

- a) $3 \cdot 0,0042$; c) $98 \cdot 1,37$; e) $59 \cdot 0,20$;
b) $12 \cdot 0,751$; d) $60 \cdot 0,68$; f) $75 \cdot 9800$.

N ä i d e. $31 \cdot 0,60 = 18,60 \approx 19$;
 $22 \cdot 970 = 21\,340 \approx 21\,000$.

634. Klassi pikkus on 11,3 m ja laius 8,4 m. Kui suur on klassi põranda pindala?

Pindala leidmiseks tuleb pikkust ja laiust väljendavad arvud korrutada:

$$\begin{array}{r} 11,3 \\ \times 8,4 \\ \hline 452 \\ 904 \\ \hline 94,92 \end{array}$$

Klassi pikkust ja laiust väljendavad arvud on ligikaudsed (miks?), mistõttu korrutis tuleb ümardada. Küsime, missuguse järguni tuleb seda teha?

Antud arvude alamtõkked on 11,25 ja 8,35, ülemtõkked on 11,35 ja 8,45.

Korrutis omandab väikseima väärtuse, kui tegurid on võimalikult väikesed. Leiame korrutise alamtõkke, korrutades tegurite alamtõkked:

$$\begin{array}{r} 11,25 \\ \times 8,35 \\ \hline 5625 \\ 3375 \\ 9000 \\ \hline 93,9375 \end{array}$$

Nüüd korrutame tegurite ülemtõkked, et leida korrutise ülemtõke.

$$\begin{array}{r} 11,35 \\ \times 8,45 \\ \hline 5675 \\ 4540 \\ 9080 \\ \hline 95,9075 \end{array}$$

Kõrvutame nüüd kõik kolm korrutist.

Antud arvude korrutis: 94,92

Alamtõkete korrutis: 93,9375

Ülemtõkete korrutis: 95,9075

Igas korrutises on kümneliste arv üks ja sama (9). Üheliste arv aga on juba erinev: 4, 3, 5. Järelikult tuleb korrutis ümardada ühelisteni. Seega $94,92 \approx 95$.

Mitu tüvenumbrit on esimeses teguris? teises teguris? Mitu tüvenumbrit on korrutises?

Millise järelduse võid teha?

Kahe ligikaudse arvu korrutis tuleb ümardada nii, et korrutises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga teguris.

635. Määra arvutamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude korrutistes:

- a) $7 \cdot 3,587$; d) $121 \cdot 1,0042$; g) $0,57 \cdot 0,305$;
 b) $22 \cdot 5,87$; e) $1308 \cdot 0,00561$; h) $5,8 \cdot 0,001$;
 c) $1,008 \cdot 81$; f) $44 \cdot 0,207$; i) $0,3 \cdot 7,84$.

636. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude korrutised vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale:

- a) $0,8 \cdot 16,9 = 13,52 \approx \dots$ d) $366 \cdot 90 = 32940 \approx \dots$
 b) $7,2 \cdot 0,09 = 0,648 \approx \dots$ e) $0,79 \cdot 6,41 = 5,0639 \approx \dots$
 c) $24,0 \cdot 481 = 11544 \approx \dots$ f) $0,03 \cdot 0,07 = 0,0021 \approx \dots$

637. Arvuta kolmnurkse maatüki pindala, kui maatüki üks külj on 46 m ja vastastipu kaugus sellest küljest on 37 m.

638. Arvuta ligikaudsete arvude
 $3,8 \cdot 12,456$

korrutis kahel viisil: 1) korrutades tegurid antud kujul; 2) ümardades enne korrutamist suurema tüvenumbrite arvuga tegurit nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga teguris.

Ümarda tulemused korrutise ümardamise reegli kohaselt ja võrdle tulemusi. Missuguse järeltõlke võid teha?

Rakenda seda arutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude korrutamisel.

Näide. $0,06 \cdot 3,8754 = 0,06 \cdot 3,9 = 0,234 \approx 0,2$.

639. Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutised:

- | | | |
|--------------------|----------------------|------------------------|
| 1) $15 \cdot 2,34$ | 2) $15,2 \cdot 0,03$ | 3) $17,007 \cdot 4,08$ |
| $1,6 \cdot 0,25$ | $0,07 \cdot 15,25$ | $5,08 \cdot 0,0149$ |
| $7,5 \cdot 0,014$ | $0,156 \cdot 1,7$ | $6,8 \cdot 0,93$ |
| $1,01 \cdot 2,04$ | $16,15 \cdot 0,08$ | $0,991 \cdot 0,89$ |
| $0,09 \cdot 3,07$ | $23 \cdot 4,08$ | $6,07 \cdot 0,305$ |

640. Leia ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki pikkus on 1,72 km ja laius 0,34 km.

641. Laoplatstile veeti 16 250 m³ tammepalke. Arvuta palkide kaal, kui üks kuupmeeter palke kaalub 0,85 tonni.

642. Kui palju kaalub 17,5 m³ kivisütt, kui 1 m³ kivisütt kaalub 1,3 tonni?

643. Leia korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui kuusnurga külje pikkuseks saadi mõõtmisel 12,24 m.

Mitu tüvenumbrit tuleb võtta siin korrutises? Miks?

644. Teosta järgmised korrutamised (üks tegureist on ligikaudne arv; teine — täpne arv, mis on trükitud jämedas kirjas).

- 1) $8 \cdot 6,57$; 3) $0,283 \cdot 734$; 5) $90 \cdot 375$;
2) $0,85 \cdot 375$; 4) $70 \cdot 4,8$; 6) $7 \cdot 12,8$.

645. Leia korrutised:

1) $5 \frac{1}{9} \cdot 2 \frac{4}{7}$; 2) $\frac{8}{11} \cdot \frac{11}{18}$ ja 3) $5 \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{1}{11}$

kahel viisil: a) teisenda iga harilik murd kümnendmurruks ning ümarda tulemust; b) leia korrutis harilike murdude korrutamise teel ning teisenda tulemus kümnendmurruks.

Harilike murdude teisendamisel kümnendmurruks ümarda arvud esimeses ülesandes kümnendikeni, teises sajandikeni ja kolmandas tuhandikeni.

Võrdle mõlemal teel saadud korrutisi.

646. Kooli spordiväljakust oli ette nähtud katta muruga 5800 m^2 . Kui palju on selleks vaja muruseemet, arvestades ühele aarile $1,85 \text{ kg}$?

647. Sovhoosis on nisu all 1250 ha . Kui palju nisu saab sovhoos, kui loodetav saak on $18,5 \text{ ts}$ hektarilt?

648. Tööliste brigaad töötas maantee parandamisel 132 tundi, korrastades keskmiselt 24 m maanteed tunnis. Mitu meetrit maanteed parandas see brigaad?

649. Põranda värvimiseks kulub $0,242 \text{ kg}$ värvi ruutmeetrile. Kui palju värvi on vaja 43 m^2 suuruse põranda värvimiseks?

650. Leia $18,5 \text{ m}^3$ kivisöe kaal, kui 1 m^3 kivisütt kaalub $1,3 \text{ t}$.

651. Kui palju kaalub $12,87 \text{ m}$ pikkune raudtala, mille jooksva meetri kaal on $60,4 \text{ kg}$?

652. Arvuta oma klassi põranda pindala.

653. Arvuta oma toa põranda pindala.

654. Veoauto koormasse mahub 1600 kg turvast. Kui palju turvast tuuakse kohale 19 koormaga?

655. Kaupluses oli 23 tükki vahariiet, igas tükkis $23,0 \text{ m}$. Kui palju vahariiet oli selles kaupluses kokku?

656. Kui palju kaaluvad 36 kaubavagunit, kui ühe vaguni keskmine kaal koos kaubaga on 23,76 t?

657. Katusepleki tahvel kaalub 4,52 kg. Kui palju kaalub 50 sellist tahvlit?

658. Kahe punkti vaheline kaugus plaanil on 8,3 cm. Leia nende punktide vaheline tõeline kaugus, kui plaani mõõt on 1 : 250.

659. Maatüki pindala plaani järgi on 3,3 cm². Leia selle maatüki tõeline pindala, kui 1 cm plaanil kujutab 50 m.

660. Pudel kaalub 0,0475 kg. Kui palju kaaluvad 120 sellist pudelit?

LIGIKAUDSETE ARVUDE JAGAMINE.

661. *Olgu vaja jagada ligikaudne arv 72,4 ligikaudse arvuga 0,13.*

$$72,4 : 0,13 = 7240 : 13 = 556,923 \dots$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \hline 90 \\ \hline 120 \\ \hline 30 \\ \hline 40 \\ \hline 1 \end{array}$$

Kuna siin jagamine nähtavasti ei lõpe, siis on väga oluline teada, kui kaugele jagamist jätkata.

Küsimusele vastamiseks leiame otsitava jagatise alam- ja ülemtõkke.

Jagatis omandab väikseima väärtuse siis, kui jagatav on võimalikult väike ja jagaja võimalikult suur. Seetõttu jagatise alamtõkkeks on jagatava alamtõkke ja jagaja ülemtõkke jagatis:

$$72,35 : 0,135 = 535,9 \dots$$

Jagatise ülemtõkkeks on jagatava ülemtõkke ja jagaja alamtõkke jagatis:

$$72,45 : 0,125 = 579,6.$$

Võrdleme nüüd antud ligikaudsete arvude jagatist tema alam- ja ülemtõkkega.

Ligikaudsete arvude jagatis:	556,923 ...
Jagatise alamtõke:	535,9 ...
Jagatise ülemtõke:	579,6.

Näeme, et jagatistes on ühesugused ainult sajaliste numbrid (5). Kümneliste number on igas jagatises juba isesugune: 5, 3, 7. Seega tuleb jagatis ümardada kümnelisteni.

Mitu tüvenumbrit on jagatavas? Mitu jagajas? Mitme tüvenumbriga saime jagatise?

662. Eeltoodud näide kinnitab, et ligikaudsete arvude jagatise ümardamisel kehtib sama reegel mis nende arvude korrutise ümardamiselgi:

ligikaudsete arvude jagatis tuleb ümardada nii, et jagatises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on väiksema tüvenumbrite arvuga andmes.

663. Kontrolli selle reegli õigsust, jagades eelmise näite eeskujul arvu 4,3 arvuga 5,73, siis esimese arvu alamtõkke teise arvu ülemtõkkega ja lõpuks esimese arvu ülemtõkke teise arvu alamtõkkega. Mitu kohta tuleb jagatises säilitada?

664. Määra ilma jagamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale järgmistes ligikaudsete arvude jagatistes:

$$a) 75 : 8; \quad b) 6,18 : 0,0013; \quad c) 90,3062 : 30,1.$$

665. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude jagatised vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale.

$$a) 135 : 1,9 = 71,05 \dots \approx \dots \quad b) 143,8 : 0,15 = 958,6 \dots \approx \dots$$

$$c) 8,5 : 9 = 0,944 \dots \approx \dots$$

666. Arvuta ligikaudsete arvude jagatis

$$0,3 : 6,374$$

kahel viisil: 1) teostades jagamise arvudega antud kujul, 2) ümardades enne jagamist suurema tüvenumbrite arvuga arvu nii, et selleks oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga antud arvus.

Saadud jagatised ümardame jagatise ümardamise reegli kohaselt ja võrdleme tulemusi:

$$1) 0,3 : 6,374 = 300 : 6374 = 0,047 = \underline{0,05};$$

$$\begin{array}{r} \overline{30\ 000} \\ -25\ 496 \\ \hline 45\ 040 \\ -44\ 618 \\ \hline 4220 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \overline{30\ 000} \\ -25\ 496 \\ \hline 45\ 040 \\ -44\ 618 \\ \hline 4220 \end{array}} \right\} 24 \text{ numbrit!}$$

$$2) 0,3 : 6,374 = 0,3 : 6,4 = 3 : 64 = 0,046 = \underline{0,05}.$$

$$\begin{array}{r} \overline{300} \\ 256 \\ \hline 440 \\ 384 \\ \hline 560 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \overline{300} \\ 256 \\ \hline 440 \\ 384 \\ \hline 560 \end{array}} \right\} 15 \text{ numbrit!}$$

Et tulemused on võrdsed ja teisel viisil arvutamine on tunduvalt lihtsam, siis on praktilisem arvutada teisel viisil, s. o.

enne jagamist ümardame suurema tüvenumbrite arvuga arvu varunumbrini.

Näiteid. 1) $38,593 : 8,7 = 38,6 : 8,7 = 4,43 = 4,4.$

2) $0,7 : 0,628 = 0,7 : 0,63 = 1,1 = 1.$

Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude jagamisel.

667. Leia järgmised ligikaudsete arvude jagatised:

1) $18,63 : 0,8$ 2) $4,28 : 0,7$ 3) $822 : 76$ 4) $341,3 : 12$
 $382,6 : 36,8$ $4,8 : 0,284$ $8 : 34$ $5 : 22,5$

668. Ristküliku pindala on $15,12 \text{ cm}^2$. Ristküliku ühe külje pikkus on $3,6 \text{ cm}$. Leia teise külje pikkus.

669. Klassi põranda pindala on $69,2 \text{ m}^2$. Kui suur peab olema selle klassi kõrgus, et klassis oleks 250 m^3 õhku?

670. Ristkülikukujuliselt põllult, mille pindala on 54 ha , saadi 834 ts nisu. Kui suur on keskmine nisusaak hektarilt?

671. $32,7 \text{ m}$ pikkune traat on vaja jaotada 16 võrdseks tükiks. Leia iga tüki pikkus.

Siin arv $32,7 \text{ m}$ on ligikaudne arv, 16 aga täpne arv. Kuna $16 = 16,0 = 16,00 = 16,000$ jne., s. t. täpsel arvul võime kujutleda

ükskõik kui mitu tüvenumbrit, siis määratakse jagatise tüvenumbrite arv ligikaudse andme tüvenumbrite arvu järgi.

$$32,7 \text{ m} : 16 = 2,044 \text{ m} \approx 2,04 \text{ m}$$

672. Teosta järgmised jagamised, kus üks arvudest on täpne arv (trükitud jämeda kirjaga).

1) 2,6 : 165	2) 573 : 4,3	3) 900 : 96	4) 1,05 : 12
27 : 2,37	435 : 13	37,4 : 19	0,1 : 26

673. Kahe linna vahemaa on 955 km. Mitme tunniga läbib selle vahemaa rong, kui selle keskmine kiirus on 52 km tunnis?

674. 83 ha suuruselt maa-alalt saadi 1430 t kartuleid. Kui suur on keskmine kartulisaak hektarilt?

675. Mitu vagunit on vaja 7500 t kauba veoks, kui kasutada 17 t kandejõuga vaguneid?

676. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 19,45 ha. Selle maatüki laius on 230 m. Leia maatüki pikkus.

677. 1442 km raudteeliini ehitamine maksis 17 900 000 rubla. Leia raudtee ühe kilomeetri ehitamise hind.

678. Sovhoos eraldas 250 ha suuruse põllu väetamiseks 63,45 t mineraalväetist. Kui palju mineraalväetist tuleb külvata 1 hektarile?

679. Jalgrattur läbis 38,06 km 47,3 minutiga. Mitu kilomeetrit läbiks jalgrattur sellise kiirusega sõites ühe tunniga?

680. Rull traati kaalub 38,54 kg. Mitu meetrit traati on selles rullis, kui 1 m traati kaalub 0,528 kg?

681. Kui suur on tsemenditünni ruumala, kui tünn mahutab 0,106 t tsementi, 1 m³ tsementi kaalub aga 1,4 t?

682. Naftaveo tsistern mahutab 38,8 t naftat. Mitu sellist tsisterni on vaja 2138 t nafta veoks?

683. 1 cm³ pliid kaalub 11,3 g, 1 cm³ tina aga 7,3 g. Mitu korda on plii tinast raskem?

684. Klassi ruumala on 235,34 m³. Klassi põranda pindala on 48,3 m². Leia klassi kõrgus.

685. Heli levimiskiirus õhus on 333,3 m sekundis? Kui pika aja pärast on kuulda müristamist, kui välku lõi 8690 m kaugusel?

686. 94-st võrdse pikkusega veektorust saadi 762 m pikkune torustik. Kui pikk on iga toru?

687. Koolimaja ruumala on 24 986 m³. Selles koolis õpib ligikaudu 1100 õpilast. Mitu kuupmeetrit ehituse mahust tuleb iga õpilase kohta?

688. 25 ühesugust polti kaaluvad 7,82 kg. Kui raske on iga polt?

689. 50 ühesugust raamatut kaaluvad 21,32 kg. Kui raske on iga raamat?

ÜLESANDEID.

690. Lahendades ülesandeid, kus otsitava arvu leidmiseks on vaja sooritada mitu tehet, lisanduvad andmete vigadest tingitud vigadele veel vahepealsete tehete tulemuste ümardamisest tingitud vead.

Olgu vaja näiteks leida korrutiste summa.

$$x = 3,6 \cdot 2,18 + 1,8 \cdot 3,74 + 2,4 \cdot 4,06 + 0,90 \cdot 8,61.$$

Arvutades vahepealseid tulemusi ümardamata, saame:

1) $3,6 \cdot 2,18 = 7,848$;	5) 7,848
2) $1,8 \cdot 3,74 = 6,732$;	6,732
3) $2,4 \cdot 4,06 = 9,744$;	9,744
4) $0,90 \cdot 8,61 = 7,749$;	7,749
	<hr/>
	32,073 \approx 32,1.

Ümardades aga iga vahepealse tehte tulemuse vastavalt reeglile, saame

$$7,8 + 6,7 + 9,7 + 7,7 = 31,9.$$

See tulemus erineb märgatavalt esimesest tulemusest (32,1).

Märgitud puudust saame vältida, kui ümardame vahepealsete tehete tulemused mitte selle järguni või tüvenumbrite arvu ni, mida näevad ette tehete tulemuste ümardamise reeglid, vaid võtame igas vahepealses tulemuses ühe järgu või tüvenumbri rohkem. Sellise varunumbri säilitame kuni lõpptulemuse saamiseni, siis jätame selle ära, lõpptulemust vastavalt ümardades.

Arvutame eelmise ülesande tulemuste ühte varunumbrit kasutades:

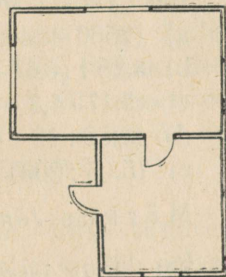
$$\begin{array}{r} 7,85 \\ 6,73 \\ 9,74 \\ 7,75 \\ \hline 32,07 \approx 32,1. \end{array}$$

Saime sama tulemuse mis ümardamata andmetega arvutades. Seega enam kui ühetehtelise ülesande lahendamisel rakedame järgmist juhust:

vahepealsete tulemuste arvutamisel säilitame ühe varunumbri. Lõpptulemuses jätame selle varunumbri ära, tulemust vastavalt ümardades.

691. Kui palju kaalub kuusepuust palk, mille ristlõige on ristkülik mõõtmetega $168 \text{ mm} \times 113 \text{ mm}$, palgi pikkus aga $4,29 \text{ m}$ ja kui 1 dm^3 kuusepuud kaalub $0,5 \text{ kg}$?

692. Kui palju tuleb maksta plaanil (joon. 95) näidatud kahe toa põranda värvimise eest, kui 1 m^2 värvimine maksab $0,19$ rubla?



693. Arvuta suhkrupeedisaak ristkülikukujuliselt põllult, mille pikkus plaanil (mõõdusuhe $1 : 100\,000$) on $2,5 \text{ cm}$ ja laius $1,2 \text{ cm}$, kui suhkrupeedisaak hektarilt on 550 ts .

694. Tühi klaaskolb kaalub $24,8 \text{ g}$, veega täidetult $74,6 \text{ g}$, petrooleumiga täidetult aga $64,9 \text{ g}$. Arvuta nende andmete põhjal, kui palju kaalub 1 cm^3 petrooleumi.

695. Ristkülikukujuline tükk plekki kaalub $149,3 \text{ g}$. Selle plekitüki pikkus on $32,3 \text{ cm}$ ja laius $12,7 \text{ cm}$. Mõõtmisel saadi selle plekitüki paksuseks $\frac{1}{2} \text{ mm}$. Leia plekitüki paksus arvutamise teel ja võrdle seda mõõtmise tulemusega, kui raua erikaal on $7,8$.

696. Ristkülikukujuline vaskplaat kaeti ühelt küljelt niklikorraga. Enne nikeldamist kaalus see plaat $48,7$, pärast nikeldamist aga $49,5 \text{ g}$. Plaadi pikkus on $11,3 \text{ cm}$ ja laius $6,5 \text{ cm}$. Nikli erikaal on $8,9$. Leia niklikihi paksus.

Mõõt 1:250

Joon. 95.

697. Vundamendi süvendi pikkus on 7,3 m, laius 5,5 m ja sügavus 3,5 m. Mitu autokoormat mulda tuleb sealt ära vedada, kui on teada, et 1 m³ mulda kaalub 2,13 t ja auto kandevõime on 2,5 tonni?

698. Aia pikkus on 67 m ja laius 56 m. Mitu pange vett on vaja selle aia kastmiseks, kui maapinda tahetakse niisutada niisama tugevasti, nagu seda tegi vihmahoog, mis sadememõõtja järgi andis veekihi paksuseks 5,25 mm?

Pang mahutab 12,3 liitrit vett.

699. Tornis kõige kõrgemal asuvast aknast allavisatud kivi jõudis maapinnani 4 sekundiga. On teada, et vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgmise sekundiga 9,8 m võrra rohkem kui eelmises sekundis.

Leia selle torni kõrgus, kui torni tipuni on viimasest aknast veel 4 m.

700. Teosta tehted ligikaudsete arvudega:

- a) $(2500 + 46,12 - 11220 : 38) : 8$;
- b) $0,28 : (0,64 \cdot 0,843 + 0,78 \cdot 0,8 - 26,078 : 32,6)$;
- c) $(2,17 \cdot 4,3 + 3,07 : 0,3 - 7,8 \cdot 1,2) \cdot 0,8$;
- d) $(3,58 : 12 - 0,28) \cdot 8 + 0,028$;
- e) $(5,05 : 200) \cdot 63 - 0,4725$.

Märkus. Jämedas kirjas on antud täpsed arvud.

701. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks sajandikeni.

$$a) \frac{\left(7\frac{5}{6} - 6\frac{7}{8}\right) \cdot 13\frac{1}{3}}{3\frac{11}{12}}; \quad b) \frac{7\frac{1}{3} + 8\frac{1}{6}}{5\frac{1}{2} - 1\frac{7}{12}} \cdot 10\frac{3}{7}.$$

702. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe kohaga murdosas (viimane koht annab varunumbri).

$$a) \frac{3\frac{5}{6} + 1\frac{4}{9} - 2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}; \quad b) \frac{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}.$$

703. Lennuk, mille kiirus on 270 km tunnis, peab lendama punktist *A* punkti *B*, mis asub lähtekohast põhja suunas 1250 km kaugusel, ning siis uuesti tagasi punkti *A*.

a) Leia, kui kaua kestab lend tuulevaikse ilmaga.

b) Kui kaua kestab lend lõunatuule puhul, mis puhub kiirusega 37,5 km tunnis?

704. Risttahukakujulise metallitüki pikkus on 0,14 m, laius 0,4 dm ja paksus 2 cm. See metallitükk kaalub 873,6 g. Teise samast metallist risttahukakujulise metallitüki mõõtmed on 0,09 m \times 0,8 dm \times 0,2 dm. Kui palju kaalub teine metallitükk?

705. Viljapeade noppimine pärast lõikust annab täiendavalt miljoneid tsentnereid teravilja. Kooliõpilased korjasid 125 ha suuruselt nisupõllult viljapäid, kusjuures igalt ruutmeetrilt leiti neid keskmiselt 4. Kui palju teravilja saadi õpilaste poolt kogutud viljapeadest, kui igas viljapeas olevate terade kaaluks arvata 1 g?

706. Toa pikkus on 8,4 m, laius 6,5 m ja kõrgus 4 m. Sellel toal on 3 akent, kõrgusega 1,64 m ja laiusega 1,2 m, ja kaks üst, mille kõrgus on 2 m 20 cm ja laius 1 m. Mitu rulli tapeeti on vaja osta selle toa tapeetamiseks, kui tapeedirulli laius on 50 cm ja tapeeti on rullis 12 m (kadudeks arvestada 10%)?

707. Viljasalve pikkus on 12 m ja laius 8 m. Vilja sügavus salves on 1,5 m. Selleks et teada saada, kui palju kaalub salves olev vili, võeti kast sisemiste mõõtmetega 0,5 m \times 0,5 m \times 0,4 m, täideti see ääreni viljaga ning kaaluti. Kastitaisi teri kaalus 80 kg.

Kui palju kaalub salves olev vili?

708. Katuse katmiseks kasutati ristkülikukujulisi katusekive, mille pikkus oli 25 cm ja laius 17 cm. Katus koosneb kahest ristkülikukujulisest osast, kummagi pikkus on 14 m ja laius 6,25 m. Kui palju kive on vaja selle katuse katmiseks, kui on teada, et katusekivide osaliselt üksteise peale asetamisel katab iga kivi katust 40% ulatuses kivi pindalast?

709. Nõu koos veega kaalus 68,4 kg. Kui sellest nõust kallati ära 78% seal olevast veest, siis kaalus nõu koos ülejäänud veega 28,3 kg. Kui palju kaalub tühi nõu?

710. Tühi nõu kaalub 15,2 g, elavhõbedaga täidetult aga 263 g. Leia selle nõu ruumala, kui on teada, et 1 cm³ elavhõbedat kaalub 13,6 g.

711. Kolhoosi 42 ha suuruselt nisupõllult saadi 15,2 hektarilt keskmiseks saagiks 20,3 ts hektarilt, ülejäänud osalt 13,1 ts hektarilt. Kui suur oli keskmine nisusaak selle põllu igalt hektarilt?

712. Rong koosneb vedurist koos tendriga, mis kokku kaaluvad 76 t, ja 35 kaubavagunist. Iga vagun koos kaubaga kaalub keskmiselt 23 t. Rong kulutab 1 km pikkuse tee läbimiseks rongikaalu iga tonni kohta 32 g kivisütt. Kui palju kivisütt peab vedur peale võtma sõiduks Tallinnast Tartusse, mille vahemaa on ligikaudu 200 km?

713. 1 m³ telliseid kaalub 1620 kg. Iga tellise mõõtmed on 27 cm × 13 cm × 6,5 cm. Kui palju kaalub 1000 tellist?

714. Piritä—Kose—Kloostrimetsa võidusõiduringraja pikkus oli 6,7554 km. Sõitja läbis selle 3 minuti 27 sekundiga. Kas saab uskuda võistluse korraldajate teadet, et sõitja keskmine kiirus oli 117,485 km tunnis.

715. Käsitöötunnis valmistati plekist karp. Selleks kulus 60,0 dm² plekki. Pärast kasti valmimist selgus, et selle välispindala oli 52,5 dm². Mitu protsenti plekist läks jäätmeteks?

716. Õhk sisaldab ligikaudu 20% hapnikku ja 80% lämmastikku.

a) Mitu kuupmeetrit hapnikku sisaldab klassituba, mille ruumala on 245 m³?

b) Kui palju hapnikku leidub toas, mille pikkus on 4,2 m, laius 3,6 m ja kõrgus 2,5 m?

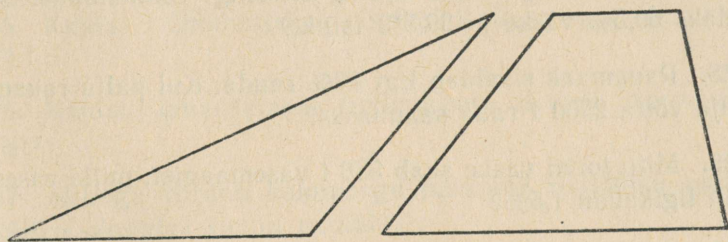
717. Kolhoosil on teravilja all 432,46 ha põldu, sellest nisu all 219,00 ha, rukki all 120,32 ha, odra all 46,30 ha, kaera all 29,21 ha ja herne all 17,63 ha. Mitu protsenti teravilja all olevast maast on iga nimetatud kultuuri all?

Märkus. Siin ja ka edaspidi anna protsentide arv täpsusega 0,1, kui pole eraldi nõutud teistsugust täpsust.

718. Meie maja õu on 329 m² ning seejuures 25% suurem naabermaja õuest. Kui suur on naabermaja õu?

719. Kauba taarakaal moodustab 6,3% kauba brutokaalust. Sama kauba netokaal on 75,2 kg. Kui palju kaalub see kaup koos taaraga?

720. a) Mitu protsenti moodustab joonisel 96 kujutatud kolmnurga pindala trapetsi pindalast?



Joon. 96.

b) Mitu protsenti moodustab joonisel 96 kujutatud trapetsi pindala kolmnurga pindalast?

721. Vedel metallisulam tõmbub jahtudes kokku. Terasevalu juures on see vähenemine 6,1%. Milline oli vedela metalli maht, kui jahtunult oli tema ruumala 9,63 dm³?

722. Rukkiteradest saadakse keskmiselt 85% jahu ja 13% kliisid. Kui palju rukkijahu ja kliisid saadi ristikülükukujuliselt põllult koristatud rukkist, kui põllu pikkus on 480 m, laius 126 m ja hektarisaak keskmiselt 22 ts?

723. Suitsutamisel saadi 24,2 kilogrammist lihast 21,6 kg suitsuliha. Kui suur oli kaalukadu protsentides liha suitsutamisel?

724. Umbrohu vastu võitlemiseks kasutati 3,5 kg keemilist umbrohutõrjevahendit, mis lahustati 180 l vees. Mitme protsendiline lahus saadi?

Märkus. Ära unusta, et lahuse kaalu moodustavad siin vee ja kemikaali raskus kokku.

725. Kartul kaotab laos hoidmisel 8,5% oma kaalust. Mitu tonni kartuleid saadi kevadel laost, kuhu sügisel pandi 240 tonni kartuleid?

726. Pronks on vase ja tina sulam. Kui palju vaske ja tina on vaja võtta 350 kg pronksi valmistamiseks, mis sisaldaks 94% vaske ja 6% tina?

727. Messing on vase ja tsingi sulam, mis sisaldab veel vähe-
sel määral teisi metalle. Mitu kilogrammi vaske ja mitu kilo-
grammi tsinki on vaja võtta 120 kg messingi valmistamiseks, mis
sisaldaks 69,5% vaske ja 29,5% tsinki?

728. Rauamaak sisaldab ligi 70% rauda. Kui palju rauamaaki
on vaja võtta 2500 t raua saamiseks?

729. Mitu tonni vaske saab 538 t vasemaagist, mille vasesisal-
dus on ligikaudu 1,5%?

730. Veoautojuht sõitis uue veoautoga 135 290 km, siis anti
auto kapitaalremonti. Norm nägi ette 80 000 kilomeetri läbimist
kapitaalremondita. Mitme protsendi võrra ületas autojuht normi?

731. Sõiduautojuht sõitis oma autoga kapitaalremondita
128 390 km. Norm oli 75 000 km. Mitme protsendi võrra ületas
sõiduautojuht plaani?

Kumb autojuht saavutas parema tulemuse (võrdle eelmise
ülesandega)?

732. Lauda desinfitseerimiseks on vaja valmistada lahus
desinfitseerivast vahendist ja veest. Desinfitseeriva vahendi hulk
lahuses peab moodustama 2,5% lahuse üldkogusest (s. o. 2,5-prot-
sendiline lahus). Kui palju desinfitseerivat vahendit on vaja võtta
30 l lahuse jaoks? Kui palju vett on selleks vaja võtta?

733. Piimatööstus arvestab piima vastuvõtmisel selle rasva-
sisalduseks 3,5%. Kui majanditest toodud piim on sellest erineva
rasvasisaldusega, siis leitakse piimakogus 3,5%-lise rasvasisal-
duse järgi.

Mitu kilogrammi piima arvestatakse kolhoosile, kes piimatöös-
tusse saatis 2250 kg 4,1%-lise rasvasisaldusega piima?

KORDAMISEKS.

734. Kuidas leida ligikaudsete arvude

- a) summa ülemtõket? alamtõket?
- b) vahe ülemtõket? alamtõket?
- c) korrutise ülemtõket? alamtõket?
- d) jagatise ülemtõket? alamtõket?

735. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude summat ja vahet?

736. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

737. Millega võrdub kolmnurga pindala? ristküliku pindala? rööpküliku pindala? ruudu pindala?

738. Ristküliku külje ja diagonaali vaheline nurk on $27^{\circ}34'$. Kui suured on diagonaalidevahelised nurgad?

739. Leia arvude 120 ja 80 suurim ühistegur ja väikseim ühis-kordne.

740. Lihtsusta avaldis

$$\left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+b} \cdot \left(\frac{a+b}{3a} - a - b \right) \right] : \frac{a-b}{a}.$$

741. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) : \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

742. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

743. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

744. Lahuta hulkliige tegureiks.

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| 1) $a^3 + 2a^2 + a$ | 2) $2a^3 - 4a^2 + 2a$ |
| 3) $a^4 + 2a^3 + a^2$ | 4) $a^3 + 4a^2 + 4a$ |
| 5) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ | 6) $a^4 + a$ |

- 7) $ab^2 - ac^2 - bc^2 + b^3$ 8) $x^4 - x$
 9) $24ax - 36ay + 14bx - 21by$ 10) $8ax - 12bx - 20ay + 30by$

745. Arvuta, rakendades valemeid.

- 1) 82^2 $4,1^2$ $6,08^2$ $(-1,08)^2$ $\left(6\frac{1}{3}\right)^2$
 2) 79^2 $8,3^2$ $9,98^2$ $(-8,97)^2$ $\left(6\frac{1}{12}\right)^2$
 3) $99 \cdot 101$ $95 \cdot 105$ $89 \cdot 111$ $6,5 \cdot 7,5$
 4) $98 \cdot 102$ $91 \cdot 109$ $87 \cdot 113$ $41,2 \cdot 38,8$
 5) $576^2 - 424^2$ $6,57^2 - 3,43^2$ $19,86^2 - 0,14^2$
 6) $693^2 - 307^2$ $5,35^2 - 4,65^2$ $3,75^2 - 6,25^2$

746. Mis arvu peab liitma avaldisega

$$25x^2 + 30x,$$

et saada kaksliikme ruut?

747. Mis arvu peab liitma kolmliikmega

$$16x^2 + 24x - 7,$$

et saada kaksliikme ruut?

✓ 748. Kui palju kasvab avaldise

$$6,25x^2 + 40x + 64$$

väärtus, kui x kasvab 4-st kuni 8-ni?

749. Mitme protsendi võrra muutub avaldise

$$8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$$

väärtus, kui a väärtus kasvab 4-st kuni 5-ni?

Kas avaldise väärtus kasvab või kahaneb?

✓ 750. Mitu protsenti moodustab avaldise

$$a^2 + b^2$$

väärtus avaldise

$$(a + b)^2$$

väärtusest, kui $a = 5$ ja $b = 3$? kui $a = 10$ ja $b = 6$?

751. Mida nimetatakse ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmääraks? Kui suur on arvu 78 ($\pm 0,3$) relatiivse vea ülemmäär?

752. Kumb ligikaudsetest arvudest 5,40 või 125 (± 2) on täpsem?

753. Leia arvude 4, 4,0 ja 4,00 relatiivse vea ülemmäärad.

754. Arvu x kohta on teada, et

$$42,4 < x < 42,8.$$

Leia arvu x ligikaudne väärtus, absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär.

755. Korrapärase kuusnurga külje pikkuse a mõõtmisel saadi, et millimeetrites on

$$37 < a < 38.$$

Teades, et korrapärase kuusnurga apoteemi ja külje suhe on ligikaudu 0,866, leia tüked, mille vahel asetseb apoteem, ja tüked, mille vahel asetseb kuusnurga pindala. Kui suur on pindala ligikaudne väärtus ja selle vea ülemmäär?

756. Ruudu külje pikkus on $8 (\pm 0,1)$ cm. Leia ruudu pindala tüked.

757. Võrdkülgse kolmnurga külg $a = 6,2$ cm. Arvuta kolmnurga pindala.

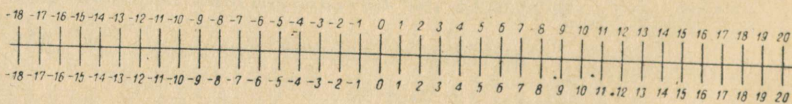
8. ARVUTUSLÜKATI.

LIHTNE ARVUTUSLÜKATI TÄISARVUDE LIITMISEKS.

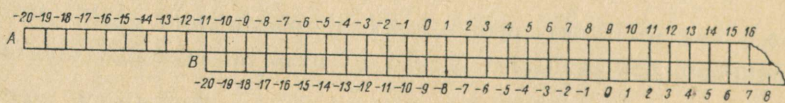
758. Joonesta ruudulisele paberile arvutelg nagu joonisel 97. Lõika saadud joonis piki sirget pooleks. Saad kaks ühtlast skaalat. Nimetame üht neist skaalaks *A*, teist skaalaks *B*. Aseta skaalad *A* ja *B* teineteise kõrvale nii nagu joonisel 98. Skaalad *A* ja *B* võib teineteise kõrval edasi-tagasi nihutada. Sel viisil oled saanud lihtsa arvutuslükati täisarvude liitmiseks ja lahutamiseks. Et skaalad *A* ja *B* oleks parem käsitseda, kleepi nad joonestuspaberile või kartongile.

Nimetame skaala kriipsu, mille juures on arv 0, nullkriipsuks.

Joonisel 98 on näidatud, kuidas liita arvuga 9 mingi teine arv. Selleks seame skaala *B* nullkriipsu kohakuti skaala *A* kriipsuga 9 ja leiame siis skaalalt *B* teise liidetava. Kui teine liidetav on näiteks 5, siis selle kohalt leiame skaalalt *A* summa $9 + 5 = 14$.



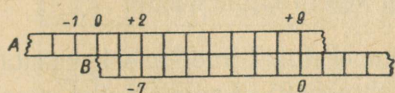
Joon. 97.



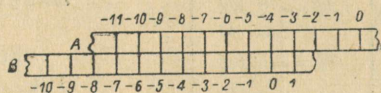
Joon. 98.

Niisamuti leiame, et $9 + (-7) = 2$ (vt. seda jooniselt 99).
 Jooniselt 100 näed, kuidas arvuga -4 liita mingi teine arv, näi-
 teks $(-4) + (-6) = -10$.

Kahe täisarvu liitmiseks võtame skaalal A ühe liidetava, seame
 sellega kohakuti skaala B nullkriipsu ja leiame siis skaalalt B
 teise liidetava. Summa loeme skaalalt A teise liidetava kohalt.



Joon. 99.



Joon. 100.

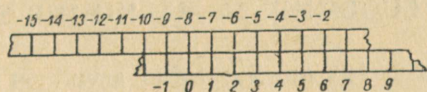
759. Leia omavalmistatud lihtsa lükati abil summa:

- | | |
|-------------------|-----------------------|
| 1) $(+12) + (+4)$ | 5) $(+11,5) + (+3,5)$ |
| 2) $(+15) + (-8)$ | 6) $(+9,5) + (-7,5)$ |
| 3) $(-2) + (-7)$ | 7) $(-8,5) + (+1,5)$ |
| 4) $(-11) + (-1)$ | 8) $(-6,5) + (-4,5)$ |

760. Kuna arvu lahutamine on samaväärne vastandarvu liit-
 misega, siis võimegi arvude lahutamist vaadelda liitmisenä.
 Näiteks

$$(-8) - (-5) = (-8) + (+5) = -3.$$

Joonisel 101 on näidatud vahe $(-8) - (-5)$ leidmine lükati
 abil.

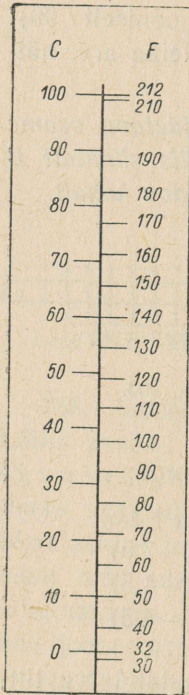


Joon. 101.

Leia lükati abil vahe:

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| 1) $(+7) - (-4)$ | 5) $(+6,5) - (-3,5)$ |
| 2) $(-8) - (+2)$ | 6) $(-7,5) - (+2,5)$ |
| 3) $(-9) - (-7)$ | 7) $(-11,25) - (+1,25)$ |
| 4) $(+1) - (-10)$ | 8) $(-2,25) - (+7,75)$ |

TEMPERATUURI UMBERARVUTAMINE.



761. Mitmeks kraadiks on Celsiuse skaalal jaotatud jää sulamispunkti ja vee keemispunkti vahe?

Missugusel temperatuuril Celsiuse skaala järgi vesi jäätub? keeb?

762. Temperatuuri mõõtmisel kasutatakse ka Fahrenheiti skaalat. Sellel skaalal on jää sulamispunkti ja vee keemispunkti vahe jaotatud 180-ks kraadiks. Jää sulamistemperatuur on Fahrenheiti skaalal 32° (lühemalt 32°F), vee keemistemperatuur aga 212°F . Joonis 102 võimaldab üht ja sama temperatuuri väljendada nii Celsiuse kui ka Fahrenheiti kraadides. Näiteks $20^\circ\text{C} = 68^\circ\text{F}$, $50^\circ\text{F} = 10^\circ\text{C}$.

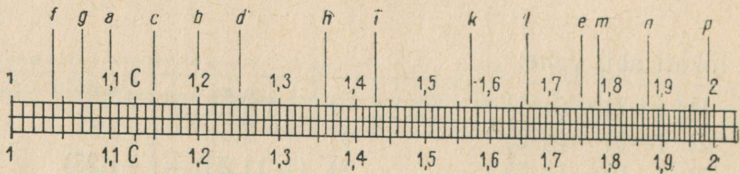
Joon. 102.

Täida lüngad.

- | | |
|---|--|
| 1) $60^\circ\text{C} = \dots^\circ\text{F}$ | 5) $160^\circ\text{F} = \dots^\circ\text{C}$ |
| 2) $10^\circ\text{C} = \dots^\circ\text{F}$ | 6) $140^\circ\text{F} = \dots^\circ\text{C}$ |
| 3) $40^\circ\text{C} = \dots^\circ\text{F}$ | 7) $150^\circ\text{F} = \dots^\circ\text{C}$ |
| 4) $80^\circ\text{C} = \dots^\circ\text{F}$ | 8) $100^\circ\text{F} = \dots^\circ\text{C}$ |

ARVUDE LUGEMINE JA MÄRKIMINE SKAALAL.

763. 1) Joonisel 103 on kujutatud arvud mitteühtlasel skaalal. Et see skaala ei ole ühtlane, nähtub kriipsuvahedest, mis skaala lõpu poole pidevalt vähenevad.



Joon. 103.

Skaala alguses ja lõpus olevate numbrite 1 ja 2 vahel on pisut väiksemate numbritega kirjutatud arvud 1,1; 1,2; ...; 1,9.

Kui skaala alguskriips märgib arvu 1, siis sel korral märgib täht a arvu 1,1 ja täht b arvu 1,2.

Vahemikud 1 kuni 1,1, 1,1 kuni 1,2, ..., 1,9 kuni 2 on igaüks omakorda jaotatud kümneks osaks, kuid jaotuskriipsude juurde ei ole nendele vastavaid arve kirjutatud. Eeldusel, et alguskriips vastab arvule 1, märgib c arvu 1,15, d arvu 1,25 ja f arvu 1,04.

Mis arvused märgivad sel eeldusel tähed $g, h, e, i, k, l, m, n, p$?
Vastused kirjuta nii: $g = 1,07$.

2) Näita pliiatsi terava otsaga joonisel 103 jaotuskriipsu, mis märgib arvu

1,02; 1,05; 1,12; 1,17; 1,35; 1,41; 1,56; 1,98.

3) Kui joonisel 103 skaala alguses ja lõpus olevad numbrid väljendavad vastavalt arve 10 ja 20, siis $a = 11$ ja $f = 10,4$.

Mis arve märgivad nüüd tähed $b, c, d, e, g, h, i, k, l, m, n, p$?

4) Kui joonisel 103 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 100 ja 200, siis $a = 110$, $h = 136$ ja $f = 104$.

Mis arve märgivad sel korral tähed $b, c, d, e, g, i, k, l, m, n, p$?

5) Kui joonisel 103 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 1 000 ja 2 000, siis $a = 1\ 100$, $d = 1\ 250$ ja $f = 1\ 040$.

Mis arve märgivad nüüd tähed $b, c, e, g, h, i, k, l, m, n, p$?

6) Kui joonisel 103 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 0,1 ja 0,2, siis

$$a = 0,11, b = 0,12 \text{ ja } f = 0,104.$$

Mis arve märgivad sel korral tähed $c, d, e, g, h, i, k, l, m, n, p$?

7) Leia joonisel 103 kriips, mis märgib arvu

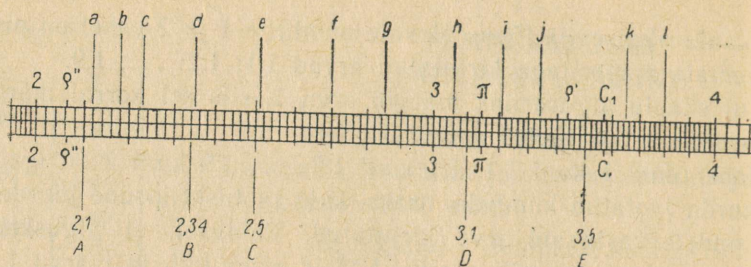
a) 10,2; 10,5; 11,2; 11,7; 13,5; 14,1; 15,6; 19,8.

b) 102; 105; 112; 117; 135; 141; 156; 198.

c) 1020; 1050; 1120; 1170; 1350; 1410; 1560; 1980.

d) 0,102; 0,105; 0,112; 0,117; 0,135; 0,141; 0,156; 0,198.

764. 1) Skaalal joonisel 104 on kujutatud arvud 2-st kuni 4-ni. Sellel skaalal näed kolmesuguse pikkusega kriipse. Kõige pikemad neist on ainult kaks; need on joonisel märgitud tähtedega C ja E .



Joon. 104.

Kriips C on arvude 2 ja 3 kriipsude vahel ja märgib arvu 2,5. Kriips E märgib arvu 3,5.

Lõigud kriipsude 2 ja 2,5, 2,5 ja 3, 3 ja 3,5 ning 3,5 ja 4 vahel on pikkuselt järgmiste lühemate kriipsudega jaotatud 5-ks osaks. Seega need kriipsud märgivad vastavalt arve 2,1 (kriips A), 2,2, 2,3, ..., 3,1 (kriips D), 3,2, ..., 3,8 ja 3,9.

Leia joonisel 104 kriips, mis märgib arvu

2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9;
3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9.

2) Lõigud kriipsude 2 ja 2,1, 2,1 ja 2,2, 2,2 ja 2,3, ..., 3,9 ja 4 vahel on kõige lühemate kriipsudega jaotatud 5 osaks. Seega märgivad kriipsud 2 ja 2,1 vahel vastavalt arve

2,02; 2,04; 2,06; 2,08.

Kriipsud arvude 2,3 ja 2,4 vahel märgivad vastavalt arve

2,32; 2,34 (kriips B); 2,36; 2,38.

Nagu näed, märgivad kõige lühemad kriipsud joonisel 104 paarismumbriga lõppevaid kolmekohalisi arve 2 ja 4 vahel.

Loe 0,02 kaupa ja näita vastavaid kriipse joonisel 104:

- 2-st kuni 2,5-ni;
- 2,52-st kuni 3-ni;
- 3,02-st kuni 3,5-ni;
- 3,52-st kuni 4-ni.

765. 1) Joonisel 104 oleval skaalal tuleb kolmekohalised paaritu numbriga lõppevad arvud 2 ja 4 vahelt võtta silma järgi kahe kõrvuti seisva kriipsu vahelise lõigu keskelt. Näiteks c märgib arvu 2,23 (on arvude 2,22 ja 2,24 vahel).

Mis arvusid märgivad tähed d, e, g, i, k ?

2) Kui joonisel 104 skaala alguskriips märgib arvu 20 ja lõpukriips arvu 40, siis

$$A = 21; B = 23,4; a = 21,2; c = 22,3.$$

Mis arvusid märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

3) Leia jooniselt 104 arvud

20,2; 20,3; 20,4; 20,5; 20,8; 20,9;
25,2; 25,3; 25,4; 25,5; 25,8; 25,9;
29,1; 29,2; 29,4; 29,5; 29,8; 29,9;
37,2; 37,4; 37,3; 37,5; 37,8; 37,9;
39,2; 39,3; 39,4; 39,5; 39,8; 39,9.

4) Kui joonisel 104 skaala alguskriips märgib arvu 200 ja lõpukriips arvu 400, siis

$$A = 210; B = 234; a = 212; c = 223.$$

Mis arvusid märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

5) Leia jooniselt 104 arvud

202; 203; 204; 205; 208; 209;
252; 253; 254; 255; 258; 259;
291; 292; 294; 295; 298; 299;
372; 373; 374; 375; 378; 379;
392; 393; 394; 395; 398; 399.

6) Kui joonisel 104 skaala alguskriips märgib arvu 0,2 ja lõpukriips arvu 0,4, siis

$$A = 0,21; B = 0,234; a = 0,212; c = 0,223.$$

Mis arvusid märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

4) Leia jooniselt 96 arvud

0,202; 0,204; 0,206; 0,208;
 0,201; 0,203; 0,205; 0,207;
 0,262; 0,264; 0,266; 0,268;
 0,261; 0,263; 0,265; 0,269;
 0,322; 0,324; 0,326; 0,328;
 0,381; 0,383; 0,385; 0,387.

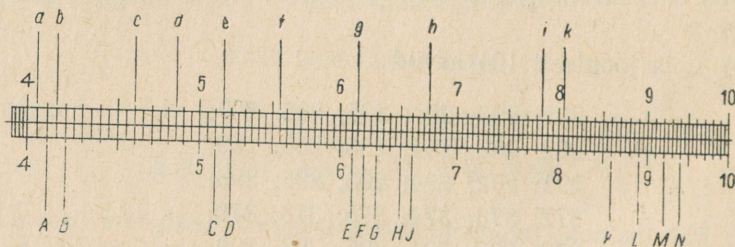
766. 1) Joonisel 105 kujutatud skaalal on arvud 4-st kuni 10-ni. Lõigud arvude 4 ja 5, 5 ja 6, 6 ja 7, 7 ja 8, 8 ja 9 ning 9 ja 10 vahel on pikkuselt erinevate kriipsudega jaotatud osadeks. Pisut pikemad kriipsud jaotavad need lõigud 10-ks osaks. Seega vastab jaotuskriips *A* arvule 4,1 ja kriips *B* arvule 4,2. Kriips *C* märgib arvu 5,1, kriips *D* aga arvu 5,2.

Mis arvusid märgivad tähed *E, F, G, H, J, K, L, M, N*?

2) Leia jooniselt 105 kõik arvud 0,1-kaupa 6,7-st kuni 8,5-ni; 4,3-st kuni 5-ni; 5-st kuni 6-ni.

3) Nagu jooniselt 105 näed, on iga lõik, mis väljendab küm-nendikku (lõik 4 ja 4,1 vahel, 4,1 ja 4,2 vahel jne.), jaotatud veel kaheks osaks, nii et sel teel saadud lõigu osa väljendab poolt küm-nendikku ehk 0,05. Seega märgib täht *a* arvu 4,05, *b* arvu 4,15 ja *i* arvu 7,85.

Mis arvusid märgivad tähed *c, d, e, f, g, h, k*?



Joon. 105.

4) Loe ja näita jooniselt 105 kõik arvud 0,05-kaupa

4-st kuni 4,95-ni;	7,05-st kuni 7,95-ni;
5-st kuni 5,95-ni;	8,05-st kuni 8,95-ni;
6-st kuni 6,95-ni;	9,05-st kuni 9,95-ni.

5) Kui joonisel 105 skaala alguskriips märgib arvu 40 ja lõpu-kriips arvu 100, siis täht *A* märgib arvu 41, täht *B* arvu 42 ja täht *a* arvu 40,5.

Mis arvused märgivad sel korral tähed *C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, b, c, d, e, f, g, h, i, k*?

6) Kui joonisel 105 skaala alguskriips märgib arvu 400 ja lõpu-kriips arvu 1000, siis *A* märgib arvu 410, *B* arvu 420 ja *a* arvu 405.

Mis arvused märgivad nüüd tähed *C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, b, c, d, e, f, g, h, i, k*?

7) Loe ja näita jooniselt 105 kõik arvud 5-kaupa

400-st kuni 500-ni;	705-st kuni 800-ni;
505-st kuni 600-ni;	805-st kuni 900-ni;
605-st kuni 700-ni;	905-st kuni 995-ni.

8) Kui joonisel 105 skaala alguskriips märgib arvu 0,4 ja lõpu-kriips arvu 1, siis *A* märgib arvu 0,41, *B* arvu 0,42 ja *a* arvu 0,405.

Mis arvused märgivad sel korral tähed *C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, b, c, e, f, g, h, i, k*?

9) Loe ja näita jooniselt 105 kõik arvud 0,005-kaupa

0,405-st kuni 0,495-ni;	0,705-st kuni 0,795-ni;
0,505-st kuni 0,595-ni;	0,805-st kuni 0,895-ni;
0,605-st kuni 0,695-ni;	0,905-st kuni 0,995-ni.

767. 1) Pannes joonistel 103, 104 ja 105 kujutatud skaalad otsakuti kokku, saame joonisel 106 kujutatud skaala. Lõigates nüüd saadud joonise piki telge pooleks, saame kaks ühesugust skaalat, mida võib teineteise kõrval edasi-tagasi nihutada ja kasutada seetõttu arvutuslükatina.

Nimetame ühte neist *C*-, teist *D*-skaalaks.

Tähendagu joonisel 106 skaala alguskriips arvu 1. Loe ja näita sellel skaalal kõik arvud

1-kaupa arvust 1 kuni arvuni 10;
0,1-kaupa arvust 1 kuni arvuni 4;
0,1-kaupa arvust 4 kuni arvuni 10;
0,01-kaupa arvust 1 kuni arvuni 2;
0,02-kaupa arvust 2 kuni arvuni 4;
0,05-kaupa arvust 4 kuni arvuni 10.

2) Tähendagu joonisel 106 skaala alguskriips arvu 10. Loe ja näita sel eeldusel skaalal kõik arvud

10-kaupa arvust 10 kuni arvuni 100;
1-kaupa arvust 10 kuni arvuni 40;
1-kaupa arvust 40 kuni arvuni 100;
0,1-kaupa arvust 10 kuni arvuni 20;
0,2-kaupa arvust 20 kuni arvuni 40;
0,5-kaupa arvust 40 kuni arvuni 100.

3) Tähendagu joonisel 106 skaala alguskriips arvu 0,1. Loe ja näita sel tingimusel skaalal kõik arvud

0,1-kaupa arvust 0,1 kuni arvuni 1;
0,01-kaupa arvust 0,1 kuni arvuni 0,4;
0,01-kaupa arvust 0,4 kuni arvuni 1;
0,001-kaupa arvust 0,1 kuni arvuni 0,2;
0,002-kaupa arvust 0,2 kuni arvuni 0,4;
0,05-kaupa arvust 0,4 kuni arvuni 1.

768. Et skaalasad C ja D oleks arvutamisel mugav teineteise suhtes nihutada, selleks on skaala C paigutatud **arvutuslükati** (joon. 107) **corpuses** edasi-tagasi nihutatava **keele** alumisele servale ja skaala D corpuse alumise poole ülemisele servale. Arvude märkimiseks neil skaaladel kasutame lükati **aknale** tehtud kriipsu, mida nimetame **märkijaks**.

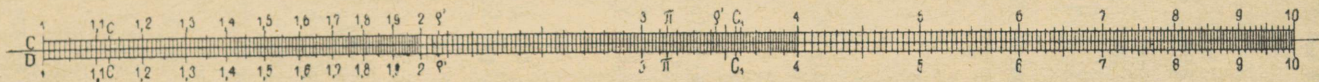
Arvutuslükatil on mitu skaalat. Meie õpime esialgu kasutama ainult skaalasad C ja D ; neid nimetatakse **lükati põhiskaaladeks**.

Kui joonisel 107 kujutatud lükati keelel asuva skaala C alguskriips märgib arvu 1, siis akna kriipsuga ehk märkijaga on seal märgitud arv 1,4. Mis arvu näitab märkija skaalal D ?

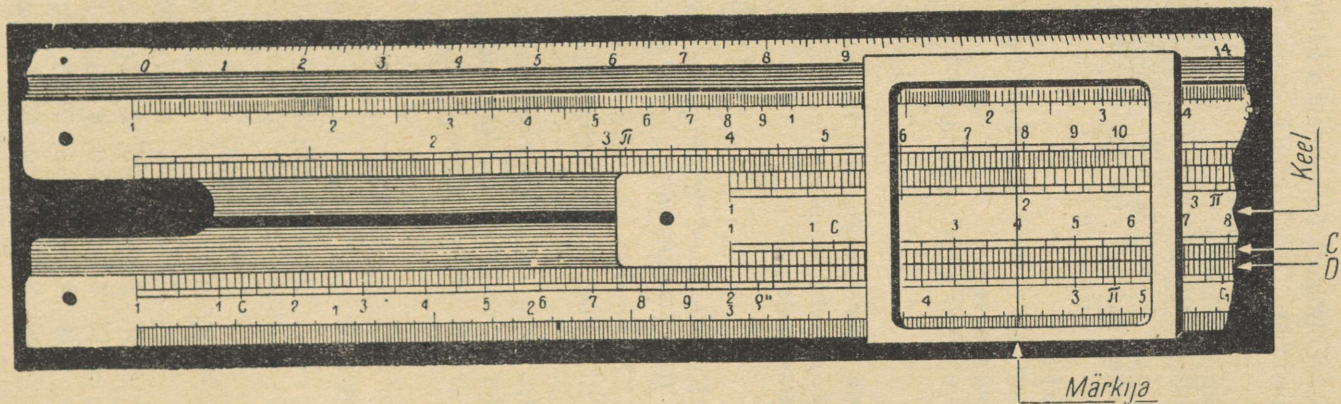
769. Kui joonisel 107 skaala C alguskriips märgib arvu 10, siis akna kriips märgib arvu 14.

Märkigu skaala C alguskriips arvu 100. Mis arvu märgib siis kriips sellel skaalal?

Märkigu skaala C alguskriips vastavalt arvu 0,1; 0,01; 1000. Mis arvu märgib sellele vastavalt märkija skaalal C ?



Joon. 106.



Joon. 107.

770. Eelmisest ülesandest näeme, et kui skaala C alguskriips märgib arvu

... 0,01; 0,1; 1; 10; 100 või 1000, ... ,

siis akna kriips joonisel 107 märgib vastavalt sellel skaalal arvu

... 0,014; 0,14; 1,4; 14; 140 või 1400, ...

Seega skaala C (ja samuti skaala D) iga kriips märgib kõiki arve, millel on ühed ja samad tüvenumbrid.

Skaaladel C ja D saame üldiselt märkida ja lugeda kolme tüvenumbriga arve.

Arvu, mille tüvenumbrid on 1, 4 ja 0, kirjutame nii:

1-4-0.

Seda loeme: «üks, neli, null».

Kui soovime ära märkida, et kõne all olev arv on skaalal C , siis kirjutame nõnda:

C -1-4-0.

a) Kirjuta üles, missuguste tüvenumbritega arv skaalal D (joon. 107) on kohaküti arvuga C -1-4-0.

b) Kirjuta üles, missuguste tüvenumbritega arv skaalal C on kohaküti arvuga D -2-7-0 (joon. 107).

771. Märgi akna kriipsuga oma lükatil, mille keel on normaalasendis (s. o. skaalade C ja D alguskriipsud on kohaküti), arvuta tüvenumbrite järgi.

- a) 1-1-0; 1-2-0; 1-3-0; 1-7-0; 1-8-0; 1-9-0;
- b) 1-0-5; 1-1-5; 1-2-5; 1-7-5; 1-8-5; 1-9-5;
- c) 1-0-1; 1-0-2; 1-0-3; 1-0-4; 1-7-1; 1-8-3;
- d) 2-0-0; 3-0-0; 4-0-0; 2-1-0; 2-2-0; 3-8-0;
- e) 2-0-2; 2-0-4; 2-0-6; 2-0-8; 3-0-2; 3-0-4;
- f) 2-0-1; 2-0-3; 2-0-7; 2-0-9; 2-1-1; 2-6-5;
- g) 3-0-0; 3-1-0; 3-2-0; 3-3-0; 3-8-0; 3-9-0;
- h) 3-0-2; 3-0-4; 3-0-6; 3-0-8; 3-5-2; 3-9-6;
- i) 2-3-1; 2-6-5; 2-9-7; 3-2-1; 3-7-1; 3-8-3;
- k) 4-1-0; 4-2-0; 4-5-0; 5-1-0; 6-3-0; 8-2-0;
- l) 4-0-5; 4-1-5; 5-2-5; 5-4-5; 7-1-5; 9-4-5;
- m) 6-0-5; 6-1-0; 6-1-5; 6-2-0; 6-2-5; 6-3-0.

772. Lükatilt näed, et näiteks vahemik 4,0 kuni 4,1 on kaheks jaotatud. Jaotuskriips märgib arvu 4,05. Märgi see arv akna kriipsuga.

Arve 4,01; 4,02; 4,03; 4,04 peame märkima silma järgi, jaotades vahemiku 4,0 kuni 4,05 silma järgi viieks osaks. Analooiliselt tuleb toimida kogu vahemiku ulatuses 4-st 10-ni, sest kogu selles vahemikus on iga kahe kõrvuti oleva kriipsu vahe viis sajandikku.

Märgi lükatil arvud:

- a) 4,15; 4,16; 4,17; 4,18; 4,19; 4,20;
- b) 4,51; 4,52; 4,53; 4,54; 4,55; 4,56;
- c) 5,01; 5,02; 5,03; 5,04; 5,05; 5,06;
- d) 5,07; 5,08; 5,09; 5,10; 5,11; 5,12.

773. Märgi lükatil arvud, mille tüvenumbrid on:

- a) 5-2-1; 5-2-2; 5-2-3; 5-2-4; 5-2-5; 5-2-6;
- b) 5-2-7; 5-2-8; 5-2-9; 5-3-0; 5-3-1; 5-3-2;
- c) 7-5-0; 7-5-1; 7-5-2; 7-5-3; 7-5-4; 7-5-5;
- d) 8-7-0; 8-7-1; 8-7-2; 8-7-3; 8-7-4; 8-7-5.

774. Märgi lükatil arvud:

- a) 110; 120; 130; 170; 180; 190;
- b) 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7;
- c) 2,31; 2,65; 2,97; 3,21; 3,71; 3,83;
- d) 60,5; 61,0; 61,5; 62,0; 62,5; 63,0;
- e) 52,1; 52,2; 52,3; 52,4; 52,5; 52,6;
- f) 750; 751; 752; 753; 754; 755.

775. Koma koha määramiseks kasutame tulemuse ligikaudse hindamise võtet jämedalt ümardatud arvudega. See toimub peast ja tehakse nii, et andmed ümardatakse ühe tüvenumbriga arvudeks ning sooritatakse tehe ümardatud arvudega. Selliselt saame tulemuse ligikaudse väärtuse ühe või kahe tüvenumbriga, mis aitab otsustada tulemuse suurst.

Olgu näiteks teada, et korrutise

$$3,71 \cdot 4,35$$

tüvenumbrid on 1-6-1. Millega võrdub korrutis?

Tehes ligikaudse hinnangu, saame

$$3,71 \cdot 4,35 \approx 4 \cdot 4 = 16.$$

Seega $3,71 \cdot 4,35 = 16,1$.

Teine näide. Jagatise

$$108 : 4,81$$

tüvenumbrid on 2-2-5. Millega võrdub jagatis? Saame

$$108 : 4,81 \approx 100 : 5 = 20.$$

Seega $108 : 4,81 = 22,5$.

Korrutise $0,42 \cdot 92$ tüvenumbrid on 3-8-6. Millega võrdub korrutis?

Teades, et jagatise $1,05 : 5,55$ tüvenumbrid on 1-8-9, kirjuta, millega võrdub jagatis.

776. Kirjuta, millega võrdub korrutis, kui nurksulgudes korrutise järel on antud ta tüvenumbrid.

1. $2,64 \cdot 3,14$ [8-3-0]	2. $1,07 \cdot 44$ [4-7-1]
$57,3 \cdot 6,28$ [3-6-0]	$8,05 \cdot 1,2$ [9-6-5]
$3,6 \cdot 4,5$ [1-6-2]	$2,55 \cdot 3,1$ [7-9-0]
$33,2 \cdot 27$ [9-0-0]	$4,05 \cdot 1,06$ [4-3-0]
$36,3 \cdot 22$ [8-0-0]	$2,5 \cdot 3,06$ [7-6-5]
$5,8 \cdot 1,3$ [7-5-4]	$5,4 \cdot 6,3$ [3-4-0]
$1,1 \cdot 7,7$ [8-4-7]	$2,28 \cdot 5,45$ [1-2-4]
$2,72 \cdot 3,4$ [9-2-5]	$7,05 \cdot 4,85$ [3-4-2]

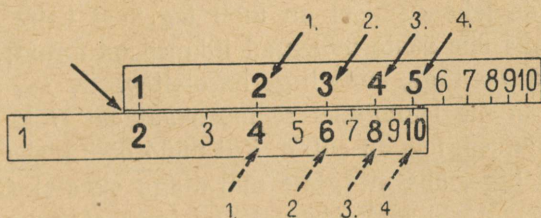
777. Kirjuta, millega võrdub jagatis, kui nurksulgudes jagatise järel on antud ta tüvenumbrid.

1. $6 : 4,8$ [1-2-5]	2. $3,4 : 7$ [4-8-5]
$7,4 : 5,6$ [1-3-2]	$6,2 : 8,4$ [7-4-0]
$3,8 : 2,9$ [1-3-1]	$5,2 : 7,8$ [6-6-5]
$5,3 : 3,9$ [1-3-6]	$1,6 : 9,2$ [1-7-4]
$4,05 : 1,82$ [2-2-2]	$3,34 : 4,35$ [7-6-8]
$2,66 : 2,44$ [1-0-9]	$3,74 : 7,15$ [5-2-3]
$3,22 : 1,23$ [2-6-2]	$5,75 : 6,05$ [9-5-0]
$5,55 : 3,2$ [1-7-4]	$1,11 : 8,15$ [1-3-6]

LÜKATI PÕHISKAALADE OMADUS.

778. Joonisel 108 on kujutatud skaalad C ja D skemaatiliselt niisuguses asendis, et arv 1 skaalal C on kohakuti arvuga 2 skaalal D . Arvude 1 ja 2 suhe on $\frac{1}{2}$. Nagu jooniselt 108 näed, on kõikide kohakuti seisvate arvude suhted võrdsed $\frac{1}{2}$ -ga:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$$



Joon. 108.

Seega on kohakuti seisvad arvud võrdelised, s.t. nende suhted on võrdsed.

Pane oma lükati keel nii, et skaalal C arv 3 oleks kohakuti skaala D arvuga 1. Näed, et kohakuti on veel arvud 4,5 ja 1,5, 6 ja 2, 7,5 ja 2,5 ning 9 ja 3. Ka need arvud on võrdelised, sest

$$\frac{4,5}{1,5} = \frac{6}{2} = \frac{7,5}{2,5} = \frac{9}{3} = 3.$$

Põhiskaalade igas asendis on kohakuti seisvad arvud võrdelised.

Olgu $C-3$ ja $D-1$ kohakuti. Vaata oma lükatil kohakuti seisvaid arve ja täida tabel:

C	3	3,3	4,2		5,1		6,3			7,8	8,7	
D	1	1,1		1,6		1,9		2,4	2,5			3,1

779. Kontrolli lükati abil, kas järgmises tabelis olevad suured x ja y on võrdelised.

x	3,6	45	50	7,5	0,6	5,85	12	13,5	21	14,8	13,5	67,5
y	4,8	60	66,5	10	0,8	7,2	16	18	28	19,7	86	18,5

VÖRDE TUNDMATU LIIKME LEIDMINE.

780. Vörde lahendamisel on meil tegemist kahe võrdse suhtega, kusjuures ühe suhte mõlemad liikmed on antud; teisest suhtest on antud üks liige, teine liige on otsitav.

Otsitava liikme leidmiseks seame skaaladel C ja D kohakuti selle suhte liikmed, mis on antud. Kui nüüd otsitavaks liikmeks on võrde neljas liige, siis märgime märkijaga skaalal C võrde kolmanda liikme. Märkija alt skaalal D leiame otsitava liikme.

N ä i d e. Leia x võrdest

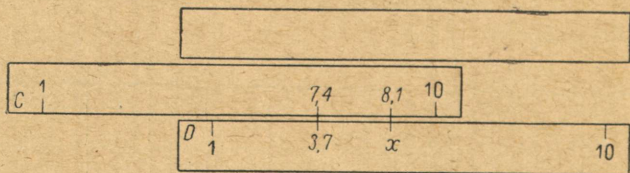
$$\frac{7,4}{3,7} = \frac{8,1}{x}$$

L a h e n d u s. Seame kohakuti C -7,4 ja D -3,7 (joon. 109). Nüüd märgime märkijaga skaalal C arvu 8,1. Skaalal D näeme märkija all otsitava arvu tüvenumbreid 4-0-5.

Koma koha määramiseks toimime nii: suhet $\frac{7,4}{3,7}$ hinnates leiame, et see on 2. Seega x on ligikaudu 4.

V a s t u s. $x \approx 4,05$.

Kui otsitavaks on võrde kolmas liige, siis märgime märkijaga skaalal D antud neljanda liikme. Märkija alt skaalal C leiame otsitava.



Joon. 109.

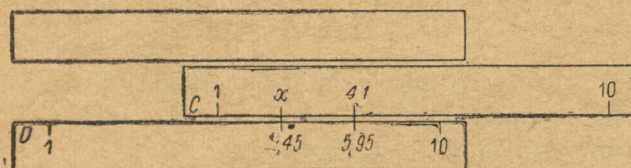
Näide. Lahenda võrre

$$\frac{41}{5,95} = \frac{x}{0,45}$$

Lahendus. Seame kohakuti C -41 ja D -5,95 (joon. 110). Paneme märkija arvule D -0,45. Märkija alt loeme otsitava arvu tüvenumbrid 3-1-0.

Hinnates antud suhet, saame $\frac{41}{5,95} \approx \frac{40}{6} \approx 7$. Seega x peab olema arvust 0,45 seitse korda suurem, s. t. $7 \cdot 0,45 \approx 7 \cdot 0,5 = 3,5$.

Vastus. $x = 3,10$.



Joon. 110.

Lahenda nende näidete eeskujul võrded

$$\text{a) } \frac{8,2}{4,3} = \frac{9,25}{x}; \quad \text{b) } \frac{27,8}{3,64} = \frac{x}{3,24}$$

Märkus. Skaaladel C ja D kohakuti seisvate arvude suhet võib vaadelda murruna, kusjuures suhte esimene liige on lugejaks, teine liige nimetajaks ning keele alumine serv murrujooneks.

781. Leia x võrdest

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{5}{8,2} = \frac{15}{x}; & 2) \quad & \frac{20}{32,8} = \frac{25}{x}; \\ 3) \quad & \frac{14,5}{20,8} = \frac{x}{41,5}; & 4) \quad & \frac{29,6}{42,5} = \frac{x}{6,05}. \end{aligned}$$

782. Teades, et $4^\circ \text{R} = 5^\circ \text{C}$, täida alljärgnev tabel.

R	4	6	6,3	6,55	7,05	7,2					12,5	15,6		
C							2,8	30,2	40	41,5			36,8	61,2

KORRUTAMINE.

783. Lahenda lükati abil võrre

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{x}.$$

Võrde põhiomaduse põhjal saad, et

$$x = 2 \cdot 3.$$

Seega annab selle võrde lahendamine korrutise $2 \cdot 3$.

Niisamuti võrde

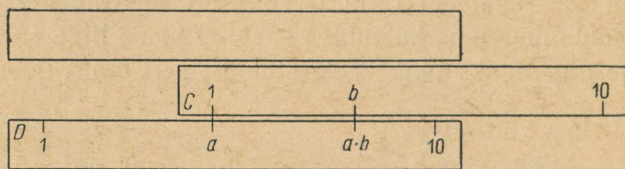
$$\frac{1}{1,82} = \frac{2,75}{x}$$

lahendamine annab korrutise $1,82 \cdot 2,75$. Leia lükati abil see korrutis.

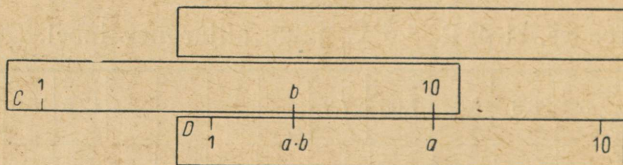
784. Ülesandest 776 järeldub, et kahe teguri korrutise leidmiseks lükatil toimime nii:

- 1) märgime skaalal D ühe teguri;
- 2) seame selle teguriga kohakuti skaala C alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpukriipsu, s. o. arvu 10);
- 3) märgime skaalal C teise teguri;
- 4) leiame märkija alt skaalal D otsitava korrutise.

Joonistel 111 ja 112 on skemaatilisel näidatud korrutise $a \cdot b$ leidmine lükati abil.



Joon. 111.



Joon. 112.

785. Leia lükati abil korrutis:

a) $2,14 \cdot 17,3$

b) $7,25 \cdot 8,45$

786. Leia lükati abil korrutis ja võrdle tulemust vastusega.

1) $8,30 \cdot 7,25$

5) $1,74 \cdot 6,50$

2) $9,80 \cdot 19,0$

6) $1,29 \cdot 8,55$

3) $4,25 \cdot 7,20$

7) $5,05 \cdot 7,65$

4) $6,05 \cdot 8,10$

8) $4,75 \cdot 6,75$

Vastused. 1) 60,2. 2) 186. 3) 30,6. 4) 49. 5) 11,3. 6) 11,0.
7) 38,6. 8) 32,0.

787. Leia lükati abil korrutis ja kontrolli tulemust ülesande lõpus antud tüvenumbrite järgi.

1) $2,08 \cdot 5,55$

5) $8,30 \cdot 33,0$

2) $3,38 \cdot 8,35$

6) $0,56 \cdot 0,84$

3) $6,05 \cdot 1,88$

7) $86 \cdot 113$

4) $12,2 \cdot 8,75$

8) $34 \cdot 0,58$

Korrutiste tüvenumbrid: 1) 1-1-5. 2) 2-8-2. 3) 1-1-4. 4) 1-0-7.
5) 2-7-4. 6) 4-7-0. 7) 9-7-2. 8) 1-9-7.

788. Leia lükati abil korrutised:

1) $52 \cdot 0,016$

2) $152 \cdot 0,42$

$0,63 \cdot 0,57$

$26 \cdot 4,6$

$31,6 \cdot 8,10$

$37,4 \cdot 0,64$

$0,21 \cdot 7,2$

$67 \cdot 17,2$

3) $4,2 \cdot 3,9$

4) $13,2 \cdot 5,60$

$5,6 \cdot 3,2$

$16,1 \cdot 1,10$

$4,75 \cdot 3,20$

$17,2 \cdot 0,495$

$6,7 \cdot 4,9$

$21,7 \cdot 0,875$

789. Leia korrutised:

1) $1,4 \cdot 2,7$

2) $3,2 \cdot 1,56$

$3,5 \cdot 3,6$

$7,81 \cdot 1,62$

$3,7 \cdot 1,5$

$32,4 \cdot 2,8$

$4,2 \cdot 5,6$

$1,87 \cdot 2,56$

3) $3,47 \cdot 5,66$

4) $3,2 \cdot 5,6$

$0,47 \cdot 56,6$

$7,8 \cdot 1,45$

$8,75 \cdot 0,69$

$6,42 \cdot 34,5$

$0,42 \cdot 0,97$

$4,8 \cdot 0,75$

790. Leia korrutised, teades, et tegurid on ligikaudsed arvud.

- | | | | |
|----|------------|----|--------------|
| 1) | 3,2 · 4,1 | 2) | 4,70 · 2,10 |
| | 3,4 · 1,5 | | 0,3 · 12,5 |
| | 2,3 · 4,7 | | 0,30 · 12,5 |
| | 3,0 · 1,5 | | 0,300 · 12,5 |
| 3) | 3,2 · 4,73 | 4) | 4,7 · 5,1 |
| | 1,1 · 10,6 | | 0,22 · 8,9 |
| | 3,5 · 4,10 | | 13,8 · 4,2 |
| | 0,755 · 81 | | 0,86 · 162 |

791. Üks tellis kaalub 3,6 kg. Kui palju kaaluvad 12; 15; 17; 19; 21; 25; 37; 42; 56; 62 tellist?

792. Klassi pikkus on 7,8 m ja laius 6,2 m. Kui suur on klassi põranda pindala?

793. Traktor künnab 1 tunniga 0,22 ha keša. Kui palju künnab see traktor 7,67 tunniga?

794. Meeter riiet maksab 2,75 rbl. Kui palju maksab 0,75; 3,25; 4,2; 5,6; 6,45 meetrit seda riiet?

PROTSENTIDE LEIDMINE.

795. Protsentide leidmine antud arvust toimub korrutamise teel. Näiteks 47,5% arvust 63,2 leitakse nii:

$$47,5\% \cdot 63,2 = 0,475 \cdot 63,2 = 30.$$

Leia lükati abil 25% arvust 72.

796. Leia lükati abil:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) 72% 85-st | 2) 67% 95-st |
| 35% 42-st | 87,5% 129-st |
| 25% 48-st | 92% 335-st |
| 12% 22-st | 13,5% 47-st |

JAGAMINE.

797. Jagatise 8 : 4 leidmiseks lükati abil lahendame võrde

$$\frac{8}{4} = \frac{x}{1},$$

millest

$$x = \frac{8}{4}.$$

Leia võrde

$$\frac{12}{4} = \frac{x}{1}$$

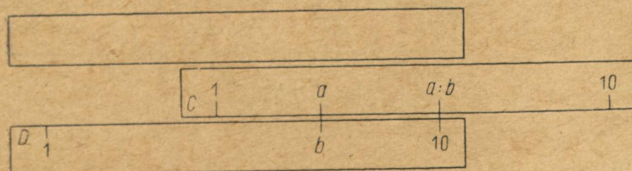
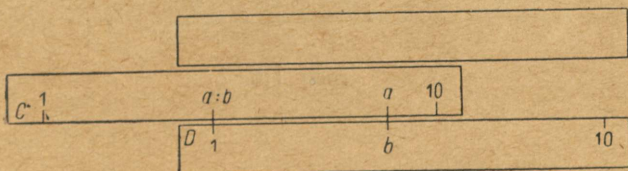
lahendamise teel jagatis $\frac{12}{4}$.

798. Leia eelneva eeskujul jagatis 69,4 : 2,46. (Vastus. 28,2)

799. Ülesannetest 797 ja 798 järeldub, et kahe arvu jagatise leidmiseks lükati abil toimime järgmiselt:

- 1) märgime jagaja skaalal D ;
- 2) seame jagajaga kohakuti jagatava skaalal C ;
- 3) leiame skaala D alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpu-kriipsu, s. o. arvu 10) kohalt skaalal C jagatise.

Joonisel 113 ja 114 on skemaatilisel näidatud jagatise $a : b$ leidmine lükati abil.



Joon. 114.

Jagatise 8 : 4 arvutamist saab käsitada ka võrde

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{x}$$

lahendamisenä, sest sellegi võrde lahendamine annab

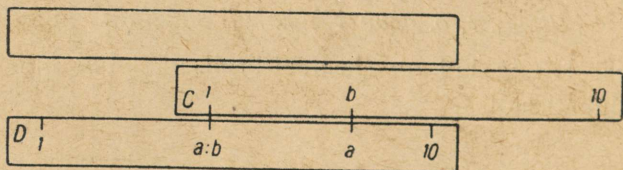
$$x = 8 : 4.$$

Jagatise 12 : 4 saame võrde

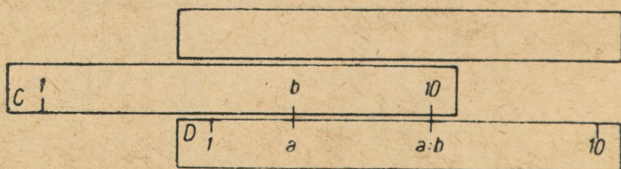
$$\frac{4}{12} = \frac{1}{x}$$

lahendamisel. Seda arvestades võib jagamine lükatil toimuda ka nii:

- 1) märgime jagatava skaalal D ;
- 2) seame jagatavaga kohakuti jagaja skaalal C ;
- 3) leiame skaala C alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpukriipsu, s. o. arvu 10) kohalt skaalal D jagatise (vt. joonised 115 ja 116).



Joon. 115.



Joon. 116.

Leia lükati abil jagatis:

a) $9,35 : 2,32$

b) $44 : 7,8$

800. Arvuta lükati abil jagatis ja võrdle tulemust vastusega.

1) $19,5 : 3,86$

5) $6,1 : 2,91$

2) $3,06 : 5,15$

6) $9,8 : 6,7$

3) $16,2 : 4,5$

7) $2,22 : 1,14$

4) $4,4 : 2,1$

8) $5,45 : 4,15$

Vastused. 1) 5,05. 2) 0,595. 3) 3,6. 4) 2,1. 5) 2,1. 6) 1,46.
7) 1,86. 8) 1,31.

801. Arvuta lükati abil ligikaudsete arvude jagatis.

1) $8,35 : 5,6$

2) $7,05 : 2,46$

$7,20 : 2,04$

$8,15 : 4,05$

$2,08 : 1,45$

$2,88 : 2,36$

$3,38 : 1,83$

$6,05 : 1,05$

3) $4,6 : 3,02$

4) $2,22 : 4,25$

$1,64 : 3,1$

$7,05 : 9,9$

$2,88 : 5,8$

$3,82 : 4,35$

$4,4 : 9,15$

$4,15 : 6,65$

802. Ristküliku pindala on $32,5 \text{ dm}^2$. Leia ristküliku alus, kui kõrgus on $5,20 \text{ dm}$.

803. Kui kõrge peab olema $8,50 \text{ dm}^2$ suuruse põhjaga risttahukas, et selle ruumala oleks $56,5$; $13,3$; $45,2$; $56,8$; $62,4$ kuupdetsimeetrit?

804. Saadeti jalgrattaid kaalus $2,25$ tonni. Mitu jalgratast seal oli, kui üks jalgratas kaalub keskmiselt $0,018$ tonni?

805. Mitmelt hektarilt saadi 861 ts kartuleid, kui keskmine saak hektarilt oli 182 ts?

ARVU LEIDMINE TEMA PROTSENTIDES ANTUD OSA JÄRGI.

806. Arvu leidmine tema protsentides antud osa järgi toimub jagamise teel. Olgu näiteks teada, et 34,5% mingist arvust on 68,5. Siis otsitav arv on

$$68,5 : 34,5\% = 68,5 : 0,345.$$

Lükatil lejame, et jagatise tüvenumbrid on 1-9-8. Et $68,5 : 0,345 \approx 70 : 0,3 \approx 200$, siis $68,5 : 0,345 = 198$.

Leia lükati abil arv, millest 32% on 17,5.

807. Leia arv, millest

1) 64% on 16	2) 3,1% on 93
48% on 72	6,8% on 13,6
68% on 0,65	1,8% on 90
2,5% on 25	8% on 2,4

808. Tööline maksab korteri eest üüri 1,44 rubla kuus. See moodustab 1,8% tema kuupalgast. Kui suur on selle töölise kuupalk?

809. Maak sisaldab 66,7% rauda. Kui palju maaki on tarvis 2,5 tonni raua saamiseks?

810. Pärast seda, kui 7,2% söest oli ära tarvitatud, oli sütt veel järel 232 tonni. Mitu tonni sütt oli ära kulutatud?

811. Kui masina hinda alandati 5,2% võrra, siis selle hind vähenes 182 rubla võrra. Kui palju maksis masin enne hinnaalandust?

KAHE ARVU SUHE PROTSENTIDES.

812. Kolhoosil on 960 ha maad, sellest põllumaad 912 ha. Mitu protsenti kolhoosi maast on põldude all?

$$L a h e n d u s. 912 : 960 = 0,955 = 95,5\%.$$

Leia, mitu protsenti on 3,4 10,5-st.

813. Mitu protsenti on

1) 2 6-st?	2) 8 17,5-st?
5 20-st?	8,75 15-st?
9 45-st?	5,3 80-st?
6 25-st?	2,25 32-st?

814. Kooliõpilased panid idanema 60 peediseemet, millest idanes 57. Mitu protsenti seemneist idanes?

815. 400-st rukkiterast idanes 392 tera. Mitu protsenti rukkiteradest idanes?

816. Kauba brutokaal on 120 kg, netokaal 98 kg. Mitu protsenti moodustab taarakaal brutokaalust?

817. Klassis on 36 õpilast. Ühel päeval puudus klassist 4 õpilast. Mitu protsenti õpilastest puudus sel päeval klassist?

818. Noorte tehnikute ringi liikmete arv kasvas 98-lt 125-ni. Mitme protsendi võrra kasvas ringi liikmete arv?

9. TSENTRAALSÜMMEETRIA. RÖÖPKÜLIK. TRAPETS.

SÜMMEETRIA PUNKTI SUHTES.

819. a) On antud kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge s ja t ning mingi kujund, näiteks kolmnurk ABC (joon. 117). Peegeldame kolmnurka ABC esmalt teljest s . Saame kolmnurga $A'B'C'$. Nüüd peegeldame kolmnurka $A'B'C'$ teljest t . Saame kolmnurga $A''B''C''$.

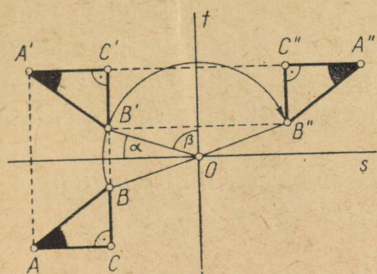
Urime, kuidas asetseb kahekordse peegelduse teel saadud kolmnurk $A''B''C''$ antud kolmnurga ABC suhtes. Selleks ühendame kolmnurga ühe tipu ja selle peegeldused, näiteks punktid B , B' ja B'' telgede lõikepunktiga O . Sümmeetria tõttu

$$\left. \begin{array}{l} OB = OB' \\ OB' = OB'' \end{array} \right\} \rightarrow OB = OB''.$$

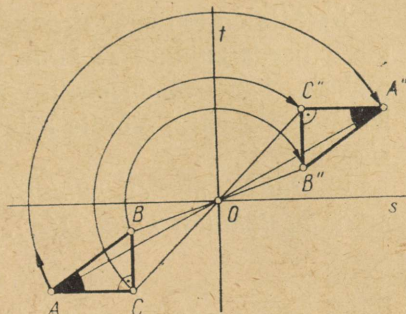
Punkt B'' on saadav punktist B lõigu OB (ehk ka kogu tasapinna) pööramisel punkti O ümber nurga BOB'' võrra. Leiame selle nurga:

$$\begin{aligned} \angle BOB'' &= \angle BOB' + \angle B'OB'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Seega on OB'' saadav lõigust OB selle pööramisel punkti O ümber sirgnurga võrra. Niisamuti saaksime punktist A punkti A'' , kui lõigu OA pööraksime ümber punkti O sirgnurga võrra. Üldiselt, kolmnurk $A''B''C''$ on saadav kolmnurgast ABC selle pööramisel punkti O ümber sirgnurga võrra. Sellel pööramisel kolmnurga iga punkt, näiteks tipp B , kujundab poolringjoone, mille keskpunkt on O (joon. 118).



Joon. 117.



Joon. 118.

Kokkuvõttes saame, et kaks järjestikust peegeldust kahest ristuvast teljest on sama, mis kujundi (ehk kogu tasapinna) pööramine ümber telgede lõikepunkti sirgnurga võrra.

b) Mis on joonisel 118 punkt O lõigu AA'' suhtes? lõigu BB'' suhtes? lõigu CC'' suhtes? Kuidas on kõige lihtsam leida punkte A'' , B'' ja C'' , kui punktid A , B , C ja O on antud?

820. a) Olgu kujundi k (näiteks kolmnurga ABC) pööramisel sirgnurga võrra ümber punkti O saadud kujund k' (kolmnurk $A'B'C'$). Kujundeid k ja k' nimetatakse punkti O suhtes sümmeetrilisteks. Niisamuti nimetame selle punkti suhtes sümmeetrilisteks iga kaht nende kujundite teineteisele vastavat punkti (nagu A ja A'), iga kaht teineteisele vastavat lõiku, nurka jne.

Punkti, mille suhtes kujundid k ja k' on sümmeetrilised, nimetatakse nende kujundite sümmeetriakeskpunktiks. Näiteks joonisel 118 on punkt O kolmnurkade ABC ja $A''B''C''$ sümmeetriakeskpunkt.

Eelnevast on selge, et

sümmeetriakeskpunkt on kahe selle punkti suhtes sümmeetrilise punkti ühenduslõigu keskpunkt.

Sümmeetriat punkti suhtes nimetatakse ka tsentraalsümmeetriaks.

Tsentraalsümmeetria on määratud, kui on antud sümmeetriakeskpunkt, sest siis on kerge leida igale punktile temaga sümmeetriliselt asetsevat punkti (kuidas?).

b) Mis on lõiguga, sirgega, nurgaga antud punkti suhtes sümmeetriliseks kujundiks? Mida võib öelda kahe sümmeetrilise lõigu pikkuse, kahe sümmeetrilise nurga suuruse, kahe sümmeetrilise kolmnurga kohta? Võrdle kahe sümmeetrilise kolmnurga orientatsiooni.

c) Punkti, mis on punkti O suhtes sümmeetriline punktiga A , märgime lühidalt kujul $O(A)$. Kirjutust

$$A' = O(A)$$

loeme «Punkt A' on punkti O suhtes sümmeetriline punktiga A » ehk «Punktid A' ja A on punkti O suhtes sümmeetrilised». See kirjutus tähendab, et

$$A'O = AO \text{ ja } O \in AA'$$

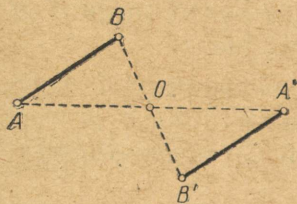
s. o. punkt O on lõigu AA' keskpunkt.

Loe kirjutusi ja selgita, mida need tähendavad:

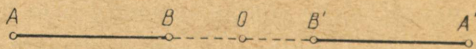
$$M' = O(M), A = C(B), P' = M(P).$$

821. a) Võta mingi lõik AB ja väljaspool sirget AB punkt O . Joonesta lõik $A'B'$, mis on punkti O suhtes sümmeetriline lõiguga AB , s. o. lõik $A'B' = O(AB)$ (joon. 119).

b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et $O \in AB$ (joon. 120).



Joon. 119.



Joon. 120.

c) Tõesta, et

punkti suhtes sümmeetrilised sirged on paralleelsed või ühtivad.

Näpunäide (joon. 119). Kui $O \notin AB$, siis

$$\triangle AOB = \triangle A'OB' \rightarrow \angle A = \angle A' \rightarrow AB \parallel A'B'.$$

822. Joonesta kolmnurgaga ABC punkti O suhtes sümmeetriline kolmnurk, kui

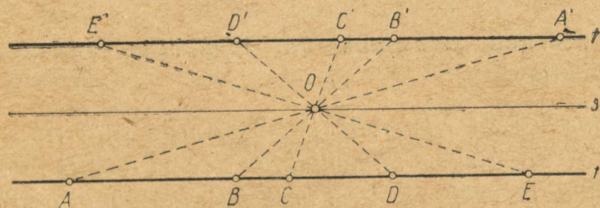
- punkt O on väljaspool kolmnurka ABC ;
- punkt O on kolmnurga ABC ühe külje pikendusel;
- punkt O on kolmnurga ABC ühel küljel;
- punkt O on kolmnurga ABC ühes tipus;
- punkt O on kolmnurga ABC sees.

823. On antud sirge s ja punkt $O \notin s$. Joonesta sirge $s' = O(s)$. Lahenda ülesanne kahel viisil:

- antud sirge mistahes kahe punkti abil;
- punktist O sirgele s tõmmatud ristlõigu abil.

824. On antud kaks punkti P ja P' . Leia sirgli ja joonlaua abil nende sümmeetriakeskpunkt.

825. On antud kaks paralleelset sirget t ja t' . Näita, et nendega määratud riba kesksirge iga punkt on sirgete t ja t' sümmeetriakeskpunktiks (joon. 121).



Joon. 121.

N ä p u n ä i d e. Vt. üles. 503, b.

Kui palju on sümmeetriakeskpunkte kahel paralleelsel sirgel?

Kahe paralleelse sirge sümmeetriakeskpunktid asetsevad nende paralleelide poolt piiratud riba kesksirgel.

826. Missugustel suurtest trükitähedest leidub sümmeetriakeskpunkt? Joonesta need tähed ühes sümmeetriakeskpunktiga.

827. a) Sõnasta teoreem: $A \in s \rightarrow O(A) \in O(s)$.

b) Sõnasta teoreem:

$$\left. \begin{array}{l} s' = O(s) \\ t' = O(t) \end{array} \right\} \rightarrow s' \cap t' = O(s \cap t).$$

828. Joonesta võrdkõlgsel kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

829. Joonesta mingi korrapärase kuusnurk. Kas tal leidub sümmeetriakeskpunkt?

RÕÖPKÜLIKU OMADUSED.

830. a) Lõika paberist kaks erinevat riba ja aseta need nii, nagu näed joonisel 122. Öeldakse, et need ribad lõikuvad. Kahe lõikuva riba ühisosa on rööpkülik (nelinurk ABCD joonisel 122).

Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed:

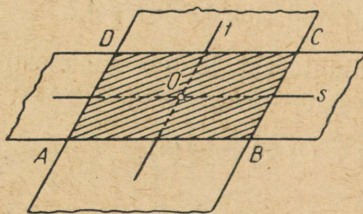
$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC.$$

b) Tõestame, et rööpkülikul leidub sümmeetriakeskpunkt, nimelt

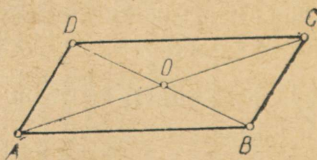
kesksirgete lõikepunkt on rööpküliku sümmeetriakeskpunktiks.

Olgu (joon. 122) riba $AB \parallel DC$ kesksirge s ja riba $AD \parallel BC$ kesksirge t . Nende sirgete lõikepunkt $O = s \cap t$ on siis mõlema riba ühine sümmeetriakeskpunkt, sest kesksirge iga punkt on riba üheks sümmeetriakeskpunktiks (üles. 825). Niisiis, sirge $AB = O(DC)$ ja sirge $AD = O(BC)$. Kuid siis sirgete AB ja AD lõikepunkt A on punkti O suhtes sümmeetriline sirgete DC ja BC lõikepunktiga C :

$$A = O(C).$$



Joon. 122.



Joon. 123.

$$B = O(D).$$

Sellega on väide tõestatud: kui joonist pöörata 180° võrra ümber punkti O , siis punkt A satub punkti C kohale, punkt B punkti D kohale ja kogu joonis võtab endise asendi.

c) Ühendame rööpküliku vastastipud A ja C ning B ja D . Et $A = O(C)$ ja $B = O(D)$, siis

$$O \in AC \text{ ja } O \in BD,$$

sest kahe sümmeetrilise punkti ühenduslõik läbib sümmeetriakeskpunkti. Sellest nähtub, et (joon. 123)

$$O = AC \cap BD.$$

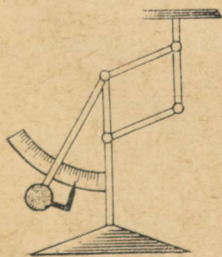
Rööpküliku sümmeetriakeskpunktiks on tema diagonaalide lõikepunkt.

831. Kasutades rööpküliku sümmeetriat ja tõsiasja, et kaks sümmeetrilist lõiku (nurka) on võrdsed, tõesta rööpküliku järgmised omadused:

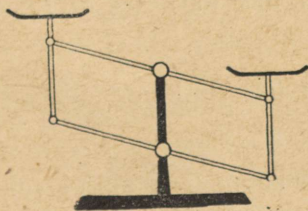
- rööpküliku vastasküljed on võrdsed;
- rööpküliku vastasnurgad on võrdsed;
- rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist;
- rööpküliku diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdses kolmnurgaks.

832. Rööpkülik leiab tehnikas sageli rakendamist. Joonised 124 kuni 127 kujutavad mõningaid esemeid, mille juures on kasutatud rööpkülikut (kirjakaal, lauakaal, jalgratta lamp, hambaarsti riistade laud).

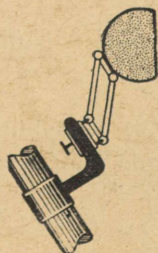
Selgita, miks on sobiv viimase kahe eseme kinnitamisel kasutada rööpkülikut, mitte aga kolmnurka.



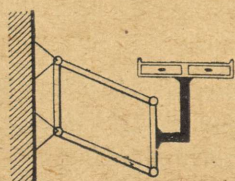
Joon. 124.



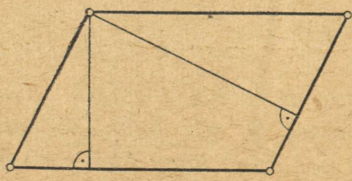
Joon. 125.



Joon. 126.



Joon. 127.



Joon. 128.

833. Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse tema kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust (joon. 128).

Joonesta mingi rööpkülik ühes tema kahe kõrgusega, mõõda alused ja kõrgused, arvuta pindala kahel viisil ja võrdle tulemusi. Millest on tingitud tulemuste erinevus, kui see esineb?

834. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 5 cm ja 3,5 cm ning nendevaheline nurk on 60° . Mõõda rööpküliku diagonaalid.

835. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 6,8 cm ja 4 cm ning nendevaheline nurk on 140° . Mõõda rööpküliku diagonaalid.

836. Põhjenda väidet, et

rööpküliku külje lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga.

837. Rööpküliku übermõõt on 18,6 dm. Üks külge on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

838. Rööpküliku übermõõt on 5,5 m ja üks külge on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

839. Rööpküliku üks nurk on $57^\circ 15'$. Kui suured on teised nurgad?

840. Rööpküliku üks nurk on $52^\circ 20'$ suurem kui teine. Leia nurkade suurused.

841. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged paralleelselt haaradega. Leia saadud rööpküliku übermõõt, kui võrdhaarse kolmnurga haar on 12 cm.

842. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

843. Tõesta, et rööpküliku külje lähisnurkade poolitajad on risti.

844. Rööpküliku teravnurga poolitaja, lõikudes rööpküliku küljega, jaotab selle lõikudeks 8 cm ja 3 cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

845. Tõesta, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külg on pool pikemast.

RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

846. a) Peale rööpküliku definitsiooni on veel muid tunnuseid, mis võimaldavad otsustada, et antud nelinurk on rööpkülik. Üks neist on järgmine:

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

Eeldus. $AB = DC$ ja $AD = BC$ (joon. 129).

Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC . Siis

$$\triangle ABC = \triangle CDA,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ ja } \gamma_1 = \alpha_2$$

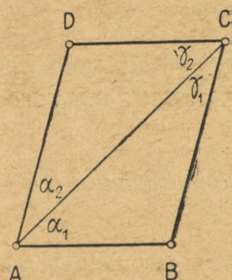
kuid vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

b) Tõestatud teoreemi järgi on nelinurga vastaskülgede võrdsus piisav tingimus selleks, et nelinurk oleks rööpkülik: kui see tingimus on täidetud, siis nelinurk on rööpkülik.

Varem leidsime, et iga rööpküliku vastasküljed on võrdsed, s. t. vastaskülgede võrdsus on tarvilik tingimus selleks, et neli-



Joon. 129.

murk oleks rööpkülik: kui see tingimus pole täidetud, siis nelinurk ei saa olla rööpkülik.

Neid kaht tõsiasja koos väljendab lause: vastaskülgede võrdsus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et antud nelinurk oleks rööpkülik.

c) Suusapaar maksab 12.80 rbl. Kas suusapaari ostmiseks on tarvilik või piisav, et ostjal oleks raha 5 rbl., 8 rbl., 12 rbl., 15 rbl., 20 rbl.? Missuguse summa omamine on nende suuskade ostmiseks tarvilik ja piisav?

847. a) *Teine teoreem, mille põhjal saab otsustada, et antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:*

nelinurk, millel on üks paar võrdseid ja paralleelseid vastaskülgi, on rööpkülik.

Eeldus. $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joon. 129).

Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Kolmnurkadel ADC ja ABC on peale ühise külje AC veel eelduse järgi

$$AD = BC.$$

Nende kolmnurkade nurkadest

$$\alpha_2 = \gamma_1$$

kui põiknurgad paralleelsete sirgete AD ja BC lõikaja AC juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KNK järgi on siis

$$\triangle ADC = \triangle CBA.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$\alpha_1 = \gamma_2,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad. Sellest järeldub sirgete paralleelsuse teise tunnuse põhjal, et nelinurga $ABCD$ vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

b) Järelda eelnevast, et ühe paari vastaskülgede paralleelsus ja võrdsus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et nelinurk oleks rööpkülik.

848. Rööpküliku konstrueerimiseks tema antud elementide järgi ehitame nende elementide järgi esmalt ühe kolmnurga, milleks diagonaal jaotab rööpküliku, ja siis teise. Teostanud konstruktsiooni,

põhjendame, kasutades rööpküliku tunnuseid, et saadud nelinurk on tõesti rööpkülik.

Rööpküliku kaht lähiskülge tähistame tähtedega a ja b , külje a lähisnurki tähtedega α ja β , diagonaalide tähtedega e ja f (f on β vastas).

a) Joonesta rööpkülik, millel $a = 3,9$ cm, $b = 2,9$ cm ja $e = 5,8$ cm.

b) Joonesta rööpkülik, millel $a = 4,5$ cm, $\alpha = 48^\circ$ ja $f = 7,2$ cm.

c) Joonesta rööpkülik, millel $a = 5,5$ cm, $\beta = 130^\circ$ ja $b = 4,1$ cm.

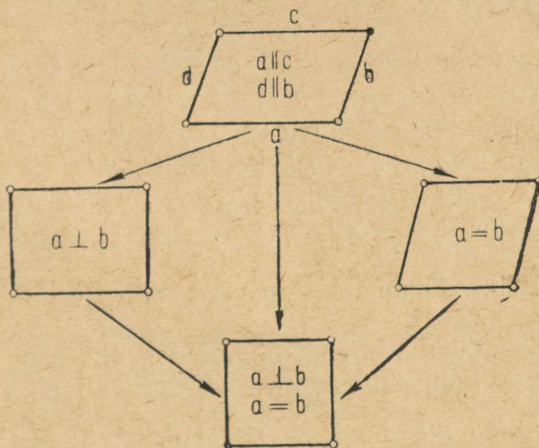
849. a) Tõesta, et

nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

b) Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades ehita rööpkülik, millel $a = 5,7$ cm, $e = 7,2$ cm ja $f = 5,2$ cm.

RÖÖPKÜLIKU ERILIIGID.

850. Rööpküliku eriliikidena vaatleme selliseid rööpkülikuid, millel kas nurgad on võrdsed või küljed on võrdsed või nii nurgad kui ka küljed on võrdsed. Selliseid rööpkülikuid nimetatakse vastavalt ristkülikuteks, rombideks ja ruutudeks (joon. 130).



Joon. 130.

a) Ristkülik on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed.

Et rööpküliku nürkade summa on 360° , siis ristküliku iga nurk peab olema $360^\circ : 4$ ehk 90° . Seega ristkülik on täisnurkne rööpkülik. Niisuguse rööpküliku saame, kui tema ühe nurga teeme täisnurgaks (joon. 130).

Põhjenda väidet, et kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis on ka teised nurgad täisnurgad.

b) Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

Rombi saame, kui rööpküliku ühe tipu lähisküljed teeme võrdseiks, sest siis on rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu kõik küljed võrdsed (joon. 130). Seega romb on võrdkülgne rööpkülik.

c) Ruut on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed ja küljed on võrdsed (joon. 130).

851. a) Kuidas defineerida ruutu ristküliku kaudu?

b) Kuidas defineerida ruutu rombi kaudu?

852. a) Mis on kahe ristuva riba ühisosa?

b) Mis on kahe ühelaiuse riba ühisosa?

c) Mis on kahe ristuva ja ühelaiuse riba ühisosa?

RISTKÜLIKU, ROMBI JA RUUDU OMADUSED.

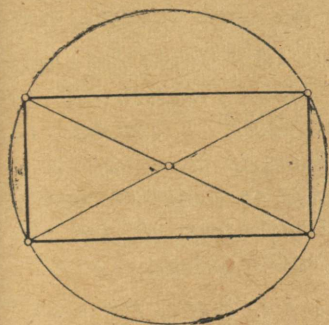
853. Rööpküliku igal eriliigil on muidugi kõik rööpküliku omadused. Kuid peale nende on igal eriliigil veel omad eriomadused. Kui kõneldakse ristküliku või rombi omadustest, siis mõeldakse tavaliselt neid eriomadusi. Vaatleme neid.

Joonesta ristkülik $ABCD$ ühes tema diagonaalidega AC ja BD , vaatle kolmnurki ABC ja BAD ning tõesta teoreem:

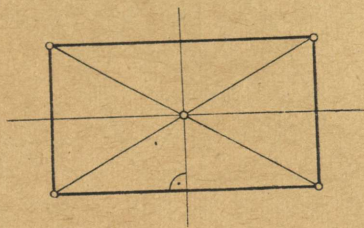
ristküliku diagonaalid on võrdsed.

854. Et ristküliku kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist ja ühtlasi on teineteisega võrdsed, siis järeldub, et

ristküliku diagonaalide lõikepunkt on tema tippudest võrdsetel kaugustel.



Joon. 131.



Joon. 132.

Kontrolli seda, joonestades ringjoone, mille keskpunktiks on ristküliku diagonaalide lõikepunkt ja mis läbib ristküliku üht tippu (joon. 131). Kas ta läbib ristküliku kõiki tippe?

Seda ringjoont nimetatakse ristküliku ümberringjooneks.

855. Mis on ristküliku sümmeetriatelgedeks? Kasutades ristküliku teljelist sümmeetriat, tõesta, et ristküliku tipud on diagonaalide lõikepunktist võrdsel kaugusel (joon. 132).

856. a) Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

b) Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

c) Joonesta ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 45° .

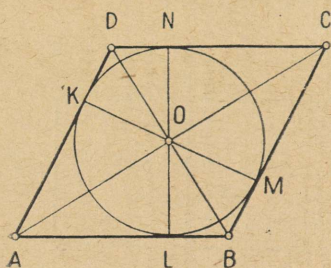
857. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

858. Mis on rombi sümmeetriatelgedeks? Nimeta rombi tähtsaimaid omadusi, mis järelduvad tema sümmeetriast (vt. ül. 480).

859. Tõesta, et

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsel kaugusel.

Eeldus. Nelinurk $ABCD$ on romb ja O on tema diagonaalide lõikepunkt; $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$ (joon. 133).



Joon. 133.

Väide. $OK = OL = OM = ON$.
 Tõestus. On teada, et nurgapoolitaja punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nii nurga A kui ka nurga C haaradest, seega

$$OK = OL \text{ ja } OM = ON.$$

Sama punkt O kui diagonaali BD punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja seega

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust, saame

$$OK = OL = OM = ON,$$

mida tuligi tõestada.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi siseringjooneks (joon. 133).

860. Tõesta, et rombi lähiskülgedele tõmmatud kõrgused on võrdsed. Mis on nendeks kõrgusteks joonisel 133?

861. Tõesta, et rombi kahest vastastipust tõmmatud kõrgused lõikuvad diagonaalil.

862. Põhjenda väidet: ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

863. Põhjenda väidet, et ruudul on kõik risküliku omadused ja ühtlasi ka kõik rombi omadused. Mis sellest järeldub ruudu sümmeetria kohta? ruudu diagonaalide kohta?

864. Põhjenda väidet, et ruut on korrapärane nelinurk. Mis on ruudu keskpunktiks? Näita, et ruudul leidub siseringjoon ja ka ümberringjoon.

865. a) Joonesta sirkli ja joonlaua abil ruut, mille üheks küljeks jääb antud lõik.

b) Joonesta ruut, mille diagonaali pikkus on 6,4 cm.

c) Joonesta ruut, mille ümberringjoon on antud.

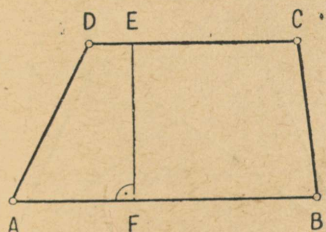
TRAPETS.

866. Trapets on nelinurk, millel ainult üks paar vastaskülgi on paralleelsed.

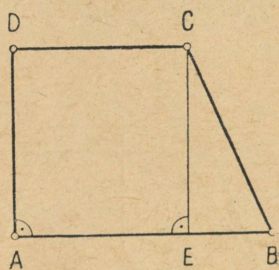
Trapetsi paralleelsed küljed (AB ja DC , joon. 134) on tema alused, teised küljed aga haarad. Alustevaheline ristlõik on trapetsi kõrgus (EF , joon. 134).

Näita, et trapets on nurga ja riba ühisosa, kui nurga tipp on väljaspool riba ja nurka mõista tasapinna osana.

Kui suur on trapetsi haara lähisnurkade summa? Kui suur on trapetsi nurkade summa?



Joon. 134.



Joon. 135.

867. Trapetsit, mille üks haar on alustega risti, nimetatakse täisnurkseks trapetsiks (joon. 135).

Kui suured on täisnurkse trapetsi kaks nurka? Mis saab öelda täisnurkse trapetsi kõrguse kohta?

868. Joonesta täisnurkne trapets, mille -

- alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning lühem haar on 3,3 cm;
 - alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning pikem haar on 3,3 cm;
 - pikem alus on 6 cm ja haarad on 4 cm ja 5,5 cm;
 - üks alus on 6,4 cm ja diagonaalid on 5,4 cm ja 7,5 cm.
- Mõõda jooniselt küljed ja diagonaalid, mis pole antud.

869. Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda võrdhaarseks trapetsiks (joon. 136).

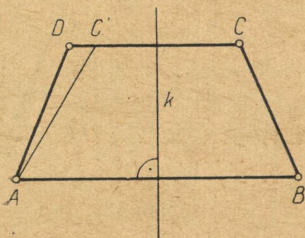
Tõestame, et

võrdhaarsel trapetsil leidub sümmeetriatelg.

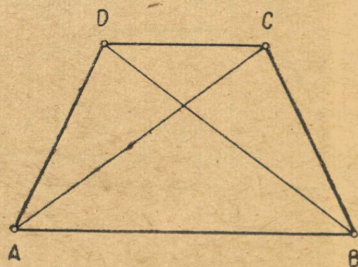
Eeldus. $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$ (joon. 136).

Väide. Leidub niisugune sirge s , et $A = s(B)$ ja $D = s(C)$.

Tõestus. Olgu AB trapetsi pikem alus. Joonestame tema keskristsirge k ja näitame, et see ongi otsitav sümmeetriatelg s . Et $k \perp AB$, siis $k \perp DC$, sest paralleelsetel sirgetel on ühised rist-sirged. Seega $C' = k(C)$ peab asetsema kusagil sirgel DC . Kui $C' \neq D$, siis ühendame C' ja $A = k(B)$. Sümmeetria tõttu $AC' = BC$ ja eelduse tõttu $BC = AD$, tähendab $AC' = AD$. Seega kolmnurk ADC' on võrdhaarne ja tema alusnurgad tippude D ja C' juures on võrdsed. Kuid see pole võimalik, sest üks neist nurkadest on teravnurk ja teine nürinurk. Seega pole võimalik, et $C' \neq D$. Jääb üle, et $D = k(C)$, s. t. sirge k on trapetsi $ABCD$ sümmeetriatelg.



Joon. 136.



Joon. 137.

870. Kasutades võrdhaarse trapetsi sümmeetriat, tõesta järgmised teoreemid (joon. 137).

- võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed;
- võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed;
- võrdhaarse trapetsi haarade pikendused lõikuvad aluste keskristsirgel.

871. Joonesta võrdhaarne trapets, mille

- alus on 6 cm, haar 3 cm ja nendevaheline nurk on 60° ;
- alus, haar ja diagonaal on antud;
- alused on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3 cm.

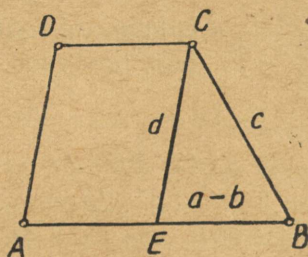
872. a) Kui suur on võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa?

b) Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

873. Joonesta trapets, mille

- alused on 9,5 cm ja 4,2 cm, haarad on 4 cm ja 5,2 cm;
- alused on 7 cm ja 3 cm, haarad on 5,3 ja 5,9 cm;
- üks alus on 7,5 cm, üks haar 3,7 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 7 cm ja teine diagonaal 6 cm;
- üks alus on 9 cm, üks haar 4,8 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 6 cm ja teine diagonaal 7,2 cm;
- üks alus on 4 cm, üks haar 3 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 6 cm ja teine alus 8 cm;
- pikem alus on 8 cm, kõrgus 4,7 cm, haarad 5,7 cm ja 5 cm. Igalt jooniselt mõõda küljed ja kõrgus, mis ei ole antud.

N ä i d e. Joonestame trapetsi, mille alused on a ja b , haarad c ja d . Ülesande lahenduse leidmiseks oletame, et ülesanne on lahendatud ja $ABCD$ on otsitav trapets (joon. 138). Kui lühema aluse CD ühest otspunktist, näiteks punktist C joonestada teise haara paralleelne lõik CE , siis tekib kolmnurk BCE , mille küljed on teada. Ülesande lahendamiseks joonestame antud andmete järgi esmalt selle kolmnurga ja siis viimase külge rööpküliliku $AECD$.



Joon. 138.

874. Leia võimalikult lihtsa joonise abil trapetsi kõrgus, kui

- trapetsi alused on 8,3 cm ja 13,3 cm, haarad on 4 cm ja 3,5 cm;
- trapetsi alused on 25 cm ja 18 cm, haarad on 6 cm ja 5 cm;
- trapetsi alused on 29 cm ja 21 cm, haarad on 8 cm;
- trapetsi üks alus on 8,4 cm, üks haar on 6 cm ja nende otspunkte ühendav diagonaal 5,2 cm.

KOLMNURGA KESKLÕIK. TRAPETSİ KESKLÕIK.

875. Joonesta mingi kolmnurk ABC ja ühenda selle kahe külje keskpunktid D ja E (joon. 139). Saadud lõiku DE nimetatakse kolmnurga kesklõiguks.

Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse tema kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku.

Mitu kesklõiku on kolmnurgal? Joonesta tema kõik kesklõigud. Mõõda iga kesklõik ja võrdle tema pikkust küljega, millel pole kesklõiguga ühist punkti. Kuidas kesklõik näib asetsevat selle külje suhtes?

876. Tõestame, et

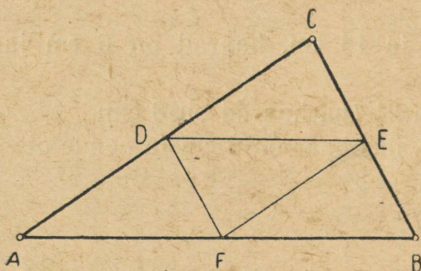
kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Eeldus. $AD = DC$ ja $BE = EC$ (joon. 139).

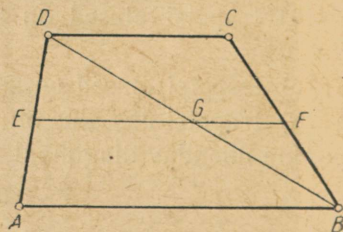
Väide. $DE \parallel AB$ ja $DE = AB : 2$.

Tõestus. Joonestame sirge $CG \parallel AB$. Punktid D ja E on eelduse tõttu riba $CG \parallel AB$ kesksirge kaks punkti, sirge DE on seega riba kesksirge. Kuid kesksirge on ju paralleelne riba piiravate sirgetega: $DE \parallel AB$.

Olgu punkt F kolmnurga külje AB keskpunkt. Siis FE on kolmnurga kesklõik ja tõestuse esimese osa põhjal $FE \parallel AD$. Kuid siis on nelinurk $ADEF$ rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Sellest järeldub, et $DE = AF = AB : 2$.



Joon. 139.



Joon. 140.

877. Ühendame trapetsi ABCD mitteparalleelsete külgede keskpunktid E ja F (joon. 140). Saadud lõiku EF nimetatakse trapetsi kesklõiguks.

Tõestame, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub aluste poolsummaga.

Tõestus. Punktid E ja F on riba $AB \parallel DC$ kesksirge kaks punkti, järelikult sirge EF on riba kesksirge ja seega

$$EF \parallel AB \parallel DC.$$

Joonestame trapetsi diagonaali BD. See jaotab trapetsi kaheks kolmnurgaks ABD ja DBC, mille kesklõigud on vastavalt EG ja GF. Kolmnurga kesklõigu omaduse tõttu

$$EF = EG + GF = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}.$$

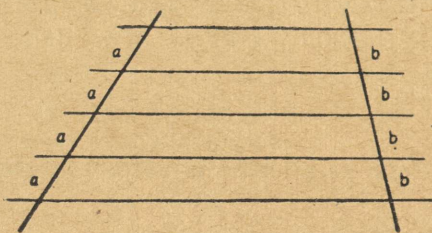
Sellega on teoreem tõestatud.

878. Missuguse kujundi saab trapetsist, kui tema ühe aluse pikkus väheneb nii, et saab võrdseks nulliga? Mis saab sel juhul trapetsi kesklõigust? Järelda sel teel, et kolmnurga kesklõik võrdub poolega ühest küljest.

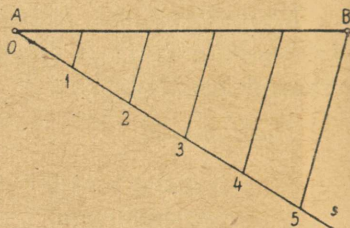
879. Kui trapetsi üks haar poolitada, saadud pooled uuesti poolitada jne., siis see haar jaotub võrdseteks lõikudeks. Tõmmates kõigist saadud jaotuspunktidest alustega paralleelsed sirged, jaotub trapetsi kesklõigu omaduste põhjal ka teine haar võrdseteks lõikudeks. Seda tõsiasja võime sõnastada järgmiselt (joon. 141):

kui paralleelsed sirged lõikavad kaht sirget nii, et ühel neist tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad võrdsed lõigud ka teisel sirgel.

880. Eelmises ülesandes antud paralleelsete sirgete omadus võimaldab antud lõiku kergesti jaotada võrdseteks osadeks. Olgu vaja lõik AB jaotada näiteks viieks võrdseks osaks (joon. 142). Ülesande lahendamiseks joonestame läbi lõigu AB otspunkti A mingi abisirge s, märgime sellel järjestikku, alates punktist A, viis



Joon. 141.



Joon. 142.

võrdset lõiku ning ühendame viimase lõigu otspunkti punktiga B. Nüüd joonestame sellele ühendussirgele paralleelsed sirged abisirge s punktidest 1, 2, 3 ja 4. Need paralleelid jaotavad lõigu AB viieks võrdseks osaks.

881. a) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 142 näidatud viisil kolmeks võrdseks osaks.

b) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 142 näidatud viisil kuueks võrdseks osaks.

882. a) Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on selle küljed?

b) Kolmnurga külgede pikkused a , b ja c avalduvad kahe arvu x ja y kaudu järgmiselt:

$$a = 4x - 2y; \quad b = 3x + y; \quad c = 5x - 3y.$$

Avalda antud kolmnurga kesklõigust moodustuva kolmnurga küljed x ja y kaudu. Leia kummagi kolmnurga ümbermõõt ja võrdle neid.

883. Trapetsi alused on 7 dm ja 12 dm. Kui pikad on lõigud, milleks diagonaal tükeldab kesklõigu?

884. Trapetsi kesklõik on 12 m. Diagonaal tükeldab selle lõiku deks, millest üks on teisest 3 m pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

885. a) Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

b) Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

c) Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

KOLMNURGA MEDIAANIDE LÕIKUMINE.

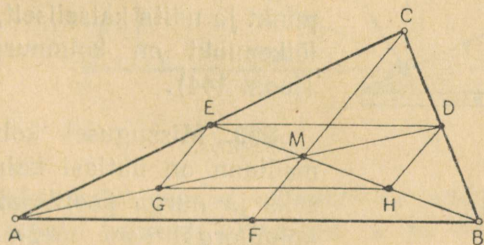
886. Mida nimetatakse kolmnurga mediaaniks? Kas mediaan saab asetseda väljaspool kolmnurka?

887. Joonesta mingi kolmnurga kolm mediaani. Mida paned tähele nende kohta? Leia mõõtmise teel, kuidas suhtuvad need kaks lõiku, milledeks mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani.

888. Tõestame, et

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1, arvates kolmnurga vastavast tipust.

Eeldus. $AE = CE$; $AF = BF$; $BD = CD$ (joon. 143).



Joon. 143.

Väide. AD , BE ja CF lõikuvad kõik ühes ja samas punktis M ning seejuures $AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$.

Tõestus. Tähistame mingi kahe mediaani (näiteks AD ja BE) lõikepunkti tähega M ja ühendame nende mediaanide otspunktid D ja E ning lõikude AM ja BM keskpunktide G ja H . Siis DE on kolmnurga ABC kesklõik ja GH on kolmnurga ABM kesklõik, tähendab:

$$ED \parallel AB \text{ ja } ED = \frac{1}{2} AB;$$

$$GH \parallel AB \text{ ja } GH = \frac{1}{2} AB.$$

Sellest järeldub, et

$$ED \parallel GH \text{ ja } ED = GH.$$

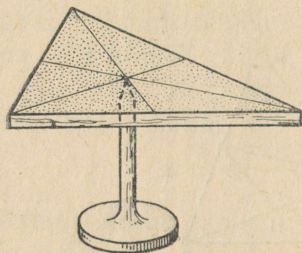
Kuid siis nelinurk $GHDE$ on rööpkülik, sest tema üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja võrdsed. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis

$$MD = MG \text{ ja } ME = MH.$$

Kuid MG on pool lõigust AM ja MH on pool lõigust BM , tähendab

$$AM : MD = 2 : 1 \text{ ja } BM : ME = 2 : 1.$$

Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF . See peab tõestatu põhjal lõikama nii mediaani AD kui ka mediaani BE punktis, mis jaotab neid suhtes $2 : 1$, arvates vastavast tipust, s. t. punktis M . See näitab, et kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis.



Joon. 144.

889. Lõika papist välja mingi kolmnurk, määra tema mediaanide lõikepunkt ja näita katseliselt, et mediaanide lõikepunkt on kolmnurga raskuskeske (joon. 144).

890. Missugusel kolmnurgal üks mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks? Missugusel kolmnurgal iga mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks?

891. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk ühes täisnurga tipust tõmmatud mediaaniga ja võrdle mediaani pikkust hüpotenuusi pikkusega. Näita, et see mediaan võrdub alati poole hüpotenuusiga.

892. Teades, et täisnurga tipust tõmmatud mediaan võrdub poole hüpotenuusiga, leia, kui suur on nurk selle mediaani ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks teravnurk on 59° .

TRAPETSI PINDALA.

893. a) Millega võrdub rööpküliku pindala? Avalda rööpküliku pindala S tema aluse a ja kõrguse h kaudu.

b) Millega võrdub ristküliku pindala? Järelda rööpküliku pindala valemist, et ristküliku pindala võrdub tema kahe lähiskülje pikkuste korrutisega.

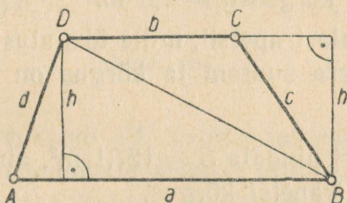
894. a) Millega võrdub kolmnurga pindala? Avalda kolmnurga pindala S tema aluse a ja kõrguse h kaudu.

b) Avalda täisnurkse kolmnurga pindala S tema kaatetite a ja b kaudu. Kuidas see valem tuleneb ristküliku pindala valemist?

895. Tõestame, et

trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

Tõestuseks joonestame mingi trapetsi $ABCD$ ja tükeldame ta diagonaaliga BD kaheks kolmnurgaks ABD ja DBC (joon. 145).



Joon. 145.

Trapetsi pindala võrdub saadud kolmnurkade pindalade summaga. Tähistades trapetsi alused tähtedega a ja b ning kõrguse tähega h , saame nüüd, et trapetsi pindala

$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh,$$

sest kui kolmnurkade ABD ja DCB alusteks võtta trapetsi alused, siis kõrgused võrduvad trapetsi kõrgusega. Võttes saadud summas ühised tegurid $\frac{1}{2}$ ja h sulgude ette, saame

$$S = \frac{1}{2}h(a + b)$$

ehk, korrutades tegurid $\frac{1}{2}$ ja $a + b$,

$$S = \frac{a+b}{2}h,$$

mida oligi vaja tõestada.

Trapetsi aluste poolsumma $\frac{a+b}{2}$ võrdub teatavasti tema kesklõiguga. Tähistades selle tähega k , saame trapetsi pindala valemi kirjutada kujul

$$S = kh,$$

mis ütleb, et

trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega.

896. a) Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 5,8 cm ja 4,6 cm ning kõrgus on 3,7 cm.

b) Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 320 m ja 240 m ning kõrgus on 65% kesklõigust.

897. a) Arvuta pindala trapetsil, mille alus $a = 15,7$ m, alus $b = 8\frac{2}{3}$ m ja kõrgus $h = 4,8$ m.

b) Arvuta pindala trapetsil, mille üks alus on 48 m, teine alus on sellest 25% võrra suurem ja kõrgus on teisest alusest 25% võrra väiksem.

898. a) Trapetsi pindala $S = 127,1$ m², alus $a = 18$ m ja alus $b = 13$ m. Arvuta trapetsi kõrgus.

b) Trapetsi pindala $S = 392$ m², alus $a = 25$ m ja kõrgus $h = 14$ m. Kui pikk on alus b ?

899. Trapetsi alused ja kõrgus avalduvad kahe arvu x ja y abil järgmiselt:

$$a = 2x + y, \quad b = 2x - y, \quad h = x + y.$$

Avalda trapetsi pindala x ja y kaudu ja arvuta pindala, kui $x = 5$ ja $y = 7$.

900. Arvuta täisnurkse trapetsi pindala, kui alused on 8 dm ja 5 dm ning trapetsi üks nurk on 45°.

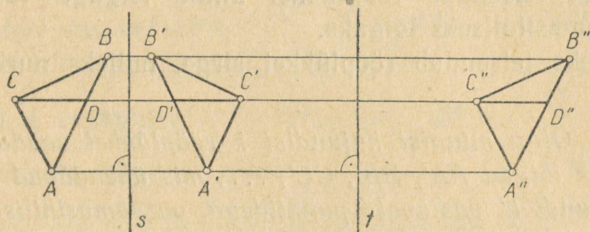
901. Täisnurkse trapetsi lühem alus on 12 cm, kõrgus 7 cm ja pikem haar 8 cm. Arvuta trapetsi pindala, kui on teada, et trapetsi üks nurk on 60°.

902. Missuguse kujundi pindala valemi saab trapetsi pindala valemist,

- 1) kui selles ühe aluse pikkuseks võtta 0?
- 2) kui selles alused on võrdsed?

LÜKE. VEKTOR. VEKTORITE SUMMA JA VAHE.

903. a) On antud kaks paralleelset sirget s ja t ning kolmnurk ABC (joon. 146). Joonesta $\triangle A'B'C' = s(\triangle ABC)$ ja $\triangle A''B''C'' = t(\triangle ABC)$.



Joon. 146.

b) Kuidas asetseb sirge AA' sirge s suhtes? sirge $A'A''$ sirge t suhtes? sirged s ja t teineteise suhtes? Mis sellest järeldeb punktide A , A' ja A'' kohta? Kuidas asetsevad punktid B , B' ja B'' ? punktid C , C' ja C'' ?

c) Kuidas asetsevad sirged AA'' , BB'' ja CC'' üksteise suhtes? Miks $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$?

d) Mõõda lõikude AA'' , BB'' ja CC'' pikkused. Mida paned tähele? Võrdle nende lõikude pikkusi sirgete s ja t vahelise kaugusega. Kuidas põhjendada, et lõik AA'' on täpselt kaks korda pikem sirgete s ja t vahelisest kaugusest?

e) Võta kolmnurga ABC ühel küljel vabalt punkt M ja leia temale kolmnurga $A''B''C''$ juures vastav punkt M'' . Võrdle lõiku MM'' lõikudega AA'' , BB'' ja CC'' .

Kujundi kahekordsel peegeldamisel kahest paralleelsest sirgest nihkuvad kujundi kõik punktid paralleelseid sirgeid mööda ühes ja samas suunas ühe ja sama lõigu võrra.

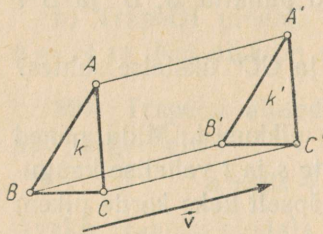
904. a) Liikumist, mis toimub kujundiga, kui teda peegeldada kahest paralleelsest sirgest, nimetatakse rööplükkeks ehk lihtsalt lükkeks. Lüke asendab seega peegeldamist kahest paralleelsest sirgest.

b) Vaatleme, kuidas teisendub lõik rööplükkel. Põhjenda väidet, et lõik AB (joon. 146) ja temast rööplükkel saadud lõik $A''B''$ on paralleelsed ja võrdsed. Lõik CD (joon. 146) ja temast rööplükkel saadud lõik $C''D''$ on kindlasti ka võrdsed, kuid nad pole paralleelsed (nad asetsevad ühel ja samal sirgel).

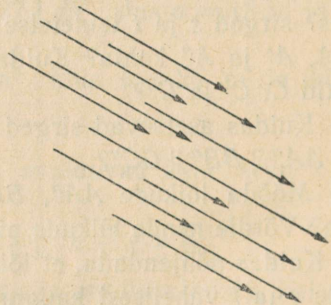
Kaht sirget, mis on paralleelsed või langevad ühte, samuti aga ka nende sirgete lõike, nimetatakse samasihilisteks. Niisiis, lõik teisendub rööplükkel antud lõiguga võrdseks ja samasihiliseks lõiguks.

c) Milleks teisendub rööplükkel sirge, milleks nurk, milleks kolmnurk?

905. a) Olgu mingist kujundist k rööplükkel saadud kujund k' . Siis kõik lõigud AA' , BB' , CC' , ..., mis ühendavad kujundi k punkte kujundi k' vastavate punktidega, on samasihilised, samasuunalised (suunaga punkti A poolt punkti A' poole jne.) ja ühepikkused (joon. 147). Niisugust lõikude hulka nimetatakse vektoriks (joon. 148). See lõikude hulk on antud, kui on antud üksainus lõik neist. Seetõttu öeldakse, et



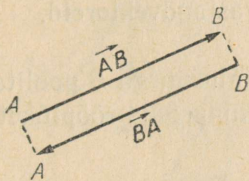
Joon. 147.



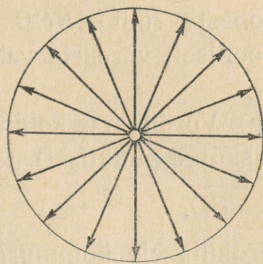
Joon. 148.

vektor on kindla sihi, pikkuse ja suunaga lõik, mille alguspunkti võib vabalt valida.

b) Vektorit tähistatakse kas üheainsa väikese tähega, mille peal on nool (\vec{a}), või ka kahe suure tähega, mille peal on nool (\vec{AB}). Viimasel juhul näitab esimene täht vektori alguspunkti, teine



Joon. 149.



Joon. 150.

Lõpp-punkti. Kui tähises \vec{AB} muuta tähtede järjekord, siis saame antud vektori **vastandvektori** \vec{BA} , s. o. vektori, mis erineb antud vektorist ainult suuna poolest (joon. 149).

Vektori \vec{a} vastandvektorit märgitakse kujul $-\vec{a}$. Vektori \vec{a} pikkuse tähiseks on $|\vec{a}|$ või ka a .

c) Kaks vektorit \vec{a} ja \vec{b} on võrdsed (sümbolites $\vec{a} = \vec{b}$), kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund. Kui kas või ainult üks neist tingimustest pole täidetud, siis vektorid pole võrdsed. Kaks vastandvektorit, näiteks \vec{AB} ja \vec{BA} saame teha võrdseiks, kui ühe ees neist muudame märgi: $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

d) Lükke on antud, kui on teada lükke vektor \vec{v} , sest siis on võimalik antud kujundi igale punktile leida temale vastavat punkti lükkel saadava kujundi juures (joon. 147).

Kirjelda, kuidas joonisel 147 antud punktidest A , B ja C saadakse lükke vektori \vec{v} abil punktid A' , B' , ja C' .

906. a) Vektorite alguspunktiks on ringi keskpunkt ja lõpp-punktiks ringjoone mingi punkt (joon. 150). Missugused neist vektorist on samasihilised? Kas nende vektorite hulgas leidub võrdseid vektoreid? Kas leidub vastandvektoreid?

b) Joonesta rööpkülik $ABCD$ ühes diagonaalide lõikepunktiga O . Leia järgmiste vektorite hulgast võrdseid vektoreid ja vastandvektoreid:

$$\vec{AD}, \vec{OC}, \vec{CB}, \vec{AO}, \vec{BC}, \vec{OB}, \vec{DO}, \vec{AB}, \vec{OD}, \vec{DC}.$$

c) Joonesta ruut $ABCD$ ühes diagonaalide lõikepunktiga O . Nimeta jooniselt võrdseid vektoreid ja vastandvektoreid.

907. a) Võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurga B poolitaja lõikab vastaskülge punktis D . Rakenda kolmnurgale rööplüket, mille vektor $\vec{v} = \vec{BD}$.

b) Võrdkülgsele kolmnurgale on rakendatud rööplüket, mis viib kolmnurga keskpunkti K antud punkti K' . Joonesta kolmnurk tema uues asendis.

908. a) Antud kujundile k on järjestikku rakendatud kaks rööplüket, mille vektorid on vastavalt \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 (joon. 151). Esimesel lükkel on saadud kujund k' , teisel k'' . Näita, et kujundi k'' saaks kujundist k üheainsa lükkega.

Võtame kujundil k mingi lõigu AB ja võrdleme sellega kujundite k' ja k'' vastavaid lõike $A'B'$ ja $A''B''$. Et rööplükkel lõik teisendub temaga võrdseks ja samasihiliseks lõiguks, siis

$$AB = A'B' \text{ ja } A'B' = A''B'', \text{ mistõttu } AB = A''B'',$$

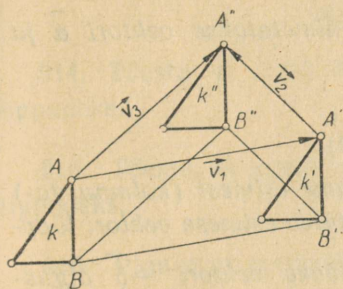
$$AB \parallel A'B' \text{ ja } A'B' \parallel A''B'', \text{ mistõttu } AB \parallel A''B''.$$

Nii näeme, et nelinurgas $ABB''A''$ on üks paar vastaskülgi paralleelsed ja võrdsed. Kuid siis on selles nelinurgas ka teine paar vastaskülgi AA'' ja BB'' paralleelsed ja võrdsed, s. t. lõik $A''B''$ on saadav lõigust AB lükke abil, mille vektor $\vec{v}_3 = \vec{AA''}$. Sama lükke abil saaksime kujundist k vahetult kujundi k'' .

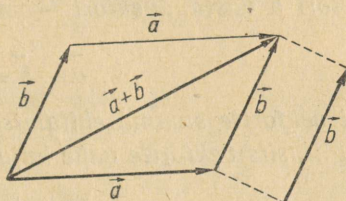
b) Pöörame tähelepanu joonisel 151 antud vektorite \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 ja saadud vektori \vec{v}_3 vahelisele seosele. Vektorit \vec{v}_3 nimetatakse vektorite \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 summaks ja avaldatakse kujul

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Kahe vektori summaks on vektor, mille alguspunktiks on ühe liidetava alguspunkt ja lõpp-punktiks teise liidetava lõpp-punkt eeldusel, et esimese liidetava lõpp-punkt ja teise alguspunkt ühtivad.



Joon. 151.

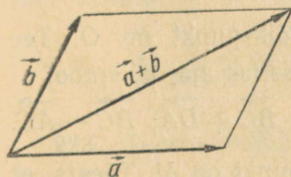


Joon. 152.

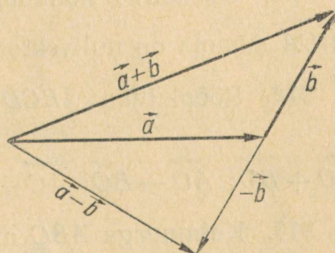
Kahe mistahes vektori \vec{a} ja \vec{b} liitmiseks nn. kolmnurgareegli järgi tuleb teine liidetav (ütlemme vektor \vec{b}) viia esimese liidetava lõpp-punkti juurde (joon. 152). Esimese vektori algusest teise lõppu minev vektor on siis summa $\vec{a} + \vec{b}$. Liidame samad vektorid veel järjekorras $\vec{b} + \vec{a}$, viies vektori \vec{b} vektori \vec{a} alguspunkti juurde ja siis vektori \vec{a} vektori \vec{b} lõpp-punkti juurde (joon. 152). Varem saadud kolmnurk täieneb nüüd rööpkülilikuks. Tulemus ütleb, et vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Saadud joonisest võib välja lugeda veel teise vektorite liitmise eeskirja, nn. rööpkülilikureegli: kui liidetavad vektorid kanda ühise alguspunkti juurde ja ehitada neile vektoreile rööpkülilik, siis samast punktist lähtuv rööpküliliku diagonaalvektor on antud vektorite summa (joon. 153).



Joon. 153.

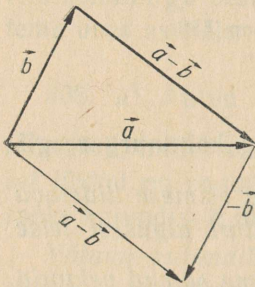


Joon. 154.

c) Vektorite \vec{a} ja \vec{b} vaheks $\vec{a} - \vec{b}$ nimetatakse vektori \vec{a} ja vektori \vec{b} vastandvektori $-\vec{b}$ summat:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Kui vektorite summa ehitamiseks kasutame esimest (kolmnurga-) reeglit, siis vektorite vahe kujutamiseks tuleb esimese vektori lõpp-



Joon. 155.

punkt teha ühtivaks vektori $-\vec{b}$ alguspunktiga (joon. 154). Kui vektorid \vec{a} ja \vec{b} on kantud ühise alguspunkti juurde, siis vahe $\vec{a} - \vec{b}$ on vektor, mis viib lahutatava \vec{b} lõpp-punktist vähendatava \vec{a} lõpp-punkti (joon. 155). Sellest näeme, et kui vektoritele \vec{a} ja \vec{b} on ehitatud rööpkülik (joon. 153), siis lahutatava vektori \vec{b} lõpp-punktist lähtuv diagonaalvektor on vektorite vahe. Rööpküliku ehitamisega saab seega korruga nii vektorite summa kui ka vahe.

909. Võta vabalt kaks vektorit ja leia nende summa ning vahe.

910. Võta vabalt kolm vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} ning näita, et

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Näpunäide. Kui liidetavaid on rohkem kui kaks, siis lihtsam on kasutada kolmnurgareeglit; tõestatava võrduse mõlemad pooled esinevad ühel ja samal joonisel.

911. On antud kolmnurk ABC . Näita, et vektorite \vec{AB} , \vec{BC} ja \vec{CA} summa on nullvektor, s. o. vektor, mille pikkus on 0.

912. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt on O . Tee joonis ja leia sellest vektorid $\vec{AO} + \vec{BO}$; $\vec{AO} - \vec{BO}$; $\vec{AC} - \vec{AD}$; $\vec{DC} + \vec{BD}$; $\vec{BC} + \vec{DA}$; $\vec{BC} - \vec{AC}$.

913. Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt on M . Tõesta, et

$$\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{MC}.$$

KORDAMISEKS.

914. Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe rombi tippudeks.

915. Tõesta, et rombi külgede keskpunktid on ühe ristküliku tippudeks.

916. Pioneerid matkasid kompassi järgi esiteks 3 km suunas N30°E, siis 2 km suunas N40°W ja lõpuks veel 4 km suunas N40°E. Valmista nende teest joonis mõõdus 1 : 100 000 ja leia sellest, kui kaugel olid pioneerid matka lõpul oma lähtekohast otsejoones.

917. Laev sõitis esiteks kursiga N60°E, siis kursiga E ja lõpuks kursiga S30°W. Kuidas esimene teelõik asetseb viimase suhtes?

918. Missugune kujund tekib, kui võrdhaarse trapetsi külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

919. Missugune kujund tekib, kui nelinurga külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

Näpunäide. *Kasuta nelinurga diagonaale.*

920. Kolmnurga mediaanid on 15,6 cm, 18,9 cm ja 14,1 cm. Arvuta kolmnurga tippude kaugused mediaanide lõikepunktist.

921. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2x-1} + \frac{8}{2x+1} + \frac{7+16x}{1-4x^2} \right) \cdot \frac{2x-1}{x-1}.$$

922. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2a+3} + \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+9}{4a^2-9} \right) : \frac{8}{4a^2+12a+9}.$$

923. Teosta tehted

$$\frac{5,22 - 0,744 : 0,2}{25 \cdot 0,016} + \left(3 \frac{1}{15} - \frac{44}{45} \right) : 1 \frac{22}{25}.$$

924. Teosta tehted

$$34,17 : 1,7 + \left(2\frac{3}{4} + 0,15 \right) : \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8}.$$

925. Mitu protsenti moodustab arvude 4,2 ja 3,8 vahe ruut samade arvude ruutude vahest?

926. 1) Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtused, kui $a \in \{-2; -1; 0\}$:

$$\frac{a^2 - ax + a - x}{a^2 - ax - a + x}.$$

2) Antud on hulk $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ ja $B = \{4; 5; 6; 7\}$. Leia hulk $C = A \cup B$, $D = A \cap B$, $E = A'_C$ ja $F = B'_A$.

3) Antud on hulk $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$ ja $C = \{1; 3; 6; 7; 8\}$. Leia järgmised hulgad $A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$ ja $(A \cup B) \cap C$.

4) Olgu A mistahes hulk. Selgita, mis on $A \cup A$, $A \cap A$, $A \cup \emptyset$ ja $A \cap \emptyset$.

5) Kas lause $45 \in \{3; 6; 9; \dots; 99\}$ on õige või väär?

10. RINGJOON. RINGJOONE PIKKUS. RINGI PINDALA.

RINGJOON.

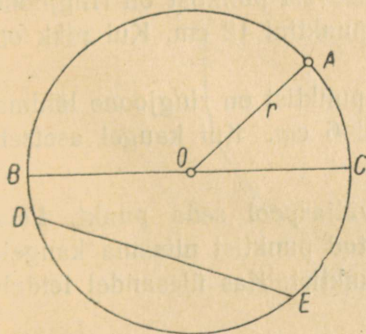
927. Vaatleme ringjoont, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks $OA = r$ (joon. 156).

Ringjooneks nimetatakse tasapinna antud punktist antud kaugusel asetsevate selle tasapinna punktide hulka.

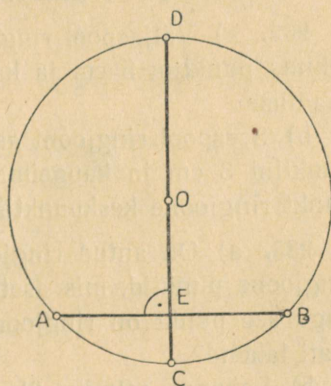
Kuidas nimetatakse seejuures antud punkti? kuidas antud kaugust? Mida nimetatakse ringjoone kõõluks (DE joonisel 156)? mida diameetrigiks (BC joonisel 156)?

928. a) Põhjenda väidet, et

ringjoone keskpunkt on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks.



Joon. 156.



Joon. 157.

b) Põhjenda väidet, et

ringjoone iga diameeter on ringjoone sümmeetriateljeks.

Kasuta tõsiasja, et ringjoone iga punkt on diameetri teatud punktist (keskpunktist) teatud kaugusel, sellega diameetri suhtes sümmeetriline punkt järelikult samal kaugusel.

Kuidas leida ringjoone antud punktiga antud diameetri suhtes sümmeetrilist punkti?

929. Mis on ringjoonest ja selle kõõlust koosneva kujundi sümmeetriateljeks (joon. 157)?

Põhjenda väidet, et

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja selle otspunkti ühendavad kaared.

PUNKTI JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

930. Tasapinnal on ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega 3 cm. Otsusta, kas tasapinna punkt M asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont, kui

$$OM = 5 \text{ cm}; \quad OM = 2,5 \text{ cm}; \quad OM = 3 \text{ cm}.$$

931. Tee joonis järgmise lause selgitamiseks.

Punkt asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas punkti kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

932. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 5 cm ja kaugeima punktini 12 cm. Kui pikk on raadius?

b) Seespool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 3 cm ja kaugeima punktini 6 cm. Kui kaugel asetseb punkt ringjoone keskpunktist?

933. a) On antud ringjoon ja väljaspool seda punkt. Leia ringjoone punktid, mis asetsevad antud punktist niisama kaugel, nagu see punkt on ringjoone keskpunktist. Kas ülesandel leidub alati lahend?

b) Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui antud punkt on seespool ringjoont.

SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEEND.

934. a) Joonesta ringjoon ja selle mingi kõõl. Pikenda seda kõõlu üle mõlema otspunkti. Mitu ühist punkti on saadud sirgel ringjoonega?

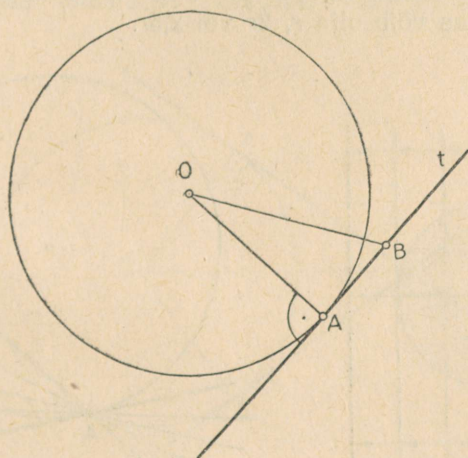
Sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti, nimetatakse ringjoone lõikajaks.

b) Joonesta ringjoon ja selle mingi lõikaja. Leia lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist ja võrdle seda raadiusega. Põhjenda ilma mõõtmiseta, et

ringjoone lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius.

c) Olgu o mingi ringjoon, k selle lõikaja ja m sellega piiratud ring. Mis on siis $o \cap k$? mis $m \cap k$?

935. Saab näidata, et mõnel sirgel on ringjoonega ainult üks ühine punkt. Niisuguse sirge saamiseks joonesta ringjoone mingi raadiuse OA otspunktist A raadiusele ristsirge t (joon. 158). Tõesta, et sirgel t on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimelt punkt A . Tõestuseks võta sirgel t mingi muu punkt (mitte A), näiteks punkt B , ühenda see punktiga O ja näita, et võetud punkti



Joon. 158.

kaugus ringjoone keskpunktist on suurem kui raadius. Mis sellest järeldub punkti B asukoha kohta? Kus asetsevad siis sirge t kõik punktid, välja arvatud punkt A ?

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone puutujaks. Seda ühist punkti nimetatakse puutepunktiks.

Ringjoone puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega.

On antud ringjoon o ja punkt $A \in o$. Kirjuta tingimused, mille korral sirge t on ringjoone o puutuja punktis A .

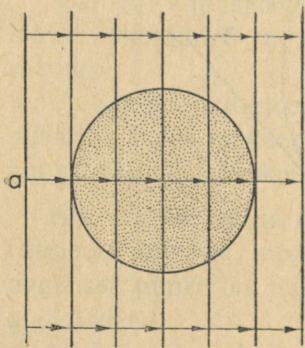
936. Joonesta vabalt võetud ringjoonele puutuja ringjoone mingis punktis A .

937. Kuidas leida sirge kaugust punktist? Kuidas leida puutuja kaugust ringjoone keskpunktist? Näita, et

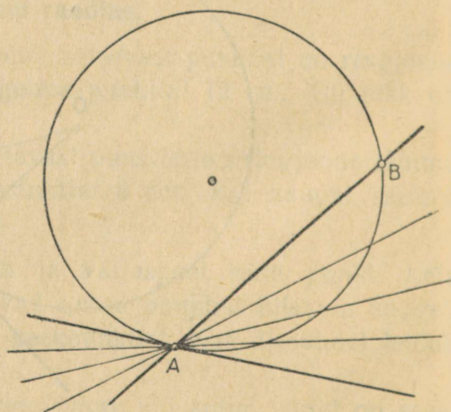
puutuja kaugus ringi keskpunktist võrdub raadiusega.

938. Mida võib öelda sirgest, kui on teada, et tema kaugus ringjoone keskpunktist a) on väiksem kui raadius, b) võrdub raadiusega, c) on suurem kui raadius?

939. Joonesta vabalt võetud raadiusega r ringjoon ja kolm üksteisega paralleelset sirget nii, et nende kaugused ringi keskpunktist on vastavalt $0,5r$, r ja $1,5r$. Näita, et äärmiste sirgete vaheline kaugus võib olla r , $2r$ või $2,5r$.



Joon. 159.



Joon. 160.

940. a) Mis saab väljaspool ringjoont asetsevast sirgest a joonisel 159, kui ta liigub nooltega näidatud suunas?

b) Mis saab lõikajast AB joonisel 160, kui seda lõikajat pöörata tema lõikepunkti A ümber, kuni teine lõikepunkt B ühtib lõikepunktiga A ?

941. Ehitä antud raadiusega ringjoon, mis läbib antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal on sel ülesandel üks lahend, millal kaks lahendit, millal lahend puudub?

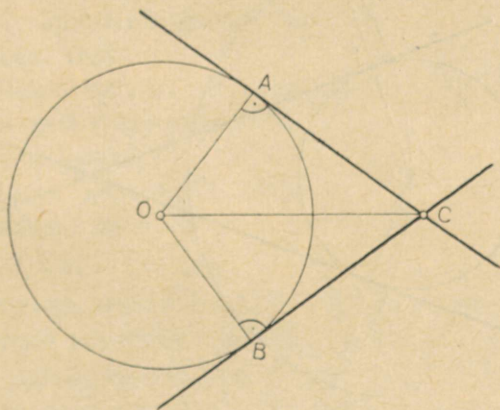
942. a) Joonesta antud keskpunktiga ringjoon, mis puudutab antud sirget.

b) Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti A ja puudutab antud sirget selle antud punktis B .

943. a) Joonesta puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

b) Joonesta antud ringjoonele puutujad tema ühe ja sama diameetri otspunktidest. Kuidas asetsevad need puutujad teineteise suhtes? Miks?

944. Ringjoonele on joonestatud kaks lõikuvat puutujat (joon. 161). Arvuta nende puutujate vahelise nurga suurus, kui puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk on 112° .



Joon. 161.

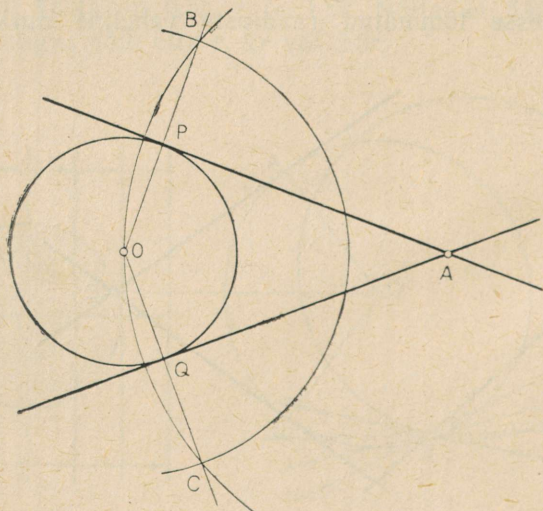
945. Ringjoonele on joonestatud kaks lõikuvat puutujat AC ja BC (joon. 161). Mis on tekkinud kujundi sümmeetriateljeks? Järelda kujundi sümmeetriast, et

- puutujate lõigud nende lõikepunktist puutepunktideni on võrdsed;
- puutepunktidest lähtuvad raadiused moodustavad sirgega OC võrdsed nurgad.

946. Joonesta antud ringjoonele puutujad läbi punkti, mis on väljaspool ringjoont.

Ülesande lahendamiseks sirkli ja joonlaua abil (joon. 162) joonestatakse antud ringjoone keskpunkti O ümber uus ringjoon raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoon, mis läbib punkti O . Olgu nende kahe uue ringjoone lõikepunktid B ja C . Joonesta nüüd lõigud OB ja OC ning leia punktid P ja Q , kus nad lõikavad antud ringjoont. Nii sirge PA kui ka sirge QA on puutuja läbi punkti A .

Põhjendus. Konstruktsiooni järgi on punkt P lõigu OB keskpunkt, sest $OB = 2 \cdot OP$, ja punkt A on lõigu OB otspunktidest võrdsetel kaugustel, sest $AO = AB$. Järelikult AP on lõigu OB



Joon. 162.

keskristsirge ja seega $AP \perp OP$. Kuid siis AP on ringjoone puutuja punktis P . Samal viisil saame näidata, et AQ on ringjoone puutuja punktis Q . Mõlemad nad läbivad punkti A .

947. Joonesta ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.

948. On antud ringjoone kaks lõikuvat puutujat ja puutepunkt ühel neist. Joonesta ringjoon.

949. Tõesta, et kui punkti kaugus ringi keskpunktist võrdub diameetriga, siis sellest punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk on 60° .

950. Mis võib öelda ringjoone o ja sirge t vastastikuse asendi kohta, kui $o \cap t = \{A, B\}$, kui $o \cap t = M$? kui $o \cap t = \emptyset$?

KAHE RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

951. On antud kaks ringjoont, mille keskpunktid on O_1 ja O_2 ning raadiused vastavalt r_1 ja r_2 . Joonesta need ringjooned juhul, kui

- a) $O_1O_2 > r_1 + r_2$,
- b) $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

Kuidas asetsevad ringjooned üksteise suhtes juhul a)? Kuidas juhul b)? Mis on tekkinud kujundi sümmeetriateljeks nii ühel kui ka teisel juhul?

952. On antud kaks ringjoont, millel leidub ühine punkt A väljaspool nende keskpunktide ühendussirget O_1O_2 (joon. 163).

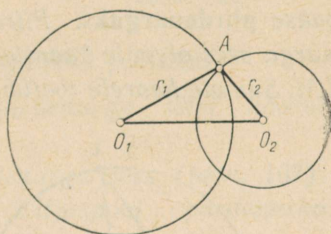
a) Kasutades kujundi sümmeetriat, näita et neil ringjoontel leidub veel teine ühine punkt.

b) Kasutades kolmnurga AO_1O_2 külgede omadusi, näita, et

$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$

953. Põhjenda väidet: kui kahel ringjoonel leidub kolm ühist punkti, siis need ringjooned ühtivad (vt. ül. 462, c).

954. On antud kaks ringjoont, mille keskpunktid on O_1 ja O_2 ning raadiused vastavalt r_1 ja r_2 . Selgita sellekohase joonise abil nende ringjoonte vastastikust asendit, kui



Joon. 163.

a) $O_1O_2 = r_1 - r_2$;

b) $O_1O_2 < r_1 - r_2$.

Kummal juhul üks ringjoon puudutab teist seesmiselt.

955. Joonesta kaks **kontsentrilist**, s. o. ühise keskpunktiga ringjoont. Mis võib öelda saadud kujundi sümmeetriast?

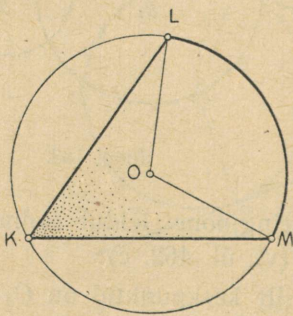
956. Määra kahe ringjoone vastastikune asend järgmise tabeli andmeil.

Ül. nr.	Keskpunktide vaheline kaugus	Ühe ringjoone raadius	Teise ringjoone raadius
1	38 mm	22 mm	60 mm
2	75 mm	56 mm	37 mm
3	28 cm	5 cm	12 cm
4	25,4 cm	45,6 cm	8,8 cm
5	2,7 dm	3,2 dm	1,3 dm

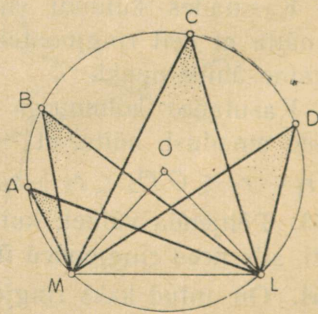
957. Kahe ringjoone keskpunktid on O_1 ja O_2 , raadiused vastavalt r_1 ja r_2 . On teada, et $O_1O_2 < r_1$. Missugune peab olema r_2 , et üks ringjoon puudutaks teist?

PIIRDENURK.

958. Joonesta ringjoone ühest ja samast punktist K kaks kõõlu KL ja KM (joon. 164). Nende kõõlude vahelist nurka LKM nimetatakse **piirdenurgaks**. Piirdenurga kohta öeldakse, et ta toetub nurga sees olevale kaarele, näiteks piirdenurk LKM toetub kaarele LM . Samale kaarele toetub ka üks kesknurk, nimelt kesknurk LOM .



Joon. 164.



Joon. 165.

Missugusele kaarele toetuvad piirdeurkad A , B , C ja D joo-
niseel 165?

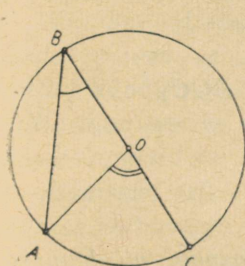
Mitu piirdeurka toetub ühele ja samale kaarele? Mitu kesk-
nurka toetub sellele kaarele?

959. Mõõda piirdeurk ja samale kaarele toetuv kesk-
nurk. Kumb on suurem ja mitu korda?

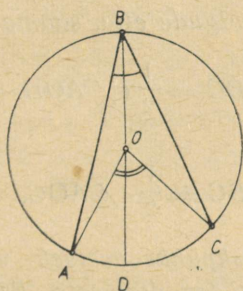
960. Tõestame, et

piirdeurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesk-
nurgast.

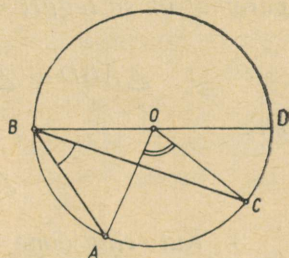
Olgu $\angle ABC$ piirdeurk ja $\angle AOC$ kesk-
nurk, mis toetuvad
ühele ja samale kaarele. Tõestame siis, et $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC$.



Joon. 166.



Joon. 167.



Joon. 168.

Tõestamisel tuleb vaadelda kolme võimalikku juhtumit:

- 1) ringjoone keskpunkt asetseb piirdeurka ühel haaral (joon. 166);
- 2) ringjoone keskpunkt asetseb piirdeurka sees (joon. 167);
- 3) ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdeurka (joon. 168).

1. Kui ringjoone keskpunkt O asetseb piirdeurka haaral BC , siis kesk-
nurk AOC on kolmnurga ABO välisnurk ja seetõttu

$$\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB.$$

Et kolmnurk OAB on võrdhaarne (miks?), siis saadud võrduse
paremal poolel on võrdsed liidetavad ja seega

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABO,$$

millest järeldubki, et

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

2. Kui ringjoone keskpunkt asetseb piirde-
nurga sees (joon. 167), siis joonestame diameetri BD . See diameeter jaotab piirde-
nurga ja kesknurga kaheks osaks, mille kummagi kohta teoreem
on eelmises punktis tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \angle DOC.$$

Lüües esimese võrduse pooltega teise võrduse pooled ja tuues
paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle DOC)$$

ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

3. Kui ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirde-
nurka (joon. 168), siis, joonestades diameetri BD , saame piirde-
nurga ABC esitada kahe niisuguse piirde-
nurga vahena, mille kohta
teoreem on juba tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle COD.$$

Lahutades esimese võrduse pooltest teise võrduse pooled ja
tuues paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} (\angle AOD - \angle COD)$$

ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

Sellega on teoreem täielikult tõestatud.

961. Teoreemist piirdenurga kohta teeme järgmised järeldused.

1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast. Nende piirdenurkade tipud asetsevad kaarel (*MCL* joonisel 165), mille igast punktist (*A, B, C, ...*) paistab kaare otspunkte ühendav kõõl (*ML*) ühes ja samas vaatenurgas.

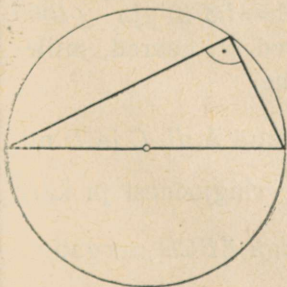
2. Võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed (miks?).

3. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,

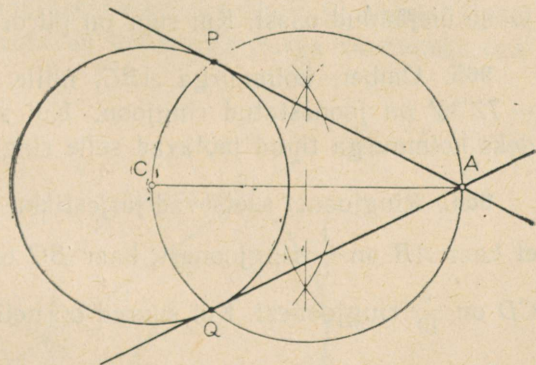
sest vastav kesknurk on kaks täisnurka (joon. 169). See järeldus näitab, et ringjoone igast punktist (peale kahe punkti) paistab diameeter täisnurgas.

Viimast järeldust nimetatakse Thalese* teoreemiks. Seda teoreemi saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks antud hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame ringjoone, mille diameetriks on antud hüpotenuus, ja möödame diameetri ühest otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu ja diameetri teiste otspunktide ühendamisel saame nõutud täisnurkse kolmnurga.

962. Thalese teoreem annab uue võimaluse ringjoone puutuja ehitamiseks punktist, mis asetseb väljaspool ringjoont. Selleks



Joon. 169.



Joon. 170.

* Thales, kreeka filosoof ja matemaatik, elas VI saj. I poolel e. m. a.

ühendame antud punkti A antud keskpunktiga C ja joonestame ringjoone, millele lõik AC on diameetrik (joon. 170). Siis leiame saadud ringjoone ja antud ringjoone ühised punktid P ja Q ning joonestame sirged AP ja AQ .

Teosta see konstruktsioon ja põhjenda, et AP ja AQ on puutujad.

963. Missugust joont mööda tuleb paadiga sõita lahel, kui soovime mingit rannalõiku kogu aeg näha täisnurgas (joon. 171)?



Joon. 171.

964. a) Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40° , 75° , $118^\circ 20'$, $131^\circ 48'$?

b) Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76° võrra väiksem ringjoone ülejäänud osast. Kui suur on piirdenurk?

965. Ümber kolmnurga ABC , mille $\angle A = 58^\circ 40'$ ja $\angle B = 72^\circ 30'$ on joonestatud ringjoon. Kui suured on kaared, milledeks kolmnurga tipud jaotavad selle ringjoone?

966. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaar AB on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, kaar BC on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja kaar CD on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured on nelinurga $ABCD$ nurgad?

967. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B . Punktist A on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD . Tõesta, et punktid B , C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.

Näpunäide. Joonesta kõõl AB ja vaatle nurki ABC ja ABD .

968. Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A, B, C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AD ja BC on paralleelsed.

Näpunäide. Joonesta kõõl AC ja vaatle tekkinud piirde-
nurki.

969. Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A, B, C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AC ja BD on võrdsed.

Näpunäide. Võrdle kaari, milledele need kõõlud toetuvad.

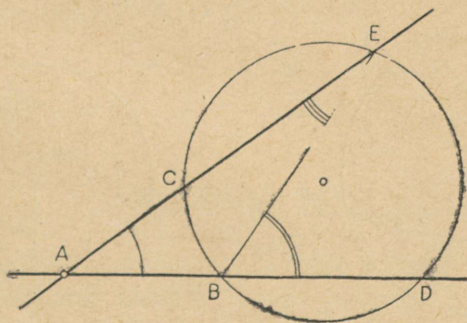
970. Antud on lõik $AB = 4$ cm. Missugusel joonel asetsevad punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas?

971. Antud on võrdkülgne kolmnurk, mille üheks küljeks on lõik AB , ja sirge s , mis lõikab selle kolmnurga kaht ülejäänud külge. Leia sirgel s kaks punkti, milledest lõik AB on näha nurgas 60° .

972. a) Ringi sisse on joonestatud korrapärase kuusnurk. Missuguse osa ringjoonest moodustab kuusnurga nurgale (kui piirde-
nurgale) vastav kaar? Leia selle nurga suurus.

b) Ringi sisse on joonestatud korrapärase viisnurk. Kui suur on selle viisnurga nurk?

973. Tõesta, et korrapärase hulknurga ühest ja samast tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga nurga võrdseteks osadeks.



Joon. 172.

974. Väljenda kolmnurga sisenurk α teise sisenurga β ja kolmanda tipu juures oleva välisnurga γ_1 kaudu. Arvuta α , kui $\beta = 38^\circ$ ja $\gamma_1 = 117^\circ$.

975. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist A on joonestatud ringjoonele kaks lõikajat ACE ja ABD (joon. 172), mille vahel on kaared BC ja DE . Kaar BC on 54° ja kaar DE on 132° . Kui suur on $\angle AEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?

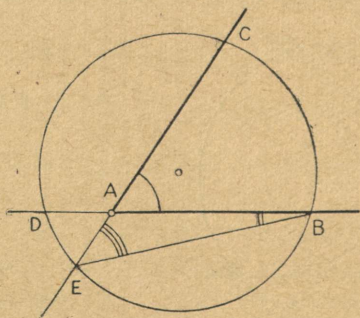
b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul väljaspool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC , kui nurga haarade vahel olevad kaared on 34° ja 105° .

976. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui nurga sees olevad kaared on a) 78° ja 134° ; b) 55° ja 172° ; c) $165^\circ 17'$ ja $47^\circ 39'$.

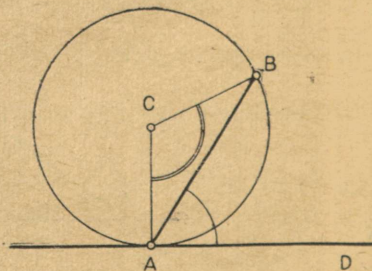
977. a) Ringjoon on lõigatud kahe sirgega EC ja DB , mis lõikuvad seespool ringjoont punktis A (joon. 173). Lõikajatevahelise nurga BAC ja tema tippnurga EAD sees olevad kaared on 78° ja 25° . Kui suur on $\angle CEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?

b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul seespool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC , kui selle nurga ja tema tippnurga haarade vahel olevad kaared on 115° ja 34° .

978. Arvuta nurk ringjoone kahe lõikuva kõõlu vahel, kui selle nurga ja tema tippnurga sees olevad kaared on a) 51° ja 34° ; b) 68° ja $27^\circ 20'$; c) $115^\circ 14'$ ja $18^\circ 24'$.



Joon. 173.



Joon. 174.

979. Kaks kõõlu lõikuvad nii, et nad jaotavad ringjoone osadeks, mis suhtuvad järjestikku nagu 1 : 3 : 5 : 6. Arvuta kõõludevaheline teravnurk.

980. Ringjoonel järjestikku võetud punktid A , B , C ja D jaotavad ringjoone kaarteks, mis suhtuvad nagu 2 : 5 : 7 : 1. Kui suur on nurk sirgete AB ja DC vahel? sirgete AC ja BD vahel?

981. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV . Puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone kaheks kaareks, milledest väiksem on 134° . Joonesta kõõl UV ja leia, kui suur on $\angle PUV$, $\angle PVU$, $\angle UPV$.

982. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV , mille vahel on nurk 78° . Kui suured on kaared, milledeks puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone?

983. Arvuta puutuja ja puutepunktist tõmmatud kõõlu vaheline nurk BAD (joon. 174), kui kõõlule toetuv kesknurk $\angle ACB = 110^\circ$.

984. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar moodustab 70% ringjoonest. Kui suur on see nurk?

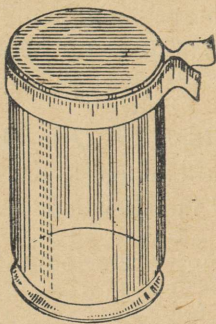
985. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk on $64^\circ 45'$. Kui suured on kaared, milledeks kõõl jaotab ringjoone?

986. Kui suur on korrapärase kõõlkolmnurga külje ja selle otspunktist tõmmatud puutuja vaheline nurk?

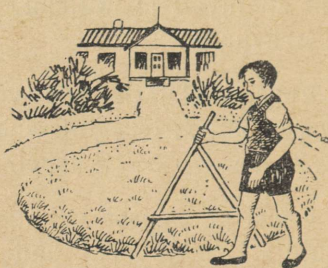
987. Kui suur on korrapärase kõõlkuusnurga külje ja selle otspunktist joonestatud puutuja vaheline nurk?

RINGJOONE PIKKUS.

988. Ringjoone pikkuse ehk ringi ümbermõõdu mõõtmisega puutume kokku, kui soovime mõõta näiteks ümmarguse palgi, ämbri põhja või vankri ratta ümbermõõtu. Sageli saab selleks kasutada painduvat mõõdulinti, nagu näidatud joonisel 175.



Joon. 175.



Joon. 176.

Too näiteid, kus veel saab ringjoone pikkust niiviisi mõõta.

989. Maapinnal leiduva ringjoone pikkuse mõõtmiseks on mõõdusirker mõnikord sobivam kui mõõdulint (joon. 176). Selgita, miks.

Too näiteid, kus maapinnal esineb ringjooni. Selgita, milleks nende pikkust on vaja mõõta ja kuidas seda tehakse.

990. Mõõda mõne ümmarguse (ringikujulise) eseme ümbermõõt ja läbimõõt, arvuta nende suhe ja koosta mõõtmise tulemustest järgmine tabel.

Eseme nimetus	Ümbermõõt	Läbimõõt	Nende suhe

Arvuta leitud suhete aritmeetiline keskmine ja võrdle seda teiste õpilaste poolt saadud keskmisega. Mida paned tähele?

991. Täpsemad mõõtmised näitavad, et erinevate ringide ümbermõõtude ja läbimõõtude suhted ei erine üksteisest kuigi palju, olles kõik ligikaudu võrdsed arvuga 3,14. Ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei muutu ringi läbimõõdu muutudes ehk, teisiti öeldes, ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on jääv suurus.

Selle suhte täpset väärtust tähistatakse kreeka tähega π (pii). Nüüd saame, et ringjoone pikkuse c ja läbimõõdu d ehk $2r$ suhe on

$$c : d = \pi \text{ ehk } c : 2r = \pi.$$

Avaldades siit jagatava c , saame ringi ümbermõõdu (ehk ringjoone pikkuse) valemid:

$$c = \pi d; c = 2\pi r$$

Ringi ümbermõõt võrdub arvu π ja läbimõõdu korrutisega ehk arvu 2π ja raadiuse korrutisega.

Arvu π täpne väärtus avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna. Sellest on arvutatud enam kui 700 kümnendkohta. Arvu π esimesed 22 kohta on järgmised:

3,141 592 653 589 793 238 482.

Ringi ümbermõõdu arvutamisel saab kasutada neist muidugi ainult esimesi kohti. Arvu π ligikaudse väärtusena kasutatakse harilikult arvu 3,14, mõnikord ka arvu $3\frac{1}{7}$ ja suuremat täpsust nõudvate arvutuste puhul arvu 3,1416.

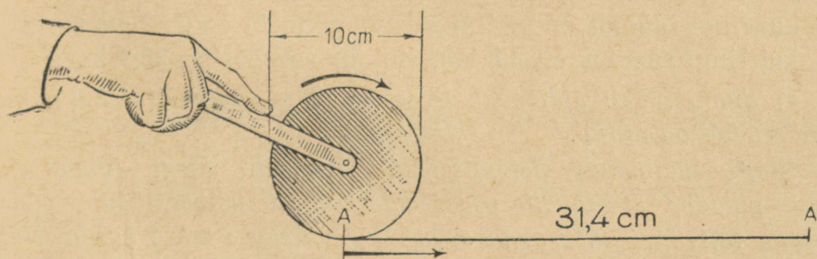
992. Ümmarguse vaagna ümbermõõdu mõõtmisel saadi tulemuseks 89,2 cm ja läbimõõdu mõõtmisel 28,4 cm. Arvuta arvu π ligikaudne väärtus.

993. a) Arvuta peast ringi ümbermõõtt, kui läbimõõtt on 1 m; 10 dm; 0,1 km; kui raadius on 5 cm; 0,5 dm; 1 m.

b) Arvuta ringi ümbermõõtt c , kui läbimõõtt $d = 16$ cm; 4,5 dm; 0,8 m.

c) Arvuta ringjoone pikkus c , kui raadius $r = 7$ cm; 3,8 dm; 12 m.

994. Mida kujutab joonis 177?



Joon. 177.

995. Arvuta Maa ekvaatori pikkus, kui ekvaatori raadius on 6378 km.

996. Kuu liigub ümber Maa peaaegu ringjoonelist teed mööda ja tema keskmine kaugus Maast on 380 000 km. Arvuta Kuu tee pikkus (eeldusel, et Maa seisab ruumis paigal).

997. Maa liigub ümber Päikese peaaegu ringjoonelist teed mööda, tehes aasta vältel ühe täistiiru. Arvuta Maa aastase tee pikkus, kui Maa kaugus Päikesest on 150 000 000 km (ja kui Päike seisaks ruumis paigal).

998. a) Ringjoone pikkuse kergemaks leidmiseks on koostatud tabelleid. Ühe sellise tabeli leiad õpiku lisast. Selles on antud ringi läbimõõdu kolmekohaliste tüvedega väärtustele

1,00, 1,01, 1,02, . . . , 9,99, 10,0

vastavad ümbermõõdu väärtused (niisamuti kolmekohaliste tüvedega):

3,14, 3,17, 3,20, . . . , 31,4, 31,4.

Antud läbimõõdule, näiteks läbimõõdule 2,76 vastava ümbermõõdu leidmiseks võtad tabelist selle rea, mille algul (esimeses veerus) seisab antud läbimõõdu esimesest kahest numbrist koosnev arv 2,7, ja selle veeru, mille pealkirjaks (esimeses reas) on antud läbimõõdu viimane number 6. Võetud rea 2,7 ja veeru 6 lõikekohas leiad läbimõõdule 2,76 vastava ümbermõõdu 8,67. (Tabeli kergemaks kasutamiseks lõika papist riba ja pane see selle rea alla, millest parajasti arvu otsid.)

b) Kontrolli tabeli abil, et:

kui ringi läbimõõt on 1,74 dm, siis ümbermõõt on 5,47 dm;

kui ringi raadius on 3,54 m, siis ümbermõõt on 22,2 m;

kui ringi raadius on 4,5 km, siis ümbermõõt on 28,3 km.

c) Sama tabeli abil saab leida ka ringi läbimõõtu, kui tema ümbermõõt on antud.

Ringi läbimõõdu leidmisel ümbermõõdu järgi tuleb silmas pidada, et tabeli osas, mis algab ümbermõõdu väärtusega 10,1, iga ümbermõõt esineb järjestikku 3 või 4 korda. Näiteks ümbermõõt 10,1 on ringil läbimõõduga 3,20, 3,21, 3,22, 3,23, sest ümardatult kümnendikeni on nende ringide ümbermõõdud

kõik 10,1. Seega võib ümbermõõdule 10,1 vastavaks läbimõõduks ühesuguse õigsusega võtta 3,20, 3,21, 3,22 või 3,23. Vastuste erinevuse vältimiseks võtame võimalikest väärtustest suurima, mis lõpeb paarisnumbriga. Niisiis,

kui ringi ümbermõõt on 10,1 cm, siis läbimõõt on 3,22 cm;
 kui ringi ümbermõõt on 10,7 dm, siis läbimõõt on 3,42 dm;
 kui ringi ümbermõõt on 28,7 m, siis läbimõõt on 9,14 m.

999. Joonesta alljärgnev tabel vihikusse ja täida see, kasutades ringjoone pikkuste tabelit.

r (cm)				2,36	1,65	3,65			
d (cm)	1,90	5,75	9,24						
c (cm)							25,8	17,0	5,97

1000. Tabel võimaldab leida ringjoone pikkust ka neil juhtumitel, kui antud läbimõõtu ei leidu tabelis. Selleks tuleb teada, et kui läbimõõt d suureneb (väheneb) 10, 100 jne. korda, siis ringjoone pikkus πd samuti suureneb (väheneb) 10, 100 jne. korda, sest ühe teguri (d) suurenemisel (vähennemisel) mingi arv korda suureneb (väheneb) korrutis (πd) sama arv korda. Lühemalt öeldakse, et ringjoone pikkus on võrdeline läbimõõduga.

Näiteid. 1. Et leida ringjoone pikkust, kui $d = 27$ cm, võtame tabelist läbimõõdule 2,7 vastava pikkuse 8,48 ja suurendame seda 10 korda. Nii saame, et kui $d = 27$ cm, siis $\pi d = 84,8$ cm.

2. Et leida ringjoone pikkust, kui $d = 0,0852$ m, võtame tabelist läbimõõdule 8,52 vastava pikkuse 26,8 ja vähendame seda 100 korda. Nii saame, et kui $d = 0,0852$ m, siis $\pi d = 0,268$ m.

1001. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

a) läbimõõt on 15 cm, 92 m, 236 m, 928 km, 307 m, 57 dm, 1400 m;

b) läbimõõt on 0,163 cm, 0,47 km, 0,9 dm, 0,025 m, 0,06 dm, 0,007 m.

Töö vormista tabeli kujul:

d	15 cm	92 m	_____
c	_____

1002. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

- a) raadius on 8 cm, 13,5 dm, 32,6 dm, 13 m, 245 m, 382 km;
- b) raadius on 0,07 cm, 0,272 cm, 0,38 km, 0,415 m, 0,46 km.

Töö vormista tabeli kujul:

r	d	c
8 cm	16 cm	. . .
13,5 dm

1003. Ringjoone pikkuste tabelis antud läbimõõdud on kolmekohaliste tüvedega arvud. Kui antud ringjoone läbimõõt on enam kui kolme tüvenumbriga, siis ringjoone pikkuse leidmisel tabeli järgi tuleb läbimõõt enne ümardada kolmekohalise tüvega arvuks.

Näide. Kui $d = 8,376$ m, siis ümardades saame, et $d \approx 8,38$ m ja sellele vastav ringjoone pikkus $c \approx 26,3$ m.

1004. Leia ringjoone pikkus, kui

- a) läbimõõt on 1,082 m, 0,2747 dm, 5,718 m, 6,223 m, 0,3065 km;
- b) raadius on 0,1274 dm, 38,81 cm, 5296 m, 0,7652 km, 69,88 km.

Näide. Kui $r = 0,3284$ km, siis $d = 0,6568$ km $\approx 0,657$ km ja $c \approx 2,06$ km.

1005. Tabelis antud ringjoone pikkused on kolmekohaliste tüvedega arvud, milledest väikseim on 3,14 ja suurim on 31,4. Kui antud ringjoone pikkus on tabelis mitteleiduv arv, mis on suurem kui 3,14, aga väiksem kui 31,4, siis leiame ringjoone pikkuste tabelist kaks järjestikust arvu, mille vahel ta asetseb, vaatame, kummast neist ta erineb vähem, ja võtame sellele vastava läbimõõdu. Näiteks ringjoone pikkus 3,97 asetseb tabelis leiduvate ringjoone pikkuste 3,96 ja 3,99 vahel ja seejuures erineb arvust 3,96 vähem kui arvust 3,99. Seetõttu võtame otsitavaks läbimõõduks ringjoone pikkusele 3,96 vastava läbimõõdu, s. o. 1,26. Nii siis, kui ringjoone pikkus on 3,97 ühikut, siis läbimõõt on 1,26 ühikut. See läbimõõdu väärtus on muidugi ligikaudne ja nimelt veaga alla 0,005.

Kui antud ringjoone pikkus erineb täpselt ühepalju kahest tabelis antud järjestikusest ringjoone pikkusest, siis on ükskõik,

kummale vastav läbimõõt neist võtta. Raadiuse kergemaks arvutamiseks on soovitatav võtta paarisnumbriga lõppev väärtus. Näiteks, kui ringjoone pikkus on 3,66 ühikut, siis läbimõõduks saame 1,16 ühikut.

1006. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema ümbermõõt on: 4 cm; 4,3 dm; 5,5 m; 12 m; 14,3 m; 18,7 m; 28,39 km; 30,46 km.

1007. Kui antud ringjoone pikkuse mõõtarv ei kuulu tabelis antud äärmiste arvude, s.o. 3,14 ja 31,4 vahele, siis suurendame (või vähendame) seda mõõtarvu 10, 100, ... korda nii, et uus mõõtarv oleks suurem kui 3,14, kuid väiksem kui 31,4. Selle põhjal leitud läbimõõt tuleb muidugi sama arv korda vähendada (või vastavalt suurendada).

Näited. 1. Olgu ringjoone pikkus $c = 1,66$ m; suurendades seda mõõtarvu 10 korda, saame 16,6, millele vastav läbimõõt tabeli järgi on 5,28; tähendab, otsitav läbimõõt $d = 0,528$ m.

2. Olgu ringi ümbermõõt $c = 386$ m; vähendades mõõtarvu 100 korda, saame 3,86, millele vastav läbimõõt tabeli järgi on 1,23; tähendab, otsitav läbimõõt $d = 123$ m.

1008. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema ümbermõõt on:

a) 52 mm, 138 mm, 75 cm, 204 cm, 0,87 dm, 2,56 m, 2,92 dm, 0,6 km;

b) 88 mm, 212 mm, 1,12 m, 2,75 m, 0,03 km, 2,42 km, 1920 m, 2,5 m.

1009. Mitu meetrit on ümmarguse tiigi läbimõõt, kui ümbermõõt on 245 sammu ja sammu pikkus on 0,7 m?

1010. a) Mitu äärekivi kulub ümmargusele lillepeenrale, mille läbimõõt on 2,6 m, kui kivi pikkus on 17 cm?

b) Mitu lilletaime kulub ümmarguse lillepeenra ääristamiseks, kui peenra läbimõõt on 3,7 m ja taimede vaheks jätta 20 cm?

1011. Lapsed tegid jääle karusselli, pannes kelgu tiirlema 6,5 m pikkuse lati otsa. Kui pika sõidu sai Tõnu, kes tegi 15 tiiru?

1012. a) Ratas tegi 19,6 m vahemaal 8 pööret. Mitu pööret teeb ratas 1 km pikkusel vahemaal? Kui suur on selle ratta raadius?

b) Mitu pööret teeb 1,5 m kõrgune veduriratas ühes tunnis, kui vedur läbib tunnis 75 km? Missuguse aja vältel teeb see ratas 1000 pööret?

1013. Kui pikk on 75° -ne kaar ringjoonel, mille raadius on 6 cm?

Näpunäide. Võta abiks ühekraadise kaare pikkus.

1014. Ringjoone 36° -se kaare pikkus on 5 dm. Kui pikk on raadius?

1015. Kui pikk on 100° -ne kaar ringjoonel, mille läbimõõt on 1 m?

1016. Ringjoone raadius on 10 cm. Kui pikk on

a) korrapärase kõõlviisnurga küljele vastava kaare pikkus?

b) korrapärase kõõlkaheksanurga küljele vastava kaare pikkus?

1017. Kaks sirget raudteed, mille sihtide vaheline nurk on 60° , on sujuvalt ühendatud ringi kaarega (joon. 178), mille pikkus on 125 m. Arvuta selle kaare raadius.



Joon. 178.

1018. Ringi raadius on r cm. Kui palju ja mitme protsendi võrra on korrapärase kõõlkuusnurga küljele vastav kaar sellest küljest pikem?

1019. Maa ekvaatori raadius on 6378 km. Arvuta meremiili pikkus, kui on teada, et see võrdub Maa ekvaatori $1'$ -se kaare pikkusega.

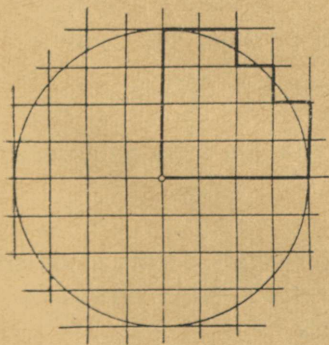
RINGI PINDALA.

1020. Ruudulisele paberile joonestatud ringi pindala ligikaudsks leidmiseks loendame kõik ruudud, mida see ring katab, kusjuures pooliku ruudu loeme terve eest, kui üle poole temast näib olevat ringi sees, ja jätame arvesse võtmata, kui üle poole temast näib olevat väljaspool ringi. Töö kergendamiseks võib leida esmalt veerandringi pindala ja korrutada tulemus neljaga. Ruutude kergemaks loendamiseks piirame joonega kõik kaasaarvatavad ruudud (joon. 179).

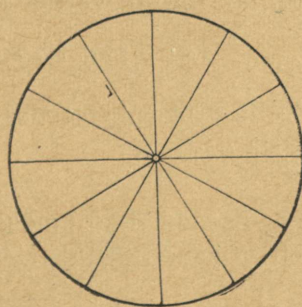
Leia joonisel 179 kujutatud ringi ligikaudne pindala, kui seal iga ruudu külg on 0,5 cm.

1021. Joonesta ruudulisele paberile kolm ringi, mille raadiused on vastavalt 1 cm, 2,5 cm ja 3 cm. Leia eelmise ülesande eeskujul iga ringi ligikaudne pindala.

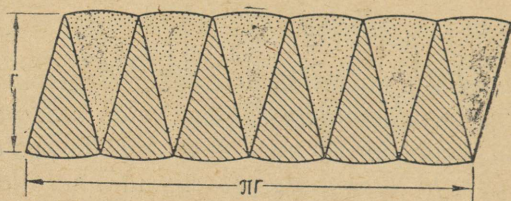
1022. Joonesta paksemale paberile (kartongile) mingi ring, näiteks raadiusega 4 cm, jaota see raadiustega esiteks kuueks ja siis kaheteistkümneks võrdseks osaks ja lõika need osad korralkult paberist välja (joon. 180). Iga niisugust osa nimetatakse ringi **sektoriks**. Kleebi need sektorid vihikusse üksteise kõrvale joonise 181 eeskujul ja värvi vaheldumisi kahe eri värviga. Missugust kujundit meenutab see kujund? Mille poolest ta erineb rööpkülilist? Millega võiks lugeda võrdseks selle «rööpküliliku» aluse, millega kõrguse? Mis siit järeldub ringi pindala kohta?



Joon. 179.



Joon. 180.



Joon. 181.

Ringi pindala võrdub poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.

Näide. Kui ringi raadius $r = 2$ cm, siis pool ümbermõõtu $\pi r = 3,14 \cdot 2 = 6,28$ cm ja pindala $S = 6,28 \cdot 2 = 12,56 = 13$ cm².

Arvuta sel viisil ringi pindala, kui ringi raadius on 5 cm; 4 dm; 8 m.

1023. Tuleta eelmises ülesandes antud teoreemi põhjal ringi pindala valem.

$$S = \pi r^2$$

Ringi pindala võrdub raadiuse ruudu ja arvu π korrutisega.

Võrdle ringi pindala puutujaruudu pindalaga (joon. 182).

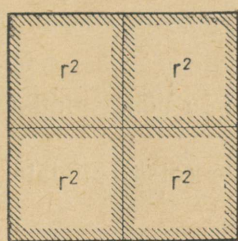
1024. a) Arvuta valemi järgi ringi pindala, kui raadius

$r = 3$ cm; 1,5 cm; 35 m; 0,8 km; 2,45 km.

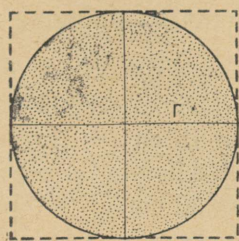
b) Mitu protsenti moodustab ringi pindala tema puutujaruudu pindalast?

1025. Asenda ringi pindala valemis raadius r tema avaldisega diameetri d kaudu ja tuleta järgmine ringi pindala valem:

$$S = \frac{1}{4} \pi d^2$$



$$4r^2$$



$$3,14r^2$$

Joon. 182.

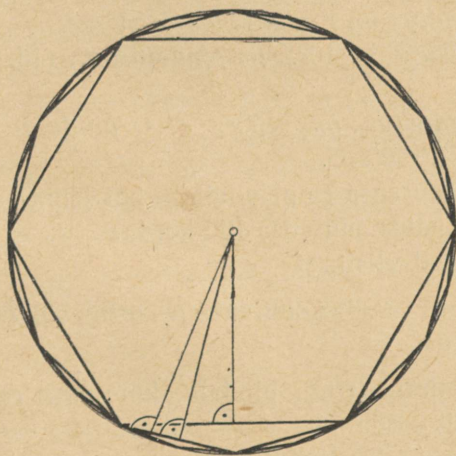
Sõnasta see valem. Arvuta selle valemi järgi ringi pindala, kui läbimõõt

$$d = 2 \text{ cm}; 4 \text{ dm}; 1 \text{ m}; 0,4 \text{ m}; 2,6 \text{ km}.$$

Näide. Kui ringi läbimõõt $d = 3,2 \text{ dm}$, siis pindala $S =$

$$= \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 3,2^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 10,24 = 3,14 \cdot 2,56 = 8,0384 \approx \approx 8,0 \text{ dm}^2.$$

1026. Tuleta ringi pindala arvutamise eeskiri korrapärase hulknurga pindala arvutamise eeskirjast. Selleks vaatle ringi sisse joonestatud korrapärase 6-nurga, korrapärase 12-nurga, korrapärase 24-nurga jne. pindala (joon. 183). Millega võrdub iga nii-



Joon. 183.

suguse hulknurga pindala? Mida siit võiks järeldada ringi pindala kohta?

1027. a) Arvuta ümmarguse piimanõu põhja pindala, kui nõu läbimõõt on 16 cm.

b) Arvuta ümmarguse palgi ristlõike (otsa) pindala, kui palgi läbimõõt on 36 cm.

1028. Ringi pindala kergemaks leidmiseks on koostatud tabelleid. Uhe sellise tabeli leiad õpiku lisast. Selle ehitus ja kasutamine on analoogiline ringi ümbermõõdude tabeli ehituse ja kasutamisega.

Näiteid.

a) Kui ringi läbimõõt on 2,4 m, siis pindala on 4,52 m².

b) Kui ringi raadius on 3,76 dm, siis pindala on 44,4 dm².

c) Kui ringi pindala on 29,9 m², siis läbimõõt on 6,17 m.

1029. a) Leia tabeli abil ringi pindala, kui läbimõõt on 1,8 cm, 2,7 cm, 3,74 dm, 5 dm, 6,38 m, 7,25 m, 8 km, 10 km.

b) Leia tabeli abil ringi pindala, kui ringi raadius on 1,2 cm, 3,8 cm, 4,72 dm, 0,71 dm, 0,95 m, 2 m, 1,5 km, 4,87 km.

c) Leia tabeli abil ringi raadius, kui ringi pindala on 11,7 cm², 41,4 dm², 7,07 m², 11 m², 18,2 km², 28 km².

1030. a) Selgita, kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb mingi arv korda.

Kui ringi raadius on r , siis pindala on πr^2 .

Kui ringi raadius on $10r$, siis pindala on $\pi(10r)^2 = \pi \cdot 100r^2 = 100\pi r^2$.

Kui ringi raadius on $100r$, siis pindala on $\pi(100r)^2 = \pi \cdot 10\,000r^2 = 10\,000\pi r^2$.

Mitu korda suurenes ringi pindala, kui tema raadius suurenes 10 korda? kui raadius suurenes 100 korda?

b) Näita samal viisil, et

kui ringi raadius suureneb n korda, siis pindala suureneb n^2 korda.

c) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb 3, 5, 7, 12, 20, 50 korda?

d) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius väheneb 2, 5, 8, 10, 25, 100 korda?

1031. Kuidas muutub ringi raadius ja kuidas pindala, kui

- a) läbimõõt suureneb 2 korda, 5 korda, 10 korda?
- b) läbimõõt väheneb 3 korda, 8 korda, 100 korda?

1032. Teades, kuidas muutub ringi pindala tema raadiuse (läbimõõdu) muutudes, leia tabeli abil ringi pindala järgmistel andmetel.

- a) Läbimõõt on 12 cm, 43 cm, 92 m, 25 km, 0,4 dm, 0,75 m.
- b) Raadius on 8 cm, 32 cm, 0,3 m, 15 m, 0,28 km, 0,39 km.

N ä i d e. Kui ringi raadius $r = 5,5$ m, siis läbimõõt $d = 11$ m. Tabelist leiame, et 10 korda väiksema läbimõõduga ringi pindala on $0,95$ m². Suurendades seda 100 korda, saame 95 m². Lühidalt: kui $r = 5,5$ m, siis $d = 11$ m ja $S = 100 \cdot 0,95$ m² = 95 m².

Analoogiliselt:

kui $r = 0,07$ m, siis $d = 0,14$ m ja $S = 1,54$ m² : $100 = 0,0154$ m².

1033. Leia ringi pindala järgmistel andmetel:

- a) läbimõõt on 1,07 dm, 0,326 dm, 7,87 m, 246 m, 0,508 km;
- b) raadius on 0,124 dm, 31,9 cm, 671 m, 1128 m, 7,87 km.

1034. Tabelis antud ringi pindala väärtused on arvud vahemikust 0,79 kuni 78,5. Kui antud ringi pindala väärtus on sellesse vahemikku kuuluv arv, mida ei ole tabelis, siis läbimõõdu leidmiseks leia tabelist antud pindala väärtusele lähim pindala väärtus ja võta sellele vastav läbimõõt. Näiteks pindala väärtusele 5,02 lähim tabelis leiduv väärtus on 5,03 ja sellele vastav läbimõõt 2,53. Tähendab, kui pindala $S = 5,02$, siis läbimõõt $d = 2,53$.

Kui antud ringi pindala väärtus ei kuulu vahemikku 0,79 kuni 78,5, siis läbimõõdu leidmiseks suurendame (või vähendame) seda väärtust 100 või 10 000 korda nii, et ta kuuluks sinna, leiame siis suurendatud (või vähendatud) pindala väärtusele vastava läbimõõdu ja vähendame (või suurendame) seda vastavalt 10 või 100 korda.

N ä i d e. Olgu antud ringi pindala $0,235$ m². Suurendades seda 100 korda, saame $23,5$ m². Sellele vastav läbimõõt on $5,47$ m. Vähendades seda 10 korda, saame $0,547$ m. Tähendab, kui ringi pindala on $0,235$ m², siis läbimõõt on $0,547$ m.

1035. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema pindala on
a) $2,4 \text{ dm}^2$, 13 dm^2 , 53 cm^2 , 248 cm^2 , 4840 m^2 , $0,8 \text{ m}^2$, $0,075 \text{ m}^2$,
 100 m^2 ;

b) $4,7 \text{ dm}^2$, 16 dm^2 , 855 m^2 , 322 mm^2 , 2100 m^2 , $0,6 \text{ m}^2$,
 $0,024 \text{ km}^2$, 500 km^2 .

1036. Spordiplats kujutab endast ristkülikut, mille otstes on poolringid. Selle ristküliku mõõtmed on 120 m ja 80 m. Spordiplatsi äärel on jooksurajad, mis moodustavad 8 m laiuse riba (joon. 184).

- a) Kui suur on spordiplatsi kogupindala?
b) Kui suur on jooksuradade all olev pindala?
c) Kui suur on jooksuradade all oleva riba välimise ääre pikkus, kui suur on seesmise ääre pikkus ja kui suur on nende vahe?



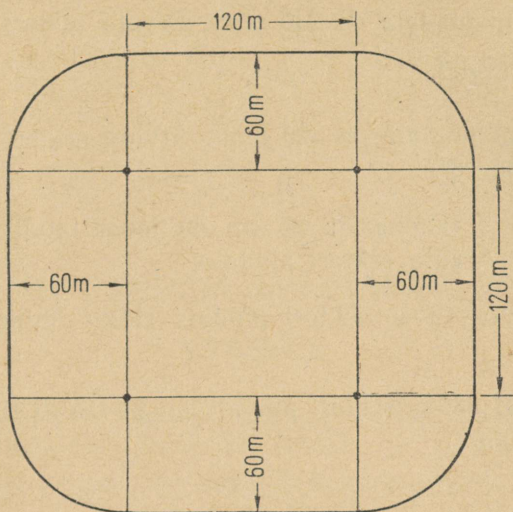
Joon. 184.

1037. Hobuseköietamise keti pikkus on 8,4 m. Kui suur pindala on maatükil, millelt hobune saab süüa rohtu?

1038. Ristkülikukujulise väljaku igasse nurka tahetakse rajada veerandringi-kujuline ja keskele ringikujuline iluaed. Esimesed neist on raadiusega 7 m ja viimane raadiusega 6 m. Aia allaminev pind tuleb katta mullaga nii, et igal ruutmeetril oleks seda $0,1 \text{ m}^3$. Mitu autokoormat kulub selleks mulda, kui igas koormas on seda 3 m^3 ?

1039. a) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõnelinurga pindala ringi pindalast?

Näpunäide. Ringi raadius olgu r . Kõõnelinurga pindala leidmiseks vaatle neid kaht kolmnurka, milledeks diagonaal jaotab selle nelinurga.



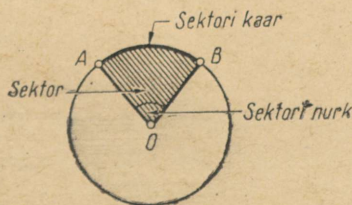
Joon. 185.

b) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlkuusnurga pindala ringi pindalast?

1040. Ümmarguse tiigi ümbermõõt on 132 m. Kui suur on tiigi pindala?

1041. Arvuta joonisel 185 kujutatud väljaku pindala (hektari-tes) ja ümbermõõt.

1042. Ringi raadius on 10 cm. Ring on jaotatud kümneks võrdseks sektoriks. Arvuta iga sektori nurk, kaare pikkus ja pindala.



Joon. 186.

1043. Ringi pindala on 240 mm^2 . Arvuta sektori pindala, kui sektor on $\frac{3}{8}$ ringist.

1044. Ringi pindala on 320 mm^2 . Arvuta sektori pindala, kui sektori nurk on 18° .

1045. Ringis raadiusega 25 cm on joonestatud sektor, mille nurk on 144° . Arvuta sektori pindala.

1046. Arvuta 48° -se sektori pindala ringis, mille raadius on $0,5 \text{ m}$.

1047. Ringi 56° -se sektori pindala on 84 cm^2 . Leia ringi pindala ja übermõõt.

11. ÜHE MUUTUJAGA LINEAARNE VÖRRAND.

SAMASUS.

1048. Teisendame avaldist $(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)$, avades selles sulud ja koondades sarnased liikmed:

$$(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 1 = 4x.$$

Kirjutame võrduse, mille üheks pooleks on antud avaldis ja teiseks pooleks teisendamisel saadud avaldis:

$$(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1) = 4x.$$

Kui selle võrduse mõlemal poolel asendada muutuja x mistahes vabalt võetud väärtusega ja arvutada võrduse poolte väärtused, siis selgub, et need on võrdsed. Näiteks, kui x asendada arvuga 3, siis võrduse vasaku poole väärtus

$$v = (2 \cdot 3 + 1)^2 - (4 \cdot 3^2 + 1) = 7^2 - 37 = 49 - 37 = 12$$

ja parema poole väärtus

$$p = 4 \cdot 3 = 12,$$

seega $v = p$. Selles ei ole midagi üllatavat, sest sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on teisendused, mille puhul avaldise väärtus ei muutu.

Teisendust, mille puhul avaldise väärtus ei muutu, nimetatakse samasusteisenduseks.

Sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on seega samasusteisendused.

1049. Otsusta iga allpool nimetatud teisenduse kohta, kas see on samasusteisendus või mitte. Kui teisendus ei ole samasusteisendus, siis otsusta, kuidas avaldise väärtus nimetatud teisendusel muutub.

- 1) Hulkliikme liikmete ühise teguri toomine sulgude ette.
- 2) Avaldise jagamine 3-ga, näiteks üleminek avaldiselt $3a + 6$ avaldisele $a + 2$.
- 3) Kahe arvu summa ja vahe korrutise asendamine nende arvude ruutude vahega.
- 4) Murru laiendamine.
- 5) Murdude liitmise reegli rakendamine.
- 6) Murru korrutamine 4-ga, näiteks üleminek murrult $\frac{a}{8}$ murrule $\frac{a}{2}$.
- 7) Murde sisaldava avaldise korrutamine nende murdude ühise nimetajaga.
- 8) Hulkliikme lahutamine tegureiks.
- 9) Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks.

1050. Võrdust, mille ühest poolest saab samasusteisenduste abil teise poole, nimetatakse samasuseks. Kui samasuses muutuja asendada tema mistahes väärtusega, siis saadakse õige võrdus.

Näiteks järgmised võrdused on samasused:

- 1) $(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$;
- 2) $3x - \frac{1-x}{2} = \frac{7x-1}{2}$;
- 3) $1 - 9a^4 = (1 + 3a^2)(1 - 3a^2)$;
- 4) $0,75 - \frac{1}{4} = 0,5$.

Nimeta iga võrduse puhul need teisendused, mille abil saab võrduse ühest poolest teise.

1051. Tõesta, et järgmised võrdused on samasused.

- 1) $\frac{a}{2}(4x - 1) - \frac{a}{3}(6x - 2) = \frac{a}{6}$
- 2) $3mn - 2m - 12 + 18n = (3n - 2)(m + 6)$
- 3) $6x^2 - 5x - 4 = (3x - 4)(2x + 1)$
- 4) $(m^2 + 2mn + n^2)(m^2 - 2mn + n^2) = (m^2 - n^2)^2$
- 5) $\left(3 - 1 : \frac{2}{3}\right) : \left(4 - 1 : 1 \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{13}$

Näpunäide. Tõestuseks näita, et võrduse ühest poolest (ükskõik kummast) saab samasusteisenduste teel teise poole.

1052. Kas antud võrdus on samasus või mitte, seda saab otsustada ka proovimise teel. Selleks asenda võrduses esinev muutuja (või muutujad, kui neid on mitu) mõnede vabalt võetud arvudega ja kontrolli arvutamise teel, kas saadud võrdus on õige või väär.

Mis võib öelda võrduse kohta, kui ta ei ole õige muutuja asendamisel mingi arvuga?

Kontrolli proovimise teel, kas järgnevad võrdused on samasused või mitte:

1) $(3 + a)^2 - (3 - a)^2 = 12a$

2) $(1 - a)^2 - (a - 1)^2 = 0$

3) $4(a - 1) = 0$

4) $a^2 = 3a - 2$

5) $a^2 - b^2 = b^2 - a^2$

1053. Näita arvutamise teel, et

1) võrdus $2a^2 - 3a = 3a$ on õige, kui $a = 3$;

2) võrdus $6 + \frac{2a}{2-a} + \frac{4}{a-2} = 4$ on õige, kui $a = 1$;

3) võrdus $5x + 8 = x$ on õige, kui $x = -2$;

4) võrdus $6x - 2(3x - 1) - 2 = 0$ on õige, kui $x = 0$.

Näita nüüd proovimise teel, et mõned nendest võrdustest ei ole samasused. Missugused nimelt?

Iga võrdus ei ole samasus.

1054. Koosta iga järgneva lause põhjal võrdus ja otsusta, kas saadud võrdus on samasus või mitte.

1) Arv $5a$ on $3a$ võrra suurem kui $2a$.

2) Arv $7m$ on 6 võrra väiksem kui $10m$.

3) Arv x on 4 võrra väiksem kui 12.

4) Arv x on 4 korda väiksem kui arv y .

5) Arvude a ja 3 jagatis võrdub poolega nende arvude summast.

6) Arvude x ja 4 ruutude vahe on 16 võrra väiksem arvu x ruudust.

7) Arvude x ja 1 summa ruut on $2x$ võrra suurem samade arvude ruutude summast.

VÖRRANDI LAHENDID.

1055. Mida nimetatakse võrrandiks? Kasutades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, lahenda peast järgmised võrrandid.

a) $x + 4 = 11$	b) $x + 7 = 2$	c) $x + 1 = 7$	d) $x + 5 = 3$
$y - 2 = 7$	$y - 3 = 0$	$y - 2 = 10$	$y - 6 = -4$
$6 - z = 1$	$2 - z = 3$	$15 - z = 9$	$74 - z = 80$
$5u = 0,1$	$3u = 7$	$5u = -1$	$-3u = \frac{1}{3}$
$21 : v = 7$	$4 : v = 0,5$	$15 : v = 3$	$18 : v = -2$

Missuguseid tehetes esinevate arvude omadusi tuleb kasutada tulbas a antud võrrandite lahendamisel?

1056. Olgu antud võrrand $x^2 = x + 6$. Kui selleks muutuja x asendada arvuga 2, siis saame mittevõrdsed tulemused: $2^2 \neq 2 + 6$. Kui aga x asendada arvuga 3, siis saame võrdsed tulemused:

$$3^2 = 3 + 6.$$

Kui võrrandis muutuja asendamisel mingi arvuga võrrandi pooled osutuvad võrdseteks, siis öeldakse, et see arv rahuldab võrrandit.

Kas arv 3 rahuldab võrrandit $x^2 = x + 6$? Aga arv 2?

Proovi, kas arvudest 0, -1 , -2 ja -3 mõni rahuldab võrrandit $x^2 = x + 6$.

Võrrandit rahuldavat arvu nimetatakse võrrandi lahendiks.

Näiteks arv 3 on võrrandi $x^2 = x + 6$ lahendiks, samuti ka arv -2 .

1057. Leia proovimise teel, kas arvude 0, 2, -2 , 5, -5 hulgas leidub võrrandi

$$\frac{4x - 1}{x - 2} = 3$$

lahendit.

1058. a) Näita, et arvud 5 ja -3 on võrrandi $x^2 = 2x + 15$ lahenditeks.

b) Näita, et arvud -1 , $+1$, -2 ja $+2$ rahuldavad võrrandit $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$. Mitu lahendit leidsid sellel võrrandil?

1059. Mis liiki arv on positiivse arvu ruut? negatiivse arvu ruut? nulli ruut? Kas leidub niisugune arv, mille ruut võrdub -4 ? Kas leidub lahendit võrrandil

$$x^2 = -4; x^2 = -9; x^2 + 1 = 0; x^2 + 100 = 0?$$

1060. a) Missuguse arvu jagamisel 5-ga saadakse 0? Mis on lahendiks võrrandil

$$\frac{x}{5} = 0; \frac{x}{10} = 0; x : 2\frac{1}{3} = 0; x : 0,05 = 0?$$

b) Kas leidub arvu, millega arvu 1 jagades saadakse 0? Kas leidub lahendit võrrandil

$$\frac{1}{x} = 0; \frac{5}{x} = 0; 0,5 : x = 0; 1\frac{1}{4} : x = 0?$$

1061. Mis on lahendiks võrrandil

$$\frac{x}{2} = 1; \frac{x}{2} = 0; \frac{2}{x} = 1?$$

Võrrandil võib olla üks või mitu lahendit. Võrrandil võib ka lahend puududa.

VÖRRANDI PÕHIOMADUSED.

1062. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid:

1) $x + 7 = 15 \Leftrightarrow x = 15 - 7;$

2) $y - 12 = 8 \Leftrightarrow y = 8 + 12;$

3) $6 - z = 4 \Leftrightarrow z = 6 - 4;$

4) $8 = 17 - u \Leftrightarrow u = 17 - 8.$

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas olevat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest, kui selles viia üks liige (reas 1 ja 2) või kaks liiget (reas 3 ja 4) võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes seejuures iga üleviidava liikme märgi vastupidiseks. Näiteks reas 4 olevast võrrandist $8 = 17 - u$ saab võrrandi $u = 17 - 8$, kui liige $-u$ viia võrrandi paremalt poolelt vasakule poolele, kirjutades sinna $+u$, ja liige 8 viia võrrandi vasakult poolelt paremale, kirjutades sinna -8 (joon. 187).

$$g = 17 - u$$

$$u = 17 - g$$

Joon. 187.

Selgita, missugused liikmed on võrrandites 1, 2 ja 3 viidud ühelt poolt teisele.

Võrrandi liikmete ülalkirjeldatud omadust nimetatakse võrrandi esimeseks põhiomaduseks.

Võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

1063. Võrrandi esimene põhiomadus võimaldab tunduvalt kergendada võrrandi lahendamist. Olgu vaja lahendada näiteks võrrand

$$6 - 5x = 27 - 8x.$$

Teisendame võrrandit nii, et tema liikmed, mis sisaldavad tundmatut, oleksid võrrandi vasakul poolel, ja liikmed, mis ei sisalda tundmatut, paremal poolel. Antud võrrandis tuleb selleks liige $-8x$ viia paremalt poolelt vasakule (märgiga $+$) ja liige 6 viia vasakult paremale (märgiga $-$). Seda tehes saame teisendatud võrrandi

$$8x - 5x = 27 - 6.$$

Koondades nüüd sarnased liikmed, saame

$$3x = 21.$$

Siit järeldub, et

$$x = 7.$$

Lahenduse kirjutame lühidalt järgmiselt:

$$6 - 5x = 27 - 8x \rightarrow 8x - 5x = 27 - 6 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7.$$

Kontroll. $v = 6 - 5 \cdot 7 = 6 - 35 = -29;$

$$p = 27 - 8 \cdot 7 = 27 - 56 = -29;$$

$$v = p.$$

Vastus. $x = 7.$

1064. Rakendades võrrandi esimest põhiomadust, lahenda võrrandid:

1) $5x = 4x + 12$

6) $14x - 9 = 5x$

2) $-5x = 36 - 6x$

7) $3x - 3 = 4 + x$

3) $10x = 9x - 44$

8) $2x + 4 = 1 - x$

4) $x - 1 = 1$

9) $7 + 3x = 8 - 2x$

5) $x + 2 = 5 - x$

10) $4 - 5x = 8 + 3x$

1065. Millega võrdub x , kui

$$5 = x; -3 = x; -1 = x?$$

$a = b \Leftrightarrow b = a$

Võrrandi pooli võib vahetada ilma ühegi liikme märki muutmata.

Kasuta seda omadust järgmiste võrrandite lahendamisel:

1) $12 = x + 7$

3) $4 + 2x = 10x - 4$

2) $28 = 4 + 6x$

4) $-10 = 3 + x$

Näide. $60 = x + 15 \rightarrow x + 15 = 60 \rightarrow x = 60 - 15$
 $\rightarrow x = 45.$

1066. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid.

1) Kui $8x = 5$, siis $x = \frac{5}{8}$.

2) Kui $-3x = 9$, siis $x = 9 : (-3)$.

3) Kui $\frac{x}{5} = a$, siis $x = 5a$.

4) Kui $\frac{4}{x} = 2$, siis $4 = 2x$ ja $x = 4 : 2$.

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas seisvat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest selle vasaku ja parema poole korrutamisel või jagamisel ühe ja sama (nullist erineva) arvuga. Näiteks võrrandist $\frac{4}{x} = 2$ saame võrrandi $4 = 2x$, kui esimese võrrandi mõlemad pooled korrutame arvuga x .

Missuguse arvuga tuleb korrutada või jagada 1., 2. ja 3. reas oleva võrrandi pooli, et leida võrrandi lahendit?

Võrrandi teine põhiomadus:

võrrandi pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

1067. Nõue, et arv, millega võrrandi pooli korrutame, ei oleks 0, on tarvilik sellepärast, et võrrandi poolte korrutamisel arvuga 0 saaksime võrrandi, mida rahuldab iga arv. Korrutades näiteks võrrandi $2x = 10$ pooli arvuga 0, saame võrrandi $0 \cdot 2x = 0 \cdot 10$ ehk $0x = 0$. Seda võrrandit rahuldab iga arv. Tõepoolest, $0 \cdot 2 = 0$, $0 \cdot (-2) = 0$, $0 \cdot 5 = 0$ jne. Antud võrrandit $2x = 10$ rahuldab aga ainult arv 5.

Võrrandil $0 \cdot x = 0$ on lõpmata palju lahendeid, sest tema lahendiks sobib iga arv.

Lahenda võrrandid

$$x + 5 = 5 + x; \quad 2x + 3 = 3 + 2x; \quad 3x - 6 = 3(x - 2).$$

1068. Võrrandi mõlema poolega teostata tehe märgitakse harilikult võrrandi järele püstkriipsu taha. Näiteks tähendab kirjutus

$$2(x + 7) = 34 \quad | : 2$$

võrrandi mõlema poole jagamist 2-ga. Jagades saame

$$x + 7 = 17,$$

millest

$$x = 17 - 7$$

ehk

$$x = 10.$$

1069. Kasutades võrrandi teist põhiomadust, lahenda järgmised võrrandid. Lahendeid kontrolli peast.

1) $7x = 49$

2) $9x = 0$

3) $1 = \frac{3}{4}x$

4) $5 = \frac{x}{2}$

$3y = -2,1$

$\frac{y}{2} = 3$

$3y = \frac{1}{3}$

$\frac{6}{y} = 2$

$\frac{z}{4} = 1$

$\frac{2z}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{2z}{5} = 0$

$\frac{3z}{4} = \frac{1}{2}$

$0,4u = 0,8$

$0,3u = 1,2$

$\frac{3}{u} = 2$

$-1,2u = 0,8$

$\frac{v}{5} = 0,3$

$12 = 8v$

$\frac{3}{2v} = 1,5$

$\frac{2}{3}v = -\frac{1}{6}$

Näiteid. 1) $\frac{3x}{4} = 6 \mid \cdot 4 \rightarrow 3x = 24 \mid : 3 \rightarrow x = 8.$

2) $\frac{5}{2z} = 15 \mid \cdot 2z \rightarrow 5 = 30z \rightarrow 30z = 5 \mid : 30 \rightarrow z = \frac{1}{6}.$

1070. Võrrandi esimene ja teine põhiomadus võimaldavad antud võrrandit mitmeti teisendada. Need teisendused ei ole samasusteisendused, sest antud võrrandi pooled pole võrdsed teisendamisel saadud võrrandi vastavate pooltega. Näiteks võrrandi

$$3x - 4 = 6 + x$$

ja sellest esimese põhiomaduse põhjal saadud võrrandi

$$3x - x = 6 + 4$$

vastavad pooled ei ole omavahel võrdsed. Küll on aga nende võrrandite lahendid võrdsed. Seetõttu ütleme, et võrrandid on samaäärsed ja kirjutame:

$$3x - 4 = 6 + x \Leftrightarrow 3x - x = 6 + 4.$$

Kontrolli, et arv 5 rahuldab nii üht kui ka teist ülalantud võrrandit.

VÕRRANDI LIIKE.

1071. Võrrandid liigitatakse neis esinevate muutujate arvu järgi ühe muutujaga võrrandeks, kahe muutujaga võrrandeks jne. Näiteks on

$$3x^2 = x - 1 \text{ ühe muutujaga võrrand,}$$

$$2x + 3y = 4 \text{ kahe muutujaga võrrand,}$$

$$x^2 + y^2 = 2z \text{ kolme muutujaga võrrand.}$$

Käesolevas peatükis vaatleme ainult ühe muutujaga võrrandeid.

1072. Vaatleme mingit võrrandit, milles muutuja ei esine murru nimetajas, näiteks võrrandit

$$2(5x - 8) = 4 - 3(x + 1).$$

Anname sellele võrrandile võimalikult lihtsa kuju. Selleks avame sulud, viime kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, kirjutades paremale 0, ja koondame sarnased liikmed:

$$10x - 16 = 4 - 3x - 3;$$

$$10x + 3x - 16 - 4 + 3 = 0;$$

$$13x - 17 = 0.$$

Kui pärast võrrandi lihtsustamist muutuja esineb võrrandis ainult esimeses astmes, siis nimetatakse seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks (ka lineaarvõrrandiks).

Ühe muutujaga lineaarses võrrandis on pärast võrrandi lihtsustamist ainult kaks liiget: liige muutuja esimese astmega ja muutujat mitterisaldav liige, nn. vabaliige. Niisuguse võrrandi üldkuju on

$$ax + b = 0, \text{ kus } a \neq 0.$$

Selles võrrandis on a ja b mistahes antud arvud, kusjuures $a \neq 0$. Lahendades üldkujulise lineaarse võrrandi, saame

$$\begin{aligned} ax &= -b; \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ühe muutujaga lineaarsel võrrandil on üks ja ainult üks lahend.

1073. Anna igale alljärgnevale võrrandile võimalikult lihtne kuju ja otsusta, missugused neist on lineaarsed võrrandid, missugused mitte. Lineaarsed võrrandid lahenda.

- 1) $3x - 4(2 - x) = 6$
- 2) $x(3 + x) = 2(3 - x)$
- 3) $(x - 1)^2 = x^2$
- 4) $3(2 - 3x) = 8 - 2(3 - x)$
- 5) $(x - 3)(x + 3) = 7$

Näide. $x(7 + x) = 5 - x(5 + 2x)$;

$$7x + x^2 = 5 - 5x - 2x^2;$$

$$7x + x^2 - 5 + 5x + 2x^2 = 0;$$

$$3x^2 + 12x - 5 = 0. \text{ Ei ole lineaarne võrrand.}$$

LINEAARSE VÕRRANDI KOOSTAMINE JA LAHENDAMINE.

1074. Lineaarset võrrandit lahendame järgmise üldplaani järgi.

1) Avame sulud, kui neid võrrandis on, ja koondame sarnased liikmed.

2) Viime muutujat sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja kõik muud liikmed võrrandi teisele poolele.

3) Koondame sarnased liikmed.

4) Jagame võrrandi mõlemad pooled muutuja kordajaga.

Leitud lahendit tuleb kontrollida.

Näide. Lahendame võrrandi $4(x - 2) - 9 = 3 - (x + 5)$.

Lahendus.

Avame sulud: $4x - 8 - 9 = 3 - x - 5;$

Koondame sarnased liikmed: $4x - 17 = -x - 2;$

Viime üle liikmed -17 ja $-x$: $4x + x = 17 - 2;$

Koondame sarnased liikmed: $5x = 15;$

Jagame võrrandi pooled 5-ga: $x = 3.$

Kontroll. $v = 4 \cdot (3 - 2) - 9 = 4 \cdot 1 - 9 = -5;$

$p = 3 - (3 + 5) = 3 - 8 = -5;$

$v = p.$

Vastus. $x = 3.$

Märkus. Lahendus kirjuta edaspidi ilma selgituseta. Lahenduse võib kirjutada ka ritta, pannes võrrandite vahele järeldamismärgi \rightarrow (vt. ül. 1069).

1075. Lahenda võrrandid:

1) $7(x - 3) + 3(x - 5) = 2(3x + 2)$

2) $11x - (25 - 3x) = 17$

3) $7 - (7x - 28) = 0$

4) $3(10 - x) - 6(9,5 - x) = 0$

5) $3(x + 4) = (17 - x) \cdot 4$

1076. Lahenda võrrandid:

1) $0,02(30 - x) - 4 = 0,2 - 0,04(x - 3)$

2) $2x + 3 - 4(x - 2) = 7 - (3x - 5) + 4x$

3) $6 + 2v(-4v - 1) = 1 - 4v(2v + 3) - 5$

4) $(y - 6)(2y - 3) = 2(y - 4)(y - 3)$

5) $5(x - 2) - 3(x - 1) = -1$

1077. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Arvuga x liideti 21 ning saadi 68. Millega võrdub x ?

2) 26,8-le lisati arv a ning saadi 43,3. Leia a .

3) Arvust m lahutati 3,8 ja saadi 4,5. Leia m .

- 4) Arvust 15,7 lahutati arv s ja saadi 6,9. Leia s .
- 5) Arvu m suurendati 6,8 korda ja saadi 34. Leia m .
- 6) Arvu y jagamisel arvuga 3,7 saadi 11,1. Leia y .
- 7) Arv 13,5 jagati arvuga x ja saadi 0,5. Leia x .
- 8) Mingi arvuga liideti 180 ja saadi 150. Leia see arv.

1078. Lahenda võrrandid:

- 1) $4k - 0,2(k + 4) = 41$
- 2) $0,5(z - 1) - 0,25(3 - z) = 2$
- 3) $4(3x - 2) = 6x - 6$
- 4) $5(k + 2) = 13 + 3k$
- 5) $4(3v - 1) = 3(2v + 2) + 8$

1079. Lahenda võrrandid:

- 1) $2(5u - 3) = 3(2u + 5) - 5$
- 2) $(2x - 1) - (6x - 4) = 0$
- 3) $(x - 2)(x - 3) = x(x - 1)$
- 4) $3(6 - x) - 4(x + 8) = 0$
- 5) $2(x - 1) - 3(3 + x) = 5 + x$

1080. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

- 1) Arvu 35 korrutati ühe teise arvuga ja saadi 72,45. Missuguse arvuga korrutati?
- 2) Mingi arv jagati 7,5-ga ja saadi 4,4. Leia see arv.
- 3) Missuguse arvuga tuleb liita 2,87, et saada 11,06?
- 4) Missugusest arvust tuleb lahutada 12,5, et saada 63,1?
- 5) Missugust arvu tuleb korrutada 3,8-ga, et saada 4,18?
- 6) Missuguse arvuga tuleb jagada 33,5, et saada 3,7?
- 7) Riiulil oli teatud hulk raamatuid. Kui neile lisati veel 14 raamatut, siis oli riiulil 81 raamatut. Mitu raamatut oli esialgu riiulil?
- 8) Pärast seda kui laost veeti 284 m³ puid ära, jäi sinna veel 3759 m³ puid. Kui palju puid oli esialgu laos?

1081. Kui võrrand sisaldab harilikke murde, siis alustame võrrandi lahendamist murdude kaotamisega. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga.

Näide.
$$\frac{2x-1}{5} = 3 + \frac{1-3x}{4} \quad | \cdot 20$$

Võrrandi mõlema poole korrutamiseks 20-ga korrutame võrrandi iga liikme selle arvuga.

$$\frac{4(2x-1)}{5} = 20 \cdot 3 + \frac{5(1-3x)}{4}$$

$$4(2x-1) = 20 \cdot 3 + 5(1-3x);$$

$$8x - 4 = 60 + 5 - 15x;$$

$$8x + 15x = 65 + 4;$$

$$23x = 69;$$

$$x = 3.$$

Kontroll. $v = \frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = \frac{5}{5} = 1;$

$$p = 3 + \frac{1 - 3 \cdot 3}{4} = 3 - 2 = 1;$$

$$v = p.$$

Vastus. $x = 3.$

1082. Lahenda võrrandid.

$$1) \frac{y}{3} - 7 = 5$$

$$6) 7 + \frac{x}{3} = 13$$

$$2) 20 = 13 + \frac{7x}{2}$$

$$7) 8 = \frac{x}{5} + 7$$

$$3) 1 + \frac{4t}{3} = 13$$

$$8) \frac{3r}{8} - 15 = 0$$

$$4) \frac{3x}{4} - \frac{x}{2} = 1$$

$$9) \frac{s}{2} + \frac{s}{4} = 0$$

$$5) \frac{x-2}{3} = 5$$

$$10) \frac{5}{x} = \frac{2}{3}$$

1083. Lahenda võrrandid.

$$1) \frac{2c-1}{5} - \frac{1+c}{2} = 1$$

$$4) \frac{2x+7}{4} - \frac{x+1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$2) \frac{s+3}{5} = 8 - \frac{s-1}{4}$$

$$5) \frac{n}{2} - \frac{5n+4}{3} = \frac{4n-9}{3}$$

$$3) \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{4} - 1$$

1084. Koosta võrdus iga järgneva lause põhjal.

1. Arv 6 on 2 võrra suurem kui 4.
2. Arv 10 on 2 korda suurem kui 5.
3. Arv $x + 3$ on 4 võrra suurem kui $\frac{x}{2}$.
4. Arvude $x + 1$ ja $x - 1$ jagatis on 2.
5. Arvude $3x - 1$ ja $x - 2$ vahe on 3.

1085. Näide. Ma mõtlesin ühe arvu, liitsin sellega 2, tulemuse jagasin 3-ga, saadud jagatisest lahutasin 4 ja sain 6. Misuguse arvu ma mõtlesin?

Lahendus.

I. Võrrandi koostamine.

Olgu minu poolt mõeldud arv x . Liitnud selle arvuga 2, sain $x + 2$. Saadud tulemuse jagamisel 3-ga sain $\frac{x+2}{3}$. Lahutades sellest 4, sain $\frac{x+2}{3} - 4$. Ülesandes on öeldud, et tulemuseks ma sain 6. Järelikult

$$\frac{x+2}{3} - 4 = 6.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$\frac{x+2}{3} - 4 = 6; | \cdot 3$$

$$x + 2 - 12 = 18;$$

$$x - 10 = 18;$$

$$x = 18 + 10;$$

$$x = 28.$$

III. Lahendi kontroll (ülesande teksti põhjal).

$$28 + 2 = 30; 30 : 3 = 10; 10 - 4 = 6.$$

IV. Vastus. Mõeldud arv oli 28.

1086. Ma mõtlesin ühe arvu. Sellest arvust lahutasin 11, saadud vahe jagasin 8-ga ja tulemusega liitsin 7. Sain 10. Misuguse arvu ma mõtlesin?

1087. Jagades tundmatu arvu 5-ga ja suurendades saadud jagatist 27 võrra, saame arvu, mis on pool endisest tundmata arvust. Leia see arv.

1088. Jüri on Reinust 2 aastat vanem, Maret on Jürist 3 aastat noorem. Kokku on Reinu, Jüri ja Mareti vanus 37 aastat. Kui vana on Rein?

1089. Isa, poja ja tütre vanus on kokku 47 aastat. Isa on pojast 5 korda vanem, tütar on pojast 2 aastat noorem. Kui vana on poeg?

1090. Lahenda võrrandid.

$$1) \frac{2x-3}{5} = \frac{x+1}{3} \qquad 4) \frac{2x+5}{3} - \frac{x+6}{2} - \frac{x+8}{6} = 0$$

$$2) \frac{11}{15}x - \frac{5}{6}(x-2) = 0 \qquad 5) \frac{5(4x-1)}{8} - \left[x - \frac{3(1-x)}{2} \right] = 2$$

$$3) \frac{2(x-4)}{3} = 3(x-2) - \frac{4x-3}{2}$$

1091. 1) Kolme järjestikuse täisarvu summa on 54. Leia need arvud.

2) Nelja järjestikuse täisarvu summa on 34. Leia need arvud.

3) Kirjutati neli täisarvu, milledest iga järgmine on temale eelnevast arvust 2 võrra suurem. Nende arvude summa on 44. Leia need arvud.

4) Jaota arv 37 kahte ossa nii, et pool ühest osast oleks 15 võrra suurem teise osa $\frac{2}{3}$ -st.

1092. Lahenda võrrandid.

$$1) 2 - x - \frac{5x-1}{3} = \frac{4x+2}{15}$$

$$2) 2x - \frac{8x+7}{3} = -\frac{6x-5}{7}$$

$$3) \frac{6x-5}{7} = x - 1 - \frac{3x-4}{5}$$

$$4) 5 \cdot \frac{x}{6} - 3 \cdot \frac{x}{4} - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{9}x - 1 \frac{1}{12}x + 15 \frac{1}{8}$$

$$5) 13z - \frac{8z}{9} = 15z + 22 - \frac{7z}{2}$$

1093. Lahenda võrrandid.

$$1) \frac{6}{7}(9-2x) - \frac{2}{3}(3x-4) = 3 - 1 \frac{1}{2}x$$

$$2) \frac{7x+18}{3} - \frac{4}{5}(x+3) = \frac{3}{2}(x+2) + \frac{2}{3}$$

$$3) \frac{7-2x}{2} - \left(1\frac{1}{2}x - \frac{x-2}{7}\right) = 36 - 6x$$

$$4) \frac{5x-1}{3} + \frac{4(x-1)}{5} - 2x - 4 = 0$$

$$5) \frac{2(2x-7)}{7} + 6\frac{5}{6} + \frac{7(x-4)}{3} = x + 4 - \frac{9-7x}{8} - \frac{1}{6}$$

1094. Näide. 5., 6. ja 7. klass kogusid 840 kg vanapaberit, kusjuures 6. klass kogus 2 korda rohkem ja 7. klass 4 korda rohkem kui 5. klass. Kui palju vanapaberit kogus iga klass?

Lahendus.

I. Võrrandi koostamine.

Olgu 5. klassis kogutud x kilogrammi vanapaberit. Siis 6. klassis on seda kogutud $2x$ kilogrammi ja 7. klassis $4x$ kilogrammi. Et üldse koguti vanapaberit 840 kg, siis

$$x + 2x + 4x = 840.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$x + 2x + 4x = 840 \rightarrow 7x = 840 \rightarrow x = 120.$$

III. Lahendi kontroll.

5. klass ... 120 kg;

6. klass ... 240 kg;

7. klass ... 480 kg;

Kokku ... 840 kg.

IV. Vastus. 5. klass kogus vanapaberit 120 kg, 6. klass 240 kg ja 7. klass 480 kg.

1095. Kolhoosi aias kasvab 120 pirni-, õuna- ja ploomipuud. Pirnipuid on kolm korda rohkem kui ploomipuid, õunapuid kaks korda rohkem kui pirnipuid. Mitu pirni-, õuna- ja ploomipuud on kolhoosi aias?

1096. Ristkülikukujulise põllu pikkus on kaks korda suurem laisest. Leia selle põllu pikkus ja laius, kui põllu übermõõt on 960 m.

1097. Kolmnurga übermõõt on 180 cm. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 9, 11 ja 16. Leia kolmnurga iga külje pikkus.

1098. Kolm perekonda kasutavad korterit, mille üür on 9 rubla kuus. Esimese perekonna kasutada on korteri elamispinnast 30 m², teisel 20 m² ja kolmandal 50 m². Üür jaotatakse kolme perekonna vahel võrdeliselt kasutatavale elamispinnale. Kui palju tuleb maksta igal perekonnal?

1099. Kolmnurga külgede pikkused väljenduvad kolme üksteisele järgneva täisarvuga. Leia iga külje pikkus, kui kolmnurga übermõõt on 24 cm.

1100. 1) Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda teisest suurem. Leia kummagi nurga suurus.

2) Kahest kõrvunurgast on üks 36° teisest väiksem. Leia need nurgad.

1101. 1) Kolmes koolis on kokku 1200 õpilast. Teises koolis on õpilasi kaks korda rohkem kui esimeses, kolmandas koolis aga 40 õpilast vähem kui teises. Mitu õpilast on igas koolis?

2) Kolmel riiulil on kokku 178 raamatut. Alumisel riiulil on 3 korda rohkem raamatuid kui keskmisel, ülemisel aga 3 võrra rohkem kui keskmisel. Mitu raamatut on igal riiulil?

1102. Tehase kolmes tsehhis töötab kokku 624 töölisi. Teises tsehhis on töölisi 5 korda rohkem kui esimeses, kolmandas tsehhis aga niipalju kui esimeses ja teises tsehhis kokku. Mitu töölisi on igas tsehhis?

1103. «Tere, tere, sada hane,» ütles haneparvele vastulendav üksik hani.

«Ei meid ole 100 hane,» vastas parve juht. «Kui meid oleks veel nii palju, nagu meid on, ja veel pool sellest ning veerand sellest ning sina ka lendaksid koos meiega, alles siis oleks meid sada hanel!»

Mitu hane lendas parves?

VÖRRAND, MIS SISALDAB MUUTUJAT MURRU NIMETAJAS.

1104. *Võrrandit*

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

lahendamata saab öelda, et selle lahendiks ei või olla arv 0 ega arv 1. Miks? Lahenda see võrrand, korrutades võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga $x(x-1)$.

Võrrandi lahendiks ei saa olla arv, mille puhul muutujat sisaldav murru nimetaja võrduks nulliga.

1105. Põhjenda väidet, et võrrandi

$$\frac{4-x}{x-2} = 6 + \frac{2}{x-2} \quad \text{lahendiks ei või olla arv 2;}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{x-2} \quad \text{,, ,, ,, ,, ükski arvudest 0, 1 ja 2;}$$

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x-8} \quad \text{,, ,, ,, ,, ükski arvudest 2, -2 ja 4.}$$

1106. Ütle arvud, mis ei või olla

$$\text{võrrandi } \frac{4}{x-1} = \frac{2}{x+1} \quad \text{lahenditeks;}$$

$$\text{,, } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{x+3} \quad \text{,,}$$

$$\text{,, } \frac{2}{x+2} = \frac{1}{2x-1} \quad \text{,,}$$

1107. Lahendame võrrandi

$$\frac{4-x}{x-2} = 6 + \frac{2}{x-2}, \quad (I)$$

teades ette, et tema lahendiks ei saa olla arv 2. (Miks?) Korrutades võrrandi mõlemad pooled arvuga $x-2$, saame võrrandi

$$4-x = 6(x-2) + 2, \quad (II)$$

mille lahendamisel saame:

$$4-x = 6x-12+2;$$

$$4-x = 6x-10;$$

$$-x-6x = -10-4;$$

$$-7x = -14;$$

$$x = 2.$$

Oleme saanud lahendiks arvu, mis ei või olla antud võrrandi (I) lahendiks. Kontrollimine näitab, et viga me teinud ei ole; arv 2 rahuldab võrrandit (II) ja kõiki järgnevaid võrrandeid, kuid ei rahulda antud võrrandit (I). Sellest tuleb teha järgmine järeldus:

kui võrrandi pooli korrutada avaldisega, mis sisaldab muutujat, siis võib saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui antud võrrandil.

Siin korrutasime võrrandi pooli avaldisega $x - 2$ ja saime võrrandi, millel on üks lahend (2), kuna antud võrrandil ei ole ühtki lahendit. Et võrrandil (1) lahendit ei saa olla, see selgub, kui muutujat sisaldavad liikmed viia võrrandi vasakule poolele ja seal murrud liita. Siis võrrand omandab kuju

$$\frac{2-x}{x-2} = 6 \text{ ehk } \frac{x-2}{x-2} = -6.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit, sest x iga väärtuse puhul võrrandi vasak pool on 1, kuna parem pool on -6 .



Joon. 188.

1108. Arvu, mis rahuldab antud võrrandi (algvõrrandi) teisen-
damisel saadud võrrandit, kuid ei rahulda algvõrrandit, nimeta-
takse algvõrrandi **võõrlahendiks**.

Näita, et $x = 3$ on võrrandi

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x-5}{x-3} = 2$$

võõrlahend.

1109. Lahendanud võrrandi, milles muutuja esineb murru
nimetajas, vaatame esmalt, kas murdude nimetajad on leitud
lahendi puhul nullist erinevad või mitte. Kui muutuja asendami-
sel leitud arvuga mõni nimetaja muutub nulliks, siis see arv ei
ole antud võrrandi lahendiks. Kui ükski nimetaja nulliks ei
muutu, siis see arv võib olla võrrandi lahendiks. Kas ta seda
on või ei ole, seda näitab lahendi kontroll.

Näide 1. Lahendame võrrandi

$$\frac{3}{4x-2} = 1 - \frac{1}{1-2x};$$

Lahutame esimese murru nimetaja teguriteks:

$$\frac{3}{2(2x-1)} = 1 - \frac{1}{1-2x}.$$

Muudame märgi teise murru nimetaja kõigil liikmeil ja teise murru ees:

$$\frac{3}{2(2x-1)} = 1 + \frac{1}{2x-1}.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $2(2x-1)$:

$$3 = 2(2x-1) + 2.$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$3 = 4x - 2 + 2 \rightarrow 4x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Kontroll.

I. Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui $x = \frac{3}{4}$:

$$4x - 2 = 4 \cdot \frac{3}{4} - 2 = 3 - 2 = 1 \neq 0;$$

$$1 - 2x = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

II. Arvutame algvõrrandi poolte väärtused:

$$v = \frac{3}{1} = 3; \quad p = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3;$$

$$v = p.$$

Vastus. $x = \frac{3}{4}$.

Näide 2.

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} + \frac{8}{(x-1)(x-3)} = 0.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $(x-1)(x-3)$:

$$(x+5)(x-3) - (x+1)(x-1) + 8 = 0.$$

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$x^2 + 5x - 3x - 15 - x^2 + 1 + 8 = 0;$$

$$2x - 6 = 0;$$

$$x = 3.$$

Kontroll.

I. Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui $x = 3$:

$$x - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0;$$

$$x - 3 = 3 - 3 = 0(!).$$

Arv 3 ei rahulda antud võrrandit.

Vastus. Antud võrrandil ei ole lahendit.

1110. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{6}{x-1} = 2$$

$$2) \frac{2x}{x-1} = 5$$

$$3) \frac{1-x}{x-1} = 3$$

$$4) \frac{0,5x+2}{3-0,25x} = 2$$

1111. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{5}{2x} + \frac{1}{6} = \frac{3}{5x} + \frac{4}{5}$$

$$2) \frac{2}{3x} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2x}$$

$$3) \frac{5}{6x} - \frac{3}{4x} = \frac{1}{12x}$$

$$4) \frac{0,1}{2x} - \frac{0,15}{3x} = 2$$

1112. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{2}{10-x} = \frac{3}{x}$$

$$2) \frac{2}{3x} = \frac{3}{2x}$$

$$3) \frac{2}{x-4} = \frac{6}{x-3}$$

$$4) \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$5) \frac{x-5}{x-7} = \frac{x-8}{x-9}$$

$$6) \frac{x-3}{x} = \frac{x+1}{x+10}$$

Märkus. Võrde kuju omavaid võrrandeid on kõige lihtsam lahendada võrde põhiomaduse põhjal (joon. 189).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $ad = bc$	$\frac{2x-3}{5} = \frac{x+8}{3}$ $3(2x-3) = 5(x+8)$
---------------------------------------	---

Joon. 189.

1113. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x+2}{3x} = \frac{5}{12}$

2) $\frac{3u-5}{2} = \frac{4u-1}{-3}$

3) $\frac{6}{z} = \frac{7}{10-z}$

4) $\frac{E}{1+E^2} = \frac{1}{2+E}$

5) $\frac{2l}{1+l+4l^2} = \frac{1}{1+2l}$

6) $\frac{a}{a^2+1} = \frac{1}{a+4}$

1114. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{3}{x-1} = \frac{4}{x+1}$

2) $\frac{x+1}{x} = \frac{2x+1}{2x}$

3) $\frac{18}{x-2} = 9$

4) $\frac{3}{2x+4} = \frac{5}{3x+8}$

5) $\frac{x^2}{x-4} = x-6$

6) $\frac{24}{x} - \frac{17-x}{x-1} = 1$

1115. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$

2) $\frac{x+1}{3-x} + \frac{2x-5}{x-3} = 4$

3) $\frac{11+x}{6+x} = \frac{8+x}{4+x}$

4) $\frac{0,3x+1,8}{1,6x+2,7} = 0,6$

5) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$

6) $\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2} = 1$

1116. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{4x+7}{x-1} = \frac{12x+5}{3x+4}$

2) $\frac{5x-7}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$

3) $\frac{7x-3}{x-1} = \frac{2}{3}$

4) $\frac{2(3-7x)}{1+x} = \frac{1}{2}$

$$5) \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20}{x^2-25} \quad 6) \frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{24}{x^2-16}$$

1117. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{10,3}{x} + \frac{1}{3} = \frac{7,8}{x} + \frac{2}{3}$$

$$2) \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{24}$$

$$3) \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{6}$$

$$4) \frac{3}{4-3x} + \frac{1}{3x} = 0$$

$$5) \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{4}{x-2}$$

$$6) \frac{x-7}{x+7} = \frac{2x-15}{2x-6} - \frac{1}{2(x+7)}$$

1118. Üks masinakirjutaja võib käsikirja ümber kirjutada 8 tunniga, teine 7 tunniga. Kui kiiresti võivad nad selle töö lõpetada koos töötades?

1119. Bassein täitub veega ühe kraani kaudu 3 tunniga, teise kraani kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub bassein siis, kui avada mõlemad kraanid korraga?

1120. Kaks töölist lõpetaksid töö koos töötades 3 tunni ja 36 minutiga. Esimene tööline üksi lõpetaks töö 6 tunniga. Mitme tunniga teeks selle töö teine tööline üksi töötades?

1121. Jaan läbis ühekilomeetrise vahemaa joostes 9 minuti võrra kiiremini kui kõndides. Teades, et joostes liikus Jaan $2\frac{1}{2}$ korda kiiremini kui kõndides, leia Jaani kõndimiskiirus ja jooksu-kiirus.

1122. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{3}{7}$?

1123. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{5}{14}$?

1124. Murru nimetaja on lugejast 4 korda suurem. Kui murru lugejaga ja nimetajaga liidame 10, siis saame murru, mille väärtus on $\frac{1}{2}$. Leia murd.

1125. Murru $\frac{4}{25}$ lugejale lisati 9 ja nimetajale 2. Siis lisati uuesti lugejale 9 ja nimetajale 2. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi 1. Mitu korda lisati neid arvusid murru lugejale ja nimetajale?

1126. Murru $\frac{13}{22}$ lugejast lahutati 3 ja nimetajast 5. Siis lahutati uuesti lugejast 3 ja nimetajast 5. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi $\frac{1}{2}$. Mitu korda lahutati neid arvusid murru lugejast ja nimetajast?

1127. Töölised said kokku 120 rubla. Kui neid oleks olnud 4 võrra vähem, siis oleks igaüks neist saanud kolm korda rohkem. Kui palju oli töölisi?

1128. Töölised said kokku 180 rubla. Kui neid oleks olnud 3 võrra rohkem, siis oleks neist igaüks saanud kaks korda vähem. Kui palju oli töölisi?

1129. Kui turist oli sõitnud $\frac{3}{8}$ kahe linna vahelisest teest, siis jäi tal sõita poolest teest veel 15 km. Leia nende linnade vaheline kaugus.

1130. Kui turist oli sõitnud $\frac{5}{9}$ kahe linna vahelisest teest, siis oli tal sõidetud 10 km rohkem kui pool teed. Leia nende linnade vaheline kaugus.

1131. Isa on 42 aastat ja poeg 9 aastat vana. Mitme aasta pärast on isa kaks korda pojast vanem?

1132. Isa on 39-aastane, poeg 15-aastane. Mitme aasta eest oli poeg isast seitse korda noorem?

1133. Esimese toru kaudu täitub bassein 5 tunniga, teise kaudu aga tühjeneb 6 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

1134. Esimese toru kaudu täitub bassein 4 tunniga, teise kaudu 5 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

TÄHELISTE KORDAJATEGA VÖRRAND.

1135. Võrrandis võib peale muutujat tähistava tähe esineda veel muid tähti. Need tähed tähistavad antud arve, kuid pole öeldud, missuguseid nimelt. Neid tähtede abil kirjutatud antud arve nimetatakse tähelisteks kordajateks ehk parameetriteks ja tähistatakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega a, b, c jne., kuna muutujaid tähistatakse tähestiku lõpposa tähtedega x, y, z, u, v .

Et tähelise kordaja kohta pole öeldud, millist arvu ta tähendab, siis võib tema all mõelda meelevaldset arvu, kuid mitte niisugust, mille puhul võrrandis või tema lahendis mõni nimetaja muutub nulliks. Näiteks võrrandis

$$\frac{x}{a} - x = a$$

parameeter a tähendab meelevaldset arvu, kuid mitte arvu 0. Lahendame selle võrrandi:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - x &= a; | \cdot a \\ x - ax &= a^2; \\ (1 - a)x &= a^2; | : (1 - a) \\ x &= \frac{a^2}{1 - a}. \end{aligned}$$

Nüüd näeme, et antud võrrandis ei tohi tähe a all mõista ka arvu 1, sest siis saadud lahend ei kõlbaks. Missuguse kuju saab võrrand, kui $a = 1$?

Täheliste kordajatega võrrandi lahendamisel pane tähele, et pärast muutujat sisaldavate liikmete viimist võrrandi ühele poolele tuleb muutuja viia sulgude taha ja siis võrrandi pooled jagada muutuja kordajaga.

Näide. $ax + 2 = b - 3x;$
 $ax + 3x = b - 2;$
 $(a + 3)x = b - 2;$
 $x = \frac{b - 2}{a + 3}.$

1136. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| 1) $2x = a$ | 6) $x - a = b - x$ | 11) $px + qx = 9$ |
| 2) $ax = m - 2x$ | 7) $ax + (x - a) = b$ | 12) $x = 1 - 3x$ |
| 3) $2x + 1 = n$ | 8) $x + h = 2(x + k)$ | 13) $x = 1 - mx$ |
| 4) $2(x + 1) = p$ | 9) $2x + 3x = 2c + 3d$ | 14) $\frac{x}{p} + \frac{x}{q} = 1$ |
| 5) $px + 3(x + 1) = q$ | 10) $nx + x = 1$ | 15) $\frac{x}{2} = \frac{t}{3} - x$ |

1137. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 1) $\frac{a}{x} - b = c$ | 6) $\frac{a}{x-2} - c = \frac{b}{x-2}$ | 11) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ |
| 2) $\frac{m}{x} + \frac{n}{x} = p$ | 7) $\frac{m}{m-x} = \frac{n}{n-x}$ | 12) $\frac{1}{x} = \frac{2}{m} - \frac{3}{n}$ |
| 3) $\frac{a}{x-1} - 1 = -b$ | 8) $\frac{a}{x-1} - \frac{6}{x+1} = 0$ | 13) $\frac{1}{x} = 3 - \frac{a}{b}$ |
| 4) $\frac{a}{mx} + \frac{b}{nx} = p$ | 9) $\frac{m-x}{n-x} = \frac{m+x}{n+x}$ | 14) $\frac{1}{x} = \frac{2u}{v} + 3u$ |
| 5) $\frac{m-x}{m+1} = n$ | 10) $\frac{a}{x+1} + 2 = \frac{bx}{x+1}$ | 15) $\frac{m}{x} = 2a - \frac{b}{a}$ |

1138. Ühe ruudu külge on a cm võrra väiksem teise ruudu küljest, pindala on aga d cm² võrra väiksem. Kui pikk on suurema ruudu külge?

1139. Kolhoosis on tööl b naist, mis moodustab $a\%$ kogu kolhoosnikute arvust. Kui suur on kolhoosnikute arv selles kolhoosis?

1140. Laeva kiirus seisvas vees on a km tunnis. Jõe voolu kiirus on b km tunnis. Kui kaugel asetseb üks linn teisest, kui aurik kulutas reisiks sinna ja tagasi mööda jõge t tundi?

1141. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama a ha päevas. Tegelikult ületasid nad igapäevase külviplaani, külvates b ha päevas, mille tõttu lõpetasid külvitööd 2 päeva enne määratud tähtaega. Kui suur oli külvipind?

1142. Kolm töolist lõpetaksid töö koos töötades a tunniga. Esimene tööline lõpetaks selle töö üksi b tunniga, teisel töölisel kuluks selleks üksi töötades c tundi. Kui palju aega kuluks kolmandal töölisel üksi selle töö lõpetamiseks?

1143. Allpool on antud rida valemeid, milles esineb mitu tähte. Loe kordamööda iga täht valemis tundmatuks ja lahenda valem selle tähe suhtes (kui ta pole juba selle suhtes lahendatud).

$$1) S = \frac{1}{2}ah$$

$$6) V = abc$$

$$11) ab = hc$$

$$2) c = 2\pi r$$

$$7) s = vt$$

$$12) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$$3) k = \frac{a+b}{2}$$

$$8) K = \frac{na}{2} \cdot m$$

$$13) 2\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$4) S = \frac{ab}{2}$$

$$9) e = \frac{P}{V}$$

$$14) \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$5) T = K + 2P$$

$$10) S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$15) \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Mitmed neist valemist väljendavad tuntud tõsiasju. Kas tead mõnda neist?

ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÖRRANDI ABIL.

1144. Maret väljus linnast jalgrattal 2 tundi enne Virvet. Maret läbis tunnis 10 km, Virve 14 km. Millise aja jooksul jõuab Virve Maretile järele?

1145. Kaks mootorpaati väljusid samaaegselt ühest ja samast kohast ning sõitsid üks pärivoolu, teine vastuvoolu. Mootorpaatide kiiruste suhe on 2:3. Viie tunni pärast asusid nad teineteisest 100 km kaugusel. Leia mootorpaatide kiirus.

1146. Asulate A ja B vahemaa on 66 km. Kell 9 väljus asulast A jalgrattur asula B suunas kiirusega 14 km tunnis. Kell 10 väljus asulast B teine jalgrattur asula A suunas kiirusega 12 km tunnis. Kui kaua aja pärast kohtas esimene jalgrattur teist?

*

1147. Epul on 30 metallraha, 10- ja 15-kopikalised, koguväärtusega 3 rbl. 90 kop. Mitu 10- ja mitu 15-kopikalist tal on?

1148. Mootorsõidukite remonditöökojas parandati kuu jooksul autosid ja motorollereid, kokku 40 masinat. Töökojas praktilikalt viibiv Tõnu leidis, et parandatud sõidukeil oli kokku 100 ratast. Mitu autot ja mitu motorollerit oli töökojas parandamisel kuu jooksul?

1149. Pirita jõel sõitis 70 inimest süstadel. Uheinimesesüstasid oli kolm korda rohkem kui kaheinimesesüstasid. Mitu ühe- ja mitu kaheinimesesüsta oli jõel?

1150. Jüri kasvatas kanu ja jäneseid. Kokku oli kanadel ja jänestel 33 pead ja 100 jalga. Mitu jänest ja mitu kana oli Jüril?

1151. Ristkülikukujulise ehituskruundi pikkus on laiupest 3 korda suurem. Kui selle ehituskruundi laiust suurendada 2 m võrra, siis tema pindala suureneb 96 m² võrra. Leia ehituskruundi mõõtmed.

1152. Ristküliku pikkus on 2 korda suurem laiupest. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 5 m võrra, laiust aga 3 m võrra, siis tema pindala suureneb 92 m² võrra. Missugused on selle ristküliku esialgsed mõõtmed?

1153. Ruudu iga külje pikkust vähendati 3 cm võrra, mille tõttu ruudu pindala vähenes 33 cm² võrra. Leia selle ruudu külje esialgne pikkus.

1154. Ristküliku pikkus on 5 m võrra suurem tema kahekordsest laiupest. Ristküliku ümbermõõt on 190 m. Leia selle ristküliku pikkus ja laius.

*

1155. Kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa on 120. Leia need arvud.

1156. Leia kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa, kui on teada, et teise ja kolmanda arvu summa on 28 võrra suurem esimesest arvust.

1157. Leia neli üksteisele järgnevat paarisarvu, kui on teada, et lahutades neljanda arvu teise arvu kolmekordsest, saame arvu, mis on 4 võrra suurem esimesest arvust.

1158. Leia kolm üksteisele järgnevat paaritut arvu, kui on teada, et esimese ja kolmanda arvu summa on 37 võrra suurem teisest arvust.

1159. Peeter, Jüri ja Rein korjasid kokku 63 seent. Jüri korjas 8 seent vähem kui Peeter, Rein korjas aga seeni 3 korda rohkem kui Jüri. Mitu seent korjas neist igaüks?

1160. Kolhoosi aias on 240 viljapuud. Õunapuid on 3 korda rohkem kui pirnipuid, ploompuid 9 võrra vähem kui õunapuid, kirsipuid aga 4 korda rohkem kui ploompuid. Mitu igast liigist puud on kolhoosi aias?

1161. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama 25 ha päevas. Tegelikult külvasid nad 30 ha päevas ning lõpetasid selle tõttu külvitööd 3 päeva enne tähtaega. Kui suur oli ettenähtud külvipind?

1162. Aurik pidi plaani järgi sõitma ühest sadamast teise kiirusega 15 km tunnis. Masinarikke tõttu sõitis aurik ainult 12 km tunnis ning hilines selle tõttu 3 tundi. Kui kaugel asus üks sadam teisest?

1163. Jalgrattur sõitis kolhoosist linna kiirusega 16 km tunnis ja linnast tagasi koju kiirusega 12 km tunnis. Kogu sõiduaeg linna ja tagasi oli $2\frac{1}{3}$ tundi. Kui kaugel asus kolhoos linnast?

1164. Teekonnaks Tallinnast Tartusse ja tagasi kulus autol kokku 10 tundi. Mitu kilomeetrit on maanteed mööda Tallinnast Tartusse, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 km tunnis ja tagasisõidul 40 km tunnis ning kui Tartus peatuti 2 tundi?

1165. Jalgrattur sõitis kodunt raudteejaama ja tagasi. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit 18 km tunnis. Jaamas kulus jalgratturil pool tundi. Kogu reis kestis 3 tundi. Kui kaugel elas jalgrattur raudteejaamast?

1166. Valve luges läbi $\frac{2}{9}$ raamatust. Nüüd selgus, et lugeda on 95 lehekülge rohkem sellest, mis on juba loetud. Mitu lehekülge on selles raamatus?

1167. Sovhoosis on põllumaa all $\frac{2}{3}$ kogu maa-alast, heinamaad moodustavad aga $\frac{2}{15}$ sovhoosi maa-alast. Kui palju on sellel sovhoosil maad, kui on teada, et põllumaad on 320 ha rohkem kui heinamaad?

1168. Ruudu külg on 6 m pikem kui võrdkülgse kolmnurga külg. Ruudu übermõõt on võrdkülgse kolmnurga übermõõdust 34 m suurem. Leia võrdkülgse kolmnurga külje pikkus.

1169. Trapetsi lühem alus on $\frac{2}{3}$ pikemast alusest. Trapetsi kesklõigu pikkus on 5 cm. Kui pikk on trapetsi pikem alus?

1170. Kaks matkagrupperi väljuvad samaaegselt linnast *A*, et minna linna *B*. Esimene grupper liigub kiirusega 4 km tunnis, teine grupper aga kiirusega 5 km tunnis. Teine grupper jõudis 1 tund varem linna *B*. Kui suur on linnade *A* ja *B* vahemaa?

1171. Toomas, Jaan ja Peeter koguvad raha jalgrataste ostmiseks. Jaanil on kogutud 6 rubla rohkem kui Toomal, Peetril aga 10 rubla vähem kui Tooma kogutud kahekordne summa. Mitu rubla on igal poisil kogutud, kui kokku on nende poolt kogutud 96 rubla?

1172. Rein ütles: «Kui ma oma vanuse korruptan 3-ga ning tulemusega liidan 2 aastat, siis saan oma isa vanuse. Korruptades aga isa vanuse 2-ga ning liites tulemusega 3 aastat, saan vanaisa vanuse. Meie kolme vanus kokku on 99 aastat.»

Kui vana on Rein?

1173. Murru nimetaja on lugejast 2 võrra suurem. Suurendades murru lugejat ja nimetajat 1 võrra, saame uue murru, mille lugeja ja nimetaja suhe on 2 : 3. Kui suur on esialgne murd?

1174. Kahe arvu suhe on 7 : 2. Samade arvude vahe on 30. Leia suurem arv.

1175. Kahe arvu suhe on 3 : 5. Nende arvude vahe on 12. Leia väiksem arv.

1176. Kolhoosi viljapuuaeda istutati 120 viljapuud. Õunapuid istutati 3 korda, pirnipuid aga 30 võrra enam kui kirsipuid. Mitu puud istutati igast liigist?

1177. Kolme arvu summa on 51. Leia need arvud, teades, et esimene arv on kaks korda väiksem teisest, kolmas arv on aga 3 võrra suurem esimesest.

1178. Ma võtsin ühe arvu, liitsin sellega 28, korrutasin tulemuse 3-ga, siis lahutasin 120, jagasin saadud vahe 20-ga ja sain 8 korda väiksema arvu, kui ma algul võtsin. Missuguse arvu ma võtsin?

1179. Kui ma algul jagan mõeldud arvu 4-ga, siis aga jagan mõeldud arvu 6-ga ja saadud jagatised liidan, saan 20. Leia mõeldud arv.

1180. Ristküliku pikkus ja laius suhtuvad nagu 3 : 2. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 2 korda, laiust aga vähendada 1 ühiku võrra, siis suureneb ristküliku übermõõt 16 ühiku võrra. Leia antud ristküliku mõõtmed.

12. ÜLDISEKS KORDAMISEKS.

1181. Leia 8,4% avaldise $3\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ väärtusest.

1182. Mitu protsenti moodustab avaldise $2\frac{3}{8} - 3 \cdot 0,75$ väärtus avaldise $2\frac{3}{8} + 3 \cdot 0,75$ väärtusest?

1183. Leia arv, millest 17% võrdub avaldise $1,45 - 0,25 : \frac{5}{12}$ väärtusega.

1184. Mitu protsenti moodustab arvude 5 ja 7 ruutude summa samade arvude summa ruudust?

1185. Arvuta avaldise väärtus.

a) $4,2 - 3\frac{3}{4} \cdot \left(5,4 - 4\frac{1}{3}\right)$

b) $4\frac{3}{8} : \left(6,5 - 2,2 \cdot 1\frac{4}{11}\right)$

c)
$$\frac{3 + 4,2 : 0,1}{\left(1 : 0,3 - 2\frac{1}{3}\right) \cdot 0,3125}$$

d)
$$\frac{(18,305 : 7 - 0,38 : 4) \cdot (6,35 + 4,65)}{28,08 : 6 + 7,38 : 9}$$

1186. Leia võrde tundmatu liige.

a) $x : 12 = 4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$

c) $1\frac{7}{8} : 1,5 = x : 0,24$

b) $3\frac{1}{2} : 0,4 = x : 1\frac{1}{7}$

d) $0,8 : x = 4\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$

1187. Kolmepäevasest automatkast osavõtjad sõitsid esimesel päeval 30% kogu teekonnast, teisel päeval $\frac{3}{8}$ ülejäänud teosast ja kolmandal päeval viimased 189 km. Kui pikk oli teekond?

1188. Kolhoosil oli 1. oktoobril sügisküüdi teha veel 630 ha. Sellest künti oktoobrikuu esimesel poolel 23% ja sama kuu teisel poolel $\frac{8}{11}$ ülejäänud pindalast. Mitu hektarit jäi künda novembrikuuks?

1189. 31. oktoobril 1959. aastal saavutas nõukogude lendur G. Mossolov ühe turboreaktiivmootoriga lennukil E-66 keskmiseks kiiruseks ühel lennuloigul 2504 kilomeetrit tunnis. Kui kaua vältab sellise kiirusega reis ümber Maa (Maa ümbermõõt on 40 000 km)?

1190. Mitu pööret minutis peab tegema veduriratas, mille ümbermõõt on 5,18 m, et rongi kiirus oleks 60 km tunnis?

1191. Lihtsusta avaldised.

a) $(3x - 4)(3x + 4) - (3x - 4)^2 + 32$

b) $(2a + 0,3b)(2a - 0,3b) - (2a + 0,3b)^2 + 1,2ab$

c) $(3a - 1)^2 - 5(a + 2)(a - 2) - 2a(2a + 3)$

d) $(2a - 1)^3 - (2a + 1)^3$

e) $(3x - 2a)^3 - (3x + 2a)(9x^2 - 6ax + 4a^2)$

1192. a) Missuguseid nurki nimetatakse kõrvunurkadeks?

b) Missuguseid nurki nimetatakse tippnurkadeks?

1193. Missugused on kahe sirge paralleelsuse tunnused?

1194. Arvuta kumera kaheksanurga sisenurkade summa. Kui suur on sama kaheksanurga välisnurkade summa?

1195. Arvuta kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe lähisnurga summa on 217° ja samade nurkade vahe on 39° .

1196. Sirgete s ja t lõikamisel sirgega u tekkis kaks lähisnurka, mille summa oli 234° . Kui suured on nurgad, mis tekivad sirgete s ja t lõikumisel?

1197. Arvuta korrapärase viisteistnurga välisnurk ja sisenurk.

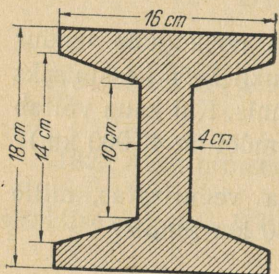
1198. a) Tõesta, et rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.

b) Avalda täisnurkse trapetsi pindala, kui tema alused on $x + 2$ ja $3x - 4$ ning lühem haar on $2x + 1$.

1199. Leia hulkliikmete jagatis.

a) $(a^6 + 2a^5 + a^4) : (a^2 + a)$

b) $(x^5 + x^3y^3 + x^2y^2 + y^5) : (x^3 + y^2)$



Joon. 190.

1200. Arvuta joonisel 190 kujutatud raudtala ristlõike pindala.

1201. Moodusta teoreemi «Kui kaht paralleelset sirget lõigata kolmanda sirgega, siis tekivad võrdsed põiknurgad» pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem.

1202. Kirjuta teoreemi $A \rightarrow B$ pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Kui antud teoreem on õige, siis missugune teoreem on kindlasti ka õige?

1203. Kui hulk $M = \{3, 7, 9, 10, 13, 15\}$ ja $P = \{3, 6, 9, 12\}$, mis on siis $M \cap P$ ja mis on $M \cup P$?

1204. Mis on 3-ga jaguvate arvude hulga ja 5-ga jaguvate arvude hulga ühisosa?

1205. Mis on 3-ga jaguvate arvude hulga ja 9-ga jaguvate arvude hulga ühisosa, mis on nende ühend?

1206. Olgu P paarisarvude hulk, Q kuuega jaguvate arvude hulk ja N naturaalarvude hulk. Kujuta nende hulcade seos diagrammina. Mis on P'_N ja Q'_N ?

1207. Mis on ristkülikute hulga ja rombide hulga ühisosa?

1208. Arvuta murru $\frac{x^3 - 8}{3x^3 + 6x^2 + 12x}$ väärtused, kui $x \in \{-4; 5; 8\}$, taandades enne antud murru.

1209. Arvu a jagamisel arvuga b saadi jagatiseks täisarv q ja jäägiks r . Avalda

- 1) arv a arvude b , q ja r kaudu;
- 2) arv b arvude a , q ja r kaudu;
- 3) arv q arvude a , b ja r kaudu;
- 4) arv r arvude a , b ja q kaudu.

Sõnasta seos, mis näitab, kuidas jagatav avaldub jagaja, jagatise ja jäägi kaudu.

1210. Kahe arvu summa on 33. Kui suurem nendest arvudest jagada väiksemaga, siis saame jagatiseks 4 ja jäägiks 3. Leia need arvud.

1211. Taanda murrud.

$$a) \frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2}$$

$$b) \frac{3x - 3}{x^2 - 2x + 1}$$

$$c) \frac{7a + 7}{a^2 + 2a + 1}$$

$$d) \frac{x^2 - 1}{ax - a}$$

$$e) \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}$$

$$f) \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

1212. Lihtsusta avaldised.

$$a) \frac{5x - 3}{15} + \frac{3x - 5}{10}$$

$$b) \frac{2a + 5}{8} + \frac{3a - 7}{12}$$

$$c) \frac{a - 1}{4} + \frac{2a - 3}{6} - \frac{3a + 1}{9}$$

$$d) \frac{3x - 7}{12} - \frac{2x - 1}{16} - \frac{x - 3}{18}$$

$$e) \frac{4x}{1 - x^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x + x^2}$$

$$i) x - \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x}{x + 1}$$

$$g) \frac{5 - 3x}{x^2 - 9} + \frac{5}{x^2 - 3x}$$

$$h) a + \frac{a}{a - 1} - \frac{a^2}{a + 1}$$

$$i) \frac{2x - 5}{2x^2 + 5x} - \frac{2x + 5}{2x^2 - 5x} + \frac{40}{4x^2 - 25}$$

1213. Kahe arvu summa on 95. Samade arvude vahe on 3 korda väiksem väiksemast liidetavast. Leia need arvud.

1214. Kahe arvu summa on 96. Kui väiksemat liidetavat suurendada 6 võrra, suuremat aga niisama palju vähendada, siis saame võrdsed arvud. Leia need arvud.

1215. Õhk sisaldab ümmarguselt 20% hapnikku ja 80% lämmastikku. Kui palju hapnikku ja kui palju lämmastikku on teie klassiruumis?

1216. Haudeaparaati paigutati 240 muna. Nendest munadest saadi 211 tibu. Mitu protsenti see on?

1217. Tehas valmistas 223 masinat, täites sellega plaani 105-protsendiliselt. Mitu masinat nägi ette plaan?

1218. Trapetsikujulise põllu rööbiti asetsevate külgede pikkused on 365 m ja 462 m, nende külgede kaugus teineteisest on 221 m. Sellel põllul kasvatati rukist, mille saak oli keskmiselt 21 ts hektarilt. Kui palju jahu ja kliisid saab sellest rukist, kui jahvatamisel saab teradest keskmiselt 85% jahu ja 13% kliisid?

1219. Mitu kilogrammi liha võeti suitsutamiseks, kui saadud suitsuliha kaalus 18,6 kg ja kaalukadu suitsutamisel on 12,3%?

1220. On vaja valmistada 710 kg pronksi, mis sisaldaks 87% vaske ja 13% tina. Kui palju on selleks vaja võtta vaske, kui palju tina?

1221. Kui palju vaske ja tsinki on vaja võtta 150 kg messingi valmistamiseks, kui selles tsingi kaal peab olema 65% vase kaalust?

1222. Kolmnurga üks külge on teisest kaks korda pikem ja kolmas külge esimesest küljest 16 cm pikem. Kolmnurga übermõõt on 108 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

1223. Millised on kolmnurga pikima külje tüked, kui sama kolmnurga kaks lühemat külge on 17,8 cm ja 24,6 cm?

1224. Klassis on 15 poissi ja 21 tüdrukut. Mitme protsendi võrra on tüdrukuid rohkem kui poisse? Mitme protsendi võrra on poisse vähem kui tüdrukuid?

1225. a) Arv x on 25% arvust y . Mitu protsenti on arv y arvust x ?

b) Arv u on 64% arvust v . Mitu protsenti on arv v arvust u ?

1226. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 25% võrra suurem. Kui suured on need nurgad?

1227. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 30% võrra suurem kui tipunurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

1228. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 40% võrra suurem kui alusnurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

1229. Võrdhaarse trapetsi pikem alus on 4 dm, haar 1 dm ja nendevaheline nurk 60° . Leia lühem alus.

1230. Kahe arvu summa on 145,6. Üks arv moodustab 0,12 teisest arvust. Leia need arvud.

1231. Krohvija koos oma õpilasega sai 30 rbl. 80 kop. töötasu. Krohvija töötas 8 päeva, õpilane aga ainult 35% sellest ajast. Krohvija päevapalk oli õpilase päevapalgast 40% kõrgem. Arvuta krohvija päevapalk ja õpilase päevapalk.

1232. a) Nimeta neli kolmnurkade võrdsuse tunnust.

b) Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 4,5 cm ja alusnurk on 45° .

c) Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk.

1233. Tõesta, et rombi diagonaalid jaotavad rombi neljaks võrdseks kolmnurgaks. Mis liiki need kolmnurgad on?

1234. Rombi diagonaal moodustab ühe küljega nurga $37^\circ 40'$. Leia rombi kõik nurgad.

1235. Tõesta, et rööpkülik, mille diagonaalid on teineteisega risti, on romb.

1236. Ehita kolmnurk, mille küljed on 4 cm, 6 cm ja 7 cm, ning leia punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel kõige pikema külje otspunktidest ja võrdsetel kaugustel kõige väiksema nurga haaradest.

1237. Ehita võrdhaarne trapets, mille pikem alus on 6 cm, kõrgus 2 cm ja haar 2,5 cm.

1238. Ehita romb, mille külg on 3,5 cm ja üks diagonaal on 2 cm.

1239. Kuidas tuleb ümardada

a) ligikaudsete arvude summat ja vahet?

b) ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

1240. Kolmas Nõukogude kosmoserakett, mis saadeti välja 4. oktoobril 1959. a., oli sama päeva kella 18-ks eemaldunud Maast 145 000 kilomeetri kaugusele. 5. oktoobril kella 12-ks oli sama kosmoserakett eemaldunud Maast 248 000 kilomeetri kaugusele.

Kui suur oli kolmanda Nõukogude kosmoseraketi keskmine kiirus sellel vahemaal?

1241. Arvuta, rakendades valemeid.

a) 83^2 $7,1^2$ $2,05^2$ $(-5,01)^2$ $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$

b) $97 \cdot 103$ $93 \cdot 107$ $85 \cdot 115$ $2,7 \cdot 3,3$

c) $78,2^2 - 21,3^2$ $9,816^2 - 0,184^2$ $1,27^2 - 8,73^2$

1242. Arvuta, rakendades valemeid.

a) 68^2 $5,02^2$ $9,99^2$ $(10,1)^2$ $\left(-8\frac{1}{8}\right)^2$

b) $96 \cdot 104$ $94 \cdot 106$ $84 \cdot 116$ $2,6 \cdot 3,4$

c) $98,2^2 - 1,8^2$ $6,91^2 - 3,09^2$ $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

1243. Mis arvu peab liitma kaksliikmega

$$64x^2 - 48x,$$

et saada kaksliikme ruut?

1244. Mis arvu peab liitma kolmliikmega

$$9x^2 + 24x + 25,$$

et saada kaksliikme ruut?

1245. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^3 + b^3 + 3(a + b)$ b) $2a^2 - 4a + 2$

c) $a^3 + a^2 - 2a - 2$ d) $216a^3 + 1$

e) $3a^3 - 20c^2 - 5b + 12a^3c^2$

1246. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^3 + 2a^2b + ab^2$

b) $a^3 + a^2c - ac^2 - c^3$

c) $a^3 - a^2 - a + 1$

d) $64a^6 - x^6$

e) $12b + 20a^2b - 15a - 16ab^2$

1247. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^2b - 2ab^2 + b^3$

b) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

c) $a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3$

d) $a^6 - 729$

e) $0,15a^2 - 0,21bc - 0,35ab + 0,09ac$

1248. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 25$

b) $9a^2 - 24ab + 16b^2 - 36$

c) $81 - 25u^2 + 20uv - 4v^2$

d) $49 - 36x^2 - 24ax - 4a^2$

1249. Näita, et olgu x väärtus missugune tahes, avaldise

$$(2x - 3)(7 - x) + (2x - 9)(x - 4)$$

väärtus on ikka 15.

1250. Avalda valemist

a) $s = vt + S_0$ suurus t ;

b) $Q = cm(t_2 - t_1)$ suurus t_2 ;

c) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ suurus c ;

d) $S = \frac{a+b}{2}h$ suurus a ;

e) $u = \frac{ax+by}{3}$ suurus y .

1251. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,1.

a) $(2 - 3x)x + 3(x - 7)(x + 1) = -42$

b) $7(x - 3) - (x - 3)^2 + (x - 2)(x + 2) = 23$

c) $2(x - 3)(x + 4) - (x - 3)(x + 3) - (x + 4)^2 = -100$

1252. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,01.

a) $(x - 1)(3x + 2) - 3(x - 7)(x - 2) = 0$

b) $(12 - x)(3 + x) - 0,5(3 + 2x)(4 - x) = 48$

1253. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,001.

a) $2(x - 18)(x + 3) - 2x^2 = -110,2$

b) $(8x - 3)(x + 1) - 2x(4x - 3) = -1,8$

1254. Rong sõidab Tallinnast Aakre jaamani 6 tunniga. Kui see rong sõidaks tunnis 8 km rohkem, siis läbiks ta sama tee 5 tunniga. Mitu kilomeetrit on Tallinnast Aakreni?

1255. Jalgrattur, kes väljus punktist A punkti B poole, sõitis 12 km tunnis, kohtas poolel teel veoautot, mis liikus kiirusega 28 km tunnis ja oli väljunud punktist B 2 tundi hiljem kui jalgrattur punktist A . Arvuta punktide A ja B vaheline kaugus.

1256. Lihtsusta avaldis

$$\frac{m}{n} \left(n + 1 + \frac{2n}{m} \right) - \left(2m + \frac{m^2 + n^2}{n} \right) : \left(m + \frac{n^2}{m + 2n} \right).$$

1257. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} + \frac{4x^2}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+1}{2x}.$$

1258. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4a}{a^2-b^2} \right) \cdot \frac{a^2-b^2}{4b-4b^2}.$$

1259. Lihtsusta avaldis

$$\left(a - \frac{b+a}{1+ab} \right) : \left[1 - \frac{a(b-1)}{1+ab} \right].$$

1260. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) : \left(1 + \frac{y}{x} \right).$$

1261. Jaota arv 45 kaheks osaks nii, et väiksema osa pool oleks kaks korda suurem kui suurema osa viiendik.

1262. Ruudu pindala on võrdne ristküliku pindalaga. Ristküliku laius on 2 m väiksem ja ristküliku pikkus 4 m suurem kui ruudu külge. Kui pikk on ruudu külge?

1263. Auto sõitis 225 km 5 t. 15 minutiga. Algul sõitis ta kiirusega 40 km tunnis, siis aga kiirusega 60 km tunnis. Kui kaugel sihtkohast auto kiirust suurendati?

1264. Täisnurkse kolmnurga hüpoteenuusi pikkus on 12 cm. Kui kaugel on mediaanide lõikepunkt täisnurga tipust?

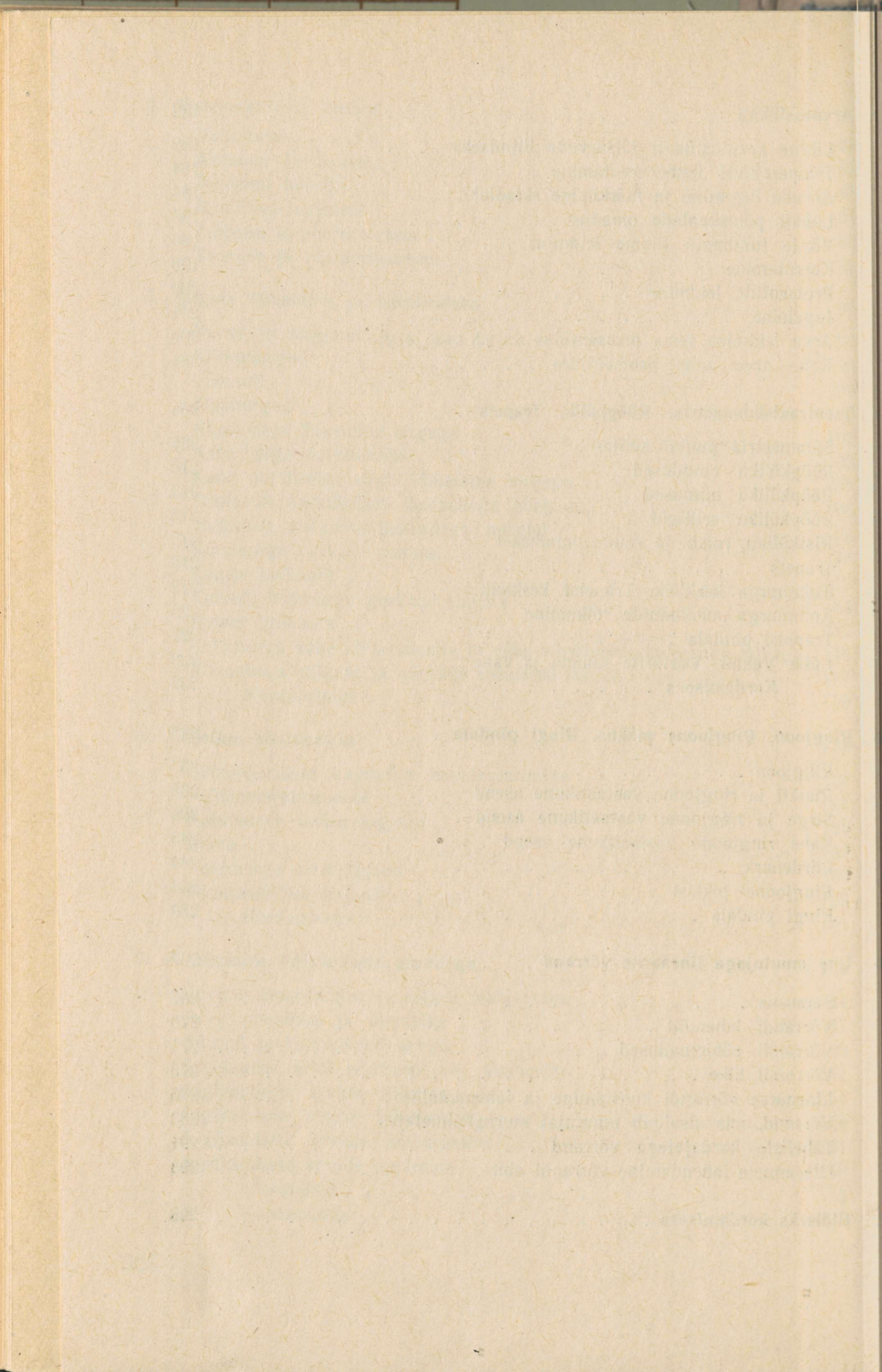
1265. Leia vektorite summa $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$.

SISUKORD.

1. Kordamiseks ja täiendamiseks	3
2. Hulgad	12
Hulk ja selle element	12
Hulk ja selle osahulk	14
Hulkade ühend ja ühisosa	20
3. Ratsionaalavaldised	23
Uksliikmete suurim ühistegur ja vähim ühiskordne	23
Algebraise murru mõiste	27
Murru põhiomadus	28
Murru taandamine	30
Murdude teisendamine ühenimelisteks	32
Murdude liitmine ja lahutamine	34
Murdude korrutamine	42
Murru astendamine	45
Murdude jagamine	46
Kordamiseks	49
Hulkliikmete tegureiks lahutamine ühise teguri sulgude ette too- sega	52
Hulkliikmete tegureiks lahutamine valemite kasutamisega	55
Hulkliikmete tegureiks lahutamine liikmete rühmitamise võttega	58
Hulkliikmete tegureiks lahutamine miime võttega	60
Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmine	61
Hulkliikmete vähima ühiskordse leidmine	62
Hulkliikmeliste liikmetega murrud	63
Murru taandamine	63
Murru laiendamine	65
Murdude teisendamine ühenimelisteks	66
Murdude liitmine ja lahutamine	67
Murdude korrutamine	71
Murdude jagamine	72
Kõik tehted murdudega	74
Kordamiseks	78

4. Matemaatilised laused	82
Definitsioon	82
Aksiom ja teoreem	83
Teoreemi koostis	85
Järeldamisharjutusi	87
Teoreem ja pöördteoreem	89
Teoreem ja vastandteoreem	91
5. Sirgete lõikumine ja paralleelsus	97
Punkt ja sirgjoon	97
Kõrvnurgad	98
Võrrand	99
Tippnurgad	100
Kahe sirge lõikamine sirgega	101
Kahe sirge paralleelsus	103
Kahe paralleelse sirge lõikamine sirgega	107
Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad	108
Vastavalt ristuvate haaradega nurgad	109
Kolmnurga nurkade summa	110
Kumer hulknurk	112
Kumer hulknurga nurkade summa	114
Kumer hulknurk	112
Kolmnurga kahe külje summa ja vahe võrdlemine kolmanga küljega	115
Kolmnurga külgede ja nurkade vahelised seosed	117
Kordamiseks	119
6. Teljeline sümmeetria	121
Sümmeetriliste kujundite konstrueerimine	121
Põhikonstruktsioonid	127
Kolmnurga ümberringjoon	130
Romb	132
Kolmnurga siseringjoon	135
Sümmeetriline kujund	139
Kordamiseks	141
7. Arvutamine ligikaudsete arvudega	144
Arvude ümardamine ja sellest tekkiv viga	144
Arvu alamtõke ja ülemtõke	147
Täpsed ja ligikaudsed arvud	148
Ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmäär	151
Ligikaudsete arvude liitmine	154
Ligikaudsete arvude lahutamine	158
Ligikaudsete arvude korrutamine	161
Ligikaudsete arvude jagamine	168
Ülesandeid	172
Kordamiseks	179

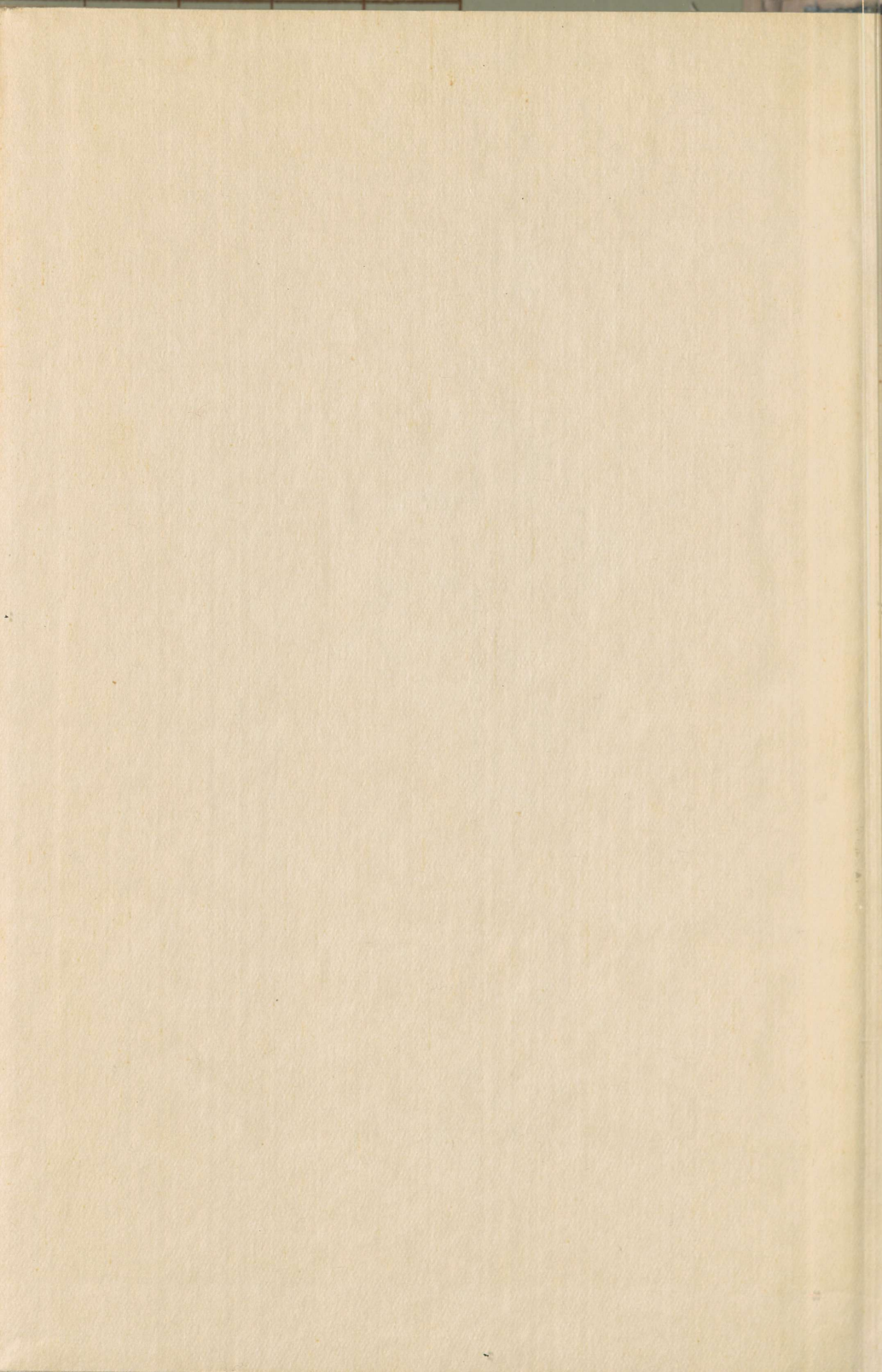
8. Arvutuslükati	182
Lihtne arvutuslükati täisarvude liitmiseks	182
Temperatuuri ümberarvutamine	184
Arvude lugemine ja märkimine sklaalal	184
Lükati põhiskaalade omadus	195
Võrde tundmatu liikme leidmine	196
Korrutamine	198
Protsentide leidmine	200
Jagamine	201
Arvu leidmine tema protsentides antud osa järgi	204
Kahe arvu suhe protsentides	204
9. Tsentraalsümmeetria. Rööpkülik. Trapets	206
Sümmeetria punkti suhtes	206
Rööpküliku omadused	210
Rööpküliku tunnused	213
Rööpküliku eriliigid	215
Ristküliku, rombi ja ruudu omadused	216
Trapets	219
Kolmnurga kesklõik. Trapetsi kesklõik	222
Kolmnurga mediaanide lõikumine	225
Trapetsi pindala	227
Lüke. Vektor. Vektorite summa ja vahe	229
Kordamiseks	235
10. Ringjoon. Ringjoone pikkus. Ringi pindala	237
Ringjoon	237
Punkti ja ringjoone vastastikune asend	238
Sirge ja ringjoone vastastikune asend	239
Kahe ringjoone vastastikune asend	243
Piirdenurk	244
Ringjoone pikkus	251
Ringi pindala	259
11. Ühe muutujaga lineaarne võrrand	267
Samasus	267
Võrrandi lahendid	270
Võrrandi põhiomadused	271
Võrrandi liike	275
Lineaarse võrrandi koostamine ja lahendamine	276
Võrrand, mis sisaldab muutujat murru nimetajas	283
Tähealiste kordajatega võrrand	291
Ülesannete lahendamine võrrandi abil	293
12. Üldiseks kordamiseks	298



Эльмар Этверк, Арнольд Вихман. МАТЕМАТИКА ДЛЯ VII КЛ. На эстонском языке. Издание 9-е, исправленное и дополненное. Художественное оформление В. Варе. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja L. Krikmann. Korrektorid E. Bitter ja S. Türn. Laduda antud 10. II 1969. Trükkida antud 11. IV 1969. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 19,5 + 0,25 (lisa). Arvestuspoognaid 14,60. Trükiarv 27 000. Tellimise nr. 1082. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 26 kop.





26 kop.

A
29851

7148135

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00714813 5

26 kop.

A
29851
7148135



MATEMAATIKA VII KL.

E. ETVERK
A. VIHMAN

Matemaatika
VII KLASSILE

TABELID

RINGJOONE PIKKUS (d — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,36	3,39	3,42
1,1	3,46	3,49	3,52	3,55	3,58	3,61	3,64	3,68	3,71	3,74
1,2	3,77	3,80	3,83	3,86	3,90	3,93	3,96	3,99	4,02	4,05
1,3	4,08	4,12	4,15	4,18	4,21	4,24	4,27	4,30	4,34	4,37
1,4	4,40	4,43	4,46	4,49	4,52	4,56	4,59	4,62	4,65	4,68
1,5	4,71	4,74	4,78	4,81	4,84	4,87	4,90	4,93	4,96	5,00
1,6	5,03	5,06	5,09	5,12	5,15	5,18	5,22	5,25	5,28	5,31
1,7	5,34	5,37	5,40	5,43	5,47	5,50	5,53	5,56	5,59	5,62
1,8	5,65	5,69	5,72	5,75	5,78	5,81	5,84	5,87	5,91	5,94
1,9	5,97	6,00	6,03	6,06	6,09	6,13	6,16	6,19	6,22	6,25
2,0	6,28	6,31	6,35	6,38	6,41	6,44	6,47	6,50	6,53	6,57
2,1	6,60	6,63	6,66	6,69	6,72	6,75	6,79	6,82	6,85	6,88
2,2	6,91	6,94	6,97	7,01	7,04	7,07	7,10	7,13	7,16	7,19
2,3	7,23	7,26	7,29	7,32	7,35	7,38	7,41	7,45	7,48	7,51
2,4	7,54	7,57	7,60	7,63	7,67	7,70	7,73	7,76	7,79	7,82
2,5	7,85	7,89	7,92	7,95	7,98	8,01	8,04	8,07	8,11	8,14
2,6	8,17	8,20	8,23	8,26	8,29	8,33	8,36	8,39	8,42	8,45
2,7	8,48	8,51	8,55	8,58	8,61	8,64	8,67	8,70	8,73	8,77
2,8	8,80	8,83	8,86	8,89	8,92	8,95	8,98	9,02	9,05	9,08
2,9	9,11	9,14	9,17	9,20	9,24	9,27	9,30	9,33	9,36	9,39
3,0	9,42	9,46	9,49	9,52	9,55	9,58	9,61	9,64	9,68	9,71
3,1	9,74	9,77	9,80	9,83	9,86	9,90	9,93	9,96	9,99	10,0
3,2	10,1	10,1	10,1	10,1	10,2	10,2	10,2	10,3	10,3	10,3
3,3	10,4	10,4	10,4	10,5	10,5	10,5	10,6	10,6	10,6	10,6
3,4	10,7	10,7	10,7	10,8	10,8	10,8	10,9	10,9	10,9	11,0
3,5	11,0	11,0	11,1	11,1	11,1	11,2	11,2	11,2	11,2	11,3
3,6	11,3	11,3	11,4	11,4	11,4	11,5	11,5	11,5	11,6	11,6
3,7	11,6	11,7	11,7	11,7	11,7	11,8	11,8	11,8	11,9	11,9
3,8	11,9	12,0	12,0	12,0	12,1	12,1	12,1	12,2	12,2	12,2
3,9	12,3	12,3	12,3	12,3	12,4	12,4	12,4	12,5	12,5	12,5
4,0	12,6	12,6	12,6	12,7	12,7	12,7	12,8	12,8	12,8	12,8
4,1	12,9	12,9	12,9	13,0	13,0	13,0	13,1	13,1	13,1	13,2
4,2	13,2	13,2	13,3	13,3	13,3	13,4	13,4	13,4	13,4	13,5
4,3	13,5	13,5	13,6	13,6	13,6	13,7	13,7	13,7	13,8	13,8
4,4	13,8	13,9	13,9	13,9	13,9	14,0	14,0	14,0	14,1	14,1
4,5	14,1	14,2	14,2	14,2	14,3	14,3	14,3	14,4	14,4	14,4
4,6	14,5	14,5	14,5	14,5	14,6	14,6	14,6	14,7	14,7	14,7
4,7	14,8	14,8	14,8	14,9	14,9	14,9	15,0	15,0	15,0	15,0
4,8	15,1	15,1	15,1	15,2	15,2	15,2	15,3	15,3	15,3	15,4
4,9	15,4	15,4	15,5	15,5	15,5	15,6	15,6	15,6	15,6	15,7
5,0	15,7	15,7	15,8	15,8	15,8	15,9	15,9	15,9	16,0	16,0
5,1	16,0	16,1	16,1	16,1	16,1	16,2	16,2	16,2	16,3	16,3
5,2	16,3	16,4	16,4	16,4	16,5	16,5	16,5	16,6	16,6	16,6
5,3	16,7	16,7	16,7	16,7	16,8	16,8	16,8	16,9	16,9	16,9
5,4	17,0	17,0	17,0	17,1	17,1	17,1	17,2	17,2	17,2	17,2

RINGI PINDALA

(d — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93
1,1	0,95	0,97	0,99	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11
1,2	1,13	1,15	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
1,3	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52
1,4	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65	1,67	1,70	1,72	1,74
1,5	1,77	1,79	1,81	1,84	1,86	1,89	1,91	1,94	1,96	1,99
1,6	2,01	2,04	2,06	2,09	2,11	2,14	2,16	2,19	2,22	2,24
1,7	2,27	2,30	2,32	2,35	2,38	2,40	2,43	2,46	2,49	2,52
1,8	2,54	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,72	2,75	2,78	2,81
1,9	2,84	2,87	2,90	2,93	2,96	2,99	3,02	3,05	3,08	3,11
2,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,37	3,40	3,43
2,1	3,46	3,50	3,53	3,56	3,60	3,63	3,66	3,70	3,73	3,77
2,2	3,80	3,84	3,87	3,91	3,94	3,98	4,01	4,05	4,08	4,12
2,3	4,15	4,19	4,23	4,26	4,30	4,34	4,37	4,41	4,45	4,49
2,4	4,52	4,56	4,60	4,64	4,68	4,71	4,75	4,79	4,83	4,87
2,5	4,91	4,95	4,99	5,03	5,07	5,11	5,15	5,19	5,23	5,27
2,6	5,31	5,35	5,39	5,43	5,47	5,52	5,56	5,60	5,64	5,68
2,7	5,73	5,77	5,81	5,85	5,90	5,94	5,98	6,03	6,07	6,11
2,8	6,16	6,20	6,25	6,29	6,33	6,38	6,42	6,47	6,51	6,56
2,9	6,61	6,65	6,70	6,74	6,79	6,83	6,88	6,93	6,97	7,02
3,0	7,07	7,12	7,16	7,21	7,26	7,31	7,35	7,40	7,45	7,50
3,1	7,55	7,60	7,65	7,69	7,74	7,79	7,84	7,89	7,94	7,99
3,2	8,04	8,09	8,14	8,19	8,24	8,30	8,35	8,40	8,45	8,50
3,3	8,55	8,60	8,66	8,71	8,76	8,81	8,87	8,92	8,97	9,03
3,4	9,08	9,13	9,19	9,24	9,29	9,35	9,40	9,46	9,51	9,57
3,5	9,62	9,68	9,73	9,79	9,84	9,90	9,95	10,0	10,1	10,1
3,6	10,2	10,2	10,3	10,3	10,4	10,5	10,5	10,6	10,6	10,7
3,7	10,8	10,8	10,9	10,9	11,0	11,0	11,1	11,2	11,2	11,3
3,8	11,3	11,4	11,5	11,5	11,6	11,6	11,7	11,8	11,8	11,9
3,9	11,9	12,0	12,1	12,1	12,2	12,3	12,3	12,4	12,4	12,5
4,0	12,6	12,6	12,7	12,8	12,8	12,9	12,9	13,0	13,1	13,1
4,1	13,2	13,3	13,3	13,4	13,5	13,5	13,6	13,7	13,7	13,8
4,2	13,9	13,9	14,0	14,1	14,1	14,2	14,3	14,3	14,4	14,5
4,3	14,5	14,6	14,7	14,7	14,8	14,9	14,9	15,0	15,1	15,1
4,4	15,2	15,3	15,3	15,4	15,5	15,6	15,6	15,7	15,8	15,8
4,5	15,9	16,0	16,0	16,1	16,2	16,3	16,3	16,4	16,5	16,5
4,6	16,6	16,7	16,8	16,8	16,9	17,0	17,1	17,1	17,2	17,3
4,7	17,3	17,4	17,5	17,6	17,6	17,7	17,8	17,9	17,9	18,0
4,8	18,1	18,2	18,2	18,3	18,4	18,5	18,5	18,6	18,7	18,8
4,9	18,9	18,9	19,0	19,1	19,2	19,2	19,3	19,4	19,5	19,6
5,0	19,6	19,7	19,8	19,9	19,9	20,0	20,1	20,2	20,3	20,3
5,1	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8	20,8	20,9	21,0	21,1	21,2
5,2	21,2	21,3	21,4	21,5	21,6	21,7	21,7	21,8	21,9	22,0
5,3	22,1	22,2	22,3	22,3	22,4	22,5	22,6	22,6	22,7	22,8
5,4	22,9	23,0	23,1	23,2	23,2	23,3	23,4	23,5	23,6	23,7

