Das

A B C

der Algebra

Der Druck wird gestattet.
Riga, am 23sten Febr. 1843.
Dr. C. E. Napiersky,
Censor.

Das A B C der Algebra.

Ein Auszug für [illegible] zu XXII bis XXVI der Fundamente der Algebra.

XXVIII.

Vom Professor Dr. G. Paucker.

Mitau, 1/13 Januar 1843.

1.

Die Zeichen der Algebra.

Das Zeichen der Addition ist ein +.
Das Zeichen der Subtraction ist ein — links vom Subtrahendus.
Das Zeichen der Multiplication ist ein Punkt, oder eine bloße Nebeneinandersetzung.
Das Zeichen der Division besteht aus zwei Punkten : vor dem Divisor, oder es ist die Bruchform.
Das Zeichen der Gleichheit besteht aus zwei parallelen Strichen =.
Das Zeichen der gemeinschaftlichen Operation oder das Einschließungszeichen ist die Klammer ( ) oder [ ]
Das Zeichen der negativen Zahl ist ein über ihrem absoluten Werth gesetzter Strich.

Beispiele.

$a+b$ heißt a nebst b
$a-b$ heißt a weniger b
$a.b$ oder ab heißt a mal b
$a:b$ oder $\frac{a}{b}$ heißt a dividirt durch b
$xx=b$ heißt x mal x gleich b
$a(b+c)$ heißt a mal Summe $b+c$
$a-(b+c)$ heißt a weniger Summe $b+c$.

2.

2.

Die negative Zahl zu ihrem absoluten Werthe addirt, giebt Null.

Die ganzen Zahlen und Brüche in der Arithmetik heißen absolute Werthe. Jeder absolute Werth hat eine negative Zahl. Umgekehrt hat jede negative Zahl einen absoluten Werth.

Die Definition der negativen Zahl oder Gegenzahl läßt sich so ausdrücken: Sie ist eine solche, die zu ihrem absoluten Werthe hinzugefügt, Null giebt.

Z. B. $1+\bar{1}=0$. d. h. Eins u. Gegeneins machen Null; $2+\bar{2}=0$. d. h. Zwei und Gegenzwei machen Null; $a+\bar{a}=0$, d. h. a nebst Gegen-a oder nebst dem negativen a macht Null.

3.

Die Addition einer negativen Zahl ist gleichbedeutend mit der Subtraction ihres absoluten Werthes.

Ebenso ist die Subtraction einer negativen Zahl gleichbedeutend mit der Addition ihres absoluten Werthes.

Es sey $b+\bar{a}=c$, so ist $b+\bar{a}+a=c+a$

aber $\bar{a}+a=0$, also $b=c+a$

Es sey $b-\bar{a}=c$, so ist $b-\bar{a}+\bar{a}=c+\bar{a}$

also $b = c + \bar{a}$, also $b + a = c + \bar{a} + a$
aber $\bar{a} + a = o$, also $b + a = c$.

Daher ist auch die Summe zweier negativen Zahlen gleich der negativen Zahl der Summen ihrer absoluten Werthe.

Es sey nämlich $a + b = c$, so ist
$$a + \bar{a} + b + \bar{b} = c + \bar{a} + \bar{b}$$
also $0 = c + \bar{a} + \bar{b}$. Also
$\bar{c} = \bar{c} + c + \bar{a} + \bar{b}$, aber $\bar{c} + c = o$
also $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Daher ist endlich auch die negative Zahl einer negativen Zahl ein absoluter Werth.

Denn es sey $a + \bar{a} = o$, und $\bar{a} = c$
so ist $a + c = o$. Aber auch $\bar{c} + c = o$
also $a = \bar{c}$.

4.

Das Product eines absoluten Werths mit einer negativen Zahl ist eine negative Zahl.

Hingegen das Product zweier negativen Zahlen ist ein absoluter Werth.

Nämlich $a + \bar{a} = o$, also $ac + \bar{a}.c = o$
Aber ac ist ein absoluter Werth, also ist $\bar{a}.c$ eine negative Zahl.

Da $c + \bar{c} = o$, so ist $ca + \bar{c}.a = o$. Aber ca ein absoluter Werth, also $\bar{c}.a$ eine

negativen Zahl.
Also $a + \bar{a} = 0$, so ist $a.\bar{c} + \bar{a}.\bar{c} = 0$
Aber $a.\bar{c}$ ist eine negative Zahl, also ist $\bar{a}.\bar{c}$ ein absoluter Werth.
Hieraus folgt dasselbe auch für die Quotienten der Division.
Jede negative Zahl kann also angesehen werden als das Produkt ihres absoluten Werths mit der *negativen Eins*, welche auch das *lineäre Symbol* heißt. Z. B. die negative Zahl von $a + b$ kann geschrieben werden $\bar{1}.(a+b)$
Das Produkt der negativen Eins oder des lineären Symbols mit sich selbst, giebt Eins, nämlich $\bar{1}.\bar{1} = 1$.

5.

Erklärung der Potenz.

Das Produkt mehrerer gleichen Zahlen heißt eine *ganzzahlige Potenz*.
Jede dieser gleichen Zahlen heißt die *Grundzahl* der Potenz. Die Anzahl der gleichen Faktoren heißt der *Name* der Potenz. Man schreibt z. B.
$aa = a^2$, $aaa = a^3$, $aaaa = a^4$.
Hier ist a die Grundzahl, die Namen sind 2, 3, 4.
Wenn bei der Auflösung einer Gleichung die Bestimmung eintritt, daß

die ganzwenige Potenz einer gesuchten Grundzahl b, der ganzwenigen Potenz einer gegebenen Grundzahl a gleich seyn soll, so heißt die gesuchte Zahl b eine Bruchpotenz oder Wurzel der gegebenen Grundzahl a. Der Name dieser Bruchpotenz oder Wurzel wird durch einen Bruch bezeichnet dessen Zähler der Name der gegebenen Grundzahl a, und dessen Nenner der Name der gesuchten Grundzahl b ist.

z. B. $b^2 = a$ wird bezeichnet durch $b = a^{\frac{1}{2}}$ oder durch $b = \sqrt[2]{a}$. Ferner $b^3 = a$, wird bezeichnet durch $b = a^{\frac{1}{3}}$ oder durch $b = \sqrt[3]{a}$. Ferner $b^3 = a^2$ wird bezeichnet durch $b = a^{\frac{2}{3}}$ oder durch $b = \sqrt[3]{a^2}$.

Wenn die Bestimmung eintritt, daß das Product einer gesuchten Zahl b mit der Potenz einer gegebenen Grundzahl a, gleich Eins seyn soll, so heißt die gesuchte Zahl b die <u>gegenwenige Potenz</u> der gegebenen Grundzahl a.

z. B. $b.a^2 = 1$ oder $b = \frac{1}{a^2}$ wird bezeichnet durch $b = a^{\overline{2}}$. Ferner $b.a^3 = 1$ oder $b = \frac{1}{a^3}$ wird bezeichnet durch $b = a^{\overline{3}}$. Ferner $b.a^m = 1$ oder $b = \frac{1}{a^m}$ wird bezeichnet durch $b = a^{\overline{m}}$

6.

Das Produkt gleichnamiger Potenzen verschiedener Grundzahlen ist die gleichnamige Potenz des Produkts der Grundzahlen.

Es sey $a\,b = c$, so soll seyn $a^m \cdot b^m = c^m$

Es sey erstens m eine ganze Zahl und ein absoluter Werth.

Dann ist z. B. $a^3 \cdot b^3 = aaa \cdot bbb = ab \cdot ab \cdot ab = ccc = c^3$

Es sey zweitens m ein Bruch und ein absoluter Werth.

z. B. Wenn $x = a^{\frac{2}{3}}$, $y = b^{\frac{2}{3}}$, so ist nach der Erklärung der Bruchpotenz (5) $x^3 = a^2$, $y^3 = b^2$, also $x^3 \cdot y^3 = a^2 \cdot b^2$

Aber $x^3 \cdot y^3 = (xy)^3$ und $a^2 b^2 = (ab)^2 = c^2$ also $(xy)^3 = c^2$, also nach der Erklärung der Bruchpotenz $xy = c^{\frac{2}{3}}$, also $a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

Es sey drittens der Wenn $m = \overline{n}$ eine negative Zahl, deren absoluter Werth n sey.

Wenn z. B. $x = a^{\overline{n}}$, $y = b^{\overline{n}}$, so ist nach der Erklärung der gegennamigen Potenz (5) $x\,a^n = 1$, $y\,b^n = 1$, also $x\,y\,a^n b^n = 1$. Aber $a^n b^n = (a\,b)^n = c^n$, also $x\,y\,c^n = 1$, also nach der Erklärung der gegennamigen Potenz $x\,y = c^{\overline{n}}$, also $a^{\overline{n}} \cdot b^{\overline{n}} = c^{\overline{n}}$.

Eben so wird der Satz bewiesen:
Wenn $\frac{a}{b} = c$, so ist $\frac{a^m}{b^m} = c^m$

7.

Das Produkt zweier Potenzen von einerlei Grundzahl und von verschiedenen Namen, ist gleich einer Potenz derselben Grundzahl, deren Namen die Summe der Namen ist.

Es sei $m + n = r$, so soll seyn $a^m \cdot a^n = a^r$

Es seyen erstens m, n ganze Zahlen und absolute Werthe.

Dann ist z. B. $a^3 \cdot a^4 = aaa \cdot aaaa = aaaaaaa$
also $a^3 \cdot a^4 = a^7$

Eben so wird für $m > n$ bewiesen, daß
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ist.

Es seyen zweitens m, n Brüche und absolute Werthe.

Z. B. Wenn $x = a^{\frac{2}{3}}$, $y = a^{\frac{3}{4}}$, so ist nach der Erklärung der Bruchpotenz (5)
$x^3 = a^2$, $y^4 = a^3$. Hieraus folgt

$$x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$$

$$y^4 \cdot y^4 \cdot y^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

also $x^{12} = a^8$, $y^{12} = a^9$, $x^{12} \cdot y^{12} = a^8 \cdot a^9$
also (6) $(xy)^{12} = a^{17}$, also nach der Erklärung der Bruchpotenz (5) $xy = a^{\frac{17}{12}}$, also

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}}$$

Eben so wird für $m > n$ bewiesen, daß
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ist.

Es ist drittens einer der beiden Nenner eine negative Zahl.

Wenn z. B. $x = a^{5}$, $y = a^{\bar{3}} = \frac{1}{a^{3}}$ ist,

so ist $xy = a^{5} \cdot \frac{1}{a^{3}} = a^{2} = a^{5-3}$, also

$a^{5} \cdot a^{\bar{3}} = a^{5-3} = a^{5+\bar{3}}$

Oder wenn z. B. $x = a^{5}$, $y = a^{\bar{7}} = \frac{1}{a^{7}}$ ist,

so ist $xy = a^{5} \cdot \frac{1}{a^{7}} = \frac{1}{a^{2}} = a^{\bar{2}} = a^{5+\bar{7}}$

also $a^{5} \cdot a^{\bar{7}} = a^{5+\bar{7}}$

also allgemein $a^{m} \cdot a^{\bar{n}} = a^{m+\bar{n}}$

ebenso $\frac{a^{m}}{a^{\bar{n}}} = a^{m-\bar{n}}$

Es seyen viertens beide Nenner negative Zahlen.

Wenn z. B. $x = a^{\bar{5}} = \frac{1}{a^{5}}$, $y = a^{\bar{3}} = \frac{1}{a^{3}}$,

so ist $xy = \frac{1}{a^{5}} \cdot \frac{1}{a^{3}} = \frac{1}{a^{8}} = a^{\bar{8}}$,

also $a^{\bar{5}} \cdot a^{\bar{3}} = a^{\bar{8}} = a^{\bar{5}+\bar{3}}$

also allgemein $a^{\bar{m}} \cdot a^{\bar{n}} = a^{\bar{m}+\bar{n}}$

ebenso $\frac{a^{\bar{m}}}{a^{\bar{n}}} = a^{\bar{m}-\bar{n}}$

8.

Die Potenz einer Potenz ist eine Potenz derselben Grundzahl, deren Nenner das Produkt der Nenner ist.

Es sey $a^{m} = b$, $b^{n} = c$, so soll seyn
$$c = a^{mn}$$

Es seyen erstens $m, n,$ ganze Zahlen und absolute Werthe.

Wenn z. B. $a^{3} = b$, $b^{4} = c$, so ist $c = bbbb$ also $c = a^{3} \cdot a^{3} \cdot a^{3} \cdot a^{3} = a^{12}$, also $b^{4} = a^{12}$ also $(a^{3})^{4} = a^{12}$

Es seyen zweitens $m, n,$ Brüche und absolute Werthe.

Wenn z. B. $a^{\frac{2}{3}} = b$, $b^{\frac{5}{7}} = c$, so ist nach der Erklärung der Bruchpotenz (5) $a^{2} = b^{3}$, $b^{5} = c^{7}$, also $a^{10} = b^{15}$, $b^{15} = c^{21}$, also $a^{10} = c^{21}$, also nach der Erklärung der Bruchpotenz (5) $c = a^{\frac{10}{21}}$, also $b^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{10}{21}}$ also $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{10}{21}}$

Es seyen drittens von den beiden Werthen $m, n,$ entweder der eine allein oder beide, negative Zahlen.

Wenn $a^{\overline{2}} = \frac{1}{a^{2}} = b$, $b^{3} = c$, so ist $c = \frac{1}{a^{6}} = a^{\overline{6}}$, also $b^{3} = a^{\overline{6}}$, also
$$(a^{\overline{2}})^{3} = a^{\overline{6}} = a^{\overline{2}\cdot 3}$$

Wenn $a^{2} = b$, $b^{\overline{3}} = c$, so ist $c = \frac{1}{b^{3}}$ also $c = \frac{1}{a^{6}} = a^{\overline{6}}$, also $b^{\overline{3}} = a^{\overline{6}}$, also
$$(a^{2})^{\overline{3}} = a^{\overline{6}} = a^{2\cdot\overline{3}}$$

Wenn $a^{\overline{2}} = b$, $b^{\overline{3}} = c$, so ist $c = \frac{1}{b^{3}}$ also $c = \frac{1}{a^{\overline{6}}} = a^{6}$, also $b^{\overline{3}} = a^{6}$, also
$$(a^{\overline{2}})^{\overline{3}} = a^{6} = a^{\overline{2}\cdot\overline{3}}$$

9.

Bei der Multiplikation zweier Polynome wird jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Gliede des anderen Polynoms multipliziert, mit Rücksicht auf die Vorzeichen nach (4) und mit Rücksicht auf die Namen der Potenzen nach (7).

z. B. $M = 13a^5 b + 10a^2 b^2 - 4ab^3$
$N = 6a^3 b^2 - 18b^3 - 7a^3 b^4$

$$MN = 78a^8 b^3 - 174a^5 b^4 - 295a^2 b^5 + 2ab^6 + 28a^4 b^7$$

10.

Bei der Division eines Polynoms mit einem andern, werden beide nach Potenzen derselben Grundzahl geordnet. Die Division des ersten Gliedes des Dividendus mit dem ersten Gliede des Divisors gibt das erste Glied des Quotienten. Mit diesem wird der ganze Divisor multipliziert, und das Produkt wird vom Dividendus abgezogen, wodurch sich der Rest ergibt. Mit diesem wird ebenso verfahren, bis die Division beendigt ist.

$$N = 2a^{\frac{3}{2}} - 3a^{\frac{5}{2}}b^2 + 5a^{\frac{7}{2}}b^4\,;\quad \frac{M}{N} = \frac{3}{a} - 5b^2 + 7ab^4$$

$$M = 6a^{\frac{1}{2}} - 19a^{\frac{3}{2}}b^2 + 44a^{\frac{5}{2}}b^4 - 46a^{\frac{7}{2}}b^6 + 35a^{\frac{9}{2}}b^8$$

$$\underline{6a^{\frac{1}{2}} - 9a^{\frac{3}{2}}b^2 + 15a^{\frac{5}{2}}b^4}$$

$$-10a^{\frac{3}{2}}b^2 + 29a^{\frac{5}{2}}b^4$$

$$\underline{-10a^{\frac{3}{2}}b^2 + 15a^{\frac{5}{2}}b^4 - 25a^{\frac{7}{2}}b^6}$$

$$14a^{\frac{5}{2}}b^4 - 21a^{\frac{7}{2}}b^6$$

$$\underline{14a^{\frac{5}{2}}b^4 - 21a^{\frac{7}{2}}b^6 + 35a^{\frac{9}{2}}b^8}$$

11.

<u>Die Ausziehung der Faktoren besteht darin, daß alle Glieder des Polynoms, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, mit ihren Vorzeichen vereinigt in das Einschließungszeichen gebracht werden, außerhalb desselben aber der gemeinschaftliche Faktor als Multiplikator gesetzt wird.</u>

Z. B. Wenn $M = 2a^3 - 6a^4 + 8a^5$

so ist $M = 2a^3(1 - 3a + 4a^2)$

Hieher gehört auch die Reduktion auf einen gemeinschaftlichen Nenner.

Z. B. Wenn $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$

so ist $M = \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$

also $M = \frac{a^2 - ab + ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Eine bestimmte Lineargleichung aufzulösen.

Es sey z. B. $\frac{a+x}{d+x} - b = \frac{c}{d+x} - f$

Wenn in irgend einem Gliede die Wurzel der Gleichung im Divisor ist, so wird dieser Divisor durch Multiplication aller Glieder mit demselben, weggeschafft.

$$a + x - b(d+x) = c - f(d+x)$$

Alle Glieder, welche die Wurzel enthalten, werden auf eine Seite des Gleichheitzeichens gebracht, indem man die additiven subtrahirt, die subtractiven addirt.

$$a + x - bd - bx + fx = c - fd$$

oder $a - bd = c - fd - fx - x + bx$

Alle Coefficienten der Wurzel werden in eine Summe vereinigt

$$a + x(1 - b + f) - bd = c - fd$$

oder $a - bd = c - fd - x(1 - b + f)$

Alle Glieder der Gleichung werden mit dem gefundenen Factor der Wurzel dividirt

$$x = \frac{c - a + bd - fd}{1 - b + f}$$

Eine bestimmte quadratische Gleichung auflösen, heißt zwei Linearfactoren finden, deren Product den Werth der quadratischen Gleichung giebt.

Die allgemeine Form der bestimmten quadratischen Gleichung ist:

$$cx^2 + dx + f = 0$$

z. B. $34x^2 - 131x - 99 = 0$

Wenn c, d, einerlei Vorzeichen haben, so nimmt man $x + a = b$ an. Wenn c, d, verschiedene Vorzeichen haben, so nimmt man $x - a = b$ an. Beide Theile dieser angenommenen Gleichung erhebt man ins Quadrat, und multiplicirt diese Quadrate mit c.

Angenommen . . $x - a = b$

Quadrat $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$

mit $c = 34$ $34x^2 - 68ax + 34a^2 = 34b^2$

Den Factor von x setzt man gleich d, und zieht dann die gegebene quadratische Gleichung von der angenommenen ab.

Angenommen $68a = 131$

angenommen $34x^2 - 131x + 34a^2 = 34b^2$

gegeben $34x^2 - 131x - 99 = 0$

abgezogen $34b^2 = 34a^2 + 99$

die beiden Theile der Gleichung, durch welche a gegeben ist, erhebt man ins Quadrat.

Angenommen $68a = 131$

das Quadrat $4624a^2 = 17161$

die Gleichung, welche b^2 durch a^2 ausdrückt, multiplicirt man mit einer solchen Zahl, daß a^2 in beiden Gleichungen einerlei Factor erhält.

$$34 \cdot b^2 = 34a^2 + 99$$

mit 136 . . . $4624 \cdot b^2 = 4624a^2 + 13464$

$$0 = 4624a^2 - 17161$$

Abgezogen $4624 \cdot b^2 = 30625$

Quadratwurzel $68 \cdot b = \pm 175$

Aus den beiden gefundenen Werthen von a und b bestimmt man x.

$x - a = b$, also $x = a + b$

also . . . . . $68x = 68a + 68 \cdot b$

also . . . . . $68x = 131 + 175$

oder . $68x = 131 - 175$

Hieraus erhält man die beiden Linearfactoren $68x - 306 = 0$ oder $2x - 9 = 0$

und $68x + 44 = 0$ oder $17x + 11 = 0$

das Produkt dieser beiden Linearfactoren giebt die gegebene quadratische Gleichung.

$$(2x - 9)(17x + 11) = 0$$

oder $34x^2 - 131x - 99 = 0$

14.

Eine quadratische Gleichung zu cha- racterisiren.

Allgemeine Form $cx^2+dx+f=0$

angenommen . . $x+a=b$

Quadrat . . . . . $x^2+2ax+a^2=b^2$

mit c mult. . . . $cx^2+2acx+a^2c=b^2c$

angenommen I $2ac=d$

angenommen $cx^2+dx+a^2c=b^2c$

gegeben . . . . . $cx^2+dx+f=0$

Differenz . . . . $b^2c=a^2c-f$

mit 4c mult. . . . $4b^2c^2=4a^2c^2-4cf$

angenommen $0=4a^2c^2-d^2$

Differenz . . II $4b^2c^2=d^2-4cf$

Die gegebene Zahl f heißt die feste Zahl. Eine quadratische Gleichung in welcher das Product der festen Zahl mit dem Coefficienten des Quadrats der Wurzel eine negative Zahl ist, heißt eine Gleichung der zweiten Art, und hat immer zwei mögliche Wurzeln. Z. B.

$$5x^2+3x-14=0$$

denn hier ist $cf=\overline{70}$ eine negative Zahl, also $4b^2c^2=d^2-4cf=289$ ein absoluter Werth, aus welchem die Quadratwurzel ausgezogen werden kann.

Eine quadratische Gleichung, in welcher das Product der festen Zahl mit dem Co-

Coefficienten des Quadrats der Wurzel ein absoluter Werth ist, heißt eine Gleichung der ersten Art. Eine solche Gleichung hat nur dann mögliche Auflösungen, wenn das 4fache jenes Produkts nicht größer als das Quadrat des Coefficienten der Wurzel ist. z. B.

$$34x^2 - 175x + 99 = 0$$

$$c = 34 \quad f = 99 \quad d = \overline{175} \quad d^2 = 30625$$

also: $4b^2c^2 = 30625 - 13464 = 17161$

Wenn aber das 4fache jenes Produkts größer als das Quadrat des Coefficienten der Wurzel ist, so führt die quadratische Gleichung der ersten Art auf unmögliche Zahlen. Eine Zahl, deren Quadrat dem linearen Symbol, d. h. der negativen Eins gleich ist, heißt das quadratische Symbol, und wird durch i bezeichnet, so daß $ii + 1 = 0$ ist. Dieses quadratische Symbol dient zur Bezeichnung der unmöglichen Wurzeln einer quadratischen Gleichung der ersten Art. z. B.

die Gleichung . . . . $x^2 + x + 1 = 0$

hat die Linearfactoren $x + \frac{1}{2} + i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 0$

und $x + \frac{1}{2} - i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 0$

Multipliciren

30) $2a^4x^2 - 4b^4y^2$ mit $2a^4x^2 + 4b^4y^2$

31) $\frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2$ mit $2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2$

32) $a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4$ mit $7a^4 - 4a^2b^2 + b^4$

33) $a^2 - \frac{3}{5}ab + \frac{7}{5}b^2$ mit $6a - 2b$

34) $a^3 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$ mit $a^3 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$

35) $a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4$ mit $a + 2b$

36) $x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - 4x^2y^3 + 5xy^4 - 6y^5$
mit $x^2 - 3xy + y^2$

37) $7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3$ mit $3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2$

38) $0,5x - 2x^2y + 0,3y$ mit $4x + 2,1x^2y - 0,8y$

39) $15a^{\overline{6}}b^2 - 7a^{\overline{5}}b^4 + 6a^{\overline{4}}b^6$ mit $2a^{\overline{2}}b^2 - 3a^{\overline{1}}b^4$

40) $13a^{\overline{5}}b + 10a^{\overline{2}}b^2 - 4ab^3$
mit $6a^3b^2 - 18b^3 - 7a^3b^4$

41) $3x^{\overline{2}}y^{\overline{4}} - 2x^2y^{\overline{5}} + 8x^6y^{\overline{3}}$
mit $2x^{\overline{3}}y^{\overline{5}} + 6xy^{\overline{3}} + 12x^5y^{\overline{1}}$

42) $(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)$

Dividiren.

34) $3a^2 - \frac{5}{2}ab + \frac{1}{2}b^2$ mit $a - \frac{1}{3}b$

35) $-2a^{\overline{8}}x^5 + 17a^{\overline{4}}x^6 - 5x^7 - 24a^4x^5$
mit $2a^{\overline{3}}x^3 - 3ax^4$

36) $a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9$
mit $a^3 - 2a^2b^3$

37) $6a^3 - \frac{23}{5}a^2 + \frac{48}{5}a - \frac{14}{5}$ mit $6a - 2$

38) $a^8 - 16 b^8$ mit $a^2 - 2b^2$

39) $-1 + a^3 b^3$ mit $-1 + ab$

40) $3a^5 + 16a^4 b - 33a^3 b^2 + 14a^2 b^3$ mit $a^2 + 7ab$

41) $3a^4 b^{12} - 8a^7 b^8 - \frac{97}{4} a^{10} b^4 + \frac{17}{4} a^{13}$

mit $\frac{3}{2} a^3 b^5 - \frac{1}{4} a^6 b$

42) $-a^8 b^4 + 15a^{11} b^5 - 48a^{14} b^6 - 20a^{17} b^7$

mit $-a^6 b + 10a^9 b^2$

43) $\frac{1}{3} - 6x^2 + 27x^4$ mit $\frac{1}{3} + 2x + 3x^2$

44) $6a^6 + 122a^4 + 458\frac{2}{3}a^3 - 1650\frac{2}{3}a^2 + 420\frac{2}{3}a + 494$

mit $a^2 + \frac{26}{3}a - 19$

45) $\frac{3}{4}x^5 - 4x^4 + \frac{77}{8}x^3 - \frac{43}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + 27$

mit $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$

46) $a^6 + 2a^3x^3 + x^6$ mit $a^2 - ax + x^2$

47) $a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6$ mit $a^2 - 4ax + 4x^2$

48) $4a^4 - 9b^2a^2 + 6b^3a - b^4$

mit $2a^2 - 3ba + b^2$

49) $2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$

mit $2a^2 - 3ab + 4b^2$

50) $18 - 35x + 96x^2 - 101x^3 + 131x^4$

$- 78x^5 + 51x^6 - 18x^7$

mit $9 - 4x + 6x^2 - 3x^4$

Potenzen und Wurzeln.

1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}} =$

2) $a^{\frac{2}{3}} = b, \quad b^{8} =$

3) $\sqrt[3]{a^{2}} = b, \quad b^{7} =$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3} \cdot \overline{1}} =$

5) $\frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}} =$

6) $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} : a^{\frac{5}{6} \cdot \overline{1}} =$

7) $256^{\frac{5}{12}} = \quad ; \quad 243^{\frac{3}{4}} =$

8) $\sqrt{1690} + \sqrt{2890} + \sqrt{2250} =$

9) $\left(4\sqrt{\frac{7}{3}} + 5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{7}{3}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$

10) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{3} =$

11) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

12) $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{5} =$

13) $\sqrt{2028} + \sqrt{2700} - \sqrt{3468} =$

14) $\sqrt[2]{a^{3}} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} =$

Complicirte Lineargleichungen.

26) $13{,}2x - \frac{3}{4}x + 7{,}6953 = \frac{1}{5}x + 7834{,}5$

27) $32{,}1x + 176\frac{3}{4} - x = 19\frac{1}{3}x + 7345 - \frac{2}{3}x.$

28) $3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x$

29) $0 = \frac{16}{7}x - \frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$

30) $3\frac{2}{3} - x - \frac{9}{2}x + 8 = -17 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x$

31) $11\frac{1}{2}x = \frac{11}{6}x + 66\frac{3}{8} - 5x - 9\frac{1}{4}$

32) $2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23$

33) $12\frac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7}{3}x = \frac{3}{4}x - 5\frac{3}{8}$

34) $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10}x + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}x + 15 = 0$

35) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 7x - 712 + \frac{1}{5}x$

36) $\frac{7{,}53}{18}x + 100 = \frac{2}{5}x + 3{,}86 - \frac{1}{6}x$

37) $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$

38) $\frac{3x}{4 + \frac{1}{2}x} - \frac{3}{5} = \frac{9}{7}$

39) $\frac{2}{\frac{1}{2}x - 3} + \frac{5}{\frac{3}{2}x - 9} = 4$

40) $\frac{7}{6x} + \frac{2}{2x - \frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{2x} + \frac{2}{3x}$

41) $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - bcx$

42) $\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$

43) $\frac{aax}{b - c} + cd = bx - ac$

44) $\frac{x}{a} - 1 - \frac{d}{c}x + 3ab = a..$

Quadratische Gleichungen

35) $x^2 - 8x = 14$

36) $x^2 + 6x = 27$

37) $x^2 + 52x = 1725$

38) $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$

39) $x^2 - 7x + 3\frac{1}{4} = 0$

40) $x^2 - 81x + 770 = 0$

41) $3x^2 - 2x = 65$

42) $x^2 = 47x + 1704$

43) $x^2 - 22x = 3015$

44) $x^2 + (13 - x)^2 = 89$

45) $x^2 + (40 - x)^2 = 818$

46) $12x^2 - 67x + 90 = 0$

47) $118x - 2\frac{1}{2}x^2 = 20$

48) $622x = 15x^2 + 6384$

49) $11\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}x^2 + 41\frac{1}{4} = 0$

50) $9\frac{3}{5}x - 21\frac{15}{16} = x^2$

51) $9\frac{1}{3}x^2 - 90\frac{1}{3}x + 195 = 0$

52) $\frac{18}{5}x^2 + \frac{18078}{65}x + 4728 = 0$

53) $20748 - 1616x + 21x^2 = 0$

XXIX Cursus.

Zu XXIV, XXV, XXVI, der

Fundamenta.

1.

Die Versetzungszahl, ohne Wiederholung, ist das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis mit zur Anzahl der Elemente.

Zwei Elemente 1, 2, haben zwei Versetzungen, nämlich 12 und 21, also $P = 1.2$ drei Elemente 1, 2, 3, haben 6 Versetzungen, nämlich: 123, 132, 213, 231, 312, 321, also $P = 1.2.3$.

Wenn ein Element hinzukommt, so hat es bei unveränderter Stelle soviel Versetzungen mit den übrigen, als diese unter einander Versetzungen haben: z. B.

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Man erhält also die Versetzungszahl von n Elementen, wenn man die Versetzungszahl von $n-1$ Elementen mit n multiplicirt, z. B.

$n = 4 \qquad P = 1.2.3.4$

$n = 5 \qquad P = 1.2.3.4.5$ u. s. w.

Wenn unter den Elementen einige gleiche sind, so heißt die Anzahl der gleichen eine Wiederholungsclasse. Man bestimmt die Versetzungszahl für die Wiederholungsclassen. Da die Elemente gleich sind,

so

so geben diese nur einen einzigen Versetzung. Also muß man die allgemeine Versetzungszahl mit der Versetzungszahl für die Wiederholungsklasse dividiren. Die zu versetzenden Elemente seyen z. B. 22289. Für 5 Elemente ist $P = 120$, für die Wiederholungsklasse 3 ist $P = 6$, also ist die Versetzungszahl von 22289 $P = \frac{120}{6} = 20$

2.

<u>Die Veränderungszahl aus n Elementen zur Classe m ist:</u>

<u>mit Wiederholung</u> $V = n^m$

<u>ohne Wiederholung</u> $V = n(n-1)\ldots(n-m+1)$

Wenn man nämlich jedes Element vor alle Elemente setzt, so erhält man die Veränderungen mit Wiederholung zur Classe 2, $V = n^2$.

Wenn man jedes Element vor alle Veränderungen der Classe 2 setzt, so erhält man alle Veränderungen mit Wiederholung zur Classe 3, $V = n^3$ u. s. w.

Wenn man jedes Element vor alle übrigen setzt, so erhält man alle Veränderungen ohne Wiederholung zur Classe 2, $V = n(n-1)$.

Wenn man vor jede dieser Veränderungen

jedes

jedes nicht darin enthaltene Element setzt, so erhält man die Veränderungen ohne Wiederholung zur Classe 3, $V = n(n-1)(n-2)$ u. s. w.

3.

Die Verbindungszahl aus n Elementen zur Classe m ist:

ohne Wiederholung $C = \frac{n(n-1) \ldots (n-m+1)}{1 . 2 . \ldots . m}$

mit Wiederholung $C = \frac{n(n+1) \ldots (n+m-1)}{1 . 2 \ldots m}$

Verbindungen sind diejenigen Veränderungen, in welchen die verschiedenen Versetzungen derselben Elemente nicht als verschiedene Fälle angesehen werden. Man erhält also die Verbindungszahl ohne Wiederholung, wenn man die Veränderungszahl ohne Wiederholung mit der Versetzungszahl der Classe dividirt. z. B.

zur Classe 2 .. $C = \frac{n(n-1)}{1 . 2}$

zur Classe 3 .. $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}$

zur Classe 4 . $C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$

Um die Verbindungen mit Wiederholung aus n Elementen zur Classe m zu erhalten, bildet man die Verbindungen ohne Wiederholung aus $n+m-1$ Elementen zur Classe m, und setzt darin das Element der 1, 2, 3, 4, 5 … ten Stelle

entsprechen den 0, 1, 2, 3, 4 . . fach.
Demnach ist die Verbindungszahl mit Wiederholung aus n Elementen

zur Classe 2 .. $C = \frac{n(n+1)}{1.\ 2}$

zur Classe 3 .. $C = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

zur Classe 4 .. $C = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

4.

<u>In der Entwickelung der ganzen positiven Potenz n eines Binoms $1+a$, ist der Coëfficient jeder Potenz m von a, gleich der Verbindungszahl ohne Wiederholung von n Elementen zur Classe m.</u>

Setzt man nämlich $(1+a)^n =$

$$1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 + \overset{4}{n}a^4 \ldots$$

so heißen die Coëfficienten $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n}, \overset{4}{n}$, . . . die <u>Binomialzahlen</u>. Hier wird angenommen, daß n ein absoluter Werth und eine ganze Zahl sey; dann ist $\overset{1}{n} = \frac{n}{1}$, $\overset{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$, $\overset{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

$\overset{4}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ u. s. w.

Um dieses zu beweisen, setzt man $n+1 = r$, so ist $(1+a)^r = (1+a)^m (1+a)$

Multiplicirt man die obige Reihe

$$1+\overset{1}{n}a+\overset{2}{n}a^2+\overset{3}{n}a^3+\overset{4}{n}a^4 \ldots$$

mit $1+a$, so ist $(1+a)^r =$

$$1+(\overset{1}{n}+1)a+(\overset{2}{n}+\overset{1}{n})a^2+(\overset{3}{n}+\overset{2}{n})a^3$$
$$+(\overset{4}{n}+\overset{3}{n})a^4 \ldots$$

Vermöge der obigen Beziehung ist

$$(1+a)^r = 1+\overset{1}{r}a+\overset{2}{r}a^2+\overset{3}{r}a^3+\overset{4}{r}a^4 \ldots$$

Die Binomialzahlen müssten also die Eigenschaft haben, daß:

$\overset{1}{n}+1=\overset{1}{r}$, $\overset{2}{n}+\overset{1}{n}=\overset{2}{r}$, $\overset{3}{n}+\overset{2}{n}=\overset{3}{r}$ u. s. w.

Diese Gleichungen werden durch die oben angenommenen Werthe befriedigt. Denn

$$\overset{1}{n}+1=\frac{n}{1}+1=\frac{n+1}{1}=\overset{1}{r}$$
$$\overset{2}{n}+\overset{1}{n}=\frac{n(n-1)}{1.\,2}+\frac{n}{1}=\frac{(n+1)n}{1.\,2}=\overset{2}{r}$$
$$\overset{3}{n}+\overset{2}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{n(n-1)}{1.\,2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}=\overset{3}{r}$$

u. s. w.

Wenn also die obigen Formeln der Binomialzahlen für irgend einen Namen n welcher eine ganze Zahl und ein absoluter Werth ist, gelten, so gelten sie auch für den um 1 größeren Namen $r=n+1$. Sie gelten aber für den Namen 2, da

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2$$

Also gelten sie für jeden Namen n, welcher eine ganze Zahl und ein absoluter Werth ist.

5.

Zu der Entwickelung der Potenz eines Binoms $1+a$, haben die Binomialcoefficienten, wenn der Name ein Bruch oder eine negative Zahl ist, dieselbe Form, als in dem Falle, wo der Name der Potenz eine ganze Zahl und ein absoluter Werth ist. —

Es seyen m, n, und $c = m + n$, ganze Zahlen und absolute Werthe. Man bezeichne

$$(1+a)^m = 1 + \overset{1}{m}a + \overset{2}{m}a^2 + \overset{3}{m}a^3 \ldots = M$$
$$(1+a)^n = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots = N$$
$$(1+a)^c = 1 + \overset{1}{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots = C$$

so ist nach (4)

$$\overset{1}{m} = \frac{m}{1}, \quad \overset{2}{m} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \quad \overset{3}{m} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$\overset{1}{n} = \frac{n}{1}, \quad \overset{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad \overset{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$\overset{1}{c} = \frac{c}{1}, \quad \overset{2}{c} = \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2}, \quad \overset{3}{c} = \frac{c(c-1)(c-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Es ist aber $(1+a)^m \cdot (1+a)^n = (1+a)^c$

also ist das Product der Binomialreihen M, N, der Binomialreihe C gleich, wenn m, n, ganze Zahlen und absolute Werthe sind, und zwar für jeden beliebigen Werth von a. Führt man also

die

die Multiplication aus, so müssten die Coëfficienten gleicher Potenzen von a, in MN und in C, einander gleich seyn. Die Binomialzahlen der Namen m, n, c, müssten also folgende Gleichungen befriedigen, welche mit A bezeichnet werden.

$$\overset{1}{c} = \overset{1}{m} + \overset{1}{n}$$

$$\overset{2}{c} = \overset{2}{m} + \overset{1}{m}\,\overset{1}{n} + \overset{2}{n}$$

$$\overset{3}{c} = \overset{3}{m} + \overset{2}{m}\,\overset{1}{n} + \overset{1}{m}\,\overset{2}{n} + \overset{3}{n} \quad \text{u. s. w.}$$

Es lassen sich aber die Binomialzahlen der Namen m, n, c, nach Potenzen dieser Namen entwickeln, nämlich:

$$1\,\overset{1}{m} = m$$
$$2\,\overset{2}{m} = m^2 - m$$
$$6\,\overset{3}{m} = m^3 - 3m^2 + 2m$$
$$24\,\overset{4}{m} = m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m$$
$$\vdots$$

$$1\,\overset{1}{n} = n$$
$$2\,\overset{2}{n} = n^2 - n$$
$$6\,\overset{3}{n} = n^3 - 3n^2 + 2n$$
$$24\,\overset{4}{n} = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n.$$
$$\vdots$$

$$1\,\overset{1}{c} = c$$
$$2\,\overset{2}{c} = c^2 - c$$
$$6\,\overset{3}{c} = c^3 - 3c^2 + 2c$$
$$24\,\overset{4}{c} = c^4 - 6c^3 + 11c^2 - 6c$$
$$\vdots$$

Da nun die Gleichungen A gültig sind, welches auch die Werthe der absoluten ganzen Zahlen m, n, c, seyn mögen, so müssen in den Gleichungen A <u>die Zahlcoëfficienten gleicher Potenzen von m, n, zu beiden Seiten gleich seyn.</u> Also müssen die Gleichungen A auch dann gültig bleiben, wenn man für m, n, statt ganzer Zahlen und absoluter Werthe, Brüche oder negative Zahlen setzt. Also ist <u>das Product der Binomialreihen M, N, auch dann der Binomialreihe C gleich,</u> wenn m, n, Brüche oder negative Zahlen sind.

Hat man also die Binomialreihe

$$N = 1 + \dot{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

wo der Name n ein Bruch ist, und setzt man $n + n = 2n = c$, so ist

$$N^2 = 1 + \dot{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

Setzt man $2n + n = 3n = c$, so ist

$$N^3 = 1 + \dot{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

Setzt man $3n + n = 4n = c$, so ist

$$N^4 = 1 + \dot{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

u. s. w.

Setzt man also $m \cdot n = c$, wo m eine ganze Zahl und ein absoluter Werth ist, so ist:

$$N^m = 1 + \overset{1}{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

Nimmt man aber für m diejenige ganze Zahl an, welche dem Nenner des Bruchs n gleich ist, so ist $mn = c$ eine ganze Zahl, und dem Zähler des Bruchs n gleich, also nach (4)

$$(1+a)^c = 1 + \overset{1}{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

also ist $N^m = (1+a)^c$

also ist $N = (1+a)^{\frac{c}{m}} = (1+a)^n$

Also ist auch für den Fall, wo n ein Bruch und ein absoluter Werth ist,

$$(1+a)^n = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

Verbindet man hiermit die Binomialreihe

$$M = 1 + \overset{1}{m}a + \overset{2}{m}a^2 + \overset{3}{m}a^3 \ldots$$

deren Nenner m eine negative Zahl sey, und setzt man $m + n = c$, so ist, wie oben bewiesen worden

$$(1+a)^n M = 1 + \overset{1}{c}a + \overset{2}{c}a^2 + \overset{3}{c}a^3 \ldots$$

Man nehme nun n so an, daß $m + n = 0$ also $c = 0$ sey, so ist:

$$(1+\alpha)^n M = 1$$

also $M = (1+\alpha)^{-n} = (1+\alpha)^m$

Also ist auch für den Fall wo der Exponent m eine negative ganze oder negative Bruchzahl ist, die Entwickelung gültig:

$$(1+\alpha)^m = 1 + \overset{1}{m}\alpha + \overset{2}{m}\alpha^2 + \overset{3}{m}\alpha^3 - - -$$

6.

In einer arithmetischen Reihe erster Ordnung ist jedes Glied gleich dem Anfangsgliede nebst dem Produkt der Stelle mit der Differenz.

Die Summe ist gleich dem Produkt der mittleren Zahl mit der Anzahl der Glieder.

In der arithmetischen Reihe erster Ordnung sind die ersten Differenzen einander gleich.

Stelle	0	1	2	3	- - -	n
Glieder	$a,$	$b,$	$c,$	$d,$	....	u
Differenz		α	α	α		

Hier ist $b, = a, + \alpha$

$c, = b, + \alpha = a, + 2\alpha$

$d, = c, + \alpha = a, + 3\alpha$

$\vdots$

also $u = a, + n\alpha$

Um die Summen der Glieder zu finden

Setzt man

$$S = a_1 + (a_1 + a) + (a_1 + 2a) \; - - - - \; u$$

$$S = u + (u - a) + (u - 2a) \; - - - - \; a$$

so ist $2S = (n+1)(a_1 + u)$

also $S = (n+1)(a_1 + \frac{1}{2} n a)$

Setzt man $a_1 + \frac{1}{2} n a = m$, so heißt m die mittlere Zahl, und es ist

$$S = (n+1) m$$

wo $n+1$ die Anzahl der Glieder ist.

7.

Jedes Glied einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung wird durch eine Binomialreihe ausgedrückt, welche die Stelle dieses Gliedes zum Nenner hat, und welche statt der Potenzen der Grundzahl, die Anfangsglieder der Differenzreihen enthält.

Man nehme zuerst eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung

Stellen	0	1	2	3	----	n
Glieder	a_2	b_2	c_2	d_2	---	u
1. diff:		a_1	b_1	c_1		
2 diff:			a	a		

Hier ist:

$b_1 = a_1 + a \quad c_1 = a_1 + 2a \quad d_1 = a_1 + 3a$

$$b_2 = a_2 + a_1$$
$$c_2 = b_2 + b_1 = a_2 + 2a_1 + a$$
$$d_2 = c_2 + c_1 = a_2 + 3a_1 + 3a$$
$$f_2 = d_2 + d_1 = a_2 + 4a_1 + 6a$$
u. s. w.

Die Coëfficienten sind die Binomial-zahlen der Stelle n. Es ist nämlich das der Stelle n entsprechende Glied in der Reihe erster Ordnung $= a_1 + na$. Es sey nun das der Stelle n entsprechende Glied der Reihe zweiter Ordnung $= a_2 + \overset{1}{n} a_1 + \overset{2}{n} a$, so giebt die Summe dieser beiden Glieder das der Stelle $n+1 = r$ entsprechende Glied der Reihe zweiter Ordnung $= a_2 + (\overset{1}{n}+1)a_1 + (\overset{2}{n}+\overset{1}{n})a$
$= a_2 + \overset{1}{r} a_1 + \overset{2}{r} a$

Wenn also die Formel für irgend ein Glied der Reihe zweiter Ordnung richtig ist, so gilt sie auch für alle folgenden Glieder.

Man nehme nun eine Reihe dritter Ordnung:

Stelle	0	1	2	3	4	–	–	–	n
Glieder	a_3	b_3	c_3	d_3	f_3	–	–	–	m
1. diff.	a_2	b_2	c_2	d_2					
2 diff.	a_1	b_1	c_1						
3 diff.	a	a							

Hier ist

$b_3 = a_3 + a_2$

$c_3 = b_3 + b_2 = a_3 + 2a_2 + a_1$

$d_3 = c_3 + c_2 = a_3 + 3a_2 + 3a_1 + a$

$f_3 = d_3 + d_2 = a_3 + 4a_2 + 6a_1 + 4a$

$g_3 = f_3 + f_2 = a_3 + 5a_2 + 10a_1 + 10a$

wo die Coefficienten die Binomial-zahlen der Stelle sind.

Es ist nämlich das der Stelle n entsprechende Glied in der Reihe zweiter Ordnung, wie oben bewiesen wurde,

$= a_2 + \overset{1}{n} a_1 + \overset{2}{n} a$

Es sey nun das der Stelle n entsprechende Glied in der Reihe dritter Ordnung

$= a_3 + \overset{1}{n} a_2 + \overset{2}{n} a_1 + \overset{3}{n} a$

so giebt die Summe beider das der Stelle $n + 1 = r$ entsprechende Glied in der Reihe dritter Ordnung

$= a_3 + (\overset{1}{n} + 1) a_2 + (\overset{2}{n} + \overset{1}{n}) a_1 + (\overset{3}{n} + \overset{2}{n}) a$

$= a_3 + \overset{1}{r} a_2 + \overset{2}{r} a_1 + \overset{3}{r} a$

Wenn also die Formel für irgend ein Glied der Reihe dritter Ordnung richtig ist, so gilt sie auch für alle folgenden Glieder.

Auf diese Art kann der Beweis für alle folgenden Ordnungen geführt werden.

Es beruht also auf der in (4) bewiesenen Eigenschaft der Binomialzahlen: wenn $n+1 \mathrel{\underline{C}} r$ ist, so ist:

$$\overset{1}{n}+1=\overset{1}{r} \qquad \overset{2}{n}+\overset{1}{n}=\overset{2}{r} \qquad \overset{3}{n}+\overset{2}{n}=\overset{3}{r} \quad \text{u.s.w.}$$

Es sei also u das der Stelle n entsprechende Glied einer arithmetischen Reihe, und die Anfangsglieder der Differenzreihen seien a a_1 a_2 a_3 a_4 u.s.w. so ist in einer Reihe von der

Ordnung 1 $\quad u = a_1 + \overset{1}{n}a$

Ordnung 2 $\quad u = a_2 + \overset{1}{n}a_1 + \overset{2}{n}a$

Ordnung 3 $\quad u = a_3 + \overset{1}{n}a_2 + \overset{2}{n}a_1 + \overset{3}{n}a$

Ordnung 4 $\quad u = a_4 + \overset{1}{n}a_3 + \overset{2}{n}a_2 + \overset{3}{n}a_1 + \overset{4}{n}a$

Ordnung 5 $\quad u = a_5 + \overset{1}{n}a_4 + \overset{2}{n}a_3 + \overset{3}{n}a_2 + \overset{4}{n}a_1 + \overset{5}{n}a$

8.

<u>Der Name derjenigen Potenz von 10, deren Werth einer gegebenen Zahl gleich ist, heißt der Logarithmus dieser Zahl.</u>

Die Logarithmen für die Grundzahl 10 werden durch L bezeichnet. Die Zahl sei b, so ist ihr Logarithmus $= Lb$, und die logarithmische Gleichung ist also

$$b = 10^{Lb}$$

Die Logarithmen von 1, 10, 100, 1000, u.s.w., d.h. der 0ten 1ten 2ten 3ten Ordnung von 10, sind respective 0, 1, 2, 3 u.s.w. und heißen die Kennziffer.

Wenn also die Kennziffer ein absoluter Werth ist, so ist sie um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen der dem Logarithmus zugehörigen ganzen Zahl.

9.

Der Logarithmus des Produkts mehrerer Zahlen ist der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich.

$$b = 10^{Lb} \qquad c = 10^{Lc}$$

also $$bc = 10^{Lb} \cdot 10^{Lc}$$

also $$bc = 10^{Lb + Lc}$$

aber $$bc = 10^{Lbc}$$

also $$L(bc) = Lb + Lc$$

Ebenso wird der Beweis für mehrere Faktoren geführt:

$$L(bcd) = Lb + Lc + Ld \text{ u.s.w.}$$

Hieraus folgt auch, daß der Logarithmus eines Quotienten gleich dem Unterschied des Logarithmus des Dividendus über den Logarithmus des Divisors ist:

$$L\left(\frac{b}{c}\right) = Lb - Lc$$

10.

Der Logarithmus eines ächten Bruchs ist eine negative Zahl.

Da $\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = 1$, und $L1 = 0$

so ist $L\frac{c}{d} + L\frac{d}{c} = 0$

Ist aber $\frac{c}{d}$ ein ächter Bruch, so ist $\frac{d}{c}$ ein unächter Bruch, also $L\frac{d}{c}$ ein absoluter Werth, folglich, vermöge der obigen Gleichung $L\frac{c}{d}$ eine negative Zahl.

Der Logarithmus eines ächten Bruchs wird gewöhnlich so angegeben, daß man die Ergänzung des absoluten Werths seines negativen Logarithmus, zu 10 nimmt z. B.

$$L\frac{5}{4} = 0,09691$$

$$L\frac{4}{5} = \bar{0},09691 = 9,90309$$

Hieraus folgt noch, daß, wenn mit einer Zahl dividirt werden, also ihr Logarithmus subtrahirt werden soll, statt dessen die Ergänzung dieses Logarithmus zu 0, addirt werden kann. Diese Ergänzung wird mit einem

* bezeichnet.

z. B. die geographische Meile mit der russischen Werst zu vergleichen. Die geographische Meile ist der 5400 ste Theil des Meridienumfangs, der 360 ste Theil dieses Umfangs ist 57008,715 Toisen, die Toise ist 76,7366 engl. Zoll.

Toisen	57008,715	4,75593
	15	* 8,82391
engl. Zoll	76,7366	1,88500
	12	* 8,92082
Engl. Fuß	3500	* 6,45593
$a =$	6,9437	0,84159
$b =$	0,14402	9,15841

11.

Um den Logarithmus der Potenz einer Zahl zu erhalten, wird der Logarithmus der Zahl mit dem Nenner der Potenz multiplicirt.

$$b = 10^{Lb}$$

also $b^n = 10^{n\,Lb}$

also $Lb^n = n\,Lb$

12.

Um den Logarithmus der Wurzel einer Zahl zu erhalten, wird der Logarithmus der Zahl mit dem Nenner der Wurzel dividirt.

Es sey $\sqrt[n]{c} = b$, also $c = b^n$, so ist (: 11)

$Lc = n\,Lb$ also $Lb = \frac{Lc}{n}$.

13.

Die geometrische Reihe ist die Entwickelung der ersten gegenwärtigen Potenz eines Binoms.

das Binom hieß $1-c$, so ist seine erste gegenseitige Potenz $= \frac{1}{1-c} = (1-c)^{\overline{1}}$

Aber $\frac{1}{1-c} = (1-c)^{\overline{1}} = 1 + c + c^2 + c^3 - - -$

Also $\frac{c^m}{1-c} = c^m + c^{m+1} + c^{m+2} + c^{m+3} - - -$

Setzt man also $n+1 = m$, so ist:

$$\frac{1}{1-c} - \frac{c^m}{1-c} = 1 + c + c^2 - - - + c^n$$

also $$\frac{a}{1-c} - \frac{ac^m}{1-c} = a + ac + ac^2 - - + ac^n$$

Hier heißt die Reihe rechts eine geometrische Reihe, a das Anfangsglied, c der Exponent, n die Stelle, $n+1 = m$ die Anzahl der Glieder, $u = ac^n$ das der Stelle entsprechende Glied, $\frac{a}{1-c} = b$ die Grenze der Reihe und $s = b - bc^m$ die Summe der Reihe.

Wenn $c > 1$, so setzt man die Grenze der Reihe $\frac{a}{c-1} = b$, und dann ist die Summe der Reihe $s = bc^m - b$.

14.

Der Ausdruck eines Kapitals mit Zinsen und Zwischenzinsen ist gleich dem Produkte des baren Werths mit derjenigen Potenz des Zinsfußes, deren

Wenn der Anzahl der Termine gleich ist.
Umgekehrt ist der bare Werth gleich dem Quotienten welchen die Division des Anwachses mit jener Potenz des Zinsfußes giebt.
Die Anzahl der Termine ergiebt sich, wenn der Unterschied der Logarithmen des Anwachses und baren Werths mit dem Logarithmus des Zinsfußes dividirt wird.

Das Capital 100 giebt in einem Termine den Zins p, welcher die Procentzahl heißt. Aus 100 wird also in einem Termine $100 + p$. Folglich wird aus 1, in einem Termine, $1 + \frac{p}{100} = c$. Diese Zahl c heißt der Zinsfuß. Aus dem baren Werthe b wird also in

1 Termine der Anwachs $a = bc$
2 Terminen der Anwachs $a = bc^2$
3 Terminen der Anwachs $a = bc^3$
n Terminen der Anwachs $a = bc^n$

Umgekehrt ist also $b = \frac{a}{c^n}$

Ferner ist $La = Lb + Lc^n$

also $La - Lb = Lc^n = n\,Lc$

also $n = \frac{La - Lb}{Lc}$

15.

<u>Die Tilgung einer Schuld durch eine Rente geschieht in soviel Terminen, als erforderlich sind, damit die Dotation zur Rente anwachse.</u>

Statt der Zinsen wird am Ende jedes Termins die Rente r gezahlt. Die Schuld sei S, so ist

$$S = \frac{r}{c} + \frac{r}{c^2} + \frac{r}{c^3} - - - + \frac{r}{c^{n-1}} + \frac{r}{c^n}$$

$$Sc = r + \frac{r}{c} + \frac{r}{c^2} + \frac{r}{c^3} - - + \frac{r}{c^{n-1}}$$

also $S(c-1) = r - \frac{r}{c^n}$

Nun ist $S(c-1) = f$, der Zins von S in einem Termin, also

$$f = r - \frac{r}{c^n}$$

Hier heißt $r - f = d$ die <u>Dotation</u>

also $\quad dc^n = r \qquad n = \frac{Lr - Ld}{Lc}$

Setzt man $\frac{r}{c-1} = H$, so heißt H das <u>Rentenkapital</u>, also:

$$(H - S)\, c^n = H$$

Setzt man $1 - \frac{1}{c^n} = k$, so ist

$$S = Hk \text{ und } f = rk$$

Aus dem Zinsfuß c und der Anzahl n der Termine berechnet man die Zahl k,

welche immer ein ächter Bruch ist.
Ist nur die Rente r gegeben, so berechnet man das Rentencapital $H = \frac{r}{c-1}$, und erhält dann das Antrittscapital $S = Hk$
Ist aber das Antrittscapital S gegeben, so berechnet man daraus den Zins $f = S(c-1)$ und erhält dann die Rente $r = f/k$

Wenn aber Ende jedes Termins statt des Zinses die Rente r gezahlt wird, so ist der baare Werth der Schuld

$$Q = S \pm Hk$$

Man nimmt das obere Zeichen, wenn der Gläubiger, das untere Zeichen wenn der Schuldner die Rente zahlt.
Der Anwuchs der Schuld nach n Terminen ist

$$T = Sc^n \pm Hc^n k$$

Uebungsbeispiele.

Arithmetische Reihen.

1) 1 Ordn. $a_1 = 7,\ a = 3,\ n = 20,\ u = \ ;\ S = \ ;$
2) 1 Ordn. $a_1 = 5,\ a = \frac{1}{2},\ n = 79,\ u = \ ;\ S = \ ;$
3) 2 Ordn. die 97ste dreieckige Zahl =
4) 2 Ordn. die 31ste fünfeckige Zahl =
5) 2 Ordn. die 63ste sechseckige Zahl =

6) die 100 ste 4 eckigen Pyramidenzahl =

Anwendung der Logarithmen.

1) $\sqrt{375\frac{5}{7}} =$

2) $0,27589 \cdot 0,003834 \cdot 4,23712 =$

3) $\sqrt[3]{0,00273} =$

4) $(0,265)^7 =$

5) geom. R. $a = 2,\ c = 2,\ n = 38$

6) geom. R. $a = 2,\ c = 2,5,\ n = 29$

7) geom. R. $a = 5,\ c = \frac{7}{5},\ n = 19$

Zinsrechnung.

8) $c = 1,04,\quad n = 25,\quad b = 30000,\quad a =$

9) $c = 1,04,\quad n = 12,\quad b = 5500,\quad a =$

10) $c = 1,04,\quad n = 20,\quad b = 7500,\quad a =$

11) $c = 1,05,\quad n = 19,\quad b = 25843,\quad a =$

12) $c = 1,05,\quad n = 37,\quad b = 11000,\quad a =$

13) $c = 1,06,\quad n = 10,\quad b = 3595,\quad a =$

14) $c = 1,06,\quad n = 30,\quad b = 15000,\quad a =$

15) $c = 1,04,\quad n = 12,\quad a = 2500,\quad b =$

16) $c = 1,04,\quad n = 10,\quad a = 12000,\quad b =$

17) $c = 1,04,\quad n = 50,\quad a = 1000000,\quad b =$

18) $c = 1,04,\quad n = 20,\quad a = 16000,\quad b =$

19) $c = 1,04,\quad b = 1000,\quad a = 2000,\quad n =$

20) $c = 1,05,\quad b = 1000,\quad a = 3000,\quad n =$

21) $c=1{,}06$, $b=1000$, $a=4000$, $n=$

22) $c=1{,}04$, $b=10000$, $a=15000$, $n=$

23) $c=1{,}04$, $b=700$, $a=10000$, $n=$

24) $c=1{,}04$, $b=7500$, $a=18000$, $n=$

25) $c=1{,}045$, $b=8000$, $a=15000$, $n=$

26) $c=1{,}04$, $f=400$, $r=600$, $n=$

27) $c=1{,}04$, $f=400$, $r=500$, $n=$

28) $c=1{,}05$, $f=5$, $r=10$, $n=$

29) $c=1{,}04$, $n=30$, $r=800$, $S=$

30) $c=1{,}06$, $n=40$, $r=600$, $S=$

31) $c=1{,}05$, $n=37$, $r=300$, $S=$

32) $c=1{,}04$, $n=35$, $r=500$, $S=$

33) $c=1{,}05$, $n=25$, $r=1000$, $S=$

34) $c=1{,}04$, $n=20$, $r=2000$, $S=$

35) $c=1{,}06$, $n=18$, $r=2500$, $S=$

36) $c=1{,}05$, $n=50$, $S=0$, $r=1000$, $T=$

37) $c=1{,}04$, $n=20$, $S=0$, $r=1300$, $T=$

38) $c=1{,}04$, $n=30$, $S=10000$, $r=$

39) $c=1{,}04$, $n=10$, $S=10000$, $r=500$, $T=$

40) $c=1{,}04$, $n=6$, $S=10000$, $r=800$, $T=$