TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

431

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XX

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 431 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XX

Algebra ja geomeetria

Алгебра и геометрия

ТАРТУ 1977

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛУГРУПП, БОГАТЫХ ЭНДОМОРФИЗМАМИ

Е.Габович

Кафедра алгебры и геометрии

Х.Сильдос

Кружок СНО при кафедре алгебры и геометрии

В работе [5] описаны абелевы группы, любая подгруппа которых является эндоморфным образом всей группы, а в [7] найдены все абелевы группы, эпиморфно отображающиеся на любую свою подгруппу с конечным числом образующих (к этому же циклу исследований относится и работа [8]). Естественно изучать и другие алгебраические системы с аналогичными свойствами.

В настоящей работе в некоторых частных случаях находится решение следующей проблемы, сформулированной одним из авторов в [4] (проблема I2): "Описать полугруппы (абелевы полугруппы, нильпотентные полугруппы), эндоморфным образом которых служит: а) любая их подполугруппа, б) любая их счетная подполугруппа, в) любая их конечная подполугруппа, г) любая их конечнопорожденная подполугруппа".

Полугруппу S будем называть Γ-полугруппой (Φ-полугруппой), если для любой ее подполугруппы (конечнопорожденной подполугруппы) T существует эндоморфизм полугруппы S, отображающий S на подполугруппу T. Гомоморфизмы на некоторую полугруппу будем в настоящей работе называть эпиморфизмами.

В работе [6] полностью описаны идемпотентные ($e^2 = e$ для любого элемента e) полугруппы, каждая подполугруппа которых является Φ-полугруппой или Γ-полугруппой. Полугруппу S будем называть Γ^*-полугруппой (Φ^*-полугруппой), если любая ее подполугруппа является Γ-полугруппой (Φ-полугруппой). Через Γ будем обозначать класс всех Γ-полугрупп. Аналогично определяются классы Γ^* и Φ^*. Иногда мы будем рассматривать множество $\mathfrak{K} = \{\Gamma^*, \Gamma, \Phi^*, \Phi\}$. Ясно, что

$$\Gamma^* \subset \Gamma \subset \Phi, \quad \Gamma^* \subset \Phi^* \subset \Phi, \qquad (0.1)$$

причем, как отмечено в [6], все классы из $\mathfrak{R}$ различны уже в случае, когда рассматриваются только абелевы идемпотентные полугруппы.

Для других алгебраических систем можно пользоваться аналогичной терминологией. Так, для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}$ можно, например, говорить о $\mathfrak{X}$-группах. Для точного определения этого понятия слова "полугруппа" и "подполугруппа" в определении $\mathfrak{X}$-полугруппы следует заменить словами "группа" и "подгруппа". При этом класс $\mathfrak{X}$-полугрупп, являющихся группами, оказывается более узким, чем класс $\mathfrak{X}$-групп.

Примером Γ-полугруппы может служить свободная в некотором многообразии полугруппа с бесконечным множеством (мощности τ) свободных образующих. Любая ее подполугруппа имеет мощность, не превосходящую τ и, следовательно, является эпиморфным образом всей полугруппы. Вместо многообразия здесь можно рассмотреть любой класс полугрупп, содержащий все подполугруппы своих свободных полугрупп.

Большое число примеров отдельных $\mathfrak{X}$-полугрупп при разных $\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}$ и целых классов таких полугрупп будет приведено ниже. В частности, примеры классов групп, являющихся $\mathfrak{X}$-полугруппами, рассмотрены в первом параграфе статьи.

§1. Φ-полугруппы, являющиеся группами

Предложение 1.1. Для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}$ группа G тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$-полугруппой, когда она - периодическая $\mathfrak{X}$-группа. Абелева группа G тогда и только тогда является $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}^*$- или Γ-полугрупой, когда она периодическая группа, удовлетворяющая, соответственно, условию:

АΦ: из $A \neq 0$, где A - максимальная полная подгруппа в G, следует, что G/A - неограниченная группа;

АΦ^*: група G - редуцированная;

АΓ: ее каждая примарная компонента является гомоморфным образом своей базисной подгруппы.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение предложения.

Необходимость. Предположим, что группа G является Φ-полугруппой (Γ-полугруппой). Если бы некоторый ее элемент g имел бесконечный порядок, то существовал бы эпиморфизм группы G на не являющуюся группой подполугруппу $\{g, g^2, \dots, g^n, \dots\}$. Следовательно, G - периодическая группа. Будучи Φ-полугруппой (Γ-полугруппой), она и подавно является Φ-группой (Γ-группой). Если она к тому же оказывается Φ^*-полугруппой (Γ^*-полугруппой), то любая ее подполугруппа, в том числе и любая ее подгруппа, является Φ-полугруппой (Γ-полугруппой), а потому, и подавно, Φ-группой (Γ-группой).

Достаточность. Если G - периодическая группа, то любая ее подполугруппа является ее подгруппой. Следовательно, если G является Φ-группой (Φ^*-группой, Γ-группой или Γ^*-группой), то она же оказывается и Φ-полугруппой, Φ^*-полугруппой, Γ-полугруппой или Γ^*-полугруппой, соответственно.

Перейдем к доказательству второго утверждения и исследуем каждый из рассматриваемых здесь случаев в отдельности.

В случае абелевых групп, являющихся Φ-полугруппами, утверждение предложения непосредственно следует из доказанного первого утверждения предложения и из результатов работы [7] (см. стр. 73), в которой показано, что абелева периодическая группа G тогда и только тогда является Φ-группой, когда она удовлетворяет условию АФ (ниже мы будем называть этот последний результат просто "леммой").

Пусть теперь G - абелева группа, являющаяся Φ^*-полугруппой. Тогда по доказанному первому утверждению предложения, она является Φ^*-группой. Если бы в G максимальная полная подгруппа A не равнялась нулю, то A не являлась бы Φ-группой: A/A - ограниченная группа вопреки лемме. Следовательно, $A = 0$ и G - редуцированная группа.

Наоборот, если G - редуцированная группа, то таковы же и все ее подгруппы. Но, ввиду леммы, любая редуцированная абелева периодическая группа является Φ-группой. Следовательно, G является Φ^*-группой и, по предположению, Φ^*-полугруппой.

Пусть, наконец, G - абелева группа, являющаяся Γ-полугруппой. По доказанному первому утверждению предложения она является периодической Γ-группой. Пусть G_p - ее p-примарная компонента, а H_p - произвольная подгруппа в G_p. Пусть F - подгруппа группы G, получающаяся из разложения G в прямую сумму примарных компонент в результате замены прямого слагаемого G_p на H_p. Покажем, что при любом гомоморфизме φ группы G на F (такие гомоморфизмы существуют, так как G является Γ-группой) группа G_p отображается на свою подгруппу H_p. Действительно, так как гомоморфный образ p-примарного элемента p-примарен, а все p-примарные элементы из F лежат в H_p, то $G_p\varphi \subset H_p$. Аналогичные включения $G_q\varphi \subset G_q$ имеют место и для других примарных компонент. Если бы хотя бы одно из них было строгим, то строгим было бы и включение

$$G\varphi = (\Pi G_q)\varphi = \Pi(G_q\varphi) \subset F.$$

Это противоречие с эпиморфностью φ и показывает, что φ индуцирует эпиморфизм G_p на H_p. Следовательно, G_p является Γ-группой. Но в [5] (стр. 80) показано, что абелева примарная группа тогда и только тогда является Γ-группой, когда она является гомоморфным образом своей базисной подгруппы. Поэтому любая примарная компонента группы G является гомоморфным образом своей базисной подгруппы.

Наоборот, если любая примарная компонента абелевой периодической группы G является гомоморфным образом своей базисной подгруппы, то, как мы отметили, каждая ее компонента будет являться Γ-группой. Пусть H - подгруппа группы G, а

$$G = \Pi G_q, \quad H = \Pi H_q -$$

разложения групп G и H на примарные компоненты. Так как G_q содержит все q-примарные элементы группы G, то $H_q \subseteq G_q$. Поэтому существует семейство эпиморфизмов $\varphi_q : G_q \longrightarrow H_q$, склеив которые, мы и получим эпиморфизм группы G на H. Следовательно, G является Γ-группой, а потому и Γ-полугруппой.

Предложение доказано.

Следствие. Подгруппа абелевой группы, являющейся Φ-полугруппой, может не быть Φ-полугруппой.

Действительно, максимальная полная подгруппа, если она отлична от нуля, не является Φ-подгруппой абелевой периодической Φ-группы.

§2. Множества образующих Φ-полугрупп

Будем обозначать символом $\langle X \rangle$ или $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle$ подполугруппу некоторой полугруппы, порожденную ее подмножеством $\mathfrak{X}=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Если будет нужно подчеркнуть, что $\mathfrak{X}$ является неприводимым порождающим множеством для полугрушы $\langle \mathfrak{X} \rangle$, то будем писать $\langle\langle \mathfrak{X} \rangle\rangle$.

Лемма 2.I. (Лемма об образующих). Если в Γ-полугруппе (Φ-полугруппе) S существует система образующих мощности τ, то и в каждой ее подполугруппе (с конечным числом образующих) T найдется система образующих, мощность которой не превышает τ.

Доказательство. Пусть $\langle a_\alpha, \alpha \in I \rangle$ - система образующих мощности τ полугруппы S. Так как S является Γ-полугруппой (Φ-полугруппой), то существует эпиморфизм φ полугруппы S на подполугруппу T. Тогда множество $\{a_\alpha \varphi \mid \alpha \in I\}$ является системой образующих полугруппы T и имеет мощность, не превышающую τ.

Лемма доказана.

Предложение 2.2. Любая Φ-полугруппа является или периодической полугруппой или полугруппой без кручения, всякая система образующих которой бесконечна.

Доказательство. Пусть Φ-полугруппа S не является периодической. Тогда она содержит элемент x бесконечного порядка. Так как $S \in \Phi$, то существует эпиморфизм полугруппы S на ее бесконечную моногенную подполугруппу $\langle x \rangle$. Но гомоморфный образ элемента конечного порядка является сам элементом конечного порядка, а все элементы в $\langle x \rangle$ имеют бесконечный порядок. Поэтому в S нет элементов конечного порядка, т.е. S - полугруппа без кручения.

Покажем методом "от противного", что S не может иметь конечной системы образующих. Предположим, что такая система существует и содержит n образующих. Пусть $m > n$. Рассмотрим в S подполугруппу $A=\{x^m, x^{m+1}, \dots\}$. По лемме об образующих эта подполугруппа должна иметь систему $\mathfrak{X}$ образующих, состоящую не более, чем из n элементов. Однако любая система образующих этой подполугруппы должна содержать элемент x^m, который не равен произведению никаких двух элементов полугруппы A (из такого равенства, как известно, следовала бы конечность порядка элемента x). Система $\mathfrak{X}$ должна также содержать элементы $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots$ $\dots, x^{2m-1}$, которые также не равны произведению никаких двух элементов из A: $x^{m+k} \cdot x^{m+l} = x^{2m+k+l} \neq x^{m+p}$ при $p<m$, $k, l, p \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Следовательно, система $\mathfrak{X}$ образующих содержит не менее m различных элементов.

Это противоречие (напомним, что $m > n$) и показывает, что S не имеет ни одной конечной системы образующих.

Предложение доказано.

Следствие 2.3. Бесконечная моногенная полугруппа не является Φ-полугруппой.

Действительно, она является полугруппой без кручения, но обладает и конечными системами образующих.

Следствие 2.4. Классы Γ и Φ не замкнуты относительно взятия подполугрупп и гомоморфных образов.

Действительно, свободная полугруппа с бесконечным множеством образующих, бесконечная моногенная подполугруппа которой является и ее подполугруппой и гомоморфным образом, к этим классам не принадлежит.

Заметим, что непосредственно из определения классов Γ^* и Φ^* следует их замкнутость относительно взятия подполугрупп.

Следствие 2.5. Любая Φ^*-полугруппа является периодической.

Действительно, все подполугруппы Φ^*-полугруппы, в том числе и ее моногенные подполугруппы, являются Φ-полугруппами. Однако, если Φ^*-полугруппа не имеет кручения, то любая ее моногенная подполугруппа бесконечна и по следствию 2.3 не является Φ-полугруппой. Следовательно, по предложению 2.2, Φ^*-полугруппа является периодической.

Следствие 2.6. Свободное произведение Φ^*-полугрупп или конечного числа Φ-полугрупп с конечным числом образующих, или любых полугрупп, среди которых хотя бы одна содержит элемент конечного порядка, не является Φ-полугруппой.

Действительно, в первом и третьем случаях свободное произведение является, вопреки предложению 2.2, смешанной полугруппой, а во втором - непериодической полугруппой с конечным числом образующих.

Предложение 2.7. Пусть A и B - полугруппы, свободные, соответственно, в классах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и обладающие конечными системами свободных образующих, состоящими из одинакового числа элементов. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и класс $\mathfrak{B}$ содержит все подполугруппы полугруппы B. Тогда, если A является Γ-полугруппой, то и B оказывается Γ-полугруппой.

Доказательство. Пусть B' – произвольная подполугруппа полугруппы B. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – системы свободных образующих полугрупп A и B, соответственно. Определим $a_i\varphi = b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, то $B \in \mathfrak{A}$ и поэтому отображение φ, определенное на множестве свободных образующих свободной в $\mathfrak{A}$ полугруппы A можно продолжить до эпиморфизма полугруппы A на B.

Обозначим через A' полный прообраз полугруппы B' при этом эпиморфизме φ. Так как A является Γ-полугруппой, то по лемме об образующих подполугруппа A' полугруппы A обладает множеством образующих, состоящим из $m \le n$ элементов. Таким множеством является, например, система

$$\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_m\} = \{a_1\psi, a_2\psi, \ldots, a_n\psi\},$$

где ψ – эпиморфизм полугруппы A на A' (см. диаграмму ниже), существование которого вытекает из определения Γ-полугруппы. Но тогда полугруппа $B' = A'\varphi$ обладает системой

$$\{a'_1\varphi, a'_2\varphi, \ldots, a'_m\varphi\} = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_k\}$$

образующих, состоящей из $k \le m$ элементов.

Покажем теперь, что B можно эпиморфно отобразить на B', т.е. что существует эпиморфизм χ, превращающий в коммутативную следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle \arrow[d, "\chi"] \\
\begin{matrix}\langle a_1\psi, a_2\psi, \ldots, a_n\psi\\ = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_m\rangle = A'\end{matrix} \arrow[r, "\varphi"] & B' = \langle a'_1\varphi, a'_2\varphi, \ldots, a'_m\varphi\rangle = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_k\rangle
\end{tikzcd}$$

Так как $k \le n$, то определим

$$b_1\chi = b'_1,\quad b_2\chi = b'_2,\ \ldots,\ b_k\chi = b_{k+1}\chi = \ldots = b_n\chi = b'_k.$$

Класс $\mathfrak{B}$ замкнут относительно взятия подполугрупп полугруппы B. Поэтому $B' \in \mathfrak{B}$ и из свободности B в $\mathfrak{B}$ вытекает, что определенное на множестве свободных образующих полугруппы B отображение χ продолжается до эпиморфизма всей полугруппы B на ее подполугруппу B'.

Ввиду произвольности подполугруппы B' это и доказывает, что B является Γ-полугруппой.

Предложение доказано.

§3. Подполугруппы ϕ-полугрупп

Предложение 3.I. Моногенная полугруппа тогда и только тогда является ϕ-, Γ-, ϕ^*- или Γ^*-полугруппой, когда она имеет тип $(1,d)$, $(2,d)$ или $(3,2d-1)$, где d - любое натуральное число.

Доказательство. Необходимость. Ввиду включений (0,I) достаточно показать, что любая моногенная ϕ-полугруппа имеет один из перечисленных в формулировке предложения типов.

Рассмотрим моногенную ϕ-полугруппу $\langle x\rangle$. По следствию 2.3 она не может быть бесконечной. Предположим, что она имеет тип (h,p), где $h>3$. Рассмотрим в $\langle x\rangle$ подполугруппу $\langle x^2, x^3, \ldots\} = A$ и эпиморфизм $\varphi : \langle x\rangle \longrightarrow A$. Так как $h > 3$, то x^2 не равен никакому другому элементу полугруппы A и, следовательно, ясно, что $x\varphi = x^2$, ибо в противном случае $x^2 \notin \langle x\rangle\varphi = A$. Поэтому $x^k\varphi = x^{2k}$ и $x^3 = x^l\varphi = x^{2l}$ при некотором l. Следовательно, предположение $h>3$ приводит к противоречию с самим собой: последнее из доказанных равенств возможно лишь при $h \leq 3$.

Итак, $h\leq 3$. Если $h=3$, то из равенства $x^3 = x^{2l}$, выводимого также, как в предыдущем абзаце, следует, что p нечетно, т.е. $p = 2d-1$ при некотором d.

Достаточность. Ввиду включений (0,I) достаточно показать, что любая моногенная полугруппа $S = \langle x\rangle$, имеющая один из перечисленных в формулировке предложения типов (h,p), является Γ^*-полугруппой.

Отметим сначала, что любая циклическая группа конечного порядка является Γ-полугруппой. Действительно, любая ее подполугруппа является ее подгруппой и притом циклической. Так как при этом ее порядок оказывается делителем порядка всей группы, то вся группа может быть эпиморфно отображена на эту свою циклическую подгруппу.

Если $h=1$, т.е. S - конечная циклическая группа, то $S\in\Gamma^*$, ибо любая ее подполугруппа, будучи также циклической группой, является, как было отмечено, Γ-полугруппой.

Пусть $h=2$ и T – собственная подполугруппа в S. Так как $S=\{x, x^2=x^{2+\rho}, x^3, \dots, x^{\rho+1}\}$ и T, будучи собственной подполугруппой не содержит образующего элемента x полугруппы S, то T является подполугруппой конечной циклической группы $\{x^2, x^3, \dots, x^{\rho+1}\}$. Поэтому T сама является конечной циклической группой. Эпиморфизм $S \to T$ построим, отобразив x в образующий элемент группы T. Итак, $S \in \Gamma$. Но T, как конечная циклическая группа, тоже является Γ-полугруппой, так что $S \in \Gamma^*$.

Наконец, если $h=3$ и $\rho = 2d-1$, то возможны два случая. Если подполугруппа $T \subset \{x^3, x^4, x^5, \dots\}$, то повторяются рассуждения предыдущего абзаца. Если же $T = S\setminus\{x\}$, то отображение $x \to x^2$ порождает, ввиду равенства $x^3 = x^{2d+2}$, эпиморфизм φ полугруппы S на T, определенный формулой $x^k\varphi = x^{2k}$. Действительно,

$$x^2 = x\varphi,\quad x^3 = x^{d+1}\varphi = x^{2d+2},\quad x^4 = x^2\varphi,\quad x^5 = x^{d+2}\varphi = x^{2d+4}$$

и т.д. Сама подполугруппа $T \in \Gamma$, ибо, ввиду того же равенства, полугруппа

$$T = \{x^2, x^3 = x^{2d+2} = (x^2)^{d+1}, x^4 = (x^2)^2, x^5 = (x^2)^{d+2}, \dots\}$$

порождена элементом x^2 и имеет тип $(2,t)$ при некотором натуральном t, а этот случай рассмотрен в предыдущем абзаце.

Предложение доказано.

<u>Следствие 3.2</u>. Для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{K}$ класс моногенных $\mathfrak{X}$-полугрупп замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подполугрупп.

Действительно, моногенная Φ-полугруппа имеет тип $(1,d)$, $(2,d)$ или $(3,2d-1)$. Как мы видели в ходе доказательства предложения, любая ее подполугруппа тоже имеет один из этих типов, т.е. является сама $\mathfrak{X}$-полугруппой. Ясно, что гомоморфный образ такой моногенной полугруппы также имеет один из трех названных типов и поэтому тоже оказывается $\mathfrak{X}$-полугруппой.

<u>Предложение 3.3</u>. Если множество E всех идемпотентов Γ-полугруппы (Φ-полугруппы) S является подполугруппой в S, то $E \in \Gamma$ ($E \in \Phi$).

<u>Доказательство</u>. Пусть F – подполугруппа (с конечным числом образующих) полугруппы E. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : S \longrightarrow F$ и покажем, что $E\varphi = F$ Так как $S\varphi = F$,

то $E\varphi \in F$. Если $f \in F$, $x \in S$ и $x\varphi = f$, то и $x^n\varphi = f$ для всех n. По предложению 2.2 полугруппа S является периодической полугруппой, так что найдется такое n, что $x^n = e \in E$. Следовательно, $e\varphi = f$, $F \subset E\varphi$ и $F = E\varphi$.

Предложение доказано.

Множество S всех элементов полугруппы S, каждый из которых порождает циклическую подгруппу, назовем групповым ядром полугруппы S, а множество $S'' = \{x \in S \mid x^2 \in S'\}$ назовем квадратной оболочкой группового ядра S'.

<u>Предложение 3.4</u>. Множество E всех идемпотентов и групповое ядро Φ^*-полугруппы S, а также его квадратная оболочка являются подполугруппами полугруппы S.

<u>Доказательство</u>. Пусть $S \in \Phi^*$. Мы будем неоднократно, не оговаривая этого дополнительно, пользоваться тем, что любая моногенная подполугруппа Φ^*-полугруппы является Φ-полугруппой и, следовательно, по предложению 3.I, имеет тип (I, d), (2, d) или (3, 2d -I).

Предположим, что $ef \in E$. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : \langle e,f\rangle \longrightarrow \langle ef\rangle$. Ясно, что $\langle e\varphi, f\varphi\rangle = \langle ef\rangle$. Если $\langle ef\rangle$ не является группой, то ef входит в любое порождающее множество моногенной полугруппы $\langle ef\rangle$, так что $e\varphi = ef$ или $f\varphi = ef$ (в противном случае $ef \notin \langle e,f\rangle\varphi$). Следовательно, $ef \in E$. Предположим поэтому, что $\langle ef\rangle$ – группа порядка n: $ef = (ef)^{n+1}$. Поскольку $(ef)^n$ – ее единственный идемпотент, то

$$e\varphi = f\varphi = (ef)^n \qquad \text{и} \qquad \langle e,f\rangle\varphi = (ef)^n,$$

так что $\langle e,f\rangle\varphi = (ef)^n$ и из эпиморфности φ вытекает, что группа $\langle ef\rangle$ одноэлементна, так что $ef \in E$. Итак, E является подполугруппой в S.

Пусть $S \in \Phi^*$ и y лежит в групповом ядре класса кручения $K_f = \{z \in S \mid \exists k : z^k = f\}$, а x – класса K_e. Предположим, что $xy \in K_g$. Если $\langle xy\rangle$ – моногенная полугруппа типа (2, d) или (3,2d -I), то рассмотрим эпиморфизм $\varphi : \langle x,y\rangle \longrightarrow \langle xy\rangle$. Рассуждение, аналогичное проведенному в предыдущем абзаце, показывает, что $x\varphi = xy$ или $y\varphi = xy$, ибо в противном случае $\langle x,y\rangle\varphi \neq \langle xy\rangle$. Пусть, для определенности $x\varphi = xy$. Тогда из равенства $x \cdot x' = e$, справедливого для некоторого $x' \in \langle x\rangle$, получим $x\varphi \cdot x'\varphi = xy \cdot x'\varphi = ef = g$, т.е. xy обладает в K_g обратным элементом, вопреки предположению о типе полугруппы $\langle xy\rangle$. Следовательно,

$\langle xy\rangle$ имеет тип (I, d), т.е. является группой и xy принадлежит S', т.е. групповое ядро полугруппы S является подгруппой в S.

Наконец, если $xy\in S''$, причем x^2 и y^2 лежат в групповых ядрах классов кручения K_e и K_f, соответственно, то $xy\in K_g$. Если $\langle xy\rangle$ - типа (3,2 d-I), а φ - эпиморфизм полугруппы $\langle x,y\rangle$ на $\langle xy\rangle$, то опять же или $x\varphi = xy$, или $y\varphi = xy$. Поэтому или из равенства $x^2\cdot e = x^2$, или из равенства $y^2 f = y^2$ будет следовать, что $(xy)^2 g = (xy)^2$, т.е. что $(xy)^2$ лежит в групповом ядре класса K_g (на самом деле $\langle xy\rangle$ не может иметь в рассматриваемом случае тип (3,2d-I), ибо в такой моногенной полугрупле первая степень образующего, принадлежащая групповому ядру - это его куб). Если же $\langle xy\rangle$ имеет тип (2, d) или (I, d), то включение $(xy)^2\in S'$ очевидно. Итак, во всех случаях $xy\in S''$ и S'' является подполугруппой в S.

Предложение доказано.

<u>Замечание 3.5</u>. В Γ-полугруппе и даже в Φ-полугруппе множество всех идемпотентов, групповое ядро и его квадратная оболочка могут не быть подполугруппами.

Рассмотрим, например, свободную со счетным множеством свободных образующих $x_1, x_2, \ldots$ полугруппу F многообразия, задаваемого тождеством $x^3 = x^4$. Из этого тождества следует, что $x^3 = x^4 = x^5 = x^6$, так что $(x^3)^2 = x^3$ и куб любого элемента из F является идемпотентом. Наоборот, из $e^2 = e$ вытекает, что $e = e^2 = e^3$, т.е. и наоборот каждый идемпотент является кубом некоторого элемента из F. Из тождества $x^3 = x^4$ следует, что любой элемент из F порождает моногенную нильполугруппу. Поэтому групповое ядро каждой моногенной подполугруппы одноэлементно и состоит только из ее идемпотента, а групповое ядро всей полугруппы F совпадает с множеством E всех идемпотентов из F.

Полугруппа F как свободная в некотором многообразии полугруппа со счетным множеством свободных образующих является Γ-полугруппой. Однако E не является подполугруппой в F: элементы x_1^3 и x_2^3 - идемпотенты, а их произведение $x_1^3 x_2^3$, не будучи кубом никакого слова из F, не является идемпотентом. Не является в F подполугруппой и квадратная оболочка ее группового ядра: x_1^2 и x_2^2 лежат в квадратной оболочке группового ядра рассматриваемой полугруппы, а их произведение $x_1^2 x_2^2$ не лежит в нем, ибо $x_1^2 x_2^2 x_1^2 x_2^2$ не является кубом никакого элемента.

§4. Связки Φ-полугрупп

Ни один из классов (0,I) не замкнут относительно операции прямого произведения. Действительно, рассмотрим два экземпляра абелевой идемпотентной полугруппы, состоящей из двух элементов 0 и I ($0\cdot I = 0$) и являющейся, очевидно, Γ^*-полугруппой. Их прямое произведение обладает единицей и поэтому не может быть эпиморфно отображено на свою трехэлементную подполугруппу $\{(0,0), (0,I), (I,0)\}$ без единицы. Следовательно, оно не является Φ-полугруппой. Этот же пример четырехэлементной полугруппы, являющейся связкой своих четырех одноэлементных Γ^*-подполугрупп, показывает, что связка Φ-полугрупп не является, вообще говоря, Φ-полугруппой. Ниже для некоторых видов связок выясняется, в каких случаях они не выводят за пределы классов (0,I).

Будем рассматривать связки полугрупп S_α, $\alpha \in I$ и будем предполагать в приводимых определениях, что

$$S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha \cap S_\beta = \phi$$

и α, β — разные элементы из I. Связка называется линейной, если I является линейно упорядоченным множеством и $ab, ba \in S_\alpha$ для любых $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha < \beta$. Она называется последовательно аннулирующей, если при этом $ab = ba = a$. Связка называется взаимно аннулирующей, если I содержит нуль 0 и в ней всегда $S_\alpha S_\beta = 0$. Взаимно аннулирующая связка является частным случаем следующей конструкции, не являющейся связкой: полугруппа S является взаимно аннулирующей суммой полугрупп S_α, $\alpha \in I$, если

$$S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \quad \text{и} \quad S_\alpha \cap S_\beta = \{0\}, \quad S_\alpha \cdot S_\beta = \{0\}$$

для любых различных α и β из I.

Будем обозначать символами S^0 и S^1 полугруппы, являющиеся результатом внешнего присоединения, соответственно, нуля 0 или единицы I к полугруппе S.

<u>Предложение 4.I.</u> Для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{K}$ тогда и только тогда $S^0 \in \mathfrak{X}$ (или $S^1 \in \mathfrak{X}$), когда S является $\mathfrak{X}$-полугруппой с нулем (соответственно, с единицей) во всей полугруппе S при $\mathfrak{X} = \Gamma$ или $\mathfrak{X} = \Gamma^*$ или в каждой ее конечнопорожденной подполугруппе при $\mathfrak{X} = \Phi$ или $\mathfrak{X} = \Phi^*$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{X} = \Gamma$.

Необходимость. Пусть $S^0 \in \Gamma$ (или $S^1 \in \Gamma$). Тогда любая ее подполугруппа T (в том числе и S), являясь ее эпиморфным образом, оказывается полугруппой с нулем (с единицей), который (которую) мы обозначим через 0_T (через 1_T).

Пусть $T \subset S$. Исходя из эпиморфизма $\varphi : S^0 \longrightarrow T^0$ (соответственно, $\varphi : S^1 \longrightarrow T^1$), определим отображение $\psi : S \longrightarrow T$ следующим образом:

$$a\psi = \begin{cases} a\varphi, & \text{если } a \notin 0\varphi^{-1} \text{ (если } a \notin 1\varphi^{-1}) \\ 0_T (1_T), & \text{если } a \in 0\varphi^{-1} \text{ (если } a \in 1\varphi^{-1}) \end{cases}.$$

Ясно, что ψ отображает S на T. Покажем, что ψ является гомоморфизмом. Для этого рассмотрим следующие четыре случая:

1. $x, y \notin 0\varphi^{-1}$ (или $x, y \in 1\varphi^{-1}$);
2. $x, y \in 0\varphi^{-1}$ (или $x, y \in 1\varphi^{-1}$);
3. $x \notin 0\varphi^{-1}$, $y \in 0\varphi^{-1}$ (или $x \notin 1\varphi^{-1}$, $y \in 1\varphi^{-1}$);
4. $x \in 0\varphi^{-1}$, $y \notin 0\varphi^{-1}$ (или $x \in 1\varphi^{-1}$, $y \notin 1\varphi^{-1}$);

и докажем равенство $(xy)\psi = x\psi \cdot y\psi$ для каждого из них в отдельности.

1. Покажем, что в этом случае $xy \in 0\varphi^{-1}$ (или $xy \notin 1\varphi^{-1}$). Предположив противное, мы имели бы

$$0 = (xy)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi \qquad (\text{или } 1 = (xy)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi).$$

Но $x\varphi, y\varphi \in T \subset S$ и поэтому равенство $x\varphi \cdot y\varphi = 0$ (или $x\varphi \cdot y\varphi = 1$) противоречит тому, что 0 (или 1) внешне присоединен (присоединена) к S. Поэтому $xy \notin 0\varphi^{-1}$ (или $xy \notin 1\varphi^{-1}$) и, пользуясь первой строкой определения ψ, получим

$$(xy) = (xy)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi = x\psi \cdot y\psi.$$

2. В данном случае используем вторую строку определения отображения ψ: так как $0\varphi^{-1} \setminus \{0\}$ и $1\varphi^{-1} \setminus \{0\}$ являются подполугруппами в S, то $xy \in 0\varphi^{-1}$ (или $xy \in 1\varphi^{-1}$) и

$$(xy)\psi = 0_T = 0_T \cdot 0_T = x\psi \cdot y\psi$$

$$(\text{или} \quad (xy)\psi = 1_T = 1_T \cdot 1_T = x\psi \cdot y\psi).$$

3. В этом случае

$$(xy)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi = x\varphi \cdot 0 = 0 \ (\text{или } = x\varphi \cdot 1 = x\varphi),$$

так что $xy \in 0\varphi^{-1}$ (или $xy \in 1\varphi^{-1}$) и

$$(xy)\psi = 0_T = x\psi \cdot 0_T = x\psi \cdot y\psi$$

$$(\text{или } (xy)\psi = (xy)\varphi = x\varphi = x\psi = x\psi \cdot 1 = x\psi \cdot y\psi).$$

4. Аналогично случаю 3. рассматривается случай 4.

Следовательно, ψ — эпиморфизм и $S \in \Gamma$.

Достаточность. Пусть S — некоторая Γ-полугруппа с нулем 0_S (единицей 1_S). Покажем, что $S^0 \in \Gamma$ (соответственно, $S^1 \in \Gamma$). Пусть T — подполугруппа в S^0 (соответственно, в S^1). Если $T \subset S$, то существует эпиморфизм $\varphi : S \longrightarrow T$. Если же $T \not\subset S$, то $\mathcal{U} = T \cap S = T \setminus \{0\}$ (соответственно, $\mathcal{U} = T \setminus \{1\}$) является подполугруппой в S и существует эпиморфизм $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{U}$. Определим отображение φ_0 (соответственно φ_1) полугруппы S^0 (соответственно, S^1) на T, положив

$$a\varphi_0 = \begin{cases} a\varphi, & \text{если } a \in S \\ 0_T, & \text{если } a = 0 \end{cases} \quad \left(\text{или } a\varphi_1 = \begin{cases} a\varphi, & \text{если } a \in S \\ 1_T, & \text{если } a = 1 \end{cases}\right)$$

Здесь 0_T (соответственно, 1_T) — нулевой (единичный элемент полугруппы T, существование которого в случае $0 \notin T$ (соответственно, $1 \notin T$) является следствием существования эпиморфизма φ.

Так как при $a, b \in S$ произведение этих элементов также принадлежит полугруппе S, а на S отображение φ_0 (соответственно, φ_1) совпадает с гомоморфизмом φ, то в этом случае отображение φ_0 (соответственно φ_1) сохраняет произведение. При $a = b = 0$ (соответственно, $a = b = 1$) сохранение произведения очевидно ввиду строки определения отображения φ_0 (соответственно, φ_1). Наконец, так как

$$(0a)\varphi_0 = 0\varphi_0 = 0_T = 0_T a\varphi = 0\varphi_0 a\varphi_0$$

$$(\text{или } (1a)\varphi_1 = a\varphi_1 = a\varphi = 1_T a\varphi = 1\varphi_1 \cdot a\varphi_1),$$

и имеют место мультипликативно дуальные равенства, то φ_0 (соответственно, φ_1) является эпиморфизмом.

Итак, предложение доказано для $\mathfrak{X} = \Gamma$.

Пусть теперь $\mathfrak{X} = \Gamma^*$. Если $S^0 \in \Gamma^*$ (соответственно, $S^1 \in \Gamma^*$) а T — произвольная подполугруппа полугруппы S, то T^0 (соответственно, T^1) является подполугруппой в S^0 (соответственно, в S^1) и по определению класса Γ^*-полугрупп $T^0 \in \Gamma$ (соответственно, $T^1 \in \Gamma$). Но тогда, по доказанной выше части предложения, $T \in \Gamma$. Ввиду произвольности подполугруппы T это и означает, что $S \in \Gamma^*$.

Наоборот, если S является Γ^*-полугруппой с нулем (единицей), а T — подполугруппа в S, то $T \in \Gamma$ и обладает нулем (единицей) по определению Γ^*-полугруппы. Поэтому $T^0 \in \Gamma$ (соответственно, $T^1 \in \Gamma$) по доказанному в случае $\mathfrak{X} = \Gamma$ утверждению предложения и, следовательно,

$S \in \Gamma^*$ (соответственно $S^1 \in \Gamma^*$).

Совершенно аналогично случаю $\mathfrak{X} = \Gamma$ доказывается, что $S^0 \in \Phi$ (соответственно, $S^1 \in \Phi$) тогда и только тогда, когда S является Φ-полугруппой, каждая конечнопорожденная подполугруппа которой содержит нуль (единицу).

Наконец, проведя рассуждения, аналогичные доказательству предложения в случае $\mathfrak{X} = \Gamma^*$, покажем, что $S^0 \in \Phi^*$ (или $S^1 \in \Phi^*$) тогда и только тогда, когда S является Φ^*-полугруппой, каждая конечнопорожденная подполугруппа которой содержит нуль (единицу).

Предложение доказано.

Предложение 4.2. Для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}$ взаимно аннулирующая сумма $\mathfrak{X}$-полугрупп является $\mathfrak{X}$-полугруппой.

Доказательство. Пусть S является взаимно аннулирующей суммой Γ-полугрупп S_α, $\alpha \in I$. Рассмотрим в S подполугруппу T. Если $0 \in T$, то T является взаимно аннулирующей суммой своих подполугрупп $T_\alpha = T \cap S_\alpha$, $\alpha \in J$, где $J = \{\alpha \in I \mid T_\alpha \neq \{0\}\}$. Действительно, $T = \bigcup_{\alpha \in J} T_\alpha$

$$T_\alpha \cap T_\beta = T \cap S_\alpha \cap T \cap S_\beta = T \cap \{0\} = \{0\},$$

$$T_\alpha \cdot T_\beta \subset S_\alpha \cdot S_\beta = \{0\}, \quad T_\alpha T_\beta = \{0\}.$$

Так как все $S_\alpha \in \Gamma$, то для каждого $\alpha \in J$ существует эпиморфизм $\varphi_\alpha : S_\alpha \longrightarrow T_\alpha$. Определим отображение φ полугруппы S на T, положив

$$a\varphi = \begin{cases} a\varphi_\alpha, & \text{если } a \in S_\alpha \text{ и } \alpha \in J; \\ 0 & \text{если } a \in S_\beta \text{ и } \beta \notin J. \end{cases}$$

Ясно, что φ отображает S на всю подполугруппу T. Покажем, что φ — гомоморфизм. Равенство $(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$ очевидно, если a и b лежат в одной компоненте S_α. Если же a и b лежат в разных компонентах, то $ab = 0$. При этом $a\varphi$ и $b\varphi$ или лежат в разных компонентах, или, как это следует из определения отображения φ, хотя бы один из этих элементов равен нулю. И в том, и в другом случае $a\varphi \cdot b\varphi = 0$.

Аналогичные рассуждения проводятся в случае, когда S является взаимно аннулирующей суммой Φ-полугрупп. При этом предполагается, что T — подполугруппа с конечным числом образующих и все T_α тоже оказываются подполугруппами с конечным числом образующих. Именно, если $T = \langle \mathfrak{X} \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ и $Y = \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_\ell\}$ — множество

3

тех из образующих системы $\mathfrak{X}$, которые содержатся в T_α, то $T_\alpha = \langle \mathcal{Y} \rangle$. Действительно, образующие из $\mathfrak{X}/\mathcal{Y}$ не могут принимать участия в порождении ненулевых элементов из T_α, так как их ненулевые произведения лежат вне T_α, а их произведения на элементы из $\mathcal{Y}$ равны нулю. Конечность числа образующих во всех T_α, $\alpha \in J$ гарантирует существование эпиморфизмов φ_α.

Если же $0 \notin T$, то найдется $\alpha \in I$, для которого $T \subset S_\alpha$. Действительно, если бы T содержала элементы $x_\alpha \in T_\alpha$ и $x_\beta \in T_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, то она содержала бы и их произведение $x_\alpha x_\beta = 0$ вопреки сделанному предположению. Построим $\psi : S \longrightarrow S_\alpha$ так же, как строился бы φ в первом абзаце при $T = S_\alpha$. Ясно, что произведение $\psi \varphi_\alpha$, где φ_α - эпиморфизм полугруппы S_α на T, является искомым эпиморфизмом S на T. Следовательно, $S \in \Gamma$.

Пусть теперь S является взаимно аннулирующей суммой Γ^*-полугрупп (Φ^*-полугрупп) $S_\alpha, \alpha \in I$. Если $0 \in T$, то $T \in \Gamma$ (соответственно, $T \in \Phi$), ибо T является взаимно аннулирующей суммой Γ-полугрупп (Φ-полугрупп). Если же $0 \notin T$, то $T \in \Gamma$ (соответственно $T \in \Phi$), ибо T является подполугруппой некоторой Γ^*-полугруппы (Φ^*-полугруппы). Предложение доказано.

Следствие 4.3. Взаимно аннулирующая связка Φ-полугрупп (Γ-полугрупп) S_α, где $\alpha \in I$, с нулем является Φ-полугруппой (Γ-полугруппой).

Действительно, по предложению 4.I все полугруппы $S_\alpha \cup 0$ являются Φ-полугруппами (Γ-полугруппами), а по предложению 4.3 полугруппа S, которая является взаимно аннулирующей суммой полугрупп $S_\alpha \cup 0$, оказывается сама Φ-полугруппой (Γ-полугруппой).

Следствие 4.4. Взаимно аннулирующая связка S полугрупп S_α, где $\alpha \in I$, является Γ^*-полугруппой (Φ^*-полугруппой) тогда и только тогда, когда все S_α суть Γ^*-полугруппы (Φ^*-полугруппы) с нулем (каждая конечнопорожденная подполугруппа которых обладает нулем).

Действительно, по предложению 4.I. все $S_\alpha \cup 0$ являются Γ^*-полугруппами (Φ^*-полугруппами), когда все S_α суть Γ^*-полугруппы (Φ^*-полугруппы) с нулем (каждая конечнопорожденная подполугруппа которых обладает нулем). Поэтому в этом случае полугруппа S, которая является взаимно аннулирующей суммой полугрупп $S_\alpha \cup 0$, оказывается, по предложению 4.2, сама Γ^*-полугруппой (Φ^*-полугруппой).

Наоборот, если взаимно аннулирующая связка S полугрупп S_α является Γ^*-полугруппой (Φ^*-полугруппой), то, по определению Γ^*-полугруппы (Φ^*-полугруппы), не только каждая полугруппа S_α является Γ-полугруппой (Φ-полугруппой), но и каждая ее подполугруппа (с конечным числом образующих) T_α, будучи подполугруппой и в S, является Γ-полугруппой (Φ-полугруппой). Следовательно, все S_α являются Γ^*-полугруппами (Φ^*-полугруппами). А из существования эпиморфизма $S \longrightarrow T_\alpha$ и наличия в S нуля вытекает, что T_α - полугруппа с нулем.

<u>Замечание 4.5</u>. Взаимно аннулирующая связка может оказаться Φ-полугруппой (Γ-полугруппой) и в том случае, когда некоторые ее компоненты S_α не являются Γ-полугруппами.

Рассмотрим, например, для $\alpha \in N = \{1, 2, \dots\}$ полугруппы S_α, изоморфные четырехэлементной нильпотентной моногенной полугруппе $N_4 = \{x, x^2, x^3, x^4 = x^5\}$ или ее подполугруппам

$$N_1 = \{x^4\}, \quad N_2 = \{x^3, x^4\} \quad \text{и} \quad N_3 = \{x^2, x^3, x^4\},$$

причем полугруппа S_α изоморфна полугруппе N_β, если $\alpha \equiv \beta \pmod 4$.

Взаимно аннулирующая связка S полугрупп S_α, $\alpha \in N$ является Γ-полугруппой. Действительно, любая ее подполугруппа T изоморфна взаимно аннулирующей связке $\mathcal{U}$ некоторых из полугрупп S_α, именно полугрупп S_α при $\alpha \in M \subset N$. Пусть $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow T$ - изоморфизм полугруппы $\mathcal{U}$ на T. Действие эпиморфизма $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{U}$ на элемент $s \in S_\alpha$ определим по формуле

$$s\varphi = \begin{cases} s, & \text{если } \alpha \in M; \\ 0, & \text{если } \alpha \notin M. \end{cases}$$

Эпиморфизм полугруппы S на ее подполугруппу T определим как произведение $\varphi\psi$. Итак, $S \in \Gamma$, хотя при $\alpha \equiv 4 \pmod 4$ все $S_\alpha \notin \Gamma$.

Последовательно аннулирующая связка Γ^*-полугрупп может не быть Γ-полугруппой, как показывает пример следующей цепи (точнее, абелевой идемпотентной полугруппы, ассоциированной с этой цепью):

$$0 < \dots < 4 < 3 < 2 < 1.$$

Эта цепь обладает нулем, однако ее подполугруппа ненулевых элементов нуля не имеет и потому не может быть эпиморфным образом всей полугруппы.

Пусть I – неодноэлементное линейно упорядоченное множество и пусть $\lambda = \min I$, $\pi = \max I$. Пусть S – последовательно аннулирующая связка полугрупп S_α, где $\alpha \in I$. Обозначим через S_σ множество $S \setminus (S_\lambda \cup S_\pi)$. Здесь $S_\alpha = \emptyset$, если $\alpha \notin I$.

<u>Предложение 4.6</u>. Последовательно аннулирующая связка S полугрупп S_α, где $\alpha \in I$, является Φ^*-полугруппой тогда и только тогда, когда S_σ – цепь, S_π (если $\pi \in I$) и S_λ (если $\lambda \in I$) являются Φ^*-полугруппами, причем каждая конечнопорожденная подполугруппа в S_λ (если $\lambda \in I$) обладает единицей, а в S_π (если $\pi \in I$) нулем.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Если $S \in \Phi^*$, то и все $S_\alpha \in \Phi^*$, а сама S (ввиду следствия 2.5) – периодическая полугруппа. Пусть $\alpha < \beta$. Рассмотрим два идемпотента $e \in S_\alpha$ и $f \in S_\beta$. По определению последовательно аннулирующей связки множества $S_\alpha \cup f$ и $S_\beta \cup e$ являются подполугруппами в S и, следовательно, Φ^*-полугруппами. Первая из них – полугруппа с единицей, а вторая – с нулем, так что и любая подполугруппа с конечным числом образующих в S_α – полугруппа с единицей, а в S_β – с нулем. В частности, Φ^*-полугруппой с единицей является каждая конечнопорожденная подполугруппа в S_λ, а с нулем – в S_π (если, соответственно, $\lambda \in I$ или $\pi \in I$).

Для $\gamma < \alpha < \beta$ доказанное означает, что в S_α любая конечнопорожденная подполугруппа обладает и нулем, и единицей. В [3] доказано, что полугруппа, любая подполугруппа которой обладает единицей, является линейной связкой групп G_ρ. Доказательство этого утверждения проходит и в случае, когда лишь известно, что любая конечнопорожденная подполугруппа обладает единицей, так как все используемые в этом доказательстве подполугруппы можно считать конечнопорожденными. По доказанному, в группах G_ρ все циклические подгруппы обладают нулем, т.е. одноэлементны. Поэтому и все G_ρ тоже одноэлементны, так что S_α является последовательно аннулирующей связкой одноэлементных полугрупп, т.е. цепью. Но тогда цепью оказывается и S_σ.

Тот факт, что S_σ является цепью, может быть доказан и следующим образом. Каждая моногенная подполугруппа в S_σ обладает и нулем, и единицей, т.е. одноэлементна. Следовательно, S_σ - идемпотентная полугруппа. Она абелева: матричные компоненты в ее разложении в коммутативную связку матричных полугрупп одноэлементны по той же причине, что и моногенные подполугруппы. Наконец, она ассоциирована с цепью: при наличии в полуструктуре, ассоциированной с ней, несравнимых элементов a и b множество $\{a, b, ab\}$ являлось бы конечнопорожденной подполугруппой с нулем ab, но без единицы (единица в полуструктуре больше всех элементов, а здесь такого элемента нет).

<u>Достаточность</u>. Предположим теперь, что последовательно аннулирующая связка S имеет строение, описанное в формулировке предложения. Пусть $U \subset T \subset S$, причем T - подполугруппа, а U - конечнопорожденная подполугруппа в S. Рассмотрев пересечения полугруппы U с компонентами связки, убедимся в том, что U является последовательно аннулирующей связкой некоторых конечнопорожденных полугрупп $U_\lambda \subset S_\lambda$ и $U_\pi \subset S_\pi$ и конечной цепи

$$U_\sigma = \{u_1, \ldots, u_n \mid u_1 < \ldots < u_n\} \subset S_\sigma .$$

Существование эпиморфизмов

$$\varphi_\lambda : S_\lambda \longrightarrow U_\lambda ; \; \varphi_\sigma : S_\sigma \longrightarrow U_\sigma ; \; \varphi_\pi : S_\pi \longrightarrow U_\pi$$

вытекает из того, что $S_\lambda, S_\pi, S_\sigma \in \Phi^*$. Если подполугруппы $U_\lambda, U_\sigma, U_\pi$ непусты, то эпиморфизм $\varphi : S \longrightarrow U$ можно определить, склеив $\varphi_\lambda, \varphi_\sigma$ и φ_π. Если же некоторые из этих подполугрупп пусты, то φ строится с помощью некоторых из эпиморфизмов $\varphi_\lambda, \varphi_\sigma$ и φ_π и отображений в следующие идемпотенты: 1_λ (единица полугруппы U_λ), 0_π (нуль полугруппы U_π) u_1 и u_n. Определение φ в каждом из возможных случаев приведено в ниже следующей таблице.

Покажем, что φ сохраняет произведения. Это очевидно в тех случаях, когда оба сомножителя лежат одновременно или в S_λ, или в S_σ, или в S_π. Будем поэтому считать, что они лежат в двух разных таких подполугруппах.

Рассмотрим элементы $x \in S_\lambda$, $y \in S_\sigma$ и $z \in S_\pi$ и во всех семи случаях из определения отображения φ докажем равенства

№	$\neq\emptyset$	φ
1	$U_\lambda,\ U_\sigma,\ U_\pi$	$\varphi_\lambda \cup \varphi_\sigma \cup \varphi_\pi$
2	$U_\sigma,\ U_\pi$	$(S_\lambda \to u_1) \cup \varphi_\sigma \cup \varphi_\pi$
3	$U_\lambda,\ U_\sigma$	$\varphi_\lambda \cup \varphi_\sigma \cup (S_\pi \to u_n)$
4	$U_\lambda,\ U_\pi$	$\varphi_\lambda \cup (S_\sigma \to 1_\lambda) \cup \varphi_\pi$
5	U_λ	$\varphi_\lambda \cup (S_\sigma \cup S_\pi \to 1_\lambda)$
6	U_σ	$(S_\lambda \to u_1) \cup \varphi_\sigma \cup (S_\pi \to u_n)$
7	U_π	$(S_\lambda \cup S_\sigma \to 0_\pi) \cup \varphi_\pi$

$$(xy)\varphi = x\varphi\cdot y\varphi,\qquad (xz)\varphi = x\varphi\cdot z\varphi,\quad (yz)\varphi = y\varphi\cdot z\varphi.$$

Так как по определению последовательно аннулирующей связки $xy = xz = x$, $yz = y$, то достаточно доказать равенства

$$x\varphi = x\varphi\cdot y\varphi,\qquad x\varphi = x\varphi\cdot z\varphi \qquad \text{и}\quad y\varphi = y\varphi\cdot z\varphi. \quad (4.I)$$

I. Равенства (4.I) вытекают из определения последовательно аннулирующей связки и того, что $x\varphi$, $y\varphi$ и $z\varphi$ лежат в разных ее компонентах.

2.-4. По той же причине некоторые из равенств (4.I) выполняются и в случаях 2-4. В следующей таблице звездочкой * отмечено, какие из равенств (4.I) выполняются по этой причине

равенство \ номер случая	2	3	4
$x\varphi\cdot y\varphi = x\varphi$		*	
$x\varphi\cdot z\varphi = x\varphi$	*	*	*
$y\varphi\cdot z\varphi = y\varphi$	*		*

Проверим в рассматриваемых случаях остальные равенства:

2. $x\varphi \cdot y\varphi = u_1 \cdot u_k = u_1 = x\varphi$;

3. $y\varphi \cdot z\varphi = u_k \cdot u_n = u_k = y\varphi$;

4. $x\varphi \cdot y\varphi = x\varphi \cdot 1_\lambda = x\varphi$, ибо $x\varphi \in S_\lambda$.

5-7. В случаях 5-7. соотношения (4.I) вытекают из следующих легко проверяемых равенств

	5	6	7	
$x\varphi \cdot y\varphi =$	$x\varphi \cdot 1_\lambda = x\varphi$	$u_1 \cdot u_k = u_1$	$0_\pi \cdot 0_\pi = 0_\pi$	$= x\varphi$
$x\varphi \cdot z\varphi =$	$x\varphi \cdot 1_\lambda = x\varphi$	$u_1 \cdot u_n = u_1$	$0_\pi \cdot x\varphi = 0_\pi$	$= x\varphi$
$y\varphi \cdot z\varphi =$	$1_\lambda \cdot 1_\lambda = 1_\lambda$	$u_k \cdot u_n = u_k$	$0_\pi \cdot x\varphi = 0_\pi$	$= y\varphi$

Легко видеть, что построенное гомоморфное отображение эпиморфно. Следовательно, $S \in \Phi$. Совершенно аналогично доказывается, что $T \in \Phi$, т.е. что $S \in \Phi$.

Предложение доказано.

<u>Следствие 4.7</u>. Последовательно аннулирующая связка S полугрупп S_α, где $\alpha \in I$, является Γ^*-полугруппой тогда и только тогда, когда S_λ (при $\lambda \in I$) является Γ^*-полугруппой с единицей 1_λ, S_π (при $\pi \in I$) – Γ^*-полугруппой с нулем 0_π, а $E_\sigma = S_\sigma \cup 1_\lambda \cup 0_\pi$ изоморфна подцепи цепи всех целых чисел.

Действительно, если $S \in \Gamma^*$, то $S_\lambda \in \Gamma^*$, $S_\pi \in \Gamma^*$, а ход доказательства предложения показывает, что S_λ обладает единицей, а S_π – нулем. Множество E_σ является в S идемпотентной Γ^*-цепью. Но, как известно из [6], Γ^*-цепь изоморфна подцепи цепи всех целых чисел.

Доказательство обратного утверждения почти дословно повторяет вторую часть доказательства предложения. При этом нужно учесть, что если $S_\lambda \neq \emptyset$, то цепь E_σ имеет первый элемент, а если $S_\pi \neq \emptyset$, то E_σ имеет последний элемент, ибо сейчас $1_\lambda \cup S_\sigma \cup 0_\pi$ является подцепью цепи целых чисел.

§5. Некоторые классы Φ-полугрупп с единицей

Вместо "линейно упорядоченное множество" мы говорим "цепь", вместо "вполне упорядоченное множество" - "лестница", а вместо "нижняя полуструктура" просто "полуструктура". Через ω будем обозначать порядковое число, являющееся порядковым типом множества N натуральных чисел, упорядоченного обычным образом.

Как известно, каждая коммутативная идемпотентная полугруппа $A(\cdot)$ ассоциирована с полуструктурой, в которую A превращается, если определить $a \leq b \Longleftrightarrow ab = a$. Обозначим эту полуструктуру через $A(<)$. Наоборот, по полуструктуре $A(<)$ можно восстановить полугруппу $A(\cdot)$, положив $ab \overset{def}{=\!=} a \cap b$.

Лемма 5.1. Коммутативная идемпотентная полугруппа $A(\cdot)$, ассоциированная с цепью $A(<)$, тогда и только тогда является Γ-полугруппой (Φ-полугруппой), когда для каждой (конечной) подцепи $B(<)$ цепи $A(<)$ существует монотонное отображение цепи $A(<)$ на $B(<)$.

Доказательство. Произвольная (конечная) подцепь цепи является подполугруппой (с конечным числом образующих) ассоциированной полугруппы и наоборот. Далее, в случае цепи эквивалентность $a \leq b \Longleftrightarrow ab = a$ может быть использована как для определения порядка, по известному закону умножения, так и для определения таблицы умножения по заданной упорядоченности. Поэтому вытекающая из приведенной эквивалентности эквивалентность $a\varphi \leq b\varphi \Longleftrightarrow a\varphi \cdot b\varphi = a\varphi$ и означает монотонность гомоморфизма и гомоморфность монотонного отображения.

Лемма доказана.

В дальнейшем для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}$ цепь, являющуюся $\mathfrak{X}$-полугруппой, будем называть $\mathfrak{X}$-цепью. Напомним также следующие определения. Если A и B - цепи, то цепь $A \cup B$ называется их ординальной суммой и обозначается символом $A \oplus B$, если $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$, а линейный порядок, существовавший в A и B, сохранен в $A \cup B$. Если α и β - порядковые типы цепей A и B, соответственно, то их сумма $\alpha + \beta$ есть, по определению, порядковый тип цепи $A \oplus B$, так что из равенства $\gamma = \alpha + \beta$ вытекает, что цепь C порядкового типа γ имеет подцепи A и B порядковых типов α и β, соответственно. Определения остальных используемых теоретико-множественных понятий можно найти в монографии [2].

Предложение 5.2. Цепь, обладающая минимальным элементом, тогда и только тогда является Γ-цепью, когда она – лестница порядкового типа $\omega^{\gamma}m$, где m – произвольное натуральное, а γ – произвольное порядковое число.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что A является Γ-цепью. Тогда, по лемме 5.I, существует монотонное отображение цепи A на любое ее подмножество B. При этом минимальный элемент цепи A отобразится в элемент, являющийся минимальным в B. Поэтому A – лестница.

Предположим, что порядковый тип α лестницы A не является порядковым числом вида $\omega^{\gamma}m$. Так как любое порядковое число может быть разложено по произвольному основанию, в том числе и по основанию ω (см. [2], стр. 258), то порядковое число α можно представить в виде

$$\alpha = \omega^{\eta_1}n_1 + \omega^{\eta_2}n_2 + \ldots + \omega^{\eta_k}n_k, \qquad (5.I)$$

где $\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_k$ – порядковые числа, а $0 \leq n_i < \omega$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, т.е. $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$ и $k > 1$. При этом можно считать, что $n_k > 0$. Поэтому лестница A может быть представлена в виде ординальной суммы $A = A_1 \oplus A_2$, где A_2 – лестница порядкового типа ω^{η_k}. В разложении (5.I) можно считать, что $n_1 > 0$, т.е. что слагаемое $\omega^{\eta_1}n_1$ действительно входит в это разложение. Поэтому в A существует подлестница B порядкового типа ω^{η_1}. Пусть $\varphi: A \longrightarrow B$ – монотонное отображение лестницы A на B. Так как при монотонном отображении может происходить лишь уменьшение порядкового типа в результате совпадения образов некоторых элементов, то порядковый тип лестницы $A_2\varphi$ не превышает порядкового числа ω^{η_k}, являющегося порядковым типом лестницы A_2. Так как

$$B = A\varphi = (A_1 \oplus A_2)\varphi = A_1\varphi \oplus A_2\varphi$$

и так как $A_2\varphi \neq \emptyset$, ибо A_2 непусто (цепь A_2 имеет порядковый тип ω^{η_k}), то $A_2\varphi$ является остатком (см. [2], стр. 261) множества B. Однако, как показано в [2] (см. стр. 261), любой остаток множества с порядковым типом

4

ω^{η_1} имеет порядковый тип ω^{η_1}.

Итак, лестница $A_2\varphi$ имеет, с одной стороны, порядковый тип, не превосходящий порядкового числа ω^{η_k}, а, с другой стороны, равный ω^{η_1}, вопреки тому, что $\eta_1 > \eta_k$. Полученное противоречие показывает, что $\alpha = \omega^{\gamma} m$ для некоторых γ и m.

<u>Достаточность</u>. Рассмотрим лестницу A порядкового типа $\alpha = \omega^{\gamma} m$ и покажем, что для любого ее непустого подмножества B существует монотонное отображение $\varphi : A \longrightarrow B$ цепи A на B. Ввиду леммы 5.I. это и будет означать, что A является Γ-цепью.

Предположим, что порядковый тип β лестницы B имеет следующее разложение по основанию ω:

$$\beta = \omega^{\eta_1} n_1 + \omega^{\eta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\eta_k} n_k \tag{5.2}$$

где $\gamma \geq \eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_k$, а $k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$. Если лестница B такова, что $\alpha > \beta$, то $\gamma > \eta$ или $\gamma = \eta_1$, но $m > n_1$ (см. [2], стр. 260). Докажем сначала существование φ в частном случае, когда $\beta = \omega^{\eta}$ и $m = 1$.

<u>Лемма 5.3</u>. Если A и B - лестницы порядковых типов $\alpha = \omega^{\gamma}$ и $\beta = \omega^{\eta}$, соответственно, причем $\gamma \geq \eta$, то существует монотонное отображение лестницы A на лестницу B.

<u>Доказательство</u>. Как следует из теоремы 6 на стр. 261 монографии [2], лестницы A и B можно в данном случае считать лексикографически упорядоченными множествами всех функций из лестниц I и J порядкового типа γ и η, соответственно, в лестницу N, отличных от нуля лишь в конечном числе точек. Пусть $I = J' \oplus K$, где лестница J' подобна лестнице J. Каждой функции $f = f(x) \in A$, где $x \in I$, поставим в соответствие функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in J'; \\ 0, & \text{если } x \notin J'. \end{cases}$$

Ясно, что она отлична от нуля лишь в конечном числе точек - в тех же точках из I, что и функция $f(x)$. Множество всех функций такого вида образует в A подлестницу, подобную B. Действительно, оно подобно множеству всех функций $f'(x)$, определенных только на J и принимающих в точках из J те же значения, что и функции $f(x)$ и $f_0(x)$.

Покажем, что отображение $\varphi : f \longrightarrow f_0$ индуцирует, с точностью до подобия, монотонное отображение лестницы A на лестницу B. Действительно, по определению лексикографического упорядочения множества функций, если $f < g$ в A, то существует такое $\sigma \in \gamma$, что $f(x) = g(x)$ для всех $x < \sigma$, а $f(\sigma) < g(\sigma)$. Так как

$$f_0(x) = f(x) = g(x) = g_0(x)$$

для всех $x < \sigma$, а $f_0(\sigma) = f(\sigma) < g(\sigma) = g_0(\sigma)$ для $\sigma \in J$ и $f_0(\sigma) = 1 = g_0(\sigma)$ для $\sigma \in K$, то из $f < g$ всегда следует, что $f_0 \leq g_0$.

Лемма доказана.

Закончим доказательство предложения, используя лемму 5.3. Порядковое число, являющееся типом лестницы C, будем обозначать через $\uparrow C \uparrow$, минимальный элемент лестницы B через b, а $\sum_{i=1}^{k} n_i$ через n. Для каждой такой пары лестниц C и $\mathfrak{D}$, что $\uparrow C \uparrow = \omega^{\sigma}$, $\uparrow \mathfrak{D} \uparrow = \omega^{\sigma}$ и $\sigma \geq \delta$ фиксируем одно монотонное отображение C на $\mathfrak{D}$ и обозначим его через $\varphi(C, \mathfrak{D})$.

Представим лестницы A и B, порядковые типы которых равны порядковым числам $\omega^{\gamma} m$ и (5.2), соответственно, в виде

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$$
$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$$

где

$$\uparrow A_i \uparrow = \omega^{\mu}$$
$$\uparrow B_1 \uparrow = \uparrow B_2 \uparrow = \ldots = \uparrow B_{n_1} \uparrow = \omega^{\eta_1},$$
$$\uparrow B_{n_1+1} \uparrow = \uparrow B_{n_1+2} \uparrow = \ldots = \uparrow B_{n_1+n_2} \uparrow = \omega^{\eta_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\uparrow B_{n-n_k+1} \uparrow = \uparrow B_{n-n_k+2} \uparrow = \ldots = \uparrow B_n \uparrow = \omega^{\eta_k}.$$

Если $n \leq m$, то положим

$$\varphi_{m-n+1} \overset{def}{=\!=} \varphi(A_{m-n+1}, B_1)$$
$$\varphi_{m-n+2} \overset{def}{=\!=} \varphi(A_{m-n+2}, B_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m \overset{def}{=\!=} \varphi(A_m, B_n)$$

(это определение корректно, ибо $\uparrow A_{m-n+i} \uparrow = \omega^{\mu}$, $\uparrow B_i \uparrow = \omega^{\eta_j}$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, k$ и $\mu \geq \eta_j$), а при $n < m$ положим дополнительно

$$\varphi_i : A_i \longrightarrow b \quad (i = 1, 2, \ldots, m-n).$$

Определим теперь φ следующим образом:

$$a\varphi \overset{def}{=\!=} a\varphi_i, \qquad \text{если} \quad a \in A_i \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ясно, что φ монотонно отображает A на B, ибо все φ_i монотонны.

Если $n > m$, то представим A_m в виде

$$A_m = C_m \oplus C_{m+1} \oplus \ldots \oplus C_{n-1} \oplus C_n,$$

где

$$|C_m| = |B|, \ |C_{m+1}| = |B_{m+1}|, \ldots, |C_{n+1}| = |B_{n-1}|.$$

Так как порядковый тип лестницы A_m, как остатка лестницы A порядкового типа ω^{γ}, равен тоже порядковому числу ω^{γ} и поэтому он не меньше порядковых типов ω^{γ_i} лестниц B_j, то такое разложение лестницы A_m существует. Порядковый тип остатка C_n лестницы A_m порядкового типа ω^{γ} тоже равен порядковому числу ω^{γ}. Обозначив $C_i = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, мы получим для A следующее представление

$$A = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n$$

Так как $|C_i| = \omega^{\gamma_i}$, $|B_i| = \omega^{\beta_i}$ и $\gamma_i \geqslant \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то отображение φ можно построить следующим образом:

$$a\varphi = a\varphi(C_i, B_i), \quad \text{если } a \in C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

И в этом случае ясно, что φ монотонно отображает A на B.

Предложение доказано.

Следствие 5.4. Идемпотентная полугруппа с единицей тогда и только тогда является Γ-полугруппой, когда она – цепь порядкового типа $(\omega^*)^{\gamma_m}$.

Доказательство. Необходимость. Любая идемпотентная полугруппа является, как известно, коммутативной связкой матричных связок единичных групп, т.е. матричных полугрупп. Каждая подполугруппа идемпотентной Γ-полугруппы с единицей, в том числе и каждая ее матричная компонента, обладает единицей. Но матричная полугруппа с единицей одноэлементна: из $1 = m_{\alpha\beta}$ следует

$$m_{\alpha\tau} = m_{\alpha\beta} \cdot m_{\sigma\tau} = 1 \cdot m_{\sigma\tau} = m_{\sigma\tau} \cdot 1 = m_{\sigma\tau} m_{\alpha\beta} = m_{\sigma\beta},$$

откуда $\alpha = \sigma$, $\beta = \tau$ и $m_{\sigma\tau} = 1$ для любого элемента $m_{\sigma\tau}$ матричной компоненты. Следовательно, рассматриваемая идемпотентная полугруппа коммутативна. Если бы в ассоциированной с ней полуструктуре существовали несравнимые элементы a и b, то элементы a, b и ab образовывали бы подполугруппу, не обладающую единицей. Как мы отмечали выше, таких подполугрупп не должно быть. Следовательно, ассоциированная с рассматриваемой Γ-полугруппой полуструктура является цепью (Γ-цепью). Единица полугруппы является ее максимальным элементом.

Для завершения доказательства необходимости условия следствия воспользуемся следующим очевидным утверждением:

Лемма 5.5. Если цепь A является Γ-цепью, то и дуальная цепь A^* является Γ-цепью.

Применив к дуальной Γ-цепи предложение 5.2, получим, что она имеет порядковый тип $\omega^{\gamma}m$. Следовательно, рассматриваемая Γ-цепь имеет порядковый тип $(\omega^*)^{\gamma}m$.

Достаточность. Пусть лестница A имеет порядковый тип $(\omega^*)^{\gamma}m$. Тогда дуальная лестница A^* имеет порядковый тип $\omega^{\gamma}m$ и, по предложению 5.2, она является Γ-цепью. Тогда, по лемме 5.5, Γ-цепью является и лестница A.

Следствие доказано.

Предложение 5.6. φ-полугруппа S с единицей является линейной связкой периодических групп G_α, $\alpha \in I$, причем если $S \in \Gamma$, то I – лестница типа $(\omega^*)^{\gamma}m$.

Доказательство. В [I] доказано, что полугруппа, каждая подполугруппа которой обладает единицей, является линейной связкой периодических групп. Почти дословно повторяя это доказательство (см. пояснения, сделанные в ходе доказательства предложения 4.6), получим, что полугруппа, каждая конечнопорожденная подполугруппа которой обладает единицей, является линейной связкой периодических групп. Но в φ-полугруппе с единицей как раз и выполняется такое свойство. Если $S \in \Gamma$, то множество идемпотентов образует в S подполугруппу [3] и даже цепь с максимальным элементом. По предложению 3.3. она является Γ-цепью и по следствию 5.4 ее тип равен $(\omega^*)^{\gamma}m$.

Предложение доказано.

Следствие 5.7. φ-полугруппа с нулем и единицей является цепью, а если она является Γ-полугруппой, то даже конечной цепью.

Действительно, ее групповые компоненты должны обладать нулем и потому одноэлементны. Если $S \in \Gamma$, то любое подмножество этой цепи должно обладать первым и последним элементом, т.е. цепь должна быть конечной: наличие первого элемента в каждом подмножестве означает, что мы имеем дело с лестницей, а последнего – что эта лестница не может быть бесконечной, ибо бесконечная лестница всегда имеет подмножество без последнего элемента.

<u>Предложение 5.8.</u> Если Γ-полугруппа с единицей содержит конечное число идемпотентов, то ее групповые компоненты являются Γ-группами.

<u>Доказательство.</u> Пусть S является Γ-полугруппой с единицей e_1 и с идемпотентами

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \quad e_i e_j = e_j e_i = e_i \ (i > j).$$

Тогда S является линейной связкой периодических групп

$$G_1, \ldots, G_n, \quad G_i G_j \subset G_i, \ G_j G_i \subset G_i \ (i > j)$$

с единицами $e_1, \ldots, e_n$, соответственно. Покажем, что все $G_i \in \Gamma$. Для этого рассмотрим в G_i подгруппу F_i, а в S подполугруппу

$$T = e_1 \cup \ldots \cup e_{i-1} \cup F_i \cup G_{i+1} \cup \ldots \cup G_n.$$

Тот факт, что T действительно является подполугруппой в S вытекает из того, что S является линейной связкой групп G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, так что при умножении элементов из T, принадлежащих двум различным компонентам вида $\{e_k\}$, $\{e_l\}$, F_i, G_p или G_q, где $1 \leq k < l < i < p < q \leq n$, разложения множества T, их произведение попадает в ту из двух этих компонент, индекс которой больше. Пусть φ – эпиморфизм S на T. Он отображает каждую групповую компоненту G_j в себя. Действительно, $G_j \varphi$ является группой, так что $G_j \varphi \in G_l$ для некоторого l, ибо в противном случае группа $G_j \varphi$ пересекалась бы с несколькими компонентами разложения полугруппы S в линейную связку и являлась бы поэтому объединением нескольких непересекающихся групп, что невозможно. Так как идемпотенты линейной связки групп образуют цепь, а сужение на эту цепь отображения φ является эпиморфизмом (T содержит все идемпотенты из S) этой цепи, то по лемме 5.1 отображение φ индуцирует монотонное отображение цепи всех идемпотентов на себя. Ввиду конечности множества идемпотентов, это означает, что φ – тождественное отображение цепи идемпотентов в на себя и $j = l$. Следовательно, $G_i \varphi = F_i$, т.е. $G_i \in \Gamma$.

Предложение доказано.

Утверждение, обратное предложению 5.8 не имеет места. Существуют линейные связки конечного числа Γ-групп, не являющиеся Γ-полугруппами.

Рассмотрим, например, последовательно аннулирующую связку двухэлементных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и группы $G_0=\{0\}$, $G_i G_j \subset G_i$, $i<j$. Покажем, что не существует эпиморфизма S на G_n. Из равенств

$$g_i g_{i-1} = g_{i-1},\ g_i \in G_i,\ i=1,2,\ldots,n \text{ и } g_i\varphi = g_n^{k(i)}$$

следует, что

$$g_n^{k(i)} g^{k(i-1)} = g_n^{k(i-1)}, \text{ т.е. } g_n\varphi = g_{n-1}\varphi = \ldots = g_2\varphi = g_1\varphi = e_n.$$

Но $g_0\varphi = 0\varphi = e_n$, т.е. $S\varphi = e_n \neq G_n$.

Аналогичный пример последовательно аннулирующей связки двухэлементных групп G_α, $\alpha\in I$, где I - лестница типа ω, показывает, что и линейная связка бесконечного множества Γ-групп может не быть Γ-полугруппой.

Теорема 5.9. Полугруппа S тогда и только тогда является конечной Γ-полугруппой с единицей, когда

1) S является последовательно аннулирующей связкой конечного числа конечных Γ-групп $G_1, \ldots, G_n$, $G_i G_j \subset G_i (i>j)$;

2) группы $G_1, \ldots, G_{n-1}$ являются эпиморфными образами группы G_n.

Доказательство. Пусть S - конечная Γ-полугруппа с единицей. По предложению 5.6 она является линейной связкой периодических групп

$$G_1, \ldots, G_n,\ G_i G_j \in G_j \text{ при } i<j. \qquad (5.3)$$

Так как S конечна, то все эти группы конечны и являются по предложению 5.8 Γ-группами.

Множество

$$T = e_1 \cup \ldots \cup e_i \cup G_{i+1} \cup \ldots \cup G_n$$

является в S подполугруппой. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi: S \longrightarrow T$. В ходе доказательства предложения 5.8 было показано, что при этом

$$G_1\varphi = e_1, \ldots, G_i\varphi = e_i,\ G_{i+1}\varphi = G_{i+1}, \ldots, G_n\varphi = G_n.$$

Рассмотрим $g_i \in G_i$ и $g_j \in G_j$, $i<j$. Тогда

$$g_j\varphi = g_j\varphi\cdot e_j = g_j\varphi\cdot e_j e_i = g_j\varphi\cdot e_i = g_j\varphi\cdot g_i\varphi = (g_j g_i)\varphi = (g_j g_i \cdot e_j)\varphi = g_j\varphi\cdot g_i e_j\varphi,$$

откуда $g_i e_j \varphi = e$. Но группа G_j конечна, так что прообраз единицы при эпиморфизме φ состоит из одного элемента: $g_i e_j = e_j$. Аналогично,

$$g_i\varphi = (g_j g_i)\varphi = (g_j e_j g_i)\varphi = g_j\varphi\cdot e_j g_i\varphi$$

и $e_j g_i = e_j$. Поэтому $g_i g_j = g_j = g_j g_i$, что и доказывает утверждение 1).

Остальные утверждения теоремы (справедливость утверждения 2) и достаточность условий теоремы) вытекают из следующей леммы, имеющей и самостоятельный интерес:

Лемма 5.10. Последовательно аннулирующая связка периодических Γ-групп (5.3) тогда и только тогда является Γ-полугруппой, когда выполнено условие 2).

Доказательство. Необходимость. Пусть S является Γ-полугруппой и последовательно аннулирующей связкой групп (5.3). Рассмотрим в S подполугруппу $R = G_1 \cup \dots \cup G_i$, $i < n$, и эпиморфизм $\varphi : S \longrightarrow R$. Из $e_j e_n = e_n$ и $e_j\varphi = e_k$, $e_n\varphi = e_l$ следует $e_k e_l = e_l$, т.е. $k \le l$. Поэтому $G_n\varphi \subset G_i$. Пусть $g_j \in G_j$, $j < n$. Тогда из равенства $g_j e_n = e_n$ следует, что $g_j\varphi \cdot e_i = e_i$. Если $g_j\varphi \in G_i$, то это означает, что $g_j\varphi = e_i$ и $G_j\varphi = e_i$. Если же $g_j\varphi \in G_k$, $k < i$, то $G_j\varphi \subset G_k$. И в том, и в другом случае из эпиморфности φ следует, что $G_n\varphi = G_i$, что и утверждается в 2).

Достаточность. Предположим, что полугруппа S является последовательно аннулирующей связкой периодических Γ-групп (5.3) и что она удовлетворяет условию 2). Покажем, что $S \in \Gamma$.

Рассмотрим в S подполугруппу T и пусть

$$J = \{\alpha \mid 1 \le \alpha \le n,\ T \cap G_\alpha \ne \emptyset\} =$$
$$= \{\alpha_1, \dots, \alpha_k \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_k,\ e_{\alpha_1} e_{\alpha_k} = e_{\alpha_k}\}.$$

Полугруппа T является последовательно аннулирующей связкой своих подгрупп $T_\alpha = T \cap G_\alpha$, $\alpha \in J$, так что, в частности, все идемпотенты $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k} \in T$. Рассмотрим эпиморфизм $\psi : G_n \longrightarrow T_{\alpha_k}$, существование которого вытекает из 2) и из того, что $G_{\alpha_k} \in T$, и эпиморфизмы $\varphi_i : G_{\alpha_i} \longrightarrow T_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in J \setminus \alpha_k$. Продолжим их следующим образом до отображения φ полугруппы S на T $(g_i \in G_i)$:

$$g_i\varphi = \begin{cases} g_i\varphi_i, & \text{если } i \in J \setminus \{\alpha_k\}; \\ e_{\alpha_j}, & \text{если } \alpha_{j-1} < i < \alpha_j \quad (\text{здесь } \alpha_0 = 0,\ j = 1, \dots, k-1) \\ e_{\alpha_k}, & \text{если } \alpha_{k-1} < i < n; \\ g_i\psi, & \text{если } i = n. \end{cases} \tag{5.4}$$

Покажем, что φ является гомоморфизмом. Пусть

$$\alpha_i \le \alpha_{j-1} < \alpha < \beta < \alpha_j \le \alpha_{k-1} < \gamma < \alpha_k < \xi < \delta < n. \tag{5.5}$$

Тогда, соответственно из первой, второй, третьей и четвертой строк определения (5.4) следует, что

$$g_{\alpha_j}\varphi = g_{\alpha_j}\varphi_j; \tag{5.6}$$
$$g_\alpha\varphi = e_{\alpha_j} = g_\beta\varphi; \tag{5.7}$$

$$g_\gamma\varphi = g_{\alpha_k}\varphi = g_\varepsilon\varphi = g_\delta\varphi = e_{\alpha_k} \qquad (5.8)$$

$$g_n\varphi = g_n\psi. \qquad (5.9)$$

При $p = q$ равенство

$$(g_p g_q)\varphi = g_p\varphi\, g_q\varphi \qquad (5.10)$$

очевидно, ибо φ индуцирует гомоморфизмы на всех группах (5.3). Доказывая (5.10) в остальных случаях, будем, для определенности, предполагать, что $p < q$. Если при этом $g_p\varphi \in G_i$, $g_q\varphi \in G_\ell$, $i < \ell$, то $g_p\varphi \cdot g_q\varphi = g_q\varphi = (g_p g_q)\varphi$. Поэтому в проверке нуждаются только те случаи, когда $g_p\varphi$ и $g_q\varphi$ лежат в одной групповой компоненте.

При условии $p < q$ существует 10 принципиально различных способов выбрать g_p и g_q в разных групповых компонентах. Все эти способы указаны в приводимой ниже таблице, в которой также показано, в какую групповую компоненту попадают образы двух рассматриваемых элементов (через P обозначено множество $\{\gamma, \alpha_k, \varepsilon, \delta\}$).

№	p	$g_p\varphi \in$	q	$g_q\varphi \in$
1	$=\alpha_i$	G_{α_i}	$=\alpha$	G_{α_j}
2	—"—	—"—	$=\alpha_j$	—"—
3	—"—	—"—	$\in P$	G_{α_k}
4	—"—	—"—	$=n$	—"—
5	$=\alpha$	G_{α_j}	$=\beta$	G_{α_j}
6	—"—	—"—	$=\alpha_j$	—"—
7	—"—	—"—	$\in P$	G_{α_k}
8	—"—	—"—	$=n$	—"—
9	$\in P$	G_{α_k}	$\in P$	—"—
10	—"—	—"—	$=n$	—"—

Из сравнения второго и четвертого столбцов основной части этой таблицы следует, что в проверке нуждаются только случаи 5,6,9 и 10. Рассмотрим каждый из них в отдельности:

5. $(g_\alpha g_\beta)\varphi = g_\beta\varphi \overset{(5.7)}{=} e_{\alpha_j} = e_{\alpha_j} e_{\alpha_j} \overset{(5.7)}{=\!=} g_\alpha\varphi \cdot g_\beta\varphi$;

6. $(g_\alpha g_{\alpha_j})\varphi = g_{\alpha_j}\varphi \overset{(5.6)}{=} g_{\alpha_j}\varphi_j = e_{\alpha_j} g_{\alpha_j}\varphi_j \overset{(5.7)}{=\!=} g_\alpha\varphi \cdot g_{\alpha_j}\varphi_j$

9. $(g_p g_q)\varphi = g_q\varphi \overset{(5.8)}{=\!=} e_{\alpha_k} = e_{\alpha_k} e_{\alpha_k} \overset{(5.8)}{=\!=} g_p\varphi \cdot g_q\varphi$;

10. В этом случае $e_{\alpha_k} \cdot g_n\varphi = g_n\varphi$, ибо $g_n\varphi \overset{(5.9)}{=\!=} g_n\psi \in T_{\alpha_k}$, так что

$$(g_p g_n)\varphi = g_n\varphi = e_{\alpha_k} g_n\varphi \overset{(5.8)}{=\!=} g_p\varphi \cdot g_n\varphi.$$

Лемма и теорема доказаны.

Теорема 5.11. Полугруппа S тогда и только тогда является Φ^*-полугруппой (Γ^*-полугруппой) с единицей, когда она – линейная связка групп G_α, $\alpha \in I$, где I – цепь с единицей (типа ω^* или m), причем все G_α одноэлементны, кроме, быть может, компоненты G_{α_0}, $\alpha = \min I$, которая является Φ^*-группой (Γ^*-группой).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что S является Φ^*-полугруппой (Γ^*-полугруппой) с единицей. Тогда, по предложению 5.6, S является линейной связкой групп G_α, где $\alpha \in I$. Будем считать, что $G_\alpha G_\beta \in G_\alpha$ при $\alpha < \beta$. Множество I может рассматриваться (с точностью до подобия) как множество всех единиц e_α всех групп G_α или, что то же, как множество всех идемпотентов полугруппы S. По предложению 3.4 множество всех идемпотентов Φ^*-полугруппы является ее подполугруппой и, следовательно, идемпотентной Φ^*-полугруппой с единицей (соответственно, Γ^*-полугруппой с единицей). Поэтому, как отмечено в [6], I является цепью (порядкового типа ω^* или m).

Пусть $\alpha > \beta$. Покажем, что G_α одноэлементна. Пусть $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta = g_\alpha e_\beta$. Множество $\langle g_\alpha\rangle \cup \langle g_\beta\rangle$ является в S конечнопорожденной подполугруппой:

$$g_\alpha^k g_\beta^\ell = g_\alpha^k (e_\beta g_\beta^\ell) = g_\alpha^{k-1}(g_\alpha e_\beta) g_\beta^\ell = $$
$$= g_\alpha^{k-1} g_\beta g_\beta^\ell = g_\alpha^{k-1} g_\beta^{\ell+1} = \dots = g_\beta^{k+\ell} \in \langle g_\beta\rangle.$$

Отобразим эту полугруппу эпиморфизмом φ не ее подполугруппу $e_\alpha \cup \langle g_\beta\rangle$. Как показано в ходе доказательства предложения 5.9

$$\langle g_\alpha\rangle\varphi = e_\alpha, \quad \langle g_\beta\rangle\varphi = \langle g_\beta\rangle.$$

Поэтому

$$g_\beta\varphi = (e_\beta g_\beta)\varphi = (e_\alpha e_\beta g_\beta)\varphi = (e_\alpha g_\beta)\varphi =$$

$$= g_\alpha \varphi \cdot g_\beta \varphi = (g_\alpha g_\beta)\varphi = (g_\alpha e_\beta g_\beta)\varphi = g_\beta^2 \varphi = (g_\beta \varphi)^2,$$

откуда $g_\beta \varphi = e_\beta$. Следовательно,

$$\langle g_\beta \rangle = \langle g_\beta \rangle \varphi = e_\beta, \quad g_\beta = e_\beta$$

и $e_\beta = g_\alpha e_\beta$. Аналогично, $e_\beta g_\alpha = e_\beta$, так что для всех элементов циклической группы $\langle g_\alpha \rangle$ элемент e_β служит нулем. Поэтому $\langle g_\alpha \rangle \cup e_\beta$ является подполугруппой в S. Она конечно порождена и, следовательно, принадлежит классу Φ. Отобразив ее эпиморфно на ее циклическую подгруппу $\langle g_\alpha \rangle$, получим, что последняя обладает нулем. Следовательно, $g_\alpha = e_\alpha$. Ввиду произвольности выбора g_α заключаем, что $G_\alpha = e_\alpha$.

Если I не обладает минимальным элементом, то из доказанного следует, что $G_\alpha = e_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Если I содержит минимальный элемент α_0, то $G_\alpha = e_\alpha$ для всех $\alpha > \alpha_0$, а G_{α_0} является Φ^*-группой (Γ^*-группой).

Достаточность. Линейная связка описанного в условии теоремы типа является последовательно аннулирующей. Ее принадлежность к классу Φ^* (или Γ^*) вытекает из предложения 4.6 (следствия 4.7).

Теорема доказана.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою признательность рецензенту Я.В.Хиону, чье внимательное отношение к статье во многом способствовало приданию ей ее настоящего вида.

Литература

1. Воробьев Н. Н., Ассоциативные системы, каждая подсистема которых имеет единицу. ДАН СССР, 1953, 88, 393-396.
2. Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств. Москва, 1970.
3. Просвиров А. С., О периодических полугруппах. Матем. записки, 1971, 8, 77-94.
4. Свердловская тетрадь (нерешенные проблемы теории полугрупп), Свердловск, 1969.
5. Fuchs, L., Kertesz, A., Szele, T., On abelian group whose subgroups are endomorphic images. Acta Sci. Math., Szeged, 1955, 16, 1, 77-88.
6. Gabovič, E. Ja., On bands in which every finite-

ly generated subband is an endomorphic image. Semigroup Forum, 1972, 4, 2, 335-340.

7. K e r t e s z, A., S z e l e, T., Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. Acta Sci. Math., Szeged, 1953, 15, 70-76.

8. S a s i a d a, E., On abelian group every countable subgroup of which is an endomorphic image. Bull.Acad. Polonais, Classe III, 1954, 2, 365-368.

Поступило
22 II 1973

ÜHEST POOLRÜHMADE KLASSIST, MIS ON RIKAS ENDOMORFISMIDE POOLEST

J.Gabovitŝ ja H.Sildos

R e s ü m e e

Poolrühm S kuulub klassi Φ, kui tema mis tahes lõpliku arvu elementide poolt tekitatud alampoolrühma T korral eksisteerib epimorfism $S \longrightarrow T$. Uuritakse klassi Φ mõningaid alamklasse.

ON A CLASS OF SEMIGROUPS WHICH ARE RICH IN ENDOMORPHISMS

E.Gabovič and H.Sildos

S u m m a r y

A semigroup $S \in \Phi$ if for every finitely generated subsemigroup T of S there exists an epimorphism of S on T. Some subclasses of Φ are studied.

О НЁТЕРОВЫХ И КОНЕЧНО СВЯЗАННЫХ ПОЛИГОНАХ

П. Нормак

Кафедра алгебры и геометрии

В теории колец и модулей играют довольно большую роль понятия "нётеровость" и "конечная связанность".

В данной статье определяется нётеровость для полигонов и изучаются простейшие свойства нётеровых полигонов. Найдены необходимые и достаточные условия для конечной связанности полигона.

Пусть S - моноид, т.е. полугруппа с единицей. Множество M называется левым S-полигоном, если для любых элементов $s \in S$ и $m \in M$ определено произведение $sm \in M$, причем $(s_1 s_2)m = s_1(s_2 m)$ и $1m = m$ для всех $s_1, s_2 \in S$ и $m \in M$. Если существует конечное подмножество $\{m_i, i=1,\dots,n\}$ S-полигона M, такое, что каждый элемент $m \in M$ можно записать в виде $m = sm_i$, где $s \in S$ и $i \in \{1,\dots,n\}$, то полигон M называется конечно порожденным. Элементы m_i, $i=1,\dots,n$, называются образующими S-полигона M. Полигон с одним образующим называется циклическим. Эквивалентность ρ на S-полигоне M называется отношением конгруэнтности, если из $m_1 \rho m_2$ следует $sm_1 \rho sm_2$ для всех $s \in S$. Легко убедиться, что циклический S-полигон Sz с образующим z изоморфен факторполигону S/ρ, где ρ - левая конгруэнция на моноиде[I] S, определяемая условием: $s \rho t$ тогда и только тогда, когда $sz = tz$. Конгруэнция ρ на полигоне M называется конечнопорожденной, если существует конечное число пар (x_i, y_i), $i=1,\dots,n$, $x_i, y_i \in M$, таких, что ρ равняется пересечению всех конгруэнций на M, "склеивающих" элементы x_i и y_i, $i=1,\dots,n$. Копроизведение $\coprod_I M_i$ S-полигонов M_i, $i \in I$, где I - некоторое множество индексов, изоморфно объединению попарно непересекающихся полигонов M_i, $i \in I$. Назовем S-полигон F свободным, если он изоморфен копроизведению некоторого множества

I Эквивалентность ρ на моноиде S называется левой конгруэнцией, если $s \rho t$ влечет $us \rho ut$ для всех $u \in S$.

экземпляров моноида S. Последовательность $A \rightrightarrows B \xrightarrow{\gamma} C$, где A, B, C - S-полигоны, называется точной, если $\gamma\alpha = \gamma\beta$ и для всякого гомоморфизма $\sigma : B \longrightarrow D$, такого, что $\sigma\alpha = \sigma\beta$, существует единственный гомоморфизм $\varkappa : C \longrightarrow D$, при котором $\varkappa\gamma = \sigma$. Полигон C называется конечно связанным, если существует точная последовательность $K \rightrightarrows F \longrightarrow C$, где F - конечно порожденный свободный и K - конечно порожденный полигоны.

В работе неоднократно используется следующий[2] результат ([5], предложение I. 5.8):

Лемма О. Гомоморфизм $\gamma : B \longrightarrow C$ в точной последовательности полигонов $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\gamma} C$ является эпиморфизмом. Последовательность $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\mu} D$, где $\mu : B \rightarrow D$ - эпиморфизм, является точной тогда и только тогда, когда $D \simeq C$ [1].

I. Нётеровы полигоны

Пусть S - моноид. Все рассматриваемые в дальнейшем полигоны являются левыми S-полигонами.

Предложение I. Пусть M - полигон. Следующие утверждения эквивалентны:

I) Любая конгруэнция на полигоне M является конечнопорожденной;

2) Любая возрастающая цепочка $\rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \ldots$ конгруэнций на полигоне M стабилизируется;

3) Любое непустое множество конгруэнций на полигоне M имеет максимальный элемент.

Доказательство проводится аналогично соответствующим доказательствам в теории модулей (см. например, [2], стр. I66).

Будем говорить, что полигон M нётеров, если он удовлетворяет одному из условий предложения I.

Предложение 2. Всякий подполигон нётерова полигона - нётеров.

Доказательство. Пусть N - подполигон нётерова полигона M и пусть $\rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \ldots$ - возрастающая цепочка кон-

---

[2] Следует отметить, что в категории полигонов каждый эпиморфизм является отображением на (см., например, доказательство теоремы I работы [4]).

груэнций на полигоне N. Определим на M отношения ρ'_i, $i=1,2,\ldots$,

$$m_1\rho'_i m_2 \iff \begin{cases} m_1\rho_i m_2, & \text{если } m_1 m_2 \in N \\ m_1 = m_2, & \text{если } m_1 m_2 \in M\setminus N \end{cases}$$

Ясно, что ρ'_i, $i=1,2,\ldots$, являются конгруэнциями на полигоне M, причем $\rho'_i \le \rho'_{i+1}$. Так как из $\rho_i < \rho_{i+1}$ следует $\rho'_i < \rho'_{i+1}$, то последовательность $\rho_1 \le \rho_2 \le \ldots$ стабилизируется.

Из леммы II. 3.12 книги [3] непосредственно вытекает:

Предложение 3. Всякий факторполигон M/ρ нётерова полигона M нётеров.

Теорема I. Копроизведение $A \amalg B$ полигонов A и B нётерово тогда и только тогда, когда A и B нётеровы.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2.

Достаточность. Предположим, что на полигоне $A \amalg B$ задана последовательность конгруэнций $\rho_1 < \rho_2 < \ldots$. Пусть α_i, β_i - сужения конгруэнции ρ_i на полигонах A и B соответственно. Ясно, что α_i и β_i являются конгруэнциями и $\alpha_i \subseteq \alpha_{i+1}$, $\beta_i \subseteq \beta_{i+1}$ для всех i, $i=1,2,\ldots$ Рассмотрим в A подмножества $A_i=\{a \mid a\in A$, существует элемент $b\in B$ такой, что $a\rho_i b\}$. Легко проверяется, что A_i - подполигон в A, причем $A_i \subseteq A_{i+1}$. Каждый подполигон A_i определяет на полигоне A конгруэнцию Риса γ_i, где $x\gamma_i y$ тогда и только тогда, когда $x=y$ или $x,y\in A_i$. Так как последовательности $\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \ldots$ и $\beta_1 \subseteq \beta_2 \subseteq \ldots$ стабилизируются, то найдется такой индекс N, что $\alpha_i = \alpha_N$ и $\beta_i = \beta_N$ при всех $i \ge N$. Покажем, что при $i > N$ неравенство $\rho_i \subsetneq \rho_{i+1}$ влечет $\gamma_i \subsetneq \gamma_{i+1}$. Действительно, поскольку $\rho_i \subset \rho_{i+1}$, то существуют элементы $a\in A$, $b\in B$ такие, что $a\rho_{i+1}b$, но $a \not\rho_i b$. Если теперь $a\rho_i b'$ для некоторого $b'\in B$, то $a\rho_{i+1}b'$. Но тогда $b\rho_{i+1}b'$, т.е. $b\beta_{i+1}b'$, откуда $b\beta_i b'$, так как $\beta_i = \beta_{i+1}$. Поскольку β_i - ограничение ρ_i, получаем $a\rho_i b'\rho_i b$, в противоречии с $a\not\rho_i b$. Таким образом, последовательность $\gamma_i \subset \gamma_{i+1} \subset \ldots$ строго возрастающая, что противоречит нётеровости полигона A.

2. Конечно связанные полигоны

Лемма I. Последовательность $K \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{\varkappa} S/\rho$ полигонов над моноидом S, где K - порождается множеством $\{k_i, i=1,\ldots,n\}$, ρ порождается парами $(\alpha(k_i), \beta(k_i))$ и $\varkappa$ - канонический эпиморфизм, является точной.

Доказательство. Пусть $\gamma\alpha = \gamma\beta$ для некоторого гомоморфизма $\gamma : S \longrightarrow A$. Ясно, что $\rho \subseteq \ker\gamma$. Но тогда существует единственный гомоморфизм $\bar{\gamma} : S/\rho \longrightarrow A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varkappa"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & S/\rho \arrow[dl, "\bar{\gamma}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

коммутативна ([3], следствие 3.8).

Теорема 2. Пусть S - моноид. Следующие свойства циклического S-полигона Sz эквивалентны:

I) Sz - конечно связан;

2) Существует точная последовательность S-полигонов $K \rightrightarrows S \rightarrow Sz$, где K - конечнопорожденный S-полигон;

3) $Sz \simeq S/\rho$, где ρ - конечнопорожденная левая конгруэнция на моноиде S.

Доказательство. I)$\Longrightarrow$2). Пусть циклический S-полигон Sz конечно связан, т.е. существует точная последовательность

$$K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{\gamma} Sz, \tag{I}$$

где K - конечнопорожденный и F_κ - конечнопорожденный свободный S-полигоны. Пусть $F = \coprod_{i=1}^{\kappa} S^i$. Обозначим элемент s в компоненте S^i полигона F через s^i. Пусть K порождается множеством $\{x_i,\ i = 1, \dots, \ell\}$ $\alpha(x_i) = s_i^{n_i}$, $\beta(x_i) = t_i^{m_i}$ $i = 1, \dots, \ell$ и $\gamma(1^i) = a_i z$, $i = 1, \dots, \kappa$. Так как γ - эпиморфизм, то $\gamma(u_0^j) = z$ для некоторого $u_0^j \in F$. Построим последовательность

$$K \overset{\alpha'}{\underset{\beta'}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{\gamma'} Sz, \tag{2}$$

где $\gamma'(s) = \gamma(s^j)$,

$$\begin{aligned} \alpha'(sx_i) &= \begin{cases} ss_i a_{n_i} u_0, & \text{если } \alpha(x_i) \bar{\in} S^j, \text{ т.е. } n_i \neq j, \\ ss_i, & \text{если } \alpha(x_i) \in S^j, \text{ т.е. } n_i = j; \end{cases} \\ \beta'(sx_i) &= \begin{cases} st_i a_{m_i} u_0, & \text{если } \beta(x_i) \bar{\in} S^j, \text{ т.е. } m_i \neq j, \\ st_i, & \text{если } \beta(x_i) \in S^j, \text{ т.е. } m_i = j. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Отображения α' и β' корректно определены. Покажем это для α'.

Пуоть $s'x_u = s''x_v$ при некоторых $s', s'' \in S$, $u, v \in \{1, \dots, \ell\}$. Тогда $s's_u^{n_u} = \alpha(s'x_u) = \alpha(s''x_v) = s''s_v^{n_v}$, откуда $n_u = n_v$ и $s's_u = s''s_v$. Ясно, что α' - гомоморфизм. Покажем, что последовательность (2) точна. Убедимоя, во-первых, что $\gamma'\alpha' =$

$=\gamma'\beta'$. Действительно,

$$\gamma'\alpha'(x_i)=\begin{cases}\gamma'(s_i a_{n_i} u_0) = s_i a_{n_i} z, & \text{если } n_i\ne j,\\ \gamma'(s_i) = s_i a_j z, & \text{если } n_i=j,\end{cases}$$

т.е. всегда $\gamma'\alpha'(x_i)=s_i a_{n_i} z$. Далее,

$$\gamma'\beta'(x_i)=\begin{cases}\gamma'(t_i a_{m_i} u_0) = t_i a_{m_i} z, & \text{если } m_i\ne j,\\ \gamma'(t_i) = t_i a_j z, & \text{если } m_i=j,\end{cases}$$

т.е. всегда $\gamma'\beta(x_i)=t_i a_{m_i} z$. С другой стороны, из точности последовательности (I) следует $\gamma\alpha(x_i)=\gamma\beta(x_i)$. Так как $\gamma\alpha(x_i)=\gamma(s_i^{n_i})=\gamma(s_i 1^{n_i})=s_i\gamma(1^{n_i})=s_i a_{n_i} z$ и $\gamma\beta(x_i)=\gamma(t_i^{m_i})=\gamma(t_i 1^{m_i})=t_i\gamma(1^{m_i})=t_i a_{m_i} z$, то $s_i a_{n_i} z = t_i a_{m_i} z$, что означает $\gamma'\alpha'(x_i)=\gamma'\beta'(x_i)$. Поскольку это справедливо для всех i, $i=1,\dots,l$, то $\gamma'\alpha'=\gamma'\beta'$. Пусть гомоморфизм $\gamma'': S\to B$ таков, что $\gamma''\alpha'=\gamma''\beta'$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & F \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\sigma"'] & Sz \\ & S \arrow[d, "\gamma''"'] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

где

$$\sigma(s^i)=\begin{cases} s a_i u_0, & \text{если } i\ne j,\\ s & \text{если } i=j.\end{cases}$$

Ввиду того, что F – свободный S-полигон, σ является корректно определенным гомоморфизмом. Тогда

$$\gamma''\sigma\alpha(x_i)=\gamma''\sigma(s_i^{n_i}) = \begin{cases}\gamma''(s_i a_{n_i} u_0), & \text{если } n_i\ne j,\\ \gamma''(s_i) & \text{если } n_i=j\end{cases}$$

и

$$\gamma''\sigma\beta(x_i)=\gamma''\sigma(t_i^{m_i}) = \begin{cases}\gamma''(t_i a_{m_i} u_0), & \text{если } m_i\ne j,\\ \gamma''(t_i) & \text{если } m_i=j.\end{cases}$$

Поскольку $\gamma''\alpha'=\gamma''\beta'$, получим $\gamma''\alpha'(x_i)=\gamma''\beta'(x_i)$ и ввиду (3) $\gamma''\sigma\alpha(x_i)=\gamma''\sigma\beta(x_i)$, $i=1,\dots,l$. Следовательно, $\gamma''\sigma\alpha=\gamma''\sigma\beta$ и существует единственный гомоморфизм $\psi: Sz\to B$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\sigma"'] & & Sz \arrow[dll, "\psi"] \\ S \arrow[d, "\gamma''"'] & & \\ B & & \end{tikzcd} \tag{4}$$

коммутативна. Покажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\gamma'"] \arrow[dr, "\gamma''"'] & & Sz \arrow[dl, "\psi"] \\
& B &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

коммутативна. В самом деле, из коммутативности диаграммы (4) получим $\psi\gamma(1^j) = \gamma''\sigma(1^j)$, т.е. $\psi(a_j z) = \gamma''(1)$. Поэтому $\psi\gamma'(1) = \psi(a_j z) = \gamma''(1)$, откуда и следует коммутативность диаграммы (5). Легко понять, что гомоморфизм ψ является единственным гомоморфизмом, обращающий диаграмму (5) в коммутативную. Следовательно, последовательность (2) точна.

2) $\Longrightarrow$ 3) Пусть имеется точная последовательность S-полигонов $K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{\gamma} Sz$, где K порождается множеством $\{k_i,\ i=1,\dots,n\}$ и пусть $\alpha(k_i) = s_i$, $\beta(k_i) = t_i$. Пусть ρ – левая конгруэнция на моноиде S, порожденная парами (s_i, t_i), $i=1,\dots,n$. По лемме I последовательность $K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{\varkappa} S/\rho$, где $\varkappa$ – канонический эпиморфизм, является точной. Тогда по лемме 0 имеет место $S/\rho \simeq Sz$.

3) $\Longrightarrow$ I). Пусть $Sz \simeq S/\rho$, где ρ порождается множеством $\{(s_i, t_i)\ i=1,\dots,n\}$. Рассмотрим диаграмму $K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{\gamma} S/\rho$, где K – конечнопорожденный свободный S-полигон, свободно порождаемый множеством $\{k_i,\ i=1,\dots,n\}$ $\alpha(k_i) = s_i$, $\beta(k_i) = t_i$ и γ – канонический эпиморфизм. Импликация следует теперь из леммы I и леммы 0. Теорема доказана.

Одноэлементный S-полигон называется нулевым S-полигоном.

<u>Следствие</u>. Нулевой S-полигон является конечно связанным тогда и только тогда, когда единичная конгруэнция на моноиде S является конечно порожденной.

Примером таких моноидов служит, например, конечнопорожденная полугруппа с единицей или моноид с правым нулем.

<u>Предложение 4</u>. Полигон A над моноидом S конечно связан тогда и только тогда, когда существует конечно порожденный свободный S-полигон F и конечно порожденная конгруэнция ρ на F такие, что $A \simeq F/\rho$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть A – конечно связан, т.е. существует точная последовательность $K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{\gamma} A$, где K – конечно порожденный и F – конечно порожденный

свободный S-полигоны. Пусть ρ - конгруэнция на F, порожденная парами $(\alpha(x_i), \beta(x_i))$, $i=1,\dots,\ell$, где $\{x_i, i=1,\dots\ell\}$- множество порождающих K и $\varkappa : F \to F/\rho$ - канонический эпиморфизм. Тогда ввиду выбора последовательности $K \rightrightarrows F \to A$ и следствия 3.8 работы [3] существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & A \arrow[dl, shift left, "\bar{\gamma}"] \\ & F/\rho \arrow[ur, shift left, "\bar{\varkappa}"] & \end{tikzcd}$$

Так как γ, $\varkappa$ - эпиморфизмы, то $\bar{\varkappa}$ и $\bar{\gamma}$ являются взаимно обратными.

<u>Достаточность</u>. Пусть $A \simeq F/\rho$, где ρ порождается парами (f_i, g_i), $i=1,\dots,n$. Пусть K - конечнопорожденный свободный полигон с множеством свободных образующих $\{x_i, i=1,\dots,n\}$. Требуемой точной последовательностью оказывается последовательность $K \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{\gamma} F/\rho$, где γ - канонический эпиморфизм и $\alpha(x_i)=f_i$, $\beta(x_i)=g_i$, $i=1,\dots,n$. Предложение доказано.

Назовем моноид S нётеровым, если он является нётеровым как S-полигон.

Нётеровым моноидом является, например, циклическая полугруппа с единицей.

<u>Теорема 3</u>. Все конечнопорожденные S-полигоны над нётеровым моноидом S являются нётеровыми и конечно связанными.

<u>Доказательство</u>. Если M - конечнопорожденный S-полигон с множеством образующих $\{m_i, i=1,\dots,n\}$, то существует конгруэнция ρ на свободном S-полигоне F_n с образующими f_i, $i=1,\dots,n$, такая, что $F_n/\rho \simeq M$. Полигон M является нётеровым по теореме I и предложению 3 и конечно связанным по теореме I и предложению 4.
Теорема доказана.

<u>Предложение 5</u>. Пусть S - моноид. Тогда S-полигон $S \times S$ является конечнопорожденным в том и только в том случае, когда S - конечный моноид.

<u>Доказательство</u>. <u>Достаточность</u> очевидна.

<u>Необходимость</u>. Предположим, что S - бесконечный моноид. Пусть $S \times S$ порождается парами (s_i, t_i), $i=1,\dots,n$. Рассмотрим всевозможные пары вида $(1, s)$, где $s \in S$. Пусть

$S_i=\{s\in S;\ (1,s)=x(s_i,t_i)$ для некоторого $x\in S\}$, $i=1,\dots,n$. Ясно, что хотя бы один из множеств S_i, $i=1,\dots,n$, скажем, S_1, является бесконечным. Пусть $(1,u_1)=v_1(s_1,t_1)$ и $(1,u_2)=v_2(s_1,t_1)$, где $u_1,u_2\in S_1$ и $u_1\neq u_2$. Тогда $v_1\neq v_2$ и элементы s_1v_1 и s_1v_2 являются идемпотентами. При этом $s_1v_1\neq s_1v_2$, так как из предположения $s_1v_1=s_1v_2$, умножая обе части этого равенства слева на v_1, получим $v_1=v_2$. Кроме того, $(s_1v_1)(s_1v_2)=s_1(v_1s_1)v_2=s_1v_2$. Таким образом, выбрав в S_1 бесконечную последовательность $u_1,u_2,\dots$ различных элементов и полагая $e_i=s_1v_i$, где $(1,u_i)=v_i(s_1,t_1)$, получим, что моноид S содержит бесконечное множество различных идемпотентов $e_1,e_2,\dots$ с правилом умножения $e_ke_l=e_l$. Покажем, что с помощью каждой пары (s_i,t_i), $i=1,\dots,n$, можно получить не более одной пары вида $(1,e_i)$, $i=1,2,\dots$. Действительно, предположим, что

$$(1,e_k)=x(s_m,t_m),\quad (1,e_l)=y(s_m,t_m) \tag{10}$$

при некоторых $k,l\in\{1,2,\dots\}$; $x,y\in S$; $m\in\{1,\dots,n\}$, $e_k\neq e_l$. Тогда $1=xs_m$, откуда $Ss_m=S$. Значит, главный идеал Ss_m моноида S свободен как S-полигон. По лемме 5 работы [1], если главный идеал Ss моноида S – свободный, то либо элемент $s\in S$ сократим справа, либо $s=uv$, где $vu=1$. Если s_m сократим справа, то из соотношений (10) получим $xs_m=1=ys_m$, откуда $x=y$, что противоречит неравенству $e_k\neq e_l$. Если s_m – идемпотент, то из (10) получим $s_m=1\cdot s_m=xs_m\cdot s_m=xs_m=1$. Тогда $x=y=1$, что опять противоречит неравенству $e_k\neq e_l$. Таким образом, поскольку пар вида $(1,e_i)$, $i=1,2,\dots$, бесконечное множество, то и множество образующих S-полигона $S\times S$ должно быть бесконечным. Противоречие. Следовательно, моноид S должен быть конечным.

Предложение доказано.

<u>Примечание</u>. Последовательность $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\gamma} C$ называется эффективно точной, если $A=\{(x,y)\in B\times B;\ \gamma(x)=\gamma(y)\}$ и α,β – ограничения канонических проекций. Недавно Клиффордом был поднят вопрос об эквивалентности утверждения a) и c) предложения 4.2 работы [6]. Клиффорд представил контрпример, показывающий, что из справедливости утверждений a) предложения 4.2 не следует справедливость утверждения c).

Следующие рассуждения показывают еще раз, что нижеследующие утверждения а) и с) неэквивалентны.

а) Полигон A конечно связан;

с) A - конечнопорожденный и если $K \Longrightarrow B \longrightarrow A$ - эффективно точная последовательность, где B - конечнопорожденный, то и K - конечнопорожденный.

Если $C = \Theta$ - нулевой S-полигон, то эффективной точной последовательностью является $S \times S \Longrightarrow S \longrightarrow \Theta$. По предложению 4.2 работы [6] нулевой S-полигон конечно связан тогда и только тогда, когда $S \times S$ - конечно порожденный. По предложению 4 это эквивалентно тому, что моноид S - конечный. По следствию к теореме 2 нулевой S-полигон конечно связан тогда и только тогда, когда единичная конгруэнция на моноиде S является конечно порожденной. Так как такой моноид может быть и бесконечным, (например, бесконечный моноид с правым нулем), то получим противоречие.

Автор благодарен доценту М.А.-Б.Кильпу за руководство этой работой.

Литература

1. Дорофеева М. П., О некоторых свойствах категории полигонов. II № 5632-73. Деп. ВИНИТИ.
2. Ленг С., Алгебра. Москва, 1968.
3. Кон П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
4. Скорняков Л. А., Характеризация категории полигонов. Матем. сб., т. 80, 4, 1969, 492-502.
5. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, Москва, 1974.
6. Stenström B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 48 (1971), 315-334.

Поступило
7 IX 1976

NOETHERI JA LÕPLIKULT SEOTUD POLÜGOONIDEST

P. Normak

Resümee

Käesolevas artiklis defineeritakse Noetheri polügoonid ning uuritakse nende põhilisi omadusi. Samuti leitakse tingimused polügoonide lõplikuks seotuseks.

ON NOETHERIAN AND FINITELY PRESENTED POLYGONS

P. Normak

S u m m a r y

Let S be a monoid. We say that the congruence relation ϱ over a left S-polygon M is finitely generated if there exists a finite set of pairs (a_i, b_i), $i = 1, \dots, n$, where $a_i, b_i \in M$ for all i, such that ϱ is the smallest congruence relation over M for which $a_i \varrho b_i$ for all i. A left S-polygon M is said to be Noetherian if every congruence relation over M is finitely generated. A sequence

$$A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\gamma} C, \qquad (*)$$

where A, B, C are left S-polygons, is said to be exact if $\alpha\gamma = \beta\gamma$ and if $\sigma : B \longrightarrow D$ is a homomorphism such that $\alpha\sigma = \beta\sigma$ then there exists a unique homomorphism $\varkappa : C \longrightarrow D$ such that $\gamma\varkappa = \sigma$. If in the exact sequence (*) A is finitely generated and B finitely generated free, then C is said to be finitely presented. A monoid S is said to be Noetherian if it is Noetherian as a left S-polygon.

<u>Theorem 3</u>. Every finitely generated S-polygon over a Noetherian monoid S is Noetherian and finitely presented.

We also show that the Stenström's conditions in [6] for a polygon to be finitely presented are untrue.

ЗАМЕЧАНИЯ О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП И ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

У. Кальюлайд
Кафедра алгебры и геометрии

Статья имеет преимущественно обзорный характер; речь идет о том, чтобы дать определения пары и смежных понятий в случае, когда действующим объектом является полугруппа или алгебра. Тем самым здесь в область линейных представлений полугрупп переносится сеть понятий и связей, сходная с языком теории групповых пар [3,4]. Главная цель состоит в том, чтобы сформулировать в указанной ситуации соответствие между многообразиями пар и специальными идеалами в подходящих алгебрах, а также описать близкие к этому связи для линейных автоматов.

Пусть K - любое ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Если для фиксированной полугруппы Γ задан ее гомоморфизм в полугруппу K-эндоморфизмов некоторого K-модуля[I] G, то принято говорить о представлении полугруппы Γ в модуле G. Если дано представление $f:\Gamma \longrightarrow {}_K G$, то K-модуль G приобретает дополнительную структуру Γ-модуля: элементы из Γ будут "действовать" на модуле G согласно формуле

$$g\circ\gamma = g^{\gamma^f},$$

где через γ^f обозначен эндоморфизм, соответствующий при гомоморфизме f элементу $\gamma\in\Gamma$, а g^{γ^f} - результат действия γ^f на $g\in G$. Очевидно, при этом выполняются следующие соотношения

1) $g\circ\gamma_1\gamma_2 = (g\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$, и

2) $g\circ\iota = g$ (в случае, если Γ - моноид и ι - единица в Γ).

В случае, когда действующим объектом Γ является группа, изучение возникающей здесь категории Γ-модулей является

[I] Так как основное кольцо K коммутативно, то различать левые и правые K-модули не имеет смысла.

классической тематикой. Особое внимание еще со времен Фробениуса уделяется случаю, когда K – поле и $\dim_K G < \infty$. Выполнение этих условий в рассматриваемой нами полугрупповой ситуации при фиксации K-базиса для G превращает $\mathrm{End}_K G$ в полугруппу матриц, и мы имеем здесь матричное представление полугруппы Γ. В исследованиях такого рода упор обычно делался на том, как данная полугруппа действует, т.е. на внешних свойствах Γ. Однако, за последние десятилетия стимулирующее соседство богатой глубокими результатами абстрактной теории групп привело к преимущественному изучению внутренних свойств полугрупп. Логика такого развития естественным образом заключает в себе тенденцию к игнорированию внешних свойств полугруппы Γ. Тесная связь и равноправие абстрактных свойств G и Γ, а также свойств действия Γ в G достигается в понятии пары, всесторонее изучение которого помимо этого обстоятельства служит также хорошим экспериментом для теории многоосновных систем. Если серьёзно отнестись к приложениям алгебры к некоторым вопросам теоретической кибернетики [5-9], а также к тенденции к единству ее разных разделов, то нельзя обойти этот подход. Эти обстоятельства кажутся нам достаточным мотивом для рассмотрения следующего понятия.

Говорят о паре (G, Γ), если полугруппа Γ действует в качестве полугруппы K-эндоморфизмов в K-модуле G. Другими словами, определена алгебраическая операция $G \times \Gamma \longrightarrow G$, которую обозначим $g \circ \gamma$, обладающая следующими свойствами.

I) При фиксированном $\gamma \in \Gamma$ отображение $g \longrightarrow g \circ \gamma$ является K-эндоморфизмом модуля G, и

2) $g \circ (\gamma_1 \gamma_2) = (g \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$.

В частном случае, когда Γ – моноид с единицей ι, требуется еще выполнение свойства

3) для всех $g \in G$, $g \circ \iota = g$.

§I. Основные понятия

Приведем полный список необходимых определений.

Ядро пары (G, Γ) – это, по определению, конгруэнция $\mathrm{Ker}\,(G, \Gamma)$ в полугруппе Γ, смежными классами которой являются классы равнодействующих на G элементов из Γ. Другими словами,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2\,(\mathrm{Ker}(G,\Gamma)) \Longleftrightarrow \forall g \in G,\quad g\circ\gamma_1 = g\circ\gamma_2.$$

Если $\mathrm{Ker}(G,\Gamma)$ является единичным бинарным отношением на Γ, то говорят, что пара (G,Γ) точна.

По определению, гомоморфизм пар $\mu : (G,\Gamma) \to (G',\Gamma')$ понимается, как пара гомоморфизмов: K-гомоморфизм $\mu : G \to G'$ и гомоморфизм $\mu : \Gamma \to \Gamma'$ связанные условием

$$\forall g \in G,\ \gamma \in \Gamma,\quad (g\circ\gamma)^{\mu} = g^{\mu}\circ\gamma^{\mu}.$$

Сопутствующее понятие изоморфизма пар позволяет говорить об абстрактных свойствах пар. В возникающей здесь категории пар определяются все алгебраические понятия.

Пара (H,Σ) называется подпарой пары (G,Γ), если H - подмодуль в G, Σ - подполугруппа в Γ, подмодуль H инвариантен относительно действия Σ, и представление Σ относительно H индуцируется исходным представлением полугруппы Γ.

Для данного набора пар (G_i,Γ_i), $i\in I$, пусть G - полная прямая сумма всех G_i, а Γ - декартово произведение всех полугрупп Γ_i, $i \in I$. Действие Γ в G задаем формулой $(g\circ\gamma)(i) = g(i)\circ\gamma(i)$, $i\in I$, где элементы $g\in G$ и $\gamma\in\Gamma$ рассматриваются как функции на I. Возникающая таким образом пара (G,Γ) называется декартовым произведением пар (G_i,Γ_i); обозначается она $\prod\limits_{i\in I}(G_i,\Gamma_i)$.

Конгруэнция пары (G,Γ) - это пара данных $\langle H,\sigma\rangle$, где H является Γ - инвариантным подмодулем в G, а σ - конгруэнция в полугруппе Γ, такая, что $\sigma\subset \mathrm{Ker}(G/H,\Gamma)$. Каждая конгруэнция $\langle H,\sigma\rangle$ определяет пару $(G/H,\ \Gamma/\sigma)$, которая называется факторпарой (G,Γ) по $\langle H,\sigma\rangle$ и обозначается $(G,\Gamma)/\langle H,\sigma\rangle$; действие в факторпаре определено формулой $\bar g\circ\bar\gamma = \overline{g\circ\gamma}$. Естественным образом сформулируются и доказываются теоремы о гомоморфизмах [5], а также следующая

<u>Теорема</u> (Ремак). Пусть в паре (G,Γ) задан набор конгруэнций $\langle H_i,\sigma_i\rangle$, $i\in I$. Тогда пара данных $\langle H,\sigma\rangle = \langle \bigcap\limits_{i\in I} H_i, \bigcap\limits_{i\in I}\sigma_i\rangle$ также будет конгруэнцией пары (G,Γ) и существует мономорфизм пар

$$(G,\Gamma)/_{\langle H,\sigma\rangle} \longrightarrow \prod_{i\in I}(G/_{H_i},\ \Gamma/_{\sigma_i}).$$

Наряду с обычными гомоморфизмами пар выделяются еще их левые и правые гомоморфизмы. При левом гомоморфизме действующая полугруппа в рассматриваемых парах (по определению) одна и та же, т.е. левый гомоморфизм пар - это гомоморфизм соответствующих этим парам Γ-модулей. При правом гомоморфизме пар последние имеют одну и ту же область действия, на которой гомоморфизм является тождественным отображением.

Сделаем еще одно замечание.

Для любой полугруппы Γ через Γ^* обозначим моноид, получаемый внешним присоединением к Γ единицы. Ясно, что всякая пара (G,Γ) может быть "продолжена" до пары (G,Γ^*), доопределив действие единицы $\iota\in\Gamma^*$ при всех $g\in G$ формулой $g\circ\iota=g$. Таким образом, категорию пар сопровождает категория унитальных пар.

В дальнейшем существенную роль будут играть также пары, в которых действующими объектами являются K-алгебры. Пусть даны K-модуль G и K-алгебра A. Будем говорить о паре (G,A), если дана операция $G\times A\longrightarrow G$, действие элементов из A на G, обозначаемое $\circ$, и удовлетворяющее для всех $g\in G$; $a,a'\in A$ и $\alpha\in K$ условиям:

1) $g\circ(aa')=(g\circ a)\circ a'$,

2) $g\circ(a+a')=g\circ a+g\circ a'$,

3) $g\circ(\alpha a)=\alpha(g\circ a)$,

4) отображение $g\longrightarrow g\circ a$ является K-эндоморфизмом модуля G при всяком фиксированном $a\in A$. Особо важным для нас примером служат пары типа $(G,K\Gamma)$, получаемые из пар (G,Γ) линейным продолжением действия Γ в G до действия полугрупповой алгебры $K\Gamma$ в G. Согласно сделанному выше замечанию, каждую пару (G,Γ) сопровождает пара $(G,K\Gamma^*)$.

§2. Многообразия Γ-модулей

В теории пар заметную роль играет понятие биркгофского класса пар. По определению, это те классы пар, которые замкнуты относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар. Класс пар Θ назовем насыщенным, если для любого правого эпиморфизма $(G,\Gamma)\longrightarrow(G,\Gamma')$ из того, что одна из этих двух пар принадлежит Θ, следует, что и вторая пара лежит в Θ. Насыщенный биркгофский класс, по определению, является многообразием пар. Оказывается, многообразия пар задаются системами битождеств, для описания которых очень удобен язык полугрупповых алгебр. В данном параграфе опишем эту идею детальнее. Важно подчеркнуть, что это описание протекает близко к групповому случаю, где аналогичные связи оказались центральными [3,4], но не совпадает с ним. Поэтому, имея в виду задачу объединения материала, необходимого для понимания полугруппового случая, включено сюда изложение указанных связей.

I. Рассмотрим здесь случай многообразий пар с фиксированной действующей полугруппой. В этом случае условие насыщенности в определении многообразия тривиализируется, а поэтому многообразие Γ-модулей - это просто биркгофский класс Γ-модулей.

Таким образом, предполагаем, что полугруппа Γ фиксирована, и рассмотрим линейные представления полугруппы Γ типа (G,Γ), лежащие в данном их классе Θ. Пара (G,Γ) индуцирует пару $(G, K\Gamma^*)$, ядром которой служит некоторый двусторонний идеал $\mathcal{U} = \mathcal{U}(G, K\Gamma^*)$ в кольце $K\Gamma^*$. Образуем идеал

$$\mathcal{U}_\theta = \bigcap_{(G,\Gamma)\in\theta} \mathcal{U}(G, K\Gamma^*);$$

он состоит из всех элементов $u \in K\Gamma^*$, таких, что во всякой паре $(G, K\Gamma^*)$, индуцированной некоторой парой (G,Γ) из Θ, битождество $y \circ u \equiv 0$ выполняется при всех $u \in \mathcal{U}_\theta$. Таким образом, классу θ представлений полугруппы Γ сопоставлен двусторонний идеал $\mathcal{U}_\theta \subset K\Gamma^*$.

С другой стороны, пусть $\mathcal{U}$ - некоторое подмножество в $K\Gamma^*$. Сопоставим ему класс $\theta_\mathcal{U}$ пар (G,Γ) по следующему правилу:

$(G,\Gamma) \in \theta_\mathcal{U} \Longleftrightarrow$ если в паре $(G, K\Gamma^*)$ битождество вида $y \circ u \equiv 0$ выполняется для всех $u \in \mathcal{U}$.

Возникает соответствие $\theta \longrightarrow \mathcal{U}$ и $\mathcal{U} \longrightarrow \theta_\mathcal{U}$; нас будут интересовать замкнутости этого соответствия. Ими оказываются с одной стороны - многообразия представлений данной полугруппы Γ, а с другой стороны - двусторонние идеалы в полугрупповом кольце $K\Gamma^*$. На этом пути и устанавливается взаимно-однозначное соответствие между многообразиями представлений Γ и двусторонними идеалами в $K\Gamma^*$. Следующие пункты посвящены доказательству этого утверждения.

2. Пусть дана пара (G,Γ). Она является циклической парой, по определению, если имеется такой элемент $a \in G$, что $G = a \circ K\Gamma^*$. Здесь мы воспользуемся тем, что пару (G,Γ) сопровождает пара $(G, K\Gamma^*)$, где и проводятся вычисления.

Элемент a назовем $K\Gamma^*$-образующим для G. Например, регулярная пара $(K\Gamma^*, \Gamma)$ является циклической, так как $K\Gamma^* = \varepsilon \circ K\Gamma^*$, где ε – единица в Γ^*.

Для произвольной циклической пары (G, Γ) с $K\Gamma^*$-образующим a зададим отображение $\tau : (K\Gamma^*, \Gamma) \longrightarrow (G, \Gamma)$ формулой

$$\forall u \in K\Gamma^*, \ u^\tau = a \circ u.$$

Имеем эпиморфизм Γ-модулей $\tau : K\Gamma^* \to G$, ядро которого составляют все те $u \in K\Gamma^*$, которые аннулируют элемент a в паре $(G, K\Gamma^*)$. Следовательно, имеем

$$(G, \Gamma) \cong (K\Gamma^*/\mathrm{Ann}_{K\Gamma^*}(a), \Gamma).$$

Это показывает, что циклические представления полугруппы Γ реализутся как фактор-представления регулярного представления.

Пусть Θ – многообразие Γ-пар. Рассмотрим всевозможные циклические пары, лежащие в классе Θ и имеющие вид $(K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma)$, где $\mathcal{V} \subset K\Gamma^*$ – некоторый правый идеал. Пусть $\mathcal{U}^*$ является пересечением всех таких $\mathcal{V} \subset K\Gamma^*$, $\mathcal{U}^* = \bigcap_\Theta \mathcal{V}$. Из свойств класса Θ и теоремы Ремака выводим, что $\mathcal{U}^*$ является двусторонним идеалом.

3. Многообразию Θ сопоставлено теперь два идеала в кольце $K\Gamma^*$: с одной стороны, только что описанным способом сопоставлен идеал $\mathcal{U}^*$, а с другой стороны, описанным в пункте I способом идеал $\mathcal{U}_\Theta$. Докажем, что $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_\Theta$.

Для этого возьмем любую пару $(G, \Gamma) \in \Theta$, любой элемент $a \in G$ и рассмотрим подпредставление $(a \circ K\Gamma^*, \Gamma)$ в (G, Γ), которое также содержится в Θ в силу свойств этого класса. Это подпредставление изоморфно паре $(K\Gamma^*/\mathrm{Ann}_{K\Gamma^*}(a), \Gamma)$, которая, следовательно, также лежит в Θ. Отсюда следует, что $\mathcal{U}^* \subset \mathrm{Ann}_{K\Gamma^*}(a)$. Это означает, что для всех $u \in \mathcal{U}^*$ имеем $a \circ u = 0$, и поэтому из определения $\mathcal{U}_\Theta$ следует, что $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}_\Theta$.

С другой стороны, рассмотрим пару $(K\Gamma^*/\mathcal{U}^*, \Gamma)$, которая согласно теореме Ремака содержится в Θ. Это означает, что элементы из $\mathcal{U}_\Theta$ должны аннулировать K-модуль $K\Gamma^*/\mathcal{U}^*$, и, в частности, элемент $\varepsilon + \mathcal{U}^*$ этого модуля. Поэтому, для любого $v \in \mathcal{U}_\Theta$ имеем

$$\mathcal{U}^* = (\varepsilon + \mathcal{U}^*) \circ v = \varepsilon \circ v + \mathcal{U}^* = \varepsilon v + \mathcal{U}^* = v + \mathcal{U}^*,$$

т.е. $\mathcal{U}^* = v + \mathcal{U}^*$, откуда $v \in \mathcal{U}^*$. Следовательно, выполняется $\mathcal{U}_\Theta \subset \mathcal{U}^*$.

Равенство $\mathcal{U}_\theta = \mathcal{U}^*$ доказано.

4. Пусть теперь θ – любое многообразие Γ-пар, а $\mathcal{U} \subset K\Gamma^*$ – любой двусторонний идеал. Имеем сопоставления

$$\theta \longrightarrow \mathcal{U}_\theta \longrightarrow \theta_{(\mathcal{U}_\theta)} = \theta', \qquad \text{и}$$
$$\mathcal{U} \longrightarrow \theta_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}_{(\theta_{\mathcal{U}})} = \mathcal{U}'.$$

Покажем, что $\theta = \theta'$ и $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

Сначала докажем равенство $\theta = \theta'$. Включение $\theta \subset \theta'$ очевидно по конструкции θ'. Для доказательства обратного включения заметим следующее. Если каждое циклическое подпредставление некоторой пары $(G, \Gamma) \in \theta'$ лежит в θ, то $(G, \Gamma) \in \theta$.

Действительно, пусть (H_i, Γ), $i \in I$ – набор всех циклических подпредставлений для (G, Γ), и пусть все $(H_i, \Gamma) \in \theta$. Для каждого $i \in I$ возьмем некоторый Γ-модуль A_i, изоморфный H_i, и образуем полную прямую сумму Γ-модулей A_i, $A = \sum\limits_{i \in I}^{c} A_i$. Имеем пару (A, Γ). Всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ можно рассматривать как постоянную функцию $\forall i \in I$, $\gamma(i) = \gamma$, и тем самым полугруппа Γ вкладывается в свою декартову степень Γ^I. Описанное вложение $\Gamma \longrightarrow \Gamma^I$ индуцирует вложение пар $(A, \Gamma) \longrightarrow (A, \Gamma^I)$, откуда в силу $(A, \Gamma^I) = \prod\limits_{i \in I}(A_i, \Gamma)$ и свойств класса θ следует $(A, \Gamma) \in \theta$. Но (A, Γ) содержит подпару $(\sum\limits_{i \in I}^{d} A_i, \Gamma)$, где $\sum\limits_{i \in I}^{d} A_i$ – дискретная прямая сумма Γ-модулей A_i, и так как θ замкнуто по подпарам, то $(\sum\limits_{i \in I}^{d} A_i, \Gamma) \in \theta$. Изоморфизмы Γ-модулей $A_i \longrightarrow H_i$ индуцируют эпиморфизм $\sum\limits_{i \in I}^{d} A_i \longrightarrow \sum\limits_{i \in I} H_i$. Таким образом, имеем эпиморфизм пар

$$(\sum_{i \in I}^{d} A_i, \Gamma) \longrightarrow (\sum_{i \in I} H_i, \Gamma) = (G, \Gamma),$$

откуда $(G, \Gamma) \in \theta$. Этим приведенное выше замечание обосновано.

Пусть имеется любая пара $(G, \Gamma) \in \theta'$. Покажем, что все циклические подпары этой пары лежат в классе θ. Для этого возьмем любой элемент $a \in G$ и рассмотрим в (G, Γ) циклическую подпару $(a \circ K\Gamma^*, \Gamma)$. Имеем изоморфизм

$$(a \circ K\Gamma^*, \Gamma) \cong (K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma), \text{ где } \mathcal{V} = \mathrm{Ann}_{K\Gamma^*}(a) \subset K\Gamma^*.$$

Отсюда следует $(K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma) \in \theta'$, что согласно определению θ' означает, что $\mathcal{U}_\theta$ аннулирует модуль $K\Gamma^*/\mathcal{V}$. В частности, при всех $u \in \mathcal{U}_\theta$ имеем $\mathcal{V} = (\varepsilon + \mathcal{V}) \circ u = \varepsilon \circ u + \mathcal{V} = u + \mathcal{V}$, откуда $\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{V}$. Следовательно, имеется эпиморфизм

$$(K\Gamma^*/\mathcal{U}_\theta, \Gamma) \longrightarrow (K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma).$$

Вместе с полученным выше соотношением $(K\Gamma^*/\mathcal{U}_\theta, \Gamma) \in \theta$ это влечет $(K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma) \in \theta$, а вместе с тем и нужное $(\alpha \circ K\Gamma^*, \Gamma) \in \theta$. Если иметь в виду также сделанное выше замечание относительно циклических подпар, то этими рассуждениями доказательство равенства $\theta = \theta'$ завершено.

Покажем теперь, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

По самой конструкции $\mathcal{U}'$ ясно, что $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$. Докажем обратное включение. Для этого рассмотрим пару $(K\Gamma^*/\mathcal{U}, \Gamma)$. Заметим, что при всяком $g \in K\Gamma^*$,

$$(g + \mathcal{U}) \circ u = g \circ u + \mathcal{U} = gu + \mathcal{U} = \mathcal{U};$$

здесь соотношение $gu \in \mathcal{U}$ имеет место в силу того, что $\mathcal{U}$ – двусторонний идеал в $K\Gamma^*$. Но равенство $(g + \mathcal{U}) \circ u = \mathcal{U}$ означает, что в рассматриваемой паре имеет место битождество $y \circ u \equiv 0$ при всех $u \in \mathcal{U}$. Таким образом, $(K\Gamma^*/\mathcal{U}, \Gamma) \in \theta_{\mathcal{U}}$. По определению идеала $\mathcal{U}'$, каждый его элемент $u' \in \mathcal{U}'$ аннулирует всякое представление в классе $\theta_{\mathcal{U}}$. Следовательно, это верно и для пары $(K\Gamma^*/\mathcal{U}, \Gamma)$, откуда

$$\mathcal{U} = (\varepsilon + \mathcal{U}) \circ u' = \varepsilon \circ u' + \mathcal{U} = \varepsilon u' + \mathcal{U} = u' + \mathcal{U}.$$

Это, однако, означает $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Равенство $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ доказано.

Резюмируя, видим, что рассуждениями этого параграфа доказан следующий факт.

<u>Теорема I</u>. Многообразия представлений фиксированной полугруппы Γ (многообразия Γ-модулей) находятся во взаимнооднозначном соответствии с двусторонними идеалами в полугрупповом кольце $K\Gamma^*$.

§ 3. Многообразия пар и битождества

До сих пор мы рассматривали многообразия представлений отдельной полугруппы, т.е. многообразия пар с фиксированной действующей полугруппой. Переходим теперь к задаче обозрения многообразий произвольных пар.

I. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ – счетное множество. Будем обозначать Ψ и Ψ^* соответственно свободную полугруппу и свободный моноид с элементами множества X в качестве системы их свободных образующих. Пусть $u = u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ – любой элемент полугруппового кольца $K\Psi^*$. По определению, в паре выполняется (специальное)[2] битождество $y\circ u\equiv 0$, если при любой специализации $y\longrightarrow g\in G$, $x_{i_j}\longrightarrow \gamma_{i_j}\in\Gamma$ в паре $(G, K\Gamma^*)$ имеем $g\circ u(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})=0$.

Каждому классу пар θ сопоставим в $K\Psi^*$ подмножество $\mathcal{U}_\theta$ всех таких элементов u из $K\Psi^*$, что во всякой паре из θ выполняются битождества $y\circ u\equiv 0$; назовем $\mathcal{U}_\theta$ индикатором класса θ. Непосредственно проверяется, что подмножество $\mathcal{U}_\theta$ является двусторонним идеалом в $K\Psi^*$, инвариантным относительно всех таких эндоморфизмов кольца $K\Psi^*$, которые индуцируются эндоморфизмами моноида Ψ^*. В дальнейшем эндоморфизмы кольца $K\Psi^*$ с отмеченным свойством назовем специальными. Специальными назовем также идеалы в $K\Psi^*$, инвариантные относительно всех специальных эндоморфизмов. Таким образом, каждому классу пар θ сопоставлен специальный идеал $\mathcal{U}_\theta$ в кольце $K\Psi^*$.

С другой стороны, пусть $\mathcal{U}$ - любое подмножество в $K\Psi^*$. Сопоставим ему класс $\theta_{\mathcal{U}}$ пар (G, Γ) по следующему правилу: пара (G, Γ) принадлежит классу $\theta_{\mathcal{U}}$ в точности тогда, когда в этой паре выполняются все битождества $y\circ u\equiv 0$, $u\in\mathcal{U}$. Здесь же отметим, что в этом случае, когда $\mathcal{U}$ является двусторонним идеалом в $K\Psi^*$, класс $\theta_{\mathcal{U}}$ является многообразием.

Покажем, что индикатор класса $\theta_{\mathcal{U}}$ является минимальным специальным идеалом в $K\Psi^*$, содержащим множество $\mathcal{U}$.

Обозначим класс $\theta_{\mathcal{U}}$ через θ^*. В силу специальности идеала $\mathcal{U}_{\theta^*}$, индикатора класса θ^*, и очевидного включения $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_{\theta^*}$, достаточно показать, что $\mathcal{U}_{\theta^*}$ содержится в каждом специальном идеале, содержащем множество $\mathcal{U}$. Пусть $\mathcal{U}'$ - специальный идеал в $K\Psi^*$, содержащий $\mathcal{U}$. Рассмотрим пару $(K\Psi^*/\mathcal{U}', \Psi)$, которая индуцирована регулярным действием Ψ в $K\Psi^*$. Из $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}'$ следует, что эта пара содержится в θ^*. Пусть $\mathcal{V}$ - подмножество всех таких $u\in K\Psi^*$, что на паре $(K\Psi^*/\mathcal{U}', \Psi)$ выполняются битождества $y\circ u\equiv 0$, $u\in\mathcal{V}$. Имеем $\mathcal{U}_\theta\subset\mathcal{V}$. Покажем, однако, что

---

[2] В полугрупповом случае можно рассматривать и битождества более общего вида, параллельно тому, как это делается в [3, стр. 566-572]. Однако, в том случае, когда K - поле и областями действия пар будут векторные пространства над полем K, всякую такую систему битождеств легко заменить эквивалентной ей системой специальных битождеств.

$\mathcal{V} = \mathcal{U}'$. Действительно, нетрудно заметить, что $\mathcal{U}' \subset \mathcal{V}$. Далее, для произвольных $g \in K\Psi^*$ и $v \in \mathcal{V}$ имеем $\mathcal{U}' = (g+\mathcal{U}')\circ v = (g+\mathcal{U}')v = gv+\mathcal{U}'$. Взяв здесь в качестве g единицу ε кольца $K\Psi^*$, видим, что $v \in \mathcal{U}'$. Этим доказано $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}'$. Следовательно, доказано равенство $\mathcal{V} = \mathcal{U}'$, а вместе с тем и соотношение $\mathcal{U}_\Theta \subset \mathcal{U}'$.

2. Пусть Θ – многообразие пар. Рассмотрим всевозможные циклические пары, лежащие в классе Θ и имеющие вид $(K\Psi^*/\mathcal{V}, \Psi)$, где $\mathcal{V} \subset K\Psi^*$ – некоторый правый идеал. Пусть $\mathcal{U}^*$ является пересечением всех таких $\mathcal{V} \subset K\Psi^*$, $\mathcal{U}^* = \bigcap\limits_\Theta \mathcal{V}$. Из свойств класса Θ и теоремы Ремака следует, что $\mathcal{U}^*$ является двусторонним идеалом в $K\Psi^*$. Многообразию пар Θ сопоставлено теперь два идеала в кольце $K\Psi^*$ – идеалы $\mathcal{U}^*$ и $\mathcal{U}_\Theta$.

Покажем, что $\mathcal{U}_\Theta = \mathcal{U}^*$. Рассмотрим пару $(K\Psi^*/\mathcal{U}^*, \Psi)$, которая согласно теореме Ремака содержится в Θ. Отсюда, в частности, вытекает, что для любого $v \in \mathcal{U}_\Theta$,

$$\mathcal{U}^* = (\varepsilon + \mathcal{U}^*)\circ v = \varepsilon\circ v + \mathcal{U}^* = \varepsilon v + \mathcal{U}^* = v + \mathcal{U}^*.$$

Это означает $\mathcal{U}_\Theta \subset \mathcal{U}^*$.

Докажем теперь обратное включение. С этой целью возьмем любую пару $(G, \Gamma) \in \Theta$, и рассмотрим любую специализацию $\nu: X \longrightarrow \Gamma$. Отображение ν индуцирует гомоморфизм полугрупп $\Psi \longrightarrow \Gamma$ а следовательно и гомоморфизм полугрупповых колец $K\Psi^* \longrightarrow K\Gamma^*$, которые обозначим той же буквой ν. В свою очередь, гомоморфизмы $\nu: \Psi \longrightarrow \Gamma$ и $\nu: K\Psi^* \longrightarrow K\Gamma^*$ индуцируют при всяком $g \in G$ гомоморфизм пар $\nu_g: (K\Psi^*, \Psi) \longrightarrow (g\circ K\Gamma^*, \Gamma)$, если для всех $u \in K\Psi^*$, $\psi \in \Psi$ полагать $u^{\nu_g} = g\circ u^\nu$ и $\psi^{\nu_g} = \psi^\nu$. Поэтому, существует мономорфизм $(K\Psi^*, \Psi)/\operatorname{Ker}\nu_g \longrightarrow (g\circ K\Gamma^*, \Gamma)$, где $(g\circ K\Gamma^*, \Gamma)$ как подпара в (G, Γ) содержится в Θ. Пусть $\operatorname{Ker}\nu_g = (\mathcal{V}_g, \sigma_g)$; тогда, в силу существования естественного правого эпиморфизма $(K\Psi^*/\mathcal{V}_g, \Psi) \longrightarrow (K\Psi^*/\mathcal{V}_g, \Psi/\sigma_g)$, а также свойств насыщенности и замкнутости по подпарам класса Θ выводим $(K\Psi^*/\mathcal{V}_g, \Psi) \in \Theta$. Это показывает, однако, что $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{V}_g$. Учитывая определение $\mathcal{V}_g$, выводим, что $g\circ u^\nu = 0$ для всех $u \in \mathcal{U}^*$. Так как это верно для произвольной пары $(G, \Gamma) \in \Theta$ и при всяких $g \in G$ и $\nu: X \longrightarrow \Gamma$, видим, что битождества $y\circ u = 0$, $u \in \mathcal{U}^*$, выполняются на всех парах $(G, \Gamma) \in \Theta$. Отсюда немедленно следует $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}_\Theta$.

3. Пусть Θ - многообразие пар, а $\mathcal{U} \subset K\Psi^*$ - любой двусторонний специальный идеал. Имеем сопоставления

$$\Theta \longrightarrow \mathcal{U}_\Theta \longrightarrow \Theta_{(\mathcal{U}_\Theta)} = \Theta', \quad \text{и}$$

$$\mathcal{U} \longrightarrow \Theta_\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}_{(\Theta_\mathcal{U})} = \mathcal{U}'.$$

Имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$; это доказано в пункте I. Докажем равенство $\Theta = \Theta'$.

Так как $\Theta \subset \Theta'$ очевидно по конструкции, то достаточно показать $\Theta' \subset \Theta$. Для этого заметим, что рассуждениями пункта 4 предыдущего параграфа можно убедиться в правильности следующего утверждения: если для некоторой пары $(G, \Gamma) \in \Theta'$ все ее подпары вида $(g \circ K\Gamma^*, \Gamma)$, $g \in G$, лежат в Θ, то и $(G, \Gamma) \in \Theta$. Покажем, что для любой пары $(G, \Gamma) \in \Theta'$ все ее циклические подпары $(g \circ K\Gamma^*, \Gamma)$, $g \in G$, действительно лежат в Θ.

С целью записать короче соответствующее рассуждение, введем следующее обозначение. Пусть даны любые специальный идеал $\mathcal{W}$ в $K\Psi^*$ и полугруппа Γ. Обозначим через $\mathcal{W}_\Gamma$ множество образов (значений) всех элементов из $\mathcal{W}$ при гомоморфизмах $K\Psi^* \longrightarrow K\Gamma^*$, индуцированных всевозможными специализациями $X \longrightarrow \Gamma$. Отметим, что $\mathcal{W}_\Gamma$ - специальный идеал в $K\Gamma^*$.

Воспользуемся теперь изоморфизмом пар

$$(g \circ K\Gamma^*, \Gamma) \cong (K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma), \quad \text{где } \mathcal{V} = \mathrm{Ann}_{K\Gamma^*}(g).$$

Пара $(K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma)$, таким образом, лежит в Θ'. По определению класса Θ' это означает, что $(K\Gamma^*/\mathcal{V}) \circ (\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma = 0$; в частности, имеем $(\varepsilon + \mathcal{V}) \circ (\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma = 0$, т.е. $(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma + \mathcal{V} = \mathcal{V}$, откуда $(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma \subset \mathcal{V}$. Поэтому имеется эпиморфизм пары $(K\Gamma^*/(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma, \Gamma)$, лежащей в многообразии Θ, на пару $(K\Gamma^*/\mathcal{V}, \Gamma)$ которая, следовательно, также лежит в Θ. Нужное нам утверждение доказано.

Резюмируя, видим, что многообразия пар - представлений полугрупп находятся в биективном соответствии со специальными идеалами в $K\Psi^*$.

4. На множестве многообразий пар - представлений полугрупп можно следующим образом ввести умножение. По определению, пара (G, Γ) содержится в классе $\Theta_1 \cdot \Theta_2$, если в G существует такой Γ-подмодуль H, что $(H, \Gamma) \in \Theta_1$ и $(G/H, \Gamma) \in \Theta_2$. Оказывается, относительно такого умножения многообразия пар образуют полугруппу, которую обозначим $\mathfrak{M}(K)$.

Пусть индикаторами многообразий Θ_1 и Θ_2 являются соответственно $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Покажем, что индикатором многообразия $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ является идеал $\mathcal{U}_2 \cdot \mathcal{U}_1$. Воспользуемся для этого следующим замечанием: для любых специальных идеалов $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в $K\Psi^*$ и полугруппы Γ имеет место равенство $(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})_\Gamma = \mathcal{V}_\Gamma \cdot \mathcal{U}_\Gamma$. Проверка этого утверждения производится при помощи рассуждений, совершенно аналогичных соответствующим рассуждениям для групповых пар, и поэтому здесь опускается.

Пусть теперь Θ – многообразие пар, определяемое идеалом $\mathcal{U}_2 \cdot \mathcal{U}_1$. Пара (G, Γ) содержится в классе Θ в точности тогда, когда $0 = G \circ (\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1)_\Gamma = G \circ (\mathcal{U}_{2,\Gamma} \cdot \mathcal{U}_{1,\Gamma}) = (G \circ \mathcal{U}_{2,\Gamma}) \circ \mathcal{U}_{1,\Gamma}$. Но это означает $(G,\Gamma) \in \Theta_1 \cdot \Theta_2$, так как взяв $H = G \circ \mathcal{U}_{2,\Gamma}$, видим, что $(H, \Gamma) \in \Theta_1$ и $(G/H, \Gamma) \in \Theta_2$. Обратно, пусть $(G,\Gamma) \in \Theta_1\Theta_2$. Тогда легко видеть, что $0 = (G \circ \mathcal{U}_{2,\Gamma}) \circ \mathcal{U}_{1,\Gamma} = G \circ (\mathcal{U}_{2,\Gamma} \cdot \mathcal{U}_{1,\Gamma}) = G \circ (\mathcal{U}_2 \cdot \mathcal{U}_1)_\Gamma$, откуда $(G, \Gamma) \in \Theta$. Следовательно, $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \subset \Theta$, а тем самым и $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$. Это означает, что специальный идеал $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$ определяет многообразие $\Theta_1\Theta_2$.

В итоге доказана следующая

Теорема 2. Полугруппа многообразий пар – представлений полугрупп антиизоморфна полугруппе специальных идеалов в $K\Psi^*$.

5. Отметим, наконец, следующее.

Каждому многообразию пар Θ отвечает вербальная функция $^*\Theta$ сопоставляющая всякой паре (G, Γ) пересечение $^*\Theta(G, \Gamma)$ всех тех Γ-подмодулей $H \subset G$, для которых $(G/H, \Gamma) \in \Theta$. Очевидно, что $(G/{}^*\Theta(G,\Gamma), \Gamma) \in \Theta$. Параллельно групповому случаю, имеем следующие два свойства вербальной функции.

(1) Вербал перестановочен с (дискретными) прямыми произведениями.

(2) Пусть Θ_1 и Θ_2 – многообразия пар. Тогда соотношение $(G, \Gamma) \in \Theta_1\Theta_2$ выполняется в точности тогда, если $(^*\Theta_2(G,\Gamma), \Gamma) \in \Theta_1$.

С другой стороны, каждому многообразию пар Θ отвечает радикальная функция $'\Theta$, сопоставляющая каждой паре (G, Γ) сумму всех тех Γ-подмодулей H в G, для которых $(H, \Gamma) \in \Theta$. Очевидно, что $('\Theta(G,\Gamma), \Gamma) \in \Theta$. Отметим два свойства радикальной функции.

(1) Радикал перестановочен с прямыми суммами.

(2) Пусть Θ_1 и Θ_2 – многообразия пар. Соотношение $(G,\Gamma)\in\Theta_1\cdot\Theta_2$ выполняется тогда и только тогда, если $(G/\Theta_1(G,\Gamma),\Gamma)\in\Theta_2$.

Доказательства отмеченных свойств вербала и радикала получается простой модификацией терминологии в соответствующих доказательствах группового случая, и поэтому здесь опускаются.

§4. Одно соответствие для многообразий линейных автоматов

Излагаемые ниже определения и связи, касающиеся линейных автоматов, представляют собой часть общей теории автоматов (см. [I], гл. 7 или [8], гл. XIV). Посредством понятия линейного автомата рассмотренные выше линейные пары естественным образом включаются в эту теорию как ее составная часть, и поэтому теория автоматов может служить мотивировкой их изучения.

I. Приведем необходимые определения.

Линейный (полугрупповой) автомат (Мили) – это трехосновная алгебраическая система $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, в которой A (состояния) и B (выходы) являются K-модулями, Γ - полугруппа входных сигналов, и заданы K-линейные операция переходов $A\circ\Gamma\longrightarrow A$ и операция выходов $A*\Gamma\longrightarrow B$ со свойствами

$$\forall a\in A;\ \gamma_1\gamma_2\in\Gamma,\quad \begin{array}{l} a\circ(\gamma_1\gamma_2)=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2, \quad \text{и}\\ a*(\gamma_1\gamma_2)=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2.\end{array}$$

Это определение является обобщением понятия линейной системы в [I].

Заметим, что в линейном автомате $\mathfrak{A}$ полугруппа Γ допускает двоякую интерпретацию, т.к. посредством формул

$$\forall a\in A,\ \gamma^{\mu_0}(a)=a\circ\gamma,\quad \gamma^{\mu_*}(a)=a*\gamma$$

возникает морфизм $\mu_0:\Gamma\longrightarrow \mathrm{End}_K A$ полугруппы Γ в мультипликативную полугруппу алгебры $\mathrm{End}_K A$, и отображение $\mu_*:\Gamma\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A,B)$, удовлетворяющее условию $(\gamma_1\gamma_2)^{\mu_*}=\gamma_1^{\mu_0}\cdot\gamma_2^{\mu_*}$.

Линейный автомат $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$, называется подавтоматом для $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, если $A'\subset A$, $\Gamma'\subset\Gamma$, $B'\subset B$ – подобъекты в соответствующих алгебраических структурах, и $A'\circ\Gamma'\subset A'$ и $A'*\Gamma'\subset B'$.

Пусть даны линейные автоматы $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ и $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$

и тройка морфизмов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_1 : A \to A'$, $\sigma_2 : \Gamma \to \Gamma'$ и $\sigma_3 : B \to B'$. По определению, $\sigma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ есть морфизм автоматов, если выполнены условия

$$\forall a \in A,\ \gamma \in \Gamma,\ (a \circ \gamma)^{\sigma_1} = a^{\sigma_1} \circ \gamma^{\sigma_2} \quad \text{и} \quad (a * \gamma)^{\sigma_3} = a^{\sigma_1} * \gamma^{\sigma_2}.$$

При этом ясно, что подмодули $\mathrm{Ker}\,\sigma_1 = A_\sigma \subset A$ и $\mathrm{Ker}\,\sigma_3 = B_\sigma \subset B$, и ядерная конгруэнция на Γ, $\mathrm{Ker}\,\sigma_2 = \varkappa$, удовлетворяют требованию

$$\forall a, a' \in A;\ \gamma, \gamma' \in \Gamma,\ ((a - a' \in A_\sigma) \,\&\, (\gamma \varkappa \gamma')) \Longrightarrow ((a \circ \gamma - a' \circ \gamma') \,\&$$
$$\& \ (a * \gamma - a' * \gamma' \in B_\sigma)).$$

Обратно, если в компонентах линейного автомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ выделен набор конгруэнций $\Lambda = (A_\sigma, \varkappa, B_\sigma)$, удовлетворяющий отмеченному требованию, то Λ называется конгруэнцией автомата $\mathfrak{A}$. В таком случае система $\mathfrak{A}/\Lambda = (A/A_\sigma, \Gamma/\varkappa, B/B_\sigma)$, в которой все операции над классами эквивалентностей определены по представителям в этих классах (т.е. индуцированы соответствующими операциями в $\mathfrak{A}$), является линейным автоматом. Это, по определению, факторавтомат $\mathfrak{A}$ по Λ. Естественным образом сформулируются и доказываются для линейных автоматов теоремы о гомоморфизмах и теорема Ремака.

Декартовым произведением семейства линейных автоматов $\mathfrak{A}_i = (A_i, \Gamma_i, B_i)$, $i \in I$, называется система

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i = (A, \Gamma, B) \text{ где } A = \sum_{i \in I}^{c} A_i \text{ и } B = \sum_{i \in I}^{c} B_i \text{ -}$$

полные прямые суммы, соответственно, модулей A_i и B_i, $i \in I$, $\Gamma = \prod_{i \in I} \Gamma_i$ - декартово произведение полугрупп Γ_i, $i \in I$, а операции $A \circ \Gamma \to A$ и $A * \Gamma \to B$ определены покомпонентно, т.е.

$$\forall a \in A, \gamma \in \Gamma, i \in I, \quad \begin{array}{l} (a \circ \gamma)(i) = a(i) \circ \gamma(i), \\ (a * \gamma)(i) = a(i) * \gamma(i). \end{array} \quad \text{и}$$

Естественным образом возникает понятие биркгофского класса линейных автоматов. По определению, класс θ линейных автоматов называется биркгофским классом, если он замкнут по эпиморфным образам, подавтоматам и декартовым произведениям. Далее, назовем класс θ линейных автоматов насыщенным, если вместе с автоматом (A, Γ, B) он содержит и все надавтоматы вида (A, Γ, B'), где $B' \supset B$ и для всякого тождественного на A и B эпиморфизма $(A, \Gamma, B) \to (A, \Sigma, B)$ из $(A, \Sigma, B) \in \theta$ следует $(A, \Gamma, B) \in \theta$. Насыщенные биркгофские классы линейных автоматов будем называть многообразиями линейных автоматов.

2. Нетривиальные многообразия линейных автоматов задаются битождествами. В следующем пункте мы будем описывать это соответствие детальнее, и для этого нам потребуется следующий вспомогательный результат: если для некоторого линейного автомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ все его подавтоматы вида $\mathfrak{A}_a = (a \circ K\Gamma^*, \Gamma, a * K\Gamma)$ содержатся в некотором многообразии Θ, то $\mathfrak{A} \in \Theta$.

Чтобы доказать это утверждение, возьмем для каждого $a \in A$ изоморфный $\mathfrak{A}_a$ автомат (A'_a, Γ, B'_a) и образуем автомат $(A', \Gamma, B') = (\sum_{a \in A} A'_a, \Gamma, \sum_{a \in A} B'_a)$. Всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ можно рассматривать как постоянную функцию: $\gamma(a) = \gamma$ для всех $a \in A$. Тем самым полугруппа Γ вкладывается в декартову степень Γ^A, что индуцирует вложение автоматов $(A', \Gamma, B') \longrightarrow (A', \Gamma^A, B')$. Но $(A', \Gamma^A, B') = \prod_{a \in A}(A'_a, \Gamma, B'_a) \in \Theta$, следовательно, имеем также $(A', \Gamma, B') \in \Theta$. Автомат (A', Γ, B') содержит подавтомат $\mathfrak{A}_A = (\sum_{a \in A} A'_a, \Gamma, \sum_{a \in A} B'_a)$, где через $\sum$ обозначена дискретная прямая сумма соответствующих модулей. Класс Θ, однако, замкнут по подавтоматам, откуда следует $\mathfrak{A}_A \in \Theta$. Изоморфизмы $A'_a \longrightarrow a \circ K\Gamma^*$ и $B'_a \longrightarrow a * K\Gamma$ индуцируют эпиморфизмы $\sum_{a \in A} A'_a \twoheadrightarrow \sum_{a \in A} a \circ K\Gamma^* = A$, и $\sum_{a \in A} B'_a \twoheadrightarrow B'' \in B$, такие, что возникает эпиморфизм автоматов $\mathfrak{A}_A \twoheadrightarrow (A, \Gamma, B'')$. В силу $\mathfrak{A}_A \in \Theta$ отсюда следует $(A, \Gamma, B'') \in \Theta$, а тем самым и $(A, \Gamma, B) = \mathfrak{A} \in \Theta$. Утверждение доказано.

3. Сопровождающие всякий линейный автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ отображения

$$\mu_\circ : \Gamma \longrightarrow \mathrm{End}_K A \quad \text{и} \quad \mu_* : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A, B)$$

можно линейно продолжить до отображений $\mu_\circ : K\Gamma \longrightarrow \mathrm{End}_K A$ и $\mu_* : K\Gamma \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, B)$, и тогда возникает автомат $\mathfrak{A}_L = (A, K\Gamma, B)$. Будем говорить, что в автомате $\mathfrak{A}$ выполняется битождество $y \circ u = 0$ (битождество $z * u = 0$), если для линейного продолжения $\sigma : K\Psi \longrightarrow K\Gamma$ любого гомоморфизма $\sigma : \Psi \longrightarrow \Gamma$, индуцированного некоторой специализацией $\sigma : X \longrightarrow \Gamma$, выполнено следующее условие: для всех $a \in A$ в автомате $\mathfrak{A}_L$ имеет место соотношение $a \circ u^\sigma = 0$ (соотношение $a * u^\sigma = 0$).

Каждому классу линейных автоматов Θ сопоставим в $\mathcal{F} = K\Psi^*$ пару подмножеств $(\mathcal{U}_\Theta, \mathcal{V}_\Theta)$, индикатор класса Θ, где $\mathcal{U}_\Theta$ (индикатор состояний для класса Θ) - подмножество всех тех $u \in K\Psi$, что во всяком автомате из Θ выполняется битождество $y \circ u = 0$, и $\mathcal{V}_\Theta$ (индикатор выходов для Θ) – подмножество всех тех $v \in K\Psi$, что во всяком автомате из Θ выполняется битождество $z * v = 0$.

Легко понять, что $\mathcal{U}_\Theta$ – двусторонний специальный идеал в $\mathcal{F}$. Действительно, для любого линейного автомата (A, Γ, B) можно рассматривать соответствующую ему линейную полугрупповую пару (A, Γ), которая полностью определяет $\mathcal{U}_\Theta$. Поэтому достаточно сослаться на пункт I предыдущего параграфа, где соответствующий факт впервые отмечен (доказывающие это непосредственные вычисления опускались).

Проверка, сводящаяся к развертыванию определений, показывает, что $\mathcal{V}_\Theta$ – левый специальный идеал в $\mathcal{F}$.

Оказывается, для пары $(\mathcal{U}_\Theta, \mathcal{V}_\Theta)$ выполнено $\mathcal{U}_\Theta \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{V}_\Theta$ (условие согласованности). Действительно, при всех $a \in A$, $u \in \mathcal{U}_\Theta$, $f \in \mathcal{F}$ имеем:

$$a * (uf)^\sigma = a * (u^\sigma f^\sigma) = (a \circ u^\sigma) * f^\sigma = 0 * f^\sigma = 0,$$

что и доказывает требуемое.

4. Назовем пару $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ где $\mathcal{U}$ – двусторонний специальный идеал в $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ – левый специальный идеал в $\mathcal{F}$, и выполнено условие согласованности $\mathcal{U}\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$, идеальной парой. Нетривиальные многообразия линейных полугрупповых автоматов находятся во взаимно однозначном соответствии с указанными идеальными парами. Настоящий пункт посвящен доказательству этого утверждения.

Выше мы видели, что каждому классу автоматов отвечает идеальная пара. С другой стороны, пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ – любая согласованная пара подмножеств в $K\Psi$; согласованность означает здесь, что $\mathcal{U}\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$. Сопоставим этой паре класс Θ автоматов по следующему правилу; автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ принадлежит классу Θ в точности тогда, когда в $\mathfrak{A}$ выполняются все битождества $y \circ u = 0$, $u \in \mathcal{U}$, а также все битождества $z * v = 0$, $v \in \mathcal{V}$. Обозначим через $(\mathcal{U}_\Theta, \mathcal{V}_\Theta)$ индикатор полученного таким образом класса линейных автоматов $\Theta = \Theta_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}$, через $\mathcal{U}'$ – минимальный специальный идеал в $\mathcal{F}$, содержащий множество $\mathcal{U}$, и через $\mathcal{V}'$ – минимальный специальный левый идеал в $\mathcal{F}$, содержащий $\mathcal{V}$. Докажем, что $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_\Theta$ и $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_\Theta$.

Равенство $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_\Theta$ доказывается рассуждениями пункта I предыдущего параграфа. Покажем, что $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_\Theta$. Сперва заметим, что левый идеал $\mathcal{V}'$ порожден в кольце $\mathcal{F}$ множеством $\mathcal{V}$;

поэтому его элементы являются суммами вида $\sum_i f_i v_i$, $f_i \in \mathcal{F}$, $v_i \in \mathcal{V}$. Но тогда в любом автомате $(A, \Gamma, B) \in \Theta$ для всех $a \in A$ имеем

$$a * (\sum_i f_i v_i)^{\sigma} = a * (\sum_i f_i^{\sigma} v_i^{\sigma}) = \sum_i (a \circ f_i^{\sigma}) * v_i^{\sigma} = \sum_i a'_i * v_i = 0.$$

Таким образом, доказано $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}_{\Theta}$.

Проверку обратного включения начинаем со следующего наблюдения. Из условия $\mathcal{U}\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$ легко следует, что $\mathcal{U}'\mathcal{F} \subset \mathcal{V}'$. Поэтому, если $\mathcal{V}''$ – некоторый специальный левый идеал, содержащий множество $\mathcal{V}$, то имеем линейный автомат $\mathfrak{A}'' = (\mathcal{F}/\mathcal{U}', \Psi, \mathcal{F}/\mathcal{V}'')$ с регулярным действием в роли $\circ$ и $*$. Из $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}''$ следует, что $\mathfrak{A}'' \in \Theta$. Относительно автомата $\mathfrak{A}''$ покажем еще, что его индикатор выходов $\mathcal{W}$ совпадает с $\mathcal{V}''$. По определению,

$$\mathcal{W} = \{ w \in K\Psi \mid (g + \mathcal{U}') * w = 0 \quad \text{для всех } g \in \mathcal{F} \}.$$

Теперь, для всякого $v \in \mathcal{V}''$ имеем

$$(g + \mathcal{U}') * v = (g + \mathcal{U}')v = gv + \mathcal{U}'v \subset \mathcal{V}'',$$

откуда следует $\mathcal{V}'' \subset \mathcal{W}$. Обратно, для любого $w \in \mathcal{W}$,

$$\mathcal{V}'' = (\varepsilon + \mathcal{U}') * w = (\varepsilon + \mathcal{U}')w = w + \mathcal{U}'w,$$

но $\mathcal{U}'w \subset \mathcal{U}' \subset \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}''$. Следовательно, имеем $w \in \mathcal{V}''$, а тем самым $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}''$. В результате доказано нужное равенство $\mathcal{W} = \mathcal{V}''$.

Далее, имеем следующий очевидный факт: если идеальная пара $(\mathcal{U}_{\Theta}, \mathcal{V}_{\Theta})$ является индикатором некоторого класса линейных автоматов Θ, а пара $(\mathcal{U}', \mathcal{V}'')$ – индикатор некоторого конкретного автомата из класса Θ, то $\mathcal{U}_{\Theta} \subset \mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}_{\Theta} \subset \mathcal{V}''$. Отсюда следует $\mathcal{V}_{\Theta} \subset \bigcap\limits_{\mathcal{V}'' \supset \mathcal{V}} \mathcal{V}'' = \mathcal{V}'$. Равенство $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_{\Theta}$ доказано.

Отметим еще, что построенный выше класс линейных автоматов $\Theta = \Theta_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}$ является многообразием. Легкая проверка этого факта предоставляется читателю.

Пусть даны любые многообразие линейных автоматов Θ и идеальная пара $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Имеем сопоставления

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \longrightarrow \Theta_{(\mathcal{U},\mathcal{V})} \longrightarrow (\mathcal{U}_{\Theta_{(\mathcal{U},\mathcal{V})}}, \mathcal{V}_{\Theta_{(\mathcal{U},\mathcal{V})}}), \text{ и}$$

$$\Theta \longrightarrow (\mathcal{U}_{\Theta}, \mathcal{V}_{\Theta}) \longrightarrow \Theta_{(\mathcal{U}_{\Theta}, \mathcal{V}_{\Theta})}.$$

Выше, фактически, было доказано, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\Theta_{(\mathcal{U},\mathcal{V})}}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\Theta_{(\mathcal{U},\mathcal{V})}}$. Докажем теперь равенство $\Theta = \Theta_{(\mathcal{U}_{\Theta}, \mathcal{V}_{\Theta})}$; для краткости записи будем правую часть здесь обозначать символом Θ'.

Очевидно, достаточно показать $\Theta' \subset \Theta$. Как видно из наблюдения в пункте 2, для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы для всякого автомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B) \in \Theta'$ все его подавтоматы вида $\mathfrak{A}_a = (a \circ K\Gamma^*, \Gamma, a * K\Gamma)$, $a \in A$, лежали в Θ. Чтобы доказать это последнее утверждение, задаем отображение $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ автомата $(K\Gamma^*, \Gamma, K\Gamma)$ в автомат $\mathfrak{A}_a$ формулами

$$\forall u \in K\Gamma^*,\ \gamma \in \Gamma,\ v \in K\Gamma,\ u^{\tau_1} = a \circ u,\ \gamma^{\tau_2} = \gamma,\ v^{\tau_3} = a * v.$$

Доказательство того, что τ является эпиморфизмом автоматов, сводится к проверке определений. Пусть $\operatorname{Ker} \tau_1 = \mathcal{U}$ и $\operatorname{Ker} \tau_3 = \mathcal{V}$; в силу $\mathfrak{A}_a \in \Theta'$ и изоморфизма $\mathfrak{B} := (K\Gamma^*/\mathcal{U}, \Gamma, K\Gamma/\mathcal{V}) \cong \mathfrak{A}_a$ имеем тогда, что $\mathfrak{B} \in \Theta'$. Но тогда, согласно определению класса Θ', в автомате $\mathfrak{B}$ выполняются все битождества $y \circ u = 0$, $u \in \mathcal{U}_\Theta$, и все битождества $z * v = 0$, $v \in \mathcal{V}_\Theta$. Следовательно, идеал $(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma$ в регулярном действии „$\circ$" аннулирует модуль $K\Gamma^*/\mathcal{U}$; имеем для всякого $u' \in (\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma$

$$\mathcal{U} = (\varepsilon + \mathcal{U}) \circ u' = \varepsilon \circ u' + \mathcal{U} = u' + \mathcal{U}$$

откуда $u' \in \mathcal{U}$. Этим доказано $(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma \subset \mathcal{U}$.

Аналогично доказывается $(\mathcal{V}_\Theta)_\Gamma \subset \mathcal{V}$.

Доказанные соотношения гарантируют существование эпиморфизма автомата $(K\Gamma^*/(\mathcal{U}_\Theta)_\Gamma, \Gamma, K\Gamma/(\mathcal{V}_\Theta)_\Gamma)$, содержащегося в Θ, на автомат $\mathfrak{B}$. Поэтому $\mathfrak{B} \in \Theta$, откуда в силу $\mathfrak{A}_a \cong \mathfrak{B}$ следует нужное $\mathfrak{A}_a \in \Theta$. Доказательство утверждения, сформулированного в начале этого пункта, завершено.

5. Оказывается полезным рассматривать умножение многообразий линейных автоматов. Чтобы определить эту операцию, введем понятие инвариантного подавтомата. Именно, автомат $\mathfrak{A}' = (A', \Gamma, B')$ назовем инвариантным подавтоматом в линейном автомате $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, если выполнены следующие условия:

(I) $A' \subset A$ и $B' \subset B$ являются K-подмодулями.

(2) A' является Γ-инвариантным относительно действия " $\circ$ "; другими словами, $A' \circ \Gamma \subset A'$.

(3) Для всех $a \in A'$ и $\gamma \in \Gamma$ имеем $a * \gamma \in B'$.

Всякий инвариантный подавтомат $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ сопровождается факторавтоматом $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$. По определению, $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' := (A/A', \Gamma, B/B')$, где для всех $\bar{a} \in A/A'$ и $\gamma \in \Gamma$ положено $\bar{a} \circ \gamma = \overline{a \circ \gamma}$ и $\bar{a} * \gamma = \overline{a * \gamma}$. Корректность такого определения непосредственно вытекает из определений.

Имея эти понятия, можно определить произведение многообразий линейных автоматов. Пусть даны многообразия линейных автоматов Θ_1 и Θ_2; по определению, $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B) \in \Theta_1 \cdot \Theta_2$, если существует такой инвариантный подавтомат $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \in \Theta_1$, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \in \Theta_2$. Ассоциативность такого умножения многообразий становится очевидным после того, когда эта же операция будет определена на языке идеальных пар.

Именно, введем на множестве $J^a(K)$ идеальных пар следующее умножение

$$(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1) * (\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2) = (\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_2).$$

Очевидно, $J^a(K)$ с таким умножением представляет собой полугруппу - полугруппу идеальных пар. Верна следующая

Теорема 3. Многообразия линейных автоматов с операцией их умножения, введенной выше, составляют полугруппу $\mathfrak{M}^a(K)$, антиизоморфную полугруппе идеальных пар $J^a(K)$.

Доказательство. Надо показать, что если многообразие линейных автоматов Θ_i определяется идеальной парой $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i)$, $i = 1, 2$, то многообразие $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ определяется идеальной парой $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2) * (\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1)$. Обозначим многообразие, определенное этой последней идеальной парой, через Θ. Легко проверить, что автомат $\mathfrak{A} = (\mathcal{F}/\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1, \Psi, \mathcal{F}/\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1) \in \Theta$ является свободным[3] линейным автоматом многообразия Θ. Далее введем еще в рассмотрение следующие два линейных автомата

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathcal{F}/\mathcal{U}_1, \Psi, \mathcal{F}/\mathcal{V}_1) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_2 = (\mathcal{F}/\mathcal{U}_2, \Psi, \mathcal{F}/\mathcal{V}_2);$$

ясно, что $\mathfrak{A}_i$ свободен в многообразии Θ_i, $i = 1, 2$, соответственно.

Покажем теперь, что $\mathfrak{A} \in \Theta_1 \cdot \Theta_2$, откуда немедленно следует $\Theta \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$.

Рассмотрим в $\mathfrak{A}$ инвариантный подавтомат $\mathfrak{A}_3 = (\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1, \Psi, \mathcal{V}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1)$; свойства идеальной пары $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2)$ гарантируют его существование. Оказывается, что $\mathfrak{A}_3 \in \Theta_1$. Действительно, имеем

---

[3] Понятие свободного (свободного в данном многообразии) линейного автомата формулируется по известной категорной схеме, и это предоставляется читателю; наводящие соображения можно найти в [5], часть II, стр. 157-161.

$$(\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1)\circ\mathcal{U}_1 = (\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1)\cdot\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1, \quad \text{и}$$
$$(\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1)*\mathcal{V}_1 = (\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1)\cdot\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_2\mathcal{V}_1/\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1.$$

Значит, в $\mathfrak{A}$ найден инвариантный подавтомат $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3\in\Theta_1$, такой, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_3=(F/\mathcal{U}_2,\Psi,F/\mathcal{V}_2)\in\Theta_2$. Отсюда, по определению, следует $\mathfrak{A}\in\Theta_1\cdot\Theta_2$; тем самым доказано и соотношение $\Theta\subset\Theta_1\cdot\Theta_2$.

Докажем обратное включение $\Theta_1\cdot\Theta_2\subset\Theta$.

Возьмем любой автомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)\in\Theta_1\cdot\Theta_2$. Согласно определению, существует инвариантный подавтомат $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma,B')\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'\in\Theta_1$, такой, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'=(A/A',\Gamma,B/B')\in\Theta_2$. Воспользуясь этим, покажем $\mathfrak{A}\in\Theta$. Мы должны проверить, что в $\mathfrak{A}$ выполняются все битождества $y\circ u=0$, $u\in\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$, и все битождества $z*v=0$, $v\in\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1$. Интерпретация соотношений $\mathfrak{A}'\in\Theta_1$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'\in\Theta_2$ дает, что $A'\circ\mathcal{U}_1^{\sigma}=0$, $A'*\mathcal{V}_1^{\sigma}=0$ и $A\circ\mathcal{U}_2^{\sigma}\subset A'$, $A*\mathcal{V}_2^{\sigma}\subset B'$ для всякого гомоморфизма специализации σ. Это влечет

$$A\circ(\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1)^{\sigma}=A\circ(\mathcal{U}_2^{\sigma}\mathcal{U}_1^{\sigma})=(A\circ\mathcal{U}_2^{\sigma})\circ\mathcal{U}_1^{\sigma}\subset A'\circ\mathcal{U}_1^{\sigma}=0, \quad \text{и}$$
$$A*(\mathcal{U}_2\mathcal{V}_1)^{\sigma}=A*(\mathcal{U}_2^{\sigma}\mathcal{V}_1^{\sigma})=(A\circ\mathcal{U}_2^{\sigma})*\mathcal{V}_1^{\sigma}\subset A'*\mathcal{V}_1^{\sigma}=0.$$

Из этих вычислений следует $\mathfrak{A}\in\Theta$. Соотношение $\Theta_1\cdot\Theta_2\subset\Theta$, таким образом, проверено. Доказано также утверждение теоремы.

Литература

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем. Москва, 1970.
2. Курош А. Г., Общая алгебра (лекции 1969-1970 учебного года). Москва, 1974.
3. Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
4. Плоткин Б. И., Радикалы и многообразия в представлениях групп. Латв. мат. ежегодник, 1972, 10, 75-131.
5. Плоткин Б. И., Алгебраические структуры (конспект лекций). Рига, 1973 (вып. I) и 1974 (вып. II).
6. Плоткин Б. И., Дидидзе Ц. Е., Кублакова Е. М., О многообразиях автоматов, Докл. АН СССР, 1975, 221, 537-541.
7. Birkhoff G., The role of algebra in computing. Computers in algebra and number theory, vol. IV. SIAM-AMS Proceedings, Providence, 1971.

8. E i l e n b e r g S., Automata, languages and machines, vol. A. New York and London, 1974.
9. N e u m a n n J., The general and logical theory of automata. Collected papers of J.Neumann, vol. 5, N.Y. 1971, 288-328.

Поступило

11.II.1976

MÄRKUSI POOLRÜHMADE ESITUSTE JA
LINEAARSETE AUTOMAATIDE MUUTKONDADEST

U. Kaljulaid

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis on antud algmõisted ja -seosed niisuguste lineaarsete paaride käsitlemiseks, kus tegutsevaks objektiks on poolrühm või algebra. Taoliste paaride kui kahealuseliste algebraliste süsteemide teooria on paljus paralleelne rühmsele juhule [3,4], olles mitmealuseliste algebraliste süsteemide uurimise konkreetne näide universaalalgebrale omases stiilis [2]. Oluliseks stiimuliks lineaarsete paaride uurimisel on nende seos lineaarsete automaatidega; viimane mõiste üldistab raamatus [1] intensiivselt uuritava lineaarse süsteemi mõistet.

Töö eesmärgiks on näidata kirjeldatud tüüpi paaride (automaatide) muutkondade üksühest vastavust sobivalt valitud algebrate spetsiaalsete ideaalidega (ideaalipaaridega).

REMARKS ON THE VARIETIES
OF SEMIGROUP REPRESENTATIONS AND AUTOMATA

U. Kaljulaid

S u m m a r y

This paper gives some elementary notions for dealing with linear actions (linear pairs in the sense of B.Plotkin [4]) of semigroups and algebras. The theory of such actions is on the whole parallel to the group case [3,4]. A motivation for investigating such linear pairs rises from their connections with linear automata, the latter being a generalization of linear systems in [1].

Our goal here is to describe the bijection between the varieties of linear pairs (automata) and invariant ideals (pairs of ideals) in suitable algebras.

О СВЯЗНОСТЯХ ПОВЕРХНОСТИ НЕПОЛНОГО РАНГА В НЕЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. Абель

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

В работах [4] и [6] грассманово многообразие m-плоскостей в евклидовом и в аффинно-симплектическом пространствах соответственно трактуется как расслоение, слоями которого являются m-плоскости. На этом расслоении естественным образом возникает связность. Таким образом открывается возможность исследовать многообразие плоскостей с новой точки зрения - по свойствам кручения и кривизны связности.

В настоящей работе рассматривается $(m+r)$-мерная поверхность V_{m+r} ранга r в неевклидовом расширенном пространстве. Такая поверхность расслаивается на r-параметрическое семейство m-мерных плоских образующих. Исходя из идей работ [4] и [6] с поверхностью V_{m+r} ранга r связываются внутренняя, боковая и нормальная связности поверхности. Устанавливаются некоторые свойства форм кручения и кривизны неевклидовой связности. В конце работы показывается одна возможность выделить нормальные поверхности при помощи кривизны внутренней связности поверхности V_{m+r} ранга r.

§I. Многообразие плоскостей и неевклидово расслоение

I. Рассмотрим N-мерное расширенное неевклидово пространство ${}^{l}S_N$, где $l \leq N$ и l - меньшее из чисел коэффициентов одного знака в каноническом виде абсолюта

$$g_{JK} x^J x^K = 0 \quad (J, J, K, \ldots, = 0, 1, \ldots, N)$$

в автополярном и нормированном репере $\{M_0, \ldots, M_N\}$ данного пространства[I].

[I] Метрический тензор g_{JK} в данном пространстве является симметрическим, т.е. $g_{JK} = g_{KJ}$, и невырожденным, т.е. $\det \| g_{JK} \| \neq 0$.

Инфинитезимальные перемещения репера $\{M_0,\dots,M_N\}$ в неевклидовом пространстве ${}^{l}S_N$ определяются системой уравнений

$$d\vec{M}_{\varkappa}=\omega_{\varkappa}^{\lambda}\vec{M}_{\lambda}. \qquad (1.1)$$

Здесь 1-формы $\omega_{\varkappa}^{J}$ удовлетворяют известным структурным уравнениям

$$d\omega_{\varkappa}^{J}=\omega_{\varkappa}^{\lambda}\wedge\omega_{\lambda}^{J} \qquad (1.2)$$

проективного пространства и, кроме того (в силу инвариантности метрики и автополярности репера), формы $\omega_{\varkappa}^{J}$ связаны между собой следующим образом:

$$\omega_{\varkappa}^{J}=-g^{JJ}g_{\varkappa\varkappa}\,\omega_{J}^{\varkappa}. \qquad (1.3)$$

2. Пусть дано погружение некоторого n-мерного дифференцируемого многообразия B_n в грассманово многообразие неизотропных n-мерных плоскостей в ${}^{l}S_N$. Оно определяет каноническое неевклидово расслоение L, базой которого является B_n, слоями – n-мерные плоскости в ${}^{l}S_N$, как неевклидовы подпространства ${}^{l_n}S_n$ индекса l_n $(l_n \leq n)$, структурной группой – подгруппа коллинеаций, которые сохраняют абсолют слоя. (В дальнейшем такие расслоения встречаются как канонические расслоения многообразий плоскостей в ${}^{l}S_N$). Если формы θ^a $(a,b,\dots,=n+1,\dots,n+n)$ составляют корепер в каждой точке x некоторой области $U\subset B_n$, то система Пфаффа $\theta^a=0$ является вполне интегрируемой, т.е.

$$d\theta^a=\theta^b\wedge\theta_b^a. \qquad (1.4)$$

Кроме того, при фиксации точки $x\in B_n$, имеем $\theta^a=0$. Выберем в ${}^{l}S_N$ автополярный нормированный репер $\{M_J\}$ так, чтобы первые $n+1$ точки M_A $(A,B,\dots,=0,1,\dots,n)$ лежали на n-мерной плоскости ${}^{l_n}S_n$, а остальные точки M_P $(P,Q,R,\dots,=n+1,\dots,N)$ расположились на поляре плоскости ${}^{l_n}S_n$. Если теперь фиксировать точку x многообразия B_n, то фиксируется и n-мерная плоскость ${}^{l_n}S_n$ – слой над точкой $x\in B_n$. Следовательно, в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$d\vec{M}_A=\omega_A^B\vec{M}_B+\omega_A^P\vec{M}_P$$
$$d\vec{M}_P=\omega_P^B\vec{M}_B+\omega_P^Q\vec{M}_Q,$$

кроме соотношений (1.3) имеют место

$$\omega_A^P=L_{Aa}^{P}\theta^a. \qquad (1.5)$$

Из структурных уравнений (I.2) пространства ${}^{l}S_N$ учитывая (I.3) и (I.5), получим уравнения
$$d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B + \Omega_A^B. \qquad (I.6)$$
Здесь
$$\Omega_A^B = \omega_A^R \wedge \omega_R^B = S_{Aab}^B\, \theta^a \wedge \theta^b = \tfrac{1}{2} T_{Aab}^B\, \theta^a \wedge \theta^b, \qquad (I.7)$$
где
$$S_{Aab}^B = -g^{BB} g_{RR} L_{Aa}^R L_{Bb}^R$$
и
$$T_{Aab}^B = 2 S_{A[ab]}^B.$$
Уравнения (I.4) и (I.6) представляют собой структурные уравнения неевклидова расслоения L. Из уравнений (I.7) следует, что формы Ω_A^B являются полубазовыми. По теореме Картана-Лаптева [3,5] на расслоении L возникает проективно-метрическая связность с формами связности ω_A^B и 2-формами кривизны Ω_A^B. В дальнейшем назовем эту связность неевклидовой связностью.

§2. Формы кривизны и кручения неевклидовой связности

I. Представим совокупность форм кривизны $\{\Omega_A^B\}$ в виде следующей матрицы
$$\Theta = \|\Omega_A^B\| = \begin{Vmatrix} \Omega_0^0 & \cdots & \Omega_0^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \Omega_n^0 & \cdots & \Omega_n^n \end{Vmatrix}.$$
В автополярном репере элементы этой матрицы удовлетворяют условиям
$$\Omega_A^B = -g^{AA} g_{BB}\, \Omega_B^A. \qquad (2.I)$$
Матрица Θ называется <u>матричной 2-формой кривизны</u> неевклидовой связности.

Если матричная 2-форма кривизны связности является нулевой матрицей, то связность называется <u>локально плоской</u>.

Рассмотрим теперь перемещение $\{M_J\}$ в репер $\{'M_J\}$, которое определяется формулами
$$'\vec{M}_A = a_A^B \vec{M}_B, \qquad '\vec{M}_P = a_P^Q \vec{M}_Q,$$
где матрицы преобразования $A_1 = \|a_A^B\|$ и $A_2 = \|a_P^Q\|$ - неособые. При таком перемещении слой расслоения L, натянутый на точки $\{M_A\}$, сохраняется.

Введем теперь матрицы $A_1^{-1} = \|\tilde{a}_A^B\|$ и $A_2^{-1} = \|\tilde{a}_P^Q\|$. Так как

$$d'\vec{M}_A = da_A^B \cdot \vec{M}_B + a_A^B \cdot d\vec{M}_B = (da_A^B + a_A^C \omega_C^B)\vec{M}_B + $$
$$+ a_A^B \omega_B^P \vec{M}_P = (da_A^B + a_A^C \omega_C^B) \cdot \tilde{a}_B^D \,{}'\vec{M}_D +$$
$$+ a_A^B \omega_B^P \cdot \tilde{a}_P^Q \,{}'\vec{M}_Q,$$
$$d'\vec{M}_P = da_P^Q \cdot \vec{M}_Q + a_P^Q \cdot d\vec{M}_Q =$$
$$= (da_P^Q + a_P^R \omega_R^Q) \cdot \tilde{a}_Q^S \,{}'\vec{M}_S + a_P^Q \omega_Q^A \cdot \tilde{a}_A^B \,{}'\vec{M}_B,$$

то формы перемещения $\omega_J^{\varkappa}$ преобразуются в новые формы ${}'\omega_J^{\varkappa}$ следующим образом:

$${}'\omega_A^D = (da_A^B + a_A^C \omega_C^B) \cdot \tilde{a}_B^D, \qquad {}'\omega_P^B = a_P^Q \omega_Q^A \tilde{a}_A^B,$$
$${}'\omega_A^P = a_A^B \omega_B^Q \tilde{a}_Q^P, \qquad {}'\omega_P^S = (da_P^Q + a_P^R \omega_R^Q) \cdot \tilde{a}_Q^S.$$

Отсюда, в частности, следуют формулы преобразования форм кривизны

$${}'\Omega_A^B = {}'\omega_A^P \wedge {}'\omega_P^B = a_A^C \Omega_C^D \tilde{a}_D^B \tag{2.2}$$

или в матричном виде

$${}'\Theta = A_1 \Theta A_1^{-1}. \tag{2.3}$$

Из полученных формул преобразования (2.2) и (2.3) вытекает, что формы Ω_A^B связаны только со слоями расслоения L и преобразуются по тензорному закону. Следовательно, справедливо

<u>Предложение I</u>. Формы кривизны Ω_A^B неевклидовой связности составляют тензорные 2-формы неевклидова расслоения L.

2. При помощи форм кривизны Ω_A^B неевклидовой связности можно ввести вектор-форму Σ в каждой точке слоя. Например, в точках M_A определяется форма Σ следующим образом:

$$\Sigma_{M_A} = \Omega_A^B \vec{M}_B.$$

Форма Σ_M называется <u>вектор-формой кручения</u> неевклидовой связности <u>в точке M</u>.

Пусть для некоторых точек X и M из слоя расслоения L, определенных соответственно векторами

$$\vec{X} = x^A \vec{M}_A, \quad \vec{M} = m^A \vec{M}_A,$$

справедливо

$$(\Sigma_M, \vec{X}) = 0. \tag{2.4}$$

Тогда говорят, что форма Σ <u>в точке M полярна точке X</u>.

Если соотношение (2.4) имеет место для каждой точки некоторой плоскости Δ в данном слое, то говорят, что <u>форма $\sum$ в точке M полярно сопряжена плоскости Δ</u>.

Докажем следующее предложение.

<u>Предложение 2</u>. I) Если $\sum = 0$ в точках $E_0, \dots, E_{n_1}$ слоя расслоения L, то $\sum = 0$ в каждой точке плоскости Δ, натянутой на точки $E_0, \dots, E_{n_1}$. 2) Если форма $\sum$ в точках $E_0, \dots, E_{n_1}$ слоя полярно сопряжена плоскости Δ, натянутой на точки $E_0, \dots, E_{n_1}$, то $\sum$ полярно сопряжена плоскости Δ во всех точках плоскости Δ.

<u>Доказательство</u>. I) Пусть точки $E_0, \dots, E_{n_1}$ принадлежат подплоскости Δ слоя ${}^{l_n}S_n$ расслоения L. Не умаляя общности, можно предполагать, что $n_1 \leq n$ и точки E_{i_1} $(i_1, j_1, \dots, = 0, 1, \dots, n_1)$ линейно независимы. Тогда точки E_{i_1} образуют проективный репер плоскости Δ. Присоединим к точкам E_{i_1} систему точек $\{E_{i_2}\}(i_2, j_2, \dots, = n_1+1, \dots n)$ так, чтобы множество $\{E_0, \dots, E_{n_1}, E_{n_1+1}, \dots, E_n\}$ образовало проективный репер слоя ${}^{l_n}S_n$. Пусть X - произвольная точка плоскости Δ. Тогда

$$\vec{X} = x^{i_1}\vec{E}_{i_1} \tag{2.5}$$

и можно найти репер $\{F_A\}$ слоя ${}^{l_n}S_n$ так, чтобы $X = F_0$, точки $F_1, \dots, F_{n_1}$ принадлежали плоскости Δ, а $F_{i_2} = E_{i_2}$. Следовательно, переход

$$\vec{F}_A = f_A^B \vec{E}_B \tag{2.6}$$

от репера $\{E_B\}$ к реперу $\{F_A\}$ слоя ${}^{l_n}S_n$ осуществляется неособой матрицей $F = \| f_A^B \|$, в которой

$$f_{i_1}^{j_2} = f_{j_2}^{i_1} = 0, \quad f_0^{i_1} = x^{i_1}, \quad f_{i_2}^{j_2} = \delta_{i_2}^{j_2}. \tag{2.7}$$

При этом матрица $F^{-1} = \| \tilde{f}_A^B \|$ имеет аналогичное строение, т.е.

$$\tilde{f}_{i_1}^{j_2} = \tilde{f}_{j_2}^{i_1} = 0, \quad \tilde{f}_{i_2}^{j_2} = \delta_{i_2}^{j_2}. \tag{2.8}$$

Если теперь матрицы ${}'\Theta = \| {}'\Omega_A^B \|$ и ${}''\Theta = \| {}''\Omega_A^B \|$ являются матричными 2-формами кривизны неевклидовой связности в репере $\{E_{i_1}, E_{i_2}\}$ и $\{F_{i_1}, E_{i_2}\}$ соответственно, то в силу (2.3) имеем

$${}''\Theta = F\,{}'\Theta\, F^{-1}.$$

Элементы ${}''\Omega_{i_1}^B$ данной матрицы ${}''\Theta$ в силу формул (2.7)-(2.8) имеют вид

$$''\Omega_{i_1}^{j_1} = f_{i_1}^{A}\,'\Omega_A^B \tilde{f}_B^{j_1} = f_{i_1}^{k_1}\,'\Omega_{k_1}^{m_1} \tilde{f}_{m_1}^{j_1}, \tag{2.9}$$

$$''\Omega_{i_1}^{j_2} = f_{i_1}^{A}\,'\Omega_A^B \tilde{f}_B^{j_2} = f_{i_1}^{k_1}\,'\Omega_{k_1}^{k_2} \delta_{k_2}^{j_2}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим теперь форму кручения $\sum$ в точках E_A и $F_0 = X$. По предположениям первой части предложения 2

$$\sum_{E_{i_1}} = '\Omega_{i_1}^{A} \vec{E}_A = 0.$$

А это значит, что $'\Omega_{i_1}^{j_1} = '\Omega_{i_1}^{j_2} = 0$. Пользуясь соотношениями (2.9)-(2.10), находим, что теперь

$$\sum_X = ''\Omega_0^A \vec{F}_A = ''\Omega_0^{i_1} \vec{F}_{i_1} + \Omega_0^{i_2} \vec{F}_{i_2} =$$
$$= f_0^{j_1}\,'\Omega_{j_1}^{k_1} \tilde{f}_{k_1}^{i_1} \vec{F}_{i_1} + f_0^{j_1}\,'\Omega_{j_1}^{i_2} \vec{F}_{i_2} = 0.$$

Так как точка X была произвольной точкой плоскости, то первая часть предложения доказана.

2) Пусть плоскость Δ и форма $\sum$ в точках E_{i_1} - полярно сопряжены. Тогда справедливо

$$\left(\sum_{E_{i_1}}, \vec{y}\right) = 0,$$

где вектор $\vec{y}$ определяет произвольную точку y плоскости Δ. Пользуясь соотношениями (2.6) и (2.9)-(2.10) находим, что в любой точке $X = F_0$, которая определяется вектором (2.5), имеет место

$$\left(\sum_X, \vec{y}\right) = \left(''\Omega_0^A \vec{F}_A, \vec{y}\right) = \left(f_0^B\,'\Omega_B^C \tilde{f}_C^A \cdot f_A^D \vec{E}_D, \vec{y}\right) =$$
$$= f_0^{i_1}\left('\Omega_{i_1}^C \delta_C^D \vec{E}_D, \vec{y}\right) = f_0^{i_1}\left(\sum_{E_{i_1}}, \vec{y}\right) = 0.$$

Предложение доказано.

Можем сформулировать следующее предложение.

Предложение 3. Если вектор-форма кручения неевклидовой связности обращается в нуль на гиперплоскости слоя неевклидова расслоения, то неевклидова связность является локально плоской.

Доказательство. Пусть кручение $\sum$ обращается в нуль на $(n-1)$-мерной подплоскости Δ слоя расслоения L. Тогда автополярный репер $\{M_J\}$ можно выбрать так, чтобы точки $M_0, \dots, M_{n-1}$ лежали на плоскости Δ. Следовательно, по первой части предложения 2 имеем

$$\sum_{M_{i_1}} = \Omega_{i_1}^{A} \vec{M}_A = 0 \quad (i_1 = 0, 1, \dots, n-1).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_{i_1}^{A} = 0.$$

Оставшиеся формы $\Omega_n^{i_1}$ и Ω_n^n в матрице θ, учитывая соотношение (2.1) (т.е. в силу автополярности репера $\{M_J\}$), также равны нулю. Следовательно, матричная 2-форма кривизны Θ связности является нулевой матрицей и предложение доказано.

Из предложения 3 сразу вытекает

Следствие. Если форма кручения неевклидовой связности обращается в нуль на слое расслоения, то неевклидова связность является локально плоской.

§3. Неевклидовы связности поверхности неполного ранга

I. Рассмотрим в неевклидовом пространстве ${}^{l}S_N$ неизотропную $(m+r)$-мерную поверхность V_{m+r} ранга r (здесь $1 \leq m \leq N$). Как известно (см. [7], стр. 66-68), поверхность V_{m+r} ранга r состоит из r-параметрической системы m-мерных плоских образующих, вдоль которых касательная плоскость остаётся постоянной.

Обозначим через ${}^{l_1}S_m$ (здесь $l_1 \leq m$ и $l_1 \leq l$) m-мерную плоскую образующую поверхности V_{m+r} ранга r и введем следующие понятия: $(r-1)$-мерную плоскость ${}^{l_2}S_{r-1}$ (здесь $l_2 \leq r-1$ и $l_2 \leq l$), которая является полярной плоскостью к образующей ${}^{l_1}S_m$ в $(m+r)$-мерной касательной плоскости поверхности V_{m+r} ранга r назовем боковой плоскостью, а $(N-m-r-1)$-мерную плоскость ${}^{l_3}S_{N-m-r-1}$ (здесь $l_3 \leq N-m-r-1$ и $l_1+l_2+l_3 = l$), которая полярна к касательной плоскости поверхности V_{m+r} ранга r назовем нормальной плоскостью поверхности V_{m+r} ранга r. Присоединим теперь к каждой неизотропной образующей ${}^{l_1}S_m$ поверхности V_{m+r} ранга r автополярный нормированный репер $\{M_0, \ldots, M_N\}$ пространства ${}^{l}S_N$ так, чтобы первые $m+1$ точки M_i $(i,j,\ldots = 0,1,\ldots,m)$ принадлежали данной образующей ${}^{l_1}S_m$, следующие r точки M_α $(\alpha,\beta,\ldots = m+1,\ldots,m+r)$ расположились на боковой плоскости ${}^{l_2}S_{r-1}$, а остальные $N-m-r$ точки M_p $(p,q,\ldots = m+r+1,\ldots,N)$ находились на нормальной плоскости ${}^{l_3}S_{N-m-r-1}$.

Так как касательная плоскость поверхности V_{m+r} ранга r в точке M_i натянута теперь на $M_0,\ldots,M_m$ и $M_{m+1},\ldots,M_{m+r}$, то в (I.I), которые перепишем в виде

$$d\vec{M}_i = \omega_i^j \vec{M}_j + \omega_i^\beta \vec{M}_\beta + \omega_i^q \vec{M}_q, \tag{3.I}$$

$$d\vec{M}_\alpha = \omega_\alpha^j \vec{M}_j + \omega_\alpha^\beta \vec{M}_\beta + \omega_\alpha^p \vec{M}_p, \tag{3.2}$$

$$d\vec{M}_p = \omega_p^j \vec{M}_j + \omega_p^\beta \vec{M}_\beta + \omega_p^q \vec{M}_q, \tag{3.3}$$

имеют, кроме (I.3), место

$$\omega_i^q = 0. \tag{3.4}$$

При фиксации образующей ${}^{l}S_m$ фиксируется и касательная плоскость поверхности V_{m+r} ранга r. Поэтому формы Пфаффа ω_i^α и ω_α^ρ в уравнениях (3.1)-(3.3) зависят только от дифференциалов главных параметров поверхности V_{m+r} ранга r. Примем в качестве линейно независимых форм поверхности V_{m+r} ранга r формы[2] ω_0^α. Теперь получим дифференциальные уравнения

$$\omega_i^\alpha = \lambda_{i\beta}^\alpha \omega_0^\beta, \quad \lambda_{0\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \qquad (3.5)$$
$$\omega_\alpha^\rho = \Lambda_{\alpha\beta}^\rho \omega_0^\beta,$$

которые вместе с уравнениями (3.4) полностью определяют поверхность V_{m+r} ранга r в пространстве ${}^{l}S_N$. Дифференцируя внешним образом систему (3.4), учитывая уравнения (3.5), получим конечные соотношения

$$\lambda_{i\beta}^\alpha \Lambda_{\alpha\gamma}^\rho = \lambda_{i\gamma}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^\rho.$$

В частности, при $i=0$, отсюда вытекает, что коэффициенты $\Lambda_{\alpha\beta}^\rho$ симметричны по нижним индексам, т.е.

$$\Lambda_{\alpha\beta}^\rho = \Lambda_{\beta\alpha}^\rho.$$

2. Как выше сказано, поверхность V_{m+r} ранга r в ${}^{l}S_N$ расслаивается на r-параметрическое семейство m-мерных плоскостей, которое представляет собой r-мерное дифференцируемое подмногообразие $B_r(m,N)$ в грассмановом многообразии m-мерных плоскостей N-мерного неевклидова пространства ${}^{l}S_N$. Так как в подвижном репере $\{M_0, \dots, M_N\}$ пространства ${}^{l}S_N$, стационарная подгруппа m-мерной плоской образующей поверхности V_{m+r} ранга r определена в предыдущем пункте системой $\omega_0^\alpha = 0$ и в силу уравнений (3.5) имеем

$$d\omega_0^\alpha = \omega_0^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \lambda_{j\beta}^\alpha \omega_0^j), \qquad (3.6)$$

то в качестве базисных форм многообразия $B_r(m,N)$ можно выбрать формы ω_0^α.

Фиксируем теперь точку x многообразия $B_r(m,N)$, т.е. предположим $\omega_0^\alpha = 0$. Тогда из уравнений (3.1)-(3.3) в силу (3.5) вытекает, что вместе с точкой $x \in B_r(m,N)$, т.е. вместе с плоской образующей, фиксируются и боковая и нормальная плоскости поверхности неполного ранга.

---

[2] Здесь предполагается дополнительно, что точка M_0 не является фокусом поверхности V_{m+r} ранга r.

Следовательно, поверхностью неполного ранга определяются три неевклидова расслоения с общей базой $B_*(m,N)$. Расслоение, слоями которого являются m-мерные образующие поверхности неполного ранга, назовем <u>внутренним расслоением поверхности неполного ранга</u>. Его структурные уравнения представимы в виде (3.6) и (I.6), где индексы $A, B, \dots,$ надо отождествить с индексами $i, j, \dots$. Расслоение, слоями которого являются $(r-1)$-мерные боковые плоскости, назовем <u>боковым расслоением поверхности неполного ранга</u>. Уравнения (3.6) и (I.6), где индексы $A, B, \dots,$ надо отождествить с индексами $\alpha, \beta, \dots,$ являются структурными уравнениями бокового расслоения. Третье расслоение назовем <u>нормальным расслоением поверхности неполного ранга</u>, так как его слоями являются $(N-m-r-1)$-мерные нормальные плоскости. Если в (I.6) отождествить индексы $A, B, \dots,$ с индексами $p, q, \dots,$ то уравнения (I.6) и (3.6) представляют структурные уравнения нормального расслоения. В §I данной работы показано, что на неевклидовом расслоении возникает неевклидова связность со своими формами кривизны, свойства которых подробнее изучены в §2. Следовательно, справедлива теорема

<u>Теорема I</u>. С поверхностью неполного ранга в неевклидовом пространстве ${}^{l}S_N$ ассоциируются три однозначно определенных неевклидовых связностей с формами связности ω_i^j (внутренняя связность), ω_α^β (боковая связность) и ω_p^q (нормальная связность) и 2-формами кривизны Ω_i^j, Ω_α^β и Ω_p^q соответственно.

§4. Вполне нормальная поверхность неполного ранга

Рассмотрим теперь такие поверхности V_{m+r} ранга r в ${}^{l}S_N$, которые допускают m-параметрическое семейство r-мерных поверхностей, касательные плоскости которых проходят через боковые плоскости для плоских образующих поверхности V_{m+r} ранга r. Такой весьма специальный класс поверхностей естественно называть <u>вполне нормальной поверхностью V_{m+r} ранга r</u>, а указанные r-мерные поверхности ее <u>ортогональными поверхностями</u>.

Произвольная точка A образующей, для которой

$$\vec{A} = \vec{M}_0 + a^{i'} \vec{M}_{i'} \qquad (i', j', \dots, = 1, \dots, m),$$

описывает одну из ортогональных r-мерных поверхностей (A), если касательная плоскость к (A) в точке A проходит через $(r-1)$-мерную боковую плоскость. Тогда, в разложении

$$d\vec{A} = a^{i'}\omega^0_{i'}\vec{M}_0 + (da^{j'} + \omega^{j'}_0 + a^{i'}\omega^{j'}_{i'})\vec{M}_{j'} + (\omega^\alpha_0 + a^{i'}\omega^\alpha_{i'})\vec{M}_\alpha =$$
$$= a^{i'}\omega^0_{i'}\vec{A} + (\omega^\alpha_0 + a^{i'}\omega^\alpha_{i'})\vec{M}_\alpha +$$
$$+ (da^{j'} + \omega^{j'}_0 + a^{i'}\omega^{j'}_{i'} - a^{i'}a^{j'}\omega^0_{i'})\vec{M}_{j'}$$

компоненты при $\vec{M}_{j'}$ должны быть равными нулю, т.е.

$$da^{j'} + \omega^{j'}_0 + a^{i'}\omega^{j'}_{i'} - a^{i'}a^{j'}\omega^0_{i'} = 0.$$

Рассматриваемые ортогональные поверхности проходят через произвольную точку A образующей тогда и только тогда, когда последняя система уравнений относительно $a^{i'}$ вполне интегрируема. Дифференцируя ее внешним образом, приходим к уравнениям

$$\omega^\alpha_0 \wedge \omega^{j'}_\alpha + a^{i'}\omega^\alpha_{i'} \wedge \omega^{j'}_\alpha - a^{i'}a^{j'}\omega^\alpha_{i'} \wedge \omega^0_\alpha = 0. \qquad (4.I)$$

Учитывая здесь (3.4) в обозначениях (I.7), где индексы $A, B, \ldots$, надо отождествить с индексами $i, j, \ldots$, а $P, R, \ldots$ пробегут значения $m+1, \ldots, N$, перепишем уравнения (4.I) в виде

$$\Omega^{j'}_0 + a^{i'}\Omega^{j'}_{i'} - a^{i'}a^{j'}\Omega^0_{i'} = 0.$$

Очевидно, что они имеют место при произвольных $a^{i'}$ тогда и только тогда, когда

$$\Omega^{j'}_0 = \Omega^{j'}_{i'} = \Omega^0_{i'} = 0.$$

Следовательно, точка A описывает ортогональную r-мерную поверхность тогда и только тогда, когда матричная 2-форма кривизны внутренней связности поверхности V_{m+r} ранга r является нулевой матрицей.

Теорема 2. Поверхность V_{m+r} ранга r в ${}^{\ell}S_N$ является вполне нормальной тогда и только тогда, когда ее внутренняя связность является локально плоской.

Из предложения 3 и из теоремы 2 вытекает

Следствие Поверхность неполного ранга является вполне нормальной, если форма кручения ее внутренней связности обращается в нуль на гиперплоскости плоской образующей данной поверхности неполного ранга.

§5. О строении фокального многообразия вполне нормальной поверхности неполного ранга

В статьях [I] и [2] рассматривались невырожденные фокальные образы - фокальная поверхность и фокальный конус - таких поверхностей неполного ранга, у которых оба фокальных образа не имеют кратных компонент или только один из них не имеет кратных компонент, допуская их существование у второго образа. В обоих случаях имело место распадение фокальных образов на некоторые компоненты. В данной работе покажем, что распадение фокального многообразия поверхности неполного ранга непосредственно следует из требования локальной плоскости внутренней связности, т.е. из требования вполне нормальности поверхности неполного ранга.

I. Определим теперь фокальное многообразие поверхности неполного ранга. Как хорошо известно, точка X, определенная вектором

$$\vec{X} = x^i \vec{M}_i , \tag{5.I}$$

называется <u>фокусом</u> данной образующей поверхности неполного ранга, если существует направление, при котором

$$d\vec{X} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \vec{M}_i).$$

Дифференцирование соотношения (5.I) с использованием (3.I) и (3.4) дает

$$d\vec{X} = (dx^i + x^j\omega_j^i)\vec{M}_i + x^i\omega_i^\alpha \vec{M}_\alpha .$$

Следовательно, точка X является фокусом, если координаты x^i удовлетворяют системе

$$x^i\omega_i^\alpha = 0,$$

которая, в силу (3.5), имеет вид

$$x^i \lambda^\alpha_{i\beta}\omega_0^\beta = 0 \tag{5.2}$$

Направления, найденные из (5.2), называются <u>фокальными направлениями</u>. Множество всех фокусов называется <u>фокальным многообразием</u> поверхности неполного ранга и оно определяется для нетривиального фокального направления уравнением

$$\det \| x^i \lambda^\alpha_{i\beta} \| = 0. \tag{5.3}$$

В общем случае для поверхности ранга r фокальное многообразие, определенное уравнением (5.3), является алгебраической поверхностью порядка r.

2. Учитывая определение (I.7) и теорему 2, поверхность неполного ранга является вполне нормальной, если выполнены условия

$$\Omega_i^j \equiv \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = 0 \tag{5.4}$$

при произвольных значениях индексов i и j $(i, j, \ldots = 0, 1, \ldots, m)$. В силу (I.3) и (3.5), условия (5.4) равносильны требованиям

$$g^{jj} g_{\alpha\alpha} \lambda_{i\beta}^\alpha \lambda_{j\gamma}^\alpha \omega_0^\beta \wedge \omega_0^\gamma = 0. \tag{5.5}$$

Так как последние выполнены при любых i и j, то уравнения (5.5) имеют место, если

$$g_{\alpha\alpha} \lambda_{i[\beta}^\alpha \lambda_{|j|\gamma]}^\alpha = 0 \quad (\beta \neq \gamma), \tag{5.6}$$

откуда, в частности при $j = 0$, вытекает, что

$$g_{\beta\beta} \lambda_{i\gamma}^\beta = g_{\gamma\gamma} \lambda_{i\beta}^\gamma \quad (\beta \neq \gamma). \tag{5.7}$$

Следовательно, в случае вполне нормальной поверхности неполного ранга, все матрицы $\mu_i = \| g_{\alpha\alpha} \lambda_{i\beta}^\alpha \|$ являются симметричными.

Оказывается, что можно найти автополярный репер, в котором все матрицы μ_i имеют диагональный вид. Рассмотрим одну из них $\mu_1 = \| g_{\alpha\alpha} \lambda_{1\beta}^\alpha \|$. Все ее собственные значения действительны и можно найти автополярный репер $\{M_i, M_\alpha, M_p\}$, в котором симметричная матрица μ_1 имеет диагональный вид. В этом репере

$$g_{\alpha\alpha} \lambda_{1\beta}^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Так как боковая плоскость является неизотропной, то в выбранном репере матрица $\Lambda_1 = \| \lambda_{1\beta}^\alpha \|$ также имеет диагональный вид

$$\lambda_{1\beta}^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{5.8}$$

Теперь из (5.6), в силу (5.7), следует, что

$$g_{\alpha\alpha} \lambda_{j\beta}^\alpha (\lambda_{1\alpha}^\alpha - \lambda_{1\beta}^\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{5.9}$$

Покажем, что из последнего соотношения (5.9) вытекает, что

$$\lambda_{j\beta}^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{5.10}$$

Действительно, если $\lambda_{1\alpha}^\alpha \neq \lambda_{1\beta}^\beta$, то сразу вытекает (5.10). Если же для каких-либо значений индексов α и β имеет место $\lambda_{1\alpha}^\alpha = \lambda_{1\beta}^\beta$, то проведем следующее обсуждение. Дифференцируя сперва соотношения (3.5), найдем

$$d\lambda_{i\beta}^\alpha = \lambda_{j\beta}^\alpha \omega_i^j + \lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - \lambda_{i\gamma}^\alpha \lambda_{j\beta}^\gamma \omega_0^j + \lambda_{i\beta\gamma}^\alpha \omega_0^\gamma,$$

откуда, в силу (5.8), получим

$$\lambda^\alpha_{j\beta}\omega^j_1 = \lambda^\alpha_{1\alpha}\lambda^\alpha_{j\beta}\omega^j_0 - \lambda^\alpha_{1\beta\gamma}\omega^\gamma_0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$(\lambda^\alpha_{j\alpha} - \lambda^\beta_{j\beta})\omega^j_1 = \lambda^\alpha_{1\alpha}(\lambda^\alpha_{j\alpha} - \lambda^\beta_{j\beta})\omega^j_0 + (\quad)_\gamma \omega^\gamma_0.$$

Из того, что поверхность V_{m+r} ранга r вполне нормальная, следует, что формы ω^j_1, ω^j_0 и ω^γ_0 линейно независимы. Поэтому отсюда вытекает (5.10), а также

$$\lambda^\alpha_{j\alpha} = \lambda^\beta_{j\beta}$$

для тех индексов α и β для которых $\lambda^\alpha_{1\alpha} = \lambda^\beta_{1\beta}$. Следовательно, в данном репере все матрицы $\Lambda_i = \|\lambda^\alpha_{i\beta}\|$ имеют диагональный вид. В итоге можно сформулировать лемму.

Лемма. Если поверхность V_{m+r} неполного ранга r является вполне нормальной, то все матрицы $\Lambda_i = \|\lambda^\alpha_{i\beta}\|$ одновременно приведены в диагональный вид, причем кратности собственных значений матриц Λ_i одинаковы при всех $i = 1, \ldots, m$.

3. Уравнение (5.3) фокального многообразия вполне нормальной поверхности V_{m+r} неполного ранга r преобразуется теперь, в силу (5.10), в уравнение

$$\det \| x^i \lambda^\alpha_{i\beta} \delta^\beta_\alpha \| = 0$$

или, учитывая, что $\lambda^\alpha_{0\beta} = \delta^\alpha_\beta$, можем написать

$$\prod_\alpha (x^0 + x^\tau \lambda^\alpha_{\tau\alpha}) = 0 \quad (\tau = 1, \ldots, m).$$

Итак справедлива теорема

Теорема 3. Если в случае вполне нормальной поверхности V_{m+r} ранга r кратности собственных значений, общие для всех матриц Λ_i, $i = 1, \ldots, m$, равны $t_1, \ldots, t_u$ $(t_1 + \ldots + t_u = r)$, то фокальное многообразие порядка r распадается на u различных $(m-1)$-мерных плоскостей с кратностями $p_1, \ldots, p_u$ соответственно.

Литература

1. А к и в и с М. А., Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей. Докл. АН СССР, 1962, 146, №3, 515-518.

2. А к и в и с М. А., Фокальные образы поверхности ранга r. Изв.высш.учебн. заведений.Математика, 1957, №1, 9-19.

3. Л а п т е в Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. Матем. о-ва, 1953, 2, 275-382.

4. Л у м и с т е Ю. Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 12-46.
5. О с т и а н у Н. М., Р ы ж к о в В. В., Ш в е й к и н П. И., Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Труды геометрического семинара, 1973, 4, 7-70.
6. П а р р и н г А. К., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 21-45.
7. Я н е н к о Н. Н., Некоторые вопросы теории вложения римановых метрик в евклидовы пространства. Успехи матем. наук, 1953, 8, № 1 (53), 21-100.

Поступило
23 IУ 1976

MITTETÄIELIKU ASTAKUGA PINDADE SEOSTUSTEST MITTEEUKLEIDILISES RUUMIS

E. Abel

Resümee

Artiklis vaadeldakse $(m+r)$-mõõtmelist mitteisotroopset pinda V_{m+r}, mille astak on r, mitteeukleidilises ruumis ${}^{l}S_N$. Vaadeldavad pinnad ladenevad r-parameetriliseks m-mõõtmeliste mitteeukleidiliste tasandite parveks [5]. Pinnaga seotakse kolm kihtruumi koos neis tekkivate mitteeukleidiliste seostustega ning antakse tarvilik ja piisav tingimus mittetäieliku astakuga pinna täielikuks normaalsuseks.

ON THE CONNECTIONS OF THE SURFACES WITH DEGENERATE FAMILY OF TANGENT SPACES IN NON-EUCLIDEAN SPACE

E. Abel

Summary

In the present paper the $(m+r)$-dimensional non-isotropic surface V_{m+r} with rank r is considered in non-euclidean space ${}^{l}S_N$. Such a surface may be described as a r-parameters family of m-dimensional non-euclidean planes. By means of ideas from [2] and [4], three bundles with non-euclidean connections are associated with this surface. A sufficient and necessary condition for completely normability of the surface with not full rank is given also.

БЕЗУСЛОВНЫЕ ШАУДЕРОВЫ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПОЛУРЕФЛЕКСИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Э. Оя

Кафедра математического анализа

Н.Калтон [8] доказал, что если безусловный шаудеров базис (e_n) полного бочечного пространства X не ограниченно полный, то X содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное пространству c_0, а если (e_n) не натягивающий, то X содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное пространству ℓ_1. Этот результат был перенесен автором [2] на безусловные шаудеровы разложения в секвенциально полном бочечном пространстве. В настоящей статье этот результат и вытекающиеся из него критерии полурефлексивности распространяются на общие локально выпуклые пространства с безусловно простыми и безусловными шаудеровыми разложениями.

§I. Обозначения, основные понятия и вспомогательные результаты

Пусть X - (отделимое) локально выпуклое пространство с (топологическим) сопряженным X' и с алгебраическим сопряженным X^*. Обозначим через $\mathfrak{B}(X)$ семейство всех ограниченных множеств в пространстве X. Пусть X_t обозначает пространство X с топологией t (в дальнейшем все топологии предполагаются локально выпуклыми). В пространстве X нам понадобятся слабая топология $\sigma = \sigma(X, X')$, топология Макки $\tau = \tau(X, X')$, сильная топология $\beta(X, X')$ и сильнейшая локально выпуклая топология η такая, что $\mathfrak{B}(X_\eta) = \mathfrak{B}(X)$ (т.е. X_η - борнологическое пространство, ассоциированное с X). Пусть X'_σ и X'_β обозначают сопряженное X' к X в слабой и сильной топологиях $\sigma(X', X)$ и $\beta(X', X)$ соответственно.

Шаудеровым разложением локально выпуклого пространства X называется последовательность (P_n) непрерывных ненулевых проекторов в пространстве X такая, что $P_n \circ P_m = 0$, если $n \neq m$, и любой элемент $x \in X$ представим в виде

$x = \sum P_n x$, где ряд сходится в топологии пространства X. Пусть $\sum$ - система всех конечных множеств натуральных чисел, упорядоченная по включению. Обозначим $U_\nu = \sum_{n\in\nu} P_n$, где $\nu \in \sum$, причем $U_\emptyset = 0$ для пустого множества $\emptyset$. Шаудерово разложение (P_n) пространства X называется безусловным, если $x = \lim_{\nu\in\sum} U_\nu x$ при каждом $x \in X$, т.е. ряд $\sum P_n x$ сходится безусловно к x, и безусловно простым, если[I] $\{U'_\nu f : \nu \in \sum\} \in \mathfrak{B}(X'_\beta)$ для каждого функционала $f \in X'$. Существуют безусловные шаудеровы разложения, не являющиеся безусловно простыми, однако, в более употребляемых пространствах (секвенциально полные пространства, бочечные пространства) безусловность шаудерова разложения влечет за собой его безусловную простоту [3]. С другой стороны, не известно, включает ли класс безусловных шаудеровых разложений безусловно простые шаудеровы разложения, или (что кажется более вероятным) нет.

(Безусловный) шаудеров базис $(e_n) \subset X$ с сопряженной последовательностью $(f_n) \subset X'$ представляет собой (безусловное) шаудерово разложение пространства X на одномерные подпространства $P_n X$, где проекторы P_n определены равенствами $P_n x = f_n(x) e_n$, $x \in X$.

Шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X называется ограниченно полным (соответственно полным), если каждая ограниченная последовательность (соответственно последовательность Коши) $(\sum_{1\le k\le n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится. Если (P'_n) является шаудеровым разложением пространства X'_β, то шаудерово разложение (P_n) пространства X называется натягивающим.

Если (P_n) - шаудерово разложение локально выпуклого пространства X такое, что

$$\{U_\nu x : \nu \in \textstyle\sum\} \in \mathfrak{B}(X) \qquad \forall x \in X$$

(в частности, если (P_n) безусловно простое или безусловное), то, как и в [3], каждой топологии t на X такой, что $\sigma \le t \le \eta$, определяемой семейством полунорм $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, поставим в соответствие ε-топологию $t\varepsilon$ как топологию, определяемую семейством полунорм $\{q_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где

[I] Обозначим через A' сопряженное к отображению A.

$$q_\alpha(x) = \sup\{p_\alpha(x), p_\alpha(U_\nu x) : \nu \in \Sigma\},\ x \in X. \tag{I}$$

Если $\sigma \leq t \leq T \leq \eta$, то, очевидно, $t \leq t\iota \leq T\iota$. Равенство $t = t\iota$ выполняется тогда и только тогда, когда множество проекторов $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ в X_t равностепенно непрерывно (см. 4^0 из предложения I.3 статьи [3]), в частности, тогда, когда $X = X_t$ бочечно, или же (теорема I.7 из [3]) $X = X_t$ квазибочечно и (P_n) безусловно простое.

Пусть (P_n) – шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Ясно, что (P_n') – шаудерово разложение для X'_σ. Иногда в дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\text{разложение } (P_n') \text{ для } X'_\sigma \text{ полно.} \tag{2}$$

Условие (2) выполняется, очевидно, тогда, когда X'_σ секвенциально полно. Последнее условие выполняется, когда X_τ бочечно и, в частности, когда X бочечно.

Следующие леммы касаются условия (2).

Лемма I. Если безусловное шаудерово разложение удовлетворяет условию (2), то оно безусловно простое.

Лемма 2. Если безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X удовлетворяет условию (2), то топология $\sigma\iota$ согласована с двойственностью (X, X').

Лемма I вытекает из предложения I.4 и следствия 3 теоремы I.5, а лемма 2 – из предложений I.4 и I.8 статьи [3].

§ 2. Ограниченная полнота и натягиваемость

При рассмотрении шаудеровых разложений удобно использовать нижеследующие виды изоморфизма, введенные в [3]. В случае шаудерова базиса все они сводятся к обычному изоморфизму. Будем говорить, что локально выпуклое пространство Z и подпространство Y локально выпуклого пространства X с последовательностью проекторов (P_n) в X являются $w\omega$-полно разложимо-изоморфными, если

$$\text{пространство } Z \text{ изоморфно пространству } Y \tag{3}$$

и все подпространства[2] ${}^cP_n Y \subset X$ слабо секвенциально полны; сепарабельно-сопряженно разложимо-изоморфными, если выполнено условие (3) и все пространства $({}^cP_n Y)'$ сильно сепарабельны; конечномерно разложимо-изоморфными, если вы-

---

[2] Символ ${}^cY$ обозначает замыкание множества $Y \subset X$.

полнено условие (3) и все пространства $P_n Y$ конечномерны.

Теорема I. Пусть (P_n) – безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1^0 Разложение (P_n) ограниченно полно.

2^0 Разложение (P_n) полно и X не содержит подпространств, $w\omega$-полно разложимо-изоморфных пространству c_0.

3^0 Разложение (P_n) полно и безусловно и X не содержит подпространств, конечномерно разложимо-изоморфных пространству c_0 и топологически дополняемых в X_{T_τ}, где T- исходная топология пространства X.

Доказательство. Эквивалентность $1^0 \Longleftrightarrow 2^0$ доказана в [3] (эквивалентность $1^0 \Longleftrightarrow 3^0$ & 5^0 из теоремы 2.4). Поскольку ограниченная полнота (P_n) влечет за собой безусловность (P_n) (лемма 2.3 из [3]), импликация 1^0 & $2^0 \Longrightarrow 3^0$ очевидна. Покажем, что $3^0 \Longrightarrow 1^0$. Допустим, что (P_n) не ограниченно полно. Тогда по теореме 2.4 (см. доказательство импликации 4^0 & $5^0 \Longrightarrow 1^0$) из [3] в X существуют элементы $z_k = U_{\nu(k)} z_k \neq 0$, где множества $\nu(k) \in \sum$ удовлетворяют условию

$$\max\{i : i \in \nu(k)\} < \min\{i : i \in \nu(k+1)\}, \qquad (4)$$

такие, что[3] $Z = \mathrm{clm}\{z_k : k = 1, 2, \ldots\} \subset X$ изоморфно c_0. При этом для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \le k \le n}$ и для любой T_τ-непрерывной полунормы q выполнено неравенство

$$q\left(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\right) \le c \sup_{1 \le k \le n} |t_k|, \qquad (5)$$

где число $c > 0$ зависит от q, и хотя бы для одной T-непрерывной полунормы p – неравенство

$$\sup_{1 \le k \le n} |t_k| \le p\left(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\right). \qquad (6)$$

Из (4) ясно, что $\dim P_k Z \le 1$ при всех k, т.е. Z конечномерно разложимо-изоморфно пространству c_0. Пусть Z_{T_τ}- пространство Z, наделенное топологией, индуцированной T_τ. Для установления импликации $3^0 \Longrightarrow 1^0$ остается доказать топологическую дополняемость пространства Z_{T_τ} в X_{T_τ}. Для

---

[3] Символ $\mathrm{clm}\, Y$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $Y \subset X$.

этого построим непрерывный проектор R пространства X_{T_ν} на Z_{T_ν}.

Учитывая линейную независимость системы (z_k), определим на ее линейной оболочке линейные формы f_i соотношением

$$f_i\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\Big) = t_i, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Как это видно из (6), во всех точках $z = \sum_{1\le k\le n} t_k z_k$ справедливо неравенство

$$|f_i(z)| \le p(z), \quad i = 1, 2, \dots .$$

С помощью теоремы Хана-Банаха продолжим каждый функционал f_i до такого функционала $g_i \in X'$, что во всех точках $x \in X$ будет выполняться неравенство

$$|g_i(x)| \le p(x), \quad i = 1, 2, \dots ,$$

т.е. множество $\{g_i : i = 1, 2, \dots\} X'$ равностепенно непрерывно. Определим $h_i \in X'$ равенством

$$h_i = g_i \circ \mathcal{U}_{\nu(i)}.$$

Тогда множество $\{h_i : i = 1, 2, \dots\} \subset (X_{T_\nu})'$ равностепенно непрерывно (множество $\mathcal{U}_\nu : X_{T_\nu} \to X_T$, $\nu \in \sum$, равностепенно непрерывно в силу (I)). Положим

$$R_n x = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) z_k .$$

Очевидно, что $R_n z_k = z_k$, если $k \le n$, и R_n - проектор в X. Ввиду неравенства (5) и равностепенной непрерывности множества $\{h_k : k = 1, 2, \dots\} \subset (X_{T_\nu})'$, множество проекторов $R_n : X_{T_\nu} \to X_{T_\nu}$, $n = 1, 2, \dots$, равностепенно непрерывно. Кроме того, поскольку

$$h_k(x) = h_k(\mathcal{U}_{\nu(k)} x) \qquad \forall x \in X,$$

легко проверить, что при заданном $\nu \in \sum$

$$R_m(\mathcal{U}_\nu x) = R_{n(\nu)}(\mathcal{U}_\nu x) \quad \forall x \in X, \ m \ge n(\nu),$$

где $n(\nu)$ - наименьший номер такой, что

$$\min\{i : i \in \nu(n(\nu))\} \ge \max\{i : i \in \nu\}.$$

Следовательно, существует $\lim R_n x$ в Z_{T_ν} на множестве $\{\mathcal{U}_\nu x : x \in X, \ \nu \in \sum\}$. Это множество всюду плотно в X_{T_ν}, так как (P_n), будучи безусловным, является шаудеровым разложением для X_{T_ν} (см. 8° из предложения I.3 статьи [3]). Поэтому из равностепенной непрерывности множества $\{R_n : n = 1, 2, \dots\}$ для любого $x \in X$ получаем, что $(R_n x)$ - последовательность Коши в Z_{T_ν}. Поскольку Z, наделенное T-топологией, изоморфно c_0, то и Z_{T_ν} изоморфно c_0 (следствие 2 теоремы I.5 из [3]) и, значит, полно. Следовательно, T_ν-предел $\lim R_n x = Rx \in Z$ существует для всех $x \in \in X$. Ясно, что R – проектор в X и $Rz_k = z_k$ при всех k. Непрерывность проектора R в X_{T_ν} вытекает из равностепенной непрерывности множества $\{R_n : n = 1, 2, \dots\}$. Таким образом, требуемый проектор R построен.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть (P_n) – безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X на слабо секвенциально полные пространства $P_n X$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I° Разложение (P_n) ограниченно полно.

2° Разложение (P_n) полно и X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0.

3° Разложение (P_n) полно и безусловно и X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0 и топологически дополняемых в X_{T_ν}, где T – исходная топология пространства X.

Замечание. Теорема I и ее следствие имеют место для безусловного шаудерова разложения (P_n) пространства X, если $\mathfrak{B}(X'_\beta) = \mathfrak{B}(X'_\sigma)$ в X'.

Прежде чем перейти к изучению натягиваемости, расширим немного понятие полного шаудерова разложения. Как и в [3], шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X будем называть полным в топологии t на X, если проекторы P_n непрерывны в X_t и каждая t-последовательность Коши $(\sum_{1 \le k \le n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится в топологии t. Для разложения, полного в исходной топологии, будет сохранен термин "полное".

Теорема 2. (а) Пусть (P_n) – безусловное шаудерово разложение локально выпуклого пространства X, удовлетворяющее условию (2). Если (P_n) натягивающее, то X_{T_ν}, где T – исходная топология пространства X, не содержит подпространств, сепарабельно-сопряженно разложимо-изоморфных пространству l_1.

(b) Пусть (P_n) – безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X и пусть существует топология T на X, где $\sigma \le T \le \eta$, в которой (P_n) является полным. Если существует топология t на X

где[4] $\sigma\tau \le t \le \eta = \eta\tau$, такая, что X_t не содержит топологически дополняемых подпространств, конечномерно разложимо-изоморфных пространству l_1, то (P_n) натягивающее.

Доказательство. (а) В силу 8^0 из предложения I.3 статьи [3] имеем, что (P_n) - шаудерово разложение для X_{T_τ}. Кроме того, так как $T_\tau \le \tau$ (предложение I.4 из [3]), а (P_n) для X натягивающее, то (P_n) для X_{T_τ} является натягивающим и остается применить теорему 2.7 из [3].

(b) Допустим, что (P_n) не натягивающее. Тогда (см. доказательства леммы 2.6 и теоремы 2.7 из [3]) существуют функционал $f \in X'$, число $b > 0$ и элементы $z_k = U_{\nu(k)} z_k \in X$, где множества $\nu(k) \in \sum$ удовлетворяют условию (4), такие что $f(z_k) \geqslant b$ и $Z = clm\{z_k : k = 1, 2, \dots\} \subset X_{\sigma\tau}$ изоморфно l_1. При этом для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \le k \le n}$ и для любой η-непрерывной полунормы p выполнено неравенство

$$p\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\Big) \le c \sum_{k=1}^{n} |t_k|, \tag{7}$$

где число $c > 0$ зависит от p. Из (4) видно, что $\dim P_n Z \le 1$ при всех n, т.е. Z конечномерно разложимо-изоморфно пространству l_1. Кроме того, поскольку Z борнологично, на Z совпадают все топологии t, где $\sigma\tau \le t \le \eta$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что Z, рассматриваемое как подпространство в $X_{\sigma\tau}$, топологически дополняемо. Для этого построим непрерывный проектор R пространства $X_{\sigma\tau}$ на Z.

Положим

$$R_n x = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(U_{\nu(k)} x)}{f(z_k)} z_k, \quad x \in X.$$

Ясно, что $R_n z_k = z_k$, если $k \le n$, и R_n - проектор в X. С помощью неравенств (7) выше и (3) из [3] получаем, что для любой $\sigma\tau$-непрерывной полунормы p имеет место ооотношение

$$p(R_n x) \le \frac{c}{b} \sum_{k=1}^{n} |f(U_{\nu(k)} x)| = \frac{c}{b} f\Big(\sum_{k=1}^{n} s_k U_{\nu(k)} x\Big) \le$$

$$\le \frac{2c}{b} q_f\Big(\sum_{k=1}^{n} U_{\nu(k)} x\Big) \le \frac{2c}{b} q_f(x),$$

---

[4] Отметим (следствие I теоремы I.5 из [3]), что поскольку (P_n) безусловно простое, то $\eta = \eta i$.

где $s_k = \operatorname{sgn} f(\mathcal{U}_{\nu(k)}x)$ и $c>0$ зависит от p, а q_f – $\sigma\varepsilon$-непрерывная полунорма, соответствующая по формуле (I) полунорме $|f(\cdot)|$. Значит, множество проекторов $R_n : X_{\sigma\varepsilon} \longrightarrow X_{\sigma\varepsilon}$, $n = 1, 2, \ldots$, равностепенно непрерывно. Кроме того, рассуждения из доказательства утверждения $3^0 \Longrightarrow \Longrightarrow I^0$ теоремы I показывают, что существует предел $\lim R_n x \in \in Z$ в $X_{\sigma\varepsilon}$ на множестве $\{\mathcal{U}_\nu x : x \in X,\ \nu \in \Sigma\}$. Это множество всюду плотно в $X_{\sigma\varepsilon}$, так как (P_n), будучи безусловным шаудеровым разложением для X_σ (предложение I.8 из [3]), является шаудеровым разложением для $X_{\sigma\varepsilon}$ (предложение I.3, 8^0, из [3]). Продолжая теперь доказательство аналогично доказательству теоремы I, заключаем, что $\sigma\varepsilon$-предел $\lim R_n x = = Rx \in Z$ существует для всех $x \in X$ и R – требуемый проектор.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть (P_n) – безусловное шаудерово разложение локально выпуклого пространства $X = X_T$, удовлетворяющее условию (2), такое, что все $(P_n X)'$ сильно сепарабельны, и пусть существует топология T_1 на X, где $\sigma \le T_1 \le \eta$, в которой (P_n) является полным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I^0 Разложение (P_n) натягивающее.

2^0 Пространство $X_{T\varepsilon}$ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.

3^0 Существует топология t на X, где $\sigma\varepsilon \le t \le \eta = \eta\varepsilon$, такая, что X_t не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных пространству l_1.

Для доказательства отметим, что, так как топология $T\varepsilon$ согласована с (X, X') (предложение I.4 из [3]), импликация $I^0 \Longrightarrow 2^0$ вытекает из теоремы 2, (a), импликация $2^0 \Longrightarrow 3^0$ очевидна, а поскольку (P_n) безусловно простое (лемма I), импликация $3^0 \Longrightarrow I^0$ содержится в теореме 2, (b).

§3. Полурефлексивные и рефлексивные пространства

Ниже будет часто использована следующая теорема Т.Кука [6]: для полурефлексивности локально выпуклого пространства X с шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны, необходимо и достаточно, чтобы (P_n) было одновременно ограниченно полным и натягивающим.

12

В следующей теореме будет сформулирована совокупность условий, достаточных для того, чтобы локально выпуклое пространство с безусловно простым шаудеровым разложением было полурефлексивным.

Теорема 3. Пусть X – локально выпуклое пространство с полным безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны. Рассмотрим следующие условия:

I^0 Разложение (P_n) безусловно и X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0 и топологически дополняемых в X_{T_τ}, где T – исходная топология пространства X.

2^0 То, что условие 3^0 в следствии из теоремы 2.

3^0 Пространство X'_β не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных пространству c_0.

4^0 Пространство X'_β не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных пространству ℓ_1.

5^0 Каждая $\beta(X', X)$–последовательность Коши $(\sum_{1\le k\le n} f_k)$, где $f_k \in P'_k X'$, сходится в X'_β.

Тогда пространство X является полурефлексивным, если выполнено одно из четырех следующих условий: I^0 & 2^0, 3^0 & 4^0 & 5^0, I^0 & 3^0 & 5^0, 2^0 & 4^0 & 5^0.

Доказательство. Покажем, что каждое из условий, перечисленных в утверждении теоремы, гарантирует ограниченную полноту и натягиваемость (P_n) и, следовательно (теорема Кука), полурефлексивность пространства X.

Условие I^0 влечет за собой ограниченную полноту (P_n) (теорема I), а условие 2^0 – натягиваемость (P_n) (теорема 2, (b)). Так как (P_n) безусловно простое, то (см. предложение 2.5 и лемму I.2 из [3]) (P'_n) – безусловное и безусловно простое шаудерово разложение для пространства $H = \{f \in X' : f = \sum P'_n f$ в топологии $\beta(X', X)\}$, наделенного топологией, индуцированной $\beta(X', X)$. Кроме того (предложения 2.5 и I.3, 4^0, из [3]), $\beta = \beta\tau$, где β – топология пространства H. Поэтому (теорема I) из 3^0 & 5^0 следует ограниченная полнота разложения (P'_n) для H, а значит (предложение 5.5 из [7]), натягиваемость (P_n). В силу теоремы 2, (b), из 4^0 & 5^0 следует натягиваемость разложения (P'_n) для H, а значит (теорема 2 из [4]), ограниченная полнота (P_n).

Теорема доказана.

Замечание I. Согласно следствию I теоремы 2.4 из [3] и следствию теоремы I, условие I^0 равносильно тому, что X_{T_τ}, где T - исходная топология пространства X, слабо секвенциально полно, а также тому, что X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_o, и следует из слабой секвенциальной полноты пространства X. Кроме того, условие 3^0 & 5^0 вытекает из слабой секвенциальной полноты пространства X'_β.

Замечание 2. Если предположить, что X секвенциально полно (необходимое условие полурефлексивности), а тогда и (P_n) будет полным, то в теореме 3 требование безусловной простоты (P_n) можно заменить требованием безусловности (P_n). Таким образом, результат Ю.Б.Тумаркина [5]: если секвенциально полное локально выпуклое пространство X с безусловным шаудеровым базисом не полурефлексивно, то либо X содержит подпространство, изоморфное c_o, либо X содержит подпространство Y такое, что Y_η изоморфно ℓ_1, усиливается. А именно, последняя фраза заменяется фразой "либо X_t при любой топологии t такой, что $\sigma\tau \le t \le \eta$, содержит подпространство, изоморфное ℓ_1". (Если X_η содержит подпространство Y, изоморфное ℓ_1, то, очевидно, $Y = Y_\eta$, а значит, Y_η изоморфно ℓ_1).

Если топология $\sigma\tau$ согласована с двойственностью (X, X') то (поскольку полурефлексивное пространство слабо секвенциально полно, а из слабой секвенциальной полноты пространства следует условие I^0 из теоремы 3 (см. замечание I), и полурефлексивность наследуется замкнутыми подпространствами) условие I^0 & 2^0 теоермы 3 также необходимо для полурефлексивности пространства X. Топология $\sigma\tau$ согласована с (X, X'), если, например, выполнено условие (2) (лемма 2), или же пространство X_τ квазибочечно (следствие I теоремы I.7 из [3]). Однако, как мы увидим, при последних предположениях можно получить более сильные критерии полурефлексивности и рефлексивности. Это будет сделано в двух следующих теоремах.

Теорема 4. Пусть X - локально выпуклое пространство с полным безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны, и пусть выполнено условие (2). Рассмотрим условия I^0, 3^0, 4^0 из теоремы 3 и следующие условия:

2^0 Пространство X_τ не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных пространству ℓ_1.

5^0 Для любого элемента $x \in X$ ряд $\sum P_n x$ сходится сильно (т.е. в $\beta(X, X')$-топологии).

6^0 Пространство X' полурефлексивно.

6^{00} Пространство X_τ рефлексивно.

Тогда имеют место импликации $6^0 \Longleftrightarrow 1^0$ & 2^0 и 2^0 & $4^0 \Rightarrow$ $\Longrightarrow 6^0$, а если все $(P_n X)_\tau$ рефлексивны[5], то $6^0 \Longleftrightarrow 1^0$ & 3^0 и $6^{00} \Longleftrightarrow 6^0$ & $5^0 \Longleftrightarrow 2^0$ & 4^0 & $5^0 \Longleftrightarrow 3^0$ & 4^0 & 5^0.

Доказательство. В силу замечаний, сделанных перед формулировкой теоремы, $6^0 \Longrightarrow 1^0$ & 2^0, а (см. теорему 3) 1^0 & & $2^0 \Longrightarrow 6^0$.

Покажем, что из условия (2) следует условие 5^0 теоремы 3. Рассмотрим $\beta(X', X)$-последовательность Коши $s = (\sum_{1 \le k \le n} f_k)$, $f_k = P'_k f_k$. Она сходится к некоторому элементу $f \in X^*$ равномерно на каждом множестве из (X). Если выполнено условие (2), то s, будучи $\sigma(X', X)$-последовательностью Коши, $\sigma(X', X)$-сходится к некоторому функционалу $g \in X'$. Значит, $f = g$, и s сходится в X'_β.

Теперь, согласно теореме 3, имеем 2^0 & $4^0 \Longrightarrow 6^0$, 1^0& & $3^0 \Longrightarrow 6^0$ и 3^0 & $4^0 \Longrightarrow 6^0$.

Предположим, что все $(P_n X)_\tau$ рефлексивны. Тогда и все $(P_n X)'_\beta$ рефлексивны и, значит, слабо секвенциально полны. Следовательно, подпространства $P'_n X'$ в X'_β, которые естественно изоморфны пространствам $(P_n X)'_\beta$, также слабо секвенциально полны. Если X полурефлексивно, а значит (теорема Кука), (P_n) натягивающее, то (теорема 3 из [4]) шаудерово разложение (P'_n) для X'_β ограниченно полно. Кроме того, как мы видели в доказательстве теоремы 3, разложение (P'_n) безусловно простое. Поэтому (следствие теоремы I) пространство X'_β не содержит подпространств, изоморфных c_0. Значит, имеет место утверждение $6^0 \Longrightarrow 3^0$ и тем самым эквива-

---

[5] Рефлексивность $(P_n X)_\tau$ следует из рефлексивности X_τ, так как свойство рефлексивности наследуется топологически дополняемыми подпространствами, а топология Макки топологически дополняемого подпространства в X есть топология, индуцированная $\tau(X, X')$.

лентность $6^0 \Longleftrightarrow I^0$ & 3^0 доказана.

Покажем, что $6^{00} \Longleftrightarrow 6^0$ & 5^0. Если X_τ рефлексивно, то очевидно, X полурефлексивно (т.е. $6^{00} \Longrightarrow 6^0$), и, следовательно (теорема Кука), (P_n) ограниченно полно. Поэтому (лемма 2.3 из [3]) все ряды вида $\sum P_n x$ сходятся в X_τ, и значит (топологии $\tau(X, X')$ и $\beta(X, X')$ совпадают в силу рефлексивности X_τ), в топологии $\beta(X, X')$. (Итак, $6^{00} \Longrightarrow 5^0$.) Для установления импликации 6^0 & $5^0 \Longrightarrow 6^{00}$ достаточно заметить, что условие 5^0 влечет за собой бочечность пространства X_τ. Действительно, поскольку выполнено условие (2), а пространства $(P_n X)_\tau$ рефлексивны и, следовательно, бочечны, то остается применить следствие после теоремы 3.2 из [7].

Импликация $6^{00} \Longrightarrow 4^0$ вытекает из того, что сильное сопряженное к рефлексивному пространству рефлексивно и, следовательно, не содержит подпространств, изоморфных l_1. Кроме того, как мы видели, $6^{00} \Longleftrightarrow 6^0$ & 5^0, а $6^0 \Longrightarrow 2^0$ & 3^0 и, с другой стороны, 2^0 & $4^0 \Longrightarrow 6^0$, а также 3^0 & $4^0 \Longrightarrow 6^0$. Тем самым все требуемые импликации установлены.

Теорема доказана.

Замечание. В теореме 4 требование безусловной простоты (P_n) можно заменить требованием безусловности (P_n) (лемма I).

Теорема 5. Пусть X - локально выпуклое пространство с полным безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны, и пусть пространство X_τ является квазибочечным. Тогда имеют место импликации $6^{00} \Longleftrightarrow I^0$ & $2^0 \Longleftrightarrow 3^0$ & $4^0 \Longleftrightarrow I^0$ & $3^0 \Longleftrightarrow 2^0$ & 4^0, где условия[6] I^0 - 4^0 и 6^{00} те же, что и в теореме 4.

Доказательство. Пусть выполнено условие 6^{00}. Тогда пространство X_τ бочечно, и поэтому условие (2) выполнено. Кроме того, все $(P_n X)_\tau$ рефлексивны[5]. Поэтому, согласно теореме 4, условия I^0 - 4^0 выполнены.

Покажем, что из квазибочечности X_τ следует условие 5^0 теоремы 3. Рассмотрим произвольную $\beta(X', X)$-последовательность Коши $\mathfrak{s}$. Она сходится к некоторому элементу $f \in X^*$ равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{B}(X)$. Но поскольку X_τ

---

[6] Так как X_τ квазибочечно, то (см. следствие I теоремы I.7 из [3]) в условии I^0 требование безусловности (P_n) автоматически выполнено.

квазибочечно, $\beta(X',X)$-ограниченные множества относительно компактны в X'_σ. Поэтому s относительно компактна в X'_σ и, будучи $\sigma(X',X)$-последовательностью Коши, $\sigma(X',X)$-сходится к некоторому функционалу $g \in X'$. Значит, $f = g$ и s сходится в X'_β.

Теперь, так как $\sigma \leq \varepsilon \leq \tau$ (см. рассуждения перед формулировкой теоремы 4), из теоремы 3 вытекает, что каждое из условий 1^0 & 2^0, 3^0 & 4^0, 1^0 & 3^0, 2^0 & 4^0 достаточно для полурефлексивности пространства X. А поскольку X_τ квазибочечно, полурефлексивность X равносильна условию 6^{00}.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 5 справедлива для безусловного шаудерова разложения, если X_τ бочечно.

Замечания к теоремам 4 и 5. (а) В замечании I к теореме 3 были приведены условия, равносильные условию 1^0. Кроме того, условие 1^0 можно заменить слабой секвенциальной полнотой пространства X, условие 2^0 – отсутствием в X_τ подпространств, изоморфных пространству ℓ_1, условие 3^0 – слабой секвенциальной полнотой пространства X'_β, а также отсутствием в X'_β подпространств, изоморфных пространству c_0, а условие 4^0 – отсутствием в X'_β подпространств, изоморфных пространству ℓ_1.

(b) Аналогичные критерии рефлексивности известны лишь для банахова пространства с безусловным базисом (см., например, [1], стр. 130). Для полного бочечного пространства с безусловным шаудеровым базисом эквивалентность[7] $6^{00} \Longrightarrow 1^0$ & 2^0 доказана Н.Калтоном [8]. Из результата Калтона вытекают критерии рефлексивности, установленные Л.Вейлем [9].

Литература

1. Д э й М. М., Нормированные линейные пространства. Москва, 1961.

2. О я Э., Безусловные шаудеровские разложения и рефлексивность бочечных пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 122-134.

3. О я Э., Безусловные шаудеровы разложения в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 90-116.

4. О я Э., О двойственности ограниченно полных и натягивающих шаудеровых разложений в локально выпуклых простран-

ствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 117-127.
5. Т у м а р к и н Ю. Б., О локально выпуклых пространствах с базисом. Докл. АН СССР, 1970, 195, № 6, 1278-1281.
6. C o o k, T. A., Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann., 1969, 182, № 3, 232-235.
7. K a l t o n, N. J., Schauder decompositions in locally convex spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, 68, № 2, 377-392.
8. K a l t o n, N. J., Unconditional and normalised bases. Studia math. (PRL), 1970, 38, № 1-5, 243-253.
9. W e i l l, L. J., Unconditional and shrinking bases in locally convex spaces. Pacific J. Math., 1969, 29, № 2, 467-483.

Поступило
II VI 1975

TINGIMATUD SCHAUDERI LAHUTUSED JA POOLREFLEKSIIVSED RUUMID

E. Oja

R e s ü m e e

Kasutades $\mathcal{E}$-topoloogiaid [3], üldistatakse jadaliselt täieliku tünniruumi tingimatu Schauderi lahutuse tõkestatult täielikkuse ja pinguloleku kriteeriumid [8,2] suvalise lokaalselt kumera ruumi juhule (teoreemid 1 ja 2). Saadud tulemuste abil leitakse rida poolrefleksiivsuse ja refleksiivsuse tingimusi (teoreemid 3 - 5).

UNCONDITIONAL SCHAUDER DECOMPOSITIONS AND SEMIREFLEXIVE SPACES

E. Oja

S u m m a r y

Let (P_n) be a Schauder decomposition for a locally convex (Hausdorff) space $X = X_T$. If $\{\mathcal{U}_\nu' f : \nu \in \Sigma\}$, where $\mathcal{U}_\nu = \sum_{n\in\nu} P_n$ and Σ denotes the collection of finite subsets of the natural numbers, is $\beta(X', X)$-(i.e. strongly) for each $f \in X'$ then (P_n) is called unconditionally simple. Let a topology t on X, $\sigma \leq t \leq \eta$ (where $\sigma = \sigma(X, X')$ is the weak topology and η is the strongest locally convex topology for X which defines the same bounded sets as T), be generated by a family of seminorms $\{p\}$ and suppose $\{\mathcal{U}_\nu x : \nu \in \Sigma\}$ is bounded for each $x \in X$ (e.g., suppose

(P_n) is unconditional or unconditionally simple). Then $t\tau$ denotes the topology on X generated by the family of seminorms $\{q\}$ where $q(x) = \sup\{p(x), p(\mathcal{U}_\nu x) : \nu \in \sum\}$ for each p. If X is barrelled then $T\tau = T$. The following improvements of Theorems 2.1, 2.2 of [8] and Theorems 1,2 of [2] are established.

<u>Corollary to Theorem 1</u>. If (P_n) is unconditionally simple and each P_nX is weakly sequentially complete, the following are equivalent:

1' (P_n) is boundedly complete.

2' (P_n) is complete and X contains no subspace isomorphic to c_o.

3' (P_n) is complete and unconditional and X contains no subspace isomorphic to c_o and complemented in $X_{T\tau}$.

<u>Theorem 2</u>. (b) Suppose (P_n) is unconditionally simple and complete in a locally convex topology T_1 on X, $\sigma \leq T_1 \leq \eta$ (i.e., each P_n is T_1-continuous and for each T_1-Cauchy sequence $(\sum_{1 \leq k \leq n} x_k)$, $x_k \in P_k X$, the series $\sum x_k$ is T_1-convergent). If (P_n) is not shrinking then for every locally convex topology t on X, $\sigma\tau \leq t \leq \eta\tau$, the space X_t contains a complemented subspace isomorphic to ℓ_1.

<u>Corollary to Theorem 2</u>. If (P_n) is unconditional and complete, each $(P_nX)'$ is strongly separable and

(P_n') is a complete Schauder decomposition for $(X', \sigma(X', X))$ (2) then the following are equivalent:

1" (P_n) is shrinking.

2" $X_{T\tau}$ contains no subspace isomorphic to ℓ_1.

3" There is a locally convex topology t on X, $\sigma\tau \leq t \leq \eta\tau$, such that X_t contains no complemented subspace isomorphic to ℓ_1.

Consider the following conditions:

1° = 3'.

2° X_τ, where $\tau = \tau(X, X')$ is the Mackey topology, contains no complemented subspace isomorphic to ℓ_1.

3° $(X', \beta(X', X))$ contains no complemented subspace isomorphic to c_o.

4° $(X', \beta(X', X))$ contains no complemented subspace isomorphic to ℓ_1.

5° For each $x \in X$ the series $\sum P_n x$ converges in the strong topology $\beta(X, X')$.

6• X is semireflexive.

6•• X_τ is reflexive.

The results above yield the following theorems, in which (P_n) will be complete and each $P_n X$ will be semireflexive.

Theorem 4. Let (P_n) be unconditionally simple (or unconditional) and suppose (2) is satisfied. Then we have the implications 6° $\Longrightarrow$ 1° & 2° and 2° & 4° $\Longrightarrow$ 6°. If each $(P_n X)_\tau$ is reflexive then 6• $\Longrightarrow$ 1° & 3° and 6•• $\Longrightarrow$ 6° & 5° $\Longrightarrow$ 2° & & 4° & 5° $\Longleftrightarrow$ 3° & 4° & 5°.

Theorem 5. If (P_n) is unconditionally simple and X_τ is quasibarrelled (or (P_n) is unconditional and X_τ is barrelled) then 6•• $\Longleftrightarrow$ 1° & 2° $\Longleftrightarrow$ 3° & 4° $\Longleftrightarrow$ 1° & 3° $\Longleftrightarrow$ 2° & 4°.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С.КАРЛИНА НА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА С БЕЗУСЛОВНЫМ ШАУДЕРОВЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ

Э.Оя

Кафедра математического анализа

Пусть X - банахово пространство с безусловным базисом[1] (e_n) и пусть (f_n) - сопряженная система линейных функционалов. В 1948 году С.Карлин [7] выяснил, что (f_n) будет базисом для X'_β (т.е. базис (e_n) натягивающий) тогда и только тогда, когда X'_β сепарабельно или же X'_β слабо секвенциально полно. Он также установил, что X рефлексивно тогда, когда сильное второе сопряженное $X''=(X'_\beta)'_\beta$ к X сепарабельно. Насколько нам известно, условие рефлексивности не перенесено на более общие пространства. Это обусловлено, по-видимому, отсутствием общих утверждений двойственности ограниченной полноты и натягиваемости базиса и его сопряженного базиса[2]. Критерии натягиваемости получили развитие в статье Л.Вейля [8] в 1969 году. Вейль рассматривал безусловные шаудеровы базисы в бочечном пространстве и перенес первый критерий натягиваемости на полные бочечные пространства, второй - на бочечные пространства X такие, что X'_β бочечно[3] (т.е. на правильные бочечные пространства). В настоящей статье оба критерии натягиваемости распространяются на локально выпуклые пространства X с безусловным шаудеровым разложением (P_n) удовлетворяющим условию

$$\text{разложение } (P'_n) \text{ для } X'_\sigma \text{ полно}^4. \qquad (1)$$

---

[1] По поводу терминологии и обозначений см. [4], § 1.

[2] По поводу утверждений двойственности см. [3].

[3] Даже не все пространства Фреше удовлетворяют этому условию.

[4] Условие (1) выполняется, когда X_τ бочечно и, в частности, когда X бочечно.

Показывается также, что в этой более общей ситуации сепарабельность X'' влечет за собой полурефлексивность X.

Начнем с короткого замечания. Согласно лемме I из [4], условие (I) гарантирует безусловную простоту безусловного шаудерова разложения. Поэтому в нижеследующих теоремах требование безусловной простоты разложения можно заменить требованием его безусловности.

Теорема I. Пусть (P_n) - безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X такое, что все $(P_n X)'_\beta$ сепарабельны. Если выполнено условие (I), то натягиваемость разложения (P_n) эквивалентна сепарабельности пространства X'_β.

Доказательство. Необходимость. Так как линейная оболочка множества $\cup P_n' X'$ всюду плотна в X'_β, а все $P_n' X' \subset X'_\beta$, будучи естественно изоморфными пространствам $(P_n X)'_\beta$ (элемент вида $P_n' f$, $f \in X'$, отождествляется с сужением f на $P_n X$), сепарабельны, то и X'_β сепарабельно.

Достаточность. Допустим, что (P_n) не натягивающее. Тогда по лемме 2.6 из [2] существуют элементы $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что их линейная оболочка, рассматриваемое как подпространство в $X_{\sigma\xi}$, изоморфна множеству всех финитных числовых последовательностей, наделенному ℓ_1-нормой. Следовательно, ее сильное сопряженное не сепарабельно. С другой стороны, согласно лемме 2 из [4], $(X_{\sigma\xi})' = X'$, так что, поскольку X'_β сепарабельно, сильное сопряженное к любому подпространству пространства $X_{\sigma\xi}$ сепарабельно. Мы пришли к противоречию.

Теорема 2. Пусть (P_n) - безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X такое, что все $(P_n X)'_\beta$ слабо секвенциально полны. Если выполнено условие (I), то натягиваемость разложения (P_n) эквивалентна слабой секвенциальной полноте пространства

Доказательство. Так как (P_n) безусловно простое, то по предложению 2.5 из [2] последовательность проекторов (P_n') представляет собой безусловно простое шаудерово разложение пространства

$$H = \{ f \in X' : f = \sum P_n' f \text{ в } X'_\beta \}$$

наделенного топологией, индуцированной $\beta(X', X)$, причем множество проекторов $\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_\nu' : \nu \in \Sigma \}$ равностепенно непрерывно в X'_β. Поэтому в силу 4^0 из предложения I.3 статьи

[2] имеем $\beta = \beta\varepsilon$, где через β обозначена топология пространства H. Кроме того, H замкнуто в X'_β. В самом деле, из равностепенной непрерывности множества $\mathcal{U}$ следует, что если f принадлежит замыканию H, то $(\sum_{1\le k\le n} P'_k f)$ – последовательность Коши в X'_β, а значит, она сходится к некоторому элементу $g \in X^*$ равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{B}(X)$. С другой стороны, $\sum P'_k f = f$ в X'_σ. Следовательно, $f = g$, и $\sum P'_k f = f$ и X'_β, т.е. $f \in H$.

Необходимость. Поскольку (P_n) натягивающее, разложение (P'_n) для $H = X'_\beta$ ограниченно полно (теорема 3 из [3]). Кроме того, подпространства $P'_n X'$ пространства X'_β, которые естественно изоморфны пространствам $(P_n X)'_\beta$, слабо секвенциально полны. Значит, по следствию I теоремы 2.4 из [2] (импликация $1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$) пространство X', наделенное $\beta\varepsilon$-топологией, слабо секвенциально полно. А так как $\beta\varepsilon = \beta(X', X)$, то и X'_β слабо секвенциально полно.

Достаточность. Если X'_β слабо секвенциально полно, то и H, будучи замкнутым в X'_β, слабо секвенциально полно. Значит, по следствию I теоремы 2.4 из [2] (импликация $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$) разложение (P'_n) для H ограниченно полно и поэтому, согласно предложению 5.5 из [6], разложение (P_n) натягивающее.

Замечание I. Как это видно из доказательства теоремы 2, для того, чтобы из слабой секвенциальной полноты X'_β вывести натягиваемость (P_n), достаточно лишь предполагать, что (P_n) безусловно простое.

Замечание 2. Предположение, что пространства $(P_n X)'_\beta$ сепарабельны в теореме I или слабо секвенциально полны в теореме 2, нельзя отбросить. Так, например (см. предложение I из [I]), банахово пространство[5] $c_0(\ell_1)$ имеет натягивающее безусловное шаудерово разложение (в этом примере все пространства $(P_n X)'_\beta$ изоморфны пространству m), но его сильное сопряженное, будучи изоморфным пространству $\ell_1(m)$, не является ни сепарабельным, ни слабо секвенциально полным.

Из теорем I и 2 вытекает

---

[5] Множество $S(X) = \{(x_n) : x_n \in X, \ (\|x_n\|) \in S\}$ (где $S = c_0$ или $S = \ell_p$, $p \ge 1$, и X – банахово пространство), наделенное нормой $\|(x_n)\| = \|(\|x_n\|)\|_S$, является банаховым пространством с безусловным шаудеровым разложением (P_k), где $P_k(x_n) = (\delta_{kn} x_n)$ ($\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kn} = 0$ при $k \ne n$).

Следствие. Если безусловный шаудеров базис локально выпуклого пространства X удовлетворяет условию (I), то его натягиваемость эквивалентна сепарабельности пространства X'_β, а также эквивалентна слабой секвенциальной полноте пространства X'_β.

Теорема 3. Пусть X – локально выпуклое пространство с полным безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны, и пусть выполнено условие (I). Если второе сопряженное X'' к X сепарабельно, то X полурефлексивно.

Доказательство. Поскольку полурефлексивность локально выпуклого пространства X с шаудеровым разложением (P_n) таким, что все $P_n X$ полурефлексивны, равносильна тому, что (P_n) ограниченно полное и натягивающее (теорема Т.Кука [5]), достаточно проверить натягиваемость и ограниченную полноту разложения (P_n).

Разложение (P_n) натягивающее, так как в противном случае (см. теорему 2, (b), из [4]) $X_{\sigma\varepsilon}$ содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное ℓ_1, а значит, пространство X'_β, которое (в силу леммы 2 из [4]) совпадает с $(X_{\sigma\varepsilon})'_\beta$, содержит подпространство, изоморфное m. Но это невозможно, поскольку X'' сепарабельно, а m' нет.

Так как (P_n) натягивающее, то в силу теоремы 3 из [3] разложение (P'_n) для X'_β (ограниченно) полно. Как мы видели в доказательстве теоремы 2, (P'_n) является безусловно простым и $\beta = \beta\varepsilon$, где $\beta = \beta(X', X)$. Кроме того, поскольку X'' сепарабельно, то X'_β не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1. Следовательно, по теореме 2, (b), из [4] разложение (P'_n) натягивающее, а значит, по теореме 2 из [3] разложение (P_n) ограниченно полно.

Применяя теорему Кука, мы получим полурефлексивность пространства X.

Замечание 3. Предположения, что пространства $P_n X$ полурефлексивны, нельзя отбросить в теореме 3. Например, так как пространство Джеймса J не рефлексивно, а J'' сепарабельно, то, согласно предложению I из [I], банахово пространство[5] $\ell_2(J)$ с безусловным шаудеровым разложением нерефлексивно, а его второе сопряженное сепарабельно.

Литература

1. О я Э., Безусловные шаудеровские разложения и рефлексивность бочечных пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 122-134.
2. О я Э., Безусловные шаудеровы разложения в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 90-116.
3. О я Э., О двойственности ограниченно полных и натягивающих шаудеровых разложений в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 117-127.
4. О я Э., Безусловные шаудеровы разложения и полурефлексивные пространства. Настоящий сборник, стр. 82-97.
5. C o o k, T. A., Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann., 1969, 182, № 3, 232-235.
6. K a l t o n, N. J., Schauder decompositions in locally convex spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, 68, № 2, 377-392.
7. K a r l i n, S., Bases in Banach spaces. Duke Math.J., 1948, 15, 971-985.
8. W e i l l, L. J., Unconditional and shrinking bases in locally convex spaces. Pacific J. Math., 1969, 29, № 2, 467-483.

Поступило
11 VI 1975

MÕNEDE S.KARLINI TULEMUSTE ÜLDISTAMINE LOKAALSELT KUMERA RUUMI TINGIMATUTELE SCHAUDERI LAHUTUSTELE

E. Oja

R e s ü m e e

S.Karlin [7] näitas, et Banachi ruumi X tingimatu baas on pingul parajasti siis, kui ruumi X tugev kaasruum X'_β on separaabel või nõrgalt jadaliselt täielik. L.J. Weill [8] üldistas esimese kriteeriumi täielikele tünniruumidele, teise - tünniruumidele X, mille kaasruum X'_β on tünniruum. Käesolevas artiklis kantakse mõlemad kriteeriumid üle lokaalselt kumerasse ruumi X, mille tingimatult lihtne (või tingimatu) Schauderi lahutus rahuldab tingimust (1) (teoreemid 1 ja 2). Samadel eeldustel tõestatakse ka järgmine Karlini tulemuse analoog: tugeva teise kaasruumi $(X'_\beta)'_\beta$ separaablusest järeldub ruumi X poolrefleksiivsus (teoreem 3).

A GENERALIZATION OF SOME RESULTS OF S.KARLIN TO LOCALLY CONVEX SPACES WITH UNCONDITIONAL SCHAUDER DECOMPOSITION

E. Oja

S u m m a r y

Let X be a locally convex (Hausdorff) space and let X'_β denote the topological dual X' with the strong topology $\beta(X', X)$. Let (P_n) be an unconditionally simple (or unconditional) Schauder decomposition for X and suppose (P_n') is a complete Schauder decomposition for $(X', \sigma(X', X))$. The following generalizations of results of S.Karlin [7] concerning unconditional bases in Banach spaces are obtained:

<u>Theorem 1</u>. If each $(P_n X)'_\beta$ is separable then (P_n) is shrinking if and only if X'_β is separable.

<u>Theorem 2</u>. If each $(P_n X)'_\beta$ is weakly sequentially complete, then (P_n) is shrinking if and only if X'_β is weakly sequentially complete.

<u>Theorem 3</u>. Let (P_n) be complete and each $P_n X$ be semireflexive; if $(X'_\beta)_\beta$ is separable, X is semireflexive.

In the unconditional Schauder basis case (i.e. each $P_n X$ is one-dimensional) Theorem 1 was proved by L.J.Weill [8] for complete barrelled spaces, and Theorem 2 - for barrelled spaces X having a barrelled dual X'_β.

СУММИРУЕМОСТЬ ФОРМАЛЬНОГО УМНОЖЕНИЯ РЯДОВ НЕПРЕРЫВНЫМ МЕТОДОМ РИССА

Н.Веске

Кафедра математического анализа

1. Пусть даны ряды

$$\sum u_n \tag{1}$$

и

$$\sum v_n \tag{2}$$

Составим по правилу Дирихле ряд-произведение

$$\sum w_k , \tag{3}$$

где

$$w_k = \sum_{\lambda_n+\mu_l=\nu_k} u_n v_l ,$$

$0<\lambda_n \uparrow \infty$ и $0<\mu_l \uparrow \infty$, а члены последовательности $\{\nu_k\}=\{\lambda_n+\mu_l\}$ расположены в восрастающем порядке, причем все между собой равные суммы $\lambda_n+\mu_l$ считаются за одно ν_k.

Продолжаем исследования вопроса, начатого в статьях [1, 2]. Подчиняем ряд (1) некоторому ограничению и оставим произвольным ряд (2). Ищем условия для ряда (2), чтобы ряды (1) и (3) были одновременно сходящимися или суммируемыми.

Обозначим

$$U_\lambda(t)=\sum_{\lambda_n\le t} u_n , \qquad V_\mu(t)=\sum_{\mu_l\le t} v_l ,$$

$$W_\nu(t)=\sum_{\nu_k\le t} w_k=\sum_{\nu_k\le t}\sum_{\lambda_n+\mu_l=\nu_k} u_n v_l=\sum_{\lambda_n\le t} u_n \sum_{\mu_l\le t-\lambda_n} v_l .$$

Напомним определение непрерывного метода Рисса (R,μ,β) с $\beta>0$ (см. [5], п. 1.1). Пусть

$$V_\mu^\beta(t)=\sum_{\mu_l\le t}(t-\mu_l)^\beta v_l=\int_0^t (t-x)^\beta dV_\mu(x) ,$$

а

$$V_\mu^0(t)=V_\mu(t)$$

и

$$V_\mu^\beta(t)=0, \quad \text{если} \quad t<\lambda_1 \quad \text{и} \quad \beta\ge 0.$$

Ряд (2) называется (R,μ,β)-суммируемым к числу V, если (R,μ,β)-средние

$$V_\mu^\beta(t)/t^\beta$$

имеют при $t\to\infty$ конечный предел V.

При последовательности

$$\{u_n\} \tag{4}$$

обозначим аналогично

$$u_\lambda(t)=\sum_{\lambda_n\le t}\bar\Delta u_n=\int_0^t du_\lambda(x),$$

где $u_0=0$ и при[I] $\alpha>0$

$$U_\lambda^{*\alpha}(t)=\sum_{\lambda_n\le t}(t-\lambda_n)^\alpha\bar\Delta u_n=$$

$$=\int_0^t(t-x)^\alpha du_\lambda(x)=\alpha\int_0^t(t-x)^{\alpha-1}u_\lambda(x)dx,$$

где $t-\lambda_n=0$ при $\lambda_n\ge t$.

Обозначим $\{\varepsilon_n\}=\{1\}$, тогда

$$U_\lambda(t)=\sum_{\lambda_n\le t}u_n=\sum_{\lambda_n\le t}\varepsilon_n u_n=\sum_{\lambda_n\le t}\varepsilon_n\sum_{\lambda_n\le\lambda_n}\bar\Delta u_n=$$

$$=\int_0^t dU_\lambda(x)=\int_0^t dE_\lambda(x)\int_0^x du_\lambda(y)=$$

$$=\int_0^t u_\lambda(x)\,dE_\lambda(x)$$

и

$$E_\lambda(t)=\sum_{\lambda_n\le t}\varepsilon_n=\int_0^t dE_\lambda(x).$$

Аналогично получаем для ряда (3), что

$$W_\nu^\gamma(t)=\sum_{\nu_k\le t}(t-\nu_k)^\gamma\bar\Delta W_k=$$

$$=\sum_{\nu_k\le t}(t-\nu_k)^\gamma\sum_{\lambda_n+\mu_l=\nu_k}u_n v_l=$$

$$=\sum_{\lambda_n\le t}u_n\sum_{\mu_l\le t-\lambda_n}(t-\lambda_n-\mu_l)^\gamma v_l=$$

$$=\sum_{\lambda_n\le t}u_n V_\mu^\gamma(t-\lambda_n)=$$

$$=\int_0^t V_\mu^\gamma(t-x)\,dU_\lambda(x).$$

Если $\gamma=\alpha+\beta$, где α и β – целые числа, $\beta\ge0$ и $\alpha\ge1$, то по формуле (см. [3], стр. 324)

$$\int_a^b(b-x)^n(x-a)^m dx=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}(b-a)^{m+n+1}$$

имеем

[I] Во всей статье $\Delta u_n=u_n-u_{n+1}$, $\bar\Delta u_n=u_n-u_{n-1}$.

$$W_\nu^{\alpha+\beta}(t)=\int_0^t dU_\lambda(x)\int_0^{t-x}(t-x-y)^{\alpha+\beta}dV_\mu(y)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}\int_0^t dU_\lambda(x)\int_0^{t-x}dV_\mu(y)\int_y^{t-x}(t-x-z)^{\alpha-1}(z-y)^\beta dz=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}\int_0^t dU_\lambda(x)\int_0^{t-x}(t-x-z)^{\alpha-1}V_\mu^\beta(z)\,dz=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}\int_0^t V_\mu^\beta(t-z)\,dz\int_0^z(z-x)^{\alpha-1}u_\lambda(x)\,dE_\lambda(x).$$

Аналогично имеем

$$U_\lambda^{\alpha+\beta}(t)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}\int_0^t(t-z)^\beta dz\int_0^z(z-x)^{\alpha-1}u_\lambda(x)\,dE_\lambda(x).$$

2. **Найдем условия для того, чтобы последовательность**

$$A=\{t^{-\beta}W_\nu^\beta(t)-V\,U_\lambda(t)\}=$$

$$=\left\{\int_0^t[t^{-\beta}V_\mu^\beta(t-x)-V]\,u_\lambda(x)\,dE_\lambda(x)\right\} \tag{5}$$

сходилась к нулю.

Нас интересует, каким условиям должны удовлетворять ряд (2) и число V, чтобы преобразование (5) переводило все сходящиеся к нулю последовательности (4) в сходящиеся к нулю последовательности A.

Ответ на этот вопрос дает следующая

Лемма I. Для того, чтобы для каждой ограниченной $u(x)$ из условия

$$u(x)=o(1)$$

следовало

$$T(t)=\int_0^t V(t,x)\,u_\lambda(x)\,dE(x)=o(1), \tag{6}$$

достаточно, чтобы

$$\int_0^t|V(t,x)|\,dE(x)<H$$

и для каждого конечного x

$$\int_0^x|V(t,x)|\,dE(x)<\varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6 (см. [4], стр. 7I) интеграл (6) разбиваем на две части

$$T(t)=\int_0^x V(t,x)\,u(x)\,dE(x)+\int_x^t V(t,x)\,u(x)\,dE(x)=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Выбираем $\mathcal{K}$ так, чтобы $|u(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mathcal{K}}$ при $x \geqslant \mathcal{K}$. Следовательно,

$$|\mathrm{II}| < \frac{\varepsilon}{2\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}}^{t} |\vartheta(t,x)|\, dE(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу предположения леммы с другой стороны $\mathrm{I} \to 0$ при $t \to \infty$. Лемма доказана.

При помощи леммы I выводим, что справедлива

Теорема I. Для того, чтобы последовательность $\mathcal{A}$ сходилась к нулю для всякой сходящейся к нулю последовательности (4) и (R,μ,β)-суммируемого к ϑ ряда (2), достаточно, чтобы выполнилось условие

$$\int_0^t |t^{-\beta}\vartheta_\mu^\beta(t-x) - \vartheta|\, dE_\lambda(x) = O(1). \tag{7}$$

Доказательство. Применяя лемму I к интегралу (5), получаем, что помимо выполнения условия (7) для сходимости к нулю последовательности $\mathcal{A}$ надо, чтобы при конечном $\mathcal{K}$

$$\int_0^{\mathcal{K}} |t^{-\beta}\vartheta_\mu^\beta(t-x) - \vartheta|\, dE_\lambda(x) = o(1).$$

Переписав последнее условие в виде

$$\sum_{\lambda_n \leq \mathcal{K}} |t^{-\beta}\vartheta_\mu^\beta(t-\lambda_n) - \vartheta| = o(1),$$

обнаруживаем, что оно выполнено, если

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\beta}\vartheta_\mu^\beta(t-\lambda_n) = \vartheta,$$

т.е. если ряд (2) является (R,μ,β)-суммируемым к ϑ.

Теорема доказана.

Примечание I. Если последовательность $\mathcal{A}$ сходится к нулю, то последовательность (R,ν,β)-средних ряда (3) и последовательность $\{\vartheta U_\lambda(t)\}$ одновременно сходятся.

Предположим, что последовательность

$$\{u_n/\lambda_n\} \tag{8}$$

сходится к нулю. Тогда имеет место

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность $\mathcal{A}$ сходилась к нулю для всякой сходящейся к нулю последовательности (8) и (R,μ,β)-суммируемого к ϑ ряда (2), достаточно выполнить условие

$$\int_0^t |t^{-\beta}\vartheta_\mu^\beta(t-x) - \vartheta|\, d\Lambda(x) = O(1), \tag{9}$$

где $\Lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} \lambda_n$.

Доказательство. Интеграл (5) можно представить в виде

$$\int_0^t [t^{-\beta} \vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta] \frac{u_\lambda(x)}{x} \, d\Lambda(x).$$

Применяя теперь лемму I к последнему интегралу, получаем следующие достаточные условия для сходимости к нулю последовательности A при сходящейся к нулю последовательности (8):

условие (9) и при конечном K

$$\int_0^K |t^{-\beta} \vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta| \, d\Lambda(x) = o(1).$$

Последнее условие выполнено, если ряд (2) является (R,μ,β)-суммируемым к ϑ.

3. Найдем условия для того, чтобы последовательность

$$B = \{t^{-\beta} W_\nu^\beta (t) - t^{-\beta} \vartheta U_\lambda^\beta (t)\}$$

сходилась к нулю. Справедлива

<u>Теорема 3</u>. Последовательность B сходится к нулю для всякого (R,μ,β)-суммируемого к ϑ ряда (2), если

I) последовательность (4) сходится к нулю и

$$\int_0^t |\vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta (t-x)^\beta| \, dE_\lambda(x) = O(t^\beta), \tag{I0}$$

или

2) последовательность (8) сходится к нулю и

$$\int_0^t |\vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta (t-x)^\beta| \, d\Lambda(x) = O(t^\beta). \tag{II}$$

<u>Доказательство</u>. Члены последовательности B имеют вид

$$t^{-\beta} \int_0^t [\vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta (t-x)^\beta] \, dU_\lambda(x) =$$
$$= t^{-\beta} \int_0^t [\vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta (t-x)^\beta] \, u_\lambda(x) dE_\lambda(x) =$$
$$= t^{-\beta} \int_0^t x^{-1} [\vartheta_\mu^\beta (t-x) - \vartheta (t-x)^\beta] \, u_\lambda(x) d\Lambda(x).$$

Применяя к этим интегралам лемму I, получаем условия, которые даны в теореме 3.

4. Обозначим

$$\bar{U}_\lambda^\beta (t) = \sum_{\lambda_n \le t} (t-\lambda_n)^{\beta-1} \lambda_n u_n =$$
$$= \int_0^t (t-x)^{\beta-1} u_\lambda(x) d\Lambda(x) = \int_0^t (t-x)^{\beta-1} x \, dU_\lambda(x).$$

Тогда для ряда (3) имеем аналогично

$$\bar{W}_\nu^\beta (t) = \sum_{\nu_k \le t} (t-\nu_k)^{\beta-1} \nu_k w_k =$$
$$= \sum_{\mu_l \le t} v_l \sum_{\lambda_n \le t-\mu_l} (t-\lambda_n-\mu_l)^{\beta-1} \lambda_n u_n +$$

$$+\sum_{\mu_l\le t}\mu_l v_l \sum_{\lambda_n\le t-\mu_l}(t-\lambda_n-\mu_l)^{\beta-1}u_n=$$

$$=\int_0^t d\vartheta_\mu(x)\int_0^{t-x}(t-x-z)^{\beta-1}u_\lambda(z)\,d\Lambda(z)+$$

$$+\int_0^t x\,d\vartheta_\mu(x)\int_0^{t-x}(t-x-z)^{\beta-1}u_\lambda(z)\,dE_\lambda(z)=$$

$$=\int_0^t \vartheta_\mu^{\beta-1}(t-z)u_\lambda(z)\,d\Lambda(z)+$$

$$+\int_0^t \bar{\vartheta}_\mu^{\beta}(t-z)\,u_\lambda(z)\,dE_\lambda(z).$$

Найдем достаточные условия для того, чтобы последовательность

$$C=\{t^{-\beta}\bar{W}_\nu^{\beta}(t)-t^{-\beta}\vartheta\bar{U}_\lambda^{\beta}(t)\}$$

сходилась к нулю. При помощи леммы I выводим, что справедлива

Теорема 4. Последовательность C сходится к нулю для всякого $(R,\mu,\beta-1)$-ограниченного со значением ϑ ряда (2) и

$$\bar{\vartheta}_\mu^{\beta}(t)=o(t^{\beta}), \tag{I2}$$

если

а) последовательность (4) сходится к нулю и

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^t|\vartheta_\mu^{\beta-1}(t-x)-\vartheta(t-x)^{\beta-1}|\,d\Lambda(x)=O(t^{\beta}),\\ &\int_0^t|\bar{\vartheta}_\mu^{\beta}(t-x)|\,dE_\lambda(x)=O(t^{\beta});\end{aligned}\right\} \tag{I3}$$

или

б) последовательность $\{\lambda_n u_n\}$ сходится к нулю и

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^t|\vartheta_\mu^{\beta-1}(t-x)-\vartheta(t-x)^{\beta-1}|\,dE_\lambda(x)=O(t^{\beta}),\\ &\int_0^t x^{-1}|\bar{\vartheta}_\mu^{\beta}(t-x)|\,dE_\lambda(x)=O(t^{\beta}).\end{aligned}\right\} \tag{I4}$$

Доказательство. Так как

$$C=t^{-\beta}\int_0^t[\vartheta_\mu^{\beta-1}(t-x)-\vartheta(t-x)^{\beta-1}]\,u_\lambda(x)\,d\Lambda(x)+$$
$$+t^{-\beta}\int_0^t\bar{\vartheta}_\mu^{\beta}(t-x)\,u_\lambda(x)\,dE_\lambda(x),$$

то, применяя лемму I, получим в случае а) достаточные условия

(I3) и для каждого конечного $\varkappa$ условия

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\lambda_n\le\varkappa}|\vartheta_\mu^{\beta-1}(t-\lambda_n)-\vartheta(t-\lambda_n^{\beta-1})|\lambda_n=o(t^\beta),\\&\sum_{\lambda_n\le\varkappa}|\bar{\vartheta}_\mu^\beta(t-\lambda_n)|=o(t^\beta);\end{aligned}\right\}\qquad(I5)$$

или в случае б) достаточные условия (I4) и для каждого конечного $\varkappa$ условия

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\lambda_n\le\varkappa}|\vartheta_\mu^{\beta-1}(t-\lambda_n)-\vartheta(t-\lambda_n)^{\beta-1}|=o(t^\beta),\\&\sum_{\lambda_n\le\varkappa}|\bar{\vartheta}_\mu^\beta(t-\lambda_n)|\lambda_n^{-1}=o(t^\beta).\end{aligned}\right\}\qquad(I6)$$

Условия (I5) и (I6) выполнены, если ряд (2) является $(R,\mu,\beta-1)$-ограниченным со значением ϑ и условие (I2) тоже выполнено. Теорема доказана.

<u>Примечание</u>. Если ряд (2) является $(R,\mu,\beta-1)$-суммируемым к значению ϑ, то условие (I2) выполнено. Это видно из равенства

$$t^{-\beta+1}\vartheta_\mu^{\beta-1}(t)-\vartheta=$$
$$=t^{-\beta}\sum_{\mu_l\le t}(t-\mu_l)^{\beta-1}\mu_l v_l+t^{-\beta}\sum_{\mu_l\le t}(t-\mu_l)^\beta v_l-\vartheta.$$

Литература

I. В е с к е Н., Суммируемость методом Чезаро формального произведения рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 28I, II8-I28.

2. В е с к е Н., Суммируемость формального умножения рядов методом Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I975, 355, I96-203.

3. Х а р д и Г., Курс чистой математики. Москва, I949.

4. Х а р д и Г., Расходящиеся ряды. Москва, I95I.

5. C h a n d r a s e k h a r a n, K., M i n a k s h i s u n d a r a m, S., Typical means. Bombay, 1952.

Поступило
24 XII I975

RIDADE FORMAALSE KORRUTISE SUMMEERUVUS PIDEVA RIESZI MENETLUSEGA

N. Veske

R e s ü m e e

Jätkatakse töödes [1,2] alustatud probleemide uurimist ridade võrdsummeeruvusest. Ridade (1) ja (2) korrutisrida (3) moodustatakse Dirichlet korrutisreegli põhjal. Leitakse piisavad tingimused jadade A, B ja C nulliks koonduvuseks juhul, kui rida (2) on (R, μ, β)-summeeruv arvuks ϑ, jadad (4) või (8) aga koonduvad nulliks.

SUMMIERBARKEIT DES FORMALEN PRODUKTS DER REIHEN NACH VERALLGEMEINERTEM RIESZ-VERFAHREN

N. Veske

Z u s a m m e n f a s s u n g

Im Artikel wird die Summierbarkeit der formalen Produktreihe (3) der Reihen (1) und (2) nach verallgemeinertem Riesz-Verfahren (R, ν, β) im Fall, wenn die Folgen (4) oder (8) Nullfolgen sind, behandelt. Zum Beispiel gilt der folgende Satz:

<u>Satz 3</u>. Wenn 1) die Bedingung (10) erfüllt ist und die Folge (4) eine Nullfolge ist, oder 2) die Bedingung (11) erfüllt ist und die Folge (8) eine Nullfolge ist dann ist die Folge B eine Nullfolge bei der gegen ϑ (R, μ, β)-summierbaren Reihe (2).

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

Я. Сикк

Кафедра математического анализа

В настоящей статье показано, что теоремы вложения для тригонометрических рядов, изученные С.Б.Стечкиным [6], П.Л. Ульяновым [9] и М.Ф.Тиманом [7], являются орудием для нахождения мультипликаторов при конструктивных пространствах, изученных автором в [2,3].

Обозначим через A - множество[1] всех $f(x)\in C$, для которых $f^{\sim}(x)=\sum_k (a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ абсолютно сходится, т.е.

$$\sum_k (|a_k|+|b_k|)<\infty.$$

Говорят, что метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность, если $\mathcal{U}(m^\lambda)\subset m^\lambda$. Метод арифметических средних C^1 сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда (см. [I], стр. I48)

$$\lambda_n\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}=O(n). \qquad (I)$$

<u>Теорема I</u>. Пусть метод T сохраняет λ-ограниченность и метод $\mathcal{U}$ сохраняет μ-ограниченность. Пусть выполнено условие

$$\lambda_n^{-1}n^{1/r-1/p}+\Big\{\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{p/r-2}\lambda_k^{-p}\Big\}^{1/p}=O(\mu_n^{-1}). \qquad (2)$$

Тогда при $1<r<p<\infty$ имеет место вложение $L^r_{T\lambda}\subset L^p_{\mathcal{U}\mu}$.

<u>Доказательство</u>. Из одной теоремы Ульянова (см. [9],теорема 6) непосредственно следует, что если выполнено условие (2), тогда имеет место вложение $L^r_\lambda\subset L^p_\mu$. Но так как метод T сохраняет λ-ограниченность и метод $\mathcal{U}$ сохраняет μ-ограниченность, то при $1<r<p<\infty$ имеют место равенства $L^r_\lambda=L^r_{T\lambda}$ и $L^p_\mu=L^p_{\mathcal{U}\mu}$ (см. [3], предложение I).

---

[1] В настоящей статье сохраняются все обозначения и определения статей [2 и 3].

Следовательно, имеет место вложение $L^{r}_{T\lambda} \subset L^{p}_{\mathcal{U}\mu}$. Теорема доказана.

Предложение I. Пусть λ, μ и η - скорости и метод A удовлетворяет условию $a_{n0} = 1$. Кроме того, пусть для λ и μ удовлетворено условие (2), метод T сохраняет λ-ограниченность и метод $\mathcal{U}$ сохраняет μ-ограниченность. Если

а) $\tau_k \in (A^{r}_{0}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (L^{r}_{A\eta}, L^{p}_{\mathcal{U}\mu})$;

б) $\tau_k \in (A, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (L^{r}_{A}, L^{p}_{\mathcal{U}\mu})$.

Доказательство вытекает из лемм I и IA статьи [3] и из теоремы I.

Следствие I.I. Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\mu = \{n^{\alpha}\}$, $\mu^{1} = \{n^{k+\alpha}\}$ при $k = 1, 2, \ldots$, $\eta = \{n^{\beta}\}$ и $\eta^{1} = \{n^{j+\beta}\}$ при $j = 1, 2, \ldots$, а метод T сохраняет λ-ограниченность.

а) Пусть для λ и μ удовлетворено условие (2). Если

1. $\tau_k \in (C^{1\eta}_{0}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (\mathrm{Lip}(\beta, r), \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;

2. $\tau_k \in (C^{1}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (L^{r}, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;

3. $\tau_k \in (Z^{j\eta^{1}}_{0}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (W^{j}\, \mathrm{Lip}(\beta, r), W^{k}\, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$.

б) Пусть для λ и μ^{1} удовлетворено условие (2). Если

4. $\tau_k \in (C^{1\eta}_{0}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (\mathrm{Lip}(\beta, r), W^{k}\, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;

5. $\tau_k \in (C^{1}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (L^{r}, W^{k}\, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;

6. $\tau_k \in (Z^{j+1}_{0}{}^{\eta}, T^{\lambda}_{0})$, то $\tau \in (W^{j}\, \mathrm{Lip}(\beta, r), W^{k}\, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$.

Доказательство. Из леммы I в [5] вытекает, что $\mathrm{Lip}(\alpha, r) = L^{r}_{C^{1}\{n^{\alpha}\}}$ и $W^{j}\, \mathrm{Lip}(\alpha, r) = L^{r}_{Z^{j+1}\{n^{j+\alpha}\}}$, а из леммы 4 из [3] вытекает, что $L^{r}_{C^{1}} = L^{r}$. Используя эти соотношения и предложение I, получаем утверждения следствия I.I.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U}$ - метод, сохраняющий λ-ограниченность и пусть λ удовлетворяет условию

$$\sum_{k} \lambda_k^{-1} k^{p/r - 2} < \infty. \tag{3}$$

Тогда при $1 < r < p < \infty$ имеет место вложение

$$L^{r}_{\mathcal{U}\lambda} = L^{r}_{\lambda} \subset L^{p}, \tag{4}$$

причем, если $\mathcal{U} = C_1$, то вложение (4) имеет место также и при $r = 1$.

Доказательство. Из теоремы А из [7] непосредственно следует, что при выполнении (3) имеет место вложение $L^{r}_{\lambda} \subset L^{p}$ при $1 \leq r < p < \infty$. Так как метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность, то при $r \in (1, \infty)$ имеет место равенство $L^{r}_{\mathcal{U}\lambda} =$

$= L^{r}_{\lambda}$ (см. [3], предложение I). Следовательно, имеет место вложение (4) при $1 < r < p < \infty$. Остается доказать случай $r = 1$.

Так как мы рассматриваем в этом случае только такие λ, которые удовлетворяют условию (I), то по предложению 3 в [3] имеет место равенство $L_{C^1_\lambda} = L_\lambda$. Значит, если $r = 1$ и $\mathcal{U} = C^1$, то из условия (3) следует вложение (4). Теорема полностью доказана.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{U}$ - метод, сохраняющий λ-ограниченность и пусть λ удовлетворяет условию

$$\sum_{n} n^{p(k+1+1/r)-2} \lambda_n^{-p} < \infty. \tag{5}$$

Тогда при $1 < r < p < \infty$ имеет место вложение

$$L^{r}_{\mathcal{U}\lambda} \subset W^{k} L^{p}, \tag{6}$$

причем, если $\mathcal{U} = C^1$, то вложение (6) имеет место также и при $r = 1$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству теоремы I, только в данном случае вместо теоремы A в [7] применяем теорему 8 в [7].

<u>Предложение 2</u>. Пусть λ удовлетворяет условию (3) (соответственно (5)) при $1 < r < p < \infty$, метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность и T удовлетворяет условию

$$\sup_{n} \int_0^{\pi} \left| \tau_{n0}/2 + \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} \cos ku \right| du < \infty. \tag{7}$$

Если $\tau_k \in (T_0, \mathcal{U}^{\lambda}_0)$, то $\tau \in (L^{r}, L^{p})$ (соответственно $\tau \in (L^{r}, W^{k} L^{p})$).

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнены условия предложения 2. Тогда в силу теоремы 2 (соответственно теоремы 3) имеет место вложение (4) (соответственно (6)). Следовательно, имеет место вложение

$$(L^{r}, L^{r}_{\mathcal{U}\lambda}) \subset (L^{r}, L^{p}) \tag{8}$$

(соответственно,

$$(L^{r}, L^{r}_{\mathcal{U}\lambda}) \subset (L^{r}, W^{k} L^{p}), \tag{9}$$

если λ удовлетворяет условию (5)) для классов мультипликаторов. Для нахождения мультипликаторов класса $(L^{r}, L^{r}_{\mathcal{U}\lambda})$ мы используем методику, которую мы выработали в статье [3]. Используя часть г) леммы IA из [3] получаем, что если $\tau_k \in (T_0, \mathcal{U}^{\lambda}_0)$, то $\tau \in (L^{r}, L^{r}_{\mathcal{U}\lambda})$ из которого в силу

(8) (соответственно (9)) вытекает утверждение предложения.

Предложение 3. Пусть λ удовлетворяет условию (3) (соответственно (5)) при $1<\nu<p<\infty$ и метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность. Если $\varepsilon_k \in (T_0^{\mu}, \mathcal{U}_0^{\lambda})$, то $\varepsilon \in (L^{\nu}_{T\mu}, L^p)$ (соответственно $\varepsilon \in (L^{\nu}_{T\mu}, W^k L^p)$).

Доказательство аналогично доказательству предложения 2, только здесь вместо части г) леммы IA из [3] применяем часть а) леммы IA из [3].

Следствие 3.I. Пусть λ удовлетворяет условию (3) (соответственно (5)) при $1<\nu<p<\infty$ и метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность. Кроме того, пусть $\eta=\{n^{j+\alpha}\}$ и $\mu=\{n^{\alpha}\}$ при $\alpha\in(0,1)$ и $j=1,2,\ldots$.

а) Если $\varepsilon_k \in (Z_0^{\{n^j\}}, \mathcal{U}_0^{\lambda})$, то $\varepsilon \in (W^j L^{\nu}, L^p)$ (соответственно $\varepsilon \in (W^j L^{\nu}, W^k L^p)$).

б) Если $\varepsilon_k \in (C_0^{1\mu}, \mathcal{U}_0^{\lambda})$, то $\varepsilon \in (\mathrm{Lip}(\alpha,\nu), L^p)$ (соответственно $\varepsilon \in (\mathrm{Lip}(\alpha,\nu), W^k L^p)$).

в) Если $\varepsilon_k \in (Z_0^{(j+1)\eta}, \mathcal{U}_0^{\lambda})$, то $\varepsilon \in (W^j \mathrm{Lip}(\alpha,\nu), L^p)$ (соответственно $\varepsilon \in (W^j \mathrm{Lip}(\alpha,\nu), W^k L^p)$).

Доказательство следует из предложения 3 используя в случае а) часть I леммы I в [5], а в случае б) и в) часть 8 леммы I в [5], по которой $\mathrm{Lip}(\alpha,\nu)=L^{\nu}_{C^1\mu}$ и $W^j \mathrm{Lip}(\alpha,\nu)= =L^{\nu}_{Z^{(j+1)\eta}}$.

Примечание I. Если $\mathcal{U}=C^1$ и λ удовлетворяет кроме условия (3) (соответственно 4) еще и условию (I), то утверждения предложений 2 и 3, а также следствия 3.I имеют место и в случае $\nu=1$ (см. теоремы 2 и 3).

Теорема 4. Пусть скорость λ удовлетворяет условию

$$\sum \lambda_k^{-1} k^{-1/2} < \infty \tag{I0}$$

и метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность, тогда имеет место вложение

$$C_{\mathcal{U}\lambda} \subset A. \tag{II}$$

Доказательство. Из теоремы I из [6] следует, что если выполнено условие (I0), то имеет место вложение $C_{\lambda}\subset A$. Но из определений пространств C_{λ} и $C_{T\lambda}$ непосредственно вытекает, что $C_{T\lambda}\subset C_{\lambda}$, следовательно, имеет место вложение (II). Теорема доказана.

Предложение 4. Пусть λ удовлетворяет условию (I0), метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность и T удовлетворяет условию (7). Если $\varepsilon_k \in (T, \mathcal{U}_0^{\lambda})$, то $\varepsilon \in (C, A)$.

Доказательство. Пусть выполнены требования предложения 4. Тогда в силу теоремы 4 имеет место вложение $C_{\mathcal{U}\lambda} \subset A$, а в силу примера I из [2] имеет место равенство $C = C_T$. Следовательно, имеет место вложение $(C, C_{\mathcal{U}\lambda}) = (C_T, C_{\mathcal{U}\lambda}) \subset (C, A)$ для классов мультипликаторов. Используя части г) леммы IA в [2] получаем, что если $\tau_k \in (T, \mathcal{U}_0^\lambda)$, то $\tau \in (C, C_{\mathcal{U}\lambda})$ следовательно, и $\tau \in (C, A)$. Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть μ удовлетворяет условию (IO) и метод T сохраняет μ-ограниченность. Тогда

а) $(L, L^p_{\mathcal{U}\lambda}) \subset (L^q, A)$ при $1 \le p \le \infty$ и $1/p + 1/q = 1$;

б) $(L, L_{\psi T\lambda}) \subset (L_\varphi, A)$.

Доказательство следует из предложения 4 и следствия 4.2 статьи [5].

Предложение 6. Пусть μ удовлетворяет условию (IO) и метод T сохраняет μ-ограниченность.

I. Если $\mathcal{K}^\circ \in L^q_{T\mu}$, то $\tau \in (L^p, A)$ при $1 \le p \le \infty$ и $1/p + 1/q$;

2. если $\mathcal{K}^\circ \in L_{\psi T\mu}$, то $\tau \in (L_\varphi, A)$;

3. если $\mathcal{K}^\circ \in (L_{\varphi \mathcal{U}\lambda}, T^\mu)$, то $\tau \in (L_{\varphi \mathcal{U}\lambda}, A)$;

4. если $\mathcal{K}^\circ \in (L_{\psi \mathcal{U}\lambda}, T^\mu)$, то $\tau \in (L_{\psi \mathcal{U}\lambda}, A)$;

5. если $\mathcal{K}^\circ \in (L^p_{\mathcal{U}\lambda}, T^\mu)$, то $\tau \in (L^p_{\mathcal{U}\lambda}, A)$.

Доказательство следует из предложения I из [4], из леммы 3 в [5] и из теоремы 4.

Теорема 5. Пусть скорость λ удовлетворяет условию (I) и метод $\mathcal{U}$ сохраняет λ-ограниченность. Пусть для λ и μ выполнено еще условие

$$\Big\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-2} \Big\}^{1/2} = O(\mu_n^{-1}), \tag{I2}$$

в таком случае имеет место вложение $L_{C^1_\lambda} \subset L^2_{\mathcal{U}\mu}$.

Доказательство. Пусть для λ и μ выполнено условие (I2). Тогда в силу теоремы 8 из работы [9] имеет место вложение $L_\lambda \subset L^2_\mu$. Но так как метод $\mathcal{U}$ сохраняет μ-ограниченность, то $L^2_{\mathcal{U}\mu} = L^2_\mu$ (см. [3], предложение I). Аналогично, если λ удовлетворяет условию (I), то в силу предложения 3 из [3] имеет место соотношение $L_{C^1_\lambda} = L_\lambda$. Следовательно, имеет место вложение $L_{C^1_\lambda} \subset L^2_{\mathcal{U}\mu}$. Теорема полностью доказана.

Предложение 7. Пусть λ удовлетворяет условию (I) и $\mathcal{U}$ сохраняет μ-ограниченность. Пусть, кроме того, для λ и μ выполнено условие (I2). Если $\mathcal{K}^\circ \in L_{C^1_\lambda}$, то $\tau \in$ $\in (L, L^2_{\mathcal{U}\mu})$.

Доказательство следует из теоремы 5 и части 2 следствия 4.I в статье [5].

Литература

1. К а н г р о Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск.ун-та, 1971, 277, 136-154.

2. С и к к Я., О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье со скоростью. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 222-235.

3. С и к к Я., О некоторых T^{λ}-конструктивных пространствах и мультипликаторах класса $(X_{T\lambda}, X_{U\mu})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 163-179.

4. С и к к Я., Мультипликаторы, T^{λ}-дополнительные пространства и коэффициенты Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 180-185.

5. С и к к Я., Мультипликаторы классов $(X_{T\lambda}, Y_{U\mu})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 70-74.

6. С т е ч к и н С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами. Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, 643-648.

7. Т и м а н М. Ф., О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций. Изв. высших учебн. заведений. Математика, 1974, № 10, 61-74.

8. Т ы н н о в М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 82-97.

9. У л ь я н о в П. Л., Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках. Матем. сб., 1970, 81, № 2, 104-131.

Поступило
15 I 1976

SISESTUSTEOREEMID JA MULTIPLIKAATORID

J. Sikk

R e s ü m e e

Töös näidatakse, et teatavad S.Steškini [6], P.Uljanovi [9] ja M.Timani [7] poolt vaadeldud sisestusteoreemid on üle viidavad konstruktiivsete ruumide juhule. Kasutades saadud tulemusi ja mõningaid autori varasemaid tulemusi töödes [2,3,4,5], leitakse piisavad tingimusi multiplikaa-

torite jaoks mitmete funktsiooniruumide korral.

IMBEDDING THEOREMS AND MULTIPLIERS

J. Sikk

S u m m a r y

The purpose of this article is to investigate some multipliers. For our investigation we use some imbedding theorems studied by S.Stečkin [6], P.Ul'janov [9] and M.Timan [7] and the method of T^{λ}-constructive spaces introduced by the author [2,3,4,5].

For instance, the following result for multipliers is proved (see corollary 1.1).

Suppose that $\mu = \{n^{\alpha}\}$, $\mu^1 = \{n^{k+\alpha}\}$, $\eta = \{n^{\beta}\}$ and $\eta^1 = \{n^{j+\beta}\}$ for $k, j = 1, 2, \dots$, and $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

a) Let the condition (2) be satisfied for λ and μ:

1. if $\tau_k \in (C_0^{1\eta}, T_0^{\lambda})$, then $\tau \in (\mathrm{Lip}(\beta, \nu), \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;
2. if $\tau_k \in (C^1, T^{\lambda})$, then $\tau \in (L^{\nu}, \mathrm{Lip}(\alpha, p))$;
3. if $\tau_k \in (Z_0^{j\eta_1}, T_0^{\lambda})$, then $\tau \in (W^{i}\,\mathrm{Lip}(\beta, \nu), W^{k}\,\mathrm{Lip}(\alpha, p))$.

b) Let the condition (2) be satisfied for λ and μ:

4. if $\tau_k \in (C_0^{1\eta}, T_0^{\lambda})$, then $\tau \in (\mathrm{Lip}(\beta, \nu), W^{k}\,\mathrm{Lip}(\alpha, p))$;
5. if $\tau_k \in (C^1, T_0^{\lambda})$, then $\tau \in (L^{\nu}, W^{k}\,\mathrm{Lip}(\alpha, p)$;
6. if $\tau_k \in (Z_0^{j\eta^1}, T_0^{\lambda})$, then $\tau \in (W^{j}\,\mathrm{Lip}(\beta, \nu), W^{k}\,\mathrm{Lip}(\alpha, p))$.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

I. Пусть $F=\{f_n\}$ – система измеримых на $e=[a,b]$ функций, для которой при всех $n=0,1,2,\ldots$

$$M_n = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in e} |f_n(t)| < \infty. \tag{I}$$

Положим на e $g_0(t)\equiv 1$ и для $k=2^{\nu_1}+\ldots+2^{\nu_k}$ с $\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_k$

$$g_k(t)=\frac{f_{\nu_1+1}(t)}{M_{\nu_1+1}}\cdots\frac{f_{\nu_k+1}(t)}{M_{\nu_k+1}}. \tag{2}$$

Система $G=\{g_k\}$ называется системой произведений системы F.

В работе [7] мы ввели следующее понятие:

Система F называется p-слабо мультипликативной, если для системы произведений G при некотором $M>0$ имеет место неравенство

$$\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k w_k(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}\le M, \tag{3}$$

где $W=\{w_k\}$ – система Уолша (которая, как известно, является системой произведений системы Радемахера $R=\{r_k\}$), а $a_k=\int_e g_k(t)\,dt$.

В работе [7] мы доказали следующие теоремы.

<u>Теорема А</u>. Если F – p-слабо мультипликативная система с $1<p\le\infty$ и $M_n=O(1)$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k f_k(t) \tag{4}$$

сходится безусловно почти всюду на e для всех $x=\{\xi_k\}\in l^2$.

<u>Теорема В</u>. Если F – p-слабо мультипликативная система с $2\le p\le\infty$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k g_k(t) \tag{5}$$

сходится почти всюду на e для всех $x\in l^2$.

Теорема А является обобщением одной теоремы Алексича из [6], а теорема В обобщает результаты из [5].

Ниже мы обозначаем

$$s_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n} \xi_k f_k(t),$$

$$S_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k(t)$$

и докажем следующие "максимальные теоремы".

Теорема I. Если F – ограниченная p-слабо мультипликативная система с $p=\infty$, то частичные суммы $s_n(x,t)$ ряда (4) для всех $x\in l^2$ при любом порядке следования его членов удовлетворяют для произвольного $0<q<\infty$ условию

$$\int_e [\sup_n |s_n(x,t)|]^q dt<\infty. \tag{6}$$

Теорема 2. Если G – система сходимости по мере в l^2, то для каждого $\varepsilon>0$ найдутся подмножество $T_\varepsilon\subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon>0$ такие, что для всех $x\in l^2$

$$\left\{\int_{T_\varepsilon}[\sup_n |S_n(x,t)|]^2 dt\right\}^{1/2}\le M_\varepsilon \|x\|_2. \tag{7}$$

Окажется, что теорема I вытекает из следующей теоремы

Теорема 3. Если F – p-слабо мультипликативная система с $p=\infty$, то[I] для всех конечных наборов действительных чисел $\{c_k\}$ $(0\le k\le n)$ имеем для некоторого $M>0$ и произвольного $2<q<\infty$

$$\int_e \left|\sum_{k=0}^{N} c_k f_k(t)\right|^q dt\le M\left\{\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right\}^{q/2}. \tag{8}$$

Кроме того, из теоремы 2 мы выводим следующее

Следствие. Если G – система сходимости по мере в l^2, то ряд (2) для всех $x\in l^2$ сходится почти всюду на e.

Это следствие обобщает теорему В и дает в некотором смысле точное условие для сходимости почти всюду ряда (5), так как свойство быть системой сходимости по мере в l^2 является, очевидно, необходимым условием для сходимости ряда (5) почти всюду для всех $x\in l^2$.

2. Для доказательста теоремы 2 нам нужна следующая

Лемма I. Если G – система сходимости по мере в l^2, то для каждого $\varepsilon>0$ найдется измеримое подмножество $T_\varepsilon\subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ такое, что для каждого $h\in L^2_e$

[I] т.е. F является S_∞-системой.

$$\sum \left[\int_{T_\varepsilon} h(t) g_k(t)\, dt\right]^2 < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Так как в [2] (см. стр. 154) доказано, что оператор P из l^2 в пространство всех измеримых, конечных почти всюду на e функций S_e, где

$$Px = \sum_{k=0} \xi_k g_k$$

линеен и ограничен, то в силу теоремы 4 из [3] вытекает, что для любого $N \geq 1$ при некотором $C_\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_{T_\varepsilon} \left[\sum_{k=0}^{N} \xi_k g_k(t)\right]^2 dt \leq C_\varepsilon \sum_{k=0}^{N} \xi_k^2 . \tag{10}$$

Учитывая, что для произвольного $h \in \mathcal{L}^2_e$

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \int_{T_\varepsilon} h(t) g_k(t)\, dt\, \xi_k \right| \leq \int_{T_\varepsilon} \left[\sum_{k=0}^{N} \xi_k g_k(t)\right]^2 dt,$$

мы заключаем при помощи неравенства (10), что ряд (9) сходится. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2 проведем в основном так, как в [5]. В силу леммы 3 из [4] для выполнения условия (7) необходимо и достаточно, чтобы для каждых $\varepsilon > 0$ и $x \in l^2$ нашлись измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \in e$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что равномерно относительно всех разбиений $\mathfrak{M}^{\varepsilon x}_m = \{\mathfrak{M}^{\varepsilon x}_{mn}\}$ множества $T_{\varepsilon x}$ на произвольное число $m+1$ непересекающихся измеримых частей $\mathfrak{M}^{\varepsilon x}_{mn}$ имеет место неравенство

$$A^{\varepsilon x}_m \equiv \left| \int_e h(t) \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) S_n(x,t)\, dt \right| \leq M_{\varepsilon x},$$

где $\chi^{\varepsilon x}_{mn}$ – характеристическая функция множество $\mathfrak{M}^{\varepsilon x}_{mn}$, а h – произвольная функция из $\mathcal{L}^2_e$. Из ортогональности системы Уолша вытекает, что

$$A^{\varepsilon x}_m = \left| \int_0^1 \int_e h(t) \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \sum_{k=0}^{n} \xi_k w_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) g_\nu(t)\, dt\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^1 \left[\sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k w_k(\tau) \right| \right]^2 d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 \left[\int_{T_{\varepsilon x}} |h(t)| \left| \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(t) g_\nu(t) \right| dt \right]^2 d\tau \right\}^{1/2} =$$

$$= A \cdot B_m .$$

По теореме Шьёлина из [9] имеем, что $A < \infty$. Далее, учитывая, что в силу (1) и (2)

$$\sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) g_\nu(t) \geq 0,$$

мы получим

$$B_m^2 = \int_0^1 \Big[\sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) \int_{T_\varepsilon} |h(t)| g_\nu(t)\,dt \Big]^2 d\tau,$$

откуда в силу ортогональности системы Уолша имеем, что

$$B_m^2 = \sum_{\nu=0}^{2^m-1} \Big[\int_{T_\varepsilon} |h(t)| g_\nu(t)\,dt \Big]^2.$$

По лемме I тогда $B_m = O_\varepsilon(1)$, вследствие чего найдется $M_{\varepsilon x} > 0$ такое, что $A_m^{\varepsilon x} \le M_{\varepsilon x}$. Теорема доказана.

4. Доказательство следствия. Имеем, что S_n – непрерывные линейные операторы из l^2 в S_e, для которых на тотальном в l^2 множестве почти всюду существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,t). \tag{II}$$

Далее, из условия (7) вытекает в силу леммы 3 из [4], что почти всюду

$$\sup_n |S_n(x,t)| < \infty$$

для всех $x \in l^2$. Следовательно, по теореме Банаха (см. [I], стр. 36I) мы имеем, что предел (II) существует почти всюду для всех $x \in l^2$. Следствие доказано.

5. Для доказательства теоремы 3 нам нужна

Лемма 2. Если F – p-слабо мультипликативная система с $p=\infty$, то для каждого $1<q<\infty$ найдется постоянная $N_q > 0$ такая, что для всех $f \in \mathcal{L}_e^q$

$$\Big\{ \int_e \Big[\sup_n \Big| \sum_{k=0}^{n} b_k g_k(t) \Big| \Big]^q dt \Big\}^{1/q} \le N_q \|f\|_q,$$

где

$$b_k = \int_0^1 f(t) w_k(t)\,dt.$$

Доказательство проводим дословно так, как в [8] (см. теорему 2), заменяя в последнем слабую мультипликативность системы F на p-слабую мультипликативность системы F при $p=\infty$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{c_k\}$ – произвольный конечный набор действительных чисел. Для выполнения условия (8) достаточно показать, что для произвольного $h \in \mathcal{L}_e^p$ с $\|h\| \le 1$ при любом $1<p<2$ имеет место неравенство

$$A_n \equiv \Big| \int_e h(t) \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) \Big| \le M \Big\{ \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \Big\}^{1/2}. \tag{I2}$$

Но

$$A_n = \left|\int_e h(t)\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} c_k r_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{2^n-1} w_\nu(\tau) g_\nu(t)\, d\tau\, dt\right| =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} c_k r_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{2^n-1} w_\nu(\tau) d_\nu\, d\tau\, |,$$

где

$$d_\nu = \int_e h(t) g_\nu(t)\, dt.$$

Теперь для $q>2$ с $1/p + 1/q = 1$ имеем, что

$$A_n \leq \left\{\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n} c_k r_k(\tau)\right|^q d\tau\right\}^{1/q} \left\{\int_0^1 \left|\sum_{\nu=0}^{2^n-1} w_\nu(\tau) d_\nu\right|^p d\tau\right\}^{1/p} = B_n C_n. \qquad (13)$$

Так как система Радемахера – S_∞–система, то найдется постоянная $N>0$ такая, что

$$B_n \leq N \left\{\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right\}^{1/2}. \qquad (14)$$

С другой стороны

$$C_n = \sup_{\|f\|\leq 1} \left|\int_0^1 f(\tau) \sum_{\nu=0}^{2^n-1} w_\nu(\tau) \int_a^b h(t) g_\nu(t)\, dt\, d\tau\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|f\|\leq 1} \left\{\int_0^1 \left|\sum_{\nu=0}^{2^n-1} g_\nu(t)\, b_\nu\right|^q dt\right\}^{1/q},$$

где $b_\nu = \int_0^1 f(\tau) w_\nu(\tau)\, d\tau$.

В силу леммы 2 мы имеем

$$C_n \leq N_q \|f\|_q.$$

Теперь при помощи неравенств (14) и (13) выводим, что имеет место неравенство (12). Теорема доказана.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
2. Никишин Е. М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1970, 25, № 6, 129–191.
3. Никишин Е. М., О системах сходимости по мере для l_2. Матем. заметки, 1973, 13, № 3, 337–340.
4. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 140–151.
5. Тюрнпу Х., Шипп Ф., Сходимость почти всюду функциональных рядов по системам произведений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 189–192.

6. A l e x i t s, G., Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1971, 92, 1-10.
7. S c h i p p, F., T ü r n p u, H., Über schwach multiplikative Systeme. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. math., 1974, 17, 91-96.
8. S c h i p p, F., Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsystemen. Acta Sci. math., 1973, 35, 13-16.
9. S j ö l i n, P., An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series. Arkiv mat. 1968, 7, № 6, 551-570.

Поступило
13 II 1976

MAKSIMAALSED TEOREEMID FUNKTSIONAALRIDADELE MULTIPLIKATIIVSETE SÜSTEEMIDE KORRAL

H. Türnpu

R e s ü m e e

Olgu $F=\{f_k\}$ niisuguste lõigus $\ell=[a,b]$ mõõtuvate funktsioonide f_k süsteem, mille korral on täidetud tingimus (1). Süsteemi F produktsüsteemi G defineerime seosega (2). Töös [7] tõime sisse järgmise mõiste: me ütleme, et süsteem F on p-nõrgalt multiplikatiivne, kui ta rahuldab tingimust (3). Eelpoolnimetatud töös me tõestasime teoreemid A ja B. Käesolevas töös me tõestame teoreemid 1, 2 ja 3, kus teoreem 2 on teoreemi B üldistuseks, aga teoreem 1 täpsustab teoreemi A juhul, kui $p=\infty$.

MAXIMALSÄTZE FÜR REIHE NACH PRODUKTSYSTEMEN

H. Türnpu

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei $F=\{f_k\}$ ein Funktionensystem, wo für f_k die Bedingung (1) gilt. Es bezeichne $G=\{g_k\}$ das Produktsystem des Funktionensystems F; das bedeutet, daß $g_0(t)\equiv 1$ und für $k=2^{\nu_1}+\dots+2^{\nu_k}$ mit $\nu_1>\nu_2>\dots>\nu_k$ die Funktionen g_k die Form (2) haben. Das System F heisst p-schwach ($1\le p\le\infty$) multiplikativ, wenn für das Produktsystem die Bedingung (3) gilt, wobei für $k=0,1,2,\dots$ $a_k=\int_\ell g_k(t)dt$ ist.

In der vorliegenden Arbeit haben wir die folgenden "Maximalsätze" bewiesen:

<u>Satz 1</u>. Ist F ein beschränktes ρ-schwach multiplikatives System mit $\rho = \infty$, so gilt für jede $0 < q < \infty$ die Ungleichung (5).

<u>Satz 2</u>. Ist das Produktsystem G des Systems F ein Maß konvergenzsystem in ℓ^2, so gilt die Ungleichung (6).

Satz 2 ist eine Verallgemeinerung des Satzes 4 in der Arbeit [7].

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ - система измеримых по Лебегу и конечных почти всюду на отрезке $e = [a, b]$ функций φ_k. Рассмотрим ряд[I]

$$\sum \xi_k \varphi_k(t), \tag{I}$$

где $x = \{\xi_k\} \in l^q$ с $1 < q < \infty$. Если $q = 2$ и система φ удовлетворяет для $p > 2$ и всех $\{c_k\}$ условию

$$\int_e \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\Big|^p dt \leq \Big\{\sum_{k=0}^{n} c_k^2\Big\}^{1/2},$$

то, как показал Стечкин в [I], ряд (I) сходится безусловно почти всюду на e для всех $x \in l^2$. Далее, Гапошкин в [I] показал, что при выполнении условия (2) частные суммы $s_n(x,t)$ ряда (I) при любом порядке следования его членов для всех $x \in l^2$ удовлетворяют условию

$$\int_e \sup_n |s_n(x,t)|^p dt < \infty.$$

Дальнейшее обобщение этих результатов приведено в работах [2,3]. Так, например, в [3] доказано в частности утверждение

<u>Теорема А.</u> Если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M = M_{pq\varepsilon} > 0$ такие, что для некоторого $p > q > 1$ и всех чисел $\{c_k\}$

$$\int_{T_\varepsilon} \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\Big|^p dt \leq M \Big\{\sum_{k=0}^{n} |c_k|^q\Big\}^{p/q}, \tag{3}$$

то для всех $x \in l^q$ при любом порядке следования членов ряда (I)

$$\int_{T_\varepsilon} \sup_n |s_n(x,t)|^p dt < \infty. \tag{4}$$

Настоящая заметка обобщает теорему А в нижеследующем плане. Рассмотрим конечнострочный метод суммирования $A = (\alpha_{nk})$, который удовлетворяет условию

$$0 < \alpha \leq \lim_n |\alpha_{nk}| \leq \beta < \infty. \tag{5}$$

I Через $\sum u_k$ обозначаем сумму $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Обозначая для $x \in l^q$

$$\sigma_n(A, x, t) = \sum_{k=0}^{\nu_n} a_{nk} \xi_k \varphi_k(t),$$

сформулируем следующий результат.

<u>Теорема I</u>. Пусть метод суммирования A удовлетворяет условию (5). Если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M = M_{pq\varepsilon} > 0$ такие, что для некоторого $p > q > 1$ и всех $x \in l^q$

$$\int_{T_\varepsilon} |\sigma_n(A, x, t)|^p dt \leq M \left\{ \sum_{k=0}^{\nu_n} |\xi_k|^q \right\}^{p/q}, \tag{6}$$

то для всех $x \in l^q$ имеет место неравенство (4).

Теорема I вытекает немедленно из теоремы A и из следующего утверждения.

<u>Теорема 2</u>. Пусть метод A удовлетворяет условию (5). Для того, чтобы имело место условие (6), необходимо и достаточно выполнение условия (3).

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть выполнено условие (6). Тогда для всех $h \in \mathcal{L}_e^{p'}$ с $\|h\| \leq 1$ $(1/p' + 1/p = 1)$ и $x \in l^q$ с $\|x\| \leq 1$

$$A_n \equiv \int_{T_\varepsilon} h(t) \sigma_n(A, x, t) dt \leq M. \tag{7}$$

Учитывая, что

$$A_n = \sum^{\nu_n} a_{nk} \xi_k c_k^\varepsilon,$$

с $c_k^\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} h(t) \varphi_k(t) dt$, мы из условия (7) выводим, что при $1/q' + 1/q = 1$

$$B_n \equiv \sum_{k=0}^{\nu_n} |a_{nk}|^{q'} |c_k^\varepsilon|^{q'} = M. \tag{8}$$

Воспользуясь условием (5), заключаем, что для всех $s \leq \nu_n$

$$B_n \geq \alpha^{q'} \sum_{k=0}^{s} |c_k^\varepsilon|^{q'}.$$

Но для $x \in l^q$ с $\|x\| \leq 1$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{s} |c_k^\varepsilon|^{q'} \right\}^{1/q'} \geq \left| \sum_{k=0}^{s} \xi_k c_k^\varepsilon \right| = \left| \int_{T_\varepsilon} h(t) \sum_{k=0}^{s} \xi_k \varphi_k(t) dt \right|,$$

следовательно, учитывая что $h \in \mathcal{L}_e^{p'}$, мы при помощи неравенства (8) заключаем, что

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{s} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p dt \leq M,$$

откуда в свою очередь выводим условие (3).

<u>Достаточность</u>. Покажем, что

$$\sup_n A_n \leq \beta \sup_n \left\{ \int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p dt \right\}^{1/p}. \tag{9}$$

Так как

$$\sup_n A_n \le \beta \sup_n \sup_{\|x\|_q \le 1} \sup_{\|f\|_p \le 1} \sum_{k=0}^{\lambda_n} |\xi_k| |c_k^\varepsilon| =$$

$$= \beta \sup_n \sup_{\|x\|_q \le 1} \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \xi_k \varphi_k(t) f(t) dt \right| =$$

$$= \beta \sup_n \sup_{\|x\|_q \le 1} \left\{ \int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p dt \right\}^{1/p},$$

то неравенство (9) имеет место и теорема полностью доказана.

Литература

1. Г а п о ш к и н В. Ф., Лакунарные ряды и независимые функции. Успехи матем. наук, 1966, 22, 6, 3-82.
2. М о р и ц Ф., Обобщение некоторых классических неравенств в теории ортогональных рядов. Матем. заметки, 1975, 17, 2, 219-230.
3. Т ю р н п у Х., Об обобщении одной теоремы С.Б.Стечкина. Acta sci. math. 1974, 36, 3-4, 369-374.

Поступило

13 II 1976

FUNKTSIONAALRIDADE TINGIMUSTETA KOONDUVUSEST PEAAEGU KÕIKJAL

H. Türnpu

R e s ü m e e

Olgu $\varphi = \{\varphi_k\}$ lõigus $e = [a, b]$ mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide süsteem. Töös [1] näidatakse, et kui süsteem φ rahuldab tingimust (2), siis on rida (1) iga $x \in \ell^2$ korral peaaegu kõikjal tingimusteta koonduv. Käesolevas artiklis antakse selle väite üldistus.

BEMERKUNGEN ZUR UNBEDINGTEN KONVERGENZ DER FUNKTIONENREIHEN

H. Türnpu

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei $\varphi = \{\varphi_k\}$ ein Funktionensystem, wo die Funktionen φ_k im Interwall $e = [a, b]$ meßbar und fast überall endlich sind. Es ist bekannt, daß für jede $x = \{\xi_k\} \in \ell^2$ die Reihe (1) unter Bedingung (2) unbedingt fast

überall konvergiert. Wir beweisen folgenden

Satz. Wenn für jede $\varepsilon > 0$ die meßbare Untermenge $T_\varepsilon \subset e$ mit mes $T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ und die Konstante $M_{\varepsilon p q} > 0$ derart existieren, daß für $p > q > 1$ die Bedingung (6) erfüllt ist, dann konvergiert die Reihe (1) unbedingt fast überall in e für jede $x \in L^q$.

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. Педас

Кафедра вычислительной математики

I. В настоящей статье рассматривается линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)x(s)ds + f(t) \tag{I}$$

с непрерывно дифференцируемым при $\tau > 0$ ядром $\varkappa(\tau)$, имеющим при $\tau = 0$ логарифмическую особенность,

$$|\varkappa(\tau)| \leq b(|\ln\tau| + 1) \quad (0 < \tau \leq 1;\ b = \mathrm{const}); \tag{2}$$

$$|\varkappa'(\tau)| \leq \frac{b'}{\tau} \quad (0 < \tau \leq 1;\ b' = \mathrm{const}). \tag{3}$$

Более того, мы будем предполагать, что

$$\begin{cases} \text{существуют конечные пределы} \\ \lim\limits_{\tau\to 0}[\varkappa(\tau)/\ln\tau] \text{ и } \lim\limits_{\tau\to 0}\tau\varkappa'(\tau). \end{cases} \tag{4}$$

Интегральные уравнения рассматриваемого типа встречаются в теории переноса излучения. Сюда относится, например, уравнение Милна.

Особенность ядра $\varkappa(\tau)$ влечет за собой особенность решения $x_0(t)$ интегрального уравнения (I): если свободный член $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируем на отрезке $[0,I]$, то $x_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируемо в промежутке $(0,I)$ и его вторая производная $x_0''(t)$ имеет особенности типа $t^{-1}\ln t$ и $(1-t)^{-1}\ln(1-t)$ при $t=0$ и $t=1$ соответственно (см. теорему I).

Численное решение таких уравнений весьма затруднительно из-за медленной сходимости приближенных методов. В настоящей статье доказывается, что при использовании подходящей функции веса, достаточно простой дискретизационный метод имеет быстроту сходимости $h^{1+\lambda}|\ln h|$, $0 \leq \lambda < 1$, где h - шаг дискретизации (см. теорему 2).

2. В этом пункте дадим более четкие формулировки результатов статьи; их доказательства будут приведены в последующих пунктах.

Теорема I. Пусть ядро $\varkappa(\tau)$ интегрального уравнения (I) непрерывно дифференцируемо при $0<\tau\le 1$ и удовлетворяет условиям (2), (3) и (4), а свободный член $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируем при $0\le t\le 1$. Пусть уравнение (I) имеет единственное решение $x_0(t)$.

Тогда решение $x_0(t)$ уравнения (I) дважды непрерывно дифференцируемо при $0<t<1$ и справедлива оценка

$$|x_0''(t)|\le c\left(\frac{|\ln t|}{t}+\frac{|\ln(1-t)|}{1-t}\right)\quad (0<t<1;\ c=\mathrm{const}). \tag{5}$$

Обозначим через $C[0,I]$ класс непрерывных на $[0,I]$ функций с максимум-нормой. Интегральное уравнение (I) рассмотрим как операторное уравнение

$$x=Tx+f \tag{6}$$

в банаховом пространстве $C[0,I]$ с интегральным оператором

$$(Tx)(t)=\int_0^1\varkappa(|t-s|)\,x(s)\,ds. \tag{7}$$

Пусть n – натуральное число, $h=\frac{1}{n}$. Разделим отрезок $[0,I]$ на n равных частей узлами $s_j=jh$ $(j=0,1,\dots,n)$. Рассмотрим уравнение

$$x_n=P_nTx_n+P_nf, \tag{8}$$

где x_n – ломаная линия с вершинами в точках $(s_j,\ x(s_j))$ (сплайн первого порядка), задаваемая формулой

$$x_n(s)=x(s_j)\frac{s-s_{j-1}}{h}+x(s_{j-1})\frac{s_j-s}{h},\quad s_{j-1}\le s\le s_j\ (j=1,\dots,n), \tag{9}$$

а P_n – оператор, ставящий каждой непрерывной функции $x(t)$ в соответствие ее интерполяционный сплайн x_n первого порядка:

$$P_nx=x_n\quad (x\in C[0,1]). \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I.

Тогда уравнение (8) имеет при достаточно больших n единственное решение x_n. Последовательность x_n стремится к решению x_0 уравнения (I) равномерно на $[0,I]$ с весом $t^\lambda(1-t)^\lambda$, $0\le\lambda=\mathrm{const}<1$:

$$\varepsilon_n=\max_{0\le t\le 1}t^\lambda(1-t)^\lambda|x_n(t)-x_0(t)|\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty. \tag{11}$$

Справедлива оценка

$$\varepsilon_n\le Ch^{1+\lambda}|\ln h|\quad (0\le\lambda<1;\ C=C(\lambda)=\mathrm{const}). \tag{12}$$

Замечание I. Решение уравнения (8) равносильно решению системы линейных уравнений

$$\xi_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\int_{s_{j-1}}^{s_j}\frac{s_j-s}{h}\,\varkappa(|s_i-s|)\,ds\right]\xi_{j-1}+\left[\int_{s_{j-1}}^{s_j}\frac{s-s_{j-1}}{h}\,\varkappa(|s_i-s|)\,ds\right]\xi_j\right)+f(s_i)$$

$$(i=0,1,\ldots,n),$$

относительно постоянных ξ_i. Здесь ξ_i - приближенные значения искомого решения $x_0(t)$ в узлах сетки s_i $(i=0,1,\ldots,n)$. Эта система получается из (8), если придать переменной t последовательно значения $s_0, s_1, \ldots, s_n$.

Замечание 2. Ввиду логарифмической особенности решения $x_0(t)$ при $t=0$ и $t=1$, от методов дискретизации не следует ожидать более быстрой равномерной сходимости на $[0,1]$, чем $h|\ln h|$. Указанную быстроту сходимости имеет, например, метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы средних прямоугольников [1].

Замечание 3. Иногда требуется найти не само решение $x_0(t)$ уравнения (1), а значение функционала

$$\int_0^1 x_0(s)z(s)\,ds \quad (z\in C[0,1]).$$

Из теоремы 2 следует, что значения указанного функционала могут быть вычислены по формуле

$$\int_0^1 x_n(s)z(s)\,ds,$$

где $x_n(s)$ - решение уравнения (8). При этом имеет место оценка

$$\left|\int_0^1 x_0(s)z(s)\,ds-\int_0^1 x_n(s)z(s)\,ds\right|\le C\cdot h^{1+\lambda}|\ln h| \quad (0\le\lambda=\mathrm{const}<1),$$

где постоянная $C=C(\lambda,z)$ не зависит от h.

3. Доказательство теоремы 1. Условимся здесь и далее обозначать через C различные константы. Положим

$$p(t)=\frac{1}{|\ln t|+1},\quad q(t)=\frac{t}{|\ln t|+1}.$$

Через U будем обозначать совокупность непрерывно дифференцируемых в $(0,1]$ функций $u(t)$ таких, что имеют место оценки

$$|u(t)|\le C(|\ln t|+1),\quad |u'(t)|\le C\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right)\quad (0<t\le 1), \tag{13}$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to 0} p(t)u(t),\qquad \lim_{t\to 0} q(t)u'(t). \tag{14}$$

Через V будем обозначать совокупность непрерывно дифференцируемых в $[0,1)$ функций $v(t)$ таких, что имеют место оценки

$$|v(t)| \le C(|\ln(1-t)|+1), \quad |v'(t)| \le C\left(\frac{|\ln(1-t)|}{1-t}+1\right) \quad (0 \le t < 1), \tag{15}$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to 1} p(1-t)v(t), \qquad \lim_{t\to 1} q(1-t)v'(t). \tag{16}$$

Снабженные соответственно нормами

$$\|u\|_U = \max_{0\le t\le 1} |p(t)u(t)| + \max_{0\le t\le 1} |q(t)u'(t)|$$

и

$$\|v\|_V = \max_{0\le t\le 1} |p(1-t)v(t)| + \max_{0\le t\le 1} |q(1-t)v'(t)|,$$

U и V являются банаховыми пространствами.

Теперь мы можем определить пространство

$$W = \{u+v \mid u \in U,\ v \in V\}$$

с нормой

$$\|w\|_W = \inf_{u\in U,\ v\in V,\ u+v=w} (\|u\|_U + \|v\|_V). \tag{17}$$

Пространство W, снабженное нормой (17), является банаховым пространством (см. [4], стр. 12-13).

Объясним теперь вкратце план доказательства. Напишем интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)x(s)ds + f'(t) + x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t),$$

где $x_0(t)$ – решение исходного уравнения (1). Можно показать, что единственным решением этого уравнения является $x_0'(t)$ (производная функции $x_0(t)$). Таким образом, мы имеем равенство

$$x_0'(t) - \int_0^1 \varkappa(|t-s|)x_0'(s)ds = f'(t) + x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t). \tag{18}$$

Далее, функция

$$f'(t) + x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t)$$

принадлежит пространству W, ибо $f'(t) \in W$, и в силу (2), (3) и (4) также $[x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t)] \in W$. Пусть I есть тождественное преобразование и пусть оператор T определяется формулой (7). Мы хотим показать, что оператор T отображает пространство W в себя и существует обратный ограниченный оператор $(I-T)^{-1}$ (определенный на всем пространстве W). Это равносильно требуемому результату, так как тогда из (18) следует включение

$$x_0'(t) = (I-T)^{-1}[f'(t) + x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t)] \in W,$$

т.е. $x_0'(t)$ непрерывно дифференцируема в (0,1) и имеет место оценка (5).

В дальнейшем наряду с пространством W будем применять пространство W_0, определенное равенством

$$W_0 = \{u+v \mid u \in U_0,\ v \in V_0\},$$

где

$$U_0 = \{u \mid u \in U,\ u(1)=0\},\quad V_0 = \{v \mid v \in V,\ v(0)=0\},$$

и с нормой

$$\|w\|_{W_0} = \inf_{u \in U_0,\ v \in V_0,\ u+v=w} (\|u\|_U + \|v\|_V). \tag{17'}$$

Ясно, что имеет место теоретико-множественное равенство $W_0 = W$ и что $\|w\|_W \le \|w\|_{W_0}$ $(w \in W_0)$, т.е. оператор вложения W_0 в W ограничен. По теореме Банаха ограничен также обратный к нему оператор, т.е. имеет место неравенство $\|w\|_{W_0} \le C\|w\|_W$ с некоторой постоянной C. Поэтому нормы в W_0 и W эквивалентны.

Таким образом, на основании сказанного выше, достаточно проверить справедливость следующих утверждений.

$i)$ Интегральный оператор T (определенный формулой (7)) отображает пространство W_0 в пространство W.

$ii)$ Оператор T является вполне непрерывным оператором из W_0 в W.

$iii)$ Однородное уравнение $x = Tx$ имеет в W только нулевое решение.

$i)$ Покажем, что $(Tw)(t) \in W$ для $w(t) = [u(t)+v(t)] \in W_0$. Нам надо показать, что функция $(Tw)(t)$ может быть представлена в виде

$$(Tw)(t) = (Tu)(t) + (Tv)(t),$$

где $(Tu)(t)$ – непрерывно дифференцируемая в $(0,1]$ функция, для которой имеют место оценки (13) и существуют пределы (14), а $(Tv)(t)$ – непрерывно дифференцируемая в $[0,1)$ функция, для которой имеют место оценки (15) и существуют пределы (16).

Из (13), (15) и (2) следует, что

$$(Tw)(t) = (Tu)(t) + (Tv)(t),$$

где $(Tu)(t)$ и $(Tv)(t)$ – непрерывные функции на отрезке $[0,1]$. Поэтому основной вопрос, который нам предстоит здесь решить, это вопрос о дифференцируемости функций $(Tu)(t)$ и $(Tv)(t)$. Доказательство этого разбивается на три части. В первой части доказываются, что несобственные интегралы

$$J_u(t) = \int_0^1 u'(s)[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)]\,ds \quad (u \in U_0) \tag{19}$$

и
$$J_v(t)=\int_0^1 v'(s)\left[\varkappa(|t-s|)-\varkappa(1-t)\right]ds \quad (v\in V_0), \tag{20}$$
абсолютно сходятся при каждом $0<t<1$, и устанавливаются оценки
$$|J_u(t)|\le C\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right) \quad (0<t\le 1), \tag{21}$$
$$|J_v(t)|\le C\left(\frac{|\ln(1-t)|}{1-t}+1\right) \quad (0\le t<1). \tag{22}$$

Во второй части показываются, что функции $q(t)J_u(t)$ и $q(1-t)J_v(t)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$. Отсюда следует, между прочим, что $J_u(t)$ - непрерывная в $(0,1]$, а $J_v(t)$ - непрерывная в $[0,1)$ функция, и существуют конечные пределы
$$\lim_{t\to 0} q(t)J_u(t), \qquad \lim_{t\to 1} q(1-t)J_v(t).$$
После этого в третьей части устанавливаются равенства
$$\left.\begin{aligned}(Tu)'(t)&=J_u(t),\\ (Tv)'(t)&=J_v(t).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$
Тем самым завершается доказательство утверждения i).

а) Докажем сходимость интеграла (19) и оценку (21); сходимость интеграла (20) и оценка (22) устанавливаются аналогично.

В силу (13) имеем
$$|J_u(t)|\le C\int_0^1\left(\frac{|\ln s|}{s}+1\right)|\varkappa(|t-s|)-\varkappa(t)|\,ds. \tag{24}$$
Фиксируем точку $t\in(0,1]$ и положим
$$m(t)=\frac{t}{t+M},$$
где M - сколь угодно большое число. Так как
$$\int_0^1=\int_0^{m(t)}+\int_{m(t)}^{t}+\int_t^1,$$
то сейчас наша цель состоит в доказательстве следующих пределов
$$L_1(t)=\lim_{\ell_1\to 0_+}\int_{\ell_1}^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|\,ds, \quad 0<\ell_1<m(t);$$
$$L_2(t)=\lim_{\ell_2\to t-}\int_{m(t)}^{\ell_2}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|\,ds, \quad m(t)<\ell_2<t;$$
$$L_3(t)=\lim_{\ell_3\to t_+}\int_{\ell_3}^{1}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(s-t)-\varkappa(t)|\,ds, \quad t<\ell_3<1.$$

Пользуясь оценками (2) и (3) и формулой

$$\varkappa(t-s)-\varkappa(t)=\varkappa'(\xi_s)s,$$

где $t-s<\xi_s<t$, мы получаем

$$\int\limits_{\ell_1}^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|\leq$$

$$\leq C\frac{b'}{t-m(t)}\int\limits_0^{m(t)}|\ln s|ds=Cb'\frac{m(t)[|\ln m(t)|+1]}{t-m(t)}$$

Поскольку

$$\frac{m(t)[|\ln m(t)|+1]}{t-m(t)}=\frac{t[|\ln t-\ln(t+M)|+1]}{t^2+t(M-1)}\leq\frac{1}{M-1}[|\ln t|+\ln(1+M)+1],$$

то за счет увеличения M можно теперь добиться, чтобы для всех $\ell_1>0$ выполнялось неравенство

$$\int\limits_{\ell_1}^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds\leq C(M)\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right),$$

где $C(M)\longrightarrow 0$ при $M\longrightarrow\infty$. Отсюда следует, что интеграл $L_1(t)$ сходится. Кроме того, имеет место оценка

$$\int\limits_0^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds\leq C(M)\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right), \qquad (25)$$

где $C(M)\longrightarrow 0$ при $M\longrightarrow\infty$.

Аналогично, как выше, при всех $\ell_2<t$ имеем

$$\int\limits_{m(t)}^{\ell_2}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds\leq$$

$$\leq C\left(b\frac{|\ln m(t)|}{m(t)}\int\limits_0^t|\ln(t-s)|ds+b\frac{|\ln t|}{m(t)}\int\limits_0^t|\ln s|ds\right)\leq$$

$$\leq Cb\left[(1+M)+\frac{(1+M)\ln(1+M)}{|\ln t|}\right]\frac{|\ln t|}{t},$$

т.е. интеграл $L_2(t)$ сходится и имеет место оценка

$$|L_2(t)|\leq C\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right).$$

Такое же положение будет иметь место и для интеграла $L_3(t)$:

$$|L_3(t)|\leq C\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right).$$

Итак, нами доказано, что несобственный интеграл в правой части неравенства (24) сходится при каждом $0<t\leq 1$ и имеет место оценка

$$\int\limits_0^1\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(|t-s|)-\varkappa(t)|ds\leq C\left(\frac{|\ln t|}{t}+1\right)\quad(0<t\leq 1). \qquad (26)$$

Сходимость интеграла (19) и оценка (21) доказаны.

б) Возьмем любую точку t_0 из $[0,1]$ и докажем непрерывность функции

$$q(t)J_u(t) = q(t)\int_0^1 u'(s)\left[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)\right]ds$$

в точке $t=t_0$. Непрерывность функции $q(1-t)J_v(t)$ доказывается аналогично.

Положим

$$y(t,s) = u'(s)q(t)\left[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)\right].$$

По теореме Витали (см. [2], стр. 167) достаточно показать, что

1) функции $y(t,s)$ сходятся почти всюду к функции $y(t_0,s)$ при $t \longrightarrow t_0$;

2) при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое (не зависящее от t) число $\delta > 0$, что

$$\int_G |y(t,s)|ds < \varepsilon \qquad \text{при} \quad \operatorname{mes} G < \delta.$$

Здесь $\operatorname{mes} G$ – лебегова мера измеримого множества $G \subset [0,1]$.

Условие 1) очевидно. Пусть η – достаточно малое, а M – достаточно большое положительное число. Пусть $0 < t \leqslant 1$ и $m(t) = t/(t+M)$. Тогда в силу (13) имеем

$$\int_0^\eta |y(t,s)|ds \leqslant$$
$$\leqslant C\left(q(t)\int_0^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds + q(t)\int_{m(t)}^{\eta}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(|t-s|)-\varkappa(t)|ds\right) \quad (27)$$

В силу (25) для первого члена в правой части неравенства (27) будем иметь

$$q(t)\int_0^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds \leqslant C(M),$$

где $C(M) \longrightarrow 0$ при $M \longrightarrow \infty$. Увеличив, если нужно M, будем теперь считать, что при $0 < t \leqslant 1$ имеют место неравенства

$$m(t) < \eta, \quad q(t)\int_0^{m(t)}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(t-s)-\varkappa(t)|ds < \frac{\gamma}{2},$$

где γ – какое-нибудь малое положительное число. При указанном (фиксированном) числе M для второго члена в правой части неравенства (27) будем иметь

$$q(t)\int_{m(t)}^{\eta}\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|\varkappa(|t-s|)-\varkappa(t)|ds \leqslant$$
$$\leqslant C b\, q(t)\left(\frac{|\ln m(t)|}{m(t)}\int_{m(t)}^{\eta}|\ln(|t-s|)|ds + \frac{|\ln t|}{m(t)}\int_{m(t)}^{\eta}|\ln s|ds\right) \leqslant$$
$$\leqslant C2b\left[(M+1) + \frac{(M+1)\ln(M+1)}{|\ln t|+t}\right]\int_0^\eta |\ln s|ds.$$

За счет уменьшения η можно теперь добиться, чтобы указанный член в (27) был достаточно малый $(<\gamma/2)$.

Таким образом, мы доказали, что интеграл $\int_0^\eta |y(t,s)|ds$ стремится к нулю при $\eta \longrightarrow 0$ равномерно по t, $0<t\le 1$. Выберем $\varepsilon>0$ и зафиксируем $\eta<1$ так, чтобы для всех $0<t\le 1$ выполнялось неравенство

$$\int_0^\eta |y(t,s)|ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть δ – достаточно малое положительное число. Обозначим через G_δ то множество из отрезка $[0,1]$, для которого $\operatorname{mes} G_\delta<\delta$. Принимая во внимание очевидное равенство

$$G_\delta=(G_\delta\cap[0,\eta])\cup(G_\delta\cap[\eta,1]),$$

и используя соотношение

$$\int_{G_\delta}(|\ln(|t-s|)|+|\ln s|)ds\to 0 \text{ при } (\operatorname{mes} G_\delta)\longrightarrow 0,$$

мы получаем оценку

$$\int_{G_\delta}|y(t,s)|ds\le\int_0^\eta|y(t,s)|ds+\int_{G_\delta\cap[\eta,1]}|y(t,s)|ds\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+C\frac{|\ln\eta|}{\eta}\int_{G_\delta}(|\ln(|t-s|)|+|\ln s|)ds<\varepsilon,$$

если δ достаточно малое число.

Итак, выполнено и условие 2) теоремы Витали. По этой теореме функция $q(t)J_u(t)$ непрерывна в точке $t_0\in[0,1]$. Ввиду произвольности точки t_0 функция $q(t)J_u(t)$ непрерывна на $[0,1]$.

Кроме того, мы доказали следующий результат: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$ (не зависящее от t, $0<t\le 1$), что

$$q(t)\int_G\left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|x(|t-s|)-x(t)|ds<\varepsilon \text{ при } \operatorname{mes} G<\delta\ (G\in[0,1]). \qquad (28)$$

в) Сначала положим

$\mathcal{D}(0,1)=\{\varphi\,|\,\varphi$ – бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в $(0,1)\}$

и обозначим через $\mathcal{D}'(0,1)$ пространство, двойственное к $\mathcal{D}(0,1)$ (т.е. $\mathcal{D}'(0,1)$ есть пространство распределений на $(0,1)$). Если $F\in\mathcal{D}'(0,1)$, а $\varphi\in\mathcal{D}(0,1)$, то значение F на функции φ мы будем обозначать через $\langle F,\varphi\rangle$. Если F – регулярное распределение (т.е. распределение, порождаемое локально интегрируемой в $(0,1)$ функцией $F(t)$), то обозначим

$$\langle F,\varphi\rangle=(F,\varphi)=\int_0 F(t)\varphi(t)dt,\quad \varphi\in\mathcal{D}(0,1).$$

Теперь мы докажем первое равенство из (23) (второе равенство доказывается аналогично). Точнее, мы докажем, что для любой $\varphi \in \mathfrak{D}(0,1)$ имеет место равенство

$$\langle (Tu)', \varphi \rangle = (J_u(t), \varphi(t)) \quad (u \in U_0), \tag{29}$$

где $J_u(t) = \int_0^1 u'(s)[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)]\,ds$ – непрерывная в $(0,1]$ функция и T^0 – интегральный оператор (7).

Прежде всего следует отметить, что при всех $\varphi \in \mathfrak{D}(0,1)$ имеем

$$(T\varphi)'(t) = (T'\varphi')(t). \tag{30}$$

Действительно, выберем такую функцию $f(t)$, чтобы выполнялось равенство $\varphi = T\varphi + f$. Так как $\varphi \in \mathfrak{D}(0,1)$, то из (18) следует равенство $\varphi' = T\varphi' + f'$, откуда и следует соотношение (30).

Далее, принимая во внимание симметричность оператора T и учитывая (30), при всех $\varphi \in \mathfrak{D}(0,1)$ получим

$$\begin{aligned}\langle (Tu)', \varphi \rangle &= \\ &= -\langle Tu, \varphi' \rangle = -(Tu, \varphi') = -(u, T\varphi') = \\ &= -(u, (T\varphi)') = -(u, [T\varphi - (T\varphi)(0)]') = \\ &= (u', T\varphi - (T\varphi)(0)).\end{aligned} \tag{31}$$

На последнем шаге мы воспользовались интегрированием по частям и соотношением $u(1) = 0$.

С другой стороны, так как $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,1)$ и имеет место неравенство (21), то при всех $\varphi \in \mathfrak{D}(0,1)$ существует интеграл

$$\int_0^1 J_u(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 u'(s)[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)]\,ds \right) \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 [\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)]\varphi(t)\,dt \right) u'(s)\,ds = \int_0^1 u'(s)[(T\varphi)(s) - (T\varphi)(0)]\,ds.$$

Таким образом, продолжая равенства (31), получим равенство (29):

$$\begin{aligned}\langle (Tu)', \varphi \rangle &= \langle u', T\varphi - (T\varphi)(0) \rangle = \\ &= (u'(s), [(T\varphi)(s) - (T\varphi)(0)]) = (J_u(t), \varphi(t)).\end{aligned}$$

Доказательство утверждения i) закончено.

ii) Достаточно доказать, что, какова бы ни была последовательность $\{w_n\}$ элементов из единичного шара пространства W_0 $(\|w_n\|_{W_0} \le 1,\ n = 1, 2, \dots)$, последовательность $\{Tw_n\}$ компактна в W.

В силу (17') для каждого n найдутся такие элементы $u_n \in U_0$ и $v_n \in V_0$, что

$$w_n(t) = u_n(t) + v_n(t)$$

и

$$\|u_n\|_U + \|v_n\|_V \le 1 + \frac{1}{n}. \tag{32}$$

Поскольку

$$(Tw_n)(t) = (Tu_n)(t) + (Tv_n)(t),$$

то для завершения доказательства утверждения ii) достаточно показать, что последовательность $\{Tu_n\}$ компактна в U, а последовательность $\{Tv_n\}$ в V. В свою очередь для этого достаточно показать, что множества

$$\{p(t)(Tu_n)(t)\}, \quad \{q(t)(Tu_n)'(t)\}$$

и

$$\{p(1-t)(Tv_n)(t)\}, \quad \{q(1-t)(Tv_n)'(t)\}$$

- суть компактные множества в пространстве $C[0,1]$.

Докажем, например, компактность множества $\{q(t)(Tu_n)'(t)\}$, т.е. покажем, что функции

$$d_n(t) = q(t)\int_0^1 u_n'(s)[\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)]\,ds,$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Компактность остальных множеств устанавливается аналогично.

Ограниченность $d_n(t)$ одним и тем же числом следует из (26) и (32):

$$|d_n(t)| \le 2q(t)\int_0^1 \frac{1}{q(s)}|\varkappa(|t-s|) - \varkappa(t)|\,ds \le C'$$

$$(C' = \text{const};\ n = 1, 2, \dots).$$

Остается доказать равностепенную непрерывность $d_n(t)$. Имеем

$$|d_n(t_1) - d_n(t_2)| = \left|\int_0^1 \frac{u_n'(s)q(s)}{q(s)}\left(q(t_1)[\varkappa(|t_1-s|) - \varkappa(t_1)] - q(t_2)[\varkappa(|t_2-s|) - \varkappa(t_2)]\right)ds\right| \le$$

$$\le C\int_0^1 \left(1 + \frac{|\ln s|}{s}\right)\left|q(t_1)[\varkappa(|t_1-s|) - \varkappa(t_1)] - q(t_2)[\varkappa(|t_2-s|) - \varkappa(t_2)]\right|ds. \tag{33}$$

Нам надо доказать, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от n число $\delta > 0$, что

$$|d_n(t_1) - d_n(t_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| < \delta \qquad (0 \le t_1, t_2 \le 1).$$

Положим

$$r(t_1, t_2; s) = \left(1 + \frac{|\ln s|}{s}\right)\left|q(t_1)[\varkappa(|t_1-s|) - \varkappa(t_1)] - q(t_2)[\varkappa(|t_2-s|) - \varkappa(t_2)]\right|.$$

Ввиду (33) достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_0^1 r(t_1, t_2; s)\,ds < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| < \delta. \tag{34}$$

Доказательство проведем от противного. Пусть для некоторого определенного числа $\varepsilon > 0$ не существует такого числа $\delta > 0$, о котором идет речь в (34). В таком случае, какое бы число $\delta>0$ ни взять, найдутся в отрезке $[0,1]$ такие два значения t_1 и t_2, что $|t_1-t_2|<\delta$, а $\int_0^1 r(t_1,t_2;s)ds \geqslant \varepsilon$. Возьмем теперь последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел так, что $\delta_n \longrightarrow 0$. В силу сказанного, для каждого δ_n $(n=1,2,\cdots)$ найдутся в $[0,1]$ значения t_1^n и t_2^n такие, что

$$|t_1^n - t_2^n| < \delta_n, \qquad \text{а} \quad \int_0^1 r(t_1^n, t_2^n; s)ds \geqslant \varepsilon.$$

Из ограниченной последовательности $\{t_1^n\}$ можно извлечь подпоследовательность (которую будем снова обозначать через $\{t_1^n\}$), сходящуюся к некоторой точке t^0 отрезка $[0,1]$. Так как $|t_1^n - t_2^n| < \delta_n$, а $\delta_n \longrightarrow 0$, то одновременно и последовательность $\{t_2^n\}$ сходится к t^0.

Тогда будем иметь:

1) функции $r_n(s) = r(t_1^n, t_2^n; s)$ сходятся к функции 0 почти всюду при $n \longrightarrow \infty$;

2) при любом заданном $\alpha > 0$ существует число $\beta > 0$, одно и то же для всех n и такое, что

$$\int_G r_n(s)ds \leqslant \int_G \left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|q(t_1^n)[\varkappa(|t_1^n - s|) - \varkappa(t_1^n)]|ds +$$
$$+ \int_G \left(1+\frac{|\ln s|}{s}\right)|q(t_2^n)[\varkappa(t_2^n - s|) - \varkappa(t_2^n)]|ds < \alpha,$$

если $\operatorname{mes} G < \beta$. Здесь мы воспользовались соотношением (28). Тогда по теореме Витали должно быть

$$\int_0^1 r_n(s)ds \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty,$$

а это противоречит тому, что при всех значениях n

$$\int_0^1 r_n(s)ds = \int_0^1 r(t_1^n, t_2^n; s)ds \geqslant \varepsilon > 0.$$

Таким образом, нами доказано, что функции $d_n(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, а следовательно, и образуют компактное множество.

Тем самым доказано, что интегральный оператор (7) вполне непрерывен как оператор из W_0 в W.

iii) Из непрерывности ядра $\varkappa(\tau)$ при $0<\tau\leqslant 1$ и неравенства (2) вытекает, что оператор T вполне непрерывен в пространстве $C[0,1]$. Поэтому предположение о существовании решения уравнения (1) равносильно условию, что соответствующее однородное уравнение $x=Tx$ имеет лишь нулевое решение пространстве $C[0,1]$. Отсюда следует, что уравнение $x=Tx$ имеет лишь нулевое решение и в пространстве W, так как при каждой $x \in W$ функция $(Tx)(t)$ является непрерывной функцией на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Напомним один результат из теории проекционных методов для уравнений второго рода (см. [3], стр. 200).

Теорема 3. Пусть банахово пространство E' непрерывно вложено в банахово пространство E, т.е.

$$E' \subset E, \quad \|x\|_E \le C \|x\|_{E'} \qquad (x \in E').$$

Пусть T вполне непрерывен, как оператор, из E в E', а проекторы P_n ограничены, как операторы из E' в E, причем $P_n \longrightarrow P$ сильно, где P - оператор вложения пространства E' в пространство E. Пусть свободный член f уравнения

$$x = Tx + f$$

принадлежит E'. Пусть это уравнение имеет единственное решение x_0.

Тогда при достаточно больших n и уравнение

$$x_n = P_n T x_n + P_n f$$

имеет единственное решение x_n и

$$\|x_n - x_0\|_E \longrightarrow 0 \qquad \text{при } n \longrightarrow \infty. \tag{36}$$

Быстрота сходимости характеризуется неравенством

$$\|x_n - x_0\|_E \le C \|P_n x_0 - x_0\|_E . \tag{37}$$

Имея целью применить теорему 3, обозначим через $C^\lambda(0,1)$ пространство непрерывных в $(0,1)$ функций $x(t)$ таких, что

$$\|x\|_{C^\lambda(0,1)} = \max_{0 \le t \le 1} \{t^\lambda (1-t)^\lambda |x(t)|\} < +\infty .$$

Будем считать, что $0 \le \lambda < 1$. Тогда имеем

$$C[0,1] \subset C^\lambda(0,1); \quad \|x\|_{C^\lambda(0,1)} \le \|x\|_{C[0,1]} \quad (x \in C[0,1]). \tag{38}$$

Итак, будем проверять, что выполнены все условия теоремы 3, где в роли E' и E выступают $C[0,1]$ и $C^\lambda(0,1)$, а операторы T и P_n определены формулами (7) и (10) соответственно.

Из (10) и (9) вытекает, что $P_n^2 = P_n$, т.е. что P_n действительно является проектором из $C[0,1]$ в $C^\lambda(0,1)$. Из (10) и (38) следует, что проектор P_n ограничен ($\|P_n\|_{E' \to E} \le 1$). Далее в силу (9), (10) и (38) для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $x(t)$ имеем

$$\|P_n x - x\|_{C^\lambda(0,1)} \le \|P_n x - x\|_{C[0,1]} \longrightarrow 0$$

при $n \to 0$. Другими словами, последовательность проекторов P_n как операторов из $C[0,1]$ в $C^\lambda(0,1)$, сильно стремится к оператору вложения $C[0,1]$ в $C^\lambda(0,1)$.

Так как в теореме 2 предполагается существование решения уравнения (1) (уравнения (6)), то для применения теоремы 3 остается еще установить, что T вполне непрерывен как оператор из $C^\lambda(0,1)$ в $C[0,1]$.

Пусть S есть ограниченное множество пространства $C^\lambda(0,1)$, т.е. для любой $x \in S \subset C^\lambda(0,1)$

$$t^\lambda(1-t)^\lambda |x(t)| \le K \quad (K = \mathrm{const}). \tag{39}$$

Докажем, что функции

$$y(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)x(s)ds \quad (x \in S)$$

образуют компактное множество в $C[0,1]$, т.е. что оператор (7) – вполне непрерывный оператор из $C^\lambda(0,1)$ в $C[0,1]$.

Равномерная ограниченность функций $y(t)$ следует из (2) и (39):

$$|y(t)| \le \max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 \frac{|\varkappa(|t-s|)|}{s^\lambda(1-s)^\lambda} s^\lambda(1-s)^\lambda |x(s)| ds \le C'K,$$

где $C' = b \max\limits_{0 \le t \le 1} \int_0^1 (|\ln(|t-s|)| / s^\lambda(1-s)^\lambda) ds$. Остается доказать равностепенную непрерывность $y(t)$. Имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le K \int_0^1 \frac{|\varkappa(|t_1-s|) - \varkappa(|t_2-s|)|}{s^\lambda(1-s)^\lambda} ds. \tag{40}$$

Пусть $\mu > 0$ – некоторое достаточно малое число. Покроем точки t_1 и t_2 числовой прямой отрезками $[t_1-\mu, t_1+\mu]$ и $[t_2-\mu, t_2+\mu]$ длины 2μ, в середине которых находятся точки t_1 и t_2. Эти отрезки могут перекрывать друг друга и выходить из $[0,1]$. В интеграле (40) модуль подинтегральной функции не больше

$$b \frac{|\ln(|t_1-s|)| + |\ln(|t_2-s|)|}{s^\lambda(1-s)^\lambda}. \tag{41}$$

Интегрируя эту сумму по множествам

$$a(t_1;\mu) = ([t_1-\mu, t_1+\mu] \cap [0,1])$$

и

$$a(t_2;\mu) = ([t_2-\mu, t_2+\mu] \cap [0,1]),$$

и складывая результаты, получим положительную величину, которая не больше

$$32 b C(\mu), \tag{42}$$

где $b = \mathrm{const}$ (постоянная из (2)), а

$$C(\mu) = \int_0^\mu \frac{|\ln s|}{s^\lambda} ds \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0. \tag{43}$$

Нам надо доказать, что при любом $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$ (не зависящее от $x\in S$), что
$$|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|<\delta \qquad (0\leq t_1,\ t_2\leq 1).$$
В силу (42) и (43) выбираем теперь μ так, чтобы иметь
$$K\int\limits_{a(t_1;\mu)\cup a(t_2;\mu)} \frac{|\varkappa(|t_1-s|)-\varkappa(|t_2-s|)|}{s^\lambda(1-s)^\lambda}\,ds\leq 32\,b\,KC(\mu)<\frac{\varepsilon}{2}.$$
Затем, в силу непрерывности подинтегральной функции в интеграле
$$K\int\limits_{[0,1]\setminus(a(t_1;\mu)\cup a(t_2;\mu))} \frac{|\varkappa(|t_1-s|)-\varkappa(|t_2-s|)|}{s^\lambda(1-s)^\lambda}\,ds$$
существует такое δ, что этот интеграл не больше $\varepsilon/2$, если $|t_1-t_2|<\delta$, и окончательно мы получаем $|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon$. Таким образом доказано, что T вполне непрерывный оператор из $C^\lambda(0,I)$ в $C[0,I]$.

Итак, теорема 3 применима. При $n\geqslant n_0$ уравнение (8) имеет единственное решение x_n и имеет место сходимость (II). В силу теоремы I оценка (I2) вытекает из (37).

Действительно, пусть $x_0(t)$ есть решение уравнения (I). Оценим норму $\|P_n x_0-x_0\|_{C^\lambda(0,1)}$. Для этого прежде всего найдем оценку погрешности $x_0-P_n x_0$ на первом частичном промежутке $[0,h]$.

Проинтегрируем равенство (I8) по t от 0 до $t\leq h$:
$$x_0(t)-x_0(0)=x_0(0)\int_0^t\varkappa(t)dt+x_0(1)\int_0^t\varkappa(1-t)dt+\int_0^t(Tx_0')(t)dt+\int_0^t f'(t)dt.$$
Пользуясь оценкой (2) для ядра $\varkappa(\tau)$ и помня, что функции $f(t)$ и $\int\limits_0^1\varkappa(|t-s|)x_0'(s)ds$ непрерывны на $[0,I]$, получим оценку
$$|x_0(t)-x_0(0)|\leq Ct|\ln t|, \tag{44}$$
где $0\leq t\leq h$.

С другой стороны, при $0\leq t\leq h$
$$P_n x_0(t)=x_0(0)\frac{h-t}{h}+x_0(h)\frac{t}{h}$$
и, следовательно,
$$x_0(t)-P_n x_0(t)=[x_0(t)-x_0(0)]+\frac{t}{h}[x_0(0)-x_0(h)].$$
Отсюда в силу (44) следует оценка
$$|x_0(t)-P_n x_0(t)|\leq Ch|\ln h| \qquad (0\leq t\leq h<h_0), \tag{45}$$
где h_0 - малое положительное число ($h_0\leq e^{-1}$).

Точно такую-же оценку можно установить и для последнего частичного промежутка:

$$|x_0(t)-P_n x_0(t)|\le C h|\ln h| \qquad (1-h\le t\le 1,\ h<h_0). \tag{46}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $ih\le t\le (i+1)h$ $(i=1,2,\dots$ $\dots,n-2)$. Тогда

$$x_0(t)-P_n x_0(t)=\frac{1}{2}(t-ih)(t-(i+1)h)x_0''(\xi_i),$$

где $ih<\xi_i<(i+1)h$. Отсюда в силу теоремы I следует оценка

$$\max_{ih\le t\le (i+1)h}|x_0(t)-P_n x_0(t)|\le C h^2\left[\frac{|\ln ih|}{ih}+\frac{|\ln(1-(i+1)h)|}{1-(i+1)h}\right]. \tag{47}$$

На основе (45), (46) и (47) наконец находим

$$\|x_0-P_n x_0\|_{C^\lambda(0,1)}\le$$

$$\le\max_{0\le t\le h}t^\lambda(1-t)^\lambda|x_0(t)-P_n x_0(t)|+\max_{1-h\le t\le 1}t^\lambda(1-t)^\lambda|x_0(t)-P_n x_0(t)|+$$

$$+\max_{1\le i\le n-2}\ \max_{ih\le t\le (i+1)}t^\lambda(1-t)^\lambda|x_0(t)-P_n x(t)|\le$$

$$\le C h^{1+\lambda}|\ln h|+C h^2\max_{1\le i\le n-2}\left[\frac{((i+1)h)^\lambda|\ln ih|}{ih}+\frac{(1-ih)^\lambda|\ln(1-(i+1)h)|}{1-(i+1)h}\right]\le$$

$$\le C h^{1+\lambda}|\ln h| \qquad (h<h_0).$$

Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность Г.Вайникко за руководство.

Литература

I. В а й н и к к о Г., П е д а с А., О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью методом механических квадратур. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971,281, 201-210.

2. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.

3. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., В а й н и к к о Г. М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.

4. G a j e w s k i, H., G r o g e r, K., Z a c h a r i a s, K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin, 1974.

Поступило
I III 1976

LOGARITMILISELT ISEÄRASE TUUMAGA INTEGRAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEST ESIMEST JÄRKU SPLAIN-KOLLOKATSIOONIMEETODIL

A. Pedas

R e s ü m e e

Artiklis käsitletakse võrrandi (1) ligikaudset lahendamist meetodil (8). Võrrandi (1) tuum on logaritmiliselt iseärane ja rahuldab tingimusi (2), (3) ja (4). Näidatakse, et toodud meetod koondub kiirusega (12).

ÜBER DIE LÖSUNG DER INTEGRALGLEICHUNGEN MIT DEN LOGARITHMISCH SINGULÄREN KERNEN BEI DER SPLINE-KOLLOKATIONSMETHODE ERSTEN GRADES

A. Pedas

Z u s a m m e n f a s s u n g

Dieser Artikel behandelt die Auflösung der Integralgleichung (1) nach der Methode (8). Der Kern der Gleichung (1) ist logarithmisch singulär und genügt den Bedingungen (2), (3) und (4). Es wird gezeigt, daß diese Methode gegen die Geschwindigkeit (12) konvergiert.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К. Рийвес

Кафедра математической статистики и программирования

Настоящая работа основывается на результатах работы [2] и указывает некоторые возможности их применения. Именно, в §I даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейная целевая функция была ограничена или ограничена сверху (снизу) на множестве точек выпуклого многогранника (см. [I], стр. II6). При этом предполагается, что множество определяющих элементов (см. [2], стр. I89) рассматриваемого многогранника уже найдено. В противном случае можно пользоваться аналогичными признаками, приведенными С.Н. Черниковым в [5] (стр. 9I-98).

В §2 указываются признаки экстремума линейной целевой функции на множестве вершин некоторого выпуклого многогранника, являющегося специальным сечением многогранника решений рассматриваемой задачи линейного программирования. Эти признаки являются уточнениями условий, описанных Т.Ху в [4] стр. 8I-84, 96-99).

§I. Условия существования решения задачи линейного программирования

I. Введение. Пусть имеется задача линейного программирования

$$a_{01}x^1+\ldots+a_{0n}x^n \longrightarrow \underset{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathcal{U}}{\mathrm{extr}}, \qquad (\mathrm{I.I'})$$

где многогранник $\mathcal{U}$ допустимых решений задан в n-мерном пространстве R_n системой

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x^\nu \leq a_{i0}, \quad i=1,\ldots,m. \qquad (\mathrm{I.2})$$

Отождествим в дальнейшем точку $\mathfrak{X}=(x^1,\cdots,x^n)$ с ее радиус-вектором, применяя для последнего то же обозначение. Тогда можно линейную целевую функцию задачи (I.I') записать в виде скалярного произведения векторов $A_0=(a_{01},\ldots,a_{0n})$ и $\mathfrak{X}=(x^1,\cdots,x^n)$, т.е.

$$a_{01}x^1+\ldots+a_{0n}x^n \equiv (A_0,\mathfrak{X}), \qquad (\mathrm{I.3})$$

и задача (I.I') записывается в виде

$$(A_0, \mathfrak{X}) \longrightarrow \underset{\mathfrak{X}\in\mathcal{U}}{\mathrm{extr}}. \qquad (I.I)$$

В [2](стр. I88-I89) было введено не ограничивающее общности предположение, что ранг матрицы коэффициентов системы (I.2) определяется ее первыми столбцами и равен $\rho (1 \leq \rho \leq \min(m,n))$, и было показано, что многогранник $\mathcal{U}$ можно представить в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + V(R_{n-\rho}). \qquad (I.4)$$

Здесь $\mathcal{U}_0$ является выпуклым многогранником ρ-мерного подпространства $R_\rho \subset R_n$, определенного уравнениями $x^{\rho+1} = \ldots = x^n = 0$, и задается системой

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^\alpha \leq a_{i0}, \quad i=1,\ldots,m, \qquad (I.5)$$

для которой предполагается, что для каждого i справедливо $\sum_{\alpha=1}^{\rho} |a_{i\alpha}| \neq 0$. Через $V(R_{n-\rho})$ обозначено $(n-\rho)$-мерное векторное пространство, дополняющее $V(R_\rho)$ с $R_\rho \supset \mathcal{U}_0$ до полного пространства $V(R_n)$ и имеющее базис $\{Z_t | t=\rho+1,\ldots,n\}$, составленный из базисных решений однородной системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^\nu = 0, \quad i=1,\ldots,m$$

(см. также [6], стр. II6-II8).

Во множество определяющих элементов многогранника $\mathcal{U}$ входят кроме векторов $Z_t (t=\rho+1,\cdots,n)$ еще вершины $\mathfrak{X}_u (u=1,\ldots,r_0;\ r_0 \geq 1)$ и направляющие векторы $\mathcal{Y}_s (s=1,\ldots,p_1;\ p_1 \geq 0$, где при $p_1 = 0$ — $\{\mathcal{Y}_s\} = \emptyset)$ неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0$. Если известны все определяющие элементы многогранника $\mathcal{U}$, то известен весь многогранник: любую точку $\mathfrak{X}$ из $\mathcal{U}$ можно по формулам представления (см. [6], стр. II8) выразить в виде

$$\mathfrak{X} = \sum_{u=1}^{r_0} \alpha_u \mathfrak{X}_u + \sum_{s=1}^{p_1} \beta_s \mathcal{Y}_s + \sum_{t=\rho+1}^{n} \gamma_t Z_t, \qquad (I.6)$$

где

$$\alpha_u, \beta_s \geq 0, \ \sum_{u=1}^{r_0} \alpha_u = 1 \quad -\infty \leq \gamma_t \leq +\infty \qquad (I.7)$$

и предполагается, что

$$\sum_{s=1}^{0} \beta_s \mathcal{Y}_s = 0, \quad \sum_{t=n+1}^{n} \gamma_t Z_t = 0. \qquad (I.8)$$

В дальнейшем пользуемся обозначениями, введенными в [2] (стр. I92-I93). Именно, через A (с нижними, а иногда также с верхними индексами) обозначена некоторая подматрица матрицы коэффициентов системы (I.5) или (I.2), а через $\bar{A}$ - подматрица соответствующей расширенной матрицы. При этом нижние индексы при A (или $\bar{A}$) указывают индексы строк матрицы $\|a_{i\alpha}\|$ или $\|a_{i\nu}\|$, входящих в A (или $\bar{A}$), верхние индексы вида $\alpha|t$ означают, что α-ый столбец заменен t-ым $(t=\rho+1,\dots,n,0)$ столбцом, а индекс вида $\hat{\alpha}$ означает, что α-ый столбец пропущен. Через d с соответствующими индексами обозначен определитель (иногда с подходяще выбранным знаком) матрицы A (или $\bar{A}$) и через q с такими же индексами - ранг рассматриваемой матрицы. Например, для любой вершины $\mathcal{X}_u$ многогранника $\mathcal{U}_0$ найдется последовательность индексов $(i_1(u),\dots,i_\rho(u))\subseteq\{1,\dots,m\}$, так чтобы

$$d_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}=\det A_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}=\begin{vmatrix} a_{i_1(u),1} & \dots & a_{i_1(u),\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho(u),1} & \dots & a_{i_\rho(u),\rho} \end{vmatrix}\neq 0$$

и координаты $x_u^\alpha\ (\alpha=1,\dots,\rho)$ точки $\mathcal{X}_u$ выражаются формулами

$$x_u^\alpha=\frac{d^{\alpha|0}{}_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}}{d_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}}, \tag{I.9}$$

где

$$d^{\alpha|0}_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}=\det A^{\alpha|0}_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}=\begin{vmatrix} a_{i_1(u),1} \dots a_{i_1(u),\alpha-1}\, a_{i_1(u),0}\, a_{i_1(u),\alpha+1} \dots a_{i_1(u),\rho} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i_\rho(u),1} \dots a_{i_\rho(u),\alpha-1}\, a_{i_\rho(u),0}\, a_{i_\rho(u),\alpha+1} \dots a_{i_\rho(u),\rho} \end{vmatrix}$$

и $x_u^{\rho+1}=\dots=x_u^n=0$ (см.[2], предложение I.7). Аналогично, при непустом множестве $\{y_s\}$ координаты $y_s^\alpha\ (\alpha=1,\dots,\rho)$ каждого вектора y_s получаются при подходящем выборе индексов $j(s), j_1(s),\dots,j_{\rho-1}(s)\in\{1,\dots,m\}$ где $d_{j(s)j_1(s)\dots j_{\rho-1}}\neq 0$, по формулам

$$\begin{aligned} y_s^\alpha &= -\operatorname{sgn} d_{j(s)j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}\, d^{\hat{\alpha}}_{j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)} = \\ &= (-1)^\alpha (\operatorname{sgn}\det A_{j(s)j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}) \det A^{\hat{\alpha}}_{j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}, \end{aligned} \tag{I.10}$$

а $y_s^{\rho+1}=\dots=y_s^n=0$. (см. [2], предложение I.8).

В описанных обозначениях векторы $Z_t\ (t=\rho+1,\dots,n)$ можно записать в виде

$$Z_t=\Big(\underbrace{\frac{d^{1|-t}_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}}{d_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}},\dots,\frac{d^{\rho|-t}_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}}{d_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}},0,\dots,0}_{t},1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-t}\Big), \tag{I.11}$$

где последовательность $(i_1(w),\dots,i_\rho(w))$ индексов из $\{1,\dots,m\}$ определяет некоторую произвольно фиксированную вершину $\mathcal{X}_w$ многогранника $\mathcal{U}_0$.

В изложении §2 важную роль будет играть подмножество множества индексов $\{1,\dots,m\}$, определенное для фиксированной последовательности $(i_1(u),\dots,i_\rho(u))$ при $d_{i_1(u)\dots i_\rho(u)}\neq 0$

следующим образом:

$$\mathcal{M}_{i_1(u)\ldots i_\rho(u)} = \{ i \in \{1,\ldots,m\} \mid \bar{d}_{i i_1(u)\ldots i_\rho(u)} = 0 \}. \tag{I.I2}$$

Мы дадим аналитические признаки для существования решения задачи (I.I) на множестве точек (I.2). Они представляются в виде неравенств, которым должны удовлетворять определители, составленные из коэффициентов системы (I.2), в частности (I.5), и координат вектора A_o, записанных во введенных выше обозначениях.

Пусть

$$\bar{A}_o = \max_{u=1,\ldots,r_0} (A_o, \mathfrak{X}_u), \tag{I.I3A}$$

$$\underline{A}_o = \min_{u=1,\ldots,r_0} (A_o, \mathfrak{X}_u). \tag{I.I3Б}$$

Известно (см. [6], стр. I3I), что если задача (I.I), (I.2) разрешима, то для задачи максимизации

$$\operatorname*{extr}_{\mathfrak{X} \in \mathcal{U}} (A_o, \mathfrak{X}) = \bar{A}_o, \tag{I.I4A}$$

а для задачи минимизации

$$\operatorname*{extr}_{\mathfrak{X} \in \mathcal{U}} (A_o, \mathfrak{X}) = \underline{A}_o. \tag{I.I4Б}$$

Отметим (см. [3], стр. 3I8), что если задача (I.I) является задачей максимизации целевой функции $(A_o, \mathfrak{X})$, то она имеет решение (I.I4A) только тогда, когда функция $(A_o, \mathfrak{X})$ ограничена по крайней мере сверху на множестве точек $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}$. Если же (I.I) – задача минимизации функции $(A_o, \mathfrak{X})$, то она имеет решение (I.I4Б) только тогда, когда функция $(A_o, \mathfrak{X})$ ограничена по крайней мере снизу на множестве точек $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}$. Поэтому вопрос об условиях существования решения задачи (I.I) равносилен нахождению условий ограниченности (хотя бы односторонней) целевой функции $(A_o, \mathfrak{X})$ на множестве точек $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}$.

Вычислим с учетом введенных обозначений и формул (I.I0), (I.II) величины $(A_o, \mathcal{Y}_s)$, (A_o, Z_t) соответственно, для любых $s = 1, \ldots, p_{1_n}$ и $t = \rho + 1, \ldots, n$. Именно,

$$\begin{aligned} (A_o \mathcal{Y}_s) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{o\nu} y_s^{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{o\alpha} y_s^{\alpha} = \\ &= -\operatorname{sgn} d_{j(s) j_1(s) \ldots j_{\rho-1}(s)} \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{o\alpha} d^{\hat{\alpha}}_{j_1(s)\ldots j_{\rho-1}(s)} = \\ &= -\operatorname{sgn} d_{j(s) j_1(s) \ldots j_{\rho-1}(s)} \, d_{o j_1(s) \ldots j_{\rho-1}(s)}, \end{aligned} \tag{I.I5}$$

$$\begin{aligned} (A_o, Z_t) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{o\nu} z_t^{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{o\alpha} d^{\alpha|-t}{}_{i_1(w)\ldots i_\rho(w)} (d_{i_1(w)\ldots i_\rho(w)})^{-1} + a_{ot} = \\ &= (-1)^{\rho} d^{t}_{o i_1(w)\ldots i_\rho(w)} (d_{i_1(w)\ldots i_\rho(w)})^{-1}, \end{aligned} \tag{I.I6}$$

где

$$d_{0j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}=\begin{vmatrix} a_{01} & \dots & a_{0\rho} \\ a_{j_1(s),1} & \dots & a_{j_1(s),\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j_{\rho-1}(s),1} & \dots & a_{j_{\rho-1}(s),\rho}\end{vmatrix},\quad d^t_{0i_1(w)\dots i_\rho(w)}=\begin{vmatrix} a_{01} & \dots & a_{0\rho} & a_{0t} \\ a_{i_1(w),1} & \dots & a_{i_1(w),\rho} & a_{i_1(w),t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho(w),1} & \dots & a_{i_\rho(w),\rho} & a_{i_\rho(w),t}\end{vmatrix}.$$

В силу линейности целевой функции задачи (I.I), (I.2) ее значение в произвольной точке $X\in\mathcal{U}$ выражается, с учетом (I.6), (I.I5) и (I.I6), формулой

$$(A_0,X)=\sum_{u=1}^{r_0}\alpha_u(A_0,X_u)-$$
$$-\sum_{s=1}^{\mu_1}\beta_s\left(\operatorname{sgn} d_{j(s)j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}\right)d_{0j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}+$$
$$+(-1)^\rho\left(d_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}\right)^{-1}\sum_{t=\rho+1}^{n}\gamma_t\, d^t_{0i_1(w)\dots i_\rho(w)}, \tag{I.I7}$$

где выполняются условия (I.7). Отсюда видно, что если известно множество определяющих элементов многогранника решений задачи (I.I), то для вычисления значений целевой функции в произвольной точке этого многогранника достаточно вычислить ее r_0 значений (A_0,X_u) в вершинах многогранника $\mathcal{U}_0$, а также μ_1 определителей $d_{0j_1(s)\dots j_{\rho-1}(s)}$ порядка ρ и $n-\rho$ определителей $d^t_{0i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ порядка $\rho+1$. Для предлагаемых нами условий ограниченности функции (A_0,X) на множестве точек многогранника $\mathcal{U}$ вычисляются только последние упомянутые $\mu_1+n-\rho$ определители.

Замечание. Из формулы (I.I7) следует по соглашению (I.8), что при пустых множествах $\{Y_s\}=\emptyset$, $\{Z_t\}=\emptyset$, т.е. при $\mu_1=0$ и $\rho=n$, функция (A_0,X) всегда ограничена на множестве точек многогранника $\mathcal{U}$ и тем самым задача (I.I), (I.2) всегда разрешима.

2. Условия ограниченности линейной функции на специальном подмножестве точек многогранника $\mathcal{U}$ при непустом $\{Z_t\}$.

Полученные нами основные результаты будут сформулированы в виде предложений, подробные доказательства которых опускаются для краткости изложения. В некоторых случаях указывается лишь общий принцип доказательства.

Предложение I.I. Пусть задача (I.I), (I.2) такова, что для системы (I.2) справедливо $\rho<n$. Пусть, кроме того, у многогранника $\mathcal{U}_0$, определенного соответствующей (I.2) системой (I.5), фиксирована некоторая вершина $X_w\in\{X_u\mid u=1,\dots,r_0\}$, которая соответствует последовательности $(i_1(w),\dots,i_\rho(w))$ индексов из $\{1,\dots,m\}$ (см. (I.9)). Функция (A_0,X) ограничена

на множестве точек

$$\mathcal{X}=\sum_{u=1}^{z_0}\alpha_u \mathcal{X}_u+\sum_{t=\rho+1}^{n}\gamma_t Z_t \in \mathcal{U} \tag{I.18}$$

тогда и только тогда, когда при всех $t=\rho+1,\dots,n$ имеют место

$$d^{t}_{0 i_1(w)\dots i_\rho(w)}=0. \tag{I.19}$$

Для доказательства предложения достаточно учесть выражения (I.18) и (I.16), а также условия (I.7).

<u>Следствие I.I</u>. Если при предположениях предложения I.I для всех $t=\rho+1,\dots,n$ выполнены условия (I.19), то задача линейного программирования (I.I), (I.2) эквивалентна задаче (I.I), (I.5).

Другими словами, если выполнены условия (I.19), то для решения задачи (I.I), (I.2) можно ограничиться рассмотрением случая, когда многогранником допустимых решений будет $\mathcal{U}_0\subset R_\rho$, определенный системой (I.5) (см. [6], стр. 126-127).

<u>3. Условия ограниченности линейной функции на множестве точек многогранника</u> $\mathcal{U}_0$. Соответствующие необходимые и достаточные условия даются в виде двух предложений, сформулированных отдельно для случаев $\rho=1$ и $\rho\geqslant 2$.

<u>Предложение I.2.</u> Для того, чтобы линейная функция $(A_0,\mathcal{X})$ была (хотя бы односторонне) ограничена на множестве точек многогранника $\mathcal{U}_0$, заданного системой (I.5) при $\rho=1$ (т.е. $a_{i_1 1}\neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы $a_{01}\neq 0$ и, кроме того, выполнялось одно из следующих условий:

I. $\mu_1=0$;

2. $\mu_1=1$, $\operatorname{sgn} a_{01}=\operatorname{sgn} a_{i_1 1}$;

3. $\mu_1=1$, $\operatorname{sgn} a_{01}=-\operatorname{sgn} a_{i_1 1}$,

где последовательность-индекс (i_1) удовлетворяет условиям предложения 2.3 из [2], т.е. определяет направляющий вектор полупрямой $\mathcal{U}_0$. При этом в случае I функция $(A_0,\mathcal{X})$ ограничена как сверху так и снизу; в случае 2 ограничена только сверху и в случае 3 - только снизу.

<u>Предложение I.3</u>. Линейная функция $(A_0,\mathcal{X})$ ограничена (хотя бы односторонне) на множестве точек многогранника $\mathcal{U}_0$, заданного системой (I.5) при $\rho\geqslant 2$ и ненулевом $A_0=(a_{01},\dots,a_{0\rho})$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1^0. либо $p_1=0$, либо $p_1 \neq 0$ и для каждого $s=1,\dots,p_1$ справедливо $d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)}=0$;

2^0. при $p_1 \neq 0$ существует по крайней мере один $s\in\{1,\dots,p_1\}$ так, что $d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)} \neq 0$ и для каждого $s=1,\dots,p_1$ либо

$$d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)}=0, \qquad (\text{I.20A})$$

либо

$$\operatorname{sgn} d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)} = \operatorname{sgn} d_{j(s)j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)}; \qquad (\text{I.20Б})$$

3^0. при $p_1 \neq 0$ существует по крайней мере один $s\in\{1,\dots,p_1\}$ так, что $d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)} \neq 0$ и для каждого $s=1,\dots,p_1$ либо

$$d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)}=0, \qquad (\text{I.21A})$$

либо

$$\operatorname{sgn} d_{0j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)} = -\operatorname{sgn} d_{j(s)j_1(s)\dots j_{\varsigma-1}(s)}, \qquad (\text{I.21Б})$$

где $j_1(s),\dots,j_{\varsigma-1}(s), j(s)$ удовлетворяют условиям предложения I.8 из [2], т.е. определяют различные направляющие векторы y_s $(s=1,\dots,p_1)$ неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0$. При этом в случае 1^0 функция (A_0, x) будет ограничена как сверху так и снизу, в случае 2^0 она ограничена только сверху и в случае 3^0 – только снизу.

Отметим, что в силу замечания, сделанного в конце первого пункта, первая половина условий случая 1^0 является тривиальным. Она включена в предложение для целостности изложения. Доказательство остальных основывается на формулах представления (I.6) точек $x\in\mathcal{U}_0$ и выражениях (I.17) при условиях (I.7).

§2. Признаки экстремума линейной целевой функции в фиксированной вершине многогранника $\mathcal{U}_0$

I. Вводные замечания. Пусть дана задача (I.I), (I.2) и известно, что эта задача разрешима, т.е. либо $\varrho=n$ и $p_1=0$, либо выполнены условия предложений I.I, I.3 (или I.2). Теперь мы дадим аналитические признаки для того, чтобы значение (A_0, x_w) целевой функции (I.I) в некоторой фиксированной вершине $x_w\in\{x_u \mid u=1,\dots,v_0\}$ многогранника $\mathcal{U}_0$, заданного системой (I.5), являлось экстремальным, т.е. дадим условия для того, чтобы

$$\operatorname*{extr}_{x\in\mathcal{U}} (A_0, x) = (A_0, x_w).$$

Целесообразно напомнить некоторые определения и результаты из работы [2]. Рассмотрим неупорядоченную последовательность, состоящую из ρ различных индексов $i_1, \ldots, i_\rho$, где $i_1, \ldots, i_\rho \in \{1, \cdots, m\}$ и обозначим ее через $(i_1, \ldots, i_\rho)$.

<u>Определение 2.I</u>. Неупорядоченная последовательность $(i_1, \cdots, i_\rho)$ называется J-вырожденной, если $g_{i_1 \ldots i_\rho} = \rho$ и существует точно J значений индекса $i \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_\rho\}$ таких, что $\bar{d}_{i i_1 \ldots i_\rho} = 0$ (здесь $J = 0, \ldots, m - \rho$). Число J называется порядком вырожденности последовательности $(i_1, \cdots \ldots, i_\rho)$ и обозначается через $J_{i_1 \cdots i_\rho}$. При $\rho = m$, когда множество $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \cdots, i_\rho\}$ является пустым, считается $J_{i_1 \ldots i_\rho} = 0$.

<u>Определение 2.2</u>. Пусть неупорядоченная последовательность $(i_1, \ldots, i_\rho)$ является J-вырожденной. Такая последовательность $(i_1, \cdots, i_\rho)$ называется $\mathcal{K}$-допустимой, если существует точно $\mathcal{K}$ значений индекса $i \in \{1, \cdots, m\} \setminus M_{i_1 \cdots i_\rho}$ таких что $\operatorname{sgn} \bar{d}_{i i_1 \ldots i_\rho} = (-1)^\rho \operatorname{sgn} d_{i_1 \ldots i_\rho}$ (здесь $\mathcal{K} = 0, \ldots, m - \rho - J$, учитывая (I.I2)). Число $\mathcal{K}$ называется порядком допустимости последовательности $(i_1, \cdots, i_\rho)$ и обозначается через $\mathcal{K}_{i_1 \cdots i_\rho}$. При $J_{i_1 \ldots i_\rho} = m - \rho$, когда множество $\{1, \cdots \ldots, m\} \setminus M_{i_1 \cdots i_\rho}$ является пустым, считается $\mathcal{K}_{i_1 \cdots i_\rho} = 0$.

<u>Предложение 2.I</u>. Пусть последовательность $(i_1, \cdots, i_\rho)$ такова, что $g_{i_1 \cdots i_\rho} = \rho$. Однозначно определенная точка $x_{i_1 \cdots i_\rho}$ пересечения гиперплоскостей Γ_i, заданных уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^\alpha = a_{i0}\,, \quad i \in M_{i_1 \cdots i_\rho}, \tag{2.I}$$

является вершиной многогранника U_0, заданного системой (I.5), тогда и только тогда, когда порядок вырожденности и порядок допустимости последовательности $(i_1, \cdots, i_\rho)$ удовлетворяют условию $J_{i_1 \cdots i_\rho} + \mathcal{K}_{i_1 \cdots i_\rho} = m - \rho$.

По предложению 2.I вершины $x_u \, (u = 1, \ldots, r_0)$ многогранника U_0, заданного системой (I.5), будут определены последовательностями $(i_1(u), \ldots, i_\rho(u))$, удовлетворяющими условию $J_u + \mathcal{K}_u = m - \rho$, где для краткости обозначено $J_{i_1(u) \cdots i_\rho(u)} = J_u$, $\mathcal{K}_{i_1(u) \cdots i_\rho(u)} = \mathcal{K}_u$. При этом по (I.I2) имеет место $|M_{i_1(u) \cdots i_\rho(u)}| = \rho + J_u$ и тем самым $\rho \leq |M_{i_1(u) \cdots i_\rho(u)}| \leq m$.

Пусть фиксирована вершина $x_w \in \{x_u \mid u = 1, \cdots, r_0\}$, определенная последовательностью $(i_1(w), \cdots, i_\rho(w))$ с $J_w + \mathcal{K}_w = m - \rho$. Рассмотрим множество векторов $\{A_i = (a_{i1}, \cdots, a_{i\rho}) \mid i \in M_{i_1(w) \cdots i_\rho(w)}\}$. Если J_w отличен от нуля, то может случиться, что некоторые из этих векторов A_i имеют пропорциональные координаты. Выберем из каждого класса векторов A_i с

пропорциональными координатами по одному вектору и обозначим их через $A_{k_\nu(w)}=(a_{k_\nu(w),1},\dots,a_{k_\nu(w),\rho})$, $\nu=1,\dots,r_1$.
В силу $d_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}\neq 0$, справедливо

$$\rho\le r_1\le\rho+J_w,$$

и поэтому можно считать, что

$$\{A_{i_\alpha(w)}\mid\alpha=1,\dots,\rho\}\subseteq\{A_{k_\nu(w)}\mid\nu=1,\dots,r_1\}.$$

Отсюда следует, что из векторов $\{A_{k_\nu(w)}\mid\nu=1,\dots,r_1\}$ можно составить по крайней мере один базис ρ-мерного пространства, содержащего многогранник $\mathcal{U}_0$. Следовательно, при $r_1>\rho$ любые $\rho+1$ из них, а тем более множество векторов $\{A_0,A_{k_\nu(w)}\mid\nu=1,\dots,r_1\}$ образуют линейно зависимые системы. Последнее утверждение записывается в ивде

$$A_0=\sum_{\nu=1}^{r_1}l^\nu A_{k_\nu(w)},\tag{2.2}$$

где $|l^1|+\dots+|l^{r_1}|\neq 0$, так как $A_0\neq 0$.

Фиксируем некоторый базис $\{A_{\varkappa_\alpha(w)}\mid\alpha=1,\dots,\rho\}\subseteq\{A_{k_\nu(w)}\mid\nu=1,\dots,r_1\}$, соответствующий последовательности $(\varkappa_1(w),\dots,\varkappa_\rho(w))$ с $d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}\neq 0$, и вычислим координаты векторов A_0 и $A_{k_\nu(w)}$ в этом базисе. Выражение (2.2) принимает вид

$$A_0=\sum_{\alpha=1}^{\rho}l^\alpha A_{\varkappa_\alpha(w)},\tag{2.3}$$

где $|l^1|+\dots+|l^\rho|\neq 0$, а для $A_{k_\nu(w)}$ имеют место выражения

$$A_{k_\nu(w)}=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\lambda_\nu^\alpha A_{\varkappa_\alpha(w)},\quad \nu=1,\dots,r_1.\tag{2.4}$$

В координатной записи как (2.3), так и каждое выражение (2.4) представляет собой линейную систему уравнений для определения, соответственно l^α и λ_ν^α $(\nu=1,\dots,r_1)$ с отличным от нуля определителем $d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}$. Решением системы (2.3) будет в описанных нами обозначениях

$$l^\alpha=(-1)^{\alpha-1}\frac{d_{0\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha(w)}\dots\varkappa_\rho(w)}}{d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}},\quad \alpha=1,\dots,\rho,$$

или, что то же самое,

$$l^\nu=(-1)^{\alpha-1}\frac{d_{0\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\alpha(w)\dots\varkappa_\rho(w)}}{d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}},\ k_\nu(w)\in\{\varkappa_1(w),\dots,\varkappa_\rho(w)\}\tag{2.5}$$

$$l^\nu=0,\ k_\nu(w)\in\{k_1(w),\dots,k_{r_1}(w)\}\setminus\{\varkappa_1(w),\dots,\varkappa_\rho(w)\}.$$

Для каждого $\nu=1,\dots,r_1$ система (2.4) имеет решение

$$\lambda_\nu^\alpha=(-1)^{\alpha-1}\frac{d_{k_\nu(w)\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha(w)}\dots\varkappa_\rho(w)}}{d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}},\quad \alpha=1,\dots,\rho.\tag{2.6}$$

Введем обозначение

$$L_{k_{v_1}(w)\dots k_{v_\rho}(w)}=\begin{vmatrix}\lambda^1_{k_{v_1}(w)} & \dots & \lambda^\rho_{k_{v_1}(w)}\\ \dots & \dots & \dots\\ \lambda^1_{k_{v_\rho}(w)} & \dots & \lambda^\rho_{k_{v_\rho}(w)}\end{vmatrix}, \tag{2.7}$$

тогда

$$d_{k_{v_1}(w)\dots k_{v_\rho}(w)}=L_{k_{v_1}(w)\dots k_{v_\rho}(w)}\, d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)} \tag{2.8}$$

при любых $k_{v_1}(w),\dots,k_{v_\rho}(w)$.

Из векторов $\{A_{k_1(w)},\dots,A_{k_{n_1}(w)}\}$ можно выбрать не более $C^\rho_{n_1}$ базисов $\{A_{\varkappa_1(w)},\dots,A_{\varkappa_\rho(w)}\}$ и для каждого из них справедливы (2.5) и (2.6). Если базис уже фиксирован, то для вычисления как l^α так и всех серий $\lambda^\alpha_v(k_v(w)\in\{k_1(w),\dots$ $\dots,k_{n_1}(w)\}\setminus\{\varkappa_1(w),\dots,\varkappa_\rho(w)\}$ надо вычислить ρ определителей порядка ρ.

<u>2. Условия существования экстремума в фиксированной вершине многогранника</u> $\mathcal{U}_0$. Предлагаемые нами условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы значение $(A_0,\mathfrak{X}_w)$ целевой функции $(A_0,\mathfrak{X})$ в вершине $\mathfrak{X}_w\in\mathcal{U}_0$ являлось решением задачи

$$(A_0,\mathfrak{X})\longrightarrow \operatorname*{extr}_{\mathfrak{X}\in\mathcal{U}_0}$$

при условиях предложения I.3. При условиях предложения I.I оно же будет решением задачи (I.I), (I.2).

<u>Предложение 2.2</u>. Пусть $\mathfrak{X}_w=\mathfrak{X}_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ является некоторой вершиной многогранника $\mathcal{U}_0$, заданного системой (I.5) при $\rho\geqslant 1$ и $M_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}=\{i\,|\,\bar d_{i i_1(w)\dots i_\rho(w)}=0\}\subseteq$ $\subseteq\{1,\dots,m\}$. Если можно выбрать последовательность $(\varkappa_1(w),\dots$ $\dots,\varkappa_\rho(w))\subseteq M_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ с $d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}\neq 0$ так, чтобы для каждого $\alpha=1,\dots,\rho$ выполнялось одно из условий

$$\begin{gathered} d_{0\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha}(w)\dots\varkappa_\rho(w)}=0,\\ \operatorname{sgn} d_{0\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha}(w)\dots\varkappa_\rho(w)}=(-1)^{\alpha-1}\operatorname{sgn} d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)},\end{gathered} \tag{2.9}$$

то имеет место $(A_0,\mathfrak{X}_w)=\bar A_0$. Если же можно выбрать $(\varkappa_1(w),\dots$ $\dots,\varkappa_\rho(w))\subseteq M_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ с $d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}\neq 0$ так, чтобы для каждого $\alpha=1,\dots,\rho$ выполняется одно из условий

$$\begin{gathered} d_{0\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha}(w)\dots\varkappa_\rho(w)}=0,\\ \operatorname{sgn} d_{0\varkappa_1(w)\dots\widehat{\varkappa_\alpha}(w)\dots\varkappa_\rho(w)}=(-1)^{\alpha}\operatorname{sgn} d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)},\end{gathered} \tag{2.10}$$

то справедливо $(A_0,\mathfrak{X}_w)=\underline{A}_0$. Имеет место и обратное: если функция $(A_0,\mathfrak{X})$ имеет в вершине $\mathfrak{X}_w=\mathfrak{X}_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ многогранника $\mathcal{U}_0$ максимум (минимум), то существует последовательность $(\varkappa_1(w),\dots,\varkappa_\rho(w))\subseteq M_{i_1(w)\dots i_\rho(w)}$ с $d_{\varkappa_1(w)\dots\varkappa_\rho(w)}\neq 0$

так, чтобы выполнялось (2.9) (соответственно (2.10)).

<u>Замечание I</u>. Если одновременно существуют последовательности, для которых удовлетворяются соответственно (2.9) и (2.10), то $\bar{A}_o = \underline{A}_o$ (в этом случае $\mathcal{U}_o$ является однозначно определенной точкой $\mathfrak{X}_w$ пространства R_ϱ).

<u>Замечание 2</u>. При $\varrho = 1$ считаем $d_{\varkappa_1(w)\cdots\varkappa_\varrho(w)} = d_{\varkappa_1(w)} = a_{\varkappa_1(w)\pi}$ и $d_{o\varkappa_1(w)\ldots\widehat{\varkappa_\alpha(w)}\cdots\varkappa_\varrho(w)} = d_o = a_{o1}$ $(\alpha = 1)$, если вершина $\mathfrak{X}_w$ "многогранника" $\mathcal{U}_o \subset R_1$ определена последовательностью $(\varkappa_1(w))$, удовлетворяющей условию предложения 2.I.

Здесь мы воспользовались обозначениями (I.13). Отметим, что для проверки условий (2.9) или (2.10) требуется вычислить не более $\varrho C^{\varrho}_{n_1}$ определителей $d_{o\varkappa_1(w)\cdots\widehat{\varkappa_\alpha(w)}\cdots\varkappa_\varrho(w)}$ порядка ϱ. Доказательство предложения основывается на двух леммах, которые следуют из введенных определений и формул (I.10), (I.15), (2.3), (2.8).

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть многогранник $\mathcal{U}_o$, заданный системой (I.5), имеет размерность $0 < \dim \mathcal{U}_o \leq \varrho$. Тогда из произвольно фиксированной вершины $\mathfrak{X}_w$ многогранника $\mathcal{U}_o$ выходит по крайней мере $\dim \mathcal{U}_o$ ребер (ограниченных или неограниченных) с направляющими векторами $\mathcal{Y}'_{s'(w)}$, $s'(w) = 1, \ldots, p'_1(w)$, $p'_1(w) \geq \dim \mathcal{U}_o$. Любая точка $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}_o$ представима в виде

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_w + \sum_{s'(w)=1}^{p'_1(w)} \beta_{s'(w)} \mathcal{Y}'_{s'(w)}, \quad \beta_{s'(w)} \geq 0. \tag{2.II}$$

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть многогранник $\mathcal{U}_o$ задан системой (I.5) в ϱ-мерном пространстве, и в последнем фиксирован базис $\{A_{\varkappa_\alpha(w)} \mid \alpha = 1, \ldots, \varrho\}$. Тогда значение функции $(A_o, \mathfrak{X})$ в любой вершине $\mathfrak{X}_u$ $(u = 1, \ldots, n_o)$ выражается формулой

$$(A_o, \mathfrak{X}_u) = (A_o, \mathfrak{X}_w) - |d_{\varkappa_1(w)\cdots\varkappa_\varrho(w)}| \sum_{\alpha=1}^{\varrho} {}^*\beta_\alpha(u)\, l^\alpha, \tag{2.I2}$$

где ${}^*\beta_\alpha(u) \geq 0$, а l^α вычисляются по (2.5).

Нами выработаны алгоритмы для решения задачи (I.I), (I.2) с учетом условий предложений I.I–I.3 и 2.2. Они являются модификациями алгоритма, который выработан нами для нахождения всех определяющих элементов многогранника $\mathcal{U}$, заданного системой (I.2). Последний алгоритм основывается на результатах работы [2].

Литература

I. Р и й в е с К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, <u>305</u>, 116–126.

2. Р и й в е с К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. III. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 187-216.
3. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. I. Москва-Ленинград, 1951.
4. Х у Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва, 1974.
5. Ч е р н и к о в С. Н., Линейные неравенства. Москва, 1968.
6. Ю д и н Д. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения. Москва, 1969.

Поступило
1 III 1976

LINEAARSE PLANEERIMISÜLESANDE LAHENDUVUSTINGIMUSTEST

K. Riives

R e s ü m e e

Kasutades töö [2] tulemusi, on antud analüütilised tunnused selleks, et üldine lineaarne planeerimisülesanne omaks lahendit. Vastavad tunnused on tarvilikud ja piisavad ning nad esitatakse võrratustena, mida peavad rahuldama determinandid, mille elementideks on peale sihifunktsiooni kordajate ka lubatavate lahendite hulktahukat määrava võrratuste süsteemi kordajad. Lõpuks on antud analüütilised tunnused määramaks, kas fikseeritud punktis sihifunktsioon saavutab ekstreemumi või mitte.

CONDITIONS FOR SOLVABILITY OF A LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

K. Riives

S u m m a r y

Using the results of [2], we give analytic conditions for solvability of a linear programming problem. The conditions are necessary and sufficient. They are presented in the form of algebraic conditions for the determinants, whose elements are coefficients of objective function and coefficients of the system of constraints determining the polytope of solutions of the problem. Finally we give analytic conditions for the extremum of the objective function in the fixed point of the polytope.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 431. ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ XX. На русском языке. Резюме на эстонском, английском и немецком языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редактор Э. Реймерс. Корректоры К.Усталу и О.Мутт. Сдано в печать 11/07 1977. Бумага печатная № 1 30х45 1/4. Печ. листов 10,25. Учетно-издат. листов 9,50. Тираж 400. МВ 00295. Типография ТГУ. ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, 14. Зак. № 866. Цена 1 руб. 40 коп.