

Tartu Ülikool
Sotsiaal- ja haridusteaduskond
Haridusteaduste instituut
Klassiõpetaja õppekava

Maret Vaabel

NELJANDA KLASSI ÕPILASTE MATEMAATIKATEADMISED,
TÜÜPILISED VEAD NING POISTE JA TÜDRUKUTE ERINEVUSED
ÜLESANNETE LAHENDAMISEL

magistritöö

Juhendaja: Anu Palu, Ph.D

Läbiv teema: matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel

KAITSMISELE LUBATUD

Juhendaja: Anu Palu, Ph.D.

.....

(allkiri ja kuupäev)

Kaitsmiskomisjoni esimees: Anu Palu, Ph.D.

.....

(allkiri ja kuupäev)

Tartu 2013

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 2

Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised, tüüpilised vead ning poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel

Resümee

Magistritöös uuriti neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmisi kolmel kognitiivsel tasemel: protseduurilised teadmised, kontseptuaalsed arusaamised ja probleemide lahendamine. Samuti uuriti ülesannete tüüpilisemaid lahendusi ning määrati veatüüp: õige, lahendamata, osaline, numbrid ja muu. Lisaks võrreldi poiste ja tüdrukute matemaatikateadmisi ja ülesannete lahendusi. Magistritöös kasutati uuringus „Eesti põhikooli efektiivsus“ kogutud andmeid. Valimisse kuulus 790 õpilast.

Antud töö tulemustest selgus, et matemaatikateadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel on omavahel seotud. Seda on kinnitanud ka mitmed varasemad uurimused (Ghazali ja Zakaria, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Ülesannete lahenduste analüüs näitas, et vigu tehti kõige enam probleemülesannetes ja kontseptuaalseid teadmisi nõudvates ülesannetes. Sooline võrdlus näitas, et tüdrukute teadmised matemaatikas olid tunduvalt paremad. Samas hästi ja halvasti lahendatud ülesanded olid neil samad ning veatüüp sõltus vastaja soost. Poisid jätvad sagedamini ülesanded lahendamata, samas tüdrukud lahendavad osaliselt. Õpilaste vigu analüüsid ja oma õppetööd paremini planeerides saavad õpetajad parandada nii poiste kui ka tüdrukute teadmiste tasemeid.

Märksõnad: matemaatikateadmised, kognitiivsed tasemed, protseduuriline teadmine, kontseptuaalne arusaamine, probleemide lahendamine, tüüpilisemad vead ülesannete lahendamisel, sooline erinevus ülesannete lahendamisel.

Fourth-grade students' mathematical knowledge, typical errors and task solving differences between boys and girls.

Abstract

In this master thesis fourth grade students mathematical skills in three cognitive domains, procedural knowledge, conceptual understanding and problem solving, were studied. Also most common answers were analysed and categorized to correct, unsolved, partially solved, numbers and various. Differences between boys and girls were brought out in three domains of mathematical skills as well as in most common errors in answers. 790 participants in research of Efficiency of Estonian primary school („Eesti põhikooli efektiivsus“) were used for analysis.

This study showed that mathematical knowledge in different cognitive domains are connected. This result is consistent with many other previous studies (Ghazali ja Zakaria, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). The analysis of different domains confirmed that most error were made in tasks which demanded problem solving skills and conceptual knowledge. In comparison of girls and boys, girls showed notably better results than boys. Although girls and boys made the same amount of errors in same tasks respectively as the girls were better in sum, the category of the errors were not the same. If a boy did not know how to solve the task he tended to leave it unsolved. A girl rather left it partially solved. Analysing these differences not only between sexes and planning their work accordingly teachers can enhance the results of boys and girls.

Keywords: mathematical knowledge, cognitive abilities, procedural knowledge, conceptual understanding, problem solving, common errors in tasks, sex differences in tasks

Sisukord

Resümee.....	2
Abstract.....	3
Sissejuhatus.....	5
<i>Matemaatikapädevus ja teadmiste hindamine kognitiivsel tasandil.....</i>	<i>6</i>
<i>Teadusmõistete kujunemine matemaatikas</i>	<i>8</i>
<i>Põhilised vead matemaatika ülesannete lahendamisel.....</i>	<i>9</i>
<i>Poiste ja tüdrukute matemaatikateadmiste erinevused.....</i>	<i>15</i>
<i>Uurimuse eesmärgid ja uurimisküsimused.....</i>	<i>17</i>
Metoodika.....	18
<i>Valim ja protseduur.....</i>	<i>18</i>
<i>Mõõtevahend</i>	<i>18</i>
<i>Andmetöötlus.....</i>	<i>19</i>
Tulemused.....	19
<i>Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised.....</i>	<i>19</i>
<i>Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel</i>	<i>20</i>
<i>Halvemini lahendatud ülesannete vastuste analüüs</i>	<i>22</i>
<i>Poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel.....</i>	<i>26</i>
Arutelu.....	29
Tänuõnad.....	33
Autorsuse kinnitus.....	33
Kasutatud kirjandus.....	34

Sissejuhatus

Tasemetööd näitavad, et poiste ja tüdrukute tulemused matemaatikas on erinevad. Poiste tulemused on madalamad kui tüdrukutel. 2011. aastal ebaõnnestus tasemetöös 54% poisse ja 46% tüdrukuid. Edukate seas on tase võrdsem, kuid ka nende hulgas on tüdrukud poistest edukamad (Taal, 2011). 2007. aasta tasemetööde tulemused on samuti tüdrukute kasuks (Jukk, 2007). Tasemetöö analüüsidest tuuakse välja keskmised tulemused ja vigu analüüsitakse vaid väga üldiselt. Ei selgu, kas poisid ja tüdrukud teevad samu või erinevaid vigu. Lisaks on Eestis uuritud tüüpilisi vigu aritmeetiliste ülesannete arusaamisest kolmandas ja neljandas klassis ning matemaatikateadmisi ja edukust eesti ja vene koolide näitel (Leopard, Kiuru & Palu 2011; Palu & Kikas, 2010; Palu, Suviste & Kikas, 2012).

Uurides ülesannete lahendusi matemaatikas, tuleb enne selgeks teha, millised on neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised. Matemaatikateadmisi hinnates saab ka õpilaste tehtavatest vigadest paremini ja analüütilisemalt aru. Kui on selge, kuidas on omavahel seotud õpilaste protseduuriline teadmine, kontseptuaalne arusaamine ja probleemide lahendamine, on võimalik vigu analüüsidest luua süsteem (National Assessment of Educational Progress, 2003; Samuelsson, 2010) ja parandada puudujääke vastavalt teadmiste tasemele. Lisaks nimetatud kognitiivsele tasemele saab uurida vigu aine sisu järgi, näiteks arvutamine, geomeetrilised kujundid, mõõtmine ja tekstülesanded. Magistritöös on sisust lähtuvad teemad toodud välja kognitiivsete tasemete kaupa. Selline ülesehitus võiks anda tööd lugevatele õpetajatele juhise, mis kohtades ja miks õpilased eksivad.

Õpilaste matemaatikateadmiste ja vigadele keskendumine teises kooliastmes aitaks näha õpetuse puudujääke. Õpilaste vigadest võime järeldada, kas õpetusviisid on efektiivsed, ja saame anda soovitusi õppetöö parandamiseks. Poiste ja tüdrukute tehtud vigade kõrvutamisel saadud info võimaldab õpetuse plaanimisel arvestada soolisi iseärasusi. Uurimuse eesmärk on anda ülevaade matemaatilistest teadmistest erinevatel kognitiivsetel tasemetel ning välja selgitada, mis vigu teevad neljanda klassi õpilased matemaatika ülesannete lahendamisel. Üks eesmärk on ka võrrelda poiste ja tüdrukute tehtud vigu ülesannete lahendamisel ja selgitada välja nende matemaatikateadmiste erinevused.

Matemaatikapädevus ja teadmiste hindamine kognitiivsel tasandil

Põhikooli riikliku õppekava lisa 3 (2010) defineerib matemaatikapädevust kui „matemaatiliste mõistete ja seoste tundmist, suutlikkust kasutada matemaatikat temale omase keele, sümbolite ja meetoditega erinevate ülesannete modelleerimisel nii matemaatikas kui ka teistes õppeainetes ja eluvaldkondades“. Matemaatikapädevus hõlmab matemaatika kognitiivseid ehk tunnetuslikke tasemeid. Põhikooli riiklik õppekava (2010), PISA (Programme for International Student Assessment), TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) ja paljud teoreetikud (Ghazali & Zakaria, 2011; National Assessment of Educational Progress, 2003; Samuelsson, 2010) jaotavad matemaatika teadmised tasemeteks just tunnetuslike erinevuste, mitte sisuliste teemade põhjal.

Põhikooli riikliku õppekava (2010), PISA (OECD, 2010), TIMSS-i 2003. aasta (Rahvusvaheline matemaatika ja loodusainete võrdlusuuring TIMSS, 2003) ja 2007. aasta (Martin, Mullis & Foy, 2008) uurimuste hindamise raamistikus kirjeldatud pädevuste järgi jaotatakse matemaatikateadmised kognitiivseteks tasemeteks. Erinevalt PISA-st (OECD, 2010) rõhutab põhikooli riiklik õppekava (2010) ja TIMSS (2003) veel aine valdkondadele. Kui TIMSS jagas 2003. aastal matemaatikateadmised nelja tunnetuslikku tasemesse – faktide ja protseduuride teadmine, mõistete kasutamine, rutiinsete e harjumuspäraste ülesannete lahendamine, arutlemine –, siis 2007. aasta TIMSS (Martin, Mullis & Foy, 2008) jagab matemaatikateadmised juba kolme kognitiivsesse tasemesse: teadmine, rakendamine ja arutlemine, mis on sarnane eelnevaga.

Kuna eri allikates (Martin, Mullis & Foy, 2008; OECD, 2010; põhikooli riiklik õppekava, 2010; Rahvusvaheline matemaatika ja loodusainete võrdlusuuring TIMSS, 2003) on tasemete jaotus väga sarnane, siis käesolevas töös on lähtutud kolmest matemaatikateadmiste kognitiivsest tasemest. Esimene tase on reprodutseerimine ehk lihtsamate matemaatiliste faktide, mõistete ja protseduuride taasesitamine. Teine tase on seostamine, mis kujutab endas eri elementide, mõistete ja teadmiste ühendamist ülesande lahendamiseks. Kolmas tase ehk kõige kõrgem tase on reflekteerimine, kus on ulatuslikum matemaatiline mõtlemine, hindamine ja arutlemine. Kokkuvõtlikult saab matemaatilisi teadmisi jaotada protseduurilisteks, kontseptuaalseteks ja probleemide lahendamiseks (National Assessment of Educational Progress, 2003).

Protseduuriline teadmine seisneb õpilaste võimes valida vastava ülesande jaoks õige tegevuskava, mis oleks efektiivne ja täpne, ning võimes seda kava rakendada. Siia juurde käib

ka lihtsamate operatsioonide sooritamine ilma tabelleid ja viiteid kasutamata (Samuelsson, 2010). Näiteks täisarvulise tehte $15 + 12 \cdot 7$ puhul on õpilasel meeles, et kõigepealt tuleb korrutada, siis liita, ning ta suudab arvutada peast. Protseduuriline teadmine ilmneb veel graafikute ning tabelite lugemisel ja koostamisel, geomeetriliste kujundite konstrueerimisel ja ümardamisel (National Assessment of Educational Progress, 2003; Samuelsson, 2010). Siinkohal ei pruugi õpilased luua tähenduslikke seoseid matemaatika eri osade vahel, vaid on panustatud päheõpitud toimingute meenutamisele.

Kontseptuaalne arusaamine on matemaatika põhimõtete, operatsioonide ja suhete üheaegne hõlmamine. Õpilased teavad rohkem kui ainult eraldiseisvaid fakte ja kasutatavaid meetodeid, nagu see kehtib protseduuriliste teadmiste puhul (Samuelsson, 2010). Näiteks ülesandes tuleks vahetada arvus 236,47 kümmelised ja sajalised ja öelda, mis arv saadi. Kontseptuaalne arusaamine esineb põhimõistete äratundmisel, võrdlemisel, rakendamisel ja kategoriseerimisel, mudelite ja diagrammide kasutamisel ja seostamisel, sümbolite ja märkide kasutamisel, mõistete ja seoste kujutamisel (National Assessment of Educational Progress, 2003; Samuelsson, 2010). Kontseptuaalne arusaamine eeldab õpilase võimekust mõistuspäraselt definitsioone ja seoseid rakendada (Ghazali & Zakaria, 2011). Ghazali ja Zakaria (2011) uurimus näitas, et kontseptuaalne ja protseduuriline võimekus arenevad vastastikusel mõjul. Kellel on varajane kontseptuaalne arusaamine, sellele ennustatakse ka tulevikus head protseduurilist arusaamist, ning kellel on hea protseduuriline arusaamine, neile ennustatakse paremat arengut ka kontseptuaalses arusaamises. Lisaks leiti veel, et õpilane, kellel on kõrge kontseptuaalne võimekus, on võimeline lahendama probleemülesannete tüüpe, mida ta varem näinud pole.

Probleemide lahendamise oskus on väga oluline matemaatikapädevuse saavutamiseks. Selle alla kuuluvad oskus siduda oma teadmisi uute situatsioonidega ja sünteesida selle kaudu uusi teadmisi, oskus probleeme püstitada ja neile lahendusstrateegiaid leida ning tulemusi analüüsida ja kontrollida. Probleemi lahendades peavad õpilased oskama analüüsimise ja üldistamise abil leida ratsionaalseid võtteid ning lahendust kriitiliselt hinnata (National Assessment of Educational Progress, 2003; Samuelsson, 2010). Probleemülesande äralahendamine pakub õpilastele rõõmu ja eduelamust. Vaatame näiteks järgmist ülesannet: „Rattapoel on laos jalgrattaid ja kolmerattalisi kokku 36. Neil on kokku 80 velge. Mitu jalgratast ja mitu kolmerattalist poes müüakse?“ (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) See on hea probleemülesanne sellepärast, et lahendamiseks ei ole ühte õiget strateegiat ning

lahenduseni jõudmiseks on vaja kasutada seostamist, arutlemisoskust ning loogilist mõtlemist. Lisaks on see uudne situatsioon, mida koolis üldjuhul ette ei tule. Probleemülesande lahendamiseks on vaja tekitada lapses huvi ja väljakutset, mis motiveeriks tegutsema. Probleemülesanded peaksid olema elulised ja matemaatika tunnis igapäevased, sest see õpetab last elus hakkama saama, kui neil on vaja enda probleeme lahendada (Dole, Wright & Zevenbergen, 2004).

Teadusmõistete kujunemine matemaatikas

Nagu kognitiivsete teadmiste puhul, nii on olemas ka mõtlemisel mõistete kujunemisetapid. Et jõuda teadusmõistete ja tervikliku arusaamiseni ning edasi süsteemimõisteni, on vaja aru saada tavamõistetest. Mõtlemine ei kindlusta alati õppimist, sest kõik mõisted ei ole püsivad ega muuda käitumises ega hoiakutes midagi (Krull, 2000). Kõik mõiste kujunemise etapid on olulised ka matemaatikas, sest mõiste annab tekstile tähenduse. Probleemide lahenduseni jõudmiseks on eriti oluline mõista tervikut, et luua midagi uut. Kui mõiste tähendus saab selgeks, saab protseduurilisest teadmisest edasi liikuda kontseptsioonide juurde ning hakata mõisteid kasutama ja neid omavahel seostama.

Kikas (2005) toob välja, et on olemas tavamõiste ja teadusmõiste, millest teise areng sõltub esimesest. Tavamõiste on mõiste, millega laps üldistab ja kirjeldab nähtut, see tuleb kogemuse ja sotsiaalsel teel. Teadusmõiste on aga keelesisene ning see võimaldab „näha nähtamatut“, kus ühele mõistele antakse ka teine tähendus. Näites kolmnurk on geomeetriline kujund, kus kolmnurk on tavamõiste ning geomeetriline kujund teadusmõiste. Lisaks sellele hakkavad tekkima teadusmõistetes tavamõistete rühmad ja süsteemid, kuid nende õppimisel tuleks õpilasi suunata, et ei tekiks valesid arusaamasid, sest igast uuest teadmisest võetakse juurde endale kõige sobivam mõiste (Kikas, 2005). Näiteks laps teab, et null on number, kuid õpetaja ütleb, et null ei ole tavaline number, sest see näitab hulkade puudumist ehk mitte millegi olemasolu. Tekib vastuolu, laps seletab ümber ja saab, et null ei ole mingi arv, sest ta ei näita mitte midagi. Õpilane leiab kompromissi (Allen, 2010; Kikas, 2005).

Samamoodi võivad tekkida ka matemaatikas vead, vastuolud, kus tõlgendatakse materjali erinevalt. Matemaatikas tekivad raskused ka siis, kui õpilane ei ole saanud piisavalt materjalist aru ehk pole tekkinud piisavalt teadusmõisteid ega jõudnud oma teadmistega õppimise II etappi. See võib olla ka põhjus, miks mõni õpilane ei jõua kontseptuaalsete teadmiste ülesannete õige lahendamiseni, sest faktiteadmised ja mõisted on puudulikud või

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 9

valed. Sellise riski vähendamiseks tuleks uut informatsiooni näitlikustada erinevate skeemide, jooniste, mõistete rühmitamisega ja varasemate teadmiste sidumisega.

Kui õpilastel on olemas piisav pagas teadusmõisteid, siis tuleb arvestada ka ülesannete taustaga ehk luua süsteemimõisteid. Kuid korrapärasele süsteemimõisteteni jõudmine võtab aega ja 3.–5. klassi õpilastele ei pruugi see jõukohane olla. Neil ei ole veel välja kujunenud põhjapanevat teadusmõistete pagasit. Lugesdes põhikooli riikliku õppekava lisa 3 (2010) on näha, et õpilaste mõistete kujunemisele ja arenemisele aidatakse koolis igati kaasa, sest õppimisel lähtutakse nn spiraali põhimõttest. See tähendab, et sama mõiste, väljend ja reegel tuleb kasutusele paljudes erinevates olukordades. Iga spiraali ringiga õpitakse midagi juurde ja kinnistatakse eelnevat.

Näiteks alguses õpitakse geomeetristest kujunditest selgeks ruut ja ristkülik ning tehakse übermõõdu- ja pindalaarvutusi. Järgmise ringiga võetakse juurde juba kuup ja risttahukas ning tehakse sarnaseid arvutusi, lisaks tuleb juurde ruumala. Kuna iga spiraali ring on keerulisem, siis on oluline kõik mõisted selgeks õppida, et ei tekiks vigu arusaamise tõttu. Samas peab seda jälgima ka õpetaja, sest pole mõtet minna ainekavaga edasi, kui varasem teema pole lastel selge. Sellest johtuvalt võib õpilastel matemaatikas vastuolud ja vastikus tekkida ning õpituolemused võivad langeda.

Põhilised vead matemaatika ülesannete lahendamisel

Matemaatikateadmiste testi vastuste vigadel võib olla palju põhjuseid. Näiteks võib eelnevale toetudes väita, et vigade põhjus võib olla tava- ja teadusmõistete vähesus või süsteemide puudus, mis on seotud kognitiivsete tasemete väljakujunemisega. Nagu eelpool mainitud, on matemaatilised teadmised jaotatud kolme tasemesse: protseduuriline teadmine, kontseptuaalne arusaamine ja probleemide lahendamine. Paljud uurimused on tõestanud, et need tasemed on omavahel väga seotud (Ghazali & Zakaria, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Samuelsson, 2010).

Et jõuda kõrgemale tasemele matemaatikast arusaamises, on vaja läbida eelnevad nii kognitiivsed kui ka mõistete arenemise etapid. Vögotski lähima arengu tsooni teooria põhjal saab väita, et kui õpilasele anda ülesanne, mis asub kõrgemal kognitiivsel tasemel, kui õpilane on saavutanud, siis suure tõenäosusega ei ole ta suuteline seda ülesannet lahendama (Krull, 2000). Vigade põhjal saab jälgida lapse arengut. Vastavalt sellele, mis viga on tehtud, saab järeldada, mis tasemes on tekkinud puudujääke.

Esimeses ja teises kooliastmes käsitletakse matemaatikas viit teemat: arvutamine, tekstülesanded, mõõtmine, geomeetrilised kujundid ning algebra (põhikooli riiklik õppekava, 2010). Algebraülesannete vigu antud töös ei vaadelda. Kuna algebra tuleb käsitlusele peamiselt teises kooliastmes ning töös uuritakse just esimese kooliastme lõpetanud õpilaste teadmisi, siis algebrateadmisi uurimuslikus osas kasutatud testis ei kontrollitud.

Erinevate teemade ülesandeid saab paigutada olenevalt ülesande raskusest kõikide kognitiivsete tasemete alla, kuid mõne ülesande tüüp iseloomustab üht kognitiivset taset teisest enam. Protseduuriliste teadmiste alla kategoriseeruvad pigem arvutamises ülesanded ja mõõtmises ülesanded, kuigi viimases teemas võib olla juba rohkem kontseptuaalseid ülesandeid kui arvutamise juures. Tekstülesanded on tavaliselt kõige raskemad ehk nõuavad probleemide lahendamise oskust, kuid olenevalt teksti keerukusest ja varem harjutatud ülesande tüübist võib ülesanne nõuda ainult kontseptuaalseid teadmisi. Geomeetriliste kujundite teema puhul on raskem välja tuua mõne kognitiivse taseme eelistust, sest ülesanded võivad võrdse tõenäosusega olla nii protseduurilised, kontseptuaalsed kui ka probleemsed. Geomeetriliste kujundite ülesandeid on väga erinevaid: alates lihtsatest protseduuridest, nagu mõõtmine ja joonestamine, kuni ruumi tajumise ja pöördkehade arvutusteni. Varasematest uurimustest leitud konkreetsed vead on välja toodud kognitiivsete tasemete kaupa, kuid seotud nelja õppepeatüki teemaga. Kognitiivsetest tasemetest on lähtunud ka uurimuslikus osas.

Protseduuriline teadmine. Suur hulk arvutamisel tehtavaid vigu on seletatavad puudulike protseduuriliste teadmistega. Vead liitmisel ja lahutamisel tekivad üleminekul ühelt kümnendsüsteemi järgult teisele (Geary, 2006; Ryan & Williams, 2007). Näiteks tehte $58 + 24$ puhul jäetakse üks kümneline üle kandmata. Viga tekib, sest pole aru saadud, et kümnelised koosnevad omakorda ühelistest. See ilmneb ka siis, kui on lahutamine ainult kümnelistest. Näiteks tehte $30 - 9$ puhul jäetakse üks kümneline vähemaks võtmata. Kui lastele on lahutamist õpetatud kui suuremast numbrist väiksema lahutamist, siis kahekohaliste arvude lahutamisel võib tekkida protseduuriline vastuolu (Dole, Wright & Zevenbergen, 2004; Geary, 2006; Ryan & Williams, 2007). Näiteks tehte $42 - 28$ puhul lahutatakse neljast kaks ja kaheksast kaks ning kokku saadakse kakskümmend kuus. Selliseid eksimisi on Ameerika 2. klassi riiklikul testil ühe ülesande näitel 62% (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Ryan ja Williams (2007) toovad välja veel, et palju vigu tekib naturaalarvude reeglite üleviimisel reaalarvude valdkonda (murrud, kümnendmurrud ja negatiivsed arvud).

Korrutamise ja jagamise kohta on tüüpiline arusaam, et korrutamisel muutub arv alati suuremaks ja jagamisel muutub arv alati väiksemaks. See on tõene enamiku naturaalarvude kohta, aga mitte kõigi reaalarvude puhul. Seetõttu on kerged tulema vead, nagu $0,2 \cdot 0,3 = 0,6$ ja $0,52 > 0,6$. Kümnenndkohtade arvutamine on lihtne, kui numbreid on sama palju (näiteks $1,3 + 3,5 = 4,8$), aga kümnenndike ja sajandike võrdlemine on raskem. Näiteks $2,5$ ja $2,32$ võrdlemisel arvatakse, et $2,5 < 2,32$, sest kolmkümmend kaks on suurem kui viis. Selline arvamine viib veel selliste vigadeni nagu $2,3 + 1,47 = 3,50$ ja $2,5 \cdot 2,5 = 4,25$, kus arvutatakse eraldi arvudega enne koma ja arvudega pärast koma. Väga sarnane on murdudega arvutades lugejate ja nimetajatega eraldi liitmine (Ryan & Williams, 2007), näiteks $7/12 + 6/13 = 13/25$. Mõistmise teeb veel raskemaks see, et korrutamise puhul see arutus kehtibki.

Mõõtmiste puhul peavad õpilased oskama kasutada füüsikalisi suurusi, teisendada, ümardada, hinnata suurusi ligikaudselt ning opereerida pindala ja ruumala arvutustega. Õpilastel on vaja mõõtmisoskust rakendada väga paljudes olukordades ka väljaspool kooli (Rahvusvaheline matemaatika ja loodusainete võrdlusuuring TIMSS, 2003). Füüsikaliste suuruste lisamine mõõtetulemusele ja teisendamine nõuavad kindlasti protseduuriliste oskuste olemasolu. Näiteks mehaaniliselt kilomeetreid meetriteks teisendades peab lihtsalt meelde jätma, et arvu tuleb korrutada tuhandega.

Objektide mõõtmisel on vaja skaalasiid lugeda. Esimesed raskused tekivad objekti ja mõõtetulemuse kokkuviiimisel (Ryan & Williams, 2007). Näiteks number 5 joonlaual näitab, et sinnamaani on objektil pikkust 5 ühikut, mida saab soovi korral ükshaaval kokku loendada. Kuid vähesed aduvad, et tegelikult on sinnamaani loendatud 6 numbrit: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sellest vähesest arusaamisest võib tekkida viga, kus teitel $18 - 4$ loendatakse tagasi neli korda 18, 17, 16, 15 ja saadakse vastuseks 15. Skaalade lugemisel ollakse harjunud, et kahe kriipsu vahe on 1 ühik, mitte 2 ega 4 ühikut. Seda viga tehakse harjumusest või sarnaste tüüpülesannete lahendamisel, sest skaala kasv 2 või 4 võrra on haruldasem (Ryan & Williams, 2007). Muidugi võib vea teha ülesande mitteläbilugemisest või ei vaadata tähelepanelikult pilti, mida peab üleandes kasutama.

Geomeetriliste kujundite äratundmine, joonestamine ja andmete lugemine kuuluvad lihtsamate ülesannete hulka. Andmete lugemisel tekkivad vead on sarnased mõõtmisel tekkivate vigadega. Samas võib juba äratundmise juures tekkida raskusi, sest õpitavaid kujundeid on üprisiski palju. Kui 2007. aasta matemaatika tasemetöös paluti võrrelda esemeid ruumiliste kujunditega, siis õpilased eksisid, sest neil ei olnud meeles geomeetriliste kujundite

täpsed nimetused. Esiteks pakuti ruumiliste kujundite nimetamise asemel tasapinnalisi termineid, mida on rohkem ja kauem õpitud (Jukk, 2007). Teine viga on teiste esemete nimetamine, mitte geomeetriliste terminite kasutamine. Näiteks aku pildi võrdlemisel ei tooda välja risttahukas, vaid esimese vea tüübi puhul ristkülik või teise vea tüübi puhul esemed nagu kast, karp. Lisaks protseduuriliste teadmiste vigadele on ka mitmeid vigu, mida sooritatakse kontseptuaalsete teadmiste tasemel.

Kontseptuaalne arusaamine. Arvutusülesannete jaotamine protseduurilisteks ja kontseptuaalseteks on vägagi sõltuv õpilaste vanusest. Kui ei ole loodud süsteemse tavamõistetelt teadusmõistetele üleminemisel, siis uue teema juures, mis on eelmisest keerulisem, tekivad vead (Kikas, 2005). Samas kui on ülesannete lahendamise tehnikad ja olulised mõisted omandatud, muutuvadki esialgsed kontseptuaalsed ülesanded protseduurilisteks. Näiteks õpilastel on selgeks õpitud, et arv 23 on numbrid kaks ja kolm ning sooritatakse tehteid vastavalt üheliste liitmis-lahutamise reeglile, kuid ei tea tähendust, et 23 koosneb kahest kümnelisest ja kolmest ühelisest (Geary, 2006). Keerulisemad ongi ülesanded, mis eeldavad ülesande püstitusel mõistete tundmist. Vigade põhjuseks on ka see, kui reeglite mõistmisel ei hoomata nende vahelisi suhteid. See tähendabki, et kontseptuaalne arusaamine on nõrk.

Kõige enam tekib vigu tekstülesannetes ja probleemülesannete lahendamisel, sest see on matemaatilise arusaamise kõrgeim tase ning hea tulemuse tagamiseks on vaja häid tulemusi eelnevates tasemetes. Antud juhul võib vahet teha rutiinsetel tekstülesannetel ja probleemülesannetel. Tekstülesanded ei pruugi, kuid võivad olla probleemülesanded. Tekstülesanded võivad olla rutiinsed, kindla strateegiaga, ühetehtelised ülesanded (Orton, 2004).

Paljud tekstülesanded jäävad kontseptuaalse arusaamise tasemele just nende strateegiate tõttu. Teatud tekstülesande tüüpe lahendatakse mitmeid kordi läbi ja need muutuvad rutiinseteks. Vead tekivad ka rutiinsetes tekstülesannetes, kas lohakuse või vähesese funktsionaalse lugemisoskuse tõttu. Palu ja Kikase (2010) uurimus näitab, et vead tekstülesannetes tulenevad eelkõige tekstist mitteamusaamisest ja seetõttu tehakse mingeid tehteid olemasolevate arvudega ega mõisteta tervikut. Näiteks ülesande „Maril on 17 õuna ning tal on 4 õuna rohkem kui Kallel. Mitu õuna on Kallel?“ tehte koostamisel võetakse abiks võtmesõna „rohkem“, mis viitab arvude liitmisele, kuid igas kontekstis ei tähenda see liitmist

(Palu & Kikas, 2010). Palju vigu võib tekkida just võtmesõnade „vähem“, „rohkem“ ja „korda“ valesti mõistmisest või ainult selle ja arvude vaatamisest.

Mõnel juhul tekib viga väärarusaamisest või tähenduse puudumisest. Näiteks kui ülesanne on leida mediaan ritta seatud suvalistest arvudest, siis osa õpilasi võivad võtta kohe aritmeetilise keskmise ilma, et oleks arve kasvavas järjekorras ritta seadnud. Mõni laps võib arvata, et mediaan on arve järjekorda panemata keskmine arv; ning teistel võiski olla osaline või lõpetamata ülesanne, sest sel hetkel oli ära unustanud ritta seadmise (Ryan & Williams, 2007). See on seotud õpilaste puuduliku üleminekuga tavamõistetelt teadusmõistele, sest teatakse küll omast kogemusest, et mediaan oli seotud keskmiste arvudega, aga ei teata, mida see täpselt tähendas ja mis oli selle mõiste kasutamise mõte.

Praktikas on näha, et kuigi mõõtmisülesannetes küsitud teisendused võivad olla lihtsad, siis mõõtmisega seotud mõistete kandmine reaalsesse ellu nõuab juba paremat arusaamist. Pealtnäha lihtne protseduuriline teisendamisülesanne võib muutuda kontseptuaalseks, kui õpilane arutleb enda vastust kontrollides, et meeter on väiksem ühik kui kilomeeter, seega mahub samale lõigule rohkem meetreid kui kilomeetreid ning vastuseks saadud arv peab olema suurem kui antud arv.

Neljandas klassis peavad õpilased oskama lisaks geomeetriliste kujundite teadmistele neid analüüsida ning anda geomeetriliste seoste põhjal selgitusi. Geomeetria valdkond eeldab head ruumilist ettekujutust, et opereerida koordinaattasandisse paigutatud kahe- ja kolmemõõtmeliste kujunditega ning nendevaheliste seostega (Rahvusvaheline matemaatika ja loodusainete võrdlusuuring TIMSS, 2003). Kui on tegemist kujundite analüüsimisega ja kujundite vahel seoste leidmisega, siis võib ülesande lugeda kontseptuaalse arusaamise juurde.

Ryan ja Williams (2007) toovad välja veel, et vead võivad tekkida näiteks tüüpülesannete või prototüüpiliste kujundite selgeks õppimisest. Prototüübiline kujund tähendab mõtetes kindla kontseptsiooni, mõiste esilekerkimist. Kui mõttes ette kujutada ristkülikut, siis arvatakse tavaliselt tahvi suhtes horisontaalselt $2/3$ külgede suhtega ristkülikut ning arvatakse, et ainult tüüpiline vaste ongi õige. Põhjus võib olla õpetaja kõige iseloomulikumate näidete toomine. Ruutu ei ole mõistlik ristküliku reegli õpetamisel näitena tuua. Näiteks kui palutakse ära märkida joonisel kõik ristkülikud, siis ei märgita ruute ega viltu asetsevaid ristkülikuid, kuna tüüpilisel ristkülikul on kaks paralleelset külge pikemad kui teised ja üldjuhul on pikemad need küljed, mis asetsevad taustpinna suhtes horisontaalselt

(Ryan ja Williams; 2007). Seega ei piisa tüüpiliste kujundite päheõppimisest, vaid vajalik on suurem arusaamine definitsioonidest. Suuremat arusaamist vajavad veel probleemülesanded, sest vastasel korral tekivad vead.

Probleemide lahendamine. Raskemad tekstülesanded ehk probleemülesanded erinevad oluliselt rutiinsetest tekstülesannetest. Probleemülesande lahendamise käigus kombineerib õpilane varem õpitud teadmisi, reegleid, lahendamisstrateegiaid, et lahendada tema jaoks tundmatuid olukordi. Probleemide lahendamine eeldab kõrget protseduurilist ja kontseptuaalset arusaamist, mistõttu seda ka eraldi kognitiivse tasemenähtuseks käsitletakse (Orton, 2004). Ka TIMSS-uuringu tulemustest saab järeldada, et Eesti lastele tekitab raskusi tekstülesanded ja seal oleva tekstist arusaamine, probleemi ja andmete sidumine, nende reaalselt kasutamine ning tulemuste tõlgendamine matemaatika keelde ja tagasi arusaadavaks tõlgendamine (Lepmann, 2010).

Eesti koolimatemaatika eeldab, et II kooliastmes õpetatakse probleemülesannete lahendamist erinevate strateegiate, skeemide ja etappide tutvustamise ja demonstreerimisega (põhikooli riiklik õppekava, 2010). See võimaldab õpilastel ise leida omale sobiva tee, kuidas jõuda ülesande lahenduseni. Probleemülesanded nõuavad mitmeid käike ning seetõttu sisaldavad mitmekülgset informatsiooni. Mõne definitsiooni kohaselt ongi probleemülesannete lahendamine ebareeglipärane ja nõuab iga kord erinevat reeglit ning see teeb selle väga raskeks. Pole olemas ühte ja õiget probleemülesande lahendamise strateegiat, kuid on olemas mõni lihtsam ja mõni keerulisem skeem.

Erinevate matemaatiliste skeemide kasutamise miinuseks võib olla liigne sümbolite tasand ja reaalsete situatsioonide lahendamine jääb nõrgaks (Pedaste & Sarapuu, 2010). Tüüpilisemad vead tulenevad sellest, et õpilased hakkava kasutama ainult antud arve ega keskenduta sisule. Näiteks kui ülesandes on antud, et laudas on 13 talle ja 15 vasikast, ning küsitud on hoopis taluniku vanust, siis enamik annaks vastuseks 28. Või keskendutakse hoopis ebaolulise informatsiooni tõlgendamisele ja seetõttu valitakse vale algoritm ülesande lahendamiseks (Pedaste & Sarapuu, 2010).

Probleemide lahendamist peetakse üheks matemaatika kõige praktilisemaks osaks. Tekstülesanded treenivad probleemülesande lahendamise oskust. Kui on lahendatud piisaval hulgal klassikalisi ülesandeid valikuliste strateegiatega, on tõenäolisem osata ka raskemaid probleemsituatsioone lahendada (Orton, 2004). Samas vigade tekkimine on loomulik osa

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 15
probleemide lahendamisel, kuid kindlasti peab rõhutama tulemuste hindamisele, sest sellega
võib avastada juba varasemates etappides tehtud vigu (Pedaste & Sarapuu, 2010).

Poiste ja tüdrukute matemaatikateadmiste erinevused

Teadlased (Cvencek, Meltzoff & Greenwald, 2011; Gurian & Ballew, 2004) väidavad, et meeste ja naiste ajud töötavad erinevalt, sest nende ehitus ja funktsioon on erinev. Poistel on enamjaolt parema ajupoolkera teatavad osad enam arenenud kui tüdrukutel ning vastupidi. Peab rõhutama sõna enamjaolt, sest näiteks ajupoolkera domineerivus võib sõltuda käelisusest, vanusest või kultuurist ja veel paljudest muudest teguritest. Kuid see ei tee üht teisest paremaks, vaid annab mõnel alal poisile eelised ning teinekord tüdrukule. Samas on ka erandeid ning mõne lapse aju on arenenud mitmekülgsemalt ja leidub mõlemale omaseid tunnusjooni. Poiste ja tüdrukute aju ehitusliku eripära tõttu võib neil olla erinev matemaatiline võimekus ning nad võivad lahendada samu ülesanded erinevalt, sealjuures olla sama edukad (Kreegipuu, 2002).

Gurian & Ballew (2004) toovad veel välja, et füsioloogiliste erinevuste tõttu on poistel parem ruumitaju ja abstraktne mõtlemine. See annab neile eelised mõõtmises, kartograafia- ja mehaanikaülesannetes. Nad loovad kujundeid, kujutavad end paremini ette kolmemõõtmelises ruumis ja suudavad paremini lahendada pöördkehadega seotud probleeme (Borodako & Afanasjev, 2005). Samas objektide muutust asukoha suhtes märkavad tüdrukud paremini kui poisid (Kreegipuu, 2002). Poistel on parem abstraktne mõtlemine, mis annab parema ettekujutuse matemaatilistest teoreemidest ja võrranditest. Samuti arvude ja loogiliste mudelitega töötamisel (Gurian & Ballew, 2004). Tulemuslikum on ka üksnes tahvli abiga õppimine.

Tüdrukud on seevastu keeleliselt arenenumad. Nad õpivad kiiremini lugema, neil on suurem sõnavara ja räägivad grammatiliselt paremini kui sama vanad poisid (Borodako & Afanasjev, 2005; Kreegipuu, 2002). Tüdrukud haaravad materjali kiiresti, aga iseasi, kas nad loovad kohe selle põhjal seoseid. Hea vahemälu aitab näiteks peastarvutamise juures või uut õpikuteksti lugedes. Poisid seevastu peavad selle esmalt enda jaoks tähenduslikuks muutma (Borodako & Afanasjev, 2005; Gurian & Ballew, 2004).

Peab rõhutama, et sellealased uurimused ja kultuuriline kogemus on aluse andnud stereotüüpsele käitumisele, et poisid on matemaatikas edukamad ja et see ei ole tüdrukute ala (Cvencek, Meltzoff & Greenwald, 2011). Sellest eelarvamusest eeldatakse, et poisid on

matemaatikas loomult paremad ning seetõttu nõutakse tüdrukutelt rohkem, mis tegelikult tõstab tüdrukute tulemuslikkust (Che, Wiegert & Threlkeld, 2011). Aga isegi kui eelpool nimetatud aju ülesehitusest tingitud eripärad tulevad esile, ei ole kindel, kuidas neid tõlgendada. Sama matemaatika ülesandega võivad lääne kultuuris paremini hakkama saada mehed, kuid Aasias saavad hoopis naised. Oskused arenevad vastavalt kultuuriliste ja individuaalsete vajaduste keskkonnas (Gardner, 2004).

Erinevusi on ka õpistiilides, kuna poisid on enamasti deduktiivse mõtlemisega ning tüdrukud induktiivse. Kontseptsioonide loomisel lähtuvad poisid üldpõhimõtetest ning sobitavad juurde üksikjuhte ning nende mõtlemine on kiirem kui tüdrukute oma. Et pakkuda võrdväärset kontrolltööd, tuleks lisada vabavastustega küsimusi, milles tüdrukud on tugevad ning valikvastustega küsimusi, mis on poiste plussiks (Gurian & Ballew, 2004).

Borodako ja Afanasjev (2005) toovad oma uurimuses välja, et poiste matemaatiline edu tüdrukute ees on aastatega vähenenud, ja uuemad uurimused leiavad, et erinevus puudub või tüdrukud on matemaatikas edukamad kui poisid. Eesti uurimused näitavad, et kolmanda klassi tasemetöodes on tüdrukute tulemused tervikuna poiste omadest olulisemalt paremad. Hinnete keskmised olid tüdrukutel ja poistel vastavalt 4,42 ja 4,3. Tüdrukud edestasid poisse eriti vormistamises ja hoolsuses (Jukk, 2007). Samas tulemuste paranemine ajas on uuringutes erinev. Kuuenda klassi tasemetöodes on sarnased tulemused nagu kolmandas klassis, kus tüdrukud olid oluliselt paremad, kuid vahe on väiksem. Keskmised punktid olid vastavalt 30,21 ja 29,04 (Oja, 2007).

Pärast II kooliastet sooritavad 15-aastased PISA testi ning 2006. aastal sooritatud test näitab tüdrukute ja poiste erinevuseks ainult 1 punkti. 2009. aasta test seevastu näitab juba olulist, 8-punktilist erinevust, aga poiste kasuks. Vanuseliselt on kuuenda klassi tasemetöö ja PISA vahel kaks aastat (Tire, Puksand, Henno, & Lepmann, 2010). Poiste tulemuste paranemine on märgatav ka Ameerikas tehtud uurimuses (Marshall & Smith, 1987), kus leiti, et kolmanda klassi tüdrukute tulemused on paremad kui poistel, aga see vahe on kuuendas klassis kadunud. Kuid üldine testitulemus ei pruugi anda lõplikku ülevaadet, sest testis võib olla väga palju erinevaid ja erineva tasemega ülesande tüüpe, millest osa sobivad rohkem poistele, osa tüdrukutele.

Uurimuse eesmärgid ja uurimisküsimused

TIMSS-i 2003. aasta uuringu alusel on Eesti laste teadmised jõudnud rahvusvahelisele kesktasemele (Lepmann, 2010) ja 2011. aasta kolmanda klassi tasemetööde keskmine lahendus oli 84,9% (Taal, 2011), mis on täiesti arvestatav tulemus. 2011. aasta tasemetööde tulemusi võrreldes on näha, et poiste ja tüdrukute matemaatikateadmised on erinevad. Poisid on saanud üleüldise madalama tulemuse. Lisaks sellele on tasemetööde ebaõnnestujate seas 8% rohkem poisse kui tüdrukuid. Hästi sooritanute vahel on erinevus väiksem (4%), kuid siiski tüdrukute kasuks (Taal, 2011). Sama näitavad ka 2007. aasta tasemetööde tulemused, kus tüdrukute keskmine hinne on 4,42 ja poistel 4,3 (Jukk, 2007).

Tasemetööde uurijad toovad analüüsides välja keskmised tulemused, kuid tüüpilisi vastuseid või vigu ülesannete lahendamisel analüüsitakse vaid väga üldiselt. Õpilaste vigadele keskendumise kaudu saame reflekteerida õpetusviiside efektiivsust ja anda soovitusi õppetöö parandamiseks. Keskmisest tulemusest ei selgu, kas poisid ja tüdrukud teevad samu või erinevaid vigu. Poiste ja tüdrukute tehtud vigade kõrvutamine võimaldab saada infot sooliste iseärasuste arvestamiseks õpetuse planeerimisel.

Käesoleva uurimuse peaesmärk on anda ülevaade neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmistest erinevatel kognitiivsetel tasemetel ning välja selgitada, mis vigu tehakse ülesannete lahendamisel. Eesmärk on ka võrrelda poiste ja tüdrukute tehtud vigu ülesannete lahendamisel ja selgitada välja nende erinevused.

Eesmärgi saavutamiseks püstitati järgmised uurimisküsimused:

1. Millised on neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised?
2. Millistes ülesannetes tehakse kõige enam vigu?
3. Millised on kõige tüüpilisemad vead ülesannete lahendamisel?
4. Milliseid vigu teevad tüdrukud kõige enam, milliseid poisid?

Metoodika

Valim ja protseduur

Magistritöös kasutatakse andmeid, mis pärinevad uurimusest „Eesti põhikooli efektiivsus“ (Toomela, 2009). Õpilaste valimi moodustavad 790 õpilast, kellest poisse oli 401 (50,8%) ja tüdrukuid 389 (49,2%). Kokku oli õpilasi 28 koolist ja 49 klassist eri koolitüüpidest üle Eesti. Testi sooritasid neljanda klassi õpilased 2008. aasta sügisel. Kõik õpilased osalesid vanema nõusolekul.

Õpilaste matemaatikateadmisi mõõdeti testiga, mille koostas Anu Palu (Tartu Ülikooli haridusteaduskonna õppejõud). Testid saadeti koolidesse ning testi viisid läbi klassiõpetajad, kes ise teste ei hinnanud. Testi sooritasid neljanda klassi õpilased kirjalikult matemaatika tunni ajal. Õpilastel oli testi lahendamiseks aega 45 minutit. Tulemused sisestas arvutisse käesoleva töö autor.

Mõõtevahend

Matemaatikateadmiste mõõtevahend oli test, mis koosnes 14 ülesandest. Matemaatikateadmiste testi koostamisel võeti aluseks põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava (2004) ning TIMMS-i 2007. aasta raamistikus kirjeldatud kognitiivsed tasemed: protseduuriline, kontseptuaalne ja probleemide lahendamine. Lahendusi hinnati dihhotoomselt, kus vale vastus ja vastamata jäetud ülesanne andis 0 punkti ja õige vastus andis 1 punkti. Ülesannetes tehtavaid vigu analüüsiti valede vastuste põhjal. Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis kinnitas testi usaldusväärsust ($\alpha = 0,823$).

Neljanda klassi testis oli neliteist ülesannet ja kolmel ülesandel alaülesanded, mis teeb kokku kakskümmend viis ülesannet. Põhikooli riikliku õppekava alusel kasutatakse uurimuses 12 ülesannet, sest ülesanded 13 ja 14 on õppekavavälised ja anti õpilastele lahendada eksperimendi mõttes. Ülesanded jagunevad ainetemadeks: arvutamine (5 ülesannet), mõõtmine ja aeg (4 ülesannet), tekstülesanded (3 ülesannet). Samad ülesanded jagunevad vastavalt kognitiivsete valdkondade järgi: protseduurilised (2 ülesannet), kontseptuaalsed (5 ülesannet) ja probleemide lahendamise ülesanded (4 ülesannet).

Näiteks protseduuride ja faktide tundmise ülesanne on “*Arvuta avaldise $64 - 26 + 14$ väärtus*”, kontseptuaalse ehk rakendamise ülesande näide on “*Kinos näidatava filmi algusajad on järgmised: 1. seanss 14.00; 2. seanss 15.30; 3. seanss 17.00. Mis kell algab 4.*

seanss?” ja probleemi lahendamise ülesanne on “*Juhan tahtis kalkulaatori abil liita 1379 ja 243. Ta sisestas ekslikult 1279 ja 243. Mida võiks teha, et viga parandada? a) lahutada 100, b) liita 1, c) lahutada 1, või d) liita 100.*”.

Andmetöötlus

Andmete töötlemisel kasutati statistikaprogrammi SPSS versiooniga 20.0 ja andmete sisestamiseks kasutati tabelarvutusprogrammi Open Office Calc. Uurimustöö andmeid analüüsiti kvantitatiivsete andmeanalüüsimeetoditega, kus on kasutatud kirjeldava statistika näitajaid: aritmeetiline keskmine (M), standardhälve (SD), minimaalne ja maksimaalne tulemus. Järeldava statistika tegemiseks kasutati aritmeetiliste keskmiste võrdlemisel dispersioonanalüüsi ANOVA, T-testi, Pearsoni korrelatsioonimaatriksit. Sageduste erinevust kontrolliti Hi-ruut testiga. Järelduste tegemisel võeti aluseks olulisusenivoo väärtusega $p < 0,05$, mis tähendab, et eksimistõenäosus on kuni 5%.

Tulemused

Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised

Selgitamaks neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmisi, tehti testist kirjeldavad analüüsid. Õpilaste keskmine tulemus oli $M = 0,60$ ($SD = 0,20$). Parim tulemus 1,00 oli 7 õpilasel (3 poissi ja 4 tüdrukut), mis teeb 0,9% kõikidest tulemustest. Halvima tulemuse 0,00 sai 2 õpilast (1 poiss ja 1 tüdruk), mis teeb 0,3% kõikidest tulemustest. Õpilaste keskmised tulemused erinesid statistiliselt oluliselt (T-test; $p < 0,01$). Poiste ja tüdrukute keskmiste tulemuste vahel oli olemas statistiliselt oluline erinevus (T-test, $p < 0,05$). Poiste keskmine tulemus ($M = 0,59$; $SD = 0,20$) oli väiksem kui tüdrukute oma ($M = 0,62$; $SD = 0,19$).

Uuringus osales 49 klassi ning keskmiselt lahendas ühes klassis korraga testi 16 õpilast. Vastuste arv klassi kohta oli maksimaalselt 29 ja minimaalselt 3. Dispersioonanalüüs ANOVA näitas, et klasside keskmiste tulemuste vahel oli statistiliselt oluline erinevus ($F = 7,547$; $p < 0,01$). Klasside minimaalne keskmine tulemus oli $M = 0,20$ (4 õpilast klassis) ja klasside maksimaalne keskmine tulemus oli $M = 0,84$ (27 õpilast klassis).

Ei leitud ühtegi ülesannet, mille kõik õpilased veatult lahendasid (tabel 1). Koos alaülesannetega loetuna lahendati viieteistkümnest ülesandest kuus ülesannet alla 50%. Sellest kaks ülesannet 7 ja 11, mis kuuluvad probleemülesannete juurde, lahendati alla 30% ulatuses

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 20

õigesti. Üle 50% lahendati õigesti kaheksa ülesannet ja viis ülesannet lahendati üle 80% ulatuses õigesti. Kõige paremini lahendati protseduuriliste teadmiste juurde kuuluvad arvutusülesanded 3b ja 1, mille lahendatavus oli 85%.

Tabel 1. Ülesannete keskmised tulemused kogu valimi paremusjärjestusena

	Kogu valim (N = 790)		Tüdrukud (N = 389)		Poisid (N = 401)	
	M	SD	M	SD	M	SD
Ülesanne 7	,17	,38	,18	,38	,17	,37
Ülesanne 11	,23	,42	,24	,43	,22	,42
Ülesanne 2	,41	,49	,44	,50	,38	,49
Ülesanne 10	,41	,49	,39	,49	,43	,50
Ülesanne 3c	,46	,50	,45	,50	,46	,50
Ülesanne 8	,49	,50	,51	,50	,47	,50
Ülesanne 3a	,57	,50	,62	,49	,52	,50
Ülesanne 4	,67	,47	,71	,45	,64	,48
Ülesanne 9	,72	,45	,72	,45	,73	,45
Ülesanne 5	,73	,45	,77	,42	,69	,46
Ülesanne 3d	,81	,39	,82	,38	,80	,40
Ülesanne 12	,82	,39	,84	,37	,79	,41
Ülesanne 6	,82	,38	,83	,38	,82	,39
Ülesanne 3b	,85	,36	,85	,35	,85	,36
Ülesanne 1	,85	,35	,86	,35	,85	,36

Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel

Matemaatikateadmiste testi 12 ülesannet sai kognitiivsete tasemete järgi jaotada kolme gruppi: protseduurilised, kontseptuaalsed ja probleemülesanded. Protseuurilisi teadmisi nõudvate ehk arvutusülesannete hulka kuulusid ülesanded 1 ja 3, kus ülesandel 3 olid veel alaülesanded. Selles grupis eristusid kergemad ja raskemad ülesanded. Ülesanded 3b ja 3d olid kergemad ja ülesanded 1, 3a ja 3c olid keerulisemad arvutusülesanded, mis pakkusid õpilastele väljakutset.

Teise, kontseptuaalset teadmist nõudvate ehk teadmiste rakendamise ülesannete gruppi kuulusid kuus kergemat ja rutiinsemat ülesannet. Neid ülesandeid käsitleti tüüpülesannetena ja õpilased lahendasid neid koolis korduvalt. Ülesandes 2 oli vaja tunda mõisteid ja panna kokku arv. Ülesanne 5 oli tüüpiline tekstülesanne. Ülesanne 8 oli arvutusülesanne, kus ülesandest pidi tekkima üldisem arusaamine. Ülesanne 9 ja 10 olid aja mõistet nõudvad tekstülesanded. Ülesandes 12 pidi tundma pikkusühikuid.

Kolmandas, probleemülesannete grupis oli neli ülesannet, mis olid pigem keerulised ja mitterutiinsed. Seal pidid õpilased tegema mitmeid eristmelisi arvutusi või oma teadmisi

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 21 sünteesima ja looma ise tehteid. Nendeks ülesanneteks oli ülesanne 4, kus oli vaja ise kolmest arvust võrdus koostada; ülesanne 6, kus pidi mõistma ja parandama tehet; ülesanne 7, kus pidi mõistma teksti ja leidma rohkem kui ühe lahenduse, ja ülesanne 11, kus oli vaja teada ringi mõisteid ning rakendada etteantud andmeid.

Probleemülesannete lahendatavus (tabel 2) oli märgatavalt kehvem kui kontseptuaalsete ja protseduurilisi teadmisi nõudvate ülesannete puhul, nende tasemete vahel oli statistiliselt oluline erinevus ($p < 0,01$). Esimese grupi ehk protseduuriliste ülesannete lahendatavus oli kõige parem. Kontseptuaalsete ülesannete keskmine tulemus oli 10% kehvem kui esimesel grupil. Probleemülesannete lahendatavus oli kõige madalam ning selle keskmine tulemus jäi isegi alla 50%. Ülesannete lahendatavuses kognitiivsete tasemete gruppide ja soo järgi oli näha, et tüdrukute tulemused olid paremad kui poiste tulemused (tabel 2), kuid see ei olnud statistiliselt oluliselt erinev ($p = 0,11$ ehk $p > 0,05$). Kõikides ülesannete gruppides olid tüdrukute tulemused ainult 2–3% paremad.

Tabel 2. Kognitiivsete tasemete järgi jaotatud ülesannete gruppide lahendatavus kogu valimi ning tüdrukute ja poiste võrdlusena

	Kogu valim (N = 790)		Tüdrukud (N = 389)		Poisid (N = 401)	
	M	SD	M	SD	M	SD
Protseduurilised	,71	,22	,72	,21	,70	,22
Kontseptuaalsed	,60	,27	,61	,26	,58	,27
Probleemülesanded	,48	,26	,49	,26	,46	,26

Märkus. Statistiline oluline erinevus eri kognitiivsete tasemete vahel kogu valimi kohta $p < 0,01$. Statistiline oluline erinevus poiste ja tüdrukute vahel $p > 0,05$

Analüüsid kognitiivsete tasemete ülesannete gruppe Pearsoni korrelatsioonimaatriksiga, oli gruppide vahel näha statistiliselt olulist seost ($p < 0,01$), mida saab üldistada üldkogumile. Pearsoni korrelatsioonimaatriks näitas, et tunnuste vahel oli keskmise tugevusega positiivne seos. Kontseptuaalset teadmist nõudvate ülesannete ja probleemülesannete lahendamise vahelise seose kordaja oli kõige kõrgem ($r = 0,5$). Kontseptuaalset teadmist nõudvate ülesannete ja protseduurilist teadmist nõudvate ülesannete lahendamise vahelise seose kordaja oli natuke madalam kui eelmisel ($r = 0,43$). Kõige madalam, kuid siiski keskmise tugevusega seos oli protseduurilist teadmist nõudvate ülesannete ja probleemülesannete lahendamise vahel ($r = 0,39$).

Halvemini lahendatud ülesannete vastuste analüüs

Kõikide ülesannete enim kordunud vastused kodeeriti veatüüpideks. Välja jäeti ainult ülesanne 1, sest see oli lihtne protseduurilisi teadmisi nõudev ülesanne ja andmeid sisestades lisati kohe ainult õige või vale vastus. Nelja kõige halvemini lahendatud ülesande (tabel 1) enim kordunud vastuseid analüüsiti lähemalt ning tulemused on toodud vastava ülesande ja erinevate kodeeringute kaupa tabelites 3–6. Veatüüpe tuli kokku neli, millele lisandus õige vastuse kodeering. Esimene veatüüp on *lahendamata*, kus õpilased oli jätnud ülesande pooleli või täiesti tegemata. Teine on *osaline* vastus, kus õpilane ei olnud täitnud kogu töökorraldust või oli mõne seose ära unustanud. Kolmas on *numbrid*, kus õpilane ei olnud aru saanud teksti sisust või puudusid teadmised mõnest mõistest ning õpilane arvutas valesti. Viimane veatüüp on *muu*, kus on kõik ülejäänud vastused, mille esinemise sagedus oli väiksem kui 1%. Need jäeti välja sellepärast, et need ei kuulu enam tüüpiliste vastuste hulka. Sealsete vastuste sagedus oli 1 õpilane kuni 9 õpilast ühe vastusevariandi kohta.

Kõige enam oli tehtud vigu ülesandes 7 (tabel 3), kus täiesti õigesti oli vastanud 17% lastest. Ülesanne 7 kuulub probleemülesande juurde, kus oli vaja aru saada tekstist ning leida mitu vastusevarianti. Vastuseks oli leitud enamasti üks vastusevariant, mis teeb ülesande osaliselt õigesti lahendatuks, kuid mitte piisavalt, et õigeks lugeda. Peale selle oli puudulik teadmine sulgude kasutamisest. Enamik vigu kategoriseerus *osalise* veatüübi alla, sest ülesandes kasutati osaliselt õiget lähenemist ning ülesanne sooritati mõnevõrra õigesti, kuid mitte piisavalt, et täiesti õigeks lugeda. Ülesande 7 töökorraldus oli järgmine: „Mardil oli poodi minnes 100 krooni. Ta kulutas sellest 35 kr maiustustele ja 12 kr joogile. Milliste avaldistega saad arvutada järelejäänud rahasummat? Ringita vastav täht või tähed.

- a) $100 - 35 - 12$, b) $100 - 35 + 12$, c) $100 - (35 + 12)$,
 d) $100 - (35 - 12)$, e) $(100 - 35) - 12$, f) $100 - 12 - 35$.“

Tabel 3. *Ülesande 7 vastuste tüübid ja nende esinemise sagedus protsentides*

Vastus	Tüüp	Kirjeldus	Sagedus	Kõik	Tüdrukud	Poisid
acef	Õige	Ülesanne lahendatud õigesti	137	17,3%	18%	16,7%
-	Lahendamata	Ülesandel puudub vastus	32	4,1%	1,5%	6,5%
c või a või e või f	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti vaid osaliselt. Leiab ühe matemaatilise lahenduse.	130 105 25 10	34,3%	35,7%	32,6%
acf või	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid	30	8,5%	9,7%	7,2%

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 23

aef või ce või af		õigesti vaid osaliselt. Leiab osa matemaatilisi lahendusi.	16 11 10			
adef või acdef või bc või abcef või abcdef	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti, kuid on sulgude mõiste avaldises puudulik.	41 37 17 10 10	14,7%	16,1%	12,9%
d või b	Numbrid	Rakendab tekstis esinevaid mõisteid ja seoseid puudulikult ning arvutab valesti.	60 17	9,8%	8%	11,4%
Muu vastus	Muu	Lisaks veel 28 erinevat vastust	92	11,3%	11%	12,7%

Teiseks tehti palju vigu ülesandes 11, kus õigesti oli vastanud 23% lastest (tabel 4). Ülesanne 11 kuulub samuti probleemülesande juurde, sest selle lahendamiseks oli õpilasel vaja mõista teksti sisu ning välja lugeda andmed, mis oli antud, ning vastavalt tööülesandele teadmisi reprodutseerida. Lisaks väljalugemisele pidi õpilane ka teadma ja oskama kasutada ringiga seotud mõisteid. Teksti mõistmisest tekkis palju vigu, sest juhuslike tehteid antud arvudega sooritati palju. Et õiget vastust saada, tuli selles ülesandes arvutada kahest ringist läbiva murdjoone AB pikkus, mitte mõõta. Siiski osa õpilasi sooritas mõõtmise ning vead tekkisid valesti mõistmisest või halvasti mõõtmisest. Ülesande 11 tüüpilisemad vead kategoriseerisid kõige enam numbrite veatüübi alla, sest ülesandes ei kasutatud õigeid võtteid ning saadi täiesti vale vastus. Ülesande 11 töökorraldus oli järgmine: „Leia joonisel oleva murdjoone AB pikkus, kui väikese ringi raadius on 6 mm ja suure ringi raadius on 13 mm.“

Tabel 4. Ülesande 11 vastuste tüübid ja nende esinemise sagedus protsentides

Vastus	Tüüp	Kirjeldus	Sagedus	Kõik	Tüdrukud	Poisid
38 mm või 3 cm 8mm	Õige	Ülesanne lahendatud õigesti	184	23,3%	24,4%	22,2%
.	Lahendamata	Ülesandel puudub vastus	91	11,5%	7,7%	15,2%
19 mm või 19 või 1cm 9 mm	Numbrid	Liidab lihtsalt arvud kokku. Ei näe ülesande tervikut või puuduvad ühikud.	156 15 11	23%	27%	19,2%
4 cm või 40 mm	Numbrid	Ei tee arvutusi vastavalt tekstile. Mõõdab joonlauaga murdjoone pikkuse ning tekivad mõõtmisvead.	47 10	7,2%	6,2%	8,2%
39 mm või 37 mm või 3 cm9 mm	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti, kuid teeb arvutamisevigu.	21 15 15	6,5%	6,2%	6,7%

Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 24

38	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti, kuid puuduvad ühikud.	14	1,8%	2,3%	1,2%
Muu vastus	Muu	Lisaks veel 127 erinevat vastust	211	26,7%	26,2%	27,3%

Ülesanne 2, mis kuulus kontseptuaalseid teadmisi nõudvate ülesannete juurde, lahendati mõnevõrra paremini kui eelmine (41%) (tabel 5). Selles ülesandes oli vaja kirjutada arv vastavalt arvu järkudele ja sooritada mõni arvutus. Samuti nõudis ülesanne õpilastelt tekstist arusaamist ning arvu järgu mõiste tundmist. Õpilaste teadmised olid väga erinevad ning vastused mitmekülgised. Enamasti läksid tüüpilised vead osalise veatüübi kategooriasse, sest õpilased olid lahendanud ülesande osaliselt õigesti ning kaks numbrit kolmest olid arvus õigesti määratud. Allolevas tabelis on välja toodud tüüpilisemad vastused. Ülesande 2 töökorraldus oli järgmine: „Kirjuta arv, milles ühelisi on 6, kümnelisi 2 võrra rohkem ja sajalisi 2 korda vähem kui ühelisi.“

Tabel 5. Ülesande 2 vastuste tüübid ja nende esinemise sagedus protsentides

Vastus	Tüüp	Kirjeldus	Sagedus	Kõik	Tüdrukud	Poisid
386	Õige	Ülesanne lahendatud õigesti.	321	40,6%	43,7%	37,7%
-	Lahendamata	Ülesandel puudub vastus.	33	4,2%	3,6%	4,7%
486	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti vaid osaliselt (kasutab mõiste “korda vähem” asemel mõistet “võrra vähem”).	190	24,1%	26,2%	21,9%
286 686	või Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti vaid osaliselt (ei oska kasutada mõistet “korda vähem”).	10 17	3,5%	3,3%	3,5%
426 326	või Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti vaid osaliselt (määrab ainult ühelised / ühelised ja sajalisi).	27 10	4,7%	3,1%	6,2%
226	Numbrid	Ei tee tehteid. Kirjutab lihtsalt tekstis olevad numbrid ritta.	9	1,1%	0,8%	1,5%
Muu vastus	Muu	Lisaks veel 92 erinevat vastust.	173	21,8%	19,3%	24,5%

Teine kontseptuaalseid teadmisi nõudev ülesanne oli ülesanne 10, mille tulemus oli eelmisega sama (41%) (tabel 6). Ülesanne 10 kuulub nagu eelminegi kontseptuaalseid teadmisi nõudvate ülesannete juurde. Selles ülesandes oli vaja aru saada tekstist, tunda aja mõisteid ning teha mitmeid ajaarvutusi, osata kasutada 60nd-süsteemi. Vigade variatiivsus oli väga suur ja tüüpilisemaid vastuseid oli vähem. Põhilised vead tulenesid 60nd-süsteemi unustamisest või teadmatusest, ebapiisavast funktsionaalsest lugemisest, matemaatilise teksti

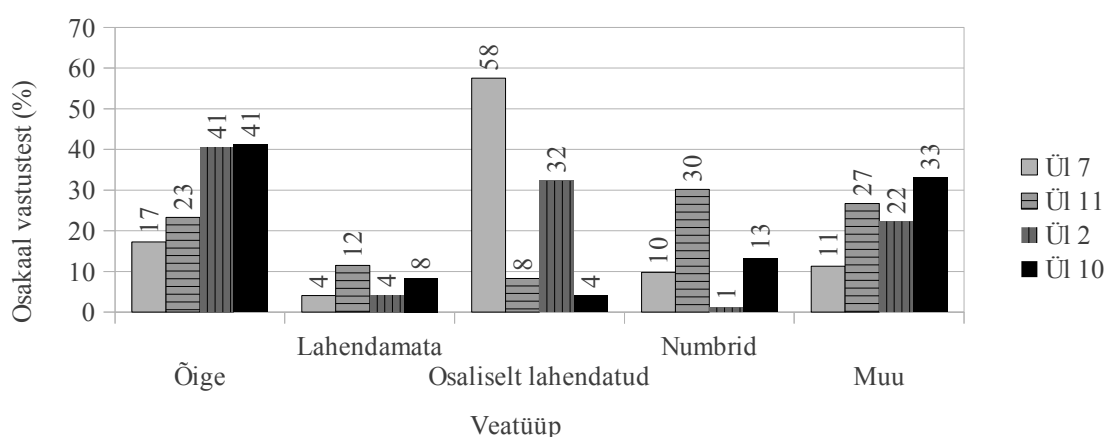
Matemaatikateadmised, vead ja erinevused ülesannete lahendamisel 25

mittearusaamisest ja ühikute puudumisest või valesti määramisest. Selle ülesande tüüpilisemad vead läksid kõige enam numbrite veatüübi hulka, sest tulemuse saamiseks sooritati mingid tehted arvudega, nägemata ülesande tervikut. Peale selle tehti väga palju vigu ühikute mittekasutamise või valesti kasutamise tõttu.

Ülesande 10 tööjuhend oli järgmine: „Sandra harjutab klaverimängu 6 korda nädalas. Ta harjutab kolmel päeval 45 minutit päevas ja kolmel päeval 20 minutit päevas. Kui kaua nädalas harjutab Sandra klaverit?“

Tabel 6. Ülesande 10 vastuste tüübid ja nende esinemise sagedus protsentides

Vastus	Tüüp	Kirjeldus	Sagedus	Kõik	Tüdrukud	Poisid
3 h 15 min või 195 min	Õige	Ülesanne lahendatud õigesti.	325	41,1%	39,3%	42,9%
-	Lahendamata	Ülesandel puudub vastus.	66	8,4%	5,7%	11%
65 min või 65	Numbrid	Liidab arvud minutites kokku. Ei näe ülesande tervikut. Puudub ühik.	65 13	9,8%	9,7%	9,9%
1 h 5 min	Numbrid	Liidab arvud minutites kokku ning teisendab tundidesse. Ei näe ülesande tervikut.	28	3,5%	4,6%	2,5%
195 või 195 h	Osaline	Rakendab tekstis esinevaid seoseid õigesti, kuid puuduvad ühikud või on ühik vale.	21 11	4,1%	3,9%	4,2%
Muu vastus	Muu	Lisaks veel 167 erinevat vastust.	261	33,1%	36,8%	29,5%



Joonis 1. Nelja halvemini lahendatud ülesannete vastuste sagedused veatüüpide järgi

Veatüüpidest lähtuvalt oli näha (joonis 1), et veatüübi esinemine oleneb ülesandest. Õpilaste lahendused lähevad kõige enam osaliselt lahendatud veatüübi hulka, milles oli kõige suurem protsent ülesandel 7. Samas ülesandel 11 oli enim numbrilisi vastuseid ja seda ülesannet oli ka kõige rohkem tegemata jäetud. Lisaks on joonisel näha, et väga suur hulk vastuseid kuuluvad muu veatüübi alla, kus õpilased olid leidnud lahenduse, mida teised pole saanud. Üksikvastust oli ülesandel 10 protsentuaalselt rohkem (33%) kui teistesse veatüüpidesse kuuluvaid vastuseid (25%).

Poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel

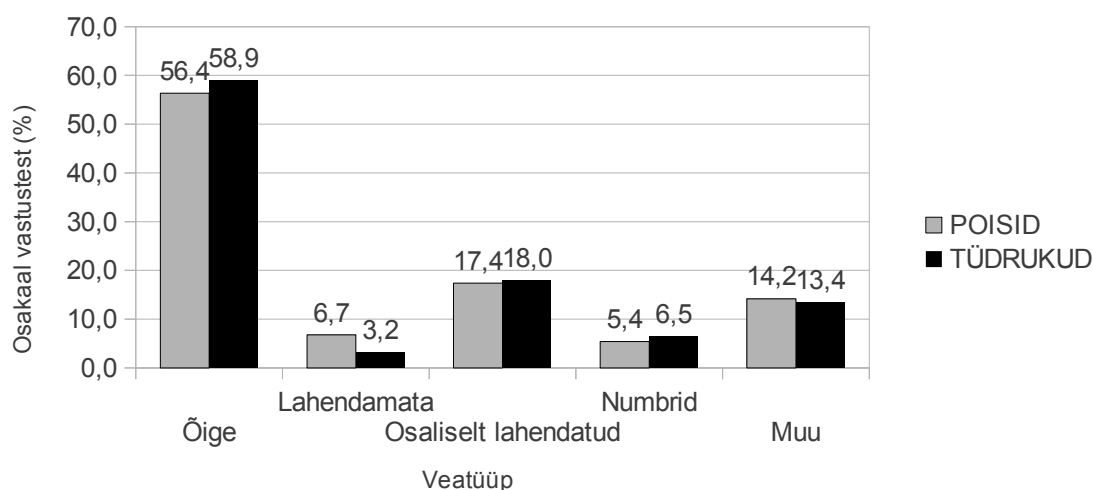
Ülesanded, mida lahendati halvasti või hästi, olid nii poistel kui ka tüdrukutel samad (tabel 1). Kuid halva ja hea tähendus on suhteline ja nii oli mitmeid ülesandeid, mida lahendasid tüdrukud poistest oluliselt paremini. Statistiliselt oluliselt erinevad olid arvutusülesanne 3a (T-test; $p < 0,01$), võrduse koostamise ülesanne 4 ($p < 0,01$) ja ühetehteline tekstülesanne 5 ($p < 0,05$).

Samas ei leidunud ühtegi ülesannet, mille oleksid lahendanud poisid tüdrukutest oluliselt paremini ($p > 0,05$). Kuid oli kolm ülesannet, mille tulemused olid poistel natuke paremad. Keerulisema arvutusülesande 3c lahendasid 45% tüdrukutest õigesti, kuid poistest 46%. Aja suhteid nõudev ülesanne 9 oli lahendatud tüdrukutel 72% ulatuses ja poistel 73% ulatuses õigesti. Kõige tugevam erinevus poiste kasuks oli ülesandes 10, mis oli keerulisem mitmetehteline tekstülesanne ja kus oli vaja aja tundmist. Selle ülesande lahendasid 39% tüdrukutest ja 43% poistest õigesti.

Sageduste erinevuse kontrollimiseks kasutatakse Hii-ruut-testi. Analüüsisid Hii-ruut-testiga ülesandeid 2–12, mis on juba kodeeritud veatüüpidesse, saab väita, et kümne ülesande vastus oleneb vastaja soost. See tähendab, et peaaegu kõigi ülesannete vastused on vastavalt õpilase soole erinevad. Kümnest ülesandest nelja ülesande olulisusenivoo oli $p < 0,01$ ja kuuel $p < 0,05$ (tabel 7).

Tabel 7. Hii- ruut-testi tulemused kümnele ülesandele, mille vastus sõltub vastaja soost

Ülesanne	Hii-ruut-testi tulemus	Olulisusenivoo	Ülesanne	Hii-ruut-testi tulemus	Olulisusenivoo
3a	$X^2 = 12,4$	$p < 0,05$	8	$X^2 = 11,2$	$p < 0,05$
3c	$X^2 = 12,0$	$p < 0,05$	9	$X^2 = 15,4$	$p < 0,01$
5	$X^2 = 12,5$	$p < 0,05$	10	$X^2 = 11,1$	$p < 0,05$
6	$X^2 = 12,8$	$p < 0,05$	11	$X^2 = 14,7$	$p < 0,01$
7	$X^2 = 15,0$	$p < 0,01$	12	$X^2 = 20,0$	$p < 0,01$



Joonis 2. Poiste ja tüdrukute võrdlus oluliselt erinenud ülesannete (2, 3, 5–12) lahendustes esinenud veatüüpide järgi

Vastaja soost ei sõltunud ülesanne 4, mis on probleemülesanne ja kus oli vaja koostada ise kaks võrdust olemasolevatest arvudest. Jooniselt 2 on näha, et tüdrukute vastused on pigem veatüübilised, milleks on osaliselt lahendatud 0,6% rohkem ja numbrilised 0,9% rohkem kui poisid. Samas poisid jätvavad pigem lahendamata 3,5% rohkem või teevad üksikuid vigu 0,8% võrra rohkem kui tüdrukud.

Arutelu

Käesoleva uurimustöö eesmärk oli anda ülevaade neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmistest erinevatel kognitiivsetel tasemetel ja selgitada välja ülesannete lahendamise tüüpilisemad vead. Teine eesmärk oli võrrelda poiste ja tüdrukute teadmisi ja vigu ülesannete lahendamisel.

Uurimustöö esimene küsimus oli teada saada, millised olid neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised. Kirjeldava analüüsi tulemused näitasid, et neljanda klassi õpilaste teadmised olid pisut üle keskmise, sest õpilaste keskmine lahendatavus oli 60% ning õpilastevaheline erinevus oli statistiliselt oluline (T-test; $p < 0,01$). Vastavalt PISA ja TIMSS-i uurimusele oli Eesti õpilaste keskmine tulemus saavutanud rahvusvahelise kesktaseme (Lepmann, 2010) ja 2011. aasta tasemetöö keskmine lahendatavus oli 84,9% (Taal, 2011), mis oli tunduvalt kõrgem, kui praeguse uurimuse tulemuses. Peale selle ilmnis töös, et õpilaste saavutused erinevad oluliselt ka klassiti ($p < 0,01$). Palu ja Kerikmäe (2012) uurimuses tuli välja, et õpetajate õpetamisstiil ja õpilaste tulemused olid omavahel seotud. Sellest võib järeldada, et klasside erinevus võib sõltuda õpetaja õpetamisstiilist.

Teine uurimustöö küsimus oli teada saada, millistes ülesannetes tehakse kõige enam vigu. Tulemustes selgus, et kõige kehvem oli probleemülesannete lahendatavus, sest see nõudis kõrgemaid teadmisi, seostamisi ning arutlemisoskust. Keskmised tulemused tulid kontseptuaalseid teadmisi nõudvate ülesannete puhul. Need ülesanded eeldasid mõistete tundmist ja nende rakendamist, siia kuulusid ka lihtsamad tekstülesanded. Lepmann (2010) tõi samuti välja, et ka rahvusvahelisel taustal olid õpilastel nõrgemad tulemused, kui oli vaja tekstist arusaamist, seostamist, erinevate mõistete tundmist ja interpreteerimist, andmete lugemist ja tõlgendamist ning saadud tulemuste reprodutseerimist. Kõige paremad tulemused saadi protseduuriliste ülesannete lahendamisel, mille alla kuulusid arvutusülesanded ja rutiinsemad ülesanded. Uurimuse tulemused on vastavalt teooriale ootuspärased ehk mida kõrgem kognitiivne tase, seda madalam tulemus. Et kõrgema taseme tulemusi parandada, tuleks õpetamisel rõhku panna pigem arusaamisele, seostamisele ja uute situatsioonide lahendamisele kui arvutusülesannete ja peast arvutamise treenimisele.

Pearsoni korrelatsioonimaatriks tõi välja ülesannete gruppide omavahelise keskmise tugevusega positiivse seose, mis näitas statistilist olulisust ($p < 0,01$). Positiivne seos näitab, et mida kõrgemad olid õpilaste tulemused kontseptuaalsete ülesannete lahendamisel, seda kõrgemad olid ka probleemülesannete lahendamise tulemused ning vastupidi. Sama kehtib ka

teiste tunnuste vahel, kuid seos oli väiksem. Mitmed uurimused (Ghazali ja Zakaria, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001) on leidnud, et kognitiivsed tasemed on omavahel seotud ning arenevad järkjärguliselt. Kui arendada üht kognitiivset taset, siis see omakorda arendab järgmist, mis omakorda tõstab taas esimese taseme teadmist. Palu ja Kerikmäe (2012) toovad välja, et protseduuriliste ülesannete harjutamisele keskendunud õpetajate õpilaste tulemused on erinevate ülesannete lahendamisel madalamad. Seega võiks järeldada, et õpetamisel tasub arendada kõiki kognitiivseid tasemeid korraga. Isegi siis, kui eesmärk on ainult kindlate protseduuride omandamine, näitab saadud tulemus, et harjutades sama teema kontseptuaalseid või probleemülesandeid, kinnistuvad ka „eesmärgipärased“ protseduurilised teadmised.

Vigade tekkimine võib olla põhjustatud paljudest aspektidest, mis ei pruugi olla seotud kognitiivsete tasemetega. Teadlased (Dole, Wright & Zevenbergen, 2004; Ryan & Williams, 2007) on leidnud, et vead võivad tekkida ka tugevast ärevusest, mis võib viia paanikani ja liigse kiirustamiseni. Vead võivad ka tekkida vähesest huvist ja vajalikkusest. Nii täiskasvanud kui ka lapsed teevad hooletusvigu, näiteks kiirustades valesti lugemine, vähene funktsionaalne lugemise oskus, lohakus, faktide valesti mäletamine või mõistmine, töömälu ülekoormus, kiirustamine, järeldusteni „hüppamine“ ja järgneva ennustamine vastavalt tüüpülesannetele. Hooletusvigade vältimiseks tuleks oma tulemusi pidevalt kontrollida. Algselt tuleks kontrollida tulemusi kogu klassiga ja iga kord, et õpilane saaks aru, mida teha, ning harjutamise kaudu muutuks see tegevus rutiinseks.

Kolmanda uurimustöö küsimusega taheti teada saada, mis olid kõige tüüpilisemad ülesannete lahendamise vead. Tüüpilisemad vastused kodeeriti ära ning selle tulemusena saadi lisaks õigele vastusele neli veatüüpi: *lahendamata*, *osaline*, *numbrid* ja *muu*. Lahendamata veatüüp tähendab, et õpilane ei olnud lahendanud ülesannet ega andnud ülesandele vastust. Osaline tähendab, et ülesandes oli kasutatud osa mõisteid või teadmisi õigesti, kuid ei jõutud õige vastuseni või ei järgitud korralikult töökorraldust. Numbrite veatüübi alla kuulusid need lahendused, kus oli saadud täiesti vale vastus teadmiste puuduse tõttu ja/või tekstist mitteamusaamise tõttu sooritati arvudega suvalisi tehteid. Kõige viimane oli muu veatüüp. Sinna alla kuulusid kõik teised vastusevariandid, mille esinemise sagedus oli väiksem kui 10 inimest, sest vastasel juhul ei saa seda lugeda enam tüüpiliseks vastuseks.

Uurimuses tuli välja neli ülesannet, mis oli lahendatud alla 45%. Kaks kõige kehvemini lahendatud ülesannet olid probleemülesanded ja järgmised kaks keerulisemad

kontseptuaalseid teadmisi nõudvad ülesanded. Peab välja tooma, et vigade variatiivsus oli väga suur ja tüüpilisemaid vastuseid esines vähem. Osalise veatüübi kohta tuli välja, et ülesandes, kus oli rohkem kui üks õige vastus, olid õpilased esitanud ainult ühe vastusevariandi. Siinkohal tuleb selgelt välja, et õpilastel kippus olema protseduuriline mõtlemine, kus tavaliselt on igal ülesandel ainult üks õige vastus. Osalise lahendatavuse tingis ka ebapiisav funktsionaalne lugemine või võtmesõnade „võrra rohkem“ ja „korda vähem“ valesti arusaamine.

Ülesande 11 ja 10 tüüpilisemad vead rühmitusid kõige enam numbrite veatüübi hulka. Ülesandes 11 tekkisid põhilised vead oletatavasti seetõttu, et puudus teadmine *raadiuse* mõistest ning kuidas mõistet kasutada. Seetõttu sooritasid õpilased murdjoone mõõtmise, kus omakorda tekkisid vead. Ülesande 10 tulemuse saamiseks sooritati tehted arvudega, nägemata ülesande tervikut ja mõistmata seda, et tegemist on aja arvutamise ülesandega. Lisaks tehti väga palju vigu ühikute kasutamata jätmise või nende valesti kasutamise tõttu. Teksti mittemõistmise või mõistete mittetundmise tagajärjel sooritati lihtsalt mingid arvutused etteantud arvudest.

Nelja kõige nõrgemini lahendatud ülesannet veatüübi järgi analüüsid selgus, et nende esinemine oleneb ülesandest. Õpilased tegi kõige enam osalise ja numbrilise veatüübi vigu. Oli saadud ka väga palju üksikvastuseid ehk muu veatüübi vastuseid. Siit võib oletada, et õpilaste teadmised olid puudulikud ning mittetegemise asemel üritati ise vastuseid leiutada. Sellegipoolest oli ka õpilasi, kes jätsid ülesande lihtsalt lahendamata, kuna need ülesanded olid keerulised. Geary *et al.* (2007) uurimus näitas, et madala saavutusega õpilased ei oska eriti numbrilist informatsiooni tõlgendada ja neil on raskusi arvutusülesannete fakte või õigeid oskuseid pikaajalisest mälestusest meelde tuletada. Väga paljud õpilased ei jõuagi esimesest tasemest ehk faktiteadmiseni ja lihtsamate protseduuride tegemisest kaugemale.

Neljas uurimistöös probleem oli teada saada, mis vigu teevad tüdrukud kõige enam, milliseid poisid. Uurimuses tuli välja, et tüdrukute tulemused olid statistiliselt oluliselt paremad kui poiste omad. Tüdrukute paremat edukust on näidanud ka tasemetööde tulemused (Jukk, 2007; Taal, 2011). Sellest hoolimata ei olnud poiste ja tüdrukute ülesannete lahendamises kognitiivse taseme gruppide vahel statistiliselt olulist erinevust. Ülesannete tulemusi kõrvutades oli näha, et ülesanded, mis olid kehvasti lahendatud või hästi lahendatud, oli nii tüdrukutel kui ka poistel samad. Kuid uurimuses selgus, et kolm ülesannet lahendasid tüdrukud statistiliselt oluliselt paremini kui poisid. Nendeks olid lihtsam arvutusülesanne,

võrduse koostamine olemasolevate arvudega ning ühetehteline rutiinne tekstülesanne, mis oli lihtsam kontseptuaalseid teadmisi nõudev ülesanne. Esimene ülesanne oli puhtalt protseduuriliste teadmiste kasutamine, kuid teine, võrduse koostamine, oli keeruline ja võis lugeda probleemülesande hulka. Kuid sellegipoolest sai seal kasutada protseduurilisi teadmisi. On leitud, et tüdrukud kasutavad probleemülesannete lahendamisel enamasti protseduurilisi teadmisi ja/või varem läbi tehtud strateegiaid (Che, Wiegert & Threlkeld, 2011) ning tüdrukud on üldjuhul paremad arvutajad (Kreegipuu, 2002).

Uurimuses ei tulnud välja ühtegi ülesannet, mille tulemus oleks olnud poistel oluliselt parem. Kuid oli samuti kolm ülesannet, mille lahendasid poisid natuke paremini kui tüdrukud. Esimene ülesanne oli keerulisem arvutusülesanne ning teised kaks olid ajasuhteid nõudvad ülesanded, mis olid keerukamad kontseptuaalseid teadmisi nõudvad ülesanded. Lisaks nõudis kolmas ülesanne veel mitme töökorralduse täitmist ja selle tulemus oli poistel 4% parem kui tüdrukutel. Kreegipuu (2002) toob välja, et poisid oskavad paremini ebaolulist infot ignoreerida ning seetõttu lahendavad nad keerulisemaid tekstülesandeid või probleemülesandeid kohati paremini.

Analüüsides veel veatüüpide sageduste erinevusi, siis Hii-ruut-test tõi välja, et paljude ülesannete vastus oleneb vastaja soost. Vastuse erinevus võis tulla poiste ja tüdrukute aju ehituse eripärast või induktiivse ja deduktiivse õpistiili kasutamisest (Kreegipuu, 2002; Gurian & Ballew, 2004) või hoopis mõistete ja arusaamade erinevast kujunemisest. Tüdrukud teevad enamasti veatüüpiliselt numbrilisi või osalise lahendamise vigu, kuid poistel on pigem üksikvastuseid, mis rühmitusid muu veatüübi alla. Peale eksimistele jätavad poisid ülesannetele rohkem vastamata kui tüdrukud. Seda on leidnud ka Che, Wiegert & Threlkeld (2011), et tüdrukud on kohusetundlikumad, tulemusele motiveeritud ning järgivad pigem reegleid ja tuttavaid lähenemisi. Samas poisid julgevad rohkem eksida ning toovad uusi lahendusi, mida ei osata ette ennustada, ja jätavad kergekäelisemalt ülesande tegemata. Poiste tulemuste parandamiseks tuleks neid motiveerida ja pakkuda neile ülesandeid, mis vastaksid poiste huvidele ning oleksid rohkem elulised, samuti lasta neil katsetada erinevaid probleemülesannete strateegiaid.

Uurimistööl olid mõned piirangud. Uurimuse üks piirang võib olla lastele testi tegemine, sest sellega võivad kaasneda närvilisuse tõttu tehtud vead. Kuna testi tegemiseks oli ajapiirang, siis võis see mõjutada aeglasemate valmisjõudmist, mis ei pruugi tähendada, et nad ei osanud. Peale selle oli töö piiranguks testi kvantitatiivsus. Vastustest saab vastavalt

lahendusele ainult oletada, mis kognitiivsel tasemel õpilane arutleb, kuid puudub teadmine, kuidas ja mida ta teeb. Tulevikus tasuks uurida laste kognitiivseid tasemeid kvalitatiivselt ning jälgida laste arutlemist, sest see annaks laste teadmiste tasemest parema ülevaate.

Uurimistöös selgus, et neljanda klassi tüdrukute matemaatikateadmised on oluliselt paremad kui poistel. Raskemad ülesanded on aga neile sarnaselt rasked ja vigade erinevus oleneb soost. Tüdrukud teevad rohkem veatüübilisi vigu, samas kui poisid jätavad rohkem ülesandeid lahendamata ning mõtlevad uusi lahendeid välja. Vastavalt kognitiivsetele tasemetele tehti vigu enamasti probleemülesannete lahendamisel ja keerulisemaid kontseptuaalseid teadmisi nõudvates ülesannetes. Koolimatemaatikas tuleks keskenduda nende tasemete arengule ja pakkuda rohkem uute situatsioonide, arutlemise ning seostamisega ülesandeid. Lisaks tuleks iga päev klassis ülesannete lahendamisel tekkinud vigu analüüsida, sest see annab parema tagasiside õpilastele ja tõstab õpilaste teadmiste taset.

Tänuõnad

Suured tänud juhendajale koostöö, asjalike nõuannete eest ja võimaluse eest kasutada uurimistöö andmeid magistriritöö valmimisel. Autori tänuavaldused lähevad veel lähedastele Jaak Vaabelile, kes oli kannatlik abikaasa, jagas soovitusi ja statistikateadmisi, ning Anne Vaabelile, kes abistas keelekorrektuuriga. Samuti soovin tänada veel uuringus osalenud koolide õpetajaid ja õpilasi.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuete järgi ning on kooskõlas hea akadeemilise tavaga.

Kasutatud kirjandus

- Allen, M. (2010). *Misconceptions in Primary Science*. Open University Press. Maidenhead, GBR. Külastatud aadressil http://books.google.ee/books?hl=en&lr=&id=ws2uL6yIjaMC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Misconceptions+in+Primary+Science&ots=MobFRvTfOS&sig=xC3bKWyZE1v2xyhxExuy73qDsRY&redir_esc=y
- Borodako, T., & Afanasjev, J. (2005). Eesti õpilaste matemaatikaedukuse soolisi aspekte kolmandate ja kuuendate klasside riiklike tasemetööde tulemuste alusel. *Koolimatemaatika XXXII*, 37–42. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. Külastatud aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/images/materjalid/artiklid/opiuuringud/km32_borodako_afanasjev.pdf
- Che, M., Wiegert, E., & Threlkeld, K. (2011). Problem solving strategies of girls and boys in single-sex mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (2), 311-326.
- Cvencek, D., Meltzoff, A. N. & Greenwald, A. G. (2011), Math-Gender Stereotypes in Elementary School Children. *Child Development*, 82 (3), 766-779.
- Dole, S., Wright, R. J. & Zevenbergen, R. (2004). *Teaching Mathematics in Primary School*. Allen & Unwin. Australia.
- Gardner, H. (2004). *Frequently asked questions-multiple intelligences and related educational topics*. Külastatud aadressil <http://www.howardgardner.com/FAQ/FREQUENTLY%20ASKED%20QUESTIONS%20Updated%20March%202009.pdf>
- Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In D. Kuhl & R. S. Siegler (Vol. Eds.), *Cognition, perception, and language*, 2, 777-810. W. Damon (Gen. Ed.), *Handbook of child psychology* (6th Ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Geary, D. C., Bailey, D. H., & Hoard, M. K. (2009). Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability With a Simple Screening Tool The Number Sets Test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27 (3), 265-279. University of Missouri.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive Mechanisms Underlying Achievement Deficits in Children With Mathematical Learning Disability. *Child Development*, 78 (4), 1343 - 1359. University of Missouri. Columbia
- Ghazali, N. H. C., & Zakaria, E. (2011). Students' Procedural and Conceptual Understanding

- of Mathematics. Australian Journal of Basic & Applied Sciences, 5 (7), 684-691.
- Gurian, M., & Ballew, A, C. (2004). *Poisid ja tüdrukud õpivad erinevalt. Käsiraamat õpetajale*. El Paradiso, Haridus- ja Teadusministeerium.
- Jukk, H. (2004). *Matemaatika tasemetöö tulemuste seos õpilaste suhtumise ja arvamusega*. Külastatud aadressil http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/matemaatika_tasemetoo.pdf
- Jukk, H. (2007). *3. klassi 2007. a Matemaatika tasemetöö*. Külastatud aadressil http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/matem_3.kl_analyys__parand_.pdf
- Kikas, E. (2005). *Õpilaste mõtlemise areng ja selle soodustamine koolis*. A. Ots (Toim), *Üldoskused õpilase areng ja selle soodustamine koolis*. Tartu Ülikooli õppekava arenduskeskus. Tartu Ülikooli kirjastus.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D. C.: National Academy Press. Külastatud aadressil http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=9822&page=126
- Kreepuu, K. (2002). Mehed, naised ja vaimne võimekus. *Horisont*, 3. Külastatud aadressil http://www.loodusajakiri.ee/horisont/artikkel290_256.html
- Krull, E. (2000). *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat*. Tartu Ülikooli kirjastus.
- Leopard, R., Kiuru, N. & Palu, A. (2011). Success of Third-grade Students in Solving Different Types of Mathematics Problems in Estonian-speaking and Russian-speaking Schools. In: J. Mikk, M. Veisson, P. Luik (Eds.), *Preschool and primary education*, 91-105. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Lepmann, T. (2010). *Rahvusvaheliste võrdlusuuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006 õppetund Eesti matemaatikaõpetajale*, 77–82. Haridus- ja Teadusministeerium, Tallinn. Külastatud aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/images/materjalid/artiklid/vordlus/timss_pisa_oppetunnid_matemaatikas.pdf
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S. & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. TIMSS & PIRLS International Study Center. Külastatud aadressil http://gpv.ooe.gruene.at/uploads/media/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf

- National Assessment of Educational Progress (NAEP). (2003). *Mathematical Abilities*.
Külastatud aadressil <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/abilities.asp>
- OECD. (2010). *PISA 2012 MATHEMATICS FRAMEWORK*. Külastatud aadressil
<http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>
- Oja, M. (2007). *6. klassi matemaatika tasemetöö analüüs 2007*. Külastatud aadressil
http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/m._oja_6.kl.tasemetoo_analyys.pdf
- Orton, A. (2004). What Cognitive Demands Are Made in Learning Mathematics? *In Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice*, 13- 26. London: Continuum.
- Palu, A., & Kerikmäe, I. (2012). Teises kooliastmes saavutatud matemaatikapädevus ja õpetajate arvamused pädevuse parandamise võimalustest. *Koolimatemaatika XXXIX*, 59 - 66. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. Külastatud aadressil
http://matdid.edu.ee/joomla/images/materjalid/artiklid/kontroll/km39_palu_kerikmae.pdf
- Palu, A., & Kikas, E. (2010). The types of the most widespread errors in solving arithmetic word problems and their persistence in time. In: A. Toomela (Eds.), *Systemic Person-Oriented Study of Child Development in Early Primary School*, 155-172. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Palu, A., Suviste, R. & Kikas, E. (2012). Errors in Solving Arithmetic Word Problems. Differences between Students of Estonian- and Russian-language schools. In: A. Toomela, E. Kikas (Eds.), *Children Studying in a Wrong Language: Russian Speaking Children in Estonian School. Twenty Years After the Collapse of the Soviet Union*, 99 – 121. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Pedaste, M. & Sarapuu, T. (2010). Probleemülesannete tüübid ja lahendusstrateegiad. *Põhikooli valdkonnaraamat LOODUSAINED*. Külastatud aadressil
http://www.oppekava.ee/index.php/Probleem%C3%BClesannete_t%C3%BC%C3%BCbid_ja_lahendusstrateegiad
- Põhikooli riiklik õppekava (2010). *Lisa 3. Matemaatika*. Külastatud aadressil
<https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/0000/1327/3133/13275424.pdf#>

- Rahvusvahelise matemaatika ja loodusainete võrdlusuuring TIMSS*. (2003). Külastatud aadressil http://uuringud.ekk.edu.ee/fileadmin/user_upload/documents/TIMSS_RD_loplik_020203.pdf
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*, 93 (2), 346-362.
- Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions*. Open University Press McGraw-Hill. England
- Samuelsson, J. (2010). The Impact of Teaching Approaches on Students' Mathematical Proficiency in Sweden. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5 (2), 61-78.
- Taal, D. (2011). *Üleriigiline 3. klassi matemaatika tasemetöö 2011 (lühikokkuvõte)*. Külastatud aadressil http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/3tt2011_kokkuv6te.pdf
- Tire, G., Puksand, H., Henno, I., & Lepmann, T. (2010). *PISA 2009 – Eesti tulemused. Eesti 15-aastaste õpilaste teadmised ja oskused funktsionaalses lugemises, matemaatikas ja loodusteadustes*. Haridus- ja Teadusministeerium, eksamikeskus. Tallinn. Külastatud aadressil http://uuringud.ekk.edu.ee/fileadmin/user_upload/documents/PISA_2009_Eesti.pdf
- Toomela, A. (2009). *Eesti põhikooli efektiivsus. LÕPPARUANNE*. Tartu/Tallinn. Külastatud aadressil www.hm.ee/index.php?popup=download&id=11756

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Maret Vaabel

(sünnikuupäev: 28.06.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised, tüüpilised vead ning poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel,

mille juhendaja on Anu Palu,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 20.05.13