

DR. PHIL. NAT. JÜRI NUUT  
TALLINNA TEHNIKAINSTITUUDI KORR. PROFESSOR  
TARTU ÜLIKOOLI ERADOTSENT

# STAATIKA ALGED



AKADEEMILISE KOOPERATIIVI KIRJASTUS

13662

A-39355 II

DR. PHIL. NAT. JÜRI NUUT

TALLINNA TEHNIKAINSTITUUDI KORR. PROFESSOR; TARTU ÜLIKOOLI ERADOTSENT

# STAATIKA ALGED



AKADEEMILISE KOOPERATIIVI KIRJASTUS  
TARTU, 1937

13662

2

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

140202

L 1601107

## Sisukord.

	Lk.
Eessõna . . . . .	7
<b>Sissejuhatus</b> . . . . .	9
§ 1. Mehaanika liigitamine . . . . .	9
§ 2. Tungiühikud . . . . .	10
§ 3. Tungide matemaatiline iseloom . . . . .	11
Harjutusülesandeid . . . . .	11
<b>I. Vektorid</b> . . . . .	13
§ 4. Vektorite liitmine . . . . .	13
§ 5. Komponentide ahel . . . . .	15
§ 6. Vektori lahutamine komponentideks eritingimustel . . . . .	16
§ 7. Koordinaatteljestikud . . . . .	18
§ 8. Vektori projektsioonid telgedele . . . . .	19
§ 9. Paralleelsed vektorid . . . . .	21
§ 10. Ahela sulgeja projektsioon . . . . .	22
§ 11. Suunakoosinused . . . . .	24
§ 12. Skalaarne korrutus . . . . .	26
Harjutusülesandeid . . . . .	28
<b>II. Tungid ja momendid</b> . . . . .	32
§ 13. Ühises punktis rakendatud tungide tasakaal . . . . .	32
§ 14. Staatiline moment antud punktis . . . . .	33
§ 15. Momendi tõlgendus pindalana . . . . .	35
§ 16. Abilause kolmnurga pindala projektsioonist . . . . .	36
§ 17. Moment telje suhtes . . . . .	37
§ 18. Momendi projektsioonide analüütiline väljendus . . . . .	39
§ 19. Vektori kandesirge võrrand . . . . .	41
§ 20. Moment meelevaldselt võetud punktis . . . . .	43
§ 21. Momentide liitumine . . . . .	44
Harjutusülesandeid . . . . .	46
<b>III. Tungikomplekside teisendamine</b> . . . . .	49
§ 22. Kindel keha . . . . .	49
§ 23. Tung libiseva vektorina . . . . .	50
§ 24. Komponenttungide asendamine resultanttungiga ja ümberpöörduvalt . . . . .	51
§ 25. Tungikompleksi asendamine kahe tungiga . . . . .	53
§ 26. Tungikompleksi üldine resultant ja resulteeruv moment . . . . .	55
§ 27. Samaväärsete tungikompleksid . . . . .	57
§ 28. Samaväärsete komplekside teisendatavus elementaar-tehete abil . . . . .	59
§ 29. Tungipaar . . . . .	61

	Lk.
§ 30. Dünaam . . . . .	62
§ 31. Minimaalne resulteeruv moment . . . . .	63
§ 32. Tungikompleksi tsentraaltelg . . . . .	64
§ 33. Resulteerivate momentide sümmeetriline jaotus ruumis	67
§ 34. Eritüübilised tungikompleksid . . . . .	68
Harjutusülesandeid . . . . .	70
<b>IV. Paralleeltungid . . . . .</b>	<b>74</b>
§ 35. Samasuunaliste paralleeltungide graafiline liitmine . .	74
§ 36. Vastassuunalised paralleeltungid . . . . .	77
§ 37. Tungipaaride liitmine tasapinnas . . . . .	78
§ 38. Tungipaari kandmine meelevaldsetele paralleelsirgetele tasapinnas . . . . .	79
§ 39. Erinevatel tasapindadel asetsevate tungipaaride liit- mine . . . . .	80
§ 40. Tungi lahutamine paralleelseteks komponentideks . .	82
§ 41. Komponentide suuna analüüs . . . . .	84
§ 42. Seotud paralleelvektorite kese . . . . .	86
§ 43. Massikese . . . . .	88
§ 44. Punktide keskme graafilised määramisvõtted . . . . .	90
§ 45. Massikeskmed pideva massijaotuse puhul . . . . .	92
Harjutusülesandeid . . . . .	95
<b>V. Süsteemide tasakaal . . . . .</b>	<b>99</b>
§ 46. Süsteemi sisetungid . . . . .	99
§ 47. Reaktsiooni seadus . . . . .	100
§ 48. Tasakaalu kuus tarvilikku tingimust . . . . .	101
§ 49. Ühes punktis kinnistatud kindla keha tasakaal . . . . .	104
§ 50. Telje külge kinnistatud keha . . . . .	106
§ 51. Telje pidi libisev keha . . . . .	108
§ 52. Ühes punktis tasapinnale toetuv keha . . . . .	110
§ 53. Kahes punktis tasapinnale toetuv keha . . . . .	111
§ 54. Mitmes punktis tasapinnale toetuv keha . . . . .	113
§ 55. Tungi lahutamine kuues antud sihis . . . . .	115
§ 56. Nöörhulknurga mõiste . . . . .	117
§ 57. Varignon'i hulknurk . . . . .	119
§ 58. Rippsild . . . . .	121
§ 59. Kahes otsas kinnistatud nööril libisev rull . . . . .	122
§ 60. Kolmnurgaks pingutatud nöör . . . . .	124
Harjutusülesandeid . . . . .	126
<b>VI. Töö mõiste ja hõõrdumine . . . . .</b>	<b>130</b>
§ 61. Elementaartöö . . . . .	130
§ 62. Elementaartööde summa . . . . .	132
§ 63. Võimalikkude nihete printsiip . . . . .	134
§ 64. Võimalikkude nihete printsiibi interpretatsioonid . .	136
§ 65. Robervali kaalud, detsimaalkaalud, diferentsiaalplokk .	139
§ 66. Tasakaalu liigid . . . . .	143
§ 67. Hõõrdumisnurk . . . . .	145
§ 68. Hõõrdumistegur . . . . .	147
Harjutusülesandeid . . . . .	149

## Eessõna.

Käesolev raamat on mõeldud neile, kes alustavad mehaanika stuudiumi staatikaga, eeskätt meie kõrgema tehnilise õppeasutise esimese semestri üliõpilastele. Raamat eeldab, et lugeja tema läbitöötamisele asudes valdaks elementaarset matemaatikat gümnaasiumi tavalise kursuse ulatuses, ning edaspidi, rööbiti staatikaga, tutvuks järk-järgult ka ruumilise analüütilise geomeetria elementidega ning paralleelprojektsiooni võtetega.

Silmas pidades just algajaid, on vajalikud matemaatilised mõttekäigud raamatus käsiteldud üsna elementaarselt ja võrdlemisi detailselt, et kergendada lugejale jälgimist. Sellega on tahtud võimaldada ka isoleeritud iseõppijale produktiivset töötamist.

Sisuliselt on aine raamatus käsiteldud üldise mehaanika seisukohalt, eelastmena tehnilise mehaanika stuudiumile; eksperimentaalset külge pole puudutatud. On püütud tutvustada lugejat mõistetega ja meetoditega elementaarses ulatuses nõnda, et see annaks teatava teadmiste raudvara ja ühtlasi juhiks õppija tähelepanu vajadusele arendada ruumilise kujutlemise võimet, arvutamise kindlust ja oskust mõelda mehaanika kujutlemades. Olulist tähtsust omab seejuures harjutusülesandeis pakutud materjal. Lugejale olgu soovitatud neis ülesandeis nõutud arvutusi alati läbi viia lõpuni ega kokkuda väsitava arvutustöö ees. Neil eeldustel käesoleva kursuse tõsine läbitöötamine peaks õppijale tasandama teed kõrgemate palade juurde.

Autor.



## Sissejuhatus.

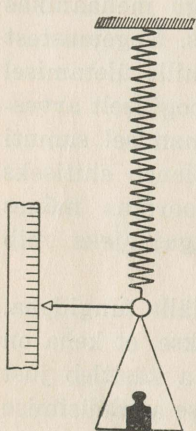
§ 1. **Mehaanika liigitamine.** Mehaanika aineks on kehade liikumise ja tasakaalu seadused. Muutusi keha liikumises või ka kujus seletab mehaanika t u n g i d e mõjuga. Subjektiivselt annab tung ennast tunda tõmbe või surve näol näiteks raskete esemete kandmisel; säärast tungi kompenseerime ehk, nagu mehaanikas öeldakse, „tasakaalustame“ siis lihaseid pingutades. Kogemustest on teada, et lihaste pingutamise võimel on piir, mille ületamisel vastava raskuse kandmine osutub võimatuks. Analoogiliselt arvestab mehaanika mõne ehitise (näiteks silla) koormamisel samuti kompenseerivate pingete tekkimist, millede piir oleneb ehitiseks kasutatud materjali vastupidavusest. Osutub koormus mõnes kohas liiga suureks, siis tekivad rikked, mille tagajärjeks võib olla ehitise kokkuvarisemine.

Tunge kompenseerivad pinged avalduvad ise jälle tungidena. Täieliku kompensatsiooni saavutamise puhul öeldakse, et keha on t a s a k a a l u s. Mehaanika eripeatükk s t a a t i k a käsitleb just tasakaalu küsimusi, selgitades tungide matemaatilise analüüsimise võtteid ja põhjendades nõudeid, mida tuleb rahuldada tasakaalu saavutamiseks. Tungide mõju liikumisele uurib mehaanika tähtsaim eriosa — d ü n a a m i k a. Liikumise seadusi omaette, olenemata tungidest, käsitleb eripeatükk k i n e m a a t i k a.

Mehaanikat võib käsitleda, rõhutades eeskätt katselisi tulemusi, füüsika eriosana. Sel puhul kõneldakse „katselisest“ ehk „eksperimentaalsest“ mehaanikast. Moodsa katselise mehaanika loojaks on Galilei (1564—1642). Lähtudes katseliselt püstitatud põhilausestest võib aga mehaanikat käsitleda ka formaalsete matemaatiliste deduktsioonide najal, laialt rakendades matemaatilise analüüsi võtteid. Säärase „teoreetilise“ (ka „ratsionaalse“) mehaanika rajajaks on Newton (1643—1727); teoreetilist mehaanikat on arendanud ja süvendanud esijoones prantslased Lagrange (1736—1813), Laplace (1749—1827) jt.

Tehnika arenemisega on Poncelet' (1789—1867) ja Coriolis'e (1792—1843) mõjul omandanud suure tähtsuse „tehniline“ mehaanika, s. o. mehaanika säärane käsitusviis, kus silmas peetakse esijoones inseneriteadusi, näiteks ehitiste konstruktsioonide vastupidavuse küsimusi (Culmann, 1821—1881). Vastandina tehnilisele mehaanikale kutsutakse teoreetilist mehaanikat siis ka „üldiseks“ mehaanikaks. Käesolevas raamatus tulevad kõne alla staatika alged üldise mehaanika seisukohalt.

§ 2. **Tungiühikud.** Füüsika seisukohalt saab tunge mitmeti liigitada nende loomuse poolest, kõneldes näiteks elastsuse tungidest, elektrilistest tungidest ja teistest. Tähtsaks, inseneri konstruktiivses töös enamasti eeskätt arvesse tulevaks tungi eriliigiks on kehade raskus.



1. joonis.

Tungide suurusi saab omavahel „staatiliselt“ võrrelda paljudel juhtudel vedrukaalude (dünamomeetri) abil (1. joon.). Sel puhul loetakse kaks tungi võrdseks, kui nad samades oludes sama vedru juures esile kutsuvad sama pikenemise. Inseneriteadustes (tehnikas) on kombeks tungide võrdlusel tungiühikuna tarvitada kilogrammi (kg), või suuremate tungide puhul tonni (t;  $1\text{ t} = 1000\text{ kg}$ ). Tehnika küsimuste jaoks küllaldase täpsusega võib lugeda tungi 1 kg võrdseks 1 liitri vee raskusega; 1 t oleks seega ühe kantmeetri veel kaal. kg ja t on nn. tehnilised tungiühikud.

Füüsikalistes uurimistes on otstarbekohasem kasutada teisugust tungiühikut, mis rajatud mitte staatilisele raskusemõistele, vaid dünaamikas käsiteldavale kiirendusele. Selles nn. absoluutses ehk CGS-süsteemis (sentimeeter-gramm-sekund-süsteemis) on tungiühikuks düün (Dyn), s. o. tung, mis annab massile 1 gramm (g) 1 sekundiga (sec) kiiruse kasvu 1 sentimeetri võrra sekundis. Massi 1 g sisaldab seejuures 1 kantsentimeeter ( $\text{cm}^3$ ) puhast vett (täpsemalt  $1,000027\text{ cm}^3$ )  $4^\circ\text{C}$  temperatuuril ja normaalrõhumisel. Tung 1 kg vastab 980 665 düünile. Ümmarguselt on 1 düün umbes võrdne 1 milligramm-raskusega.

Märkus: Nimetused „gramm“ ja „kilogramm“ on rööbiti tarvitusel kahes erinevas mõttes: tehnikas nad tähendavad

raskust, füüsikas aga enamasti massi. Mass on keha asendist olenematu, raskus aga oleneb geograafilisest laiusest ja kõrgusest merepinna suhtes. Massil 1 kg on raskus 1 kg laiusel  $45^\circ$  merepinnal, — mujal on sama massi raskus pisut erinev.

**§ 3. Tungide matemaatiline iseloom.** Tungide tasakaalustamise küsimustes ei piisa üksnes tungide suuruste teadmisest, sest vägagi oluliseks osutuvad veel tungide rakenduspunktid ja suunad. Nii näiteks saab tugevasti koormatud kangi tasakaalustada juba võrdlemisi väikese tungi abil, andes viimasele sobiva suuna ja rakendades teda parajal kohal. Matemaatilises keeles väljendatakse seda nõnda, et tunge tuleb mehaanika probleemide lahendamisel käsitleda vektoritena, s. o. matemaatiliste mõistetenä, kus koos on arvestatud 1) suurust, 2) rakenduspunkti ja 3) suunda. Piltlikult on otstarbekohane säärast tungivektorit kujutella noolena, mis algab vastavas rakenduspunktis, omab vastava tungi suunda ja sisaldab parajasti niipalju pikkusühikuid, kui palju tung sisaldab tungühikuid.

Tuleb silmas pidada, et mitte üksnes tungid, vaid ka paljud teised mõisted (näiteks kiirus ja kiirendus) omavad vektoriaalse suuruse (vektori) iseloomu. Kõikidel neil juhtudel saab kasutada mainitud noolkujutist. Vektor on seega üldisem mõiste kui tung; ainult erijuhtudel on vektoriks just tung.

Vastandina vektoritele kutsutakse suurusi, mis sisuliselt pole seotud suunaga (nagu näiteks mass, temperatuur) skaalarseteks ehk skaalariteks. Mass 1 kg on skaalar; raskus 1 kg on vektor.

## Harjutusülesandeid.

1. Telliskivi laius on pool tema pikkusest ning paksus pool tema laiusest; erikaalu 2,6 puhul kaalub ta 11 naela. Arvutada telliskivi mõõtmed.

2. 4 m pikk malmtoru (erikaal 7,25), välise läbimõõduga 17 cm, kaalub 145 kg. Arvutada toru seesmine läbimõõt.

3. Vedur annab rongile, mille raskus 400 tonni, ühe minutiga kiiruse 30 km tunnis. Kui suur vähemalt peaks sel puhul olema veduri poolt arendatud tõmbetung?

4. Kui suur peaks olema vesinikuga täidetud sfääriline õhupall, et ta suudaks kanda 400 kg bruto?

5. Üle ploki on visatud nöör, mille otstele on kinnitatud ühelt poolt raskus 1 kg, teiselt poolt natuke suurem raskus  $P$ . Kui suur peab olema  $P$ , et vihid kolme sekundi möödumisel omandaksid kiiruse  $50 \text{ cm sec}^{-1}$ ? (Ploki ja nööri mass ning hõõrdumine jäägu arvestamata.)

## I. Vektorid.

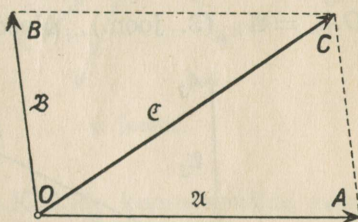
§ 4. **Vektorite liitmine.** Suure tähtsuse tõttu, mida vektorid omavad mehaanika probleemides, tutvume kõigepealt vektorite mõningate üldomadustega, ajutiselt tähele panemata jättes nende vektorite füüsikalist tähendust, s. o. mitte peatudes selle juures, kas need vektorid kujutavad tunge, kiirusi või midagi muud.

Vektoritega saab samuti nagu arvudega (skaalaritega) teostada mitmesuguseid tehteid. Algeliseks vektortehteks on **s a m a s p u n k t i s r a k e n d a t u d** vektorite liitmine üheks uueks vektoriks sama rakendus-punktiga.

Olgu (2. joon.) punktis  $O$  rakendatud 2 vektorit  $\vec{OA}$  ja  $\vec{OB}$  (säärase kirjutusviisi puhul on noolega vihjatud vektori suunale). Selleks, et liita vektoriga  $\vec{OA}$  vektor  $\vec{OB}$ , tõmbame  $AC \parallel OB$  ja võtame pikkuse  $AC$  võrd-sena pikkusega  $OB$  vektorile  $\vec{OB}$  vastavas suunas. Sellega on punkti  $C$  asukoht üheselt määratud.

Vektor  $\vec{OC}$  loetakse siis vektoriga  $\vec{OA}$  vektori  $\vec{OB}$  liitmise tulemuseks.

Kui oleksime vastupidises järjekorras tahtnud vektoriga  $\vec{OB}$  liita vektori  $\vec{OA}$ , siis sama eeskirja kohaselt oleksime pidanud tõmbama  $BC' \parallel OA$  ja võtma  $BC' = OA$  vektorile  $\vec{OA}$  vastavas suunas. Sel teel leitud punkt  $C'$  peab aga kindlasti langema varemleitud punkti  $C$  kohale, sest  $OACB$  on rööpkülik ja seepärast tingimata just  $BC \parallel OA$  ja  $BC = OA$ . Tulemusena oleksime seega saanud, liites vektoriga  $\vec{OB}$  vektori  $\vec{OA}$ , jälle endise vektori  $\vec{OC}$ .



2. joonis.

Seda kahel viisil saadavat vektorit  $\vec{OC}$  kutsutakse  $\vec{OA}$  ja  $\vec{OB}$  või  $\vec{OB}$  ja  $\vec{OA}$  summaks, ehk, kui tähtis on rõhutada, et tegemist on just vektortehtega, vektoriaalseks summaks. Sümbolites kirjutatakse:

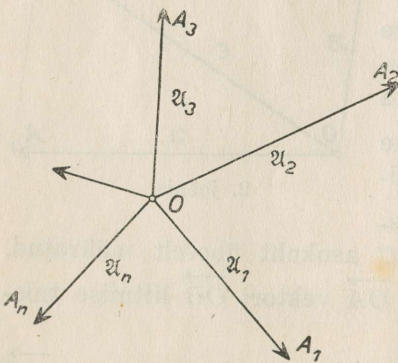
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OA}. \quad (1)$$

Sageli tähistatakse vektorit üheainsa, siis aga enamasti gooti tähega. Tähistame  $\vec{OA} = \mathfrak{A}$ ,  $\vec{OB} = \mathfrak{B}$ ,  $\vec{OC} = \mathfrak{C}$ , siis 2. joonise kohaselt

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}. \quad (2)$$

Summa  $\mathfrak{C}$  esineb vektorite  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  kaudu määratud parallelogrammi  $OACB$  diagonaalina, kusjuures oluline on, et kõik kolm vektorit on rakendatud selle parallelogrammi ühes ja samas tipus. Kirjeldatud vektorite liitmist kutsutakse sageli „liitmiseks parallelogrammi seaduse alusel“.

Vaatleme nüüd üldjuhtu, kus ühises punktis  $O$  on rakendatud mitte enam kaks, vaid  $n$  vektorit  $\vec{OA}_1 = \mathfrak{A}_1$ ,  $\vec{OA}_2 = \mathfrak{A}_2$ , ...,  $\vec{OA}_n = \mathfrak{A}_n$  (3. joon.). Need vektorid ei tarvitse asetseada ühes



3. joonis.

tasapinnas, vaid võivad omada üsna meelevaldseid suundi ruumis. Parallelogrammi seaduse alusel võime liita vektoreid  $\mathfrak{A}_1$  ja  $\mathfrak{A}_2$  üheks uueks vektoriks  $\mathfrak{S}_2$ ; sel viisil saame süsteemi, mis koosneb  $n-1$  vektorist  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \dots, \mathfrak{A}_n$ , mis kõik rakendatud ühises punktis  $O$ . Liidame nüüd  $\mathfrak{S}_2$  ja  $\mathfrak{A}_3$  parallelogrammi seaduse alusel uueks vektoriks  $\mathfrak{S}_3$ , saame süsteemi, mis koosneb ainult  $n-2$  vektorist  $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{A}_4, \dots, \mathfrak{A}_n$ .

Säärast toimingut jätkates jõuame lõpuks kahest vektorist  $\mathfrak{S}_{n-1}, \mathfrak{A}_n$  koosneva süsteemini. Liites need ülejäänud 2 vektorit, saame üheainsa vektori  $\mathfrak{S}_n$ . Sel viisil saadud vektorit  $\mathfrak{S}_n$  kutsutaksegi käsiteldud üldjuhul punktis  $O$  rakendatud vektoritekoogu  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  summaks:

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n. \quad (3)$$

Hiljemini (§ 10) veendume, et tulemus  $\mathfrak{S}_n$  ei olene järjekorrast, milles kirjeldatud toimingu puhul vektorid  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  (liidetavad) on kasutatud.

**§ 5. Komponentide ahel.** Osutub mõni vektor  $\mathfrak{S}$  teatavate samas punktis rakendatud vektorite  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  summaks, siis kutsutakse neid liidetavaid  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  ka vektori  $\mathfrak{S}$  komponentideks.

Punktis  $O$  rakendatud komponentide liitmiseks peaksime § 4 selgitatud toimingu kohaselt kõigepealt võtma (4. joon.)  $P_1P_2$  paralleelselt ja võrdselt vek-

toriga  $\mathfrak{A}_2$ ; ühendusnool  $\overrightarrow{OP_2}$  (joonisel märkimata!) kujutaks siis  $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ . Et selle

vektoriga  $\overrightarrow{OP_2} = \mathfrak{S}_2$  nüüd liita  $\mathfrak{A}_3$ , peaksime punktist  $P_2$  lähtudes tõmbama  $P_2P_3$  paralleelselt ja võrdselt vektoriga

$\mathfrak{A}_3$ ;  $\overrightarrow{OP_3}$  kujutabki siis summat  $\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{A}_3$ . Kirjeldatud viisil edasi sammudes saame järk-järgult murdjoone

$$OP_1P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n,$$

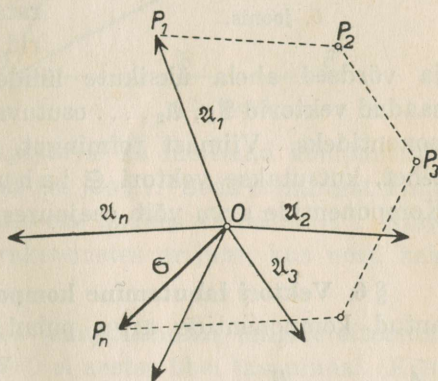
kus  $P_{n-1}P_n$  on paralleelne ja võrdne viimase komponendiga  $\mathfrak{A}_n$ . Kõikide komponentide sum-

maks  $\mathfrak{S}$  osutub  $\overrightarrow{OP_n}$ . Selle summa  $\mathfrak{S}$  leidmiseks piisab murd-

joonest  $OP_1 \dots P_n$ ; osasummade  $\overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \dots$  väljajoonestamine oleks ülearune. Murdjoont  $OP_1 \dots P_n$  nimetame komponentide

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  kaudu määratud ahelaks ehk lühidalt — komponentide ahelaks. Komponentide ahela üksikud lülid (küljed)  $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$  on vastavalt paralleelsed ja võrdsed komponentidega  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ . Komponentide ahel on tasane, kui kõik komponendid asetsevad ühes ja samas tasapinnas, muidu mitte. Ühendades ahela alguse  $O$  ahela lõpuga  $P_n$ , saame

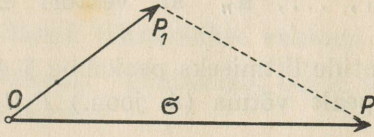
ahela sulgeja  $\mathfrak{S} = \overrightarrow{OP_n}$ . Ahel koos oma sulgejaga moodustab kinnise hulknurga  $OP_1P_2 \dots P_nO$ . Selle hulknurga tegelikuks kujutamiseks juhul, kus ahel pole tasane, tuleks rakendada kujutava geomeetria võtteid. Summa  $\mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n$  määramisvõtet



4. joonis.

komponentide ahela kaudu nimetatakse ka vektorite liitmiseks „hulknurga põhimõttel“. Erijuhul, kus komponentide arv on vaid 2, saame kolmnurga (5. joon.); kujund on siis tingimata tasane.

Olgu ümberpöörduvalt alul ette antud mingi vektor  $\vec{OP}_n = \mathfrak{E}$ .

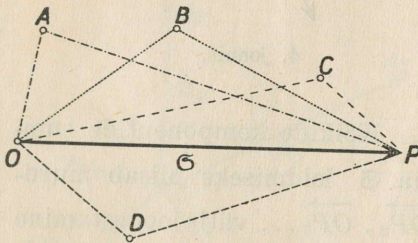


5. joonis.

Joonestame meelevaldse ruumilise murdjoone, mis algaks punktis  $O$  ja lõpeks punktis  $P_n$ . Tõlgendades seda murdjoont komponentide ahelana, võime tema järgi määrata punktis  $O$  rakendatud vektorid  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ , mis paralleelsed

ja võrdsed ahela üksikute lülidega  $OP_1, P_1P_2, \dots$ . Niiviisi saadud vektorid  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  osutuvad siis kindlasti vektori  $\mathfrak{E}$  komponentideks. Viimast toimingut, mis moodustab liitmise pöördtehet, kutsutakse vektori  $\mathfrak{E}$  lahutamiseks komponentideks. Komponentide arvu võib seejuures meelevaldselt ette anda.

**§ 6. Vektori lahutamine komponentideks eritingimustel.** Etteantud komponentide arvu puhul saab antud vektorit  $\mathfrak{E}$  ikkagi



6. joonis.

veel lõpmata mitmekesisel viisil komponentideks lahutada, sest komponentide ahela kuju jääb veel üsna meelevaldseks. 6. joonisel on kujutatud näiteks 4 erinevat ahelat  $OAP, OBP, OCP, ODP$ , milledest igaüks isemoodi määrab vektori  $\vec{OP}$  lahutamist kaheks komponentiks.

Teatavate lisanõuete juurdevõtmisega võib saavutada seda, et vektori lahutamine komponentideks toimuks ühesel viisil. Staatika küsimuste puhul esinevad sääraste lisanõuete sageli järgmised:

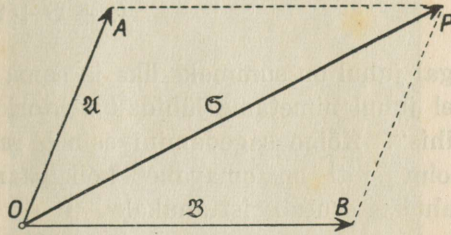
1) Lahutada  $\mathfrak{E}$  kaheks komponentiks, milledest üks, ütleme  $\mathfrak{A}$ , on meelevaldselt ette antud. Sel puhul on kolmnurgas  $OAP$  (7. joon.) punktide  $O, A$  ja  $P$  asukohad kindlad; et teine komponent  $\mathfrak{B}$  peab olema paralleelne ja võrdne lüluga  $AP$ , siis on ta sellega määratud üheselt. Otsitavat komponenti  $\mathfrak{B}$

kutsutakse sel puhul vektorite  $\mathfrak{E}$  ja  $\mathfrak{A}$  v a h e k s (diferentsiks):

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{E} - \mathfrak{A}. \quad (4)$$

Joonisest ilmneb, et s a m a  $\mathfrak{B}$  oleksime saanud lähtudes ahelast  $OBP$ , kus  $BP$  on paralleelne ja võrdne a n t u d vektoriga  $\mathfrak{A}$ .

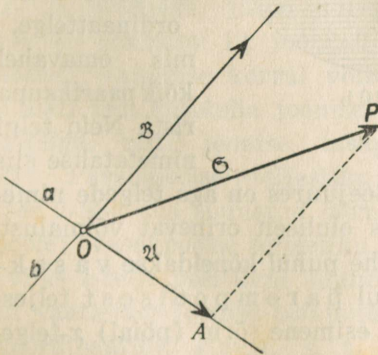
2) Lahutada  $\mathfrak{E}$  kaheks komponendiks, millede sihtsirged (kandesirged)  $a$  ja  $b$  läbi  $O$  on ette antud ( $a$  ja  $b$  peavad siis tingimata asetsema koos vektoriga  $\mathfrak{E}$  samal tasapinnal). Jällegi on sel korral ahelast  $OAP$  punktide  $O$ ,  $A$  ja  $P$  asukohad



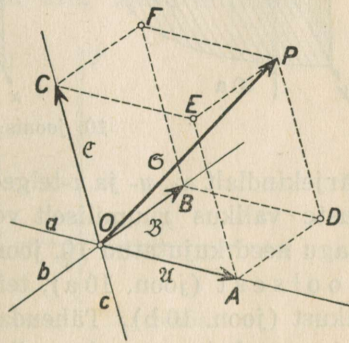
7. joonis.

määratud üheselt ja selle tagajärjel ka mõlemad komponendid  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  samuti määratud üheselt (8. joon.). Seda toimingut nimetame lühidalt vektori lahutamiseks „kahes antud sihis“. Kõige sagedamini esineb sel puhul rakendustes erijuht, kus need kaks sihti on teineteisega risti.

3) Lahutada  $\mathfrak{E}$  kolmeks komponendiks, millede etteantud 3 sihtsirget  $a$ ,  $b$  ja  $c$  läbi  $O$  ei asetse ühel tasapinnal. Küsi-



8. joonis.



9. joonis.

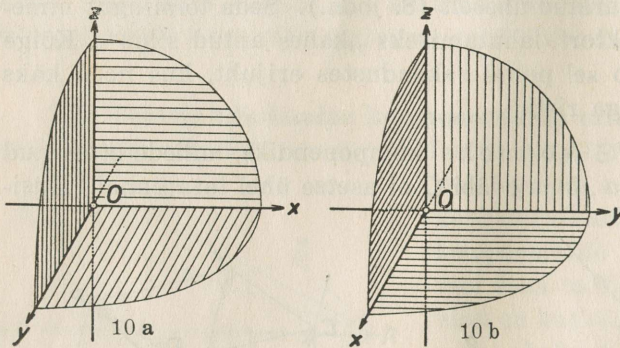
muse lahendab sel juhul ruumiliselt mõeldud 9. joonis. Kolm sirget  $a$ ,  $b$  ja  $c$  määravad rööptahuka  $OADBCEPF$ , mille diagonaaliks on  $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{E}$ . Otsitavateks komponentideks osutuvad  $\overrightarrow{OA} = \mathfrak{A}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathfrak{B}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \mathfrak{C}$ . Samast joonisest ilmneb, et ahe-

laid, mis vastavad nõuetele, ja mille ühiseks sulgejaks on  $\vec{OP}$ , leidub 6, nimelt  $OADP$ ,  $OAEP$ ,  $OBDP$ ,  $OBFP$ ,  $OCEP$ ,  $OCFP$ . Nad kujutavad  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$  liitmist vastavalt kuues võimalikus järjekorras:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}, \mathfrak{B} + \mathfrak{A} + \mathfrak{C}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{A}, \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$$

Igal juhul on summaks üks ja sama vektor  $\vec{OP} = \mathfrak{S}$ . Toimingut sel juhul nimetame lühidalt vektori lahutamiseks „kolmes antud sihis“. Kõige sagedamini esineb rakendustes erijuht, kus need kolm sihti on omavahel kõik paarikaupa risti, s. t. kus rööptahukas osutub risttahukaks.

### § 7. Koordinaatteljestikud. Mehaanika probleemide uuri-

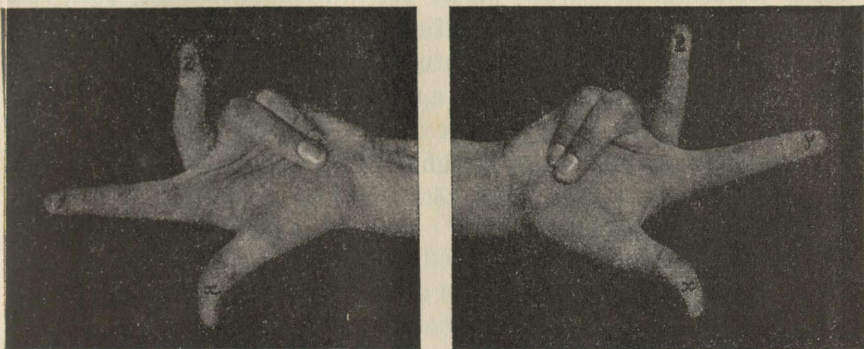


10. joonis.

misel on väga paljudel juhtudel otstarbekohane rakendada analüütilise geomeetria meetodeid, võttes abiks 3 koordinaattelge, mis omavahel kõik paarikaupa risti. Neid telgi

nimetatakse siis järjekindlalt  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telgedeks. Seejuures on aga telgede nimetuste valikus ruumiliselt veel kaks oluliselt erinevat võimalust, nagu need kujutatud 10. joonisel: ühe puhul kõneldakse v a s a k p o o l s e s t (joon. 10 a), teise puhul p a r e m p o o l s e s t teljestikust (joon. 10 b). Tähendagu käe esimene sõrm (pöial)  $x$ -telge, teine  $y$ -, kolmas  $z$ -telge, siis saame vasema käe sõrmedele anda vasakpoolse, parema käe sõrmedele parempoolse teljestiku kuju (11. joon.). Vasakpoolset teljestikku eelistavad prantsuse (ja vene) autorid, parempoolset — inglise ja saksa omad; sellepärast kõneldakse sageli ka vastavalt prantsuse ja inglise teljestikust. Katse näitab, et pole kuidagi võimalik paigutada vasakpoolset teljestikku parempoolsele nõnda, et vastavate tähtedega nimeta-

tud telgede positiivsed suunad kõik korruga vastavalt ühtiksid. Kui aga telgedele anda nimed  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mõnel teisel, 10. joonisest erineval viisil, siis säärast uut teljestikku saab alati pöörata nii-

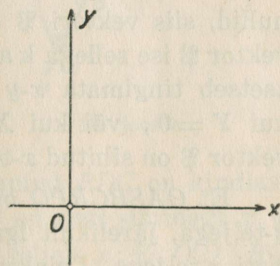


11. joonis.

sugusesse asendisse, et ta langeks ühte kas teljestikuga joonisel 10 a, või aga teljestikuga joonisel 10 b, tähendab, iga teljestik osutub tingimata kas vasakpoolseks või aga parempoolseks.

Ühtluse mõttes on käesolevas raamatus edaspidi järjekindlalt tarvitatud parempoolset teljestikku.

Tasapinnaliste küsimuste uurimisel võib piirduda kahe, näiteks  $x$ - ja  $y$ -teljega, jättes  $z$ -telje lihtsalt ära. Neile telgedele antakse siis enamasti 12. joonisel kujutatud asend. Vajaduse korral võib sellele lisaks alati veel kujutella joonisel puuduvat  $z$ -telge, risti joonise tasapinnaga läbi  $O$ . Parempoolse teljestiku puhul peab see  $z$ -telg siis suunatud olema vaatleja poole; vasakpoolse teljestiku eelistamisel viiks  $z$ -telje positiivne suund vastupidiselt vaatlejast joonise tasapinna taha.

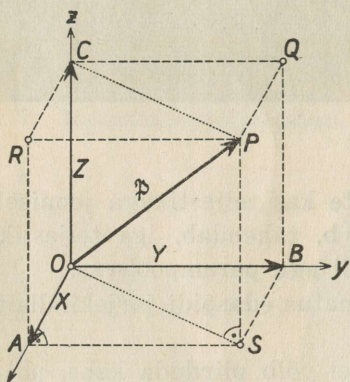


12. joonis.

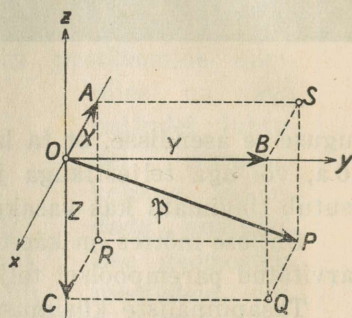
Koordinaatide algust, s. t. punkti, kus koordinaatteljed omavahel lõikuvad, tähistatakse harilikult tähega  $O$  (*origo* = algus). Alguse  $O$  asukoha ja telgede sihid püütakse valida nõnda, et see võimalust mööda hõlbustaks antud küsimuse „analüütilist“ käsitlemist.

**§ 8. Vektori projektsioonid telgedele.** Olgu antud mõni meelevaldne vektor  $\mathfrak{F}$ . Valime tema algpunkti  $O$  koordinaatide

alguseks ja paigutame läbi  $O$  üsna juhusliku koordinaatteljestiku. Lahutame  $\mathfrak{F}$  komponentideks nende kolme koordinaattelje sihis (13. joon.). Neil komponentidel on siis teatavad pikkused, mida saab iseloomustada veel pluss- või miinus-märkidega, sõltuvalt sellest, kas vastava komponendi suund langeb ühte vastava telje positiivse suunaga, või aga osutub vastupidiseks. Sel teel saame iga vektori  $\mathfrak{F}$  puhul kolm arvu, mida tähistame näiteks  $X, Y, Z$ ; igaüks neist arvudest võib osutada kas positiivseks, või negatiivseks, või saab erijuhul olla ka null. 14. joonisel on  $X < 0, Y > 0, Z < 0$ . On kõik kolm arvu  $X, Y, Z$  korruga



13. joonis.



14. joonis.

nullid, siis vektori  $\mathfrak{F}$  ots  $P$  langeb tema algpunktiga  $O$  ühte ja vektor  $\mathfrak{F}$  ise sellega ka  $0$  (null-vektor). On  $Z = 0$ , siis vektor  $\mathfrak{F}$  asetseb tingimata  $x-y$  tasapinnal; analoogiline olukord valitseb, kui  $Y = 0$ , või kui  $X = 0$ . On korruga  $Z = 0$  ja  $Y = 0$ , siis vektor  $\mathfrak{F}$  on sihitud  $x$ -telge pidi jne.

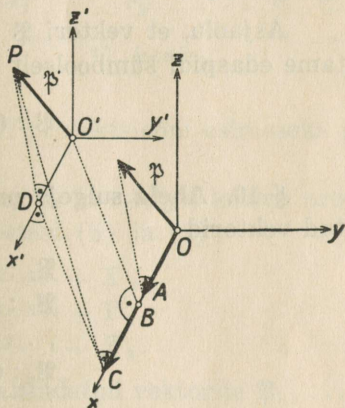
Et  $OASBCRPQ$  on risttahukas, siis tasapind  $PRAS$  on risti  $x$ -teljega, järelikult iga sirge selles tasapinnas, ka sirge  $AP$ , on risti  $x$ -teljega. Leiaksime seega punkti  $A$ , tõmmates läbi  $P$  ristjoone sellele teljele, s. t. „projektides“  $P$  teljele  $x$ . Analoogiliselt leiame  $B$  ja  $C$ , projektides  $P$  vastavalt  $y$ - ja  $z$ -teljele. Vektori  $\mathfrak{F}$  algpunkti  $O$  projektsiooniks mistahes koordinaatteljele on iga kord sama punkt  $O$  ise. Seega vektori  $\mathfrak{F}$  komponendi  $\overrightarrow{OA}$  saame projektides  $\mathfrak{F}$   $x$ -teljele; samuti saame komponendi  $\overrightarrow{OB}$ , projektides  $\mathfrak{F}$   $y$ -teljele, ja komponendi  $\overrightarrow{OC}$ , projektides  $\mathfrak{F}$   $z$ -teljele.

Neid komponente iseloomustavaid arve  $X, Y, Z$  kutsutakse seejärel vektori projektsioonideks koordinaattelgedele. Mõnikord nimetatakse ka neid arve otsekohe vektori  $\mathfrak{P}$  komponentideks koordinaattelgi pidi, kuigi see sisuliselt ei ole päris korrektne, sest  $X, Y, Z$  on skaalarid (arvud!), komponendid aga on alati mõeldud vektoritena.

Projektsioonidega  $X, Y, Z$  on vektor  $\mathfrak{P}$  üheselt määratud, nagu seda saab välja lugeda 13. joonisest.

**§ 9. Paralleelsed vektorid.** Olgu  $X$  vektori  $\mathfrak{P}$  projektsioon  $x$ -teljele (15. joon.). Vaatleme kõrvuti veel mõnda teist vektorit  $\mathfrak{P}'$ , mis vektoriga  $\mathfrak{P}$  samasuunaliselt paralleelne ning suuruse poolest võrdne, kuid rakendatud mõnes teises punktis  $O'$ . Projektides ka  $\mathfrak{P}'$   $x$ -teljele saame sel

teljel vektori  $\overrightarrow{BC}$ , mille pikkust, kui teda varustada varem selgitatud eeskirja kohaselt märgiga, näitab endine arv  $X$ . Selles veendume, võttes ajutiselt abiks uued koordinaatteljed  $x', y', z'$  paralleelselt ja samasuunaliselt endiste telgedega  $x, y, z$ , kuid algusega punktis  $O'$  (kanname teljestiku rööplükkega punktist  $O$  punkti  $O'$ ). Siis peab esiteks  $\mathfrak{P}'$  komponent  $\overrightarrow{O'D}$   $x'$ -telje sihis ilmselt olema võrdne ja samasuunaliselt



15. joonis.

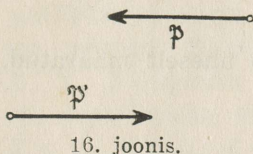
paralleelne vektoriga  $\overrightarrow{OA}$ , mille pikkust iseloomustas arv  $X$ . Teiseks tasapind  $PDC$  on kindlasti risti sihtidega  $x'$  ja  $x$ . Kolmandaks ka  $O'B$  on risti sihtidega  $x'$  ja  $x$ , sest  $B$  pidi olema punkti  $O'$  projektsioon teljele  $x$ . Et  $O'D \parallel BC$ , siis seega nelinurk  $O'DCB$  osutub ristkülikuks, mille tõttu  $BC = O'D$ , tähendab, ka  $\overrightarrow{BC}$  pikkust iseloomustab endine arv  $X$ .

Samasugused kaalutlused näitavad, et ka projektsioonid teistele telgedele on vektoritel  $\mathfrak{P}'$  ja  $\mathfrak{P}$  ühised, sest antud juhul  $x$ -telg pole millegi poolest teiste telgedega võrreldes eelistatud. Niisiis:

**vektori samasuunaliselt paralleelsel ülekandmisel mõne uue rakenduspunkti juurde ei muutu projektsioonid  $X, Y, Z$ .**

Ehk teisiti:

samasuunaliselt paralleelsetel ja suuruse poolest võrdsetel vektoritel on vastavad projektsioonid  $X, Y, Z$  vastavalt võrdsed.



Kui kaks vektorit on paralleelsed ja suuruse poolest võrdsed, kuid vastassuunalised, nagu  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{P}'$  16. joonisel, siis kehtivad üldiselt ikkagi ülaltoodud kaalutlused, ainult suuna pööramise tagajärjel muutuvad projektsioonidel  $X, Y, Z$  üheskoos kõik märgid

vastupidisteks. Tähenab:

võrdse suurusega paralleelsetel, kuid vastassuunalistel vektoritel erinevad projektsioonid vaid selle poolest, et märgid on vastupidised.

Asjaolu, et vektori  $\mathfrak{P}$  projektsioonideks on  $X, Y, Z$ , kirjutame edaspidi sümboolselt ka kujul

$$\mathfrak{P} : (X, Y, Z).$$

§ 10. Ahela sulgeja projektsioon. Olgu punktis  $A$  rakendatud vektorid

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &: (X_1, Y_1, Z_1) \\ \mathfrak{P}_2 &: (X_2, Y_2, Z_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \mathfrak{P}_n &: (X_n, Y_n, Z_n) \end{aligned} \quad (5)$$

Olgu nende vektorite summaks  $\mathfrak{P}$ :

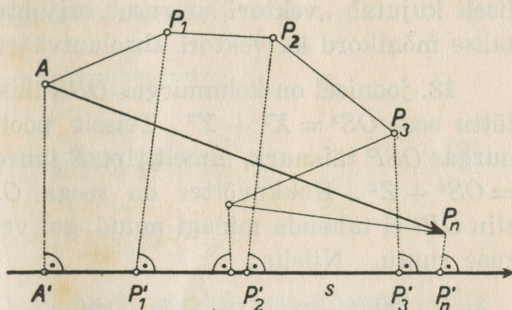
$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots + \mathfrak{P}_n. \quad (6)$$

Arvutame neil andmeil summa  $\mathfrak{P}$  projektsioone  $X, Y, Z$ . § 5 kohaselt moodustab  $\mathfrak{P}$  komponentide  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  ahela  $AP_1P_2 \dots P_n$  sulgeja  $\overrightarrow{AP}_n$  (17. joon.), kusjuures  $P_1P_2$  on samasuunaliselt paralleelne ja võrdne vektoriga  $\mathfrak{P}_2$  jne. Võtame meelevaldse sirge  $s$ , millel valitud positiivne suund („orienteeritud“ sirge), ja projektime ahela lülid ning ahela sulgeja sellele sirgele. Saame sel teel projektsioonid  $A'P'_1, P'_1P'_2, \dots, P'_{n-1}P'_n, A'P'_n$ , mida võime jällegi käsitleda positiivsete või negatiivsete arvudena, vastavalt sellele, kas projektsiooni alg- ja lõpp-punktiga määratud

suund ühtib sirge  $s$  positiivse suunaga, või aga osutub vastu-  
pidiseks; langeb erijuhtudel projektsiooni lõpp algusega ühte, siis  
vastab sellele muidugi arv null.

Algebra eeskirjade kohaselt on kirjeldatud viisil märkidega  
varustatud arvude  $A'P_1'$ ,  $P_1'P_2'$ , ...,  $P_{n-1}'P_n'$  summaks para-  
jasti see samuti mär-  
giga varustatud arv,  
mis vastab punktis  $A'$   
algavale ja punktis  $P_n'$   
lõppevale lõigule sirgel  
 $s$ . See tähendab aga, et

**ahela sulgeja projektsioon mistahes orienteeritud sirgele on võrdne sama ahela lülide projektsioonide sum-  
maga samal sirgel.**



17. joonis.

Seda lauset nimetame edaspidi projektsiooni esimeseks põhilauseks.

Võttes eriti sirgena  $s$  järjest  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telge, leiame projekt-  
siooni esimese põhilause alusel seostest (5) ja (6):

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Valemid (7) annavad punktis  $A$  rakendatud vektorite  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$   
liitmise eeskirja analüütilisel kujul, kusjuures pole tähtis, kus nimelt asetseb punkt  $A$ . Erijuhuna võib see punkt  
 $A$  langeda ka koordinaatide algusse  $O$ .

Kui ahela moodustamisel oleksime vektorid  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  võtnud  
mingisuguses meelevaldselt teises järjekorras, siis valemitega (7)  
määratud arvud  $X, Y, Z$  oleksid jäänud ikkagi endiseks, sest  
paremat kätt esineksid valemities kõik endised liidetavad arvud,  
ainult mõnes teises järjekorras, mis ei avalda mõju algebraliseilt  
võetud summale. Arvud  $X, Y, Z$  omalt poolt määravad punktis  $A$   
rakendatud vektori  $\mathfrak{P}$  üheselt. Sellega ongi selgunud, et vek-  
torite liitmisel § 5 kohaselt hulknurga põhimõtte alusel leitud  
summa ei olene komponentide järjekorrast, nagu  
väidetud § 4 lõpus.

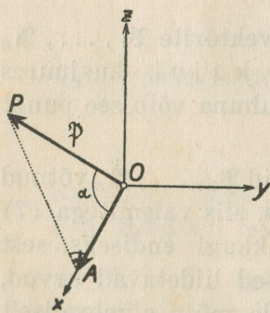
§ 11. **Suunakoosinused.** Vektori  $\mathfrak{P}$  projektsioonidega  $X, Y, Z$  on määratud vektori suurus ja suund; meelevaldseks jääb ainult veel rakenduspunkt. Vektori  $\mathfrak{P}$  suurust, s. t. positiivsena mõeldud arvu, mis näitab, mitu korda nool  $\mathfrak{P}$  on ühikust pikem, tähistatakse sageli sümboliga  $|\mathfrak{P}|$ ; samalaadiline sümbol on tarvitusel algebras arvu „absoluutse suuruse“ tähistamiseks, mis sisuliselt kujutab „vektori suuruse“ erijuhtu. Vektori suurust kutsutakse mõnikord ka vektori absoluutväärtuseks.

13. joonisel on kolmnurgas  $OBS$  täisnurk tipu  $B$  juures, mille tõttu seal  $OS^2 = X^2 + Y^2$ . Teiselt poolt esineb seal ka kolmnurgas  $OSP$  täisnurk, nimelt tipu  $S$  juures, — järelikult on  $OP^2 = OS^2 + Z^2$ . Kokkuvõttes on seega  $OP^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ ; kuid siin  $OP^2$  ei tähenda midagi muud, kui vektori  $\mathfrak{P} : (X, Y, Z)$  suuruse ruutu. Niisiis:

$$|\mathfrak{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad |\mathfrak{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (8)$$

kus ruutjuur on alati mõeldud positiivsena. Valem (8) määrab vektori suuruse tema kolme projektsiooni kaudu, kusjuures pole nõutav, et vektor algaks just punktis  $O$ , sest vektori paralleelne ülekanne meelevaldse teise rakenduspunkti juurde ei mõjosta arve  $|\mathfrak{P}|, X, Y, Z$ .

Vektor  $\mathfrak{P}$  moodustab  $x$ -telje positiivse suunaga teatava nurga  $\alpha$  (18. joon.), mis võib kõiguda  $0^\circ$  ja  $180^\circ$  vahemikus. Projektides  $\mathfrak{P}$   $x$ -teljele, saame kolmnurgas  $OPA$  tipu  $A$  juures kindlasti alati täisnurga. Sellest kolmnurgast loeme välja, et  $\cos \alpha = \frac{X}{|\mathfrak{P}|}$ , kusjuures  $\alpha$  osutub teravnurgaks, kui  $X > 0$ , ja nürinurgaks, kui  $X < 0$ . Projektsiooniga  $X$  on järelikult otseselt määratud  $\cos \alpha$  märk.



18. joonis.

Olgu vektori  $\mathfrak{P}$  nurgad  $y$ - ja  $z$ -telje positiivse suunaga vastavalt  $\beta$  ja  $\gamma$ . Kui  $\alpha, \beta, \gamma$  on teada, siis sellega on määratud vektori  $\mathfrak{P}$  suund ruumis. Rakendustes osutub enamasti otstarbekohasemaks vektori  $\mathfrak{P}$  suuna määramine mitte otseselt  $\alpha, \beta, \gamma$ , vaid kaudselt  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  kaudu. Neid vahemikus  $-1$  kuni  $+1$  kõikuvaid arve kutsutakse vektori  $\mathfrak{P}$  suunakoosinusteks. Edaspidi

tähistame need suunakoosinused lühendatult sümbolitega  $l, m, n$ :

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma.$$

Et ülalleitud suunakoosinuse arvutamise võtte on vastavate muudatustega ilmselt rakendatav ka teiste koordinaattelgede puhul, sest  $x$ -telg pole teistega võrreldes mitte millegi poolest eelistatud olukorras, siis saame (8) kaasabil valemid:

$$\begin{aligned} l &= \frac{X}{|\mathfrak{P}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ m &= \frac{Y}{|\mathfrak{P}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ n &= \frac{Z}{|\mathfrak{P}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Jällegi pole siin oluline, et vektor  $\mathfrak{P}$  algaks just koordinaatide alguses  $O$ , sest paralleelsel ülekandmisel mõne teise rakenduspunkti juurde ei muutu nurgad  $\alpha, \beta, \gamma$  ega projektsioonid  $X, Y, Z$ .

Kirjutades (9) põhjal

$$X = |\mathfrak{P}| \cdot l = |\mathfrak{P}| \cdot \cos \alpha, \quad (10)$$

ning võttes arvesse, et  $x$ -telje valik on siin üsna meelevaldne, saame lause:

**vektori projektsioon mistahes orienteeritud sirgele on võrdne vektori suuruse ja vektori ning sirge positiivse suuna vahelise kaldenurga koosinuse korrutisega.**

Seda lauset nimetame projektsiooni teiseks põhilauseks.

Vektori kolme suunakoosinuse vahel valitseb valemist (10) kergesti tuletatav seos. Kirjutame (10) iga telje puhul eraldi välja, tõstame ruutu ja liidame saadud seosed. Saame sel teel:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= |\mathfrak{P}|^2 l^2 + |\mathfrak{P}|^2 m^2 + |\mathfrak{P}|^2 n^2 = \\ &= |\mathfrak{P}|^2 (l^2 + m^2 + n^2), \end{aligned}$$

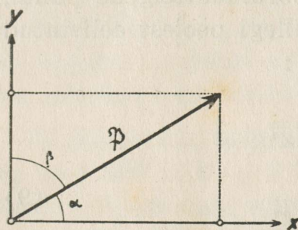
ehk, (8) põhjal:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) (l^2 + m^2 + n^2).$$

Jagades siin mõlemad pooled arvuga  $X^2 + Y^2 + Z^2$ , järeldame:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (11)$$

Suunakoosinuste ruutude summa annab seega alati arvu 1. On kaks suunakoosinust teada, siis saab selle seose põhjal määrata kolmanda suunakoosinuse absoluutväärtuse; lahtiseks jääb ainult märgi küsimus.



19. joonis.

Asetseb vektor  $\mathfrak{P}$   $x$ - $y$  tasapinnal, siis ta on risti teljega  $z$ , seega  $\gamma = 90^\circ$  ja  $n = \cos \gamma = 0$ . Seos (11) annab sel erijuhul (19. joon.):

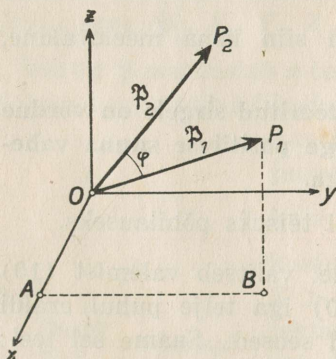
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Kuid joonisest on näha, et siin  $\cos \beta = \sin \alpha$ ; järelikult praegu leitud erikujuline tulemus ühtib trigonomeetriast

tuntud valemiga

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

§ 12. Skalaarne korrutis. Olgu punktis  $O$  rakendatud kaks vektorit  $\mathfrak{P}_1 : (X_1, Y_1, Z_1)$  ja  $\mathfrak{P}_2 : (X_2, Y_2, Z_2)$ . Vektorite  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  suundade vaheline nurk  $\varphi$  (20. joon.) võib kõikuda  $0^\circ$  ja  $180^\circ$



20. joonis.

vahemikus. Vektorite projektsioonide kaudu on võimalik seda nurka arvutada. Vastava valemi tuletamiseks projektme ahela  $OABP_1$  vektori  $\mathfrak{P}_2$  kandesirgele, valides viimasel positiivseks suunaks just vektori  $\mathfrak{P}_2$  suuna. See projektsioon peab projektsiooni esimese põhilause alusel võrdne olema sama ahela sulgeja projektsiooniga. Lülide ja sulgeja projektsioone saame arvutada projektsiooni teise põhilause alusel, arvesse võttes seejuures, et lüli  $OA$  suuruseks on  $|X_1|$  (arvu  $X_1$  abso-

luutväärtus!), lüli  $AB$  suuruseks on  $|Y_1|$  ja lüli  $BP_1$  suuruseks  $|Z_1|$ , ning sulgeja  $OP_1$  suuruseks on  $|\mathfrak{P}_1|$ . Kaldenurkade koosinusi on samuti kerge määrata: olgu vektori  $\mathfrak{P}_2$  suunakoosinused vastavalt  $l_2 = \cos \alpha_2$ ,  $m_2 = \cos \beta_2$ ,  $n_2 = \cos \gamma_2$ ; kaldenurk  $AOP_2$  on siis  $\alpha_2$ , kui  $X_1$  on positiivne, ja  $180^\circ - \alpha_2$ , kui  $X_1$  on negatiivne, nagu selgub joonisest. Sellepärast lüli  $OA$  projektsioon suunale  $OP_2$  teise põhilause alusel peab olema võrdne arvuga  $|X_1| \cdot \cos \alpha_2$ ,

kui  $X_1 > 0$ , ja võrdne arvuga  $|X_1| \cdot \cos(180^\circ - \alpha_2)$ , kui  $X_2 < 0$ ; mõlemal juhul tuleb välja arv  $X_1 l_2$ , nagu on kerge kontrollida. Samal viisil selgub, et lülide  $AB$  ja  $BP_1$  projektsioonideks on vastavalt arvud  $Y_1 m_2$  ja  $Z_1 n_2$ .

Sulgeja  $OP_1$  projektsioonina leiame joonisest arvu  $|\mathfrak{P}_1| \cdot \cos \varphi$ .

Projektsiooni esimese põhilause alusel on seega

$$|\mathfrak{P}_1| \cdot \cos \varphi = X_1 l_2 + Y_1 m_2 + Z_1 n_2.$$

Kuid (9) põhjal on  $l_2 = \frac{X_2}{|\mathfrak{P}_2|}$  jne. Järelikult:

$$|\mathfrak{P}_1| \cdot \cos \varphi = X_1 \frac{X_2}{|\mathfrak{P}_2|} + Y_1 \frac{Y_2}{|\mathfrak{P}_2|} + Z_1 \frac{Z_2}{|\mathfrak{P}_2|},$$

ehk teisiti:

$$|\mathfrak{P}_1| \cdot |\mathfrak{P}_2| \cdot \cos \varphi = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \quad (12)$$

Arvu  $|\mathfrak{P}_1| \cdot |\mathfrak{P}_2| \cdot \cos \varphi$ , ehk, mis tähendab sedasama, arvu  $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$  kutsutakse vektorite  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  skalaarseks korrutiseks. Seda skalaarset korrutist tähistatakse paljudel juhtudel ka lühidalt sümboliga  $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$ . Skalaarne korrutis on arv, seega skalaar, mitte vektor! Kirjutades (12) kujul

$$(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 \quad (12a)$$

näeme, et  $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = (\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1)$ , järelikult skalaarne korrutis ei muutu, kui korrutatavad vektorid võtta vastupidises järjekorras. Mehaanikas esineb skalaarne korrutis paljudel juhtudel, näiteks töö mõiste puhul.

Valemist (12) leiamegi nurga  $\varphi$  seose põhjal:

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (13)$$

Mõlemaid ruutjuuri tuleb siin võtta positiivsetena.  $\varphi$  on seega üheselt määratud  $0^\circ$  ja  $180^\circ$  vahemikus.

Kui  $\varphi = 90^\circ$ , siis  $\cos \varphi = 0$ , mille tõttu siis ka lugeja valemi (13) paremal poolel peab muutuma nulliks; tähendab,  $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$  on sel korral null. On ümberpöörduvalt kahe nullist erineva vektori  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  puhul skalaarne korrutis null, siis ka  $\cos \varphi = 0$ ,

järelikult need vektorid on siis teineteisega risti. Kahe vektori ristiseisu tunnus peitub seega tingimuses

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \quad (14)$$

On kaks vektorit  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  samasuunaliselt paralleelsed (seejuures mitte tingimata suuruselt võrdsed!), siis peavad neil olema suunakoosinused  $l_1$  ja  $l_2$ ,  $m_1$  ja  $m_2$ ,  $n_1$  ja  $n_2$  vastavalt võrdsed. Valemite (9) põhjal tähendaks see:

$$\frac{X_1}{|\mathfrak{P}_1|} = \frac{X_2}{|\mathfrak{P}_2|}; \quad \frac{Y_1}{|\mathfrak{P}_1|} = \frac{Y_2}{|\mathfrak{P}_2|}; \quad \frac{Z_1}{|\mathfrak{P}_1|} = \frac{Z_2}{|\mathfrak{P}_2|},$$

millest järgneb

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \left[ = \frac{|\mathfrak{P}_1|}{|\mathfrak{P}_2|} \right]. \quad (15)$$

On vektorite paralleelsus vastassuunaline, siis  $l_1 = -l_2$  jne., ning analoogilisel viisil leiaksime

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \left[ = -\frac{|\mathfrak{P}_1|}{|\mathfrak{P}_2|} \right]. \quad (15a)$$

Ümberpöörduvalt on kindlasti kas  $l_1 = l_2$  jne., või  $l_1 = -l_2$  jne., kui täidetud on nõue (15) või (15a); seega neis nõuetes peitub vektorite paralleelsuse tingimus, mille võime sõnastada ka järgmiselt:

**vektorid on paralleelsed siis ja ainult siis, kui nende vastavad projektsioonid koordinaattelgedele on võrdelised; positiivse võrdeteguri puhul on seejuures paralleelsus samasuunaline, negatiivse võrdeteguri puhul vastassuunaline.**

M ä r k u s: Vektori  $\mathfrak{P}: (X, Y, Z)$  skalaarne korrutis iseendaga on (12) põhjal:

$$|\mathfrak{P}| \cdot |\mathfrak{P}| \cdot \cos 0^\circ = |\mathfrak{P}| \cdot |\mathfrak{P}| = |\mathfrak{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

mis viib meid jälle tagasi valemi (8) juurde.

## Harjutusülesandeid.

6. Punktis  $O$  on rakendatud vektorid  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$ , kusjuures  $|\mathfrak{A}|$  on 5,7 ühikut ja  $|\mathfrak{B}|$  on 8,3 ühikut, ning nurk  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  suundade vahel on  $117^\circ$ . Arvutada nende kahe vektori summa suurus ja nurgad, mis see summa moodustab komponentidega  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$ .

✓ 7. Arvutada eelmises ülesandes mainitud vektorite  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  vahe  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  suurus ja nurgad, mis see vahe moodustab vektoritega  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$ .

✓ 8. Vektor  $\mathfrak{P}$ , mille suurus on 25 ühikut, on lahutatud kaheks ristkomponendiks  $\mathfrak{G}$  ja  $\mathfrak{H}$ , kusjuures  $\mathfrak{G}$  ja  $\mathfrak{P}$  vaheline kaldenurk on  $38^\circ$ . Arvutada  $|\mathfrak{G}|$  ja  $|\mathfrak{H}|$ .

✓ 9. Vektor moodustab ruumis kolme koordinaatteljega võrdsed teravnurgad. Arvutada nende nurkade suurus.

✓ 10. Vektor moodustab  $x$ -teljega nurga  $\alpha = 50^\circ$ ,  $y$ -teljega nurga  $\beta = 60^\circ$ ,  $z$ -teljega nürinurga  $\gamma$ . Arvutada  $\gamma$ .

✓ 11. Vektor, mille suurus on 15,8 ühikut, moodustab  $y$ -teljega nurga  $\beta = 132^\circ$ , olles seejuures risti  $z$ -teljega.  $x$ -teljega moodustatud nurk  $\alpha$  ületab  $90^\circ$ . Arvutada vektori projektsioonid telgedele.

✓ 12. Vektori  $\mathfrak{P}$  puhul on  $|X| = |Y| = |Z| = 13,5$ , kusjuures  $X > 0, Y < 0, Z > 0$ . Arvutada  $|\mathfrak{P}|$  ja nurgad  $\alpha, \beta, \gamma$  telgedega.

✓ 13. Arvutada nurk vektorite  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  vahel järgnevas tabelis suunakoosinuste kohta antud andmeil:

	$l$	$m$	$n$
$\mathfrak{P}_1$	$-0,38$	$+0,67$	$> 0$
$\mathfrak{P}_2$	$< 0$	$+0,53$	$+0,77$

✓ 14. Täita vabad kohad alljärgneva tabeli viimases reas nõnda, et vektor  $\mathfrak{P}_3$  oleks risti vektoritega  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$ :

	$X$	$Y$	$Z$
$\mathfrak{P}_1$	$+8$	$-6$	$-4$
$\mathfrak{P}_2$	$-10$	$+7,5$	$+5$
$\mathfrak{P}_3$			

✓ 15. Määrata vektor  $\mathfrak{B}_3$  eelmises ülesandes nõnda, et  $|\mathfrak{B}_3| = 32,5$ .

16.  $|\mathfrak{B}_1| = 1$ ,  $|\mathfrak{B}_2| = 2$ ,  $|\mathfrak{B}_3| = 3$ ,  $|\mathfrak{B}_4| = 4$ ; vektorid on rakendatud ühises punktis  $O$  ning  $\mathfrak{B}_1$  ja  $\mathfrak{B}_3$  on vastassuunalised, samuti on  $\mathfrak{B}_2$  ja  $\mathfrak{B}_4$  vastassuunalised; peale selle on  $\mathfrak{B}_2$  risti vektoriga  $\mathfrak{B}_1$ . Määrata nende nelja vektori summa suurus graafilisel teel. Kontrollida tulemus analüütiliselt, valides koordinaatteljed sobival viisil.

✓ 17. Ühises punktis rakendatud vektorid on kujutatud korrapärase kuusnurga ühest tipust väljuvate diagonaalide kaudu. Määrata nende vektorite summa suurus graafiliselt ja analüütiliselt, võttes kuusnurga külje pikkusühikuks.

✓ 18. Samalaadne küsimus juhul, kus kuusnurk on asendatud korrapärase seitsenurgaga.

19. Korrapärase tetraeedri ruumala on ühik. Selle tetraeedri ühest tipust väljuvad kolm serva kujutavad kolme vektorit. Määrata nende vektorite summa suurus ja nurgad, mis summa moodustab komponentidega.

20. Analoogiline küsimus korrapärase oktaeedri puhul.

✓ 21. Vektorid  $\mathfrak{B}_1$ ,  $\mathfrak{B}_2$ ,  $\mathfrak{B}_3$ ,  $\mathfrak{B}_4$  asetsevad kõik  $x$ - $y$ -tasapinnal esimeses veerandis ja on rakendatud koordinaatide alguses. Nende vektorite otspunktid asetsevad kõik sirgel  $x - 5 = 0$ , vastavalt kaugustel 1, 2, 3, 4  $x$ -teljest. Määrata nende vektorite summa suurus ja suund graafiliselt ja analüütiliselt.

✓ 22. Ühikvektorid (s. o. vektorid, mille suurus on ühik)  $\mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{A}_2$ ,  $\mathfrak{A}_3$   $x$ - $y$ -tasapinnas on rakendatud koordinaatide alguses ja suunatud vastavalt sirgete  $2x - 3y = 0$ ,  $3x + 4y = 0$ ,  $4x - 5y = 0$  pidi. Arvutada vektorite summa suurus.

✓ 23. Ühikvektor  $\mathfrak{E}_1$  moodustab  $x$ - ja  $y$ -teljega nurgad  $135^\circ$ ; ühikvektor  $\mathfrak{E}_2$  moodustab  $y$ - ja  $z$ -teljega nurgad  $60^\circ$ . Määrata skalaarne korrutis  $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2)$ , arvestades kõik võimalused.

✓ 24.  $x$ - $y$ -tasapinnas vektor  $\mathfrak{A}$  asetseb sirgel  $2x + 3y - 5 = 0$ , omades projektsiooni  $X = 1$ . Samas tasapinnas vektor  $\mathfrak{B}$  asetseb sirgel  $3x - 4y + 6 = 0$ , omades projektsiooni  $Y = 2$ . Ühiseks rakenduspunktiks on mainitud sirgete lõikepunkt. Määrata a) mõlema vektori otspunktide asukohad; b) summa  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  kandesirge võrrand.

25. Punktide  $A$ ,  $B$ ,  $C$  koordinaadid on antud tabelis:

	$x$	$y$	$z$
$A$	2	-1	5
$B$	-6	-3	4
$C$	-1	2	-3

Vektor  $\vec{CD}$  on risti vektoriga  $\vec{AB}$  ning rööbik  $y$ - $z$ -tasapinnaga; selle vektori  $\vec{CD}$  suurus on 10 ühikut. Arvutada punkti  $D$  koordinaadid täpsusega 0,01.

## II. Tungid ja momendid.

§ 13. Ühises punktis rakendatud tungide tasakaal. Pikaajalised kogemused vaatluste ja katsete najal kinnitavad, et samas punktis rakendatud mitu tungi liituvad üheksainsaks sealsamas rakendatud tungiks just samal viisil, nagu liituvad neid tunge kujutavad vektorid. See asjaolu õigustabki sisuliselt tungide käsitlemist vektoritena: vektorite omadused kanduvad otseselt üle ka tungidele. Nagu iga teisegei vektori puhul, saab ka tungi juures määrata tema kolm projektsiooni  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  koordinaattelgedele; need projektsioonid määravad tungi suuruse ja suuna poolest üheselt; lahtiseks jääb siis ainult veel rakenduspunkti küsimus. Nurk kahe tungi vahel ning tungide ristseisu või rööpseisu tingimused on määratud nende projektsioonide najal § 12 leitud eeskirjade kohaselt. Tungide liitmist saab teostada parallelogrammi või hulknurga põhimõttel. Tungi võib meelevaldselt lahutada samas punktis rakendatud komponenttungideks.

Ühises punktis rakendatud komponenttungide summat kutsetakse sageli „resultanttungiks“ ehk „resulteeruvaks“ tungiks.

Ühises punktis rakendatud komponenttungid hävivad vastastikku, kui nende resultanttung kaob, s. t. kui nad koos mõjuvad sellele punktile nõnda, nagu poleks seal üldse mingit tungi. Sel puhul öeldakse siis, et vastav punkt, või ka vastavad tungid omavahel, on t a s a k a a l u s.

Olgu ühises punktis rakendatud tungid  $\mathfrak{P}_1 : (X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $\mathfrak{P}_2 : (X_2, Y_2, Z_2)$ , ...,  $\mathfrak{P}_n : (X_n, Y_n, Z_n)$ . Tarvilik ja küllaldane tasakaalu tingimus peitub sel puhul nõuetes

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0 \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

sest siis ja ainult siis kaob resultanttung üldse.

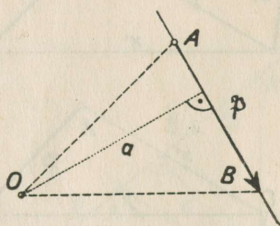
Graafiliselt tähendab resultanttungi kadumine seda, et vastavas komponendide ahelas alg- ja lõpp-punkt langevad ühte, teiste sõnadega, et vastav ahel osutub kinniseks jooneks.

Mehaanika probleemides juhtub võrdlemisi harva, et kõik kõnesolevad tungid on rakendatud just ühes ja samas punktis. Sel korral tuleb selgitada, kuidas need rakenduspunktid on omavahel seotud, kas nad näiteks kuuluvad kõik ühe ja sama kindla keha juurde, või on nad seotud omavahel liikuvate varraste või nõõride abil, või jällegi on täiesti sõltumatud üksteisest, jne. Vastavalt valitsevale olukorrale kujunevad siis tasakaalu tingimused üldse keerulisemaks kui seda arvestavad valemid (16). Tähtsat osa neis üldisemates tingimustes mängib tungi momendi mõiste.

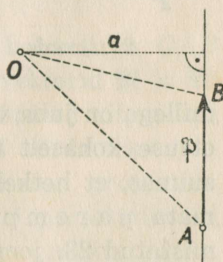
§ 14. **Staatiline moment antud punktis.** Olgu antud mõni tungivektor  $\mathfrak{P}$  ja meelevaldselt valitud punkt  $O$  (21. joon.). Kui  $O$  ja tungi  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkt  $A$  mõlemad kuuluvad ühe ja sama kindla keha juurde ning seejuures  $O$  on mõne teise keha külge kinnitatud, siis tung  $\mathfrak{P}$  püüab üldiselt esile kutsuda esimese keha pöõret kinnitatud punkti  $O$  ümber. Tungi pöõrdevõimet iseloomustavad sel puhul kaks arvu, nimelt 1) tungi  $\mathfrak{P}$  suurus ja 2) tungi  $\mathfrak{P}$  kandesirge kaugus  $a$  punktist  $O$  (tungi „õla“ suurus). Katsed näitavad, et seda pöõrdevõimet saab otstarbekalt mõõta just korrutise  $|\mathfrak{P}| \cdot a$  abil, kus  $a$  tähendab punktist  $O$  vektori  $\mathfrak{P}$  kandesirgele tõmmatud ristilõõigu pikkust (vt. ka 22. joon.!). Seejuures tuleb aga arvestada veel teatavaid lisaasjaolusid.

Esiteks saaks pöõrlemine toimuda vaid tasapinnas  $ABO$ , s. t. nõnda, nagu oleks läbi pöõratava keha punkti  $O$  pandud pöõrlemistelg risti tasapinnaga, milles asub  $O$  ja mõjuv tung.

Teiseks võõiks säärase pöõrlemistelje puhul pöõramine üldiselt toimuda kahes vastupidises suunas, kuid mõjuv tung eelistab üht suunda. 21. joonisel oleks see eelistatud suund vaatleja



21. joonis.

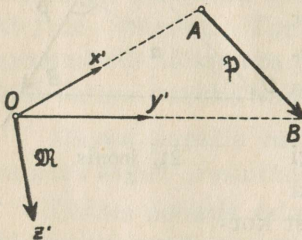
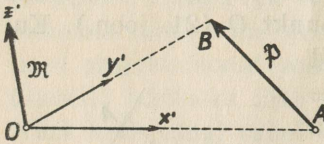


22. joonis.

seisukohalt kellaosuti liikumise suunas, 22. joonisel aga vastupidi.

Neil asjaoludel osutub vajalikuks tungi  $\mathfrak{P}$  pöördevõimet punkti  $O$  suhtes omakorda käsitleda vektoriaalse suurusena. Pöördevõimet iseloomustavad vektorit kutsutakse tungi  $\mathfrak{P}$  pöördemomendiks, ehk staatiliseks momendiks, ehk joonmomendiks, või ka üsna lühidalt lihtsalt „momendiks“ punktis  $O$ . Mainitud momentvektorit kujutellakse punktis  $O$  rakendatud noolena, mille suurus on  $|\mathfrak{P}| \cdot a$  ja mis sihitud risti  $O$  ja  $\mathfrak{P}$  sisaldavale tasapinnale (tasapinnale  $O\mathfrak{P}$ ) sellest tasapinnast ühele või teisele poole, vastavalt erikokkuleppele, mille kohe selgitame.

Mainitud erikokkulepe oleneb sellest, kas töötada parempoolse või vasakpoolse koordinaatteljestikuga. Nimetame hetkeks momentvektori  $\mathfrak{M}$  suuna  $z'$ -teljeks,



23. joonis.

$OA$  suuna (punktist  $O$  vektori  $\mathfrak{P}$  alguse poole!)  $x'$ -teljeks ning  $OB$  suuna (punktist  $O$  vektori  $\mathfrak{P}$  lõpu poole!)  $y'$ -teljeks. Sel teel saadud  $x'$ -,  $y'$ -,  $z'$ -teljestik pole küll üldjuhul mitte täiesti ortogonaalne, sest  $x'$ - ja  $y'$ -teljed ei tarvitse moodustada täisnurka; ometi aga saab selle teljestiku puhul ikkagi öelda, kas ta kuulub parempoolsesse või vasakpoolsesse tüüpi. Erikokkulepe momentvektori  $\mathfrak{M}$  suuna valiku kohta seisab nüüd selles, et kirjeldatud viisil hetkeks moodustatud  $x'$ -,  $y'$ -,  $z'$ -teljestik peab osutama alati samatüübiliseks, nagu see  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -teljestik,

millega on juba varem otsustatud järjekindlalt töötada. § 7 tehtud otsuse kohaselt tuleb meil järelikult alati võtta  $\mathfrak{M}$  niisuguses suunas, et hetkeks tekkinud abiteljestik  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  osutuks tingimata parempoolseks. Vastavalt sellele nõudele ongi valmistatud 23. joonis, kus mõlemal juhul  $\triangle OAB$  on mõeldud vaadatuna ülevalt ja  $\mathfrak{M}$  on mõeldud joonise tasapinnas.

Saavutatud erikokkulepet võime sõnastada ka järgmiselt:  
**olles peatunud parempoolse teljestiku juures, anname momentvektorile  $\mathfrak{M}$  alati säärase suuna, et vaatlejal, kelle jalad on punktis  $O$  ja pea  $\mathfrak{M}$  suunas, nool  $\mathfrak{P}$  näitaks paremalt vasakule.**

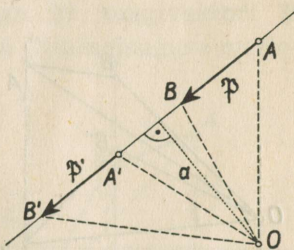
Vasakpoolse koordinaadistikuga töötades tuleks ümberpöör-  
dult nõuda, et nool  $\mathfrak{P}$  näitaks vasakult paremale.

§ 15. Momendi tõlgendus pindalana. Jäägu tungivektor  $\mathfrak{P}$  ruumis paigale, punkti  $O$  asukoht, mille suhtes  $\mathfrak{P}$  momenti  $\mathfrak{M}$  määrame, olgu aga muutlik. Selle punkti  $O$  asendi muutumisel muutuvad siis üldiselt ka  $\mathfrak{M}$  suurus, siht ja suund. Suurus  $|\mathfrak{M}|$  on null (s. t. momentvektor kaob) siis ja ainult siis, kui  $O$  on võetud vektori  $\mathfrak{P}$  kandesirgel, sest siis  $a = 0$  ja seepärast ka kor-  
rutis  $|\mathfrak{P}| \cdot a = 0$ .

Kui punkti  $O$  uus asukoht  $O'$  on valitud endises tasapinnas  $O\mathfrak{P}$ , siis vastav uus momentvektor  $\mathfrak{M}'$  on endise momentvektoriga  $\mathfrak{M}$  paralleelne, sest mõlemad peavad olema risti ühe ja sama tasa-  
pinnaga  $O\mathfrak{P}$  ehk  $O'\mathfrak{P}$ .

On  $O'$  ja  $O$  kaugused vektori  $\mathfrak{P}$  kandesirgest võrdsed, siis ka momentvektorite suurused  $|\mathfrak{M}|$  ja  $|\mathfrak{M}'|$  on võrdsed, muidu mitte.

Jäägu nüüd aga punkt  $O$  paigale ning lubame tungivektorile  $\mathfrak{P}$  „libiseda“ oma kandesirget mööda, s. t. rakendame samasuunalise ja niisama suure  $\mathfrak{P}$  mitte punktis  $A$ , vaid mõnes uues punktis  $A'$  samal kandesirgel (24. joon.). Momentvektor  $\mathfrak{M}$  punktis  $O$  peab siis jää-  
ma muutumatult endiseks, sest  $a$ ,  $|\mathfrak{P}|$ , tasapind  $O\mathfrak{P}$  ja pöörmissuund on jäänud kõik endisteks. Muutub aga  $\mathfrak{P}$  suund samal kandesirgel vastupidiseks, siis püsib küll momentvektori suurus ja siht, kuid suund on endisele vastupidine.



24. joonis.

Joonis näitab, et korrutis  $|\mathfrak{P}| \cdot a$  võrdub kolmnurga  $OAB$  ( $\triangle O\mathfrak{P}$ ) kahekordse pindalaga. Seega on momentvektorid  $\mathfrak{M}$  ja  $\mathfrak{M}'$  kahes erinevas punktis  $O$  ja  $O'$  suuruse poolest võrdsed niipea kui kolmnurkade  $\triangle O\mathfrak{P}$  ja  $\triangle O'\mathfrak{P}$  pindalad osutuvad võrdseteks.

Momentvektorit saab, nagu iga vektorit üldse, projektida mistahes orienteeritud sirgele. On momentvektori projektsioonid kolmele koordinaatteljele teada, siis on sellega määratud ka momentvektor ise tervikuna, niipea kui teada on veel punkt, milles ta rakendatud. Momentvektori projektsioone  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -teljele tähistatakse harilikult vastavalt tähtede  $L$ ,  $M$ ,  $N$  kaudu.

Edaspidi selgitame, kuidas saab määrata  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , kui momentvektor on võetud koordinaatide alguses ja teada

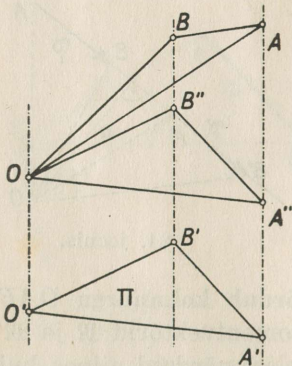
on tungivektori  $\mathfrak{F}$  projektsioonid  $X, Y, Z$  ning selle tungivektori rakenduspunkti  $A$  koordinaadid  $x, y, z$ . Veel hiljem selgub siis, kuidas neil andmeil saab arvutada meelevaldses punktis võetud momentvektori projektsioone.

§ 16. Abilause kolmnurga pindala projektsioonist. Tõestame kõigepealt geomeetrilise abilause:

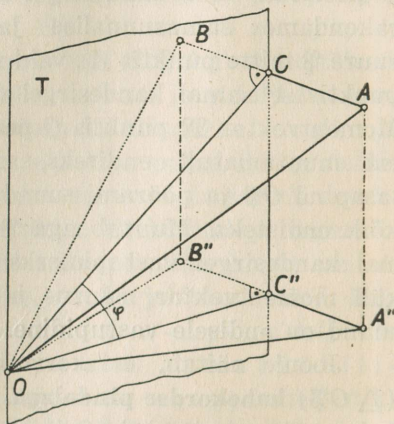
**kolmnurga pindala projektsioon mistahes tasapinnale  $\Pi$  võrdub selle pindala suuruse ja kolmnurga ning  $\Pi$  vahelise kalde-  
nurga koosinuse korrutisega.**

Olgu  $\triangle OAB$  projektsiooniks tasapinnale  $\Pi$  kolmnurk  $O'A'B'$  (25. joon.). Projektsiooni suurus ei muutu, kui tõsta  $\Pi$  paralleelselt iseendaga punktini  $O$ , nii et projektsiooniks osutuks  $\triangle OA''B''$ . Võime seega piirduda viimase eriasendiga.

Sirged  $AB$  ja  $A''B''$  asetsevad ühes tasapinnas, mis risti tasapinnaga  $\Pi$ . Järelikult  $AB$  ja  $A''B''$  on kas paralleelsed või lõikuvad ühises punktis.



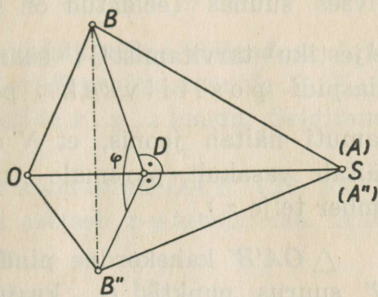
25. joonis.



26. joonis.

Esimesel juhul (26. joon.) paneme läbi  $O$  tasapinna  $T$  risti sihtidega  $AB$  ja  $A''B''$ ;  $T$  annab lõikejoontena  $OC$  ja  $OC''$  vastavalt kolmnurkade  $OAB$  ja  $OA''B''$  kõrgusi, ning lauses mainitud kaldenurgaks osutub  $\widehat{COC''} = \varphi$ . Seejuures on  $OC'' = OC \cdot \cos \varphi$  ning  $AB = A''B''$ . Et kolmnurga  $\triangle OAB$  pindalaks on  $\frac{1}{2} AB \cdot OC$  ja  $\triangle OA''B''$  pindalaks on  $\frac{1}{2} A''B'' \cdot OC'' = \frac{1}{2} AB \cdot OC \cdot \cos \varphi = \triangle OAB \cdot \cos \varphi$ , siis lause kehtivus sel juhul on ilmne.

Teisel juhul võtame arvesse, et  $\triangle OAB$  ja  $\triangle OA''B''$  pindalad ei muutu, kui külg  $AB$  või vastavalt  $A''B''$  libiseb oma kandesirget mööda. Laseme  $AB$  säärast libiseda, kuni  $A$  langeb  $AB$  ja  $A''B''$  kandesirgete ühisesse punkti  $S$  (27. joon.). Pärast seda paneme läbi  $BB''$  tasapinna risti sirgega  $OS$ , mille tagajärjel on määratud lõikejooned  $BD$  ja  $B''D$ , mõlemad risti sirgega  $OS$ . Nüüd on  $BD$  ja  $B''D$  vastavalt kolmnurkade  $OSB$  ja  $OSB''$  kõrgused, ning nurk



27. joonis.

$\widehat{BDB''}$  on lause sõnastuses mainitud kaldenurk, mille jälle tähistame sümboliga  $\varphi$ . Seejuures  $B''D = BD \cdot \cos \varphi$ . Kolmnurga  $OAB$  pindalaks on nüüd  $\frac{1}{2} OS \cdot BD$ ; kolmnurga  $OA''B''$  pindalaks on  $\frac{1}{2} OS \cdot B''D = \frac{1}{2} OS \cdot BD \cdot \cos \varphi = = \triangle OAB \cdot \cos \varphi$ . Lause on seega ka sel juhul osutunud õigeks.

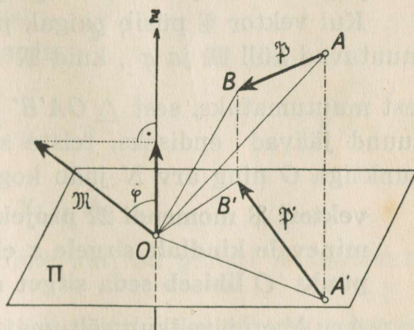
§ 17. **Moment telje suhtes.** Kujutagu  $\mathfrak{M}$  tungivektori  $\mathfrak{P}$  momenti punktis  $O$  (28. joon.). Paneme läbi  $O$  mingisuguse meelevaldselt orienteeritud sirge  $z$ . Olgu momentvektori  $\mathfrak{M}$  projektsioon sellele sirgele tähistatud tähega  $N$ . Projektsiooni teise põhilause alusel on siis

$$N = |\mathfrak{M}| \cdot \cos \varphi, \quad (17)$$

kui  $\varphi$  tähendab nurka  $\mathfrak{M}$  ja  $z$  suundade vahel.

Paneme läbi  $O$  veel tasapinna  $\Pi$  risti sirgega  $z$  ja vaatleme  $\triangle O\mathfrak{P}$  projektsiooni sellele tasapinnale.

Nurk  $\varphi$  on siis ühtlasi tasapindade  $O\mathfrak{P}$  ja  $\Pi$  vaheline kaldenurk, sest ta kujutab nurka nende tasapindade normaalide vahel. Eelmises paragraafis tõestatud abilause põhjal on  $2 \cdot \triangle OA'B' = 2 \cdot \triangle OAB \cdot \cos \varphi$ , kui  $A'B'$  tähendab vektori  $\mathfrak{P} = \overrightarrow{AB}$  projektsiooni tasapinnale  $\Pi$ . Võttes arvesse, et  $2 \cdot \triangle OAB$  kujutab aga parajasti  $|\mathfrak{M}|$ , järeldame siit (17) abil, et  $N$  absoluutväärtus võrdub  $\triangle OA'B'$  kahekordse pindalaga. Joonisest selgub



28. joonis.

ühtlasi, et  $N$  on positiivne, niipea kui nool  $\overrightarrow{A'B'}$  näitab paremalt vasakule niisugusele vaatlejale, kes seisab sirge  $z$  sihis peaga positiivses suunas (eeldatud on seejuures parempoolse koordinaatiteljestiku tarvitamist!); säärast noole  $\overrightarrow{A'B'}$  suunda nimetame edaspidi positiivseks pöörlemissuunaks ümber telje  $z$ . Samuti näitab joonis, et  $N$  osutub negatiivseks, kui nool  $\overrightarrow{A'B'}$  näitab vasakult paremale (negatiivse pöörlemise suunas ümber telje  $z$ ).

$\triangle OA'B'$  kahekordne pindala on aga vektori  $\overrightarrow{A'B'}$  momendi  $\mathfrak{M}$  suurus punktis  $O$ , kusjuures  $\mathfrak{M}$  peab just sihitud olema  $z$ -pidi ja nimelt, nagu jällegi joonisest selgub,  $z$  positiivses suunas, kui nool  $\overrightarrow{A'B'}$  vastab positiivsele pöörlemisele, ja negatiivses suunas, kui nool  $\overrightarrow{A'B'}$  vastab negatiivsele pöörlemisele ümber telje  $z$ . Kõrvutades seda ülalleituga, näeme, et arv  $N$  parajasti iseloomustab nõutaval viisil vektori  $\mathfrak{M}$  suurust ja suunda sirgel  $z$ .

**Vektorina ühtib  $\mathfrak{M}$  komponent  $z$  sihis tungivektori  $\overrightarrow{AB}$  projektsiooni  $\overrightarrow{A'B'}$  momendiga punktis  $O$ .**

Kui vektor  $\mathfrak{F}$  püsib paigal, punkt  $O$  aga libiseb sirgel  $z$ , siis muutuvad küll  $\mathfrak{M}$  ja  $\varphi$ , kuid  $\mathfrak{M}$  jääb nii suuruse kui suuna poolest muutumatuks, sest  $\triangle OA'B'$  suurus ja noolte  $\overrightarrow{A'B'}$  pöörlemis-suund jäävad endiseks, teiste sõnadega,  $\mathfrak{M}$  libiseb ainult koos punktiga  $O$  ning arv  $N$  jääb kogu aeg endiseks. Tähendab:

**vektori  $\mathfrak{F}$  momendi  $\mathfrak{M}$  projektsioon  $N$  meelevaldsele  $O$ -st läbiminevale kindlale sirgele  $z$  ei muutu, kui momendi rakendus-punkt  $O$  libiseb seda sirget mööda.**

Arv  $N$  on järelikult sõltumatu  $O$  erilisest valikust sel sirgel  $z$ . Seda arvu kutsutakse tungivektori  $\mathfrak{F}$  momendiks  $z$  suhtes.

Olgu nüüd punktis  $O$  parajasti koordinaatide algus. Projektides seal võetud momentvektori  $\mathfrak{M}$  kolmele  $O$ -st läbiminevale koordinaatteljele  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , saame kolm arvu  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , mis vastavalt kujutavad tungivektori  $\mathfrak{F}$  momente koordinaattelgedes suhtes. On ümberpöörduvalt momendid  $L$ ,  $M$ ,  $N$  koordinaattelgedes suhtes teada, siis on nende kaudu üheselt määratud momentvektor  $\mathfrak{M}$  koordinaatide alguses. Libiseb  $\mathfrak{F}$  oma

kandesirget mööda, siis momentvektor  $\mathfrak{M}$  jääb muutumatuks ja seepärast jäävad muutumatuks ka momendid  $L, M, N$  koordinaattelgede suhtes.

§ 18. Momendi projektsioonide analüütiline väljendus. Arve  $L, M, N$  saab väljendada tungivektori  $\mathfrak{P}$  projektsioonide  $X, Y, Z$  ja selle rakenduspunkti  $A$  koordinaatide  $x, y, z$  kaudu. Selgitame arvutuskäiku näiteks  $N$  puhul.

$N$  on sobiva märgiga võetud kolmnurga  $OA'B'$  (29. joon.) kahekordne pindala. See kolmnurk asetseb  $x$ - $y$ -tasapinnas. Analüütilise geomeetria eeskirjade kohaselt saab seda pindala seal väljendada kolmnurga kolme tipu koordinaatide kaudu determinandi kujul:

$$\text{kahekordne pindala} = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}.$$

Olulise lisakokkuleppena loeme seejuures  $O$  esimeseks,  $A'$  teiseks,  $B'$  kolmandaks tipuks (teatavasti determinandi märk võib muutuda vastupidiseks, kui tippude järjekorda muuta). Siis on kõigepealt

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

ning

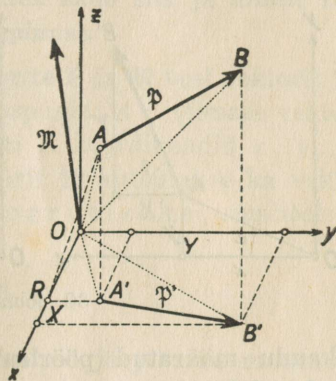
$$x_2 = x, \quad y_2 = y,$$

sest  $A'$  projektsioonid  $x$ - ja  $y$ -teljele ühtivad punkti  $A$  vastavate projektsioonidega.

Kolmanda tipu  $B'$  koordinaatide leidmiseks võtame arvesse, et nad on määratud punkti  $B$  projektsioonidega vastavatele telgedele. Kujutleme hetkeks  $OAB$  ahelana  $\vec{OA} + \vec{AB}$ , mille sulgejaks on  $\vec{OB}$ . Projektides seda ahelat järjest  $x$ - ja  $y$ -teljele, saame projektsiooni esimese põhilause alusel

$$x + X = x_3, \quad y + Y = y_3.$$

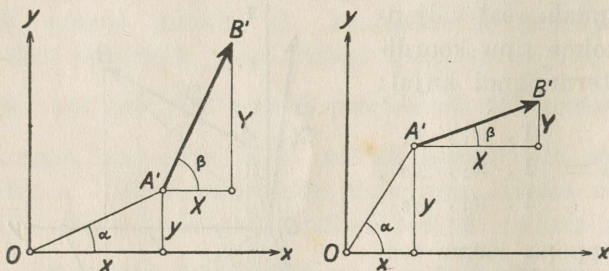
Viies sel teel leitud väärtused ülalantud determinanti, leiame, rakendades determinantide tuntud omadusi:



29. joonis.

$$2 \cdot \triangle OA'B' = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & x, & y \\ 1, & x+X, & y+Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & y \\ x+X, & y+Y \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x, & y \\ X, & Y \end{vmatrix} = xY - yX.$$

Projektsiooni  $N$  määramiseks jääb nüüd ainult veel otsustada märgi küsimust. Avaldis  $xY - yX$  osutub positiivseks või negatiivseks, sõltuvalt sellest, kas  $\frac{x}{y} > \frac{X}{Y}$  või  $\frac{x}{y} < \frac{X}{Y}$ , s. t. vastavalt



30. joonis.

sellele, kas 30. joonisel kujutatud nurkadest  $\alpha$ ,  $\beta$  esimene või aga teine osutub väiksemaks. Sama joonis näitab, et esimesel ju-

hul vektori  $\overrightarrow{A'B'}$  kaudu määratud pöörlemissuund ümber  $z$ -telje on positiivne, tähendab,  $N > 0$ , teisel juhul aga negatiivne, tähendab,  $N < 0$ . Sellest selgub, et avaldis  $xY - yX$  annabki juba  $N$  õige märgiga igal juhul. Järelikult:

$$N = xY - yX. \quad (18)$$

Arvude  $M$  ja  $L$  arvutamine toimub täpselt samal põhimõttel, ainsa vahega, et tähtede  $x$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $Y$  asemele tulevad vastavalt tähed  $z$ ,  $x$ ,  $Z$ ,  $X$  ja  $y$ ,  $z$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Seega on:

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY \\ M &= zX - xZ \\ N &= xY - yX. \end{aligned} \quad (19)$$

Et vektorid  $\mathfrak{M}$  ja  $\mathfrak{N}$  on teineteisega ristiseisus, siis valemi (14) põhjal peab kehtima seos

$$LX + MY + NZ = 0. \quad (20)$$

Tõepoolest veendumeagi, asetades  $L$ ,  $M$  ja  $N$  asemele avaldised (19), et summa  $LX + MY + NZ$  identselt kaob.

Arv  $N$ , s. t. arv  $xY - yX$  muutub nulliks siis ja ainult siis, kui  $\triangle OA'B'$  kõduneb sirglõiguks, nimelt kui kas  $\overrightarrow{A'B'}$  kandesirge läbib  $O$ , või jällegi lõik  $\overrightarrow{A'B'}$  kaob; esimesel korral vektori  $\mathfrak{P}$  kandesirge peab lõikama  $z$ -telge, teisel korral see kandesirge peab olema paralleelne  $z$ -teljega. Mõlemaid võimalusi iseloomustab asjaolu, et vektor  $\mathfrak{P}$  asetseb  $z$ -teljega ühisel tasapinnal. Silmas pidades  $z$ -telje meelevaldsust, järeldame siit:

**vektori moment mõne telje suhtes kaob siis ja ainult siis, kui see vektor asetseb telje tasapinnas.**

M ä r k u s: Vaatleme peale vektorite  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{M}$  veel vektorit  $\mathfrak{A}$ , mis viib punktist  $O$  vektori  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkti  $A$ ; viimase vektori projektsioonideks on siis just punkti  $A$  koordinaadid  $x, y, z$ . Valemite (19) kaudu määratud vektorit  $\mathfrak{M}$  kutsutakse ka vektorite  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{P}$  vektoriaalseks korrutiseks; sümboolselt kirjutatakse sel puhul

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{P}.$$

Tegurite järjekord on seejuures oluline: järjekorra muutmine muudab vektoriaalse korrutise suuna vastupidiseks. Olgu silmas peetud, et kahe vektori vektoriaalne korrutis kujutab jällegi vektorit, kuna aga kahe vektori skalaarne korrutis kujutab skaalarit.

§ 19. **Vektori kandesirge võrrand.** Libiseb vektor  $\mathfrak{P}$  oma kandesirget mööda, siis 6 arvu  $X, Y, Z, L, M, N$  võrrandis (19) jäävad muutumatuiks, küll aga muutuvad seejuures rakenduspunkti  $A$  koordinaadid  $x, y, z$  samades võrrandites. Kui  $A$  oleks võetud kuski väljaspool endist kandesirget, siis  $L, M, N$  ei saaks jääda endiseks, kuigi  $X, Y, Z$  on endised, sest säärases uues kohas  $A$  rakendatud vektor  $\mathfrak{P}$  oleks endisega samasuunalisel paralleelne ja suuruse poolest võrdne, asetseks seejuures aga kas koordinaatide algusest  $O$  teisel kaugusel, mille tõttu tema moment punktis  $O$  ei saaks enam olla endise suurusega, — või tasapind  $O\mathfrak{P}$  oleks endisest erinev, mille tagajärjel momentvektoril kindlasti oleks nüüd teine siht, — või lõpuks, kui ka tasapind oleks endine, siis ometi pööramissuund ümber  $O$  osutuks vastupidiseks, mis-

pärast ka momentvektori suund peaks osutama vastupidiseks (kõiges selles veendugu lugeja ise, tehes vastavad joonised!).

Neist asjaoludest järeldame, et võrrandid (19), kus  $X, Y, Z, L, M, N$  tähendavad konstante, on rahuldatud muutujatega  $x, y, z$  siis ja ainult siis, kui nende muutujatega määratud punkt  $A$  asetseb vastava vektori  $\mathfrak{F}$  kandesirgel. Teiste sõnadega, **süsteem (19) kujutab vektori  $\mathfrak{F}$  kandesirge võrrandit**. Vektor  $\mathfrak{F}$  on seejuures iseloomustatud oma kolme projektsiooniga  $X, Y, Z$  ja kolme momendiga  $L, M, N$  koordinaattelgede suhtes. Need 6 arvu võib soovikohaselt ette anda, kuid mitte üsna meelevaldselt, vaid tingimata nõnda, et rahuldatud oleks nõue (20), sest momentvektor peab ju alati olema risti tungivektoriga; teisi kitsendusi nende kuue arvu valikus ei ole. On need arvud vabalt, kuid ikkagi arvestades mainitud vabaduse kitsendust, valitud, siis (19) määrab üheselt sirge joone, mis vastavat vektorit  $\mathfrak{F}$  kannab. Näiliselt (19) koosneb küll kolmest võrrandist, kuid tegelikult, seose (20) tõttu, sõltumatuid võrrandeid seal esineb kõigest kaks, nagu see peabki olema sirge määramise puhul ruumis.

Sirge (19) suunakoosinusteks on vektori  $\mathfrak{F}$  suunakoosinused, s. t. valemitega (9) määratud arvud  $l, m, n$ . Kirjutades (10) põhjal  $X$  asemele  $|\mathfrak{F}| \cdot l$ ,  $Y$  asemele  $|\mathfrak{F}| \cdot m$ ,  $Z$  asemele  $|\mathfrak{F}| \cdot n$ , saame (19)-le anda kuju

$$\begin{aligned} L &= |\mathfrak{F}| \cdot (yn - zm), & M &= |\mathfrak{F}| \cdot (zl - xn), \\ N &= |\mathfrak{F}| \cdot (xm - yl), \end{aligned} \quad (21)$$

millest nähtub, et  $L, M, N$  on võrdelised vektori  $\mathfrak{F}$  suurusega. Valime veel  $\mathfrak{F}$  ühikvektorina, s. t. võtame  $|\mathfrak{F}| = 1$  ning kirjutame sel puhul  $L, M, N$  asemele vastavalt sümbolid  $\lambda, \mu, \nu$ , mis (20) põhjal muidugi jälle eeldab

$$\lambda l + \mu m + \nu n = 0; \quad (22)$$

kandesirge võrrand omab siis kuju

$$\lambda = yn - zm, \quad \mu = zl - xn, \quad \nu = xm - yl. \quad (23)$$

Kuitahes suure vektori  $\mathfrak{F}$  puhul on

$$L = |\mathfrak{F}| \cdot \lambda, \quad M = |\mathfrak{F}| \cdot \mu, \quad N = |\mathfrak{F}| \cdot \nu.$$

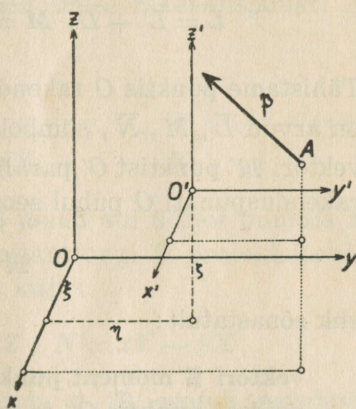
Suunakoosinused  $l, m, n$  peavad muidugi rahuldama nõude (11)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Kuus arvu  $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ , mis valitud nõnda, et rahuldatud oleks nii (11) kui ka (22), kutsutakse sirge joone (kandesirge) koordinaatideks. Igaie võimalikule valikule vastab üks ja ainult üks sirge; ümberpöörduvalt saab iga sirge puhul määrata tema koordinaadid praegumainitud mõttes.

§ 20. **Moment meelevaldselt võetud punktis.** Olgu jälle  $\mathfrak{P} : (X, Y, Z)$  mõni tungivektor, mis rakendatud teatavas punktis  $A : (x, y, z)$ , s. o. punktis  $A$ , mille koordinaatideks arvud  $x, y, z$ . Otsitud olgu seekord  $\mathfrak{P}$  moment koordinaatide algusest  $O$  erinevas punktis  $O' : (\xi, \eta, \zeta)$ . Selleks kanname hetkeks koordinaatteljed rööplükkega üle punkti  $O'$  (31. joon.). Analüütilisest geometriast tuntud valemite põhjal on siis punkti  $A$  koordinaadid  $x', y', z'$  selle uue teljestiku suhtes:

$$\begin{aligned} x' &= x - \xi, & y' &= y - \eta, \\ z' &= z - \zeta. \end{aligned} \quad (24)$$



31. joonis.

Olgu punktis  $O'$  võetud momentvektori  $\mathfrak{M}'$  projektsioonid koordinaattelgedele tähistatud vastavalt sümbolitega  $L', M', N'$ , kusjuures on ilmsesti ükskõik, kas projektida endistele või uutele telgedele, sest teljed on vastavalt samasuunaliselt paralleelsed. Vektori  $\mathfrak{P}$  projektsioonid on ka uues teljestikus endiselt  $X, Y, Z$ . Rakendades valemid (19) uue teljestiku juures, kus  $O'$  on alguspunktiks, leiame (24) kaasabil:

$$\begin{aligned} L' &= y'Z - z'Y = \\ &= (y - \eta)Z - (z - \zeta)Y = \\ &= yZ - zY - (\eta Z - \zeta Y) = \\ &= L - (\eta Z - \zeta Y), \end{aligned}$$

ning analoogiliselt

$$\begin{aligned} M' &= M - (\zeta X - \xi Z) \\ N' &= N - (\xi Y - \eta X). \end{aligned}$$

Siin jällegi (19) põhjal  $L, M, N$  tähendavad vektori  $\mathfrak{P}$  momente endiste koordinaattelgedede suhtes, s. t. punktis  $O$  võetud momentvektori  $\mathfrak{M}$  projektsioone.

Leitud tulemuse hõlpsamaks meelespidamiseks tähistame ajutiselt

$$\eta Z - \zeta Y = \bar{L}, \quad \zeta X - \xi Z = \bar{M}, \quad \xi Y - \eta X = \bar{N}, \quad (25)$$

ning paneme tähele, et  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$  oleksid punktis  $O$  võetud momentvektori projektsioonid, kui tungivektor  $\mathfrak{P}$  oleks rakendatud mitte punktis  $A$ , vaid punktis  $O'$ . Siis ülalleitud tulemusi saab kirjutada ka kujul:

$$L = L' + \bar{L}, \quad M = M' + \bar{M}, \quad N = N' + \bar{N}. \quad (26)$$

Tähistame punktis  $O$  rakendatud vektorit, mille projektsioonideks on arvud  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ , sümboliga  $\bar{\mathfrak{M}}$  ning kujutleme ka momentvektori  $\mathfrak{M}'$  punktist  $O'$  paralleelselt ülekantuna punktisse  $O$ . Ühise rakenduspunkti  $O$  puhul seos (26) näitab, et

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \bar{\mathfrak{M}}, \quad (27)$$

ehk sõnastatult:

**vektori  $\mathfrak{P}$  moment punktis  $O$  on summa  $\mathfrak{P}$  momendist meelevaldses punktis  $O'$  ja momendist, mille saaksime punktis  $O$ , kui  $\mathfrak{P}$  oleks rakendatud selles meelevaldses kohas  $O'$ .**

**§ 21. Momentide liitumine.** Olgu punktis  $A : (x, y, z)$  rakendatud  $n$  tungivektorit

$$\mathfrak{P}_1 : (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathfrak{P}_2 : (X_2, Y_2, Z_2), \quad \dots, \quad \mathfrak{P}_n : (X_n, Y_n, Z_n).$$

Igaüks neist annab omaette momentvektori

$$\mathfrak{M}_1 : (L_1, M_1, N_1), \quad \mathfrak{M}_2 : (L_2, M_2, N_2), \quad \dots, \quad \mathfrak{M}_n : (L_n, M_n, N_n)$$

punktis  $O$ , kusjuures

$$\begin{aligned} L_1 &= yZ_1 - zY_1, & L_2 &= yZ_2 - zY_2, & \dots, & L_n &= yZ_n - zY_n \\ M_1 &= \dots & & & & & \\ N_1 &= \dots & & & & & \end{aligned} \quad (28)$$

Liites kõik need punktis  $O$  rakendatud momentvektorid üheks uueks samal kohal rakendatud vektoriks  $\mathfrak{M} : (L, M, N)$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n,$$

saame vektorite liitmise analüütilise eeskirja kohaselt:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_n \\ M &= M_1 + M_2 + \dots + M_n \\ N &= N_1 + N_2 + \dots + N_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Moodustades seejuures paremat kätt esinevad summad  $L_1 + \dots + L_n$  jne. seoste (28) alusel, saame, silmas pidades veel, et  $x, y, z$  on igal pool ühised väärtused, nimelt ühise rakenduspunkti  $A$  koordinaadid:

$$\begin{aligned} L &= y(Z_1 + \dots + Z_n) - z(Y_1 + \dots + Y_n) \\ M &= z(X_1 + \dots + X_n) - x(Z_1 + \dots + Z_n) \\ N &= x(Y_1 + \dots + Y_n) - y(X_1 + \dots + X_n). \end{aligned} \quad (30)$$

Kuid  $X_1 + \dots + X_n$  jne. pole midagi muud kui ühises punktis  $A$  rakendatud tungide  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  resultanttungi  $\mathfrak{P}$  projektsioonid  $X, Y, Z$ . Tulemus (30) omab seega kuju:

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX.$$

Selle võrdlus võrranditega (19) näitab, et  $\mathfrak{M}$  osutub parajasti resultanttungi  $\mathfrak{P}$  momendiks punktis  $O$ .

Et seega  $\mathfrak{M}$  ja  $\mathfrak{P}$  peavad olema jällegi teineteisega risti, siis antud juhul

$$(L_1 + \dots + L_n)(X_1 + \dots + X_n) + (M_1 + \dots + M_n) \cdot (Y_1 + \dots + Y_n) + (N_1 + \dots + N_n)(Z_1 + \dots + Z_n) = 0.$$

Matemaatikas on kombeks summad nagu  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  lühendatult tähistada summa sümboli  $\Sigma$  (kreeka täht „sigma“) abil kujul

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i, \text{ või ka lihtsalt } \Sigma X_i.$$

Indeksi  $i$  asemel võib siin muidugi tarvitada ka mõnd teist tähte, näiteks  $j, k$ ; seda tuleb arusaamatuste ärahoidmiseks tingimata

teha eriti siis, kui mitu  $\Sigma$ -märki esineb kõrvuti (s. t. korrutamise puhul). Vektorite  $\mathfrak{M}$  ja  $\mathfrak{P}$  ristiseisu tunnust võib summa sümboli  $\Sigma$  abil kirjutada kujul:

$$\Sigma L_i \cdot \Sigma X_k + \Sigma M_i \cdot \Sigma Y_k + \Sigma N_i \cdot \Sigma Z_k = 0. \quad (31)$$

### Harjutusülesandeid.

✓ 26. Punktis  $O$  rakendatud nelja tungi projektsioonid on näidatud järgnevas tabelis:

	$X$	$Y$	$Z$
$\mathfrak{A}$	+ 1,73	+ 2,56	— 0,79
$\mathfrak{B}$	— 5,32	— 2,65	+ 3,07
$\mathfrak{C}$	+ 2,50	— 4,97	+ 6,71
$\mathfrak{D}$	+ 0,28	+ 3,15	— 5,68

Arvutada tasakaalustava tungi suurus ja nurgad, mis tema moodustab telgedega.

37 ✓ 27. Tungi rakenduspunkti koordinaadid on  $x_1 = -3$ ,  $y_1 = +2$ ,  $z_1 = +4$ ; tungivektori lõpp-punkt omab koordinaate  $x_2 = -1$ ,  $y_2 = -4$ ,  $z_2 = +3$ . Arvutada punktis  $x_3 = +1$ ,  $y_3 = +2$ ,  $z_3 = -3$  võetud momendi projektsioonid.

38 ✓ 28. Tungi projektsioonid on  $X = 2$ ,  $Y = -2$ ,  $Z = 5$ ; momendid  $x$ - ja  $y$ -telje suhtes on vastavalt  $L = -3$ ,  $M = 1$ . Määrata kohad, kus tungi kandesirge lõikab koordinaattasapindu.

39 ✓ 29. Tungi momentvektor koordinaatide alguses on 10 ühikut suur ja moodustab telgedega võrdsed teravnurgad. Tung ise on rakendatud punktis, kus  $y = -1$  ja  $z = 5$ . Arvutada tungi projektsioonid telgedele.

30. Tungi kandesirge on määratud võrranditega

$$x + y - z + 4 = 0, \quad 2x - 3y + z - 1 = 0.$$

Tungi projektsioon  $x$ -teljele on  $+1$ . Arvutada tungi momendid koordinaattelgede suhtes.

31. Tungi kandesirge läbib punkti  $x = 1, y = 1, z = 1$  ning omab suunakoosinusi  $l = -\frac{3}{\sqrt{13}}, m = +\frac{4}{\sqrt{13}}$ . Arvutada koordinaatide alguses võetud momentvektori kandesirge suunakoosinused. Arvutada momentvektori suurus, kui tungi suurus on ühik.

32. Tung on rakendatud koordinaatide alguses ja moodustab  $x$ - ja  $y$ -teljega nurgad  $125^\circ$ ,  $z$ -teljega aga teravnurga. Arvutada punktis  $(-3, 2, 1)$  võetud momentvektori suurus ja projektsioonid telgedele.

33. Tungi momentvektor koordinaatide alguses on risti tasapinnaga  $2x - y + z + 1 = 0$  ja omab projektsiooni  $N = -1$ . Tung ise asetseb tasapinnas  $x + 2y - 2z - 3 = 0$ . Arvutada tungi suurus.

✓ 34. Tungi kandesirge on risti  $y$ -teljega ja lõikab seda telge kaugusel 5 ühikut koordinaatide algusest, moodustades seejuures  $y$ - $z$ -tasapinnaga  $30^\circ$ -se nurga. Tungi moment  $x$ -telje suhtes on  $-3$ . Arvutada tungi projektsioonid kõigil võimalikel juhtudel.

✓ 35. Tungi 3,78 kg kandesirge möödub teatavast teljest 42 cm kaugusel, moodustades selle teljega nurga  $37^\circ$ . Arvutada selle telje suhtes võetud momendi suurus.

36. Korrapärase tetraeedri ruumala on ühik. Selle tetraeedri serv kujutab tungivektorit. Arvutada vastasserva kui telje suhtes võetud momendi suurus.

37. Korrapärase oktaeedri ruumala on ühik. Oktaeedri üks serv kujutab tungivektorit. Arvutada momendid kõikide servade suhtes.

✓ 38. Kangil, mille õla pikkus on 2,7 m, on rakendatud tung 35 kg, mille suund moodustab õlaga nurga  $40^\circ$ . Arvutada teise õla pikkus, teades, et seal on  $75^\circ$ -se nurga all rakendatud kangi tasakaalustav tung. Lahenduse otsimisel toetuda tõsiasjale, et kang on tasakaalus ainult siis, kui mõlema rakendatud tungi momendid kangi toetuspunktis on suuruselt võrdsed.

✓ 39. Tung on rakendatud punktis  $(4, -2, +3)$ , omab projektsiooni  $Z = +1$  ja annab punktis  $(1, -1, -2)$  momendi null. Arvutada tungi teised projektsioonid.

40. Tung on rakendatud punktis  $(0, 3, -1)$  ja omab pro-

jektsioone  $X = 2$ ,  $Y = 2$ ,  $Z = -4$ . Kui suur on selle tungi moment sirge

$$x + 2y - z = 0, \quad 3x - y + 2z = 0$$

suhtes?

41. Sirge koordinaatidest on teada, et  $l = -\frac{4}{13}$ ,  $m = -\frac{12}{13}$ ,  $\mu = +2$ ,  $\nu = -1$ . Määrata kohad, kus see sirge lõikab koordinaattasapindu.

42. Tung on risti tasapinnaga  $x + y - z - 1 = 0$  ja omab punktis  $A : (-2, -3, +1)$  momenti null. Kirjutada punktis  $B : (0, +1, +1)$  võetud momendi kandesirge võrrand.

43. Punktis  $A : (-1, +2, -1)$  on rakendatud kolm tungi  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$ ,  $\mathfrak{F}_3$ , mis omavahel paarikaupa risti.  $\mathfrak{F}_1$  projektsioonid on  $X_1 = +3$ ,  $Y_1 = +4$ ,  $Z_1 = -12$ . Tungid on kõik samasuured, ning tung  $\mathfrak{F}_2$  on rööbik  $x$ - $y$ -tasapinnaga. Määrata nende tungide momentide summa koordinaatide alguses.

44. Kolm tungivektorit  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  moodustavad kolmnurga vastavalt külgedega 13, 14, 15. Arvutada nende tungivektorite momentide summa mingisuguses meelevaldses punktis. Veenduda, et see summa iga punkti puhul osutub samaks.

45. Andes eelmise ülesande andmeil kolmandale tungivektorile vastupidise suuna  $\overrightarrow{AC}$ , arvutada momentide summa tungivektoreist moodustatud kolmnurga sisse joonestatud ringi keskpaignas. Kas nüüd veel summa osutub samaks ka igas teises punktis?

### III. Tungikomplekside teisendamine.

§ 22. **Kindel keha.** Kui vaatlusele tulevad korraga mitu tungi, mis rakendatud mitmes punktis, siis öeldakse, et tegemist on tungisüsteemiga, tungikoguga ehk tungikompleksiga. Elementaarses staatikas mängivad tähtsat osa säärased tungikompleksid, kus kõik rakenduspunktid kuuluvad ühele ja samale kindlale kehale. Seejuures mõistetakse staatikas kindla keha all niisugust keha, millel kõikide punktide omavahelised kaugused igas olukorras jäävad muutumatuks.

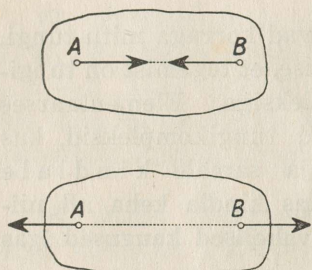
Säärane kindla keha mõiste kujutab matemaatilist fiktsiooni, samuti nagu fiktsioon peitub ka näiteks geomeetrilistes mõistetes „sirge“, „tasapind“ ja mujal. Looduses tegelikult esinevad kehad pole kunagi staatika mõttes absoluutselt „kindlad“, vaid painduvad (deformeeruvad) eranditult kõik, niipea kui neile mõjuvad küllalt suured tungid; samuti paisuvad nad üldiselt temperatuuri tõusmisel. Sellele vaatamata osutub kindla keha fiktsioon staatikas vägagi väärtuslikuks tasakaalu seaduste selgitamisel. Tuleb muidugi silmas pidada, et sel teel leitud seadused on tegelikkude „füüsikaliste“ kehade juures rakendatavad vaid teatavas lähenduses, kuid seda täpsemalt, mida enam antud keha omaduste poolest läheneb staatikas kasutatud kindla keha fiktsioonile. Just inseneriteaduste alal leidub aga ka sageli juhtumeid, kus kindla keha kujutelmale rajatud analüüs ei anna selgust; sel puhul kõneldakse „staatiliselt määramata“ probleemist ja otsitakse lahendust teiste meetodite abil, arvestades näiteks kehade elastseid omadusi. Elastsusõpetus moodustab tehnilise mehaanika eripeatüki. Käesolevas raamatus ta kõne alla ei tule; käsitlemist leiavad vaid säärased probleemid, mis oma loomuse poolest on „staatiliselt määratud“.

§ 23. **Tung libiseva vektorina.** Kindla keha staatika on rajatud teatavatele aksioomidele, mis küllaldases kokkukõlas korduvalt teostatud katsete tulemustega.

Esimese aksioomi sõnastame järgmiselt:

**kaks võrdset, kuid vastassuunalist tungi ei avalda kindlale kehale mingit mõju, kui neid kujutavad vektorid asetsevad ühel ja samal kandesirgel (32. joon.).**

Ühine kandesirge läbib muidugi tungide mõlemaid rakenduspunkte  $A$  ja  $B$ . Selle aksioomi põhjal võib mistahes tungikompleksile, mis mõjub antud kindlale kehale, kaks säärast tungi juurde lisada, või ka vastuoksa võib igast tungikompleksist kaks säärast tungi lihtsalt välja jätta, ilma et selle tagajärjel tekkinud uue tungikompleksi mõju kehale muutuks esialgse tungikompleksi mõjuga võrreldes.



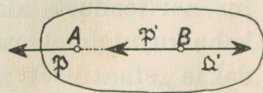
32. joonis.

Erijuhul selle aksioomi põhjal ei avalda mingit mõju kehale kaks võrdset, kuid vastassuunalist tungi, kui nad on rakendatud ühes ja samas punktis, sest niisuguste tungide vektorid asetsevad siis kindlasti ühisel kandesirgel.

Teise aksioomi sõnastame järgneval viisil:

**tungid, mis rakendatud kindla keha ühes ja samas punktis, ei avalda sellele kehale mingit mõju, kui nende resultanttung kaob.**

Sääraseid tunge võib järelikult mistahes tungikompleksile juurde lisada, või samuti mistahes tungikompleksist välja jätta, ilma et sel teel saadud uus tungikompleks oma mõju poolest kehale erineks esialgse tungikompleksi mõjust samale kehale. Tõsiasi, et kaks võrdset ja vastassuunalist samas punktis rakendatud tungi ei avalda mingit mõju kehale, võib ilmsesti käsitleda ka selle teise aksioomi erijuhuna.



33. joonis.

Olgu nüüd kindla keha punktis  $A$  rakendatud meelevaldne tung  $\mathfrak{P}$  (33. joon.). Valime selle tungi kandesirgel mõne uue punkti  $B$  meelevaldselt ning rakendame seal samal kandesirgel

kaks võrdset ja vastassuunalist tungi  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{D}'$ , nagu näidatud joonisel. Aksiomide põhjal see ei avalda mingit mõju kehale. Valime nüüd veel tungi  $\mathfrak{F}'$  suuruse võrdsena esialgse tungi  $\mathfrak{F}$  suurusega. Siis on  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{D}'$  kaks võrdset, kuid vastassuunalist tungi, mis asetsevad ühisel kandesirgel; esimese aksiomi põhjal need kaks tungi võib lihtsalt tungikompleksist  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{D}'$  ära jätta, ilma et see avaldaks mõju kehale. Seega jääb aga lõpptulemusena nüüd endise tungi  $\mathfrak{F}$  asemele ainus tung  $\mathfrak{F}'$ , mis suuruse, suuna ja kandesirge poolest ühtib tungiga  $\mathfrak{F}$ , kuid on rakendatud  $A$  asemel punktis  $B$ . Selle tungi  $\mathfrak{F}'$  mõju kehale peab, nagu äsjased kaalutlused näitavad, olema sama, kui endise tungi  $\mathfrak{F}$  mõju. Tähendab:

**kindla keha juures rakendatud tungi rakenduspunkti võib nihutada tungi kandesirget mööda keha piirides mistahes teisele kohale, ilma et selle tagajärjel muutuks tungi mõju kehale.**

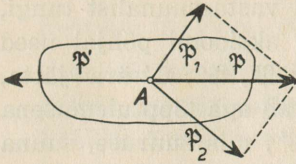
Kindla keha staatika probleemides võib, teiste sõnadega, lubada tungile oma kandesirget mööda libiseda. Vektorit, mille füüsikaline ekvivalent ei muutu, kui see vektor oma kandesirget mööda nihkub teisale, kutsutakse „libisevaks“ vektoriks.

**Kindla keha staatika käsitleb tunge libisevate vektoritena.** Paneme tähele veel, et § 17 tulemuste kohaselt säärase libiseva tungi moment mistahes punktis libisemise tagajärjel ei muutu. Libisev vektor on iseloomustatud kuue arvuga  $X, Y, Z, L, M, N$ , — rakenduspunkt on teataval määral vaba. Nende kuue arvuga on (19) kaudu kindlaks määratud selle vektori kandesirge; neid arve kutsutakse ka libiseva vektori koordinaatideks. Libiseva vektori koordinaate ei saa valida täiesti meelevaldselt, sest tuleb ikkagi rahuldada nõuet  $LX + MY + NZ = 0$ ; teisi kitsendusi ei ole.

Tungi libistamist kandesirget mööda kasutatakse õige sageli staatiliste küsimuste otsustamisel juhtudel, kus soovitakse mõnda tungide kompleksi asendada teissugusega. Nimetame seda toimingut sel puhul edaspidi „esimeseks elementaartehteks“ (tungikomplekside juures).

**§ 24. Komponenttungide asendamine resultanttungiga ja ümberpöörduvalt.** Olgu kindla keha punktis  $A$  rakendatud tungid  $\mathfrak{F}_1$  ja  $\mathfrak{F}_2$  (34. joon.). Lisame sellele tungikompleksile veel samas

punktis  $A$  rakendatud 2 võrdset ja vastassuunalist tungi  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{P}'$ , valides  $\mathfrak{P}$  just tungide  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  summana; aksiomide põhjal see kehale mõju ei avalda. Nagu aga nüüd joonise najal kerge veenduda, kaob uues kompleksis kolme tungi



34. joonis.

parajasti valitud  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  resultanttungina, siis oleme sel viisil tõestanud lause:

**ühises punktis rakendatud kaks tungi võib alati asendada nende resultanttungiga, ilma et selle juures muutuks kehale avaldatud mõju.**

On ühes punktis rakendatud rohkem kui kaks tungi, siis võib neid selle põhjal järjest paarikaupa asendada resultanttungidega, jätkates seda toimingut seni, kuni üle jääb üksainus resultanttung selles punktis. Teiste sõnadega,

**ühes punktis rakendatud tunge võib liita, ilma et selle tagajärjel muutuks mõju kehale.**

Säärast tungide liitmist kasutatakse jällegi staatika küsimuste juures tungikomplekside teisendamise otstarbeks. Seda toimingut nimetame edaspidi sel puhul „teiseks elementaar-tehteks“.

§ 21 tulemuste kohaselt on teise elementaar-tehte juures saadud resultanttungi moment mistahes punktis võrdne liidetud komponenttungide momentide summaga.

Olgu 34. joonisel ümberpööratud järjekorras antud esialgu punktis  $A$  rakendatud tung  $\mathfrak{P}$ . Valime tungiga  $\mathfrak{P}$  suuruse poolest võrdse, kuid vastassuunalise tungi  $\mathfrak{P}'$  ning peale selle veel 2 tungi  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  nõnda, et kolme viimase tungi resultanttung kaoks. See nõuab, nagu joonisest selgub, et  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$  oleksid parajasti esialgu antud tungi  $\mathfrak{P}$  komponendid. Nende kolme tungi lisandamine on teise aksiomi põhjal lubatud. Jättes aga nüüd saadud neljatungilises kompleksis tungid  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{P}'$  ära sel põhjusel, et nad on võrdsed ja vastassuunalised ning samas punktis rakendatud, jõuame tungikompleksi juurde, mis koosneb ainuüksi tungidest  $\mathfrak{P}_1$  ja  $\mathfrak{P}_2$ , tähendab, esialgse tungi  $\mathfrak{P}$  komponentidest. Niisiis:

tungi võib asendada oma kahe mistahes komponendiga, ilma et selle tagajärjel muutuks mõju kehale.

Sama mõtte alusel võib iga saadud komponenttungi omakorda lahutada kaheks komponenttungiks ning jätkata säärast toimingut üsna meelevaldselt. Et selle juures tekkiv tungikompleks ikka jälle koosneb vaid esialgse tungi komponentidest, siis järgneb seega üldlause, et

**tungi võib asendada tema mistahes komponentidega meelevaldselt arvul, ilma et mõju kehale seejuures muutuks.**

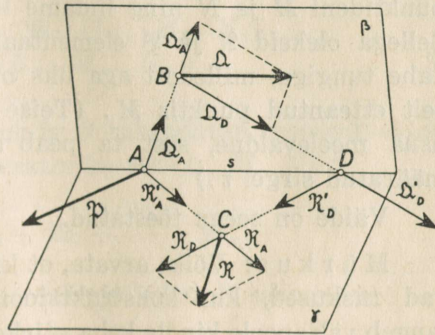
Tungi lahutamist komponentideks tungikompleksi teisendamise otstarbeks nimetame edaspidi „kolmandaks elementaartehteks“ tungikomplekside juures.

Nulltungi lahutamine komponentideks, mis sisuliselt moodustab eelmise toimingu erijuhtu, on lubatud otseselt juba teise aksioomiga.

**§ 25. Tungikompleksi asendamine kahe tungiga.** Kolme elementaartehte abil saab kindla keha juures rakendatud tungikompleksi alati asendada k a h e tungiga, milledest ü h e rakenduspunkt seejuures veel on valitav meelevaldselt. Selles veendume, jõudes selgusele, et juhul, kus tungikompleks koosneb vaid k o l m e s t tungist, säärane taandamine on alati teostatav; mistahes tungikompleksi taandamist võib ju siis ilmsesti toimendada järk-järgult kolmikute kaupa.

Olgu siis antud 3 tungi  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  vastavalt rakenduspunktidega  $A$ ,  $B$ ,  $C$

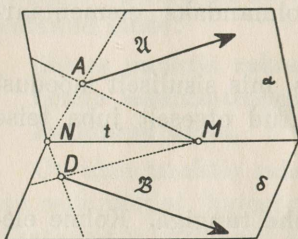
(35. joonis). Paneme läbi  $A$  ja  $\mathfrak{Q}$  tasapinna  $\beta$  ning läbi  $A$  ja  $\mathfrak{R}$  tasapinna  $\gamma$ . Nende kahe tasapinna lõikesirgel  $s$  võtame meelevaldselt veel punkti  $D$ . Lahutame  $\mathfrak{Q}$  komponentideks  $\mathfrak{Q}_A$  ja  $\mathfrak{Q}_D$  vastavalt sirgete  $BA$  ja  $BD$  sihis; samuti lahutame  $\mathfrak{R}$  komponentideks  $\mathfrak{R}_A$  ja  $\mathfrak{R}_D$  vastavalt sirgete  $CA$  ja  $CD$  sihis (kolmas elementaartehe!).  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  asendab nüüd kompleks  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}_A$ ,  $\mathfrak{Q}_D$ ,



35. joonis.

$\mathfrak{R}_A, \mathfrak{R}_D$ . Laseme  $\mathfrak{D}_A$  ja  $\mathfrak{R}_A$  kumbagi libiseda rakenduspunktini  $A$ , samuti  $\mathfrak{D}_D$  ja  $\mathfrak{R}_D$  libiseda punktini  $D$  (esimene elementaartehe!). Saame sel teel kompleksi  $\mathfrak{B}, \mathfrak{R}_A', \mathfrak{D}_A', \mathfrak{R}_D', \mathfrak{D}_D'$ . Kolmel esimesel tungil on siin ühine rakenduspunkt  $A$ ; liidame nad seal teise elementaartehte alusel üheks tungiks  $\mathfrak{A}$ . Samuti on kahel viimasel tungil ühine rakenduspunkt  $D$ , mille tõttu need võime liita üheks tungiks  $\mathfrak{B}$ . Seega olemegi saanud kolme esialgse tungi  $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}$  asemel k a k s tungi  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$ .

Jääb veel näidata, et saadud kahe tungi puhul ü h e rakenduspunkt on valitav meelevaldselt. Seda selgitab 36. joonis, kus



36. joonis.

$\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  vastavalt rakenduspunktidega  $A$  ja  $D$  kujutavad ülalkirjeldatud toiminguga saadud kahte tungi. Valime nüüd veel  $M$  meelevaldselt ning paneme läbi  $M$  ja  $\mathfrak{A}$  tasapinna  $\alpha$  ning läbi  $M$  ja  $\mathfrak{B}$  tasapinna  $\delta$ . Nende tasapindade lõikesirgel  $t$  valime vabalt veel ühe punkti  $N$  ning lahutame  $\mathfrak{A}$  komponentideks  $\mathfrak{A}_M$  ja  $\mathfrak{A}_N$  vastavalt  $AM$  ja  $AN$  sihis, ning  $\mathfrak{B}$  komponentideks  $\mathfrak{B}_M$  ja  $\mathfrak{B}_N$  vastavalt  $DM$  ja  $DN$  sihis.

Nihutame jällegi saadud tunge rakenduspunktideni  $M$  ja  $N$  ning liidame lõpuks seal tungid paarikaupa. Sellega oleksid  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  elementaartehte abil asendatud jällegi kahe tungiga, milledest aga üks on rakendatud üsna meelevaldselt etteantud punktis  $M$ . (Teise rakenduspunkt  $N$  pole enam üsna meelevaldne, sest ta peab asetsema  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ning  $M$  kaudu määratud sirgel  $t$ .)

Väide on seega tõestatud.

M ä r k u s: Võiks arvata, et kirjeldatud toimingu puhul tekiavad raskused, kui konstruktsioonis kasutatud punktidest mõni langeb väljapoole kindla keha piirkonda. Kuid tuleb silmas pidada, et mõtteliselt võime sel puhul ajutiselt kõnesoleva kindla keha täiendada lisaosadega vajalisel määral nõnda, et sellega oleksid haaratud kõik konstruktsioonis tarvitatud abipunktid; pärast, lõpptulemuse saamisel võib neid lisaosi jälle lugeda kõrvaldatuiks, — ainult lõpp-punktid  $M$  ja  $N$  peavad muidugi jääma kindla kehaga liikumatult seotuks. Säärane mõtteline tegevusvabadus lubab konstruktsiooni teostamisel eeldada keha piiramata suurena. Sel alusel staatikas harilikult jäetaksegi tungi-

komplekside teisendamise puhul kindel keha, millele see kompleks mõjub, üldse mainimata, kuigi sisuliselt muidugi see keha konstruktsiooni alusena on oluline.

§ 26. **Tungikompleksi üldine resultant ja resulteeruv moment.**  
Olgu kindla keha juures rakendatud tungid

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1: (X_1, Y_1, Z_1), \mathfrak{F}_2: (X_2, Y_2, Z_2), \dots, \\ \mathfrak{F}_n: (X_n, Y_n, Z_n) \end{aligned} \quad (32)$$

vastavalt punktides

$$\begin{aligned} A_1: (x_1, y_1, z_1), A_2: (x_2, y_2, z_2), \dots, \\ A : (x, y_n, z_n). \end{aligned} \quad (33)$$

Punktid (33) võivad selle juures ka osaliselt või isegi kõik omavahel ühte langeda. Koordinaadistiku asend on meelevaldne; võtame koordinaatteljed nõnda, et algus langeks meelevaldselt etteantud kohale  $O$ .

Igale tungile kompleksist (32) vastab punktis  $O$  oma momentvektor. Olgu need momentvektorid vastavalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1: (L_1, M_1, N_1), \mathfrak{M}_2: (L_2, M_2, N_2), \dots, \\ \mathfrak{M}_n: (L_n, M_n, N_n). \end{aligned} \quad (34)$$

Liidame need ühises punktis  $O$  rakendatud momentvektorid  $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$  üheks uueks vektoriks  $\mathfrak{M}: (L, M, N)$ :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n.$$

Vektorite liitmise analüütilise eeskirja kohaselt saame

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_n = \Sigma L \\ M &= M_1 + M_2 + \dots + M_n = \Sigma M_i \\ N &= N_1 + N_2 + \dots + N_n = \Sigma N_i. \end{aligned} \quad (35)$$

Sel viisil defineeritud vektorit  $\mathfrak{M}$  kutsutakse tungikompleksi (32)—(33) resulteeruvaks momendiks punktis  $O$ . See resulteeruv moment muutub üldiselt punkti  $O$  asukoha muutumisega.

Moodustame veel ühe vektori  $\mathfrak{R}$ :  $(X, Y, Z)$ , kus

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X_i \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y_i \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum Z_i, \end{aligned} \quad (36)$$

jättes seejuures aga  $\mathfrak{R}$  rakenduspunkti täiesti meelevaldseks. Säärast liiki vektorit, mille suurus ja suund on üheselt määratud, kuid rakenduspunkt üsna vabalt valitav, kutsutakse „vabaks vektoriks“. Praegu moodustatud  $\mathfrak{R}$  on seega „vaba“ vektor. Vastandiks sellele kutsutakse vektorit, millel ka rakenduspunkt on üheselt fikseeritud, „kinnistatud“ vektoriks. Momentvektorid kuuluvad oma loomuse poolest üldiselt „kinnistatud“ vektorite hulka. Kolmanda vektoriliigiga — „libisevate“ vektoritega — tutvusime juba varemini (tung!).

Valemitega (36) defineeritud vaba vektorit  $\mathfrak{R}$  kutsutakse tungikompleksi (32) üldiseks resultantiks. See üldine resultant ei olene rakenduspunktide  $A_1, A_2, \dots, A_n$  koordinaatidest.

Tungikompleksi üldist resultanti ei tohi kuidagi ära vahetada ühises punktis rakendatud komponenttungide resultanttungiga, kuigi nimetuste sarnasus selleks ahvatleb. Kompleksi üldine resultant on v a b a vektor, komponentide resultanttung aga ainult libisev vektor; komponentide resultanttungiga tohib komponente kindla keha juures asendada, kuna aga kompleksi üldine resultant üksinda veel kompleksi üldjuhul ei asenda.

Olgu nüüd tungikompleksi (32)—(33) kallal toimetatud mingisugused elementaartehted. Kergesti veendume, et selle tagajärjel ei muutu ei üldine resultant ega ka resulteeruv moment punktis  $O$ . Tõepoolest, elementaartehte puhul mõne tungi  $\mathfrak{P}_i$  projektsioonid jäävad kas endiseks (esimese elementaartehte juures!), või liituvad teiste tungide projektsioonidega (teise elementaartehte puhul!), või lõpuks jagunevad omakorda mitmeks liidetavaks (kolmanda elementaartehte teostamisel!). Igal juhul jääb selle tagajärjel  $X = \sum X_i$  jne. endiseks, seega ei muutu üldise resultandi projektsioonid telgedele. Samuti ei muutu resulteeruva momendi projektsioonid  $L = \sum L_i$  jne., sest esimene elementaartehte ei muuda üldse liidetavaid arve  $L_i$ , teine elementaartehte võtab ainult kokku mõningad  $L \dots$ , mis vastavad ühise rakenduspunktiga tungidele, mõneks uueks osasummaks,

lõpuks kolmas elementaartehe asendab üksiku  $L_i$  vaid uute liidetavatega, millede summaks on endine  $L_i$ ; seega summad  $\Sigma L_i$  jne. elementaartehete mõjul kunagi ei saa muutuda. Sõnastame tulemuse lausena:

**elementaartehted ei muuda tungisüsteemi üldist resultanti ega ka resulteeruvat momenti.**

Samalaadilised kaalutlused näitavad, et tungikompleksi osadesse jagunemisel meelevaldsel viisil, valemite (35) ja (36) abil arvatud kogukompleksi üldist resultanti ja resulteeruvat momenti võib saada ka teisiti, nimelt määrates samade valemite põhjal kompleksi iga osa jaoks eraldi üldise resultandi ja resulteeruva momendi, ning liites pärast sel teel saadud komponendid vastavalt. Võib seega öelda, et kogukompleksi üldine resultant ja samuti resulteeruv moment on osakomplekside üldiste resultantide või vastavalt resulteeruvate momentide vektoriaalne summa.

Märkus: Tungikompleksi resulteeruva momendi  $\mathfrak{M}$  ja üldise resultandi  $\mathfrak{R}$  skalaarne korrutis

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{R}) = LX + MY + NZ$$

üldjuhul erineb nullist, sest üldjuhul  $\mathfrak{M}$  ja  $\mathfrak{R}$  pole mitte üksteisega risti. Küll aga kaob  $(\mathfrak{M}\mathfrak{R})$  erijuhtudel, näiteks siis, kui kõik rakenduspunktid (33) langevad ühte, sest siis on kehtiv valem (31).

§ 27. Samaväärsed tungikompleksid. Tundes tungikompleksi (32)—(33) resulteeruva momendi koordinaatide alguses  $O$ , saame hõlpsasti arvutada ka resulteeruva momendi mistahes teises punktis  $O'$ , mille koordinaatideks on, ütleme,  $\xi, \eta, \zeta$ . Valemi (27) põhjal on nimelt iga üksiku tungi  $\mathfrak{P}_i$  puhul

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i' + \overline{\mathfrak{M}}_i,$$

kus  $\overline{\mathfrak{M}}_i$  tähistab  $\mathfrak{P}_i$  momenti sel korral, kui see  $\mathfrak{P}_i$  oleks rakendatud mitte punktis  $A_i$ , kus ta tegelikult on, vaid punktis  $O'$ . Võttes summa kõikide  $\mathfrak{P}_i$ -de kohta, leiame siit:

$$\Sigma \mathfrak{M}_i = \Sigma \mathfrak{M}_i' + \Sigma \overline{\mathfrak{M}}_i,$$

ehk, tähistades  $\Sigma \mathfrak{M}_i'$  tähega  $\mathfrak{M}'$  ja  $\Sigma \overline{\mathfrak{M}}_i$  tähega  $\overline{\mathfrak{M}}$ ,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \overline{\mathfrak{M}}. \quad (37)$$

Et seejuures  $\overline{\mathfrak{M}}$  määramisel kõik vektorid  $\mathfrak{P}_i$  tuleb rakendada ühes ja samas kohas  $O'$ , siis § 21 kohaselt on lubatud need  $\mathfrak{P}_i$  seal asendada vastava resultanttungiga, mille projektsioonideks on aga  $\Sigma X_i, \Sigma Y_i, \Sigma Z_i$ , tähendab, parajasti üldise resultandi  $\mathfrak{R}$  projektsioonid  $X, Y, Z$ . Seega  $\overline{\mathfrak{M}}$  projektsioonid  $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$  on

$$\overline{L} = \eta Z - \zeta Y, \quad \overline{M} = \zeta X - \xi Z, \quad \overline{N} = \xi Y - \eta X. \quad (38)$$

Tähistades  $\mathfrak{M}'$  projektsioone sümbolitena  $L', M', N'$ , järeldame valemite (37) ja (38):

$$\begin{aligned} L' &= L - (\eta Z - \zeta Y), & M' &= M - (\zeta X - \xi Z), \\ N' &= N - (\xi Y - \eta X), \end{aligned} \quad (39)$$

mis väliselt ühtivad § 20 saadud valemitega. Tungikompleksi resulteeruv moment punktis  $O'$  on seega väljendatud  $\mathfrak{M} : (L, M, N)$ ,  $\mathfrak{R} : (X, Y, Z)$  ja  $O' : (\xi, \eta, \zeta)$  kaudu.

Eeskirjast (39) teeme tähtsa järelduse. Olgu nimelt kõrvuti kompleksiga (32)—(33) antud veel mõni säärane teine kompleks, mille resulteeruv moment koordinaatide alguses  $O$  ühtib eelmise kompleksi resulteeruva momendiga sealsamas. Kui nüüd veel ka üldine resultant teisel tungikompleksil on sama mis esimeselgi, siis järgneb valemist (39) otsekohe, et mõlema kompleksi resulteeruvad momendid mistahes teises punktis  $O'$  samuti peavad ühtima.

Kaks tungikompleksi, millel üldine resultant on ühine ning samuti on ühine resulteeruv moment mingisuguses ühes punktis  $O$ , kutsutakse samaväärseiks. Nagu praegu nägime, on samaväärsetel kompleksidel resulteeruvad momendid ühised ka igas teises punktis  $O'$ .

On mõne tungikompleksi üldine resultant null ning samuti ka null resulteeruv moment ühes mingisuguses punktis  $O$ , siis öeldakse, et see kompleks on samaväärne nulliga. Valemit (39) jällegi järgneb, et säärase kompleksi resulteeruv moment peab ka igas teises punktis  $O'$  kaduma.

§ 28. Samaväärsete komplekside teisendatavus elementaartehete abil. Antud tungikompleksiga samaväärse kompleksi saame alati, kui rakendame selle antud kompleksi juures mingisugused elementaartehted, sest ükski elementaartehe, nagu juba selgitasime varemini, ei muuda üldist resultanti ega resulteeruvat momenti. Veendume nüüd veel, et ka ümberpöörduvalt just **elementaartehted** võimaldavad igal juhul üle minna mistahes antud tungikompleksist mistahes teise juurde, **kui ainult see teine kompleks on esimesega samaväärne.**

Selleks tõestame kõigepealt, et nulliga samaväärse kompleksi kõikide tungide hävitamine on teostatav elementaartehete abil. Tõepoolest, iga kompleks taandub elementaartehete najal, nagu nägime (§ 25), kaheks tungiks, milledest ühe rakenduspunkt on valitav meelevaldselt. Valime selleks rakenduspunktiks koordinaatide alguse  $O$ . Rakendades elementaartehteid nulliga samaväärse kompleksi juures peame igal hetkel saama ikkagi jälle nulliga samaväärse kompleksi, sest üldine resultant ja resulteeruv moment ei saa muutuda. Järelikult on taandamisprotsessi tulemusena saadud kaks tungi koos samaväärsed nulliga. Resulteeruv moment punktis  $O$  peab seega siin olema null; selle resulteeruva momendi saame, liites mõlema tungi momente punktis  $O$ ; et seejuures esimene tung on rakendatud just  $O$ -s, siis tema moment seal on juba null, — järelikult peab ka teine tung punktis  $O$  andma momendi null, et summa null välja tuleks. See tähendab aga, et teise tungi kandesirge peab läbima  $O$ , mille tõttu libistamise teel saame ka teise tungi lugeda rakendatuks samas kohas  $O$ . Siis on aga võimalik neid kahte tungi asendada ühe resultanttungiga, ning viimane peab seejuures tingimata osutama nulliks, sest muidu oleks kompleksi üldine resultant nullist erinev. Seega kompleksi kõik tungid on elementaartehete abil hävinud, nagu väitsimegi.

Tähendagu nüüd sümboolid  $(S)$  ja  $(S')$  kahte meelevaldset, kuid samaväärset kompleksi, mis samasusmärgi abil kirjutame ka nõnda:

$$(S) \equiv (S').$$

Tähendagu ( $-S'$ ) kompleksi, mille saaksime, andes kompleksi  $(S')$  kõikidele tungidele vastupidised suunad samade rakenduspunktide juures. Komplexidel  $(S')$  ja  $(-S')$  on siis ilmsesti üldised resultandid võrdsed, kuid vastassuunalised, samuti ka

resulteeruvad momendid võrdsed ja vastassuunalised. Kompleksidest ( $S'$ ) ja ( $-S'$ ) kui osadest moodustatud uus kogukompleks omab seepärast resulteeruvat momenti null ja samuti üldist resultanti null, tähendab, ta on samaväärne nulliga; sümboliseeritakse seda kujul

$$(S') + (-S') \equiv 0.$$

Elementaartehte abil saab, nagu ülal nägime, säärases kompleksis kõik tungid hävitada; toimetades kõik selle juures tarvitatud tehted ümberpööratud järjekorras, saame järelikult ka säärast kompleksi elementaartehte abil üles ehitada. See tähendab aga seda, et kompleksile ( $S$ ) saab kompleksi ( $S'$ ) + ( $-S'$ ) juurde lisada, kasutades ainuüksi elementaartehteid. Nüüd on aga sel viisil moodustatud uues kogukompleksis ( $S$ ) + ( $S'$ ) + ( $-S'$ ) ka osa ( $S$ ) + ( $-S'$ ) omaette samaväärne nulliga, sest oletuse järgi pidi olema ( $S$ )  $\equiv$  ( $S'$ ), mille tõttu komplekside ( $S$ ) ja ( $-S'$ ) üldised resultandid ja samuti ka resulteeruvad momendid on vastavalt võrdsed, kuid vastupidised. Järelikult peab kogukompleksis ( $S$ ) + ( $S'$ ) + ( $-S'$ ) võimalikuks osutama esimest osa kolmanda vastu elementaartehte abil hävitada, mille tagajärjel jääb üle ainuüksi kompleks ( $S'$ ). Sel viisil oleksimegi jõudnud, lähtudes kompleksist ( $S$ ), elementaartehte abil kompleksi ( $S'$ ) juurde, mida oligi vaja tõestada.

Tõestuse mõttekäiku väljendab lühidalt ja tabavalt sümbolne kirjutus:

$$(S) \equiv (S) + [(-S') + (S')] \equiv [(S) + (-S')] + (S') \equiv (S'),$$

kus iga kord samasusmärgiga on vihjatud võimalusele teisendada elementaartehte abil.

Kompleksi ( $S$ ) teisendamisevõimalusi kompleksiks ( $S'$ ) on lõpmata palju, sest võiks ju näiteks esialgu toimetada ükskõik missuguseid meelevaldseid tehteid meelevaldsel arvul, ning alles mõne aja pärast asuda planeetlikule tööle. Ei tohi arvata, et ülalantud tõestuses näidatud teisendamistee osutub ka kõige lühemaks, sest igal konkreetsel juhul võib õnnestuda leida lühemaid; tõestuse eesmärgiks oli ainult selgitada, et vähemalt üks tee peab alati viima sihile.

§ 29. **Tungipaar.** Võib juhtuda, et tungikompleksi üldine resultant kaob, resulteeruv moment mõnes punktis  $O$  seejuures aga mitte. Säärasel erijuhul üldise resultandi  $\mathfrak{R}$  projektsioonid on  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$ , mille tõttu valemist (39) järgneb  $L'=L$ ,  $M'=M$ ,  $N'=N$ ; tähendab, säärase kompleksi resulteeruv momentvektor on igas punktis nii suuruse kui ka suuna poolest sama. Võib öelda ka, et sel puhul resulteeruv moment osutub samuti nagu üldine resultant „vabaks“ vektoriks.

Taandades säärase erikujulise kompleksi kaheks tungiks  $\mathfrak{F}_1 : (X_1, Y_1, Z_1)$  ja  $\mathfrak{F}_2 : (X_2, Y_2, Z_2)$ , peame saama

$$X_1 + X_2 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = 0,$$

ehk

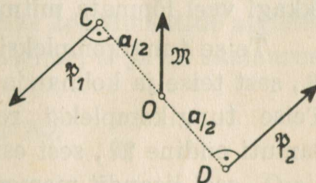
$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2.$$

Taandatud kompleks koosneb seega kahest suuruse poolest võrdsest, kuid vastassuunalisest tungist, seejuures tingimata erinevail kandesirgeil, sest muidu kompleks oleks samaväärne nulliga ja resulteeruv moment sellepärast samuti null. Niisugust kahetungilist süsteemi kutsutakse tungipaariks (37. joon.); tungipaari puhul on

$$\mathfrak{R} = 0, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \neq 0. \quad (40)$$

Vaba vektorit  $\mathfrak{M}$  kutsutakse tungipaari puhul mitte enam momendiks antud punktis, vaid lihtsalt „tungipaari momendiks“ ehk ka „tungipaari teljeks“. Need kaks tungi  $\mathfrak{F}_1$  ja  $\mathfrak{F}_2$ , milledest tungipaar koosneb, kutsutakse tungipaari komponentideks.

Tungipaari telje suurust  $|\mathfrak{M}|$  saab hõlpsasti arvutada, võttes punkti  $O$  tungide  $\mathfrak{F}_1$  ja  $\mathfrak{F}_2$  kandesirgetele risti tõmmatud lõigu keskkohas; selle ristilõigu  $CD$  pikkust  $a$  kutsutakse tungipaari „õlaks“. 37. joonisest selgub, et tungi  $\mathfrak{F}_1$  moment  $CD$  keskkohas  $O$  omab suurust  $\frac{a}{2} \cdot |\mathfrak{F}_1|$ ; niisama suur on samas kohas ka teise komponendi  $\mathfrak{F}_2$  moment, ning mõlema komponendi momentvektorid osutuvad samasuunalisteks, mille tõttu nende



37. joonis.

suurused liituvad puht-aritmeetiliselt. Seega tungipaari telg  $\mathfrak{M}$  omab suurust:

$$|\mathfrak{M}| = \frac{a}{2} \cdot |\mathfrak{P}_1| + \frac{a}{2} \cdot |\mathfrak{P}_2| = 2 \frac{a}{2} \cdot |\mathfrak{P}_1| = a \cdot |\mathfrak{P}_1|, \quad (41)$$

sest tungipaaril on  $|\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{P}_2|$ . Niisiis:

**tungipaari momendi (telje) suuruse määrab ühe komponendi suuruse korrutis õlaga.**

§ 30. **Dünaam.** Üldjuhul on tungikompleksi puhul nii üldine resultant kui ka resulteeruv moment nullist erinev. Varemini selgus, et tungikompleksi saab taandada kaheks tungiks. Paljudel juhtudel on aga otstarbekohasem teostada taandamist kolmele tungile, milledest kaks moodustavad tungipaari. Et see tööpoolest peab alati olema läbiviidav, seda näitavad järgmised kaalutlused.

Vaatleme kõrvuti meelevaldselt etteantud esimese kompleksiga veel teist kolmetungilist kompleksi, kus esimeseks tungiks on punktis  $O$  rakendatud esimese kompleksi üldine resultant  $\mathfrak{R}$ , teine ja kolmas tung koos aga moodustavad tungipaari, mille teljeks  $\mathfrak{M}$  on esimese kompleksi resulteeruv moment punktis  $O$ . Teine ja kolmas tung tuleb seega valida võrdses suuruses, kuid vastastikku vastupidises suunas tasapinnas, mis risti resulteeruva momentvektoriga  $\mathfrak{M}$ , ning anda paari õlale veel säärane suurus, et (41) kohaselt momentvektori suurus parajasti välja tuleks, hoolitsedes seejuures ka õige pöörmissuuna eest. Kõik see on teostatav ikkagi veel lõpmata mitmekesisel viisil.

Teise tungikompleksi üldiseks resultandiks on jällegi endine  $\mathfrak{R}$ , sest teise ja kolmanda tungi projektsioonid hävivad vastamisi. Teise tungikompleksi resulteeruv moment punktis  $O$  on aga samuti endine  $\mathfrak{M}$ , sest esimene tung, olles rakendatud just punktis  $O$ , seal lisandit momentvektorile anda ei saa, mille tõttu resulteeruva momendina punktis  $O$  jääb vaid tungipaari moment, mis pidigi olema  $\mathfrak{M}$ .

Sellest järgneb nüüd, et moodustatud teine tungikompleks on esimesega samaväärne. § 28 alusel peab ta seega saadav olema esimesest kompleksist elementaartehete kaudu. Et elementaartehet ei muuda tungikompleksi mõju kehale, siis järeldame:

**mistahes tungikompleksi mõju kindlale kehale on alati asen-**

**datav tungi ja tungipaari koosmõjuga, kusjuures siin esikohal mainitud tungil rakenduspunkt on valitav meelevaldselt, tungipaari telg aga on sellest rakenduspunktist.**

Lauses mainitud tung tõukab keha teatavas suunas, kuna lisaks tulev tungipaar püüab samal ajal keha pöörata. Mistahes tungikompleksi mõju kindlale kehale avaldub seega tõukamises ja pööramises. On tungikompleks samaväärne nulliga, siis kaob nii tõuketung  $\mathfrak{R}$  kui ka pöörav moment  $\mathfrak{M}$ ; kõik tungid hävivad siis vastamisi ja keha on t a s a k a a l u s. Überpöördult saab valitseda tasakaal ainult siis, kui pole ei tõukamist ega pööramist, tähendab, kui  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{M}$  kaovad, teiste sõnadega, kui rakendatud tungikompleks on samaväärne nulliga. Kindlale kehale mõjuva tungikompleksi samaväärsus nulliga on seega kindla keha puhul tasakaalu küllaldaseks ja tarvilikuks tingimuseks.

Kompleksi, mis koosneb tungist ja tungipaarist, kutsutakse P l ü c k e r i järgi „dünaamiks“ (1867). Kindlale kehale mõjuv tungikompleks on alati asendatav dünaamiga.

**§ 31. Minimaalne resulteeruv moment.** Üldjuhul leidub lõpmata palju erinevaid dünaame, mis asendavad antud tungikompleksi, nagu näha juba sellest, et tõuketungi rakenduskoha  $O$  võime valida meelevaldselt. Sobiva  $O$  valikuga võib saavutada aga seda, et tungipaari telje suurus  $|\mathfrak{M}|$  osutuks minimaalseks. Seda näitavad järgmised kaalutlused.

Olgu jälle antud tungikompleksi üldiseks resultandiks  $\mathfrak{R} : (X, Y, Z)$  ja resulteeruvaks momendiks koordinaatide alguses  $\mathfrak{M} : (L, M, N)$ . Nagu § 26 lõpus tähendasime,  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{M}$  skalaarne korrutis

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{M}) = LX + MY + NZ$$

üldjuhul erineb nullist. Veel varemini (§ 12) selgitasime, et skalaarne korrutis näitab vektorite suuruste korrutist nendevahelise nurga koosinusega. Moodustab  $\mathfrak{R}$  suund  $\mathfrak{M}$  suunaga nurga  $\varphi$ , siis järelikult

$$LX + MY + NZ = |\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}| \cdot \cos \varphi, \quad (42)$$

kus  $|\mathfrak{R}|$  tähendab tungikompleksi kaudu määratud konstanti,  $|\mathfrak{M}|$  ja  $\varphi$  aga olenevad  $O$  valikust ja on seega muutuvad.

Määrates valemite (39) abil resulteeruva momendi  $\mathfrak{M}' : (L', M', N')$  mõnes uues punktis  $O' : (\xi, \eta, \zeta)$  ning tähistades nurga uue väärtuse sümboliga  $\varphi'$ , saame skalaarse korrutisena

$$|\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}'| \cdot \cos \varphi' = L'X + M'Y + N'Z.$$

Asendades siin  $L', M', N'$  nende avaldistega valemeist (39), leiame:

$$\begin{aligned} L'X + M'Y + N'Z &= LX + MY + NZ - \\ &- [X(\eta Z - \zeta Y) + Y(\zeta X - \xi Z) + Z(\xi Y - \eta X)] = \\ &= LX + MY + NZ - 0 = \\ &= LX + MY + NZ. \end{aligned}$$

Skalaarse korrutise väärtus on seega jäänud endiseks:

$$|\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}'| \cdot \cos \varphi' = |\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}| \cdot \cos \varphi,$$

millest järgneb, et ka

$$|\mathfrak{M}'| \cdot \cos \varphi' = |\mathfrak{M}| \cdot \cos \varphi. \quad (43)$$

See tähendab, et resulteeruva momendi projektsioon üldise resultandi suunale on  $O'$  mistahes valiku puhul üks ja sama.

Et aga vektori projektsiooni suurus kunagi ei saa ületada vektorit ennast, siis  $\mathfrak{M}'$  ei saa kunagi suuruse poolest väiksem olla, kui seda on  $|\mathfrak{M}| \cdot \cos \varphi$  absoluutväärtus. On  $\varphi' = 0^\circ$  või  $180^\circ$ , siis  $\mathfrak{M}'$  peabki omama oma kõige väiksemat võimalikku suurust, olles seejuures sama- või vastassuunaliselt paralleelne tungikompleksi üldise resultandiga  $\mathfrak{R}$ . Sääraselt määratud „kompleksi minimaalset resulteeruvat momenti“ tähistame sümboliga  $\mathfrak{M}'_{\min}$ . Järgnevas paragraafis selgub, millised peavad olema punkti  $O'$  koordinaadid, et resulteeruv moment seal osutuks minimaalseks.

**§ 32. Tungikompleksi tsentraaltelg.** Toetume ülal selgunud nõudele, et resulteeruv moment on minimaalne seal kohas, kus vektorid  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{M}'$  on paralleelsed. Vektorite paralleelsuse tunnuse alusel (§ 12) peab järelikult säärases kohas  $O'$  olema

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z}.$$

Väljendades siin  $L', M', N'$  valemite (39) põhjal ning asendades

selle juures  $\xi, \eta, \zeta$  harilikkude koordinaatide sümbolitega  $x, y, z$ , saame siit nende  $x, y, z$  jaoks võrrandid:

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z}. \quad (44)$$

Et siin kolm tundmatut  $x, y, z$  on seotud ainult kahe rippumatu võrrandiga, siis nõutavaid punkte minimaalse resluteeruva momendiga  $\mathcal{W}'_{\min}$  leidub isegi lõpmata palju. Kõik need punktid  $O' : (x, y, z)$  koos moodustavad võrranditega (44) määratud joone ruumis. Et need võrrandid (44) on muutujate  $x, y, z$  suhtes lineaarsed, siis see joon peab olema sirge. Sirget (44) kutsutakse antud tungikompleksi tsentraalteljeks.

**Tsentraaltelje igas punktis ja ainult neis punktides tungikompleksi resluteeruv moment on minimaalne.**

Veendume veel, et tsentraaltelg ise on paralleelne kompleksi üldise resultandi  $\mathfrak{R}$  suunaga. Selleks on küllaldane näidata, et rakendades vektorit  $\mathfrak{R}$  selle tsentraaltelje mõnes punktis  $(x, y, z)$ , vektori teine otsapunkt langeb alati ka samale teljele. Vektori teise otsa koordinaadid on seejuures  $x + X, y + Y, z + Z$ ; pannes need väärtused võrrandisse (44) jooksvate koordinaatide  $x, y, z$  asemele, leiaksime tõepoolest:

$$\begin{aligned} \frac{L - [(y + Y)Z - (z + Z)Y]}{X} &= \frac{M - [(z + Z)X - (x + X)Z]}{Y} = \\ &= \frac{N - [(x + X)Y - (y + Y)X]}{Z}. \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist taandub see tulemus aga jälle kujule (44), mille tõttu tulemus peab olema õige, sest (44) on valitud  $x, y, z$  puhul õige, väljendades  $O'$  asetsemist tsentraalteljel. Niisiis koordinaadid  $x + X, y + Y, z + Z$  antud eeldustel tõepoolest rahuldavad samuti võrrandeid (44), niipea kui koordinaadid  $x, y, z$  neid rahuldavad; seega vektori  $\mathfrak{R}$  mõlemad otsapunktid langevad tsentraalteljele alati koos korruga, mis võimalik on vaid seetõttu, et tsentraaltelg on üldise resultandiga  $\mathfrak{R}$  paralleelne.

Järelikult:

**tsentraaltelje mistahes punktis resluteeruv momentvektor ja üldine resultantvektor omavad mõlemad tsentraaltelje sihti.**

Tsentraaltelge saaks orienteerida, valides tema positiivseks suunaks just üldise resultandi suuna. Säärasel kokkuleppel nurk  $\varphi'$

seal võetud momentvektori  $\mathcal{M}'_{\min}$  ja üldise resultandi  $\mathcal{R}$  suuna vahel osutub ühtlasi selle momentvektori  $\mathcal{M}'_{\min}$  kaldenurgaks tsentraaltelje suhtes.

Minimaalse momentvektori  $\mathcal{M}'_{\min}$  asukoha määramine võrrandite (44) abil osutub võimatuks, kui  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ , s. t. tungipaari puhul. Siis on aga resulteeruv moment „vaba“ vektor, mille suurus igas kohas on üks ja sama, ning seega on ka arusaadav, miks säärasel juhul minimaalse momendi otsimine muutub mõttetuks. Sel juhul pole üldse ka mõtet kõnelda tsentraalteljest, küll aga võib ikkagi rääkida tsentraaltelje sihist, mis langeb ühte tungipaari telje sihiga.

On projektsioonidest  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ainult üks või kaks võrdsed nulliga, siis tsentraaltelg leidub; tuleb sel juhul vaid (44) tõlgendada nõnda, et seal, kus nimetajas esineb null, ka vastav lugeja peab olema null, sest paralleelsuse tingimuse mõtte kohaselt  $\mathcal{R}$  ja  $\mathcal{M}'$  peavad andma koordinaattelgedega vastavalt võrdsed sihikoosinused. Igal juhul saame siis sel korral seose (44) asemel kaks võrrandit, millega tsentraaltelg on üheselt määratud.

Valides dünaami nõnda, et tungipaari moment osutuks minimaalseks, saame nagu selgus, kompleksi resulteeruva momendi tõuketungi rakenduskohal (tähendab tungipaari teljel) paralleelsena tsentraaltelje sihiga, s. t. tõuketungi sihiga. Tungipaari tasapind selles erikujulises dünaamis peab järelikult olema risti tõuketungi sihiga. Tõuketungi rakenduspunkt võib seejuures veel tsentraaltelge pidi libiseda. Säärast erikujulist dünaami kutsutakse tungikruviks (Ball, 1870), ehk, kui arusaamatusi pole karta, ka lihtsalt kruviks. Kindla keha juures rakendatud tungikompleksi saab alati mõju poolest asendada teatava kruviga. Nimetuse „kruvi“ näitlik põhjendus on ilmne: keha tõukamine ja pööramine toimuvad nagu mehaanilises kruvis selle liikumise puhul nutris.

Arvu  $f$

$$f = \frac{|\mathcal{M}'| \cdot \cos \varphi}{|\mathcal{R}|} = \frac{|\mathcal{M}'_{\min}|}{|\mathcal{R}|} \quad (45)$$

kutsutakse tungikruvi „nooleks“.

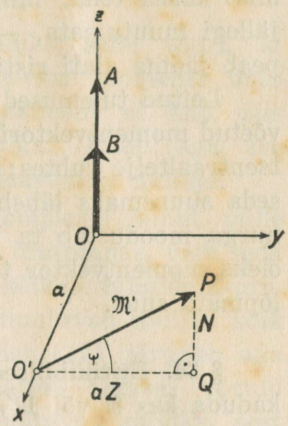
Tungikompleksi taandamine tungikruviks omab tähtsust paljudes staatika küsimustes. Tungikomplekside liitumist võib näiteks taandada kruvide liitmisele.

§ 33. Resulteeruvate momentide sümmeetriline jaotus ruumis.

Koordinaatteljestiku valikul osutub staatika probleemides sageli otstarbekohaseks võtta üheks koordinaatteljeks, näiteks  $z$ -teljeks, just tungikompleksi tsentraaltelge; küsimuste analüütiline käsitlemine muutub siis enamasti hõlpsamaks.

Näitena uurime sel teel resulteeruvate momentvektorite  $\mathfrak{M}$  suuruste ja suundade jaotust ruumis.

$z$ -teljeks valime tungikompleksi tsentraaltelje, võttes selle positiivseks suunaks üldise resultandi  $\mathfrak{R}$  suuna. Koordinaatide alguse  $O$  ja pärast seda veel  $x$ -telje valik jääb teatava määraneni meelevaldseks. Resulteeruv moment  $\mathfrak{M} : (L, M, N)$  punktis  $O$  on  $\mathfrak{M}'_{\min}$  ja langeb seetõttu tsentraaltelje, s. o.  $z$ -telje sihile; järelikult  $L = 0, M = 0$ .  $N$  võib olla positiivne või negatiivne, erijuhul ka null. Samuti on üldise resultandi projektsioonid  $X = 0, Y = 0$ , kuna  $Z$  on kas positiivne või null. 38. joonisel  $\vec{OA}$  kujutab üldist resultanti  $\mathfrak{R}$  ning  $\vec{OB}$  resulteeruvat momenti  $\mathfrak{M}$ .



38. joonis.

Valime nüüd ruumis vabalt veel ühe punkti  $O'$ . Kasutades koordinaatide alguse ja  $x$ -telje valiku vabadust, võime alati probleemiseadet kitsendamata oletada, et  $O'$  asetseb parajasti  $x$ -teljel ja nimelt tema positiivsel poolel. Selle punkti  $O'$  koordinaadid oleksid siis  $x = a, y = 0, z = 0$ , kusjuures veel  $a \geq 0$ . (39) põhjal omab säärasel korral resulteeruv moment  $\mathfrak{M}'$  punktis  $O'$  projektsioone

$$L' = 0, \quad M' = +aZ, \quad N' = N. \quad (46)$$

Seega on  $\mathfrak{M}'$  risti  $x$ -teljega, s. t.  $O$  ja  $O'$  ühendava sirgiga. Täisnurkne kolmnurk  $O'PQ$  asetseb tasapinnas, mis samuti risti selle sirgiga.  $\mathfrak{M}'$  kaldenurk  $\psi$   $x$ - $y$ -tasapinna suhtes on määratud seosega

$$\tan \psi = \frac{N}{aZ}. \quad (47)$$

Et  $N$  ja  $Z$  selles seoses on konstandid, siis  $\psi$  läheneb nullile

$a$  piiramata kasvamisel, ning läheneb  $90^\circ$ -le  $a$  piiramata kahane-  
misel.  $\mathfrak{M}'$  suurust määrab valem

$$|\mathfrak{M}'| = \sqrt{N^2 + a^2 Z^2}, \quad (48)$$

kust näha, et  $\mathfrak{M}'$  kasvab piiramata  $a$  piiramata kasvamisel, ning läheneb minimaalsuurusele  $|N|$ , kui  $a$  piiramata kahaneb. Nihkub  $O'$  rööbiti  $z$ -teljega üles- või allapoole, siis võib temaga koos viia ka  $x$ -telge ja  $x$ - $y$ -tasapinda, ning  $\psi$  ja  $|\mathfrak{M}'|$  jäävad muutumata. Pöörleb  $O'$  ümber  $z$ -telje (tsentraaltelje), jäädes ikkagi kaugusele  $a$  sellest teljest, siis võiksime lasta ka  $x$ -telge seda pöörlemist kaasa teha, mille tagajärjel selgub, et  $\psi$  ja  $|\mathfrak{M}'|$  jäävad jällegi muutumata, — ainult  $\mathfrak{M}'$  siht ruumis muutuks, sest ta peab jääma alati risti kaasapöörleva  $x$ -telje sihiga.

Leitud tulemused annavad näitliku pildi ruumi punktides  $O'$  võetud momentvektorite  $\mathfrak{M}'$  jaotusest: jaotuses valitseb sümmeetria tsentraaltelje suhtes; mida kaugemal  $O'$  asetseb tsentraalteljest, seda suuremaks läheb momentvektor, ning seda suurema teravnurga moodustab ta tsentraalteljega; lõpmata suures kauguses oleks momentvektor tsentraalteljega risti, olles seejuures ise ka lõpmata suur.

§ 34. **Eritüübilised tungikompleksid.** Erijuhtudel võib kruvis kaduda kas  $\mathfrak{R}$  või  $\mathfrak{M}'_{\min}$ . Kaovad mõlemad korraga, siis on süsteem samaväärne nulliga.

Kaob  $\mathfrak{R}$ , resulteeruv minimaalne moment aga mitte, siis kompleks ilmsesti taandub tungipaariks. Kaob vaid  $\mathfrak{M}'_{\min}$ , üldine resultant aga mitte, siis kompleks taandub üheksainsaks tungiks, mis rakendatud kompleksi tsentraalteljel ja omab selle tsentraaltelje sihti. Mõlemal juhul kompleksi iseloomustav muutumata väärtusega skalaarne korrutis  $LX + MY + NZ$  („invariantne“ skalaarne korrutis) ilmsesti omab väärtust null, sest tema kolm liidetavat muutuvad eraldi nulliks.

Ümberpöördult, kui

$$LX + MY + NZ = 0,$$

siis on kas  $|\mathfrak{R}| = 0$ , või  $|\mathfrak{M}'_{\min}| = 0$ , sest (42) ja (43) põhjal on selle invariantse skalaarse korrutise väärtus võrdne korrutisega  $|\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}'_{\min}|$ , mis saab null olla ainult siis, kui üks tegureist on null. Kompleks taandub siis kas tungipaariks või üheksainsaks tungiks.

Kompleksi tüübi kohta saab seega selgusele jõuda järgmisel viisil.

Määrame kompleksi üldise resultandi ja resulteeruva momendi ühes üsna meelevaldses punktis (näiteks koordinaatide alguses). Arvutame saadud andmeil  $LX + MY + NZ$ . Osutub see avaldis positiivseks või negatiivseks, siis kõnesolev tungikompleks on samaväärne  $k$  a h e tungiga, samaväärne dünaamiga ja samaväärne kruviga, mille nool  $f$  ei kao.

Osutub aga see avaldis nulliks, ilma et  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ise oleksid korruga nullid, siis kompleks tingimata peab olema taanduv üheksainsaks tungiks.

Osutub avaldis  $LX + MY + NZ$  nulliks selle tõttu, et  $X = Y = Z = 0$ , siis vaatleme veel kompleksi momenti ühes meelevaldselt valitud punktis. Kui see moment ei kao, siis kompleks on samaväärne ühe tungipaariga. Kaob aga see momentvektor samuti, siis kompleks on samaväärne nulliga.

Tasase tungikompleksi puhul, s. t. kompleksi puhul, mille kõik tungivektorid asetsevad ühes ja samas tasapinnas, võib seda tasapinda alati valida  $x$ - $y$ -tasapinnaks. Siis kõikide tungide  $Z$ -projektsioonid muutuvad nulliks ja samuti muutuvad nulliks kõik rakenduspunktide  $z$ -koordinaadid. Valemeist (19) järgneb aga siis, et iga üksiku tungi puhul koordinaatide alguses võetud momentvektori  $L$ - ja  $M$ -projektsioonid muutuvad nulliks, sest säärase tungi  $\mathfrak{F}_i$  puhul on

$$L_i = y_i \cdot 0 - 0 \cdot Y_i = 0, \quad M_i = 0 \cdot X_i - x_i \cdot 0 = 0.$$

Selle tagajärjel osutuvad aga nulliks ka arvud  $Z = \sum Z_i$ ,  $L = \sum L_i$ ,  $M = \sum M_i$ . Siit järgneb, et invariantne skalaarne korrutis  $LX + MY + NZ$  käesoleval juhul tingimata muutub nulliks. Arvestades varem-leitud tulemusi, saame seega lause:

**kui tasane tungikompleks pole samaväärne nulliga, siis ta on alati asendatav kas üheainsa tungiga, või üheainsa tungipaariga.**

Üksik tung ja samuti ka üksik tungipaar on elementaarteinete abil ilmselt asendatav **tasase** tungikompleksiga. On nüüd mõne ruumilise tungikompleksi puhul invariantne avaldis  $LX + MY + NZ$  võrdne nulliga, tähendab, see tungikompleks asendatav kas ühe tungiga või tungipaariga, siis selle tõttu sama tungikompleks nähtavasti on teisendatav ka tasaseks kompleksiks.

## Harjutusülesandeid.

46. Näidata, et tasapinnal üksik tung on alati samaväärne kolme tungiga, millede kandesirgeteks on samas tasapinnas meelevaldselt etteantud kolmnurga küljed.

47. Näidata, et ruumis üksik tung on alati samaväärne kuue tungiga, millede kandesirgeteks on meelevaldselt etteantud tetraeedri servad.

48. Tung  $\mathfrak{F}$   $x$ - $y$ -tasapinnas on rakendatud punktis  $(+1, -4)$  ja omab projektsioone  $X=3$ ,  $Y=4$ . See tung on asendatud kolmest tungist koosneva samaväärse kompleksiga nõnda, et mainitud kolme tungi kandesirged lõikuvad kohtades  $(0, +5)$ ,  $(+12, 0)$  ja  $(0, 0)$ . Arvutada kompleksi tungide suurused.

49. Tungide  $\mathfrak{F}_1$  ja  $\mathfrak{F}_2$  projektsioonid ja rakenduspunktide koordinaadid on antud tabelis:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{F}_1$	0	-1	0	0	0	+0
$\mathfrak{F}_2$	0	+0	+1	+1	0	0

Punktis  ~~$(-1, 1, 1)$~~  <sup>milles  $y=-1, z=-1$</sup>  on rakendatud tung  $\mathfrak{F}_3$ :  $(+1, +1, +1)$ . Missuguses  $x$ - $y$ -tasapinna kohas peaks rakendatama neljas tung  $\mathfrak{F}_4$ , et kompleks  $\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$  osutuks samaväärseks kompleksiga  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ ?

50. Järgnev tabel sisaldab andmeid kolme tungi  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  projektsioonide ja rakenduspunktide kohta:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{A}$	+3	+2	-1	0	-1	-3
$\mathfrak{B}$	-4	-5	+2	+2	-2	+4
$\mathfrak{C}$					+1	

Määrata puuduvad andmed nõnda, et kompleks oleks samaväärne nulliga.

✓ 51. Tungipaari kaks komponenti asetsevad kuubi vastas-servadel, omades suurust kumbki 2 ühikut. Kuubi serva pikkus on 3 ühikut. Arvutada tungipaari telje projektsioonid sama kuubi servadele.

52. Tung  $\mathfrak{B} : (+2, -1, -1)$  on rakendatud punktis  $(0, -4, +3)$ . Tung  $\mathfrak{D}$  moodustab koos tungiga  $\mathfrak{B}$  tungipaari ja on rakendatud  $y$ - $z$ -tasapinna punktis. Määrata tungi  $\mathfrak{D}$  rakendus-punkt, teades, et tungipaari telg on  $\mathfrak{M} : (-3, -5, -1)$ .

✓ 53. Kompleks koosneb kahest tungist  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ , millede projektsioonid ja rakenduspunktid on antud tabelis:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{A}$	+1	+1	+1	+2	0	-1
$\mathfrak{B}$	-3	-2	+4	-5	+3	0

See kompleks on asendatud dünaamiga, kusjuures üldine resultant on rakendatud  $x$ -teljel positiivsel poolel kaugusel 1 koordinaatide algusest. Arvutada dünaami tungipaari telje projektsioonid ja selle telje suurus.

54. Dünaam koosneb tungist, mis sihitud  $x$ -telje suunas, ja tungipaarist, mille telg on rööbik  $z$ -teljega. Näidata, et vastav tungikompleks peab taanduma üheksainsaks tungiks.

✓ 55. Dünaam koosneb  $y$ -teljel asetsevast ning selle telje positiivses suunas mõjuvast tungist, mille suurus on ühik, ning tungipaarist, mille telg omab samuti suurust 1, moodustades seejuures koordinaattelgedega võrdseid teravnurki. Asendada see dünaam kahe tungiga  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ , vastavalt alljärgnevale tabelile, täites seal tühjad kohad parajal viisil:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{A}$				0		
$\mathfrak{B}$	+2	-1	-3	+1	0	$\times$

56. Määrata koht, kus eelmises ülesandes mainitud dünaami tsentraaltelg lõikab  $x$ - $z$ -tasapinda.

57. Kompleks  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  on määratud tabeliga:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{A}$	-1	+3	-5	0	-2	-4
$\mathfrak{B}$	+2	-4	+1	-3	+1	+2
$\mathfrak{C}$	+1	+1	+2	-1	+4	+4

Määrata kohad, kus selle kompleksi tsentraaltelg lõikab koordinaattasapindu.

58. Kompleks koosneb tungidest:

	$X$	$Y$	$Z$	$x$	$y$	$z$
$\mathfrak{B}_1$	0	-1	0	+1	0	0
$\mathfrak{B}_2$	0	0	+1	0	+1	0
$\mathfrak{B}_3$	+1	0	0	0	0	+1

Määrata koht selle kompleksi tsentraalteljel, kus  $x = 1$ .

59. Näidata, et kahe tungi tsentraaltelg peab kohtuma nende tungide kandesirgeid lõikava ühise ristsirgega. (Näpunäide: arvutuste lihtsustamiseks valida teljestik nõnda, et  $z$ -telg oleks üheks kandesirgeks ja  $x$ -telg oleks ülalmainitud ühiseks ristsirgeks.)

60. Tung  $\mathfrak{A} : (+1, 0, -1)$  on rakendatud punktis  $(0, -1, 0)$ . Tung  $\mathfrak{B}$  asetseb kandesirgel

$$y - 1 = 0, \quad 2x - z = 0.$$

Määrata  $\mathfrak{B}$  nõnda, et kompleksi  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  tsentraalteljeks osutuks parajasti  $z$ -telg.

61. Arvutada tungidest  $\mathfrak{A} : (+2, -1, +3)$  ja  $\mathfrak{B} : (-1, -3, +2)$  koosneva kompleksi minimaalse momendi projektsioo-

nid koordinaattelgedele, teades, et  $\mathfrak{R}$  rakenduspunktiks on koordinaatide algus, kuna  $\mathfrak{B}$  on rakendatud punktis  $(-2, -4, +1)$ .

✓ 62. Liita 2 tungikruvi üheks uueks tungikruviks, s. t. määrata selle uue „resulteeruva“ tungikruvi telje võrrand ning üldise resultandi ja resulteeruva momendi projektsioonid, järgmiste andmete najal: esimese tungikruvi teljeks on  $x$ -telg, üldine resultant on  $\mathfrak{R}_1 : (+3, 0, 0)$ , kruvi nool  $f_1 = +\frac{1}{2}$ ; teise tungikruvi teljeks on  $y$ -telg, üldine resultant on  $\mathfrak{R}_2 : (0, +4, 0)$ , nool  $f_2 = -\frac{1}{3}$ .

✓ 63. Tungikruvi teljeks on  $z$ -telg, üldine resultant on  $\mathfrak{R} : (0, 0, +10)$ , nool  $f = +2$ . Arvutada säärase tungikruviga asendatud tungikompleksi resulteeruva momendi projektsioonid punktis  $(-3, -2, +1)$ .

✓ 64. Tungikompleksi tsentraalteljeks on  $y$ -telg. Kompleksi resulteeruv moment punktis  $(-3, +2, -4)$  omab projektsioone  $M' = -3$ ,  $N' = +8$ . Arvutada üldise resultandi suurus ja vastava tungikruvi nool  $f$ .

✓ 65. Tungikompleksi tsentraalteljeks on  $x$ -telg. Kompleksi resulteeruv moment punktis  $(+2, -6, +10)$  omab suurus 15 ja moodustab  $x$ -telje positiivse suunaga nurga  $30^\circ$ . Arvutada punktis  $(+1, +1, 0)$  võetud resulteeruva momendi projektsioonid.

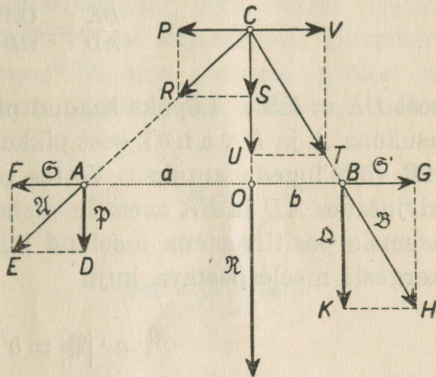
## IV. Paralleeltungid.

§ 35. Samasuunaliste paralleeltungide graafiline liitmine. Paralleeltungide kompleks, s. t. säärane kompleks, kus kõik tungivektorid on omavahel paralleelsed, peab alati taanduv olema üheks tungiks või üheksainsaks tungipaariks, niipea kui see kompleks pole samaväärne nulliga. Tõepoolest, paralleeltungide kompleksi ühist tungide sihti võime valida  $z$ -teljeks, mille tagajärjel kõik  $X$ - ja kõik  $Y$ -projektsioonid kaovad ja sellepärast ka üldise resultandi projektsioonid  $X$  ja  $Y$  muutuvad nulliks. (19) põhjal on siis ka iga üksiku tungi momendi  $\mathfrak{M}_i$  projektsioon  $N_i = x_i \cdot 0 - y_i \cdot 0 = 0$ , järelikult on ka resulteeruva momendi projektsioon  $N = \sum N = 0$ . Kõige selle tagajärjel muutuvad aga nulliks kõik kolm liidetavat invariantset avaldises  $LX + MY + NZ$ , millest järgnebki, et ülaltodud väide on õige.

On õpetlik selgitada, kuidas tegelikult teostub paralleeltungide kompleksi taandamine elementaartehete abil. Seejuures on küllalt, kui selgub, kuidas talitada ka  $h$  e paralleeltungi puhul, sest üldjuhtu saab siis käsitleda järk-järgult, võttes paralleeltunge kokku paarikaupa. Et paralleeltungide kompleksi üldisel resultandil ülalmainitud telgede valiku puhul on  $X = 0$ ,  $Y = 0$ , siis see üldine resultant, tähendab, ka kompleksi tsentraaltelg, peab osutama samuti paralleelseks kompleksi tungide ühise sihiga; taandades kaks paralleeltungi üheks, peame seetõttu saama tungi, mis jälle endistega paralleelne.

Vaatleme eeskätt kaht samasuunaliselt paralleelset tungi. Nii-suguste tungide  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$  „liitmist“ üheks tungiks selgitab 39. joonis, kus rakenduspunkte  $A$  ja  $B$  ühendav sirge  $AB$  on võetud risti tungide ühise sihiga, mis ei kitsenda probleemiseadet, sest tunge mööda kandesirgeid libistades võime seda eriasendit igal juhul saavutada.

Joonise kohaselt on tungidega  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{D}$  kõigepealt liidetud kaks meelevaldset, kuid vastassuunalist tungi  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{S}'$  ühendus-sirge  $AB$  sihis, mis moodustab esimesest ja kolmandast elemen-taartehtest kombineeritud toimingu. Edasi on  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{F}$  liidetud üheks tungiks  $\mathfrak{A}$ , ning  $\mathfrak{S}'$  ja  $\mathfrak{D}$  liidetud üheks tungiks  $\mathfrak{B}$ . Neid tunge  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  saab nihutada ühise rakenduspunktini  $C$ . Koos sellega on ristkülik  $ADEF$  üle kantud kohta  $C$  ristkülikuna  $CSRP$  ja analoogiliselt ristkülik  $BKHG$  üle kantud  $C$  juurde ristkülikuna  $CUTV$ . Kui nüüd  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  rakenduspunkti  $C$  juures lahutada komponentideks vastavalt sealsete ristkülikute külgede sihtides,



39. joonis.

siis nende komponentide puhul  $\overrightarrow{CP} = \mathfrak{S}$ ,  $\overrightarrow{CV} = \mathfrak{S}'$ ,  $\overrightarrow{CS} = \mathfrak{F}$ ,  $\overrightarrow{CU} = \mathfrak{D}$ , ja  $\overrightarrow{CP}$  ja  $\overrightarrow{CV}$  hävivad vastamisi; üle jäävad  $C$  juures ainult  $\overrightarrow{CS}$  ja  $\overrightarrow{CU}$ , mis samasuunaliste tungidena liituvad aritmeetiliselt, andes ainsa tungi  $\mathfrak{R}$ , mille suurus

$$|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{F}| + |\mathfrak{D}|.$$

Saadud tungi  $\mathfrak{R}$  võime soovi korral veel nihutada punktini  $O$  sirgel  $AB$ . Elementaartehtete abil saaduna on  $\mathfrak{R}$  ilmsesti sama-väärne kompleksiga  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{D}$ .

Punkti  $O$  asukoha sirgel  $AB$  saaksime määrata joonisest geo-meetrilistel kaalutlustel. Et  $\triangle ADE \sim \triangle COA$ , siis

$$\frac{DE}{AD} = \frac{OA}{CO};$$

samuti on sirgest  $CO$  paremat kätt

$$\frac{KH}{BK} = \frac{OB}{CO}.$$

Jagamise kaudu järgneb neist kahest võrrandist

$$\frac{DE \cdot BK}{AD \cdot KH} = \frac{OA \cdot CO}{CO \cdot OB}$$

ehk

$$\frac{BK}{AD} = \frac{OA}{OB},$$

sest  $DE = KH$ . Lõpuks saadud proportsioon määrabki punkti  $O$  asukoha  $A$  ja  $B$  vahel, sest pikkused  $AD$ ,  $BK$  ning kogupikkuse  $AB$  võib lugeda antuks. Võttes proportsioonis ristkorrutised ja kirjutades  $AD$  ja  $BK$  asemele vastavalt  $|\mathfrak{P}|$  ja  $|\mathfrak{Q}|$ , ning  $OA$  ja  $OB$  asemele positiivsetena mõeldud lühendussümbolid  $a$  ja  $b$ , saame kergesti meelespeetava kuju

$$a \cdot |\mathfrak{P}| = b \cdot |\mathfrak{Q}|. \quad (49)$$

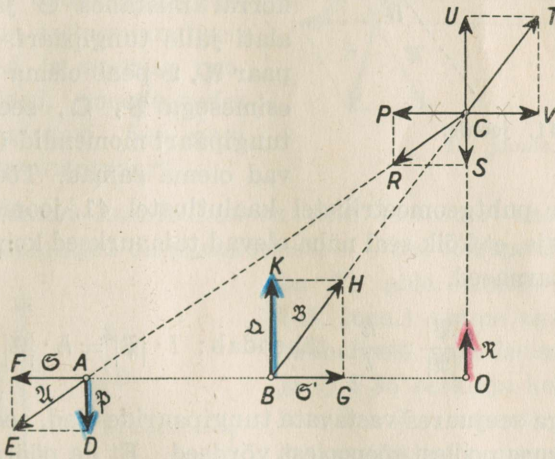
Seos (49) näitab, et kompleksi  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  resulteeruv moment punktis  $O$  kaob, sest  $a \cdot |\mathfrak{P}|$  on  $\mathfrak{P}$  momendi suurus punktis  $O$ , samuti  $b \cdot |\mathfrak{Q}|$  on  $\mathfrak{Q}$  momendi suurus sealsamas, ning mõlemad momentvektorid punktis  $O$  on otse vastassuunalised. Kompleksiga  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  samaväärse ainsa tungi  $\mathfrak{R}$  moment punktis  $O$  peabki olema null ka juba sellepärast, et see tung  $\mathfrak{R}$  on seal rakendatud. Lähtudes sellest praegumainitud tõsiasiast, oleksime saanud tuletada tingimuse (49) lihtsamal teel.

Sõnastame tulemuse lausena:

**kaht samasuunalist paralleelset tungi saab asendada ühe tungiga, mis endistega paralleelne, ja mille suurus on antud tungide suuruste summa; asendava tungi rakenduspunkt asub rakenduspunkte ühendaval sirglõigul suuremale tungile lähemal, jagades seda sirglõiku võrdeliselt antud paralleeltungide suurusega.**

Paralleeltunge  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$  võime käsitleda lõikuvate kandesirgetega tungide piirjuhuna, kus lõikepunkt kaob lõpmatusse. Laenates sealt komponenttungide ja resultanttungi mõisted, öeldakse ka paralleeltungide  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$  puhul, et need „komponendid“ liituvad üheks „resultanttungiks“  $\mathfrak{R}$ .

§ 36. Vastassuunalised paralleeltungid. Olgu nüüd punktides  $A$  ja  $B$  rakendatud tungid  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$  vastassuunaliselt paralleelsed. Võime sõna-sõnalt korrata eelmises paragraafis kirjeldatud toimingut, nagu see ongi tehtud 40. joonisel, kus kõik vastavad punktid ja tungid on märgitud vastavalt samade tähtedega, nagu 39. jooniselgi. Lõpptulemuses tekib siiski teatav erinevus, mis tingitud asendi erinevusest algandmeil: „liitmise“ tulemusena saadud „resultanttung“  $\mathfrak{R}$  oma suuruse poolest ei ole enam  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$  suuruste summa, vaid nende suuruste vahe



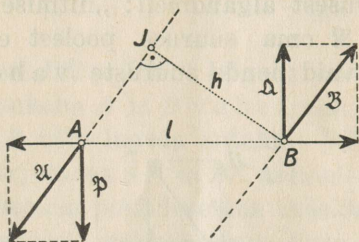
40. joonis.

(diferents); seejuures on  $\mathfrak{R}$  ikkagi endiste tungidega paralleelne, kuid suunatud suurema komponendi suunas, ning  $\mathfrak{R}$  rakenduspunkt  $O$  sirgel  $AB$  asetseb nüüd väljaspool lõiku  $AB$ , aga ikkagi suuremale komponendile lähemal. Täpselt nagu varemingi, leiame jälle seose (49), kui  $a$  ja  $b$  endisel viisil tähendavad positiivsetena mõeldud lõikude  $OA$  ja  $OB$  pikkusi vastavalt. Tulemuse sõnastame järgmiselt:

kaks vastassuunaliselt paralleelset, suuruse poolest erinevat tungi on asendatavad ühe tungiga, mis endistega paralleelne, suunatud suurema komponendi suunas ning suuruse poolest võrdne komponentide suuruste diferentsiga; resultanttungi rakenduspunkt komponentide rakenduspunkte ühendaval sirgel asetseb väljaspool komponentide määratud vahemikku,

olles seejuures suuremale komponendile lähemal; lõigud resultantungi rakenduspunkti komponentide rakenduspunktideni on võrdelised komponentide suurustega.

40. joonisel näidatud konstruktsioon pole läbiviidav, kui komponendid  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$ , olles suuruse poolest võrdsed, moodustavad tungipaari, sest siis, nagu on kerge kontrollida,  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$



41. joonis.

kandesirged osutuvad alati jälle paralleelseteks ning punkti  $C$  seega ei leidu (41. joon.). Saadud tungid  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  moodustavad sel korral mistahes  $\mathfrak{E}$  ja  $\mathfrak{E}'$  puhul alati jälle tungipaari. See tungipaar  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  peab olema samaväärne esimesega  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ , seega mõlema tungipaari momendid (teljed) peavad olema samad. Tõepoolest sel-

gubki juba puhtgeomeetrilistel kaalutlustel 41. joonisest, arvestades tõsiasi, et kõik seal näha olevad täisnurksed kolmnurgad on omavahel sarnased,

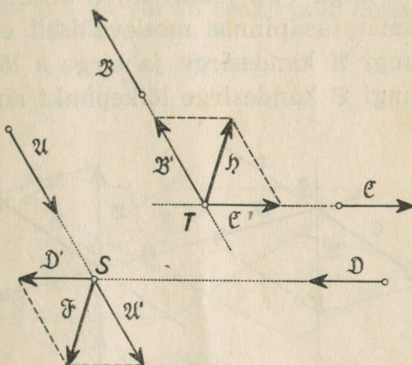
$$\frac{|\mathfrak{P}|}{|\mathfrak{A}|} = \frac{h}{l}, \text{ tähendab: } l \cdot |\mathfrak{P}| = h \cdot |\mathfrak{A}|.$$

$l$  ja  $h$  on aga seejuures vastavate tungipaaride õlad, seega momendid on suuruse poolest tõepoolest võrdsed. Et ka pöörmissuunad mõlemal tungipaaril ühtivad ja momentvektorid on loomulikult risti tungipaaride ühise tasapinnaga, siis ongi mõlemad momentvektorid ühised.

§ 37. **Tungipaaride liitmine tasapinnas.** Koosneb kompleks ainuüksi tungipaaridest, siis tema üldine resultant kaob, nagu kerge näha. See tähendab aga, et säärane kompleks peab taanduma üheksainsaks tungipaariks (eeldusel, et kompleks pole samaväärne nulliga). Järelikult ka tungipaarid kahekaupa võetuna peavad liituma uueks tungipaariks. Selgitame liitmise toimingut kõigepealt erijuhul, kus mõlemad tungipaarid („komponentpaarid“) asetsevad samas tasapinnas.

Olgu antud (42. joon.) samas tasapinnas tungipaarid  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ . „Resultantpaari“ leidmiseks otsime esiteks  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{D}$  kandesirgete lõikepunkti  $S$ , ning  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$  kandesirgete lõike-

punkti  $T$ , ja rakendame neis punktides vastavalt nihutamise teel tungid  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{D}$  ja  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ . Joonisel on need  $S$  ja  $T$  juurde nihutatud tungid selguse mõttes eraldatud sümbolitega  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{D}'$  ja  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{C}'$ . Asendades nüüd  $\mathfrak{A}'$  ja  $\mathfrak{D}'$  nende resultanttungiga  $\mathfrak{F}$ , ning analoogiliselt  $\mathfrak{B}'$  ja  $\mathfrak{C}'$  resultanttungiga  $\mathfrak{H}$ , saame sel viisil esialgse kompleksi  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  asemele kompleksi  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$ . Joonisest selgub, et  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{H}$  on vastassuunaliselt paralleelsed ja suuruse poolest võrdsed, moodustades seega tungipaari. See ongi otsitav „resultantpaar“.



42. joonis.

Kirjeldatud konstruktsioon pole teostatav üksnes siis, kui  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{D}$  kandesirged on paralleelsed, s. t. kui löikepunkti  $S$  (ja siis ka  $T$ ) pole olemas. Sel korral

(43. joon.) saame aga liita samasuunaliselt paralleelseid tuge  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{D}$  § 35 eeskirja kohaselt üheks tungiks  $\mathfrak{F}$ ; samuti võime liita samasuunaliselt paralleelsed tungid  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$  üheks tungiks  $\mathfrak{H}$ . Joonisest selgub, et  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{H}$  moodustavad jälle tungipaari, mis ongi sel korral otsitav resultantpaar.

Oleksime võinud raskusest pääseda ka teisel teel, pöörates nimelt kõigepealt 41. joonise koha-

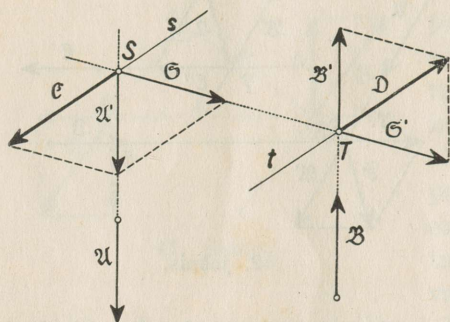
selt tungipaari  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  tungide sihid teatava nurga võrra. See oleks võimaldanud leida nõutavad löikepunktid  $S$ ,  $T$  ja neis rakendatud tungipaari  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$  varemseletatud viisil.

§ 38. Tungipaari kandmine meelevaldsetele paralleelsirgetele tasapinnas. Enne kui näidata ruumis meelevaldselt asetsevate tungipaaride liitmist, tõestame abilause:

tungipaar laseb ennast elementaarteinete abil nõnda teisen-

dada, et tema komponendid langeksid samas tasapinnas meelevaldselt etteantud kahele paralleelsele sirgele.

Olgu (44. joon.)  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  antud tungipaar ning tähendagu  $s$ ,  $t$  samas tasapinnas meelevaldselt etteantud sirgeid jooni. Olgu  $S$  tungi  $\mathfrak{A}$  kandesirge ja sirge  $s$  lõikepunkt; analoogiliselt olgu  $T$  tungi  $\mathfrak{B}$  kandesirge lõikepunkt sirgega  $t$ . Kanname  $\mathfrak{A}$  punktisse



44. joonis.

$S$  ja lahutame ta seal komponenttungideks  $\mathfrak{C}$  ja  $\mathfrak{C}'$  vastavalt sirge  $s$  ja sirge  $ST$  sihis. Nihutame pärast seda  $\mathfrak{C}$  oma kandesirget mööda punktini  $T$  ja liidame ta seal samasse kohta nihutatud tungiga  $\mathfrak{B}$  üheks resultanttungiks  $\mathfrak{D}$ . Joonisest saab välja lugeda, et selle tagajärjel ülejäänud tungid  $\mathfrak{C}$  ja  $\mathfrak{D}$

moodustavad jälle tungipaari, mille kandesirgeteks on parajasti  $s$  ja  $t$ ; tekkimisviisi kohaselt peab see tungipaar olema samaväärne esialgse tungipaariga  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ .

Peaksid sirged  $s$  ja  $t$  olema võetud paralleelsetena tungidega  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$ , siis vajalikkude lõikepunktide  $S$  ja  $T$  leidmine otseselt poleks võimalik. Kuid sel korral võime alati 41. joonise järgi enne tungipaari  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  pöörata meelevaldse nurga võrra. Pärast seda otsime lõikepunkte sirgetega  $s$  ja  $t$  ning talitame endisel viisil edasi.

Abilause on seega tõestatud.

Tungipaari saab järelikult enda tasapinnas meelevaldselt pöörata ja nihutada ning komponente viia soovikohaselt teineteisele lähemale või teineteisest kaugemale, ilma et samaväärsus selle all kannataks.

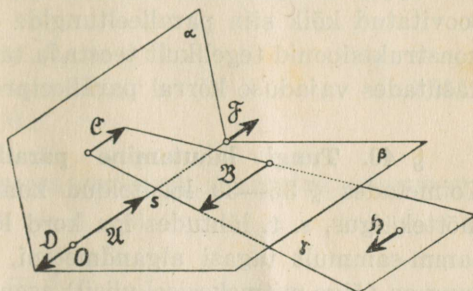
### § 39. Erinevatel tasapindadel asetsevate tungipaaride liitmine.

Olgu  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  kaks tungipaari erinevatel tasapindadel  $\alpha$ ,  $\beta$ . Määrates nende tasapindade lõikesirge  $s$ , võime neid tungipaare abilause kohaselt alati orienteerida nõnda, et  $\mathfrak{A}$  ja samuti ka  $\mathfrak{D}$  langeksid kandesirgele  $s$  (45. joon.). Liidame seal  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{D}$  üheks tungiks  $\mathfrak{F}$ , mille rakenduspunkt sirgel  $s$  on mui-

dugi meelevaldne. Tungid  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$  on mõlemad paralleelsed sirgega  $s$  ja seetõttu ka omavahel paralleelsed ning asetsevad seepärast teatavas ühises tasapinnas  $\gamma$ . Selles tasapinnas võime  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$  liita üheks resultanttungiks  $\mathfrak{F}$  § 35 või 36 eeskirjade kohaselt. Joonisest saab välja lugeda, et  $\mathfrak{F}$  ja  $\mathfrak{H}$  moodustavad tungipaari; see asendabki kahest tungipaarist koosnevat kompleksi  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ .

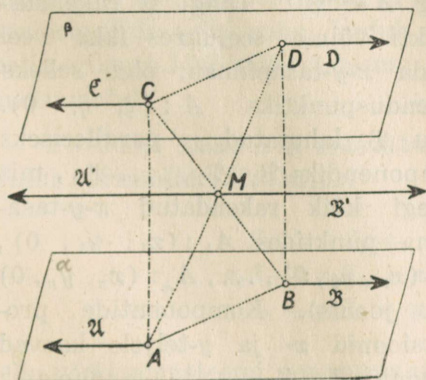
Prægukirjeldatud toiming pole läbiviidav, kui tasapinnad  $\alpha$  ja  $\beta$ , milles tungipaarid  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ja  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  vastavalt asetsevad, on rööbikud, sest siis puudub vajalik lõikesirge  $s$ . Näitame, et säärasel korral osutub alati võimalikuks üht tungipaari elementaartehte abil üle kanda teise tungipaari tasapinnale; sellega probleem taanduks samas tasapinnas asetseva kahe tungipaari liitmisele, mis juba leidnud käsitlemist varem (§ 37).

Tungipaari  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ülekandmist omast tasapinnast  $\alpha$  paralleel-



45. joonis.

sesse tasapinnasse  $\beta$  selgitab 46. joonis. Projektide  $\mathfrak{A}$  ja  $\mathfrak{B}$  rakenduspunktid  $A$  ja  $B$  tasapinnast  $\alpha$  tasapinnale  $\beta$  vastavalt kohtadesse  $C$  ja  $D$ . Siis  $ABDC$  on ristkülik; olgu  $M$  selle ristküliku diagonaalide lõikepunkt. Rakendame punktis  $M$  kaks võrdset, kuid vastupidiselt suunatud tungi  $\mathfrak{A}'$  ja  $\mathfrak{B}'$  paralleelselt tungi  $\mathfrak{A}$  sihiga;  $\mathfrak{A}'$  suurus olgu  $\mathfrak{A}$  suuruselt täpselt 2 korda suurem. Liites  $\mathfrak{A}'$  ja  $\mathfrak{B}'$  § 36 ees-



46. joonis.

kirja järgi, saame tungi  $\mathfrak{C}$ , mille suuruseks osutub  $2 \cdot |\mathfrak{A}|$  —  $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|$ , ja mille rakenduspunktiks sirgel  $BM$  peab (49) põhjal olema just punkt  $C$ . See tung  $\mathfrak{C}$  on tungiga  $\mathfrak{A}$  sama-suunaline ja suuruse poolest võrdne. Analoogilisel viisil liidame  $\mathfrak{B}'$  ja  $\mathfrak{A}$  § 36 kohaselt, mis annab punktis  $D$  rakendatud tungi  $\mathfrak{D}$ ,

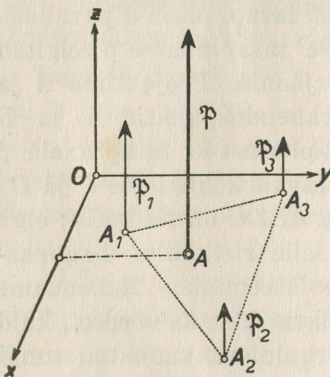
mille suund vastab  $\mathfrak{B}$  suunale ja suurus on  $\mathfrak{B}$  suurusega võrdne. Sel teel ongi tungipaar  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  asendatud samaväärse tungipaariga  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  tasapinnas  $\beta$ .

Õppijale olgu harjutuseks ja asjasse süvenemiseks tungivalts soovitatud kõik siin paralleeltungide puhul selgitatud graafilised konstruktsioonid tegelikult teostada täpsete joonestusriistade abil, kasutades vajaduse korral paralleelprojektsiooni võtteid.

#### § 40. Tungi lahutamine paralleelseteks komponentideks.

Toimetades § 35—39 käsitletud konstruktsioone ümberpööratud mõttekäigus, s. t. lähtudes iga kord lõpptulemusest ning minnes samm-sammult tagasi algandmeteni, näeme kohe, et iga üksik tung on (õige mitmekesisel viisil) asendatav kahe paralleelse sama või ka sama- ja vastassuunalise komponendiga. Samuti selgub võimalus iga tungipaari asendada jällegi väga mitmekesisel viisil teiste tungipaaridega.

Tungi lahutamist paralleelseteks komponentideks saab hõlpsasti uurida analüütilisel teel. Olgu antud mõni tung  $\mathfrak{P}$ . Orienteerime  $z$ -telje  $\mathfrak{P}$  suunas, siis selle tungi projektsioonid  $X = 0$  ja  $Y = 0$  ning  $Z = |\mathfrak{P}|$ . Tungi  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkti võime seejuures ikka veel valida  $x$ - $y$ -tasapinnas; olgu selleks rakenduspunktiks  $A : (\xi, \eta, 0)$ .



47. joonis.

Olgu  $\mathfrak{P}$  lahutatud  $n$  paralleelseks komponendiks  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ , mis jällegi kõik rakendatud  $x$ - $y$ -tasapinna punktides  $A_1 : (x_1, y_1, 0)$ ,  $A_2 : (x_2, y_2, 0)$ ,  $\dots$ ,  $A_n : (x_n, y_n, 0)$  (47. joonis). Komponentide projektsioonid  $x$ - ja  $y$ -teljele kaovad

kõik; jäävad ainult projektsioonid  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$   $z$ -teljele.

Et kompleks  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  peab olema samaväärne ainsa tungiga  $\mathfrak{P}$ , siis selle kompleksi üldine resultant peab omama projektsioone null  $x$ - ja  $y$ -teljel ning projektsiooni  $Z$  teljel  $z$ . Samuti peab kompleksi resulteeruv moment koordinaatide alguses  $O$  ühtima tungi  $\mathfrak{P}$  momendiga selles kohas. Selle momendi projektsioonid on:

$$\begin{aligned}
 L &= \eta Z - 0 \cdot Y = \eta Z \\
 M &= 0 \cdot X - \xi Z = -\xi Z \\
 N &= \xi \cdot 0 - \eta \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Üksiku tungi  $\mathfrak{F}_i$  moment punktis  $O$  omab analoogiliselt (50)-ga projektsioone:

$$\begin{aligned}
 L_i &= y_i Z_i \\
 M_i &= -x_i Z_i \\
 N_i &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Üldise resultandi ja resulteeruva momendi etteantud suurusest järgnevad seega võrrandid:

$$\begin{aligned}
 \Sigma Z_i &= Z \\
 \Sigma y_i Z_i &= \eta Z \\
 -\Sigma x_i Z_i &= -\xi Z
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

On  $\mathfrak{F}$  ning rakenduspunktid  $A, A_1, A_2, \dots, A_n$  antud, siis kolmes võrrandis (52) osutuvad tundmatuiks  $n$  arvu  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Üldiselt on kolme lineaarse võrrandi kaudu just kolm suurust üheselt määratud. Järelikult saab paralleelseid komponente kindla keha staatika seaduste najal määrata üheselt ainult siis, kui komponentide arv on parajasti kolm. Suurema komponentide arvu puhul leidub võrrandsüsteemil (52) lõpmata palju erinevaid lahendussüsteeme, — probleem on siis „staatiliselt määramatu“.

Piirdume staatiliselt määratud juhuga  $n = 3$ , kirjutades sel puhul võrrandid (52) kujul:

$$\begin{aligned}
 Z_1 + Z_2 + Z_3 &= Z \\
 x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + x_3 Z_3 &= \xi Z \\
 y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 &= \eta Z
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Selle võrrandsüsteemi determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix},$$

mis analüütilisest geomeetriast tuntud valemi põhjal pole midagi muud, kui vastava kolmnurga  $A_1 A_2 A_3$  kahekordne pindala. Järe-

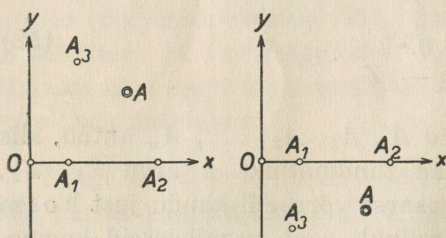
likult  $\Delta$  kaob siis ja ainult siis, kui punktid  $A_1, A_2, A_3$  asetsevad ühel sirgel. Moodustavad need punktid aga tõelise kolmnurga, siis  $\Delta$  erineb nullist ja tundmatud  $Z_1, Z_2, Z_3$  on selle tagajärjel (53) kaudu määratud ühesel viisil. Lahendid  $Z_1, Z_2, Z_3$  võivad olla kas kõik positiivsed, või osalt negatiivsed, kõik 3 korraga negatiivsed olla ei saa, sest nende summa on positiivne. Negatiivne  $Z_i$  tähendab, et  $\mathfrak{F}_i$  on suunatud  $\mathfrak{F}$ -ga vastupidiselt.

§ 41. Komponentide suuna analüüs. Uurime lähemalt võrrandsüsteemi (53) lahendite märke.

Meil on sel puhul veel ilmne vabadus valida koordinaatteljed nõnda, et  $A_1$  ja  $A_2$  langeksid mõlemad  $x$ -teljele, et seega  $y_1 = 0$  ja  $y_2 = 0$ . Kolmas võrrand (53) omab selle valiku puhul kuju:

$$y_3 Z_3 = \eta Z, \text{ ehk } Z_3 = \frac{\eta}{y_3} \cdot Z.$$

Siit järgneb, et  $Z_3$  on siis ja ainult siis positiivne, kui  $\eta$  ja  $y_3$  on varustatud ühe ja sama märgiga, tähendab, kui

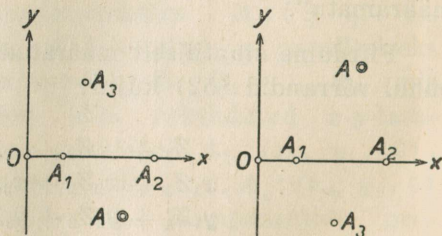


48. joonis.

$A$  asetseb sirge  $A_1A_2$  suhtes samal pooltel, kus  $A_3$  (48. joonis). Asetsevad aga  $A$  ja  $A_3$  sirge  $A_1A_2$  suhtes erinevatel pooltel, siis  $\eta$  ja  $y_3$  on vastasmärgilised ja  $Z_3$  selle tagajärjel osutub negatiivseks (49. joonis).

$Z_3 = 0$  tuleks ainult siis, kui  $\eta = 0$ , s. t. kui  $A$  asetseks sirgel  $A_1A_2$ .

Koordinaattelgede valik ja samuti punktide numeratsioon ei saa avaldada mõju üheselt määratud tundmatutele  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Selle tõttu saame leitud tulemuse sõnastada järgmiselt:



49. joonis.

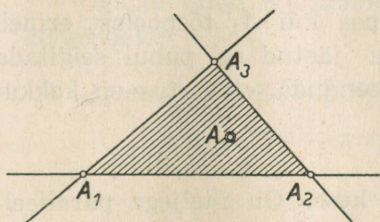
**Komponent on tungiga  $\mathfrak{F}$  samasuunaline, kui tema rakenduspunkt asetseb teise kahe komponendi rakenduspunktidega määratud sirge suhtes samal pooltel, kus tungi  $\mathfrak{F}$  rakenduspunktki.**

Komponent on tungiga  $\mathfrak{F}$  vastassuunaline, kui tema rakenduspunkt asetseb teise kahe komponendi rakenduspunktidega määratud sirge suhtes tungi  $\mathfrak{F}$  rakenduspunktiga võrreldes vastaspoolel.

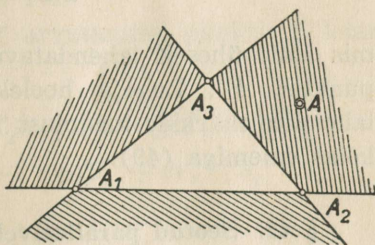
Komponent kaob, kui tema rakenduspunkt asetseb väljaspool teise kahe komponendi rakenduspunktidega määratud sirget, tungi  $\mathfrak{F}$  rakenduspunkt aga langeb selle sirge peale.

Tehes vastavad proovid joonisel, järeldame siit:

1) Kõik komponendid on tungiga  $\mathfrak{F}$  samasuunalised, kui  $\mathfrak{F}$  on rakendatud komponentide rakenduspunktidega määratud kolmnurga seesmises osas (viirutatud piirkonnas 50. joonisel).



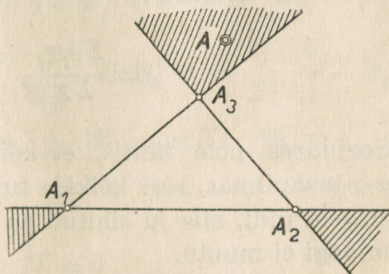
50. joonis.



51. joonis.

2) Kaks komponenti on tungiga  $\mathfrak{F}$  samasuunalised, üks aga vastassuunaline, kui  $\mathfrak{F}$  on rakendatud väljaspool komponentide rakenduspunktidega määratud kolmnurka ja nimelt 51. joonisel viirutatud piirkonnas.

3) Üks komponent on tungiga  $\mathfrak{F}$  samasuunaline, kaks aga vastassuunalised, kui  $\mathfrak{F}$  on rakendatud väljaspool komponentide rakenduspunktidega määratud kolmnurka ja nimelt 52. joonisel viirutatud piirkonnas.



52. joonis.

4) Üks ja ainult üks komponentidest on null, kui tung  $\mathfrak{F}$  on rakendatud mainitud kolmnurga külgsirgel.

Lugeja hooleks olgu jäetud selgitada, missugused komponendid nimelt on tungiga  $\mathfrak{F}$  vastassuunalised igal üksikul juhul.

Kaob kolmnurk  $A_1A_2A_3$ , s. t. asetsevad  $A_1, A_2, A_3$  ühisel sirgel, siis võrrandsüsteemi (53) determinant  $\Delta$  kaob, nagu ülal nägime; üldjuhul sel korral lahendust üldse ei leidu. Erijuhul aga, kui ka  $A$  asetseb samal sirgel, on lahendeid lõpmata palju, mille tõttu siis probleem mehaanika seisukohalt muutub „staatiliselt määramatuks“. Viimasel korral saaksime staatiliselt määratud probleemi ainult vähendades komponentide arvu ühe võrra, s. t. piirdudes kahe rakenduspunktiga  $A_1, A_2$  punktist  $A$  läbimineval sirgel. Valides nimelt seda sirget  $x$ -teljeks ( $\eta = 0, y_1 = 0, y_2 = 0$ ), saame siis (53) asemel vaid kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= Z \\ x_1Z_1 + x_2Z_2 &= \xi Z, \end{aligned} \quad (54)$$

mis alati üheselt lahendatavad, niipea kui  $A_1$  tõepoolest erineb punktist  $A_2$ . Lugeja hooleks olgu jäetud sel puhul selgitada lahendite märkide küsimust ning veenduda, et vastus on kokkukõlas valemiga (49).

**§ 42. Seotud paralleelvektorite kese.** On  $z$ -teljega paralleelsed tungid  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  antud meelevaldsel arvul  $n$ , siis valemitega (52) on määratud mitte üksnes nende „resultanttung“  $\mathfrak{P}$  (ka „summa“), vaid ka veel selle  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkti  $A$  kaks esimest koordinaati  $\xi$  ja  $\eta$ . Eeldatud on seejuures, et  $|\mathfrak{P}|$  erineb nullist, s. t. et kompleks  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  ei taandu üheks tungipaariks ega ole samaväärne nulliga. Võrranditest (52) järgneb nimelt sel eeldusel:

$$\xi = \frac{\sum x_i Z_i}{\sum Z_i}, \quad \eta = \frac{\sum y_i Z_i}{\sum Z_i}. \quad (55)$$

Seejuures pole tähtis, et kõik rakenduspunktid asetseksid just  $x$ - $y$ -tasapinnas, sest kõikide tungide libistamisel vastavaid kandesirgeid pidi, mis ju sihitud on risti  $x$ - $y$ -tasapinnaga, seostes (55) midagi ei muutu.

Loobume nüüd erikujulise koordinaadistiku valikust ja samuti nõudest, et rakenduspunktid  $A, A_1, A_2, \dots$  oleksid kõik ühes ja samas tasapinnas. Nõuame selle eest aga, et paralleeltungid  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  oleksid kõik samasuunalised, — siis sama suunda omab muidugi ka nende tungide resultanttung  $\mathfrak{P}$ . Tähen-



Nüüd paneme aga veel tähele, et valemis (57) suunakoosinused  $l, m, n$  üldse ei esine. See tähendab, et punkt  $C$  jääb samaks, kui anda kompleksi  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  tungidele meelevaldne teine, kõigile tungidele muidugi jälle ühine suund, seejuures aga mitte muutes nende tungide suurusi ja rakenduspunkte. Ikkagi on siis ainus tung  $\mathfrak{F}$ , millele see uus kompleks taandub, rakendatav endises punktis  $C$ . Kompleksi tsentraaltelg, mis alati on paralleelne üldise resultandiga, seega paralleelne tungiga  $\mathfrak{F}$  ja samuti paralleelne kompleksi tungidega  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ , teeb järelikult suuna muutumist kaasa, kuid läbib seejuures alati ühe ja sama, võrranditega (57) määratud punkti  $C$ . Oluliseks eelduseks seejuures on, et tungid  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  ei libise, vaid jäävad kogu aeg seotuks kindlate rakenduspunktidega  $A_1, A_2, \dots$ . Punkti  $C$  nimetame seotud paralleelvektorite  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  keskmeks. See kese püsib paigal, kui muutuvad ainult vektorite sihid; ta on ainult nende vektorite suurustest ja rakenduspunktidest.

Asetsevad rakenduspunktid kõik ühel tasapinnal, siis ka kese  $C$  asetseb samal tasapinnal. Tõepoolest, võttes rakenduspunktide  $A_1, A_2, \dots$  tasapinna sel juhul  $x$ - $y$ -tasapinnaks, s. t. võttes  $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots$ , leiame valemist (57)

$$\zeta = \frac{\sum z_i \cdot |\mathfrak{F}_i|}{\sum |\mathfrak{F}_i|} = \frac{\sum 0 \cdot |\mathfrak{F}_i|}{\sum |\mathfrak{F}_i|} = 0,$$

millest selgubki, et ka  $C$  asetseb samal tasapinnal.  $C$  ühtib sel korral valemitega (55) määratud punktiga  $A$  paragraafist 42, kus tungid olid võetud erilises suunas, nimelt kõik risti  $x$ - $y$ -tasapinnaga. Nagu näeme, viimane nõue osutub mitteoluliseks, sest ka iga teise suuna puhul, näiteks ka siis, kui  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  ise kõik ka langeksid sellesse tasapinda, kese jääb endisele kohale.

Asetsevad rakenduspunktid  $A_i$  kõik ühel ja samal sirgel, siis ka kese  $C$  asetseb sellel samal sirgel. Tõepoolest, valides selle sirge näiteks  $x$ -teljeks, s. t. võttes  $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, z_1 = 0, z_2 = 0, \dots$ , leiame valemist (57)  $\eta = 0, \zeta = 0$ , millest järgneb, et ka  $C$  langeb  $x$ -teljele.

§ 43. **Massikese.** Seotud paralleelvektorite keskmee mõiste esineb mehaanikas enamasti pisut erilisel kujul, nimelt juhul, kus  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  tähendavad punktides  $A_1, A_2, \dots$  kontsentreeri-

tud masside raskusi. Raskused (kaalud) kujutellakse omavahel paralleelsete tungidena, mis võrdelised vastavate massidega. Tähistame punktidesse  $A_1, A_2, \dots$  paigutatud masse vastavalt tähtedega  $m_1, m_2, \dots$ . Raskuse võrdelisust massiga väljendame võrrandiga

$$|\mathfrak{P}_i| = m_i g, \quad (58)$$

mõeldes  $g$  all võrdetegurit, s. t. iga  $i$  puhul üht ja sama arvu. Selle võrdeteguri tegelik suurus pole käesoleval hetkel tähtis, nagu kohe selgub. Kirjutades nimelt võrrandis (57) iga  $|\mathfrak{P}_i|$  asemele  $m_i g$ , leiame:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{g \sum m_i x_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ \eta &= \dots \dots \dots = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ \zeta &= \dots \dots \dots = \frac{\sum m_i z}{\sum m_i} \end{aligned} \quad (59)$$

Nagu näeme, langeb võrdetegur  $g$  siin lõpuks välja, ning keskme  $C$  asukoht oleneb üksnes massidest  $m_1, m_2, \dots$  ja kohtadest  $A_1, A_2, \dots$ , kus need massid asetsevad. Punkti  $C$  kutsutakse sel puhul vastavalt jaotatud masside massikeskmeks. Mõnikord räägitakse selle asemel ka „raskuskeskmest“, kuid säärane nimetus tõmbab tähelepanu kõrvale tõsiasiast, et juba massidega on kese määratud; vastavate raskuste (maapinnal muutlikkude suuruste!) tundmine pole keskme arvutamiseks vajalik. Praktilistes arvutustes võib aga muidugi massides  $m_i$  asemel lähtuda ka raskustest  $\mathfrak{P}_i$ , määrates siis massikeskme  $C$  otseselt valemite (57) järgi.

On kõik kõne alla tulevad massid omavahel võrdsed, siis võime kõik  $m_i$  asendada ühe ja sama tähega  $m$ , mis siis omakorda valemist välja langeb. Juhul, kus esineb  $k$  punkti paigutatud  $k$  võrdset massi, saame nimelt valemite (59) põhjal:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{mx_1 + mx_2 + \dots + mx_k}{m + m + \dots + m} = \frac{m(x_1 + \dots + x_k)}{km} = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} = \frac{\sum x_i}{k} \\ \eta &= \dots \dots \dots = \frac{\sum y_i}{k} \\ \zeta &= \dots \dots \dots = \frac{\sum z_i}{k} \end{aligned} \quad (60)$$

Valemitega (60) määratud punkti kutsutakse lihtsalt punktide  $A_1, \dots, A_k$  keskmeks. Vastandina viimasele öeldakse ka sageli, et (59) määrab samade punktide „kaalutud“ keset.

Keskme ja kaalutud keskmee mõisted analoogiliste valemite põhjal defineerituina esinevad ka mehaanikast hoopis erinevatel aladel, näiteks statistikas.

§ 44. **Punktide keskmee graafilised määramisvõtted.** Kahe punkti kesee asetseb neid punkte ühendava sirglõigu keskkohas, nagu selgub valemest (60), kui seal võtta  $k = 2$ .

Teatavate punktide keskmee asukoha määramiseks võib kõigepealt määrata keskmee osade kaupa, varustades siis saadud osalised keskmee massidega proportsionaalselt iga kord kasutatud punktide arvuga, ning pärast määrata saadud masside jaotuse massikeskmee. Analoogiliselt võib talitada, kui kõik kõnealused punktid algusest peale on varustatud erinevate massidega ning otsitud on nende massikesee. Selgitame mõtet konkreetsel näitel, võttes 4 punkti  $A_1, A_2, A_3, A_4$  vastavalt massidega  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Võtame  $A_1$  ja  $A_2$  üheks osaks,  $A_3$  ja  $A_4$  teiseks osaks; kasutame esimese ja teise osa tähistamiseks vastavalt üks ja kaks kriipsu. Leiame:

$$\xi' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{massiga } m_1 + m_2)$$

$$\xi'' = \frac{m_3x_3 + m_4x_4}{m_3 + m_4} \quad (\text{massiga } m_3 + m_4).$$

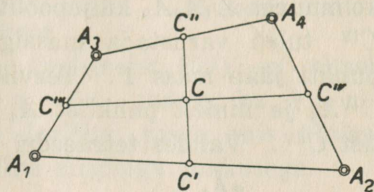
Saadud kahe osalise massikeskmee uue massikeskmee jaoks leiame:

$$\xi = \frac{(m_1 + m_2)\xi' + (m_3 + m_4)\xi''}{(m_1 + m_2) + (m_3 + m_4)} = \frac{(m_1x_1 + m_2x_2) + (m_3x_3 + m_4x_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

mis ilmsesti ühtib väärtusega, mille oleksime saanud otseselt rakendades terviku kohta (59); massikeskmee teiste koordinaatidega  $\eta$  ja  $\zeta$  on lugu täpselt analoogiline. Olgu jäetud lugeja hooleks kontrollida osadeks jaotamise võtte lubatavust üldjuhul, kus  $k$  punkti on mingisugusel meelevaldsel viisil jaotatud alaosadesse.

Paljudel juhtudel saab kirjeldatud osalise määramise põhimõttel massikeset hõlpsasti leida graafilise konstruktsiooni najal. Olgu näiteks antud jällegi 4 punkti  $A_1, A_2, A_3, A_4$  võrdsete

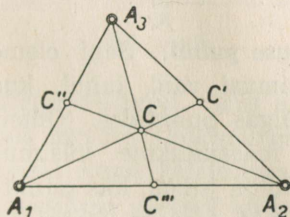
massidega ning otsitud nende punktide kese. Punktidest  $A_1$  ja  $A_2$  koosneva osa kese  $C'$  asetseb lõigu  $A_1A_2$  keskkohas (53. joonis). Samuti asetseb  $A_3, A_4$  kese lõigu  $A_3A_4$  keskkohas  $C''$ . Saadud punkte  $C'$  ja  $C''$  tuleb varustada kumbagi massiga 2, s. t. jällegi võrdsete massidega. Nende masside massikese asetseb seetõttu lõigu  $C'C''$  keskkohas  $C$ , mis ongi nelja punkti  $A_1, A_2, A_3, A_4$  kese. Osadesse jaotamise viis on seejuures üsna meelevaldne: niisama hästi oleksime võinud osa  $A_1, A_3$  jaoks määrata osakeskme  $C'''$  ning osa  $A_2, A_4$  jaoks osakeskme  $C^{IV}$ , — terviku kese  $C$  peaks ikkagi tulema endisele kohale, kuid seejuures lõigu  $C'''C^{IV}$



53. joonis.

keskkohas, s. t.  $C$  asub sirgete  $C'C''$  ja  $C'''C^{IV}$  lõikepunktis. Need sirged peavad selle tagajärjel ilmtingimata lõikuma igal juhul, s. t. ka siis, kui nelinurk  $A_1A_2A_3A_4$  pole tasane. Sel teel oleme tuletanud, lähtudes staatika kaalutlustest, puhtgeomeetrilise lause nelinurga omaduste kohta.

Vaatleme teise näitena juhtu, kus antud on 3 võrdse massiga punkti  $A_1, A_2, A_3$  (54. joonis).  $C'''$  tähendab siin osa  $A_1, A_2$



54. joonis.

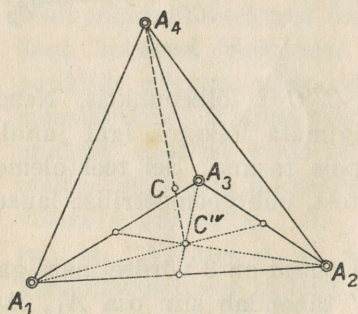
keset (lõigu  $A_1A_2$  keskkoha). Seda punkti  $C'''$  tuleb eeskirja kohaselt varustada massiga 2. Punktis  $A_3$ , mis on loomulikult iseenda kese, jääb mass 1. Punktidesse  $C'''$  ja  $A_3$  asetatud masside massikese asetseb tingimata sirgel  $C'''A_3$ , millest järgneb, et kolme punkti  $A_1, A_2, A_3$  kese peab tingimata asetsema kolmnurga  $A_1A_2A_3$  küljepoolitajal.

Seega kõik kolm küljepoolitajat peavad kohtuma ühises punktis  $C$ , nimelt kolmnurga tippude keskes.

(49) põhjal leiame veel, et punkt  $C$  küljepoolitajal  $C'''A_3$  peab asetsema punktist  $A_3$  kaks korda kaugemal kui punktist  $C'''$ , sest mass, ja selle tagajärjel ka raskustung punktis  $A_3$  on vastavast massist (raskusest) punktis  $C'''$  kaks korda väiksem. Niisiis pikkus  $C'''C$  moodustab ühe kolmandiku küljepoolitaja kogupikkusest  $C'''A_3$ . See on ilmselt kehtiv mistahes küljepoolitaja kohta. Sel viisil staatika kaalutlused annavad puhtgeomeetrilise lause: „Kolmnurga küljepoolitajad kohtuvad ühises punktis, mis

eraldab iga küljepoolitaja küljepoolses osas täpselt ühe kolmandiku.“

Vaatleme nüüd veel kord 4 punkti  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , käsitledes neid seekord ruumiliselt tetraeedri nelja tipuna (see tetraeeder ei tarvitse olla korrapärane). Kolmest punktist  $A_1, A_2, A_3$  koosneva osa kese  $C^{IV}$  (55. joonis) peab langema, nagu praegu nägime, kolmnurga  $A_1A_2A_3$  küljepoolitajate lõikumise kohale. Seda punkti  $C^{IV}$  tuleb varustada massiga 3, kuna ülejäänud neljandasse punkti jääb mass 1. Terviku kese  $C$  asetseb igatahes sirgel  $C^{IV}A_4$  ja nimelt punktist  $A_4$  kolm korda kaugemal kui punktist  $C^{IV}$ . Valides tetraeedri tahu neljal võimalikul viisil, saame



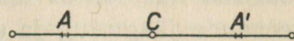
55. joonis.

4 erinevat sirget, mis kõik peavad kohtuma samas punktis  $C$ . Kõrvalsaadusena oleme seega leidnud geomeetrilise lause: „Sirglõigud, mis ühendavad tetraeedri tipu vastastahu küljepoolitajate lõikekohaga, kohtuvad ühises punktis; see punkt eraldab igal säärasel lõigul tahupoolses osas ühe veerandi.“

§ 45. **Massikeskmed pideva massijaotuse puhul.** Seni oleme käsitelnud massikeskme määramise küsimusi vaid juhul, kus massid on eraldatult jaotatud lõplikus hulgas punktides. Ometi aga esineb see „diskreetsete punktide“ massikeskme küsimus praksis esimesi harva, kuna sagedamad on juhud, kus punkte on lõpmata palju ja nad täidavad pidevalt teatava ruumiosa, näiteks kindla keha. Sääraste „pidevalt jaotatud punktide“ massikeskme määramine toimub samuti valemis (59) väljendatud põhimõtteil, ainsa vahetega, et nüüd tuleb hariliku summa asemel tegelda lõpmata kasvava liidetavate arvuga summa piirväärtusega, s. t. i n t e g r a a l i g a. Käesolevas raamatus integreerimist nõudvad probleemid üldiselt käsitlemist ei leia; küll aga vaatleme mõningaid siia kuuluvaid erijuhte, kus integreerimisest saab pääseda geomeetrilise sümmeetria kaalutluste najal.

Olgu näiteks keha sirglõigutaoline, näiteks ühtlasest materjalist ühtlaselt peen traaditükk. Massikeske  $C$  peab siis asetsema selle sirglõigu keskkohas (56. joonis). Tõepoolest, igale üsna

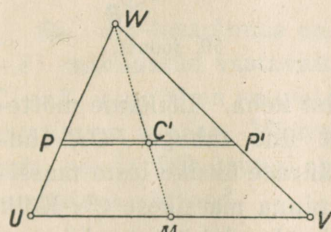
väikesele sirglõigu osakesele  $A$  ühel pool seda keskkoha  $C$  vastab alati samal kaugusel  $C$ -st, kuid teisel poolel asetsev niisama väike osake  $A'$ . Kohtades  $A$  ja  $A'$  paigutatud võrdsed massid omaette annavad osalise massikeskme just kohas  $C$ . Jaotades antud sirglõigu terves ulatuses osaparrideks  $A$ ,  $A'$  mainitud viisil, leiame seega kõik osakeskmed samas kohas  $C$ , — selle tõttu ka terve kogu massikese



56. joonis.

peab langema sinnasamasse kohta (valemeist (59) on nimelt näha, et erijuhul  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$ , saame ka  $\xi = x$ ). Massikeskmes  $C$  on mõeldav kogu sirglõigu mass, mis ühtlase materjali puhul muidugi on võrdeline sirglõigu pikkusega.

Olgu keha tasapinnaline ja seejuures kolmnurgakujuline, nagu näiteks plekist lõigatud kolmnurk. Lõikame mõttes selle



57. joonis.

kolmnurga  $UVW$  (57. joonis) paralleelselt kolmnurga ühe küljega  $UV$  üsna kitsasteks ribadeks  $PP'$ . Iga üksiku säärase riba massikese asetseb siis ülalleitu põhjal selle riba (sirglõigu) keskkohas  $C'$ . Kõik punktid  $C'$  koos moodustavad aga kolmnurga  $UVW$  küljepoolitaja  $WM$ . Nende kõikide osaliste keskmete  $C'$  uus kese asetseb seetõttu samal

küljepoolitajal. Kus nimelt, seda ütleb kaalutlus, et samal viisil see terviku (kolmnurga pinna) massikese peab asetsema ka igal teisel sama kolmnurga küljepoolitajal. Seega **kolmnurga pinna massikese asetseb küljepoolitajate ühises lõikepunktis, s. t. samas kohas, kus asetseb selle kolmnurga kolme tipu kese.**

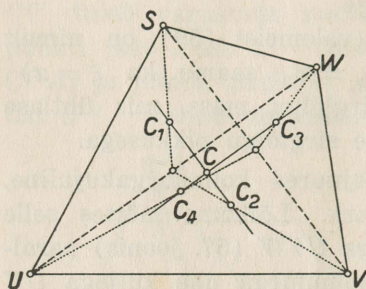
Ekslik oleks arvata, et iga hulknurga pinna massikese üldiselt langeb ühte tippude keskmega: ainult kolmnurga juures on see möödapääsematult nõnda.

Tasase nelinurga  $UVWS$  pinna massikeskme võib leida graafilise konstruktsiooni abil järgmiselt:

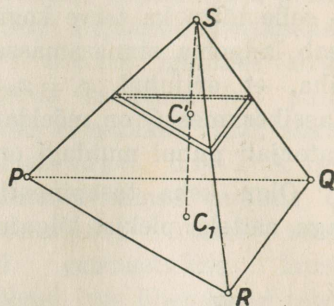
Jaotame nelinurga pindala diagonaali  $UW$  abil kaheks kolmnurgaks (58. joonis), ning määrame ülal selgitatud viisil saadud kolmnurkade  $SUW$  ja  $WVU$  pindade massikeskmed  $C_1$  ja  $C_2$  vastavalt. Nelinurga pinna massikese  $C$  peab siis langema sirgele  $C_1C_2$ . Toimetades sama nelinurga lahutamist kaheks kolm-

nurgaks ka veel teise diagonaali  $SV$  kaudu, leiame endisel viisil, et otsitav massikese  $C$  peab langema teisele sirgele  $C_3C_4$ . Järelikult on  $C$  sirgete  $C_1C_2$  ja  $C_3C_4$  lõikepunkt.

Samale ideele rajatud konstruktsioonid on rakendatavad ka suurema külgede arvuga tasapinnalise hulknurga juures, milles veenduda jäägu lugeja enda hooleks.



58. joonis.



59. joonis.

Vaatleme nüüd veel tetraeedrikujulist keha. Lõikame mõtteliselt selle tetraeedri  $PQRS$  paralleelselt ühe tahuga  $PQR$  õhukesteks lestadeks  $P'Q'R'$  (59. joonis). Säärase üksiku lesta massikeskmeks on vastava kolmnurga  $P'Q'R'$  pinna massikese  $C'$ . Kõik punktid  $C'$  langevad seejuures sirgele, mis ühendab tetraeedri tipu  $S$  vastastahu  $PQR$  massikeskmega  $C_1$ . Neid sirgeid leidub neli, vastavalt tetraeedri neljale tipule, ja otsitav tetraeedri ruumala massikese  $C$  asetseb nende nelja sirge joone ühises lõikepunktis, seega samas kohas, kus asetseb selle tetraeedri nelja tipu  $S, P, Q, R$  kese (vt. eelmine paragraaf!). Ainult tetraeedri puhul on see alati nõnda; suurema tippude arvu juures on tahk-keha massikese üldiselt erinev tippude keskmest.

Sümmeetrilise kujuga esemetel langeb massikese ilmseti igale sümmeetriateljele, millest kohe järgneb, et kõik sümmeetriateljed peavad lõikuma ühes kohas, nimelt keha massikeskmes. Nii näiteks asetseb massiivse ühtlase ellipsoidi massikese selle ellipsoidi tsentris; samas asetseb ka ellipsoidi pinna massikese. Risttahuka massikese langeb ühte tema nelja ruumilise diagonaali lõikepunktiga. Ringi pinna ja samuti ringi piirdejoone massikese asetseb vastava ringi tsentris.

On keha üksikud osad valmistatud erineva erikaaluga materjalist, siis võib määrata massikeskme asukoha esialgu igale üksi-

kule ühtlasele osale eraldi, ning siis juba need osalised keskmed (59) põhjal üheks kokku võtta. Õõnsuste arvestamisel võib seejuures tarvitada kunstlikku võtet, nimelt määrata kõigepealt massiivsena mõeldud keha massikese, siis eraldi õõnsuse massikese ja lõpuks jälle rakendada valemid (59), võttes seal seekord aga õõnsuse massi negatiivse märgiga, kuigi vastavalt keha materjali tihedusele: siis lõpptulemusena õõnsuse kohtades ilmsesti ongi arvestatud mass null, nagu vajalik.

Raskematel juhtudel keha massikeskme määramine eeldab, nagu juba mainitud, integreerimise oskust.

### Harjutusülesandeid.

66.  $x$ - $y$ -tasapinnas on punktides  $A:(+3, -5)$  ja  $B:(-2, -8)$  rakendatud vastavalt tungid  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{Q}$ , kusjuures  $|\mathfrak{P}| = 5$  ja  $|\mathfrak{Q}| = 3$ , ning  $\mathfrak{P}$  on suunatud  $x$ -telje positiivses,  $\mathfrak{Q}$  aga sama telje negatiivses suunas. Määrata koht sirgel  $AB$ , kus tuleks rakendada nende kahe tungi resultanttungi, ja selle resultanttungi kandesirge võrrand.

67.  $x$ - $y$ -tasapinnas asetsevad kolm samasuunaliselt paralleelset tungivektorit. Esimese vektori kandesirge võrrand on  $2x - 3y + 5 = 0$ , teine kandesirge läbib koordinaatide alguse, kolmas lõikab  $y$ -telge negatiivsel poolel kaugusel 2 ühikut koordinaatide algusest. Teine tung on esimesest 2 korda suurem ja kolmandast 3 korda väiksem. Määrata selle tungikompleksi tsentraaltelje võrrand.

68.  $x$ - $y$ -tasapinnas on antud tungivektorid  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ , kusjuures punktid  $A, B, C$  on määratud koordinaatidega  $A:(-1, -1)$ ,  $B:(+4, -2)$ ,  $C:(+5, +6)$ . Asendada see tungikompleks kahe paralleeltungiga, milledest üks langeks  $x$ -teljele ja omaks suurust 1. Määrata nende paralleeltungide projektsioonid ja nende kandesirgete võrrandid.

69. Kolm ühesuurust tungi on kõik suunatud nõnda, et kolme koordinaatteljega nad moodustavad võrdseid nürinurki. Nende tungide rakenduspunktid on vastavalt  $(-1, -1, +2)$ ,

$(-3, +2, -1)$ ,  $(+1, -1, +4)$ . Määrata kohad, kus kompleksi tsentraaltelg lõikab koordinaattasapindu.

70. Sama küsimus, nagu eelmises ülesandes, kuid eeldusel, et kolmanda tungi suund on vastupidine.

71. Esimene tungipaar asetseb tasapinnas  $x - y + 2z - 3 = 0$ , teine tungipaar tasapinnas  $2x + y - z + 1 = 0$ . Esimese tungipaari telg omab projektsiooni  $N_1 = +4$ , teise tungipaari telg projektsiooni  $N_2 = -3$ . Neid kahte tungipaari asendav resulteeruv tungipaar on võetud tasapinnas, mis läbib koordinaatide alguse. Kirjutada selle tasapinna võrrand.

72. Tung  $\mathfrak{P}:(-3, +4, -1)$  on rakendatud punktis  $A:(+3, +3, -1)$ ; tung  $\mathfrak{Q}:(-5, +3, -2)$  on rakendatud koordinaatide alguses; kolmas tung  $\mathfrak{S}$ , olles rakendatud punktis  $(-2, -1, +1)$ , on valitud nõnda, et kompleks  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{S}$  taandub tungipaariks. Kirjutada selle tungipaari tasapinna võrrand.

73.  $z$ -telge pidi mõjub positiivses suunas tung, mille suurus on 3 ühikut. Asendada see tung kahe paralleeltungiga, milledest üks oleks rakendatud punktis  $(+3, -4, 0)$ , omaks samuti  $z$ -telje positiivset suunda ja oleks 8 ühikut suur. Missuguses  $x$ - $y$ -tasapinna kohas peaks siis rakendama teise komponendi?

74. Kolmnurga külgede pikkused on vastavalt 7 cm, 24 cm ja 25 cm. Sellele kolmnurgale ümber joonestatud ringi keskkohas surub tung, mille suurus on 1 kg. Kuidas jaguneb see surve kolmnurga kolmele tipule?

75. Kolmnurga külgede pikkused on 15 cm, 20 cm ja 25 cm. Kolmnurga seesmises osas, kohal, mille kaugus lühemast küljest on 5 cm ja keskmisest küljest 8 cm, surub tung 1 kg. Kuidas jaguneb see surve kolmnurga kolmele tipule?

76. Kuidas jaguneks surve eelmise ülesande andmeil, kui suruva tungi 1 kg rakenduskoha kaugused ülalmainitud kahest küljest on endised, kuid see rakenduskohast ise on valitud nõnda, et lühema külje vastastipus, ja ainult seal, surve osutub negatiivseks?

✓ 77. Kui kaugel ülesandes nr. 75 mainitud kolmnurga külgedest peaks asetsema suruva tungi rakenduskoht, et surve jaguneks kolmnurga tippudele võrdseks?

✓ 78.  $x$ - $y$ -tasapinnas asetseva nelja punkti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  koordinaadid on näidatud järgmises tabelis:

	$A$	$B$	$C$	$D$
$x$	0	+5	0	+7
$y$	0	0	+3	+4

Määrata nelinurga  $ABDC$  tippude keskme ja pinna massikeskme koordinaadid.

79. Koordinaatide algus koos punktidega, mis võetud kolmel koordinaatteljel positiivsetel pooltel ja kaugusel 1 ühik koordinaatide algusest, määrab teatava tetraeedri. Missugused massid tuleks paigutada selle tetraeedri tippudesse, et nende massikeske langeks etteantud kohta  $(x, y, z)$ ? Kas saab seejuures piirduda üksnes positiivsete massidega? Mis toimub, kui masse proportsionaalselt muuta?

Arvuline näide:  $x = -2$ ,  $y = +3$ ,  $z = -4$ ; massid määrata nõnda, et nende summa oleks ühik.

80. Kui kaugel Päikesese keskkohast asetseb Päikesest ja Maast koosneva süsteemi massikeske? Väljendada tulemus Päikesese läbimõõdu osades.

✓ 81. Ruudukujulisest plekist lõigatakse naaberkülgede keskohti ühendavat sirget pidi maha üks kolmnurk. Kui palju nihkub selle tagajärjel ülejäänud plekitüki massikeske, kui ruudu külje pikkus on  $a$ ?

✓ 82. Ristkülikutaolise plekitüki mõõtmed on  $25 \times 40$  cm. Sellesse tükki on stantsitud ümmargune auk, läbimõõduga 10 cm. Augu keskoht asetseb ristküliku pikemast küljest kaugusel 10 cm ja lühemast küljest kaugusel 15 cm. Määrata selle plekitüki massikeskme asukoht.

✓ 83. Ülevalt lahtine kast  $\frac{3}{4}$  tolli paksuste seintega on väliselt

20 tolli pikk, 15 tolli lai ja 18 tolli kõrge. Mitme cm kõrgusel asetseb tühja kasti massikese?

✓ 84. Korrapärasest koonusest põhja läbimõõduga  $d$  ja kõrgusega  $H$  on ülemine osa paralleelselt põhjaga maha lõigatud, nii et üle on jäänud ainult tüvi, mille kõrguseks on  $h$ . Kus asetseb selle tüve ruumala massikese? (Näpunäide: Koonuse ruumala massikese asetseb tipust 3 korda kaugemal kui põhjast.)

✓ 85. Kuubikujuline anum seesmise servapikkusega  $a$  on pooleni täidetud veega. Anum kallutatakse nüüd üht serva pidi nõnda, et vesi parajasti ulatub ääreni. Kuidas muutub selle kallutamise tagajärjel veekogu massikeskme kõrgus?

## V. Süsteemide tasakaal.

§ 46. **Süsteemi sisetungid.** Olgu antud hulk „materiaalseid“ punkte, mis mõne püstitatud küsimuse seisukohalt moodustavad teatava terviku, näiteks kindla keha, või mõne masina liikuvad osad, või päikesesüsteemi planeedid, või vedeliku mõnes anumad või midagi muud selletaolist. Säärast punktide kogu kutsutakse siis mehaanikas „punktide süsteemiks“ või ka lihtsalt „süsteemiks“. Päike koos planeetidega moodustab näiteks „päikesesüsteemi“. Iga ehitis selles mõttes moodustab süsteemi, mille osadeks (elementideks) on näiteks alused, toed, kandjad, seinad jne.

Süsteemi punktidele mõjuvaid tunge võib liigitada nende päritolu järgi kahte liiki. Kogemused näitavad nimelt, et iga kord kui esineb mõnel kehal  $A$  rakendatud tung, seda tungi võib lugeda tingitaks teatava teise keha  $B$  olemasolust. Keha  $B$  nagu „kutsub esile“ keha  $A$  juures rakendatud vastava tungi. Olgu nüüd mõne punktisüsteemi juurde kuuluvas punktis  $A_1$  konstateeritud teatav tung  $\mathfrak{F}$ . Vastavalt sellele, kas see tung  $\mathfrak{F}$  on „esile kutsutud“  $s a m a s \ddot{u} s t e e m i$  kuuluvast mõnest osast  $A_2$ , või aga on tingitud sellesse süsteemi mittekuuluvast kehast  $B$ , kutsutakse tungi  $\mathfrak{F}$  siis esimesel juhul „seesmiseks“ ehk  $s i s e t u n g i k s$ , teisel juhul aga „väliseks“ ehk  $v \ddot{a} l i s t u n g i k s$ .

Sise- ja välistungide liigitelul on mõte vaid siis, kui süsteem on sisuliselt täpselt piiritletud. Süsteemi lahutamisel osadesse mõni tung, mis enne kuulus seesmiste hulka, võib pärast lahutamist osutada väliseks (ümbertöördult mitte!). Osade kokkuvõtmisel uueks süsteemiks mõni tung, mis enne oli väline, võib pärast osutada seesmiseks (mitte ümbertöördult!). Süsteemis, mis haarab kõiki maailmas üldse esinevaid kehi, on  $k \ddot{o} i k$  tungid loomulikult seesmised.

§ 47. **Reaktsiooni seadus.** Mehaanikas toetutakse järgmisele, pikaajalistest kogemustest tuletatud seadusele:

**Kui punktis  $A$  on rakendatud mõni tung, mille olemasolu on tingitud punkti  $B$  olemasolust, siis punktis  $B$  on tingimata ka rakendatud niisama suur, kuid vastassuunaline tung, mis tingitud  $A$  olemasolust.**

Selle seaduse teises sõnastuses on püstitanud juba **Newton** „mehaanika kolmanda põhiseadusena“ omas teoses „*Philosophiæ naturalis principia mathematica*“ (1686). Newtoni kolmandat põhiseadust kutsutakse ka „mõju ja vastumõju“ ehk „reaktsiooni“ seaduseks. Möödamannes olgu siin mainitud, et Newtoni „esimene“ põhiseadus on tuntud **inerts**i seaduse nime all; „teine“ põhiseadus väidab sisuliselt, et tung on vektor, mille suund langeb ühte tema poolt esilekutsutud kiirendusvektori suunaga ja mille suurus on võrdeline selle kiirendusvektori suunaga; nendele seadustele on rajatud dünaamika.

Mehaanika rajamise algpäevil arvati, et  $B$  olemasolust kohas  $A$  esilekutsutud tung peab olema sihitud ühendussirget  $AB$  pidi. Praegu tunneme füüsikalisi nähtusi, kus see nii ei ole; magnetipooluse mõju elektrivoolu kandvale juhtmele ja überpöörduvalt on näiteks sihitud risti selle ühendussirgega.

Ülalsõnastatud kujul on reaktsiooni seadus seni igal juhul eranditult kinnitust leidnud ning arvatakse, et ka edaspidiste vaatluste tulemused siin vististi muutusi ei too. Reaktsiooni seaduse alusel punktis  $B$  esinevat tungi, mis võrdne, kuid vastassuunaline punktis  $A$  esineva tungiga, kutsutakse viimasele tungile vastavaks „reaktsioontungiks“ ehk ka lihtsalt **reaktsiooniks**. Kumba neist kahest tungist lugeda just reaktsioontungiks, oleneb käsiteldava küsimuse iseärasustest.

Sageli punktid  $A$  ja  $B$  langevad ruumiliselt ühte, kuuludes seejuures aga ikkagi erinevatele kehadele. Asetseb näiteks raske kera horisontaalsel siledal laual, siis teoreetiliselt need kaks keha, kui nad on staatika mõttes kindlad, puutuvad kokku ühises punktis. Kera raskus surub lauale just selles puutepunktis; laud, survele mitte järele andes, paneb vastu just samas geomeetrilises kohas sellega, et ta avaldab kerale seal võrdset ja vastassuunalist reaktsioontungi („arendab“ reaktsiooni). Surve mõjub lauale, reaktsioon aga kerale; punkt  $A$  kuulub seega käesoleval juhul lauale, punkt  $B$  kerale, kuigi geomeetriselt mõlemad

punktid asetsevad samas kohas. Kera püsib paigal seetõttu, et temale mõjuv raskustung on tasakaalustatud laua poolt arendatud reaktsiooniga. Laud saab püsida paigal seetõttu, et temale mõjuv kera surve leiab mingil täiendaval viisil lauale mõjuvate tungide näol tasakaalustamist, näiteks selle tagajärjel, et laud toetub jalgadega põrandale, mis omakorda avaldab reaktsiooni lauale, jne.

Lugeja tehku endale hoolsasti selgeks siin valitsev olukord, silmas pidades alati, et surve ja reaktsioon on rakendatud erinevatel kehadel, kuigi võib-olla (nagu praeguses näites) geomeetrilises mõttes ühel ja samal kohal. Võetagu veel arvesse, et füüsiliselt kahe erineva keha punktid ei saa kunagi absoluutselt ühtida, — ikka jääb mõni, kas või üsna väike vahe.

Reaktsiooni seadus annab tähtsa järelduse punktisüsteemis esineva sisetungide kompleksi kohta. Mõjugu süsteemile punktis  $A_1$  mõni sisetung, s. o. tung, mis tingitud samasse süsteemi kuuluva teise materiaalse punkti  $A_2$  olemasolust. Siis esineb kindlasti veel üks sisetung, mis esimesega suuruse poolest võrdne, kuid vastassuunaline, — nimelt punktis  $A_2$  rakendatud punkti  $A_1$  poolt esilekutsutud reaktsioontung. See näitab, et süsteemi juures esinev sisetungide kompleks koosneb paarikaupa võrdsetest, kuid vastassuunalistest tungidest. **Selle kompleksi üldine resultant peab sellepärast olema null.**

Kui oletada veel, nagu see klassikalises mehaanikas tavaliselt kombeks, et tung ja sellest tingitud reaktsioontung langevad ühisele, rakenduspunkte ühendavale sirgele, siis see tung ja reaktsioontung koos ei saa moodustada tungipaari, vaid nad annavad koos mistahes punktis momendi null. Sellest järgneb siis omakorda, et sisetungidest koosneva kompleksi **resulteeruv moment mistahes punktis osutub nulliks**. Koos eelmise tulemusega see tähendab aga, et **sisetungide kompleks on samaväärne nulliga**. Rõhutagem aga veel kord, et see järeldus on õige ainult siis, kui tung ja temale vastav reaktsioon ei saa kunagi moodustada tungipaari.

§ 48. **Tasakaalu kuus tarvilikku tingimust.** Punktisüsteem öeldakse staatilises tasakaalus olevat, kui selle süsteemi iga üksik materiaalne punkt on tasakaalus, s. t. kui igas säärases punktis eraldi seal rakendatud kõikide tungide resultanttung kaob.

Sellest definitsioonist saab kohe tuletada punktisüsteemi kohta koos *t a r v i l i k k u* tasakaalu tingimust, kusjuures kombekohaselt piirdume kitsendava oletusega, et tung koos reaktsiooniga kunagi ei moodusta tungipaari.

Kui punktisüsteemi igas üksikus punktis seal rakendatud kõik tungid (s. t. nii sise- kui välistungid) koos hävivad, siis ilmestti tungide kompleks, mis koosneb eranditult kõikidest, selle süsteemi punktides üldse rakendatud tungidest, peab andma üldise resultandina nulli, ja samuti osutub nulliks selle kompleksi resulteeruv moment mistahes kohas. Tehtud oletusel on aga seejuures osakompleks, mis koosneb ainuüksi kõikidest süsteemi sisetungidest, juba omaette samaväärne nulliga. Järelikult peab ülejäänud osakompleks, s. t. kompleks, mille moodustavad süsteemile mõjuvad kõik välistungid, tasakaalu puhul osutama samaväärseks nulliga.

Kasutades välistungide sümboliseerimiseks indeksit „ex“ (*extérieur* = välimine), leiame seega, et süsteemi tasakaaluks on ilmtingimata tarvilik:

$$\begin{aligned} \Sigma X_k^{\text{ex}} = 0, & \quad \Sigma Y_k^{\text{ex}} = 0, & \quad \Sigma Z_k^{\text{ex}} = 0 \\ \Sigma L_k^{\text{ex}} = 0, & \quad \Sigma M_k^{\text{ex}} = 0, & \quad \Sigma N_k^{\text{ex}} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Need ongi koos tasakaaluks tarvilikku tingimust. Neis tingimustes sisetungid üldse ei esine, mis eriti tähtis neil kordadel, kus sisetungide loomusest, nende keerulisuse tõttu, midagi kindlat pole teada.

Sageli kutsutakse välistunge lihtsalt süsteemi juures „rakendatud“ tungideks. Nummerdades neid „rakendatud“ tunge mingisuguses meelevaldses järjekorras ning jättes indeksi „ex“ ära, kirjutatakse ülalantud koos tarvilikku tingimust harilikult kujul

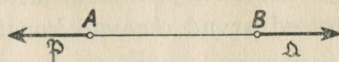
$$\begin{aligned} \Sigma X_k = 0, & \quad \Sigma Y_k = 0, & \quad \Sigma Z_k = 0 \\ \Sigma L_k = 0, & \quad \Sigma M_k = 0, & \quad \Sigma N_k = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

pidades endastmõistetavaks, et siin summad haaravad ainult neid rakendatud tunge, s. t. välistunge.

Et tarvilikud tingimused (61) või (62) üldjuhul pole veel tasakaalu saavutamiseks küllaldased, seda selgitab lihtne näide: olgu võetud kahest punktist *A*, *B* koosnev süsteem (60. joonis), kus

need punktid on omavahel seotud kummipaelaga; rakendame neis punktides kaks võrdset, kuid vastupidi suunatud välistungi punktide ühendussirge sihis, — need välistungid rahuldavad siis kindlasti tingimusi (62), — ometi ei tarvitse süsteem olla tasakaalus, sest kummipael üldiselt venib.

Ühel tähtsal erijuhul on aga kuus tingimust (62) siiski ka küllaldased, nimelt siis, kui kõnealune punktisüsteem moodustab kindla keha. Sel korral on nimelt teatavasti lubatav keha juures rakendatud tungikompleksi asendada dünaamiga. See dünaam kaob



60. joonis.

aga kindlasti, kui rahuldatud on tingimused (62), s. t. kui rakendatud tungide kompleks on samaväärne nulliga. Järelikult säärasel korral on tegemist kindla kehaga, mille juures välistunge üldse rakendatud ei ole, ning jäävad üle vaid sisetungid. Et viimaste kompleks alati on samaväärne nulliga, siis võib kindla keha puhul neid sisetunge elementaartehete abil hävitada. Seega antud juhul kõik tungid üldse hävivad vastastikku, mis tähendabki tasakaalu. Seetõttu kindel keha on tingimata tasakaalus, niipea kui välistungide kompleks on samaväärne nulliga, tähendab, kui see kompleks rahuldab tingimusi (62). Nii näiteks 60. joonise puhul oleks kindlasti tegemist tasakaaluga, kui ühendusena  $A$  ja  $B$  vahel võtta kummipaela asemel kindel varras. Märgitud tõsiasi sõnastame lausena:

**Kindla keha tasakaaluks on tingimused (62) tarvilikud ja küllaldased.**

Märkus I: Oluline erinevus kindla keha ja juhusliku punktisüsteemi vahel peitub selles, et kindla keha juhul tohib tungi rakenduspunkti kandesirget mööda vabalt nihutada, kuna aga mittekindla punktisüsteemi puhul säärane toiming üldiselt pole lubatav. Kindla keha puhul tung on libisev vektor, üldise punktisüsteemi puhul tuleb aga tungi käsitleda seotud vektorina. Mõjub tung kindla keha ühele punktile, siis ta ühtlasi mõjub ka kogu kehale; mõjub aga tung näiteks vedeliku mõnele osakesele, siis selle vedeliku teised osakesed ei tarvitse säärase tungi mõju veel otseselt tunda.

Märkus II: Kõnelesime siin punktisüsteemi „staatilisest“ tasakaalust kui niisugusest, kus süsteemi iga punkt omaette on tasakaalus. Mõeldav on veel teissugune süsteemi tasakaalu kont-

septsioon, nimelt säärane, kus süsteemi üksikud punktid tungide mõjul liiguvad, kuid nõnda, et mõne aja möödumisel endine olukord ikka jälle kordub. Säärasel korral võiks kõnelda „dünaamilisest“ tasakaalust. Takistuseta võnkuv pendel või jällegi välismõjudest vaba süsteem, mis koosneb päikesest ja ühest planeedist, annaksid säärase, dünaamilises tasakaalus oleva süsteemi näiteid. („Dünaamilisest“ tasakaalust kõneldakse ka veel mõningatel teistel juhtudel, näiteks, kui protsessi vältel teatavad keskmised arvud omavad konstantset suurust.)

**§ 49. Ühes punktis kinnistatud kindla keha tasakaal.** Kindla keha tasakaalu küsimustest omavad praktilist tähtsust säärased, kus keha liikumisvabadus on tõkestatud mingisuguste lisaasjaolude tõttu. Vaatleme mõningaid neist.

Olgu näiteks liikumisvabaduse tõkkeks asjaolu, et mingi seadme kaudu kindla keha üks punkt  $O$  peab tingimata alati püsima paigal. Olgu säärasele „ühes punktis kinnistatud“ kehale rakendatud mingisugune välistungide kompleks  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$ , mille üldise resultandi projektsioonideks on  $X, Y, Z$  ja kinnistatud punktis  $O$  võetud resulteeruva momendi projektsioonideks on  $L, M, N$ . Lihtsustamise mõttes võib seejuures seda punkti  $O$  alati valida koordinaatide alguspunktiks. Need „otseselt“ rakendatud tungid  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  siis kindlasti ei ole äga mitte ainsad sellele kehale mõjuvad välistungid, sest arvesse tuleb veel kinnistusseadmest tingitud tung  $\mathfrak{R} : (X_{\mathfrak{R}}, Y_{\mathfrak{R}}, Z_{\mathfrak{R}})$ , mis mõjudes sellele kehale kinnistatud punktis  $O$ , igal juhul takistab  $O$  paigalt nihkumist. Otseselt kehale rakendatud tungid  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  püüavad  $O$  nihutada, mille tõttu keha punktis  $O$  surub takistavale seadmele;  $\mathfrak{R}$  on seadme reaktsioon sellele survele. See reaktsioon  $\mathfrak{R}$  on esialgu tundmatu; ta oleneb sellest, millised on otseselt rakendatud kompleksiga määratud projektsioonid  $X, Y, Z, L, M, N$ . Täiendades seda kompleksi veel tundmatu tungiga  $\mathfrak{R}$ , saame alles kehale mõjuva välistungide kogukompleksi. Võib ka öelda, et  $\mathfrak{R}$  lisamisega otseselt rakendatud välistungidele, saame võimaluse keha käsitella üsna vabana, s. t. mitte enam seadmega seotuna, sest  $\mathfrak{R}$  asendab parajasti seadme mõju.

Kindla keha tasakaalu küllaldaseks ja tarvilikuks tingimuseks on, et välistungide kogukompleksi osutuks samaväärseks nulliga. (62) annab seega antud juhul:

$$\begin{aligned} X + X_{\mathfrak{R}} = 0, \quad Y + Y_{\mathfrak{R}} = 0, \quad Z + Z_{\mathfrak{R}} = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

sest reaktsioon  $\mathfrak{R}$ , olles ise rakendatud punktis  $O$ , annab seal momendi null. Neist tingimustest (63) kolm viimast ei sisalda enam tundmata reaktsioontungi  $\mathfrak{R}$  projektsioone, — need kolm viimast tingimust üksinda ongi juba, nagu kohe selgub, küllaldased keha tasakaalu saavutamiseks käesoleval juhul; kolm esimest tingimust saab rahuldada alati, valides  $\mathfrak{R}$  parajal viisil. Et kolm tingimust  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$  on tõesti tasakaaluks juba küllaldased, see selgub järgmistel kaalutlustel:

1) Nende täitmise puhul otseselt rakendatud tungikompleksi  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  invariantne skalaarne korrutis  $LX + MY + NZ$  ilmsesti kaob, seega kompleks on kas samaväärne nulliga — ja siis on tasakaal endastmõistetav —, või taandub üheks tungiks  $\mathfrak{F}$ , mis sihitud tsentraaltelge pidi.

2) See tsentraaltelg läbib punkti  $O$ , sest seal resulteeruv moment on minimaalne, nimelt null.

3) Otseselt rakendatud tungikompleks  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  on järelikult samaväärne ainsa tungiga  $\mathfrak{F}$ , mis rakendatud punktis  $O$ . Säärast tungi  $\mathfrak{F}$  peab aga just tasakaalustama kinnistuseadme poolt arendatud vastav reaktsioon  $\mathfrak{R}$ , ning tasakaal on seega kindlasti saavutatud.

Nagu praeguantud tõestusest selgub, on tingimustega  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$  juba kaudselt fikseeritud reaktsioon  $\mathfrak{R}$ : see  $\mathfrak{R}$  peab nimelt olema võrdne, kuid vastassuunaline otseselt rakendatud tungikompleksi  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  üldise resultandiga. Seda ütlevadki kolm esimest võrrandit (63), määrates üheselt kolm tundmatut  $X_{\mathfrak{R}}, Y_{\mathfrak{R}}, Z_{\mathfrak{R}}$ .

Leitud tulemuse saab sõnastada järgmiselt:

**Ühes punktis kinnistatud kindel keha on otseselt rakendatud tungide mõjul tasakaalus siis ja ainult siis, kui nende tungide resulteeruv moment kinnistatud punktis kaob.**

Intuitiivselt on see tulemus peaaegu endastmõistetav: on keha üks punkt kinnistatud, siis otseselt rakendatud tungide mõju võib väljenduda ainult keha pööramise selle punkti ümber; moment näitab aga tungide pööramisvõimet, — kui pööramist ka ei teki, siis moment peab tingimata kaduma.

Rõhutame veel kord, et ülalsõnastatud tingimus jätab reaktsiooni üldse mainimata. See ongi loomulik, sest reaktsioon on, nagu tähendasime, esialgu tundmata, — tingimusest, mis kõneleks ka reaktsioonist, oleks selle tagajärjel praktiliselt vähem kasu. Tagantjärele, kui juba selgunud on tasakaalu olemasolu, saab antud juhul reaktsiooni täpselt määrata.

Näite ühes punktis kinnistatud kehast annaks mehhanism, millel üks sfäärrikujuline osa on paigutatud pisut suurema raadiusega samuti sfäärrikujulisse paigalseisvasse pesasse. Liikuva sfääri tsepter jääb säärase seadme puhul alati paigale, kuna teised keha osad saavad liikuda.

**§ 50. Telje külge kinnistatud keha.** On kindlal kehal kinnistatud mitte üks, vaid ka k s punkti  $O$  ja  $O'$ , siis peavad paigale jääma ka kõik punktid sel kehal, mis asetsevad sirgel  $OO'$ . Kehal jääb seega vaid vabadus pöörelda selle sirge  $OO'$  kui telje ümber, telge pidi mitte libisedes; öeldakse siis, et keha on kinnistatud telje külge (nagu näiteks hooratas).

Säärase keha juures otseselt rakendatud välistungide kompleksi  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  üldise resultandi projektsioone tähistame jällegi sümbolitega  $X, Y, Z$ . Punktis  $O$  võetud resulteeruva momendi projektsioonid olgu vastavalt  $L, M, N$ . Valime  $O$  koordinaatide alguseks ning viime veel  $z$ -telje läbi punkti  $O'$  nõnda, et selle  $O'$  koordinaatideks oleks, ütleme,  $x = 0, y = 0, z = \zeta$ . Keha tasakaalu tingimuste otsimisel tuleb peale nende otseselt rakendatud välistungide arvestada veel punktides  $O$  ja  $O'$  tõkkeseadme poolt arendatud reaktsioone  $\mathfrak{R} : (X_{\mathfrak{R}}, Y_{\mathfrak{R}}, Z_{\mathfrak{R}})$  ja  $\mathfrak{R}' : (X'_{\mathfrak{R}}, Y'_{\mathfrak{R}}, Z'_{\mathfrak{R}})$ . Reaktsiooni  $\mathfrak{R}$  moment punktis  $O$  kaob, sest  $\mathfrak{R}$  on rakendatud just selles punktis  $O$ . Reaktsioontungi  $\mathfrak{R}'$  moment punktis  $O$  omab projektsioone

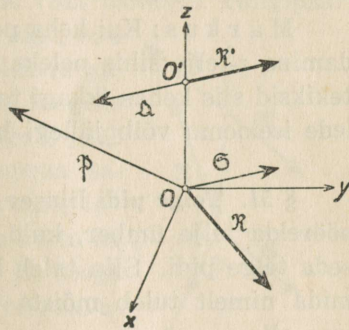
$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{R}'} &= 0 \cdot Z'_{\mathfrak{R}} - \zeta Y'_{\mathfrak{R}} = -\zeta Y'_{\mathfrak{R}} \\ M_{\mathfrak{R}'} &= \zeta X'_{\mathfrak{R}} - 0 \cdot Z'_{\mathfrak{R}} = \zeta X'_{\mathfrak{R}} \\ N_{\mathfrak{R}'} &= 0 \cdot Y'_{\mathfrak{R}} - 0 \cdot X'_{\mathfrak{R}} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Keha on tasakaalus siis ja ainult siis, kui tema juures rakendatud kogukompleks  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$  on samaväärne nulliga, s. t. kui

$$\begin{aligned} X + X_{\mathfrak{R}} + X'_{\mathfrak{R}} &= 0, \quad Y + Y_{\mathfrak{R}} + Y'_{\mathfrak{R}} = 0, \quad Z + Z_{\mathfrak{R}} + Z'_{\mathfrak{R}} = 0, \\ L - \zeta Y_{\mathfrak{R}'} &= 0, \quad M + \zeta X_{\mathfrak{R}'} = 0, \quad N = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Ainult viimane neist kuuest tingimusest ei sisalda reaktsioone  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{R}'$ . Ta on muidugi tarvilik tasakaalu puhul, — veendume aga, et ta üksinda käesoleval juhul on juba küllaldane (viis esimest saab alati rahuldada paraja reaktsioonide valikuga!).

Kui nimelt tungikompleksi  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  puhul  $N = 0$ , siis seda kompleksi saab asendada dünaamiga, mille tõuketungi võime rakendada punktis  $O$ , ja mille tungipaari telg peab olema risti koordinaatteljega  $z$ , sest selle tungipaari momendi projektsioon  $N$  koordinaatteljele  $z$  on null. Mainitud tungipaari võib seega paigutada  $z$ -telge sisaldavasse tasapinda ning tema komponente rakendada just punktides  $O$  ja  $O'$ . 61. joonisel on need dünaami tungipaari komponendid tähistatud vastavalt  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{Q}$ , ning dünaami tõuketung märgitud tähega  $\mathfrak{P}$ . Et  $O$  ja  $O'$  on kinnistatud, siis nad arendavad parajasti sääraseid reaktsioone  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{R}'$ , et  $\mathfrak{R}$  tasakaalustaks  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{S}$  punktis  $O$ , ning  $\mathfrak{R}'$  tasakaalustaks  $\mathfrak{Q}$  punktis  $O'$ . Tasa-kaal on seega kindlustatud, nagu väitsimegi.



61. joonis.

Resulteeruva momendi projektsiooni  $N$  pöörlemisteljele  $z$  võib järjekindlalt nimetada resulteeruvaks momendiks selle telje suhtes. Tulemuse võib sõnastada järgmiselt:

**Telje külge kinnistatud kindel keha on tasakaalus siis ja ainult siis, kui otseselt rakendatud tungikompleksi resulteeruv moment kinnistatud telje suhtes kaob.**

Ka see tulemus on intuiitiivselt üsna endastmõistetav.

Sõnastuses ei esine jällegi reaktsioonid kui tundmatud. Seekord aga ei õnnestu isegi tagantjärele reaktsioonide täielik arvutamine, sest neid reaktsioone määravad 6 projektsiooni, kuna võrrandeid nende määramiseks jääb ainult 5. Neljas, viies, esimene ja teine võrrand (65) määravad küll üheselt  $X_{\mathfrak{R}'}, Y_{\mathfrak{R}'}, X_{\mathfrak{R}}, Y_{\mathfrak{R}}$ , — kolmas võrrand määrab aga ainult kahe tundmatu summa  $Z_{\mathfrak{R}} + Z_{\mathfrak{R}'}$ , jättes lahtiseks, kui suur üksik liidetav selles summas peab olema. Reaktsioonid jäävad seega antud probleemis osaliselt „staatiliselt määramatuks“, nimelt osutuvad staatiliselt määratuks ainult nende reaktsioonide projektsioonid kinnistatud

telje ristsihis, lahtiseks aga jäävad projektsioonid kinnistatud teljele endale. Et see ideaalselt kindla keha puhul loomulikult ka peab nii olema, selgub 61. joonisest: säärase kindla keha puhul võib ju alati rakendada lisaks seal esinevatele tungidele veel kaks võrdset, kuid vastassuunalist tungi vastavalt punktides  $O$  ja  $O'$   $z$ -telje sihis, ilma et see avaldaks mõju kehale. See mõjustaks aga teiselt poolt ikkagi kohe samades punktides rakendatud tasakaalustavaid reaktsioone  $\mathfrak{H}$  ja  $\mathfrak{H}'$ , sest neid tuleb võtta nõnda, et  $O$  ja  $O'$  kumbki omaette oleks tasakaalus. Nende meelevaldsete tungide lisandamisel punktides  $O$  ja  $O'$  muutuksid järelikult reaktsioonide projektsioonid  $z$ -teljele; reaktsioonide projektsioonid risti  $z$ -teljega võetud sihtides ei muutu.

**M ä r k u s:** Kui keha pole ideaalselt kindel, siis tungide lisandamine  $z$ -telje sihis poleks enam tähtsusetu, sest selle tagajärjel tekiksid siis kehas ikkagi teatavad väikesed deformatsioonid, millega iseloomu võib jällegi haarata teatavate võrrandite abil.

**§ 51. Telge pidi libisev keha.** Vaatleme juhtu, kus keha saab pöörelda telje ümber, kuid samal ajal ka hõõrdumiseta libiseda seda telge pidi. Siin tuleb kõigepealt matemaatiliselt täpsustada, mida nimelt tuleb mõista hõõrdumiseta libisemise võimaluse all.

Libisemine sirget pidi hõõrdumiseta tähendab säärast liikumisvõimalust, kus kõnesolev sirge ei avalda mingit takistust, s. t. mingit reaktsiooni siis, kui sel sirgel asetsevad keha punktid nihkuvad just selle sirge sihis. Käeoleval juhul see tähendab seda, et keha telg takistab liikumist ainult sel korral, kui selle telje kohal asetsevad keha punktid püüavad lahkuda teljest, mitte aga siis, kui liikumine toimub telge pidi. Staatika keeles tõlgendatakse seda nõnda, et telje kohtadel tekkiv reaktsioon ei oma projektsiooni telje sihis, s. t. telje poolt arendatud reaktsioon saab olla suunatud ainult risti selle teljega. Järelikult:

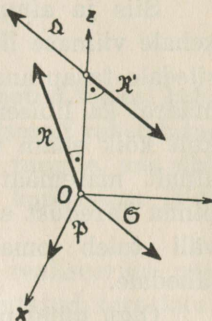
**Libisemine toimub hõõrdumiseta, kui telg suudab arendada reaktsiooni ainult telje normaali suunas („normaalreaktsiooni“).**

Valime nüüd säärasel teljel meelevaldselt punktid  $O$  ja  $O'$ . Telg ise olgu jälle võetud  $z$ -teljeks ning  $O$  koordinaatide alguseks. Tarvitame eelmise paragraafi sümboleid. Reaktsioonid  $\mathfrak{H}$  ja  $\mathfrak{H}'$  vastavalt punktides  $O$  ja  $O'$  peavad käesoleval juhul mõlemad

olema  $z$ -teljega risti, seega  $Z_{\mathfrak{R}} = 0$  ja  $Z_{\mathfrak{R}'} = 0$ . Tasakaalu tingimused esinevad jällegi kujul (65), ainsa vahega, et nüüd kolmandas tingimuses puuduvad reaktsioonid  $Z_{\mathfrak{R}}$  ja  $Z_{\mathfrak{R}'}$ . Selle tagajärjel esineb tasakaalu tingimustes nüüd  $k$  a  $k$  s reaktsioone mitteisaldavat võrrandit:

$$Z = 0, \quad N = 0. \quad (66)$$

Need kaks tingimust (66) ongi tasakaalu kindlustamiseks antud juhul küllaldased. Tõepoolest, korrates eeldusel (66) mõttekäike, mis viisid 61. joonisele, näeme, et nüüd dünaami tõuketung  $\mathfrak{P}$  peab tingimata langema  $x$ - $y$ -tasapinnale, sest  $Z = 0$ ; võime seega anda  $x$ -teljele just selle tungi  $\mathfrak{P}$  suuna (62. joonis). Tungipaari  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{D}$  võime seejuures oma tasapinnas alati veel nii pöörata, et tema komponendid oleksid samuti risti  $z$ -teljega ja et seetõttu ka  $\mathfrak{S}$  langeks  $x$ - $y$ -tasapinnale. Siis ka punktis  $O$  tunge  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathfrak{S}$  tasakaalustav reaktsioon  $\mathfrak{R}$  peab langema samasse  $x$ - $y$ -tasapinda, tähendab, olema risti teljega  $z$ , ning samuti on selle teljega risti ka tasakaalustav reaktsioon punktis  $O'$ . Et seega reaktsiooni ristseis keha telje suhtes on saavutatud, siis tasakaal ongi käes.



62. joonis.

Tulemuse sõnastus kõlaks järgmiselt:

**Kindel keha, saades pöörelda kinnistatud telje ümber ja ka hõõrdumiseta libiseda sama telge pidi, on tasakaalus, kui otseselt kehale rakendatud välistungide kompleks annab üldise resultandi risti kinnistatud teljega, kusjuures veel resulteeruv moment selle telje suhtes kaob.**

Et käesoleval juhul reaktsioonid tohivad olla ainult risti teljega, siis reaktsioonide suurused ja suunad on määratud üheselt; tegelikult jääbki nüüd nelja tundmatu  $X$ ,  $Y$ ,  $X'$ ,  $Y'$  määramiseks just 4 võrrandit:

$$\begin{aligned} X + X_{\mathfrak{R}} + X_{\mathfrak{R}'} &= 0, & Y + Y_{\mathfrak{R}} + Y_{\mathfrak{R}'} &= 0, \\ L - \zeta Y_{\mathfrak{R}'} &= 0, & M + \zeta X_{\mathfrak{R}'} &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Arvesse tuleb nüüd nimelt ikka ainult säärane tungikompleksi  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  asendav dünaam, kus tungipaari komponendid

on kinnistatud teljega risti. Nõuetega (67) on määratud reaktsioon telje  $i$  g a s punktis.

Käsiteldud kinnistusseadme näite pakub kruvil liikuv mutter.

§ 52. Ühes punktis tasapinnale toetuv keha. Vaatleme kindlat keha, mis toetub siledale tasapinnale ainult ühes punktis (nagu näiteks õhuga tugeva surveni täidetud pall siledale põrandale). Siin vajab jälle kõigepealt selgitamist, mida mõistetakse staatikas „sileda“ tasapinna all.

Analoogiliselt varemõelduga püstitame siin definitsiooni:

**Tasapind on „sile“, kui ta suudab arendada reaktsiooni ainult enda normaali suunas („normaalreaktsiooni“).**

Siis ja ainult siis nimelt see tasapind ei avalda takistust kehale viimase libisemise puhul mööda seda tasapinda. Vastand siledale tasapinnale on „kare“ tasapind, — see takistab teataval määral ka libisemist. Tehnikas kasutatud tasapinnad on tegelikult kõik enam või vähem karedad, — „sile“ tasapind kujutab ainult matemaatilist käsitlemist lihtsustavat fiktsiooni. Tasapinna karedust saab tehniliselt vähendada poleerimise teel. Liuväli tuleb omaduste poolest siledale tasapinnale võrdlemisi lähedale.

Olgu nüüd punkt  $O$ , milles keha siledale tasapinnale toetub, võetud koordinaatide alguseks ja see tasapind ise võetud  $x$ - $y$ -tasapinnaks. Tasapinna reaktsioon kehale punktis  $O$  olgu  $\mathfrak{R}$ . Et tasapind on mõeldud siledana, siis valitud teljestiku juures kaovad reaktsiooni projektsioonid  $x$ - ja  $y$ -telgedele, ning jääb ainult projektsioon  $Z_{\mathfrak{R}}$  teljele  $z$ . Keha juures otseselt rakendatud välistungide kompleks omagu üldist resultanti projektsioonidega  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ja punktis  $O$  resulteeruvat momenti projektsioonidega  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Tasakaalu korral peab kogu välistungide kompleks (s. t. otseselt rakendatud välistungid pluss tasapinna reaktsioon  $\mathfrak{R}$  kehale) osutama samaväärseks nulliga. Järelikult on siis:

$$X = 0, Y = 0, Z + Z_{\mathfrak{R}} = 0, L = 0, M = 0, N = 0, \quad (68)$$

sest reaktsioon  $\mathfrak{R}$ , olles rakendatud punktis  $O$ , annab seal momendi null. Viis neist tingimusest (68) ei sisalda reaktsiooni; need 5 tingimust ongi küllaldased, kui keha seos tasapinnaga on säärane, et keha punkt  $O$  ei saa üldse tasapinnast lahti („kahe-

poolne“ seos). Tõepoolest, neil viiel tingimusel otseselt rakendatud tungikompleksi invariantne skalaarne korrutis  $LX + MY + NZ$  kaob, mille tõttu see kompleks taandub üheleainsale tungile (kui ta pole üldse samaväärne nulliga). Kompleksi tsentraal telg läbib punkti  $O$ , sest seal on resulteeruv moment minimaalne, nimelt null. Selle tagajärjel võime kujutella, et kompleksi asendav ainus tung on rakendatud just punktis  $O$ . Et  $X = 0$  ja  $Y = 0$ , siis see ainus tung pealegi peab olema risti  $x$ - $y$ -tasapinnaga, seega saab teda tasakaalustada samas kohas tasapinna normaalreaktsiooniga kehale. Tasakaal on järelkult kindlustatud.

Reaktsiooni suurus on määratud ülejäänud ainsa võrrandiga süsteemist (68):

$$Z + Z_{\text{R}} = 0. \quad (69)$$

Tulemuse võib sõnastada järgmiselt:

**Sileda tasapinnaga ühesainsas punktis seotud kindel keha on tasakaalus siis ja ainult siis, kui kehale otseselt rakendatud välitungide kompleks taandub üheleainsale tungile, mis sihitud risti tasapinnaga, ja nimelt nõnda, et kandesirge läbib toetuspunkti.**

Nõutud kahepoolset seost saab tehniliselt realiseerida näiteks kahe paralleelse sileda plaadi vahele paigutatud teraskuuli kujul.

„Toetumisega“ tasapinnale sõna kitsamas mõttes on aga tegemist õieti vaid siis, kui keha seos tasapinnaga on „ühepoolne“, s. t. kui keha ühes suunas on võimeline tasapinnast lahkuma, teises suunas aga mitte (tasapinnast ei saa „läbi tungida“). Sel juhul tuleb tasakaalu kindlustamiseks lisada veel üks nõue, nimelt, et ainus tung, millele otseselt rakendatud tungide kompleks taandub, suruks keha vastu tasapinda. Analüütiliselt tähendab ühepoolne seos antud juhul seda, et reaktsiooni projektsioonil peab olema kindel etteantud märk, näiteks positiivne, kui tasapind ainult kannab tema peale ülevalt pandud keha, mitte takistades sama keha tõusmist ülespoole. Surumine vastu tasapinda sel korral leiaks aset ainult siis, kui  $Z \leq 0$ .

**§ 53. Kahes punktis tasapinnale toetuv keha.** Vaatleme keha, mis kahes punktis (nagu näiteks jalgratas) toetub siledale tasapinnale. Olgu need punktid  $O$  ja  $O'$ . Valime  $O$  koordinaatide algu-

seks,  $OO'$   $x$ -teljeks ning toetustasapinna  $x$ - $y$ -tasapinnaks. Punkti  $O'$   $x$ -koordinaadi väärtuseks olgu seejuures  $\xi$ , — teised koordinaadid on nullid. Et tasapind on eeldatud siledana, siis reaktsioonid  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{N}$  punktides  $O$  ja  $O'$  peavad olema normaalsed, seega mõlema reaktsiooni projektsioonid  $x$ - ja  $y$ -teljele peavad kaduma, ning jäävad ainult projektsioonid  $Z_{\mathfrak{R}}$  ja  $Z'_{\mathfrak{R}}$ . Reaktsiooni  $\mathfrak{R}$  moment koordinaatide alguses  $O$  kaob; reaktsiooni  $\mathfrak{N}$  moment sealsamas omab projektsioone

$$L_{\mathfrak{R}'} = 0, \quad M_{\mathfrak{R}'} = -\xi Z'_{\mathfrak{R}}, \quad N_{\mathfrak{R}'} = 0. \quad (70)$$

Siit järgnevad keha tasakaalu tingimused:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + Z_{\mathfrak{R}} + Z'_{\mathfrak{R}} = 0, \quad L = 0, \quad M - \xi Z'_{\mathfrak{R}} = 0, \\ N = 0. \quad (71)$$

Neli neist tingimusest, nimelt reaktsioone mittesisaldavad

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad L = 0, \quad N = 0 \quad (72)$$

on kahepoolse seose puhul jällegi tasakaaluks küllaldased. Selles veenduda olgu jäetud lugeja enda hooleks. Peatume aga siin pisut üksikasjalisemalt juhul, kus seos on ainult ühepoolne.

Et tingimuste (72) täitmise puhul  $LX + MY + NZ = 0$ , siis tungid sel korral peavad taanduma kas üheksainsaks tungiks, või üheksainsaks tungipaariks. Viimasel juhul, s. t. tungipaari puhul, ühepoolse seose korral tasakaalu olla ei saa, sest tasakaalustavad reaktsioonid peaksid siis ju samuti moodustama tungipaari ega saaks seega olla „ühepoolsed“. Niisiis tuleb ühepoolse seose korral lisaks tingimustele (72) veel nõue, et otsest rakendatud tungide kompleks oleks samaväärne ühe tungiga  $\mathfrak{P}$ . Et  $L = 0$  ja  $N = 0$ , siis see ainus tung peab asetsema  $x$ - ja  $z$ -teljega ühises tasapinnas; et ühtlasi  $X = 0$ , siis see tung peab olema risti  $x$ -teljega, lõigates seda telge mingis punktis  $P$ . Järelikult on  $\mathfrak{P}$  asendatav kahe paralleelse komponendiga, mis rakendatud punktides  $O$  ja  $O'$  samal teljel. Neid komponente saabki tasakaalustada samadel kohtadel tekkivate reaktsioonidega  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{N}$ , kuid, arvestades nende reaktsioonide ühepoolst, ainult siis, kui komponendid on samasuunalised ja nimelt vastassuunalised tasapinna võimaliku reaktsiooni suunaga. Komponentide samasuunalisus leiab aga § 35 ja 36 tulemuste järgi

aset siis ja ainult siis, kui punkt  $P$  langeb sirglõigu  $OO'$  piiridesse. Seega võib resultaadi sõnastada järgmiselt:

**Siledale tasapinnale kahes punktis ühepoolset toetuv kindel keha on tasakaalus siis ja ainult siis, kui otseselt rakendatud välistungid taanduvad üheleainsale tungile, mis surub keha vastu tasapinda, olles sihitud tasapinnaga risti nõnda, et kandesirge lõikab toetuspunktidega määratud sirglõiku.**

§ 54. **Mitmes punktis tasapinnale toetuv keha.** Vaatleme kindlat keha, mis toetub siledale  $x$ - $y$ -tasapinnale  $k$  punktis  $A_1 : (x_1, y_1, 0), \dots, A_k : (x_k, y_k, 0)$ ; piirdume juhuga, kus seos on ühepoolne, ütleme, kus kõik reaktsioonid  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$  saavad suunatud olla ainult  $z$ -telje positiivses suunas.

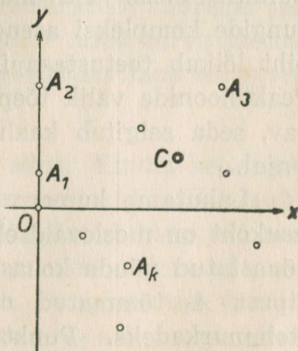
Vahelduseks kasutame siin tasakaalu tingimuste leidmiseks teist teed, lähtudes nimelt reaktsioonide analüüsist.

Paralleelsed samasuunalised reaktsioonid  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$  lubavad endid liita üheksainsaks tungiks  $\mathfrak{R}$ , mis jällegi omab positiivset  $z$ -telje suunda. Nimetame  $\mathfrak{R}$  resulteeruvaks reaktsiooniks. Selle resulteeruva reaktsiooni rakenduspunkti  $C$  võime paigutada jälle  $x$ - $y$ -tasapinda. Olgu  $C$  koordinaatideks  $x = \xi, y = \eta, z = 0$ . Keha on tasakaalus ainult siis, kui tema juures otseselt rakendatud välistungid tasakaalustavad resulteeruva reaktsiooni  $\mathfrak{R}$ , s. t. kui nad taanduvad üheks tungiks, mis risti  $x$ - $y$ -tasapinnaga, olles suunatud  $z$ -teljele vastupidiselt ja rakendatud samas punktis  $C$ , kus resulteeruv reaktsioonigi.

Et reaktsioonid  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$  on tundmatud, siis punkti  $C$  asukoht on veel esialgu ebamäärane. Igal juhul on aga  $C$  seotud samasuunaliste paralleelvektorite  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$  k e s e (§ 42), seega määratud valemitega:

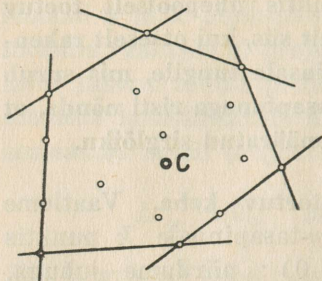
$$\xi = \frac{\sum x_i \cdot |\mathfrak{R}_i|}{\sum |\mathfrak{R}_i|}, \quad \eta = \frac{\sum y_i \cdot |\mathfrak{R}_i|}{\sum |\mathfrak{R}_i|}. \quad (73)$$

Valime  $y$ -telje nõnda, et ta läbiks vähemalt kaks toetuspunkti  $A_i$ , jättes seejuures kõik teised toetuspunktid sinapoole, kus koordinaat  $x$  pole negatiivne (63. joonis). Esimesest valemist (73) järgneb, et ka  $C$  asetseb siis samal poolel, sest ka  $\xi$  ei saa siis olla negatiivne.



63. joonis.

Valitud  $y$ -telg moodustab toetuspunktide kogu  $A_1, \dots, A_k$  juures ühe „äärsirge“. Sääraseid „äärsirgeid“ võib aga alati leida mitu, nagu selgitatud 64. joonisel.



64. joonis.

Kõik üldse võimalikud äärsirged koos moodustavad kumera hulknurga sääraselt, et kõik toetuspunktid  $A_i$  asetsevad kas selle hulknurga sees, või aga piirdejoonel, ning igas selle hulknurga tipus asetseb kindlasti üks punkt  $A_i$ . Sel teel defineeritud kumerat hulknurka kutsume toetuspunktide kogu „kumeraks kontuuriks“.

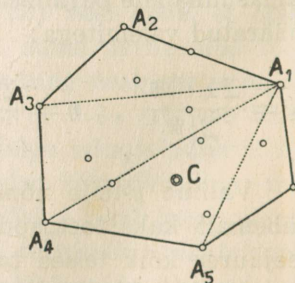
Et 63. joonisel selgunud tulemus ilmsesti ei olene sellest, missuguse äärsirge nimelt oleme valinud  $y$ -teljeks, siis järeldame, et  $C$  ei saa mingil tingimusel asetseda väljaspool ülalmainitud kumerat kontuuri, ükskõik millised ka oleksid samasuunalised reaktsioonid  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$ .

Seega oleme leidnud keha tasakaaluks antud juhul tarviliku tingimuse:

**Otseselt rakendatud välistungid peavad taanduma üheksainsaks, toetustasapinnaga risti suunatud tungiks, mis suruks keha vastu seda tasapinda, kusjuures selle tungi kandesirge ei tohi lõigata toetustasapinda väljaspool toetuspunktidega määratud kumerat kontuuri.**

See tingimus on ühtlasi küllaldane, sest sel puhul osutub võimalikuks ühepoolseid reaktsioone  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$  valida nõnda, et resulteeruva reaktsiooni rakenduspunktiks oleks just sama koht, kus välistungide kompleksi asendava ainsa tungi siht lõikab toetustasapinda. Et säärane reaktsioonide valik tõepoolest on teostatav, seda selgitab kaalutus 65. joonise najal.

Lahutame kumera kontuuri, kus  $C$  asukoht on meelevaldselt (muidugi ülalsonastatud nõude kohaselt!) ette antud, tipust  $A_1$  tõmmatud diagonaalide abil kolmnurkadeks. Punkt  $C$  langeb siis tingimata ühe niisuguse kolmnurga piirkonda. Lahutame kohal  $C$  rakendatud tungi kol-



65. joonis.

meks paralleelkomponendiks rakenduspunktidega selle kolmnurga tippudes. § 41 tulemuste kohaselt on need komponendid siis kõik selle tungiga samasuunalised. Tasakaalustame nüüd need kolm komponenti vastavate ühepoolsete reaktsioonidega ja loeme reaktsioone kõigis teistes toetuspunktides  $A_i$  nullideks. Saadud reaktsioonide kompleks kindlustab siis tasakaalu.

Praegukirjeldatud reaktsioonide valik pole ainuvõimalik: üldjuhul  $k > 3$  saab reaktsioone sama tulemusega etteantud  $C$  puhul valida lõpmata mitmekesisel viisil. Ainult juhul  $k = 3$ , kui seejuures toetuspunktid moodustavad tõelise kolmnurga, reaktsioonid on määratud üheselt 65. joonise juures selgitatud võtte alusel. Reaktsioonide valiku mitmesus selgub sama joonise najal suurema  $k$  puhul kas või juba sellest, et kumera kontuuri kolmnurkadeks lahutamine võib toimuda mitmekesisel viisil, olenevuses sellest, missugune toetuspunkt on just ristitud punktiks  $A_1$ . Juhul  $k > 3$  on järelikult reaktsioonide probleem „staatiliselt määramatu“.

Reaktsioonide arvutamine staatiliselt määratud juhul  $k = 3$  toimub kõige hõlpsamini kolme võrrandi

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_1| + |\mathfrak{R}_2| + |\mathfrak{R}_3| &= |\mathfrak{P}| \\ x_1 \cdot |\mathfrak{R}_1| + x_2 \cdot |\mathfrak{R}_2| + x_3 \cdot |\mathfrak{R}_3| &= \xi \cdot |\mathfrak{P}| \\ y_1 \cdot |\mathfrak{R}_1| + y_2 \cdot |\mathfrak{R}_2| + y_3 \cdot |\mathfrak{R}_3| &= \eta \cdot |\mathfrak{P}| \end{aligned}$$

abil, kus  $|\mathfrak{R}_1|$ ,  $|\mathfrak{R}_2|$ ,  $|\mathfrak{R}_3|$  on ainsad kolm tundmatut. Need võrrandid on sisuliselt samad, mis võrrandid (53).

Konkreetsena näite siinkäsiteldud probleemile pakub jalgadega siledale põrandale toetuv koormatud laud; on jalgade arv 3, siis koormuse jaotus jalgadele on staatiliselt määratud, suurema jalgade arvu puhul enam mitte. Viimasel juhul tuleb surve jaotust otsustada lisakaalutluste najal, arvestades näiteks laua elastsust.

**§ 55. Tungi lahutamine kuues antud sihis.** Kindel keha võib teise külge kinnistatud olla mitme kindla varda abil. Kui nüüd esimesele kehale mõjub mingi otseselt rakendatud tung või tungide kompleks, siis see kandub üle neile varrastele; viimased arendavad siis muidugi vastavaid reaktsioone. Tungi jaotus varrastele on üldjuhul üheselt määratud, kui varraste arv on parajasti kuus. Seda selgitavad alljärgnevad kaalutlused:

Olgu esimese keha juures rakendatud tung  $\mathfrak{P} : (X, Y, Z)$ , mille moment meelevaldselt valitud koordinaatide alguses omab projektsioone  $L, M, N$ . Probleemiseade nõuab selle tungi  $\mathfrak{P}$  asendamist kuu tungiga  $\mathfrak{P}_1 : (X_1, Y_1, Z_1), \dots, \mathfrak{P}_6 : (X_6, Y_6, Z_6)$ , millede kandesirged  $s_1, \dots, s_6$  on meelevaldselt ette antud, lühidalt — tungi lahutamist „komponentideks“ kuue kandesirge sihis.

Otsides probleemi analüütilist lahendust, peame kõigepealt need kuus kandesirget mingisuguste arvude abil matemaatiliselt iseloomustama. Sobivaks võtteks osutub siin iga üksiku sirge  $s_i$  määramine § 19 selgitatud viisil kuue „koordinaadi“  $l_i, m_i, n_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$  kaudu, milledest kolm esimest kujutavad sirge suunakoosinusi, kolm viimast aga sellele sirgele paigutatud ühikvektori momente koordinaattelgedede suhtes. Sirge suunakoosinused pole seejuures mitte midagi muud, kui sama ühikvektori projektsioonid koordinaattelgedele. Sirge kuus koordinaati  $l_i, \dots, \nu_i$  peavad muidugi rahuldama nõudeid (22) ja (11).

Sirgele  $s_i$  langeva „komponendi“  $\mathfrak{P}_i$  projektsioone ja momente telgede suhtes määravad siis seosed

$$\begin{aligned} X_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot l_i, & Y_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot m_i, & Z_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot n_i, \\ L_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot \lambda_i, & M_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot \mu_i, & N_i &= |\mathfrak{P}_i| \cdot \nu_i, \end{aligned} \quad (75)$$

sest kõik need projektsioonid peavad olema võrdelised  $\mathfrak{P}_i$  suurusega. Kuus kandesirget on antud, kui teada on nende 36 koordinaati. Kuus tundmata „komponenti“  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_6$  moodustavad koos kompleksi, mis peab olema samaväärne ainsa tungiga  $\mathfrak{P}$ . Kompleksi üldine resultant ja resulteeruv moment peab seetõttu ühtima vastavate tungi  $\mathfrak{P}$  elementidega, mis annab (75) abil kuus võrrandit

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_1| \cdot l_1 + |\mathfrak{P}_2| \cdot l_2 + |\mathfrak{P}_3| \cdot l_3 + |\mathfrak{P}_4| \cdot l_4 + |\mathfrak{P}_5| \cdot l_5 + |\mathfrak{P}_6| \cdot l_6 &= X \\ |\mathfrak{P}_1| \cdot m_1 + |\mathfrak{P}_2| \cdot m_2 + \dots &= Y \\ |\mathfrak{P}_1| \cdot n_1 + \dots &= Z \\ |\mathfrak{P}_1| \cdot \lambda_1 + |\mathfrak{P}_2| \cdot \lambda_2 + \dots &= L \quad (76) \\ |\mathfrak{P}_1| \cdot \mu_1 + \dots &= M \\ |\mathfrak{P}_1| \cdot \nu_1 + \dots &= N \end{aligned}$$

kuue tundmatu jaoks  $|\mathfrak{P}_1|, \dots, |\mathfrak{P}_6|$ . Need 6 tundmatut on lineaarse võrrandsüsteemiga (76) üldiselt üheselt määratud

ja probleem seega põhimõtteliselt lahendatud. Niihästi  $\mathfrak{P}$  kui ka  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_6$  on seejuures loomuse poolest käsitletud libisevate vektoritena.

Ainult erijuhul, kus süsteemi (76) determinant muutub nulliks,

$$\begin{vmatrix} l_1, l_2, \dots, l_6 \\ m_1, \dots, \dots \\ \dots, \dots, \dots \\ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_6 \end{vmatrix} = 0, \quad (77)$$

kujuneb olukord teissuguseks, sest siis võib kas üldse puududa lahendus, või aga lahendusi võib olla lõpmata palju. Sel korral sirged  $s_1, \dots, s_6$  pole mitte enam valitud üsna sõltumatult üks teisest, vaid kuuluvad, nagu Plücker'i järgi öeldakse, kõik koos ühte ja samasse lineaarsesse sirgete kompleksi, mis määratud just võrrandiga (77). Selle erijuhu lähemal uurimisel meie ei peatu.

Vastassuunas võetuna süsteemi (76) lahendid annavad kuue varda reaktsioone tungi  $\mathfrak{P}$  survele.

Kui üksik tung  $\mathfrak{P}$  kirjeldatud viisil on lahutatav „komponentideks“ kuue meelevaldse kandesirge sihis, siis ilmsesti sama on kehtiv ka mistahes tungide kompleksi kohta, sest iga üksiku tungi sellest kompleksist võiksime siis lahutada mainitud kandesirgete sihis ning pärast igal üksikul säärasel kandesirgel sinna langenud komponente üheks uueks „kompleksi komponendiks“ kokku võtta.

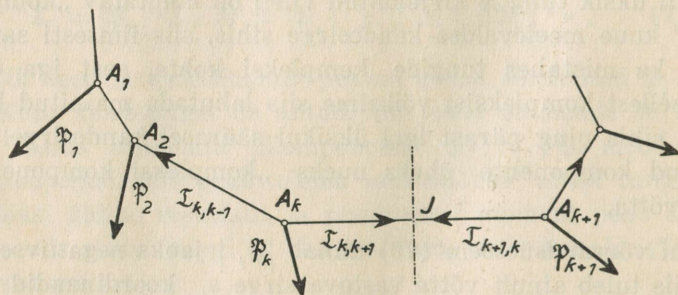
Kui võrrandsüsteem (76) annab  $|\mathfrak{P}_i|$  jaoks negatiivse väärtuse, siis tuleb ainult võtta vastava sirge  $s_i$  koordinaadid vastupidise märgiga, mille tagajärjel  $|\mathfrak{P}_i|$  märk muutub positiivseks ja suurus jääb endiseks. Et sirgel on 2 suunda, siis tema koordinaatide kõikide märkide korruga muutmine on lubatav.

**§ 56. Nöörhulknurga mõiste.** Tehnika küsimustes mitmesugusel kujul sageli esinevaks punktisüsteemiks on säärane, kus materiaalsed punktid  $A_1, \dots, A_n$  on järjekorras ühendatud ideaalsete, s. t. mittevenivate nööridega või ideaalsete, mittevenivate ega ka kokkusurutavate varrastega. Loomulikult säärane süsteem ei moodusta enam kindlat keha, sest punktide kaugused üksteisest saavad sel korral üldiselt veel muutuda. Süsteemi sidu-

vad pinguletõmmatud nöörid või vardad näitavad igas asendis koos üht murtud joont (lahtist või kinnist „hulknurka“), mille tõttu sääraseid punktisüsteeme mehaanikas kutsutakse vastavalt nöörihulknurkadeks või varrashulknurkadeks.

Süsteemi sisetungid kanduvad varras- või nöörihulknurgas edasi süsteemi varraste või vastavalt nööri kaudu. Sisuline vahe mõlema tüübi vahel peitub selles, et nöör suudab üle kanda ainult tõmme (ühepoolne seos!), varras aga kannab üle nii tõmbe kui ka survetungi (kahepoolne seos!).

Varras- või nöörihulknurgale mõjuvad välistungid on rakendatud materiaalses punktides  $A_1, \dots, A_n$ , s. t. varraste või nööri otspunktides. Need välistungid on loomu poolest nende punktidega seotud vektorid. Sääraste hulknurkade tasakaalu küsimuste selgitamine toimub otstarbekohaselt graafiliste võtete najal; vastavad meetodid on välja arenenud eriliseks distsipliiniks, mille nimetuseks on „grafostaatika“. Käesolevas kursuses piirdume ainult üsna üldjooneliselt probleemiseade selgitamisega, jättes kõrvale kõik üksikasjad ja eriküsimused ning praktilised lihtsustamisvõtted.



66. joonis.

Punktid  $A_1, \dots, A_n$  olgu nummerdatud ühendamise järjekorras, s. t. nõnda, et  $A_i$  ja  $A_{i+1}$  oleksid alati omavahel nööri või vardaga ühendatud (66. joonis). Hulknurk on kinnine, kui siis veel ka  $A_n$  on ühendatud punktiga  $A_1$ , vastasel korral on hulknurk lahtine.

Jaotame mõtteliselt nöörihulknurga kahte ossa,  $A_1, \dots, A_k$  ja  $A_{k+1}, \dots, A_n$ . Teise osa mõju esimesele kandub siis üle nööri  $A_k A_{k+1}$  kaudu, ning katkeks selle nööri katkestamisel

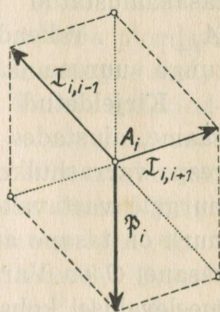
mistahes vahepeelses kohas  $J$ . Nööri seal läbi lõigates võiksime seda mõju säilitada, rakendades ühenduse katkestamise kohas  $J$  vastava tungi, mille tähistame sümboliga  $\mathfrak{T}_{k, k+1}$ ; see tung peab suunatud olema punktist  $A_k$  punkti  $A_{k+1}$  poole. Samuti mõjub teine osa esimesele sama nööritüki kaudu, ning jällegi on mõju ühenduse katkestamise korral asendatav kohas  $J$  rakendatud tungiga, mis nüüd aga suunatud vastupidiselt punktist  $A_{k+1}$  punkti  $A_k$  poole; seda tungi tähistame sümboliga  $\mathfrak{T}_{k+1, k}$ . Reaktsiooni seaduse alusel tungid  $\mathfrak{T}_{k, k+1}$  ja  $\mathfrak{T}_{k+1, k}$  on suuruse poolest võrdsed ning vastassuunalised. Nende tungide suurused ei muutu, kui nöör  $A_k A_{k+1}$  läbi lõigata mõnes teises kohas; nad iseloomustavad selles nööriosas valitseva „pinge“ suurst. Edaspidi nimetame neid tunge lihtsalt „pingeteks“.

Analoogiline olukord valitseb varrashulknurga varrastes, ainsa vahega, et siis ühe osa mõju teisele ei tarvitse piirduda tõmbega, vaid saab niisama hästi avalduda tõukamises (surumises).

Süsteemi igale üksikule punktile  $A_i$  mõjub teatav välistungide resultanttung  $\mathfrak{P}_i$  ja peale selle veel kaks pinget,  $\mathfrak{T}_{i, i-1}$  ja  $\mathfrak{T}_{i, i+1}$ , punktis  $A_i$  kinnitatud kahe nööri sihis. Erandi selles mõttes võivad moodustada lahise hulknurga otpunktid  $A_1$  ja  $A_n$ , kui kummalgi lõpeb ainult üks ühenduslül. Hulknurk on tasakaalus, kui iga üksik tema punkt  $A_i$  on tasakaalus, s. t. kui igas üksikus punktis  $A_i$  seal rakendatud kolm tungi  $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{T}_{i, i-1}, \mathfrak{T}_{i, i+1}$  on omaette tasakaalus:

$$\mathfrak{P}_i + \mathfrak{T}_{i, i-1} + \mathfrak{T}_{i, i+1} = 0 \quad (78)$$

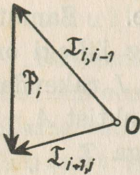
(67. joonis). See tingimus (78) on nöör- või varrashulknurga tasakaaluks tarvilik ja küllaldane.



67. joonis.

§ 57. Varignon'i hulknurk. Tingimus (78) nõuab, et  $\mathfrak{P}_i$  ja  $\mathfrak{T}_{i, i-1}$  resultantvektor oleks suuruse poolest võrdne, kuid vastassuunaline vektoriga  $\mathfrak{T}_{i, i+1}$ , seega võrdne ja samasuunaline vektoriga  $\mathfrak{T}_{i+1, i}$ . Järelikult vektor  $\mathfrak{T}_{i+1, i}$  osutub vektorite  $\mathfrak{P}_i$  ja  $\mathfrak{T}_{i, i-1}$  summaks, kui kõik kolm vektorit rakendada mingisuguses meelevaldses ühises punktis  $O$  (68. joonis). Sellega on  $\mathfrak{T}_+$  suurus ja suund graafiliselt määratud  $\mathfrak{P}_i$  ja

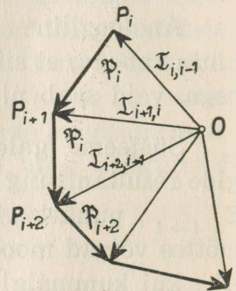
$\mathfrak{Z}_{i,i-1}$  suuruste ja suundade kaudu. 68. joonisel kujutatud kolmnurk määrab mõlema pinge  $\mathfrak{Z}_{i,i-1}$  ja  $\mathfrak{Z}_{i+1,i}$  suurusi, niipea kui on teada  $\mathfrak{P}_i$  suurus ja suund ning punktiga  $A$  ühendatud nõõride või varraste sihid, sest siis on selle kolmnurga kaudu vastavad külgede pikkused määratud.



68. joonis.

Kui  $\mathfrak{Z}_{i+1,i}$  on suuruse ja suuna poolest graafiliselt leitud, siis saame, liites sellega  $\mathfrak{P}_{i+1}$ , täpselt samasugusel graafilisel viisil määrata järgneva pinge  $\mathfrak{Z}_{i+2,i+1}$  jne. Kasutades konstruktsiooni juures juba varem leitud vektorit  $\mathfrak{Z}_{i+1,i}$ , võime lihtsalt joonestada vajaliku uue kolmnurga endise kõrvale jne. (69. joonis).

Tekib järjest üksteise külge paigutatud kolmnurkade jada ühise tipuga  $O$ . Need kolmnurgad koos moodustavad hulknurga  $OP_i P_{i+1} P_{i+2} \dots O$ , millel välja joonestatud kõik punktist  $O$  väljuvad diagonaalid; need diagonaalid määravad graafiliselt üksikutes nõõriosades või varrastes valitsevaid pingeid ja nende nõõriosade või varraste sihte. Küljed  $P_i P_{i+1}$ ,  $P_{i+1} P_{i+2}$ , ... kujutavad tasakaalustatud hulknurga tippudes  $A_i$ ,  $A_{i+1}$ , ... rakendatud välistungide resultanttunge suuruse ja suuna poolest.



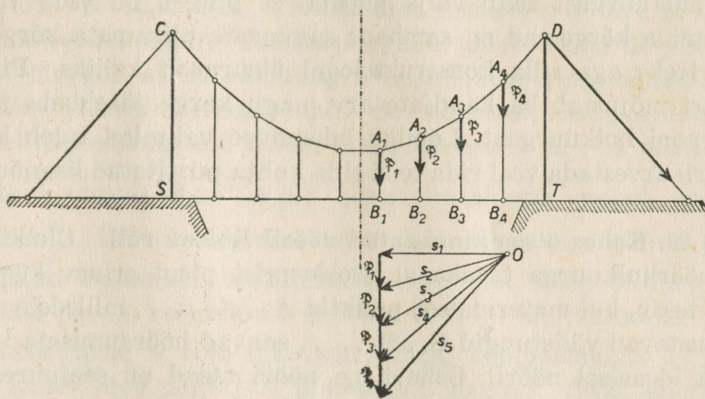
69. joonis.

Kirjeldatud viisil tekkivat hulknurka  $OP_1 P_2 \dots O$ , mille saame, alustades konstruktsiooni juba esimesest nõõrhulknurga resp. varrashulknurga tipust, kutsutakse nõõr- (varras-) hulknurgale vastavaks Varignon'i hulknurgaks. Varignoni hulknurk on tasane ainult siis, kui teda määrav nõõrhulknurk ise on tasane.  $O$  on Varignoni hulknurga „poolus“, — selle võib valida meelevaldsel kohal; pingeid kujutavad lõigud  $OP_1, OP_2, \dots$  on „pooluskiired“, ülejäänud lõigud  $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots$  on Varignoni hulknurga „küljed“.

Nõõrhulknurk saab olla tasakaalus ainult siis, kui Varignoni hulknurga joonestamine osutub võimalikuks, s. t. kui ühendused omavad just sääraseid sihte, et vastavad pooluskiired Varignoni hulknurgas parajasti saavad väljuda ühisest poolusest  $O$ , kui „küljed“  $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots$  suuruse ja suuna poolest vastavad nõõrhulknurga juures rakendatud välistungidele  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ . Varrashulknurga puhul on see tingimus ühtlasi küllaldane, nõõr-

hulknurga juures (ühepoolne seos!) aga veel mitte: viimasel juhul tuleb nimelt lisaks veel nõuda, et Varignoni hulknurgast järgnevad pingete suunad vastaksid tõepoolest tõmmetele, sest nõõrid ei saa tõuketunge edasi anda.

§ 58. **Rippsild.** Asja selgitamiseks käsitleme üsna lühidalt 70. joonisel kujutatud rippsilla skeemi.



70. joonis.

Sild  $ST$  ripub kandjatel  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , millede ülemised otsad  $A_1, A_2, \dots$  on omavahel ühendatud kõieosadega  $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ . Kõie lõpposad on seejuures muidugi kinnitatud kindlate sammaste  $CS$  ja  $DT$  abil.

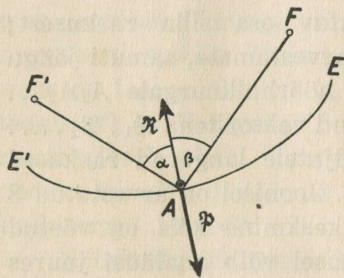
Igale kandjale  $A_i B_i$  langeb teatav osa silla raskusest; kandja enda raskus jäägu selle kõrval arvestamata, samuti jäägu arvestamata kõie enda kaal. Vastavad nõõrhulknurgale  $A_1A_2 \dots$  mõjuvad välistungid on joonisel märgitud vektoritena  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ . Kui  $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$ , siis võib kandjatele langevad raskused  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  lugeda omavahel võrdseteks. Joonisel on arvestatud 8 kandjat, kusjuures sümmeetria tõttu keskmine kõis on võetud horisontaalsena. Samuti sümmeetria alusel võib analüüsi juures piirduda silla ühe poolega.

Valime punkti  $A_2$  kõrguse punkti  $A_1$  suhtes meelevaldselt ja määrame selle järgi teiste kandjate pikkused tasakaalustatud silla puhul. Vastava Varignoni hulknurga „küljed“ peavad antud juhul moodustama koos sirge joone vertikaalses suunas. Pooluse  $O$  asukoht on määratud horisontaalse sihi  $s_1$  ja kõieosaga  $A_1A_2$

paralleelse sihi  $s_2$  abil. Järgnevate köieosade sihid on siis kõik ette määratud vastava Varignoni hulknurga kaudu. Nende järgi juba saab siis määrata kandjate ja sammaste  $SC$  ja  $DT$  pikkusi ning mõõta köieosades valitsevaid pingeid.

Vastavalt kõrgust  $A_2$  muutes võime proovide najal leida säärase sobiva, et sammaste pikkused omaksid nõutavat etteantud suurust. Konstruktori ülesandeks on valida mõõtmed nõnda, et projektitud sillas köie pinged ei kujuneks liiga suureks. Varignoni hulknurgast saab välja lugeda, et pinged on seda väiksemad, mida kõrgemad on sambad; sammaste piiramata kõrgendamine teeks aga silla konstruktsiooni ülearuselt kalliks. Pingete suurust mõjustab ka kandjate arv, nagu kerge järeldada jällegi Varignoni hulknurgast. Lõpliku lahenduse valimisel tuleb konstruktoril arvestada veel rida teisi silla kohta püstitatud lisanõudeid.

**§ 59. Kahes otsas kinnistatud nööril libisev rull.** Ülalkäsiteldud nöörhulknurga tasakaalu probleemist pisut erinev küsimuse seade tekib, kui materiaalsed punktid  $A_1, A_2, \dots$ , millele mõjuvad vastavad välistungid  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ , saavad hõõrdumiseta libiseda ideaalsel nööril. Selle ühe nööri otsad on seejuures siis mõeldud liikumatult kinnistatuina, või aga nöör ise on kujutatud kinnisena. Oluline vahe varema küsimusega võrreldes peitub selles, et seal ei olnud tegemist ühe nööriga, vaid mitme nööritükiga, millede otsad olid vastavalt kinnistatud punktides  $A_1, A_2$  jne. Konkreetse näite nööri pidi libisevatele punktidele annab köistransport, kus köiel veerevate rullide külge on kinnistatud transportivad vagonetid. Selle kujutelma alusel nimetame nööril libiseva punkti ka libisevaks „rulliks“.



71. joonis.

Vaatleme kõigepealt erijuhtumit, kus tegemist üheainsa libiseva rulliga  $A$ . Nööri otsad olgu seejuures liikumatult kinnistatud kahes kindlas punktis  $F$  ja  $F'$ . Rullile  $A$  mõjugu välistung  $\mathfrak{P}$  (71. joonis). Nöör  $F'AF'$  on mõeldud ideaalsena, s. t. ta ei tohi venida ega ka avaldada takistust kuju muutumisele. Et  $FA + F'A$  pingule tõmmatud nööri puhul alati on võrdne nööri konstantse kogupikkusega, siis nööri pidi libisedes  $A$  võib liikuda ainult mööda ellipsi kaart,

kus tulitäppideks on just kinnistatud punktid  $F$  ja  $F'$ , kui probleemi käsitleda tasapinnaliselt. Tasakaalu küsimuse analüüsimeks võime seetõttu mõttes nööri üldse kõrvaldada, asendades teda paindumatu ellipsikaarega  $EE'$ , nõudes, et  $A$  oleks sunnitud kogu aeg selle kaare peale jääma, omades aga võimalust seda kaart mööda hõõrdumisetä libiseda. Kaar avaldab siis  $A$  kaudu temale üleantud surve puhul reaktsiooni sellele punktile  $A$ ; hõõrdumise puudumist tõlgendame endisel viisil nõnda, et see reaktsioon  $\mathfrak{R}$  saab olla sihitud ainult kaare normaali sihis (normaalreaktsioon!). Tasakaalu puhul peab olema  $\mathfrak{B} + \mathfrak{R} = 0$ , millest järgneb, et ka välistung  $\mathfrak{B}$  peab siis mõjuma antud kohal just ellipsi kaare normaali sihis. See normaali siht poolitab aga, nagu ellipsi omadustest teada, fokaalkiirte  $FA$  ja  $F'A$  poolt moodustatud nurga  $\widehat{FAF'} = \varphi$ ; seega tasakaalu puhul joonisel  $\alpha = \beta = \frac{\varphi}{2}$ . Leitud tingimus on ühtlasi tungi õige suuna puhul küllaldane tasakaalu tekkimiseks, sest siis nöör (ellips) saab arendada paraja reaktsiooni  $\mathfrak{R}$  tungi  $\mathfrak{B}$  mõju hävitamiseks.

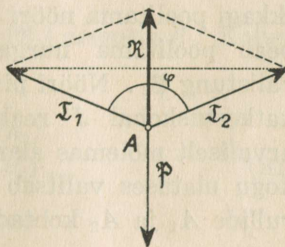
Reaktsiooni  $\mathfrak{R}$  võib lahutada kaheks komponendiks  $\mathfrak{Z}_1$  ja  $\mathfrak{Z}_2$  nööri kahes sihis punkti  $A$  juures (72. joonis). Seda lahutamist andev tungiparallelogramm osutub antud juhul rombiks, sest diagonaal  $\mathfrak{R}$  poolitab selle parallelogrammi nurga tipu  $A$  juures. Seega on aga  $|\mathfrak{Z}_1| = |\mathfrak{Z}_2|$ . Neid nööri sihis mõjuvaid tunge saab tegelikult realiseerida ainult nöör ise temas tekkiva pinge kaudu välistungi  $\mathfrak{B}$  mõjul. Arvestades  $\mathfrak{Z}_1$  ja  $\mathfrak{Z}_2$  võrdsust suuruse poolest, tarvitame selle nööri pinge tähistamiseks ühist tähte  $T$ , pidades seejuures muidugi ikkagi silmas, et nööri pinge igal kohal mõjub nööri enda sihis. Joonisest selgub, et nööri pinge  $T$  projektsioon  $\mathfrak{R}$  suunale on  $\frac{|\mathfrak{R}|}{2}$ , järelikult

$$T \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{|\mathfrak{R}|}{2}.$$

Et  $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{R}|$ , siis järeldame siit:

$$|\mathfrak{B}| = 2T \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (79)$$

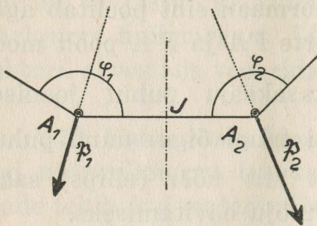
Katkestades nööri mistahes kohas, peaksime tasakaalu säilita-



72. joonis.

miseks sealsamas rakendama nööri sihis parajas suunas just pinge  $T$  suuruse tungi. Nööri terves ulatuses on pinge  $T$  sama. Selle pinge suuruse määrabki valem (79). Pinge kandub üle nööri kaudu ka kinnistuskohdadele  $F$  ja  $F'$ , avaldades seal tõmme, mille suurus on endiselt  $T$ .

§ 60. Kolmnurgaks pingutatud nöör. Olgu nüüd võetud nöör, millel libiseb ka k s rulli  $A_1$  ja  $A_2$  (73. joonis). Lõigates mõttes nööri katki mingis kohas  $J$  rullide  $A_1$  ja  $A_2$  vahel, peaksime varemisaavutatud tasakaalu alalhoidmiseks kohas  $J$  mõlemale



73. joonis.

saadud nööriotsale rakendama tunge, mis võrdsed katkestamata nööriosa  $A_1A_2$  pingega. Teeme seda ja vaatleme siis süsteemi esimest alamosa, kuhu kuulub  $A_1$ . Omaette võetuna kujutab ta eelmises paragraafis käsitletud süsteemi. Samuti kujutab eelmises paragraafis vaadeldud süsteemi ülejäänud teine alamosa omaette. Rakendades varemleitud tule-

musi, järeldame siit, et rullile  $A_1$  rakendatud välistung  $\mathfrak{P}_1$  peab ikkagi poolitama nööri poolt moodustatud nurga kohal  $A_1$ , samuti peab poolitama nurga kohal  $A_2$  teise rulli juures rakendatud välistung  $\mathfrak{P}_2$ . Nööri pinget igas osas määrab valem (79). Et aga katkestuskohal  $J$  reaktsiooni seaduse alusel pinge peab olema arvuliselt mõlemas alamosas ühine, siis järgneb, et terves nööris kogu ulatuses valitseb üks ja sama pinge  $T$ . Tähistades nurki rullide  $A_1$  ja  $A_2$  kohtadel vastavalt sümbolitega  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$ , saame seega

$$|\mathfrak{P}_1| : \cos \frac{\varphi_1}{2} = |\mathfrak{P}_2| : \cos \frac{\varphi_2}{2} (= 2T).$$

Analoogilised kaalutlused näitavad, et ka üldjuhul, kus tegemist  $n$  rulliga  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , mis nööri pidi libisevad hõõrdumiseta vastavalt  $n$  tungi  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  mõjul, tasakaal on saavutatud siis, kui mainitud tungide sihid poolitavad nurki  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  kohtadel  $A_1, \dots, A_n$ , omades nööri pingule tõmbamiseks tarvilikku suunda, ning kui selle juures on rahuldatud võrrandid

$$|\mathfrak{P}_1| : \cos \frac{\varphi_1}{2} = |\mathfrak{P}_2| : \cos \frac{\varphi_2}{2} = \dots = |\mathfrak{P}_n| : \cos \frac{\varphi_n}{2}. \quad (80)$$

Iga avaldis  $|\mathfrak{F}_i| : \cos \frac{\varphi_1}{2}$  kujutab siin ühtlasi kogu nööri valitseva pinge kahekordset suurust  $2T$ .

Need tulemused on rajatud muidugi eeldusele, et teisi välis-  
tunge peale  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  nööri ei mõju, eriti, et nöör ise  
ei kaalu midagi.

Leitud tingimused on kehtivad ka siis, kui nöör on kinnine.  
Vaatleme sel puhul üksikasjalisemalt juhtu, kus kinnine nöör  
kolme tungi abil on tõmmatud kolmnurgaks. Tungid  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$   
peavad siis muidugi mõjuma samas tasapinnas, sest kolmnurga  
kolm nurgapoolitajat asetsevad kõik selle kolmnurga tasapinnas.  
Kolme nurga  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  määramiseks saame antud juhul kolm  
võrrandit

$$|\mathfrak{F}_1| : \cos \frac{\varphi_1}{2} = |\mathfrak{F}_3| : \cos \frac{\varphi_3}{2}$$

$$|\mathfrak{F}_2| : \cos \frac{\varphi_2}{2} = |\mathfrak{F}_3| : \cos \frac{\varphi_3}{2}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi.$$

Viimasest võrrandist järgneb:

$$\cos \frac{\varphi_3}{2} = \sin \left( \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} \right).$$

Kirjutame hõlbustamiseks  $\frac{\varphi_i}{2}$  asemele  $\alpha_i$  ja  $|\mathfrak{F}_i|$  asemele  $P_i$ . Kahest  
esimesest võrrandist järgneb nüüd

$$\begin{aligned} P_3 \cos \alpha_1 &= P_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \\ P_3 \cos \alpha_2 &= P_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned} \quad (81)$$

millest jagamise teel järeldame

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad \text{ehk} \quad \cos \alpha_2 = \frac{P_2}{P_1} \cos \alpha_1,$$

ning edasi veel

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{P_2^2}{P_1^2} \cos^2 \alpha_1} = \frac{1}{P_1} \sqrt{P_1^2 - P_2^2 + P_2^2 \sin^2 \alpha_1}$$

Esimesest võrrandist (81) saame seega

$$\begin{aligned} P_3 \cos \alpha_1 &= P_1 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) = \\ &= P_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{P_1} \cos \alpha_1 \sqrt{P_1^2 - P_2^2 + P_2^2 \sin^2 \alpha_1} \right), \end{aligned}$$

ehk, peale lihtsustamist ja irratsionaalsuse eraldamist:

$$P_3 - P_2 \sin \alpha_1 = \sqrt{P_1^2 - P_2^2 + P_2^2 \sin^2 \alpha_1}.$$

Tõstes siin mõlemad pooled ruutu ning lihtsustades, järeldame

$$2P_2P_3 \sin \alpha_1 = P_2^2 + P_3^2 - P_1^2,$$

ja siit:

$$\sin \alpha_1 = \frac{P_2^2 + P_3^2 - P_1^2}{2P_2P_3}. \quad (82)$$

Sellega on teravnurk  $\alpha_1 = \frac{\varphi_1}{2}$  määratud. Vastavate indeksite ümberpaigutamisega saame valemist (82) otsekohe ka  $\sin \alpha_2$  ja  $\sin \alpha_3$ .

Erijuhul  $P_1 = P_2 = P_3 = P$  valem (82) annab:

$$\sin \alpha_1 = \frac{P^2}{2P^2} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 30^\circ, \quad \varphi_1 = 60^\circ = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Järelikult nööri kolmnurk sel korral osutub võrdkülgseks, nagu ongi oodata juba üksnes sümmeetrilise rajatud kaalutlustel.

### Harjutusülesandeid.

86. Lihtplokist üle visatud nöör on 4,2 m pikk ja kaalub 800 g; ploki ratta läbimõõt on 25 cm. Nööri otstes kinnistatud vihid 1,2 kg ja 1,5 kg hoiavad tasakaalu, kusjuures hõõrdumine ei tule arvesse. Kui pikad on nööri osad ploki mõlemal poolel?

87. Ristkülik  $35 \times 50$  cm koosneb kahest kongruentsest täisnurksest kolmnurgast, mis valmistatud erinevast materjalist. See ristkülik, asetledes püsttasapinnas, on keskel toetatud risti läbimineva horisontaalse telje abil. Missuguseid kaldenurki rõhtsihiga moodustavad tasakaalu asendis selle ristküliku diagonaalid?

88. Kehale mõjuvad punktides  $A$ ,  $B$ ,  $C$  järgmised tungid: punktis  $A$  tung  $\mathfrak{P}$ , mille suurus on 14 kg ja mõjusuund punktist  $A$  punkti  $B$  poole; punktis  $B$  tung  $\mathfrak{Q}$ , mille suurus on 28 kg ja mõjusuund punktist  $B$  punkti  $C$  poole; punktis  $C$  tung  $\mathfrak{S}$ , mille suurus 50 kg ja mõjusuund on vastupidine punktist  $C$  punktile  $A$  viivale suunale. Punkti  $A$  kaugus punktist  $B$  on 35 cm, punkti  $B$  kaugus punktist  $C$  on 1,2 m, punkti  $A$  kaugus punktist  $C$  on 1,25 m. Keha on toetatud  $ABC$  tasapinna kohal  $O$ , mille kaugus sirgest  $BC$  on

10 cm, ning püsib selle tõttu tasakaalus. Kui suur on toetuspunkti  $O$  kaugus külgedest  $AB$  ja  $AC$ ?

✓ 89. Horisontaalne 10 m pikk tala kaalub 0,4 t ja on toetatud kahes kohas  $A$  ja  $B$ , mis asetsevad teineteisest 6 m kaugusel. Teatavas kohas  $M$  punktide  $A$  ja  $B$  vahel mõjub talale lisakoormus 300 kg. Kus kohas nimelt asetseb  $M$ , kui on teada, et tala ulatub toetuspunktist  $A$  1,2 m võrra üle ja et reaktsioonid toetuspunktides  $A$  ja  $B$  koormatud tala puhul on omavahel võrdsed?

✓ 90. Horisontaalse telje külge on ekstsentriliselt kinnistatud massiivne ühtlane 2 cm paks rauast ketas (erikaal 7,8). Ketta läbimõõt on 40 cm; telje tsentri kaugus ketta keskkohast on 5 cm. Ketta piirdejoone kõrgeimas kohas on rakendatud horisontaalne tung 4 kg, mis hoiab ketta tasakaalus. Kui suure nurga vertikaaliga moodustab telje keskkoha ketta keskkohaga ühendav sirge?

✓ 91. Silindrikujuline ühtlane korsten läbimõõduga  $d$  meetrit on  $h$  meetrit pikk ja kaalub  $k$  tonni. Missugune tuulesurve alamäär, arvestades kilogrammides korstna diametraaltasapinna ruutmeetri kohta, osutub sellele korstnale ohtlikuks?

92. 70 cm pikk riul, mis kaalub ise 0,8 kg, on horisontaalselt vabalt asetatud kahele sümmeetriliselt paigutatud kandjale. Kui suur on kandjate vahelise kauguse alamäär, et oleks lubatud panna riuli mistahes kohale 1,5 kg raske ese?

✓ 93. Ümmarguse kolmjalgse laua läbimõõt on 90 cm; jalgade toetuspunktid asetsevad laua teljest 30 cm kaugusel. Kui suur peaks olema laua omakaal, et laua juures istuv külaline, toetudes temale 20 kg-se raskusega, ei ajaks lauda ümber?

94. Kolmjalgsele lauale on pandud 8,6 kg raske ese kaugusel 20 cm laua keskkohast, seejuures aga võrdsel kaugusel kahest jalast. Sümmeetriliselt paigutatud jalgade toetuspunktid asetsevad laua teljest 30 cm kaugusel; laud ise kaalub 5 kg. Arvutada põranda reaktsioonid jalgadele.

95. Kolmjalgsele statiivile on monteeritud 12 kg raske mõõteriist. Statiivi jalad on 1,4 m pikad ja moodustavad oma-

vahel nurki  $30^\circ$ ; statiiv kaalub 0,8 kg. Arvutada üksikule jalale mõjuva reaktsiooni projektsioon jala suunale.

96. Punktide  $A, B, \dots$  koordinaadid on antud järgnevas tabelis:

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$x$	+1,45	+1,45	0	-0,15	-0,35	-0,65
$y$	-0,2	-0,2	+0,075	0	-0,6	0
$z$	0	+1	-0,4125	-0,3	0	+0,5

	$G$	$H$	$I$	$K$	$P$	$Q$
$x$	-0,55	+0,725	-0,05	+0,97	-0,55	0
$y$	-1,7	0	+2,55	0	-1,2	+2,65
$z$	0	+0,425	0	+2,04	0	-1,1

Lahutada  $z$ -teljel positiivses suunas mõjuv 100 kg suur tung komponentideks kuue kandesirge  $AB, CD, EF, GH, IK, PQ$  järgi ja määrata nende komponentide projektsioonid telgedele (andmed on valitud nõnda, et need projektsioonid osutuvad täisarvulisteks). Kontrollida tulemus!

97. Joonestada varrashulknurk nelja tipuga tasakaalu asendis, kusjuures neis tippudes rakendatud välistungide suurused oleksid vaheldumisi 1 kg ja 2 kg ning need tungid on järjest pööratud samas suunas  $30^\circ$  võrra. Esimeses tipus rakendatud välistung olgu vastava äärvardaga risti ja moodustagu järgmise vardaga nurk  $110^\circ$ . Tehtud joonise najal määrata varrastes valitsevad pinged ja selgitada, kas vardaid tohib tasakaalu rikkumata asendada niitidega.

98. Arvutada 70. joonisel kujutatud ripp silla sammaste  $CS$  ja  $DT$  kõrgused, võttes  $A_1B_1 = 3$  m,  $B_1B_2 = 4$  m ja oletades, et köieosa  $A_1A_2$  on rõhtjoone suhtes kallutatud  $15^\circ$  võrra.

99. 46 m pikk köis on kinnistatud kohtades  $A$  ja  $B$  sammaste külge, kusjuures koht  $B$  asetseb kohast  $A$  5 m võrra kõrgemal. Sammaste vaheline kaugus on 40 m. Köiel libiseva rulli

külge kinnistatud koorem on  $A$  ja  $B$  vahel peatuma jäänud surnud punktis. Mitu  $m$  allpool  $A$  taset asetseb sel puhul rull?

100. Arvutada eelmise ülesande andmeil köie pinge suurus, kui koorem moodustab  $0,8 t$  ja köie enda kaal ei tule arvesse.

101. Kahe punkti  $A$  ja  $B$  omavaheline kaugus on  $60 \text{ cm}$ . Neis punktides oma otstega kinnistatud niit on niitipidi hõõrdumiseta libiseval rõngal rakendatud tungi mõjul tasakaalus, kusjuures niidi osad moodustavad täisnurga ja ühepoolne osa on teisest just  $2$  korda pikem. Määrata niidi kogupikkus.

102. Kinnine nöör on kolme tungi abil pingutatud kolm-nurgaks. Kaks neist tungidest on omavahel võrdsed, kolmas on  $5\%$  võrra suurem. Arvutada tekkinud kolmnurga nurki.

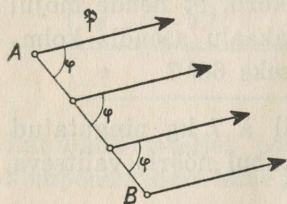
103. Milline peaks olema tungide vahekord, et nende mõjul pinguletõmmatud kinnine nöör näitaks tasakaalu asendis kolmnurga kuju, kus üheks nurgaks on  $50^\circ$ , teiseks  $60^\circ$ ?

104. Kinnine nöör on viie tungi abil  $7 \text{ kg}$  pingutatud korrapäraseks viisnurgaks. Arvutada sel puhul nööris valitseva pinge suurus.

105.  $1 \text{ kg}$  raske kuul  $K$  on nööride abil seotud kohtadega  $A$  ja  $B$ , millede omavaheline kaugus on  $50 \text{ cm}$ . Koht  $A$  asetseb seejuures kohast  $B$   $30 \text{ cm}$  võrra kõrgemal. Nööri  $KA$  pikkus on  $30 \text{ cm}$ , nööri  $KB$  pikkus on  $25 \text{ cm}$ . Arvutada pinged neis nööri-des tasakaalu asendi puhul.

## VI. Töö mõiste ja hõõrdumine.

§ 61. **Elementaartöö.** Punktisüsteemide tasakaalutingimuste leidmiseks võib paljudel juhtudel lähtuda töö mõistest, kuigi viimane sisuliselt kuulub mitte enam staatikasse, vaid dünaamikasse (liikumisõpetusse). Mehaanilise töö ehk lihtsalt „töö“ all mõistetakse mehaanikas teatavat skalaarset



74. joonis.

suurust (s. t. mitte vektorit!), mille koos määravad selle punkti liikumisel kujundatud tee („trajektoor“) ja sellele materiaalsele punktile liikumise ajal mõjunud tung. Erijuhul, kui punkti trajektoor on sirge ning sellele punktile liikumise ajal mõjunud tung oli suuruse ja suuna poolest püsiv, tungi poolt antud juhul tehtud töö definitsioon kõlab järgmiselt (74. joonis):

**Töö on tee pikkuse korrutis tungi suurusega ja tungi ning tee suuna vahelise kaldenurga koosinusega.**

On punkt kõnesolevas ajavahemikus nihkunud sirget joont mööda punktist  $A$  punktini  $B$ , siis seda käidud teed võime käsitleda vektorina  $\overrightarrow{AB}$ . Samuti kujutab vektorit tung  $\mathfrak{F}$ , mis liikumise vältel suuruse ja suuna poolest püsinud. Tähenagu  $\varphi$  nurka nende kahe vektori  $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{F}$  vahel. Korrutis  $|\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{S}| \cos \varphi$  pole siis midagi muud, kui vektorite  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{F}$  skalaarne korrutis  $(\mathfrak{S}\mathfrak{F})$ . Niisiis antud erijuhul

$$\text{Töö} = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{S}| \cdot \cos \varphi = (\mathfrak{S}\mathfrak{F}). \quad (83)$$

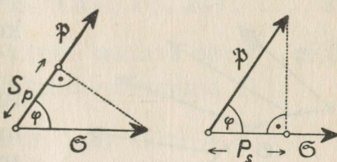
Paneme veel tähele, et  $|\mathfrak{S}| \cdot \cos \varphi$  kujutab teevektori  $\mathfrak{S}$  projektsiooni  $S_p$  tungivektori  $\mathfrak{F}$  suunale, ning et  $|\mathfrak{F}| \cdot \cos \varphi$  kujutab ümberpöörduvalt tungivektori  $\mathfrak{F}$  projektsiooni  $P$  teevektori suunale

(75. joonis), s. t. tungi  $\mathfrak{P}$  komponendi  $\mathfrak{S}$  suunas. Valemit (83) võib seega tõlgendada veel kahel viisil:

- töö on antud erijuhul korrutis tungi suuruselt ja punkti nihkest selle tungi suunas;
- töö on sel erijuhul korrutis tee pikkusest ja tungi komponendist tee suunas.

On  $\varphi = 0$ , siis  $\cos \varphi = 1$  ja töö osutub lihtsalt tee pikkuse korrutiseks tungi suuruselt; punkt nihkub siis just tungi suunas. On aga  $\varphi = \pi$ , tähendab, punkt nihkub just tungile vastupidises suunas, siis  $\cos \varphi = -1$  ja tööks osutub jällegi korrutis tee pikkusest ja tungi suuruselt, kuid seekord võetud miinusmärgiga. Seega töö valemi (83) põhjal võib osutada kas positiivseks või negatiivseks. Töö kaob sama valemi järgi ainult siis, kui pole nihkumist või pole tungi, või kui  $\cos \varphi = 0$ , tähendab, ka siis, kui tung mõjub risti punkti nihkumissuunaga.

Töö definitsioon üldjuhul on samuti rajatud valemile (83). Liigub punkt kõverjoonelisel trajektoril, kusjuures ka veel tung on suuruse ja suuna poolest muutlik, siis vaatleme vastavat nihkumist mitte korruga tervikuna, vaid jaotame ta mõttes üsna väikesteks osadeks, mida nimetame sel puhul „elementaarnihketeks“. Iga üksikut säarast elementaarnihet käsitleme üsna väikese vektorina (vektori „diferentsiaalina“); säaraseks elementaarnihkeks kulub üsna vähe aega, mille vältel tung ei jõuagi märgatavalt muutuda. Selle tõttu loeme tungi elementaarnihke ulatuses suuruse ja suuna poolest püsivaks. Moodustame valemi (83) alusel suuruse, mis kujutab elementaarnihke puhul tehtud tööd, s. t. moodustame skalaarse korrutise elementaarnihkumisele vastavast üsna väikesest teevektorist ja selle nihkumise hetkele vastavast tungivektorist, tähistades selle „lõpmata väikese“ teevektori suurust sümboliga  $ds$  (tee „diferentsiaal“), vastava tungivektori suurust sümboliga  $P$  ja nurka tungivektori ja elementaarnihke suundade vahel sümboliga  $\hat{P}, ds$ . Mainitud skalaarne korrutis on siis  $P \cdot ds \cdot \cos \hat{P}, ds$ ; nimetame seda elementaarnihkumisele vastavaks elementaartöök, tarvita-



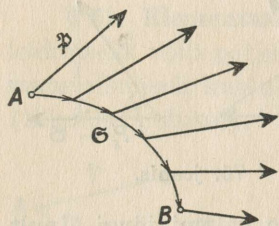
75. joonis.

des selle tähistamiseks ka sümbolit  $dT$  (töö  $T$  „diferentsiaal“):

$$dT = P \cdot ds \cdot \cos P, \hat{ds}. \quad (84)$$

Et siin paremat kätt esinev tegur  $ds$  on „lõpmata väike“, siis ka skalaarne korrutis  $dT$  ise osutub „lõpmata väikeseks“.

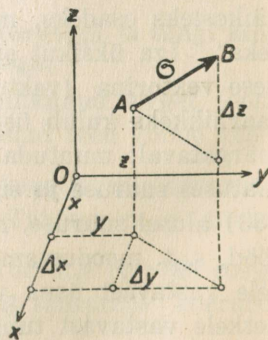
$P$  ja nurk  $P, \hat{ds}$  võib iga üksiku elementaarnihke puhul olla erinev. Võttes kõverjoonelise trajektoori puhul tehtud „elementaartööde“ summa trajektoori algusest kuni trajektoori lõpuni, saamegi selle liikumise kestel tehtud kogutöö (vt. 76. joonis).



76. joonis.

Antud seletuse täpsustamiseks tuleks kasutada piirprotsessi mõistet, mille juures meie aga siin ei peatu. Kogutöö arvutamiseks tuleb üldjuhul rakendada integreerimise tehet. Statika küsimuste otsustamisel saame piirida elementaartöö mõistega, kõrvale jättes integraale.

§ 62. **Elementaartööde summa.** Teevektorit  $\mathfrak{S}$  määravad tema projektsioonid koordinaattelgedele. Olgu vektori algpunkt  $A$  määratud koordinaatidega  $x, y, z$  (77. joonis). Vektori lõpupunkti koordinaadid olgu vastavalt  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  võrra suuremad (need arvud  $\Delta x$  jne. võivad muidugi olla negatiivsed või osaliselt nullid), nii et see lõpupunkt  $B$  omab koordinaate  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ . Sel korral  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  ongi just vektori  $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{S}$  projektsioonid koordinaattelgedele. Juhul, kus teevektor  $\overrightarrow{AB}$  on „lõpmata väike“, kujutades seega siis vaid „elementaarnihet“, väljendame seda, kirjutades kasvu sümboli  $\Delta$  asemel diferentsiaali sümboli  $d$ , — projektsioonideks on siis järelikult  $dx, dy, dz$ .



77. joonis.

Tungi  $\mathfrak{P}$  projektsioonid samadele koordinaattelgedele olgu  $X, Y, Z$ . Tungile  $\mathfrak{P}$  ja nihkele  $\overrightarrow{AB}$  vastav töö on skalaarne kor-

rutis ( $\mathfrak{P} \overrightarrow{AB}$ ). Meelde tuletades valemit (12) võime seetõttu kirjutada

$$T = X \cdot \Delta x + Y \cdot \Delta y + Z \cdot \Delta z.$$

Elementaartöö jaoks saame siit avaldise, tähistades seda elementaartööd endisel viisil jälle diferentsiaali sümboli  $d$  abil kujul  $dT$ :

$$dT = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (85)$$

Olgu nüüd nihkuva materiaalse punkti juures korraga rakendatud mitu tungi  $\mathfrak{P}_1: (X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $\mathfrak{P}_2: (X_2, Y_2, Z_2)$ , ..., siis nihke  $\overrightarrow{AB}$  puhul igaüks neist tungidest teeb teatava töö  $T_i$ . Kõik need osalised tööd  $T_i$  kokku annavad teatava summa  $T$ :

$$T = \Sigma T_i = (X_1 \cdot \Delta x + Y_1 \cdot \Delta y + Z_1 \cdot \Delta z) + \\ + (X_2 \cdot \Delta x + Y_2 \cdot \Delta y + Z_2 \cdot \Delta z) + \dots$$

Seda summat  $T$  võib aga siis kirjutada ka kujul

$$T = (X_1 + X_2 + \dots) \cdot \Delta x + (Y_1 + Y_2 + \dots) \cdot \Delta y + \\ + (Z_1 + Z_2 + \dots) \cdot \Delta z.$$

Kuid avaldised sulgudes kujutavad siin  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  resultanttungi projektsioone  $X, Y, Z$ . Järelikult jälle

$$T = X \cdot \Delta x + Y \cdot \Delta y + Z \cdot \Delta z,$$

millest selgub, et tööde  $T_i$  summa võrdub resultanttungi tööga. Analooiliselt leiame elementaartööde summana

$$dT = \Sigma dT_i = Xdx + Ydy + Zdz,$$

millest näha, et ka elementaartööde  $dT_i$  summaks on resultanttungi elementaartöö. Seega on kehtiv lause:

**Mõjub materiaalsele punktile mitu tungi korraga, siis mistahes nihkumise puhul komponentide tööde summa võrdub resultanttungi tööga.**

Erijuhul, kui komponenttungid on tasakaalus, tähendab, nende resultanttung on null, kaob selle tõttu komponenttungide tööde summa. See annab tähtsa järelduse staatilises tasakaalus olevate punktisüsteemide kohta.

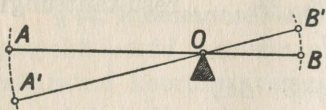
Staatilises tasakaalus olevas punktisüsteemis on nimelt just igas üksikus selle süsteemi punktis sise- ja välistungid tasakaalus; kui nüüd säärase tasakaalus oleva süsteemi punktid nihkuvad

„lõpmata väikeste“ suuruste võrra oma kohtadelt, siis igas üksikus punktis tehtud elementaartööde summa peab osutama nulliks, järelikult peab null olema ka terve süsteemi ulatuses arvestatud kõikide seal rakendatud tungide elementaartööde summa. Tulemuse tähtsuse pärast sõnastame ta eraldi lausena:

**On punktisüsteem tasakaalus, siis süsteemi punktide mistahes elementaarnihete puhul kõikide süsteemis üldse rakendatud sise- ja välistungide elementaartööde summa peab tingimata kaduma.**

§ 63. **Võimalikkude nihete printsiip.** Praegu sõnastatud tulemuses on jutt täiesti meelevaldsetest süsteemi punktide elementaarnihetest, arvestamata süsteemis valitsevaid seoseid, mis teataval määral piiravad süsteemi punktide nihkumise vabadust. Piirdume nüüd süsteemidega, kus sisetungid on tingitud vaid seostest, ja käsitleme elementaarnihkeid, mis on *k o k k u k õ l a s* süsteemi seostega.

Koosneb näiteks süsteem kahest punktist  $A$  ja  $B$ , mis omavahel ühendatud kindla, punkti  $O$  ümber pöörleva vardaga („kang“, 78. joonis), siis punkti  $A$  nihkumine „kokkukõlas süsteemis valitsevate seostega“ eeldab,



78. joonis.

et  $A$  asukoht püsib alati sfääril, mille tsentriks on  $O$  ja raadiuseks pikkus  $OA$ . Pealegi on ilmne, et  $A$  nihkumisel teatavasse kohta  $A'$  täpselt on määratud koht  $B'$ , kuhu on säärasel korral nihkunud punkt  $B$ . Teissugused nihkumised pole nüüd enam lubatud.

Teissugused nihkumised pole nüüd enam lubatud.

Paneme tähele, et antud näites *s i s e t u n g i d e* tööde summa osutub nulliks, sest nii punktis  $A$  kui ka punktis  $B$  vastav sisetung mõjub sfääri raadiuse sihis (hoides nii  $A$  kui  $B$  püsival kaugusel vastavate sfääride ühisest tsentrist  $O$ ), järelikult sisetung on alati suunatud *r i s t i* igale võimalikule punkti  $A$  või  $B$  elementaarnihkele, — siis on aga (84) põhjal vastav üksik sisetungi elementaartöö ja sellepärast ka sisetungide elementaartööde summa kindlasti null. Analüüsides lihtsamaid teissuguseid kahepoolseid seoseid mehhanismides, võib veenduda, et seostest tingitud sisetungide tööde summa osutub nulliks, niipea kui *h õ r d u m i n e* jätta arvestamata. Selle analüüsi juures meie ei peatu.

Üldjuhul, kus kahepoolsed seosed mehhanismis on kuitahes komplitseeritud, võetakse praegumainitud asjaolu hõõrdumise puudumise definitsioonina:

**Süsteemi kahepoolseid seoseid loetakse hõõrdumisvabadeks siis ja ainult siis, kui sisetungide elementaartööde summa kaob, niipea kui süsteemi punktide elementaarnihked on kokkukõlas mainitud seostega.**

Sageli ei mainita eraldi, et süsteemi seosed on seejuures kõik eeldatud kahepoolsetena, kuigi see asjaolu omab tähtsust. Tegelikult tuleb igatahes tasakaalu küsimusi ülalantud definitsiooni abil uurides alati hetkeks oletada, et kõik seosed on just kahepoolsed.

Võttes arvesse, et eelmises paragraafis antud lause alusel sise- ja välistungide elementaartööd koos alati peavad andma tasakaalu asendis summa null, järeldame praegusest definitsioonist, et hõõrdumise puudumisel juba välistungide poolt üksinda tehtud elementaartööd peavad andma summa null, niipea kui elementaarnihked on kokkukõlas süsteemis valitsevate seostega.

Kui süsteem ei ole tasakaalus, siis leidub vähemalt üks seostega kokkukõlas olev elementaarnihete kogu, kus välistungide elementaartööde summa erineb nullist. Tõepoolest, lubame süsteemi igale punktile nihkuda just tema juures rakendatud kõikide (s. t. nii seesmistele kui välimistele) tungide resultanttungi suunas; need nihkumised on siis kindlasti kokkukõlas süsteemi seostega, sest mitte-tasakaalustatud punkt hakkaski Newtoni teise põhiseaduse kohaselt (§ 47) ise liikuma just selle resultanttungi suunas, nagu seda selgitatakse dünaamikas. Kirjeldatud elementaarnihete puhul elementaartööde kogusumma osutub kindlasti positiivseks, sest iga resultanttungi suund langeb ühte vastava elementaarnihke suunaga. Et seejuures aga sisetungide arvele langev elementaartööde summa jääb ikkagi nulliks, sest nihked on kokkukõlas süsteemi seostega, siis välistungide töö omaette peab juba olema positiivne, seega erineb nullist.

Kõigist neist kaalutlustest järgneb lause:

**Hõõrdumisvaba seostega mehhanism on tasakaalus siis ja ainult siis, kui kahepoolsetena arvestatud seoste põhjal võimalikkude igasuguste elementaarnihete puhul välistungide elementaartööde summa kaob.**

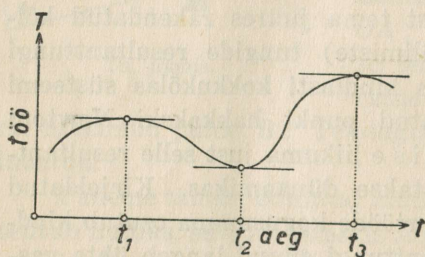
Selle lausega väljendatud tõsiasi kutsutakse „võimalikkude nihete printsiibiks“. Sõnastuses on oluline, et arvesse tulevad igasugused võimalikud elementaarnihked; tasakaalu ei ole, kui vaid mõningate elementaarnihete puhul elementaartööde summa osutub nulliks, teissuguste elementaarnihete puhul (mis ikkagi kokkukõlas seostega!) aga mitte.

Esinevad süsteemis ka hõõrdumised, siis välistungide hulka tuleb lugeda ka hõõrdumistunge.

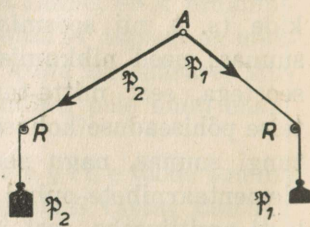
§ 64. **Võimalikkude nihete printsiibi interpretatsioonid.** Võimalikkude nihete printsiibile võib mitmel viisil anda näitlikuma kuju.

Olgu tegemist mõne masinaga, mille osad liiguvad seal rakendatud tungide mõjul. Olgu mingisugusel viisil teostatud nende tungide poolt masina liikumisel tehtud kogutöö pidev mõõtmine. Joonestame sellekohase töödiagrammi, kujutades näiteks tööd aja funktsioonina (79. joonis). Ordinaadi kasv  $dT$  üsna väikesel ajavahemikul  $dt$  näitab siis elementaartööde summat antud hetkel, mis vastab masina osade teatavale asendile. Staatilises tasakaalus saab masin olla ainult seal, kus  $dT$  osutub nulliks, tähendab seal, kus töö käigukõvera puutuja diagrammil on rööbik ajateljega.

Teise, veelgi tähtsama tõlgenduse võimalikkude nihete printsiibile saame anda, silmas pidades asjaolu, et mistahes punktis  $A$



79. joonis.



80. joonis.

rakendatud mistahes tunge võime realiseerida ideaalse nööri külge kinnitatud vihtide abil, juhtides nööri üle väikeste plokkide  $R_1, R_2, \dots$ , nagu see skemaatiliselt selgitatud 80. joonisel. Nihkub nööri ühine rakenduspunkt  $A$ , siis nihkuvad ka vihid pisut üles- ja allapoole. Punktis  $A$  tehtud töö  $A$  elementaarnihke puhul on sama, mis vihtide kohal nende tõusmisel või langemisel raskustungide poolt tehtud töö: punkti  $A$  elementaarnihke projektsioon seal rakendatud vastava tungi suunale (nööri!) on nimelt parajasti võrdne väikese pikkusega, mille võrra vastav

viht nihkub alla- või ülespoole, olles esimesel juhul positiivne, teisel negatiivne.

On nüüd kirjeldatud viisil mõtteliselt vihtidega varustatud süsteem tasakaalus, siis igasuguse seoste põhjal võimaliku punktide  $A$  elementaarnihete kogu juures vihtide langemisel või tõusmisel tehtud elementaartööde summa peab olema null. Järelikult mõnede vihtide langemisel teised peavad vastavalt tõusma, et negatiivne töö kompenseeriks positiivset tööd. Uurime asja lähemalt. Tõmbame mingisugusel kohal horisontaalse  $x$ -telje, viies  $z$ -telje vertikaalselt alla poole. Et vihid saavad liikuda ainult vertikaalses sihis, s. t. risti  $x$ - $y$ -tasapinnaga, siis antud küsimuse puhul on olulised ainult vihtide asukohtade  $z$ -koordinaadid  $z_1, z_2, \dots$ . Vihtidekogu massikese  $C$  omagu selles asendis  $z$ -koordinaati  $\xi$ . Valemi (57) alusel on

$$\xi = \frac{z_1 \cdot |\mathfrak{P}_1| + z_2 \cdot |\mathfrak{P}_2| + \dots}{|\mathfrak{P}_1| + |\mathfrak{P}_2| + \dots}.$$

Olgu nüüd aset leidnud teatavad elementaarnihked, mille tagajärjel vihtide koordinaadid pole enam endised  $z_1, z_2, \dots$ , vaid pisut erinevad uued  $z_1 + dz_1, z_2 + dz_2, \dots$ . Massikeskme  $C$  uus asukoht on siis määratud uue koordinaadiga  $\xi + d\xi$ , kusjuures sama (57) põhjal

$$\begin{aligned} \xi + d\xi &= \frac{(z_1 + dz_1) |\mathfrak{P}_1| + \dots}{|\mathfrak{P}_1| + \dots} = \\ &= \frac{z_1 \cdot |\mathfrak{P}_1| + z_2 \cdot |\mathfrak{P}_2| + \dots}{|\mathfrak{P}_1| + |\mathfrak{P}_2| + \dots} + \frac{dz_1 \cdot |\mathfrak{P}_1| + dz_2 \cdot |\mathfrak{P}_2| + \dots}{|\mathfrak{P}_1| + |\mathfrak{P}_2| + \dots} = \\ &= \xi + \frac{dz_1 \cdot |\mathfrak{P}_1| + dz_2 \cdot |\mathfrak{P}_2| + \dots}{|\mathfrak{P}_1| + |\mathfrak{P}_2| + \dots}. \end{aligned}$$

Kuid  $dz_1 \cdot |\mathfrak{P}_1| + dz_2 \cdot |\mathfrak{P}_2| + \dots$  kujutab parajasti vihtide nihkumisel raskustungide poolt tehtud elementaartööde summat, mis tasakaaluasendis peab andma nulli. Seega teine liidetav muutub nulliks, ja

$$\xi + d\xi = \xi, \text{ ehk } d\xi = 0.$$

See näitab, et tasakaaluasendi kohal võimalikkude elementaarnihete korral **vihtide massikese  $C$  peab püsima paigal**. Tasakaal valitseb siis ja ainult siis, kui seostega kokkukõlastatud mistahes elementaarnihete puhul vihtide massikese jääb alati paigale.

On süsteemis valitsevad seosed säärased, et teatava asendi juures vihtide massikese üldse enam madalamale langeda ei saa, siis on tasakaal kindel, nagu selgub järgmistest kaalutlustest:

Rakendatud tungide mõjul süsteemi punktid peaksid, nagu juba varemini tähendasime, hakkama liikuma nõnda, et elementaartööde summa osutuks positiivseks. Need rakendatud, vihtidega realiseeritud tungid on vihtide juures paralleelsed ja seetõttu asendatavad üheainsa tungiga  $\mathfrak{P}$ , mille suuruseks on antud tungide summa, ja mille rakenduspunktiks on vihtide massikese  $C$ . Varemini-leitud  $d\xi$  avaldisest järgneb

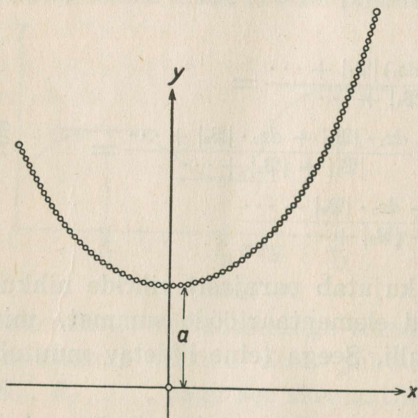
$$(|\mathfrak{P}_1| + |\mathfrak{P}_2| + \dots) \cdot d\xi = |\mathfrak{P}_1| \cdot dz_1 + |\mathfrak{P}_2| \cdot dz_2 + \dots$$

ehk

$$|\mathfrak{P}| d\xi = |\mathfrak{P}_1| \cdot dz_1 + |\mathfrak{P}_2| \cdot dz_2 + \dots,$$

mis näitab, et sellele nihkele vastavate elementaartööde summa võrdub tungi  $\mathfrak{P}$  elementaartööga massikeskme  $C$  nihkumisel. Oleks nüüd see töö tööpoolest positiivne, siis peaks olema  $d\xi > 0$ , tähendab, massikese  $C$  peaks nihkuma allapoole, kui lubada süsteemi punktidele alluda seal rakendatud välistungidele. Et aga

seosed oletuse järgi ei luba  $C$  nihkumist allapoole, siis tuleb järeldada, et resultanttunge, millede mõjul süsteemi punktid alustaksid liikumist, üheski punktis pole olemas, s. t. süsteemi iga üksik punkt ja sellepärast ka kogu süsteem tervikuna on tasakaalus. Järelikult:



81. joonis.

**Süsteem on kindlasti tasakaalus, kui vihtide massikese on oma madalaimas asendis.**

Viimast tulemust võib näiteks kasutada kahes punktis kinnistatud ühtlase raske ahela tasakaalu kuju leidmiseks, vaadeldes ahela üksikuid lülisid otseselt seal asetsevate vihtidena. Ahela tasakaalu kuju peab olema säärane, kus vastava pikku-

sega joone kaar kinnistatud punktide vahel annab võimalikult madala massikeskme. Matemaatiline analüüs näitab, et sääraseks jooneks („aheljooneks“) osutub hüperboolse koosinuse käigukõver, s. t. kõver, mille võrrand sobiva teljestiku valiku puhul omab kuju

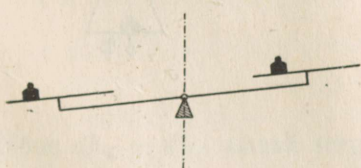
$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a},$$

kus  $a$  on ahela pikkusest ja kinnistuskohdade asendist olenev konstant (kõvera ja  $y$ -telje löikepunkti ordinaat, 81. joonis).

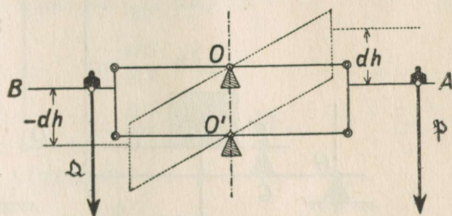
**M ä r k u s:** Kuivõrra tähtis on võimalikkude nihete printsiibi rakendamisel seoseid arvestada kahepoolsetena, selgitab lihtne näide: pendel, s. o. ideaalse niidi kaudu kinnispunktiga  $O$  seotud raske materiaalne punkt  $A$ , on ilmsesti tasakaalus, kui ühendusniit on pingutatud vertikaalses suunas nõnda, et  $A$  asetseks allpool punkti  $O$ . Arvestades niitühendust ühepoolse seosena (nagu ta tegelikult ongi), võiksime aga siis ikkagi seosega kokkukõlas anda massile  $A$  väikese nihke otse ülespoole, mille puhul  $A$  peale mõjuva raskustungi töö poleks null, vaid oleks negatiivne. Tuleb tingimata arvestada (fiktiivselt) niidi seost ikkagi kahepoolsetena, et säärane elementaarnihkumine ei kuuluks lubatavate hulka.

### § 65. Robervali kaalud, detsimaalkaalud, diferentsiaalplokk.

„Lihtmasinate“ all mõistetakse mehaanikas mehhanisme, mille juures on rakendatud kaks välistungi, nimelt teatav „koormis“  $\mathcal{Q}$



82. joonis.



83. joonis.

ja „tasakaalustav tung“  $\mathfrak{P}$ . Lihtmasinate tasakaalu tingimuste leidmisel võib edukalt rakendada just võimalikkude nihete printsiipi. Selgitame seda kolme näitega.

Esimene näide: Robervali kaalud.

Lihtsa kangi külge paindumatult kinnistatud vaekaussidega kaalud (82. joonis) ei sobiks õigeks kaalumiseks, sest tulemus

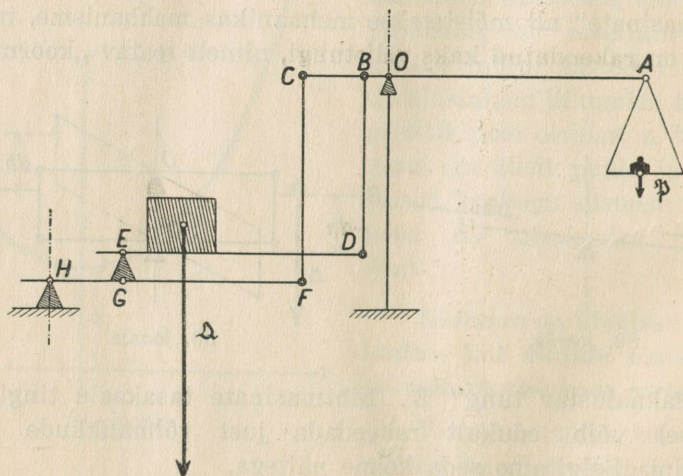
oleneks koormise ja vihtide asendist kaussidel. Jätame lugeja enda hooleks seda üksikasjaliselt põhjendada.

Mainitud pahet saab vältida, kinnitades kausid šarniirparallelogrammi külge 83. joonisel skemaatiliselt selgitatud viisil. On  $|\mathfrak{P}|$  ja  $|\mathfrak{Q}|$  seal nüüd võrdsed, siis parallelogrammi pööramisele toetuspunktide  $O$  ja  $O'$  ümber teatava väikese nurga võrra kauss  $A$ , liikudes paralleelselt iseendaga, tõstab  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkti teatava väikese suuruse  $dh$  võrra; samal ajal kauss  $B$ , liikudes jällegi paralleelselt iseendaga, langetab koormise  $\mathfrak{Q}$  rakenduspunkti just sama suuruse võrra. Välistungide elementaartööde summa selle elementaarnihke puhul oleks järelikult, kui arvestada õigel viisil märke:

$$-|\mathfrak{P}| \cdot dh + |\mathfrak{Q}| \cdot dh = (|\mathfrak{Q}| - |\mathfrak{P}|)dh = 0,$$

kui ainult  $|\mathfrak{P}|$  ja  $|\mathfrak{Q}|$  on omavahel võrdsed, sõltumata sellest, misugustele kohtadele nimelt koormis ja tasakaalustav viht on paigutatud.  $|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{Q}|$  on järelikult nende kaalude puhul tarvilikuks ja küllaldaseks tasakaalutingimuseks; kausside suhteline kõrgus pole oluline. Tegelikult konstrueeritakse kaalud muidugi nõnda, et parallelogrammi enda raskuse mõjul tasakaaluasendis kaalud osutuvad horisontaalseks.

Teine näide: detsimaalkaalud.



84. joonis.

Kang  $AC$  (84. joonis) saab püsttasapinnas liikuda kinnispunkti  $O$  ümber. Platvorm  $FH$  toetub kinnispunktile  $H$ . Plat-

vorm  $DE$  toetub  $EG$  kaudu platvormile  $FH$ . Kohtades  $B, C, D, F$  on šarniirühendused, kusjuures  $BD$  ja  $CF$  on ühendusvardad. Pöörame mõttes kangi  $AC$  üsna väikese nurga võrra, mille tagajärjel  $A$  ning temaga ühes alati horisontaalne kauss tõstab tungi  $\mathfrak{P}$  rakenduspunkti teatava väikese suuruse  $dh$  võrra. Sellest tingituna langevad punktid  $C$  ja  $B$  ning ühes nendega punktid  $F, G, D$  ja  $E$ . Detsimaalkaalude dimensioonid on nõnda valitud, et  $D$  ja  $E$  langused oleksid omavahel võrdsed, s. t. nõnda, et platvorm  $ED$  liiguks paralleelselt iseendaga. Geomeetriselised arutlused näitavad meile edaspidi, kuidas seda saavutada.

Tähistame  $C$  langust sümboliga  $dh_C$ , analoogiliselt  $B$  langust sümboliga  $dh_B$  jne. Et

$$\frac{dh_C}{dh} = \frac{OC}{OA},$$

siis

$$dh_C = \frac{OC}{OA} dh,$$

ja analoogiliselt

$$dh_B = \frac{OB}{OA} dh.$$

Ilmselt on

$$dh_F = dh_C, \quad dh_D = dh_B, \quad dh_E = dh_G.$$

Eesmärgiks on saavutada  $dh_E = dh_D$ , või, mis sisuliselt sama,  $dh_G = dh_B$ . Arvutades  $dh_G$ , leiame:

$$\begin{aligned} \frac{dh_G}{dh_F} &= \frac{HG}{HF}; & dh_G &= \frac{HG}{HF} dh_F = \\ & & &= \frac{HG}{HF} dh_C = \\ & & &= \frac{HG}{HF} \cdot \frac{OC}{OA} dh. \end{aligned}$$

Nõue  $dh_G = dh_B$  annab seega võrrandi

$$\frac{HG}{HF} \cdot \frac{OC}{OA} dh = \frac{OB}{OA} dh,$$

ehk

$$\frac{HG}{HF} = \frac{OB}{OC}. \quad (86)$$

See ongi otsitav nõue, mille rahuldamisel platvorm  $DE$  on sunnitud liikuma paralleelselt iseendaga, nihkudes igal pool alla täpselt niisama palju, kui kangi  $AC$  punkt  $B$ . Koormis  $\mathfrak{Q}$  langeb

järelikult niisama palju, nagu ta oleks nihkunud, olles kinnistatud otse punkti  $B$  külge, tähendab  $dh_B$  võrra.

Võimalikkude nihete printsiibist järgneb nüüd tasakaalutingimusena

$$|\mathcal{D}| \cdot dh_B - |\mathcal{F}| \cdot dh = 0,$$

ehk

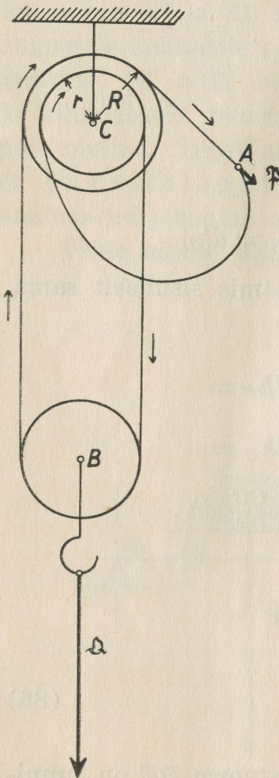
$$|\mathcal{D}| \cdot \frac{OB}{OA} dh - |\mathcal{F}| \cdot dh = 0.$$

See näitab, et tasakaal valitseb siis ja ainult siis, kui

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|\mathcal{D}|} = \frac{OB}{OA}.$$

Enamasti võetakse  $\frac{OB}{OA} = 0,1$ , millest ka tingitud nimetus „detsimaal“-kaalud.

Kolmas näide: diferentsiaalplokk.



85. joonis.

Kaks kontsentrilist hammasrattast erinevate raadiustega  $R$  ja  $r$  on teineteisega lahutamatuult seotud. Neist rattastest 85. joonisel kujutatud viisil üle visatud kett kannab ploki  $B$ , millele mõjub koormis  $\mathcal{D}$ . Tasakaalustav tung  $\mathcal{F}$  olgu rakendatud kohas  $A$ . Võimalikkude nihete printsiibi rakendamiseks kujutleme ketti säärasena, et ta oleks suuteline üle kandma mitte üksnes tõmmet, vaid ka tõuketungi, nagu seda teataval määral teeb näiteks terastross.

Laseme ketil märgitud tungi  $\mathcal{F}$  rakenduspunkti  $A$  koos ketiga nihkuda, ütleme,  $\mathcal{F}$  suunas üsna väikese suuruse  $ds$  võrra. Ploki mõlemad rattad pöörduvad selle tagajärjel kumbki teatava üsna väikese nurga  $da$  võrra joonisel nooltega märgitud suunas. Keti osa  $C$  ja  $B$  vasakul poolel väheneb siis  $R \cdot da$  võrra, paremal poolel aga pikeneb  $r \cdot da$  võrra. Et  $R > r$ , siis selle lõpptulemusena kogu ketiosa  $C$  ja  $B$  vahel lüheneb

$$R \cdot da - r \cdot da = (R - r) \cdot da = (R - r) \frac{ds}{R}$$

võrra, sest  $ds = R \cdot da$ . Et see lühenemine võrdselt jaguneb keti-osa parema ja vasaku poole vahel, sest koormatud plokk  $B$  püüab püsida võimalikult madalas asendis, siis koormise  $\mathcal{Q}$  rakenduspunkt tõuseb

$$\frac{R-r}{2R} \cdot ds$$

võrra. Võimalikkude nihete printsiip annab järelikult tasakaalutingimusena

$$|\mathfrak{P}| \cdot ds - |\mathcal{Q}| \cdot \frac{R-r}{2R} ds = 0,$$

mis peab kehtima iga  $ds$  puhul, ka siis, kui  $ds$  on negatiivne, s. t. kui  $A$  peaks nihkuma tungile  $\mathfrak{P}$  vastupidises suunas; viimase võimaluse haaramiseks tulebki keti kaudu realiseeritud seost  $\mathfrak{P}$  ja  $\mathcal{Q}$  rakenduspunktide vahel mõtteliselt lugeda kahepoolseks. Leitud tingimus annab

$$|\mathfrak{P}| = \frac{R-r}{2R} \cdot |\mathcal{Q}|. \quad (87)$$

Võttes diferentsi  $R - r$  väga väikesena suurema hammasratta läbimõõduga  $2R$  võrreldes, leiame, et tasakaalustav tung  $\mathfrak{P}$  moodustab üsna väikese murdosa koormisest  $\mathcal{Q}$ . Masina kasulikkust tõsteabinõuna määrab seega rataste raadiuste diferents, millest ka tingitud nimetus „diferentsiaal-“ plokk.

**§ 66. Tasakaalu liigid.** Punktisüsteemis valitsev tasakaal võib olla mitmet liiki. Liigitamist tuleb teostada kaalutluste najal, mis sisuliselt kuuluvad dünaamikasse.

Kui tasakaal leiab aset säärases süsteemi punktide asendis, kuhu need punktid neile mõjuvate tungide sunnil pärast mistahes elementaarnihkumist ise püüavad alati tagasi pöörduda, siis sel viisil iseloomustatud tasakaalu kutsutakse „püsivaks“ ehk „stabiilseks“. Elementaarnihked on siin ja ka edaspidi ikka mõeldud süsteemi seostega kokkukõlas olevatena.

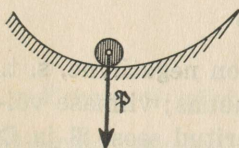
Kui vastupidiselt pärast võimalikku elementaarnihet punktid ise neis rakendatud endiste tungide mõjul hakkaksid liikuma nõnda, et nad veel enam eemalduksid tasakaaluasendist, siis öeldakse, et kõnesolev tasakaal on „ebapüsiv“ ehk „labiilne“.

Vahepealne võimalus esineb sel korral, kui mistahes võimaliku elementaarnihke puhul süsteem saavutatud uues asendis osu-

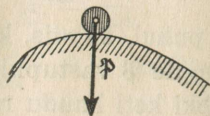
tub ikka jälle tasakaalus olevaks, sel puhul kõneldakse „ükskõiksest“ ehk „indiferentsest“ tasakaalust.

On mõeldav veel üks liik: süsteemi käitumine pärast teostatud elementaarnihet võib oleneda sellest, missugused nimelt on need teostatud nihked, ilmutades mõningate puhul stabiilsuse, teiste puhul jällegi labiilsuse tunnuseid. Säärasel korral öeldakse, et tasakaal on „ebamäärane“.

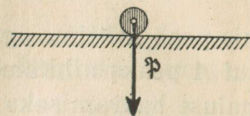
Neid tasakaalu liike saab näitlikult selgitada raske kera asendite abil hõõrdumist mitteavaldaval pinnal. 86. joonisel



86. joonis.

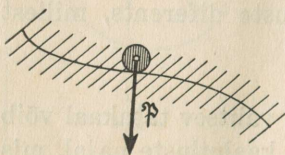


87. joonis.



88. joonis.

kujutatud lohus on säärase kera tasakaal stabiilne, 87. joonisel kujutatud künkal labiilne, ja 88. joonisel näidatud tasapinnalisel alusel indifferentne. Ebamäärase tasakaalu võimalust interpreteerib 89. joonis, kus toetuspinna on mõeldud horisontaalsete moodustajatega silindrina: kera nihkumisel pinna tõusva poole suunas ilmnevad stabiilse tasakaalu tunnused, sest kera püüab tagasi tulla; nihkumisel toetuspinna langeva osa suunas tasakaal näib olevat labiilne, sest kera hakkaks edasi veerema; nihkumisel toetuspinna horisontaalse moodustaja sihis tasakaal tundub indifferentseks.



89. joonis.

Ühes punktis toetatud raske keha on stabiilses tasakaalus, kui massikese asetseb toetuspunktist läbimineval vertikaalil, seejuures allpool toetuspunkti. Langeb aga massikese samale vertikaalile, olles ise seejuures ülalpool toetuspunkti, siis tasakaal osutub labiilseks. Indifferentne tasakaal leiab aset, kui massikese ruumiliselt ühtib toetuspunktiga.

Igasuguste kaalude puhul konstruktsioon on harilikult teostatud nõnda, et kaalukangi massikese asetseks parajasti siis toetuspunktist läbimineval vertikaalil, ja seejuures muidugi allpool toetuspunkti, kui selle kaalukangi enda asend on horisontaalne. Sellega saavutatakse seda, et ka koormatud kaalude (püsiv) tasakaal leiab aset ainult kaalukangi horisontaalses asendis.

Komplitseeritud mehhanismide puhul tasakaalu liigi otsustamine võib osutuda võrdlemisi keeruliseks matemaatiliseks probleemiks.

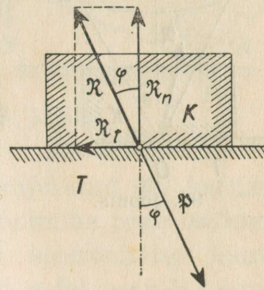
§ 67. **Hõõrdumisnurk.** Hõõrdumise arvestamata jätmine on tegelikkude probleemide puhul lubatav ainult esimeses lähenduses. Igasugustes konstruktsioonides inseneri tegevuse aladel mängib hõõrdumine väga olulist osa. Peatume üsna lühidalt võtete juures, millede najal hõõrdumisest tingitud lisatunge saab staatika probleemides arvestada.

Kogemused näitavad, et tungiga  $\mathfrak{P}$  vastu füüsilist tasapinda surutud füüsiline keha  $K$  püsib tasakaalus ka siis veel, kui tung  $\mathfrak{P}$  moodustab tasapinna normaaliga teatava mitte liiga suure teravnurga  $\varphi$  (90. joonis). See on ilmselt võimalik vaid seetõttu, et füüsiline tasapind  $T$  on võimeline avaldama kehale  $K$  sama nurga all normaali suhtes kallutatud ja vastupidi suunatud „kaldreaktsiooni“ (ideaalselt sileda tasapinna puhul on arvestatud ainult „normaalreaktsiooni“ tekkimine). **Kaldreaktsiooni tekkimist nimetataksegi „hõõrdumiseks“.**

Kaldreaktsiooni  $\mathfrak{R}$  võime lahutada tangentsiaalseks ja normaalseks komponendiks, vastavalt tasapinna enda ja tasapinna normaali sihis. Tähistame neid komponente sümbolitega  $\mathfrak{R}_t$  ja  $\mathfrak{R}_n$ , nimetades neid vastavalt „tangentsiaalreaktsiooniks“ ja „normaalreaktsiooniks“. Hõõrdumise puudumisel, s. t. sileda tasapinna puhul, tangentsiaalreaktsioon kaob ja üle jääb ainult normaalreaktsioon. Tegelikud katsed näitavad aga alati ka  $\mathfrak{R}_t$  olemasolu.

Kui  $\mathfrak{R}_t$  ei kao, siis keha  $K$  elementaarnihke puhul toetustasapinda pidi reaktsioontungi elementaartöö erineb nullist, sest kaldreaktsioon  $\mathfrak{R}_t$  annab seejuures kindlasti nullist erineva töö hulga, kuna normaalreaktsiooni  $\mathfrak{R}_n$  töö jääb nulliks, sest selle reaktsioontungi siht on risti nihke sihiga.

Tasakaal valitseb 90. joonisel skitseeritud juhul tegelikult ainult siis, kui, nagu öeldud, nurk  $\varphi$  ei ole liiga suur. Seega leidub selle nurga  $\varphi$  väärtustel ülemmäär, mille ületamisel tasakaalu enam ei saaks olla. Seda ülemmäära kutsutakse keha  $K$  ja tasa-

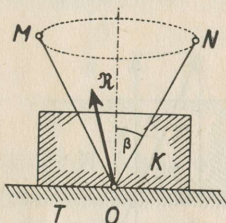


90. joonis.

pinna  $T$  vaheliseks hõõrdumisnurgaks. Hõõrdumisnurga tähisena tarvitame sümbolit  $\beta$ .

Hõõrdumisnurka  $\beta$  saab defineerida suurima teravnurgana, mille reaktsioontung  $\mathfrak{R}$  võib normaaliga moodustada. Veel enam kallutatud reaktsiooni tasapind  $T$  ei suuda kehale  $K$  avaldada. Hõõrdumisnurga  $\beta$  suurus oleneb  $K$  ja  $T$  pindade füüsilistest omadustest. Katsed kinnitavad, et  $\beta$  ei olene mõjuva tungi  $\mathfrak{P}$  suurusest.

Tõmbame  $K$  ja  $T$  ühises kohas  $O$  kõik kiired  $OM$ ,  $ON$  jne., mis  $O$  läbiva normaali suhtes on kallutatud hõõrdumisnurga  $\beta$  võrra. Kõik need kiired koos moodustavad ringkoonuse avausega  $2\beta$ ; seda koonust kutsutakse ka hõõrdumiskoonuseks. Reaktsioonivektor  $\mathfrak{R}$  langeb alati kas selle koonusega piiratud ruumiosa sissepoole (s. t. sinna, kus asetseb ka normaalise), või äärmisel juhul selle koonuse pinnale. Telglõikes annab hõõrdumiskoonus nurga

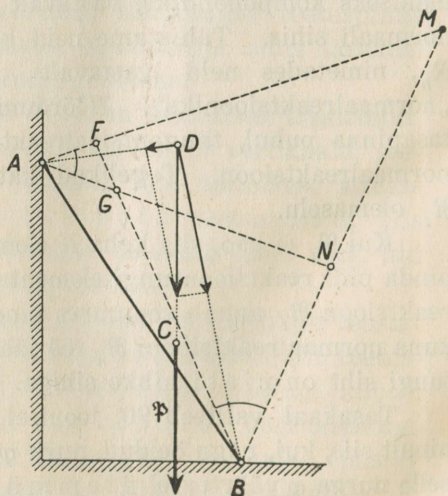


91. joonis.

$$\widehat{MON} = 2\beta.$$

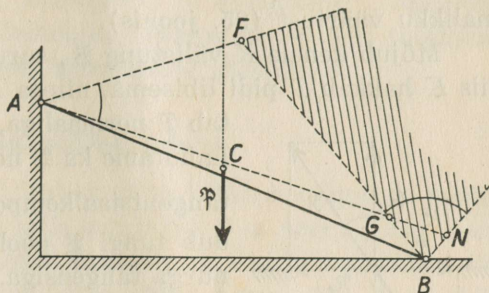
Hõõrdumise olemasolu puhul tasakaal valitseb siis ja ainult siis, kui välistunge saab kompenseerida reaktsioonidega (91. joonis) vastavate hõõrdumiskoonuste piirides.

Selgitava näitena vaatleme vastu seina toetatud redelit  $AB$ , millest inimene kavatseb üles ronida (92. joonis). Olgu redelist ja temal asetsevast inimesest koosneva süsteemi massikese  $C$ , seal rakendatud raskus olgu  $\mathfrak{P}$ . Käsitelles probleemi ainult püsttasapinnas, asendame hõõrdumiskoonused kohtadel  $A$  ja  $B$  vastavate



92. joonis.

avausnurkadega  $\widehat{MAN}$  ja  $\widehat{FBN}$ . Need nurgad ei tarvitse olla võrdsed, sest hõõrdumisnurk seinaga ja redeli kombinatsioonis võib erineda hõõrdumisnurgast maapinna ja redeli kombinatsioonis. Tasakaal valitseb seni, kui  $\mathfrak{F}$  kandesirge läbib avausnurkade haaradega määratud nelinurga  $FMNG$  sisemuse. Tõepoolest, kandesirge  $\mathfrak{F}$  rakenduspunkti seda kandesirget mööda mõnesse meelevaldsesse kohta  $D$  selle nelinurga sisemuses, võime pärast  $\mathfrak{F}$  lahutada komponentideks  $DA$  ja  $DB$  sihis. Neid komponente hävitavadki hõõrdumiskoonuste piiridesse langevad vastavad reaktsioonid kohtades  $A$  ja  $B$ .

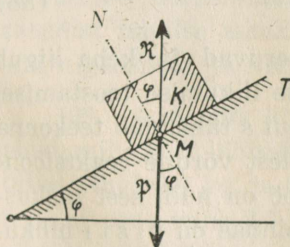


93. joonis.

On redel püstitatud väga kallakult, näiteks nii, nagu see kujutatud 93. joonisel, siis leitud tulemuse järgi redelit pidi ülesronimine peab osutama võimatuks, sest massikese  $C$  nihkub siis ülesronimise juures lubatavast asendist eemale, mille tagajärjel redel peab langema.

Käsiteldud redeli probleemis reaktsioonid punkti  $D$  meelevaldsuse tõttu on „staatiliselt määratud“.

**§ 68. Hõõrdumistegur.** Hõõrdumisnurga mõistet võib näitlikult esile tuua veel kaldpinna  $T$  abil (94. joonis), millele asetatud raske keha  $K$ , eeldades, et kaldpinna ja keha pinna füüsilised omadused on endised. Rakendame kehale  $K$  mõjuva raskustungi  $\mathfrak{F}$  kohas  $M$ , kus  $K$  kaldpinnaga kokku puutub. Nurk  $\mathfrak{F}$  ja kaldpinna normaali  $MN$  vahel on võrdne kaldpinna kaldenurgaga  $\varphi$ . Seni kui  $\varphi$  ei ületa hõõrdumisnurka  $\beta$ , saab  $\mathfrak{F}$  tasakaalustada vastassuunalise kaldreaktsiooniga  $\mathfrak{R}$ . Ületab aga  $\varphi$  selle lubatava ülemmäära  $\beta$ , siis nõutavat kaldreaktsiooni enam tekkida ei saa ja keha  $K$  peab hakkama libisema mööda kaldpinna alla. Järelikult hõõrdumisnurka  $\beta$  võime defineerida ka säärase



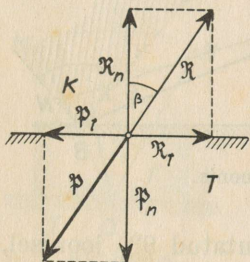
94. joonis.

kaldpinna kaldenurga ülemmäärana, mille ületamisel keha  $K$  parajasti hakkab libisema. Keha  $K$  raskus pole seejuures oluline, sest  $\beta$  ei olene tungi  $\mathfrak{P}$  suurusest.

Tavaliselt määratakse mitte otseselt  $\beta$ , vaid arvu  $\tan \beta$ . Arvu  $f = \tan \beta$  kutsutakse  $K$  ja  $T$  vaheliseks „hõõrdumisteguriks“.

Hõõrdumistegur  $f$  näitab otseselt jagatise  $\frac{|\mathfrak{R}_t|}{|\mathfrak{R}_n|}$  suurimat võimalikku väärtust (95. joonis).

Mõjub kehale  $K$  välistung  $\mathfrak{P}$ , surudes  $K$  vastu tasapinda  $T$ , siis  $K$  hakkab  $T$  pidi libisema, niipea kui nurk, mille  $\mathfrak{P}$  moodustab  $T$  normaalgiga, ületab hõõrdumisnurka  $\beta$ . Lahutame ka  $\mathfrak{P}$  normaalkomponendiks  $\mathfrak{P}_n$  ja tangentsiaalkomponendiks  $\mathfrak{P}_t$ . Suhe  $\frac{|\mathfrak{P}_t|}{|\mathfrak{P}_n|}$  võrdub tungi  $\mathfrak{P}$  poolt normaaliga moodustatud nurga tangensiga. Seega  $K$  libisemine algab, kui



95. joonis.

$$\frac{|\mathfrak{P}_t|}{|\mathfrak{P}_n|} > \tan \beta = f,$$

s. t. kui

$$|\mathfrak{P}_t| > f \cdot |\mathfrak{P}_n|.$$

Olgu horisontaalsele tasapinnale toetuva keha kaaluks  $\mathfrak{R}$ . Tõugates sama keha veel horisontaalses sihis tungiga  $\mathfrak{S}$ , näeme, et sel puhul keha juures rakendatud on kokku teatav välistung  $\mathfrak{P}$ , mille normaal- ja tangentsiaalkomponentideks on parajasti  $\mathfrak{R}$  ja  $\mathfrak{S}$ . Praeguleitud valemist järgneb, et alustatud liikumise alahoidmiseks peab parajasti olema

$$|\mathfrak{S}| = f \cdot |\mathfrak{R}|. \quad (88)$$

Siis nimelt  $\mathfrak{S}$  ja  $\mathfrak{R}_t$  vastastikku kompenseeruvad ja keha liigub ühtlase kiirusega (inerts'i mõjul). Säärase liikumise teostamisel rakendatud tõuketungi  $\mathfrak{S}$  tööks on  $|\mathfrak{S}| \cdot s$ , kui  $s$  tähendab teekonna pikkust. See töö on absoluutväärtuse poolest võrdne reaktsioonitungi  $\mathfrak{R}_t$  poolt tehtud tööga. Raskuse  $\mathfrak{R}$  töö on null, sest raskustungi siht keha libisemisel horisontaalses pinnas on risti nihkumise suunaga.

Märkus: Ka veeremise puhul tuleb tegelikult ilmsiks hõõrdumine, mis väljendub selles, et näiteks normaaltungiga  $\mathfrak{R}$  vastu horisontaalset pinda surutud ratas hakkab veerema ainult säärase lisatungi mõjul, mille moment toetuspunktis ületab tea-

tava alammäära. Staatika põhimõttel momenti saab asendada sobivalt valitud tungipaariga. Olgu selle tungipaari telg tähistatud sümboliga  $\mathfrak{M}$ . Veeremine algab, kui

$$|\mathfrak{M}| > \delta \cdot |\mathfrak{R}|,$$

kus koefitsienti  $\delta$  võib, nagu katsed kinnitavad, lugeda sõltumatuks suurusest  $\mathfrak{R}$  ja ratta raadiusest.  $\delta$  kutsutakse „veeremise hõõrdumisteguriks“. Hõõrdumine veeremisel on alati tunduvalt väiksem kui samade kehade hõõrdumine libisemisel.

### Harjutusülesandeid.

106. 57 kg raske kast libiseb 13 m pikkust kaldpinda mööda alla; rõhtsihis nihkub kast selle tagajärjel 8 m võrra. Kui suure töö on kasti nihkumisel teinud raskustung, kui hõõrdumist mitte arvestada? Näidata, et töö oleks olnud sama, kui kast oleks langenud otse vertikaali sihis samalt kõrguselt.

107. Punkt  $A$  on  $h$  meetri võrra kõrgem punktist  $B$ . Raske ese, mille kaal on  $P$  kg, libiseb mingisugust teed mööda punktist  $A$  punktisse  $B$ . Näidata, et sel puhul raskustungi poolt tehtud töö on igal juhul  $Ph$  kilogramm-meetrit, olenemata sellest, millist teed mööda on toimunud liikumine. (Näpunäide: vaadelda elementaarnihke projektsiooni vertikaalile ja summeerida need projektsioonid, toetudes geomeetrilistele kaalutlustele.)

108. Telliskivi dimensioonid on  $6,5 \times 12 \times 25$  cm, kaal on 3,4 kg. Arvutada töö, mis tuleb teha lauale toetuva telliskivi pööramisel horisontaalse serva ümber stabiilse tasakaalu algasendist labiilse tasakaalu lõppasendini. Vaadelda kõik võimalikud algasendid ja võrrelda tulemusi protsentuaalselt.

109. 4 m pikk köis kaalub 3 kg. Köis on visatud üle lihtploki, mille rulli läbimõõt on 30 cm. Köie otstesse  $A$  ja  $B$  on kinnitatud vihid 0,9 kg ja 1,5 kg vastavalt. Alghetkel on  $A$  ja ploki telje nivoode vahe 2,5 m. Sellest asendist alates lubatakse köiele vihtide mõjul liikuda seni kui ploki rull on teinud 2 tiiru. Arvutada köiest ja vihtidest koosneva süsteemi juures raskustungi poolt tehtud kogutöö.

110. Ülevaalt lahtine kuubikujuline anum, mille maht on 8 liitrit, on pooleni täidetud veega. Anumat kallutatakse põran-

dal nõnda, et vesi parajasti hakkab servast üle voolama. Arvestame seejuures kaht kallutamiskiisi: a) säärast, kus anuma üks serv jääb põrandale; b) säärast, kus ainult üks tipp jääb põrandale, ning seejuures üks diagonaaltasapind jääb püsti. Kumba kallutamiskiisi puhul tarvilik töö on suurem ja mitme % võrra nimelt? (Anuma enda kaal jäägu arvestamata.)

111. Rakendada võimalikkude nihete printsiip kiilu ja kruvi tasakaalu tingimuste leidmiseks.

112. Rakendada võimalikkude nihete printsiip mitmetüübiliste liitplokkide tasakaalu tingimuste leidmiseks.

113. Millega on seletatav, et keemikute kaalud näitavad õigesti, olgugi et nad on rajatud lihtsa kangi põhimõttele?

114. Määrata diferentsiaalploki hammasrataste dimensioonid nõnda, et koormis oleks tasakaalustavast tungist 10 korda suurem, väiksema hammasratta kaal oleks suurema ratta kaalust 10% võrra väiksem, lugedes rataste paksused võrdseiks ja nende profiilid geomeetriliselt sarnasteks.

115. Raske ühtlane koonus toetub horisontaalsele lauale. Kirjeldada tasakaalu asendid, nimetades iga kord tasakaalu liik.

116. Raske ühtlane ellipsoid kolme erineva peateljega toetub horisontaalsele lauale. Kirjeldada tasakaalu asendid ja määrata iga kord vastav tasakaalu liik.

117. Kuubiline, ühtlaselt täidetud kinnine kast, mille väliskülje pikkus on 80 cm, kaalub koos täidisega 130 kg. Töölistele on tehtud ülesandeks nihutada kast horisontaalsel pinnal teisele kohale, mis asub endisest 16 m kaugusel. Milline peaks olema kasti ja maapinna vaheline hõõrdumisnurk, et kasti lohistamiseks pinda mööda kulukuks niisama palju tööd, kui kulub kasti transportimiseks nõutavale kohale, veeretades ta järjest üle serva.

118. Tööline nihutab 100 kg raske kasti 18 m pikkust kaldpinda mööda alla, kusjuures kõrgusnivoode vahe alg- ja lõpupunkti vahel on 2 m. Hõõrdumisnurk kasti ja kaldpinna vahel on  $20^\circ$ . Arvutada töölise poolt tehtud töö kilogramm-meetrites.

119. Kui suur oleks töö eelmise ülesande andmeil juhul, kui kasti tuleb lükata kaldpinda mööda alt üles?

120. 2,5 m pikk ahel, mis kaalub 20 kg, on visatud põigiti üle 1,5 m laia ja 80 cm kõrge laua ja hakkab parajasti libisema, kui ahela ots on põrandast 25 cm kaugusel. Arvutada hõõrdumisnurk ja hõõrdumistegur ahela ja laua vahel. Arvutada ahela juures rakendatud välistungide kogutöö alghetkest kuni ajani, kus ahel on tervena põrandal.

121. Kaks ühepikkust 8-tollist palki on teineteise kõrvale pandud horisontaalsele aluspinnale, nii et nad pikuti kokku puutuvad. Neile kahele on peale pandud kolmas samasugune palk, mis jällegi terves pikkuses kokku puutub nii esimese kui ka teisega. Kui suured vähemalt peavad olema hõõrdumisnurk ja hõõrdumistegur palgi ja aluspinna vahel, et need kolm palki püsiksid selles asendis? (Palke käsitella silindritena.)

122. Kui tugevasti vähemalt peaks suruma lametangidele, soovides nendega hoida igas asendis eset, mille raskus on 3 kg. ja mille hõõrdumisteguriks tangide suhtes võib lugeda halvemal juhul 0,2? Tangide käepoolse öla pikkusena võtta 20 cm ja eseme-poolse osa pikkusena 5 cm.

123. Vilumata löögi tagajärjel kirves on tunginud ainult üsna vähe puuhalu sisse ning jäänud seal kinni, nii et 9 kg raske halg ripub kirve otsas. Olgu kirvetera poolt moodustatud kiilu nurgaks  $10^\circ$  ja hõõrdumisteguriks puu ja kirve vahel 0,1. Kui suur vähemalt on säärasel juhul halu külgsurve kirvele?

124. 5 tonni kaaluv veoauto pidurdatakse teel, mille kalle on 0,08. Kui suur vähemalt peaks olema hõõrdumisnurk rattakummi ja maantee vahel, et pidurdamine säärase kaldega teel üldse oleks võimalik? Kui suur on alghetkel pidurdav tung, kui hõõrdumisnurk on sellest alammäärast 4 korda suurem?

125. 60 cm läbimõõduga silindrilise 1,2 m pika teerulli liikvelepanemiseks tuleb tema telje külge rakendada horisontaalne tung 30 kg. Arvutada veeremise hõõrdumistegur  $\delta$ , lugedes rulli massiivseks erikaaluga 2,5.