

S. FILITŠEV
G. MORDKOVITŠ
A. POGORELOV

ISESEISVAD TÖÖD
ELEMENTAAR-
MATEMAATIKAS

ÕPETAJATE
INSTITUUTIDELE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

ISESEISVAD TÖÖD ELEMENTAARMATEMAATIKAS

ÕPETAJATE INSTITUUTIDE KAUGÕPPEOSAKONNA
ÜLIÕPILASTELE



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950 TARTU

Metoodilisi näpunäiteid aritmeetikas ja algebras S. Filitšev.
Metoodilisi näpunäiteid geomeetrias G. Mordkovitš.
Harjutusi ülesannete lahendamiseks A. Pogorelov.

Originaali tiitel:

Самостоятельные занятия по элементарной математике. Сборник для заочников учительских институтов. Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР. Москва, 1948.

Tõlkinud I. Uibo.

2 ✓

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

8494

I. METOODILISI NÄPUNÄITEID ISESEISVAKS TÖÖKS ARITMEETIKAS JA ALGEBRAS.

Kaugõppeosakonna üliõpilaste õppeprotsessis omab otsustavat tähtsust iseseisev töö kursusekava ulatuses.

Eriti peab kaugõppe üliõpilane organiseerima iseseisvalt töö aritmeetikas ja elementaaralgebras ning omandama esmajärjekorras aritmeetiliste ja algebraliste ülesannete lahendamise tehnika.

ARITMEETIKA.

Vene NFSV Haridusministeeriumi matemaatikaprogrammi (1946. a.) seletuskirjas on öeldud, et aritmeetika õpetamise eesmärk on õpetada õpilasi teostama tehteid täis- ja murdarvudega arusaamisega, kiiresti, kindlalt ja võimalikult ratsionaalselt ning kasutama neid teadmisi ülesannete lahendamiseks ja lihtsamateks praktilise iseloomuga arvutusteks. Edasi lisatakse, et V klassis tuleb pöörata suurt tähelepanu ülesannete lahendamisele täis- ja murdarvudega. Ülesannete sisuks olgu üldtuntud sõltuvused, nagu näiteks: sõltuvus hinna, väärtuse ja hulga vahel, kiiruse, tee ja aja vahel jne.

Tüüpülesandeist vaadeldakse ülesandeid kahe arvu leidmiseks nende summa ja vahe järgi; nende suhte ja summa või vahe järgi; ülesandeid, mis lahendatakse ühe tundmatu kõrvaldamise teel asendusviisiga või andmete võrdsustamisviisiga, ja teisi.

Iga märgitud tüübi kohta tuleb lahendada ülesandeid mitmesuguse sisuga: liikumise, segude, koostöö, basseini ülesandeid jne.

Vene metoodilises kirjanduses on olemas materjale aritmeetiliste ülesannete lahendamise metoodikast, eriti algkooliõpetajaile. See kirjandus aitab algajat õpetajat, kuid sellest on vähe.

Ainult siis saab aritmeetika õpetamine kulgeda normaalselt, kui õpetaja ise oskab hästi ülesandeid lahendada, orienteerub sel-

gelt aritmeetiliste ülesannete põhitüüpides ja, mis peaasi, aritmeetiliste ülesannete lahendamise meetodeis.

Õpetaja peab oskama lahendada igasugust ülesannet aritmeetikast kaasaja aritmeetiliste ülesannete kogudest *.

Edaspidistes metoodilistes juhendites toetume peaausjalikult aritmeetiliste ülesannete kogule „Сборник арифметических задач для педучилищ Филичева и Чекмарева” (3 издание 1941 г.).

§ 1. Numbriliste ülesannete lahendamine.

Aritmeetiliseks ülesandeks nimetatakse igasugust küsimust, millele vastuse saamiseks tuleb kahe või mitme arvu põhjal leida uus arv. Otsitavat arvu nimetatakse otsitavaks, aga ülesandes tuntud arve — andmeteks.

Kui ülesandes on otseselt näidatud tehted, mis on tarvis teha antud arvudega otsitava arvu saamiseks, siis nimetatakse niisugust ülesannet numbriliseks ülesandeks ehk harjutuseks

Pärisülesandeks nimetatakse sellist küsimust, kus andmed ei osuta, milliseid tehteid tuleb teha antud arvudega, et saada otsitav arv.

Harjutusi leidub kõigis aritmeetiliste ülesannete kogudes. Harjutuste lahendamine annab õpilastele oskuse arusaamisega, kiiresti ja võimalikult ratsionaalselt teha tehteid täis- ja murdarvudega. Harjutuste lahendamisel on nõutav üleskirjutuste õige asetus, tehete järjekorra seletus ja arvutuste seletus.

Harjutuse

$$\frac{3 \cdot 6 \frac{1}{2} - 11 \frac{1}{5} : 9 \frac{1}{3}}{14 : 2 \frac{2}{9} + 8 \frac{2}{5} \cdot 14 \frac{2}{7}}$$

lahendamisel seletatakse esiteks tehete järjekord: et leida resultaat antud harjutuses, leiame arvude 3 ja $6\frac{1}{2}$ korrutise, leitud kor-

* 1) Филичев С. В. и Чекмарев Я. Ф., Сборник арифметических задач для педучилищ, 4 издание, 1946 г.

2) Березанская Е. С., Сборник задач и упражнений по арифметике, издания 1939—1944 гг.

3) Каменский и Либерман, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1939 г.

rutisest lahutame arvude $11\frac{1}{5}$ ja $9\frac{1}{3}$ jagatise, siis leiame arvude 14 ja $2\frac{2}{9}$ jagatise ning liidame selle arvude $8\frac{2}{5}$ ja $14\frac{2}{7}$ korrutisega, lugejas saadud vahe jagame nimetajas saadud summaga.

Lahendamise üleskirjutus korraldatakse harilikult küsimuste järgi (sammude viisi):

$$1) 3 \cdot 6\frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}; \quad 2) 11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3} = \frac{56 \cdot 3}{5 \cdot 28} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5};$$

$$3) 19\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5} = 18\frac{3}{10}; \quad 4) 14 : 2\frac{2}{9} = 6\frac{3}{10};$$

$$5) 8\frac{2}{5} \cdot 14\frac{2}{7} = 120 \text{ jne.}$$

Mõnikord tehakse üleskirjutus võrduste reana:

$$\frac{3 \cdot 6\frac{1}{2} - 11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3}}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 14\frac{2}{7}} = \frac{19\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}}{6\frac{3}{10} + 120} = \frac{18\frac{3}{10}}{126\frac{3}{10}} = \frac{183 \cdot 10}{10 \cdot 1263} = \frac{61}{421}.$$

Vahel on kasulik arvutus varustada seletusega. Näiteks on tarvis $11\frac{1}{5}$ jagada $9\frac{1}{3}$ -ga. Et jagada segaarv segaarvuga, teisendame segaarvud liigmurdudeks, ja et jagada murd murruga, selleks jne.

On väga tarvilik peatuda „ x -ga” harjutuste lahendamisel kui headel harjutustel seoste kohta nelja aritmeetikatehte komponentide vahel.

Näiteks:

$$\left(\frac{1\,000\,000 - x \cdot 7}{8} \cdot 5 + 529\,210 \right) \cdot 10 - 9\,999\,999 = 1,$$

on tarvis leida x .

Lahendus.

1) Vähendatav on võrdne lahutatavaga, mis on liidetud vahega:

$$\left(\frac{1\,000\,000 - x \cdot 7}{8} \cdot 5 + 529\,210 \right) \cdot 10 = 9\,999\,999 + 1 = 10\,000\,000.$$

2) Korrutatav võrdub korrutisega, mis on jagatud korrutajaga:

$$\frac{1\,000\,000 - x \cdot 7}{8} \cdot 5 + 529\,210 = 1\,000\,000.$$

3) Liidetav on võrdne summaga ilma teise liidetavata:

$$\frac{1\,000\,000 - x \cdot 7}{8} \cdot 5 = 1\,000\,000 - 529\,210 = 470\,790.$$

4) Korrutatav võrdub korrutisega, mis on jagatud korrutajaga:

$$\frac{1\,000\,000 - x \cdot 7}{8} = 470\,790 : 5 = 94\,158.$$

5) Jagatav on võrdne jagajaga, mis on korrutatud jagatisega:

$$1\,000\,000 - x \cdot 7 = 8 \cdot 94\,158 = 753\,264.$$

6) Lahutatav on võrdne vähendatavaga ilma vaheta:

$$7x = 1\,000\,000 - 753\,264 = 246\,736.$$

7) Korrutaja on võrdne korrutisega, mis on jagatud korrutatavaga:

$$x = 246\,736 : 7 = 35\,248.$$

Vastus: $x = 35\,248$.

Harjutusi. Lahendada aritmeetiliste ülesannete kogust (Филичев и Чекмарев — для педучилищ, 3 изд. 1941 г.) järgmised ülesanded: 389, 390, 391, 392, 393, 398, 399, 400, 1653, 1656, 1657, 2167, 2266, 2269.

§ 2. Lihtülesandeid.

Kui aritmeetiline ülesanne lahendub ühe tehtega, nimetatakse seda ülesannet lihtülesandeks. Lihtülesanded selgitavad ühe või teise tehte mõistet, tutvustavad tehete kasutamise mitmesuguste juhtudega. Toome näiteks mõned ülesanded, mis lahendatakse ühe tehtega.

a) Õpilane ostis ruudulisi ja joonelisi vihikuid, kusjuures ta ruudulisi ostis 12 võrra rohkem kui joonelisi. Kui palju ruudulisi vihikuid peab ära tarvitama, et neid jääks 7 võrra vähem kui joonelisi?

Vastus: 19 vihikut.

b) Isa on emast 4 aasta võrra vanem ja tütrest 28 aasta võrra vanem. Mitme aasta võrra on tütar emast noorem?

Vastus: 24 aasta võrra.

c) Kahes kassas oli kummaski 3452 rbl. Ühest kassast anti välja mingi summa, teisest anti välja 750 rbl. võrra vähem üle-

jäägist esimeses kassas. Kui palju raha jäi järele kahes kassas kokku?

Vastus: 4202 rbl.

d) Kui tööle panna 3 korda rohkem töölisi ja sellesama tööliste arvuga töötada ühe vahetuse asemel kahes vahetuses, mitu korda kiiremini lõpetatakse siis töö sama töötootlikkuse juures?

Vastus: 6 korda.

§ 3. Puhtaritmeetilisi liitülesandeid.

Kui ülesanne nõuab lahendamiseks rohkem kui ühe tehte, nimetatakse niisugust ülesannet liitülesandeks. Liitülesande lahendamisel tuleb ülesanne jaotada lihtülesandeiks ning siis lahendada need lihtülesanded.

Liitülesande jaotamist lihtülesandeiks ja nende lahendamise järjekorra näitamist nimetatakse ülesande lahendamisplaani koostamiseks. Lahendamisplaani koostamisel liitülesande lahendamiseks võib arutleda järgmiselt: alustatakse ülesandes antud arvudega, seejärel tehakse kindlaks, milliseid tehteid tuleb teha nii ülesandes antud arvudega kui ka arvutamisel saadud arvudega, et jõuda otsitava arvuni (sünteeiline liitülesande arutlusvõte, süntees — otsene arutlusviis).

Kuid liitülesande lahendamisel võib plaani koostamisel arutluskäik olla ka ümberpööratud, — lähtudes otsitavast arvust teha kindlaks, mida on tarvis teada, et leida otsitav arv (analüütiline liitülesande arutlusvõte, analüüs).

Olgu antud ülesanne: Osteti fotoaparaat, pikksilm ja pianiino. Fotoaparaat maksab 180 rbl., pikksilm on 6 korda odavam kui fotoaparaat, pianiino aga maksab 10 korda rohkem kui fotoaparaat ja pikksilm kokku. Kui palju rublasid kulutati kogu ostuks?

Sünteeiline liitülesande arutlusvõte (süntees).

Fotoaparaat maksab 180 rbl., pikksilm on aga 6 korda odavam; seepärast, kui 180 jagada 6-ga, võib teada saada, kui palju maksab pikksilm. Saanud teada pikksilma hinna ja teades ülesande andmeist fotoaparaadi hinda, saame teada, kui palju maksavad fotoaparaat ja pikksilm kokku, kui liidame fotoaparaadi ja pikksilma leitud hinna. Leidnud fotoaparaadi ja pikksilma hinna kokku, võime leida pianiino hinna, selleks on tarvis korrutada

fotoaparaadi ja pikksilma hinna summa 10-ga. Teades iga ostetud eseme hinda, võime teada saada kogu kulutuse summa, kui liidame iga üksikeseme hinna.

Sünteesi puhul tuleb hästi osata võrrelda ja valida andmeid ülesandest ning andmete järgi koostada küsimusi. Esimese lihtülesande lahendus annab uue arvu, mis kombineeritakse kasutamata andmetega ülesandest jne., kuni saadakse vastus ülesande küsimusele.

Analüütiline liitülesande arutlusvõtte (analüüs).

Et leida, mitu rubla on kulutatud ostuks, peame teadma iga eseme hinna eraldi. Fotoaparaadi hind on teada. Pianiino hinda aga ei tea, ülesandest on teada, et pianiino hind on 10 korda suurem fotoaparaadi ja pikksilma hinna summast. Kuid pikksilma hinda me ülesandes ei tea. Järelikult tuleb esialgu teada saada pikksilma hind, mis on 6 korda odavam fotoaparaadi hinnast. Niisiis, et vastata ülesande küsimusele, leiame esiteks pikksilma hinna, seejärel fotoaparaadi ja pikksilma hinna kokku jne.

Analüüsi puhul eraldatakse esijoones teatud järjekorras kõik lihtülesanded, ja alles pärast seda algab eraldatud lihtülesannete lahendamine.

Ülesande lahenduse üleskirjutamise vormid.

Pärast ülesande lahendamisplaani koostamist on tarvis üles kirjutada lahendused.

Toome üleskirjutuste põhivormid.

Ülesanne: On ostetud 10 m sitsi — 7 rbl. 20 kop. meeter ning 12 m linast riiet 8 rbl. 50 kop. meeter. Kui palju raha kulutati ostuks?

1. Arvutused ilma selgitava tekstita:

1) $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 = 72 \text{ rbl.}$

2) $8 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} \times 12 = 102 \text{ rbl.}$

3) $72 \text{ rbl.} + 102 \text{ rbl.} = 174 \text{ rbl.}$

Vastus: 174 rbl.

2. Lahenduse üleskirjutus numbrilise valemina:

$7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 + 8 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} \times 12 = 174 \text{ rbl.}$

3. Lahenduse üleskirjutus küsimustega:

1) Kui palju maksab sits? $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 = 72 \text{ rbl.}$

2) Kui palju maksab linane? $8 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} \times 12 = 102 \text{ rbl.}$

3) Kui palju raha kulutati ostuks? $72 \text{ rbl.} + 102 \text{ rbl.} = 174 \text{ rbl.}$

Vastus: 174 rbl.

4. Lahenduse üleskirjutus vastuste vormis:

1) Sitsi hind: $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 = 72 \text{ rbl.}$

2) Linase hind: $8 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} \times 12 = 102 \text{ rbl.}$

3) Ostuks kulutati: $72 \text{ rbl.} + 102 \text{ rbl.} = 174 \text{ rbl.}$

5. Üleskirjutus selgitava tekstiga tehte lõpus:

1) $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 = 72 \text{ rbl.}$ maksab sits.

2) $8 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} \times 12 = 102 \text{ rbl.}$ maksab linane jne.

6. Lahenduse üleskirjutus kogu lahendusprotsessi üksikasjalise seletusega.

Et teada saada, kui palju raha kulutati ostuks, on tarvis teada, kui palju raha kulutati sitsi ostmiseks ja kui palju linase riide ostmiseks. Et sitsi osteti 10 m, 7 rbl. 20 kop. meeter, siis kogu sitsi hinna teadasaamiseks tuleb $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.}$ korrutada 10-ga; $7 \text{ rbl. } 20 \text{ kop.} \times 10 = 72 \text{ rbl.}$ jne.

Ülesande lahenduse kontroll.

Kui kõiki tehteid arvudega on tarvis kontrollida, siis seda tarvilikum on kontrollida saadud resultaati liitülesande lahendamisel, sest ainult lahenduse kontroll avastab tehtud vea. Ülesande lahendust võib kontrollida kahel viisil:

1) uurida, kas saadud vastus rahuldab ülesande tingimusi või

2) koostada uus ülesanne, võttes saadud vastuse üheks andmeks.

Kontroll esimesel viisil. Kolmes kastis on 54,8 ts. kartuleid. Esimeses on 1,9 ts. vähem kui teises, teises aga on 12,9 ts. vähem kui kolmandas. Kui palju kartuleid on igas kastis?

Vastus: 12,7 ts.; 14,6 ts.; 27,5 ts.

Ülesande tingimuste kohaselt on esimeses kastis 1,9 ts. vähem kui teises, ja tõepoolest: $14,6 \text{ ts.} - 12,7 \text{ ts.} = 1,9 \text{ ts.}$ Teises kastis on 12,9 ts. vähem kui kolmandas, ja tõepoolest: $27,5 \text{ ts.} - 14,6 \text{ ts.} = 12,9 \text{ ts.}$ jne.

Kontroll teisel viisil. Kolm niidumasinat niidavad väheldase aasa $1\frac{3}{5}$ tunniga. Kui kiiresti võiks selle näita kolmas niidumasin, kui on teada, et esimene niidab aasa 8 tunniga ja teine 6 tunniga?

Vastus: 3 tunniga.

Kontrolliks koostame sellise ülesande:

Kolm niidumasinat niidavad aasa $1\frac{3}{5}$ tunniga. Kui kiiresti niidaks selle esimene niidumasin, kui on teada, et teine niitis 6 tunniga ja kolmas 3 tunniga?

Vastus: 8 tunniga, s. o. saadi arv, mis oli kõrvaldatud antud ülesande andmetest.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele (sünteesi või analüüsiga ja koos kontrolliga) lahendada järgmised ülesanded: 188, 189, 745, 884, 886, 887.

§ 4. Tüüpülesanded.

Võtame ülesanded:

a) 38 kootud mütsi ja 45 kaelasalli jaoks kulus 15 kg 640 g villa. Mütsile ja kaelasallile läheb kokku 360 g villa. Kui palju villa läheb eraldi mütsile ja kaelasallile?

b) Hariliku kiiruse puhul sõidab kaubarong Moskvast Novosibirskisse 141 tundi. Sama teekonna võib ta sooritada 69 tunniga, kui suurendada kiirust 24 km võrra tunnis. Mitu km on Moskvast Novosibirskisse?

Kasutades nende ülesannete juures tavalisi sünteesi- või analüüsivõtteid, jõuame ülesseatud sihile aeglaselt ning ülesande lahendamisplaani me ei koosta. Et lahendada eespool toodud ülesandeid, tuleb kasutada erilisi võtteid (meetodeid), mis on rakendatavad ainult üksikuil erijuhtudel.

Seepärast jaotatakse aritmeetilised ülesanded kahte gruppi: puhtaritmeetilised ülesanded nii otsese lahenduskäiguga kui ka vastupidise lahenduskäiguga, millede lahendamiseks on küllaldane kasutada tavalisi sünteesi- ja analüüsivõtteid ning kus nõutakse täpset arusaamist arvude võrdlemisest nende vahe ja suhte abil.

Teine ülesannete grupp on tüüpülesanded. Tüüpülesannete all me mõistame niisuguseid liitülesandeid, millede lahendamiseks kasutatakse erivõtteid. Võtame vaatluse alla tavalised tüüpüles-

anded, milliseid esineb koolipraktikas. Ülesannete tüüpideks jaotamise aluseks on aritmeetiline sisu, seejuures on suurt tähelepanu osutatud lahendamise meetodeile.

1. Ülesandeid nelja aritmeetilise tehte komponentide ja resultaatide vahelistele seostele.

1. Tehases on 6 tsehhi. Esimeses, teises ja kolmandas tsehhis on kokku 270 tööpinki. Neljandas tsehhis on 22 tööpinki vähem kui esimeses, viiendas 29 võrra rohkem kui teises ja kuuendas 15 võrra vähem kui kolmandas. Mitu tööpinki on kogu tehases?

Lahendus. Tööpinkide arv esimeses, teises ja kolmandas tsehhis on kokku 270, s. o. kolme liidetava summa; neist esimene vähenes 22 võrra, teine suurenes 29 võrra ja kolmas vähenes 15 võrra. Uus summa — tööpinkide arv neljandas, viiendas ja kuuendas tsehhis — peab olema $270 - 22 + 29 - 15 = 262$ tööpinki.

$$270 - 22 = 248; 248 + 29 = 277; 277 - 15 = 262 \text{ (tööpinki).}$$

Vastus: 262 tööpinki.

2. Istutatud puudest kuivasid ära 38 kaske ja 19 kuuske. Pärast seda jäi kaski 18 puu võrra rohkem kui kuuski. Kumba puuliiki oli istutatud rohkem?

Lahendus. Istutatud kaskede ja kuuskede arvude vahe vähenes 38 võrra (vähendatav vähenes 38 võrra) ja suurenes 19 võrra (lahutatav vähenes 19 võrra), lõppkokkuvõttes vähenes $38 - 19 = 19$ võrra: vahe on $18 + 19 = 37$.

Vastus: kaski oli istutatud 37 võrra rohkem kui kuuski.

3. Lahutamistehte teostamisel tahvlil kustusid ära mõned numbrid, seetõttu jäi tahvlile lahendamisest järgmine pilt:

$$\begin{array}{r} 274? \\ - 1??83 \\ \hline 73265 \end{array}$$

Taastada puuduvad numbrid.

- L a h e n d u s. 1) $? - 3 = 5$; vähendatava üheliste arv on 8;
2) $6 - ? = 2$; lahutatava sajaliste arv on 4 jne.

$$\begin{array}{r} \text{V a s t u s:} \quad 92748 \\ \quad \quad \quad 19483 \\ \hline \quad \quad \quad 73265 \end{array}$$

4. Kahe arvu korrutis on 345; ta väheneb 69 võrra, kui korrutajat vähendada 3 võrra. Leida korrutatav ja korrutaja.

L a h e n d u s. Kui korrutajat vähendada 3 võrra, väheneb korrutis kolmekordse korrutatava võrra. Korrutatav on $69 : 3 = 23$; korrutaja on $345 : 23 = 15$.

V a s t u s: 23 ja 15.

5. Kui tundmatu arv jagada 7-ga ja jagatis liita jagatavaga ja jagajaga, saame 263. Leida arv.

L a h e n d u s. Jagaja võrdub 7-ga. Seitsmes osa jagatavast, liidetud jagatava ja arvu 7-ga, on võrdne 263-ga. Siit liidetav — seitse kaheksandikku jagatavast — on võrdne summaga 263 ilma teise liidetava 7-ta;

$$263 - 7 = 256; \quad 256 : 8 = 32; \quad 32 \cdot 7 = 224.$$

V a s t u s: 224.

6. Ühel koormal oli kaupa 8,5 ts. võrra rohkem kui teisel; kui mõlemale koormale lisati kaupa, siis esimesel oli ainult 7,1 ts. võrra rohkem kui teisel. Kui palju kaupa lisati teisele koormale, kui esimesele lisati 4,7 ts.?

L a h e n d u s.

1) $8,5 \text{ ts.} + 4,7 \text{ ts.} = 13,2 \text{ ts.}$ (vahe suurenes 13,2 võrra);

2) $13,2 \text{ ts.} - 7,1 \text{ ts.} = 6,1 \text{ ts.}$ (lahutatav suurenes 6,1 võrra).

V a s t u s: 6,1 tsentnerit.

7. Kuidas muutub murru väärtus, kui murru lugejale lisada $\frac{3}{5}$ lugejast, nimetajast aga lahutada $\frac{3}{8}$ nimetajast?

L a h e n d u s. Lugeja on suurendatud $\frac{8}{5}$ korda, nimetaja on vähendatud $\frac{8}{5}$ korda; murd suurenes $\frac{8}{5} \cdot \frac{8}{5} = 2\frac{14}{25}$ korda.

V a s t u s: murd suurenes $2\frac{14}{25}$ korda.

8. Õpilasel oli tarvis liita kaks kümnendmurdu. Ta eksis ja asetaskoma suuremas arvus nõutavast kahe numbri võrra vasa-

kule ja sai summa 27,8986, kuna õige summa on 400. Leida liidetavad.

Lahendus. Koma viimisega kahe numbri võrra vasakule vähendas õpilane üht liidetavat 100 korda ehk 0,99 võrra tema suurusest. Summa vähenes samavõrra. Seepärast $400 - 27,8986 = 372,1014$ on 0,99 liidetavast. Leiame liidetava: $372,1014 : 0,99 = 375,86$. Teine liidetav on $400 - 375,86 = 24,14$.

Vastus: 375,86; 24,14.

9. Antud on kaks arvu: $10\frac{2}{3}$ ja $4\frac{1}{2}$. Mitu korda on tarvis $10\frac{2}{3}$ -le lisada $\frac{1}{48}$ ja niisama palju kordi lahutada $4\frac{1}{2}$ -st $\frac{1}{12}$, et uute arvude vahe oleks $8\frac{1}{4}$?

Lahendus.

1) Antud arvude vahe on $10\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2} = 6\frac{1}{6}$.

2) Vahe suureneb $8\frac{1}{4} - 6\frac{1}{6} = 2\frac{1}{12}$ võrra.

3) Kui lisada üks kord vähendatavale $\frac{1}{48}$ ja lahutada lahutatavast $\frac{1}{12}$, suureneb vahe $\frac{1}{48} + \frac{1}{12} = \frac{5}{48}$ võrra.

4) Vahe suureneb $2\frac{1}{12}$ võrra, kui vähendatavas ja lahutatavas teha muudatusi $2\frac{1}{12} : \frac{5}{48} = 20$ korda.

Vastus: 20 korda.

Harjutusi. Ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele lahendada iseseisvalt järgmised ülesanded: 398, 399, 400, 576—588, 801, 805, 811, 896, 936, 1369, 1463, 1570, 1572, 1588, 1656, 1657, 1773, 2106, 2273, 2274, 2292, 2303, 2387.

2. Ülesandeid kahe või mitme arvu leidmiseks nende summa ja vahe järgi (arvu jaotamine mittevõrdseteks osadeks).

1. Raamatukogus oli 6500 raamatut vene, prantsuse ja saksa keeles. Prantsusekeelseid raamatuid oli 2560 võrra vähem kui venekeelseid ja saksakeelseid 220 võrra rohkem kui prantsusekeelseid. Kui palju raamatuid igast liigist oli raamatukogus?

Lahendus. Et leida raamatute arv igast liigist, on tarvis esiteks teada raamatute arv mingisuguses ühes liigis; siis, kasu-

tades andmeid arvude vahekorra kohta, leiame raamatute arvu kahes ülejäänud liigis. Ülesanne lahendatakse kolme tundmatu arvu võrdsustamise meetodiga. Tundmatuks arvuks, mille kindlakstegemisega tuleb alustada ülesande lahendamist, võib võtta ükskõik millise kolmest otsitavast arvust. Võrdsustame näiteks prantsuskeelsete raamatute arvu vene- ja saksakeelsete raamatute arvuga. Ülesande andmete järgi on prantsusekeelsete raamatute arv 2560 võrra väiksem kui venekeelsete raamatute arv ja 220 raamatu võrra väiksem kui saksakeelsete raamatute arv. Et võrdsustada kõik need kolm arvu prantsusekeelsete raamatute arvuga, on tarvis venekeelsete raamatute arv vähendada 2560 võrra ja saksakeelsete oma 220 võrra.

1) Kui palju väheneks raamatute üldhulk raamatukogus, kui venekeelsete raamatute arvu vähendada 2560 võrra ja saksakeelsete oma 220 võrra? $2560 + 220 = 2780$ (raamatut).

2) Kui suur oleks raamatute üldarv raamatukogus, kui kõigis kolmes keeles oleks raamatuid sellisel hulgal nagu prantsuse keeles? $6500 - 2780 = 3720$ (raamatut).

3) $3720 : 3 = 1240$ (prantsusekeelseid raamatuid).

4) $1240 + 2560 = 3800$ (venekeelseid raamatuid).

5) $1240 + 220 = 1460$ (saksakeelseid raamatuid).

2. 940 rbl. eest osteti laud, diivan, peegel ja pesukapp. Diivan on 120 rbl. võrra lauast odavam, peegel 40 rbl. võrra diivanist kallim ja pesukapp 60 rbl. võrra peeglist odavam. Kui palju maksis iga ese?

L a h e n d u s. Lahendame ülesande, oletades, et 4 eseme hind on võrdne laua hinnaga. Siis esemete üldhind suureneks $120 + 80 + 140 = 340$ (rbl.) võrra, sest peegel on lauast odavam $120 - 40 = 80$ (rbl.) võrra, pesukapp aga on lauast odavam $60 + 80 = 140$ (rbl.) võrra. Esemete üldhind oleks $940 + 340 = 1280$ (rbl.). Laua hind on $1280 \text{ rbl.} : 4 = 320$ rbl.; diivani hind on $320 \text{ rbl.} - 120 \text{ rbl.} = 200$ rbl. jne.

3. Kolmel vennal oli mingisugune rahasumma: esimesel ja teisel kokku 600 rbl.; teisel ja kolmandal kokku 500 rbl.; kolmandal ja esimesel kokku 700 rbl. Kui palju raha oli igal vennal üksikult?

L a h e n d u s.

1) $600 \text{ rbl.} + 500 \text{ rbl.} + 700 \text{ rbl.} = 1800 \text{ rbl.}$, s. o. kolme venna kahekordistatud rahasumma.

2) $1800 \text{ rbl.} : 2 = 900 \text{ rbl.}$, kolme venna rahasumma.

3) $900 \text{ rbl.} - 600 \text{ rbl.} = 300 \text{ rbl.}$, omas kolmas vend.

4) $900 \text{ rbl.} - 500 \text{ rbl.} = 400 \text{ rbl.}$, omas esimene vend.

5) $900 \text{ rbl.} - 700 \text{ rbl.} = 200 \text{ rbl.}$, omas teine vend.

V a s t u s: 400 rbl.; 200 rbl.; 300 rbl.

Lahendage see ülesanne teisel viisil.

4. Koolisaalis seisid pingid. Õpilaste koosoleku ajal selgus, et kui igale pingile istuks 7 inimest, jääks ühele pingile 5 inimest, kui aga igal pingil istuks 6 inimest, jääks 37 õpilast kohata. Mitu pinki oli saalis?

L a h e n d u s.

1) $7 - 5 = 2$; paigutades 7 inimest pingile, jääks vabaks 2 kohta;

2) $7 - 6 = 1$; paigutades 6 inimest pingile, istuks igale pingile 1 inimene vähem;

3) $37 + 2 = 39$; 39 pinki, sest kohata jäänud 37 õpilast võisid tulla 37 pingilt, peale selle tuleb kahe õpilase arvel lisada 2 pinki.

V a s t u s: 39 pinki.

5. Kahes maatükis on kokku $24\frac{1}{4}$ ha. Kui esimesest ära lõigata $3\frac{1}{2}$ ha ja lisada teisele, on esimeses ikkagi $\frac{3}{5}$ ha võrra rohkem kui teises. Kui suur on kumbki maatükk?

L a h e n d u s.

1) $24\frac{1}{4} \text{ ha} - \frac{3}{5} \text{ ha} = 23\frac{13}{20} \text{ ha}$;

2) $23\frac{13}{20} \text{ ha} : 2 = 11\frac{33}{40} \text{ ha}$;

3) $11\frac{33}{40} \text{ ha} + \frac{3}{5} \text{ ha} = 12\frac{17}{40} \text{ ha}$;

4) $12\frac{17}{40} \text{ ha} + 3\frac{1}{3} \text{ ha} = 15\frac{37}{40} \text{ ha}$;

5) $11\frac{33}{40} \text{ ha} - 3\frac{1}{2} \text{ ha} = 8\frac{13}{40} \text{ ha}$.

V a s t u s: $15\frac{37}{40} \text{ ha}$; $8\frac{13}{40} \text{ ha}$.

6. A ja B, töötades koos, võivad lõpetada mingi töö 12 päevaga, A ja C — $13\frac{1}{3}$ päevaga ning B ja C — $17\frac{1}{7}$ päevaga.

Mitme päevaga igaüks neist võiks üksinda töötades lõpetada selle töö? Mitme päevaga kõik kolm koos töötades võiksid lõpetada selle töö?

L a h e n d u s.

1) $1:12 = \frac{1}{12}$ tööst täidavad A ja B ühe päeva jooksul.

2) $1:13\frac{1}{3} = \frac{3}{40}$ tööst täidavad A ja C ühe päeva jooksul.

3) $1:17\frac{1}{7} = \frac{7}{120}$ tööst täidavad B ja C ühe päeva jooksul.

4) $\frac{1}{12} + \frac{3}{40} + \frac{7}{120} = \frac{13}{60}$ tööst täidaksid kõik kolm päevas, kui igaüks kahekordistaks oma tööosa.

5) $\frac{13}{60}:2 = \frac{13}{120}$ tööst täidaksid kolm ühel päeval.

6) $\frac{13}{120} - \frac{1}{12} = \frac{1}{40}$ tööst täidab päevas C.

7) $1:\frac{1}{40} = 40$ (päeva) jne. V a s t u s: 20 p.; 30 p.; 40 p.

Harjutusi. Lahendada iseseisvalt ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele järgmised ülesanded: 636, 648, 654, 662, 705, 807, 874, 901, 1670, 1672, 1683, 1686, 1739, 1757, 1823, 1863, 2006, 2124, 2122, 2173, 2297, 2321.

3. Ülesandeid, milledes tundmatute arvude leidmiseks on tarvis kõigepealt leida antud arvude vahe.

Siia kuuluvad ka mõned ülesanded liikumise kohta ühes suunas.

1. 500 g suhkrut on 4 rbl. 50 kop. võrra odavam 1 kg riisist, 2 kg suhkrut on 1 rbl. 50 kop. võrra kallim 1 kg riisist. Kui palju maksab 1 kg riisi ja 1 kg suhkrut?

L a h e n d u s. Tingimuste järgi on 2 kg suhkrut 1 rbl. 50 kop. võrra kallim 1 kg riisist, kuid 2 kg suhkrut on 4 kg riisist 4 rbl. 50 kop. $\times 4 = 18$ rbl. võrra odavam. (See järeldub tingimuste esimesest osast, sest $500 \text{ g} \times 4 = 2000 \text{ g}$.) Sellest järeldub, et 1 kg riisi hind, suurendatud 1 rbl. 50 kop. võrra, on võrdne 4 kg riisi hinnaga, vähendatud 18 rbl. võrra. Seepärast 4 kg riisi on 1 kg riisist 18 rbl. + 1 rbl. 50 kop. = 19 rbl. 50 kop. võrra kallim, siit 3 kg riisi maksab 19 rbl. 50 kop.; 1 kg riisi maksab 19 rbl. 50 kop. : 3 = 6 rbl. 50 kop.; 2 kg suhkru hind on 6 rbl. 50 kop. + 1 rbl. 50 kop. = 8 rbl.; 1 kg suhkrut maksab 8 rbl. : 2 = 4 rbl.

V a s t u s: 6 rbl. 50 kop.; 4 rbl.

2. 4 tosinat supilusikaid ja 6 tosinat teelusikaid kaalub 4 kg 680 g, kuid 6 tosinat samasuguseid supilusikaid ja 6 tosinat teelusikaid kaalub 5 kg 904 g.

Kui palju kaalub üks supilusikas ja üks teelusikas?

L a h e n d u s. (Tundmatu kõrvaldamise meetod.) Erinevuse kaalus põhjustab erinevus supilusikate arvus.

1) $6 - 4 = 2$ (tosinat);

2) $5 \text{ kg } 904 \text{ g} - 4 \text{ kg } 680 \text{ g} = 1 \text{ kg } 224 \text{ g}$;

3) $1 \text{ kg } 224 \text{ g} : 24 = 51 \text{ g}$ (kaalub supilusikas);

4) $1 \text{ kg } 224 \text{ g} \cdot 2 = 2 \text{ kg } 448 \text{ g}$;

5) $4 \text{ kg } 680 \text{ g} - 2 \text{ kg } 448 \text{ g} = 2 \text{ kg } 232 \text{ g}$;

6) $2 \text{ kg } 232 \text{ g} : 72 = 31 \text{ g}$ (kaalub teelusikas).

3. 15 kg kohvi ja 12 kg suhkrust eest maksti 768 rbl.; teine kord maksti 17 kg kohvi ja 14 kg suhkrust eest 872 rbl.

Kui palju maksab 1 kg kohvi ja 1 kg suhkrust?

L a h e n d u s. (Andmete võrdsustamise meetod.) Suurendame esimesel korral ostetud kohvi ja suhkrust hulka 7 korda ja teisel korral ostetud hulka 6 korda.

105 kg kohvi ja 84 kg suhkrust maksab 5376 rbl.

102 kg „ „ 84 kg „ „ 5232 rbl.

3 kg kohvi maksab 144 rbl.

144 rbl. : 3 = 48 rbl. (maksab 1 kg kohvi);

48 rbl. $\times$ 15 = 720 rbl.; 768 rbl. — 720 rbl. = 48 rbl.;

48 rbl. : 12 = 4 rbl. (maksab 1 kg suhkrust).

V a s t u s: 48 rbl.; 4 rbl.

4. Pumbati vett kahe pumbaga. Kui üks töötas 9 tundi, teine aga 3 tundi, siis pumpasid nad 69 tünnitait. Kui esimene töötaks kolm korda aeglasemalt, teine aga kaks korda kiiremini, annaksid nad 48 tünnitait. Mitu tünnitait pumpas kumbki pump tunnis?

L a h e n d u s. (Metateesise¹ meetodiga.) Tingimus — esimene pump töötas kolm korda aeglasemalt, teine aga kaks korda kiiremini, — on samaväärne sellega, et mõlemad pumbad töötasid samasuguse tootlikkusega kui esimesel juhul, kuid esimene ei töötanud mitte 9 tundi, vaid 3 tundi, teine mitte 3 tundi, vaid 6 tundi. Saame järgmise ülesande: Esimese pumba 9-tunnise ja teise 3-tunnise tööga saime 69 tünni vett, kuid esimese pumba 3-tunnise

¹ Metateesis — kreekakeelne sõna — tähendab ümberpaigutamist.

ja teise 6-tunnise tööga saime 48 tunni vett. Mitu tünnitäit pumpas kumbki pump tunnis? Viimasest tingimuse osast järeldame, et esimese pumba 9-tunnisest ja teise 18-tunnisest tööst saaksime 144 tunni vett (kõik arvud on suurendatud 3 korda). Teostame esimese ja teise tingimuse osa võrdlemise:

$144 \text{ tunni} - 69 \text{ tunni} = 75 \text{ tunni}; 18 \text{ tundi} - 3 \text{ t.} = 15 \text{ t.};$

$75 \text{ tunni} : 15 = 5 \text{ tunni}$ (teine pump pumpab 5 tunni tunnis);

$5 \text{ tunni} \times 3 = 15 \text{ tunni}; 69 \text{ tunni} - 15 \text{ tunni} = 54 \text{ tunni};$

$54 \text{ tunni} : 9 = 6 \text{ tunni}$ (esimene pump pumpab 6 tunni tunnis).

Lahendada see ülesanne, lülitades välja teise pumba töötundide arvu.

5. Moskvast läheb Moskva—Saraatovi liinil kaubarong Mitšurinskisse kiirusega 25 km tunnis, teine kaubarong väljub Mitšurinskist Saraatovisse kiirusega 30 km tunnis. Vahemaa Mitšurinski ja Saraatovi vahel on 50 km võrra pikem kui Moskva ja Mitšurinski vahel. Kui teine väljus Mitšurinskist, oli esimene juba 25 km kaugusel Moskvast. Teha kindlaks vahemaa Moskvast Mitšurinskisse ja Saraatovisse, kui esimene rong jõudis Mitšurinskisse ja teine Saraatovisse ühel ajal.

Lahendus. (Jääkide meetodiga.) Esimene rong oli katnud 25-km-se vahemaa Moskvast teise rongi väljumise momendiks, tähendab, esimene rong väljus Moskvast 1 tunni võrra varem kui teine rong Mitšurinskist. Vahemaa Mitšurinskist Saraatovisse on 50 km võrra pikem kui Moskvast Mitšurinskisse, et aga mõlema rongi üheaegse liikumise alguseks asus esimene 25 km võrra lähemal Mitšurinskile, kui on tegelik vahemaa Moskva—Mitšurinski vahel, siis vahemaade vahe on 25 km võrra suurem ja on seega $50 \text{ km} + 25 \text{ km} = 75 \text{ km}$.

Kuid rongid saabusid üheaegselt — üks Mitšurinskisse, teine Saraatovisse. Teine rong sõitis tunnis läbi 5 km võrra rohkem maad kui esimene ($30 \text{ km} - 25 \text{ km}$); üheaegsel liikumisel kattis teine rong 75 km võrra maad rohkem kui esimene, järelikult nad sõitsid üheaegselt 15 tundi ($75 \text{ km} : 5 \text{ km}$). Esimene rong sõitis $15 \text{ tundi} + 1 \text{ tund} = 16 \text{ tundi}$. Vahemaa Moskvast Mitšurinskisse $25 \text{ km} \times 16 = 400 \text{ km}$, Mitšurinskist Saraatovisse $30 \text{ km} \times 15 = 450 \text{ km}$, Moskvast Saraatovisse $400 \text{ km} + 450 \text{ km} = 850 \text{ km}$.

Vastus: 850 km.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele lahendada järgmised ülesanded: 613, 665, 814, 830, 888,

779, 780, 1616, 1624, 1633, 1694, 1798, 1802, 1811, 1826, 1831, 2115, 2145, 2285, 2313, 2330, 2354, 2366, 2347, 2424.

4. Osa leidmine arvust ja arvu leidmine tema osa järgi.

1. Ühes vabrikus töötavate naiste arv moodustab $\frac{1}{3}$ sealsamas töötavate meeste arvust. Millise osa moodustavad naised selles vabrikus töötajate koguarvust?

Lahendus. Naised moodustavad $\frac{1}{3}$ meeste arvust; järelikult oli mehi 3 osa ja naisi 1 osa; kokku oli töötajaid 4 osa. Naised moodustavad vabrikus töötajate üldarvust $\frac{1}{4}$.

Vastus: $\frac{1}{4}$.

2. Müüja müüs 4 ostjale õunu: esimesele $\frac{1}{3}$ kogu õunte arvust ja veel 32 õuna; teisele $\frac{1}{3}$ järelejäänud õuntest ja veel 32 õuna; kolmandale $\frac{1}{3}$ teisest ostjast järelejäänud õuntest ja veel 32 õuna; neljandale $\frac{1}{3}$ kolmandast järelejäänud õuntest ja viimased 32 õuna. Mitu õuna ostis iga ostja?

Lahendus.

1) Viimased 32 õuna moodustavad $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ülejäägist pärast kolmandat ostjat;

2) $32 : \frac{2}{3} = 48$; 48 õuna jäi kolmandast ostjast järele;

3) $48 + 32 = 80$; 80 õuna on $\frac{2}{3}$ ülejäägist pärast teist ostjat; $80 : \frac{2}{3} = 120$; 120 õuna jäi järele pärast teist ostjat jne.

Vastus: 162 õuna; 108 õuna; 72 õuna; 48 õuna.

3. $\frac{5}{18}$ ühest arvust on $\frac{7}{18}$ teisest arvust. Kumb arv on suurem?

Lahendus. $\frac{5}{18}$ esimesest arvust on $\frac{7}{18}$ teisest; $\frac{1}{18}$ esimesest on $\frac{7}{90}$ teisest ($\frac{7}{18}$ vähendati 5 korda); $\frac{18}{18}$ esimesest ehk esimene arv on $\frac{7}{5}$ teisest ($\frac{7}{90}$ suurendati 18 korda). Täheleb, esimene arv on suurem.

Teine lahendus. $\frac{7}{18} : \frac{5}{18} = \frac{7}{5}$, esimene arv on $\frac{7}{5}$ teisest.

4. Vaadis on 27 pange piiritust. Algul valati vaadist 9 pange piiritust välja ja asendati niisama suure hulga veega; seejärel valati sellest segust jälle 9 pange välja ning asendati niisama suure hulga veega, kolmas kord valati uuesti 9 pange segu välja ning asendati veega. Mitu pange piiritust ja mitu pange vett jäi vaati?

Lahendus.

- 1) $27 - 9 = 18$ (pange);
- 2) $9 : 27 = \frac{1}{3}$ (osa);
- 3) $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ (pange);
- 4) $18 - 6 = 12$ (pange);
- 5) $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ (pange);
- 6) $12 - 4 = 8$ (pange piiritust);
- 7) $27 - 8 = 19$ (pange vett).

Vastus: 8 pange piiritust; 19 pange vett.

5. On müüdud kaks ühesuguse kaaluga korvitäit marju. Üks kolmandik esimesest korvist müüdi $3\frac{1}{4}$ rbl. kg; $\frac{13}{18}$ ülejäägist 3 rbl. kg ja ülejäänud osa $2\frac{11}{20}$ rbl. kg. Teine korvitäis müüdi ühesuguse hinnaga ja saadi niisama palju raha kui esimese korvitäie eest. Millise hinnaga müüdi marju teisest korvist?

Lahendus. Oletame, et kummaski korvis oli 1 kg marju.

- 1) siis $\frac{1}{3}$ kg eest saadi $3\frac{1}{4}$ rbl. $\times \frac{1}{3} = 1\frac{1}{12}$ rbl.;
- 2) $1 \text{ kg} - \frac{1}{3} \text{ kg} = \frac{2}{3} \text{ kg}$;
- 3) $\frac{2}{3} \text{ kg} \times \frac{13}{18} = \frac{13}{27} \text{ kg}$;
- 4) $\frac{13}{27} \text{ kg}$ eest saadi: 3 rbl. $\times \frac{13}{27} = 1\frac{4}{9}$ rbl.;
- 5) $\frac{2}{3} \text{ kg} - \frac{13}{27} \text{ kg} = \frac{5}{27} \text{ kg}$;
- 6) $\frac{5}{27} \text{ kg}$ eest saadi: $2\frac{11}{20} \text{ rbl.} \times \frac{5}{27} = \frac{17}{36} \text{ rbl.}$;
- 7) $1\frac{1}{12} \text{ rbl.} + 1\frac{4}{9} \text{ rbl.} + \frac{17}{36} \text{ rbl.} = 3 \text{ rbl.}$

Vastus: 1 kg marjade eest teisest korvist saadi 3 rbl.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele lahendada järgmised ülesanded: 1412, 1416, 1417, 1422, 1521, 1526, 1577, 1601, 1610, 1634, 1770, 1772, 1783, 1875, 2031, 2047, 2071, 2077, 2175, 2184, 2299, 2305, 2336, 2339, 2342, 2351, 2390.

5. Ülesandeid arvu jaotamiseks mittevõrdseteks osadeks suhte järgi. Jagamine pöördvõrdeliselt antud arvudega jne.

(Võrdeline jagamine.)

1. Ühes rahakotis on 52 rbl., teises 34 rbl. Pärast seda, kui kummastki võeti ühepalju raha ära, oli esimeses $1\frac{9}{10}$ korda rohkem kui teises. Mitu rbl. võeti kummastki kotist?

L a h e n d u s. (Osade meetodiga.)

1) $52 \text{ rbl.} - 34 \text{ rbl.} = 18 \text{ rbl.}$ Kui võeti ära ühepalju, jäi vahe endiseks.

2) Võtame tervikuks summa, väljendades selle arvuga 1, mis jäi teise rahakotti, ja on $1\frac{9}{10} - 1 = \frac{9}{10}$; $\frac{9}{10}$ teise kotti jäänud rahast on 18 rbl.;

3) $18 \text{ rbl.} : \frac{9}{10} = 20 \text{ rbl.}$; teise kotti jäi 20 rbl.;

4) $34 \text{ rbl.} - 20 \text{ rbl.} = 14 \text{ rbl.}$; kummastki rahakotist võeti 14 rbl. Teostada kontroll vastupidise võttega.

2. Nelja vasetüki kaal on 144,5 kg. Kolme viimase tüki kaal on $\frac{1}{3}$ esimese tüki kaalust, kahe viimase kaal on pool teise tüki kaalust, kolmanda tüki kaal on 0,7 neljanda tüki kaalust. Kui palju kaalub iga vasetükk eraldi?

L a h e n d u s. (Sarnasusmeetod.) Oletame, et neljanda vasetüki kaal on 1 kg, siis kolmanda tüki kaal oleks 0,7 kg; $(1 \text{ kg} + 0,7 \text{ kg}) \cdot 2 = 3,4 \text{ kg}$ — see oleks teise vasetüki kaal; $(1 \text{ kg} + 0,7 \text{ kg} + 3,4 \text{ kg}) \cdot 3 = 15,3 \text{ kg}$ — see oleks esimese tüki kaal. $1 \text{ kg} + 0,7 \text{ kg} + 3,4 \text{ kg} + 15,3 \text{ kg} = 20,4 \text{ kg}$ — see on oletatav nelja vasetüki kaal. $144,5 \text{ kg} : 20,4 \text{ kg} = 7\frac{1}{12}$. Tegelikult on neljanda tüki kaal $7\frac{1}{12}$ kg;

$7\frac{1}{12} \text{ kg} \times 0,7 = 4\frac{23}{24} \text{ kg}$ on kolmanda tüki kaal jne.

Vastus: $108\frac{3}{8} \text{ kg}$; $24\frac{1}{12} \text{ kg}$; $4\frac{23}{24} \text{ kg}$; $7\frac{1}{12} \text{ kg}$.

3. Kahes taskus on raha. Kui esimesest taskust asetada teise 1,6 rbl., siis on kummaski ühepalju. Kui aga teisest asetada esimesse 0,5 rbl., siis on esimeses 2,5 korda rohkem kui teises. Kui palju raha on kummaski taskus?

Lahendus. (Osade meetodiga.)

1) $1,6 \text{ rbl.} \times 2 = 3,2 \text{ rbl.}$, niipalju on esimeses taskus rohkem kui teises.

2) $0,5 \text{ rbl.} + 0,5 \text{ rbl.} + 3,2 \text{ rbl.} = 4,2 \text{ rbl.}$, niisugune on esimese ja teise tasku summa vahe, kui teisest asetada esimesse 0,5 rbl.

3) Kui võtta teise taskusse jäänud summa tervikuks ja väljendada see arvuga 1, on esimeses 2,5 ühikut, vahe on aga $2,5 - 1 = 1,5$ ühikut.

4) $4,2 \text{ rbl.} : 1,5 = 2,8 \text{ rbl.}$ — see on teise taskusse jäänud summa.

5) $2,8 \text{ rbl.} + 0,5 \text{ rbl.} = 3,3 \text{ rbl.}$ — oli teises taskus.

6) $3,3 \text{ rbl.} + 3,2 \text{ rbl.} = 6,5 \text{ rbl.}$ — oli esimeses taskus.

Vastus: 6,5 rbl.; 3,3 rbl.

4. Kaks rongi väljusid jaamast A ja B erineval ajal; esimene liikus $1\frac{1}{2}$ korda kiiremini, kuid hakkas liikuma 14 tundi hiljem.

Rongide kohtumisel selgus, et teine oli läbinud $1\frac{3}{5}$ korda suurema vahemaa kui esimene. Mitme tunni pärast peale esimese rongi liikumise algust kohtusid rongid?

Lahendus. (Osade meetodiga.) Kui esimene rong sõidaks niisama palju tunde kui teine (s. o. 14 tunni võrra rohkem kui tegelikult), oleks esimese rongi poolt läbitud vahemaa $1\frac{1}{2}$ korda suurem kui teise rongi poolt läbitud vahemaa, s. o. vahemaad moodustaksid 3 osa ja 2 osa või 12 ja 8 osa. Tegelikult moodustavad need vahemaad 5 ja 8 osa. Nähtavasti esimene rong sõitis oma tee 7 osa läbi 14 tunniga, seepärast oma tegeliku tee, mis koosnes 5 osast, läbis ta 10 tunniga. Teine rong sõitis 24 tundi.

5. Baas saatis kioskile ja kahte kauplusse 420 kg riisi. Esimene kauplus sai kaks korda rohkem kui kiosk ehk $\frac{3}{4}$ sellest, mis

sai kiosk ja teine kauplus kokku. Kui palju riisi sai kiosk ja kumbki kauplus?

L a h e n d u s. (Oletuse meetodiga.)

1) Oletame, et kiosk sai 1 kg riisi, siis esimene kauplus peab saama 2 kg; 2 kg on $\frac{3}{4}$ riisi hulgast, mille said kiosk ja teine kauplus; $2 \text{ kg} : \frac{3}{4} = 2\frac{2}{3} \text{ kg}$.

2) $2\frac{2}{3} \text{ kg} - 1 \text{ kg} = 1\frac{2}{3} \text{ kg}$; niipalju riisi saab teine kauplus.

3) $1 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 1\frac{2}{3} \text{ kg} = 4\frac{2}{3} \text{ kg}$.

4) $420 \text{ kg} : 4\frac{2}{3} \text{ kg} = 90$ (korda); 90 kg sai kiosk.

5) $90 \text{ kg} \times 2 = 180 \text{ kg}$; niipalju sai esimene kauplus.

6) $1\frac{2}{3} \text{ kg} \times 90 = 150 \text{ kg}$ sai teine kauplus.

6. Jaotada 8,51 kolmeks liidetavaks nii, et nende korrutamisel järjekorras 0,145-ga, 0,116-ga, 0,174-ga saaksime võrdsed korrutised.

L a h e n d u s. Esimese liidetava ja 0,145 korrutis on võrdne teise liidetava ja 0,116 korrutisega ning moodustab 0,145-st $\frac{116}{145}$ ehk $\frac{4}{5}$; järelikult esimene liidetav on teisest $\frac{4}{5}$; teise liidetava ja 0,116 korrutis on võrdne kolmanda liidetava ja 0,174 korrutisega, kuid 0,116 moodustab 0,174-st $\frac{116}{174}$ ehk $\frac{2}{3}$; järelikult kolmas liidetav võrdub $\frac{2}{3}$ -ga teisest; võtame teiseks liidetavaks 1, siis esimene moodustab $\frac{4}{5}$ ja kolmas $\frac{2}{3}$ teisest; $\frac{4}{5} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{37}{15}$ teisest liidetavast on 8,51; siit: $8,51 : \frac{37}{15} = 3,45$ (teine liidetav); $3,45 \times \frac{4}{5} = 2,76$ (esimene liidetav), $3,45 \times \frac{2}{3} = 2,3$ (kolmas liidetav).

V a s t u s: 2,76; 3,45; 2,3.

7. Kuivatatud õuntest hinnaga 6,6 rbl. kg ja ploomidest 8,4 rbl. kg koostati 12 kg segu hinnaga 7,05 rbl. kg. Mitu kg õunu ja ploome võeti segusse?

L a h e n d u s. (Oletuse meetodiga.) Kui oleks võetud 12 kg õunu, siis maksaksid need $6,6 \text{ rbl.} \times 12 = 79,2 \text{ rbl.}$, segu maksis aga $7,05 \text{ rbl.} \times 12 = 84,6 \text{ rbl.}$ Et suurendada segu hinda

84,6 rbl. — 79,2 rbl. = 5,4 rbl. võrra, on tarvis asendada osa õunu ploomidega; kui 1 kg õunu asendada 1 kg ploomidega, tõuseb segu hind 8,4 rbl. — 6,6 rbl. = 1,8 rbl. võrra; ploome on võetud 5,4 rbl. : 1,8 rbl. = 3 (kg), õunu 12 kg — 3 kg = 9 kg.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust pedagoogilistele koolidele lahendada järgmised ülesanded: 1584, 1664, 1702, 1722, 1724, 1728, 1745, 1866, 1955, 2125, 2291, 2324, 2333, 2341, 2355, 2361, 1708, 1738, 1762, 1845, 1854, 2113, 2118, 1602, 1605, 1685, 1703, 1707, 1710, 1740, 1750, 1836, 2311, 2316, 2325, 2331, 2364, 2368.

Toodud ülesannete grupid lahendatakse tavaliselt harilike ja kümnenndmurdude õppimisel; kõik nad lahendatakse kaalutlemise teel ja arendavad õppijais algatusvõimet ning leidlikkust.

§ 5. Ülesandeid võrdelistele suurustele.

1. Kolmlause.

Ülesandeid, milledes antakse ühe suuruse 2 väärtust ja üks väärtus teisest, esimesega võrdelisest suurusest ning nõutakse leida teise suuruse teine väärtus, nimetatakse ülesandeiks lihtkolmlausele. Niisiis, ülesandeis lihtkolmlausele tuleb kolme antud arvu järgi leida nende neljas võrdeline.

Ülesandeid, milles antakse 2 väärtuse kaupa kahest või rohkemast suurusest ja ainult üks väärtus esimesega päri- või pöördvõrdelisest suurusest ning nõutakse kindlaks teha teine selle suuruse väärtus, nimetatakse ülesandeiks liitkolmlausele.

1. Hammasratas teeb 50 tiiru minutis. Teine hammasratas, haakunud eelmisega, teeb 75 tiiru minutis. Leida teise ratta hammaste arv, kui esimese ratta hammaste arv on 30.

Lahendus. (Võrde abil.) Mõlemad haakunud hammasrattad pöörlevad minutis ühe ja sama hammaste arvu võrra, seepärast on hammaste arv pöördvõrdeline nende poolt tehtud tiirude arvuga.

50 tiiru — 30 hammast,

75 tiiru — x hammast (x on teise ratta hammaste arv)

$$x : 30 = 50 : 75.$$

$$x = \frac{30 \cdot 50}{75} = 20 \text{ (hammast).}$$

Vastus: 20 hammast.

Märkus. Ülesannete lahendamisel kolmlause abil tuleb mee-

les pidada, et iga vastava võrdeliste suuruste väärtustepaari jagatis on jääv ja pöördvõrdeliste suuruste paari korrutis on jääv. Antud ülesandes on $50 \cdot 30 = 75 \cdot 20$.

2. Tiik täitub veega kraavi kaudu, mille mõõtmed on: laius 2,5 m ja sügavus 0,6 m, 30 tunniga, kui vesi voolab kiirusega 1,2 m minutis. Kui kiiresti täitub sama tiik, kui vee kiirus on 2 m minutis ja kraavi laius on 3 m, sügavus 1 m?

Lahendus. (Ühiku kaudu.)

$$2,5 \text{ m} - 0,6 \text{ m} - 1,2 \text{ m} - 30 \text{ tundi};$$

$$3 \text{ m} - 1 \text{ m} - 2 \text{ m} - ? \text{ tundi}.$$

Kui kraavi laius on 1 m, sügavus 0,6 m ja vee kiirus on seejuures 1,2 m minutis, siis tiigi täitumiseks kulub 2,5 korda rohkem aega kui 30 tundi ehk $30 \text{ tundi} \times 2,5$.

Kui kraavi laius on 1 m, sügavus 1 m ja vee voolukiirus 1,2 m minutis, ei kulu tiigi täitumiseks mitte $30 \text{ tundi} \times 2,5$, vaid

$$1 : 0,6 = \frac{5}{3} \text{ korda vähem ehk}$$

$$30 \text{ tundi} \times 2,5 : \frac{5}{3} = \frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3}{5}.$$

Kraavi laiuse ja sügavuse puhul 1 m ning vee voolukiiruse puhul 1 m minutis ei kulu tiigi täitumiseks mitte $\frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3}{5}$, vaid 1,2 korda rohkem ehk $\frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot 1,2}{5}$.

Kui kraavi laius on 3 m, sügavus 1 m ning vee voolukiirus 1 m minutis, läheb tiigi täitumiseks 3 korda vähem aega kui $\frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot 1,2}{5}$ ehk $\frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot 1,2}{5 \cdot 3}$.

Kraavi laiuse puhul 3 m, sügavuse puhul 1 m ja vee voolukiiruse puhul 2 m minutis väheneb tiigi täitumise aeg veel 2 korda ja on:

$$\frac{30 \text{ tundi} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot 1,2}{5 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \text{ tundi}.$$

Lahendus kirjutatakse ühiku kaudu üles järgmiselt:

2,5 m laiuse, 0,6 m sügavuse, 1,2 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik 30 tunniga.

1 m laiuse, 0,6 m sügavuse, 1,2 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik $30 \cdot 2,5$ tunniga.

1 m laiuse, 1 m sügavuse, 1,2 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik $30 \cdot 2,5 \cdot 0,6$ tunniga.

1 m laiuse, 1 m sügavuse, 1 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik $30 \cdot 2,5 \cdot 0,6 \cdot 1,2$ tunniga.

3 m laiuse, 1 m sügavuse, 1 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik

$$\frac{30 \cdot 2,5 \cdot 0,6 \cdot 1,2}{3} \text{ tunniga.}$$

3 m laiuse, 1 m sügavuse, 2 m/min. vee voolukiiruse puhul täitub tiik

$$\frac{30 \cdot 2,5 \cdot 0,6 \cdot 1,2}{3 \cdot 2} = 9 \text{ tunniga.}$$

Vastus: 9 tundi.

3. 25 töolist, töötades iga päev 5 tundi, peavad 15 päevaga tegema valmis $\frac{3}{11}$ tööst. Ülejäänud töö täitmiseks liitusid nendega veel 15 inimest. Mitme päevaga oleks töö lõpetatud, kui töölised töötaksid $6\frac{1}{4}$ tundi päevas?

Lahendus. (Võrde abil.)

$$25 \text{ töolist} - 5 \text{ tundi} - \frac{3}{11} \text{ tööst} - 15 \text{ päeva};$$

$$40 \text{ „} - 6\frac{1}{4} \text{ „} - \frac{8}{11} \text{ „} - x \text{ „}.$$

Lahendus kulgeb järgmisel viisil:

$$\begin{array}{l|l} 25 \text{ töolist} - 15 \text{ päeva} & \\ 40 \text{ „} - y \text{ „} & y : 15 = 25 : 40; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 5 \text{ tundi} - y \text{ päeva} & \\ 6\frac{1}{4} \text{ „} - z \text{ „} & z : y = 5 : 6\frac{1}{4}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{11} \text{ tööst} - z \text{ päeva} & \\ \frac{8}{11} \text{ tööst} - x \text{ päeva} & x : z = \frac{8}{11} : \frac{3}{11}. \end{array}$$

Oletame, et 40 töolist töötasid samades tingimustes kui 25 töolistki:

$$25 \text{ töolist} - 5 \text{ tundi} - \frac{3}{11} \text{ tööst} - 15 \text{ päeva};$$

$$40 \text{ „} - 5 \text{ „} - \frac{3}{11} \text{ „} - y \text{ „}.$$

Tundmatu päevade arvu määramiseks tähega y , sest otsitav ei

vasta veel kõigile ülesande tingimustele. Tööliste arv ja tööpäevade arv on pöördvõrdelised:

$$y : 15 = 25 : 40.$$

Muudame töötundide arvu vastavalt tingimustele.

$$40 \text{ töölist} - 5 \text{ tundi} - \frac{3}{11} \text{ tööst} - y \text{ päeva};$$

$$40 \text{ „} - 6\frac{1}{4} \text{ „} - \frac{3}{11} \text{ „} - z \text{ päeva}.$$

Igapäevane töötundide arv ja tööpäevade arv on pöördvõrdelised:

$$z : y = 5 : 6\frac{1}{4}.$$

Võtame viimase ülesande tingimuse:

$$40 \text{ töölist} - 6\frac{1}{4} \text{ tundi} - \frac{3}{11} \text{ tööst} - z \text{ päeva};$$

$$40 \text{ „} - 6\frac{1}{4} \text{ „} - \frac{8}{11} \text{ „} - x \text{ päeva}.$$

Töö hulk ja tööpäevade arv on võrdelised.

$$x : z = \frac{8}{11} : \frac{3}{11}.$$

Korrutame kolme võrde pooled:

$$y : 15 = 25 : 40;$$

$$z : y = 5 : 6\frac{1}{4};$$

$$x : z = \frac{8}{11} : \frac{3}{11};$$

$$(y \cdot z \cdot x) : (15 \cdot y \cdot z) = \left(25 \cdot 5 \cdot \frac{8}{11}\right) : \left(40 \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{3}{11}\right).$$

Taandame esimese suhte liikmed korrutisega $y \cdot z$, teise suhte liikmed $\left(25 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{11}\right)$ -ga. Saame: $x : 15 = 1 : \frac{3}{4}$, $x = 20$ (päeva).

Vastus: 20 päeva.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust lahendada järgmised ülesanded: 2598, 2610, 2614, 2616, 2623, 2628, 2644.

2. Protsendid.

1. Nisupeksmisel saadakse 69% seemneid, 28% aganaid ja 3% teisi jäätmeid. Kui palju teri, aganaid ja teisi jäätmeid saab 45 ts. nisust?

L a h e n d u s. (Võrde abil.)

1) 100% nisu kaalust on 45 ts.

69% „ „ „ „ x ts.

Nisu kaal ja tema kaalu protsendid on võrdelised.

$x : 45 = 69\% : 100\%$ ehk $x : 45 = 69 : 100$;

$$x = \frac{45 \cdot 69}{100} = 31,05 \text{ (ts. on seemnete kaal).}$$

2) 100% — 45 ts.

28% — y

Saame võrde: $y : 45 = 28 : 100$;

$$y = \frac{45 \cdot 28}{100} = 12,6 \text{ (ts. on aganate kaal), jne.}$$

V a s t u s: 31,05 ts. teri, 12,6 ts. aganaid, 1,35 ts. muid jäätmeid.

2. Rohi kaotab kuivades 28% enda kaalust. Kui palju oli niidetud rohtu, kui heina saadi 144 ts.?

L a h e n d u s. Rohu kaal on 100%; $100\% - 28\% = 72\%$ rohu kaalust on 144 ts.

72% on 144 ts.

100% on x

$$x : 144 = 100 : 72$$

$$x = \frac{144 \cdot 100}{72} = 200 \text{ (ts.).}$$

V a s t u s: 200 ts.

3. Vabrikus töötab 4158 meest ja naist, kusjuures naiste arv on 65% meeste arvust. Kui palju on mehi rohkem kui naisi?

L a h e n d u s. Meeste arv on 100%; 165% meeste arvust on 4158 inimest.

165% on 4158 inimest

100% on x

$$x = \frac{4158 \cdot 100}{165} = 2520 \text{ (meest) jne.}$$

V a s t u s: mehi on rohkem 882 inimese võrra.

4. Kaup maksab jaemüügikaupluses 1653,6 rbl., sealjuures kauplus lisab 6% juurdehindlust vabrikuhindadele. Vabrik lisab väljaantava kauba omahinnale 4%. Määrata kindlaks kauba omahind vabrikus.

L a h e n d u s. Kauba vabrikuhind on 100%. $100\% + 6\%$ vabrikuhinnast on 1653,6 rbl.

$$\begin{array}{r} 106\% \text{ on } 1653,6 \text{ rbl.} \\ 100\% \text{ on } x \\ \hline x = \frac{1653,6 \cdot 100}{106} = 1560 \text{ (rbl.).} \end{array}$$

1560 rbl. on kauba vabrikuhind, see on $100\% + 4\% = 104\%$ kauba omahinnast vabrikus. Leiame kauba omahinna vabrikus ehk 100%.

$$\begin{array}{r} 104\% \text{ on } 1560 \text{ rbl.} \\ 100\% \text{ on } x \\ \hline x = \frac{1560 \cdot 100}{104} = 1500 \text{ (rbl.).} \end{array}$$

V a s t u s: 1500 rbl.

5. Mürsepast stahhaanovlane ladus oma abitöölistega 23 400 tellist, norm aga oli 3200 tükki. Leida plaanitäitmise protsent.

L a h e n d u s. 3200 tellise asemel 23 400 kivi

$$\begin{array}{r} 100\% \text{ asemel } x \\ \hline x = \frac{23\,400 \cdot 100}{3200} = 731 \frac{1}{4}. \end{array}$$

Järelikult täideti plaan $731 \frac{1}{4}\%$ -liselt.

6. Mitme protsendi võrra suurenes töölise igapäevane töötasu, kui ta 9 rbl. 45 kop. asemel edaspidi teenis 14 rbl. 40 kop.?

L a h e n d u s. 9,45 rbl. asemel 14,4 rbl.

$$\begin{array}{r} 100\% \text{ asemel } x \\ \hline x : 100 = 14,4 : 9,45 \\ x = \frac{14,4 \cdot 100}{9,45} = 152 \frac{8}{21} (\%) \\ 152 \frac{8}{21} \% - 100\% = 52 \frac{8}{21} \% \approx 52,38\% . \end{array}$$

V a s t u s: kõrgendus on 52,38% endisest töötasust.

7. Töötootlikkus tõusis 20% võrra. Mitu protsenti vähenes teatava detaili valmistamiseks kuluv aeg?

L a h e n d u s. 100% on töötootlikkus; $100\% + 20\% = 120\%$;

töötotlikkus suurenes vahekorras $120 : 100 = 6 : 5$; detaili valmistamise aeg vähenes vahekorras $6 : 5$, s. o. $\frac{1}{6}$ tunni võrra;

$$\frac{1}{6} = \frac{100\%}{6} = 16\frac{2}{3}\%.$$

Vastus: $16\frac{2}{3}\%$ võrra.

8. Kaks töolist võivad täita teatud tellimuse 7,5 tunniga, töötades ühesuguse tootlikkusega. Esimene tööline suurendas oma tootlikkust 40% võrra. Mitme tunniga täitsid töölised ülesande?

Lahendus.

1) $1 : 7,5 = \frac{2}{15}$;

2) $\frac{2}{15} : 2 = \frac{1}{15}$ tööst täidab tunnis teine tööline;

3) $100\% + 40\% = 140\%$ moodustab esimese väljatootus teise omast;

4) $\frac{1}{15} : 100 \cdot 140 = \frac{7}{75}$;

5) $\frac{1}{15} + \frac{7}{75} = \frac{4}{25}$;

6) $1 : \frac{4}{25} = 6\frac{1}{4}$ (tundi).

Vastus: $6\frac{1}{4}$ tunniga.

9. Mitu grammi vett on tarvis lisada 50 g 35%-lisele soolhappele, et saada 10%-list soolhapet?

Lahendus.

1) $50 \text{ g} \cdot 0,35 = 17,5 \text{ g}$;

2) $17,5 \text{ g} : 0,1 = 175 \text{ g}$;

3) $175 \text{ g} - 50 \text{ g} = 125 \text{ g}$.

Vastus: 125 g.

10. Kaup muutus odavamaks $14\frac{1}{6}\%$ võrra. Mitu kg võib teda osta nüüd selle raha eest, mille eest varem anti 10,3 kg?

Lahendus. 1 kg kauba endine hind on 100%; alandatud hind on $100\% - 14\frac{1}{6}\% = 85\frac{5}{6}\%$, s. o. nii mitu korda vähem, kui

mitu korda on $85\frac{5}{6}$ vähem 100-st; ostetud kauba hulk peab niisama palju kordi suurenema:

$$10,3 \text{ kg} \cdot \frac{100}{85\frac{5}{6}} = 12 \text{ kg}.$$

Vastus: 12 kg.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust lahendada järgmised ülesanded: 2670, 2672, 2673, 2675, 2679, 2686, 2693, 2702, 2710, 2714, 2741, 2754, 2759, 2764, 2770, 2776, 2789, 2790, 2796, 2804, 2815.

3. Võrdeline jagamine.

Antud arvu jaotamist niisugusteks mittevõrdseteks osadeks, kus iga kahe otsitava osa suhe oleks võrdne antud arvude suhtega, nimetatakse võrdeliseks jagamiseks ehk jaotamiseks võrdelisteks osadeks.

1. Kassas on kolme-, viie- ja kümnerublased rahatähed, igast liigist ühepalju, — kogusummas 1080 rbl. Mitu rahatähte oli kokku kassas?

Lahendus. (Sarnasusmeetodiga.) Oletame, et kassas on üks kolme-, üks viie- ja üks kümnerublane paberraha; 3 rbl. + 5 rbl. + 10 rbl. = 18 rbl. oleks siis kassas; 1080 rbl. : 18 rbl. = 60 (korda); 60 paberraha igas väärtuses, kokku $60 \times 3 = 180$.

Vastus: 180 paberraha.

2. Töökojas on kolm ühesuguse mahuga metallitükki: raua-, vase- ja tinatükk, üldkaaluga 69 kg. Määrata iga tüki kaal, kui raud on veest 7,8 korda raskem, vask 8,5 korda ja tina 11,3 korda raskem.

Lahendus. I on raua kaal, II — vase kaal, III — tina kaal, siis

$$I : II : III = 7,8 : 8,5 : 11,3 = 78 : 85 : 113.$$

$$I = \frac{69 \cdot 78}{78 + 85 + 113} = 19,5 \text{ (kg)}; \quad II = \frac{69 \cdot 85}{78 + 85 + 113} = 21,25 \text{ (kg)}; \text{ jne.}$$

3. Jaotada arv 245 kolme ossa nii, et $I : II = 3 : 8$; $I : III = 2 : 9$.

Lahendus. Kui oletada, kasutades esimest võrret, et I osa

võrdub 3 ühikuga, siis saame sobivuse teise võrdega, mille järgi I osale vastab kaks ühikut. Muudame võrded nii, et I osa sisaldaks ühtsa arvu ühikuid kummaski võrdes. Leiame väikseima ühiskordse 3 ja 2 jaoks, ta võrdub 6-ga; korrutame esimese suhte liikmed 2-ga ja teise omad 3-ga:

$$\begin{aligned} I : II &= 6 : 16 \\ I : III &= 6 : 27 \\ I : II : III &= 6 : 16 : 27 \end{aligned}$$

49

$$\begin{aligned} I &= \frac{245 \cdot 6}{49} = 30; \\ II &= \frac{245 \cdot 16}{49} = 80; \\ III &= \frac{245 \cdot 27}{49} = 135. \end{aligned}$$

4. Jaotada 1082 4 ossa nii, et $I : II = \frac{2}{7} : 0, (3)$;

$$IV : III = 0,5 : 1\frac{1}{3}; \quad II : III = \frac{1}{5} : \frac{2}{3}.$$

Lahendus. Murdarvude suhte asendame täisarvude suhtega.

$$\begin{aligned} I : II &= 6 : 7 \\ IV : III &= 3 : 8 \\ II : III &= 3 : 10 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot 4 \end{array} \right\}$$

$$I : II : III : IV = 72 : 84 : 280 : 105$$

$$I = \frac{1082 \cdot 72}{72 + 84 + 280 + 105} = 144 \text{ jne.}$$

Võrrutame II arvu osade hulga esimeses ja kolmandas võrdes; selleks korrutame esimese suhte liikmed 3-ga, kolmanda suhte liikmed 7-ga; et võrrutada III arvu osade hulga, on tarvis teise suhte liikmed korrutada 7·5-ga, kolmanda suhte liikmed 4-ga; kuid II arv esineb esimeses suhtes, seepärast esimese suhte liikmed korrutame samuti 4-ga, jne.

Vastus: 144; 168; 560; 210.

5. Jaotada 4408,6 rbl. viie isiku vahel nii, et kui A saab 4 rbl., siis B saab 5 rbl.; kui B saab 3 rbl., siis C peab saama 2 rbl. Kui C saab 3 rbl., siis D saab 5 rbl.; kui D saab 6 rbl., siis E saab 7 rbl. Kui palju saab igaüks?

Lahendus. A, B, C, D, E poolt saadud summad tähistame vastavalt I, II, III, IV, V abil.

Siis:

$$I : II = 4 : 5,$$

$$II : III = 3 : 2,$$

$$III : IV = 3 : 5,$$

$$IV : V = 6 : 7.$$

Kui oletada, et arv I koosneb 4 osast, siis arv II peab omama 5 niisugust osa. Arvu III osade hulga saame teada võrdest $II : III = 3 : 2$ ehk $5 : III = 3 : 2$;

$$III = \frac{5 \cdot 2}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (osa).}$$

IV arvu osade hulga saame teada kolmandast võrdest.

$$IV = \frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9} \text{ (osa); } V = \frac{50 \cdot 7}{9 \cdot 6} = \frac{175}{27}.$$

$$I : II : III : IV : V = 4 : 5 : 3\frac{1}{3} : 5\frac{5}{9} : \frac{175}{27} = 108 : 135 : 90 : 150 : 175.$$

$$I = \frac{4408,6 \cdot 108}{108 + 135 + 90 + 150 + 175} = 723,6 \text{ (rbl.) jne.}$$

6. Talupoeg läks külast linna kiirusega 3 km tunnis; tagasi tuli ta hobusega keskmise kiirusega 6 km tunnis. Kogu teekonnale edasi-tagasi kulutas ta 6 tundi. Kui suur on vahemaa külast linna?

Lahendus. Liikumise ajad ühel ja samal vahemaal on pöördvõrdelised liikumise kiirusega. Seepärast on 6 tundi tarvis jagada pöördvõrdeliselt arvudega 3 ja 6; $I : II = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2 : 1$,

$$I = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4 \text{ (tundi); } 3 \cdot 4 = 12 \text{ (km).}$$

Et jagada arv osadeks pöördvõrdeliselt antud arvudega, tuleb see arv jagada võrdeliselt antud arvude pöördväärtustega.

Mainitud ülesandes oli meil tarvis 6 tundi jagada pöördvõrdeliselt arvudega 3 ja 6, selleks aga jagame võrdeliselt arvudega $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{6}$.

7. Kahe arvu summa on 1680; leida need arvud, teades, et 3% esimesest on 5% teisest arvust.

Lahendus. 3% on 0,03; 5% on 0,05. Esimese (I) arvu kor-

rutis 0,03-ga võrdub teise (II) arvu ja 0,05 korrutisega. Arvud I ja II peavad olema pöördvõrdelised arvudega 0,03 ja 0,05.

$$I : II = 0,05 : 0,03 = 5 : 3.$$

$$I = \frac{1680 \cdot 5}{5 + 3} = 1050; \quad II = 630.$$

8. Kahel võrdsel metsalangil töötab kaks puuraiujate brigaadi. Üks brigaad, 21 inimest, töötab kohalike tingimuste järgi 6 tundi päevas, teine brigaad, 15 inimest, töötab 7 tundi päevas. Teine brigaad lõpetas langi raiumise kaks päeva hiljem kui esimene. Mitu päeva töötas kumbki brigaad?

Lahendus. Kumbki brigaad täitis ühe ja sama suurusega tööhulga, seepärast päevade arv, mis kulutati kummagi brigaadi poolt tööks, on pöördvõrdeline tööliste arvuga ja igapäevase töö tundide arvuga. Kui tööpäevade arvu märgime tähistega I ja II, siis:

$$I : II = \frac{1}{21} : \frac{1}{15};$$

$$I : II = \frac{1}{6} : \frac{1}{7}.$$

$$I : II = \left(\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{6} \right) : \left(\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{7} \right); \quad I : II = 5 : 6;$$

$$II - I = 6 - 5 = 1 \text{ (osa);}$$

$$I = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (päeva);} \quad II = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (päeva).}$$

Vastus: 10 päeva ja 12 päeva.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust lahendada järgmised ülesanded: 2828, 2830, 2832, 2836, 2853, 2863, 2875, 2880, 2885, 2889, 2893, 2894, 2899, 2912, 2916, 2925, 2933, 2942, 2945, 2952, 2960, 2969.

4. Ülesandeid segude kohta.

Ülesandeid segude kohta on kahte liiki. Esimese liigi ülesannetes antakse iga segatava sordi hulk ja tema hind, nõutakse leida segu hind. Teise liigi ülesannetes antakse ainult iga segatava sordi hind, segu hind ja segu üldine hulk, nõutakse leida, kui palju on tarvis võtta igast sordist, et saada nõutava hinnaga segu.

1. 1 m^3 kasepuid maksab 24 rbl., 1 m^3 männipuid — 20 rbl.

ja 1 m³ haavapuid — 16 rbl. Arvutada 1 m³ segapuude hind, kui seal on 45% kase-, 30% männi- ja 25% haavapuid.

Lahendus.

1) $24 \text{ rbl.} \times 0,45 = 10,8 \text{ rbl.};$

2) $20 \text{ rbl.} \times 0,3 = 6 \text{ rbl.};$

3) $16 \text{ rbl.} \times 0,25 = 4 \text{ rbl.};$

4) $10,8 \text{ rbl.} + 6 \text{ rbl.} + 4 \text{ rbl.} = 20,8 \text{ rbl.}$

Vastus: 20,8 rbl.

2. Mitu protsenti puhast hõbedat sisaldab hõbe prooviga 750?

Lahendus. $750 : 1000 = 0,75; 75\%.$

Vastus: 75%.

3. Kuivatatud õuntest hinnaga 6,6 rbl. ja 8,4 rbl. kg koostati 12 kg segu hinnaga 7,05 rbl. kg. Mitu kg õunu kummastki sordist on segus?

Lahendus.

1) $7,05 - 6,6 = 0,45 \text{ (rbl.)}$ on kasu odavama sordi kg-lt.

2) $8,4 - 7,05 = 1,35 \text{ (rbl.)}$ on kahju kallima sordi kg-lt.

3) Et segu ei annaks kasu ega kahju, on tarvis, et kasu ühelt sordilt võrduks kahjuga teiselt sordilt, selleks peab iga segatava aine hulk olema pöördvõrdeline selle aine ühiku hinna ja segu ühiku hinna vahega. Esimese sordi hulk suhtub teise sordi hulgaga nagu $1,35 : 0,45 = 3 : 1$. Siit odavama sordi hulk $\frac{12 \cdot 3}{3+1} = 9 \text{ (kg)}.$

Selle lahenduse skeemikujuline üleskõrjutus on järgmine:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I } 6,6 \text{ rbl.} & 7,05 \text{ rbl.} & + 0,45 \\ \text{II } 8,4 \text{ rbl.} & & - 1,35 \end{array} \quad \text{I : II} = 1,35 : 0,45 = 3 : 1$$

$$\text{I} = \frac{12 \cdot 3}{3+1} = 9; \quad \text{II} = \frac{12 \cdot 1}{3+1} = 3.$$

Vastus: 9 kg ja 3 kg.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust lahendada järgmised ülesanded: 2978, 2990, 2991, 3006, 3013, 3019, 3020, 3027, 3028.

5. Ülesandeid aritmeetikakursuse kõigi osade kohta.

1. Sisepääsu hind aeda on 1,5 rbl. Kui alandati pääsme hinda, suurenes küllastajate arv tema $\frac{1}{2}$ võrra, sissetulek aga suurenes tema $\frac{1}{4}$ võrra. Kui palju alandati hinda?

L a h e n d u s. Sissetulek pääsmete eest on 1,5 rbl. korrutatud külastajate arvuga. Teine tegur suurenes tema $\frac{1}{2}$ võrra ehk $1\frac{1}{2}$ korda, korrutis suurenes tema $\frac{1}{4}$ võrra ehk $\frac{5}{4}$ korda. Saame teada, mitu korda suurenes esimene tegur:

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \text{ (korda), s. o. vähenes } \frac{1}{6} \text{ osa võrra.}$$

$$150 \text{ kop.} \times \frac{1}{6} = 25 \text{ kop.}$$

V a s t u s: 25 kop. võrra.

2. Poiss, kogudes raha raadiovastuvõtja jaoks, pöördus abi-
saamiseks isa ja kahe onu poole. Esimene onu andis 25% sellest, mis oli kogutud ilma onu abita, kaasa arvatud ka poisi enda summa. Teine onu andis $33\frac{1}{3}\%$ ja isa 50% sellest, mis oli kogutud ilma nendeta, kaasa arvatud poisi enda summa. Kui palju maksis vastuvõtja, kui poisil endal oli 104 rbl.?

L a h e n d u s. Esimene onu annab 25% sellest, mis oli kogutud temata, kaasa arvatud poisi korjandus, see on 100%. Seepärast esimese onu sissemaks on $\frac{25}{100+25} = \frac{1}{5}$ vastuvõtja hinnast. Täp-

selt samuti annab teine onu $\frac{33\frac{1}{3}}{100+33\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$ vastuvõtja hinnast,

ja isa annab $\frac{1}{3}$ hinnast. Kõik kolm annavad $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$;

$$1 - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}; \quad 104 \text{ rbl.} : \frac{13}{60} = 480 \text{ rbl.}$$

V a s t u s: 480 rbl.

3. Rong möödub 7,2 sek. semaforist ja 12 sek. platvormist, mille pikkus on 120 m. Kui pikk on rong ja kui suur on tema kiirus?

L a h e n d u s. Rong möödub semaforist 7,2 sekundit, niikaua läbib ta vahemaa, mis võrdub tema pikkusega; 12 sekundiga läbib ta vahemaa, mis võrdub 120 m pluss rongi pikkus. Järelikult 12 sek. — 7,2 sek. = 4,8 sek. jooksul läbib ta 120 m; $120 \text{ m} : 4,8 = 25 \text{ m}$; $25 \text{ m} \times 3600 = 90\,000 \text{ m} = 90 \text{ km}$; $25 \text{ m} \cdot 7,2 = 180 \text{ m}$.

V a s t u s: 180 m; 90 km.

4. Valvur töötab 4 päeva ja 5. päeval puhkab. Ta alustas esmaspäeval tööd pärast pühapäevast puhkepäeva. Kui kaua aja pärast ta puhkab jälle pühapäeval?

Lahendus. Päevade arv, mis moodub, alates esmaspäevast kuni järgmise puhkuseni pühapäeval — see on väikseim arv, mis peab jaguma 5-ga (4 päeva tööd + 1 päev puhkust) ja 7-ga (7 päeva nädalas). Väikseim ühiskordne arvudele 5 ja 7 on 35 (päeva, kaasa arvatud pühapäev); kuni pühapäevani moodub 34 päeva.

Vastus: 34 päeva pärast.

5. Tehase insener sõidab iga päev rongiga jaama kell 8 hommikul. Samal kellaajal sõidab talle jaama vastu auto ja toob ta õigeaks ajaks tehasesse. Kord jõudis ta jaama tund aega tavalisest varem ja mitte soovides oodata autot läks talle vastu. Tõepoolest, teatava aja pärast ta kohtas oma autot ja saabus tehasesse 20 min. varem kui tavaliselt. Arvutada kellaaeg, millal insener kohtas autot?

Vastus: kell 7.50.

Harjutusi. Aritmeetiliste ülesannete kogust lahendada järgmised ülesanded: 3051, 3058, 3061, 3085, 3096, 3099, 3104, 3111, 3114, 3117, 3127, 3137, 3152, 3158, 3174, 3195, 3211, 3222, 3226, 3239, 3249, 3250, 3254, 3315, 3324, 3326, 3341, 3422, 3425.

ALGEBRA.

Matemaatikaprogrammi seletuskirjas, 1946. a. väljaanne, räägitakse, et algebra õpetamise eesmärgiks keskkoolis on laiendada õpilaste kujutlust arvust, õpetada teadlikult, kiiresti ja võimalikult ratsionaalselt teisendama algebralisi avaldisi, õpetada võrrandite koostamise võtteid ja nende lahendamise meetodeid. Õpetaja ise peab täiuslikult valdama algebraliste avaldiste teisendamise tehnikat ja omama oskust lahendada ülesandeid võrrandite abil. Stabiilses algebra ülesannete kogus ei tohi ükski ülesanne õpetajale raskusi teha. Peale selle peab õpetaja oskama lahendada kõrgemat tüüpi ülesandeid elementaaralgebra ülesannete kogust.

Oma igapäevases töös peab õpetaja miinimumina kasutama järgmisi raamatuid:

1. Šapošnikov ja Valtsov, Algebra ülesannete kogu VI—VIII ja VIII—X klassile, RK „Pedagoogiline Kirjandus”, 1949.

2. Алексахин, Кауфман и Сычугова. Дополнительный сборник алгебраических задач, ч. I. Под редакцией профессора Гребенча.

3. Бляшов и Чичигин. Дополнительный сборник алгебраических задач, ч. II. Под редакцией проф. Гребенча.

4. Пржевальский. Сборник алгебраических задач, ч. I, 1941 г.

5. Обер и Папелье. Упражнения по элементарной алгебре, 1940 г.

6. Кречмар. Задачи по алгебре, 1940, Учпедгиз.

7. Кречмар. Задачник по алгебре, 1937, ОНТИ.

8. „Математика в школе”. Методический журнал, 1937—1941; 1946—1947 гг.

9. A. Kissel'ov, Algebra VI—VIII ja VIII—X klassile, RK „Pedagoogiline Kirjandus”, 1949.

10. Александров и Колмогоров. Алгебра, Учпедгиз, 1940 г.

11. S. Bronštein, Algebra ja selle õpetamine seitsmeklassilises koolis, RK „Pedagoogiline Kirjandus”, 1949.

12. Чистяков. Методика алгебры.

13. Гибш. Элементарная математика.

14. Барсуков А. Н. Уравнения первой степени, 1944, ja teised.

Allpool antakse metoodilisi näpunäiteid abiks kaugõppe üliõpilasele, kes õpib iseseisvalt, arendades oma oskust lahendada ülesandeid võrrandite koostamise teel ning oskust ratsionaalselt teisedada algebralisi avaldisi.

Elementaaralgebra ülesannete esimene grupp ongi ülesanded avaldiste teisendamiseks. Alustame nendega.

§ 1. Tehteid relatiivsete arvudega.

Arvutada algebraliste summade korrutis:

$$(-3 + 5 + 8 - 4) \cdot (+2 - 7 - 6).$$

Nõutava korrutise võib leida kahel viisil:

a) Arvutame esmalt mõlemad summad, pärast leiame saadud arvude korrutise:

$$-3 + 5 + 8 - 4 = +6; \quad 2 - 7 - 6 = -11; \quad (+6) \cdot (-11) = -66.$$

Järelikult

$$(-3 + 5 + 8 - 4) \cdot (2 - 7 - 6) = (+6) \cdot (-11) = -66.$$

b) Nõutava korrutise arvutamisel teisel viisil korrutatakse esiteks esimese summa liikmed teise summa esimese liikmega, pärast korrutatakse esimese summa kõik liikmed teise summa teise liikmega jne.

$$\begin{aligned} & (-3 + 5 + 8 - 4) \cdot (2 - 7 - 6) = (-3)(+2) + \\ & + (+5)(+2) + (+8)(+2) + (-4)(+2) + (-3)(-7) + \\ & + (+5)(-7) + (+8)(-7) + (-4)(-7) + (-3)(-6) + \\ & + (+5)(-6) + (+8)(-6) + (-4)(-6) = -6 + 10 + 16 - 8 + \\ & + 21 - 35 - 56 + 28 + 18 - 30 - 48 + 24 = 117 - 183 = -66. \end{aligned}$$

Harjutusi. Arvutada:

1) $(-3,4 - 7 + 6,1) \cdot (1,5 - 4 + 2,3 + 5);$

2) $\left[-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6}\right]^2;$

3) $\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] \left[-2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right] \left[-(-2)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\right] \left[5 - \frac{1}{2} - 3\right];$

4) $\frac{\left[\frac{2}{7} - \frac{3}{5}\right] \cdot \left[\frac{2}{11} + 3\right]}{\left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{4}{5} - 2\right]};$

5) $\frac{\frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2}}{-4 + \frac{3}{4} + \frac{5}{2}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{2}{5} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{4}{7} - 1}.$

§ 2. Algebraaliste avaldiste numbrilised väärtused.

1) Leida hulkliikme numbriline väärtus:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3(y + z) \cdot (z + x)(x + y),$ kui

a) $x = -4, y = 2, z = 1;$ b) $x = -3, y = 4, z = -1.$

Lahendus.

a) $(-4)^3 + 2^3 + 1^3 + 3(2 + 1)(1 - 4)(-4 + 2) = -64 + 8 + 1 + 3(+3)(-3)(-2) = -55 + 54 = -1.$

b) $(-3)^3 + 4^3 + (-1)^3 + 3(4 - 1)(-1 - 3)(-1 + 4) = -27 + 64 - 1 + 3(+3)(-4)(+1) = +36 - 36 = 0.$

2) Leida avaldise numbriline väärtus:

$$\frac{1}{a^2 - 3b^2 + 2ab} + \frac{1}{b^2 - 3a^2 + 2ab} - \frac{2}{3a^2 + 10ab + 3b^2},$$

kui $a = 2, b = -3; a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}.$

Kui $a=2$, $b=-3$, saame:

$$a^2 - 3b^2 + 2ab = 4 - 27 - 12 = -35; \quad b^2 - 3a^2 + 2ab = 9 - 12 - 12 = -15;$$

$$3a^2 + 10ab + 3b^2 = 12 - 60 + 27 = -21$$

$$-\frac{1}{35} - \frac{1}{15} + \frac{2}{21} = -\frac{3}{105} - \frac{7}{105} + \frac{10}{105} = 0.$$

Kui $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$, saame:

$$a^2 - 3b^2 + 2ab = \frac{1}{9} - \frac{3}{16} - \frac{1}{6} = \frac{16 - 27 - 24}{144} = -\frac{35}{144};$$

$$b^2 - 3a^2 + 2ab = \frac{1}{16} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3 - 16 - 8}{48} = -\frac{21}{48} = -\frac{7}{16};$$

$$3a^2 + 10ab + 3b^2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{3}{16} = \frac{16 - 40 + 9}{48} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16};$$

$$-\frac{144}{35} - \frac{16}{7} + \frac{32}{5} = \frac{-144 - 80 + 224}{35} = \frac{0}{35} = 0.$$

3) Leida avaldise numbriline väärtus:

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

$$\text{kui } a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -1.$$

Saame:

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} + \frac{-2}{-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{(-2)} \cdot \frac{1}{4}}{-\frac{3}{4} \cdot \frac{(-1)}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + 4 - \frac{5}{3} = 3.$$

Harjutusi. Leida avaldiste numbrilised väärtused:

$$1) \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}, \text{ kui } x = -3; \quad x = \frac{1}{2};$$

$$2) \frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}, \text{ kui } a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad x = 3, \\ y = -1;$$

$$3) \frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2}, \text{ kui } a = 3, \quad b = -2 \text{ ja} \\ \text{kui } a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2};$$

$$4) \frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \frac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}, \text{ kui } x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{3}, \\ a = \frac{3}{2}, \quad b = 1;$$

$$5) \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

kui $x = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -2$.

§ 3. Tehteid ratsionaalsete avaldistega.

Ratsionaalseid avaldiseid on võimalik mitmel viisil teisendada. Peatume põhimistel teisendustel.

A. Tehteid täis-üksliikmetega ja täis-hulkliikmetega.

1) Arvutada korrutis $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$.

Lahendus.

$$\begin{array}{r} \times \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ \quad x^2 - x + 1 \\ \hline x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 \\ \quad - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x \\ \quad \quad + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

2) Arvutada korrutis:

$$(a^4 - 3a^2b^2 + 2ab^3 - b^4)(2a^3 + a^2b - 3b^3).$$

Lahendus.

$$\begin{array}{r} \times \quad a^4 - 3a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \quad 2a^3 + a^2b - 3b^3 \\ \hline 2a^7 - 6a^5b^2 + 4a^4b^3 - 2a^3b^4 \\ \quad + a^6b - 3a^4b^3 + 2a^3b^4 - a^2b^5 \\ \quad \quad - 3a^4b^3 \quad \quad + 9a^2b^5 - 6ab^6 + 3b^7 \\ \hline 2a^7 + a^6b - 6a^5b^2 - 2a^4b^3 \quad \quad + 8a^2b^5 - 6ab^6 + 3b^7 \end{array}$$

3) Lihtsustada avaldis:

$$(2a^2 + 3ab - b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 + 3ab + 2b^2).$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} (2a^2 + 3ab - b^2)^2 &= 4a^4 + 12a^3b + 5a^2b^2 - 6ab^3 + b^4; \\ -4(a^2 - b^2)(a^2 + 3ab + 2b^2) &= -4a^4 - 12a^3b - 4a^2b^2 + \\ &\quad + 12ab^3 + 8b^4. \end{aligned}$$

Pärast liitmist saame:

$$a^2b^2 + 6ab^3 + 9b^4 = b^2(a^2 + 6ab + 9b^2) = b^2(a + 3b)^2.$$

4) Kontrollida Lagrange'i samasus:

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) - (aa_1 + bb_1)^2 = (ab_1 - ba_1)^2.$$

L a h e n d u s.

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = a^2a_1^2 + b^2a_1^2 + a^2b_1^2 + b^2b_1^2;$$

$$(aa_1 + bb_1)^2 = a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + 2aa_1bb_1.$$

Pärast lahutamist saame:

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) - (aa_1 + bb_1)^2 =$$

$$= a^2b_1^2 + b^2a_1^2 - 2aa_1bb_1 = (ab_1 - ba_1)^2.$$

5) Leida hulkliikmete jagatis:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x + y + z}.$$

L a h e n d u s.

$\begin{array}{r} x^3 - x^2(y+z) - 3xyz + (y^3 + z^3) \\ - x^2(y+z) - 3xyz + (y^3 + z^3) \\ + x^2(y+z) + x(y+z)^2 \\ \hline x(y^2 + z^2 - yz) + (y^3 + z^3) \\ - x(y^2 + z^2 - yz) - (y^3 + z^3) \\ \hline 0 \end{array}$	$\frac{x + (y + z)}{x^2 - x(y + z) + (y^2 + z^2 - yz)}$
---	---

Harjutusi.

1) Arvutada korrutis $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.

2) Arvutada tähelepandavad korrutised:

a) $(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})(a - b)$, kus m tähistab positiivset täisarvu;

b) $(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \dots - ab^{m-2} + b^{m-1})(a + b)$, kus m tähistab positiivset paaritut täisarvu;

c) $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$.

3) Arvutada hulkliikmete jagatised:

a) $\frac{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)};$

b) $\frac{-x^4 + (a^2 - a)x^3 + (a^3 + 3a)x^2 + (-a^3 + 2a^2)x - 2a^2}{-x^2 + a^2x + 2a};$

c) $(x^5 - 1) : (x - 1);$

d) $(a^8 - 1) : (a + 1).$

4) Kontrollida Euleri samasus:

$$(ax + by + cz + dt)^2 + (bx - ay + dz - ct)^2 + \\ + (cx - dy - az + bt)^2 + (dx + cy - bz - at)^2 = \\ = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

5) Määrata kindlaks samasused:

a) $(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$;

b) $(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$;

c) $(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + yx + y^2)^2$.

Näpunäide näite a) kohta: olgu $x + y = s$, $xy = p$,

$$\text{siis } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 = \\ = s^4 - 4ps^2 + 2p^2;$$

$$(x + y)^4 + x^4 + y^4 = s^4 + s^4 - 4ps^2 + 2p^2 = \\ = 2(s^2 - p)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

B. Tegureiks lahutamine.

Tihti on kasulik esitada täis-hulkliige mitme teguri korrutisena, näiteks esimese astme hulkliikmete korrutisena. Tegureiks saab lahutada ainult neid hulkliikmeid, mis on saadud teiste hulkliikmete korrutamisel, kusjuures antud hulkliige lahutatakse niisuguste hulkliikmete korrutiseks, mis esinesid tema saamisel. Üldist reeglit hulkliikme tegureiks lahutamiseks ei ole; küllaldase praktika põhjal hulkliikmete teisendamisel võib mõningail juhtudel suurema vaevata näha, millisteks teguriteks lahutub antud hulkliige (ratsionaalsete arvude valdkonnas).

Lahutada tegureiks:

1) $1 + x^6$.

Lahendus.

$$1 + x^6 = 1^3 + (x^2)^3 = (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4);$$

$$1 - x^2 + x^4 = (1 + x^2)^2 - 3x^2 = (1 + x\sqrt{3} + x^2)(1 - x\sqrt{3} + x^2);$$

$$1 + x^6 = (1 + x^2)(1 + x\sqrt{3} + x^2)(1 - x\sqrt{3} + x^2).$$

2) $x^3 + x + 2$.

Lahendus.

$$x^3 + x + 2 = (x^3 + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 2).$$

3) $3 - a^2 - a^3 - a^4$.

L a h e n d u s.

$$3 - a^2 - a^3 - a^4 = (1 - a^2) + (1 - a^3) + (1 - a^4) = \\ = (1 - a)(3 + 3a + 2a^2 + a^3).$$

4) $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

L a h e n d u s.

$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = \\ = (x + y)^5 - (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = \\ = (x + y)[(x + y)^4 - x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4] = \\ = (x + y)[(x^2 + 2xy + y^2)^2 - x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4] = \\ = (x + y)(5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3) = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

5) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

L a h e n d u s. x asendamisel avaldisega $[-(y + z)]$ muutub meie avaldis nulliks:

$$[-(y + z)]^3 + y^3 + z^3 - 3[-(y + z)]yz = \\ = -(y + z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y + z)yz = \\ = -3(y + z)yz + 3(y + z)yz = 0.$$

Järelikult on tal tegur $(x + y + z)$; eraldame selle:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)^3 - 3xy(x + y) - \\ - 3xz(x + z) - 3yz(y + z) - 9xyz = (x + y + z)^3 - \\ - 3xy(x + y) - 3yz - 3xz(x + z) - 3xyz - \\ - 3yz(y + z) - 3xyz = (x + y + z)^3 - 3(x + y + \\ + z)(xy + xz + yz) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - \\ - xy - xz - yz).$$

6) $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$.

L a h e n d u s. Meie avaldis muutub nulliks, kui

$$x = y, x = z \text{ ja } y = z.$$

Järelikult ta jagub korrutisega $(x - y)(x - z)(y - z)$.

Eraldame need tegurid:

$$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) = x^3(y - z) + \\ + (y^3z - z^3y) - (xy^3 - z^3x) = x^3(y - z) + yz(y^2 - z^2) - \\ - x(y^3 - z^3) = x^3(y - z) + yz(y + z)(y - z) - x(y - z)(y^2 + \\ + yz + z^2) = (y - z)[x^3 + yz(y + z) - x(y^2 + yz + z^2)] = \\ = (y - z)[(x^3 - xz^2) - (xy^2 - y^2z) - (xyz - yz^2)] = \\ = (y - z)[x(x + z)(x - z) - y^2(x - z) - yz(x - z)] = \\ = (y - z)(x - z)[x(x + z) - y^2 - yz] = \\ = (y - z)(x - z)(x - y)(x + y + z).$$

Harjutusi. Lahutada tegureiks:

1) $125x^6 + 5x^2 + 10$;

2) $a^5 + 2a^4 + 2a^3b + b^5$;

3) $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$;

4) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$;

5) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;

6) $(y + z)(z + x)(x + y) + xyz$;

7) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

Näpunäide näite 7 kohta. Antud avaldis muutub nulliks, kui $y = z$, seepärast tema teguriks on $y - z$, samuti on tema tegureiks $z - x$ ja $x - y$. Et antud avaldis on kolmanda astmeline, siis ta võrdub $k(y - z)(z - x)(x - y)$, kus k on jääv arv. Võrdsustades koefitsiendid xy^2 juures antud ja saadud avaldistes, leiame, et $k = 1$.

8) $(a + b + c)^5 - (b + c - a)^5 - (c + a - b)^5 - (a + b - c)^5$.

Näpunäide. Antud avaldis võrdub

$$abc[k(a^2 + b^2 + c^2) + l(bc + ca + ab)];$$

see peab olema viienda astmeline.

Olgu $a = b = c = 1$, siis $243 - 1 - 1 - 1 = 3k + 3l$;
 $k + l = 80$. Olgu $a = b = 1$, $c = -1$, siis $1 + 1 + 1 - 243 =$
 $= -(3k - l)$; $3k - l = 240$; $k = 80$, $l = 0$; järelikult antud avaldis võrdub $80abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

9) $(b - c)(b + c)^4 + (c - a)(c + a)^4 + (a - b)(a + b)^4$.

10) Lahutada tegureiks näited Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannete kogu I osast, peatükk III, § 6.

C. Ratsionaalsed murrud.

1) Lihtsustada murd:

$$\frac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2} &= \frac{(2a^2 - 2b^2) - (ab + b^2)}{(2a^2 - 3ab) - (2ab - 3b^2)} = \\ &= \frac{(a + b)[2(a - b) - b]}{(2a - 3b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}. \end{aligned}$$

2) Lihtsustada murd:

$$\frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}.$$

Lahendus.

$$\frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5} = \frac{7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2}{5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{7}{5}(x^2+xy+y^2).$$

3) Liita:

$$\frac{2a+x}{a^2-x^2} + \frac{x-a}{2a^2+3ax+x^2}.$$

Lahendus. Lahutame teise murru nimetaja tegureiks:

$$2a^2+3ax+x^2 = (a+x)(2a+x);$$

$$\frac{2a+x}{a^2-x^2} + \frac{x-a}{2a^2+3ax+x^2} = \frac{(2a+x)^2 - (a-x)^2}{(a^2-x^2)(2a+x)} = \frac{3a(a+2x)}{(a^2-x^2)(2a+x)}.$$

4) Lihtsustada:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Lahendus.

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} = \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1.$$

5) Lihtsustada:

$$\frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}.$$

Lahendus.

Lugeja on:

$$\frac{(x^2+xy+y^2)(x-y)^2}{x^3y^3} = \frac{(x^3-y^3)(x-y)}{x^3y^3}.$$

Nimetaja on:

$$\frac{x^4+y^4-x^3y-xy^3}{x^2y^2} = \frac{(x^3-y^3)(x-y)}{x^2y^2}.$$

Antud murd võrdub $\frac{1}{xy}$.

6) Lihtsustada:

$$\left(\frac{p}{q} + 1\right)^2 \cdot \frac{\frac{p^3}{q^3} - 1}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 1} : \frac{\frac{p^3}{q^3} + 1}{\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 1}.$$

Lahendus. Jagatav on:

$$\frac{\frac{(p+q)^2}{q^2} \cdot \frac{p^3 - q^3}{q^3}}{\frac{p^2 - q^2}{pq} \cdot \frac{p^2 + pq + q^2}{q^2}} = \frac{p(p+q)}{q^2}.$$

Jagaja on:

$$\frac{p(p^3 + q^3)}{q^2(p^2 - pq + q^2)} = \frac{p(p+q)}{q^2}.$$

Jagatis on 1.

7) Näidata, et

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)} +$$

$$+ \frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a + b + c + d.$$

Lahendus. Viies murrud ühisele nimetajale leiame, et lugejate summa on:

$$-a^4(b-c)(b-d)(c-d) - b^4(c-a)(c-d)(a-d) -$$

$$-c^4(a-b)(a-d)(b-d) - d^4(b-c)(c-a)(a-b).$$

See avaldis muutub nulliks, kui $b=d$, kui $c=d$, ja seepärast ta võrdub:

$$k(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

Võrdsustades koefitsiendid a^4b^2c ees leiame, et $k=1$. Ühine nimetaja on

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d),$$

seepärast murdude summa on

$$a + b + c + d.$$

Harjutusi.

1) Lahendada kõik ülesanded Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile”, IV peatükk, § 6.

2) Lihtsustada:

$$\frac{\frac{a+2b}{ab^4} - \frac{2a+b}{a^4b}}{\frac{b^2+c^2}{b^2c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cdot \frac{a^2+c^2}{a^2c^2}}.$$

3) Näidata, et kui

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1,$$

siis

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^{2n+1} = 1.$$

4) Näidata, et kui

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - yx}{c},$$

siis

$$\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ac}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}.$$

5) Teisendada murd $\frac{x-y}{x+y}$ lihtsamaks, võttes

$$x = \frac{a-1}{a+1}; \quad y = \frac{2a-1}{2a+1}.$$

§ 4. Irratsionaalsed avaldised.

Irratsionaalsete avaldiste arvutamisel ja teisendamisel kasutatakse praktikas ainult üht avaldise väärtust — aritmeetilist. Peale selle tuleb märk miinus paarituarvulise juuri ja korral alati tuua juuremärgi alt juuremärgi ette, näiteks:

$$\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7},$$

vastasel korral saame vale tulemuse.

Olgu tarvis arvutada:

$$(\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}) \cdot \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} & (\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}) \cdot \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}} = \\ & = -(\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} = \\ & = -\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} + \\ & + \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} = -\sqrt[6]{529} + \\ & + \sqrt[3]{23} = -\sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{23} = 0. \end{aligned}$$

Kui aga enne jätta $\sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}}$ teisendamata, tuleb vastus $2\sqrt[3]{23}$ (vale). Kontrollige.

Lahendage Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete

kogu VIII—X klassile", peatükk IX, ülesanne nr. 317. Seletage, miks peab olema kaks vastust: $+1$ ja -1 .

Irratsionaalsete avaldiste teisendamise aluseks on samasus $(\sqrt[n]{a})^n = a$, mis oma sisult on juure definitsioon. Selle samasuse abil saab iga ratsionaalse avaldise teisendada irratsionaalseks:

$$5 = (\sqrt{5})^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \dots; \quad x + y = (\sqrt{x+y})^2 = \dots,$$

mis annab võimaluse taandada murde ja kaotada irratsionaalsust nimetajas või lugejas:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{a} = \frac{\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a})^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}; \quad \frac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}; \quad \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \text{ jne.}$$

Samasuse $(\sqrt[n]{a})^n = a$ teine kasutamisevõimalus esineb juuravaldiste teisendamise põhireeglite tuletamisel. Toome mõningaid näiteid irratsionaalsete avaldiste teguriteks lahutamise ja irratsionaalsete murdavaldiste teisendamise kohta.

- 1) $\sqrt{15} - \sqrt{6} = \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.
- 2) $a + b - \sqrt{a^2 - b^2} = (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}) = \sqrt{a+b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})$.
- 3) $x + 4\sqrt{x} + 3 = x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3 = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} + 3) = (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)$.
- 4) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{\sqrt{7}(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.
- 5) $\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}{a^2 + b^2} = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Toome kaks näidet, milles peale valemi $(\sqrt[n]{a})^n = a$ nõutakse veel astme astendamise ja korrutise astendamise seaduse kasutamist.

$$6) \left[\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right]^6 = \frac{x^6}{y^6} \left[\left(\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right)^3 \right]^2 = \frac{x^6}{y^6} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)^2 = \frac{x^4}{y^4}.$$

$$7) \left[\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right]^{2n} = \frac{a^{2n}}{b^{2n}} \left[\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^n \right]^2 = \frac{a^{2n}}{b^{2n}} \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{a^{2n-2}}{b^{2n-2}}.$$

Irratsionaalsete avaldiste jagamise ja korrutamise õppimisel valemite abil on kasulik irratsionaalsete avaldiste tegureiks lahutamisel rakendada järgmisi valemeid:

$$a) \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2.$$

$$b) a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

$$c) \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}).$$

$$d) a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b).$$

$$e) a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}).$$

$$f) x - y + 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + 3) \text{ jne.}$$

Analüüsi mõningaid näiteid võrduste tõestamiseks.

$$1) \text{ Tõestada: } \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}.$$

Lahendus. Mõlemad antud võrduse pooled on positiivsed. Selleks et tõestada nende võrdsust, piisab, kui tõestada, et nende ruudud on võrdsed. Vasaku poole ruut on $2 + \sqrt{3}$; parema poole ruut on $\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Seega mõlema poole ruudud on võrdsed.

2) Tõestada:

$$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

Lahendus. Asendame antud murrud nendega võrdsete murrudega, millel on ratsionaalsed nimetajad.

$$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}; \quad \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2};$$

$$\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

Siis saame:

$$\sqrt{6} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ jne.}$$

3) Tõestada, et kui a ja b on positiivsed arvud ning $a^2 - b$ on positiivne, siis

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Lahendus. Et tõestatava võrduse mõlemad pooled on positiivsed, siis on küllaldane, kui näidata, et nende poolte ruudud on võrdsed. Vasaku poole ruut on $a + \sqrt{b}$. Parema poole ruut on

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})(a-\sqrt{a^2-b})}{4}} = a + \sqrt{b} \text{ jne.}$$

4) Tõestada:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

Lahendus. Saame:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{6};$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{6} \text{ jne.}$$

Harjutusi.

1. Lahendada ülesanded §-d 9, 10, 11 Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannete kogust, II jagu, ptk. IX.

2. Lihtsustada:

$$\text{a) } \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}; \quad \text{b) } \frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}};$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^3-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}},$$

oletades, et x^2 ei ole 1.

$$\text{d) } \frac{(3 \pm \sqrt{5})^5 - 2^5}{(3 \pm \sqrt{5})^5 + 2^5}.$$

3) Näidata, et kui:

$$a) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0,$$

siis

$$(x + y + z)^3 = 27xyz;$$

$$b) (y - z) \sqrt[3]{1 - x^3} + (z - x) \sqrt[3]{1 - y^3} + (x - y) \sqrt[3]{1 - z^3} = 0,$$

siis

$$(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3.$$

§ 5. Murdarvulised ja negatiivsed astendajad.

1) Lihtsustada:

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1)(x - x^{\frac{1}{2}} + 1).$$

Lahendus.

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1) = (x^{\frac{1}{2}} + 1)^2 - (x^{\frac{1}{4}})^2 = x^{\frac{1}{2}} + x + 1,$$

$$(x + x^{\frac{1}{2}} + 1)(x - x^{\frac{1}{2}} + 1) = (x + 1)^2 - (x^{\frac{1}{2}})^2 = x^2 + x + 1.$$

2) Kontrollida samasus:

$$(a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Lahendus.

$$a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}} (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}});$$

võrduse vasaku poole võib kirjutada järgmiselt:

$$(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

ehk

$$(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

3) Lihtsustada murd:

$$\frac{a^2 - a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}.$$

Lahendus. Oletame, et

$$x^{\frac{1}{4}} = y, \quad a^{\frac{1}{4}} = b,$$

saame:

$$\frac{b^8 - b^6y + 2b^2y + 2y^3}{b^2 - y^2} = \frac{b^6(b^2 - y^2) - 2y(b^2 - y^2)}{b^2 - y^2} = b^6 - 2y$$

ehk

$$a^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}.$$

Harjutusi.

1. Lahendada Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VIII—X klassile”, IX ptk., § 12 harjutusülesanded.

2. Lihtsustada avaldis:

$$\frac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}$$

oletades, et $p > 1$, $q > 1$, $pq > 1$.

3. Arvutada avaldis:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}\right),$$

kui

$$x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}},$$

kus p ja q tähistavad mistahes ratsionaalseid arve ja $\frac{a+b}{a-b}$ on positiivne.

Elementaaralgebra ülesannete teise grupi moodustavad esimese ja teise astme võrrandid ühe ja rohkema tundmatuga. Ülesannete lahendamist võrrandite abil on üsna raske selgeks õppida, siin on tarvis tublisti treenida. Väga tarvilik on tõsiselt tutvuda võrrandite ja võrrandisüsteemide ekvivalentsuse teooriaga (vt. Gibš, Elementaarmatemaatika)¹.

§ 6. Esimese astme võrrandid ja võrratused ühe tundmatuga.

1) Lahendada võrrand:

$$\frac{7x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}.$$

¹ Vt. ka elementaarmatemaatika õpikut õpetajate instituutidele. S. I. Novosjolov, Algebra, Eesti Riiklik Kirjastus, 1950.

Lahendus:

$$\frac{2(7x+4)}{10} - \frac{10x}{10} = \frac{5(3x-5)}{10};$$

$$2(7x+4) - 10x = 5(3x-5); \quad 11x = 33; \quad x = \frac{33}{11} = 3.$$

Kontrollime, kas siis, kui $x=3$, antud võrrandi mõlemad pooled saavad ühe ja sama numbrilise väärtuse. Kui $x=3$, on võrrandi vasak pool $\frac{21+4}{5} - 3 = 2$, ja parem pool on $\frac{9-5}{2} = 2$.

$$2) \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} = \frac{x-3}{4} + 1.$$

Lahendus. Pärast nimetajast vabanemist saame:

$$4(2x-1) - (5x+2) - 3(x-3) - 12 = 0;$$

$$8x - 4 - 5x - 2 - 3x + 9 - 12 = 0;$$

$$(8-5-3)x - 4 - 2 + 9 - 12 = 0; \quad 0 \cdot x - 9 = 0; \quad 0 \cdot x = 9.$$

Võrrandil ei ole lahendit, see on lahendamatu võrrand.

$$3) \frac{x+6}{2} + \frac{2(x+17)}{3} + \frac{5(x-10)}{6} = 2x+6.$$

Lahendus. Pärast murdudest vabanemist saame:

$$3(x+6) + 4(x+17) + 5(x-10) - 6(2x+6) = 0;$$

$$0 \cdot x = 0.$$

Võrrandit rahuldab iga x väärtus; võrrand on määramatu.

$$4) \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{2}{3}.$$

Lahendus. Teisendame kõik võrrandi liikmed ühenimelisteks, võttes ühiseks nimetajaks $21(8x-11)$ ja vabastame võrrandi nimetajast, oletades, et $8x-11 \neq 0$, s. o. $x \neq \frac{11}{8}$. Saame: $43x - 172 = 0$ või $x = \frac{172}{43} = 4$; 4 on võrrandi lahend, mida kinnitab ka kontroll.

$$5) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0.$$

Lahendus. Viime kõik võrrandi liikmed ühisele nimetajale $(x-1)(x+3)$ ning vabaneme sellest nimetajast, oletades, et ta ei ole null, s. o. et x ei ole 1 ega -3 . Saame $(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 4 = 0$; $3x+9=0$; siit $x=-3$. Järelikult, antud võrrandil ei ole lahendit.

6) Lahendada võrrand:

$$m^2x = m(x+2) - 2.$$

Lahendus.

$$m^2x - m(x + 2) + 2 = 0; \quad (m^2 - m)x = 2(m - 1);$$
$$m(m - 1)x = 2(m - 1).$$

Kui $m(m - 1) \neq 0$, siis $x = \frac{2(m - 1)}{m(m - 1)} = \frac{2}{m}$; kui $m = 0$, siis saame $0 \cdot x = 2$, võrrand on lahendamatu. Lõpuks, kui $m = 1$, siis $0 \cdot x = 0$, võrrand on määratu.

$$7) \frac{a - x}{a - b} - \frac{x - b}{a + b} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Lahendus. Oletame, et $a - b$ ja $a + b$ on nullist erinevad, muidu võrrandil ei ole mõtet. Viime kõik võrrandi liikmed väikseimale ühisnimetajale ja vabastame võrrandi sellest nimetajast. Saame võrrandi $2ax = a^2 - b^2$. Kui $a \neq 0$, omab võrrand lahendi $x = \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Kui $a = 0$, siis b ei võrdu nulliga; sel juhul võrrandil ei ole lahendit.

8) Lahendada võrratus:

$$m(x - 1) > x - 2.$$

Lahendus.

$$(m - 1)x > m - 2.$$

Kui $m > 1$, siis $m - 1$ on positiivne ja $x > \frac{m - 2}{m - 1}$.

Kui $m < 1$, siis $m - 1$ on negatiivne ja $x < \frac{m - 2}{m - 1}$.

Kui $m = 1$, siis võrratus saab kuju $x \cdot 0 > -1$; ta on õige igal x väärtusel.

9) Ülesanne ühe tundmatuga esimese astme võrrandi koostamiseks. Kolm isikut jaotavad omavahel mingi rahasumma. Esimene saab 600 rbl. võrra vähem kui $\frac{2}{3}$ sellest summast, teine saab $\frac{1}{4}$ sellest summast, kolmas saab 4000 rbl. võrra vähem kui pool sellest summast. Tuleb leida kogu summa ja kui palju raha sai igaüks.

Lahendus. Koostada võrrand ülesande andmete järgi, see tähendab, väljendada võrrandi abil seosed ülesandes antud arvude ja tundmatute arvude vahel. Üldist reeglit võrrandi koostamiseks ei ole võimalik anda. Siin on tarvilik suur treening ülesannete lahendamisel võrrandite abil. Antud ülesande võib lahendada järgmisel viisil.

Igas algebra ülesandes tuleb kõigepealt valida tundmatu suu-

rus. Antud ülesandes tuleb võtta tundmatuks rahasumma, mis tuleb jaotada. Me märgime selle tähega x , võttes ühikuks rubla.

Nüüd on tarvis koostada võrrand, mille lahendiks on tundmatu arv x . Võrrandi koostamiseks märgime ära tehted, mis tuleb teha arvuga x . Pärast seda kontrollime, kas saadud arv rahuldab ülesande tingimusi. Esimene saab rahasumma, mis on võrdne $\frac{2}{3}x$ ilma 600 rbl., s. o. $\frac{2}{3}x - 600$; teine saab $\frac{x}{4}$, kolmas aga $\frac{x}{2} - 4000$. Selleks, et arv x rahuldaks ülesande tingimusi, on tarvilik ja piisav, et nende kolme osa summa oleks x . Nii saame võrrandi:

$$\frac{2x}{3} - 600 + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 4000 = x.$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} - x = 4600;$$

$$8x + 3x + 6x - 12x = 4600 \cdot 12;$$

$$5x = 4600 \cdot 12; \quad x = \frac{4600 \cdot 12}{5} = 11\,040.$$

Jaotamisele kuuluv rahasumma on 11 040 rbl. Esimese isiku osa on $\frac{2x}{3} - 600$ ehk $\frac{2 \cdot 11\,040}{3} - 600 = 6760$ (rbl.). Teise osa on $\frac{x}{4} = \frac{11\,040}{4} = 2760$ (rbl.). Kolmanda osa on $\frac{x}{2} - 4000 = \frac{11\,040}{2} - 4000 = 1520$ (rbl.). Kõigi kolme summa on $6760 + 2760 + 1520$, mis on tõesti 11 040 rbl.

Harjutusi.

1) Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile”, VI ptk., lahendada järgmised ülesanded: 110—135, 163—177, 188—210.

2) Šapošnikov ja Valtsov, „Algebra ülesannete kogu VIII—X klassile”, ptk. XX, ülesanded 25—39.

3) Šapošnikov ja Valtsov, „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile”, VI ptk., ülesanded 383, 412, 428, 477 (jagamine jäägiga); ülesanded 386, 392, 393, 396, 419 (ümbervalamine); ülesanded 388, 397, 398, 413, 414, 461 (segud); ülesanded 389, 402, 403, 421, 447, 466, 474, 475 (protsendid); ülesanded 399, 441, 442, 463, 467, 468 (liikumine); ülesanded 404, 405, 406, 407, 408 (basseinid); ülesanded 415, 416, 484 (kahekohaline arv); ülesanded 420, 429,

437, 473 (tundmatute korrutis); ülesanded 423, 431, 433 (murd); ülesanded 391, 441, 453, 454, 455, 458, 459, 462 (füüsika).

4) Kuuekohaline arv algab vasakult numbriga 1. Kui see number viia esimeselt kohalt vasakult viimasele kohale paremal, siis uus saadud arv on kolm korda suurem eelmisest. Leida esialgne arv.

5) Vaat sisaldab a liitrit veini. Temast valatakse välja liiter veini ja asendatakse liitri veega; seejärel valatakse liiter segu välja ja uuesti asendatakse ta liitri veega. Niiviisi korratakse n korda. Kui palju puhast veini jääb vaati?

§ 7. Esimese astme võrrandisüsteem kahe ja mitme tundmatuga.

Enne kui asuda harjutuste juurde esimese astme võrrandisüsteemide lahendamisel, tuleb korrata teooriat: mis nimetatakse võrrandisüsteemiks, millal antud võrrandisüsteemil on üks ja ainult üks lahendite süsteem, millal ta on vastuoluline ja millal määramatu.

Esmajärjekorras on tarvis korrata esimese astme võrrandisüsteemi kahe tundmatuga. Kahe võrrandi lahendamine kahe tundmatuga taandatakse võrrandi koostamiseks, mis sisaldab ainult üht tundmatut. Niisuguse võrrandi koostamist nimetatakse tundmatu elimineerimiseks. Kasutatakse nelja elimineerimismeetodit. 1) Koefitsientide võrdsustamise meetod. 2) Asendusmeetod. 3) Tundmatute võrdlemise meetod. 4) Määramata kordaja meetod. Omaette meetod on abitundmatute meetod, mis tihti lihtsustab algebralist avaldist, sageli asendatakse murdavaldis täisavaldisega jne. Kõigi nende võtetega peab olema tuttav.

1) Lahendada süsteem:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 4y - 29 &= 0 \\ 9x - 2y - 17 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lahendus. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi üldine kuju:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Süsteemi determinant } D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Võrrandisüsteemil on üks ja ainult üks lahendisüsteem, mis väljendub valemitega:

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Lugeja x jaoks $N_x = \begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix} = bc' - cb'$ saadakse nimetajast D

tähe x ees seisvate koefitsientide a ja a' asendamisega võrrandite

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

vabaliikmetega, mis on võetud vastupidiste märkidega, ehk vabaliikmetega tingimusel, et nad on üle viidud võrrandi paremale poolele, s. o. $-c$ ja $-c'$.

Täpselt samuti lugeja y jaoks $N_y = \begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix} = a'c - ac'$ saadakse nimetajast D koefitsientide b ja b' , mis seisavad y ees, asendusega vabaliikmetega $-c$ ja $-c'$.

Meie juhul

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 9 = -42;$$

ta ei võrdu nulliga, järelikult antud süsteemil on üks lahendisüsteem:

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 4 \\ 17 & -2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-126}{-42} = 3;$$

$$y = \frac{N_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 29 \\ 9 & 17 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-210}{-42} = 5.$$

Võib otseselt veenduda, et need väärtused rahuldavad antud süsteemi.

2) Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 5x - 9y = 7 \end{cases}$$

Lahendus. Lahendame määramata kordajate meetodiga. Korrutame esimese võrrandi pooled mingi määramata arvuga m , liidame pärast selle võrrandi pooled teise võrrandi pooltega, siis saame

$$(4m + 5)x + (3m - 9)y = 26m + 7. \quad (1)$$

Et arv m on määramata, siis valime ta nii, et selles võrrandis koefitsient ühe tundmatu ees, näiteks y ees, muutuks nulliks, s. o. võtame $3m - 9 = 0$ ehk $m = 3$. Siis $(4m + 5)x = 26m + 7$ ehk $(4 \cdot 3 + 5)x = 26 \cdot 3 + 7$. Siit $x = 5$.

Kui võrrandis (1) võtame $4m + 5 = 0$, saame

$$(3m - 9)y = 26m + 7. \text{ Aga et } m = \frac{-5}{4}, \text{ siis } y = 2.$$

3) Lahendada süsteem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3y-5} &= 3 \\ \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{3y-5} &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Lahendus. Lahendame abitudmatute meetodiga.

Võttes

$$\frac{1}{2x-1} = a; \quad \frac{1}{3y-5} = b,$$

saame:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 3 \\ 3a - 2b &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Leiame, et $a = 2$, $b = 1$, siit

$$\frac{1}{2x-1} = 2 \text{ ja } \frac{1}{3y-5} = 1.$$

Järelikult,

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = 2.$$

4) Lahendada süsteem:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 5 &= 0 \\ 4x - 6y + 9 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lahendus. Antud süsteemi determinant

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 0.$$

Järelikult koefitsiendid x ja y ees kummaski võrrandis on teineteisega võrdelised:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}, \text{ kuid } \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{5}{9}.$$

Antud võrrandisüsteemil ei ole lahendit.

Lahendame antud süsteemi asendusmeetodiga. Esimesest võrrandist saame: $x = \frac{3y-5}{2}$. Asetame selle x väärtuse teise võrrandisse, saame:

$$\frac{4(3y-5)}{2} - 6y + 9 = 0 \text{ ehk } 0 \cdot y = 2.$$

Antud võrrandisüsteem on ekvivalentne süsteemiga

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3y-5}{2} \\ 0 \cdot y &= 2 \end{aligned} \right\},$$

millel ei ole lahendit.

5) Lahendada süsteem:

$$\left. \begin{aligned} (m+5)x + (2m+3)y - (3m+2) &= 0 \\ (3m+10)x + (5m+6)y - (2m+4) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lahendus. Antud võrrandisüsteemi determinant

$$D = \begin{vmatrix} m+5 & 2m+3 \\ 3m+10 & 5m+6 \end{vmatrix} = -m(m-2).$$

Kui $m(m-2) \neq 0$, siis võrrandisüsteemil on ainult üks lahendisüsteem ühise nimetajaga D .

$$x = -\frac{11m+14}{m-2}, \quad y = \frac{7m+22}{m-2}.$$

Kui $m=0$, saab süsteem järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} 5x + 3y - 2 &= 0 \\ 10x + 6y - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$m=0$ korral on süsteem määramatu.

Kui $m=2$, siis võrrandid saavad järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} 7x + 7y - 8 &= 0 \\ 16x + 16y - 8 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 7 \\ 16 \end{matrix} = \begin{matrix} 7 \\ 16 \end{matrix} \neq \begin{matrix} -8 \\ -8 \end{matrix};$$

juhul, kui $m=2$, ei ole süsteemil lahendit.

Ei ole raske eespool öeldut laiendada kahest võrrandist koosnevalt süsteemilt võrrandidele, kus on kuimitu tahes tundmatut (vt. algebra õpikust).

6) Lahendada süsteem:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0 \\ x + by + b^2z + b^3 &= 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lahendus. Lahutame liikmeti esimese võrrandi liikmed järgemööda teise kahe võrrandi liikmetest, saame antud võrrandisüsteemiga ekvivalentse võrrandisüsteemi:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0 \\ (b - a)y + (b^2 - a^2)z + b^3 - a^3 &= 0 \\ (c - a)y + (c^2 - a^2)z + c^3 - a^3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Jagades kõik teise võrrandi liikmed $(b - a)$ -ga ja kolmanda liikmed $(c - a)$ -ga, pärast lahutades teise võrrandi liikmed kolmanda liikmetest, saame võrrandisüsteemi:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0 \\ y + (b + a)z + b^2 + ab + a^2 &= 0 \\ z + c + b + a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Vastus: $z = -(a + b + c)$; $y = bc + ca + ab$; $x = -abc$.

Harjutusi. 1. Lahendada Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile”, ptk. VI, a) ülesanded: 243, 244, 249; b) ülesanded: 300, 304, 317, 318, 321, 324; c) ülesanded: 351, 361, 365; d) ülesanded: 259, 265, 271, 290, 330, 337, 349, 350.

2. Šapošnikov ja Valtsov, „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile”, ptk. VI, ülesanded 501, 502, 479, 487, 486, 497, 491, 492, 503, 490, 501, 499, 500, 481, 513, 517, 523, 527, 534, 536, 541, 545, 550, 561.

3. Lahendada süsteemid:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad x(y + z) : y(z + x) : z(x + y) &= p : q : r \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= p + q + r \end{aligned} \right\}$$

Vastus: $x = \frac{1}{-p + q + r}$; $y = \frac{1}{p - q + r}$; $z = \frac{1}{p + q - r}$.

$$\left. \begin{aligned} b) \quad ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= d^3 \end{aligned} \right\}$$

Vastus: $x = \frac{d(d - b)(d - c)}{a(a - b)(a - c)}$.

4. Rauamaaki saadakse kahest eri kaevandusest: üks maak sisaldab 72% rauda, teine aga 58%. Teatud hulk esimest maaki

segatakse teatud hulga teise maagiga, saadakse kolmas maak, mis sisaldab 62% rauda. Kui segu jaoks oleks võetud igat maaki 15 kg võrra rohkem, saaks maagi, mis sisaldab 63,25% rauda. Leida neil tingimustel: 1) vahetuskord, milles oli tehtud segu mõlematest maadidest, 2) mõlemate seguks võetud maadide kaal.

5. Kolm kraani A, B ja C, millest kaks — B ja C — lasevad vähem vett läbi kui kraan A ning nad on ühe ja sama läbilaskevõimega, on avatud reservuaari täitmiseks üheaegselt. Leida aeg, mis on tarvilik reservuaari täitmiseks, teades, et

1) kui sulgeda üks kraan, kas B või C, momendil, kui reservuaar on täitunud pooleni, pikeneb täitmisoperatsioon 1 tunni võrra;

2) kui peale selle sulgeda veel teine kraan momendil, kui reservuaar on täitunud $\frac{3}{4}$ -ni, pikeneb täitumine veel 1 tunni võrra.

6. Arvutada hõbeda ja vase sulami kaal ning proov, teades, et sulatades vaske 3 kg puhta hõbedaga, saadakse sulami proov 900, sulatades teda aga 2 kg teise sulamiga, mille proov on 900, saadakse sulamiprooviga 840.

§ 8. Ühe tundmatuga teise astme võrrandid.

Korrata algebra õpiku järgi ruutvõrrandite teooriat.

Lahendada võrrandid:

$$1) (7 - 4\sqrt{3})x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2 = 0.$$

Lahendus.

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}; (2 - \sqrt{3})x = y;$$

$$y^2 + y - 2 = 0; y_1 = 1; y_2 = -2;$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = -2(2 + \sqrt{3}).$$

$$2) \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Lahendus.

$$\frac{(x+1)^3}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{m^2}{n^2}; \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{m^2}{n^2};$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{m}{n} \text{ ja } \frac{x+1}{x-1} = -\frac{m}{n} \text{ jne.}$$

$$3) \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0.$$

Lahendus. Liidame esimese murru neljandaga ja teise kolmandaga:

$$\frac{2x}{x^2-64} + \frac{2x}{x^2-36} = 0; x_1 = 0;$$

$$\frac{1}{x^2-64} + \frac{1}{x^2-36} = 0; x_2 = \sqrt{50}; x_3 = -\sqrt{50}.$$

$$4) \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4.$$

Lahendus. Antud võrrandist saame, lahutades tema igast vasakpoolsest liikmest 1, võrrandi:

$$\frac{2}{x-1} + \left(-\frac{4}{x+2}\right) + \left(-\frac{6}{x+3}\right) + \left(+\frac{8}{x-4}\right) = 0.$$

$$\frac{4}{x-4} - \frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-1}; \frac{x+24}{x^2-x-12} = \frac{x-4}{x^2+x-2};$$

$$x = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{69}{5}}\right).$$

$$5) \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 4,8.$$

Lahendus.

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 5 - \frac{1}{5}; \frac{x-1}{x+1} = 5; \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{5} \text{ jne.}$$

6) Lahendada homogeenne võrrand:

$$ab(a-x)^2 + (a^2+b^2)(x-a)(x-b) + ab(x-b)^2 = 0.$$

Lahendus.

$$ab(x-a)^2 + (a^2+b^2)(x-a)(x-b) + ab(x-b)^2 = 0;$$

$$\frac{x-a}{x-b} = n, \text{ siit } x-a = n(x-b);$$

$$ab[n(x-b)]^2 + (a^2+b^2)n(x-b)(x-b) + ab(x-b)^2 = 0;$$

$$(x-b)^2[abn^2 + (a^2+b^2)n + ab] = 0;$$

$$(x-b)^2 = 0; x_1 = b \text{ (antud võrrandit ei rahulda);}$$

$$abn^2 + (a^2+b^2)n + ab = 0; n_1 = -\frac{b}{a}; n_2 = -\frac{a}{b};$$

$$x_2 = \frac{a^2+b^2}{a+b}; x_3 = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$7) \frac{x+a+m}{x+a-m} = \frac{1-ma+mx}{1+ma-mx}.$$

Lahendus. Lahendame tuletatud proportsiooni abil:

$$\frac{x+a+m+x+a-m}{x+a+m-x-a+m} = \frac{1-ma+mx+1+ma-mx}{1-ma+mx-1-ma+mx};$$

$$\frac{2x+2a}{2m} = \frac{2}{2mx-2ma}; x = \pm \sqrt{a^2+1}.$$

8) Milliste λ väärtuste korral võrrandi $2x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 3 = 0$ lahendite vahe võrdub ühega?

Lahendus. Olgu x_1 ja x_2 antud võrrandi lahendid.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

$$x_1 + x_2 = \frac{\lambda + 1}{2}; \quad x_1x_2 = \frac{\lambda + 3}{2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)^2 - 2(\lambda + 3) = \frac{\lambda^2 - 6\lambda - 23}{4};$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0; \quad \lambda_1 = -3; \quad \lambda_2 = 9.$$

Kui $\lambda = -3$, siis $x_1 = -1$; $x_2 = 0$.

Kui $\lambda = 9$, siis $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

$$9) \quad x^4 - 2(x^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

Vastus: $\pm(a + b)$ ja $\pm(a - b)$.

$$10) \quad \sqrt{10 + x} - \sqrt{10 - x} = 2.$$

Lahendus.

$$\sqrt{10 + x} = \sqrt{10 - x} + 2; \quad 10 + x = 4 + 4\sqrt{10 - x} + 10 - x;$$

$$2x - 4 = 4\sqrt{10 - x}; \quad x - 2 = 2\sqrt{10 - x};$$

$$x^2 - 36 = 0; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = -6.$$

Teine lahend: -6 on võõrlahend, rahuldab võrrandit

$$\sqrt{10 - x} - \sqrt{10 + x} = 2.$$

$$11) \quad \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{5}{6}.$$

Lahendus.

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = y; \quad \text{siis } 6y^2 - 5y - 6 = 0; \quad y_1 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{1}{y}; \quad \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = \frac{3}{2}, \quad x_1 = 5;$$

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = -8.$$

Teine lahend on võõrlahend, ta tekkis antud võrrandi poolte ruutu tõstmisel ja rahuldab võrrandit:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} - \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = \frac{5}{6}.$$

$$12) \quad 5x^2 + 35x - \sqrt{x^2 + 7x - 1} = 4.$$

Lahendus.

$5(x^2 + 7x - 1) - \sqrt{x^2 + 7x - 1} + 1 = 0$; $\sqrt{x^2 + 7x - 1} = y$;
siis $5y^2 - y + 1 = 0$ jne.

Harjutusi. 1. Lahendada Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VI—VIII klassile” ptk. VIII ülesanded: 39—52, 68—72, 77, 78, 82, 83, 84, 85, 87, 88—100, 102, 103, 106.

2. Šapošnikov ja Valtsov, „Algebra ülesannete kogu VIII—X klassile”, ptk. XI, ülesanded: 23, 24, 25, 29, 32, 36, 39, 43, 44, 45; ülesanded: 95—109; ülesanded: 110—122, 126, 130.

3. Šapošnikov ja Valtsov, VIII—X klassile, ptk. XII, ülesanded: 5, 7, 17, 18, 22, 24, 26.

4. Šapošnikov ja Valtsov, VIII—X klassile, ptk. XIII, ülesanded: 11, 13, 16, 18, 20, 21, 26, 33, 35, 37.

$$5. \quad \frac{1-ax}{bx} + \frac{1-bx}{ax} = 2.$$

Näpunäide. Lisada igale murrule -1 .

$$6. \quad (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$$

Näpunäide. Teine tegur esitada kujul $(x^2 + x + 1) + 1$ ja teha asendus $x^2 + x + 1 = y$.

7. Leida reaalsed lahendid:

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{4}{13} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Näpunäide. $\sqrt[3]{x} = m$;

siis on: $m + \frac{1}{m} = \frac{4}{13} \left(m^3 + \frac{1}{m^3} \right)$, pärast taandamist avaldisega $m + \frac{1}{m}$ saame

$$\frac{4}{13} \left(m^2 - 1 + \frac{1}{m^2} \right) = 1$$

jne. Taandamisel avaldisega $m + \frac{1}{m}$ kadusid imaginaarsed lahendid.

$$8. \quad \frac{1}{8-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{2}{3-2x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{5-x} + \frac{2}{15-2x}.$$

Näpunäide.

$$\left(\frac{1}{8-x} - \frac{1}{1-x} \right) + \left(\frac{1}{4-x} - \frac{1}{5-x} \right) + 2 \left(\frac{1}{3-2x} - \frac{1}{15-2x} \right) = 0;$$

$$x^2 - 9x + 8 = y \text{ jne.}$$

§ 9. Teise astme võrrandite süsteemid.

Mitme tundmatuga teise astme võrrandite lahendamisel esineb raskusi. Ainult mõningail erijuhtudel taandub see ühe tundmatuga ruutvõrrandi lahendamiseks. On tarvis suurt treeningut teise astme võrrandisüsteemi lahendamisel.

Lahendada süsteemid:

$$1) \begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

Lahendus. $x = ny$, saame

$$\begin{cases} n^2 y^2 + ny^2 = 12 \\ ny^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Korrutame saadud teise võrrandi mõlemad pooled 6-ga, pärast lahutame ta pooled esimese võrrandi pooltest, saame:

$$n^2 y^2 - 5ny^2 + 6y^2 = 0 \text{ ehk } n^2 - 5n + 6 = 0 \quad (y^2 \neq 0) \text{ jne.}$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}; x_{3,4} = \pm 3.$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 1 + \frac{7}{\sqrt{xy}} \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3} = 78 \end{cases}$$

Lahendus. Vabastame esimese võrrandi nimetajaist, teise võrrandi vasaku poole lahutame tegureiks, saame:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ \sqrt{xy}(x + y) = 78 \end{cases}$$

Võttes:

$$x + y = m \text{ ja } \sqrt{xy} = n,$$

saame:

$$\begin{cases} m - n = 7 \\ mn = 78 \end{cases} \text{ jne.}$$

Vastus: $x_1 = y_2 = 4$; $x_2 = y_1 = 9$. Teised lahendid on imaginaarsed.

$$3) \begin{cases} x + y + xy = -1 \\ x^2 + y^2 - (x + y) = 22 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Teise võrrandi kirjutame järgmiselt:

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2xy = 22.$$

Võttes:

$$x + y = m \text{ ja } xy = n,$$

saame:

$$m + n = -1; \quad m^2 - m - 2n = 22.$$

Leiame:

$$m_1 = 4; \quad m_2 = -5; \quad n_1 = -5; \quad n_2 = 4 \text{ jne.}$$

$$\text{V a s t u s: } x_1 = y_2 = 5; \quad x_2 = y_1 = -1; \quad x_3 = y_4 = -4; \\ x_4 = y_3 = -1.$$

$$\left. \begin{aligned} 4) \quad x + y - z &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

L a h e n d u s. Vabastame kolmanda võrrandi vasaku poole nimetajaist.

$$xy - zy - xz = \frac{xyz}{6} \quad (1).$$

Tõstame esimese võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy - xz - yz) = 16$$

ehk (1) põhjal pidades silmas teist võrrandit:

$$14 + 2 \cdot \frac{xyz}{6} = 16; \quad xyz = 6, \quad xy = \frac{6}{z}.$$

Asetanud väärtuse xy võrrandisse (1), saame:

$$\frac{6}{z} - z(x + y) = 1.$$

Kuid esimesest võrrandist:

$$x + y = 4 + z;$$

saame seega:

$$\frac{6}{z} - z(4 + z) = 1. \text{ jne.}$$

$$\left. \begin{aligned} 5) \quad x(y + z) : y(x + z) : z(x + y) &= a : b : c \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= a + b + c. \end{aligned} \right\}$$

L a h e n d u s. Kirjutame esimese võrrandi järgmiselt:

$$\frac{xy + xz}{a} = \frac{xy + yz}{b} = \frac{xz + yz}{c}.$$

Jagame iga lugeja xyz -ga:

$$\frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{y}}{a} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{b} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{c}.$$

Võrdsete suhete rea omaduse põhjal saame:

$$\frac{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}{a + b + c} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{y}}{a} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{b} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{c}$$

ehk, arvestades teist võrrandit:

$$\frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{y}}{a} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{b} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{c} = \frac{2(a + b + c)}{(a + b + c)} = 2,$$

siit

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{y} &= 2a \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} &= 2b \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} &= 2c \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Vastus: } x = \frac{1}{b + c - a}; y = \frac{1}{a + c - b}; z = \frac{1}{a + b - c}.$$

Harjutusi. 1. Lahendada Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VIII—X klassile” ptk. XIV ülesanded: a) 4, 9, 12, 14, 16, 20, 24, 25, 26, 30; b) 36, 39, 44, 47, 49, 55, 57, 59, 62, 63, 65, 67, 72, 75, 80, 84, 87, 90; c) 106, 108, 123, 124, 125, 126, 127, 132, 133, 134.

2. Lahendada süsteimid:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } yz &= a + y + z \\ zx &= b + z + x \\ xy &= c + x + y \end{aligned} \right\}$$

Näpunäide. Antud süsteemi teisendame kergesti järgmiseks:

$$\begin{aligned} (x - 1)(y - 1) &= c + 1 \\ (z - 1)(x - 1) &= b + 1 \\ (y - 1)(z - 1) &= a + 1 \end{aligned}$$

Korrutame teise võrrandi pooled esimese pooltega ja jagame tulemused kolmanda võrrandi pooltega, saame:

$$(x-1)^2 = \frac{(b+1)(c+1)}{a+1} \text{ jne.}$$

$$\text{b) } \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} x+y+z &= 9 \\ x^2+y^2+z^2 &= 41 \\ x^3+y^3+z^3 &= 189 \end{aligned} \right\}$$

3. Пржевальский, Сборник алгебраических задач, ч. I, 1941 г. №№ 536—561.

§ 10. Logaritm- ja eksponentvõrrandid.

1) Arvutada: $7^{\log_7 0,3}$

Lahendus. Samasuse $a^{\log_a N} = N$ põhjal on

$$7^{\log_7 0,3} = 0,3.$$

2) Arvutada:

$$4^{\frac{1}{2} + \log_{16} \sqrt{3}}$$

Lahendus.

$$4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\log_{16} \sqrt{3}} = 2 \cdot 16^{\frac{1}{2} \log_{16} \sqrt{3}} = 2 \cdot 16^{\log_{16} \sqrt[4]{3}} = 2 \sqrt[4]{3}.$$

3) $(0,13)^{x-204} = 0,002197.$

Lahendus.

$$(0,13)^{x-204} = (0,13)^3; \quad x-204=3; \quad x=207.$$

4) $3^{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{6561}.$

Lahendus.

$$3^{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}}; \quad \sqrt{x} = \frac{8}{4}; \quad x=4.$$

5) $[4^{3-x}]^{(2-x)} = 1.$

Lahendus.

$$\begin{aligned} 4^{(3-x)(2-x)} &= 4^0 \\ (3-x)(2-x) &= 0 \text{ jne.} \end{aligned}$$

$$6) \log_2 \log_2 \log_2 x = 0.$$

Lahendus.

$$\log_2 \log_2 x = y; \quad \log_2 y = 0; \quad y = 1;$$

$$\log_2 \log_2 x = 1; \log_2 x = z; \log_2 z = 1; z = 2; \log_2 x = 2; x = 2^2 = 4.$$

$$7) x^{1+\lg x} = 100.$$

Lahendus. Logaritmides saame:

$$\lg^2 x + \lg x - 2 = 0; \lg x = -2; x = 0,01; \lg x = 1; x = 10.$$

$$8) xy = 9; (2x)^{\log_2 y} = 8.$$

Lahendus. Logaritmides mõlemad võrrandid alusel 2 saame:

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 = 3; \log_2 y (\log_2 2 + \log_2 x) = 3.$$

Asetades teise võrrandisse esimesest

$$\log_2 x = 3 - \log_2 y;$$

teisendame teise võrrandi niisuguseks:

$$\log_2^2 y - 4 \log_2 y + 3 = 0 \text{ jne.}$$

Harjutusi. 1. Lahendada Šapošnikovi ja Valtsovi teosest „Algebra ülesannete kogu VIII—X klassile” ptk. XVI ülesanded:

a) 1—34; b) 181, 189, 190, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 208, 214, 215, 217, 222, 229, 232, 235, 239—248.

$$2. \text{ Arvutada: a) } 3^{\log_3 2 + \log_3 3}; \text{ b) } 2^{4 - \log_5 5}; \text{ c) } 9^{2 + \log \sqrt{3}}.$$

3. Lahendada võrrandid:

$$\text{a) } 2^{(3^x)} = 3^{(2^x)}; \text{ b) } x^{\sqrt{2}} = 2x; \text{ c) } 5^x + 5^{-x} = \sqrt{5}.$$

4. Lahendada süsteemid:

$$\text{a) } y^{x^2 - 7x + 12} = 1; \quad y + x = 4;$$

$$\text{b) } (x + y)^{\frac{1}{x}} = 2; \quad (x + y) \cdot 3^x = 279\,936.$$

§ 11. Teise astme võrratused.

Teooriast läbi lugeda teine peatükk Gibši „Элементарная математика”.

Teise astme võrratuste lahendamisel on kasulik kasutada skeemi:

Kui	Kui	$ax^2 + bx + c > 0$ Rahuldub tingimusel kui	$ax^2 + bx + c < 0$ Rahuldub tingimusel kui
$b^2 - 4ac > 0$	$a > 0$ $a < 0$	$x > x_1$ ja $x < x_2$ $x_2 < x < x_1$	$x_2 < x < x_1$ $x > x_1$ ja $x < x_2$
$b^2 - 4ac = 0$	$a > 0$ $a < 0$	Igal x väärtusel võimatu	Võimatu igal x väärtusel
$b^2 - 4ac < 0$	$a > 0$ $a < 0$	Igal x väärtusel võimatu	Võimatu igal x väärtusel

x_1 ja x_2 on võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid, kusjuures $x_1 > x_2$.

1) Lahendada võrratus:

$$2x^2 - 5x - 12 < 0.$$

Lahendus.

$$2x^2 - 5x - 12 = 0, \quad x_1 = -\frac{3}{2}; \quad x_2 = 4.$$

Lahendid on erimärgilised, sest kolmliikme äärmised liikmed on vastupidiste märkidega. Antud kolmliige on negatiivne, kui x väärtus asetseb tema nullkohtade vahel. Võrratuse lahendid on määratud sellega, et peab olema $-\frac{3}{2} < x < 4$.

2) Lahendada võrratus:

$$6x^2 - 17x + 5 > 0.$$

Lahendus. Antud kolmliikmel on kaks erinevat nullkohta $\frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$. Ta on positiivne x väärtustel, mis asetsevad tema nullkohtadest väljaspool. Järelikult, kas $x < \frac{1}{3}$ või $x > \frac{5}{2}$.

3) Missugustel λ väärtustel võrratus $x^2 + 2x + \lambda > 10$ rahuldub igal x väärtusel?

Lahendus. $x^2 + 2x + \lambda - 10 > 0$. Selleks et teise astme kolmliige jääks positiivseks, on tarvis, et koefitsient x^2 ees oleks nullist suurem ja diskriminant $b^2 - 4ac$ oleks võrdne nulliga või sellest väiksem. Antud juhul: $4 - 4(\lambda - 10) \leq 0$, s. o. $\lambda \geq 11$.

Harjutusi. 1. Lahendada võrratused:

- a) $-x^2 + 4x + 1 > 0$; b) $9x^2 - 6x + 1 > 0$;
c) $2x^2 - x + 3 > 0$.

2) Lahendada võrratused:

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{20}{x+1} < \frac{8}{x^2-1}$; b) $\frac{1}{x^2-2x-15} > \frac{1}{x^2-x-2}$.

3) Millistel λ väärtustel võrratus $x^2 - (8\lambda - 2)x + 15\lambda^2 - 2\lambda - 7 > 0$ rahuldub mistahes x väärtusel?

4) Millistel λ väärtustel igal x väärtusel

$$(\lambda - 2)x^2 + 2(\lambda - 3)x + (5\lambda - 6) > 0?$$

5) Milliseid tingimusi peab rahuldama arv m , et kolmliige $x^2 - 2(4m - 1)x + 15m^2 - 2m - 7$ oleks positiivne igal x väärtusel?

§ 12. Harjutusi kogu elementaaralgebra kursuse kohta.

Harjutamiseks kogu elementaaralgebra kursuse ulatuses võtta raamat: Кречмар, Задачи по алгебре. Пособие для учителей средней школы. Учпедгиз, 1940 г. Selles väikses kogus on järgmised osad:

1. Avaldiste teisendamine (27 numbrit).
2. Võrrandid ja võrrandisüsteemid (28 nr.).
3. Irratsionaalsed võrrandid (29 nr.).
4. Logaritmid, logaritmivõrrandid ja eksponentvõrrandid (25 nr.).
5. Kombinatoorika elemendid (27 nr.).
6. Võrratused (34 nr.).
7. Kõrgema astme võrrandid (26 nr.).

II. METOODILISI NÄPUNÄITEID ISESEISVAKS TÖÖKS GEOMEETRIAS.

Geomeetria õpetamise eesmärk on arendada õpilastes ruumilist kujutlust kujundite omaduste tundmaõppimise teel ja nende omaduste kasutamise teel arvutus- ja konstruktsioonülesannete lahendamisel; arendada õpilastes loogilist mõtlemist ja oskust kasutada saadud teadmisi praktilistes töödes (maastiku mõõtmised, mitmesuguste ehitiste, pindalade ja ruumalade arvutamine jne.). Teooria ja praktika seos matemaatika õpetamisprotsessis ilmneb esiteks harjutuste täitmisel, mis annavad teatava ettevalmistuse praktiliste küsimuste lahendamiseks, ja teiseks, praktiliste tööde teostamisel, kus leiavad kasutamist õpilaste matemaatilised teadmised.

Need tööd ja harjutused peavad olema orgaaniliselt seotud matemaatikaprogrammiga ja nad ei tohi segada matemaatiliste teadmiste süsteemi. (Keskkooli matemaatikaprogrammi seletuskirjast, 1944. a.)

Tuleb meeles pidada, et ainult küllaldase hulga ülesannete lahendamise puhul õpitavast materjalist omandab õpilane tõepoolest selle materjali.

Kasulike ülesannete allikatena geomeetria osutame järgmistele raamatutele:

М. По п р у ж е н к о. Сборник геометрических задач. Планиметрия. Учпедгиз, 1936; Б. Романовский, Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, 1936; его же дополнительный сборник задач по стереометрии, Учпедгиз, 1940. П. Д з ы к, Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел. Учпедгиз, 1936. Гу л ь. Сборник геометрических задач, планиметрия (дополнение к стабильному задачнику Н. Рыбкина), Учпедгиз, 1940. Б. Делоне, О. Житомирский, А. Фетисов. Сборник геометрических задач, Учпедгиз, 1941. Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile. RK „Pedagoogiline Kirjandus”, 1949; Kisseljov, Geomeetria, stereomeetria XI klassile, Eesti Riiklik Kirjastus, 1950.

Häid, trigonomeetria kasutamist nõudvaid ülesandeid geomeetrias võime leida ülesannete kogus:

Н. Рыбкин: „Собрание стереометрических задач, требующих применения тригонометрии”. Гос. изд., 1923.

On tarvis meeles pidada, et õpetamise eelduseks on, et õpetaja ise oskaks vabalt ülesandeid lahendada. See saavutatakse ainult suure praktikaga — mida rohkem on õpetaja ülesandeid lahendanud, seda parem. Eriti tarvilik on, et õpetaja oleks lahendanud Kisseljovi õpikust kõik geomeetria ülesanded.

Geomeetria ülesandeid on nelja tüüpi: konstruktsioonülesanded, geomeetriliste kohtade ülesanded, tõestamisülesanded ja arvutamisülesanded. Konstruktsioonülesannete lahendamise eesmärk on esiteks õpetada õpilast tegema ja lugema jooniseid, teiseks õpetada teda matemaatiliselt mõtlema, tõsta tema matemaatilist kultuuri, õpetada kombineerima, kasutades geomeetrias omandatud teoreetilisi teadmisi. Selle ülesannete tüübi juurde kuuluvad, meetoodilises mõttes, geomeetriliste kohtade ülesanded, millised lülitame konstruktsioonülesannete ossa (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria, VIII ja IX klass. RK „Pedagoogiline Kirjandus”, 1949, lk. 89, ülesanded 21—23; lk. 118, ülesanded 1—5 ja lk. 199, ülesanded 15—20). Tuleb meeles pidada, et arusaamine geomeetrisest kohast on üks põhimistest mõistetest geomeetrias. Ülesanded tõestamise kohta aitavad vahetult omandada teooriat, õpetavad moodustama matemaatilisi tõestusi, s. o. aitavad omakorda kaasa matemaatilise kultuuri tõstmisel. Lõpuks arvutamisülesanded õpetavad arvutamisel õigesti kasutama geomeetrilisi teoreeme (peaasjalikult meetrilisi, s. o. seotud mõõtmistega), õpetavad arvutama. Siirdume nüüd nende nelja tüüpi ülesannete arutlemisele.

§ 1. Konstruktsioonülesandeid.

1. Igas konstruktsioonülesandes on tarvis konstrueerida otsitav kujund A teise antud kujundi a järgi, kusjuures otsitava kujundi elemendid on teatud vahekorras antud kujundi elementidega. Elementaargeomeetrias vaadeldakse ainult niisuguseid konstruktsioone, mis taanduvad sirge konstrueerimisele, mis läbib kahte antud punkti (joonlaua kasutamine), ja ringjoone konstrueerimisele, millest on antud keskpunkt ja raadius (sirkli kasutamine). Tuleb eristada kaht tüüpi konstruktsioonülesandeid. Esimest tüüpi ülesanded on niisugused, milles otsitava kujundi asendile ei esi-

tata mingeid nõudeid ja see võib olla valitud vabalt, näiteks: konstrueerida kolmnurk aluse, tipunurga ja kõrguse järgi. Siin antud kujund a koosneb kahest antud lõigust AB ja h ning antud nurgast, otsitavalt kujundilt nõutakse, et ta oleks kolmnurk, millel on antud alus, kõrgus ja tipunurk; selle kolmnurga asendile ei esitata mingeid nõudeid.

Teist tüüpi ülesanded on niisugused, kus otsitava kujundi asend on määratud ühes teiste andmetega. Näiteks: ehitada kolmnurk, kui on antud üks tema tippudest ja sirged, millel asetsevad kõrgused, mis ei läbi seda tippu. Siin kujund a (antud) koosneb punktist B ja kahest sirgest h ja k , ja otsitav kujund A on kolmnurk, mille üks tipp peab ühtima punktiga B , ja kõrgused, mis ei läbi seda tippu, peavad asetsema sirgetel h ja k . On selge, et otsitava kolmnurga asend ei ole vabalt valitav, sest me oleme seotud kas või tingimusega, et üks tema tippudest ühtiks antud punktiga B .

Lõpuks peetagu meeles, et kui ülesande lahendamisprotsessis on tarvis edaspidisteks konstrueerimisteks kasutada näiteks sirge ja kaare lõikepunkti, peame valima ühe neist punktidest. Harilikult saame lahenduse, valides ka teise punkti; sel juhul andmete vaba valik annab meile mitu kujundit A , mis rahuldavad ülesande tingimusi.

Konstruktioonülesande lahendamisprotsess toimub harilikult neljas järgus.

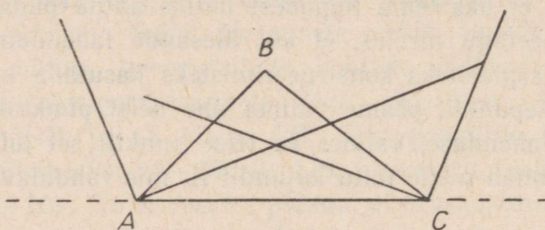
Kõige tähtsam järk on analüüs, mille eesmärk on leida kogu konstruktsioonide ahel, mis viib meid otsitava kujundini. Analüüs seisneb selles, et, oletades ülesande lahendatuks — otsitava kujundi konstrueerituks — me uurime hoolikalt joonist (tehtud käsitsi, „silma” järgi) eesmärgiga välja selgitada kõik joonise elementide omavahelised seosed kui ka seosed ülesande andmetega (selleks tuleb harilikult joonist täiendada). Oletades, et otsitav kujund on leitud, peab ta joonestama võimalikult üldisel kujul, mitte koormates teda muude seostega peale nende, mis on ülesandes märgitud. Näiteks, kui on tarvis ehitada kolmnurk aluse, tipunurga ja kõrguse järgi, siis oletades, et ülesanne on lahendatud, on tarvis otsitav kolmnurk joonestada teravnurkne ja isekülgne, aga mitte täisnurkne, võrdkülgne jne.

Lõpetanud analüüsi, siirdume teisele lahendamisjärgule — konstrueerimisele, s. o. teostame konstruktsiooni, mis selgus analüüsist, neist seostest, mis leidsime analüüsi puhul; sealjuures ehitame otsitava kujundi tingimata sirkli ja joonlaua abil, selleks et

esiteks võimalikult täpselt kujutada leitud seosed ning sellega teha analüüsi tulemus õpilastele hästi selgeks, ja teiseks süvendada õpilaste täpsust.

Teostades konstruktsiooni peame meeles pidama, et analüüsi puhul ei võeta arvesse kõiki ülesande tingimusi ja seepärast ei rahulda kõik analüüsi tulemusena leitud kujundid ülesande nõudeid. Näiteks olgu tarvis joonestada ringjoon antud kolmnurga sisse. Märkame, et sissejoonestatud ringjoone keskpunkt on ühekaugusel nurga haaradest, otsime punkti, mis rahuldab seda tingimust, rakendades geomeetriliste kohtade meetodit (joon. 1).

Sirgetest AB ja AC võrdsetel kaugustel asuvate punktide geomeetriline koht koosneb kahest sirgest, mis poolitavad kolmnurga tipu A juures olevad sise- ja välisnurgad. Niisuguste punktide geo-



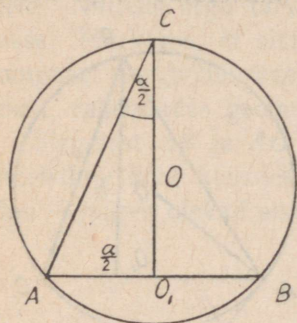
Joon. 1.

meetriline koht, mis on sirgetest AC ja BC ühekaugusel, koosneb kahest sirgest, mis poolitavad tipu C juures olevad nurgad. Nende kahe paari sirgete lõikumisel paariviisi saame neli punkti, milledest üks, nimelt sisenurga-poolitajate lõikepunkt, ongi otsitav keskpunkt; ülejäänud 3 punkti on välisringjoonte keskpunktid ja nad ei kõlba ülesande lahendusteks. See juhtus sellepärast, et analüüsi puhul me ei arvestanud seda tingimust, et otsitav punkt peab olema kolmnurga sees.

Niisiis teostades konstruktsiooni, peame veel läbi viima tõestuse, et leitud kujund tõepoolest rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

Mõningail juhtudel — nimelt siis, kui analüüsimisel täielikult võetakse arvesse kõik ülesande tingimused, — tõestamise tarvilikkus kaob. Lõpuks ülesande lahendamise viimane järk on uurimine, mille eesmärgiks on selgitada antud ülesande lahenduste arv, olenevalt andmete suurusest ja asendist (lahenduste arv võib olla null, s. o. ülesanne võib olla lahendamatu). Siin märgime, et

misel viisil: meelevaldsest punktist D sirgel AB tõmbame ristsirge (sinnapoole, kus on ehitatud segment); sellele asetame (punktist D) lõigu, mis on võrdne kõrgusega h (DR) ja punktist R tõmbame alusele paralleelse sirge. Selle paralleeli ja ringjoone lõikepunktid C ja C_1 ühendame punktidega A ja B . Kolmnurgad ACB ja AC_1E on otsitavad kolmnurgad.



Joon. 4.

Asume tõestamisele. Mõlemate kolmnurkade alused võrduvad lõiguga a — konstruktsiooni järgi; kõrgus on h , mis nähtub jooniselt, ja lõpuks, nende kolmnurkade tipud on ehitatud segmendi kaare punktid. Teostame lõpuks ülesande uurimise. Joonisest (joon. 4) nähtub, et

$$O_1C = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

ja seepärast kui

$$h < \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

siis aluse paralleel, mis on tõmmatud punktist R , lõikub ringjoonega kahes punktis — seega on ülesandel kaks lahendust. Kui

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

siis paralleel puudutab ringjoont ühes punktis — saame ühe lahenduse, ja lõpuks, kui

$$h > \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

siis paralleel ei lõiku ringjoonega ega puuduta teda; lahendust ei ole, ülesanne on sel juhul lahendamatu. Lahenduste arv sõltub siin niisiis andmete suurusest.

b) On antud ringjoon ja sellel kolm punkti — A, B, C . Selle ringjoone sisse joonestada kolmnurk nii, et antud punktid oleksid ringjoone ja selle kolmnurga ühest tipust tõmmatud kõrguse, nurgapoolitaja ja mediaani (muidugi nende pikenduste) lõikepunktid.

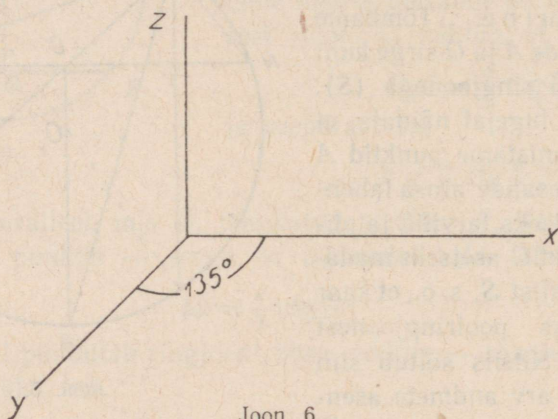
A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja kolmnurk NMP on otsitav (joon. 5); et MB on nurga NMP poolitaja, siis kaar NBP jaotub punktis B pooleks ja punktist B sirgele NP tõmmatud ristlõigu alus on NP keskpunkt, s. o. punkt D . Ringi keskpunkt O asetseb sirgel BD ; sirge BD on paralleelne sirgega AM . Siit selgub konstruktsioon: tõmbame sirge läbi B ja antud

Tõestus. Konstruktsiooni järgi on $NP \perp AM$, tähendab, AM on kõrgus. Edasi, et O on ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt ja $OD \perp NP$, siis D on NP keskpunkt, s. o. MD on mediaan; lõpuks, et O on ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt ja $BD \perp NP$, siis B jaotab kaare NBP pooleks, s. o. MB on nurgapoolitaja, mida oligi tarvis tõestada.

Märgime, et mõne lihtsama ülesande lahendamist võib kohe alata konstruktsiooniga, jättes vahele kolm ülejäänud järku. Nii toimib Kisseljov lihtülesannete lahendamisel (Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, §-d 62—67, ülesanded 1—7; Geomeetria, stereomeetria XI klassile, ülesanded §-dest 19—22; §-dest 35—37, lk. 37 ülesanded 12—20). Meie aga ei soovita alahinnata analüüsi ja teda kasutada isegi lihtülesannete puhul, kui lahendust kohe ei leia, sest see on tähtis järk, esiteks näitab ta õppijale, kuidas me leidsime konstruktsiooni, mis viib meid eesmärgile, ning teiseks õpetab lähenema ülesandeile matemaatiliselt — õpetab süstemaatiliselt uurima.

79

1. Võtta vabalt punkt, mis asetseb antud sirgel või väljaspool seda, antud ringjoonel, sees- või väljaspool seda.
2. Läbi kahe antud punkti tõmmata sirge.
3. Joonestada ringjoon, millest on antud keskpunkt ja raadius.
4. Antud sirgele sellel antud punktist asetada antud pikku-sega lõik.
5. Leida kahe antud sirge lõikepunkt.
6. Leida antud sirge ja antud ringjoone lõikepunkt, leida kahe antud ringjoone lõikepunktid.
7. Võtta tasapind läbi kolme antud punkti, läbi sirge ja punkti, mis asetseb väljaspool seda sirget, läbi kahe lõikuva sirge ja läbi kahe paralleelse sirge.



Joon. 6.

8. Leida kahe tasapinna lõikesirge ja leida sirge ja tasapinna lõikepunkt.
 9. Võtta vabalt punkt antud tasapinnal või sellest väljaspool.
 10. Ehitada sirge antud tasapinnal.
 11. Ehitada antud keskpunktiga ja antud raadiusega kerapind.
 12. Võtta vabalt punkt kerapinnal või väljaspool seda.
 13. Leida antud tasapinna või antud sirge ja antud kerapinna lõikejoon või lõikepunkt.
 14. Ruumis antud tasapinnal teha kõik konstruktsioonid, mis kuuluvad tasapinnalisse geomeetriasse.
- Ruumiliste kujundite kujutamisel tasapinnal peab tundma järgmist.
1. Sirglõigud, mis on paralleelsed joonise tasapinnaga, esinevad joonisel loomulikus suurus.

2. Sirglõigud, mis on risti joonise tasapinnaga, kujutatakse joonisel kaks korda väiksemate sirglõikudena ja moodustavad 135° -lise nurga horisontaalsirgega (joon. 6).

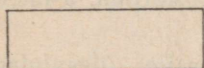
3. Paralleelsed sirglõigud on ka joonisel paralleelsed.

4. Tasapinnalised kujundid, mis asetsevad tasapinnal XOZ (need paigutame alati paralleelselt joonise tasapinnaga) või sellele paralleelsetel tasapindadel, kujutatakse võrdsete kujunditena.

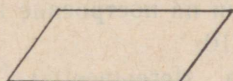
5. Tasapinnalised kujundid, mis asetsevad teistel tasapindadel, kujutatakse iseendaga mitte võrdsete ja mitte sarnaste kujunditena.

6. Suhe, milles on jaotatud sirglõik, säilib projekteerimisel, s. o., kui C jaotab sirglõigu AB suhtes $\frac{m}{n}$, siis tema projektsioon C_1 jaotab sirglõigu A_1B_1 sellesamas suhtes.

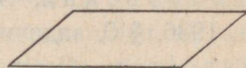
7. Paralleelsed sirglõigud säilitavad oma pikkuste suhted ka projektsioonis.



Joon. 7.

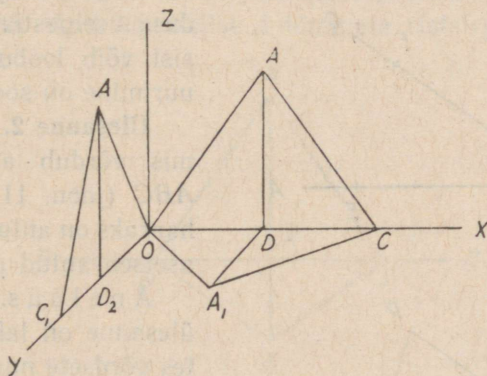


Joon. 8.



Joon. 9.

Sirge kujutatakse sirglõiguna, tasapind enda tükina. Harilikult kujutatakse tasapinda ristküliku projektsioonina, nagu on näidatud joonistel 7–9; joonisel 7 on kujutatud vertikaalne tasapind (joonise tasapinda mõtleme alati vertikaalsena), joonisel 8 — horisontaalne tasapind, joonisel 9 — profiilne tasapind.



Joon. 10.

Ülesanne. Tasapinnal XOZ (joon. 10) on antud võrdhaarne kolmnurk AOC : a) kolmnurk AOC pöörleb aluse OC ümber kuni

horisontaalse tasapinnaga ühtimiseni; b) kolmnurk AOC , jäädes vertikaalsesse asendisse, pööratakse telje OZ ümber kuni tema jõudmiseni profiilsele tasapinnale. Ehitada kolmnurga AOC kujutis igas nimetatud asendis.

a) Selle pööramise juures jääb kõrgus AD kogu aeg risti teljega OX . Kui AD langeb tasapinnale XOY , siis tema kujutis A_1D on paralleelne teljega X ja pikkuselt on ta kaks korda väiksem kui AD .

b) Kolmnurga pööramisel kuni tema ühtimiseni profiilse tasapinnaga tuleb OC risti joonise tasapinnaga, seepärast kujutatakse ta lõiguna OC_1 , kaks korda väiksemana tegelikust suuruselt, ta läheb telje y mööda. Kõrgus AD läbib lõigu OC_1 keskpunkti ja, olles paralleelne joonise tasapinnaga, esineb joonisel loomulikus suuruses ning asetseb paralleelselt teljega OZ .

Soovitame iseseisvalt läbi töötada järgmised harjutused: Романовский, Задачи на построение в стереометрии. Учпедгиз, 1936, § 5, задачи 1—10; Kisseljov, Geomeetria, stereomeetria XI klassile, ülesanded §-dest 60—64.

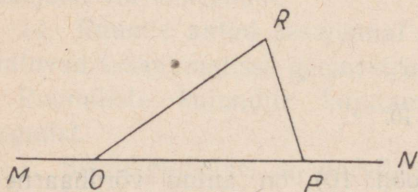
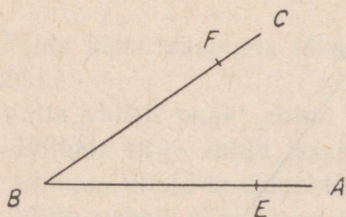
§ 2. Põhimised konstruktsioonülesanded.

Kisseljovi õpikust, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, lahendada ülesanded §-dest 61—67.

Ülesanne 1. Ehitada kolmnurk tema 3 külje järgi. Lahendus on selgesti nähtav, analüüsist võib loobuda, tõestus ja uurimine on soovitatav teha.

Ülesanne 2. Ehitada nurk, mis võrdub antud nurgaga ABC (joon. 11), mille üheks haaraks on antud sirge ja tipp asetseb antud punktis O .

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Võttes võrdsete nurkade haaradele võrdsed lõigud $BF = BE = OR = OP$, saame kongruentsed kolmnurgad, millest selgub konstruktsioon.

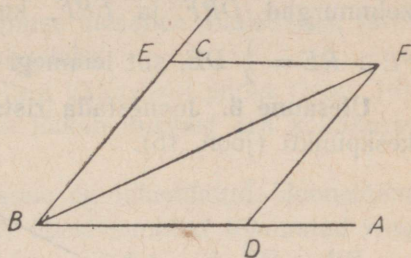


Joon. 11.

Ülesanne 3. Poolitada antud nurk (joon. 12).

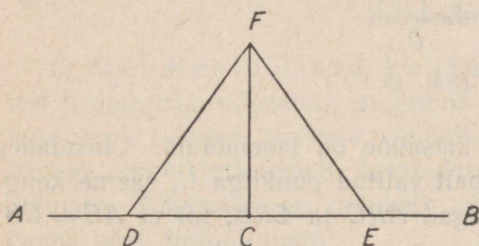
A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Võttes punktist B nurga haaradele võrdsed lõigud BD ja BE , ühendame punktid E ja D nurgapoolitajal vabalt valitud punktiga F ; kolmnurgad BEF ja BDF on kongruentsed kahe külje ja nende vahelise nurga järgi ja seega $DF = EF$. Paneme tähele, et $EF + FD = 2DF > ED$, siis $DF > \frac{1}{2} ED$.

Siit leiame konstruktsiooni.



Joon. 12.

Ülesanne 4. Antud punktist C sirgel AB tõmmata sellele sirgele ristsirge (joon. 13).

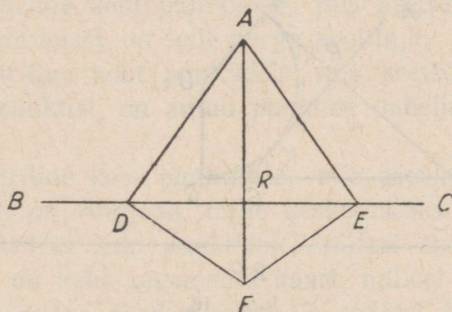


Joon. 13.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Võttes punktist C sirgel AB võrdsed lõigud $CD = CE$ ja ühendades D ja E ristsirgel vabalt võetud punktiga F , saame kongruentsed täisnurksed kolmnurgad (kaatetite järgi), s. o. $DF = FE$.

Paneme tähele, et $DF > DC$; siit leiame konstruktsiooni.

Ülesanne 5. Antud punktist A tõmmata ristsirge antud sirgele (joon. 14).

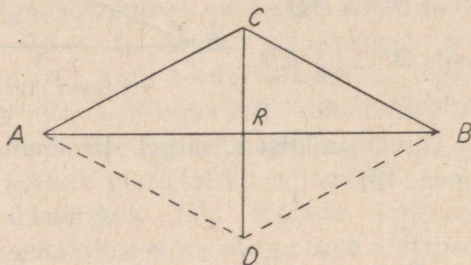


Joon. 14.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Võttes punktist R sirgel BC mõlemale poole võrdsed lõigud $RD = RE$, saame

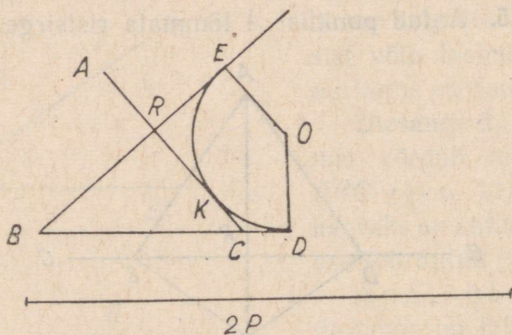
$$FE > RE = \frac{1}{2} DE, \text{ siit leiamegi konstruktsiooni,}$$

Ülesanne 6. Joonestada ristsirge antud lõigule AB läbi tema keskpunkti (joon. 15).



Joon. 15.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Ühendades punktid A ja B ristsirgel vabalt valitud punktiga C , saame kongruentsed täisnurksed kolmnurgad ARC ja CRB , nii et $AC = CB$; paneme tähele, et $AC > AR = \frac{1}{2} AB$. Võttes $DR = RC$, saame $AD = AC = BC = BD$, kust leiamegi konstruktsiooni.



Joon. 16.

Soovitame teha järgmisi harjutusi: Kisseljovi õpikust, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, analüüsida ülesanne §-st 68; § 69 harjutustest lahendada ülesanded: 15, 16, 22, 23, 25,

27, 32; § 102 harjutustest lahendada ülesanded 32—46; analüüsida ülesanded §-st 126—129 ja §-st 132; § 135 harjutustest lahendada ülesanded: 23, 25, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 39, 50.

Selle paragrahvi lõpetame järgmise ülesande analüüsiga, jättes edaspidised lahendamisjärgud õppiia teha.

Ülesanne. Antud on nurk ja sellest väljaspool punkt (joon. 16). Läbi punkti A tõmmata sirge, mis lõikab nurgast ära kolmnurga antud perimeetriga $2p$.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Joonestame välisringjoone. Kasutades seda, et ühest punktist tõmmatud ringjoone puutujad on võrdsed, on kerge näidata, et $BD = BE = p$, siit saamegi konstruktsiooni.

§ 3. Konstruktsioonülesannete lahendamise põhimised meetodid.

a) Geomeetriliste kohtade meetod. Üks põhimisest geomeetria mõistetest on punkti geomeetrilise koha mõiste, sellega peab õpilane tutvuma võimalikult varakult ja peab õppima temaga opereerima vabalt, kasutades teda kogu geomeetria kursuse ulatuses. Kõigepealt peavad kõik põhimised geomeetrilised kohad olema hästi tuntud, nagu:

T a s a p i n n a l:

1. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel antud sirgest, on paar sirgeid, mis on paralleelsed antud sirgega — üks ühel, teine teisel pool.

2. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel antud nurga haaradest, on selle nurga poolitaja.

3. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel kahest antud punktist, on antud punktide vahelise lõigu keskrist-sirge.

4. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel antud punktist, on ringjoon, mille keskpunktiks on antud punkt.

5. Geomeetiline koht punktidele, millest antud lõik on näha antud nurgas, on kaks segemendi kaart, millest kumbki mahutab endasse antud nurga piirdenurgana ja millest üks asetseb antud lõigust ühel pool, teine teisel pool.

6. Geomeetiline koht punktidele, millest antud lõik on näha täisnurgas, on ringjoon, mille keskpunktiks on lõigu keskpunkt ja raadiuseks on pool antud lõigust.

7. Geomeetriline koht punktidele, mis jaotavad antud suhtes niisuguste kiirte lõigud, mis ühendavad mingit punkti ringjoone punktidega, on ringjoon.

R u u m i s:

1. Geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel antud tasapinnast, on kaks tasapinda, mis on paralleelsed antud tasapinnaga — üks ühel ja teine teisel pool sellest tasapinnast.

2. Geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel kahest lõikuvast tasapinnast, on tasapind, mis läbib antud tasapindade lõikejoont ja poolitab nendest tasapindadest moodustatud kahetahulise nurga.

3. Geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad ühekaugusel antud punktist, on kerapind keskpunktiga selles punktis.

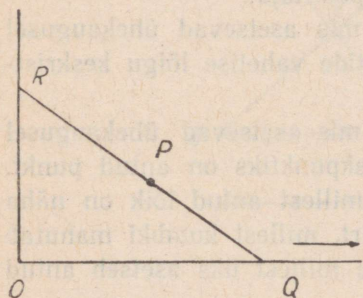
4. Kõigil antud punkti läbivail tasapindadel võetud teise antud punkti projektsioonide geomeetriline koht on sfäär, mille diameeter on antud punkte ühendav lõik.

5. Geomeetriline koht sirgetele, mis lõikavad antud sirget ja läbivad väljaspool seda sirget olevat antud punkti, on tasapind, mis läbib antud sirget ja antud punkti.

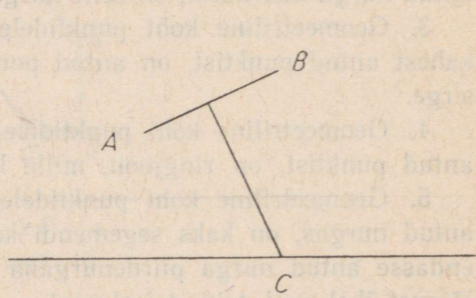
6. Geomeetriline koht sirgetele, mis lõikavad antud sirget a ja on paralleelsed teise antud sirgega b (a ja b ei lõiku), on tasapind, mis läbib sirget a ja sirget c , mis lõikub sirgega a ja on paralleelne antud sirgega b .

7. Geomeetriline koht sirgetele, mis lõikavad paralleelsete sirgete paari, on tasapind, mis läbib neid sirgeid.

Õpilased peavad tingimata õppima ehitama lihtsamaid geomeetrilisi kohti. Esitame niisuguste ülesannete näiteid.



Joon. 17.



Joon. 18.

Ülesanne 1. Sirglõik pikkusega l libiseb oma otstega mööda täisnurga haarasid (joon. 17). Leida selle sirglõigu keskpunktide

geomeetriline koht, s. o. selgitada, millise kõverjoone moodustab selle juures punkt P .

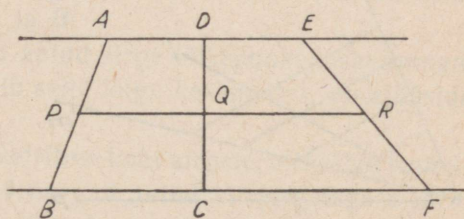
Lahendus. Sirglõigu mistahes asendil asetseb täisnurkse kolmnurga ROQ ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt lõigu keskpunktis, s. o. punktis P , järelikult $OP = \frac{l}{2}$ ja tähendab, P joonestab ringjoone raadiusega, mis võrdub poolega sirglõigust ja mille keskpunkt on täisnurga tipus.

Ülesanne 2. On antud sirge ja sellest väljaspool kaks punkti A ja B (joon. 18). Leida sirgel punkt, mis on punktidest A ja B ühekaugusel.

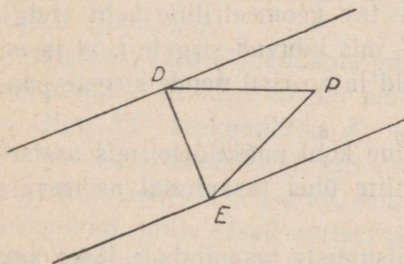
Lahendus. Punktidest A ja B ühekaugusel asetsevate punktide geomeetriline koht on sirge, mis on risti sirgega AB ja läbib lõigu AB keskpunkti. Otsitav punkt peab järelikult asetsema sellel ristsirgel. Samaaegselt peab otsitav punkt olema antud sirgel, järelikult ta on ristsirge ja selle sirge lõikepunkt, s. o. punkt C . Nähtavasti, kui AB oleks risti antud sirgega, siis punkt C oleks „eemaldunud lõpmatusse” ja ülesanne oleks lahendamatu.

Ülesanne 3. Geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad kahest paralleelsest sirgest ühekaugusel, on sirge. Milline?

Ülesanne 4. Geomeetriline koht punktile, mis jaotab kahe paralleelse sirge vahelise kauguse antud suhtes, on sirge. Milline?



Joon. 19.



Joon. 20.

Ülesanne 5. Niisuguste sirglõikude keskpunktide geomeetriline koht, millede otspunktid asetsevad kahel paralleelsel sirgel, on antud sirgetega paralleelne sirge, mis poolitab antud paralleelide vahelise kauguse (joon. 19).

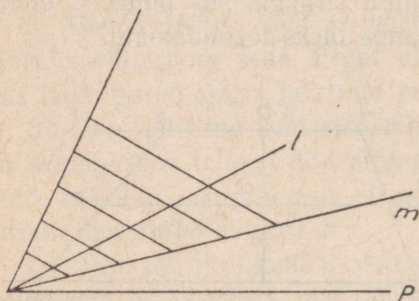
Näpunäide. PQ on trapetsi $ABCD$ kesklõik, nagu ka QR on trapetsi $CDEF$ kesklõik.

Ülesanne 6. Ehitada geomeetriline koht ruumi punktidele, mis asetsevad kahest paralleelsest sirgest ühekaugusel (joon. 20).

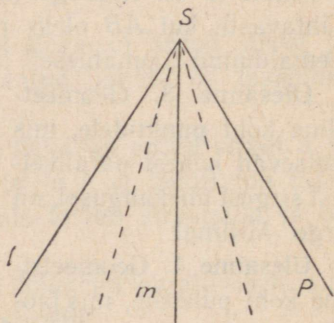
Lahendus. Olgu P niisugune punkt ruumis, mis on ühekaugusel antud sirgetest. Ühendades punktist P sirgetele tõmmatud ristlõikude alused, saame võrdhaarse kolmnurga DPE , mille tasapind on risti antud sirgete tasapinnaga. Kõrgus tipust P poolitab aluse. Siit selgub konstruktsioon. Otsitav geomeetriline koht on tasapind, mis on risti kahe antud sirge tasapinnaga ja läbib sirget, mis poolitab nende paralleelide-vahelise kauguse.

Ülesanne 7. Ehitada geomeetriline koht ruumi punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest lõikuvast sirgest l ja m (joon. 21).

Õpilasele jäetakse tõestada, et otsitav geomeetriline koht on tasapind, mis läbib antud sirgete poolt moodustatud nurgapoolitajat ja on nende sirgete tasapinnaga risti.



Joon. 21.



Joon. 22.

Ülesanne 8. Leida koonilised pinnad, millele kolm antud sirget l , m ja p , mis läbivad üht ja sedasama punkti, on moodustajad (ehitada otsitavate koonuste teljed) (joon. 22).

Jätame õpilasele tõestada, et otsitav geomeetriline koht (telg) on niisuguste tasapindade lõikejoon, mis läbivad sirgete l , m ja p poolt moodustatud nurgapoolitajaid ja on risti nende sirgete paaride tasapindadega.

Ülesanne 9. Ehitada geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kolmest mitte ühel tasapinnal asetsevast paralleelsest sirgest a , b , c .

Otsitav geomeetriline koht on niisuguste tasapindade lõikejoon, mis on risti tasapindadega, mis läbivad sirgete paare a , b ja b , c .

ning jaotavad nendevahelise kauguse pooleks. Millal on ülesanne lahendamatu?

Ülesanne 10. Ehitada geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest paralleelsest tasapinnast.

Vastus. See on tasapind, mis poolitab antud tasapindade vahelise kauguse.

Ülesanne 11. Ehitada geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest lõikuvast tasapinnast.

Vastus. See on tasapind, mis poolitab antud tasapindade vahelise kahetahulise nurga.

Ülesanne 12. Ehitada geomeetriline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest antud tasapinnast ja kahest antud punktist.

Vastus. Antud tasapindadest võrdsetel kaugustel asetseva tasapinna ja kahte antud punkti ühendava sirglõigu keskristtasapinna lõikejoon (viimane tasapind on geomeetriline koht punktile, mis asetseb võrdsetel kaugustel kahest ruumpunktist). Analüüsida ülesanne.

Ülesanne 13. Leida antud sirgel punkt, mis on võrdsetel kaugustel kahest ruumpunktist A ja B .

Vastus. Otsitav punkt on antud sirge lõikepunkt tasapinnaga, mis on risti lõiguga AB ja läbib selle lõigu keskpunkti. Analüüsida ülesanne.

Ülesanne 14. Ehitada geomeetriline koht sirgele, mis läbib ruumpunkti A ja moodustab võrdsed nurgad antud kiivsirgetega a ja b .

Näpunäide. Tõmbame läbi A sirged, mis on paralleelsed sirgetega a ja b ja läbi nende sirgete poolt moodustatud nurgapoolitaja ehitame tasapinna, mis on risti selle nurga tasapinnaga. Tõestada, et see on otsitav geomeetriline koht.

Ülesanne 15. Leida geomeetriline koht niisuguste sirglõikude keskpunktidele, mille otspunktid asetsevad kahel antud kiivsirgel a ja b (joon. 23).

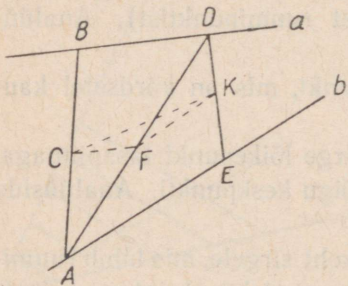
Lahendus. Ühendame punktid A ja D teineteisega, olgu AD keskpunktiks F . Siis CF on paralleelne sirgega a .

Olgu ED keskpunktiks K , siis FK on paralleelne sirgega b . CK on samal tasapinnal, kus on CF ja FK , tähendab, otsitav geomeetriline koht on tasapind, mis läbib mistahes niisuguse sirglõigu keskpunkti, mille otsad asetsevad antud sirgetel, see tasapind läbib kaht sellest keskpunktist väljuvat sirget, milledest üks on paralleelne sirgega a ja teine sirgega b .

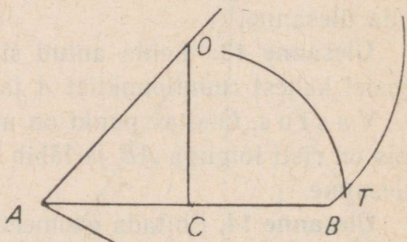
Soovitame õppijail lahendada järgmised ülesanded: Kissel'jov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 102 harjutustest ülesanded 21—23, § 135 harjutustest ülesanded 1—5, § 143 harjutustest ülesanded 1, 2.

a) Geomeetriliste kohtade meetod konstruktsioon-
ülesannete lahendamisel seisneb selles, et me, kõrvaldades üles-
ande ühe tingimuse, ehitame tolle geomeetrilise koha, mis rahul-
dab ülejäänud tingimusi. Võttes arvesse kõrvaldatud tingimuse,
kuid kõrvaldades mingi teise, ehitame teise geomeetrilise koha.
Ülesande lahenduseks on ilmselt konstrueeritud geomeetriliste koh-
tade lõikekujund.

Soovitame teostada harjutused Kisseljovi õpikust, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 133; analüüsida § 134, 135 ning § 143 harjutustest ülesanded 14, 19—22; Романовский, Задачи на построение в стереометрии, 11—14.



Joon. 23.



Joon. 24.

Ülesanne. Ehitada kolmnurk aluse, tipunurga ja alusele tõmmatud mediaani järgi (joon. 24).

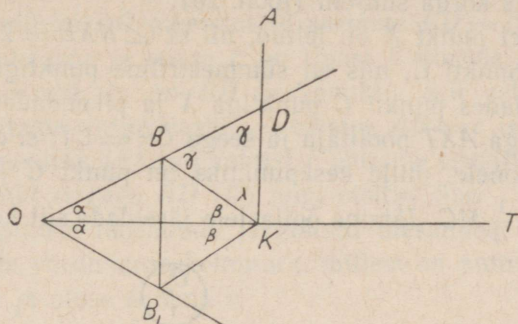
L a h e n d u s. Kõrvaldades tingimuse mediaanist, leiame geomeetrilise koha punktidele, kust antud alus on näha antud nurgas. Kõrvaldades nüüd tingimuse nurgast, kuid võttes arvesse tingimuse mediaanist, saame teise geomeetrilise koha, nimelt ringjoone keskpunktiga aluse poolitamispunktis, s. o. punktis C ja raadiusega, mis võrdub mediaaniga. Otsitav tipp on kahe ringjoone lõikepunkt.

K ü s i m u s. On antud ringjoon. Kuidas leida tema keskpunkt?

Soovitame veel kord analüüsida kolmnurga ehitamise ülesannet tipunurga, aluse ja kõrguse järgi. Ehitanud geomeetrilise koha punktidele, kust antud alus on näha antud nurgas, ehitame geomeetrilise koha punktidele, mis sirgest, millel asetseb alus, on kaugusel h ; siis vaatame, kus need geomeetrilised kohad lõikuvad.

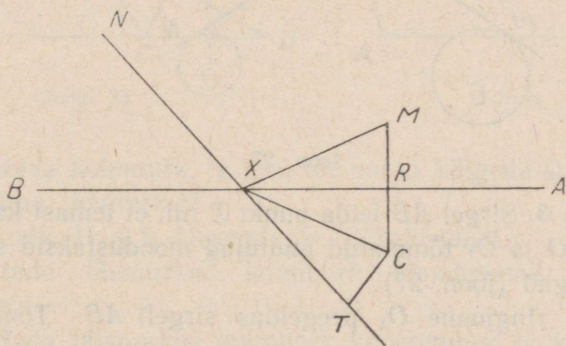
b) Sümmeetriameetod (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 102, ülesanded 1—3).

Järgmised ülesanded näitavad, kuidas teljelise sümmeetria omadusi saab mõnikord kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel.



Joon. 25.

Ülesanne 1. On antud nurk ning kaks punkti A ja B (joon. 25). Punktist B tõmmata sirge nii, et tekiks võrdhaarne kolmnurk, mille



Joon. 26.

tipp asetseb sirgel OT (antud nurga haaral) ja kolmnurga ühe haara pikendus läbib punkti A .

Oletame, et ülesanne on lahendatud ja punkt K on otsitav. Ehitame punkti B_1 sümmeetriliselt punktiga B telje OT suhtes.

$$\angle \lambda = \pi - 2\gamma = \pi - 2\alpha - 2\beta;$$

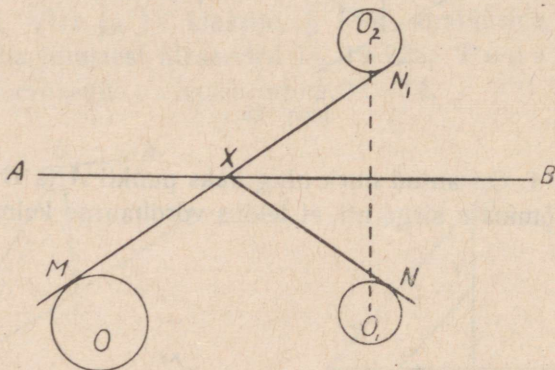
$\gamma = \alpha + \beta$ ja $\angle DKB_1 = \lambda + 2\beta = \pi - 2\alpha$, seega ülesanne on taandunud järgmiseks: ehitades punkti B_1 sümmeetriliselt punktiga B telje OT suhtes, ühendame A ja B_1 , ehitame geomeetrilise

koha punktile, millest lõik AB_1 on näha antud nurgas $(\pi - 2\alpha)$ ja lõpuks leiame, kus see geomeetiline koht lõikub kiirega OT .

Ülesanne 2. Antud sirgel AB leida punkt X , millega ühendades antud punktid M ja N saame nurgad NXB ja MXA , milledest üks on teisest kaks korda suurem (joon. 26).

Oletame, et punkt X on leitud, nii et $\angle NXB = 2 \angle MXA$.

Ehitades punkti C , mis on sümmeetriline punktiga M telje AB suhtes, ühendades punkti C punktiga X ja pikendades NX , saame, et XC on nurga AXT poolitaja ja seega $CR = CT$, s. o. NT on puutujaks ringjoonele, mille keskpunktiks on punkt C ja raadius on võrdne $CR = \frac{1}{2}MC$. Jätame õpilastele järeldada siit konstruktsioon.



Joon. 27.

Ülesanne 3. Sirgel AB leida punkt X nii, et temast kahele antud ringjoonele O ja O_1 tõmmatud puutujad moodustaksid sirgega AB võrdsed nurgad (joon. 27).

Olgu O_2 ringjoone O_1 peegeldus sirgelt AB . Tõmbame puutuja XN_1 .

Jätame õpilastele tõestada, et $\angle AXM = \angle N_1XB$, s. o., et MXN_1 on sirge — ühine puutuja kahele ringjoonele O ja O_2 . Konstruktsioon selgub siit. Kui palju lahendusi on siin võimalikud?

Märgime, et sümmeetriameetod taandub murdjoonte sirgestamisele — näiteks ülesande 3 lahendamist võib alustada nii: asendame murdjoone MXN sirgega MXN_1 ja otsime punkti N_1 asukoha. Ülesanne taandub küsimusele, kuidas murda sirge nii, et saada otsitav kujund.

c) Sirgestamismeetod on eriti sagedasti kasutatav neis ülesandeis, kus andmeteks on mõne murdjoone külgede summa

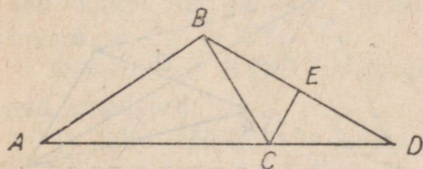
või vahe (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 102 harjutustest ülesanded 73 ja 74).

Ülesanne 1. Ehitada kolmnurk, millest on antud A , c , $a + b$ (joon. 28).

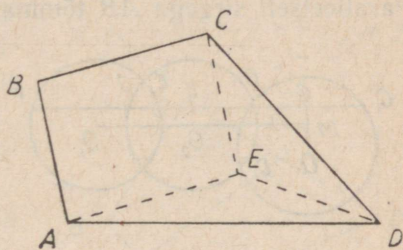
Et murdjoone BCA külgede summa on teada, siis sirgestame murdjoone, milleks AC pikendusele asetame $CD = BC$. Kolmnurk BCD on võrdhaarne ja seega E on tipust C alusele BD tõmmatud ristlõigu aluspunkt, ta on BD keskpunkt. Siit selgub ülesande lahendus: ehitame antud nurga A , võtame $AB = c$ ja $AD = a + b$; jaotame BD pooleks (E) ja punktist E ehitame ristsirge sirgele BD . Selle lõikepunkt sirgega AD (C) ongi otsitav tipp.

Jätame õpilaste lahendada järgmised ülesanded:

1) Ehitada võrdhaarne kolmnurk, millest on antud tema haar a ning kõrguse ja aluse summa s .



Joon. 28.



Joon. 29.

2) Ehitada kolmnurk, millest on antud külgede summad $a + b$ ja $b + c$ ning tipunurk B .

(Vaata ptk. II, § 5, ülesande nr. 17 lahendust.)

3) Ehitada täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja kaatetite summa järgi.

4) Ehitada täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja kaatetite vahe järgi.

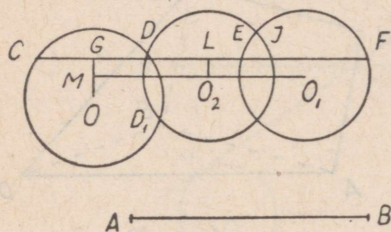
N ä p u n ä i d e. Oletame, et ülesanne on lahendatud; paigutame ühe kaateti teisele ja uurime nürinurkset kolmnurka, mida on kerge ehitada.

d) Paralleellükke-meetod (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 101, ülesanded 1–3) põhineb parallelogrammi omadustel ja kasutatakse neil juhtudel, kui konstruktsioon on keeruline selle tõttu, et kujundi osad on üksteisest liiga kaugel — siis kasutataksegi otsitava kujundi mingisuguse osa paralleellüket.

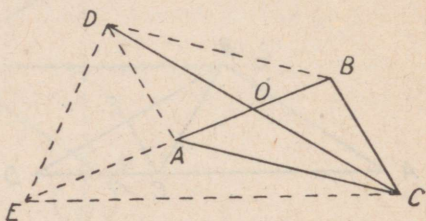
Ülesanne 1. Ehitada nelinurk, kui on teada tema nurgad ja kaks vastaskülge (joon. 29).

Oletame, et kujundis $ABCD$ on antud: küljed BC ja AD ning nurgad A, B, C . Nihutame külje BC tema endaga paralleelselt asendisse AE . Tekib kolmnurk AED , milles on teada kaks külge $AE = BC$ ja AD ning nurk EAD , mis võrdub kahe tuntud nurga vahega. Ehitame selle kolmnurga. Hiljem on kerge tõmmata sirged EC ja CD , seepärast et esimene moodustab tuntud nurga sirgega EA , teine aga moodustab tuntud nurga küljega AD . Pärast seda jääb ainult tõmmata CB paralleelselt sirgega EA — ja lahendus on ilmne. Et sel ülesandel on üksainus lahendus, siis järeldame sellest, et nelinurk on määratud tema nurkade ja kahe vastasküljega.

Ülesanne 2. On antud kaks ringjoont O ja O_1 ja sirge AB . Paralleelselt sirgega AB tõmmata lõikaja nii, et antud ringjooned



Joon. 30.



Joon. 31.

lõikavad sellest ära kõõlud, millede summa võrdub antud sirglõiguga S (joon. 30).

Olgu $CF \parallel AB$ ja $CD + EF = S$. Nihutame ringjoont O_1 nii, et CD ja EF moodustaksid ühe sirglõigu $CJ = S$.

Küsimus taandub punkti O_2 leidmisele. Tõmmates $OG \perp CD$ ja $O_2L \perp DL$ leiame $GL = \frac{S}{2}$. Et $O_1M \parallel AB$, siis lahendatakse ülesanne järgmiselt: tõmmates $O_1M \parallel AB$ võtame $OM \perp O_1M$, sirgele MO_1 asetame osa sirglõigust MO_2 , mis võrdub poolega lõigust S , ja joonestame ringjoone keskpunktiga O_2 ning raadiusega O_1F . See ringjoon lõikab ringjoont O punktides D ja D_1 . Otsitavad lõikajad läbivad D ja D_1 ja on paralleelsed sirgega AB .

Kolmnurkade ja nelinurkade ehitamisel on väga tähtis teada kujundite omadusi, mis tekivad nende külgede paralleellükkel. Järgmise kahe ülesande lahendamisel kasutatakse peaaegu kõiki neid omadusi.

Ülesanne 3. Kolmnurga külgede paralleellüke (joon. 31). Kolmnurgas ABC nihutame CA asendisse BD ja AB pikendusel märgime $AE = AB$. Siis tekib kolmnurk CDE . Näidata, et kolmnurgas CDE : 1) küljed on kaks korda suuremad kolmnurgas ABC mediaanidest; 2) kolmnurga CDE pindala on kolm korda suurem kolmnurga ABC pindalast; 3) kaks kõrgust igast kolmnurgast ADE , AEC ja ADC võrduvad kolmnurga ABC kõrgustega; 4) nurgad punkti A juures võrduvad kolmnurga ABC sise- või välisnurkadega ja nurgad kolmnurga ABC mediaanide vahel on võrdsed kolmnurga DEC nurkadega; 5) AD , AC ja EO on kolmnurga EDC mediaanid. Kui ülesande tingimused võimaldavad ehitada kolmnurka DEC või üht väikestest kolmnurkadest, siis vastupidised paralleellükkega on kerge jõuda kolmnurgani ABC .

Ülesanne 4. Nelinurga külgede paralleellüke (joon. 32). Antud nelinurgas $ABCD$ nihutame paralleelselt külgi AB ja AD vastavalt asendisse CX ja CY .

Rööpkülilikul $BXYD$ on järgmised omadused:

1) selle rööpküliliku küljed ja nurk on vastavalt võrdsed diagonaalidega ja nurgaga nende vahel nelinurgas $ABCD$;

2) nurgad BCX , XCY , YCD on vastavalt võrdsed nurkadega B , A ja D antud kujundis;

3) nurgad XCD ja BCY on vastavalt võrdsed nurkadega vastaskülgedega AB ja CD ; BC ja AD vahel;

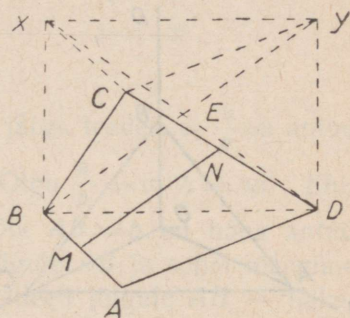
4) rööpküliliku pindala on kaks korda suurem nelinurga pindalast;

5) punkti C kaugused rööpküliliku tippudest on vastavalt võrdsed nelinurga külgedega;

6) rööpküliliku diagonaalid on kaks korda pikemad lõikudest, mis poolitavad AB ja CD , BC ja AD ; diagonaalidevaheline nurk on võrdne samade lõikude vahelise nurgaga.

Väga palju ülesandeid nelinurkade konstrueerimise kohta lahendatakse rööpküliliku $BXYD$ konstrueerimise abil.

Niisugustes ülesannetes ühed andmetest annavad võimaluse ehitada selle rööpküliliku, teised andmed aga määravad punkti C (sageli punkt C on kahe geomeetrilise koha lõikepunkt) ja anna-

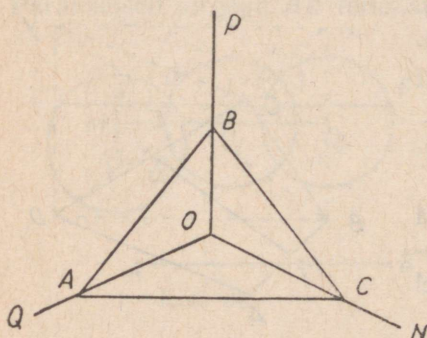


Joon. 32.

vad võimaluse kujundilt $BXYD$ siirduda kujundile $ABCD$ vastupidise paralleellükke abil. Näitena soovitame analüüsida § 101 juurde kuuluvat ülesannet Kisseljovi õpikust Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile.

e) **Sarnasusmeetod** (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, § 181, ülesanded 1—3).

Ülesanne 1. Ehitada kolmnurk kahe nurga ja ümberjoonestatud ringjoone raadiuse järgi. Ehitades kolmnurga kahe nurga järgi, taandub ülesanne järgmiseks: ringisse raadiusega R joonestada kõõlkolmnurk, mis on sarnane antud kolmnurgaga. Olgu ABC antud kolmnurk (joon. 33). Ehitame ümberjoonestatud ringjoone keskpunkti O , $OA = OC = OB$ on tema raadiused. Asetame raadiuse R lõikudele OC , OB , OA . Kolmnurk NPQ on otsitav,



Joon. 33.

mis on sarnane antud kolmnurgaga ja selle ümberjoonestatud ringjoone raadius on võrdne antud raadiusega $R = ON$.

Märkus. Ülesande lahendamisel sarnasusmeetodi abil eemaldame algul meetrilised tingimused ja säilitame sarnasuse tingimused (nurgad, suhted) ja seejärel teisendame sarnaselt kujundi antud mõõtmeteni.

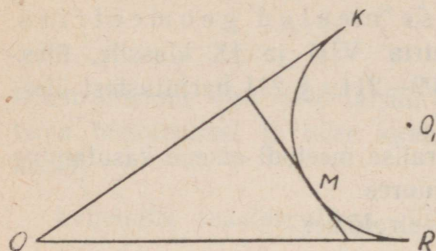
Ülesanne 2. On antud nurk ja punkt M selle sees. Tõmmata läbi punkti M sirge nii, et tekiks väikseima ümbermõõduga kolmnurk (joon. 34).

Joonestame välisringjoone (oletades, et ülesanne on lahendatud), siis kolmnurga ümbermõõt võrdub summaga $OK + OR = 2OR$.

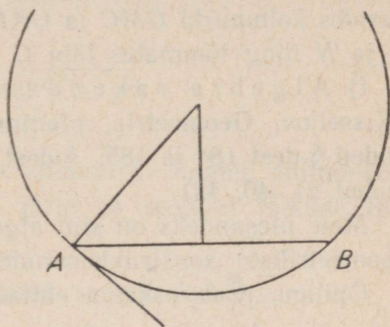
Ülesanne taandus niisuguseks: joonestada ringjoon antud nurga sisse nii, et punkt M jääks sellest vasakule (või ringjoone vasakule osale) ja et puutuja punktist O oleks väikseim. Nähtavasti on see siis, kui M asetseb ringjoone vasakul osal: ja tõepoolest, kõigi niisuguste ringjoonte keskpunktid asetsevad nurgapoolitajal ja väiksema puutuja annab ringjoon, mis asetseb lähemal punktile O . Niisiis ülesanne taandus järgmiseks: on antud nurk ja punkt tema sees. Läbi selle punkti ehitada ringjoon, mis puudutab nurga haarasid. See ülesanne on lahendatud Kisseljovi õpi-

kus Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile (sarnasusmeetod, § 181).

Ülesanne 3. Ehitada kolmnurk, teades tema kõrguse ja aluse suhet, tipunurka ja külje mediaani (joon. 35).

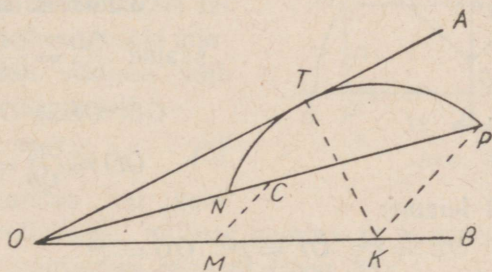


Joon. 34.



Joon. 35.

Ehitame kolmnurga tema tipunurga järgi, teades, et $\frac{h}{b}$ on antud (eemaldades tingimuse mediaanist). Olgu $\frac{h}{b} = a$, $h = ba$. Ehitame segmendi, mille kaarelt antud lõik $AB = b$ on näha antud nurgas a ; läbi B tõmbame ristsirge lõigule AB ja sellel märgime $h = ba$; selle otspunktist tõmbame paralleeli lõigule AB — lõikepunkt ringjoonega annab meile lahenduse. Jätame lugejale uurida, millal on kaks lahendust, millal üks ja millal mitte ühtegi.



Joon. 36.

Ülesanne 4. On antud nurk AOB ja selle sees punkt C (joon. 36). Leida haaral OB punkt M , mis asetseb ühekaugusel haarast OA ja punktist C .

f) Algebra rakendamise meetod geomeetrias. (Kisseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, ülesanded §-dest 184 ja 185; §-dest 209—211; § 211 harjutustest ülesanded 21, 40, 42).

Õpilane peab oskama ehitada sirglõike:

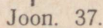
peab oskama ehitada võrdelisi sirglõike. Keskmise võrdelise konstrueerimise rakendamine mitu korda järjest annab antud sirglõigu mistahes astme konstruktsiooni.

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{1} \text{ ehk } OC = OB^2 = x^2.$$
 $OD \cdot OB = OC^2$, siit saame

Samal viisil leiame:

$$OE = x^4; \quad OF = x^5; \quad OG = x^6 \dots$$

Jätkates teda punktist A edasi kellaosuti liikumise suunas, saame järjestikku täisarvuliste negatiivsete astendajatega x -i astmed.



Õpilane peab oskama ehitada ruutvõrrandi lahendeid:

a) valemite järgi, b) Vieta teoreemi järgi.

a) Lahendades võrrandi

$$x^2 + mx + n^2 = 0,$$

saame

$$x_1 = -\frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - n^2};$$

konstruktsioon viib meid täisnurkse kolmnurga kaateti ehitamisele tema hüpotenuusi ja teise kaateti järgi ja seejärel lõikude liitmisele.

Lahendite reaalarvulised väärtused saame, kui $\frac{m}{2} \geq n$.

Märgime, et kui m ja n loetakse oma loomult positiivseiks (lõikude pikkused), siis:

$$x_2 = -\frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - n^2}$$

ei kõlba.

Kui võrrand on $x^2 + mx - n^2 = 0$, siis lahendite konstruktsioon viib hüpotenuusi $\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2}$ konstrueerimisele kahe kaateti järgi.

b) Kui võrrandil on kuju: $x^2 + mx + n^2 = 0$, (1)
siis

$$x_1 + x_2 = -m; \quad x_1 x_2 = n^2; \quad (2)$$

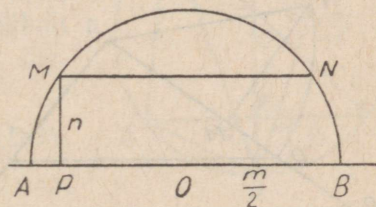
et viimane võrdus näitab, et lahendid omavad ühesuguseid märke, siis esimese võrduse võib üles kirjutada järgmiselt:

$$|x_1| + |x_2| = m \quad (3)$$

Niiviisi taandus asi kahe lõigu konstrueerimiseks, milliste summa ja korrutis on vastavalt võrdsed antud suurustega m ja n^2 (joon. 38).

Lõigule $AB = m$ kui diameetrile ehitame poolringjoone. Seejärel joonestame $MN \parallel AB$ kaugusel n temast.

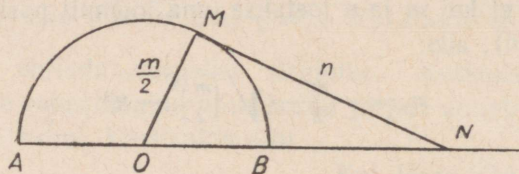
Siis ristsirge MP määrab sirgel AB punkti P . Lõigud AP ja PB kujutavad endast lahendeid x_1 ja x_2 , mis on võetud absoluutväärtustena. Õpilastele jääb teostada kontroll selle üle. Fakt,



Joon. 38.

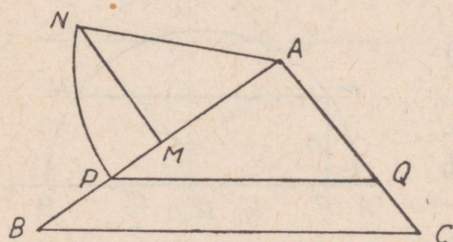
et lahendid on reaalsed ainult siis, kui $\frac{m}{2} \geq n$, nähtub jooniselt 38: siin $n > \frac{m}{2}$ puhul sirge MN ei löika ringjoont.

Kui võrrandil on kuju $x^2 + mx - n^2 = 0$, siis tema lahendid on erinevate märkidega, järelikult nende algebralise summa saame vastavate lõikude lahutamise teel. Lahendite konstruktsioon selle juhtumi jaoks on kujutatud joonisel 39. Vabalt valitud punktist O raadiusega $OM = \frac{m}{2}$ joonestame ringjoone. Vabalt valitud punktist M tõmbame talle puutuja ja märgime sellel lõigu $MN = n$. Läbi punktide N ja O tõmbame sirge, mis lõikub ringjoonega punktides A ja B . Siis lõigud AN ja BN kujutavad endast lahendite x_1 ja x_2 väärtusi, sest $AN - BN = AB = m$ ja $AN \cdot BN = MN^2 = n^2$. Nagu nähtub, on siis konstruktsioon alati võimalik. Illust-



Joon. 39.

reerimiseks soovitame analüüsida ülesannet § 209 juurde — Kiseljov, Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile.



Joon. 40.

Ülesanne 1. Ehitada nii-suguse ruudu külge x , mille pindala on kaks korda suurem antud ruudu pindalast.

Meil on: $x^2 = 2a^2$ ehk $|x| = a\sqrt{2}$, s. t. otsitava ruudu külge on antud ruudu diagonaal. Soovitame teha konstruktsiooni.

Ülesanne 2. Kolmnurgas ABC tõmmata sirge, mis on paralleelne alusega, nii, et ta poolitaks kolmnurga pindala. Oletame, et ülesanne on lahendatud (joon. 40).

Meil on:

$$\frac{\text{pindala } ABC}{\text{pindala } APQ} = \frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} = \frac{2}{1};$$

kuid

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ},$$

järelikult

$$\frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} = \frac{AB^2}{AP^2} = 2,$$

siit

$$AP = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

See valem annab meile lihtsa konstruktsiooni. Poolitame lõigu AB (M) ja ehitame täisnurkse võrdhaarse kolmnurga AMN . Viimase hüpotenuus AN annabki otsitava sirglõigu:

$$AN = \sqrt{MN^2 + MA^2} = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

Jääb veel lõigul AB märkida lõik $AP=AN$ ja läbi P tõmmata paralleel BC -le. Lahendus on ühene ja alati võimalik.

Ülesanne 3. On antud nurk ja punkt M tema poolitajal. Läbi antud punkti M tõmmata sirge nii, et tema lõikepunktid antud nurga haaradel määraksid antud pikkusega sirglõigu a (Pappuse ülesanne).

Analüüs. On antud nurk BAC (joon. 41) ja $BC = a$ läbi antud punkti M tõmmatud sirgloik, AM nurga BAC poolitaja. Joonestame kolmnurga ABC ümber ringjoone keskpunktiga O , tõmbame diameetri DE ning kõõlud AE ja BD . Täisnurksed kolmnurgad ADE ja FDM on sarnased (kaared BD ja DC on võrdsed, järelikult F poolitab BC); järelikult $DM \cdot DA = DF \cdot DE$; teiselt poolt diameetri ristsirge omaduse põhjal:

$$DF \cdot DE = DB^2, \text{ s. o. } DM \cdot DA = DB^2.$$

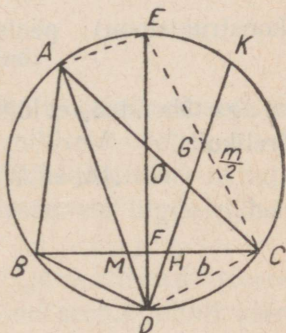
Olgu nüüd $AM = m$, $MD = x$, $BD = b$, siis võrdus väljendub järgmisel kujul:

$$x(x+m) = b^2, \quad (\text{A})$$

kusjuures kolmnurgast BFD nähtub, et

$$b = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ kus } \alpha = \angle BAC.$$

Konstruktsioon. Ehitame antud lõigule $a=BC$ kaare (BAC), millelt antud sirglõik on näha nurgas α . Olgu D kaare



Joon. 41.

sest

$$FD \leq MD, AM \leq EF \text{ ja et } EF = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

saame lahenduse olemasolu tarviliku tingimuse

$$m \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Näitame, et see tingimus on piisav. Tõepoolest, kui $AM = EF$, siis punkt E on nurga tipp, s. o. punkt A ühtib punktiga E . Selle juures punkt M ühtib punktiga F ja lõik $BC \perp AM$ (EF). Sel juhul on

$$m = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ ehk } a = 2m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{B})$$

Joonestame mitmesugused lõikajad läbi punkti M (joon. 42). Neil lõikajail tekivad lõigud BC mitmesuguse pikkusega. $BC \perp MA$ puhul on lõigu BC pikkus määratud valemiga (B). Me jätame lugejale näidata, et see väärtus on minimaalne ja et sellelt väärtuselt kasvab lõigu pikkus lõikaja pöörlemisel.

Soovitame õpilastel lahendada järgmine ülesanne: on antud kaks kolmnurka; ehitada kolmnurk, mis on esimesega sarnane ja teisega pindvõrdne.

§ 4. Tõestamisülesanded.

Oskus tõestada teoreeme, kombineerida teoorias omandatud teadmisi teoreemide iseseisval tõestamisel, milliseid õpetaja ei ole tõestanud — see on õpilase kõrge matemaatilise kultuuri näitaja, ja seepärast tuleb sellele geomeetriliste ülesannete liigile pühendada erilist tähelepanu.

Geomeetrilisi teoreeme on kolme tüüpi: „projektiivsed” teoreemid, mis möönavad mingisugust fakti, mis on seotud ainult asendiga, nagu näiteks teoreem — „Kolmnurga sisenurga poolitaja ja kahe selle sisenurgaga mitte kõrvuti asetseva välisnurga poolitajad lõikuvad ühes punktis” — on „projektiivne teoreem”; „meetrilised” teoreemid, mis möönavad suurusega seoses olevat fakti, näiteks Pythagorase teoreem, ja lõpuks segaiseloomuga teoreemid, nagu näiteks teoreem: „Igas kolmnurgas lõikuvad mediaanid ühes punktis ja jagunevad selles punktis lõikudeks, mis suhtuvad nagu 1 : 2, alates küljest.

Õpetamise kogemus on näidanud, et õpilastel on raskem aru saada esimest ja kolmandat tüüpi teoreemidest. Tuleb alustada

lihtsate teoreemide tõestamisega, kusjuures on tarvis iga kord rõhutada, milline teoreemi eeldus nimelt on kasutatud mingi järelduse või väite saamiseks. Märkime siin muuseas, et õpilased tavaliselt ei armasta tõestamisülesandeid. Õpetaja peab õpetama õpilasi lahendama niisuguseid ülesandeid, jättes geomeetria kursuses sellele ühe esimestest kohtadest. Tingimata soovitame teostada kõik tõestamisülesanded, mis leiduvad Kisseljovi õpikus Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile, ja nimelt: §-st 27 ülesanded 4—7; §-st 69 ülesanded 1—14; §-st 102 ülesanded 1—20; §-st 135 ülesanded 7—19; §-st 143 ülesanded 3—12; §-st 211 ülesanded 1—14; §-st 269 ülesanded 1—8.

Tõestada teoreem — see tähendab arutluste abil jõuda teoreemi eeldustelt selle järeldusele. Näiteks teoreemis: „Nurgapoolitaja mistahes punkt on võrdsetel kaugustel nurga haaradest”, on eeldus — „kui punkt N asetseb nurga poolitajal”; väide — „siis ta on võrdsetel kaugustel nurga haaradest”. Me peame järeldama teise esimesest, s. o. esitama teoreemi eeldused niisuguses vormis, et nendest saada järeldused, millest koosneb väide; kõigepealt on tarvis teada, milles seisneb teoreemi eeldus ja milles tema väide. Õpilased peavad õppima neid julgelt ja täpselt formuleerima.

Kuid sellest on vähe. Õpilasele tuleb näidata, et teoreemi väide ei saa olla õige, kui kõik teoreemi eeldused ei ole täidetud, — näiteks eespool mainitud näites — kui punkt N ei asetse nurgapoolitajal, siis ta ei saa olla võrdsetel kaugustel nurga haaradest.

Järelikult peab õpilane õppima kõigepealt tähelepanelikult läbi mõtlema kõik teoreemi eeldused ja neist igaüht maksimaalselt ära kasutama. Kui teoreem tõestatakse mitme eeldusega, tuleb õpetajal näidata õpilasele, millise eelduse ärakasutamisel nimelt milline väite osa on saadud. Õpilasele on tarvis näidata, et pole mõtet rääkida mingisugustest oletustest, kui neid ei kasutata tõestuses. Ebaõnnestumise puhul peab õpilane kõigepealt veel kord läbi sirvima kõik teoreemi eeldused ja kontrollima, kas nad on kõik täielikult ära kasutatud. Esineb juhtumeid, kus õpilane on unustanud kasutada mingisuguse teoreemi eelduse, kuid on teoreemi ikkagi „tõestanud”. Sel juhul peab õpilane ise aru saama, et jättes kasutamata ühe eelduse, ta ei saa tõestada teoreemi — on olemas mingi viga arutluses või see eeldus on üleliigne. Õpetaja, kes valib teoreeme iseseisvaks tõestamiseks, peab hoolitsema, et ei oleks ühtegi liigset, teistest sõltuvat eeldust.

Edasi, õpilane peab täpselt sõnastama mõistete definitsioone,

milledega ta opereerib, andes nimelt mõistete definitsioonide need sõnastused, mis on nõutavad antud teoreemi tõestamisel.

Eespool toodud näites peab õpilane endale otsekohe asetama küsimuse:

1) Mis see tähendab, et sirge on nurgapoolitaja? See tähendab, et ta poolitab antud nurga.

2) Mis on punkti kaugus sirgest? Punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkus.

Enne kui üle minna näidete juurde, osutame, et teoreemide tõestamisel on tarvis joonised teha kõige üldisemal kujul, vabad kitsendustest, välja arvatud need, mille tingib teoreem — nagu näiteks, kui teoreemi eelduses räägitakse ainult võrdhaarsest kolmnurgast, siis ei tohi mingil juhul joonestada võrdkülgset või täisnurkset kolmnurka; kui aga on räägitud kolmnurgast üldiselt, siis tuleb teda ka joonestada üldiselt, jne.

Näide 1. Tõestada, et võrdkülgses kolmnurgas kolmnurga sees võetud punkti M ja kolmnurga külgede vaheliste kauguste summa on jääv, ta võrdub kolmnurga kõrgusega (joon. 43).

Antud: võrdkülgne kolmnurk ja selle sees punkt M .

Tõestada, et

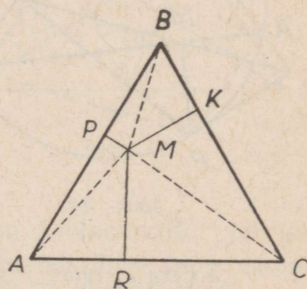
$$MR + MP + MK = h \quad (1)$$

Tõestus. Kuna antud on ainult, et punkt M asetseb kolmnurga sees, siis peamegi selle ära kasutama, selleks, ühendades punkti M tippudega, märgime üles, et kolmnurkade AMC , AMB ja CMB pindalade summa võrdub kolmnurga ABC pindalaga: sest

et pindala $AMC = \frac{AC}{2} \cdot MR$; pindala $AMB = \frac{AB}{2} \cdot MP$; pindala $CMB = \frac{CB}{2} \cdot MK$; pindala $ABC = \frac{AC}{2} \cdot h$, seega siis

$$\frac{AC}{2} \cdot MR + \frac{AB}{2} \cdot MP + \frac{CB}{2} \cdot MK = \frac{AC}{2} h. \quad (2)$$

Me ei kasutanud veel üht eeldust, nimelt, et kolmnurk on võrdkülgne: see annab $AC = AB = CB$, mis peale asetamist võrdusse (2) ja mõlema poole taandamist arvuga $\frac{AC}{2}$ annab võrduse (1), mida oligi tarvis tõestada.



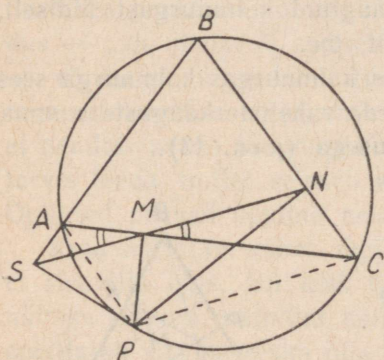
Joon. 43.

Näide 2. Tõestada, et kui ringjoone punktist tõmmata ristlõigud selle ringjoone sisse joonestatud kolmnurga külgedele, siis nende ristlõikude alused asetsevad ühel sirgel [nn. Simsoni sirgel (joon. 44)].

Ringjoonel on antud vabalt valitud punkt P ja ringjoone sisse joonestatud kolmnurk ABC . Punktist P on tõmmatud ristlõigud kolmnurga külgedele (või pikendustele). Tõestada, et punktid S , M ja N asetsevad ühel sirgel.

Tõestus. Tuleb tõestada, et $\angle CMN = \angle SMA$. Nelinurk $SAMP$ on kõõlnelinurk, sest nurgad ASP ja PMA on täisnurgad. Nurgad AMS ja APS on võrdsed kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele. Et nurgad CMP ja PNC on

täisnurgad, siis punktid P , M , N ja C asetsevad ühel ringjoonel (mis on tõmmatud PC keskpunktist raadiusega $\frac{1}{2}PC$). Niisiis nelinurk $PMNC$ on kõõlnelinurk ja nurgad CPN ja CMN on võrdsed kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ning samale kaarele. Tähendab, piisab kui tõestada, et



Joon. 44.

$$\angle SPA = \angle CPN.$$

Kuid see on selge:

$$\begin{aligned}\angle SPA &= 90^\circ - \angle PAS = 90^\circ - (180^\circ - \angle PAB) = \\ &= \angle PAB - 90^\circ;\end{aligned}$$

$$\angle CPN = 90^\circ - \angle PCB;$$

kuid et eelduse järgi nelinurk $PABC$ on kõõlnelinurk, siis:

$$\angle PAB + \angle PCB = 180^\circ,$$

$$\angle PAB - 90^\circ = 90^\circ - \angle PCB,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Me kasutasime ära nelinurga $PABC$ kui kõõlnelinurga, kirjutades, et: $\angle PAB + \angle PCB = 180^\circ$; me kasutasime ära eelduse, et $PM \perp AC$, $PS \perp BA$ ja $PN \perp BC$, kui kirjutasime, et nelinurgad $PMNC$ ja $SAMP$ on kõõlnelinurgad; kuid selle tõestamiseks, et nelinurk $PMNC$ on kõõlnelinurk, oli tarvis eeldus, et $PM \perp MC$

ja $PN \perp NC$, selle tõestamiseks aga, et nelinurk $PSAM$ on kõõlnelinurk, oli tarvis ainult eeldus, et $\angle S + \angle M = 180^\circ$, mis võib muidugi nii olla ka lõpuks siis, kui nurgad S ja M ei ole täisnurgad.

See, et $\angle S$ on täisnurk, oli meile tarvis, kui me kirjutasime, et

$$\angle SPA = 90^\circ - \angle PAS.$$

Niiviisi me oleme kasutanud ära kõik teoreemi eeldused. Seda tuleb õpilasele seletamisel tingimata rõhutada.

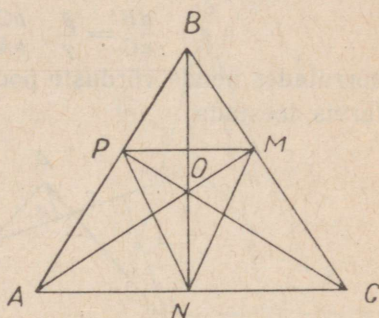
Näide 3. Tõestada, et kui kolmnurgas ABC ühendada kõrguste aluspunktid, siis saame kolmnurga, milles esimese kolmnurga kõrgused on nurgapoolitajad (joon. 45).

Antud on: vabalt valitud kolmnurk ABC ja $BN \perp AC$, $AM \perp BC$, $CP \perp AB$; punktid M , N ja P on ühendatud.

Tõestada, et sirged BN , AM , CP on nurkade MNP , NMP , NPM poolitajad.

Selleks tõestame nurkade MNB ja BNP võrdsuse jne. Et CP on risti sirgega AB ja BN on risti sirgega AC (eelduse järgi), siis nurgad OPA ja ONA on täisnurgad — nende summa võrdub 180° , ja järelikult nelinurk $ANOP$ on kõõlnelinurk. Nurgad BNP ja MAP kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ning samale kaarele, on võrdsed. Edasi, et (eelduse järgi) AM ja BC on risti, samuti BN ja AC on risti, siis nelinurk $MONC$ on samuti kõõlnelinurk (samadel põhjustel), ja järelikult samadel põhjustel on omavahel võrdsed nurgad BNM ja PCM (kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele). Nurgad BAM ja BCP on omavahel võrdsed kui kahe täisnurkse kolmnurga AMB ja CPB teravnurgad, mis omavad ühise nurga MBP . Niiviisi $\angle PNB = \angle MNB$, s. o. BN on nurga PNM poolitaja. Analoogiliselt tõestame, et AM on nurga PMN poolitaja ja CP on nurga NPM poolitaja.

Tuleb juhtida õppiija tähelepanu sellele, et kolmnurga ABC kõrguste ristseisu tema külgedega me kasutasime selle tõestamiseks, et nelinurk — näiteks $ANOP$ — on kõõlnelinurk. Kuid selleks on meile piisav, et nurkade P ja N summa on 180° , ja sel-



Joon. 45.

leks ei ole sugugi tarvis, et need nurgad oleksid täisnurgad. Asjaolu, et need nurgad on täisnurgad, me kasutasime ära nurkade PCB ja MAB võrdsuse tõestamiseks jne.

Näide 4. Kui kolmnurga ABC küljed BC , CA , AB (joon. 46) lõikuvad ühe ja sama sirgega punktides a , b , c , siis niiviisi külgedel tekkinud sirglõikude vahel kehtib seos:

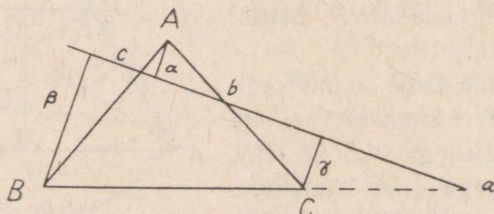
$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1. \quad (1)$$

Et seda tõestada, tõmbame kolmnurga tippudest kuni lõikumiseni sirgega (mida nimetatakse transversaaliks) kolm (meelevaldse sihiga) paralleelset sirglõiku, olgu α , β , γ tippude kaugused transversaalist, mis on mõõdetud mööda tõmmatud paralleele.

Siis on:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{bC}{bA} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{cA}{cB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

korrutades nende võrduste pooled, saamegi võrduse (1), mida oligi tarvis tõestada.



Joon. 46.

Märkus. Kui transversaal oleks olnud paralleelne küljega BC , siis oleks punkti a pidanud vaatlema, kui lõpmatuses asetsevat, ja suhet $\frac{aB}{aC}$ kui ühega võrduvat.

Milleks oleks muutunud siis otsitav suhe?

Kui kaks külge AB ja AC oleksid muutunud paralleelseteks, siis punkt A asetseks lõpmatuses. Millise teoreemi saame sel juhul?

Näide 5. Pöördteoreem (Menelaose teoreem). Kui kolmnurga ABC külgedel AB , AC , BC on võetud kolm punkti a , b , c , mis rahuldavad seost (1), siis need kolm punkti asetsevad ühel sirgel.

Tõestus. Sirge ab lõikab külge AB mingisuguses punktis c' nii, et saame võrduse:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1; \text{ seesama võrdus, kõrnutades teda võrdusega (1),}$$

näitab, et $\frac{cA}{cB} = \frac{c'A}{c'B}$, see tähendab, et punktid c ja c' ühtivad.

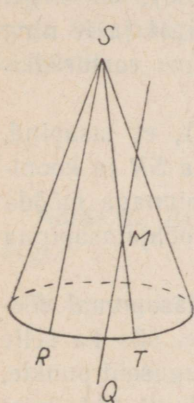
Näide 6. m_a on mediaan, mis on tõmmatud kolmnurga küljele a . Tõestada, et $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

Näpunäide. Täiendada kolmnurk parallelogrammiks.

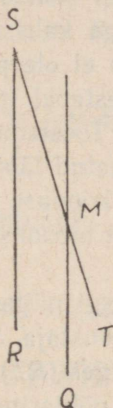
Näide 7. Antud on püstkoonus (joon. 47).

Tõestada, et ükski koonilise pinna puutuja ei ole paralleelne moodustajaga.

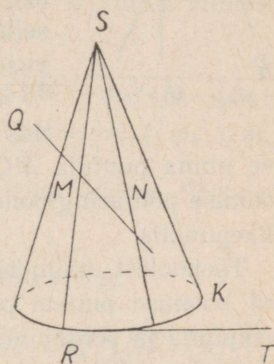
Koonilise pinna puutujaks nimetatakse sirget, millel on koonuse pinnaga ainult üks ühine punkt (kaks üheks liitunud punkti). Tõestame teoreemi vastuväiteliselt. Olgu koonuse pinna puutuja



Joon. 47.



Joon. 48.



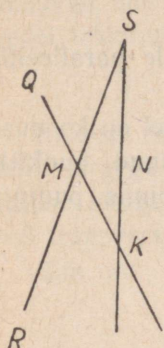
Joon. 49.

MQ selle pinna punktis M paralleelne moodustajaga SR . Tõmbame tasapinna läbi nende kahe paralleelse sirge SR ja MQ . Et see tasapind omab koonusega ühise punkti M ja kõik moodustaja SR punktid, siis ta lõikab koonilist pinda mööda kaht moodustajat SR ja ST , kus ST on see koonuse moodustaja, mis läbib puutepunkti M . Et puutuja MQ asetseb samal tasapinnal, siis saame (joon. 48), et sirge MQ , mis on paralleelne sirgega RS , lõikub koonilise pinnaga: selle sirge ja koonuse üks lõikepunkt on M , teine aga asetseb lõpmatuses, ja järelikult MQ ei ole puutuja, nagu me oletasime, mida oligi tarvis tõestada.

Näide 8. On antud püstkoonus (joon. 49) ja tema pinnal punkt M , milles on tõmmatud koonuse pinna puutuja MQ . Läbi punkti M on tõmmatud koonuse moodustaja SR , ja läbi moodustaja SR ning puutuja MQ on võetud tasapind.

Tõestada, et sellel tasapinnal ei ole koonuse punkti, mis ei asetseks moodustajal.

Olgu nii, et võetud tasapinnal leidub punkt N , mis kuulub koonuse pinnale, kuid mis ei asetse moodustajal SR (joon. 50). Et



Joon. 50.

punkt N asetseb koonuse pinnal, siis võetud tasapind, omades koonusega ühise punkti N ja kõik moodustaja SR punktid, lõikub koonusega kaht moodustajat SR ja SK mööda, kusjuures SK läbib punkti N . Sirge MQ asetseb eelduse järgi samal tasapinnal ja järelikult (vt. näide 7) ei ole paralleelne sirgega SR . Nagu nähtub tasapinnalisest joonisest (joon. 50), on sirgel MQ koonusega kaks ühist punkti M ja K ning sellepärast ta ei ole puutuja. Saime vasturääkivuse, mis tõestabki teoreemi.

Näide 9. Tõestada (joon. 49), et tasapind, mis on tõmmatud läbi moodustaja SR ja koonilise pinna puutuja MQ , lõikub koonuse põhja tasapinnaga mööda koonuse põhjaringjoone puutujat moodustaja SR ja põhjatasapinna lõikepunktis.

Tõepoolest, nagu tõestatu järgi näites 8, ei ole tasapinnal võetud koonuse punkte peale moodustaja SR punktide, siis ka selle tasapinna ja põhjapinna lõikesirgel (RT) ei ole niisuguseid punkte, s. o. sirge RT omab koonuse põhjaringjoonega ainult üht ühist punkti R ja seepärast on ta selle ringjoone puutuja.

§ 5. Arvutamisülesanded.

Siirdume nüüd arvutamisülesannete juurde. Kõigist neljast geomeetria ülesannete tüübist on see õpilastele kõige tuttavam ja arusaadavam ülesannete tüüp. Kuid neile ülesannetele ei pühendata keskkoolis kahjuks alati küllaldast tähelepanu.

Arvutamisülesanded esiteks kontrollivad õpilase teoreetilisi teadmisi ja teiseks õpetavad teda konstrueerima ja lugema jooniseid ning süstemaatiliselt ja lõpuni tegema kõik nõutavad arvutused. On tarvis nõuda õpilaselt, et ta ülesande lahendamisel esiteks teeks lahendamisplaani, formuleeriks täpselt, mida ta otsib igal lahenduse etapil, — ei tule karta samasugust vaheküsimuste süsteemi, nagu aritmeetiliste ülesannete lahendamisel. Kuid tuleb meeles pidada, et hästi tehtud joonis on pool edu. Seepärast tuleb iga-suguse, isegi ka lihtsa ülesande lahendamise juures kasutada

sirkliit ja joonlauda. Soovitame iga kord nõuda õpilaselt ühe või teise teoreemi kasutamisel selle täpset formuleerimist. On kasulik praktiseerida õpilastega lihtsate ülesannete suusõnalist lahendamist. Olemasolevate ülesannete kogudest võib soovitada: „Сборник геометрических задач” М. Попруженко (Учпедгиз, 1936 г.) ja П. Дзык, „Сборник стереометрических задач” (Учпедгиз, 1936).

Näide 1. Arvutada kolmnurga pindala tema kolme mediaani järgi.

Näpunäide. Olgu BAC antud kolmnurk. AA' , BB' , CC' on tema mediaanid ja G nende lõikepunkt. Pikendame GA' ja võtame $A'A'' = GA'$. Kolmnurga $GA''C$ pindala võrdub ühe kolmandikuga kolmnurga ABC pindalast. Kolmnurga $GA''C$ küljed leitakse kergesti.

$$\text{Vastus: } \frac{4}{3} \sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)},$$

$$\text{kus } 2M = m_a + m_b + m_c.$$

Näide 2. Arvutada kolmnurga pindala tema kolme kõrguse järgi.

Näpunäide. Kasutada võrdusi $ah_a = bh_b = ch_c$.

$$\text{Vastus: } \frac{1}{s} = 4 \sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})},$$

$$\text{kus } 2H = h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}.$$

Näide 3. Kolmnurga ABC külgedel AB , BC , CA on võetud vastavad punktid C_1 , A_1 , B_1 nii, et $AC_1 = \frac{1}{5} AB$, $BA_1 = \frac{1}{5} BC$, $CB_1 = \frac{1}{5} CA$. Sirged AA_1 , BB_1 , CC_1 moodustavad üksteisega lõikudes kolmnurga, mille pindala tuleb leida, kui antud kolmnurga pindala on S .

Näpunäide. Tähistame sirgete AA_1 ja BB_1 lõikepunkti tähega N , sirgete BB_1 ja CC_1 lõikepunkti tähega P ja sirgete CC_1 ja AA_1 lõikepunkti tähega M . Siis pindala $MNP =$ pindala $ABC -$ — pindala $AMC -$ pindala $BPC -$ pindala ANB . Näiteks pindala AMC otsimiseks leida suhted

$$\frac{\text{pindala } AMC}{\text{pindala } BMC} \text{ ja } \frac{\text{pindala } AMC}{\text{pindala } AMB}.$$

On tarvis tähele panna, et pindala $AMC +$ pindala $BMC +$ pindala $AMB =$ pindala ABC .

Vastus: $\frac{3}{7}S$.

Näide 4. Kolmnurga ABC küljele BC on ehitatud kaks võrdkülgset kolmnurka BCD ja BCD' .

Leida pikkused AD ja AD' , kui antud kolmnurga küljed on a, b, c .

Näpunäide. Leida AD ja AD' ruutude summa ja vahe.

Vastus: $\sqrt{k^2 + 2S\sqrt{3}}$ ja $\sqrt{k^2 - 2S\sqrt{3}}$, kus $a^2 + b^2 + c^2 = 2k^2$.

Näide 5. Kolmnurga kolme kõrguse aluspunktid on omavahel ühendatud. Leida sel viisil tekkinud kolmnurga ümbermõõt.

Näpunäide. Ühendades mingi kahe kõrguse aluspunktid, saame kolmnurga, mis on sarnane antud kolmnurgaga.

Vastus: $\frac{8S^2}{abc}$.

Näide 6. Selgitada arvutamise abil, et kolmnurga kolm sisenurga poolitajat lõikuvad ühes punktis.

Näpunäide. Kui O on nurgapoolitajate AA_1 ja BB_1 lõikepunkt, siis $OA_1 = \frac{a}{2p} AA_1$. Kui O_1 on nurgapoolitajate AA_1 ja CC_1 lõikepunkt, siis $O_1A_1 = \frac{a}{2p} AA_1$; et $OA_1 = O_1A_1$, siis kolm nurgapoolitajat lõikuvad ühes punktis.

Näide 7. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatet on a , on pööratud 30° võrra täisnurga tipu ümber. Leida pindala, mis on ühine täisnurkse kolmnurga mõlemale asendile.

Näpunäide. Otsitav pindala võrdub kahe kongruentse võrdhaarse kolmnurga pindalade summaga.

Näide 8. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 15 ja 8. Diameetri pikendusel on võetud punkt 17 ühiku kaugusel keskpunktist ja sellest on tõmmatud puutujad neile ringjoontele. Arvutada puutepunktide vaheline kaugus.

Näpunäide. Kasutada Ptolemaiiose teoreemi.

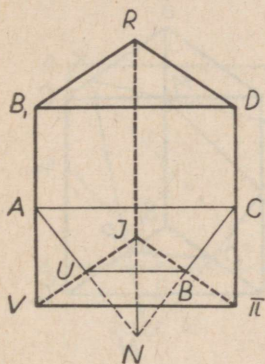
Vastus: $9\frac{8}{17}$.

Siirdume stereomeetria ülesannete juurde. Siin tuleb tähelepanu pöörata kolmele põhilisele ülesannete tüübile: ülesanded lõigete alalt, ülesanded hulktahtukate alalt ja ülesanded pöördkehade ja ümarkehade alalt (koonus, silinder, kera).

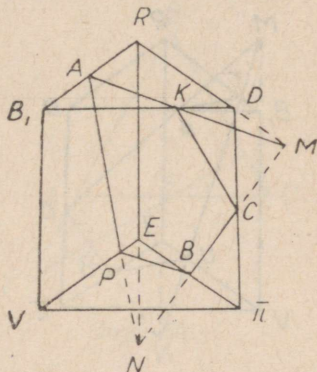
Toome näiteid mõningate lõigete konstrueerimise kohta.

Näide 1. Ehitada korrapärase kolmetahulise prisma lõige tasapinnaga, mis läbib servade B_1V , $D\pi$ ja $J\pi$ keskpunkte (joon. 51).

Lõikaja tasapind lõikab tahku $RJ\pi D$ mööda sirget BC . Piken-dame BC kuni lõikumiseni sirgega RJ punktis N (et sirged BC ja RJ asetsevad ühel tasapinnal $RD\pi J$, siis nad kas lõikuvad või on paralleelsed).



Joon. 51.



Joon. 52.

Punkt N asetseb tasapinnal RB_1VJ . Ühendame punktid A ja N ; AU on lõikaja tasapinna ja tahu VB_1RJ lõikejoon. Nähtavasti on UB tahu $VJ\pi$ lõikejoon ja AC on tahu $VB_1D\pi$ lõikejoon. Lõikena saime kujundi $AUBC$.

Näide 2. Ehitada prisma lõige tasapinnaga, mis läbib servade πD , πE ja B_1R keskpunkte (joon. 52).

Pikendades BC kuni lõikumiseni sirgega RE punktis N , ühen-dame punktid A ja N ; AP on lõikaja tasapinna lõikejooneks tahul VB_1RE , PB aga tahul $VE\pi$; pikendades BC kuni lõikumiseni sir-gega RD punktis M ning ühendades A ja M , saame AK , mis on tahu B_1RD lõikejoon. Lõpuks KC on tahu $B_1D\pi V$ lõikejoon. Lõige on kujund $APBCKA$.

Näide 3. Ehitada prisma lõige tasapinnaga, mis läbib servade $J\pi$, πD , B_1D keskpunkte (joon. 53).

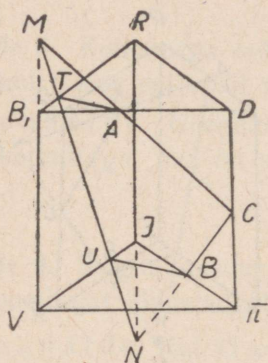
Pikendame AC kuni lõikumiseni sirgega VB_1 punktis M ; pikendame BC kuni lõikumiseni sirgega RJ punktis N . Ühendame M ja N . Lõikeks on kujund $TACBUT$.

Näpunäide. Et saada lõikaja tasapinna ja tahu lõikesirget, tuleb ehitada kaks punkti, mis on ühised selle tahuga ja lõikaja tasapinnaga ja siis need punktid ühendada.

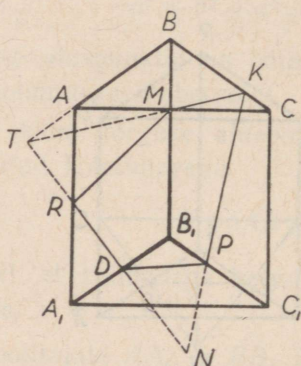
Soovitame iseseisvalt ehitada järgmised lõiked.

a) Kuubi lõige tasapinnaga, mis läbib tema mingil kolmel serval vabalt võetud kolm punkti.

b) Kuubi lõige tasapinnaga, mis läbib tema mingil kolmel tahul vabalt võetud kolm punkti.



Joon. 53.



Joon. 54.

c) Ehitada mingisugune kuubi lõige tasapinnaga nii, et lõige oleks: 1) isekülgne kolmnurk, 2) võrdhaarne kolmnurk, 3) võrdkülgne kolmnurk, 4) ristkülik, 5) ruut, 6) romb, 7) võrdhaarne trapets, 8) kuusnurk, 9) viisnurk.

Lõikeülesannete lahendamisel on tarvis kõigepealt need lõiked ehitada ja kogu ülesanne jaotada tasapinnalisteks ülesanneteks.

Näide 4. Korrapärase kolmetahulise prisma iga serv on a . Prisma on lõigatud tasapinnaga, mis läbib servade AA_1 , A_1B_1 ja AC keskpunkte (joon. 54). Arvutada lõike pindala (ABC ja $A_1B_1C_1$ on prisma põhjad).

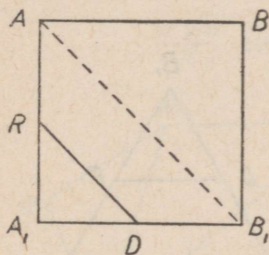
Kõigepealt ehitame kujundi, mille saame lõikes. RD on tahu A_1ABB_1 lõikejoon. Lõikesirge ehitamiseks tahul ABC pikendame RD kuni lõikumiseni sirgega AB punktis T ja ühendame T ja M . MK on lõiketasapinna ja tahu ABC lõikejoon; RM on lõiketasa-

Lõikesirge ehitamiseks tahul BCC_1B_1 on tarvis leida sellel tahul veel üks lõiketasapinna punkt peale K . Selleks pikendame RD kuni lõikumiseni sirgega BB_1 punktis N ; ühendame N ja K ; PK on otsitav lõikesirge. (P on sirgete B_1C_1 ja NK lõikepunkt, mis asetsevad ühel tasapinnal.) Lõpuks DP on tahu $A_1B_1C_1$ lõikejoon. Niisiis on lõikeks kujund $RDPKMR$.

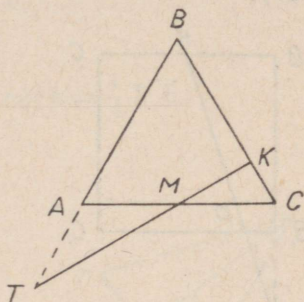
Külje RD arvutamiseks kasutame joonist (joon. 55).

Ruudu külj on a . Tuleb arvutada kahe lõikuva külje keskkohiti ühendava sirglõigu pikkus.

Näpunäide. Tõmmata diagonaal AB_1 , mis on paralleelne otsitava lõiguga. Miks diagonaal AB_1 on paralleelne sirgega RD ?



Joon. 55.



Joon. 56.

RM arvutamiseks toimime analoogiliselt, võttes ruudu A_1ACC_1 . MK arvutamiseks märgime, et me pikendasime RD kuni lõikumiseni sirgega AB (joon. 54); täisnurksed kolmnurgad RA_1D ja RAT on kongruentsed (nurgad A_1RD ja ART on võrdsed kui tippnurgad, kaatetid RA ja RA_1 on mõlemad võrdsed $\frac{a}{2}$).

Järelikult $AT = A_1D = \frac{a}{2}$.

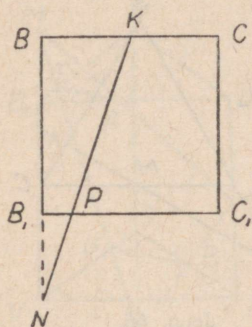
Vaadeldes nüüd joonist (joon. 56), võime taandada ülesande järgmiseks: On antud korrapärane kolmnurk küljega a (ABC). Külj AB on pikendatud poole oma pikkuse võrra (AT), punkt T on ühendatud punktiga M , s. o. külje AC keskkohaga. Leida lõigu MK pikkus.

Näpunäide. Võrdhaarsest kolmnurgast TAM , kus $AT = AM = \frac{a}{2}$, teades nurka TAM , mis võrdub $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, leiame külje TM ; edasi, et võrdhaarses kolmnurgas TAM nur-

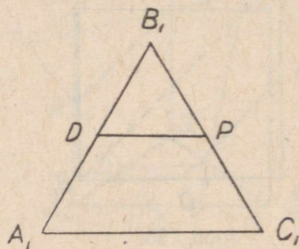
gad MTA ja AMT on mõlemad 30° , näeme kolmnurgas KTB : külg TB on $a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$; nurk $KTB = 30^\circ$; nurk $KBT = 60^\circ$, tähendab $TKB = 90^\circ$. Leiame kaateti TK , seejärel leiame lahutamise teel MK .

KP pikkuse leidmiseks märgime, et me pikendasime RD kuni lõikumiseni sirgega BB_1 . Täisnurksed kolmnurgad DB_1N ja DA_1R on kongruentsed, sest neil on võrdsed nurgad A_1DR ja B_1DN kui tippnurgad ning kaatetid $B_1D = DA_1 = \frac{a}{2}$.

Tähendab $B_1N = RA_1 = \frac{a}{2}$ ja ülesanne taandus selliseks (joon. 57).



Joon. 57.



Joon. 58.

On antud ruut B_1BCC_1 küljega a . Tema külg BB_1 on pikendatud tema poole pikkuse võrra (kuni punktini N) ja punkt N on ühendatud punktiga K ; BK leiame täisnurksest kolmnurgast TKB (joon. 56).

N ä p u n ä i d e. Täisnurksest kolmnurgast NBK , teades kaatetid, leiame hüpotenuusi NK . Leides kolmnurkade NBK ja NB_1P sarnasuse põhjal lõigu B_1P , leiame seejärel NP ja pärast PK .

Lõpuks, lõigu DP pikkuse kindlakstegemiseks vaatleme korrapärast kolmnurka $A_1B_1C_1$ küljega a (joon. 58), kus $DB_1 = \frac{a}{2}$ ja B_1P on teada. Kolmnurgast DB_1P leiame nurga $DB_1P = 60^\circ$ ja kahe külje DB_1 ja B_1P järgi külje DP .

Niisiis (joon. 59) on meil viisnurk $DRMKP$, millel $RD = RM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $MK = DP = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $KP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; tema pindala arvutamiseks tõmbame diagonaalid DM ja DK ja arvutame nende pikkused,

siis arvutame otsitava pindala kui kolme kolmnurga DRM , DMK ja DPK pindalade summa, mis arvutame kolme külje järgi (Heroni valem).

Vaatleme joonist 54, joonestame eraldi joonise 59, kus

$$TR = RD = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad RM = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad TM = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Koosinusteoreemi järgi saame kolmnurgast MTR , tähistades nurga MTR tähega α :

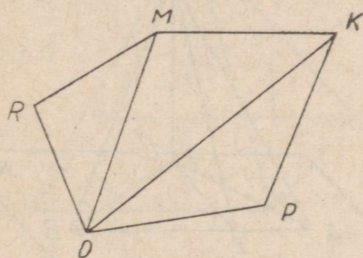
$$MR^2 = TR^2 + TM^2 - 2TM \cdot TR \cdot \cos \alpha$$

või, asetades siia leitud väärtused:

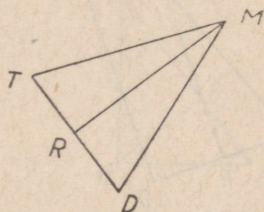
$$\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{4} - 2 \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \alpha,$$

kust

$$\frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{3a^2}{4}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{6}.$$



Joon. 59.



Joon. 60.

Kasutades sama teoreemi kolmnurgas MTD (joon. 60), saame:

$$\begin{aligned} MD^2 &= TM^2 + TD^2 - 2TM \cdot TD \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{3}{4}a^2 + 2a^2 - \frac{2a}{2} \sqrt{3} \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{6} = \frac{5a^2}{4}; \quad MD = \frac{a}{2} \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Diagonaali DK arvutamiseks vaatleme joon. 61, kus

$$TK = \frac{3}{4}a\sqrt{3} \text{ (joon. 56); } TD = a\sqrt{2};$$

$$TR = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad TM = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ (joon. 56);}$$

$$RM = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{4}\sqrt{6} \text{ (joon. 60).}$$

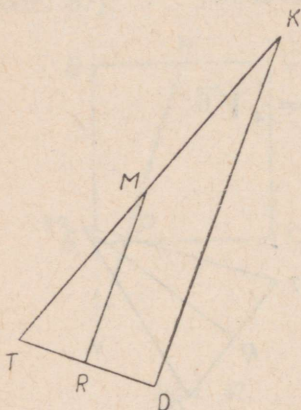
Kasutades nüüd koosinusteoreemi kolmnurgas DTK (joon. 61) külje DK pikkuse arvutamiseks, saame:

$$DK^2 = TK^2 + TD^2 - 2TK \cdot TD \cdot \cos \alpha = \\ = \frac{27a^2}{16} + 2a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{3a}\sqrt{2} \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{59a^2}{16} - \frac{36a^2}{16} = \frac{23a^2}{16},$$

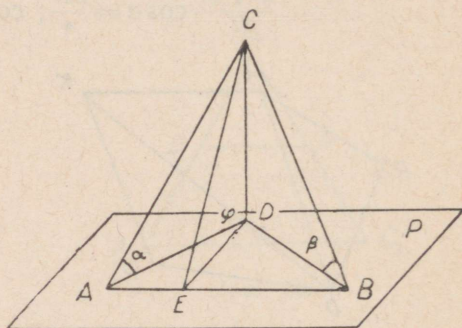
siit

$$DK = \frac{a}{4}\sqrt{23}.$$

Soovitame lahendada järgmise ülesande: Korrapärase kolmetahulises püramiidis on läbi kõrguse keskpunkti tõmmatud tasapind, mis on paralleelne küljetahuga. Arvutada lõike pindala, teades, et põhjaserv on a ja küljeserv on b .



Joon. 61.



Joon. 62.

Kursuses tuleb jätta kõige tähtsam koht stereomeetria ülesannete lahendamisele koos trigonomeetria kasutamisega. Lahendame mõned näited.

Näide 1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi läbib tasapind, mis moodustab kaatetitega nurgad α ja β . Millise nurga ta moodustab kolmnurga tasapinnaga (joon. 62).

Olgu P antud tasapind ja AB täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus. Et saada nurgad α ja β , tõmbame CD risti tasapinnaga P ning ühendame D punktidega A ja B ; siis $\angle CAD = \alpha$ ja $\angle CBD = \beta$. Et saada kahtahulise nurga joonnurk kolmnurga ABC tasapinna ja tasapinna P vahel, tõmbame DE risti sirgega AB ning ühendame E ja C ; siis tuleb ka EC risti sirgega AB

(kolme ristsirge teoreemi põhjal), ja järelikult nurk CED on otsitav joonnurk; märgime ta tähega φ . Nüüd leiame seose nurga φ ja nurkade α ja β vahel. Selleks kasutame mõnda sirglõiku kui põhilõiku, et tema kaudu väljendada teisi sirglõike. Niisuguseks lõiguks võib olla nende kolmnurkade, milles esinevad nurgad α , β , φ , ühine kaatet, s. o. lõik CD .

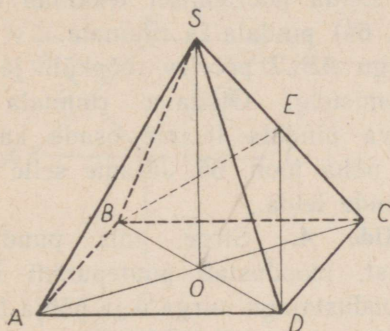
Oletades, et $CD = a$, leiame:

$$AC = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad CB = \frac{a}{\sin \beta}, \quad CE = \frac{a}{\sin \varphi}.$$

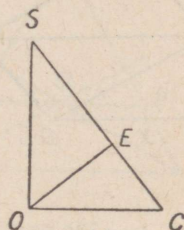
Et nurk ACB on täisnurk, siis $AC \cdot CB = CE \cdot AB$ ehk

$$AC \cdot CB = CE \sqrt{AC^2 + CB^2}.$$

Eespool toodud avaldiste asendamine annab otsitava.



Joon. 63.



Joon. 64.

Näide 2. Leida korrapärase neljatahulise püramiidi ruumala, kui on antud põhjaserv a ja kahetahuline nurk küljetahkude vahel (joon. 63).

Tähistades püramiidi ruumala tähega V ja kõrguse SO tähega h , saame: $V = \frac{1}{3}a^2h$. Et leida h , selleks kasutame joonnurka α ; selle võib ehitada, tõmmates punktidest B ja D ristlõigud servale SC ; et küljed CB ja CD on võrdsed ja ühesuguse kaldega SC suhtes, siis ristsirged lõikuvad servaga ühises punktis E . Ühendades E ja O , saame:

$$\angle BEO = \angle DEO = \frac{\alpha}{2}.$$

Tähistades $\angle SCO$ tähega φ , leiame:

$$h = OC \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

$\operatorname{tg} \varphi$ leiame võrdusest:

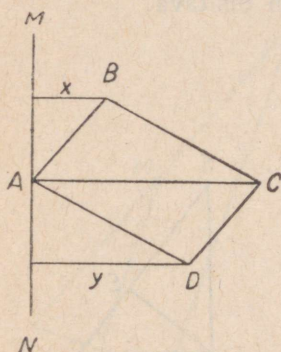
$$\sin \varphi = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{OD} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Niiviisi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} : \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} : \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} : \sqrt{-\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Asetades selle eespool h jaoks saadud avaldisse, leiame V .

Näide 3. Rööpkülik, mille küljed on a , b ja teravnurk on α , pöörleb suurema diagonaali ristsirge ümber, mis on tõmmatud diagonaali otpunktist (rööpküliku tasapinnal). Leida pöörlemisel tekkinud keha (joon. 65) pindala ja ruumala.



Joon. 65.

Olgu $ABCD$ pöörlev rööpkülik ja MN pöörlemistelg. Otsitava ruumala ja otsitava pindala leiame osade kaupa, nagu näha joon. 65. Jätame selle õpilase enda leida.

Näide 4. Sirge, mis puudutab koonust, moodustab puutepunkti läbi-va moodustajaga nurga α ja põhja tasapinnaga moodustab kaldenurga β . Leida nurk moodustaja ja põhja tasapinna vahel.

Näpunäide. Ära kasutada asjaolu, et tasapind, mis läbib moodustajat ja koonuse puutujat, lõikab põhja tasapinda põhja ringjoone puutujat mööda. Vaadelda joonist selles tasapinnas.

Lõpuks anname mõnede konstruktsioonülesannete, tõestamisülesannete ja arvutamisülesannete lahendused.

Ülesanne 1. Tasapinnal on antud kolm punkti M , N , P (joon. 66). Nõutakse ehitada niisugune täisnurkne kolmnurk ABC , mille jaoks need antud punktid oleksid külgedele ehitatud ruutude keskpunktideks. (Ruudu keskpunkt on tema diagonaalide lõikepunkt).

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja kolmnurk ABC on otsitav. Tõmbame punktidest N , M , P sirged vastavalt risti külgedele AB , BC , AC . Nad lõikuvad punktis O — hüpotenuusi keskpunktis, sest et N , M , P on külgedele ehitatud ruutude diagonaalide lõikepunktid, need ristjooned läbivad külgede kesk-

punkte ja niiviisi nende lõikepunkt on ringjoone keskpunkt, mis on kolmnurgale ABC ümber joonestatud. Et N ja M on külgedele AB ja BC ehitatud ruutude keskpunktid, siis on:

$$NR = \frac{1}{2} AB; DM = \frac{1}{2} BC,$$

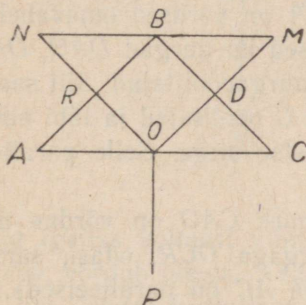
nurgad BNR ja DMB on kumbki 45° .

Et küljed AB ja BC on eelduse kohaselt teineteisega risti, siis kujund $RBDO$ on ristkülik, siit

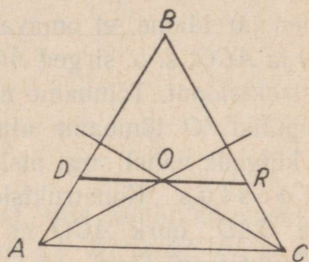
$$OR = BD = \frac{1}{2} BC \text{ ja } OD = RB = \frac{1}{2} AB.$$

Niiviisi:

$$ON = OR + RN = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB = DM + OD = OM,$$



Joon. 66.



Joon. 67.

ja seega täisnurkne kolmnurk NOM on võrdhaarne, millest muu-seas järeldub, et NM lähisnurgad on temal 45° ; arvestades eespool tehtud märkust nurkade BNR ja DMB kohta, tuleme otsusele, et meie täisnurkse kolmnurga tipp B peab asetsema lõigul NM . Mär-gime, et kül AC on risti sirgega OP ja et P on ruudu keskpunkt, mille kül on AC , siis $OP = AO = OC$.

Konstruksioon. Ühendame punktid N ja M ; punktide-st N ja M tõmbame sirged 45° nurga all sirgele MN , nende lõike-punkti (punkti O) ühendame punktiga P . Edasi, punktist O tõm-bame sirge risti sirgega OP ja märgime sellel punktist O kumma-legi poole lõigu pikkusega OP . Saame punktid A ja C , milledest tõmbame sirged risti vastavalt külgedele ON ja OM ; kui need sir-ged lõikuvad sirgel MN , siis on lahendus võimalik ja kolmnurk ABC , kus B on lõikepunkt, on otsitav. Vastasel korral on lahendus võimatu.

Ülesanne 2. On antud kolmnurk ABC (joon. 67). Tõmmata alusele AC paralleelne sirge nii, et selle sirge lõik külgede vahel võrduks külgmiste lõikude AD ja CR summaga.

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja DR paralleelne alusega AC , ja

$$AD + CR = DR.$$

Paigutame lõigule DR punktist D lõigu pikkusega AD , saame punkti O ; siis, sest eelduste järgi peab olema $AD + RC = DR$, lõik OR peab võrduma lõiguga RC . Ühendame A ja O ning O ja C . Et $AD = DO$ ja $OR = RC$, siis kolmnurgad ADO ja ORC on võrdhaarsed ja nende alusnurgad on võrdsed, — nurk OAD on võrdne nurgaga DOA ja nurk ROC on võrdne nurgaga OCR . Kuid, teisest küljest, et sirge DR on eelduste kohaselt paralleelne sirgega AC , siis nurgad CAO ja DOA , ROC ja OCA on võrdsed omavahel ja nii viisi järeldame, et omavahel on võrdsed ka nurgad DAO , OAC , RCO ja ACO , s. o. sirged AO ja CO on nurgapoolitajad. Siit saame konstruktsiooni. Tõmbame nurkade A ja C poolitajad ja läbi nende lõikepunkti O tõmbame alusele paralleelse sirge. Selle paralleeli lõik külgede vahel ongi otsitav.

Tõestus. Konstruktsiooni järgi nurk CAO on võrdne nurgaga OAD ; nurk ACO on võrdne nurgaga OCR , edasi, samuti konstruktsiooni järgi (sest sirged DR ja AC on paralleelsed), on omavahel võrdsed nurgad DOA ja CAO , ROC ja OCA ; tähendab, nurk DAO on võrdne nurgaga AOD , nurk COR on võrdne nurgaga OCR , s. o. kolmnurgad ADO ja ORC on võrdhaarsed, $AD = DO$, $OR = RC$, s. o. $AD + RC = DR$, mida oligi tarvis tõestada.

Ülesanne 3. (Pascali teoreem). Igas ringjoone sisse joonestatud kuusnurgas asetsevad vastaskülgede lõikepunktid ühel sirgel (joon. 68).

Olgu $ABCDEF$ kuusnurk, mille vastasküljed AB ja DE lõikuvad punktis L , küljed BC ja EF punktis M , küljed CD ja FA punktis N .

Vaatleme kolmnurka ISK , mis moodustatud kuusnurga külgedest AB , CD , EF , teiste sõnadega, meie kuusnurga külgedest, mis on võetud üle ühe. Punktid L , M , N on asetatud vastavalt selle kolmnurga külgedel SK , KI , SI . Need punktid asetsevad ühel sirgel, kui on kehtiv seos:

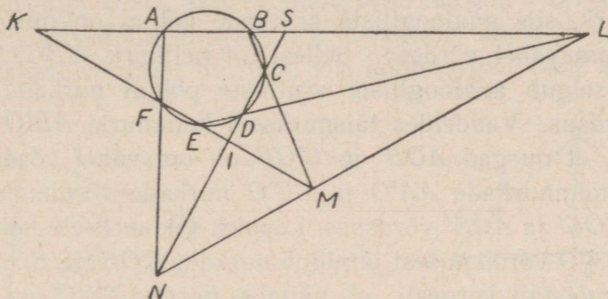
$$\frac{LS}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NS} = 1. \quad (1)$$

Kuid kui me lõikame kolmnurka ISK järjestikku iga kuusnurga ülejäänud küljega DE , BC , FA , saame seosed:

$$\frac{LS}{LK} \cdot \frac{EK}{EI} \cdot \frac{DI}{DS} = 1, \quad \frac{MK}{MI} \cdot \frac{CI}{CS} \cdot \frac{BS}{BK} = 1, \quad \frac{NI}{NS} \cdot \frac{AS}{AK} \cdot \frac{FK}{FI} = 1.$$

Korrutame need kolm võrdust liikmeti grupeerides tegureid murdude lugejais ja nimetajais:

$$\frac{LS}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NS} \cdot \frac{CI}{EI} \cdot \frac{DI}{FI} \cdot \frac{AS}{CS} \cdot \frac{BS}{DS} \cdot \frac{EK}{AK} \cdot \frac{FK}{BK} = 1.$$

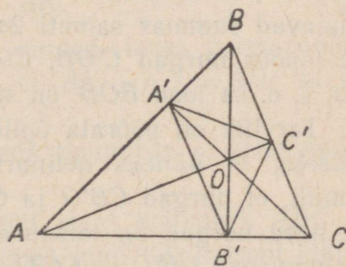


Joon. 68.

Kuid igaüks kolmest viimasest murrust, mis kuuluvad vasakusse poolde, võrdub ühega. Näiteks korrutised $CI \cdot DI$ ja $EI \cdot FI$ on võrdsed kui lõikude korrutised, mis on ära lõigatud ringjoonega punkti I väljuvatest sirgetest. Niiviisi saame seose (1) ja teoreem on tõestatud.

Märkus. Eespool mainitud tõestus jääb kehtima, kui punktid A , B , C , D , E , F ühtivad paariviisi ja kolmnurga ISK küljed on ringjoone puutujad. Seejuures teoreem võtab järgmise kuju: ringjoone sisse joonestatud kolmnurga tippudest läbitõmmatud puutujad lõikavad vastavaid külgi kolmes punktis, mis asetsevad ühel sirgel.

Ülesanne 4. On antud kolmnurk ABC (joon. 69) ja selle sisse on joonestatud kolmnurk $A'B'C'$ nii, et väikese kolmnurga tippudest suure kolmnurga külgedele tõmmatud ristjooned on väikese kolmnurga nurgapoolitajad. Tõestada, et need sirged on suure kolmnurga kõrgused.



Joon. 69.

Antud on: nurk $A'B'O$ on võrdne nurgaga $C'B'O$, nurk $B'A'O$ on võrdne nurgaga $OA'C'$ ja nurk $A'C'O$ on võrdne nurgaga $OC'B'$. Tõestada, et sirged AC ja BB' , BC ja AC' , AB ja CA' on paariti üksteisega risti, s. o. et BO ja OB' on üks sirge, CO ja OA' on üks sirge ja lõpuks AO ja OC' on üks sirge. Et eelduste kohaselt nurgad $OB'C$ ja $OC'C$ on täisnurgad ja seega annavad summas 180° , nelinurk $B'OC'C$ on kõõlnelinurk ja nurgad $C'B'O$ ja $C'CO$ kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele, on omavahel võrdsed. Et nelinurk $AB'OA'$ on samadel kaalutlustel ka kõõlnelinurk, siis analoogiliste arutluste põhjal on nurgad $A'B'O$ ja OAA' omavahel võrdsed. Sellest, et nelinurk $A'BC'O$ on kõõlnelinurk, selgub analoogiliste arutluste põhjal nurkade $C'BO$ ja $C'A'O$ võrdsus. Vaadeldes täisnurkseid kolmnurki $AB'O$ ja $OC'B$, järeldame, et nurgad AOB' ja $C'OB$ on omavahel võrdsed; täisnurksete kolmnurkade $AA'O$ ja $CC'O$ nurkade võrdlemisel saame nurkade COC' ja AOA' võrdsuse. Lõpuks, täisnurksete kolmnurkade $CB'O$ ja $BA'O$ võrdlemisest järeldub nurkade COB' ja BOA' võrdsus (õpilane mõistab kergesti, et näiteks nurgad OCC' ja $C'B'O$ on omavahel võrdsed, samuti nurgad OAA' ja $OB'A'$, ja et eelduste kohaselt on nurgad $C'B'O$ ja $OB'A'$ võrdsed, seetõttu on omavahel võrdsed ka nurgad OCC' ja OAA').

Nurgad AOA' , $A'OB$, BOC' , COC' , COB' , $B'OA$ annavad summas $4d$. Et edasi, $AOA' = COC'$, $COB' = BOA'$, $C'OB = AOB'$ ja $A'OB = B'OC$, siis nurgad AOA' , $A'OB$, $C'OB$ annavad summas $2d$, s. o. joon AOC' on sirge; nurgad $C'OC$, $C'OB$, BOA' annavad summas samuti $2d$ ja järelikult ka joon COA' on sirge, ja lõpuks nurgad $C'OB$, COC' ja COB' annavad samuti summas $2d$, s. o. ka joon BOB' on sirge, mida oligi tarvis tõestada.

Tarvilik on pöörata õpilase tähelepanu faktile, et selle tõestamiseks, et näiteks nelinurk $CB'OC'$ on kõõlnelinurk, on tarvis ainult, et nurgad $CB'O$ ja $CC'O$ annaksid summas $2d$, kuid seda, et need nurgad on täisnurgad, kasutasime seal, kus väitsime, et kolmnurgad $CB'O$ ja $CC'O$ on täisnurksed.

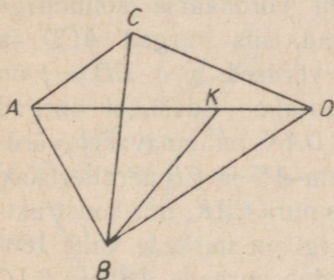
Ülesanne 5. Tõestada, et kõõlnelinurga diagonaalide korrutis võrdub tema vastaskülgede korrutiste summaga (Ptolemaiiose teoreem).

Et nelinurk $ABDC$ on kõõlnelinurk (joon. 70), siis nurk ACB võrdub nurgaga ADB ja nurk ABC võrdub nurgaga ADC kui piirdenurgad, mis toetuvad samadele kaartele.

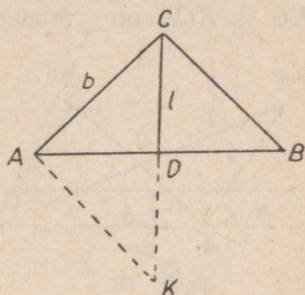
Võtame nurga DBK võrdse nurgaga CBA . Nagu näha, kolmnurgad DKB ja BAC on sarnased ja sellepärast $\frac{AC}{KD} = \frac{BC}{BD}$ ehk

$$AC \cdot BD = BC \cdot KD. \quad (1)$$

Et nurk BKA kui välisnurk on võrdne nurkade BDK ja DBK summaga, s. o. ACB ja CBA summaga, aga see viimane summa on võrdne vahega $180^\circ - BAC$, ja selle tõttu, et nelinurk $ACDB$ on kõõlnelinurk, nurkade BAC ja BDC summa on 180° , nurk BKA võrdub nurgaga BDC , aga et peale selle nurgad KBA ja DBC on omavahel võrdsed kui nurgad, mis koosnevad ühest ja samast nurgast ja kahest võrdsest nurgast, siis kolmnurgad BKA ja BDC on



Joon. 70.



Joon. 71.

sarnased, millest järeldub, et $\frac{AB}{CB} = \frac{AK}{CD}$ ehk

$$AB \cdot CD = CB \cdot AK. \quad (2)$$

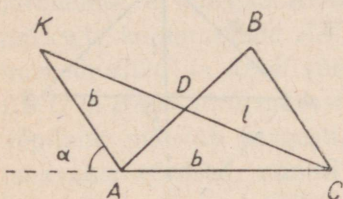
Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, tuues parempoolses osas sulgude ette CB ja märgates, et $AK + KD = AD$, saame selle, mille pidime tõestama.

Ülesanne 6. Ehitada kolmnurk tema tipunurga α , selle nurga poolitaja l ja külje b järgi (joon. 71).

Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et kolmnurk ABC on ehitatud. Pikendame CD (nurgapoolitaja) kuni lõikumiseni läbi A mineva sirgega, mis on paralleelne küljega CB (punkt K). Et sirged AK ja CB on paralleelsed, nurk AKC on võrdne nurgaga DCB ja et (selle tõttu, et CD on nurga ACB poolitaja) nurk ACD on võrdne nurgaga DCB , siis nurk ACD on võrdne nurgaga AKD , s. o. kolmnurgas CAK on alusnurgad võrdsed — see kolmnurk on võrdhaarne. Edasi, sirgete AK ja CB paralleelsuse tõttu nurgad DAK ja DBC on võrdsed, siis nurk KAC on võrdne nurkade BAC

ja ABC summaga, s. o. vahega $180^\circ - \alpha$, kus α on C tipunurk. Niiviisi taandub ülesanne kolmnurga ehitamisele kahe külje järgi, mis on võrdsed b -ga, ja nendevahelise nurga järgi.

Konstruksioon. Ehitame kolmnurga KAC , milleks vabalt valitud sirgel võtame vabast punktist antud lõigu b (joon. 72), ehitame, nagu joonisel näidatud, nurga α ja tema haaral võtame lõigu b , saame lõigu AK . Ühendame K ja C , sirgel CK võtame punktist C antud nurgapoolitaja $l = CD$, ühendame A ja D ning pikendame sirget AD kuni lõikumiseni sirgega, mis läbib punkti C ja on paralleelne sirgega AK (CB). Saame lõikumiskohas punkti B ja kolmnurk ABC on otsitav. Tõepoolest, et sirgete CB ja AK paralleelsuse tõttu nurgad AKC ja BCD on võrdsed, kuid nurgad AKC ja KCA on võrdsed omavahel kui võrdhaarse kolmnurga



Joon. 72.

alusnurgad, siis nurgad ACD ja DCB on võrdsed, s. o. $CD = l$ on nurgapoolitaja. Edasi, et nurgad ABC ja DAK on omavahel võrdsed sirgete AK ja CB paralleelsuse tõttu, siis nurk CAK , mis konstruksiooni järgi on nurkade vahe $180^\circ - \alpha$, võrdub nurkade ABC ja BAC summaga, s. o. 180° miinus nurk

BCA , niiviisi nurk BCA ongi nurk α . Lõpuks külge AC on konstruksiooni järgi võrdne antud lõiguga b .

Uurimine. Ülesanne on nähtavasti lahendatav, kui $l = CD < CK$, aga et kolmnurgast CAK koosinusteoreemi järgi on

$$CK^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos(180^\circ - \alpha) = 2b^2 + 2b^2 \cos \alpha,$$

ja konstruksiooni võimalikkuseks on tarvis, et kehtiks võrratus

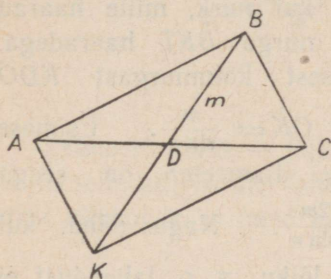
$$l < b \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} \text{ ehk } l < 2b \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ülesanne 7. Ehitada kolmnurk tipunurga α , külje a ja antud nurga tipust tõmmatud mediaani m järgi.

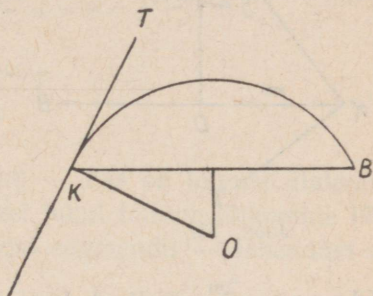
Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja kolmnurk ABC (joon. 73) on otsitav: nurk $ABC = \alpha$, külge $CB = a$ ja mediaan $BD = m$, $AD = DC$. Pikendades mediaani BD tema pikkuse võrra ja ühendades siis niiviisi saadud punkti K punktidega A ja C , saame parallelogrammi $ABCK$; selle tõttu, et diagonaalid selles nelinurgas on poolitatud, on: $AD = DC$ eelduse järgi, $KD = DB$ konstruksiooni järgi. Kolmnurgas KAB on tuntud: külge $BK = 2m$,

külge $AK = a$, sest parallelogrammis on vastasküljed võrdsed, ja lõpuks nurk BAK on võrdne vahega $180^\circ - \alpha$, sest sirgete BC ja AK paralleelsuse tõttu on nurgad CAK ja ACB omavahel võrdsed ning seega nurk BAK on võrdne kahe nurga CAB ja CAK summaga ehk nurkade CAB ja ACB summaga, s. o. 180° miinus nurk ABC , seega on ta võrdne antud nurgaga α . Niisugust kolmnurka oskame ehitada.

Konstruksioon. Vabalt valitud sirgel märgime lõigu, mis on võrdne $2m$ (BK) (joon. 74), ja ehitame sellele segmendi, milles antud nurk $180^\circ - \alpha$ on piirdenurk, selleks ehitame punkti K juurde nurga α , haarale KT punktis K tõmbame ristsirge kuni lõikumiseni sirgega, mis on risti lõiguga KB ja mis läbib tema kesk-



Joon. 73.



Joon. 74.

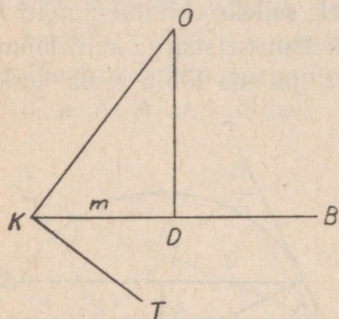
punkti. Võttes niiviisi saadud punkti O keskpunktiks, tõmbame ringjoone raadiusega OK . Nagu teada, osa ehitatud ringjoonest, mis asetseb lõigust KB ehitatud nurga $180^\circ - \alpha$ suhtes teisel pool, ongi punktide geomeetriline koht, kust antud lõik KB on näha nurgas $180^\circ - \alpha$. Nüüd jääb veel arvestada antud külge KA , mis on võrdne lõiguga a ; selleks joonestame raadiusega a , võttes punkti K keskpunktiks, ringjoone, mis lõikab ehitatud ringjoont punktis A ; ühendame punkti A punktidega K ja B ; läbi punkti D , s. o. lõigu KB keskpunkti, tõmbame punktist A kiire, millele punktist D märgime lõigu DC , mille pikkus on AD . Lõpuks ühendame punkti C punktiga B — kolmnurk ABC on otsitav. Tõepoolest, kujund $ABCK$ on parallelogramm, sest selles kujundis konstruksiooni järgi poolitavad diagonaalid teineteist. Siit järeldub, et külge BC on võrdne küljega AK (mis võrdub lõiguga a). Edasi, et D on konstruksiooni järgi külje AC keskpunkt, siis BD on nurga ABC tipust tõmmatud mediaan. Nüüd on (sest punkt D on lõigu KB keskpunkt):

$$DB = \frac{1}{2}KB = \frac{1}{2} \cdot 2m = m.$$

Lõpuks nurk ABC võrdub α -ga, sest et parallelogrammis $ABCK$ nurkade KAB ja ABC summa on 180° , aga nurk KAB võrdub konstruktsiooni järgi vahega $180^\circ - \alpha$, järelikult nurk ABC võrdub α -ga.

Teostame ülesande uurimise. Selleks vaatleme eraldi kaht juhtu:

1) Otsitava kolmnurga tipunurk on nürinurk, s. o. $\alpha > 90^\circ$, $180^\circ - \alpha < 90^\circ$, ja esimese ringjoone keskpunkt asub lõigust KB



Joon. 75.

ülalpool (joon. 75). Keskpunkt O asub lõigust KB samal poolel, kus asub meid huvitav segment. Nurk KOD on ilmselt võrdne $180^\circ - \alpha$ kui nurk, mille haarad on risti nurga BKT haaradega. Täisnurksest kolmnurgast KDO

saame: $OK = \frac{m}{\sin \alpha}$. Esimese

ringjoone diameeter on seega

võrdne $\frac{2m}{\sin \alpha}$. Nagu näha, kui

$KA = a > \frac{2m}{\sin \alpha}$, siis kaks ringjoont ei lõiku, s. o. lahendust ei

ole. Kui $a = \frac{2m}{\sin \alpha}$, siis mõlemad ringjooned puudutavad teineteist punktis, mis on diametraalselt punkti K vastas — ülesandel on

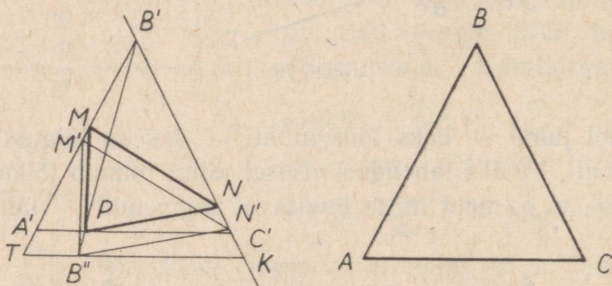
üks lahendus. Kui $a < \frac{2m}{\sin \alpha}$, siis on võimalikud kolm juhtu:

$a < 2m$, $a > 2m$ ja $a = 2m$; esimesel juhul saame kaks lõikepunkti — ühe, lõigust KB ülalpool, see annabki meile lahenduse, sest ta asetseb meid huvitaval segmendi kaarel, teise, lõigu KB all; niisugusel juhul saame ühe lahenduse. Teisel juhul saame mõlemad lõikepunktid lõigust KB ülalpool — kaks lahendust. Kolmandal juhul saame ühe lahenduse, sest mõlemad ringjooned lõikuvad punktis B ja punktis, mis on lõigust KB ülalpool.

2) Otsitava kolmnurga tipunurk on teravnurk, $\alpha < 90^\circ$, $180^\circ - \alpha > 90^\circ$, seega esimese ringjoone keskpunkt ja meid huvitav segment asetsevad lõigust KB üks ühel, teine teisel pool (joon. 76).

Kui $a > \frac{2m}{\sin \alpha}$, siis lahendust ei ole. Kui $a = \frac{2m}{\sin \alpha}$, siis mõlemad ringjooned puudutavad teineteist punktis, mis on diamet-

ja $OC = \frac{2}{3} KC$, siis ülesanne taandub kolmnurga AOC ehitamisele tema kahe külje $AO = \frac{2}{3} AE$, $OC = \frac{2}{3} KC$ ja mediaani $OD = \frac{1}{3} BD$ järgi (sest punkt D on lõigu AC keskpunkt). Täiendades kolmnurka AOC paralleelogrammini (joon. 78), taandame ülesande kolmnurga AOR ehitamisele tema kolme külje järgi: AO , $AR = OC$ ja $OR = 2OD$. Pöördudes tagasi kolmnurga AOC juurde, me taastame ka terve otsitava kolmnurga ABC , selleks pikendame mediaani OD tema kahekordse pikkuseni (OB) ja ühendame B ja A ning B ja C . Tõestus ja uurimine on silmanähtav. Meie jätame selle teostada õpilastele.



Joon. 79.

Ülesanne 9. Antud kolmnurga ABC sisse ehitada kolmnurk, mis on sarnane antud kolmnurgaga MNP (joon. 79).

Tõmbame punktist N sirge, mis on paralleelne küljega BC , punktist M küljega AB paralleelse sirge ja punktist P küljega AC paralleelse sirge. Niiviisi on kolmnurga MNP ümber ehitatud kolmnurk kolmnurgaga ABC sarnane. Märkides nüüd küljel $B'C'$ punktist B' pikkuse BC , saame punkti K (kui BC on suurem lõigust $B'C'$, vastasel korral punkt K asub C' ja B' vahel). Punktist K tõmbame sirge paralleelselt küljega $A'C'$ ja pikendame külge $B'A'$ kuni sellega lõikumiseni punktis T . Saame kolmnurga, mis on kongruentne kolmnurgaga ABC ; ta on sarnane kolmnurgaga $A'B'C'$ ja kolmnurgaga ABC , kaks vastavat külge KB' ja CB on omavahel võrdsed konstruktsiooni järgi (kolmnurkade $B'KT$ ja BCA sarnasusest järeldub vastavate külgede võrdelisus, s. o. $\frac{B'K}{BC} =$

$= \frac{B'T}{BA}$, kuid võrdusest $B'K = BC$ jäeldub võrdus $B'T = BA$, samuti

nagu võrdusest $\frac{B'K}{BC} = \frac{KT}{AC}$ jäeldub see, et $KT = AC$).

Et lõpuks kolmnurga $B'KT$ sisse, mis on kongruentne kolmnurgaga ABC , ehitada kolmnurgaga MNP sarnane kolmnurk, tuleb punktist B' läbi punkti P tõmmata lõik kuni lõikumiseni sirgega TK , saame punkti B'' , mis vastab punktile P , punktist B'' tõmbame sirgega PN paralleelse sirge, saame punkti N' , on tarvis veel tõmmata punktist B'' sirgega PM paralleelne sirge. Kolmnurk $B''N'M'$ on otsitav; sarnastest kolmnurkadest $B''M'B'$ ja PMB' jäeldub:

$$\frac{MP}{M'B''} = \frac{B'P}{B'B''},$$

ja sarnastest kolmnurkadest $B'PN$ ja $B'B''N'$ jäeldub:

$$\frac{PN}{B''N'} = \frac{B'P}{B'B''}, \text{ s. o. } \frac{MP}{M'B''} = \frac{PN}{B''N'}.$$

Kolmnurkade $B''N'B'$ ja PNB' sarnasusest jäeldub võrre:

$$\frac{NB'}{B'N'} = \frac{B'P}{B'B''},$$

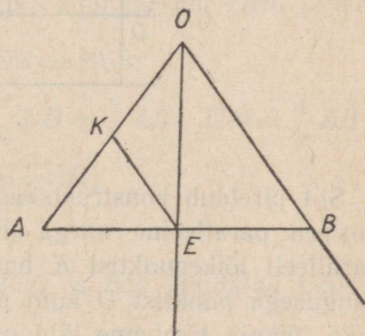
kolmnurkade $B'MP$ ja $B'MB''$ sarnasusest jäeldub võrre:

$$\frac{B'M}{B'M'} = \frac{B'P}{B'B''}, \text{ s. o. } \frac{NB'}{B'N'} = \frac{B'M}{B'M'},$$

siit selgub, et sirged MN ja $M'N'$ on paralleelsed, mida oligi tarvis tõestada (kolmnurga ABC sisse on ehitatud kolmnurgaga MNP sarnane kolmnurk).

Ülesanne 10. Kolm kiirt väljuvad punktist O (joon. 80). Tõmmata lõikaja nii; et selle lõikaja kiirte vahelised lõigud on võrdsed.

Oletame, et ülesanne on lahendatud. Punktist E tõmbame küljega OB paralleelse sirge. Kolmnurkade AKE ja AOB sarnasusest jäeldub võrre:



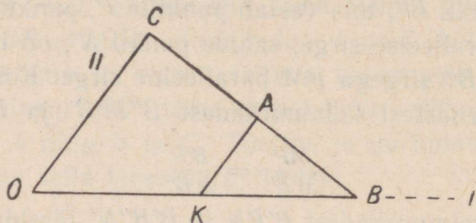
Joon. 80.

$$\frac{AK}{KO} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{1}.$$

Konstrueerimiseks võtame ühel küljel vabalt valitud lõigu (OA), jaotame ta pooleks (K) ja jaotuspunkti (K) tõmbame sirgega OB

paralleelse sirge. Selle sirge ja keskmise kiire lõikepunkti (E) ühendame punktiga A . Otsitav lõikaja läbib punkte A ja E . Tõestuse soovitame teha õpilasel endal.

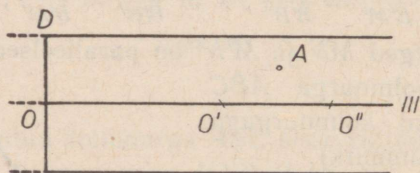
Ülesanne 11. On antud nurk (joon. 81) ja punkt A selle nurga sees; läbi punkti A tõmmata lõikaja nii, et punkt A poolitab nurga haarade vahelise lõikaja lõigu.



Joon. 81.

Oletame, et ülesanne on lahendatud ja CB on otsitav sirge (s. o. otsitav sirge läbib punktid C ja B). Antud punktist A tõmbame haaraga OC paralleelse sirge. Kolmnurkade OCB ja KAB sarnasusest järeldame, et

$$\frac{CA}{AB} = \frac{KO}{KB}, \quad OK = KB.$$



Joon. 82.

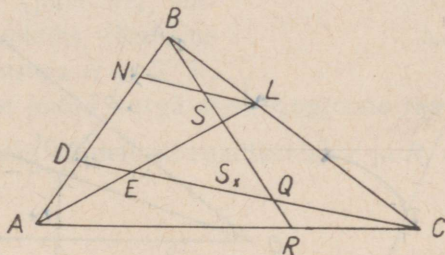
Siit järeldub konstruktsioon. Antud punktist A tõmbame sirge, mis on paralleelne nurga ühe haaraga, olgu haaraga II . Selle paralleeli lõikepunktist K haaral I võtame kauguse, mis võrdub kaugusega punktist O kuni punkti K . Saame punkti B ja otsitava lõikaja tõmbame läbi punktide A ja B . Tõestamise jätame õpilasele teha.

Ülesanne 12. On antud kaks paralleelset sirget ja punkt A nende vahel (joon. 82). Tõmmata ringjoon, mis puudutab mõlemad sirgeid ja läbib punkti A .

Eemaldame esiteks eelduse, et otsitav ringjoon peab läbima punkti A . Kaht antud paralleelset sirget puudutavate ringjoonte

keskpunktide geomeetiline koht on antud sirgetega paralleelne sirge, mis poolitab antud paralleelide vahelise ristlõigu. Edasi, punktist A raadiusega OD tõmbame sirget III lõikava kaare. Saame kaks lõikepunkti O' ja O'' . Lugejale jätame tõestada, et need kaks punkti on otsitavate ringjoonte keskpunktid; niiviisi saame kaks lahendust.

Ülesanne 13. On antud kolmnurk ABC , mille iga külg on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja kolmandike otspunktid on ühendatud, nagu näidatud joonisel 83. Arvutada niiviisi saadud kolmnurga pindala S_x ja kogu kolmnurga pindala S suhe.



Joon. 83.

Punktist L tõmbame sirge (LN) paralleelselt sirgega CD ; vaatleme kolmnurki NBL ja DBC ; $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$. Kolmnurkade ANL ja ADE sarnasusest saame võrde $\frac{AD}{AN} = \frac{AE}{AL}$, kuid kolmnurkade DBC ja NBL sarnasusest järeldub, et $\frac{NB}{DN} = \frac{1}{2}$; $DN = 2NB$;

$$AD = \frac{1}{3} AB; \quad BD = 3NB = \frac{2}{3} AB; \quad NB = \frac{2}{9} AB; \quad DN = \frac{4}{9} AB;$$

$$AN = AD + DN = \frac{1}{3} AB + \frac{4}{9} AB = \frac{7}{9} AB;$$

$$\frac{AD}{AN} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3}{7} = \frac{AE}{AL}.$$

Olgu nüüd kolmnurkade ADE , RQC ja BSL pindalad tähistatud vastavalt S_1 , S_2 ja S_3 .

Et kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu võrdsete nurkade lähiskülgede korrutised, siis $\frac{\text{pindala } ADC}{S} = \frac{1}{3}$ ja ka pindala $ALB =$ pindala $BRC = \frac{1}{3} S$; et kolmnurkade ADC , BRC ja ALB pindalade summa on S , järelikult

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_x;$$

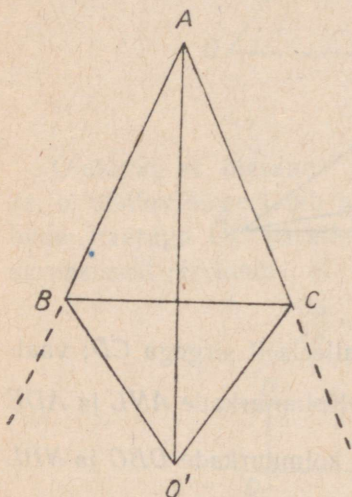
$$\frac{S_1}{\text{pindala } ABL} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7};$$

$$S_1 = \frac{1}{7} \text{ pindala } ABL = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} S = \frac{1}{21} S, \text{ samuti}$$

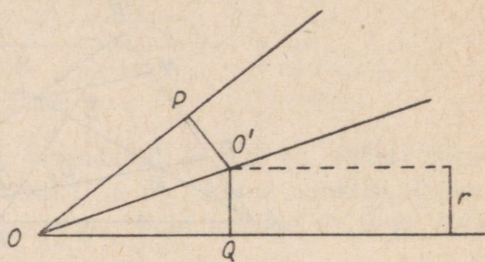
$$S_2 = \frac{1}{21} S \text{ ja } S_3 = \frac{1}{21} S \text{ ja } S_1 + S_2 + S_3 = S_x = \frac{3}{21} S = \frac{1}{7} S, \quad \frac{S_x}{S} = \frac{1}{7}.$$

Ülesanne 14. Tõestada, et igas kolmnurgas (joon. 84) kuuest nurgapoolitajast iga kolm (kaks välist ja üks seesmine) lõikuvad ühes punktis.

Pikendades küljed AB ja AC , tõmbame välisnurkade C ja B



Joon. 84.



Joon. 85.

nurgapoolitajad. Iga punkt sirgel CO' on võrdseil kaugustel külgedest AC ja BC , iga punkt sirgel $O'B$ on võrdseil kaugustel külgedest AB ja BC , järelikult O' on võrdseil kaugustel kolmest kül-

jest BC , AB ja AC , s. o. O' on külge BC ja külgede ja AB ning AC pikendust puudutava ringjoone keskpunkt. See ringjoon, olles sisse joonestatud nurka A , omab keskpunkti, mis asetseb nurga A poolitajal, s. o. O' asub nurga A poolitajal, mida oligi tarvis tõestada.

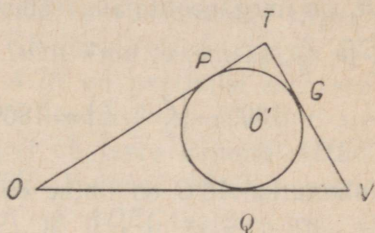
Ülesanne 15. Ehitada kolmnurk tipunurga, aluse a ja siseringjoone raadiuse r järgi.

Võtame antud nurga ja joonestame sinna sisse ringjoone antud raadiusega r . See tehakse selliselt (joon. 85). Tõmmatakse nurgapoolitaja, siis paigutatakse haara ristsirgele lõik, mis on võrdne raadiusega r , ja selle lõigu otspunktist (lugedes vastavalt nurga haaralt) tõmmatakse sellele haarale paralleelne sirge kuni lõikumiseni nurgapoolitajaga. Saadakse punkt O' — otsitava ringjoone

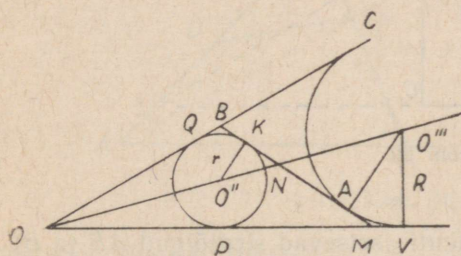
keskpunkt. Lõigu $OP = OQ$ loeme antuks, sest teda saab üles-
ande andmete järgi alati ehitada.

Oletame, et ülesanne on lahendatud (joon. 86). Siis summa $2OP + 2GT + 2GV$ on kolmnur-
ga perimeeter, s. o. perimeeter on $2OP + 2a$. Antud nurga haaradel
võtame tipust O lõigud $OP +$
 $+ a = OQ + a$ (OP on antud);
võetud lõikude otstest tõmbame
ristlõigud haaradele. Need lõiku-
vad punktis O''' (joon. 87), võt-
tes selle keskpunktiks, tõmbame
ringjoone raadiusega $R = O'''V$.

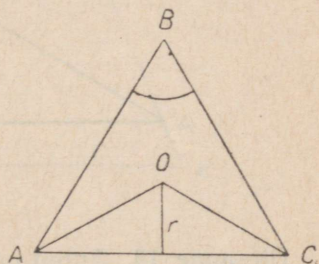
Seejärel ehitame antud nurga sisse ringjoone raadiusega r . Jaota-
des $O''O'''$ osadeks võrdeliselt raadiustega r ja R , nii et $\frac{O''N}{NO'''} = \frac{r}{R}$;



Joon. 86.



Joon. 87.



Joon. 88.

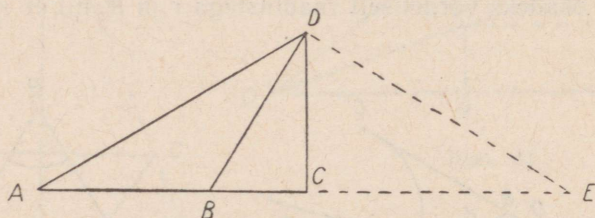
läbi punkti N tõmbame puutuja ringjoonele (r), ta on ka puutujaks
ringjoonele (R). Täisnurksed kolmnurgad $O''KN$ ja NAO''' on sarna-
sed, järelikult $\frac{O''K}{O'''A} = \frac{O''N}{NO'''} = \frac{r}{R}$ ja et $O''K = r$, $O'''A = R$, siis tõm-
matud puutuja ringjoonele (r) on risti ringjoone (R) raadiusega
puutepunktis A . Kolmnurga (joon. 87) ümbermõõt on $2OP + 2a$
(sest tõmmatud sirge on puutujaks mõlemale ringjoonele. Edasi,
nurga BOM haarade vahel tõmmatud sirge lõik on a . Tõepoolest:
 $OB + BM + OM = 2(a + OP)$; kuid teisest küljest, et BM on
puutujaks ka ringjoonele (R), saame, et sama perimeeter võrdub
 $2OP + 2BM$, sest et BM on puutujaks ka ringjoonele (r), selle-
pärast et see perimeeter on $OP + OQ + PM + MK + KB + BQ =$
 $= 2OP + 2MK + 2BK = 2OP + 2BM$, selle tõttu, et $PM = MK$ ja

$QB = BK$, kui ühest punktist ringjoonele (r) tõmmatud puutujad. Siit $BM = a$ ja kolmnurk OMB on otsitav.

Teine lahendus. Oletame, et ülesanne on lahendatud (joon. 88). Olgu O siseringjoone keskpunkt ja raadius r . AO ja OC on nurgapoolitajad. Tähistades nurgad OAC ja OCA vastavalt $\frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\gamma}{2}$, saame, et nurk AOC võrdub vahega

$$180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Kolmnurka AOC on lihtne ehitada aluse a , tipunurga $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ja kõrguse r järgi. Edasi, tipust O kui keskpunktist, raadiusega r , joonestame ringjoone ja punktidest (tippudest) A ja C tõmbame sellele puutujad. Ülesanne on alati lahendatav.



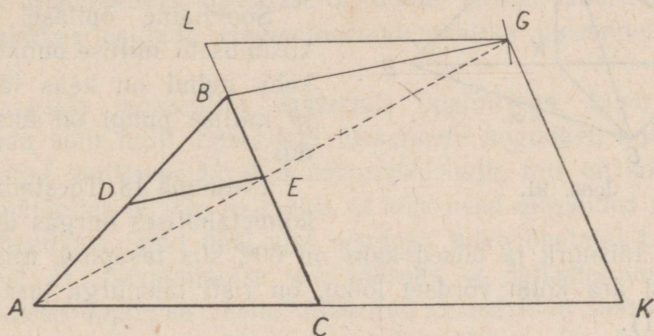
Joon. 89.

Ülesanne 16. Antud on otsakuti asetsevad sirglõigud AB ja BC (joon. 89). Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, kust need lõigud on näha võrdsetes nurkades.

BD peab olema kolmnurga ADC nurgapoolitajaks. Jaotame AC väliselt vahekorras $\frac{AB}{BC}$. Ühendame E ja D ; DE on välisnurga poolitaja ja DE on risti sirgega BD . Siit järeldub konstruktsioon: leiame punktiga B harmoonilise punkti E (s. o. punkti, mis jaotab AC väliselt samas vahekorras, nagu B jaotab AC seesmiselt). Poolitame BE ja, saadud punkti keskpunktiks võttes, joonestame ringjoone. Kõik punktid D asetsevad sellel ringjoonel — see ringjoon ongi otsitav punktide geomeetriline koht. Tõepoolest, kui D asetseb sellel ringjoonel, siis nurk EDB on täisnurk kui diameetritele toetuv piirdenurk. Tähendab, DE ja BD on teineteisega risti; E , B , C ja A on harmoonilised punktid, DE on välisnurga poolitaja, BD on sisenurga poolitaja.

Ülesanne 17. Kolmnurga ABC nurgas (joon. 90) tõmmata lõik DE nii, et lõigud AD , DE , EC on omavahel võrdsed.

Olgu lõik DE tõmmatud nii, et lõigud AD , DE , EC on omavahel võrdsed. Ülesanne viib meid kujundi $ADEC$ konstrueerimisele. Punktist B tõmbame paralleeli sirgele DE kuni lõikumiseni sirgega AE punktis G , punktist G tõmbame GK paralleelselt sirgega CE . Kolmnurgad ADE ja ABG , AEC ja AGK on paariviisi sarnased. Me näeme, et ehitades kujundi $ABGK$, leiame kohe punkti E sirgete BC ja AG lõikepunktina, seejärel ka terve kujundi $ADEC$, tõmmates ED paralleelselt sirgega BG . Kujundi $ABGK$ konstrueerimiseks märkame kujundite $ABGK$ ja $ADEC$ sarnasusest, et $AB = BG = GK$, sest et $AB : BG : GK = AD : DE : EC$. Selle tõttu



Joon. 90.

teostame kujundi $ABGK$ konstrueerimise järgmiselt. Et G asetseb punktist B antud kaugusel AB , siis tõmbame punktist B , kui keskpunkti, kaare raadiusega AB ; edasi, võtame CB -l (punktist C punkti B poole) lõigu pikkusega AB (joonisel AB on suurem kui CB ja seepärast saame selle operatsiooni tagajärjena punkti L väljaspool lõiku CB); punktist L tõmbame sirgega AC paralleelse sirge kuni lõikumiseni tõmmatud kaarega — saame punkti G , millest tõmbame sirgega BC paralleelse sirge kuni tema lõikumiseni külje AC pikendusega punktis K . Küljed AB , BG , GK on omavahel võrdsed konstruktsiooni järgi. Ühendame nüüd punktid A ja G . Külgede BC ja AG lõikepunkti tähistame tähega E ja punktist E tõmbame paralleeli küljega BG ; punktis D lõikub see paralleel küljega AB . Lõik DE ongi otsitav. Tõepoolest, kolmnurkade ADE ja ABG , AEC ja AGK sarnasusest (nad on paariviisi sarnased vastavate külgede paralleelsuse tõttu) järeldub võrre $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BG} =$

$= 1$, järelikult $AD = DE$ ja $\frac{EC}{AE} = \frac{GK}{AG}$, kuid kolmnurkade ADE ja ABG sarnasusest järeldub ju võrre $\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BG}$, s. o. $\frac{EC}{GK} = \frac{DE}{BG}$, ja selle tõttu, et lõigud BG ja GK on võrdsed, on ka lõigud EC ja DE omavahel võrdsed, mida oligi tarvis tõestada.

Uurimiseks täheldame, et keskpunktist B tõmmatud kaar raadiusega AB lõikub külje CB pikendusega punktist B kaugusel AB . Seega siis, kui L asetseb punktist B kaugusel, mis on suurem kui

AB , puudub ülesandel lahendus, sest kiir, mis tuleb punktist L paralleelselt sirgega AC , jääb ringjoonest väljapoole.

Soovitame õpilasel vastata küsimusele, millise punkti L asukoha puhul on kaks lahendust ja millise puhul on üks lahendus.

Ülesanne 18. Tõestada, et kui

kolmetahulises nurgas üks tasa-

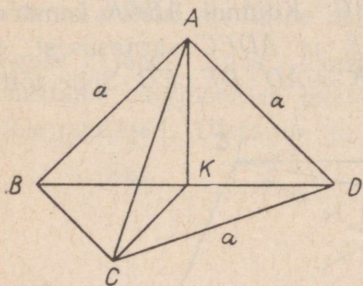
nurk on täisnurk ja teised kaks on 60° , siis tasapind, mis lõikab servadest ära kolm võrdset lõiku, on risti täisnurga tasapinnaga (joon. 91).

Lõigaku tasapind BCD kolmetahulise nurga servadest ära kolm võrdset lõiku $AB = AC = AD = a$, nurk BAD on täisnurk, nurgad BAC ja CAD on 60° . Et kolmnurgad ABC ja ADC on eelduse kohaselt võrdhaarsed, nurgaga 60° , siis on nad võrdkülgsed. Täisnurkne kolmnurk BAD aga on võrdhaarne. Lastes võrdhaarses kolmnurgas BCD tipust C ristsirge alusele (K), kolmnurgas BAD tipust A ristsirge alusele, läheb see punkti K , s. o. külje BD keskpunkti; arvutame KC ja KA pikkused. Et

$$BD^2 = a^2 + a^2, \quad BD = a\sqrt{2}, \quad \text{siis}$$

$$\frac{BD}{2} = KD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ ja } AK^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}, \quad AK = a\sqrt{\frac{1}{2}} = CK,$$

kolmnurgas AKC on: $AC = a$, $CK = AK = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, s. o. nende külgede pikkuste vahel kehtib seos $AC^2 = CK^2 + AK^2$, mis ütleb, et kolmnurk AKC on täisnurkne, täisnurk on tipu K juures, s. o. tasapinnad BCD ja BAD on teineteisega risti, mida oligi tarvis tõestada.



Joon. 91.

III. HARJUTUSI ELEMENTAARMATEMAATIKA ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS.

Sissejuhatus.

Igale matemaatika õpetajale on teada, millist tähelepanu tuleb koolipraktikas osutada elementaarmatemaatika ülesannete lahendamisele.

Üheaegselt teoreetilise materjali õppimisega tuleb õpilasel lahendada suur hulk ülesandeid ülesannete kogudest, milledeks on ette nähtud kindlaksmääratud harjutuste hulk, mis on kohustuslik igale kooliõpilasele. On loomulik, et kõik need ülesanded peab õpilane lahendama, kuid ühel ajal nendega tuleb õpetajal hoolitseda selle eest, et ettevalmistuse tase tõuseks, et õpilastel tekiks huvi matemaatika õppimise vastu. Mainitud eesmärkide saavutamiseks aitab kaasa raskemate ülesannete lahendamine. On loomulik, et õpetaja-kaugõppija oskab teostada praktikas kõike seda ainult sel juhul, kui tal on küllaldane ettevalmistus ülesannete lahendamiseks ja tarvilikud käsiraamatud. Viimaste aastate jooksul on välja antud palju mitmesuguseid ülesannete kogusid ja käsiraamatuid, kuid kõik need on välja antud väikeses tiraažis ning pühendatud elementaarmatemaatika eriosadele. Käesolev „Harjutuste kogu ülesannete lahendamiseks elementaarmatemaatikas” on ette nähtud mainitud lünga täitmiseks. Selles kogus antakse harjutusi algebra, geomeetria ja trigonomeetria kohta, mille poolest ta põhiliselt erineb kõigist varem väljaantud ülesannete kogudest.

Selle kogu koostamisel on kasutatud suur hulk ülesannete kogusid ja õpikuid.

Esmajärjekorras on esile tõstetud see materjal, mis ei ole küllaldaselt esitatud kooli ülesannete kogudes (tõestamisülesanded, konstruktsioonülesanded jne.) ja milliseid õpetaja võib ära kasutada oma praktilises töös.

Ülesannete lahendamisele käesolevast ülesannete kogust tuleb

asuda ainult sel juhul, kui teoreetiline materjal on hästi õpitud ja on lahendatud küllaldane hulk keskmise raskusega ülesandeid antud osas. Igas osas tuuakse mõned ülesanded üksikasjalise lahendusega, mis annavad võimaluse tutvuda nende meetoditega, mida kasutatakse kindlat tüüpi ülesande lahendamisel.

Soovitav on ülesandeid lahendada selles järjekorras, nagu nad on käesolevas kogus. Enne kui asuda konstruktsioonülesannete lahendamisele, tuleb tähelepanelikult läbi töötada kõik seda tüüpi ülesanded, mis on aruteldud Kisseljovi geomeetria õpikus. Erilist tähelepanu tuleb pöörata harjutustele, mis on seotud geomeetriliste kohtade leidmisega.

Selles kogus ei ole ülesandeid mõnede osade kohta, sellepärast soovitame kasutada järgmisi ülesannete kogusid:

1. П. Обер и Г. Папелье, Упражнения по элементарной алгебре.
2. Е. Пржевальский, Сборник алгебраических задач.
3. В. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии.
4. В. Кречмар, Задачник по алгебре.

ALGEBRA.

§ 1. Tehted ratsionaalsete ja irratsionaalsete algebraliste avaldistega.

Algebra kursusest on teada, et kolmliiget $ax^2 + bx + c$ saab esitada algtegurite korrutisena, kui on teada selle kolmliikme nullkohad x_1 ja x_2 . Hulkliikme lahutamisel algtegiureiks on mõnikord kasulik esitada hulkliige teise astme kolmliikmena mõne avaldise suhtes, leida selle kolmliikme nullkohad ja lõpuks teostada tegureiks lahutamine. Selgitame seda tegureiks lahutamise viisi rea näidetega.

Nr. 1. Lahutada algtegiureiks:

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12.$$

Lahendus. Võtame tarvitusele tähistuse $z = x^2 + x$; siis antud avaldis võrdub:

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = z^2 + 4z - 12.$$

Viimase kolmliikme nullkohad on -6 ja 2 ja seepärast saab teda esitada korrutisena $(z - 2)(z + 6)$. Pöördudes tagasi endise tähistuse juurde, saame:

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = (z - 2)(z + 6) = \\ = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 6) = (x^2 + x + 6)(x - 1)(x + 2),$$

sest

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Nr. 2. Lahutada algteguvõrrand:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12.$$

Lahendus. Selleks et selle ülesande lahendamiseks taandada ülesande nr. 1, esitame iga kolmeliikme kaksliikmena ja saadud kaksliikmed korrutame. Saame:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = [(x^2 + x) + 1][(x^2 + x) + 2] - 12 = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 2(x^2 + x) + 2 - 12 = (x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 10.$$

Nüüd võtame kasutamisele tähistuse $x^2 + x = z$; antud avaldis võrdub

$$z^2 + 3z - 10 = (z + 5)(z - 2) = (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2) = \\ = (x^2 + x + 5)(x + 2)(x - 1).$$

Nr. 3. Lahutada algteguvõrrand:

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2.$$

Lahendus. Olgu $x^2 + 4x + 8 = z$; siis saame:

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = z^2 + 3xz + 2x^2.$$

Viimane kolmeliikme omab nullkohad $z_1 = -2x$; $z_2 = -x$ ja seepärast

$$z^2 + 3xz + 2x^2 = (z + 2x)(z + x).$$

Asetades siia z väärtuse saame:

$$(x^2 + 4x + 8 + 2x)(x^2 + 4x + 8 + x) = \\ = (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 5x + 8) = (x + 2)(x + 4)(x^2 + 5x + 8).$$

Nr. 4. Lahutada algteguvõrrand:

$$a) (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$$

$$\text{Vastus: } (x + 4)(x - 3)(x + 2)(x - 1).$$

$$b) (x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2.$$

$$\text{Vastus: } (x + 2)^2(x^2 + 6x + 4).$$

$$c) 2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2.$$

$$\text{Vastus: } 9(x+1)^2(x^2+4x+1).$$

Nr. 5. Lahutada algteguks:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24.$$

Lahendus. Selleks, et antud juhtu taandada eelmistele, korrutame esimese teguri neljandaga ja teise kolmandaga. Saame:

$$\begin{aligned} & [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 24 = \\ & = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = \\ & = [(x^2 + 5x) + 4][(x^2 + 5x) + 6] - 24 = \\ & = (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 - 24 = \\ & = (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) = x(x+5)(x^2 + 5x + 10). \end{aligned}$$

Nr. 6. Lahutada algteguks:

$$a) (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15.$$

$$\text{Vastus: } (x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$$

$$b) 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2.$$

$$\text{Vastus: } (x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120).$$

Bezout' teoreemi järeltuse põhjal on teada, et hulkliige

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

jagub jäägita binoomiga $x - x_1$, kui arv x_1 on funktsiooni $f(x)$ nullkohaks. Kui on teada kõik funktsiooni nullkohad $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, võib funktsiooni esitada järgmisel kujul:

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Siit järeldub, et kui hulkliikme nullkohad saab leida proovimise teel, siis on kerge hulkliiget algteguks lahutada. Arutleme mõningaid näiteid.

Nr. 7. Lahutada algteguks:

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36.$$

Lahendus. Kui antud funktsioonil on täisarvulisi nullkohti, tuleb neid nullkohti otsida vabaliikme jagajate hulgast. Igaüks neist jagajaist tuleb võtta proovimisele, et teada saada, kas ta on funktsiooni nullkoht. Vabaliikme jagajad on:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 18; \pm 36.$$

Pärast kontrolli näeme, et nullkohaks on arv -2 . Siit järeldub, et hulkliige jagub binoomiga $x + 2$. Saame:

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = (x + 2)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18).$$

Et funktsioonil võib olla kordseid nullkohti, siis on tarvilik kontrollida, kas ei ole arv -2 nullkohaks veel tegurile $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. Kontrolli teel teeme kindlaks, et -2 on teise teguri nullkohaks ja järelikult saame:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 &= (x + 2)(x + 2)(x^2 - 6x + 9) = \\ &= (x + 2)^2(x - 3)^2. \end{aligned}$$

Nr. 8. Lahutada algtegureiks:

$$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15.$$

Lahendus. Vabaliikme jagajad on:

$$\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15.$$

Pärast kontrolli näeme, et nullkohtadeks on arvud: $1; -1; 3; -5$. Siit järeldub:

$$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 5).$$

Nr. 9. Lahutada algtegureiks:

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$.

Vastus: $(x - 1)(x + 3)(x + 7)$.

b) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$.

Vastus: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$.

c) $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$.

Vastus: $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(2x - 1)$.

d) $9x^3 - 15x^2 - 32x - 12$.

Vastus: $(3x + 2)^2(x - 3)$.

Nr. 10. Lahutada lühimal teel algtegureiks avaldis:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

Lahendus. Kui antud hulkliiget vaadelda kui x -i funktsiooni, siis $x = z$ ja $x = y$ korral antud avaldis saab nulliks ja seepärast $(x - z)$ ja $(x - y)$ on tema tegurid. Kui aga antud hulkliiget vaatleme kui z funktsiooni, siis $z = y$ korral antud avaldis muutub nulliks ja järelikult $z - y$ on tema tegur. Niisiis selgus, et hulkliikme tegurid on: $(x - z)$, $(x - y)$, $(z - y)$. Et antud hulkliige

on 3-ndat järku hulkliige, ei ole rohkem tegureid, mis sõltuksid muutujaist x , y ja z . Niisiis:

$$\begin{aligned} x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = \\ = c(x - y)(x - z)(z - y), \end{aligned}$$

kus c on jääv kordaja. Nüüd on tarvis määrata c . Parem ja vasak pool on samaselt võrdsed, järelikult peavad olema võrdsed sarnaste liikmete koefitsiendid. Võrreldes koefitsiente xz^2 juures paremal ja vasakul poolel, saame: $-1 = -c$; $c = 1$ (oleks võinud võrrelda koefitsiente ükskõik millise kahe sarnase liikme ees). Siit hulkliige võrdub korrutisega:

$$(x - y)(x - z)(z - y).$$

Nr. 11. Lahutada lühimal teel algtegureiks avaldis:

$$a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3.$$

Lahendus. Kui antud hulkliiget vaadelda a funktsioonina, s. o.

$$f(a) = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3,$$

siis $a = c$ ja $a = b$ korral saame:

$$f(c) = c(b - c)^3 + b(c - c)^3 + c(c - b)^3 = 0;$$

$$f(b) = b(b - c)^3 + b(c - b)^3 + c(b - b)^3 = 0;$$

ning seepärast $a - c$ ja $a - b$ on selle hulkliikme tegurid. Kui aga hulkliiget lugeda b funktsiooniks, s. o.

$$f(b) = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3,$$

siis $b = c$ korral saame:

$$f(c) = a(c - c)^3 + c(c - a)^3 + c(a - c)^3 = 0,$$

järelikult $b - c$ on hulkliikme tegur. Niisiis leidsime hulkliikme kolm tegurit $(a - c)$, $(a - b)$ ja $(b - c)$. Et antud hulkliige on neljandat järku, aga kolme leitud teguri korrutis on kolmandat järku, peab hulkliige sisaldama veel a , b ja c suhtes esimest järku teguri.

Niisiis

$$\begin{aligned} a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = \\ = (a - b)(a - c)(b - c)(Aa + Bb + Cc + D), \end{aligned}$$

kus A , B , C , D on koefitsiendid, mis tuleb arvutada. Viimase võrduse parem ja vasak pool on samaselt võrdsed ja seepärast peavad olema võrdsed koefitsiendid sarnaste liikmete puhul. Võrreldes

a^3b, b^3c, c^3a, bc^2 koefitsiente, saame: $A = -1, B = -1; C = -1; D = 0$.

Niisiis saame:

$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = \\ = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Nr. 12. Lahutada lühimal teel algtegreiks järgmised avaldised:

1) $(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3$.

Vastus: $3(y-z)(z-x)(x-y)$.

2) $(b-c)(a-b+c)(a+b-c) + (c-a)(a+b-c)(-a+b+c) + (a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$.

Vastus: $-4(b-c)(c-a)(a-b)$.

3) $(b-c)(b+c)^2 + (c-a)(c+a)^2 + (a-b)(a+b)^2$.

Vastus: $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

4) $x(y+z)(y^2-z^2) + y(z+x)(z^2-x^2) + z(x+y)(x^2-y^2)$.

Vastus: $(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

5) $(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3$.

Vastus: $-2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

Nr. 13. Lahutada tegureiks:

$$(y+z)(z+x)(x+y) + xyz.$$

Lahendus. Selleks et esitada antud avaldis korrutisena, peab esiteks teostama korrutamise, seejärel rühmitada liikmed kolme-kaupa nii, et pärast ühise teguri sulgude ette toomist jääks sulgudesse üks ja seesama avaldis. Saame:

$$(y+z)(z+x)(x+y) + xyz = \\ = yzx + y^2z + yx^2 + y^2x + z^2x + z^2y + zx^2 + zxy + xyz = \\ = (xyz + yx^2 + zx^2) + (xyz + y^2z + y^2x) + (z^2x + z^2y + xyz) = \\ = x(yz + xy + xz) + y(yz + xy + xz) + z(yz + xy + xz) = \\ = (yz + xy + xz)(x + y + z).$$

Nr. 14. Lahutada tegureiks:

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c).$$

Lahendus. Siin tuleb avada ainult viimased sulud, seejärel saadud kuus liiget rühmitame kahekaupa. Saame:

$$\begin{aligned}
 & a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + a^2bc + ab^2c + abc^2 = \\
 & = [a^3(b+c) + a^2bc] + [b^3(c+a) + ab^2c] + \\
 & + [c^3(a+b) + abc^2] = a^2(ab+ac+bc) + b^2(bc+ab+ \\
 & + ac) + c^2(ac+bc+ab) = (ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2).
 \end{aligned}$$

Nr. 15. Lahutada tegureiks:

$$1) \quad xyz(x^3 + y^3 + z^3) - y^3z^3 - z^3x^3 - x^3y^3.$$

$$\text{Vastus: } (x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy).$$

$$2) \quad abcx^3 - (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)x^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2)x - a^2b^2c^2.$$

$$\text{Vastus: } (ax - bc)(bx - ac)(cx - ab).$$

Nr. 16. Lihtsustada murd:

$$\frac{(a+b+c)(cb-a^2) + (bc+ac+ab)(a-b) + (bc+ac+ab)(a-c)}{cb-a^2+b(a-b)+c(a-c)}.$$

Lahendus. Lahutame lugeja tegureiks:

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)(cb-a^2) + (bc+ca+ab)(a-b) + \\
 & + (bc+ca+ab)(a-c) = (a+b+c)cb - a^2(a+ \\
 & + b+c) + a(bc+ca+ab) - b(bc+ca+ab) + \\
 & + a(bc+ca+ab) - c(bc+ca+ab) =
 \end{aligned}$$

(rühmitame 1., 4. ja 6. liikme ühtedesse sulgudesse ning 2., 3. ja 5. liikme teistesse sulgudesse; teisest sulgavaldisest toome ühise teguri a sulgude ette)

$$\begin{aligned}
 & = [abc + b^2c + bc^2 - b^2c - abc - ab^2 - bc^2 - ac^2 - abc] + \\
 & + [-a^2 - ab - ac + bc + ac + ab + bc + ac + ab] = \\
 & = -a(bc + b^2 + c^2) + a[-a^2 + 2bc + ac + ab] = \\
 & = a[-bc - b^2 - c^2 - a^2 + 2bc + ac + ab] = \\
 & = a(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

Teostades korrumatamise nimetajas, saame:

$$\begin{aligned}
 cb - a^2 + b(a-b) + c(a-c) & = cb - a^2 + ab - b^2 + ac - c^2 = \\
 & = ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2.
 \end{aligned}$$

Nüüd võib murru üles kirjutada järgmiselt:

$$\frac{a(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2)}{ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2} = a.$$

Nr. 17. Lihtsustada murd:

$$\frac{x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)}{(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2}.$$

Lahendus. Lahutame lugeja tegureiks:

$$\begin{aligned}
 & x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) = \\
 & = x^4(y-z) + y^4z - y^4x + z^4x - z^4y = \\
 & = x^4(y-z) + (y^4z - z^4y) - (y^4x - z^4x) = \\
 & = x^4(y-z) + yz(y^3 - z^3) - x(y^4 - z^4) = \\
 & = x^4(y-z) + yz(y-z)(y^2 + yz + z^2) - \\
 & \quad - x(y-z)(y+z)(y^2 + z^2) = \\
 & = (y-z)(x^4 + y^3z + y^2z^2 + yz^3 - xy^3 - xyz^2 - xy^2z - xz^3) = \\
 & = (y-z)[(x^4 - xy^3) - (xy^2z - y^3z) - (xyz^2 - y^2z^2) - \\
 & \quad - (xz^3 - yz^3)] = (y-z)[x(x-y)(x^2 + xy + y^2) - \\
 & \quad - y^2z(x-y) - yz^2(x-y) - z^3(x-y)] = \\
 & = (x-y)(y-z)[x^3 + x^2y + xy^2 - y^2z - yz^2 - z^3] = \\
 & = (x-y)(y-z)[(x^3 - z^3) + (x^2y - yz^2) + (xy^2 - y^2z)] = \\
 & = (x-y)(y-z)[(x-z)(x^2 + xz + z^2) + y(x - \\
 & \quad - z)(x+z) + y^2(x-z)] = (x-y)(y-z)(x - \\
 & \quad - z)(x^2 + xz + z^2 + xy + yz + y^2).
 \end{aligned}$$

Niisiis lugeja võrdub:

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xz + xy + yz).$$

Teisendame nimetaja:

$$\begin{aligned}
 & (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 = \\
 & = y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2xz + x^2 + x^2 + 2xy + y^2 = \\
 & = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 2xz + 2xy = \\
 & = 2(x^2 + y^2 + z^2 + yz + xz + xy).
 \end{aligned}$$

Nüüd võib murru esitada järgmiselt:

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xz + xy + yz)}{2(x^2 + y^2 + z^2 + yz + xz + xy)} = \frac{1}{2}(x-y)(y-z)(x-z).$$

Nr. 18. Lihtsustada murd:

$$\frac{x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) - z^3(x^2 - y^2)}{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{yz + zx + xy}{x + y + z}.$$

Nr. 19. Lihtsustada murd:

$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}.$$

$$\text{Vastus: } (a+b)(a+c)(c+b).$$

Nr. 20. Lihtsustada murd:

$$\frac{m(b^2c^3 - b^3c^2) + m^2(b^3c - bc^3) + m^3(bc^2 - b^2c)}{a(b^2c^3 - b^3c^2) + a^2(b^3c - bc^3) + a^3(bc^2 - b^2c)^2}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{m(m-b)(m-c)}{a(a-b)(a-c)}.$$

Nr. 21. Lihtsustada murd:

$$\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{a-b}{(c-a+b)(c+a-b)}.$$

Nr. 22. Leida:

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}.$$

Lahendus. Teisendame murru lugejat:

$$\begin{aligned} & a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \\ & = \frac{a^2(c-b)}{bc} + \frac{b^2(a-c)}{ac} + \frac{c^2(b-a)}{ab} = \\ & = \frac{a^3c - a^3b + b^3a - b^3c + c^3b - c^3a}{abc} = \frac{(a^3c - c^3a) - (a^3b - c^3b) + (b^3a - b^3c)}{abc} = \\ & = \frac{ac(a-c)(a+c) - b(a-c)(a^2+ac+c^2) + b^3(a-c)}{abc} = \\ & = \frac{(a-c)(a^2c+ac^2-ba^2-abc-bc^2+b^3)}{abc} = \\ & = \frac{(a-c)[(a^2c-abc)+(ac^2-bc^2)-(ba^2-b^3)]}{abc} = \\ & = \frac{(a-c)[ac(a-b)+c^2(a-b)+b(a-b)(a+b)]}{abc} = \\ & = \frac{(a-c)(a-b)(ac+c^2-ab-b^2)}{abc} = \\ & = \frac{(a-c)(a-b)[(ac-ab)+(c^2-b^2)]}{abc} = \frac{(a-c)(a-b)(c-b)(a+b+c)}{abc}. \end{aligned}$$

Teisendame murru nimetajat:

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \\ & = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{abc} = \frac{a^2(c-b) + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a}{abc} = \\ & = \frac{a^2(c-b) + (c^2b - b^2c) - (c^2a - b^2a)}{abc} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2(c-b) + bc(c-b) - a(c-b)(c+b)}{abc} = \\
 &= \frac{(c-b)(a^2 + bc - ac - ab)}{abc} = \frac{(c-b)[(a^2 - ab) - (ac - bc)]}{abc} = \\
 &= \frac{(c-b)[a(a-b) - c(a-b)]}{abc} = \frac{(a-b)(c-b)(a-c)}{abc}.
 \end{aligned}$$

Nüüd võib murru kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\frac{(a-c)(a-b)(c-b)(a+b+c)}{abc}}{\frac{(a-b)(c-b)(a-c)}{abc}} = a + b + c.$$

Nr. 23. Arvutada:

$$\frac{\left(x^n - 1 - \frac{7-x^n}{3+x^n}\right) \cdot \frac{4}{x^{n+2} + 3x^2}}{\frac{6x^{2n} - 24}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \cdot \frac{2x}{3x^n + 6}}$$

Lahendus. Arvutame lugeja:

$$\begin{aligned}
 &\left(x^n - 1 - \frac{7-x^n}{3+x^n}\right) \cdot \frac{4}{x^2(x^n+3)} = \\
 &= \frac{3x^n - 3 + x^{2n} - x^n - 7 + x^n}{3+x^n} \cdot \frac{4}{x^2(x^n+3)} = \frac{4(x^{2n} + 3x^n - 10)}{x^2(3+x^n)^2} = \\
 &= \frac{4(x^n+5)(x^n-2)}{x^2(3+x^n)^2}.
 \end{aligned}$$

Teisendame nimetajat:

$$\frac{6x^{2n} - 24}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \cdot \frac{2x}{3x^n + 6} = \frac{6(x^n-2)(x^n+2) \cdot 2x}{x^3(x^n+3)^2 \cdot 3(x^n+2)} = \frac{4(x^n-2)}{x^2(x^n+3)^2}.$$

Niisiis antud murd võrdub avaldisega:

$$\frac{\frac{4(x^n+5)(x^n-2)}{x^2(3+x^n)^2}}{\frac{4(x^n-2)}{x^2(x^n+3)^2}} = x^n + 5.$$

Nr. 24. Leida:

$$1) \frac{\frac{a+2b}{ab^4} - \frac{2a+b}{a^4b}}{\frac{b^2+c^2}{b^2c^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \frac{a^2+c^2}{a^2c^2}}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}.$$

$$2) \frac{\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+x^2+2x^3}}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{(x^2+1)(2x+1)}{(x^3-1)(2x-1)}.$$

$$3) \frac{\left[1 + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right] \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]}{\left[1 - \frac{c^3}{(a+b)^3}\right] \left[1 + \frac{c}{a+b}\right]}.$$

$$\text{Vastus: } 1.$$

$$4) \frac{\frac{b^2-c^2}{a} + \frac{c^2-a^2}{b} + \frac{a^2-b^2}{c}}{\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}}.$$

$$\text{Vastus: } a+b+c.$$

$$5) a(x+y) + \frac{\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-y} + \frac{x}{(a-x)^2} - \frac{y}{(a-y)^2}}{\frac{1}{(a-y)(a-x)^2} - \frac{1}{(a-x)(a-y)^2}}.$$

$$\text{Vastus: } 2a^2.$$

Nr. 25. Kui

$$xy + yz + zx = 1,$$

siis

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Tõestada.

Lahendus. Võrduse vasakul poolel liidame murrud:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \\ &= \frac{x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} = \\ &= \frac{x - xz^2 - xy^2 + xy^2z^2 + y - yz^2 - yx^2 + yx^2z^2 + z - zy^2 - zx^2 + zx^2y^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}. \end{aligned}$$

Teisendame lugejat nii, et ta sisaldaks tegurit

$$xy + yz + zx:$$

$$\begin{aligned} & x + y + z - x(z^2 + y^2) - y(z^2 + x^2) - z(x^2 + y^2) + \\ & + xyz(yz + xz + xy) = (x + y + z) - x(z^2 + y^2) - \\ & - y(z^2 + x^2) - z(x^2 + y^2) + xyz, \end{aligned}$$

sest viimane tegur on eelduse järgi võrdne ühega. Esimese liikme korrutame avaldisega $(xy + yz + zx)$, s. o. ühega ja avame sulud:

$$\begin{aligned}
 & (x+y+z)(xy+yz+zx) - x(z^2+y^2) - y(z^2+x^2) - \\
 & - z(x^2+y^2) + xyz = x^2y + xyz + zx^2 + xy^2 + y^2z + xyz + \\
 & + xyz + yz^2 + z^2x - x(z^2+y^2) - y(z^2+x^2) - z(x^2+y^2) + \\
 & + xyz = 4xyz + y(x^2+z^2) + z(x^2+y^2) + x(y^2+z^2) - \\
 & - x(z^2+y^2) - y(z^2+x^2) - z(x^2+y^2) = 4xyz.
 \end{aligned}$$

Lugeja on $4xyz$ ja järelikult saame:

$$\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Nr. 26. Näidata:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 - \frac{y-z}{y+z}\right) \left(1 - \frac{z-x}{z+x}\right) = \\
 & = \left(1 + \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 + \frac{y-z}{y+z}\right) \left(1 + \frac{z-x}{z+x}\right).
 \end{aligned}$$

Lahendus. Võrduse vasaku poole igas sulgavaldises teostame lahutamise:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 - \frac{y-z}{y+z}\right) \left(1 - \frac{z-x}{z+x}\right) = \frac{2y}{x+y} \cdot \frac{2z}{y+z} \cdot \frac{2x}{z+x} = \\
 & = \frac{2x}{x+y} \cdot \frac{2y}{y+z} \cdot \frac{2z}{z+x} =
 \end{aligned}$$

(selleks, et iga murdu esitada summana, liidame iga murru lugejale ühe ja sellesama arvu, samuti ka lahutame ühe ja sellesama arvu)

$$\begin{aligned}
 & = \frac{x+y+x-y}{x+y} \cdot \frac{y+z+y-z}{y+z} \cdot \frac{z+x+z-x}{z+x} = \\
 & = \frac{(x+y) + (x-y)}{x+y} \cdot \frac{(y+z) + (y-z)}{y+z} \cdot \frac{(z+x) + (z-x)}{z+x} = \\
 & = \left(1 + \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 + \frac{y-z}{y+z}\right) \left(1 + \frac{z-x}{z+x}\right).
 \end{aligned}$$

Nr. 27. Kui

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

siis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Tõestada.

Nr. 28. Näidata, et

$$\frac{a^2b^2c^2 - a^2b^2 - c^2 + 1}{a^2bc - \frac{c}{b} + b\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)} + 1 = a^2,$$

kui

$$c = a + 2, \quad b = a - 1.$$

Nr. 29. Kui

$$p + q = 1,$$

siis

$$\frac{p}{q^3 - 1} - \frac{q}{p^3 - 1} = \frac{2(q - p)}{p^2 q^2 + 3}.$$

Tõestada.

Nr. 30. Kui

$$2s = a + b + c,$$

siis

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nr. 31. Kui

$$a + b + c + d = 0,$$

siis

$$(a+b)(a+c)(a+d) = (b+c)(b+d)(b+a) = \\ = (c+d)(c+a)(c+b) = (d+a)(d+b)(d+c)$$

ja

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Lahendus. Võrdusest

$$a + b + c + d = 0$$

saame

$$(a+c) = -(b+d)$$

ja

$$(a+d) = -(b+c),$$

ja seepärast

$$(a+b)(a+c)(a+d) = (a+b) \cdot [-(b+d)] \cdot [-(b+c)] = \\ = (b+c)(b+d)(b+a).$$

Samast võrdusest

$$(a+b) = -(c+d)$$

ja

$$(a+d) = -(b+c),$$

ja seepärast

$$(a+b)(a+c)(a+d) = -(c+d) \cdot (a+c) \cdot [-(b+c)] = \\ = (c+d)(c+a)(c+b).$$

Eelduse järgi

$$(a+b) = -(c+d)$$

ja

$$a+c = -(b+d),$$

ja seepärast:

$$(a+b)(a+c)(a+d) = -(c+d) \cdot [-(b+d)](a+d) = \\ = (d+a)(d+b)(d+c).$$

Võttes kuupi mõlemad võrduse

$$(a+b) = -(c+d)$$

pooled, saame:

$$(a+b)^3 = -(c+d)^3;$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 - d^3;$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + (3a^2b + 3ab^2) + (3c^2d + 3cd^2) = 0;$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3ab(a+b) + 3cd(c+d) = 0.$$

Kasutades võrdust $c+d = -(a+b)$, asendame summa viimases liikmes:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3ab(a+b) - 3cd(a+b) = 0;$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(a+b)(ab - cd) = 0.$$

(I)

Teisendame viimast tegurit:

$$ab - cd = ab + ac - ac - cd = a(b+c) - c(a+d) = \\ = a(b+c) + c(b+c) = (a+c)(b+c),$$

sest eelduse järgi

$$a+d = -(b+c).$$

Asendades viimase teguri võrduses (I), saame:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Nr. 32. Kui

$$2s = a + b + c + d,$$

siis

$$4(bc + ad)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 = \\ = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Nr. 33. Leida, millega peab võrduma jääv kordaja k , et hulkliige

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$$

jaguks hulkliikmega

$$x + y + z.$$

Arvutades k , leida jagatis.

L a h e n d u s. Oletame, et esimene hulkliige jagub teisega; siis

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = (x + y + z) \cdot Q(x, y, z), \quad (I)$$

kus $Q(x, y, z)$ on hulkliige, mille saame esimese hulkliikme jagamisel teise hulkliikmega. Võrduses (I) koefitsient k on jääv, kuid x, y ja z võivad olla igasuguse väärtusega, s. o. võrdus (I) on samasus. Kordaja k leidmiseks anname muutujatele x, y ja z niisugused eriväärtused, mille puhul $x + y + z = 0$. Niisuguseid väärtusi võime leida lõpmata palju. Võtame näiteks niisugused väärtused:

$$x = 2; y = -1; z = -1.$$

Asetades need väärtused võrdusse (I), saame:

$$\begin{aligned} 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + k(2)(-1)(-1) &= \\ = (2 - 1 - 1) \cdot Q(2; -1; -1); \\ 6 + 2k &= 0; k = -3. \end{aligned}$$

Niisiis

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

jagub hulkliikmega $x + y + z$. Korraldades hulkliikme liikmed tähe x alanevate astmete järgi, leiame jagatise:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3xyz + y^3 + z^3 \\ \hline x^3 + x^2(y+z) \\ \hline 0 - x^2(y+z) - 3xyz + y^3 + z^3 \\ \hline -x^2(y+z) - x(y+z)^2 \\ \hline 0 + x[(y+z)^2 - 3yz] + y^3 + z^3 \\ \hline + x[(y+z)^2 - 3yz] + [(y+z)^3 - 3yz(y+z)] \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \frac{x + (y+z)}{x^2 - x(y+z) + [(y+z)^2 - 3yz]} \right|$$

Niisiis

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= \\ = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned} \quad (A)$$

Nr. 34. Näidata, et

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\ = \frac{1}{2} (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]. \end{aligned}$$

Näpunäide. Kasutada ülesandes nr. 33 tuletatud võrdust (A).

Nr. 35. Kui

$$a + b + c = 0,$$

siis

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Nr. 36. Kui a , b ja c on üksteisest erinevad reaalarvud, siis

$$bc(a-b)(a-c) + ac(b-a)(b-c) + ab(c-a)(c-b)$$

on positiivne arv.

Näpunäide. Esitada antud avaldis ruutude summana.

Nr. 37. Lihtsustada murd:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}.$$

Näpunäide. Kasutada ülesandes nr. 33 tuletatud võrdust (A).

Nr. 38. Lihtsustada murd:

$$\frac{(bc - a^2) + (ac - b^2) + (ab - c^2)}{a(bc - a^2) + b(ac - b^2) + c(ab - c^2)}.$$

Näpunäide. Kasutada ülesandes nr. 33 tuletatud võrdust (A).

Nr. 39. Lihtsustada murd:

$$\frac{1 + (a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})}.$$

Lahendus. Esitame antud murru kahe murru summana:

$$\frac{1 + (a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})} = \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})} +$$

$$+ \frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})} = (\text{esimese murru lugejat}$$

ja nimetajat korrutame korrutisega $(a - \sqrt{a^2 - 1})(b - \sqrt{b^2 - 1})$, teise murru taandame)

$$= (a - \sqrt{a^2 - 1})(b - \sqrt{b^2 - 1}) + (a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1}) =$$

$$= 2[ab + \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}].$$

Nr. 40. Kui

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0,$$

siis

$$(x + y + z)^3 = 27xyz.$$

Lahendus. Eelduse järgi

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{z}.$$

Viimase võrduse mõlemad pooled tõstame kuupi:

$$x + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y = -z;$$

$$x + y + z + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 0.$$

Summa viimastes sulgudes asendame avaldisega $-\sqrt[3]{z}$.

Saame:

$$x + y + z + 3\sqrt[3]{xy}(-\sqrt[3]{z}) = 0; \quad x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Tõstes võrduse mõlemad pooled kuupi, saame:

$$(x + y + z)^3 = 27xyz.$$

Nr. 41. Lihtsustada murd:

$$\frac{1 - ab + \sqrt{1 + a^2} - a\sqrt{1 + b^2}}{1 - ab + \sqrt{1 + b^2} - b\sqrt{1 + a^2}}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{1 - a + \sqrt{1 + a^2}}{1 - b + \sqrt{1 + b^2}}.$$

Nr. 42. Lihtsustada murd:

$$\frac{n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4} - 2}{n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4} + 2}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{n+1}{n-1} \sqrt{\frac{n-2}{n+2}}.$$

Nr. 43. Lihtsustada murd:

$$\frac{xy - \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2}}}{1 + xy \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2}}}.$$

$$\text{Vastus: } \frac{2xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{2 + x^2 + y^2 - x^2y^2}.$$

Nr. 44. Tõestada järgmine võrdus:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Lahendus: Võrduse vasakus pooles teostame liitmise ja tulemuse tõstame kuupi:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \right)^3 = \\ &= \frac{(1 - \sqrt[3]{2})^3 + 3(1 - \sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{4} + 3(1 - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{16} + 4}{9} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} - 2 + 3\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{8} + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{32} + 4}{9} = \frac{9\sqrt[3]{2} - 9}{9} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Niisiis
$$\left(\frac{\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \right)^3 = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Siit:
$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Nr. 45. Tõestada võrdus:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}).$$

Lahendus. Väljendame võrduse parema poole $\sqrt[3]{4}$ ja $\sqrt[3]{5}$ kaudu ning tõstame ta ruutu. Saame:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5^2}) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{9} (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5^4} + 4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5^2} - 10\sqrt[3]{4}) = \\ &= \frac{1}{9} (-9\sqrt[3]{4} + 9\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Niisiis
$$\left[\frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}) \right]^2 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}.$$

Siit
$$\frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}}.$$

Nr. 46. Tõestada järgmised võrdused:

a)
$$\left(\frac{3 + 2\sqrt[4]{5}}{3 - 2\sqrt[4]{5}} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{5} + 1}{\sqrt[4]{5} - 1}.$$

b)
$$\left(\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}.$$

c)
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{28} - 1).$$

§ 2. Uue tundmatuga võrrandid.

Nr. 1. Lahendada võrrand:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0.$$

Lahendus. Kõik murrud viime ühisele nimetajale $(x-1)(x+3)$ ja vabaneme sellest nimetajast oletades, et $x \neq 1$ ja $x \neq -3$. Saame:

$$(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 4 = 0$$

või

$$3x + 9 = 0, \quad x = -3.$$

Kuid varem märkisime, et x ei saa võrduda arvuga -3 . Siit järeldub, et antud võrrandil ei ole lahendit.

Nr. 2. Lahendada võrrandid:

$$a) \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{2(5x-39)}{3x-24}.$$

Vastus: $x = 12$.

$$b) \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3.$$

Vastus: $x = -\frac{9}{2}$.

$$c) \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}.$$

Vastus: $x = 1$.

Nr. 3. Lahendada võrrand:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{18}{x^2+2x+2} - \frac{18}{x^2+2x+1} = 0.$$

Lahendus. Võtame kasutusele uue tundmatu oletades, et

$$x^2 + 2x + 1 = y.$$

Saame:

$$\frac{1}{y-4} + \frac{18}{y+1} - \frac{18}{y} = 0.$$

Vabaneme nimetajast oletades, et

$$y \neq 4, \quad y \neq -1, \quad y \neq 0.$$

Saame:

$$y^2 - 17y + 72 = 0, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = 9.$$

Siis leiame x väärtused ja saame:

$$x_1 = -4; \quad x_2 = +2; \quad x_{3,4} = -1 \pm 2\sqrt{-2}.$$

Nr. 4. Lahendada võrrand:

$$\frac{2x}{4x^2 + 3x + 8} + \frac{3x}{4x^2 - 6x + 8} = \frac{1}{6}.$$

Lahendus. Oletades, et $x \neq 0$, jagame vasaku poole mõlema murru lugeja ja nimetaja arvuga x :

$$\frac{2}{4x + 3 + \frac{8}{x}} + \frac{3}{4x - 6 + \frac{8}{x}} = \frac{1}{6}.$$

Võtame kasutusele uue tundmatu

$$y = 4x + \frac{8}{x}.$$

Saame võrrandi

$$\frac{2}{y + 3} + \frac{3}{y - 6} = \frac{1}{6}$$

ning lahendame selle. Lahendid: $y_1 = 0$; $y_2 = 33$.

Siis arvutame x väärtused ja saame:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-2}; \quad x_3 = 8; \quad x_4 = \frac{1}{4}.$$

Nr. 5. Lahendada võrrand:

$$(x - 3)(x - 4)(x - 7)(x - 8) = 60.$$

Lahendus. Korrutades esimese sulgavaldisel neljandaga ja teise kolmandaga, saame:

$$(x^2 - 11x + 24)(x^2 - 11x + 28) = 60.$$

Kui võtta

$$y = x^2 - 11x + 24,$$

saame võrrandi:

$$y(y + 4) = 60; \quad y^2 + 4y - 60 = 0; \quad y_1 = -10; \quad y_2 = 6.$$

Siit:

$$1) \quad x^2 - 11x + 24 = -10; \quad x^2 - 11x + 34 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}(11 \pm \sqrt{-15});$$

$$2) \quad x^2 - 11x + 24 = 6; \quad x^2 - 11x + 18 = 0; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 9.$$

Nr. 6. Lahendada võrrandid:

$$a) \quad (2x^2 - 3x + 1)^2 = 22x^2 - 33x + 1.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = -\frac{3}{2}.$$

$$b) (x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a) = c^4.$$

$$\text{Vastus: } x = a \pm \frac{1}{2} \sqrt{26a^2 \pm 2 \sqrt{4c^4 + 25a^4}}.$$

$$c) (12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{12}; x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{-39}}{24}.$$

$$d) \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0.$$

Näpunäide. Liita esimene murd neljandaga ning teine kolmandaga.

$$\text{Vastus: } x_1 = 0; x_{2,3} = \pm \sqrt{50}.$$

$$e) \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Näpunäide. Liita paariviisi need murrud, millel nimetajate summa on üks ja seesama.

$$\text{Vastus: } x_1 = \frac{5}{2}; x_{2,3} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17}); x_{4,5} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{7}).$$

$$f) \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} - \frac{1}{6+x} + \frac{1}{7+x} = 0.$$

Näpunäide. Liita paariviisi need murrud, millel nimetajate summa on üks ja seesama.

$$\text{Vastus: } x_{1,2,3,4} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4} \mp 3\sqrt{-1}}.$$

Nr. 7. Lahendada võrrand:

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$$

Lahendus. Korrutame esimese teguri neljandaga ja teise kolmandaga. Saame:

$$[(x+2)(x+12)][(x+3)(x+8)] = 4x^2;$$

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2;$$

$$[(x^2 + 24) + 14x][(x^2 + 24) + 11x] = 4x^2$$

Korrutame kaksliikmed vasakul poolel:

$$(x^2 + 24)^2 + 25x(x^2 + 24) + 154x^2 = 4x^2;$$

$$(x^2 + 24)^2 + 25x(x^2 + 24) + 150x^2 = 0.$$

Viimase võrrandi vasak pool on $x^2 + 24$ suhtes ruuttrinoom, mille esitame korrutisena:

$$(x^2 + 24 + 15x)(x^2 + 24 + 10x) = 0,$$

$$x^2 + 15x + 24 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}(-15 \pm \sqrt{129});$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0; \quad x_3 = -6; \quad x_4 = -4.$$

Nr. 8. Lahendada võrrand:

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = 4 + \frac{x-7}{x-1}.$$

Lahendus. Eraldame igast murrust täisosa:

$$\frac{2x+2-3}{x+1} + \frac{3x+6-7}{x+2} = 4 + \frac{x-1-6}{x-1};$$

$$\frac{2(x+1)-3}{x+1} + \frac{3(x+2)-7}{x+2} = 4 + \frac{(x-1)-6}{x-1};$$

$$2 - \frac{3}{x+1} + 3 - \frac{7}{x+2} = 4 + 1 - \frac{6}{x-1};$$

$$\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} = \frac{6}{x-1}.$$

Lahendades viimase võrrandi, saame:

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -\frac{5}{4}.$$

Nr. 9. Lahendada võrrand:

$$\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} = \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}.$$

Lahendus. Eraldame igast murrust täisosa:

$$\frac{(4x-16)-1}{x-4} + \frac{(10x-15)+2}{2x-3} = \frac{(8x-28)-2}{2x-7} + \frac{5x-5+1}{x-1};$$

$$4 - \frac{1}{x-4} + 5 + \frac{2}{2x-3} = 4 - \frac{2}{2x-7} + 5 + \frac{1}{x-1};$$

$$\frac{5}{2x^2-11x+12} = \frac{5}{2x^2-9x+7}.$$

Lahendame viimase võrrandi ning saame:

$$x = \frac{5}{2}.$$

Nr. 10. Lahendada võrrandid:

$$1) \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4.$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{\frac{69}{5}}).$$

$$2) \frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Näpunäide. Eraldada täis-hulkliikmed murdudest.

$$\text{Vastus: } x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

$$3) \frac{2(3x-4)}{2x+1} + \frac{9(x-1)}{3x+1} = \frac{2(3x-2)}{2x+3} + \frac{3(x-2)}{x-1}.$$

$$\text{Vastus: } x=5; \quad x_3 = -\frac{13}{32}.$$

Nr. 11. Lahendada võrrand:

$$\frac{(3a+b-x)^2 + (a-b+x)^2}{(3b+a+x)^2 + (a-b+x)^2} = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}.$$

Lahendus. Mõlema murru lugejat saab lihtsustada, kui võrrandi mõlemast poolest lahutada 1:

$$\frac{(3a+b-x)^2 + (a-b+x)^2}{(3b+a+x)^2 + (a-b+x)^2} - 1 = \frac{3a+b-x}{3b+a+x} - 1;$$

$$\frac{(3a+b-x)^2 - (3b+a+x)^2}{(3b+a+x)^2 + (a-b+x)^2} = \frac{2a-2b-2x}{3b+a+x};$$

$$\frac{(3a+b-x+3b+a+x)(3a+b-x-3b-a-x)}{9b^2+a^2+x^2+6ab+6bx+2ax+a^2+b^2+x^2-2ab+2ax-2bx} = \frac{2(a-b-x)}{3b+a+x};$$

$$\frac{(4a+4b)2(a-b-x)}{10b^2+4ab+2a^2+4x(a+b)+2x^2} = \frac{2(a-b-x)}{3b+a+x}.$$

Siit saame:

$$(a-b-x) \cdot \left\{ \frac{2a+2b}{5b^2+2ab+a^2+2x(a+b)+x^2} - \frac{1}{3b+a+x} \right\} = 0.$$

Võrdsustades esimese teguri nulliga ja lahendades saadud võrrandi, saame $x_1 = a - b$. Võrdsustades teise teguri nulliga ja lahendades niiviisi saadud võrrandi, saame:

$$x_{2,3} = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 6ab}.$$

Nr. 12. Lahendada võrrand:

$$\left(\frac{3a+2b+3x}{4a+b-x} \right)^2 = \frac{2a+3b+2x}{3a+2b-2x}.$$

Lahendus. On kerge näha, et kui kummaski võrrandi pooles murru lugejast lahutada nimetaja, saame ühe ja sellesama vahe. Arvestades seda lahutame võrrandi mõlemast poolest arvu 1:

$$\left(\frac{3a+2b+3x}{4a+b-x} \right)^2 - 1 = \frac{2a+3b+2x}{3a+2b-2x} - 1;$$

$$\frac{(3a+2b+3x)^2 - (4a+b-x)^2}{(4a+b-x)^2} = \frac{2a+3b+2x-3a-2b+2x}{3a+2b-2x};$$

$$\frac{(7a+3b+2x)(-a+b+4x)}{(4a+b-x)^2} = \frac{(-a+b+4x)}{3a+2b-2x}.$$

Toome kõik liikmed vasakule poolele ja võtame ühise teguri sulgude ette:

$$(-a+b+4x) \left[\frac{7a+3b+2x}{(4a+b-x)^2} - \frac{1}{3a+2b-2x} \right] = 0.$$

Võrdsustades nulliga esimese teguri, saame $x_1 = \frac{a-b}{4}$. Võrdsustades nulliga teise teguri ja lahendades võrrandi, saame:

$$x_{2,3} = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 3ab}.$$

Nr. 13. Lahendada võrrandid:

$$1) \left(\frac{2x-5a+3b}{2x-5b+3a} \right)^2 = \frac{25a+9b-34x}{25b+9a-34x}.$$

Vastus: $x_1 = a$; $x_2 = b$.

$$2) \left(\frac{a+b+2x}{a+b-2x} \right)^2 = \frac{5a-3b+4x}{5a-3b-4x}.$$

Vastus: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$.

$$3) \left(\frac{5a+4b-x}{5b+4a-x} \right)^2 = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{a+2b+x}{b+2a+x}.$$

Vastus: $x_1 = 2a+b$; $x_2 = a+2b$.

$$4) \left(\frac{x+7a-b}{x+7b-a} \right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a-b}{x+b-a}.$$

Vastus: $x_1 = a+b$; $x_{2,3} = \pm \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

$$5) \left(\frac{a+3b+3x}{a+7b-x} \right)^2 = \frac{3a+b+x}{3b+a-x}.$$

Vastus: $x_1 = \frac{1}{5}(a+11b)$; $x_{2,3} = \pm \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$.

Nr. 14. Lahendada võrrand:

$$\frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{49}{45}.$$

Lahendus. Võtame kasutusele uue tundmatu

$$z = x^2 + x + 1,$$

siis

$$(x+1)^2 = x^2 + x + 1 + x = z + x;$$

$$x^2 + 1 = x^2 + x + 1 - x = z - x.$$

Asetades kõik selle antud võrrandisse saame:

$$\frac{z^2}{z^2 - x^2} = \frac{49}{45}.$$

Lahendame viimase võrrandi z suhtes ning saame:

$$z_{1,2} = \pm \frac{7}{2}x.$$

Asendades z , saame kaks võrrandit:

$$1) x^2 + x + 1 = \frac{7}{2}x$$

ja

$$2) x^2 + x + 1 = -\frac{7}{2}x.$$

Lahendades need võrrandid saame:

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2}; x_{3,4} = \frac{1}{4}(-9 \pm \sqrt{65}).$$

Nr. 15. Lahendada võrrand:

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{x(x + 1)^2} = \frac{625}{112}.$$

Lahendus. Selleks, et kasutada uut tundmatut, esitame võrrandi vasaku poole järgmisel kujul:

$$\frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{625}{112}; \quad \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1) + 2x} = \frac{625}{112}.$$

Jagades teise murru lugeja ja nimetaja avaldisega $x^2 + 1$, saame:

$$\frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x}{x^2 + 1}} = \frac{625}{112}.$$

Võtame:

$$\frac{x}{x^2 + 1} = z;$$

siis

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + 2z} = \frac{625}{112};$$

lahendades viimase võrrandi saame:

$$z_1 = \frac{7}{50} \text{ ja } z_2 = -\frac{16}{25}.$$

Siit

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{7}{50} \text{ ja } \frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{16}{25}.$$

Lahendades viimased võrrandid saame:

$$x_1 = 7; x_2 = \frac{1}{7}; x_{3,4} = \frac{-25 \pm \sqrt{-399}}{32}.$$

Nr. 16. Lahendada võrrand:

$$\frac{(x + 1)^4}{x(x^2 + 1)} = \frac{128}{15}.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}; x_{3,4} = \frac{1}{5}(3 \pm 4i).$$

Nr. 17. Lahendada võrrand:

$$(x^2 - 4x + 5)^2 - (x - 1)(x - 3) = 4.$$

Lahendus. Teostades korrutamise teises liikmes saame:

$$(x^2 - 4x + 5)^2 - (x^2 - 4x + 3) = 4.$$

Teisendame võrrandi vasakut poolt nii, et saaksime teise astme võrrandi $x^2 - 4x$ suhtes:

$$\begin{aligned} [(x^2 - 4x) + 5]^2 - (x^2 - 4x) - 7 &= 0; \\ (x^2 - 4x)^2 + 10(x^2 - 4x) + 25 - (x^2 - 4x) - 7 &= 0; \\ (x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 18 &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandi saame:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -3; \quad x^2 - 4x = -6; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3; \\ x_{3,4} &= 2 \pm \sqrt{-2}. \end{aligned}$$

Nr. 18. Lahendada võrrand:

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Lahendus. Täiendades kaks esimest liiget täisruuduni saame:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x^2 + 4x + 4 &= 0; \\ (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x + 4 - 16x^2 &= 0; \\ (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) + 4 &= 16x^2. \end{aligned}$$

Võrrandi vasak pool on täisruut ja seepärast võib võrrandi kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned} [(x^2 + x) + 2]^2 - 16x^2 &= 0; \\ \{(x^2 + x) + 2\} - 4x\} \{(x^2 + x) + 2\} + 4x\} &= 0; \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x^2 + 5x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades kaks viimast võrrandit saame:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Nr. 19. Lahendada võrrandid:

$$1) \quad x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 36 = 0.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 3; \quad x_2 = 3; \quad x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

$$2) \quad x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 1; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 2.$$

$$3) \quad 4x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = x_{3,4} = \frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{-15}).$$

$$4) \quad 32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = \frac{5}{4}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -\frac{1}{4}.$$

$$5) x^4 - 4ax^3 + (4a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2a(b^2 + c^2)x + b^2c^2 = 0.$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}; \quad x_{3,4} = a \pm \sqrt{a^2 - c^2}.$$

$$6) x^4 + 3x + 1 = 3x^3 + \frac{4}{9}x^2.$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = \frac{1}{3}(7 \pm \sqrt{85}); \quad x_{3,4} = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{10}).$$

$$7) 3x^2(x-4)^2 + 5(x-2)^2 = 32.$$

$$\text{Vastus: } x_{1,2} = 2 \pm 4\sqrt{\frac{1}{3}}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 3.$$

Nr. 20. Lahendada võrrand:

$$x^4 + 1 = 2(1 + x)^4.$$

Lahendus. Arendame parema poole Newtoni binoomi valemi järgi:

$$x^4 + 1 = 2 + 8x + 12x^2 + 8x^3 + 2x^4;$$

$$x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 = 0.$$

Lahendame saadud sümmeetrilise võrrandi. Jagades mõlemad pooled x^2 -ga, saame:

$$x^2 + 8x + 12 + 8 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0. \quad (\text{I})$$

Võtame:

$$y = x + \frac{1}{x},$$

siis

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ ja } y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Asetame võrrandisse (I) y , saame:

$$y^2 + 8y + 10 = 0,$$

siit

$$y = -4 \pm \sqrt{6}; \quad x + \frac{1}{x} = -4 \pm \sqrt{6},$$

$$x = \frac{1}{2} \left(-4 \mp \sqrt{6} \pm \sqrt{18 \pm 8\sqrt{6}} \right).$$

Nr. 21. Lahendada võrrand:

$$x^5 = \frac{133x - 78}{133 - 78x}.$$

Lahendus. Vabaneme nimetajast (oletades, et $133 - 78x \neq 0$, s. o. $x \neq \frac{133}{78}$) ja rühmitame liikmed:

$$x^5(133 - 78x) = 133x - 78; \quad 133x^5 - 78x^6 = 133x - 78;$$

$$(133x^5 - 133x) - (78x^6 - 78) = 0;$$

$$133x(x^4 - 1) - 78(x^6 - 1) = 0.$$

$$133x(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 78(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(133x^3 + 133x - 78x^4 - 78x^2 - 78) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(78x^4 - 133x^3 + 78x^2 - 133x + 78) = 0.$$

Järelikult:

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ja } 78x^4 - 133x^3 + 78x^2 - 133x + 78 = 0.$$

Lahendades esimese võrrandi saame:

$$x_{1,2} = \pm 1.$$

Teise võrrandi lahendame kui sümmeetrilise võrrandi ning saame:

$$x_3 = \frac{3}{2}; \quad x_4 = \frac{2}{3}; \quad x_{5,6} = \frac{-3 \pm 4\sqrt{-40}}{13}.$$

Nr. 22. Lahendada võrrandid:

a) $x^4 = \frac{11x - 6}{6x - 11}.$

Vastus: $x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_{4,5} = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{-35}).$

b) $x^6 = \frac{257x^2 - 68}{68x^2 - 257}.$

Vastus: $x_{1,2} = \pm 2; \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{2};$

$$x_{5,6,7,8} = \pm \sqrt{\frac{13}{34}} \pm \sqrt{-\frac{21}{34}}.$$

c) $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0.$

Vastus: $x_1 = 3; \quad x_2 = -1; \quad x_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{3}.$

Nr. 23. Uurida võrrandit:

$$m^2x = m(x + 2) - 2.$$

Lahendus. Uurimisel tuleb selgitada:

- 1) missuguste m väärtuste puhul võrrandil on üksainus lahend;

2) missuguste m väärtuste puhul ei ole lahendit;

3) missuguste m väärtuste puhul on lõpmatu palju lahendeid.

Pärast teisendamist saame:

$$m^2x - mx = 2m - 2; \quad xm(m - 1) = 2(m - 1). \quad (I)$$

Vaatleme mõningaid juhtumeid:

I. Olgu $m \neq 0$ ja $m \neq 1$, siis $m(m - 1) \neq 0$.

Lahendades selle võrrandi saame:

$$x = \frac{2(m - 1)}{m(m - 1)}.$$

Et $m - 1 \neq 0$, võib mõlemad murru liikmed jagada avaldisega $m - 1$. Pärast taandamist saame $x = \frac{2}{m}$.

II. Olgu $m = 0$. Siis võib antud võrrandi üles kirjutada järgmiselt: $0 \cdot x = -2$. Sellel võrrandil ei ole lahendeid.

III. Olgu $m = 1$. Siis võrrand (I) võtab kuju $0 \cdot x = 0$. Sel juhul rahuldab võrrandit iga x väärtus.

Nr. 24. Uurida võrrandit:

$$a^2x + 4 = a(x + 2) + b.$$

Lahendus. Pärast teisendamist saame:

$$a^2x - ax = 2a + b - 4; \quad xa(a - 1) = 2a + b - 4. \quad (I)$$

Vaatleme kõiki võimalikke juhtumeid:

I. Olgu $a \neq 0$; $a \neq 1$, siis $a(a - 1) \neq 0$.

Sel juhul on võrrandil üksainus lahend

$$x = \frac{2a + b - 4}{a(a - 1)}.$$

II. 1) Olgu $a = 0$; $b \neq 4$. Sel juhul võrrandi (I) võib üles kirjutada järgmiselt: $0 \cdot x = b - 4$. Võrrandil lahendeid ei ole.

2) Olgu $a = 0$; $b = 4$. Võrrandi (I) võib üles kirjutada järgmiselt: $0 \cdot x = 0$. Võrrandit rahuldab iga x väärtus.

III. 1) Olgu $a = 1$; $b \neq 2$. Võrrandi (I) võib üles kirjutada järgmiselt:

$$0 \cdot x = 2 + b - 4; \quad 0 \cdot x = b - 2.$$

Võrrandil lahendeid ei ole.

2) Olgu $a = 1$; $b = 2$. Võrrandi (I) võib üles kirjutada järgmiselt: $0 \cdot x = 0$. Võrrandit rahuldab iga x väärtus.

Nr. 25. Uurida võrrandit:

$$m^2(x-2) - 3m = x + 1.$$

Vastus: I. $(m-1)(m+1) \neq 0$; $x = \frac{2m+1}{m+1}$.

II. $m=1$. Võrrandil lahendeid ei ole.

III. $m=-1$. Rahuldab iga x väärtus.

Nr. 26. Uurida võrrandit:

$$ax + b - \frac{3x + 2ab}{3} = \frac{1}{2}.$$

Vastus: I. $a-1 \neq 0$; $x = \frac{4ab - 6b + 3}{6(a-1)}$.

II. $a=1$ $\begin{cases} b \neq \frac{3}{2}. & \text{Võrrandil lahendeid ei ole.} \\ b = \frac{3}{2}. & \text{Rahuldab iga } x \text{ väärtus.} \end{cases}$

Nr. 27. Uurida võrrandit:

$$(a+x)(1+bx) = a(1+b) + a^2b^2 + bx^2.$$

Vastus: I. Kui $1+ab \neq 0$, siis $x = \frac{a}{b}$.

II. Kui $1+ab=0$, siis rahuldab võrrandit iga x väärtus.

Nr. 28. Uurida võrrandit:

$$\frac{2x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}.$$

Vastus: I. Kui $a+b \neq 0$, siis $x = \frac{2ab}{a+b}$.

II. Kui $a+b=0$, ei ole võrrandil lahendeid.

Nr. 29. Uurida võrrandit:

$$\frac{a-x}{a-b} + \frac{a+x}{a+b} + \frac{x}{2} = \frac{abx}{a^2-b^2} + \frac{(a-b)x}{2(a+b)}.$$

Vastus: I. Kui $b(b+2) \neq 0$, siis $x = \frac{2a^2}{b(b+2)}$.

II. Kui $b=0$ ja $a \neq 0$, siis lahendeid ei ole.

III. Kui $b=-2$ ja $a \neq 0$, siis lahendeid ei ole.

IV. Kui $b=-2$ ja $a=0$, siis rahuldab võrrandit iga x väärtus.

Nr. 30. Lahendada võrrand:

$$2x^2 - 15x + 5 + \sqrt{2x^2 - 15x + 11} = 0.$$

Lahendus. Võtame uueks tundmatuks

$$z = \sqrt{2x^2 - 15x + 11}. \quad (I)$$

Võrrandi (I) mõlemad pooled tõstame ruutu ja avaldame

$$2x^2 - 15x.$$

Saame:

$$z^2 = 2x^2 - 15x + 11; \quad 2x^2 - 15x = z^2 - 11. \quad (II)$$

Kasutades võrdusi (I) ja (II), asendame antud võrrandis x avaldised tähega z .

Saame:

$$z^2 - 11 + 5 + z = 0; \quad z^2 + z - 6 = 0; \quad z_1 = -3; \quad z_2 = +2.$$

Lahend $z_1 = -3$ ei kõlba, sest võrdus (I) näitab, et z peab olema positiivne.

Asetades võrdusse (I) z asemel väärtuse 2, saame:

$$2 = \sqrt{2x^2 - 15x + 11}; \quad 4 = 2x^2 - 15x + 11; \quad 2x^2 - 15x + 7 = 0;$$

$$x_1 = 7; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Asetame leitud väärtused antud võrrandisse ja veendume, et nad on võrrandi lahenditeks.

Nr. 31. Lahendada võrrandid:

a) $3\sqrt{x^2 + x - 2} = x^2 + x.$

$$\text{Vastus: } x_1 = 2; \quad x_2 = 3; \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

b) $\sqrt{x^2 + x + 37} = \frac{7}{25} [x^2 + (x + 1)^2].$

$$\text{Vastus: } x_1 = 3; \quad x_2 = -4.$$

c) $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30.$

$$\text{Vastus: } x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{9}{2}.$$

d) $x^2 - 3x + 5\sqrt{x^2 - 3x + 76} = 260.$

$$\text{Vastus: } x_1 = 15; \quad x_2 = -12.$$

Nr. 32. Lahendada võrrand:

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$$

Lahendus. Jagame võrrandi mõlemad pooled avaldisega

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}. \text{ Saame:}$$

$$\sqrt[3]{\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}} = 5; \quad \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 4\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} = 5.$$

Võttes $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = y$, saame võrrandi $y + \frac{4}{y} = 5$, mille lahendid on 1 ja 4; vastavad x väärtused on $x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{63a}{65}$.

Nr. 33. Lahendada võrrand:

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 5; \quad x_2 = -\frac{30}{127}.$$

Nr. 34. Lahendada võrrand:

$$3x + \sqrt{6x+10} = 35.$$

Lahendus. Viime esimese liikme võrrandi paremale poolele ning saame:

$$\sqrt{6x+10} = 35 - 3x. \quad (\text{I})$$

Selle võrrandi lahendiks võib olla ainult niisugune väärtus, millel juuremärgi all seisev avaldis on positiivne, s. o. niisugune x väärtus, mis rahuldab võrratust $6x+10 > 0$. Kui see tingimus on täidetud, on võrrandi vasak pool positiivne; siit järeldub, et ka võrrandi parem pool peab olema positiivne, s. o. x peab rahuldama võrratust $35 - 3x > 0$. Niisiis võrrandi lahendiks võib olla ainult niisugune x , mis rahuldab üheaegselt kahte võrratust:

$$\begin{array}{l} 6x+10 > 0 \quad \left| \quad x > -\frac{5}{3} \right| \\ 35-3x > 0 \quad \left| \quad \frac{35}{3} > x \right| \end{array} \quad -\frac{5}{3} < x < \frac{35}{3}.$$

Kui x rahuldab mainitud tingimusi, on võrrandi (I) mõlemad poo-

led positiivsed ja neid võib tõsta ruutu, seejuures võõrlahendeid ei teki. Saame:

$$6x + 10 = (35 - 3x)^2. \quad (\text{II})$$

Pärast teisendamist saame:

$$x^2 - 24x + 135 = 0.$$

Võrrandi (II) lahenditeks on 9 ja 15. Ülesandes antud võrrandit rahuldab see x väärtus, mis on eespool märgitud võrratuste-süsteemi lahendiks, s. o. $x=9$, sest et $-\frac{5}{3} < 9 < \frac{35}{3}$. Teine väärtus $x=15$ ei ole antud võrrandi lahendiks. Otsese asendamisega on kerge kontrollida, et $x=9$ on võrrandi lahend.

Nr. 35. Lahendada võrrandid:

$$\text{a) } x - \sqrt{4 - x^2} = 1.$$

$$\text{Vastus: } x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{b) } 2x^2 - 5x = -\sqrt{x^2 + 20x - 4}.$$

$$\text{Vastus: } x = 2 - \sqrt{3}.$$

Nr. 36. Lahendada võrrand:

$$\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x - 4} = \sqrt{4x + 5}.$$

Lahendus. Selleks et kõik juuravaldised oleksid positiivsed, on tingimata tarvilik, et oleks $x > 4$. Sel tingimusel mõlemad võrrandi pooled on positiivsed. Tõstes mõlemad pooled ruutu, saame:

$$3x + 1 + 2\sqrt{(3x + 1)(x - 4)} + x - 4 = 4x + 5;$$

$$\sqrt{(3x + 1)(x - 4)} = 4.$$

Teist korda ruutu tõstes leiame:

$$3x^2 - 11x - 4 = 16;$$

$$3x^2 - 11x - 20 = 0.$$

(I)

Võrrandi (I) lahendid on:

$$x_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = 5.$$

Ülesandes antud võrrandi lahendiks on $x=5$, sest x peab olema suurem kui 4.

Nr. 37. Lahendada võrrandid:

$$\text{a) } \sqrt{x - 2} + \sqrt{7 - x} = \sqrt{3x}.$$

$$\text{Vastus: } x_1 = \frac{27}{13}; \quad x_2 = 3.$$

$$b) 2\sqrt{3x+1} + 3\sqrt{5x-4} = 4\sqrt{6x+1}.$$

Vastus: $x=8$.

$$c) \sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13}.$$

Vastus: $x=3$.

$$d) \sqrt{x+6} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} + \sqrt{3x+4}.$$

Vastus: $x = -\frac{1}{2}$; $x=1$.

Nr. 38. Lahendada võrrand:

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$$

Lahendus. Aritmeetika kursusest on teada, et kui on antud võrre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, siis võib saada tuletatud võrde $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, s. o. esimese suhte liikmete summa suhtub nende vahesse, nagu teise suhte liikmete summa suhtub nende vahesse. Tuletatud võrrete kasutamine lihtsustab sageli lahendamist, kuid ta võib seotud olla lahendite kadumisega või vöörlahendite ilmumisega. Vöörlahendid teevad nulliks antud võrde ühe suhte nimetaja. Kadunud lahendid teevad nulliks saadud võrde ühe suhte nimetaja.

Selleks, et lihtsustada antud võrrandit, vaatleme teda kui võrret:

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = \frac{6-x}{1}.$$

Koostame tuletatud võrde:

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} + (\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}) = \frac{(6-x)+1}{(6-x)-1};$$

$$\frac{2\sqrt[3]{7-x}}{3\sqrt[3]{x-5}} = \frac{7-x}{5-x}; \quad \frac{\sqrt[3]{7-x}}{3\sqrt[3]{x-5}} = \frac{7-x}{x-5}; \quad \sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} - \frac{7-x}{x-5} = 0;$$

$$\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} \left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{7-x}{x-5}\right)^2} \right] = 0.$$

Siit

$$\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} = 0 \quad (I)$$

ja

$$1 - \left(\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} \right)^2 = 0. \quad (II)$$

Lahendame mõlemad võrrandid.

Võrrandil (I) on lahend $x_1 = 7$. Võrrandil (II) on lahend $x_2 = 6$. Nagu eespool juba mainitud, võib võrrandi lahendamisel esineda lahendi kadumine. Kadumaläinud lahenditeks võivad olla need lahendid, mis muudavad võrde nimetaja nulliks, s. o. $x - 5 = 0$, $x = 5$. Otsese asendamisega veendume, et antud võrrandil on lahendid: $x_1 = 7$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$.

§ 3. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemid.

Nr. 1. Lahendada ja siis uurida m väärtusi võrrandisüsteemis:

$$\begin{cases} (m+5)x + (2m+3)y - (3m+2) = 0 \\ (3m+10)x + (5m+6)y - (2m+4) = 0. \end{cases}$$

Lahendus. Arvutame võrrandisüsteemi determinandi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+5 & 2m+3 \\ 3m+10 & 5m+6 \end{vmatrix} = (m+5)(5m+6) - (3m+10)(2m+3) = -m^2 + 2m = m(2-m).$$

I. Kui $\Delta \neq 0$, s. o. $m(2-m) \neq 0$, $m \neq 0$ ja $m \neq 2$, siis süsteemil on ainult üks lahendipaar. Tundmatud määratakse kindlaks valemi järgi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

kus

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3m+2 & 2m+3 \\ 2m+4 & 5m+6 \end{vmatrix} = (3m+2)(5m+6) - (2m+4)(2m+3) = m(11m+14);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+5 & 3m+2 \\ 3m+10 & 2m+4 \end{vmatrix} = (m+5)(2m+4) - (3m+2)(3m+10) = -m(7m+22).$$

Niisiis

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(11m+14)}{m(2-m)} = \frac{11m+14}{2-m}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-m(7m+22)}{m(2-m)} = \frac{7m+22}{m-2}.$$

II. Olgu $m=0$, siis antud süsteemi võib üles kirjutada sellisel kujul:

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2 = 0 \\ 10x + 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

Antud juhul x ja y koefitsiendid ja vabaliikmed on võrdelised:

$\frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$, järelikult süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Nii siis $m=0$ korral süsteem on määramatu.

III. Kui $m=2$, siis antud süsteemi võib üles kirjutada järgmiselt:

$$\begin{cases} 7x + 7y - 8 = 0 \\ 16x + 16y - 8 = 0. \end{cases}$$

Antud juhul $\frac{7}{16} = \frac{7}{16} \neq \frac{8}{8}$, järelikult $m=2$ korral süsteemil lahendeid ei ole.

Nr. 2. Lahendada ja siis uurida m väärtusi järgmistes võrrandisüsteemides:

$$a) \begin{cases} (m-1)x + 2my + 2 = 0 \\ 2mx + (m-1)y - (m-1) = 0. \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq \frac{1}{3}$; $m \neq -1$;

$$x = \frac{2(m-1)}{3m-1}; y = -\frac{m+1}{3m-1}.$$

II. $m = \frac{1}{3}$; lahendeid ei ole.

III. $m = -1$; on lõpmatu hulk lahendeid.

$$b) \begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3my - (2m + 3) = 0. \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq 0$; $m \neq -3$; $x = 2$; $y = -\frac{1}{m}$.

II. $m = 0$; süsteemil lahendeid ei ole.

III. $m = -3$; süsteem on määramatu.

$$c) \begin{cases} (2m-3)x - my - (3m-2) = 0 \\ -5x + (2m+3)y + 5 = 0. \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq -1$; $m \neq \frac{9}{4}$; $x = \frac{6(m-1)}{4m-9}$;

$$y = \frac{5}{4m-9}.$$

II. $m = \frac{9}{4}$; süsteemil lahendeid ei ole.

III. $m = -1$; süsteem on määramatu.

Nr. 3. Leida m ja p nii, et süsteem

$$\begin{cases} (3m - 5p + b)x + (8m - 3p - a)y = 1 \\ (2m - 3p + b)x + (4m - p)y = 2 \end{cases}$$

oleks määramatu.

$$\text{Vastus: } m = \frac{14a + 5b}{64}; p = \frac{8a + 12b}{64}.$$

Nr. 4. Lahendada ja uurida võrrandisüsteemid m väärtuse suhtes:

$$\text{a) } \begin{cases} (m-1)x + (m+1)y - 2(m^2-1) = 0 \\ (m^2-1)x + (m^2+1)y - 2(m^3-1) = 0 \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq 0$; $m \neq -1$; $x = m+1$; $y = m-1$.

II. $m = 0$; süsteem on määramatu.

III. $m = 1$; süsteem on määramatu.

$$\text{b) } \begin{cases} (m-1)^2x + (m^2-1)y - (m+1)^2 = 0 \\ (2m-1)x + (m+1)y - (m^2-1) = 0 \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq 0$; $m \neq -1$; $m \neq 1$;

$$x = \frac{(m+1)(m-3)}{m-1}; y = \frac{m^2-5m+2}{1-m}.$$

II. $m = 0$ ja $m = -1$; süsteem on määramatu.

III. $m = 1$; lahendeid ei ole.

$$\text{c) } \begin{cases} m(m-1)x + m(m+1)y - (m^3+2) = 0 \\ (m^2-1)x + (m^3+1)y - (m^4-1) = 0 \end{cases}$$

Vastus: I. $m \neq 0$; $m \neq \pm 1$; $m \neq 2$;

$$x = -\frac{m^3+m^2+1}{m^2(m-1)}; y = \frac{m^3+m+1}{m^2}.$$

II. $m = 0$ ja $m = 1$; lahendeid ei ole.

III. $m = -1$; $m = 2$; süsteem on määramatu.

Nr. 5. Leida m nii, et võrrandid

$$x - y = m, \quad mx + y = 1, \quad x + y = 2$$

kuulaksid ühte süsteemi.

Näpunäide. Leida kahe võrrandi lahendite süsteem ja leitud väärtused asetada kolmandasse võrrandisse.

Vastus: $m=0$ või $m=-1$.

Nr. 6. Lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} + \frac{5}{2} = 0 \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} + \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$$

Näpunäide. Võtta:

$$\frac{1}{x+y-1} = u, \quad \frac{1}{2x-y+3} = v.$$

Vastus: $x=2$; $y=-3$.

Nr. 7. Lahendada võrrandisüsteemid:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{3x+y-2} + \frac{3}{x+4y+1} + \frac{7}{24} = 0 \\ \frac{1}{3x+y-2} - \frac{2}{x+4y+1} + \frac{7}{12} = 0 \end{cases}$$

Vastus: $x=-1$; $y=2$.

$$\text{b) } \begin{cases} 3\sqrt{4x+2y} - 5\sqrt{2x-y} = 2 \\ 7\sqrt{4x+2y} + 2\sqrt{2x-y} = 32 \end{cases}$$

Vastus: $x=3$; $y=2$.

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt[3]{x+y+2} - \sqrt{2x-3y-7} + 3 = 0 \\ 2\sqrt[3]{x+y+2} + 3\sqrt{2x-3y-7} - 14 = 0 \end{cases}$$

Vastus: $x=4$; $y=-5$.

Üksliikme astmeks nimetatakse temas esinevate tähtede astendajate summat.

Näiteks: 1) $5a^3b^2c$ on kuuenda astme üksliige a , b ja c suhtes.

2) $2a^3bc$ on viienda astme üksliige;

3) $5abc$ on kolmanda astme üksliige. Hulkliiget nimetatakse homogeenseks, kui kõik tema liikmed on ühe ja sama astmelised.

Näiteks: 1) $2abc^2 + 3a^3b - 5bc^3$ on neljanda astme homogeenne hulkliige;

2) $3ab^2 - 5b^3 - 2ac^2$ on kolmanda astme hulkliige.

Võrrandit nimetatakse homogeenseks, kui kõik tema liikmed on tundmatute suhtes ühe ja sama astmelised.

Näiteks: 1) $2x^2 - 3xy + 5y^2 = 0$ on homogeenne võrrand x ja y suhtes;

2) $2ax^3 - 3bx^2y + 5cy^3 = 0$ on homogeenne võrrand x ja y suhtes.

Peatume süsteemide lahendamisel, mille koosseisu kuulub homogeenseid võrrandeid.

Nr. 8. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 6x^2 - xy - 12y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = \frac{17}{16} \end{cases}$$

Lahendus. Esimene võrrand on homogeenne. Jagades esimese võrrandi mõlemad pooled y^2 -ga, saame:

$$6 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 12 = 0.$$

Lahendame saadud ruutvõrrandi $\frac{x}{y}$ suhtes ja leiame $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ või $\frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$; $x = \frac{3}{2}y$ või $x = -\frac{4}{3}y$. Nüüd taandub antud süsteemi lahendamine kahe süsteemi lahendamisele:

$$(I) \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x^2 + 2y^2 = \frac{17}{16} \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = -\frac{4}{3}y \\ x^2 + 2y^2 = \frac{17}{16} \end{cases}$$

Lahendades need süsteemid, saame:

$$I) \quad x = \pm \frac{3}{4}; \quad y = \pm \frac{1}{2}$$

ja

$$II) \quad x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}; \quad y = \mp \frac{3}{8} \sqrt{2}$$

Nr. 9. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$$

Lahendus. Teisendame süsteemi nii, et üks võrrandeist tuleks homogeenne. Antud juhul saab niisuguse teisenduse teha, sest mõlema võrrandi vasakul poolel seisab ühe ja sama astmeline homogeenne hulkliige. Korrutades esimese võrrandi pooled 16-ga

ja teise omad 17-ga ning lahutades teise pooled esimese pooltest, saame:

$$\left. \begin{aligned} 32y^2 - 64xy + 48x^2 &= 16 \cdot 17 \\ 17y^2 - 17x^2 &= 16 \cdot 17 \end{aligned} \right| 15y^2 + 65x^2 - 64xy = 0$$

Nüüd taandub süsteemi lahendamine eelmisele juhule:

$$\begin{cases} 15y^2 + 65x^2 - 64xy = 0 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \text{ või } \frac{x}{y} = \frac{5}{13}.$$

Edasi lahendame kaks võrrandisüsteemi:

$$(I) \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = \frac{5}{13}y \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$$

ja saame:

$$I) x = \pm 3; y = \pm 5; \quad II) x = \pm \frac{5}{3}; y = \pm \frac{13}{3}.$$

Nr. 10. Lahendada võrrandisüsteemid:

$$a) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x = \pm 4; y = \pm 5 \text{ või} \\ x = \pm 3\sqrt{3}; y = \pm \sqrt{3}.$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x = \pm 3; y = \pm 2 \text{ või} \\ x = \pm 5\sqrt{\frac{1}{2}}; y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$c) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x = \pm 3; y = \pm 1 \text{ või } x = \pm 1; y = \pm 3.$$

Allpool esitatakse süsteemid, mis lahendatakse edukalt uute tundmatute meetodiga. See meetod seisneb selles, et tundmatuteks ei loe meie süsteemi kuuluvaid tundmatuid endid, vaid nende sum-

mat, vahet või korrutist ja niiviisi taandame antud süsteemi elementaarseks süsteemiks.

Nr. 11. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} x^2 - x^2y^2 + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 4 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Teisendame võrrandi vasakud pooled nii, et nad väljenduksid tundmatute summa ja korrutise kaudu:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - x^2y^2 = 19 \\ x + y - xy = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy - (xy)^2 = 19 \\ (x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Võtame kasutusele uued tundmatud

$$x + y = u; \quad xy = v$$

ja saame:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - 2v = 19 \\ u - v = 4 \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi asendamismeetodiga, leiame:

$$v = \frac{1}{2}; \quad u = \frac{9}{2}.$$

Endiste tundmatute juurde tagasi tulles saame:

$$\begin{cases} x + y = \frac{9}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{1}{2} = 0; \quad z = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{4}$$

Siit:

$$\begin{aligned} 1) \quad x_1 &= \frac{9 + \sqrt{73}}{4}; \quad y_1 = \frac{9 - \sqrt{73}}{4}. \\ 2) \quad x_2 &= \frac{9 - \sqrt{73}}{4}; \quad y_2 = \frac{9 + \sqrt{73}}{4}. \end{aligned}$$

Nr. 12. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 2x^3y^2 - y^3x^2 = 36 \\ 2x^2y - y^2x = 6 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Teisendame kumbagi võrrandit nii, et oleks võimalik kasutada uusi tundmatuid:

$$\begin{cases} x^2y^2(2x-y) = 36 \\ xy(2x-y) = 6 \end{cases}$$

Võtame:

$$2x - y = t; \quad xy = u.$$

Saame:

$$\begin{cases} u^2t = 36 \\ ut = 6 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist leiame u :

$$u \cdot (ut) = 36; \quad u \cdot 6 = 36; \quad u = 6.$$

Teisest võrrandist leiame $t = 1$. Endiste tundmatute juurde tagasi tulles saame:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Lahendame selle süsteemi asendamismeetodiga ning saame:

$$1) \ x_1 = 2; \ y_1 = 3; \quad 2) \ x_2 = -\frac{3}{2}; \ y_2 = -4.$$

Nr. 13. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases}$$

Lahendus. Teisendame võrrandite vasakud pooled nii, et nad väljenduksid tundmatute vahe ja korrutise kaudu:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 + xy = 7(x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y)^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ (x - y)^2 + xy = 7(x - y) \end{cases} \quad \begin{cases} 18(x - y)^2 - 3xy = 0 \\ (x - y)^2 - 7(x - y) + xy = 0 \end{cases}$$

Võtame kasutusele uued tundmatud

$$u = x - y, \quad v = xy$$

ja saame:

$$\begin{cases} 6u^2 - v = 0 \\ u^2 - 7u + v = 0 \end{cases}$$

Leiame esimesest võrrandist v ja asetame teise. Lahendades võrrandi leiame:

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 1 \quad \text{ja} \quad v_1 = 0; \quad v_2 = 6.$$

Siirdudes endistele tundmatutele saame kaks süsteemi:

$$(I) \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Lahendades need süsteemid leiame:

$$1) x_1 = 0; y_1 = 0; \quad 2) x_2 = 3; y_2 = 2; \quad 3) x_3 = -2; y_3 = -3.$$

Nr. 14. Lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = \frac{97}{4} \\ xy = 3 \end{cases}$$

Lahendus. Teisendame võrrandid nii, et vasakud pooled väljenduksid tundmatute ruutude summa ja tundmatute korrutise kaudu.

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = \frac{97}{4} \\ xy = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \frac{97}{4} \\ xy = 3 \end{cases}$$

Võttes

$$u = x^2 + y^2; \quad v = xy,$$

saame:

$$\begin{cases} u^2 - 2v^2 = \frac{97}{4} \\ v = 3 \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi saame:

$$v = 3; \quad u = \pm \frac{5}{2}$$

Siirdudes endistele tundmatutele saame kaks süsteemi:

$$(I) \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \\ xy = 3 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x^2 + y^2 = -\frac{5}{2} \\ xy = 3 \end{cases}$$

Edasi tuleb lahendada need süsteemid.

Nr. 15. Lahendada võrrandisüsteemid:

$$a) \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 65 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 2, y_1 = 3 \text{ või } x_2 = 3, y_2 = 2.$$

$$b) \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 8$; $y_1 = 2$ või $x_2 = 2$; $y_2 = 8$.

$$c) \begin{cases} (x + y)^4 + 4(x + y)^2 - 117 = 0 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 14$; $y_1 = -11$ või $x_2 = 11$; $y_2 = -14$.

$$d) \begin{cases} x - y + x^2 - y^2 = 330 \\ x + y + x^2 - y^2 = 150 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = -16$; $x_2 = 15$.

$$e) \begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + y^2x = 30 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$;

$y_1 = 1$; $y_2 = 5$; $y_3 = 3$; $y_4 = 2$.

$$f) \begin{cases} (2x - 5)^2 + (3y - 2)^2 = 17 \\ (2x - 5)(3y - 2) = 4 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = \frac{9}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = 3$; $x_4 = 2$;

$y_1 = 1$; $y_2 = \frac{1}{3}$; $y_3 = 2$; $y_4 = -\frac{2}{3}$.

$$g) \begin{cases} (3x + 4y)(7x - 2y) + 3x + 4y = 44 \\ (3x + 4y)(7x - 2y) - 7x + 2y = 30 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{24}{17}$; $y_1 = 2$; $y_2 = -\frac{1}{17}$.

Nr. 16. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{34}{15} \\ x + y + xy = 29 \end{cases}$$

Lahendus. Olgu

$$\sqrt{\frac{x+y}{5x}} = z,$$

siis esimene võrrand võtab niisuguse kuju:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{34}{15},$$

siit

$$z_1 = \frac{5}{3}, \quad z_2 = \frac{3}{5}.$$

Järelikult

$$\frac{x+y}{5x} = z^2 = \frac{25}{9} \text{ või } \frac{9}{25}; \text{ kui } \frac{x+y}{5x} = \frac{25}{9}, \text{ siis}$$
$$y = \frac{116}{9}x, \text{ kui aga } \frac{x+y}{5x} = \frac{9}{25}, \text{ siis } y = \frac{4}{5}x.$$

Asetades y selle väärtuse teise võrrandisse leiame lahendite süsteemid.

Nr. 17. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Lahendus. Vabaneme irratsionaalsusest nimetajas ja leiame esimeses võrrandis ühise nimetaja:

$$\frac{x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2}}{x + y} = \frac{20}{x + y}.$$

Oletades, et $x + y \neq 0$, võib võrrandi kirjutada järgmiselt:

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20.$$

Võttes

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

ja saame:

$$z^2 + z - 20 = 0,$$

siit

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} = -5 \text{ või } = 4 \text{ jne.}$$

Nr. 18. Lahendada võrrandisüsteemid:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9) \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 6; y_1 = 3; x_2 = 3; y_2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

$$\text{Vastus: } x_1 = 25; y_1 = 9; x_2 = \frac{49}{4}; y_2 = \frac{81}{4}.$$

Nr. 19. Lahendada süsteem:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{7}{3}; \quad x + y = \frac{3}{2} xy.$$

Lahendus. Antud juhul vaatleme esimest võrrandit kui võrret. Kirjutame tuletatud võrde: esimese suhte liikmete summa suhtub nende vahesse nagu teise suhte liikmete summa suhtub nende vahesse:

$$\frac{x^2 + xy + y^2 + x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2 - x^2 + xy - y^2} = \frac{7 + 3}{7 - 3};$$

$$\frac{2x^2 + 2y^2}{2xy} = \frac{10}{4}; \quad \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2},$$

siit

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2} xy \quad (xy \neq 0).$$

Tõstes teise võrrandi mõlemad pooled ruutu saame:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{9}{4} x^2 y^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{9}{4} x^2 y^2 - 2xy.$$

Niisiis saime süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} xy \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{4} x^2 y^2 - 2xy \end{cases}$$

Võrdsustades võrrandi paremad pooled saame:

$$\frac{9}{4} x^2 y^2 - 2xy = \frac{5}{2} xy.$$

Siit $xy = 0$ või $xy = 2$. Esimese resultaadi jätame kõrvale, sest oletuse järgi $xy \neq 0$. Niisiis $xy = 2$, aga teisest antud võrrandist saame:

$$x + y = 3.$$

Edasi lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

ja saame:

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 1$$

või

$$x_2 = 1; \quad y_2 = 2.$$

Nr. 20. Lahendada võrrandisüsteemid:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2}} = \frac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} \\ \frac{8y}{3} - 12 = \frac{x^2}{16} \end{cases}$$

Vastus: $x_{1,2} = \pm 24$; $y_{1,2} = 18$ või

$$x_{3,4} = \pm 8; y_{3,4} = 6.$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = x - y \\ \frac{x(xy+1)}{y(xy-1)} = 5 \end{cases}$$

Vastus: $x = \pm 2\sqrt{3}$; $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

ülejääänud lahendid on imaginaarsed.

Nr. 21. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Lahendus. Kirjutame esimese võrrandi selliselt:

$$x^2 + y^2 = 7 + xy.$$

Tõstame mõlemad pooled ruutu ja saame:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 49 + 14xy + x^2y^2$$

või

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 = 49 + 14xy. \quad (3)$$

Võrrandite (2) ja (3) vasakud pooled on võrdsed ja järelikult on võrdsed ka nende paremad pooled, s. o. $49 + 14xy = 133$, siit $xy = 6$. Asetades võrrandisse (1) korrutise väärtuse saame:

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Edasi lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2y^2 = 36 \end{cases}$$

ja saame:

- 1) $x=3$; $y=2$; 2) $x=-3$; $y=-2$; 3) $x=2$; $y=3$;
4) $x=-2$; $y=-3$.

Nr. 22. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931 \end{cases}$$

Vastus: $x = \pm 5$, $y = \pm 3$ või $x = \pm 3$, $y = \pm 5$.

Nr. 23. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} = 35 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 5 \end{cases}$$

Lahendus. Tähistame:

$$\sqrt[4]{x} = u; \quad \sqrt[5]{y} = v.$$

Siis süsteem võtab kuju:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 35 \\ u + v = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 35 \\ u + v = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 7 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

Lahendades viimase süsteemi, arvutame u ja v ning seejärel leiame x ja y .

Nr. 24. Lahendada süsteemid:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 27$; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 27$.

$$\text{b) } \begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 3$; $y_1 = 2$; $x_2 = 2$; $y_2 = 3$.

§ 4. Jada piirväärtus.

Definitsioon. Arvu l nimetatakse jada $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ piirväärtuseks, kui iga kuitahes väikese $\varepsilon > 0$ korral võib leida niisuguse arvu N , mis sõltub arvust ε , et võrratus $|x_n - l| < \varepsilon$ jääb alati kehtima, kui aga $n > N$.

Nr. 1. Tõestada, tugenedes jada piirväärtuse definitsioonile, et arv 3 on jada

$$\frac{3}{2}; \frac{6}{3}; \frac{9}{4}; \frac{12}{5}; \frac{15}{6}; \dots; \frac{3n}{n+1}; \dots$$

piirväärtuseks.

Lahendus. Näitame, et ükskõik milline on valitud $\varepsilon > 0$, ikka võib leida vastava arvu N nii, et võrratusest $n > N$ järelneb $|x_n - 3| < \varepsilon$.

Koostame avaldise vahe absoluutväärtuse jaoks:

$$\left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n - 3n - 3}{n+1} \right| = \left| \frac{-3}{n+1} \right| = \frac{3}{n+1}.$$

Kui n valime nii, et $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$,

s. o.

$$n+1 > \frac{3}{\varepsilon} \text{ ja } n > \frac{3}{\varepsilon} - 1,$$

siis

$$\left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Niisiis antud juhul arvu N võib võtta võrdsena $\frac{3}{\varepsilon} - 1$, s. o. $N = \frac{3}{\varepsilon} - 1$. (Tuleb märkida, et üldiselt arvu N võib valida mitmel viisil ja ta ei tarvitse olla tingimata täisarv. Niisiis võib võtta $N \geq \frac{3}{\varepsilon} - 1$.) Seega iga ε jaoks võib leida vastava N ja siit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

Võtame vaatlusele mõned erijuhud:

1) Kui $\varepsilon = \frac{2}{3}$, siis $N = \frac{3}{\frac{2}{3}} - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$.

Niisiis, kui jada liikme number on arvust 3,5 suurem, siis selle liikme väärtus erineb 3-st vähem kui $\frac{2}{3}$ võrra. (Antud juhul võis võtta $N \geq 3,5$.)

2) Kui $\varepsilon = 0,16$, siis

$$N = \frac{3 \cdot 100}{16} - 1 = \frac{75}{4} - 1 = \frac{71}{4}.$$

Niisiis kõigil $n > \frac{71}{4}$ väärtustel on $|x_n - 3| < 0,16$. (Antud juhul võis võtta $N \geq \frac{71}{4}$.)

Nr. 2. Tõestada, tugenedes jada piirväärtuse definitsioonile, et arv 1 on jada

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}; \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}; \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}; \frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1}; \dots; \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}; \dots$$

piirväärtus.

Lahendus. Ülesanne on lahendatud, kui näitame, kuidas etteantud $\varepsilon > 0$ järgi saab määrata vastava arvu N nii, et võrratusest $n > N$ järelneb $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Moodustame avaldise vahe absoluutväärtuse jaoks:

$$\begin{aligned} |x_n - 1| &= \left| \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} - 1 \right| = \left| \frac{\sqrt{n^2+1}-1-\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} \right| = \\ &= \left| \frac{-2}{\sqrt{n^2+1}+1} \right| = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+1}. \end{aligned}$$

Kui n valime nii, et $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+1} < \varepsilon$ (eeldame, et $\varepsilon < 1$), s. o. $\frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n^2+1}+1$; $\frac{2}{\varepsilon} - 1 < \sqrt{n^2+1}$; $n^2+1 > \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)^2$,

$$n^2 > \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)^2 - 1; n > \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)^2 - 1}, \text{ siis}$$

$$\left| \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Niisiis iga $\varepsilon > 0$ jaoks võib võtta

$$N \geq \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)^2 - 1},$$

ja siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} = 1.$$

Võtame vaatlusele mõned erijuhud:

1) kui $\varepsilon = 0,1$, siis

$$N = \sqrt{\left(\frac{2}{0,1} - 1\right)^2 - 1} = \sqrt{19^2 - 1} = \sqrt{360}.$$

Niiviisi, kui jada liikme number $n > \sqrt{360}$, siis selle liikme absoluutväärtus erineb arvust 1 vähem kui 0,1 võrra.

2) Kui $\varepsilon = 0,001$, siis

$$N = \sqrt{\left(\frac{2}{0,001} - 1\right)^2 - 1} = \sqrt{1999^2 - 1}.$$

Kui jada liikme number on suurem kui N , erineb ta oma absoluutväärtuselt arvust 1 vähem kui 0,001 võrra.

Nr. 3. Tõestada, tugenedes jada piirväärtuse definitsioonile, et arv $\frac{2}{3}$ on jada

$$\frac{2}{4}; \frac{4}{7}; \frac{6}{10}; \frac{8}{13}; \frac{10}{16}; \dots; \frac{2n}{3n+1}; \dots$$

piirväärtuseks.

Nr. 4. Tõestada, tugenedes jada piirväärtuse definitsioonile, et arv $\frac{3}{5}$ on jada

$$\frac{2}{4}; \frac{11}{19}; \frac{26}{44}; \frac{47}{79}; \dots; \frac{3n^2 - 1}{5n^2 - 1}; \dots$$

piirväärtuseks.

Nr. 5. Tõestada, tugenedes jada piirväärtuse definitsioonile, et arv 1 on jada

$$\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots; \frac{n+1}{n+2}; \dots$$

piirväärtuseks.

§ 5. Progressioonid ja summad.

Selles osas esitatakse rida ülesandeid lõpmatute ridade

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

summeerimise kohta.

Et faktiliselt ei saa summeerida lõpmata palju liidetavaid, siis on tarvis selgitada, millistel juhtudel sümbolil

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

on arvu tähendus ja mida meie mõistame lõputu rea summana. Moodustame rea n esimesest liikmest summa

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ja nimetame seda summat edaspidi rea osasummaks. Kui n muutub, muutub ka osasumma S_n .

Rida nimetatakse koonduvaks, kui n piiramatul kasvamisel osasumma S_n piirväärtuseks on arv S . Arvu S nimetatakse siis rea summaks ja sel juhul sümbolil

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

on arvu tähendus. Kui arvul S_n ei ole mingisugust piirväärtust n piiramatul kasvamisel, siis nimetatakse rida hajuvaks; niisugusel real ei ole summat ja sümbolil

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ei ole arvu tähendust.

Ülesannete lahendamisel aritmeetiliste ja geomeetriliste progressioonide kohta on nõutav ainult nende valemite tundmine, mis tuletatakse elementaaralgebra kursusest.

Nr. 1. Millega võrdub korrutis:

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[5]{5} \dots \sqrt[2^n]{5}.$$

Lahendus. Kirjutame iga teguri murdarvulise astendajaga astmena ja leiame astmete korrutise:

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{8}} \dots 5^{\frac{1}{2^n}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 5^{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}} = 5^{1 - \frac{1}{2^n}},$$

kus astendaja on arvutatud geomeetrilise progressiooni liikmete summa valemi järgi.

Nr. 2. Summeerida lõpmatu rida:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots$$

Lahendus. Rühmitades paariviisi liidetavad, saame geomeetrilise progressiooni.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} \right) + \left(\frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} \right) + \left(\frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} \right) + \dots = \\ & = \frac{13}{5^2} + \frac{13}{5^4} + \frac{13}{5^6} + \dots = \frac{13}{5^2} \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right) = \\ & = \frac{13}{5^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Nr. 3. Leida n liikme summa:

$$a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + na^n.$$

Lahendus. Antud ülesande taolised ülesanded lahendatakse järgmise meetodiga. Paneme tähele, et antud reas a astmete ees seisvad koefitsiendid $1, 2, 3, \dots, n$ moodustavad aritmeetilise progressiooni, kuid astmed $a, a^2, a^3, \dots, a^n$ moodustavad geomeetrilise progressiooni teguriga a .

Olgu S otsitav summa:

$$S = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + (n-1)a^{n-1} + na^n. \quad (I)$$

Korrutades mõlemad pooled a astmetest moodustatud geomeetrilise progressiooni teguriga a :

$$S \cdot a = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \dots + (n-1)a^n + na^{n+1} \quad (II)$$

ja lahutades võrduse (II) võrdusest (I), saame:

$$\begin{aligned} S - S \cdot a &= [a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + (n-1)a^{n-1} + na^n] - \\ &\quad - [a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \dots + (n-1)a^n + na^{n+1}]; \\ S(1-a) &= (a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) - na^{n+1}, \end{aligned}$$

sest igale liikmele peale a ja a^{n+1} tuli temaga sarnane liige.

Summa, mis on sulgudes, on geomeetiline progressioon teguriga a , seepärast saame:

$$S(1-a) = \frac{a-a^{n+1}}{1-a} - na^{n+1},$$

siit

$$S = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}.$$

Nr. 4. Summeerida lõpmatu rida:

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots,$$

kus

$$0 < x < 1.$$

Lahendus. Antud juhul x astmete ees seisvad koefitsiendid $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ moodustavad aritmeetilise progressiooni, kuid astmed

$$x^0, x^1, x^2, \dots, x^n, \dots$$

moodustavad geomeetrilise progressiooni teguriga x . Tähistame otsitava summa tähega S ja korrutame võrduse

$$S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots \quad (I)$$

mõlemad pooled x astmetest koosneva geomeetrilise progressiooni teguriga x :

$$S \cdot x = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \dots \quad (\text{II})$$

Lahutame võrduse (II) võrdusest (I):

$$\begin{aligned} S(1-x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \\ &= 1 + 2[x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots]. \end{aligned}$$

Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete summa, mis asetseb sulgudes, võrdub avaldisega $\frac{x}{1-x}$.

Järelikult

$$S(1-x) = 1 + \frac{2x}{1-x},$$

siit

$$S = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Nr. 5. Leida lõpmatu rea summa:

$$1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots,$$

kus

$$0 < x < 1.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{1-2x+3x^2-x^3}{(1-x)^2}.$$

Nr. 6. Summeerida lõpmatu rida:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$$

$$\text{Vastus: } S = 2.$$

Nr. 7. Tõestada, et

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \dots = 2.$$

Nr. 8. Tõestada, et

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{16}} \cdot 16^{\frac{1}{32}} \dots = 2.$$

Nr. 9. Summeerida lõpmatu rida:

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - \dots,$$

kus

$$0 < x < 1.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}.$$

Nr. 10. Summeerida lõpmatu rida:

$$x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \dots,$$

kus

$$0 < x < 1.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{x(3x+1)}{1-x^2}.$$

Nr. 11. Kirjutada geomeetriline progressioon, milles esimene liige $a_1 = 6$, viimane liige $b = 192$, liikmete arv on kuus.

$$\text{Vastus: } \div 6; 12; 24; 48; 96; 192.$$

Nr. 12. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, teades, et esimese ja teise summa on 15, kolmanda ja neljanda summa on 60.

Lahendus. Olgu otsitavad arvud: $\div u; uq; uq^2; uq^3$. Siis eelduse järgi on: $u + uq = 15$; $uq^2 + uq^3 = 60$.

Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} u(1+q) = 15 \\ uq^2(1+q) = 60 \end{cases}$$

Jagades teise võrrandi pooled esimese vastavate pooltega, saame $q = \pm 2$; kui võtta $q = 2$, siis $u = 5$ ja arvud on 5, 10, 20, 40; kui aga $q = -2$, siis $u = -15$, ja arvud on siis: -15; 30; -60; 120.

Nr. 13. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, teades, et äärmiste summa võrdub suurema, aga keskmiste summa võrdub väiksema lahendiga, mis on võrrandil

$$2^{x^2 - 65x + 1050,5} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vastus: } 8; 12; 18; 27.$$

Nr. 14. Leida geomeetriline progressioon, milles esimese seitsme liikme summa (S_7) võrdub $444\frac{1}{2}$ ja suhtub 2-se kuni 8-nda liikme (incl.) summasse nagu 1:2.

Lahendus. Andmete kohaselt on antud progressioon

$$u + uq + uq^2 + \dots + uq^7 + \dots$$

Geomeetrilise progressiooni liikmete summa arvutame valemi järgi

$$S_7 = u + uq + uq^2 + \dots + uq^6 = \frac{u - uq^7}{1 - q} = 444\frac{1}{2}.$$

Arvutame liikmete summa 2-sest kuni 8-nda liikmeni:

$$uq + uq^2 + \dots + nq^7 = \frac{uq - uq^8}{1 - q}.$$

Moodustame suhte

$$\frac{u(1 - q^7)}{1 - q} : \frac{uq(1 - q^7)}{1 - q} = 1 : 2; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2}; \quad q = 2.$$

Asetades leitud väärtuse $q = 2$ avaldisse S_7 , saame:

$$\frac{u(1 - q^7)}{1 - q} = 444 \frac{1}{2};$$

$$\frac{u(1 - 128)}{-1} = 444 \frac{1}{2}; \quad 127u = \frac{889}{2}; \quad u = \frac{7}{2}.$$

Otsitav progressioon on:

$$\div \frac{7}{2}; \quad 7; \dots$$

Nr. 15. Geomeetrilise progressiooni esimese kolme liikme summa on 21; kuid esimese nelja liikme summa on 45; leida see progressioon.

Vastus: 3,6.

Nr. 16. Leida esimese kolmekümne niisuguse paarituarvu summa, mis jagamisel 5-ga annab jäägis 1.

Lahendus. Arvude üldkuju, mis 5-ga jagades annavad jäägis 1, on $5k + 1$; võttes k väärtuseks 0, 1, 2, saame need arvud: 1; 6; 11; 16; 21; ... (eriti tuleb märkida, et jagades arvu 1 5-ga, saame jagatise 0; sest $1 = 0 \cdot 5 + 1$). Ülesande nõude järgi tuleb võtta sellest reast ainult paaritud arvud, s. o.

$\div 1; 11; 21; \dots$ Leiame:

$$u_{30} = u_1 + 29d = 291; \quad S_{30} = (1 + 291) \cdot 15 = 4380.$$

Nr. 17. Leida esimese saja niisuguse arvu summa, mis jagamisel 3-ga annavad jäägis 1.

Vastus: $S_{100} = 14\,950$.

Nr. 18. Leida kõikide sajast väiksemate 3-ga jaguvate arvude summa ruut.

Vastus: 1683^2 .

Nr. 19. Leida aritmeetiline progressioon, milles

$$S_n = 3n^2 + 4n.$$

Sellessamas progressioonis leida u_{10} , mitte arvutades ei esimest liiget ega vahet.

L a h e n d u s. Kui $S_n = 3n^2 + 4n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ puhul), siis

$$S_1 = u_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$$

(võttes $n = 1$);

$$S_2 = u_1 + u_2 = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 20$$

(võttes $n = 2$).

$$S_2 - S_1 = u_2 = 20 - 7 = 13;$$

järelikult otsitav progressioon on $\div 7; 13; 19; \dots$ Nüüd arvutame u_{10} . Oletades, et $n = 10$, saame:

$$S_{10} = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = 340; \text{ oletades, et } n = 9,$$

saame:

$$S_9 = 3 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 = 279.$$

Kümne liikme summa ja üheksa liikme summa vahe on

$$S_{10} - S_9 = 340 - 279 = 61,$$

see ongi otsitav kümnes liige.

Nr. 20. Leida aritmeetiline progressioon, milles $S_n = n^2$ iga-sugusel liikmete arvul n .

L a h e n d u s. Eelduse kohaselt mitme tahes liikme summa leitakse valemi $S_n = n^2$ järgi. Summa, mis sisaldab üht liiget, saame, kui selles valemis võtta $n = 1$, s. o.

$$S_1 = u_1 = 1^2 = 1.$$

Kahe esimese liikme summa leiame kui valemis võtta $n = 2$, s. o.

$$S_2 = u_1 + u_2 = 2^2 = 4.$$

Siit

$$u_2 = S_2 - S_1 = 4 - 1 = 3.$$

Sellepärast otsitav progressioon on $\div 1; 3; 5; \dots$, sest progressiooni vahe on 2.

Nr. 21. Leida S_8 aritmeetilises progressioonis, milles:

$$u_n = \frac{3n-1}{6}.$$

$$\text{Vastus: } S_8 = \frac{50}{3}.$$

Nr. 22. Leida liige u_m aritmeetilises progressioonis, milles:

$$S_n = pn + qn^2.$$

$$\text{Vastus: } u_m = 2qm + p - q.$$

Nr. 23. Leida aritmeetiline progressioon, milles $u_1 = 2$ ja esimese kümne liikme summa on $\frac{1}{3}$ kümne järgmise liikme summast.

Lahendus. Arvutame esimese kümne liikme summa:

$$S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \cdot 10 = 5(u_1 + u_{10}) = 5(2u_1 + 9d);$$

$$S_{10} = 5(4 + 9d).$$

Järgmise kümne liikme summa on:

$$S_{10}^I = (u_{11} + u_{12} + u_{13} + \dots + u_{20}) = \frac{u_{11} + u_{20}}{2} \cdot 10 =$$

$$= [(u_1 + 10d) + (u_1 + 19d)] \cdot 5 = 5(4 + 29d).$$

Ülesande tingimuste järgi saame võrrandi:

$$(4 + 9d) \cdot 5 = \frac{1}{3} (4 + 29d) \cdot 5,$$

kust $d = 4$. Otsitav progressioon on $\div 2; 6; 10 \dots$

Nr. 24. Arvutada aritmeetilise progressiooni vahe, milles $u_1 = 100$, teades, et tema esimese kuue liikme summa on viis korda suurem kuue järgmise liikme summast.

$$\text{Vastus: } d = -10.$$

Nr. 25. Arvutada esimene liige aritmeetilisele progressioonile vahega 4, teades, et esimese viie liikme summa on kolm korda väiksem viie järgmise liikme summast.

$$\text{Vastus: } u_1 = 2.$$

Nr. 26. Arvutada x võrrandist:

$$(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155.$$

$$\text{Vastus: } x = 1.$$

Summade arvutamisel tuleb mõnikord kasutada loomulikkude arvude astmete summade arvutamise valemeid. Loomulikkude arvude rea summa leitakse valemi järgi:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2},$$

nagu aritmeetilise progressiooni liikmete summa. Loomuliku arvu-rea arvude ruutude summa arvutatakse valemi järgi:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (\text{A})$$

Selle valemi tuletamine antakse elementaaralgebra kursuses. Matemaatikas kasutatakse tihti märki Σ , mis on summa tähiseks. Selgitame selle märgi tähendust rea näidetega. Olgu antud summa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Liidetava üldkuju on k^2 . Kasutades summeerimise märki kirjutatakse see summa üles järgmiselt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Võrduse vasak pool osutab, et summeeruvad arvud on k^2 , kus k saab järgemööda väärtused $1, 2, \dots, n$. See summa sisaldab n liidetavat, millised saame, asetades k asemel järjest kõik arvud 1 -st kuni n -ni.

Summa

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

võib üles kirjutada järgmiselt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

Tõepoolest, kui me k asemele asetame järgemööda väärtused $1, 2, 3, \dots, n$, ja saadud resultaadid kirjutame liidetavatena eelnevate juurde, siis saame antud esialgse summa. Summa

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1)$$

võib üles kirjutada järgmiselt:

$$\sum_{k=1}^n k(k + 1).$$

Summa

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n - 1)(2n + 1)$$

võib üles kirjutada selliselt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)(2k + 1).$$

Eelnevad näited osutavad, kuidas summa üleskirjutuselt arendatud kujul siirdutakse summa üleskirjutusele summeerimismärgi abil. Nüüd vaatame ümberpööratud ülesannet, kuidas summa üleskirjutuselt märgi Σ abil siirduda summale arendatud kujul:

Avaldis $\sum_{k=1}^{k=n} k(k + 3)$ tähendab summat:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3).$$

Üleskirjutus $\sum_{k=10}^{k=10} k^2(k+1)$ väljendab summat:
 $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \dots + 10^2 \cdot 11.$

Nüüd vaatleme summade arvutamise näiteid.

Nr. 27. Arvutada summa:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1).$$

Lahendus. Kasutades summeerimismärki, kirjutame antud summa teisel viisil. Saame:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k). \quad (I)$$

Nüüd kirjutame summa (I) arendatud kujul. Andes tähele k väärtused 1, 2, 3, ..., n , saame:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k=n} (k^2 + k) = \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + \dots + (n^2 + n) = \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{2n+1}{3} + 1 \right] = \\ &= \frac{n(n+1)2(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \end{aligned}$$

kus loomuliku arvurea arvude ruutude summa on arvutatud valemi (A) järgi.

Nr. 28. Arvutada summa:

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + 17^2 + \dots + (4n-3)^2.$$

Lahendus. Kirjutame, nagu eelnevas ülesandes, summa teisel kujul:

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + \dots + (4n-3)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (4k-3)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (16k^2 - 24k + 9). \quad (I)$$

Oletades, et $k=1, 2, 3, \dots, n$, kirjutame summa (I) arendatud kujul:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (16k^2 - 24k + 9) = (16 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 9) + \\ + (16 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 9) + (16 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 9) + \dots + \\ + (16n^2 - 24n + 9) =$$

[summeerime kõik esimesed liikmed ja toome sulgude ette 16; rühmitame kõik teised liikmed ja toome sulgude ette -24 ; rühmitame kõik kolmandad liikmed]

$$= 16(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 24(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \\ + \underbrace{(9 + 9 + \dots + 9)}_{n \text{ liidetavat}} = \\ = 16 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 24 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 9n.$$

Nr. 29. Leida summa:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3).$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

Nr. 30. Leida summa:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Nr. 31. Arvutada loomulikkude arvude kuupide summa

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Näpunäide. Võtta samasus

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

ja võtta $x=1, 2, 3, \dots, n$, kirjutada n võrdust.

Liita kõikide nende võrduste vastavad pooled, koondada sarnased liikmed ja arvutada S_3 .

$$\text{Vastus: } S_3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2.$$

Nr. 32. Leida summa:

$$1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n+1)^3.$$

Lahendus:

$$1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (4k+1)^3 =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{k=n} (4^3 k^3 + 3 \cdot 4^2 k^2 + 3 \cdot 4 \cdot k + 1) = \\
 & = (4^3 \cdot 0^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 4 \cdot 0 + 1) + \\
 & + (4^3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1) + \\
 & + (4^3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1) + \\
 & + (4^3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 1) + \dots + \\
 & + (4^3 \cdot n^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot n^2 + 3 \cdot 4n + 1) =
 \end{aligned}$$

[rühmitame eraldi esimesed, teised, kolmandad ja neljandad liikmed ja toome ühisteguri sulgude ette]

$$\begin{aligned}
 & = 4^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 3 \cdot 4^2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \\
 & + 3 \cdot 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1 \text{ korda}} = \\
 & = 64 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + 48 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 12 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\
 & = (n+1)(2n+1)(8n^2 + 12n + 1).
 \end{aligned}$$

Nr. 33. Leida summa:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n \cdot (n+1)^2.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}.$$

Nr. 34. Leida summa:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3.$$

$$\text{Vastus: } S = n(n+1)(2n^2 - 2n + 1) - n.$$

Nr. 35. Arvutada summa:

$$1 \cdot n^2 + 2(n-1)^2 + \dots + k(n-k+1)^2 + \dots + n \cdot 1^2.$$

$$\text{Vastus: } \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Nr. 36. Arvutada summa:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n.$$

$$\text{Vastus: } S = -n.$$

Nr. 37. Arvutada summa:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2.$$

$$\text{Vastus: } S = -\frac{n(n+1)}{2}, \text{ kui } n \text{ on paarisarv.}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ kui } n \text{ on paarituurv.}$$

Nr. 38. Arvutada summa:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1)n^2.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}.$$

Sageli saab lõplike ridade summeerimist teostada lõplike vahede meetodiga. Peatume lühidalt selle meetodi vaatlemisel. On teada, et kui on antud rea üldine liige, siis võib üles kirjutada terve rea, võttes $n=1, 2, 3, \dots, n$. Niiviisi rea liikmed on funktsiooni $f(n)$ väärtusteks, kus $n=1, 2, 3, \dots, n$. Näiteks kui $f(n) = n(n+1)$, siis on rida niisuguse kujuga:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1).$$

Nüüd siirdume meetodi sisu juurde. Olgu tarvis leida summa

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n).$$

Valime funktsiooni $F(k)$, mis rahuldab tingimust:

$$F(k+1) - F(k) = f(k).$$

Kui niisugune funktsioon $F(k)$ on leitud, võib tõestada järgmise teoreemi:

kui

$$f(k) = F(k+1) - F(k),$$

siis

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = F(n+1) - F(1).$$

Tõestus. Eelduse järgi

$$f(1) = F(2) - F(1)$$

$$f(2) = F(3) - F(2)$$

$$f(3) = F(4) - F(3)$$

$$\dots$$

$$f(n) = F(n+1) - F(n)$$

Liidame saadud võrduste pooled ja koondame sarnased liikmed:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = F(n+1) - F(1).$$

Teoreem on tõestatud.

Vaatleme mõningaid näiteid mainitud meetodi kasutamise kohta.

Nr. 39. Leida summa:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x.$$

Lahendus. Antud juhul

$$f(k) = \cos (2k-1)x, \quad F(k) = \frac{\sin (2k-2)x}{2 \sin x}.$$

Tõestame, et $F(k)$ rahuldab tingimust

$$f(k) = F(k+1) - F(k).$$

Tõepoolest

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{\sin 2kx}{2 \sin x}; \\ F(k+1) - F(k) &= \frac{\sin 2kx}{2 \sin x} - \frac{\sin (2k-2)x}{2 \sin x} = \\ &= \frac{2 \cos (2k-1)x \cdot \sin x}{2 \sin x} = \cos (2k-1)x = f(k). \end{aligned}$$

Nüüd võib kasutada summa arvutamiseks tõestatud teoreemi:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x &= \\ = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) &= F(n+1) - F(1) = \\ = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} - \frac{\sin (2-2)x}{2 \sin x} &= \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}. \end{aligned}$$

Nr. 40. Leida summa:

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

kus

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Lahendus. I variant. Antud juhul

$$f(k) = a + bk + ck^2.$$

Määrame funktsiooni $F(k)$. See peab olema 3-nda astme hulki:

$$F(k) = Ak^3 + Bk^2 + Ck.$$

Arvutame koefitsiendid:

$$\begin{aligned} F(k+1) - F(k) &= \\ = A(k+1)^3 + B(k+1)^2 + C(k+1) - Ak^3 - Bk^2 - Ck &= \\ = 3Ak^2 + 3Ak + A + 2Bk + B + C = a + bk + ck^2 &= f(k). \end{aligned}$$

Võrdleme ühesuguste k astmete koefitsiente ja saame:

$$\left. \begin{aligned} c &= 3A \\ b &= 3A + 2B \\ a &= A + B + C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{c}{3}; \quad B = \frac{b-c}{2}; \\ C &= \frac{6a-3b+c}{6}. \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{c}{3}x^3 + \frac{b-c}{2}x^2 + \frac{6a-3b+c}{6}x.$$

Arvutame summa:

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) &= f(0) + F(n) - F(1) = \\ &= a + \frac{c}{3}n^3 + \frac{b-c}{2}n^2 + \frac{6a-3b+c}{6}n - \frac{c}{3} - \frac{b-c}{2} - \\ &\quad - \frac{6a-3b+c}{6} = a + an - a + b\frac{n^2-n}{2} + c\frac{2n^3-3n^2+n}{2 \cdot 3} = \\ &= an + b\frac{n(n-1)}{2} + c\frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

II variant.

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) &= a + (a+b+c) + \\ &\quad + (a+2b+2^2c) + (a+3b+3^2c) + \dots + \\ &\quad + [a+b(n-1)+c(n-1)^2] = \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ korda}} + \\ &\quad + b[1+2+3+\dots+(n-1)] + c[1^2+2^2+3^2+\dots+ \\ &\quad + (n-1)^2] = an + b\frac{n(n-1)}{2} + c\frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

Nr. 41. Leida summa:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin (n-1)x.$$

Näpunäide. $f(k) = \sin kx$. Kasutades koosinuste vahe valemit, valime funktsiooni:

$$F(k) = -\frac{\cos \frac{(2k-1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n-1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Nr. 42. Leida summa:

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos (n-1)\alpha.$$

Näpunäide.

$$f(k) = \cos (k-1)\alpha.$$

Kasutades siinuste vahe valemit, valime funktsiooni:

$$F(k) = \frac{\sin \frac{2x-3}{2} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Vastus: } S = \frac{\cos \frac{n-1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Nr. 43. Leida summa:

$$\arctg \frac{x}{1+1 \cdot 2x^2} + \arctg \frac{x}{1+2 \cdot 3x} + \dots + \arctg \frac{x}{1+n(n+1)x^2}; \quad x > 0.$$

Näpunäide:

$$f(k) = \arctg \frac{x}{1+k(k+1)x^2}.$$

Kasutades valemit

$$\arctg x - \arctg y = \arctg \frac{x-y}{1+xy},$$

leiame funktsiooni

$$F(k) = \arctg kx.$$

$$\text{Vastus: } S = \arctg \frac{nx}{1+(n+1)x^2}.$$

Nr. 44. Arvutada summa:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \arctg \frac{2k}{2+k^2+k^4}.$$

Näpunäide. Funktsiooni $F(k)$ määramiseks on tarvis kasutada ülesande nr. 43 näpunäites antud valemit, saame:

$$F(k) = \arctg (k^2 - k + 1).$$

$$\text{Vastus: } S = \arctg (n^2 + n + 1) - \frac{\pi}{4}.$$

§ 6. Logaritmid.

Definitsioon. Arvu $N > 0$ logaritmi alusel $a > 0$ nimeatakse niisugust astendajat, millega tuleb astendada alus a , et saada antud arv N . Logaritmi tähistatakse järgmiselt: $\log_a N = x$. Logaritmi definitsioon antakse peaaegu alati õigesti, kuid paljud ei saa aru sellest definitsioonist. Seoses sellega on tarvilik vaa-

delda rida näiteid, mis on seotud definitsiooniga. Lahendamisel tuleb arvestada, et definitsiooni järgi on $a^{\log_a N} = N$.

Logaritmi definitsioonist nähtub, et logaritmitav arv peab olema positiivne, s. o. $\log_a N$ omab mõtet ainult siis, kui $N > 0$. Kui logaritmitavana kasutatakse muutuva väärtuse sümbolit, siis on igakord tarvis täpsustada, milline on muutuja võimalik muutumise piirkond, et logaritm oleks arvu tähendus. Näiteks: 1) avaldisel $\log(x-1)$ on mõte ainult nende x väärtuste puhul, kus $x-1 > 0$, s. o. $x > 1$. Väärtusel $x \leq 1$ avaldis $\log(x-1)$ ei oma mõtet. 2) Avaldisel $\log(\sin x)$ on arvu tähendus nende x väärtuste puhul, kus $\sin x > 0$, s. o. väärtuste puhul:

$$x = t + 2k\pi, \text{ kus } 0 < t < \pi \text{ ja } k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$$

Nr. 1. Millega võrdub avaldis $64^{\frac{2}{3} \log_{64} 27}$?

Lahendus. On antud aste, mille alus on 64. Astendajas esineb logaritm alusel 64. See annab meile võimaluse teisendada antud avaldist nii, et siin esineks aste $64^{\log_{64} 27}$.

Saame:

$$64^{\frac{2}{3} \log_{64} 27} = (64^{\log_{64} 27})^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = 9.$$

Nr. 2. Millega võrdub avaldis $81^{\log_{243} 32}$?

Lahendus. Antud avaldist tuleb teisendada nii, et astme alus võrduks logaritmi alusega. Selleks peab arvu 81 esitama arvu 243 astmena, s. o. leida $x = \log_{243} 81$. Definitsiooni järgi $243^x = 81$; $3^{5x} = 3^4$; $5x = 4$;

$$x = \frac{4}{5}. \text{ Niisiis } 81 = 243^{\frac{4}{5}}.$$

Asetades leitud väärtuse antud avaldisse 81 asemele, saame:

$$(243^{\frac{4}{5}})^{\log_{243} 32} = 243^{\frac{4}{5} \log_{243} 32} = (243^{\log_{243} 32})^{\frac{4}{5}} = 32^{\frac{4}{5}} = 16,$$

sest definitsiooni järgi $243^{\log_{243} 32} = 32$.

Nr. 3. Arvutada avaldis:

$$\frac{6 \sqrt[24]{x^2 + 1}}{2 \log_8(x^2 + 1)}$$

Lahendus. Antud murru nimetajas esineb aste, mille alus on 2, ja astendajas esineb logaritm alusel 8. Teisendame astme aluse nii, et ta oleks arvu 8 astmeks.

Saame:

$$\frac{\frac{24 \sqrt[6]{x^2+1}}{(8^3)^{\frac{1}{\log_8(x^2+1)}}}}{2} = \frac{24 \sqrt[6]{x^2+1}}{8^{\frac{1}{\log_8(x^2+1)}}} = \frac{24 \sqrt[6]{x^2+1}}{(8^{\log_8(x^2+1)})^{\frac{1}{6}}} = \frac{24 \sqrt[6]{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{1}{6}}} = 24.$$

Nr. 4. Leida avaldiste väärtused:

a) $3^{\log_3 2}$; b) $7^{\log_7 0,3}$; c) $a^{\log_a b}$.

Vastus: 2; 0,3; b .

Nr. 5. Arvutada avaldise väärtus:

$$x = 10^{1 - \log \frac{5}{2}}.$$

Vastus: $x = 4$.

Nr. 6. Millega võrdub $125^{\log_{25} 16}$?

Vastus: 64.

Nr. 7. Leida avaldiste väärtused¹:

a) $10^{3 \log 2}$; b) $5^{2 \log_5 3}$; c) $3^{\log_{27} 8}$; d) $8^{\frac{4}{3} \log_{16} 3}$.

Vastus: 8; 9; 2; 3.

Nr. 8. Leida avaldise väärtus:

$$2^{\log_4 [(2 - \sqrt{3})^2]} + 3^{\log_9 [(2 + \sqrt{3})^2]}.$$

Vastus: 4.

Nr. 9. Arvutada avaldise väärtus:

$$\frac{5^{\log_{25} [(x^2 - 1)^4]} \cdot (x^2 - 1)}{3^{\log_9 [(x - 1)^6]} \cdot 7^{\log_{49} [(x + 1)^6]}}$$

Vastus: 1.

Nr. 10. Leida avaldise väärtus:

$$\frac{1}{2(x+3)^3} \left[8^{\log_2 \sqrt[3]{x}} + 3 \right]^3.$$

Vastus: $\frac{1}{2}$.

Nr. 11. Arvutada avaldise väärtus:

$$\frac{3}{7} [1 + 4^{\log_2 5}]^{\log_{26} 7}.$$

Vastus: 3.

¹ Sümbol $\log$ aluse näitamiseta tähendab logaritmi alusega 10.

Nr. 12. Leida avaldise väärtus:

$$[5^{\log_{25} 9} + 3^{\log_9 16}]^{2\log_7 5}.$$

Vastus: 25.

Algebra kursuses tuletatakse võrdus

$$\log_{a_1} A = \log_a A \cdot \frac{1}{\log_a a_1},$$

mille abil võib arvutada arvu A logaritmi alusel a_1 , kui on teada selle arvu logaritm alusel a . Tegurit $\frac{1}{\log_a a_1}$ nimetatakse mooduliks üleminekul logaritmidelt alusel a logaritmidele alusel a_1 .

Allpool antud ülesannete lahendamisel peale mooduli kasutamist üleminekul ühelt logaritmide süsteemilt teisele tuleb meeles pidada veel järgmist.

Olgu näiteks logaritmide süsteemis alusega 14 antud $\log_{14} 7 = a$, siis

$$\log_{14} 2 = \log_{14} \frac{14}{7} = \log_{14} 14 - \log_{14} 7 = 1 - a;$$

samuti, kui $\log_{30} 2 = a$ ja $\log_{30} 3 = b$, siis

$$\log_{30} 5 = \log_{30} \frac{30}{2 \cdot 3} = \log_{30} 30 - \log_{30} 2 - \log_{30} 3 = 1 - a - b.$$

Üldiselt, kui logaritmide aluse a saab lahutada algtegureiks $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ ja kui on antud $k-1$ teguri logaritmid, siis k -nda teguri logaritm leitakse järgmiselt:

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k; \log_a a = \log_a a_1 + \log_a a_2 + \dots + \log_a a_k,$$

siit

$$\log_a a_k = 1 - [\log_a a_1 + \log_a a_2 + \dots + \log_a a_{k-1}].$$

Nr. 13. Antud on:

$$\log_{14} 7 = a; \log_{14} 5 = b;$$

leida $\log_{35} 28$.

Lahendus. Saame:

$$\log_{35} 28 = \log_{14} 28 \cdot \frac{1}{\log_{14} 35}. \quad (I)$$

Kõigepealt arvutame $\log_{14} 28$. Saame:

$$\begin{aligned} \log_{14} 28 &= \log_{14} (14 \cdot 2) = \log_{14} \left(14 \cdot \frac{14}{7} \right) = \log_{14} 14 + \\ &+ \log_{14} 14 - \log_{14} 7 = 1 + 1 - a = 2 - a, \end{aligned}$$

siis arvutame

$$\log_{14} 35 = \log_{14} 7 + \log_{14} 5 = a + b.$$

Asetades leitud väärtused võrdusse (I) leiame:

$$\log_{35} 28 = \frac{2-a}{a+b}.$$

Nr. 14. Arvutada $\log_4 1,2$ teades, et $\log 2 = a$ ja $\log 3 = b$.

Lahendus. Saame $\log_4 1,2 = \log 1,2 \cdot \frac{1}{\log 4}$.

Arvutame:

$$\begin{aligned}\log 1,2 &= \log \frac{12}{10} = \log 12 - \log 10 = \log 3 + 2 \log 2 - 1 = \\ &= b + 2a - 1; \quad \log 4 = 2 \log 2 = 2a.\end{aligned}$$

Lõpuks saame:

$$\log_4 1,2 = \frac{2a+b-1}{2a}.$$

Nr. 15. Arvutada $\log_{25} 50$ teades, et $\log_{10} 64 = a$.

$$\text{Vastus: } \frac{12-a}{12-2a}.$$

Nr. 16. On antud $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Leida $\log_{30} 8$.

$$\text{Vastus: } 3(1-a-b).$$

Nr. 17. On antud $\log_{24} 3 = a$; $\log_{24} 5 = b$. Leida $\log_{30} 12$.

$$\text{Vastus: } \frac{2+a}{1+2a+3b}.$$

Nr. 18. Arvutada $\log_{25} 12$ teades, et $\log_5 4 = a$ ja $\log_5 3 = b$.

$$\text{Vastus: } \frac{a+b}{2}.$$

Nr. 19. Arvutada $\log_9 20$ teades, et $\log 2 = a$ ja $\log 3 = b$.

$$\text{Vastus: } \frac{1+a}{2b}.$$

Nr. 20. Arvutada $\log_5 6$ teades, et $\log 2 = a$, $\log 3 = b$.

$$\text{Vastus: } \frac{a+b}{1-a}.$$

Nr. 21. Olgu $a^2 + b^2 = 7ab$. Tõestada, et

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b).$$

Lahendus. Lisades võrduse pooltele $2ab$ saame:

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= 9ab; \quad (a+b)^2 = 3^2 ab; \quad 2 \log(a+b) = 2 \log 3 + \\ &+ \log a + \log b; \quad 2[\log(a+b) - \log 3] = \log a + \log b;\end{aligned}$$

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b).$$

Nr. 22. Tõestada, et

$$\frac{\log_a n}{\log_{am} n} = 1 + \log_a m.$$

Lahendus. Asendame nimetajas logaritmi alusel am logaritmidega alusel a .

Saame:

$$\frac{\log_a n}{\log_{am} n} = \frac{\log_a n}{\log_a n \cdot \frac{1}{\log_a(am)}} = \log_a(am) = \log_a a + \log_a m = 1 + \log_a m.$$

Nr. 23. Tõestada, et

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

Nr. 24. Lihtsustada avaldis

$$\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}.$$

Vastus: $\log_b a$.

Nr. 25. Antud on $a^2 + b^2 = c^2$. Tõestada:

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Nr. 26. Antud on

$$y = 10^{\frac{1}{1 - \log x}}; \quad z = 10^{\frac{1}{1 - \log y}}$$

(logaritmid on võetud alusel 10).

Tõestada:

$$x = 10^{\frac{1}{1 - \log z}}.$$

§ 7. Võrratused.

Ülesannete lahendamisel võrratuste kohta on tarvis silmas pidada võrratuste põhiomadusi.

1. Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$.
2. Kui $a > b$, siis $a + m > b + m$, kus m on mistahes reaalarv.
3. Kui $a > b$, siis $am > bm$, kui $m > 0$ ja $am < bm$, kui $m < 0$.
4. Kui $a > b$ ja $ab > 0$, siis $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, kui $ab < 0$.
5. Kui $a > b > 0$, siis $a^x > b^x$, kui $x > 0$.
6. Kui $a > 1$ ja $\alpha > \beta > 0$, siis $a^\alpha > a^\beta$;
kui aga $0 < a < 1$ ja $\alpha > \beta > 0$, siis $a^\alpha < a^\beta$.

7. Kui $A > B > 0$ ja $a > 1$, siis $\log_a A > \log_a B$.

8. Kui $A > B > 0$ ja $C < a < 1$, siis $\log_a A < \log_a B$.

Eespool nimetatud omaduste tõestuste üle lugege elementaar-algebra õpikust või sooritage nad iseseisvalt.

Nr. 1. Näidata, et

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Lahendus. Me võime kirjutada:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Liites nende võrratuste vastavad pooled saame:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} &> \frac{1}{\sqrt{n}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Nr. 2. Näidata, et

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$

kus n on positiivne täisarv.

Nr. 3. Olgu n ja p positiivsed täisarvud

$$(n \geq 1; p \geq 1).$$

Tõestada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} &< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}. \end{aligned}$$

Lahendus. Kerge on näidata, et:

$$a) \frac{1}{(n+k+1)(n+k)} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)};$$

$$b) \frac{1}{(n+k+1)(n+k)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1};$$

$$c) \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}.$$

Siit järeldub:

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}.$$

Nr. 9. Näidata, et tähtede positiivsetel väärtustel:

$$1) (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) > 4;$$

$$2) (a^3 + b^3) > a^2b + ab^2;$$

$$3) x + \frac{1}{x} > 2.$$

Nr. 10. Kui a , b ja c on kolmnurga küljed, siis

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc).$$

Nr. 11. Olgu $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; n on positiivne täisarv.

1) Tõestada, et

$$u_{n+1} > u_n.$$

2) Tõestada, et

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Nr. 12. Tõestada:

$$2 > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \dots > \sqrt[n-1]{n-1} > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{n+1} > \dots$$

Lahendus. Võrratus on tõestatud, kui näitame, et

$$\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n-1]{n}} < 1 \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

Meil on:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n-1]{n}} &= \sqrt[n(n-1)]{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}} = \sqrt[n(n-1)]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1}} = \\ &= \sqrt[n(n-1)]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1}} < \sqrt[n(n-1)]{\frac{3}{n+1}} < 1, \text{ kui } n > 2, \end{aligned}$$

sest ülesande nr. 11 põhjal on $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Siit järeldub:

$$\sqrt[n-1]{n-1} > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{n+1}.$$

Nr. 13. Tõestada, et

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \dots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > \dots$$

Nr. 14. Tõestada, et

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (a > 0; b > 0).$$

Lahendus. Võime kirjutada:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

Siit:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled avaldisega $3(a+b)$ ning saame:

$$3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a+b); \quad 3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2.$$

Lisame võrratuse mõlemale poolele $a^3 + b^3$, saame:

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Siit:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Nr. 15. Tõestada, et

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{b},$$

kui $a \geq b$.

Nr. 16. Tõestada, et

$$(a+c)(b+d) \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}.$$

Nr. 17. Tõestada võrratus:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc + 1 > 0.$$

Nr. 18. Näidata, et kui

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_3}{b_3} \geq \dots \geq \frac{a_n}{b_n}$$

ja kõik b_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) on ühe ja sellesama märgiga arvud, siis

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$$

väärtus on vähima ja suurima ülalkirjutatud suhte väärtuste vahel.

Nr. 19. Lahendada võrratus:

$$\frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}.$$

Lahendus. Kanne kõik võrratuse liikmed vasakule poolele ja viime ühisele nimetajale, saame:

$$\frac{2mx + 20x - 5m + 10}{12(m-2)} < 0.$$

Antud juhul ei saa nimetajat ära jätta, sest me ei tea tema märki.

I. Oletame, et $m - 2 > 0$; korrutades võrratuse mõlemad pooled positiivse arvuga $12(m - 2)$, saame:

$$2x(m + 10) - 5m + 10 < 0; \quad 2x(m + 10) < 5(m - 2).$$

Et $m > 2$, siis $m + 10 > 0$ ja järelikult

$$x < \frac{5(m-2)}{2(m+10)}.$$

II. Olgu $m - 2 < 0$; korrutades võrratuse mõlemad pooled negatiivse arvuga $12(m - 2)$ ja pöörates võrratuse märgi, saame:

$$2x(m + 10) - 5m + 10 > 0; \quad 2x(m + 10) > 5(m - 2).$$

a) Kui $m < -10$, siis tegur $m + 10$ on negatiivne ja me saame:

$$x < \frac{5(m-2)}{2(m+10)}.$$

b) Kui $-10 < m < 2$, siis tegur $m + 10$ on positiivne ja me saame:

$$x > \frac{5(m-2)}{2(m+10)}.$$

c) Kui $m = -10$, siis võib võrratuse kirjutada järgmiselt:

$$2x \cdot 0 > -60.$$

See võrratus on õige igal x väärtusel.

Niisiis

$$\text{I.} \quad m > 2; \quad x < \frac{5(m-2)}{2(m+10)}.$$

$$\text{II.} \quad m < 2 \quad \begin{cases} m < -10; & x < \frac{5(m-2)}{2(m+10)} \\ -10 < m; & x > \frac{5(m-2)}{2(m+10)} \end{cases}$$

$m = -10$, võrratus on õige igal x väärtusel.

Nr. 20. Lahendada võrratused:

$$\text{a) } \frac{x}{m} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4m};$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(m+1)}.$$

$$\text{Vastus: a) } \left\{ \begin{array}{l} m > 0 \left\{ \begin{array}{l} m < \frac{1}{2}, \quad x > -\frac{2(m-1)}{3(1-2m)} \\ m > \frac{1}{2}, \quad x < -\frac{2(m-1)}{3(1-2m)} \\ m = \frac{1}{2}, \quad \text{võrratust ei rahulda} \\ \quad \quad \quad \text{ükski } x \text{ väärtus.} \end{array} \right. \\ m < 0, \quad x < -\frac{2(m-1)}{3(1-2m)}. \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} m < -1, \quad x < \frac{4m-5}{2(2-m)}. \\ m > -1 \left\{ \begin{array}{l} m < 2, \quad x > \frac{4m-5}{2(2-m)} \\ m > 2, \quad x < \frac{4m-5}{2(2-m)} \\ m = 2, \quad \text{võrratus ei kehti} \\ \quad \quad \quad \text{ühelgi } x \text{ väärtusel.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nr. 21. Lahendada võrratus:

$$(x-3)^2(5x+2)^3(-x+2)(-3x+1) > 0.$$

Lahendus. Korrutis

$$(x-3)^2(5x+2)^2$$

on positiivne igal x väärtusel, välja arvatud $x=3$ ja $x=-\frac{2}{5}$, ja seepärast võib võrratuse vasaku poole jagada selle korrutisega

$$(x \neq 3, \quad x \neq -\frac{2}{5}).$$

Saame:

$$(5x+2)(x-2)(3x-1) > 0.$$

Korrutise märk sõltub tegurite $(5x+2)$, $(x-2)$ ja $(3x-1)$ märkidest, kuid nende tegurite märgid sõltuvad x väärtuse asendist nende tegurite nullkohtade suhtes ja nimelt arvude

$$-\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{3} \text{ ja } 2 \text{ suhtes.}$$

Asetades nullkohad kasvavas järjekorras jaotame arvutelje järgmisteks vahemikeks:

$$-\infty \dots -\frac{2}{5} \dots \frac{1}{3} \dots 2 \dots +\infty.$$

Kui x kuulub vahemikku $(-\infty; -\frac{2}{5})$, on kõik tegurid negatiivsed ja korrutis on samuti negatiivne. Kui x kuulub vahemikku $(-\frac{2}{5}; \frac{1}{3})$,

on esimene tegur positiivne, kaks ülejäänud on aga negatiivsed, ja kõikide tegurite korrutis on positiivne.

Kui x kuulub vahemikku $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$, on esimesed kaks tegurit positiivsed, kolmas on negatiivne ja nende tegurite korrutis on negatiivne.

Kui x kuulub vahemikku $(2; +\infty)$, on kõik tegurid positiivsed ja seepärast nende korrutis on positiivne. Resultaadid võime üles kirjutada järgmise tabeli kujul:

Vahemikud	Tegurite ja korrutise märgid igas vahemikus				
	$5x+2$	$x-2$	$3x-1$	P (korrutis)	järeldus
$-\infty \dots -\frac{2}{5}$	—	—	—	—	
$-\frac{2}{5} \dots \frac{1}{3}$	+	—	—	+	$-\frac{2}{5} < x < \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} \dots 2$	+	+	—	—	
$2 \dots +\infty$	+	+	+	+	$x > 2$

Niisiis antud võrratus on õige, kui

$$-\frac{2}{5} < x < \frac{1}{3} \text{ ja } 2 < x \text{ (kui seejuures } x \neq 3).$$

Nr. 22. Lahendada võrratused:

a) $(2x+1)(x-5)(x+3)(3x-4) < 0;$

b) $(-3x+2)(x+1)(4x-5) < 0,$

Vastus: a) $-3 < x < -\frac{1}{2}; \frac{4}{3} < x < 5.$

b) $x < -1; \frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}.$

Nr. 23. Lahendada võrratus:

$$\frac{(4x^2-1)(x+2)^2}{x^3(x+1)(x-2)^5} > 0.$$

Lahendus. Tegur $(x+2)^2$ on positiivne igal x väärtusel (kui aga $x \neq -2$); tegur x^2 on positiivne igal x väärtusel ($x \neq 0$); tegur $(x-2)^4$ on positiivne igasugusel arvust 2 erineval x väärtusel.

tusel ($x \neq 2$) ja seepärast võime võrratuse vasaku poole korru-
tada avaldisega $x^2(x-2)^4$ ja jagada avaldisega $(x+2)^2$. Saame:

$$\frac{4x^2-1}{x(x+1)(x-2)} > 0.$$

Jagatis võrratuse vasakul poolel on sellesama märgiga, mis lugeja
ja nimetaja korrutiski; seepärast antud võrratuse lahenduse võib
asendada võrratuse

$$x(x+1)(x-2)(2x-1)(2x+1) > 0 \text{ lahendusega.}$$

Koostame tabeli ja leiame lahendused.

Vahemikud	Tegurite ja korrutise märgid igas vahemikus						
	$x+1$	$2x+1$	x	$2x-1$	$x-2$	korrutis	järeldus
$-\infty \dots -1$	—	—	—	—	—	—	
$-1 \dots -\frac{1}{2}$	+	—	—	—	—	+	$-1 < x < -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} \dots 0$	+	+	—	—	—	—	
$0 \dots \frac{1}{2}$	+	+	+	—	—	+	$0 < x < \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \dots 2$	+	+	+	+	—	—	
$2 \dots +\infty$	+	+	+	+	+	+	$x > 2$

Võrratus on rahuldatud, kui

$$-1 < x < -\frac{1}{2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad x > 2.$$

Nr. 24. Lahendada võrratused:

a) $\frac{x(x+2)}{x^2-1} > 0;$

b) $\frac{-2x+3}{(3x+1)(x-4)} < 0.$

Vastus: a) $x < -2$; $-1 < x < 0$; $x > 1$.

b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$; $x > 4$.

Nr. 25. Lahendada võrratus:

$$\frac{x-2}{2x+3} > 1.$$

Lahendus. Kanne ühe vasakule poolele ja leiame ühise nimetaja.

$$\frac{x-2}{2x+3}-1>0; \frac{x-2-2x-3}{2x+3}>0; \frac{-(x+5)}{2x+3}>0; \frac{x+5}{2x+3}<0.$$

Viimane võrratus on ekvivalentne võrratusega

$$(x+5)(2x+3)<0.$$

Võrratus on õige, kui

$$-5 < x < -\frac{3}{2}.$$

Nr. 26. Lahendada võrratused:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x+1}-3<0;$$

$$\text{b) } \frac{2}{x-1}<\frac{5}{2x-1};$$

$$\text{c) } \frac{-4}{3x+1}>\frac{3}{2-x}.$$

Vastus: a) $x < -2$; $x > -1$.

$$\text{b) } \frac{1}{2} < x < 1; x > 3.$$

$$\text{c) } -\frac{11}{5} < x < -\frac{1}{3}; x > 2.$$

Nr. 27. Lahendada võrratus:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0.$$

Lahendus. Lahutades tegureiks lugeja ja nimetaja, saame:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)}>0.$$

Viimane võrratus on ekvivalentne võrratusega:

$$(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)>0.$$

Võrratus on õige, kui

$$x < -3; -2 < x < +2; x > 3.$$

Nr. 28. Lahendada võrratused:

$$\text{a) } \frac{x^2-3x+1}{x^2-1}>1;$$

$$\text{b) } \frac{x+2}{x-1}>\frac{x+4}{x-3};$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{3x+1}<\frac{x-2}{2x-1}.$$

$$\text{Vastus: a) } x < -1; \frac{2}{3} < x < 1.$$

$$\text{b) } x < -\frac{1}{2}; 1 < x < 3.$$

$$\text{c) } x < -\frac{1}{3}; 0 < x < \frac{1}{2}; x > 8.$$

Nr. 29. Lahendada võrratus:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0.$$

Lahendus. Leides antud võrratuses kõigi liikmete ühise nimetaja ja lihtsustades lugeja, saame:

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 0.$$

Võrratus on rahuldatud, kui $x < -3$; $-2 < x < -1$ ja $x > 1$.

Nr. 30. Lahendada võrratused:

$$\text{a) } \frac{2}{3x+1} > \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1};$$

$$\text{b) } \frac{1}{x(x-1)(x+2)} > \frac{1}{x^2(x+3)}.$$

$$\text{Vastus: a) } -3 < x < -1; -\frac{1}{3} < x < 0; x > 1.$$

$$\text{b) } x < -3; -2 < x < -1; x > 1.$$

Võrratuste lahendamisel tuleb sageli kasutada lauset, mida peab tõestama: kui ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ diskriminant $b^2 - 4ac$ on negatiivne, siis igal reaalarvulisel x väärtusel ühtib selle kolmliikme väärtuse märk koefitsiendi a märgiga.

Nr. 31. Lahendada võrratus:

$$3(m+1)x^2 - 6(m^2 + m + 1)x + 7(m^3 - 1) < 0.$$

Lahendus. Antud kolmliikme diskriminant

$$\Delta = 36(m^2 + m + 1)^2 - 84(m+1)(m^3 - 1),$$

ehk

$$\begin{aligned} \Delta &= 12(m^2 + m + 1)[3(m^2 + m + 1) - 7(m^3 - 1)] = \\ &= 12(m^2 + m + 1)(-4m^3 + 3m + 10). \end{aligned}$$

Tegur $(m^2 + m + 1)$ on alati positiivne, sest kolmliikmel $m^2 + m + 1$ ei ole reaalarvulisi nullkohti. Seetõttu diskriminandi Δ märk ühtib kolmliikme

$$(-4m^3 + 3m + 10)$$

märgiga, millel on nullkohad 2 ja $-\frac{5}{4}$. Vaatleme kõiki võimalikke juhtumeid:

a) kui $m < -\frac{5}{4}$ või kui $m > 2$, siis kolmliikmel

$$(-4m^2 + 3m + 10)$$

on oma esimese liikme märk, s. o. ta on negatiivne. Järelikult Δ on negatiivne, seega antud võrratuse vasakul poolel seisev kolmeliige ei oma reaalarvulisi nullkohti; antud võrratuse vasaku poole märk ühtib oma esimese koefitsiendi $m + 1$ märgiga. Kui $m < -\frac{5}{4}$, siis $m + 1$ on negatiivne, sel korral antud võrratus on õige, ükskõik milline on x väärtus. Kui $m > 2$, siis $m + 1 > 0$; antud võrratus ei ole õige ühelgi x väärtusel.

b) Kui $-\frac{5}{4} < m < 2$, siis Δ on positiivne ja antud võrratuse vasakul poolel seisval kolmliikmel on kaks erinevat nullkohta

$$x_1 \text{ ja } x_2 \text{ } (x_1 < x_2).$$

Kui $m + 1 < 0$, siis võrratus on õige, kui $x < x_1$ või kui $x > x_2$. Kui $m + 1 > 0$, siis võrratus on õige, kui $x_1 < x < x_2$.

c) $m = -\frac{5}{4}$ korral on antud võrratus õige igasugusel x väärtusel, välja arvatud $x = -\frac{21}{4}$. $m = 2$ korral võrratus ei kehti ühelgi x väärtusel.

Nr. 32. Lahendada võrratused:

a) $mx^2 + (2m + 1)x + m + 2 > 0$;

b) $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 > 0$.

Vastus: a) Kui $m > \frac{1}{4}$, on võrratus õige igal x väärtusel.

Kui $m = \frac{1}{4}$, on võrratus õige igal x väärtusel, mis erineb -3 -st.

Kui $m < \frac{1}{4}$, siis võrratuse vasakul poolel olev kolmeliige omab kaht nullkohta x_1 ja x_2 ($x_1 < x_2$).

Kui $0 < m < \frac{1}{4}$, siis kolmliige on positiivne, kui $x < x_1$ või kui $x > x_2$.

Kui $m < 0$, siis võrratus on õige, kui aga $x_1 < x < x_2$.

b) Kui $m \leq \frac{1}{3}$, siis võrratus on võimatu.

$$\text{Kui } m > \frac{1}{3} \begin{cases} m < 1, \text{ siis võrratus on õige juhul, kui } x_1 < x < x_2. \\ m > 1, \text{ siis võrratus on õige juhul, kui } x < x_1 \text{ või kui } x > x_2, \end{cases}$$

kus x_1 ja x_2 on võrratuse vasakul poolel seisva kolmliikme nullkohad.

Nr. 33. Missugustel arvu m väärtustel kolmliige

$$x^2 - 2(4m - 1)x + 15m^2 - 2m - 7$$

on positiivne igal x väärtusel?

Vastus: kolmliige on positiivne, kui $2 < m < 4$.

Nr. 34. Lahendada võrratus:

$$\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x^2-9} > 0.$$

Lahendus. Kolmliikme $x^2 + x + 1$ diskriminant on $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$, järelikult igasugusel reaalarvulisel x väärtusel on $x^2 + x + 1 > 0$.

Jagades võrratuse mõlemad pooled selle kolmliikmega, saame ekvivalentse võrratuse

$$\frac{x-2}{x^2-9} > 0.$$

Lahendades viimase võrratuse saame:

$$\begin{cases} -3 < x < 2. \\ 3 < x. \end{cases}$$

Nr. 35. Lahendada võrratused:

$$\text{a) } \frac{(x-1)(x^2-x+4)}{(x-4)(x^2+x+3)} < 0.$$

Vastus: $1 < x < 4$.

$$b) \frac{(x^2+1)(x-3)}{(x^2+3x+6)(x+3)} > 0.$$

Vastus: $x < -3$; $3 < x$.

$$c) \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} < 0.$$

Vastus: võrratusel ei ole lahendeid.

$$d) \frac{x^2-8x+15}{x^2-10x+21} < 20.$$

Vastus: $x > 7\frac{2}{9}$; $x < 7$.

Nr. 36. Lahendada võrratus:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3.$$

Lahendus. Juured on reaalsed, kui $x > 8$, ja seepärast me vaatleme edaspidi väärtusi $x > 8$. Viime teise juuravaldise võrratuse paremale poolele:

$$\sqrt{2x+1} > 3 + \sqrt{x-8}.$$

Võrratuse mõlemad pooled on positiivsed ja seepärast võib nad ruutu tõsta:

$$2x+1 > 9+x-8+6\sqrt{x-8}; \quad x > 6\sqrt{x-8}.$$

Viimases võrratuses on mõlemad pooled positiivsed ja seepärast võib neid teiskordselt ruutu tõsta:

$$x^2 > 36(x-8); \quad x^2 - 36x + 288 > 0.$$

Viimane võrratus on õige väärtustel $x < 12$ ja $x > 24$. Et x väärtus peab olema suurem kui 8, on antud võrratus õige, kui $8 < x < 12$ ja kui $x > 24$.

Nr. 37. Lahendada võrratused:

$$a) \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5};$$

$$b) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1;$$

$$c) \sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}.$$

Vastus: a) $\frac{5}{2} < x < 3$.

$$b) -\frac{1}{2} < x < 3 - \sqrt{12}.$$

$$c) \frac{19}{3} < x < 9.$$

Nr. 38. Tõestada, et hüpotenuusi ja täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrguse summa on poolperimeetrist suurem.

Nr. 39. Murru lugeja on tema nimetajast 1 võrra väiksem; kui murru lugejale ja nimetajale lisada 1, on murru väärtus suurem kui $\frac{1}{2}$, kui lugejast ja nimetajast lahutada 1, on murru väärtus väiksem kui $\frac{6}{7}$.

Leida murd.

Vastus: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$ ja $\frac{6}{7}$.

Definitsiooni järgi $|a| = a$, kui $a > 0$ ja $|a| = -a$, kui $a < 0$, s. o. positiivse arvu absoluutväärtus võrdub sama positiivse arvuga, aga negatiivse arvu a absoluutväärtus võrdub arvuga $-a$.

Nr. 40. Kindlaks teha, millistel x väärtustel on õige võrdus:

$$\left| \frac{x-1}{2x+3} \right| = \frac{x-1}{2x+3}.$$

Lahendus. Võrdus on õige nendel x väärtustel, mille puhul $\frac{x-1}{2x+3} > 0$, sest sel juhul murru absoluutväärtus võrdub sellesama murruga.

Nr. 41. Leida, millistel x väärtustel on õige kumbki kahest võrdusest:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left| \frac{2x^2-3}{4x+1} \right| = -\frac{2x^2-3}{4x+1}; \\ \text{b)} \quad & \left| \frac{2-x+x^2}{8-x-x^2} \right| = \frac{2-x+x^2}{8-x-x^2}. \end{aligned}$$

Nr. 42. Lahendada võrratus:

$$a^x > 5\beta^{1+x} \quad (0 < a < \beta < 1),$$

logaritmides mõlemad pooled alusel 10.

Lahendus. Jagame võrratuse mõlemad pooled positiivse arvuga β^x ja saame samapidise võrratuse $\left(\frac{a}{\beta}\right)^x > 5\beta$. Logaritmides mõlemad võrratuse pooled alusel 10, saame samapidise võrratuse

$$x \log \frac{a}{\beta} > \log 5 + \log \beta.$$

Et $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, siis $\log \frac{\alpha}{\beta}$ on negatiivne arv. Jagades mõlemad võrratuse pooled negatiivse arvuga $\log \frac{\alpha}{\beta}$, saame:

$$x < \frac{\log 5 + \log \beta}{\log \alpha - \log \beta}.$$

Nr. 43. Lahendada võrratus $a^x > 2$ ($a > 1$), logaritmidest võrratuse mõlemad pooled alusel $\frac{1}{2}$.

Lahendus. Logaritmidest mõlemad pooled alusel $\frac{1}{2}$, mis on väiksem kui 1, saame vastupidise võrratuse

$$x \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

Arvust 1 suurema arvu logaritm ühest väiksemal alusel on negatiivne arv, seepärast $\log_{\frac{1}{2}} a < 0$.

Jagades võrratuse mõlemad pooled negatiivse arvuga $\log_{\frac{1}{2}} a$, saame

$$x > \frac{\log_{\frac{1}{2}} 2}{\log_{\frac{1}{2}} a}.$$

Nr. 44. Lahendada võrratus $a^x > b$ ($a > 0$; $b > 0$) logaritmitest: 1) alusel a , kus $0 < a < 1$; 2) alusel β , kus $\beta > 1$. Uurida kõik võimalikud juhud.

§ 8. Matemaatiline induksioon.

Elementaararvamaatika õppijad teavad, kui tähtis on matemaatikas tõestuse viis, mis on rajatud nn. täielikule ehk matemaatilisele induksioonile. See meetod lubab järeldada, et mingi väide on õige igasuguse loomuliku arvu $n > k$ puhul, kui 1) ta on õige mõne n väärtuse k puhul ja 2) selle väite õigsusest ($n - 1$) puhul järeldub tema õigsus arvu n puhul. Lahendame mõned ülesanded, millede lahendamine on seotud matemaatilise induksiooni meetodi kasutamisega.

Nr. 1. Tõestada võrduse õigsus:

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!},$$

kus $n = 1, 2, 3, \dots$

L a h e n d u s. Kõigepealt näitame, et võrdus on õige mõne n väärtuse puhul:

$$1 = \frac{1}{1!} \quad (n=1); \quad 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2!} \quad (n=2);$$

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6-3-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3!} \quad (n=3).$$

Nüüd oletame, et võrdus on õige arvu $(n-1)$ puhul, ja tõestame, et siis ta on õige ka arvu n puhul:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} - \frac{n-1}{n!} &= \\ = \left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} \right) - & \\ - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n-1}{n!} = \frac{n-n+1}{n!} = \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

sest oletuse järgi on

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Siit järeldub, et antud võrdus on õige igasuguse loomuliku arvu n puhul.

Nr. 2. Tõestada võrduse õigsus:

$$\begin{aligned} \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{13} + \arctg \frac{1}{21} + \dots + \arctg \frac{1}{n^2+n+1} &= \\ = \arctg \frac{n}{n+2}, \text{ kus } n=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

L a h e n d u s. Näitame, et võrdus on õige mõne n väärtuse puhul.

Kasutades $\arctg$ -te summa teisendamise valemit

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy},$$

(juhul kui $xy < 1$) saame:

$$n=1; \arctg \frac{1}{3} = \arctg \frac{1}{1+2};$$

$$\begin{aligned} n=2; \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7} &= \arctg \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = \arctg \frac{10}{20} = \\ &= \arctg \frac{2}{4} = \arctg \frac{2}{2+2}. \end{aligned}$$

$$n=3; \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{13} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{13} = \\ = \arctg \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13}} = \arctg \frac{15}{25} = \arctg \frac{3}{5}.$$

Nüüd oletame, et võrdus on õige arvu $(n-1)$ puhul ja tõestame, et siis ta on õige ka arvu n puhul:

$$\left(\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{13} + \dots + \arctg \frac{1}{(n-1)^2 + (n-1) + 1} \right) + \\ + \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctg \frac{n-1}{(n-1)+2} + \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} = \\ = \arctg \frac{\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n^2 + n + 1}}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{n^2 + n + 1}} = \arctg \frac{n^3 - 1 + n + 1}{n^3 + 2n^2 + 2n + 1 - n + 1} = \\ = \arctg \frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + 2n^2 + n + 2} = \arctg \frac{n(n^2 + 1)}{(n+2)(n^2 + 1)} = \arctg \frac{n}{n+2}.$$

Siit järeldub, et võrdus on õige iga loomuliku arvu n puhul.

Nr. 3. Olgu x mingi antud arv, mis asetseb 0 ja 1 vahel. Arvude y_n lõpmatu jada on kindlaks määratud järgmisel viisil:

$$y_1 = \frac{x}{2}; \quad y_2 = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2}; \quad y_3 = \frac{x}{2} + \frac{y_2^2}{2}; \quad \dots; \\ y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}.$$

Tõestada, et

$$y_{n-1} < y_n, \text{ kus } n = 2, 3, 4, \dots$$

Lahendus.

$$y_1 > 0, \text{ sest } x > 0.$$

Näitame, et $y_1 < y_2$ ja siis, kasutades täieliku induktsiooni meetodit, teeme kindlaks, et $y_{n-1} < y_n$.

$$y_1 = \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2} = y_2.$$

Niisiis $y_1 < y_2$. Nüüd oletame, et on õige võrratus:

$$y_{n-2} < y_{n-1},$$

ja tõestame, et sel korral $y_{n-1} < y_n$.

Et $0 < x < 1$, siis võrratusest $y_{n-2} < y_{n-1}$ tuleneb võrratus $y_{n-2}^2 < y_{n-1}^2$.

Siit järeldub:

$$y_{n-1} = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-2}^2}{2} < \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} = y_n; \quad y_{n-1} < y_n, \text{ kus } n = 2, 3, 4, \dots$$

Nr. 4. Tõestada, et

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}, \text{ kus } n = 1, 2, 3, \dots$$

Lahendus. Näitame, et võrdus on õige mõne n väärtuse puhul:

$$n = 1; \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}};$$

$$n = 2; \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} = \frac{4 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4}}{4 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{4}} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{2^2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2^2}} = \frac{\sin x}{2^2 \cdot \sin \frac{x}{2^2}};$$

$$n = 3; \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot 2 \sin \frac{x}{8}}{2^2 \cdot \sin \frac{x}{2^2} \cdot 2 \sin \frac{x}{8}} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cancel{\sin \frac{x}{2^2}}}{\cancel{2^3 \sin \frac{x}{2^2}} \sin \frac{x}{2^3}} = \frac{\sin x}{2^3 \sin \frac{x}{2^3}}$$

Oletame, et võrdus on õige väärtusel $(n - 1)$ ja tõestame, et siis ta on õige ka arvu n puhul:

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{x}{2^n} =$$

$$= \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \right) \cos \frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{\sin x}{2^{n-1} \sin \frac{x}{2^{n-1}}} \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x \cdot 2 \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^n}}{2^{n-1} \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cdot 2 \sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}.$$

Nr. 5. Tõestada, et

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

kus $n = 1, 2, 3, \dots$

Nr. 6. Tõestada, et

$$\begin{aligned} \arctg \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2} + \arctg \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4} + \arctg \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 6} + \dots + \\ + \arctg \frac{\sqrt{3}}{(2n-1)2n} = \arctg \frac{n\sqrt{3}}{n+1}, \end{aligned}$$

kus $n = 1, 2, 3, \dots$

Nr. 7. Tõestada, et

$$\begin{aligned} \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} = \\ = \arctg \frac{n}{n+1}, \text{ kus } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Nr. 8. Tõestada, et

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) + \dots + (1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x},$$

kus $n = 1, 2, 3, \dots$

Nr. 9. Olgu

$$\begin{aligned} S_n = a_1 + (a_1+1)a_2 + (a_1+1)(a_2+1)a_3 + \dots + \\ + (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_{n-1}+1)a_n. \end{aligned}$$

Tõestada, et

$$S_n = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_n+1) - 1.$$

Nr. 10. Antud on, et

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ ja } a_0 = 2, a_1 = 3.$$

Tõestada, et

$$a_n = 2^n + 1.$$

Lahendus. Oletades antud valemis $n = 1$, saame:

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 = 2^2 + 1.$$

Oletame, et

$$a_n = 2^n + 1$$

ja tõestame, et siis

$$a_{n+1} = 2^{n+1} + 1.$$

Tõepoolest:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = \\ &= 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2 = 2^n(3 - 1) + 1 = 2^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

Nr. 11. Olgu:

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ ja } a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Tõestada, et

$$a_n = 2^n - 1.$$

Nr. 12. Olgu arvude paarid

$$(a; b); (a_1; b_1); (a_2; b_2); \dots$$

moodustatud järgmise seaduse järgi:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}; b_1 = \frac{a_1+b}{2}; a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; b_2 = \frac{a_2+b_1}{2}.$$

Tõestada:

$$\begin{aligned} a_n &= a + \frac{2}{3} (b - a) \left(1 - \frac{1}{4^n}\right); \\ b_n &= a + \frac{2}{3} (b - a) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right). \end{aligned}$$

Nr. 13. Tõestada samasus:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{a} + \frac{a+1}{ab} + \frac{(a+1)(b+1)}{abc} + \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd} + \dots + \\ + \frac{(a+1)(b+1)(c+1) \dots (k+1)}{abcd \dots skl} = \frac{(a+1)(b+1) \dots (k+1)(l+1)}{abcd \dots kl}. \end{aligned}$$

Nr. 14. Tõestada samasus:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+q) = \frac{1}{q+2} n(n+1) \dots (n+q+1).$$

Nr. 15. Tõestada samasus:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+q)} = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+q)} \right).$$

§ 9. Trigonomeetrilised samasused.

Trigonomeetria kursuses tuletatakse valemid:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{b-a}{2} \\ 1 + \cos a &= 2 \cos^2 \frac{a}{2} \\ 1 - \cos a &= 2 \sin^2 \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (I)$$

Need valemid võib üles kirjutada järgmiselt:

$$\sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\sin a + \sin b) \quad (Ia)$$

$$\sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} (\sin a - \sin b) \quad (Ib)$$

$$\cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\cos a + \cos b) \quad (Ic)$$

$$\sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} (\cos a - \cos b) \quad (Id)$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2} \quad (Ie)$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2} \quad (If)$$

Samasuste tõestamisel tuleb sageli funktsioonide korrutis asendada funktsioonide summa või vahega. Nii näiteks:

$$1) \sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ = \frac{1}{2} (\sin 18^\circ + \sin 2^\circ),$$

mille saame valemi (Ia) järgi, oletades, et

$$\frac{a+b}{2} = 10 \text{ ja } \frac{a-b}{2} = 8.$$

$$2) \cos 12^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2} (\cos 32^\circ + \cos 8^\circ),$$

mille saame valemi (Ic) järgi, oletades, et

$$\frac{a+b}{2} = 20; \quad \frac{a-b}{2} = 12.$$

Nr. 1. Kontrollida samasus:

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} & \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \\ & = (\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ) \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \end{aligned}$$

(sulgudes olevate koosinuste korrutise võib asendada koosinuste summaga, kasutades valemit Ic)

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cos 80^\circ = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) \cos 80^\circ = \\ & = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cos 80^\circ + \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ \right) = \frac{1}{8} (\cos 80^\circ + \\ & \quad + 2 \cos 20^\circ \cos 80^\circ) = \end{aligned}$$

(koosinuste korrutise asendame valemi (Ic) järgi)

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{8} (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 60^\circ) = \\ & = \frac{1}{8} (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

sest $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$.

Nr. 2. Kontrollida järgmised samasused:

a) $8 \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sqrt{3}$

b) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$

Nr. 3. Kontrollida samasus:

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}.$$

Lahendus. Üle minnes siinustele ja koosinustele saame:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \\ & = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \\ & = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \\ & = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} (1 + 2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \end{aligned}$$

(lugejas olevate siinuste korrutise asendamine valemi (Id) järgi koosinuste vahega)

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}(1 + \cos 20^\circ - \cos 60^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3}(2 \cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 60^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nr. 4. Kontrollida samasused:

$$\text{a) } \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{4 \cos 20^\circ}{\sin 60^\circ};$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3.$$

Nr. 5. Tõestada samasus

$$\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$$

teades, et

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Lahendus. Kasutades valemit (Ic) saame:

$$\begin{aligned} (\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ) \cdot (\cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ) &= \frac{1}{2} (\cos 72^\circ + \cos 60^\circ) + \\ &+ \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 36^\circ) = \frac{1}{4} \left(\sin 18^\circ + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} + \cos 36^\circ \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

$$\text{sest } \cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Nr. 6. Tõestada samasus

$$\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} = \left(\frac{1}{2} \right)^7,$$

teades, et

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ ja } \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Nr. 7. Tõestada samasus:

$$\sin 3a \cdot \sin^3 a + \cos 3a \cdot \cos^3 a = \cos^3 2a.$$

Lahendus. Kasutades valemeid (Ic) ja (Id) saame:

$$\sin 3a \cdot \sin^3 a + \cos 3a \cdot \cos^3 a = (\sin 3a \cdot \sin a) \cdot \sin^2 a +$$

$$\begin{aligned}
 & +(\cos 3a \cdot \cos a) \cos^2 a = \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \sin^2 a + \\
 & + \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cos^2 a = \frac{1}{2} [\cos 2a \cdot \sin^2 a - \cos 4a \cdot \sin^2 a + \\
 & \quad + \cos 2a \cdot \cos^2 a + \cos 4a \cos^2 a] = \\
 & = \frac{1}{2} [\cos 2a (\sin^2 a + \cos^2 a) + \cos 4a (\cos^2 a - \sin^2 a)] = \\
 & = \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a \cdot \cos 2a] = \frac{1}{2} \cos 2a [1 + \cos 4a] = \\
 & = \frac{1}{2} \cos 2a \cdot 2 \cos^2 2a = \cos^3 2a,
 \end{aligned}$$

sest valemi (Ie) põhjal:

$$1 + \cos 4a = 2 \cos^2 2a.$$

Nr. 8. Tõestada samasused:

$$a) 4 \sin a \cdot \sin (60^\circ - a) \cdot \sin (60^\circ + a) = \sin 3a;$$

$$b) 4 \cos a \cdot \cos (60^\circ - a) \cdot \cos (60^\circ + a) = \cos 3a.$$

Nr. 9. Tõestada samasus:

$$\sin^2 \frac{a+b}{2} + \sin^2 \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \cos b = \sin^2 b.$$

Lahendus. Teisendame esimese ja teise liikme, kasutades valemeid (Ic) ja (If). Kolmandas liikmes asendame siinuste korrutise valemi (Id) järgi koosinuste vahega. Saame:

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \frac{a+b}{2} + \sin^2 \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \cos b = \\
 & = \frac{1 - \cos(a+b)}{2} + \frac{1 - \cos(a-b)}{2} - (\cos b - \cos a) \cos b = \\
 & = \frac{1}{2} [1 - (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + 1 - (\cos a \cos b + \\
 & + \sin a \sin b)] - \cos^2 b + \cos a \cos b = \frac{1}{2} [2 - 2 \cos a \cos b] - \\
 & - \cos^2 b + \cos a \cos b = 1 - \cos^2 b = \sin^2 b.
 \end{aligned}$$

Nr. 10. Tõestada samasused:

$$a) \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta;$$

$$b) \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} - \frac{2 \cos(a-b)}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin^2(a-b)}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b};$$

$$c) \cos^2 \frac{a}{2} \left(1 + \sec^2 \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \left(1 - \sec \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) = \sin a;$$

$$d) \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) + \\ + 4 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c-a}{2} = 0;$$

$$e) \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c;$$

$$f) (\sin a + \sin 2a + \sin 3a) : (\cos a + \cos 2a + \cos 3a) = \operatorname{tg} 2a;$$

$$g) \sec\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \sec 2a;$$

$$h) \frac{\sin 26^\circ}{\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\sin 17^\circ \cdot \sin 2^\circ} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 43^\circ \cdot \sin 2^\circ};$$

$$i) \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sec \alpha}{\sec \alpha + \sec \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \varphi}{2};$$

$$k) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin a}} = \frac{2 \sin\left(15^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}.$$

Nr. 11. Tõestada, et

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

kui

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Lahendus. Kaks esimest liiget liidame siinuste summa valemi järgi, aga kolmanda teisendame kahekordse nurga valemi järgi. Saame: $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Eelduse järgi

$$A + B + C = 180^\circ,$$

järelikult

$$A + B = 180^\circ - C; \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}; \sin \frac{A+B}{2} = \\ = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}.$$

Niisiis saame:

$$2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \\ = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right), \text{ kuid } \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2},$$

siit

$$\sin \frac{C}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{A+B}{2}.$$

Niiviisi saame:

$$\begin{aligned} & 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A-B+A+B}{4} \cdot \cos \frac{A-B-A-B}{4} = \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Nr. 12. Oletades, et

$$A + B + C = 180^\circ,$$

tõestada järgmised võrdused:

- a) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$
- b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$
- c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cos B \cos C.$

GEOMEETRIA.

Tõestamisülesanded.

§ 1. Kolmnurgad ja hulknurgad.

Nr. 1. Tõestada, et kolmnurga mediaan on tema poolperimeetrist väiksem.

Tõestus. On antud kolmnurk ABC ja mediaan BE , s. o. $AE = EC$. On tarvis tõestada, et $BE < \frac{AB + BC + CA}{2}$.

Igas kolmnurgas on mistahes külge kahe teise külje summast väiksem ja seepärast kolmnurgas ABE (joon. 92) on $BE < AB + AE$ (I). Samal põhjusel kolmnurgas BCE on $BE < BC + EC$ (II).

Liites võrratuste (I) ja (II) vastavad pooled, saame:

$$2BE < AB + BC + AE + EC \text{ ehk } BE < \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Nr. 2. Tõestada, et võrdhaarses kolmnurgas on kaks mediaani võrdsed, kaks nurgapoolitajat võrdsed ja kaks kõrgust võrdsed.

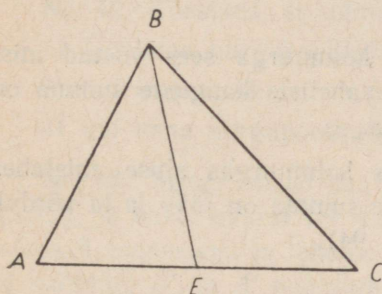
Nr. 3. Kui võrdhaarses kolmnurgas võrdsete külgede keskpunktidest tõmbame ristlõigud kuni lõikumiseni teise võrdse küljega, siis need ristlõigud on võrdsed. (Tõestada.)

Nr. 4. Ristsirged, mis on tõmmatud nurga kahele haarale võrdsetel kaugustel nurga tipust, lõikuvad nurgapoolitajal. (Tõestada.)

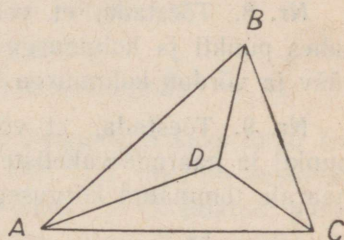
Nr. 5. Sirge, mis on risti nurgapoolitajaga, lõikab nurga haaradest ära võrdsed lõigud. (Tõestada.)

Nr. 6. Kolmnurga mediaan on väiksem nende külgede poolsummast, mille vahel ta asetseb.

Näpunäide. Pikendada mediaan tema enda pikkuse võrra, saadud punkt ühendada selle külje ühe otspunktiga, millele on tõmmatud mediaan, ja uurida saadud kujundit.



Joon. 92.



Joon. 93.

Nr. 7. Tõestada, et kolmnurga sees võetud mingi punkti ja kolmnurga tippude vaheliste sirglõikude summa on kolmnurga übermõõdust väiksem ja poolübermõõdust suurem.

Tõestus. On antud $\triangle ABC$ ja punkt D selle sees (joon. 93). Tõestada:

$$1) DA + DB + DC < AB + BC + CA;$$

$$2) DA + DB + DC > \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Geomeetria kursusest on teada, et kumer murdjoon on lühem igast teisest murdjoonest, mis teda hõlmab, ja seepärast:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad AB + BC > AD + DC \\ \text{(II)} \quad AB + AC > DB + DC \\ \text{(III)} \quad BC + AC > AD + DB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Liites poolte kaupa} \\ \text{võrratused (I), (II) ja (III),} \\ \text{saame:} \end{array}$$

$$2AB + 2BC + 2AC > 2AD + 2DC + 2DB.$$

Siit:

$$AD + DC + DB < AB + BC + CA.$$

Teoreemi esimene osa on tõestatud. Teoreemi teise osa tõestame, kasutades seda, et kolmnurgas iga külg on kahe teise külje summast väiksem.

Kolmnurgast ABD (joon. 93) saame: $AB < AD + BD$. (I)

„ BCD „ $BC < BD + CD$. (II)

„ ADC „ $AC < AD + CD$. (III)

Liites poolte kaupa viimased võrratused (I), (II), (III), saame:

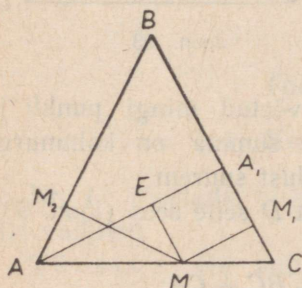
$$AB + BC + AC < 2AD + 2BD + 2CD;$$

$$AD + BD + CD > \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

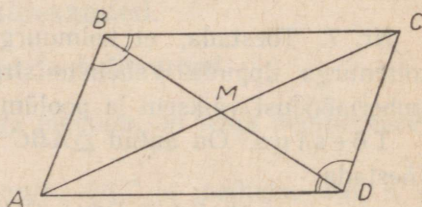
Teoreemi teine osa on tõestatud.

Nr. 8. Tõestada, et võrdkülgse kolmnurga sees võetud mistahes punkti ja kolmnurga külgede vaheliste kauguste summa on jääv ja võrdub kolmnurga kõrgusega.

Nr. 9. Tõestada, et võrdhaarset kolmnurgas aluse mistahes punkti ja haarade vaheliste kauguste summa on jääv ja ta võrdub haarale tõmmatud kõrgusega (joon. 94).



Joon. 94.



Joon. 95.

Tõestus. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC (s. o. $AB = BC$), $MM_1 \perp BC$; $MM_2 \perp AB$; $AA_1 \perp BC$. On tarvis tõestada, et $MM_1 + MM_2 = AA_1$, ükskõik kus asetseb alusel AC võetud punkt M .

Punktist M tõmbame sirge $ME \parallel BC$, siis $MM_1 = EA_1$ kui rõõp-küliku vastasküljed. Täisnurksed kolmnurgad AM_2M ja AEM on kongruentsed, sest neil on hüpotenuus AM ühine ja teravnurgad

MAM_2 ja AME on võrdsed (kumbki neist võrdub nurgaga C). Siit $MM_2 = AE$ kui küljed, mis asetsevad võrdsete nurkade vastas kongruentsetes kolmnurkades. Niiviisi saame:

$$AA_1 = AE + EA_1 = MM_2 + MM_1.$$

Nr. 10. Läbi kolmnurga tippude on tõmmatud sirged, mis on paralleelsed vastaskülgedega. Tõestada, et 1) nende poolt moodustatud kolmnurk on antud kolmnurgast neli korda suurem; 2) iga tema külg on antud kolmnurga vastavast küljest kaks korda suurem.

Nr. 11. Kui täisnurkses kolmnurgas üks teravnurk võrdub $\frac{1}{3}d$, siis tema vastaskaatet on pool hüpotenuusist. Tõestada.

Nr. 12. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne:

- 1) kui tema nurgapoolitaja on ühtlasi kõrguseks;
- 2) kui tema mediaan on ühtlasi kõrguseks;
- 3) kui tema nurgapoolitaja on ühtlasi mediaaniks.

Nr. 13. Mingi nurga haaral OX on paigutatud kaks lõiku OA ja OB , ja teisel haaral OY kaks lõiku OA' , OB' , mis on vastavalt võrdsed esimestega ja lõikude otsad on omavahel ühendatud: punkt A punktiga B' , ja A' punktiga B . Tõestada, et punkt M , milles lõikuvad sirged AB' ja $A'B$, asetseb antud nurga poolitajal.

Nr. 14. Kui kolmnurgas ei ole kaks külge omavahel võrdsed, siis nende vahel asetsev mediaan moodustab väiksema küljega suurema nurga kui teise küljega (tõestada, täiendades joonist) (joon. 95).

Tõestus. Eelduse järgi külg $AB < BC$ ja BM on mediaan, s. o. $AM = MC$. On tarvis tõestada, et nurk $ABM >$ nurgast MBC . Tõestuseks pikendame mediaani nii, et $MD = BM$, ja ühendame punkti D punktidega A ja C . Nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, sest tema diagonaalid poolitavad teineteist. Siit $\angle CBM = \angle ADM$ kui põiknurgad paralleelide juures. Kolmnurgas ABD on eelduse põhjal külg $AD > AB$ ja seetõttu asetseb suurema külje vastas suurem nurk, s. o. nurk $ABM >$ nurgast ADM , ja teoreem on tõestatud.

Nr. 15. Tõestada, et kolmnurga mediaan on väiksem kui nende külgede poolsumma, millede vahel ta asetseb, ja suurem kui vahe selle poolsumma ja kolmanda külje poole vahel.

Nr. 16. Tõestada, et kolmnurga mediaanide summa on pool-
ümbermõõdust suurem ja ümbermõõdust väiksem.

Nr. 17. Tõestada, et kui kolmnurga kaks kõrgust on võrdsed,
siis kolmnurk on võrdhaarne.

Nr. 18. Tõestada, et igas kolmnurgas ABC :

1) nurga A poolitaja moodustab kõrgusega, mis väljub tipust A ,
nurga, mis võrdub $\angle B$ ja $\angle C$ poolvahega.

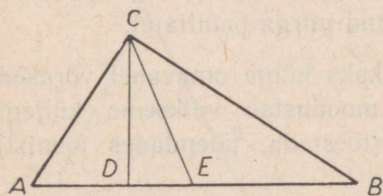
2) $\angle B$ ja $\angle C$ poolitajad moodustavad omavahel nurga, mis
võrdub nurga $\frac{A}{2}$ ja täisnurga summaga.

3) Välisnurkade B ja C poolitajad moodustavad omavahel
nurga, mis on nurga $\frac{A}{2}$ täiendusnurk.

Nr. 19. Kolmnurga mediaan poolitab kõik sirglõigud, mis on
tõmmatud kolmnurgas paralleelselt sellele küljele, mille kesk-
punkti läbib võetud mediaan.

Nr. 20. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile
tõmmatud mediaan on võrdne hüpotenuusi poolega.

Nr. 21. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas mediaan ja kõr-
gus, mis on tõmmatud hüpotenuu-
sile, moodustavad nurga, mis võr-
dub selle kolmnurga teravnurkade
vahega.



Joon. 96.

Tõestus. On antud, et
 $\triangle ABC$ on täisnurkne:

$CD \perp AB$; $AE = EB$ (joon. 96).

Tõestada: $\angle DCE = \angle A - \angle B$.

Eelduse järgi $AC \perp CB$ ja $AB \perp$
 CD , järelikult $\angle ACD = \angle B$

kui vastavalt ristuvate haaradega

nurgad. Kolmnurk ACE on võrdhaarne, sest ta mediaan võrdub
poole hüpotenuusiga, s. o. $AE = EC$. Siit $\angle A = \angle ACE$ kui võrd-
haarse kolmnurga alusnurgad. Järelikult

$$\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = \angle A - \angle B.$$

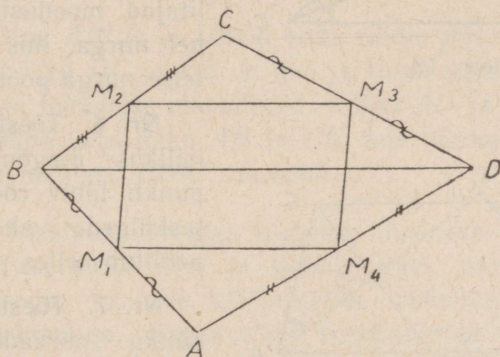
Teoreem on tõestatud.

Nr. 22. Tõestada, et kui ühendame kolmnurga kõrguste alus-
punktid, siis saame uue kolmnurga, milles esimese kõrgused on
nurgapoolitajad.

§ 2. Rööpkülilikud ja trapetsid.

Nr. 1. Tõestada, et ühendades järjestikku mingi nelinurga külgede keskpunktid, saame rööpküliku.

Tõestus. Olgu antud nelinurk $ABCD$. Selle nelinurga külgede keskpunktid on M_1, M_2, M_3, M_4 . On tarvis tõestada, et nelinurk $M_1M_2M_3M_4$ (joon. 97) on rööpkülik. Tõmbame diagonaali BD ja vaatleme kolmnurki BDC ja ABD . Lõik M_2M_3 on kolmnurga kesklõik ja seepärast $M_2M_3 = \frac{1}{2}BD$ ning $M_2M_3 \parallel BD$. Lõik M_1M_4 on kolmnurga ABD kesklõik ja seepärast $M_1M_4 = \frac{1}{2}BD$ ning $M_1M_4 \parallel BD$. Viimastest võrdustest järeldub, et $M_2M_3 = M_1M_4$ ja $M_2M_3 \parallel M_1M_4$, järelikult konstrueeritud nelinurk on rööpkülik.



Joon. 97.

Nr. 2. On antud ruut $ABCD$. Tema külgedel on võetud võrdsed lõigud AA_1, BB_1, CC_1 ja DD_1 . Punktid A_1, B_1, C_1, D_1 on ühendatud järjestikku sirgetega. Tõestada, et nelinurk $A_1B_1C_1D_1$ on ruut.

Nr. 3. Igasugune trapetsi sees asetsev aluste vaheline sirg-lõik poolitub kesklõiguga.

Nr. 4. Kolmnurgas on läbi alusnurkade poolitajate lõikepunkti tõmmatud alusega paralleelne lõik. Tõestada, et see lõik võrdub külgede lõikude summaga, võttes need lõigud aluse poolt (joon. 98).

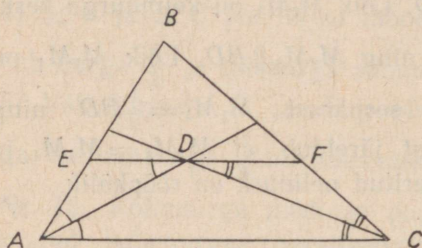
Tõestus. Antud on: $\angle EAD = \angle DAC$, $\angle FCD = \angle DCA$ ja $EF \parallel AC$. Nõutakse tõestada, et $EF = AE + FC$. Kolmnurk AED on võrdhaarne, sest $\angle EAD = \angle EDA = \angle DAC$, järelikult

$AE = ED$ (I). Nurdade $\angle FCD = \angle FDC = \angle DCA$ võrdusest järeldub, et kolmnurk DFC on võrdhaarne, järelikult $FC = DF$ (II).

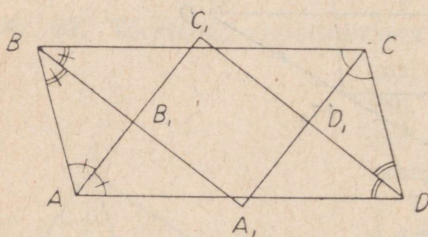
Liites poolte kaupa võrdused (I) ja (II), saame:

$$AE + FC = ED + DF = EF.$$

Teoreem on tõestatud.



Joon. 98.



Joon. 99.

Nr. 5. Tõestada, et kumeras nelinurgas:

1) kahe järjestikuse nurga poolitajad moodustavad omavahel nurga, mis võrdub kahe teise nurga poolsummaga;

2) kahe vastasnurga poolitajad moodustavad omavahel nurga, mis võrdub kahe teise nurga poolvahega.

Nr. 6. Tõestada, et rööpküklikus diagonaalide lõikepunkti läbiv rööpkükliku vastaskülgede vaheline sirglõik poolitub selles punktis.

Nr. 7. Tõestada, et rööpkükliku nurkade poolitajad moodustavad ristküliku; tema välisnurkade poolitajad moodustavad samuti ristküliku.

Tõestus. On antud: (joon. 99).

$$\begin{aligned} \angle ABB_1 &= \angle B_1BC; & \angle DAB_1 &= \angle BAB_1; \\ \angle BCD_1 &= \angle D_1CD; & \angle CDD_1 &= \angle D_1DA. \end{aligned}$$

Nõutakse tõestada, et nelinurk $A_1B_1C_1D_1$ on ristkülik.

Rööpkükliku ühe külje lähisnurgad moodustavad summas $2d$,

s. o.

$$\angle DAB + \angle ABC = 2d, \text{ järelikult}$$

$$\frac{\angle DAB}{2} + \frac{\angle ABC}{2} = d,$$

s. o.

$$\angle BAB_1 + \angle ABB_1 = d.$$

Kolmnurgas ABB_1 nurk $BB_1A = d$, sest kahe teise nurga summa on d . Nurk $C_1B_1A_1 = d$ kui nurga BB_1A tippnurk. Täpselt samuti saab tõestada, et $\angle A_1D_1C_1 = d$. Niisiis nelinurgas $A_1B_1C_1D_1$ kaks vastasnurka on täisnurgad. Selle nelinurga küljed on paariviisi paralleelsed: $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ ja $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, sest iga paari sirgete lõikumisel kolmandaga moodustuvad võrdsed põiknurgad, ja seejärel see nelinurk on rööpkülik. Et sellel rööpkülikul on täisnurk, siis nelinurk $A_1B_1C_1D_1$ on ristkülik. Analoogiliselt saab tõestada teoreemi teise osa.

Nr. 8. Tõestada, et kaks niisugust rööpkülikut, milledest üks on joonestatud teise sisse, teisiti öeldes niisugused, millel neli tippu esimesest asetsevad vastavalt teise neljal küljel, omavad ühise sümmeetria-keskpunkti.

Nr. 9. Olgu $ABCD$ ja $DEFG$ kaks ruutu, mis on asetatud kõrvuti nii, et küljed DC ja DE on ühe ja sama suunaga ning küljed AD ja DG on teineteise pikendused. Küljel AD ja külje DC pikendusel on võetud kaks lõiku AH ja CK , mis võrduvad lõiguga DG . Tõestada, et nelinurk $HBKF$ on ruut.

Nr. 10. Tõestada, et igas trapetsis haarade ja diagonaalide keskpunktid asetsevad ühel ja samal sirgel, mis on paralleelne trapetsi alusega; haarade keskpunktide vaheline kaugus võrdub aluste poolsummaga, diagonaalide keskpunktide vaheline kaugus võrdub aluste poolvahega.

Nr. 11. Tõestada, et kui punktidest A, B ja lõigu AB keskpunktist C tõmmata ristlõigud vabalt võetud sirgeni, siis ristlõik, mis on tõmmatud punktist C , võrdub punktidest A ja B tõmmatud ristlõikude poolsummaga või poolvahega, sedamööda, kas need ristlõigud on ühesuunalised või vastandsuunalised.

Nr. 12. Tõestada, et kui kolmnurga kolmest tipust ja tema mediaanide lõikepunktist tõmmata ristlõigud mingi välissirgeni, võrdub viimane neljast ristlõigust kolme esimese summa kolmandikuga (joon. 100).

Tõestus. On antud: $AE = EB$; $BF = FC$; $AD = 2DF$. Sirged AA_1, DD_1, BB_1, CC_1 on risti sirgega NN_1 . On tarvis tõestada, et

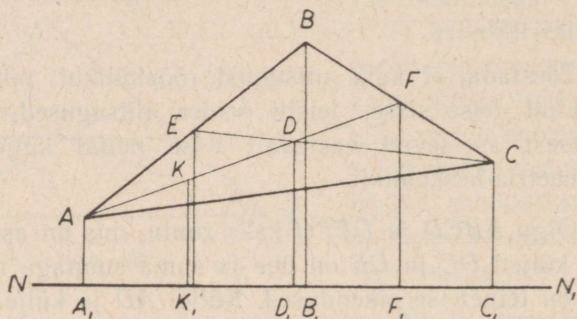
$$DD_1 = \frac{1}{3} (AA_1 + BB_1 + CC_1).$$

Tõestuseks poolitame punktiga K lõigu AD ja punktidest K ja F tõmbame ristlõigud sirgele NN_1 . Lõik FF_1 on trapetsi BCC_1B_1 kesklõik ja seepärast

$$FF_1 = \frac{BB_1 + CC_1}{2}. \quad (I)$$

Lõik KK_1 on trapetsi ADD_1A_1 kesklõik ja seepärast

$$KK_1 = \frac{AA_1 + DD_1}{2}. \quad (II)$$



Joon. 100.

Lõik DD_1 on trapetsi KFF_1K_1 kesklõik ja seepärast

$$DD_1 = \frac{KK_1 + FF_1}{2}. \quad (III)$$

Võrduses (III) asendame KK_1 ja FF_1 , kasutades võrdusi (I) ja (II). Saame:

$$DD_1 = \frac{\frac{BB_1 + CC_1}{2} + \frac{AA_1 + DD_1}{2}}{2}; \quad DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{4} + \frac{DD_1}{4};$$

$$\frac{3}{4} DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{4}; \quad DD_1 = \frac{1}{3} (AA_1 + BB_1 + CC_1).$$

Teoreem on tõestatud.

Nr. 13. Tõestada, et kolmnurga nurk on terav-, täis- või nürinurk sõltuvalt sellest, kas vastaskülg on väiksem, võrdne või suurem kui vastava mediaani kahekordne.

§ 3. Ringjoon.

Nr. 1. Tõestada, et kui kahe teineteist puutuva ringjoone puutepunktist tõmmata vabalt võetud sirge, lõikab see sirge mõlemaid

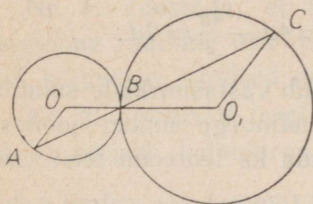
ringjooni kahes teises niisuguses punktis, et sealt tõmmatud raadiused on omavahel paralleelsed.

Tõestus: Eelduse järgi sirge AB (joon. 101) läbib puutepunkti B . Kesk sirge OO_1 läbib samuti punkti B . $\angle ABO = \angle CBO_1$ kui tippnurgad. Kolmnurgad AOB ja BO_1C on võrdhaarsed ja seepärast

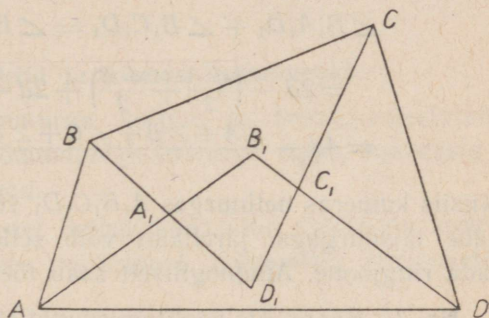
$$\angle BAO = \angle ABO = \angle CBO_1 = \angle BCO_1; \quad \angle BAO = \angle BCO_1.$$

Sirged AO ja O_1C on paralleelsed, sest nende lõikumisel kolmandaga tekkisid võrdsed põiknurgad. Teoreem on tõestatud.

Nr. 2. Tõestada, et kui kahe ringjoone lõikepunktidest A ja B tõmmata vabalt kaks lõikajat, siis kõõlud, mis ühendavad uusi lõikepunkte, on omavahel paralleelsed.



Joon. 101.



Joon. 102.

Nr. 3. Tõestada, et kui kaks ringjoont puudutavad teineteist, siis iga lõikaja, mis on tõmmatud läbi puutepunkti, lõikab ringjoontest ära kaks vastastikku asetsevat ühe ja sama kraadide arvuga kaart.

Nr. 4. Tõestada, et kui kahe ringjoone puutepunktist tõmmata ringjoonte sees asetsev mingi lõikaja, siis puutuvad, mis on tõmmatud läbi selle lõikaja otspunktide, on paralleelsed.

Nr. 5. Tõestada, et kahe võrdse kõõlu lõigud, kui kõõlud lõikuvad ühes ringis, on vastavalt võrdsed.

Nr. 6. Tõestada, et iga nelinurga nurgapoolitajad moodustavad nelinurga, mis on kõõlnelinurk. Seesama on kehtiv välisnurkade poolitajate kohta.

Tõestus. On antud (joon. 102):

$$\begin{aligned} \angle DAA_1 &= \angle BAA_1; & \angle CBA_1 &= \angle ABA_1; \\ \angle BCC_1 &= \angle DCC_1; & \angle CDC_1 &= \angle ADC_1. \end{aligned}$$

Antud nelinurga nurkade summa on $4d$, s. o.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d.$$

On tarvis tõestada, et nelinurk $A_1B_1C_1D_1$ on kõõlnelinurk, s. o. tema ümber võib ehitada ringjoone. Teoreem on tõestatud, kui me näitame, et saadud nelinurgas on vastasnurkade summa $2d$. Kolmnurgast ABA_1 saame:

$$\angle BA_1A = 2d - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B\right). \quad (I)$$

Kolmnurgast CDC_1 saame:

$$\angle CC_1D = 2d - \left(\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D\right). \quad (II)$$

Kasutades võrdusi (I) ja (II), teeme kindlaks saadud nelinurga vastasnurkade summa:

$$\begin{aligned} \angle B_1A_1D_1 + \angle B_1C_1D_1 &= \angle BA_1A + \angle CC_1D = \\ &= 2d - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) + 2d - \left(\frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2}\right) = \\ &= 4d - \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{2} = 4d - \frac{4d}{2} = 2d. \end{aligned}$$

Niisiis kumeras nelinurgas $A_1B_1C_1D_1$ võrdub vastasnurkade summa kahe täisnurgaga, järelikult võib selle nelinurga ümber joonestada ringjoone. Analooiliselt saab tõestada ka teoreemi teist osa.

Nr. 7. Kaare AB poolitamispunkti C tõmmatakse vabalt kaks sirget, mis lõikuvad ringjoonega punktides D , E ja kõõluga AB punktides F , G . Tõestada, et nelinurga $DEFG$ ümber võib joonestada ringjoone.

Nr. 8. Näidata, et kaarte AB ja AC poolitamispunkte ühendav sirge, kus A , B ja C on kolm punkti ühel ringjoonel, lõikab kõõlustest AB ja AC ära võrdsed lõigud, lugedes neid lõike alates punktist A .

Nr. 9. Tõestada, et sirge, mis on paralleelne puutujaga kõõl-kolmnurga tipus ja lõikub kolmnurga kahe küljega, lõikab sellest kolmnurgast ära niisuguse nelinurga, mille ümber võib joonestada ringjoone.

Nr. 10. Antud ringi diameeter AB on pikendatud punktist B edasi. Läbi mingi punkti C sellel pikendusel on tõmmatud sirge $CD \perp AB$. Tõestada, et kui selle ristsirge vabalt valitud punkti M ühendame punktiga A , siis korrutis $AM \cdot AA_1$ on jääv (kus A_1 on selle sirge ja ringjoone teine lõikepunkt).

Nr. 11. Nelinurga vastasküljed on pikendatud lõikumiseni ja sel viisil moodustunud nelja kolmnurga ümber on joonestatud ringjooned. Tõestada, et kõik need ringjooned lõikuvad ühes punktis.

Nr. 12. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B ; läbi A on tõmmatud lõikaja, mis lõikub ringjoontega punktides C ja D ; tõestada, et nurk CBD on jääv iga lõikaja jaoks.

Nr. 13. Võrdkülgse kolmnurga ABC ümber joonestatud ringjoonel on võetud vabalt punkt M ; tõestada, et lõikudest: MA , MB , MC üks võrdub kahe ülejäänu summaga.

Nr. 14. Tõestada, et kui kolmnurga ümber joonestame ringjoone ja sellel vabalt valitud punktist tõmbame ristlõigud kolmnurga külgedele, siis nende aluspunktid asetsevad ühel sirgel.

Nr. 15. Milline kõõl, mis läbib punkti ringi sees, on kõige väiksem?

§ 4. Tähtsad punktid ja jooned kolmnurgas.

Nr. 1. Tõestada, et kolmnurga kõrgus ja ümberjoonestatud ringjoone raadius, mis on tõmmatud kolmnurga tippu, moodustavad külgedega võrdsed nurgad.

Nr. 2. Millistel tingimustel ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt asetseb kolmnurga sees, väljaspool, kolmnurga piirjoonel?

§ 5. Võrdeliste lõikude teoreemid.

Nr. 1. Sirge, mis on tõmmatud läbi trapetsi aluste keskpunktide, läbib mitteparalleelsete külgede lõikepunkti ja diagonaalide lõikepunkti. Tõestada.

Nr. 2. Kui kolmnurga mittevõrdsete külgede vahel asetseva nurga tipust on tõmmatud nurgapoolitaja ja mediaan, on esimene teisest väiksem. Tõestada.

Nr. 3. Tõestada, et kui kaks ringjoont puudutavad teineteist välimiselt, siis puutepunktidega piiratud ühise puutuja lõik on ringjoonte diameetrite keskmine võrdeline.

§ 6. Meetrilised seosed kolmnurkades ja nelinurkades.

Nr. 1. Tõestada, et nurgapoolitaja ruut (joon. 103) võrdub kolmnurga külgede korrutisega ilma aluse lõikude korrutiseta.

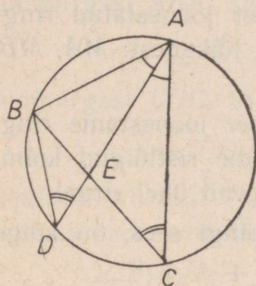
Tõestus. On antud:

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

Nõutakse tõestada:

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC.$$

Joonestame kolmnurga ABC ümber ringjoone ja pikendame nurgapoolitajat kuni lõikumiseni ringjoonega punktis D . Punkt D on kaare BDC poolitamispunkt, sest piirdenurgad BAD ja DAC on



Joon. 103.

võrdsed ja järelikult toetuvad võrdsetele kaartele. Kolmnurgad ABD ja AEC on sarnased, sest nurgad punkti A juures on võrdsed eelduse põhjal, ja $\angle C = \angle D$ kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele. Kolmnurkade sarnasusest järeldub:

$AB : AE = AD : AC$; $AB \cdot AC = AD \cdot AE$
ehk

$$AB \cdot AC = AE(AE + ED);$$

$$AB \cdot AC = AE^2 + AE \cdot ED.$$

Kuid kui läbi ringi sees võetud punkti E on tõmmatud mõningad kõõlud (BC , AD), siis iga kõõlu lõikude korrutis on jääv ja seepärast

$$AE \cdot ED = BE \cdot EC.$$

Siit

$$AB \cdot AC = AE^2 + BE \cdot EC; \quad AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC.$$

Teoreem on tõestatud.

Nr. 2. Tõestada, et trapetsi diagonaalide ruutude summa võrdub haarade ruutude summaga koos aluste kahekordse korrutisega.

Nr. 3. Tõestada, et teravnurkse kolmnurga pindala võrdub kõrguste aluspunktide poolt moodustatud kolmnurga poolümbermõõdu ja ümberringjoone raadiuse korrutisega.

Nr. 4. Kolmnurga külgede a , b , c järgi leida ümberringjoone raadius.

Nr. 5. Kolmnurga ABC kõrguste h_a , h_b , h_c järgi leida tema pindala S .

Nr. 6. Leida kahe teineteist välimiselt puudutava ringjoone raadiuste R ja r järgi ühise puutuja pikkus.

§ 7. Kujundite sarnasus.

Nr. 1. Tõestada, et kolmnurga kahe sisenurga poolitajate ja vastaskülgede lõikepunkte läbiv sirge lõikub kolmanda küljega

samas punktis, kus selle küljega lõikub vastastipu juures asetseva välisnurga poolitaja.

Nr. 2. Tõestada, et trapetsi diagonaalide lõikepunkti ja haarade pikenduste lõikepunkti ühendav sirge poolitab aluse.

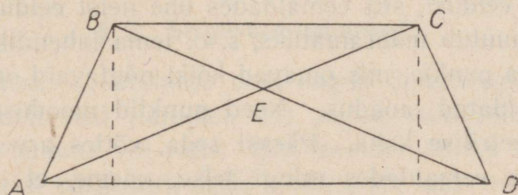
Nr. 3. Tõestada, et kaks ruutu on alati sarnased.

Nr. 4. Nurga haarad on ühendatud kahe paralleelse sirglõiguga ja iga sirglõigu otspunktis on tõmmatud ristsirged nurga haaradele kuni vastastikuse lõikumiseni. Tõestada, et ristsirgete lõikepunktid asetsevad nurga tipuga ühel sirgel.

Nr. 5. Trapetsi aluste a ja b järgi leida haaradevaheline sirglõik, mis on tõmmatud paralleelselt alustega läbi diagonaalide lõikepunkti.

§ 8. Pindalad.

Nr. 1. Trapets on jaotatud diagonaalidega neljaks osaks. Tõestada, et haaradepoolsed osad on pindvõrdsed.



Joon. 104.

Tõestus. On antud trapets $ABCD$ (joon. 104). Nõutakse tõestada, et kolmnurgad ABE ja CED on pindvõrdsed. Kolmnurgad ABD ja ACD on pindvõrdsed, sest neil on ühine alus AD ja võrdsed kõrgused. Jooniselt nähtub, et pindala $ABE = \text{pindala } ABD - \text{pindala } AED$ (I) ja pindala $ECD = \text{pindala } ACD - \text{pindala } AED$ (II). Võrduste (I) ja (II) vasakud pooled on võrdsed, sest nende paremad pooled on võrdsed. Seepärast pindala $ABE = \text{pindalaga } ECD$. Teoreem on tõestatud.

Nr. 2. Rööpkülik on jaotatud neljaks osaks sirglõikudega, mis on tõmmatud läbi diagonaali mingi punkti paralleelselt külgedega. Tõestada, et diagonaalist kahele poole asetatud osad on pindvõrdsed.

Nr. 3. Rööpkülik on jaotatud neljaks osaks sirglõikudega, mis

ühendavad mingi seesmise punkti tippudega. Tõestada, et vastastikku asetsevate osade pindalade summad on võrdsed.

Nr. 4. Tõestada, et sirge, mis ühendab ringi ümber joonestatud nelinurga diagonaalide keskpunkte, läbib selle ringi keskpunkti.

Mõningaid geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamise meetodeid.

§ 1. Geomeetriliste kohtade meetod.

Punktide geomeetriliseks kohaks nimetatakse joont või joonte kogu või pinda, mille kõikidel punktidel on mingi kindel omadus, mis kuulub üksnes neile. Niisiis, kui nõutakse tõestada, et mingisugune joon on punktide geomeetiline koht, mis rahuldab mingisugust eeldust, siis jagunevad tõestused kahte ossa: 1) on tarvis näidata, et iga punkt, mis rahuldab nõutavat eeldust, asetseb tingimata sellel joonel; 2) et selle joone iga punkt rahuldab tingimata nõutavat eeldust. Kui konstruktsioonülesannete lahendus viib meid mingisuguse punkti leidmisele, mis peab rahuldama mingeid kindlaid eeldusi, siis eemaldades ühe neist eeldustest, näeme, et ülesanne muutub määramatuks, s. o. tema lahendiks ei ole üks, vaid terve rida punkte, mis omavad kõiki nõutavaid omadusi, välja arvatud eemaldatud omadus. Need punktid moodustavad mingisuguse geomeetrilise koha. Pärast seda, võttes arvesse eemaldatud eeldust ja eemaldades mingi teise, näeme, et otsitav punkt võib võtta lugematu hulk uusi asendeid, mis kõik kokku moodustavad uue geomeetrilise koha. Teeme kindlaks mõlemate geomeetriliste kohtade kuju ja ehitame need. Siis otsitav punkt peab asetsema esimesel ja teisel geomeetrilisel kohal ja on järelikult määratud nende lõikumisega. Ülesanne on võimalik või võimatu, oleneb sellest, kas leitud geomeetrilised kohad lõikuvad või mitte. Nii-sugune on geomeetriliste kohtade meetodi tuum. Seda meetodit tuleb sageli kasutada, sellepärast on tähtis teada ja osata ehitada mitmesuguseid geomeetrilisi kohti.

Loendame need geomeetrilised kohad, millede teadmine on tarvilik allpool antud konstruktsioonülesannete lahendamisel.

I. Geomeetiline koht tasapinna punktidele, mis seisavad antud punktist O antud kaugusel R , on ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega R .

II. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel antud punktidest A ja B , on sirglõigu AB keskristsirge.

III. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest sirgest, on nende kahe sirge poolt moodustatud nurga poolitaja.

IV. Geomeetiline koht punktidele, mis asetsevad antud kaugusel sirgest AB , on kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega AB .

V. Antud sirget AB sellel antud punktis M puudutavate ringjoonte keskpunktide geomeetiline koht on punktist M tõmmatud sirglõigu AB ristsirge.

VI. Antud ringjoont O sellel antud punktis M puudutavate ringjoonte keskpunktide geomeetiline koht on antud ringjoone keskpunkti ja punkti M läbiv sirge.

VII. Geomeetiline koht punktidele, milledest antud sirglõik on näha antud nurgas, on kaks kaart, mis toetuvad sellele sirglõigule ja millesse antud nurk mahub piirdenurgana.

VIII. Võrdsete kõõlude keskpunktide geomeetiline koht antud ringis O on kontsentiline ringjoon, mis on puutujaks ühele nendest kõõludest.

§ 2. Sirgestamismeetod.

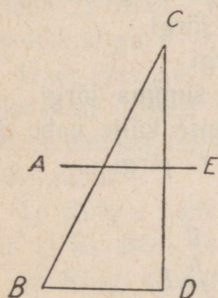
Seda meetodit kasutatakse eriti sageli kolmnurga konstrueerimisel, ja nimelt neil juhtudel, kui antud elementide hulgas on tema külgede summa või vahe. See meetod seisneb selles, et pööratakse üht neist külgedest, mille summa või vahe on antud, nende külgede lõikepunkti ümber, kuni mõlemad küljed moodustavad ühe sirge, kusjuures joonisel saadakse antud summa või vahe.

Edaspidise eeldusena on tarvilik lahendada järgmised konstruktsioonülesanded (vt. A. Kisseljovi „Geomeetria”).

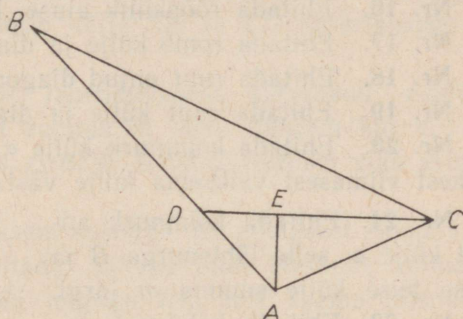
1. Poolitada antud sirglõik.
2. Ehitada antud sirglõigu keskristsirge.
3. Läbi vabalt valitud punkti sirgel tõmmata selle sirge ristsirge.
4. Väljaspool sirget asetsevast punktist tõmmata sellele sirgele ristsirge.
5. Antud sirge punktis ehitada nurk, mis võrdub antud nurgaga.
6. Poolitada antud nurk.
7. Ehitada kolmnurk tema antud kolme külje järgi.
8. Väljaspool antud sirget asetsevast punktist tõmmata sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

$= 180^\circ - (180^\circ - \angle B) = \angle B$; kahe teise külje vahe $AC - AB = AD - AB = d$.

Uurimine. Selleks et kolmnurka oleks võimalik ehitada, on tarvis, et vahe d oleks väiksem kui a . Kui antud nurk B on terav- või täisnurk, siis ülesanne on alati lahendatav ja ainult üheselt, sest sel juhul $\angle BDC$, olles väiksem kui $\angle ABC$ (kui sisenurk), on tingimata teravnurk ja seepärast kaldsirge DB ja ristsirge EA lõikuvad tingimata DB pikendusel punkti B pool ja määravad otsitava tipu A . Kui aga nurk B on nüri, siis ehitus ei ole alati võimalik, sest võib juhtuda, et $\triangle$ -s DBC nurk BDC on täisnurk, ja järelikult sirged DB ja AE on paralleelsed (joon. 106) või kui nurk BDC on nürinurk, siis sirged DB ja AE , kuigi lõikuvad mõnes punktis A (joon. 107), ei määra otsitavat tippu, sest



Joon. 106.



Joon. 107.

saadud $\triangle$ -ga ABC nurk ABC ei võrdu nurgaga B , vaid on $180^\circ - \angle B$, ja järelikult see kolmnurk ei rahulda ülesande tingimusi.

Nr. 2. Ehitada kolmnurk: a) kahe külje ja suurema külje vastasnurga järgi; b) külje ja selle kahe lähisnurga järgi; c) kahe külje ja väiksema külje vastasnurga järgi.

Nr. 3. Ehitada täisnurkne kolmnurk hüpoteenuusi ja teravnurga järgi.

Nr. 4. Ehitada täisnurkne kolmnurk kaateti ning hüpoteenuusi ja teise kaateti summa järgi.

Nr. 5. Ehitada täisnurkne kolmnurk kaateti ja kahe teise külje vahe järgi.

Nr. 6. Ehitada täisnurkne kolmnurk antud teravnurga ja selle vastaskaateti järgi.

Nr. 7. Ehitada kolmnurk kahe nurga ja neist ühe nurga vastaskülje järgi.

Nr. 8. Ehitada võrdhaarne kolmnurk tipunurga ja aluse järgi.

Nr. 9. Ehitada võrdkülgne kolmnurk tema kõrguse järgi.

Nr. 10. Ehitada kolmnurk aluse, kõrguse ja külje järgi.

Nr. 11. Ehitada kolmnurk külje, kahe teise külje summa ja ühele nendest tõmmatud kõrguse järgi.

Nr. 12. Ehitada kolmnurk nurga ja selle nurga lähiskülgedele tõmmatud kõrguste järgi.

Nr. 13. Ehitada rõõpkülik kahe lähiskülje ja ühe diagonaali järgi.

Nr. 14. Ehitada rõõpkülik külje ja kahe diagonaali järgi.

Nr. 15. Ehitada rõõpkülik kahe diagonaali ja nende vahelise nurga järgi.

Nr. 16. Ehitada rõõpkülik aluse, kõrguse ja diagonaali järgi.

Nr. 17. Ehitada romb külje ja diagonaali järgi.

Nr. 18. Ehitada ruut antud diagonaali järgi.

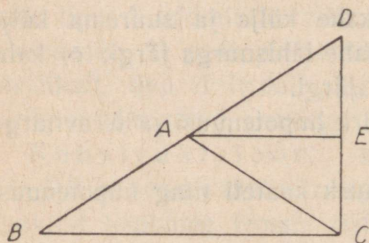
Nr. 19. Ehitada ruut külje ja diagonaali summa järgi.

Nr. 20. Ehitada kolmnurk külje a , kahe teise külje vahe d ja kahest viimasest väiksema külje vastasnurga C järgi.

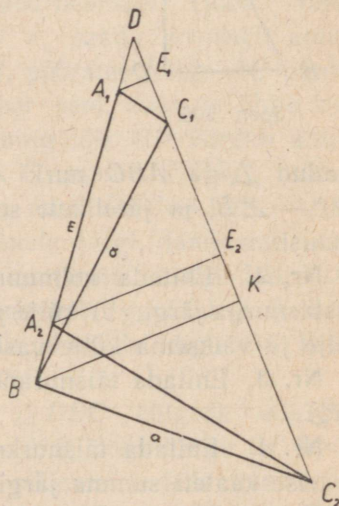
Nr. 21. Ehitada kolmnurk antud külje a , selle lähisnurga B ja kahe teise külje summa m järgi.

Nr. 22. Ehitada kolmnurk antud külje a , tema vastasnurga A ja kahe teise külje summa m järgi.

Antud on: a ; $\angle A$; $b + c = m$.



Joon. 108.



Joon. 109.

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $\triangle ABC$ (joon. 108) on otsitav. Pöörame külge AC punkti A ümber kuni

ta võtab asendi AD , nii et $AD = AC$ ja järelikult $BD = m$. Ühendades punkti D punktiga C saame $\triangle BDC$, milles on teada kaks külge $BC = a$ ja $BD = m$ ja nurk BDC , mis asetseb nendest väiksema vastas ja on võrdne poolega antud nurgast A .

$$\begin{aligned}\angle ADC &= \angle ACD \text{ kolmnurga } ACD \text{ võrdhaarsuse tõttu,} \\ \angle BAC &= \angle ADC + \angle ACD = 2 \angle ADC,\end{aligned}$$

kolmnurga välisnurga teoreemi põhjal, kust

$$\angle ADC = \frac{\angle A}{2}.$$

Konstruktioon. Vabalt valitud sirgel võtame lõigu $BD = m$. Punkti D (joon. 108) juures ehitame nurga suurusga $\frac{\angle A}{2}$, punktist B lõikame äsja ehitatud nurga haara kaarega, mille raadius on a . Ühendades saadud lõikepunkti C punktiga B saame $\triangle BCD$. Tipp A ühtib külje BD ja CD keskristsirge AE lõikepunktiga.

Uurimine. Ülesande lahenduvuseks tarvilikud eeldused seisnevad ilmselt selles, et summa m oleks suurem kui a . Kui see eeldus on täidetud, siis $\triangle BDC$ konstrueerimisel võib esineda kolm juhtu:

1) Külge a võib olla väiksem ristlõigu BK pikkusest (joon. 109), siis $\triangle$ -ka BDC ei saa ehitada, siit järeldub ülesande võimatus.

2) Külge a võib võrduda lõiguga BK , siis saame täisnurkse kolmnurga ja ülesanne omab ühe lahenduse.

3) Kui külge a on suurem ristlõigust BK , siis punkti B ümber joonestatud ringjoon raadiusega a lõikub sirgega DK kahes punktis C_1 ja C_2 , saame kaks kolmnurka BDC_1 ja BDC_2 . Tõmbame külgede DC_1 ja DC_2 keskelt ristsirged E_1A_1 ja E_2A_2 , saame kolmnurgad BA_1C_1 ja BA_2C_2 , mis rahuldavad eeldusi. On kerge tõestada, et need kolmnurgad on kongruentsed.

Täisnurksest kolmnurgast BKD saame:

$$BK = BD \sin \hat{B\hat{D}K} = m \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

Nüüd võib ülesande lahendamise võimalikkuse eelduse üles kirjutada järgmiselt:

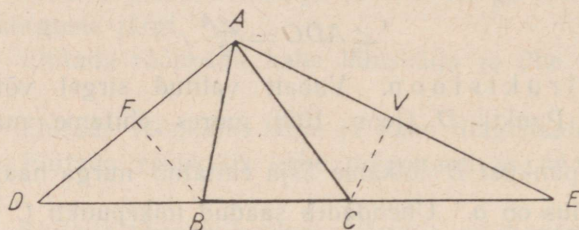
$$m \cdot \sin \frac{A}{2} \leq a < m.$$

Kui see eeldus on täidetud, omab ülesanne ühe lahenduse; vastasel korral lahendust ei ole.

Nr. 23. Ehitada kolmnurk antud külje, selle vastasnurga ja kahe teise külje vahe järgi.

Nr. 24. Ehitada kolmnurk tema ümbermõõdu ja nurkade järgi. Antud on: $2p$; $\angle B$; $\angle C$.

Analüüs. Oletame, et $\triangle ABC$ (joon. 110) on ehitatud. Pöörame külje BA punkti B ümber kuni asendini BD ja külge CA punkti C ümber kuni asendini CE . Siis $DE = 2p$.



Joon. 110.

Ühendades D ja E punktiga A saame $\triangle ADE$, milles on teada üks külg $DE = 2p$ ja kaks nurka: $\angle ADE = \frac{\angle B}{2}$ ja $\angle AED = \frac{\angle C}{2}$.

Kui kolmnurk ADE on ehitatud, siis tipud B ja C saame seal, kus AD ning AE keskristsirged lõikuvad küljega DE .

Konstruktsioon. Ehitame kolmnurga ADE külje $DE = 2p$ ja nurkade $\frac{B}{2}$ ja $\frac{C}{2}$ järgi. Külgede AD ja AE keskest tõmbame ristsirged, mis lõikuvad küljega DE punktides B ja C . Kolmnurk ABC on otsitav.

Tõestus. Kolmnurk ABC rahuldab kõiki ülesande nõudeid. Kolmnurga BDA ja kolmnurga CAE võrdhaarsusest järeldub, et $AB = DB$ ja $AC = EC$, järelikult

$$AB + BC + AC = DB + BC + EC = 2p.$$

Peale selle

$$\angle ABC = \angle ADB + \angle BAD = 2 \angle ADB = 2 \cdot \frac{\angle B}{2} = \angle B$$

ja

$$\angle ACB = 2 \angle CEA = 2 \cdot \frac{\angle C}{2} = \angle C.$$

Uurimine. Ülesanne on alati lahenduv ja omab ühe lahenduse.

Nr. 25. Ehitada kolmnurk antud külje, kahe teise külje summa ja ühele neist külgedest tõmmatud kõrguse järgi.

Nr. 26. Ehitada kolmnurk antud külje ja kahele teisele küljele tõmmatud mediaanide järgi.

Antud on: a ; m_b ; m_c .

Analüüs. Kui $\triangle ABC$ (joon. 111) on otsitav, siis tõmmates tema mediaanid BD ja CE , märkame, et $\triangle$ -gas BOC on teada kolm külge:

$$BC = a, BO = \frac{2}{3} m_b, CO = \frac{2}{3} m_c.$$

(Kolmnurga kolm mediaani lõikuvad ühes punktis; see punkt lõikab igast mediaanist ära ühe kolmandiku, lugedes ära lõigatud lõiku vastavast küljest.)

Konstruktsioon. Ehitame $\triangle BOC$ kolme külje järgi:

$$BC = a; BO = \frac{2}{3} m_b; CO = \frac{2}{3} m_c.$$

Pikendame BO kuni punktini D nii, et $BD = m_b$ ja CO kuni punktini E nii, et $CE = m_c$. Tõmmates sirged BE ja CD kuni lõikumiseni punktis A , saame otsitava kolmnurga ABC .

Tõestus. $\triangle$ -gas ABC on külge $BC = a$ konstruktsiooni järgi; BD ja CE on pikkuselt võrdsed lõikudega m_b ja m_c ; tõestame, et BD ja CE on mediaanid, s. o., et E ja D on külgede AB ja AC keskpunktid. Ühendades punktid E ja D näeme, et $\triangle EOD \sim \triangle BOC$, sest neil on võrdsed nurgad $\angle BOC = \angle EOD$ kui tippnurgad ja nende nurkade lähisküljed on võrdelised. Kolmnurkade sarnasusest järeldub, et $\angle EDO = \angle OBC$, s. o. $ED \parallel BC$, ja et

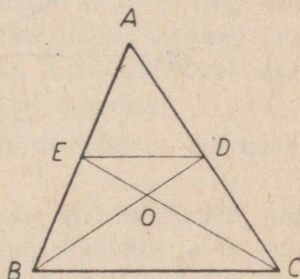
$$ED : BC = OD : OB,$$

kust

$$ED = \frac{1}{2} BC.$$

ED ja BC paralleelsusest järeldub, et $\triangle AED \sim \triangle ABC$, kust

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{1}{2},$$



Joon. 111.

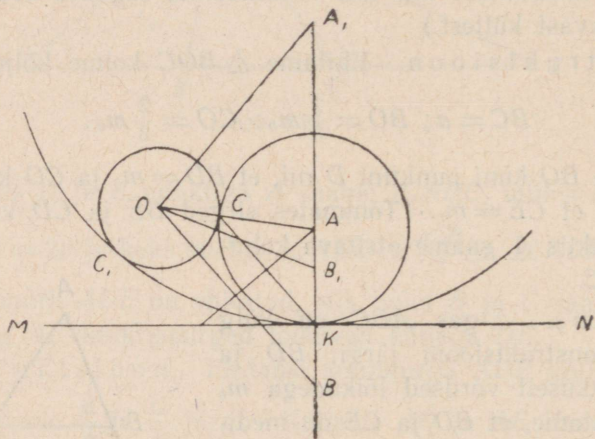
s. o. E on külje AB keskpunkt ja punkt D on külje AC keskpunkt, seepärast EC ja BD on tõepoolest mediaanid.

Uurimine. Ülesanne on lahenduv ja tal on üks lahendus, kui on võimalik ehitada $\triangle BOC$, s. o. kui

$$\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a \text{ ja } \frac{2}{3}m_b - \frac{2}{3}m_c < a.$$

Nr. 27. Ehitada kolmnurk kahe antud külje ja kolmandale küljele tõmmatud mediaani järgi.

Nr. 28. Joonestada ringjoon, mis puudutab antud sirget antud punktis ja antud ringjoont.



Joon. 112.

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et ringjoon A (joon. 112) on otsitav. Keskpunkt A peab tingimata asetsema ristsirgel, mis on tõmmatud antud punktis K sirgele MN .

Ühendades ringjoonte keskpunktid A ja O sirgega AO ja puutepunkti C punktiga K sirgega CK , saame võrdhaarse kolmnurga ACK . Tõmmates keskpunktist O sirge $OB \parallel CK$ kuni lõikumiseni KA pikendusega punktis B , saame $\triangle AOB$, mis on sarnane $\triangle$ -ga ACK ja mis on järelikult ka võrdhaarne. Võrdusest $AB = AO$ järeldub, et $KB = CO$, s. o. KB on võrdne antud ringjoone raadiusega ja seepärast punkti B asend kui ka sirge BO asend on teada. Niiviisi võib leida keskpunktile A teise geomeetrilise koha, selleks on nimelt sirglõigu OB keskristsirge.

Konstruksioon. Sirgele MN temal antud punktis K tõmbame ristsirge ja võtame sellel lõigu KB , mis võrdub antud ringjoone raadiusega. Ühendame punkti B keskpunktiga O ja sirglõigu BO keskpunktist tõmbame ristsirge kuni lõikumiseni KB pikendusega punktis A , mis ongi otsitava ringjoone keskpunkt. Jääb üle ainult punktist A raadiusega AK joonestada ringjoon.

• **Tõestus.** Konstruktsiooni järgi $AB = AO$ ning $KB = CO$, järelikult $AK = AC$. Kuid AK on raadius, millega tõmbame ringjoone A , järelikult keskpunktidevaheline kaugus AO võrdub raadiuste summaga ja seepärast ringjoon A puudutab antud ringjoont. Peale selle, nagu nähtub konstruktsioonist, puudutab ringjoon A sirget MN sellel antud punktis K , ja seepärast kõik ülesande nõuded on täidetud.

Uurimine. Kui võtta punktist K tõmmatud ristsirgel lõik KB_1 , mis võrdub antud ringjoone raadiusega, antud sirgest teisele poole, siis, sooritades täiesti samasuguse konstruktsiooni nagu enne, saame ringjoone A_1 , mis puudutab antud ringjoont seesmiselt, nii et üldse ülesandel on kaks lahendust: välimine ja seesmine puutumine; kuid võivad esineda juhud, kus on võimalikud ka kaks välimist või kaks seesmist või mingi üks või isegi mitte ühtegi puutumist. Lahendite mitmesugused liigid sõltuvad ringjoone O , sirge MN ja sellel asetseva punkti K vastastikusest asendist. Vaatleme kõiki juhtumeid, mis võivad esineda.

Sirge MN ja ringjoon O võivad: 1) mitte lõikuda ega puudutada; 2) puudutada; 3) lõikuda.

1. Kui sirgel MN ja ringjoonel O ei ole ühiseid punkte, nagu see on näidatud joonisel, on ülesanne alati võimalik ja ta omab kaht lahendust: üks seesmine, teine välimine puutumine.

2. Kui MN puudutab ringjoont O , siis võivad esineda kaks juhtu:

a) Punkt K ei ühti ringjoone ja sirge puutepunktiga. Sel juhul ülesandel on ainult üks lahendus — välimine puutumine.

b) Punkt K ühtib ringjoone O ja sirge MN puutepunktiga. Sel juhul muutub ülesanne määramatuks ja omab lõpmata palju lahendusi, nii seesmiste kui välimiste puutumistega.

3. Kui MN ja ringjoon O lõikuvad, võib esineda kolm juhtu:

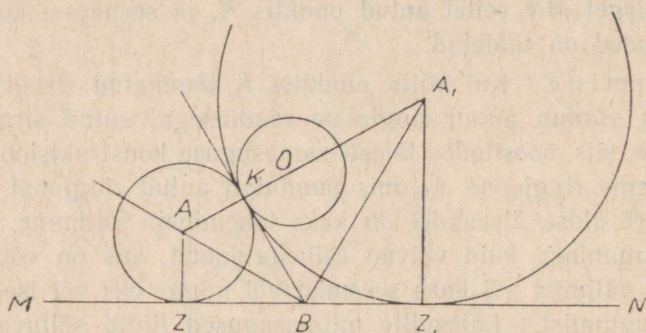
a) Punkt K asetseb ringjoonest O väljaspool. Sel juhul omab ülesanne kaht lahendust: mõlemad ringjooned puudutavad antud ringjoont välimiselt.

b) Punkt K asetseb ringjoone O sees. Ülesanne omab kaht lahendust: mõlemad puutumised on seesmised.

c) Punkt K on üks sirge MN ja ringjoone O lõikepunktidest. Et otsitava ringjoone keskpunkt peab sel juhul ühtima punktiga K ja ringjoone raadius võrdub nulliga, siis ei oma ülesanne ühtegi lahendust.

Nr. 29. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puudutab antud sirget sellel antud punktis.

Nr. 30. Joonestada ringjoon, mis läbib antud punkti A ja puudutab antud sirget sellel antud punktis B .



Joon. 113.

Nr. 31. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mille keskpunkt asetseb antud nurga haaral ja mis teisest haarast lõikab ära antud pikkusega kõõlu.

Nr. 32. Nurga haaral antud punktist joonestada ringjoon, mis nurga teisest haarast lõikab ära antud pikkusega kõõlu.

Nr. 33. Joonestada ringjoon, mis puudutab antud ringjoont sellel antud punktis ja antud sirget.

Analüüs. Oletame, et ringjoon A (joon. 113) rahuldab nõudeid, s. o. puudutab ringjoont O sellel antud punktis K ja sirget MN . Et kahe puuteri keskpunktid asetsevad puutepunktiga ühel sirgel, siis otsitav keskpunkt peab tingimata olema sirgel OK . Teisest küljest, tõmmates punktis K puutuja ringjoonele O kuni lõikumiseni sirgega MN punktis B , näeme, et otsitav ringjoon puudutab nurga KBM kaht haara ja seepärast tema keskpunkt peab asetsema selle nurga poolitajal.

Konstruksioon. Ühendame ringjoone O keskpunkti antud punktiga K ja tõmbame punktis K puutuja KB kuni lõikumiseni antud sirgega MN . Kui sirge KB on paralleelne sirgega MN , siis lahenduse edaspidine käik on ilmne. Tõmbame sirgete KB ja MN poolt moodustatud nurgapoolitaja kuni tema lõikumiseni sirgega OK punktis A . Võtame punkti A keskpunktiks ja joonestame ringjoone raadiusega AK . See ringjoon ongi otsitav.

Tõestus. Et punkt A asetseb nurga KBM poolitajal, siis $AK = AZ$ ja seepärast ringjoon A puudutab sirget MN . Peale selle nähtub konstruktsioonist, et ta puudutab ka ringjoont O sellel antud punktis K .

Uurimine. Sirge KB , antud ringjoone puutuja punktis K , lõikudes sirgega MN , moodustab kaks kõrvunurka: KBN ja KBM , seepärast on ülesandel üldiselt kaks lahendust: üks keskpunkt A saadakse OK ja nurga KBM poolitaja lõikumisel (välimine puutuja), teine keskpunkt A_1 tekib OK ja nurga KBN poolitaja lõikumisel (seesmine puutuja). Vaatleme kõiki võimalikke ringjoone O ja sirge MN vastastikuse asendi juhtusid:

- 1) Sirgel MN ei ole ringjoonega O ühiseid punkte.
- 2) Sirge MN puudutab ringjoont O .
- 3) Sirge MN lõikub ringjoonega O .

Kui sirgel MN ei ole ühiseid punkte ringjoonega O , siis ülesanne on alati lahenduv ja ta omab kaks lahendust — seesmine ja välimine puutumine.

Kui MN puudutab ringjoont O , siis võivad esineda kaks juhtu:

a) puutepunkt ühtib punktiga K . Ülesanne muutub määratuks ja omab lugematu hulga lahendusi, nii seesmise kui ka välimise puutumisega;

b) puutepunkt ei ühti punktiga K . Sel juhul on ülesandel ainult üks lahendus: välimine puutumine.

Kui sirge MN lõikub ringjoonega, siis võivad esineda kaks isesugust asendit:

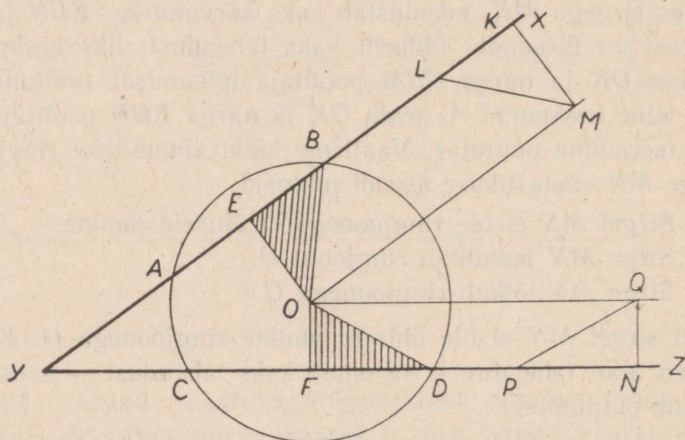
a) sirge, lõikudes ringjoonega, ei läbi punkti K . Ülesanne omab kaht lahendust — seesmine ja välimine puutumine;

b) sirge MN lõikub ringjoonega ja K on üks lõikepunktidest. Ülesandel sel juhul lahendust ei ole.

Nr. 34. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis lõikab antud nurga haaradest ära antud pikkustega kõõlud.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et nõutava raadiusega ringjoon O (joon. 114) lõikab antud nurga XYZ haaradest ära antud lõigud $AB = a$ ja $CD = b$. Ühendades keskpunkti O lõikepunktidega B ja D ja tõmmates ristsirged, märkame, et kumbki täisnurkne kolmnurk OEB ja OFD on määratud hüpotenuusi ja ühe kaatetiga, seepärast on võimalik ehitada mõlemaid neid kolmnurki. See konstruktsioon määrab ristlõikude OE ja OF pikkused, s. o. keskpunkti O kaugused antud nurga haaradest, pärast seda on ülesande lahendus teada.

Konstruktsioon. Võtame sirgel XY vabalt valitud punkti K lõigu KL , mis võrdub antud lõigu a poolega. Tõmbame punktis K ristsirge KM ning punktist L antud raadiusega R mär-



Joon. 114.

gime ristsirgel kaare. Sirge, mis on tõmmatud punktist M paralleelselt haaraga XY , on keskpunkti O üks geomeetriline koht. Et saada teine geomeetriline koht, teeme analoogilise konstruktsiooni vabalt valitud punkti N juures sirgel YZ : võtame $NP = \frac{b}{2}$; tõmbame $NQ \perp YZ$ ja lõikame seda ristsirget punktist P antud raadiusega R tõmmatud kaarega. Saadud täisnurkse kolmnurga NPQ tipust Q tõmbame sirge paralleelselt haaraga YZ . Niiviisi ehitatud kaks geomeetrilist kohta määravad lõikudes keskpunkti O . Ringjoon, mis on tõmmatud keskpunktist O antud raadiusega R , on otsitav.

Tõestus. Tõmmates punktist O ristsirged $OE \perp XY$ ja

$OF \perp YZ$ ning ühendades punkti O punktidega B ja D , saame täisnurksed kolmnurgad OEB ja OFD . $\triangle OEB = \triangle MKL$ ($OB = R = ML$; $OE = MK$), ja järelikult

$$EB = KL = \frac{a}{2},$$

ja seepärast

$$AB = 2EB = 2 \cdot \frac{a}{2} = a.$$

Samuti

$$\triangle OFD = \triangle QNP \quad (OD = QP = R; \quad OF = QN),$$

ja sellespärast

$$FD = NP = \frac{b}{2};$$

järelikult,

$$CD = 2FD = 2 \cdot \frac{b}{2} = b.$$

Niisiis, ringjoon O on tõmmatud antud raadiusega R ja lõikab nurga haaradest ära nõutava pikkusega kõõlud a ja b , nii et kõik ülesande nõuded on rahuldatud.

Uurimine. Et kõõl ei tohi olla diameetrist suurem, väljenduvad ülesande võimalikkuse tingimused võrratustega $a < 2R$ ja $b < 2R$. Kui neid võrratusi on arvestatud, on ülesanne alati lahenduv. Kui seejuures on eelduseks, et näiteks haarale XY peab tulema nimelt kõõl b , on lahendus alati ühene; vastasel korral, kui on ükskõik millisel haaral peab olema kõõl a ja millisel kõõl b , on ülesandel kaks lahendust.

Nr. 35. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puudutab antud sirget ja antud ringjoont.

Nr. 36. Antud ringjoone sisse joonestada kolm ühesuurust ringjoont, mis puudutavad üksteist ja antud ringjoont.

Nr. 37. Ehitada romb nurga ja diagonaalide summa või vahe järgi.

Nr. 38. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mille keskpunkt asetseb antud nurga haaral ja mis nurga teist haara puudutab.

Nr. 39. Ehitada võrdhaarne kolmnurk kõrguse ja ümbermõõdu järgi.

Nr. 40. On antud kaks punkti; tõmmata sirge nii, et nendest punktidest sellele sirgele tõmmatud ristlõigud tulevad antud pikkusega.

Nr. 41. Antud sektori sisse joonestada ringjoon, mis puudutab raadiusi ja sektori kaart.

Nr. 42. Ehitada võrdhaarne kolmnurk tipunurga ja ümbermõõdu järgi.

Nr. 43. Ehitada täisnurkne kolmnurk teravnurga ja kaatetite vahe järgi.

Nr. 44. Läbi väljaspool ringjoont asetseva punkti tõmmata lõikaja nii, et tema seesmine osa võrdub antud lõiguga.

Nr. 45. Leida geomeetrilised kohad:

a) antud punktist antud sirge punktideni tõmmatud sirglõikude keskpunktidele;

b) punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest paralleelsirgest;

c) ühise alusega ja võrdsete kõrgustega kolmnurkade tippudele;

d) punktidele, millest antud ringjoonele tõmmatud puutujad on võrdsed antud pikkusega;

e) punktidele, millest antud ringjoon on näha antud nurgas (s. o. igast punktist ringjoonele tõmmatud kaks puutujat moodustavad omavahel antud nurga);

f) niisuguste ringjoonte keskpunktidele, mis on joonestatud antud raadiusega ja mis puudutavad antud sirget;

g) antud ringjoont sellel antud punktis puudutavate ringjoonte keskpunktidele;

h) niisuguste ringjoonte keskpunktidele, mis on joonestatud antud raadiusega ja puudutavad antud ringjoont (kaks juhtu);

i) kõigi kõõlude keskpunktidele, mis läbivad ringjoone antud punkti;

k) punktidele, mis jaotavad kõik ringjoone antud punkti läbivad kõõlud ühes ja samas vahekorras $m : n$;

l) punktile, mille kaugused antud nurga haaradest suhtuvad nagu $m : n$;

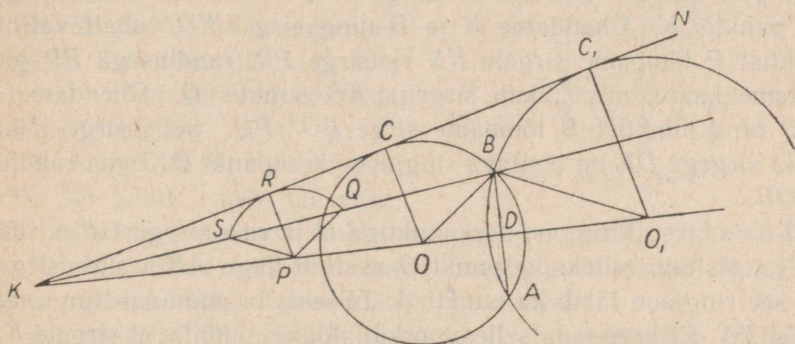
m) kahest antud punktist niisugustel kaugustel asetsevale punktile, et nimetatud kauguste ruutude summa on jääv;

n) kahest antud punktist niisugustel kaugustel asetsevale punktile, et nimetatud kauguste ruutude vahe on jääv.

§ 3. Sarnasusemeetod.

Mõnel juhul ei ole kasulik hakata kohe ehitama otsitavat kujundit, vaid on parem alustada niisuguse kujundi ehitamisega, mis otsitava kujundiga on sarnane; pärast seda on kerge üle minna nõutavale kujundile. Sel juhul jaotatakse andmed kahte klassi: ühed annavad võimaluse ehitada kujundi, mis on sarnane antud kujundiga, teised aga on selleks, et sellelt kujundilt üle minna nõutavale. See meetod on eriti kasulik neil juhtudel, kui ainult üks antud suurustest on nõutava kujundi joonelement, kõik teised aga on nurgad või külgede suhted.

Näiteks kui kolmnurga ehitamiseks on antud kaks nurka või nurk ja selle nurga lähiskülgede suhe või kolme külje suhted ning



Joon. 115.

peale selle mingi joonelement (näiteks külg, kõrgus, mediaan, nurgapoolitaja, sissejoonestatud või ümberjoonestatud ringjoone raadius jne.), siis esmalt, jättes tähele panemata antud joonelemente, ehitatakse antud kujundiga sarnane kujund, pärast, kasutades antud joonelementi, ehitatakse otsitav kujund. Sarnasusemeetodit kasutatakse sageli ühtede kujundite ehitamisel teiste sisse.

Nr. 46. Joonestada ringjoon, mis läbib kaht antud punkti ja puudutab antud sirget.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja ringjoon O on otsitav (joon. 115). Keskpunkt O peab ilmselt asetsema rist-sirgel, mis on tõmmatud lõigule AB tema keskpunktist. Ühendades keskpunkti O puutepunktiga C ja punktiga B , näeme, et punkt O peab seisma ühekaugusel antud sirgest KN ja antud punktist B .

Ülesanne taandub nüüd järgmiseks: on antud $\angle NKD$ ja selle sees punkt B ; nõutakse selle nurga haaral KD leida niisugune punkt, et tema kaugused antud punktist B ja nurga teisest haarast KN oleksid võrdsed.

Seda ülesannet on väga lihtne lahendada sarnasusemeetodi abil, sest kui sirgel KD vabalt valitud punktist P tõmmata sirged $PQ \parallel OB$ ja $PR \parallel OC$, siis $\triangle KOB$ ja $\triangle KPQ$ ning $\triangle KOC$ ja $\triangle KPR$ sarnasusest on kerge järeldada, et $PQ = PR$. Järelikult, kui tõmmata haaral KD vabalt võetud punktist P ristsirge PR haarale KN ja märkida raadiusega PR sirgel KB punkt Q , siis otsitav punkt O on sirgega PQ paralleelse ja punkti B läbiva sirge ning sirge KD lõikepunkt.

Konstruksioon. Ühendame antud punktid A ja B ning lõigu AB keskelt tõmbame ristsirge DK , mis lõikab antud sirget KN punktis K . Ühendame K ja B ning sirgel KD vabalt valitud punktist P tõmbame sirgele KN ristsirge PR , raadiusega PR joonestame kaare, mis lõikub sirgega KB punktis Q . Ühendame P ja Q ning punktist B tõmbame sirge $BO \parallel PQ$. Selle sirge lõikepunkt sirgega DK on otsitava ringjoone keskpunkt O . Tema raadius on OB .

Tõestus. Ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega OB on tõepoolest otsitav: esiteks, et punkt O asetseb lõigu AB keskristsirgel, siis see ringjoon läbib ka punkti A . Teiseks, ta puudutab tingimata sirget KN . Et veenduda selles, on küllaldane näidata, et sirgele KN punktist O tõmmatud ristlõik võrdub raadiusega OB . Et $OB \parallel PQ$ konstruktsiooni põhjal ja $OC \parallel PR$ kui kaks ristsirget ühele ja samale sirgele KN , siis $\triangle KOB \sim \triangle KPQ$ ja $\triangle KOC \sim \triangle KPR$. Nende kolmnurkade sarnasusest järeldub:

$$\frac{OB}{PQ} = \frac{OK}{PK} \text{ ja } \frac{OC}{PR} = \frac{OK}{PK}.$$

Nendest võrretest saame:

$$\frac{OB}{PQ} = \frac{OC}{PR}. \text{ Kuid } PQ = PR \text{ konstruktsiooni järgi.}$$

Järelikult $OC = OB$ ja seepärast ringjoon, mis on joonestatud raadiusega OB , läbib punkti C ning sirgete KN ja OC ristseisu tõttu on sirge KN tingimata ringjoone O puutuja, mida oligi tarvis tõestada.

Uurimine. Ülesanne on lahendamatu: 1) kui punktid A ja B asetsevad antud sirgest KN teine teisel pool; 2) kui punktid A

ja B asetsevad sirgel KN , sest mõlemal juhul punkte A ja B läbiv ringjoon lõikub tingimata sirgega KN ja ei või puudutada teda. Kõigil teistel ülejäänud juhtudel ülesanne on lahenduv ja omab üldiselt kaks lahendust: ringjoon O ja ringjoon O_1 (joon. 115), mille keskpunkti saame DK lõikumisel sirgega BO_1 , mis on tõmmatud paralleelselt sirgega PS , kus S on raadiusega PR tõmmatud kaare teine lõikepunkt sirgel BK . Peale selle, sõltuvalt sirgete AB ja KN vastastikusest asendist, võivad esineda järgmised erijuhud.

1) Sirge KN läbib ühte antud punktidest, näiteks punkti B . Ülesanne omab sel juhul ühe lahenduse: otsitav keskpunkt asetseb AB keskristsirge ja sirgele KN punktis B tõmmatud ristsirge lõikepunktis.

2) Sirge KN on paralleelne sirgega AB . Sel juhul on üks lahendus, kusjuures konstruktsioon lihtsustub.

3) Sirge AB on risti sirgega KN . Sel juhul omab ülesanne kaht lahendust, kusjuures mõlema ringjoone raadiused on võrdsed.

Nr. 47. Antud segmendi sisse joonestada ruut nii, et tema kaks tippu asuksid kõõlul, teised kaks tippu kaarel.

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $KZMN$ (joon. 116) on ruut, mis on ehitatud antud segmendi $AKZB$ sisse. Tõmmates kaare $AKZB$ keskpunktist O ristsirge OCE küljele KZ ning ühendades punktid C ja Z , tõmbame sirge CZ vabast punktist F ristsirge FH sirgele AB . Kolmnurkade CFH ja CZM sarnasusest saame:

$$FH : ZM = CF : CZ. \quad (I)$$

Tõmmates $FG \parallel KZ$, saame kolmnurkade CGF ja CEZ sarnasusest:

$$GF : EZ = CF : CZ. \quad (II)$$

Võrrete (I) ja (II) võrdlemisel saame:

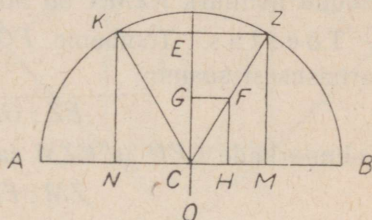
$$FH : ZM = GF : EZ.$$

Asetades saadud võrdes keskmised liikmed ümber ja asendades GF võrdse väärtusega CH , saame:

$$FH : CH = ZM : EZ = 2 : 1,$$

kust

$$FH = 2CH.$$



Joon. 116.

Sellest järeldub, et kui võtta sirgel AB punktist C vabalt valitud lõik CH , AB ristsirgel punktis H lõik HF kaks korda suurem kui CH , siis sirge, mis ühendab punkte C ja F , lõikumisel segmendi kaarega määrab otsitava ruudu ühe tipu asendi.

Konstruksioon. Antud segmendi keskpunktist O tõmbame sirgele AB ristsirge OC ja võtame punktist C sirgel AB vabalt valitud lõigu CH . Punktis H tõmbame sirgele AB ristsirge ja võtame sellel lõigu $HF = 2CH$ (joon. 116). Ühendame C ja F ning pikendame CF kuni lõikumiseni segmendi kaarega punktis Z .

Punktist Z tõmbame sirgele AB ristsirge ZM ja tõmbame $ZK \parallel AB$. Punktist K tõmbame sirgele AB ristsirge KN . Niiviisi saadud nelinurk $KZMN$ on nõutav ruut.

Tõestus. Tõmbame $FG \parallel AB$. Kolmnurkade CGF ja CEZ sarnasusest saame:

$$EZ : GF = CZ : CF. \quad (\text{III})$$

Kolmnurkade CFH ja CZM sarnasusest saame:

$$ZM : FH = CZ : CF. \quad (\text{IV})$$

Võrretest (III) ja (IV) järeldub:

$$EZ : GF = ZM : FH.$$

Vahetades keskmiste liikmete kohad ja märgates, et $GF = CH$, saame:

$$EZ : ZM = CH : FH = 1 : 2$$

(konstruktsiooni järgi), kust

$$EZ = \frac{1}{2} ZM.$$

Kuid E on kõõlu KZ keskpunkt (sest raadius OE on risti kõõluga KZ) ja seepärast võrdusest

$$EZ = \frac{1}{2} ZM$$

järeldub, et

$$KZ = ZM.$$

Ühendades K ja C märkame, et

$$\triangle CKN = \triangle CZM (CK = CZ; \angle CKN = \angle CZM);$$

järelikult

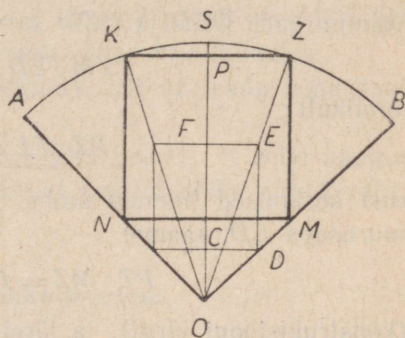
$$NK = ZM = KZ.$$

Niisiis, nelinurgas $KZMN$ on kõik küljed omavahel võrdsed ning kõik nurgad on täisnurgad ja seepärast $KZMN$ on ruut.

Uurimine. Kaare $AKZB$ suurenemisel segmendi sisse joonestatud ruudu külge suureneb kuni suurima võimaliku väärtuseni, mis on $R\sqrt{2}$, millise väärtuse ta saab siis, kui kaar $AKZB$ muutub võrdseks $\frac{3}{4}$ -ga ringjoonest. Kaare edasisel suurenemisel muutub ülesanne lahendamatuks. Niisiis ülesanne on võimalik ja omab ühe lahenduse sel juhul, kui kaares $AKZB$ ei ole mitte enam kui 270 kaarekraadi.

Nr. 48. Antud sektori sisse ehitada ruut nii, et kaks tema tippu asuksid kaarel ja teised kaks raadiustel.

A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et ruut $KZMN$ (joon. 117) on joonestatud antud sektori AOB sisse. Ühendades keskpunkti O ruudu tipuga Z , lastes ristsirge OP sirgele KZ ja tõmmates sirgele OZ vabalt valitud punktist E sirge $EF \parallel KZ$, $ED \parallel ZM$ ja $DC \parallel EF$, märkame, et kolmnurkade OFE ja OPZ sarnasuse tõttu saame:



Joon. 117.

$$FE : PZ = OE : OZ \quad (I)$$

ning kolmnurkade ODE ja OMZ sarnasusest:

$$DE : MZ = OE : OZ; \quad (II)$$

võrretest (I) ja (II) järeldeb:

$$FE : PZ = DE : MZ,$$

ehk, asetades keskmised liikmed ümber:

$$FE : DE = PZ : MZ = 1 : 2,$$

s. o.

$$FE = CD = \frac{1}{2} DE.$$

Sellest selgub, et kui sirgele OP vabalt valitud punktis tõmmata ristsirge CD ja punktis D tõmmata $DE \perp CD$ ning võtta $DE = 2CD$, siis sirge OE lõikab sektori kaart punktis, mis saab üheks ruudu tipuks.

Konstruktsioon. Poolitame sirgega OS nurga AOB , mille moodustavad sektori raadiused. Sellel sirgele vabalt valitud punktis tõmbame temale ristsirge CD kuni lõikumiseni sirgega OB ,

punktis D tõmbame ristsirge sirgele CD ja võtame temal lõigu $DE = 2CD$.

Ühendame punktid O ja E ning pikendame sirget OE kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis Z . Punktist Z tõmbame $ZM \parallel OS$ ja $ZK \perp OS$; punktist K tõmbame $KN \parallel OS$ ning ühendame punktid M ja N . Kujund $KZMN$ on nõutav ruut.

Tõestus. Et raadius OS on risti kõõluga KZ , siis $KP = PZ$. Tõmmates $EF \parallel ZK$, saame kolmnurkade OFE ja OPZ sarnasusest:

$$PZ : FE = OZ : OE.$$

Kolmnurkade OED ja OZM sarnasusest:

$$ZM : ED = OZ : OE,$$

järelikult

$$PZ : FE = ZM : DE,$$

kust keskmised liikmed ümber asetades ja asendades FE võrdse suurusega CD , saame:

$$PZ : ZM = CD : DE = 1 : 2$$

(konstruktsiooni järgi), ja järelikult:

$$PZ = \frac{1}{2} ZM,$$

et aga PZ on pool lõigust KZ , siis $KZ = ZM$. Ühendades O ja K märkame, et $\triangle ONK = \triangle OZM$ ($OK = OZ$ kui raadiused; $\angle OKN = \angle OZM$, sest igaüks neist täiendab võrdseid nurki OKZ ja OZK 90° -ni; $\angle NOK = \angle MOZ$, sest igaüks neist täiendub kuni pooleni $\angle AOB$ võrdsete nurkadega). Nende kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et $NK = ZM$. Järelikult nelinurk $KZMN$, omades kolm võrdset külge ($NK = ZM = KZ$) ja konstruktsiooni järgi kaks täisnurka ($\angle NKZ$ ja $\angle MKZ$), mis asetsevad võrdsete külgede vahel, on ruut.

Uurimine. Sektori raadiustest AO ja BO moodustatud nurga AOB suurenemisel suureneb sissejoonestatud ruudu külge KZ kogu aeg kuni saavutab suurima võimaliku väärtuse, s. o. kuni ta muutub võrdseks $R\sqrt{2}$, kus $R = AO$. See toimub siis, kui $\angle AOB$ saab väärtuse 270° , sel juhul ruudu külge saab võrdseks vahemaaga A ja B vahel. Edaspidisel nurga AOB suurenemisel muutub ülesanne lahendamatuks. Niisiis, ülesanne on võimalik ja omab ühe lahenduse, kui $\angle AOB$ ei ületa 270° .

Nr. 49. Ehitada kolmnurk tipunurga, kõrguse ja nende lõikude suhte järgi, milleks kõrgus jaotab aluse.

Nr. 50. Joonestada sisse ruut: 1) antud kolmnurka; 2) antud sektorisse; 3) antud segmenti.

Nr. 51. Läbi antud punkti tõmmata sirge nii, et kolm antud sirget, mis lähtuvad ühest punktist, lõikaksid otsitavast sirgest ära antud vahekorras olevad lõigud.

Nr. 52. Läbi ringjoonel antud punkti A tõmmata kõõl AD , mis lõikuks antud kõõluga BC niisuguses punktis E , et lõigud DE ja DC oleksid antud vahekorras.

Nr. 53. Tõmmata kolmnurga sees alusega paralleelne lõik nii, et see lõik oleks keskmiseks võrdeliseks ühe külje lõikudele.

Nr. 54. Ehitada võrdhaarne kolmnurk, kui on teada tema haar ning kõrguse ja aluse summa.

Nr. 55. Antud sirgel leida niisugune punkt, et selle kaugus antud punktist ja kaugus teisest antud sirgest oleks antud vahekorras.

§ 4. Paralleellükke-meetod.

Sageli on kasulik asetada antud või otsitava kujundi mõned osad ümber teise asendisse, milles on kergem selgitada antud elementide ja otsitavate elementide vahelisi seoseid. On olemas mitmesugused niisuguse ümberasetuse võtted. Meie vaatleme paralleelset ülekannet ehk paralleellüket.

Nr. 56. Ehitada kolmnurk tema kolme antud mediaani järgi.

Antud on: m_a ; m_b ; m_c .

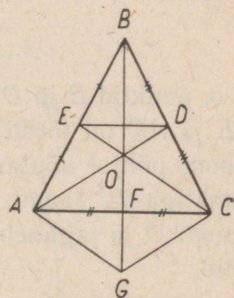
Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $\triangle ABC$ (joon. 118) on otsitav. Tõmmates selles kolmnurgas tema mediaanid AD , BF , CE , märkame, et $\triangle$ -s AOC on teada kaks külge

$$AO = \frac{2}{3} m_a; \quad CO = \frac{2}{3} m_c$$

ja kolmanda külje mediaan

$$OF = \frac{1}{3} m_b,$$

seepärast on konstruktsiooni kerge teha.



Joon. 118.

Konstruksioon. Ehitame $\triangle OGC$ kolme külje järgi:

$$OG = \frac{2}{3} m_b; \quad OC = \frac{2}{3} m_c; \quad GC = \frac{2}{3} m_a$$

ja täiendame ta rööpkülilikuni. Tõmbame selles rööpkülilikus diagonaali AC ja pikendame AO kuni punktini D , nii et $AD = m_a$, ja CO kuni punktini E , nii et $CE = m_c$ (joon. 118). Tõmmates sirged AE ja CD , saame nende lõikumisel tipu B . Kolmnurk ABC on otsitav.

Tõestus. Ühendades punktid E ja D märkame, et

$$\triangle EOD \sim \triangle AOC$$

nurkade võrdsuse tõttu, sest

$$\angle AOC = \angle EOD,$$

ja nende nurkade lähiskülgede võrdelisuse tõttu. Kolmnurkade sarnasusest järeldub, et $ED \parallel AC$ ja et

$$ED : AC = EO : OC,$$

s. o. et

$$ED = \frac{1}{2} AC.$$

ED ja AC paralleelsuse tõttu on

$$\triangle BED \sim \triangle BAC,$$

kust saame:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DB}{CB} = \frac{ED}{AC} = \frac{1}{2},$$

millest:

$$BE = \frac{1}{2} AB; \quad BD = \frac{1}{2} BC,$$

s. o. punktid E ja D on külgede AB ja CB keskpunktid ja seepärast CE ja AD on tõesti kolmnurga ABC mediaanid, neil on konstruksiooni põhjal nõutav pikkus. Ühendades tipu B vastaskülje keskpunktiga F , saame kolmanda mediaani BF , mis läbib tingimata punkti O ja jaguneb selles vahekorras $2 : 1$. Järelikult $BO = 2 \cdot OF$, kuid

$$OF = \frac{1}{2} OG = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} m_b \right) = \frac{1}{3} m_b.$$

Niisiis, $BO = \frac{2}{3} m_b$, ja järelikult $BF = m_b$, s. o. ka kolmas mediaan on nõutava pikkusega.

Uurimine. Ülesanne on lahenduv ja omab ühe lahenduse, kui on võimalik ehitada $\triangle OCG$, s. o. kui

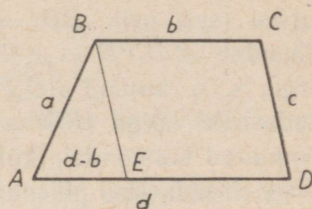
$$\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > \frac{2}{3} m_c \quad \text{ja} \quad \frac{2}{3} m_a - \frac{2}{3} m_b < \frac{2}{3} m_c.$$

Järelikult kolme mediaani järgi kolmnurga ehitamise võimalikkuse eeldused seisnevad selles, et kahe mediaani summa oleks suurem kolmandast ning vahe väiksem kolmandast.

Nr. 57. Ehitada trapets tema nelja antud külje järgi.

Analüüs. Kui $ABCD$ (joon. 119) on otsitav trapets, siis, tõmmates sirge $BE \parallel CD$, märkame, et $\triangle ABE$ on teada kõik kolm külge: $AB = a$, $BE = c$ ja $AE = d - b$.

Konstruksioon. Ehitame $\triangle ABE$ kolme külje järgi, tipust B tõmbame sirge paralleelselt sirgega AE ja võtame sellel lõigu $BC = b$. Läbi punkti C tõmbame sirge paralleelselt sirgega BE kuni lõikumiseni AE pikendusega punktis D . Trapets $ABCD$ on otsitav.



Joon. 119.

Tõestus. Kujund $ABCD$ on tõepoolest trapets, sest et $BC \parallel AD$; selles trapetsis külg $AB = a$; $BC = b$;

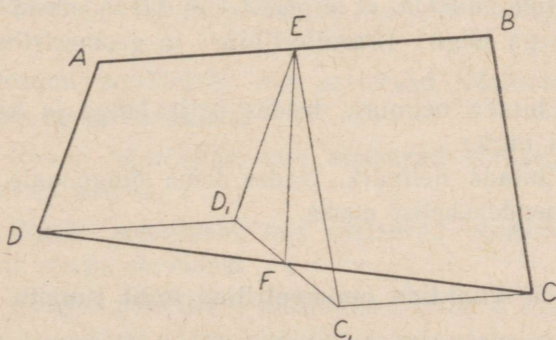
$$CD = BE = c;$$

$$AD = AE + ED = d - b + b = d.$$

Niisiis on trapetsis $ABCD$ kõik neli külge nõutava pikkusega.

Uurimine. Ülesanne on lahenduv ja omab ühe lahenduse, kui on võimalik ehitada $\triangle ABE$, s. o. kui

$$a + c > d - b \text{ ja } a - c < d - b.$$



Joon. 120.

Nr. 58. Ehitada nelinurk $ABCD$ (joon. 120), teades kõiki tema külgi ja lõiku EF , mis ühendab vastaskülgede keskpunkte.

Lahendus. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja nelinurk $ABCD$ (joon. 120) on otsitav. Et lähendada antud lõikusid teineteisele, teeme külgedega AD ja BC paralleellükke, nii et küljed AD ja BC lähevad asendisse ED_1 ja EC_1 . Siis sirglõik DD_1 on võrdne ja paralleelne sirglõiguga AE ning sirglõik CC_1 on võrdne ja paralleelne sirglõiguga EB ; kuid et $AE = EB$, siis $DD_1 = CC_1$ ja $DD_1 \parallel CC_1$. Selle tõttu kolmnurgad DD_1F ja CC_1F on kongruentsed (sest neil: $DD_1 = CC_1$, $DF = CF$ ja $\angle D_1DF = \angle FCC_1$); tähendab $\angle D_1FD = \angle CFC_1$ ja seepärast joon D_1FC_1 peab olema sirge, s. o. kujund ED_1FC_1 on kolmnurk. Selles kolmnurgas on teada kaks külge ($ED_1 = AD$; $EC_1 = BC$) ja mediaan EF , mis on tõmmatud kolmandale küljele. Nende andmete järgi on kolmnurka kerge ehitada (kui pikendame mediaani EF punktist F tema pikkuse võrra ja saadud punkti ühendame punktidega D_1 ja C_1 , siis saame rööpküliku, milles on teada küljed ja üks diagonaal). Saanud $\triangle ED_1C_1$, ehitame kolmnurgad D_1DF ja C_1CF ning seejärel kogu nelinurga $ABCD$.

Nr. 59. Ehitada nelinurk kolme külje a , b , c ning kahe nurga α ja β järgi, mis on neljanda külje lähisnurkadeks.

Nr. 60. Ehitada trapets tema ühe nurga, kahe diagonaali ja kesklõigu järgi.

Nr. 61. Kahele antud ringjoonele tõmmata ühine lõikaja, mis on paralleelne antud sirgega, nii et lõikepunktidega määratud kõõlude summa või vahe võrdub antud pikkusega.

Nr. 62. Ringis on antud kaks kõõlu AB ja CD . Leida ringjoonel niisugune punkt X , et sirged XA ja XB lõikaksid kõõlust ära antud pikkusega lõigu. (Paralleellükke- ja geomeetriliste kohtade meetod.)

Nr. 63. Ehitada nelinurk, teades nelja külge ja kahe vastaskülje vahelist nurka.

Nr. 64. Ehitada nelinurk, teades tema diagonaale, kaht vastaskülge ja nendevahelist nurka.

§ 5. Punktide geomeetriline koht ruumis.

Punktide geomeetriliseks kohaks ruumis on enamasti kas pind või joon. Kui punktide geomeetriline koht ruumis on joon, on teda sageli otstarbekohane vaadelda kahe teise geomeetrilise koha lõikejoonena — kahe pinna lõikejoonena. Ülesannetes geomeetriliste kohtade otsimiseks ja ehitamiseks on olulised järgmised kaks

momenti. Olgu kujund F otsitav geomeetiline koht. Niisugusel korral tõestatakse:

1) Iga punkt, mis omab vaadeldavaid omadusi, kuulub kujundile F .

2) Kujundi F iga punkt omab vaadeldavat omadust.

Need kaks momenti vastavad otsesele ja pöördteoreemile. Neil juhtudel, kui lahendus on lihtne ja kohe selge, jäetakse pöördteoreem sageli tõestamata.

Leida geomeetrilised kohad.

Nr. 1. Ruumi punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kahest antud punktist.

Nr. 2. Ruumi punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kolmest antud, mitte ühel sirgel asetsevast punktist.

Nr. 3. Ruumi punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kahest paralleelsest tasapinnast.

Nr. 4. Ruumi punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kahest lõikuvast tasapinnast.

Nr. 5. Ruumi punktidele, mis asetsevad antud punktist O kaugusel a .

Nr. 6. Ruumi punktidele, mis asetsevad antud tasapinnast P kaugusel a .

Nr. 7. Ruumi punktidele, mis asetsevad antud sirgest AA_1 kaugusel a .

Nr. 8. Ruumi punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kahest paralleelsest sirgest.

Nr. 9. Ruumi punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kolmetahulise nurga tahkudest.

Nr. 10. Ruumi punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest lõikuvast sirgest.

Nr. 11. Ruumi punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kolmetahulise nurga servadest.

Nr. 12. Kaugus punktist A tasapinnani P on a . Leida geomeetiline koht niisugustele ruumi punktidele, mis asetsevad punktist A ja tasapinnast P kaugusel $\frac{3}{4}a$.

Nr. 13. Sirge AA_1 on paralleelne tasapinnaga P ja asetseb temast kaugusel a . Leida geomeetiline koht niisugustele ruumi

punktidele, mis asetsevad sirgest AA_1 ja tasapinnast P kaugusel $\frac{3}{4}a$.

Nr. 14. Lõik AB omab pikkuse $2a$. Leida geomeetriline koht niisugustele ruumi punktidele, mis asetsevad punktidest A ja B kaugusel $\frac{3}{2}a$.

Nr. 15. Paralleelsete sirgete AA_1 ja BB_1 kaugus teineteisest on $2a$. Leida geomeetriline koht niisugustele punktidele, mis kumastki sirgest asetsevad kaugusel $\frac{3}{2}a$.

Leida geomeetriline koht:

Nr. 16. Punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kolmnurga kolmest küljest.

Nr. 17. Punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel ringjoone punktidest.

Nr. 18. Punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel rombi neljast küljest.

Nr. 19. Punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel võrdhaarse trapetsi neljast tipust.

Nr. 20. Leida ruumis niisugune punkt M , mis asetseb antud risküliku tippudest A , B , C ja D antud kaugusel a .

Nr. 21. Leida punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel neljast mitte ühel tasapinnal asetsevast punktist A , B , C ja D .

Leida geomeetriline koht:

Nr. 22. Sirgetele, mis lõikavad antud sirget a ja läbivad antud punkti A väljaspool seda sirget.

Nr. 23. Sirgetele, mis lõikavad antud sirget a ja on paralleelsed teise sirgega b (a ja b ei lõiku).

Nr. 24. Sirgetele, mis lõikavad paralleelseid sirgeid a ja b .

Nr. 25. Sirgetele, mis on risti antud sirgega AB ja läbivad sellel sirgel antud punkti C .

Nr. 26. Punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kolmest mitte ühel tasapinnal asetsevast paralleelsest sirgest a , b ja c .

Nr. 27. Sirgetele, mis läbivad antud punkti ja on paralleelsed antud tasapinnaga P .

Nr. 28. Sirgetele, mis on puutujaiks kerale ja on paralleelsed antud sirgega.

Nr. 29. Kerapinna puutujatele, mis on tõmmatud läbi antud punkti A .

Nr. 30. Niisuguste kerade keskpunktidele, mille raadius on R ja mis on puutujaiks kerale raadiusega r .

Nr. 31. Ruumvõrdsete püramiidide tippudele, millel on ühine põhi.

Nr. 32. Sirgetele, mis lõikavad sirget AA_1 punktis B antud nurgi α .

Nr. 33. Sirgetele, mis lõikavad tasapinda P punktis A ja moodustavad selle tasapinnaga nurga α .

Nr. 34. Niisuguste kerapindade keskpunktidele, mille raadius on R ja mis läbivad punkti A .

Nr. 35. Kerade keskpunktidele, mis puudutavad kolmetahulise nurga tahke.

Nr. 36. Läbi ruumis antud punkti A tõmmata antud sirgega a paralleelne sirge.

Nr. 37. Leida ruumis väljaspool sirget a võetud punkti A kaugus sellest sirgest.

Nr. 38. Läbi ruumis antud väljaspool sirget a asetsevast punktist A tõmmata ristsirge sirgele a .

Nr. 39. Läbi antud punkti M tõmmata sirge, mis lõikab kaht antud sirget a ja b , mis ei asetse ühel tasapinnal.

Näpunäide. Otsitav sirge läbib punkti M ja lõikab sirget a , seepärast ta asetseb tasapinnal P , mis on määratud punktiga M ja sirgega a ; sama sirge peab asetsema tasapinnal Q , mis läbib punkti M ja sirget b , järelikult on otsitav sirge tasapindade P ja Q lõikesirge.

Nr. 40. On antud tasapind P ja sellest väljaspool kolm punkti A , B ja C , mis ei asetse ühel sirgel. Tasapinnal P ehitada punkt, mis on kolmest antud punktist võrdsetel kaugustel.

Näpunäide. Otsitav punkt on tasapinna P lõikepunktiks selle sirgega, mis on risti kolme antud punkti A , B , C läbiva tasapinnaga ja läheb läbi kolme punkti A , B , C tõmmatud ringjoone keskpunkti.

Nr. 41. Leida ruumis niisugune punkt, mis asub mitte ühel sirgel asuvast kolmest punktist A , B ja C antud kaugusel a .

Näpunäide. Tõmbame sirge OM , mille punktid on ühekaugusel punktidest A , B ja C . Läbi selle sirge ja punkti B võtame tasapinna. Selles tasapinnas punktist B joonestame ringjoone raa-

diusega a . Ringjoon lõikab sirget OM kahes punktis. Need punktid on otsitavad.

Nr. 42. Väljaspool tasapinda P asetsevast punktist M tõmmata sirge, mis on paralleelne tasapinnal P asetseva sirgega.

Nr. 43. Tasapinnal P tõmmata väljaspool tasapinda P asetseva ja tasapinnaga P paralleelse sirgega paralleelne sirge.

Nr. 44. Läbi antud sirge a tõmmata teise, sirgega a mitte lõikuva, sirgega b paralleelne tasapind.

Näpunäide. Läbi sirgel a vabalt valitud punkti A tõmbame sirge c paralleelselt sirgega b . Läbi kahe lõikuva sirge a ja c võtame tasapinna P . Tasapind P on otsitav. Kui $a \parallel b$, siis iga tasapind, mis läbib a , on paralleelne sirgega b (välja arvatud tasapind, mis läbib a ja b).

Nr. 45. On antud kaks mitte lõikuvat sirget a ja b ning punkt M väljaspool neid sirgeid. Läbi punkti M tõmmata sirgetega a ja b paralleelne tasapind.

Näpunäide. Läbi punkti M tõmbame sirge $a_1 \parallel a$ ja $b_1 \parallel b$. Tasapind, mis läbib sirgeid a_1 ja b_1 on otsitav. Kui a ja b on paralleelsed, on ülesandel lõpmata palju lahendusi.

Nr. 46. Läbi punkti M tõmmata sirge, mis on ortogonaalne (risti) antud sirgega a ja paralleelne antud tasapinnaga P .

Näpunäide. Läbi punkti M võtta tasapind $Q \perp a$ ja tasapind R , mis on paralleelne tasapinnaga P . Tasapindade Q ja P lõikejoon on otsitav sirge.

Nr. 47. Ehitada sirge, mis on paralleelne antud sirgega a ja lõikab kaht teist, mitte ühel tasapinnal asetsevat sirget b ja c .

Lahendus. Läbi sirgel b vabalt valitud punkti B tõmbame sirge $m \parallel a$. Läbi kahe lõikuva sirge m ja b tõmbame tasapinna P , mis on paralleelne sirgega a . Täpselt samuti läbi sirgel c vabalt valitud punkti C tõmbame sirge $n \parallel a$. Läbi kahe lõikuva sirge n ja c võtame tasapinna Q , mis samuti on paralleelne sirgega a . Sirge MN , tasapindade P ja Q lõikejoon, lõikab sirgeid b ja c , sest ta asetseb kummagagi neist ühel tasapinnal ja on samal ajal paralleelne sirgega a kui kahe niisuguse tasapinna lõikejoon, milledest kumbki on paralleelne sirgega a .

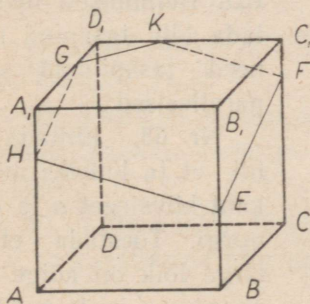
Nr. 48. On antud kaks mittelõikuvat sirget a ja b ja tasapind $P \parallel a$. Sirged a ja b lõigata kolmanda sirgega nii, et see kolmas sirge oleks paralleelne tasapinnaga P ja risti sirgega a .

Näpunäide. Läbi sirge a võtame tasapinna Q , paralleelse tasapinnaga P .

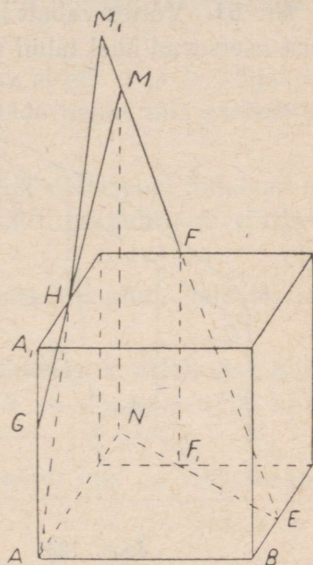
Olgu punkt B sirge b ja tasapinna Q lõikepunkt. Läbi punkti B tõmbame $BD \perp a$. Sirge BD on otsitav.

Nr. 49. Kuubi (joon. 121) servadel on võetud punktid E , F ja G , kusjuures kaks neist, E ja F , asetsevad ühel tahul, aga kolmas paralleelsel tahul. Ehitada kuubi lõige tasapinnaga, mis läbib kolme punkti E , F ja G .

Näpunäide. Ühendame punktid E ja F , mis asetsevad tahul BB_1C_1C . Läbi tahul AA_1D_1D asetseva punkti G tõmbame sirge $GH \parallel EF$. Ühendame punktid H ja E . Läbi punkti F tõmbame



Joon. 121.



Joon. 122.

$FK \parallel EH$, ühendame punktid G ja K ; viisnurk $HEFKG$ (joon. 121) on otsitav lõige.

Nr. 50. Kuubi (joon. 122) servadel on võetud kolm punkti E , F ja G , kusjuures mitte mingisugused kaks punkti ei asetse ühel ja samal tahul. Ehitada kuubi lõige tasapinnaga, mis läbib kolme punkti E , F ja G .

Näpunäide. Ülesande lahendamiseks leiame veel ühe lõikepunkti ühel kuubi serval, seejärel taandub ülesanne eelmiseks.

Läbi punkti F tõmbame sirge FF_1 , mis on paralleelne kuubi servaga AA_1 . Läbi sirge FF_1 ja punkti E võtame tasapinna, mis lõikub kuubi vasaku küljetahu tasapinnaga sirget MN mööda. Punktid E ja F kuuluvad otsitavale lõikele, seepärast sirge EF iga

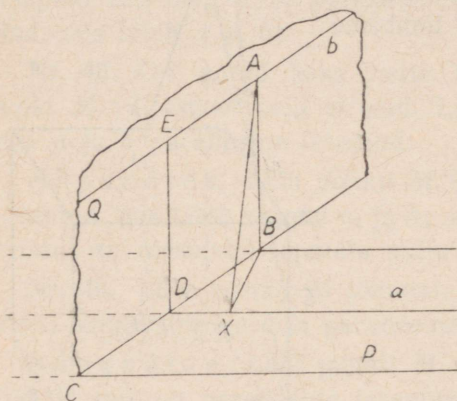
punkt kuulub lõikepinnale. Järelikult ka punkt M (EF ja vasaku küljetahu lõikepunkt) kuulub sellele tasapinnale. Ühendame kaks punkti M ja G ; et need punktid mõlemad kuuluvad lõikepinnale, siis neid läbiva sirge iga punkt asetseb otsitaval lõiketasapinnal, järelikult ka punkt H (sirge GM ja kuubi serva lõikepunkt) kuulub sellele tasapinnale. Kuid nüüd taandub ülesanne eelnevale ülesandele, sest lõike antud punktide E, F, G, H seast kaks, G ja H , asetsevad ühel tahul.

Nr. 51. Võttes vabalt kolm punkti kuubi servadel nii, et 1) kaks neist asetsevad ühel tahul või 2) mitte mingisugused kaks punkti ei

asetse ühel tahul, ehitada kuubi tasapinnaline lõige, mis läbib antud punkte.

Nr. 52. On antud kaks mittelõikuvat sirget AB ja CD . Kummastki neist ehitada läbi tasapind nii, et need tasapinnad oleksid paralleelsed.

Nr. 53. Ehitada sirge nii, et ta lõikaks mõlemat kaht kiivsirget a ja b täisnurgi. Tõestada, et selle sirge lõik on kõige lühem sirgete a ja b vahelistest lõikudest.



Joon. 123.

L a h e n d u s. Olgu a ja b kiivsirged (joon. 123). Läbi sirge a võtame tasapinna P , mis on paralleelne sirgega b . Sirgel b vabalt valitud punktist A tõmbame tasapinnale P ristsirge AB . Läbi kahe lõikuva sirge b ja AB võtame tasapinna Q . Olgu tasapindade P ja Q lõikejoon BC ning antud sirge a ja sirge BC lõikepunktiks D . Tasapinnal Q läbi sirgete BC ja a lõikepunkti D tõmbame sirgega AB paralleelse sirge DE . Sirglõik DE ongi otsitav. Tõepoolest, DE on risti tasapinnaga P , sest $DE \parallel AB$, teisest küljest $DE \perp b$, sest $b \perp AB$, aga $DE \parallel AB$. Igasugune teine sirglõik, näiteks AX , on tasapinna P kaldlõik ja on seepärast suurem kui AB või ED .

Nr. 54. Ehitada nurk, mis võrdub kahe kiivsirge vahelise nurgaga ja mille tipp on antud punktis.

Nr. 55. Ehitada lühim sirglõik kuubi serva ja kuubi selle diagonaali vahel, mis ei lõika antud serva.

Nr. 56. Läbi kahetahulise nurga tahkudest väljaspool asetseva punkti M ehitada tasapind, mis on ühtviisi kaldu kahetahulise nurga tahkude suhtes.

Näpunäide. Kahetahulise nurga tahkudel võtame sirged a ja b paralleelselt tema servaga AB ja sellest võrdsetel kaugustel. Läbi kahe paralleelse sirge a ja b võtame tasapinna P . Läbi punkti M ehitame tasapinna Q , mis on paralleelne tasapinnaga P . Tasapind Q on otsitav.

Nr. 57. Tasapinnal P on antud kaks sirget a ja b , väljaspool tasapinda P on antud sirge c . Sirgel c leida punkt, mis asetseb sirgetest a ja b võrdsetel kaugustel.

Nr. 58. Antud on tasapind P ja sellest väljaspool lõikuvad sirged a ja b . Tasapinnal P leida sirge, mille iga punkt on võrdsetel kaugustel sirgetest a ja b .

Nr. 59. Läbi antud punkti M ehitada tasapind, mis on risti tasapindadega P ja Q .

Nr. 60. Punktist A , mis asetseb täisnurkse kahetahulise nurga ühel tahul, tõmmata ristsirge sirgele MN , mis asetseb selle nurga teisel tahul.

Nr. 61. Läbi punkti M ehitada tasapind, mis on risti tasapinnaga P ja paralleelne sirgega a .

SISUKORD.

I. Metoodilisi näpunäiteid iseseisvaks tööks aritmeetikas ja algebras.

	Lk.
Aritmeetika	3
§ 1. Numbriliste ülesannete lahendamine	4
§ 2. Lihtülesandeid	6
§ 3. Puhtaritmeetilisi liitülesandeid	7
§ 4. Tüüpülesanded	10
1. Ülesandeid nelja aritmeetilise tehte komponentide ja resul-	
taatide vahelistele seostele	11
2. Ülesandeid kahe või mitme arvu leidmiseks nende summa ja	
vahe järgi (arvu jaotamine mittevõrdseteks osadeks) . . .	13
3. Ülesandeid, milledes tundmatute arvude leidmiseks on tar-	
vis kõigepealt leida antud arvude vahe	16
4. Osa leidmine arvust ja arvu leidmine tema osa järgi . . .	19
5. Ülesandeid arvu jaotamiseks mittevõrdseteks osadeks suhte	
järgi. Jagamine pöördvõrdeliselt antud arvudega jne. . .	21
§ 5. Ülesandeid võrdelistele suurustele	24
1. Kolmlause	24
2. Protsendid	27
3. Võrdeline jagamine	31
4. Ülesandeid segude kohta	34
5. Ülesandeid aritmeetikakursuse kõigi osade kohta	35
Algebra	37
§ 1. Tehteid relatiivsete arvudega	38
§ 2. Algebraaliste avaldiste numbrilised väärtused	39
§ 3. Tehteid ratsionaalsete avaldistega	41
A. Tehteid täis-üksliikmetega ja täis-hulkliikmetega	41
B. Tegureiks lahutamine	43
C. Ratsionaalsed murrud	45
§ 4. Irratsionaalsed avaldised	48
§ 5. Murdarvulised ja negatiivsed astendajad	52
§ 6. Esimese astme võrrandid ja võrratused ühe tundmatuga . . .	53
§ 7. Esimese astme võrrandisüsteem kahe ja mitme tundmatuga . .	57
§ 8. Ühe tundmatuga teise astme võrrandid	62
§ 9. Teise astme võrrandite süsteemid	66

	Lk.
§ 10. Logaritm- ja eksponentvõrrandid	69
§ 11. Teise astme võrratused	70
§ 12. Harjutusi kogu elementaaralgebra kursuse kohta	72
II. Metoodilisi näpunäiteid iseseisvaks tööks geomeetrias.	
§ 1. Konstruktsioonülesandeid	74
§ 2. Põhimised konstruktsioonülesanded	82
§ 3. Konstruktsioonülesannete lahendamise põhimised meetodid	85
§ 4. Tõestamisülesanded	103
§ 5. Arvutamisyülesanded	110
III. Harjutusi elementaararvamaatika ülesannete lahendamiseks.	
Sissejuhatus	139
Algebra	140
§ 1. Tehted ratsionaalsete ja irratsionaalsete algebraliste avaldistega	140
§ 2. Ühe tundmatuga võrrandid	158
§ 3. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemid	174
§ 4. Jada piirväärtus	187
§ 5. Progressioonid ja summad	190
§ 6. Logaritmid	205
§ 7. Võrratused	210
§ 8. Matemaatiline induktsioon	225
§ 9. Trigonomeetrilised samasused	231
Geomeetria	236
Tõestamisülesanded	236
§ 1. Kolmnurgad ja hulknurgad	236
§ 2. Rööpkülikud ja trapetsid	241
§ 3. Ringjoon	244
§ 4. Tähtsad punktid ja jooned kolmnurgas	247
§ 5. Võrdeliste lõikude teoreemid	247
§ 6. Meetrilised seosed kolmnurkades ja nelinurkades	247
§ 7. Kujundite sarnasus	248
§ 8. Pindalad	249
Mõningaid geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamise meetodeid	250
§ 1. Geomeetriliste kohtade meetod	250
§ 2. Sirgestamismeetod	251
§ 3. Sarnasusemeetod	265
§ 4. Paralleellükke-meetod	271
§ 5. Punktide geomeetiline koht ruumis	274

Vastutav toimetaja A. Vihman.
Keeleline toimetaja A. Zupping.
Tehniline toimetaja H. Kohu.

Ladumisele antud 4. IV 1950. Trükkimisele antud 22. VII 1950. Trükiarv 1000. Paber $60 \times 92, \frac{1}{16}$. Trükipoognaid 17,75. Arvutuspoognaid 16,38. MB-05125. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1117.

На эстонском языке.
Самостоятельные занятия по элементарной математике.

Hind rbl. 6.75

Rbl. 6.75

A-18587

10

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00449323 7