

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

# TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

659

## ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid  
töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 659 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.g.

## ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid  
töid

Труды по математике и механике

TARTU 1983

Redaktsioonikolleegium:

Ü. Lepik (esimees), L. Ainola, K. Kenk, M. Kilp, Ü. Lumiste,  
E. Reimers, E. Tiit, G. Vainikko.

Редакционная коллегия:

Д. Лепик (председатель), Л. Айнола, Г. Вайникко, К. Кенк,  
М. Кильп, Д. Лумисте, Э. Реймерс, Э. Тийт.

Ответственный редактор тома Т. Оленев

Ученые записки Тартуского государственного университета.

Выпуск 659.

ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ.

Труды по математике и механике.

На русском языке.

Рецензы на английском языке.

Тартуский государственный университет.

СССР, 202400, г.Тарту, ул.Пяксона, 14.

Ответственный редактор Т. Оленев.

Корректоры С. Оленева, Х. Елка.

Подписано к печати 8.12.1983.

ИВ 10645.

Формат 60x90/16.

Бумага писчая.

Машиннопись. Ротапринт.

Учетно-издательских листов 6,6.

Печальных листов 7,5.

Тираж 400.

Заказ № 1319.

Цена 1 руб.

Типография ТГУ, СССР, 202400, г.Тарту, ул.Пяксона, 14.

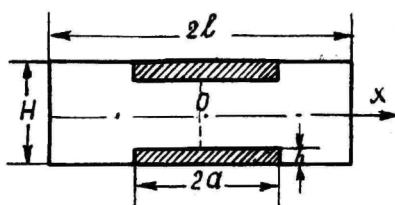
ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ АРМИРОВАННОЙ БАЛКИ  
ИЗ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА  
В СЛУЧАЕ ИМПУЛЬСВЕННОГО НАГРУЖЕНИЯ

Я. Леллеп, Э. Сагков

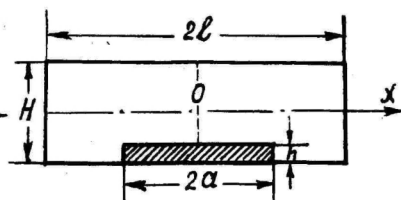
Тартуский государственный университет

1. Постановка задачи и основные зависимости

Рассмотрим свободно опертую и жестко заделанную балку длины  $2l$ , ширины  $B$  и высоты  $H$ . В балку вложена арматура из другого материала. Для конкретности рассмотрим два способа армирования: 1) т.н. симметричное армирование относительно оси балки (фиг. 1а), 2) т.н. случай несимметричного армирования, где слой из более крепкого материала находится лишь в нижней части балки (фиг. 1б).



Фиг. 1а



Фиг. 1б

Размеры арматуры обозначены через  $2a$  и  $h$ . Материалы арматуры и связующего считаем жестко-пластическими, имеющими различные плотности и пределы текучести.

Предположим, что балке сообщена некая динамическая нагрузка либо в виде начальной кинетической энергии, либо в виде начального поля скоростей.

Задача оптимизации состоит в определении параметров  $\alpha = a/l$  и  $\delta = h/H$  так, чтобы при заданной массе  $\mu$  балки остаточный прогиб в центре балки в момент прекращения движения был бы минимальным.

Пластические шарниры в балке появляются при достижении в некоторых сечениях предельного момента  $M_0$ . Шарниры могут возникать в центре балки и в сечениях  $x = \pm a$ , а также в точках заделки в случае жесткого закрепления.

Уравнения движения балки имеют вид

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{cases} m_1 \ddot{w} \\ m_2 \ddot{w} \end{cases}, \quad (1.1)$$

где  $Q = Q(x, t)$  и  $M = M(x, t)$  соответственно поперечная сила и изгибающий момент,  $w = w(x, t)$  - прогиб балки,  $m_1$  - масса единицы длины армированной части балки и,  $m_2$  - масса единицы длины остальной части:

$$m_1 = \begin{cases} B[2g_1 h + g_2 (H - 2h)], & \text{в случае симметричного армирования} \\ B[h g_1 + g_2 (H - h)], & \text{в случае несимметричного армирования} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$m_2 = B g_2 H,$$

где через  $g_1$  и  $g_2$  обозначены плотности арматуры и связующего. Уравнения (1.1) будем интегрировать при следующих граничных условиях:

$$M(l) = Q(0) = 0 \quad (1.3)$$

в случае свободного опирания и

$$M(l) = -M_0, \quad Q(0) = 0 \quad (1.4)$$

в случае жесткого заземления. К этим условиям прибавляются еще условия непрерывности величин  $M$  и  $Q$  в точке  $x = a$ :

$$\begin{aligned} M(a+0) &= M(a-0), \\ Q(a+0) &= Q(a-0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для интегрирования уравнений (1.1) применяем метод модальных решений. В случае балок ступенчато-переменной толщины названный метод дал хорошие результаты [1]. Согласно этому методу скорость прогиба балки представляется в виде

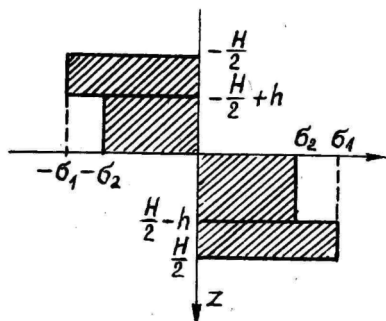
$$\dot{w} = \begin{cases} (l-a)\dot{\varphi} + (a-x)\dot{\theta}, & x \in [0, a], \\ (l-x)\dot{\varphi}, & x \in [a, l], \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $\varphi$  и  $\theta$  углы поворота в шарнирах. Интегрируя два раза уравнения (1.1), приходим к соотношениям

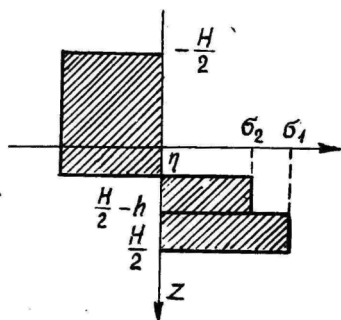
$$M = \begin{cases} m_1 \left[ \left( \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \ddot{\theta} + (\ell - \alpha) \frac{x^2}{2} \ddot{\varphi} \right] + C_1 x + C_3, \\ m_2 \left( \ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \ddot{\varphi} + \dot{C}_2 x + C_4, \end{cases} \quad (1.7)$$

где постоянные  $C_1 - C_4$  определяются из граничных условий и условий непрерывности.

Вычисляем в дальнейшем значения предельных моментов для двух видов армирования. Рассмотрим сперва случай, когда арматура расположена симметрично (фиг. 1а). Эпюра напряжений в армированной части балки представлена на фиг. 2а.



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Обозначим через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пределы текучести арматуры и связующего, через  $M_0^1$  и  $M_0^2$  — соответственно предельные моменты в армированной части балки и в балке без арматуры. Согласно правилу вычисления предельного момента

$$M_0^1 = B \int_{-H/2}^{H/2} \sigma z dz = \frac{1}{4} B \sigma_2 H^2 [1 + 4\delta(1-\delta)(\nu-1)],$$

$$M_0^2 = B \int_{-H/2}^{H/2} \sigma z dz = \frac{1}{4} B \sigma_2 H^2, \quad (1.8)$$

где  $\nu = \sigma_1 / \sigma_2$ .

В случае несимметричного армирования (фиг. 2б) соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0^1 &= \frac{1}{4} B \sigma_2 H^2 [-\delta^2(\gamma-1)^2 + 1 + 2\delta(1-\delta)(\gamma-1)], \\ M_0^2 &= \frac{1}{4} B \sigma_2 H^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Моменты, определяемые формулами (1.7), не могут превышать значений предельных моментов (1.8) или (1.9). Перейдем к следующим величинам:

$$N = \frac{36_0 \kappa}{4 B l^4 \sigma_2^2}, \quad P = -\frac{\ddot{\theta}}{N}, \quad R = -\frac{\ddot{\varphi}}{N}.$$

Символом  $\mu$  обозначена полная масса балки, т.е.

$$\mu = 2 B \sigma_2 H l [2\alpha\delta(\gamma-1) + 1]$$

в случае симметричного армирования и

$$\mu = 2 B \sigma_2 H l [\alpha\delta(\gamma-1) + 1]$$

в случае несимметричного армирования.

Неравенства  $M(0) \leq M_0^1$  и  $M(a) \leq M_0^2$  можно переписать в следующем виде (приведем формулы лишь для свободного опирания):

$$A_1 P + A_2 R \leq \frac{1 + 4\delta(1-\delta)(\gamma-1)}{2\alpha\delta(\gamma-1) + 1}, \quad (1.10a)$$

$$B_1 P + B_2 R \leq \frac{1}{2\alpha\delta(\gamma-1) + 1} \quad (1.11a)$$

в случае симметричного армирования (фиг. 1а) и

$$A_1 P + A_2 R \leq \frac{1 + 2\delta(1-\delta)(\gamma-1) - \delta^2(\gamma-1)^2}{\alpha\delta(\gamma-1) + 1} \quad (1.10б)$$

$$B_1 P + B_2 R \leq \frac{1}{\alpha\delta(\gamma-1) + 1} \quad (1.11б)$$

в случае несимметричного армирования (фиг. 1б).

В этих формулах обозначено

$$A_1 = \alpha^2(3 - \alpha)[2\delta(\gamma - 1) + 1],$$

$$A_2 = 3\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha)[2\delta(\gamma - 1) + 1] + 2(1 - \alpha)^2,$$

$$B_1 = 3\alpha^2(1 - \alpha)[2\delta(\gamma - 1) + 1],$$

$$B_2 = 6\alpha(1 - \alpha)^2[2\delta(\gamma - 1) + 1] + 2(1 - \alpha)^3$$

и  $\alpha = a/l$ ,  $\delta = h/H$ ,  $\gamma = S_1/S_2$ .

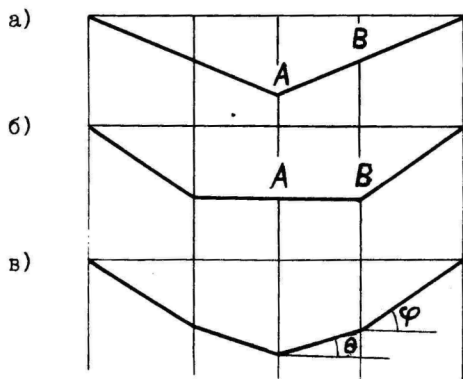
## 2. Анализ пластических механизмов и вычисление остаточного прогиба

При анализе возможных пластических механизмов оказалось, что в рассматриваемом случае возможны три следующих варианта:

I. Пластический шарнир возникает только в центре балки (фиг. 3а). Тогда  $\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$ ,  $P = R$  и в формулах (1.10) следует принять знак равенства. Неравенства (1.11) должны быть выполнены.

II. Пластический шарнир возникает только в сечении В (фиг. 3б). Тогда  $\ddot{\theta} = P = 0$ , и величина  $R$  вычисляется из равенств (1.11). Неравенства (1.10) должны быть выполнены.

III. Работают шарниры А и В (фиг. 3в). Тогда (1.10) и (1.11) превращаются в систему уравнений, из которых вычисляются ускорения  $P_1$  и  $R$ .



Фиг. 3

Перейдем теперь к вычислению остаточного прогиба. Остаточный прогиб центра балки в момент прекращения движения  $t = t_f$  вычисляется по формуле

$$w(0, t_f) = l[(1-\alpha)\lambda + \alpha]\theta(t_f), \quad (2.1)$$

где  $\lambda = \dot{\psi}/\ddot{\theta}$ . По идее метода модальных решений величина  $\lambda$  является постоянной. Так как и  $\ddot{\theta}(t) = \text{const}$ , то путем интегрирования получим

$$\dot{\theta}(t) = t\ddot{\theta} + \dot{\theta}(0), \quad \theta(t) = 1/2 t^2 \ddot{\theta} + t\dot{\theta}(0).$$

В момент остановки балки  $\dot{\theta}(t_f) = 0$ , следовательно,

$$t_f = -\frac{\dot{\theta}(0)}{\ddot{\theta}}.$$

Таким образом, остаточный прогиб центра балки  $x = 0$  равен

$$w(0, t_f) = -1/2 l[(1-\alpha)\lambda + \alpha] \frac{\dot{\theta}^2(0)}{\ddot{\theta}}. \quad (2.2)$$

Величина  $\dot{\theta}(0)$  определяется путем сравнения действительного и "модального" полей скоростей в начальный момент времени. В данной работе это делается двумя способами. Предположим сперва, что балке сообщена начальная кинетическая энергия  $K_0$

$$K_0 = m_1 \int_0^a \dot{w}^2(x, 0) dx + m_2 \int_a^l \dot{w}^2(x, 0) dx.$$

После несложных преобразований можно остаточный прогиб (2.2) в случае симметричного армирования представить в виде

$$w(0, t_f) = \frac{K_0 l}{\sigma_x B H^2} F(\alpha, \delta, P, R), \quad (2.3)$$

где через  $F$  обозначен следующий функционал:

$$F = \frac{(1-\alpha)R + \alpha P}{\{2\alpha\delta(\gamma-1)+1\} \{ [2\delta(\gamma-1)+1] [\alpha^2 P^2 + 3\alpha^2(1-\alpha)PR + 3\alpha(1-\alpha)^2 R^2 + (1-\alpha)^2 R^2] \}} \quad (2.4)$$

Величину  $\dot{\theta}(0)$  можно определить и по-другому: следуя идеям Мартина и Саймондса [2]. Формула, связывающая начальные поля скоростей, выглядит в нашем случае так:

$$m_1 v_0 \int_0^a \dot{w}(x, 0) dx + m_2 v_0 \int_a^l \dot{w}(x, 0) dx =$$

$$= m_1 \int_0^a \dot{w}^2(x, 0) dx + m_2 \int_a^l \dot{w}^2(x, 0) dx.$$

Здесь предположено, что балке сообщено прямоугольное начальное поле скоростей  $\dot{w}_0 = \text{const}$ . Тогда остаточный прогиб вычисляется по формуле

$$w(0, t_f) = -\frac{3w_0^2 g_2 l^2}{6_2 H} F(\alpha, \delta, P, R), \quad (2.5)$$

где

$$F = \frac{[[ (1-\alpha)R + \alpha P ] \{ R [ 1 - \alpha(2-\alpha) ] + [ 2\delta(\gamma-1) + 1 ] [ 2\alpha(1-\alpha)R + \alpha^2 P ] \}^2]}{[ 2\alpha\delta(\gamma-1) + 1 ] \{ [ 2\delta(\gamma-1) + 1 ] [ \alpha^2 P^2 + 3\alpha^2(1-\alpha)PR + 3\alpha(1-\alpha)^2 R^2 ] + (1-\alpha)^2 R^2 \}^2}. \quad (2.6)$$

Вопрос о минимальном значении остаточного прогиба сводится, таким образом, к нахождению минимума функционала (2.4) или (2.6). Параметры  $\gamma$  и  $\nu$  считаем заданными, параметры  $\alpha$  и  $\delta$  подлежат определению.

### 3. Численные результаты.

Ниже представлены некоторые результаты вычислений.

Таблица 1

Свободное опирание, симметричное армирование

		$K_0 = \text{const}$		$\nu_0 = \text{const}$	
$\gamma$	$\nu$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
1,5	2,0	0,68	0,50	0,67	0,35
2,0	2,0	0,68	0,45	0,61	0,22
1,5	3,0	0,80	0,47	0,80	0,39
2,5	2,5	0,75	0,43	0,69	0,22
2,0	3,0	0,80	0,42	0,78	0,30

Таблица 2

Свободное опирание, несимметричное армирование

$\gamma$	$\nu$	$K_0 = \text{const}$		$\nu_0 = \text{const}$	
		$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
1,5	2,0	0,46	0,32	0,46	0,26
2,0	2,0	0,46	0,34	0,44	0,22
1,5	3,0	0,55	0,25	0,55	0,22
2,5	2,5	0,51	0,27	0,49	0,19
2,0	3,0	0,54	0,28	0,54	0,20

Таблица 3

Жесткое закрепление, симметричное армирование

$\gamma$	$\nu$	$K_0 = \text{const}$		$\nu_0 = \text{const}$	
		$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
1,5	2,0	0,54	0,50	0,51	0,30
2,0	2,0	0,53	0,48	0,42	0,16
1,5	3,0	0,68	0,44	0,67	0,35
2,5	2,5	0,61	0,45	0,45	0,12
2,0	3,0	0,68	0,50	0,61	0,22

В таблицах 1 - 3 приведены оптимальные значения параметров  $\alpha$  и  $\delta$ , минимизирующих соответствующий функционал. Отметим еще, что минимум функционала  $F$  достигался всегда при типе выпучивания II.

Вычисления были проведены К. Ярвяги и У. Ауниным, которым авторы выражают свою благодарность.

## Литература

1. Lepik, Ü., Mróz Z., Optimal design of plastic structures

- under impulsive and dynamic pressure loading. - Internat. J. Solids. Struct., 1977, v. 13, p. 657-674.
2. Martin J.B., Symonds P.S., Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures. - J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, v. 92, p. 43-66.

**Optimal design of a reinforced rigid-plastic beam  
in the case of impulsive loading**

**J. Lellep, E. Sakkov**

**Summary**

Problems of optimal design of non-homogeneous simply supported and clamped rigid-plastic beams subjected to the impulsive loading are studied. The dynamic behaviour of beams is prescribed by the approximate mode-form technique specifying (i) the initial kinetic energy and (ii) the initial velocity field. The location of the reinforcement is sought for under the requirement that the maximal residual deflection attains the minimal value for a given volume.

Numerical results are presented in the cases where the reinforcement layer is located (i) symmetrically and (ii) non-symmetrically with respect to the axis of the beam. The results comprise the optimal values of the reinforcement parameters.

# АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК

Т. Лепикулт

Тартуский государственный университет

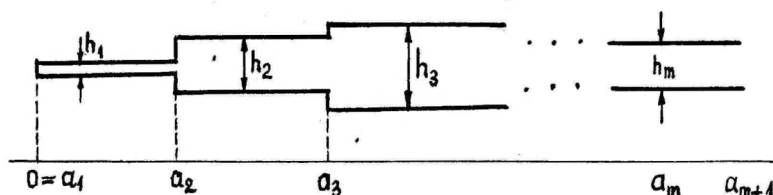
Расчет конструкции на динамические нагрузки является в настоящее время одной из важнейших проблем механики деформируемого твердого тела.

При проектировании балочных конструкций часто применяются балки ступенчато-постоянной высоты. В случае жестко-пластического материала в некоторых сечениях таких балок возникают пластические шарниры. Для определения их положения надо проанализировать ряд вариантов, что является весьма трудоемким процессом. Поэтому целесообразно автоматизировать такие расчеты. Для этой цели в данной статье составлены алгоритмы расчета и пакет программ.

Данная задача решена Ю. Лепиком и М. Юст в [1] и [3] методом модальных решений. Поскольку метод модальных решений является приближенным, то необходимо оценить область приемлемости этого метода и точность полученных результатов. Для этой цели в данной статье задача решается методом квазимодальных решений, общая характеристика которого представлена в [2]. В конце статьи приводятся 3 примерных задачи, решенные при помощи составленного пакета.

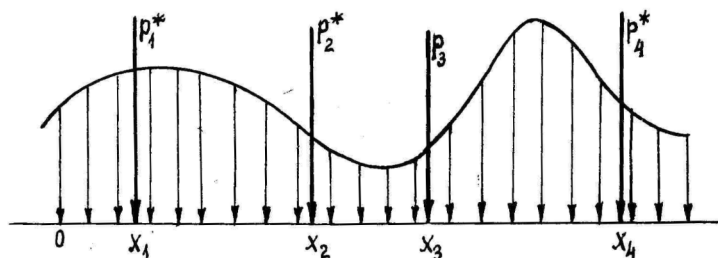
## 1. Постановка задачи

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения. Материал балки жестко-пластический, высота-кусочно-постоянная, ширина-постоянная. Размеры балки указаны на фиг. 1.



Фиг. 1.

Концы балки могут быть свободно опертыми, жестко заделанными или совсем свободными. Балка нагружена поперечным давлением  $p^* = p^*(x, t)$  и сосредоточенными нагрузками  $P_i^* = P_i^*(x, t)$ , где  $x$  - координата вдоль оси балки,  $t$  - время. Сосредоточенные силы приложены в сечениях  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  (фиг. 2).



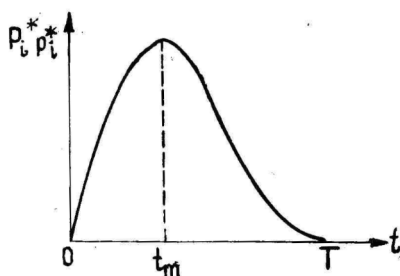
Фиг. 2.

Пусть интенсивность нагрузок изменяется по закону

$$p^*(x, t) = p^0(x) e^{-\alpha^* t} \sin \omega^* t, \quad (1)$$

$$P_i^*(x, t) = P_i^0(x) e^{-\alpha^* t} \sin \omega^* t, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $\alpha^*$  и  $\omega^*$  - заданные числа (такая зависимость хорошо характеризует взрывообразную нагрузку). Формулы (1) имеют место до момента  $T = \pi / \omega^*$ , в дальнейшем возьмем  $p^*(x, t) = P_i^*(x, t) = 0$  (Фиг. 3).



Фиг. 3.

Функции  $p^0(x)$  и  $P_i^0(x)$  характеризуют интенсивность нагрузок в момент времени  $t = t_m$ . Поставим задачу найти остаточные прогибы продольной оси балки и время деформации при заданных нагрузках, граничных условиях и конфигурации балки.

## 2. Основные уравнения

Представим уравнения движения балки в виде

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} = Q^*, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial x} = \rho V h(x) \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - p^*(x), \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность,  $w^*$  - прогиб,  $t$  - время,  $p^*$  - давление,  $x$  - координата вдоль балки,  $M^*$  - изгибающий момент,  $Q^*$  - перерезывающая сила  $V$ ,  $h$  - ширина и высота балки.

В сечениях  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , где приложены сосредоточенные силы  $P_i^*$ , должны быть выполнены требования

$$Q^*(x_i+) - Q^*(x_i-) = -P_i^*. \quad (3)$$

Перейдем к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, & \gamma &= \frac{h(x)}{h(0)}, & M &= \frac{4M^*}{\sigma_0 V h^2(0)}, & Q &= \frac{4lQ^*}{\sigma_0 V h^2(0)}, \\ p &= \frac{4l^2 p^*(x)}{\sigma_0 V h^2(0)} \cdot \nu(\tau), & P_i &= \frac{4l P_i^*}{\sigma_0 V h^2(0)} \cdot \nu(\tau), & & & & \\ \tau &= \frac{t}{T}, & w &= \frac{2lQ^* l^2 w^*}{3\sigma_0 h(0) T^2}, & \tau_* &= \frac{t_m}{T}, & & \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_0$  - предел текучести и

$$\nu(\tau) = \exp\left(\frac{x(\tau_* - \tau)}{\tan(x\tau_*)}\right) \cdot \frac{\sin(x\tau)}{\sin(x\tau_*)}.$$

Уравнения (2) и (3) представляются теперь в форме

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 6\gamma(\xi) \ddot{w} - p, \quad (5)$$

$$Q(\xi_i+) - Q(\xi_i-) = -P_i. \quad (6)$$

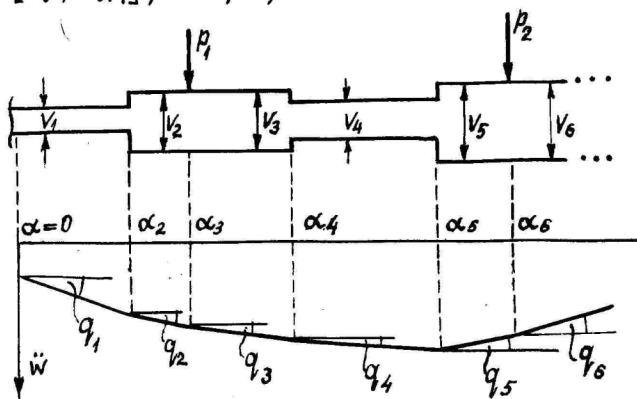
Здесь и в дальнейшем точками обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ .

Так как материал балки жестко-пластический, то в тех се-

чениях, где изгибающий момент равен его предельному значению, возникают пластические шарниры, а участок балки между шарнирами остается жестким. Шарниры могут двигаться вдоль оси балки.

Для решения задачи придется проинтегрировать систему (5) - (6) с момента  $\tau = 0$  до  $\tau = \tau_f$ , когда движение кончается при заданных нагрузках и граничных условиях. С этой целью образуем вектор  $\vec{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_n = 2$  и компоненты  $\alpha_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$  обозначают 1) точки положения пластических шарниров, 2) сечения, где приложены сосредоточенные силы, и 3) сечения, где изменяется высота балки. Размерность вектора  $\vec{A}$  меняется в ходе решения задачи. Предположим еще, что компоненты вектора  $\vec{A}$  упорядочены.

Введем еще следующие безразмерные величины:  $v$ ,  $a_i$ ,  $\dot{a}$ ,  $\dot{a}_i$  - скорости и ускорения концов балки  $\omega_i$ ,  $q_i$  - угловая скорость и угловое ускорение на участке  $\xi \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (Фиг 4),  $\gamma_i$  - высота балки на участке  $\xi \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .



Фиг. 4.

Скорость  $\dot{w}$  на участке  $\xi \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$  определяется по формуле

$$\dot{w}(\xi, \tau) = \dot{a} + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \omega_k (\xi - \alpha_k). \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$N_i = N + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i). \quad (8)$$

Продифференцируем формулы (7) - (8) по времени, учитывая, что шарниры могут двигаться вдоль оси балки (на опорах шарниры можем считать стационарными). Получим

$$\ddot{w}(\xi, \tau) = \Delta + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + q_k (\xi - \alpha_k) + \sum_{i=2}^k \dot{\alpha}_i (\omega_{i-1} - \omega_i), \quad \xi \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad (9)$$

$$\Delta = \Delta + \sum_{i=1}^{n-1} q_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \dot{\alpha}_i (\omega_{i-1} - \omega_i). \quad (10)$$

Обозначим символами  $Q_+(\xi, \tau)$  и  $M_+(\xi, \tau)$  ту часть величин  $Q(\xi, \tau)$  и  $M(\xi, \tau)$ , которая не зависит от давления  $p(\xi, \tau)$ . Тогда на основании формул (5) - (6) и (9) имеем для отрезка  $\xi \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ , что

$$Q_+(\xi, \tau) = Q_+(\alpha_k, \tau) + 6\gamma_k \left[ \Delta + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \sum_{i=2}^k \dot{\alpha}_i (\omega_{i-1} - \omega_i) \right] (\xi - \alpha_k) + 3\gamma_k q_k (\xi - \alpha_k)^2 - P_k, \quad (11)$$

$$M_+(\xi, \tau) = M_+(\alpha_k, \tau) + [Q_+(\alpha_k, \tau) - P_k] (\xi - \alpha_k) + 3\gamma_k \left[ \Delta + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \sum_{i=2}^k \dot{\alpha}_i (\omega_{i-1} - \omega_i) \right] \cdot (\xi - \alpha_k) + \gamma_k q_k (\xi - \alpha_k)^3.$$

Для каждого момента времени функции  $Q_+(\xi, \tau)$  и  $M_+(\xi, \tau)$  можно вычислить рекуррентно для всего отрезка  $[\alpha_1, \alpha_n]$ . Расчет начинается с соотношений  $Q_+(\alpha_1, \tau) = Q_0(\tau)$  и  $M_+(\alpha_1, \tau) = M_0(\tau)$ , где символами  $Q_0(\tau)$  и  $M_0(\tau)$  обозначены значения перерезывающей силы и изгибающего момента на левом конце балки. Обозначая еще

$$x_1(\xi, \tau) = \int_0^\xi p(\xi, \tau) d\xi, \quad x_2(\xi, \tau) = \int_0^\xi x_1(\xi, \tau) d\xi, \quad (12)$$

получим для определения функций  $Q(\xi, \tau)$  и  $M(\xi, \tau)$  формулы

$$\begin{aligned} Q(\xi, \tau) &= Q_+(\xi, \tau) - x_1(\xi, \tau), \\ M(\xi, \tau) &= M_+(\xi, \tau) - x_2(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Проанализируем теперь граничные условия. Если левый конец балки свободно оперт, получим 2 уравнения

$$M_0(\tau) = 0, \quad \Delta = 0. \quad (14)$$

Если левый конец балки совсем свободный, получим

$$M_0(\tau) = 0, \quad Q_0(\tau) = 0. \quad (15)$$

Если левый конец балки жестко заделан, надо рассмотреть два подварианта. Если при  $\xi = 0$  шарнир возникает, то

$$M_0(\tau) = -\tilde{M}_\Delta, \quad \Delta = 0, \quad (16)$$

где  $\tilde{M}_\Delta = \gamma^h(0)$  обозначает предельный момент балки при  $\xi = 0$ . Если же в сечении  $\xi = 0$  шарнира не будет, получим уравнения

$$q_1 = 0, \quad \Delta = 0. \quad (17)$$

Аналогичные пары уравнений получим и на правом конце балки. Таким образом, из граничных условий получаем всегда 4 уравнения

Допустим теперь, что в момент  $\tau$  во внутренних точках балки имеется  $n_1$  шарниров, причем  $n_2$  из них - подвижные. Таким образом, в каждый момент  $\tau$  имеем неизвестные  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_{n_1+1}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}$ ,  $Q_0$ ,  $M_0$ . Вообще неизвестных  $n_1 + n_2 + 5$ . Составим теперь систему уравнений для определения неизвестных.

В шарнирах должны быть выполнены условия

$$M(\alpha_k, \tau) = \tilde{M}_k, \quad (18)$$

где

$$\tilde{M}_k = \pm (\min(\gamma_{k-1}, \gamma_k))^2, \quad k = 1, \dots, n_1. \quad (19)$$

Знак в последней формуле выберем так, чтобы было соответствие со знаком момента в предыдущем моменте.

Подвижный шарнир может существовать только там, где функция  $M(\xi, \tau)$  достигает экстремума по  $\xi$ , т.е.

$$M'(\alpha_k, \tau) = Q(\alpha_k, \tau) = 0, \quad k = 1, \dots, n_k. \quad (20)$$

Вообще имеем 4 уравнения из граничных условий, 1 уравнение (10),  $n_1$  уравнений из условий (18) и  $n_2$  уравнений из условий (20). Таким образом, число уравнений  $n_1 + n_2 + 5$ , что совпадает с числом неизвестных. Описываемая система уравнений является квазилинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(\tau, \vec{y}) \dot{\vec{y}} = \vec{F}(\tau, \vec{y}), \quad (21)$$

где  $\vec{y}$  и  $\dot{\vec{y}}$  обозначают вектора неизвестных и их производных по времени,  $A(\tau, \vec{y})$  - матрица системы и  $\vec{F}(\tau, \vec{y})$  - вектор свободных членов.

Если к моменту  $\tau$  нагрузка будет выше статически предельной нагрузки и существует  $\xi \in [0, 2]$ , так что  $\dot{\omega}(\xi, \tau) \neq 0$ , то эта система является однозначно разрешимой. Но если к моменту  $\tau$  нагрузка ниже статически предельной, система разрешается однозначно только при статически определенных задачах. Статически неопределенными являются задачи, при которых 1) балка в одном конце свободно опирается, а в другом - жестко заделана и 2) балка в обоих концах жестко заделана. Решение статически неопределенных задач в данной работе не рассматривается.

После вычислений величин  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\dots$ ,  $\omega_{n_1+1}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{n_2}$  надо проверить, выполнены ли следующие требования:

1) энергия диссипации на шарнирах положительна, т.е.

$$(\omega_{i-1} - \omega_i) \dot{M}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_1 + 2, \quad (22)$$

причем  $\omega_0 = \omega_{n_1+2} = 0$ ;

2) изгибающий момент нигде не превосходит предельного момента

$$|M(\xi, \tau)| \leq [\min(\gamma(\xi-), \gamma(\xi+))]^2, \quad \xi \in (0, 2),$$

$$|M(0, \tau)| \leq \gamma^2(0),$$

$$|M(2, \tau)| \leq \gamma^2(2).$$

Если некоторые из неравенств (22) нарушаются, то соответствующий шарнир исчезает, а если неравенства (23) в некоторой области нарушаются, то в соответствующей точке появляется новый шарнир.

Для вычисления остаточных прогибов можно применить любой метод численного интегрирования. Движение прекращается, когда все шарниры исчезают, т.е. все угловые скорости станут равными нулю.

### 3. Пакет программ

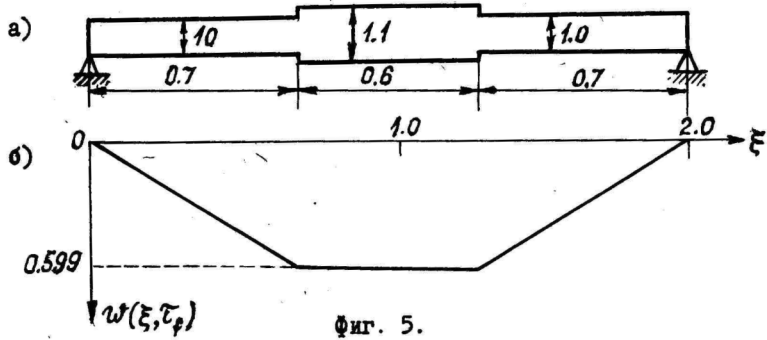
Пакет состоит из 13 модулей. Основная задача при решении - интегрирование системы уравнений при помощи метода Рунге-Кутты. При этом надо учитывать изменение размерности системы в ходе решения при появлении и исчезновении пластических шарниров и проверять выполнимость неравенств (22) и (23). Кроме того, приходится экстраполировать некоторые величины, например, энергию диссипации на всех шарнирах, перерезывающие силы в стационарных шарнирах и координаты движущихся шарниров. В конце каждого шага вычисляются приращения остаточных прогибов. Пакет отлажен не полностью. Пока получено решение сравнительно простых задач.

#### Пример 1.

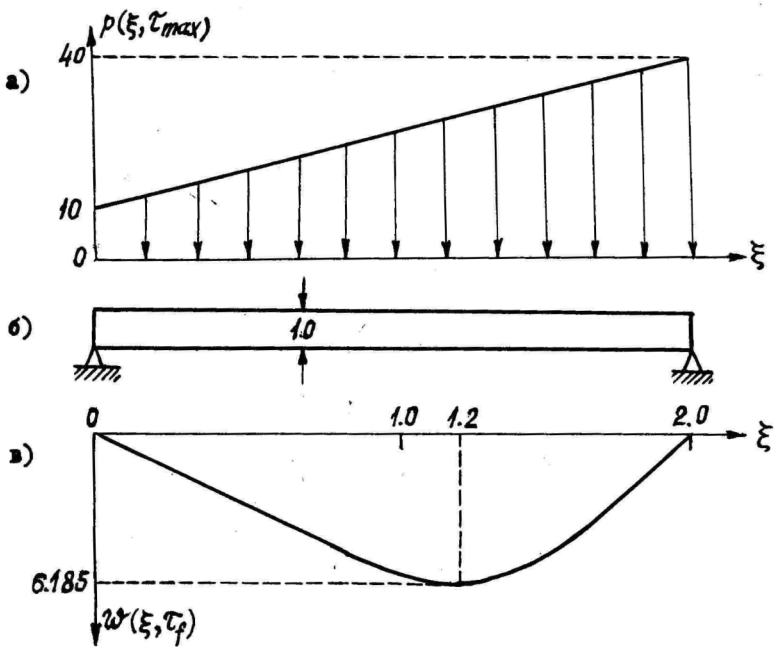
Рассматривается изгиб свободно опертой трехступенчатой балки под действием равномерно распределенной нагрузки  $p = 10$  (фиг. 5а). В момент  $\tau = 0.022$  возникают шарниры в точках изменения высоты балки. Шарниры остаются стационарными и исчезают в момент  $\tau_p = 2.057$ . Остаточные прогибы показаны на фиг. 5б.

#### Пример 2.

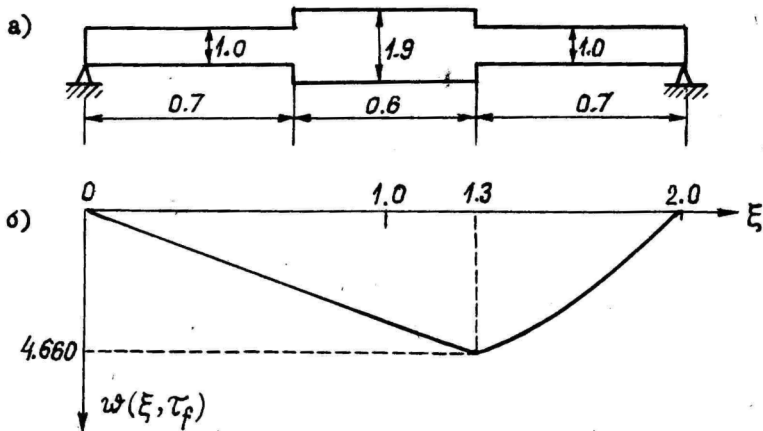
На свободно опертую балку (фиг. 6б) с постоянной высотой приложена нагрузка, линейно увеличивающаяся по пространственной координате  $\xi$  (фиг. 6а). В момент времени  $\tau = 0.007$  появляется шарнир в точке  $\xi = 1.10$ . В момент времени  $\tau = 0.064$  шарнир удваивается, и шарниры расходятся. После момента максимальной нагрузки шарниры начинают приближаться друг к другу и соединяются в точке  $\xi = 1.347$ . Оставшийся шарнир движется к середине балки и исчезает в момент  $\tau_p = 5.577$ . Остаточные прогибы показаны на фиг. 6в.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

### Пример 3.

Размеры балки показаны на фиг. 7а, нагрузка на фиг. 6а. В момент  $\tau = 0.007$  появляется шарнир в сечении  $\xi = 1.30$ . В момент  $\tau = 0.015$  шарнир начинает двигаться вправо и после момента максимальной нагрузки - влево. В момент  $\tau = 1.607$  шарнир останавливается в сечении  $\xi = 1.30$  и исчезает в момент  $\tau = 5.236$ . Остаточные прогибы показаны на фиг. 7б.

### Литература

1. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. - Изд. «Валгус», Таллин, 1982.
2. Лепик Ю., Решение задач динамического изгиба жестко-пластических конструкций методом квазимодалных форм движения. - В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности», Горький, 1980, 14, 70 - 74.
3. Lepik Ü., Just M. Automatic calculation for bending of rigid-plastic beams under dynamic loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983, 38, 19 - 28.

Automatic calculation for dynamic bending  
of rigid-plastic stepped beams

T. Lepikult

Summary

Rigid-plastic beams of piecewise constant cross-sections are considered. The ends of the beams are simply supported, clamped or free. Distributed and concentrated dynamic loads are applied. For the problem in question exact solutions are found.

Three examples are given.

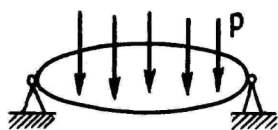
## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН

Ю. Кирс, К. Кенк

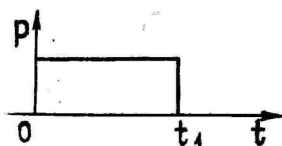
Таллинский политехнический институт

В работе [1] было рассмотрено оптимальное проектирование цилиндрической оболочки с учётом изотропного упрочнения материала. Поверхность текучести материала в случае равномерного внешнего давления принималась в виде квадрата.

В настоящей работе рассматривается оптимальное проектирование шарнирно опертой круговой пластины, нагруженной равномерным давлением  $P$  (фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Расчёт выполнен для случая изотропного упрочнения с применением поверхности Мизеса.

Рассмотрена пластина радиусом  $R$  и толщиной  $2H$ . Режим изменения нагрузки представлен на фиг. 2.

Расчёт выполнен с применением цилиндрических координат  $(\kappa, \varphi, z)$ . Требовалось определить при заданном объёме  $V$  оболочки и её толщины на краю  $H_0$  распределение толщины  $H(\kappa)$  так, чтобы прогибы пластины в момент  $t = t_1$  были бы минимальными. Уравнение движения пластины и условие текучести Мизеса имеют вид

$$\frac{d^2}{d\kappa^2}(\kappa M_\kappa) - \frac{dM_\varphi}{d\kappa} + P\kappa = 2\rho H\kappa \ddot{W}, \quad (1)$$

$$\partial T^2 = \sigma_A^2, \quad (2)$$

где  $W$  - прогиб пластины,  $\rho$  - плотность материала,  $\sigma_A$  - предел текучести при одноосном растяжении и  $T = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}{3}}$  интенсивность касательных напряжений. Не учитывая упругих деформаций, получим ассоциированный с поверхностью (2) закон течения

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \lambda \Delta_n \\ \dot{e}_\varphi &= \lambda \Delta_\varphi \\ \dot{e}_z &= \lambda \Delta_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Delta_n$ ,  $\Delta_\varphi$  и  $\Delta_z$  — компоненты дивергатора напряжений. Нетрудно убедиться на основе (3), что  $\lambda = \eta / 2T$  и

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\eta}{2T} (\lambda \dot{e}_n + \dot{e}_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\eta}{2T} (\lambda \dot{e}_\varphi + \dot{e}_n), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\eta = 2 \sqrt{\dot{e}_n^2 + \dot{e}_\varphi^2 + \dot{e}_z \cdot \dot{e}_\varphi}$  — интенсивность скорости сдвига. В расчётах учитываем изотропное упрочнение материала по закону

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{3A_p}{B} + \sigma_{s0}^2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{s0}$  — исходный предел текучести,  $A_p$  — пластическая работа и  $B$  — постоянная материала. Для пластической мощности будем иметь

$$\dot{A}_p = \eta T$$

и с учётом (5) получим

$$T = \frac{\bar{\gamma}}{2B} + \frac{\sigma_{s0}}{\sqrt{3}}, \quad (6)$$

где  $\bar{\gamma} = \int_0^t \eta dt$ .

Компоненты деформации выражаются по формулам

$$\begin{aligned} e_n &= \varepsilon_n + z \mathcal{E}_n \\ e_\varphi &= \varepsilon_\varphi + z \mathcal{E}_\varphi, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_\varphi$  — компоненты деформации на средней поверхности, а  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{E}_\varphi$  — компоненты кривизны.

В случае чистого изгиба ( $\varepsilon_n = \varepsilon_\varphi = 0$ ) получим

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= z \dot{\mathcal{E}}_n \\ \dot{e}_\varphi &= z \dot{\mathcal{E}}_\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

На основе (7) из (6) имеем

$$T = \frac{|z| \bar{\gamma}}{B} + \frac{\sigma_{s0}}{\sqrt{3}}, \quad (8)$$

где

$$\bar{\gamma} = \int_0^t \sqrt{\dot{\mathcal{E}}_n^2 + \dot{\mathcal{E}}_\varphi^2 + \dot{\mathcal{E}}_n \dot{\mathcal{E}}_\varphi} dt.$$

Моменты  $M_n$  и  $M_\varphi$  в (I) вычисляются по формулам

$$M_n = \int_{-H}^H \sigma_n z dz, \quad M_\varphi = \int_{-H}^H \sigma_\varphi z d\varphi$$

и с учётом (4), (7) и (8) получим

$$M_n = \frac{(2\dot{x}_n + \dot{x}_\varphi)}{\sqrt{3} \zeta} M_A \quad (9)$$

$$M_\varphi = \frac{(2\dot{x}_\varphi + \dot{x}_n)}{\sqrt{3} \zeta} M_A,$$

где  $\zeta = \dot{\gamma}$  и  $M_A = \sigma_{s0} H^2 + \frac{2\sqrt{3} \gamma H^3}{3B}$ .

Учитывая, кроме того, что  $x_n = -\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}$  и  $x_\varphi = -\frac{1}{n} \frac{\partial W}{\partial n}$ , можно дифференциальное уравнение (I) рассматривать как уравнение для определения функции  $W(n, t)$ , содержащее ещё неизвестную функцию  $H(n)$ .

Будем искать  $H(n)$  в виде полинома

$$H(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3. \quad (10)$$

Пусть заданы объём оболочки

$$V_0 = 4\pi \int_0^R n H dr,$$

толщина на краю  $H_0 = H(R)$ , а также требуем выполнения условия

$$\frac{dH}{dn}(0) = 0.$$

Тогда, переходя к безразмерным величинам

$$h = \frac{H}{H_0}, \quad x = \frac{n}{R}, \quad t = \frac{a_3 R^3}{H_0}, \quad V = \frac{V_0}{2\pi R^2 H_0},$$

получим

$$h = \beta_0 + \beta_1 x^2 + t x^3, \quad (11)$$

где

$$\beta_0 = (2V - 1) + \frac{t}{5},$$

$$\beta_1 = 2(1 - V) - \frac{t}{5}.$$

Переходим в основном уравнении (I) к безразмерным величинам

$$\tau = \frac{t}{t_1}, \quad m_1 = \frac{M_n}{\sigma_T H_0^2}, \quad m_2 = \frac{M_\varphi}{\sigma_T H_0^2}, \quad q = \frac{PR^2}{\sigma_T H_0^2},$$

$$\kappa = \frac{\kappa R^2}{\sigma_T t_1^2}, \quad w = \frac{W}{H_0}, \quad \alpha = \frac{2H_0^2}{3BR^2\sigma_T},$$

где  $\sigma_T = \frac{\sigma_{10}}{\sqrt{3}}$ .

Если, кроме того, предположить, что

$$w(x, \tau) = \varphi(\tau) \cdot f(x), \quad (12)$$

то основное уравнение (1) получит вид

$$\frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} (x m_1) - \frac{\partial m_2}{\partial x} + q x = 2\kappa h x \varphi^* \varphi, \quad (13)$$

где

$$m_1 = (2\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \left( \alpha \varphi h^3 + \frac{h^2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2}} \right),$$

$$m_2 = \frac{2\gamma_2 + \gamma_1}{2\gamma_1 + \gamma_2} \cdot m_1, \quad (14)$$

$$\gamma_1 = -\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{x} \frac{df}{dx},$$

а звёздочка над величиной означает частную производную по  $\tau$ ,

т.е.  $\varphi^* = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ .

Ищем функцию  $f(x)$  в виде полинома

$$f(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + e_4 x^4. \quad (15)$$

С учётом условий

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial m_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial m_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$w \Big|_{x=1} = m_1 \Big|_{x=1} = 0, \quad m_2 \Big|_{x=1} \neq 0,$$

получим

$$f = \frac{\ell}{14} (14x^2 - 3x^4 - 11), \quad (16)$$

где  $\ell$  — неизвестная постоянная.

С учётом (14) и (16) уравнение (13) получит вид

$$7x m_1' + m_1' \frac{7-9x^2}{1-x^4} - \frac{4x}{(1-x^2)^2} m_1 = F_1(x, \tau), \quad (17)$$

где

$$F_1(x, \tau) = \kappa \varphi^* \ell (\rho_0 x + \rho_1 x^3 + \rho_2 x^4) (14x^2 - 3x^4 - 11) - 7q x, \quad (18)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial x} = m_1'.$$

Решение однородного уравнения соответствующего уравнению (17) имеет вид

$$\tilde{m}_1 = \frac{C(\tau)}{(1-x^2)^{1/7}}$$

Поэтому решение уравнения (17) ищем в виде

$$m_1 = \frac{C(x, \tau)}{(1-x^2)^{1/7}} \quad (19)$$

После подстановки (19) в (17) получим

$$7x D' + D \frac{7-5x^2}{1-x^2} = F_1(x, \tau)(1-x^2)^{1/7}, \quad (20)$$

где  $D = C'$ . (21)

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{D} = \frac{E(\tau)(1-x^2)^{1/7}}{x},$$

а следовательно, решение уравнения (20) ищем в виде

$$D = E(x, \tau) \frac{(1-x^2)^{1/7}}{x}. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (20) получим

$$7E' = F_1(x, \tau). \quad (23)$$

Выполнив интегрирование в (23) и затем в (21), получим из (19)  $m_1(x, \tau)$ . Вышеуказанные интегрирования связаны с вычислением интегралов типа

$$\int_0^x x^n (1-x^2)^{1/7} dx, \quad (24)$$

где  $n$  - целое число.

Если  $n$ -нечётное, интеграл (24) нетрудно вычислить, а в случае чётного  $n > 2$  путём интегрирования по частям приходим к необходимости вычисления интеграла

$$J(x) = \int_0^x x^2 (1-x^2)^{1/7} dx.$$

В итоге получим

$$m_1(x, \tau) = \frac{7qA}{32} + \kappa \psi^2 \mathcal{F}_2 + \frac{99446}{122655A^{1/7}} [J(x) - J(1)], \quad (25)$$

где  $\mathcal{F}_2 = A[\beta_0(0,15625 + 0,08333 A + 0,01136 A^2) +$   
 $+ \beta_1(0,04948 + 0,02639 A - 0,02746 A^2 - 0,00647 A^3) +$   
 $+ \beta x^3(0,02702 - 0,03429x^2 + 0,00513 x^4)]$

и  $A = 1 - x^2$ . Вычисляя  $J(1)$  по формуле трапеции, получим  $J(1) = 0,2806$ .

Учитывая, что

$$y_1(0) = y_2(0) = -2l,$$

вычислим  $m_1(0, \tau)$  согласно (14) и (25).

Приравнявая полученные результаты друг к другу, приходим для определения  $\varphi$  к дифференциальному уравнению

$$\ddot{\varphi} + \frac{6\alpha\beta_0^3}{\kappa D_1} \varphi = K, \quad (26)$$

где

$$K = \frac{\sqrt{3}\beta_0^3 + 4J(1)0,08107 - 0,21875}{lk \cdot D_1} q,$$

$$D_1 = V - 0,41801 - 0,16707 - 4 \cdot 0,00014.$$

Учитывая, что согласно (12) и (16)

$$w(x, \tau) = \frac{\varphi l}{14} (14x^2 - 3x^4 - 11),$$

то  $w(0, \tau) = -\frac{11}{14}\varphi l$  и требование минимальности прогиба в центре пластины сводится к требованию минимальности  $\varphi l$  путём подходящего выбора параметра  $h$ . Нетрудно убедиться, что обычно  $\frac{\beta_0^3}{D_1} > 0$ , и тогда решение (26) имеет вид

$$\varphi = \frac{K}{L^2} + C_1 \cos(L\tau) + C_2 \sin(L\tau), \quad (27)$$

где  $L^2 = \frac{6\alpha\beta_0^3}{\kappa D_1}$ .

Учитывая начальные условия  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ , получим

$$\varphi = \frac{K\kappa D_1}{6\alpha\beta_0^3} [1 - \cos(L\tau)]. \quad (28)$$

Условие минимума  $\left. \frac{\partial \varphi l}{\partial h} \right|_{\tau=1} = 0$  приводится к виду

$$\frac{E_1}{0,000696 \cdot E_2} [0,000232 - \frac{\alpha\beta_0^3}{2\kappa} - \frac{\alpha\beta_0^3}{6\kappa E_2}] - 0,03792 - \beta_0 I, 1547 = 0, \quad (29)$$

$$\text{где } E_1 = 0,21875q - \beta_0^3 I, 73205 - 0,113745(2V - 1 - \beta_0),$$

$$E_2 = 602,5934V - 241,03735 - \beta_0.$$

Определив  $\beta_0$  из (29) и учитывая, что

$$h = 5\beta_0 - 10V + 5$$

$$\text{и } \beta_1 = 2(1 - V) - \frac{6}{5}h,$$

получим окончательно выражение для  $h$  из (11).

Прогиб в центре пластины

$$Z = w(0, 1) = \frac{11E_1(1 - \cos L)}{84 \cdot \alpha \cdot \beta_0^3} \quad (30)$$

Аналогично был выполнен также расчёт без учёта упрочнения. Соответствующие результаты отмечены звёздочкой. В таблице приведены результаты некоторых примеров расчёта.

V	q	$\mu$	$\alpha$	Z	Z*	$\beta_0$	$\beta_0^*$
1	800	100	0,1	2,668	2,734	0,1038	0,107
1	1000	100	0,1	3,373	3,42	0,135	0,142
0,8	600	100	0,2	3,01	3,08	0,1154	0,1244
1,2	1200	100	0,1	3,00	3,08	0,12	0,124

$\beta_1$	$\beta_1^*$	$\beta$	$\beta^*$
5,38	5,359	-4,48	-4,46
5,19	5,15	-4,325	-4,29
3,307	3,2536	-2,423	-2,378
7,282	7,256	-6,402	-6,38

Как видно по результатам расчёта, упрочнение материала слабо влияет на результаты, и в данной задаче расчёт можно вести без учёта упрочнения.

Литература.

И. Кирс Ю., Кенк К., Об учёте упрочнения при оптимальном проектировании. Уч. зап. Тартуск. ун-та., 1982, 627, 72-79.

About the Optimal Design of Circular Plates

J. Kirs and K. Kenk

Summary

The designing of simply supported plastic circular plates made of isotropically hardening material is examined. The plate is under the dynamic normal pressure, having the form of rectangular impulse. The purpose is to determine such a function of thickness in which the normal deformations in the centre of the plate were as small as possible. The problem is solved by using the yield-curve, presented by Mises. The results of calculations indicate that the effect of hardening is insignificant in such a problem.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР  
К ЖЁТКО-ПЛАСТИЧЕСКИМ КРУГЛЫМ ПЛАСТИНКАМ  
В СЛУЧАЕ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

Проблемам оптимального проектирования пластических элементов конструкций при динамическом нагружении уделено еще недостаточно много внимания. Одним из путей оптимизации является оптимизация расположения дополнительных опор к элементам конструкций. В работе Прагера и Розвани [14] получены условия оптимального расположения дополнительных опор для жестко-пластического материала в случае статических нагрузок. В работах Лепика [7] и Леллепа [6] эти условия обобщены на случай динамического нагружения. Леллепом [5] было найдено оптимальное расположение дополнительной опоры к жестко заделанной с одного и шарнирно закрепленной с другого конца жестко-пластической балке при импульсном нагружении. Некоторые основные пути оптимального проектирования неупругих конструкций, подверженных динамическим нагружениям, были рассмотрены в монографии Лепика [8].

Вопросы оптимизации пластических элементов конструкций при динамической нагрузке естественно базируются на задачах динамического поведения соответствующих элементов конструкций. Проблемы жестко-пластической динамики балок и пластин восходят к Гвоздеву [2]. Элементарная теория динамического изгиба жестко-пластических круглых пластин, использующая закон течения, который связывает определенным образом поле напряжений и скоростей прогибов в пластинке, была предложена Гопкинсом и Прагером [3]. Отметим также работы Ванга и Гопкинса [4] и Ванга [16], в первой из которых рассматривалась деформация заделанной по краю круглой пластинки при импульсной нагрузке, а во второй рассматривалась аналогичная задача для свободно опертой по внешнему краю круглой пластинки. Динамика кольцевых пластин изучалась в работе Шапиро [10], где рассматривалась защемленная по внутреннему краю кольцевая пластинка с подвергнутым удару внешним краем. Кольцевая пластинка, свободно опертая по внешнему краю, подверженная нагрузке прямоугольного типа, была объектом изучения в работе Мруза [13], при этом на внутренний край пластинки дейст-

ует перерезывающая сила. В работе Эггарвала и Эблун [11] решается задача деформирования заделанной или свободно опертой по внешнему краю кольцевой пластинки при импульсном нагружении. Отметим, что в этой работе не выполняется требование равенства радиального изгибающего момента своему предельному значению на шарнирной окружности. Изгиб опертой по внешнему краю кольцевой пластинки в случае невозрастающего по времени равномерно распределенного давления изучался в работе Мазалова и Немировского [12]. Движение заземлённой по внутреннему краю кольцевой пластинки под действием нагрузки прямоугольного типа рассматривалось Костриком и Лизгуновым в [4].

В данной работе находится такой радиус круговой опоры, концентрической с внешним краем импульсно нагруженной круглой пластинки и осуществляющей ее жёсткую заделку, при котором максимальный остаточный прогиб пластинки был бы минимален. Рассматриваются три случая опирания для внешнего края пластинки: свободное опирание, жёсткая заделка и случай, когда внешний край свободен. При этом первые два случая рассмотрены подробно, а для случая, когда внешний край свободен, приведены только конечные результаты оптимизационной задачи.

### 1. Основные соотношения

Рассмотрим жёстко-пластическую круглую пластинку радиуса  $R$ . Пусть к пластинке установлена дополнительная круговая опора радиуса  $S$ , концентрическая с внешним краем круглой пластинки. В начальный момент времени  $t=0$  пластинка не деформирована, но все её точки, кроме опорных, имеют скорость  $v_0$  по направлению нормали к срединной поверхности пластинки.

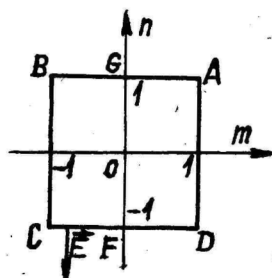
Уравнения движения пластинки в безразмерной форме имеют следующий вид:

$$(qm)' - n = qg, \quad (1.1)$$

$$(qg)' = 12q\ddot{n}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\kappa}{R}, & s &= \frac{S}{R}, & m &= \frac{M}{M_0}, & n &= \frac{N}{M_0}, \\ q &= \frac{RQ}{M_0}, & n &= \frac{12M_0}{\kappa n_0^2 R^2} W, & \tau &= \frac{12M_0}{\kappa n_0 R^2} t, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $r$  - радиальная координата,  $M$ ,  $N$  и  $M_0$  - радиальный, окружной и предельный изгибающие моменты соответственно,  $Q$  - перерезывающая сила,  $\rho$  - масса, приходящаяся на единицу срединной поверхности пластинки,  $W$  - прогиб и  $t$  - время. Штрихи и точки обозначают дифференцирование по  $\varrho$  и  $\tau$  соответственно.



Фиг. 1.

Начальные условия в этом случае будут иметь вид

$$w(\varrho, 0) = 0, \quad \dot{w}(\varrho, 0) = 1. \quad (1.4)$$

В случае, если внешний край пластинки заделан либо оперт, то надо потребовать, чтобы

$$\dot{w}(1, \tau) = 0, \quad (1.5)$$

а также надо потребовать выполнение требования

$$\dot{w}(s, \tau) = 0. \quad (1.6)$$

Добавим также краевое условие

$$rv(s, \tau) = -1. \quad (1.7)$$

Будем пользоваться предельной кривой (квадрат Йогансена) [9, 15], которая ограничивает квадрат  $|rv| < 1$ ,  $|rv| < 1$  (фиг. 1). Вектор скорости деформации имеет вид

$$\vec{E} = \left\{ -\dot{w}', -\frac{1}{\varrho} \dot{w}' \right\}. \quad (1.8)$$

## 2. Деформация круглой пластинки

Рассмотрим динамику жёстко заделанной по внешнему краю импульсно нагруженной круглой пластинки в случае условия текучести в виде квадрата. Отметим, что аналогичная задача в случае условия текучести Треска была решена в [1], а случай свободно опертого внешнего края рассмотрен в [16].

Движение пластинки происходит в двух фазах. Во время первой фазы шарнирная окружность движется от опоры к центру пластинки и достигает его в момент времени  $\tau_H = \frac{\Delta^2}{2}$ , во время второй фазы имеет место стационарный шарнир в центре пластинки, которая прекращает движение в момент времени

$$\tau_{12} = \Delta^2. \quad (2.1)$$

Безразмерный радиус пластинки здесь равен  $\Delta$ .

Опуская в целях краткости выкладки, можно получить, что

$$w(q, \tau_{II}) = \frac{\delta - q}{4A} (q^2 + 2\delta q + 2\delta^2),$$

$$w(q, \tau_{III}) = \frac{\delta - q}{4A} (q^2 + 2\delta q + 3\delta^2),$$

откуда максимальный остаточный прогиб равен

$$\max_{0 \leq q \leq \delta} w(q, \tau_{III}) = w(0, \tau_{III}) = \frac{3}{4} \delta^2. \quad (2.2)$$

Используя формулы для радиального изгибающего момента, можно показать, что при  $0 \leq q \leq \delta$  в течение обеих фаз движения выполняется неравенство  $|m(q, \tau)| \leq 1$ . Для окружного изгибающего момента при этом оказывается, что  $n(q, \tau) = 1$ .

### 3. Динамика кольцевой пластинки (случай свободно опертого либо жёстко заделанного внешнего края)

Рассмотрим кольцевую пластинку внутреннего радиуса  $S$  и внешнего радиуса  $R$ . Перейдём к безразмерным величинам по формулам (1.3). Пусть внешний край пластинки свободно опёрт либо жёстко заделан.

Заметим, что задать механизм движения так, чтобы шарнирные окружности от опор начали движение друг навстречу другу, а часть пластинки между шарнирными окружностями имела бы постоянную по времени скорость, не представляется возможным. Это происходит потому, что в этом случае первая фаза движения кончилась бы встречей шарнирных окружностей, а для второй фазы, для которой имелась бы одна нестационарная шарнирная окружность с координатой  $\alpha$ , из уравнения (1.1) в силу непрерывности перерезывающей силы  $q$  можно получить равенство

$$\lambda + \alpha m'(\alpha, \tau) = \alpha m(\alpha, \tau).$$

Однако в силу того, что функция  $m(q, \tau)$  имеет при  $q = \alpha$  максимум, это последнее равенство противоречиво, т.к.

$$m(\alpha, \tau) \geq 0, \text{ а } m(\alpha, \tau) \leq 0.$$

Исходя из вышесказанного и учитывая (1.5) и (1.6), зададим поле скоростей в виде

$$n' = \begin{cases} n(\tau) \frac{g-1}{g_1-1}, & 1 \leq g \leq g_1(\tau), \\ n(\tau), & g_1(\tau) \leq g \leq g_2(\tau), \\ n(\tau) \frac{g-1}{g_2-1}, & g_2(\tau) \leq g \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Как показывают проведённые вычисления, функция  $n(\tau)$ , уменьшаясь от значения 1, становится равна нулю раньше, чем произошла бы встреча шарнирных окружностей  $g_1$  и  $g_2$ . Поэтому опасность получения вышеприведённого противоречия здесь исключена.

Учитывая вид вектора скоростей деформации (1.8) и механизм движения, описываемый формулами (3.1), мы видим, что отрезку  $1 \leq g \leq g_1$  соответствует режим CD квадрата текущей части, поэтому здесь мы должны взять  $n = -1$ , а отрезку  $g_2 \leq g \leq 1$  в случае свободно опертого внешнего края соответствует режим AG квадрата Иогансена (фиг. 1), а в случае заделанного внешнего края - режим AB квадрата текущей части, и в этом случае в уравнении (1.1) мы берём  $n = 1$ .

На отрезке  $g_1 \leq g \leq g_2$  имеет место соотношение  $m = 1$ , поэтому из уравнений (1.1) и (1.2) мы получаем

$$n' = -12g n''.$$

Принимая во внимание, что  $n(g_1, \tau) = -1$ , а  $n(g_2, \tau) = 1$ , находим, что

$$n' = \frac{1}{3(g_1^2 - g_2^2)}. \quad (3.2)$$

В этом случае получается, что для отрезка  $g_1 \leq g \leq g_2$  мы находимся на стороне DA предельного квадрата и для окружного изгибающего момента  $n$  на этом отрезке имеет место соотношение

$$n = \frac{2}{g_2^2 - g_1^2} g^2 - \frac{g_1^2 + g_2^2}{g_2^2 - g_1^2}.$$

При этом перерезывающая сила  $q = (1-n)/g$  непрерывна на  $[g_1, g_2]$ .

Далее будем сначала рассматривать случай свободно опертого внешнего края.

Принимая во внимание (3.1) и (3.2), при решении уравнений (1.1) и (1.2) с учётом условия (1.7) и условий

$$m(g_1, \tau) = m(g_2, \tau) = 1, \quad m'(g_1, \tau) = m'(g_2, \tau) = 0, \quad m(1, \tau) = 0$$

можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{g}_1 = \frac{2\lambda}{\pi(g_1 - \lambda)(2g_1 + \lambda)} - \frac{g_1 - \lambda}{3\pi(g_2^2 - g_1^2)} \quad (3.3)$$

$$\dot{g}_2 = \frac{1}{\pi(g_2 - 1)(2g_2 + 1)} - \frac{g_2 - 1}{3\pi(g_2^2 - g_1^2)} \quad (3.4)$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений (3.2) - (3.4), надо проинтегрировать при начальных условиях

$$v(0) = 1, \quad g_1(0) = \lambda, \quad g_2(0) = 1. \quad (3.5)$$

При  $\tau = 0$  эта система имеет особенность.

Учитывая (3.3)-(3.5), находим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \dot{g}_1(g_1 - \lambda) = \frac{1}{2}, \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \dot{g}_2(g_2 - 1) = \frac{1}{4}.$$

Отсюда, принимая во внимание (3.2) и (3.5), получим, что при  $\tau \ll 1$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \lambda + \sqrt{\tau}, \\ g_2(\tau) &= 1 - \sqrt{\frac{\tau}{2}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} v(\tau) &= 1 + \frac{2\lambda}{3(2\lambda + \lambda\sqrt{2})} \left\{ (2 + \sqrt{2})(1 + \lambda) \ln \left[ 1 + \frac{\sqrt{\tau}}{(1 + \lambda)(2\sqrt{2} + \lambda)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda)(2 - \sqrt{2}) \ln \left[ 1 - \frac{\sqrt{\tau}}{(1 - \lambda)(2 - \sqrt{2})} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В случае же жёстко заделанного внешнего края уравнение (3.4) надо заменить на

$$\dot{g}_2 = \frac{2}{\pi(g_2 - 1)(2g_2 + 1)} - \frac{g_2 - 1}{3\pi(g_2^2 - g_1^2)}, \quad (3.7)$$

уравнения же (3.2) и (3.3) остаются прежними.

Соотношения (3.6) при жёстко заделанном внешнем крае для  $\tau \ll 1$  приобретают вид

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \lambda + \sqrt{\tau}, \\ g_2(\tau) &= 1 - \sqrt{\tau}, \\ v(\tau) &= 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{2\sqrt{\tau}}{1 + \lambda} + \ln \left( 1 - \frac{2\sqrt{\tau}}{1 + \lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим также, что изгибающий радиальный момент по модулю для этих случаев не превышает предельного.

Численные результаты решения соответствующих систем дифференциальных уравнений будут представлены в п. 5.

#### 4. Оптимальное расположение дополнительных опор

Оптимальным значением будем считать такое значение  $\Delta$ , при котором максимальный остаточный прогиб для всей пластинки будет минимален. Это условие равносильно следующему равенству (здесь  $\tau_{f1}$  и  $\tau_{f2}$  - моменты окончания движения для внутренней и внешней частей пластинки соответственно):

$$\max_{0 \leq \Delta \leq 1} w(\varrho, \tau_{f1}) = \max_{\Delta \leq \varrho \leq 1} w(\varrho, \tau_{f2}). \quad (4.1)$$

Для внутренней (круглой) части пластинки всё довольно просто. Здесь по формуле (2.2) имеем

$$\max_{0 \leq \varrho \leq \Delta} w(\varrho, \tau_{f1}) = \frac{3}{4} \Delta^2.$$

Для нахождения правой части равенства (4.1) придётся численно проинтегрировать на ЭВМ соответствующие системы дифференциальных уравнений, полученные в п. 3.

Рассмотрим в отдельности три случая опирания внешнего края.

**И с л у ч а й** (свободно опертый внешний край). Систему уравнений (3.2) - (3.4) решаем методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом  $h = 0,0001$ , начиная с момента времени  $\tau_0 = 0,0001$  и при выборе начальных условий принимая во внимание соотношение (3.6).

В данном случае

$$\max_{\Delta \leq \varrho \leq 1} w(\varrho, \tau_{f2}) = \int_0^{\tau_{21}} w(\tau) d\tau,$$

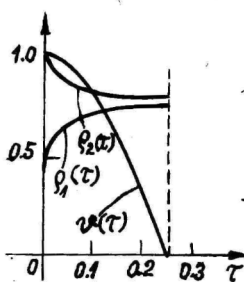
где  $\tau_{21}$  находится при решении системы (3.2) - (3.4) и является моментом времени, когда функция  $w(\tau)$  становится равной нулю.

Условие (4.1) в данном случае даёт оптимальный радиус дополнительной опоры

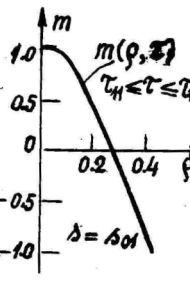
$$\Delta_1 = 0,4667.$$

Поведение функций  $q_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  и  $w(\tau)$  для этого значения  $\Delta$  показано на фиг. 2. При этом  $\tau_{21} = 0,260$ . График изгибающего радиального момента при  $\Delta = \Delta_1$  для внутренней (круглой)

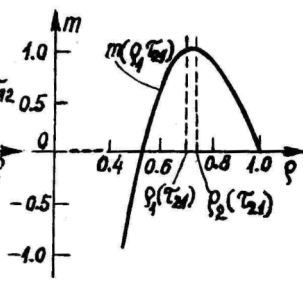
части пластинки в момент времени  $\tau = \tau_{11}$  и в течение всей II фазы движения показан на фиг. 3. На фиг. 4 показан график радиального изгибающего момента при  $\Delta = \Delta_1$  для внешней



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

(кольцевой) части пластинки в конечный момент времени  $\tau = \tau_{21}$ . Отметим, что для  $\Delta = \Delta_1$  по формуле (2.1) имеем  $\tau_{12} = (\Delta_1)^{1/2} = 0,218$ , т.е. в этом случае  $\tau_{11} = \tau_{12} < \tau_{21} = \tau_{12}$ .

При этом для  $\Delta = \Delta_1$

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} m(\rho, \tau_{11}) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} m(\rho, \tau_{21}) = 0,1634.$$

II с л у ч а й (жёстко заделанный внешний край). В данном случае систему уравнений (3.2), (3.3) и (3.7) решаем опять методом Рунге-Кутты с шагом  $h = 0,0001$ , начиная с момента времени  $\tau_0 = 0,0001$  и пользуясь при выборе начальных условий формулами (3.8).

Максимальный остаточный прогиб для внешней (кольцевой) части пластинки находим в процессе решения системы по формуле Симпсона

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} w(\rho, \tau_{21}) = \int_0^{\tau_{21}} w(\tau) d\tau.$$

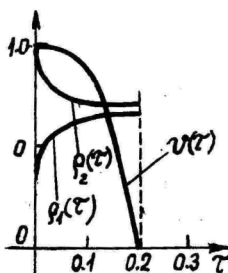
Здесь  $\tau_{21}$  - момент окончания движения.

Пользуясь условием (4.1), получаем в данном случае следующий оптимальный радиус дополнительной опоры:

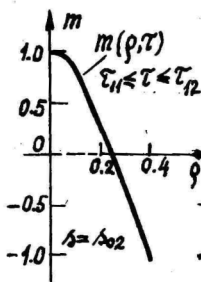
$$\Delta_{21} = 0,4251.$$

Графики функций  $\rho_1(\tau)$ ,  $\rho_2(\tau)$  и  $w(\tau)$  при этом значении  $\Delta$  изображены на фиг. 5. График изгибающего радиального момента при  $\Delta = \Delta_{21}$  для внутренней (круглой) части пластинки в мо-

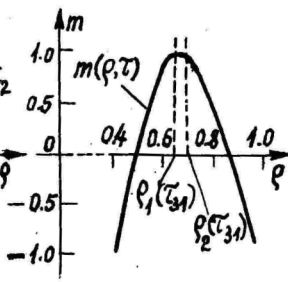
мент времени  $\tau = \tau_{21}$  и в течение всей II фазы движения показан на фиг. 6. График радиального изгибающего момента при  $\Delta = \Delta_{21}$  для внешней (кольцевой) части пластинки в



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

конечный момент времени  $\tau = \tau_{21}$  показан на фиг. 7. Вычисления показывают, что  $\tau_{21} = 0,212$ . Время движения внутренней части пластинки при  $\Delta = \Delta_{21}$ , как показывает формула (2.1), равно  $\tau_{12} = (\Delta_{21})^2 = 0,181$ . Здесь опять  $\tau_{f1} = \tau_{12} < \tau_{21} = \tau_{f2}$ .

При этом для  $\Delta = \Delta_{21}$

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} m(\rho, \tau_{f1}) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} m(\rho, \tau_{f2}) \approx 0,1355.$$

III случай (свободный внешний край). В целях краткости мы опустили рассмотрение деформации заделанной по внутреннему и свободной по внешнему краю кольцевой пластинки. Приведем лишь окончательный результат задачи оптимизации расположения дополнительной опоры.

Условие (4.1) в данном случае даёт следующее оптимальное значение для радиуса опоры:

$$\Delta_3 = 0,7042.$$

Вычисления показывают, что для  $\Delta = \Delta_3$  общая длительность движения внешней части оказывается равной  $\tau_{22} = 0,505$ ,

для внутренней части движение заканчивается в момент времени  $\tau_{12} = (\Delta_2)^2 = 0,496$ . Здесь мы видим, что промежуток времени  $\tau_{22} - \tau_{21} = \tau_{12} - \tau_{11} = 0,009$  между моментами окончания движения для внутренней и внешней частей пластинки является меньше, чем в предыдущих случаях.

При  $\Delta = \Delta_2$  имеем также

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} \eta(\rho, \tau_{11}) = 0,3719, \quad \max_{0 \leq \rho \leq 1} \eta(\rho, \tau_{22}) = 0,3224.$$

В приводимой таблице для всех трех случаев опирания внешнего края пластинки указан коэффициент экономии  $e$ , равный отношению максимального остаточного прогиба при оптимальном расположении дополнительной опоры к максимальному остаточному прогибу в случае, когда радиус дополнительной опоры равен половине радиуса пластинки.

	свободное опирание	жесткая заделка	свободный внешний край
$e$	0,8716	0,7230	0,3833

## Литература

1. Ванг А., Гопкинс Г., О пластической деформации заделанной по краю круглой пластинки под действием импульсной нагрузки. *Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.*, 1955, 31, № 3, 123-137.
2. Гвоздев А.А., К расчёту конструкций на действие взрывной волны. *Строит. пром.*, 1943, № 1,2.
3. Гопкинс Г., Прагер В., Динамика пластической круглой пластинки. *Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.* 1955, 31, № 3, 112-122.
4. Кострик В.К., Лизгунов О.Л. Движение кольцевой пластинки под действием динамической нагрузки. *Рук. деп. в ВИНТИ 25 марта 1981 г.*, № 1329-81 Деп., 14 стр.
5. Леллеп Я., Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной пластической балки. *Уч. зап. Тартуск. ун-та*, 1979, 487, 52-57.
6. Леллеп Я., Об условиях оптимальности расположения дополнительной опоры. *Уч. зап. Тартуск. ун-та*, 1981, 564, 41-50.
7. Лепик Д., Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. *Уч. зап. Тартуск. ун-та*, 1977, 430, 132-143.
8. Лепик Д., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. *Таллин, Валгус*, 196 с.
9. Спиридонов А.Г., Деформация неупругой кольцевой пластины под действием распределённой импульсной нагрузки. *Науч. тр. Всес. заоч. машиностр. ин-та*, 1975, 33, 75-78.
10. Шапиро Г.С., Удар по кольцевой жёстко-пластической пластинке. *Прикл. мат. и мех.*, 1959, 23, № 1, 172-175.
11. Aggarwal H.R., Ablow C.M., Plastic bending of an annular plate by uniform impulse. *Int.J.Non-Linear Mech.*, 1971, 6, Nr. 1, 69-80.
12. Mazalov V.N., Nemirovsky Ju.V., Dynamical bending of rigid-plastic annular plates. *Int.J.Non-Linear Mech.*, 1976, 11, 25-39.

13. Mróz Z., Plastic deformations of annular plates under dynamic loads. Arch.Mech. Stosowanej, 10, Nr.4, 499-516.
14. Prager W., Rozvany G.I.N. Plastic design of beams: optimal location of supports and step in yield moment. Int.J.Mech.Sci., 1975, 17, Nr. 10, 627-631.
15. Ranganatham B.V., Subba K.S. Limit analysis of annular slabs. Int. J. Mech. Sci., 1972, 14, Nr. 10, 693-699.
16. Wang A.J. The permanent deflection of a plastic plate under blast loading. J. Appl. Mech., 1955, 22, 375-376.

Optimal location of additional supports for  
rigid-plastic circular plates in the case of  
impulsive loading

G. Olenev

Summary

Optimal location of the rigid circular additional support for a rigid-plastic circular plate subjected to the initial transverse impulse is sought for under the condition that the maximal residual deflection of the plate attains a minimal value. The outer edge of the plate may be simply supported, clamped or free. In the first case the optimal radius of the additional support is  $0.4667 R$ , in the second case -  $0.4251 R$  and in the third case  $0.7042 R$ , where  $R$  is the **radius of the plate**. The material of the plate is assumed to obey the square yield condition.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ  
ОПОРЫ К ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКЕ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

Одним из способов уменьшения податливости конструкции является установка к ней дополнительных опор. В случае статического нагружения эта идея применялась Мрузом и Розвани [8] для упругих и Прагером и Розвани [9] для жёстко-пластических конструкций. Этот подход был обобщён Лепиком [3] и Леллепом [2] на случай динамического нагружения. Вопросам уменьшения податливости балок при помощи дополнительных опор посвящена глава У монографии Лепика [4]. Оптимальное проектирование жёстко-пластических цилиндрических оболочек с дополнительными опорами в случае нагрузки прямоугольного типа рассматривалось Леллепом в работе [7].

В данной работе определяется расположение дополнительной опоры к жёстко заделанной с одного и свободной с другого конца жёстко-пластической цилиндрической оболочке, подверженной импульсному нагружению. Деформация заделанной с обоих концов жёстко-пластической цилиндрической оболочки под действием нагрузки прямоугольного типа была исследована Ходжем [6], а аналогичная задача при импульсной нагрузке рассматривалась автором данной статьи [5]. Поведение заделанной с одного и свободной с другого конца жёстко-пластической цилиндрической оболочки под действием нагрузки прямоугольного типа изучалось Колесниковъ и Костриком [4].

#### 1. Исходные предположения

Рассмотрим жёстко-пластическую цилиндрическую оболочку длины  $l$ , расположенную горизонтально, левый конец которой жёстко заделан, а правый – свободен. Установим к оболочке жёсткую круговую дополнительную опору, препятствующую прогибанию оболочки в месте её установки и расположенную на расстоянии  $S$  от левого конца оболочки, в котором поместим начало координатной оси  $Ox$ , направленной вдоль оболочки. В начальный момент времени  $t = 0$  оболочка не деформирована, но все её точки, кроме опорных, имеют одинаковую скорость  $v_0$  по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки. Требуется найти такое расположение дополнительной

опоры, при котором максимальный остаточный прогиб оболочки достигал бы минимального значения.

Уравнение движения цилиндрической оболочки и начальные условия имеют следующий безразмерный вид:

$$m''(\xi, \tau) = \ddot{w}(\xi, \tau) - c^2 n(\xi, \tau), \quad (1.1)$$

$$w(\xi, 0) = 0, \quad \dot{w}(\xi, 0) = 1, \quad (1.2)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad s = \frac{S}{l}, \quad m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0},$$

$$\tau = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0} t, \quad \dot{w} = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0^2} W, \quad c^2 = \frac{4l^2}{hR},$$

где  $x$  - координата по образующей оболочки,  $h$  и  $R$  - толщина и радиус оболочки соответственно,  $\mu$  - поверхностная плотность оболочки,  $M$ ,  $M_0$ ,  $N$  и  $N_0$  - осевой и предельный осевой изгибающие моменты, окружная сила и предельная окружная сила на единицу длины соответственно,  $W$  - прогиб по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки,  $t$  - время. Здесь и далее штрихи и точки обозначают дифференцирование по  $\xi$  и  $\tau$  соответственно.

Второе равенство из (1.2) выполняется при всех  $\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ , кроме  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , где мы имеем следующие граничные условия:

$$\dot{w}(0, \tau) = \dot{w}(1, \tau) = 0. \quad (1.3)$$

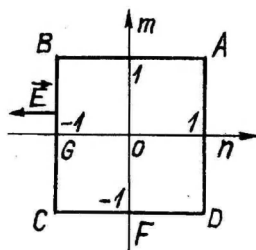
Кроме того, имеем граничные условия:

$$m(0, \tau) = m(1, \tau) = -1, \quad m'(1, \tau) = m'(0, \tau) = 0. \quad (1.4)$$

Будем пользоваться предложенным Ходжем [6] условием текучести, при котором предельная кривая ограничивает квадрат  $|m| \leq 1$ ,

$|n| \leq 1$  (фиг. 1). Вектор скоростей деформации для цилиндрической оболочки при этом имеет вид

$$\vec{E} = (-\dot{w}, -\frac{1}{c^2} \dot{w}'').$$



Фиг. 1

## 2. Деформация цилиндрической оболочки и определение максимальных остаточных прогибов

Движение оболочки можно рассматривать как движение её двух частей - левой ( $0 \leq \xi \leq \lambda$ ) и правой ( $\lambda \leq \xi \leq 1$ ) соответственно. Деформация левой (заделанной с обоих концов) части оболочки изучена в [5]. Оказывается, что в случае короткой левой части оболочки, для которой выполняется условие  $c^2 \lambda^2 \leq 48$ , её движение происходит в двух фазах, и время движения  $\tau_1$  и максимальный остаточный прогиб  $W_{\xi 1}$  левой части оболочки равны соответственно

$$\tau_1 = \frac{\lambda^2}{16 + c^2 \lambda^2}, \quad W_{\xi 1} = \frac{64 + c^2 \lambda^2}{2(16 + c^2 \lambda^2)(48 + c^2 \lambda^2)} \lambda^2. \quad (2.1)$$

В случае длинной левой части оболочки, т.е. в случае, когда  $c^2 \lambda^2 > 48$ , движение происходит в трёх фазах, и для полного времени движения  $\tau_2$  и максимального остаточного прогиба  $W_{\xi 2}$  имеем соотношения

$$\tau_2 = \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{\alpha \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2}) + \alpha^2 (1 + \sqrt{2})} \right], \quad (2.2)$$

$$W_{\xi 2} = \frac{1}{c^2} \left[ \frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha^2 + 1)(\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1)}{2(\alpha^2 + 1)^2(\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)} - \frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)^2}{(\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1)^2} \ln \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 - 1)\sqrt{2}} \right] \quad (2.3)$$

где  $\alpha = (1 + \sqrt{2}) \exp \frac{c\lambda - 4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ .

Механизмы движения правой части оболочки зависят от величины параметра  $c^2(1-\lambda)^2$ . В случае короткой правой части оболочки, когда  $c^2(1-\lambda)^2 \leq 6$ , и в случае правой части оболочки средней длины, когда  $6 < c^2(1-\lambda)^2 \leq 6(3 + 2\sqrt{2})$ , движение происходит в двух фазах. В случае же длинной правой части оболочки, т.е. в случае, когда выполняется условие  $c^2(1-\lambda)^2 > 6(3 + 2\sqrt{2})$ , движение происходит в трёх фазах.

Механизм движения и уравнения для параметров движения в течение начальной фазы движения одинаковы для всех трёх случаев.

Фаза II. Удовлетворяя второму граничному условию из (1.3), поле скоростей для начальной фазы представим в виде

$$\dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} u(\tau) \frac{\xi - \lambda}{\eta - \lambda}, & \lambda \leq \xi \leq \eta(\tau), \\ \frac{v(\tau) - u(\tau)}{1 - \eta} \xi - \frac{v(\tau)\eta - u(\tau)}{1 - \eta}, & \eta(\tau) \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Дифференцируя (2.4) по времени, подставляя полученный результат в (1.1) и интегрируя это уравнение с учётом того, что отрезку  $\lambda \leq \xi \leq \eta$  соответствует режим СВ, а отрезку  $\eta \leq \xi \leq 1$  - режим ВГ квадрата текучести (фиг. 1), а также с учётом условий (1.4) и условий

$$v(\eta, \tau) = 1, \quad v(\lambda, \tau) = 0,$$

приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -c^2 + \frac{6}{(1-\eta)^2} \\ \dot{u} = -c^2 - \frac{6}{(1-\eta)^2} + \frac{(v-u)f(\eta)}{2(\eta-\lambda)(1-\eta)^2\varphi} \\ \dot{\eta} = \frac{f(\eta)}{2(\eta-\lambda)(1-\eta)\varphi}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $f(\eta) = -c^2(\eta-\lambda)^2(1-\eta)^2 + 12(\eta-\lambda)^2 - 12(1-\eta)^2$ ,  
 $\varphi = v(\eta-\lambda) - u(1-\lambda)$ .

Эту систему надо проинтегрировать при начальных условиях

$$v(0) = u(0) = 1, \quad \eta(0) = \lambda.$$

Однако функция  $\dot{\eta}$  при  $\tau = 0$  имеет особенность, поэтому при численном решении на ЭВМ системы (2.5) воспользуемся тем, что при  $\tau \ll 1$

$$\begin{aligned} v(\tau) &= -c^2\tau + 1 + \frac{2\sqrt{3}\tau}{1-\lambda-2\sqrt{3}\tau} + \ln(1-\lambda-2\sqrt{3}\tau) - \ln(1-\lambda), \\ u(\tau) &= -c^2\tau - \frac{6\tau}{(1-\lambda)^2} + 1, \\ \eta(\tau) &= \lambda + 2\sqrt{3}\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно показать, что в случае короткой либо в случае правой части оболочки средней длины, т.е. в случае, когда  $c^2(1-\delta)^2 \leq 6(3+2\sqrt{2})$ , фаза движения II заканчивается в момент времени  $\tau = \tau_{II}$  исчезновением шарнирной окружности с координатой  $\eta$ , т.е.  $\dot{w}'(\eta-, \tau_{II}) = \dot{w}'(\eta+, \tau_{II})$ . При этом терпит разрыв по времени осевой изгибающий момент (это явление встречалось в литературе, напр., в [1] и [4, стр.166]). При  $c^2(1-\delta)^2 > 6(3+2\sqrt{2})$  фаза II заканчивается в момент времени  $\tau = \tau_{31}$ , когда производная по  $\xi$  осевого изгибающего момента в точке  $\xi = \delta$   $m(\delta, \tau) = [12 - c^2(\eta - \delta)^2]/4(\eta - \delta)$ , уменьшаясь, достигает нуля.

Продолжим рассмотрение короткой правой части оболочки во второй фазе движения.

Фаза II. Зададим поле скоростей в виде

$$\dot{w}(\xi, \tau) = v(\tau)(\xi - \delta)/(1 - \delta), \quad \delta \leq \xi \leq 1.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, подставляя полученный результат в (1.1) и интегрируя это уравнение с учётом того, что в данном случае отрезку  $\delta \leq \eta \leq 1$  соответствует пластический режим СГ квадрата текучести (фиг. 1), а также с учётом (1.4), получим, что

$$v(\tau) = -3 \left[ \frac{c^2}{2} + \frac{1}{(1-\delta)^2} \right] (\tau - \tau_{II}) + v(\tau_{II}).$$

Отсюда находим момент окончания движения  $\tau_{II}$  и максимальный остаточный прогиб  $W_{II}$

$$\tau_{II} = \tau_{II} + \frac{2}{3} \frac{(1-\delta)^2}{c^2(1-\delta)^2 + 2} v(\tau_{II}), \quad (2.7)$$

$$W_{II} = \frac{1}{3} \frac{v^2(\tau_{II})}{c^2 + 2/(1-\delta)^2} + \int_0^{\tau_{II}} v(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Заметим, что необходимое неравенство  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$  равносильно в данном случае условию  $m(\delta, \tau) = [6 - c^2(1-\delta)^2]/4(1-\delta) \geq 0$ , т.е. условию  $c^2(1-\delta)^2 \leq 6$ . Т.е. мы имеем дело с короткой правой частью оболочки.

Перейдём к рассмотрению второй фазы движения в случае правой части оболочки средней длины ( $6 < c^2(1-\delta)^2 \leq 6(3+2\sqrt{2})$ ).

Фаза 22. В течение этой фазы

$$\dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \delta \leq \xi \leq \eta_1(\tau), \\ n(\tau)(\xi - \eta_1)(1 - \eta_1), & \eta_1(\tau) \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

На отрезке  $\delta \leq \xi \leq \eta_1$  имеет место пластический режим F (фиг. 1), где  $n(\xi, \tau) = 0$  и  $m(\xi, \tau) = -1$ , поэтому уравнение (1.1) здесь будет удовлетворяться тождественно.

Интегрируя уравнение (1.1) с учётом (2.9) и того, что отрезку  $\eta_1 \leq \xi \leq 1$  соответствует пластический режим CG, а также учитывая (1.4) и то, что

$$m(\eta_1, \tau) = -1, \quad m'(\eta_1, \tau) = 0,$$

получим, что

$$\eta_1(\tau) = C_1 \tau + C_2,$$

$$n(\tau) = -c^2(\tau - \tau_H) + \frac{6}{c_1} \frac{1}{c_1 \tau + C_2 - 1} + \frac{6}{(1-\delta)c_1} + n(\tau_H),$$

где

$$C_1 = \frac{1}{n(\tau_H)} \frac{c^2(1-\delta)^2 - 6}{(1-\delta)}, \quad C_2 = \delta - \frac{\tau_H}{n(\tau_H)} \frac{c^2(1-\delta)^2 - 6}{1-\delta}.$$

Отсюда находим момент окончания движения  $\tau_{22}$  и максимальный остаточный прогиб  $W_{22}$

$$\tau_{22} = \tau_H + \frac{1+\delta}{c} \frac{n(\tau_H)}{c(1-\delta) + \sqrt{6}}, \quad (2.10)$$

$$W_{22} = \frac{1}{2l} \left[ \frac{(1-\delta)n(\tau_H)}{c^2(1-\delta)^2 - 6} \right]^2 \left[ c^2(1-\delta)^2 - 6 \left( 1 - 2ln \frac{\sqrt{6}}{c(1-\delta)} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Перейдём к рассмотрению второй и третьей фаз движения для длинной правой части оболочки.

Фаза 32. Поле скоростей запишем в виде

$$\dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \delta \leq \xi \leq \eta_0(\tau), \\ u(\tau) \frac{\xi - \eta_0}{\eta - \eta_0}, & \eta_0(\tau) \leq \xi \leq \eta(\tau), \\ \frac{n(\tau) - u(\tau)}{1 - \eta} \xi - \frac{n(\tau)\eta - u(\tau)}{1 - \eta}, & \eta(\tau) \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

На отрезке  $1 \leq \xi \leq q_0$  опять имеем пластический режим F, на отрезке  $q_0 \leq \xi \leq q$  - режим CB и на отрезке  $q \leq \xi \leq 1$  - режим BG (фиг. 1).

Дифференцируя (2.12) по времени, подставляя полученный результат в (1.1) и интегрируя это уравнение с учётом (1.4) и условий

$m(q_0, \tau) = -1$ ,  $m(q, \tau) = 1$ ,  $m'(q_0, \tau) = m'(q, \tau) = 0$ ,  
приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -c^2 + \frac{6}{(1-q)^2} \\ \dot{u} = -c^2 - \frac{6}{(1-q)^2} + 6 \frac{\sigma - u}{1-q} \frac{h}{(1-q)(q-q_0)\psi} \\ \dot{q}_0 = \frac{c^2(q-q_0)^2 - 12u}{u(q-q_0)} \\ \dot{q} = 6 \frac{h}{(1-q)(q-q_0)\psi} \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $h = (q-q_0)^2 - 2(1-q)^2$ ,  $\psi = \sigma(q-q_0) - u(1-q_0)$ .

Вычисления, проведённые на ЭВМ, показали, что фаза 32 кончается в некоторый момент времени  $\tau = \tau_{32}$  исчезновением шарнирной окружности  $q$ , т.е. имеет место равенство  $\psi(\tau_{32}) = 0$  или  $\dot{v}'(q-, \tau_{32}) = \dot{v}'(q+, \tau_{32})$ . Если при этом, как показывают вычисления, обращается в нуль функция  $\sigma(\tau)$ , то движение заканчивается. Мы же не будем сразу исключать случая, что  $\sigma(\tau_{32}) = 0$ , а предполагая, что  $\sigma(\tau_{32}) > 0$ , рассмотрим третью фазу движения.

Фаза 33. В течение этой фазы

$$\dot{v}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq q_0(\tau), \\ \sigma(\tau)(\xi - q_0)/(1 - q_0), & q_0(\tau) \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

На отрезке  $0 \leq \xi \leq q_0$  опять имеем пластический режим F, а на отрезке  $q_0 \leq \xi \leq 1$  - режим CG (фиг. 1).

Интегрируя (1.1) на отрезке  $q_0 \leq \xi \leq 1$  с учётом (2.14), (1.4) и условий

$m(q_0, \tau) = -1$ ,  $m'(q_0, \tau) = 0$ ,  
приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -c^2 - \frac{6}{(1-q_0)^2}, \\ \sigma \dot{q}_0 = c^2(1 - q_0) - \frac{6}{1 - q_0}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Движение прекращается в момент времени  $\tau = \tau_{20}$ , когда  $\psi(\tau_{20}) = 0$ . Отметим, что во все рассматриваемые фазы движения осевой изгибающий момент по модулю не превышает предельного.

### 3. Оптимальное расположение дополнительной опоры

Приравнивая между собой максимальный остаточный прогиб для левой части оболочки, который задаётся формулами (2.1) и (2.3), и для правой части оболочки, задаваемый при помощи (2.8), (2.11) и находящийся при решении систем (2.5), (2.13) и (2.15), находим оптимальное расположение  $\Lambda_0$  дополнительной опоры.

Время движения соответствующих частей оболочки задаётся формулами (2.1), (2.2), (2.7), (2.10), а также получается при решении на ЭВМ систем (2.5), (2.13) и (2.15). Эти системы численно интегрировались на ЭВМ методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом  $h = 0,00001$ , начиная с момента времени  $\tau_0 = 0,00001$  и пользуясь при выборе начальных условий соотношениями (2.6).

В приводимой таблице для некоторых значений  $c^2$  указаны оптимальное расположение дополнительной опоры  $\Lambda_0$ , коэффициент экономии  $e$  (при этом  $e = W_f(\Lambda_0)/W_f(0,5)$ , где  $W_f(\Lambda)$  - безразмерный максимальный остаточный прогиб оболочки в случае, когда дополнительная опора имеет координату  $\Lambda$ ), величина  $\tilde{W}_f = c^2 W_f(\Lambda_0) = (\sigma_0 h / \mu R n_0^2) W_f(S_0)$  (здесь  $\sigma_0$  - предел текучести материала, а  $W_f(S_0)$  - максимальный остаточный прогиб оболочки при оптимальном расположении дополнительной опоры), а также величины  $\tilde{\tau}_{f1} = c^2 \tau_{f1} = (\sigma_0 h / \mu R n_0) \tau_{f1}$ , ( $i = 1, 2$ ), где  $\tau_{f1}$  ( $\tau_{f2}$ ) и  $t_{f1}$  ( $t_{f2}$ ) есть соответственно безразмерное и просто время движения левой (правой) части оболочки при оптимальном расположении дополнительной опоры.

$c^2$	10	50	100	500	1000
$\Lambda_0$	0,7533	0,7790	0,8073	0,8990	0,9253
$e$	0,4258	0,6587	0,7487	0,8944	0,9482
$\tilde{W}_f$	0,1699	0,3955	0,4628	0,4997	0,5000
$\tilde{\tau}_{f1}$	0,2618	0,6547	0,8043	0,9835	0,9975
$\tilde{\tau}_{f2}$	0,2327	0,5498	0,6499	0,7045	0,7099

Отметим, что применение метода модальных движений к рассматриваемой задаче в случае, когда приравнивались кинетические энергии действительного и модального движений, дало следующий не зависящий от параметра  $c^2$  результат:

$$A_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \approx 0,7388.$$

Автор выражает благодарность Т. Лепикулту за проведение вычислений на ЭВМ.

#### Литература

1. Колесников С.М., Кострик В.К., Поведение жёстко-пластической цилиндрической оболочки под действием импульса внешнего давления. Прикл. механ., 1975, 11(21), № 7, 63-69.
2. Леллеп Я., Об условиях оптимальности расположения дополнительной опоры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 41-50.
3. Лепик Д., Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 132-143.
4. Лепик Д., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", 1982, 196 с.
5. Оленев Г., Деформация жёстко-пластической цилиндрической оболочки при импульсной нагрузке. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 627, 57-65.
6. Hodge P.G., Impact pressure loading of rigid plastic cylindrical shells. J.Mech. and Phys. Solids, 1955, 3, N 3, 376-388.
7. Lellep J., Optimal design of plastic cylindrical shells with additional supports. Proceedings of 3-rd IFAC Symp. on Control of Distr. Param. Systems, 1982, -Toulouse, 8 pp.
8. Mróz Z., Rozvany G.I.N., Optimal design of structures with variable support conditions. J.Optimiz. Theory and Appl., 1975, 15, N 1, 85-101.
9. Prager W., Rozvany G.I.N., Plastic design of beams: opti-

mal locations of supports and steps in yield moment.  
Int. J. Mech.Sci., 1975, 17, N 10, 627-631.

About optimal location of an additional support  
for a rigid-plastic cylindrical shell under  
impulsive loading

G. Olenev

Summary

Optimal location of the rigid circular additional support for a rigid-plastic cylindrical shell subjected to the initial transverse impulse is sought, for under the condition that the maximal residual deflection attains a minimal value. The left end of the shell is clamped and the right one is free. The optimal location of the additional support is found for several parameters  $c^2 = 4c^2/hR$ , where  $l$ ,  $h$  and  $R$  are the length, thickness and radius of the shell accordingly. The material of the shell is assumed to obey the square yield condition.

# К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ

Я. Леллеп

Тартуский государственный университет

Существуют разные подходы к улучшению проектов пластических цилиндрических оболочек, работающих в области больших прогибов. В работе [2] применены вариационные методы для параметрической оптимизации жестко-пластических цилиндрических оболочек с учетом больших прогибов. В [5] разработана методика проектирования геометрически нелинейных замкнутых цилиндрических оболочек минимального веса для заданного распределения перемещений. Ниже этот метод обобщается для коротких оболочек, нагруженных внутренним давлением и осевым растяжением. Материал оболочек считается жестко-пластическим, подчиняющимся линеаризованному условию текучести.

## 1. Формулировка задачи и основные уравнения

Пусть круговая цилиндрическая оболочка радиуса  $A$  и длины  $2l$  подвержена действию внутреннего давления интенсивности  $P$  и осевого растяжения  $N_x$  на единицу длины окружности. Концы цилиндра шарнирно закреплены, но допускают перемещения вдоль оси. Толщина стенки  $h$  может быть либо постоянной, либо зависящей от координаты  $x$  (начало координатной системы помещается в центральном поперечном сечении). Рассматриваются лишь короткие оболочки (см. [4], [5]). Требуется найти такой проект оболочки переменной толщины, при котором ее вес достигает минимального значения и прогиб  $W$  не превышает прогиба  $W_*$  оболочки постоянной толщины  $h_*$ . Таким образом, минимизации подлежит функционал

$$J = \int_0^l h dx. \quad (1.1)$$

Материал оболочки считается жестко-пластическим, подчиняющимся некоторому аппроксимированному условию пластичности. Применяется такая аппроксимация точной поверхности текучести, при которой напряженное состояние оболочки соответствует лишь грани  $N_\varphi = N_0$ . При этом

$$\Phi \left( \frac{|M_x|}{M_0}, \frac{N_x}{N_0}, h \right) \leq 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $N_x$ ,  $N_\varphi$  - усилия и  $M_x$  изгибающий момент, а  $N_0$  и  $M_0$  - предельные усилие и момент соответственно.

Учитываются умеренно большие прогибы, поэтому компоненты деформации выражаются в виде

$$\varepsilon_x = \frac{dU}{d\mathcal{X}} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{dW}{d\mathcal{X}} \right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{W}{A}, \quad \varkappa_x = -\frac{d^2W}{d\mathcal{X}^2}, \quad (1.3)$$

где  $U$  и  $W$  - осевое и радиальное перемещения. Согласно ассоциированному закону деформирования (применяется теория пластичности типа деформации)

$$\varepsilon_x = \lambda_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial N_x}, \quad \varepsilon_\varphi = \lambda_2^2, \quad \varkappa_x = \lambda_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial M_x}, \quad (1.4)$$

где  $\lambda_1^2$  и  $\lambda_2^2$  есть некоторые неотрицательные множители. При этом  $\lambda_1 = 0$ , если  $\Phi < 0$ .

Уравнение равновесия рассматриваемой оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 M_x}{d\mathcal{X}^2} - N_x \frac{d^2 W}{d\mathcal{X}^2} + \frac{N_0}{A} - p = 0. \quad (1.5)$$

Для сокращения записи основных уравнений в работе используются следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{\mathcal{X}}{\ell}, \quad n = \frac{N_x}{N_*}, \quad m = \frac{M_x}{M_*}, \quad \nu = \frac{N_0}{N_*}, \quad (1.6)$$

$$\rho = \frac{pA}{N_*}, \quad \omega = \frac{N_* \ell^2}{AM_*}, \quad \mu = \frac{N_* W}{\lambda M_*},$$

где  $N_*$  - предельная сила, а  $M_*$  - предельный момент оболочки постоянной толщины  $h_*$ . Следует подчеркнуть, что величина  $h$  может быть не только реальной толщиной, но и некоторым параметром, характеризующим структуру поперечного сечения оболочки. Например, в случае идеально трёхслойного цилиндра за  $h$  выбирается толщина несущих слоев.

## 2. Оболочка постоянной толщины

В случае  $\nu = 1$  уравнение равновесия (1.5) примет с учетом (1.6) вид (штрих обозначает дифференцирование по  $x$ )

$$m'' - 2nm' + \omega(1 - n) = 0. \quad (2.1)$$

Ищем решение последнего уравнения, удовлетворяющее соотношениям (1.2) - (1.4).

Пусть поперечное сечение  $x = x_1$  разбивает оболочку на

две области (из-за симметрии рассматривается лишь правая половина цилиндра). Предполагается, что в центральной части, т.е. при  $x \in (0, x_1)$ , условие (1.2) превращается в равенство, а при  $x \in (x_1, 1)$  в (1.2) имеет место неравенство. Гипотеза такого типа довольно естественна; она использовалась и в работах [2], [4], [5].

В принципе ограничение (1.2) можно записать в виде

$$|mv| \leq f(rv, v). \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) при  $x \in (0, x_1)$  изгибающий момент  $m = -mv = -f(rv, v)$ , а при  $x \in (x_1, 1)$  согласно (1.3) и (1.4) имеем  $m' = 0$ .

Таким образом, непрерывное и непрерывно дифференцируемое решение уравнения (2.1), которое удовлетворяет крайним условиям  $mv(1) = w(1) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ ,  $w(0) = w_0$ , имеет вид при  $x \in [0, x_1]$

$$mv = -mv_*, \quad w = w_0 + \frac{\omega}{4rv}(1-r)x^2 \quad (2.3)$$

и при  $x \in [x_1, 1]$

$$mv = \frac{\omega}{2}(r-1)(x-x_1)^2 - mv_*, \quad w = \frac{\omega}{2rv}(1-r)x_1(x-1). \quad (2.4)$$

Величины  $x_1$  и  $w_0$  выражаются в виде

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{2mv_*}{\omega(r-1)}}, \quad w_0 = \frac{1}{4rv} [\omega(r-1) - 2mv_*]. \quad (2.5)$$

Если  $x_1 = 0$  и  $w_0 = 0$ , то из (2.5) вытекает, что предельная нагрузка равна

$$rv_0 = 1 + 2mv_*/\omega. \quad (2.6)$$

### 3. Оптимизационная задача

Поставленная выше задача заключается в минимизации функционала (1.1) с учетом ограничений (1.2) - (1.5). Кроме того, следует иметь в виду то, что прогиб оптимального проекта не должен превышать прогиба оболочки постоянной толщины, который задан формулами (2.3) - (2.5). Однако число ограничений уменьшается, если ввести предположение о совпадении прогибов оптимальной и сравниваемой оболочек. Такой подход был разработан в работе [5]. Следуя [5], соотношения (1.3) и (1.4) можно опустить в дальнейшем анализе, поскольку задан-

ный прогиб заведомо является кинематически допустимым.

Уравнение равновесия (1.5) примет с учетом (1.6) и (2.3)-(2.5) вид

$$w'' = \begin{cases} \omega(1-\sigma), & x \in (0, x_1), \\ \omega(r-\sigma), & x \in (x_1, 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

К уравнениям (3.1) добавляются краевые условия и ограничение (2.2), которое согласно выбранному распределению перемещений удовлетворяется в центральной зоне в виде равенства.

Разработанная в [5] методика оптимального проектирования непосредственно применима и для данной задачи. Необходимые условия оптимальности, выведенные аналогично [5], приводят к результату

$$|m| = f(r, \sigma), \quad (3.2)$$

который действителен при всех  $x \in (0, 1)$ .

Соотношения (3.1) и (3.2) позволяют получить уравнение для определения безразмерной толщины

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} w'' + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} w'^2 = \begin{cases} \pm \omega(1-\sigma), & x \in (0, x_1), \\ \pm \omega(r-\sigma), & x \in (x_1, 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Последнее уравнение решается с учетом краевых условий  $w'(0)=0$ ,  $w(1)=w_0$  ( $w_0$  - корень уравнения  $f(r, \sigma)=0$ ).

#### 4. Идеально трехслойная оболочка

Большие прогибы растянуто-изогнутых однородных и идеально трехслойных жестко-пластических цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [1], [3], [4]. Следуя [4], условие (3.2) можно записать в виде (общая толщина  $H$  считается постоянной, а толщина несущих слоев  $h$  - переменной)

$$|m| = \sigma - \nu. \quad (4.1)$$

Следовательно, в данном случае  $f = \sigma - \nu$  и  $\partial f / \partial \sigma = 1$ ,  $\partial^2 f / \partial \sigma^2 = 0$ . Подставляя эти частные производные в (3.3) и учитывая то, что  $m \neq 0$ , приходим к уравнению

$$w'' = \begin{cases} \omega(\sigma-1), & x \in (0, x_1), \\ \omega(\sigma-r), & x \in (x_1, 1). \end{cases} \quad (4.2)$$

Согласно (4.1)  $w(1) = \nu$ .

Гладкое решение уравнения (4.2), удовлетворяющее указанным краевым условиям, имеет вид

$$\pi(x, n, p) = 1 + \{n - p + (p-1)ch[\rho(1-x_1)]\} \cdot \frac{ch\rho x}{ch\rho} \quad (4.3)$$

при  $x \in [0, x_1]$  и

$$\pi(x, n, p) = p + \frac{1}{ch\rho} \{ (n-p)ch\rho x + (1-p)sh\rho x_1 \cdot sh[\rho(1-x)] \} \quad (4.4)$$

при  $x \in [x_1, 1]$ , где  $\rho = \sqrt{\omega}$ .

Экономия найденного проекта оценивается коэффициентом

$$e = \int_0^1 \pi dx, \quad (4.5)$$

который выражает отношение масс оптимального проекта и оболочки постоянной толщины. Коэффициент экономии (4.5) примет с учетом (4.3) и (4.4) вид

$$e = x_1 + p(1-x_1) + \frac{1}{\rho ch\rho} [(n-p)sh\rho + (p-1)sh\rho x_1]. \quad (4.6)$$

Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2. В табл. 1 приведены значения функции  $\pi$  при некоторых значениях нагрузки  $p$  (здесь  $\omega = 4$ ,  $n = 0,2$ ).

Таблица 1.

$p \backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,400	1,081	1,055	0,973	0,822	0,578	0,200
1,625	1,049	1,053	1,015	0,878	0,621	0,200
2,111	1,027	1,029	1,036	0,958	0,694	0,200
3,500	1,012	1,013	1,015	1,021	0,827	0,200
11,000	1,003	1,003	1,004	1,005	1,007	0,200

В табл. 2 указана зависимость коэффициента экономии от внешних нагрузок. Первые две строки в табл. 2 соответствуют случаю  $\omega = 4$ , последние-случаю  $\omega = 8$ , причем  $x_1 = 0$ .

Таблица 2.

$n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$p$	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$e$	0,7770	0,8216	0,8662	0,9108	0,9554
$p$	1,25	1,20	1,15	1,10	1,05
$e$	0,8111	0,8489	0,8867	0,9244	0,9622

Так как внешние нагрузки считались заданными при формулировке задачи, то (4.3) и (4.4) представляют оптимальный (в смысле требований поставленной задачи) проект для фиксированных значений внешних нагрузок. Пусть конкретно  $\nu = \nu_*$  и  $\nu = \nu_*$ . Является ли этот проект приемлимым и при  $\nu < \nu_*$ ,  $\nu < \nu_*$ , пока еще не ясно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим процесс деформирования оболочки толщины  $n(x, \nu_*, \nu_*)$  под действием нагрузок  $\nu$  и  $\nu$ , причем  $0 < \nu < \nu_*$ ,  $\nu_0 < \nu < \nu_*$ . Здесь  $\nu_0$  - несущая способность, которая определяется согласно (2.6) и (4.1) в виде

$$\nu_0 = 1 + 2(1-\nu)/\omega. \quad (4.7)$$

Прямая проверка показывает, что напряженное состояние оболочки толщины  $n(x, \nu_*, \nu_*)$  имеет вид

$$m = \begin{cases} \nu - n, & x \in (0, x_0), \\ \frac{\omega}{2}(\nu-1)(x-x_0)^2 + \nu - n, & x \in (x_0, x_1), \\ \frac{\omega}{2}[(\nu-\nu_0)(x-x_1)^2 + (\nu-1)(x_1-x_0)^2] + \omega(\nu-1)(x-x_0)(x-x_1) + \nu - n, & x \in (x_1, 1), \end{cases} \quad (4.8)$$

где

$$x_0 = 1 - \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{\omega(\nu-1)}}, \quad x_1 = 1 - \sqrt{\frac{2(1-\nu_0)}{\omega(\nu_0-1)}}. \quad (4.9)$$

Кроме того,  $n' = \omega(1-\nu)/2\nu$  при  $x \in (0, x_0)$  и  $n' = 0$  при  $x \in (x_0, 1)$ . Из формул (4.7) - (4.9) следует, что  $m > \nu - n$  при  $x \in (x_0, 1)$ , если  $\nu < \nu_*$  и  $\nu < \nu_*$ . Таким образом, прогибы оболочки, толщина которой определена соотношениями (4.3) и (4.4) (где  $\nu = \nu_*$  и  $\nu = \nu_*$ ), совпадают с прогибами оболочки постоянной толщины при всех  $0 < \nu < \nu_*$ ,  $\nu_0 < \nu < \nu_*$ .

#### Литература

1. Куль Л.М., Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения. Матер. летней школы по пр. "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. Ч. II", Тарту, 1966, 59-72.

2. Леллеп Я.А., Оптимальное проектирование пластических цилиндрических оболочек с дополнительными опорами с учетом больших прогибов. XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. III, Таллин, 1983, 149-155.
3. Лепик Ю.Р., Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 146-159.
4. Duszek M., Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections, Arch. Mech. Stosow., 1966, 18, Nr. 5, 599-614.
5. Lellep J., Sawczuk A., Optimal project of a cylindrical shell for moderately large deflections. Struct. Contr. Proc. Int. IUTAM Symp., Ontario, 1979, Amsterdam, 1980, 431-446.

On optimal design of rigid-plastic cylindrical shells accounting for large deflections

J. Lellep

Summary

A solution procedure regarding optimization of rigid-plastic cylindrical shells within the post-yield range is developed. The optimal thickness variation is sought for under the requirement of minimum material consumption and the deflection of the optimal design is required to be that of the constant thickness shell in the large deflections range. The shells under consideration are subjected to the uniformly distributed internal pressure and an axial dead load. With reference to the earlier paper [5] the optimality condition is represented in the general form whereas the particular case of a sandwich shell is treated in detail.

# БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Я. Леллеп, С. Ханнус

Тартуский государственный университет

Исследования по вопросам геометрически нелинейных жестко-пластических конструкций начались уже в шестидесятых годах. Однако внимание уделялось главным образом конструкциям, которые подчиняются кусочно-нелинейным условиям текучести. Среди исследований этого направления следует отметить работы Лепика [1] и Душек [3]. Значительно меньше изучены большие прогибы пластических оболочек с учетом нелинейных условий текучести.

Ниже рассматриваются геометрически нелинейные цилиндрические оболочки, подверженные действию внутреннего давления. Предполагается, что материал оболочек подчиняется условию Хубера-Мизеса, которое удовлетворяется в интегральном виде.

## 1. Основные соотношения

Рассмотрим цилиндрическую оболочку конечной длины  $2l$  и радиуса  $A$ , подверженной равномерному внутреннему давлению интенсивности  $P$ . Начало координатной оси  $Ox$ , направленной вдоль образующей оболочки, поместим в среднем сечении оболочки. Перемещения вдоль оси оболочки и перпендикулярно к ней обозначим через  $U$  и  $W$  соответственно. Оболочку считаем идеально трёхслойной (типа сэндвича). Предположим, что толщина несущих слоев  $h$  и толщина заполнителя  $2H$  постоянны и имеет место соотношение  $h \ll 2H$ . В дальнейшем будем учитывать умеренно большие прогибы, т.е. прогибы, сравнимые с толщиной оболочки.

При сделанных допущениях уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{N_2}{A} - P = 0, \quad \frac{dN_1}{dx} = 0. \quad (1.1)$$

Допустим, что материал оболочки жестко-пластический, подчиняющийся аппроксимированному нелинейному условию текучести [2], [4]

$$N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2 + \frac{3}{4H} M^2 - 4\sigma_0^2 h^2 \leq 0, \quad (1.2)$$

где  $M$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  - обобщенные напряжения и  $\sigma_0$  - предел текучести. Естественно предполагать, что напряженное состояние оболочки как в предельном состоянии, так и в области конечных перемещений таково, что (1.2) превращается в равенство

$$N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2 + \frac{3}{4H} M^2 - 4\sigma_0^2 k^2 = 0. \quad (1.3)$$

Эта гипотеза использовалась и в работе [5] при исследовании геометрически нелинейных пологих оболочек.

Компоненты деформации имеют в случае умеренно больших прогибов вид

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2, \\ \epsilon_2 &= \frac{W}{A}, \quad K_1 = \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad K_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В данной работе применяется теория пластичности типа деформации, согласно которой вектор деформации перпендикулярен к поверхности текучести. Поэтому компоненты вектора деформации выражаются, с другой стороны, в виде

$$\epsilon_1 = \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial N_1}, \quad \epsilon_2 = \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial N_2}, \quad K_1 = \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial M}, \quad (1.5)$$

где через  $\Phi$  обозначается левая часть равенства (1.3), а  $\lambda^2$  - неотрицательный скалярный множитель. Из уравнений (1.3) - (1.5) получаем (здесь и в дальнейшем  $N_1$  рассматривается как постоянная величина):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 = \lambda^2 (2N_1 - N_2), \quad (1.6)$$

$$\frac{W}{A} = \lambda^2 (2N_2 - N_1), \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \lambda^2 \frac{3}{2H^2} M. \quad (1.8)$$

Пусть края оболочки шарнирно закреплены. Рассматривая из-за симметрии лишь правую часть оболочки, краевые условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} M'(0) &= 0, & W'(0) &= 0, & U(0) &= 0, \\ M(l) &= 0, & W(l) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

## 2. Формулировка краевой задачи

Введя обозначения

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad m = \frac{M}{2\sigma_0 h H}; \quad n_1 = \frac{N_1}{2\sigma_0 h}; \quad n_2 = \frac{N_2}{2\sigma_0 h};$$

$$p = \frac{AP}{2\sigma_0 h}; \quad w = \frac{W}{H}; \quad u = \frac{Ul}{H^2}; \quad \alpha = \frac{l^2}{AH}$$

и исключая величину  $\lambda^2$  с помощью (1.7), уравнения (1.1), (1.3), (1.6), (1.8) можно придать безразмерную форму:

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} - n_1 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \alpha(n_2 - p) = 0,$$

$$n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2 + \frac{5}{4} m^2 - 1 = 0,$$

(2.1)

$$\frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2 - \frac{\alpha n (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1} = 0,$$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{3\alpha n w}{2(2n_2 - n_1)} = 0.$$

Следует отметить, что в уравнении (2.1) имеется только один геометрический параметр оболочки —  $\alpha$ .

Обозначая штрихом производную по переменной  $\xi$  и введя обозначения  $m' = q$ ,  $w' = z$  уравнения (2.1), можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m' = q,$$

$$q' = \frac{3n_1 \alpha n m}{2(2n_2 - n_1)} + \alpha(p - n_2),$$

$$w' = z,$$

(2.2)

$$z' = \frac{3\alpha n w}{2(2n_2 - n_1)},$$

$$u' = -\frac{1}{2} z^2 + \frac{\alpha n (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1}.$$

К системе (2.2) принадлежат согласно (1.9) граничные условия

$$q(0)=0, \quad z(0)=0, \quad u(0)=0, \quad m(1)=0, \quad w(1)=0. \quad (2.3)$$

Исключая из второго уравнения системы (2.1) величину  $v_x$  и подставляя в (2.2), получим

$$\begin{aligned} m' &= q, \\ q' &= \frac{3\alpha_1 \alpha_2 m v}{2\sqrt{4-3(n_1^2+m^2)}} + \alpha \left( \rho - \frac{1}{2} (n_1 + \sqrt{4-3(n_1^2+m^2)}) \right), \\ w' &= z, \\ z' &= \frac{3\alpha_1 m v}{2\sqrt{4-3(n_1^2+m^2)}}, \\ u' &= -\frac{1}{2} z + \frac{\alpha w (3n_1 - \sqrt{4-3(n_1^2+m^2)})}{2\sqrt{4-3(n_1^2+m^2)}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Систему (2.4) вместе с условиями (2.3) следует рассматривать как краевую задачу для определения функций  $m$ ,  $q$ ,  $w$ ,  $z$ ,  $u$ .

### 3. Несущая способность растянуто-изогнутых оболочек

Остаточные пластические деформации появляются в оболочке после того, когда интенсивность внешней нагрузки превышает её несущую способность. Поэтому прежде всего необходимо найти предельную нагрузку. В случае коротких цилиндрических оболочек предельной считается нагрузка, при которой изгибающий момент достигает максимального допустимого значения в срединном поперечном сечении. Это означает, что к (2.3) прибавляется граничное условие

$$m(0) = \sqrt{\frac{4}{3} - n_1^2}. \quad (3.1)$$

В предельном состоянии перемещения  $u$ ,  $w$  тождественно равняются нулю. Таким образом, в системе (2.4) последние три уравнения удовлетворяются тождественно, а первые сводятся к системе

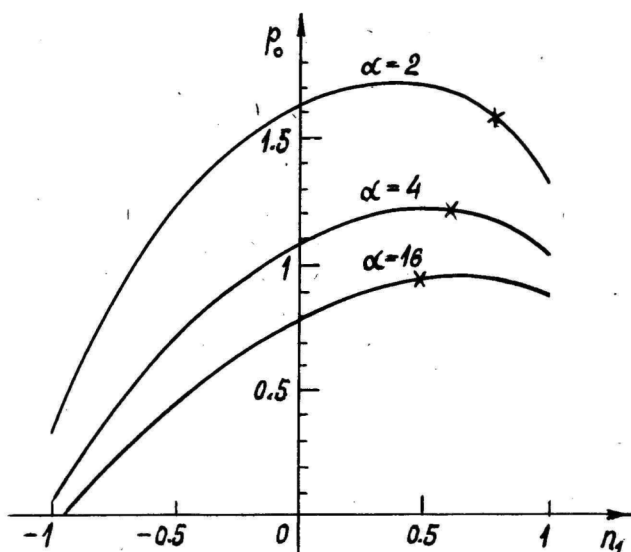
$$m' = q; \quad q' = \alpha \left[ \rho - \frac{1}{2} (n_1 + \sqrt{4-3(n_1^2+m^2)}) \right]. \quad (3.2)$$

К уравнениям (3.2) принадлежат согласно (2.3) и (3.1) три крайних условия, которые позволяют найти функции  $m$ ,  $q$  и пре-

дельную нагрузку  $p$ .

Вычисления проведены для оболочек, нагруженных внутренним давлением и осевым растяжением, а также для замкнутых оболочек. В первом случае величина  $n_1$  считается заданной, а во втором  $n_1 = r/2$ .

Результаты вычисления представлены при  $\alpha = 2, \alpha = 4, \alpha = 16$  на фигуре 1. Точки графика, соответствующие замкнутым оболочкам отмечены звездочками. Вычисления показывают, что графики являются симметричными относительно начала координат. Поэтому на фиг. 1 представлена лишь та часть графика, которая соответствует положительным значениям величины  $p$ .



Фиг. 1.

#### 4. Численное решение краевой задачи

Далее рассматривается лишь замкнутая оболочка. Для определения напряженно-деформационного состояния следует решить нелинейную краевую задачу (2.3), (2.4), принимая в последней  $n_1 = r/2$ . При численном решении этой задачи используется метод, который носит название спуск по координатам. Этот метод заключается в следующем:

- а) задаются отсутствующие граничные условия на левом конце отрезка (пренебрегаются краевыми условиями на правом конце отрезки)

$$m(0) = C_1, \quad (4.1)$$

$$w(0) = C_2, \quad (4.2)$$

- б) решается соответственная задача Коши на отрезке  $[0, 1]$ ,

- в) определяется значение функционала

$$F = |m(1)| + |w(1)|. \quad (4.3)$$

Далее выбираются новые значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в (4.1), (4.2) с целью минимизировать функционал (4.3). Эту процедуру повторяют до тех пор, пока  $F$  будет меньше, чем заданное число. Интересно отметить, что при изменении условия (4.1) значительно изменяется второе слагаемое в (4.3) и наоборот.

Результаты вычислений представлены в табл. 1 и 2. Табл. 1 соответствует случаю  $\alpha = 2$ , табл. 2 - случаю  $\alpha = 4$ . Несущие способности соответственно равны 1,579 и 1,219.

Таблица 1.

$\xi$	p = 1,7			p = 1,8		
	m	w	u	m	w	u
0	-0,699	0,180	0	-0,642	0,354	0
0,2	-0,670	0,168	0,106	-0,620	0,332	0,241
0,4	-0,585	0,137	0,172	-0,550	0,271	0,400
0,6	-0,442	0,095	0,204	-0,426	0,188	0,474
0,8	-0,246	0,048	0,215	-0,242	0,095	0,494
1	-0,000	-0,000	0,214	0,000	-0,000	0,484

Таблица 2.

$\xi$	p = 1,7			p = 1,8		
	m	w	u	m	w	u
0	-0,487	1,114	0	-0,442	1,362	0
0,2	-0,479	1,052	0,601	-0,439	1,290	0,903
0,4	-0,448	0,880	1,050	-0,421	1,083	1,600
0,6	-0,374	0,623	1,257	-0,363	0,771	1,946
0,8	-0,231	0,319	1,228	-0,233	0,396	1,921
1	0,000	-0,000	1,032	-0,000	0,000	1,627

## Литература

1. Лепик Д., Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 146-159.
2. Розенблюм В. И., Приближенная теория равновесия пластических оболочек. Прикл. мат. и мех., 1954, 18, № 3, 289-302.
3. Duszek M., Geometrycznie nieliniowa teoria konstrukcji sztywno-plastycznych. Warszawa, 1975.
4. Robinson M., A comparison of yield surfaces for thin shells. Int. J. Mech. Sci., 1971, 13, N 4, 345-354.
5. Sherbourne A. N., Haydl H. M., Plastic analysis of shallow spherical shells under combined loading at moderately large deflections. Z. angew. Math. und Mech., 1974, 54, Nr. 2, 73-82.

### Large deflections of closed rigid-plastic cylindrical shells

J. Lellep, S. Hannus

#### Summary

Rigid-plastic cylindrical shells subjected to the uniform internal pressure are considered by taking account of the post yield behavior. The sandwich shells are studied assuming that the material of the carrying layers obeys a non-linear approximation of the von Mises criterion. Kinematically and statically **acceptable** numerical solutions are given for several loading and shell parameters.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВЫТОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ  
КРУГЛОГО ВАЛА БОКОВОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Э. Сакс

Тартуский государственный университет

В разных областях техники встречаются валы, скручиваемые окружной боковой касательной нагрузкой. При этом для определенных целей желательно, чтобы такой вал имел окружную выточку, форма которой существенного значения не имеет. В таком случае представляется возможным разыскивать оптимальную форму выточки, чтобы вал воспринимал максимально возможный крутящий момент при заданных условиях нагружения. Другими словами, не должно появиться концентрации напряжений в области выточки. Отсюда интуитивно ясно, что дно выточки должно быть достаточно пологим (это подтверждается последующим решением). Если вал не получит остаточных деформаций, т.е. должен остаться за все время деформирования упругим, наиболее целесообразно требовать, чтобы по всему контуру выточки соблюдалось условие равнопрочности - постоянство интенсивности касательных напряжений.

Пусть вал с равнопрочной выточкой скручивается двумя равными по величине и обратными по направлению боковыми касательными усилиями около обоих торцов на цилиндрических участках длины  $\delta$ . Длину вала обозначим через  $2\lambda$ , так что ширина выточки равна  $2(\lambda - \delta)$ . Здесь рассматривается только случай, где краевые условия на участке приложения боковой касательной нагрузки заданы в перемещениях. Конкретно считается, что углы поворотов нагруженных цилиндрических участков - постоянные величины, свои для обоих участков. Начало цилиндрической системы координат  $\kappa\theta z$  целесообразно расположить в центре вала и ограничиться рассмотрением части вала  $0 \leq z \leq \lambda$ . Вследствие того, что вращение вала как жесткого целого на распределение напряжений не влияет, перемещения можно считать нечетными по  $z$  функциями; в таком случае они в сечении  $z = 0$  равны нулю.

При решении задачи будем пользоваться функцией перемещения  $\psi$  [1], удовлетворяющей дифференциальному уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \kappa^2} + \frac{3}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = 0.$$

Функция  $\psi$  должна удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\psi = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad \psi = \Psi \quad \text{при } \delta \leq z \leq \lambda,$$

где  $\Psi$  - заданный угол поворота;

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \lambda,$$

так как торец свободен от крутящих нагрузок;

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} / \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{dR(z)}{dz} \quad \text{при } 0 \leq z \leq \delta,$$

где [2]  $R = R(z)$  - искомая форма выточки.

Пользуясь формулами [1]

$$\tau_{z\theta} = G\kappa \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \tau_{\kappa\theta} = G\kappa \frac{\partial \psi}{\partial \kappa},$$

где  $G$  - модуль сдвига, для интенсивности касательных напряжений получим выражение

$$\tau_{\theta} = G\kappa \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Как и при решении задачи равнопрочности в работе [2], пользуемся и здесь методом последовательных приближений.

Аналогично получим итерационную формулу

$$\psi_{ij} = \frac{1}{4} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2i} \right) \psi_{i+1,j} + \left( 1 - \frac{3}{2i} \right) \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} \right], \quad (1)$$

где  $\psi_{ij} = \psi(\kappa_i, z_j)$ ,  $\kappa_i = i\chi$ ,  $z_j = j\chi$ , причем шаг  $\chi$  ради конкретности был выбран равным  $1/8$ .

В качестве начального приближения для функции перемещения  $\psi$  было выбрано

$$\psi_j^0 = \begin{cases} [1 - (1 - i\chi)\delta/\lambda] j\chi & \text{при } 0 \leq j \leq t; \\ [i\chi + (1 - i\chi)i\chi/\lambda] t & \text{при } t \leq j \leq q; \end{cases}$$

где  $t = (\lambda - \delta)/\chi$ ;  $q = \lambda/\chi$  ( $t$  и  $q$  - целые числа).

Итерирование по формулам (1) и нахождение уточненного контура  $R_j^m$  выточки выполняется аналогично работе [2].

Формы равнопрочных выточек нашлись для трех наборов параметров  $\lambda$  и  $\delta$ . Как видно по результатам таблицы 1, форма равнопрочных выточек существенно отличается от цилиндрической лишь в областях, непосредственно примыкающих к точкам разрыва боковых усилий при  $z = \lambda - \delta$ . Отсюда можно делать вы-

вод, что ширину выточки при желании допустимо уменьшить ( в некоторых пределах) или увеличить.

Приведенные в табл. I формы равнопрочных выточек соответствуют случаю, когда были заданы постоянные по длине углы поворота  $\gamma$  на цилиндрических участках  $\lambda - \delta \leq z < \lambda$ . Если на тех же участках задавать постоянные по длине окружные касательные усилия, как показывают соответствующие расчеты, концентрация напряжений при  $z = \lambda - \delta$  будет ниже, чем в случае заданных постоянных углов поворота. Это приведет к тому, что глубина равнопрочных выточек будет несколько меньше, чем в вышеприведенных случаях в табл. I.

Таблица I.

$\lambda$	$\delta$	R(0)	R( $\gamma$ )	R(2 $\gamma$ )	R(3 $\gamma$ )	R(4 $\gamma$ )	R(5 $\gamma$ )	R(6 $\gamma$ )	R(7 $\gamma$ )	R( $\lambda$ )
1	$\frac{1}{2}$	0,81	0,81	0,81	0,90	1	1	1	1	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,81	0,81	0,80	0,89	1	1	1	-	-
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0,84	0,82	0,90	1	1	1	1	-	-

#### Литература

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Кручение упругих тел. Москва, 1963.
2. Немировский Ю. В., Сакс Э.Э., О равнопрочных формах упругих круглых валов при сложном кручении. Машиноведение, 1972, № 1, 103-110.

The optimal forms of noched shafts in torsion  
by the tangent loading applied on the lateral  
surface

E. Saks

Summary

The tangent loading is the piecewise constant function of the axial coordinate of the shaft in this problem. The optimal form of the shaft has been found so that the stress intensity is constant in the central part of the shaft where the lateral surface is free of loading. The problem has been solved for the three combinations of geometrical parameters, using the iteration method to find the torsion angles on the chosen network. Calculated optimal forms of the shaft have been given in the table.

# ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СОСУДОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

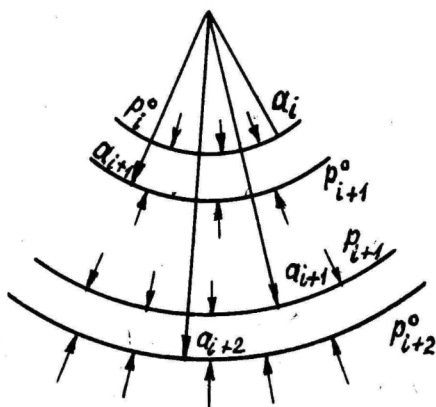
И. Пелля, М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

1. Работ, где рассматривается задача оптимизации многослойных сферических сосудов и цилиндрических труб, совсем немного. В работе [1] приведен обзор работ, выполненных в этом направлении при статической нагрузке, и сформулирована задача оптимизации в наиболее общем виде. В работе [2] решена задача о максимизации внутреннего давления в армированном сферическом сосуде. В данной работе рассматривается задача

о максимизации амплитуды внутреннего давления, гармонически изменяющегося во времени.

Рассмотрим сферические сосуды и цилиндрические трубы, представляющие наборы из  $N$  связанных между собой концентрических сфер или одноосных труб (см. фиг. 1). Пусть рассматриваемые конструкции нагружены равномерным внутренним давлением, которое гармонически изменяется во времени.



Фиг. 1.

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ni} &= \frac{\sigma_{ni}^0}{p}; & \sigma_{\theta i} &= \frac{\sigma_{\theta i}^0}{p}; & \sigma_{\varphi i} &= \frac{\sigma_{\varphi i}^0}{p}; & \sigma_{zi} &= \frac{\sigma_{zi}^0}{p}; \\
 \nu_i &= \frac{\nu_i^0}{\nu}; & \gamma_i &= \frac{\gamma_i^0}{\gamma_n}; & n_i &= \frac{g_i}{l}; & u_i &= \frac{u_i^0}{l}; \\
 \nu_j &= \frac{\nu_j^0}{\nu}; & \alpha_i &= \frac{a_i^0}{l}; & \alpha_{N+1} &= \frac{a_{N+1}^0}{l}; & t &= \frac{t^0}{l} \sqrt{\frac{p}{\gamma_n}};
 \end{aligned}$$

$$\omega = \omega^0 \ell \sqrt{\frac{\gamma_*^0}{\rho}}; \quad E_i = \frac{E_i^0}{\rho}; \quad \nu_i,$$

где  $\rho$ ,  $\ell$ ,  $\gamma_*$  - характерные давление, линейный размер и плотность;  $E_i$ ,  $\nu_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) - модули Юнга и коэффициенты Пуассона;  $\sigma_{\theta_i}^*$ ,  $\sigma_{\phi_i}^*$ ,  $\sigma_{z_i}^*$ ,  $u_i^*$  - компоненты напряжений и смещений;  $a_{N+1}$ ,  $p_i^*$  - внешний радиус и внутреннее давление;  $a_i$  - внутренние радиусы;  $p_j$  ( $j=2, 3, \dots, N$ ) - реактивное давление, возникающее на поверхности раздела слоёв;  $a_i \leq \rho_i \leq a_{i+1}$  - текущие радиусы;  $\sigma_i^{*0}$ ,  $\omega^0$ ,  $t$ ,  $\gamma_i^0$  - пределы текучести, частота изменения приложенного давления, время и плотности материалов.

Будем считать, что многослойные цилиндрические трубы находятся в условиях плоской деформации. В принятых предположениях для некоторого слоя с номером  $i$  (нумерация начинается от внутреннего радиуса рассматриваемых конструкций) справедливо динамическое уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial r_i^{*2}} + \frac{q}{\kappa_i} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} - \frac{q u_i}{\kappa_i^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где в случае сферического сосуда  $q=2$ , а в случае цилиндрической трубы  $q=1$  и

$$c_i = \sqrt{\frac{E_i^*(1-\nu_i^*)}{(1+\nu_i^*)(1-2\nu_i^*)}}$$

Здесь в случае сферического сосуда  $E_i^* = E_i$ ;  $\nu_i^* = \nu_i$  и в случае цилиндрической трубы

$$E_i^* = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}; \quad \nu_i^* = \frac{\nu_i}{1-\nu_i}$$

Предполагая, что внутреннее давление  $p_i(t)$  меняется по закону

$$p_i(t) = p_i \cos \omega t, \quad (1.2)$$

граничные условия для  $i$ -ой сферы (трубы) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{r_i}(\alpha_i) = -p_i \cos \omega t; \quad \sigma_{r_i}(\alpha_{i+1}) = -p_{i+1} \cos \omega t, \quad (1.3)$$

где  $p_{N+1} = 0$  и искать выражения для напряжений и смещений в виде

$$\sigma_{n_i}(r_i, t) = \sigma_{n_i}(r_i) \cos \omega t; \quad \sigma_{\theta_i}(r_i, t) = \sigma_{\theta_i}(r_i) \cos \omega t; \quad (1.4)$$

$$\sigma_{\varphi_i}(r_i, t) = \sigma_{\varphi_i}(r_i) \cos \omega t; \quad \sigma_{z_i}(r_i, t) = \sigma_{z_i}(r_i) \cos \omega t;$$

$$u_i(r_i, t) = u_i(r_i) \cos \omega t.$$

С учетом (1.4) условия сопряжения слоёв можно записать так:

$$u_{\kappa+1}(\alpha_{\kappa+1}) = u_{\kappa}(\alpha_{\kappa+1}); \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N-1). \quad (1.5)$$

Подставляя  $u_i(r_i, t)$  в виде (1.4) в уравнение (1.1), приходим к следующему уравнению для амплитуд смещения:

$$\frac{d^2 u_i(r_i)}{dr_i^2} + \frac{q}{r_i} \frac{du_i(r_i)}{dr_i} + \left( \kappa_i^2 - \frac{q}{v_i^2} \right) u_i(r_i) = 0, \quad (1.6)$$

где  $\kappa_i = \omega/c_i$ , которое заменой переменных  $\bar{x}_i = \kappa_i r_i$  приводится к дифференциальному уравнению типа Бесселя. Общее решение уравнения (1.6) можно представить в виде [3]

$$u_i(r_i) = C_{1i} \psi_{1i}(r_i) + C_{2i} \psi_{2i}(r_i), \quad (1.7)$$

где при  $q=1$   $\psi_{1i}(r_i) = J_1(\bar{x}_i)$ ;  $\psi_{2i}(r_i) = N_1(\bar{x}_i)$  и при  $q=2$

$$\psi_{1i}(r_i) = \frac{\sin \bar{x}_i}{\bar{x}_i^2} - \frac{\cos \bar{x}_i}{\bar{x}_i}; \quad (1.8)$$

$$\psi_{2i}(r_i) = -\frac{\cos \bar{x}_i}{\bar{x}_i^2} - \frac{\sin \bar{x}_i}{\bar{x}_i}.$$

Здесь  $J_1(\bar{x}_i)$  и  $N_1(\bar{x}_i)$  — цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Из закона Гука, пользуясь представлением (1.4) и формулой (1.7), получим, что амплитуда радиального и окружного напряжений определяются формулами

$$\sigma_{r_i}(r_i) = f_{1i}(r_i) C_{1i} + f_{2i}(r_i) C_{2i} \quad (1.9)$$

где

$$\sigma_{\theta_i}(r_i) = g_{1i}(r_i) C_{1i} + g_{2i}(r_i) C_{2i},$$

$$f_{ni}(r_i) = \lambda_i \left( \frac{d\psi_{ni}}{dr_i} + 2 \frac{\psi_{ni}}{r_i} \right) + 2\mu_i \frac{d\psi_{ni}}{dr_i}; \quad \mu_i = \frac{E_i^*}{2(1+\nu_i^*)};$$

$$g_{ni}(r_i) = \lambda_i \left( \frac{d\psi_{ni}}{dr_i} + 2 \frac{\psi_{ni}}{r_i} \right) + 2\mu_i \frac{\psi_{ni}}{r_i}; \quad \lambda_i = \frac{\nu_i^* E_i^*}{(1+\nu_i^*)(1-2\nu_i^*)};$$

$\nu = 1, 2.$

В случае сферического сосуда  $\sigma_{\theta_i} = \sigma_{\theta_i}$ . В случае цилиндрической трубы  $\sigma_{\theta_i} = \gamma_i(\sigma_{\theta_i} + \sigma_{\theta_i})$ . Константы интегрирования  $C_{1i}$  и  $C_{2i}$  определяются из граничных условий (1.3) и равны

$$C_{1i} = [\rho_{i+1} f_{2i}(\alpha_i) - \rho_i f_{2i}(\alpha_{i+1})] \Delta_i^{-1}, \quad (1.10)$$

$$C_{2i} = [\rho_i f_{1i}(\alpha_{i+1}) - \rho_{i+1} f_{1i}(\alpha_i)] \Delta_i^{-1},$$

где

$$\Delta_i = f_{1i}(\alpha_i) f_{2i}(\alpha_{i+1}) - f_{1i}(\alpha_{i+1}) f_{2i}(\alpha_i).$$

Подставляя теперь (1.10) в формулу (1.6) и пользуясь затем условиями сопряжения слоев (1.5), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд реактивных давлений  $\rho_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N$ ):

$$d_{1k} \rho_k + \rho_{k+1} + d_{2k} \rho_{k+2} = 0; \quad (1.11)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1),$$

где

$$d_{1k} = -\frac{H_{1k}}{S_k}; \quad d_{2k} = -\frac{H_{2k}}{S_k}. \quad (1.12)$$

Здесь

$$H_{1k} = [f_{1k}(\alpha_{k+1}) \psi_{2k}(\alpha_{k+1}) - f_{2k}(\alpha_{k+1}) \psi_{1k}(\alpha_{k+1})] \Delta_{k+1};$$

$$H_{2k} = [f_{1,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{2,k+1}(\alpha_{k+1}) - f_{2,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{1,k+1}(\alpha_{k+1})] \Delta_k;$$

$$S_k = [f_{2k}(\alpha_k) \psi_{1k}(\alpha_{k+1}) - f_{1k}(\alpha_k) \psi_{2k}(\alpha_{k+1})] \Delta_{k+1} +$$

$$+ [f_{2,k+1}(\alpha_{k+2}) \psi_{1,k+1}(\alpha_{k+1}) - f_{1,k+1}(\alpha_{k+2}) \psi_{2,k+1}(\alpha_{k+1})] \Delta_k.$$

Общее решение системы (1.11) можно представить в виде

$$\rho_j = A_j \rho_1, \quad (1.13)$$

где  $A_1 = 1$ , а  $A_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N$ ) определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$A_j = (K_{j-1} - d_{2,j-1} A_{j-1}) \bar{f}_{j-1}^{-1}$$

где  $\bar{f}_0 = 1$ ;  $\bar{f}_1 = 1$ ;  $A_{N+1} = 0$ ;  $K_0 = 1$ ;

$$\bar{f}_s = 1 - d_{1s} d_{2,s-1} \bar{f}_{s-1}^{-1}; \quad (s = 2, 3, \dots, N-1)$$

$$K_{j-1} = -d_{1,j-1} K_{j-2} \bar{f}_{j-2}^{-1}.$$

2. Полученные в п. 1 выражения для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемых конструкциях позволяют сформулировать и решить задачу максимизации амплитуды приложенного давления. Для этого введем функцию  $\sigma_i(\kappa_i)$ , которая имеет выражение

$$\sigma_i(\kappa_i) = |\sigma_{\theta_i}(\kappa_i) - \sigma_{\kappa_i}(\kappa_i)| \quad (2.1)$$

для  $i$ -й сферы, выражение

$$\sigma_i(\kappa_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[\sigma_{\theta_i}(\kappa_i) - \sigma_{\kappa_i}(\kappa_i)]^2 + [\sigma_{\theta_i}(\kappa_i) - \sigma_{\alpha_i}(\kappa_i)]^2 + [\sigma_{\kappa_i}(\kappa_i) - \sigma_{\alpha_i}(\kappa_i)]^2} \quad (2.2)$$

для  $i$ -й трубы.

Пользуясь формулами (1.10) и (1.11), представим (2.1) и (2.2) в виде

$$\sigma_i(\kappa_i) = \frac{f_i}{h_i(\kappa_i)} \quad (2.3)$$

где

$$h_i(\kappa_i) = |\Delta_i \kappa_i \{ 2\mu_i [A_{i+1} f_{\alpha i}(\alpha_i) - A_i f_{\alpha i}(\alpha_{i+1})] (\psi_{1i} - \kappa_i \psi'_{1i}) + \\ + [A_i f_{1i}(\alpha_{i+1}) - A_{i+1} f_{1i}(\alpha_i)] (\psi_{2i} - \kappa_i \psi'_{2i}) \}^{-1}|$$

в случае  $i$ -й сферы и

$$h_i(\kappa_i) = \sqrt{2} \Delta_i \{ [C_{1i}^* (q_{1i} - f_{1i}) + C_{2i}^* (q_{2i} - f_{2i})]^2 + \\ + [C_{1i}^* ((1-\nu_i)q_{1i} - \nu_i f_{1i}) + C_{2i}^* ((1-\nu_i)q_{2i} - \nu_i f_{2i})]^2 + \\ + [C_{1i}^* ((1-\nu_i)f_{1i} - \nu_i q_{1i}) + C_{2i}^* ((1-\nu_i)f_{2i} - \nu_i q_{2i})]^2 \}^{-\frac{1}{2}};$$

$$C_{1i}^* = A_{i+1} f_{\alpha i}(\alpha_i) - A_i f_{\alpha i}(\alpha_{i+1});$$

$$C_{2i}^* = A_i f_{1i}(\alpha_{i+1}) - A_{i+1} f_{1i}(\alpha_i)$$

в случае  $i$ -й трубы.

В соответствии с условием пластичности Мизеса рассматриваемые конструкции остаются упругими, если выполняются неравенства

$$\max_{\alpha_i \leq \alpha_i \leq \alpha_{i+1}} \sigma_i(\alpha_i) \leq \sigma_i^* \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

откуда для амплитуды внутреннего давления получим ограниченные  $p_i \leq p_{ii}$ , где  $p_{ii} = \sigma_i^* \min_{\alpha_i \leq \alpha_i \leq \alpha_{i+1}} h_i(\alpha_i)$ .

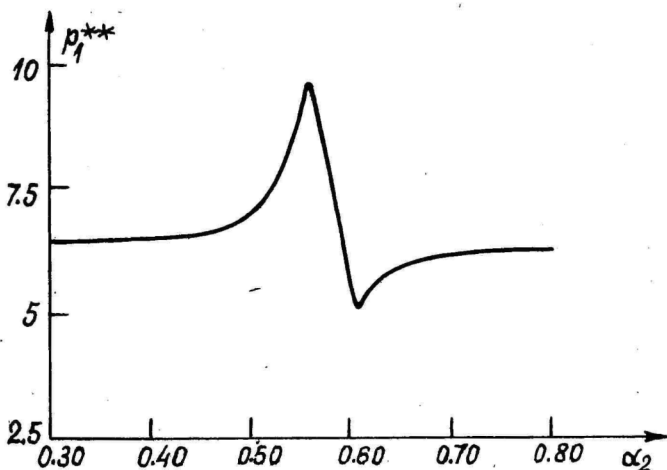
При заданном наборе материалов и геометрических размеров слоёв максимально допустимое значение амплитуды внутреннего давления  $p_i^*$  в области упругих деформаций определяется равенством

$$p_i^* = \min_i p_{ii}$$

Если варьированию подлежат также геометрические размеры слоёв и порядок следования материалов в них, то можно поставить следующую задачу максимизации амплитуды внутреннего давления: среди рассматриваемых конструкций с одинаковыми внутренними (внешними) радиусами и объемом, весом или внешними (внутренними) радиусами найти такую, которая имеет наибольшее значение максимально допустимой амплитуды внутреннего давления в области упругих деформаций, т.е. необходимо найти

$$p_1^{**} = \max_{\sigma_i^*, \nu_i, E_i, \alpha_i} [\min_i p_{ii}]$$

при условии, что  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{N+1}$ .



Фиг. 2.

В качестве примера рассмотрим здесь двухслойный сферический сосуд. Внутренний и внешний радиусы сосуда считаются заданными и принимают значения:  $\alpha_1 = 0.1$  и  $\alpha_2 = 1.0$ . Радиус поверхности раздела слоев  $\alpha_2$  и порядок следования материалов в слоях варьируется. Кроме этого, принимаем, что  $\omega = 100$ . Расчеты показали, что из двух варьируемых материалов наиболее выгодным является порядок следования материалов в слоях, при котором  $E_1 = 2000$ ;  $\nu_1 = 0.3$ ;  $\gamma_1 = 1.788$ ;  $\sigma_1^* = 10.0$ ;  $E_2 = 710$ ;  $\nu_2 = 0.31$ ;  $\gamma_2 = 1.000$ ;  $\sigma_2^* = 2.5$ . Для лучшей иллюстрации задачи на фиг. 2 приведен участок графика зависимости  $\rho_1^*$  от  $\alpha_2$ , в случае приведенных характеристик материалов слоев, содержащего максимум  $\rho_1^{**} = 9.6$  при  $\alpha_2 = 0.56$ .

#### Литература

1. Немировский Д.В., Хейнлоо М.Л., Одномерная задача прочности и оптимального проектирования неоднородных многослойных сферических и цилиндрических сосудов или круглых дисков, В сб. Прикладные проблемы прочности и пластичности № 5, 1976.
2. Толпина Н.Я., Хейнлоо М.Л., Расчет и оптимизация армированных многослойных сферических сосудов, Уч. зап. ТГУ 627, 1982.
3. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров, Наука, 1970.

Optimization of multilayered spherical vessels and cylindrical tubes under harmonic dynamical loading

I. Pellja, M. Heinloo

#### Summary

The paper discusses spherical vessels and cylindrical tubes, consisting of a finite number of concentric spheres or coaxial cylinders joined together. We examine such constructions under harmonic dynamical pressure applied to the internal surface. The formulae for computing stress and displacements are found in this work. By use of these formulae we solve the problem of the internal pressure amplitude maximization.

## ОБ ИСКАЖЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ

Т. А. Пейпман

Таллинский политехнический институт

Распространение двумерных волн деформации описывается асимптотическим эволюционным уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} R(\beta(\sigma, \zeta, \eta)) = H \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2} + \frac{n}{\eta} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right), \quad n = 0; 1, \quad (1)$$

где  $R$  - волновой оператор в осевом направлении;  $\beta$  - амплитудный фактор, связанный с деформацией или со скоростью;  $\sigma, \zeta, \eta$  - лучевые координаты;  $H$  - параметр дифракции;  $n = 0$  для плоского и  $n = 1$  для цилиндрического пучков соответственно [4].

В данной статье рассматривается решение эволюционного уравнения с волновым оператором

$$R = \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + \operatorname{sign}(1 + m_0) \beta \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial^2 \beta}{\partial \zeta^2}, \quad (2)$$

где  $\mu$  - параметр дисперсии,  $m_0$  зависит от упругих свойств материала и для большинства твердых тел  $\operatorname{sign}(1 + m_0) = -1$ . Для решения уравнения (1) используется численный алгоритм, базирующийся на методе быстрого преобразования Фурье и на методе конечных разностей [1, 5].

Рассмотрим решение уравнения (1) с волновым оператором (2) с начальным условием

$$\beta(\zeta, \eta) \Big|_{\sigma=0} = \sin \zeta \cdot \exp(-\eta^2), \quad (3)$$

для которого известно аналитическое решение [2, 4] в линейной постановке.

При распространении двумерной волны деформации (волнового пучка) в нелинейной диспергирующей среде происходят изменения профиля волны. Расширяется пучок и изменяется амплитуда в зависимости от перераспределения скоростей в про-

филе (нелинейные и дисперсионные эффекты) и от искривления фронта (дифракционные эффекты).

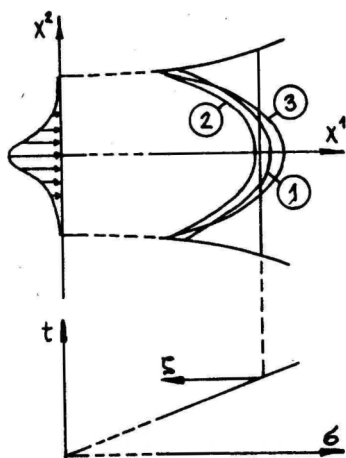


Рис. 1

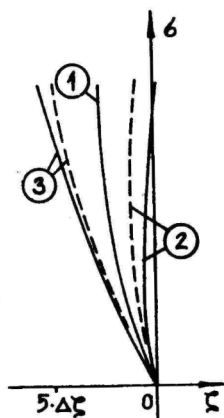


Рис. 2

На рис. 1 показана связь лучевых координат с координатами  $x^1$  и  $x^2$ ; при  $\sigma = 1, 2$  показаны также фронты волны в случае линейной модели (линия 1.) [2] и в случае диспергирующей среды (линия 2 соответствует  $\mu = -0,3000$  и линия 3 -  $\mu = 0,3000$ ). Зависимый от знака параметра дисперсии фронт волны либо отстает, либо опережает фронт, определенный для пучка в линейной недиспергирующей среде [2]. На рис. 2 показано развитие сдвига фронта волны  $\delta$  при  $\eta = 0$  (нумерация кривых совпадает с рис. 1). Из сравнения с асимптотическим результатом для линейной модели в диспергирующей среде [3]

$$\delta = \mu\sigma - 4N\sigma\eta^2(1 + 16N^2\sigma^2)^{-1} + \frac{1}{2} \arctan 4N\sigma \quad (4)$$

следует, что сдвиг фронта волны в недиспергирующей среде обусловлен дифракцией (рис. 1, 2 - линия 1) и в диспергирующей среде - совместным влиянием дифракции и дисперсии (рис. 2 - линии 2 и 3 с пунктиром). Этот эффект (рис. 2 - линии 2 и 3) усиливается с учетом нелинейности, так как высшие гармоники сосредоточены в приаксиальной области.

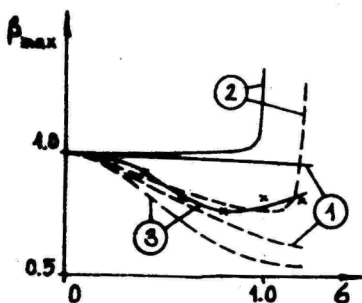


Рис. 3

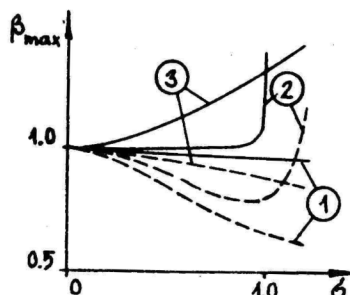


Рис. 4

На рис. 3 и рис. 4 показано изменение максимальной амплитуды для положительного и отрицательного значений параметра дисперсии соответственно, при параметрах дифракции  $N = 0,1$  (сплошная линия) и  $N = 0,5$  (пунктирная линия): линия 1 - линейная модель, линия 2 -  $\mu = \pm 0,0222$ , линия 3 -  $\mu = \pm 0,3000$ . В обоих случаях при малых параметрах дифракции доминирует нелинейность, что приведет к образованию ударного профиля при  $b' \approx 1,0$ . Это соответствует координате образования ударной волны в случае одномерной нелинейной модели для начального импульса в виде синусоиды. С увеличением влияния дифракции ударный профиль образуется позже ( $b' = 1,2$  при  $N = 0,5$ ). Увеличение параметра дисперсии приведет к уменьшению максимальной амплитуды в случае  $N = 0,5$ . При  $N = 0,1$  амплитуда при отрицательных  $\mu$  увеличивается до образования ударного профиля, при положительных  $\mu$  на начальном этапе амплитуда уменьшается, но при  $b' > 1$  начинается рост амплитуды.

На рис. 5 и рис. 6 показаны профили волн для положительных и отрицательных параметров дисперсии, соответственно, при  $b' = 1,2$ ,  $N = 0,5$ . Линии соответствуют следующим параметрам дисперсии: 1 - начальный импульс, 2 -  $\mu = \pm 0,0222$ , 3 -  $\mu = \pm 0,1500$ , 4 -  $\mu = \pm 0,3000$ . Чем меньше параметр дисперсии, тем больше влияние нелинейности, что приведет к

укрочению профиля волны. С увеличением параметра дисперсии существенного укрочения профиля не наблюдается, но изменяется соотношение зон сжатия и растяжения. При положительных параметрах дисперсии сжимается зона растяжения, при отрицательных - зона сжатия.

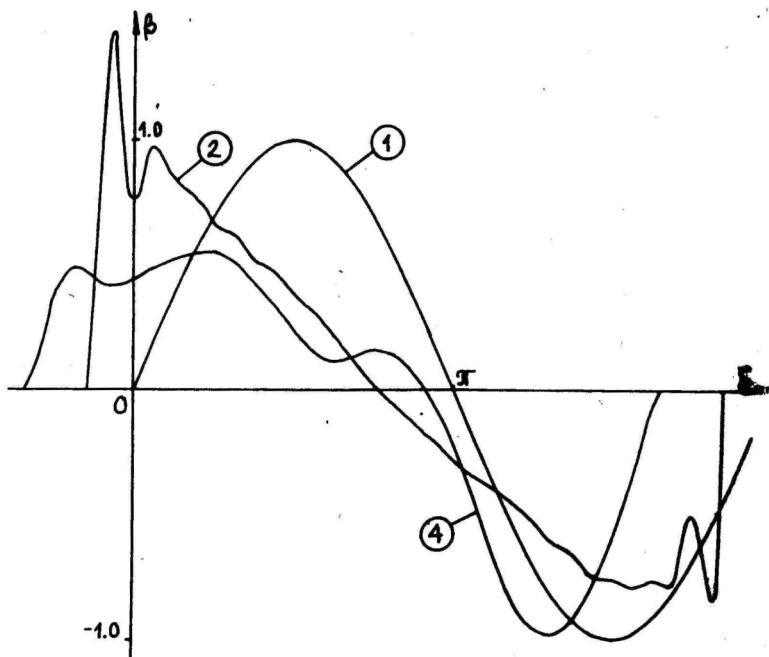


Рис. 5

На рис. 7 показан профиль половины пучка относительно оси  $b$  при  $\sigma = 1,2$ ;  $H = 0,5$ ;  $\mu = -0,0222$ , а на рис. 8 - при  $\sigma = 1,2$ ;  $H = 0,1$ ;  $\mu = 0,3000$ . При большем параметре дифракции  $H$  дифракционная расходимость более значительна, чем при малых  $H$ .

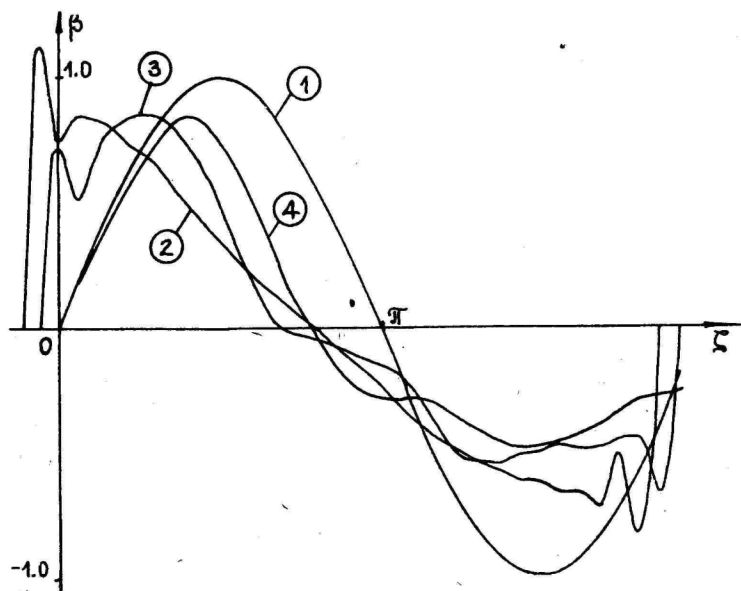


Рис. 6

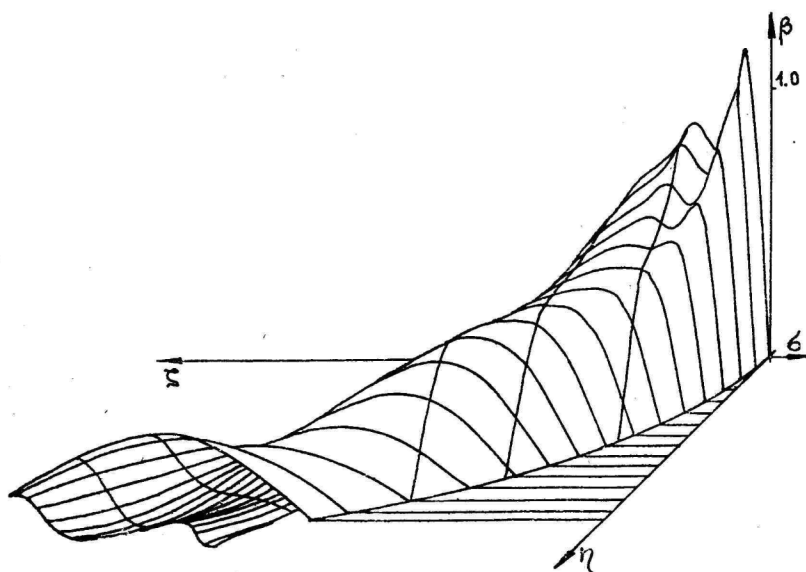


Рис. 7

В случае  $\mu = -0,0222$  наблюдается образование ударного профиля. В случае  $\mu = 0,30000$  наблюдается изменение отношения зон сжатия и растяжения, а также высокочастотная осцилляция, обусловленная дисперсией.

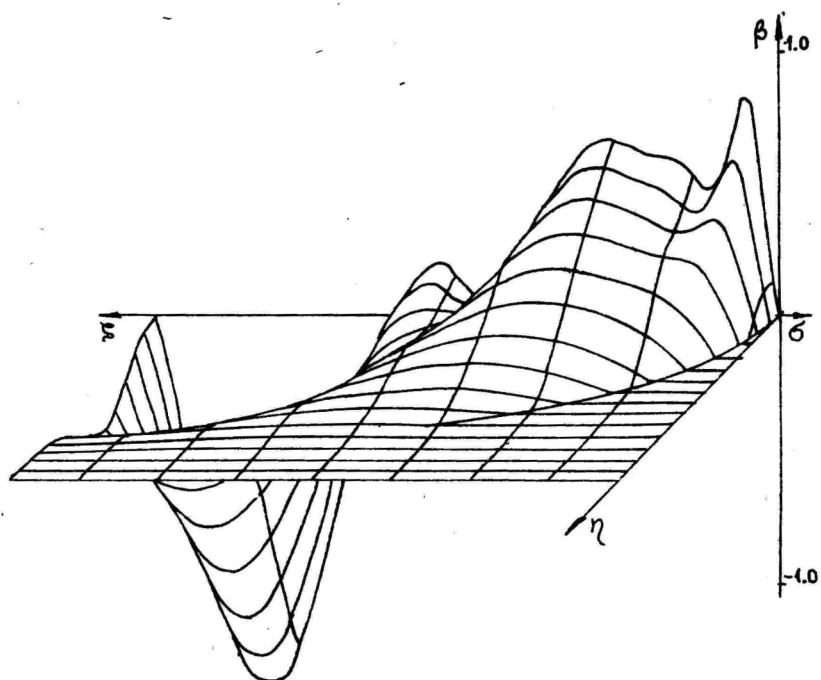


Рис. 8

## Литература

1. Пейпман Т.А., Энгельбрехт Ю.К., Решение двумерных уравнений переноса переходных волновых процессов методом преобразования Фурье., Ученые записи Тартуского государственного университета, 1982, № 627, 107-112.
2. Руденко О.В., Солуян С.И., Теоретические основы нелинейной акустики, М.: Наука, 1975, 288 с.
3. Энгельбрехт Ю.К., Нелинейные волновые процессы деформации в твердой среде. Дисс. на соискание уч. степ. д.физ.-мат. наук, Таллин, 1980, 321 с.
4. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К., Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
5. Fornberg B., Whitham G.B.; A Numerical and Theoretical Study of Certain Nonlinear Wave Phenomena., Phil. Trans. Royal Soc., London, 1978, A 289, 373-404.

### On distortion of the two-dimensional deformation waves

T. Peipman

#### Summary

A nonlinear two-dimensional evolution equation (1) with the wave operator (2) and the initial condition (3) is solved numerically. The pseudospectral method in space and the leap-frog scheme in time is used [2,3]. The nonlinearity, dispersion and diffraction are taken into account. The influence of dispersion and nonlinearity on the shift of the wavefront is considered. The amplitude distortion is influenced by the diffractive expansion and the higher-order harmonics, are generated due to combined nonlinear and dispersive effects.

## К ПОСТРОЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА

Г.П.Арясов, И.А.Гавриков,  
И.Г.Мубаракшин, Б.Н.Ясулович  
Таллинский политехнический институт

Для обеспечения требуемого уровня надежности таких инженерных конструкций, как корпуса самолетов, морских и речных судов, каркасов зданий и промышленных сооружений и т.д., необходимо при оценке их прочности учитывать динамические нагрузки. Уточненный учет этих нагрузок можно осуществить лишь на основе совершенных методов прогнозирования динамических характеристик элементов конструкций. Поэтому развитие уточненных высокоэффективных численных методов, учитывающих индивидуальные особенности конструкций, подверженных динамическому воздействию, является актуальной задачей. К таким методам принадлежит применяемый в данной работе метод конечных элементов (МКЭ). Эта работа кладет начало предполагаемому циклу работ, направленному на создание и развитие на основе МКЭ высокопроизводительного вычислительного комплекса инженерных конструкций.

При динамическом расчете по МКЭ необходимо наличие динамических матриц (МД) элементов, на которые разбивается исходная конструкция. В связи с этим целью работы являлось построение МД плоского стержневого элемента с учетом совместных деформаций изгиба и сдвига. Отличие этой матрицы от аналогичных, которые имеются в литературе [1,2,3,4], состоит в том, что в данном случае при её построении учтены краевые условия по суммарным угловым деформациям от изгиба и сдвига.

Рассмотрим построение МД элемента стержня (рис. 1), которая, как известно, представляет собой совокупность матрицы масс (ММ) и матрицы жесткости (МЖ). Построение ММ осуществлено путем дискретизации функционала кинетической энергии элемента стержня, а построение МЖ - путем дискретизации его полной потенциальной энергии.

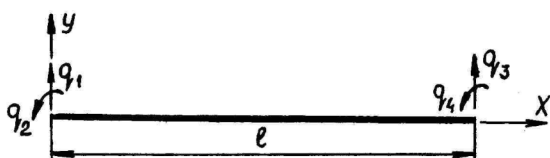


Рис. 1 Элемент стержня с положительными направлениями узловых обобщенных перемещений

Функционал кинетической энергии для элемента стержня имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \rho F \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \quad (1)$$

где  $w(x, t) = v(x, t) + u(x, t)$  — суммарные поперечные перемещения стержня от изгиба и сдвига,  $\rho$ ,  $F$  — плотность материала и площадь поперечного сечения стержня.

Для дискретизаций функционала (1) необходимо в соответствии с процедурой МКЭ выразить поперечные перемещения  $w(x, t)$  через обобщенные перемещения его узловых точек  $q_i$  или, другими словами, построить интерполяционный полином, аппроксимирующий изогнутую линию элемента стержня.

Принимаем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1(0) + u_1(0); & q_2 &= v_1'(0) + u_1'(0); \\ q_3 &= v_2(0) + u_2(0); & q_4 &= v_2'(0) + u_2'(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Отличие условий (2) от условий, принимаемых в других работах, состоит в том, что здесь в качестве узловых перемещений принимаются как суммарные (изгибная плюс сдвиговая составляющие) прогибы ( $q_1, q_3$ ), так и суммарные углы поворота от изгиба и сдвига ( $q_2, q_4$ ).

Проделав соответствующие выкладки, получим функционал кинетической энергии, выраженный через узловые перемещения

$$T = \frac{1}{2} \rho F \int_0^l \{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{q\} dx, \quad (3)$$

где  $\{q\}$  — матрица-столбец узловых перемещений,

$[N] = [N_1, N_2, N_3, N_4]$  — матрица-строка функций форм конечного элемента,

$$N_1 = 1 - \frac{24\varphi x}{l\xi} - \frac{3x^2}{\xi} + \frac{2x^3}{l\xi};$$

$$N_2 = x - \frac{2(l^2 + 6\varphi)x^2}{l\xi} + \frac{x^3}{\xi};$$

$$N_3 = \frac{24\varphi x}{l\xi} + \frac{3x^2}{\xi} - \frac{2x^3}{l\xi};$$

$$N_4 = -\frac{12\varphi x}{\xi} - \frac{(l^2 - 18\varphi)x^2}{l\xi} + \frac{x^3}{\xi};$$

$$\varphi = \frac{\kappa_2 EJ}{GF}, \quad \xi = l^2 + 24\varphi, \quad (4)$$

где

$\kappa_2$  - коэффициент формы поперечного сечения стержня,  
 $EJ$ ,  $GF$  - жесткость стержня соответственно при изгибе и сдвиге.

Представим выражение (3) как

$$T = \frac{1}{2} \{q\}^T [M] \{q\}, \quad (6)$$

$$\text{где } [M] = \rho F \int_0^l [N]^T [N] dx \quad - \quad (7)$$

- матрица масс стержневого элемента.

Выполнив вычисления по формуле (7), получим искомую ММ в виде:

$$[K] = \frac{m}{\xi^2} \begin{bmatrix} \frac{156l^2}{420} + \frac{24\varphi}{10} + \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{22l^3}{420} - \frac{4\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & \frac{54l^4}{420} - \frac{12\varphi}{10} - \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{15l^5}{420} + \frac{\varphi l}{10} + 6\varphi l + \frac{5}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ -\frac{5}{5}\xi + \xi^2 \frac{1}{10l^2} & -\frac{4}{5}\xi l + \xi^2 \frac{2}{10l} & -\frac{2}{5}\xi - \frac{3}{10l^2}\xi^2 & +\frac{7}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ \frac{4\varphi^2}{420} + \frac{6\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & \frac{15l^3}{420} + \frac{\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & -\frac{3l^4}{420} + \frac{3\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & -\frac{9}{5}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 \\ -\frac{9}{10}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 & +\frac{1}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 & -\frac{13}{5}\xi l^2 + \frac{3}{10}\xi^2 & \\ \frac{156l^2}{420} + \frac{24\varphi}{10} + \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{22l^3}{420} - \frac{4\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & \frac{54l^4}{420} - \frac{12\varphi}{10} - \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{15l^5}{420} + \frac{\varphi l}{10} + 6\varphi l + \frac{5}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ -\frac{5}{5}\xi + \xi^2 \frac{1}{10l^2} & -\frac{4}{5}\xi l + \xi^2 \frac{2}{10l} & -\frac{2}{5}\xi - \frac{3}{10l^2}\xi^2 & +\frac{7}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ \frac{4\varphi^2}{420} + \frac{6\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & \frac{15l^3}{420} + \frac{\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & -\frac{3l^4}{420} + \frac{3\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & -\frac{9}{5}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 \\ -\frac{9}{10}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 & +\frac{1}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 & -\frac{13}{5}\xi l^2 + \frac{3}{10}\xi^2 & \\ \frac{156l^2}{420} + \frac{24\varphi}{10} + \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{22l^3}{420} - \frac{4\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & \frac{54l^4}{420} - \frac{12\varphi}{10} - \frac{12\varphi^2}{l^2} & \frac{15l^5}{420} + \frac{\varphi l}{10} + 6\varphi l + \frac{5}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ -\frac{5}{5}\xi + \xi^2 \frac{1}{10l^2} & -\frac{4}{5}\xi l + \xi^2 \frac{2}{10l} & -\frac{2}{5}\xi - \frac{3}{10l^2}\xi^2 & +\frac{7}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 \\ \frac{4\varphi^2}{420} + \frac{6\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & \frac{15l^3}{420} + \frac{\varphi l}{10} + \frac{6\varphi^2}{l} & -\frac{3l^4}{420} + \frac{3\varphi l^2}{10} + \frac{12\varphi^2}{10l^2} & -\frac{9}{5}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 \\ -\frac{9}{10}\xi l^2 + \frac{2}{10}\xi^2 & +\frac{1}{5}\xi l - \frac{1}{10l}\xi^2 & -\frac{13}{5}\xi l^2 + \frac{3}{10}\xi^2 & \end{bmatrix} \quad (8)$$

симметрично

где  $m = \rho F l$  - погонная масса элемента стержня.

Аналогично строится и матрица жесткости (МЖ). С учетом изгиба и сдвига функционал полной потенциальной энергии элемента стержня (рис. 1) запишется в виде [2]

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^l (\sigma_1')^2 dx + \frac{GF}{2k_s} \int_0^l (\sigma_2')^2 dx, \quad (9)$$

где

$$\sigma_1 = [N]\{q\}, \quad \sigma_2 = -\varphi [N^*]\{q\}. \quad (10)$$

Учитывая формулы (10), получим выражение функционала (9) в виде

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^l (\{q\}^T [N']^T [N'] \{q\} + \varphi \{q\}^T [N^*]'^T [N^*] \{q\}) dx. \quad (11)$$

Путем варьирования функционала (11) по вектору обобщенных перемещений  $\{q\}$  и соответствующих преобразований согласно процедуре МКЭ имеем следующее выражение для МЖ:

$$[K] = EJ \int_0^l ([N'] [N'] + \varphi [N^*]') dx. \quad (12)$$

После соответствующих вычислений получим в окончательном виде искомую матрицу жесткости стержневого элемента

$$[K] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{12(l^2 - 12\varphi)}{l} & 6(l^2 + 12\varphi) & -\frac{12(l^2 + 12\varphi)}{l} & 6(l^2 + 12\varphi) \\ & 4l^3 - 60l\varphi + \frac{576\varphi^2}{l} & -6(l^2 + 12\varphi) & 2l^3 - 24l\varphi - \frac{864\varphi^2}{l} \\ & & \frac{12(l^2 + 12\varphi)}{l} & -6(l^2 + 12\varphi) \\ & & & 4l^3 - 36l\varphi + \frac{576\varphi^2}{l} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Искомая динамическая матрица (МД), как говорилось выше, состоит из ММ (8) и МЖ (13). Полученная МД позволит точнее оценить вклад сдвиговой деформации в прогиб балки при изгибных колебаниях и выяснить, при каких геометрических характеристиках этот вклад ощутимее. Последнее и будет составлять предмет дальнейшего исследования.

1. Арчер Д.Ж. Формулировка матриц для анализа конструкций с использованием метода конечных элементов. Ракетная техника и космонавтика. 1965, № 10, 155-166.
2. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., Судостроение, 1974.
3. Справочник по строительной механике корабля, т. 2, под ред. Палий О.М. Л., Судостроение, 1982.
4. Archer J.S. Consistent matrix formulations for structural analysis using influence-coefficient techniques. Space Technology Labs.Inc.Rept. EM 13-24,Nov., 1963.

On Construction of the Dynamic  
Matrix of a Bar Element

G. Aryasov, I. Gavrikov, I. Mubarakshin,  
B. Jasulovich,

Summary

In this paper the dynamic matrix of a bar element considering bending and shearing deformations is worked out. The role of the dynamic matrix is essential for fulfilling boundary conditions in the case of full displacement and angle resulting from bending and shearing. The obtained dynamic matrix is different from the analogous matrices which are described in literature. This difference is conditioned by receiving other boundary conditions.

## РАСЧЁТ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА СИЛЬФОНА МЕТОДОМ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. П. Арясов, А. Н. Снитко, Е. В. Соколов  
Таллинский политехнический институт

Расчёт гофрированных оболочек на прочность, независимо от того, в каком направлении в оболочке расположены гофры, представляет собой весьма сложную, особенно с точки зрения численной реализации, трудоёмкую задачу, так как для этой цели приходится производить сопряжение большого числа оболочек вращения. По этой причине при расчёте гофрированных оболочек типа сильфона чаще всего рассматривался случай бесконечно длинной оболочки, как это сделано, например, в [3]. Однако такой подход не позволял учесть влияние краевого эффекта на характеристики напряжённо-деформированного состояния оболочки.

В данной работе рассматривается метод расчёта гофрированной оболочки типа сильфона, позволяющий сократить объём вычислений по сравнению с другими численными методами, а также учесть влияние краевого эффекта.

Рассмотрим гофрированную оболочку вращения, гофры которой расположены перпендикулярно её оси вращения (рис. 1).

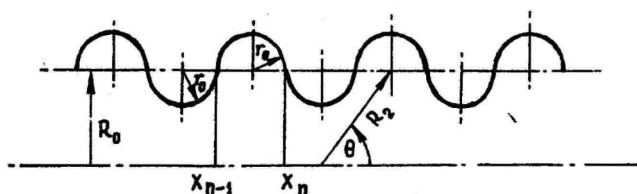


Рис. 1

Кривизны такой оболочки можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} = \sum_{n=1}^N [\eta(x-x_{n-1}) - \eta(x-x_n)] \frac{(-1)^{n-1}}{R_0}, & (I)_1 \\ \frac{1}{R_2} = \sum_{n=1}^N [\eta(x-x_{n-1}) - \eta(x-x_n)] \frac{\sin \theta}{1 + (-1)^{n-1} \frac{R_0}{R_2} \sin \theta}, & (I)_2 \end{cases}$$

где  $\eta(x-x_{n-1})$ ,  $\eta(x-x_n)$  - единичные функции,  $x_{n-1}$  и  $x_n$  - координаты начальной и конечной точек полугофра, отсчитываемые вдоль её образующей,  $N$  - число полугофров. Остальные обозначения такие же, как и в монографии [2, с. 349]. Поскольку угол  $\theta$  не зависит от номера полугофра, задание радиуса кривизны оболочки в форме (1)<sub>2</sub> не позволяет свести решение поставленной задачи к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно координаты  $x$ . Поэтому представляется целесообразным любой из гофров оболочки разбить на определённое количество участков, в пределах каждого из которых кривизна оболочки сохраняет постоянное значение.

Тогда для  $n$ -го полугофра получим

$$\frac{1}{R_{\lambda n}} = \sum_{l=1}^L [\eta(x-x_{n+l-1}) - \eta(x-x_{n+l})] \frac{1}{R_{\lambda l}^*}, \quad (2)$$

где  $L$  - количество участков, на которые разбит полугофр;  $R_{\lambda l}^* = \text{const}$  - значение радиуса кривизны  $R_{\lambda}$  в пределах  $l$ -го участка.

Объединяя все полугофры оболочки, вместо (1)<sub>2</sub> получим

$$\frac{1}{R_{\lambda}} = \sum_{n=1}^N [\eta(x-x_{n-1}) - \eta(x-x_n)] \frac{1}{R_{\lambda n}}, \quad (3)$$

где величина радиуса  $R_{\lambda n}$  определяется по формуле (2).

Если теперь воспользоваться тем или иным типом дифференциальных уравнений теории оболочек, то, принимая во внимание соотношение (3), можно построить решение для гофрированной оболочки. В данном случае воспользуемся уравнениями теории тонких оболочек, построенными на основе упрощенных Мултари-Донелла-Власова [2, с. 99]. Они имеют вид

$$\begin{cases} D\nabla^4 \omega - \nabla_{\kappa}^4 \varphi = q_0, \\ \nabla^4 \varphi + E h \nabla_{\kappa}^2 \omega = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где для данного случая

$$\begin{aligned} \nabla^4(\dots) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} \right)^2, \\ \nabla_{\kappa}^2(\dots) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial S} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $S$  - окружная координата оболочки.

Если воспользоваться соотношениями Кодащи [2, с.17, Ф-лы (2.28)], то можно показать, что для данного случая

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{R_1} \right) = 0,$$

так как при выбранной системе координат параметры Ляме  $A_1 = A_2 = 1$ . Поэтому окончательно

$$\nabla_{\alpha}^2(\dots) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial S^2}, \quad (5)$$

где  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  определяются по формулам (1) и (4).

Если второе уравнение системы (5) умножить на  $j\gamma^2 = -j \frac{2\sqrt{S(4-S^2)}}{EK^2}$ , а первое разделить на  $D = \frac{EK\gamma^2}{EK^2}$ , то после сложения преобразованных уравнений системы (4) получим

$$\nabla^2 y + A_j \nabla_{\alpha}^2 y = A_j \gamma^2 q, \quad (6)$$

где  $A = EK\gamma^2$ ,

$$y = \omega + j\gamma^2 \varphi.$$

В силу периодичности всех функций, входящих в уравнение (6), по окружной координате  $S$  их можно представить следующим образом:

$$(\dots)(\alpha, y) = \sum_{m=0}^{\infty} (\dots)(\alpha) \cos \frac{mS}{R_0}.$$

Последнее соотношение справедливо при условии, что  $\alpha_0 \leq R_0$ , тогда

$$\nabla^2 y_m(\alpha, y) = \left( \frac{d^2 y_m(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{m^2}{R_0^2} y_m(\alpha) \right) \cos \frac{mS}{R_0},$$

$$\nabla_{\alpha}^2 y_m(\alpha, y) = \left( \frac{1}{R^2} \frac{d^2 y_m(\alpha)}{d\alpha^2} - \frac{1}{R_1} \frac{m^2}{R_0^2} y_m(\alpha) \right) \cos \frac{mS}{R_0},$$

$$q_m(\alpha, y) = q_m(\alpha) \cdot \cos \frac{mS}{R_0}.$$

Поэтому уравнение (6) распадается на  $m$  независимых обыкновенных уравнений, каждое из которых будет иметь такой вид:

$$\frac{d^2 y_m}{d\alpha^2} - 2 \frac{m^2}{R_0^2} \frac{d^2 y_m}{d\alpha^2} + \frac{m^4}{R_0^4} y_m + A_j \left[ \frac{1}{R^2} \frac{d^2 y_m}{d\alpha^2} - \frac{1}{R_1} \frac{m^2}{R_0^2} y_m \right] = q_m(\alpha). \quad (7)$$

Поскольку, как видно из соотношений (1) и (2), кривизны оболочки приняты кусочно постоянными, то для решения дифференциального уравнения (7) можно использовать метод, изло-

женный в [1]. Тогда любой из гофров может быть представлен как составная оболочка, дифференциальные уравнения каждого из элементов которой имеют постоянные коэффициенты.

Как показано в работе [1], в силу ограниченности решений в точках сопряжения соседних элементов такой составной оболочки получим рекуррентные соотношения, связывающие между собой произвольные постоянные соседних элементов [1, ф-ла (6)]. Так для точки  $x = a_i$ , разделяющей  $(i + 1)$ -ый и  $i$ -ый элементы, будем иметь

$$[W_{i+1}(a_i)] \begin{bmatrix} C_{1,i+1} \\ C_{2,i+1} \\ C_{3,i+1} \\ C_{4,i+1} \end{bmatrix} = [W_i(a_i)] \begin{bmatrix} C_{1,i} \\ C_{2,i} \\ C_{3,i} \\ C_{4,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{1i}(a_i) - y_{1i+1}(a_i) \\ y'_{1i}(a_i) - y'_{1i+1}(a_i) \\ y''_{1i}(a_i) - y''_{1i+1}(a_i) \\ y'''_{1i}(a_i) - y'''_{1i+1}(a_i) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$[W_{i+1}(a_i)] = \begin{bmatrix} \rho^{1a_i} & \rho^{2a_i} & \rho^{3a_i} & \rho^{4a_i} \\ \gamma_1 \rho^{1a_i} & \gamma_2 \rho^{2a_i} & \gamma_3 \rho^{3a_i} & \gamma_4 \rho^{4a_i} \\ \gamma_1^2 \rho^{1a_i} & \gamma_2^2 \rho^{2a_i} & \gamma_3^2 \rho^{3a_i} & \gamma_4^2 \rho^{4a_i} \\ \gamma_1^3 \rho^{1a_i} & \gamma_2^3 \rho^{2a_i} & \gamma_3^3 \rho^{3a_i} & \gamma_4^3 \rho^{4a_i} \end{bmatrix},$$

$$[W_i(a_i)] = \begin{bmatrix} \rho^{1a_i} & \rho^{2a_i} & \rho^{3a_i} & \rho^{4a_i} \\ \delta_1 \rho^{1a_i} & \delta_2 \rho^{2a_i} & \delta_3 \rho^{3a_i} & \delta_4 \rho^{4a_i} \\ \delta_1^2 \rho^{1a_i} & \delta_2^2 \rho^{2a_i} & \delta_3^2 \rho^{3a_i} & \delta_4^2 \rho^{4a_i} \\ \delta_1^3 \rho^{1a_i} & \delta_2^3 \rho^{2a_i} & \delta_3^3 \rho^{3a_i} & \delta_4^3 \rho^{4a_i} \end{bmatrix}.$$

$y_{1i}(a_i)$  и  $y_{1i+1}(a_i)$  - частные решения неоднородных дифференциальных уравнений  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го элементов.

Поскольку распределенная нагрузка в пределах каждого элемента предлагается постоянной, частные решения  $y_{1i}(x)$  и  $y_{1i+1}(x)$  также будут постоянны, а следовательно, производные от  $y_{1i}(x)$  и  $y_{1i+1}(x)$  будут равны нулю.

Поэтому, решая систему (8) относительно матрицы произвольных постоянных  $(i + 1)$ -го элемента, получим

$$[C_{j,i+1}] = [W_{i+1}(a_i)]^{-1} \cdot [W_i(a_i)] \cdot [C_{j,i}] + [W_{i+1}(a_i)]^{-1} \cdot [P_n], \quad (9)$$

где

$$[C_{j,i+1}] = \begin{bmatrix} C_{1,i+1} \\ C_{2,i+1} \\ C_{3,i+1} \\ C_{4,i+1} \end{bmatrix}, \quad [C_{j,i}] = \begin{bmatrix} C_{1,i} \\ C_{2,i} \\ C_{3,i} \\ C_{4,i} \end{bmatrix}, \quad [P_n] = \begin{bmatrix} y_{ni}(a_i) - y_{ni+1}(a_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^3 (a_4 - a_j) \prod_{j=1}^2 (a_3 - a_j) \cdot (a_2 - a_1), \quad (10)$$

то

$$[W_{i+1}(a_i)]^{-1} \cdot [W_i(a_i)] = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{bmatrix} = [\Delta_{kl}],$$

где

$$\Delta_{kl} = \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^4 (\gamma_j - \delta_l)}{\prod_{j=1, j \neq k}^4 (\gamma_j - \delta_k)} l^{(\delta_l - \gamma_k) a_i}$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$[W_{i+1}(a_i)]^{-1} \cdot [P_n] = \begin{bmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \\ P_{n3} \\ P_{n4} \end{bmatrix} = [P_{nk}],$$

где

$$P_{nk} = [y_{ni}(a_i) - y_{ni+1}(a_i)] \cdot \frac{l^{\prod_{j=1, j \neq k}^4 \gamma_l}}{\prod_{l=1, l \neq k}^4 (\gamma_l - \delta_k)} l^{-\gamma_k a_i}$$

Используя рекуррентное соотношение (9), произвольные постоянные любого элемента составной оболочки можно выразить через произвольные постоянные  $C_{ji}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) её первого участка. При этом для гофрированной оболочки первоначально

эту операцию удобнее всего произвести для каждого гофра в отдельности, т.е. произвольные постоянные всех элементов гофра выразить через произвольные постоянные его первого элемента. После этого полученные произвольные постоянные целесообразно выразить через произвольные постоянные первого гофра.

Дальнейший процесс построения решения дифференциального уравнения (7) аналогичен процессу построения решения для дифференциального уравнения, коэффициенты которого представляют собой гладкие функции от координаты  $x$  на всём промежутке интегрирования, так как получаемые после выполнения преобразований (9) дифференциальное уравнение содержит лишь четыре произвольных постоянных, что является достаточным для нахождения общего решения уравнения (7).

При практической реализации предлагаемого метода не следует забывать, что величины корней характеристических уравнений  $\gamma_i$  и  $\delta_i$ , содержащиеся в матрицах  $[\Delta_{ki}]$  и  $[P_{kk}]$ , а также все произвольные постоянные, участвующие в построении решения, являются комплексными. Поэтому на заключительном этапе (при удовлетворении граничных условий) необходимо произвести разделение мнимой и вещественной части произвольных постоянных.

В заключение остановимся на основных особенностях метода, рассматриваемого в данной работе. Прежде всего — это численный метод, так как при его использовании весь промежуток интегрирования исходного дифференциального уравнения необходимо разбить на ряд участков, общее количество которых рекомендуется брать в пределах  $(10+20)N$ , где  $N$  — общее количество полугофров. Однако сам процесс построения решения основывается на ряде простых и устойчивых с точки зрения выполняемых вычислительных операций аналитических соотношений, к которым относятся рекуррентная формула (9) и зависимость (10).

При этом наивысший порядок систем линейных алгебраических уравнений, которые необходимо решать при использовании данного метода, равен четырём, т.е. порядку исходного дифференциального уравнения (7), а общее количество таких систем

равняется числу элементов, на которые разбивается гофрированная оболочка. Однако и сам процесс решения данных систем значительно упрощается за счёт использования для этой цели зависимости (10). Что касается последующих алгебраических операций, к которым относится представление произвольных постоянных различных участков оболочки через произвольные постоянные первого элемента её первого гофра, то этот процесс реализуется с помощью простого перемножения матриц четвёртого порядка, что не может вызвать особых затруднений.

Следует также отметить, что данный метод может быть использован без каких-либо принципиальных изменений для решения широкого класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, включая сюда и системы дифференциальных уравнений любого порядка.

Так, для данной задачи не было никакой необходимости переходить к комплексной функции  $u$ , а также вводить ряд упрощённых предположений относительно геометрии оболочки и характера получающихся решений, основанных на упрощениях Муштари-Донелла-Власова. Принципиально данная задача может быть решена методом, предложенным в настоящей работе, с использованием системы исходных дифференциальных уравнений теории тонких оболочек без введения каких-либо упрощающих предположений. Однако применение в данной работе дифференциального уравнения (7) позволило с наибольшей простотой и ясностью проследить основные особенности предлагаемого метода. Тем более, что решение уравнения (7) можно рассматривать в качестве первого приближения задачи об изгибе гофрированной оболочки типа силфона.

## Литература

1. Королёв В.М., Слепов Б.И., Соколов Е.В. Применение обобщённых функций к построению аналитических решений для составных оболочек и пластин. В кн. "Строительная механика сооружений". Мажвуз. темат. сб. тр. Л., ЛИСИ, 1981, с.54-60.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз. Л., 1962.
3. Сильфоны. Расчёт и проектирование. Под ред. Л.Е.Андреевой. "Машиностроение". М., 1975.

The Calculation of Siphon-Type Goffering Shell  
by the Method of Generalized Functions

G. Aryasov, A. Snitko, E. Sokolov

### Summary

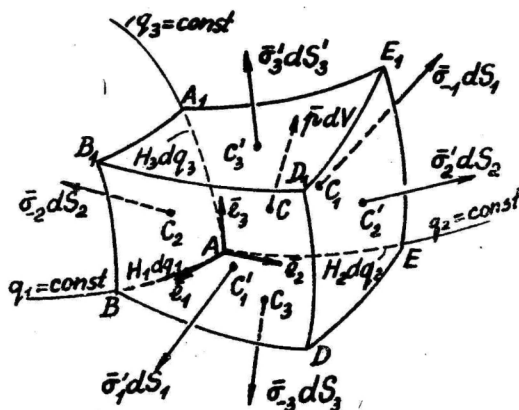
In this article a new numerical method for the solution of differential equations of siphon-type goffering shell is considered. This method allows to reduce considerably the quantity of calculation compared with other methods and to overcome the difficulties connected with registration of the boundary conditions. The method is founded on the use of the recurrent correlations which connect integration constants of each field of the composite shell.

О ПРИМЕНЕНИИ УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ  
В РАСЧЕТАХ УПРУГИХ ТЕЛ

Х. Рельвик

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

1.° Принцип отвердывания. Рассмотрим движение вырезанного из упругого тела элемента (Фиг. 1). Пусть на него



Фиг. 1.

действует сила  $\vec{\sigma}_1 dS_1$  в центре  $C_1$  грани  $AEE_1A_1$  и аналогично силы  $\vec{\sigma}'_1 dS'_1$ ,  $\vec{\sigma}_2 dS_2$ ,  $\vec{\sigma}'_2 dS'_2$ ,  $\vec{\sigma}_3 dS_3$  и  $\vec{\sigma}'_3 dS'_3$  в точках  $C'_1$ ,  $C_2$ ,  $C'_2$ ,  $C_3$  и  $C'_3$  соответственно. В центре элемента приложена сила  $\vec{p} dV$ . Уравнение возможной мощности (коротко УВМ) [1] элемента имеет вид

$$d\text{mv}\vec{a}_c \cdot \{\vec{v}_c\} = \sum_{i=1}^3 [(\vec{\sigma}_i dS_i \cdot \{\vec{v}_{c_i}\}) + \vec{\sigma}'_i dS'_i \cdot \{\vec{v}'_{c_i}\}] + \vec{p} dV \cdot \{\vec{v}_c\}. \quad (1)$$

Но возможные скорости точек  $C_i$  выражаются через скорость центра  $C$ :

$$\{\vec{v}_{c_i}\} = \{\vec{v}_c\} + \{\vec{v}_{c_i c}\} + \{\vec{\omega}_i\} \times \vec{CC}_i, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_{c_i c}$  — скорость точки  $C_i$  относительно  $C$  за счет удлинения отрезка  $CC_i$  и угловую скорость  $\{\vec{\omega}_i\}$  отрезка  $CC_i$  можно разложить в сумму

$$\{\vec{\omega}_i\} = \{\vec{\omega}\} + \{\vec{\omega}_i^*\}, \quad (3)$$

где  $\{\bar{\omega}\}$  — общая величина для всех точек  $C_i$ . Параметры в фигурных скобках независимы друг от друга, поэтому после подстановки величин (2) и (3) в уравнение (1) выделим члены с множителями  $\{\bar{\sigma}_c\}$  и  $\{\bar{\omega}\}$  :

$$d\bar{m}\bar{a}_c \cdot \{\bar{\sigma}_c\} = \{\bar{\sigma}_c\} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 (\bar{\sigma}_{-i} d\delta_i + \bar{\sigma}'_i d\delta'_i) + \bar{p} dV \right] + \{\bar{\omega}\} \cdot \sum_{i=1}^3 [(\bar{c}\bar{c}_i \times \bar{\sigma}_{-i}) d\delta_i + (\bar{c}\bar{c}'_i \times \bar{\sigma}'_i) d\delta'_i]. \quad (4)$$

Уравнение (4) совпадает с УВМ для твердого элемента, следовательно, деформирующий элемент можно рассматривать как абсолютно твердый.

2<sup>o</sup>. Частные производные единичных векторов. Пусть дана

система криволинейных координат  $q_1, q_2, q_3$  и единичных векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$ . Из ортогональности единичных векторов ( $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ ) часто делается вывод  $\partial(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) / \partial q_k = 0$ . Но, с другой стороны, известно, что из условия  $f(q_1, q_2, q_3) = 0$  не следует, что  $\partial f / \partial q_k = 0$ . Поэтому рассмотрим этот вопрос более подробно.

Запишем частное производное вектора  $\bar{e}_i$  в виде

$$\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_j} = \left( \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_j} \cdot \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_j} \cdot \bar{e}_2 \right) \bar{e}_2 + \left( \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_j} \cdot \bar{e}_3 \right) \bar{e}_3.$$

Отсюда видно, что требуется определить двадцать семь проекций  $(\partial \bar{e}_i / \partial q_j) \cdot \bar{e}_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ). Единичный вектор ортогонален своей полной производной по времени. Это верно и в случае, когда вместо  $\bar{e}_i$  подставить ее возможную величину, т.е. возможную скорость конца вектора  $\bar{e}_i$ , т.е.  $\bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_i = 0$  и

$\bar{e}_i \cdot \{\bar{e}_i\} = 0$  или, так как  $\bar{e}_i = \bar{e}_i(q_k)$ , то

$$\bar{e}_i \cdot \{\bar{e}_i\} = \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_i \{\dot{q}_1\} + \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_2} \cdot \bar{e}_i \{\dot{q}_2\} + \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_3} \cdot \bar{e}_i \{\dot{q}_3\} = 0, \quad (5)$$

где  $\{\dot{q}_k\}$  — произвольные независимые друг от друга величины. Равенство (5) определяет девять искоемых проекций

$$\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_k} \cdot \bar{e}_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Из условия  $\bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_j = 0$  получим аналогично, что

$$\left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_1} \cdot \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_1} \cdot \vec{e}_i\right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_2} \cdot \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_2} \cdot \vec{e}_i\right) \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_3} \cdot \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_3} \cdot \vec{e}_i\right) \dot{q}_3 = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_n} \cdot \vec{e}_j = -\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_n} \cdot \vec{e}_i \quad (7)$$

Наконец из известной формулы  $\delta^2 \pi / \partial q_i \partial q_j = \delta^2 \pi / \partial q_j \partial q_i$  получим

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (H_j \vec{e}_j) = \frac{\partial}{\partial q_j} (H_i \vec{e}_i)$$

или

$$\frac{\partial H_j}{\partial q_i} \vec{e}_j + H_j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \vec{e}_i + H_i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}, \quad (8)$$

где  $H_n$  - параметры Ламе.

Скалярное произведение равенства (8) на единичный вектор  $\vec{e}_i$ , а потом на  $\vec{e}_n$  с учетом формулы (7) дают соответственнс

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \quad (j \neq i); \quad (9)$$

$$H_j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} \cdot \vec{e}_n = H_i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{e}_n \quad (10)$$

Сравнивая между собою все три равенства (10) с учетом условия (7), получим

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_n} \cdot \vec{e}_i = 0 \quad (i \neq j \neq n). \quad (11)$$

Формулы (6), (9), (11) и (7) определяют все нужные проекции

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_1} &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3; & \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_2; & \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3; \\ \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_1; & \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_1; & \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_3; \\ \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_1; & \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_2; & \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_3} &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Таблицу (I2) можно найти, например, в книгах [3] и [4].

3°. Дифференциальные уравнения движения и равновесия элемента в криволинейных координатах. УВМ для вырезанного элемента будет

$$dm\ddot{\vec{a}}_e \cdot \{\vec{r}_e\} = \left[ \sum_{i=1}^3 (\vec{\sigma}'_i ds'_i + \vec{\sigma}_i ds_i) + \vec{r} dV \right] \cdot \{\vec{r}_e\} + \quad (I3)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \left[ \vec{\sigma}'_i ds'_i \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{c}'_i) + \vec{\sigma}_i ds_i \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{c}_i) \right],$$

где (не суммировать по повторным индексам)

$$\vec{\sigma}_i \approx -(\sigma_i \vec{e}_i + \tau_{ij} \vec{e}_j + \tau_{ik} \vec{e}_k); \quad ds_i = H_j H_k dq_j dq_k;$$

$$\vec{\sigma}'_i \approx \left( \sigma_i + \frac{\partial \sigma_i}{\partial q_i} dq_i \right) (\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i} dq_i) + \left( \tau_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial q_i} dq_i \right) (\vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} dq_i) +$$

$$+ \left( \tau_{ik} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial q_i} dq_i \right) (\vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q_i} dq_i);$$

$$ds'_i = ds_i + \frac{\partial(ds_i)}{\partial q_i} dq_i = H_j H_k dq_j dq_k + \frac{\partial(H_j H_k)}{\partial q_i} dq_i dq_j dq_k.$$

Последний член может оказаться полезным, несмотря на его малости.

Выпишем для краткости только первое уравнение равновесия (т.е. при  $\ddot{\vec{a}}_e = 0$ ). Для этого соберем вместе все члены с множителем  $\{\sigma_{ci}\}$  :

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{\sigma}'_i ds'_i + \vec{\sigma}_i ds_i) \cdot \vec{e}_i = 0.$$

Отсюда после вычислений и пренебрежения малыми величинами высших порядков получим

$$H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial q_1} + H_3 \tau_{12} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + H_2 \tau_{13} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \sigma_1 \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1} -$$

$$- H_3 \sigma_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + H_3 H_1 \frac{\partial \tau_{21}}{\partial q_2} + \tau_{21} \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2} - \quad (I4)$$

$$- H_2 \sigma_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + H_1 H_2 \frac{\partial \tau_{31}}{\partial q_3} + \tau_{31} \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial q_3} = -\rho_1 H_1 H_2 H_3.$$

Дальше следует учет обобщенного закона Гука (традиционным путем).

Второе и третье уравнения получим из (14) циклической переставкой индексов. Последние члены уравнения (13) следует группировать по параметрам  $\{\omega_i\}$ . Они дают закон парности касательных напряжений

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}.$$

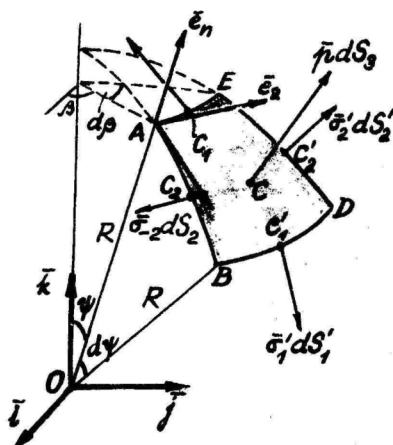
В случае декартовых координат  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ,  $\sigma_i = \sigma_x$ ,  $\tau_{21} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{31} = \tau_{zx}$ ,  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$  и уравнение (14) дает

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\rho_x.$$

Результаты совпадают с данными литературы, например [2], [3], [4] и [7]. Частные случаи рассматриваются, например, в книгах [5] и [6].

4<sup>0</sup>. Пример. Найдем при непосредственной помощи У В М дифференциальные уравнения равновесия тонкой сферической безмоментной оболочки (фиг. 2).

Выберем за обобщенные координаты углы  $\psi$  и  $\beta$ . Единичный вектор  $\vec{e}_1$  направим по касательной к меридиану,  $\vec{e}_2$  — по касательной к параллели, а  $\vec{e}_n$  — по радиусу сферы. Тогда



Фиг. 2.

$$\vec{e}_1 = \cos \psi \cos \beta \vec{i} + \cos \psi \sin \beta \vec{j} - \sin \psi \vec{k};$$

$$\vec{e}_2 = -\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j};$$

$$\vec{e}_n = \sin \psi \cos \beta \vec{i} + \sin \psi \sin \beta \vec{j} + \cos \psi \vec{k}$$

и частные производные (12) будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \psi} &= -\vec{e}_n; & \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \psi} &= 0; & \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \psi} &= \vec{e}_1; \\ \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \rho} &= \cos \psi \vec{e}_2; & \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \rho} &= -\cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_n; & \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \rho} &= \sin \psi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Вырежем из оболочки элемент ABDE. На него действуют силы

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 dS_1; & \quad (\vec{c}_1 + \frac{\partial \vec{c}_1}{\partial \psi} d\psi) dS'_1; \\ \vec{c}_2 dS_2; & \quad (\vec{c}_2 + \frac{\partial \vec{c}_2}{\partial \rho} d\rho) dS'_2; \\ \vec{p} dS_3 &= (p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_n \vec{e}_n) dS_3, \end{aligned}$$

где, если толщину оболочки принимать за единицу,

$$\begin{aligned} dS_1 &= R \sin \psi d\beta; \\ dS'_1 &= R \sin(\psi + d\psi) d\beta \approx R \sin \psi d\beta + R \cos \psi d\psi d\beta; \\ dS_2 &= dS'_2 = R d\psi; & dS_3 &= R^2 \sin \psi d\psi d\beta. \end{aligned}$$

Учитывая направление единичных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$  в точках приложения сил, т.е. в точках  $C_1, C'_1, C_2, C'_2$  и  $C_3$ , получим выражения напряжений

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &\approx -(\sigma_1 \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 + \tau_{1n} \vec{e}_n); \\ \vec{c}'_1 &\approx (\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} d\psi)(\vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \psi} d\psi) + (\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \psi} d\psi)(\vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \psi} d\psi) + \\ &+ (\tau_{1n} + \frac{\partial \tau_{1n}}{\partial \psi} d\psi)(\vec{e}_n + \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \psi} d\psi); \\ \vec{c}_2 &\approx -(\sigma_2 \vec{e}_2 + \tau_{21} \vec{e}_1 + \tau_{2n} \vec{e}_n); \\ \vec{c}'_2 &\approx (\sigma_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \rho} d\rho)(\vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \rho} d\rho) + (\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial \rho} d\rho)(\vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \rho} d\rho) + \\ &+ (\tau_{2n} + \frac{\partial \tau_{2n}}{\partial \rho} d\rho)(\vec{e}_n + \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \rho} d\rho); \\ \vec{p} &= p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_n \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Пусть теперь элемент оболочки как твердое тело (по принципу отвердевания) движется с возможной скоростью  $\{\vec{v}_c\}$ . Если мы рассмотрим случай равновесия, то движение дается по принципу освобожденности, но действительное ускорение счи-

$$dm\vec{a}_c \cdot \{\vec{r}_c\} = [\vec{\sigma}_1 dS_1 + \vec{\sigma}'_1 dS'_1 + \vec{\sigma}_2 dS_2 + \vec{\sigma}'_2 dS'_2 + \vec{r} d\delta_3] \cdot \{\vec{r}_c\}, \quad (15)$$

где  $\{\vec{r}_c\} = \{\sigma_{c1}\} \vec{e}_1 + \{\sigma_{c2}\} \vec{e}_2 + \{\sigma_{c3}\} \vec{e}_3$ . Дальше при  $\vec{a}_c = \vec{0}$

$$[\vec{\sigma}_1 dS_1 + (\vec{\sigma}_1 + \frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial \psi} d\psi) dS'_1 + \vec{\sigma}_2 dS_2 + (\vec{\sigma}_2 + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial \rho} d\rho) dS'_2] \cdot \vec{e}_1 = -\rho R d\delta_3.$$

Отсюда после вычислений найдем первое уравнение равновесия (сохраняя члены порядка  $d\psi d\rho$  включительно)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} \sin \psi + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \psi + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial \rho} + \tau_{21} \sin \psi = -\rho R \sin \psi. \quad (16)$$

Аналогично получим второе и третье уравнения, умножая в уравнении (15) скалярно вместо  $\vec{e}_1$  единичным вектором  $\vec{e}_2$  или  $\vec{e}_3$  соответственно.

Пусть теперь элемент оболочки вращается (если он покоится, то движение дается по принципу освобождения) вокруг центра масс  $C$  с возможной угловой скоростью  $\{\vec{\omega}\} = \{\omega_1\} \vec{e}_1 + \{\omega_2\} \vec{e}_2 + \{\omega_3\} \vec{e}_3$ . Тогда вместо уравнения (15) имеем

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 dS_1 \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{C}C_1) + (\vec{\sigma}_1 + \frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial \psi} d\psi) dS'_1 \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{C}C'_1) + \\ + \vec{\sigma}_2 dS_2 \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{C}C_2) + (\vec{\sigma}_2 + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial \rho} d\rho) dS'_2 \cdot (\{\vec{\omega}\} \times \vec{C}C'_2) = 0. \end{aligned}$$

Точка  $C$  при этом делит пополам проходящий через параллель, а на меридиане она лежит ближе к грани  $BD$ . Но непосредственные вычисления показывают, что эта разница более высокой степени малости и влияния на результат не имеет. Поэтому

$$CC_1 \approx \frac{R d\psi}{2} \approx CC'_1; \quad CC_2 \approx \frac{R \sin \psi d\rho}{2} \approx CC'_2$$

и с достаточной точностью

$$\begin{aligned} \vec{C}C_1 \approx -\frac{1}{2} R d\psi \vec{e}_1; & \quad \vec{C}C_2 \approx -\frac{1}{2} R \sin \psi d\rho \vec{e}_2; \\ \vec{C}C'_1 \approx \frac{1}{2} R d\psi \vec{e}_1; & \quad \vec{C}C'_2 \approx \frac{1}{2} R \sin \psi d\rho \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Следовательно, УВМ будет

$$\begin{aligned} & [dS_1(-\frac{1}{2}Rd\psi\vec{e}_1 \times \vec{e}_{-1}) + dS_1' \cdot \frac{1}{2}Rd\psi\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\psi}d\psi) + \\ & + dS_2(-\frac{1}{2}R\sin\psi d\beta\vec{e}_2 \times \vec{e}_{-2}) + dS_2' \cdot \frac{1}{2}R\sin\psi d\beta\vec{e}_2 \times (\vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\beta}d\beta)] \cdot \{\vec{\omega}\} = 0, \end{aligned}$$

откуда по независимости и произвольности параметров  $\{\omega_i\}$  получим после сокращения общих множителей

$$\begin{aligned} & -\vec{e}_1 \cdot dS_2 d\beta (\vec{e}_2 \times \vec{e}_{-2}) + \vec{e}_1 \cdot dS_2' d\beta [\vec{e}_2 \times (\vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\beta}d\beta)] = 0 ; \\ & -\vec{e}_2 \cdot dS_1 (d\psi \times \vec{e}_{-1}) + \vec{e}_2 \cdot dS_1' [\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\psi}d\psi)] = 0 ; \\ & -\vec{e}_n \cdot dS_1 d\psi (\vec{e}_1 \times \vec{e}_{-1}) + \vec{e}_n \cdot dS_1' [\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\psi}d\psi)] d\psi - \\ & -\vec{e}_n \cdot dS_2 \sin\psi d\beta (\vec{e}_2 \times \vec{e}_{-2}) + \vec{e}_n \cdot dS_2' \sin\psi d\beta [\vec{e}_2 \times (\vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\beta}d\beta)] = 0. \end{aligned}$$

Оба движения - поступательное с возможной скоростью  $\{\vec{v}_c\}$  и вращательное с возможной угловой скоростью  $\{\omega\}$  можно давать и одновременно, от этого результат не зависит. Но отдельно они дают более короткие операции и являются наглядными.

Вычисления в трех последних уравнениях дают

$$\tau_{2\beta} = 0 ; \quad \tau_{\omega} = 0 ; \quad (17)$$

$$\tau_{21} = \tau_{2n} . \quad (18)$$

Результаты (17) показывают, что в безмоментной теории оболочек следует пренебречь и перерезывающими силами, а равенство (18) выражает закон парности тангенциальных напряжений.

Наконец, остается учитывать равенства (17) и (18) в уравнениях типа (16). Получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial \psi} \sin\psi + (S_1 - S_2) \cos\psi + \frac{\partial \tau_{2n}}{\partial \beta} = -r_1 R \sin\psi ;$$

$$\frac{\partial \tau_{2n}}{\partial \psi} \sin\psi + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + 2\tau_{2n} \cos\psi = -r_2 R \sin\psi ;$$

$$S_1 + S_2 = R r_n .$$

Для простоты вычислений выбираем осесимметричную нагрузку ( $\partial \sigma_{r\theta} / \partial \rho = \partial \sigma_{z\rho} / \partial \rho = 0$ ). Тогда учет обобщенного закона Гука дает:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \cot \psi + (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \psi} - (\nu + \cot^2 \psi) u = - \frac{R^2(1-\nu^2)}{E} p_{\theta},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \cot \psi + (1 - \cot^2 \psi) w = - \frac{2R^2(1+\nu)}{E} p_{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} + u \cot \psi + 2w = \frac{R^2(1-\nu)}{E} p_{\theta},$$

где  $u$ ,  $w$  и  $w$  — перемещения по направлениям  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_N$  соответственно,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль упругости, а толщина оболочки принята за единицу.

### Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллин, "Вадгус", 1979, 168 с.
2. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.—Л., ОГИЗ — гостехиздат, 1974, 300 с.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л., судпромгиз, 1962, 431 с.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. Л., судпромгиз, 1958, 370 с.
5. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела, т. I. М., "Наука", гл. ред. физ.-мат. лит., 1975, 832 с.
6. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела, т. II. М., "Наука", гл. ред. физ.-мат. лит., 1970, 616 с.
7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.—Л. ОГИЗ — гостехиздат, 1947, 300 с.

### About the Use of the Equation of Possible Power by Calculating Elastic Bodies

H. Relvik

Summary

In the paper the equation of possible power is used for working out the equilibrium equations (14) of continua medium. An example of a thin spherical shell is given, also proceeding directly from the equation of possible power.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УВМ  
К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ФИЗИКИ

О. Сильде, А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

1. Являясь одним из приёмов механики метод уравнения возможной мощности (УВМ) [1], как показал опыт, даёт в некоторых случаях его применения заметные преимущества. Такими, например, случаи задач механики, в которых рассматриваются системы с неголономными связями.

В данной статье метод УВМ распространяется на смежные области физики. Дается вывод уравнений движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном поле. На основе полученных уравнений выводятся уравнения Максвелла.

Предложенный в статье способ применения УВМ к выводу указанных уравнений, видимо, не является единственной возможностью.

2. В теории относительности УВМ для материальной точки можно записать в виде, аналогичном тому, что имеет место в классической механике

$$\dot{\vec{u}} \cdot \{\vec{v}\} = \vec{F} \cdot \{\vec{v}\}, \quad (1)$$

где

$$\dot{\vec{u}} = m_0 \vec{v} \quad (2)$$

4- мерный вектор количества движения и массы;

$m_0$  - масса покоя материальной точки;

$$\vec{v} = v^k \vec{u}_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3)$$

- 4- мерный вектор скорости,

$$\{\vec{v}\} = \{v^k\} \vec{u}_k \quad (4)$$

- возможная скорость точки,

$$\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}, \quad (5)$$

$ds$  - длина элементарного отрезка мировой линии, его квадрат

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

$x^i, x^2, x^3$  - пространственные координаты,  $x^0 = ct$  - временная координата,  $c$  - скорость света; путём действительных преобразований можно  $ds^2$  в любой неособенной точке пространства привести к виду, при котором

$$g^{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{jk} = 0 \text{ при } j \neq k; \quad (7)$$

$$\vec{F} = F^{\mu} \vec{u}_{\mu} \quad (8)$$

- 4-мерная сила.

Вычислив производную по  $s$  от (2), учитывая при этом (3), (5) и что  $m_0 = \text{const}$ , подставив в (1) эту производную, а также (4), (8) и принимая во внимание произвольность параметров возможной скорости, получим уравнения движения:

$$m_0 \left( \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{jl}^{\mu} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right) = F^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

где  $\Gamma_{jl}^{\mu} = \ddot{u}^{\mu} \cdot (\partial \ddot{u}_l / \partial x^j)$  - символ Кристоффеля II рода.

Уравнениям (9) можно придать другой вид, если использовать тензор энергии-импульса массы

$$T^{jk} = m_0 \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \quad (10)$$

и рассматривать случай, когда  $F^{\mu}$  в (8) есть дивергенция

$$F^{j\mu}{}_{;j} = -F^{\mu} \quad (11)$$

от тензора  $F^{j\mu}$  некоторого поля, взятого с обратным знаком.

Дивергенция от тензора (10) будет

$$T^{j\mu}{}_{;j} = m_0 \left( \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{jl}^{\mu} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right), \quad (12)$$

где учтено, что для материальной точки  $(dx^j/ds)_{;j} = 0$ .

Подставив (11) и (12) в (9), получим

$$T^{j\alpha}{}_{;j} + F^{j\alpha}{}_{;j} = 0. \quad (13)$$

3. С целью учёта электромагнитного поля запишем теперь вектор скорости в виде

$$\vec{v} = v^\mu \vec{u}_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (14)$$

где  $v^\mu = dx^\mu/ds$ , выражение для  $ds$  по прежнему определяется по (6). Введение параметра скорости  $v^\mu$  означает, что гравитационное и электромагнитное поле вместе с движущейся в нём частицей представляют теперь материальный объект с пятью степенями свободы.

Индексы будут подчиняться следующему правилу: если индекс пробегает значения 0, 1, 2, 3, то он обозначается латинской буквой, если же - 0, 1, 2, 3, 4, то - греческой буквой.

Выражение для возможной скорости аналогично (4), где индексом теперь будет греческая буква, как в (14).

С учётом сказанного, и принимая для простоты  $m_\mu = 1$ , из (1) получим

$$(g_{\mu\sigma} \dot{v}^\mu + F_{\lambda\mu} \sigma^\lambda v^\mu) \{v^\sigma\} = Q_\sigma \{v^\sigma\}, \quad (15)$$

а уравнения движения, считая  $\{v^\sigma\}$  в (15) независимыми, будут

$$g_{\mu\sigma} \dot{v}^\mu + \Gamma_{\lambda\mu} \sigma^\lambda v^\mu = Q_\sigma, \quad (16)$$

где

$$Q_\sigma = F_\sigma/m_0 = F_\sigma = \vec{F} \cdot \vec{u}_\sigma,$$

$$g_{\mu\sigma} = \vec{u}_\mu \cdot \vec{u}_\sigma \quad (17)$$

- метрический тензор 5- мерного пространства, символ Кристоффеля  $\Gamma_{\lambda\mu} \sigma = \vec{u}_\sigma \cdot (\partial \vec{u}_\mu / \partial x_\lambda)$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_{\lambda\mu} \sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (18)$$

В первую очередь нас интересуют уравнения, получающиеся для 4- мерного пространства. Отделив в этих уравнениях члены с латинскими индексами от членов с индексом 4, из (16) получим

$$g_{\mu j} \dot{v}^\mu + g_{\mu j} v^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda} v^\alpha v^\lambda + 2\Gamma_{\alpha\lambda} v^\alpha v^\lambda + \Gamma_{\mu j} (v^\mu)^2 = Q_j. \quad (19)$$

Первый и третий члены в (19) отражают влияние гравитационного поля. Для выяснения физического смысла остальных членов дадим интерпретацию  $v^4$  и сделаем ещё некоторые допущения.

Пусть заряженные частицы имеют постоянную массу покоя  $m_0$  и постоянный заряд  $q_0$ . При непрерывном распределении масс и зарядов  $m_0$  — плотность покоящейся массы,  $q_0$  — плотность покоя заряда. Приведа все размерности к степеням длины, можно и массу и заряд выразить через единицы длины. Тогда отношение  $q_0/m_0$  будет иметь размерность нуля.

Сделаем допущения, что

$$v^4 = \frac{dx^4}{ds} = \frac{q_0}{m_0} = \text{const}, \quad (20)$$

откуда

$$\dot{v}^4 = 0 \quad (21)$$

и

$$x^4 = \frac{q_0}{m_0} s + x_0^4. \quad (22)$$

Ясно, что координата  $x^4$  имеет переменное значение только внутри зарядов  $q_0 \neq 0$ , в окружающем же пространстве её значение можно принять равным нулю. Полагая, что внутри заряженных частиц со временем изменений нет, имеем независимость параметров этих частиц от  $x^4$ . Следовательно, всюду

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (23)$$

Принимая во внимание (23), по формуле (18) найдём

$$2\Gamma_{\mu 4, j} = \frac{\partial g_{4j}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{4\mu}}{\partial x^j}. \quad (24)$$

Пусть в (24)

$$g_{4j} = A_j \quad (25)$$

— векторный потенциал электромагнитного поля. Тогда имеем

$$2\Gamma_{\mu 4, j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^j} = \varphi_{\mu j} \quad (26)$$

— тензор интенсивностей электромагнитного поля.

Кроме того, положим ещё, что

$$g_{44} = \text{const}, \quad (27)$$

Тогда из (18) с учётом  $\partial g_{4j}/\partial x^4 = 0$  имеем

$$\Gamma_{44, j} = 0. \quad (28)$$

Учтя в (19) выражение (21), (26), (28) и умножив на  $m_0$ , получим

$$m_0(g_{\mu j} \dot{v}^\mu + \Gamma_{\mu\ell j} v^\mu v^\ell) + g_0 \varphi_{\mu j} v^\mu = F_j, \quad (29)$$

где  $F_j = Q_j m_0$ .

Пусть  $F_j = 0$ . Умножив (29) на  $g^{ij}$ , получим

$$m_0(\dot{v}^\lambda + \Gamma_{\mu\ell}^\lambda v^\mu v^\ell) = g_0 \varphi_{\mu}^\lambda v^\mu, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \quad (30)$$

в последнем учтено, что  $g_{\mu j} g^{\lambda j} = \delta_\mu^\lambda$  - символ Кронекера, и  $\varphi_{\mu}^\lambda = -\varphi_{\lambda}^\mu$  - вследствие антисимметричности  $\varphi_{\mu j}$ .

На левой стороне уравнений (30) стоит левая сторона (9), на правой - 4- мерная Лоренцова сила.

Рассматривая случай, когда действие гравитационного поля на явления электромагнетизма незначительно, и можно псевдориманово пространство заменить на мир Минковского:  $ds^2 = -dx^0^2 - dx^1^2 - dx^2^2 - dx^3^2$ , тогда все  $\Gamma_{\mu\ell}^\lambda = 0$ , вследствие чего из (30) имеем

$$m_0 \frac{d^2 x^j}{ds^2} = g_0 \varphi_{\mu}^j \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (31)$$

где составляющими тензора  $\varphi_{\mu j}$  будут:  $E^0 = \varphi^1_0$ ,  $E^j = \varphi^0_j$ ,  $E^x = \varphi^y_0$ ,  $H^x = \varphi^z_y$ ,  $H^y = \varphi^z_x$ ,  $H^z = \varphi^y_x$ , а  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - векторы напряжённостей соответственно электрического и магнитного полей.

Таким образом, на основе УВМ и исходя из сделанных допущений и геометрических представлений, получены уравнения (30) движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном поле, откуда в частном случае следуют уравнения (31) движения этой частицы в электромагнитном поле.

4. Используем полученные уравнения движения для вывода уравнений Максвелла.

Найдём некоторые уравнения.

Используя (26), имеем

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^j} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^j},$$

аналогично

$$\frac{\partial \varphi_{\mu j}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^j \partial x^\lambda},$$

$$\frac{\partial \varphi_{j\lambda}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^j \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \quad (32)$$

Суммируя между собой (32), получим

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial x^j} + \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{ja}}{\partial x^a} = 0, \quad j, k, a = 0, 1, 2, 3. \quad (33)$$

В (33) имеем 12-ю четвёрку уравнений Максвелла, являющихся следствием существования потенциала  $A_j$ .

Так как дивергенция (12) тензора  $T^{jk}$ , где все  $\Gamma_{jk}^k = 0$ , даёт левую часть (31), то из (13) и (31) следует, что дивергенция от  $F^{kj}$  есть правая часть (31) с отрицательным знаком. Учтя при этом (11), имеем

$$F^{kj}_{;k} = -F^j = -g_0 \varphi^j \frac{dx^k}{ds} \quad (34)$$

- выражение 4- мерной Лоренцовой силы.

Итак, из уравнений движения заряженной частицы получено (34). Найдём теперь  $F^{jk}$ , являющийся тензором плотности энергии и импульса электромагнитного поля. Он должен получиться из тензора  $\varphi^j_k$ , что следует из (34), и состоять из квадратичного выражения от  $\varphi^j_k$ , что вытекает из соображений размерностей. В самом общем виде выражение для  $F^{jk}$  можно записать так:

$$F^{jk} = \kappa(\varphi^{j\Delta} \varphi^k_{\Delta} + \alpha g^{jk} \varphi), \quad (35)$$

где

$$\varphi = \varphi_{jk} \varphi^{jk}, \quad (36)$$

$\kappa$  и  $\alpha$  - коэффициенты, подлежащие определению.

Дивергенция тензора  $F^{jk}$ , учитывая, что все  $\Gamma_{kl}^l = 0$  будет

$$\frac{\partial F^{jk}}{\partial x^j} = \kappa \left( \frac{\partial \varphi^{j\Delta}}{\partial x^j} \varphi^k_{\Delta} + \varphi^{j\Delta} \frac{\partial \varphi^k_{\Delta}}{\partial x^j} + \alpha g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right). \quad (37)$$

Выражение на правой стороне (37) с использованием равенств (33) и (34) можно привести к виду

$$\frac{\partial F^{jk}}{\partial x^j} = \kappa \left[ \frac{\partial \varphi^{j\Delta}}{\partial x^j} \varphi^k_{\Delta} + \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right]. \quad (38)$$

Теперь подстановка (38) в (34) даёт

$$\kappa \left[ \frac{\partial \varphi^{j\Delta}}{\partial x^j} \varphi^k_{\Delta} + \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) g^{jk} \cdot 2 \varphi^{lm} \frac{\partial \varphi_{lm}}{\partial x^j} \right] = -g_0 \varphi^k \frac{dx^k}{ds}, \quad (39)$$

( $l, m = 0, 1, 2, 3$ ),

где  $\partial/\partial x^j$  заменено выражением  $\mathcal{L}\varphi^{lm} \partial\varphi^{lm}/\partial x^j$ .

В уравнении (39) можно интенсивностям поля  $\varphi^{\kappa A}$  и  $\varphi^{lm}$  давать произвольные значения, так как в любой точке пространства можно прибавить некоторое произвольное постоянное электромагнитное поле, производные которого по координатам равны нулю. Следовательно,

$$\kappa \left[ \frac{\partial \varphi^{jA}}{\partial x^j} \{ \varphi^{\kappa A} \} + \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) g^{jk} \mathcal{L} \{ \varphi^{lm} \} \frac{\partial \varphi^{lm}}{\partial x^j} \right] = - \varrho_0 \{ \varphi^{\kappa A} \} \frac{d\alpha^A}{ds}. \quad (40)$$

Уравнение (40) может быть удовлетворено при следующих условиях:

$$\alpha = -\frac{1}{4} \quad (41)$$

и

$$\kappa \frac{\partial \varphi^{jA}}{\partial x^j} = - \varrho_0 \frac{d\alpha^A}{ds}. \quad (42)$$

Коэффициент  $\kappa$  можно вычислить на основе частного случая из электростатики, где  $\kappa = -(4\pi)^{-1}$ .

Наконец, вторая четвёрка уравнений Максвелла принимает вид

$$\frac{\partial \varphi^{jk}}{\partial x^j} = 4\pi \varrho_0 \frac{d\alpha^k}{ds}. \quad (43)$$

Отметим, что первая четвёрка уравнений (33) Максвелла получилась из наличия потенциала  $A_j$ , вторая же - (43) служит для определения этого потенциала. Она была выведена при условии, что все  $\Gamma_{kl}^j = 0$ . Если отказаться от этого условия, то ясно, что левая сторона (43) является дивергенцией тензора  $\varphi^{jk}$  и вместо (43) имеем более общий вид уравнений

$$\varphi^{jk}{}_{;j} = 4\pi \varrho_0 \frac{d\alpha^k}{ds}.$$

Примечание. Обозначения величин в данной статье использовались те же, что и в [2].

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. "Валгус", Таллин, 1979.
2. Silde, O. Relatiivsusteooria põniküsimusi geometria valguses, "Valgus", Tallinn, 1974.

The possible power equation application  
of some problems in physics

O. Silde, A. Haitin

Summary

The method of possible power equation (P.P.E.) is one of the principles of mechanics. This method gives a considerable advantage in solving mechanical tasks, especially in systems with nonholonomic constraints.

In the paper the method of P.P.E. is applied in adjacent fields of physics. The equations of movement of the particle charge in a gravitation and electromagnetic field and the equations of Maxwell have been derived.

## ДИНАМИКА ЗИМАНОВОЙ МАШИНЫ КАТАСТРОФ

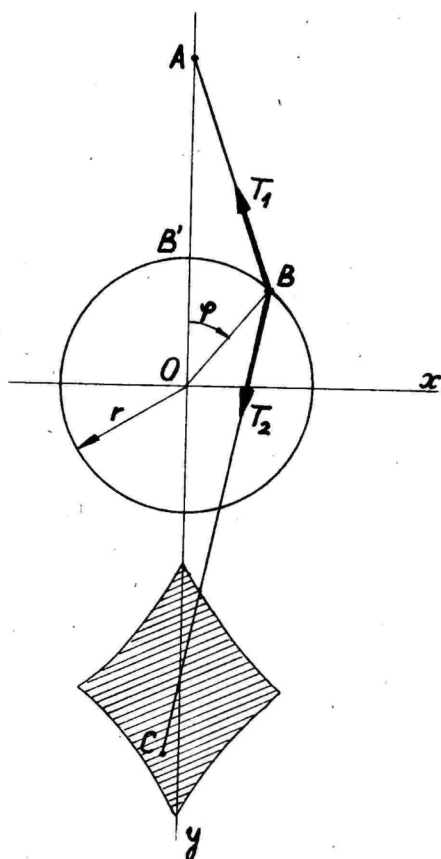
Р. Шлумер, В. Погга, М. Фельдман, Ю. Энгельбрехт  
Таллинский политехнический институт

Машина катастроф предложена Э.К. Зиманом в 1969 г. для демонстрации типичных свойств неустойчивого (катастрофического) поведения на примере вращательного движения [2]. Теория Зимановой машины основывается на исследовании функции внутренней энергии гибких элементов (резинок) как функции от угла поворота рабочего элемента (диска). Появление лабильных точек на кривых функции внутренней энергии при определенных углах поворота диска позволяет предсказать неустойчивое движение (скачок в угле поворота). Структура рассматриваемой функции внутренней энергии соответствует канонической катастрофе сборки точки бифуркационного множества и определяется согласно стандартной методике [1]. При этом динамика машины, т.е. переход из одного стабильного положения в другое, исследована только качественно [1].

В данной заметке приводится точное описание динамики Зимановой машины катастроф, основанное на классических принципах динамики жесткого тела.

Рассмотрим стандартную модель Зимановой машины (фиг. 1) состоящей из диска радиусом  $r$ , который может свободно вращаться вокруг центра  $O$  и из двух резинок  $AB = l_1$ ,  $BC = l_2$ . В недеформированном положении длины резинок соответственно  $l_{01}$  и  $l_{02}$ . Принимаем  $l_{01} = l_{02} = AB'$  (фиг. 1). Напомним коротко принцип работы машины. Если перемещать свободный конец  $C$  второй резинки по плоскости  $xy$ , то вращается плавно и диск. Только при переходе конца  $C$  дважды через границы отображения многообразия катастрофы (заштрихованное поле на фиг. 1) диск "прыгает" в новое положение стабильного равновесия.

Реакции резинок  $T_1$  и  $T_2$  являются внешними силами для



Фиг. 1

он приводит диск во вращение, пока момент снова равняется нулю. Разумеется, что тогда диск, имеющий определенную угловую скорость, продолжает вращение, но упругие силы в резинках возвращают его в стабильное положение, и колебание вокруг этого положения затухает из-за внутреннего трения в резинках.

Пусть редуцированные жесткости резинок ( $E_1$  и  $E_2$ , соответственно) определены в удобно выбранных единицах так, что

диска. В стабильном положении их результирующий момент относительно точки  $O$ , через который проходит ось вращения диска, равняется нулю, так как результирующая данной системы сил ( $T_1, T_2$ ) проходит через точку  $O$ . Если свободный конец  $C$  второй резинки перемещается не через критические точки границ отображения, то возникающий результирующий момент заставляет диск плавно вращаться, и при остановке конца  $C$  останавливается и диск, потому что он проходит через стабильное положение равновесия. Если же свободный конец  $C$  перемещается через критические точки, то в следующий момент результирующий момент не уравновешивается, и

$$T_i = E_i(l_i - l_{i0}), \quad i = 1, 2.$$

Тогда результирующий момент  $M_0$  равняется согласно фиг. 1

$$M_0 = M_{20} - M_{10} = T_2 d_2 - T_1 d_1,$$

где  $d_i$ ,  $i = 1, 2$  соответствующие плеча. Согласно представленной на фиг. 1 геометрии получим

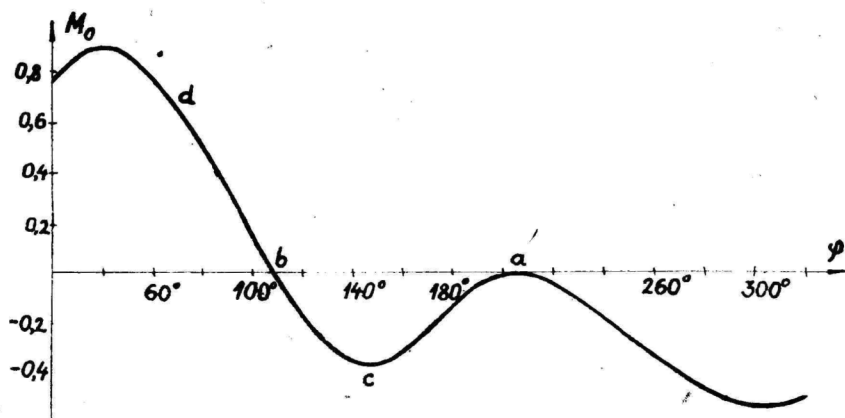
$$M_{10} = (l_1 - l_{01}) E_1 (l_{01} + r) r l_1^{-1} \sin \varphi,$$

$$M_{20} = (l_2 - l_{02}) E_2 (x^2 + y^2) l_2^{-1} \sin(\varphi + \arctan \frac{x}{y}),$$

$$l_1 = [r^2 + (l_{01} + r)^2 - 2(l_{01} + r)r \cos \varphi]^{\frac{1}{2}},$$

$$l_2 = [(x - r \sin \varphi)^2 + (y + r \cos \varphi)^2]^{\frac{1}{2}},$$

где  $x, y$  - координаты точки  $C$ . График функции  $M_0$  для одной фиксированной точки  $C$  ( $x = 0,4$ ;  $y = 2,376$ ) показан на фиг. 2. При этом приняты следующие значения свободных



Фиг. 2

параметров:  $r = l_{01} = l_{02} = 1$ ,  $E_1 = E_2 = 1$ . Выбранные координаты точки  $C(x, y)$  соответствуют точке в непосредственной

близости границы отображения многообразия катастрофы. При переходе  $C(x, y)$  на  $C'(x + \Delta x, y + \Delta y)$  уже имеет место катастрофа, которая для данных  $x, y$  начинается с угла поворота  $\varphi_0 = 200^\circ$  (точка  $a$  на фиг. 2) и оканчивается при угле  $\varphi_1 = 108^\circ$  (точка  $b$  на фиг. 2). Движение диска описывается дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_0, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции диска. Для аналитического решения выражение для момента  $M_0$  слишком сложно, поэтому кривую  $act$  на графике фиг. 2 можно аппроксимировать выражением

$$M_0' = 0,374 \sin(-2,14\varphi + 51^\circ), \quad (2)$$

в кривую  $cbd$  — выражением

$$M_0'' = 1,73 - 0,918\varphi. \quad (3)$$

Тогда угловая скорость диска на повороте от угла  $\varphi_0$  до угла  $\varphi_1$  определяется из уравнения (1), заменяя  $M_0$  выражением (2) для  $M_0'$ , а при дальнейшем движении — из уравнения (1), заменяя  $M_0$  выражением (3) для  $M_0''$  и учитывая полученную на первом этапе угловую скорость  $\omega(\varphi_1) = \omega_1$ . Вполне ясно, что в последнем случае необходимо учесть и затухание, обусловленное главным образом трением резинок, а также трением в оси. В этом случае движение определяется из уравнения

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \frac{d\varphi}{dt} + 0,918\varphi - 1,73 = 0 \quad (4)$$

при начальных условиях  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_1$ . Решение уравнения (4) при известном коэффициенте затухания  $\mu$  определяется элементарно.

## Литература

1. Poston T., Stewart I., Catastrophe Theory and its Applications. Pitman, London, 1978.
2. Zeeman E.C., A catastrophe machine. In: Towards a Theoretical Biology, ed. by C.H.Waddington. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968-72, vol. 4, 276-282.

Dynamics of the Zeeman catastrophe machine  
R. Plumer, V. Pogga, M. Feldman, J.Engelbrecht

### Summary

The usual analysis of the Zeeman catastrophe machine is based on the investigation of the energy function and its dynamical behaviour is described only qualitatively. In this paper the dynamics of the Zeeman catastrophe machine is analysed quantitatively. The differential equations of motion are derived and briefly discussed. It is shown that beside the energy function the function of the moment with respect to the rotation axis **allows for the description of the jump dynamics.**

## СОДЕРЖАНИЕ

Я. Леллеп, Э. Сахков, Оптимальный проект армированной балки из жестко-пластического материала в случае импульсивного нагружения . . . . .	3
Т. Лепикулт, Автоматизированный расчет задач динамики жестко-пластических ступенчатых балок . . . . .	12
Ю. Кирс, К. Кенк, Об оптимальном проектировании круговых пластин . . . . .	23
Г. Оленев, Оптимальное расположение дополнительных опор к жестко-пластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения . . . . .	30
Г. Оленев, Об оптимальном расположении дополнительной опоры к жестко-пластической цилиндрической оболочке при импульсном нагружении . . . . .	42
Я. Леллеп, К оптимальному проектированию жестко-пластических цилиндрических оболочек с учетом больших прогибов . . . . .	52
Я. Леллеп, С. Ханнус, Большие прогибы жестко-пластических замкнутых цилиндрических оболочек . . . . .	59
Э. Сакс, Оптимальные формы выточек при кручении круглого вала боковой касательной нагрузкой . . . . .	66
И. Пелля, М. Хейнлоо, Оптимизация многослойных сферических сосудов и цилиндрических труб при гармонической динамической нагрузке . . . . .	69
Т. Пейпман, Об искажении двумерных волн деформации . . . . .	76
Г. Арясов, И. Гавриков, И. Мубаракшин, Б. Ясулович, К построению динамической матрицы стержневого элемента . . . . .	83
Г. Арясов, А. Снитко, Е. Соколов, Расчет гофрированных оболочек типа сильфона методом обобщенных функций . . . . .	88

X. Рельвик, О применении уравнения возможной мощности в расчетах упругих тел . . . . .	96
O. Сильде, А. Хайтин, Применение метода УВМ к некоторым вопросам физики . . . . .	105
P. Плумер, В. Погга, М. Фельдман, Ю. Энгельбрехт, Динамика зимановой машины катастроф . . . . .	113

CONTENTS

J. Lellep, E. Sakkov, Optimal design of a reinforced rigid-plastic beam in the case of impulsive loading . . . . .	3
T. Lepikult, Automatic calculation for dynamic bending of rigid-plastic stepped beams . . . . .	12
J. Kirs, K. Kenk, About the optimal design of circular plates . . . . .	23
G. Olenev, Optimal location of additional supports for rigid-plastic circular plates in the case of impulsive loading . . . . .	30
G. Olenev, About optimal location of an additional support for a rigid-plastic cylindrical shell under impulsive loading . . . . .	42
J. Lellep, On optimal design of rigid-plastic cylindrical shells accounting for large deflections . . . . .	52
J. Lellep, S. Hamus, Large deflections of closed rigid-plastic cylindrical shells . . . . .	59
E. Saks, The optimal forms of noched shafts in torsion by the tangent loading applied on the lateral surface . . . . .	66
I. Pellja, M. Heinloo, Optimization of multilayered spherical vessels and cylindrical tubes under	

harmonic dynamical loading . . . . .	69
T. Feipman, On distortion of the two-dimensional deformation waves . . . . .	76
G. Aryasov, I. Gavrikov, I. Mubarakshin, B. Jasulovich, On construction of the dynamic matrix of a bar element . . . . .	83
G. Aryasov, A. Snitko, E. Sokolov, The calculation of siphon-type goffering shell by the method of generalized functions . . . . .	88
H. Relvik, About the use of the equation of possible power by calculating elastic bodies . .	96
O. Silde, A. Haitin, The possible power equation application of some problems in physics . . . .	105
R. Plumer, V. Pogga, M. Feldman, J. Engelbrecht, Dynamics of the Zeeman catastrophe machine . . .	113