

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Patrik Nukka

Funktsioonide lähendamine
kuupsplainidega, kus splaini teise
tuletise väärtused rajapunktides on
võrdsed nulliga

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: lektor Kaido Lätt
professor Arvet Pedas

Tartu 2019

Funktsioonide lähendamine kuupsplainidega, kus splaini teise tuletise väärtused rajapunktides on võrdsed nulliga

Bakalaureusetöö

Patrik Nukka

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös käsitletakse funktsioonide lähendamist kuupsplainidega olukorras, kus splaini teise tuletise väärtused rajapunktides on võrdsed nulliga. Töö eesmärgiks on anda hinnang interpoleerimisel tekkivale veale ning kinnitada saadud tulemusi numbriliste näidetega. Näidiskordsfunktsioonide interpoleerimine on realiseeritud programmeerimiskeeles Python.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Kuupsplainid, veahinnangud, interpolatsioon, numbriline lähendamine, ligikaudsed meetodid.

Approximation of functions by cubic splines with natural boundary conditions

Bachelor's thesis

Patrik Nukka

Abstract. In the following bachelor's thesis the interpolation of functions by cubic splines is considered with natural boundary conditions. The purpose of the thesis is to estimate the interpolation error and to give numerical examples. The numerical examples have been implemented in the Python environment.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words: Cubic splines, estimates for the error, interpolation, numerical approximation, approximation methods.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Kuupsplaini definitsioon	5
2 Kuupsplaini esitus	7
2.1 Süsteemi koostamine	7
2.2 Domineeriva peadiagonaaliga maatriksid	9
2.3 Olemasolu ja ühesus	10
2.4 Süsteemi lahendamine	11
3 Veahinnangud	12
4 Ühtlase võrgu juhtum	18
5 Numbrilised näited	22
5.1 Näide 1	22
5.2 Näide 2	25
5.3 Näide 3	28
Kirjandus	31
Lisa	32

Sissejuhatus

Käesolevas töös käsitletakse funktsioonide lähendamist kuupsplainidega. Nagu võib lugeda tööst [1], veel küllalt hiljuti kasutasid insenerid paindlike joonlaudu, et tõmmata siledaid kõverad läbi etteantud punktide. Selliseid joonlaudu nimetati "splainideks", sealt tuli ka matemaatikasse sõna spline. Splineid kasutamine interpoleerimiseks on väga populaarne, sest suure interpolatsioonisõlmede arvu korral polünoomidega interpoleerimine ei ole väga praktiline. Näiteks interpoleerimisel Newtoni interpolatsioonipolünoomiga on selle aste ainult ühe võrra väiksem, kui interpolatsioonisõlmede arv. Kuupsplainidega interpoleerimise kohta võib pikemalt lugeda näiteks raamatutest [1] ja [9].

Kuupsplainidega interpoleerimist on varasemalt uuritud mitmes bakalaaurusetöös (vt näiteks [4], [8]), kuid kuupsplaine, kus splinei teise tuletise väärtused on rajapunktides võrdsed nulliga, ei ole nendes käsitletud.

Kuupsplaini defineerimiseks jaotatakse lõik $[a, b]$ kõigepealt osalõikudeks võrgu Δ abil, mis koosneb punktidest $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, kus N on etteantud naturaalarv. Seejärel nõutakse, et lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon S_Δ oleks igal osalõigul $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, kolmandat järku polünoom. Niisugust funktsiooni S_Δ nimetatakse kuupsplainiks.

Töö esimeses osas (peatükid 1-2) konstrueerime kuupsplaini, mis rahuldab tingimusi $S_\Delta(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$ võrgul Δ , mille üheseks määramiseks nõuame lisaks, et see rahuldaks rajatingimusi $S''_\Delta(x_0) = S''_\Delta(x_N) = 0$. Esitame funktsiooni S_Δ suuruste $M_j := S''_\Delta(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, kaudu ning näitame, et selline spline on vaadeldavate rajatingimuste korral üheselt määratud.

Peatükis 3 leiame hinnangud suurustele

$$\max_{x \in [a, b]} |S_\Delta(x) - f(x)|, \quad \max_{x \in [a, b]} |S'_\Delta(x) - f'(x)|, \quad \max_{x \in [a, b]} |S''_\Delta(x) - f''(x)|,$$

kus f on neli korda pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Peatükis 4 uurime kuupsplaini S_Δ määrava lineaarse võrrandisüsteemi maatriksi pöördmaatriksi leidmist sel juhul, kui osalõigud $[x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, 2, \dots, N$) on võrdse pikkusega.

Viimases peatükis (peatükk 5) toome kolm numbrilist näidet, et demonstreerida funktsioonide lähendamist peatükis 2 konstrueeritud kuupsplainidega.

1. Kuupsplaini definitsioon

Olgu meil antud lõik $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ning $a < b$. Võtame naturaalarvu $N \geq 3$ ja jaotame lõigu $[a, b]$ punktide $x_j \in [a, b]$ abil N osalõiguks $[x_{j-1}, x_j]$ nii, et $x_{j-1} < x_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Hulka

$$\Delta := \{x_0, x_1, \dots, x_N \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}, \quad (1.1)$$

nimetatakse **võrguks** lõigul $[a, b]$. Punkte x_0, x_1, \dots, x_N nimetatakse võrgu Δ **sõlmedeks**.

Otsime lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruvat funktsiooni S_Δ , mis igas osalõigus $[x_{j-1}, x_j]$ on kuuppolünoom.

Definitsioon 1. Lõigul $[a, b]$ määratud funktsiooni $S_\Delta = S_\Delta(x)$, mis rahuldab tingimusi

- (i) S_Δ on kuuppolünoom igas osalõigus $[x_{j-1}, x_j]$, kus $j = 1, 2, \dots, N$ ehk
$$S_\Delta(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_{j-1}) + \gamma_j(x - x_{j-1})^2 + \delta_j(x - x_{j-1})^3, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R},$$
- (ii) $S_\Delta \in C^2[a, b]$, see tähendab, et funktsioon S_Δ on lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv,

nimetatakse võrgule Δ vastavaks **kuupsplainiks**.

Olgu võrgul Δ ette antud funktsiooni $f = f(x)$ väärtused f_0, f_1, \dots, f_N , $f_j := f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Definitsioon 2. Kuupsplaini S_Δ , mis rahuldab järgmisi tingimusi

$$S_\Delta(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

nimetatakse võrgu Δ sõlmedes väärtusi f_0, f_1, \dots, f_N **interpoleerivaks kuupsplainiks**.

Tingimusi (1.2) nimetatakse **interpolatsioonitingimusteks**.

Kuna meil on N osalõiku ning igas osalõigus me vajame $S_\Delta(x)$ määramiseks 4 parameetrit $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$, siis kokku tuleb määrata $4N$ parameetrit. Seejuures paneme tähele järgmist.

- Tuletiste $S_{\Delta}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) pidevus sisesõlmedes x_1, x_2, \dots, x_{N-1} annab meile $3(N - 1)$ lisatingimust.
- Interpolatsioonitingimused (1.2) annavad veel $N + 1$.

See tähendab, et lisaks tingimustele (1.2) on kuupasplaini S_{Δ} kordajate leidmiseks vaja ette anda veel kaks lisatingimust. Edasi hakkame vaatlema juhtu, kus nõuame, et $M_0 = 0$, $M_N = 0$. Teisi juhte saab vaadata näiteks raamatust [9], lk 97.

2. Kuupsplaini esitus

2.1 Süsteemi koostamine

Valime lõigu $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ning fikseerime naturaalarvu $N \geq 3$. Tähistame $M_j := S''_{\Delta}(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$ ning võtame $M_0 = 0$, $M_N = 0$. Diferentseerides kaks korda definitsiooni 1 punktis (i) antud avaldist, saame võrduse

$$S''_{\Delta}(x) = 2\gamma_j + 6\delta_j(x - x_{j-1}), \quad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Tingimustest $S''_{\Delta}(x_{j-1}) = M_{j-1}$ ja $S''_{\Delta}(x_j) = M_j$ saame järgmise võrrandisüsteemi kordajate α_j ja β_j määramiseks:

$$\begin{cases} M_{j-1} &= 2\gamma_j, \\ M_j &= 2\gamma_j + 6\delta_j(x_j - x_{j-1}). \end{cases}$$

Süsteemi lahendiks on

$$\begin{cases} \gamma_j &= \frac{1}{2}M_{j-1}, \\ \delta_j &= \frac{M_j - M_{j-1}}{6(x_j - x_{j-1})}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Järelikult splaini S_{Δ} teist järku tuletis lõigus $[x_{j-1}, x_j]$ avaldub kujul

$$S''_{\Delta}(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad (2.2)$$

kus $h_j = x_j - x_{j-1}$. Interpolatsioonitingimustest $S_{\Delta}(x_{j-1}) = f_{j-1}$, $S_{\Delta}(x_j) = f_j$ ning seosest (2.1) saame

$$\begin{cases} f_{j-1} &= \alpha_j, \\ f_j &= \alpha_j + \beta_j h_j + \frac{M_j + 2M_{j-1}}{6} h_j^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

kus α_j ja β_j on otsitavad. Süsteemi (2.3) lahendiks on

$$\begin{cases} \alpha_j &= f_{j-1}, \\ \beta_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j + 2M_{j-1}}{6} h_j. \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned}
S_{\Delta}(x) &= f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) - \frac{M_j + 2M_{j-1}}{6}h_j(x - x_{j-1}) + \frac{1}{2}M_{j-1}(x - x_{j-1})^2 \\
&+ \frac{M_j - M_{j-1}}{6(x_j - x_{j-1})}(x - x_{j-1})^3 = M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(f_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \\
&- 2\frac{M_{j-1}}{6}h_j^2 + 2\frac{M_{j-1}}{6}h_j(x_j - x) + \frac{f_{j-1}}{h_j}(x_j - x) + \frac{1}{2}M_{j-1}(h_j - (x_j - x))^2 \\
&- \frac{M_{j-1}}{6h_j}(h_j - (x_j - x))^3, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
S_{\Delta}(x) &= M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \left(f_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \\
&+ \left(f_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6}\right) \frac{x_j - x}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Kuupsplaini S_{Δ} definitsioonis nõutakse, et see oleks kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$. Kuna S_{Δ} on igas osalõigus $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, kuuppolünoom, siis piisab nõuda S_{Δ} ja tema esimese ja teise tuletise S'_{Δ} ja S''_{Δ} pidevust ainult punktides x_1, x_2, \dots, x_{N-1} .

Alustame S''_{Δ} pidevuse uurimisest. Selleks kirjutame välja S''_{Δ} ühepoolsed piirväärtused punktis x_j , $j = 1, 2, \dots, N - 1$, seose (2.2) abil. Saame

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_j^-} S''_{\Delta}(x) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} \left(M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right) = M_j \frac{x_j - x_{j-1}}{h_j} = M_j \frac{h_j}{h_j} \\
&= M_j, \\
\lim_{x \rightarrow x_j^+} S''_{\Delta}(x) &= \lim_{x \rightarrow x_j^+} \left(M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}} \right) = M_j \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} = M_j \frac{h_{j+1}}{h_{j+1}} \\
&= M_j,
\end{aligned}$$

mis ütleb, et S''_{Δ} on pidev punktides x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . Analoogiliselt saab näidata, et S_{Δ} on pidev punktides x_1, x_2, \dots, x_{N-1} .

Avaldisest (2.4) järeldub, et iga $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, korral funktsiooni S_{Δ} tuletis S'_{Δ} avaldub kujul

$$S'_{\Delta}(x) = M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j. \quad (2.5)$$

Võrdusest (2.5) saame tuletise S_Δ ühepoolsed piirväärtused punktis x_j :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_j^-} S'_\Delta(x) &= \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \\ \lim_{x \rightarrow x_j^+} S'_\Delta(x) &= -\frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}.\end{aligned}$$

Tuletise $S'_\Delta(x)$ pidevuseks lõigul $[a, b]$ peavad kehtima võrdused

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Samasuste (2.6) lihtsustamiseks toome sisse järgmised tähistused:

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Kirjutame võrdused (2.6) kujul

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6 \frac{(f_{j+1} - f_j)/h_{j+1} - (f_j - f_{j-1})/h_j}{h_{j+1} + h_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.7)$$

ehk maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-2} & 2 & \lambda_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{N-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-3} \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-3} \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

kus M_1, M_2, \dots, M_{N-1} on otsitavad ja

$$d_j = 6 \frac{(f_{j+1} - f_j)/h_{j+1} - (f_j - f_{j-1})/h_j}{h_{j+1} + h_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

2.2 Domineeriva peadiagonaaliga maatriksid

Toome sisse mõned abimõisted ja -tulemused, mida hakkame edaspidi kasutama.

Definitsioon 3. Ruutmaatriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse *domineeriva peadiagonaaliga maatriksiks*, kui

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definitsioon 4. Ruutmaatriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse **regulaarseks**, kui tema determinant ei ole null.

Lause 1. Domineeriva peadiagonaaliga maatriks on regulaarne.

Tõestus. Lause 1 tõestuse võib leida raamatust [9]. □

Lemma 1. Olgu antud lineaarne võrrandisüsteem

$$\sum_j a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kus $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ on domineeriva peadiagonaaliga maatriks ning x_1, x_2, \dots, x_n otsitavad. Tähistame

$$q := \min_i \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) > 0.$$

Siis võrrandisüsteem on üheselt lahenduv ning kehtib hinnang

$$\max_j |x_j| \leq \frac{1}{q} \max_i |b_i|. \quad (2.9)$$

Tõestus. Lausest 1 tuleneb esimese väite tõestus, tõestame nüüd hinnangu (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \max_i |b_i| &= \frac{1}{q} \max_i \left| \sum_j a_{ij}x_j \right| \geq \frac{1}{q} \max_i \left(|a_{ii}x_i| - \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \right) \\ &\geq \frac{1}{q} \max_j |x_j| \left(|a_{ii}| - \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \right| \right) \geq \max_j |x_j|. \end{aligned}$$

□

2.3 Olemasolu ja ühesus

Näitame, et suurused M_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, on võrrandisüsteemiga (2.8) üheselt määratud. Selleks esitame süsteemi (2.8) maatrikskujul

$$AM = d,$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-2} & 2 & \lambda_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{N-1} & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-3} \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-3} \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Paneme tähele, et maatriks A on domineeriva peadiagonaaliga, sest iga $j = 1, 2, \dots, N-1$ korral $|\lambda_j| + |\mu_j| = \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}} + 1 - \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}} = 1 < 2$, seega Lause 1 põhjal maatriks A on regulaarne ehk süsteem (2.8) on üheselt lahenduv. Sellest järeldub, et suurused M_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, ja koos sellega ka splain kujul (2.4) on üheselt määratud.

2.4 Süsteemi lahendamine

Süsteemi (2.8) lahendamiseks leidub efektiivne algoritm (vt [1]). Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi, mis on süsteemiga (2.8) sarnase ülesehtisusega, st süsteemi kujul

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & b_1x_1 & + & c_1x_2 & = & d_1, \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & + & c_2x_3 & = & d_2, \\ a_3x_2 & + & b_3x_3 & + & c_3x_4 & = & d_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}x_{n-2} & + & b_{n-1}x_{n-1} & + & c_{n-1}x_n & = & d_{n-1}, \\ & & a_nx_{n-1} & + & b_nx_n & = & d_n, \end{array} \quad (2.11)$$

kus x_1, x_2, \dots, x_n otsitavad ning $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$. Esimese sammuna elimineerime süsteemi (2.11) teisest võrrandist tundmatuga x_1 liidetava. Teiseks sammuks on kolmandast võrrandist tundmatud x_2 sisaldava liidetava elimineerimine. Jätkates analoogiliselt kuni viimase võrrandini viime süsteemi (2.11) kujule

$$\begin{array}{l} x_k = q_k x_{k+1} + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_n = u_n, \end{array} \quad (2.12)$$

kus

$$\begin{array}{l} p_k = a_k q_{k-1} + b_k, \quad q_0 = 0, \\ q_k = \frac{-c_k}{p_k}, \\ u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{p_k}, \quad u_0 = 0. \end{array}$$

Süsteemist (2.12) saame lihtsalt leida otsitavad x_1, x_2, \dots, x_n .

3. Veahinnangud

Selles peatükis leiame hinnangud interpoleeriva kuupsplaini S_Δ , tema tuletise S'_Δ ja tema teise tuletise S''_Δ jaoks. Alustame meie arutelu ühe abitulemuse tõestusega.

Lemma 2. *Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ väärtusi $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, interpoleeriv kuupsplain S_Δ esitatud kujul (2.4), kus $M_j = S''_\Delta(x_j)$. Rahuldagu kuupsplain S_Δ rajatingimusi $M_0 = M_N = 0$. Siis kehtib hinnang*

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |M_j - f''(x_j)| \leq \max \left\{ |f''(x_0)|, \frac{1}{4}Ch^2, |f''(x_N)| \right\}, \quad (3.1)$$

kus

$$h = \max_{j=1,2,\dots,N} h_j = \max_{j=1,2,\dots,N} (x_j - x_{j-1}), \quad C = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Tõestus. Olgu meil $f \in C^4[a, b]$ ning rahuldagu kuupsplain S_Δ rajatingimusi $M_0 = M_N = 0$. Tähistame

$$r_j := M_j - f''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Paneme tähele, et $r_0 = -f''(x_0)$ ja $r_N = -f''(x_N)$. Asendades $M_j = r_j + f''(x_j)$ võrrandisüsteemi (2.7), saame

$$\mu_j r_{j-1} + 2r_j + \lambda_j r_{j+1} = \tilde{d}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

kus

$$\tilde{d}_j = d_j - \mu_j f''(x_{j-1}) - 2f''(x_j) - \lambda_j f''(x_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

ning

$$d_j = 6 \frac{(f_{j+1} - f_j)/h_{j+1} - (f_j - f_{j-1})/h_j}{h_{j+1} + h_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Paneme tähele, et võrrandisüsteemi (3.2) maatriks on domineeriva peadiagonaaliga, seega Lause 1 põhjal leidub süsteemil ühene lahend.

Hindame nüüd suurusi \tilde{d}_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$. Selleks esitame $f(x_{j-1})$, $f(x_{j+1})$, $f''(x_{j-1})$ ja $f''(x_{j+1})$ Taylori valemi põhjal punktis x_j jääkliikmega integraalkujul (vt [6], lk 224):

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - f'(x_j)h_j + \frac{f''(x_j)}{2}h_j^2 - \frac{f'''(x_j)}{6}h_j^3 - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{f^{(4)}(t)}{6}(x_{j-1}-t)^3 dt, \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + f'(x_j)h_{j+1} + \frac{f''(x_j)}{2}h_{j+1}^2 + \frac{f'''(x_j)}{6}h_{j+1}^3 \\ &\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f^{(4)}(t)}{6}(x_{j+1}-t)^3 dt, \\ f''(x_{j-1}) &= f''(x_j) - f'''(x_j)h_j - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(4)}(t)(x_{j-1}-t) dt, \\ f''(x_{j+1}) &= f''(x_j) + f'''(x_j)h_{j+1} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(4)}(t)(x_{j+1}-t) dt. \end{aligned}$$

Asendades need avaldised võrdustesse (3.3), saame

$$\begin{aligned} \tilde{d}_j &= \frac{6f(x_j)}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)} + \frac{6f'(x_j)}{h_{j+1}+h_j} + 3\lambda_j f''(x_j) + \lambda_j f'''(x_j)h_{j+1} \\ &\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f^{(4)}(t)}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)}(x_{j+1}-t)^3 dt - \frac{6f(x_j)}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)} \\ &\quad - \frac{6f(x_j)}{h_j(h_{j+1}+h_j)} + \frac{6f(x_j)}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)} - \frac{6f'(x_j)}{h_{j+1}+h_j} + 3\mu_j f''(x_j) - \mu_j f'''(x_j)h_{j+1} \\ &\quad - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{f^{(4)}(t)}{h_j(h_{j+1}+h_j)}(x_{j-1}-t)^3 dt - \mu_j f''(x_j) + \mu_j f'''(x_j)h_j \\ &\quad + \mu_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(4)}(t)(x_{j-1}-t) dt - 2f''(x_j) - \lambda_j f''(x_j) - \lambda_j f'''(x_j)h_{j+1} \\ &\quad - \lambda_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(4)}(t)(x_{j+1}-t) dt. \end{aligned}$$

Arvestades, et $\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}$ ja $\mu_j = \frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}$ saame \tilde{d}_j kirjutada kujul

$$\begin{aligned} \tilde{d}_j &= \frac{1}{h_{j+1}+h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(4)}(t) \left(\frac{(x_{j+1}-t)^3}{h_{j+1}} - h_{j+1}(x_{j+1}-t) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{h_{j+1}+h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(4)}(t) \left(h_j(x_{j-1}-t) - \frac{(x_{j-1}-t)^3}{h_j} \right) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Teeme lõigul $[x_{j-1}, x_j]$ muutujavahetuse $t = x_{j-1} + h_j\tau$ ning lõigul $[x_j, x_{j+1}]$ muu-

tujavahetuse $t = x_j + h_{j+1}\tau$. Siis

$$\begin{aligned}\tilde{d}_j &= \frac{1}{h_{j+1} + h_j} \int_0^1 f^{(4)}(x_j + h_{j+1}\tau) \left(\frac{(h_{j+1} - h_{j+1}\tau)^3}{h_{j+1}} - h_{j+1}(h_{j+1} - h_{j+1}\tau) \right) h_{j+1} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{h_{j+1} + h_j} \int_0^1 f^{(4)}(x_{j-1} + h_j\tau) \left(h_j(-h_j\tau) - \frac{(-h_j\tau)^3}{h_j} \right) h_j d\tau. \\ &= \frac{h_{j+1}^3}{h_{j+1} + h_j} \int_0^1 f^{(4)}(x_j + h_{j+1}\tau) ((1-\tau)^3 - (1-\tau)) d\tau \\ &\quad + \frac{h_j^3}{h_{j+1} + h_j} \int_0^1 f^{(4)}(x_{j-1} + h_j\tau) (\tau^3 - \tau) d\tau, j = 1, 2, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Hindame nüüd \tilde{d}_j absoluutväärtust:

$$\begin{aligned}|\tilde{d}_j| &\leq \frac{h_{j+1}^3}{h_{j+1} + h_j} \left| \int_0^1 f^{(4)}(x_j + h_{j+1}\tau) ((1-\tau)^3 - (1-\tau)) d\tau \right| \\ &\quad + \frac{h_j^3}{h_{j+1} + h_j} \left| \int_0^1 f^{(4)}(x_{j-1} + h_j\tau) (\tau^3 - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{h_{j+1}^3}{h_{j+1} + h_j} C \left| \int_0^1 (-2\tau + 3\tau^2 - \tau^3) d\tau \right| + \frac{h_j^3}{h_{j+1} + h_j} C \left| \int_0^1 (\tau^3 - \tau) d\tau \right| \\ &= \frac{1}{4} C \frac{h_{j+1}^3}{h_{j+1} + h_j} + \frac{1}{4} C \frac{h_j^3}{h_{j+1} + h_j} = \frac{1}{4} C \frac{h_{j+1}^3 + h_j^3}{h_{j+1} + h_j} = \frac{1}{4} C \frac{(h_{j+1} + h_j)(h_{j+1}^2 - h_{j+1}h_j + h_j^2)}{h_{j+1} + h_j} \\ &= \frac{1}{4} C (h_{j+1}^2 - h_{j+1}h_j + h_j^2).\end{aligned}$$

Paneme tähele, et kui $h_j \geq h_{j+1}$, siis

$$h_{j+1}^2 - h_{j+1}h_j + h_j^2 \leq h_{j+1}^2 - h_{j+1}^2 + h_j^2 = h_j^2 \leq h^2.$$

Kui $h_j \leq h_{j+1}$, siis

$$h_{j+1}^2 - h_{j+1}h_j + h_j^2 \leq h_{j+1}^2 - h_j^2 + h_j^2 = h_{j+1}^2 \leq h^2.$$

Järelikult

$$|\tilde{d}_j| \leq \frac{1}{4} Ch^2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Kuna $2 - \lambda_j - \mu_j = 1$, saame süsteemi (3.2) muutujate r_1, r_2, \dots, r_{N-1} jaoks hinnangu

$$\max_{j=1,2,\dots,N-1} |r_j| \leq \max_{j=1,2,\dots,N-1} |\tilde{d}_j|.$$

Järelikult lemma 1 põhjal

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |r_j| \leq \max_{j=1,2,\dots,N-1} \{|f''(x_0)|, \tilde{d}_j, |f''(x_N)|\}.$$

Seega oleme saanud, et kehtib hinnang

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |M_j - f''(x_j)| \leq \max \left\{ |f''(x_0)|, \frac{1}{4}Ch^2, |f''(x_N)| \right\}.$$

□

Paneme tähele, et kui lemma 1 puhul $f''(x_0) = f''(x_N) = 0$, siis hinnang (3.1) saab kuju

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |M_j - f''(x_j)| \leq \frac{1}{4}Ch^2. \quad (3.4)$$

Teoreem 1. Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ väärtusi $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, interpoleeriv kuupsplain S_Δ esitatud kujul (2.4), kus $M_j = S''_\Delta(x_j)$. Rahuldagu kuupsplain S_Δ rajatingimusi $M_0 = M_N = 0$, ning eeldame, et $f''(x_0) = f''(x_N) = 0$. Siis kehtivad veahinnangud

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |S_\Delta(x) - f(x)| &\leq \frac{3}{8}Ch^4, \\ \max_{x \in [a, b]} |S'_\Delta(x) - f'(x)| &\leq \frac{3}{8}Ch^3, \\ \max_{x \in [a, b]} |S''_\Delta(x) - f''(x)| &\leq \frac{3}{8}Ch^2, \end{aligned}$$

kus

$$h = \max_{j=1,2,\dots,N} h_j = \max_{j=1,2,\dots,N} (x_j - x_{j-1}), \quad C = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Tõestus. Esimesena leiame hinnangu suurusele $S''_\Delta(x) - f''(x)$, kui $x \in [a, b]$. Kui $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, siis (2.2) põhjal

$$S''_\Delta(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}).$$

Teisendame suurust $S''_\Delta(x) - f''(x)$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$, eesmärgiga kasutada hinnangut (vt [7], lk 74)

$$\left| f''(x_{j-1}) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right) + f''(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - f''(x) \right| \leq \frac{1}{8}Ch, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \quad (3.5)$$

Saame

$$\begin{aligned}
S''_{\Delta}(x) - f''(x) &= M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) - f''(x) \\
&= M_{j-1} \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - f''(x_{j-1}) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) \\
&\quad - f''(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} + f''(x_{j-1}) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + f''(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - f''(x) \\
&= (M_{j-1} - f''(x_{j-1})) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + (M_j - f''(x_j)) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \\
&\quad + f''(x_{j-1}) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + f''(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - f''(x). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Seose (3.6) ja hinnangute (3.4) ja (3.5) kohaselt iga $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, korral

$$\begin{aligned}
|S''_{\Delta}(x) - f''(x)| &\leq \left| (M_{j-1} - f''(x_{j-1})) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + (M_j - f''(x_j)) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right| \\
&\quad + \left| f''(x_{j-1}) \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) + f''(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - f''(x) \right| \\
&\leq \left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{h_j} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) \max_{j=0,1,\dots,N} |M_j - f''(x_j)| + \frac{1}{8} Ch^2 \\
&\leq \frac{3}{8} Ch^2.
\end{aligned}$$

Järelikult oleme näidanud, et

$$\max_{x \in [a,b]} |S''_{\Delta}(x) - f''(x)| = \max_{j=1,2,\dots,N} \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |S''_{\Delta}(x) - f''(x)| \leq \frac{3}{8} Ch^2. \tag{3.7}$$

Tähistame

$$h(x) := S_{\Delta}(x) - f(x), \quad x \in [a, b], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Paneme tähele, et $h(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, N$. Rolle'i teoreemi kohaselt (vt [2] lk 217) leiduvad punktid $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, nii, et $h'(\xi_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$. Kuna

$$h'(x) = S'_{\Delta}(x) - f'(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

siis $S'_{\Delta}(\xi_j) = f'(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Järelikult $x \in [x_{j-1}, x_j]$ korral

$$S'_{\Delta}(x) - f'(x) = \int_{\xi_j}^x (S''_{\Delta}(t) - f''(t)) dt,$$

millest hinnangu (3.7) abil saame $x \in [x_{j-1}, x_j]$ jaoks

$$|S'_\Delta(x) - f'(x)| \leq \int_{\xi_j}^x |S''_\Delta(t) - f''(t)| dt \leq \frac{3}{8}Ch^2 \int_{\xi_j}^x dt \leq \frac{3}{8}Ch^3.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\max_{x \in [a, b]} |S'_\Delta(x) - f'(x)| = \max_{j=1, 2, \dots, N} \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |S'_\Delta(x) - f'(x)| \leq \frac{3}{8}Ch^3. \quad (3.8)$$

Leiame lõpetuseks hinnangu ka suurusele $S_\Delta(x) - f(x)$, kus $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$. Kuna S_Δ on funktsiooni f väärtusi f_0, f_1, \dots, f_N interpoleeriv kuupsplain, siis

$$S_\Delta(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Järelikult

$$S_\Delta(x) - f(x) = \int_{x_{j-1}}^x (S'_\Delta(t) - f'(t)) dt, \quad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Viimasest seosest ja hinnangust (3.8) järeldub, et $x \in [x_{j-1}, x_j]$ korral

$$|S_\Delta(x) - f(x)| \leq \int_{x_{j-1}}^x |S'_\Delta(t) - f'(t)| dt \leq \frac{3}{8}Ch^3 \int_{x_{j-1}}^x dt \leq \frac{3}{8}Ch^4.$$

Seega oleme näidanud, et

$$\max_{x \in [a, b]} |S_\Delta(x) - f(x)| = \max_{j=1, 2, \dots, N} \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |S_\Delta(x) - f(x)| \leq \frac{3}{8}Ch^4. \quad (3.9)$$

□

4. Ühtlase võrgu juhtum

Selles peatükis leiame maatriksi (2.10) pöördmaatriksi juhul, kui $x_j - x_{j-1} = h$ iga $j = 1, 2, \dots, N$ korral. See peatükk põhineb raamatul [1].

Olgu meil lõigul $[a, b]$ antud võrk Δ , mille korral

$$h := x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Sellist võrku Δ nimetatakse **ühtlaseks võrguks lõigul** $[a, b]$. Kui me eeldame, et meil on tegemist ühtlase võrguga, siis me saame leida maatriksi (2.10) pöördmaatriksi vahetu aruteluga.

Toome sisse n -ndat järku determinandi

$$D_n(\lambda) := \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

kus $\lambda \in \mathbb{R}$ on suvaline muutuja. Tähistame

$$D_{-1}(\lambda) = 0, \quad D_0(\lambda) = 1 \text{ ja } D_1(\lambda) = 2.$$

Arendame determinandi (4.1) viimase rea järgi, saame

$$D_n(\lambda) = \sum_j (-1)^{n+j} a_{nj} \bar{m}_{nj} = (-1)^{n+n-1} (1-\lambda) \bar{m}_{n,n-1} + (-1)^{n+n} 2 D_{n-1}(\lambda), \quad n = 2, 3, \dots,$$

kus a_{nj} asub n -ndas reas ja j -ndas veerus ning \bar{m}_{nj} on elemendile a_{nj} vastav täiendmiinor. Vaatleme täiendmiinorit $\bar{m}_{n,n-1}$ lähemalt:

$$\bar{m}_{n,n-1} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{n-1+n-1} \lambda D_{n-2}(\lambda) = \lambda D_{n-2}(\lambda),$$

kus $n = 2, 3, \dots$. Järelikult $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$D_n(\lambda) = 2D_{n-1}(\lambda) - \lambda(1 - \lambda)D_{n-2}(\lambda),$$

millest saame rekurrentse võrrandi

$$D_n(\lambda) - 2D_{n-1}(\lambda) + \lambda(1 - \lambda)D_{n-2}(\lambda) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Võrrandile (4.2) vastav karakteristlik võrrand on

$$q^2 - 2q + \lambda(1 - \lambda) = 0.$$

Viimase karakteristliku võrrandi lahendid on $1 + (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}$ ja $1 - (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}$, millest (vt [5])

$$D_n(\lambda) = c_1 [1 - (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}]^n + c_2 [1 + (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}]^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Kordajad c_1 ja c_2 leiame lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} c_1 & + & c_2 & = & D_0(\lambda), \\ c_1 [1 - (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}] & + & c_2 [1 + (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}] & = & D_1(\lambda). \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendid on

$$c_1 = -\frac{1 - (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}}{2(1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}}, \quad c_2 = \frac{1 + (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}}{2(1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}}.$$

Kokkuvõttes oleme leidnud, et

$$D_n(\lambda) = \frac{[1 + (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}]^{n+1} - [1 - (1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}]^{n+1}}{2(1 - \lambda + \lambda^2)^{1/2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Kuna meil on tegemist ühtlase võrguga, siis

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

millest järeldub, et (4.3) saab kuju

$$D_n = \frac{(1 + \sqrt{3}/2)^{n+1} - (1 - \sqrt{3}/2)^{n+1}}{\sqrt{3}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Järelikult avaldub matriksi (2.10) determinant $|A|$ kujul

$$|A| = D_{N-1} = 2D_{N-2} - \frac{1}{4}D_{N-3}. \quad (4.5)$$

Maatriksi (2.10) pöördmaatriksi $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$ elementide määramiseks toome sisse **algebraalse täiendi** mõiste (vt näiteks [3]).

Definitsioon 5. Olgu $A = (a_{ij})$ n -ndat järku ruutmaatriks. Suurust $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{m}_{i,j}$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$), kus \overline{m}_{ij} on elemendile a_{ij} vastav täiendmiinor, nimetatakse maatriksi A elemendi a_{ij} **algebraliseks täiendiks**.

Teoreem 2. Kui n -ndat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ on regulaarne, siis

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

kus A_{ij} on maatriksi A elemendi a_{ij} algebraline täiend ning $|A|$ on maatriksi A determinant.

Tõestus. Teoreemi tõestuse võib leida raamatust [3]. □

Teoreemi 2 põhjal saame pöördmaatriksi A^{-1} elementide \tilde{a}_{ij} leidmiseks järgmised seosed:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j} D_{N-1-j} D_{i-1}}{2^{j-i} |A|}, \quad \text{kui } 1 \leq i \leq j \leq N-1, \\ \tilde{a}_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j} D_{N-1-i} D_{j-1}}{2^{i-j} |A|}, \quad \text{kui } 1 \leq j \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Kuna suurused M_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, määratakse süsteemist (2.7), siis

$$M_i = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{a}_{ij} d_j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ühtlase võrgu korral

$$d_j = \frac{3}{h^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

järelikult iga $i = 1, 2, \dots, N-1$ korral

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{3}{h^2} \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{a}_{ij} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) = \frac{3}{h^2} [\tilde{a}_{i1} f_0 + (\tilde{a}_{i2} - 2\tilde{a}_{i1}) f_1 \\ &+ \sum_{j=2}^{N-2} (\tilde{a}_{i,j-1} - 2\tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{i,j+1}) f_j + (\tilde{a}_{i,N-2} - 2\tilde{a}_{i,N-1}) f_{N-1} + \tilde{a}_{i,N-1} f_N]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tähistame

$$r := 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s := 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma := -\frac{1}{2r} = -2s = -\left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seose (4.4) kohaselt

$$D_n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}, \quad \frac{D_{n-1}}{r^n} = \frac{1 - \sigma^{2n}}{2 + \sigma}.$$

Seega, kui $1 \leq i \leq j \leq N - 1$, siis

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= \frac{\sigma^{j-i} [D_{i-1}/r^{i-1}] [D_{N-1-j}/r^{N-1-j}]}{|A|/r^{N-2}} = \frac{\sigma^{j-i} [D_{i-1}/r^i] [D_{N-1-j}/r^{N-j}] r^{N-2}}{r^{-2} D_{N-1}} \\ &= \frac{\sigma^{j-i} (1 - \sigma^{2i})(1 - \sigma^{2N-2j})}{(2 + \sigma)(1 - \sigma^{2N})}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Paneme tähele, et seostest (4.7) järeldeb, et kui $1 \leq j \leq N - 1$, $1 \leq i \leq N - 1$, siis kehtib $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et ühtlase võrgu korral on võimalik seoste (4.8) ja (4.9) abil leida suurused M_i , $i = 1, 2, \dots, N - 1$, mis on võrrandisüsteemi (2.8) lahendiks.

5. Numbrilised näited

Toome nüüd numbrilised näited konkreetsete funktsioonide kuupsplainidega interpoleerimisest.

5.1 Näide 1

Olgu interpoleeritav funktsioon antud eeskirjaga

$$f(x) = \sin x - \cos x, \quad x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]. \quad (5.1)$$

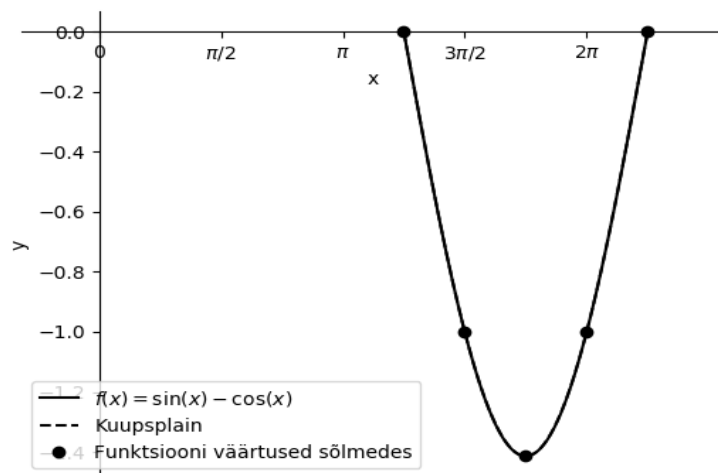
Kuna

$$f''(x) = \cos x - \sin x, \quad x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right],$$

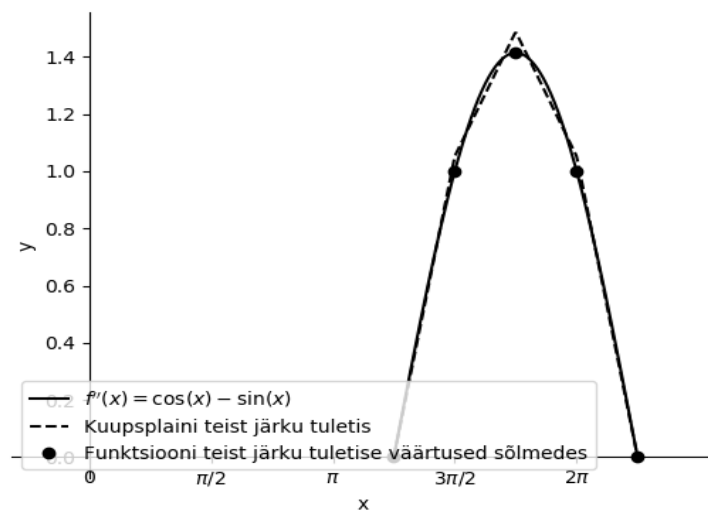
siis funktsioon f on lõigul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]$ kooskõlas interpoleeriva splaini S_Δ rajatingimustega $M_0 = M_N = 0$.

Olgu lõigul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]$ antud ühtlane võrk Δ , mille korral $h = \frac{a-b}{N} = \frac{\pi}{N}$, $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$. Funktsiooni (5.1) interpoleeriva kuupsplaini (kujul (2.4)) ja selle teist järku tuletise (kujul (2.2)) konstrueerimiseks leiame alguses funktsiooni f väärtused võrgu Δ sõlmedes ehk suurused $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Järgmisena määrame suurused M_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ lahendades süsteemi (2.8) Pythoni paketi NumPy sisefunktsiooni `numpy.linalg.solve(a, b)` abil.

Joonistel 5.1 ja 5.2 on esitatud funktsiooni (5.1), selle teist järku tuletise, funktsiooni (5.1) interpoleeriva kuupsplaini S_Δ ja kuupsplaini teise tuletise S''_Δ graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes juhul, kui $N = 4$.



Joonis 5.1: Funktsiooni (5.1) ja teda interpoleeriva kuupsplaini graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes (funktsiooni f ja kuupsplaini graafikud langevad peaaegu kokku).



Joonis 5.2: Funktsiooni (5.1) teist järku tuletise ja teda interpoleeriva kuupsplaini teise tuletise graafikud koos funktsiooni teist järku tuletise väärtustega võrgu Δ sõlmedes.

Järgmistes tabelites on toodud suuruste

$$\varepsilon_N := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_{\Delta}(x_{kj}) - f(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11,$$

$$\varepsilon_N'' := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_{\Delta}''(x_{kj}) - f''(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11$$

arvulised väärtused, kus $x_{kj} = x_j + \frac{kh}{10}$, $k = 0, 1, \dots, 10$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$. Lisaks on toodud ka jagatised $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$ ja $\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$. Kuna funktsiooni f neljandat järku tuletise absoluutne väärtus ei ületa lõigul $[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ suurus 1.4143, siis teoreemi 1 põhjal saame järgmised teoreetilised hinnangud:

$$\max_{x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]} |S_{\Delta}(x) - f(x)| \leq 0.5303625h^4,$$

$$\max_{x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]} |S_{\Delta}''(x) - f''(x)| \leq 0.5303625h^2.$$

Toodud hinnangute põhjal on alust arvata, et suhted $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$ ja $\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$ peaksid lähenema vastavalt arvudele 16 ja 4, kui N kasvab.

N	Teoreetiline viga	ε_N	$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$
4	0.2018	1.5047×10^{-03}	16.8588
8	1.2612×10^{-02}	8.9255×10^{-05}	16.2273
16	7.8825×10^{-04}	5.5003×10^{-06}	16.0576
32	4.9266×10^{-05}	3.4254×10^{-07}	16.0144
64	3.0791×10^{-06}	2.1389×10^{-08}	16.0036
128	1.9244×10^{-07}	1.3365×10^{-09}	15.9926
256	1.2028×10^{-08}	8.3571×10^{-11}	15.8392
512	7.5179×10^{-10}	5.2762×10^{-12}	8.9871
1024	4.6984×10^{-11}	5.8700×10^{-13}	0.6095

Tabel 5.1:

N	Teoreetiline viga	ε''_N	$\frac{\varepsilon''_N}{\varepsilon''_{2N}}$
4	0.3271	7.4086×10^{-02}	4.0560
8	8.1784×10^{-02}	1.8266×10^{-02}	4.0151
16	2.0446×10^{-02}	4.5493×10^{-03}	4.0038
32	5.1115×10^{-03}	1.1362×10^{-03}	4.0010
64	1.2779×10^{-03}	2.8399×10^{-04}	4.0002
128	3.1947×10^{-04}	7.099×10^{-05}	4.0001
256	7.9867×10^{-05}	1.7748×10^{-05}	4.0000
512	1.9967×10^{-05}	4.4370×10^{-06}	3.9999
1024	4.9917×10^{-06}	1.1093×10^{-06}	3.9922

Tabel 5.2:

Tabelitest 5.1 ja 5.2 on näha, et näite 1 korral saadud tulemused on kooskõlas teoreetiliste hinnangutega.

5.2 Näide 2

Olgu interpoleeritav funktsioon antud eeskirjaga

$$f(x) = \cos 3x + \frac{9}{2}x^2 - 2x, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (5.2)$$

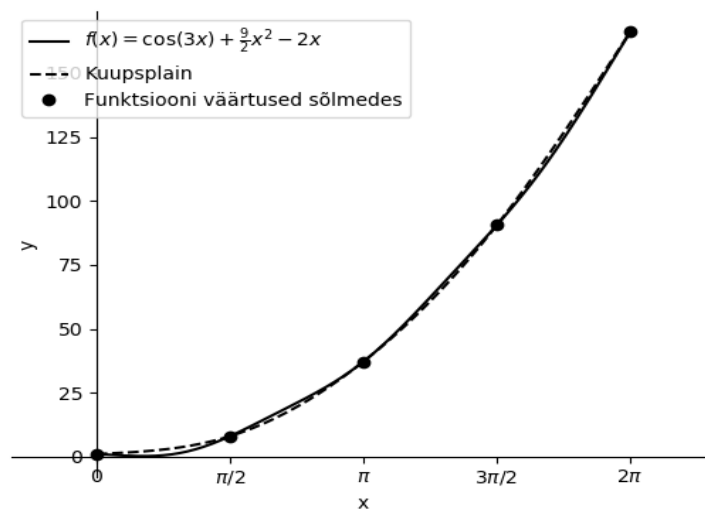
Kuna

$$f''(x) = 9 - 9 \cos(3x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

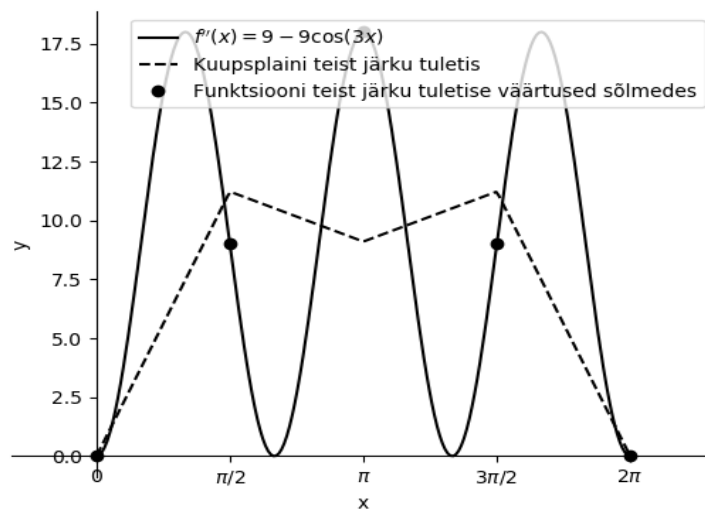
siis funktsioon f on lõigul $[0, 2\pi]$ kooskõlas teda interpoleeriva splaini S_Δ rajatimustega $M_0 = M_N = 0$.

Olgu lõigul $[0, 2\pi]$ antud ühtlane võrk Δ , mille korral $h = \frac{a-b}{N} = \frac{2\pi}{N}$, $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$. Funktsiooni (5.2) interpoleeriva kuupsplaini (kujul (2.4)) ja selle teist järku tuletise (kujul (2.2)) konstrueerimiseks leiame alguses funktsiooni f väärtused võrgu Δ sõlmedes ehk suurused $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Järgmisena määrame suurused M_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ lahendades süsteemi (2.8) Pythoni paketi NumPy sisefunktsiooni `numpy.linalg.solve(a, b)` abil.

Joonistel 5.3 ja 5.4 on esitatud funktsiooni (5.2), selle teist järku tuletise, funktsiooni (5.1) interpoleeriva kuupsplaini S_Δ ja kuupsplaini teise tuletise S''_Δ graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes juhul, kui $N = 4$.



Joonis 5.3: Funktsiooni (5.2) ja teda interpoleeriva kuupsplaini graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes.



Joonis 5.4: Funktsiooni (5.2) teist järku tuletise ja teda interpoleeriva kuupsplaini teise tuletise graafikud koos funktsiooni teist järku tuletise väärtustega võrgu Δ sõlmedes.

Järgmistes tabelites on toodud

$$\varepsilon_N := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_\Delta(x_{kj}) - f(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11,$$

$$\varepsilon_N'' := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_\Delta''(x_{kj}) - f''(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11$$

arvulised väärtused, kus $x_{kj} = x_j + \frac{kh}{10}$, $k = 0, 1, \dots, 10$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$. Lisaks on toodud ka jagatised $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$ ja $\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$. Kuna funktsiooni neljandat järku tuletise absoluutne väärtus ei ületa lõigul $[0, 2\pi]$ suurst 81, siis teoreemi 1 põhjal saame teoreetilised hinnangud

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |S_\Delta(x) - f(x)| \leq 30.375h^4,$$

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |S_\Delta''(x) - f''(x)| \leq 30.375h^2.$$

Toodud hinnangute põhjal on alust arvata, et suhted $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$ ja $\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$ peaksid lähenema vastavalt arvudele 16 ja 4, kui N kasvab.

N	Teoreetiline viga	ε_N	$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$
4	184.9251	2.2520	9.0360
8	11.5578	2.4923×10^{-01}	18.5810
16	0.7224	1.3413×10^{-02}	16.8764
32	4.5148×10^{-02}	7.9479×10^{-04}	16.2167
64	2.8217×10^{-03}	4.9010×10^{-05}	16.0560
128	1.7636×10^{-04}	3.0524×10^{-06}	16.0141
256	1.1022×10^{-05}	1.9061×10^{-07}	16.0036
512	6.8890×10^{-07}	1.1910×10^{-08}	15.8603
1024	4.3056×10^{-08}	7.5096×10^{-10}	15.2376

Tabel 5.3:

N	Teoreetiline viga	ε''_N	$\frac{\varepsilon''_N}{\varepsilon''_{2N}}$
4	74.9473	10.825	2.6081
8	18.7368	4.1506	3.8419
16	4.6842	1.0803	3.7345
32	1.1711	2.8929×10^{-01}	3.6199
64	0.2928	7.9918×10^{-02}	3.9058
128	7.3191×10^{-02}	2.0461×10^{-02}	3.9765
256	1.8298×10^{-02}	5.1456×10^{-03}	3.9941
512	4.5744×10^{-03}	1.2883×10^{-03}	3.9985
1024	1.1436×10^{-03}	3.2219×10^{-04}	3.9997

Tabel 5.4:

Tabelitest 5.3 ja 5.4 on näha, et näite 2 korral saadud tulemused on kooskõlas teoreetiliste hinnangutega.

5.3 Näide 3

Olgu interpoleeritav funktsioon antud eeskirjaga

$$f(x) = \sin(\sqrt{3}x) - \cos(x), \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (5.3)$$

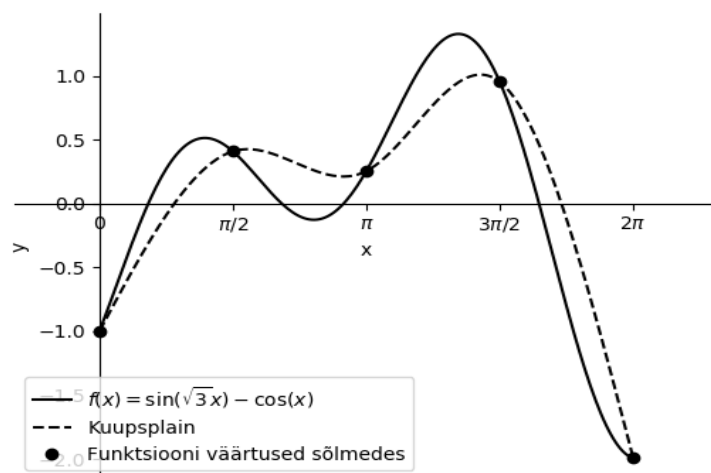
Kuna

$$f''(x) = \cos(x) - 3\sin(\sqrt{3}x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

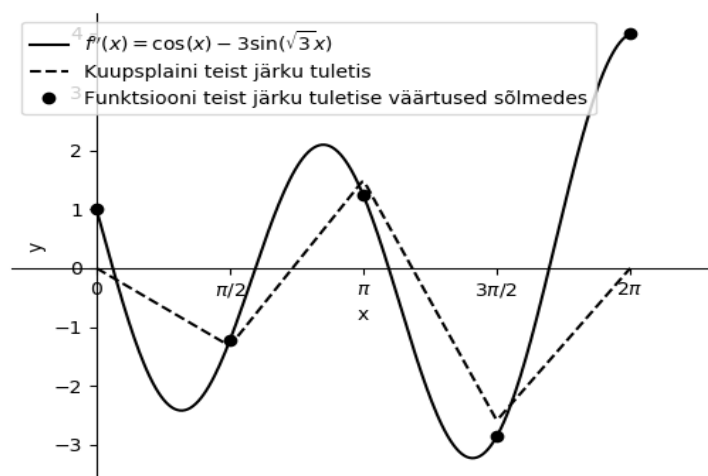
siis funktsioon f ei ole lõigul $[0, 2\pi]$ kooskõlas teda interpoleeriva splaini S_Δ raja-tingimustega $M_0 = M_N = 0$, sest $f''(0) = 1$ ja $f''(2\pi) = 3.9809$.

Olgu lõigul $[0, 2\pi]$ antud ühtlane võrk Δ , mille korral $h = \frac{a-b}{N} = \frac{2\pi}{N}$, $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$. Funktsiooni (5.3) interpoleeriva kuupsplaini (kujul (2.4)) ja selle teist järku tuletise (kujul (2.2)) konstrueerimiseks leiame alguses funktsiooni f väärtused võrgu Δ sõlmedes ehk suurused $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Järgmisena määrame suurused M_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ lahendades süsteemi (2.8) Pythoni paketi NumPy sisefunktsiooni `numpy.linalg.solve(a, b)` abil.

Joonistel 5.5 ja 5.6 on esitatud funktsiooni (5.3), selle teist järku tuletise, funktsiooni (5.1) interpoleeriva kuupsplaini $S_\Delta(x)$ ja kuupsplaini teise tuletise $S''_\Delta(x)$ graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes juhul, kui $N = 4$.



Joonis 5.5: Funktsiooni (5.3) ja teda interpoleeriva kuupsplaini graafikud koos funktsiooni väärtustega võrgu Δ sõlmedes.



Joonis 5.6: Funktsiooni (5.3) teist järku tuletise ja teda interpoleeriva kuupsplaini teise tuletise graafikud koos funktsiooni teist järku tuletise väärtustega võrgu Δ sõlmedes.

Järgmistes tabelites on toodud

$$\varepsilon_N := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_{\Delta}(x_{kj}) - f(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11,$$

$$\varepsilon_N'' := \max_{\substack{j=0,1,\dots,N-1 \\ k=0,1,\dots,10}} |S_{\Delta}''(x_{kj}) - f''(x_{kj})|, \quad N = 2^i, \quad i = 2, 3, \dots, 11$$

arvulised väärtused, kus $x_{kj} = x_j + \frac{kh}{10}$, $k = 0, 1, \dots, 10$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$. Lisaks on toodud ka jagatised $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$ ja $\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$.

N	ε_N	$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}$
4	7.1329×10^{-01}	4.8965
8	1.4567×10^{-01}	4.6069
16	3.1621×10^{-02}	4.1523
32	7.6152×10^{-03}	4.0380
64	1.8859×10^{-03}	4.0095
128	4.7035×10^{-04}	4.0024
256	1.1752×10^{-04}	4.0006
512	2.9375×10^{-05}	4.0001
1024	7.3436×10^{-06}	4.0000

Tabel 5.5:

N	ε_N''	$\frac{\varepsilon_N''}{\varepsilon_{2N}''}$
4	4.0273	1.0116
8	3.9809	1
16	3.9809	1
32	3.9809	1
64	3.9809	1
128	3.9809	1
256	3.9809	1
512	3.9809	1
1024	3.9809	1

Tabel 5.6:

Kuna näite 3 korral ei ole teoreemi 1 eeldused täidetud, siis teoreetilised hinnangud ei pruugi kehtida. Tabelitest 5.5 ja 5.6 näeme, et see on nii: vead vähenevad tunduvalt aeglasemalt, kui näidetes 1 või 2.

Kirjandus

- [1] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*. Academic Press, New York and London, 1967.
- [2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I*. "Valgus", Tallinn, 1982.
- [3] M. Kilp, *Algebra I*. Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
- [4] A. Koovit, *Interpoleerimine kuupsplainidega*. Bakalaurusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2013.
- [5] R. Palm, *Diskreetse matemaatika elemendid*. Tartu Ülikool, Tartu, 2009.
- [6] A. Pedas, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*. Tartu Ülikool, Tartu, 2011.
- [7] E. Tamme, *Arvutusmeetodid I*. "Valgus", Tallinn, 1973.
- [8] M. Vikerpuur, *Interpoleerimine kuupsplainidega splaini teise ja eelviimase sõlmega seotud rajatingimuste korral*. Bakalaurusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2009.
- [9] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*. Наука, Москва, 1980.

Lisa

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as sc

a=5*np.pi/4
b=9*np.pi/4          #otspunktid
n=4                  #osalõikude arv

def f(x):             #interpoleeritav funktsioon
    return np.sin(x)-np.cos(x)
def df(x):            #funktsiooni teist järku tuletis
    return -np.sin(x)+np.cos(x)

def d4f(x):           #funktsiooni neljandat järku
    tuletise absiluuvtväärtuse vastandväärtus
    return -np.abs(np.sin(x)-np.cos(x))

def S(N,x):           #interpoleeriv kuupsplain
    h=(b-a)/N         #osalõikude pikkus
    X=np.linspace(a,b,N+1) #sõlmed
    Y=f(X)             #funktsiooni väärtused sõlmedes
    A=np.zeros((N-1,N-1)) #kordajate maatriks
    d=np.zeros(N-1)    #vabaliige

    for j in range(len(d)):
        A[j][j]=2
        if not j==len(d)-1:
            A[j][j+1]=0.5
        A[j][j-1]=0.5
        d[j]=6*((Y[j+2]-Y[j+1])/h-(Y[j+1]-Y[j])/h)/(2*h)
```

```

A[0][-1]=0

M=np.zeros(N+1)          #kordajad

M[1:-1]=np.array(np.linalg.solve(A,d))
try:
    for j in range(1,N+1):
        if X[j-1]<=x and x<=X[j]:
            return (M[j]/(6*h))*(x-X[j-1])**3+(M[j-1]/(6*h))*(X[j]-x)**3+(Y[j]-(M[j]*h**2)/6)*(x-X[j-1])/h+(Y[j-1]-(M[j-1]*h**2)/6)*(X[j]-x)/h
        else:
            continue
except:
    list=[]
    for k in x:
        if b==k:
            list.append((M[-2]/(6*h))*(b-k)**3+Y[-1]*(k-X[-2])/h+(Y[-2]-(M[-2]*h**2)/6)*(b-k)/h)
        break
    for j in range(N+1):
        if X[j-1]<=k and k<X[j]:
            list.append((M[j]/(6*h))*(k-X[j-1])**3+(M[j-1]/(6*h))*(X[j]-k)**3+(Y[j]-(M[j]*h**2)/6)*(k-X[j-1])/h+(Y[j-1]-(M[j-1]*h**2)/6)*(X[j]-k)/h)
        else:
            continue
    return np.array(list)

def dS(N,x):
    teist järku tuletis          #interpoleeriva kuupsplaini
    h=(b-a)/N                    #osalõikude pikkus
    X=np.linspace(a,b,N+1)      #sõlmed
    Y=f(X)                       #funktsiooni väärtused sõlmedes
    A=np.zeros((N-1,N-1))      #kordajate maatriks
    d=np.zeros(N-1)            #vabaliige

```

```

for j in range(len(d)):
    A[j][j]=2
    if not j==len(d)-1:
        A[j][j+1]=0.5
    A[j][j-1]=0.5
    d[j]=6*((Y[j+2]-Y[j+1])/h-(Y[j+1]-Y[j])/h)/(2*h)
A[0][-1]=0

M=np.zeros(N+1)          #kordajad

M[1:-1]=np.array(np.linalg.solve(A,d))
try:
    if x==a or x==b:
        return 0
    for j in range(1,N+1):
        if X[j-1]<=x and x<=X[j]:
            return M[j]*(x-X[j-1])/h+M[j-1]*(X[j]-x)/h
        else:
            continue
except:
    list=[]
    for k in x:

        if b==k:
            list.append(0)
            break
        for j in range(N+1):
            if X[j-1]<=k and k<X[j]:
                list.append(M[j]*(k-X[j-1])/h+M[j-1]*(X[j]-k)/h)
            else:
                continue

    return np.array(list)

def viga(N):          #interpoleeriva kuupsplaini
    viga
    x=np.linspace(a,b,10*N+1)
    vaartused=S(N,x)
    return np.amax(np.absolute(vaartused-f(x)))

```

```

def dviga(N):
    #interpoleeriva kuupsplaini
    teist järku tuletise viga
    x=np.linspace(a,b,10*N+1)
    vaartused=dS(N,x)
    return np.amax(np.absolute(vaartused-df(x)))

t=np.linspace(a,b,200)
s=S(4,t)
ds=dS(4,t)

c=np.linspace(a,b,n+1)

ax = plt.gca()
#teljestik
ax.spines[ 'right' ].set_color( 'none' )
ax.spines[ 'top' ].set_color( 'none' )
ax.xaxis.set_ticks_position( 'bottom' )
ax.spines[ 'bottom' ].set_position( ( 'data' ,0) )
ax.yaxis.set_ticks_position( 'left' )
ax.spines[ 'left' ].set_position( ( 'data' ,0) )
plt.xticks([0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2, 2*np.pi],
            [r'$0$', r'$\pi/2$', r'$\pi$', r'$3\pi/2$', r'$2\pi$'])

plt.xlim(-1,b+1)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.plot(t, f(t), 'k-', label=r'$f(x)=\sin(x)-\cos(x)$')
plt.plot(t, s, 'k--', label='Kuupsplain')
plt.plot(c, f(c), 'ko', label='Funktsiooni_väärtused_sõlmedes')
plt.legend()

plt.figure()
ax = plt.gca()
#teljestik
ax.spines[ 'right' ].set_color( 'none' )
ax.spines[ 'top' ].set_color( 'none' )

```

```

ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['left'].set_position(('data',0))
plt.xticks([0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2, 2*np.pi],
            [r'$0$', r'$\pi/2$', r'$\pi$', r'$3\pi/2$', '$2\pi$'])

plt.xlim(-1,b+1)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.plot(t, df(t), 'k-', label=r'$f'(x)=\cos(x)-\sin(x)$')
plt.plot(t, ds, 'k--', label='Kuupsplaini_tleist_järku_tuletis')
plt.plot(c, df(c), 'ko', label='Funktsiooni_tleist_järku_tuletise_väärtused_sõlmedes')
plt.legend()

plt.show()

en=np.zeros(10) #kuupsplaini vead juhtudel N=4,8,...,2048
den=np.zeros(10) #kuupsplaini teist järku tuletise vead juhtudel N=4,8,...,2048

for i in range(2,2+len(en)):
    en[i-2]=viga(2**i)
    den[i-2]=dviga(2**i)

print('Kuupsplaini_vead_juhtudel_N=4,8,...,2048')
print(en)

print('Kuupsplaini_vigade_jagatise_juhtudel_N=4,8,...,2048')
for i in range(1,len(en)):
    print((en[i-1])/(en[i]), 'N='+str(2**(i+1)))

print('Kuupsplaini_tleist_järku_tuletise_vead_juhtudel_N

```

```

    =4,8,...,2048')
print(en)

print('Kuupsplaini_tleist_järku_tuletise_vigade_jagatise_d_
juhtudel_N=4,8,...,2048')
for i in range(1,len(en)):
    print((en[i-1])/(en[i]), 'N='+str(2**(i+1)))

C=-sc.minimize(d4f,7*np.pi/4,bounds=[(a,b)]).fun[0]#
    funktsiooni neljandat järku tuletise maksimaalne väärtus
    (absoluutselt)
print('Kuupsplaini_teoreetiline_hinnangud_juhtudel_N
=4,8,...,2048')
for i in range(2,2+len(en)):
    print(3*C*(((b-a)/(2**i))**4)/8, 'N='+str(2**i))
print('Kuupsplaini_tleist_järku_tuletise_teoreetiline_
hinnangud_juhtudel_N=4,8,...,2048')
for i in range(2,2+len(en)):
    print(3*C*(((b-a)/(2**i))**2)/8, 'N='+str(2**i))

```

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Patrik Nukka,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Funktsioonide lähendamine kuupsplainidega, kus splaini teise tuletise väärtused rajapunktides on võrdsed nulliga", mille juhendajad on lektor Kaido Lätt ja professor Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Patrik Nukka
08.05.2019