



Kõrgem matemaatika

II

Tallinn
1966

TALLINNA POLITEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

KÕRGE MATEMAATIKA

PROGRAMM, METOODILINE JUHEND JA KONTROLLTÖÖD

II kursuse kaugõpilastele

Koostajad H.Roos ja T.Jõgi

Tallinn
1966

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

В Ы С Ш А Я М А Т Е М А Т И К А

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
для студентов-заочников II курса

Составители Х.Роос и Т.Ильги
На эстонском языке

F₂

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

76962

ARHIIVKOGU

Trükkimisele antud 27. VIII 66. Paber 60x84, 1/16
Trükipg. 2,25. Tingtrükipg. 2,09
Tiraaž 1500 eks. Tell. nr.333
TPI rotaprint, 1966
Tasuta

SISSEJUHATUS

Juhend on koostatud vastavalt N. Piskunovi õpikutele: "Diferentsiaal- ja integraalarvutus" I, Tallinn 1965 (tekstis lühendatult P I) ja "Diferentsiaal- ja integraalarvutus" II, Tallinn 1966 (tekstis lühendatult P II) ning I. Peterseni ja H. Roosi "Kõrgema matemaatika ülesannete kogule" I (1962) ja II (1961) (tekstis lühendatult PR I ja PR II).

Õpikust võetud ülesannete lahendamine on miinimumnõudeks kursuse läbitöötamisel. Kursuse täielikuks omandamiseks on soovitatav läbi töötada näidatud ülesanded ka ülesannete kogudest PR I ja PR II.

Sügissemestril käsitletav kõrgem matemaatika III haarab teemad: üldintegraal, määratud integraal, määratud integraali rakendusi ja mitme muutuja funktsioonid.

Kevadsemestril käsitletav kõrgem matemaatika IV hõlmab teemad: kahe- ja kolmekordne integraal, joonintegraal, pindintegraal ja diferentsiaalvõrrandid.

ÜLDINTEGRAAL EHK MÄÄRAMATA INTEGRAAL

Antud funktsiooni algfunktsioon. Ülesanded, mis viivad üldintegraali mõistele. Üldintegraal ja selle lihtsamaid omadusi. Üldintegraalide põhivalemid. Integreerimise üldvõtteid: summa integreerimine, ositi integreerimine, integreerimine asendusvõttega.

Ratsionaalsete murdfunktsioonide lahutamine osamurdudeks. Ratsionaalsete murdfunktsioonide integreerimine. Trigonomeetriliste ja irratsionaalsete funktsioonide integreerimine. Näiteid üldintegraalidest, mis pole avaldatavad elementaarfunktsioonide kaudu.

Enne kui asuda kõne all oleva teema õppimisele, peavad hästi peas olema diferentseerimise põhivalemid.

Teemat käsitletakse õpiku P I peatükis X. Nimetatud peatükist tuleb hästi ära õppida §-d 1-9, 11, 14, 15 ja 16. Ara võib jätta §-d 10 ja 13.

Integreerimise põhivalemid, mis on antud § 2, tuleb kindlasti pähe õppida.

Rohkesti tähelepanu pööratagu murdratsionaalse funktsiooni integreerimisele (§ 5 - I ja II, §-d 7, 8 ja 9), sest väga suur osa irratsionaalseid, trigonomeetrilisi ja muid funktsioone teisendatakse enne integreerimist muutuva vahetamisega murdratsionaalseteks funktsioonideks.

Irratsionaalsete funktsioonide integreerimisel on mõnikord õpikus antud trigonomeetriliste teisenduste (§ 15) asemel sobivam kasutada hüperboolseid teisendusi, mis on näidatud ülesannete kogus PR I, lk. 190 valemite (31) ja (32). Hüperboolsete funktsioonide definitsioonid on antud samas ülesannete kogus lk. 113. Nendest definitsioonidest võib järeldada hüperboolsete funktsioonide niisuguseid omadusi, mis mõnikord kergendavad integreerimist:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1),$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + c.$$

Sageli võib antud üldintegraali avaldamiseks kasutada mitut eri võtet ja igale võttele vastavalt saada ka erineva vastuse. Kuid kõik saadud vastused erinevad üksteisest ainult konstantse liidetava võrra, kuigi see alati pole silmanähtav.

Näiteks, kui $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ lahendamiseks kasutada

teisendust $t = x + 1$, siis saame $I = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c =$

$= \arctan(x + 1) + c$, kui aga kasutada teisendust $x = \frac{2}{z - 1}$

ehk $z = \frac{2 + x}{x}$, saame $I = - \int \frac{dz}{1 + z^2} = \arctan z + c =$
 $= \arctan \frac{2 + x}{x} + c.$

Saadud vastustest pole otsekohe näha, et nad erineksid ainult konstantse liidetava võrra. Kui aga lugeda suvalisi konstante mõlemas vastuses võrdseteks ja esimesest vastusest lahutada teine, siis saame: $\arctan(x + 1) - (-\arctan \frac{2 + x}{x})$,

millest $\tan [\arctan(x + 1) + \arctan \frac{2 + x}{x}] =$

$$= \frac{\tan \arctan(x + 1) + \tan \arctan \frac{2 + x}{x}}{1 - \tan \arctan(x + 1) \cdot \tan \arctan \frac{2 + x}{x}} =$$

$$\frac{x + 1 + \frac{2 + x}{x}}{1 - (x + 1) \cdot \frac{2 + x}{x}} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x^2 - 2x - 2} = -1.$$

Et $\tan(\frac{3\pi}{4} + k\pi) = -1$, kus k on täisarv ja

$$-\pi < \arctan \alpha - \arctan \beta < \pi,$$

siis

$\arctan(x+1) - (-\arctan \frac{2+x}{x}) = \frac{3x}{4} + k\pi$, kus $k=0$
või -1. Järelikult erinevadki saadud üldintegraalid konstandi võrra.

Üliõpilane peab olema teadlik, et üldintegraal avaldub elementaarsetes funktsioonides ainult eriti valitud funktsioonide kaudu. § 16 on toodud näiteid üsna lihtsatest funktsioonidest, mille integraalid ei avaldu elementaarfunktsioonide kaudu.

Ülesannete kogust PR I tuleks läbi töötada näited
I - XVI, lk.191-205 ja lahendada ülesanded: 1033 - 1035,
1037, 1038, 1042, 1043, 1045, 1048, 1049, 1052, 1053, 1057,
1058, 1063, 1066, 1073, 1078, 1080, 1084, 1085, 1087, 1098,
1092, 1094, 1095, 1102, 1107, 1108, 1109, 1114, 1116, 1119,
1125, 1126, 1131, 1132, 1141, 1145, 1150, 1151, 1154, 1156,
1158, 1166, 1168, 1171, 1175, 1181, 1186, 1192, 1194, 1198,
1200, 1202, 1204, 1209, 1220, 1221, 1224, 1226, 1228, 1232,
1236, 1239, 1244, 1251.

MÄÄRATUD INTEGRAAL

Ülesanded, mis viivad määratud integraali mõistele. Pideva funktsiooni määratud integraal kui summa piirväärtus, selle olemasoluteoreemi sõnastus (ilma tõestuseta). Määratud integraali lihtsamaid omadusi, keskvaertusteoreem.

Määratud integraali tuletis ülemise raja järgi. Määratud integraali ja üldintegraali vaheline seos. Newton-Leibnizi valem.

Määratud integraali arvutamine muutuja vahetusega ja ositi integreerimisega.

Lõpliku arvu katkevuskohadega (tõkestatud kui ka tõkestamata) funktsioonide integreerimine. Lõpmatu rajaga püratu integraal, võrdlusprintsip, absoluutne ja tingimisi koonduvus.

Määratud integraali on käsitletud õpiku P I XI peatükis §-d 1 - 7.

Määratud integraali omadustest tuleks esile tõsta 6. oma-

dust (lk.388), mis võimaldab integreerida praktiliselt kullaltki sageli esinevaid mitteelementaarseid funktsioone, nagu

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{kui } 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

seega

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_1^2 2 dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = 3 + \pi. \end{aligned}$$

Määratud integraali arvutamiseks muutuja vahetuse abil on kaks võimalust. Üldintegraali võib avaldada uue muutuja kaudu, saadud funktsioon teisendada tagasi esialgse muutuja funktsiooniks ning alles seejärel arvutada integraal Newton-Leibnizi valemi abil. Niisugusel juhul pole vaja integraali rajasid muuta. Sel viisil on lahendatud ülesannete kogus PR I näide II, lk. 223. Sageli on aga uue muutuja kaudu leitud üldintegraali tülikas teisendada esialgse muutuja funktsiooniks, kohasem on teisendada integraali rajasid uuele muutujale vastavaks.

Nii on lahendatud õpikus P I, lk. 394 toodud näide ja ülesannete kogus PR I näide VII, lk. 226.

Kui määratud integraali $\int_a^b f(x) dx$ arvutamisel kasutada muutuja teisendust $u = \varphi(x)$, siis peab sellel funktsioonil vahemikus $a \leq x \leq b$ olema üks ja seesama pöördfunktsioon $x = \psi(u)$. Näiteks $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$.

Kui aga selle integraali arvutamiseks kasutada teisendust $u = x^2$, siis vahemikus $-1 \leq x < 0$ $x = -\sqrt{u}$, $dx = -\frac{du}{2\sqrt{u}}$, vahemikus $0 \leq x \leq 2$ aga $x = \sqrt{u}$ ja $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Seetõttu tuleb antud integraal kõigepealt teisendada summaks ja siis kumbagi liidetavat eraldi integreerida:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x^2 dx &= \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx = \int_1^0 u \left(-\frac{du}{2\sqrt{u}}\right) + \int_0^4 u \frac{du}{2\sqrt{u}} = \\&= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} du + \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \sqrt{u} du + \int_0^4 \sqrt{u} du \right] = \\&= \frac{1}{3} \left\{ [u\sqrt{u}]_0^1 + [u\sqrt{u}]_0^4 \right\} = \frac{1}{3} (1 + 4 \cdot 2) = 3.\end{aligned}$$

Jättes aga tähele panemata, et funktsioonil $u = x^2$ on vahemikus $-1 \leq x \leq 2$ kaks erinevat pöördfunktsiooni, saaksime vale vastuse: $du = 2x dx$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ ja

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \int_1^4 u \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_1^4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Määratud integraali arvutamine lihtsustub tunduvalt, kui integreerimise piirkond on sümmeetriline nullpunkti suhtes ja integreeritav funktsioon on kas paaritu-või paarisfunktsioon.

Olgu näiteks $f(x)$ paaritufunktsioon, s.o. $f(-x) = -f(x)$, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Tehes nüüd esimeses integraalis asenduse $x = -y$, $dx = -dy$, saame:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-y)(-dy) = \int_a^0 f(y) dy = -\int_0^a f(y) dy = \\&= -\int_0^a f(x) dx \text{ (kui asendada } y = x). \text{ Seega}\end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Kui $f(x)$ on paarisfunktsioon, s.o. $f(-x) = f(x)$, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Tehes esimeses integraalis asenduse $x = -y$, saame:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y)(-dy) = - \int_a^0 f(y) dy = \int_0^a f(y) dy = \int_0^a f(x) dx.$$

Seega

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Niisiis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{kui } f(x) \text{ on paarisfunktsioon} \\ 0, & \text{kui } f(x) \text{ on paaritufunktsioon.} \end{cases}$$

Päratute integraalide puhul peab teadma mõlema tüübi definitsiooni ja mõistma, et siin ei ole tegemist tavaliste määratud integraalidega. Seetõttu tehtagu endale selgeks, et piirväärtuste arvutamine on vältimatu ning antud rajade vahetu kasutamine Newtoni-Leibnizi valemis lubamatu.

Ülesannete kogust PR I tuleb läbi töötada § 13, näited I, II, IV - X, XII - XV ja lahendada ülesanded 1265(1), 1266, 1268, 1270, 1273, 1281, 1282, 1285, 1287(1), 1288(1,2), 1290, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299(1), 1301, 1303, 1305, 1309(1,3,5), 1310, 1312, 1315, 1322, 1325, 1327, 1329, 1333, 1335, 1341, 1343, 1344, 1347, 1349, 1351, 1352, 1356, 1358, 1364, 1366, 1368, 1382, 1383, 1387, 1390, 1391.

MÄÄRATUD INTEGRAALI RAKENDUS I

Määratud integraali rakendamine geomeetriliste ja füüsikaliste suuruste leidmiseks.

Pindala arvutamine rist- ja polaarkoordinaatides. Keha ruumala arvutamine pralleellõigete pindalade kaudu. Kaare pikkuse arvutamine. Pöördpinna pindala arvutamine.

Lihtsamad füüsikalise sisuga ülesanded.

Määratud integraali rakendus I on käsitletud õpiku P I peatükis XII, millest tuleb õppida kõik §-d 1 - 8.

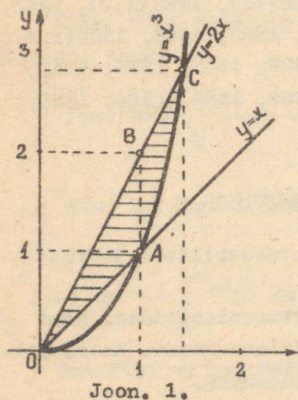
Käesolev teema peab andma üliõpilasele kindla veendumuse, et määratud integraali mõiste on mõõdapähsmatult vajalik väga mitmesuguste suuruste mõõtmisel.

Ülesannete kogust PR I tuleb läbi töötada § 14 näited I - XVI ja lahendada ülesanded 1407, 1408, 1409, 1411, 1412, 1417, 1421, 1423, 1427, 1429, 1431, 1437, 1441, 1443, 1447, 1451, 1455, 1460, 1462, 1467, 1470, 1473, 1475, 1478, 1483, 1487, 1488, 1490, 1495, 1507, 1511, 1517, 1520, 1527,

Geomeetrilise sisuga ülesannete lahendamisel tuleb erilist tähelepanu pöörata rajade õigele määramisele. Näiteks õpiku P I harjutuses nr.9 moodustab viirutatud pindala OACB (joon. 1) poole uuritavast kujundist (teine, kujutatule sümmeetriline kujundipool on III veerandis). Kolmnurga OAB pindala võib määrata elementaarselt (alus AB = 1, kõrgus 1) $S_1 = \frac{1}{2}$;

$$\text{kujundi ACB pindala } S_2 = \int_1^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx = x^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

Kogu kujundi pindala on seega $S = 2(S_1 + S_2) = \frac{3}{2}$. Tähtis on mõista, et antud kolme joone vahel on nimelt pinnatükk OACB, samuti osata leida joonte lõikepunkte nende võrrandite paari-kaupa koos lahendamisel.

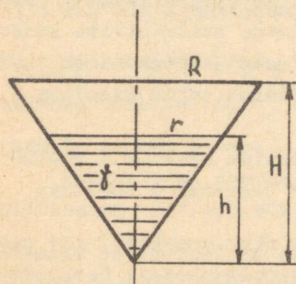


Harjutuses nr.37 ei ole antud rajasid. Nagu võrrandist $(x^{\frac{1}{3}})^2 + (y^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}}$ nähtub, on joon sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, funktsioon on määratud vahemikus $[-a, a]$. Seega on tegemist kinnise kõveraga, millest veerand asub I veerandis rajadega 0 ja a. Leiame funktsiooni $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ tuletise $y' = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{3}$ ja kaare

$$\text{diferentsiaali } ds = \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) x - \frac{2}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

$$s = 4 \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = 6a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = 6a.$$

Füüsikalise sisuga ülesannete lahendamisel on kõige olulisemaks momendiks elementaarkorrutise (osavahemiku pikkuse funktsiooni korrutise) moodustamise oskus. Nende korrutiste summeerimine ja üleminek piirväärtusele, s.o. määratud integraalile, ei valmista tavaliselt mingeid raskusi. Vaatleme õpikus P I toodud harjutust nr.71 (vt. joonis 2). Teataval hetkel on vedeliku tase kõrgusel h . Mingi väikese ajavahemiku jooksul väheneb vedeliku ruumala $\Delta V = -\pi r^2 \Delta h$ võrra. Selle vedelikuhulga tõstmiseks kõrgusele $H - h$ kulub töö $\Delta A = -\pi r^2 \Delta h \gamma (H - h)$ ja kogu tehtav töö on



$$\begin{aligned} A &= - \int_H^0 \pi r^2 \gamma (H - h) dh = \\ &= \frac{\pi \gamma R^2}{H^2} \int_0^H h^2 (H - h) dh = \\ &= \frac{\pi \gamma R^2}{H^2} \left| H \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \right|_0^H = \frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}. \end{aligned}$$

Joon. 2.

MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

Kahe ja kolme muutuja funktsioonid kui punkti funktsioonid. Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline kujutamine: pind, nivoojooned. Skalaarväli. Kolme muutuja funktsiooni nivoo-pinnad.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus. Funktsiooni pidevus antud punktis ja piirkonnas. Lõplikus kinnises piirkonnas pidevate funktsioonide põhiomadused (ilma tõestuseta).

Mitme muutuja funktsiooni osatuletised. Kahe muutuja funktsiooni osatuletiste geomeetiline tähendus.

Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal, tema olemasolu piisavad tingimused. Liitfunktsiooni diferentseerimine, täisdiferentsiaali kaju invariantus. Tuletis antud suunas ja skalaarvälja gradient.

Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Osatuletiste diferentseerimise järjekorrast sõltumatuse teoreemi sõnastus.

Ilmutamata funktsioon, tema olemasolu teoreemi sõnastus. Ilmutamata funktsiooni diferentseerimine. Pinna puutuvtasapind ja -normaal, täisdiferentsiaali geomeetiline tähendus.

Mitme muutuja funktsiooni ekstreemum, ekstreemumi tarvilikud tingimused, piisavate tingimuste sõnastamine (esimese diferentsiaali muutumine nulliks ja teise diferentsiaali märgi muutumatus), nende tingimuste väljendamine osatuletiste kaudu kahe muutuja funktsiooni puhul. Mitme muutuja funktsiooni kõige väiksema ja kõige suurema väärtuse leidmine antud kinnises piirkonnas.

Mitme muutuja funktsioone tuleb õppida õpiku P I peatükist VIII §-d 1-8, 10-15 ja 17 (§ 17 teoreemi 2 tõestuse võib ära jätta).

Maaümas toimuvaü nähtusi uurides on leitud, et enamatel juhtudel üks muutuv suurus ei sõltu mitte ühestainsast teisest muutuvast suurusast, vaid mitmest. Selle tõttu on mitme muutuja funktsioonide teoorial suur praktiline väärtus.

Sõltuvus mitmest muutujast on aga keerulisem kui sõltuvus ühest muutujast. Ühe muutuja funktsioonide uurimist kergendab graafiku kasutamine, mitme muutuja funktsioonide puhul peab aga graafiku asendama mudeliga ja sedagi ainult kahe muutuja funktsioonide korral. Seetõttu võetakse mitme muutuja funktsioonide uurimise lähtekohaks kõige lihtsam juhtum, kahe muutuja funktsioon. Mitme muutuja funktsioonide puhul kehtivad teoreemid tõestatakse kahe muutuja funktsioonide abil.

Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $f'_x(x, y)$ ja $f'_y(x, y)$ on pidevad punktis (x, y) , siis saab funktsiooni täisjuurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

teisendada kujule

$$\Delta z = f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

kus γ_1 ja γ_2 lähenevad nullile Δx ja Δy lähenemisel nullile. Kahe esimese liidetava summa on funktsiooni juurdekasvu poosa ja teda nimetatakse antud funktsiooni täisdiferentsiaaliks ning tähistatakse sümboliga dz :

$$dz = f'_x(x,y) \Delta x + f'_y(x,y) \Delta y$$

või

$$dz = f'_x(x,y) dx + f'_y(x,y) dy.$$

Kui funktsioonil $f(x,y)$ on olemas täisdiferentsiaal, siis nimetatakse funktsiooni diferentseeruvaks.

Praktikas tekib tihti vajadus mitme muutuja funktsiooni ekstreemumi leidmiseks. Sellise ülesande lahendamisel tuleb silmas pidada, et mitme muutuja funktsioonil võib ekstreemum olla kas statsionaarses punktis või punktis, kus funktsioon

pole diferentseeritav. Funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ miinimum on näiteks punktis $(0,0)$, kuid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ selles punktis ei eksisteeri.

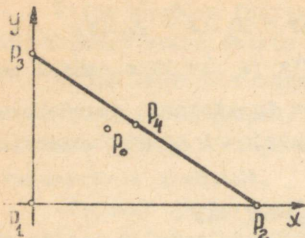
Funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis kinnises piirkonnas võib esineda piirkonnasiseses statsionaarses punktis või piirkonna rajajoonel. Seega tuleb arvutada funktsiooni väärtused statsionaarsetes punktides, piirkonna rajajoonel asuvas ekstreemkohtades ja, juhul kui rajajoon koosneb erineva võrrandiga antud osadest, veel nende osade lõikepunktides. Saadud väärtuste hulgast tuleb valida suurim ja vähim väärtus.

Olgu näiteks vaja leida funktsiooni $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ suurim ja vähim väärtus kolmnurgas, mis on piiratud koordinaattelgedega ja sirgega $2x + 3y - 6 = 0$.

Elkõige leiame funktsiooni statsionaarsed kohad. Neid saame võrrandisüsteemist

$$2x + 4y - 6 = 0$$

$$4x - 2y - 2 = 0.$$



Joon. 3.

Seega on funktsioonil üksainus statsionaarne koht $P_0(1;1)$, mis asub ühtlasi antud piirkonnas (joon.3). Piirkonna rajajoone üksikute osade $y = 0$, $x = 0$ ja $2x + 3y - 6 = 0$ lõikepunktid on $P_1(0;0)$, $P_2(3;0)$ ja $P_3(0;2)$.

Rajajoone osal P_1P_2 on funktsioonil kuju $z = x^2 - 6x$,

mille ekstreemkoha saame võrrandist $2x - 6 = 0$, milles

$x = 3$. Seega P_2 on ühtlasi ka rajajoonel asuvaks ekstreemkohaks.

Rajajoone osal P_1P_3 on funktsioonil kuju $z = -y^2 - 2y$.

Algul P_1P_3 asuva ekstreemkoha ordinaadi saame võrrandist $y - 2 = 0$, milles $y = -1$. Seega ekstreemkoht ei asu antud piirkonnas.

Rajajoone osal P_1P_3 on funktsioonil kuju $z = -9 + 10y - \frac{19}{4}y^2$, mille ekstreemkoha ordinaadi leiame võrrandist $10 - \frac{19}{2}y = 0$, milles $y = \frac{20}{19}$. Seega rajajoonel asuvaks ekstreemkohaks on $P_4(\frac{27}{19}; \frac{20}{19})$.

Et $z(P_0) = -4$, $z(P_1) = 0$,

$z(P_2) = -9$, $z(P_3) = -8$

ja $z(P_4) = -\frac{71}{19}$, siis funktsiooni suurim väärtus antud piirkonnas on 0 ja vähim väärtus -9 .

Ülesannete kogust FR II tuleb läbi töötada § 15, näited I-XII, XIV-XVIII, XXII, XXIV-XXVI ning lahendada ülesanded 1529, 1530, 1533, 1534, 1535, 1538, 1539, 1542, 1544, 1546, 1550 - 1552, 1554, 1557, 1561, 1564, 1565, 1567, 1569, 1570, 1574, 1576, 1577, 1580, 1582, 1583, 1586, 1587, 1588, 1591, 1592, 1594, 1597, 1601, 1603, 1607, 1608, 1611, 1612, 1616, 1619, 1621, 1623, 1626, 1631, 1637, 1642, 1647, 1648, 1650, 1653, 1656, 1657, 1659, 1662, 1665, 1667, 1669, 1672, 1676, 1678 - 1682, 1684, 1685, 1687, 1689, 1691, 1695, 1696, 1698,

1700, 1701, 1703, 1705, 1707, 1711, 1714, 1716, 1725, 1730, 1732, 1737, 1740, 1769, 1770, 1779, 1787, 1791, 1792, 1797, 1798 - 1801, 1804.

KAHE- JA KOLMEKORDNE INTEGRAAL

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad kahekordse integraali mõistele. Kahekordne integraal kui summa piirväärtus, tema olemasolu teoreem. Kahekordse integraali lihtsamaid omadusi, keskvärtuse teoreem.

Kahekordse integraali arvutamine kahe teineteisele järgneva integreerimise teel. Muutuja vahetus kahekordses integraalis, kahekordse integraali avaldamine polaarkoordinaatides. Võrrandiga $z = f(x, y)$ antud pinnatüki pindala arvutamine.

Ülesandeid, mis viivad kolmekordse integraali mõistele. Kolmekordne integraal kui summa piirväärtus, tema lihtsamaid omadusi ja arvutamine.

Muutujate vahetus kolmekordses integraalis, kolmekordse integraali teisendamine silinder- ja sfäärikoordinaatidesse.

Tasapinnaliste ja ruumikujundite momentide ja raskuskeskmete leidmine.

Nimetatud palad on käsitletud õpiku P II XIV peatükis §-d 1 - 5, 7, 9 - 14 (§ 13-st jääb ära 3. lõik, muutujate vahetuse üldjuhtum).

Kahekordse integraali arvutamisel on kõige olulisem osata õigesti määrata integreerimispiirkonda, mis on antud kas võrratustega või piirkonna rajajoonte võrranditega. Soovitav on piirkond skitseerida, joonise abil on tunduvalt kergem määrata õiget integreerimisjärjekorda ja integraali rajasid.

Sama kehtib ka kolmekordse integraali puhul.

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 19 toodud näited I - XIII ja lahendada ülesanded: 2222, 2224, 2227, 2229, 2230, 2232, 2234 - 2236, 2240, 2241, 2243, 2247, 2249, 2250, 2252, 2255, 2257, 2261, 2264, 2265, 2268, 2270, 2272, 2275, 2316, 2322, 2323, 2329, 2336, 2338, 2344, 2346, 2284, 2286, 2287, 2290, 2293, 2299, 2300, 2305, 2307, 2309, 2310, 2339.

JOONINTEGRAAL JA PINDINTEGRAAL

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad joonintegraali mõistele. Joonintegraal kaare pikkuse ja koordinaatide järgi tasapinnal. Joonintegraali lihtsamaid omadusi. Joonintegraali arvutamine tema teisendamisel määratud integraaliks. Vektorfunktsiooni joonintegraal.

Greeni valem. Koordinaatide järgi võetud joonintegraali integreerimise teest sõltumatus tingimused.

Ülesandeid, mis viivad pindintegraali mõistele. Pindintegraali lihtsamaid omadusi. Pindintegraali arvutamine tema kahekordseks integraaliks teisendamise teel. Vektori voog läbi pinna.

Ostrogradski ja Stokesi valemid, nende vektorkuju, divergents ja rootor.

Ülalloetud teemad on käsitletud õpiku P II XV peatükis §-d 1 - 9.

Mitmesuguste mehaanikaülesannete (töö, mass, raskuskeske jne.) lahendamine nõuab uue matemaatilise mõiste - joonintegraali kasutuselevõtmist. Õpikus ongi muutuva jõu poolt tehtava töö arvutamise ülesanne vahetult seotud joonintegraali mõistega koordinaatide järgi. Kaare pikkuse järgi defineeritud joonintegraal on toodud P II § 4 lõpus märkusena. Kui funktsiooni $X(x,y)$ vaadelda joone L tihedusena, on selle integraali füüsikaliseks tähenduseks joone L mass.

Greeni valemi rakendamisel, aga samuti ka joonintegraali arvutamisel, kui see ei sõltu integreerimisteest, tuleb alati meeles pidada tingimusi, millal need valemid ja seosed kehtivad: piirkonnas D ja selles asetseval joonel (või joontel) L peavad funktsioonid $X(x,y)$ ja $Y(x,y)$, aga ka nende osatuletised olema pidevad. Selles mõttes on õpetlik läbi uurida PR II § 20, näide VI.

Kui joonintegraal $\int_M^N X dx + Y dy$ ei sõltu integreeri-

misteest, on $X dx + Y dy = dU$, kus $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ ja $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Seega võib joonintegraali arvutada ka funktsiooni $U(x,y)$ abil tema väärtuste vahena punktides N ja M . Funktsiooni $U(x,y)$ võib leida ka nii:

$\int X dx = V(x,y) + \varphi(y)$, kuna osatuletises $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ on "kaduma läinud" $U(x,y)$ liikmed, mis sõltuvad ainult muutujast y . Nuud $\frac{\partial U}{\partial y} = Y = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$, millest

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \int \left[Y - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \right] dy, \text{ seega } U(x,y) = \\ &= V(x,y) + \varphi(y).\end{aligned}$$

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi tõstada § 20 näited I - IX ja § 21 näited II ja III ning lahendada ülesanded 2361 - 2363, 2366, 2368 - 2372, 2380 - 2388, 2392, 2395, 2396, 2403, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2411.

ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÖRRANDID

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesanded, mis nõuavad diferentsiaalvõrrandi koostamist. Harilikud diferentsiaalvõrrandid, diferentsiaalvõrrandi järk, lahend ja integraalkõverad. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ainsuse teoreemi sõnastus, Diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi mõiste. Cauchy' ülesanne, suvaliste konstantide määramine vastavalt antud algtingimustele, üld- ja erilahend. Singulaarse lahendi mõiste. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi geomeetriline tõlgendamine, sihiväli, isokliinid.

Eralduvate muutujatega, homogeensete, lineaarsete ja eksaktsete diferentsiaalvõrrandite integreerimine.

Õpikus P II on käesolevat teemat käsitletud XIII peatükis §-d 1-5, 7, 9 ja 15.

Hakates teemat õppima, tuleb kõigepealt endale selgeks teha diferentsiaalvõrrandi definitsioon, võrrandite liigituse alused,

lahendite liigid ja nende geometriline tähendus.

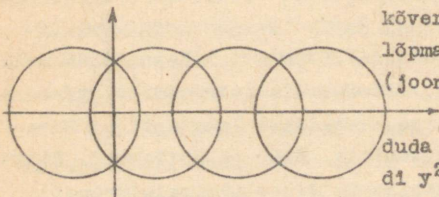
Rakendustes on erilise tähendusega Cauchy' ülesande lahendamise, s.o. diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmine vastavalt antud algtingimustele. Kui võrrandi üldlahend on leitud, tähendab see suvaliste konstantide selliste väärtuste leidmist, mille puhul erilahend rahuldab algtingimusi.

Geomeetriliselt tähendab Cauchy' ülesanne esimest järku diferentsiaalvõrrandi puhul niisuguse integraalkõvera (erilahendi) eraldamist integraalkõverate perest (üldlahendist), mis läbib antud punkti (x_0, y_0) .

Peab silmas pidama, et esimest järku diferentsiaalvõrrandi puhul võib leiduda punkte, mida ei läbi antud võrrandi ükski integraalkõver, samuti aga võib leiduda punkte, mida läbivad mitu või koguni lõpmata palju integraalkõveraid.

Näide 1. Diferentsiaalvõrrandist $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ on näha, et otsitava funktsiooni tuletis pole määratud üheski punktis, kus argument on null. Et antud võrrandi üldlahend on $y = cx$, siis on integraalkõverateks punkti $(0;0)$ läbivad sirged, välja arvatud sirge $x = 0$. Seega läbib koordinaattasapinna iga punkti,

kus $x \neq 0$, üks ja ainult üks integraalkõver, punkti $(x = 0; y \neq 0)$ ei läbi ükski integraalkõver, punkti $(0;0)$ aga kõik, s.o. lõpmata palju integraalkõvera (joon.4).

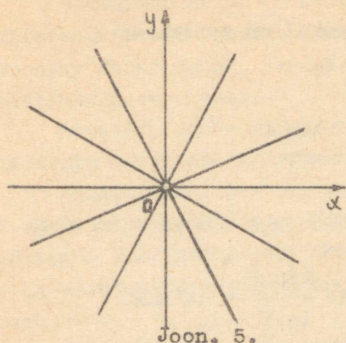


Joon. 4.

Näide 2. Nagu kergesti veenduda võib, on diferentsiaalvõrrandi $y^2(1 + y'^2) = a^2$ ($a > 0$) üldlahend $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ ja isearane lahend, s.o. lahend, mis

pole tuletatav üldlahendist, $y = \pm a$.

Seega on integraalkõverateks võrdsete raadiustega ringid, mille keskpunktid asetsevad x-teljel, ja kaks x-teljega süm-



Joon. 5.

meetrilist sirget, mis on üldlahendiga antud ringjoonte puutujateks (joon. 5).

Kuna üldlahendis

$c = x \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, siis läbib iga punkti, kus $-a < y < a$, kaks integraalringjoont; iga punkti, kus $y = \pm a$, läbib üks ringjoon ja üks sirge ning punkte, kus $y > a$ või

$y < -a$, ei läbi ükski integraalköver. Seega asetsevad kõik integraalköverad ribas, mis on piiratud sirgetega $y = a$ ja $y = -a$.

Näide 3 on toodud diferentsiaalvõrrandi koostamise ja Cauchy' ülesande lahendamise kohta.

100° C kuumendatud keha jahtub ruumis, mille temperatuur on 20° C ja püsib konstantsena kogu jahtumise vältel. 10 minuti pärast oli keha temperatuur 60° C. Millal on keha temperatuur 25° C, kui keha jahtumise intensiivsus on võrdeline jahtuva keha ja keskkonna temperatuuride vahega?

Olgu teataval ajahetkel t jahtuva keha ja keskkonna temperatuuride vahe T , siis jahtumise intensiivsus ("hetkelise kiirus") on $\frac{dT}{dt}$ ja protsessi diferentsiaalvõrrand $\frac{dT}{dt} = kT$, kus k on võrdetegur (mitte suvaline konstant!). Eraldame muutujad ja integreerime:

$$\int \frac{dT}{T} = k \int dt, \quad \ln T = kt + C,$$

saame diferentsiaalvõrrandi üldlahendi. Algtingimuseks on siin asjaolu, et hetkel $t = 0$ on $T = 100 - 20 = 80$, seega saame üldlahendist $c = \ln 80$ ja erilahend on $\ln T = kt + \ln 80$ ehk

$$\ln \frac{T}{80} = kt.$$

Jäab üle määrata võrdetegur (see pole enam algtingimuste rakendamine!): kui $t = 10$, on $T = 60 - 20 = 40$, seega

$$\ln \frac{40}{80} = 10k, \quad k = \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2}.$$

Seega antud jahtumisintensiivsuse puhul on erilahend

$$\ln \frac{T}{80} = \frac{t}{10} \ln \frac{1}{2}$$

ehk

$$t = 10 \frac{\ln \frac{T}{80}}{\ln \frac{1}{2}}.$$

Seega vastus esitatud küsimusele (kui $T = 25 - 20 = 5$):

$$t = 10 \frac{\ln \frac{5}{80}}{\ln \frac{1}{2}} = 10 \frac{\ln \frac{1}{16}}{\ln \frac{1}{2}} = 10 \frac{4 \ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{2}} = 40 \text{ min.}$$

Olulise tähtsusega küsimuseks on ka joontepere diferentsiaalvõrrandi leidmine (vastupidine ülesanne diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmisele). Kui on tegemist n -parameetri- lise joonteperega, tuleb selle võrrandit n korda diferentseerida ja saadud süsteemist elimineerida parameetrid; saadakse võrrand $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Selline elimineerimine on aga võimalik, kui parameetrid on omavahel lineaarselt sõltumatud (vt. PR II § 17, näide II). See aga tähendab, et diferentsiaalvõrrandi üldlahendis konstandid on küll meelevaidsed, aga peavad sealjuures olema lineaarselt sõltumatud. Sellel asja- olul on oluline tähtsus kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite teoorias.

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 17 näited I - IV, VII, VIII ja X ning lahendada ülesanded 1875 - 1877, 1882, 1883, 1885, 1887, 1895, 1899, 1900, 1903, 1906, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1920, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1934, 1936, 1939, 1941, 1942, 1944, 1946 - 1949, 1960, 1961, 1963, 1965, 1970, 1972, 1973, 2043 - 2046.

KÕRGEMAT JARKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Suvalise järguga diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ainsuse teoreemi sõnastus. Cauchy' ülesanne, üldlahend ja erilahend.

Mõnede diferentsiaalvõrrandite integreerimine järgu alan- damise võttega.

Homogeensed ja mittehomogeensed suvalist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid. Lahendite fundamentaalsüsteem ja Wronsky' determinant. Homogeense ja mittehomogeense võrrandi üldlahendi struktuur.

Suvalist järku lineaarsed homogeensed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid, karakteristlik võrrand.

Lineaarsed mittehomogeensed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid, erilahendi leidmine määramatu kordajate võttega. Konstantide variatsioonid meetod. Nimetatud diferentsiaalvõrrandite rakendamine lihtsate võnkumiste uurimiseks, resonants.

Õpikus P II on nimetatud palasid käsitletud XIII peatükis, §-d 16-18, 20-25 ja 28.

Et käesoleva peatüki valdavaks teemaks on lineaarsed diferentsiaalvõrrandid, siis tuleb erilist tähelepanu pöörata lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi struktuurile.

Kui n -järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

n lineaarselt sõltumatut erilahendit on $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, siis üldlahend on

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n,$$

kus $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ on suvalised konstandid.

Võttes ülal antud diferentsiaalvõrrandi paremal pool arvu 0 asemel funktsiooni $f(x)$, saame n -järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x).$$

Kui selle mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üks erilahend on $\bar{y}$, siis üldlahend on selle erilahendi ja vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi summa:

$$y = \bar{y} + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n.$$

Kui kordajad $p_1, p_2, \dots, p_n$ on konstandid, leitakse lineaarse homogeense konstantsete kordajatega n -järku diferentsiaalvõrrandi n lineaarselt sõltumatut erilahendit karakteristliku võrrandi abil (§-d 21 ja 22). Lineaarse mittehomogeense

diferentsiaalvõrrandi üks erilahend leitakse aga kas konstantide või määramatu kordajate võtte abil (§-d 23, 24 ja 25).

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 18 näited I - XII ja lahendada ülesanded 2066, 2068 - 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2086, 2088, 2089, 2091, 2092, 2094, 2096, 2100, 2102, 2103, 2109, 2110, 2113, 2115, 2119, 2120, 2123, 2125, 2127, 2131, 2134, 2137, 2138, 2142, 2144, 2148, 2150, 2153 - 2155, 2160, 2162.

DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi mõiste. Homogeenne lineaarne konstantsete kordajatega süsteem ja selle lahendamine, kui karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad.

Õpikus P II on nimetatud teemat käsitletud XIII peatüki §-des 29 ja 30, kuni esimese näiteni (incl.).

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 18 näited XV ja XVI ning lahendada ülesanded 2205, 2208, 2210, 2212 ja 2214.

KONTROLLTÖÖDE ÜLESANDED

	1.t88	2.t88	3.t88	4.t88
Tähtaeg	1.nov.	10.dets.	1.aprill	10.mai
Ülesannete nr-d	1-50	51-100	101-150	151-190
Ülesannete arv	5	5	5	4

Lahendamiseks valida need ülesanded, mille järjekorranumbri viimane arv ühtib üliõpilase matrikli numbriga viimase arvuga.

Ülesanded 1 - 10 avaldada antud üldintegraal.

1. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}},$

5. a) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx,$

b) $\int \frac{x-3}{x^5 + 2x^3} dx.$

b) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}.$

2. a) $\int x^2 \sqrt{15-x^2-2x} dx,$

6. a) $\int \frac{dx}{4+5 \sin x},$

b) $\int \frac{x^2 - 3x + 20}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} dx.$

b) $\int \frac{4x-3}{5x^2+6x+18} dx.$

3. a) $\int \sqrt{x-x^2} dx,$

7. a) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx,$

b) $\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2-1)^2} dx.$

b) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx.$

4. a) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} dx,$

8. a) $\int \frac{dx}{3+5 \cos x},$

b) $\int \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1} dx.$

b) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx.$

$$9. a) \int \sqrt{4x - x^2} dx$$

$$10. a) \int (\tan x + \cot x)^3 dx,$$

$$b) \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$b) \int \frac{dx}{9x^3 - 6x^2 + x}$$

Ülesanded 11-20 arvutada antud määratud integraal
Newton-Leibnizi valemi abil.

$$11. \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$$

$$16. \int_0^1 (x^2 + x) \ln(x + 1) dx$$

$$12. \int_0^{\ln 2} x e^{2x} dx$$

$$17. \int_0^{\sqrt{3}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

$$13. \int_0^3 x \ln(x + 3) dx$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{8}} (3x^2 - 2x + 5) \sin 4x dx$$

$$14. \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{5}} x^2 \cos 5x dx$$

$$15. \int_0^1 x^5 \arctg x dx$$

$$20. \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$$

Ülesanded 21-30 arvutada antud määratud integraali li-
gikaudne väärtus Simpsoni valemi abil, jaotades integreeri-
misvahemiku 10 võrdseks osaks. Arvutused teha kolmanda küm-
nendkohani ümardatud arvudega.

$$21. \int_0^1 \sqrt{1 + x^3} dx$$

$$24. \int_0^1 \sqrt{2 - x^3} dx$$

$$22. \int_0^1 \sqrt[3]{2 - x^2} dx$$

$$25. \int_0^1 \sqrt[3]{3 - 2x^2} dx$$

$$23. \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$26. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin x} dx$$

$$27. \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^3} dx.$$

$$28. \int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx.$$

$$29. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$30. \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)}.$$

Ülesanded 31-40 arvutada antud joontega piiratud kujundi pindala. Taha joonis.

$$31. y^2 = 16 - 8x \quad \text{ja} \quad y^2 = 24x + 48.$$

$$32. y = x^2 - 3x \quad \text{ja} \quad 3x + y - 4 = 0.$$

$$33. y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

$$34. xy = 6 \quad \text{ja} \quad x + y - 7 = 0.$$

$$35. (x^2 + y^2)^2 = 16x^2 + 9y^2.$$

$$36. y = 2x - x^2 \quad \text{ja} \quad x + y = 0.$$

$$37. (x^2 + y^2)^2 = 2xy.$$

$$38. \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{2} - y^2 = 1.$$

$$39. y = x^2 + 4x \quad \text{ja} \quad y = x + 4.$$

$$40. xy = 4; \quad x = 1; \quad x = 4 \quad \text{ja} \quad y = 0.$$

41. Leida joontega $y = 3$ ja $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje tekkinud keha ruumala.

42. Leida joontega $y = x^2$ ja $2x - y + 3 = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje tekkinud keha ruumala.

43. Arvutada joone $y = \ln x$ kaare pikkus punktide vahel, mille abstsissid on vastavalt $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{8}$.

44. Leida parameetrilisel kujul antud joone $x = \frac{t^6}{6}$,
 $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ kaare pikkus punktide vahel, kus joon lõikab koordinaattelgi.

45. Leida keha ruumala, mis tekib joontega $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje.
46. Leida kõvera $y = \frac{x^2}{2} - 1$ selle osa kaare pikkus, mille lõikab temast abstsissitelg.
47. Leida kõvera $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ kogu pikkus.
48. Leida kõvera $y = \ln(\sin x)$ kaare pikkus punktide vahel, mille abstsissid on vastavalt $\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$.
49. Leida joone $4x^2 + y^2 = 4$ pöörlemisel ümber y -telje tekkinud keha pindala.
50. Leida kõvera $y = \frac{x^3}{3}$ kaare $(-2 \leq x \leq 2)$ pöörlemisel ümber x -telje tekkinud pinna pindala.

Ülesandeis 51-60 esitada antud funktsiooni määramispiirkond võrratuste abil ja kujutada joonisel.

51. $z = \arcsin [2y(1 + x^2) - 1]$.

52. $z = \ln[x \ln(y - x)]$.

53. $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

54. $z = xy + \sqrt{\ln \frac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

55. $z = \ln x - \ln \sin y$.

56. $z = \sqrt{x \sin y}$.

57. $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin (1-y)$.

58. $z = \arcsin \frac{x}{x + y}$.

$$59. \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

$$60. \quad z = \sqrt{\frac{xy}{x^2 - y^2}}.$$

Ülesanded 61-70 kontrollida, kas antud funktsioon u rahuldab nõutud tingimust.

$$61. \quad u = \sin^2(x - at); \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$62. \quad u = e^{-\cos(x + at)}; \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$63. \quad u = \ln[x^2 + (y + 1)^2]; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$64. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$65. \quad u = \frac{y}{x}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$66. \quad u = y \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$67. \quad u = e^{\frac{x}{3}} \cdot (y - \frac{1}{y^2}); \quad y^3 \frac{\partial u}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xu.$$

$$68. \quad u = \sin(x + ay); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$69. \quad u = \cos y + (y - x)\sin y; \quad (x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$70. \quad u = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Ülesanded 71 - 80 leida antud funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas.

71. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3$ ruudus

$$6 \leq x \leq 8; \quad 4 \leq y \leq 6.$$

72. $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y + 4$ ristkülikus

$$0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 2.$$

73. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$ kolmnurgas külgedega

$$x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 1.$$

74. $z = 4xy - 3x^2 - 12y^2 + 4x + 8y + 1$ ruudus

$$0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 3.$$

75. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ kolmnurgas külgedega

$$x = -1; \quad y = -1; \quad x + y = 1.$$

76. $z = 10 + 2xy - x^2$ piirkonnas, mida piiravad jooned

$$y = 4 - x^2 \quad \text{ja} \quad y = 0.$$

77. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$ kolmnurgas külgedega

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{ja} \quad x + y + 2 = 0.$$

78. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6$ ruudus $0 \leq x \leq 4; \quad 0 \leq y \leq 4.$

79. $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y$ ristkülikus

$$0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 3.$$

80. $z = (x^3 - 3x)(2 - y^2)$ ristkülikus $-2 \leq x \leq 2$

$$-1 \leq y \leq 1.$$

Ülesanded 81-90 arvutada antud avaldise ligikaudne väärtus, lähtudes funktsiooni z väärtusest punktis A ja lugedes funktsiooni juurdekasvu ligikaudu võrdseks täisdiferentsiaali-ga.

81. $\sqrt{3,02^2 + 3,98^2}; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad A(3;4).$

82. $\ln[(1,015)^2 + (0,03)^2]; \quad z = \ln(x^2 + y^2); \quad A(1;0).$

83. $\frac{4}{1,03^2 + 2,97^2}; \quad z = \frac{4}{x^2 + y^2}; \quad A(1;3).$

84. $\frac{2,05^2}{2,05^2 + 3,01^2}$; $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; A(2;3).
85. $3,09 \cdot e^{0,09}$; $z = xe^y$; A(3;0).
86. $\sqrt{1,05^3 + 1,98^3}$; $z = \sqrt{x^3 + y^3}$; A(1;2).
87. $\operatorname{arctg} \frac{0,96}{1,05}$; $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; A(1;1).
88. $\sqrt[4]{(2,03)^3 + (1,94)^3}$; $z = \sqrt[4]{x^3 + y^3}$; A(2;2).
89. $\sqrt[3]{(3,95)^2 + (3,03)^2 + 2}$; $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 2}$; A(4;3).
90. $\sqrt[5]{(2,95)^3 + (2,03)^2 + 1}$; $z = \sqrt[5]{x^3 + y^2 + 1}$; A(3;2).

Ülesanded 91-100 leida antud pinna pütuvtasapinna ja normaali vörrandid antud punktis A.

91. $e^{-3z} - 6z + 3xy = 10$; A(3;1;0).
92. $x^2y + y^2z + z^2x - 5 = 0$; A(1;-1;2).
93. $x^2(3y^2 + y) = z$; A(2;-1;8).
94. $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20 = 0$; A(1;2;3).
95. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; A(1;1;1).
96. $x^3y^2 - xyz = 4$; A(2;1;2).
97. $z = x^2 - 2y^2$; A(1;2;-7).
98. $z = \sin x \sin y$; A($\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 1$).
99. $z = \ln(x^2 + y^2)$; A($\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0$).
100. $z = x^2 + 2y^2$; A(1;1;3).

Ülesanded 101-110 teha integreerimispiirkonna joonis ja muuta integreerimise järjekorda.

$$101. \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^3+3} f(x;y) dy. \quad 106. \int_0^4 dy \int_{2-\frac{y}{2}}^{8-\frac{y^2}{2}} f(x;y) dx.$$

$$102. \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x;y) dx. \quad 107. \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x;y) dy.$$

$$103. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y) dy.$$

$$104. \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2\sqrt{y}} f(x;y) dx. \quad 108. \int_0^2 dy \int_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x;y) dx.$$

$$105. \int_0^4 dx \int_{\frac{3}{2}\sqrt{x}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y) dy.$$

$$109. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x;y) dy.$$

$$110. \int_0^4 dy \int_{\frac{3}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y) dx.$$

Ülesanded 111-120 leida antud joontega piiratud kujundi pindala kahekordse integraali abil, teisendades joone võrrandi eelnevalt polaarkoordinaatidesse ($a > 0$). Teha skemaatiline joonis.

$$111. x^6 = a^2(x^4 - y^4).$$

$$116. x^4 + y^4 = a^2 x y.$$

$$112. (x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2). \quad 117. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4.$$

$$113. x^4 = a^2(3x^2 - y^2).$$

$$118. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2(4x^2 + 3y^2).$$

$$114. (x^2 + y^2)^2 = a y^3.$$

$$119. y^6 = a^2(y^4 - x^4).$$

$$115. (x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 + 2y^2). \quad 120. x^4 = a^2(x^2 - 3y^2).$$

Ülesanded 121-130 leida antud pindadega piiratud keha ruumala. Tõha joonis.

121. $z = \sqrt{y}$; $z = 2\sqrt{y}$; $x + y = 2$; $x = 0$.

122. $x^2 + y^2 = z$; $x^2 + y^2 = 2z - 4$.

123. $z = 4\sqrt{y}$; $x + y = 4$; $x = 0$; $z = 0$.

124. $x^2 + y^2 = 4$; $y + z = 2$; $z = 0$.

125. $z = x$; $z = 0$; $y = 0$; $y = 4$; $x = \sqrt{25 - y^2}$.

126. $x^2 + y^2 = 4y$; $z^2 = 4 - y$.

127. $z^2 = 4 - x$; $x^2 + y^2 = 4x$.

128. $z = 0$; $z = x$; $y = 0$; $y = 3$; $x = \sqrt{9 - y^2}$; $x = \sqrt{25 - y^2}$.

129. $y = 1 - z^2$; $y = x$; $y = -x$.

130. $z = y$; $z = 0$; $y = \sqrt{4 - x}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

131. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui seda keha piiravad pöördellipseoidi $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ülemine osa ja tasapind $z = 0$.

132. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui seda keha piiravad pinnad $x^2 + y^2 = z$; $z = 9$; $x = 0 (x \geq 0)$ ja $y = 0 (y \geq 0)$.

133. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui keha piiravad pinnad $x^2 + y^2 = 4$; $y + z = 2$ ja $z = 0$.

134. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui keha piiravad pinnad $x^2 + y^2 = 4 - z$; $z = 0$.

135. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui keha piiravad pinnad $x^2 + z^2 = z^2$; $y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

136. Leida ühtlase tihedusega keha raskuskese, kui keha piiravad pinnad $z = x^2 + y^2$; $x + y = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

137. Arvutada ühtlase tihedusega keha inertsimoment z -telje suhtes, kui keha piiravad pinnad $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $x^2 + y^2 = z^2$; $z > 0$.

138. Arvutada ühtlase tihedusega keha inertsimoment yz-tasapinna suhtes, kui keha piiravad pinnad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}; \quad z = c. \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0.$$

139. Arvutada ühtlase tihedusega keha inertsimoment z-telje suhtes, kui keha piiravad pinnad $x + y + z = a\sqrt{2}$;

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad z = 0.$$

140. Arvutada püramiidi mass, kui püramiidi piiravad tasapinnad $x + y + z = a$, $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ ja tihedus keha igas punktis on võrdne selle punkti koordinaadiga z.

Ülesanded 141-150 kontrollida, kas antud avaldis on mingi funktsiooni $U(x, y)$ täisdiferentsiaaliks. Jaatava vastuse korral leida funktsioon U joonintegraali abil.

141. $\left(\frac{\cos x}{y} - \frac{1 + \cos y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{\sin y}{x} + \frac{1 + \sin x}{y^2}\right)dy.$

142. $\left(\arcsin y + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx + \left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy.$

143. $[e^{x+y} + \cos(x-y) + 1]dx + [e^{x+y} - \cos(x-y) + 2y]dy.$

144. $\left(-\tan y - \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} - \tan x\right)dy.$

145. $\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y}\right)dy.$

146. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right)dy.$

147. $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy.$

148. $\left(\cos x - \frac{\sin x}{\sin y}\right)dx - \left(\sin y + \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 y}\right)dy.$

149. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy.$

150. $2x[1 - \sin(x^2 - y^2)]dx + 2y[1 + \sin(x^2 - y^2)]dy.$

Ülesanded 151-180 leida antud diferentsiaalvõrrandi
üldlahend.

$$151. y' + y \cos x = \sin x \cos x.$$

$$152. (x^2 - y^2)dy - 2xy dx = 0.$$

$$153. (x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$$

$$154. (2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy.$$

$$155. x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}.$$

$$156. 8xy' - y = -\frac{1}{y^3 \sqrt{x+1}}.$$

$$157. (y + \sqrt{xy})dx = x dy.$$

$$158. (\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0.$$

$$159. xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

$$160. x^2 y' + 2x^3 y = y^2(1 + 2x^2).$$

$$161. xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$162. yy' \sin x = \cos x(\sin x - y^2).$$

$$163. (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0.$$

$$164. x \ln x \cdot y' - y = x^3(3 \ln x - 1).$$

$$165. (\frac{\sin 2x}{y} + x)dx + (y - \frac{\sin^2 x}{y^2})dy = 0.$$

$$166. 4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0.$$

$$167. 3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}.$$

$$168. 2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2).$$

$$169. \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x) dy = 0.$$

$$170. xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

$$171. 1 + y'^2 = 2y'y''.$$

$$172. (y'')^2 = y'.$$

$$173. y^3 y'' + 1 = 0.$$

$$174. y'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

$$175. (y'')^2 = 1 - y'^2.$$

$$176. y'' = 2e^y.$$

$$177. 4y''\sqrt{y} = 1.$$

$$178. y'' = \frac{1}{9}(1 + y'^2).$$

$$179. yy'' + y'^2 = 1.$$

$$180. y''(1 + y) = 5y'^2.$$

Ülesanded 181-190 leida antud diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab ülesandes antud algtingimusi.

$$181. y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x - 8 \sin 2x;$$

$$y(\dot{0}) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$182. y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3);$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$183. y'' + y = xe^x;$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1.$$

$$184. y'' + 6y' + 13y = 26x - 1;$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$185. y'' - 4y' + 5y = xe^{2x};$$

$$y'(0) = -1; \quad y''(0) = 0.$$

$$186. 4y'' - 8y' + 5y = 5 \cos x;$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -\frac{1}{13}.$$

$$187. \quad y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x;$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

$$188. \quad y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

$$189. \quad y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x;$$

$$y(0) = 2; \quad y'(0) = 3.$$

$$190. \quad y'' + y = 2 \cos x;$$

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Sisukord

Sissejuhatus.	lk. 3
Üldintegraal ehk määramata integraal.	4
Määratud integraal.	6
Määratud integraali rakendusi	9
Mitme muutuja funktsioonid.	11
Kahe- ja kolmekordne integraal.	15
Joonintegraal ja pindintegraal.	16
Esimest järku diferentsiaalvõrrandid.	17
Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid	20
Diferentsiaalvõrrandite süsteem	22
Kontrolltööde ülesanded	23

Tasuta

A-279

76 96

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00446320 6