Clarissimo ac Doctissimo Viro
Leonhardo Eulero
S.P.D.
Jos. Bernoulli

28 60

Debeo responsum ad binas litteras quas à Te accepi, ad priores, quibus significabas me accepturum 50 Rubelos à Filio meo transmissos, quos Rev.mus Pater [illegible] rite persolvit, partim jam respondi in litteris meis ad filium datis, ubi ei ostendi dubia vestra (nam et ipse similes formavit difficultates circa logarithmos imaginarios) inde tantum oriri, quod conceptus quem habuistis de logarithmis quantitatum negativarum cum rei natura non satis bene congruebat, dixique si statuatur (et recte quidem) $lx = l-x$, intelligendum esse $l-(x)$, non vero $l(-x)$, vos autem utrumque confudisse, etiamsi magna sit inter utrumque differentia, sic ex. gr. $l-(x^{\frac{1}{2}})$ est reale quid, at $l(-x^{\frac{1}{2}})$ imaginarium. Hoc bene observato, cessant omnes vestrae difficultates et monstrosa inde deducta consequentia. Quod attinet ad scrupulum quem porro moves desumtum ex area sectoris circularis per logarithmum expressa, ubi posito sinu $= y$ et cosinu $= x$ invenitur per methodum meam quadraturam circuli ad logarithmum reducendi, area sectoris $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$, de eo jam monui filium meum, in casu quo $x = 0$, hanc aream revera exhiberi tanquam $= 0$, quamvis debeat esse $=$ Quadranti, hinc autem nihil aliud concludi debere, quam quod expressio ista $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ augeri debeat quantitate constanti $nQ$ seu multiplo quadrantis, quod vel ideo patet quia sinus et cosinus inter se convertuntur, atque non uno tantum modo sed infinitis modis fieri potest ut sit $x = 0$ et $y = 1$ vel vice versa $x = 1$ et $y = 0$; nam hoc fit assumto Sectore $=$ vel $1Q$, vel $2Q$, vel $3Q$, etc. vel etiam quando vis $= 0Q$; adeoque nulla ratio est cur $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ unum potius exprimat quam alterum, malo itaque dicere quod area sectoris statuenda sit generaliter $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} + nQ$, adeo ut quoties utrumque pars prior in nihilum abit, id, quod deest, suppleri possit per $nQ$, hoc est, per multiplum submultiplumve quadrantis prout necessitas id exigit, semper enim invenies differentiando sectoris hujus differentiale quod est $\frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}}$ sicuti decet; In casu semiquadrantis ubi $x = y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, habebis etiam partem priorem $= 0$, aut similis $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$, quocirca adjiciendum erit $\frac{1}{2}Q$; Sed hujusmodi expressiones imaginariae usum potius habeant si in series expandantur, in quibus quisque terminus imaginarius se destruat. De his satis.

Gratum erit intelligere methodum quam tibi inventam dicis ejusque communicationem promittis, reducendi hujusmodi aequationes differentio-differentiales $yyddy = xdx^2$, existente $ddx = 0$, ad differentiales primi gradus. Interim non satis capio mentem tuam de duobus aliis generibus differentio differentialium pluribus quam duobus terminis constantibus; imprimis non video quomodo quadret exemplum $ddx = x^n Y dx^{m-n} dy^{2-m} + x^p Y dx^{q-p} dy^{2-q}$ etc.

ad eas, quas innuis, aequationes, in quibus alterutra indeterminata, in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet, unius autem dimensionis tam $x$ quam $dx$ et $ddx$ dici se ponere, cum tamen in exemplo quod proponis, neque $x$ neque $dx$ neque $ddx$ unius sit dimensionis nec etiam eundem dimensionum numerum obtineat. Cave autem ne in his afflata vel incompatibilia comparare inter se suscipere velis; nam ex. gr. comparare velle $ddx$ cum $Ydx$ vel cum $Ydx^3$ aeque absurdum est quam velle lineam invenire aequalem superficiei, sed $ddx$ comparabile est cum $Ydx^2$. Ut vero dicam comparabilia sunt tantum illa differentialia in quibus littera $d$ ubique aequaliter repetitur, cujuscunque gradus sint differentialia, sic ex. gr. $ddx$ cum $Ydx^2$ vel $Ydy^2$ vel $Ydxdy$ vel $Y\frac{dy^3}{dx}$; et $d^3x$ cum $Ydx^3$, vel $Ydx^2dy$, vel $Ydxddx$, vel $Y\frac{d^4x}{dy}$, Atque ita in aliis. Hinc itaque primus terminus tui exempli generaliter loquendo est incomparabilis cum $ddx$, nam ut cum $ddx$ subsistere possit $x^n Ydx^{m-n} dy^{2-m}$, oporteret supponere $(m-n)+(2-m)=2$, sed cum sit $= 2-n$, vides nullam posse fieri comparationem inter $ddx$ et hunc terminum nisi in casu quo $n=0$: idem etiam de altero termino dicendum. Quare huic attentioni meae tuum commendo, ne possibilia velis facere quae sua natura sunt impossibilia.

Venio nunc ad litteras tuas novissimas: Solutio tua problematis de ducenda linea brevissima in superficie data videtur bona; Quod ad meam attinet, ea consistit in hac aequatione $\frac{Tddy}{Tdzdy-zds^2} = \frac{ddz}{ds^2+dz^2}$, ubi notandum per $x, y, z$ me intelligere tres coordinatas, quae tibi sunt $t, x, y$; item $T$ esse subtangentem curvae illius datae quae fit in superficie data quando secatur per planum subjecto plano perpendiculare et ipsis $y$ parallelum; porro per $ds$ (quod constans suppono) intelligo elementum curvae projectae seu $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Possum etiam naturam curvae quaesitae exprimere hac aequatione $\frac{\Theta ddx - Tddy}{\Theta dx - Tdy} = \frac{dzddz}{ds^2+dz^2}$ quae aliquando commodior est, ubi litterae $x, y, z, T$, idem mihi significant quod ante, et praeterea $\Theta$ est subtangens alterius curvae datae, quae fit secando superficiem per planum priori coordinatarum h.e. ipsis $x$ parallelum. Ex his aequationibus facile omnes casus particulares, quos solutos das, deducuntur: Non unum tantum solvendi fundamentum habeo; quantum conjicis tuus solvendi modus nititur natura minimi, quo etiam Agnatus meus feliciter usus est, et problema legitime solvit, sed hic solvendi modus non satis est generalis, ad alia quippe hujus generis problemata sese non extendens, quale esset ex. gr. hoc: Ducere in data superficie lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto. Voco autem planum osculans quod transit per tria curvae quaesitae puncta infinite sibi invicem propinqua; Patet hoc problema includere prius, nam si angulus inclinationis est rectus, erit quilibet arcus curvae quaesitae minimus inter duo puncta sua extrema; Poteris ergo etiam vadum tentare pro hoc problemate ita generaliter concepto, ego illud pariter reduxi ad aequationem differentio-differentialem. Caeterum in applicatione quam facis aequationis tuae ad superficiem cylindricam, qui tamen casus est omnium facillimus, posset dubium moveri, utrum liceat in aequatione ad quam pervenis $\frac{dxddx+dyddy}{dx^2+dy^2} = \frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$, supponere $dxddx+dyddy=0$ cum hoc nihil aliud sit quam communis divisor utriusque membri; ideoque mallem ego citra hanc suppositionem immediate integrare utrumque membrum per logarithmos, atque sic:

Assumto logarithmo ~~arbitrario~~ constante numeri arbitrarii $c$, habeo $lc + l(dx^2+dy^2) = l(dt^2+dx^2+dy^2)$, ideoque $cdx^2+cdy^2 = dt^2+dx^2+dy^2$, unde $\overline{c-1} \times dx^2+dy^2 = dt^2$, vel $\frac{1}{\sqrt{c-1}}dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$, et $\frac{1}{\sqrt{c-1}}t = \int\sqrt{dx^2+dy^2}$, prorsus ut tu invenisti: quod enim tibi est $n$, id hic est $\frac{1}{\sqrt{c-1}}$. Si superficies proposita sit conoidea, cujus sectiones transversae per planum primarium sint circuli, habeo praeter methodum generalem, aliam particularem pro hoc casu, quae immediate deducit ad aequationem differentialem primi gradus, ubi indeterminatae non sunt permixtae, et quae suppeditat constructionem quam olim Frater meus dedit, nescio ex quo fundamento erutam, quod quia non exhibuit, incertum est an sit legitimum, nam observavi posse perveniri etiam ad eandem illam constructionem per viam aliquam quae est paralogistica. Caeterum quod attinet ad tuam pro hoc casu aequationem $xdy - ydx = a\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}$, non video quomodo (positis $yy+xx = zz$ et $\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2} = du$) inde sequatur $du = \frac{z\sqrt{dt^2+dz^2}}{\sqrt{zz-aa}}$, multo minus quomodo hoc aliquid conferat ad constructionem curvae quaesitae, siquidem $du$ est elementum ipsius curvae, et $dt$, $dz$ elementa diversarum indeterminatarum. Mea vero quam habeo aequatio, in qua indeterminatae sunt separatae, expedit more solito constructionem per quadraturas, cujus ope in casu particularissimo globi statim videre est, lineam brevissimam in superficie sphaerica esse circulum maximum. Porro si in aequatione pro solidis rotundis (quorum scilicet axis est perpendicularis ad basin, nam si est obliquus, res est altioris indaginis quam non facile ad differentiales primas reduces) ponatur $a = 0$, ita ut sit $xdy - ydx = 0$, seu $y = nx$, haud dubie dat meras (ut dicis) etiam lineas brevissimas, sed omnes non nisi unam eandemque efficiunt, nempe eam ex cujus revolutione generatur solidum rotundum. Eas vocat Frater meus in suo schediasmate Meridianos, circulos vero quos singula puncta in revolutione describunt, Parallelos. Corpora Conica, quae tu non satis apte conoidica vocas, sunt utique omnia illa quae generantur ex circumductu lineae rectae circa curvam aliquam datam in aliquo plano, et perpetuo transeuntis per punctum (quod vertex Conici corporis vocatur) extra planum existens. Quae hic habes de ducenda linea brevissima in superficiebus horum corporum conicorum sunt intricata et obscura, putat Agnatus meus, cui epistolam tuam legendam tradidi, in iis aliquem paralogismum latitare: Quicquid vero sit, problema pro hujusmodi superficiebus non minus ~~...~~ quam pro simplicibus conis et cylindroidibus facillimam admittit solutionem, ita ut non egeat tam operoso quod suscipis molimine; possunt enim eorum omnes superficies transmutari in planas, ut tu ipse quoque etiam probe animadvertisti, postquam idem ego jam diu insinuavi, vide Acta Lips. a. 1698. p. 469. Ac revera hic casus nihil aliud est quam corollarium unius ex solutionibus meis generalibus, quas plures habeo.

Quod superest Vale et omnes Amicos meos verbis saluta.

Dabam Bas. a. d. 18. April. 1729.

P.S. Tenta num possis problema de ducenda linea brevissima reducere ad aequationem differentialem primi gradus in superficie aliqua quae non sit vel cylindroidica, vel conoidica, sed aliqua.