TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATIKA INSTITUUT

Rauni Lillemets

# Operaatorideaalid ning genereerivate hulkade ja genereerivate jadade süsteemid

Magistritöö

Juhendaja: prof. Eve Oja, füüs.-mat. kand.

Tartu 2013

# Sisukord

# Sissejuhatus

Käesolev magistritöö uurib operaatorideaale, genereerivate hulkade süsteeme, genereerivate jadade süsteeme ning nende mõistete omavahelisi seoseid. Motivatsiooniks nende teemade uurimiseks on autorile olnud $(p, r)$-kompaktsete operaatorite operaatorideaal, mille tõime sisse koos Kati Aini ja Eve Ojaga artiklis [1] 2012. aastal.

Magistritöö jaguneb seitsmeks peatükiks. Esimeses peatükis tuuakse vajalikud mõisted ja abitulemused, mida läheb hilisemate osade juures vaja.

Teises peatükis kirjeldame kõigepealt ajaloolist tausta, mis on viinud meid suhteliselt $(p, r)$-kompaktse hulga defineerimiseni. Alexander Grothendieck tõestas oma kuulsas Memuaaris "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" [4] 1955. aastal Banachi ruumi $X$ osahulga suhtelise kompaktsusega samaväärse tingimuse, mis on väljendatud ruumis $X$ nulliks koonduva jada kumera katte kaudu.

Lähtudes Grothendiecki tulemusest, vaatlesid Oleg Reinov [10] ning Jean Bourgain ja Oleg Reinov [2] 1980-ndatel aastatel hulga suhtelist $p$-kompaktsust, kus $1 \leq p \leq \infty$. Erijuhul $p = \infty$ langeb see omadus kokku hulga suhtelise kompaktsusega, nagu näitab Grothendiecki poolt tõestatud kriteerium.

Deba Prasad Sinha ja Anil Kumar Karn tõid oma 2002. aasta artiklis [11] sisse hulga suhtelise $p$-kompaktsuse alternatiivse mõiste, kus $1 \leq p \leq \infty$. Ka siin langeb erijuhul $p = \infty$ see mõiste kokku hulga suhtelise kompaktsusega.

Aastal 2012 ilmunud artiklis [1] tõime sisse hulga suhtelise $(p, r)$-kompaktsuse mõiste, kus $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$ ning $p^*$ on $p$ kaasindeks. Suhteliselt $(p, r)$-kompaktsed hulgad sisaldavad erijuhul $r = 1$ suhteliselt $p$-kompaktseid hulki Bourgain–Reinovi mõttes ning juhul $r = p^*$ suhteliselt $p$-kompaktseid hulki Sinha–Karni mõttes.

Pärast suhteliselt $(p, r)$-kompaktse hulga definitsiooni toomist kontrollime, et see definitsioon on korrektne. Peatüki lõpetuseks näitame, et iga suhteliselt $(p, r)$-kompaktne hulk on suhteliselt kompaktne.

Kolmandas peatükis vaatleme operaatorideaali mõistet. Operaatorideaale on põhjalikult uurinud Albrecht Pietsch oma 1980. aastal ilmunud monograafias "Operator Ideals" [9]. Operaatorideaalide näidetena vaatame pidevate lineaarsete operaatorite klassi $\mathcal{L}$ ja pidevate lineaarsete lõplikumõõtmeliste operaatorite klassi $\mathcal{F}$. Kõigi operaatorideaalide klassi tähistame OI. Klassil OI toome loomulikul viisil sisse järjestuse.

Artiklis [1] tõime sisse $(p, r)$-kompaktse operaatori mõiste. Nimelt on ruumist $X$ ruumi $Y$ tegutsev pidev lineaarne operaator $(p, r)$-kompaktne, kui ta teisendab ruumi $X$ ühikkera ruumi $Y$ suhteliselt $(p, r)$-kompaktseks hulgaks. Artiklis näitasime detaile läbitegemata, et $(p, r)$-kompaktsed operaatorid moodustavad operaatorideaali $\mathcal{K}_{(p,r)}$. Magistritöös anname sellele faktile üksikasjaliku tõestuse.

Neljandas peatükis uurime genereerivate hulkade süsteeme. Selle mõiste tõi

Irmtraud Stephani sisse 1980. aasta artiklis [12]. Artiklis tõi ta ka järgmise teoreemi: kui on antud kaks genereerivate hulkade süsteemi nii, et teine hulkade süsteem sisaldub esimeses hulkade süsteemis, siis saab nende hulkade süsteemide kaudu tekitada uue operaatorideaali. Magistritöös anname täielikkuse huvides selle teoreemi koos tõestusega. Edasi vaatame näidetena tõkestatud hulkade süsteemi $\mathbf{B}$ ja tõkestatud lõplikumõõtmeliste hulkade süsteemi $\mathbf{F}$. Kõigi genereerivate hulkade süsteemide klassi tähistame GHS.

Genereerivate hulkade süsteemidel toome loomulikul viisil sisse järjestuse. Lisaks tõestame, et suhteliselt $(p, r)$-kompaktsed hulgad moodustavad genereerivate hulkade süsteemi $\mathbf{K}_{(p,r)}$. Vaadates süsteemide $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{K}_{(p,r)}$ poolt tekitatud operaatorideaali, näeme, et see ühtib operaatorite klassiga $\mathcal{K}_{(p,r)}$. Sellega oleme alternatiivselt näidanud, et $\mathcal{K}_{(p,r)}$ on operaatorideaal.

Uurime veel, kuidas mõjutavad genereerivate hulkade süsteemide suurendamine ja vähendamine hulkade süsteemide poolt tekitatud operaatorideaali. Peatüki lõpetuseks näitame, et süsteemide $\mathbf{K}_{(p,r)}$ ja $\mathbf{F}$ poolt tekitatud operaatorideaal ühtib klassiga $\mathcal{F}$.

Viiendas peatükis uurime me genereerivate jadade süsteemi mõistet, mis pärineb Stephani artiklist [12]. Kõigi genereerivate jadade süsteemide klassi tähistame GJS. Näidetena vaatleme tõkestatud jadade süsteemi $\mathbf{m}$ ja lõplikumõõtmeliste tõkestatud hulkade elementidest moodustatud jadade süsteemi $\mathbf{f}$. Artiklis [12] näidati, et antud genereerivate jadade süsteemi $\mathbf{g}$ kaudu saab tekitada uue genereerivate hulkade süsteemi. Genereerivate jadade süsteemi $\mathbf{g}$ poolt tekitatud hulkade süsteemi tähistame $\overrightarrow{\mathbf{g}}$. Ilmneb, et kehtib $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \mathbf{K} = \mathbf{K}_{(\infty,1)}$.

Ütleme, et genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{G}$ on tekitatav, kui leidub genereerivate jadade süsteem $\mathbf{g}$ nii, et $\overrightarrow{\mathbf{g}} = \mathbf{G}$. Tekib küsimus: kas $\mathbf{K}_{(p,r)}$ on tekitatav? Üldisemalt, kui on antud mingi genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{G}$, siis kuidas kindlaks teha, kas ta on tekitatav?

Eelmistele küsimustele vastamiseks püüame kuuendas peatükis näidata, et klasside GJS ja GHS vahel on Galois' vastavus. On üks takistus: vaja on defineerida genereerivate jadade süsteemidel järjestusseos, kuid kui defineerida järjestus osajadade võtmise kaudu loomulikul viisil, siis tulemuseks on eeljärjestus. Selle lahendamiseks toome leitud eeljärjestuse abil sisse ekvivalentsiseose $\sim$ ning leiame klassijaotuse GJS$/_\sim$. Sellel klassijaotusel on juba loomulikul viisil antud järjestusseos.

Edasi tegeleme leitud klassijaotuse GJS$/_\sim$ omaduste uurimisega ning klasside GJS$/_\sim$ ja GHS vaheliste tehete $\rightarrow$ ja $\leftarrow$ defineerimisega. Näitame, et tehted $(\rightarrow, \leftarrow)$ on Galois' vastavus järjestatud klasside GJS$/_\sim$ ja GHS vahel. Lähtudes Galois' vastavuste teooriast, teeme mõningaid järeldusi genereerivate jadade ning genereerivate hulkade süsteemide omavaheliste seoste kohta. Samuti anname kriteeriumi, mis võimaldab öelda, kas antud genereerivate hulkade süsteem on tekitatav. Peatüki lõpetuseks vastame viiendas peatükis püstitatud küsimusele, kas $\mathbf{K}_{(p,r)}$ on tekitatav.

Seitsmendas peatükis näitame, et operaatorideaalid, genereerivate hulkade süsteemid ja genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklassid omavad võre struktuuri.

Magistriõpingute ajal on mind toetatud finantsiliselt Eesti Teadusfondi grandi 8976 alusel.

Soovin avaldada tänu mitmetele inimestele, kes on aidanud mul lõputööd kirjutada. Akadeemilisest ringkonnast kuulub mu suurim tänu juhendaja Eve Ojale, kes on mind suunanud ja juhendanud; ning samal ajal on ta andnud mulle vabadust uurida seda, mis mind huvitab.

Veel sooviksin avaldada tänu Aleksei Lissitsinile, kes on mulle andnud mitmeid näpunäiteid, mis viisid mind lõputöös olevate teemade uurimiseni.

Samuti olen tänulik Raido Paasile, kes juhtis mu tähelepanu sellele, et genereerivate hulkade ning jadade süsteemide vahel on Galois' vastavus.

Ning mu naisele Alisale ja tütrele Melissale olen ma tänulik mulle ikka ja alati inspiratsiooniks olemise eest.

# 1 Mõisted ja abitulemused

Siin peatükis toome sisse tähistused, mis on magistritöös läbivalt kasutusel ning meenutame mõningaid funktsionaalanalüüsist, algebrast ja hulgateooriast pärit mõisteid ja abitulemusi.

Hulga $G$ kõigi alamhulkade hulka tähistame $\mathcal{P}(G)$.

Ruume $X, Y, Z, W$ vaatleme kõikjal kui vektorruume või Banachi ruume üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ tähistab kas reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpust $\mathbb{C}$. Banachi ruumi $X$ ühikkera tähistame $B_X$.

Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid. Kõigi pidevate lineaarsete ruumist $X$ ruumi $Y$ tegutsevate operaatorite Banachi ruumi tähistatakse $\mathcal{L}(X, Y)$. Pideva lineaarse operaatori $T$ kujutishulka tähistame $\operatorname{ran} T$.

## 1.1 Klassikalised jadaruumid

Meenutame klassikalisi ruume $m$, $c_0$ ja $\ell_p$ funktsionaalanalüüsi põhikursusest. Toome ilma tõestusteta väited, mis kirjeldavad, et nende mõistete näol on tegemist Banachi ruumidega.

*Tõkestatud jadade ruum* on hulgana kirjeldatav kujul

$$m = \left\{ (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K}, \sup_k |x_k| < \infty \right\}.$$

Hulk $m$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kui defineerida vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine vektorite koordinaaditi liitmise ja korrutamisena. Vektorruum $m$ on Banachi ruum, kui defineerida elemendi $x = (x_k)$ norm võrdusega

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

*Nulliks koonduvate jadade ruum* on hulgana antav kujul

$$c_0 = \left\{ (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K}, \lim_k |x_k| = 0 \right\}.$$

Kui varustada hulk $c_0$ ruumi $m$ normiga, siis $c_0$ on Banachi ruum. Ruum $c_0$ on ruumi $m$ alamruum.

Olgu arv $p$ selline, et $1 \leq p < \infty$. *Astmega $p$ summeeruvate jadade ruum* on hulgana kirjeldatav kujul

$$\ell_p = \left\{ (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

Hulk $\ell_p$ on Banachi ruum, kui defineerida elemendi $x = (x_k)$ norm võrdusega

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Edaspidises kasutame me tähistust $\ell_\infty := c_0$, et lihtsustada valemite kirjapanekut.

*Märkus* 1.1. Kehtivad sisalduvused $\ell_p \subset \ell_q$ ja $B_{\ell_p} \subset B_{\ell_q}$, kus $1 \le p \le q \le \infty$.

Olgu $X$ Banachi ruum. Vaatame ruumide $m$, $c_0$ ja $\ell_p$ vahetuid üldistusi sellisele jadaruumile, kus jadade elementideks on ruumi $X$ punktid. Analoogiliselt klassikaliste väidetega nende ruumide kohta saab näidata järgmist.

*Ruumi $X$ tõkestatud jadade ruum*

$$m(X) = \left\{ x = (x_k) \mid x_k \in X, \sup_k \|x_k\| < \infty \right\}$$

on Banachi ruum, kui defineerida elemendi $x$ norm võrdusega

$$\|x\| = \sup_k \|x_k\|.$$

*Ruumi $X$ nulliks koonduvate jadade ruum*

$$c_0(X) = \left\{ x = (x_k) \mid x_k \in X, \lim_k \|x_k\| = 0 \right\},$$

mis on varustatud ruumi $m(X)$ normiga, on Banachi ruum. Ruum $c_0(X)$ on ruumi $m(X)$ alamruum.

Olgu arv $p$ selline, et $1 \le p < \infty$. *Ruumi $X$ astmega $p$ summeeruvate jadade ruum*

$$\ell_p(X) = \left\{ x = (x_k) \mid x_k \in X, \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty \right\}$$

on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Edaspidises kasutame me tähistust $\ell_\infty(X) := c_0(X)$, et lihtsustada valemite kirjapanekut.

*Märkus* 1.2. Definitsioonidest järeldub, et klassikalisi ruume $m, \ell_p, \ell_\infty$ saab tähistada ka vastavalt $m(\mathbb{K}), \ell_p(\mathbb{K}), \ell_\infty(\mathbb{K})$.

*Märkus* 1.3. Kehtib sisalduvus $\ell_p(X) \subset \ell_q(X)$, kus $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

**Definitsioon 1.4.** *Arvu $p$, $1 < p < \infty$, kaasindeksiks nimetatakse arvu $p^*$, mis täidab tingimust*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

*Arvu 1 kaasindeksiks defineeritakse lõpmatus ja, vastupidi, lõpmatuse kaasindeksiks arv 1.*

Funktsionaalanalüüsi põhikursuse õpikus [8, lk. 10] on tõestatud järgmine tulemus.

**Lause 1.5** (Rogers–Hölderi võrratus)**.** *Kui $1 < p < \infty$ ja $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, ..., n$, siis*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{1}$$

Kasutame edaspidi kokkulepet, et $r \cdot \infty = \infty \cdot r = \infty \cdot \infty = \infty$, kus $r > 0$.

**Järeldus 1.6** (Rogers–Hölderi võrratus ridade jaoks)**.** *Olgu $1 < p < \infty$ ja iga $k \in \mathbb{N}$ korral $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Siis kehtib võrratus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

*Kui seejuures $(a_k) \in \ell_p$ ja $(b_k) \in \ell_{p^*}$, siis $(a_k b_k) \in \ell_1$.*

*Tõestus.* Kui üks ridadest $(a_k)$ või $(b_k)$ on nulljada, siis on ka võrratuse vasakul pool nulljada ja seega võrratus kehtib triviaalselt.

Kui $(a_k) \notin \ell_p$ või $(b_k) \notin \ell_{p^*}$, siis on paremal pool korrutis, mille üks liige on $\infty$ ja teine kas positiivne reaalarv või $\infty$. Vastavalt tehtud kokkuleppele on siis võrratuse paremal pool oleva korrutise väärtus $\infty$ ja võrratus kehtib triviaalselt.

Kui $(a_k) \in \ell_p$ ja $(b_k) \in \ell_{p^*}$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p^*}$ on lõplikud. Võrratuse (1) tõttu saame iga $k \in \mathbb{N}$ korral, et

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} < \infty.$$

Minnes nüüd vasakul pool piirile protsessis $k \to \infty$, saamegi Rogers–Hölderi võrratuse ridade jaoks:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Siit järeldub ka, et jada $(a_k b_k) \in \ell_1$, sest positiivsete liikmetega arvrida koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud. $\square$

**Definitsioon 1.7.** *Olgu antud Banachi ruum $X$ ja jada $x = (x_k) \in m(X)$. Jada $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajadaks nimetatakse jada $x' = (x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, kus $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on monotoonselt kasvav naturaalarvude jada. Osajadaks olemist tähistame nii: $x' \prec x$.*

Järgmine lause on vahetult kontrollitav.

**Lause 1.8.** *Olgu antud jada $x \in \ell_\infty(X)$ ja arv $1 \leq p < \infty$. Siis leidub jada $x$ osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \ell_p(X)$.*

Toome ära kaks tulemust funktsionaalanalüüsi kursusest, mida meil läheb hiljem vaja. Tõestused leiab õpikust [8, lk. 41–43].

**Teoreem 1.9** (Hausdorffi teoreem)**.** *Meetrilise ruumi $X$ osahulga $K$ suhteliseks kompaktsuseks on tarvilik ning ruumi $X$ täielikkuse korral ka piisav, et iga $\epsilon > 0$ korral leiduks hulgale $K$ lõplik $\epsilon$-võrk.*

**Lause 1.10.** *Hulgal meetrilises ruumis on iga $\epsilon > 0$ korral lõplik $\epsilon$-võrk parajasti siis, kui tal on iga $\epsilon > 0$ korral suhteliselt kompaktne $\epsilon$-võrk.*

Järgmine tulemus on tõestatud õpikus [8, lk. 95].

**Lause 1.11** (Üldistatud kolmnurga võrratus)**.** *Olgu $X$ normeeritud ruum. Kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub, siis kehtib võrratus*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

## 1.2 Vektorruum ja tema baas

Siin osapeatükis meenutame mõningaid algebra põhimõisteid. Enamus definitsioone ja tõestusi pärinevad õpikust [6]. Lause 1.23 on toodud õpikus [8, lk. 94] ilma tõestuseta. Lause 1.28 on lause 1.23 analoog, kus lõpmatumõõtmelise vektorruumi asemel vaadatakse lõpmatumõõtmelist hulka. Täielikkuse huvides on mõlemad laused siin tõestatud. Laused 1.29 ja 1.30 on üldtuntud.

**Definitsioon 1.12.** *Olgu $X$ vektorruum. Kui on antud vektorite süsteem $e = \{e_k \mid k \in I\}$ nii, et iga vektorruumi $X$ element on avaldatav süsteemi $e$ lõpliku lineaarkombinatsioonina, siis seda vektorite süsteemi nimetatakse moodustajate süsteemiks.*

**Definitsioon 1.13.** *Vektorruumis $X$ antud lõpliku vektorite süsteemi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui võrdus $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$, kus $\alpha_k \in \mathbb{K}$, leiab aset ainult juhul $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

**Definitsioon 1.14.** *Lõpmatut vektorite süsteemi e nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui iga tema lõplik alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.*

**Definitsioon 1.15.** *Vektorite süsteemi e nimetatakse lineaarselt sõltuvaks, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.*

**Definitsioon 1.16.** *Kui moodustajate süsteem e on lineaarselt sõltumatu, siis teda nimetatakse baasiks.*

**Definitsioon 1.17.** *Olgu $X$ vektorruum ja e tema lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem. Vektorite süsteemi e nimetatakse maksimaalseks lineaarselt sõltumatuks alamsüsteemiks, kui süsteemile e suvalise vektorruumi $X$ elemendi juurdelisamisel muutub süsteem lineaarselt sõltuvaks.*

**Lause 1.18.** *Kui mittetriviaalses vektorruumis $X$ leidub lõplik moodustajate süsteem $\{e_1, \ldots, e_n\}$, siis vektorruumis $X$ leidub baas, mis koosneb maksimaalselt $n$ elemendist.*

*Tõestus.* Teoreemi tõestus järgib õpikus [6, 3.2.3] toodud sskeemi. Valime tõestuses moodustajate süsteemiks $M$ antud süsteemi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ja teeme läbi tõestuse arutluskäigu. Tulemuseks saame me vektorsüsteemi $X$ baasi. Kuna tõestuse käigus elementide arv ei saa suureneda, siis leitud baas koosneb maksimaalselt $n$ elemendist. $\square$

**Lause 1.19.** *Vektorruumi $X$ vektorite süsteem $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ on baas vektorruumis $X$ siis ja ainult siis, kui süsteem e on maksimaalne lineaarselt sõltumatu alamsüsteem vektorruumis $X$.*

*Tõestus.* Tõestus on toodud õpikus [6, 3.2.10]. $\square$

**Lause 1.20.** *Olgu $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ vektorruumi $X$ maksimaalsed lineaarselt sõltumatud alamsüsteemid. Siis $m = n$.*

*Tõestus.* Teoreem on tõestatud õpikus [6, 3.3.8]. $\square$

**Definitsioon 1.21.** *Vektorruumi $X$ nimetatakse lõplikumõõtmeliseks, kui temas leidub lõplik baas.*

**Definitsioon 1.22.** *Vektorruumi $X$ nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks, kui ta ei ole lõplikumõõtmeline.*

**Lause 1.23.** *Vektorruum on lõpmatumõõtmeline parajasti siis, kui temas leidub loenduv lineaarselt sõltumatu osahulk.*

*Tõestus.* Olgu vektorruumis $X$ antud loenduv lineaarselt sõltumatu osahulk $f$. Vaja on näidata, et vektorruum $X$ on lõpmatumõõtmeline.

Oletame vastuväiteliselt, et vektorruum $X$ on lõplikumõõtmeline, siis leidub vektorruumi $X$ baas $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Valime loenduvast vektorite süsteemist $f$ alamsüsteemi $g = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$. Vektorite süsteem $g$ on samuti lineaarselt sõltumatu. See on aga vastuolu sellega, et baasi $e$ mõõde on $n$ ja lause 1.20 kohaselt iga $n+1$ elemendist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv. Sellega on tarvilikkus näidatud.

Olgu vektorruum $X$ lõpmatumõõtmeline. Valime elemendi $e_1 \in X$ nii, et $e_1 \neq 0$. Nüüd kasutame induktsiooni. Olgu valitud lineaarselt sõltumatu elementide süsteem $\{e_1, \dots, e_k\}$. Valime järgmise sammuna elemendi $e_{k+1}$ nii, et $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ on lineaarselt sõltumatu. See on võimalik, sest vastasel juhul oleks $\{e_1, \dots, e_k\}$ vektorruumi $X$ maksimaalne lineaarselt sõltumatu osahulk, ehk baas ja seega oleks vektorruum $X$ lõplikumõõtmeline.

Nii jätkates saame loenduva elementide süsteemi $e$. See on definitsiooni põhjal lineaarselt sõltumatu, sest iga tema lõplik osahulk on lineaarselt sõltumatu. $\square$

Eelmise tõestuse kohta olgu lisatud märkus, et see käsitlus on hulgateoreetiliselt "naiivne". Nimelt eeldas tõestus loenduva arvu "valikute" tegemist, mistõttu oleks selle lause rangeks tõestamiseks vaja kasutada valikuaksioomi.

**Definitsioon 1.24.** *Olgu $X$ vektorruum. Hulka $G \subset X$ nimetame lõplikumõõtmeliseks, kui leidub lõplikumõõtmeline alamruum $Y \subset X$ nii, et $G \subset Y$.*

**Definitsioon 1.25.** *Olgu $X$ vektorruum. Hulka $G \subset X$ nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks, kui ta ei ole lõplikumõõtmeline.*

**Definitsioon 1.26.** *Vektorruumis $X$ antud vektorite süsteemi $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ lineaarseks katteks nimetatakse hulka $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n\}$ ja seda tähistatakse* $\operatorname{span} e$.

**Lause 1.27.** *Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ lineaarne kate* $\operatorname{span} e$ *on lõplikumõõtmeline vektorruum, mille baasiks on $e$.*

**Lause 1.28.** *Olgu $X$ vektorruum. Hulk $G \subset X$ on lõpmatumõõtmeline parajasti siis, kui temas leidub loenduv lineaarselt sõltumatu osahulk.*

*Tõestus.* Olgu antud loenduv lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem $f \subset G$. Vaja on näidata, et hulk $G$ on lõpmatumõõtmeline.

Oletame vastuväiteliselt, et hulk $G$ on lõplikumõõtmeline, siis leidub lõplikumõõtmeline alamruum $Y \subset X$ nii, et $G \subset Y$. Lause 1.23 põhjal on vektorruum $Y$ lõpmatumõõtmeline, mis on vastuolu. Seega on hulk $G$ lõpmatumõõtmeline, ning tarvilikkus on näidatud.

Olgu vektorruum $X$ lõpmatumõõtmeline. Valime elemendi $e_1 \in G$ nii, et $e_1 \neq 0$. Nüüd kasutame induktsiooni. Olgu valitud lineaarselt sõltumatu elementide süsteem $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset G$. Valime järgmise sammuna elemendi $e_{k+1} \in G$ nii, et $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$ on lineaarselt sõltumatu. See on võimalik, sest vastasel juhul kehtiks $G \subset \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$, mis on vektorruumi $X$ lõplikumõõtmeline alamruum ja $G$ oleks seega lõplikumõõtmeline.

Nii jätkates saame loenduva elementide süsteemi $e \subset G$. See on definitsiooni põhjal lineaarselt sõltumatu, sest iga tema lõplik osahulk on lineaarselt sõltumatu. □

Eelmise tõestuse kohta kehtib sama kommentaar, kui lause 1.23 kohta. Nimelt on see käsitlus hulgateoreetiliselt "naiivne". Tõestus eeldas loenduva arvu "valikute" tegemist, mistõttu oleks selle lause rangeks tõestamiseks vaja kasutada valikuaksioomi.

**Lause 1.29.** *Kui hulgad $G, H$ on lõplikumõõtmelised hulgad vektorruumis $X$, siis ka iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral hulk*

$$\alpha G + H = \{\alpha x + y \mid x \in G, y \in H\}$$

*on lõplikumõõtmeline hulk vektorruumis $X$.*

*Tõestus.* Antud on lõplikumõõtmelised hulgad $G$ ja $H$ vektorruumis $X$. See tähendab, et leiduvad lõplikumõõtmelised alamruumid $Y$ ja $Z$ vastavate baasidega $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ nii, et $G \subset Y$ ja $H \subset Z$.

Kuna $Y$ on vektorruum, siis sellest, et $G \subset Y$, järeldub, et ka $\alpha G \subset Y$.

On lihtne näha, et vektorite süsteem $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ on vektorruumi $Y + Z$ lõplik moodustajate süsteem. Lause 1.18 põhjal leidub vektorruumil $Y + Z$ lõplik baas. Et $\alpha G + H \subset Y + Z \subset X$, siis saamegi, et hulk $\alpha G + H$ on lõplikumõõtmeline. □

**Lause 1.30.** *Olgu $G$ lõplikumõõtmeline hulk normeeritud ruumis $X$ ning $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Siis $T(G)$ on lõplikumõõtmeline hulk ruumis $Y$.*

*Tõestus.* Eeldusest saame, et leidub lõplikumõõtmeline vektoralamruum $Z \subset X$ lõpliku baasiga $\{e_1, \ldots, e_m\}$ nii, et $G \subset Z$.

On lihtne näha, et $T(Z)$ on $Y$ alamruum ning et $\{Te_1, \ldots, Te_m\}$ on ruumi $Y$ moodustajate süsteem. Lause 1.18 põhjal on vektorruumil $T(Z)$ lõplik baas.

Kuna $T(G) \subset T(Z) \subset Y$, siis olemegi saanud, et $T(G)$ on lõplikumõõtmeline hulk ruumis $Y$. □

## 1.3 Lõplikumõõtmelise operaatori üldkuju

Magistritöö järgnevates peatükkides mängivad olulist rolli pidevad lineaarsed lõplikumõõtmelised operaatorid. On hästi teada, et pidevate lineaarset lõplikumõõtmelist operaatorit saab esitada ühemõõtmeliste pidevate lineaarsete operaatorite summana. Vaatamata sellele, et see fakt on üldtuntud, pole kirjandusest kerge leida sellele üksikasjalikku tõestust. Allpool on toodud selle lause 1.38 tõestus, mis pärineb Marian Õunapi bakalaureusetööst [13], kes omakorda on võtnud aluseks raamatus [5, lk. 119] antud neljarealise tõestusskeemi. Sisuliselt ei ole tõestust muudetud võrreldes Õunapi bakalaureusetööga, kohandatud on ainult vormilist poolt, et sobituda paremini käesoleva magistritööga.

Anname kõigepealt lõplikumõõtmelise operaatori definitsiooni.

**Definitsioon 1.31.** *Lineaarset operaatorit $T : X \to Y$, kus $X$ ja $Y$ on vektorruumid, nimetatakse lõplikumõõtmeliseks, kui* $\operatorname{ran} T$ *on ruumi $Y$ lõplikumõõtmeline alamruum.*

Kõigi lõplikumõõtmeliste pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi tähistatakse $\mathcal{F}(X, Y)$. Tõestame järgneva lihtsa abitulemuse.

**Lause 1.32.** *Olgu $T$ pidev lineaarne operaator. Operaator $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ parajasti siis, kui $T$ teisendab iga ruumi $X$ tõkestatud hulga lõplikumõõtmeliseks hulgaks.*

*Tõestus.* Olgu $G \subset X$ tõkestatud hulk. Siis leidub positiivne konstant $m$ nii, et iga $x \in G$ korral kehtib $\|x\| \leq m$. Seega kehtib $G \subset mB_X$. Nüüd saame, et $T(G) \subset T(mB_X) = mT(B_X)$. Kuna $T(B_X)$ on lõplikumõõtmeline vektorruum, siis ka $mT(B_X)$ on lõplikumõõtmeline vektorruum ja definitsiooni kohaselt on $T(G)$ lõplikumõõtmeline hulk.

Kehtigu, et $T$ teisendab iga ruumi $X$ tõkestatud hulga lõplikumõõtmeliseks hulgaks. Siis ka $T(B_X)$ on lõplikumõõtmeline hulk. On kerge näha, et $T(B_X)$ on vektorruumi $Y$ alamruum. □

Järgmise lause tõestus on toodud õpikus [8, lk. 91]:

**Lause 1.33.** *Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis on hulk suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud.*

Kasutades lõplikumõõtmelise hulga mõistet, saame sõnastada

**Järeldus 1.34.** *Tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk on suhteliselt kompaktne.*

Toome nüüd mõned abitulemused selleks, et näidata ära pideva lineaarse lõplikumõõtmelise operaatori põhikuju. Funktsionaalanalüüsi õpikus [8, lk. 89–90] on toodud lõplikumõõtmeliste ruumide isomorfismiteoreem:

**Teoreem 1.35.** *Olgu $X$ $n$-mõõtmeline normeeritud ruum baasiga $\{e_1, \dots, e_n\}$. Siis leiduvad positiivsed konstandid $c_1$ ja $c_2$ nii, et iga $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in X$ korral*

$$c_1 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \|x\| \leq c_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|.$$

**Definitsioon 1.36.** *Ruumi $X$ elemendid $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ ja ruumil $X$ määratud lineaarsed funktsionaalid $x_1^*$, $x_2^*$, ..., $x_n^*$ moodustavad biortogonaalse süsteemi, kui*

$$x_j^*(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \textit{kui } j = k \\ 0, & \textit{kui } j \neq k. \end{cases}$$

Järgmine biortogonaalsete süsteemide kohta käiv lause on võetud õpikust [8, lk. 227].

**Lause 1.37.** *Kui Banachi ruumi $X$ elemendid $x_1, x_2, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltumatud, siis leiduvad funktsionaalid $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*$ nii, et moodustub biortogonaalne süsteem.*

Järgmine lause näitabki ära pideva lineaarse lõplikumõõtmelise operaatori üldkuju.

**Lause 1.38.** *Olgu meil operaator $T : X \to Y$, $T \neq 0$. Siis $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ parajasti siis, kui $T$ esitub kujul*

$$Tx = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) y_k, x \in X,$$

*kus iga $k \in \{1, \dots, n\}$ korral $x_k^* \in X^*$ ja $y_k \in Y$. Seejuures saab elemendid $y_k$ valida nii, et süsteem $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ on $\operatorname{ran} T$ algebraline baas.*

*Tõestus.* Tarvilikkus. Olgu $T \in \mathcal{F}(X, Y)$. Näitame, et siis

$$Tx = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) y_k, x \in X,$$

kus iga $k \in \{x_1, \dots, x_n\}$ korral $x_k^* \in X^*$ ja $y_k \in Y$ on fikseeritud elemendid. Kuna $T$ on lõplikumõõtmeline operaator, siis $\operatorname{ran} T$ on lõplikumõõtmeline. Seega leidub $\operatorname{ran} T$ baas $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Kuna baasi elemendid on lineaarselt sõltumatud ruumis $Y$, siis lausest 1.37 järeldub, et leiduvad funktsionaalid $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ nii, et moodustub biortogonaalne süsteem $\{y_1, y_2, \dots, y_n; y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*\}$. Seega iga $y \in \operatorname{ran} T$ avaldub kujul

$$y = \sum_{k=1}^n y_k^*(y) y_k.$$

Olgu $x \in X$ suvaline element ja $Tx = y$. Siis

$$Tx = y = \sum_{k=1}^{n} y_k^*(y)y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^*(Tx)y_k = \sum_{k=1}^{n} (T^*y_k^*)(x)y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)y_k.$$

Sellega on tarvilikkus tõestatud.

Piisavus. Kehtigu võrdus

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)y_k, x \in X, \tag{2}$$

kus iga $k \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ korral $x_k^* \in X^*$ ja $y_k \in Y$.

Näitame, et operaator $T$ on lineaarne. Olgu $x_1, x_2 \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Siis

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + x_2) &= \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\alpha x_1 + x_2)y_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha x_k^*(x_1)y_k + x_k^*(x_2)y_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x_1)y_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x_2)y_k = \alpha T x_1 + T x_2. \end{aligned}$$

Seega on $T$ lineaarne. Lineaarse operaatori pidevuse näitamiseks piisab näidata, et ta on tõkestatud. Veendume, et $T$ on tõkestatud. Olgu $x \in X$. Siis

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)y_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*(x)y_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\| \, \|x\| \, \|y_k\|.$$

Veendume, et operaator $T$ on lõplikumõõtmeline. Võrdusest 2 on näha, et iga $y \in \operatorname{ran} T$ esitub $n$ elemendi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineaarkombinatsioonina. Lause 1.18 kohaselt leidub siis $\operatorname{ran} T$ lõplikumõõtmeline baas ja seega on $T$ lõplikumõõtmeline operaator. Seega oleme näidanud, et $T \in \mathcal{F}(X, Y)$. $\square$

Operaatorit $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ kujul $Tx = x^*(x)y$, $x \in X$, kus $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, tähistame edaspidi

$$T = x^* \otimes y.$$

Seega kehtib

$$(x^* \otimes y)(x) = x^*(x)y, x \in X.$$

Seejuures paneme tähele, et

$$\|x^* \otimes y\| = \|x^*\| \, \|y\|.$$

Tõepoolest,

$$\|x^* \otimes y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x^*(x)y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| \, \|y\| = \|x^*\| \, \|y\|.$$

Eelnevast lausest 1.38 on selge, et ühemõõtmelise operaatori $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ üldkuju on $T = x^* \otimes y$, kus $x^* \in X$, $x^* \neq 0$, ja $y \in Y$, $y \neq 0$.

## 1.4 Järjestatud hulgad ja võred

Meenutame mõningaid hulgateooriast tuntud mõisteid ja tulemusi, mida läheb meil edaspidises vaja. Kuna magistritöös vaatleme me järjestusseoseid klassidel, mitte hulkadel, siis on definitsioonid antud klasside jaoks.

**Definitsioon 1.39.** *Olgu $X$ klass. Eeljärjestuseks klassil $X$ nimetatakse binaarset seost $\lesssim$, millel on järgnevad omadused:*

*1) Iga $x \in X$ korral kehtib $x \lesssim x$ (refleksiivsus),*

*2) Olgu $x, y, z \in X$. Kui $x \lesssim y$ ja $y \lesssim z$, siis $x \lesssim z$ (transitiivsus).*

**Definitsioon 1.40.** *Olgu $X$ klass. Järjestusseoseks klassil $X$ nimetatakse binaarset seost $\leq$, millel on järgnevad omadused:*

*1) Iga $x \in X$ korral kehtib $x \leq x$ (refleksiivsus),*

*2) Olgu antud $x, y \in X$. Kui $x \leq y$ ja $y \leq x$, siis $x = y$ (antisümmeetria),*

*3) Olgu $x, y, z \in X$. Kui $x \leq y$ ja $y \leq z$, siis $x \leq z$ (transitiivsus).*

Klassi $X$ koos temal defineeritud järjestusseosega nimetatakse osaliselt järjestatud klassiks.

**Definitsioon 1.41.** *Olgu $X$ klass. Ekvivalentsiseoseks klassil $X$ nimetatakse binaarset seost $\sim$, millel on järgnevad omadused:*

*1) Iga $x \in X$ korral kehtib $x \sim x$ (refleksiivsus),*

*2) Olgu antud $x, y \in X$. Kui $x \sim y$, siis $y \sim x$ (sümmeetria),*

*3) Olgu $x, y, z \in X$. Kui $x \sim y$ ja $y \sim z$, siis $x \sim z$ (transitiivsus).*

**Lause 1.42.** *Olgu $X$ klass ja $\sim$ sellel klassil antud ekvivalentsiseos. Elemendi $x \in X$ poolt määratud ekvivalentsiklassiks nimetatakse klassi*

$$[x] = \{y \mid y \sim x\}.$$

*Klassi $X$ faktorklassiks nimetatakse klassi*

$$X/_{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}.$$

*Klassid $[x]$ moodustavad klassi $X$ klassijaotuse, ehk teisisõnu, nad jaotavad klassi $X$ üksteisega lõikumatuteks osaklassideks, mis katavad klassi $X$.*

*Tõestus.* On selge, et kuna $x \in [x]$, siis $X \subset \bigcup_{x \in X} [x]$.

Näitame, et kui $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, siis $[x] = [y]$. Eelduse põhjal saame valime elemendi $z \in [x] \cap [y]$. Olgu nüüd antud $w \in [x]$. Nüüd kehtib $w \sim x \sim z$ ja $z \sim y$. Seega seose $\sim$ transitiivsuse põhjal $w \sim y$, ehk $w \in [y]$. Kuna $w$ oli valitud vabalt, oleme saanud, et $[x] \subset [y]$. Analoogiliselt saab näidata, et $[y] \subset [x]$, millest järeldub, et $[x] = [y]$. $\square$

**Lause 1.43.** *Olgu antud klass $X$ koos temal defineeritud eeljärjestusega $\lesssim$. Defineerime seose $\sim$ järgnevalt: $x \sim y$, kui $x \lesssim y$ ja $y \lesssim x$. Nii defineeritud seos $\sim$ on ekvivalentsiseos.*

*Tõestus.* 1) Kuna $x \lesssim x$, siis ka $x \sim x$. Seega on täidetud refleksiivsuse tingimus.

2) Näitame sümmeetria tingimuse kehtivust. Kehtigu $x \sim y$. Siis $x \lesssim y$ ja $y \lesssim x$, millest järeldub, et $y \sim x$.

3) Kehtigu $x \sim y$ ja $y \sim z$. See tähendab, et $x \lesssim y$ ja $y \lesssim x$ ning $y \lesssim z$ ja $z \lesssim y$. Eeljärjestuse $\lesssim$ transitiivsusest tuleneb nüüd ka seose $\sim$ transitiivsus. $\square$

**Lause 1.44.** *Olgu $\lesssim$ eeljärjestus klassil $X$ ja $\sim$ tema kaudu defineeritud ekvivalentsiseos. Defineerime faktorklassil $X/_\sim$ seose $\leq$ järgnevalt: $[x] \leq [y]$, kui $x \lesssim y$. Nii defineeritud seos on järjestusseos.*

*Tõestus.* Näitame kõigepealt, et seos $\leq$ on korrektselt defineeritud. Olgu $x_1 \sim x_2$ ja $y_1 \sim y_2$ suvalised. Näitame, et kui $x_1 \lesssim y_1$, siis ka $x_2 \lesssim y_2$. Teame, et $x_1 \lesssim x_2$ ja $x_2 \lesssim x_1$ ning $y_1 \lesssim y_2$ ja $y_2 \lesssim y_1$. Seega $x_2 \lesssim x_1 \lesssim y_1 \lesssim y_2$ ja seose $\lesssim$ transitiivsuse põhjal saamegi, et $x_2 \lesssim y_2$.

Näitame, et seos $\leq$ on järjestusseos.

1) Kuna $x \lesssim x$, siis ka $[x] \leq [x]$.

2) Uurime antisümmeetria tingimuse kehtivust. Olgu antud ekvivalentsiklassid $[x]$ ja $[y]$ nii, et $[x] \leq [y]$ ja $[y] \leq [x]$. Nüüd $x \lesssim y$ ja $y \lesssim x$, ehk $x \sim y$. On selge, et $x \in [x]$. Kuna $x \sim y$, siis kehtib ka $x \in [y]$. Et nüüd $x \in [x] \cap [y]$, siis lause 1.42 põhjal $[x] = [y]$.

3) Olgu antud ekvivalentsiklassid $[x], [y], [z]$ nii, et $[x] \leq [y] \leq [z]$. Siis $x \lesssim y \lesssim z$ ning seose $\lesssim$ transitiivsusest järeldub, et $x \lesssim z$ ehk $[x] \leq [z]$. $\square$

Meenutame nüüd edaspidise jaoks olulist võre mõistet.

**Definitsioon 1.45.** *Olgu $X$ osaliselt järjestatud klass seose $\leq$ suhtes. Öeldakse, et $z \in X$ on elementide $x, y \in X$ alumine raja, kui $z \leq x, z \leq y$ ning iga $w \in X$ korral sellest, et $w \leq x$ ja $w \leq y$, järeldub, et $w \leq z$. Elementide $x$ ja $y$ alumist raja tähistatakse $x \wedge y$.*

**Definitsioon 1.46.** *Olgu $X$ osaliselt järjestatud klass seose $\leq$ suhtes. Öeldakse, et $z \in X$ on elementide $x, y \in X$ ülemine raja, kui $x \leq z, y \leq z$ ning iga $w \in X$ korral sellest, et $x \leq w$ ja $y \leq w$, järeldub, et $z \leq w$. Elementide $x$ ja $y$ ülemist raja tähistatakse $x \vee y$.*

**Definitsioon 1.47.** *Võreks nimetatakse osaliselt järjestatud klassi, mille igal kahel elemendil leidub ülemine ja alumine raja.*

## 1.5 Galois' vastavus

Selles peatükis kirjeldatud materjal pärineb raamatust [3]. Galois' vastavuse defineerimisel on aluseks võetud definitsioon [3, 7.22]. Magistritöös vaatame Galois' vastavust järjestatud klasside, mitte järjestatud hulkade vahel. Lisaks on võrreldes raamatus antud definitsiooniga ära vahetatud klasside $P$ ja $Q$ rollid, et tehted $\to$ ja $\leftarrow$ klapiksid paremini magistritöö kontekstiga. See on lubatud, sest nagu on mainitud [3, lk. 156], võib Galois' vastavust defineerida mitmeti.

Siin peatükis on $(P, \leq)$ ja $(Q, \leq)$ osaliselt järjestatud klassid. Olgu antud kaks tehet klasside $P$ ja $Q$ vahel: Operatsioon $\to$, mis viib klassist $P$ klassi $Q$ ning operatsioon $\leftarrow$, mis viib klassist $Q$ klassi $P$.

**Definitsioon 1.48.** *Ütleme, et klasside $P$ ja $Q$ vahel on antud Galois' vastavus $(\to, \leftarrow)$, kui iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral kehtib:*

$$q \leq \overrightarrow{p} \Leftrightarrow \overleftarrow{q} \leq p. \tag{3}$$

**Lause 1.49.** *Klasside $P$ ja $Q$ vahel on antud Galois' vastavus parajasti siis, kui kehtivad järgmised tingimused:*

1. *Kui $p \in P$, siis $\overleftarrow{\overrightarrow{p}} \leq p$*
2. *Olgu $q \in Q$, siis $q \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$.*
3. *Iga $p_1, p_2 \in P$ korral kehtib $p_1 \leq p_2 \Rightarrow \overrightarrow{p_1} \leq \overrightarrow{p_2}$.*
4. *Iga $q_1, q_2 \in Q$ korral kehtib $q_1 \leq q_2 \Rightarrow \overleftarrow{q_1} \leq \overleftarrow{q_2}$.*

*Tõestus. Piisavus.* 1) Näitame, et $\overleftarrow{\overrightarrow{p}} \leq p$. Kuna $\leq$ on osaline järjestus, siis $\overrightarrow{p} \leq \overrightarrow{p}$. Võttes võrduses (3) elemendi $q$ väärtuseks $\overrightarrow{p}$, saame, et $\overrightarrow{p} \leq \overrightarrow{p} \Rightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{p}} \leq p$.

2) Analoogiliselt eelmisele punktile näitame, et $q \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$. Seose $\leq$ refleksiivsuse põhjal kehtib $\overleftarrow{q} \leq \overleftarrow{q}$. Valides eelduses (3) $p = \overleftarrow{q}$, saame, et $\overleftarrow{q} \leq \overleftarrow{q} \Rightarrow q \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$.

3) Olgu antud $p_1 \leq p_2$. Siis punkti 1) kohaselt $\overleftarrow{\overrightarrow{p_1}} \leq p_1 \leq p_2$. Võttes eelduses (3) $q = \overrightarrow{p_1}$ ja $p = p_2$, saame, et $\overleftarrow{\overrightarrow{p_1}} \leq p_2 \Rightarrow \overrightarrow{p_1} \leq \overrightarrow{p_2}$.

4) Kehtigu $q_1 \leq q_2$. Siit saame, et $q_1 \leq q_2 \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q_2}}$. Valides võrduses (3) $p = \overleftarrow{q_2}$ ja $q = q_1$, saamegi, et $q_1 \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q_2}} \Rightarrow \overleftarrow{q_1} \leq \overleftarrow{q_2}$.

*Tarvilikkus.* Olgu antud $p \in P$ ja $q \in Q$ nii, et $q \leq \overrightarrow{p}$. Näitame, et siis $\overleftarrow{q} \leq p$. Tingimuse 4) põhjal kehtib $\overleftarrow{q} \leq \overleftarrow{\overrightarrow{p}}$. Kuna $\overleftarrow{\overrightarrow{p}} \leq p$, olemegi näidanud, et $\overleftarrow{q} \leq p$.

Kehtigu $\overleftarrow{q} \leq p$. Näitame, et siis $q \leq \overrightarrow{p}$. Esmalt, tingimuse 3) tõttu $\overrightarrow{\overleftarrow{q}} \leq \overrightarrow{p}$. Nüüd aga kehtib $q \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q}} \leq \overrightarrow{p}$. □

**Lause 1.50.** *Olgu antud $q \in Q$. Võrdus $q = \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$ kehtib parajasti siis, kui leidub $p \in P$, et $\overrightarrow{p} = q$.*

*Tõestus. Piisavus.* Eeldusest $q = \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$ järeldub, et otsitavaks elemendiks $p$ sobib $\overleftarrow{q}$.
*Tarvilikkus.* Ühelt poolt kehtib iga $q \in Q$ korral $q \leq \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$. Näitame, et $q \geq \overrightarrow{\overleftarrow{q}}$. Kuna $\overrightarrow{p} = q$, siis piisab näidata, et $\overrightarrow{p} \geq \overrightarrow{\overleftarrow{\overrightarrow{p}}}$. See omakorda järeldub tingimusest 3) ning sellest, et kehtib $p \geq \overleftarrow{\overrightarrow{p}}$. □

.

# 2 Hulga suhteline $(p, r)$-kompaktsus

Käesoleva peatüki põhimõisteks on hulga suhteline $(p, r)$-kompaktsus. Anname ajaloolise ülevaate, kuidas on selle mõiste uurimiseni jõutud.

Alexander Grothendieck avaldas oma Memuaaris [4] 1955. aastal muuhulgas järgmise tulemuse (vt. tõestust [7, 1.e.2]):

**Teoreem 2.1** (Grothendieck)**.** *Banachi ruumi $X$ osahulk $K$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui leidub $(x_k) \in \ell_\infty(X)$ nii, et*

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq 1 \right\}.$$

Sellest tulemusest lähtuvalt uurisid Oleg Reinov [10] ning Jean Bourgain ja Oleg Reinov [2] 1980-ndatel aastatel ilmutamata kujul järgmist omadust, mida me nimetame suhteliseks $p$-kompaktsuseks Bourgain–Reinovi mõttes:

**Definitsioon 2.2.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja olgu $1 \leq p \leq \infty$. Ütleme, et hulk $K \subset X$ on suhteliselt $p$-kompaktne (Bourgain–Reinovi mõttes), kui leidub $(x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et*

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq 1 \right\}.$$

Grothendiecki teoreemist järeldub, et suhteliselt $\infty$-kompaktne hulk Bourgain–Reinovi mõttes on täpselt suhteline kompaktne hulk.

Deba P. Sinha ja Anil K. Karn tõid oma 2002. aasta artiklis [11, lk. 19–20] sisse järgmise hulga suhtelise $p$-kompaktsuse mõiste.

**Definitsioon 2.3.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Hulk $K \subset X$ on suhteliselt $p$-kompaktne (Sinha–Karni mõttes), kui leidub $(x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et*

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_{p^*}} \right\}.$$

Sellest definitsioonist on näha, et suhteliselt $\infty$-kompaktsed hulgad Sinha–Karni mõttes ühtivad suhteliselt kompaktsete hulkadega.

Artiklis [1] tõime definitsiooni, mis sisaldab erijuhuna suhteliselt $p$-kompaktseid hulki nii Sinha–Karni kui ka Bourgain–Reinovi mõttes:

**Definitsioon 2.4.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja olgu $1 \leq p \leq \infty$ ning $1 \leq r \leq p^*$. Hulka $K \subset X$ nimetame suhteliselt $(p, r)$-kompaktseks, kui leidub $(x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et*

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Siit on näha, et Sinha–Karni mõttes suhteliselt $p$-kompaktne hulk on suhteliselt $(p,p^*)$-kompaktne hulk ja Bourgain–Reinovi mõttes suhteliselt $p$-kompaktne hulk on suhteliselt $(p,1)$-kompaktne hulk.

Näitame, et $(p,r)$-kompaktsuse definitsioon on korrektne, see tähendab, et seal esinev rida $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ koondub. Selleks piisab näidata, et see rida koondub absoluutselt, millest tänu ruumi $X$ täielikkusele järeldub selle rea koondumine.

*Tõestus.* 1) Vaatleme esmalt juhtu $p=1$, $1 \le r \le \infty$. Kuna $x=(x_k) \in \ell_1(X)$ ja iga $k \in \mathbb{N}$ korral $|a_k| \le 1$, siis saame summat hinnata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x\| \,. \tag{4}$$

2) Vaatleme juhtu $1 < p < \infty$, $1 \le r \le p^*$. Teame, et $x=(x_k) \in \ell_p(X)$. Kuna $(a_k) \in B_{\ell_r} \subset B_{\ell_{p^*}}$, siis $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p^*}\right)^{1/p^*} \le 1$. Kasutades Rogers–Hölderi võrratust ridade jaoks (vt. järeldus 1.6), saame, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k x_k\| \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p^*}\right)^{1/p^*} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p}\right)^{1/p} \le \|x\| \,. \tag{5}$$

3) Vaatleme juhtu $p=\infty$, $r=1$. Definitsiooni kohaselt kehtib võrratus $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le 1$. Kuna $x=(x_k) \in \ell_\infty(X)$, siis $\|x\| = \sup_k \|x_k\|$. Seetõttu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \le \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \|x\| \,. \tag{6}$$

Sellega oleme näidanud, et antud definitsioon on korrektne. □

Lähtudes definitsioonist 2.4 ja Grothendiecki teoreemist 2.1, saame koheselt järgmise tulemuse.

**Järeldus 2.5.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja hulk $K$ ruumi $X$ osahulk. Siis $K$ on suhteliselt $(\infty,1)$-kompaktne parajasti siis, kui $K$ on suhteliselt kompaktne.*

Kuna magistritöö eelviimases peatükis läheb vaja fakti, et suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk on suhteliselt kompaktne, anname siin sellele tõestuse. Küsimust, kuidas on omavahel seotud suhteliselt $(p,r)$-kompaktsed hulgad indeksite $p,r$ eri väärtuste korral, on uuritud põhjalikult artiklis [1, 3.3].

**Lause 2.6.** *Olgu $1 \le p \le \infty$ ja $1 \le r \le p^*$. Iga suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk on suhteliselt kompaktne.*

*Tõestus.* Kui $p = \infty$, siis $r = 1$. Vastavalt eelmisele lausele on hulk $K$ suhteliselt kompaktne.

Vaatame nüüd juhtu $p < \infty$. Olgu antud suhteliselt $(p, r)$-kompaktne hulk $K$. Tahame näidata, et ta on suhteliselt kompaktne. Teoreemi 1.9 (Hausdorffi teoreem) kohaselt on hulga $K$ suhteline kompaktsus samaväärne sellega, et iga $\epsilon > 0$ korral leidub hulgale $K$ lõplik $\epsilon$-võrk. Lause 1.10 põhjal on viimane tingimus samaväärne suhteliselt kompaktse $\epsilon$-võrgu olemasoluga iga $\epsilon > 0$ korral.

Valime $\epsilon > 0$. Tõestame, et hulgal $K$ leidub suhteliselt kompaktne $\epsilon$-võrk.

1) Vaatleme erijuhtu $p = 1, r = \infty$.

Kuna hulk $K$ on suhteliselt $(1, \infty)$-kompaktne, siis leidub jada $x = (x_k) \in \ell_1(X)$ nii, et

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sup_k |a_k| \leq 1 \right\}.$$

Sellest, et $(x_k) \in \ell_1(X)$, järeldub, et leidub indeks $n$ nii, et

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| < \epsilon.$$

Paneme tähele, et hulk

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \mid \sup_k |a_k| \leq 1 \right\}$$

on tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. Järelduse 1.34 kohaselt on hulk $G$ suhteliselt kompaktne.

Näitame, et hulk $G$ on hulgale $K$ $\epsilon$-võrguks.

Selleks fikseerime suvalise elemendi $y$ hulgast $K$. Siis leidub jada $a = (a_k) \in \ell_1$ nii, et

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

kusjuures $\sup_k |a_k| \leq 1$.

Leiame hulgas $G$ elemendile $y$ lähedase elemendi

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Näitame, et elemendi $z$ kaugus elemendist $y$ on väiksem kui $\epsilon$. Kasutame üldistatud kolmnurga võrratust (vt. lause 1.11), et minna normiga summamärgi alla:

$$\|y - z\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k x_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \leq \epsilon.$$

Sellega oleme tõestanud, et hulk $G$ on hulgale $K$ suhteliselt kompaktne $\epsilon$-võrk. Kuna $\epsilon$ oli suvaline, saame, et $K$ on suhteliselt kompaktne hulk.

2) Olgu $p = 1, 1 \leq r < \infty$.

Kuna hulk $K$ on suhteliselt $(1, r)$-kompaktne, siis leidub jada $x = (x_k) \in \ell_1(X)$ nii, et

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \leq 1 \right\}.$$

Sellest, et $(x_k) \in \ell_1(X)$, järeldub, et leidub indeks $n$ nii, et

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| < \epsilon.$$

Paneme tähele, et hulk

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r \leq 1 \right\}$$

on tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. Järelduse 1.34 kohaselt on hulk $G$ suhteliselt kompaktne.

Näitame, et hulk $G$ on hulgale $K$ $\epsilon$-võrguks.

Selleks fikseerime suvalise elemendi $y$ hulgast $K$. Siis leidub jada $a = (a_k) \in \ell_1$ nii, et

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

kusjuures on täidetud tingimus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \leq 1.$$

Siit järeldub, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral kehtib $|a_k| \leq 1$.

Leiame hulgas $G$ elemendile $y$ lähedase elemendi

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Näitame, et elemendi $z$ kaugus elemendist $y$ on väiksem kui $\epsilon$. Avaldame:

$$\|y - z\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k x_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \leq \epsilon.$$

Sellega oleme tõestanud, et hulk $G$ on hulgale $K$ suhteliselt kompaktne $\epsilon$-võrk. Kuna $\epsilon$ oli suvaline, saame, et $K$ on suhteliselt kompaktne hulk.

3) Olgu $1 < p < \infty, 1 \leq r \leq p^*$.

Kuna hulk $K$ on suhteliselt $(p,r)$-kompaktne, siis leidub jada $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \leq 1 \right\}.$$

Sellest, et $(x_k) \in \ell_p(X)$, järeldub, et leidub indeks $n$ nii, et

$$\left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Paneme tähele, et hulk

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r \leq 1 \right\}$$

on tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. Järelduse 1.34 kohaselt on hulk $G$ suhteliselt kompaktne.

Näitame, et hulk $G$ on hulgale $K$ $\epsilon$-võrguks.

Selleks fikseerime suvalise elemendi $y$ hulgast $K$. Siis leidub jada $a = (a_k) \in \ell_p$ nii, et

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

kusjuures on täidetud tingimus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \leq 1.$$

Leiame hulgas $G$ elemendile $y$ lähedase elemendi

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Näitame, et elemendi $z$ kaugus elemendist $y$ on väiksem kui $\epsilon$. Avaldame

$$\|y - z\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k x_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\|.$$

Siin me kasutasime üldistatud kolmnurga võrratust (vt. lause 1.11).

Kuna $(a_k) \in B_{\ell_r} \subset B_{\ell_{p^*}}$, siis $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p^*}\right)^{1/p^*} \leq 1$. Kasutades Rogers–Hölderi võrratust ridade jaoks (vt. järeldus 1.6), saame, et

$$\|y - z\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, \|x_k\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^{p^*}\right)^{1/p^*} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon. \tag{7}$$

Sellega oleme tõestanud, et hulk $G$ on hulgale $K$ suhteliselt kompaktne $\epsilon$-võrk. Kuna $\epsilon$ oli suvaline, saame, et $K$ on suhteliselt kompaktne hulk. □

# 3 Operaatorideaal $\mathcal{K}_{(p,r)}$

Siin peatükis vaatleme operaatorideaali mõistet, mis on sisse toodud A. Pietschi poolt raamatus [9]. Definitsioon 3.2 erineb esmapilgul raamatus toodust [9, 1.1.1], kuid on teoreemi [9, 1.2.2] arvestades sellega samaväärne.

Edasi toome mõningaid tuntuid näiteid operaatorideaalidest. Seejärel anname $(p,r)$-kompaktse operaatori definitsiooni, mille tõime sisse artiklis [1]. Artiklis tõime sisse $(p,r)$-kompaktsete operaatorite klassi $\mathcal{K}_{(p,r)}$ ning tõestasime üksikasju läbi tegemata, et $\mathcal{K}_{(p,r)}$ on operaatorideaal. Selle peatüki lõpus anname sellele detailse tõestuse.

**Definitsioon 3.1.** *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ pidevate lineaarsete operaatorite klass. Tähistame kõiki klassi $\mathcal{A}$ kuuluvaid operaatoreid, mis tegutsevad ruumist $X$ ruumi $Y$, niimoodi: $\mathcal{A}(X,Y)$. Seda hulka nimetatakse klassi $\mathcal{A}$ komponendiks ruumist $X$ ruumi $Y$.*

**Definitsioon 3.2.** *Klassi $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ nimetatakse operaatorideaaliks, kui*

*1) kõigi Banachi ruumide $X$ ja $Y$ korral komponent $\mathcal{A}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ lineaarne alamruum;*

*2) $\mathcal{A}$ sisaldab kõik lõplikumõõtmelised pidevad lineaarsed operaatorid;*

*3) kui $X$, $Y$, $Z$, $W$ on Banachi ruumid ja $R \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{A}(Y,Z)$, $T \in \mathcal{L}(Z,W)$, siis $TSR \in \mathcal{A}(X,W)$, ehk teisisõnu, $\mathcal{A}$ on kinnine mõlemalt poolt pidevate lineaarsete operaatorite rakendamise suhtes.*

**Definitsioon 3.3.** *Kõigi operaatorideaalide klassi tähistame* OI.

Meenutame, et lineaarset operaatorit $T : X \to Y$ nimetatakse kompaktseks, kui $T(B_X)$ on ruumi $Y$ suhteliselt kompaktne alamhulk.

*Näide.* Operaatorideaalide näideteks on:

- kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ideaal $\mathcal{L}$,
- kõigi kompaktsete lineaarsete operaatorite ideaal $\mathcal{K}$,
- kõigi lõplikumõõtmeliste lineaarsete operaatorite ideaal $\mathcal{F}$.

*Märkus* 3.4. Definitsioonist on vahetult selge, et $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{F}$ on operaatorideaalid. Funktsionaalanalüüsi õpikus [8, lk. 213, 218-219] on sisuliselt ära toodud tõestused, et omadused 1)–3) kehtivad klassi $\mathcal{K}$ korral, kuid pole sisse toodud operaatorideaali mõistet. See, et $\mathcal{K}$ on operaatorideaal, tuleneb ka lausest 3.8, kui võtta vastavalt $p = \infty, r = 1$.

**Definitsioon 3.5.** *Olgu antud $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ OI. Ütleme, et $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, kui kõigi Banachi ruumide $X, Y$ korral kehtib sisalduvus komponentide $\mathcal{A}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ vahel.*

On lihtne näha, et seos $\leq$ on osaline järjestus operaatorideaalidel.

Eelneva definitsiooni mõttes võib öelda, et $\mathcal{F}$ on väikseim operaatorideaal, ning $\mathcal{L}$ suurim operaatorideaal.

**Lause 3.6.** *Definitsioonis 3.2 piisab punkti 2) asemel nõuda, et $\mathcal{A}$ sisaldab kõik 1-mõõtmelised operaatorid.*

*Tõestus.* Oletame, et $\mathcal{A}$ sisaldab kõik 1-mõõtmelised operaatorid, mis avalduvad lause 1.38 põhjal kujul $T = x^* \otimes y$, kus $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$. Operaatorideaali definitsiooni punkt 1) ütleb, et $\mathcal{A}(X,Y)$ on $\mathcal{L}(X,Y)$ lineaarne alamruum, seega ka iga operaator kujul $T = \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes y_k$ sisaldub operaatorideaalis $\mathcal{A}(X,Y)$. Viimane on aga eelmainitud lause 1.38 kohaselt lõplikumõõtmelise operaatori üldkuju. $\square$

**Definitsioon 3.7.** *Olgu antud indeksid $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$. Lineaarset operaatorit $T : X \to Y$ nimetame $(p,r)$-kompaktseks, kui $T(B_X)$ on ruumi $Y$ suhteliselt $(p,r)$-kompaktne alamhulk.*

Tähistame suvaliste Banachi ruumide vahel tegutsevate $(p,r)$-kompaktsete operaatorite klassi sümboliga $\mathcal{K}_{(p,r)}$.

**Lause 3.8.** *Olgu $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$. Klass $\mathcal{K}_{(p,r)}$ on operaatorideaal.*

*Tõestus.* 1) Olgu $X, Y$ Banachi ruumid. Näitame, et $\mathcal{K}_{(p,r)}(X,Y)$ on $\mathcal{L}(X,Y)$ lineaarne alamruum.

Olgu operaatorid $R$, $S \in \mathcal{K}_{(p,r)}(X,Y)$. Siis leiduvad $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ ja $y = (y_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$R(B_X) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \leq 1 \right\},$$

$$S(B_X) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^r \leq 1 \right\}.$$

Konstrueerime vahelduvad jadad

$$x' = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots),$$
$$y' = (0, y_1, 0, y_2, \ldots).$$

Defineerime vahelduvate jadade $x'$, $y'$ abil jada

$$z = 2^{\frac{1}{r}} \alpha x' + 2^{\frac{1}{r}} y'.$$

On lihtne näha, et $\|x\| = \|x'\|$ ja $\|y\| = \|y'\|$.

Näitame, et $z \in \ell_p(X)$. Kasutades kolmnurga võrratust ruumis $\ell_p(X)$, saame, et

$$\|z\| = \left\|2^{\frac{1}{r}}\alpha x' + 2^{\frac{1}{r}} y'\right\| \leq \left\|2^{\frac{1}{r}}\alpha x'\right\| + \left\|2^{\frac{1}{r}} y'\right\| = 2^{\frac{1}{r}} |\alpha| \|x\| + 2^{\frac{1}{r}} \|y\| < \infty.$$

Erijuhul $p = \infty$ tuleb lisaks kontrollida ka seda, et jada $z$ oleks koonduv. Saame, et $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, sest $\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{r}}\alpha x_k = 0$ ning $\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{r}} y_k = 0$. Seega $z \in \ell_\infty(X)$.

Oleme näidanud, et $z \in \ell_p(X)$. Jääb näidata, et

$$T(B_X) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r \leq 1 \right\}.$$

Valime vabalt $\xi \in T(B_X)$. Siis kehtib, et $\xi = \alpha\xi_1 + \xi_2$, kus $\xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ja $(a_k) \in B_{\ell_r}$ ning $\xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k$ ja $(b_k) \in B_{\ell_r}$.

Olgu

$$c_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_{\frac{k+1}{2}}, & \text{kui } k \text{ on paaritu} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_{\frac{k}{2}}, & \text{kui } k \text{ on paaris.} \end{cases}$$

Siit tuleneb, et

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\xi_1 + \xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_k \right) (2^{\frac{1}{r}} \alpha x_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_k \right) (2^{\frac{1}{r}} y_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l-1}}^{\infty} c_k z_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l}}^{\infty} c_k z_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k. \end{aligned}$$

Tehtud ridade ümberjärjestamised on olnud lubatud, sest tegemist on absoluutselt koonduvate ridadega (vaata definitsiooni 2.4 korrektsuse tõestust). Ka järgmises valemireas kasutame seda fakti, et absoluutselt koonduv rida koondub tingimatult.

Jääb näidata, et $(c_k) \in B_{\ell_r}$. Kui $r < \infty$, siis selleks piisab näidata, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_k \right|^r + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_k \right|^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^r \leq 1.$$

Juhul $r = \infty$ saame, et

$$\sup_k |c_k| = \max( \sup_{\substack{k \\ k=2l-1}} |c_k|, \sup_{\substack{k \\ k=2l}} |c_k|) = \max(\sup_k |a_k|, \sup_k |b_k|) \leq 1$$

ja $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, sest $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $(c_k) \in B_{\ell_r}$.

2) Olgu $X, Y$ Banachi ruumid. Me peame tõestama, et $\mathcal{K}_{(p,r)}(X, Y)$ sisaldab kõik ühemõõtmelised lineaarsed operaatorid.

Olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ühemõõtmeline lineaarne operaator, ehk teisisõnu, $T = x^* \otimes y$, kus $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$.

Defineerime $z = (z_k)$ nii, et

$$z_k = \begin{cases} \|x^*\| \, y, & \text{kui } k = 1 \\ 0, & \text{kui } k > 1. \end{cases}$$

On selge, et $z \in \ell_p(X)$, kuna $z$ sisaldab ainult ühte nullist erinevat liiget.

Olgu $x \in B_X$, siis

$$T(x) = x^*(x) y = \frac{x^*(x)}{\|x^*\|} z_1,$$

kusjuures

$$\left| \frac{x^*(x)}{\|x^*\|} \right| \leq 1.$$

Seda arvestades saamegi, et

$$T(x) \in \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k \mid (a_k) \in B_{\ell_{r^*}} \right\}.$$

3) Jääb näidata, et kui $X$, $Y$, $Z$, $W$ on Banachi ruumid ja $R \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{K}_{(p,r)}(Y, Z)$ ja $T \in \mathcal{L}(Z, W)$, siis $TSR \in \mathcal{K}_{(p,r)}(X, W)$. Märgime, et kui operaator $R$ on 0-operaator, siis $TSR = 0 \in \mathcal{K}_{(p,r)}(X, W)$, sest $\mathcal{K}_{(p,r)}(X, W)$ on $\mathcal{L}(X, W)$ vektoralamruum. Edasises oletame, et operaator $R$ ei ole võrdne nulliga.

On antud, et $S \in \mathcal{K}(p, r)(Y, Z)$.

Seega leidub $z = (z_k) \in \ell_p(Z)$ nii, et

$$S(B_Y) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Eesmärgiks on tõestada, et leidub $w = (w_k) \in \ell_p(W)$ nii, et

$$TSR(B_X) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k \mid (b_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Olgu $w = (w_k)$, kus $w_k = \|R\| \, T(z_k)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näitame, et $w \in \ell_p(W)$. Vaatame juhtu, kui $1 \leq p < \infty$:

$$\|w\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|R\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T(z_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|R\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^p \|z_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|R\| \|T\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|R\| \|T\| \|z\| < \infty.$$

Juhul $p = \infty$ saame, et

$$\|w\| = \sup_k \|w_k\| = \|R\| \sup_k \|T(z_k)\| \leq \|R\| \|T\| \sup_k \|z_k\| = \|R\| \|T\| \|z\| < \infty$$

ning $\lim_{k\to\infty} w_k = 0$, sest $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

Valime vabalt $x \in B_X$, siis $y := \frac{Rx}{\|R\|} \in B_Y$. Sellest, et $S$ on $(p,r)$-kompaktne operaator, saame, et $S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z_k$ ja $(b_k) \in B_{\ell_r}$.

Siit tuleneb, et

$$\begin{aligned} TSR(x) &= TS(\|R\| y) = T(\|R\| S(y)) = T\left(\|R\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k z_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|R\| T(b_k z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \|R\| T(z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$TSR(B_X) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k \mid (b_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

□

Järgmine lause näitab, et $(p,r)$-kompaktsed operaatorid on ühtlasi ka kompaktsed. Lahtiseks jääb küsimus, kuidas on omavahel seotud operaatorideaalid $\mathcal{K}_{(p,r)}$ erinevate indeksite $p, r$ väärtuste korral. Vastuse sellele küsimusele saab leida artiklist [1, 3.3].

**Lause 3.9.** *Olgu* $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r \leq p^*$. *Siis* $\mathcal{K}_{(p,r)} \leq \mathcal{K}$.

*Tõestus.* Olgu antud Banachi ruumid $X$ ja $Y$ ning nende vahel tegutsev operaator $T \in \mathcal{K}_{(p,r)}(X,Y)$. Definitsiooni kohaselt on iga tõkestatud hulga $G \subset X$ kujutis $T(G)$ suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk. Lause 2.6 kohaselt on hulk $T(G)$ ka kompaktne hulk. Seega on $T$ kompaktne operaator. □

# 4 Genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{K}_{(p,r)}$

Selles peatükis toome sisse genereerivate hulkade süsteemi mõiste, mis pärineb Stephani artiklist [12]. Me näitame, et suhteliselt $(p, r)$-kompaktsed hulgad moodustavad genereerivate hulkade süsteemi. Stephani tõestas, et kahe antud genereerivate hulkade süsteemi abil saab tekitada uue operaatorideaali. Niiviisi saame me lähtudes tõkestatud hulkadest ja suhteliselt $(p, r)$-kompaktsetest hulkadest tekitada operaatorite klassi $\mathbf{K}_{(p,r)}$, mis tõestab veelkord, et $\mathbf{K}_{(p,r)}$ on operaatorideaal. Edasi vaatleme genereerivate hulkade süsteemide mõningaid omadusi.

Esmapilgul tundub, et definitsioonis 4.3 tingimus 1) oleks justkui tugevam, kui definitsioonis [12, 1.1] tingimus $G_1$. Lause 4.7 näitab, et see siiski nõnda ei ole.

Artiklis [12] vaadati genereerivate hulkade süsteemi definitsiooni reaalsete Banachi ruumide korral. Lõputöös vaatleme seda ka kompleksel juhul.

**Definitsioon 4.1.** *Tähistame kõigi Banachi ruumide tõkestatud hulkade klassi sümboliga* $\mathbf{B}$.

**Definitsioon 4.2.** *Olgu* $\mathbf{G} \subset \mathbf{B}$ *tõkestatud hulkade klass. Tähistame iga Banachi ruumi* $X$ *korral klassi* $\mathbf{G}$ *hulki, mis kuuluvad ruumi* $X$*, niimoodi:* $\mathbf{G}(X)$*. Seda hulka nimetatakse klassi* $\mathbf{G}$ *komponendiks ruumis* $X$*.*

**Definitsioon 4.3.** *Klassi* $\mathbf{G} \subset \mathbf{B}$ *nimetatakse genereerivate hulkade süsteemiks, kui on täidetud järgmised tingimused:*

*1) Iga ruumi* $X$ *tõkestatud lõplikumõõtmeline alamhulk kuulub komponenti* $\mathbf{G}(X)$*;*

*2) Kui* $G, H \in \mathbf{G}(X)$*, siis iga* $\alpha \in \mathbb{K}$ *korral* $\alpha G + H \in \mathbf{G}(X)$*;*

*3) Kui* $G \in \mathbf{G}(X)$ *ja* $H \subset G$*, siis* $H \in \mathbf{G}(X)$*;*

*4) Kui* $G \in \mathbf{G}(X)$ *ja* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*, siis* $T(G) \in \mathbf{G}(Y)$*.*

**Definitsioon 4.4.** *Kõigi genereerivate hulkade süsteemide klassi tähistame* GHS.

*Näide.* Genereerivate hulkade süsteemide näideteks on:

- kõigi tõkestatud hulkade süsteem $\mathbf{B}$,
- kõigi lõplikumõõtmeliste tõkestatud hulkade süsteem $\mathbf{F}$.

Vahetult definitsioonist on näha, et $\mathbf{B}$ on genereerivate hulkade süsteem. Vaatleme klassi $\mathbf{F}$.

**Lause 4.5.** *Klass* $\mathbf{F}$ *on genereerivate hulkade süsteem.*

*Tõestus.* On selge, et $\mathbf{F} \subset \mathbf{B}$. Näitame, et tingimused on täidetud.

1) Tingimus on täidetud definitsiooni põhjal.

2) Valime $G, H \in \mathbf{F}(X)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Lause 1.29 kohaselt siis ka hulk $\alpha G + H$ on lõplikumõõtmeline. On selge, et ta on tõkestatud. Kokkuvõttes saame, et $\alpha G + H \in \mathbf{F}(X)$.

3) Kehtib, kuna lõplikumõõtmelise tõkestatud hulga alamhulk on samuti lõplikumõõtmeline ja tõkestatud.

4) Olgu $G \in \mathbf{F}(X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Lause 1.30 kohaselt siis ka hulk $T(G)$ on lõplikumõõtmeline. Kuna operaator $T$ on tõkestatud, siis $T(G)$ on samuti tõkestatud ja kokkuvõttes saame, et $T(G) \in \mathbf{F}(Y)$. □

Genereerivate hulkade süsteemide vahel defineerime järjestuse loomulikul viisil:

**Definitsioon 4.6.** *Olgu* $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in$ GHS. *Ütleme, et* $\mathbf{G} \leq \mathbf{H}$, *kui iga Banachi ruumi* $X$ *korral komponentide vahel kehtib sisalduvus* $\mathbf{G}(X) \subset \mathbf{H}(X)$.

On lihtne näha, et seos $\leq$ on järjestusseos.

Eelneva definitsiooni põhjal võib öelda, et $\mathbf{F}$ on väikseim genereerivate hulkade süsteem ja $\mathbf{B}$ on suurim genereerivate hulkade süsteem.

**Lause 4.7.** *Definitsioonis 4.3 piisab punkti 1) asemel nõuda, et* $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ *sisaldab ruumi* $\mathbb{K}$ *ühikkera* $B_{\mathbb{K}}$.

*Tõestus.* On selge, et kui definitsiooni 4.3 punkt 1) on täidetud, siis kehtib ka käesoleva lause väide.

Näitame, et kui $B_{\mathbb{K}} \in \mathbf{G}(\mathbb{K})$, siis sellest järeldub, et iga Banachi ruumi $X$ iga tõkestatud lõplikumõõtmeline alamhulk kuulub komponenti $\mathbf{G}(X)$.

Olgu $X$ Banachi ruum ja $G \subset X$ tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. See tähendab esiteks, et leidub $b > 0$ nii, et iga $x \in G$ korral kehtib $\|x\| \leq b$; ning teiseks, et leidub süsteem $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nii, et $G \subset Y$, kus $Y = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}\}$.

Lause 1.35 (lõplikumõõtmeliste ruumide isomorfismiteoreem) põhjal leidub positiivne konstant $c$ nii, et

$$c \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \leq \|x\| .$$

Seega saame, et iga elemendi $x \in G$ esituses ruumi $Y$ baasi kaudu rahuldavad kordajad $\alpha_k$, $k \in 1, \ldots, n$ järgmist tingimust:

$$|\alpha_k| \leq \frac{\|x\|}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Defineerime hulga $G_k$ nii:

$$G_k = \left\{ \alpha_k e_k \mid |\alpha_k| \leq \frac{b}{c} \right\} .$$

Toome sisse operaatori $T_k : \mathbb{K} \to X$:

$$T_k(a) = \frac{ab}{c} e_k.$$

Nüüd saamegi, et

$$G \subset \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}, \alpha_k \leq \frac{b}{c} \right\} = \sum_{k=1}^{n} G_k = \sum_{k=1}^{n} T_k(B_{\mathbb{K}}),$$

millest järeldub genereeriva hulkade süsteemi definitsiooni tingimuste 2), 3) ja 4) põhjal, et hulk $G$ kuulub süsteemi $\mathbf{G}$ komponenti $\mathbf{G}(X)$. □

**Lause 4.8.** *Olgu* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$. *Kõigi suhteliselt* $(p, r)$*-kompaktsete hulkade klass* $\mathbf{K}_{(p,r)}$ *on genereerivate hulkade süsteem.*

*Tõestus.* Näitame esmalt, et suhteliselt $(p, r)$-kompaktsed hulgad on tõkestatud. Seejärel näitame tingimuste 1)–4) kehtivust.

Olgu $X$ Banachi ruum, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$ ja $K \in \mathbf{K}_{(p,r)}(X)$. Näitame, et $K$ on tõkestatud.

Definitsiooni põhjal leidub $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Vaatame suvalist hulga $K$ elementi $\xi \in K$. Siis $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, kus $(a_k) \in B_{\ell_r}$.

Kasutades vastavalt erijuhule ühte peatükis 2 definitsiooni 2.4 korrektsuse tõestamisel saadud hinnangutest (4), (5), (6), saame, et

$$\|\xi\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k x_k\| \leq \|x\|.$$

Siit tulenebki, et hulk $K$ on tõkestatud.

1) Lause 4.7 põhjal piisab näidata, et hulk $B_{\mathbb{K}}$ on suhteliselt $(p, r)$-kompaktne. Valime

$$(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = 1 \\ 0, & \text{kui } k > 1. \end{cases}$$

Olgu $\xi \in B_{\mathbb{K}}$. Defineerides

$$(a_k) = \begin{cases} \xi, & \text{kui } k = 1 \\ 0, & \text{kui } k > 1, \end{cases}$$

saame, et

$$\xi = a_1 x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

kus ilmselt $(x_k) \in \ell_p(\mathbb{K})$ ja $(a_k) \in B_{\ell_r}$.

2) Olgu $G, H \in \mathbf{K}_{(p,r)}(X)$ suhteliselt $(p,r)$-kompaktsed hulgad ja $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definitsioonist tuleneb, et leiduvad $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$G \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}$$

ja $\exists y = (y_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$H \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \mid (b_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Vaja on näidata, et $K := \alpha G + H$ on samuti suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk. Teisisõnu, on vaja leida $z = (z_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$K \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k \mid (c_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Konstrueerime vahelduvad jadad

$$x' = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots),$$
$$y' = (0, y_1, 0, y_2, \ldots).$$

Defineerime vahelduvate jadade $x', y'$ abil jada

$$z = 2^{\frac{1}{r}} \alpha x' + 2^{\frac{1}{r}} y'.$$

On lihtne näha, et $\|x\| = \|x'\|$ ja $\|y\| = \|y'\|$.

Näitame, et $z \in \ell_p(X)$. Kasutades kolmnurga võrratust ruumis $\ell_p(X)$, saame, et

$$\|z\| = \left\| 2^{\frac{1}{r}} \alpha x' + 2^{\frac{1}{r}} y' \right\| \leq \left\| 2^{\frac{1}{r}} \alpha x' \right\| + \left\| 2^{\frac{1}{r}} y' \right\| = 2^{\frac{1}{r}} |\alpha| \, \|x\| + 2^{\frac{1}{r}} \|y\| < \infty.$$

Erijuhul $p = \infty$ tuleb veel lisaks normi kontrollimisele ka näidata, et jada $z$ on koonduv.

Samuti $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, sest $\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{r}} \alpha x_k = 0$ ning $\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{r}} y_k = 0$. Seega $z \in \ell_\infty(X)$.

Oleme näidanud, et $z \in \ell_p(X)$.

Valime vabalt $\xi \in K$. Saame, et $\xi = \alpha\xi_1 + \xi_2$, kus $\xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ja $(a_k) \in B_{\ell_r}$ ning $\xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k$ ja $(b_k) \in B_{\ell_r}$.

Olgu

$$c_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_{\frac{k+1}{2}}, & \text{kui } k \text{ on paaritu} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_{\frac{k}{2}}, & \text{kui } k \text{ on paaris.} \end{cases}$$

Siit tuleneb, et

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\xi_1 + \xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_k \right) (2^{\frac{1}{r}} \alpha x_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_k \right) (2^{\frac{1}{r}} y_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l-1}}^{\infty} c_k z_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l}}^{\infty} c_k z_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k. \end{aligned}$$

Tehtud ridade ümberjärjestamised on olnud lubatud, sest tegemist on absoluutselt koonduvate jadadega (vaata definitsiooni 2.4 korrektsuse tõestust). Ka järgmises valemireas kasutame seda, et absoluutselt koonduv rida koondub tingimatult.

Näitame, et $(c_k) \in B_{\ell_r}$. Kui $r < \infty$, siis selleks piisab näidata, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} a_k \right|^r + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} b_k \right|^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^r \leq 1.$$

Juhul $r = \infty$ saame, et

$$\sup_k |c_k| = \max( \sup_{\substack{k \\ k=2l-1}} |c_k|, \sup_{\substack{k \\ k=2l}} |c_k|) = \max(\sup_k |a_k|, \sup_k |b_k|) \leq 1$$

ja $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, sest $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $(c_k) \in B_{\ell_r}$.

3) Olgu $G \in \mathbf{K}_{(p,r)}(X)$ ja $H \subset G$. Vastavalt suhteliselt $(p,r)$-kompaktse hulga definitsioonile leidub $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$G \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k \mid (c_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Kuna $H \subset G$, siis on selge, et ka $H$ rahuldab nõutud tingimust.

4) Olgu $X, Y$ Banachi ruumid ja $G \subset X$ suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk. Olgu antud $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Näitame, et $T(G)$ on suhteliselt $(p,r)$-kompaktne hulk.

Olgu $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$.

Siis leidub $x = (x_k) \in \ell_p(X)$ nii, et

$$G \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Näitame, et leidub $y = (y_k) \in \ell_p(Y)$ nii, et

$$T(G) \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \mid (b_k) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

Defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral $y_k := Tx_k$.
Valime $\xi \in K$. Siis $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, kus $(a_k) \in B_{\ell_r}$. Siis

$$T\xi = T\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k.$$

Siit on näha, et võttes iga $k \in \mathbb{N}$ korral $b_k := a_k$, kehtib jada $(b_k)$ jaoks nõutud tingimus $(b_k) = (a_k) \in B_{\ell_r}$.

□

**Lause 4.9.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r \leq p^*$. Siis $\mathbf{K}_{(p,r)} \leq \mathbf{K}$.*

*Tõestus.* Tuleneb vahetult lausest 2.6. □

Nüüd jõuame selleni, kuidas teadaolevate genereerivate hulkade süsteemide abil saab tekitada uusi operaatorideaale. See tulemus pärineb artiklist [12].

**Teoreem 4.10.** *Olgu antud genereerivate hulkade süsteemid $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathrm{GHS}$ nii, et $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$.*

*Defineerime Banachi ruumide $X, Y$ korral operaatorite klassi*

$$[\mathbf{G} \to \mathbf{H}](X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid G \in \mathbf{G}(X) \Rightarrow T(G) \in \mathbf{H}(Y)\}.$$

*Siis $[\mathbf{G} \to \mathbf{H}]$ moodustab operaatorideaali, mida nimetatakse $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ poolt tekitatud operaatorideaaliks.*

*Tõestus.* 1) Operaatorideaali definitsiooni esimene punkt ütleb, et $[\mathbf{G} \to \mathbf{H}](X, Y)$ peab olema $\mathcal{L}(X, Y)$ lineaarne alamruum. Teisisõnu, kui $R$, $S \in [\mathbf{G} \to \mathbf{H}](X, Y)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis $\alpha R + S \in [\mathbf{G} \to \mathbf{H}](X, Y)$. Eeldustest teame, et kui $G \in \mathbf{G}(X)$, siis $R(G), S(G) \in \mathbf{H}(Y)$. On vaja näidata, et ka $(\alpha R + S)G \in \mathbf{H}(Y)$.
Näitame, et $(\alpha R + S)G \subset \alpha R(G) + S(G)$. Tõepoolest,

$$(\alpha R + S)G = \{\alpha Ra + Sa \mid a \in G\} \subset \{\alpha Ra_1 + Sa_2 \mid a_1, a_2 \in G\} = \alpha R(G) + S(G).$$

Genereeriva hulkade süsteemi definitsiooni tingimust 2) arvestades saame, et $\alpha R(G) + S(G) \in \mathbf{H}(Y)$. Tingimuse 3) põhjal aga siis ka $(\alpha R + S)G \in \mathbf{H}(Y)$.

2) Olgu $T$ ühemõõtmeline pidev lineaarne operaator. Näitame, et siis $T \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X, Y)$.

Valime vabalt $G \in \mathbf{G}(X)$. Siis $G$ on tõkestatud hulk ruumis $X$.

Teame funktsionaalanalüüsist, et $T(G)$ on ühemõõtmeline tõkestatud hulk. Nüüd saamegi, et $T(G) \in \mathbf{H}(Y)$, sest definitsiooni kohaselt genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{H}(Y)$ sisaldab kõik lõplikumõõtmelised tõkestatud hulgad.

3) Olgu $X, Y, Z, W$ Banachi ruumid ja $R \in \mathcal{L}(X, Y), S \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](Y, Z), T \in \mathcal{L}(Z, W)$. Näitame, et siis ka $TSR \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X, W)$.

Definitsiooni ütleb meile, et kui $B \in \mathbf{G}(Y)$, siis $S(B) \in \mathbf{H}(Z)$. Näitame, et kui $G \in \mathbf{G}(X)$, siis $TSR(G) \in \mathbf{H}(W)$.

Olgu $G \in \mathbf{G}(X)$. Genereerivate hulkade süsteemi omaduse 4) põhjal $R(G) \in \mathbf{G}(Y)$. Siit järeldub eelduse põhjal, et $SR(G) \in \mathbf{H}(Z)$. Uuesti omadust 4) kasutades saame, et $TSR(G) \in \mathbf{H}(W)$, mida oligi vaja tõestada. $\square$

*Näide.* Nüüd saamegi uuesti juba nii mõnedki eelnevalt toodud väited:

- $\mathcal{L} = [\mathbf{B}{\to}\mathbf{B}]$ on operaatorideaal;
- $\mathcal{K}_{(p,r)} = [\mathbf{B}{\to}\mathbf{K}_{(p,r)}]$ on operaatorideaal;
- $\mathcal{F} = [\mathbf{B}{\to}\mathbf{F}]$ on operaatorideaal (lause 1.32 abil).

*Märkus* 4.11. Iga genereerivate hulkade süsteemi $\mathbf{G}$ korral $\mathcal{L} = [\mathbf{G}{\to}\mathbf{G}]$.

Näitame, kuidas genereerivate hulkade $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ süsteemide suurendamine ja vähendamine mõjutavad tekitatud operaatorideaali $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}]$.

**Lause 4.12.** *Olgu* $\mathbf{H} \le \mathbf{H}' \le \mathbf{G}' \le \mathbf{G}$. *Kehtivad seosed:*

*1)* $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}] \le [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}']$*;*

*2)* $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}] \le [\mathbf{G}'{\to}\mathbf{H}]$.

*Tõestus.* 1) Olgu $X, Y$ suvalised Banachi ruumid. Näitame, et kehtib sisalduvus $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X, Y) \subset [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}'](X, Y)$, millest järeldub vahetult, et $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}] \le [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}']$. Kirjutame definitsiooni põhjal lahti:

$$[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid G \in \mathbf{G}(X) \Rightarrow T(G) \in \mathbf{H}(Y)\},$$

$$[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}'](X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid G \in \mathbf{G}(X) \Rightarrow T(G) \in \mathbf{H}'(Y)\}.$$

Olgu antud operaator $T \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X, Y)$. See tähendab, et kui $G \in \mathbf{G}(X)$, siis $T(G) \in \mathbf{H}(Y)$. Et aga $\mathbf{H}(Y) \subset \mathbf{H}'(Y)$, siis ka $T(G) \in \mathbf{H}'(Y)$. Oleme näidanud, et $T \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}'](X, Y)$.

2) Olgu $X, Y$ suvalised Banachi ruumid. Piisab näidata, et $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X,Y) \subset [\mathbf{G}^{'}{\to}\mathbf{H}](X,Y)$. Kirjutame definitsiooni põhjal välja:

$$[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid G \in \mathbf{G}(X) \Rightarrow T(G) \in \mathbf{H}(Y)\},$$

$$[\mathbf{G}^{'}{\to}\mathbf{H}](X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid G \in \mathbf{G}^{'}(X) \Rightarrow T(G) \in \mathbf{H}(Y)\}.$$

Olgu $T \in [\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X,Y)$. See tähendab, et iga hulga $G \in \mathbf{G}(X)$ kujutis operaatori $T$ suhtes kuulub genereerivate hulkade süsteemi komponenti $\mathbf{H}(Y)$. Kuna aga $\mathbf{G}^{'}(X) \subset \mathbf{G}(X)$, siis ammugi iga hulga $G \in \mathbf{G}^{'}(X)$ kujutis operaatori $T$ suhtes kuulub komponenti $\mathbf{H}(Y)$. Seega $[\mathbf{G}{\to}\mathbf{H}](X,Y) \subset [\mathbf{G}^{'}{\to}\mathbf{H}](X,Y)$. □

*Näide.* Eelnevas oleme näinud, et $\mathbf{F} \le \mathbf{K}_{(p,r)} \le \mathbf{B}$. Eelmise lause põhjal saame öelda:

1) $\mathcal{F} = [\mathbf{B}{\to}\mathbf{F}] \le [\mathbf{B}{\to}\mathbf{K}_{(p,r)}] = \mathcal{K}_{(p,r)}$

2) $\mathcal{F} = [\mathbf{B}{\to}\mathbf{F}] \le [\mathbf{K}_{(p,r)}{\to}\mathbf{F}]$

Esimene võrratus $\mathcal{F} \le \mathcal{K}_{(p,r)}$ ei ütle meile midagi uut. Teine näide tekitab aga küsimuse, kas $[\mathbf{K}_{(p,r)}{\to}\mathbf{F}]$ on võrdne mõne meile tuntud operaatorideaaliga? Vastuse annab järgmine lause.

**Lause 4.13.** *Olgu $1 \le p \le \infty, 1 \le r \le p^*$. Kehtib $[\mathbf{K}_{(p,r)}{\to}\mathbf{F}] = \mathcal{F}$.*

*Tõestus.* Teame, et tekitatud operaatorideaal $[\mathbf{K}_{(p,r)}{\to}\mathbf{F}]$ sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Oletame vastuväiteliselt, et tekitatud operaatorideaal sisaldab mingit operaatorit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, mis ei ole lõplikumõõtmeline. Siis leiduvad elemendid $y_k \in T(X), k \in \mathbb{N}$ nii, et hulk $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Kuna elemendid $y_k$ kuuluvad kujutishulka $T(X)$, siis leiduvad neile originaalid $z_k$. Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral $T(z_k) = y_k$. Normeerime jada $(z_k)$ ümber nii, et jada kuuluks ruumi $\ell_p(X)$.

Defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$x_k := \frac{1}{2^k}\frac{z_k}{\|z_k\|}.$$

On lihtne näha, et $(x_k) \in \ell_p(X)$, kuna $\|x_k\| = \frac{1}{2^k}$.

Definitsiooni kohaselt on hulk

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \mid (a_k) \in B_{\ell_r} \right\}$$

suhteliselt $(p,r)$-kompaktne.

Kuna $T$ kuulub genereerivate hulkade süsteemide $\mathbf{K}_{(p,r)}$ ja $\mathbf{F}$ poolt tekitatud operaatorideaali, siis suhteliselt $(p, r)$-kompaktse hulga $K$ kujutis $T(K)$ on lõplikumõõtmeline hulk.

Paneme aga tähele, et iga $l \in \mathbb{N}$ korral element $x_l$ kuulub hulka $K$. Selle nägemiseks tuleb võtta reas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ kordaja $a_l$ võrdseks ühega ja ülejäänud kordajad võrdseks nulliga.

Nüüd iga $k \in \mathbb{N}$ korral $T(x_k) \in T(K)$. Saame, et

$$T(x_k) = T\left(\frac{1}{2^k}\frac{z_k}{\|z_k\|}\right) = \frac{1}{2^k\|z_k\|}T(z_k) = \frac{1}{2^k\|z_k\|}y_k.$$

Kuna süsteem $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on lineaarselt sõltumatu, siis samamoodi ka süsteem $\{\frac{1}{2^k\|z_k\|}y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on lineaarselt sõltumatu. See on aga vastuolu sellega, et hulk $T(K)$ on lõplikumõõtmeline.

□

# 5 Genereerivate jadade süsteemid

Selles peatükis uurime genereerivate jadade süsteemi mõistet, mis pärineb Stephani artiklist [12], kus toodi sisse ka genereerivate hulkade süsteemi mõiste. Ta tõi genereerivate jadade süsteemid sisse sellel põhjusel, et nende kaudu saab tekitada genereerivate hulkade süsteeme. Me toome mõningad genereerivate jadade süsteemide näited ja tõestame abitulemused 5.7 ning 5.15, mis pärinevad artiklist [12].

Alustuseks toome genereeriva jadade süsteemi definitsiooni. Esmapilgul tundub, et definitsioonis 5.3 tingimus 1) oleks justkui tugevam, kui artikli definitsioonis [12, 1.2] tingimus $S_2$. Lause 5.6 näitab, et see siiski nii ei ole.

**Definitsioon 5.1.** *Tähistame kõigi Banachi ruumide kõigi tõkestatud jadade klassi sümboliga* $\mathbf{m}$.

**Definitsioon 5.2.** *Olgu* $\mathbf{g} \subset \mathbf{m}$ *tõkestatud jadade klass. Tähistame iga Banachi ruumi* $X$ *korral klassi* $\mathbf{g}$ *neid jadasid, mis kuuluvad ruumi* $X$*, järgmiselt:* $\mathbf{g}(X)$. *Seda hulka nimetatakse klassi* $\mathbf{g}$ *komponendiks ruumis* $X$.

**Definitsioon 5.3.** *Klassi* $\mathbf{g} \subset \mathbf{m}$ *nimetatakse genereerivate jadade süsteemiks, kui on täidetud järgmised tingimused:*

*1) Kui* $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$*, siis* $\exists y \prec x$ *nii, et* $y \in \mathbf{g}(X)$*;*

*2) Kui* $x, y \in \mathbf{g}(X)$*, siis iga* $\alpha \in \mathbb{K}$ *korral* $\alpha x + y \in \mathbf{g}(X)$*;*

*3) Kui* $x \in \mathbf{g}(X)$ *ja* $y \prec x$*, siis* $y \in \mathbf{g}(X)$*;*

*4) Kui* $x = (x_k) \in \mathbf{g}(X)$ *ja* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*, siis* $(Tx_k) \in \mathbf{g}(Y)$.

**Definitsioon 5.4.** *Kõigi genereerivate jadade süsteemide klassi tähistame* GJS.

*Näide.* Genereerivate jadade süsteemideks näideteks on:

- kõigi tõkestatud jadade süsteem $\mathbf{m}$,
- kõigi tõkestatud lõplikumõõtmeliste hulkade elementidest moodustatud jadade süsteem $\mathbf{f}$.

See, et $\mathbf{m}$ on genereerivate jadade süsteem, tuleneb vahetult definitsioonist. Vaatleme süsteemi $\mathbf{f}$.

**Lause 5.5.** *Süsteem* $\mathbf{f}$*, mille komponent ruumis* $X$ *on antud võrdusega*

$$\mathbf{f}(X) = \{(x_k) \in \mathbf{m}(X) \mid \exists G \in \mathbf{F}(X), (x_k) \subset G\},$$

*on genereerivate jadade süsteem.*

*Tõestus.* Olgu jada $x = (x_k) \in \mathbf{f}(X)$, kus $(x_k) \subset G$. Et $G$ on tõkestatud hulk, siis ka jada $x$ on tõkestatud.

1) Valime $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$. Kuna jada $x$ on iseenda osajada ja jada $x \in \mathbf{f}(X)$, siis ongi vajalik tingimus täidetud.

2) Olgu $x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbf{f}(X)$. Siis leiduvad hulgad $G, H$ nii, et $(x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$ ja $(y_k) \subset H \in \mathbf{F}(X)$. Nüüd tänu genereerivate hulkade süsteemide omadusele 2) kehtib, et $\alpha G+H \in \mathbf{F}(X)$. Nüüd aga $\alpha x+y = (\alpha x_k+y_k)_{k=1}^{\infty} \subset \alpha G+H \in \mathbf{F}(X)$, mistõttu jada $\alpha x + y$ kuulub süsteemi $\mathbf{f}$ definitsiooni põhjal samuti komponenti $\mathbf{f}(X)$.

3) Valime jada $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$. Kui $y \prec x$, siis kehtib $y = (y_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$, seega $y$ kuulub samuti komponenti $\mathbf{f}(X)$.

4) Olgu antud $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tänu genereerivate hulkade süsteemide omadusele 4) kehtib $T(G) \in \mathbf{F}(X)$. Seega ka jada $Tx = (Tx_k) \subset T(G)$ kuulub komponenti $\mathbf{f}(X)$. □

**Lause 5.6.** *Definitsioonis 5.3 piisab tingimuse 1) asemel nõuda, et iga ruumi $m$ ühikkerasse $B_m$ kuuluv jada $x$ sisaldab osajada $y$, mis kuulub komponenti $\mathbf{g}(\mathbb{K})$.*

*Tõestus.* On selge, et kui kehtib definitsiooni 5.3 punkt 1), siis käesoleva lause väide on koheselt täidetud.

Vastupidi: kehtigu, et kui jada $x \in B_m$, siis leidub $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(\mathbb{K})$. Näitame, et kui $G \in \mathbf{F}(X)$ ja $x = (x_k) \subset G$, siis leidub jada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$.

Olgu $X$ Banachi ruum ja $G \subset X$ tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. Olgu $x = (x_k)$ hulga $G$ elementidest moodustatud jada.

Kuna $G$ on tõkestatud, siis leidub konstant $b > 0$ nii, et iga $z \in G$ korral $\|z\| \leq b$. Kuna $G$ on lõplikumõõtmeline, siis leidub süsteem $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nii, et $G \subset Y$, kus $Y = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}\}$.

Lause 1.35 (lõplikumõõtmeliste ruumide isomorfismiteoreem) põhjal leidub positiivne konstant $c$ nii, et

$$c \max_{1\leq k\leq n} |\alpha_k| \leq \|z\|.$$

Seega saame, et iga elemendi $z \in G$ esituses ruumi $Y$ baasi kaudu rahuldavad kordajad $\alpha_k$, $k \in 1, \ldots, n$ järgmist tingimust:

$$|\alpha_k| \leq \frac{\|z\|}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Toome sisse operaatori $T_k : \mathbb{K} \to X$:

$$T_k(a) = \frac{ab}{c} e_k.$$

Nüüd

$$G \subset \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}, \alpha_k \leq \frac{b}{c} \right\} = \sum_{k=1}^{n} T_k(B_{\mathbb{K}}).$$

Vaatleme nüüd uuritavat jada $x$. Et tema liige $x_k \in G$, siis teda saab esitada kujul

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} T_j(\alpha_{kj}),$$

kus $\alpha_{kj} \in B_{\mathbb{K}}$ iga $k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral.

Konstrueerime iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral jada

$$a_j = (\alpha_{kj})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Paneme tähele, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $a_j \in B_m$.

Eelduse põhjal jada $a_1$ sisaldab osajada

$$b_1 = (\alpha_{k1})_{k \in N_1 \subset \mathbb{N}}$$

nii, et $b_1 \in \mathbf{g}(\mathbb{K})$. Samuti jada $a_2$ osajada $(\alpha_{k2})_{k \in N_1}$ kuulub ruumi $B_m$, seega jada $(\alpha_{k2})_{k \in N_1}$ sisaldab osajada

$$b_2 = (\alpha_{k2})_{k \in N_2 \subset N_1}$$

nii, et $b_2 \in \mathbf{g}(\mathbb{K})$.

Niimoodi induktiivselt jätkates jõuame selleni, et $a_n$ osajada

$$(\alpha_{kn})_{k \in N_{n-1}}$$

sisaldab osajada

$$b_n = (\alpha_{kn})_{k \in N_n \subset N_{n-1}}$$

nii, et $b_n \in \mathbf{g}(\mathbb{K})$.

Defineerime $c_j = (\alpha_{kj})_{k \in N_n}$ iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Iga $j$ korral kehtib $c_j \prec b_j$. Genereerivate jadade süsteemi tingimuse 3 põhjal siis ka igaüks jadadest $c_j \in \mathbf{g}(\mathbb{K})$.

Nüüd iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral jada $T_j c_j \in \mathbf{g}(X)$ genereeriva jadade süsteemi tingimuse 4 põhjal. Siit aga saame, et $\sum_{j=1}^{n} T_j c_j \in \mathbf{g}(X)$. Avaldame

$$\sum_{j=1}^{n} T_j c_j = \sum_{j=1}^{n} (T_j \alpha_{kj})_{k \in N_n} = \left( \sum_{j=1}^{n} T_j \alpha_{kj} \right)_{k \in N_n} = (x_k)_{k \in N_n} \prec x.$$

Seega oleme näidanud, et jada $x$ sisaldab süsteemi $\mathbf{g}(X)$ kuuluvat osajada. □

Järgnev abitulemus pärineb artiklist [12].

**Lause 5.7.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *genereerivate jadade süsteem. Siis iga Banachi ruumi* $X$ *kõik konstantsed jadad kuuluvad komponenti* $\mathbf{g}(X)$.

*Tõestus.* Olgu $x = (c)$ konstantne. On selge, et hulk $G = \{c\}$ on tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk ruumis $X$. Seega $G \in \mathbf{F}(X)$ ja hulga $G$ elementidest moodustatud jada $x$ sisaldab osajada, mis kuulub komponenti $\mathbf{g}(X)$. Aga iga jada $x$ osajada $y \prec x$ on võrdne jada $x$ endaga. Seega $x \in \mathbf{g}(X)$. $\square$

Nüüd jõuame selleni, miks toodi genereerivate jadade süsteemi mõiste sisse. Nimelt saab genereerivate jadade süsteemi kaudu tekitada uusi genereerivate hulkade süsteeme. See tulemus pärineb artiklist [12].

**Teoreem 5.8.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *geneerivate jadade süsteem. Defineerime Banachi ruumi* $X$ *korral hulkade klassi*

$$\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X) = \{G \subset X \mid \forall x = (x_k) \subset G \, \exists y \in \mathbf{g}(X) \text{ nii, et } y \prec x\}\,.$$

*Siis* $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$ *moodustab genereerivate hulkade süsteemi, mida nimetatakse jadade süsteemi* $\mathbf{g}$ *poolt tekitatud hulkade süsteemiks.*

*Tõestus.* Näitame kõigepealt, et iga hulk $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$ on tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et $G$ on tõkestamata. Siis leidub hulga $G$ elementidest moodustatud jada $x = (x_k) \subset G$ nii, et $\|x_k\| \to \infty$. Nüüd ka iga jada $x$ osajada on tõkestamata, seega ei kuulu ükski $x$ osajada genereeriva jadade süsteemi $\mathbf{g}$ komponenti $\mathbf{g}(X)$. Oleme jõudnud vastuoluni sellega, et $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$. Seega peab hulk $G$ olema tõkestatud.

1) Selleks, et näidata, et $\mathbf{F}(X) \subset \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$, piisab näidata, et kui $x = (x_k) \subset G \subset \mathbf{F}(X)$, siis leidub osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. See on aga täpselt genereerivate jadade süsteemi tingimus 1), mida $\mathbf{g}$ rahuldab.

2) Olgu antud hulgad $G, H \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Näitame, et hulk $\alpha G + H \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$. Valime vabalt jada $x = (x_k) \subset \alpha G + H$. Siis jada $x$ avaldub kujul $(x_k) = (\alpha y_k + z_k)$, kus $(y_k) \subset G$ ja $(z_k) \subset H$. Kuna $(y_k) \subset G$, siis leidub jada $(y_k)$ osajada

$$(y_k)_{k \in N_1 \subset \mathbb{N}} \in \mathbf{g}(X).$$

Et $(z_k)_{k \in N_1}$ on $H$ elementidest moodustatud jada, siis leidub tema osajada

$$(z_k)_{k \in N_2 \subset N_1} \in \mathbf{g}(X).$$

Tänu genereerivate jadade süsteemi omadusele 3) ka $(y_k)_{k \in N_2} \in \mathbf{g}(X)$ ja omaduse 2) põhjal

$$(x_k)_{k \in N_2} = (\alpha y_k + z_k)_{k \in N_2} \in \mathbf{g}(X).$$

Seega jada $x$ sisaldab osajada süsteemis $\mathbf{g}(X)$. Kuna jada $x$ oli vabalt valitud, siis järeldubki siit, et $\alpha G + H \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$.

3) Olgu antud $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$ ja $H \subset G$. Valime $x = (x_k) \subset H$. Kuna $(x_k) \subset G$, siis leidub osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$.

4) Võtame hulga $G \in \overrightarrow{\mathbf{g}}(X)$ ja operaatori $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tahame näidata, et ka $T(G) \in \overrightarrow{\mathbf{g}}(Y)$. Selleks valime vabalt jada $y = (y_k) \subset T(G)$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral leidub $x_k \in G$ nii, et $T(x_k) = y_k$. Moodustame jada $x = (x_k)$. Et $(x_k) \subset G$, siis leidub osajada $z \prec x$ nii, et $z = (z_k) \in \mathbf{g}(X)$. Nüüd aga $(Tz_k) \subset T(G)$ on jada $y$ osajada, mis kuulub genereerivate jadade süsteemide omaduse 4 põhjal komponenti $\mathbf{g}(Y)$. □

**Definitsioon 5.9.** *Ütleme, et genereerivate hulkade süsteem* $\mathbf{G}$ *on tekitatav, kui leidub genereerivate jadade süsteem* $\mathbf{g}$ *nii, et* $\overrightarrow{\mathbf{g}} = \mathbf{G}$.

Vaatleme mõningaid näiteid.

**Lause 5.10.** *Tõkestatud jadade süsteemi* $\mathbf{m}$ *poolt tekitatud hulkade süsteem on* $\mathbf{B}$.

*Tõestus.* Kuna $\overrightarrow{\mathbf{m}}(X)$ on genereerivate hulkade süsteem, siis iga Banachi ruumi $X$ korral $\overrightarrow{\mathbf{m}}(X) \subset \mathbf{B}(X)$. Teistpidine sisalduvus tuleneb sellest, et iga tõkestatud hulga elementidest moodustatud jada on tõkestatud. □

**Lause 5.11.** *Jadade süsteemi* $\mathbf{f}$ *poolt tekitatud hulkade süsteem ühtib lõplikumõõtmeliste tõkestatud hulkade süsteemiga* $\mathbf{F}$.

*Tõestus.* Olgu antud Banachi ruum $X$ ja lõplikumõõtmeline tõkestatud hulk $G$. Kuna iga jada $x = (x_k) \subset G$ korral $x \in \mathbf{f}(X)$, siis saamegi, et $G \in \overrightarrow{\mathbf{f}}(X)$. Oleme näidanud, et $\mathbf{F} \leq \overrightarrow{\mathbf{f}}$.

Uurime, kas kehtib sisalduvus $\overrightarrow{\mathbf{f}} \subset \mathbf{F}$. Oletame vastuväiteliselt, et leidub Banachi ruum $X$ ja hulk $G \in X$ nii, et $G \in \overrightarrow{\mathbf{f}}(X)$, aga $G \notin \mathbf{F}(X)$. Me teame, et $G$ on tõkestatud hulk, kuna $G \in \overrightarrow{\mathbf{f}}(X)$. Sellest, et $G \notin \mathbf{F}(X)$, järeldub, et hulk $G$ peab olema lõpmatumõõtmeline hulk. Lause 1.28 piisava tingimuse kohaselt siis leidub loenduv lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset G$. Vaatame seda vektorite süsteemi jadana $x = (e_k)$. Kuna $G \in \overrightarrow{\mathbf{f}}(X)$, siis peab leiduma osajada $y = (y_k) \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{f}(X)$. See viimane tähendab $\mathbf{f}(X)$ definitsiooni põhjal, et leidub hulk $H \subset X$ nii, et $H$ on lõplikumõõtmeline ja $(y_k) \subset H$. Kuna $y$ on $x$ osajada, siis hulk $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on lineaarselt sõltumatu. Lause 1.28 tarviliku tingimuse kohaselt siis $H$ on lõpmatumõõtmeline hulk, mis on vastuolu. □

**Definitsioon 5.12.** *Tähistame kõigi Banachi ruumide kõigi koonduvate jadade klassi sümboliga* $\mathbf{c}$.

**Lause 5.13.** *Klass* $\mathbf{c}$ *on genereerivate jadade süsteem.*

*Tõestus.* Kõigepealt, on teada, et iga koonduv jada on tõkestatud. Seega $\mathbf{c} \subset \mathbf{m}$.

1) Olgu antud hulk $G \in \mathbf{F}(X)$ ja jada $x = (x_k) \subset G$. Kuna $G$ on tõkestatud hulk lõplikumõõtmelises ruumis, siis lause 1.33 põhjal on ta suhteliselt kompaktne. See aga tähendabki, et jadast $x$ saab eraldada välja osajada $y \prec x$, mis on koonduv.

2) Valime vabalt koonduvad jadad $x, y \in \mathbf{c}(X)$ ning $\alpha \in \mathbb{K}$. On teada, et siis ka jada $\alpha x + y \in \mathbf{c}(X)$ (vaata [8, lk. 83]).

3) Tingimus kehtib, sest iga koonduva jada osajada on samuti koonduv (vaata [8, lk. 7]).

4) Kehtib pideva lineaarse operaatori definitsiooni põhjal. □

Definitsiooni kohaselt on kompaktsed hulgad sellised hulgad, mille elementidest moodustatud jadadest saab välja eraldada koonduva osajada. Seda fakti saame nüüd kirja panna kujul $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \mathbf{K} = \mathbf{K}_{(\infty,1)}$. Nüüd tekib järgmine küsimus:

*Küsimus* 5.14. Olgu $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r \leq p^*$. Kas genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{K}_{(p,r)}$ on tekitatav?

Vastuse sellele küsimusele anname järgmises peatükis, kui me oleme rohkem teada saanud genereerivate jadade ning genereerivate hulkade süsteemide omavahelistest seostest.

Toome nüüd ühe abilause, mis pärineb artiklist [12].

**Lause 5.15.** *Kui $x = (x_k) \in \mathbf{g}(X)$, siis hulk $G = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \overrightarrow{\mathbf{g}}(X)$.*

*Tõestus.* Vaatleme hulga $G$ elementidest moodustatud jada $y = (y_k)$. Vaja on näidata, et $y$ sisaldab osajada $z \prec y$ nii, et $z \in \mathbf{g}(X)$.

Oletame, et jada $y$ sisaldab konstantset osajada $z \prec y$. Siis lause 5.7 kohaselt $z \in \mathbf{g}(X)$.

Vaatame juhtu, kus jada $y$ ei sisalda ühtegi konstantset osajada. Jada $y$ liikmed $y_k$ kuuluvad hulka $G$, seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral $y_k = x_{a_k}$. Jada $a = (a_k)$ on naturaalarvudest koosnev jada, mis ei sisalda konstantset osajada. Siis peab jada $a$ sisaldama kasvavat osajada $(a_k)_{k \in N_1 \subset \mathbb{N}}$. Konstrueerime nüüd jada $z = (y_k)_{k \in N_1}$. Teisiti kirjutades, $z = (x_{a_k})_{k \in N_1}$, mis on jada $x$ osajada, kuna indeksid $(a_k)_{k \in N_1}$ on kasvavas järjekorras. Seega jada $y$ sisaldab osajada $z$, mis kuulub komponenti $\mathbf{g}(X)$. □

# 6 Galois' vastavus hulkade ja jadade süsteemide vahel

Käesoleva peatüki esmaseks eesmärgiks on tuua sisse järjestusseos genereerivate jadade süsteemidel. Ilmneb, et kui defineerida järjestus osajadade võtmise kaudu loomulikul viisil, siis tulemuseks on eeljärjestus. Selle eeljärjestuse abil saab sisse tuua ekvivalentsiseose $\sim$, mille kaudu me saame leida genereerivate jadade süsteemidel klassijaotuse $\mathrm{GJS}/_\sim$. Klassil $\mathrm{GJS}/_\sim$ on juba antud järjestusseos.

Edasi toome sisse tehted $^{\rightarrow} : \mathrm{GJS}/_\sim \to \mathrm{GHS}$ ja $^{\leftarrow} : \mathrm{GHS} \to \mathrm{GJS}/_\sim$, millest lähtudes näitame, et klasside $\mathrm{GJS}/_\sim$ ja GHS vahel eksisteerib Galois' vastavus. Lähtudes sellest vastavusest saame me mõningaid tulemusi, mis kirjeldavad genereerivate jadade ning hulkade süsteemide omavahelist vahekorda.

Galois' vastavuste teooria abil tuleneb koheselt kriteerium selle määramiseks, kas genereerivate hulkade süsteem on tekitatav või mitte. Selle kriteeriumi abil vastame küsimusele 5.14, näidates, et genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{K}_{(p,r)}$ on tekitatav ainult juhul, kui $p = \infty$ ja $r = 1$. Sellel erijuhul süsteem $\mathbf{K}_{(p,r)}$ langeb kokku suhteliselt kompaktsete hulkadega süsteemiga $\mathbf{K}$.

**Definitsioon 6.1.** *Olgu $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ genereerivate jadade süsteemid. Ütleme, et $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$, kui iga Banachi ruumi $X$ ja iga jada $x \in \mathbf{g}(X)$ korral leidub osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{h}(X)$.*

**Lause 6.2.** *Seos $\lesssim$ on eeljärjestus genereerivate jadade süsteemide vahel.*

*Tõestus.* 1) Olgu $\mathbf{g}$ genereerivate jadade süsteem. Ilmselt $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{g}$, sest iga jada sisaldab iseennast osajadana.

2) Kehtigu $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h} \lesssim \mathbf{j}$. Näitame, et siis ka $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{j}$.

Olgu $X$ Banachi ruum ja $x = (x_k) \in \mathbf{g}(X)$ suvaline. Nüüd leidub $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{h}(X)$, millest omakorda järeldub, et leidub $z \prec y$ nii, et $z \in \mathbf{j}(X)$. Et jada $z$ on jada $x$ osajada, siis olemegi saanud, et $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{j}$. □

Üldiselt ei ole $\lesssim$ järjestus, sest ei kehti antisümmeetria tingimus (ehk teisisõnu, leiduvad ekvivalentsed genereerivate jadade süsteemid, mis on hulkade võrduse mõttes erinevad). Näite selle kohta annab allpool tõestatav lause 6.11.

**Definitsioon 6.3.** *Defineerime genereerivate jadade süsteemide vahel seose $\sim$ järgnevalt: $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$, kui $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$ ning $\mathbf{h} \lesssim \mathbf{g}$. Lause 1.43 põhjal on seos $\sim$ ekvivalentsiseos.*

**Lause 6.4.** *Olgu $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ genereerivate jadade süsteemid. Kui $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$, siis $\overrightarrow{\mathbf{g}} \le \overrightarrow{\mathbf{h}}$.*

*Tõestus.* Kehtigu $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$. Näitame, et iga Banachi ruumi $X$ korral $\overrightarrow{\mathbf{g}}(X) \subset \overrightarrow{\mathbf{h}}(X)$.

Olgu $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$. Tahame näidata, et $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}(X)$. Selleks võtame jada $x = (x_k) \subset G$ ja näitame, et leidub $x$ osajada, mis kuulub komponenti $\mathbf{h}(X)$.

Kuna $G \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$ ja $x = (x_k) \subset G$, siis leidub osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. Et kehtib $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$, siis leidub osajada $z \prec y$ nii, et $z \in \mathbf{h}(X)$, mida oligi tarvis näidata. □

Järgmisest lausest selgub, et genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklassid on teatud mõttes kooskõlas genereerivate hulkade süsteemide tekitamisega.

**Teoreem 6.5.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid. Kehtib* $\mathbf{g} \sim \mathbf{h} \Leftrightarrow \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$.

*Tõestus. Piisavus.* Eelduse kohaselt $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$ ja $\mathbf{h} \lesssim \mathbf{g}$. Eelmise lause põhjal siis $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} \leq \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$ ja $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}} \leq \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$, mistõttu $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$.

*Tarvilikkus.* Kehtigu $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$. Oletame vastuväiteliselt, et ei kehti väide $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$. See tähendab, et $\mathbf{g} \not\lesssim \mathbf{h}$ või $\mathbf{h} \not\lesssim \mathbf{g}$. Oletame konkreetsuse mõttes, et $\mathbf{g} \not\lesssim \mathbf{h}$ (teisel juhul on tõestus analoogiline). See tähendab, et leiduvad Banachi ruum $X$ ning jada $x = (x_k) \in \mathbf{g}(X)$ nii, et iga osajada $y \prec x$ korral $y \notin \mathbf{h}(X)$. Lause 5.15 põhjal $G = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}(X)$. Samal ajal aga $G \notin \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}(X)$, sest vastasel juhul sisaldaks hulga $G$ elementidest moodustatud jada $x = (x_k)$ osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{h}(X)$, mis oleks vastuolu. Seega oleme näidanud, et $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}} \neq \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$, mis on vastuolu eeldusega. Seega on algne vastuväiteline oletus vale ja tõestatav väide kehtib. □

**Definitsioon 6.6.** *Olgu* $[\mathbf{g}], [\mathbf{h}] \in \mathrm{GJS}/_\sim$. *Defineerime, et* $[\mathbf{g}] \leq [\mathbf{h}]$, *kui* $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$.

Lause 1.44 kohaselt on seos $\leq$ järjestusseos. Nüüd oleme saavutanud oma eesmärgi: oleme defineerinud genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklasside vahel järjestusseose.

Järgmine definitsioon annab meile võimaluse rääkida genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklassi poolt tekitatud genereerivate hulkade süsteemist.

**Definitsioon 6.7.** *Olgu* $[\mathbf{g}] \in \mathrm{GJS}/_\sim$ *genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklass. Defineerime tehte* $^\rightarrow : \mathrm{GJS}/_\sim \to \mathrm{GHS}$ *järgmiselt:*

$$\overrightarrow{[\mathbf{g}]} := \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$$

*Lause 6.5 põhjal on see definitsioon korrektne, kuna tulemus ei sõltu ekvivalentsiklassi* $[\mathbf{g}]$ *esindaja* $\mathbf{g}$ *valikust.*

Toome nüüd sisse uue tehte, mis seab genereerivate hulkade süsteemile seab vastavusse uue genereerivate jadade süsteemi.

**Lause 6.8.** *Olgu antud genereerivate hulkade süsteem* $\mathbf{G}$. *Siis jadade süsteem* $\overleftarrow{\mathbf{G}}$, *mille komponent ruumis* $X$ *on antud võrdusega*

$$\overleftarrow{\mathbf{G}}(X) = \{(x_k) \in \mathbf{m}(X) \mid \exists G \in \mathbf{G}(X) \text{ nii, et } (x_k) \subset G\},$$

*on genereerivate jadade süsteem.*

*Tõestus.* Kontrollime nõutud tingimuste täidetust.

1) Valime vabalt $(x_k) \subset \mathbf{F}(X)$. Et $\mathbf{F}$ on vähim genereerivate hulkade süsteem, siis ka $(x_k) \subset \mathbf{G}(X)$. Definitsioonist järeldub nüüd, et $(x_k) \in \overleftarrow{\mathbf{G}}(X)$.

2) Olgu antud jadad $x, y \in \overleftarrow{\mathbf{G}}(X)$ ning $\alpha \in \mathbb{K}$. Nüüd leiduvad vastavalt hulgad $G, H \in \mathbf{G}(X)$ nii, et $x = (x_k) \subset G$ ja $y = (y_k) \subset H$. Seega $\alpha x + y = (\alpha x_k + y_k) \subset \alpha G + H \in \mathbf{G}(X)$.

3) Kinnisus osajadade võtmise suhtes tuleb vahetult definitsioonist.

4) Olgu $x = (x_k) \in \overleftarrow{\mathbf{G}}(X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Teame, et leidub hulk $G \in \mathbf{G}(X)$ nii, et $(x_k) \subset G$. Nüüd $Tx = (Tx_k) \subset T(G) \in \mathbf{G}(Y)$, seega $Tx \in \overleftarrow{\mathbf{G}}(Y)$. □

Lähtudes genereerivate jadade süsteemist $\mathbf{g}$, saame me tekitada uue jadade süsteemi $\overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}$. Järgmised kaks lauset aitavad selle tekitatud jadade süsteemi omadusi paremini tundma õppida.

**Lause 6.9.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *genereerivate jadade süsteem ja* $X$ *Banachi ruum. Kehtib sisalduvus* $\mathbf{g}(X) \subset \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}(X)$.

*Tõestus.* Valime jada $(x_k) \in \mathbf{g}(X)$. Nüüd lause 5.15 kohaselt $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \overrightarrow{\mathbf{g}}(X)$, mistõttu $(x_k) \in \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}(X)$. □

**Lause 6.10.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *genereerivate jadade süsteem. Siis kehtib* $\mathbf{g} \lesssim \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}$ *ja* $\overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}} \lesssim \mathbf{g}$.

*Tõestus.* Näitame, et $\mathbf{g} \lesssim \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}$. Eelmise lause kohaselt $\mathbf{g}(X) \subset \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}(X)$. Siit aga järeldub, et $\mathbf{g} \lesssim \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}$, sest iga $x \in \mathbf{g}(X)$ korral võime võtta otsitavaks osajadaks jada $x \in \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}(X)$ enda.

Teiselt poolt näitame, et $\overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}} \lesssim \mathbf{g}$. Olgu antud $x = (x_k) \in \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{g}}}(X)$. Seega jada $(x_k)$ elementide hulk $G = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kuulub süsteemi $\overrightarrow{\mathbf{g}}(X)$. Kuna jada $x$ on hulga $G$ elementidest moodustatud jada, siis peab jada $x$ sisaldama süsteemi $\overrightarrow{\mathbf{g}}$ definitsiooni põhjal osajada $y \in x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. □

Eelmise lause kohaselt kehtivad genereerivate jadade süsteemide $\mathbf{c}$ ja $\overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{c}}}$ vahel seosed $\mathbf{c} \lesssim \overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{c}}}$ ja $\overleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{c}}} \lesssim \mathbf{c}$. Järgmine lause näitab, et hulkadena on need süsteemid erinevad. See tõestab, et seos $\lesssim$ ei rahulda antisümmeetria aksioomi.

**Lause 6.11.** *Kehtib* $\mathbf{c} \subsetneq \overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}}$.

*Tõestus.* Lause 6.9 kohaselt iga Banachi ruumi $X$ korral $\mathbf{c}(X) \subset \overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}}(X)$.

Vaatame alterneeruvat arvujada $x = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. See jada ei ole koonduv, seega $x \notin \mathbf{c}(\mathbb{K})$. Aga hulk $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$ kui tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk kuulub süsteemi $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}(\mathbb{K})$, seega ka jada $(x_k)$ kuulub süsteemi $\overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}}(\mathbb{K})$. $\square$

**Definitsioon 6.12.** *Olgu* $\mathbf{G} \in \mathrm{GHS}$ *genereerivate hulkade süsteem. Defineerime tehte* $^{\leftarrow}$ : $\mathrm{GHS} \to \mathrm{GJS}/_{\sim}$ *järgmiselt:*

$$\overleftarrow{\mathbf{G}} = \left[\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}\right].$$

**Teoreem 6.13.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *genereerivate jadade süsteem. Siis kehtib* $\overset{\leftrightarrows}{[\mathbf{g}]} = [\mathbf{g}]$.

*Tõestus.* Avaldame $\overset{\leftrightarrows}{[\mathbf{g}]} = \overset{\leftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}}$. Võrdus $\overset{\leftrightarrows}{[\mathbf{g}]} = [\mathbf{g}]$ on samaväärne sellega, et $\overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}} \lesssim \mathbf{g}$ ja $\mathbf{g} \lesssim \overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}}$. Need kaks omadust kehtivad aga lause 6.10 põhjal. $\square$

**Teoreem 6.14.** $(\rightarrow, \leftarrow)$ *on Galois' vastavus järjestatud klasside* GHS *ja* $\mathrm{GJS}/_{\sim}$ *vahel.*

*Tõestus.* Olgu antud $[\mathbf{g}] \in \mathrm{GJS}/_{\sim}$ ja $\mathbf{G} \in \mathrm{GHS}$. Tuleb tõestada, et $\mathbf{G} \le \overrightarrow{[\mathbf{g}]}$ parajasti siis, kui $\overleftarrow{\mathbf{G}} \le [\mathbf{g}]$.

*Piisavus.* Eeldus on, et $\mathbf{G} \le \overrightarrow{[\mathbf{g}]} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$. Vaja on näidata, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}} \lesssim \mathbf{g}$.

Kirjutame lahti, mida eeldus tähendab: Olgu $X$ Banachi ruum ning hulk $G \in \mathbf{G}(X)$. Siis iga hulga $G$ elementidest moodustatud jada $x$ sisaldab osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$.

Sõnastame, mida meil on vaja tõestada: Olgu $X$ Banachi ruum ning jada $x = (x_k) \subset \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}(X)$. See tähendab, et hulk $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{G}(X)$. Tuleb näidata, et jada $x$ sisaldab osajada $y$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$.

Kui me võrdleme eeldust ja tõestatavat väidet, siis näeme, et piisavuse tõestus on ilmne.

*Tarvilikkus.* Eeldame, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}} \lesssim \mathbf{g}$. Tõestame, et $\mathbf{G} \le \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}}$.

Olgu antud Banachi ruum $X$ ja hulk $G \in \mathbf{G}(X)$. Valime jada $x = (x_k) \subset G$. Näitame, et jada $x$ sisaldab osajada $y$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. Kuna jada $(x_k)$ on hulga $G \in \mathbf{G}(X)$ elementidest moodustatud jada, siis jada $(x_k) \in \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}(X)$. Eelduse põhjal leidub siis jada $x$ osajada $y$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$, mida oligi tarvis tõestada. $\square$

Galois' vastavuse olemasolu ütleb, et kehtivad järgmised omadused 1)–4). Ilmneb, et omaduste 1) ja 3) kehtivuse oleme juba varem näidanud. Omadused 2) ja 4) on uued.

**Teoreem 6.15.** *Olgu* $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid ning* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *genereerivate hulkade süsteemid. Siis kehtivad väited:*

*1)* $\overset{\leftrightarrows}{[\mathbf{g}]} \leq [\mathbf{g}]$ *(mida ütleb ka teoreem 6.13);*

*2)* $\mathbf{G} \leq \overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}}$*;*

*3)* $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h} \Rightarrow \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} \leq \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$ *(mis on varem tõestatud teoreemis 6.5);*

*4)* $\mathbf{G} \leq \mathbf{H} \Rightarrow \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}} \lesssim \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{H}}$.

*Tõestus.* Tõestus tugineb lausele 1.49.

1) Tuleneb vahetult lausest.

2) Lause põhjal saame, et $\mathbf{G} \leq \overset{\rightleftarrows}{\mathbf{G}}$. Seega kehtib $\mathbf{G} \leq \overrightarrow{\left[\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}\right]} = \overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}}$.

3) Lause ütleb, et kui $[\mathbf{g}] \leq [\mathbf{h}]$, siis $\overrightarrow{[\mathbf{g}]} \leq \overrightarrow{[\mathbf{h}]}$. See on samaväärne väitega, et kui $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{h}$, siis $\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{g}} \leq \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{h}}$.

4) Lause näitab, et kui $\mathbf{G} \leq \mathbf{H}$, siis $\overleftarrow{\mathbf{G}} \leq \overleftarrow{\mathbf{H}}$. Definitsiooni järgi $\overleftarrow{\mathbf{G}} \leq \overleftarrow{\mathbf{H}}$ parajasti siis, kui $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}} \lesssim \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{H}}$. □

**Teoreem 6.16.** *Genereerivate hulkade süsteem* $\mathbf{G}$ *on tekitatav parajasti siis, kui* $\mathbf{G} = \overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}}$.

*Tõestus.* Lause 1.50 põhjal on $\mathbf{G}$ tekitatav parajasti siis, kui $\mathbf{G} = \overset{\rightleftarrows}{\mathbf{G}}$. Definitsioonide põhjal kehtib võrdus $\overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{G}}} = \overset{\rightleftarrows}{\mathbf{G}}$. □

**Teoreem 6.17.** *Olgu* $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r \leq p^*$. *Siis genereerivate jadade süsteem* $\mathbf{K}_{(p,r)}$ *on tekitatav ainult siis, kui* $p = \infty, r = 1$.

*Tõestus.* Tõestame, et $\overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}}_{(p,r)} = \mathbf{K}$, millest lause 6.16 põhjal järeldub tõestatav väide. Teame, et $\mathbf{K} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}$. Väide $\overset{\dashrightarrow}{\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}}_{(p,r)} = \overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}$ on lause 6.5 põhjal samaväärne sellega, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)} \sim \mathbf{c}$.

Näitame, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)} \lesssim \mathbf{c}$. Teame lause 4.9 põhjal, et $\mathbf{K}_{(p,r)} \leq \mathbf{K}$ . Siit järeldub, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)} \leq \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}} = \overset{\dashleftarrow}{\overset{\dashrightarrow}{\mathbf{c}}} \sim \mathbf{c}$. Seega seose $\lesssim$ transitiivsuse põhjal kehtib, et $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)} \lesssim \mathbf{c}$.

Vaja on näidata, et $\mathbf{c} \lesssim \overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)}$. Valime vabalt Banachi ruumi $X$ ja jada $x = (x_k) \in \mathbf{c}(X)$. Näitame, et jada $x$ sisaldab osajada $w$, mis kuulub jadade süsteemi $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)}(X)$. Definitsiooni põhjal kuulub jada $w = (w_k)$ süsteemi $\overset{\dashleftarrow}{\mathbf{K}}_{(p,r)}(X)$ parajasti siis, kui hulk $\{w_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kuulub süsteemi $\mathbf{K}_{(p,r)}(X)$.

Jada $x$ on ruumis $X$ koonduv. Tähistame jada $x$ piirväärtust ruumis $\xi$. Nüüd moodustame uue jada $y = (y_k) := (x_k - \xi)$. On lihtne näha, et jada $y \in c_0(X)$. Lause 1.8 põhjal leidub jada $y$ osajada $z \prec y$ nii, et $z \in \ell_p(X)$. Moodustame jada $w = (w_k) := (z_k + \xi)$. Nii saadud jada $w$ on esialgse jada $x$ osajada.

Näitame nüüd, et hulk $\{w_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on suhteliselt $(p,r)$-kompaktne.

Moodustame uue jada $v = (v_k) \subset X$ järgmiselt:

$$v_k = \begin{cases} 2\xi, & \text{kui } k = 1, \\ 2z_{(k-1)}, & \text{kui } k > 1. \end{cases}$$

Sellest, et jada $z \in \ell_p(X)$, järeldub, et ka jada $v \in \ell_p(X)$. Tahame tõestada, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$w_k \in \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l v_l \mid (a_l) \in B_{\ell_r} \right\}.$$

On lihtne näha, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $w_k = z_k + \xi = \frac{1}{2} v_{k+1} + \frac{1}{2} v_1$.

Defineerime arvjada $a = (a_l)$ järgmiselt

$$a_l = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } l = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kui } l = k+1, \\ 0 & \text{muidu.} \end{cases}$$

On lihtne kontrollida, et $a \in B_{\ell_r}$ ja et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $w_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_l w_l$.

Seega oleme näidanud, et hulk $\{w_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on suhteliselt $(p,r)$-kompaktne.

$\square$

# 7 Struktuuride võred

Käesolevas peatükis näitame, et operaatorideaalid ning genereerivate hulkade süsteemid ja genereerivate jadade süsteemid moodustavad võored.

## 7.1 Operaatorideaalide võre

Siin alapunktis näitame, et klass OI on võre.

**Lause 7.1.** *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ operaatorideaalid. Siis $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ on operaatorideaal.*

*Tõestus.* On selge, et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Olgu antud Banachi ruumid $X, Y$. Operaatorideaalide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ühiosa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ defineeritakse komponentide kaudu järgmiselt: $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})(X, Y) := \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$. Näitame, et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ on operaatorideaal.

1) Olgu antud operaatorid $R, S \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})(X, Y)$. See tähendab, et $R, S \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $R, S \in \mathcal{B}(X, Y)$. Kuna $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on operaatorideaalid, siis järeldub siit, et $\alpha R + S \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $\alpha R + S \in \mathcal{B}(X, Y)$, ehk $\alpha R + S \in \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$, mida oligi tarvis näidata.

2) Kuna iga pideva lineaarse lõplikumõõtmelise operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ korral kehtib $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, siis ka $T \in \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$.

3) Olgu antud Banachi ruumid $X$, $Y$, $Z$, $W$ ning operaatorid $R \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{A}(Y, Z) \cap \mathcal{B}(Y, Z)$, $T \in \mathcal{L}(Z, W)$. Siis ka $TSR \in \mathcal{A}(X, Y)$ ning $TSR \in \mathcal{B}(X, Y)$, ehk $TSR \in \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$. $\square$

**Lause 7.2.** *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ operaatorideaalid. Siis $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ on operaatorideaal.*

*Tõestus.* Olgu $X, Y$ Banachi ruumid. Operaatorideaalide summa $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ defineerime komponentide kaudu järgmiselt: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(X, Y) := \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$. On ilmne, et $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$, kuna kahe tõkestatud operaatori summa on tõkestatud. Näitame, et operaatorite klass $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(X, Y)$ moodustab operaatorideaali.

1) Olgu antud Banachi ruumid $X, Y$ ning operaatorid $(R + S)$ ja $(T + V) \in \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$, kus $R, T \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $S, V \in \mathcal{B}(X, Y)$. Näitame, et ka operaator $\alpha(R + S) + (T + V) \in \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$. See on nii, sest operaatorite liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne: $\alpha(R + S) + (T + V) = (\alpha R + T) + (\alpha S + V) \in \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$.

2) Olgu $X, Y$ Banachi ruumid ja $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ pidev lineaarne lõplikumõõtmeline operaator. Avaldame $T = T + 0$, kus 0 tähistab 0-operaatorit. Nüüd $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $0 \in \mathcal{B}(X, Y)$, sest mõlemad on pidevad lineaarsed lõplikumõõtmelised operaatorid. Järelikult kehtib, et $T \in \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$.

3) Olgu $X$, $Y$, $Z$, $W$ Banachi ruumid ja operaatorid $R \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S_1 + S_2 \in \mathcal{A}(Y, Z) + \mathcal{B}(Y, Z)$, $T \in \mathcal{L}(Z, W)$, kus $S_1 \in \mathcal{A}(Y, Z)$ ja $S_2 \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Tuleb näidata, et $T(S_1 + S_2)R \in \mathcal{A}(X, W) + \mathcal{B}(X, W)$. See on nii, sest operaatorite liitmine ja

järjest rakendamine on seotud distributiivsuse seadusega: $T(S_1 + S_2)R = TS_1R + TS_2R \in \mathcal{A}(X, W) + \mathcal{B}(X, W)$.

$\square$

**Lause 7.3.** *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ operaatorideaalid. Siis $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ja $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.*

*Tõestus.* 1) On selge, et kehtivad seosed $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ ja $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \leq \mathcal{B}$. Näitame, et operaatorideaal $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ on operaatorideaalide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ alumine raja. Olgu $\mathcal{C}$ selline operaatorideaal, et $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$. Näitame, et siis $\mathcal{C} \leq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Olgu antud Banachi ruumid $X, Y$. Eelduse põhjal $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{A}(X, Y)$ ning $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Siit järeldub, et $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$.

2) Näitame, et $\mathcal{A}, \mathcal{B} \leq \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Olgu antud Banachi ruumid $X, Y$. Sisalduvus $\mathcal{A}(X, Y) \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B})(X, Y)$ kehtib, sest $0 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Analoogiliselt näidatakse, et ka $\mathcal{B}(X, Y) \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B})(X, Y)$.

Tõestame, et operaatorideaal $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ on operaatorideaalide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ülemine raja.

Valime vabalt operaatorideaali $\mathcal{C}$ nii, et $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$. Näitame, et siis ka $\mathcal{A} + \mathcal{B} \leq \mathcal{C}$. Olgu $X, Y$ Banachi ruumid. Valime vabalt operaatorid $R + S \in \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y)$, kus $R \in \mathcal{A}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(X, Y)$. Eelduse kohaselt $R \in \mathcal{A}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ ja $S \in \mathcal{B}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$, seega operaatorideaali omaduse 1) tõttu ka $R + S \in \mathcal{C}(X, Y)$, mida oligi tarvis tõestada. $\square$

## 7.2 Genereerivate hulkade süsteemide võre

Siin alapunktis uurime genereerivate hulkade süsteemide võret.

**Lause 7.4.** *Olgu $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ genereerivate hulkade süsteemid. Siis $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ on ka genereerivate hulkade süsteem.*

*Tõestus.* Olgu $X$ Banachi ruum. Genereerivate hulkade süsteemide $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ ühisosa $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ defineerime komponentide kaudu järgmiselt: $(\mathbf{G} \cap \mathbf{H})(X) := \mathbf{G}(X) \cap \mathbf{H}(X)$. Näitame, et komponendid rahuldavad nõutud tingimusi.

On selge, et hulkade süsteemi $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ hulgad on tõkestatud.

1) Kuna iga ruumi $X$ tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk alamhulk kuulub komponentidesse $G(X)$ ja $H(X)$, siis kuulub ta ka nende ühisossa.

2) Hulgad $G, H$ kuuluvad komponentidesse $\mathbf{G}(X)$ ja $\mathbf{H}(X)$. Siis kuulub ka hulk $\alpha G + H$ komponenti $\mathbf{G}(X) \cap \mathbf{H}(X)$.

3) Kehtib tänu sellele, et komponendid $\mathbf{G}(X)$ ja $\mathbf{H}(X)$ on mõlemad kinnised osahulkade võtmise suhtes.

4) Olgu antud hulk $G \in \mathbf{G}(X) \cap \mathbf{H}(X)$. Ilmselt siis ka $T(G) \in \mathbf{G}(X) \cap \mathbf{H}(X)$.

$\square$

**Lause 7.5.** *Olgu antud genereerivate hulkade süsteemid* $\mathbf{G}$ *ja* $\mathbf{H}$. *Siis hulkade süsteem* $\mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$, *mille komponent iga banachi ruumi* $X$ *korral antakse kujul* $(\mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H}))(X) = \{K \mid K \subset G+H,$ *kus* $G \in \mathbf{G}(X), H \in \mathbf{H}(X)\}$, *on genereerivate hulkade süsteem.*

*Tõestus.* Iga hulk $K \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$ on tõkestatud, sest tõkestatud hulkade summa on tõkestatud. Näitame, et genereerivate hulkade süsteemiks olemise tingimused on täidetud.

1) Olgu $K \subset X$ tõkestatud lõplikumõõtmeline hulk. Siis $K \in \mathbf{G}(X)$. Hulk $\{0\}$ on samuti tõkestatud ja lõplikumõõtmeline, seega kehtib $\{0\} \in \mathbf{H}(X)$. Kuna $K = K + \{0\}$, siis $K \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})(X)$.

2) Olgu antud arv $\alpha \in \mathbb{K}$ ja hulgad $K_1, K_2 \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})(X)$. Siis mõlema $k \in \{1,2\}$ korral $K_k \subset G_k + H_k$, kus $G_k \in \mathbf{G}(X)$, $H_k \in \mathbf{H}(X)$. Nüüd saame, et $\alpha K_1 + K_2 \subset (\alpha G_1 + \alpha H_1) + (G_2 + H_2) = (\alpha G_1 + G_2) + (\alpha H_1 + H_2)$. Kuna $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ on genereerivate hulkade süsteemid, siis $\alpha G_1 + G_2 \in \mathbf{G}(X)$ ja $\alpha H_1 + H_2 \in \mathbf{H}(X)$ ja oleme näidanud, et $\alpha K_1 + K_2 \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})(X)$.

3) Omadus järeldub vahetult definitsioonist.

4) Olgu antud hulk $K \subset G + H$, kus $G \in \mathbf{G}(X)$ ja $H \in \mathbf{H}(X)$ ning pidev lineaarne operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nüüd $T(K) \subset T(G+H) = T(G) + T(H)$. Kuna $T$ on pidev lineaarne operaator, siis $T(G) \in \mathbf{G}(Y)$ ja $T(H) \in \mathbf{H}(Y)$. Oleme tõestanud, et $T(K) \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})(Y)$. □

**Lause 7.6.** *Olgu* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *genereerivate hulkade süsteemid. Siis* $\mathbf{G} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ *ja* $\mathbf{G} \vee \mathbf{H} = \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$.

*Tõestus.* 1) On selge, et kehtivad võrratused $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} \le \mathbf{G}$ ja $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} \le \mathbf{H}$. Teiselt poolt, kui genereerivate hulkade süsteem $\mathbf{J}$ on süsteemidest $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ väiksem, siis kehtib ka $\mathbf{J} \le \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$.

2) Näitame, et $\mathbf{G} \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$. Olgu antud hulk $G \in \mathbf{G}(X)$. Nüüd $G = G + \{0\}$, kusjuures $\{0\} \in \mathbf{H}(X)$, sest tegemist on tõkestatud lõplikumõõtmelise hulgaga. Seega $G \in \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$ ja oleme näidanud, et $\mathbf{G} \le \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$. Analoogiliselt saab näidata, et $\mathbf{H} \le \mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$.

Näitame, et kui $\mathbf{J}$ on genereerivate hulkade süsteem, mille korral $\mathbf{G} \le \mathbf{J}$ ja $\mathbf{H} \le \mathbf{J}$, siis ka $\mathrm{Subsets}(\mathbf{G}+\mathbf{H}) \le \mathbf{J}$. Olgu $K \subset G + H$, kus $G \in \mathbf{G}(X) \subset \mathbf{J}(X)$ ja $H \in \mathbf{H}(X) \subset \mathbf{J}(X)$. Nüüd genereerivate hulkade süsteemide tingimuste põhjal ka $K \in \mathbf{J}(X)$, mida oligi tarvis näidata. □

## 7.3 Genereerivate jadade süsteemide võre

Siin alapunktis uurime genereerivate jadade süsteemide ekvivalentsiklasside võret.

**Lause 7.7.** *Olgu* $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid. Siis* $\mathbf{g}\cap\mathbf{h}$ *on samuti genereerivate jadade süsteem.*

*Tõestus.* Olgu antud Banachi ruum $X$ ja jada $x \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$. Siis jada $x$ on tõkestatud, kuna $x \in \mathbf{g}(X)$.

1) Olgu $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$ suvaline. Näitame, et siis leidub jada $x$ osajada, mis kuulub komponenti $(\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$.

Kuna $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$ ja $\mathbf{g}$ on genereerivate jadade süsteem, siis leidub osajada $y = (x_k)_{k\in K_1\subset\mathbb{N}}$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. Seega jada $y$ on tõkestatud ja lõplikumõõtmelise hulga $G$ elementidest moodustatud jada. Kuna $\mathbf{h}$ on genereerivate jadade süsteem, siis leidub osajada $z \prec y$ nii, et $z \in \mathbf{h}(X)$. Et $\mathbf{g}$ on genereerivate jadade süsteem ja $z$ on $y$ osajada, siis $z \in \mathbf{g}(X)$. Seega olemegi näidanud, et leidub jada $x$ osajada $z \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$.

2) Vaja on näidata, et $(\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$ on ruumi $X$ tõkestatud jadade ruumi $\mathbf{m}(X)$ lineaarne alamruum. See tuleneb vahetult sellest, et $\mathbf{g}(X)$ ja $\mathbf{h}(X)$ on ruumi $\mathbf{m}(X)$ lineaarsed alamruumid.

3) Olgu antud jada $x \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$ ja osajada $y \prec x$. Kuna $x \in \mathbf{g}(X)$, siis $y \in \mathbf{g}(X)$; analoogiliselt, kuna $x \in \mathbf{h}(X)$, siis $y \in \mathbf{h}(X)$. Seega ka $y \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$.

4) Valime vabalt $x = (x_k) \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nüüd, kuna $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ on genereerivate jadade süsteemid, siis omaduse 4 kohaselt $(Tx_k) \in \mathbf{g}(Y)$ ja $(Tx_k) \in \mathbf{h}(Y)$ ehk $(Tx_k) \in (\mathbf{g}\cap\mathbf{h})(Y)$. □

**Lause 7.8.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid. Siis* $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ *on samuti genereerivate jadade süsteem.*

*Tõestus.* Vaatleme jada $x = y + z \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$, kus $y \in \mathbf{g}(X)$ ja $z \in \mathbf{h}(X)$. Jada $x$ on tõkestatud, sest ta on kahe tõkestatud jada summa.

1) Olgu $x = (x_k) \subset G \in \mathbf{F}(X)$. Näitame, et leidub jada $x$ osajada, mis kuulub süsteemi $(\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$. Kuna $\mathbf{g}$ on genereerivate jadade süsteem, siis leidub osajada $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}(X)$. Teiselt poolt aga ainult nullidest koosnev jada $(0) \in \mathbf{h}(X)$ lause 5.7 põhjal. Seega võime kirjutada $y = (y_k + 0) = (y_k) + (0) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$.

2) Ilmselt on süsteem $(\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$ kinnine jadade liitmise ja arvuga korrutamise suhtes.

3) Olgu $x = (x_k) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$, kus $x = y + z$ ning $y = (y_k) \in \mathbf{g}(X)$ ja $z = (z_k) \in \mathbf{h}(X)$. Näitame, et $x$ iga osajada kuulub samuti süsteemi $(\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$. Selleks vaatame jada $x$ suvalist osajada

$$x' = (x_k)_{k\in K\subset\mathbb{N}}.$$

Nüüd $x' = y' + z'$, kus $y' = (y_k)_{k\in K} \in \mathbf{g}(X)$ ja $z' = (z_k)_{k\in K} \in \mathbf{h}(X)$. Seega $x' \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$, mida oligi tarvis tõestada.

4) Olgu antud jada $x = (x_k) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, kus $x = y + z$ ning $y = (y_k) \in \mathbf{g}(X)$ ja $z = (z_k) \in \mathbf{h}(X)$. Näitame, et $(Tx_k) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(Y)$. Kuna

$(x_k) = (y_k + z_k)$, siis $(Tx_k) = (T(y_k + z_k)) = (Ty_k) + (Tz_k)$. Nüüd, kuna $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ on genereerivate hulkade süsteemid, siis $(Ty_k) \in \mathbf{g}(Y)$ ja $(Tz_k) \in \mathbf{h}(Y)$, ning kokkuvõttes $(Tx_k) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(Y)$. $\square$

Erinevalt operaatorideaalidest ja genereerivate hulkade süsteemidest on meil genereerivate jadade süsteemide korral järjestusseos mitte genereerivate jadade süsteemide, vaid ekvivalentsiklasside vahel. Seetõttu saab võre omadusi vaadata ainult ekvivalentsiklasside vahel.

**Lause 7.9.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid ning* $[\mathbf{g}]$ *ja* $[\mathbf{h}]$ *vastavad ekvivalentsiklassid. Siis* $[\mathbf{g}] \wedge [\mathbf{h}] = [\mathbf{g} \cap \mathbf{h}]$.

*Tõestus.* Näitame, et valem $[\mathbf{g} \cap \mathbf{h}]$ on korrektselt defineeritud, s.t. tulemus ei sõltu ekvivalentsiklasside $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ esindajate valikust.

Olgu antud ekvivalentsed jadade süsteemid $\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_2$ ja $\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{h}_2$. Näitame, et siis ka $(\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1) \sim (\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2)$.

Näitame, et $(\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1) \lesssim (\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2)$. Selleks valime vabalt jada $x \in (\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1)(X)$. Vaja on näidata, et leidub jada $x$ osajada, mis kuulub komponenti $(\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2)(X)$.

Et jada $x \in (\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1)(X)$, siis ka $x \in \mathbf{g}_1(X)$. Seega ekvivalentsuse $\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_2$ põhjal leidub $y \prec x$ nii, et $y \in \mathbf{g}_2(X)$. Kuna $y \prec x \in (\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1)(X)$, siis ka $y \in (\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1)(X)$ ja seega ka $y \in \mathbf{h}_1(X)$. Ekvivalentsuse $\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{h}_2$ tõttu leidub $z \prec y$ nii, et $z \in \mathbf{h}_2(X)$. Kuna $z \prec y \in \mathbf{g}_2(X)$, siis ka $z \in \mathbf{g}_2(X)$. Seega kokkuvõttes $z \in (\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2)(X)$. Kuna $z \prec y$ ja $y \prec x$, siis me oleme näidanud otsitava osajada $z$ olemasolu.

Vahetades eelnevas lõigus olnud tõestuses ära $\mathbf{g}_1$ ja $\mathbf{g}_2$ ning $\mathbf{h}_1$ ja $\mathbf{h}_2$ rollid, saame, et $(\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2) \lesssim (\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1)$. Kokkuvõttes $(\mathbf{g}_1 \cap \mathbf{h}_1) \sim (\mathbf{g}_2 \cap \mathbf{h}_2)$.

Nüüd asume tõestatava väite näitamise juurde.

Näitame kõigepealt, et $[\mathbf{g} \cap \mathbf{h}] \leq [\mathbf{g}]$, ehk $\mathbf{g} \cap \mathbf{h} \lesssim \mathbf{g}$. Olgu antud $x \in (\mathbf{g} \cap \mathbf{h})(X)$ ja osajada $y \prec x$. Nüüd ka $y \in (\mathbf{g} \cap \mathbf{h})(X) \subset \mathbf{g}(X)$. Kuna $y \prec y$ ja $y \in \mathbf{g}(X)$, siis olemegi näidanud, et $\mathbf{g} \cap \mathbf{h} \lesssim \mathbf{g}$. Täpselt analoogiliselt näidatakse, et $\mathbf{g} \cap \mathbf{h} \lesssim \mathbf{h}$. Seega $[\mathbf{g} \cap \mathbf{h}]$ on ekvivalentsiklasside $[\mathbf{g}]$ ja $[\mathbf{h}]$ alumine tõke. Olgu antud mingi ekvivalentsiklass $[\mathbf{j}]$ nii, et $[\mathbf{j}] \leq [\mathbf{g}]$ ja $[\mathbf{j}] \leq [\mathbf{h}]$. Näitame, et siis $[\mathbf{j}] \leq [\mathbf{g} \cap \mathbf{h}]$, ehk teisisõnu, $[\mathbf{g} \cap \mathbf{h}]$ on suurim element ekvivalentsiklasside $[\mathbf{g}]$ ja $[\mathbf{h}]$ alumiste tõkete hulgas.

Valime vabalt jada $x \in \mathbf{j}(X)$ ja osajada $y \prec x$. Vaja on näidata, et leidub jada $y$ osajada, mis kuulub komponenti $(\mathbf{g} \cap \mathbf{h})(X)$. Nüüd, kuna $\mathbf{j} \lesssim \mathbf{g}$, siis leidub osajada $z \in y$ nii, et $z \in \mathbf{g}(X)$. Et $z \prec y$, siis $z \in \mathbf{j}(X)$. Nüüd, kuna $\mathbf{j} \lesssim \mathbf{h}$, siis leidub $w \prec z$, siis $w \in \mathbf{h}(X)$. Et $w \prec z \in \mathbf{g}(X)$, siis $w \in (\mathbf{g} \cap \mathbf{h})(X)$. Seega $w$ sobibki otsitavaks osajadaks. $\square$

**Lause 7.10.** *Olgu* $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{h}$ *genereerivate jadade süsteemid ning* $[\mathbf{g}]$ *ja* $[\mathbf{h}]$ *vastavad ekvivalentsiklassid. Siis* $[\mathbf{g}] \vee [\mathbf{h}] = [\mathbf{g} + \mathbf{h}]$.

*Tõestus.* Näitame, et valem $[\mathbf{g}+\mathbf{h}]$ on korrektselt defineeritud, s.t. ei sõltu esindajate valikust. Olgu $\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_2$ ja $\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{h}_2$. Tõestame, et siis ka $\mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2$. Uurime kõigepealt, kas $\mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1 \lesssim \mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2$.

Olgu antud jada $x=(x_k) \in (\mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1)(X)$, kus $x=y+z$, $y \in \mathbf{g}_1(X)$, $z \in \mathbf{h}_1(X)$. Vaja on näidata, et leidub $x$ osajada, mis kuulub komponenti $(\mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2)(X)$.

Et $\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_2$, siis leidub $y$ osajada

$$y' = (y_k)_{k\in K_1\subset\mathbb{N}} \in \mathbf{g}_2(X).$$

Nüüd kuna $\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{h}_2$, siis jada $z' = (z_k)_{k\in K_1} \in \mathbf{h}_1(X)$ sisaldab osajada

$$z'' = (z_k)_{k\in K_2\subset K_1} \in \mathbf{h}_2(X).$$

Nüüd ka $y'' = (y_k)_{k\in K_2} \in \mathbf{g}_2(X)$. Defineerime jada

$$x'' = (x_k)_{k\in K_2} = (y_k+z_k)_{k\in K_2} = y''+z'' \in (\mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2)(X).$$

Olemegi näidanud, et jada $x \in (\mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1)(X)$ sisaldab osajada $x'' \in (\mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2)(X)$.

Vahetades eelnenud tõestuse osas ära $\mathbf{g}_1$ ja $\mathbf{g}_2$ ning $\mathbf{h}_1$ ja $\mathbf{h}_2$ rollid, saame analoogiliselt, et $\mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2 \lesssim \mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1$ ning kokkuvõttes $\mathbf{g}_1+\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{g}_2+\mathbf{h}_2$.

Näitame nüüd, et $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{g}+\mathbf{h}$. Olgu jada $x \in \mathbf{g}(X)$ suvaline. Näitame, et jada $x$ sisaldab osajada, mis kuulub komponenti $(\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$. Kuna jada $x=(x_k)$ saab ümber kirjutada kujul $(x_k)=(x_k+0)$, siis kehtib $x \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$ ja otsitavaks osajadaks saab võtta jada $x$ enda.

Analoogiliselt tõestatakse, et $\mathbf{h} \lesssim \mathbf{g}+\mathbf{h}$.

Jääb veel näidata, et genereerivate jadade süsteem $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ on süsteemide $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ vähim ülemine tõke. Olgu $\mathbf{j}$ selline geneerivate jadade süsteem, et $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{j}$ ja $\mathbf{h} \lesssim \mathbf{j}$. Näitame, et siis $\mathbf{g}+\mathbf{h} \lesssim \mathbf{j}$.

Olgu $x=(x_k) \in (\mathbf{g}+\mathbf{h})(X)$. Siis jada $x$ avaldub kujul $x=y+z$, kus $y=(y_k) \in \mathbf{g}(X)$ ja $z=(z_k) \in \mathbf{h}(X)$. Näitame, et siis leidub jada $x$ osajada, mis kuulub komponenti $\mathbf{j}(X)$.

Kuna $\mathbf{g} \lesssim \mathbf{j}$, siis leidub jada $y$ osajada

$$y' = (y_k)_{k\in K_1\subset\mathbb{N}} \in \mathbf{j}(X).$$

Nüüd jada

$$z' = (z_k)_{k\in K_1} \in \mathbf{h}(X),$$

seega jada $z'$ sisaldab osajada

$$z'' = (z_k)_{k\in K_2\subset K_1} \in \mathbf{j}(X).$$

Nüüd ka $y'' = (y_k)_{k\in K_2} \in \mathbf{j}(X)$. Et $\mathbf{j}$ on genereerivate jadade süsteem, siis jada $x'' = y''+z'' \in \mathbf{j}(X)$. Jada $x''$ ongi otsitav osajada. □

# Operator Ideals and Generating Systems of Sets and Sequences

## Master Thesis


## Rauni Lillemets


# Summary


This master thesis aims to study the notions of operator ideals, generating systems of sets and generating systems of sequences and connections between them.

The master thesis consists of seven chapters.

In the first chapter the necessary notions and general lemmas are introduced.

In the second chapter the definition and historical background of the notion of relatively $(p, r)$-compact sets are given, where $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r \leq p^*$ and $p^*$ is the conjugate index of $p$. It is shown that the relatively $(\infty, 1)$-compact sets are exactly the relatively compact sets.

In the third chapter we look at the notion of an operator ideal. Let the class of all operator ideals be denoted by OI. An operator is said to be $(p, r)$-compact if it maps every bounded set to a relatively $(p, r)$-compact set. We denote the class of all $(p, r)$-compact operators by $\mathcal{K}_{(p,r)}$ and show that $\mathcal{K}_{(p,r)} \in \mathrm{OI}$.

The fourth chapter starts with the notion of generating system of sets that was introduced in [12] by I. Stephani in 1980s. This notion is of importance because it gives a possibility to generate a new operator ideal from two given generating systems of sets. We denote the class of all generating systems of sets by GHS and define a partial order on GHS. Let the class of all relatively $(p, r)$-compact sets be denoted by $\mathbf{K}_{(p,r)}$. The class $\mathbf{K}_{(\infty,1)}$ coincides with the class $\mathbf{K}$ of the relatively compact sets.

The fifth chapter is devoted to the notion of generating system of sequences that was also introduced in [12] by Stephani. Let the class of all generating systems of sequences be denoted by GJS. Stephani showed that from a given generating system of sequences it is possible to generate a new generating system of sets. Let $\mathbf{g} \in \mathrm{GJS}$. We denote the system of sets generated from $\mathbf{g}$ by $\overrightarrow{\mathbf{g}}$. Denote the system of convergent sequences by $\mathbf{c}$. It is easily obtained that $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \mathbf{K}$.

We define a system $\mathbf{G} \in \mathrm{GHS}$ to be generatable if there exists a system $\mathbf{g} \in \mathrm{GJS}$ such that $\overrightarrow{\mathbf{g}} = \mathbf{G}$. We ask the question: is the system $\mathbf{K}_{(p,r)}$ generatable? More generally, given a system $\mathbf{G} \in \mathrm{GHS}$, how to decide whether this system is generatable?

We start the sixth chapter by introducing a pre-order on the class GJS. With the help of this pre-order, we define an equivalence relation $\sim$ on GJS and find

the corresponding quotient class GJS$/_\sim$. On this class we now introduce a partial order. We then define operations $\rightarrow$ and $\leftarrow$ between the classes GJS$/_\sim$ and GHS. We show that these operations $(\rightarrow, \leftarrow)$ form a Galois connection. Using the Galois connection we give a criterion that allows to decide whether a given generating system of sets is generatable. We also give an answer to the question whether the system of sets $\mathbf{K}_{(p,r)}$ is generatable.

In the seventh chapter we show that the classes of operator ideals and generating systems of sets and sequences are all examples of lattices.

# Kirjandus


[1] K. Ain, R. Lillemets, E. Oja, *Compact operators which are defined by $\ell_p$-spaces*, Quaest. Math. **35** (2012), 145–149.

[2] J. Bourgain, O. Reinov, *On the approximation properties for the space $H^\infty$* , Math. Nachr. **122** (1985) 19–27.

[3] B. A. Davey, H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order, Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[5] P. Habala, P. Hájek, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces I*, Charles University, Prague, 1996.

[6] M. Kilp, *Algebra I*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[7] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1977.

[8] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[9] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[10] O. Reinov, *A survey of some results in connection with Grothendieck approximation property*, Math. Nachr. **119** (1984) 257–264.

[11] D. P. Sinha, A. K. Karn, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of $l_p$* , Studia Math. **150** (2002) 17–33

[12] I. Stephani, *Generating systems of sets and quotients of surjective operator ideals*, Math. Nachr. **99** (1980) 13–27

[13] M. Õunap, *Kompaktsed operaatorid Banachi ruumides*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2007.

# Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rauni Lillemets,
(sünnikuupäev 14.09.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
"Operaatorideaalid ning genereerivate hulkade ja genereerivate jadade süsteemid",

mille juhendaja on Eve Oja,

1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2013