I, 221.

Anfangsgründe

der

Buchstabenrechnung und Algebra,

mit Inbegriff

der

Combinationslehre und unbestimmten Analytik,

nebst Uebungsaufgaben.

Zur Repetition des mündlichen Unterrichts und zur eignen weitern Fortbildung neben diesem.

Carl Heinrich Von

C. H. Kupffer,

Doctor der Philosophie, Hofrath und Oberlehrer der Mathematik am Gymnasium zu Reval.

Reval, 1832,

gedruckt bei Lindfors Erben.

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Vollendung desselben fünf Exemplare an die Zensur-Comität abgeliefert werden.

Dorpat, den 16. November 1831.

(L. S.) Dr. F. Parrot, Zensor.

Seiner Excellenz

dem Herrn

Geheimen-Rathe und Senateur, Collegen des Ministers des öffentlichen Unterrichts, Präsidenten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, mehrerer hohen Orden Ritter und Ehren-Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften des In- und Auslandes

SERGIUS VON OUWAROFF

verehrungsvoll gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede.

Diese Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra sollen eine Grundlage für den mündlichen Unterricht vornämlich in öffentlichen Lehranstalten seyn. Der Anfänger sollte ein Buch in die Hände bekommen, das ihm die Repetition des mündlichen Vortrages erleichterte, indem es ihm die Hauptmomente desselben vor Augen stellte. Dies forderte einen gedrängten und deutlichen Vortrag. Ausführlichere Erklärungen und Erläuterungen konnten dem mündlichen Vortrage überlassen bleiben. In allen Schulen sind mehr oder minder fähige, mehr oder weniger geübte Schüler in einer Classe beisammen, wo sie 1 bis 2 Jahr verweilen, daher habe ich diejenigen Paragraphen, welche für den talentvolleren oder für den länger geübten sind, mit einem Sternchen bezeichnet, und sie ausführlicher behandelt, weil für diese Partieen für die mündliche Erklärung selten viel Zeit übrig bleibt, und weil sie dem mit den Hauptlehren bekannten Schüler auch wohl zur eignen weitern Fortbildung dienen sollten. Dadurch kann dieses Buch ihn noch auf die Universität begleiten. Auch für den Privatunterricht wird diese Absonderung nicht überflüssig seyn. Nicht alle Privatlehrer können zugleich erfahrne Lehrer in der Mathematik seyn, in welcher zu unterrichten die Umstände sie doch oft nöthigen. Diesen giebt diese Absonderung zu erkennen, worauf der erste Anfänger die meiste Zeit zu verwenden hat, und was er allenfalls übergehen kann, wenn Zeit oder geringe Fähigkeit seiner Schüler die größte Oekonomie vorschreiben.

Wo mir in andern Lehrbüchern ein Gesichtspunkt aufstieß, der mir für die Fassungskraft von Anfängern vorzüglich geeignet schien, da habe ich ihn benutzt. Die eigenthümliche Bearbeitung jedoch wird man hoffentlich nirgends vermissen, und auch manches, soviel ich weiß, ganz neue, wie die Methode zur Approximation der Gleichungen §. 92, oder doch zum Theil neue, wie Seite 11, 118, 155, 196, 210, 221

u. ff., finden, so wie die meisten algebraischen Uebungsaufgaben neu oder neu bearbeitet sind.

In der Anordnung der Materien hatte ich folgenden Gesichtspunkt: Die Verrichtung der arithmetischen Grundoperationen und die Lehre von den Potenzen als ein specieller Fall jener gehört in die Arithmetik und Buchstabenrechnung; Alles, worin die Anwendung algebraischer Grundsätze vorwaltet, wie die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, die Lehre von den Proportionen, Progressionen und Logarithmen schien mir in die Algebra gezogen werden zu müssen.

Unterlassen kann ich hierbei nicht, dem Herrn Collegienrath Paucker in Mitau, welchem ich das Manuscript vor dem Drucke zur Durchsicht mittheilte, für die darauf verwandte Mühe, und für seine ins Innere der Sache gehenden Bemerkungen, welche mich zu bedeutenden Verbesserungen und Erweiterungen veranlaßt haben, zu danken.

Meinen Dank auch dem Herrn Oberstlieutenant Baron von Wrangell für die mir mitgetheilten Notizen zu den Uebungsaufgaben und für die zuvorkommende Güte überhaupt, mit welcher er mir und meinen Schülern stets nützlich zu werden suchte, wo die ihm übertragenen geodätischen Operationen in der Umgegend von Reval und die ihm anvertraute Sternwarte Gelegenheit dazu gaben.

Eine russische Uebersetzung dieser Anfangsgründe will ich versuchen, wenn ich Aufmunterung dazu finden sollte.

Reval, den 10. November 1831.

C. H. Kupffer.

Berichtigungen und Zusätze.

Seite 10, Zeile 7 von unten, fehlt vor $a + 2b$ die Klammer.
„ 25, in der ersten Zeile fehlt der §. 19.
„ 56, Zeile 1 von unten, statt kleinern, lies kleinere.
„ 80, „ 5 von oben, nach der Parenthese lies aufgeschichtet.
„ 95, „ 11 „ „ statt $\sqrt{5}$ lies $\sqrt{0,5}$
„ 120, „ 4 von unten, „ b^3 „ $a^{m-3} b^3$
„ — „ 5 „ „ „ b^2 „ $a^{m-2} b^2$.
„ 143, „ 5 „ „ „ ihn „ ihm.
„ 156, „ 8 von oben, „ m „ n
„ — „ 4 von unten „ Classe „ Casse.
„ 176, „ 5 von oben „ a^2 „ x^2
„ 177, „ 9 „ „ „ Y „ y
„ 196 u. ff. Die Anmerkung enthält für ihren Zweck über die in ihr aufgestellte Formel zur beiläufigen Berechnung der Wurzeln und gemischten Potenzen von Brüchen vielleicht zu wenig Beispiele, daher noch Folgendes über sie. Diese Formel geht, wenn $\frac{M}{N}$ der gegebene Bruch ist, und $a - b = M$, $a + b = N$ gesetzt wird, für die Berechnung der Wurzeln in folgende über:

$$\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{na - b}{na + b}.$$

Wenn der gegebene Bruch, $\frac{M}{N}$, große Zahlen zum Zähler und Nenner hat, so ist auch nach dieser einfachen Formel die Berechnung verhältnißmäßig noch etwas weitläuftig. Aber eben, weil sie die Wurzel nur beiläufig geben soll, kann man sich begnügen, wenn der Fehler erst in der dritten Decimalstelle erscheint. Dann ist es erlaubt, für $\frac{M}{N}$ einen Näherungswerth zu brauchen, dessen Nenner klein genug ist. Man wird zu dem Ende den Bruch $\frac{M}{N}$ in einen Kettenbruch verwandeln und aus einem Näherungswerthe desselben die Wurzel nach der Formel berechnen. Der Fehler wird auch dann immer noch unbedeutend seyn, wozu folgende Beispiele als Beleg dienen.'

Beispiel 1.

Die Quadratwurzel von $\frac{75}{92}$ soll beiläufig angegeben werden.

Berechnung.

	75					
75	92	1				
	75					
	17	75	4			
		68				
		7	17	2		
			14			
			3	7	2	
				6		
				1	3	3

Folglich sind $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{11}$, . . die Näherungswerthe von $\frac{75}{92}$. Da $\frac{9}{11} = \frac{10-1}{10+1}$, so ist

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{2 \cdot 10 - 1}{2 \cdot 10 + 1} = \frac{19}{21} = \ldots 0{,}904 \ldots$$

Die exacte Ausziehung der Quadratwurzel aus $\frac{75}{92}$ giebt 0,902 . .

Beispiel 2.

Um die Kubikwurzel von $\frac{75}{92}$ zu berechnen, ist

$$\sqrt[3]{\frac{9}{11}} = \frac{3 \cdot 10 - 1}{3 \cdot 10 + 1} = \frac{29}{31} = \ldots 0{,}935 \ldots$$

Die exacte Ausziehung der K. W. aus $\frac{75}{92}$ giebt 0,934 . .

Eben so ist $\sqrt[4]{\frac{9}{11}}$ nach der Formel $= 0{,}9512 \ldots;$

$\sqrt[4]{\frac{75}{92}}$ nach genauer Berechnung $= 0{,}9502 \ldots$

$\sqrt[5]{\frac{9}{11}}$ nach der Formel $= 0{,}9607 \ldots;$

$\sqrt[5]{\frac{75}{92}}$ nach genauer Berechnung $= 0{,}9599 \ldots$

$\sqrt[6]{\frac{9}{11}}$ nach der Formel $= 0{,}9672 \ldots;$

$\sqrt[6]{\frac{75}{92}}$ nach genauer Berechnung $= 0{,}9665 \ldots$

$\sqrt[7]{\frac{9}{11}}$ nach der Formel $= 0{,}9718 \ldots;$

$\sqrt[7]{\frac{75}{92}}$ nach genauer Berechnung $= 0{,}9712 \ldots$

Für gemischte Potenzen geht die Formel in folgende über

$$\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{na - mb}{na + mb}.$$

Demnach ist für die gemischte Potenz $\left(\frac{75}{92}\right)^{\frac{3}{5}}$

$$\left(\frac{9}{11}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{5 \cdot 10 - 3}{5 \cdot 10 + 3} = \frac{47}{53} = \ldots\ldots 0{,}886 \ldots;$$

der genaue Werth von $\left(\frac{75}{92}\right)^{\frac{3}{5}}$ ist . . . 0,884 . .

Ferner ist

$(\frac{75}{92})^{\frac{2}{7}}$ nach genauer Berechnung $= 0{,}943 \ldots;$

$(\frac{9}{11})^{\frac{2}{7}}$ nach der Formel $= \frac{7 \cdot 10 - 2}{7 \cdot 10 + 2} = \frac{17}{18} = 0{,}944 \ldots$

$(\frac{631}{514})^{\frac{3}{8}}$ nach genauer Berechnung $= 1{,}0594 \ldots;$

$(\frac{14}{12})^{\frac{3}{8}}$ nach d. Formel $= \frac{8 \cdot 13 + 3}{8 \cdot 13 - 3} = \frac{107}{101} = 1{,}0594 \ldots$

$(\frac{631}{541})^{\frac{5}{8}}$ nach genauer Berechnung $= 1{,}1009 \ldots;$

$(\frac{14}{12})^{\frac{5}{8}}$ nach der Formel $= \frac{109}{99} = 1{,}1010 \ldots$

$(\frac{731}{541})^{\frac{7}{8}}$ nach genauer Berechnung $= 1{,}1441 \ldots;$

$(\frac{14}{12})^{\frac{7}{8}}$ nach der Formel $= \frac{111}{97} = 1{,}1443 \ldots$

$(\frac{631}{541})^{\frac{9}{8}}$ nach genauer Berechnung $= 1{,}1890 \ldots;$

$(\frac{14}{12})^{\frac{9}{8}}$ nach der Formel $= \frac{113}{95} = 1{,}1894 \ldots$

Inhalt.

Buchstabenrechnung.

Algebra.

Erster Theil. Von den einfachen Gleichungen.

Buchstabenrechnung.

Einleitung.

§. 1.

Um sich von verschiedenen Größen eine deutliche Vorstellung zu machen, muß man ihre Verhältnisse zu einander kennen lernen. Dies geschieht durch Messen. Um eine Größe zu messen, wird eine andere von derselben Gattung beliebig angenommen, welche das Maß heißt und nichts anders als die Einheit der Zahl ist, durch welche jene Größe ausgedrückt wird. Messen ist eigentlich diejenige Operation, durch welche man erfährt, wie viel mal das angenommene Maß in einer Größe enthalten ist, und ist ohne zählen nicht möglich, und wird auch schlechtweg zählen genannt, wenn es dadurch allein directe geschehen kann, wie z. B. wenn die in einem Beutel enthaltenen Dukaten gezählt werden.

Man kann nur Größen von einer Gattung unter einander vergleichen, aber alle Dinge lassen sich auf irgend eine Weise als Größen einer Gattung betrachten. Nehmen kann man jede Größe zum Maße von Größen derselben Gattung, aber es ist bequemer, nur ein Maß für jede Gattung Größen zum Grunde zu legen, und, weil weder zu große noch zu kleine Zahlen (d. i. Brüche mit großen Nennern) geschickt zur Bezeichnung der Größen sind, dieses durch eine fortgesetzte Vervielfältigung und Theilung zu vergrößern und zu vermindern, je nachdem die zu messenden Größen groß oder klein sind. Das gebräuchliche Maß für Längen ist ein Fuß, woraus durch Vervielfältigung Ruthen, Werst, Stunden, Meilen; durch Theilung Zoll, Linien entstehen. Quadratfuß, Quadratruthen u. s. w. sind es für Flächen, Kubikfuß u. s. w. für Körper. Für Winkel sind es Grade, Minuten, Sekunden; für die Zeit Jahre, Tage, Stunden, Minuten u. s. w.

Jede Zahl kann als Einheit, jede Einheit als Zahl betrachtet werden.

§. 2.

Die Zahlen können auf verschiedene Weise unter einander verbunden und dadurch neue Zahlen erzeugt werden. Solche Verbindungen der Zahlen unter einander geschehen durch arithmetische Operationen. So mannichfaltig die Verbindungen sind, durch welche aus gegebenen Zahlen neue erzeugt werden können, so sind doch nicht mehr als 4 arithmetische Operationen nöthig, um sie zu Stande zu bringen, nämlich: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren. Diese heißen arithmetische Grundoperationen, und die Elementar-

Arithmetik beschäftigt sich mit diesen und einigen Modificationen und Combinationen derselben, namentlich denen, welche unter dem Namen der Potenzen-Rechnung begriffen sind.

Die Arithmetik zerfällt demnach in 2 Abschnitte.

I. Die Lehre von den arithmetischen Grundoperationen.

II. Die Lehre von den Potenzen.

Erster Abschnitt.

Von den arithmetischen Grundoperationen.

§. 3.

Die Zahlen werden bezeichnet durch Ziffern und durch Buchstaben, die arithmetischen Operationen durch die Zeichen:

$+$ für die Addition.

$-$ für die Subtraction.

. oder $\times$ für die Multiplication.

: für die Division.

Die Ziffern sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; die Buchstaben werden gewöhnlich aus dem lateinischen Alphabet genommen, und jeder Buchstabe kann jede beliebige Zahl bezeichnen.

§. 4.

Die Bezeichnung einer Größe oder mehrerer zu einem Ganzen unter einander verbundener (§. 2.) Größen heißt ein

Ausdruck, z. B. $7 + 3$; $8 - 5 + 3$; $(19 - 7 + 11) : 2$; $19 (7 + 11) : 2$; $19 - 7 + 11 : 2$; $[19 - (7 + 11)] : 2$; $5 + 3 . 4 : 7$; $a + b : a - b + b . c$; $a - b + c : d$.

Die durch + und — verbundenen Größen heißen **Glieder des Ausdrucks.** Ein Ausdruck von 2 Gliedern heißt ein **Binomium** oder eine **zweitheilige** Größe, von 3 Gliedern ein **Trinomium** oder eine **dreitheilige** Größe; jeder Ausdruck von mehreren Gliedern heißt ein **Polynomium.** Auch pflegt man einen Ausdruck von einem Gliede eine einnamige, von mehr Gliedern eine **zusammengesetzte** oder eine **complexe** Größe zu nennen.

Die Multiplication unter Buchstaben wird meistens durch bloßes Nebeneinanderschreiben, die Division, indem man unter den Dividendus einen Strich zieht und darunter den Divisor schreibt, bezeichnet. Es ist also gebräuchlich, die obigen Buchstabenausdrücke folgendermaßen zu schreiben:

$$a - b + bc; \quad a - b + \frac{c}{d}.$$

Auch kommen Ausdrücke vor, wo ein Buchstabe mit einer in Ziffern geschriebenen Zahl multiplicirt ist. Solche Zahlen heißen **Coefficienten** der Buchstaben oder auch der Glieder, und werden vor den Buchstaben geschrieben. Z. B. $3a - 2ab + 7\frac{a}{b}$. Hier sind 3, 2, 7, die Coefficienten.

Ueber eine Erweiterung dieses Begriffes siehe §. 46.

§. 5.

In der Verrichtung der arithmetischen Operationen mit Ziffern und mit Buchstaben findet ein wesentlicher Unterschied Statt. Bei ersteren können sie wirklich verrichtet, bei letzteren nur angedeutet werden. Daher zerfällt dieser Theil wieder in 2 Theile, nämlich die Verrichtung der arithmetischen Grundoperationen

1) in Ziffern;

2) in Buchstaben.

Verrichtung der arithmetischen Grundoperationen in Ziffern.

Diese lehrt die Rechenkunst.

Verrichtung der arithmetischen Grundoperationen in Buchstaben.

§. 6.

Diese heißt die Buchstabenrechnung. Sie hat bald mit einzelnen Buchstaben, bald mit ganzen Ausdrücken, in denen wiederum die Zeichen der Glieder abwechselnd + und — sind, zu thun. Die Regeln der Buchstabenrechnung werden also auf alle diese Fälle Rücksicht nehmen müssen. Ich werde diejenigen Fälle zuerst in Betrachtung ziehen, wo kein Buchstabe das Zeichen — vor sich hat, und die Regeln hierüber besondere Regeln nennen. Dann erst werde ich die allgemeinen Regeln für alle Fälle aufstellen.

Besondere Regeln.

§. 7.

Addition. Sind die zu addirenden Buchstaben gleich, so addire die Coefficienten, und schreibe deren Summe vor den Buchstaben als Coefficienten. Dies ist die Summe. Willst du sie in Zahlen verwandeln, so setze für die Buchstaben die Zahl, die er bezeichnet, und verrichte die vorher blos angedeutete Multiplication. — Sind die zu addirenden Buchstaben zum Theil verschieden, nämlich so, daß einige oder alle wiederholt vorkommen, so mache es mit jedem Buchstaben eben so, und schreibe die einzelnen Summen neben einander hin. Dies wird die Summe seyn.

Exempel 1.

3a, 2a, a sollen addirt werden und a sey = 17.

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 3a \\ 2a \\ a \\ \hline 6.\,a = 6.\,17. = 102. \end{array}$$

Exempel 2.

4a, 5b, 3c, 2a, 5c, 6b, 7a, 2d sollen addirt werden, und a sey = 2; b = 3; c = 7; d = 9.

Auflösung.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4a & + & 5b & + & 3c & & \\ 2a & + & 6b & + & 5c & & \\ 7a & + & & & & + & 2d \\ \hline 13a & + & 11b & + & 8c & + & 2d. \end{array}$$

Berechnung in Zahlen.

$$
\begin{aligned}
13a &= 26\\
11b &= 33\\
8c &= 56\\
2d &= 18\\
\hline
13a + 11b + 8c + 2d &= 133.
\end{aligned}
$$

§. 8.

Subtraction. Schreibe jeden Buchstaben des Subtrahendus mit seinem Coefficienten unter den ihm gleichen Buchstaben des Subtractors und ziehe darauf die Coefficienten ab. Hingeschrieben wird darauf die Differenz oder der Rest, wie in der Addition.

Exempel.

$2a + 3b$ soll von $5a + 4b$ abgezogen werden, wo $a = 25$; $b = 27$.

Auflösung.	Berechnung in Zahlen.
$5a + 4b$	$3a = 75$
$2a + 3b$	$b = 27$
$3a + b$	$3a + b = 102$

Zur Probe kann man den Subtractor und den Subtrahendus noch besonders berechnen.

$5a = 125$	$2a = 50$
$4b = 108$	$3b = 81$
$5a + 4b = 233$	$2a + 3b = 131$
$2a + 3b = 131$	
Rest 102	

§. 9.

Multiplication. Erklärung. Zwei Zahlen mit einander multipliciren heißt die eine so viel mal nehmen, als die andere Einheiten enthält. — Diese Zahlen heißen: Factoren, was herauskommt: Product. Sollen 3 Zahlen mit einander multiplicirt werden, so wird das Product zweier als ein Factor angesehen, bei der Multiplication von 4 Zahlen das Product von dreien u. s. w. Woraus erhellt, wie das Product von mehreren Factoren berechnet werden könne.

Grundsätze der Multiplication.

I. Zwei Factoren geben ein gleiches Product, wenn man den einen Factor erst in Theile zerlegt, jeden Theil mit dem andern Factor multiplicirt und die Producte addirt — und — wenn man ohne Zerlegung multiplicirt.

II. Eben darum wird aber auch dann dasselbe Product herauskommen, wenn man auch noch den andern Factor in Theile zerlegt, jeden Theil des einen mit jedem Theile des andern multiplicirt, und die erhaltenen einzelnen Producte addirt.

III. Es ist einerlei, in welcher Ordnung die Factoren mit einander multiplicirt werden.

Regeln.

Erste Regel. Wenn einzelne Buchstaben mit einander multiplicirt werden sollen, so schreibe sie nur als Factoren neben einander hin. Mit den Coefficienten mache es eben so, oder berechne erst ihr Product und schreibe dies hin.

Exempel 1.

a soll mit b multiplicirt werden.

Auflösung.

Das Product ist ab.

Exempel 2.

2 a soll mit 3 c und dies mit 4 b multiplicirt werden.

Auflösung.

Das Product ist $2a. 3c. 4b = 2. 3. 4acb = 24abc$.

Zweite Regel. Wenn ein Buchstabe oder ein aus einem Gliede bestehender Ausdruck der eine Factor ist, der andere Factor aus mehreren Gliedern besteht, so multiplicire jedes Glied desselben mit jenem, und addire die erhaltenen Producte.

Exempel.

a soll mit $a + 2b + 3c$ multiplicirt werden.

Auflösung : $a + 2b + 3c$
$\quad a$

Das Product ist $aa + 2ab + 3ac$.

Theile eines jeden Factors A und B einander gleich sind. Nun ist gewiß $A = 1 + 1 + \ldots$; $B = 1 + 1 + 1 + \ldots$, indem A aus A, B aus B Einheiten besteht. In welcher Ordnung A und B also auch mit einander multiplicirt werden, so geben sie eine gleiche Anzahl gleicher Producte, folglich ist $AB = BA$.

Auf gleiche Weise wird die Richtigkeit des Satzes von 3 oder mehr Factoren bewiesen.

Sind unter diesen auch gebrochene Zahlen, so gehört der Satz zum Theil in die Division, wo er auch auf diesen Fall ausgedehnt wird.

§. 10.

Division. Die Division kann aus mehreren Gesichtspunkten betrachtet werden.

Erste Erklärung. Dividiren ist: eine Größe theilen, und zwar in gleiche Theile. Die Größe, welche getheilt wird, heißt Dividendus; die Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile jene getheilt werden soll, heißt Divisor, der Theil Quotient. Hiernach bedeutet also der Divisor die Anzahl, der Quotient die Größe der Theile.

Zweite Erklärung. Zwei Zahlen durch einander dividiren, heißt: eine dritte Zahl suchen, die so viel mal in dem Dividendus enthalten ist, als der Divisor Einheiten hat.

Zusatz. Daraus folgt, daß der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt den Dividendus giebt, und daraus die

Dritte Erklärung. Eine Größe dividiren heißt: sie in zwei Factoren zerlegen, von welchen der eine der Divisor, der andere der Quotient ist.

Da es hierbei nun einerlei ist, welchen Factor man als Multiplicator, welchen als Multiplicandus ansieht (§. 9.), so kann man auch den Divisor als die Größe des Theils, den Quotienten als die Anzahl der Theile betrachten und daraus fließt die

Vierte Erklärung. Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt: eine dritte, den Quotienten suchen, welche so viel Einheiten hat, als die eine Zahl in der andern enthalten ist.

Bevor die Regeln der Division aufgestellt werden, müssen auch hier einige Sätze vorangehn.

I. Grundsatz. **Wenn zu einer Größe eben so viel hinzugefügt, als weggenommen wird, oder, wenn sie mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt wird, so bleibt sie unverändert.**

II. **Es entsteht einerlei Quotient, wenn man den Dividendus in Theile zerlegt, jeden Theil durch den Divisor dividirt, und die erhaltenen Quotienten addirt — und — wenn man den Dividendus unzertheilt dividirt.** (Erklärung 2, Zus. und §. 9, I.)

III. **Wenn von mehrern Zahlen einige mit einander multiplicirt, und durch die übrigen dividirt werden sollen, so ist einerlei, in welcher Ordnung dies geschieht.**

So ist $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot a$, weil diese Quotienten, mit dem Divisor c multiplicirt, alle 3 denselben Dividendus geben. [Erklärung 2, Zus. und §. 9, III.]

Anmerkung. Daraus folgt, daß §. 9. III. auch für gebrochene Factoren gilt, und daraus, daß auch der obige Satz richtig ist, wenn a, b, c . . . gebrochene Zahlen sind.

Regel der Division für einnamige Größen.

Schreibe den Divisor als Nenner unter den Dividendus; die Coefficienten kannst du erst dividiren, und den Quotienten statt ihrer schreiben. Haben Divisor und Dividendus gleiche Factoren, so lasse sie weg. (Dritte Erklärung der Division.)

Exempel 1.

6a soll durch 3b dividirt werden. Der Quotient ist $\frac{6a}{3b} = \frac{2a}{b}$

Exempel 2.

2abbc soll durch 4bbbcd dividirt werden. Der Quotient ist $\frac{a}{2bd}$

§. 11.

Zwar wird mittelst eines Bruches die Division in der Buchstabenrechnung bezeichnet, doch werden die Buchstabenbrüche auch als Größen an und für sich genommen, und bedeuten dann einen, durch den Nenner ausgedrückten Theil einer Größe, die durch den Zähler bezeichnet wird. In dieser Bedeutung sind sie Gegenstand der arithmetischen Grundoperationen, und auf diese Bedeutung beziehen sich folgende Sätze, welche übrigens auch für die andere gelten:

1) Den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl multipliciren, heißt: ihn noch in so viel gleiche Theile theilen, als die Zahl anzeigt, mit welcher man multiplicirt.

2) Ein Bruch wird multiplicirt, wenn der Zähler, dividirt, wenn der Nenner multiplicirt wird.

3) Ein Bruch bleibt unverändert, wenn Zähler und Nenner mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt werden.

§. 12.

Addition und Subtraction mit Brüchen.

Addire bei jener, und subtrahire bei dieser die Zähler, wenn die Nenner gleich sind, ziehe einen Strich unter die Summe oder den Rest, und schreibe den Nenner darunter. Sind die Nenner ungleich, so bringe die Brüche erst auf gleiche Nenner durch eine dazu geschickte Multiplication. (§. 11.)

§. 13.

Multiplication mit Brüchen.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so multiplicire sie mit dem Zähler (§. 11, 2), oder schreibe sie neben ihn. Soll ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden, so multiplicire die Zähler mit einander, und die Nenner mit einander (§. 11 u. 10, III.) und bezeichne dies bei Buchstaben nach §. 9, Regel 1, u. §. 10, Regel der Div.; auch lasse die dem Zähler und dem Nenner gemeinschaftlichen Factoren weg.

Exempel 1.

$\frac{b}{c}$ soll mit a multiplicirt werden. Das Product ist $\frac{ab}{c}$.

Exempel 2.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Exempel 3.

$$\frac{4ab}{15cd} \cdot \frac{5ccd}{2abb} = \frac{2c}{3b}$$

§. 14.

Division mit Brüchen.

Je kleiner der Divisor ist, desto größer ist der Quotient (§. 10, 4te Erkl.). Ist der Divisor ein eigentlicher Bruch, so ist der Quotient bei gleichem Dividendus größer, als wenn der Divisor eine ganze Zahl ist. Je kleiner der Bruch ist, desto größer ist der Quotient. Auch ist in diesem Falle der Quotient immer größer, als der Dividendus: denn ist der Divisor 1, so ist der Quotient so groß als der Dividendus, folglich größer, wenn der Divisor kleiner als 1 ist.

Regeln der Division mit Brüchen.

Ist der Dividendus ein Bruch, der Divisor eine ganze Zahl, so multiplicire den Nenner desselben mit dem Divisor. (§. 11, 1.)

Ist der Divisor ein Bruch, so kehre ihn um, und multiplicire dann den Dividendus.

Beweis.

Der Dividendus sei a, der Divisor $\frac{c}{d}$, dann ist nach der Regel der Quotient $\frac{ad}{c}$, welcher multiplicirt mit dem Divisor den Dividendus geben muß (§. 10, Erkl. 2, Zus.). Es ist aber aber auch wirklich $\frac{ad}{c} \cdot \frac{c}{d} = a$. Eben so ist, wenn $\frac{a}{b}$ der Dividendus ist, der Quotient $\frac{ad}{bc}$, weil $\frac{ab}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

§. 15.

Von den positiven und negativen Größen.

In der Buchstabenrechnung müssen oft Ausdrücke von mehreren Gliedern abgezogen, mit einem andern Buchstaben multiplicirt oder dividirt werden. Dadurch stößt man auf negative Größen. Z. B. $[a + b - c]$ soll von d abgezogen werden. Man wird also ein Glied nach dem andern von d abziehen, d. h. ich nehme a, dann b von d weg; wie mache ich es aber mit dem dritten Gliede $- c$? Dies erfordert einiges Nachdenken. — Man nennt solche Größen, die das Zeichen — vor sich haben, negative Größen; dagegen heißen die mit dem Zeichen + positive Größen. Es ist also in den arithmetischen Operationen mit Buchstaben eine doppelte

Frage zu beantworten. Wie verfährt man mit positiven, und wie mit negativen Größen?

Man nennt sie in Beziehung auf einander entgegengesetzte Größen. Eine negative Größe erhält nur in Beziehung auf eine positive Bedeutung.

Sie ist eine solche, um welche eine positive vermindert wird. Daraus lassen sich auch die Zeichen der entgegengesetzten Größen, wenn sie addirt, subtrahirt, multiplicirt, oder dividirt werden, bestimmen.

Soll eine negative Größe addirt werden, so wird man sie nur mit dem Zeichen — hinschreiben, oder sie, wenn alle Zahlen in Ziffern gegeben sind, von den positiven wegnehmen. In der Subtraction wird man eine abzuziehende negative Größe mit dem Zeichen + hinschreiben oder den Subtractor um sie vergrößern. Ein Beispiel wird dies deutlich machen.

Aufgabe. Ziehe $b - c$ von a ab.

Auflösung.

Nimmst du b weg, so hast du eine um c zu große Zahl abgezogen, und mußt also nachher c zulegen. Du wirst also erhalten

$$a - b + c.$$

Hast du $- c$ allein abzuziehen, so vergrößere diese um eine beliebige Größe b; dann giebt die Subtraction wieder: $a - b + c$. Du hast aber um b zu viel abgezogen, mußt also b wieder zulegen: es bleibt also $a + c$.

Eine negative Größe abziehen, heißt also so viel, als sie mit dem Zeichen + addiren.

Eine Größe mit einer positiven multipliciren ist nichts anders, als jene wiederholt addiren; mit einer negativen so viel, als sie wiederholt abziehen. Also wird eine negative Größe mit einer negativen multiplicirt ein positives Product geben.

Da in der Division der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt den Dividendus giebt, so lassen sich nun auch die Zeichen für die Division bestimmen, wenn negative Größen da sind.

Allgemeine Regeln.

§. 16.

Addition positiver und negativer mit Buchstaben bezeichneter Größen.

Regel.

Schreibe die gleichen Buchstaben mit ihren Coefficienten und den davor gesetzten Zeichen unter einander, addire von dem ersten Buchstaben alle Coefficienten mit dem Zeichen + und dann alle mit dem Zeichen —, ziehe beide Summen von einander ab, und setze vor den Ueberrest das Zeichen der größern Summe, verfahre eben so mit allen folgenden Buchstaben, so hast du die Summe.

Exempel.

Man soll addiren: $3a - 4b + 5a + 2c - 7a + 6b - 2a + 5b - 4a - 8b + 9a - 6b + 3c$.
$a = 8$; $b = 2$; $c = 4$.

Auflösung.

$$
\begin{array}{rrr}
3a & -\ 4b & +\ 2c \\
+\ 5a & +\ 6b & +\ 3c \\
-\ 7a & +\ 5b & \\
-\ 2a & -\ 8b & \\
-\ 4a & -\ 6b & \\
+\ 9a & & \\
\hline
+\ 17a & -\ 18b & +\ 5c \\
-\ 13a & +\ 11b & \\
\hline
4a & -\ 7b & +\ 5c
\end{array}
$$

Berechnung in Ziffern.

$$
\begin{array}{rcrr|rcrr}
3a & = & 24 & & & & & \\
-4b & = & & -8 & & & & \\
5a & = & 40 & & & & & \\
2c & = & 8 & & & & & \\
-7a & = & & -56 & & & & \\
6b & = & 12 & & & & & \\
-2a & = & & -16 & & & & \\
5b & = & 10 & & & & & \\
-4a & = & & -32 & & & & \\
-8b & = & & -16 & 4a & = & 32 & \\
+9a & = & 72 & & -7b & = & & -14 \\
-6b & = & & -12 & 5c & = & 20 & \\
+3c & = & 12 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$38 = 178 - 140 = 4a - 7b + 5c = 52 - 14 = 38$$

Uebungsaufgaben.

1) 7a — 5c + 136 + 12a — 3c — 7b = 19a + 6b — 8c = 7, wenn a = 1, b = 2, c = 3.

2) 5a + 41b — 6c — 7d + 18 + 13a — 14a + 9c — 10d — 14 = 18a + 27b + 3c — 17d + 4.

3) 13h — 3c — 8f + 6g — 9h + 8c — 2f — 9g + 5x = 5c — 10f — 3g + 4h + 5x.

4) 17x — 16y + 5z + 3 — 4g — 2x — 3y — 8 — g — x + 3y — 7 — 3z + 7g — g — 5 + 6z + 6y — 2x + x + 8y — 15z + g = 2g + 13x — 2y — 7z + 74.

5) — 17f + 5a — 6a + 14f + 3f — 5a + 6a = 0.

§. 17.

Subtraction.

Regel.

Das Zeichen jeder abzuziehenden Größe verwandele in das entgegengesetzte, und addire sie dann, so hast du die Differenz.

Exempel.

3a — 2b — 4c soll von a — b + 2c abgezogen werden. a = 10; b = 3; c = 4.

Addire: a — b + 2c		
— 3a + 2b + 4c		
— 2a + b + 6c		
— 2a = — 20	a = 10	3a = 30 +
b = 3	—b = — 3	—2b = — 6
6c = 24	2c = 8	—4c = —16
—2a + b + 6c = 27 — 20	=	15 — 8 = 7

Uebungsaufgaben.

1) $2a - 8b - 5$ soll von $6a - 3b + 4$ abgezogen werden. Es bleibt $4a + 5b + 9 = 59$, wenn $a = 10$, $b = 2$.

2) $13a - 9d + 9c - 3b - (8a - 8b + 9c - 10d + 14) = 5a + 5b + d - 14$.

3) $- 8a + 25b - 3c - (7a - 9b - 32c) = - 15a + 34b + 29c$.

4) $31a - 5c + 10d - (7a - 9d + 18c - 2e) = 38a - 23c + 19d + 2e$.

5) $\frac{1}{2}a - \frac{5}{3}x - (\frac{3}{4}a - \frac{1}{6}x) - (6b + \frac{11}{4}x - \frac{14}{3}a) = 4\frac{5}{12}a - 6b - 4\frac{1}{4}x$.

§. 18.

Multiplication.

Erste Regel.

Schreibe die Factoren neben einander, ohne auf die Zeichen zu sehen. Vor dieses Product setze das Zeichen +, wenn beide Factoren gleiche Zeichen, —, wenn sie ungleiche Zeichen hatten.

Zweite Regel.

Wenn mehr als 2 Factoren, die jeder aus einem Gliede bestehen, sind.

Betrachte das Product zweier Factoren als einen Factor, fahre damit so lange fort, bis du alle Factoren auf 2 zurück gebracht hast, und verfahre dann wie im ersten Fall.

Dritte Regel.

Wenn 2 Factoren gegeben sind, die aus mehrern Gliedern bestehen.

Multiplicire jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern, schreibe die Producte mit ihren Zeichen hin, und addire sie.

Exempel 1.

$+a \,.\, +b = +ab$; $+a \,.\, -b = -ab$; $-a \,.\, -b = +ab$.

Exempel 2.

$a \,.\, -b \,.\, -c \,.\, +d \,.\, -e = -ab \,.\, -cd \,.\, -e = -ab \,.\, +cde = -abcde$.

Exempel 3.

$a + 2b$ soll mit $a - 3b$ multiplicirt werden; $a = 12$; $b = 3$.

Auflösung.

$$
\begin{array}{r}
a + 2b \\
a - 3b \\
\hline
aa + 2ab - 6bb \\
- 3ab \\
\hline
aa - ab - 6bb
\end{array}
$$

Berechnung.

$aa =$	144	$a =$	12		$a =$	12	
$-ab =$	-36	$2b =$	6		$3b =$	-9	
$-6bb =$	-54	$a + 2b =$	18		$a - 3b =$	3	
		$a - 3b =$	3				

$aa - ab - 6bb = 144 - 90 = 54 = (a + 2b)(a - 3b)$

Uebungsaufgaben.

1) $(14l - 4m - 18)(9l - 33m) = 126ll - 162l - 498lm + 132mm + 594m = 86.6 = 516$, wenn $l = 8$, $m = 2$.

2) $(4a + 10b + 6c - 10e)(6a + 20b + 30f) = 24aa + 140ab + 36ac - 60ae + 120af + 200bb + 120bc - 200be + 300bf + 180cf - 300ef$.

3) $(a + \frac{5}{3}b - \frac{7}{6}c)(2a - 4b + 18c) = 2aa - \frac{2}{3}ab + \frac{47}{3}ac - \frac{20}{3}bb + \frac{104}{3}bc - 21cc$.

4) $(15ab + 9ac - 12bc)(- \frac{7}{2}ab + 9ac - bc - \frac{d}{2}) = - \frac{105}{2}aabb + \frac{207}{2}aabc + 81aacc + 27abbc - 117abcc - \frac{15}{2}abd - \frac{9}{2}acd + 12bbcc + 6bcd$.

5) $(aa - \frac{3}{5}ab + \frac{7}{5}bb)(6a - 2b) = 6aaa - \frac{28}{5}aab + \frac{48}{5}abb - \frac{14}{5}bbb$.

6) $(3a + 3b + 2c)(3a + 3b - 2c) = 9aa + 18ab + 9bb - 4cc$.

7) $(6aaa + 70aab - 34abb - 26bbb)(aa + \frac{26}{3}ab - 19bb) = 6aaaaa + 122aaaab + 458\frac{2}{3}aaabb - 1650\frac{2}{3}aabbb + 420\frac{2}{3}abbbb + 494bbbbb$.

8) $(- \frac{9}{2}m + 15n + pp)(\frac{1}{8}m - n + 3pp) = - \frac{9}{16}mm + \frac{51}{8}mn - \frac{107}{8}mpp - 15nn + 44npp + 3pppp$.

Von den Producten gleicher Factoren.

Das Product zweier gleicher Factoren heißt ein Quadrat, dreier ein Cubus, von vieren ein Biquadrat; überhaupt heißt das Product gleicher Factoren eine Potenz. Jeder der gleichen Factoren heißt eine Grundzahl, die Anzahl der gleichen Factoren der Exponent der Potenz, und wird rechts über die Grundzahl geschrieben. So ist

a^2 das Quadrat von a und $=$ aa.
a^3 der Cubus von a und $=$ aaa.
a^4 das Biquadrat von a und $=$ aaaa.
a^5 die 5te Potenz von a und $=$ aaaaa.
a^m die mte Potenz von a und $=$ aaa. . .

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe oder eines Binomiums ist gleich dem Quadrat des ersten Theils + dem Quadrat des zweiten Theils + dem doppelten Product des ersten Theils in den zweiten Theil, oder — dem doppelten Product des ersten Theils in den zweiten Theil, je nachdem die Theile durch das Zeichen + oder — verbunden sind.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Beweis.

Beweis.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Die Summe zweier Zahlen multiplicirt mit dem Unterschiede derselben, giebt den Unterschied ihrer Quadrate.

Beweis.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

§. 20.

Division.

Erste Regel.

Wenn Dividendus und Divisor nur aus einem Gliede bestehen.

Schreibe den Dividendus und Divisor als einen Bruch, und setze vor denselben das Zeichen +, wenn jene gleiche Zeichen, das Zeichen —, wenn jene ungleiche Zeichen hatten. Das Zeichen des Bruches kannst du auch vor den Zähler setzen.

Zweite Regel.

Wenn der Dividendus aus mehreren, der Divisor aus einem Gliede besteht.

Dividire jedes Glied des Dividendus durch den Divisor, und schreibe die Quotienten mit ihren Zeichen neben einander.

Dritte Regel.

Wenn der Divisor aus mehrern Gliedern besteht.

Dividire das erste Glied des Divisors in den Dividendus oder in das erste Glied des vorher geordneten Dividendus, wenn er aus mehrern Gliedern besteht, schreibe den Quotienten hin. Diesen multiplicire darauf in jedes Glied des Divisors, setze das Product mit dem entgegengesetzten Zeichen unter den Dividendus, und addire es darauf. Mit der erhaltenen Summe verfahre eben so.

Exempel 1.

$$-a : b = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b};\quad -a : -b = \frac{a}{b}.$$

Exempel 2.

$$ab + 2b^2 - 6bc - 9c : 3b = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - 2c - 3\frac{c}{b}.$$

Exempel 3.

$$a^3 - a^2b - 6ab^2 + ab + 2b^2 : a + 2b;$$
$$a = 4;\ b = 1.$$

Auflösung.

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{a + 2b} & \\
\quad a^3 - a^2b - 6ab^2 + ab + 2b^2 & a^2 - 3ab + b. \\
-a^3 - 2a^2b & \\
\hline
\quad -3a^2b - 6ab^2 & \\
\quad +3a^2b + 6ab^2 & \\
\hline
\qquad\qquad ab + 2b^2 & \\
\qquad\quad - ab - 2b^2 & \\
\hline
\qquad\quad 0. &
\end{array}
$$

Berechnung.

$$
\begin{array}{rcll}
a^3 & = & 64 & \\
a^2b & = & & -16 \\
-6ab^2 & = & & -24 \\
+ab & = & 4 & \\
+2b^2 & = & 2 & \\
\hline
\text{„} & = & 70 & -40 = 30;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & 4 \\
2b & = & 2 \\
\hline
a + 2b & = & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a^2 & = & 16 \\
-3ab & = & -12 \\
b & = & 1
\end{array}
$$

$$30 : 6 = 5 = a^2 - 3ab + b = 17 - 12 = 5.$$

Uebungsaufgaben.

1) $(9ac - 6ade - 3f + \frac{3c}{d}) : 2a = \frac{9}{2}c + \frac{3c}{2ad} - 3de - \frac{3f}{2a} = 65 : 8 = 8\frac{1}{8}$, wenn $a = 4$, $c = 2$, $d = 1$, $e = \frac{1}{2}$; $f = \frac{1}{3}$.

2) $(9acf - 3bdef - ad) : 6adfg = \frac{3c}{2dg} - \frac{be}{2ag} - \frac{1}{6fg}$.

3) $(8aa - 11ab - 5c + 1) : -2a = -4a + \frac{11}{2}b + \frac{5c}{2a} - \frac{1}{2a} = -13 : -8 = 1\frac{5}{8}$.

4) $(12acfg - 67affg + 3fggh) : 2aabbfg = \frac{6c}{abb} - \frac{67f}{2abb} + \frac{3gh}{2aabb}$.

5) $(aa - 5ab + 6bb) : (a - 2b) = a - 3b$.

6) $(aa + 7ab + 12bb) : (a + 3b) = a + 4b$.

7) $(4aa + 28ab + 40bb) : (a + 2b) = 4a + 20b$.

8) $(aa - ab + \frac{2}{9}bb) : (a - \frac{1}{3}b) = a - \frac{2}{3}b$.

9) $(3aa - \frac{5}{2}ab + \frac{1}{2}bb) : (a - \frac{1}{3}b) = 3a - \frac{3}{2}b$.

10) $(\frac{3}{2}xxx - \frac{5}{4}xx - 6\frac{1}{2}x + 6) : (\frac{3}{2}x - 3) = xx + \frac{7}{6}x - 2 = 0 : 0 = 4\frac{1}{3}$, wenn $x = 2$.

§. 21.

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots$$

Für $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ u. s. w. bekommt man also

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Zur Erläuterung, wie vortheilhaft die Bezeichnung der Zahlen mit Buchstaben oft ist, um Rechnungen abzukürzen, dienen folgende Aufgaben.

1) Wird $3749 = a$, $2637 = b$, $1102 = c$, $783 = d$ gesetzt, so ist $3749 . 783 - 2637 . 783 - 1102 . 783 = (a - b - c) d = 10 . 783$.

2) Für $a = 3749$, $b = 1871$ ist
$3749^2 + 3749 . 1871 - 2 . 3749 . 1811 - 2 . 1871^2 = a^2 + ab - 2ab - 2b^2 = (a + b)(a - 2b) = 5620 . 7$.

3) Für $a = 97$, $b = 96$ ist
$97^2 + 3 . 97 . 96 - 97 . 96 - 3 . 96^2 = a^2 + 3ab - ab - 3b^2 = (a + 3b)(a - b) = 385 . 1$.

4) Für $a = 87$, $b = 28$ ist
$87^2 - 3 . 87 . 28 + 87 . 28 - 3 . 28^2 = a^2 - 3ab + ab - 2b^2 = (a - 3b)(a + b) = 3 . 115$.

5) $a = 794$, $b = 792$ giebt
$794^2 + 2 . 794 . 792 - 794 . 792 - 2 . 792^2 = a^2 + 2ab - ab - 2b^2 = (a + 2b)(a - b) = 2378 . 2$.

6) Für $a = 11$, $b = 4$, $c = 5$ ist
$11^2 + 2 . 11 . 4 + 4^2 - 5^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c) = 20 . 10$.

7) $a = 41$, $b = 61$, $c = 83$ giebt
$41^2 - 2 . 41 . 61 + 4 . 83 + 41 . 61 - 2 . 61^2 + 61 . 83 - 41 . 83 + 2 . 61 . 83 - 83^2 = a^2 - 2ab + ac + ab - 2b^2 + bc - ac + 2bc - c^2 = (a - 2b + c)(a + b - c) = 2 . 19$.

Von den Decimalbrüchen.

§. 22.

In der Rechnung sind Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. oft sehr bequem. Ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz der Zahl 10 ist, heißt ein Decimalbruch. Er wird folgendermaßen geschrieben: 0, 37123; wo die erste Stelle nach dem Komma Zehntheile, die zweite Hunderttheile, die dritte Tausendtheile u. s. w. bedeutet.

0, 37123 bedeutet also: $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{3}{100000}$ oder: $\frac{37123}{100000}$, indem $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$; $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{37}{100}$; $\frac{37}{100} = \frac{370}{1000}$ also $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{371}{1000}$; u. s. w.

Kommt noch eine ganze Zahl hinzu, so wird diese statt der Null vor das Komma geschrieben.

§. 23.

So oft ein Decimalbruch mit 10 multiplicirt wird, so oft rückt das Komma um eine Stelle weiter rechts. Denn durch die Multiplication mit 10 wird jede Ziffer zur nächst höhern Ordnung erhoben: aus den Tausendtheilen werden Hunderttheile, aus den Hunderttheilen werden Zehntheile, aus den Zehntheilen Einer, aus den Einern Zehner u. s. w. Das aber thut die Versetzung des Komma.

Auch folgendes Beispiel macht dies klar:

$$7, 37 \text{ mit } 10 \text{ multiplicirt ist } = 70 + \frac{3.10}{10} + \frac{7.10}{100}.$$
$$= 70 + 3 + \frac{7}{10} = 73, 7.$$

§. 24.

So oft ein Decimalbruch durch 10 dividirt wird, so oft rückt das Komma um eine Stelle weiter zur Linken. Denn durch die Division mit 10 steigt jede Ziffer in die nächst niedrigere Ordnung; das aber wird durch die Verrückung des Komma zur Linken bewerkstelligt.

§. 25.

Regel zur Multiplication der Decimalbrüche. Sie werden zuerst multiplicirt wie ganze Zahlen, und darauf werden von dem Producte soviel Decimalstellen abgestrichen (denn so wird das Verrücken des Komma zur Linken genannt), **als die Factoren enthielten.**

Exempel.

$$
\begin{array}{r}
23{,}1 \\
3{,}14 \\
\hline
924 \\
231 \\
693 \\
\hline
72{,}534
\end{array}
$$

Anmerk. Man pflegt in der Rechnung mit Decimalbrüchen von der Linken zur Rechten zu multipliciren, wie folgt:

$$
\begin{array}{r}
23{,}1 \\
3{,}14 \\
\hline
693 \\
231 \\
924 \\
\hline
72{,}534
\end{array}
$$

Uebungsaufgaben.

1) 7,14 . 2 = 14,28.

2) 0,7 . 27000 = 18900.

3) 0,01126 . 51 = 0,57426.

4) 0,000027 . 757 = 0,020439.

5) 0,86 . 0,13 = 0,1118.

6) 0,006 . 0,016 = 0,000096.

7) 22,7 . 0,024 = 0,5448.

8) 0,274 . 0,00014 = 0,00003836.

§. 26.

Regel zur Division mit Decimalbrüchen. Hänge an den Dividendus soviel Nullen, als zur Division nöthig sind; verrücke im Dividendus das Komma um soviel Nullen rechts als der Divisor Decimalstellen enthält, lasse im Divisor das Komma weg (oder denke es dir weg) und dividire; darauf streiche vom Quotienten soviel Decimalstellen ab, als im Dividendus übrig bleiben.

Exempel.

1) 1,1 : 4,4

```
4,4 | 11,00 | 0,25
       88
      ----
       220
```

2) 11 : 4,4

```
4,4 | 110,0 | 2,5
```

3) 11 : 0,44

0,44 | 1100, | 25

4) 11 : 0,044

0,044 | 11000, | 250.

Uebungsaufgaben.

1) 648 : 2 = 3,24
2) 9,4608 : 8 = 1,1826
3) 0,237852 : 6 = 0,039642
4) 0,98308242 : 27 = 0,03641046
5) 643 : 8 = 80,375
6) 6,3627 : 19 = 0,3348789
7) 0,000373 : 158 = 0,000002360759
8) 800 : 2,5 = 320
9) 451 : 0,1 = 4510
10) 0,5 : 0,025 = 20
11) 0,04 : 0,008 = 5
12) 4,4 : 0,5 = 8,8
13) 7,2 : 0,09 = 80
14) 21,6 : 0,6 = 36
15) 0,169 : 0,00013 = 1300
16) 144 : 0,12 = 1200
17) 1,44 : 0,012 = 120
18) 0,027 : 0,27 = 0,1
19) 0,027 : 0,03 = 0,9
20) 56 : 0,007 = 8000

§. 27.

Jeder Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, wenn an den Zähler Nullen angehängt werden, und durch den Nenner dividirt wird. Das Komma wird nach §. 26 bestimmt. Bemerkenswerth sind hier die periodischen Decimalbrüche, in welchen die Ziffern in einer bestimmten und immer wiederkehrenden Ordnung auf einander folgen. So ist $\frac{3}{7} = 0{,}428571428\ldots$ ein periodischer Decimalbruch.

Uebungsaufgaben.

1) $\frac{1}{7} = 0{,}14285714\ldots$ (Periode: 142857)
2) $\frac{1}{8} = 0{,}125$
3) $\frac{1}{9} = 0{,}1111111\ldots$
4) $\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots$ (Periode: 09)
5) $\frac{1}{13} = 0{,}076923\ldots$ (Periode: 076923)
6) $\frac{13}{16} = 0{,}8125$
7) $\frac{1}{17} = 0{,}05882\ldots$ (Periode: 0588235294117647)

§. 28.

Wenn man in einem Product oder Quotienten die höhern Decimalstellen nicht braucht, so kann man sich der verkürzten Multiplication (multiplicatio contracta) oder Division (divisio contracta) bedienen, welche folgende Beispiele lehren.

Multiplicatio contracta.

$$
\begin{array}{r}
7{,}6534 \\
2{,}563 \\
\hline
153068 \\
38267 \\
4592 \\
229 \\
\hline
19{,}6156
\end{array}
$$

Divisio contracta.

```
3,716048 | 7,632035 | 2,053804
           7432096
           -------
            199939
            185802
            ------
             14137
             11148
             -----
              2989
              2972
              ----
                17
                14
                --
                 3
```

§. 29.

Anwendung der Rechnung mit Decimalbrüchen auf die Annäherung der Brüche.

Um einen Bruch, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind, und der sich nicht aufheben läßt, in einen andern ihm nahe kommenden, der aus kleinen Zahlen besteht, zu verwandeln, verwandle ihn in einen Decimalbruch und setze 1 als Nenner darunter, multiplicire darauf Zähler und Nenner mit einer solchen ganzen Zahl, daß der Zähler irgend einer ganzen Zahl nahe kommt. Diese setze für den Zähler, so hast du den genäherten Bruch.

Exempel.

$\frac{75}{92}$ sei der gegebene Bruch.

$\frac{75}{92} \mid \frac{0{,}815}{1} \mid \frac{4{,}075}{5}$ also $\frac{75}{92} = \frac{4}{5} + 0{,}015 \ldots$

$\frac{75}{92} \mid \frac{0{,}815}{1} \mid \frac{4{,}890}{6}$ also $\frac{75}{92} = \frac{5}{6} - 0{,}01 \ldots$

$\frac{75}{92}$ fällt also zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ und diese Brüche sind nur wenig von jenem Bruche, dessen Grenzen sie sind, dem Werthe nach, verschieden. Dabei läßt sich in jedem Falle leicht, wie hier, bestimmen, wie groß der Fehler höchstens seyn könne.

Uebungsaufgaben.

1) $\frac{71}{98}$ kommt nahe dem Bruch $\frac{5}{7}$

2) $\frac{63}{79}$ „ „ „ „ $\frac{4}{5}$

3) $\frac{76}{91}$ „ „ „ „ $\frac{5}{6}$

4) $\frac{172}{289}$ „ „ „ „ $\frac{3}{5}$

5) $\frac{171}{298}$ „ „ „ „ $\frac{4}{7}$

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 30.

Daß eine Potenz aus der Multiplication gleicher Factoren entstehe, und was Grundzahl, Exponent der Potenz bedeuten, ist oben (§. 19.) erklärt.

Eine Zahl in gleiche Factoren zerlegen heißt: eine Wurzel aus ihr ziehen, und jeder dieser gleichen Factoren heißt eine Wurzel der gegebenen Zahl.

Die Anzahl der gleichen Factoren heißt hier der Exponent der Wurzel; auch drückt man sich so aus: es ist eine Wurzel vom nten Grade, wenn n die Anzahl der gleichen

Factoren ist. Die gegebene Zahl heißt auch hier die Grundzahl. Sie sei wieder a, und werde in n gleiche Factoren zerlegt; so wird die Wurzel vom nten Grade folgendermaßen geschrieben:

$$\sqrt[n]{a} \text{ oder auch } a^{\frac{1}{n}}.$$

Wenn ein Product von m gleichen Factoren in n gleiche Factoren zerlegt werden soll, so wird dies folgendermaßen geschrieben:

$$\sqrt[n]{a^m} \text{ oder } a^{\frac{m}{n}}$$

Man dehnt den Namen Potenz auch auf diese zwei anderen Fälle aus, und nennt das, was rechts über die Grundzahl geschrieben ist, schlechtweg Exponent der Potenz; so sind a^m, $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ Potenzen von a, und die Exponenten dieser Potenzen sind: m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$. Ist $\frac{m}{n}$ der Exponent und sind m, n größer als 1, so heißt die Potenz eine gemischte.

Eine gegebene Zahl a in 2 gleiche Factoren zerlegen, heißt die Quadratwurzel daraus ziehen, in 3 die Kubikwurzel, in 4 die Wurzel vom 4ten Grade u. s. f., und jeder der 2 gleichen Factoren von a heißt die Quadratwurzel von a, der 3 gleichen Factoren die Kubikwurzel, der 4 gleichen eine Wurzel vom 4ten Grade von a u. s. f.

Zusatz. Aus einer Zahl die Wurzel vom nten Grade ausziehen, heißt auch: jene in 2 Factoren zerlegen, von denen der eine diese Wurzel, der andere die $(n-1)^{te}$ Potenz dieser

Wurzel ist, oder, jene Zahl dividiren. Der Quotient ist die Wurzel, der Divisor die $(n-1)^{te}$ Potenz davon.

Anmerkung. Bei der Quadratwurzel wird der Exponent der Wurzel 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen.

§. 31.

Berechnung der Quadrate, Kubus und höheren Potenzen.

Sie versteht sich aus der Erklärung von selbst.

Exempel.

Das Quadrat von 1 ist 1, von 2 ist 4, von 3 ist 9, von 4 ist 16 u. s. f.

Der Kubus von 1 ist 1, von 2 ist 8, von 3 ist 27 u. s. w.

Das Biquadrat von 1 ist 1, von 2 ist 16, von 3 ist 81 u. s. w.

§. 32.

Zerlegung in gleiche Factoren oder Berechnung der Wurzeln.

Diese geschieht durch Versuche; wie? lehren folgende Beispiele.

Exempel 1.

Aus 4, 25, 144 die Quadratwurzel zu ziehen.

$4 = 2 \, . \, 2$; $25 = 5 \, . \, 5$; $144 = 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 3 = 12 \, . \, 12$; also sind die Quadratwurzeln aus obigen Zahlen 2, 5, 12.

Exempel 2.

Aus 5 die Quadratwurzel zu ziehen. Versuche erst 2, aber $2^2 = 4$, also 2 zu klein, versuche nun 3, aber $3^2 = 9$, also 3 zu groß. Die Quadratwurzel ist also größer als 2 und kleiner als 3; versuche also 2, 1; dann 2, 2 u. s. w.

$2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$
$2{,}21^2 = 4{,}8841$; $2{,}22^2 = 4{,}9284$;
$2{,}23^2 = 4{,}9729$; $2{,}24^2 = 5{,}0176$; folglich ist 2,23 . . . die Quadratwurzel aus 5.

Exempel 3.

Aus 9 die Kubikwurzel zu ziehen.

$2^3 = 8$; $3^3 = 27$, also $\sqrt[3]{9} > 2$ und < 3
$2{,}1^3 = 9{,}261$; $2{,}09^3 = 9{,}129 \ldots$;
$2{,}08^3 = 8{,}998 \ldots$, also ist 2,08 . . . die Kubikwurzel aus 9.

Zusatz. In der Berechnung der Wurzeln stößt man auf Zahlen, deren Wurzeln sich durch keinen Decimalbruch, auch durch keinen andern Bruch genau ausdrücken lassen. Solche Wurzeln heissen Irrationalzahlen, für welche man eigentlich nur Grenzen findet, zwischen welche sie fallen, welche Grenzen indessen so genau angegeben werden können, als in einem vorkommenden Fall nöthig ist, so daß man immer diese Grenzen statt der Wurzeln brauchen darf. So ist $\sqrt{2}$ eine Irrationalzahl. Nun findet man $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$. Bedarf man dieser Wurzel nur bis zur zweiten Decimalstelle, so wird man 1, 41 dafür brauchen, obgleich dies eigentlich nur die kleinere Grenze der Wurzel ist; die größere Grenze ist 1,42. Man nimmt, wo Genauigkeit nöthig ist, von den beiden Grenzen diejenige, welche dem genauern Werthe am nächsten kommt. Für $\sqrt{2}$ ist dies 1,41. Aber für $\sqrt{5}$ ist die genauere Grenze in Hunderttheilchen die größere, nämlich 2,24, weil $\sqrt{5} = 2{,}236 \ldots$ ist.

Anmerk. Soviel gehört über die Berechnung der Wurzeln hieher; mehr davon folgt weiter unten.

Um zu einer vollkommen deutlichen Vorstellung von den Potenzen zu gelangen, ohne welche dieser Abschnitt nicht verständlich ist, wird es gut seyn, sich in der Berechnung mehrerer Wurzeln und gemischter Potenzen durch Versuche, auf die angegebene Weise, zu üben. Dazu dienen die folgenden Aufgaben über die Berechnung der Wurzeln und gemischten Potenzen.

1) $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$

2) $\sqrt[3]{2} = 1{,}259 \ldots$

3) $\sqrt[4]{2} = 1{,}189 \ldots$

4) $\sqrt[5]{2} = 1{,}148 \ldots$

5) $\sqrt[6]{2} = 1{,}122 \ldots$

6) $\sqrt{3} = 1{,}732 \ldots$

7) $\sqrt[3]{3} = 1{,}442 \ldots$

8) $\sqrt[4]{3} = 1{,}316 \ldots$

9) $\sqrt[6]{3} = 1{,}200 \ldots$

10) $\sqrt{5} = 2{,}236 \ldots$

11) $\sqrt[3]{5} = 1{,}709 \ldots$

12) $\sqrt[4]{5} = 1{,}495\ldots$

13) $\sqrt[6]{5} = 1{,}307\ldots$

14) $\sqrt{7} = 2{,}645\ldots$

15) $\sqrt[3]{7} = 1{,}912\ldots$

16) $\sqrt[6]{7} = 1{,}383\ldots$

17) $\sqrt{1000} = 31{,}622\ldots$

18) $\sqrt[4]{1000} = 5{,}623\ldots$

19) $\sqrt[5]{1000} = 3{,}981\ldots$

20) $\sqrt[6]{1000} = 3{,}162\ldots$

Berechnung gemischter Potenzen.

Exempel.

$8^{\frac{2}{3}}$ und $81^{\frac{3}{4}}$ zu berechnen.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8.8)} = \sqrt[3]{(4.2.2.4)} = \sqrt[3]{(4.4.4)} = 4.$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(81.81.81)} = \sqrt[4]{(27.3.27.3.27.3)} = \sqrt[4]{(27.27.27.27)} = 27.$$

Uebungsaufgaben.

1) $2^{\frac{2}{3}} = 1{,}58\ldots$

2) $2^{\frac{7}{3}} = 5{,}03\ldots$

3) $2^{\frac{2}{5}} = 1{,}31\ldots$

4) $2^{\frac{10}{6}} = 8{,}97\ldots$

5) $3^{\frac{2}{3}} = 2{,}08\ldots$

6) $3^{\frac{5}{4}} = 3{,}94\ldots$

7) $6^{\frac{7}{6}} = 8{,}08\ldots$

8) $9^{\frac{6}{5}} = 3^{\frac{12}{5}} = 13{,}95\ldots$

9) $9^{\frac{7}{6}} = 3^{\frac{7}{3}} = 12{,}97\ldots$

10) $10^{\frac{3}{5}} = 3{,}98\ldots$

§. 33.

Das Quadrat eines Bruches wird erhalten, wenn man Zähler und Nenner des Bruches ins Quadrat erhebt; die Quadratwurzel aus einem Bruche findet man, wenn man aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht.

Jede Potenz eines Bruches wird erhalten, wenn man statt des Zählers die Potenz des Zählers, statt des Nenners die Potenz des Nenners schreibt.

§. 34.

Die erste Potenz einer Größe a ist die Größe a selbst.

§. 35.

Soll eine gegebene Zahl durch eine Potenz dividirt werden, so bekommt der Exponent der Potenz das Zeichen —, und wird alsdann als Factor zum Dividendus geschrieben. So wird $3 : 2^3$ auch bezeichnet durch $3 . 2^{-3}$. Ueberhaupt kann $b : a^m$ auch durch $b . a^{-m}$ bezeichnet werden. Eben so wird ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz ist, oder in welchem sich eine Potenz als Factor befindet, geschrieben. Folglich $\frac{3}{7^2} = 3 . 7^{-2}$; $\frac{5}{7^{\frac{1}{2}}} = 5 . 7^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{6}{5 . 7^{\frac{2}{3}}} = \frac{6 . 7^{-\frac{2}{3}}}{5} = 6 . 7^{-\frac{2}{3}} . 5^{-1}$.

Fundamentalsätze und Regeln der Rechnung mit Potenzen.

§. 36.

Um die Potenz eines Productes von zwei oder mehr Factoren zu berechnen, ist es einerlei, ob man erst die Potenzen der Factoren berechnet und diese dann multiplicirt, oder ob man die Factoren erst multiplicirt und dann die Potenz des Products berechnet (§. 10, III. und §. 30).

Beweis für diejenigen, welche den Satz nicht unmittelbar aus den angeführten Nummern einsehen.

Das Product bestehe aus 2 Factoren a und b. Dann ist $(ab)^2 = ab \cdot ab = a^2b^2$ (§. 9, III.); folglich auch $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$, weil beide dasselbe Quadrat ab geben. Für das Quadrat und die Quadratwurzel ist der Satz also richtig.

Auf gleiche Weise wird er auch für den Kubus und die Kubikwurzel und für alle andern Potenzen, auch gemischte und auch für mehr als 2 Factoren bewiesen.

Zusatz. In Buchstaben kann dieser Satz folgendermaßen ausgedrückt werden, wenn a, b die Factoren, m, n beliebige ganze Zahlen, 1 mitgerechnet, sind:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}}.$$

Beispiele.

$$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216 = 2^3 \cdot 3^3 = 216.$$

$$(4 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6 = \sqrt{4}\,\sqrt{9} = 2.3 = 6.$$

§. 37.

Um eine Potenz, dessen Exponent eine gebrochene Zahl ist, zu berechnen, ist es einerlei, ob man die Grundzahl erst soviel mal mit sich selbst multiplicirt, als der Zähler des Exponenten verlangt und dann aus dem Product die Wurzel von dem Grade auszieht, als der Nenner des Exponenten verlangt, oder: ob man erst die Wurzel auszieht, und diese dann mit sich selbst multiplicirt.

In Buchstaben kann dieser Satz folgendermaßen bezeichnet werden:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Dies erhellt aus §. 36. Denn der Zähler des Exponenten deutet an, daß ein Product von mehreren Factoren genommen werden soll, bei welchen es einerlei ist, ob man die Wurzeln aus den Factoren, d. i. aus der Grundzahl, erst auszieht und dann multiplicirt, oder erst multiplicirt und dann die Wurzel auszieht.

Nämlich $a^{\frac{m}{n}} = (a \,.\, a \,.\, a \,.\, .)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \,.\, a^{\frac{1}{n}} \,.\, a^{\frac{1}{n}} \ldots$

d. i $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

§. 38.

Den Exponenten einer Potenz mit einer ganzen Zahl multipliciren, heißt: Diese Potenz als Grundzahl ansehen und eine Potenz von ihr nehmen, welche die gegebene ganze Zahl zum Exponenten hat.

Beweis.

Die ganze Zahl sey p, die Grundzahl a, der Exponent eine ganze Zahl m, also die gegebene Potenz a^m. Hier ist $(a^m)^p = a^m . a^m . a^m . = aaa\ldots \times aaa\ldots \times aaa\ldots$ folglich $(a^m)^p = a^{mp}$

Ist der Exponent eine gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$, so kann man $\sqrt[n]{a}$ als Grundzahl der m^{ten} Potenz ansehen, und dann hat man wieder:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mp} = a^{\frac{mp}{n}} \text{ (§. 37).}$$

§. 39.

Den Nenner n eines gebrochenen Exponenten mit einer ganzen Zahl p multipliciren, heißt: aus der Wurzel vom Grade n noch die vom Grade p ausziehen. Denn das ist soviel, als von n gleichen Factoren jeden noch in p gleiche Factoren zerlegen, wodurch np Factoren entstehen. Bezeichnet kann dieser Satz so werden:

$$a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)}$$

Zusatz. **Auch ist: den Exponenten einer Potenz mit irgend einer gebrochenen Zahl $\frac{m}{n}$ multipliciren soviel, als diese Potenz als Grundzahl ansehen und von ihr die Potenz $\frac{m}{n}$ nehmen.**

§. 40.

Jede Potenz, die einen gebrochenen Exponenten hat, behält einen gleichen Werth, wenn Zähler und Nenner desselben mit derselben ganzen Zahl multiplicirt werden, und das Erhaltene statt des gegebenen Exponenten genommen wird. Auch bleibt der Werth einer Potenz unverändert, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, und dieser mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und dieselbe ganze Zahl als Nenner darunter geschrieben wird.

§. 41.

Multiplication der Potenzen von einerlei Grundzahl.

Regel.

Addire die Exponenten der Factoren; die Summe ist der Exponent derjenigen Potenz, auf welche du die Grundzahl erheben mußt, um das Product zu erhalten.

Beweis.

Sind die Exponenten ganze Zahlen, so ist die Richtigkeit dieser Regel von selbst klar.

Sind die Exponenten gebrochene Zahlen, aber die Nenner gleich, so tritt derselbe Fall ein, indem die Wurzel aus der Grundzahl von dem Grade, als der Nenner anzeigt, als die Grundzahl angesehen werden kann, von welcher die Zähler, also wieder ganze Zahlen, die Exponenten sind.

Sind die Nenner der Exponenten ungleich, so bringe sie durch Multiplication (§. 40.) auf gleiche Nenner, wodurch auch hier derselbe Fall eintritt, als vorher.

Die Wurzel aber zur Grundzahl machen, oder, nach der Addition der Zähler, den Nenner unter die Summe der Zähler setzen, ist einerlei (§. 37.), und das letzte soviel, als Addition der gebrochenen Exponenten.

Zusatz. Wenn der Exponent ein uneigentlicher Bruch ist, so kann er in einen gemischten Bruch verwandelt und dieser statt des vorigen gesetzt werden, weil in beiden Fällen die Potenz denselben Werth behält (§. 40).

Beispiele.

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32;\quad 64^{\frac{2}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{7}{6}} = 128;$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

§. 42.

Division der Potenzen von einerlei Grundzahl.

Regel.

Ziehe den Exponenten der Potenz des Divisors von dem des Dividendus ab; der Rest ist der Exponent derjenigen Potenz, auf welche du die Grundzahl erheben mußt, um den Quotienten zu erhalten.

Beweis.

Ist von selbst klar, wenn die Exponenten ganze Zahlen sind, und folgt daraus auch für gebrochene Exponenten von gleichen Nennern, und daraus auch für ungleiche Nenner.

Beispiele.

$$\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^2 = 16;\quad \frac{64^{\frac{2}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2.$$

Zusatz. $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$

§. 43.

Zum Exponenten einer Potenz von a, er sey eine ganze oder gebrochene Zahl, eine andere ganze m oder gebrochene $\frac{m}{n}$ addiren oder subtrahiren, heißt: diese Potenz mit der Potenz von a, welche diese andere Zahl m oder $\frac{m}{n}$ zum Exponenten hat, multipliciren oder *dividiren* (§. 41 und §. 42). Jede Potenz kann, durch *Zerlegung* seines Exponenten in Theile, in Factoren, *die* wieder Potenzen sind, aufgelöst werden.

Exempel.

$$2^{2+3} = 2^2 . 2^3 = 4 . 8 = 32;$$

$$4^{2+\frac{1}{2}} = 4^2 . 4^{\frac{1}{2}} = 16 . 2 = 32;$$

$$9^{\frac{5}{2}} = 9^{2+\frac{1}{2}} = 9^2 . 9^{\frac{1}{2}} = 81 . 3 = 243$$

$$8^{\frac{7}{3}} = 8^{1+1+\frac{1}{3}} = 8 . 8 . 8^{\frac{1}{3}} = 64 . 2 = 128;$$

$$\frac{1}{4^{\frac{3}{4}}} = 4^{-\frac{3}{4}} = 4^{\frac{1}{4}-1} = \frac{4^{\frac{1}{4}}}{4} = \frac{1,41\ldots}{4}$$

$$= 0,35 \ldots$$

§. 44.

Den Exponenten einer Potenz multipliciren, heißt: von dieser Potenz eine neue nehmen; und ihn dividiren, heißt: eine Wurzel aus dieser Potenz ausziehen (§. 38 und §. 39). Man kann daher den Nenner eines gebrochenen Exponenten in Factoren zerlegen und nach einander die Wurzel von dem Grade, als die Factoren anzeigen, ausziehen.

Beispiel.

$$16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2.2}} = \sqrt{16^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{4} = 2.$$

§. 45.

Dadurch kann man sich oft viel Mühe ersparen. Z. B. Es soll die Summe der Wurzelausdrücke $8^{\frac{1}{6}} + 3 \,.\, 64^{\frac{1}{12}} + 7 \,.\, 16^{\frac{1}{8}}$ berechnet werden.

$$8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{3.2}} = 2^{\frac{1}{2}};$$

$$3 \,.\, 64^{\frac{1}{12}} = 3 \,.\, 64^{\frac{1}{3.4}} = 3 \,.\, 4^{\frac{1}{4}} = 3 \,.\, 4^{\frac{1}{2.2}} = 3 \,.\, 2^{\frac{1}{2}};$$

$$7 \,.\, 16^{\frac{1}{8}} = 7 \,.\, 16^{\frac{1}{4.2}} = 7 \,.\, 2^{\frac{1}{2}};$$

folglich $8^{\frac{1}{8}} + 3 \,.\, 64^{\frac{1}{12}} + 7 \,.\, 16^{\frac{1}{8}} = (1 + 3 + 7) \sqrt{2} = 11 \sqrt{2}$

Uebungsaufgaben über die Rechnung mit Potenzen.

1) $\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$

2) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

3) $\sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$

4) $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$

5) $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

6) $\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$

7) $\sqrt[4]{128} = 2\sqrt[4]{8}$

8) $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{32} = (3 + 2 + 4)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}.$

9) $\sqrt{147} + \sqrt{108} - \sqrt{300} = (7 + 6 - 10)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

10) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = (2 + 3 - 5)\sqrt[3]{2} = 0$

11) $\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{3} = (2 + 5 - 3 - 1)\sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$

12) $\sqrt{20} + \sqrt{80} + \sqrt{605} - \sqrt{720} = (2 + 4 + 11 - 12)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

13) $\sqrt[3]{2187} + \sqrt[3]{1029} - \sqrt[3]{3993} = (9 + 7 - 11)\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

14) $\sqrt{1008} + \sqrt{1183} - \sqrt{1575} = (12 + 13 - 15)\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

15) $\sqrt{1014} - \sqrt{1734} + \sqrt{1350} = (13 - 17 + 15)\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$

16) $\sqrt{1690} + \sqrt{2890} + \sqrt{2250} = (13 + 17 + 15)\sqrt{10} = 45\sqrt{10}$

17) $\sqrt{2592} + \sqrt{2888} - \sqrt{2312} = (18 + 19 - 17)\sqrt{8} = 20\sqrt{8} = 40\sqrt{2}$

18) $\sqrt{2028} - \sqrt{3468} + \sqrt{2700} = (26 - 34 + 30)\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$

19) $\sqrt{4050} + \sqrt{3042} - \sqrt{5202} = (45 + 39 - 51)\sqrt{2} = 33\sqrt{2}$

20) $\sqrt{3971} + \sqrt{2816} - \sqrt{6875} = (19 + 16 - 25)\sqrt{11} = 10\sqrt{11}$

21) $9^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3}$

22) $8^{\frac{5}{6}} = 4\sqrt{2}$

23) $64^{\frac{2}{3}} = 4^2$

24) $64^{\frac{3}{4}} = 16\sqrt{2}$
25) $64^{\frac{7}{6}} = 2^7$
26) $32^{\frac{7}{10}} = 8\sqrt{2}$
27) $32^{\frac{7}{15}} = 4\sqrt[3]{2}$
28) $64^{\frac{1}{15}} = \sqrt[5]{4}$
29) $64^{\frac{11}{15}} = 16\sqrt[5]{4}$
30) $64^{\frac{8}{15}} = 8\sqrt[5]{2}$
31) $64^{\frac{4}{15}} = 2\sqrt[5]{8}$
32) $64^{\frac{13}{15}} = 32\sqrt[5]{2}$
33) $64^{\frac{14}{15}} = 32\sqrt[5]{8}$
34) $64^{\frac{5}{12}} = 4\sqrt{2}$
35) $64^{\frac{7}{12}} = 8\sqrt{2}$
36) $32^{\frac{5}{12}} = 4\sqrt[12]{2}$
37) $16^{\frac{5}{12}} = 2\sqrt[3]{4}$
38) $16^{\frac{11}{12}} = 8\sqrt[3]{4}$
39) $256^{\frac{5}{12}} = 8\sqrt[3]{2}$
40) $81^{\frac{3}{8}} = 3\sqrt[3]{3}$
41) $81^{\frac{5}{6}} = 27\sqrt[5]{3}$
42) $243^{\frac{2}{3}} = 27\sqrt[3]{3}$
43) $243^{\frac{3}{4}} = 27\sqrt[4]{27}$
44) $243^{\frac{2}{5}} = 3^2$
45) $243^{\frac{5}{6}} = 81\sqrt[6]{3}$
46) $243^{\frac{3}{7}} = 9\sqrt[7]{3}$
47) $243^{\frac{5}{8}} = 27\sqrt[8]{3}$
48) $625^{\frac{3}{4}} = 5^3$
49) $625^{\frac{5}{6}} = 125\sqrt[3]{5}$
50) $625^{\frac{3}{8}} = 5\sqrt{5}$

Algebra.

Erster Theil.

Von den einfachen Gleichungen.

Einleitung.

§. 46.

Die Algebra lehrt aus gegebenen Beziehungen bekannter und unbekannter Größen zu einander die unbekannten finden. Z. B. Ich denke mir eine Zahl; du sollst sie errathen. Diese Zahl dividirt durch 3, dazu addirt 4, davon abgezogen 44 weniger die Zahl; dies alles dividirt durch 7 giebt 5 weniger die Zahl. — Hier sind Beziehungen der unbekannten Größe zu der bekannten gegeben. Das Verfahren der Algebra, um aus diesen die unbekannte zu bestimmen, wenn nur eine vorhanden ist, besteht in Folgendem: Man bezeichnet die in der Aufgabe vorkommenden bekannten Größen durch Ziffern oder die ersten Buchstaben des Alphabets, die unbekannte mit x oder einem der letzten Buchstaben des Alphabets, verbindet sie durch die Zeichen der arithmetischen Operationen, wie es die Aufgabe mit sich bringt, und setzt auf diese Weise zwei, aus der Aufgabe sich ergebende Ausdrücke, deren Resultate gleich sind, zusammen. Diese beiden Ausdrücke setzt man gleich vermittelst des Zeichens der Gleichheit, d. i. man formirt aus der Aufgabe eine Gleichung für die unbekannte Größe, oder, man bringt die Aufgabe in eine Gleichung, welche also eine Darstellung der Gleichheit zweier verschiedener Ausdrücke ist.

Die in dieser Aufgabe enthaltenen beiden Ausdrücke von gleichen Resultaten sind:

$$\frac{\frac{x}{3} + 4 - (44 - x)}{7} \text{ und } 5 - x;$$

aus diesen formirt man die Gleichung

$$\frac{\frac{x}{3} + 4 - (44 - x)}{7} = 5 - x.$$

Was zur Linken des Gleichheitszeichens steht, heißt der erste Theil der Gleichung, was zur Rechten, der zweite Theil der Gleichung. Die durch $+$ und $-$ verbundenen Größen heißen Glieder der Gleichung. Jede in die unbekannte multiplicirte bekannte Größe, sie sey in Buchstaben oder in Ziffern gegeben, heißt ein Coefficient der unbekannten Größe.

Sind mehrere unbekannte Größen vorhanden, so sind zu ihrer Bestimmung auch mehrere Gleichungen nöthig.

Nachdem man so gegebne Aufgaben in Gleichungen gebracht hat, wird man zur Bestimmung des Werthes der unbekannten Größen aus den bekannten, d. i. zur Auflösung der Gleichungen schreiten. Diese beruht auf folgendem allgemeinen Grundsatz:

Gleiche Größen bleiben gleich, wenn man mit ihnen gleiche arithmetische Operationen vornimmt.

Vornehmlich sind zwey in diesem enthaltene Grundsätze zu merken:

I. Gleiche Größen bleiben gleich, wenn zu jeder Gleiches addirt, oder von jeder Gleiches abgezogen wird.

II. Gleiche Größen bleiben gleich, wenn sie mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt werden.

Wendet man diese Grundsätze auf die obige Gleichung an, so kann man sie auf eine weit einfachere Form bringen. Multiplicirt man nämlich jeden Theil der Gleichung mit 7, so ensteht die Gleichung.

$\frac{1}{3}x - 40 + x = 35 - 7x$; addirt man zu jedem Theil $+ 7x = + 7x$, so entsteht

$$\frac{1}{3}x - 40 + 8x = 35, \text{ d. i.}$$

$$(8 + \frac{1}{3})\,x - 40 = 35.$$

Jeder Theil mit 3 multiplicirt giebt

$$25x - 120 = 105;$$

120 zu jedem Theil addirt giebt endlich

$$25x = 225.$$

Aus diesem Beispiel sieht man, daß es Gleichungen von einfacher und von mehr verwickelter Form giebt. Daher kann man die Gleichungen in einfache und zusammengesetzte eintheilen. Mit den einfachen Gleichungen beschäftigt sich der erste Theil der Algebra, mit den zusammengesetzten der zweite.

Die einfachen Gleichungen enthalten nach der hier gewählten Eintheilung nur eine unbekannte Größe, und sind von folgenden Formen:

1) $x^2 = q$;

2) $x^3 = q$, und überhaupt $x^m = q$, wo m eine beliebige ganze Zahl ist;

3) $A - B = C - D$, und $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, wo eine von diesen 4 Größen unbekannt ist;

4) $A^x = q$.

Mit diesen Gleichungen und mit den Progressionen, welche algebraisch behandelt werden, beschäftigt sich der erste Theil der Algebra, welcher daher in 5 Abschnitte zerfällt. Zu diesen füge ich noch einen sechsten Abschnitt für die Combinationslehre hinzu.

Erster Abschnitt.

Ausziehung der Quadratwurzel

oder

Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 = q.$$

§. 47.

Suche erst die Grenzen der Wurzel in ganzen Zahlen; die kleinern nenne a, und das noch fehlende Stück der Wurzel nenne b. Dann kannst du $x = a + b$ setzen, und wirst erhalten

$$a^2 + 2ab + b^2 = q$$
$$2ab + b^2 = q - a^2,$$

und wenn b^2 als unbedeutend weggelassen wird,

$$2ab = q - a^2$$
$$b = \frac{q - a^2}{2a};$$

d. h. um das fehlende Stück b zu erhalten, ziehe das Quadrat der Grenze von q ab, und dividire den Rest durch die doppelte Grenze. Der Quotient, von welchem jedoch wegen des weggelassenen b^2 nur die erste Ziffer genommen wird, ist das fehlende Stück b. Dies zur gefundenen Grenze hinzugefügt, giebt eine neue, genauere Grenze, welche du wieder a nennen kannst; eben so kannst du das an der Wurzel noch Fehlende wieder mit b bezeichnen und es auf ähnliche Weise, wie das erste b, berechnen; und so immer fort.

Beispiel.

Die Gleichung $x^2 = 5$ sey gegeben.

Die Grenzen sind 2 und 3, folglich $a = 2$ gesetzt giebt

$$b = \frac{5 - 4}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}2\ \ldots$$

Die neue genauere Grenze ist also 2,2 und das folgende

$$b = \frac{5 - 4{,}84}{4{,}4} = \frac{0{,}16}{4{,}4} = 0{,}03\ \ldots$$

Das folgende a ist also $= 2,23$ und das folgende

$$b = \frac{5 - 4,9729}{4,46} = \frac{0,0271}{4,46} = 0,006.$$

Das folgende a daher $= 2,236$. u. s. w.

Bei diesem Verfahren ist es aber ziemlich weitläuftig, das Quadrat der Grenze zu berechnen, wenn sie schon auf mehrere Stellen gefunden ist. Das Weitläuftige bei diesem Verfahren besteht in der Berechnung der Differenz $q - a^2$, welche ich D nennen will. Die Berechnung der Gleichung $x^2 = q$ oder die Ausziehung der Quadratwurzel aus q besteht nämlich, wie man nun schon deutlich genug gesehen hat, darin, daß man diese Differenzen D sucht, und stets durch die doppelte bisher gefundene Grenze dividirt. Wenn man nun die erste Grenze und die erste Differenz D gefunden hat, so fragt sich, ob man aus dieser nicht die zweite, aus der zweiten die dritte, und so fort immer aus der vorhergehenden die folgende berechnen könne. Die Antwort ist: Ja. Denn die erste Grenze sey a, so ist die zweite genauere $a + b$, folglich das zweite $D = q - (a + b)^2 = q - a^2 - 2ab - b^2$; folglich wird das zweite D gefunden, wenn man von der ersten Differenz noch $2ab$ und b^2 abzieht. Stellt nun a die zweite oder irgend eine noch genauere Grenze vor, so bleibt das Verfahren dasselbe, um die folgende Differenz D aus der vorhergehenden zu finden. Von dieser letztern wird nämlich $2ab + b^2$ abgezogen. Mit dieser Abkürzung läßt sich nun die Ausziehung der Quadratwurzel folgendermaßen bewerkstelligen:

$$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$$

$$\begin{array}{rcl}
a^2 & = & 4 \\
\hline
D & = & 1{,}00 \\
2a & = & (4) \\
2ab & = & 0{,}8 \\
b^2 & = & 0{,}04 \\
\hline
D & = & 0{,}1600 \\
2a & = & (4{,}4) \\
2ab & = & 0{,}132 \\
b^2 & = & 0{,}0009 \\
\hline
D & = & 0{,}027100 \\
2a & = & (4{,}46) \\
2ab & = & 0{,}02676 \\
b^2 & = & 0{,}000036 \\
\hline
D & = & 0{,}000304
\end{array}$$

Dies Verfahren kann abgekürzt und folgendermaßen geordnet werden:

		5,00	00	00	00	2,23606
a^2	=	4				
D	=	1 00				
2a	=	(4)				
$2ab+b^2$	=	84				
D	=	16	00			
2a	=	(4	4)			
$2ab+b^2$	=	13	29			
D	=	2	71	00		
2a	=	(	44	6)		
$2ab+b^2$	=	2	67	96		
D	=		3	04	00	
2a	=		(4	47	2)	
$2ab+b^2$	=				0	
D	=		3	04	0000	
2a	=		(	44	720)	
$2ab+b^2$	=		2	68	3236	
D	=			35	6764	

Mit Weglassung der Formeln ist auch folgende Anordnung bequem:

$$
\begin{array}{rl}
 & 5 \mid 2{,}23606 \\
 & 4 \\
\hline
42\ ) & 100 \\
 & 84 \\
\hline
443\ ) & 1600 \\
 & 1329 \\
\hline
4466\ ) & 27100 \\
 & 26796 \\
\hline
447206\ ) & 3040000 \\
 & 2683236 \\
\hline
 & 356764
\end{array}
$$

Besteht die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, aus mehrern Ziffern vor und nach dem Komma, so wird am Komma ein vertikaler Strich gezogen; eben so 2 Stellen weiter auf der rechten und linken Seite u. s. f., bis linker Hand die letzte oder vorletzte erreicht ist. Rechter Hand werden nöthigenfalls Nullen angehängt, und die Abtheilungen so lange fortgesetzt, als man sie braucht.

Beispiele.

1) Aus 6543 die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung.

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 65|43,|00 \mid 80{,}8\ \ldots \\
a^2 & = & 64| \\
\hline
D & = & 1|4\,3 \\
 & & (1|6)0 \\
\hline
D & = & 1\,43|0\,0 \\
 & & (16|0)8 \\
2ab+b^2 & = & 1\,28|6\,4 \\
\hline
D & = & 14|3\,6
\end{array}
$$

2) Aus 543,5 die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung.

```
  5|43,|50 | 23,3 . . .
  4|   |
 ----
  1|43 |
  (4)3 |
  129  |
 ----------
   1450
   (46)3
   1389
 ----------
     61
```

3) Aus 0,003 die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung.

```
0,|00|30 | 0,05 . . .
  |  |25 |
   -------
      5
```

Uebungsaufgaben.

1) $\sqrt{3721} = 61$

2) $\sqrt{6241} = 79$

3) $\sqrt{368449} = 607$

4) $\sqrt{534361} = 731$

5) $\sqrt{2996361} = 1731$

6) $\sqrt{9054081} = 3009$

7) $\sqrt{2} = 1{,}4142136 \ldots$

8) $\sqrt{3} = 1{,}7320508 \ldots$

9) $\sqrt{5} = 2{,}2360680 \ldots$

10) $\sqrt{15} = 3,8729833 \ldots$

11) $\sqrt{19} = 4,3588989 \ldots$

12) $\sqrt{1,48} = 1,2165525 \ldots$

13) $\sqrt{1,88} = 1,3711309 \ldots$

14) $\sqrt{2,92} = 1,7088007 \ldots$

15) $\sqrt{0,3} = 0,5477225 \ldots$

16) $\sqrt{0,6} = 0,7745966 \ldots$

17) $\sqrt{0,7} = 0,8366600 \ldots$

18) $\sqrt{0,007} = 0,836660 \ldots$

19) $\sqrt{0,07} = 0,2645751 \ldots$

20) $\sqrt{0,8} = 0,8944271 \ldots$

21) $\sqrt{5,1875} = 2,2776084 \ldots$

22) $\sqrt{0,828125} = 0,9100137 \ldots$

Zweiter Abschnitt.

Ausziehung der Kubikwurzel oder Berechnung der Gleichung.

$$x^3 = r.$$

§. 48.

$x = a + b$ gesetzt, giebt hier

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = r. \quad (\text{§. } 19.)$$

Von beiden Theilen der Gleichung a^3 abgezogen giebt

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = r - a^3;$$

und läßt man im ersten Theil der Gleichung das zweite und dritte Glied als unbedeutend gegen das erste weg,

$$b = \frac{r - a^3}{3a^2} = \frac{D}{3a^2}.$$

Das folgende D ist $= r - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = D - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$.

Daraus ergiebt sich folgendes Verfahren für die Ausziehung der Kubikwurzel.

Es sey $r = 12229$.

$$\begin{array}{rcr|l}
r & = & 12 & 269 \mid 23, \ldots \\
a^3 & = & 8 & \\
\hline
D & = & 4 & 269 \\
3a^2 & = & (1 & 2) \\
3a^2b & = & 3 & 6 \\
3ab^2 & = & & 54 \\
b^3 & = & & \;\,27 \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 4 & 167 \\
\hline
D & = & & 102
\end{array}$$

Uebungsaufgaben.

1) $\sqrt[3]{6859} = 19$

2) $\sqrt[3]{29791} = 31$

3) $\sqrt[3]{103823} = 47$

4) $\sqrt[3]{636056} = 86$

5) $\sqrt[3]{1295029} = 109$

6) $\sqrt[3]{10218313} = 217$

7) $\sqrt[3]{13} = 2{,}3513347 \ldots$

8) $\sqrt[3]{42} = 3{,}4760266 \ldots$

9) $\sqrt[3]{66} = 4{,}0412401 \ldots$

10) $\sqrt[3]{97} = 4{,}5947009 \ldots$

Dritter Abschnitt.

Die Lehre von den Proportionen.

§. 49.

Das arithmetische Verhältniß zweier Zahlen ist dasjenige, in welchem darauf gesehen wird, um wieviel die eine größer ist als die andere. Eine arithmetische Proportion ist die Vergleichung zweier gleichen arithmetischen Verhältnisse, und wird folgendermaßen vorgestellt:

$$A - B = C - D.$$

Die 4 Zahlen A, B, C und D, aus welchen sie besteht, heißen Glieder der Proportion, das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte die mittlern oder innern. Das erste und dritte heißen homologe Glieder; eben so das zweite und vierte. — Sind die mittlern Glieder gleich, so heißt die Proportion eine stetige.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder; in der stetigen arithmetischen Proportion ist das mittlere Glied gleich der Summe der beiden äußern Glieder dividirt durch 2, und heißt die mittlere arithmetische Proportionalzahl oder das arithmetische Mittel zwischen beiden. So ist z. B. $9 - x = x - 1$ eine stetige arithmetische Proportion und $x = 5$ das arithmetische Mittel zwischen 9 und 1.

§. 50.

Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen ist dasjenige, in welchem darauf gesehen wird, wievielmal die eine in der andern enthalten ist. Die beiden verglichenen Zahlen heißen die Glieder des Verhältnisses, die Zahl, welche anzeigt, wievielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, heißt der Exponent des Verhältnisses. Die Vergleichung zweier gleichen geometrischen Verhältnisse heißt eine geometrische Proportion, welche auch Proportion schlechtweg genannt wird. Sie wird folgendermaßen vorgestellt:

$$A : B = C : D.$$

Die Benennung der Zahlen A, B, C, D ist wie in der arithmetischen Proportion.

§. 51.

In der geometrischen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der mittlern Glieder. Denn $A : B = C : D$ ist soviel als $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; welche Gleichung mit BD multiplicirt $AD = BC$ giebt.

In jeder geometrischen Proportion ist ein äußeres Glied gleich dem Product der mittlern Glieder dividirt durch das andere äußere Glied, und ein mittleres Glied gleich dem Product der äußern Glieder dividirt durch das andere mittlere Glied.

Sind die mittlern Glieder gleich, so heißt auch die geometrische Proportion eine stetige. Das mittlere Glied ist alsdann gleich der Quadratwurzel aus dem Product der beiden äußern Glieder und heißt die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen beiden. Diese suchen, heißt auch das Verhältniß der äußern Glieder halbiren.

§. 52.

Mit jeder Proportion wie $A : B = C : D$ lassen sich hauptsächlich folgende Veränderungen vornehmen:

I. Durch Verwechselung der mittlern Glieder wird

$$A : C = B : D.$$

Denn ist $A : B = C : D$, so ist $AD = BC$, folglich $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$, d. i., $A : C = B : D$.

II. Durch Umkehrung der Verhältnisse ist auch

$$B : A = D : C.$$

III. Durch Addition:

$$A + B : B = C + D : D.$$

Denn ist $A : B = C : D$, so ist auch $\frac{A}{B} + 1 = \frac{C}{D} + 1$ oder $\frac{A + B}{B} = \frac{C + D}{D}$, d. i. $A + B : B = C + D : D$.

IV. Durch Subtraction:

$$A - B : B = C - D : D.$$

V. Durch Verwechselung und Addition:

$$A + C : B + D = A : B.$$

Denn aus $A : C = B : D$ folgt $A + C : C = B + D : D$ oder $A + C : B + D = C : D = A : B$.

Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse gleich, wie $A : B = C : D = E : F =$ u. s. w., so ist auch

$$A + C + E + \ldots : B + D + F + \ldots = A : B.$$

Denn $A + C : B + D = \frac{A}{B} = \frac{E}{F}$; aus $A + C : B + D = E : F$ folgt

$$A + C + E : B + D + F = A + C : B + D = A : B; \text{ u. s. w.}$$

VI. Indem man die Glieder eines jeden Verhältnisses der Proportion mit einer gleichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.

$$Am : Bm = C : D$$

$$Am : Bm = Cn : Dn$$

$$A\frac{m}{n} : B\frac{m}{n} = C : D \text{ u. s. w.}$$

wo m, n beliebige ganze Zahlen sind.

* §. 53.

Alle Verhältnisse setzen ein gemeinschaftliches Maß voraus, und nur für solche läßt sich der Exponent genau angeben. Doch dehnt man den Namen eines Verhältnisses auch auf Größen aus, die genau genommen kein gemeinschaftliches Maß haben, und nennt die Verhältnisse solcher Größen irrationale Verhältnisse. In einem solchen Verhältniß stehen Rationalzahlen und Irrationalzahlen, oft auch Irrationalzahlen und Irrationalzahlen (§. 32. Zus.). Weil für Irrationalzahlen sich Grenzen, so genau man will, angeben lassen, so kann man auch Grenzen für den Exponenten des Verhältnisses finden, oder überhaupt für ein irrationales Verhältniß Grenz-Verhältnisse festsetzen, welche für das irrationale Verhältniß in jedem vorkommenden Fall gebraucht werden können. So sind die Grenzen des Verhältnißes $\sqrt{5} : 2$

$2 : 2$ und $3 : 2$; $2{,}2 : 2$ und $2{,}3 : 2$; $2{,}23 : 2$ und $2{,}24 : 2$; $2{,}236 : 2$ und $2{,}237 : 2$; u. s. w.,

welche Grenz-Verhältnisse für das Verhältniß $\sqrt{5} : 2$ in jeder Berechnung gebraucht werden können, und man wird dasjenige Grenz-Verhältniß wählen, welches den erforderlichen Grad der Genauigkeit im Resultate der Rechnung giebt.

Es wird Jedem einleuchten, oder man kann als Grundsatz feststellen:

Größen, auch Verhältnisse, deren Grenzen, so weit man ihre Berechnung auch treibe oder sich getrieben denke, immer einander gleich bleiben, sind gleich. Denn sie können nicht ungleich seyn.

Da nun Irrational-Verhältnisse, deren Glieder mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt werden (wodurch das dritte und vierte Glied einer jeden Proportion immer erzeugt werden kann, wenn das erste und zweite gegeben sind), immer gleiche Grenz-Verhältnisse behalten, also ebenfalls gleich bleiben, so gelten die (§. 51 u. §. 52) aufgestellten Sätze auch von Irrationalverhältnissen.

Vierter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen oder Reihen.

§. 54.

Eine arithmetische Progression ist eine Folge von Zahlen, in welcher jede folgende aus der vorhergehenden entsteht, wenn man zu dieser immer eine und dieselbe Größe, Differenz genannt, addirt oder abzieht. Vorgestellt, wird sie durch

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + u.$$

Die einzelnen Zahlen der Reihe, wie a, $a + d$, $a + 2d$ u. s. w. heißen Glieder der Reihe oder Progression; a bezeichnet das erste Glied, u das letzte Glied, d die Differenz; mit n wird die Anzahl der Glieder der Reihe, mit S die Summe aller Glieder oder die Summe der Reihe bezeichnet. Steigend heißt die Reihe, wenn d positiv ist oder addirt wird; fallend, wenn d negativ ist oder abgezogen wird.

Das letzte Glied u ist $= a + (n-1)\,d$.

Die Summe einer arithmetischen Progression wird gefunden, wenn man das erste und letzte Glied addirt, die Summe mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt, oder:

$$S = \frac{(a+u)\,n}{2}.$$

Beweis.

Die Summe aller Glieder wird gefunden, man mag vom ersten Gliede bis zum letzten, oder in umgekehrter Ordnung vom letzten bis zum ersten addiren, folglich

$$S = a + a + d + a + 2d + \ldots + u - 2d + u - d + u;$$

aber auch

$$S = u + u - d + u - 2d + \ldots + a + 2d + a + d + a;$$

$$2S = a + u + (a+u) + (a+u) + \ldots = n\,(a+u);$$

$$S = \frac{(a+u)\,n}{2}.$$

Exempel.

Ein 10 Fuß tiefer Teich soll gegraben werden. Für jeden Fuß Tiefe wird 2 Rubel Bezahluug zugelegt. Der erste Fuß kostet 3 Rubel. Wieviel kostet es, den ganzen Teich auszugraben?

Auflösung.

Die Aufgabe verlangt die Berechnung einer arithmetischen Progression, wo das erste Glied $a = 3$, die Anzahl der Glieder $n = 10$; die Differenz $d = 2$ ist. Also ist $u = a + (n - 1)\,d = 3 + 9 . 2 = 21$;

$$S = \frac{(a + u)\,n}{2} = \frac{(3+21)\,10}{2} = \frac{24 . 10}{2} = 120.$$

Folglich betragen die Kosten 120 Rubel.

Uebungsaufgaben.

1) Ein Trupp Soldaten ist in einem Dreieck aufgestellt. An der Spitze steht ein Mann, in der zweiten Reihe stehen 2, in der dritten 3 Mann, und so steht in jeder Reihe ein Mann mehr, als in der nächstvorhergehenden. In der letzten Reihe befinden sich 24 Mann. Aus wieviel Mann bestand der Trupp?

Antwort: Aus 300 Mann.

*2) Ein Schuldner trägt seinem Gläubiger eine Schuld von 1360 Rubeln in acht Terminen ab. Im ersten Termine zahlt er 100 Rubel, und in jedem folgenden eine gleiche Summe mehr, als im vorhergehenden. Wie groß war die Summe, die er bei jedem Termin zulegte?

Antwort: 20 Rubel.

*3) Ein alter Mann wollte sich etwas sammeln und legte deshalb 274 Rubel zurück, das Jahr darauf 8 Rubel mehr, und so in jedem Jahr 8 Rubel mehr als im nächstvorhergehenden. Nach einigen Jahren stirbt er, und hat im letzten Jahr allein 372 Rubel zurückgelegt. Wie lange lebte er noch seit der Zeit, da er die erste Summe zurücklegte?

Antwort: 12 Jahr.

Von den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen und von den figurirten Zahlen.

*§. 55.

Bleibt die Differenz, welche zu jedem Gliede der Reihe hinzugefügt wird, um das folgende zu erzeugen, nicht gleich, sondern nimmt stets um eine gleiche Größe zu, d. h., stehen die hinzugefügten Differenzen in einer arithmetischen Progression, so heißt die durch Hinzufügung solcher Differenzen entstehende Reihe eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. So entsteht, wenn 0 für das erste Glied genommen wird, aus der arithmetischen Progression 1, 2, 3, 4 . . . . folgende arithmetische Reihe der zweiten Ordnung:

$$0, 1, 3, 6, 10 \ldots$$

oder mit Weglassung der Null zu Anfang:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \frac{8 \cdot 9}{2}, \frac{9 \cdot 10}{2}, \frac{10 \cdot 11}{2},$$

$$\ldots \frac{n(n+1)}{2}; \quad (\S. 54).$$

Eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung ist eine solche, wo die Differenzen der Glieder in einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung stehen. Eben so nennt man eine Reihe eine arithmetische Reihe der 4ten, 5ten, und überhaupt **mten Ordnung**, wenn die Differenzen derselben eine arithmetische Reihe der 3ten, 4ten, $(m - 1)$ten Ordnung bilden; und alle Reihen, in denen die Differenzen eine arithmetische Reihe von irgend einer Ordnung bilden, heißen **arithmetische Reihen höherer Ordnungen**, in welchem Sinne dann die bisher betrachteten arithmetischen Progessionen als arithmetische Reihen der ersten Ordnung anzusehen sind.

Wir betrachten hier nur diejenigen arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, welche aus der Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots n$ entstehen, und nehmen immer in der nächst höhern Ordnung für das erste Glied 0 an, so daß jedes Glied derselben $=$ der Summe der Differenzenreihe oder der Reihe der nächst niedrigern Ordnung ist. In diesem Falle ist, wenn das Glied 0 nicht mitgezählt wird, in der **arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung**, welche demnach mit 1 anhebt, für n Glieder das letzte Glied $u = \frac{n(n+1)}{2}$; (§. 54).

Die Summe S ist $= \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$.

Beweis.

Die in Rede stehende Reihe ist:

$$\frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2} \ldots \frac{n(n+1)}{2}.$$

Summirt man die Glieder allmählig, so wird seyn:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{8}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3};$$

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}=\frac{2.4}{2}+\frac{3.4}{2}=$$

$$\frac{2.4+3.4}{2}=\frac{4.5}{2}=\frac{3.4.5}{2.3};$$

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}=\frac{4.5}{2}+\frac{4.5}{2}$$

$$=\frac{2.4.5}{2}=\frac{2.3.4.5}{2.3}=\frac{4.5.6}{2.3};$$

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\frac{5.6}{2}=\frac{4.5.6}{2.3}+$$

$$\frac{5.6}{2}=\frac{4.5.6}{2.3}+\frac{3.5.6}{2.3}=\frac{(4+3)\,5.6}{2.3}=\frac{5.6.7}{2.3};$$

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\frac{5.6}{2}+\frac{6.7}{2}=$$

$$\frac{(5+3)\,6.7}{2.3}=\frac{6.7.8}{2.3}.$$

Folglich ist $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{2.3}$ die Summe, wenn n nicht größer als 6 ist. Die Summe für 7 Glieder ist, wenn $m = 6$ gesetzt wird,

$$=\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{2.3}+\frac{(m+1)\,(m+2)}{2}$$

$$=\frac{(m+3)\,(m+1)\,(m+2)}{2.3}=\frac{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)}{2.3}.$$

Hier ist $m+1$ die Anzahl der Glieder, folglich auch für 7 Glieder

$$S=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{2.3}$$

und so immer fort für jede Anzahl von Gliedern.

Zugleich ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$ das letzte Glied der arithmetischen Reihe der dritten Ordnung, und diese schreitet folgendermaßen fort:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3}, \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3}, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$

Für diese ist, wie man nun schon vermuthen wird, die Summe

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Beweis.

Ist diese Annahme richtig, so muß für $n+1$ Glieder die Summe $S^1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ seyn, und $S^1 - S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder dem letzten Gliede für $n+1$ Glieder. Nun ist $S^1 - S = \frac{(n+4-n)(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Folglich ist die Annahme richtig.

Daraus sieht man leicht, daß für die arithmetische Reihe der $m$ten Ordnung seyn wird für n Glieder:

das letzte Glied $u = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$;

die Summe $S = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$.

Sucht man die Reihen selbst Glied für Glied in Zahlen, so kann dies durch successive Summirung der bereits gebildeten Reihen geschehen, wie folgt:

Tafel für die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen.

In jeder Spalte bezeichnet die Römische Ziffer die Ordnung der in dieser Spalte befindlichen Reihe.

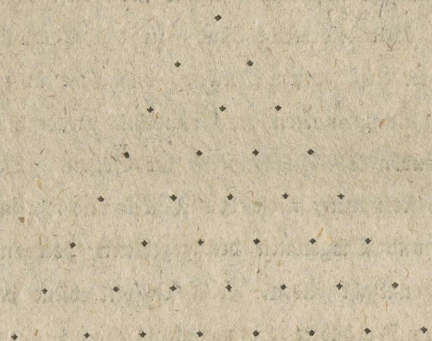
I.	II.	III.	IV.	V.
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
7	28	84	210	462
8	36	120	330	792
9	45	165	495	1287
10	55	220	715	2002

* §. 56.

Die in dieser Tafel verzeichneten Zahlen, so wie alle Zahlen, die irgend einer arithmetischen Reihe, von welcher Ordnung es sey, mit dem Anfangsgliede 1, angehören, heißen figurirte Zahlen. Der Grund ist, weil die arithmetischen Reihen der ersten, zweiten und dritten Ordnung durch Figuren vorgestellt werden können, wenn in gewissen Entfernungen Punkte regelmäßig geordnet werden. So entstehen Linear-, Trigonal-, Polygonal-, Pyramidal-Zahlen, welche nun genauer erklärt werden sollen.

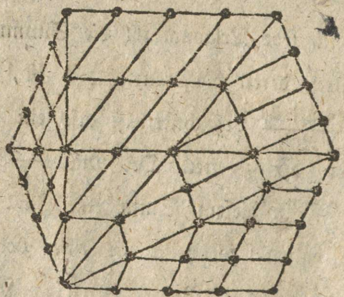
Nimmt man auf einer graden Linie erst einen, dann in gleichen Entfernungen von einander 2, 3, 4 und mehr Punkte an, so heißt die Anzahl dieser Punkte eine Linearzahl, weil sie in einer geraden Linie liegen; die Glieder der arithmetischen Progression 1, 2, 3, 4 . . . . sind Linearzahlen.

Man theile in gleichen Abständen ein gleichseitiges Dreieck durch Parallelen mit der Grundlinie; von einer Seite des Dreiecks ziehe man durch die Durchschnittspunkte wieder Parallelen mit der andern Seite. Die Anzahl aller Durchschnittspunkte heißt alsdann eine Trigonalzahl, weil sie zusammengenommen ein gleichseitiges Dreieck darstellen, wie folgt:



Ersichtlich ist jede Trigonalzahl die Summe einer arithmetischen Progression, deren Differenz = 1 ist, und wird allgemein durch $\frac{n\,(n+1)}{2}$ bezeichnet, ist also ein Glied der arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung $\frac{1\,.\,2}{2}$, $\frac{2\,.\,3}{2}$, $\frac{3\,.\,4}{2}$, $\frac{4\,.\,5}{2}$, . . . Ist in diesem Sinne eine Zahl in einer vielseitigen Figur enthalten, so heißt sie eine Polygonalzahl, und zwar eine Quadratzahl, Pentagonal-, Hexagonal-Zahl u. s. w., je nachdem diese vielseitige Figur ein Quadrat, regelmäßiges Fünfeck, Sechseck u. s. w. ist. Die Trigonalzahlen gehören ebenfalls zu den Polygonalzahlen. Die Wurzel oder Seite einer Polygonalzahl heißt die Anzahl der Punkte, die sich auf einer Seite des Vielecks befinden, und stellt die Anzahl der Glieder der arithmetischen Progression vor, deren Summe durch die Figur dargestellt wird. Darstellen kann man die Polygonalzahlen durch Punkte in den Polygonen auf folgende Weise:

Man zieht aus einem Winkelpunkte des Polygons zu den gegenüberliegenden Winkelpunkten Diagonalen, theilt diese und die Seite des Polygons in n gleiche Theile, wenn n die Wurzel der Polygonalzahl ist, darauf wählt man diese Diagonalen, so viele ihrer dazu erforderlich sind, zu den Grundlinien der in dem Polygon entstandenen Dreiecke, und zieht in jedem Dreieck von den Theilungspunkten der Grundlinie gerade Linien zu den correspondirenden Theilungspunkten der Seiten. Dann werden die Durchschnittspunkte, nebst den Winkel- und Theilungspunkten der Seiten und Diagonalen des gegebenen Polygons die verlangte Polygonalzahl bilden. Als Beispiel diene das Sechseck und die darauf gebildete Hexagonalzahl.



Hieraus sieht man, daß jede Polygonalzahl aus einer Reihe von Zahlen besteht, die beständig um soviel Einheiten größer werden, als die Anzahl der Seiten des Polygons weniger 2 beträgt. Folglich ist jede Polygonalzahl die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied = 1 und deren Differenz die um 2 verminderte Anzahl der Seiten des zu der verlangten Polygonalzahl dienenden Polygons ist. Für die Quadratzahl ist die Differenz 2, für die Pentagonalzahl 3, für die Hexagonalzahl 4, u. s. w.

Ist n die Seite einer Polygonalzahl, so ist dafür

die Trigonalzahl $= \frac{n(n+1)}{2}$

die Quadratzahl $= \frac{[1+1+(n-1)2]\,n}{2} = n^2$

die Pentagnalzahl $= [1+1+(n-1)3]\frac{n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}$

die Hexagonalzahl $= [1+1+(n-1)4]\frac{n}{2} = \frac{(4n-2)n}{2} = (2n-1)n.$

Die Polygonalzahlen sind zugleich Glieder einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung, und bilden, wenn die sie enthaltenden Polygone regelmäßig in gleichen Distanzen über einander geordnet werden, Pyramiden; daher heißt die Summe einer Reihe von Polygonalzahlen, deren Wurzel von Glied zu Glied um 1 zunimmt, eine Pyramidalzahl, und zwar eine Trigonal-Pyramidalzahl, wenn die Glieder Trigonalzahlen, eine Tetragonal-Pyramidalzahl, wenn die Glieder Quadratzahlen sind, u. s. w. Ist n die Anzahl der Punkte auf einer Seitenlinie einer regulären Pyramide, so ist die dazu gehörige Trigonal-Pyramidalzahl

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad (\S.\ 55).$$

Alle Pyramidalzahlen sind zugleich Glieder einer arithmetischen Reihe der dritten Ordnung.

Aufgabe 1.

Gleich große eiserne Kugeln sind in Gestalt einer regulären Pyramide (wo alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind); jede Seitenlinie enthält 23 Kugeln. Wieviel Kugeln enthält die unterste Schicht? Und wieviel die ganze Pyramide?

Antwort: Die unterste Schicht $\frac{23 \cdot 24}{2} = 276 \ldots$; die ganze Pyramide $\frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{2 \cdot 3} = 2300 \ldots$

Aufgabe 2.

Die Kugeln sind in Gestalt einer vierseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche aufgeschichtet. Wie groß ist die Anzahl derselben in der untersten Schicht, wenn eine Seite der Grundfläche 27 Kugeln enthält?

Antwort: Die Anzahl derselben ist eine Quadratzahl, also $= 27^2$ oder 729.

§. 57.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher jede folgende entsteht, wenn man die vorhergehende stets mit einer und derselben Zahl, Exponent der Progression genannt, multiplicirt. Dieser Exponent werde mit e bezeichnet, so daß die geometrische Progression auf folgende Weise bezeichnet werden könne:

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots + u.$$

Steigend oder divergirend ist sie, wenn e größer als 1, fallend oder convergirend, wenn e kleiner als 1 ist.

Die übrigen Benennungen und Bezeichnungen sind, wie in der arithmetischen Progression.

Das letzte Glied u ist $= ae^{n-1}$. Man findet die Summe einer geometrischen Progression oder

$$S = \frac{a(1-e^n)}{1-e} \text{ oder } = \frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Beweis.

$$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1}$$

$$Se = ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-1} + ae^n$$

$$S - Se = a - ae^n$$

$$(1-e)S = a - ae^n$$

$$S = \frac{a - ae^n}{1-e} = \frac{a(1-e^n)}{1-e} = \frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Exempel.

1) In einer gegebenen geometrischen Progression ist $a = 3$; $e = 2$; $n = 4$. Es soll das letzte Glied und die Summe der Progression bestimmt werden.

$$u = 3 \cdot 2^3 = 24;$$

$$e^n = 2^4 = 16, \text{ folglich } S = \frac{3(16-1)}{2-1} = 45.$$

2) Jemand setzt auf eine Karte 4 Rubel, verliert sie, verdoppelt den Einsatz von Neuem u. s. f., bis er fünfmal verloren hat. Wie groß war sein Verlust?

Der Verlust ist die Summe einer geometrischen Progression, wo $a = 4$, $e = 2$, $n = 5$, also

$$S = \frac{4 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{4(32 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot 31 = 124;$$

der Verlust ist also 124 Rubel.

3) Das erste Glied einer geometrischen Progression ist 2, der Exponent 3, die Anzahl der Glieder 5; wie groß ist das letzte Glied?

Antwort: 162.

4) Aus den Sterbelisten der griechischen Kirche in Rußland vom Jahr 1827 ergiebt sich, daß von 1000 Personen, die 20 Jahr alt sind, bis zum 25sten Lebensjahre 72 starben, eben so viel auf jedes Tausend vom 25sten bis zum 30sten, und so fort bis zum 40sten Jahre, so daß das Verhältniß der Anzahl der Sterbenden zu der Anzahl der Lebenden von gleichem Alter für jedes von 20 bis 40 Jahren ungefähr gleich bleibt. Wieviel starben von tausend Personen gleichen Alters in jedem Lebensjahr zwischen 20 und 40?

Antwort: 15.

Anm. Die in dieser Aufgabe erforderliche Berechnung der Wurzel vom fünften Grade kann nach §. 32 geschehen.

Fünfter Abschnitt.

Die Lehre von den Logarithmen.

§. 58.

Man kann, indem man eine gegebene Zahl A auf verschiedene Potenzen erhebt, alle Zahlen, die verlangt werden, erzeugen. So ist, wenn 2 als Grundzahl angenommen wird, $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; und so kann man noch viele Zahlen aus 2 mit Leichtigkeit hervorbringen, wenn man den Exponenten immer um 1 vermehrt. Wie findet man aber die Exponenten von 2, um 3, 5, 6, 7 u. s. w. zu erzeugen? Sie durch Versuche finden, lehrt folgendes Beispiel:

Der Exponent von 2, um 3 zu erzeugen, sey $\frac{m}{n}$; man soll diesen durch Versuche berechnen.

$2^1 = 2$ und $2^2 = 4$, also $\frac{m}{n}$ größer als 1 und kleiner als 2; man nehme daher $1\frac{1}{2}$;

$2^{1\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 1{,}41 \ldots = 2{,}82 \ldots$

Versuche darauf $1\frac{2}{3}$.

$2^{1\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$ nahe zu.

Folglich ist $\frac{m}{n} > 1\frac{1}{2}$ und $< 1\frac{2}{3}$.

$1\frac{7}{12}$ liegt in der Mitte zwischen beiden; versuche dies.

$2^{1\frac{7}{12}} = 2 \cdot 2^{\frac{7}{12}}$. Soll $\frac{7}{12}$ richtig seyn, so muß $2^{\frac{7}{12}} = \frac{3}{2}$ seyn; um sich davon zu überzeugen, erhebe man beides auf die 12te Potenz; dann muß seyn $2^7 = (\frac{3}{2})^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}}$; nun ist $3^{12} = 531441$; $2^{12} = 4096$; folglich $\frac{3^{12}}{2^{12}} = 129, \ldots$; $2^7 = 128$; also ist $2^7 < (\frac{3}{2})^{12}$ und $2^{\frac{7}{12}} < \frac{3}{2}$, folglich $\frac{7}{12}$ noch etwas zu klein, oder $\frac{m}{n} > 1\frac{7}{12}$. Und so kann man weiter fortfahren, wenn man den Exponenten noch genauer haben will. Eben so kann man die Zahl

10 und jede andere Zahl als Grundzahl wählen, und von ihr eine solche Potenz nehmen, daß dadurch jede verlangte Zahl erzeugt wird.

Um sich dieses deutlicher zu machen, suche man auf ähnliche Weise die Exponenten derjenigen Potenzen von 2, welche die Zahlen 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 20 geben. Man wird finden, daß

der Exponent	für	5	zwischen	$\frac{7}{3}$	und	$\frac{9}{4}$	liegt.
"	"	6	"	$\frac{5}{2}$	"	$\frac{13}{5}$	"
"	"	7	"	$\frac{14}{5}$	"	$\frac{17}{6}$	"
"	"	9	"	$\frac{19}{6}$	"	$\frac{16}{5}$	"
"	"	10	"	$\frac{13}{4}$	"	$\frac{10}{3}$	"
"	"	11	"	$\frac{17}{5}$	"	$\frac{7}{2}$	"
"	"	13	"	$\frac{59}{16}$	"	$\frac{15}{4}$	"
"	"	20	"	$\frac{17}{4}$	"	$\frac{13}{3}$	"

Diejenigen Exponenten, welche die verlangten Zahlen erzeugen, heißen die Logarithmen der Zahlen, welche durch sie erzeugt worden sind. Die Grundzahl A heißt die Basis des dazu gehörigen Logarithmensystems. Man hat für die Zahl 10, als Basis, die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 101000 berechnet, und sie, in Decimalbrüche verwandelt, in Tafeln geordnet. Diese heißen die Briggischen Logarithmen, weil sie von Heinrich Brigg zuerst berechnet und eingeführt worden sind.

Die Logarithmen der Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000 u. s. w. sind offenbar ganze Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., weil $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; 10^3

$= 1000$ u. s. w. ist. Der Logarithme von 1 ist 0, weil $10^0 = 1$. Der Logarithme jeder Zahl von 1 bis 10 ist kleiner als 1, also ein Bruch. Der Logarithme jeder Zahl von 10 bis 100 ist > 1 und < 2, also $1 +$ einen Bruch. Der Logarithme jeder Zahl von 100 bis 1000 ist $2 +$ einen Bruch u. s. w. Dieser Bruch wird in den Tafeln durch einen Decimalbruch ausgedrückt. Jeder Logarithme besteht also aus 2 Theilen:

1) einer ganzen Zahl oder 0. Diese heißt die Characteristica oder Kennziffer.

2) aus einem Decimalbruch. Dieser heißt die Mantissa.

§. 59.

Die Multiplication, Division und besonders die Berechnung der Potenzen wird durch den Gebrauch der Logarithmen oft sehr erleichtert, wie die folgenden Lehrsätze und deren Anwendung zeigen werden.

§. 60.

Lehrsatz. Der Logarithme eines Productes von zwei oder mehr Factoren wird gefunden, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt, oder

$$\log. ab = \log. a + \log. b;$$
$$\log. abc = \log. a + \log. b + \log. c; \text{ u. s. w.}$$

Beweis.

Diejenige Potenz der Zahl 10, welche log. a zum Exponenten hat, giebt die Zahl a, also $10^{\log. a} = a$; eben so

$$10^{\log. b} = b \text{ und } 10^{\log. ab} = ab; \text{ folglich}$$

$$ab = 10^{\log. a} \cdot 10^{\log. b} = 10^{\log a + \log. b} \quad (\S. 41.)$$

$$ab = 10^{\log. ab}; \text{ folglich}$$

$$10^{\log. ab} = 10^{\log. a + \log. b} \text{ und}$$

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

Eben so ist $\log. abc = \log. a + \log. b + \log. c$; u. s. w.

Für jede andere Basis A wird der Satz eben so bewiesen. Mit Hülfe dieses Satzes kann man

1) die Logarithmen von Producten berechnen, wenn die Logarithmen der Factoren bekannt sind;

2) die Multiplication auf die Rechnung mit Logarithmen zurückführen.

So findet man in den Tafeln

$$\begin{array}{rcl} \log. 47 & = & 1{,}6720979 \\ \log. 17 & = & 1{,}2304489 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. 47 + \log. 17 = \log. 17 \,.\, 47 = 2{,}9025468$$

Wird dieser Logarithme in den Tafeln nachgeschlagen, so findet sich, daß er der Logarithme von 799 ist. Dies ist, wie auch die Multiplication lehret, das Product von 17 und 47.

Vortheilhaft ist der Gebrauch der Logarithmen erst, wenn die Factoren aus vielen Ziffern bestehen. Dann kommt man auf Logarithmen, die in den Tafeln wenigstens bis auf die letzten Decimalstellen nicht stehen. Wie man von solchen

Logarithmen die zugehörige Zahl findet, davon weiter unten. Bestehen die Factoren aus mehr Ziffern, als die in den Tafeln enthaltenen Zahlen, so müssen die Logarithmen erst berechnet werden, wovon ebenfalls weiter unten.

§. 61.

Lehrsatz. **Der Logarithme eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus abzieht,** oder

$$\log.\frac{a}{b} = \log.a - \log.b$$

Beweis.

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{\log.a}}{10^{\log.b}} = 10^{\log.a - \log.b} \quad (§.\ 42.)$$

$$\frac{a}{b} = 10^{\log.\frac{a}{b}}; \text{ folglich:}$$

$$\log.\frac{a}{b} = \log.a - \log.b.$$

Für jede andere Basis A wird der Beweis eben so geführt.

§. 62.

Die Logarithmen von Decimalbrüchen sind eben so wie von ganzen Zahlen, nur die Characteristica wird verändert, nämlich um soviel vermindert, als Decimalstellen da sind. Denn jeder Decimalbruch ist eine ganze Zahl, dividirt durch 10, 100, 1000 . . ., deren Logarithmen — also 1, 2, 3 . . . (§. 58) — abgezogen werden müssen. Da demnach nur ganze Zahlen abgezogen werden, so bleibt die Mantissa unverändert. Man schlägt die Decimalbrüche daher so auf, als wären sie ganze Zahlen, und bestimmt nur die Characteristica folgendermaßen:

Enthält der Decimalbruch außer den Decimalstellen noch eine ganze Zahl, so wird von dieser die Characteristica genommen. Fehlt die ganze Zahl und sind nur Zehntheilchen und die folgenden Decimalstellen vorhanden, so ist die Characteristica — 1; sind auch keine Zehntheilchen, sondern nur Hundertheilchen und die folgenden Stellen vorhanden, so ist die Characteristica — 2; sind nur Tausendtheilchen und die folgenden Stellen vorhanden, so ist die Characteristica — 3; u. s. f. Jede negative Kennziffer wird ans Ende des Logarithmen geschrieben, und bedeutet nichts anders, als daß die zu dem positiven Logarithmen gehörige Zahl noch durch soviel mal 10 dividirt werden müsse, als diese negative Kennziffer Einheiten hat.

Beispiele.

$$\log. 731,2 = 2,8640362$$
$$\log. 0,7312 = 0,8640362 - 1$$
$$\log. 0,07312 = 0,8640362 - 2$$
$$\log. 0,007312 = 0,8640362 - 3$$
$$\log. 0,0007312 = 0,8640362 - 4.$$

§. 63.

Wenn 3 Zahlen wenig von einander verschieden sind, so verhalten sich ihre Differenzen sehr nahe wie die Differenzen ihrer Logarithmen. Davon kann man sich überzeugen, wenn man in den Tafeln einige auf einander folgende Logarithmen abzieht. Will man daher den Logarithmen einer Zahl M, die aus mehr als 5 Ziffern besteht, finden, so verfährt man folgendermaßen:

Man theile sie durch ein Komma bey der 5ten Ziffer in zwei Theile, nenne den ersten Theil, welcher die ganze Zahl enthält, N, und den zweiten Theil, welcher die Decimalstellen enthält, δ; hierauf schlage man die Logarithmen von N und von N + 1 auf, ziehe sie von einander ab, und nenne die Differenz D. Darauf mache man die Proportion

$$1 : \delta = D : x$$

und berechne daraus x; dann wird $\log. M = \log. N + x$ seyn, wenn man in dem gefundenen Logarithmen die zu M gehörige Kennziffer setzt.

Exempel.

Der Logarithme von 345864 wird gesucht.

Hier ist $N = 34586$; $\delta = 0,4$; $N + 1 = 34587$.

$$\begin{array}{llll} \log.(N+1) & = \log. 34587 & = & 4,5389129 \\ \log. N & = \log. 34586 & = & 4,5389003 \\ \hline & D & = & 0,0000126 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1 : 0,4 & = 0,0000126 : x \\ x & = 0,0000050 \\ \log. N & = 4,5389003 \\ x & = 0,0000050 \\ \hline \log. 34586,4 & = 4,5389053 \\ \log. 345864 & = 5,5389053 \end{array}$$

Anmerk. Die in den Tafeln befindlichen Partes proportionales ersparen diese Berechnung durch eine Proportion, indem sie bereits enthalten, um wieviel die Logarithmen zunehmen, wenn die zugehörigen Zahlen um Zehntheilchen wachsen, und umgekehrt. Eine genauere Anweisung darüber findet man in der Einleitung zu den Tafeln. Doch benutze der Anfänger die daselbst berechneten Proportionaltheile nicht eher, als bis er einige selbst berechnet hat. Er wird dadurch an Einsicht in die Sache gewinnen.

Sucht man zu einem Logarithmen, der nicht genau in den Tafeln befindlich ist, die zugehörige Zahl, so verfährt man folgendermaßen:

Dieser Logarithme wird zwischen zwei in den Tafeln auf einander folgenden Logarithmen liegen. Diese, deren zugehörige Zahlen mit N und N + 1 bezeichnet werden mögen, ziehe man von einander ab, und nenne ihre Differenz D; darauf ziehe man auch den kleinern Logarithmen in den Tafeln von dem gegebenen ab, und nenne diese Differenz d. Die zu dem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl wird von N um einen Bruch verschieden seyn, der noch unbekannt ist und mit x bezeichnet werden kann. Die zu den 3 Logarithmen gehörigen Zahlen werden demnach seyn: N, N + x, N + 1, und deren Differenzen 1 und x. Darauf mache man folgende Proportion:

$$D : d = 1 : x,$$

aus welcher x berechnet und zu N hinzugefügt wird. Diese Zahl, nämlich N + x, ist die zu dem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl.

Exempel.

Der gegebene Logarithme sey 4,4860175.

Dieser liegt zwischen den in den Tafeln auf einander folgenden: 4,4860052 und 4,4860194. Schreibe diese 3 Logarithmen unter einander, um D und d zu berechnen.

$$\begin{array}{lcl} \log.\ (N + 1) & = & 4{,}4860194 \\ \log.\ (N + x) & = & 4{,}4860175 \\ \log.\ N & = & 4{,}4860052 \\ \hline D & = & 0{,}0000142 \\ d & = & 0{,}0000123 \\ 142 : 123 & = & 1 : x \\ x & = & 0{,}86. \end{array}$$

Aus den Tafeln wird gefunden $N = 30620$; folglich ist $N + x = 30620{,}86 =$ der zum gegebenen Logarithmen 4,4860175 gehörigen Zahl.

Ist die Kennziffer des gegebenen Logarithmen eine andere Zahl als 4, so wird eben so gerechnet, als wäre sie 4, nur wird das Komma zuletzt dahin verrückt, wohin es nach der Kennziffer gehört, weil eine Veränderung derselben in der zum Logarithmen gehörigen Zahl nichts weiter verändert, als nur die Stelle des Komma.

Auch hier kann man die in den Tafeln befindlichen Proportionaltheile mit Vortheil brauchen.

Aufgabe 1.

Das Product zweier Zahlen $a = 456{,}78$ und $b = 81{,}425$ soll mit Hülfe der Logarithmen berechnet werden.

$$
\begin{array}{rcl}
\log.\ 456{,}78 & = & 2{,}6597071 \\
\log.\ 81{,}425 & = & 1{,}9107578 \\
\hline
\log.\ ab & = & 4{,}5704649 \\
\log.\ 37193 & = & 4{,}5704612 \\
\hline
d & = & \ldots 37 \\
0{,}3 \ldots & & \ldots 35 \\
0{,}01 \ldots & & \ldots 2 \\
x = 0{,}31 & & \\
\end{array}
$$

$$ab = 37193{,}31 \ldots$$

Aufgabe 2.

Mit Hülfe der Logarithmen soll berechnet werden, wie groß der Quotient von $a = 376{,}71$ dividirt durch $b = 83{,}755$ ist.

$$
\begin{array}{rcl}
\log.\ 376{,}71 & = & 2{,}5760071 \\
\log.\ 83{,}755 & = & 1{,}9230107 \\
\hline
\log.\ \frac{a}{b} & = & 0{,}6529964 \\
\log.\ 44977 & = & 4{,}6529905 \\
\hline
d & = & \ldots 59 \\
0{,}6 \ldots & & \ldots 58 \\
0{,}01 \ldots & & \ldots 1 \\
x = 0{,}61 & & \\
\end{array}
$$

$$\frac{a}{b} = 4{,}497761 \ldots$$

§. 64.

Ist bei der Division der Logarithme des Divisors größer, als der Logarithme des Dividendus, so daß die Subtraction nicht angeht, so addire man zur Characteristica des Logarithmen des Dividendus soviel als nöthig ist, um die Subtraction möglich zu machen, und ziehe eben soviel am Ende ab.

Exempel 1.

a = 48500 soll durch b = 77509 dividirt werden.

$$\begin{aligned} \log.\ 48500 &= \overset{+1}{4},6857417 - 1 \\ \log.\ 77509 &= 4,8893521 \\ \hline \log.\ \tfrac{a}{b} &= 0,7963896 - 1 \\ \frac{a}{b} &= 0,6257337. \end{aligned}$$

Exempel 2.

a = 48,5 soll durch b = 7750,9 dividirt werden.

$$\begin{aligned} \log.\ 48,5 &= \overset{+3}{1},6857417 - 3. \\ \log.\ 7750,9 &= 3,8893521 \\ \hline \log.\ \tfrac{a}{b} &= 0,7963896 - 3 \\ \frac{a}{b} &= 0,006257337 \end{aligned}$$

Exempel 3.

a = 0,0485 soll durch b = 0,00077509 dividirt werden.

$$\begin{aligned} \log.\ a &= \overset{+1}{0},6857417 - 2 - 1 \\ \log.\ b &= 0,8893521 - 4 \\ \hline \log.\ \tfrac{a}{b} &= 0,7963896 + 1 = 1,7963896 \\ \frac{a}{b} &= 62,57337. \end{aligned}$$

§. 65.

Lehrsatz. Der Logarithme einer Potenz wird gefunden, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Logarithmen der Grundzahl multiplicirt.

Beweis.

Der Exponent der Potenz ist entweder eine ganze Zahl, ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch; folglich wird, wenn m, n ganze Zahlen sind, jede Potenz, deren Grundzahl a ist, durch a^m oder durch $a^{\frac{m}{n}}$ vorgestellt. Nun ist

$$a^m = \left(10^{\log. a}\right)^m = 10^{m \log. a}\ ;\ (§.\ 38).$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(10^{\log. a}\right)^{\frac{m}{n}} = 10^{\frac{m}{n}\log. a}\ ;\ (§.39.\text{Zus.})$$

$m \log. a$ und $\frac{m}{n} \log. a$ sind die Exponenten, welche aus der Zahl 10, als Grundzahl, a^m und $a^{\frac{m}{n}}$ hervorbringen, d. i. die Logarithmen der Potenzen a^m und $a^{\frac{m}{n}}$.

Eben so wird der Satz für jede andere Basis des Logarithmensystems bewiesen.

Zusatz. Um also den Logarithmen der Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl a zu finden, dividire man den Logarithmen von a durch 2. — Ueberhaupt um den Logarithmen der Wurzel vom nten Grade aus a zu finden, dividire man den Logarithmen von a durch n. Hat der Logarithme von a eine negative Kennziffer, so wird zu ihr und zu der positiven soviel addirt, daß die negative Kennziffer durch n theilbar wird.

Exempel.

Mit Hülfe der Logarithmen die Quadratwurzel aus 5 zu berechnen; ferner aus 0,5; 0,05; 0,005.

$$\log. 5 = 0{,}6989700$$
$$\frac{\log. 5}{2} = 0{,}3494800$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236068$$

$$\log. 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1 = 1{,}6989700 - 2$$
$$\frac{\log. 0{,}5}{2} = 0{,}8494850 - 1$$
$$\sqrt{0{,}5} = 0{,}7071068,$$ wenn man die Proportionaltheile in den Tafeln zu Hülfe nimmt, und
$$\sqrt{5} = 0{,}70710677,$$ wenn man die letzten Ziffern durch eine Proportion selbst berechnet.

Anmerk. Die Quadratwurzelausziehung giebt 0,70710678... Die Proportionaltheile in den Tafeln nämlich geben für die 7te Ziffer in der zugehörigen Zahl immer den genauesten Werth an, entscheiden aber nicht immer, ob dieser der nächst kleinere oder nächst größere ist.

$$\log. 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$$
$$\frac{\log. 0{,}05}{2} = 0{,}3494800 - 1$$
$$\sqrt{0{,}05} = 0{,}2236068$$
$$\log. 0{,}005 = 0{,}6989700 - 3$$
$$= 1 + 0{,}6989700 - 3 - 1$$
$$= 1{,}6989700 - 4$$
$$\frac{\log. 0{,}005}{2} = 0{,}8494850 - 2$$
$$\sqrt{0{,}005} = 0{,}07071068$$

Aus 5; 0,5; 0,05 die Kubikwurzel zu ziehen.

$$\log. 5 = 0{,}6989700$$

$$\frac{\log. 5}{3} = 0{,}2329900$$

$$\sqrt[3]{5} = 1{,}709976$$

$$\log. 0{,}5 = \overset{+2}{0{,}6989700} - 1 - 2$$

$$\frac{\log. 0{,}5}{3} = 0{,}8996566 - 1$$

$$\sqrt[3]{0{,}5} = 0{,}7937003$$

$$\log. 0{,}05 = \overset{+1}{0{,}6989700} - 2 - 1$$

$$\frac{\log. 0{,}05}{3} = 0{,}5663233 - 1$$

$$\sqrt[3]{0{,}05} = 0{,}3684031.$$

Die Potenz $0{,}5^{\frac{3}{4}}$ zu berechnen.

$$\log. 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$$

$$3 \log. 0{,}5 = 2{,}0969100 - 3$$

$$= 3{,}0969100 - 4$$

$$\tfrac{3}{4} \log. 0{,}5 = 0{,}7742275 - 1$$

$$0{,}5^{\frac{3}{4}} = 0{,}5946035.$$

Anmerk. Ist in einer geometrischen Progression das erste Glied und auch der Exponent $= e$, so sind die Glieder derselben Potenzen von e, deren Exponenten eine arithmetische Progression bilden. So ist für die geometrische Progression

$$e + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + \ldots\ldots e^n$$

die dazu gehörige arithmetische der Exponenten der Potenzen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$$

Jedes Glied der arithmetischen Reihe ist zugleich die Nummer für jedes correspondirende Glied der geometrischen Reihe und der Logarithme desselben für die Grundzahl e. Kann e so gewählt werden, daß in der geometrischen Reihe alle ganze Zahlen genau oder doch nahe zu vorkommen? Die Antwort ist: Ja. Denn e sey zuerst $= 10$, und es soll die Zahl 11 sich in der Reihe befinden. Man wird das Verhältniß der auf einander folgenden Glieder e und e^2, d. i. 10 und 100 halbiren (§. 51) und so fortfahren, bis man auf 2 Glieder gekommen ist, welche selbst nur wenig von einander verschieden sind, und zwischen welche 11 fällt. Die durch dieses Halbiren entstehenden mittleren Glieder werden seyn: $10^{\frac{3}{2}}$, $10^{\frac{1+\frac{3}{2}}{2}} = 10^{\frac{5}{4}}$, . . . , $10^{\frac{l}{2^m}}$, wo l, m ganze Zahlen sind. Man wird also 11 und jede andere ganze Zahl zwischen 10 und 100 erhalten, wenn man m groß genug nimmt und aus 10 die Wurzel vom 2^mten Grade zieht, und diese Wurzel zum Exponenten der Progression macht, dessen erstes Glied $= 10$ ist; die dazu gehörige arithmetische wird alsdann seyn:

$$1 + \left(1+\frac{1}{2^m}\right) + \left(1+\frac{2}{2^m}\right) + \left(1+\frac{3}{2^m}\right) + \cdots$$

Jedes Glied dieser Reihe wird der Logarithme des correspondirenden Gliedes in der geometrischen Reihe seyn. Wählt man 1 zum ersten Gliede der geometrischen Reihe, und setzt sie weit genug fort, so kann man die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 an erhalten. Aus dieser Ansicht kann ebenfalls die Lehre von den Logarithmen entwickelt werden, und so sind die ersten Logarithmen von ihrem Erfinder Johann Neper, einem schottischen Baron, welcher um das Jahr 1600 lebte, wirklich berechnet worden. Daher rührt auch der Name Logarithme (λογων ἀριθμος), welcher soviel als Verhältnißzähler bedeutet.

Aufgaben zur Uebung in der Rechnung mit Logarithmen.

Anmerk. In den Resultaten ist jede Ziffer in Klammern die genauere, aus den großen Tafeln von Vega berechnete Zahl für die neben ihr stehende Ziffer.

Den Logarithmen einer Zahl zu finden, die aus mehr als 5 Ziffern besteht.

1) Log.1000478 = 6,0002075

2) log. 100137 = 5,0005946

3) log. 1008,34 = 3,0036070

4) log. 10203,1 = 4,0087322 (1)

5) log. 0,8495534 = 0,9291907(6) — 1

6) log. 0,08472412 = 0,9280071 — 2

Zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden.

7) 4,3947399 = log. 24816,46

8) 0,0068342 = log. 1,015861

9) 0,4600365 — 1 = log. 0,2884274

10) 0,2712585 — 2 = log. 0,01867491

Gebrauch der Logarithmen in der Multiplication und Division.

11) log.(793 . 971) = 5,8864924 = log. 770003;
oder 793 . 971 = 770003.

12) $\log.(1274 \cdot 3551) = 6{,}6555201 = \log. 4523974$

13) $\log. \frac{1274}{3551} = 0{,}5548187 - 1 = \log. 0{,}3587722$

14) $\log. \frac{31{,}79}{2{,}8972} = 1{,}0403120 = \log. 10{,}97266$

15) $\log. \frac{1}{34569} = 0{,}4613132 - 5 =$
$\log. 0{,}00002892765.$

Gebrauch der Logarithmen zur Berechnung der Potenzen.

16) $\sqrt{2} = 1{,}414214$
$\log. \sqrt{2} = 0{,}1505150$

17) $\sqrt{0{,}2} = 0{,}4472136$
$\log. \sqrt{0{,}2} = 0{,}6505150 - 1$

18) $\sqrt{\frac{97}{101}} = 0{,}979998 \ldots$
$\log. \sqrt{\frac{97}{101}} = 0{,}9912251 - 1$

19) $\sqrt[3]{\frac{1003}{342314}} = 0{,}1430953 \ldots$

20) $(6{,}8502)^2 = 46{,}925254$

21) $\sqrt[7]{\frac{31}{4024}} = 0{,}499$

22) $\left(\frac{205}{1592}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}2550002$

23) $\left(\frac{791}{991}\right)^{0{,}99} = 0{,}799985 \ldots$

24) $(0{,}0000286)^{0{,}03} = 0{,}7306190 \ldots$

25) $(1{,}39)^{3\frac{5}{6}} = 3{,}533649 \ldots$

Berechnung gemischter Ausdrücke mit Hülfe der Logarithmen.

26) $892 \cdot (0{,}0078)^{\frac{7}{11}} = 40{,}64157$

27) $\frac{0{,}83 \cdot (38)^{\frac{7}{15}}}{728} = 0{,}006225569$

28) $\frac{(71)^{\frac{3}{4}} \cdot (0{,}0047)^{\frac{6}{7}}}{27\sqrt{37}} = 0{,}001505339 \ldots$

Anwendung der Logarithmen auf die geometrischen Progressionen und auf die Zinsrechnung.

§. 66.

Gebrauch der Logarithmen in den geometrischen Progressionen.

Ist die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression groß, so kann das letzte Glied am leichtesten mit Hülfe der Logarithmen berechnet werden. Dann ist

$$\log. u = \log. a + (n - 1) \log. e. \quad (§. 57).$$

Für drei in dieser Gleichung gegebene Stücke läßt sich das vierte leicht herleiten.

Beispiel.

Im Churfürstenthum Hessen betrug die Bevölkerung
im Jahre 1822 578501
„ „ 1829 . . . . . 644533;

was für ein Bruch von der Volksmenge jeden Jahres ist der jährliche Zuwachs, wenn er in jedem Jahr von 1822 bis 1829 ein gleicher Theil der Bevölkerung gewesen ist?

Antwort. Ungefähr $\frac{1}{64}$.

Erläuterung. Hier ist $a = 578501$; $n - 1 = 7$; $e = 1 + x$, wo x der gesuchte Bruch ist; $u = 644533$.

Folglich: $7 \log. (1 + x) = \log. u - \log. a$

$$\log. (1 + x) = \frac{\log. u - \log. a}{7}$$

$$\begin{array}{rcl} \log. u & = & 5{,}8092451 \\ \log. a & = & 5{,}7623042 \\ \hline \log. u - \log. a & = & 0{,}0469409 \\ \frac{\log. u - \log. a}{7} & = & 0{,}0067058 \end{array}$$

$$1 + x = 1{,}01556 = 1 + \frac{1}{64}.$$

Uebungsaufgaben.

1) In P. handelt jemand mit Kleinigkeiten, die er an demselben Orte mit einem geringen Rabatt einkaufte. Er kauft und verkauft nur gegen baare Zahlung. Jede Woche setzt er sein anfangs nur 100 Rubel großes Capital um, obgleich nur mit 2 Procent Gewinn, wovon er die Hälfte für seinen Lebensunterhalt verbraucht. Wie groß ist sein Capital nach 10 Jahren, jedes Jahr zu 52 Wochen gerechnet?

Antwort. 17665 Rubel.

2) Von 2 Kaufleuten hat A den Grundsatz: gut und theuer, B den Grundsatz: wohlfeil, wenn auch schlecht. Jemand legt in eines jeden Handlung ein Capital von 10000 Rubeln auf 10 Jahr, mit der Bedingung, daß er nach Ablauf dieser Zeit die Hälfte des mit diesem Capital gemachten Gewinnes erhalte. A setzt sein Capital jährlich einmal mit 24 Procent, B viermal mit 6 Procent Gewinn um. Wieviel hat jeder damit nach Ablauf der 10 Jahre gewonnen?

Antwort. A 75944 Rubel.
B 92857 „

3) Ein Kaufmann kann seine Waaren nach der Schnelligkeit des Umsatzes in 3 Classen theilen. Die erste Classe setzt er 2, die zweite 5, die dritte 11 mal in 5 Jahren um, und die letzte jedes mal mit 12 Procent Gewinn; wieviel Gewinn brachte sie auf 1000 Rubel in 5 Jahren, und wieviel Procent Gewinn mußte er für jeden Umsatz der übrigen Waaren rechnen, um in 5 Jahren mit denselben eben soviel auf 1000 Rubel zu gewinnen, als mit der dritten Classe?

Antwort. Die Waaren der ersten Classe mußten $86\frac{1}{2}$, der zweiten $28\frac{1}{3}$ Procent Gewinn bringen, und jede Classe trug dann in 5 Jahren 2479 Rubel Gewinn auf 1000 Rubel ein.

4) Ein Wucherer nahm von einem andern 1000 Rubel auf 10 Jahr auf, die er mit 10 Procent jährlich Interesse auf Interesse verzinsen mußte. Er wucherte damit so, daß er in 10 Jahren doch noch 2000 Rubel gewann, indem er monatlich mit Zinsen auf Zinsen verlieh, und die eingelaufenen Gelder gleich wieder anzubringen wußte. Wieviel Zinsen nahm er monatlich?

Antwort. $1\frac{2}{7}$ Procent.

Mehr Beispiele über den Gebrauch der Logarithmen in den geometrischen Progressionen folgen in der

Zinsrechnung.

§. 67.

Wenn man jemanden auf eine gewisse Zeit eine Summe Geldes zur Benutzung überläßt, und sich dagegen einen verhältnißmäßigen Ersatz ausbedingt: so ist die Berechnung desselben Gegenstand der Zinsrechnung. Hierbei kommen Capital, Procent, Zinsen, Zeit in Betrachtung. Demnach beschäftigt sich die Zinsrechnung mit der Bestimmung von einem dieser vier Stücke, wenn die drei übrigen gegeben sind.

Entweder werden die Zinsen bloß vom anfänglich verliehenen Capital gerechnet, oder die Zinsen werden wieder zum Capital geschlagen, und von dem dadurch vermehrten Capital werden neue Zinsen gerechnet, und so fort. Daher zerfällt die Zinsrechnung in zwei Abschnitte:

1) die einfache Zinsrechnung;

2) die zusammengesetzte Zinsrechnung.

§. 68.

Einfache Zinsrechnung.

Wird schon in der Rechenbüchern vollständig abgehandelt, daher hier nur eine Uebersicht derselben.

Bezeichnet man mit C das verliehene Capital, mit p die jährlichen Procente, mit n die Zeit, wie lange das Capital gestanden, in Jahren und Theilen desselben ausgedrückt, mit z die Zinsen dafür, so hat man überhaupt folgende Proportion zur Berechnung eines dieser Stücke:

$$100 : C = np : z.$$

Diese Proportion, gehörig angewandt, reicht zur Auflösung aller Aufgaben der einfachen Zinsrechnung hin.

§. 69.

Zusammengesetzte Zinsrechnung.

In dieser können vornehmlich folgende Fragen aufgeworfen werden:

1) Wie groß wird ein Capital, auf Zinseszinsen verliehen, nach einigen Jahren seyn?

2) Wie groß muß ein Capital, das auf eine gegebene Zeit verliehen wird, seyn, um eine gegebene Größe zu erreichen?

3) Wie lange muß ein Capital auf Zinseszinsen stehen, um zu einer gegebenen Größe anzuwachsen?

4) Wenn jährlich eine bestimmte Summe (Jahr-

rente) von einem verliehenen Capital ausgezahlt werden soll: wieviel bleibt davon nach einer gegebenen Zeit übrig?

5) Wie groß muß ein Capital seyn, um zu einer gegebenen Jahrrente für eine gegebene Zeit hinzureichen?

6) Wie groß kann die Jahrrente für ein gegebenes Capital und für eine gegebene Zeit seyn?

7) Wie lange kann eine gegebene Jahrrente für ein gegebenes Capital dauern?

Erste Frage. Das Capital C wird auf n Jahr zu p Procent auf Zinseszinsen verliehen, wie groß wird es nach Ablauf derselben seyn?

Antwort. Bezeichnet B diese Größe des Capitals, so wird seyn

$$B = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . C \ldots (1).$$

Erläuterung.

Am Schlusse des ersten Jahres oder zu Anfang des zweiten ist das Capital $= C + \frac{pC}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) C$; oder: um das in einem Jahre durch die Zinsen vermehrte Capital zu erhalten, multiplicirt man das anfängliche Capital mit $1 + \frac{p}{100}$. Folglich wird das Capital am Ende des zweiten Jahres seyn $=$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) C . \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 . C;$$

am Ende des nten Jahres $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . C.$

So wird ein Bankbillet von 1000 Rubel, welches 5 Procent Zinsen trägt, und auf Zinseszinsen ausgestellt wird, 4 Jahr nach seiner Ausstellung $1000 \cdot (1{,}05)^4 = 1215$ Rubel 50 Copeken werth seyn, indem dafür $p = 5$, $n = 4$ ist.

In den meisten Fällen wird die Berechnung mit Hülfe der Logarithmen erleichtert.

Beispiel.

Es sey $C = 7355$ Rubel; $n = 12$; $p = 6$.

$$\begin{aligned} \log. 1{,}06 &= 0{,}0253059 \\ 12 \log. 1{,}06 &= 0{,}3036708 \\ \log. 7355 &= 3{,}8665827 \\ \log. C + \log. \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^n &= 4{,}2702535 \\ B &= 14799{,}72 \text{ Rub.} \end{aligned}$$

Das Capital wird also in 12 Jahren ungefähr doppelt so groß, als es anfänglich war.

Zweite Frage. Man will eine Schuld B, fällig nach n Jahren, gleich entrichten; wieviel hat man zu zahlen, wenn p Procent gerechnet werden?

Antwort. Wird die dazu erforderliche Summe mit x bezeichnet, so ist

$$x = \frac{B}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \quad \ldots . \quad (2);$$

folgt aus (1).

Beispiel.

Es sey $B = 2000$ Rubel; $p = 4$; $n = 7$.

$$\begin{aligned} \log. 2000 &= 3{,}3010300 \\ \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ 7 \log. 1{,}04 &= 0{,}1192331 \\ \log. x &= 3{,}1817969 \\ x &= 1519{,}84 \text{ Rubel.} \end{aligned}$$

Dritte Frage. Das Capital C wird zu p Procent auf Zinseszinsen verliehen. Es soll anwachsen, bis es $= B$ wird. Wieviel Jahre muß es stehen?

Antwort. n Jahre und

$$n = \frac{\log. B - \log. C}{\log. (1 + \frac{p}{100})} \quad \ldots \quad (3).$$

Erläuterung. Aus (1) folgt:

$$\log. B = \log. [(1 + \tfrac{p}{100})^n . C]$$

$$\log. B = \log. C + n \log. (1 + \tfrac{p}{100})$$

$$n \log. (1 + \tfrac{p}{100}) = \log. B - \log. C$$

$$n = \frac{\log. B - \log. C}{\log. (1 + \frac{p}{100})} .$$

Beispiel.

Es sey $B = 2000$; $C = 1000$; $p = 5$.

$$\begin{aligned}
\log. 2000 &= 3{,}3010300 \\
\log. 1000 &= 3{,}0000000 \\
\hline
\log. B - \log. C &= 0{,}3010300 \\
\log. 0{,}3010300 &= 0{,}4786098 - 1 \\
\log. 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\
\log. 0{,}0211893 &= 0{,}3261167 - 2 \\
\log. n &= 1{,}1524931 \\
n &= 14{,}206 \text{ Jahr.}
\end{aligned}$$

Oder bei 5 Procent wird sich das Capital ungefähr in 14 Jahren verdoppeln.

* Vierte Frage. Vom Capital C, das zu p Procent verliehen ist, wird n Jahr hindurch die Jahrrente b, am Schlusse jeden Jahres (welche Voraussetzung auch für die drei

folgenden Fragen gilt), ausgezahlt. Wie groß ist es am Ende dieser Zeit?

Antwort. Wird es mit d bezeichnet und wird $100\,b + (p\,C - 100\,b)\,(1 + \frac{p}{100})^n = M$ gesetzt, so ist

$$d = \frac{M}{p} \;\ldots\ldots\; (4).$$

Erläuterung. Das Capital C wird, wenn man $1 + \frac{p}{100} = m$ setzt, am Ende des

1sten Jahres seyn . . . . . . $Cm - b$

2ten „ $(Cm - b)\,m - b = Cm^2 - bm - b$

3ten „ $(Cm^2 - bm - b)\,m - b = Cm^3 - bm^2 - bm - b$

nten „ . . . $Cm^n - bm^{n-1} - bm^{n-2} - \ldots = Cm^n - [b + bm + bm^2 \ldots + bm^{n-1}]$

Die in der Klammer eingeschlossenen Glieder bilden eine geometrische Progression, deren Summe $= \frac{b\,(m^n - 1)}{m - 1}$ ist. (§.57).

Daher ist $d = Cm^n - \frac{b\,(m^n - 1)}{m - 1}$; oder

$$d = C\,.\,(1 + \tfrac{p}{100})^n - 100\,b\,\frac{[(1 + \frac{p}{100})^n - 1]}{p}$$

$$= [(p\,C - 100\,b)\,(1 + \tfrac{p}{100})^n + 100\,b] : p = \frac{M}{p}.$$

Beispiel.

Ein Jüngling bekommt 6700 Rubel zum Studieren. Da er nur 800 Rubel jährlich zu verbrauchen gedenkt, so giebt er diese Summe einem sichern Kaufmann mit der Bedingung, ihm jährlich 800 Rubel auszuzahlen. Wieviel bleibt nach 6 Jahren von diesem Capital noch übrig, wenn jährlich 5 Procent Zinsen gerechnet werden?

Antwort: 3537 Rubel 10 Cop.

$$100\,b = 80000$$
$$p\,C = 33500$$
$$p\,C - 100\,b = 46500$$
$$\log.\ 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$6\ \log.\ 1{,}05 = 0{,}1271358$$
$$\log.\ 46500 = 4{,}6674530$$
die Summe beider $= 4{,}7945888$

zugeh. Zahl $= 62314{,}46$

$$M = 17685{,}54$$
$$\frac{M}{p} = d = 3537{,}10$$

* Fünfte Frage. Wieviel kann man, wenn der Zinsfuß p Procent ist, zahlen, um eine Jahrrente von der Größe b auf n Jahr zu erhalten.

Antwort. Die Summe C und

$$C = \left[100b - \frac{100\,b}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\right] : p \quad \ldots \quad (5).$$

Folgt aus (4).

Beispiel.

Ein reicher Mann bewilligt seinem alten Diener eine Pension von 500 Rubel auf 20 Jahr, die auf seine Erben übergeht, wenn er früher stirbt, und überträgt die Zahlung einem Gutsbesitzer, dem er das dazu erforderliche Capital gleich auszahlen will. Wie groß wird es seyn, wenn $4\frac{1}{2}$ Procent Zinsen gerechnet werden?

Antwort. 6503 Rubel.

* Sechste Frage. Wie groß ist die Jahrrente b, welche für ein gegebenes Capital C auf eine gegebene Anzahl von Jahren, n, bewilligt werden kann, wenn der Zinsfuß p Procent ist?

Antwort. $b = \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{pC}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1} \ldots . (6)$

Folgt aus (5).

Beispiel.

Ein alter Mann von 60 Jahren hat 10000 Rubel im Vermögen. Da er nicht älter als 90 Jahr zu werden glaubt, so will er sein Vermögen gegen eine Jahrrente auf 30 Jahr hingeben. Wie groß wird diese seyn können, wenn der Zinsfuß 3 Procent ist?

Antwort. 510 Rubel.

* Siebente Frage. Wieviel Jahre kann bei p Procent Zinsen die Jahrrente b für das Capital C dauern?

Antwort. Bedeutet n die Anzahl der Jahre, so ist

$$n = \log. \frac{100\,b}{100b - pC} : \log. \left(1+\frac{p}{100}\right) \ldots (7).$$

Sechster Abschnitt.

Die Combinationslehre.

* §. 70.

Die Mannigfaltigkeit der Naturproducte setzt jeden, der darüber nachdenkt, in Erstaunen. Da nun eine aufmerksame Betrachtung lehrt, daß nur wenige einfach, bei Weitem die meisten aus diesen zusammengesetzt sind, so entsteht die Frage:

In wieviel verschiedene Verbindungen können gegebene Elemente, die wir mit a, b, c, d . . . bezeichnen wollen, gebracht werden?

Mit dieser Frage beschäftigt sich die Combinationslehre.

* §. 71.

Man kann sich drei Methoden der Verbindung gegebener Elemente denken.

I. Alle gegebene Elemente werden zu jeder Verbindung genommen, nur die Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, wird abgeändert. Solche Verbindungen heißen, in Beziehung auf einander, Versetzungen oder Permutationen; und gegebene Elemente in solche Verbindungen bringen, bis alle erschöpft sind, heißt: sie versetzen oder permutiren. So entstehen für 3 gegebene Elemente a, b, c folgende Permutationen:

abc, acb; bac, bca; cab, cba.

II. Einige der gegebenen Elemente werden beliebig, aber in festgesetzter Anzahl, genommen, verbunden und permutirt; eben so verfährt man abwechselnd mit allen Elementen, bis alle an die Reihe gekommen sind, so daß keine mehr in derselben Anzahl gewählt werden können, die man nicht schon verbunden hätte. Solche Verbindungen heißen die Variationen der gegebenen Elemente, und werden nach der Anzahl, in welcher diese genommen werden, in Classen getheilt, so daß die Variationen der ersten Classe nur ein Element enthalten, und Variationen der 2ten, 3ten oder einer höhern Classe, diejenigen heißen, in welchen 2, 3 oder mehr Elemente mit einander verbunden sind. Gegebene Elemente in solche Verbindungen bringen, heißt sie variiren, und zwar zur ersten, zweiten, dritten oder einer höhern Classe, je nachdem dadurch Variationen der ersten, zweiten, dritten oder einer höhern Classe erzeugt werden sollen.

So sind für 3 gegebene Elemente a, b, c, die Variationen der ersten Classe:

a, b, c;

der zweiten Classe:

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;

der dritten Classe:

aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc; baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc; caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

III. Ebenfalls werden einige der gegebenen Elemente beliebig, in festgesetzter Anzahl genommen, verbunden, und dann mit den übrigen abwechselnd so lange vertauscht, bis noch in Betreff der Wahl der Elemente neue Verbindungen entstehen, so daß in keiner der erzeugten Verbindungen alle Elemente dieselben bleiben. Solche Verbindungen gegebener Elemente heißen die Combinationen derselben, und werden ebenfalls nach der Anzahl der genommenen Elemente in Classen getheilt, wie die Variationen. Gegebene Elemente in solche Verbindungen bringen, heißt sie combiniren, und zwar zur ersten, zweiten, dritten, oder einer höhern Classe, je nachdem 1, 2, 3 oder mehr von den gegebenen Elementen zu diesen Verbindungen genommen werden. So sind für 3 gegebene Elemente a, b, c die Combinationen

der ersten Classe: a, b, c;

der zweiten Classe: aa, ab, ac, bb, bc, cc;

der dritten Classe: aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc.

Combinationen sind nichts anders als Variationen ohne Permutation; und Combinationen mit Permutation sind Variationen.

* §. 72.

In den Variationen und Combinationen wiederholen sich die Elemente in einigen Verbindungen, in andern nicht. Die letztern heißen Variationen, Combinationen ohne Wiederholung. Nimmt man dazu die erstern, so hat man alle Variationen, Combinationen, und diese heißen dann, zum Unterschiede von jenen partiellen, Variationen, Combinationen mit Wiederholung, welche ich demnach in der Folge, wie bisher schlechtweg Variationen, Combinationen nennen werde. In den Permutationen können unter den gegebenen Elementen einige gleiche seyn. Von welcher Art nun die Verbindung sey, so heißt die Anzahl der einander gleichen Elemente der Wiederholungsexponent dieses Elementes. So ist 2 der Wiederholungsexponent von b, 3 der von d in der Verbindung

abb c ddd ef.

* §. 73.

Die Anzahl der Permutationen, Variationen und Combinationen für jede Menge von Elementen zu bestimmen, ist dasjenige, worauf es hier hauptsächlich ankommt. Diese Bestimmung ist die Grundlage einer Reihe von interessanten Berechnuugen über die Natur und über das Leben.

Zu dieser Bestimmung ist bei jeder der angeführten Verbindungen diejenige Methode in Betrachtung zu ziehen, welche unfehlbar alle Verbindungen einer Art oder Classe giebt. Um nämlich in der Bildung der Permutationen, Variationen und Combinationen keine zu überspringen, gehe man, wie in den bisherigen Beispielen geschehen, lexicographisch zu Werke, und schreibe, so weit es angeht, die erhaltenen Verbindungen auch so, d. i., wie die Wörter in einem Lexicon geordnet sind. Ferner von einem Element anhebend gehe man successiv zu den Verbindungen von 2 und mehr Elementen über.

* §. 74.

Um also alle Permutationen gegebener ungleicher Elemente zu erhalten, ordne man erst die mit Buchstaben bezeichneten Elemente nach dem Alphabet. Darauf bilde man die Permutationen zweier Elemente, indem man zuerst das erste dem zweiten, dann das zweite dem ersten vorsetzt. Um die Permutationen dreier Elemente zu erhalten, bilde man erst die mit dem Element a anhebenden, indem man dieses den Permutationen der übrigen b und c vorsetzt; darauf die mit dem Element b anhebenden, indem man dieses den Permutationen der noch übrigen Elemente a und c vorsetzt; darauf endlich auf gleiche Weise die mit c anfangenden Permutationen. Dann hat man zuverlässig alle Permutationen dreier Elemente, indem man alle mit a, mit b, und mit c anfangenden Permutationen gebildet hat, und jede Permutation dreier Elemente mit einem dieser anfangen muß. Auf gleiche Weise wird man die Permutationen von 4 Elementen bilden, indem man zuerst das Element a den Permutationen der drei übrigen Elemente, dann b den Permutationen der drei übrigen u. s. w., vorsetzt, und eben so fortfahren, um die Permutationen von mehr Elementen zu bilden. Folglich ist die Anzahl der Permutationen ungleicher Elemente

für	1 Element	=	1
„	2 „	=	2 . 1
„	3 „	=	3 . 2 . 1
„	4 „	=	4 . 3 . 2 . 1
„	n „	=	$n.(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$

Sind unter n Elementen einige gleiche, und sind deren Wiederholungsexponenten p, q, r . . ., so ist die Anzahl der Permutationen =

$$\frac{n.(n-1)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r\ldots}$$

nämlich = der Versetzungszahl für n ungleiche Elemente, dividirt durch das Product aller Versetzungszahlen, die für jeden Wiederholungsexponenten entstehen, wenn man für ihn soviel ungleiche Elemente setzt, als er gleiche bezeichnet.

Beweis.

Man betrachte zuerst die Verbindung bacdae, wo 2 gleiche Elemente a und a sind; vertauscht man diese mit einander, so wird in der Anordnung der Elemente nichts abgeändert, und die Permutationszahl wird halb so groß seyn, als für 6 ungleiche Elemente. Ueberhaupt: Wenn 2 oder mehr unter sich gleiche Elemente, wo sie in den Permutationen auch stehen, unter sich vertauscht werden, so ändert diese Verwechselung in der Aufeinanderfolge der Elemente nichts ab; folglich, wird die Anzahl der Permutationen so genommen, als wären alle Elemente ungleich, so ist diese Anzahl 1. 2. 3 . . . p (so oft sich nämlich p ungleiche Elemente versetzen lassen) mal so groß als die gesuchte Versetzungszahl, (wo fürs erste nur 1 Element sich wiederhole, indeß die übrigen ungleich angenommen werden), und muß demnach durch 1. 2. 3 . . . . p dividirt werden, um die Versetzungszahl für n Elemente mit p unter sich gleichen, welche Zahl ich mit P bezeichne, zu erhalten. Wiederholt sich noch ein Element q mal, so muß, aus gleichen Gründen, die Versetzungszahl P noch durch 1. 2. 3. . . q dividirt werden, um die Versetzungszahl Q für n Elemente mit zweien, welche sich, die eine p, die andere q mal, wiederholen, zu erhalten. So wird für jeden Wiederholungsexponenten die Versetzungszahl für soviel ungleiche Elemente, als er gleiche bezeichnet, ein Factor des aus diesen Factoren bestehenden Divisors, durch welchen die Versetzungszahl für n ungleiche Elemente dividirt werden muß, um die Versetzungszahl für n Elemente mit Wiederholung einiger Elemente zu erhalten.

* §. 75.

Zur Bildung der Variationen der zweiten Classe erhält man alle mit a anfangenden, wenn man dies Element abwechselnd allen n Elementen vorsetzt; eben so alle mit b anfangenden Variationen, wenn man b abwechselnd allen Elementen vorsetzt; eben so alle mit c, mit d u. s. w. anfangenden. Alle Variationen aber fangen mit einem dieser Elemente an: von jedem Paar Elemente werden 2 Permutationen unter den erhaltenen Verbindungen seyn, z. B. ab und ba für die beiden Elemente a und b; aa, bb u. s. w. entstehen nur einmal, wie denn jedes Paar gleicher Elemente nur eine Permutation hat. Folglich entstehen auf diese Weise alle Variationen der zweiten Classe, keine darüber und keine fehlt. Ihre Anzahl ist n^2. Um alle Variationen der dritten Classe zu erhalten, wird man allen Variationen der zweiten Classe, erst a, dann b, u. s. w. vorsetzen und dadurch alle mit diesen Elementen anhebenden Variationen zur dritten Classe erhalten, folglich alle dieser Classe überhaupt, weil jede mit einem dieser Elemente anhebt. Ihre Anzahl ist $n \cdot n^2 = n^3$. Auf ähnliche Weise wird man alle Variationen zu jeder höhern mten Classe erhalten. Wiederholen aber kann sich hiebei keine Variation, weil in den erhaltenen Variationen der zweiten Classe jede anders war, folglich auch, indem man vor jede a setzte, alle so entstandenen Variationen der dritten Classe von einander verschieden seyn mußten, eben so alle mit b anhebenden, u. s. f.; eben so wenig kann eine mit b anhebende einer mit a anhebenden in Absicht auf die Stellung der Elemente gleich seyn, und überhaupt kann keine Permutation einer andern gleich seyn. Und geht man so bildend von jeder Classe zu einer höhern fort, so kann in keiner sich eine Variation wiederholen.

Die Anzahl der Variationen für n Elemente a, b, c, d, e, f, ... erhält man zu jeder Classe, wenn man die Anzahl der gegebenen Elemente auf eine Potenz erhebt, deren Exponent die Nummer der Classe, etwa m, ist. Oder die Anzahl der Variationen von n Elementen zur mten Classe ist $= n^m$.

Beweis.

Die Anzahl der Variationen ist für die erste Classe $= n$, folglich für die zweite Classe $= n \cdot n = n^2$;

„ „ dritte „ $= n \cdot n^2 = n^3$;

„ „ mte „ $= n^m$.

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung zur mten Classe für n Elemente ist $=$

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,(n-m+1)$$

oder diese Anzahl ist ein Product vom m Factoren, in welchem der erste $= n$ und jeder andere um 1 kleiner ist als der vorhergehende.

Beweis.

Die Variationen der mten Classe kann man auch bilden, wenn man jeder Variation der $(m-1)$ten Classe die gegebenen Elemente vorsetzt; sollen daher diejenigen Variationen, in welchen Elemente sich wiederholen, ausgelassen werden, so wird man, statt alle Elemente abwechselnd vor jede Variation zu setzen, nur $n - (m-1)$ Elemente davorsetzen, und immer diejenigen auslassen, welche in der Variation sich schon befinden, vor welche man die Elemente eben setzt. Folglich ist die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung für n Elemente

zur ersten Classe $= n$

„ zweiten „ $= n\,(n-1)$

„ dritten „ $= n\,(n-1)\,(n-2)$

„ mten „ $= n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)$

* §. 76.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung für n Elemente zur mten Classe ist gleich der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung für dieselben Elemente und zu derselben Classe, dividirt durch die Versetzungszahl für m Elemente, (§. 75) oder

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m.}$$

In jeder Classe ist die Anzahl der Combinationen von n Elementen **mit** Wiederholung gleich der Anzahl der Comb. von $n + m - 1$ Elementen **ohne** Wiederholung.

Beweis.

Für jede Classe und mit Wiederholung bekommt man alle mit dem Element a anhebenden Combinationen gegebener Elemente a, b, c . . . , wenn man den Combinationen mit Wiederholung der vorhergehenden Classe das Element a vorsetzt; eben so alle mit irgend einem Element anhebenden Combinationen, wenn man dieses den mit diesem und den folgenden Elementen anfangenden Combinationen mit Wiederholung der vorhergehenden Classe vorsetzt. Operirt man so vom ersten bis zum letzten Element, so erhält man alle Combinationen der gegebenen Elemente mit Wiederholung für die gesuchte Classe (§. 71, III.). Folglich ist für n Elemente a, b, c . . mit Wiederholung und für die mte Classe:

die Anzahl der mit a anfangenden Comb. = der Anzahl der Comb. von allen n Elementen zur vorhergehenden (m — 1)ten Classe;

die Anzahl der mit b anfangenden Comb. = der Anzahl der Comb. von allen Elementen außer a, oder von n — 1 Elementen, zur (m — 1)ten Classe;

die Anzahl der mit c anfangenden Comb. $=$ der Anzahl der Comb. von allen Elementen außer a und b, oder von $n - 2$ Elementen, zur $(m - 1)$ten Classe; u. s. w.

Setzt man jedes Element vor jede Combination einer Classe ohne Wiederholung, die mit den auf dieses folgenden Elementen anfängt, so erhält man alle Combinationen der darauf folgenden höhern Classe ohne Wiederholung.

Folglich ist für n Elemente a, b, c, ... ohne Wiederholung und für die mte Classe:

die Anzahl der mit a anfangenden Comb. $=$ der Anzahl der Comb. von allen Elementen außer a, oder von $n - 1$ Elementen, zur $(m - 1)$ten Classe;

die Anzahl der mit b anfangenden Comb. $=$ der Anzahl der Comb. von $n - 2$ Elementen zur $(m - 1)$ten Classe; u. s. w.

Daraus ergiebt sich:

Die Anzahl der Comb. von n Elementen mit Wiederholung zur mten Classe wird gefunden, wenn man addirt:

die Anzahl der Comb. mit Wiederholung zur $(m - 1)$ten Classe

von n, von $n - 1$, von $n - 2$, ..., von einem Element oder 1;

die Anzahl der Comb. von $n + m - 1$ Elementen ohne Wiederholung zur mten Classe wird gefunden, wenn man addirt:

die Anzahl der Comb. ohne Wiederholung zur $(m - 1)$ten Classe

von $n + m - 2$, von $n - 1 + m - 2$, von $n - 2 + m - 2$, ..., von $1 + m - 2$ Elementen oder 1.

Nimmt man hier $m = 2$, oder betrachtet man die Comb. der zweiten Classe, so werden in beiden Summen die correspondirenden Glieder einander gleich, folglich auch die Summen, also ist der oben aufgestellte Satz für die zweite Classe richtig, deshalb aber nun auch für die dritte, und so für jede folgende, also ist allgemein:

die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur mten Classe mit Wiederholung gleich der Anzahl der Comb. von $n + m - 1$ Elementen zu derselben Classe ohne Wiederholung.

Da die Anzahl der Comb. von $n + m - 1$ Elementen ohne Wiederholung

$$= \frac{(n + m - 1)\ (n + m - 2) \ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots m},$$

so ist die Anzahl der Comb. mit Wiederholung für n Elemente zur mten Classe

$$= \frac{n\ (n + 1)\ (n + 2) \ldots (n + m - 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}.$$

Anwendungen der Combinationslehre.

Zur Erhebung eines Binomiums auf eine beliebige Potenz entsteht, wenn $a + b$ das Binomium und m der Exponent der Potenz ist, folgende Formel:

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}\, b + \frac{m\ (m - 1)}{1 \,.\, 2}\, b^2 + \frac{(m - 1)\ (m - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\, b^3 + \ldots + b^m.$$

Der Coefficient eines jeden Gliedes ist nämlich die Versetzungszahl desselben für die Elemente a und b, welche sich wiederholen.

Beweis dieser Formel.

Indem man $a + b$ mit $a + b$ multiplicirt, setzt man erst a, dann b vor a und b, bekommt also dadurch die Variationen der zweiten Classe für 2 Elemente; multiplicirt man diese mit $a + b$, so setzt man erst a, dann b vor jede Variation der zweiten Classe, und bekommt also die Variationen der dritten Classe; multiplicirt man diese wieder, und so fort, bis man ein Produkt von m gleichen Factoren erhalten hat, so erhält man endlich die Variationen der mten Classe (§. 75). Folglich ist $(a + b)^m =$ den Variationen der Elemente a und b zur mten Classe mit Wiederholung. Da uun Variationen auch durch Permutation der Combinationen entstehen (§. 71), so schreibe man diese zur mten Classe für a und b mit Wiederholung hin, und setze vor jede Combination die Versetzungszahl: dadurch wird (§. 74)

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m\,(m-1)\ldots 1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,a^{m-1}\,b + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots(m-2).1.2}\,a^{m-2}\,b^2$$
$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots 1}{1.2\ldots(m-3)\,1.2.3}\,a^{m-3}\,b^3 + \ldots + b^m$$

oder, wenn man die gleichen Factoren im Zähler und Nenner der Coefficienten wegläßt,

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}\,b + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,a^{m-2}\,b^2$$
$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\,a^{m-3}\,b^3 + \ldots + b^m.$$

Zusatz. Hieraus ergiebt sich ebenfalls, wie früher (§. 19):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ferner ist

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

Für $a - b$ werden die Glieder abwechselnd positiv und negativ.

Aufgabe 1.

Auf dem Erdboden wechseln Wiesen, Felder, Berge, Thäler, Felsen, Wälder, Seen, Flüsse, das Meer, Städte, Dörfer, Landstraßen, Kirchen, Hütten, Palläste und mehrere andere Gegenstände mit einander ab. Diese Dinge können als die Elemente aller Landschaften angesehen werden. Es wird gefragt: wieviel verschiedene Landschaften aus 10 Objecten bloß durch Abwechselung in der Folge derselben entstehen können?

Antwort: So viel als 10 ungleiche Elemente Permutationen haben, nämlich $10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$

(§. 74) also 3628800. — Nimmt man im Durchschnitt an, daß 50 Landschaften eine Quadratmeile einnehmen, so käme für diese Menge ungefähr der 130ste Theil der Erdfläche.

Aufgabe 2.

Wieviel Landschaften können aus 20 verschiedenen Objecten, wenn man 10 davon oder weniger in jeder Ordnung mit einander verbindet, entstehen?

Antwort. 736891600000. Dies ist nämlich die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von 20 Elementen von der ersten bis zur zehnten Classe (§. 75).

Die Anzahl der Variationen von 20 Elementen ohne Wiederholung

zur 1sten Classe ist nämlich	. . . .	20
„ 2ten „ „	= 20 . 19 = . . .	380
„ 3ten „ „	= 20 . 19 . 18 = .	6840
„ 4ten „ „	= 20 . 19 . 18 . 17 =	116280
„ 5ten „ „	. . . .	1860480
„ 6ten „ „	. . . .	27907200
„ 7ten „ „	. . . .	390700800
„ 8ten „ „	. . . .	5079110400
„ 9ten „ „	. . . .	60949324800
„ 10ten „ „	. . . .	670442572800
	Summe =	736891600000

Aufgabe 3.

Einige Personen spielen Würfel. Einer der mitspielenden A schlägt vor: den jedesmaligen Einsatz, nach Beendigung jeder Tour, unter diejenigen gleich zu theilen, welche einen Pasch geworfen haben; er wolle nur einen Wurf, aber mit

3 Würfeln thun, die übrigen sollten jeder 2 mal, doch nur mit 2 Würfeln, werfen. Der Vorschlag wird angenommen. Wer ist im Vortheil?

Antwort. A.

Ist nämlich n die Anzahl der möglichen Fälle, m die Anzahl der günstigen für irgend eine Angelegenheit, so ist $\frac{m}{n}$ der Grad der Wahrscheinlichkeit, mit welcher man auf einen glücklichen Erfolg rechnen kann. Die Anzahl der möglichen Würfe mit 3 Würfeln ist die Anzahl der Variationen von 6 Elementen (indem die Anzahl der Augen von 1 bis 6 wechselt) zur dritten Classe, also $= 6^3 = 216$ (§. 75); die Anzahl der möglichen Würfe mit 2 Würfeln ist die Anzahl der Variationen von 6 Elementen zur zweiten Classe, also $= 6^2 = 36$. Die Anzahl der Pasche mit 3 Würfeln (wo nämlich 2 oder auch alle 3 gleich viel Augen zeigen) ist $=$ der Anzahl der Variationen von 6 Elementen mit Ausschluß der Variationen ohne Wiederholung; jene ist 216, diese $= 6 . 5 . 4 = 120$ (§. 75), also die Anzahl der günstigen Fälle $216 - 120 = 96$; folglich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für A $= \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$. Für 2 Würfel ist die Anzahl der möglichen Fälle $= 36$, die Anzahl der Pasche $= 6$; folglich für die übrigen die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $= \frac{6.2}{36} = \frac{1}{3}$. A hat folglich mehr Hoffnung zu gewinnen als die übrigen.

Zusatz. In jeder Wette hat unter allen möglichen Fällen, die bei dem Gegenstande der Wette eintreten können, der eine Theil die Anzahl der günstigen, der andere Theil die Anzahl der ungünstigen für sich. Darnach muß sich der Billigkeit gemäß die Summe Geldes richten, um welche von jeder Seite gewettet wird. Bezeichnen nämlich n, m die Anzahl der möglichen, und der günstigen Fälle, so wird $n - m$ die Anzahl der ungünstigen seyn, und es wird sich der Einsatz des Einen für seine Behauptung zum Einsatz des Andern gegen diese verhalten müssen wie $m : n - m$

Aufgabe 4.

A wettet gegen B um 2 Rubel darauf, daß er mit 2 Würfeln auf einen Wurf einen Pasch werfen werde. Wieviel müßte B der Billigkeit gemäß auf das Gegentheil setzen?

Antwort. 10 Rubel.

Die Anzahl der möglichen Würfe mit 2 Würfeln ist nämlich die Anzahl der Variationen für 6 Elemente zur zweiten Classe, oder $n = 36$; die Anzahl der günstigen Fälle für A oder $m = 6$; die Anzahl der ungünstigen Fälle für ihn oder $n - m = 36 - 6 = 30$; also $m : n - m = 6 : 30 = 1 : 5$, oder der Einsatz des B muß 5 mal so groß seyn, als der des A.

Aufgabe 5.

A wettet mit B darauf, daß er mit 3 Würfeln einen Pasch von 3 gleichen Augen werfen werde. B setzt eben soviel dawider, als A dafür. Wieviel Würfe müssen diesem der Billigkeit gemäß bewilligt werden?

Antwort. 35.

Denn n ist hier $= 6^3$, $m = 6$; $n - m = 216 - 6 = 210$, folglich $m : n - m = 6 : 210 = 1 : 35$.

Zusatz 1. Wieviel Würfe können dem A bewilligt werden, wenn er mit 4 Würfeln den Wurf 1356 werfen soll?

Antwort. 53.

Denn hier ist 24, als die Permutationszahl von 4 verschiedenen Elementen, die Anzahl der günstigen Fälle für A, oder $m = 24$. Ferner $n = 6^4 = 1296$; $n - m = 1272$, und $m : n - m = 24 : 1272 = 1 : 53$.

Zusatz 2. Wenn 4 Personen, jede mit 3 Würfeln, einmal werfen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der erste 3 gleiche Augen, der zweite 115, der dritte 235, der vierte 666 werfe, $= \frac{1}{20155392}$. Denn für den ersten ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$, für den zweiten $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$, für den dritten $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$, für den vierten endlich $= \frac{1}{216}$. Das Product aus diesen 4 Brüchen ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle 4 obige Fälle zugleich Statt finden werden; d. i. unter 20155392 verschiedenen möglichen Fällen wird der oben angegebene Fall einmal eintreten. Dies leuchtet auch folgendermaßen ein: Die Anzahl der möglichen Fälle für alle vier ist $216 . 216 . 216 . 216 = 216^4$; die Anzahl der günstigen Fälle für alle $= 6 . 3 . 6 . 1$, folglich kommen $3 . 6^2$ günstige Fälle auf 216^4 mögliche, das ist ein günstiger auf $2 . 216^3 = 20155392$ mögliche.

Zusatz 3. Um zu berechnen, wieviel verschiedene Spiele es im Whist giebt, wird man die Anzahl der Comb. von 52 Elementen zur 13ten Classe, die Anzahl der Comb. von 39 Elem. zur 13ten Classe, und von 26 Elem. zur 13ten Classe berechnen, und die gefundenen Zahlen mit einander multipliciren. Das Product zeigt an, auf wievielfach verschiedene Weise 52 Karten zu 13 unter 4 Spieler vertheilt werden können, ohne die Ordnung zu beachten, in welcher sie sitzen. Diese läßt für jede Vertheilung der Karten unter 4 Spieler noch 24 Permutationen zu. Folglich muß jenes Product noch mit 24 multiplicirt werden. Dies giebt 2055630287484276431486745600000 als die Anzahl aller möglichen verschiedenen Whistspiele. Bis diese alle zum Vorschein kämen, würden viele Billionen Jahre vergehen, wenn auch alle Erdbewohner den ganzen Tag Whist spielten.

Aufgabe 6.

Bis zum Jahr 1824 ist man durch Zerlegung der Naturproducte in ihre Bestandtheile auf 52 einfache Substanzen gekommen. Wieviel Mischungen kann man aus diesen 52 Bestandtheilen erzeugen, wenn man zwei, und wieviel, wenn man drei derselben abwechselnd verbindet?

Antwort. Soviel, als es Combinationen ohne Wiederholung der zweiten und der dritten Classe aus 52 Elementen giebt, folglich erhält man (§. 76) $\frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$ Mischungen für 2 Bestandtheile, u. $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{2 \cdot 3} = 22100$ für 3 Bestandtheile.

Aufgabe 7.

Werden die Bestandtheile in Absicht auf die Menge in verschiedenen Verhältnissen verbunden: wieviel entstehen dann verschiedene Mischungen aus zwei Bestandtheilen, wenn die Verhältnißzahlen ganze Zahlen sind, und so abwechseln, daß deren Summe immer 9 bleibt; und wieviel aus dreien, wenn unter übrigens gleichen Umständen die Summe der Verhältnißzahlen immer 16 bleibt?

Antwort. Soviel als es Combinationen mit Wiederholung zur 7ten Classe für 2, und zur 13ten Classe für

3 Elemente giebt — folglich 8 im ersten Fall, und 105 im zweiten Fall (§. 76).

Anmerk. Die vierte und fünfte Aufgabe sind entlehnt aus dem „Vollständigen Lehrbegriff der reinen Combinationslehre mit Anwendungen derselben auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung von Spehr. Braunschweig 1824.“

Dessen Erklärung der Variationen und dessen Bezeichnungen habe ich in diese Elemente nicht aufgenommen. Wer aber weiter gehen will, dem ist dieses Werk zu empfehlen, insbesondere wenn er eine einfache und lichtvolle Behandlung der Polynomien sucht.

Algebra.

Zweiter Theil.

Von den zusammengesetzten Gleichungen.

Einleitung.

§. 77.

Um für zusammengesetztere Gleichungen, als im ersten Theil der Algebra behandelt wurden, die Regeln zur Auflösung zu finden, also, weil die einfachen Gleichungen besondere Fälle der zusammengesetzten sind, um allgemeine Regeln zur Auflösung der Gleichungen zu begründen, ist zuerst nöthig, die verschiedenen Arten derselben kennen zu lernen, wenigstens diejenigen, welche Gegenstand der Elementar-Algebra sind. Dazu leiten folgende 4 Aufgaben:

1) Zu dem dreifachen des von mir zurückgelegten Weges 4 Werst hinzugethan und davon das Doppelte des zurückgelegten Weges abgezogen, giebt 8 Werst. Wieviel Werst habe ich zurückgelegt?

2) Jemand kauft eine Elle grobes, eine Elle feines Tuch, und bezahlt für beide zusammen 9 Rubel Silber. Eine Elle vom groben, und 2 Ellen vom feinen Tuch kosten 13 Rubel mehr, als $\frac{1}{2}$ Elle grobes Tuch. Wie theuer war jedes Tuch?

3) Ein Brett ist 3 Fuß länger als breit und 4 □Fuß groß an Fläche. Wie lang und breit war es?

4) Ich denke mir 2 Zahlen. Das Product derselben giebt 8. Das Biquadrat der ersten, vermindert um das Doppelte Product der beiden Zahlen und vermehrt um die erste Zahl, giebt 2. Was waren es für Zahlen?

Die Gleichungen zu diesen Aufgaben, wenn die unbekannten Größen mit x und y bezeichnet werden, sind:

1) $3x + 4 - 2x = 8.$

2) $x + 2y - 13 = \frac{1}{2}x;$
$x + y = 9.$

3) $x^2 + 3x = 4.$

4) $x^2 - 2yx + x = 2;$
$xy = 8.$

Worin sind diese von einander verschieden?

Antwort. In den Gleichungen 1 und 2 ist die unbekannte Größe nirgends mit sich selbst oder mit einer andern unbekannten multiplicirt; in den Gleichungen 3 und 4 ist x mit sich selbst und mit y multiplicirt. Ferner in den Gleichungen 1 und 3 ist nur eine unbekannte Größe, in den übrigen sind mehrere.

Auf diese Verschiedenheit unter den Gleichungen gründet sich die Eintheilung derselben. Man hat nämlich:

I. Gleichungen mit einer unbekannten Größe;

II. Gleichungen mit 2 unbekannten Größen;

III. Gleichungen mit 3 unbekannten Größen, mit 4, u. s. w.

Die Gleichungen mit einer unbekannten Größe werden wieder eingetheilt:

1) in Gleichungen vom 1sten Grade, d. i. wo die unbekannte nirgends mit sich selbst multiplicirt vorkommt;

2) in Gleichungen vom 2ten Grade oder in quadratische Gleichungen, d. i. wo die höchste Potenz der unbekannten die zweite ist;

3) in Gleichungen vom 3ten Grade oder kubische Gleichungen, d. i. wo die höchste Potenz der unbekannten Größe die dritte ist;

4) in Gleichungen vom 4ten Grade oder biquadratische Gleichungen, d. i. wo die höchste Potenz der unbekannten die vierte ist.

5) in Gleichungen vom 5ten und höhern Graden.

Anmerkung. In den Gleichungen vom zweiten und höheren Graden heißt der Werth der unbekannten Größe eine Wurzel der Gleichung.

Eben so werden die Gleichungen mit 2 und mehr unbekannten Größen eingetheilt in Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, und höhern Graden, je nachdem darin Producte von 1, 2, 3 und mehr unbekannten Größen vorkommen, eine wiederhole sich als Factor oder nicht.

Durch Anwendung der Grundsätze (§. 46) kann man entweder jede Gleichung so lange umformen, bis die unbekannte Größe in einem Theil der Gleichung allein stehen bleibt, und der andere Theil nur die bekannten Größen enthält, oder doch so weit vereinfachen, daß man durch Versuche möglichst leicht den Werth der unbekannten Größe ausmittelt, entweder genau oder doch nahe zu. Im ersten Fall wird die unbekannte Größe durch eine Reihe arithmetischer Operationen unter den bekannten Größen dargestellt — und diese Methode, die unbekannte zu bestimmen, heißt die allgemeine Auflösung der Gleichungen. Im zweiten Fall ist das Verfahren ganz anders; die unbekannte bleibt noch mit bekannten Größen verbunden. Man bestimmt dann den Werth der unbekannten durch Versuche, indem man für sie erst ganze Zahlen, und darauf, wo nöthig, auch zwischen sie fallende Brüche setzt, uud durch wirkliche Bewerkstelligung der in den Gleichungen angedeuteten Operationen sieht, ob der angenommene Werth der unbekannten der richtige, oder doch nahe zu der richtige ist, und damit so lange fortfährt, bis die unbekannte genau oder doch genau genug gefunden ist. Dies Verfahren heißt die Approximation der Gleichungen oder die Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Sie findet ihre Anwendung nur auf numerische Gleichungen, d. h.

solche, deren Coefficienten nicht Buchstaben, sondern bestimmte Zahlen sind.

Da alle Gleichungen entweder allgemein oder durch Näherung aufgelöst werden können, so zerfällt dieser Theil der Algebra in zwei Hauptstücke:

1) die allgemeine Auflösung der Gleichungen;

2) die Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

Jedes dieser Hauptstücke zerfällt wieder in mehrere Abschnitte.

Erstes Hauptstück.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

§. 78.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

Aus den (§. 46) aufgestellten Grundsätzen lassen sich zur Auflösung derselben folgende Regeln festsetzen:

Erste Regel.

Kommt die unbekannte Größe in irgend einem Nenner vor, so schaffe sie durch Multiplication daraus weg.

Exempel 1.

Die Gleichung sey: $\frac{5}{3+x} + 3 = 4.$

Multiplicirt man mit $3 + x$, so wird daraus:

$$5 + 9 + 3x = 12 + 4x.$$

Exempel 2.

Die Gleichung sey: $\frac{a}{b+cx} + d = e.$

Diese durch $b + cx$ multiplicirt giebt:

$$a + bd + cdx = be + cex.$$

Zweite Regel.

Enthält die Gleichung einen unentwickelten Ausdruck oder mehrere, so entwickele sie.

Exempel 1.

Die Gleichung sey:

$$5\,(2 + 3x) + (9 - x)\,(4 + \tfrac{2}{3}) = 17x - 2.$$

Diese Gleichung entwickelt giebt:

$$10 + 15x + 36 + 6 - 4x - \tfrac{2}{3}x = 17x - 2.$$

Exempel 2.

Die Gleichung sey:

$$c\,(a + bx) + (d - x)\,(f + e) = gx - h.$$

Diese entwickelt giebt:

$$ac + bcx + df + de - fx - ex = gx - h.$$

Dritte Regel.

Sind die Coefficienten gebrochene Zahlen, so schaffe die Nenner durch Multiplication weg.

Exempel 1.

Die Gleichung sey:

$$\frac{3}{5}x + 4 - \frac{1}{3}x = x + \frac{1}{2}.$$

Diese mit 5 multiplicirt giebt:

$$3x + 20 - \frac{5}{3}x = 5x + \frac{5}{2}.$$

Diese Gleichung mit 3 multiplicirt giebt:

$$9x + 60 - 5x = 15x + \frac{15}{2}.$$

Exempel 2.

Die Gleichung sey:

$$\frac{a}{b}x + c - \frac{x}{d} = x + f.$$

Diese mit b multiplicirt giebt:

$$ax + bc - \frac{bx}{d} = bx + bf.$$

Diese mit d multiplicirt giebt:

$$adx + bcd - bx = bdx + bdf.$$

Vierte Regel.

Wähle für die unbekannte Größe einen Theil der Gleichung, welchen du willst, und bringe mit dem entgegengesetzten Zeichen in diesen aus dem andern Theil der Gleichung alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten; eben so bringe aus diesem Theil alle Glieder, welche nur bekannte Größen enthalten, in den andern Theil der Gleichung. Addire darauf die Coefficienten der unbekannten Größe, und schreibe die Summe als einen Factor vor die unbekannte Größe. Durch diesen Factor dividire den andern Theil der Gleichung; der Quotient ist der Werth der unbekannten Größe.

Exempel.

$$ax - ab + bx = cx - bc$$
$$ax - ab + bx - cx = -bc$$
$$ax + bx - cx = ab - bc$$
$$(a + b - c)\,x = ab - bc$$
$$x = \frac{ab - bc}{a + b - c}$$

Uebungsaufgaben über die Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) Das fünffache einer Zahl weniger 16 giebt das Doppelte derselben und 5 darüber. Wie groß ist sie?

Antwort. 7.

Die Gleichung für diese Aufgabe, wenn die unbekannte Größe mit x, bezeichnet wird, ist:

$$5x - 16 = 2x + 5.$$

2) Zwei Familien fahren aufs Land und geben 25 Rubel aus. Jede zahlt nach der Anzahl der Personen, aus welchen sie besteht. Wieviel zahlt jede, wenn die eine anderthalb mal soviel Personen zählt, als die andere?

Antwort. Die eine zahlt 10, die andere 15 Rubel.

Gleichung: $x + 1\frac{1}{2}x = 25.$

3) Drei Brüder theilen 141 Rubel nach Verhältniß ihres Alters unter sich. Der zweite ist 3 Jahr älter als der jüngste, und 8 Jahr jünger als der älteste, welcher doppelt so alt ist, als der jüngste. Wie alt ist und wie viel bekommt jeder?

Antwort. Der älteste ist 22, der zweite 14, der jüngste 11 Jahr alt. Der erste bekommt 66, der zweite 42, der dritte 33 Rubel.

4) Drei Brüder theilen 81 Rubel nach Verhältniß ihres Alters unter sich. Der jüngste ist 7 Jahr alt und bekommt 21 Rubel. Der älteste ist 12 Jahr alt. Wie alt ist der mittelste?

Antwort. 8 Jahr.

5) Auf dieselbe Weise theilen 2 Brüder 128 Rubel. Der eine ist 4 Jahr älter als der andere und bekommt 16 Rubel mehr. Wie alt ist jeder?

Antwort. Der eine 14, der andere 18 Jahr.

Gleichung: $(2x + 4)\ 4 = 128$

oder $\frac{x+4}{2x+4} \cdot 128 = \frac{x}{2x+4} \cdot 128 + 16.$

6) Ein Gutsbesitzer verwendet $\frac{2}{3}$ seiner jährlichen Einkünfte für sich, $\frac{1}{6}$ zur Erhaltung einer Schule, $\frac{1}{12}$ für Arme, und erübrigt noch 2600 Rubel jährlich. Wie groß sind seine Einkünfte?

Antwort. 31200 Rubel jährlich.

7) Jemand hat eine Sammlung kupferner, silberner und goldener Medaillen. Sie stehen reihenweise in einem Kästchen; jede Reihe enthält eine gleiche Anzahl Medaillen. Die beiden ersten Reihen sind kupferne, darauf folgen 2 Reihen silberner, und darauf eben soviel goldener Medaillen; in derselben Ordnung folgen die übrigen Medaillen, ausgenommen die beiden letzten Reihen, in welchen, anstatt daß sie nach der Ordnung nur kupferne Medaillen enthalten sollten, kupferne und silberne

so abwechseln, daß die Anzahl jener, die Anzahl dieser um 2, die dreifache Anzahl der silbernen aber die zweifache der kupfernen um 7 übertrifft. In dem ganzen Kästchen sind 168 Medaillen. Wieviel sind von jeder Sorte darin?

Antwort. 48 goldene, 59 silberne, 61 kupferne.

8) In 5 Classen eines Gymnasiums befinden sich 176 Schüler. In der zweiten sind dreimal soviel Schüler als in der ersten, in der dritten $1\frac{1}{3}$ mal soviel als in der zweiten, in der vierten ebenfalls $1\frac{1}{3}$ mal soviel, als in der dritten, und in der fünften $1\frac{1}{6}$ mal soviel als in der vierten. Wieviel Schüler sind in jeder Classe?

Antwort. In der ersten Classe 9, in der zweiten 27, in der dritten 36, in der vierten 48, in der fünften 56.

9) Jemand kauft $3\frac{1}{2}$ Ellen Tuch, 4 Ellen Kasimir, 6 Ellen Leinwand, und bezahlt dafür zusammen 100 Rubel, und zwar für 1 Elle Kasimir 7 Rubel mehr als für 1 Elle Leinwand, für die Elle Tuch $2\frac{1}{4}$ mal soviel als für die Elle Kasimir. Wieviel bezahlte er für jedes gekaufte Stück?

Antwort. 63 Rubel für das Tuch, 32 für den Kasimir, 5 für die Leinwand.

10) Jemand bringt $19\frac{1}{2}$ Ellen Tuch von mittlerer Güte zu einem Kaufmann, um dagegen 11 Ellen feines einzuhandeln, für welches er $9\frac{3}{4}$ Rubel die Elle mehr geben muß, als er sein Tuch anschlägt. Nach geschlossenem Handel hat er noch 18 Rubel baar zu zahlen; wie hoch wurde jede Sorte Tuch die Elle angeschlagen?

Antwort. 10 Rubel 50 Cop. das gröbere, 20 Rubel 25 Cop. das feine.

11) Jemand kauft 7 Ellen grobes und 5 Ellen feines Tuch. Für jenes zahlt er 6 Rubel die Elle, und für beides zusammen 152 Rubel. Wieviel kostete das feine Tuch die Elle mehr, als das grobe?

Antwort. 16 Rubel.

12) Um einen Teich zu graben, nimmt jemand 10 Arbeiter auf 50 Tage an, und giebt jedem freie Kost und außerdem noch 75 Cop. für jeden Tag, an welchem er arbeitet, zieht ihm aber auch 30 Cop. für jeden Tag, den er nicht arbeitet, ab. Nach Ablauf der 50 Tage zahlte er 291 Rubel Arbeitslohn aus. Wieviel sind von den 500 Arbeitstagen, die auf alle kommen, ausgefallen?

Antwort. 80.

13) Ein Spion hat sich in eine Festung geschlichen, um die Stärke der Infanterie und Kavallerie in derselben zu erspähen. Er erfährt, daß der monatliche Bedarf an Lebensmitteln für die ganze Mannschaft 30000 Rubel, für jeden Infanteristen $7\frac{1}{2}$, für jeden Kavalleristen $22\frac{1}{2}$ Rubel beträgt, und daß die Anzahl beider, der Infanteristen und Kavalleristen, auf 3000 steigt. Wieviel waren von jenen und wieviel von diesen da?

Antwort. 2500 Mann Infanterie und 500 Mann Kavallerie.

14) Ein Reisender fragte den Kommandanten einer Festung: Wie groß ist die Besatzung? Der Commandant antwortete: Auf jeden Kavalleristen kommen 6 Infanteristen; die Unterhaltung eines Kavalleristen kostet, seines Pferdes wegen, an Proviant 3 mal so viel, als die eines Infanteristen, für welchen 25 Copeken täglich gerechnet werden; der tägliche Bedarf

an Lebensmitteln für die Kavallerie und Infanterie insgesammt beläuft sich auf 1602 Rubel. Wie groß war die Besatzung?

Antwort. 4984 Mann, worunter 4272 Mann Infanterie, und 712 Mann Kavallerie waren.

15) Zwei Zahlen zu finden, von welchen die eine 5 mal so groß als die andere, und deren Summe = 66 ist.

Antwort. Die Zahlen sind 11 und 55.

16) Drei Kaufleute treten in Compagnie. A legt 3000, B 4000, C 5000 Rubel in den Handel, und nach diesem Verhältniß theilen sie den Gewinn. Dieser beträgt nach einiger Zeit 6000 Rubel. Wieviel bekommt jeder davon?

Antwort. A 1500, B 2000, C 2500 Rubel.

17) Man läßt zwei Cylinder — den einen von 2, den andern von 3 Zoll Umfang — auf einer schiefen Ebene herabrollen. Der erste macht, auf die ganze Länge der schiefen Ebene, 7 Umläufe mehr, als der zweite. Wie lang war die schiefe Ebene?

Antwort. 42 Zoll.

18) A kauft eine alte silberne Dose, und bezahlt für jedes Loth Gewicht 2 Rubel. Diese wird ihm für 8 Rubel neu zugestutzt, und gefällt nun einem Liebhaber so, daß er für jedes Loth Gewicht 4 Rubel bezahlen will. Da A bei diesem Bot 10 Rubel auf die Dose gewinnt, so verkauft er sie dafür. Wieviel wog die Dose?

Antwort. 9 Loth.

19) Ein Bassin kann durch 4 Röhren mit Wasser gefüllt werden, und zwar in 1 Stunde 12 Minuten, wenn die

erste, in 2 St. 30 Min., wenn die zweite, in 3 St. 20 Min., wenn die dritte, in 3 St. 45 Min., wenn die vierte allein geöffnet wird. In welcher Zeit wird das Bassin gefüllt werden, wenn man alle Röhren zugleich öffnet?

Antwort. In 33 Minuten 20 Sekunden.

20) Ein Bassin soll durch 3 Röhren mit Wasser gefüllt werden. Durch die erste wird es in a, durch die zweite in b, durch die dritte in c Stunden gefüllt; in welcher Zeit durch alle 3?

Antwort. In $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ Stunden.

21) Mit seinem Capital gewinnt ein Kaufmann 75 Procent im ersten Jahr, giebt aber auch 5800 Rubel aus. Eben so im zweiten Jahr, worauf er nach Abzug der Ausgaben noch $\frac{1}{4}$ seines anfänglichen Capitals gewonnen hat. Wie groß war sein Capital anfangs und nachher?

Antwort. 8800 Rubel anfangs, und ist zu 11000 Rubel angewachsen.

Zusatz. Derselbe gewinnt damit im dritten und auch im vierten Jahr 90 Procent, giebt aber auch mehr aus. Am Schluße des vierten Jahres beträgt sein Capital 15930 Rbl.; wieviel gab er in jedem dieser Jahre aus?

Antwort. 8200 Rubel.

22) Es verleiht jemand ein Capital von 1400 Rubel zu 3 Procent Zinsen jährlich, nach 4 Jahren ein anderes von 1200 Rubel zu 7 Procent, und läßt die Zinsen anwachsen, bis sie von beiden Capitalien eine gleiche Summe betragen. Wie lange standen die Capitalien auf Zinsen?

Antwort. Das erste 8, das zweite 4 Jahre.

23) Das Capital A wird zu a, das Capital B um n Jahr später zu b Procent jährlicher Zinsen belegt. Wie lange müssen die Zinsen sich anhäufen, bis sie von jedem Capital eine gleiche Summe betragen?

Antwort. x Jahr für das erste Capital und $x = \frac{nbB}{bB - aA}$; $x - n$ Jahr für das zweite Capital.

24) Mit einem Boten, der täglich 4 Meilen zurücklegend von A. nach dem 49 Meilen davon entfernten Orte B. geht, geht zu gleicher Zeit ihm entgegen von B. ein anderer Bote ab, welcher täglich 3 Meilen zurücklegt. Am wievielten Tage darauf werden sie sich begegnen, und wieviel Meilen hat dann jeder zurückgelegt?

Antwort. Am 7ten Tage, nachdem der erste 28, der zweite 21 Meilen zurückgelegt hat.

25) Ein Officier reiset in Geschäften der Krone von P. ab, und macht alle 6 Stunden 43 Werst. Ihm wird von eben da nach 11 Stunden ein Courier mit neuen Aufträgen nachgeschickt. Dieser macht alle 4 Stunden 47 Werst; in wieviel Zeit wird dieser jenen einholen?

Antwort. In 17 Stunden 12 Minuten.

26) Einem Boten, der um 5 Uhr Morgens abgeht und täglich 20 Werst geht, wird am 10ten Tage nach seiner Abreise ebenfalls um 5 Uhr Morgens ein reitender Bote nachgeschickt, welcher täglich 70 Werst zurücklegt. Wieviel wird dieser zurücklegen müssen, bis er jenen einholt?

Antwort. 280 Werst.

27) A in N. will seinen Freund B, der 60 Werst weit von ihm wohnt, besuchen. Als er hinkommt, erfährt

er, daß dieser 24 Stunden früher nach H. abgereiset ist. Er reiset ihm sogleich nach, legt, wie vorher, 10 Werst in einer Stunde zurück, indeß B 20 Werst alle 3 Stunden macht, und holt ihn noch vor H. ein. In welcher Zeit nach der Abreise des A von N. geschah es?

Antwort. In 54 Stunden.

28) Ein Reisender, der a Werst in jeder Stunde zurücklegt, wird von einem andern Reisenden, vor dem er einen Vorsprung von c Werst hat, eingeholt; in wieviel Zeit, wenn der zweite b Werst stündlich macht?

Antwort. In $\frac{c}{b-a}$ Stunden.

29) Was muß zum Zähler oder zum Nenner des Bruches $\frac{23}{37}$ hinzugefügt werden, damit $\frac{5}{8}$ entstehe?

Antwort. Entweder wird $\frac{1}{8}$ zum Zähler addirt, oder $\frac{1}{5}$ vom Nenner abgezogen.

30) Ein Armer hat Aussicht, in der Ferne sein Fortkommen zu finden; aber es fehlt ihm an Reisegeld. Um ihm dies zu verschaffen, fordert ein Menschenfreund in einer zahlreichen Gesellschaft zu Beiträgen auf. Jeder giebt 2 Rubel. Da auf diese Weise 27 Rubel mehr zusammen kommen, als zur Reise nöthig sind, so kauft er ihm einen Mantel, der $\frac{1}{5}$ des eingesammelten Geldes kostet. Nun fehlen aber 11 Rubel 80 Copeken an der zur Reise bestimmten Summe. Diese legt er aus seiner eigenen Tasche zu. Aus wieviel Personen bestand die Gesellschaft? Und wieviel betrug das Reisegeld?

Antwort. Die Gesellschaft bestand aus 97 Personen, und das Reisegeld betrug 167 Rubel.

31) 25 ist das arithmetische Mittel zwischen dem dreifachen und dem dritten Theil einer Zahl; welche ist es?

Antwort. 15.

32) Jemand kauft 2 Häuser, eins für 6000, das andere für 4000 Rubel, und zieht von dem ersten 7, von dem zweiten 8 Procent jährlich Miethe. In wie langer Zeit wird sie für beide Häuser 2220 Rubel betragen?

Antwort. In 3 Jahren.

33) Zwei Freunde machten eine Fußreise, und nächtigten in einem Kruge. Am andern Morgen war der eine schon reisefertig, als der andere nur eben erwachte. Dieser sprach zu jenem: Geh nur voraus; ich werde Dich in wenig Stunden einholen. Er brach 55 Minuten später auf als der andere, und sah, als er ihn einholte, nach der Uhr. Es fand sich, daß er 10 Minuten im Durchschnitt auf die Werst gegangen war, so wie sein Gefährte 14. Wie lange und wie viel war dieser gegangen?

Antwort. 3 Stunden $12\frac{1}{2}$ Minuten, in welcher Zeit er $13\frac{3}{4}$ Werst zurückgelegt hatte.

34) Ein Reisender nimmt von einem Kaufmann für eine bedeutende Summe Waaren, und bezahlt mit falschem Papiergelde, worauf er sogleich abreiset, und 3 Meilen in 4 Stunden zurücklegt. Der Kaufmann bemerkt den Betrug erst einige Stunden nach seiner Abreise, und setzt ihn nach. Er legt 4 Meilen in 3 Stunden zurück, und holt ihn in 9 Stunden ein. Um wieviel war der Kaufmann später abgereiset?

Antwort. Um 7 Stunden.

35) Zwei Häuser werden ausgeboten. Jemand findet seine Rechnung beim Ankaufe derselben, wenn er den Werth des einen 1210 Rubel höher anschlägt, als den des andern, und dabei von jenem jährlich $7\frac{1}{2}$ Procent, von diesem, weil es baufälliger ist, 9 Procent Miethe zieht. Nun erfährt er, daß beide Häuser in 4 Jahren 3960 Rubel Miethe eingebracht haben. Wieviel kann er für jedes Haus geben?

Antwort. 6660 Rubel für das eine; 5450 für das andere.

36) A macht in einer Minute 160, B 144 Schritt; von jenem gehen 1520, von diesem 1440 Schritt auf eine Werst. A wettet mit B, daß er, obgleich seine Schritte kleiner sind, 10 Minuten später ausgehen, und ihn doch einholen wolle. Es geschah auch wirklich. In wieviel Zeit?

Antwort. In 3 Stunden 10 Minuten nach seinem Aufbruche, und nachdem er 20 Werst gegangen war.

37) A und B laufen in die Wette, und gelangen zugleich ans Ziel, obgleich B einen Vorsprung von 114 seiner Schritte erhält und 20 Schritte macht, während A 17 macht; dagegen gehen 7 Schritte von B auf 5 Schritte von A. Wieviel Schritte mußte der letztere machen, um das Ziel zu erreichen?

Antwort. 510 Schritte.

38) Ein Schuldner will seinen Gläubiger in 2 Terminen befriedigen, nämlich $\frac{1}{3}$ seiner Schuld nach 4 und den Ueberrest nach 19 Monaten abtragen. Nachher versäumt er den ersten Termin, verspricht dagegen zum Ersatz für den Verlust an Zinsen die ganze Schuld um so viel früher zu ent-

richten, als zur Ausgleichung erforderlich war. Wann mußte dies geschehn?

Antwort. 5 Monat vor dem zweiten Termin.

Erläuterung.

Bedeuten nämlich z die monatlichen Zinsen der Schuld, x die Anzahl der Monate, um welche die Auszahlung vor dem zweiten Termin geschah, so bekommt man die Gleichung

$$x \cdot \tfrac{2}{3}z = (15 - x) \cdot \tfrac{1}{3}z \text{ oder } 2x = 15 - x.$$

§. 79.

Gleichungen vom ersten Grade mit zwei unbekannten Größen.

Zur Bestimmung von zwei unbekannten Größen sind zwei Gleichungen nöthig. Zu ihrer Auflösung, wenn die unbekannten Größen mit x und y bezeichnet werden, ergiebt sich leicht folgende

Regel.

Drücke aus jeder Gleichung die eine unbekannte Größe x durch die andere y, die du als bekannt ansiehst, aus. Setze die gefundenen Ausdrücke einander gleich, so wirst du eine Gleichung erhalten, welche nur noch die andere unbekannte enthält. Diese Gleichung löse auf, so hast du den Werth von y. Diesen setze für y in einen der zuerst für x gefundenen Ausdrücke, so wirst du auch den Werth von x erhalten.

Exempel 1.

$$2x + 4y = 24$$
$$3x - y = 1$$
$$x = \frac{24 - 4y}{2}$$
$$x = \frac{1 + y}{3}$$
$$\frac{24 - 4y}{2} = \frac{1 + y}{3}$$
$$72 - 12y = 2 + 2y$$
$$14y = 70$$
$$y = 5;$$
$$x = \frac{1 + 5}{3} = 2.$$

Exempel 2.

$$ax + by = c$$
$$ex + fy = d$$
$$x = \frac{c - by}{a}$$
$$x = \frac{d - fy}{e}$$
$$\frac{c - by}{a} = \frac{d - fy}{e}$$
$$ce - bey = ad - afy$$
$$(af - be)\,y = ad - ce$$
$$y = \frac{ad - ce}{af - be}$$
$$x = \frac{c - b\left(\frac{ad - ce}{af - be}\right)}{a} = \frac{acf - bce - abd + bce}{a\,(af - be)}$$
$$x = \frac{cf - bd}{af - be}.$$

Anmerk. Man kann auch durch eine geschickte Multiplication in beide Gleichungen und darauf folgende Addition oder Subtraction bewirken, daß eine unbekannte Größe wegfällt. Z. B. multiplicirt man die erste obiger Gleichungen mit e, die zweite mit a, so erhält man:

$$\begin{array}{rcl} aex + bey & = & ce \\ aex + afy & = & ad \\ \hline (af - be)\,y & = & ad - ce \\ y & = & \dfrac{ad - ce}{af - be}. \end{array}$$

Die erste Gleichung mit f, die zweite mit b multiplicirt, giebt:

$$\begin{array}{rcl} afx + bfy & = & cf \\ bex + bfy & = & bd \\ \hline (af - be)\,x & = & cf - bd \\ x & = & \dfrac{cf - bd}{af - be} \end{array}$$

Uebungsaufgaben über die Gleichungen vom ersten Grade mit 2 unbekannten Größen.

1) Ich denke mir 2 Zahlen. Das dreifache der ersten giebt zum vierfachen der zweiten addirt 43; das vierfache der ersten zum dreifachen der zweiten addirt giebt 41. Was sind es für Zahlen?

Antwort. 5 und 7.

2) Jemand vertheilt unter zwei Personen A und B 100 Ducaten, um auf sein Glück zu spielen. A verliert die Hälfte seiner Summe, B gewinnt $\frac{1}{3}$ der seinigen, und es

findet sich, daß ungeachtet des Verlustes noch 25 Rubel gewonnen sind. Wieviel Ducaten erhielt ein jeder?

Antwort. A erhielt 10, B 90 Ducaten.

3) In einem Tanzsaal sind anfangs viermal soviel Herren als Damen. Bald aber treten noch 39 Damen und 6 Herren in den Saal; da sind eben soviel Damen als Herren in demselben. Wieviel Personen sind nun da?

Antwort. 100.

4) Ein Mathematiker hat 7 unter sich gleiche silberne und 12 unter sich gleiche goldene Kugeln, deren Gewicht er untersucht, ohne soviel Gewichte zu haben als eine Kugel wiegt. Er legt drei silberne in die eine Schale einer Wage, und 5 goldene in die andere Schale, und muß in der letzten noch 7 Loth zulegen, um Gleichgewicht zu erhalten. Darauf legt er noch den Ueberrest der silbernen in die eine, den Ueberrest der goldenen Kugeln in die andere Schale, und beide Schalen bleiben im Gleichgewicht. Wieviel wog eine silberne, und wieviel eine goldene Kugel?

Antwort. Eine silberne 49, eine goldene 28 Loth.

5) Ein Keller ist mit 2 Pumpen versehen, und enthält 1500 □Fuß Flächenraum. In diesem ist das Wasser 1 Fuß hoch gestiegen, und soll ausgepumpt werden. Wird an der ersten Pumpe 2, an der zweiten 3 Stunden lang gepumpt, so nimmt die Wassermenge um 1020 Kubikfuß ab. Wird an der ersten 1 Stunde, an der zweiten $2\frac{1}{2}$ Stunde gepumpt, so nimmt die Wassermenge um 690 K. F. ab. Wieviel K. F. werden durch jede Pumpe in 1 Stunde ausgepumpt? Und in wieviel Zeit wird die ganze im Keller befindliche Was-

sermenge ausgepumpt, wenn beide Pumpen zugleich in Bewegung gesetzt werden?

Antwort. Durch die ersten werden 240, durch die zweite 180 K. F. in einer Stunde ausgepumpt. Durch beide Pumpen zugleich wird das Wasser in $3\frac{4}{7}$ Stunden abgeleitet.

6) Jemand hat einige Rubel Silber und einige Rubel B. A., zusammen 402. Ihr Werth beträgt 1053 Rubel 75 Cop. B. A., 4 Rubel Silber zu 15 Rubel B. A. gerechnet. Wieviel hatte er von jeder Geldsorte?

Antwort. 237 Rubel Silber und 165 Rubel B. A.

7) Ein Advokat engagirt einen Schreiber, und giebt ihm, da dieser nicht fertig werden kann, einen Gehülfen, dem er weniger für jeden Bogen bezahlt. Nachdem der erste 7, der zweite 3 Bogen geschrieben hat, bekommen beide zusammen 9 Rubel 25 Cop. Der erste schreibt darauf noch 13, der zweite 10 Bogen, wofür sie 20 Rubel 50 Cop. bekommen. Wieviel bekam jeder für den Bogen?

Antwort. Der Schreiber 1 Rbl., der Gehülfe 75 Cop.

8) Jemand untersucht das Verhältniß der franz. und englischen Meilen zur geographischen. Er findet, daß er zu 100 franz. Meilen noch 106 englische hinzusetzen, und von 424 englischen 15 französische abnehmen muß, um 83 geographische Meilen zu erhalten. Der wievielte Theil sind die franz. und die englische Meile von der geographischen?

Antwort. Die franz. $\frac{3}{5}$; die englische $\frac{23}{106}$.

9) Ein Kaufmann gewinnt auf eine Quantität Kaffee 10 Procent, auf eine Quantität Zucker $12\frac{1}{2}$ Procent. Mit

dem für den Kaffee gelösten Gelde macht er einen neuen Einkauf an Kaffee; eben so an Zucker mit dem für diesen gelösten Gelde; auf jenen gewinnt er $12\frac{1}{2}$ Procent, und verliert $11\frac{1}{9}$ Procent auf diesen. Das erste Mal war der Gewinn für beides 125 Rubel B. A.; das zweite Mal überwog der Gewinn den Verlust um 50 Rubel B. A. Wieviel kostete ihm sein anfänglicher Vorrath an jeder Waare?

Antwort. Der Kaffee $736\frac{16}{19}$ Rubel. Der Zucker $410\frac{10}{19}$ Rubel.

10) A füllt einen ausgehöhlten Cylinder von Silber mit Quecksilber, und verschließt die Oeffnung mit Silber wieder so geschickt, daß nicht das mindeste davon zu merken ist. Diesen 6 Pfd. schweren Cylinder verkauft er für reines Silber an B. Das Quecksilber, sich mit dem Silber amalgamirend, dringt allmählig so nahe an die Oberfläche, daß diese an einer dünnen Stelle einem zufälligen äußern Druck nachgebend, den Betrug verräth. Um die Menge des in dem Cylinder enthaltenen Quecksilbers auszumitteln, taucht B den Cylinder in Wasser, und da verliert derselbe 17 Loth an Gewicht. Reines Silber verliert im Wasser $\frac{2}{21}$, und Quecksilber $\frac{1}{14}$ seines Gewichtes. Aus wieviel reinem Silber bestand der Cylinder, und wieviel Quecksilber war darin?

Antwort. Er enthielt 4 Pfund 10 Loth Silber und 1 Pfund 22 Loth Quecksilber.

11) Einen schadhaften Prahm versieht man, um ihn auszubessern, an der Seite, wo er ins Wasser taucht, mit Brettern und eisernen Klammern, die zusammen 98 Pfd. wiegen. Wieviel an Gewicht darf — 1 K. Fuß Wasser zu 70 Pariser Pfd., 1 K. Fuß Holz zu 50 Pfd. (durchnäßtes Birkenholz wiegt ungefähr soviel), 1 K. F. Eisen zu 540 Pfd.

gerechnet — das Eisen höchstens betragen, wenn die Tragbarkeit des Prahms sich nicht vermindern soll?

Antwort. 30, 8 . . Pfd.

12) Ein Silberarbeiter schmilzt eilflöthiges und funfzehnlöthiges Silber zusammen, um 10 Pfd. vierzehnlöthiges Silber zu erhalten. Wieviel muß er dazu von jeder Sorte nehmen?

Antwort. $2\frac{1}{2}$ Pfund vom eilflöthigen, $7\frac{1}{2}$ Pfund vom funfzehnlöthigen.

13) Wieviel a löthiges und b löthiges Silber muß man zusammen schmelzen, um 1 Pfund c löthiges zu erhalten?

Antwort. $\frac{b-c}{b-a}$ vom a löthigen, $\frac{c-a}{b-a}$ vom b löthigen.

14) 1 Kubikzoll Par. Decimalmaß reines Silber wiegt $\frac{11}{15}$ Par. Pfund, ein eben so großer Würfel von Kupfer ist $\frac{3}{5}$ Pfund schwer. Wieviel wiegt ein solcher Würfel von zwölflöthigem Silber?

Antwort. $\frac{66}{95}$ Pfund.

15) Zwei Wanderer A und B stellen sich, um ihre Schritte zu vergleichen, eine Werst aus einander, und gehen sich darauf entgegen. Sie treffen zusammen, nachdem A in 7 Minuten 1050, B in 3 Minuten 300 Schritte gegangen ist. Nun geht jeder noch bis zu dem Werstpfahl, von welchem der andere kam, worauf beide nach einer ungleichen Pause umkehren, und sich wieder entgegen gehen. Nachdem A diesmal 4, B 8 Minuten gegangen ist, treffen sie wieder zusammen. Sie wollen wissen:

1) Wieviel Schritte jeder auf eine Werst macht?

2) In welcher Zeit er sie zurücklegt?

Antwort. A macht 1320, B $1466\frac{2}{3}$ Schritte auf eine Werst. A geht eine Werst in $8\frac{4}{5}$, B in $14\frac{2}{3}$ Minuten ab.

16) Jemand hat als Grenzen eines Bruches, den er nicht mehr weiß, $\frac{4}{9}$ und $\frac{3}{7}$ gefunden, indem er abwechselnd den Zähler und Nenner desselben um $\frac{1}{3}$ vermehrt und jedesmal aufgehoben hat. Welcher Bruch war es?

Antwort. $\frac{13}{30}$.

17) Wird der Zähler eines Bruches um 1 vermindert, der Nenner um 1 vermehrt, so entsteht $\frac{3}{5}$; macht man es umgekehrt, so entsteht $\frac{7}{11}$. Welcher Bruch war es?

Antwort. $\frac{55}{89}$.

18) Jemand hat eine goldene und eine silberne Dose, deren Werth er folgendermaßen schätzt. Mit 16 Ducaten angefüllt ist jene 6 mal soviel werth, als diese, angefüllt mit 12 Ducaten. Werden die Summen vertauscht, so ist die silberne $\frac{5}{23}$ mal soviel werth, als die goldene. Zu wieviel Ducaten schlug er den Werth einer jeden Dose an?

Antwort. Die goldene zu 80, die silberne zu 4 Ducaten.

§. 80.

Gleichungen vom ersten Grade mit drei und mehr unbekannten Größen.

Soviel unbekannte Größen sind, soviel sind Gleichungen zu ihrer Bestimmung nöthig. Diese werden durch ein mit §. 79 übereinstimmendes Verfahren aufgelöst.

Man drückt nämlich aus jeder gegebenen Gleichung die eine unbekannte x durch die andern y, z . . . aus. Einen der gefundenen Ausdrücke setzt man jedem der übrigen gleich, wodurch die Anzahl der Gleichungen um 1 vermindert wird, und neue Gleichungen entstehen, die eine unbekannte x weniger enthalten. Auf dieselbe Weise formirt man aus diesen erhaltenen Gleichungen neue, die wieder eine unbekannte Größe y weniger enthalten, und fährt so fort, bis man zuletzt auf eine Gleichung kommt, die nur eine unbekannte Größe enthält. Diese löst man auf, und setzt den Werth der unbekannten in eine der nächst vorhergehenden Gleichungen, und fährt so fort, bis alle unbekannten Größen berechnet oder durch Ausdrücke unter bekannten Größen bestimmt sind.

Exempel.

Für x, y, z sind folgende 3 Gleichungen gegeben:

$$x + y + z = 9$$
$$x + 2y - z = 4$$
$$x + 3y + 4z = 27$$

Auflösung.

$$x = 9 - y - z$$
$$x = 4 - 2y + z$$
$$x = 27 - 3y - 4z$$

$$9 - y - z = 4 - 2y + z$$
$$9 - y - z = 27 - 3y - 4z$$

$$y = 2z - 5$$
$$y = \frac{18 - 3z}{2}$$

$$2z - 5 = \frac{18 - 3z}{2}$$

$$4z - 10 = 18 - 3z$$

$$7z = 28$$

$$z = 4;$$

$$y = 3;$$

$$x = 2.$$

Anmerk. Auch bei Gleichungen mit drei unbekannten Größen kann man durch eine geschickte Multiplication die Rechnung oft abkürzen. So ergiebt sich noch eine zweite und dritte Methode zur Auflösung derselben, und mit wenig Abänderungen auch der Gleichungen mit mehr unbek. Größen.

Zweite Methode.

Man wählt je zwei der gegebenen Gleichungen, und erzeugt aus ihnen durch Multiplication 2 andere, die so beschaffen sind, daß deren Summe oder Differenz eine dritte Gleichung giebt, in welcher eine unbekannte Größe wegfällt. Auf diese Weise sucht man 2 Gleichungen für die beiden übrigen unbekannten Größen. Aus diesen erzeugt man auf ähnliche Weise eine Gleichung mit einer unbekannten Größe, sucht deren Werth, und aus diesem den der beiden übrigen.

Exempel.

Die gegebenen Gleichungen mögen wieder seyn:

1) $x + y + z = 9$

2) $x + 2y - z = 4$

3) $x + 3y + 4z = 27$

Um 2 Gleichungen für x und y zu erhalten, addirt man zuerst die erste und zweite, multiplicirt darauf die zweite mit 4 und addirt die dritte. Dadurch erhält man:

$$4)\quad 2x + 3y = 13$$
$$5)\quad 5x + 11y = 43$$

und daraus
$$6)\quad 22x + 3 \, . \, 11y = 143$$
$$7)\quad 15x + 3 \, . \, 11 \, . \, y = 129$$

$$7x = 14$$
$$x = 2$$
$$y = 3 \text{ aus Gl. 4}$$
$$z = 4 \text{ aus Gl. 1.}$$

Dritte Methode.

Man multiplicirt eine der gegebenen Gleichungen mit m, eine andre mit n, addirt die dritte zu den so veränderten beiden ersten Gleichungen, worauf man die Coefficienten derjenigen unbekannten Größen, die man wegschaffen will, jeden für sich, $=0$ setzt, und daraus m, n bestimmt. Es wird dann eine Gleichung mit einer unbekannten Größe übrig bleiben, welche man auflöst, u. s. w.

Exempel.

Will man in den obigen 3 Gleichungen

$$1)\quad x + y + z = 9$$
$$2)\quad x + 2y - z = 4$$
$$3)\quad x + 3y + 4z = 27$$

x und y wegschaffen, um z allein zu erhalten, so giebt die Multiplication mit m, n

$$4)\quad mx + my + mz = 9m$$
$$5)\quad nx + 2ny - nz = 4n;$$
$$x + 3y + 4z = 27$$

addirt, und dann die Coefficienten von x, y = 0 gesetzt, giebt:

$$m + n + 1 = 0$$
$$m + 2n + 3 = 0$$
$$m = -2$$
$$m = 1;$$

folglich $(m - n + 4)\, z = 9m + 4n + 27$

$$7z = 28$$
$$z = 4.$$

Aufgaben über die Gleichungen vom ersten Grade mit 3 unbekannten Größen.

1) Drei Brüder theilen 315 Rubel unter sich nach Verhältniß ihres Alters. Hiernach kommen auf jedes Jahr Alter 5 Rubel, und der Antheil des ältesten übertrifft den Antheil des zweiten um doppelt soviel, als des zweiten Antheil die Summe übertrifft, welche dem jüngsten zufällt. Ueberhaupt aber bekommt der älteste $1\frac{1}{3}$ mal soviel, als die beiden jüngern zusammen bekommen. Wie alt ist jeder?

Antwort. Der älteste 36, der mittelste 18, der jüngste 9 Jahr.

2) Ein Studierender bekommt von seinem Vater 2000 Rubel, um 1 Jahr davon zu leben. Er theilt sie in 3 Classen A, B, C, und bestimmt die erste zu Büchern, die zweite zu Vergnügungen, die dritte zum Lebensunterhalte. Von A und B giebt er monatlich den zwölften Theil der hineingelegten

Summe aus. Die Casse C aber wird nach 7 Monaten leer; er ergänzt sie aus A und B, indem er die Hälfte der in A und $\frac{1}{3}$ der in B noch enthaltenen Summe hineinlegt. Darauf ist die Casse C um 70 Rubel größer als B, und B um 50 Rubel größer als A. Wieviel enthielt jede Casse anfangs?

Antwort. A enthielt 912, B 864, C 224 Rubel.

3) In einem Taschenbuche sind weiße (nämlich fünf und zwanzigrublige), rothe und blaue Banknoten. Ihre Anzahl ist 53, ihr Werth 460 Rubel. Dabei ist die Anzahl der weißen und die doppelte Anzahl der blauen zusammen so groß als die siebenfache Anzahl der rothen. Wieviel Zettel waren von jeder Sorte darin?

Antwort. 7 weiße, 11 rothe, 35 blaue.

4) Drei Freunde vergleichen ihre Geschwindigkeit im Gehen. A geht in 1 Minute 164 Fuß mehr ab als B in $\frac{1}{2}$ Minute, und in 12 Minuten soviel, als B und C, wenn B die 7 ersten, C die 5 letzten Minuten geht; B geht in 8 Minuten 1155 Fuß mehr ab als C in 5 Minuten. Wieviel Fuß legt jeder in 1 Minute zurück?

Antwort. A $337\frac{1}{2}$; B 347; C $324\frac{1}{5}$ Fuß.

5) Jemand vergleicht englische, französische und rheinländische Fuß mit einer Arschin, und findet durch Nachmessen folgendes: einem englischen Fuß muß er $\frac{5}{4}$ französische Fuß zusetzen, um eine Arschin zu erhalten; verkürzt er 18 Arschin um 18 englische Fuß und den Ueberrest um 5 französische Fuß, so bekommt er 18 rheinländische Fuß; 27 rheinländische Fuß gehen auf 28 engl. Fuß. Welcher Theil von einer Arschin ist jedes Fußmaß?

Antwort. 1 franz. Fuß ist $\frac{16}{35}$, 1 engl. $\frac{3}{7}$, 1 rheinl. $\frac{4}{9}$ von einer Arschin. — Genauer ist der letzte Bruch $= \frac{1391}{3194}$.

6) Zum Zähler und Nenner eines Bruches, der sich nicht mehr aufheben läßt, wird abwechselnd eine gleiche Größe addirt, die so beschaffen ist, daß der Bruch sich nun jedesmal aufheben läßt, und nach dem Aufheben $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{9}$ entsteht. Welcher Bruch war es, und welche Größe wurde addirt?

Antwort. Der Bruch war $\frac{5}{22}$; die Größe, welche addirt wurde, war $\frac{1}{2}$.

7) Auf gleiche Weise wird mit einem andern Bruch, der sich nicht aufheben läßt, verfahren, wodurch aus diesem die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ entstehen. Welcher Bruch war es diesmal, und welche Größe wurde addirt?

Antwort. Der Bruch war $\frac{5}{8}$; die addirte Größe war $\frac{1}{3}$.

8) Zwei Brüche, die einen gleichen Nenner (der mit z bezeichnet werde) haben, sollen mit einander multiplicirt werden. Da die Zähler und Nenner große Zahlen sind, so denkt man auf eine Abkürzung. Man zieht vom Zähler des ersten 5 ab, und addirt dagegen zum Zähler des zweiten 6, worauf beide Brüche sich aufheben lassen, und für den ersten $\frac{3}{5}$, für den zweiten $\frac{5}{7}$ entsteht. Durch diese Veränderung wird das Product um $\frac{53}{zz}$ zu groß. Was waren es für Brüche?

Antwort. $\frac{488}{805}$ und $\frac{569}{805}$.

9) 4 Personen spielen Pharo. Nach dem Verlust seiner Barschaft hört A auf, und da hat B $\frac{1}{4}$ seiner mitgebrachten, C eben soviel gewonnen, als er hatte; der Banquier hat nichts verloren und nichts gewonnen. Nach der zweiten

Taille verliert B seinen Gewinn und noch 25 Ducaten; der Banquier hat einen Ducaten, und C wieder soviel gewonnen, als er zu Anfange dieser Taille hatte. Auch ist sein ganzer Gewinn doppelt so groß als der Verlust des A. Wie groß war die mitgebrachte Barschaft von A, von B und von C?

Antwort. A hatte 24, B 32, C 16 Ducaten.

10) Jemand setzt auf 3 Karten, auf jede einige Ducaten, aber nur einmal in einer Taille. In der ersten Taille gewinnen alle 3, und zwar 12 Ducaten; in der zweiten Taille besetzt er sie eben so wie in der ersten, und gewinnt 8 Ducaten, obgleich die dritte Karte verliert. In der dritten Taille macht er es eben so, und gewinnt 4 Ducaten, obgleich die zweite Karte verliert. Wieviel war auf jede Karte gesetzt?

Antwort. 6, 4 und 2 Ducaten.

11) Drei Kaufleute A, B und C etabliren sich zu gleicher Zeit mit verschiedenen Capitalien. Am Schlusse des ersten Jahres hat jeder $16\frac{2}{3}$ Procent gewonnen. Am Schlusse des zweiten hat A $28\frac{4}{7}$ Procent, B $57\frac{1}{7}$ Procent, C $85\frac{5}{7}$ Procent gewonnen; am Schlusse des dritten A $66\frac{2}{3}$ Procent, B $54\frac{6}{11}$ Procent und C $11\frac{7}{13}$ Procent. Darauf schießen sie den Gewinn aller 3 Jahre zusammen, um ein Schiff mit Waaren gemeinschaftlich auszurüsten. Es findet sich, daß alle drei zusammen genommen im ersten Jahr 400, im zweiten 1400, im dritten 2000 Louisd'or gewonnen haben, also 3800 in der ganzen Zeit. Wieviel trug jeder zur Ausrüstung des Schiffes bei?

Antwort. A 1700, B $1344\frac{4}{9}$, C $755\frac{5}{9}$ Louisd'or.

12) Zwei Brüder zählen jeder soviel Jahre, daß die Summe das Alter ihres Vaters angiebt. Nach 2 Jahren

wird dieser doppelt so alt seyn, als der jüngere Sohn, und vor 30 Jahren war es der ältere. Wie alt ist jeder?

Antwort. Der jüngere Bruder 32, der ältere 34, der Vater 66 Jahr.

13) Vier Freunde reisen zu Schiffe nach H., um dort ihr Fortkommen zu suchen. Jeder muß 100 Rubel Reisegeld zahlen, was die drei ersten auch bei ihrer Ankunft thun, und darauf auch für D bezahlen, der nichts hat; und zwar giebt jeder den dritten Theil sener Barschaft hin. Sie kehren darauf in einen Gasthof ein. Nach 3 Tagen werden A, B, C angestellt, worauf jeder derselben, nachdem inzwischen A die Hälfte seiner noch übrigen Barschaft, B 2, C 3 Rubel von der seinigen ausgegeben hat, $\frac{1}{3}$ des ihm übriggebliebenen Geldes zur Bezahlung der gesammten Zeche, welche 49 Rbl. beträgt, für alle vier hergiebt. Weil D noch kein Unterkommen gefunden hat, so schießen A, B, C noch 39 Rubel für ihn zusammen. Dazu giebt von seiner jetzt noch übrigen Barschaft A den vierten Theil, B die Hälfte, und C den dritten Theil. Wieviel brachten A, B, C an Barschaft zur Reise mit?

Antwort. A hatte 244, B $224\frac{1}{2}$, C $131\frac{1}{2}$ Rubel.

14) Ein Gelehrter läßt ein Werk auf Druck-, Schreib- und Velin-Papier abdrucken. Für 2 Bogen vom ersten, 3 vom zweiten, und 4 vom dritten Papier nimmt der Buchdrucker zusammen 351 Rubel; für 2 Bogen vom ersten, 2 Bogen vom zweiten, und 3 Bogen vom dritten Papier 271 Rubel; für 1 Bogen vom ersten, vom zweiten und vom dritten Papier 114 Rubel. Wie hoch kam dem Gelehrten jeder Bogen von jeder Papiersorte zu stehen?

Antwort. Für jeden Bogen Druckpapier zahlte er 34, Schreibpapier 37, Velinpapier 43 Rubel.

15) A macht in 11 Minuten soviel Schritte, als B und C zusammen, wenn jeder 5 Minuten geht. Geht B 1 Minute, und C 3 Minuten, so machen sie zusammen 651 Schritte. Gehn alle 3 zugleich, so machen sie in einer Minute 464 Schritte. Wieviel Schritte macht jeder in einer Minute?

Antwort. A 145, B 153, C 166.

16) Drei Freunde A, B, C gehen aus 3 verschiedenen Orten nach L. ab, um von da in Gesellschaft eine anmuthige Gegend zu besuchen. Sie treffen zu gleicher Zeit in L. ein. Als sie nach der Uhr sehen, ist jeder 5 Stunden gegangen. A geht in 12 Minuten soviel ab, als B und C, wenn B die ersten 4 und C die letzten 8 Minuten geht. B legt in 8 Minuten 1221 Fuß mehr zurück als C in 5 Minuten, dagegen in einer halben 154 Fuß weniger, als A in einer Minute. Wieviel Werst war jeder bei seinem Aufbruch von B entfernt, wenn eine Werst zu 3300 Fuß gerechnet wird?

Antwort. A 30, B 32, C 29.

Aufgaben über Gleichungen vom ersten Grade mit mehr als drei unbekannten Größen.

1) Zwei Brüche sind von folgender Beschaffenheit: addirt man zum Zähler des größern Bruches den Zähler, zum Nenner den Nenner des kleinern Bruches, so wird sein Werth $\frac{2}{3}$, dagegen wird sein Werth $= 1$, wenn man, statt zu addiren, abzieht. Kehrt man den kleinen Bruch, nachdem man seinen Nenner um 1 vergrößert hat, um, und verfährt dann

wieder wie vorher, so entsteht im ersten Fall $\frac{2}{8}$, im zweiten Fall $\frac{1}{6}$. Was für Brüche waren es?

Antwort. $\frac{5}{7}$ und $\frac{1}{3}$.

2) Jemand kauft 5 Sorten Thee, von jeder 1 Pfund, und bezahlt dafür 96 Rubel B. A. Die beiden ersten Sorten kosten ihm soviel als $\frac{1}{2}$ Pfund von der dritten und $\frac{1}{4}$ Pfund von der vierten. Die fünfte Sorte kostet ihm dreimal soviel als die vierte und noch das Doppelte des Preises der dritten Sorte, für die zweite Sorte bezahlt er 2 Rbl. mehr und für die dritte Sorte 5 Rubel mehr als für die erste; wieviel bezahlte er für jede?

Antwort. Für die erste Sorte 3, für die zweite 5, für die dritte 8, für die vierte 16, und für die fünfte 64 Rbl.

Gleichungen zur Uebung im Algebraischen Operiren.

a) Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) $$\frac{33}{x+4} - \frac{21}{x+4} = 2.$$

$$\frac{12}{x+4} = 2$$

$$\frac{6}{x+4} = 1$$

$$6 = x + 4$$

$$x = 2.$$

2) $$\frac{2}{\frac{1}{2}x - 3} + \frac{5}{\frac{3}{2}x - 9} = 4.$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}x - 3} + \frac{5}{3\,(\frac{1}{2}x - 3)} = 4$$

$$11 = 6x - 36$$
$$x = \tfrac{47}{6} = 7\tfrac{5}{6}.$$

3) $$\frac{13}{\frac{1}{4}x - 5} - \frac{1}{x - 20} = 3.$$
$$51 = 3x - 60$$
$$x = 37.$$

4) $$\frac{3x}{4 + \frac{1}{2}x} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{7}.$$
$$\frac{3x}{4 + \frac{1}{2}x} = \tfrac{66}{35}$$
$$35x = 88 + 11x$$
$$x = 3\tfrac{2}{3}.$$

5) $$\frac{7}{6x} + \frac{2}{2x - \frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{2x} + \frac{2}{3x}.$$
$$\frac{2}{2x - \frac{1}{3}} = 5$$
$$6 = 30x - 5$$
$$x = \tfrac{11}{30}.$$

6) $$\tfrac{8}{15}x - \tfrac{1}{5}x - 7 = \frac{x}{3} - \frac{19\frac{1}{4}}{2x + \frac{3}{4}}.$$
$$7 = \frac{77}{8x + 3}$$
$$8x + 3 = 11$$
$$x = 1.$$

b) Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

1.

$$\begin{array}{ll} 1) & x + 3y = 20 \\ 2) & x - 4y = 6 \\ \hline & x = 14;\ y = 2. \end{array}$$

2.

$$1)\quad 6x + 11y = 75$$
$$2)\quad 5x - 11y = 2$$

$$x = 7;\quad y = 3.$$

3.

$$1)\quad 2x + \tfrac{1}{3}y = 12$$
$$2)\quad 4x - \tfrac{1}{2}y = 17$$

$$x = 5;\quad y = 6.$$

4.

$$1)\quad \tfrac{2}{3}x - y = 0$$
$$2)\quad 4x + 3y = 36$$

$$x = 6;\quad y = 4.$$

5.

$$1)\quad \tfrac{3}{7}x + 2y = 25\tfrac{6}{7}$$
$$2)\quad \tfrac{1}{9}x + \tfrac{4}{5}y = 9\tfrac{4}{5}$$

$$x = 9;\quad y = 11.$$

6.

$$1)\quad 2x - 5y = 4$$
$$2)\quad 3x + y = 6$$

$$x = 2;\quad y = 0$$

7.

$$1)\quad 2x + 5y = 9$$
$$2)\quad 3x - 4y = 2$$

$$x = 2;\quad y = 1.$$

8.

$$1)\quad 7x + 3y = 15$$
$$2)\quad 5x - 6y = 8$$

$$x = 2;\quad y = \tfrac{1}{3}.$$

9.

1) $13x - 9y = -16$

2) $11x - 7y = -12$

$x = \frac{1}{2};\ y = 2\frac{1}{2}$

10.

1) $\frac{4}{5 + x} = \frac{5}{\frac{2}{3}x + 4y}$

2) $\frac{1}{11 - 2y} = \frac{2}{5 + 3x}$

3) $3x + 4y = 17$

4) $-7x + 48y = 75$

$x = 3;\ y = 2.$

c) Gleichungen mit drei unbekannten Größen.

1.

1) $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 15$

2) $x - y + \frac{1}{4}z = 2$

3) $x + 2y - \frac{1}{6}z = 21$

$x = 7;\ y = 8;\ z = 12$

2.

1) $x + 2y + 3z = 34$

2) $x - 3y + 4z = 16$

3) $x + 5y - 6z = -14$

$x = 3;\ y = 5;\ z = 7.$

3.

1) $2x + 3y + 4z = 49$

2) $4x + 7y - 2z = 33$

3) $5x + 2y - 3z = 4$

$x = 3;\ y = 5;\ z = 7.$

4.

$$1)\quad x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{5}z = 14$$
$$2)\quad x + \tfrac{2}{9}y - 2z = 2$$
$$3)\quad x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{4}{5}z = 12$$

$x = 10;\ y = 9;\ z = 5.$

5.

$$1)\quad x + y + z = 16$$
$$2)\quad x - y + 2z = 14$$
$$3)\quad x + 2y - z = 12$$

$x = 10;\ y = 2\tfrac{2}{3};\ z = 3\tfrac{1}{3}.$

6.

$$1)\quad x + y + z = 12$$
$$2)\quad x - y + 2z = 10$$
$$3)\quad x + 2y - 2z = 4$$

$x = 5{,}6;\ y = 2{,}8;\ z = 3{,}6.$

7.

$$1)\quad x + 2y + 3z = 36$$
$$2)\quad 2x + 3y + z = 30$$
$$3)\quad 3x + y + 2z = 24$$

$x = 1;\ y = 7;\ z = 7.$

8.

$$1)\quad x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 20$$
$$2)\quad 2x - y + z = 16$$
$$3)\quad 3x + y + 2z = 24$$

$x = 22{,}4;\ y = 4{,}8;\ z = -24.$

9.

$$1)\quad x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 10$$
$$2)\quad x + 3y + 2z = 14$$
$$3)\quad 2x + 3y - 2z = 8$$

$x = 15\tfrac{1}{3};\; y = -4;\; z = 5\tfrac{1}{3}.$

10.

$$1)\quad x + 6y + 10z = 5$$
$$2)\quad 2x - 3y + 4z = 1$$
$$3)\quad 3x + 9y - 2z = 4$$

$x = \tfrac{1}{2};\; y = \tfrac{1}{3};\; z = \tfrac{1}{4}.$

11.

$$1)\quad x - \tfrac{1}{2}y - z = 2$$
$$2)\quad 3x + y - \tfrac{1}{2}z = 4$$
$$3)\quad x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}z = 6$$

$x = 5{,}1;\; y = -7{,}8;\; z = 7.$

12.

$$1)\quad 2x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{2}z = 4$$
$$2)\quad \tfrac{1}{2}x + 3y - \tfrac{1}{2}z = 5$$
$$3)\quad 5x + 2y + 2z = -6$$

$x = -14;\; y = 8;\; z = 24.$

13.

$$1)\quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z = -2$$
$$2)\quad \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{6}z = 5$$
$$3)\quad x - 6y + 3z = -5$$

$x = 4;\; y = 6;\; z = 9.$

14.

$$
\begin{array}{ll}
1) & 3x - 5y + 6z = 1 \\
2) & 2x - 5y + 2z = 0 \\
3) & x - 10y - 2z = -2
\end{array}
$$

$x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{5}$; $z = \frac{1}{6}$.

15.

$$
\begin{array}{ll}
1) & x + y + z = 1{,}9 \\
2) & x - y - 2z = -0{,}9 \\
3) & 2x - 3y + \frac{1}{4}z = -1{,}4
\end{array}
$$

$x = 1{,}2$; $y = 1{,}3$; $z = 0{,}4$

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade oder der quadratischen Gleichungen.

Quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

§. 81.

Eine quadratische Gleichung heißt rein, wenn die unbekannte Größe nur im Quadrat vorkommt, unrein, wenn sie außerdem noch in der ersten Potenz vorkommt. So ist $x^2 = q$ eine reine, $x^2 - px = q$ eine unreine quadratische Gleichung.

§. 82.

Jede quadratische Gleichung läßt sich mit Anwendung obiger Regeln (§. 78) auf die Form

$$x^2 = q \text{ oder } x^2 - px = q$$

bringen.

§. 83.

Auflösung der reinen quadratischen Gleichung $x^2 = q$.

Ziehe aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so hast du

$$x = \pm \sqrt{q};$$

denn jede positive Zahl hat eigentlich zwei Quadratwurzeln, eine positive, und eine ihr gleiche aber negative, weil jede positive Zahl als ein Product von 2 positiven oder eben so großen negativen Factoren angesehen werden kann.

Zusatz. Ist die Größe q negativ, so kann sie weder ein Product von 2 gleichen positiven, noch 2 gleichen negativen Factoren seyn, d. i., sie kann gar nicht in gleiche Factoren zerlegt werden, oder die Wurzel ist dann unmöglich.

§. 84.

Auflösung einer unreinen quadratischen Gleichung.

Jede unreine quadratische Gleichung kann auf die Form

$$x^2 - px = q$$

gebracht werden.

Addire zu jedem Theil der Gleichung soviel, nämlich $\frac{1}{4}p^2$, daß der erste Theil ein vollkommenes Quadrat, nämlich von $x - \frac{1}{2}p$, wird, und ziehe darauf aus jedem Theil die Quadratwurzel; dann wird seyn

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}.$$

Denn $x^2 - px = q$

$$x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2$$

$$\sqrt{(x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2)} = x - \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)};$$

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\, p^2 + q)}.$$

Hieraus folgt, daß jede quadratische Gleichung 2 Wurzeln hat, nämlich $\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ und $\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Ist q positiv, oder negativ und kleiner als $\frac{1}{4}p^2$, so sind beide Wurzeln möglich, und heißen dann auch reelle Wurzeln. Ist aber q negativ und größer als $\frac{1}{4}p^2$, so sind beide Wurzeln unmöglich oder imaginär, mit andern Worten, die Aufgabe, aus welcher die Gleichung formirt ist, fordert etwas unmögliches. Z. B. die Aufgabe sey:

Man soll 2 Zahlen finden, deren Summe $= 1$, und deren Product ebenfalls $= 1$ ist.

Man sieht leicht, daß es solche Zahlen gar nicht giebt. Formirt man nun aus dieser Aufgabe eine Gleichung, so ist, wenn die eine Zahl mit x bezeichnet wird, die andere $1 - x$, und deren Product $= x\,(1 - x) = x - x^2 = 1$; oder man bekommt die quadratische Gleichung

$$x^2 - x = -1.$$

Hier ist $p = 1$; $q = -1$; folglich

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 1)} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}};$$

d. i. x ist unmöglich, oder es giebt solche Zahlen, wie verlangt werden, gar nicht.

§. 85.

Die quadratischen Gleichungen können auch auf die Form

$$x^2 - Px + Q = o$$

gebracht werden. Der erste Theil der Gleichung kann als ein Product von zwei Factoren, nämlich $x - a$ und $x - b$ angesehn werden. Denn $(x - a)(x - b)$ ist entwickelt $= x^2 - (a + b)x + ab$; es dürfen also a und b nur so genommen werden, daß $a + b = P$, $ab = Q$ ist. Dann ist, da $x^2 - Px + Q = o$, auch $(x - a)(x - b) = o$. Dieses Product aber wird offenbar $= o$, entweder wenn $x = a$, oder wenn $x = b$. Daraus geht ebenfalls hervor, daß jede quadratische Gleichung 2 Wurzeln hat. Ferner sieht man daraus, daß P die Summe, Q das Product der beiden Wurzeln ist.

Zusatz. Ist Q positiv und P ebenfalls, so sind, wenn die Wurzeln möglich sind, beide positiv; ist Q positiv, aber P negativ, so sind beide Wurzeln negativ; ist Q negativ, so ist eine Wurzel positiv, die andere negativ.

Exempel 1.

Die gegebene Gleichung sey:

$$x^2 - 4x = 5.$$

Vor der Berechnung wird entschieden, ob die Wurzeln möglich sind.

Hier ist $q = 5$, also positiv, folglich sind die Wurzeln möglich; $p = 4$, folglich $\frac{1}{2}p = 2$; $\frac{1}{4}p^2 = 4$

$$\begin{array}{r} q = 5 \\ \hline \frac{1}{4}p^2 + q = 9; \end{array}$$

wenn also die Wurzeln mit x, x′ bezeichnet werden, ist

$$x = 2 + \sqrt{9} = 5$$

$$x' = 2 - \sqrt{9} = -1$$

Exempel 2.

Die gegebene Gleichung sey:

$$x^2 - 4x = -2.$$

p ist $= 4$; $q = -2$. Die Wurzeln sind möglich, weil q zwar negativ, aber kleiner als $\frac{1}{4}p^2$ ist;

$$\frac{1}{4}p^2 = 4$$

$$q = -2$$

$$\frac{1}{4}p^2 + q = 2$$

$$x = 2 + \sqrt{2} = 3{,}414\ \ldots$$

$$x' = 2 - \sqrt{2} = 0{,}585\ \ldots$$

Exempel 3.

Die gegebene Gleichung sey:

$$x^2 + 3x = -10.$$

$p = 3$; $q = -10$; beide Wurzeln sind unmöglich, weil q negativ und größer als $\frac{1}{4}p^2$.

Exempel 4.

Es werden 2 Zahlen gesucht, deren Summe $= 8$, und deren Summe der Quadrate $= 34$ ist.

Ist die eine Zahl x, so ist die andere $8 - x$; man bekommt also für x die Gleichung:

$$x^2 + (8 - x)^2 = 34$$

$$x^2 + 64 - 16x + x^2 = 34$$

$$2x^2 - 16x = -30$$

$$x^2 - 8x = -15$$

$$x = 4 + \sqrt{1} = 5;$$
$$x' = 4 - \sqrt{1} = 3;$$

$8 - x = 8 - 5$ ist ebenfalls $= 3$, d. i. die eine Zahl ist 5, die andere 3.

§. 86.

Nutzen der Substitution.

Man kann sich die Auflösung der Gleichungen oft erleichtern, wenn man statt einer unbekannten Größe eine andere substituirt, z. B. $x = c + y$ oder $= \frac{y}{c}$ setzt (wo c irgend eine unter den gegebenen Umständen vortheilhaft gewählte Größe bedeutet), darauf die Glieder entwickelt, dadurch eine Gleichung für y erhält, und aus y dann x berechnet. Vorzüglichen Vortheil gewährt, wovon im Grunde schon die Ausziehung der Quadratwurzel einen Beweis giebt, die erste Substitution. Es sey nämlich die Gleichung $x^2 - px = q$ gegeben. Setzt man hier $x = \frac{1}{2}p + y$, so ist

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 + py + \frac{1}{4}p^2, \\ -px & = & \quad - py - \frac{1}{2}p^2 \\ \hline x^2 - px & = & y^2 - \frac{1}{4}p^2 = q, \end{array}$$

wodurch man für y eine einfachere Gleichung, als für x, erhält, nämlich

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + q.$$

Daraus ergiebt sich

$$y = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}, \text{ und, wie vorhin,}$$
$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}.$$

Durch diese Substitution wird die gegebene unreine quadratische Gleichung in eine reine verwandelt, und hiemit die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen auf die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung zurückgeführt. Man nennt ein solches Substituiren, wenn dadurch das zweite Glied einer Gleichung verschwindet, das Wegschaffen des zweiten Gliedes.

Uebungsaufgaben über die Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) In einer Gesellschaft wird für einen Armen collectirt. Jede Person giebt soviel Rubel, als Personen in der Gesellschaft sind. So kommen 361 Rubel ein. Aus wieviel Personen bestand die Gesellschaft?

Antwort. Aus 19.

2) Ein Haus ist um 52 Fuß länger, als es breit ist, und nimmt einen Flächenraum von 1725 Quadratfuß ein. Wie lang und breit ist es?

Antwort. 75 Fuß lang, 23 Fuß breit.

3) Ein Italiener verkauft einige Kupferstiche für 136 Rubel. Für jedes bekommt er 9 Rubel mehr, als die Anzahl der verkauften Kupferstiche beträgt. Wieviel waren ihrer?

Antwort. 8.

4) Auf die Frage, wie alt er sey, antwortete ein Greis: multiplicirt man die Zahl meiner Jahre mit 47, und fügt zu dem Producte 1704, so zeigt die Quadratwurzel daraus mein Alter an. Wieviel Jahre zählte der Greis?

Antwort. 71 Jahr.

5) Ein Kaufmann verkauft Tuch zu 22 Rubel 5 Cop. die Elle, und gewinnt auf jeden Rubel vom Einkaufspreise

für die Elle den 80sten Theil dieses Preises. Wieviel gab er selbst für die Elle?

Antwort. 18 Rubel.

6) Nach beendigtem Kriege bekommen 2 Generale, jeder 12000 Rubel, um sie unter ihre Soldaten zur Belohnung bewiesener Tapferkeit zu vertheilen. Der eine hat 400 Mann mehr als der andere, wodurch auf jeden von seinem Regiment 1 Rubel weniger kommt, als auf jeden von der Mannschaft des andern Generals. Wieviel Mann hatte jeder General, und wieviel bekam jeder Soldat?

Antwort. Das eine Regiment war 2400 Mann stark, von welchen jeder 5 Rubel bekam; das andere Regiment bestand aus 2000 Mann, von welchen jeder 6 Rubel erhielt.

7) Jemand multiplicirt 2 ganze Zahlen, von welchen die eine um 23 größer ist als die andere. Um die Probe zu machen, dividirt er das erhaltene Product durch den kleinern der gegebenen Factoren, und bekommt 49 zum Quotienten, 7 zum Rest. Da er sich also verrechnet hat, multiplicirt er zum zweiten Mal, und sieht nun, daß ihm die erste Multiplication 400 im Product zu wenig gegeben hatte. Welche Zahlen multiplicirte er mit einander?

Antwort. 37 und 60.

8) Die Zahl 40 in 2 Theile zu zerlegen, deren Quadrate zu einander addirt die Zahl 818 geben.

Antwort. Diese Theile sind 17 und 23.

9) Die Zahl 89 in 2 Theile zu zerlegen, deren Quadratwurzeln zusammen addirt 13 geben.

Antwort. Diese Theile sind 64 und 25.

10) Die Zahl 99 eben so, wie vorher 89, zu zerlegen.

Antwort. Die Theile sind sehr nahe $84\frac{1}{2}$ und $14\frac{1}{2}$.

Quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

* §. 87.

Aufgabe. Die beiden Gleichungen

$$a^2 + ay^2 + bxy + cx + dy = e \; \dots . \quad (1)$$

und $$x + fy = g \; \dots\dots \quad (2)$$

sind gegeben; man soll x und y bestimmen.

Auflösung.

Aus der zweiten Gleichung drücke die eine unbekannte Größe durch die andere aus, und setze den gefundenen Ausdruck statt der ihm gleichen unbekannten in die erste Gleichung, so bekommst du eine quadratische Gleichung für die andere unbekannte, welche du auflösest. Jede Wurzel derselben ist ein Werth dieser unbekannten Größe, und wird statt derselben in die zweite Gleichung gesetzt, um auch die andere zu bestimmen.

* §. 88.

Dies Verfahren ist im Allgemeinen weitläuftig, wenn die Coefficienten nicht durch ihr Verhältniß zu einander Abkürzungen darbieten, welches besonders dann der Fall ist, wenn $a = f^2$ und $d = fc$ ist; denn dann verwandelt sich obige Gleichung (1) in folgende:

$$x^2 + f^2y^2 + bxy + c\,(x + fy) = e,$$

welche in folgende

$$x^2 + f^2y^2 + 2fxy - 2fxy + bxy + cg = e$$

oder $$g^2 + (b - 2f)\,xy + cg = e$$

verwandelt werden kann. Hieraus findet man:

$$xfy = \frac{e - cg - g^2}{\frac{b}{f} - 2}.$$

Setzt man den zweiten Theil dieser Gleichung $= M$ und $fy = u$, so entstehen für x und u folgende Gleichungen:

$$xu = M$$
$$x + u = g.$$

Daraus folgt nach §. 85 für beide unbekannte Größen die Gleichung

$$x^2 - gx + M = 0,$$

deren eine Wurzel $= x$, die andere Wurzel $= u$ ist, woraus dann $Y = \frac{u}{f}$ folgt.

Sind für zwei unbekannte Größen die gegebenen Gleichungen beide vom zweiten Grade, oder sind mehr als zwei unbekannte vorhanden, so übersteigt die Betrachtung dieser Fälle, so wie die allgemeine Auflösung der Gleichungen von höhern Graden die Grenzen dieser Anfangsgründe.

Zweites Hauptstück.

Approximation der Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Erster Abschnitt.

Anweisung zur Berechnung der Wurzeln jeder numerischen quadratischen oder höhern Gleichung in ganzen Zahlen und in Decimalbrüchen, wo solche nöthig sind.

§. 89.

Berechnung der Wurzel einer quadratischen Gleichung.

Die oben (§. 47) gelehrte Methode zur Ausziehung der Quadratwurzel oder zur Berechnung der reinen quadratischen

Gleichungen, läßt sich auch auf unreine quadratische Gleichungen ausdehnen.

Es sey nämlich allgemein die quadratische Gleichung

$$x^2 + px = q$$

gegeben. Die nächst kleinere Grenze der einen Wurzel sey a, das fehlende Stück b; dann ist $x = a + b$, welches für x substituirt giebt

$$x^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$px = pa + pb$$

$$x^2 + px = b^2 + (2a + p)\,b + a^2 + pa = q;$$
$$b^2 + (2a + p)\,b = q - a^2 - pa,$$

und läßt man b^2 als unbedeutend weg

$$b = \frac{q - a^2 - pa}{2a + p}.$$

Daraus ergiebt sich folgende Regel zur Berechnung des folgenden Stückes b:

Berechne erst, was der erste Theil der Gleichung giebt, wenn du die Grenze statt x setzest. Dies ziehe von q ab, und nenne die Differenz D. Verdoppele darauf die Grenze, und addire den Coefficienten von x dazu. Die Summe ist der Divisor, durch welchen D dividirt werden muß, um b zu finden. Brauche auch hier nur die erste Ziffer des Quotienten (welche in einigen Fällen auch noch vermindert werden muß) für b. Dies zu a hinzugefügt, giebt eine neue Grenze, für welche wieder D und der Divisor berechnet werden. u. s. w.

Das Verfahren ist also eben so, wie bei der Ausziehung der Quadratwurzel, nur mit dem Unterschiede, daß hier zwar auch, wie dort, a^2, aber dann noch pa von q abgezogen und zu dem Divisor $2a$ noch p hinzugefügt wird. Eben so kann aus jedem D das folgende D berechnet werden, wenn man hier eben so verfährt, wie dort, nur mit dem Unterschiede, daß man statt $2ab$ hier $(2a + p)b$ von dem vorhergehenden D abzieht. Denn

$$D = q - a^2 - pa$$

das folgende $D = q - (a+b)^2 - p(a+b)$

$$= q - a^2 - 2ab - b^2 - pa - pb$$

$$= q - a^2 - pa - 2ab - b^2 - pb$$

$$= D - (2a + p)\, b - b^2.$$

Beispiel.

Die eine Wurzel der Gleichung

$$x^2 + 2x = 5$$

soll berechnet werden.

Hier ist $p = 2$, $q = 5$, $a = 1$

$$b = \frac{D}{2a+p} = \frac{5-1-2}{2+2} = 0{,}4$$

Das zweite $a = 1{,}4$;

das zweite $D = 5 - 1{,}96 - 2{,}8 = 0{,}24$

$$2a + p = 2{,}8 + 2 = 4{,}8;$$

das zweite $b = 0{,}04$;

das dritte $a = 1{,}44$; u. s. w.

Benutzt man auch hier die gefundenen Differenzen zur Berechnung der folgenden, so wird die Rechnung folgendermaßen geführt:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 5,000000\ldots \mid 1,4494\ldots \\
a^2 + pa & = & 3 \\
\hline
D & = & 2,00 \\
(2a + p) & = & (4) \\
(2a + p)\,b & = & 1,6 \\
b^2 & = & 0,16 \\
\hline
D & = & 0,2400 \\
2a + p & = & (4,8) \\
(2a + p)\,b & = & 0,192 \\
b^2 & = & 0,0016 \\
\hline
D & = & 0,046400 \\
2a + p & = & (4,88) \\
(2a + p)\,b & = & 0,04392 \\
b^2 & = & 0,000081 \\
\hline
D & = & 0,002399 \\
2a + p & = & (4,898)
\end{array}
$$

Dies Verfahren läßt sich in vielen Fällen eben so anordnen, wie die Ausziehung der Quadratwurzel, aber bei weitem nicht in allen, wie das folgende Beispiel lehrt.

Es soll die Wurzel der Gleichung

$$x^2 + 7x = 79878$$

berechnet werden.

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 79878 \mid 279,14 \\
a^2 + pa & = & 41400 \\
\hline
D & = & 38478 \\
2a + p & = & (407) \\
(2a + p)\,b & = & 28490 \\
b^2 & = & 4900 \\
\hline
D & = & 5088 \\
2a + p & = & (547) \\
(2a + p)\,b & = & 4923 \\
b^2 & = & 81 \\
\hline
D & = & 84,00 \\
2a + p & = & (565) \\
(2a + p)\,b & = & 56,5 \\
b^2 & = & 0,01 \\
\hline
D & = & 27,4900 \\
2a + p & = & (565,2) \\
(2a + p)\,b + b^2 & = & 22,6096 \\
\hline
D & = & 4,8804
\end{array}
$$

Zweites Beispiel.

Eine Wurzel der Gleichung

$$x^2 + 11x = -19$$

soll berechnet werden.

Hier sieht man sogleich, daß keine Wurzel positiv seyn kann. Allein $x = -2$ gesetzt giebt -18, und $x = -3$ gesetzt giebt -24. Die Grenzen einer Wurzel sind also -2 und -3.

$$\begin{array}{rcrl}
 & & -19 & \mid -2{,}14\,.. \\
a^2 + pa & = & -18 & \\
\hline
D & = & -1{,}00 & \\
2a + p & = & (7) & \\
(2a + p)b + b^2 & = & -0{,}69 & \\
\hline
D & = & -0{,}3100 & \\
2a + p & = & (6{,}8) & \\
(2a + p)b + b^2 & = & -0{,}2704 & \\
\hline
D & = & -0{,}0396. &
\end{array}$$

§. 90.

Berechnung der Wurzel einer kubischen Gleichung.

Die gegebene Gleichung sey für's Erste:

$$x^3 + qx = r,$$

wo das zweite Glied fehlt.

$x = a + b$ gesetzt giebt:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + qa + qb = r;$$

$$(3a^2 + q)\,b = r - a^3 - qa = D,$$

wenn man, wie oben, die Glieder, welche die höhern Potenzen von b enthalten, wegläßt;

$$b = \frac{D}{3a^2 + q}.$$

Das folgende $D = D - (3a^2 + q)\,b - 3ab^2 - b^3$. Dies giebt für die kubischen Gleichungen von dieser Form ein ähnliches Verfahren, als für die quadratischen Gleichungen.

Es wird z. B. verlangt, eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$x^3 + 7x = 12269$$

zu berechnen.

$$\begin{array}{rcl|l}
r & = & 12269{,}0\;.\;. & 22{,}9 \\
a^3 + qa & = & 8140 & \\
\hline
D & = & 4129 & \\
3a^2 + q & = & (1207) & \\
(3a^2 + q)\,b & = & 2414 & \\
3ab^2 & = & 240 & \\
b^3 & = & 8 & \\
(3a^2 + q)\,b + 3ab^2 + b^3 & = & 2662 & \\
\hline
D & = & 1467{,}000 & \\
3a^2 + q & = & (1459) & \\
(3a^2 + q)\,b & = & 1313{,}1 & \\
3ab^2 & = & 53{,}46 & \\
b^3 & = & 0{,}729 & \\
(3a^2 + q)\,b + 3ab^2 + b^3 & = & 1367{,}289 & \\
\hline
D & = & 99{,}711 &
\end{array}$$

Hieraus sieht man deutlich genug, wie andere Gleichungen vom dritten Grade, und auch von höhern Graden zu behandeln sind, wenn man nur im letzten Fall auch höhere Potenzen eines Binomium $a + b$ zu entwickeln weiß. Die vierte Potenz des Binomium $a + b$ aber erhält man, wenn man den Kubus davon mit $a + b$ multiplicirt; dies Product wieder mit $a + b$ multiplicirt, giebt die fünfte Potenz, und so kann man durch successive Multiplication jede höhere Potenz erhalten, und sich nöthigenfalls eine Tabelle aller Potenzen eines Binomium bis zu einem gewissen Grade verfertigen, oder oder sie aus §. 76 entnehmen.

Anmerk. Eine ausführliche und vollständige Belehrung über diese Approximationsmethode der Gleichungen findet man in

Bauers Entwickelung aller möglichen Wurzeln der bestimmten numerischen Gleichungen jedes Grades.

Der Verfasser hat zugleich alles zusammengestellt, was man bisher Brauchbares hierüber gefunden hat. Denn die bisherigen allgemeinen Methoden zur Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung, welche Bestimmung der Berechnung der möglichen Wurzeln vorausgehen sollte, fordern zu weitläuftige Rechnungen, um brauchbar zu seyn, wenn nicht eine neue Bearbeitung derselben sie abkürzt. Ich nehme davon meine Methode zur Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung, Dorpat 1819, nicht aus, obgleich sie statt der von La Grange gefundenen 10 Bedingungs-Gleichungen für die Gleichungen vom fünften Grade (siehe dessen „Resolution des équations numériques) nur 3 aufstellt und als hinreichend für alle dabei vorkommenden Fälle erweiset. Auch die Anwendung der Kettenbrüche in der Approximation höherer Gleichungen ist zu weitläuftig. Das angeführte Werk von La Grange enthält das Nähere darüber.

* §. 91.

Um die Approximation der Gleichungen unter eine allgemeine Regel zu bringen, die auf jede numerische Gleichung von jedem Grade unmittelbar anwendbar ist, sey

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + vx - w = 0,$$

eine solche Gleichung, und der erste Theil $= X$. Zu ihrer Approximation dient folgende

Allgemeine

Allgemeine Regel zur Berechnung einer Wurzel einer numerischen Gleichung von einem beliebigen Grade.

Suche für x zwei Grenzen in ganzen Zahlen (oder in Zehntheilchen oder in Hunderttheilchen ꝛc., wenn $x < 1$), so daß die eine für x gesetzt weniger als 0 und die andere für x gesetzt mehr als 0 giebt. Die kleinere Grenze sey a. Setze darauf $x = a + y$, und entwickele die Gleichung (was mit Hülfe der (§. 90) vorgeschlagenen Tabelle sich ohne Schwierigkeit bewerkstelligen lassen wird), so hast du eine Gleichung $Y = 0$ für y, welche sey

$$y^m + p'y^{m-1} + \ldots + v'y - w' = 0.$$

Mit dieser verfahre eben so, wie mit der ersten Gleichung, nur mit dem Unterschiede, daß die Grenzen der Wurzel in Zehntheilchen angegeben werden. Auch können im ersten Theil der Gleichung, um die kleinere Grenze zu bestimmen, die Glieder, welche die höhern Potenzen von y enthalten, als unbedeutend gegen das letzte Glied $v'y$ weggelassen werden, so daß $y = \frac{w'}{v'}$ wird. Von dem Quotienten werden jedoch nur die Zehntheilchen beibehalten. Die so gefundene Grenze wird geprüft, und nöthigenfalls auch in den Zehntheilchen noch abgeändert. Diese verbesserte Grenze sey $= b$; darauf setze $y = b + y'$, und entwickele die Gleichung; dann bekommst du auch für y' eine Gleichung, welche du eben so behandelst, wie die vorhergehende Gleichung, um die Hunderttheilchen der Wurzel zu finden; und so fahre fort, bis du die Wurzel genau genug hast. Um die Coefficienten der unbekannten Größe in den Gleichungen für y zu erhalten, kann man auch jede unmittelbar aus der ersten Gleichung $X = 0$ ableiten (wie §. 89 und 90), indem man $a + y$ für x substituirt, aber bei der Berechnung für a den bereits gefundenen Theil der Wurzel von $X = 0$ gebraucht. Auch kann man zur Ableitung der Coefficienten jede schon gefundene Gleichung für einen fehlenden Theil der Wurzel wählen, wenn eine andere als $X = 0$ eine leichtere Berechnung darbietet.

Beispiel.

Die gegebene Gleichung sey

$x^2 - 3x - 7 = 0$, oder $x^2 - 3x = 7$.

Setze für x erst 0, dann $1, 2, 3 \ldots$. bis du auf 2 ganze Zahlen kommst, von denen die erste weniger, die zweite mehr als 7 giebt. Diese Grenzen sind hier 4 und 5, indem 4 weniger als 7, nämlich 4, und 5 mehr als 7, nämlich 10, giebt. 4 ist demnach die nächst kleinere Grenze in ganzen Zahlen. Setze $x = 4 + y$ und entwickele die Gleichung, so wird die Gleichung für y seyn:

$y^2 + 5y - 3 = 0$, oder $y^2 + 5y = 3$.

Die Grenzen der Wurzel für diese Gleichung sind $0,5$ und $0,6$, welche leicht gefunden werden, wenn $5y = 3$ gesetzt wird; denn daraus ergiebt sich $y = \frac{3}{5} = 0,6$, welcher Werth von y aber zu groß ist, weil für diesen schon $5y = 3$ wird, also für $5y + y^2$ mehr entstehen muß; $0,1$ muß also von diesem Werthe von y abgerechnet werden; eine leichte Prüfung zeigt, daß $0,5$ wirklich die nächst kleinere Grenze ist. Setze nun $y = 0,5 + y'$, so entsteht für y' nach geschehener Entwickelung die Gleichung

$$y'^2 + 6y' = 0{,}25$$
$$y' = 0{,}04 \ldots$$

0,04 ist die nächst kleinere Grenze, folglich

$$y' = 0{,}04 + y''.$$

Für y'' ergiebt sich die Gleichung

$$y''^2 + 6{,}08y'' = 0{,}0084$$
$$y'' = 0{,}001 \ldots \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist $x = 4{,}541 \ldots$

Anderes Beispiel.

Die gegebene Gleichung sey

$$x^3 - 7x - 1 = 0, \text{ oder } x^3 - 7x = 1.$$

Die Grenzen einer Wurzel sind 2 und 3; $x = 2 + y$ giebt

$$\begin{array}{l} x^3 = (y+2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ -7x = -7(y+2) = \quad -7y - 14 \\ \hline x^3 - 7x = y^3 + 6y^2 + 5y - 6 = 1. \end{array}$$

Die Grenzen von y sind 0,7 und 0,8; $y = 0{,}7 + y'$ gesetzt giebt

$$y'^3 + 8{,}1y'^2 + 14{,}87y' = 0{,}217$$
$$y' = \frac{0{,}217}{14{,}87} = 0{,}01 \ldots$$

Folglich $x = 2{,}71 \ldots$

Beispiel 3.

Die gegebene Gleichung sey:

$$x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 377 = 0.$$

Um alle Wurzeln dieser Gleichung zu berechnen, wird man für alle ganze Zahlen von 0 bis 9 folgende Resultate erhalten, und daraus die Grenzen der Wurzeln, und dann diese selbst genauer bestimmen.

Werthe von x.	Resultate der Gleich.	Grenzen der Wurzeln.	a oder d. kleinere Grenze.	Gleichungen für y, nachdem $x = a + y$ gesetzt worden.	Grenzen für y.	Wurzeln d. Gleich. $X = 0$.	Genaure Wurzeln der Gleich. $X = 0$.
0	+ 377						
1	+ 98	1 u. 2	1	$y^4 - 16y^3 + 86y^2 - 176y + 98 = 0$ $= + 4$ für $y = 0{,}8$ $= - 2$ „ $y = 0{,}9$	0,8 u. 0,9	1,8 . .	1,8701 . . .
2	− 7						
3	− 22						
4	− 7	4 u. 5	4	$y^4 - 4y^3 - 4y^2 + 16y - 7 = 0$ $= - 0{,}44$ für $y = 0{,}5$ $= + 0{,}42$ „ $y = 0{,}6$	0,5 u. 0,6	4,5 . .	4,5482 . . .
5	+ 2	5 u. 6	5	$y^4 - 10y^2 + 2 = 0$ $= + 0{,}42$ für $y = 0{,}4$ $= - 0{,}44$ „ $y = 0{,}5$	0,4 u. 0,5	5,4 . .	5,4517 . . .
6	− 7						
7	− 22						
8	− 7	8 u. 9	8	$y^4 + 12y^3 + 44y^2 + 48y - 7 = 0$ $= - 1{,}75$ für $y = 0{,}1$ $= + 4{,}45$ „ $y = 0{,}2$	0,1 u. 0,2	8,1 . .	8,1298 . . .
9	+ 98			Hiernach ist die Summe der Wurzeln . . .			19,9998

Genauere Berechnung der Wurzel zwischen 4 und 5.

I. $X = 0$ wird zur Berechnung der Coefficienten gewählt. Die Anordnung ist wie §. 89 und 90.

$$- 377{,}000 \ldots \mid 4{,}548$$

$$a^4 - pa^3 + qa^2 - ra = - 384$$

$$D = + 7$$

$4a^3 - 3pa^2 + 2qa - r = \quad (16)$ für $a = 4$

$$16b = 8$$

$$(6a^2 - 3pa + q)b^2 = -4b^2 = -1$$

$$(4a - p)\,b^3 = -4b^3 = -0{,}5$$

$$+ b^4 = 0{,}0625$$

$$D = 0{,}4375$$

$4a^3 - 3pa^2 + 2qa - r = \quad (9{,}5)$ für $a = 4{,}5$

$$9{,}5b = 0{,}38$$

$$(6a^2 - 3pa + q)b^2 = -8{,}5b = -0{,}0136$$

$$(4a - p)\,b^3 = -2b^3 = -0{,}000128$$

$$b^4 \quad 0{,}00 \ldots$$

$$D = 0{,}07$$

$$4a^3 - 3pa^2 + 2qa - r = 8{,}8$$

II. Wählt man zur Berechnung der Coefficienten stets die vorhergehende Gleichung, so entsteht:

1) $x = 4$ aus $X = 0$

2) aus $X = 0$ die Gleichung $Y = 0$, nämlich $y^4 - 4y^3 - 4y^2 + 16y - 7 = 0$ u. $y = 0{,}5$

3) aus $Y = 0$ die Gleichung $Y' = 0$, nämlich $y'^4 - 2y'^3 - 8{,}5y'^2 + 9{,}5y' - 0{,}4375 = 0$ und $y' = 0{,}04$

4) aus $Y' = 0$ die Gleichung $Y'' = 0$, nämlich
$y''^4 \ldots + 8{,}8y'' - 0{,}07 \ldots = 0$ und $y'' = 0{,}008$.

Am bequemsten zur Bestimmung aller Wurzeln ist die abgeleitete Gleichung $y^4 - 10y^2 + 2 = 0$.

* §. 92.

Uebrigens kann man bei höhern Gleichungen, nachdem die erste Ziffer einer Wurzel gefunden ist, die folgenden Ziffern mit leichterer Mühe berechnen, wenn man eine Potenzentafel zu Hülfe nimmt, und der gegebenen Gleichung $X = 0$ eine zum Gebrauch derselben bequeme Form giebt. Der erste Theil der Gleichung muß nämlich aus einer Reihe von Potenzen bestehen, deren Coefficienten Zahlen sind, die eine leichte Rechnung geben, wie 1, 10, u. s. w. Man verwandelt deshalb die gegebene Gleichung in eine andere von der Form $(x + a)^m \pm (\beta x + b)^{m-1} \pm (\gamma x + c)^{m-2} + \ldots = 0$.

Um die Größen a b, $c \ldots \beta$, $\gamma \ldots$ zu bestimmen, entwickelt man die Glieder dieser Gleichung, ordnet sie nach Potenzen von x, und setzt deren Coefficienten, welche jene Größen a, b, $c \ldots \beta$, $\gamma \ldots$ enthalten werden, den correspondirenden Coefficienten der gegebenen Gleichung $X = 0$ gleich, wodurch man Gleichungen für jene Größen bekommt. Da auf diese Weise mehr Gleichungen entstehen, als Größen zu bestimmen sind, so behält man die Freiheit, durch willkührliche Annahmen für sie die bequemsten Zahlen zum Rechnen zu erlangen.

Mit der so umgeformten Gleichuug verfährt man, nachdem für eine Wurzel 2 Grenzen, a und a', gefunden sind, auf folgende Weise, um sie genauer zu finden.

Es werde

$$X = -A \text{ für } x = a$$
$$X = +A' \text{ für } x = a'$$

so ist $A' + A$ die Differenz der Werthe von x für a' und a, oder, wenn die Grenze a sich um $D = a' - a$ ändert, so ändert sich X um $A + A'$. Der genauere Werth der Wurzel sey $a + b$: es kommt darauf an, b zu finden. Soll $a + b$ den Werth der Wurzel völlig richtig geben, so muß dafür $X = 0$ werden, oder, X ändert sich um $+ A$, wenn a sich um b ändert. Da man nun auch bei den Gleichungen, wie bei den Logarithmen annehmen darf, daß die Differenzen von x sich ungefähr verhalten, wie die Differenzen von X, so hat man zur beiläufigen Bestimmung von b folgende Proportion:

$$A + A' : A = D : b.$$

Aus dieser Proportion berechnet man b, wovon man jedoch nur die erste Ziffer beibehält. Den so gefundenen Werth von b addirt man zu a, und verfährt mit dieser genauern Grenze wie vorher. Ob die andere Grenze größer oder kleiner wird, ergiebt sich im Laufe der Rechnung bald. Das Nähere darüber lehren folgende Beispiele.

Erstes Beispiel.

Für die kubischen Gleichungen sey:

$$X = x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Dafür wird angenommen:

$(x+a)^3 + (\beta x + b)^2 + \gamma x + c = 0$ oder
$(x+a)^3 - (\beta x + b)^2 + \gamma x + c = 0.$

Die erste Annahme giebt:

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(\beta x + b)^2 = \beta^2x^2 + 2\beta bx + b^2$$
$$\gamma x + c = \gamma x + c.$$

Folglich 1) $3a + \beta^2 = p$
2) $3a^2 + 2\beta b + \gamma = q$
3) $a^3 + b^2 + c = r.$

Die zweite Annahme giebt:

1) $3a - \beta^2 = p$
2) $3a^2 - 2\beta b + \gamma = q$
3) $a^3 - b^2 + c = r.$

Exempel.

Es sey $X = x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0.$

Folglich 1) $3a + \beta^2 = 4.$ Für $\beta = 1$ ist $a = 1.$
2) $3a^2 + 2\beta b + \gamma = 3.$ Für $\gamma = 0$ ist $3 + 2b = 3$, also auch $b = 0.$
3) $a^3 + b^2 + c = -1$ oder $1 + c = -1.$ folglich $c = -2.$

Die umgeformte Gleichung ist daher:

$$X = (x+1)^3 + x^2 - 2 = 0.$$

Für $x = 0{,}2$ wird $X = -0{,}24$; für $x = 0{,}3$ wird $X = 0{,}28$. Also sind $0{,}2$ und $0{,}3$ die Grenzen, a, a', und $A = -0{,}24$; $A' = +0{,}28$; $A + A' = 0{,}52$; $D = 0{,}1$. Folglich bekommt man für b folgende Proportion:

$$0{,}52 : 0{,}24 = 0{,}1 : b$$

$$b = \frac{0{,}024}{0{,}52} = 0{,}04.$$

Demnach

$$\begin{array}{rlll}
x = & 0{,}24; & 0{,}25; & 0{,}247. \\
x + 1 = & 1{,}24; & 1{,}25; & \\
(x+1)^3 = & 1{,}906; & 1{,}953; & \\
x^2 = & 0{,}057; & 0{,}062; & \\
-2 = & -2; & -2. & \\
\hline
 & 1{,}963 - 2; & 2{,}015 - 2. & \\
X = & -0{,}037; & 0{,}015. & \\
b = & 0{,}007. & &
\end{array}$$

Genauer ist $x = 0{,}2469$.

Zweites Beispiel.

Für die Gleichungen vom 4ten Grade sey $X = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$.

$$\begin{array}{ll}
(x+a)^4 = & x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 \\
(\beta x + b)^3 = & \beta^3x^3 + 3\beta^2bx^2 + 3\beta b^2x + b^3 \\
\pm(\gamma x + c)^2 = & \pm\gamma^2x^2 \pm 2\gamma cx \pm c^2 \\
\delta x + d = & \delta x + d.
\end{array}$$

Folglich

1) $4a + \beta^3 = p$

2) $6a^2 + 3\beta^2b + \gamma^2 = q$ oder $6a^2 + 3\beta^2b - \gamma^2 = q$

3) $4a^3 + 3\beta b^2 + 2\gamma c + \delta = r$ oder $4a^3 + 3\beta b^2 - 2\gamma c + \delta = r$

4) $a^4 + b^3 + c^2 + d = s$ oder $a^4 + b^3 - c^2 + d = s$.

Exempel.

Es sey $X = x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0$.

1) $a = 0$ giebt $\beta^3 = 8$ und $\beta = 2$;

2) $\gamma = 1$ giebt $12b + 1 = 13$ und $b = 1$;

3) $\delta = 0$ giebt $6 + 2c = -8$ und $c = -7$;

4) $1 + 49 + d = 1$ giebt $d = -49$.

Die umgeformte Gleichung ist daher:

$$x^4 + (2x + 1)^3 + (x - 7)^2 - 49 = 0$$

$x =$	0,1;	0,2;	0,19;	0,2
$x^4 =$	0,00	0,00	0,001	0,001
$2x+1 =$	1,2	1,4	1,38	1,4
$(2x+1)^3 =$	1,72	2,74	2,628	2,744
$x-7 =$	−6,9	−6,8	−6,81	−6,8
$(x-7)^2 =$	47,61	46,24	46,376	46,24
$-49 =$	−49	−49	−49	−49
$X =$	+ 0,33	− 0,02	+ 0,005	− 0,015
$b =$	0,09		0,002.	

Folglich $x = 0,192\ldots$ Ferner ist $x' = 0,302$; $x'' = -3,302$; $x''' = -5,192\ldots$

Mit den gefundenen Werthen kann man weiter gehen, wenn man eine genauere Tafel der Potenzen hat. Daß von diesen nicht alle Ziffern ausgeschrieben zu werden brauchen, sieht man im Laufe der Rechnung bald. Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100, so wie der Quadrate und Kubus aller Zahlen von 1 bis 1000 findet man in

Vega's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. Dritte Auflage. 1814. Seite 149 — 151 des zweiten Bandes.

Ergeben sich aus den Gleichungen für a, b, c . . . . α, β, γ . . . keine bequeme Zahlen, so kann man eine Potenz wiederholen, und z. B. $(\beta x + b)^3 + (\beta' x + b')^3$ statt $(\beta x + b)^3$ setzen, oder auch die Coefficienten 10, 100 u. s. w., einführen. So wird die Gleichung $x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x + 8 = 0$ umgeformt in $(x + 1)^4 + x^3 + (x - 4)^3 - (2x + 11)^2 + 192 = 0$ oder in $(x - 1)^4 + 10x^3 - (4x - 1{,}5)^2 + 9{,}25 = 0$. Eine Wurzel ist $= -0{,}536$ . . , die andere mögliche $= -7{,}46$ . .

Uebungsaufgaben über die Approximation der Gleichungen.

Gleichungen vom 3ten Grade.

1) $x^3 - 6x - 4{,}5 = 0$.

$x = -1{,}90$ . .; $x' = -0{,}853$ . .; $x'' = 2{,}76$ . .

2) $x^3 - 3x - 1 = 0$.

$x = -1{,}53$ . .; $x' = -0{,}347$ . .; $x'' = 1{,}87$ . .

3) $x^3 - 2x - 0{,}6 = 0$.

$x = 1{,}54$ . .; $x' = -1{,}23$ . .; $x'' = -0{,}316$ . .

4) $x^3 + 17x - 47 = 0$; $x = 2{,}16$ . .

5) $x^3 - 13{,}32x - 24{,}6377 = 0$, d. i. $(x - 3)^3 + (3x - 6{,}72)^2 - 42{,}7957 = 0$.

$x = 4{,}35$ . .

6) $x^3 + 24x^2 + 2x - 100 = 0$, d. i. $(x + 8)^3 - 190x - 612 = 0$.

$x = 1{,}92\,..$; $x' = -2{,}18\,..$; $x'' = -23{,}73\,..$

7) $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$, d. i. $(x - 3)^3 - 31x + 127 = 0$ oder $x^3 - (3x + \frac{2}{3})^2 + 100\frac{4}{9} = 0$.

$x = -3{,}051\,..$; $x' = 4{,}145\,..$; $x'' = 7{,}906\,..$

8) $x^3 + 9x^2 - 24 = 0$, d. i. $x^3 + (3x)^2 - 24 = 0$.
$x = 1{,}51\,..$; $x' = -1{,}82\,..$; $x'' = -8{,}68\,..$

Gleichungen vom 4ten Grade.

9) $x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 10 = 0$, d. i. $(x - 1)^4 - (x + 9)^3 + (x + 123)^2 + x - 15411 = 0$.

$x = 7{,}60\,..$; $x' = 0{,}661\,..$; $x'' = -2{,}45\,..$; $x''' = -0{,}808\,..$

10) $x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0$, d. i. $(x + 1)^4 - 10\,(x + 0{,}4)^3 + (3x - 0{,}2)^2 + 4{,}6 = 0$.

x beinahe $= 1{,}1$; $x' = 5{,}502\,..$

11) $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, d. i. $x^4 - 2\,(x - 1)^2 - 6 = 0$.

$x = 1{,}61\,..$; $x' = -2{,}27\,..$

12) $x^4 - 5x^3 - 20x^2 - 10000 = 0$, d. i. $(x - 1) - (x + 9)^3 + (x + 123)^2 + x - 24401 = 0$.

$x = 12{,}17\,..$; $x' = -9{,}35\,..$

13) $x^4 - 8x + 14x^2 + 4x - 8 = 0$,

d. i. $(x - 2)^4 - (3x - 6)^2 - x^2 + 12 = 0$ oder $(x - 2)^4 - 10\,(x - 1{,}8)^2 + 8{,}4 = 0$.

$x = -0{,}732\ldots;\ x' = 0{,}763\ldots;\ x'' = 2{,}73\ldots;\ x''' = 5{,}23\ldots$

14) $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$,

d. i. $(x - 1)^4 - (3x)^2 = 0$.

$x = 0{,}208\ldots;\ x' = 4{,}791\ldots$

15) $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0$,

d. i. $x^4 - (2x + 1)^3 + 206x - 359 = 0$.

$x = -5{,}04\ldots;\ x' = 3{,}22\ldots;\ x'' = 3{,}509\ldots;\ x''' = 6{,}31\ldots$

Die meisten dieser Gleichungen findet man nach der Methode von Bauer in dessen angeführter Schrift berechnet. Die möglichen Wurzeln sind in diesen Aufgaben alle angezeigt, die imaginären sind unbemerkt geblieben.

* Anmerk. Von einer Zahl A, die von 1 nicht viel verschieden ist, läßt sich die Wurzel von jedem Grade, und überhaupt jede Potenz auf folgende Weise ziemlich genau berechnen:

Man drücke die gegebene Zahl A, wenn sie nicht schon ein Bruch ist, durch einen Bruch aus. In diesem setze man den Zähler, wenn er größer als der Nenner ist, $= a + b$, und den Nenner $= a - b$; dann ist, wenn $\frac{m}{n}$ der Exponent der verlangten Potenz ist, nahezu

$$A^{\frac{m}{n}} = \frac{a + \frac{m}{n} b}{a - \frac{m}{n} b}.$$

Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so setze man den Zähler $= a - b$, den Nenner $= a + b$; dann ist nahe zu

$$A^{\frac{m}{n}} = \frac{a - \frac{m}{n}b}{a + \frac{m}{n}b}.$$

Beweis.

Es muß im ersten Fall bewiesen werden, daß

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a + \frac{m}{n}b}{a - \frac{m}{n}b}$$

bis auf eine unbedeutende Differenz sey.

Nun ist $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

Da nun b klein gegen a ist, so lange der Bruch von 1 nicht sehr verschieden ist, so kann b^2 aus Zähler und Nenner weggelassen werden. Dann ist

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab}{a^2 - 2ab} = \frac{a + 2b}{a - 2b}.$$

Ferner:

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^3 = \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 \left(\frac{a + b}{a - b}\right) = \frac{(a + 2b)(a + b)}{(a - 2b)(a - b)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + ab + 2b^2}{a^2 - 2ab - ab + 2b^2} = \frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 3ab}$$

$= \frac{a + 3b}{a - 3b}$, indem auch hier $2b^2$ ohne bedeutenden Fehler weggelassen werden kann.

Eben so ist

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^4 = \frac{a + 4b}{a - 4b} \text{ und } \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^m = \frac{a + mb}{a - mb}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a + \frac{1}{n}b}{a - \frac{1}{n}b}.$$

Denn beide zur nten Potenz erhoben geben $\frac{a + b}{a - b}$.

Daraus aber folgt endlich auch:

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a + \frac{m}{n}b}{a - \frac{m}{n}b}.$$

Ist im Zähler $a - b$, im Nenner $a + b$, so läßt sich der Beweis für die zweite Formel eben so führen.

Der Fehler ist $< \frac{b^3}{2a\,(a - b)^2}$ für die Quadratwurzel, wenn die Grundzahl zwischen 2 und $\frac{1}{2}$ liegt. Die so erhaltene Quadratwurzel ist zu klein, wenn die Grundzahl > 1, zu groß, wenn die Grundzahl < 1 ist.

Beispiele.

Aus $\frac{5}{4}$ soll die Wurzel vom 6ten Grade gezogen werden.

Setze $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$; $a + b = 10$; $a - b = 8$: also $a = 9$; $b = 1$ und $\frac{a + b}{a - b} = \frac{9 + 1}{9 - 1}$; folglich

$$\left(\frac{9 + 1}{9 - 1}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{9 + \frac{1}{6}}{9 - \frac{1}{6}} = \frac{55}{53} = 1{,}0377.$$

Die genaue Wurzel von $(\frac{5}{4})$ ist $= 1{,}0378 \ldots$

Ferner ist $2 = \frac{3 + 1}{3 - 1}$; folglich $2^{\frac{1}{2}} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Die genaue Quadratwurzel aus 2 ist $1{,}414 \ldots$

$$2^{\frac{1}{6}} = \frac{3 + \frac{1}{6}}{3 - \frac{1}{6}} = \frac{19}{17} = 1{,}117 \ldots$$

Genauer ist $2^{\frac{1}{6}} = 1{,}1224 \ldots$

Zusatz. Die in diesem Abschnitt vorgetragenen Approximationsmethoden setzten voraus, daß man die Grenzen der Wurzeln anzugeben wisse. Dies ist auch immer thunlich, wenn diese Grenzen ganze Zahlen sind. Es treten aber Fälle ein, in welchen nicht alle Grenzen ganze Zahlen sind, nämlich allemal, wenn zwey aufeinanderfolgende Wurzeln um weniger als um 1 verschieden sind. Sind endlich alle Wurzeln einer Gleichung unmöglich, so wird es keine Grenzen für sie geben, und man bemüht sich vergebens sie aufzufinden. Ehe man daher zur Annäherung der Wurzeln einer Gleichung schreitet, muß, wenn dies durch Versuche mit ganzen Zahlen auszumitteln schwierig ist, vorher auf anderem Wege bestimmt werden:

1) ob die Wurzeln der gegebenen Gleichung möglich sind;

2) ob eine Wurzel, deren Grenzen man sucht, nicht etwa um weniger als 1 von der folgenden Wurzel verschieden ist. Die Gleichung sey zum Beispiel

$$x^2 - 5x + 6{,}2 = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung nach und nach alle ganze Zahlen für x, so entstehen lauter positive Resultate, nämlich

$x = 0$	giebt als Resultat		6,2
$x = 1$	„	„ „	2,2
$x = 2$	„	„ „	0,2
$x = 3$	„	„ „	0,2
$x = 4$	„	„ „	2,2
$x = 5$	„	„ „	6,2
$x = 6$	„	„ „	12,2 u. s. f.

Eben so entstehen positive Resultate für alle negative Werthe von x. Man weiß also fürs Erste nicht einmal, ob die Wurzeln dieser Gleichung auch möglich sind. Dies wird nach §. 84 entschieden. Denn hier ist $p = 5$; $\frac{1}{4}p^2 = 6,25$ und $q = - 6,2$ zwar negativ aber kleiner als 6,25. Folglich sind die Wurzeln möglich.

Um also in einem solchen Fall die Wurzeln zu entdecken, müssen die Grenzen einander mehr genähert werden. Um wieviel? Um die Differenz zweier auf einander folgenden Wurzeln oder um weniger. In den quadratischen Gleichungen läßt sich diese Differenz auch leicht finden. Denn ist die Gleichung

$x^2 - px = q$, so ist

die eine Wurzel $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$,

die andere Wurzel $x' = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$;

$$x - x' = 2\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = \sqrt{(p^2 + 4q)}.$$

Setzt man also in die Gleichung statt x zuerst 0, dann $\sqrt{(p^2 + 4q)}$ oder eine kleinere Größe, und darauf immer Vielfache davon, so wird sich mit Sicherheit ausweisen, zwischen welchen Zahlen die Wurzel liegt. In der Gleichung $x^2 - 5x + 6,2 = 0$ ist $p^2 + 4q = 0,2$ und $0,4 < \sqrt{0,2}$; folglich muß man nun statt x in diese Gleichung nach und nach setzen: 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2; 2,4; u. s. w.

$x = 2$ gab zum Resultat $0,2$
$x = 2,4$ giebt „ „ $- 0,04$
$x = 2,8$ „ „ „ $+ 0,04$.

Eine Wurzel fällt also zwischen 2 und 2,4; die andere zwischen 2,4 und 2,8.

Folglich wird man $2 + y$ statt x in die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6{,}2 = 0$$

setzen und dadurch erhalten: $y^2 - y + 0{,}2 = 0$.

Für $y = 0{,}2$ giebt diese Gleichung als Resultat $+ 0{,}04$
„ $y = 0{,}3$ „ „ „ „ „ $- 0{,}01$
„ $y = 0{,}7$ „ „ „ „ „ $- 0{,}01$
„ $y = 0{,}8$ „ „ „ „ „ $+ 0{,}04$.

Eine Wurzel dieser Gleichung fällt demnach zwischen 0,2 und 0,3; die andere zwischen 0,7 und 0,8. Die kleinere von diesen muß gewählt werden, wenn man die zwischen 2 und 2,4 fallende Wurzel der Gleichung $x^2 - 5x + 6{,}2 = 0$ sucht. Man setze daher $y = 0{,}2 + y'$.
Dies giebt $y'^2 - 0{,}6y' + 0{,}04 = 0$.

Von dieser Gleichung nehme man wieder die kleinste Wurzel, und so von allen folgenden Gleichungen für y, was sich übrigens schon daraus ergiebt, daß nun höhere Decimalstellen als Zehntheilchen gesucht werden. Hätte man die zwischen 2,4 und 2,8 fallende Wurzel der Gleichung $x^2 - 5x + 6{,}2 = 0$ berechnen wollen, so hätte man $y = 0{,}7 + y'$ setzen müssen.

Ohne die hier beobachtete Vorsicht kann man bei Wurzeln, die wenig von einander differiren, leicht von einer in die andere gerathen.

Was man in solchen schwierigen Fällen bei Gleichungen von höhern Graden zu beobachten habe, gehört in einen höhern Cursus der Algebra.

Zweiter Abschnitt.

Von den Kettenbrüchen und deren Anwendung auf die Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 93.

Erklärung.

Ein Kettenbruch oder ein continuirlicher Bruch ist ein solcher, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Nenner wieder eine ganze Zahl und ein Bruch ist, und so fort. So ist, wenn a, b, c, d, e, f, g, h . . . . beliebige ganze Zahlen sind,

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h + \ldots}}}}$$

ein Kettenbruch oder ein continuirlicher Bruch. Eben so

$$\cfrac{1}{A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{D + \ldots,}}}}$$

wo A, B, C, D . . . ganze Zahlen sind.

Die partiellen Brüche, aus welchen er besteht, wie $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ . . . $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ . . . , heißen Glieder desselben.

Aufgabe.

Einen gegebenen Bruch $\frac{M}{N}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Glieder alle 1 zum Zähler haben.

Auflösung.

Dividire den Zähler in den Nenner, den Rest in den vorigen Divisor, und so fort, so bekommst du die Nenner der Glieder des Kettenbruches.

So sey der gegebene Bruch: $\frac{173}{201}$.

Die fortgesetzte Division giebt

```
        173
173 | 201 | 1
    | 173 |
     --------
       28 | 173 | 6
          | 168 |
           --------
            5 | 28 | 5
              | 25 |
               --------
                3 | 5 | 1
                  | 3 |
                   -------
                    2 | 3 | 1
                      | 2 |
                       -------
                        1 | 2 | 2
```

Folglich ist

$$\frac{173}{201} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

§. 94.

Aufgabe.

Einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man multiplicirt mit Factoren, die sich aus dem Kettenbruch leicht ergeben, so lange bis ein gewöhnlicher Bruch hervorgeht.

Beispiele.

Der Kettenbruch sey

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}$$

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\frac{1}{3}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{3}{13}} = \frac{13}{68}$$

Eben so kann der obige Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

leicht wieder in seinen ursprünglichen Bruch, aus welchem er entstanden ist, verwandelt werden. Es ist nämlich

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}}} =$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{3}{5}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{28}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{28}{173}} = \frac{173}{201}.$$

§. 95.

Jeder Kettenbruch läßt sich auf die Form

$$\cfrac{1}{A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{D+\ldots}}}$$

bringen. Denn der gegebene Kettenbruch kann auf seinen ursprünglichen $\frac{M}{N}$ zurückgeführt werden, und dieser kann durch fortgesetzte Division in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C + \dots}}}$$

verwandelt werden.

Anmerk. Von einem solchen ist in der Folge nur die Rede.

* §. 96.

Der Bruch, aus welchem ein Kettenbruch entstanden ist, sey $\frac{M}{N}$; dann ist das erste Glied $\frac{1}{A} > \frac{M}{N}$. Berechnet man darauf den Kettenbruch bis zum zweiten Gliede $\frac{I}{B}$, dann bis zum dritten Gliede u. s. w., und bezeichnet die daraus resultirenden Brüche mit $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, u. s. w., so ist $\frac{p}{q} < \frac{M}{N}$, $\frac{p'}{q'} > \frac{M}{N}$ und so jeder folgende Bruch abwechselnd größer und kleiner als der Bruch $\frac{M}{N}$, für welchen also jene Brüche $\frac{I}{A}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ . . . eine Reihe von Grenzen bilden, die sich immer mehr nähern.

* §. 97.

Wird ein Kettenbruch

$$\cfrac{1}{A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{H + \cfrac{1}{I + \cfrac{1}{K + \cfrac{1}{L + \dots}}}}}}}$$

von unten herauf berechnet, und ist man bis zu einem gewissen

Nenner, etwa K, gelangt, so werde der bis dahin erhaltene Bruch mit $\frac{P}{Q}$ bezeichnet, welcher also $= \cfrac{1}{K + \cfrac{1}{L + ..}}$ ist; der nächstfolgende, nämlich bis I berechnete Bruch sey $\frac{P'}{Q'}$; dann ist für den darauf folgenden Bruch bis zum Nenner H der Zähler $P'' = Q'$, der Nenner $Q'' = HQ' + Q$.

Beweis.

$$\frac{P''}{Q''} = \cfrac{1}{H + \cfrac{P'}{Q'}} = \frac{Q'}{HQ' + P'};\ \text{also}\ P'' = Q';$$

folglich $P' = Q$, also auch: $Q'' = HQ' + Q$.

Man kann also die Berechnung eines Kettenbruches anordnen, wie die folgende des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{M}{N}$$

Die Nenner in umgekehrter Ordnung.	Sucessive Werthe von Q nach der Formel $Q'' = HQ' + Q$.
2	$\frac{1}{2}$
1	3
1	5
5	28
6	173 = M
1	201 = N.

* §. 98.

Wenn man zwei auf einander folgende Näherungswerthe $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ des Kettenbruches $\cfrac{1}{A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C \ldots}}} = \frac{M}{N}$ berechnet hat

(§. 96), so ist des dritten darauf folgenden Näherungswerthes

$\frac{P''}{Q''}$ Zähler $P'' = P + P'H$,

Nenner $Q'' = Q + Q'H$,

wenn H den dazu gehörigen Kettenbruch schließt.

Beweis.

Bezeichnen $\frac{1}{A}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ die ersten auf einander folgenden Näherungswerthe, so ist

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{B}{AB + 1}$$

$$\frac{p'}{q'} = \frac{B + \frac{1}{C}}{A\left(B + \frac{1}{C}\right) + 1} = \frac{BC + 1}{(AB + 1)\,C + A}$$

$$\frac{p''}{q''} = \frac{p'D + p}{q'D + q}\text{; und so fort.}$$

Wenn man nur noch zu dem fünften Näherungswerth übergeht, so sieht man, daß allgemein

$$P'' = P + P'H \text{ und}$$

$$Q'' = Q + Q'H,$$

wenn H den dazu gehörigen Kettenbruch schließt.

* §. 99.

Lehrsatz. Es sey

$$\frac{M}{N} = \cfrac{1}{A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C + \dots}}}$$

so sind die auf einander folgenden Näherungswerthe für $\frac{M}{N}$, nämlich $\frac{1}{A}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ . . . $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ . . . stets um $\frac{1}{QQ'}$ d. i. um einen Bruch, dessen Nenner dem Product ihrer Nenner und dessen Zähler $= 1$ ist, von einander verschieden.

Beweis.

Die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungswerthe, bis zu welchem Gliede sie sich auch erstrecken mögen, ist beständig $\frac{PQ' - P'Q}{QQ'}$. Es muß also bewiesen werden, daß beständig $PQ' - P'Q$ oder $P'Q - PQ' = 1$ sey.

Nun ist allgemein

$$P'' = P + P'H \text{ und } Q'' = Q + Q'H,$$

wenn H den dazu gehörigen Kettenbruch schließt.

Daraus folgt allgemein, daß

$$PQ' - P'Q = P''Q' - P'Q''.$$

Denn

$$\begin{array}{l} P''Q' = PQ' + P'Q'H \\ P'Q'' = P'Q + P'Q'H \\ \hline P''Q' - P'Q'' = PQ' - P'Q: \end{array}$$

folglich

$$1 = q - pA = p'q - pq' = p'q'' - p''q' = \ldots = PQ' - P'Q,$$

also $PQ' - P'Q$ oder $P'Q - PQ' = 1$.

* §. 100.

Jeder Näherungswerth $\frac{P}{Q}$ differirt also von dem folgenden und von $\frac{M}{N}$ um weniger als $\frac{1}{Q^2}$.

* §. 101.

Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl q durch einen Kettenbruch auszudrücken. Setze $x^2 = q$; suche die nächst kleinere Grenze in ganzen Zahlen; sie sey a. Substituire darauf $a + \frac{1}{b}$ statt x. Dann entsteht für b eine quadratische Gleichung. Diese ordne und verfahre mit ihr, wie mit $x^2 = q$, und s. f.

Exempel 1.

Es sey $x^2 = 5$. Hierin $x = 2 + \frac{1}{b}$ gesetzt giebt

$$4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{b^2} = 5;$$

$$b^2 - 4b = 1;$$

$$b^2 = 4 + \frac{1}{c} \text{ gesetzt giebt}$$

$$16 + \frac{8}{c} + \frac{1}{c^2} - 16 - \frac{4}{c} = 1;$$

$$\frac{4}{c} + \frac{1}{c^2} = 1;$$

$$c^2 - 4c = 1.$$

$$c = 4 + \frac{1}{d} \text{ u. s. w.;}$$

$$\text{also } x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}$$

Für den angehängten Kettenbruch ergeben sich folgende abwechselnd größere und kleinere Näherungswerthe:

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{72}, \frac{72}{305}, \frac{305}{1292}, \frac{1292}{5473}, \ldots$$

Exempel 2.

Es sey $x^2 = 11$.

$x = 3 + \frac{1}{b}$ gesetzt giebt

$$9 + \frac{6}{b} + \frac{1}{b^2} = 11 \text{ und } 2b^2 - 6b = 1;$$

$$b = 3 + \frac{1}{c} \text{ giebt}$$

$$c^2 - 6c = 2;\ c = 6 + \frac{1}{d} \text{ giebt}$$

$$2d^2 - 6d = 1, \text{ folglich } d = 3 + \frac{1}{e} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{also } x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}$$

Zusatz. Ist, wie früher, a die kleinere Grenze der Quadratwurzel aus q, und $D = q - a^2$, so ist immer

$$\sqrt{q} = a + \cfrac{D}{2a + \cfrac{D}{2a + \ldots}}$$

Die Glieder des Kettenbruchs sind nämlich alle $= \frac{D}{2a}$. Denn setzt man $x = a + y$ in die Gleichung $x^2 = q$, so entsteht $2ay + y^2 = D$. Man setze demnach $y = \frac{D}{2a + z}$; dann entsteht auch für z die Gleichung: $2az + z^2 = D$. Folglich auch $z = \frac{D}{2a}$, u. s. w.; wobei aber der Bruch $\frac{D}{2a}$ nicht aufgehoben werden darf. So ist $\sqrt{11}$ auch $= 3 + \cfrac{2}{6 + \cfrac{2}{6 + \ldots}}$; im angehängten Kettenbruch durch 2 den Zähler und Nenner dividirt, giebt $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}$, wie früher. Ferner ist $\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}$ Vortheilhaft ist es hiebei, wenn D so klein wie möglich gegen 2a ist, und darin durch die Division aufgeht. Dies wird oft durch eine geschickte Multiplication ohne viel Mühe erreicht. Man zieht nämlich aus $Q = qm^2$ die Quadratwurzel, und findet dann $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{Q}}{m}$. So ist für $q = 13$, wenn $m = 5$ gesetzt wird, $Q = 325$, wofür $a = 18$, $D = 1$, folglich

$$\sqrt{Q} = 18 + \cfrac{1}{36 + \cfrac{1}{36 + \ldots}} = 18 + \tfrac{36}{1297} = 18{,}027756360;$$

$$\frac{\sqrt{Q}}{5} = 3{,}605551272; \text{ genauer ist } \sqrt{13} = 3{,}605551275 \ldots$$

Für $q = 19$ wird $Q = 171$, wenn $m = 3$ genommen wird, und $a = 13$, $D = 2$;

$$\sqrt{Q} - 13 = \cfrac{2}{26 + \cfrac{2}{26 \ldots}} = \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{26 + \ldots}}; \text{ u. } \sqrt{q} = 4{,}358 \ldots$$

Die unbestimmte Analytik, deren Elemente nun folgen, giebt, wo leichte Versuche nicht ausreichen, Methoden zur Ausmittelung des Factors m an die Hand.

Algebra.

Dritter Theil.

Die unbestimmte Analytik.

Einleitung.

§. 102.

Die unbestimmte Analytik beschäftigt sich mit solchen Aufgaben, welche mehr unbekannte Größen, als Gleichungen enthalten. Unter solchen Umständen kann jede unbekannte Größe jeden beliebigen Werth erhalten, und ist folglich durch die gegebenen Gleichungen im Grunde noch nicht bestimmt. Von den unzähligen Werthen jeder unbekannten können aber viele durch neue Bedingungen, die man hinzufügt, ausgeschlossen werden. Solche Bedingungen sind z. B., daß für jede unbekannte Größe nur positive und ganze Zahlen angenommen werden sollen.

Man könnte auch andere Einschränkungen der Werthe der unbekannten Größen festsetzen, doch sind die eben angeführten die gewöhnlichen, und gelten daher auch für alle nun folgende Aufgaben, die wir zum Unterschiede von den bisherigen unbestimmte Aufgaben nennen wollen.

Es kömmt in allen darauf an, für die unbekannten Größen eine Formel zu finden, die zwar wieder eine oder auch mehr neue unbekannte Größen enthalten kann, jedoch so mit bekannten Größen verbunden, daß die Formel immer eine ganze Zahl giebt, wenn für die in der Formel befindlichen unbekannten Größen ganze Zahlen angenommen werden. Diese kann man beliebig annehmen und verändern, wodurch die Formel einen Ueberblick aller unter den gemachten Einschränkungen möglichen Werthe der unbekannten Größen in der Aufgabe giebt. Folgende Aufgaben mit ihren Auflösungen werden dies, und worauf es in der unbestimmten Analytik vorzüglich ankommt, deutlich machen.

§. 103.

Aufgabe.

Die Zahl 10 soll in 2 Theile x und y zerlegt werden. Was für Werthe haben diese Theile?

Antwort. $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$
$y = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Formel. $x = 1 + v$
$y = 9 - v.$

Erläuterung.

Man formirt erst die Gleichung

$$x + y = 10.$$

Darauf versucht man für x und y so lange ganze Zahlen, bis man zwei gefunden hat, welche der Aufgabe entsprechen. Um dann noch die übrigen Werthe von x und y zu finden erwäge man, daß eine Größe unverändert bleibt, wenn man etwas zu ihr addirt, und eben soviel von ihr abzieht. Sind also 1 und 9 die gefundenen ganzen Zahlen für x und y, so kann man auch $x = 1 + v$ setzen, wenn man nur $y = 9 - v$ setzt, indem dadurch im ersten Theil der Gleichung $1 + v + 9 - v$ entsteht, welches soviel als $1 + 9$ ist. Nimmt man nun für v nach der Reihe alle ganze Zahlen von 0 bis 8, so erhält man alle positive ganze Zahlen, die der Aufgabe entsprechen.

Doch ist es nicht gleichgültig, welche ganze Zahlen man zuerst für x und y annimmt. Hätte man z. B. $x = 7$ und $y = 3$ angenommen, und dann $x = 7 + v$ und $y = 3 - v$ gesetzt, so hätte man für v nicht nur positive, sondern auch negative ganze Zahlen wählen müssen, um alle der Aufgabe entsprechende Werthe zu bekommen. Dadurch aber wird der Ueberblick aller möglichen Werthe erschwert. Es ist daher, um für die eine Unbekannte die kleinste ganze Zahl zu erhalten, welche die Aufgabe zuläßt, eine Hauptregel (in vielen unbestimmten Aufgaben), daß man alle positive ganze Zahlen nach der Reihe für die eine Unbekannte x setze, und die erste beibehalte, welche auch für die andere y eine positive ganze Zahl giebt. Alsdann dürfen auch für v nur positive Zahlen gesetzt werden, welches man, abwechselnd mit allen ganzen Zahlen von 0 an, so lange thut, bis ein Werth, wie y, negativ wird.

§. 104.

Aufgabe.

Die Zahl 23 soll in 2 Theile x und y zerlegt werden, von welchen der eine 3, der andere 5 zum Factor hat.

Antwort. $x = 3,\ 18.$
$y = 20,\ 5.$

Formel. $x = 3 + 15v$,
$y = 20 - 15v.$

Erläuterung.

Man setze $x = 3m$, $y = 5n$, und formire die Gleichung:

$$3m + 5n = 23.$$

m, n müssen positive ganze Zahlen seyn. Verfährt man wie in §. 103, so bekommt man $m = 1$, und $n = 4$, dann aber auch $m = 1 + 5v$, und $n = 4 - 3v$, weil diese Werthe, für m, n, in obige Gleichung substituirt, geben:

$$3\,(1 + 5v) + 5\,(4 - 3v) = 3 + 3 \,.\, 5v + 20 - 3 \,.\, 5v = 3 + 20 = 23.$$

Folglich ist $x = 3 + 15v$
$y = 20 - 15v.$

Für v werden alle ganze Zahlen von 0 an gesetzt, bis y negativ wird. Folglich erhält man, indem für $v = 2$ der eine Werth, y, schon negativ wird, 3 und 18 für x; 20 und 5 für y.

§. 105.

Aufgabe.

Eben so soll 64 in zwei Theile x und y zerlegt werden, welche abwechselnd 4 und 6 zu Factoren haben.

Antwort. $x = 4,\ 16,\ 28,\ 40,\ 52;$
$y = 60,\ 48,\ 36,\ 24,\ 12.$

Formel. $x = 4 + 12v;$

$y = 60 - 12v.$

Erläuterung.

Hier giebt $x = 4m$, $y = 6n$ gesetzt, die Gleichung:

$4m + 6n = 64$ oder $2m + 3n = 32;$

also $m = 1 + 3v$, $n = 10 - 2v$, und

$x = 4 + 12v$, $y = 60 - 12v$.

§. 106.

Aufgabe.

Ein Gutsbesitzer kaufte für 270 Ducaten Pferde und Ochsen. Für jedes Pferd bezahlte er 13, für jeden Ochsen 4 Ducaten. Wieviel Pferde und wieviel Ochsen konnte er gekauft haben?

Antwort. 2, 6, 10, 14, 18 Pferde,

61, 48, 35, 22, 9 Ochsen.

Erläuterung.

Bedeutet x die Anzahl der Ochsen, y die Anzahl der Pferde, so entsteht die Gleichung:

$$4x + 13y = 270.$$

Nicht immer führt die successive Substitution aller ganzen Zahlen von 0 an schnell genug zum Ziele, wie hier, wenn man 0, 1, 2, 3 . . . . für x substituirt. Um in solchen Fällen die kleinste ganze Zahl für die eine unbekannte Größe, x, zu erhalten, wenn man irgend einen entsprechenden Werth für x, y schon gefunden hat, oder leicht finden kann, wie es sich oft ereignet, kann man auch so verfahren:

Man setze, wenn p, q die bereits gefundenen ganzen Zahlen für x, y in der gegebenen Gleichung $ax + by = c$ sind,

$$x = p + bw$$
$$y = q - aw$$

und verändere w, ohne negative ganze Zahlen auszuschließen, so lange, bis x den kleinsten positiven Werth erhält. Diesen, er sey r, und den dadurch für y entstehenden Werth, den ich mit s bezeichne, behalte man, als diejenigen Werthe, welche die erforderliche Beschaffenheit haben, bei, und setze

$$x = r + bv$$
$$y = s - av.$$

So findet man für die hier gegebene Gleichung $4x + 13y = 270$ bei der Annahme von 10 für y

$$4x = 140$$
$$x = 35.$$

Demnach $x = 35 + 13w$
$y = 10 - 4w.$

Für $w = -2$ bekommt x den kleinsten positiven Werth, nämlich 9, wofür $y = 18$ wird; folglich ist:

$$x = 9 + 13v$$
$$y = 18 - 4v.$$

Der kleinste positive Werth von y ist 2. Hätte man gleich für y die successive Substitution ganzer Zahlen gemacht, so wäre das vorgesteckte Ziel ebenfalls schnell erreicht worden. Nicht so in vielen andern Fällen, wo der hier eingeschlagene Weg der kürzere ist. Z. B. in der Gleichung

$$23x + 37y = 3669,$$

wo $x = 100$ für y giebt:

$$37y = 1369$$
$$y = 37$$
also $x = 26 + 37v$
$$y = 83 - 23v,$$ wofür die kleinste ganze Zahl 14 ist.

§. 107.

Aufgabe.

Zwei Zahlen x und y, von welchen die erste 7, die zweite 4 zum Factor hat, geben von einander abgezogen 3. Was können es für Zahlen seyn?

Antwort. $x = 7, 35, 63 \ldots$
$y = 4, 32, 60 \ldots$

Formel. $x = 7 + 28v$
$y = 4 + 28v.$

§. 108.

Aufgabe.

Das 47fache einer Zahl x soll um 1 größer seyn, als das 71fache einer andern y. Welche Werthe können x und y haben?

Antwort. $x = 68, 139 \ldots$
$y = 45, 92 \ldots$

Formel. $x = 68 + 71v$
$y = 45 + 47v.$

Denn $x = -3$ und $y = -2$ entsprechen der Aufgabe, also auch $71v' - 3$ und $47v' - 2$, woraus die Formel fließt.

§. 109.

Aufgabe.

Ein Fluß ist die Grenze zwischen zwei Gütern. Um Streit zu vermeiden, übernimmt der Besitzer A des einen Gutes den Lachsfang, den der Fluß darbietet, und giebt dem Besitzer B des andern Gutes einen Theil der Ausbeute, nach folgender Berechnung, ab:

Sie zählen, wieviel Tage im Jahre gefischt wird, und wieviel darunter für den Fang besonders glückliche sind. Die Ausbeute der glücklichen Tage giebt der Unternehmer ab, den Ueberrest behält er für sich.

Nun sind in einem Jahre der Tage, an welchen gefischt wurde, 97 und darunter 23 glückliche. Für die letztern ist die Durchschnittszahl der an einem Tage gefangenen Fische eine ganze Zahl und kleiner als 100; eben so für die übrigen 74 Tage. Nach geschehener vertragsmäßiger Theilung behält A nur 1 Lachs mehr als B. Wieviel Lachse bekam jeder?

Antwort: A 1036, B 1035.

Erläuterung.

y sey die Durchschnittszahl für die glücklichen, x für die übrigen Tage. Dann muß seyn:

$$74x - 23y = 1.$$

Dies giebt $x = 14 + 23v$

$y = 45 + 74v.$

Folglich ist der Antheil des A $= 14 . 74$

„ „ des B $= 45 . 23$

Zusatz 1. In einem andern Jahr fallen auf A 17 Lachse mehr, als auf B; die übrigen Umstände bleiben. Wie groß war die Ausbeute für jeden.

Antwort. Für A 592 oder 2294; für B 575 oder 2277.

Zusatz 2. Die Ausbeute der glücklichen Tage war im Durchschnitt 45, der übrigen 14. A behält einen Lachs mehr. Wie groß war zum Mindesten die Anzahl der Tage, an welchen gefischt wurde, und wieviel glückliche waren darunter?

Antwort. Die Anzahl der Tage überhaupt war 38, worunter 9 glückliche waren.

§. 110.

Aus vorstehenden Exempeln sieht man, daß in allen unbestimmten Aufgaben, nachdem die Gleichungen für sie formirt sind, zwei Fragen beantwortet werden müssen:

1) Wie findet man für jede unbekannte Größe zuvörderst nur eine positive ganze Zahl?

2) Welche Formel giebt, wenn ein entsprechender Werth für jede unbekannte Größe gefunden ist, alle andern Werthe dafür erschöpfend an?

Diese beiden Fragen für gegebene Gleichungen beantworten, oder, für die unbekannten Größen gegebener Gleichungen, wenn ihrer weniger sind, als unbekannte Größen, alle positive ganze Zahlen angeben, die den Gleichungen für sie entsprechen, heißt diese Gleichungen auflösen. Nur in diesem Sinne wird hier die bald folgende allgemeine Auflösung der zur unbestimmten Analytik gehörigen Gleichungen genommen, obwohl man auch andere Voraussetzungen machen könnte.

Man kann auch in der unbestimmten Analytik die gegebenen Gleichungen in Gleichungen vom 1ten, 2ten oder einem höhern Grade — mit zwei (denn Gleichungen mit einer unbekannten Größe können nicht mehr Gegenstand der unbestimmten Analytik seyn), drei oder mehr unbekannten Größen — eintheilen. Hier beschränke ich mich auf die Gleichungen vom ersten Grade.

Alle Gleichungen vom ersten Grade mit zwei unbekannten Größen können, bei den hier geltenden Einschränkungen, entweder auf die Form

$$Mx - Ny = C,$$

oder auf die Form

$$Mx + Ny = C,$$

wo M, N, C positive ganze Zahlen sind, gebracht werden.

Dies giebt zwei Abschnitte für die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen:

1) Auflösung der Gleichungen von der Form $Mx - Ny = C$;

2) Auflösung der Gleichungen von der Form $Mx + Ny = C$.

Für die Gleichungen von mehr als zwei unbekannten Größen, wird noch ein dritter Abschnitt folgen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen von der Form: $Mx - Ny = C$.

* §. 111.

Es sey fürs Erste $C = 1$. Es soll also die Gleichung

$$Mx - Ny = 1$$

aufgelöset werden. (§. 110, Absatz 4).

Auflösung.

Erster Fall. M, N haben keinen gemeinschaftlichen Factor.

Erstes Stück. Für jede unbekannte Größe eine der Gleichung entsprechende ganze Zahl anzugeben.

I. Nimm zuerst für x und y zwei Werthe p und q, die ein positives Resultat, das mit D bezeichnet werde, geben, an, so daß

$$Mp - Nq = D \ldots \ldots (1)$$

wird; setze darauf für x und y zwei andere Zahlen a und b, die ein negatives Resultat, etwa $- d$, geben, so daß

$$Ma - Nb = - d \ldots \ldots (2)$$

wird. Formire darauf die Gleichung

$$Dm - dn = 1,$$

aus welcher m und n bestimmt werden. Dann ist:

$$x = mp + na;$$
$$y = mq + nb.$$

Beweis.

Setzt man für x und y die angegebenen Werthe, so ist:

$$Mx = Mpm + Man;$$
$$Ny = Nqm + Nbn;$$
$$\overline{}$$
$$Mx - Ny = (Mp - Nq)m + (Ma - Nb)n$$
$$= Dm - dn = 1.$$

II. Aus den gegebenen Formeln für x und y ergiebt sich folgende Methode zur Bestimmung derselben:

Ist M größer als N, so dividire M durch N; der Rest ist D; dieser von N abgezogen giebt d; bestimme nun m, n; deren Summe giebt x. Um y zu erhalten, multiplicire den durch die Division entstandenen Quotienten, ohne den Rest zu berücksichtigen, mit x, und addire n zu dem erhaltenen Producte. — Ist N größer als M, so dividire N durch M; der Rest ist d; dieser von M abgezogen giebt D; bestimme m, n; deren Summe giebt y; dies multiplicire mit dem Quotienten, und addire m, die Summe ist x.

Denn setzt man in den Gleichungen (1) und (2) $p = 1$, $a = 1$, wenn $M > N$, so ist

$$q = \frac{M}{N}, \text{ mit Weglassung des Restes } D;$$
$$b = q + 1, \text{ und } d = N - D, \text{ folglich}$$
$$x = m + n$$
$$y = qm + (q + 1)n = qx + n.$$

Ist $N > M$; so setze man $q = 1$, $b = 1$; dann ist $p = 1 + \frac{N}{M}$, mit Weglassung des Restes d;

$a = p - 1$ und $D = M - d$, folglich

$y = m + n$;

$x = pm + (p - 1) n = (p - 1) y + m$.

Beispiel.

Einen Werth für jede unbekannte Größe in der Gleichung

$$35x - 19y = 1$$

anzugeben.

Hier ist $p = 1$, $q = 1$ und $D = 16$;

$a = 1$, $b = 2$ und $d = - 3$.

$16m - 3n = 1$ giebt $m = 1$, $n = 5$;

folglich $x = m + n = 6$;

$y = qx + n = 6 + 5 = 11$.

Wenn der Zufall die Werthe von m und n nicht gleich an die Hand giebt, so verfährt man mit der Gleichung $Dm - dn = 1$ eben so, wie mit der Gleichung $Mx - Ny = 1$, und so fort, bis man auf eine Gleichung kommt, welche die gesuchten Werthe leicht an die Hand giebt. Dies Verfahren zeigt die folgende Berechnung der Gleichung $1493x - 2311y = 1$.

Quotienten.	+	−	Quotienten.
	$M = 1493$	$N = 2311$	1
	$d = 818$	1493	
	$D = 675$	$d = 818$	1
	143	675	
3	$D' = 532$	$d' = 143$	
	429	103	
2	$D'' = 103$	$d'' = 40$	
	80	23	
1	$D''' = 23$	$d''' = 17$	
	17	6	
	6	$m - 11n = 1$	
	$m = 2$	$n = 1$	
1	$x' = 3$	$y' = 4$	
2	$x'' = 7$	$y'' = 18$	
3.	$x''' = 25$	$y''' = 93$	
	$x'''' = 143$	$y'''' = 118$	1
	$x = 404$	$y = 261$	1

III. Durch Division kann man die Gleichung $Mx - Ny = 1$ auch in folgende umformen:

$$\frac{x}{y} - \frac{N}{M} = \frac{1}{yM},$$

woraus man sieht, daß $\frac{x}{y}$ der letzte Näherungswerth für den Bruch $\frac{N}{M}$ ist, wenn derselbe in einen Kettenbruch verwandelt und dieser berechnet wird (§. 97). Daraus ergiebt sich auch folgendes Verfahren zur Bestimmung von x und y:

Verwandle $\frac{N}{M}$ in einen Kettenbruch, und berechne aus diesem den letzten Näherungswerth, nämlich denjenigen, der vor dem ursprünglich Bruch $\frac{N}{M}$ vorhergeht; dieser ist der Bruch $\frac{x}{y}$, oder dessen Zähler ist $= x$, dessen Nenner $= y$. Machen die so bestimmten Werthe von x und y den Ausdruck $Mx - Ny$ negativ (was schon, ohne Rechnung, aus der Anzahl der Nenner im Kettenbruch beurtheilt [§. 96] werden kann): so setzt man N — x für x und M — y für y.

Daraus und aus §. 97 folgt für die Gleichung

$$1493x - 2311y = 1$$

folgende Berechnung:

1493	2311	1
	1493	
818	1493	1
	818	
675	818	1
	675	
143	675	4
	572	
103	143	1
	103	
40	103	2
	80	
23	40	1
	23	
17	23	1
	17	
6	17	2
	12	
5	6	1
	5	
	1	

Quotienten in umgekehrter Ordnung.	Q″ = qQ′ + Q.
1	1
2	3
1	4
1	7
2	18
1	25
4	118
1	143
1	y = 261
1	x = 404

Zweites Stück. Eine Formel für jede unbekannte Größe anzugeben, welche alle positive ganze Zahlen, die der Gleichung entsprechen, darstellt.

Bezeichnen wir den bereits gefundenen Werth für x mit m, für y mit n, und mit v jede beliebige ganze Zahl, so ist

$$x = m + N . v$$
$$y = n + M . v.$$

Denn diese Werthe für x, y in die Gleichung $Mx - Ny = 1$ substituirt, geben

$$Mm + MNv - Nn - MNv = Mm - Nn = 1.$$

In der Gleichung $1493x - 2311y = 1$ waren 404, 261 die bereits gefundenen Werthe, folglich ist für alle Werthe

$$x = 404 + 2311v$$
$$y = 261 + 1493v; \text{ oder:}$$

$x = 404, 2715, 5026, 7337, 9648,$ u. s. w.
$y = 261, 1754, 3247, 4740, 6233,$ u. s. w.

Zweiter Fall. M, N haben einen gemeinschaftlichen Factor. Dann giebt es für x, y keine ganze Zahl, die der Gleichung entspricht.

* §. 112.

Es soll nun allgemein die Gleichung

$$Mx - Ny = C$$

aufgelöst werden, wo C eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Auflösung.

Erstes Stück. Einen Werth für jede unbekannte Größe zu finden.

Erste Methode.

Suche für jede unbekannte der Gleichung

$$Mx - Ny = 1$$

erst einen Werth, m für x und n für y; diesen multiplicire mit C, wodurch

$$x = Cm$$
$$y = Cn$$

wird; ist dieser Werth für $x > N$, oder für $y > M$, so ziehe N von x und M von y so vielmal ab, bis der Ueberrest für $x < N$, für $y < M$ ist. Die so für x, y erhaltenen Werthe entsprechen, wie man leicht sieht, der Gleichung $Mx - Ny = C$.

Zweite Methode.

Leite aus $Mx - Ny = C$, wie §. 111, II., eine Gleichung $Dm - dn = C$ von der Beschaffenheit ab, daß sich für sie die Werthe m, n leicht bestimmen lassen, und verfahre mit diesen eben so wie dort (§. 111, II.) um x, y herzuleiten.

Zweites Stück. Alle Werthe von x, y anzugeben.

Der eine gefundene Werth sey g für x, h für y; dann ist allgemein:

$$x = g + Nv;$$
$$y = h + Mv.$$

Denn diese Werthe für x, y substituirt, entsprechen der Gleichung $Mx - Ny = C$.

Exempel 1.

Die Gleichung $1493x - 2311y = 10$ soll aufgelöst werden.

Für diese ist die erste Methode am bequemsten. Nämlich:

$$x = 404 \text{ giebt } g = 4040 - 2311 = 1729;$$
$$y = 261 \quad " \quad h = 2610 - 1493 = 1117;$$

folglich wird nun

$$x = 1729 + 2311v;$$
$$y = 1117 + 1493v.$$

Exempel 2.

Die Gleichung $1493x - 2311y = 103$ soll aufgelöst werden. Dafür giebt die zweite Methode:

1493	2311 1493	1
675	818 675	1
532m	— 143n	= 103
1	3	
5	4	1
g = 14	h = q	1
folglich ist:		
x = 14	+ 2311 v;	
y = 9	+ 1493 v.	

Haben M, N einen gemeinschaftlichen Factor, den C nicht hat, so ist die Auflösung (§. 110, Absatz 4) nicht möglich.

* §. 113.

Anwendungen.

Aufgabe 1.

Für den Bruch $\frac{M}{N}$ zwei Brüche, einen größern $\frac{x}{y}$ und einen kleinern $\frac{x'}{y'}$ mit Nennern, welche nicht größer als 10 sind, anzugeben, die ihm so nahe kommen, als es dabei möglich ist.

Auflösung.

Hier müssen also die Differenzen $\frac{M}{N} - \frac{x}{y} = \frac{My - Nx}{yN}$ und $\frac{x'}{y'} - \frac{M}{N} = \frac{Nx' - My'}{y'N}$ so klein als möglich seyn, oder, wenn man die Zähler der Differenzen $= C$ und c setzt, müssen y, y' nicht größer als 10, und zugleich C, c so klein seyn, als es unter dieser Bedingung möglich ist. Dies wird durch folgendes Verfahren erreicht:

Man löset die Gleichungen $My - Nx = C$ und $Nx' - My' = c$ nach §. 111, II. auf, wobei man höchstens bis zur zweiten abgeleiteten Gleichung fortschreitet, und dann mit 1, 0 für die unbekannten Größen des ersten Theils wechselt, worauf man C, c, x, y, x', y' berechnet. Wird dann y oder y' größer als 10, so bleibt man bei der ersten abgeleiteten Gleichung stehen, und nimmt darin für die unbekannten Größen auch größere Werthe als 1 an, welche sich aus den Umständen leicht ergeben.

Erstes Beispiel.

Man schreitet bis zur zweiten abgeleiteten Gleichung fort.

M sey $= 149$; $N = 231$.

+	—		C		+	—		c	
149	231	1			231	149			
	149			1	149				
67	82	1		1	82	67			
	67				15	52		15	
52	15		37						
1	1				1	0			
3	2	1		1	1	1			
8	5	1		1	2	3			

$\frac{x}{y} = \frac{5}{8}$, Differenz $= \frac{1}{50}$ nahezu; $\frac{x'}{y'} = \frac{2}{3}$; Differenz $= \frac{1}{46}$ nahezu.

Zweites Beispiel.

Man bleibt bey der ersten abgeleiteten Gleichung stehen. M sey $= 237$; N $= 511$.

+	—		C		+	—		c	
237	511	2		2	511	237			
	474				37	200		37	
200	37		89		1	0			
				2	1	2			
1	3								
9	4	2							

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}; \qquad \frac{x'}{y'} = \frac{1}{2}.$$

Zusatz. Die kleinere Grenze ist um $\frac{C}{yN}$, die größere um $\frac{c}{y'N}$ von $\frac{M}{N}$ verschieden.

Aufgabe 2.

Jeden gegebenen Bruch in zwei oder mehr Brüche zu zerlegen, deren Zähler 1, und deren Nenner Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, u. s. w. sind.

Die Auflösung folgt aus dem Vorigen, und kann, wie in folgendem Beispiel, wo der gegebene Bruch $\frac{1493}{2311}$ in die Theile $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \ldots$ zerlegt wird, bequem angeordnet werden:

$$\begin{array}{r|r|l|l|l}
\mathrm{M} & \mathrm{N} & & & \\
1493 & 2311 & 2 = p & & \\
 & 2986 & & & \\
 & 675 & 4622 = pN & 7 = q & \\
 & & 4725 & & \\
 & & 103 & 32354 & 400 = r \\
 & & & 41200 & \\
 & & & 8846 &
\end{array}$$

Treibt man die Zerlegung nicht weit, so kann man auch jeden Quotienten in den Rest dividiren, und dabei die Decimalstellen auslassen, wie folgt:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1493 & 2311 & 2 = p & \\
 & 2986 & & \\
 & 675 & & \\
 & 337 & 2311 & 7 = q \\
 & & 2359 & \\
 & & 48 & \\
 & & 6 & 2311 \mid 400 = r
\end{array}$$

Folglich ist $\frac{1493}{2311} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{400} + \ldots$

Aufgabe 3.

A collectirt in einer Stadt für eine abgebrannte Familie. Jeder Reiche giebt 793 Copeken, jeder Aermere 541. Es findet sich nachher, daß die Beiträge der Reichen dennoch nur 1 Copeken mehr betrugen, als die der Aermeren. Wieviel waren von jenen und von diesen, wenn die eingelaufene Summe unter 13000 Rubel stehen blieb? Und wieviel kam ein?

Antwort. 307 Reiche, 450 Aermere trugen bei; die Summe der eingelaufenen Beiträge war 4869 Rubel 1 Cop.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen von der Form $Mx + Ny = C$.

* §. 114.

Die Gleichung

$$Mx + Ny = C,$$

wo M, N, C positive ganze Zahlen sind, soll allgemein aufgelöset (§. 110) werden.

Auflösung.

Suche erst für jede unbekannte Größe x, y in der Gleichung $Mx' - Ny' = C$ einen Werth; dieser sey g für x' und h für y'. Nimm darauf $g - Nw$ für x, und $-h + Mw$ für y, welche Annahmen der Gleichung $Mx + Ny = C$ entsprechen werden. Setze $w = 1 + \frac{h}{M}$, wobei der Rest in der Division weggelassen wird. Wenn dafür der Ausdruck $g - Nw$ negativ wird, so ist die Auflösung unmöglich; bleibt er positiv, so sey $g - Nw = k$; $-h + Mw = l$. Dann ist allgemein

$$x = k - Nv,$$

$$y = l + Mv,$$

wo für v jede positive ganze Zahl, die kleiner als $\frac{k}{N}$ ist, genommen werden kann.

Haben M, N einen gemeinschaftlichen Factor, den C nicht hat, so ist die Auflösung ebenfalls nicht möglich.

Beispiel.

In der Gleichung

$$35x + 19y = 2311$$

ist für $35x - 19y = 2311$; $g = 72$; $h = 11$; für die Ausdrücke $-11 + 35w$ und $72 - 19w$ ist $w = 1$, folglich

$$k = 53;$$
$$l = 24;$$

und

$$x = 53 - 19v;$$
$$y = 24 + 35v.$$

Dies giebt für x die Werthe 53, 34, 15.

„ y „ „ 24, 59, 94.

Dritter Abschnitt.

Von den Gleichungen, welche mehr als zwei unbekannte Größen enthalten.

* §. 115.

Sind für 3 unbekannte Größen, x, y, z, 2 Gleichungen gegeben, so werden sie unter der allgemeinen Form $lx + my + nz = k$ begriffen seyn. Es seyn daher gegeben die beiden Gleichungen

$$ax + by + cz = d, \text{ und}$$
$$a'x + b'y + c'z = d'.$$

Man soll diese Gleichungen auflösen.

I. Leite aus diesen zwei andere Gleichungen, von welchen die eine x und y, die andere x und z enthält, und jede ganze Zahlen zu Coefficienten hat. Die erste sey $Mx + Ny = C$, die andere $Px + Qz = R$.

II. Die erste $Mx + Ny = C$ löse nach den im zweiten Abschnitt gegebenen Regeln auf. Die Auflösung gebe $x = p + Nv$. Diesen Ausdruck für x setze statt x in die zweite Gleichung, welche dadurch in folgende übergehe:

$$P'v + Qz = R'.$$

Auch diese löse auf; es werde für sie

$$v = r + Qw.$$

Dies für v in den Ausdruck für x gesetzt, giebt

$$x = p + Nr + NQw.$$

Die Formeln für y und z sind nun auch leicht zu finden.

Beispiel.

Es sind für drei unbekannte Größen die Gleichungen

$$3x - 4y + 2z = 177, \text{ und}$$
$$2x + 3y - 5z = 1$$

gegeben. Man soll sie auflösen.

Durch Multiplication mit 5 und 2 erhält man

$$\begin{array}{r} 15x - 20y + 10z = 885 \\ 4x + 6y - 10z = 2 \\ \hline 19x - 14y = 887 \end{array}$$

$$x = 57 + 14v$$
$$y = 14 + 19v.$$

Durch Multiplication der gegebenen Gleichungen mit 3 und 4 bekommt man:

$$\begin{array}{r} 9x - 12y + 6z = 531 \\ 8x + 12y - 20z = 4 \\ \hline 17x - 14z = 535. \end{array}$$

Darin $x = 57 + 14v$ gesetzt und durch 14 dividirt, giebt:

$$z - 17v = 31;$$

$$z = 48 + w$$

$$v = 1 + w.$$

Folglich $x = 71 + 14w$, oder $= 57 + 14u$

$y = 33 + 19w$, oder $= 14 + 19u$

$z = 48 + 17w$, oder $= 31 + 17u$,

wenn für u nur positive ganze Zahlen genommen werden.

Ist nur eine Gleichung für drei unbekannte Größen gegeben, wie

$$ax + by + cz = d,$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen sind, so löse man die Gleichung

$$ax + by = d - cz$$

nach §. 112 oder 115 auf, indem man z als bekannt ansieht.

Beispiel 1.

Es sey $5x - 7y - 11z = 1$.

$5x - 7y = 1$ giebt

$$x = 3 + 7v$$

$$y = 2 + 5v.$$

Folglich giebt $5x - 7y = 1 + 11z$

$$x = 3(1 + 11z) + 7v = 3 + 33z + 7v$$

$$y = 2(1 + 11z) + 5v = 2 + 22z + 5v.$$

Beispiel 2.

Es sey $5x + 7y + 11z = 71$.

1) $5x - 7y = 1$ giebt

$$x = 3 + 7v$$

$$y = 2 + 5v.$$

Tafel

der vier ersten Potenzen von 1 bis 10.

x	x^2	x^3	x^4
1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1296
7	49	343	2401
8	64	512	4096
9	81	729	6561
10	100	1000	10000
1,1	1,21	1,331	1,464
1,2	1,44	1,728	2,073
1,3	1,69	2,197	2,856
1,4	1,96	2,744	3,841
1,5	2,25	3,375	5,062
1,6	2,56	4,096	6,553
1,7	2,89	4,913	8,352
1,8	3,24	5,832	10,497
1,9	3,61	6,859	13,032
2,0	4,00	8,000	16,000
2,1	4,41	9,261	19,448
2,2	4,84	10,648	23,425
2,3	5,29	12,167	27,984
2,4	5,76	13,824	33,177
2,5	6,25	15,625	39,062
2,6	6,76	17,576	45,697
2,7	7,29	19,683	53,144
2,8	7,84	21,952	61,465
2,9	8,41	24,389	70,728
3,0	9,00	27,000	81,000

x	x^2	x^3	x^4
3,1	9,61	29,791	92,352
3,2	10,24	32,768	104,857
3,3	10,89	35,937	118,592
3,4	11,56	39,304	133,633
3,5	12,25	42,875	150,062
3,6	12,96	46,656	167,961
3,7	13,69	50,653	187,416
3,8	14,44	54,872	208,513
3,9	15,21	59,319	231,344
4,0	16,00	64,000	256,000
4,1	16,81	68,921	282,576
4,2	17,64	74,088	311,169
4,3	18,49	79,507	341,880
4,4	19,36	85,184	374,809
4,5	20,25	91,125	410,062
4,6	21,16	97,336	447,745
4,7	22,09	103,823	487,968
4,8	23,04	110,592	530,841
4,9	24,01	117,649	576,480
5,0	25,00	125,000	625,000
5,1	26,01	132,651	676,520
5,2	27,04	140,608	731,161
5,3	28,09	148,877	789,048
5,4	29,16	157,464	850,305
5,5	30,25	166,375	915,062
5,6	31,36	175,616	983,449
5,7	32,49	185,193	1055,600
5,8	33,64	195,112	1131,649
5,9	34,81	205,379	1211,736
6,0	36,00	216,000	1296,000
6,1	37,21	226,981	1384,584
6,2	38,44	238,328	1477,633
6,3	39,69	250,047	1575,296
6,4	40,96	262,144	1677,721
6,5	42,25	274,625	1785,062

x	x^2	x^3	x^4
6,6	43,56	287,496	1897,473
6,7	44,89	300,763	2015,112
6,8	46,24	314,432	2138,137
6,9	47,61	328,509	2266,712
7,0	49,00	343,000	2401,000
7,1	50,41	357,911	2541,168
7,2	51,84	373,248	2687,385
7,3	53,29	389,017	2839,824
7,4	54,76	405,224	2998,657
7,5	56,26	421,875	3164,062
7,6	57,76	438,976	3336,217
7,7	59,29	456,533	3515,304
7,8	60,84	474,552	3701,505
7,9	62,41	493,039	3895,008
8,0	64,00	512,000	4096,000
8,1	65,61	531,441	4304,672
8,2	67,24	551,368	4521,217
8,3	68,89	571,787	4745,832
8,4	70,56	592,704	4978,713
8,5	72,25	614,125	5220,062
8,6	73,96	636,056	5470,081
8,7	75,69	658,503	5728,976
8,8	77,44	681,472	5996,953
8,9	79,21	704,969	6274,224
9,0	81,00	729,000	6561,000
9,1	82,81	753,571	6857,496
9,2	84,64	778,688	7163,929
9,3	86,49	804,357	7480,520
9,4	88,36	830,584	7807,489
9,5	90,25	857,375	8145,062
9,6	92,16	884,736	8493,465
9,7	94,09	912,673	8852,928
9,8	96,04	941,192	9223,681
9,9	98,01	970,299	9605,960