TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

556

МНОЖЕСТВА И АЛГОРИТМЫ

Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 556 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

МНОЖЕСТВА И АЛГОРИТМЫ

Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1981

СВЯЗЬ МЕЖДУ СЕМАНТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ И ПСЕВДОБУЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ

А.Таутс

Институт кибернетики АН ЭССР

В [I] было дано понятие семантической модели и доказано, что каждая модель определяет некоторую полную псевдобулеву алгебру. Но в указанной статье не был исследован вопрос: можно ли таким образом получить любую полную псевдобулеву алгебру.

Легко видеть, что ответ на этот вопрос будет отрицательным, Действительно, рассмотрим, например, псевдобулеву алгебру, состоящую из трех элементов: $0, x, 1$ упорядоченных следующим образом: $0 < x < 1$. Эта псевдобулева алгебра полна. Можно ли найти семантическую структуру, имеющую в точности три значения истинности в линейном порядке?

Каждый аспект (см. [I]) вместе со своими конкретизациями определяет одно значение истинности. Кроме них существует еще по крайней мере одно значение истинности, а именно пустое, обозначаемое через 0. Значит, искомая семантическая структура не может иметь больше чем два аспекта.

Ясно, что одним аспектом можно определить только двухэлементную псевдобулеву алгебру. Следовательно, надо рассматривать семантические структуры, имеющие ровно два аспекта α и β. Но если α и β несравнимы относительно порядка, то получим четыре значения истинности. А если $\alpha<\beta$, то должны существовать выбор направлений Ω и цепь, согласующаяся с этим выбором, проходящая через α и β. Но в этом случае β является единственной конкретизацией для α в направлении $\Omega(\alpha)$, что противоречит правильности семантической структуры.

Теперь поставим себе другую цель: построить для произвольной полной псевдобулевой алгебры M семантическую модель, псевдобулева алгебра значений истинности которой имела бы подалгебру, изоморфную M. Подалгеброй полной псевдобулевой алгебры мы будем называть ее подмножество, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно дизъюнкции и коньюнкции (в том числе и бесконечных) и импликации. В этом случае при применении некоторой операции на элементы подалгебры результат операции не будет зависеть от того, рассмотрим ли мы эту операцию относительно всей псевдобулевой алгебры или относительно подалгебры.

Пусть M - некоторая полная псевдобулева алгебра. Будем называть буквой любой отличный от 0 элемент из M вместе с конечным (может быть, пустым) кортежом из символов + и −. При этом элемент из M мы будем называть основой буквы, а кортеж - приложением буквы. Мы будем говорить, что буква a проще буквы b, если основы этих букв совпадают, а приложение буквы a является начальным отрезком приложения буквы b. В этом случае буква b сложнее, чем a.

Будем называть словом любой непустой конечный кортеж букв, удовлетворяющий следующим условиям:

I) Основой первой буквы является 1.

2) Основы букв, считая слева направо, находятся в строго убывающем порядке в смысле псевдобулевой алгебры M.

Теперь определим отношение $\leqslant$ между словами следующим образом: если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ слова, то $\bar{a} \leqslant \bar{b}$ тогда и только тогда, когда для каждой буквы в слове $\bar{a}$ имеется в слове $\bar{b}$ буква, совпадающая с ней или являющаяся более сложной.

Кроме того, каждое слово снабжают совокупностью направлений следующим образом: каждому слову ставят в соответствие одно т.н. экстранаправление, а кроме того, по одному направлению для каждого случая, где основа последней буквы данного слова является в M значением дизъюнкции элементов, строго меньших ее. Непосредственными конкретизациями данного слова в экстранаправлении считаются все ее непосредственные конкретизации в смысле отношения $\leqslant$. А если направление характеризировано тем, что основа последней буквы является в M дизъюнкцией элементов a_i, $i \in I$, то непосредственными конкретизациями данного слова в этом направлении считаются слова, полученные от данного слова прибавлением одной буквы, основа которой меньше или равна некоторому a_i, $i \in I$, а приложение есть пустой кортеж.

Проверим, является ли правильной семантическая структура, где в роли аспектов будут слова в указанном упорядочении, снабженные направлениями и непосредственными конкретизациями для каждого направления указанным образом[1].

Во первых, каждому слову предшествует только конечное число слов. Кроме того, для каждого слова в каждом направлении имеется не меньше двух непосредственных конкретизаций. Для экстранаправления можно, например, прибавить + или − к приложению любой буквы. Для остальных направлений – их будем в дальнейшем называть простыми – это вытекает из того, что в M отличный от 0 элемент может быть значением дизъюнкции совокупности элементов, строго меньших его, если эта совокупность содержит не меньше двух элементов.

Следовательно, линейно упорядоченные множества аспектов могут быть только конечные или в виде последовательности. В последнем случае они неограничены сверху. Цепи бывают только в виде последовательности. Поэтому условие о существовании наименьшей верхней грани для каждого вполне упорядоченного множества, ограниченного сверху, выполнено тривиальным образом.

Вторoе условие правильности требует, что если $\bar{a} \leq \bar{b}$, то существует выбор направлений и цепь, согласующаяся с этим, проходящая через $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Но выбор можно определить так, что каждому слову соответствует экстранаправление, а от $\bar{a}$ можно шаг за шагом двигаться к $\bar{b}$, прибавляя каждый раз + или − к некоторому приложению или основу новой буквы.

Третье условие правильности требует, чтобы множество $\{\bar{a}\}$ исчерпывало только конкретизации слова $\bar{a}$. Но если $\bar{b}$ не является конкретизацией $\bar{a}$, а Ω является некоторым выбором направлений, то $\bar{a}$ имеет такую букву, которой нет в $\bar{b}$, а также в $\bar{b}$ нет более сложной буквы. В этом случае цепь, начинающаяся с $\bar{b}$ и согласующаяся с Ω, выбирается так, что в каждом слове $\bar{c}$, не являющемся конкретизацией $\bar{a}$, прибавляется к некоторому приложению + или −, или к этому слову прибавляется основа некоторой буквы, чтобы получить непосредственную конкретизацию в направлении $\Omega(\bar{c})$, тоже не являющуюся конкретизацией $\bar{a}$. Для экстранаправления это возможно тривиальным образом, так как к любому приложению можно прибавить + или − и оба прибавления не могут дать конкретизацию слова $\bar{a}$. В случае простого направления

[1] Можно рассматривать и вырожденную псевдобулеву алгебру, где 0 и 1 совпадают. В этом случае множество букв и множество слов окажутся пустыми.

опасность возникает только в таком случае, если лишь одна буква слова $\bar a$ отсутствует в $\bar c$, но, как нам известно, можно в этом случае прибавить некоторую другую букву, получая непосредственную конкретизацию в направлении $\Omega(\bar c)$.

Наконец, остается четвертое требование: если $A \subseteq M$ исчерпывает $\bar a$ и $\bar a \le \bar b$, то A исчерпывает $\bar b$. Пусть A исчерпывает $\bar a$ и $\bar a \le \bar b$. Пусть Ω – выбор направления, реализующий исчерпываемость $\bar a$ множеством A. Выбираем, если это возможно, в направлении $\Omega(\bar a)$ такую непосредственную конкретизацию $\bar c_1$, что $\bar c_1 \le \bar b$. Также поступаем и с $\bar c_1$ получая $\bar c_2 \le \bar b$ и т.д. Так как между $\bar a$ и $\bar b$ может быть только конечное число слов, то когда-нибудь мы дойдем до некоторого $\bar c_n$, не имеющего в направлении $\Omega(\bar c_n)$ требуемой конкретизации. В случае, если $\bar a$ ее не имеет, то $n = 0$ и $\bar c_0 = \bar a$. Итак, получаем $\bar c \ge \bar a$ такую, что $\bar c \le \bar b$. Никакая непосредственная конкретизация $\bar c'$ слова $\bar c$ в направлении $\Omega(\bar c)$ не удовлетворяет неравенству $\bar c' \le \bar b$, кроме того, либо $\bar a = \bar c$, либо между $\bar a$ и $\bar c$ есть часть цепи, согласующейся с Ω. Поэтому A исчерпывает $\bar c$. Если $\bar c = \bar b$, то A исчерпывает $\bar b$ и вопрос решен. Если $\bar c < \bar b$, то $\Omega(\bar c)$ обязательно простое. Оно характеризуется совокупностью элементов $\{e_i, i \in I\}$ таких, что $\bigvee_{i \in I} e_i$ есть основа последней буквы из $\bar c$, а каждое e_i строго меньше ее. Непосредственные конкретизации в направлении $\Omega(\bar c)$ получаются прибавлением букв, основа которых меньше или равна некоторому e_i. Но так как основа последней буквы слова $\bar c$ является основой некоторой буквы слова $\bar b$, то основа последней буквы слова $\bar b$ равна или меньше ее. В этом случае выбираем направление $\Omega(\bar b)$ следующим образом. Пусть e – основа последней буквы слова $\bar b$. Известно, что $\bigvee_{i \in I}(e \wedge e_i) = e \wedge (\bigvee_{i \in I} e_i)$. Но так как $\bigvee_{i \in I} e_i \ge e$, то $\bigvee_{i \in I}(e \wedge e_i) = e$. Если теперь для некоторого $i \in I$ имеет место $e \wedge e_i = e$ т.е. $e \le e_i$, то одну конкретизацию в направлении $\Omega(\bar c)$ можно получить прибавлением буквы с основой e и эта конкретизация была бы меньше или равна $\bar b$, что противоречит предположению. Поэтому для каждого $i \in I$ имеет место $e \wedge e_i < e$ и мы можем выбирать в качестве $\Omega(\bar b)$ направление, характеризуемое совокупностью $\{e \wedge e_i, i \in I\}$. Если теперь $\bar b_1$ есть непосредственная конкретизация слова $\bar b$ в направлении $\Omega(\bar b)$, то $\bar b_1$ получается из $\bar{b}$ прибавлением буквы с основой $f \leq c \wedge e_i \leq e_i$. Но такую же букву можно прибавить и к слову $\bar{c}$, получая его непосредственную конкретизацию $\bar{a}_1$ в направлении $\Omega(\bar{c})$. При этом $\bar{a}_1 < \bar{b}_1$. Таким образом, мы нашли для $\bar{b}$ направление $\Omega'(\bar{b})$ такое, что для каждой конкретизации $\bar{b}_1$ в направлении $\Omega'(\bar{b})$ имеется $\bar{a}_1$ такое, что $\bar{a}_1 < \bar{b}_1$, а между $\bar{a}$ и $\bar{a}_1$ существует часть цепи, согласующейся с Ω. Теперь повторим конструкцию, беря $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$ в качестве $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя обстоятельство, что Ω реализует и исчерпаемость $\bar{a}_1$ множеством A. При этом получаем $\Omega'(\bar{b}_1)$ и т.д. После этого можно Ω' продолжить на всю структуру произвольным образом. Если теперь $\bar{b}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n, \ldots$ – цепь, согласующаяся с Ω', то существует последовательность $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ такая, что $\bar{a}_n \leq \bar{b}_n$ и между $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_{i+1}$ существует часть цепи, согласующейся с Ω. Поэтому $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \ldots$ определяет такую цепь. Но в этом случае некоторое $\bar{a}_n$ больше или равно некоторому слову из A, а значит, это имеет место и для $\bar{b}_n$. Поэтому Ω' реализует исчерпаемость слова $\bar{b}$ множеством A.

Следовательно, полученная семантическая структура правильна и определяет псевдобулеву алгебру.

Поставим теперь $a \in M$ в соответствие множество слов $A(a)$, состоящее в точности из тех слов, основа последней буквы которых меньше или равно a.

Проверим, являются ли множества $A(a)$ значениями истинности.

Ясно, что если $\bar{b} \in A(a)$, а $\bar{b} \leq \bar{c}$, то основа последней буквы слова $\bar{b}$ является основой некоторой буквы олова $\bar{c}$ и основа последней буквы слова $\bar{c}$ меньше или равно ей. Поэтому $\bar{c} \in A(a)$ и $A(a)$ монотонно. Остается доказать, что для каждого $\bar{b} \bar{\in} A(a)$ существует в каждом направлении непосредственная конкретизация, не принадлежащая $A(a)$. В этом случае мы можем при каждом выборе направлений Ω построить цепь, начинающуюся с $\bar{b}$, согласующуюся с Ω и не пересекающуюся с $A(a)$.

Но если $\bar{b} \bar{\in} A(a)$, то при экстранаправлении можно просто прибавить + или – к некоторому приложению. Простое направление характеризуется такой совокупностью $\{e_i : i \in I\}$, что $\vee_{i \in I} e_i$ является основой последней буквы слова $\bar{b}$. Если для каждого $i \in I$ имело бы место $e_i \leq a$, то было бы и $\vee_{i \in I} e_i \leq a$ и $\bar{b} \in A(a)$. Следовательно, для некоторого

$\iota \in I$ не имеет места $a_\iota \leq a$ и можно прибавить букву с основой b_ι, не попадая в $A(a)$. Следовательно, $A(a)$ есть значение истинности.

Проверим, является ли $\{A(a) : a \in M\}$ подалгеброй полученной булевой алгебры значений истинности, изоморфной M.

Ясно, что если $a \neq b$, то $A(a)$ и $A(b)$ разные, иначе слова, основами последних букв которых являются a и b, принадлежали бы $A(a)$ и $A(b)$, что привело бы к $a \leq b$ и $b \leq a$, т.е. $a = b$. При этом $A(a) \leq A(b)$ тогда и только тогда, если $a \leq b$, иначе слова, основы последних букв которых суть a, не принадлежат $A(b)$.

Множество $A(1)$ является всей структурой, а $A(0)$ – пустым множеством.

Пусть $\{a_\iota : \iota \in I\}$ есть совокупность элементов. Слово $\bar{a}$ принадлежит каждому $A(a_\iota)$, $\iota \in I$, если основа его последней буквы меньше или равна a_ι для всех $\iota \in I$, т.е. меньше или равно $\bigwedge_{\iota \in I} a_\iota$. Следовательно, $\bigwedge_{\iota \in I} A(a_\iota) = A(\bigwedge_{\iota \in I} a_\iota)$.

Дальше, если $a \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$, то $\bigvee_{\iota \in I}(a \wedge a_\iota) = a$. Если для некоторого $\iota \in I$ имеет место $a \wedge a_\iota = a$, т.е. $a \leq a_\iota$, то слова, основа последней буквы которых есть a, принадлежат уже $A(a_\iota)$. Если $a \leq a_\iota$ не имеет место, то для слова с основой последней буквы a существует направление, характеризуемое совокупностью $\{a \wedge a_\iota : \iota \in I\}$, и каждая непосредственная конкретизация в этом случае попадет в некоторое $A(a_\iota)$, $\iota \in I$. Т.е. $\bar{a} \in \bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota)$. А если не имеет место $a \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$, то для экстранаправления можно прибавить + или – к некоторому приложению, а всякое простое направление для $\bar{a}$ с основой последней буквы a характеризуется совокупностью $\{e_\varkappa : \varkappa \in K\}$, где $\bigvee_{\varkappa \in K} e_\varkappa = a$. При этом хотя бы для одного $\varkappa \in K$ не имеет место $e_\varkappa \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$ и мы можем найти непосредственную конкретизацию, где $e_\varkappa$ – основа последней буквы. Продолжая таким образом, мы получим цепь, не попадая ни в одно $A(a_\iota)$, $\iota \in I$, следовательно, $\bar{a} \in \bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota)$. Итак, $\bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota) = A(\bigvee_{\iota \in I} a_\iota)$.

Пусть теперь $\bar{c} \in A(a \to b)$, т.е. основа последней буквы слова $\bar{c}$ меньше или равна $a \to b$. Это имеет место и для всех конкретизаций слова $\bar{c}$. Если некоторая его конкретизация $\bar{d}$ принадлежит и $A(a)$, то основа последней буквы $\bar{d}$ меньше или равна $a \to b$ и a, т.е. меньше или равна $(a \to b) \wedge a \leq b$. В этом случае $\bar{d} \in A(b)$. Следовательно,

$\bar{c} \in A(a) \to A(b)$.

Пусть теперь $\bar{c} \in A(a \to b)$ не имеет место и пусть c – основа последней буквы слова $\bar{c}$. В этом случае $c \leq a \to b$ не имеет место, также не имеет место и $c \wedge a \leq b$. Но в этом случае можно найти конкретизацию для $\bar{c}$, прибавляя букву с основой $c \wedge a$ (в случае $c \wedge a = c$ в качестве этой конкретизации можно взять $\bar{c}$), принадлежащую $A(a)$, но не принадлежащую $A(b)$, следовательно, $c \bar{\in} A(a) \to A(b)$.

Итак, $A(a \to b) : A(a) \to A(b)$.

Таким образом, мы видим, что $\{A(a) : a \in M\}$ – подалгебра полученной псевдобулевой алгебры, изоморфна M.

Из полученного результата можно вывести следующее следствие. Если $\mathfrak{A}$ – нетавтологичная формула и $\mathcal{U}$ – контрамодель для $\mathfrak{A}$, основывающаяся на псевдобулевой алгебре M, то можно построить семантическую структуру S, система значений истинности которой имеет подалгебру M^*, изоморфную M. Теперь можно построить модель на S, где все значения истинности существования, а также и значения предикатов попадут в M^*, являясь элементами, соответствующими аналогичным значениям в M. Такая связь сохраняется и между значениями формул. Поэтому S является контрамоделью для $\mathfrak{A}$. Итак, если для $\mathfrak{A}$ существует контрамодель, то, не ограничивая общности, можно эту контрамодель задать на семантической структуре.

Литература

I. Таутс А., Семантическая модель для бесконечных формул.– Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 7-19.

Поступило
28.XII 1978

SEMANTILISTE MUDELITE JA PSEUDO-BOOLE'I ALGEBRATE VAHELINE SEOS

A.Taute

R e s ü m e e

Teatavasti artiklis [1] esitatud semantiline struktuur määrab alati mingi pseudo-Boole'i algebra. Käesolevas artiklis tõestatakse, et ehkki iga pseudo-Boole'i algebrat ei ole võimalik nii saada, on ometi iga paeudo-Boole'i algebrat

võimalik saada niisugusel viisil määratud pseudo-Boole'i algebra alamalgebrana. Siit järeldub, et valemite kontramudelite konstrueerimisel võib piirduda semantiliste mudelitega.

DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN SEMANTISCHEN MODELLEN UND DEN PSEUDO-BOOLESCHEN ALGEBREN

A.Tauts

Zusammenfassung

Bekanntlich bestimmt die in dem Artikkel [1] dargelegte semantische Struktur immer eine pseudo-Boolesche Algebra. In dem vorliegenden Artikel wird bewiesen, daß obgleich man nicht jede pseudo-Boolesche Algebra in solcher Weise bekommen kann, kann man doch jede pseudo-Boolesche Algebra als eine Unteralgebra einer in solcher Weise bestimmten Algebra bekommen. Daraus folgt, daß man sich bei dem Konstruieren der Kontramodelle der Formeln nur mit den semantischen Modellen begnügen kann.

О ФАКТОРРЕШЕТКЕ РЕШЕТКИ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ ПО КОНГРУЭНЦИИ ИММУННОСТИ

Р. Пранк
Кафедра программирования

1. Пусть $\mathcal{E}$ обозначает решетку рекурсивно перечислимых подмножеств множества натуральных чисел N относительно теоретико-множественных операций. Большое количество результатов о решетке $\mathcal{E}$, а также о факторрешетке $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ по идеалу конечных множеств, приводится в 12-ой главе монографии Роджерса [1]. Для $A, B \in \mathcal{E}$ определим

$A =_{\mathcal{J}} B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ конечно или иммунно.

Факторрешетку решетки $\mathcal{E}$ по конгруэнции иммунности $=_{\mathcal{J}}$ обозначим через $\mathcal{E}/\mathcal{J}$, а класс конгруэнтности рекурсивно перечислимого множества A через $A_{\mathcal{J}}$. Решетка $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ обладает нулевым элементом $0 = \phi_{\mathcal{J}}$ и единичным элементом $1 = N_{\mathcal{J}}$. Дополнение элемента $A_{\mathcal{J}}$ в $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ обозначим через $A_{\mathcal{J}}'$, а дополнение множества $A \subseteq N$ до N через $\bar{A}$. Под элементарной теорией решетки $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}/\mathcal{J}$) понимаем совокупность истинных в $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}/\mathcal{J}$) замкнутых формул теоретико-решеточного языка в сигнатуре $\langle 0, 1, \cup, \cap, ' \rangle$ или $\langle 0, 1, \leq \rangle$.

В [2] Лахлан ставит задачу об исследовании решетки $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ для получения информации о решетке $\mathcal{E}$. В настоящей заметке опишем элементы $\mathcal{E}/\mathcal{J}$, обладающие дополнением, и построим один элементарно определимый в $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ собственный подкласс класса элементов, не обладающих дополнением.

2. В §8.7 книги Роджерса все рекурсивно перечислимые множества группируются по пяти непересекающимся классам $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_4$, где, в частности,

$\mathcal{C}_0 = \{A \mid A$ рекурсивно$\}$,

$\mathcal{C}_1 = \{A \mid A$ просто$\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{A \mid \bar{A}$ не рекурсивно перечислимо и $\bar{A} = B \cup I$, где B – бесконечное рекурсивно перечислимое множество, I – иммунно$\}$,

а для множеств A из классов $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$ для каждого рекурсивно перечислимого множества $B \subseteq \bar{A}$ найдется такое бесконечное рекурсивно перечислимое множество $C \subseteq \bar{A}$, что $B \cap C = \phi$.

Ясно, что имеет место следующая

<u>Теорема I</u>. Пусть A - рекурсивно перечислимое множество. Тогда

$A_{\mathcal{Y}}$ имеет дополнение $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

<u>Следствие I</u>. Существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что

I) $A_{\mathcal{Y}}$ имеет дополнение в $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$,

2) класс $A_{\mathcal{Y}}$ не содержит рекурсивных множеств.

Условиям следствия удовлетворяют множества из подклассов $\mathcal{C}_{22}$ и $\mathcal{C}_{23}$ рассмотренной классификации.

По теореме I, обладающие дополнением элементы решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ порождаются рекурсивно перечислимыми множествами из различных элементарно определимых в $\mathcal{L}$ классов. Но следующая теорема показывает, что отличные от 0 и 1 элементы с дополнением решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ образуют единственный элементарно определимый в $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ класс.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $D_{\mathcal{Y}}$ и $E_{\mathcal{Y}}$ - элементы с дополнением решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$, отличные от 0 и 1. Тогда найдется такой автоморфизм Φ решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$, что $\Phi(D_{\mathcal{Y}}) = E_{\mathcal{Y}}$.

Для доказательства достаточно построить автоморфизм для случая, когда D - бесконечное кобесконечное рекурсивное множество, а $E \in \mathcal{C}_2$. Если B - множество из определения $\mathcal{C}_2$ для E, то нужный автоморфизм индуцирувтся взаимно-однозначной общерекурсивной функцией, отображающей D на E и $\overline{D}$ на B.

<u>Следствие 2</u>. Отличные от 0 и 1 элементы с дополнением решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ образуют один элементарно определимый в $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ класс.

<u>Следствие 3</u>. Существует автоморфизм решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$, не индуцированный никаким автоморфизмом решетки $\mathcal{L}$.

Отметим, что все автоморфизмы факторрешетки $\mathcal{L}/\mathcal{F}$ индуцируются автоморфизмами $\mathcal{L}$ [3].

3. Переходим к рассмотрению элементов $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ без дополнения. Аналоги известных для $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}/\mathcal{F}$ классов максимальных, ꓡ-максимальных, простых и др. элементов здесь отсутствуют, соответствующие рекурсивно перечислимые множества "склеиваются" при факторизации. Для получения элементарно определимых классов нужен "более грубый" эффект.

Аналогично рекурсивно отделимым элементам $\mathcal{L}$ называем элементы $A_{\mathcal{Y}}$ и $B_{\mathcal{Y}}$ решетки $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ отделимыми в $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$, если существует элемент $x_\varphi \in \mathcal{E}/\varphi$, обладающий дополнением и такой, что

$$A_\varphi \leq x_\varphi \text{ и } B_\varphi \leq \bar{x}_\varphi.$$

Ясно, что отделимость выражается формулой

$$(\exists x)(\exists y)[y = x' \,\&\, a \leq x \,\&\, b \leq x'].$$

Теорема 3. Существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что

I) A_φ не имеет дополнения в $\mathcal{E}/\varphi$,

2) A_φ отделим в $\mathcal{E}/\varphi$ от каждого дизъюнктного с ним элемента.

Условиям теоремы удовлетворяет множество

$$A = \{\langle x, i\rangle \mid x \in \mathbb{N}, i \in S\},$$

где S - простое множество.

Аналогично доказательству теоремы 7-XII из [I] можно убедиться, что для приведенных там множеств

$$A_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\} \text{ и } A_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$$

классы $(A_0)_\varphi$ и $(A_1)_\varphi$ являются неотделимыми также и в $\mathcal{E}/\varphi$. Из этого факта и теоремы 3 получим

Следствие 4. Существуют элементарно определимые собственные подклассы класса элементов $\mathcal{E}/\varphi$, не обладающих дополнением.

Литература

I. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва, 1972.

2. Lachlan A. H., On the lattioe of recareivelv enumerable eata. Trane. Amer. Math. Soc., 130, № 1(1968), 1-37.

3. Soare R. I., Automorphisme of the lattice of recursively anumerable aeta. Part I: Maximal aate, Ann. Math. 100, № 1 (1974), 80-120.

Поступило
I5 УI 1979

VÕREST $\mathcal{E}/\varphi$

R. Prank

Résümee

Artiklis vaadeldakse rekursiivselt loetletavate hulkade võre faktorvõrat $\mathcal{E}/\varphi$, mis on saadud kongruentsi

$A =_\varphi B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ on lõplik või immuunne

järgi.

Antakse vôre $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ täiendiga elementide kirjeldus. Näidatakse, et null- ja ühikelemendist erinevad täiendiga elemendid moodustavad ainult ühe elementaarselt defineeritava klassi, aga täiendita elementide klasse on rohkem kui üks.

ON THE FACTORLATTICE OF LATTICE OF RECURSIVELY ENUMERABLE SETS BY IMMUNITY CONGRUENCE

R.Frank

S u m m a r y

For the factorlattice $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ of lattice $\mathcal{L}$ of RE sete defined by the congruence

$A =_{\mathcal{I}} B \rightleftarrows (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ is finite or immune,

the following theorems are proved.

An element $A_{\mathcal{I}} \in \mathcal{L}/\mathcal{I}$ has complement if and only if $A \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ in the classification of §8.7 in [1]. For any two complemented elemente of $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ different from 0 and 1 there is an automorphism of $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ mapping one to the other.

An example of an elementary definable proper subclass of noncomplemented elemente is given.

ПОРОЖДЕНИЕ ИЕРАРХИЙ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ "А" И "В" ЛЁБА-ВАЙНЕРА МЕТОДОМ ИСПРАВЛЕНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

П.Лорентс

Институт кибернетики АН ЭССР

I. Введение

Пусть ω - первый счетный и ω_1 - первый несчетный ординал. Если $W(\ldots, x, \ldots)$ - некоторое выражение, значение которого зависит от параметра x, то через $\{W(\ldots,x,\ldots)\}_x$ будем обозначать множество $\{W(\ldots,0,\ldots), W(\ldots,1,\ldots),\ldots\}$, а через $\langle W(\ldots,x,\ldots)\rangle_x$ будем обозначать упорядоченную по типу ω последовательность $\langle W(\ldots,0,\ldots), W(\ldots,1,\ldots),\ldots\rangle$ Если α - счетный предельный ординал, то через $\alpha|x|$ обозначим x-ый член из фундаментальной последовательности для α.

<u>Определение I</u>. Если β - предельный ординал и $\beta \leq \omega_1$, то проектом длиной β будем называть любое такое множество, элементами которого являются фундаментальные последовательности для предельных ординалов, меньших β, причем для каждого предельного ординала $\alpha < \beta$ оно включает в точности одну фундаментальную последовательность.

Если $\mathbb{F}$ - некоторый проект, то его длину будем обозначать через $\|\mathbb{F}\|$.

С каждым проектом $\mathbb{F}$ мы связываем т.н. функции Лёба-Вайнера $F_\alpha^n(x)$, которые определяются следующим образом:

<u>Определение 2</u>. ([3] стр. 35). Пусть $n<\omega$, $x<\omega$ и $\alpha < \|\mathbb{F}\|$, тогда

$$F_0^n(x) = (n+1)(x+1),$$

$$F_\alpha^{n+1}(x) = F_\alpha^0(F_\alpha^n(x)), \quad \text{если } \alpha > 0,$$

$$F_{\alpha+1}^0(x) = F_\alpha^x(x)$$

$$F_\alpha^0(x) = F_{\alpha|x|}^0(d_\alpha^{\mathbb{F}}(x)), \quad \text{если } \alpha \text{ - предельный}$$

ординал, где

$\langle\alpha|x|\rangle_x$ - фундаментальная последовательность из $\mathbb{F}$ для α и

$$d_\alpha^{\mathbb{F}}(0) = 0,$$

$$d_\alpha^{\mathbb{F}}(x+1) = \mu z(z > d_\alpha^{\mathbb{F}}(x) \,\&\, (\forall i \leq x)(F_{\alpha|x+1|}^0(z) > F_{\alpha|i|}^0(z))).$$

Функцию $\lambda x \cdot F^{n}_{\alpha}(x)$ будем обозначать через F^{n}_{α}.

Определение 3 ([3], стр. 40). Положим

$$[\mathbb{F}]_{\alpha} = E(\{\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x+y, \lambda x \cdot x_i\} \cup \{F^{0}_{\beta} \mid \beta \leqslant \alpha\})$$

где, если K - некоторая совокупность функций, то $E(K)$ - наименьший класс функций, содержащий K и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченной рекурсии.

В своей работе [3] Лёб и Вайнер показали, что для всех проектов $\mathbb{F}$ и для $\alpha < \beta < \|\mathbb{F}\|$ имеет место строгое включение $[\mathbb{F}]_{\alpha} \subset [\mathbb{F}]_{\beta}$, при этом $\bigcup_{\alpha < \omega} [\mathbb{F}]_{\alpha} = \Phi_{prim}$, где Φ_{prim} - множество всех примитивнорекурсивных функций. В этой же работе был определен специальный проект длиной ε_0 (см. [3] стр. 47-48), которую мы здесь условно обозначим через $\mathbb{L}W$. Для этого проекта Лёб и Вайнер (см. [3] стр. 62) доказали, что $\bigcup_{\alpha < \omega^{k}} [\mathbb{L}W]_{\alpha} = \Phi_{k}$, где Φ_{k} - множество всех k-рекурсивных функций. Далее Вайнер показал (см. [2] стр. 77), что $\bigcup_{\alpha < \varepsilon_0} [\mathbb{L}W]_{\alpha} = \Phi_{ord} = P_{ror}R = PR^{(0,0)}$, где

Φ_{ord} - множество всех ординально рекурсивных функций,

$P_{ror}R$ - множество всех функций, рекурсивность которых доказуема в (классической) арифметике первого порядка,

$PR^{(0,0)}$ - множество всех примитивно рекурсивных функционалов Гёделя типа (0,0).

Кроме того, Лёбом и Вайнером было показано, что все классы $[\mathbb{L}W]$ являются конечно порожденными (см. [2] стр. 82) и что $d^{\mathbb{L}W}_{\alpha} = \lambda x \cdot x$ (см. [3] стр. 56). В связи с этим возникают весьма естественные проблемы, которые впервые были поставлены Лёбом и Вайнером в конце работы [3] и которые мы здесь приведем в слегка обобщенном виде:

А. Существуют ли такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| > \varepsilon_0$ и все классы $[\mathbb{F}]_{\alpha}$ - конечно порожденные?

В. Существуют ли такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| > \varepsilon_0$ и $d^{\mathbb{F}}_{\alpha} = \lambda x \cdot x$?

Замечание. Говоря о конечной порожденности классов $[\mathbb{L}W]_{\alpha}$, $[\mathbb{F}]_{\alpha}$, мы условимся "забыть" о бесконечности множества функций $\lambda x \cdot x_i$.

В настоящей статье мы определим относительно эффективно выбранные проекты и покажем, применяя т.н. метод исправлений фундаментальных последовательностей, что существуют такие проекты $\mathbb{F}$, что $\omega^2 \leqslant \mathbb{F} \leqslant \omega_{NC}$, где ω_{NC} - первый неконструктивный ординал и $\bigcup_{\alpha < \|\mathbb{F}\|} [\mathbb{F}]_{\alpha} = \Phi_{gen}$, где Φ_{gen} - множество всех общерекурсивных функций. Тем же методом будет доказано существование таких проектов $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \leq \omega_{\aleph_0}$ и все классы $[\mathbb{F}]_\alpha$ конечно порожденные. И, наконец, что существуют такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \omega_1$ и $d_\alpha^{\mathbb{F}} = \lambda x \cdot x$. В связи с этим отметим, что интересные проекты - т.н. стройные системы фундаментальных последовательностей - для которых положительно решается проблема "В", построил Шмит в статье [6]. Однако, как было показано в [7], нельзя выбрать стройную систему фундаментальных последовательностей одновременно для всех счетных предельных ординалов.

2. Относительно эффективно выбранные проекты

Пусть S - некоторая система обозначений для ординалов и $\nu_S(x)$ - ординал, имеющий обозначение x в системе S (см. [5] стр. 264).

Определение 4. Фундаментальную последовательность $\langle \alpha|n| \rangle_n$ будем называть вычислимой, если существует такая одноместная общерекурсивная функция φ, что $\alpha|n| = \nu_S(\varphi(n))$ для всех $n < \omega$.

Определение 5. Будем говорить, что проект $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до ординала β, если существует такая одноместная частичнорекурсивная функция ξ и такое множество $B_\beta \subseteq \mathfrak{D}_1$, содержащее по крайней мере одно обозначение для каждого ординала $\alpha < \beta$, что

- если $x \in B_\beta$ и $\nu_S(x)$ - предельный ординал, то $\xi(x)$ определен и $\langle \nu_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) \rangle_n$ есть фундаментальная последовательность из $\mathbb{F}$, имеющая $\nu_S(x)$ своим пределом, причем $\varphi_{\xi(x)}(n) \in B_\beta$ для всех $n < \omega$.

Замечание. Если $\beta = \|\mathbb{F}\|$, то будем вместо " $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до β " говорить, что " $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным".

Определение 5.I. Будем говорить, что проект $\mathbb{F}$ является эффективно выбранным до ординала β, если $\mathbb{F}$ относительно эффективно выбран до β и при этом множество B_β является рекурсивно перечислимым.

Применяя т.н. лемму о рекурсии (см. [5] стр. 509) можно доказать следующую теорему:

Теорема I. Если проект $\mathbb{F}$ относительно эффективно выбран до β, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{gen}$. Если же $\mathbb{F}$ является эффективно выбранным до β, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{F}]_\alpha^{(1)}$ является вычислимым семейством общерекурсивных функций (т.е. существует такая одноместная общерекурсивная функция ι, что

$\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{F}]_\alpha^{(1)} = \{\varphi_{f(x)}\}_x$. Теорема I, ход доказательства которой можно в общих чертах найти в [4], дает нам хороший способ для получения различных иерархий рекурсивных функций. Например:

Теорема 2. (Лёб-Вайнер [3] стр. 47). Пусть P – некоторый путь через O, где O – клиниевская система обозначений (см. [5] стр. 268), и пусть проект $\mathbb{P}$ определен следующим образом:

$$\mathbb{P} = \{ <|\varphi_\alpha(n)|_O>_n \mid 3\cdot 5^\alpha \in P \}.$$

Тогда, если ординал β имеет обозначение в P, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{P}]_\alpha \subseteq \Phi_{\beta\omega}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что проект $\mathbb{P}$ является относительно эффективно выбранным для любого β, имеющего обозначение в пути P. Остается применить теорему I ■ (знак ■ обозначает конец доказательства).

Аналогичным образом доказывается

Теорема 3. Пусть M – некоторая унивалентная система обозначений и пусть

$$\mathbb{M} = \{ < \nu_M(\varphi_{f_M(x)}(n))>_n \mid x \in \mathfrak{D}_M \,\&\, \kappa_M(x) = 2 \}.$$

В таком случае, если $\beta \leq \|\mathbb{M}\|$, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{M}]_\alpha \subseteq \Phi_{\beta\omega}$.

Эту теорему мы будем ниже использовать при решении проблемы "А".

3. Метод исправлений фундаментальных последовательностей

Постановка задачи. Решение многих вопросов об иерархии Лёба-Вайнера так или иначе сводимо к следующей проблеме: Пусть H – некоторая совокупность функций. Требуется определить такой проект $\mathbb{F}$, что для каждой $h \in H$ можно было бы указать такие $\alpha_h < \|\mathbb{F}\|$ и $f_h \in [\mathbb{F}]_{\alpha_h}$, при которых почти для всех значений $x_1, \ldots, x_n$ имело место неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) < F^0_{\alpha_h}(f_h(x_1, \ldots, x_n)).$$

Или в более "сильном" варианте: требуется найти такой проект $\mathbb{F}$, чтобы для каждой $h \in H$ можно было бы указать такую примитивно рекурсивную функцию f_h, при которой для каждого $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$ и почти для всех $x_1, \ldots, x_n$ имело место неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) < F^\omega_\alpha(f_h(x_1, \ldots, x_n)).$$

По существу именно таким способом были доказаны, например, теорема Лёба и Вайнера о том, что $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} [W]_\alpha = \varphi_K$, теоремы

Вайнера о том, что $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0}[\mathbb{L}W]_\alpha = \Phi_{ord}$ и что все классы $[\mathbb{L}W]_\alpha$ конечно порожденные, а также теорема автора о том, что существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\bigcup_{\alpha<\omega^2}[\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{gen}$ (см. [4] стр. 51-53).

В рамках настоящей работы нам достаточно изучать вышеуказанные проблемы в более узкой формулировке. А именно:

П.I. Пусть H – некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Возможно ли определить такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и для каждой $h \in H$ можно было бы указать такое α, при котором $h \prec F^0_\alpha$, где $\varphi \prec \psi \Leftrightarrow (\exists m)(\forall n > m)[\varphi(n) < \psi(n)]$).

П.II. Пусть H – снова некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega < \delta \leq \omega_1$. Возможно ли определить такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и чтобы для каждой $h \in H$ и для всех $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$ имело место $h \prec H$.

На первый взгляд может показаться, что решение этих проблем – задача безнадежная, ибо, не располагая ни малейшей информацией о поведении функций из множества H, трудно даже представить, как все-таки определить требуемые проекты. Однако ниже мы описываем т.н. метод исправлений фундаментальных последовательностей, при помощи которого решаются положительно как проблема ПI так и ПII. Суть метода исправлений фундаментальных последовательностей можно кратко и в самых общих чертах изложить в следующей форме:

Вместо того, чтобы сразу "de facto" построить нужный нам проект, берем сначала произвольный проект $\mathbb{F}$ с длиной δ, который, быть может, и не удовлетворяет нашим требованиям. Теперь мы "исправляем" проект $\mathbb{F}$, прибавляя справа по всем членам некоторых фундаментальных последовательностей из $\mathbb{F}$ подходящие натуральные числа и докажем, что полученный таким способом новый проект $\mathbb{F}$ обладает требуемыми свойствами.

Более конкретную картину о вышеуказанном мы получим из доказательств следующих теорем. Итак,

<u>Теорема 4</u>. Пусть H – некоторая счетная совокупность одноместных функций и пусть $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и для каждой $h \in H$ найдется такое α, что $h \prec F^0_\alpha$.

<u>Доказательство</u>. Берем произвольный проект $\mathbb{F}$ с длиной δ, где $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Образуем некоторую счетную совокупность B из предельных ординалов, меньших δ и установим

взаимно-однозначное соответствие между элементами H и B. Символом β_h будем обозначать предельный ординал из B, который соответствует функции h из H. Фундаментальную последовательность из $\dot{F}$ для некоторого предельного ординала α обозначим через $\langle \dot{\alpha}\,|x|\rangle_x$.

Теперь определим новый проект $\mathbb{F}$, полагая, что для предельных $\alpha \notin B$ $\mathbb{F}$ содержит $\langle \dot{\alpha}\,|x|\rangle_x$, а для β_h проект $\mathbb{F}$ содержит последовательность

$\langle \beta_h |x|\rangle_x = \langle \dot{\beta}_h |x| + \dagger h(x)\rangle_x$, где

$$\begin{cases} \dagger h(0) = h(0) \\ \dagger h(x+1) = \begin{cases} h(x+1), & \text{если } h(x+1) > \dagger h(x) \\ \dagger h(x)+1, & \text{если } h(x+1) \leq \dagger h(x). \end{cases} \end{cases}$$

Если теперь $x > 0$, то на основе леммы 2 из [4] имеем, что

$$F^{\mathbb{F}}_{\beta_h}(x) = F^{0}_{\beta_h|x|}(d^{\mathbb{F}}_{\beta_h}(x)) = F^{0}_{\dot{\beta}_h|x|+\dagger h(x)}(d^{\mathbb{F}}_{\beta_h}(x)) > \dagger h(x) \geq h(x) \blacksquare$$

<u>Теорема 5</u>. Пусть H – некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega < \delta \leq \omega_1$. Существует такой проект $\mathbb{F}$ с длиной δ, что для каждой $h \in H$ и для всех $\omega \leq \alpha < \delta$ имеет место $h < F^{0}_{\alpha}$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем произвольный проект $\dot{\mathbb{F}}$ с длиной δ, где $\omega < \delta \leq \omega_1$. Пронумеруем натуральными числами все функции из H, полагая, что $H = \{h_0, h_1, \dots\}$. Теперь определим новый проект

$\mathbb{F} = \{\langle \dot{\beta}\,|x| + \dagger(\sum_{n=0}^{x} h_n(x))\rangle_x \mid$ где β – предельный ординал меньше δ и $\langle \beta\,|x|\rangle_x$ – фундаментальная последовательность из $\dot{\mathbb{F}}$ для $\beta\}$.

Нетрудно показать, что если $l = \lambda x \cdot \dagger(\sum_{n=0}^{x} h_n(x))$, то $h < l$ для всех $h \in H$. Из этого на основе леммы 2 из [4] и леммы 2.4 из [3], легко следует, что $h < F^{0}_{\alpha}$ для всех $h \in H$ и для каждого $\omega \leq \alpha < \delta$ $\blacksquare$ "Практическую" пользу от вышеуказанных теорем 4 и 5 мы будем иметь лишь после того, когда мы сумеем ответить на следующие вопросы:

При каких условиях метод исправлений сохраняет

1° вычислимость фундаментальных последовательностей;
2° эффективную выбранность проектов;
3° рекурсивность функций Лёба-Вайнера?

<u>Определение 6</u>. Пусть S – некоторая система обозначений для ординалов. Будем говорить, что S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел справа (слово "справа"

мы в дальнейшем будем опускать), если существует такая двухместная частичнорекурсивная функция $\#_S$, что $x \#_S n$ определено для всех $x \in \mathfrak{D}_S$ и $n < \omega$ и $v_S(x \#_S n) = v_S(x) + n$.

Лемма I. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, все фундаментальные последовательности из проекта $\dot{\mathbb{F}}$ являются вычислимыми, $H \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$ я $\mathbb{F}$ получается из $\dot{\mathbb{F}}$ методом исправлений, который изложен в доказательстве теоремы 4, то все последовательности из $\mathbb{F}$ являются вычислимыми.

Лемма 2. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, проект $\dot{\mathbb{F}}$ относительно эффективно выбран до δ, причем множество $\dot{B}_S$ (см. опр. 5) содержит в точности одно обозначение для каждого предельного ординала $\beta < \delta$, существует такая одноместная общерекурсивная функция q, что $H = \{\varphi_{q(x)}\}_x$ и все функции из H являются неубывающими и если наконец

$$\mathbb{F} = \{\langle v_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) + \varphi_{q(x)}(n)\rangle_n \mid \langle v_S(\varphi_{\xi(x)}(n))\rangle_n \in \dot{\mathbb{F}}\},$$

то проект $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до δ, причем $F^{\circ}_{\alpha} \in \Phi_{q\varepsilon n}$ для всех $\alpha < \delta$.

Доказательства лемм I и 2 можно без особых трудностей получить, опираясь на определения 4, 5 и 6.

Лемма 3. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, проект $\dot{\mathbb{F}}$, где $\|\dot{\mathbb{F}}\| \geq \omega^2$, относительно эффективно выбран до некоторого $\delta \geq \omega^2$, причем множество B_δ содержит в точности одно обозначение для всех предельных $\beta < \delta$ и существует такая фундаментальная последовательность $\langle\beta_m\rangle_m$ для δ, элементы которой все суть предельные ординалы и если наконец $\{h_m\}_m = H \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$ и

$$\mathbb{F} = \{\langle\beta_m|n| + h_m(n)\rangle_n \mid \langle\beta_m|n|\rangle_n \in \dot{\mathbb{F}}\} \cup$$
$$\cup \{\langle\alpha|n|\rangle_n \mid \langle\alpha|n|\rangle_n \in \dot{\mathbb{F}} \ \& \ \alpha \notin \langle\beta_m\rangle_m\},$$

то $\bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$.

Доказательство. Пусть

a – фиксированный гёделевский номер константы 0,

c_m – фиксированный гёделевский номер функции h_m,

b_m – обозначение из B_δ для ординала β_m,

$$g_m(x) = \begin{cases} c_i \text{ если } x = b_i \text{ для некоторого } i = 0, \ldots, m, \\ x \text{ для остальных значений } x. \end{cases}$$

Определяем проекты $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_m, \ldots$ полагая, что

$$\mathbb{F}_m = \{ \langle \nu_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) + \varphi_{g_m(x)}(n) \rangle_n \mid \langle \nu_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) \rangle \in \mathbb{F} \,\&\, \nu_S(x) < A_{m+1} \}.$$

Легко видеть, что для каждого m, $\mathbb{F}_m$ - относительно эффективно выбрано до β_{m+1}, причем $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{F}_m \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_m \mathbb{F}_m = \mathbb{F}$. Следовательно, $\bigcup\limits_{\alpha < \delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subsetneq \Phi_{gen}$ ∎

Нет сомнений, что читатель сам легко сможет формулировать и доказать аналогичные леммы и для той "версии" метода исправлений, который содержится в доказательстве теоремы 5.

4. Получение иерархий всех общерекурсивных функций при помощи метода исправлений фундаментальных последовательностей

Теорема 6. Для любого предельного δ, такого, что δ имеет фундаментальную последовательность из предельных ординалов и $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_{NC}$ существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \geq \delta$ и $\bigcup\limits_{\alpha < \delta} [\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{gen}$.

Доказательство. Пусть S - некоторая максимальная унивалентная система обозначений, имеющая эффективную операцию сложения натуральных чисел. (Такую систему можно легко получить, например из системы Клини 0.). Определяем "исходный" проект $\mathbb{F}$, полагая, что

$$\mathbb{F} = \{ \langle \nu_S(\varphi_{k_S(x)}(n)) \rangle_n \mid x \in \mathfrak{D}_S \,\&\, k_S(x) = 2 \}.$$

Легко видель, что $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным. Пусть теперь $\langle \nu_S(z_m) \rangle_m$ - некоторая фиксированная фундаментальная последовательность для δ, все элементы которой суть предельные ординалы и пусть $\{f_m\}_m$ - множество всех одноместных общерекурсивных функций. Полагая, что для всех $m < \omega$

$h_m = \lambda x \cdot \mu y [g_m(x,y) = 0]$, где $f_m = \lambda x \cdot l(\mu y [g_m(x,y) = 0])$, $g_m \in \Phi_{prim}$ и l - "левая" функция из канторовской нумерации пар, определим новый проект $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F} = \{ \langle \nu_S(\varphi_{q_S(z_m)}(n)) + h_m(n) \rangle_n \}_m \cup$$
$$\cup \{ \langle \nu_S(\varphi_{q_S(x)}(n)) \rangle_n \mid x \in \mathfrak{D}_S \,\&\, k_S(x) = 2 \,\&\, x \notin \{z_m\}_m \}.$$

В силу леммы 3 имеем $\bigcup\limits_{\alpha < \delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{gen}$. В то же время, из леммы 2 из [4] следует, что $h_m \prec F^{-0}_{\nu_S(z_m)}$ для всех $m < \omega$. Но из этого вытекает, что при всех $m < \omega$ имеет место $f_m \in [\mathbb{F}]_{\nu_S(z_m)}$, откуда $\Phi_{gen} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha < \delta} [\mathbb{F}]_\alpha$.

Действительно, согласно лемме 5 из [4] и определению 3, все классы $[\mathbb{F}]_\alpha$ замкнуты относительно операций ограниченного минимума и суперпозиции. Кроме того, на основе теоремы 2.18 из [3], $\bigcup_{\alpha<\omega}[\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{prim}$ ■

Замечание. Легко показать, (используя, например, теорему 1 из [4]), что при любом проекте $\mathbb{F}$ из $\delta < \omega^2$ следует $\bigcup_{\alpha<\delta}[\mathbb{F}]_\alpha \neq \Phi_{gen}$.

5. Решение проблемы "А" Лёба-Вайнера

Лемма 4. Пусть $\mathbb{F}$ - проект. Тогда, если $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$, то класс $E(\lambda x\cdot 0, \lambda xy\cdot x+y, \lambda x\cdot x_i, \lambda x\cdot F^0_\alpha(x))$ содержит все примитивно рекурсивные функции и является замкнутым относительно ограниченного минимума.

Доказательство легко получается из определений, теоремы 2.18 из [3] и из следствия 2.1 [1].

Теорема 7. Для любого предельного $\beta \leq \omega_{NC}$ существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \geq \beta$ и если $\alpha < \beta$ конструктивный предельный ординал и $n < \omega$, то

$$[\mathbb{F}]_\alpha = E(\lambda x\cdot 0, \lambda xy\cdot x+y, \lambda x\cdot x_i, \lambda x\cdot F^0_\alpha(x))$$ и

$$[\mathbb{F}]_{\alpha+n} = E(\lambda x\cdot 0, \lambda xy\cdot x+y, \lambda x\cdot x_i, \lambda x\cdot F^0_\alpha(x), \lambda x\cdot F^0_{\alpha+n}(x)).$$

Доказательство. Пусть S - такая максимальная унивалентная система, которая имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел и для которой существует такая двухместная частичнорекурсивная функция $f_S(w,v)$, что для всех $w \in \mathfrak{D}_S$

$$Val\ \lambda v\cdot f_S(w,v) = \{x \mid x \in \mathfrak{D}_S \ \&\ v_S(x) < v_S(w)\}.$$

Положим, что g - одноместная общерекурсивная функция, удовлетворяющая условию

$\varphi_n = \lambda x\cdot l(\mu t[\varphi^{(2)}_{g(n)}(x,t)=0])$ и $\varphi^{(2)}_{g(n)} \in \Phi_{prim}$ для всех φ_n.

Теперь определим функции $A(w,z,x)$, $B(w,z,x)$, $R(w,z,x)$ и $H(w,z)$.

$$A(w,z,x) = \sum_{i=0}^{x} \mu t[\varphi^{(2)}_{g(\varphi_z(f_S(w,i)))}(x,t)=0],$$

$$B(w,z,x) = \varphi_2(\varphi_{g_S(w)}(x) +_S A_{w,z}(x)), \text{ где } A_{w,z} = \lambda x\cdot A(w,z,x),$$

$$R(w,z,0) = 0,$$

$$R(w,z,x+1) = \mu y[y > R(w,z,x) \ \&\ (\forall i \leq x)(\varphi_{B(w,z,x+1)}(y) > \varphi_{B(w,z,i)}(y))],$$

$$H(w,z)=\begin{cases}\text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot x+1, & \text{если } k_5(w)=0,\\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot(x+1)^2, & \text{если } k_5(w)=1\\ \text{и } k_1(p_5(w))=0,\\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot\varphi_{\varphi_z(p_5(w))}(\ldots\varphi_{\varphi_z(p_5(w))}(x)\ldots), & \\ \text{если } k_5(w)=1 \text{ и } k_1(p_5(w))\neq 0, & \underbrace{}_{x+1}\\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot\varphi_{R(w,z,x)}(R(w,z,x)), & \\ \text{если } k_5(w)=2. &\end{cases}$$

Ясно, что все вышеопределенные функции частячнорекурсивные, и при этом существует еще такая одноместная частичнорекурсивная функция h, что $\varphi_{h(z)}=\lambda w\cdot H(w,z)$ для всех $z\in \operatorname{Arg} H$. Применяя теорему о рекурсии, найдем такое z_0, что $\varphi_{h(z_0)}=\varphi_{z_0}$ и обозначим φ_{z_0} через ψ. Теперь определим

$$\mathbb{F}=\{<v_5(\varphi_{q_5(w)}(x)+A_{w,z_0}(x))>_x \mid k_5(w)=2\ \&\ w\in \mathfrak{D}_5\}.$$

(Очевидно, что $\mathbb{F}$ является "исправлением" проекта

$$\dot{\mathbb{F}}=\{<v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))>_x \mid w\in\mathfrak{D}_5\ \&\ k_5(w)=2\}).$$

Легко доказать, что $F^0_{v_5(v)}=\varphi_{\psi(v)}$ для всех $v\in\mathfrak{D}_5$.

Если $v_5(w)$ – предельный ординал, то на основе леммы 2 из [4]

$$F^0_{v_5(w)}(x)=F^0_{v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x))}(\alpha^{\mathbb{F}}_{v_5(w)}(x))=$$

$$=F^0_{v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x)}(\alpha^{\mathbb{F}}_{v_5(w)}(x))\geqslant A_{w,z_0}(x)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^{x}\mu t[\varphi^{(2)}_{g(\psi(f_5(w,i)))}(x,t)=0],$$

где нетрудно заметить, что $F^0_{v_5(v)}\neq\lambda x\cdot\ell(\mu t[\varphi^{(2)}_{g(\psi(f_5(v,i)))}(x,t)=0])$

для всех $v_5(v)<v_5(w)$. Но тогда на основе леммы 4 получаем, что для всех $v_5(v)<v_5(w)$ имеет место включение $F_{v_5(v)}\in E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x))$, откуда сразу вытекает

$$[\mathbb{F}]_{v_5(w)}=E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x))\quad\text{и}$$

$$[\mathbb{F}]_{v_5(w)+n}=E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x),\ \lambda x\cdot F_{v_5(w)+n}(x)).$$

6. Решение проблемы "B" Лёба-Вайнера

Теорема 8. Для любого $\beta<\omega_1$ существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\|=\beta$ и $\alpha^{\mathbb{F}}_\alpha=\lambda x\cdot x$ при всех предельных $\alpha<\beta$.

Доказательство. Возьмем произвольный такой проект $\dot{\mathbb{F}}$, что $\|\dot{\mathbb{F}}\|=\beta$. Если $\alpha<\beta$ – предельный ординал, то

$\langle \dot\alpha\,|x|\rangle_x \in \dot{F}$. Теперь определим новый проект $\mathbb{F}$ полагая, что если $\langle \alpha\,|x|\rangle_x \in F$, то

$$\alpha|0| = \dot\alpha|0|$$

$$\alpha|x+1| = \max(\alpha|x|, \dot\alpha|x+1|) + \max(F^{0}_{\alpha|0|}(x+1), F^{0}_{\alpha|1|}(x+1), \ldots, F^{0}_{\alpha|x|}(x+1))$$

В таком случае

$d^{F}_{\alpha}(0) = 0$ и если $d^{F}_{\alpha}(x) = x$, то на основе леммы 2 из [4]

$$d^{F}_{\alpha}(x+1) = \mu z\,(z > x \mathbin{\&} (\forall i \leq x)(F^{0}_{\alpha|x+1|}(z) > F^{0}_{\alpha|i|}(z))) = x+1 \blacksquare$$

Литература

1. Гжегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций. БКС, Проблемы математической логики, М., 1970.
2. Вайнер С. С., Классификация ординально рекурсивных функций.—БКС., Сложность вычислений и алгоритмов. М., 1974.
3. Лёб М.Х., Вайнер С.С., Иерархия теоретико-числовых функций. БКС, Сложность вычислений и алгоритмов мов. М., 1974.
4. Лорентс П. Иерархия Лёба-Вайнера и общерекурсивные функции.— Рекурсивные функции. Межвузовский сборник научных трудов, Иваново, Ив.ГУ, 1978.
5. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.
6. Schmidt, D. Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number-theoretic functions. Arch. math. Logik und Grundl., 18 (1976).
7. Schmidt, D. Postscript to "Built-up systems of fund. seq. and hier. of numb.-theor. funct., Arch. math. Logik und Grundl., 18 (1977).

Поступило
10.X 1979

REKURSIIVSETE FUNKTSIOONIDE HIERARHIATE GENEREERIMINE NING LÖB-WEINERI PROBLEEMIDE "A" JA "B" LAHENDAMINE FUNDAMENTAALJADADE PARANDAMISE MEETODIL

P.Lorents

Resümee

Artiklis kirjeldatakse fundamentaaljadade parandamise meetodit ning kasutatakse seda 1970. aastal Löbi ja Weineri poolt sõnastatud probleemide "A ja "B" positiivseks lahendamiseks.

GENERATING OF HIERARCHIES OF GENERAL RECURSIVE FUNCTIONS AND SOLVING THE PROBLEMS "A" AND "B" OF LÖB AND WEINER USING CORRECTION METHOD OF FUNDAMENTAL SEQUENCES

P.Lorents

S u m m a r y

A method of correcting of fundamental sequences is deecribed. The method ie based on the faet that given an arbitrary set of fundamental aequences it is possible to find such natural numbers for adding to the elemente of sequeneee which give the desired properties to the Löb-Weiner Hierarohies. The method enables to prove the existence of such hierarchies of Löb and Weiner, which represent the set of all general recursive funetions. The same method enables also to get positive answers to the problems "A" and "B" stated by Löb and Weiner in 1970.

О ДЕЙСТВИИ ПОЛУГРУПП

У.Кальюлайд
Кафедра алгебры и геометрии

I. Подход к решению задач о терминале и пределе групп, развитый в [I] и [4], существенно опирается на известную теорему Л.А.Калужнина о том, что финитная (инвариантная) стабильность точного действия группы влечет ее нильпотентность. Названные задачи, однако, могут быть отнесены также к полугруппам. Поэтому представляет некоторый интерес обобщение теоремы Калужнина на полугруппы, что и является основной целью данной заметки.

2. Для конгруэнции $\mathfrak{A}$ на полугруппе Γ рассмотрим в кольце $R = \mathbb{Z}\Gamma$ правый идеал $I(\mathfrak{A})$, порожденный всеми разностями $\gamma - \sigma$, $\gamma, \sigma \in \Gamma$ и $\gamma \sim \sigma(\mathfrak{A})$. Ясно, что $I(\mathfrak{A})$ является двусторонним идеалом кольца R и естественно возникает как ядро гомоморфизма полугрупповых колец $\mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}(\Gamma/\mathfrak{A})$, полученного $\mathbb{Z}$-линейным продолжением эпиморфизма $\Gamma \to \Gamma/\mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ - единичная конгруэнция на Γ, т.е. $\mathfrak{A}$ определяется множеством $\Gamma \times \Gamma$ всех пар, идеал $I(\mathfrak{A})$ естественно называть фундаментальным идеалом для $\mathbb{Z}\Gamma$ и обозначать $\Delta(\Gamma, \mathbb{Z})$ или просто Δ. Далее, при всяком натуральном n определяем на Γ бинарное отношение ϑ_n,

$$\gamma \sim \sigma(\vartheta_n) \text{ на } \Gamma \iff \gamma - \sigma \in \Delta^n \text{ в } \mathbb{Z}\Gamma;$$

ясно, что ϑ_n - конгруэнция на Γ. Назовем ее n-той размерной конгруэнцией полугруппы Γ относительно $\mathbb{Z}$. В случае, когда Γ - моноид, содержащий единицу, ϑ_n-класс является подмоноидом; обозначим его $D_n(\Gamma, \mathbb{Z})$. Для группы Γ подмоноид $D_n(\Gamma, \mathbb{Z})$ - хорошо известная n-я размерная подгруппа, являющаяся объектом интенсивного внимания (см. [6] и указанную там литературу).

Нильпотентность полугрупп будет пониматься в смысле А.И. Мальцева. Пусть $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x$, $Y_0 = y$ и далее индуктивно определяем

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_{n-1} u_n \mathcal{Y}_{n-1}, \quad \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_{n-1} u_n \mathcal{X}_{n-1}.$$

Согласно [2], полугруппа Γ, элементы которой удовлетворяют тождеству $\mathcal{X}_n = \mathcal{Y}_n$, называется n-ступенно нильпотентной. Для группы Γ получаем здесь обычное понятие n-ступенной нильпотентности группы ([2], теорема I). На любой полугруппе Γ можно рассматривать конгруэнцию $\vartheta_{n+1} = \mathcal{N}_n(\Gamma)$ по многообразию n-ступенно нильпотентных полугрупп - минимальную конгруэнцию α на Γ со свойством $\Gamma/\alpha \in \mathcal{N}_n$. Дополнительно полагаем, что ϑ_1 - единичное отношение на Γ. Возникает убывающий ряд конгруэнций на

$$\vartheta_1 \geqslant \vartheta_2 \geqslant \cdots \geqslant \vartheta_n \geqslant \vartheta_{n+1} \geqslant \cdots,$$

который назовем нижним центральным рядом полугруппы Γ. Заметим, что для группы Γ содержащие единицу ϑ_n-классы $(n \geqslant 1)$ совпадают с членами нижнего центрального ряда этой группы Γ. Выяснение взаимоотношения конгруэнций ϑ_n и ϑ_n кажется интересной задачей. Следует добавить, однако, что уже равенство $\vartheta_2 = \vartheta_2$ на полугруппе Γ требует (в отличие от группового случая) выполнения дополнительных условий типа сепаративности Γ.

Как и для групп (см. [I]) можно определить терминал $\tau(\Gamma)$ полугруппы Γ и ставить вопрос о выяснении поведения терминала на классе конечных полугрупп. В частности, можно высказать предположение, что $\tau(\Gamma, \mathbb{Z}) < \omega 2$ для всякого конечного моноида Γ. Далее, рассматривая предельную конгруэнцию $D_\omega(\Gamma)$ на полугруппе Γ, являющуюся ядром пары $(\mathbb{Z}\Gamma/\Delta^{\tau(\Gamma)}, \Gamma)$, можно ставить также задачу описания (в полугрупповых терминах) этой предельной конгруэнции на классе конечных полугрупп.

3. Ниже рассматриваются пары, областью действия которых является (произвольная) группа, а действующим объектом - полугруппа. Пусть (G, Γ) - некоторая такая пара. Для всякой Γ-допустимой инвариантной подгруппы H в G имеем пару (H, Γ), ядро которой обозначим k. Далее, рассмотрим подгруппу $\mathfrak{Z}(H) \leq G$,

$$\mathfrak{Z}(H) = \{g \in G \mid \forall h \in H,\ gh = hg\}.$$

<u>Лемма</u>. Для произвольного $g \in G$ и таких элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, что $\gamma_1 \sim \gamma_2 (k)$, имеет место соотношение

$$(g \circ \gamma_1)(g \circ \gamma_2)^{-1} \in \mathfrak{Z}(H \circ \gamma_1).$$

<u>Доказательство.</u> Для любых $x, y \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ полагаем $x^y = y^{-1} x y$, $[x, \gamma] = x^{-1} \cdot (x \circ \gamma)$ и $z = (g \circ \gamma_1)(g \circ \gamma_2)^{-1}$.

Очевидно, для пары (G,Γ) верно соотношение

$$\forall x,y\in G,\ \gamma\in\Gamma,\ [xy,\gamma]=[x,\gamma]^{y}\cdot[y,\gamma];$$

дважды пользуясь этим в вычислениях, для произвольного $h\in H$ имеем

$$\begin{aligned}h^{-1}zh&=(g^{-1}h)^{-1}\cdot[g,\gamma_1]\cdot[g,\gamma_2]^{-1}\cdot(g^{-1}h)=\\&=[g,\gamma_1]^{g^{-1}h}\cdot([g,\gamma_2]^{g^{-1}h})^{-1}=[h,\gamma_1]\cdot[g^{-1}h,\gamma_1]^{-1}\cdot[g^{-1}h,\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}=\\&=[h,\gamma_1]\cdot([g^{-1}hg,\gamma_1]^{g^{-1}}\cdot[g^{-1},\gamma_1])^{-1}\cdot[g^{-1}hg,\gamma_2]^{g^{-1}}\cdot[g^{-1},\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}=\\&=[h,\gamma_1]\cdot[g^{-1},\gamma_1]^{-1}\cdot[g^{-1},\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}=[h,\gamma_1]\cdot z\cdot[h,\gamma_1]^{-1},\end{aligned}$$

откуда следует требуемое соотношение $z=(h\circ\gamma_1)\cdot z\cdot(h\circ\gamma_1)^{-1}$.

Класс всех пар (G,Γ) указанного в начале пункта типа, ядро которых является единичной конгруэнцией на Γ, является многообразием, которое обозначим $\mathfrak{J}$. Исходя из $\mathfrak{J}$, можно определить классы $\mathfrak{J}^n$, $n\geq 1$; по определению, $(G,\Gamma)\in\mathfrak{J}^n$, если в группе G существует такой возрастающий Γ-допустимый инвариантный ряд длины $\leq n$,

$$1=G_0<G_1<\dots<G_{i-1}<G_i\dots<G_m=G,\quad m\leq n,\qquad (*)$$

что все пары $(G_i/G_{i-1},\Gamma)$, $i=1,2,\dots,m$, лежат в $\mathfrak{J}$. Иными словами, элементы полугруппы Γ являются равнодействующими в факторах ряда (*) эндоморфизмами. Для группы Γ из $(G,\Gamma)\in\mathfrak{J}^n$ в случае точности пары (G,Γ) следует нильпотентность Γ. Примеры матричных полугрупп показывают, однако, что для полугруппы Γ подобный вывод не всегда имеет место. Для описания необходимых дополнительных условий оказывается полезным язык квазиколец [5]. Существенным здесь является следующий пример. Пусть G - группа, а Γ - полугруппа всех однозначных отображений группы G в себя. Для всех $\sigma,\tau\in\Gamma$ и $g\in G$ полагаем $g^{\sigma+\tau}=g^{\sigma}\cdot g^{\tau}$, что наделяет полугруппу Γ и сложением. Относительно этой новой операции Γ оказывается группой; добавим, что для каждого $\sigma\in\Gamma$ противоположный элемент $(-\sigma)$ определяется формулой $g^{-\sigma}=(g^{\sigma})^{-1}$. Рассматриваемые две операции на Γ связаны левой дистрибутивностью (что, вообще говоря, неверно для правого дистрибутивного закона) и поэтому Γ - почтикольцо. Выделим в Γ подгруппу относительно сложения $\mathcal{E}(G)$, порожденную всеми эндоморфизмами группы G; элементы из $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G. Эта аддитивная подгруппа замкнута и относительно умножения, т.е. $\mathcal{E}(G)$ - квазикольцо. Заметим, что $\mathcal{E}(G)$ для абелевой группы G совпадает с кольцом End G.

Пусть f – сопровождающий пару (G,Γ) гомоморфизм представления. Пару (G,Γ) назовем n-стабильной, если $(G,\Gamma)\in \mathcal{J}^n$ и в дистрибутивно порожденном почтикольце $\mathcal{E}(G)$ квазиэндоморфизмов группы G существует такой элемент θ, который перестановочен в $\mathcal{E}(G)$ со всеми разностями $\alpha^f-\beta^f$, $\alpha,\beta\in\Gamma$, ряд $(*)$ θ-инвариантен, а в факторах этого ряда элементы из Γ равнодействуют с θ.

4. Оказывается, верна

<u>Теорема</u>. Если точная пара является n-стабильной, то действующая полугруппа $(\leq (n-1)$-ступенно) нильпотентна по Мальцеву.

Доказательство проведем индукцией по n.

Для $n=1$ утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим случай $n=2$. Точность пары (G,Γ) позволяет считать Γ подмножеством квазикольца $\mathcal{E}(G)$, причем элементы из Γ являются в $\mathcal{E}(G)$ дистрибутивными элементами. Фиксируем любые α,β и γ из Γ, g из G, и пусть θ – сопровождающий 2-стабильную пару (G,Γ) квазиендоморфизм из $\mathcal{E}(G)$. Обозначим $g^\theta=h$; тогда существует $g_1\in G_1$, что $g^{\gamma\beta}=g_1h$. Имеем также $g^{\alpha-\gamma}\in G_1$. Пользуясь доказанной выше леммой, видим, что верны следующие выкладки:

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta\gamma-\gamma\beta\alpha} &= g^{(\alpha\beta\gamma-\gamma\beta\gamma)+(\gamma\beta\gamma-\gamma\beta\alpha)} = g^{(\alpha-\gamma)\beta\gamma}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = \\
&= g^{(\alpha-\gamma)\theta}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = g^{\theta(\alpha-\gamma)}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = \\
&= h^{\alpha-\gamma}\cdot(g_1h)^{\gamma-\alpha} = h^{\alpha}h^{-\gamma}(g_1^{\gamma}h^{\gamma}h^{-\alpha}g_1^{-\alpha}) = \\
&= h^{\alpha}h^{-\gamma}(g_1^{\gamma}h^{\gamma}h^{-\alpha}g_1^{-\gamma}) = h^{\alpha}h^{-\gamma}(h^{\gamma}h^{-\alpha}) = 1,
\end{aligned}$$

откуда, в силу точности пары (G,Γ), вытекает $\alpha\beta\gamma=\gamma\beta\alpha$. Следовательно, в полугруппе Γ выполнено тождество $X_1=Y_1$ и тем самым она 1-нильпотента.

Считаем утверждение теоремы верным для всех точных m-стабильных пар, $m<n$.

Далее, пусть (G,Γ) – любая точная n-стабильная пара. Согласно определению, в группе G имеется ряд $(*)$, относительно которого полугруппа Γ действует стабильно. Введем на Γ конгруэнции $k_1=\mathrm{Ker}(G_{n-1},\Gamma)$ и $k_2=\mathrm{Ker}(G/G_1,\Gamma)$. В силу предположения индукции фактор-полугруппы Γ/k_1 и Γ/k_2 лежат в классе $\mathfrak{N}_{n-2}$, откуда следует $\Gamma/k_1\cap k_2\in\mathfrak{N}_{n-2}$, ибо $\Gamma/k_1\cap k_2$ является подполугруппой в $\Gamma/k_1\times\Gamma/k_2$.

В определяющем $(n-2)$-нильпотентность полугрупп тождестве $\mathfrak{X}_{n-2} = \mathfrak{Y}_{n-2}$ придедим встречающимся в левой и правой части переменным $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ (произвольно) фиксированные значения на элементах полугруппы Γ. Пусть σ и τ – соответствующие значения для $\mathfrak{X}_{n-2}$ и $\mathfrak{Y}_{n-2}$. Из $\Gamma/k_1 \cap k_2 \in \mathfrak{N}_{n-2}$ следует, что $\sigma \sim \tau \, (k_1 \cap k_2)$. Поэтому при любом $g \in G$ имеем $g^{\sigma} \equiv g^{\tau} \pmod{G_1}$; полагаем $g^{\sigma-\tau} = g_2 \in G_1$. При $g \in G_{n-1}$ имеем также $g^{\sigma} = g^{\tau}$. Фиксируем еще некоторый элемент $\gamma \in \Gamma$. Стабильность действия полугруппы Γ относительно рида $(*)$ позволяет провести следующие вычисления:

$$g^{\sigma\gamma\tau} = (g^{\sigma})^{\gamma\tau} = (g_2 \cdot g^{\tau})^{\gamma\tau} = g_2^{\theta}(g^{\tau\gamma})^{\tau} = g_2^{\theta}(g^{\theta}g^{-\theta}\cdot g^{\tau\gamma})^{\tau} =$$
$$= g_2^{\theta}\cdot g^{\theta\tau}\cdot (g^{(-\theta+\tau\gamma)})^{\tau} = g_2^{\theta}\cdot g^{\theta\tau}\cdot (g^{-\theta+\tau\gamma})^{\sigma} =$$
$$= g_2^{\theta}\cdot g^{\theta(\tau-\sigma)}\cdot g^{\tau\gamma\sigma} = g^{(\sigma-\tau)\theta}\cdot g^{\theta(\tau-\sigma)}\cdot g^{\tau\gamma\sigma} =$$
$$= g^{\theta(\sigma-\tau)+\theta(\tau-\sigma)+\tau\gamma\sigma} = g^{\tau\gamma\sigma}.$$

В силу точности (G, Γ) из этого следует $\sigma\gamma\tau = \tau\gamma\sigma$. Отсюда вытекает, что в полугруппе Γ выполняется тождество

$$\mathfrak{X}_{n-2}\cdot u_{n-1}\cdot \mathfrak{Y}_{n-2} = \mathfrak{Y}_{n-2}\cdot u_{n-1}\cdot \mathfrak{X}_{n-2}, \quad \text{т.е.} \quad \Gamma \in \mathfrak{N}_{n-1}.$$

Теорема доказана.

5. Введенный в определении стабильности пары (G, Γ) квазиэндоморфизм θ может полугруппе Γ не принадлежать. В частном случае, когда Γ – моноид, понятие стабильности пары (G, Γ) приобретает обычный смысл (в факторах ряда $(*)$ элементы из Γ действуют тождественно). Согласно теореме из предыдущего пункта имеем $\Gamma \in \mathfrak{N}_{n-1}$. Однако можно воспользоваться еще и наблюдением: ряд $(*)$ является допустимым для элементов из Γ, которые действуя тождественно на факторах этого ряда, являются автоморфизмами ([3], стр. 222). Следовательно, Γ является $(n-1)$-ступенно нильпотентной полугруппой с законом сокращения, и поэтому может быть рассмотрена как подполугруппа нильпотентной группы (теорема 2 из [2]).

Литература

1. К а л ь ю л а й д У., О фундаментальном идеале целочисленного группового кольца конечной группы. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1971, 281, 58-61.

2. М а л ь ц е в А. И., Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 107-111.

3. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.

4. П л о т к и н Б.И., Замечания о стабильных представлениях нильпотентных групп. Труды Московск. матем. о-ва, 1973, 29, 191-206.

5. F r ö l i c h A., Distributively generated near-rings. Proc. London Math. Soc. (3), 1958, 8, 76-108.

6. P a s s m a n D., The algebraic structure of group rings. Wiley-Interscience, 1977.

Поступило
5 XI 1979

POOLRÜHMADE TOIMEST

U.Kaljulaid

R e s ü m e e

Teatatakse, et kui poolrühma täpne toime on n-stabiilne, siis toimiv poolrühm on $(\leq (n-1))$-nilpotentne A.I. Maltsevi mõttes.

ABOUT SEMIGROUP ACTIONS

U.Kaljulaid

S u m m a r y

It has been shown here that from n-stability of a faithful semigroup action it follows that the acting semigroup is nilpotent in the sense of A.I.Malcev of degree $\leq n-1$.

О ВПОЛНЕ ПЛОСКИХ СЛЕВА МОНОИДАХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ОБЪЕДИНЕНИЯМИ ГРУПП

М.Кильп
Кафедра алгебры и геометрии

Моноид S называется <u>вполне плоским слева</u>, когда все левые S-полигоны являются плоскими. В этой статье доказывается, что вполне плоский слева моноид, являющийся объединением групп, есть полуструктура правых групп.

Пусть S – моноид. Множество M называется левым S-полигоном, если для любого элемента $m \in M$ и любого элемента $s \in S$ определено их произведение $sm \in M$ так, что $(s_1 s_2)m = s_1(s_2 m)$ и $1m = m$ для произвольных $s_1, s_2 \in S$ и $m \in M$. Правые S-полигоны определяются аналогично. Пусть B – правый S-полигон и M – левый S-полигон. Рассмотрим на декартовом произведении $B \times M$ наименьшее отношение эквивалентности, порожденное отношением $(bs, m) \equiv (b, sm)$, $s \in S$, $b \in B$, $m \in M$. Соответствующее множество классов эквивалентности называется тензорным произведением S-полигонов B и M и обозначается через $B \otimes_S M$. Класс, содержащий элемент (b, m), обозначается через $b \otimes m$. Следовательно, в тензорном произведении $B \otimes_S M$ имеет место равенство $b_1 \otimes m_1 = b_2 \otimes m_2$ тогда и только тогда, когда существует такая конечная цепочка пар из $B \times M$, что первая пара совпадает с парой (b_1, m_1), последняя совпадает с (b_2, m_2), а переход от каждой пары последовательности к следующей осуществляется при помощи переброски элемента из S, т.е., от пары (bs, m), $b \in B$, $m \in M$, $s \in S$, переходят к паре (b, sm), или наоборот.

Если M – левый S-полигон, то $\otimes_S M$ является функтором из категории всех правых S-полигонов в категорию множеств. Левый S-полигон M называется плоским, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет мономорфизмы. Это означает, что левый S-полигон M является плоским тогда и только тогда, когда из равенства $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_S M$, где $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$, A – подполигон полигона B, следует равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$

в тензорном произведении $A \otimes_S M$. Плоские правые S-полигоны определяются аналогично. Моноид называется <u>вполне плоским</u>, если все (и левые, и правые) полигоны над этим моноидом являются плоскими.

Понятие плоского полигона было введено в [I], где было показано, что существуют моноиды, над которыми все левые, но не все правые полигоны являются плоскими. В [2] доказано, что если S является полуструктурой групп, то S является вполне плоским.

<u>Лемма I</u>. Пусть S и T - моноиды и $\varphi : S \to T$ - эпиморфизм. Если S является вполне плоским слева, то и T является вполне плоским слева.

<u>Доказательство</u>. Пусть B - правый T-полигон, A - его подполигон и M - левый T-полигон. Рассмотрим $B \otimes_T M$ и предположим, что $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Это означает, что существует конечная цепочка элементов из T, при помощи которых мы можем в $B \times M$ перейти от пары (a_1, m_1) к паре (a_2, m_2). Пусть эти переброски реализуются элементами $t_1, t_2, \ldots, t_r \in T$. Определим $bs = b\varphi(s)$ и $sm = \varphi(s)m$ для всех $s \in S$, $b \in B$, $m \in M$. Тогда, очевидно, A, B и M можно рассматривать как S-полигоны. Выберем $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ так, что $\varphi(s_i) = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда наша последовательность перебросок может рассматриваться как последовательность, реализуемая элементами $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$. Из существования такой последовательности следует равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_S M$. Предположим теперь, что S является вполне плоским слева. Тогда M является плоским левым S-полигоном и мы имеем равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_S M$. Значит, мы имеем конечную цепочку пар в $A \times M$ такую, что первая пара есть (a_1, m_1) последняя - (a_2, m_2) и от каждой пары к следующей мы переходим при помощи переброски элемента из S. Пусть эти переброски реализуются элементами $u_1, u_2, \ldots, u_t \in S$. Пусть $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как в нашем случае $bu_i = b\varphi(u_i) = bv_i$ и $u_i m = \varphi(u_i)m = v_i m$ для всех $b \in B$, $m \in M$, $i = 1, 2, \ldots, t$, то мы можем рассматривать нашу новую последовательность пар как такую последовательность, где переброски реализуются элементами $v_1, v_2,$

$\ldots, v_t \in T$. Из существования такой последовательности следует, что $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_T M$. Следовательно, M является плоским S-полигоном, а T - вполне плоским слева моноидом.

Лемма 2. Пусть $S = T \cup 0$ - такой моноид с нулем 0, что T - его подмоноид. Если S является вполне плоским слева, то и T является вполне плоским слева.

Доказательство. Пусть B - правый T-полигон, A - его подполигон и M - левый T-полигон. Определим $\bar{B} = B \cup 0_B$, $0_B \bar{\in} B$, $\bar{M} = M \cup 0_M$, $0_M \bar{\in} M$, где $0_B s = 0B$, $b0 = 0_B$, $0m = 0_M$, $s0_M = 0_M$ для всех $b \in B$, $m \in M$, $s \in S$. Ясно, что $\bar{B}$ является правым, а $\bar{M}$ - левым S-полигоном. Пусть $\bar{A} = A \cup 0_B$. Тогда $\bar{A}$ является S-подполигоном полигона $\bar{B}$. Пусть $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_T M$, $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Так как T - подмоноид моноида S и $B \subset \bar{B}$, $M \subset \bar{M}$, то очевидно, $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $\bar{B} \otimes_S \bar{M}$. Предположим теперь, что S - вполне плоский слева. Тогда $\bar{M}$ является плоским S-полигоном и мы имеем $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $\bar{A} \otimes_S \bar{M}$. Следовательно, существует цепочка пар

$$(a_1, m_1), (c_1, n_1), (c_2, n_2), \ldots, (c_r, n_r), (a_2, m_2),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r \in \bar{A}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \bar{M}$, в которой мы от каждой пары к следующей переходим при помощи переброски элемента из S. Пусть эти переброски реализуются элементами $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1} \in S$. Тогда для пары (c_1, n_1) мы имеем либо $a_1 = c_1 s_1$ и $s_1 m_1 = n_1$, либо $s_1 n_1 = m_1$ и $a_1 s_1 = c_1$. В обоих случаях из определения умножения на элементы из S следует, что $s_1 \in T$, $c_1 \in A$ и $n_1 \in M$. Простая индукция по i дает нам, что для всех i мы имеем $s_i \in T$, $c_i \in A$ и $n_i \in M$. Следовательно, $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_T M$. Тем самым мы доказали, что если S является вполне плоским слева, то любой левый T-полигон является плоским, т.е. T является вполне плоским слева.

Теорема 3. Пусть S - моноид, являющийся объединением групп. Если S является вполне плоским слева, то S является полуструктурой правых групп.

Доказательство. Пусть S - вполне плоский слева моноид, являющийся объединением групп. Тогда S является полуструктурой вполне простых полугрупп [3, теорема 4.6], каждая из которых является прямоугольной связкой групп [3, стр. 80]. Следовательно, S - полуструктура прямоугольных связок R_y групп, $S = \bigcup_{y \in Y} R_y$. Пусть $y \in Y$ и $Z = \{z \in Y \mid z < y$ или z не сравним с $y\}$. Пусть $I = \bigcup_{z \in Z} R_z$. Ясно, что I - идеал моноида S. Пусть $\bar{S} = S/I$ - фактормоноид Риса. По лемме 1 моноид $\bar{S}$ является вполне плоским слева. Пусть теперь $\bar{S} = T \cup 0$. Легко понять, что T - подмоноид моноида $\bar{S}$. По лемме 2 моноид T является вполне плоским слева. Очевидно, что T - полуструктура прямоугольных связок групп, в которой R_y является нижней компонентой. Легко доказать, что левые и правые идеалы полугруппы R_y являются соответственно левыми и правыми идеалами полугруппы T. Известно [3, следствие 2.49], что прямоугольная связка групп представляет из себя объединение своих попарно непересекающихся правых (левых) идеалов. В [1, лемма 3] доказано, что если все левые полигоны над некоторым моноидом являются плоскими, то любые два правых идеала этого моноида должны иметь непустое пересечение. Из этого факта и того, что все левые T-полигоны являются плоскими, следует, что полугруппа R_y может обладать лишь одним правым идеалом. Следовательно, R_y является правой группой.

Следствие 4. Если идемпотентный моноид S является вполне плоским слева, то S - полуструктура полугрупп с правым умножением.

Из теоремы 3 и результатов статьи [2] вытекает

Теорема 5. Пусть моноид S является объединением групп. Моноид S является вполне плоским тогда и только тогда, когда S - полуструктура групп.

Следствие 6. Пусть S - идемпотентный моноид. Моноид S является вполне плоским тогда и только тогда, когда S коммутативен.

Литература

1. Кильп М., О плоских полигонах.- Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 66-72.
2. Кильп М., К гомологической классификации моноидов. - Сиб. матем. ж., 1972, 13, № 3, 578-586.

3. C l i f f o r d, A. H. and G. B. P r e s t o n, The algebraic theory of semigroups. Vol. 1 and 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1961) and (1967).

Поступило
15 XI 1979

VASAKULT TÄIESTI LAMEDATEST MONOIDIDEST, MIS ON RÜHMADE ÜHENDID

M.Kilp

R e s ü m e e

Artiklis tõestatakse, et peakirjas näidatud omadusega monoid on parempoolsete rühmade kommutatiivne sidum.

ON LEFT COMPLETELY FLAT MONOIDS THAT ARE UNIONS OF GROUPS

M.Kilp

S u m m a r y

A monoid is called left completely flat if all left acts over it are flat and completely flat if all (all left and all right) acts over it are flat.

Let S be a monoid which is a union of groups. It is proved that if S is left completely flat then S is a semilattice of right groups. S is completely flat if and only if S is a semilattice of groups.

АНАЛОГИ КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫХ КОЛЕЦ ДЛЯ МОНОИДОВ I

П. Нормак
Кафедра математики ТПедИ

Пусть S - моноид. Множество A называется левым S-полигоном, если для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$ определено произведение $sa \in A$, причем $(s_1 s_2)a = s_1(s_2 a)$ и $1a = a$ для всех $s_1, s_2 \in S$ и $a \in A$.

Как видно из определения, понятие полигона над моноидом аналогично понятию модуля над кольцом. В этой связи представляет интерес исследование свойств моноидов и полигонов, аналогичных тем или иным важным свойствам колец и модулей. Один из таких вопросов и рассматривается в настоящей работе. Напомним, что квазифробениусово кольцо было определено как артиново кольцо, удовлетворяющее некоторым свойствам двойственности. Впоследствии многими авторами были найдены различные условия, эквивалентные квазифробениусовости кольца. Среди них:

I. Все свободные левые R-модули инъективны ([6], предложение 5).

2. Все проективные левые R-модули инъективны ([9], теорема 5).

3. Все счетно-порожденные проективные левые R-модули инъективны ([9], теорема 5).

4. Любой левый R-модуль является подмодулем некоторого свободного левого R-модуля ([10], следствие 5.6).

5. Кольцо R является Σ-инъективным ([9], теорема 5, предложение 3).

6. Инъективная оболочка любого свободного левого R-модуля свободна ([2], теорема 5).

7. Все вполне проективные левые R-модули инъективны ([6], предложение 5).

8. Все свободные левые R-модули вполне инъективны ([6] предложение 5).

9. Все вполне проективные левые R-модули вполне инъективны ([6], предложение 5).

IO. Любой циклический левый и любой циклический правый R-

модуля содержатся в некотором проективном модуле ([10], следствие 5.10).

11. Все инъективные левые R-модули проективны ([10], теорема 5.3).

12. Все вполне инъективные левые R-модули проективны ([6], предложение 5).

13. Все вполне инъективные левые R-модули вполне проективны ([6], предложение 5).

14. R – совершенное слева кольцо и любой конечно порожденный левый R-модуль изоморфен подмодулю некоторого проективного R-модуля ([12], теорема 3).

15. Кольцо R удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов и для всякого неприводимого левого (правого) R-модуля A его модуль характеров A^* является неприводимым правым (левым) R-модулем ([4], теорема 58.6).

16. Кольцо R совершенно слева и любой циклический левый R-модуль рефлексивен ([12], теорема 2).

Как видно из полученных ниже результатов, аналоги условий 1.-16. для моноидов расщепляются, т.е. они определяют несколько различных классов моноидов (см., например, теоремы 1, 2, 3 и предложение 6).

Напомним некоторые определения и факты из теории полигонов. Если не оговорено противное, полигоны предполагаются левыми.

Полигон с одним образующим называется циклическим. Полигон B называется существенным расширением полигона A, если любой гомоморфизм $\varphi: B \to C$, ограничение которого на A – мономорфизм, является мономорфизмом. Максимальное существенное расширение полигона A называются инъективной оболочкой полигона A. Любой полигон A обладает инъективной оболочкой $E(A)$, единственной с точностью до изоморфизма над A ([8], теорема 10). Говорят, что S-полигон B – чистое расширение полигона A, или, что A – чистый подполигон полигона B, если каждая конечная система уравнений вида $sx = ty$, $sx = a$, где $s, t \in S$, а $a \in A$, разрешимая в B, разрешима в A. Говорят, что полигон A абсолютно чист, если он чист в своей инъективной оболочке $E(A)$. Ясно, что каждый инъективный полигон абсолютно чист. Каждой системе Σ уравнений вышеуказанного вида сопоставим следующий граф Γ (он называется графом системы Σ): вершинами графа Γ являются символы всех неизвестных, входящих в систему, а вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда в системе Σ найдется уравнение $sx = ty$. Назовем систему Σ связной, если граф этой системы – связен. Копроизведение $\coprod_I A_i$ S-полигонов A_i, $i \in I$, где I – некоторое множество индексов, изоморфно объединению попарно непересекающихся полигонов A_i, $i \in I$. Свободный S-полигон изоморфен копроизведению некоторого множества экземпляров моноида S. Одноэлементный полигон называется нулевым. Полигон A называется слабо (f-) инъективным, если он инъективен относительно вложений (конечно порожденных) левых идеалов моноида S в S. Назовем полигон Σ-инъективным, если он инъективен и копроизведение любого множества его копий также инъективно.

Не определяемые в работе понятия из теории полугрупп и теории категорий можно найти в книгах [3] и [7] соответственно.

Все рассмотрения в дальнейшем ведутся в категории левых S-полигонов, где S – фиксированный моноид.

Лемма I ([5], теорема I). Полигон с нулем инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен относительно вложений в циклические полигоны.

Предложение I. Если полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист и каждый полигон A_i содержит нулевой подполигон, то имеет место изоморфизм $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$.

Доказательство. Пусть полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист. Поскольку каждый из A_i содержит нуль, по доказательству предложения 7 работы [II] имеем $Sx \cap (\coprod_I A_i) \neq \emptyset$ для любого элемента $x \in E(\coprod_I A_i)$. Поскольку система $\{s_1 x = a_1 \in A_k, s_2 x = a_2 \in A_\ell, k \neq \ell\}$ не разрешима в $\coprod_I A_i$ ни для каких элементов $a_1 \in A_k$, $a_2 \in A_\ell$, $k \neq \ell$, $s_1, s_2 \in S$, то для любого элемента $x \in E(\coprod_I A_i)$ имеем $Sx \cap A_k \neq \emptyset$ для некоторого $k \in I$ и $Sx \cap A_\ell = \emptyset$ для $\ell \neq k$. Таким образом, $E(\coprod_I A_i) = \coprod_I X_i$, где $X_i = \{x \in E(\coprod_I A_i) ; Sx \cap A_i \neq \emptyset\}$. Существует гомоморфизм $\psi : \coprod_I E(A_i) \to \coprod_I X_i = E(\coprod_I A_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \coprod_I X_i \\ \coprod_I E(A_i) \arrow[ur, "\psi"] & \coprod_I A_i \arrow[l, "j"'] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, где i и j – естественные вложения. Поскольку $A_i \subseteq \mathcal{X}_i$, полигоны A_i содержат нулевые подполигоны и $E(A_i)$ – существенное расширение полигона A_i, $i \in I$, то $\varphi(E(A_i)) \subseteq \mathcal{X}_i$ и φ – мономорфизм. Осталось только доказать, что полигон $\coprod_I E(A_i)$ инъективен. Пусть нам заданы гомоморфизм $\alpha : Z \to \coprod_I E(A_i)$ и мономорфизм $\mu : Z \to S\omega$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod \mathcal{X}_i \\
 & \coprod_I E(A_i) \arrow[u, "\varphi"] \\
S\omega \arrow[uur, dashed, "\bar{\alpha}"] & Z \arrow[l, "\mu"'] \arrow[u, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\coprod \mathcal{X}_i$ инъективен, то существует гомоморфизм $\bar{\alpha}$: $S\omega \to \coprod_I \mathcal{X}_i$ такой, что $\bar{\alpha}\mu = \varphi\alpha$. Следовательно, существует элемент $k \in I$ такой, что $\bar{\alpha}(S\omega) \subseteq \mathcal{X}_k$. Тогда $\alpha(Z) \subseteq E(A_k)$ и α продолжается до гомоморфизма $\alpha : S\omega \to E(A_k)$. По лемме I полигон $\coprod E(A_i)$ – инъективен. Следовательно, $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$, поскольку $E(\coprod_I A_i)$ – минимальный инъективный полигон, содержащий полигон $\coprod_I A_i$.

Предложение 2. Если любые два левых идеала моноида S имеют непустое пересечение, то $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_{I \cup \{0\}} \mathcal{X}_i$, где $\mathcal{X}_i$ – подполигоны в $E(\coprod_I A_i)$, $\mathcal{X}_i \supseteq A_i$ и $\mathcal{X}_0 = \emptyset$, при условии, что полигон $\coprod_I A_i$ имеет нулевой подполигон Θ и $\mathcal{X}_0 = \Theta$ в противном случае. Кроме того, если каждый A_i содержит нулевой подполигон, то $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$.

Доказательство. Пусть любые два левых идеала моноида S имеют непустое пересечение и пусть A_i, $i \in I$, – некоторое множество S-полигонов. Обозначим $\coprod_I A_i = A$ и предположим, что для элемента $x \in E(A)$ существуют элементы $s_1, s_2 \in S$ такие, что $s_1 x \in A_k$, $s_2 x \in A_l$, $k \neq l$. По условию найдутся элементы $t_1, t_2 \in S$ такие, что $t_1 s_1 = t_2 s_2$. Тогда имеем $t_1 s_1 x \in A_k$ и $t_1 s_1 x = t_2 s_2 x \in A_l$, что невозможно. Таким образом, $E(A)$ распадается в объединение непересекающихся множеств $\mathcal{X}_i$, $i \in I$, где $\mathcal{X}_i = \{x \in E(A);\ Sx \cap A_i \neq \emptyset\}$ и нулевого подполигона Θ, если A не содержит нулевых подполигонов (лемма 2 работы [II]). Покажем, что $\mathcal{X}_i \subseteq E(A)$ – подполигон, $i \in I$. Пусть $x \in \mathcal{X}_k$ и $s \in S$. Тогда существует элемент $t \in S$ такой, что $tx \in A_k$. По условию существуют элементы $t_1, t_2 \in$

$\in S$ такие, что $t_1 s = t_2 t$. Тогда имеем $t_1 s x = t_2 t x \in \in A_k$, т.е. $sx \in \mathcal{X}_k$. Следовательно, $E(\coprod_I A_i) = \coprod_{I \cup \{0\}} \mathcal{X}_i$, где $\mathcal{X}_i \supseteq A_i$, $i \in I$. Предположим теперь, что каждый A_i содержит нулевой подполигон. Тогда, очевидно, каждый полигон $\mathcal{X}_i$ инъективен и, поскольку вложение $\iota : \coprod A_i \to E(\coprod A_i)$ продолжается до вложения $j : \coprod E(A_i) \to E(\coprod_I A_i)$, то нам достаточно доказать, что $\coprod_I E(A_i)$ – инъективен. При сделанных предположениях циклический полигон не имеет непересекающихся подполигонов. Следовательно, для любого подполигона Z циклического полигона $S\omega$ и любого гомоморфизма $\varphi : Z \to \coprod_I E(A_i)$ имеем $\varphi(Z) \subseteq E(A_k)$ для некоторого $k \in I$. Ввиду инъективности полигона $E(A_k)$ гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi} : S\omega \to \coprod E(A_i)$. Инъективность полигона $\coprod_I E(A_i)$ следует теперь из леммы I.

Предложение 3. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Копроизведение любого множества инъективных S-полигонов инъективно.

2) Существует инъективные S-полигоны A и B такие, что полигон $A \amalg B$ инъективен.

3) Существует инъективный S-полигон $A \amalg B$, где полигоны A и B содержат нулевые подполигоны.

4) Существует абсолютно чистый S-полигон $A \amalg B$, где A и B содержат нулевые подполигоны.

5) Существует S-полигон A, содержащий нулевой подполигон, такой, что полигон $A \amalg A$ абсолютно чист.

6) Существует S-полигон A такой, что $A \amalg A$-инъективен.

7) Копроизведение любого множества абсолютно чистых S-полигонов абсолютно чисто.

8) Копроизведение любого множества слабоинъективных S-полигонов слабоинъективно.

9) Копроизведение любого множества слабо f-инъективных S-полигонов слабо f-инъективно.

10) Пересечение любых двух левых идеалов моноида S непусто.

Доказательство. Учитывая тот факт, что каждый инъективный полигон является абсолютно чистым и что каждый инъективный полигон содержит нулевой подполигон ([I], лемма 3), мы получим следующий граф импликаций:

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
6 \arrow[d, leftrightarrow] & 7 & 2 \arrow[d, leftrightarrow] \\
5 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[u, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Импликация I0) $\Rightarrow$ I) вытекает из предложения 2, а импликация 4) $\Longrightarrow$ 2) следует из предложения I. Для доказательства импликаций 2)$\Longrightarrow$I0), 8)$\Longrightarrow$I0) и 9)$\Longrightarrow$I0) предположим, что $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ для некоторых главных левых идеалов I_1 и I_2 моноида S. Пусть, далее A и B – некоторые инъективные полигоны, такие, что полигон $A \amalg B$ слабо f-инъективен. Определим гомоморфизм $\varphi: I_1 \cup I_2 \to A \amalg B$ формулой

$$\varphi(s) = \begin{cases} \theta_1, & \text{если } s \in I_1, \\ \theta_2, & \text{если } s \in I_2, \end{cases}$$

где $\theta_1 \in A$, $\theta \in B$ – нулевые подполигоны. По условию φ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi}: S \to A \amalg B$. Но так как моноид S как левый S-полигон – цикличен, то образ гомоморфизма $\bar{\varphi}$ содержится либо в A, либо в B, т.е. мы получили противоречие с тем, что $\bar{\varphi}$ продолжает φ. I0) $\Longrightarrow$7). Пусть полигоны A_i, $i \in I$, абсолютно чисты. Пусть задана некоторая конечная система Σ уравнений с константами из $\coprod_I A_i$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что система Σ связна. По предложению 2 имеем $E(\coprod_I A_i) = \coprod_{I \cup \{0\}} X_i$, где $X_i \supseteq A_i$, $i \in I$. Тогда, очевидно, все константы, присутствующие в системе Σ, принадлежат некоторому полигону A_k, $k \in I$. Следовательно, система Σ разрешима в X_k и, поскольку по предложению 3 работы [II] A_k чист в X_k, система Σ разрешима в A_k. Таким образом, полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист. I0)$\Rightarrow$8), 9). Пусть A_i, $i \in I$, – слабо (f-)инъективные полигоны и пусть $\varphi: I \to \coprod_I A_i$ – гомоморфизм, где I – (конечно порожденный) левый идеал моноида S. По условию I0) идеал I не представляется в виде объединения непересекающихся левых идеалов и, следовательно, $\varphi(I) \subseteq A_k$ для некоторого $k \in I$. Поскольку A_k – слабо (f-)инъективен, то φ продолжается до гомоморфизма $\psi: S \to \coprod_I A_i$, т.е. $\coprod_I A_i$ – слабо (f-)инъективен.

<u>Лемма 2</u>. Пересечение любых двух левых идеалов моноида S с правым нулем 0 непусто тогда и только тогда, когда 0 – двусторонний нуль моноида S.

Доказательство очевидно.

Напомним, что левый S-полигон A называется образующим, если для любых различных гомоморфизмов $\alpha, \beta : X \to Y$ существует гомоморфизм $\gamma : A \to X$ такой, что $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Полигон A называется вполне проективным, если A – проективный образующий в категории левых S-полигонов.

Теорема I. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Все свободные S-полигоны инъективны.

2) Все вполне проективные S-полигоны инъективны.

3) Все проективные S-полигоны инъективны.

4) Все конечно порожденные свободные S-полигоны инъективны.

5) Все конечно порожденные проективные S-полигоны инъективны.

6) Все счетно-порожденные проективные S-полигоны инъективны.

7) Моноид S является Σ-инъективным.

8) Инъективная оболочка любого свободного S-полигона свободна.

9) Существует свободный инъективный S-полигон с множеством I свободных образующих, где $|I| \geqslant 2$.

IO) S – самоинъективен с двусторонним нулем.

Примечание. Заметим, что в теореме I рассмотрены условия на моноид, соответствующие условиям I) – 3) и 5) – 7) квазифробениусовости кольца, приведенные во введении. Отметим еще, что эквивалентности условий I), 3) и IO) теоремы I получены также с использованием других соображений М.П.Дорофеевой (Деп. ВИНИТИ № 5252 – 73, I-II).

Доказательство теоремы. Импликации 4) $\Longrightarrow$ 9) $\Leftarrow$ 8) $\Longleftarrow$ I) $\Rightarrow$ $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 6) и 7) $\Longleftarrow$ I) $\Longrightarrow$ 4) $\Longleftrightarrow$ 5) очевидны. Поскольку моноид S, как инъективный левый S-полигон, содержит левый нуль, то импликации 6) $\Longrightarrow$ IO), 7) $\Longrightarrow$ IO), 9) $\Longrightarrow$ IO) и IO) $\Longrightarrow$ I) следуют из предложения 3 и леммы 2.

Из самоинъективности моноида S не следует, что S имеет двусторонний нуль, как показывает следующий

Пример I. Пусть $S = \{1, a, 0_1, 0_2\}$, где $s0_i = 0_j a = 0_i$ и $a^2 = 1$, $i \neq j \in \{1, 2\}$. Поскольку S, очевидно, инъективен относительно вложений в циклические полигоны, то S – самоинъективен по лемме I. Однако S не содержит двустороннего нуля.

Литература

1. Д о р о ф е е в а М. П., Иньективные и плоские полигоны над наследственными моноидами.- Вести. Моск. ун-та, 1973, № 1, 47-51.
2. Г е м и н т е р н В. И., Самоинъективные кольца эндоморфизмов свободных модулей.- Мат. заметки, 1969, 6, № 5, 533-540.
3. К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп I, Москва, 1972.
4. К э р т и с Ч., Р а й н е р И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, Москва, 1969.
5. С к о р н я к о в Л. А., О гомологической классификации моноидов.- Сибирск. матем. ж., 1969, 10, 1133-1143.
6. Т о л ь с к а я Т. С., Гомологическая характеризация некоторых классов колец.- Вести. Моск. ун-та, 1971, № 2, 49-57.
7. Ц а л е н к о М. Ш., Ш у л ь г е й ф е р Е. Г., Основы теории категорий, Москва, 1974.
8. B e r t h i a u m e, P., The injective envelope of S-sets, Canad. Math. Bull., 1974, 17, 11-18.
9. F a i t h, C., Rings with ascending condition on annihilators, Nagoya Math. J., 1966, 27, № 1, 179-191.
10. F a i t h, C., W a l k e r, E., Direct sum representations of injective modules, J. Algebra, 1967, 5, 203-221.
11. N o r m a k, P., Purity in the category of M-sets, Semigroup Forum, 1980,
12. R u t t e r, E. A., Two characterizations of QF-rings, Pacific J. Math., 1969, 30, № 3, 777-784.

Поступило
13.X 1979

QF-RINGIDE ANALOOGIAID MONOIDIDE KORRAL

P.Normak

R e s ü m e

Artiklis vaadeldakse polügoone üle monoidi S. Leitakse QF-ringide analoogiad monoidide korral. Näidatakse, et üheks selliseks monoidiks on nulliga iseinjektiivne monoid.

ANALOGIES OF QF-RINGS FOR MONOIDS

P.Normak

S u m m a r y

Let S be a monoid. In this article we consider left S-sets satisfying certain properties. All of these properties are proved to be equivalent to the fact that all projective S-sets are injective the property which in the case of ringe is equivalent to the ring to be a QF-ring.

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУПРИМАРНЫМ ПОЧТИ-КОЛЬЦОМ[I]

К.Каарли
Кафедра алгебры и геометрии

В статье [I] было введено понятие полупримарного почти-кольца, являющееся естественным обобщением понятия артинова почти-кольца. Далее полупримарные почти-кольца изучались в [2]. В настоящей работе на множестве классов изоморфных неприводимых модулей над полупримарным почти-кольцом вводится некоторое отношение частичной упорядоченности. Максимальные в смысле этой упорядоченности модули называются неприводимыми модулями типа I. Оказывается, что эти модули имеют более существенное влияние на строение почти-кольца, чем остальные неприводимые модули. Доказывается ряд структурных теорем, в которых участвуют неприводимые модули типа I.

§I. Основные понятия

Почти-кольцом называется тройка $(R,+,\cdot)$, где $(R,+)$ - группа, $(R,\cdot)$- полугруппа и выполняются тождества $r(s+t)=rs+rt$, $0r=0$, где 0 - аддитивный нейтральный элемент группы $(R,+)$.

Модулем над почти-кольцом R или просто R-модулем называется группа $(G,+)$, если для всех $g\in G$, $r\in R$ определены $gr\in G$, так что $g(rs)=(gr)s$, $g(r+s)=gr+gs$ и $0r=0$ для всех $r,s\in R$, $g\in G$.

Ядро почти-кольцевого (R-модульного) гомоморфизма называется идеалом почти-кольца (R-модуля). Символ $S \triangleleft R$ ($A \triangleleft_R G$) означает, что S (A) есть идеал почти-кольца R (R-модуля G).

[I] Обычно эти неприводимые модули называются 0-неприводимыми (в теории почти-колец рассматриваются еще I- и 2-неприводимые модули). Так как в настоящей статье другого типа неприводимость не рассматривается, то опускаем приставку 0-. Соответственно сокращаются и такие понятия, как 0-примитивность, 0-полупростота и.т.д.

Если A и B являются подмножествами R-модуля G, то обозначим

$$(B:A)_R = \{ r \in R \mid Ar \subseteq B \}.$$

Хорошо известно, что из $B \trianglelefteq_R G$ и $AR \subseteq A$ следует $(B:A)_R \triangleleft R$.

Модуль G над почти-кольцом R называется неприводимым, если он цикличен (т.е. $G = gR$ для некоторого $g \in G$) и прост (т.е. не имеет R-идеалов, отличных от 0 и G). Множество всех неприводимых модулей над почти-кольцом R обозначим через $\mathfrak{M}_R$. Почти-кольцо называется примитивным, если оно обладает точным неприводимым модулем. Пересечение ядер всех неприводимых R-модулей называется радикалом почти-кольца R и обозначается через $\mathcal{J}(R)$. Если $\mathcal{J}(R) = 0$, то почти-кольцо R называется полупростым.

Почти-кольцо R называется артиновым, если модуль R_R удовлетворяет условию минимальности для подмодулей.

Чтобы определить полупримарное почти-кольцо, определим сначала матричное почти-кольцо. Пусть группа Γ действует автоморфизмами на аддитивно записанной группе G и пусть ρ – такая эквивалентность на G, что

$$g_1 \rho g_2 \Rightarrow (\gamma g_1)\rho(\gamma g_2)$$

при каждом $\gamma \in \Gamma$. С тройкой (Γ, G, ρ) свяжем почти-кольцо $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, состоящее из всех таких преобразований k группы G, что

1) $0k = 0$;

2) $(\gamma g)k = \gamma(gk)$ при всех $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$;

3) $g_1 \rho g_2 \Rightarrow g_1 k = g_2 k$.

Операциями в этом почти-кольце являются поточечное сложение и композиция отображений.

Назовем тройку (Γ, G, ρ) строго регулярной, если

1) $(\gamma g)\rho g \Rightarrow \gamma = 1$ или $g \rho 0$;

2) фактормножество G/ρ состоит из конечного числа Γ-орбит.

Почти-кольцо K называется матричным, если оно изоморфно либо почти-кольцу $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где (Γ, G, ρ) – строго регулярная тройка, либо кольцу всех матриц над телом, т.е. кольцу всех линейных преобразований некоторого конечномерного векторного пространства H над телом. В первом случае G, а во втором случае H превращается естественным образом в K-модуль, который в дальнейшем обозначается $m(K)$.

Модуль $m(K)$ определен однозначно с точностью до K-изоморфизма (см. [2]). Если почти-кольцо K содержится в качестве идеала в некотором почти-кольце R, то $m(K)$ может быть рассмотрен как R-модуль ([2], лемма 2).

Почти-кольцо R называется полупримарным, если в нем существует конечный ряд идеалов

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n = R, \qquad (1)$$

факторы которого либо нильпотентны, либо являются матричными почти-кольцами. Класс всех полупримарных почти-колец обозначим через $\mathfrak{A}$, а соответствующий ряд (1) назовем $\mathfrak{A}$-рядом. Известно [1], что класс $\mathfrak{A}$ включает все артиновы почти-кольца и является замкнутым относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. В [1] доказано, что в каждом полупримарном почти-кольце R существует приведенный $\mathfrak{A}$-ряд, т.е. $\mathfrak{A}$-ряд, каждый матричный фактор R_{i+1}/R_i которого является минимальным идеалом в R/R_i. Если теперь (1) является приведенным $\mathfrak{A}$-рядом почти-кольца R, то все модули $m(R_{i+1}/R_i)$, где R_{i+1}/R_i – матричный фактор, являются неприводимыми R-модулями и больше неприводимых R-модулей нет ([2], теорема 3).

Нам будет полезна следующая простая лемма.

<u>Лемма 1.1</u>. Если в почти-кольце R имеется цепочка идеалов

$$U \subset V \subseteq S \subset T \subseteq R,$$

для которого фактор-почти-кольца V/U и T/S являются матричными, то R-модули $m(V/U)$ и $m(T/S)$ неизоморфны.

<u>Доказательство.</u> Легко убедиться, что $V \subseteq (0 : m(T/S))$, но $V \nsubseteq (0 : m(V/U))$.

§2. Тип неприводимого R-модуля

<u>Определение</u>. Если B – подмодуль R-модуля A и $C \trianglelefteq_R B$, то назовем R-модуль B/C фактором модуля A. То, что R-модуль F изоморфен фактору модуля A, обозначим через $F \preccurlyeq A$. Если при этом F и A неизоморфны, то пишем $F \prec A$.

Из определения непосредственно следует <u>импликация</u>

$$A \preccurlyeq B \implies (0:A)_R \supseteq (0:B)_R. \qquad (2)$$

Обозначим через $[A]$ класс всех R-модулей, изоморфных R-модулю A и положим

$$[A] \preccurlyeq [B] \iff A \preccurlyeq B.$$

Также положим

$$O(R)=\{[G] \mid G\in \mathfrak{M}_R\}.$$

Пусть далее $R\in \mathfrak{A}$. Легко видеть, что в этом случае $\prec$ является отношением частичной упорядоченности на $O(R)$. Действительно, рефлексивность и транзитивность очевидны, а антисимметричность следует из (2), так как неизоморфные неприводимые модули над полупримарным почти-кольцом имеют различные ядра ([2], теорема 3).

<u>Определение</u>. Назовем типом неприводимого модуля над полупримарным почти-кольцом R максимальное натуральное число k, для которого существуют $G_1,\dots,G_k\in \mathfrak{M}_R$, такие что

$$G=G_k\prec G_{k-1}\prec\dots\prec G_1.$$

Обозначим тип модуля G через $t(G)$.

Нашей ближайшей целью является нахождение другой характеризации понятия типа.

Обозначим через $S(R)$ сумму всех нетривиальных (т.е., с ненулевым квадратом) минимальных идеалов почти-кольца R. Верна

<u>Лемма 2.I</u>. Если $R\in\mathfrak{A}$, то

I) $S(R)$ является прямой суммой конечного числа минимальных идеалов почти-кольца R, каждый из которых - матричное почти-кольцо;

2) $S(R)$ имеет левую единицу;

3) $S(R)$ является прямой суммой правых идеалов почти-кольца R, каждый из которых - неприводимый R-модуль.

<u>Доказательство.</u> Докажем сначала первое утверждение. Из теории мультиоператорных групп следует, что $S(R)$ является прямой суммой некоторого множества нетривиальных минимальных идеалов S_i, $i\in J$ ([5], стр. 49). Известно, что каждый из этих идеалов является матричным почти-кольцом ([2], теорема I) и все R-модули $m(S_i)$ неприводимы ([2], следствие 2). По лемме I.I все R-модули $m(S_i)$ попарно неизоморфны. Таким образом, множество J конечно, поскольку над полупримарным почти-кольцом существует лишь конечное число попарно неизоморфных неприводимых модулей ([2], следствие 5).

Утверждения 2) и 3) следуют непосредственно из уже доказанного и теоремы 6 работы [I]. Лемма доказана.

Построим в почти-кольце R ряд идеалов

$$0=F_0\subseteq E_1\subseteq F_1\subseteq E_2\subseteq F_2\subseteq\dots,$$

где $E_i/F_{i-1} = \mathcal{J}(R/F_{i-1})$, $F_i/E_i = S(R/E_i)$. Назовем этот ряд $\mathcal{J}S$-рядом почти-кольца R. Следующая лемма устанавливает основные свойства $\mathcal{J}S$-ряда полупримарного почти-кольца.

Лемма 2.2. Если $R \in \mathfrak{A}$, то

I) $\mathcal{J}S$-ряд почти-кольца R достигает R после конечного числа шагов;

2) факторы E_i/F_{i-1} нильпотентны,

3) факторы F_i/E_i являются прямыми суммами неприводимых R-модулей,

4) всякий неприводимый R-модуль изоморфен прямому слагаемому одного из факторов F_i/E_i.

Доказательство. Допустим, что для каждого натурального числа i имеем $F_i \neq E_i$. Тогда для каждого i найдется нетривиальный минимальный идеал S_i/E_i почти-кольца R/E_i. В силу теоремы I и следствия 2 работы [2] почти-кольца S_i/E_i являются матричными, а R-модули $m(S_i/E_i)$ неприводимыми. В силу леммы I.I модули $m(S_i/E_i)$ попарно неизоморфны, что снова приводит к противоречию с тем, что над полупримарным почти-кольцом существует лишь конечное число попарно неизоморфных неприводимых модулей.

Пусть $F_k = E_k$. Тогда R/E_k не имеет нетривиальных минимальных идеалов. Если $R = E_k$, то R/E_k содержит ненулевой нильпотентный идеал ([2], теорема I). Но это противоречит тому, что E_k/F_{k-1} является наибольшим нильпотентным идеалом почти-кольца R/F_{k-1} ([2], следствие IO). Следовательно, $F_k = R$.

Утверждение 2) вытекает из следствия IO работы [2], а 3) из леммы 2.I. Поскольку по лемме 2.I каждый фактор F_i/E_i является прямой суммой минимальных идеалов почти-кольца R/E_i, являющихся матричными почти-кольцами, то $\mathcal{J}S$-ряд допускает уплотнение, являющийся приведенным $\mathfrak{A}$-рядом. Отсюда следует утверждение 4). Лемма доказана.

Далее исследуем взаимосвязь между неприводимыми R-модулями, содержащихся в качестве прямых слагаемых в различных факторах F_i/E_i.

Лемма 2.3. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и $G_1, G_2 \in \mathfrak{M}_R$. Если $G_1 \prec G_2$ и G_j изоморфен прямому слагаемому фактора F_{i_j}/E_{i_j} $(j=1,2)$, то $i_1 > i_2$.

Доказательство. Предположим от противного, что $i_1 \leq i_2$. Поскольку $G_1 \prec G_2$, то

$$(0:G_1)_R \supseteq (0:G_2)_R. \quad (3)$$

В силу предположения найдутся минимальные идеалы T_j/E_{i_j} почти-колец R/E_{i_j}, такие что $G_j \simeq_R m(T_j/E_{i_j})$ $(j=1,2)$. Ясно, что $G_1T_1 \neq 0$. Докажем, что $G_2T_1=0$ и тем самым приходим к противоречию с (3).

Если $i_1 < i_2$, то $T_1 \subseteq F_{i_1} \subseteq E_{i_2} \subseteq (0:G_2)_R$ и, следовательно, $G_2T_1=0$.

Пусть теперь $i_1=i_2$. Тогда $T_1 \neq T_2$, ибо иначе было бы $G_1 \simeq_R G_2$. В силу минимальности идеалов T_1/E_{i_2} и T_2/E_{i_2} в R/E_{i_2} получим $T_2T_1 \subseteq T_2 \cap T_1 \subseteq E_{i_2}$, т.е. $(T_2/E_{i_2})T_1=0$. Так как матричное почти-кольцо T_2/E_{i_2}, рассматриваемое как R-модуль, изоморфно конечной прямой степени модуля $m(T_2/E_{i_2})$ ([2], лемма I), то $G_2T_1=0$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и $G_1 \in \mathfrak{M}_R$. Если G_1 изоморфен прямому слагаемому фактора F_i/E_i JS-ряда или R, причем $i>1$, то найдется $G_2 \in \mathfrak{M}_R$, такой что G_2 изоморфен прямому слагаемому фактора F_{i-1}/E_{i-1} и $G_1 \prec G_2$.

Доказательство. Обозначим $R'=R/E_{i-1}$, $F'_{i-1}=F_{i-1}/E_{i-1}$. По лемме 2.I F'_{i-1} имеет левую единицу e'. Тогда

$$R'=F'_{i-1} \dotplus U', \quad (4)$$

где $U'=(0:e')_{R'}$. Из (4) следуют канонические изоморфизмы

$$R/F_{i-1} \simeq R'/F'_{i-1} \simeq U'.$$

Обозначим канонический изоморфизм из R/F_{i-1} на U' через φ.

В силу выбора G_1 существует минимальный идеал $T/E_i \lhd R/E_i$, так что $G_1 \simeq_R m(T/E_i)$. Полагая

$$Y'=\varphi(T/F_{i-1}), \quad X'=\varphi(E_i/F_{i-1}),$$

имеем канонический изоморфизм

$$T/E_i \simeq (T/F_{i-1})/(E_i/F_{i-1}) \simeq Y'/X'.$$

Следовательно, Y'/X' имеет левую единицу и, как R-модуль, изоморфно конечной прямой степени R-модуля G_1.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех неприводимых R-модулей, изоморфных прямым слагаемым R-модуля F'_{i-1}. Докажем, что найдутся $G_2 \in \mathfrak{X}$ и $g \in G_2$ такие, что $gX' \neq gY'$. Предположим от противного, что $gX'=gY'$ для всех $g \in G \in \mathfrak{X}$. Из нашего предположения следует, что $KX'=KY'$ для всех подмножеств K из любого $G \in \mathfrak{X}$. Но тогда также $KX'^n=KY'^n$ для любого натурального числа n. Поскольку

$\mathcal{X} = \varphi(E_i / F_{i-1})$, то найдется n, такое что $X'^n = 0$. Значит, Y' нильпотентен по модулю идеала $I' = \bigcap\limits_{G \in \mathcal{X}} (0 : G)_{R'}$.

Докажем, что $I' = 0$. Так как F'_{i-1} является прямой суммой R-модулей из $\mathcal{X}$, то $I' = (0 : F'_{i-1})_{R'}$. Поскольку
$$R' = R / E_{i-1} \simeq (R / F_{i-2}) / (E_{i-1} / F_{i-2})$$
и $E_{i-1} / F_{i-2} = \mathcal{J}(R / F_{i-2})$, то $\mathcal{J}(R') = 0$. Значит, R' не имеет ненулевых нильпотентных идеалов ([6], следствие 2.8). Следовательно, если $I' \neq 0$, то он содержит нетривиальный минимальный идеал S' ([2], теорема I). Но тогда $F'_{i-1} I' \supseteq S'S' \neq 0$ что противоречит условию $I' = (0 : F'_{i-1})_{R'}$.

Из $I' = 0$ следует, что Y' - нильпотентный идеал почти-кольца R', но это противоречит наличию в Y'/X' левой единицы. Следовательно, существуют $G \in \mathcal{X}$ и $g \in G$, такие что $gX \neq gY'$.

Поскольку $X' \trianglelefteq_R Y'$, то $gX \trianglelefteq_R gY'$ и фактормодуль gY'/gX' является гомоморфным образом R-модуля Y'/X'. Так как Y'/X' является прямой суммой изоморфных копий неприводимого R-модуля G_1, то таким же является и gY'/gX':
$$gY'/gX' = \sum^{\cdot}_{i \in I} B_i / gX',$$
где $B_i / gX' \simeq_R G_1$. Следовательно, $G_1 \prec G_2$. По определению $\mathcal{X}$ существует такой минимальный идеал $V/E_{i-1} \triangleleft R/E_{i-1}$, что $G_2 \simeq_R m(V/E_{i-1})$. Тогда $G_2 V \neq 0$, но
$$G_1 V \subseteq G_1 F_{i-1} \subseteq G_1 E_i = 0.$$
Значит, $G_1 \simeq_R G_2$ и тем самым $G_1 \prec G_2$.

<u>Теорема 2.5</u>. Тип неприводимого модуля G над полупримарным почти-кольцом R равен k тогда и только тогда, когда G изоморфен прямому слагаемому фактора F_k/E_k $\mathcal{J}\mathcal{G}$-ряда почти-кольца R.

<u>Доказательство.</u> По лемме 2.2 найдется такое k, что G изоморфен прямому слагаемому фактора F_k / E_k. Тогда из леммы 2.3 следует $t(G) \leq k$, а лемма 2.4 дает $t(G) \geq k$. Следовательно, $t(G) = k$, что и требовалось доказать.

§3. Неприводимые модули типа I

В настоящем параграфе мы покажем, что не все неприводимые модули имеют одинаковое влияние на строение почти-кольца. Более сильное влияние имеют неприводимые модули типа I. В самом деле это нельзя считать неожиданностью, так как неприводимые модули типа I содержат все остальные неприводимые модули в качестве факторов.

Предложение 3.I. Если $R \in \mathfrak{A}$, то

I) всякий неприводимый R-модуль изоморфен фактору некоторого неприводимого R-модуля типа I,

2) $$\mathcal{J}(R) = \bigcap_{\substack{G \in \mathfrak{M}_R \\ t(G)=1}} (0 : G)_R$$

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определения типа неприводимого R-модуля, а второе следует из первого и импликации (2).

Лемма 3.2. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и G - точный неприводимый R-модуль. Тогда G является единственным неприводимым R-модулем типа I.

Доказательство. Так как почти-кольцо R примитивно, то оно первично, т.е. произведение ненулевых идеалов почти-кольца R отлично от нуля ([6], теорема 3.I). Следовательно, R не имеет ненулевых нильпотентных идеалов и тем самым $E_1 = 0$. В силу первичности R имеет единственный нетривиальный минимальный идеал S и тогда $F_1 = S$.

Если $G \preccurlyeq G_1$, где $G_1 \in \mathfrak{M}_R$, то $0 = (0 : G)_R \supseteq (0 : G_1)_R$. Следовательно, $(0 : G)_R = (0 : G_1)_R$ и $G \simeq_R G_1$ ([2], теорема 3). Значит, $t(G) = 1$.

По теореме 2.5 всякий неприводимый R-модуль G типа I изоморфен прямому слагаемому R-модуля S. Поскольку S изоморфно прямой степени неприводимого R-модуля $m(S)$, то $G \approx_R m(S)$.

Предложение 3.3. Если $R \in \mathfrak{A}$ и $G_1, G_2 \in \mathfrak{M}_R$, то
$$G_1 \preccurlyeq G_2 \Longleftrightarrow (0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R .$$

Доказательство. Импликация $\Longrightarrow$ следует из (2). Докажем обратную импликацию. Пусть $(0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R$. Модуль G_2 является точным неприводимым модулем над полупримарным почти-кольцом $R' = R/(0 : G_2)_R$. В силу леммы 3.2 он является с точностью до изоморфизма единственным неприводимым R'-модулем типа I. Так как $(0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R$, то G_1 можно рассматривать как R'-модуль и явно $G_1 \in \mathfrak{M}_{R'}$. По предложению 3.I имеем $G_1 \preccurlyeq G_2$. Ясно, что это соотношение сохраняется при переходе к R. Предложение доказано.

Далее покажем, что всякое полупростое полупримарное почти-кольцо имеет единственное разложение в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец. Последними примитивными почти-кольцами оказываются в точности $R/(0 : G_i)_R$, где G_i - неприводимые R-модули типа I.

Напомним, что почти-кольцо R является тогда и только тогда подпрямым произведением своих фактор-почти-колец R/S_i, $i \in J$, когда $\bigcap_{i\in J} S_i = 0$. Если, кроме того, $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} S_i \neq 0$ при любом собственном подмножестве $\mathcal{J} \subset J$, то говорят, что это подпрямое разложение несократимо.

<u>Теорема 3.4.</u> Пусть $R \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{J}(R) = 0$ и $G_1, \dots, G_n$ - все имеющиеся попарно неизоморфные неприводимые R-модули типа I. Тогда R является несократимым подпрямым произведением почти-колец $R/(0:G_i)_R$, $i=1,\dots,n$. Это единственное разложение R в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец.

<u>Доказательство.</u> В силу предложения 3.I имеем $\bigcap_{i=1}^{n}(0:G_i)_R = 0$. Значит, R является подпрямым произведением почти-колец $R/(0:G_i)_R$.

Из конечности числа неприводимых R-модулей следует, что разложения R в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец существуют. Пусть R является несократимым подпрямым произведением почти-колец R/S_i, где $S_i = (0:G_i')_R$, $G_i' \in \mathfrak{M}_R$, $i=1,\dots,m$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что среди G_i' встречаются все модули $G_1, \dots, G_n$.

Предположим, что $G_i S_j' \neq 0$ для всех $j=1,\dots,m$. Тогда

$$G_i S_1' S_2' \cdots S_m' = G_i S_2' \cdots S_m' = G_i S_m' = G_i$$

см. ([2], лемма 4). С другой стороны

$$G_i S_1' S_2' \cdots S_m' \subseteq G_i \bigcap_{j=1}^{m} S_j' = G_i 0 = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что среди S_j' найдется такой, что $G_i S_j' = 0$. Но тогда $S_j' = (0:G_j')_R \subseteq (0:G_i)$, откуда по предложению 3.3 получим $G_i \preceq G_j'$. Так как $l(G_i)=1$, то это дает $G_i \cong_R G_j'$. Теорема доказана.

Следующее предложение дает необходимое условие для того, чтобы полупримарное полупростое почти-кольцо разлагалось в прямое произведение примитивных почти-колец. В конце статьи мы построим пример 5.3, показывающий, что полученное условие не является достаточным. Однако это условие вместе с примером 5.I показывает, что далеко не каждое полупростое полупримарное почти-кольцо представляется в виде прямой суммы примитивных почти-колец. Можно даже сказать, что существование такого представления является довольно редким исключением, а не закономерностью.

Предложение 3.5. Если полупримарное полупростое почти-кольцо R является прямой суммой примитивных почти-колец, то для каждого неприводимого R-модуля G существует единственный неприводимый R-модуль G' типа 1, так что $G \preceq G'$.

Доказательство. Пусть $R = \sum_{i=1}^{n} {}^{\cdot} R_i$, где R_i - примитивные почти-кольца. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{M}_R = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{R_i}$. Каждое R_i обладает единственным неприводимым модулем типа I (лемма 3.2). Предложение будет доказано, если мы убедимся, что модули из разных $\mathfrak{M}_{R_i}$ не могут быть сравнимы в смысле отношения $\preceq$. Пусть $H_i \in \mathfrak{M}_{R_i}$, $H_j \in \mathfrak{M}_{R_j}$, $i \neq j$. Тогда $H_i R_j = H_j R_i = 0$. Значит, ядра R-модулей H_i и H_j не сравнимы в смысле включения. Требуемый результат следует теперь из предложения 3.3.

§4. Об идеальной наследственности радикала $\mathcal{J}$

В теореме 8 работы [2] была доказана эквивалентность четырех условий на полупримарное почти-кольцо R, каждое из которых влечет идеальную наследственность $\mathcal{J}$ в R, т.е. $\mathcal{J}(S) = S \cap \mathcal{J}(R)$ для каждого идеала $S \triangleleft R$. Там же было отмечено, что эти условия не являются необходимыми, и было обещено в дальнейшем опубликовать необходимые и достаточные условия. Выполним здесь это обещание.

Теорема 4.I. Следующие условия равносильны для полупримарного почти-кольца R:

I) $\mathcal{J}(S) = S \cap \mathcal{J}(R)$ при любом идеале $S \triangleleft R$.

2) Если U - нильпотентный идеал в R и V/U - нетривиальный минимальный идеал почти-кольца R/U, то $\mathcal{J}(V) = U$.

3) Если U - нильпотентный идеал почти-кольца R, то каждый нетривиальный минимальный идеал почти-кольца R/U является простым почти-кольцом.

4) Если $G \in \mathfrak{M}_R$, $t(G) = 1$, $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$, то $G \in \mathfrak{M}_S$.

5) Если $S \triangleleft R$, $G \in \mathfrak{M}_S$ и $t(G_S) = 1$, то G допускает продолжение до R-модуля.

Доказательство. Схема доказательства

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 5)$$

I) $\Longrightarrow$ 2) Пусть U - нильпотентный идеал в R и V/U - нетривиальный минимальный идеал в R/U. Тогда $U \subseteq \mathcal{J}(V)$, Докажем обратное включение. Так как $U \subseteq \mathcal{J}(V) \subseteq V$ и в силу I) имеем $\mathcal{J}(V) \triangleleft R$, то у нас две возможности: $\mathcal{J}(V) = U$ или $\mathcal{J}(V) = V$. В последнем случае V было бы нильпотентным ([2], следствие 10), что противоречило бы тому, что V/U является матричным почти-кольцом ([2], теорема I).

2)$\Longrightarrow$3) Пусть опять U – нильпотентный идеал в R и V/U – нетривиальный минимальный идеал в R/U. Почти-кольцо V/U является матричным ([2], теорема I). Если V/U является кольцом матриц над телом, то оно просто. Пусть $V/U \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где (Γ, G, ρ) – строго регулярная тройка. По условию 2) имеем $\mathcal{J}(V) = U$, откуда $\mathcal{J}(V/U) = 0$. Значит, V/U не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Но тогда V/U вообще не имеет ненулевых собственных идеалов ([I], теорема 3).

3)$\Longrightarrow$4) Пусть $G \in \mathfrak{M}_R$ и $t(G) = 1$. По теореме 2.5 модуль G изоморфен прямому слагаемому фактора $F_1/E_1 = S(R/\mathcal{J}(R))$. Значит, найдется нетривиальный минимальный идеал $T/\mathcal{J}(R)$ почти-кольца $R/\mathcal{J}(R)$, такой что $G \simeq_R m(T/\mathcal{J}(R))$. Так как $\mathcal{J}(R)$ нильпотентен ([2], следствие 10), то по условию 3) $T/\mathcal{J}(R)$ является простым почти-кольцом.

Докажем, что G – простой T-модуль. Если $T/\mathcal{J}(R)$ изоморфно кольцу матриц над телом, то это очевидно. Пусть $T/\mathcal{J}(R) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где (Γ, G, ρ) – строго регулярная тройка. Тогда простота G_T следует из простоты почти-кольца $T/\mathcal{J}(R)$ и из предложения 7 работы [I].

Пусть теперь $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{J}(R) \subseteq S \cap T + \mathcal{J}(R) \subseteq T$$

и в силу минимальности $T/\mathcal{J}(R)$ либо $S \cap T + \mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R)$, либо $S \cap T + \mathcal{J}(R) = T$. В первом случае $S \cap T \subseteq \mathcal{J}(R)$ и

$$GS = GTS \subseteq G(T \cap S) \subseteq G\mathcal{J}(R) = 0,$$

что противоречит выбору S.

Значит, $S \cap T + \mathcal{J}(R) = T$, откуда $T \subseteq S + \mathcal{J}(R)$. Поскольку $G\mathcal{J}(R) = 0$, то из простоты модуля G_T следует простота модуля G_S. Кроме того, из $GS \neq 0$ следует, что G – циклический S-модуль ([2], лемма 4).

4)$\Longrightarrow$5) Пусть $S \triangleleft R$, $G \in \mathfrak{M}_S$ и $t(G_S) = 1$. Тогда существуют $G' \in \mathfrak{M}_R$ и $H \underset{S}{\triangleleft} G'$, такие что $G \simeq_S G'/H$ ([2], теорема 2). Значит, $G_S \lessdot G'_S$. Согласно предложению

3.I найдется $G'' \in \mathfrak{M}_R$ такой, что $t(G''_R)=1$ и $G'_R \preceq G''_R$. Значит $G'_S \preceq G''_S$ и, по транзитивности, $G_S \preceq G''_S$. Так как $t(G_S)=1$, то $G \simeq_S G''$. Таким образом, G допускает продолжение до R-модуля.

5) $\Longrightarrow$ 2) Пусть снова U - нильпотентный идеал в R и V/U - нетривиальный минимальный идеал в R/U. Как и раньше, получим, что $U \subseteq \mathcal{J}(R)$ и V/U является матричным почти-кольцом. Следовательно, $0 \subseteq U \subseteq V$ является $\mathfrak{A}$-рядом для V. Тогда V также обладает приведенным $\mathfrak{A}$-рядом с одним матричным фактором ([I], лемма I4). Следовательно, V обладает единственным неприводимым модулем $G = m(V/U)$. Ясно, что $t(G_V)=1$ и по условию 5) G можно считать R-модулем. Поэтому $\mathcal{J}(V)=(0:G)_V \triangleleft R$. Так как $\mathcal{J}(V) \neq V$, то в силу минимальности V/U получим $\mathcal{J}(V)=U$.

4) $\Longrightarrow$ I) Пусть $S \triangleleft R$. Согласно теореме 7 из [2] имеем $\mathcal{J}(S) \supseteq \mathcal{J}(R) \cap S$. Докажем обратное включение. В силу условия 4) $\mathcal{J}(S)$ аннулирует все неприводимые R-модули типа I. Но тогда по предложению 3.I $\mathcal{J}(S) \subseteq \mathcal{J}(R)$. Теорема доказана.

Следствие 4.2. Полупримарное дистрибутивно порожденное почти-кольцо удовлетворяет условиям I) - 5) теоремы 4.I.

Доказательство. Известно [3], что любое дистрибутивно порожденное почти-кольцо удовлетворяет условию I) (впрочем также 4) и 5)).

§5. Примеры

Первый пример показывает, что среди частично упорядоченных множеств ч.у.м. $(O(R), \preceq)$ конечных почти-колец R встречаются все с точностью до изоморфизма конечные ч.у.м.

Пример 5.I. Пусть $(\mathcal{I}, \leq)$ - некоторое конечное ч.у.м. Покажем сначала, что существуют конечная группа G, и ее семейство подгрупп G_i, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяющие условиям

G I. $i \leq j \Longleftrightarrow G_i \subseteq G_j$;

G 2. для каждого $i \in \mathcal{I}$ множество

$$\mathcal{G}_i = \{g \in G_i \setminus \{0\} / g \in G_j \ \& \ j \in \mathcal{I} \Longrightarrow i \leq j\}$$

непусто.

Известно, что существует конечное множество A имеющее семейство подмножеств A_i, $i \in \mathcal{I}$, такое что $i \leq j \Longleftrightarrow A_i \subseteq A_j$ ([4], стр. 22). Берем некоторое семейство конечных ненулевых групп H_α, $\alpha \in A$, и положим $G = \sum^{\cdot}_{\alpha \in A} H_\alpha$, $G_i = \sum^{\cdot}_{\alpha \in A_i} H_\alpha$, т.е. G_i состоит из тех элементов $(h_\alpha) \in G$, что $h_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_i$. Легко видеть, что семейство G_i, $i \in J$, удовлетворяет условию $G1$. Условие $G2$ тоже выполнено, так как каждое $\mathcal{G}_i$ содержит по крайней мере все элементы вида $h = (h_\alpha)$, для которых $h_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_i$ и $h_\alpha \neq 0$ при $\alpha \in A_i$.

Рассмотрим множество R всех преобразований r группы G, таких что

$R1$. $G_i r \subseteq G_i$, $i \in J$;

$R2$. $(G \setminus \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i) r = 0$.

Очевидно, это множество является почти-кольцом, а группы G_i – R-модулями.

Докажем, что G_i являются неприводимыми R-модулями. Пусть $F \trianglelefteq_R G_i$ и $0 \neq F \neq G_i$. Берем $0 \neq f \in F$ и $g_i \in \mathcal{G}_i$. Легко видеть, что R содержит элемент r, такой что $g_i r = g \in G_i \setminus F$, но $(f + g_i) r = 0$. Тогда $(f + g_i) r - g_i r = -g \notin F$, что противоречит условию $F \trianglelefteq_R G_i$.

Докажем, что модулями G_i, $i \in J$, исчерпываются неприводимые R-модули. Пусть $\mathcal{J}$ – множество всех максимальных элементов ч.у.м. $(J, \leq)$. Очевидно, тогда $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (0 : G_i)_R = 0$ и $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (0 : G_i)_R \neq 0$ для каждого $j \in \mathcal{J}$. Следовательно, R является несократимым подпрямым произведением примитивных почти-колец $R/(0 : G_i)_R$, $i \in \mathcal{J}$. По теореме 3.4 получим, что неприводимые R-модули типа I – это в точности R-модули G_i, $i \in \mathcal{J}$.

Все будет доказано, если мы убедимся, что каждый G_j, $i \in \mathcal{J}$ не имеет неприводимых факторов, отличных от подмодулей G_i, $i \in J$. Пусть A – подмодуль модуля G_j, $j \in \mathcal{J}$, $B \trianglelefteq_R A$ и $A/B \in \mathfrak{M}_R$. Тогда существует $i \in J$, так что $\mathcal{G}_i \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$, пусть $g \in \mathcal{G}_i \cap (A \setminus B)$. Предположим от противного, что $B \neq 0$ и берем $0 \neq b \in B$. Легко видеть, что R содержит такой элемент r, что $gr = g$ и $(b+g) r = 0$. Тогда $(b+g) r - gr = -g \notin B$, что противоречит условию $B \trianglelefteq_R A$.

Следовательно, $B = 0$ и $A \in \mathfrak{M}_R$. Пусть $A = aR$, где $a \in A$. Тогда a содержится в некотором $\mathcal{G}_k$, где $k \in J$. Значит, $A = aR = G_k$, что и требовалось доказать.

В построенном примере 5.I в качестве отношения $\leq$ на самом деле всюду выступает включение. Следующий пример показывает, что это не обязательно. Существует конечное почти-кольцо R и такие неприводимые R-модули G_1 и G_2, что G_1 изоморфен фактору R-модуля G_2, но не изоморфен ни одному его подмодулю.

Пример 5.2. Пусть G – элементарная абелева группа порядка 8 и H и F – ее подгруппы, причем $H \supset F$, $H \simeq Z_2 \dotplus Z_2$, $F \simeq Z_2$. В качестве R берем множество всех преобразований r группы G, действующих на H эндоморфизмами и удовлетворяющих условию $Fr = 0$. Легко проверить, что G и H/F являются неприводимыми R-модулями. Также очевидно, что $H/F \prec G$, но H/F не изоморфен ни одному подмодулю модуля G. Действительно, единственным подмодулем порядка 2 модуля G является F, но $FR = 0$.

Следующий пример показывает, что существует конечное полупростое почти-кольцо, обладающее только двумя неприводимыми модулями (обе типа I), но не являющееся прямой суммой примитивных почти-колец.

Пример 5.3. Пусть G_1 и G_2 – восьмиэлементные подгруппы элементарной абелевой группы A порядка I6, пересекающиеся по четырехэлементной подгруппе H. Обозначим через F некоторую двухэлементную подгруппу группы H. Рассмотрим множество R всех преобразований r группы A, таких что I) $G_1 r \subseteq G_1$, 2) $G_2 r \subseteq G_2$, 3) $Hr \subseteq F$, 4) $Fr = 0$, 5) $[A \setminus (G_1 \cup G_2)] r = 0$.

Легко убедиться, что R есть почти-кольцо, а G_1 и G_2 являются единственными неприводимыми R-модулями. Эти R-модули неизоморфны, так как $(0 : G_1)_R \neq (0 : G_2)_R$. Следовательно, один из этих модулей не может быть фактором другого и $t(G_1) = t(G_2) = 1$. Ясно, что $(0 : G_1)_R \cap (0 : G_2)_R = 0$, т.е. R – полупростое почти-кольцо. Если бы R являлось прямой суммой примитивных почти-колец, то было бы

$$R \simeq R/(0 : G_1)_R \dotplus R/(0 : G_2)_R ,$$

откуда следовало бы

$$|R| = |R/(0 : G_1)_R| \cdot |R/(0 : G_2)_R| .$$

Однако простой подсчет показывает, что $|R| = 8^8 \cdot 4$ и $|R/(0 : G_1)_R| = |R/(0 : G_2)_R| = 8^4 \cdot 4$.

Наконец приведем пример конечного почти-кольца R и его идеала S, для которых $J(S) \neq J(R) \cap S$. Заодно этот пример показывает, что ни одно из условий теоремы 4.I не выполняется во всех конечных почти-кольцах.

Пример 5.4. Пусть $H = Z_8$ - циклическая группа порядка 8 и Γ - ее группа автоморфизмав, состоящая из I и умножения на 5. Рассмотрим почти-кольцо $R = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(H,H)$. Оно содержит идеал $S = (0:2H)_R$, который, как легко видеть, совпадает с почти-кольцом $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(H/\varrho, H)$, где

$$a \varrho b \longleftrightarrow a = b \text{ или } a, b \in 2H.$$

Прямая проверка показывает, что $H \in \mathfrak{M}_R$, но $H \notin \mathfrak{M}_S$, так как $4H \underset{S}{\triangleleft} H$. Значит, по предложению 7 из [I], S является минимальным идеалом в R, но не является простым почти-кольцом. Он имеет ненулевой нильпотентный идеал $(4H:H)_S$. Следовательно, $\mathcal{J}(S)$ - собственный ненулевой идеал в S. Поскольку S - минимальный идеал в R, то $\mathcal{J}(S) \neq \mathcal{J}(R) \cap S$.

Литература

I. К а а р л и К., Минимальные идеалы в почти-кольцах.—Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 336, 105-142.

2. К а а р л и К., Радикалы в почти-кольцах.—Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 134-171.

3. К а а р л и К., Специальные радикалы дистриоутивно пороиденных почти-колец.

4. К у р о ш А.Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1973.

5. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.

6. R a m a k o t a i a h D., Radicals for near-rings. Math. Z., 1967, 96, № 1, 45-56.

Поступило
15.XI 1979

TAANDUMATUTE MOODULITE KLASSIFIKATSIOON ÜLE POOLPRIMAARSE RINGOIDI

K.Kaarli

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis defineeritakse R-moodulite A ja B, kus R on ringoid, jaoks seos "$\preceq$" järgmiselt: $A \preceq B$, kui leiduvad alammoodul $C \subset B$ ja R-ideaal $D \underset{R}{\triangleleft} C$, nii et $A \underset{R}{\cong} C/D$. Osutub, et poolprimaarse ringoidi R korral indutseerib defineeritud seos kõigi taandumatute R-moodulite isomorfismiklasside hulgal $\mathfrak{M}$ osalise järjestuse.

Tõestatakse, et iga lõpliku osaliselt järjestatud hulga $(J, \leq)$ jaoks leidub lõplik ringoid R, millele $(J, \leq)$ on osaliselt järjestatud hulgaks $(\mathfrak{M}, \preceq)$.

Kasutades defineeritud järjestust tuuakse sisse taandumatu R-mooduli tüübi mõiste, kusjuures antud järjestuse mõttes maksimaalsete moodulite tüübiks on 1. Tõestatakse rida teoreeme poolprimaarsete ringoidide kohta, kus ilmneb ringoidi ehituse sõltuvus tüübiga 1 R-moodulite omadustest.

THE CLASSIFICATION OF IRREDUCIBLE R-GROUPS OVER A SEMIPRIMARY NEAR-RING

K.Kaarli

S u m m a r y

In this paper irreducible (more exactly, 0-irreducible) R-groups over a semiprimary near-ring R (see [1,2]) are considered. For irreducible R-groups A and B we define $A \preccurlyeq B$ if there exist a R-subgroup $C \subseteq B$ and a R-ideal $D \underset{R}{\subsetneqq} C$ such that $A \simeq C/D$. This relation "$\preccurlyeq$" induces a partial order relation on the set $\mathfrak{M}$ of isomorphism classes of irreducible R-groups.

We prove that for every finite poset $(\mathfrak{I}, \leq)$ there exists a finite near-ring R having $(\mathfrak{I}, \leq)$ as a poset $(\mathfrak{M}, \preccurlyeq)$. Using this order relation a type of an irreducible R-group is defined. According to the definition R-groups of type 1 are precisely those which belong to maximal classes of $(\mathfrak{M}, \preccurlyeq)$.

Several theorems using the notion of the type of an irreducible R-group are proven. For example we present here the following theorems.

<u>Theorem 3.4</u>. Let R be a semisimple semiprimary near-ring and $G_1, \dots, G_n$ all pairwise non-isomorphic irreducible R-groups of type 1. Then R is a noncancellable subdirect product of near-rings $R/(0:G_i)_R$, $i=1,\dots,n$ and this is an unique decomposition of R into a noncancellable subdirect product of primitive near-rings.

<u>Theorem 4.1</u>. For a semiprimary near-ring R the following conditions are equivalent.

1) $\mathfrak{J}(S) = S \cap \mathfrak{J}(R)$ for every ideal $S \triangleleft R$.

2) If U is a nilpotent ideal of R and V/U is a minimal ideal of R/U, $V^2 \nsubseteq U$, then $\mathfrak{J}(V) = U$.

3) If U is a nilpotent ideal of R then any minimal ideal V/U of R/U with $V^2 \nsubseteq U$ is a simple near-

ring.

4) If G is an irreducible R-group of type 1, S is an ideal of R and $GS \neq 0$ then G is an irreducible S-group.

5) If S is an ideal of R and G is an irreducible S-group of type 1 then G can be considered as a R-group.

ОПИСАНИЕ ВЕРШИН УСЕЧЕННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

К.Рийвес

Сектор математического программирования НИИЭП

при Госплане ЭССР

В настоящей работе изучаются выпуклые многогранники, задаваемые такой системой линейных неравенств

$$
\begin{aligned}
&0 \le x_{k\ell} \le c_{k\ell}, \quad k=1,\dots,m; \ \ell=1,\dots,n;\\
&\sum_{\ell=1}^{n} x_{k\ell} = a_k, \quad k=1,\dots,m;\\
&\sum_{k=1}^{m} x_{k\ell} = b_\ell, \quad \ell=1,\dots,n,
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{I})
$$

в которой элементы матрицы $C=\|c_{k\ell}\|$ и координаты векторов $A=(a_1,\dots,a_m)$ и $B=(b_1,\dots,b_\ell)$ удовлетворяют условиям

$$a_k,\ b_\ell > 0,\quad \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell,\quad c_{k\ell} \ge 0,\quad k=1,\dots,m;\ \ell=1,\dots,n. \quad (2)$$

Эти многогранники называются усеченными транспортными многогранниками (ср. [I]) и обозначаются через $M(A,B,C)$. Условия непустоты $M(A,B,C)$ даны в [4]. Нами предлагается методика нахождения вершин усеченных транспортных многогранников, аналогичная описанной в [3] для общих транспортных многогранников. Первые два пункта работы носят общий характер. В них уточняется постановка задачи и вводятся нужные обозначения. В п. 3 даются аналитические признаки вершины многогранника $M(A,B,C)$, имея в виду, что любая вершина соответствует специальному подмножеству множества неравенств системы (I). В п.4 описывается возможно меньший класс таких подмножеств, которыми могут определяться вершины для $M(A,B,C)$. Подмножества этого класса называются допустимыми. Перебрав подходяще упорядоченным образом допустимые подмножества и проверив для них выполнение признака вершины, можно при необходимости получить все вершины многогранника $M(A,B,C)$, задавая их своими координатами $x_{k\ell}$ $(k=1,\dots,m;\ \ell=1,\dots,n)$.

I. Постановка задачи. Чтобы использовать методику работ [2,3], переобозначим переменные $x_{k\ell}$, а также величины $c_{k\ell}$ из системы (I), используя индекс $\nu=1,\dots,N$ при $N=mn$ по формулам

$$x_{k\ell} \equiv x^{\nu},\quad c_{k\ell} \equiv a_{\nu+N,0},\quad \text{где } \nu=(k-1)n+\ell. \quad (\mathrm{I.I})$$

Если рассматривать $x_{k\ell}$ как элементы $(m \times n)$-матрицы $X = \|x_{k\ell}\|$, то множеством индексов k-й строки этой матрицы будет

$$\mathcal{K}_k = \{(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, kn\} \subset \{1, \dots, mn\}, \quad k = 1, \dots, m, \tag{I.2A}$$

и множеством индексов ℓ-го столбца

$$\mathcal{L}_\ell = \{\ell, n+\ell, \dots, (m-1)n+\ell\} \subset \{1, \dots, mn\}, \quad \ell = 1, \dots, n. \tag{I.2Б}$$

В обозначениях (I.I), (I.2) система (I) равносильна системе

$$\begin{aligned} &-x^\nu \le 0, \ \nu = 1, \dots, N; \quad x^\nu \le a_{\nu+N,0}, \ \nu = 1, \dots, N; \\ &\sum_{\nu \in \mathcal{K}_k} x^\nu \le a_k, \ k = 1, \dots, m; \ \sum_{\nu \in \mathcal{L}_\ell} x^\nu \le b_\ell, \ \ell = 1, \dots, n; \\ &-\sum_{\nu \in \mathcal{K}_k} x^\nu \le -a_k, \ k = 1, \dots, m; \ -\sum_{\nu \in \mathcal{L}_\ell} x^\nu \le -b_\ell, \ \ell = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{I.3}$$

состоящей из $M = 2(mn+m+n)$ линейных неравенств. Разобъем множество $\{i\} = \{1, \dots, M\}$ на следующие непересекающиеся подмножества

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}^0 = \{i \mid i = \nu, \ \nu = 1, \dots, N\}, \ \mathcal{N}_0 = \{i \mid i = mn+\nu, \ \nu = 1, \dots, N\}, \\ &\mathcal{N}_1 = \{i \mid i = 2mn+k, \ k = 1, \dots, m\}, \ \mathcal{N}_2 = \{i \mid i = 2mn+m+\ell, \ \ell = 1, \dots, n\}, \\ &\mathcal{N}^1 = \{i \mid i = 2mn+m+n+k, \ k = 1, \dots, m\}, \ \mathcal{N}^2 = \{i \mid i = 2(mn+m)+n+\ell, \ \ell = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Тогда система (I.3) является таким частным случаем общей системы линейных неравенств

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{i\nu} x^\nu \le a_{i0}, \quad i = 1, \dots, M, \tag{I.5}$$

где

$$a_{i\nu} = \begin{cases} -1, \text{ если } i \in \mathcal{N}^0, \ \nu = i, \\ \quad \text{или } i \in \mathcal{N}^1, \ \nu \in \mathcal{K}_{i-2N-m-n}, \\ \quad \text{или } i \in \mathcal{N}^2, \ \nu \in \mathcal{L}_{i-2(N+m)-n}; \\ +1, \text{ если } i \in \mathcal{N}_0, \ \nu = i-N, \\ \quad \text{или } i \in \mathcal{N}_1, \ \nu \in \mathcal{K}_{i-2N}, \\ \quad \text{или } i \in \mathcal{N}_2, \ \nu \in \mathcal{L}_{i-2N-m}; \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad a_{i0} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \in \mathcal{N}^0, \\ c_{k\ell}, \text{ если } i \in \mathcal{N}_0 \text{ и } i-N = (k-1)n+\ell; \\ a_{i-2N}, \text{ если } i \in \mathcal{N}_1; \\ b_{i-2N-m}, \text{ если } i \in \mathcal{N}_2; \\ -a_{i-2N-m-n}, \text{ если } i \in \mathcal{N}^1; \\ -b_{i-2(N+m)-n}, \text{ если } i \in \mathcal{N}^2, \end{cases} \tag{I.6}$$

и, кроме того,

$$a_{i0} \ge 0, \text{ если } i \in \mathcal{N}_0; \quad a_{i0} > 0, \text{ если } i \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2. \tag{I.7}$$

Нам удобно рассматривать N-мерные векторы $\mathfrak{X} = (x^1, \dots, x^N)$, $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ и $(N+1)$-мерные векторы $\bar{A}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN}, a_{i0})$. Если записать левые стороны (I.5) как скалярные произведения $(A_i, \mathfrak{X})$, то усеченный транспортный многогранник $M(A, B, C)$ определяется системой

$$(A_i, \mathfrak{X}) \le a_{i0}, \quad i = 1, \dots, M, \tag{I.8}$$

при условиях (I.6), (I.7). С учетом (I.6) ясно, что ранг ρ матрицы коэффициентов системы (I.8) равен N. Обозначим совокупность точек $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию $(A_i, \mathfrak{X}) = a_{i0}$, через Γ_i.

Напомним теперь некоторые результаты, относящиеся к вершинам многогранника, заданного произвольной системой, составленной из M линейных неравенств с N переменными и матрицей коэффициентов ранга $\rho = N$, которые резюмировались уже в [3] (см. стр. 106-108). При этом удобно пользоваться следующим соглашением. Пусть фиксированы подмножества $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ так, чтобы $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}^0, \mathcal{W} \subset \{1, \ldots M\} (|\mathcal{V}| + |\mathcal{W}| = N)$. Обозначим через $d[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ определитель матрицы порядка $N - |\mathcal{V}|$, составленной из всех координат векторов A_i при $i \in \mathcal{W}$, кроме координат с индексами из $\mathcal{V}$. Если $\mathcal{V} = \phi$, то учитываются все координаты $A_i \{i \in \mathcal{W}\}$ и определитель обозначается через $d[\mathcal{W}]$. Аналогично, через $D[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ обозначается определитель матрицы, составленной при предположениях $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}^0, \mathcal{W} \subset \{1, \ldots, M\}, |\mathcal{V}| + |\mathcal{W}| = N+1$ из координат векторов $'A_i$ с $i \in \mathcal{W}$, кроме координат с индексами из $\mathcal{V}$. Заметим, что порядок элементов множества $\mathcal{W}$ считается всегда произвольным, но раз и навсегда фиксированным, сохраняя по возможности порядок элементов множеств (I.4).

Известно, что если многогранник задан в N-мерном пространстве R_N системой (I.8) при условии $\rho = N$ (но в общем случае без условий (I.6), (I.7)), то при совместности системы (I.8) множество его вершин непустое и каждая вершина определена как единственная точка пересечения по крайней мере N гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)}, \ldots, \Gamma_{i(N)}$ пространства R_N. Эти гиперплоскости определяются уравнениями

$$(A_i, \mathfrak{X}) = a_{i0}, \quad i = i(1), \ldots, i(N). \tag{I.9}$$

По предположению определитель системы (I.9) отличен от нуля, т.е., если взять $J = \{i(1), \ldots, i(N)\}$, то $d[J] \neq 0$. Обозначим точку, определенную системой (I.9), через $\mathfrak{X}_J = \Gamma_{i(1)} \cap \ldots$ $\ldots \cap \Gamma_{i(N)}$. Поскольку координатами любой точки $\mathfrak{X}$ пространства R_N являются $x^1, \ldots, x^N$, а по (I.4) нами введено обозначение $\mathcal{N}^0 = \{1, \ldots, N\}$, координаты вершины $\mathfrak{X}_J$ можно записать в форме $x_J^i \; (i \in \mathcal{N}^0)$. Они составляют решение системы (I.9), которое выражается формулами

$$x_J^i = (-1)^i D[i, J] / d[J], \quad i \in \mathcal{N}^0. \tag{I.10}$$

Обозначим для произвольного $i \in \{1, \ldots, M\}$

$$J\{i\} = \{i\} \cup J. \tag{I.11}$$

По определению вершины и в силу предложения I.I из [2] (стр. 194), точка $\mathfrak{X}$ с координатами (I.10) будет вершиной многогранника тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \ldots, M\}$

имеют место

$$(-1)^{N-1} D[J(i)]/d[J] \leq 0. \qquad (I.12)$$

Прямым следствием системы неравенств (I.12) будет

Предложение I. Для того, чтобы точка x_J с координатами (I.10) являлась вершиной многогранника, заданного системой (I.8), необходимо и достаточно, чтобы для множества $J=\{i(1),\dots,i(N)\}$ имело место

$$d[J] \neq 0 \qquad (I.13)$$

и для всех $i \in \{1,\dots,M\}$ либо

$$\operatorname{sgn} D[J(i)] = (-1)^N \operatorname{sgn} d[J], \qquad (I.14)$$

либо

$$D[J(i)] = 0 \qquad (I.15)$$

Вернемся теперь к исследованию многогранника $M(A,B,C)$, который задается системой (I.8) при условиях (I.6), (I.7).

2. О нахождении вершин многогранника $M(A,B,C)$. Как уже отмечалось, в [4] даны необходимые и достаточные условия непустоты многогранника $M(A,B,C)$ или, что равносильно, условия непустоты множества его вершин. Однако при нахождении вершин $M(A,B,C)$ проверку условий совместности системы (I) можно опустить, так как их нарушенность проявится в том, что в процессе вычислений не будет обнаружено ни одной вершины.

Перейдем к специализации общих условий (I.13)-(I.15) вершины многогранника $M(A,B,C)$, учитывая специальный вид задающей его системы (I.8), для которой выполняются (I.6) и (I.7). Имеет место

Предложение 2. Любая вершина многогранника $M(A,B,C)$, заданного системой (I.8) при условиях (I.6), (I.7), является точкой пересечения x_J таких гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)},\dots,\Gamma_{i(N)}$, для которых $J=\{i(1),\dots,i(N)\} \subset n^0 \cup n_0 \cup n_1 \cup n_2$.

Так как у нас будут встречаться различные объединения множеств (I.4) и пересечения с ними множеств J, определяющих вершины, то введем для них специальные обозначения. Пусть $\{p,\dots,q\}, \{r,\dots,s\}$ являются произвольными подмножествами в $\{0,1,2\}$ (одно из них может быть и пустым). Примем

$$n(p,\dots,q;\ r,\dots,s) = n^p \cup \dots \cup n^q \cup n_r \cup \dots \cup n_s.$$

Если $\{p,\dots,q\} = \emptyset$, то обязательно $\{r,\dots,s\}$ непустое и $n(\emptyset;\ r,\dots,s) = n_r \cup \dots \cup n_s$. Аналогично, при $\{r,\dots,s\} = \emptyset$ – $n(p,\dots,q;\emptyset) = n^p \cup \dots \cup n^q$. В этих обозначениях имеем тели возможно более низкого порядка. С этой целью мы введем несколько вспомогательных функций. Они используются для характеризации расположения элементов множеств $SJ(0;0)$ или $J(0,\emptyset)$ и $RJ(0;\emptyset)$ относительно друг друга в случае произвольного фиксированного множества $J=\{i(1),\ldots,i(N)\}$ с $d[J]\neq 0$. Пусть u, v - натуральные числа и

$$h(u,v)=\begin{cases}0, & \text{если } u+0{,}5[u(u+1)+v(v+1)] \text{ - четное число,}\\ \mathrm{I}, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{3.I}$$

Пусть для любого $i\in J(\emptyset;0)$

$$g(i)=\begin{cases}0, & \text{если } |\{j\in J(0;\emptyset), j>i-N\}| \text{ - четное число,}\\ \mathrm{I}, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{3.2}$$

Далее положим для любого $i\in RJ(0;\emptyset)$

$$f(i)=\begin{cases}0, & \text{если } |\{j\in J(0;\emptyset), j<i\}| \text{ - четное число,}\\ \mathrm{I}, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{3.3}$$

При $J(0;\emptyset)=\emptyset$ будем считать $f(i)=g(i)=0$ при всевозможных i. С помощью (I.6), (3.2), (3.3) получается

<u>Предложение 3</u>. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} &d[J]=(-1)^{x}d[SJ(0;0), J(\emptyset;1,2)],\\ &D[J(i)]=(-1)^{y(i)}D[iJ(0;\emptyset), J(\emptyset;0,1,2)],\ i\in R(0,\emptyset),\\ &D[J(i)]=(-1)^{z}D[J(0;\emptyset), iJ(\emptyset;0,1,2)],\ i\in R(1,2;0,1,2),\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} &x=m(0;\emptyset)+0{,}5m(0;0)[m(0;0)+1]+\sum_{k\in J(0;\emptyset)}k+\sum_{k\in J(\emptyset;0)}[g(k)+k-N],\\ &y(i)=i+f(i)+0{,}5m(0;\emptyset)[m(0;\emptyset)+1]+\sum_{k\in J(0,\emptyset)}k,\\ &z\sim 0{,}5m(0,\emptyset)[m(0;\emptyset)+1]+\sum_{k\in J(0;\emptyset)}k.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь знак „$\sim$" между целыми числами означает, что эти числа имеют одинаковую чётность. При этом порядок определителей в правых частях равенств (3.4) в общем случае меньше порядка определителей в левых частях (только при $J(0;\emptyset)=\emptyset$ он сохраняется для третьей группы равенств (3.4)). Из равенств (3.4) и соотношений (3.5), (3.1)-(3.3) получаются искомые аналитические признаки вершины многогранника $M(A,B,C)$. Справедливо

<u>Предложение 4</u>. Пусть $J=\{i(1),\ldots,i(N)\}\subset R(0;0,1,2)$ - множество, в котором элементы нумерованы в возрастающем порядке. Если $d[SJ(0;0), J(\emptyset;1,2)]\neq 0$, то точка x_J пересечения гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)},\ldots,\Gamma_{i(N)}$ будет вершиной многогранника $M(A,B,C)$ тогда и только тогда, когда

1) для каждого $i\in RJ(0;\emptyset)$ имеет место

$$\operatorname{sgn} D[iJ(0,\emptyset), J(\emptyset;0,1,2)]=(-1)^{y(i)}\operatorname{sgn} d[SJ(0;0), J(\emptyset;1,2)] \tag{3.6}$$

В силу предложения 2 будем теперь рассматривать только множества $\mathcal{J}=\{i(1),\dots,i(N)\}$ с $\mathcal{J}\subset\mathcal{N}(0;0,1,2)$, не оговаривая это специально. При этом целесообразно разбить $\mathcal{J}$ на подмножества соответственно его пересечениям с произвольными множествами $\mathcal{N}(p,\dots,q;r,\dots,s)$. Именно, обозначим

$$\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s)=\mathcal{J}\cap\mathcal{N}(p,\dots,q;r,\dots,s), \tag{2.1А}$$

$$R\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s)=\mathcal{N}(p,\dots,q;r,\dots,s)\setminus\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s).$$

Если $i\in\{1,\dots,M\}$, то пусть

$$i\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s)=\{i\}\cup\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s). \tag{2.1Б}$$

Важное значение для нас будет иметь множество

$$T\mathcal{J}=\{i\in\{1,\dots,M\}\mid D[\mathcal{J}(i)]=0\}\supset\mathcal{J}, \tag{2.1В}$$

с помощью которого множество $R\mathcal{J}(0;0)$ (соответственне и его подмножества $R\mathcal{J}(0;\emptyset)$, $R\mathcal{J}(\emptyset;0)$) разбивается на две части по правилу

$$OR\mathcal{J}(0;0)=R\mathcal{J}(0;0)\cap T\mathcal{J},\ PR\mathcal{J}(0;0)=R\mathcal{J}(0;0)\setminus OR\mathcal{J}(0;0). \tag{2.2}$$

Мощности этих множеств обозначаются соответственно через

$$m(p,\dots,q;r,\dots,s)=|\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s)|,\ Rm(p,\dots,q;r,\dots,s)=$$
$$=|R\mathcal{J}(p,\dots,q;r,\dots,s)|,\ ORm(0;0)=|OR\mathcal{J}(0;0)|,\ PRm(0;0)=|PR\mathcal{J}(0;0)|.$$

Так как по определению $|\mathcal{J}|=N$, то с учетом (I.4) из (2.I), (2.2) получаются соотношения

$$\begin{aligned} m(0;0)+m(\emptyset;1,2)&=N,\\ m(\emptyset;1,2)+Rm(\emptyset;1,2)&=m+n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом $m(\emptyset;1,2)\le m+n<N$ и $m(0;0)=N-$ $-m(\emptyset;1,2)>0$. Это означает, что множестве $\mathcal{J}(0;0)$ – непустое. Пусть элементы множества $\mathcal{J}$ нумерованы в возрастающем порядке, т.е. $i(1)<\dots<i(N)$. Тогда $\mathcal{J}(0;\emptyset)=$ $=\{i(1),\dots,i(m(0;\emptyset))\}$, $\mathcal{J}(\emptyset;0)=\{i(m(0;\emptyset)+1),\dots,i(m(0;0))\}$, $\mathcal{J}(0;1,2)=\{i(m(0;0)+1),\dots,i(N)\}$. Так как при $i\in\mathcal{J}(\emptyset;0)$ имеет место $i-N\in\mathcal{N}^{\circ}$, то определим

$$S\mathcal{J}(0;0)=\{i(1),\dots,i(m(0;\emptyset)),\ i(m(0;\emptyset)+1)-N,\dots,i(m(0,0))-N\}\subset\mathcal{N}^{\circ}.$$

В общем случае элементы множества $S\mathcal{J}(0;0)$ не упорядочены в возрастающем порядке. Заметим, что для некоторого другого $\mathcal{j}\subset\mathcal{N}(0;0,1,2)$ используются аналогичные обозначения, только $\mathcal{J}$ в (2.I), (2.2) заменяется на $\mathcal{j}$ и m в (2.3) на k.

3. Аналитические признаки вершины многогранника $M(A,B,C)$

Все только что определенные множества применяются при получении необходимых и достаточных условий вершины многогранника $M(A,B,C)$, равносильных с условиями (I.I3)-(I.I5). Желательно, чтобы в искомых условиях встречались определипри

$$N'(i) = N + i + f(i) + h(m(0;\emptyset), m(0;0)) + \sum_{k \in J(\emptyset;0)} [g(k) + k - N]; \qquad (3.7)$$

2) для каждого $i \in PRJ(\emptyset;0)$ имеет место

$$\operatorname{sgn} D[J(0;\emptyset), iJ(\emptyset;0,1,2)] = (-1)^{N''} \operatorname{sgn} d[SJ(0;0), J(\emptyset;1,2)] \qquad (3.8)$$

при

$$N'' = N + h(m(0;\emptyset), m(0;0)) + \sum_{k \in J(\emptyset;0)} [g(k) + k - N]; \qquad (3.9)$$

3) для каждого $i \in RJ(\emptyset;1,2)$ имеет место

$$D[J(0;\emptyset), iJ(\emptyset;0,1,2)] = 0. \qquad (3.10)$$

Доказательство опускается. Оно аналогично доказательству предложения 4 из [3].

Ввиду (I.6), (I.10) и (I.12) можно сформулировать следующие следствия из предложения 4.

Предложение 5. Если множество J удовлетворяет условиям предложения 4, то координаты $x^i_J \geq 0$ $(i \in \mathcal{N}^0)$ определяемой им вершины x_J многогранника $M(A,B,C)$ вычисляются по формуле

$$x^i_J = \begin{cases} |D[iJ(0;\emptyset), J(\emptyset;0,1,2)]| & \text{если } i \in PRJ(0;\emptyset), \\ 0, & \text{если } i \in J(0;\emptyset) \cup ORJ(0;\emptyset). \end{cases} \qquad (3.11)$$

Предложение 6. Пусть множество J удовлетворяет условиям предложения 4. Для него формулы (3.8), (3.9) равносильны условиям

$$|D[iJ(0;\emptyset), J(\emptyset;0,1,2)]| - a_{i+N,0} \leq 0 \text{ при всех } i \in PRJ(0;\emptyset). \qquad (3.12)$$

В условиях (3.12) по существу проверяется, выполняются ли ограничения сверху для координат x^i_J точки x_J, определенной множеством J. С вычислительной точки зрения их проверка гораздо легче, чем проверка условий (3.8), так как последние требуют вычисления дополнительных определителей порядка $m(\emptyset;0,1,2)+1 = N - m(0;\emptyset)+1 \leq N+1$.

4. Допустимые множества. В этом параграфе вводится понятие допустимого множества. Оказывается, что недопустимому множеству никогда не соответствуют вершины $M(A,B,C)$. Дается полная характеристика возможно меньшего класса допустимых множеств, определяющих все вершины многогранника $M(A,B,C)$. Указывается также способ получения целой серии допустимых множеств, если некоторое допустимое множество уже получено.

Предложение 7. Любая вершина x_J многогранника $M(A,B,C)$ определяется, кроме J, также таким множествам $\mathcal{J}$, для которого $\mathcal{J}(0;0) \subset J(0;0)$ и $\mathcal{J}(\emptyset;1,2) = \mathcal{N}(\emptyset;1,2) \setminus \{2N+m+n\}$ (в частном случае $J(\emptyset;1,2) = \mathcal{N}(\emptyset;1,2) \setminus \{2N+m+n\}$ множества J и $\mathcal{J}$ совпадают).

Это предложение характеризует класс таких множеств, просмотр которых обеспечивает при необходимости нахождение полного множества вершин многогранника $M(A, B, C)$. Все они содержат однозначно определенное подмножество $\mathcal{J}(\emptyset; 1, 2)$, включающее $m+n-1$ элементов и их число зависит только от возможностей выбора $\mathcal{J}(0,0)$.

Определение. Множество $J \subset \mathcal{N}(0; 0, 1, 2)$ с упорядоченными по возрастанию элементами называется допустимым, если для него имеет место $J(\emptyset; 1, 2) = \mathcal{N}(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}$ и $d[J] \neq 0$. В противном случае оно называется недопустимым. (Заметим, что при $d[J] = 0$ множество никогда не определяет вершины.)

Для допустимых множеств упрощается проверка условий вершины из предложения 4. Именно, в силу (2) и (2.IA) имеет место

Предложение 8. Для допустимого множества J множество $RJ(0; 1, 2) = \{2N+m+n\}$ одноэлементно и J удовлетворяет условию (3.I0).

Не все множества J, имеющие структуру, описанную в предложении 7, являются допустимыми, так как по (2), (I.2), (I.6) справедливо

Предложение 9. Рассмотрим множество J с $RJ(\emptyset; 1, 2) = \{2N+m+n\}$. Оно будет недопустимым, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий

I) $a_k, b_l \subset SJ(0; 0)$ хотя бы для одного k или l;

2) при некотором $i \in J(0; \emptyset)$ имеет место $i+N \in J(\emptyset; 0)$

Определение. Допустимое множество J называется исходным, если для него имеет место $m(\emptyset; 0) = 0$.

Рассмотрим исходное множество J. Для него $m(0; \emptyset) = N - (m+n-1)$. Пусть выбрано непустое $\mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$. Обозначим

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(0; \emptyset) = J(0; \emptyset) \setminus \mathcal{K}, \quad \mathcal{J}(\emptyset; 0) = \{i+N, i \in \mathcal{K}\}, \\ &\mathcal{J}(\emptyset; 1, 2) = J(\emptyset; 1, 2) = \mathcal{N}(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}, \\ &\mathcal{F}(J, \mathcal{K}) = \mathcal{J} = (0; \emptyset) \cup \mathcal{J}(\emptyset; 0) \cup \mathcal{J}(\emptyset; 1, 2). \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Предложение I0. Пусть $J = \{i(1), \ldots, i(N)\}$ исходное множество. При $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$ множество $\mathcal{F}(J, \mathcal{K})$ допустимо. Наоборот, если множество $\mathcal{J}$ с непустым $\mathcal{J}(\emptyset; 0)$ допустимо, то существует некоторое исходное множество J с подмножеством $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$ так, что $\mathcal{J} = \mathcal{F}(J, \mathcal{K})$.

Если все исходные множества J уже известны, то предложение I0 дает правило нахождения всех допустимых множеств $\mathcal{J}$ с всевозможными $l(\emptyset; 0) = |\mathcal{J}(\emptyset; 0)| = 1, \ldots, N-(m+n-1)$.

В силу обратного утверждения этого предложения множество всех допустимых множеств исчерпывается описанным образом. Запишем в таблице I все множества $\mathcal{J}(0;0)$ допустимых множеств $\mathcal{J}$ с $\ell(\emptyset;0)\neq 0$, получаемых на основе исходного $\mathcal{J}$ по (4.3).

Таблица I

Серия множеств $\mathcal{J}(0;0)$, связанных с исходным множеством $\mathcal{J}$

$\ell(\emptyset,0)$	$\lvert\mathcal{K}\rvert=1$	$\lvert\mathcal{K}\rvert=2$	...	$N-(m+n-1)$
$\mathcal{J}(0;0)$	$i(1),\ldots,i(m(0;0)),i(1)+N$ . . . . $i(1),\ldots,i(m(0;0)+1),i(m(0;0))+N$	$i(3),\ldots,i(m(0;0)),i(1)+N,i(2)+N$ . . . . $i(1),\ldots,i(m(0;0)-2),i(m(0;0)-1)+N$, $i(m(0;0))+N$	...	$i(1)+N,\ldots,i(m(0;0))+N$
их число	$C^1_{N-(m+n-1)}$	$C^2_{N-(m+n-1)}$	...	1

Подводя итоги основных результатов п. 3-4, мы имеем I) аналитические признаки, которым должно удовлетворять допустимое множество, если ему соответствует вершина многогранника $M(A,B,C)$ (предложения 4,6,8) и 2) принцип перебора допустимых множеств (предложения 7,9,I0). Именно

Предложение II. Все вершины многогранника $M(A,B,C)$ определяются такими допустимыми множествами $\mathcal{J}$, что при всех $i\in PR\mathcal{J}(0;\emptyset)$ выполняются условия

$$\operatorname{sgn} D[i\,\mathcal{J}(0;\emptyset),\mathcal{J}(\emptyset;0,1,2)]=(-1)^{N'(i)}\operatorname{sgn} d[S\,\mathcal{J}(0;0),\mathcal{J}(\emptyset;1,2)],$$

где

$$N'(i)=N+i+f(i)+h(m(0;\emptyset),m(0,0))+\sum_{k\in\mathcal{J}(\emptyset;0)}[g(k)+k-N],$$

а функции h, g, f определены формулами (3.I), (3.2), (3.3) и, кроме того,

$$|D[i\,\mathcal{J}(0;\emptyset),\mathcal{J}(\emptyset;0,1,2)]|-a_{i+N,0}\leq 0,\quad i\in PR\mathcal{J}(0;\emptyset).$$

Для любой вершины $x_{\mathcal{J}}$ множество $V\mathcal{J}=\mathcal{J}(0;0)\cup OR\mathcal{J}(0;0)$ определено однозначно.

В силу однозначности $V\mathcal{J}$ число множеств $\mathcal{J}$, перебираемых в ходе нахождения вершин многогранника $M(A,B,C)$, может сильно сокращаться, так как любые допустимые последовательности с совпадающими $V\mathcal{J}$ определяют совпадающие с $x_{\mathcal{J}}$ вершины, и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Для получения всех вершин многогранника $M(A,B,C)$ нужен некоторый перебор множеств $\mathcal{J}$, который можно осуществить так. Перебор нужно начать с некоторого исходного множества

$\mathfrak{J}$, образуемого с учетом предложений 7 и 9. Далее для $\mathfrak{J}$ нужно проверить условия предложения II. Для этого сначала нужно вычислить определитель $d[S\mathfrak{J}(0;0), \mathfrak{J}(\emptyset;1,2)]$. Затем в случае каждого $\mathfrak{J}$ с $m(\emptyset;0)$ от 0 до $N-(m+n-1)$ нужно вычислить не более чем $Rm(0;\emptyset)=N-m(0;\emptyset)$ определителей $D[\iota\mathfrak{J}(0;\emptyset), \mathfrak{J}(\emptyset;0,1,2)]$ порядка $Rm(0;\emptyset)$. Эти определители надо вычислять до тех пор, пока все проверяемые условия выполняются. Если все условия вершины выполнены, занесем новую вершину в список. Как только хотя бы одно из условий нарушается, исследование данного $\mathfrak{J}$ нужно прекратить (оно не определяет вершины для $M(A,B,C)$), и перейти к следующему $\mathfrak{J}$. Это будет или допустимым множеством, соответствующим данному исходному, или, если последние исчерпаны, новым исходным множеством. Когда все исходные множества и соответствующие им допустимые множества перебраны, закончим работу.

Заметим, что если эти результаты применить для решения экстремальных задач, то перебор множеств $\mathfrak{J}$ значительно уменьшится.

Литература

1. Корзников А.Д. О гранях правильно-усеченного транспортного многогранника.— Вопр. планир. и экон.-мат. методы , Минск, 1978, 137-141.
2. Рийвес К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве K_n. III.— Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1975, 366, 187-216.
3. Рийвес К., Об определении вершин транспортных многогранников.— Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1979, 500, 105-118.
4. Komaromi, E., Matrices with restricted elements, row sums and column sums.— Acta Math. Acad. Sci.Hung. 1978, 31, № 3-4, 349-354.

Поступило
11.XI 1979

LÕIGATUD TRANSPORTHULKTAHUKATE TIPPUDE MÄÄRAMINE

K.Riives

Resümee

Lõigatud transporthulktahukas $M(A,B,C)$ esitatakse transpordiülesande kitsenduste süsteemiga, mida on täiendatud muutujate väärtuste ülemiste tõketega. Nagu üldistegi kumerate hulktahukate puhul, on $M(A,B,C)$ tipud esitatavad võrratuste hulga teatud alamhulkade poolt [2,3]. Töös on

kirjeldatud võimalikult väikest niisuguste alamhulkade klassi, kuhu kuuluvad kõiki $M(A,B,C)$ tippe määravad alamhulgad (vt. Laused 7,9) ja antud analüütilised tingimused selleks, et fikseeritud alamhulgale vastaks mingi tipp (Lause 11).

DETERMINATION OF THE VERTICES OF CUTTED TRANSPORTPOLYTOPES

K.Riives

S u m m a r y

A cutted transportpolytope $M(A,B,C)$ is given by the system of constraints of transportation problem with additional upper bounds for variables. As for general convex polytopes the vertices of $M(A,B,C)$ are determined by special subsets of the set of inequalities [2,3]. In the paper a possibly small class of such subsets is characterized whioh contains all subsets defining vertices of $M(A,B,C)$ (Prepositions 9,10). The analytic characters for the subset determining the vertice of $M(A,B\,C)$ are pointed out (Preposition 11).

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О (0,I)-МАТРИЦАХ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРИЕЙ АВТОБУСНЫХ РАСПИСАНИЙ

В.Фляйшер, Я.Хион

Мы рассматриваем задачи о нахождении (0,I)-матриц с заданными типами строк и с предписанными столбцевыми суммами или нижними границами столбцевых сумм. Например, мы изучаем нахождение (0,I)-матриц, имеющих заданные столбцевые суммы и содержащих в каждой строке ровно a единиц, идущих подряд (число a фиксировано). Для решения этих задач рассматриваются произвольные целочисленные матрицы с неотрицательными элементами и используется теория многочленов с целочисленными коэффициентами. Отметим, что сходный вопрос о существовании (0,I)-матриц с заданными нижними границами для столбцевых сумм и верхними границами для строчных сумм рассматривался в [3] (гл. II, теорема I2.I, следствия I2.2 и I2.3).

Обозначим через Z_n^+ совокупность всех n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами. Пусть заданы векторы

$$h_1 = (h_{10}, h_{11}, \ldots, h_{1,a_1-1}) \in Z_{a_1}^+, \ldots, h_p = (h_{p0}, h_{p1}, \ldots, h_{p,a_p-1}) \in Z_{a_p}^+ .$$

Вектор $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in Z_n^+$ называется вектором типа (h_i, k), если неотрицательное целое число $k \leq n - a_i$ и

$$x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0,\ x_k = h_{i0}, \ldots, x_{k+a_i-1} = h_{i,a_i-1},\ x_{k+a_i} = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Вектор x называется вектором типа h_i, если он является вектором типа (h_i, k) при каком-нибудь k. Пусть m и n натуральные числа $n \geq \max(a_1, \ldots, a_p)$. Обозначим через $\mathcal{M}(m, n; h_1, \ldots, h_p)$ совокупность всех $m \times n$-матриц, все строчные векторы которых имеют типы $h_1, \ldots, h_p$. Аналогично обозначим через $\mathcal{M}(n; h_1, \ldots, h_p)$ совокупность всех матриц с конечным числом строк и n столбцами, все строки которых имеют типы $h_1, \ldots, h_p$. Для нас важен случай, когда все последовательности $h_1, \ldots, h_p$ состоят только из нулей и единиц.

Пусть $X = (x_{ij})$ является $m \times n$-матрицей с целочисленными элементами. Обозначим

$$s_j(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$
$$s(\mathcal{X}) = (s_0(\mathcal{X}), s_1(\mathcal{X}), \ldots, s_{n-1}(\mathcal{X})).$$

Пусть вектор $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z_n^+$. Будем говорить, что он реализуем в $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, если существует матрица $\mathcal{X} \in \mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, так что $b = s(\mathcal{X})$. Матрицу $\mathcal{X}$ назовем тогда реализацией вектора b в $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Совокупность всех векторов $b \in Z_n^+$, реализуемых в $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, обозначим через $\mathcal{YM}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Аналогично определяются реализуемость и реализация вектора b в $\mathcal{M}(n; h_1, \ldots, h_p)$ и множество $\mathcal{YM}(n; h_1, \ldots, h_p)$. Назовем вектор b допустимым относительно $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, если существует матрица $\mathcal{X} \in \mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, так что $s(\mathcal{X}) - b \in Z_n^+$. Матрицу $\mathcal{X}$ назовем в этом случае мажорантой вектора b. Совокупность всех векторов $b \in Z_n^+$, допустимых относительно $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, обозначим через $\mathcal{LM}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Аналогичным образом определяются допустимость и мажоранта вектора b относительно $\mathcal{M}(n; h_1, \ldots, h_p)$ и множество $\mathcal{LM}(n; h_1, \ldots, h_p)$.

Мы будем рассматривать решение следующих задач. Пусть числа p и n множество векторов $h_1, \ldots, h_p$ и вектор $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ фиксированы.

1. Найти необходимые и достаточные условия реализуемости вектора b в $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Если эти условия выполнены, найти все его реализации.

2. Найти, для каких m данный вектор b допустим в $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Если условия допустимости выполнены, найти для вектора b в этом множестве мажоранту с наименьшей суммой элементов.

Аналогичные задачи рассматриваются и для матриц $\mathcal{M}(n; h_1, \ldots, h_p)$.

Классы матриц $\mathcal{M}(m,n; h_1, \ldots, h_p)$ и $\mathcal{M}(n; h_1, \ldots, h_p)$ используются при построении автобусных расписаний. При этом время обслуживания автобусной линии делится на n равных подпериодов (оборотов), в течение каждого подпериода любой автобус может отправиться на линию самое большее один раз. Если на линии работает m водителей (и автобусов), то всякому расписанию движения автобусов на этой линии соответствует (0,1)-матрица $\mathcal{X} = (x_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов. Матрица $\mathcal{X}$ задается следующим правилом: $x_{ij} = 1$, если i-ый водитель работает (отправляется на линию) на j-ом обороте, $x_{ij}=0$ в противном случае, она называется характеристической матрицей расписания. Нахождение реализации данной последовательности b в $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ (задача 1) означает, например, построение характеристической матрицы расписания, при котором все m водителей имеют рабочие дни заданных типов и на каждом обороте работает предписанное число водителей. (Это число определяется по числу пассажиров, накапливающихся за соответствующее время на остановках линии). Вычисление мажоранты данной последовательности b в $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ с минимальной суммой элементов (задача 2) означает построение характеристической матрицы такого расписания, при котором число работающих на каждом обороте водителей не меньше предписанного, а общее число совершаемых автобусами оборотов минимально.

Установим теперь связь приведенных задач с теорией многочленов. Обозначим через $Z[t]$ кольцо многочленов над кольцом Z целых чисел (см., напр. [1], стр. 195-198). Рассмотрим множество Z_n всех векторов $x=(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ с целочисленными координатами. Положим для всякого многочлена $f(t)=f_0+f_1t+\dots+f_mt^m\in Z[t]$ и любого $x\in Z_n$.

$$f(t)x=(f_0+f_1t+\dots+f_mt^m)(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})=$$
$$=(f_0x_0,f_0x_1+f_1x_0,\dots,f_0x_{n-1}+f_1x_{n-2}+\dots+f_{n-1}x_0), \quad (1)$$

где при $i>m$ считается, что $f_i=0$. Легко проверить, что при таком определении множество Z_n превращается в унитарный $Z[t]$-модуль (см. [2], стр. 181-183). Необходимость использования множества Z_n объясняется тем, что строки матриц из множеств $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ и $M(n;h_1,\dots,h_p)$ всегда принадлежат Z_n. Полезность кольца $Z[t]$ как области скаляров следует из того, что при применении многочленов $1,t,t^2,\dots$ к строкам матриц из $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ или $M(n;h_1,\dots,h_p)$ мы получаем, вообще говоря, матрицы из тех же множеств. Например, применив многочлен t к вектору $(h_{i0},h_{i1},\dots,h_{i,a_i-1},0,\dots,0)$ типа $(h_i,0)$, мы получим по формуле (1) вектор $(0,h_{i0},\dots,h_{i,a_i-2},h_{i,a_i-1},0,\dots,0)$ типа $(h_i,1)$. Кроме того, из формулы (1) вытекает, что $Z[t]$-модуль Z_n является моногенным. Из формулы (1) следует также, что аннулятор ([2], стр. 196) $Z[t]$-модуля Z_n состоит из всех многочленов кольца $Z[t]$, делящихся на t^n.

Поэтому Z_n можно рассматривать также как модуль над фактор-кольцом ([I]; стр. 486) $Z[t]/(t^n)$ по соответствующему главному идеалу (t^n)([I], стр. 492]. Отсюда следует, что $Z[t]/(t^n)$-модуль Z_n изоморфен кольцу $Z[t]/(t^n)$, рассмотренному как модуль над собой, т.е. соответствующему свободному моногенному модулю([2], стр. 189).

Множество Z_n является структурно упорядоченной группой, если положить $x=(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, если $x_0 \geqslant 0,\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_{n-1} \geqslant 0$ ([4], стр. 29, пример 3). Для трактовки упорядоченности в Z_n полезно ввести упорядоченность в кольцах Z, $Z[t]$ и $Z[t]/(t^n)$. Кольцо Z является линейно упорядоченным кольцом относительно обычной упорядоченности целых чисел ([4], стр. 168, пример I). Поэтому кольцо $Z[t]$ является структурно упорядоченным кольцом, если положить

$$f(t)=f_0+f_1 t+\cdots+f_m t^m \geqslant 0, \quad \text{если} \quad f_0 \geqslant 0,\ f_1 \geqslant 0, \ldots, f_m \geqslant 0$$

([4], стр. 169, пример 7). Подмножество (t^n) является выпуклым идеалом в $Z[t]$ ([4], стр. 14). Тогда рассуждениями, аналогичными приведенным в([4], стр. 33)устанавливается, что фактор-кольцо $Z[t]/(t^n)$ является структурно упорядоченным, если считать, что смежный класс $f(t)+(t^n) \geqslant 0$, если найдется $g(t) \in f(t)+(t^n)$, так что $g(t) \geqslant 0$. Множество всех положительных элементов частично упорядоченного кольца $\mathcal{L}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$.

Дальнейшие связи между задачами I и 2 и теорией многочленов будут указаны в последующих теоремах.

<u>Теорема I</u>. Пусть $h_1=(h_{10}, \ldots, h_{1,a_1-1}) \in Z^+_{a_1}, \ldots, h_p=(h_{p0}, \ldots, h_{p,a_p-1}) \in Z^+_{a_p}$, $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z^+_n$. Набор $b \in \mathcal{L}M(n; h_1, \ldots, h_p)$ тогда и только тогда, если существуют многочлены $c_1(t)=c_{10}+\cdots+c_{1,n-a_1}t^{n-a_1}, \ldots, c_p(t)=c_{p0}+\cdots+c_{p,n-a_p}t^{n-a_p} \in Z^+[t]$ так что $c_1(t)h_1(t)+\cdots+c_p(t)h_p(t)-b(t) \in Z^+[t]$, где $h_i(t)=h_{i0}+\cdots+h_{i,a_i-1}t^{a_i-1}$ $(i=1, \ldots, p)$, $b(t)=b_0+b_1 t+\cdots+b_{n-1}t^{n-1}$. При этом $b \in \mathcal{L}M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$ если дополнительно выполняется $c_1(1)+\cdots+c_p(1)=m$, имеет место $b \in \mathcal{J}M(n; h_1, \ldots, h_p)$, если дополнительно $c_1(t)h_1(t)+\cdots+c_p(t)h_p(t)=b(t)$, будет $b \in \mathcal{J}M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, если выполняются оба дополнительных условия. Для получения мажоранты (соответственно реализации) вектора b надо взять в соответствующую матрицу c_{10} строк типа $(h_1, 0), \ldots, c_{1,n-a_1}$ строк типа $(h_1, n-a_1), \ldots, c_{p0}$ строк типа $(h_p, 0), \ldots, c_{p,n-a_p}$ строк типа $(h_p, n-a_p)$.

Из формулировки теоремы видно, что координаты векторов здесь удобно задавать как коэффициенты многочленов.

Для доказательства теоремы нужно взять матрицу, имеющую n столбцов и строки, указанные в конце формулировки теоремы, и вычислить многочлен, задающий ее столбцевые суммы. При этом нужно неоднократно пользоваться тем, что множество Z_n является $Z[t]$-модулем, и тем, что $Z[t]$ есть структурно упорядоченное кольцо. Для экономии места соответствующее доказательство (как и дальнейшие доказательства) не будет здесь изложено.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда $p=1$, т.е. задан только один набор $h=(h_0,h_1,\dots,h_{a-1})\in Z_a^+$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $h\in Z_a^+$, $h\neq 0$ и $b\in\mathcal{M}(n;h)$, т.е. найдется такой многочлен $c(t)=c_0+c_1t+\dots+c_{n-a}t^{n-a}\in Z^+[t]$, так что $c(t)h(t)=b(t)$. Тогда многочлен $c(t)$ определен однозначно. Любые две реализации вектора b в $\mathcal{M}(n;h)$ могут отличаться только порядком строк.

Обозначим смежный класс многочлена $f(t)\in Z[t]$ по идеалу (t^n) через $\overline{f(t)}$. Если многочлен $f(t)=f_0+f_1t+\dots+f_{n-1}t^{n-1}$ таков, что $f_0=1$, т.е. $f(t)=1+g(t)$, где $g(t)=f_1t+\dots$ $\dots f_{n-1}t^{n-1}$, то имеет место формула

$$\overline{f(t)}\,\overline{d(t)}=\overline{1},\qquad\text{где } d(t)=1-g(t)+g^2(t)-\dots+(-1)^{n-1}g^{n-1}(t) \tag{2}$$

причем $\overline{d(t)}$ – единственный элемент из $Z[t]/(t^n)$, для которого $\overline{f(t)}\,\overline{d(t)}=\overline{1}$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $h=(1,h_1,\dots,h_{a-1})\in Z_a^+$, $b=(b_0,b_1,\dots,b_{n-1})\in Z_n^+$. Вектор $b\in\mathcal{M}(n;h)$ тогда и только тогда, если из чисел

$$c_k=\sum_{\substack{s_1+\dots+(a-1)s_{a-1}+s_k=k\\ s_1,\dots,s_k\geq 0}}(-1)^{s_1+\dots+s_{a-1}}\frac{(s_1+\dots+s_{a-1})!}{s_1!\cdots s_{a-1}!}h_1^{s_1}\cdots h_{a-1}^{s_{a-1}}b_{s_k}\qquad (k=0,\dots,n-1)$$

числа $c_0,\dots,c_{n-a}$ неотрицательны и $c_{n-a+1}=\dots=c_{n-1}=0$. При этом $b\in\mathcal{M}(m,n;h)$, если дополнительно выполняется

$$\sum_{k=0}^{n-a}c_k=m.$$

Эта теорема доказывается при помощи формулы (2) и факта, что $Z[t]/(t^n)$ является упорядоченным кольцом.

Установим, например, является ли вектор $b=(1,3,3,3,4,2)\in Z_6^+$ реализуемым в $\mathcal{M}(4,6;h)$, где $h=(1,2,1)$ и найдем при положительном ответе реализацию вектора b в $\mathcal{M}(4,6;(1,2,1))$. Решение задачи можно было бы получить из теоремы 3, но можно и прямо пользоваться формулой (2). Именно, мы имеем здесь $h(t)=1+2t+t^2=1+t(t+2)$. По формуле (2) обратным для $h(t)$ в $Z[t]/(t^6)$ будет

$$d(t)=1-t(t+2)+t^2(t+2)^2-t^3(t+2)^3+t^4(t+2)^4-t^5(t+2)^5.$$

Производя вычисления в $Z[t]/(t^6)$, т.е. опуская члены степени выше 5 и опуская для краткости черты, получим

$$d(t)=1-t(t+2)+t^2(t^2+4t+4)-t^3(6t^2+12t+8)+t^4(32t+16)-$$
$$-32t^5=1-2t+3t^2-4t^3+5t^4-6t^5.$$

Легко проверить, что $h(t)\,d(t)=1-7t^6-6t^7$, т.е. действительно $\overline{h(t)}\;\overline{d(t)}=\overline{1}$.

Для нахождения реализации последовательности b образуем многочлен $b(t)=1+3t+3t^2+3t^3+4t^4+2t^5$. Согласно предложению 2 надо найти многочлен $c(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3$, что $c(t)\cdot h(t)=b(t)$. Перейдем в последнем равенстве к соответствующим классам смежности и умножим его на $d(t)$. Получим

$$\overline{c(t)}=\overline{d(t)}\;\overline{h(t)}\;\overline{c(t)}=\overline{d(t)}\;\overline{b(t)}.$$

Следовательно,

$$c(t)=d(t)b(t)=b_0+(b_1-2b_0)t+(b_2-2b_1+3b_0)t^2+(b_3-2b_2+3b_1-$$
$$-4b_0)t^3+(b_4-2b_3+3b_2-4b_1+5b_0)t^4+(b_5-2b_4+3b_3-4b_2+5b_1-6b_0)t^5.$$

По виду многочлена $c(t)$ должно быть

$$c_0=b_0\geq 0,\ c_1=b_1-2b_0\geq 0,\ c_2=b_2-2b_1+3b_0\geq 0,\ c_3=b_3-2b_2+3b_1-$$
$$-4b_0\geq 0,\ c_4=b_4-2b_3+3b_2-4b_1+5b_0=0,\ c_5=b_5-2b_4+3b_3-4b_2+$$
$$+5b_1-6b_0=0.$$

В данном случае имеем

$$c_0=1\geq 0,\ c_1=3-2\cdot 1=1\geq 0,\ c_2=3-2\cdot 3+3\cdot 1=0,$$
$$c_3=3-2\cdot 3+3\cdot 3-4\cdot 1=2\geq 0,\ c_4=4-2\cdot 3+3\cdot 3-4\cdot 3+5\cdot 1=0,$$
$$c_5=2-2\cdot 4+3\cdot 3-4\cdot 3+5\cdot 3-6\cdot 1=0,\ c_0+c_1+c_2+c_3=1+1+0+2=4.$$

Следовательно, многочлен $c(t)=1+t+2t^3$ имеет требуемый вид и неотрицательные коэффициенты, т.е. реализация существует. Согласно теореме I реализация должна иметь одну строку типа $(h,0)$ (ибо $c_0=$ I), одну строку типа $(h,1)$ и две строки типа $(h,3)$. Поэтому реализацией вектора $(1,3,3,3,4,2)$ является, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

По теореме 2 все другие реализации вектора b получаются из этой матрицы перестановкой строк.

Перейдем к рассмотрению условий, при которых данный вектор $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ допустим относительно $\mathcal{M}(m, n; h)$, и к нахождению мажоранты этого набора в $\mathcal{M}(m,n;h)$. Здесь нам приходится наложить дальнейшее ограничение на рассматриваемую задачу и допустить, что вектор h имеет вид $h=(1,1,\ldots,1)$, т.е. $h(t)=1+t+\ldots+t^{a-1}$. Совокупность матриц, получающуюся при таком h, обозначим через $\mathcal{M}(m,n;[a])$.

<u>Теорема 4</u>. Для любых натуральных чисел $n \geq a$ и вектора $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ существует такое натуральное число $m^* = m^*(n, a, b)$, так что $b \in \mathcal{X}\mathcal{M}(m,n;[a])$ тогда и только тогда, если $m \geq m^*(n, a, b)$. При этом $m^*(n,a,b) \leq ([\frac{n}{a}]+1) \max\limits_{0 \leq j \leq n-1} b_j$.

Предположим сначала, что последовательность $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ допустима относительно $\mathcal{M}(m^*, n; [a])$, т.е. имеет в ней мажоранту $\mathcal{X}^*=(x^*_{ij})$. Если $m \geq m^*$, то мы получим для b мажоранту $\mathcal{X}=(x_{ij})$ в $\mathcal{M}(m,n;[a])$, добавив к $\mathcal{X}^*$, например, $m-m^*$ строк типа $(h,0)$.

Пусть при разделении n на a с остатком получится $n=ua+v$, $0 \leq v < a$, тогда $u=[\frac{n}{a}]$. Возьмем многочлен $c(t)=(\max b_j)(1+t^a+\ldots+t^{(u-1)a}+t^{(u-1)a+v})$ (при $v=0$ последний член следует опустить . Для него имеем

$$c(t)h(t)-b(t)=(\max_j b_j)(1+t+\ldots+t^{(u-1)a+v-1}+2t^{(u-1)a+v}+\ldots+2t^{ua-1}+t^{ua}+\ldots+t^{ua+v-1})-b(t) \in Z^+[t],$$

т.е. многочлен $c(t)$ определяет согласно теореме I мажоранту для вектора b. Число строк в соответствующей матрице равно по теореме I числу $c(1)$, т.е. числу $m=(\max b_j)\cdot(u+1)=(\max b_j)([\frac{n}{a}]+1)$. Следовательно, при таком значении m мажоранта вектора b в $\mathcal{M}(m,n;[a])$ заведомо существует.

Для получения правил вычисления числа m^* и мажоранты вектора b в $\mathcal{M}(m^*, n; [a])$ введем некоторые обозначения. Пусть многочлен $f(t)=f_0+f_1 t+\ldots+f_n t^n \in Z[t]$. Обозначим через $\Gamma f(t) \rceil_a$ многочлен

$$f_0+\max(f_0,f_1)t+\ldots+\max(f_0,f_1,\ldots,f_{a-1})t^{a-1}+f_a t^a+\ldots+f_n t^n.$$

Аналогично введем обозначение

$$\lfloor f(t) \rceil^a = f_0+f_1 t+\ldots+f_{n-a} t^{n-a}+\max(f_{n-a+1},\ldots,f_n)t^{n-a+1}+\ldots+\max(f_{n-1},f_n)t^{n-1}+f_n t^n,$$

положим $[f(t)]^a_a = [[f(t)]_a]^a$.

Теорема 5. Пусть заданы натуральные числа $n \geq a$ и вектор $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z^+_n$. Тогда число $m^* = m^*(n, a, b)$ равно коэффициенту при t^{n-1} в многочлене $[[b(t)]^a_a (1 + t^a + t^{2a} + \ldots)]_n$. Одна из мажорант вектора b в $M(m^*, n; [a])$ задается многочленом $c(t) = [[[b(t)]^a_a (1 + t^a + t^{2a} + \ldots)]_n]^a (1-t)$ (вычисления надо провести в $Z[t]/(t^n)$).

Доказательство теоремы снова основано на том факте, что кольцо $Z[t]/(t^n)$ является структурно упорядоченным кольцом. Используется также содержащееся в теореме I утверждение, что последовательность b допустима относительно $M(m, n; h)$ тогда и только тогда, если существует многочлен $c(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-a} t^{n-a}$, так что $c(t)h(t) \geq b(t)$ и $c(1) = m$.

Приведем пример на применение теоремы 5. Найдем наименьшее m, при котором вектор $b = (2, 1, 3, 5, 2, 6, 6, 1, 7, 4)$ допустим в $M(m, 10; 4)$. В данном случае имеем

$$b(t) = 2 + t + 3t^2 + 5t^3 + 2t^4 + 6t^5 + 6t^6 + t^7 + 7t^8 + 4t^9.$$

Вычислим

$$[b(t)]^4_4 = 2 + \max(2,1)t + \max(2,1,3)t^2 + \max(2,1,3,5)t^3 + 2t^4 + 6t^5 + \max(6,1,7,4)t^6 + \max(1,7,4)t^7 + \max(7,4)t^8 + 4t^9 = 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 2t^4 + 6t^5 + 7t^6 + 7t^7 + 7t^8 + 4t^9.$$

Далее имеем

$$[b(t)]^4_4 (1 + t^4 + t^8) = 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + (2+2)t^4 + (2+6)t^5 + (3+7)t^6 + (5+7)t^7 + (2+2+7)t^8 + (2+6+4)t^9 =$$
$$= 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 4t^4 + 8t^5 + 10t^6 + 12t^7 + 11t^8 + 12t^9.$$

Теперь получим

$$[[b(t)]^4_4 (1 + t^4 + t^8)]_{10} = 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 10t^6 + 12t^7 + 12t^8 + 12t^9.$$

Следовательно, $m^* = 12$ и вектор b допустим относительно $M(12, 10, [4])$, причем 12 – наименьшее такое число строк. Наконец, вычислим

$$[[[b(t)]^4_4 (1 + t^4 + t^8)]_{10}]^4 =$$
$$= 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 12t^6 + 12t^7 + 12t^8 + 12t^9.$$

Отсюда получим

$$c(t) = [[[b(t)]^4_4 (1 + t^4 + t^8)]_{10}]^4 (1-t) = 2 + t^2 + 2t^3 + 3t^5 + 4t^6.$$

У этого многочлена действительно $c(1) = 12$. По правилу из теоремы I мы получим матрицу

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

Ее вектор столбцевых сумм есть $(2,2,3,5,3,6,9,7,7,4)$, так что она действительно является мажорантой вектора b.

Литература

1. K a n g r o, G. Kõrgem algebra. Tartu, 1962.
2. Б у р б а к и Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Москва, 1962.
3. Ф а л к е р с о н Д., Ф о р д Л. Потоки в сетях. Москва, 1965.
4. Ф у к с Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.

Поступило
20.VI 1980

ÜLESANDED (0,1)-MAATRIKSITE KOHTA, MIS ON SEOTUD BUSSIDE SÕIDUPLAANIDE TEOORIAGA

V.Fleischer, J.Hion

R e s ü m e e

Käsitletakse selliste (0,1)-maatriksite leidmist, millel on antud tüüpi read ja etteantud veerusummad. Näiteks on uuritud selliste (0,1)-maatriksite leidmist, millel igas reas on a järjestikku seisvat ühte ja antud veerusummad. Need ülesanded lahendatakse täisarvuliste kordajatega polünoomide teooriat kasutades.

SOME PROBLEMS ON (0,1)-MATRICES RELATED WITH THE THEORY OF BUS SCHEDULINGS

V.Fleischer, J.Hion

S u m m a r y

The problems about finding of (0,1)-matricee with given types of rows and presoribed oolumn sums are considered.For inetance, finding of (0,1)-matricee having a consequent ones in every row and given oolumn sums is coneidered.These problems are solved using the theory of polynomials with integer coefficients.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 556.
МНОЖЕСТВА И АЛГОРИТМЫ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на эстонском и английском языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор М.Кильп.
Сдано в печать 27.01.1981.
МВ 01071.
Формат 30x45/4.
Бумага печатная.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 4,6.
Печатных листов 5,5.
Тираж 400.
Заказ № 90.
Цена 70 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, Тарту, ул.Пялсона, 14.
2 - 2