

Materjale keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks

I OSA

Tallinn · 1966

A 27762

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika kateeder

MATERJALE
KESKKOOLI MATEMAATIKAKURSUSE KORDAMISEKS

I o s a

Koostanud

E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass, P. Kass,
H. Krusberg, M. Teeäär

Tallinn
1966

Таллинский политехнический институт
Кафедра математики
Таллин, ул. Калинина, д. 101

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ для поступающих в ТПИ

Часть I

Составили:

Э. Этверк, А. Гарминек, А. Касс, П. Касс,
Х. Крусберг, М. Тээяр

На эстонском языке

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
68068

Kordustrükk

Trükkimisele antud 15.III 66. Paber 60x84, 1/16
Trükipg. 7,0. Tingpg.6,51. Tiraaž 1000
MB-02952. TPI rotaprint,1966. Tell.126
Hind 20 kop.

A R I T M E E T I K A J A A L G E B R A

I. REAAL- JA KOMPLEKSARVUD

§ 1. N a t u r a a l a r v u d

1. Naturaalarvu mõiste. Naturaalarvudeks nimetatakse arve

$$1, 2, 3, 4, \ldots \qquad (1)$$

mis on tekkinud esemete loendamise ja järjestamise vajadusest. Naturaalarvu mõiste on algmõiste, s.t. mõiste, mida me ei defineeri, küll defineerime selle abil aga teisi arvuliike.

Igast kahest (erinevast) naturaalarvust üks on teisest suurem. Kui naturaalarvud paigutada nende kasvava suuruse järjekorda, siis saame naturaalarvude rea (1).

Naturaalarvude rida on lõpmatu, s.t. igale naturaalarvule järgneb naturaalarvude reas veel naturaalarve. Selle rea liikmele n järgnevaid naturaalarve kirjutame kujul

$$n+1, \quad n+2, \quad n+3, \ldots$$

Käesolevas paragrahvis mõistame arvu all ikka naturaalarvu.

2. Naturaalarvu lahutamine algtegureiks. Arvust 1 suuremaid naturaalarve, mis jaguvad ainult arvuga 1 ja arvu endaga, nimetatakse algarvudeks. Kõik muud arvust 1 suuremad naturaalarvud on kordarvud, s.t. nad jaguvad peale arvu 1 ja arvu enda veel mingi naturaalarvuga. Arvu 1 ei loeta ei alg- ega kordarvuks.

Kordarvu saab kujutada algarvude korrutisena. Kordarvu kujutamist algarvude korrutisena nimetatakse algtegureiks lahutamiseks. Arvu lahutamiseks algtegureiks leiame järkjärgulise jagamise teel arvu algtegurid, alates kõige väiksemast algtegurist. Selleks on soovitav kasutada järgmist skeemi:

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5

$450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$

1210	2
605	5
121	11
11	11

$1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2.$

3. Arvude vähim ühiskordne. Arvu, mis jagub antud arvudega, nimetatakse nende arvude ühiskordseks. Näiteks 36 on arvude 3 ja 4 ühiskordne, sest ta jagub nii 3-ga kui ka 4-ga.

Antud arvude vähimaks ühiskordseks (VÜK) nimetatakse vähimat arvu, mis jagub antud arvudega.

Antud arvude vähimaks ühiskordseks on mõnikord suurim antud arvudest (kui ta jagub antud arvudega). Näiteks arvude 18, 9 ja 6 vähim ühiskordne on 18.

VÜK leidmiseks lahutatakse antud arvud algtegureiks ja korrutatakse üks arvudest temas puuduvate teiste arvude algteguritega.

Näide. Arvude 66, 110 ja 154 vähim ühiskordne leitakse järgmiselt:

66	2	110	2	154	2
33	3	55	5	77	7
11	11	11	11	11	11

VÜK = 2·3·11·5·7 = 2310.

Arvude vähimat ühiskordset kasutatakse murdude teisendamisel ühenimelisteks.

4. Arvude suurim ühistegur. Antud arvude ühisteguriks nimetatakse iga arvu, millega antud arvud jaguvad. Näiteks arvude 36 ja 48 ühisteguriks on arv 4, sest 36 ja 48 jaguvad 4-ga.

Antud arvude suurimaks ühisteguriks (SÜT) nimetatakse suurimat arvu, millega antud arvud jaguvad.

Kui kõik antud arvud jaguvad väikseima arvuga antud arvude hulgast, siis see väikseim arv ongi antud arvude SÜT. Näiteks arvude 35, 140 ja 175 suurim ühistegur on 35. Üldiselt tuleb arvude SÜT leidmiseks arvud lahutada algtegureiks ja leida nende kõigi ühiste algtegurite korrutis.

Näide. Arvude 90, 120 ja 165 suurim ühistegur leitakse järgmiselt:

90	2	120	2	165	3
45	3	60	2	55	5
15	3	30	2	11	11
5	5	15	3		
		5	5		

SÜT = 3·5 = 15.

Arvude suurimat ühistegurit kasutatakse murdude taandamisel.

§ 2. R a t s i o n a a l a r v u d

1. Aritmeetilised tehted. Tehte all mõistetakse kahest antud arvust uue arvu tuletamist ühe ja sama eeskirja järgi. Aritmeetikas vaadeldakse nelja põhitehet ehk aritmeetilisi tehteid: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist. Nende tehete tulemusi nimetatakse vastavalt summaks, vaheks, korrutiseks ja jagatiseks.

1) Kahe naturaalarvu a ja b summa a + b on arv, mis saadakse, kui naturaalarvude reas arvust a arvu b võrra edasi loendada.

Kahe naturaalarvu liitmine on alati teostatav, s.t. naturaalarvude a ja b summa on alati naturaalarv. Summal on järgmised kaks põhiomadust:

I. Summa on kommutatiivne, s.t. summa ei sõltu liidetavate järjekorrast:

$$a + b = b + a.$$

II. Summa on assotsiatiivne, s.t. summa liitmise asemel võib liita liidetavad eraldi:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Kahe naturaalarvu a ja b korrutis a · b on arv, mis saadakse, kui arv b võtta a korda liidetavana:

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ liidetavat}}$$

Kahe naturaalarvu korrutamine on alati teostatav. Korrutisel on järgmised kolm põhiomadust:

III. Korrutis on kommutatiivne, s.t. korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

IV. Korrutis on assotsiatiivne, s.t. korrutise (bc) korrutamise asemel (arvuga a) võib korrutada tegurid eraldi (esmalt b arvuga a, siis c saadud korrutisega):

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

V. Korrutis on liitmise suhtes distributiivne, s.t. summa korrutamise asemel võib iga liidetava eraldi korrutada ja saadud korrutised liita:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

3) Kahe arvu a ja b vahe a - b on arv, millega liites arvu b saadakse arv a:

$$a - b = c, \text{ kui } c + b = a.$$

Seega lahutamine on liitmise pöördtehe: antud summa a ja ühe liidetava b järgi otsitakse teist liidetavat c.

Lahutamine on naturaalarvude vallas ainult siis teostatav, kui vähendatav on suurem kui lahutatav.

Selleks et lahutamine oleks teostatav juhul, kui vähendatav ja lahutatav on võrdsed, on kasutusele võetud arv null: $a - a = b - b = \ldots = 0$.

Selleks et lahutamine oleks teostatav juhul, kui vähendatav on väiksem kui lahutatav, on kasutusele võetud negatiivsed arvud: kui $a < b$, siis $a - b = -(b - a)$, näiteks $7 - 13 = -(13-7) = -6$. Arvu $-a$ nimetatakse arvu a vastandarvuks.

Naturaalarve koos nende vastandarvudega ja arvuga null nimetatakse täisarvudeks. Täisarvude hulgas on liitmine, lahutamine ja korrutamine alati teostatavad.

4) Kahe arvu a ja b jagatis $a : b$ on arv, millega korrutades arvu b saadakse arv a:

$$a : b = c, \text{ kui } c \cdot b = a.$$

Seega jagamine on korrutamise pöördtehe: antud korrutise a ja ühe teguri b järgi otsitakse teist tegurit c.

Jagamine on täisarvude vallas ainult siis teostatav, kui jagatav a on jagaja b kordne. Selleks et jagamine oleks teostatav ka siis, kui jagatav ei ole jagaja kordne, on täisarvude hulka laiendatud murdarvudega (mida saab anda mitmel kujul). Kirjutades murdarve harilike murdude kujul, saame iga jagamise, kus jagaja on nullist erinev, kirjutada kujul

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Jagamisel arvuga 0 puudub mõte.

Täisarve koos (positiivsete ja negatiivsete) murdarvudega nimetatakse ratsionaalarvudeks.

Et ka iga täisarvu saab kirjutada hariliku murruna $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud ja $q \neq 0$, siis

iga ratsionaalarv on väljendatav kujul $\frac{p}{q}$,

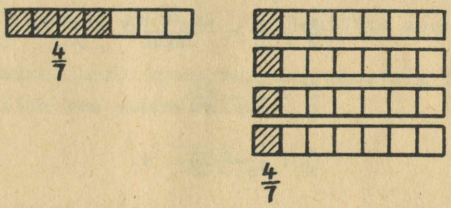
kus p ja q on täisarvud ja $q \neq 0$.

2. Harilikud murrud. Kui mingi ühik (tervik) jaotada n võrdseks osaks, kus $n > 1$ on naturaalarv, ja võtta saadud osi m, kus m on samuti naturaalarv, siis saame osade hulga, mida märgitakse sümboliga $\frac{m}{n}$ ja nimetatakse harilikuks murruks. Sama tulemuse saaksime, kui jaotaksime m ühikut n võrdseks osaks ja võtaksime ühe sellise osa (joonis 1). Nii ühest kui teisest murru saamisviisist järeldub, et $n \cdot \frac{m}{n} = m$, millest omakorda järeldub, et

$$m : n = \frac{m}{n},$$

s.t. harilik murd $\frac{m}{n}$ on naturaalarvude m ja n jagatis. Loeme selle võrduse õigeks ka siis, kui $n = 1$, nii et $\frac{m}{1} = m$. Arve m ja n nimetame vastavalt murru $\frac{m}{n}$ lugejaks ja nimetajaks, nende vahel olevat kriipsu murrujooneks.

Murdu, mille lugeja on nimetajast väiksem, nimetatakse lihtmurruks, ja murdu, mille lugeja on nimetajaga võrdne või sellest suurem, nimetatakse liigmurruks. Lihtmurd on väiksem kui 1, kuna liigmurd on võrdne 1-ga või sellest suurem.



Joonis 1.

Liigmurdu, mille lugeja on nimetaja kordne, saab teisendada täisarvuks, ja liigmurdu, mille lugeja ei ole nimetaja kordne, saab teisendada segaarvuks, s.o. täisarvu ja murru summaks. Näiteks $\frac{18}{6} = 3$ ja $\frac{23}{6} = \frac{18+5}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3\frac{5}{6}$. Ümberpöördult, segaarvu saab teisendada liigmurruks: $3\frac{5}{6} = \frac{18+5}{6} = \frac{23}{6}$.

Murru saamisviisist järeldub: 1) kui murru lugejat korrutada mingi naturaalarvuga, siis murd suureneb sama arv korda, 2) kui murru nimetajat korrutada mingi naturaalarvuga, siis murd väheneb sama arv korda. Neist kahest omadusest järeldub

murru põhiomadus: murru suurus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada (jagada) ühe ja sama arvuga. Neid teisendusi nimetatakse vastavalt murru laiendamiseks ja taandamiseks.

Murru saamisviisist järeldub, et kahest ühenimelisest murrust on suurem see murd, mille lugeja on suurem. Teisendades kaks erinimelist murdu ühenimelisteks ja rakendades eelmist tunnust, saame, et murdudest $\frac{a}{m}$ ja $\frac{b}{n}$ on

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n} \text{ või } \frac{a}{m} = \frac{b}{n} \text{ või } \frac{a}{m} < \frac{b}{n}$$

vastavalt sellele, kas

$$an > bm \text{ või } an = bm \text{ või } an < bm.$$

Aritmeetilised tehted murdudega tuginevad tehetele naturaalarvudega ja alluvad punktis 1 loetletud arvutamise põhiseadustele I - V. Need tehted defineeritakse järgmiste võrduste abil:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{m \cdot n},$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{m \cdot n},$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

Kui murdude nimetajatel leidub ühistegureid (või murrud on koguni ühenimelised), siis saab liita ja lahutada lihtsamalt.

3. Kümnendmurrud. Murdu, mille nimetajaks on 10^n, kus n on naturaalarv, ja mis on kirjutatud koma abil, nimetatakse kümnendmurruks. Neid murde kirjutatakse järgmiselt:

$$\frac{4}{10} = 0,4; \quad \frac{3}{100} = 0,03; \quad \frac{2745}{1000} = 2,745,$$

s.t. kirjutatakse ainult lugeja, eraldades selles paremalt koma abil nii mitu kohta, kui mitu nulli on nimetajas (kui lu-

geja kohtade arv on väiksem nimetaja kohtade arvust, siis kirjutatakse lugejale vasakule paras arv nulle juurde).

Kümnendmurdude suur eelis on tehete lihtsus nendega: tehted kümnendmurdudega taanduvad kergesti tehetele täisarvudega.

Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks toimub kas murru laiendamise teel ($\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$) või lugeja jagamise teel nimetajaga ($\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$). Mõne hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks tekib lõpmatu perioodiline kümnendmurd, s.o. murd, milles mingi number või numbrite rühm lõpmatult kordub:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots; \quad \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots; \quad \frac{18}{55} = 0{,}32727\ldots$$

Korduvat numbrit või numbrite rühma nimetatakse kümnendmurru perioodiks. Kui periood järgneb komale, siis murd on puhtperioodiline; kui aga koma ja perioodi vahel on mittekorduvaid numbreid, siis murd on segaperioodiline.

4. Lõpmatu perioodilise kümnendmurru teisendamine harilikuks murruks. Lõpmatut puhtperioodilist kümnendmurdu saab vaadelda lõpmatult kahaneva geomeetrilise reana, näiteks $0{,}2121\ldots = \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \ldots$ Seetõttu saab niisuguse murru teisendamisel harilikuks murruks kasutada lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa valemit

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

kus a on rea esimene liige ja q on rea tegur. Ülalantud näite puhul

$$a = \frac{21}{100} \quad \text{ja} \quad q = \frac{1}{100},$$

seega

$$0{,}2121\ldots = \frac{\frac{21}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Analoogiliselt leiame:

1. $0{,}777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$;

2. $2,5353\ldots = 2 + \frac{53}{100} + \frac{53}{10000} + \ldots = 2 + \frac{\frac{53}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2\frac{53}{99}$;

3. $0,4777\ldots = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots = \frac{4}{10} + \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} =$

$$= \frac{4}{10} + \frac{7}{100-10} = \frac{4}{10} + \frac{7}{90} = \frac{43}{90};$$

4. $0,3526\ldots = \frac{35}{100} + \frac{26}{10^4} + \frac{26}{10^6} + \ldots = \frac{35}{100} + \frac{\frac{26}{10^4}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{35}{100} +$

$$+ \frac{26}{9900} = \frac{3491}{9900}.$$

Kolmes viimases näites geomeetriline rida algab paremal seisva summa teisest liikmest.

On kerge põhjendada, et puhtperioodiline kümnendmurd võrdub niisuguse hariliku murruga, mille lugejaks on periood ja nimetajaks arv, mis on kirjutatud nii mitme 9-ga, kui mitu kohta on perioodis.

Näiteks $0,123123\ldots = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$.

§ 3. Irratsionaalarvud

1. Arvu astendamine. Astendamine on tehe, mille abil üks antud arv (astendatav) võetakse tegurina nii mitu korda, kui suur on teine antud arv (astendaja).

Arvu a astendamisel arvuga n saadud arvu nimetatakse arvu a n-daks astmeks ja märgitakse sümboliga a^n. Definitsiooni kohaselt astendatav a on mistahes arv, kuid astendaja $n \geq 2$ on naturaalarv (sest arvu saab tegurina võtta 2, 3 jne. korda). Täienduseks antud definitsioonile loeme arvu esimeseks astmeks seda arvu ennast. Niisiis

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tegurit}}; \quad a^1 = a.$$

Näiteks: $2,5^3 = 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 15,625$; $(-2)^5 = -32$; $(-1)^{50} = 1$; $0^4 = 0$.

Astme definitsioonist järeldub:

1) positiivse arvu aste on positiivne arv;

2) negatiivse arvu aste on paarisarvulise astendaja puhul positiivne, paarituarvulise astendaja puhul negatiivne;

3) arvu 0 iga aste on 0, arvu 1 iga aste on 1.

4) astendamine ei ole kommutatiivne, st. $a^n \neq n^a$, näiteks $3^4 = 81$, kuid $4^3 = 64$.

2. Arvu juurimine. Juurida arv a (juuritav) arvuga n (juurija) tähendab leida niisugune arv, mille astendamisel arvuga n saadakse arv a.

Arvu a juurimisel arvuga n saadud arvu nimetatakse n-daks juureks arvust a ja märgitakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$ (eeldusel, et niisugune arv on olemas). Niisiis

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Teist juurt arvust nimetatakse ka ruutjuureks ja kolmandat juurt kuupjuureks. Ruutjuure puhul juurijat tavaliselt ei kirjutata.

Juurimise definitsioonist selgub, et juurimine on astendamise pöördtehe: astendatava leidmine antud astme ja astendaja järgi.

Näited: $\sqrt[3]{8} = 2$, sest $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, sest $(-2)^3 = -8$; $\sqrt{25} = 5$, sest $5^2 = 25$.

Viimasena antud juurt võiks lugeda ka võrdseks arvuga -5, sest $(-5)^2 = 25$, kuid ühese tähenduse andmiseks juuresümbolile loetakse juur positiivsest arvust ikka positiivseks.

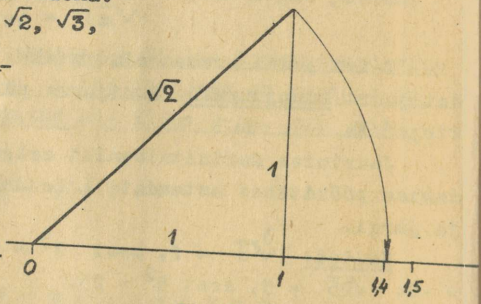
Ratsionaalarvude hulgas ei leidu iga juurija puhul juurt igast ratsionaalarvust, näiteks ei leidu arvu $\sqrt{2}$. Tõepoolest, kui leiduks ratsionaalarv $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, kus võime eeldada, et m ja n on ühistegurita arvud, siis $(\frac{m}{n})^2 = 2$ ja $m^2 = 2n^2$. Siit nähtub, et m^2 ja seega ka m on paarisarv (sest paaritu arvu ruut on paaritu arv). Oletades, et $m = 2p$, kus p on naturaalarv, ja asendades m võrduses $m^2 = 2n^2$ arvuga 2p saame, et $n^2 = 2p^2$, s.t. ka n^2 ja seega ka n on paarisarv. Kuid siis m ja n pole ühistegurita arvud, nagu eeldasime. See vastuolu näitab, et pole olemas niisugust ratsionaalarvu, mille ruut oleks 2.

Kerge on veenduda, et ratsionaalarvude hulgas ei leidu

ka paarisarvulise juurijaga juurt negatiivsest arvust, näiteks ei leidu $\sqrt{-4}$. Tõepoolest, selle arvu ruut peab olema -4, kuid ühegi ratsionaalarvu ruut ei ole negatiivne.

3. Irratsionaalarvu mõiste. Selleks et osutuks võimalikuks leida mistahes naturaalarvulise juurijaga juurt igast positiivsest arvust, on vaja ratsionaalarvude hulka täiendada uute objektidega. Sedasama nõuab ka lõikude kaudne mõõtmine (joonis 2): kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on näiteks 1 m ja 1 m, siis Pütagorase teoreemi põhjal hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala on $2m^2$ ja hüpotenuusi pikkuseks meetrites seega arv, mille ruut on 2. Seetõttu on loomulik seda arvu tähistada sümboliga $\sqrt{2}$. Analoogiliselt saame veenduda, et lõikude mõõtmine nõuab ka sümbolite $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ja paljude teiste kasutuselevõtmist arvudena.

Näitame, et arvudel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ jne. leidub ratsionaalarvude hulgas oma kindel koht. Näitena võtame esimese neist. Et $(\sqrt{2})^2 = 2$, siis $\sqrt{2}$ on suurem kui 1, kuid väiksem kui 2 (sest $1^2 = 1$, kuid $2^2 = 4$). Võttes ruutu arvud 1,1, 1,2 ... 1,9, näeme, et $\sqrt{2}$ on suurem kui 1,4, kuid väiksem kui 1,5. Jätkates seda tööd, saame järgmise tabeli:



Joonis 2.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$
jne.

Nii saame kaks lõpmatut kümnendmurdude jada, mis nähtavasti viivad ühe ja sama lõpmatu kümnendmurru juurde, mille loeme võrdseks arvuga $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421...$$

Selle kümnendmurru numbrite jada ei lõpe, sest vastasel juhul $\sqrt{2}$ oleks ratsionaalarv. Samal põhjusel see kümnendmurd ei saa olla perioodiline.

Arve, mida saab anda lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurru kujul, nimetatakse irratsionaalseteks.

Nagu $\sqrt{2}$, nii saame ka teisi juuri positiivsetest arvudest anda lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena (kui need juured pole ratsionaalarvud). Kõik sellised juured on seega irratsionaalarvud. Niisamuti saab lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena esitada ka paarituarvulise juurijaga juuri negatiivsetest arvudest, kui need juured pole ratsionaalarvud. Paarisarvulise juurijaga juuri negatiivsetest arvudest pole sellisel kujul võimalik esitada.

4. Ruutjuure ligikaudne leidmine antud täpsusega. Kui ruutjuur antud arvust on irratsionaalne või kui ta on ratsionaalne, kuid õige suure kümnendkohtade arvuga, siis arvutustes on sageli vaja asendada ta ligikaudse väärtusega, mis on võetud teatud täpsusega.

Olgu ruutjuur arvust antud kümnendmurruna ja olgu selle murdosas enam kui n kohta. Leida selle ruutjuure ligikaudne väärtus täpsusega $\frac{1}{10^n}$ tähendab ümardada seda juurt kujutav kümnendmurd murdosa n-da kohani (puuduga või liiaga vastavalt sellele, missugune on järgmine koht).

Ruutjuure ligikaudset väärtust saab leida nn. ruutjuure algoritmi abil. Kuid lihtsam on ja kiiremini viib sihile järgmine võte.

1) Leiame peast juure mingi lähendi (kuitahes jämeda) ja jagame juuritava selle esimese lähendiga. Kui jagatise ja esimese lähendi murdosades on n ühist kümnendkohta, siis nende arvude ühised kohad annavadki juure ligikaudse väärtuse täpsusega $1:10^n$.

Näide. Leida $\sqrt{5,3}$ täpsusega 0,01. Võtame esimeseks lähendiks 2,3. Jagades 5,3 arvuga 2,3, saame jagatiseks (tuhandikeni) 2,304. Võrreldes seda jagatist proovitava lähendiga, näeme, et

$$\sqrt{5,3} = 2,30$$

täpsusega 0,01 (järgmine koht on väiksem kui 4).

2) Kui eelmises punktis kirjeldatud viis ei anna juurt nõutud täpsusega, siis leiame esimese lähendi ja esimese jagatise aritmeetilise keskmise. See on juure teiseks lähendiks. Jagades juuritava juure teise lähendiga ja võrreldes jagatist teise lähendiga, näeme, kas nõutud täpsus on saavutatud või mitte.

Näide. Leida $\sqrt{5,3}$ täpsusega 0,001. Esimene lähend 2,3 ja esimene jagatis 2,304 ei anna juurt nõutud täpsusega. Leiame nende aritmeetilise keskmise: $(2,3 + 2,304):2 = 2,302$. Jagades juuritava 5,3 saadud keskmisega, saame 2,3023. Võrreldes tulemust jagajaga, näeme, et

$$\sqrt{5,3} = 2,302$$

täpsusega 0,001 (sest järgmine koht on väiksem kui 3).

3) Kui juure teine lähend ei ole küllaldase täpsusega, siis leiame aritmeetilise keskmise abil kolmanda jne., kuni nõutud täpsus on saavutatud.

M ä r k u s. Esimeseks lähendiks võtame kahekohalise, teiseks neljakohalise arvu. Kui esimene lähend pole võetud väga huupi, siis teises lähendis on tavaliselt 4, erandjuhtumil 3 õiget kohta. Iga uue lähisväärtusega õigete kohtade arv tavaliselt kahekordistub.

Näide 1. Leida $\sqrt{30}$ täpsusega 0,0001.

Olgu esimeseks lähendiks..... 5,4
Siis esimene jagatis on ..30:5,4 = 5,555
Teine lähend on..... 5,477
Teine jagatis on .....30:5,477 = 5,47745
Kolmas lähend on..... 5,47722

$$\sqrt{30} \approx 3,4772.$$

Näide 2. Leida $\sqrt{550}$ täpsusega 0,01.

Teisendame juurt nii, et juuritava täisosa oleks ühe- või kahekohaline arv:

$$\sqrt{550} = 10 \cdot \sqrt{5,5}$$

Olgu esimene lähend..... 2,4
Esimene jagatis .....5,5:2,4 = 2,292
Teine lähend..... 2,346
Teine jagatis.....5,5:2,346 = 2,3444
Kolmas lähend..... 2,3452

$$\sqrt{550} \approx 10 \cdot 2,345 \approx 23,45.$$

5. Astme mõiste üldistamine. Eespool vaatlesime astmeid positiivsete täisarvuliste astendajatega. Astme mõistet saab üldistada nii, et astendajaks võib olla iga ratsionaalarv, isegi irratsionaalarv. See teostub järgmiste definitsioonide kaudu.

1) Iga arv (välja arvatud 0) astmes 0 loetakse võrdseks arvuga 1. Niisiis $3^0 = 1$; $(\frac{4}{5})^0 = 1$; $a^0 = 1$, kui $a \neq 0$.

2) Negatiivse astendajaga astme all mõistetakse murdu, mille lugeja on 1 ja nimetaja on endise astendatavaga aste, milles astendaja on endise astendaja vastandarv.

Näiteks: 1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; 2) $(\frac{4}{5})^{-3} = \frac{1}{(\frac{4}{5})^3} = (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64}$.

Üldiselt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

3) Murrulise astendajaga astme all mõistetakse juurt, mille juurija võrdub astendajaks oleva murru nimetajaga ja juuritava astendaja võrdub selle murru lugejaga.

Näiteks: 1) $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5}$; 2) $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}$.

Üldiselt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4) Irratsionaalse astendajaga astme definitsiooni vt. Kisseljov, 'Algebra VIII-XI klassile', n°97.

Tehted astmetega, mille astendajad on ratsionaalarvud, toimuvad samade seaduste järgi, mis kehtivad astmete kohta naturaalarvuliste astendajate puhul (II, § 1, 3* ja § 4, 5).

§ 4. Nimega arvud

1. Suuruste mõõtmine. Matemaatika rakendamine tegeliku elu ülesannete lahendamisel eeldab mitmesuguste suuruste mõõtmist.

*Viide II, § 1, 3 tähendab käesoleva raamatu teise peatüki paragrahvi 1 punkti 3.

Mõõta mingi suurus tähendab kindlaks teha, mitu korda vastava suuruse ühik mahub mõõdetavasse suurusesse või missuguse osa ühikust see suurus moodustab.

Mõõtmise tulemusena saadud arvu nimetatakse selle suuruse mõõtarvuks ja mõõtarvu koos mõõtmisel kasutatud ühiku nimetusega selle suuruse väärtuseks ehk nimega arvuks.

Iga suuruse mõõtmisel on ühikuks mingi sama liiki suurus, näiteks pikkuse mõõtmisel on ühikuks mingi pikkus, pindala mõõtmisel mingi pindala ja töö mõõtmisel mingi töö. Et vältida suurte mõõtarvude kasutamise vajadust, on paljude suuruste mõõtmiseks tarvitusele võetud mitmed ühikud, mis omavahel on kooskõlastatud ja moodustavad mõõdustiku. Praegu on enamikus maades kasutusel meetermõõdustik, milles iga kahe sama liiki ühiku suhe on 10 või selle aste. Seetõttu meetermõõdustikku nimetatakse detsimaalseks. Selles mõõdustikus iga suuruse ühikute nimetused tuletatakse põhiühiku nimetusest eesliidete kaudu, mis näitavad vastava ühiku ja põhiühiku suhet. Need eesliited on järgmised (sulgudes on antud täht, mis ühiku tähise saamiseks asetatakse põhiühiku tähise ette):

mega- (M)	$= 10^6$ = miljon	detsi- (d)	$= 10^{-1}$ = kümnendik
kilo- (k)	$= 10^3$ = tuhat	senti- (c)	$= 10^{-2}$ = sajandik
hekto-(h)	$= 10^2$ = sada	milli- (m)	$= 10^{-3}$ = tuhandik
deka- (D)	$= 10^1$ = kümme	mikro- (μ)	$= 10^{-6}$ = miljondik

Eri liiki suuruste ühikuid on võimalik sel teel kooskõlastada, et suurema hulga suuruste ühikud tuletatakse vähesest arvust põhisuurusteks valitud suuruste ühikutest. Võttes näiteks pindalaühikuks niisuguse ruudu pindala, mille külg on 1 m või ruumalaühikuks niisuguse kuubi ruumala, mille serv on 1 m, ja nimetades neid vastavalt 1 ruutmeetriks ja 1 kuupmeetriks, oleme pindala- ja ruumalaühiku tuletanud pikkusühikust.

Sõltuvalt sellest, missugused suurused võetakse põhisuurusteks teiste suuruste mõõtmisel, on võimalik saada mitmesuguseid mõõtühikute süsteeme. Üldtuntud on näiteks möödunud sajandi keskpaiku kasutuselevõetud sentimeeter-gramm-sekundsüsteem (lühendatult CGS-süsteem), milles kõik ühikud on tuletatud süsteemi nimetuses esinevast kolmest ühikust.

Avaldist, mis näitab, kuidas mingi suuruse ühikud on tuletatavad mõõtühikute süsteemi põhisuurustest, nimetatakse selle suuruse dimensiooniks.

Kui süsteemi põhisuurusteks võtta näiteks pikkus (ℓ), mass (m) ja aeg (t), siis pindala dimensioon on ℓ^2, kiiruse dimensioon on $\frac{\ell}{t} = \ell \cdot t^{-1}$, kiirenduse dimensioon on $\frac{\ell}{t^2}$, jõu dimensioon on $\frac{\ell \cdot m}{t^2} = m \cdot \ell \cdot t^{-2}$ jne. Dimensiooni mõistet ei tule samastada suuruse ühikute nimetustega: dimensioon on kõigi sama suuruse ühikute ühise struktuuri näitaja antud süsteemis. Et kiiruse dimensiooniks on $\frac{\ell}{t}$, s.t. $\frac{\text{pikkus}}{\text{aeg}}$, siis kiiruse ühikuteks saavad olla näiteks $\frac{cm}{sec}$, $\frac{km}{h}$, $\frac{km}{sec}$ ja muud.

Dimensiooni mõiste on heaks vahendiks suuruste väärtusi sisaldavate võrduste kehtivuse kontrollimisel: selle mõlemal poolel peab olema üks ja sama dimensioon.

2. Tehted nimega arvudega. Sooritades tehteid nimega arvudega (suuruste väärtustega), milledest igaühel on ainult üks nimetus, jäetakse lihtsamatel juhtudel nimetused andmete juurde kirjutamata ja märgitakse see ainult tulemuse juurde. Näiteks kui keha liigub kiirusega $5\ \frac{m}{sec}$, siis 4 sekundiga läbitud tee pikkuse arvutame järgmiselt: $4 \cdot 5 = 20$ (m). Sama ülesannet võib lahendada ka kujul

$$4\ sec \cdot 5\ \frac{m}{sec} = 20\ \frac{sec.m}{sec} = 20\ m.$$

Viimane lahendusviis on tarvilik seal, kus andmete hulgas esinevad keerukamate dimensioonidega suuruste väärtused. Kontrolli huvides ja tulemuse dimensiooni määramiseks on neil juhtudel kasulik teha operatsioon ka nimetustega.

Kui tehetes esinevad arvud on mitmenimelised, siis on nimetuste kirjutamine tehete sooritamisel möödapääsematu. Näiteks, kui tuleb liita kaks ajavahemikku (ja me ei soovi neid teisendada ühenimelisteks): 3 päeva 4 tundi 37 minutit ja 2 päeva 22 tundi 53 minutit, siis kasutame järgmist skeemi:

3 d	4 h	37 m	
2 d	22 h	53 m	
5 d	26 h	90 m	
6 d	3 h	30 m	

Kus mitmenimeliste andmete teisendamine ühenimelisteks ei too kaasa tunduvat lisatööd, seal on soovitav mitmenimelised andmed asendada ühenimelistega.

3. Protsendid. Kõikidest murdudest leiavad tegelikus elus kõige sagedamini rakendamist sajandikud ehk protsendid:

$$1\ \% = 0{,}01 = \frac{1}{100};\quad 75\ \% = 0{,}75 = \frac{3}{4};\quad 150\ \% = \frac{150}{100} = 1{,}5.$$

Neid kasutatakse peamiselt mitmesuguste andmete (suuruste) võrdlemiseks, näiteks kahe suuruse suhte väljendamiseks, aga ka osa leidmiseks mingist tervikust ja terviku määramiseks osa järgi. Neid protsentarvutuse kolme põhiülesannet lahendame järgmiselt.

1) Kahe arvu m ja n suhte $\frac{m}{n}$ väljendamiseks protsentides jagame esimese arvu teisega (kuni tuhandikeni, kui jagamine varem ei lõpe) ja kirjutame tulemuse protsentides.

Näiteks arvude 5 ja 7 suhe on 5:7 = 0,714 = 71,4 %.

2) Protsentides antud osa leidmiseks antud arvust korrutame selle arvu antud osamääraga.

Näiteks 65 % arvust 4850 on

$$65\ \% \cdot 4850 = 65 \cdot 48{,}5 = 3152{,}5 \approx 3200.$$

3) Terviku leidmiseks tema protsentides antud osa järgi jagame antud osa antud osamääraga.

Näiteks, kui 35 % arvust on 280, siis arv on

$$280 : 35\% = 28000 : 35 = 4000 : 5 = 800.$$

Protsentülesannete lahendamisel tuleb alati silmas pidada seda, missugusest suurusest on protsendid võetud ehk mis on 100 %. Kui on näiteks teada, et mingil autobussiliinil ühel kuul sõitjate arv vähenes 50 % võrra ja järgmisel kuul suurenes 50 % võrra, siis oleks ekslik arvata, et sõitjate arv saavutas endise taseme: sõitjate arvu suurenemine 50 % võrra on arvutatud eelmise kuu vähenenud sõitjate arvu alusel ja moodustab seega ainult

$$50\% \cdot (100\% - 50\%) = 50\% \cdot 50\% = 25\%$$

üle-eelmise kuu sõitjate arvust, s.t. sõitjate arv saavutas

$$50\% + 25\% = 75\%$$

üle-eelmise kuu tasemest.

4. Võrdeline jaotamine. Jaotada antud arv N võrdeliselt

antud arvudega a, b, c, ..., k tähendab jaotada antud arv osadeks, mis suhtuvad nagu antud arvud a, ..., k.

Otsitavad osad A, B C, ..., K peavad olema võrdelised arvudega a, b, c, ..., k. Tähistades võrdeteguri tähega t, saame seosed:

$$A = at, \quad B = bt, \quad C = ct, \quad \ldots \quad K = kt.$$

Nende vastavate poolte liitmisel saame:

$$A + B + C + \ldots + K = at + bt + ct + \ldots + kt$$

ehk, et saadud osade summa peab võrduma jaotatava arvuga,

$$N = (a + b + c + \ldots + k)\, t,$$

millest

$$t = \frac{N}{a + b + c + \ldots + k} = \frac{N}{n},$$

kus $n = a + b + c + \ldots + k$.

Teades võrdetegurit t, saame:

$$A = \frac{Na}{n}, \quad B = \frac{Nb}{n}, \quad C = \frac{Nc}{n}, \quad \ldots, K = \frac{Nk}{n}.$$

Näide. Kui kuivendustööde kulu 480000 rbl. jaotada kolme kolhoosi vahel võrdeliselt neile kolhoosidele kuuluvate kuivendatavate aladega 300 ha, 800 ha ja 400 ha, siis vastavalt tuleb tasuda

esimesel kolhoosil $\frac{480000 \cdot 300}{300 + 800 + 400} = 320 \cdot 300 = 96000$ rbl.;

teisel kolhoosil $\frac{480000 \cdot 800}{300 + 800 + 400} = 320 \cdot 800 = 256000$ rbl.;

kolmandal kolhoosil $\frac{480000 \cdot 400}{300 + 800 + 400} = 320 \cdot 400 = 128000$ rbl.

§ 5. Reaalarvud

1. Reaalarvu mõiste. Teatavasti iga irratsionaalarvu saab esitada lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna ja, ümberpöördult, iga selline kümnendmurd on irratsionaalarv. Kuid ka iga ratsionaalarvu saab anda lõpmatu kümnendmurruna, nimelt perioodilise kümnendmurruna:

$3 = 3{,}000\ldots$ või $3 = 2{,}999\ldots$; $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 0{,}3999\ldots = 0{,}4000$.

$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ jne.

Seega kõiki meile tuntud arve saab esitada lõpmatute kümnendmurdudena. Anname neile ka ühise nimetuse:

kõiki ratsionaal- ja irratsionaalarve koos nimetatakse reaalarvudeks.

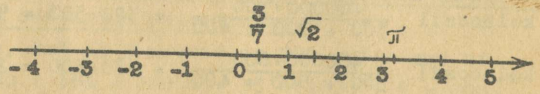
Reaalarvudel on järgmised tähtsad omadused:

1) reaalarve saab järjestada suuruse järgi, s.t. iga kahe reaalarvu a ja b kohta kehtib üks kolmest väitest:

$$a < b \quad \text{või} \quad a = b \quad \text{või} \quad a > b;$$

2) reaalarvude vallas on neli põhitehet alati teostatavad (välja arvatud jagamine nulliga), s.t. kahe reaalarvu a ja b summa, vahe, korrutis ja jagatis (viimane juhtumil, kui $b \neq 0$) on reaalarv.

2. Arvsirge. Näitame, et reaalarve saab kujutada ühe ja sama sirge punktidena. Selleks võtame sirge, loeme selle ühe punkti nullpunktiks, nimetame sirge kahest vastandsuunast ühe, näiteks suuna paremale, positiivseks ja teise negatiivseks, lõpuks valime ühiku. Kui nüüd selle ühiku kanname nullpunktist 1, 2, 3 jne. korda paremale ja vasakule poole (joonis 3),siis paremal nullpunktist saame positiivseid, vasakul negatiivseid täisarve kujutavad punktid. Kasutades lõigu võrdseteks osadeks



Joonis 3.

jaotamise konstruktsiooni, saab arvsirgel märkida iga ratsionaalarvule $r = \frac{m}{n}$ (m ja n - ühistegurita täisarvud) vastava punkti. Need punktid täidavad arvsirge tihedalt (s.t. iga kahe punkti vahel leidub kuitahes palju ratsionaalarve kujutavaid punkte), kuid ei täida pidevalt, s.t. arvsirgel leidub punkte, millele ei vasta ühtki ratsionaalarvu (joonis 2). Kujutleme nüüd, et arvsirgel on kujutatud ka kõik irratsionaalarvud punktidena. Mõnda neist, nagu $\sqrt{2}$, saame kujutada täpse konstruktsiooni abil, teiste kujutamist aga saame ainult lõpmatu protsessina mõelda, kui need arvud esitame kümnendmurdudena: $\pi = 3{,}1415926...$; $\log 5 = 0{,}6989...$; $\sin 5^\circ = 0{,}0872...$

Saab tõestada, et nüüd on sirge täidetud punktidega pidevalt: igale arvsirge punktile vastab üks reaalarv (ratsionaal-

ne või irratsionaalne). Et ühtlasi ka igale reaalarvule vastab arvsirgel üks punkt, siis öeldakse, et reaalarvude ja arvsirge punktide vahel kehtib üksühene vastavus.

3. Reaalarvu absoluutväärtus. Positiivse arvu absoluutväärtuseks on see arv ise. Negatiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse selle arvu vastandarvu. Arvu 0 absoluutväärtus on 0.

Arvu a absoluutväärtust märgitakse sümboliga $|a|$, näiteks:

$$\left|7\tfrac{1}{2}\right| = 7\tfrac{1}{2}; \quad |-13{,}3| = 13{,}3; \quad |0| = 0;$$

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{kui } a-b \geq 0 \\ b-a, & \text{kui } a-b < 0; \end{cases} \quad |a+b| = \begin{cases} a+b, & \text{kui } a+b \geq 0 \\ -a-b, & \text{kui } a+b < 0. \end{cases}$$

4. Aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine. Sageli on vaja mingit n arvust koosnevat arvudehulka (näiteks ühe klassi õpilaste pikkusi)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

iseloomustada mingi üheainsa arvuga. Selleks kasutatakse nn. keskmisi arve, milledest tähtsamad on aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine:

1) arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse jagatist

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n};$$

2) arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geomeetriliseks keskmiseks nimetatakse juurt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}.$$

Viimast keskmise mõistet kasutatakse ainult positiivsete arvude puhul.

Vaatleme ainult kaht arvu:

kahe arvu aritmeetiline keskmine võrdub arvude poolsummaga ja geomeetriline keskmine võrdub ruutjuurega arvude korrutisest.

Saab tõestada, et kui arvud pole võrdsed, siis aritmeetiline keskmine on suurem geomeetrilisest keskmisest.

§ 6. Kompleksarvud

1. Kompleksarvu mõiste. Kui piirduksime ainult reaalarvudega, oleks juurimine mõnikord võimatu, näiteks siis, kui ruutjuure märgi all on negatiivne arv. Niisuguse, matemaatika kui teaduse seisukohalt vastuvõtmatu olukorra kõrvaldamiseks tuleb arvude hulka täiendada veel uute objektidega. Selleks defineerime esmalt nn. imaginaarse ühiku i võrduse abil

$$i^2 = -1$$

ja moodustame avaldise

$$a + bi,$$

kus a ja b on mistahes reaalarvud. Seda avaldist nimetame kompleksarvuks, kusjuures arvu a nimetame kompleksarvu reaalosaks, arvu bi kompleksarvu imaginaarosaks ja arvu b imaginaarosa kordajaks.

On ilmne, et reaalarv on kompleksarvu erijuhtum: kui b = 0, siis on loomulik, et ka bi = 0, seega a + bi = a. Kui b ≠ 0, siis kompleksarvu nimetame imaginaararvuks ja erijuhtumil, kui a = 0, puhtimaginaararvuks. Niisiis, kompleksarvud jaotuvad kahte liiki: reaalarvud (kui b = 0) ja imaginaararvud (kui b ≠ 0). Viimased ongi need arvud, millega laiendasime reaalarvude hulka.

Uues, laiendatud arvuvallas saab leida ruutjuurt igast negatiivsest arvust, näiteks $\sqrt{-9} = \sqrt{9i^2} = \pm 3i$. Ühenduses sellega igal reaalsete kordajatega ruutvõrrandil leidub kaks lahendit (mis mõnikord on võrdsed).

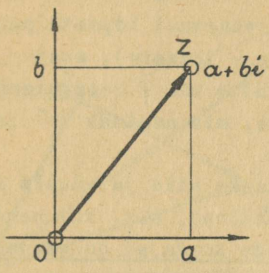
Näited. 1) $x^2 - 6x + 5 = 0$; $x = 3 \pm 2$;

2) $x^2 - 6x + 13 = 0$; $x = 3 \pm 2i$.

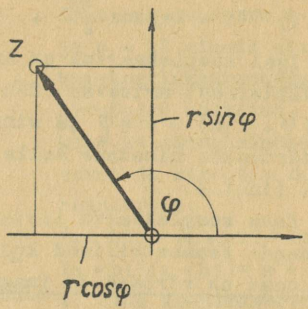
2. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine ja trigonomeetriline kuju. Kompleksarvude kujutised ühele sirgele ei mahu, sest selle täidavad reaalarvude kujutised.

Kompleksarvude geomeetriliseks kujutamiseks võtame tasapinna ja sellel kaks koordinaattelge. Kompleksarvu a + bi saame kujutada nüüd selle tasapinna punktina, mille abstsiss on reaalosa a ja ordinaat on imaginaarosa kordaja b (joonis 4).

Reaalarve kujutavad punktid asetsevad siis abstsisside (reaalteljel), puhtimaginaararve kujutavad punktid ordinaatteljel (imaginaarteljel) ja muid imaginaararve kujutavad punktid väljaspool neid telgi.



Joonis 4.



Joonis 5.

Kompleksarvu saame geomeetriliselt kujutada veel teisiti, nimelt vektorina $\vec{OZ}$, mis läheb punktist O (0;0) punkti Z (a;b). Selle vektori (joonis 4) projektsioon abstsisstelje on reaalosa a ja projektsioon ordinaatteljel on imaginaarosa kordaja b.

Tähistades nurka reaaltelje positiivse suuna ja kompleksarvu kujutava vektori vahel tähega φ ja vektori pikkust tähega r, saame, et a ja b igasuguste väärtuste puhul (joonis 5)

$$a = r \cos \varphi \quad \text{ja} \quad b = r \sin \varphi,$$

mistõttu kompleksarvule saab anda järgmise, nn. trigonomeetrilise kuju:

$$a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Arvu r nimetatakse kompleksarvu mooduliks ja φ argumendiks. Jooniselt on kerge näha, et

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ja} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}, \quad \text{kui } a \neq 0.$$

Nurga φ üheseks määramiseks tema tangensi põhjal tuleb silmas pidada veel a või b märki. Kui a = 0, siis b > 0 puhul $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ja b < 0 puhul $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Näited.

1) Anname trigonomeetrilisel kujul kompleksarvu $z = -3 + 4i$.

Siin a = -3, b = 4, seega $r = \sqrt{25} = 5$ ja $\tan \varphi = -\frac{4}{3}$.

Et $a < 0$, siis $\varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 180^\circ - 53^\circ10' = 126^\circ50'$ ja
$-3 + 4i = 5\,(\cos 126^\circ50' + i \sin 126^\circ50')$.

2) $-1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\pi + i\sin\pi$.

3) $-i = 1\cdot(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

Igal kompleksarvul on argumendi väärtusi lõpmata palju, mis üksteisest erinevad $2\pi n$ võrra (n - täisarv), sest $\cos(\varphi + 2\pi n) = \cos\varphi$ ja $\sin(\varphi + 2\pi n) = \sin\varphi$. Argumendi peaväärtuseks nimetame selle väärtuse, mis asetseb $-\pi$ ja $+\pi$ vahel (incl.).

Kaks kompleksarvu loetakse võrdseks siis ja ainult siis, kui nende geomeetrilised kujutised ühtivad, s.t. kui nende reaalosad on võrdsed ja imaginaarosade kordajad on võrdsed:

$$a + bi = c + di, \quad \text{kui} \quad a = c \quad \text{ja} \quad b = d.$$

3. Neli põhitehet algebralisel kujul antud kompleksarvudega. Tehted kompleksarvudega defineeritakse nii, et jääksid püsima reaalarvude puhul kehtivad arvutamise põhiseadused, milledele lisandub imaginaarse ühiku definitsioon $i^2 = -1$. Neid seadusi rakendades saame järgmised eeskirjad.

1) $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$.

Näide: $(3 - 5i) + (6 + 9i) = 9 + 4i$.

2) $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$.

Näide: $(3 - 5i) - (6 + 9i) = -3 - 14i$.

Niisiis, kahe kompleksarvu summa (vahe) reaalosa ja imaginaarosa kordaja võrdub vastavalt komponentide reaalosade ja imaginaarosade kordajate summaga (vahega).

Geomeetriliselt saame kahe kompleksarvu summat ja vahet tõlgendada antud vektoritele ehitatud rööpküliku diagonaalvektoritena, mille suund on sobivalt valitud (joonis 6): kui

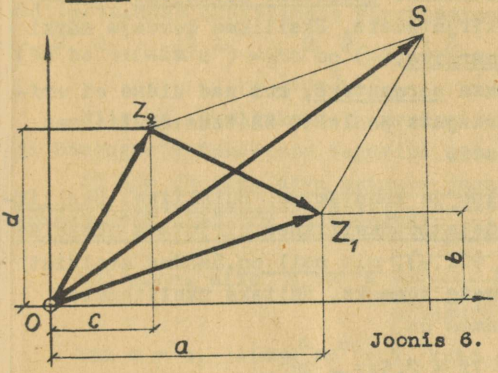
$$a + bi = \vec{OZ}_1, \quad c + di = \vec{OZ}_2, \quad \text{siis}$$

$$(a + bi) + (c + di) = \vec{OZ}_1 + \vec{OZ}_2 = \vec{OS};$$

$$(a + bi) - (c + di) = \vec{OZ}_1 - \vec{OZ}_2 = \vec{Z_2Z_1}, \text{ sest}$$
$$\vec{OZ}_2 + \vec{Z_2Z_1} = \vec{OZ}_1.$$

3) $(a + bi)(c + di) = ac + bic + adi + bidi = \underline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$.

Näide: $(4 - 3i)(2 + 5i) = (8 + 15) + (20 - 6)i = 23 + 14i$.



Joonis 6.

Kaht kompleksarvu $a + bi$ ja $a - bi$ nimetatakse kaaskompleksarvudeks. Arvutused näitavad, et kahe kaaskompleksarvu summa ja korrutis on reaalarvud:

$(a + bi) + (a - bi) = 2a$,

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

4) Kahe kompleksarvu $a + bi$ ja $c + di$ jagamise saab taandada kompleksarvu ja reaalarvu jagamisele, kui jagatav ja jagaja korrutada jagaja kaaskompleksarvuga:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Lugedes kehtivaks summa jagamise seaduse, saame:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Näide: $\dfrac{3 + 4i}{2 - 5i} = \dfrac{6 - 20}{4 + 25} + \dfrac{8 + 15}{4 + 25}\,i = -\dfrac{14}{29} + \dfrac{23}{29}\,i$.

II. ALGEBRALISTE AVALDISTE TEISENDAMINE

§ 1. Tehted üksikliikmetega ja hulkliikmetega

1. Üksliige. Üksliikmeks nimetatakse iga astet ja astmete korrutist, kus astendatavateks on arvud või tähed ja astendajateks on naturaalarvud.

Näited: $5; -\frac{3}{4}x; 3{,}14r^2; 7ab^3; ax^3y^2$.

Üksliikmes esinevat numbrilist tegurit (kui seal leidub ka tähelisi tegureid) nimetatakse üksliikme kordajaks. Kordaja 1 jäetakse tavaliselt kirjutamata. Üksliikme kordaja märki nimetatakse ka üksliikme märgiks.

Üksliikmeid nimetatakse sarnasteks, kui nad üldse ei erine või erinevad ainult kordajate poolest. Näiteks üksliikmed $4a^5$, $-5a^5$ ja $\frac{3}{5}a^5$ on sarnased.

2. Üksliikmete liitmine ja lahutamine. Hulkliige. Üksliikmete liitmiseks tuleb liidetavad üksliikmed kirjutada üksteise järele nende märkidega (+ või -), mis neil on. Saadud avaldist nimetatakse antud üksliikmete summaks. Näiteks üksliikmete $3x^2$, $-7x$, $2{,}5xy$ ja $-2x^2$ summa on

$$3x^2 - 7x + 2{,}5xy - 2x^2.$$

Üksliikmete lahutamiseks üksliikmest tuleb lahutatavad üksliikmed kirjutada vähendatava järele vastandmärkidega. Saadud avaldist nimetatakse üksliikmete vaheks. Näiteks üksliikmete $-7x$, $2{,}5xy$ ja $-2x^2$ lahutamisel üksliikmest $3x^2$ saame vahe

$$3x^2 + 7x - 2{,}5xy + 2x^2.$$

Üksliikmete summasid ja vahesid, lühemalt üksliikmete algebralisi summasid, nimetatakse hulkliikmeteks ehk polünoomideks. Neis esinevaid üksliikmeid (koos üksliikme ees oleva märgiga) nimetatakse hulkliikme liikmeteks. Hulkliikmes võib liikmete järjekorda muuta. See asjaolu võimaldab hulkliiget koondada, s.t. asendada sarnased liikmed üheainsa liikmega, mille kordaja võrdub asendatavate liikmete kordajate summaga.

Näide:

$$2x - 9xy - 5x + 6x^3 - 3xy + 4x^3 - 7x + xy =$$
$$= 6x^3 + 4x^3 - 9xy - 3xy + xy + 2x - 5x - 7x = 10x^3 - 11xy - 10x.$$

3. Üksliikmete korrutamine, jagamine ja astendamine. Üksliikmete korrutamiseks ja jagamiseks tuleb osata korrutada ja jagada kõige lihtsamaid üksliikmeid, s.o. ühe ja sama arvu astmeid.

1) Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots}_{m\text{ tegurit}}\,\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tegurit}} = a^{m+n}.$$

Korrutise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse tõttu taandub üksliikmete korrutamine astmete korrutamiseks:

$$(5a^2bc^2)\cdot(-2a^3c^4) = 5a^2bc^2(-2)a^3c^4 = 5\cdot(-2)(a^2a^3)b(c^2c^4) = -10a^5bc^6.$$

Niisiis, üksliikmete korrutamisel kordajad korrutatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liidetakse.

2) Ühe ja sama arvu astmete jagamisel jagaja astendaja lahutatakse jagatava astendajast:

kui $m > n$, siis $a^m:a^n = \dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\text{ tegurit}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tegurit}}} = \dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\text{ tegurit}}}{1} = a^{m-n}$;

kui $m = n$, siis $a^m:a^n = 1$, kuid sel juhtumil ka $a^{m-n}=a^0=1$;

kui $m < n$, siis $a^m:a^n = \dfrac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-m\text{ tegurit}}} = \dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$.

See reegel on seega kehtiv m ja n igasuguste naturaalarvuliste väärtuste puhul.

Asendades korrutiste jagatise tegurite jagatiste korrutisega, saame üksliikmete jagamise taandada astmete jagamiseks:

1) $4a^5b^2 : (-3ab) = \dfrac{4}{-3}\cdot\dfrac{a^5}{a}\cdot\dfrac{b^2}{b} = -\dfrac{4}{3}a^4b.$

2) $5a^3b : (-2ab^3c) = \dfrac{5}{-2}\cdot\dfrac{a^3}{a}\cdot\dfrac{b}{b^3}\cdot\dfrac{1}{c} = -\dfrac{5}{2}a^2b^{-2}c^{-1}.$

Kui jagaja mõne tähelise teguri astendaja on suurem kui sama tähe astendaja jagatavas, siis üksliikmete jagatis ei ole enam üksliige, vaid algebraline murd (nagu viimases näites).

3) Üksliikme astendamine naturaalarvuga toimub korrutise astendamise ja astme astendamise reegli alusel.

Korrutise astendamisel astendatakse iga tegur eraldi ja saadud astmed korrutatakse:

$$(ab)^n = \underbrace{ab\cdot ab\cdot\ldots\cdot ab}_{n\text{ tegurit}} = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tegurit}}\cdot\underbrace{bb\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ tegurit}} = a^nb^n.$$

Astme astendamisel astendajad korrutatakse:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\ldots a^m}_{n\text{ tegurit}} = \underbrace{a^{m+m+\ldots+m}}_{n\text{ liidetavat}} = a^{mn}.$$

Üksliikme astendamisel astendatakse iga tegur eraldi ja tulemused korrutatakse:

$$(-2a^2b^3c)^3 = -8a^6b^9c^3.$$

4. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine. Et hulkliikmed on algebralised summad, siis toimub hulkliikme liitmine hulkliikmega ja hulkliikme lahutamine hulkliikmest nagu summa liitmine summaga ja summa lahutamine summast:

hulkliikmete liitmisel tuleb nende kõik liikmed koos märkidega kirjutada üksteise järele ja koondada saadud hulkliige, kui sel leidub sarnaseid liikmeid;

hulkliikme lahutamisel tuleb vähendatava järele kirjutada lahutatava hulkliikme kõik liikmed vastandmärkidega ja koondada saadud hulkliige, kui sel leidub sarnaseid liikmeid.

Näited: 1) $(8x^2 - 5x + 6) + (4x^2 + 3x - 7) =$

$= 8x^2 - 5x + 6 + 4x^2 + 3x - 7 = 12x^2 - 2x - 1.$

2) $(8x^2 - 5x + 6) - (4x^2 + 3x - 7) =$

$= 8x^2 - 5x + 6 - 4x^2 - 3x + 7 = 4x^2 - 8x + 13.$

5. Hulkliikme korrutamine üksliikmega ja hulkliikmega. Et hulkliige on algebraline summa, siis hulkliikme korrutamine nii üksliikmega kui ka hulkliikmega toimub summa korrutamise seaduse (korrutamise distributiivsuse seaduse) alusel.

Hulkliikme korrutamisel üksliikmega tuleb hulkliikme iga liige korrutada selle üksliikmega ja saadud korrutised liita.

Näide: $4x^2(3x^3y - 5x^2y^3 - 7x) = 12x^5y - 20x^4y^3 - 28x^3.$

Hulkliikme korrutamisel hulkliikmega tuleb ühe hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita.

Näide: $(5x^2 - x + 1)(x - 1) = 5x^3 - x^2 + x - 5x^2 + x - 1 =$

$= 5x^3 - 6x^2 + 2x - 1.$

6. Hulkliikmete korrutamise abivalemid. Avaldiste kiiremaks teisendamiseks on kasulik järgmised hulkliikmete korrutised kindlalt meeles pidada.

1) Kahe arvu summa ruut: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

2) Kahe arvu vahe ruut: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

3) Kahe arvu summa kuup: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

4) Kahe arvu vahe kuup: $(a - b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5) Kahe arvu summa ja vahe korrutis: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

6) Korrutis, mille üheks teguriks on kahe arvu summa ja teiseks samade arvude vahe mittetäielik ruut: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

7) Korrutis, mille üheks teguriks on kahe arvu vahe ja teiseks nende arvude summa mittetäielik ruut: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Nende valemite kahtivust on kerge kontrollida otsese korrutamise teel. Nende valemite kergemaks meelespidamiseks on kasulik tähele panna, et esimesest valemist saab teise, kolmandast neljanda ja kuuendast seitsmenda, kui neis arv b asendada arvuga -b.

7. Hulkliikme jagamine üksliikmega ja hulkliikmega. Hulkliikme jagamine üksliikmega toimub nagu summa jagamine arvuga.

Hulkliikme jagamisel üksliikmega tuleb hulkliikme iga liige jagada üksliikmega ja tulemused liita.

Näiteks: $(15x^4 - 8x^3 + 6x^2):3x^2 = 5x^2 - \frac{8}{3}x + 2$.

Kui hulkliikme iga liige ei jagu üksliikmega, siis jagatiseks on algebraline murd (segaavaldis):

$$(15x^4 - 8y + 6x^2) : 3x^2 = 5x^2 - \frac{8y}{3x^2} + 2.$$

Jagada hulkliige hulkliikmega tähendab leida niisugune hulkliige, millega jagajat korrutades saame jagatava (kui selline hulkliige leidub).

Vaatleme ainult ühe ja sama tähe hulkliikmete jagamist. See toimub järgmiselt (nagu mitmekohalise arvu jagamine mitmekohalise arvuga):

1) korrastame hulkliikmed neis esineva tähe kahanevate astendajate järjekorras;

2) leiame jagatise kõrgeima liikme, jagades jagatava kõrgeima liikme jagaja kõrgeima liikmega;

3) leiame esimese jäägi, korrutades jagatise kõrgeima liikme jagajaga ja lahutades selle korrutise jagatavast;

4) leiame jagatise teise liikme, jagades esimese jäägi kõrgeima liikme jagaja kõrgeima liikmega;

5) jätkame jagatise liikmete leidmist kirjeldatud viisil, kuni jäägi kõrgeima liikme aste on madalam jagaja kõrgeima liikme astmest.

Kui viimane jääk ei ole 0, siis antud hulkliige jäägita ei jagu antud jagajaga.

Näide:
$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 7x - 2 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{6x^4 + 9x^3 - 3x^2} & 3x^2 - x + 2 \\ -2x^3 + x^2 + 7x - 2 & \\ \underline{-2x^3 - 3x^2 + x} & \\ 4x^2 + 6x - 2 & \\ \underline{4x^2 + 6x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Kui antud jagatava viimased kaks liiget oleksid näiteks $8x - 5$, siis viimane jääk oleks $x - 3$.

Nagu arvude puhulgi on jagatav $P(x)$, jagaja $Q(x)$, jagatis $T(x)$ ja jääk $R(x)$ seotud järgmiselt:

$$P(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x),$$

s.t. jagatava saame, kui jagaja ja jagatise korrutisega liidame jäägi. Sel puhul

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} .$$

§ 2. Hulkliikme lahutamine tegureiks

1. Tegureiks lahutamise lihtsamad võtted. Hulkliikme teisendamist korrutiseks nimetatakse hulkliikme tegureiks lahutamiseks. Tegureiks lahutamine loetakse lõpetatuks, kui hulkliige on esitatud korrutisena, milles hulkliikmelisi tegureid enam ei saa tegureiks lahutada. Hulkliikme teguritena võivad esineda ka üksliikmed.

Hulkliikme tegureiks lahutamise lihtsamad võtted on järgmised.

1) Teguri toomine sulgude ette: kui hulkliikme kõik liikmed sisaldavad ühise teguri, siis kirjutatakse see sulgude ette, kusjuures sulgudesse jääb antud hulkliikme ja sulgude ette viidava üksliikme jagatis.

Näide: $2x^3a - 4x^2a^2 - 2x^2a = 2x^2a(x - 2a - 1)$.

2) Liikmete rühmitamine: kui hulkliikmete üksikud liikmete rühmad omavad ühiseid tegureid, mille toomisel sulgude ette osutuvad sulgudes seisvad avaldised samasteks, siis selle ühise avaldise saab omakorda tuua sulgude ette.

Näide: $2ab - ac + c^2 - 2bc = a(2b - c) - c(2b - c) =$

$= (2b - c)(a - c)$.

3) Korrutise abivalemite kasutamine: vahetades korrutamise abivalemites (II, § 1, 6) valemi pooled, saame abivalemid tegureiks lahutamiseks; näiteks kahe arvu summa ja vahe korrutise valemist saame valemi ruutude vahe tegureiks lahutamiseks, s.o. valemi $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Näited: 1) $9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$.

2) $4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2$.

3) $16x^3 - 54a^3b^3 = 2(8x^3 - 27a^3b^3) =$

$= 2\,[(2x)^3 - (3ab)^3] = 2(2x - 3ab)(4x^2 +$

$+ 6abx + 9a^2b^2)$.

Tavaliselt tuleb hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada mitut võtet.

2. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks. Ruutkolmliikmeks nimetatakse avaldist $ax^2 + bx + c$ (mille erijuhtumiks on $x^2 + px + q$). Ruutkolmliikme lahutamisel tegureiks saab kasutada rühmitamisvõtet.

Näide: $x^2 + 8x + 12 = x^2 + 6x + 2x + 12 = x(x + 6) + 2(x+6) =$

$= (x + 2)(x + 6)$.

Tuletame valemi ruutkolmliikme tegureiks lahutamiseks. Olgu ruutkolmliikme $x^2 + px + q$ nullkohtadeks x_1 ja x_2. Siis Vieta teoreemi põhjal (III, § 4, 4)

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{ja} \quad q = x_1x_2.$$

Seega ruutkolmliige lahutub tegureiks järgmiselt:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x +$$
$$+ x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Kui ruutkolmliikmes $ax^2 + bx + c$ viia esmalt kordaja a sulgude ette, siis sulgudesse jääb taandatud ruutkolmliige, mille tegurid oleme juba leidnud:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Näide: Lahutada tegureiks $3x^2 + 4x + 1$.
Leiame kolmliikme nullkohad:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0;$$
$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{4-3}}{3};$$
$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = -1.$$

Kolmliige lahutub tegureiks järgmiselt:

$$3x^2 + 4x + 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x + 1) = (3x + 1)(x + 1).$$

Kui kolmliikme nullkohad on imaginaarsed, siis kolmliige reaalseiks tegureiks ei lahutu.

3. Bezout' teoreem hulkliikme jaguvusest binoomiga x - a

Hulkliikme jagamisel binoomiga huvitab meid sageli vaid küsimus, kas hulkliige jagub binoomiga või mitte, ja kui ei jagu siis milline on jääk. Jäägi määramiseks kasutatakse Bezout' teoreemi:

tähe x hulkliikme jagamisel binoomiga x - a, kus a on mitahes arv, tekib jääk, mis on võrdne hulkliikme selle väärtusega, mis vastab x väärtusele a.

Tähe x hulkliikmeks ehk polünoomiks nimetatakse teatavasti avaldist

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

kus n on naturaalarv. Tähistame polünoomi sümboliga p(x) (mida loeme "x-i polünoom p") ja polünoomi väärtuse, kui x = a, sümboliga p(a) (mida loeme "polünoomi p väärtus kohal a"). Polünoomi jagamisel binoomiga x - a saame jagatiseks polünoomi

$p_1(x)$, mis on ühe võrra madalama astmega kui $p(x)$, ja jäägiks mingi arvu R:

$$p(x):(x - a) = p_1(x) + \frac{R}{x - a},$$

seega

$$p(x) = (x - a)p_1(x) + R.$$

Viimane võrdus on samasus, s.t. ta kehtib x iga väärtuse puhul, seega ka juhul kui x = a. Asendades x arvuga a, saame:

$$p(a) = (a - a)p_1(a) + R,$$

millest

$$R = p(a),$$

nagu oligi vaja tõestada.

Kui polünoom jagub binoomiga x - a, siis R = 0, seega p(a) = 0. Ümberpöördult, kui p(a) = 0, siis polünoom jagub binoomiga x - a. Kui oleme leidnud niisuguse omadusega arvu a, siis

$$p(x) = (x - a)p_1(x).$$

Edasi uurime polünoomi $p_1(x)$ jaguvust. Kui $p_1(x)$ jagub binoomiga x - b ja jagatiseks on $p_2(x)$, siis ka p(x) jagub selle binoomiga ja

$$p(x) = (x - a)(x - b)p_2(x),$$

kus $p_2(x)$ on kahe võrra madalama astme polünoom. Nii saame tööd jätkata, kuni polünoomi teguriteks lahutamine on lõpetatud.

Näited: 1) Lahutada tegureiks $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

Proovides selgub, et p(1) = 0, p(-1) = 0, p(2) = 0 ja p(-3) = 0. Seega

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3).$$

2) Lahutada tegureiks $3x^3 + 11x^2 - 40x + 12$.

Proovides x väärtusi ± 1, ± 2, leiame, et p(2) = 0, tähendab polünoom jagub binoomiga x - 2. Jagades polünoomi selle binoomiga saame jagatiseks trinoomi $3x^2 + 17x - 6$. Viimase teguriteks lahutamiseks leiame vastava ruutvõrrandi lahendamisel tema nullkohad. Et need on $\frac{1}{3}$ ja -6, siis

$$3x^3 + 11x^2 - 40x + 12 = 3(x - \tfrac{1}{3})(x + 6)(x - 2) = (3x - 1)(x + 6)(x - 2).$$

3) Lahutada tegureiks $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Proovides leiame, et polünoomi üheks nullkohaks on -2. Jagades polünoomi binoomiga $x + 2$, saame jagatiseks $x^2 + x + 1$. Viimane reaalseiks tegureiks ei lahutu, sest tema diskriminant

$$(\tfrac{p}{2})^2 - q = \tfrac{1}{4} - 1 < 0.$$

Seega

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1).$$

§ 3. Algebralised murrud

1. Algebralise murru mõiste. Algebraliseks murruks nimetatakse kahe algebralise avaldise jagatist.

Näited murdudest:

$$\frac{m}{n};\quad \frac{a - b}{c + d};\quad \frac{3x^2 + 5x - 7}{8x^3 - 2x^2 + 4}.$$

Kui algebralises murrus esinevad tähed asendada arvudega ja teha murrus ettenähtud tehted, siis saame arvu, mida nimetatakse antud murru väärtuseks. Tähti võib asendada ainult niisuguste arvudega, mille puhul murru nimetaja ei muutu nulliks. Neid arve nimetatakse tähtede lubatavateks väärtusteks. Näiteks murrus $\frac{a + b}{a - b}$ tähtede a ja b lubatavateks väärtusteks on igasugused väärtused, välja arvatud need, millede puhul $a = b$.

Igal algebralisel murrul leidub vähemalt üks väärtus. Näiteks murrul $\frac{2a}{3a}$ on üks väärtus $(\frac{2}{3})$, murrul $\frac{a}{|a|}$ on kaks väärtust $(-1$ ja $+1)$, murrul $\frac{a}{b}$ on lõpmatu hulk väärtusi. Avaldisi, nagu $\frac{a}{b - b}$, millel pole ühtki väärtust, ei loeta murdudeks.

2. Murdude põhiomadus. Aritmeetiliste murdude põhiomadus on järgmisel viisil üldistatav algebraliste murdude põhiomaduseks:

algebralise murru lugeja ja nimetaja korrutamisel või jagamisel ühe ja sama avaldisega, mille väärtuseks ei ole null, saadakse murd, mis on samaselt võrdne antud murruga.

Murru lugeja ja nimetaja jagamist ühe ja sama avaldisega nimetatakse murru taandamiseks, korrutamist ühe ja sama avaldisega murru laiendamiseks. Nende teisenduste abil saame murrule anda tema lihtsaima kuju, samuti ka murde teisendada ühenimelisteks.

Näited: 1) $\frac{6x^2 + 8xy}{9xy + 12y^2} = \frac{2x(3x + 4y)}{3y(3x + 4y)} = \frac{2x}{3y}$.

2) $\frac{a - b}{b^2 - a^2} = \frac{a - b}{(b - a)(b + a)} = \frac{-(b - a)}{(b - a)(b + a)} =$

$= -\frac{1}{a + b}$.

3) $\frac{a + \frac{a}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{ax + a}{x^2 - 1} = \frac{a(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{a}{x - 1}$.

Näidetes 1 ja 2 taandasime murrud lugeja ja nimetaja ühise teguriga, näites 3 esmalt laiendasime murdu arvuga x ja siis taandasime avaldisega x + 1.

3. Tehted murdudega. Algebraliste murdude liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine defineeritakse nagu vastavad tehted harilike murdudega (I, §2, 2). Tarbetu taandamise vältimiseks on murdude liitmisel ja lahutamisel ühiseks nimetajaks soovitav võtta antud nimetajate väikseim ühiskordne (mitte lihtsalt nimetajate korrutis).

Näited: 1) $\frac{3m^2}{10a^2bc} \overset{2b}{} + \frac{5n^2}{4ab^2} \overset{5ac}{} = \frac{6bm^2 + 25acn^2}{20a^2b^2c}$.

2) $\frac{x + 1}{2x - 2} - \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 2} = \frac{x + 1}{2(x - 1)} \overset{x+1}{} - \frac{x^2 + 3}{2(x + 1)(x - 1)} \overset{1}{} =$

$= \frac{(x + 1)^2 - (x^2 + 3)}{2(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 3}{2(x + 1)(x - 1)} =$

$= \frac{2x - 2}{2(x + 1)(x - 1)} = \frac{2(x - 1)}{2(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x + 1}$.

Murdude korrutamisel ja jagamisel taandame tulemuse enne korrutamist ühisel murrujoonel.

Näide: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} : \frac{5a^2 + 5b^2}{a + b} = \frac{(a^2 + b^2)(a + b)}{(a^2 - b^2)(5a^2 + 5b^2)} =$

$= \frac{(a^2 + b^2)(a + b)}{(a + b)(a - b)5(a^2 + b^2)} = \frac{1}{5(a - b)}$.

Et algebralise murru astendamine naturaalarvulise astendajaga on võrdsete tegurite korrutamine, siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ tegurit}}}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Murru astendamisel astendatakse lugeja ja nimetaja eraldi ja esimene tulemus jagatakse teisega.

§ 4. Juuravaldiste teisendamine

1. Tehted juurtega. Juurte korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine toimub järgmiste teoreemide alusel. Neis teoreemides juuritavad a, b tähendavad positiivseid arve.

1) Võrdsete juurijatega juurte korrutis on sama juurijaga juur juuritavate korrutisest, s.t.

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Näide: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$

2) Võrdsete juurijatega juurte jagatis on sama juurijaga juur juuritavate jagatisest, s.t.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide: $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8 : 2} = \sqrt{4} = 2.$

3) Juure aste on sama juurijaga juur juuritava astmest, s.t.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Näide: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}.$

4) Juur juurest on juur, mille juurijaks on endiste juurijate korrutis, s.t.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Näide: $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4}.$

Nende väidete tõestamine toimub ühel ja samal viisil: tõestatava võrduse mõlemad pooled astendatakse ühe ja sama arvuga (võrduse 1, 2 ja 3 puhul arvuga n, võrduse 4 puhul arvuga mn), mille tulemusena saadakse võrdsed arvud. Et tõestatavate võrduste pooled on positiivsed arvud (I, §3, 2), siis nende n-date astmete võrdsusest järeldub ka astendatavate avaldiste võrdsus.

2. Korrutise, jagatise ja astme juurimine. Kui võrdustes 1 ja 2 vahetada pooled, siis saame vastavalt korrutise juurimise ja jagatise juurimise eeskirja.

Kui võrduses 3 astendaja m on juurija n kordne, ütleme m = kn, siis võrduse vasak pool teisendub järgmiselt:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^{kn} = \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^k = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$

Vahetades pooled, saame võrdusest 3 nüüd astme juurimise eeskirja:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{kui m on n kordne.}$$

Korrutise juurimise ja astme juurimise eeskirja koos rakendamine võimaldab tuua teguri juurimismärgi alt selle ette:

$$\sqrt[n]{a^{kn}b} = \sqrt[n]{a^{kn}} \cdot \sqrt[n]{b} = a^k \sqrt[n]{b}.$$

Näide: $\sqrt{5^3a^7x} = \sqrt{5^2a^6 \cdot 5ax} = 5a^3 \cdot \sqrt{5ax}$.

3. Juure taandamine ja laiendamine. Kui juuritavaks on aste, milles astendajal leidub juurijaga ühine tegur, siis saab juurt taandada, s.t. juurijat ja astendajat võib jagada nende ühise teguriga:

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõepoolest, võrduse 4 põhjal (kui selles vahetada pooled):

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{\sqrt[k]{a^{kn}}}.$$

Et astme juurimise eeskirja järgi juurimismärgi all olev juur on a^n, siis saamegi ülal antud võrduse. Vahetades selles võrduses pooled, saame eeskirja juure laiendamiseks. Juurte laiendamine võimaldab teisendada erinevate juurijatega juuri võrdsete juurijatega juurteks ja seega igasuguste juurte korrutamist ja jagamist.

Näide: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^9} = \sqrt[15]{a^{10}a^9} = \sqrt[15]{a^{19}} =$

$$= \sqrt[15]{a^{15}a^4} = a\sqrt[15]{a^4}.$$

Teguri viimine juurimismärgi ette ja juure taandamine võimaldavad anda juuravaldisele (s.o. juuri sisaldavale avaldise-

le) tema lihtsaima kuju:

$$\sqrt[4]{324a^4x^2} - \sqrt{8a^2x} = \sqrt[4]{3^4 2^2 a^4 x^2} - \sqrt{8a^2x} = \sqrt{3^2 2a^2 x} -$$

$$- \sqrt{4a^2 \cdot 2x} = 3a\sqrt{2x} - 2a\sqrt{2x} = (3a - 2a)\sqrt{2x} = a\sqrt{2x}.$$

4. Ruutirratsionaalsuse kaotamine murru nimetajast. Murdude võrdlemine ja tehete sooritamine murdudega on üldiselt lihtsam, kui murdude nimetajates ei esine juuri. Murru lugeja ja nimetaja korrutamisel sobiva avaldisega on võimalik nimetajat (või - tarbe korral - lugejat) vabastada juurtest. Nimetaja vabastamine ruutjuurest toimub lihtsamatel juhtudel järgmiste näidete eeskujul.

1) $\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{x}{a}\sqrt{a}.$

2) $\frac{x}{a - \sqrt{b}} = \frac{x(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{x(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}.$

3) $\frac{x}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$

Neid teisendusi kasutame ka juuravaldise ligikaudse väärtuse arvutamisel.

Näide: $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{7})^2}{(\sqrt{8} + \sqrt{7})(\sqrt{8} - \sqrt{7})} = \frac{8 - 2\sqrt{56} + 7}{8 - 7} \approx$

$$\approx 15 - 2 \cdot 7{,}483 = 15 - 14{,}966 = 0{,}033.$$

5. Tehted ratsionaalsete astendajatega astmetega. Varem nägime (I, §3, 5), et astme mõistet on võimalik niiviisi üldistada, et astendajaks võib olla mistahes ratsionaalarv. Saab tõestada, et nende üldistatud astmete korrutamine ja üldistatud astme astendamine toimub samade seaduste järgi, mis kehtivad naturaalsete astendajate puhul. Teatavasti viimaste puhul (II, §1, 3)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Veendume näidete varal, et sama eeskiri on kehtiv ka siis, kui 1) üks astendaja või ka mõlemad on negatiivsed täisarvud, 2) mõlemad astendajad on positiivsed murrud, 3) üks astendaja on positiivne murd, teine negatiivne murd.

1) Olgu $m = 4$ ja $n = -3$. Siis $a^m \cdot a^n = a^4 \cdot a^{-3} = a^4 \cdot \frac{1}{a^3} =$ $= a^4 : a^3 = a$ ja ka $a^{m+n} = a^{4+(-3)} = a^1 = a$, seega väide on õige.

2) Olgu $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$. Siis $a^m \cdot a^n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} =$
$= \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^5}$ ja ka $a^{m+n} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$,
seega väide on õige.

3) Olgu $m = \frac{1}{2}$ ja $n = -\frac{1}{3}$. Siis

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[6]{a}$$

ja ka

$$a^{m+n} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{3-2}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a},$$

seega väide on õige.

Analoogiliselt on võimalik väidet tõestada ka üldkujul. Üldistatud kujul astmete korrutamise eeskiri ühendab üheks eeskirjaks astmete korrutamise, astmete jagamise, juurte korrutamise ja juurte jagamise eeskirjad.

Analoogiliselt saab tõestada, et ka astme astendamise eeskiri

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

on kehtiv igasuguste ratsionaalsete astendajate puhul. See eeskiri võimaldab ühel ja samal viisil teha kõiki astmete ja juurte astendamisi ja juurimisi.

Näited: 1) $(\sqrt{a})^4 = (a^{\frac{1}{2}})^4 = a^{\frac{1}{2} \cdot 4} = a^2$.

2) $(\sqrt[4]{a^6})^2 = (a^{\frac{6}{4}})^2 = a^{\frac{12}{4}} = a^3$.

3) $\sqrt{2\sqrt[4]{2^3}} = (2 \cdot 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{7}} = (2^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

III. VORRANDID. VÕRRATUSED. FUNKTSIOONID

§ 1. V õ r d u s j a v õ r r a n d

1. Võrduse, samasuse ja võrrandi mõiste. Võrdus on sümbolites kirjutatud lause, mis väljendab kahe suuruse(algebralise

avaldise, erijuhtumil arvu)võrdsust. Võrdused on näiteks:

$$3{,}7 = 3\frac{7}{10};\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\quad 2x - 9 = 5.$$

Võrdust, milles esinevate tähtede väärtused loetakse teadaolevaiks ja mis kehtib nende tähtede mistahes väärtuste puhul, nimetatakse samasuseks. Näiteks võrdus

$$b^2 + (3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 5b^2$$

on samasus.

Võrdust, mis sisaldab ühe või mitu tähte, mis tähendavad tundmatuid arve, nimetatakse võrrandiks. Näiteks

$$5x + a = a^2$$

on ühe tundmatuga esimese astme võrrand, kui selles x tähendab tundmatut ja a antud arvu; sama võrrand on ühe tundmatuga teise astme võrrand, kui selles a tähendab tundmatut ja x antud arvu; ja sama võrrand on kahe tundmatuga teise astme võrrand, kui selles x ja a tähendavad mõlemad tundmatuid arve.

Ühe tundmatuga võrrandi lahendiks nimetatakse arvu, mis rahuldab võrrandit, s.t. mille asetamisel võrrandisse tundmatu asemele võrrandi pooled osutuvad võrdseiks. Kahe tundmatuga võrrandi lahendiks nimetatakse arvupaari, mis rahuldab võrrandit, ja üldiselt n tundmatuga võrrandi lahendiks n arvust koosnevat arvuhulka, mis rahuldab võrrandit. Võrrandi lahendi leidmist nimetatakse võrrandi lahendamiseks. Võrrandi lahendite arv võib olla mitmesugune, näiteks:

võrrandil $2x - 7 = 5$ on üksainus lahend $x = 6$;

võrrandil $x^2 + 4x - 21 = 0$ on kaks lahendit $x_1 = -7$ ja $x_2 = 3$;

võrrandil $\frac{1}{x^2 + 9} = 0$ lahendid puuduvad;

võrrandi $5(x + 1) + 2 = 5x + 7$ lahendiks on iga arv.

2. Võrrandite samaväärsuse mõiste. Kaht võrrandit nimetatakse ekvivalentseiks ehk samaväärseiks siis, kui neil kõik lahendid on ühised, s.t. kui esimese võrrandi iga lahend on ka teise võrrandi lahendiks ja teise võrrandi iga lahend on ühtlasi esimese võrrandi lahendiks. Näiteks võrrandid $x^2 - 5x = 6$ ja $5x + 6 = x^2$ on ekvivalentsed, sest nii ühe kui teise võrrandi lahenditeks on 6 ja - 1. Võrrandid $x(x^2 - 5x + 6) = 0$

ja $x^2 - 5x + 6 = 0$ pole ekvivalentsed, sest esimesel neist on kolm lahendit, teisel ainult kaks.

Samaväärseiks loetakse ka kaks võrrandit, milledel lahendid puuduvad.

Võrrandi lahendamine toimub sel teel, et antud võrrandist tuletatakse sellega samaväärne võrrand, viimasest temaga samaväärne võrrand jne., kuni jõutakse lahendini. Seega tuleb võrrandi lahendamisel jälgida, et kasutatavad teisendused annaksid eelmisega samaväärse võrrandi. Asendades võrrandi sellega mittesamaväärse võrrandiga, läheb mõni lahend kaduma või tekivad võõrlahendid. Eriti ohtlik on esimene olukord, sest kadumaläinud lahendit on hiljem raske üles leida. Kui võrrandi lahendamisel kasutatavad teisendused võimaldavad võõrlahendite tekkimist (näiteks juurvõrrandite lahendamisel), siis tuleb kõiki leitud lahendeid kontrollida esialgse võrrandi kaudu.

3. Võrduse põhiomadused.

1) Võrduse pooled on vahetatavad: kui $a = b$, siis ka $b = a$.

2) Kui kahest suurusest kumbki on võrdne kolmandaga, siis nad on võrdsed ka omavahel: kui $a = c$ ja $b = c$, siis $a = b$.

3) Võrdus jääb kehtima, kui selle pooltega liita või neist lahutada üks ja sama suurus: kui $a = b$, siis ka $a \pm m = b \pm m$.

Sellest omadusest järeldub, et võrrandi iga liiget võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks, sest liikme üleviimine on selle liikme lahutamine võrrandi mõlemast poolest.

4) Võrdus jääb kehtima, kui selle pooli korrutada või jagada ühe ja sama, nullist erineva arvuga: kui $a = b$, siis $ma = mb$ ja $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ $(m \neq 0)$.

Võrrandi $x = a$ poolte korrutamisel nulliga saame võrrandi $0 \cdot x = 0$, mis pole esialgse võrrandiga samaväärne, sest võrrandi $0 \cdot x = 0$ lahendiks on iga arv. Võrrandi poolte jagamine tundmatut sisaldava avaldisega on lubatud ainult juhul, kui see avaldis tundmatu ühelgi väärtusel ei võrdu nulliga. Vastasel korral kaotame need tundmatu väärtused, mille puhul see avaldis võrdub nulliga. Näiteks võrrandi $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ poolte jagamisel x-ga kaotame lahendi $x = 0$.

5) Võrdsete positiivsete suuruste astendamisel ühe ja sama reaalarvuga saadakse võrdsed suurused: kui $a = b$, siis

$a^m = b^m$ (a ja b on positiivsed).

6) Võrdsete positiivsete suuruste logaritmid ühel ja samal alusel on võrdsed: kui a = b, siis $\log_m a = \log_m b$ (a ja b on positiivsed).

7) Võrdus ab = 0 on võimalik siis ja ainult siis, kui a = = 0 ja b on nullist erinev arv või b = 0 ja a on nullist erinev arv või a = 0 ja b = 0.

8) Võrdus $\frac{a}{b} = 0$ on võimalik siis ja ainult siis, kui a = 0 ja b on nullist erinev arv.

§ 2. Ühe tundmatuga lineaarne võrrand

Kui pärast võrrandi lihtsustamist (murdude kaotamist, liikmete ühele poolele viimist ja koondamist) tundmatu esineb võrrandis ainult esimeses astmes, siis nimetatakse seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks. Lineaarse võrrandi üldkuju on ax = b, kus a ja b on antud arvud ($a \neq 0$) ja x on tundmatu. Võrrandi lahend avaldub kujul $x = \frac{b}{a}$.

Lineaarsel võrrandil ax = b, $a \neq 0$, leidub alati üks lahend.

See lahend on

1) positiivne, kui a ja b on samamärgilised;

2) negatiivne, kui a ja b on erimärgilised;

3) null, kui b = 0 (sest $a \neq 0$).

Võrrandi ax = b, kus a = 0, lahendamisel võib esineda kaks juhtumit:

1) kui b = 0, s.t. kui võrrand omandab kuju $0 \cdot x = 0$, siis lahendiks on iga arv, sest seda võrrandit rahuldab meelevaldne arv; näiteks võrrandit

$$101x + 66 - 100(x - 4) - 70 + x = 396$$

rahuldab iga arv;

2) kui $b \neq 0$, s.t. kui võrrand omandab kuju $0.x = b \neq 0$, siis lahend puudub, sest pole olemas arvu, mis nulliga korrutamisel annaks nullist erineva arvu b. Näiteks võrrand

$$3(5 - \frac{x}{3}) + x = 12$$

ei oma lahendit.

Võrrandit $ax = b$, kus $a = 0$, nimetatakse nullastmeliseks võrrandiks.

§ 3. Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem

1. Kahe tundmatuga lineaarse süsteemi geomeetriline vaste. Olgu antud kahest kahe tundmatuga lineaarsest võrrandist koosnev süsteem

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahendiks nimetatakse arvupaari (x, y), mis rahuldab süsteemi mõlemaid võrrandeid. Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

lahendiks on arvupaar $x = 5$, $y = 1$, lühemalt $(5, 1)$.

Süsteemi nimetatakse homogeenseks, kui võrrandite vabaliikmed on nullid: $c_1 = c_2 = 0$. Näiteks homogeensed on süsteemid

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 6x + 5y = 0 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 6x - 9y = 0. \end{cases}$$

Homogeensel süsteemil leidub alati vähemalt üks lahend, nn. nullLahend: $x = y = 0$.

Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiliseks kujutiseks (geomeetriliseks vasteks) on sirgjoon koordinaatteljestikus (mida saab joonestada kas kahe punkti järgi või algordinaadi ja tõusu abil). Võrrandisüsteemi geomeetriliseks vasteks on seega kaks sirget. Nende kahe sirgjoone ühise punkti koordinaadipaar ongi antud süsteemi lahendiks. Et kahel sirgjoonel võib olla kas üks ühine punkt (kui sirged lõikuvad) või kõik punktid ühised (kui sirged ühtivad) või neil ei ole ühtki ühist punkti (kui sirged on paralleelsed), siis võrrandisüsteemil on kas üks lahend või lõpmata palju lahendeid või süs-

teemil ei ole ühtki lahendit. Homogeense süsteemi geomeetriliseks vasteks on koordinaatide nullpunkti läbiv sirgetepaar.

2. Võrrandisüsteemi lahendamisvõtted. Võrrandisüsteemi saab lahendada graafiliselt, kui joonestada süsteemi võrranditele vastavad sirgjooned ja leida jooniselt nende lõikepunkti koordinaadid. Analüütilistest lahendusviisidest tähtsamad on asendusvõte ja liitmisvõte.

1) Asendusvõte seisneb selles, et süsteemi ühest võrrandist avaldatakse üks tundmatu teise abil ja saadud avaldis paigutatakse teise võrrandisse esimese tundmatu asemele. Nõnda tekkinud ühe tundmatuga lineaarsest võrrandist leitakse teine tundmatu ja siis selle abil ka esimene. Näiteks punktis 1 antud teise süsteemi teisest võrrandist saadava avaldise

$$x = 7 - 2y$$

esimesse võrrandisse asetamisel saame

$$3(7 - 2y) - 5y = 10;$$

siit saame, et

$$y = 1$$

ja siis

$$x = 7 - 2 \cdot 1 = 5.$$

2) Liitmisvõtte rakendamisel korrutame süsteemi võrrandite mõlemad pooled niisuguste arvudega, et pärast võrrandite liitmist ühe tundmatu kordaja oleks null. Nii tekib üks lineaarne võrrand ühe tundmatuga.

Näiteks:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10 & \mid \cdot 2 \\ x + 2y = 7 & \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$(2 \cdot 3 + 5 \cdot 1)x + 0 \cdot y = 20 + 35$$

$$x = 5.$$

Teise tundmatu saame nüüd leida näiteks süsteemi teisest võrrandist.

3. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi uurimine. Eeldame, et süsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

kõik kordajad ja vabaliikmed on nullist erinevad, ja uurime süsteemi lahenduvust, s.t. selgitame, missuguste kordajate ja

vabaliikmete väärtuste puhul süsteemil on üks lahend, missuguste puhul lõpmata hulk lahendeid ja missuguste puhul lahendid puuduvad.

Korrutades esimese võrrandi pooli arvuga b_2 ja teise pooli arvuga $-b_1$ ning liites võrrandid, saame võrrandi, mis sisaldab ainult tundmatut x:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2.$$

Analoogiliselt tuletame võrrandi, mis sisaldab ainult tundmatut y. Selleks korrutame esimese võrrandi pooled arvuga $-a_2$ ja teise võrrandi pooled arvuga a_1 ning liidame võrrandid:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 .$$

Tähistades x ja y kordajat neis võrrandeis lühidalt tähega Δ (delta), vabaliikmeid vastavalt tähtedega Δ_x ja Δ_y, saame antud süsteemi kirjutada kujul

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \end{cases}$$

kus $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = b_2c_1 - b_1c_2$ ja $\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1$.

Rakendades nüüd lineaarse võrrandi uurimisel saadud tulemusi (III, §2), näeme, et

1) süsteemil leidub üksainus lahend, kui $\Delta \neq 0$;

2) süsteemil leidub lõpmata hulk lahendeid, kui $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$ ja $\Delta_y = 0$;

3) süsteemil ei leidu lahendit, kui $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$.

Juhtumil, kui $\Delta \neq 0$, saame süsteemi lahendi avaldada kujul

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} .$$

Anname süsteemi lahendi olemasolu tunnusele $\Delta \neq 0$ kergemini meeldejääva kuju: $\Delta \neq 0$ tähendab, et $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ehk $a_1b_2 \neq a_2b_1$ ehk

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} .$$

<u>Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil leidub üksainus lahend, kui tundmatute kordajad süsteemi võrrandeis ei ole võrdelised.</u>

Analoogiliselt eelnevaga saame lõpmata hulga lahendite

olemasolu tunnusest $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ järeldada, et

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ehk lühemalt

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil leidub lõpmata palju lahendeid, kui tundmatute kordajad ja vabaliikmed süsteemi võrrandeis on võrdelised.

Lahendi puudumise tunnuse $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ saame eelneva eeskujul anda järgmiselt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil lahendit ei leidu, kui tundmatute kordajad on võrdelised, kuid nende suhe ei võrdu vabaliikmete suhtega.

Näited: 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x + 15y = 30 \end{cases}$ $\frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{6}{30}$ Süsteemil on lõpmata palju lahendeid.

2) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 10x + 15y = 30 \end{cases}$ $\frac{2}{10} = \frac{3}{15} \neq \frac{5}{30}$ Süsteemil lahendit ei ole.

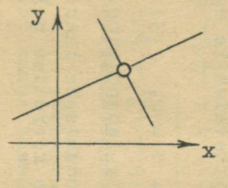
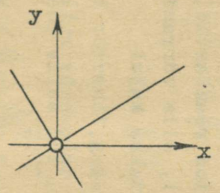
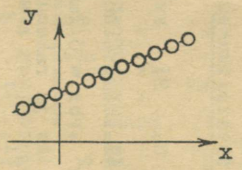
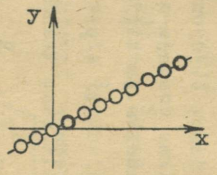
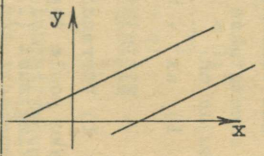
3) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x - 15y = 30 \end{cases}$ $\frac{2}{10} \neq \frac{3}{-15}$ Süsteemil on üks lahend.

Kui süsteemi võrrandeis tundmatute kordajad ja vabaliikmed on võrdelised, siis võrrandid on teineteisest sõltuvad ja ühe neist võib kõrvale jätta. Süsteemi lahendite saamiseks tuleb ülejäänud võrrandis anda ühele tundmatule vabalt väärtusi ja arvutada neile vastavad teise tundmatu väärtused. Andes näitena toodud süsteemi 1 esimesele võrrandile kuju

$$y = 2 - \frac{2}{3}x,$$

saame selle süsteemi lahendid anda kujul $(x; 2 - \frac{2}{3}x)$, milles x-le väärtusi andes saame kuitahes palju lahendeid.

Et homogeensel süsteemil leidub alati vähemalt üks lahend (null-lahend), siis selle süsteemi lahendamisel saab esineda ainult üks kahest võimalusest: süsteemil on üksainus lahend, kui tundmatute kordajad ei ole võrdelised, ja lõpmata palju

Süsteemi iseloomustus	Geomeetriline tõlgendus		Lahendite	
	Mittehomogeenne süsteem	Homogeenne süsteem	Arv	Analüütiline avaldis
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$			1	$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$			∞	$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$		Puudub	0	Puudub

lahendeid, kui need kordajad on võrdelised.

Ülevaate kõigist vaadeldud juhtumitest annab tabel lk. 47.

§ 4. Ühe tundmatuga ruutvõrrand

1. Ruutvõrrandi liigid. Ruutvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles pärast võrrandi lihtsustamist (sulgude avamist, koondamist) tundmatu kõrgeim aste on teine aste. Ruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kus x on tundmatu ja a, b, c on antud reaalarvud, kusjuures $a \neq 0$. Kui ruutliikme kordaja $a = 1$, siis võrrandit nimetatakse taandatud võrrandiks ja kirjutatakse kujul

$$x^2 + px + q = 0.$$

Taandamata võrrandit saab taandada, kui selle pooli jagada kordajaga a.

Kui vähemalt üks arvudest b ja c on null, siis ruutvõrrandit nimetatakse mittetäielikuks. Mittetäielike ruutvõrrandite üldkujud on:

1) $ax^2 + bx = 0$, 2) $ax^2 + c = 0$, 3) $ax^2 = 0$.

2. Mittetäielike ruutvõrrandite lahendamine.

1) Võrrandi $ax^2 + bx = 0$ lahendamiseks lahutame võrrandi vasaku poole tegureiks ja rakendame korrutise nulliga võrdumise tingimust (III, §1, 3):

$$x(ax + b) = 0;$$

$$x = 0 \quad \text{või} \quad ax + b = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

2) Võrrandi $ax^2 + c = 0$ lahendamiseks avaldame võrrandist tundmatu ruudu:

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

millest

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Kui a ja c on ühe ja sama märgiga, siis võrrandi lahendid on imaginaarsed. Kui a ja c on erinevate märkidega, siis võrran-

di lahendid on reaalsed.

3) Võrrandi $ax^2 = 0$ lahendid tulenevad eelmise võrrandi lahenditest, kui võtta seal $c = 0$:

$$x_1 = x_2 = 0 .$$

3. Täieliku ruutvõrrandi lahendamine. Lahendame esmalt taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0.$$

Selleks eraldame võrrandi vasakust poolest täisruudu, liites selle poolega ja lahutades sellest $(\frac{p}{2})^2$:

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0;$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - (\sqrt{\frac{p^2}{4} - q})^2 = 0.$$

Lahutades nüüd võrrandi vasaku poole tegureiks ja kasutades korrutise nulliga võrdumise tingimust, saame:

$$(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q})(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}) = 0;$$

$$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0; \quad x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0;$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.}}$$

Sellest valemist saame taandamata ruutvõrrandi lahendivalemi, kui teha järgmine asendus: $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ (sest kui taandamata ruutvõrrand taandada, siis p ja q asemele saame need avaldised). Seega võrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendivalem on

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}} .$$

Mõne lihtsa teisenduse abil saab sellele anda kuju

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}} .$$

Näide. Lahendada võrrand $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Lahendivalemi järgi

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6},$$

tähendab

$$x_1 = -2; \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Kontroll:

1) $3\cdot(-2)^2 + 5\cdot(-2) - 2 = 12 - 12 = 0.$

2) $3\cdot(\frac{1}{3})^2 + 5\cdot\frac{1}{3} - 2 = 2 - 2 = 0.$

4. Ruutvõrrandi lahendite ja kordajate vahelised seosed (Vieta teoreem). Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Liites need lahendid saame:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Korrutades need lahendid saame:

$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2})^2 - (\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q})^2 = q.$$

Seega taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub tundmatu esimese astme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Taandamata ruutvõrrandi puhul lahendite ja kordajate vahelised seosed on järgmised:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

5. Ruutvõrrandi lahendite uurimine. Eeldame, et võrrandis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kordaja a on positiivne (vastasel korral korrutame võrrandi pooli arvuga -1). Tähistame ruutvõrrandi lahendivalemis juurimismärgi all seisva avaldise $b^2 - 4ac$ tähega D ja nimetame selle avaldise võrrandi diskriminandiks:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Võrrandi diskriminandi ja kordajate märkide põhjal saame lahendite kohta öelda järgmist:

1) Kui $D > 0$, siis on ruutvõrrandil kaks reaalset ja erinevat lahendit. Kasutades võrrandi kordajate ja lahendite vahelisi seoseid

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

saame lahendite märkide kohta öelda järgmist:

a) kui $c < 0$, siis üks lahend on positiivne ja teine negatiivne (sõltumata b märgist), sest lahendite korrutis on siis negatiivne;

b) kui $c > 0$ ja $b < 0$, siis on mõlemad lahendid positiivsed, sest lahendite korrutis on positiivne ja ka summa on positiivne;

c) kui $c > 0$ ja $b > 0$, siis on mõlemad lahendid negatiivsed, sest nüüd on lahendite korrutis positiivne (see näitab, et lahendid on ühesuguste märkidega) ja lahendite summa on negatiivne.

2) Kui $D = 0$, siis ruutvõrrandil on kaks reaalset ja võrdset lahendit. Lahendite märk on vastupidine b märgile.

3) Kui $D < 0$, siis ruutvõrrandi lahendid on imaginaarsed.

6. Biruutvõrrand. Biruutvõrrandiks nimetatakse neljanda astme võrrandit, mis sisaldab ainult tundmatu paarisarvulise astendajaga astmeid ja vabaliiget. Biruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Selle võrrandi lahendamiseks teisendame ta ruutvõrrandiks, võttes uueks tundmatuks $y = x^2$. Asendamisel saame

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Lahendades selle võrrandi saame kaks lahendit y_1 ja y_2, millede kaudu biruutvõrrandi lahendid avalduvad järgmiselt:

$$x_1 = \sqrt{y_1}, \quad x_2 = -\sqrt{y_1}, \quad x_3 = \sqrt{y_2}, \quad x_4 = -\sqrt{y_2}.$$

Kui ruutvõrrandi $ay^2 + by + c = 0$ lahenditest y_1 ja y_2

1) mõlemad lahendid on positiivsed, siis biruutvõrrandi kõik lahendid on reaalsed;

2) üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, siis biruutvõrrandi kaks lahendit on reaalsed ja kaks imaginaarsed;

3) mõlemad lahendid on negatiivsed, siis biruutvõrrandi kõik lahendid on imaginaarsed;

TRÜ Raamatukogu

4) mõlemad lahendid on imaginaarsed, siis biruutvõrrandi kõik lahendid on imaginaarsed.

Näide. Võrrandi

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

lahendamiseks asendame x^2 tähega y; siis võrrandiks saame

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

Selle lahendamisel saame:

$$y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$y_1 = 4; \quad y_2 = -1.$$

Antud võrrandi lahendid on seega

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = i; \quad x_4 = -i.$$

§ 5. Ruutvõrrandisüsteemid kahe tundmatuga

1. Ühest lineaarsest ja ühest teise astme võrrandist koosnev süsteem. Ühest lineaarsest ja ühest teise astme võrrandist koosneva süsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Mx + Ny + P = 0. \end{cases}$$

Süsteemi lahendamiseks tuleb teisest võrrandist avaldada üks tundmatu teise kaudu ja asendada esimeses võrrandis see tundmatu saadud avaldisega. Nii saadakse ruutvõrrand, mis sisaldab ainult ühe tundmatu.

Näide 1. Süsteemi

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + 4y + 17 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

lahendamiseks avaldame teisest võrrandist tundmatu y:

$$y = x - 3.$$

Saadud avaldisega asendame y esimeses võrrandis:

$$2x^2 - (x - 3)^2 + x(x - 3) - 5x + 4(x - 3) + 17 = 0.$$

Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saame:

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

ehk

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Selle lahendid on

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = -2.$$

Varem leitud y avaldisest saame:

$$y_1 = -2 \quad \text{ja} \quad y_2 = -5.$$

Süsteemi lahendid on (1; -2) ja (-2; -5).

Näide 2. Lahendades samal viisil süsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 7y^2 + 12x + 21y + 22 = 0 \\ 2x - y + 10 = 0, \end{cases}$$

saame lahenditeks arvupaarid (-4; 2) ja $(-\frac{128}{23}; -\frac{26}{23})$.

Peale kirjeldatud üldise võtte saab erikujuliste süsteemide puhul kasutada veel mõningaid erivõtteid. Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b, \end{cases}$$

kus on antud kahe tundmatu summa ja korrutis, saab lahendada nii, et Vieta teoreemi alusel (III, §4, 4) koostame ruutvõrrandi

$$z^2 - az + b = 0,$$

mille lahendid ongi x ja y väärtusteks:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}.$$

Analoogiliselt saab lahendada ka süsteemi

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b, \end{cases}$$

kui sellele anda kuju

$$\begin{cases} x + (-y) = a \\ x(-y) = -b. \end{cases}$$

Koostades ruutvõrrandi

$$z^2 - az - b = 0$$

ja lahendades selle, saame:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = -z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = -z_1. \end{cases}$$

Näide 1.

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ xy = 6. \end{cases}$$

$$z^2 - 5z + 6 = 0.$$

$$z_1 = 2; \quad z_2 = 3.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Näide 2.

$$\begin{cases} x - y = 3; \\ xy = 70. \end{cases}$$

$$z^2 - 3z - 70 = 0;$$

$$z_1 = 10; \quad z_2 = -7.$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -7 \\ y_2 = -10. \end{cases}$$

2. Kahest ruutvõrrandist koosnev süsteem. Vaatleme mõnda õige lihtsat süsteemi, kus mõlemad võrrandid on teiseastmelised.

1) Süsteeme $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$ ja $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$

on kõige lihtsam lahendada asendusvõttega: asendades esimeses võrrandis y teisest saadava avaldisega $\frac{b}{x}$, saame biruutvõrrandi, mille lahendamisel leiame x.

Näide.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{144}{x^2} = 25$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ või } x^2 = 9$$

$$x = \pm 4 \text{ või } x = \pm 3.$$

Vastavad y väärtused leiame võrrandist $xy = 12$. Süsteemi lahenditeks on

$$(4; 3), \quad (-4; -3), \quad (3; 4), \quad (-3; -4).$$

2) Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

lahendamist on võimalik taandada lineaarsete süsteemide lahendamisele. Selleks korrutame teise võrrandi mõlemad pooled 2-ga, liidame siis need pooled esimese võrrandi vastavate pooltega ja lahutame neist:

$$\pm \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ 2xy = 2b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = a + 2b \\ (x - y)^2 = a - 2b. \end{cases}$$

Järelikult

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}$$

$$x - y = \pm \sqrt{a - 2b}.$$

Siit saame neli kergesti lahenduvat esimese astme võrrandisüsteemi, mille lahendid on antud süsteemi lahenditeks.

Näide. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24. \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 49 \\ (x - y)^2 = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = \pm 7 \\ x - y = \pm 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -4. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

3) Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$$

lahendamiseks liidame ja lahutame võrrandite pooled (jagades tulemused veel 2-ga):

$$\begin{cases} x^2 = \frac{a + b}{2} \\ y^2 = \frac{a - b}{2}. \end{cases}$$

Neist on kerge saada x ja y väärtusi.

§ 6. Võrratused

1. Võrratuse mõiste. Kaks reaalarvu või algebralist avaldist, mis on ühendatud märgiga $>$ ("on suurem") või $<$ ("on väiksem"), moodustavad võrratuse. Neid avaldisi (arve) nimetatakse võrratuse poolteks. Märgid $>$ ja $<$ pole rakendatavad mistahes kompleksarvude puhul.

Võrratus $a > b$ tähendab, et arv $a - b$ on positiivne, s.o. $a - b > 0$. Analoogiliselt võrratus $a < b$ tähendab, et $a - b < 0$.

Võrratusteks nimetatakse ka märkidega $\geqslant$ ("on suurem või võrdne") ja $\leqslant$ ("on väiksem või võrdne") ühendatud avaldisi.

Võrratuses esinevad tähed tähendavad kas antud arve või tundmatuid. Tundmatuid tähistatakse tavaliselt tähestiku viimaste tähtedega.

Mõni võrratus, mis sisaldab tundmatut, kehtib selle tähe iga väärtuse juures, näiteks võrratus $7x^2 + 5 > 7x^2$. Seevastu võrratus $2x - 8 > 0$ kehtib ainult siis, kui $x > 4$. Kõiki arve, mis seda tingimust täidavad, nimetatakse võrratuse $2x - 8 > 0$ lahenditeks.

Lahendada võrratus tähendab leida võrratuses esineva tundmatu (tundmatute) väärtused, millede puhul võrratus kehtib.

2. Võrratuse põhiomadused. Allpool on antud tundmatut mitteesisaldavate võrratuste seitse lihtsat omadust, mis väljendavad positiivsete ja negatiivsete arvude teatud omadusi. Iga omadust saab kirjutada veel teisel kujul, mille saame, kui märk $>$ asendada vastupidise märgiga $<$ ja märk $<$ vastupidise märgiga $>$.

1) Kui $a > b$, siis $b < a$:

võrratuse poolte vahetamisel muutub võrratuse märk vastupidiseks.

See omadus väljendab tõsiasja, et kui $a - b$ on positiivne arv, siis $b - a$ on negatiivne arv.

2) Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$.

Tõestus. Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a - b$ ja $b - c$ on positiivsed arvud. Et kahe positiivse arvu summa

$$(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$$

on positiivne, siis $a - c > 0$, s.t. $a > c$.

3) Kui $a > b$, siis $a + c > b + c$, kus c on meelevaldne reaalarv:

<u>võrratus jääb kehtima, kui selle mõlema poolega liita üks ja sama reaalarv</u>.

<u>Tõestus</u>. Kui $a > b$, siis $a - b$ on positiivne arv, seega ka

$$a - b + c - c = (a + c) - (b + c)$$

on positiivne arv ehk teisiti $a + c > b + c$.

<u>Järeldus</u>. Võrratuse liikme võib viia võrratuse ühelt poolelt teisele, muutes liikme märgi vastupidiseks (sest liikme üleviimine tähendab selle liikme lahutamist võrratuse mõlemast poolest).

4) Kui $a > b$ ja $c > 0$, siis $ac > bc$ ja $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$:

<u>võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama positiivse arvuga jääb võrratuse märk püsima</u>.

<u>Tõestus</u>. Kui $a > b$, siis $a - b$ on positiivne arv. Selle korrutamisel positiivse arvuga c saame positiivse arvu

$$(a - b)c = ac - bc,$$

tähendab $ac > bc$. Väide jääb õigeks ka siis, kui c asendada positiivse arvuga $\frac{1}{c}$, tähendab $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

5) Kui $a > b$ ja $c < 0$, siis $ac < bc$ ja $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$:

<u>võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama negatiivse arvuga muutub võrratuse märk vastupidiseks</u>.

<u>Tõestus</u>. Kui $a > b$, siis $a - b$ on positiivne arv. Selle korrutamisel negatiivse arvuga c saame negatiivse arvu

$$(a - b)c = ac - bc,$$

tähendab $ac < bc$. Väide jagamise kohta järeldub sellest endisel viisil.

6) Kui $a > b$ ja $c > d$, siis $a + c > b + d$:

<u>samapidiseid võrratusi võib liikmeti liita, säilitades tulemuses sama märgi</u>.

<u>Tõestus</u>. Et eelduse kohaselt $a - b$ ja $c - d$ on positiivsed arvud, siis on positiivne ka nende summa

$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$,

tähendab $a + c > b + d$.

7) Kui $a > b$ ja $c < d$, siis $a - c > b - d$:

vastupidiseid võrratusi võib liikmeti lahutada, säilitades tulemuses selle võrratuse märgi, millest lahutati.

Tõestus on analoogiline eelneva tõestusega.

3. Võrratuste samaväärsus. Kaht võrratust, mis sisaldavad samu tundmatuid, nimetatakse samaväärseiks ehk ekvivalentseiks siis, kui neil kõik lahendid on ühised, s.t. kui ühe võrratuse kõik lahendid on teise lahenditeks ja ümberpöördult.

Võrratuse lahendamine teostub põhiomaduste 1, 3, 4 ja 5 alusel, kuna nende abil antud võrratusest tuletatud võrratus on antud võrratusega samaväärne. Omadused 2, 6 ja 7 pole rakendatavad võrratuste ja nende süsteemide lahendamiseks, sest nende abil tuletatud võrratused pole samaväärsed antud võrratustega. Näiteks ei saa võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 3x - 6 > x + 8 \\ x + 8 > 6 \end{cases}$$

asendada (nagu võiks arvata põhiomaduse 2 põhjal) võrratusega

$$3x - 6 > 6,$$

sest antud süsteemi rahuldavad arvud $x > 7$, kuna viimast võrratust rahuldavad arvud $x > 4$.

4. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuseks ehk lineaarseks võrratuseks nimetatakse võrratust, millele saab anda kuju $ax > b$, kus a ja b on antud arvud ($a \neq 0$) ja x on tundmatu.

Selle võrratuse lahendamisel võib esineda kaks juhtumit:

1) kui $a > 0$, siis põhiomaduse 4 järgi $x > \frac{b}{a}$, s.t. võrratust rahuldavad kõik need reaalarvud, mis on suuremad arvust $\frac{b}{a}$;

2) kui $a < 0$, siis põhiomaduse 5 järgi $x < \frac{b}{a}$, s.t. võrratust rahuldavad kõik need reaalarvud, mis on väiksemad arvust $\frac{b}{a}$.

Võrratuse teisendamisel kujule $ax > b$ võib juhtuda, et kordaja a osutub võrdseks nulliga, seega võrratus omandab kuju $0 \cdot x > b$. Seda võrratust rahuldab iga arv, kui $b < 0$, ja ei rahulda ükski arv, kui $b \geq 0$.

Näited: 1) $2 - 3x < 14 - 5x$

$5x - 3x < 14 - 2$

$2x < 12$

$x < 6.$

Võrratust rahuldavad kõik reaalarvud, mis on väiksemad kui 6.

2) $\frac{37 - 2x}{3} + 9 \leqslant \frac{3x - 8}{4} - x \mid \cdot 12$

$148 - 8x - 108 \leqslant 9x - 24 - 12x$

$-8x + 3x \leqslant -24 - 256$

$-5x \leqslant -280 \mid :(-5)$

$x \geqslant 56.$

Võrratust rahuldavad arv 56 ja kõik temast suuremad arvud.

3) $2(x - 1) - x > 3(x - 1) - 2x - 5$

$2x - 2 - x > 3x - 3 - 2x - 5$

$x - x > -8 + 2$

$0 \cdot x > -6.$

Võrratust rahuldavad kõik reaalarvud.

4) $2x - 2 < x - (8 - x)$

$2x - 2 < x - 8 + x$

$2x - 2x < -8 + 2$

$0 \cdot x < -6.$

Võrratusel lahendid puuduvad.

5. Ühe tundmatuga teise astme võrratuse lahendamine. Ühe tundmatuga teise astme võrratuseks ehk ruutvõrratuseks nimetatakse võrratust, millele saab anda kuju

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

kus a, b ja c on antud arvud ($a \neq 0$) ja x on tundmatu.

Vaatleme selle võrratuse lahendamist esmalt juhtumil, kui $b = 0$. Siis saab võrratusele anda kuju

$$x^2 > -\frac{c}{a} \quad \text{või} \quad x^2 < -\frac{c}{a}$$

ehk, tähistades paremat poolt tähega m,

$$x^2 > m \quad \text{või} \quad x^2 < m. \qquad (*)$$

Arvu m kohta on õige üks kolmest väitest:

$$m > 0 \quad \text{või} \quad m = 0 \quad \text{või} \quad m < 0.$$

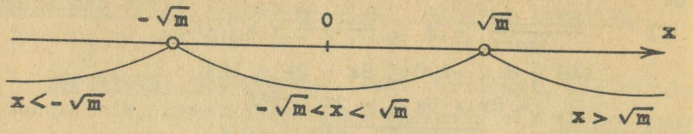
Vaatleme neid võimalusi eraldi.

I. Kui $m > 0$, siis võrratused $(*)$ on samaväärsed võrratustega

$$|x| > \sqrt{m} \quad \text{ja} \quad |x| < \sqrt{m}.$$

Kujutades arvsirgel punktid $\sqrt{m}$ ja $-\sqrt{m}$ näeme, et arvsirge ülejäänud punktid ja seega ka ülejäänud reaalarvud

jaotuvad kolme rühma:



Joonis 7.

a) arvud, mis on väiksemad kui $-\sqrt{m}$;

b) arvud, mis on suuremad kui $-\sqrt{m}$, kuid väiksemad kui $\sqrt{m}$;

c) arvud, mis on suuremad kui $\sqrt{m}$.

Neist ainult rühmade a ja c arvud rahuldavad võrratust $x^2 > m$, kuna rühma b arvud rahuldavad võrratust $x^2 < m$:

võrratuse $x^2 > m$ lahenditeks on arvud $x < -\sqrt{m}$ ja ka arvud $x > \sqrt{m}$;

võrratuse $x^2 < m$ lahenditeks on arvud x, mis täidavad tingimusi $-\sqrt{m} < x < \sqrt{m}$.

Näited. 1) Võrratuse $x^2 > 4$ lahenditeks on arvud $x < -2$ ja ka arvud $x > 2$.

2) Võrratuse $x^2 < 4$ lahenditeks on arvud vahemikust $-2 < x < 2$.

3) Võrratuse $3x^2 < 75$ ehk $x^2 < 25$ lahenditeks on arvud vahemikust $-5 < x < 5$.

II. Kui $m = 0$, siis võrratustel (*) on kuju

$$x^2 > 0 \quad \text{ja} \quad x^2 < 0.$$

Esimese võrratuse lahendiks on iga reaalarv, välja arvatud arv 0 (sest nullist erineva reaalarvu ruut on positiivne): $x \neq 0$. Teist võrratust ei rahulda ükski reaalarv.

III. Kui $m < 0$, siis võrratust $x^2 > m$ rahuldab iga reaalarv, kuid võrratust $x^2 < m$ ei rahulda ükski reaalarv.

Näited. 1) Võrratuse $3x^2 > -1$ lahendiks on iga reaalarv.

2) Võrratusel $2x^2 < -5$ lahendid puuduvad.

3) Võrratuse $5x^2 > 0$ lahendiks on iga reaalarv, välja arvatud arv 0.

Kui võrratuses

$$ax^2 + bx + c > 0$$

kordaja $b \neq 0$, siis eraldame võrratuse vasakust poolest täisruudu. Selleks esmalt jagame võrratuse pooled arvuga $a \neq 0$, kirjutades saadavad võrratused (vastavalt sellele, kas $a > 0$ või $a < 0$) kujul

$$x^2 + px + q > 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + px + q < 0.$$

Eraldades nüüd täisruudu saame

$$(x + \tfrac{p}{2})^2 + q - (\tfrac{p}{2})^2 > 0; \quad (x + \tfrac{p}{2})^2 + q - (\tfrac{p}{2})^2 < 0$$

ehk

$$(x + \tfrac{p}{2})^2 > (\tfrac{p}{2})^2 - q; \quad (x + \tfrac{p}{2})^2 < (\tfrac{p}{2})^2 - q.$$

Lahendades neid võrratusi mittetäielike võrratuste

$$x^2 > m \quad \text{ja} \quad x^2 < m$$

eeskujul, saame lineaarsed võrratused $x + \frac{p}{2}$ kohta, millest leiame x.

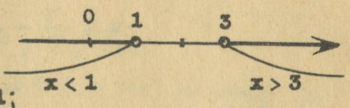
Näited: 1) $x^2 - 4x + 3 > 0;$

$(x - 2)^2 + 3 - 4 > 0;$

$(x - 2)^2 > 1;$

$x - 2 < -1; \quad x - 2 > 1;$

$\underline{x < 1}; \quad \underline{x > 3}.$



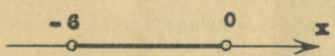
2) $x^2 + 6x \leq 0;$

$(x + 3)^2 - 9 \leq 0;$

$(x + 3)^2 \leq 9;$

$-3 \leq x + 3 \leq 3 \mid -3;$

$-6 \leq x \leq 0.$



3) $x^2 - 6x + 10 > 0;$

$(x - 3)^2 + 10 - 9 > 0;$

$(x - 3)^2 > -1.$

Lahendiks on iga reaalarv.

4) $3x^2 - 5x + 2 < 0;$

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} < 0;$

$(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36} < 0;$

$(x - \frac{5}{6})^2 < \frac{1}{36};$

5) $x^2 - 8x + 17 < 0;$

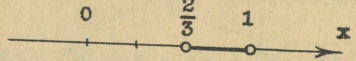
$(x - 4)^2 + 17 - 16 < 0;$

$(x - 4)^2 < -1.$

Lahendid puuduvad.

$$-\frac{1}{6} < x - \frac{5}{6} < \frac{1}{6} \mid + \frac{5}{6};$$

$$\frac{2}{3} < x < 1.$$



6) Milliste a väärtuste puhul on mõtet avaldisel $\sqrt{5a^2 - 7a + 2}$?

Antud avaldisel on mõtet, kui $5a^2 - 7a + 2 \geqslant 0$. Lahendame selle võrratuse:

$$a^2 - \frac{7}{5}a + \frac{2}{5} \geqslant 0;$$

$$(a - \frac{7}{10})^2 + \frac{2}{5} - \frac{49}{100} \geqslant 0;$$

$$(a - \frac{7}{10})^2 \geqslant \frac{9}{100};$$

$$a - \frac{7}{10} \leqslant -\frac{3}{10} \quad \text{või} \quad a - \frac{7}{10} \geqslant \frac{3}{10};$$

$$a \leqslant \frac{7}{10} - \frac{3}{10}; \quad a \geqslant \frac{7}{10} + \frac{3}{10};$$

$$a \leqslant \frac{2}{5}; \quad a \geqslant 1.$$

Vastus. Antud avaldisel on mõtet siis, kui $a \leqslant \frac{2}{5}$, ja ka siis, kui $a \geqslant 1$.

7) $|x^2 - 1| < 2;$

$-2 < x^2 - 1 < 2 \mid + 1;$

$-1 < x^2 < 3.$

Et reaalarvu ruut on alati suurem kui -1, siis vasakpoolne võrratus on üleliigne. Jääb üle, et

$$x^2 < 3,$$

seega

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

§ 7. Funktsioonide graafikud

1. Funktsiooni mõiste. Olgu meil kaks hulka mingisuguseid objekte, näiteks klassi õpilased ja nende kohad klassis. Kui ühe hulga igale objektile vastab üks objekt teisest hulgast, siis öeldakse, et nende kahe hulga objektide vahel on

olemas vastavus (ehk funktsionaalne sõltuvus). Või teine näide: arvud, mis avaldavad lõikude pikkusi, ja arvud, mis avaldavad lõikudel kui läbimõõtudel konstrueeritud ringjoonte pikkusi.

Tähistame tähega x ühe hulga objekte (milledele vastavad teise hulga objektid) ja tähega y teise hulga objekte (mis vastavad x-dele). Piltlikult kõneldes on x originaali tähis ja y kujutise tähis. Ülaltoodud esimeses näites on x õpilase tähis, y tema koha tähis, teises näites on x läbimõõdu pikkus, y vastava ringjoone pikkus. On ilmne, et x pole mitte ühe kindla objekti tähis, vaid antud hulka kuuluva mingi objekti tähis (esimeses näites on x klassi mingi õpilane, teises näites mingi mittenegatiivne arv). Selles mõttes nimetatakse x muutujaks. Et x on niisugune objekt, mille valime meelevaldselt, siis nimetatakse x sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks. Samuti muutuv on y. Soovides toonitada, et otsime valitud x-le vastavat y-t, nimetame y sõltuvaks muutujaks ehk x funktsiooniks, tähistades seda sümboolsel kujul

$$y = f(x) \quad \text{ehk} \quad y = y(x).$$

Kuna keskkooli (ja ka TPI esimese kursuse) matemaatikas vaadeldakse funktsionaalseid seoseid ainult niisuguste suuruste vahel, mille väärtused on reaalarvud, siis piirdume vastavalt kitsendatud funktsiooni mõistega, andes sellele järgmise definitsiooni:

üks suurus (y) on teise (x) funktsioon, kui on olemas eeskiri, kuidas leida teise suuruse (x) väärtusele vastavat esimese suuruse (y) väärtust.

Võib juhtuda, et mõningatele x väärtustele antud eeskiri ei võimalda leida vastavat y väärtust.

Suuruse x nende väärtuste hulka, millele võib leida vastavaid suuruse y väärtusi, nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks. Suuruse y ehk funktsiooni väärtuste hulka nimetatakse funktsiooni muutumispiirkonnaks.

Näiteks, kui eeskiri y väärtuste leidmiseks on antud valemiga

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}},$$

siis funktsiooni määramispiirkonda kuuluvad kõik reaalarvud, mis on suuremad kui arv 1, sest ainult nende puhul võimaldab

see eeskiri leida y väärtusi: $x > 1$. Funktsiooni väärtuste hulka ehk funktsiooni muutumispiirkonda kuuluvad ilmselt kõik positiivsed arvud. Soovides saada y-le näiteks väärtust 10, tuleb x-le anda niisugune väärtus, et

$$\sqrt{x-1} = \frac{1}{10}$$

ehk

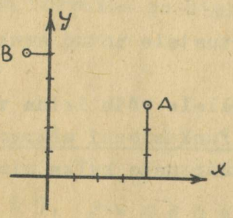
$$x - 1 = \frac{1}{100},$$

seega

$$x = 1{,}01.$$

2. Funktsiooni graafiku mõiste. Funktsiooni graafikuks nimetatakse niisugust joonist, millel argumendi väärtused ja neile vastavad funktsiooni väärtused on kujutatud lõikudena või nurkadena.

Kujutamisviisidest kõige lihtsam ja seepärast kõige kasutatavam on koordinaatide meetod, kus x-telg (nn. abstsisstelg) ja y-telg (nn. ordinaattelg) on omavahel risti (harilikult x-telg on võetud horisontaalsena, y-telg aga vertikaalsena). Mõõtühikud on mõlemal teljel sobivuse korral võrdsed (näiteks sentimeeter) või ka erinevad (kui x ja y suurusjärgud on erinevad). Telgede lõikepunkt on mõlema telje nullpunktis; teda nimetatakse koordinaatide alguseks ja tähistatakse tähega O. Igal teljel on valitud positiivne suund, mis on märgitud noolega, seega punkti koordinaadid on vastava märgiga kaugusarvud.



Joonis 8.

Näiteks: leida punkt A, mille koordinaadid on $x = 4$, $y = 3$, ja punkt B, mille koordinaadid on $x = -1$, $y = 5$. Punkti A leidmiseks teeme piki x-telge 4 sammu ja siis 3 sammu üles paralleelselt y-teljega (joonis 8). On ülearune ajakulu otsida punkti 3 y-teljel ja sealt joonestada horisontaalsirge.

Analoogiliselt punkti B saamiseks alustame tema ordinaadiga.

Asjaolu, et punkti B määravad kaks märgiga varustatud

kaugusarvu -1 ja $+5$ (-1 on abstsiss, $+5$ on ordinaat), tähistame lühidalt kujul

$$B(-1, 5).$$

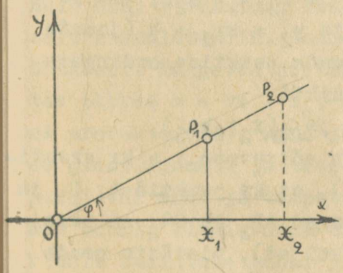
Lepime kokku: kui on tegemist mingi kindla fikseeritud punktiga, siis varustame tema koordinaadid mingi indeksiga, näiteks $A(x_1, y_1)$; kui aga punkt ei ole rangelt fikseeritud, siis jätame indeksid kirjutamata, näiteks kui punkt P on meelevaldne punkt (niinimetatud liikuv punkt) antud sirgjoonel, siis kirjutame lihtsalt

$$P(x, y).$$

3. Lihtsamate funktsioonide graafikud. Eeskiri x väärtuse järgi y vastava väärtuse leidmiseks võib olla formuleeritud väga mitmeti. Meid huvitavad esmajoones niisugused eeskirjad, mis on antud üheainsa esimese või teise astme avaldisega.

1) Lihtsaim funktsionaalne sõltuvus on võrdeline sõltuvus

$$y = kx.$$



Joonis 9.

Tõestame, et selle funktsiooni graafikuks on koordinaatide algust läbiv sirge. Selleks võtame funktsiooni graafikul kaks meelevaldset punkti $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ ning kanname joonisele nende ordinaatlõigud $X_1P_1 = kx_1$ ja $X_2P_2 = kx_2$ (joonis 9). Ühendades punktid P_1 ja P_2 koordinaatide algusega 0, saame kaks täisnurkset kolmnurka $0X_1P_1$ ja $0X_2P_2$, mis on sarnased, sest nende kaatetid on võrdelised:

$$\frac{X_2P_2}{X_1P_1} = \frac{kx_2}{kx_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{0X_2}{0X_1}.$$

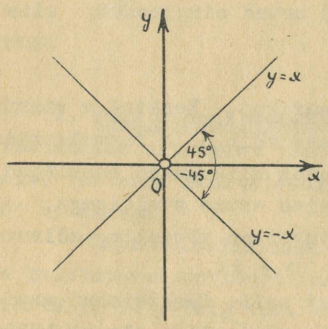
Kuid siis $\angle X_20P_2 = \angle X_10P_1$, tähendab punktid 0, P_1 ja P_2 asetsevad ühel ja samal sirgel. Seega graafik on sirgjoon.

Kordaja k geomeetriliselt tähendab x -telje ja graafiku vahelise nurga φ tangensit, sest

$$k = \frac{y}{x} = \frac{X_1P_1}{0X_1} = \frac{X_2P_2}{0X_2} = \tan\varphi.$$

Suurust $k = \tan\varphi$ nimetatakse ka sirgjoone $0P_2$ tõusuks. Kui $k > 0$, siis nurk x-telje ja sirge vahel on terav, näiteks kui

$k = 1$, siis $\varphi = 45^\circ$ ja sirge poolitab telgedevahelise nurga esimeses ja kolmandas veerandis. Kui $k < 0$, siis nurk x-telje ja sirge vahel on nürinurk (teisiti: negatiivne teravnurk). Näiteks, kui $k = -1$, siis $\varphi = 135^\circ$ (teisiti: -45°) ja sirge poolitab telgedevahelise nurga teises ja neljandas veerandis (joonis 10).



Joonis 10.

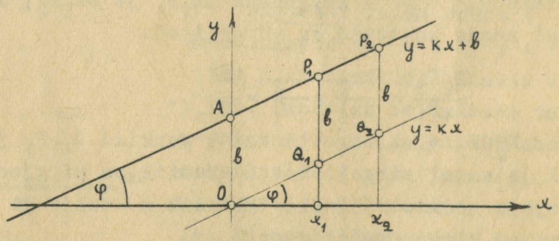
2) Lineaarse funktsiooni

$$y = kx + b$$

graafik lõikab y-telge punktis A(0; b), sest kui $x = 0$, siis $y = b$. See graafik on sirgjoon tõusuga $k = \tan\varphi$, kui φ on nurk selle sirgjoone ja x-telje vahel. Tõestuseks võtame graafiku punktile A(0; b) lisaks graafiku kaks meelevaldset punkti $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$, kus $y_1 = kx_1 + b$ ja $y_2 = kx_2 + b$ (joonis 11). Kui nende punktide ordinaate vähendada b võrra, siis saame kolm punkti

$$O,\ Q_1(x_1; kx_1) \text{ ja } Q_2(x_2; kx_2),$$

mis asetsevad ühel sirgel, sest nad on sõltuvuse $y = kx$ graafiku punktid. Sellest järeldub (kuidas?), et ka punktid A, P_1 ja P_2 asetsevad ühel ja samal sirgel. Sirged AP_2 ja OQ_2 on paralleelsed (kui rööpküliku AOQ_2P_2 vastasküljed), mistõttu nende lõikamisel sirgega x tekivad võrdsed kaasnurgad φ.

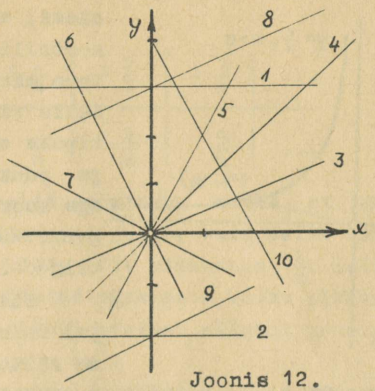


Joonis 11.

Kui lineaarse funktsiooni avaldises $kx + b$ kordaja $k = 0$, siis $y = b$, s.t. x igale väärtusele vastab üks ja sama y väärtus b. Funktsiooni graafikuks on nüüd x-teljega paralleelne sirge.

Näited. Joonisel 12 on esitatud alljärgnevate funktsioonide graafikud:

1. $y = 3$
2. $y = -2$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = x$
5. $y = 2x$
6. $y = -2x$
7. $y = -\frac{1}{2}x$
8. $y = 3 + \frac{1}{2}x$
9. $y = -2 + \frac{1}{2}x$
10. $y = 4 - 2x$.



Joonis 12.

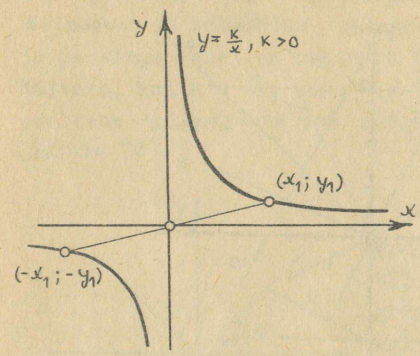
Lineaarse funktsiooni $y = kx + b$ määramispiirkonnaks on terve x-telg, sest igale reaalarvulisele x väärtusele vastab üks (ja ainult üks) y väärtus. Selle funktsiooni rakendatavus on äärmiselt laialatuslik. Vaadeldes x-i ajana, kuuluvad siia kõik ühtlaselt kulgevad protsessid (konstantse kiirusega läbikäidud tee pikkus $s = vt + s_0$, konstantse tootlikkusega töötava masina produktsioon), hind ja koguväärtus, Hooke'i seadus, ideaalse gaasi ruumala ja temperatuuri vaheline seos konstantse rõhu puhul või rõhu ja temperatuuri vaheline seos konstantse ruumala puhul, alalisvoolu elektromotoorne jõud ja voolu tugevus kindla takistuse puhul jm.

3) Pöördvõrdeline sõltuvus

$$y = \frac{k}{x}$$

on määratud kõikide x väärtuste puhul, välja arvatud $x = 0$. Graafik on sümmeetriline koordinaatide alguse O suhtes, st. kui punkt (x_1, y_1) asetseb graafikul, siis asetseb graafikul ka punkt $(-x_1, -y_1)$.

Funktsiooni graafiku saamiseks koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli ning graafiku skitseerimisel peame silmas, et kõvera harud piiramatult lähenevad koordinaattelgedele (joonis 13). Joont nimetatakse võrdhaarseks hüperbooliks. Kui $k > 0$, siis hüperbool asetseb esimeses ja kolmandas veerandis, ja kui $k < 0$, siis teises ja neljandas veerandis. Andes



Joonis 13.

seosele $y = \frac{k}{x}$ kuju $xy = k$, näeme, et suurust k võib geomeetriliselt tõlgendada kui vastava märgiga ristküliku pindala. Selle ristküliku kaheks vastastipuks on koordinaatide algus ja punkt graafikul, külgedeks aga koordinaattelgede lõigud ning graafiku punktist koordinaattelgedele tõmmatud ristlõigud.

Siinkohal soovitame lugejal valmistada rea pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuid, andes suurusele k väärtusi:

12, 6, 4, 1, 0, -6.

Näiteid füüsikast: seos kiiruse ja aja vahel ühe ja sama tee puhul; seos alalisvoolu tugevuse ja takistuse vahel kindla elektromotoorse jõu puhul; seos ideaalse gaasi ruumala ja rõhu vahel kindla temperatuuri puhul (ideaalse gaasi isotermid).

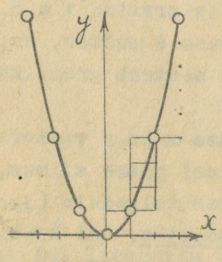
4) Funktsiooni

$$y = x^2$$

graafiku konstrueerimiseks koostame tabeli:

x	0	± 1	±2	± 3	...
y	0	+ 1	+ 4	+ 9	...

Vastav graafik on järgmine (joonis 14):



Joonis 14

Seda joont nimetatakse <u>paraboliks</u>; ta on sümmeetriline sirge suhtes, mis langeb ühte y-teljega. Edaspidi nimetame parabooli sümmeetriatelge lihtsalt <u>parabooli teljeks</u>. Punkti, kus parabool lõikub oma teljega, nimetatakse parabooli <u>haripunktiks</u>. Käesoleval juhul haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis.

Funktsiooni

$$y = ax^2;\ a > 0$$

graafiku ehitamiseks koostame samuti x ja y väärtuste tabeli,

kuid teeme seda nõnda, et kohe selguks, millist osa etendab kordaja a:

x	0	$\pm\frac{1}{a}$	$\pm\frac{2}{a}$	$\pm\frac{3}{a}$	...
y	0	$\frac{1}{a}$	$\frac{4}{a}$	$\frac{9}{a}$	...

Võrreldes seda tabelit eelmisega näeme, et joonis 14 sobib ka käesoleva funktsiooni jaoks, kuid selle vahega, et ühiklõigu asemel tuleb võtta lõik pikkusega $\frac{1}{a}$. Sellepärast joonisel 14 on meelega jäetud märkimata ühiku pikkus.

Kui $a < 0$, siis parabool asetseb allpool x-telge sümmeetriliselt paraboliga $y = -ax^2$.

Mida suurem on a absoluutväärtus, seda kitsam on parabool.

Praktiliselt kasulik on järgmine lihtne konstruktsioon: haripunktist kantakse paremale lõik $\frac{1}{a}$; sellele lõigule konstrueeritakse ruut; haripunkti vastastipust tehakse nüüd üks samm paremale ja kolm sammu üles. Lugejal soovitatakse: 1)konstrueerida graafik funktsioonile

$$y = \frac{1}{3}x^2,$$

kandes graafikule punktid:

$$(3;\ 3),\quad (6;\ 12);$$

esile tõsta ruut tippudega (0,0), (3; 0), (0; 3); 2) konstrueerida graafikud funktsioonidele

$$y = 2x^2 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{4}x^2.$$

Missugused ruudud tuleb konstrueerida nende paraboolide puhul, kumb neist paraboolidest on kitsam, kumb laiem?

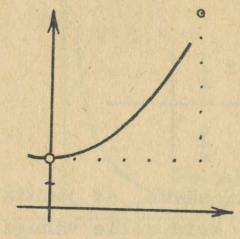
5) Funktsiooni

$$y = ax^2 + c$$

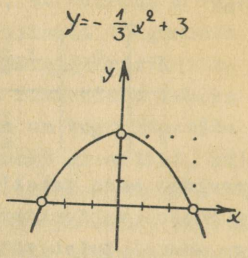
graafiku punktide ordinaadid on kõik c võrra suuremad parabooli $y = ax^2$ vastavate punktide ordinaatidest. Järelikult graafik on parabool, mille haripunkt on punktis (0; c).

Graafik ehitatakse nii, et esmalt leitakse haripunkt ja siis tehakse, lähtudes haripunktist, kõik teised konstruktsioo-

nid niisamuti, nagu parabooli $y = ax^2$ puhul.



Joonis 15.



Joonis 16.

Näiteks kujutades parabooli $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$, teeme haripunktist (0;2) 6 sammu paremale ja siis 6 sammu üles (joonis 15).

Kui funktsiooni avaldises $ax^2 + c$ arvud a ja c on erinevate märkidega, siis parabool lõikab x-telge kahes punktis, mis on sümmeetrilised y-telje suhtes (joonis 16). Kui aga a ja c on samade märkidega, siis lõikepunktide abstsissid on imaginaararvud, seega reaalseid lõikepunkte ei leidu.

6) Funktsiooni

$$y = ax^2 + bx + c$$

graafiku konstrueerimiseks võiksime koostada x ja y väärtuste tabeli, kuid kindlamini viib sihile järgmine arutlus: kordaja a sulgude ette toomisega ja täisruudu eraldamisega anname funktsiooni avaldisele kuju

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a},$$

mis on analoogiline kujuga $y = ax^2 + c$. Sellest järeldame, et otsitav graafik on parabool, mille sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega ja lõikab x-telge mitte enam punktis

$$x = 0,$$

nagu funktsiooni $y = ax^2 + c$ puhul, vaid punktis, kus

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

ehk

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Koefitsiendi a osa on jäänud täpselt endiseks; haripunkti ordinaat on vabaliige. Parabool lõikab x-telge kahes erinevas reaalses punktis või kahes ühtelangenud punktis (puutepunkt) või kahes imaginaarses punktis vastavalt sellele, kas avaldis $b^2 - 4ac$ on positiivne või null või negatiivne.

Praktiliselt võiks graafiku skitseerimine toimuda järgmiselt: 1) leida ruuttrinoomi $ax^2 + bx + c$ nullkohtade poolsumma $-\frac{b}{2a}$, 2) leida haripunkt, 3) konstrueerida ruut küljepikkusega $\frac{1}{a}$, mille üheks tipuks on haripunkt.

Näide. $y = \frac{1}{6}(x^2 - 8x - 14)$.

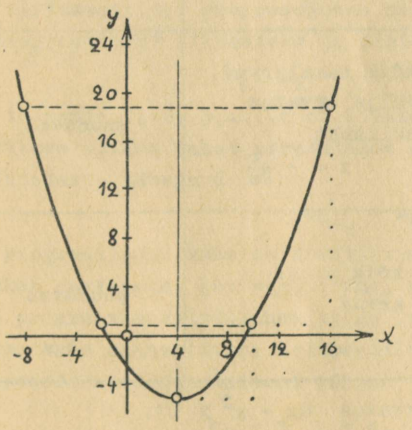
Sümmeetriatelje võrrand (joonis 17):

$$x = 4.$$

Haripunkti ordinaat (y väärtus, mis vastab x-i väärtusele 4):

$$y_L = \frac{1}{6}(4^2 - 8 \cdot 4 - 14);$$

$$y_L = -5.$$



Joonis 17.

Seega haripunkt on (4; -5).

Nüüd teeme haripunktist 6 sammu paremale ja 6 sammu üles; jõuame punkti (10,1), mis on otsitava parabooli punkt; sellest teeme 6 sammu paremale ja $3 \cdot 6 = 18$ sammu üles; punkt (16,19) on otsitava parabooli punkt. Märgime nüüd punktid, mis on leitud punktidega sümmeetrilised sirgjoone $x = 4$ suhtes. Nii saame punktid (-2, 1) ja (-8, 19). Nendest punktidest piisab parabooli skitseerimiseks. Kontrolliks võiks võtta punkti $(0, -\frac{7}{3})$ või mõne teise punkti.

7) Ruutfunktsiooni graafik on heaks vahendiks teise astme võrratuste lahendamisel, sest

$$y = ax^2 + bx + c$$

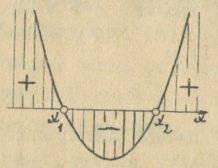
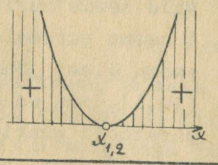
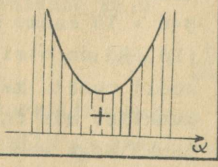
graafikust on otseselt näha, missugused x väärtused rahuldavad võrratust

$$ax^2 + bx + c > 0$$

ja missugused võrratust

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Andes lahendatavale võrratusele kuju, milles $a > 0$, ja arvutades ruuttrinoomi diskriminandi $D = b^2 - 4ac$ ning tarbe korral ka nullkohad x_1 ja x_2, saame võrratuste lahendid otseselt järgmisest tabelist.

Diskriminant	Funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik	Võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahendid	Võrratuse $ax^2 + bx + c < 0$ lahendid
$D > 0$		$x < x_1$ ja ka $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$D = 0$		kõik reaalarvud, välja arvatud nullkoht $x = -\frac{b}{2a}$	puuduvad
$D < 0$		kõik reaalarvud	puuduvad

Näide. Lahendada võrratus $8x - x^2 > 12$.

Võrratuse normaalkuju (kus $a > 0$):

$$x^2 - 8x + 12 < 0.$$

Ruuttrinoomi diskriminant:

$$D = 4^2 - 12 = 16 - 12 = 4 > 0.$$

Nullkohad:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{D} = 4 \pm 2;$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 6$$

Võrratuse lahendid:

$$\underline{2 \leq x \leq 6}.$$

IV. PROGRESSIOONID

§ 1. A r i t m e e t i l i n e p r o g r e s s i o o n

1. Aritmeetilise progressiooni mõiste. Aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvude jada, milles iga arvu (välja arvatud esimene) ja sellele eelneva arvu vahe on jääv.

Näiteks arvude jada 2, 7, 12, 17, 22 on aritmeetiline progressioon, sest iga kahe järjestikuse arvu vahe on 5.

Aritmeetilist progressiooni moodustavaid arve nimetatakse progressiooni liikmeteks ja tähistatakse sümbolitega

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

kus indeksid 1, 2, 3, ..., n on liikmete järjenumbrid. Kahe järjestikuse liikme vahet nimetatakse progressiooni vaheks ja tähistatakse tähega d:

$$d = a_{k+1} - a_k.$$

Kui progressiooni vahe on positiivne, siis progressiooni nimetatakse kasvavaks, kui negatiivne, siis kahanevaks. Aritmeetilise progressiooni mistahes liige (peale esimese ja viimase) on oma kahe naaberliikme aritmeetiline keskmine. Tõepoolest, progressiooni definitsiooni põhjal

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k,$$

millest

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

2. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem. Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Progressiooni definitsiooni põhjal

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

Analoogiliselt liikmete arvutamist jätkates näeme, et aritmeetilise progressiooni iga liige (ehk üldliige)

$$a_k = a_1 + (k - 1)d.$$

Aritmeetilise progressiooni iga liige võrdub summaga, mis saadakse, kui esimese liikmega liita progressiooni vahe ja kõigi eelnevate liikmete arvu korrutis.

Näited: $a_7 = a_1 + 6d$; $a_{20} = a_1 + 19d$; $a_{100} = a_1 + 99d$.

3. Aritmeetilise progressiooni summa valem. Aritmeetilise progressiooni summaks s nimetatakse tema kõigi liikmete summat:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Et summa otsene arvutamine suure arvu liidetavate korral on tülikas, siis tuletame valemi summa arvutamiseks. Selleks kirjutame summa kord alates esimesest liikmest, avaldades kõik liikmed progressiooni esimese liikme ja vahe kaudu, teine kord alates viimasest liikmest, avaldades kõik liikmed rea viimase liikme ja vahe kaudu:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d];$$
$$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n - 1)d].$$

Liites võrduste vastavad pooled saame:

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n).$$

Et liidetavaid $(a_1 + a_n)$ on n, siis

$$2s = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

millest

$$s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Aritmeetilise progressiooni summa võrdub progressiooni esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Summa valemile saab anda teise kuju, kui a_n asendada aval-

disega $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Siis

$$s = \frac{a_1 + a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

ehk

$$s = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

Näide. Leida esimese n paarisarvu summa.

Need paarisarvud moodustavad aritmeetilise progressiooni 2, 4, 6, ..., 2n. Selle rea summa

$$s = \frac{2 + 2n}{2} \cdot n = n(n + 1).$$

4. Ülesanded. Aritmeetilist progressiooni iseloomustavatest suurustest a_1, a_n, d, n, s peab kolm suurust olema antud, et määrata ülejäänud suurusi (sest meil on kaks võrrandit nende viie suuruse jaoks). Nende suuruste leidmist selgitavad järgmised näited.

1) Vanim ülesanne progressioonidest (pärit umbes 3000 a. e.m.a.):

Sada mõõtu vilja jaotada viie inimese vahel nii, et teine saaks nii palju rohkem esimesest, kui palju kolmas saab rohkem teisest, neljas kolmandast ja viies neljandast. Peale selle peavad esimesed kaks kokku saama 7 korda vähem vilja kui kolm ülejäänut kokku. Kui palju vilja tuleks anda igaühele?

Lahendus.

Ülesandes on tegemist aritmeetilise progressiooniga, mille liikmed peavad täitma kaht tingimust:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100;$$

$$7(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 + a_5.$$

Avaldame kõik liikmed a_1 ja d kaudu, teades, et $n = 5$ ja $s = 100$:

$$\begin{cases} \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 100; \\ 7(2a_1 + d) = 3a_1 + 9d. \end{cases}$$

Süsteemi lihtsustamisel saame:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 20; \\ 11a_1 - 2d = 0. \end{cases}$$

Niisiis

$$12a_1 = 20;$$

$$a_1 = 1\frac{2}{3};$$

$$d = 9\frac{1}{6}.$$

Seega vili tuleb jaotada järgmiselt:

$1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$ ja $38\frac{1}{3}$ mõõtu.

2) Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv ja vahe, kui $a_1 = 0,2$; $a_n = 5,2$ ja $s = 137,7$.

Lahendus.

Kasutades summa valemit leiame n:

$$\frac{0,2 + 5,2}{2} \cdot n = 137,7;$$

$$5,4n = 275,4;$$

$$n = 51.$$

Leiame üldliikme valemist d:

$$0,2 + 50d = 5,2;$$

$$50d = 5;$$

$$d = 0,1.$$

3) Tõestada, et kui a, b ja c on aritmeetilise progressiooni kolm järjestikust liiget, siis nende vahel on olemas seos

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Lahendus.

Et aritmeetilise progressiooni iga liige on naaberliikmete aritmeetiline keskmine, siis

$$b = \frac{a + c}{2} \quad \text{ja} \quad 2b = a + c.$$

Asendades tõestatava võrduse vasakus ja paremas pooles 2b summaga a + c, saame vasakul poolel

$$a^2 + 4c(a + c) = a^2 + 4ac + 4c^2$$

ja paremal poolel

$$(a + c + c)^2 = (a + 2c)^2 = a^2 + 4ac + 4c^2.$$

Et tulemused on võrdsed, siis antud seos kehtib.

4) Kaldpinda mööda veerev kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja iga järgneva sekundiga 0,7 m rohkem kui eelmises. Leida kera poolt 10 sekundiga läbitud tee pikkus.

Lahendus.

Sekundis läbitud tee pikkused moodustavad aritmeetilise progressiooni, mille esimene liige $a_1 = 0{,}5$, progressiooni vahe $d = 0{,}7$. Leida liikmete summa, kui $n = 10$.

$$s = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2};$$

$$s = \frac{1 + 9 \cdot 0{,}7}{2} \cdot 10 = 36{,}5.$$

Seega 10 sekundiga läbib kera 36,5 m.

§ 2. Geomeetriline progressioon

1. Geomeetrilise progressiooni mõiste. Geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvude jada, milles iga arvu (välja arvatud esimene) ja sellele eelneva arvu jagatis on jääv.

Näiteks arvude jada 2, 4, 8, 16, ... on geomeetriline progressioon, sest

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots = 2.$$

Geomeetrilist progressiooni moodustavaid arve nimetatakse progressiooni liikmeteks ja tähistatakse sümbolitega

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

kus 1, 2, ..., n on liikmete järjenumbrid. Geomeetrilise progressiooni mingi liikme ja eelneva liikme jagatist nimetatakse progressiooni teguriks ja tähistatakse tähega q. Teguri q järgi saab progressiooni liikmeid järgmiselt iseloomustada:

1) kui $q > 0$, siis progressiooni kõik liikmed on ühesuguste märkidega;

2) kui $q < 0$, siis progressiooni liikmed on vahelduvate märkidega;

3) kui $|q| > 1$, siis progressiooni liikmete absoluutväärtused kasvavad liikme järjenumbri kasvades;

4) kui $|q| < 1$, siis progressiooni liikmete absoluutväärtused kahanevad liikme järjenumbri kasvades.

Geomeetrilise progressiooni iga kolme järjestikuse liikme a_{k-1}, a_k ja a_{k+1} vahel kehtib seos $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_{k-1}}$ ehk

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} ,$$

mis ütleb, et geomeetrilise progressiooni iga liige (peale esimese ja viimase) on oma naaberliikmete geomeetriline keskmine.

2. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem. Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \dots , a_n,$$

mille tegur on q. Kohal k seisev liige (üldliige) on a_k ja sellele eelnev liige a_{k-1}. Geomeetrilise progressiooni definitsiooni järgi

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} \cdot q .$$

Geomeetrilise progressiooni iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja progressiooni teguri korrutisega.

Andes k-le järjest väärtused 2, 3, 4, ... , n, saame:

$$a_2 = a_1 \cdot q ;$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 ;$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \quad \text{jne.}$$

Üldiselt:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} .$$

Geomeetrilise progressiooni iga liige võrdub arvuga, mis saadakse progressiooni esimese liikme korrutamisel rea teguri astmega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.

Näited: $a_5 = a_1 \cdot q^4$; $a_{15} = a_1 \cdot q^{14}$; $a_{100} = a_1 \cdot q^{99}$.

3. Geomeetrilise progressiooni summa valem. Geomeetrilise progressiooni summaks s nimetatakse tema liikmete summat:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n .$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Kiiremini jõutakse eesmärgile vastava summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks avaldame liikmed a_2, a_3, ... , a_n esimese liikme ja rea teguri kaudu ning korrutame saadud võrduse

$$s = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

kummagi poole teguriga q:

$$sq = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n .$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame:

$$sq - s = a_1 \cdot q^n - a_1 ,$$

millest

$$s = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} .$$

Näide. Geomeetrilises progressioonis on viis liiget. Esimese nelja liikme summa on 13 ja viimase nelja liikme summa 19,5. Leida progressiooni äärmised liikmed.

Lahendus.

Ülesande põhjal

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13; & (1) \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 19,5. & (2) \end{cases}$$

Teise võrrandi kirjutame kujul

$$q(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 19,5.$$

Et suluavaldise väärtus võrdub 13, siis

$$q = \frac{19,5}{13} = \frac{3}{2}.$$

Esimese liikme a_1 leidmiseks kasutame summa valemit:

$$13 = \frac{a_1 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1};$$

$$13 = 2a_1\left(\frac{81}{16} - 1\right); \quad a_1 = 1,6.$$

Lahutame võrrandi (2) pooltest võrrandi (1) vastavad pooled:

$$a_5 - a_1 = 6,5;$$

$$a_5 = 6,5 + 1,6 = 8,1.$$

Seega $a_1 = 1,6$ ja $a_5 = 8,1$.

§ 3. Lõpmatult kahanev geomeetriline progressioon

1. Muutuva suuruse piirväärtus. Suuruste muutumise iseloomustamisel kasutatakse mitmeid erimõisteid ja -sümboleid, milledest tähtsamad on järgmised.

1) Muutuvat suurust s nimetatakse tõkestatuks, kui leidub niisugune arv $M > 0$, mida suuruse s absoluutväärtus ei ületa: $|s| \leq M$. Näiteks nurga siinus on tõkestatud suurus, sest

$$|\sin x| \leq 1.$$

2) Kui suurus s muutub nii, et tema absoluutväärtus saab suuremaks kuitahes suurest etteantud arvust ja sellest suuremaks ka jääb, siis öeldakse, et suurus kasvab tõkestamatult. Suuruse s tõkestamatut kasvamist märgitakse sümboliga

$$s \to \infty$$

(loe: s kasvab tõkestamatult).

Kui tõkestamatul kasvamisel suurus omandab ainult positiivseid või ainult negatiivseid väärtusi, siis suuruse muutumist märgitakse vastavalt kujul

$$s \to +\infty \quad \text{või} \quad s \to -\infty$$

(loe: s kasvab tõkestamatult positiivses suunas, negatiivses suunas).

Näited. 1) Kui teravnurk x läheneb 90°-le, siis $\tan x \to +\infty$; kui nürinurk x läheneb 90°-le, siis $\tan x \to -\infty$; kui nurk x läheneb 90°-le, siis $\tan x \to \infty$.

2) Kui ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga tippude arv kasvab tõkestamatult, siis kasvab tõkestamatult ka hulknurga sisenurkade summa $s = (n - 2) \cdot 360^\circ$: kui $n \to +\infty$, siis $s \to +\infty$.

3) Kui suurus s muutub nõnda, et tema ja jääva suuruse A vahe absoluutväärtus

$$|s - A|$$

saab kuitahes väikeseks, siis öeldakse, et suurus s läheneb suurusele A ehk suuruse s piirväärtuseks on suurus A.

Seda suuruse s muutumist märgitakse kujul

$$s \to A \quad \text{või} \quad \lim s = A,$$

kus sümbol lim on lühend ladinakeelsest sõnast limes (piir).

Kui s pole vabalt muutuv suurus, vaid sõltub näiteks suurusest x, siis tema muutumiseks nii, et ta läheneks antud suurusele A, on tarvilik, et x muutuks sobival viisil (kas läheneks mingile arvule a või kasvaks tõkestamatult).

Suuruse x lähenemist arvule a ja sellest tingitud suuruse s lähenemist arvule A märgitakse kas kujul

kui $x \to a$, siis $s \to A$ või $\lim\limits_{x \to a} s = A$.

Analoogiliselt märgitakse suuruse x tõkestamatut kasvamist ja sellest tingitud suuruse s lähenemist arvule A:

kui $x \to \infty$, siis $s \to A$ või $\lim\limits_{x \to \infty} s = A$.

Näited: 1) Kui suuruse x väärtusteks on

$$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \ldots,$$

siis $x \to \frac{1}{3}$ ehk $\lim x = \frac{1}{3}$, sest $|x - \frac{1}{3}|$ väärtusteks on siis $|0{,}3 - \frac{1}{3}|;\ |0{,}33 - \frac{1}{3}|;\ |0{,}333 - \frac{1}{3}|;\ \ldots$

ehk $\frac{1}{30};\quad \frac{1}{300};\quad \frac{1}{3000};\quad \ldots,$

mis näitab, et $|x - \frac{1}{3}|$ saab kuitahes väikeseks.

2) Kui ringjoone raadius on r ja selle sisse joonestatud korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt on s_n, siis

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 2\pi r.$$

Märkus. Ühtse märkimisviisi loomiseks loetakse sümbolid ∞, $+\infty$ ja $-\infty$ tõkestamatult kasvavate suuruste piirväärtusteks, kuigi need sümbolid ei tähenda arve. Nii kirjutatakse näiteks

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty.$$

2. Teoreemid piirväärtuste arvutamiseks. Piirväärtuste leidmisel tugineme järgmistele teoreemidele.

1) Kui murru lugeja on jääv ja nimetaja läheneb nullile, siis murd kasvab tõkestamatult:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty, \quad a = \text{const}.$$

Väite tõestamiseks tuleb näidata, et kui $x \to 0$, siis murru $\frac{a}{x}$ absoluutväärtus saab kuitahes suureks. Selleks võtame kuitahes suure positiivse arvu M, koostame võrratuse

$$\left|\frac{a}{x}\right| > M$$

ja näitame, et kui $x \to 0$, siis koostatud võrratusel lahendeid leidub, olgu M kuitahes suur. Võrratuse lahendamisel saame:

$$\frac{|a|}{|x|} > M$$

ja

$$|x| < \frac{|a|}{M} .$$

Kui $x \to 0$, siis $|x|$ muutub kuitahes väikeseks ja seega viimane võrratus on rahuldatud. Kuid siis on rahuldatud ka võrratus $\left|\frac{a}{x}\right| > M$, s.t. $\frac{a}{x} \to \infty$

2) <u>Kui murru lugeja on jääv ja nimetaja kasvab tõkestamatult, siis murd läheneb nullile</u>:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0, \quad a = \text{const.}$$

Väite tõestamiseks tuleb näidata, et kui $x \to \infty$, siis saab

$$\left|\frac{a}{x} - 0\right| = \left|\frac{a}{x}\right| = \frac{|a|}{|x|}$$

kuitahes väikeseks. Selleks võtame kuitahes väikese positiivse arvu ε ja näitame, et kui $x \to \infty$, siis x teatud väärtusest alates rahuldab tema iga väärtus võrratust

$$\frac{|a|}{|x|} < \varepsilon .$$

Lahendades selle võrratuse, saame:

$$|x| > \frac{|a|}{\varepsilon} .$$

Kui $x \to \infty$, siis $|x| \to +\infty$, tähendab, leidub kuitahes palju x väärtusi, mis rahuldavad seda võrratust, olgu ε kuitahes väike.

3) <u>Kui astme aluse absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis positiivse astendaja tõkestamatul kasvamisel aste läheneb nullile</u>:

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0, \quad |a| < 1.$$

Väite tõestamiseks tuleb näidata, et kui $n \to +\infty$, siis

$$|a^n - 0| = |a|^n$$

saab kuitahes väikeseks. Selleks võtame kuitahes väikese positiivse arvu ε ja näitame, et kui $n \to +\infty$, siis n teatud väärtusest alates on võrratus

$$|a|^n < \varepsilon$$

rahuldatud n iga väärtuse puhul. Võttes võrratuse mõlema poole logaritmid alusel 10, saame

$$n \cdot \log|a| < \log \varepsilon$$

ehk, jagades võrratuse mõlemad pooled negatiivse arvuga $\log|a|$,

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |a|}.$$

Et $n \to +\infty$, siis tema teatud väärtusest alates on see võrratus rahuldatud, olgu ε kuitahes väike.

Näide. Kui $a = 0{,}8$, siis $a^2 < 0{,}7$, $a^4 < 0{,}5$, $a^8 < 0{,}2$, $a^{16} < 0{,}03$, $a^{32} < 0{,}001$, $a^{64} < 0{,}0000001$, mis näitab, et n tõkestamatul kasvamisel a^n läheneb nullile õige kiiresti.

4) Kui astme aluse absoluutväärtus on suurem kui 1, siis positiivse astendaja tõkestamatul kasvamisel aste kasvab tõkestamatult:

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \infty, \quad |a| > 1.$$

Tõestus. Et

$$a^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n},$$

siis

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n},$$

kusjuures $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$. Kui $n \to +\infty$, siis teoreemi 3 põhjal $\left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$ ja seega teoreemi 1 põhjal

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \to \infty \text{ ehk } \lim_{n \to +\infty} a^n = \infty.$$

Näited: 1) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}5^n = \infty$, 2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}95)^n = 0$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{8}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$, sest teoreemi 4 põhjal murru nimetaja kasvab tõkestamatult ja seega teoreemi 2 põhjal murd läheneb nullile.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}05 \cdot 2^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{0{,}05}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \infty$, sest teoreemi 3

põhjal murru nimetaja läheneb nullile ja seega teoreemi 1 põhjal murd kasvab tõkestamatult.

Järeldus. Näidete 3 ja 4 eeskujul saab tõestada, et kui korrutise üks tegur on jääv ja teine tegur läheneb nullile või kasvab tõkestamatult, siis ka korrutis vastavalt läheneb nullile või kasvab tõkestamatult.

3. Lõpmatu geomeetriline progressioon. Kui progressiooni liikmete arv n kasvab tõkestamatult, siis progressiooni nimetatakse lõpmatuks. Vaatleme lõpmatut geomeetrilist progressiooni:

$$a_1;\ a_1q;\ a_1q^2;\ \ldots;a_1q^{n-1};\ldots$$

Leiame, kuidas muutub selle üldliige $a_n = a_1q^{n-1}$, kui $n \to +\infty$

1) Kui $|q| > 1$, siis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_1q^{n-1} = \infty$, sest kui $n \to +\infty$, siis ka $n - 1 \to +\infty$, seega eelmise punkti teoreemi 4 ja järelduse põhjal $a_1q^{n-1} \to \infty$.

2) Kui $|q| < 1$, siis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_1q^{n-1} = 0$, sest kui $n \to +\infty$, siis analoogiliselt teoreemi 3 ja järelduse põhjal $a_1q^{n-1} \to 0$.

3) Kui $|q| = 1$, siis jada on $a_1;\ a_1;\ a_1;\ \ldots$ või $a_1;\ -a_1;\ a_1;\ -a_1;\ \ldots$, s.t. jada liikmete absoluutväärtused on konstantsed.

Kui lõpmatu geomeetrilise progressiooni teguri absoluutväärtus $|q| > 1$, siis progressiooni nimetatakse lõpmatult kasvavaks ja kui $|q| < 1$, siis lõpmatult kahanevaks. Ülalpool nägime, et lõpmatult kasvava geomeetrilise progressiooni üldliige kasvab tõkestamatult ja lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni üldliige läheneb nullile:

$$\text{kui } |q| > 1, \text{ siis } \lim_{n\to+\infty} a_1q^{n-1} = \infty;$$

$$\text{kui } |q| < 1, \text{ siis } \lim_{n\to+\infty} a_1q^{n-1} = 0.$$

Näited: 1) Kui $a_1 = 3$ ja $q = 5$, siis progressioon on $3;\ 15;\ 75;\ 375;\ 1875;\ 9375;\ \ldots\ a_n \to \infty$

2) Kui $a_1 = 3$ ja $q = \frac{1}{5}$, siis progressioon on

$3; \frac{3}{5}; \frac{3}{25}; \frac{3}{125}; \frac{3}{625}; \frac{3}{3125}; \ldots \quad a_n \to 0.$

3) Kui $a_1 = 3$ ja $q = -\frac{1}{5}$, siis progressioon on

$3; -\frac{3}{5}; \frac{3}{25}; -\frac{3}{125}; \frac{3}{625}; -\frac{3}{3125}; \ldots a_n \to 0.$

4. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa.

Kui lõpmatu jada

$$a_1; a_2; a_3; \ldots, a_n, \ldots$$

liikmed ühendada märkidega +, siis saame lõpmatu rea

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Kui vaadeldavaks jadaks on lõpmatult kahanev geomeetriline progressioon, siis liikmete ühendamisel märkidega + saame lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (*)$$

(milles esimese liikme tähiseks on a). Tekib küsimus, kas saadud rida esitab mingit arvu või mitte. Küsimuse lahendamine otsese liitmise teel pole võimalik, sest liitmine jätkuks lõpmatult. Küll osutub aga võimalikuks liita esimesed n liiget ja leida siis saadud summa s_n piirväärtus n tõkestamatul kasvamisel (kui see piirväärtus on olemas).

Rea (*) esimese n liikme summa

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

leiame geomeetrilise progressiooni liikmete summa valemi järgi (IV, § 2, 3):

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}(1 - q^n).$$

Kui $n \to +\infty$, siis $q^n \to 0$, sest $|q| < 1$ (p. 2, teoreem 3); kuid siis $1 - q^n \to 1$ ja seega

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$$

Seda piirväärtust nimetatakse lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks ja tähistatakse tähega s:

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

Seda arvu esitabki lõpmatult kahanev geomeetriline rida:

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1 - q}.$$

Näited: 1) $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \ldots = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$;

2) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} - \ldots = \frac{3}{1+\frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$;

3) Kui $3 + 3x + 3x^2 + \ldots = 2$, siis

$$\frac{3}{1-x} = 2,$$

seega

$$1 - x = \frac{3}{2}$$

ja

$$x = -\frac{1}{2}.$$

V. LOGARITMID

§ 1. Logaritmi mõiste ja põhiomadused

1. Arvu logaritmi mõiste. Arvu x logaritmiks antud alusel a nimetatakse niisugust arvu y, millega on vaja logaritmi alust astendada, et saada arv x.

Arvu x logaritmi alusel a märgitakse sümboliga $\log_a x$. Ülal antud definitsiooni saab selle sümboli abil kirjutada lühidalt järgmiselt:

$$\log_a x = y, \text{ kui } a^y = x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Näited: 1) $\log_7 49 = 2$, sest $7^2 = 49$;

2) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, sest $5^{-3} = \frac{1}{125}$;

3) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$, sest $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, sest $(\frac{1}{3})^{-4} = 81$.

Järeldus. Kui võrdustest (*) suurus y elimineerida (asendades teises võrduses y tema avaldisega esimesest), siis logaritmi definitsioon avaldub üheainsa võrdusena:

$$a^{\log_a x} = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

Näited: 1) $3^{\log_3 9} = 9$ 2) $2^{\log_2 5} = 5$;

3) $5^{2\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9$;

4) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

Logaritmide aluseks kõlbab iga positiivne arv, välja arvatud arv 1. Viimane ei kõlba selleks, sest arvu 1 kõik astmed on võrdsed. Logaritmide aluseks ei kõlba ka negatiivne arv, sest negatiivse arvu mõned astmed pole reaalarvud.

2. Logaritmide põhiomadused. Vaatleme mitmesuguste arvude x logaritme ühel ja samal alusel $a > 1$ (logaritme alusel $0 < a < 1$ ei kasutata). Kui on tegemist logaritmidega ühel ja samal alusel, siis alust ei tarvitse märkida: $\log_a x = \log x$.

1) Arvu 1 logaritm on igal alusel 0:

$\log 1 = 0$, sest $a^0 = 1$.

2) Aluse logaritm võrdub arvuga 1:

$\log a = 1$, sest $a^1 = a$.

3) Arvu kasvamisel kasvab ka tema logaritm:

kui $x_2 > x_1$, siis ka $\log x_2 > \log x_1$.

Kirjutades arvud x_2 ja x_1 võrduse (* *) põhjal astmetena, saame eelduse $x_2 > x_1$ kujul

$$a^{\log x_2} > a^{\log x_1}.$$

Lugedes ilma lähema põhjenduseta õigeks, et ühe ja sama aluse $a > 1$ puhul suuremal astmel on ka suurem astendaja, saame:

$$\log x_2 > \log x_1.$$

4) Negatiivsetel arvudel ja arvul 0 ei ole logaritme, sest

$$a^{\log x} = x$$

on iga reaalarvulise astendaja (log x) puhul positiivne, s.t. $x > 0$.

5) Arvust 1 väiksemate positiivsete arvude logaritmid on negatiivsed, sest kui $0 < x < 1$, siis omaduse 3 põhjal

$$\log x < \log 1$$

ehk

$$\log x < 0.$$

6) Arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed,

sest kui $x > 1$, siis omaduse 3 põhjal

$$\log x > \log 1$$

ehk (omadus 1)

$$\log x > 0.$$

Seejuures, kui $1 < x < a$, siis $0 < \log x < 1$, ja kui $x > a$, siis $\log x > 1$.

Näited: 1) $0 < \log_4 3 < 1$ (sest $1 < 3 < 4$, omadus 6);
2) $\log_5 8 > 1$ (sest $8 > 5$, omadus 6);
3) $\log_2 0{,}5 < 0$ (sest $0 < 0{,}5 < 1$, omadus 5);
4) $\log_3 6 > \log_3 5$ (sest $6 > 5$, omadus 3).

3. Eksponentfunktsiooni graafik. Suurust y nimetatakse suuruse x eksponentfunktsiooniks, kui $y = a^x$, kus a on mingi positiivne konstant ($a \neq 1$).

Kujutame selle sõltuvuse graafiliselt eeldusel, et $a > 1$, näiteks $a = 2$. Selleks arvutame 2^x väärtused, mis vastavad näiteks x täisarvulistele väärtustele -3 kuni 3:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Kujutades need väärtuspaarid graafiliselt saame joonise 18. Et x iga väärtuse juures $2^x > 0$, siis eksponentkõver on kogu ulatuses pealpool x-telge, kusjuures x kasvades ka $y = 2^x$ kasvab. Need kaks omadust on eksponentfunktsioonil a^x iga aluse $a > 1$ puhul:

1) $a^x > 0$; 2) kui $x_2 > x_1$, siis $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Kui astme alus $0 < a < 1$, näiteks $a = \frac{1}{2}$, siis

$$y = (\tfrac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x},$$

mille graafikuna saame joonise 19. Siis

1) $a^x > 0$; 2) kui $x_2 > x_1$, siis $a^{x_2} < a^{x_1}$.

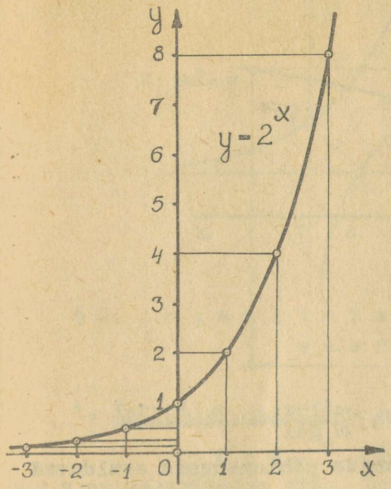
Kui $a = 1$, siis $y = a^x = 1$, mille graafikuks on x-teljega paralleelne sirge läbi punkti (0; 1).

Kokkuvõte:

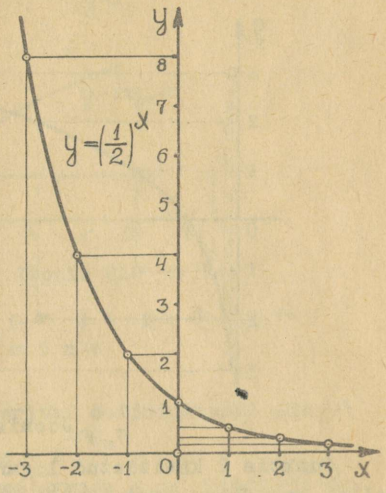
1) eksponentfunktsioon $a^x (a > 0)$ on x iga väärtuse juures positiivne;

2) argumendi x kasvades eksponentfunktsioon kasvab, kui $a > 1$, ja kahaneb, kui $0 < a < 1$;

3) iga aluse a puhul ($a > 0$) eksponentfunktsiooni graafik läbib punkti (0; 1).



Joonis 18.



Joonis 19.

4. Logaritmfunktsiooni graafik. Suurust y nimetatakse suuruse x logaritmfunktsiooniks, kui $y = \log_a x$, kus $a \neq 1$ on mingi positiivne konstant (tavaliselt $a > 1$).

Selle sõltuvuse saame seosest $y = a^x$, kui viimase lahendame x suhtes ja vahetame selles tähed x ja y selle märkimiseks, et endine vabalt muutuv suurus x on loetud sõltuvaks muutujaks ja endine sõltuv muutuja y argumendiks:

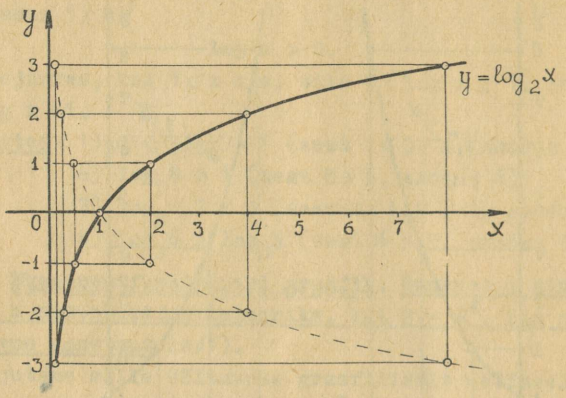
kui $y = a^x$, siis $x = \log_a y$ ehk, vahetades tähised, $y = \log_a x$.

Kirjeldatud seose tõttu eksponentfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni nimetatakse teineteise pöördfunktsioonideks.

Kujutame graafiliselt mingi logaritmfunktsiooni, näiteks funktsiooni $y = \log_2 x$. Selleks anname x-le väärtused, millede logaritmid on täisarvud -3-st kuni 3-ni:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Vastav graafik on kujutatud joonisel 20



Joonis 20.

Punktis 2 käsitletud logaritmide põhiomadused avalduvad selles graafikus järgmiselt:

1) graafik lõikab x-telge punktis (1;0), s.t. log 1 = 0;

2) graafik läbib punkti (2; 1), s.t. log 2 = 1;

3) logaritmfunktsiooni graafikuks on tõusev joon;

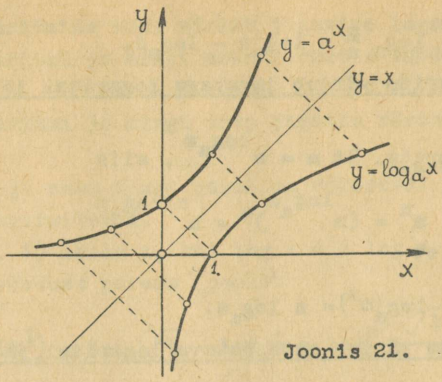
4) graafik asetseb täielikult y-teljest paremal, s.t. nullil ja negatiivsetel arvudel puuduvad logaritmid;

5) vahemikus $0 < x < 1$ on graafik allpool x-telge, s.t. nende arvude logaritmid on negatiivsed;

6) vahemikus $x > 1$ on graafik pealpool x-telge, s.t. nende arvude logaritmid on positiivsed.

Kui logaritmide aluseks võtta endise aluse a pöördarv $\frac{1}{a}$, siis logaritmfunktsiooni graafikuks saaksime joone, mis on x-telje suhtes sümmeetriline joonega $y = \log_a x$ (punktiirjoon joonisel 20).

Kui ühes ja samas teljestikus kujutada eksponentfunktsioon $y = a^x$ ja tema pöördfunktsioon $y = \log_a x$, siis saame sirge $y = x$ suhtes sümmeetrilise joonepaari (joonis 21).



Joonis 21.

§ 2. Logaritmimine ja potentseerimine

1. Korrutise logaritm. Logaritmi definitsiooni põhjal

$$m = a^{\log_a m} \quad \text{ja} \quad n = a^{\log_a n},$$

kus a on logaritmide alus. Leiame arvude m ja n korrutise:

$$m \cdot n = a^{\log_a m} \cdot a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n}.$$

Et arvude m ja n korrutise logaritm on astendaja, millega alust a astendades saadakse korrutis mn, siis viimasest võrdusest järeldub, et

$$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n.$$

See järeldus kehtib ka rohkem kui kahe teguri puhul, sest ühe ja sama arvu a astmete korrutamisel liidetakse astendajad igasuguse tegurite arvu puhul:

$$\log_a(mnp \ \ldots \ r) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots + \log_a r.$$

Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

2. Jagatise logaritm. Leiame arvude

$$m = a^{\log_a m} \quad \text{ja} \quad n = a^{\log_a n}$$

jagatise:

$$m : n = a^{\log_a m} : a^{\log_a n} = a^{\log_a m - \log_a n}.$$

Et arvude m ja n jagatise logaritm on astendaja, millega alust a astendades saadakse jagatis m:n, siis viimasest võrdusest järeldub, et

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$$

Jagatise logaritm võrdub jagatava logaritmi ja jagaja logaritmi vahega.

3. Astme logaritm. Et $m = a^{\log_a m}$, siis

$$m^n = (a^{\log_a m})^n = a^{n \cdot \log_a m}$$

Sellest järeldub, et

$$\log_a(m^n) = n \log_a m.$$

Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

4. Juure logaritm. Iga juurt saab kirjutada astmena kujul $\sqrt[n]{m} = m^{\frac{1}{n}}$. Seepärast juure logaritm avaldub järgmiselt:

$$\log_a \sqrt[n]{m} = \log_a(m^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \log_a m = \frac{\log_a m}{n}.$$

Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

5. Avaldise logaritmimine. Algebralise avaldise logaritmimiseks nimetatakse tema logaritmi avaldamist avaldises leiduvate arvude logaritmide kaudu. Iga avaldise logaritmimine tugineb punktides 1 kuni 4 käsitletud korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmimise eeskirjadele. Summa ja vahe logaritmi avaldamine liikmete logaritmide kaudu pole võimalik, nii et näiteks $\log(a + b) \neq \log a + \log b$.

Näited:

1) $\log \frac{a\sqrt[3]{b}}{4} = \log a + \frac{1}{3} \log b - 4 \log c.$

2) $\log \sqrt[5]{\frac{5,74^2 \cdot \sqrt[3]{7,7}}{0,86 \cdot 13,6^4}} = \frac{1}{5} [2 \log 5,74 + \frac{1}{3} \log 7,7 - (\log 0,86 + 4 \log 13,6)].$

3) $\log (2 - \sqrt{3})^7 = 7 \log(2 - \sqrt{3}).$

6. Potentseerimine. Potentseerimiseks nimetatakse avaldise leidmist tema logaritmi järgi. Juhinduda tuleb järgmistest reeglitest:

1) logaritmide summa võrdub korrutise logaritmiga;

2) logaritmide vahe võrdub jagatise logaritmiga;

3) logaritmi ja mingi arvu korrutis võrdub astme logaritmiga;

4) logaritmi ja mingi arvu jagatis võrdub juure logaritmiga;

5) ühe ja sama aluse puhul on võrdsetel logaritmidel ka võrdsed logaritmitavad.

Näited. 1) Leida x, kui $\log x = 3 \log a + \frac{1}{5} \log b - \log c$. Teisendame võrduse parema poole:

$$\log x = \log(a^3) + \log \sqrt[5]{b} - \log c = \log \frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{c}.$$

Järelikult

$$x = \frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{c}.$$

2) Leida x, kui $\log x = 3\left[\frac{1}{2} \log 37{,}8 + 5 \log 0{,}94 - (\log 7{,}8 + 3 \log 59{,}1)\right]$.

Teisendame võrduse parema poole:

$$\log x = 3\left[\log \sqrt{37{,}8} + \log (0{,}94^5) - (\log 7{,}8 + \log (59{,}1^3))\right] =$$

$$= 3 \log \frac{\sqrt{37{,}8} \cdot 0{,}94^5}{7{,}8 \cdot 59{,}1^3} = \log \left(\frac{\sqrt{37{,}8} \cdot 0{,}94^5}{7{,}8 \cdot 59{,}1^3} \right)^3$$

Järelikult

$$x = \left(\frac{0{,}94^5 \cdot \sqrt{37{,}8}}{7{,}8 \cdot 59{,}1^3} \right)^3.$$

§ 3. K ü m n e n d l o g a r i t m i d

1. Kümnendlogaritmide omadused. Kümnendlogaritmideks nimetatakse logaritme alusel 10. Arvu a kümnendlogaritmi märgime sümboliga log a. Seega $\log a = b$, kui $10^b = a$.

Arve 10^n, kus n on positiivne või negatiivne täisarv, nimetatakse järguühikuteks. Järguühiku 10^n kümnendlogaritm võrdub arvuga n : $\log(10^n) = n$.

Näiteks $\log 100 = \log(10^2) = 2$; $\log 0{,}001 = \log(10^{-3}) = -3$. Kirjutades järguühiku numbri 1 ja sellele järgnevate või eelnevate nullide abil, [illegible]me, et järguühiku kümnendlogaritm võrdub tema kirjutuses numbri 1 järel olevate nullide arvuga või sel-

le numbri ees olevate nullide arvu vastandarvuga (kaasa arvatud null tervet). Muude ratsionaalarvude kümnendlogaritmid on irratsionaalsed. Tõestame seda vastuväiteliselt, oletades, et mingi ratsionaalarvu $a \neq 10^n$ (n - täisarv) kümnendlogaritm on ratsionaalarv $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud: $\log a = \frac{p}{q}$. Siis logaritmi definitsiooni põhjal $10^{\frac{p}{q}} = a$. Astendades võrduse mõlemaid pooli arvuga q, saame $10^p = a^q$. Et 10^p on järguühik, a^q aga mitte, siis saadud võrdus pole võimalik ja seega meie oletus oli vale. Ratsionaalarvu $a \neq 10^n$ kümnendlogaritm avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, mille täisosa nimetatakse logaritmi karakteristikuks ja murdosa mantissiks. Viimased antakse tavaliselt 3, 4, 5 või 7 kümnendkohaga. Kui arvu logaritm on negatiivne, siis antakse talle kuju, kus karakteristik on negatiivne, mantiss aga positiivne. Selleks lahutatakse täisosast 1, murdosaga aga liidetakse 1.

Näide: $\log 0{,}5 = \bar{1}, 30103 = \bar{1}, 69897$. Viimases kirjutuses mantiss on positiivne, karakteristik negatiivne. Selliseid arve nimetatakse poolnegatiivseteks ja neid loetakse nagu "üks miinusega koma kuuskümmend üheksa kaheksasada üheksakümmend seitse" või "kuuskümmend üheksa tuhat kaheksasada üheksakümmend seitse". Arvu korrutamisel järguühikuga 10^n ehk teisiti, koma nihutamisel arvus n koha võrra paremale (kui $n > 0$) või -n koha võrra vasakule (kui $n < 0$) tuleb liita arvu kümnendlogaritmi karakteristikuga n, mantiss aga jätta endiseks, sest

$$\log(a \cdot 10^n) = \log a + \log(10^n) = \log a + n,$$

mis erineb arvu a logaritmist täisarvu n võrra. Seetõttu on arvudel, mis erinevad üksteisest vaid koma asukoha poolest arvus, üks ja sama logaritmi murdosa. Kümnendlogaritmide tabeli koostamisel piisab kui anda arvude 1 - 10 logaritmide murdosad, sest nende abil saab leida kõigi arvude kümnendlogaritme.

Tuletame reegli arvu kümnendlogaritmi täisosa määramiseks. Kui arvu a täisosa on ühekohaline arv, siis

$$1 \leq a < 10,$$

seega

$$0 \leq \log a < 1,$$

mis näitab, et log a täisosa on 0. Nii näiteks $\log 7{,}85 = 0{,}8949$. Et iga n-kohalise täisosaga arvu saab kirjutada ühe ühekohalise

täisosaga arvu ja 10^{n-1} korrutisena, siis eespool tõestatud teoreemi põhjal n-kohalise täisosaga arvu kümnendlogaritmi karakteristik on n-1.

Näide: $\log 7850 = \log(7{,}85 \cdot 10^3) = \log 7{,}85 + \log(10^3) = 0{,}8949 + 3 = 3{,}8949.$

Iga kümnendmurdu, mille tüvenumbrite ees on n nulli (kaasa arvates ka ühelisi tähistav null), saab kirjutada ühe ühekohalise täisosaga arvu ja 10^{-n} korrutisena. Järelikult selle kümnendmurru logaritmi karakteristik on -n.

Näide: $\log 0{,}000785 = \log(7{,}85 \cdot 10^{-4}) = \log 7{,}85 + \log(10^{-4}) = 0{,}8949 - 4 = \bar{4}{,}8949.$

Niisiis:

arvust 1 suurema täisarvu ja kümnendmurru logaritmi karakteristik on ühe võrra väiksem arvu täisosa numbrite arvust; arvust 1 väiksema kümnendmurru logaritmi karakteristik sisaldab nii mitu negatiivset ühelist, kui mitu nulli on arvu tüvenumbrite ees (kaasa arvatud ka ühelisi tähistav 0).

2. Arvutamine logaritmide tabelite abil. Logaritmide praktiline väärtus seisneb selles, et nende abil on kerge leida mitmekohaliste arvude korrutisi, jagatisi, astmeid ja juuri. Eriti suurt täpsust mittenõudvate arvutuste puhul kasutatakse neljakohalisi tabeleid, millede abil saame vastuses neli tüvenumbrit, kusjuures viimane neist ei tarvitse olla õige. Avaldiste puhul, mis sisaldavad liitmist ja lahutamist, tuleb tehete komponendid arvutada eraldi. V. Bradise "Neljakohalistes matemaatilistes tabelites" leidub peale logaritmide mantissi de tabeli veel antilogaritmide tabel, mida kasutatakse arvu leidmiseks tema logaritmi järgi. Antilogaritmide tabeli kasutamisel tuleb meeles pidada, et arvu tüvenumbrid leitakse tabelist logaritmi mantissi järgi (jättes seega karakteristiku kõrvale) ja koma asukoht arvus määratakse karakteristiku järgi. Trigonomeetrilisi funktsioone sisaldavate avaldiste väärtuste arvutamiseks on tabelitekogudesse paigutatud ka trigonomeetriliste funktsioonide logaritmid. Selgitavad märkused tabelite kasutamise kohta on lisatud tabelite juurde.

Näited. 1) Leida $\sqrt[7]{857}$.

Tähistame otsitava tähega x; siis

$\log x = \frac{1}{7} \log 857 = \frac{1}{7} \cdot 2{,}9330 = 0{,}4190.$

Antilogaritmide tabeli abil leiame, et

$$x = 2{,}624.$$

2) Arvutada $\dfrac{4{,}193^2 \cdot \sqrt{503{,}2}}{19{,}14 \cdot \sin 7^\circ 41'}$.

Kui märgime avaldise väärtuse tähega x, siis

$$\log x = 2 \log 4{,}193 + \frac{1}{2} \log 503{,}2 - \log 19{,}14 - \log \sin 7^\circ 41'.$$

Arvutamise hõlbustamiseks kasutame järgmist skeemi:

$2 \log 4{,}193 = 2 \cdot 0{,}6225 = 1{,}2450$

$\frac{1}{2} \log 503{,}2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}7018 = 1{,}3509$

$- \log 19{,}14 = -1{,}2819 = \bar{2}{,}7181$

$- \log \sin 7^\circ 41' = -\bar{1}{,}1261 = 0{,}8739$

$\log x = 2{,}1879$

$x = 154{,}1.$

Näites on kasutatud lahutatava teisendamist liidetavaks. See toimub nii, et täisosast lahutatakse 1 ja murdosaga liidetakse 1:

$$\overset{-1+1}{-1{,}2819} = \bar{2}{,}7181;$$

$$\overset{-1+1}{-\bar{1}{,}1261} = 0{,}8739.$$

3) Arvutada $x = \dfrac{\pi \sqrt{0{,}256^3}}{\sqrt{51{,}22} \sqrt[3]{0{,}082}}$.

$\log \pi = 0{,}4971$

$\frac{3}{2} \log 0{,}256 = \frac{3}{2} \cdot \bar{1}{,}4082 = \frac{1}{2} \cdot \bar{2}{,}2246 = \bar{1}{,}1123$

$-\frac{1}{2} \log 51{,}22 = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}7095 = \overset{-1+1}{-0{,}8548} = \bar{1}{,}1452$

$-\frac{1}{6} \log 0{,}082 = -\frac{1}{6} \cdot \bar{2}{,}9138 = \overset{-4+4 \quad -1+1}{-\bar{1}{,}8190} = 0{,}1810$

$\log x = \bar{2}{,}9356$

$x = 0{,}08622.$

4) Arvutada $x = \sqrt[5]{\dfrac{25{,}8 \sqrt{0{,}021}}{3{,}512}} - 1000^{0{,}1}$.

Arvutada tuleb ositi, sest avaldises esineb vahe. Tähistame vähendatava tähega a ja lahutatava tähega b ning arvutame a ja b:

$$a = \frac{25{,}8\sqrt{0{,}021}}{3{,}512^2};$$

$$\log 25{,}8 = \quad = 1{,}4116$$

$$\tfrac{1}{2}\log 0{,}021 = \tfrac{1}{2} \cdot \bar{2}{,}3222 = \bar{1}{,}1611$$

$$-\log 3{,}512 = \underline{-0{,}5455 \quad = \bar{1}{,}4545}$$

$$\log a \quad = 0{,}0272$$

$$a \quad = 1{,}064$$

$$b = 1000^{0{,}1} = (10^3)^{0{,}1} = 10^{0{,}3};\ \log b = 0{,}3$$

$$b = 1{,}995.$$

Asendame antud avaldises a ja b leitud väärtustega:

$$x = \sqrt[5]{1{,}064 - 1{,}995} = \sqrt[5]{-0{,}931} = -\sqrt[5]{0{,}931};$$

$$-x = \sqrt[5]{0{,}931};\ \log(-x) = \tfrac{1}{5}\log 0{,}931 = \tfrac{1}{5} \cdot \bar{1}{,}9689 = \bar{1}{,}9938;$$

$$-x = 0{,}9858$$

$$x = -0{,}9858.$$

§ 4. Eksponent- ja logaritmvõrrandid

1. Eksponentvõrrand. Eksponentvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus tundmatu esineb astendajas. Üks eksponentvõrrandi lahendamise võte põhineb järgmisel astmete omadusel: kui ühe ja sama arvu astmed on võrdsed, siis on võrdsed ka astendajad. Teine lahendamisvõte: logaritmitakse võrrandi mõlemaid pooli. Vaatleme nende võtete rakendamist järgmiste näidete juures.

Näide 1. $0{,}25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

Teisendame võrrandit nii, et selle mõlemad pooled oleksid ühe ja sama arvu astmed:

$$(\tfrac{1}{4})^{2-x} = \frac{2^8}{2^{x+3}};\ 2^{-2(2-x)} = 2^{8-x-3}.$$

Astmete võrdsusest järeldub astendajate võrdsus:

$$-2(2-x) = 8 - x - 3;$$

võrrandi lahendamisel saame:

$$x = 3.$$

Kontroll:

$$0{,}25^{2-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4;$$

$$\frac{256}{2^{3+3}} = \frac{2^8}{2^6} = 4.$$

Näide 2.

$$2^x = 10.$$

Logaritmime võrrandi mõlemaid pooli:

$$x \log 2 = \log 10.$$

Seega

$$x = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}322.$$

Viimase arvu saamiseks kasutame pöördarvude tabelit.

Näide 3.

$$4^{x+2} + 4^x = 34;$$

$$4^x \cdot 4^2 + 4^x = 34;$$

$$4^x(16+1) = 34;$$

$$2^{2x} = 2;$$

$$2x = 1;$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Näide 4.

$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$$

$$(3^x)^2 \cdot 3 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Tähistame 3^x tähega z. Siis võrrand saab kuju

$$3z^2 - 10z + 3 = 0,$$

millest leiame:

$$z_1 = 3;\ z_2 = \frac{1}{3}.$$

Edasi saame kaks eksponentvõrrandit:

1) $3^x = 3$; $x_1 = 1$;

2) $3^x = 3^{-1}$; $x_2 = -1$.

Näide 5.

$$4^x + 6^x = 9^x.$$

Jagame võrrandi mõlemaid pooli arvuga 9^x:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Tähistame $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ tähega z. Siis võrrand on:

$$z^2 + z - 1 = 0;$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\ ;\quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\ .$$

Kõlbab ainult esimene lahend, sest $(\frac{2}{3})^x$ peab olema positiivne:

$$(\frac{2}{3})^x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\ .$$

Logaritmides selle võrrandi pooli, saame avaldada x:

$$x = \frac{\log(\sqrt{5} - 1) - \log 2}{\log 2 - \log 3}\ .$$

2. Logaritmvõrrand. Logaritmvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus tundmatu esineb logaritmitavas avaldises. Logaritmvõrrandi põhiliseks lahendamisvõtteks on potentseerimine. Et potentseerimisel võime saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui lähtevõrrandil, siis tuleb logaritmvõrrandi lahendeid ikka kontrollida.

Näide 1. $\log(2x + 1) = \log x;$

$2x + 1 = x;$

$x = -1.$

Võrrandil puudub lahend: võrrandi mõlemad pooled kaotavad mõtte, kui $x = -1$.

Näide 2. $\log(x^2) = 0;$

$2 \log x = 0;\ \log x = 0;\ x_1 = 1.$

Lahendades teisiti:

$\log(x^2) = \log 1;\ x^2 = 1;\ x = \pm 1,$

näeme, et esimesel viisil lahend -1 läks kaduma.

Näide 3. $\log(x+1) + \log(x - 1) = \log 3$

$\log(x + 1)(x - 1) = \log 3$

$x^2 = 4;\ x_1 = 2;\ x_2 = -2.$

Kontroll näitab, et lahend $x_2 = -2$ on võõrlahend.

Näide 4. $\log(x + 6) - \frac{1}{2}\log(2x - 3) = 2 - \log 25$

$\log(x + 6) - \frac{1}{2}\log(2x - 3) = \log 100 - \log 25$

$2\log(x + 6) - \log(2x - 3) = 2 \log \frac{100}{25}$

$\log\frac{(x + 6)^2}{2x - 3} = \log 16$

$\frac{(x + 6)^2}{2x - 3} = 16$

$$x^2 + 12x + 36 = 32x - 48$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0$$

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = 6.$$

Kontroll: 1) $\log(14 + 6) - \frac{1}{2}\log(28 - 3) = \log 20 - \frac{1}{2}\log 25 =$
$= \log 20 - \log 5 = \log 4;$
$2 - \log 25 = \log 100 - \log 25 = \log 4;$
$x_1 = 14$ on lahend.

2) $\log(6 + 6) - \frac{1}{2}\log(12 - 3) = \log 12 - \frac{1}{2}\log 9 = \log 12 -$
$- \log 3 = \log 4;$ $x_2 = 6$ on lahend.

VI. ÜHENDID. NEWTONI BINOOM

§ 1. Ü h e n d i d

1. Variatsioonid. Mitmeid loodusobjekte ja ühiskonnanähtusi saab vaadelda lihtsamate objektide või nähtuste ühenditena. Nimetame neid lihtsamaid objekte või nähtusi ühendite elementideks. Näiteks keemiline ühend koosneb keemilistest elementidest, kõne koosneb sõnadest, viimased omakorda häälikutest, kümnendsüsteemi arvu kirjutus koosneb numbritest 0, 1, 2...,9, ühendriik koosneb riikidest jne. Allpool vaatleme kolme liiki ühendeid: variatsioone, permutatsioone ja kombinatsioone.

Variatsioonideks m elemendist n-kaupa nimetatakse ühendeid, millest igaüks sisaldab n elementi antud m elemendi hulgast ja mis erinevad üksteisest kas elementide endi või nende järjekorra poolest.

Näiteks kõik kahekohalised arvud, mis on kirjutatud numbrite 1, 3, 5 ja 7 abil (teisi numbreid kasutamata) , on variatsioonid 4-st elemendist 2-kaupa.

Variatsioonide arvu m elemendist n-kaupa tähistatakse sümboliga A_m^n. Leiame valemi A_m^n arvutamiseks.

Olgu meil m elementi

a, b, c, d, ... , k, l.

Variatsioonid ühekaupa on need elemendid ise, üksikult vaadelduna. Seega

$$A_m^1 = m.$$

Koostame antud elementidest variatsioonid kahekaupa. Selleks ühendame esmalt elemendi a iga ülejäänud m–1 elemendiga, siis elemendi b iga ülejäänud m–1 elemendiga jne., lõpuks l iga ülejäänud elemendiga:

ab, ac, ad, ... , ak, al
ba, bc, bd, ... , bk, bl
.....
la, lb, lc, ... lk.

Saime tabeli, milles on m rida, igas reas m–1 ühendit. Selles tabelis leiduvad kõik variatsioonid m elemendist kahekaupa, tähendab

$$A_m^2 = m(m - 1).$$

Variatsioonide moodustamiseks kolmekaupa võtame iga variatsiooni kahekaupa ja ühendame selle järjekorras iga ülejäänud m–2 elemendiga, mis võetud ühendis ei esine. Nii saame ühendist ab järgmised m–2 ühendit kolmekaupa:

abc, abd, ... , abk, abl.

Moodustades igast variatsioonist kahekaupa m–2 variatsiooni kolmekaupa, saame neid m–2 korda rohkem, kui on variatsioone kahekaupa. Tähendab,

$$A_m^3 = (m - 2) \cdot A_m^2$$

ehk

$$A_m^3 = m\,(m - 1)(m - 2).$$

Jätkates ühendite moodustamist samal viisil, saame:

$$A_m^4 = (m - 3) \cdot A_m^3 = m(m - 1)(m - 2)(m - 3);$$

$$A_m^5 = (m - 4) \cdot A_m^4 = m(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4).$$

Üldiselt:

$$A_m^n = m(m - 1)(m - 2) \ldots [m - (n - 1)].$$

Saadud valemi võib sõnastada järgmiselt: kõigi võimalike variatsioonide arv m elemendist n-kaupa võrdub n järjestikuse täisarvu korrutisega, milles suurim tegur on m.

Näited: 1) $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

2) Mitmel erineval viisil võivad 40 koosolekust osavõtjat valida endi hulgast koosoleku juhatuse koosseisus juhataja, tema asetäitja ja sekretär?

Iga võimalik juhatuse koosseis (juhataja X, tema asetäitja Y ja sekretär Z) kujutab endast üht variatsiooni 40 elemendist 3-kaupa, sest kaks koosseisu loeme erinevaks, kui samade isikute X, Y, Z vahel on ametid jaotatud teisiti. Seega erinevaid viise juhatuse moodustamiseks on:

$$A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280.$$

2. Permutatsioonid. Permutatsioonideks m elemendist nimetatakse ühendeid, mis sisaldavad kõiki antud elemente ja erinevad üksteisest ainult elementide järjekorra poolest.

Seega permutatsioonid on niisugused variatsioonid, kus igas ühendis esinevad kõik antud elemendid. Sellest järeldub, et permutatsioonide arv m elemendist

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \ldots [m-(m-1)] = m(m-1)(m-2) \ldots .1$$

ehk

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m.$$

Kõigi võimalike permutatsioonide arv m elemendist võrdub naturaalarvude 1, 2, ...m korrutisega.

Naturaalarvude korrutist $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ nimetatakse m faktoriaaliks ja tähistatakse sümboliga m! Näiteks $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Permutatsioonide arv m elemendist avaldub nüüd valemiga

$$P_m = m!$$

Näide. Mitmel viisil võivad 4 reisijat istuda neljakohalises kupees?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

seega 24-l viisil.

3. Kombinatsioonid. Kombinatsioonideks m elemendist n-kaupa nimetatakse ühendeid, millest igaüks sisaldab n elementi antud m elemendi hulgast ja mis erinevad üksteisest vähemalt ühe elemendi poolest.

Seega kaks kombinatsiooni m elemendist n-kaupa ei loeta

erinevaks, kui nad sisaldavad samu elemente, kuid erinevas järjekorras: elementide järjekord kombinatsioonis ei ole oluline.

Kombinatsioonide arvu m elemendist n-kaupa tähistatakse sümboliga C_m^n. Tõestame, et

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Selleks kujutleme, et igas kombinatsioonis m elemendist n-kaupa tehakse kõik võimalikud permutatsioonid (mida on P_n); siis ühest niisugusest kombinatsioonist saab P_n uut ühendit; C_m^n niisugusest kombinatsioonist saab $C_m^n \cdot P_n$ ühendit. Need uued ühendid on aga variatsioonid m elemendist n-kaupa. Tähendab,

$$C_m^n \cdot P_n = A_m^n, \text{ millest } C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Kombinatsioonide arv m elemendist n-kaupa on võrdne variatsioonide arvuga m elemendist n-kaupa jagatud permutatsioonide arvuga n elemendist.

Näide 1. Kombinatsioonide arv 4-st elemendist 3-kaupa on

$$C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Kui elementideks võtta a, b, c ja d, siis kombinatsioonid neist 3-kaupa on

abc, abd, acd ja bcd.

Näide 2. Brigaadis on 12 töölist. Teatud ülesande täitmiseks tuleb neist välja saata 5-liikmeline rühm. Mitmel viisil võib sellist rühma koostada?

Kaks rühma saab lugeda erinevaks, kui nad erinevad vähemalt ühe töölise poolest. Sellest nähtub, et tegemist on kombinatsioonidega:

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

Rühma saab koostada 792-l viisil.

Märkus. Kombinatsioonide arvu m elemendist n-kaupa tähistatakse ka sümboliga $\binom{m}{n}$, mida loetakse "m üle n".

4. Valem $C_m^n = C_m^{m-n}$. Kombinatsioonide arv m elemendist n-kaupa

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

Laiendame saadud murdu korrutisega

$$(m-n)(m-n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = (m-n)!$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\cdot(m-n)(m-n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{n!\,(m-n)!}.$$

Murru lugejas on nüüd m!, seega

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Rakendame tulemust selleks, et arvutada kombinatsioonide arv m elemendist (m–n)-kaupa:

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,[m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}.$$

Võrreldes kahte viimast avaldist saame, et

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Seda seost on soovitav kasutada arvutamisel siis, kui $n > \frac{1}{2}m$. Tõepoolest, C_{100}^{97} arvutamiseks tuleks kirjutada murd, mille lugejas ja nimetajas on 97 tegurit (enamiku neist saab taandada). Lihtsam on aga:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{100-97} = C_{100}^{3} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3} = 161700.$$

Märkus. Et $C_m^m = 1$, siis loetakse, et ka $C_m^0 = C_m^m = 1$.

§ 2. Newtoni binoom

1. Binoomvalemi tuletamine. Korrutades kaks erinevate liikmetega binoomi $a_1 + b_1$ ja $a_2 + b_2$, saame hulkliikme, millel on 2^2 liiget, kusjuures igas liikmes on kaks tegurit, neist üks kummagi binoomi liikmete hulgast:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2.$$

Kui selle võrduse pooli korrutada kolmanda binoomiga $a_3 + b_3$, siis paremal saame hulkliikme, millel on 2^3 liiget, kusjuures igas liikmes on kolm tegurit, neist üks igast binoomist:

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) = a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1b_2b_3.$$

Kerge on näha, et kui korrutatavate binoomide arv suureneb ühe binoomi võrra, siis

1) korrutamisel saadava hulkliikme liikmete arv kasvab kahekordseks;

2) igasse liikmesse tuleb tegurina juurde uue binoomi üks liige.

Sellest järeldub, et n binoomi korrutamisel (kui nende liikmed on kõik erinevad) saadakse hulkliige, mille

1) liikmete arv on 2^n;

2) igas liikmes on n tegurit, neist üks iga binoomi liikmete hulgast;

3) liikmete hulgas esinevad kõik võimalikud kombinatsioonid n elemendist, milleks on n binoomi üks või teine liige.

Hulkliikme liikmeid saab liigitada selle järgi, mitu binoomide teist liiget b_i (või esimest liiget a_i) on hulkliikme liikme tegurite hulgas. Kui mingis liikmes on b_i teguritena k korda, siis a_i on seal teguritena n - k korda, ja neid liikmeid on hulkliikmes nii palju, kui suur on C_n^k ehk C_n^{n-k}.

Niisiis:

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_n) =$$

$$= \underbrace{a_1a_2\ldots a_n}_{\text{ainult tegurid } a_i} + \underbrace{(b_1a_2\ldots a_n + \ldots + a_1a_2\ldots a_{n-1}b_n)}_{C_n^1 \text{ liiget ühe teguriga } b_i} +$$

$$+ \underbrace{(b_1b_2a_3\ldots a_n + \ldots + a_1a_2\ldots a_{n-2}b_{n-1}b_n)}_{C_n^2 \text{ liiget kahe teguriga } b_i} + \ldots + \underbrace{b_1b_2\ldots b_n}_{\text{ainult tegurid } b_i}.$$

Asendades selles võrduses binoomide esimesed liikmed arvuga a ja teised liikmed arvuga b, saame valemi binoomi a + b astme arvutamiseks:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

Seda valemit nimetatakse Newtoni binoomvalemiks. Valemi paremat poolt nimetatakse binoomi astme arendiks.

Algebra algkursusest tuntud valemid $(a \pm b)^2$ ja $(a \pm b)^3$ arvutamiseks on Newtoni binoomvalemi erijuhtumid.

Näited. 1) $(a + b)^5 =$

$= a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^3b^2 + C_5^3 a^2b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + b^5 =$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

2) $(1 + x)^6 = 1 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 +$

$+ x^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$

3) $(x - 1)^7 = x^7 + C_7^1 x^6 (-1) + C_7^2 x^5 (-1)^2 + C_7^3 x^4(-1)^3 +$

$+ C_7^4 x^3(-1)^4 + C_7^5 x^2(-1)^5 + C_7^6 x(-1)^6 + (-1)^7 =$

$= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1.$

2. Binoomi astme arendi üldliikme valem. Binoomi astme arendi kõigil liikmeil on üks ja sama struktuur:

$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} +$

$+ C_n^n a^0 b^n$, sest $C_n^0 = C_n^n = 1$ ja $b^0 = a^0 = 1$. Arendi liikmete ühtse ehituse tõttu saab nende arvutamiseks anda üheainsa valemi - üldliikme valemi:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k.$$

Selles valemis k + 1 on arendi liikme järjenumber (esimese liikme puhul k = 0, teise liikme puhul k = 1 jne.), T_{k+1} on arendi liige järjenumbriga k + 1. Andes valemis k-le väärtused 0, 1, ... , n, saame järjekorras kõik arendi liikmed. Valem leiab kasutamist peamiselt siis, kui on vaja leida ainult mõnda üksikut arendi liiget.

Näited. 1) Leida $(2 - \frac{\sqrt{x}}{2})^9$ arendi 6. liige.

$$T_6 = T_{5+1} = C_n^5 a^{n-5} b^5 = C_9^5 \cdot 2^4 \cdot (-\frac{\sqrt{x}}{2})^5 =$$

$$= -\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^4 \cdot \frac{x^2 \sqrt{x}}{2^5} = -63x^2\sqrt{x}.$$

2) Leida $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$ arendi liige, millcs x puudub.

Asendame üldliikme valemis

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

suurused n, a ja b andmetega

$$n = 15,\ a = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},\ b = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}:$$

$$T_{k+1} = C_{15}^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{15-k} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{15}^k\, x^{5-\frac{k}{3}-\frac{k}{2}}.$$

Et otsitavas liikmes x puudub, siis saadud üldliikme avaldises x astendaja peab võrduma nulliga:

$$5 - \frac{k}{3} - \frac{k}{2} = 0.$$

Selle võrrandi lahendamisel saame k = 6. Otsitav liige on seega

$$T_7 = C_{15}^6 .$$

3. Binoomkordajate summa. Binoomi astme arendi kordajaid

$$1,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,\ \ldots\ C_n^{n-2},\ C_n^{n-1},\ 1$$

ehk taandatult

$$1,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots\ C_n^2,\ C_n^1,\ 1$$

nimetatakse binoomkordajaiks. Kui binoomvalemis

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^2 a^2 b^{n-2} +$$

$$+ C_n^1 a b^{n-1} + b^n$$

asendada a = b = 1, saame

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^2 + C_n^1 + 1,$$

millest nähtub, et binoomkordajate summa võrdub arvuga 2^n, kus

n on binoomi astendaja. Kui binoomvalemis asendada a arvuga 1 ja b arvuga -1, siis saame:

$$0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n.$$

Sellest nähtub, et paarisnumbrilistel kohtadel seisvate binoomkordajate $C_n^1, C_n^3, \ldots$ summa võrdub paaritunumbrilistel kohtadel seisvate kordajate 1, $C_n^2, \ldots$ summaga.

Näide. Kui n = 6, siis binoomkordajad on

$$1, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^2, C_6^1, 1$$

ehk

$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1,$$

binoomkordajate summa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 \text{ ja ka } 2^6 = 64,$$

paarisnumbrilistel kohtadel seisvate kordajate summa

$$6 + 20 + 6 = 32$$

ja ka paaritunumbrilistel kohtadel seisvate kordajate summa

$$1 + 15 + 15 + 1 = 32.$$

S I S U K O R D

Lk.

A R I T M E E T I K A J A A L G E B R A

I. REAAL- JA KOMPLEKSARVUD

§ 1. N a t u r a a l a r v u d

1. Naturaalarvu mõiste 3
2. Naturaalarvu lahutamine algtegureiks 3
3. Arvude vähim ühiskordne 4
4. Arvude suurim ühistegur 4

§ 2. R a t s i o n a a l a r v u d

1. Aritmeetilised tehted 5
2. Harilikud murrud 7
3. Kümnendmurrud 8
4. Lõpmatu perioodilise kümnendmurru teisendamine harilikuks murruks 9

§ 3. Irratsionaalarvud

1. Arvu astendamine 10
2. Arvu juurimine 11
3. Irratsionaalarvu mõiste 12
4. Ruutjuure ligikaudne leidmine antud täpsusega 13
5. Astme mõiste üldistamine 15

§ 4. Nimega arvud

1. Suuruste mõõtmine 15
2. Tehted nimega arvudega 17
3. Protsendid 18
4. Võrdeline jaotamine 18

§ 5. Reaalarvud

1. Reaalarvu mõiste 19
2. Arvsirge 20
3. Reaalarvu absoluutväärtus 21
4. Aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine 21

§ 6. Kompleksarvud

1. Kompleksarvu mõiste 22
2. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine ja trigonomeetriline kuju 22
3. Neli põhitehet algebralisel kujul antud kompleksarvudega 24

II. ALGEBRALISTE AVALDISTE TEISENDAMINE

§ 1. Tehted üksliikmetega ja hulkliikmetega

1. Üksliige 25
2. Üksliikmete liitmine ja lahutamine. Hulkliige 26
3. Üksliikmete korrutamine, jagamine ja astendamine 26
4. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine 28
5. Hulkliikme korrutamine üksliikmega ja hulkliikmega ... 28
6. Hulkliikmete korrutamise abivalemid 28
7. Hulkliikme jagamine üksliikmega ja hulkliikmega 29

§ 2. Hulkliikme lahutamine tegureiks

1. Tegureiks lahutamise lihtsamad võtted 30
2. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks 31
3. Bezout' teoreem hulkliikme jaguvusest binoomiga x - a 32

§ 3. Algebralised murrud

1. Algebralise murru mõiste 34
2. Murdude põhiomadus 34
3. Tehted murdudega 35

§ 4. Juuravaldiste teisendamine

1. Tehted juurtega 36
2. Korrutise, jagatise ja astme juurimine 37
3. Juure taandamine ja laiendamine 37
4. Ruutirratsionaalsuse kaotamine murru nimetajast 38
5. Tehted ratsionaalsete astendajatega astmetega 38

III. VÕRRANDID. VÕRRATUSED. FUNKTSIOONID

§ 1. Võrdus ja võrrand

1. Võrduse, samasuse ja võrrandi mõiste 39
2. Võrrandite samaväärsuse mõiste 40
3. Võrduse põhiomadused 41

§ 2. Ühe tundmatuga lineaarne võrrand 42

§ 3. Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem

1. Kahe tundmatuga lineaarse süsteemi geomeetriline vaste.. 43
2. Võrrandisüsteemi lahendamisvõtted 44
3. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi uurimine ... 44

§ 4. Ühe tundmatuga ruutvõrrand

1. Ruutvõrrandi liigid 48
2. Mittetäielike ruutvõrrandite lahendamine 48
3. Täieliku ruutvõrrandi lahendamine 49
4. Ruutvõrrandi lahendite ja kordajate vahelised seosed (Vieta teoreem) 50
5. Ruutvõrrandi lahendite uurimine 50
6. Biruutvõrrand 51

§ 5. Ruutvõrrandisüsteemid kahe tundmatuga

1. Ühest lineaarsest ja ühest teise astme võrrandist koosnev süsteem 52

2. Kahest ruutvõrrandist koosnev süsteem 54

§ 6. V õ r r a t u s e d

1. Võrratuse mõiste 56
2. Võrratuse põhiomadused 56
3. Võrratuse samaväärsus 58
4. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine 58
5. Ühe tundmatuga teise astme võrratuse lahendamine 59

§ 7. F u n k t s i o o n i d e g r a a f i k u d

1. Funktsiooni mõiste 62
2. Funktsiooni graafiku mõiste 64
3. Lihtsamate funktsioonide graafikud 65

IV. PROGRESSIOONID

§ 1. A r i t m e e t i l i n e p r o g r e s - s i o o n

1. Aritmeetilise progressiooni mõiste 73
2. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem 73
3. Aritmeetilise progressiooni summa valem 74
4. Ülesanded 75

§ 2. G e o m e e t r i l i n e p r o g r e s - s i o o n

1. Geomeetrilise progressiooni mõiste 77
2. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem 78
3. Geomeetrilise progressiooni summa valem 78

§ 3. L õ p m a t u l t k a h a n e v g e o - m e e t r i l i n e p r o g r e s s i o o n

1. Muutuva suuruse piirväärtus 80
2. Teoreemid piirväärtuste arvutamiseks 81
3. Lõpmatu geomeetriline progressioon 84
4. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa... 85

V. LOGARITMID

§ 1. L o g a r i t m i m õ i s t e j a p õ h i - o m a d u s e d

1. Arvu logaritmi mõiste 86

2. Logaritmide põhiomadused 87
3. Eksponentfunktsiooni graafik 88
4. Logaritmfunktsiooni graafik 89

§ 2. Logaritmimine ja potentseerimine

1. Korrutise logaritm 91
2. Jagatise logaritm 91
3. Astme logaritm 92
4. Juure logaritm 92
5. Avaldise logaritmimine 92
6. Potentseerimine 92

§ 3. Kümnendlogaritmid

1. Kümnendlogaritmide omadused 93
2. Arvutamine logaritmide tabelite abil 95

§ 4. Eksponent- ja logaritmvõrrandid

1. Eksponentvõrrand 97
2. Logaritmvõrrand 99

VI. ÜHENDID. NEWTONI BINOOM

§ 1. Ühendid

1. Variatsioonid 100
2. Permutatsioonid 102
3. Kombinatsioonid 102
4. Valem $C_m^n = C_m^{m-n}$ 104

§ 2. Newtoni binoom

1. Binoomvalemi tuletamine 104
2. Binoomi astme arendi üldliikme valem 106
3. Binoomkordajate summa 107

A-27762

Hind 20 kop.