A. BARSUKOV

ALGEBRA

I

VI–VII KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-21692

A. BARSUKOV

ALGEBRA

I OSA

ÕPIK VI JA VII KLASSLE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel:

А. Н. Барсуков. Алгебра. Учебник для 6 и 7 классов семилетней и средней школы.

Часть первая.

Утверждён Министерством просвещения РСФСР. Учпедгиз 1957.

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2

Tartu Riikliku Ülikooli Raamatukogu

41934

ARHIIVKOGU

ESIMENE PEATÜKK.

ALGEBRALISED AVALDISED. VÕRRANDID.

§ 1. Tähtede kasutamine.

Algebras tähistatakse arve tihti mitte numbrite, vaid tähtedega. Toome selle kohta mõned näited.

Näide 1. Aritmeetikast on teada, et arvude liitmine allub vahetuvuse seadusele: summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel.

Näiteks:

$$5+7=7+5=12;$$
$$11+20=20+11=31 \text{ jne.}$$

Kuidas aga kirjutada, et see seadus on kehtiv mitte üksnes arvude 5 ja 7 või 11 ja 20 puhul, vaid mistahes arvude puhul? Toimime nii: tähistame ühe liidetavatest tähega a, teise tähega b. Nende arvude summa on nagu tavaliselt $a+b$. Liitmise vahetuvuse seaduse võime seega kirjutada järgmiselt:

$$a+b=b+a.$$

See kirjutus näitabki, et arvude a ja b mistahes väärtuste korral nende summa ei olene liidetavate järjekorrast.

Näide 2. Lahendame kolm üksteisele sarnast ülesannet: *Vend on õest 3 aastat vanem. Kui vana on vend, kui õde on:* 1) 5-*aastane?* 2) 11-*aastane?* 3) 24-*aastane?*

Saame järgmised lahendused:

$$1)\ 5+3=8;\quad 2)\ 11+3=14;\quad 3)\ 24+3=27.$$

Üldiselt, milline ka ei oleks õe vanus, tuleb sellele venna vanuse leidmiseks liita 3 aastat. Sõnastame seepärast ülesande nii: *Vend*

on õest 3 aastat vanem. Kui vana on vend, kui õe vanus on m aastat?

Siin on tähega m tähistatud õe vanus. Järelikult venna vanus on $(m + 3)$ aastat.

Esimeses ülesandes $m = 5$, teises $m = 11$, kolmandas $m = 24$.

Me lahendasime ülesande üldkujul. Kirjutus $m + 3$ annab üldvalemi paljude sarnaste ülesannete lahendamiseks. Need ülesanded saame, kui asendame m mitmesuguste arvudega.

Näide 3. Aritmeetika ülesannete kogudes leidub näiteks niisuguseid harjutusi:

$$x + 3 = 11.$$

Tuleb leida x.

Siin on tähega x tähistatud tundmatu arv — üks liidetav. Teades, et kumbki liidetavatest on võrdne summa ja teise liidetava vahega, leiame x:

$$x = 11 - 3 = 8.$$

Siin täht x tähistab arvu, mis algul oli tundmatu, kuid mille leidsime aritmeetika reegleid kasutades.

Esimeses näites tähed a ja b tähistasid mistahes arvusid. Öeldakse, et sel juhul tähed a ja b võivad omada mistahes arvulisi väärtusi.

Teises näites võib täht m omada samuti mitmesuguseid arvulisi väärtusi, kuid mitte enam mistahes väärtusi. Näiteks oleks mõttetu anda tähele m väärtus $m = 500$, kuna inimesed niisuguse vanuseni ei ela.

Lõpuks, kolmandas näites võib tähel x olla ainult üks väärtus, nimelt 8, kuna mistahes teiste arvuliste väärtuste puhul võrdus $x + 3 = 11$ oleks vale.

Tavaliselt kasutatakse algebras arvude tähistamiseks ladina tähestiku tähti.

§ 2. Algebralised avaldised.

Lahendame ülesande.

Õpilane ostis n 20-kopikast vihikut ja 85-kopikase õpiku. Kui palju maksis ta kogu ostu eest?

Et leida, kui palju maksis õpilane kõigi vihikute eest, tuleb ühe vihiku hind korrutada vihikute arvuga. Tähendab, vihikud maksid kokku $20 \cdot n$ kopikat.

Kogu ostu eest tuli seega maksta

$$(20 \cdot n + 85) \text{ kopikat.}$$

Märgime, et tähelise teguri ette korrutamismärki ei kirjutata. Seetõttu võib selle avaldise esitada järgmisel kujul:

$$20n + 85.$$

Saime ülesande lahendi valemi. See näitab, et ülesande lahendamiseks tuleb vihiku hind korrutada ostetud vihikute arvuga ja tulemusele liita õpiku hind.

Niisuguste kirjutuste puhul kasutatakse sõna «valem» asemel ka väljendit «algebraline avaldis».

Definitsioon 1. **Algebraliseks avaldiseks nimetatakse tehtemärkidega ühendatud ja numbrite või tähtedega kirjutatud arvude kogu.**

Lühiduse mõttes öeldakse sageli «algebralise avaldise» asemel lihtsalt «avaldis».

Toome algebraliste avaldiste näiteid:

$$\frac{a+3}{b-1};\quad 3mn;\quad 9(p+q);\quad a;\quad (3+8)\cdot 7;\quad 4{,}5.$$

Nendest näidetest selgub, et algebraline avaldis võib koosneda ainult ühest tähest, kuid võib ka mitte sisaldada tähtedega tähistatud arve (kaks viimast näidet). Sel juhul nimetatakse avaldist ka aritmeetiliseks avaldiseks.

Anname eespool saadud algebralises avaldises $20n + 85$ tähele n väärtuse 5 (tähendab, õpilane ostis 5 vihikut). Asendame n arvuga 5, saame:

$$20 \cdot 5 + 85,$$

mis on võrdne arvuga 185 (see on 1 rbl. 85 kop.).

Arvu 185 nimetatakse antud algebralise avaldise arvuliseks väärtuseks, kui $n = 5$.

Definitsioon 2. **Algebralise avaldise arvuliseks väärtuseks tähtede antud väärtuste korral nimetatakse arvu, mis saadakse, kui avaldises tähed asendada nende antud väärtustega ja teostada nõutud tehted.**

Näiteks võib öelda: avaldise $20n + 85$ väärtus, kui $n = 2$, on 125 (1 rbl. 25 kop.).

Sama avaldise väärtus, kui $n = 3$, on 145 (1 rbl. 45 kop.) jne.

Näeme, et algebralise avaldise väärtus oleneb sellest, milliseid

väärtusi anname selles esinevatele tähtedele. Ainult erandina esinevad avaldised, mille väärtus ei olene neis esinevate tähtede väärtustest. Näiteks avaldise $2(a+3) - 2a$ arvuline väärtus on tähe a iga väärtuse puhul 6.

Leiame näiteks avaldise $3a + 2b$ arvulise väärtuse tähtede a ja b mitmesuguste väärtuste puhul.

Olgu $a = 4$ ja $b = 2$.

Asendame antud avaldises a arvuga 4 ja b arvuga 2 ning arvutame saadud avaldise väärtuse:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16.$$

Järelikult, kui $a = 4$ ja $b = 2$, on avaldise $3a + 2b$ arvuline väärtus 16.

Analoogiliselt leiame, et kui $a = 5$ ja $b = 7$, on avaldise väärtus 29; kui $a = 0$ ja $b = 1$, on avaldise väärtus 2 jne.

Arvutamise tulemused võib esitada tabelina, mis piltlikult näitab, kuidas muutub avaldise väärtus sõltuvalt temas esinevate tähtede väärtuste muutmisest.

Koostame kolmerealise tabeli.

Esimesse ritta kirjutame tähe a väärtused, teise tähe b väärtused ning kolmandasse avaldise $3a + 2b$ väärtused. Saame järgmise tabeli:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a + 2b$	16	29	2	19	11

Paragrahvis 1, rääkides liitmise vahetuvuse seadusest, kirjutasime, et kaks avaldist $a + b$ ja $b + a$ on võrdsed:

$$a + b = b + a.$$

Sellist kirjutust nimetatakse võrduseks.

Definitsioon 3. **Võrdusmärgiga ühendatud kaht algebralist avaldist nimetatakse võrduseks.**

Matemaatikas kasutatakse peale võrdusmärgi veel võrratusmärke:

$>$ — ... on suurem kui ...,
$<$ — ... on väiksem kui ....

Näiteks, kirjutust

$5 > 2$ — loetakse: viis on suurem kui kaks;
$3 < 7$ — loctakse: kolm on väiksem kui 7.

Definitsioon 4. **Võrratusmärgiga ühendatud kaht algebralist avaldist nimetatakse võrratuseks.**

Tuleb meeles pidada, et võrratusmärgi teravik on alati suunatud väiksema arvu poole.

Näide. Mõõtnud sirglõigu, saime, et selle pikkus d on suurem kui 5 *cm*, kuid väiksem kui 6 *cm*. Mõõtmise tulemuse võib üles kirjutada kahe võrratusmärgi abil järgmiselt:

$$5\ cm < d < 6\ cm.$$

§ 3. Tähtede lubatavad väärtused.

Paragrahvis 1 toodud näidetest järeldame, et mingisuguses algebralises avaldises esinevad tähed võivad omada kas mistahes väärtusi (esimene näide), mitmesuguseid, kuid mitte mistahes väärtusi (teine näide) või ainult ühe väärtuse (kolmas näide).

Definitsioon. **Neid arvulisi väärtusi, mida võivad omada tähed antud algebralises avaldises, nimetatakse nende tähtede lubatavateks väärtusteks.**

Kui avaldis saadi ülesande lahendamise tulemusena, siis tähtede lubatavate väärtuste hulga määravad kindlaks ülesande tingimused.

Nii näiteks paragrahvis 2 saadud avaldises $20n + 85$ on tähe n lubatavate väärtuste hulgaks naturaalarvude hulk, sest vihikute arvu saab väljendada ainult naturaalarvudega.

Kui antud avaldises esinevate tähtede väärtuste kohta ei ole midagi öeldud, siis loetakse selle avaldise tähtede lubatavateks väärtusteks kõiki neid väärtusi, mille puhul avaldis ei kaota mõtet.

Olgu antud avaldis:

$$\frac{2x - 15}{2}.$$

Leiame selle avaldise arvulise väärtuse, kui $x = 2$.

Asendame x arvuga 2, saame:

$$\frac{2 \cdot 2 - 15}{2} = \frac{4 - 15}{2}.$$

Saime lugejas vahe, milles vähendatav on väiksem lahutatavast. Avaldis kaotas mõtte, kui $x = 2$. Tähendab, arv 2 ei kuulu tähe x lubatavate väärtuste hulka. On kerge näha, et x võib siin olla ainult kas suurem kui $7\frac{1}{2}$ või võrdne sellega. Tähe x kõigi nende väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $7\frac{1}{2}$, kaotab avaldis mõtte. Lühidalt võib tähe x lubatavad väärtused üles märkida järgmiselt:

$$x \geqslant 7\frac{1}{2}.$$

Märk $\geqslant$ tähendab «suurem või võrdne».

Avaldises

$$\frac{2}{a-3}$$

on tähe a lubatavateks väärtusteks ainult arvust 3 suuremad arvud, kuna $a = 3$ puhul saame nimetajas nulli, aritmeetikast on aga teada, et nulliga jagada ei saa. Seepärast peab $a > 3$.

§ 4. Kordaja.

Lahendame ülesande.

Pliiats maksab a kopikat. Kui palju maksab 6 niisugust pliiatsit?

Vastus: $a \cdot 6$ kopikat.

Kokkuleppe kohaselt kirjutatakse korrutises numbriline tegur täheliste tegurite ette (tegurite ümberpaigutamisel korrutis ei muutu). Seetõttu kirjutatakse saadud avaldis järgmiselt: $6a$.

Tegurit 6 nimetatakse antud avaldise kordajaks.

Definitsioon. **Täheliste tegurite ees asetsevat numbrilist tegurit nimetatakse kordajaks.**

Kui avaldis sisaldab ainult tähelisi tegureid, siis öeldakse, et selle kordaja on üks. Tõepoolest, näiteks avaldised ab ja $1 \cdot ab$ on omavahel võrdsed, kuna ühega korrutamine ei muuda arvude väärtust. Kordajat «üks» tavaliselt aga ei kirjutata.

Kordaja võib olla nii täis- kui ka murdarv.

Olgu antud avaldis:

$$ab + ab + ab.$$

Selles avaldises on arv ab võetud liidetavana kolm korda. Kuid

võtta mingi arv liidetavana kolm korda tähendab seda, et see arv tuleb korrutada kolmega. Tähendab, võime kirjutada:

$$ab + ab + ab = ab \cdot 3.$$

Kuna numbrilise kordaja otsustasime kirjutada esimesena, siis saame avaldise $3ab$, kus 3 on kordaja. Vastupidi, kui meil on näiteks avaldis $4a$, kus 4 on kordaja, siis võime selle avaldise kirjutada ka järgmiselt:

$$4a = a + a + a + a.$$

Tähendab, kui kordaja on täisarv, siis see näitab, mitu korda tema järel olev avaldis on võetud liidetavana.

Kui kordajaks on aga murdarv, siis see näitab, kui suur osa tuleb võtta tema järel asetseva avaldise väärtusest.

Näiteks avaldises $1\frac{1}{2}ab$ kordaja $1\frac{1}{2}$ näitab, et a ja b mistahes väärtuste puhul tuleb võtta $\frac{3}{2}$ nende korrutisest. Kui $a = 5$; $b = 6$, saame

$$1\tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 1\tfrac{1}{2} \cdot 30 = 45.$$

§ 5. Astendamine.

Aritmeetikas kordarvude algtegureiks lahutamisel esitati need arvud algarvude astmete korrutisena. Astmed kirjutati astendajate abil.

Tuletame meelde need mõisted.

Definitsioon 1. **Mitme võrdse teguri korrutist nimetatakse astmeks.**

Näiteks arvud

$$49 = 7 \cdot 7;$$
$$\frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5};$$
$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

on vastavalt seitsme, kolme viiendiku ja kahe astmed.

Astmeteks on ka võrdsete täheliste tegurite korrutised, näiteks:

aa, $xxxx$ jne.

Tegurite arvu järgi jaotatakse astmed teiseks, kolmandaks jne. astmeks.

Näiteks:

$36 = 6 \cdot 6$ — kuue teine aste;

$\frac{1}{27} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ — ühe kolmandiku kolmas aste;

$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ — viie neljas aste jne.

Aritmeetikas nimetatakse võrdsete arvude liitmist korrutamiseks.

Korrutamise juures kirjutatakse liidetav arv ainult üks kord, temast paremale (teisele poole korrutamismärki) kirjutatakse aga korrutaja, mis näitab, mitu korda esimene arv tuleb võtta liidetavaks.

Näiteks:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5;$$

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot 3.$$

Sarnaselt sellega defineeritakse ka võrdsete arvude korrutamist kui uut tehet.

Definitsioon 2. **Mitme võrdse arvu korrutamist nimetatakse astendamiseks.**

Järelikult on astendamine viies aritmeetiline tehe.

Definitsioon 3. **Arvu, mida astendatakse, nimetatakse astendatavaks.**

Näiteks $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ on nelja kolmas aste. Arv 4 on astendatav.

Aritmeetikast on teada, et aste kirjutatakse lühidalt järgmiselt: kirjutatakse astendatav ning sellest paremale üles arv, mis näitab tegurite arvu.

Näiteks: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$.

Definitsioon 4. **Arvu, mis näitab, mitmendasse astmesse astendatav võetakse, nimetatakse astendajaks.**

Viimases näites on astendaja 4.

Avaldises 8^2 on arv 8 astendatav, arv 2 astendaja ning 8^2 ehk 64 aste.

Toome võrdluseks näiteid korrutamise ja astendamise kohta.

Korrutamine:	Astendamine:
$13 \cdot 2 = 13 + 13 = 26;$	$13^2 = 13 \cdot 13 = 169;$
$\left(2\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2};$	$\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8};$
$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12;$	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$
$a \cdot 2 = a + a = 2a;$	$aa = a^2;$
$x \cdot 3 = x + x + x = 3x;$	$xxx = x^3.$

Astme (mitme võrdse teguri korrutise) definitsioonist järeldub, et astendaja võib olla kaks, kolm, neli jne. Järelikult võib astendaja olla ainult ühest suurem naturaalarv.

Kasutatakse ka astendajat 1. Nimelt loetakse mistahes arvu esimest astet võrdseks selle arvu endaga, näiteks:

$$5^1 = 5; \quad 8{,}35^1 = 8{,}35; \quad a^1 = a.$$

Astendajat 1 tavaliselt ei kirjutata, kuid iga arvu võib esitada astmena, kus astendajaks on 1.

Edaspidi näeme, et astendaja 1 osutub paljuski kasulikuks.

Aritmeetikast on teada, et arvu teist astet nimetatakse teisiti ruuduks ja kolmandat astet — kuubiks. See on seotud pindala ja ruumala avaldamisega ruut- ja kuupühikutes. Seepärast nimetatakse arvu tõstmist teise või kolmandasse astmesse lühidalt ruutu või kuupi tõstmiseks.

Praktikas tuleb sageli tõsta arve ruutu ja kuupi. Seepärast on arvutamise kergendamiseks ja kiirendamiseks koostatud spetsiaalsed arvude ruutude ja kuupide tabelid.

Märkus. On kasulik veenduda ja meeles pidada, et null mistahes astmes on null ning üks mistahes astmes on 1.

§ 6. Tehete järjekord.

Kui aritmeetikas tuli arvudega teostada erinevaid tehteid, siis sooritasime need teatavate reeglitega kindlaks määratud järjekorras. Samad reeglid kehtivad algebras. Seejuures tuleb arvestada ka uut tehet — astendamist.

Tuletame meelde, et:

liitmist ja lahutamist nimetatakse esimest järku teheteks;

korrutamist ja jagamist teist järku teheteks;

astendamist kolmandat järku tehteks.

Tuletame nüüd meelde reeglid tehete järjekorra kohta.

Reegel 1. **Üht ja sama järku tehted teostatakse selles järjekorras, nagu nad on kirjutatud.**

Näide 1.

$$17 - 11 + 8 = 6 + 8 = 14;$$
$$8 : 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Kuid mõnikord on otstarbekam toimida teisiti.

Olgu näiteks antud avaldis:

$$51 - 27 + 19.$$

Teostades tehted kirjutatud järjekorras, saame:

$$51 - 27 = 24; \quad 24 + 19 = 43.$$

Arvutamine muutub aga kergemaks, kui teeme seda teises järjekorras:

$$51 + 19 = 70; \quad 70 - 27 = 43.$$

Näide 2.

$$25 : 10 \cdot 4.$$

Jaganud 25 arvuga 10, saame murru $2\frac{1}{2}$, mis tuleb korrutada 4-ga.

Arvutamine muutub aga palju lihtsamaks, kui muudame tehete järjekorra:

$$25 \cdot 4 : 10 = 100 : 10 = 10.$$

Nagu näeme, võib sama järku tehete järjekorda meelevaldselt muuta (tingimusel, et kõik tehted pärast ümberpaigutamist oleksid ikkagi teostatavad). Kui aga selleks ei ole vajadust, siis teostatakse need tehted selles järjekorras, nagu nad on kirjutatud.

Reegel 2. **Kui avaldises esineb erinevat järku tehteid, siis teostatakse esmalt kõrgemat järku tehted ning seejärel madalamat järku tehted.**

Selgitame seda reeglit näidetega.

Näide 1.

$$3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38.$$

Esmalt korrutame (teist järku tehe) ning seejärel liidame.

Näide 2.

$$4 \cdot 5^2 : 2 = 4 \cdot 25 : 2 = 100 : 2 = 50.$$

Esimesena teostame siin kolmandat järku tehte.

Näide 3.

$$5 \cdot 2^3 - 6^2 : 12 = 5 \cdot 9 - 36 : 12 = 40 - 3 = 37.$$

Algul on teostatud kolmandat järku, siis teist järku ning lõpuks esimest järku tehted.

Mõnikord tuleb aga reegliga 2 määratud järjekorrast kõrvale kalduda. Selgitame seda ülesande abil.

Ülesanne. *Kahest punktist väljusid teineteisele vastu kaks jalgratturit. Üks sõitis kiirusega a km tunnis, teine b km tunnis.*

Kui suur on nende punktide vaheline kaugus, kui on teada, et jalgratturid kohtusid t tunni pärast?

Lahendame ülesande küsimuste abil.

1) Kui suure vahemaa läbisid jalgratturid ühes tunnis kokku?

$$a + b.$$

2) Kui suur on nende punktide vaheline kaugus?

Et vastata sellele küsimusele, tuleb saadud tulemus $a + b$ korrutada arvuga t. Kui me esitaksime selle tehte järgmiselt:

$$a + bt,$$

siis saaksime vale vastuse, sest teise reegli järgi tuleb meil selles avaldises b korrutada t-ga ja tulemusega liita a. Me peame aga näitama, et siin tuleb esmalt liita (esimest järku tehe) ning seejärel korrutada (teist järku tehe). Seda näidatakse sulgude abil. Avaldis kirjutatakse seepärast järgmiselt:

$$(a + b)t.$$

Reegel 3. **Kui algul on vaja teostada madalamat järku tehted, siis kasutatakse sulgusid. Tehted sulgudes olevate arvudega sooritatakse esimeses järjekorras.**

Toome näiteid.

$11 - 2 \cdot 4 = 11 - 8 = 3$, kuid $(11 - 2) \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$.
$5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$, kuid $(5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$.
$2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$, kuid $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$.
$ab^2 = abb$, kuid $(ab)^2 = (ab)(ab) = abab = aabb = a^2b^2$.

Kui on antud murdavaldis, mis on kirjutatud murrujoone abil, siis murrujoon asendab sulgusid ja näitab, et tuleb enne arvutada nii lugejas kui nimetajas seisev avaldis ning esimene tulemus jagada teisega.

§ 7. Liitmise ja korrutamise põhiseadused.

Edaspidi, kui õpime tundma tehteid numbrite või tähtedega väljendatud arvudega, tuleb meil paljudel juhtudel kasutada neid tehete seadusi, mida õppisime aritmeetikas. Kuna nendel seadustel on suur tähtsus matemaatikas, siis nimetatakse neid tehete põhiseadusteks.

Tuletame need meelde.

1. Liitmise kommutatiivsuse e. vahetuvuse seadus.
Summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel.

See seadus on paragrahvis 1 antud võrduse

$$a + b = b + a$$

kujul, kus a ja b on mistahes arvud.

2. Liitmise assotsiatiivsuse e. ühenduvuse seadus.

Et arvuga liita kahe arvu summa, võib selle arvuga liita esimese liidetava ja saadud summaga teise liidetava.

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

kus a, b ja c on mistahes arvud.

Näide:

$$5 + (7 + 11) = 5 + 18 = 23.$$
$$(5 + 7) + 11 = 12 + 11 = 23.$$

Tähendab:

$$5 + (7 + 11) = (5 + 7) + 11.$$

Vahetuvuse ja ühenduvuse seadust rakendatakse tihti peastarvutamise juures, järjestades liidetavad nii, et neid oleks kergem peast liita.

Näide 1.

$$89 + 67 + 11.$$

Paigutame ümber kaks viimast liidetavat, saame:

$$89 + 11 + 67.$$

Selles järjekorras on nende arvude liitmine palju kergem.

Tavaliselt liidetavaid uuesti ümber ei kirjutata, vaid muudetakse nende järjekorda peast, s. t. paigutatakse 67 ja 11 ümber, liidetakse 89 ja 11 ning siis tulemusega 67.

Näide 2.

$$76 + 87 + 24 + 13.$$

Et neid arvusid oleks kergem peast liita, muudame liidetavate järjekorda järgmiselt:

$$76 + 24 + 87 + 13.$$

Kasutades ühenduvuse seadust, paigutame kaks viimast liidetavat sulgudesse:

$$76 + 24 + (87 + 13).$$

Sulgudes olevate arvude liitmine on kerge. Saame

$$76 + 24 = 100; \quad 100 + 100 = 200.$$

Peast liitmisel tuleb alati vaadata, kas arvutusi ei saa vahetuvuse ja ühenduvuse seaduse rakendamisega lihtsustada.

3. Korrutamise vahetuvuse seadus.

Korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel.

$$ab = ba,$$

kus a ja b on mistahes arvud.

4. Korrutamise ühenduvuse seadus.

Et mingit arvu korrutada kahe arvu korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga ning saadud tulemuse korrutada teise teguriga.

$$a(bc) = (ab)c.$$

Näide 1.

$$5 \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 12 = 60.$$
$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Tähendab:

$$5 \cdot (3 \cdot 4) = (5 \cdot 3) \cdot 4.$$

Näide 2.

$$50 \cdot (4 \cdot 17).$$

Selle asemel et korrutada 4 ja 17 ning seejärel 50 ja 68, võime selle avaldise ühenduvuse seaduse põhjal ümber kirjutada järgmiselt:

$$(50 \cdot 4) \cdot 17.$$

Nüüd on korrutamine tunduvalt kergem. Korrutamise vahetuvuse ja ühenduvuse seaduste rakendamine kergendab sageli peast arvutamist.

Näide 1.

$$25 \cdot 37 \cdot 4.$$

On päris tülikas 25 korrutada 37-ga. Paigutame kaks viimast tegurit ümber:

$$25 \cdot 4 \cdot 37.$$

Nüüd on seda korrutist kerge peast leida.

Näide 2.

$$75 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 2.$$

Kasutades vahetuvuse ja ühenduvuse seadust, kirjutame selle avaldise ümber järgmiselt:

$$75 \cdot 4 \cdot (35 \cdot 2).$$

Nüüd saame kõik tehted sooritada peast.

5. Korrutamise distributiivsuse e. jaotuvuse seadus.

Et korrutada kahe arvu summa mingi arvuga, võib iga liidetava eraldi korrutada selle arvuga ja saadud tulemused liita.

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Näide 1. Jaotuvuse seadust kasutame näiteks kahekohaliste (ja mitmekohaliste) arvude korrutamisel. Et korrutada 26 arvuga 7, esitame arvu 26 summana $20+6$, siis korrutame nii 20 kui ka 6 arvuga 7 ning liidame tulemused:

$$26 \cdot 7 = (20+6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

Mõnikord on aga otstarbekam toimida vastupidi: selle asemel et korrutada iga liidetav ühe ja sama arvuga, leiame enne nende liidetavate summa ning korrutame selle antud arvuga.

Näide 2.

$$87 \cdot 28 + 13 \cdot 28.$$

Peast arvutamine on siin raske.

Esitame avaldise teisel kujul:

$$(87+13) \cdot 28.$$

Me rakendasime siin ümberpööratud kujul jaotuvuse seadust:

$$ac + bc = (a+b)c.$$

Nüüd saame tehted sooritada peast väga kergesti.

Kõik nimetatud seadused kehtivad ka siis, kui liidetavaid või tegureid on rohkem kui kaks.

§ 8. Algteadmisi võrranditest.

Ülesanne. *Mingile arvule liideti 8 ja saadi 17. Leida see arv.*

Lahendame ülesande nii: tähistame tundmatu arvu mingi tähega, näiteks tähega a. Liidame sellele 8, saame $a+8$. Ülesande tingimuste järgi on see summa aga 17. Tähendab:

$$a + 8 = 17.$$

Siin on a ja 8 liidetavateks ning 17 nende summaks. Üks liidetav on aga võrdne summa ja teise liidetava vahega. Järelikult:

$$a = 17 - 8 \quad \text{ehk} \quad a = 9.$$

Kontrollime. Asendame a avaldises $a+8$ arvuga 9. Saame:

$$9 + 8 = 17.$$

Ülesanne on lahendatud õigesti.

Võrdused, mis sisaldavad tundmatut arvu, kannavad eri nimetust.

Definitsioon 1. **Võrdust, mis sisaldab mingi tähega tähistatud tundmatut arvu, nimetatakse võrrandiks.**

Toome veel näiteid võrranditest:

$$2m - 5 = m + 2;$$
$$\frac{3k}{4} + 7 = 13;$$
$$x^2 = 5x - 6.$$

Avaldist, mis asetseb vasakul pool võrdusmärki, nimetatakse võrrandi vasakuks pooleks, paremal pool asetsevat avaldist nimetatakse aga võrrandi paremaks pooleks.

Võrrandis $a + 8 = 17$ on $a + 8$ võrrandi vasak pool, 17 aga parem pool.

Definitsioon 2. **Lahendada võrrand, see tähendab leida tundmatu need väärtused, mille puhul võrrandi mõlemad pooled on võrdsed ühe ja sama arvuga** (teiste sõnadega: leida tundmatu kõik need väärtused, mille puhul võrdus jääb kehtima).

Öeldakse, et need tundmatu väärtused rahuldavad võrrandit.

Definitsioon 3. **Tundmatu väärtusi, mis rahuldavad võrrandit, nimetatakse võrrandi lahenditeks.**

Nagu nägime, on võrrandi $a + 8 = 17$ lahendiks $a = 9$. Asendamise teel võime veenduda, et võrrandi $2m - 5 = m + 2$ lahendiks on $m = 7$, võrrandi $\frac{3k}{4} + 7 = 13$ lahendiks $k = 8$, võrrandi $x^2 = 5x - 6$ lahenditeks $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$.

Märkus. Võrrandis esinevaid tundmatuid arve tähistatakse enamasti tähestiku viimaste tähtedega (x, y, z). Kuid see ei ole tingimata kohustuslik. Tundmatut arvu võib üldiselt tähistada mistahes tähega.

Lihtsamate võrrandite lahendamine. Toome veel näitena mõningad võrrandid, mis kergesti lahenduvad aritmeetikast tuntud sõltuvuste põhjal.

Näide 1.

$$x - 187 = 215.$$

Tundmatu arv x on vähendatavaks. Kuid vähendatav on võrdne lahutatava ja vahe summaga. Järelikult

$$x = 187 + 215 \quad \text{ehk} \quad x = 402.$$

Kontroll. $402 - 187 = 215.$

Näide 2.

$$\frac{4}{15} : x = \frac{2}{3}.$$

Jagaja on võrdne jagatava ja jagatise jagatisega. Järelikult:

$$x = \frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \frac{2}{5}.$$

Kontroll.

$$\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

Ülesannete lahendamine võrrandite abil. Algebra edaspidisel käsitlemisel näeme, kui suur tähtsus on võrranditel ülesannete lahendamisel. Võrrandite abil on kerge lahendada ülesandeid, mida aritmeetiliselt on väga raske lahendada või mille lahendamine aritmeetiliselt pole võimalik, sest lahenduse käik on väga keeruline ja pikk. Selliseid ülesandeid vaatleme edaspidi. Praegu vaatleme paari lihtsat näidet ülesannete lahendamisest võrrandite abil.

Ülesanne 1. *Klassi jaoks osteti vihikuid. Pärast seda, kui 48 vihikut jaotati õpilastele, jäi neid järele veel 32 tükki. Mitu vihikut osteti?*

Koostame ülesande tingimuste põhjal võrrandi. Ostetud vihikute arvu tähistame tähega x. Kui 48 vihikut jaotati õpilastele, siis ostetud vihikute hulk vähenes 48 võrra, tähendab, vihikuid jäi järele:

$$x - 48.$$

Kuid ülesandes on öeldud, et järele jäi 32 vihikut. Tähendab, ülejääk $x - 48$ on võrdne 32-ga, seega

$$x - 48 = 32.$$

Lahendame selle võrrandi. Tundmatu arv x (vähendatav) on võrdne lahutatava ja vahe summaga. Seega

$$x = 48 + 32 \quad \text{ehk} \quad x = 80.$$

Kontroll. $80 - 48 = 32.$

Ülesanne 2. *Ma mõtlesin ühe arvu. Kui korrutasin selle 13-ga, siis sain 143. Millise arvu ma mõtlesin?*

Tähistame mõeldud arvu tähega x. Korrutades selle 13-ga, saame $x \cdot 13$ ehk $13x$. Kuid ülesande tingimuste järgi on tulemus 143. Järelikult:

$$13x = 143.$$

Leiame x kui tundmatu teguri:

$$x = 143 : 13 \quad \text{ehk} \quad x = 11.$$

Kontroll. $13 \cdot 11 = 143.$

Võrrandite lahendamisel tuleb tähelepanu pöörata sellele, milliseid arvulisi väärtusi võib omada tähega märgitud tundmatu, s. t. millised väärtused on tema jaoks lubatavad.

Nii on ülesandes 1 tundmatu lubatavateks väärtusteks ainult naturaalarvud. Ülesandes 2 on aga tundmatu lubatavateks väärtusteks nii täisarvulised kui ka murdarvulised väärtused.

Pärast võrrandi lahendamist selgub, missugust lubatud väärtustest peab omama tundmatu, et võrdus oleks õige.

§ 9. Ajaloolisi andmeid.

Esimesi algebra algeid võib leida juba vanade rahvaste juurest. Nii oskasid vanad babüloonlased ligikaudu 4000 aastat enne meie ajaarvamist lahendada küllaltki raskeid võrrandeid.

Vanad egiptuse matemaatilised teosed (umbes 2000 aastat e. m. a.) sisaldasid samuti mõningaid algmõisteid algebrast.

Eriti tuleb aga ära märkida IX sajandi väljapaistva matemaatiku Muchammad Al-Khwārizmi teoseid. Tema perekonnanimi Al-Khwārizmi («Horesmist») vihjab sellele, et õpetlane on pärit Horesmist (praegune Uzbeki NSV). Tema matemaatika-alased teosed sisaldavad üksikasjaliselt selle aja algebralisi teadmisi. Tol ajal ei olnud veel kasutusel spetsiaalseid märke valemite ja reeglite üleskirjutamiseks. Ei olnud näiteks liitmismärki, lahutamismärki, võrdusmärki jt. Sellepärast esitas Al-Khwārizmi kõik reeglid sõnades.

Soovides kirjutusviisi lühendada, hakkasid matemaatikud lühendama tihti kasutatavaid sõnu. Näiteks liitmise ja lahutamise juures kirjutati sõnade «pluss» ja «miinus» asemel ainult nende sõnade esimesed tähed «p» ja «m».

Tähed arvude märkimiseks võttis esimesena tarvitusele prantsuse matemaatik Viëta (1540—1603). Oma matemaatika-alastes teostes tähistas Viëta kõiki tundmatuid arve vokaalidega, tuntud arve — konsonantidega. Tähtede kasutamisele võtmisel arvude märkimiseks oli suur tähtsus. Tähtede abil muutus võimalikuks üles kirjutada reegleid ja valemeid üldkujul mistahes arvude jaoks.

1703. aastal ilmus Venemaal vene matemaatiku-pedagoogi L. Magnitski matemaatika õpik «Aritmeetika». See sisaldas peale aritmeetika veel teadmisi algebrast, geomeetriast, astronoomiast, geodeesiast ja muust. Samuti nagu Viëta kasutas ka L. Magnitski tundmatute arvude tähistamiseks konsonante.

L. Magnitski raamat oli Venemaal aastakümnete jooksul peamiseks matemaatika käsiraamatuks. Selle järgi õppis suur vene teadlane M. Lomonossov.

Algebralised üleskirjutused kaasaegsel kujul võeti tarvitusele kuulsa inglise õpetlase Isaac Newtoni (1642—1727) töödes. Toome näiteks tema üleskirjutuse:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

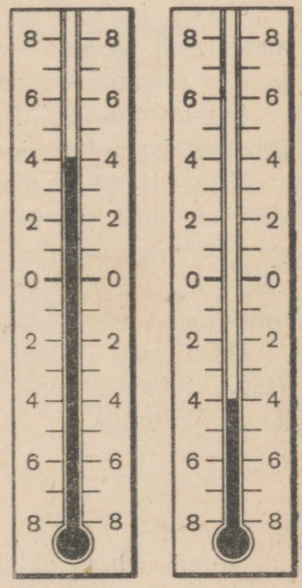
TEINE PEATÜKK.

RATSIONAALARVUD.

§ 10. Positiivsed ja negatiivsed arvud.

Kui küsimusele «Milline on praegu õhu temperatuur?» vastata: «Termomeeter näitab 4°», siis see vastus ei ole täpne. Termomeeter võib näidata 4° sooja või 4° külma (joon. 1).

Öeldakse ka: 4° üle nulli või 4° alla nulli. Need selgitavad sõnad: «sooja», «külma», «üle nulli», «alla nulli», tuleb lisada seepärast, et temperatuur võib alates nullist muutuda kahes vastupidises suunas. Ta võib tõusta (elavhõbe termomeetris liigub nullist ülespoole) või langeda (elavhõbe liigub nullist allapoole).



Joon. 1.

Ilmateate edasiandmisel raadio kaudu neid selgitavaid sõnu aga ei kasutata. Öeldakse lühidalt näiteks nii: «Jakutskis oli temperatuur miinus 6°, Murmanskis miinus 1°, Kaasanis pluss 1°, Minskis pluss 3°, Rostovis pluss 12° jne.» Sõnade «üle nulli» või «alla nulli» asemel lisatakse kraadide arvu ette märk pluss või miinus.

Nimetatud temperatuure võib märkida järgmiselt:

Jakutsk	$-6°$	Minsk	$+3°$
Murmansk	$-1°$	Rostov	$+12°$.
Kaasan	$+1°$		

Seda kirjutust mõistetakse nii, et temperatuur Jakutskis oli 6° alla nulli, Kaasanis 1° üle nulli jne.

Sageli, kui termomeeter näitab sooja, jäetakse temperatuuri märkimisel plussmärk ära ja $+13°$ asemel kirjutatakse lihtsalt 13°.

Järelikult nullist kõrgemate temperatuuride märkimiseks kasutatakse arve 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$, 7 jne. Need arvud on meile tuttavad juba aritmeetikast. Neid nimetatakse positiivseteks arvudeks.

Nullist madalamate temperatuuride märkimiseks kasutatakse uusi arve: -1, -2, -3, $-3\frac{1}{2}$, -7 jne. Neid arve nimetatakse negatiivseteks arvudeks.

Temperatuuri null kraadi märgitakse nulliga. Viimane ei ole ei positiivne ega ka negatiivne arv. Tema ette võib panna nii märgi pluss kui ka märgi miinus või jätta ta hoopis märgita. Kirjutused 0; $+0$; -0 tähistavad ühte ja sama arvu — nulli.

Negatiivseid arve ei kasutata aga mitte üksnes temperatuuride märkimiseks. Toome näiteid.

Vara ja võlg. Juba üle tuhande aasta tagasi tähistas india matemaatik ja astronoom Bramagupta (VII saj.) vara positiivsete ja võla negatiivsete arvudega (§ 29).

Samuti võib positiivseid ja negatiivseid arve kasutada tuleviku ja mineviku, tulude ja kulude jne. märkimiseks.

Suuruste muutumine. Positiivseid ja negatiivseid arve võib kasutada suuruste muutumise mõõtmiseks, märkides positiivsete arvudega nende suurenemise, negatiivsete arvudega nende vähenemise. Näiteks võime positiivsete arvudega märkida temperatuuri tõusu, negatiivsete arvudega — languse.

Positiivsed arvud (täis- ja murdarvud), negatiivsed arvud (täis- ja murdarvud) ning arv null moodustavad ratsionaalarvude hulga.

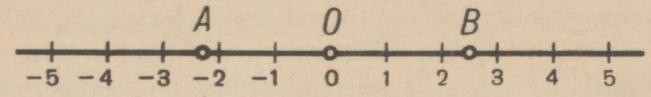
§ 11. Arvtelg.

Võtame sirgel vabalt mingi punkti O (joon. 2) ning nimetame selle alguspunktiks. Valime vabalt mingi pikkusühiku, näiteks ühe sentimeetri, ja paigutame sirgele punktist O paremale üksteise järel 1 cm pikkused lõigud. Esimese lõigu lõpp-punkti tähistame arvuga 1, teise lõpp-punkti arvuga 2 jne.

Samuti paigutame lõigud ka punktist O vasakule poole.

Punktist O vasakul pool asetsevate lõikude lõpp-punktid märgime arvudega -1, -2, -3 jne.

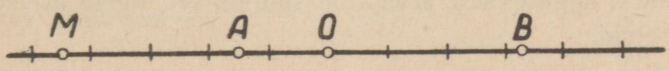
On arusaadav, et punktist O võib mõlemale poole paigutada ka lõike, mis on väljendatud mistahes murdarvuga. Näiteks joonisel 2 kujutab punkt B arvu $2\frac{1}{2}$, punkt A arvu $-2{,}3$.



Joon. 2.

D e f i n i t s i o o n. **Sirget, millel iga arvu kujutab vastav punkt, nimetatakse arvsirgeks e. arvteljeks.**

Selleks et leida, kus asetseb arvteljel punkt M (joon. 3), mis vastab näiteks arvule $-4\frac{1}{2}$, asetame punktist O vasakule lõigu, mis on võrdne $4\frac{1}{2}$ valitud pikkusühikuga (meie näites $4\frac{1}{2}$ cm).



Joon. 3.

Lühiduse mõttes öeldakse sõnade «arvule a vastav punkt» asemel lihtsalt «punkt a». Järelikult, arvteljel (joon. 3) on kujutatud punktid: $-1\frac{1}{2}$ (punkt A), 3,2 (punkt B), null (punkt O).

Eelmises paragrahvis me kohtusime juba arvteljega: termomeetri skaala kujutab endast ühte osa arvteljest.

Edaspidi tuleb meil sageli kasutada arvtelge.

Arve, mis asetsevad arvteljel teine teisel pool alguspunkti ja võrdsel kaugusel sellest, nimetatakse v a s t a n d a r v u d e k s. Nii on -5 arvu $+5$ vastandarv, arv 2 arvu -2 vastandarv jne. Arv 0 (null) on iseenda vastandarv. Märgime, et märke «pluss» ja «miinus» nimetatakse vastupidisteks märkideks.

§ 12. Ratsionaalarvude võrdlemine.

Me oskame võrrelda mistahes positiivseid arve, see tähendab, oskame alati öelda, kumb kahest antud arvust on suurem, kumb väiksem.

Nüüd, kus me tunneme ka negatiivseid arve, tuleb püstitada reeglid nende arvude võrdlemiseks nii üksteisega kui ka positiivsete arvudega.

Selleks pöördume tagasi arvtelje juurde. Vaatame, kuidas asetsevad arvteljel positiivsed arvud, mida me oskame võrrelda.

Näeme, et mida kaugemale punktist O paremale me läheme, seda suuremaks muutuvad positiivsed arvud. Vastupidi, kui liikuda vasakule (punkti O poole), vähenevad arvud kuni nullini. Tähendab, võib öelda, et kahest positiivsest arvust on see suurem, kumb asetseb arvteljel paremal.

Laiendame seda seaduspärasust kogu arvtelje kohta, see tähendab, me loeme kahest arvust selle suuremaks, kumb asetseb arvteljel paremal.

Eeslnevast järgneb, et:

1. iga positiivne arv on suurem nullist ja igast negatiivsest arvust;

2. iga negatiivne arv on väiksem nullist;

3. kahest negatiivsest arvust on suurem see, kumb asetseb arvteljel paremal.

Näiteks:

$$3 > 0;\ 1 > -5;\ -\frac{1}{2} < 0;\quad -3 > -10;\quad -4 < -1.$$

§ 13. Arvu absoluutväärtus.

Mingist punktist O sõitsid vastupidistes suundades välja kaks autot. Esimene sõitis punktist O 40 *km* paremale, teine 50 *km* vasakule. Kumb neist läbis pikema tee?

Kui tahame näidata mitte ainult läbitud teed, vaid ka suunda, siis võime kirjutada, et esimene auto sõitis $+40$ *km* või lihtsalt 40 *km*, teine aga -50 *km*. Me ei saa aga öelda, et esimene auto läbis pikema tee, olgugi et $40 > -50$, sest siis teeksime jämeda vea.

Võrreldes kahe auto poolt läbitud teid, huvitume me ainult tee pikkusest, mitte aga sellest, millises suunas see tee läbiti. Kuid läbitud teed märgitakse alati aritmeetilise, s. t. positiivse arvuga. Tähendab, -50 asemel peame võtma tema vastandarvu $+50$, mis tegelikult väljendab teise auto poolt läbitud kilomeetrite arvu. Sel juhul öeldakse, et me võtame arvu -50 absoluutväärtuse.

Definitsioon 1. **Negatiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse tema vastandarvu.**

Järelikult -10 absoluutväärtus on $+10$; $-0{,}3$ absoluutväärtus on $+0{,}3$ jne.

Arvu absoluutväärtuse tähistamiseks kirjutatakse antud arv kahe püstkriipsu vahele, näiteks $|-50|$.

Tähendab, võib kirjutada:

$$|-50|=50;\quad |-0{,}3|=0{,}3;\quad |-\tfrac{2}{5}|=\tfrac{2}{5};\quad |-3{,}87|=3{,}87.$$

Järelikult tuleb eespool esitatud küsimusele vastata järgmiselt: teine auto läbis suurema tee, kuna

$$|-50|>40.$$

Me võrdleme siin arvu -50 absoluutväärtust arvuga 40. Ühtsuse mõttes räägitakse ka positiivse arvu ning samuti nulli absoluutväärtusest.

Definitsioon 2. **Positiivse arvu ja nulli absoluutväärtuseks on antud arv ise.**

Järelikult:

$$|5|=5;\quad |40|=40;\quad |0|=0 \text{ jne.}$$

Seega, võrreldes kahe auto poolt läbitud teid, võime öelda, et me võrdleme arvude -50 ja 40 absoluutväärtusi ning saame

$$|-50|>|40|.$$

Kirjutused 5; $+5$; $|5|$ tähistavad ühte ja sama positiivset arvu 5. On tähtis meeles pidada, et ka kirjutus $|-5|$ tähistab arvu 5.

$$5=+5=|5|=|+5|=|-5|.$$

Eelmises paragrahvis me esitasime reegli negatiivsete arvude võrdlemiseks. Vastavalt sellele reeglile võime kirjutada:

$$-5>-15;\quad -3>-3{,}5;\quad -1>-2 \text{ jne.}$$

Kui aga võrdleme nende arvude absoluutväärtusi, siis saame:

$$|-5|<|-15|;\quad |-3|<|-3{,}5|;\quad |-1|<|-2| \text{ jne.}$$

Näeme, et kui üks negatiivne arv on teisest suurem, siis tema absoluutväärtus on teise arvu absoluutväärtusest väiksem, ja vastupidi, kui ühe negatiivse arvu absoluutväärtus on teise negatiivse arvu absoluutväärtusest suurem, siis see arv ise on teisest väiksem.

Näiteks:

$$|-15|>|-8|; \quad \text{kuid} \quad -15<-8.$$

$$|-1\tfrac{1}{4}|>|-1|, \quad \text{kuid} \quad -1\tfrac{1}{4}<-1.$$

Nüüd võib negatiivsete arvude võrdlemise reegli sõnastada teisiti, toetumata nende arvude asetusele arvteljel.

Reegel. **Kahest negatiivsest arvust on see suurem, kumma absoluutväärtus on väiksem.**

Seepärast

$$-11>-12, \quad \text{kuna} \quad |-11|<|-12|;$$
$$-1{,}2<-1, \quad \text{kuna} \quad |-1{,}2|>|-1| \text{ jne.}$$

§ 14. Ratsionaalarvude liitmine.

Meil tuleb nüüd anda reeglid tehete kohta ratsionaalarvudega, s. t. mistahes ratsionaalarvude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise reeglid. Alustame liitmisest.

Püüame anda niisuguse ratsionaalarvude liitmise reegli, mis täidaks kolme järgmist tingimust:

1. Et ülesanded, mis aritmeetikas (s. t. positiivsete arvude puhul) lahendusid liitmise abil, lahenduksid sama tehte abil ka mistahes ratsionaalarvude puhul.

2. Et mistahes ratsionaalarvude liitmise reegel jääks positiivsete arvude jaoks samaks, nagu me tunneme teda aritmeetikast.

3. Et positiivsete arvude kohta antud liitmise põhiseadused (§ 7) jääksid samaks ka mistahes ratsionaalarvude liitmise kohta.

Võtame seepärast ülesande, mis aritmeetikas lahendub liitmise abil, näiteks:

Termomeeter näitas a°. Seejärel temperatuur tõusis b° võrra. Mitu kraadi näitab termomeeter praegu?

On selge, et positiivse a ja b korral tuleb antud ülesande lahendamiseks a kraadile lisada b kraadi. Saame vastuse:

$$(a+b) \text{ kraadi.}$$

Kontrollime näite abil.

1. Olgu $a=+4$; $b=+2$.

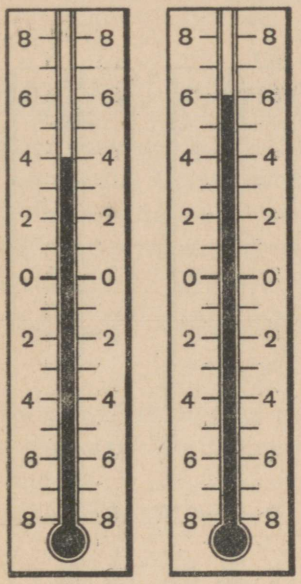
Tähendab, termomeeter näitas algul 4° sooja, seejärel temperatuur tõusis 2° võrra. Ilmselt näitab termomeeter praegu 6° (joon. 4).

Järelikult:

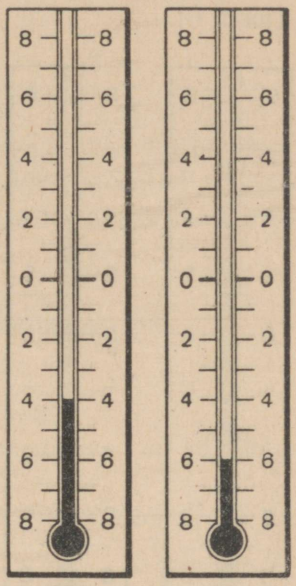
$$(+4)+(+2)=+6,$$

nagu peabki olema.

Vaatame nüüd, missuguseid väärtusi peab omandama summa $a+b$ tähtede a ja b mitmesuguste ratsionaalarvuliste (mitte ainult positiivsete) väärtuste puhul.



Joon. 4.



Joon. 5.

2. Olgu $a=-4$; $b=-2$.

Tähendab, termomeeter näitas algul 4° külma, seejärel temperatuur alanes veel 2° võrra.

On selge, et nüüd näitab termomeeter — 6° (joon. 5).

Järelikult:

$$(-4)+(-2)=-6.$$

Võrreldes ülesannete 1 ja 2 tulemusi, võime sõnastada järgmise reegli.

Reegel 1. **Et liita kaks ühesuguste märkidega arvu, on vaja liita nende absoluutväärtused ja summa ette panna seesama märk.**

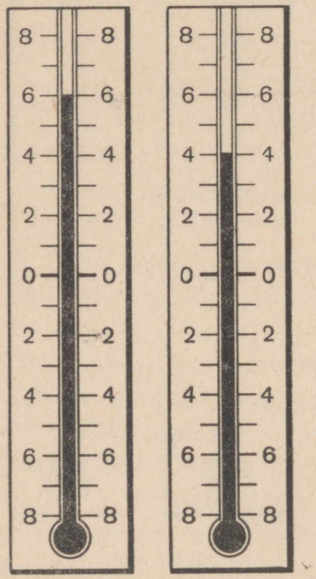
Seega, et liita — 11 ja — 8, liidame nende absoluutväärtused 11 ja 8 ning saadud arvu 19 ette paneme miinuse. Saame:

$$(-11)+(-8)=-19.$$

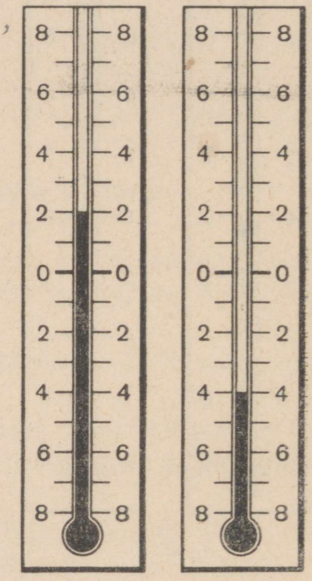
See reegel jätab positiivsete arvude liitmise samaks, nagu me tunneme seda aritmeetikast. (Tähendab, teine tingimus on täidetud.)

3. Olgu $a = +6$; $b = -2$.

Tähendab, termomeeter näitas algul 6° sooja, kuid siis langes temperatuur 2° võrra. On ilmne, et termomeeter näitab nüüd 4° sooja (joon. 6).



Joon. 6.



Joon. 7.

Järelikult, kui tahame, et ka sel juhul lahenduks ülesanne liitmise abil, siis peame kirjutama:

$$(+6)+(-2)=+4.$$

4. Olgu $a = +2$; $b = -6$.

Arutledes samuti nagu eelmises näites, leiame, et termomeeter näitab pärast temperatuuri langemist 6° võrra 4° külma (joon. 7).

Tähendab, lahendades ka selle ülesande liitmise abil, peame kirjutama:

$$(+2)+(-6)=-4.$$

Vaadeldes juhtumeid 3 ja 4, võime sõnastada järgmise reegli.

Reegel 2. **Et liita kaks erinevate märkide ja erinevate absoluutväärtustega arvu, tuleb leida nende absoluutväärtuste vahe ning vahe ette kirjutada selle arvu märk, mille absoluutväärtus on suurem.**

Selle reegli järgi saame, et:

$$(-5)+(+7)=+2;$$
$$(+5)+(-7)=-2;$$
$$(-3{,}5)+(+1{,}2)=-2{,}3.$$

5. Olgu $a=+3$; $b=-3$.

Kui termomeeter näitas 3° sooja ning seejärel temperatuur langes 3° võrra, siis termomeeter näitab nüüd 0°. Samuti on selge, et kui termomeeter näitab $a°$ sooja, siis pärast temperatuuri langemist a kraadi võrra termomeetri näit on 0°.

Tähendab:

Reegel 3. **Kahe vastandarvu summa on null.**

$$a+(-a)=0.$$

Märgime, et on õige ka vastupidine väide.

Kui kahe arvu summa on null, siis need arvud on teineteise vastandarvud.

Lõpuks on kerge leida (ja kontrollida termomeetril), et näiteks:

$$2+0=2 \qquad -3+0=-3 \qquad 0+0=0.$$
$$0+2=2 \qquad 0+(-3)=-3$$

Reegel 4. **Kui üks kahest liidetavast on null, siis nende summa on võrdne teise liidetavaga.**

Need neli tuletatud reeglit hõlmavad kõik võimalikud ratsionaalarvude liitmise juhtumid.

§ 15. Liitmise seadused.

Veendume, et ratsionaalarvude liitmisel jäävad kehtima kõik positiivsete arvude liitmise põhiseadused.

Vahetuvuse seadus. Mistahes ratsionaalarvude a ja b kohta kehtib võrdus:

$$a+b=b+a.$$

See tuleneb ratsionaalarvude liitmise reeglist.

Tõepoolest, kui arvud on ühemärgilised (reegel 1), siis liidame nende absoluutväärtused, see tähendab positiivsed arvud. Vahetu-

vuse seaduse kehtivus positiivsete arvude kohta on aga tõestatud.

Kui arvud on vastandmärgilised (reegel 2), siis liitmisel lahutame suurema absoluutväärtusega arvust väiksema absoluutväärtusega arvu, olenemata sellest, kas suurema absoluutväärtusega arv asetseb esimesel või teisel kohal. Tähendab, ka siin ei olene summa liidetavate järjekorrast.

Reeglites 3 ja 4 ei räägita midagi liidetavate järjekorrast, tähendab, need reeglid kehtivad liidetavate mistahes järjekorra puhul.

Ühenduvuse seadus. Mistahes ratsionaalarvude kohta on õige võrdus:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Selles võib veenduda näite abil:

$$(-5)+[(+3)+(-7)]=(-5)+(-4)=-9$$

ja

$$[(-5)+(+3)]+(-7)=(-2)+(-7)=-9.$$

Nagu positiivsete arvude puhul, nii jääb ka siin vahetuvuse ja ühenduvuse seadus kehtima, kui liidetavaid on rohkem kui kaks.

§ 16. Mitme arvu liitmine.

Et liita mitu ratsionaalarvu, liidame antud reegli järgi esimesed kaks liidetavat, siis liidame saadud summaga kolmanda liidetava, uue summaga neljanda liidetava jne.

Näiteks:

$$(-7)+(+5)+(+2)+(-3)+(+9)=$$
$$=(-2)+(+2)+(-3)+(+9)=0+(-3)+(+9)=$$
$$=(-3)+(+9)=+6.$$

Kuid ratsionaalarvude liitmist võib teostada ka lihtsamalt.

Rakendades vahetuvuse seadust, paigutame (mõttes) liidetavad ümber nii, et esimesel kohal asetsevad kõik positiivsed liidetavad, nende järel aga kõik negatiivsed liidetavad. Seejärel, kasutades ühenduvuse seadust, liidame eraldi kõik positiivsed liidetavad ja kõik negatiivsed liidetavad. Saame kaks arvu, millised liidame kahe ratsionaalarvu liitmise reegli järgi.

Nii võib eespool toodud näites teostada liitmise järgmises järjekorras:

1) $(+5)+(+2)+(+9)=+16$;
2) $(-7)+(-3)=-10$;
3) $(+16)+(-10)=+6$.

Tähendab, võime anda liitmise kohta järgmise reegli.

Reegel. **Et liita mitu ratsionaalarvu, võib liita eraldi kõik positiivsed ja kõik negatiivsed arvud ning saadud kaks arvu liita kahe ratsionaalarvu liitmise reegli järgi.**

§ 17. Ratsionaalarvude lahutamine.

Lahutamist defineeritakse kui liitmise pöördtehet.

Lahutada ühest arvust teine, see tähendab leida niisugune kolmas arv, mille liitmisel teise arvuga saadakse esimene arv.

Teiste sõnadega, lahutada mistahes arvust a arv b — see tähendab leida niisugune kolmas arv c, et kehtiks võrdus:

$$c+b=a.$$

Näiteks:

$5-(+7)=-2$, sest $(-2)+(+7)=+5$;
$(-3)-(+8)=-11$, sest $(-11)+(+8)=-3$;
$(-1)-(-5)=+4$, sest $(+4)+(-5)=-1$.

Et anda üldist reeglit mistahes ratsionaalarvude lahutamiseks, toimime järgmiselt. Asendame esitatud näidetes lahutamise lahutatava vastandarvu liitmisega. Saame:

$5+(-7)=-2$;
$(-3)+(-8)=-11$;
$(-1)+(+5)=+4$.

Näeme, et saime samad tulemused, mis lahutamiselgi. Selle põhjal võime anda järgmise reegli.

Reegel. **Et lahutada mingi arv, tuleb vähendatavaga liita lahutatava vastandarv.**

$$a-b=a+(-b).$$

Tõestame selle reegli.

Meil on vaja tõestada, et mistahes a ja b korral on kehtiv võrdus

$$a-b=a+(-b) \qquad (1)$$

Võrduse vasakul pool on arv a vähendatav, arv b — lahutatav.

Tähendab, paremal pool olev avaldis $a+(-b)$ on arvude a ja b vahe

Järelikult, võrdus (1) on õige, kui vahe $a+(-b)$ ja lahutatava b summa on võrdne vähendatavaga a.

Kontrollime seda, liites $a+(-b)$ ja b; saame

$$[a+(-b)]+(+b).$$

Ühenduvuse seaduse põhjal võime selle avaldise kirjutada järgmiselt:

$$a+[(-b)+(+b)].$$

Kuid nurksulgudes olev summa on kahe vastandarvu summa ning seepärast võrdne nulliga.

Järelikult,

$$[a+(-b)]+(+b)=a+[(-b)+(+b)]=a+0=a.$$

Saime vähendatava a. Tähendab, võrdus (1) on õige.

Toodud reegli abil võib lahutamise asendada liitmisega, liitmise reegel on meile aga juba tuttav.

Eelnevast järgneb, et ühe ratsionaalarvu lahutamise teisest võib asendada kahe ratsionaalarvu liitmisega. Kahe ratsionaalarvu liitmine on aga alati võimalik ning annab ühese tulemuse (§ 14). Tähendab, me võime kinnitada, et ratsionaalarvude hulgas on lahutamine alati võimalik ning annab ühese tulemuse. Selle poolest põhiliselt erinebki ratsionaalarvude hulk positiivsete arvude hulgast, kus, nagu me teame, liitmine on alati võimalik, kuid lahutamine mitte.

§ 18. Liitmise ja lahutamise omadused.

Paragrahvis 15 näitasime, et mistahes ratsionaalarvude liitmisel jäävad kehtima liitmise vahetuvuse ja ühenduvuse seadused. Kuid siit järeldub, et ka nendest seadustest tuletatud liitmise ja lahutamise omadused jäävad kehtima ratsionaalarvude puhul.

1. Summa liitmine.

Et liita mingi arvuga mitme arvu summa, võib selle arvuga liita järjest iga liidetava.

Näide.

$$(-5)+[(-3)+(+15)+(-4)]=(-5)+(+8)=3$$

ja

$$(-5)+(-3)+(+15)+(-4)=(-8)+(+15)+(-4)=$$
$$=(+7)+(-4)=3.$$

Aritmeetikast teame, et seda omadust kasutatakse arvutamise lihtsustamiseks. Toome näiteid.

Olgu meil vaja leida summa:

$$35 + (25 + 40 + 27).$$

Sulud näitavad, et algul on vaja liita sulgudes olevad arvud. Liites need, saame 92. Liites 35 ja 92, saame 127.

Kasutades aga summa liitmise omadust, võime liita näiteks niisuguses järjekorras:

$$35 + 25 = 60; \quad 60 + 40 = 100; \quad 100 + 27 = 127.$$

Arvutamine osutus lihtsamaks.

Toome veel ühe näite. Leida summa:

$$187 + 46 + 38 + 54 + 113.$$

Paigutame liidetavad ümber järgmiselt:

$$187 + 113 + 46 + 54 + 38.$$

Liidame nii:

$$(187 + 113) + (46 + 54) + 38 = 300 + 100 + 38 = 438.$$

Selline vahetuvuse ja ühenduvuse seaduse üheaegne rakendamine väljendub lühidalt järgmises reeglis.

Liidetavaid võib ühendada rühmadeks mistahes viisil.

2. Vahe liitmine.

Et liita mingi arvuga kahe arvu vahe, võib liita vähendatava ja tulemusest lahutada lahutatava.

Näiteks:

$$(-7) + [(+3) - (-10)] = (-7) + (+13) = 6$$

ja

$$[(-7) + (+3)] - (-10) = (-4) - (-10) = (-4) + (+10) = 6.$$

Tähendab:

$$(-7) + [(+3) - (-10)] = [(-7) + (+3)] - (-10).$$

Üldkujul võib selle omaduse kirjutada järgmiselt:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Ka seda omadust kasutatakse tihti peast arvutamisel. Olgu näiteks vaja liita 28 ja 39. Et $39 = 40 - 1$, siis $28 + 39 = 28 + (40 - 1) = (28 + 40) - 1 = 67$.

Kõik need lahutamise omadused, mis kehtivad positiivsete arvude puhul, jäävad kehtima ka mistahes ratsionaalarvude puhul.

3. Summa lahutamine.

Selle asemel et mingist arvust lahutada mitme arvu summa, võib sellest arvust lahutada iga liidetava üksteise järel.

Näide.

$$(-7)-[(-3)+(+8)]=(-7)-(+5)=-12$$

ja

$$[(-7)-(-3)]-(+8)=(-4)+(-8)=-12.$$

4. Vahe lahutamine.

Selle asemel et mingist arvust lahutada vahe, võib sellest arvust lahutada vähendatava ja tulemusega liita lahutatava.

Näide.

$$(-8)-[(-6)-(+3)]=(-8)-(-9)=1$$

ja

$$[(-8)-(-6)]+(+3)=(-2)+(+3)=1.$$

Üldkujul:

$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

Seda omadust kasutatakse samuti arvutamise lihtsustamiseks, näiteks:

$$253-197=253-(200-3)=253-200+3=56.$$
$$257-(257-78)=257-257+78=78.$$

§ 19. Algebraline summa.

Võtame avaldise, mis sisaldab liitmist ja lahutamist:

$$(+7)-(+4)+(+2)-(-5)-(+3). \qquad (1)$$

Lahutamise reegli põhjal võime kõik lahutamised asendada vastandarvude liitmisega. Saame:

$$(+7)+(-4)+(+2)+(+5)+(-3). \qquad (2)$$

Seega kõik avaldises (1) olevad arvud muutusid liidetavateks.

Definitsioon. **Summat, milles liidetavateks on positiivsed ja negatiivsed arvud (eriti ka nullid), nimetatakse algebraliseks summaks.**

Iga avaldist, mis sisaldab liitmist ja lahutamist, võib kujutada algebralise summana.

Näiteks:

$$a+(-b)-(-c)-(+d)+(-c)=$$
$$=a+(-b)+(+c)+(-d)+(-c).$$

Kirjutuse lihtsustamiseks võime igal pool liitmismärgi ära jätta, pidades meeles, et iga märk avaldises kuulub selle märgi järel oleva arvu juurde ja et kõik need arvud tuleb liita.

Nii võib avaldise (2) kirjutada lühemalt:

$$7 - 4 + 2 + 5 - 3.$$

Ka see avaldis näitab, et on vaja liita arvud 7; -4; $+2$; $+5$; -3.

§ 20. Korrutamine.

Mistahes ratsionaalarvude korrutamise reegli tuletamiseks võtame aluseks samad nõuded, mida kasutasime ratsionaalarvude liitmise reegli tuletamisel (vt. § 14).

Võtame jällegi ülesande temperatuuri muutumisest.

Temperatuur tõuseb tunnis $a°$ võrra. Praegu näitab termomeeter 0°. Kui palju näitab termomeeter t tunni pärast?

Nagu ka varem, tähistame temperatuuri langust negatiivsete arvudega.

Peale selle esineb ülesandes veel aeg, mille jooksul temperatuur muutus. Lepime kokku tähistada aega antud momendist edasi positiivsete arvudega, möödunud aega aga negatiivsete arvudega.

Tuleme tagasi ülesande juurde. Kuna igas tunnis temperatuur tõuseb $a°$ võrra, siis t tunni pärast on temperatuur tõusnud at kraadi võrra.

Vaatame, millega on võrdne korrutis at arvude a ja t mitmesuguste väärtuste korral.

1) $a = 2$; $t = 3$.

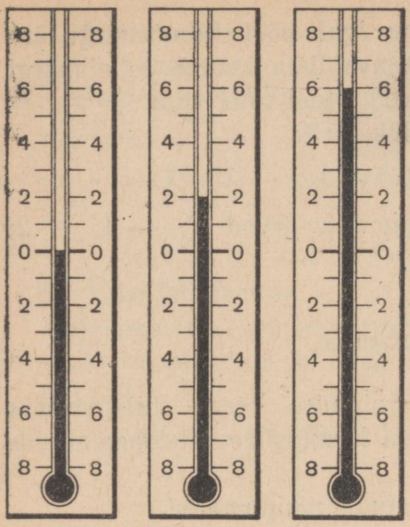
Antud momendil näitab termomeeter 0°. Kolme tunni jooksul tõuseb temperatuur igas tunnis 2°. Järelikult 3 tunniga tõuseb temperatuur 6° (joon. 8). Tähendab: $2 \cdot 3 = 6$.

2) $a = -2$; $t = 3$.

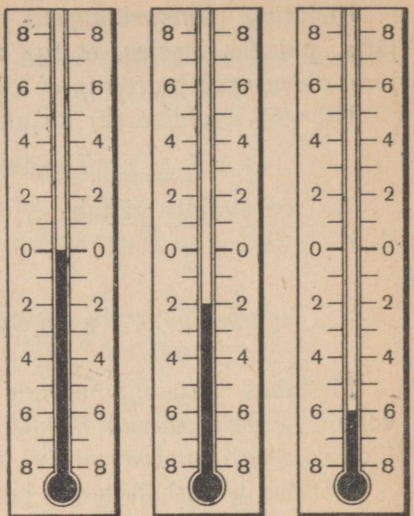
Temperatuur langeb igas tunnis 2°. Tähendab, 3 tunni jooksul langeb ta 6° (joon. 9). Seega: $(-2) \cdot 3 = -6$.

3) $a = 2$; $t = -3$.

Temperatuur tõuseb igas tunnis 2°. Praegu näitab termomeeter 0°. Tähendab, 3 tunni eest oli temperatuur 6° alla nulli (kolme



Joon. 8.



Joon. 9.

tunni jooksul tõusis temperatuur igas tunnis 2° ja antud momendiks on jõudnud nullini) (joon. 10). Tähendab: $2 \cdot (-3) = -6$.

4) $a = -2$; $t = -3$.

Temperatuur langeb igas tunnis 2°. Praegu on 0°. Tähendab, 3 tunni eest pidi ta olema 6° üle nulli (sest langedes igas tunnis 2°, on temperatuur 3 tunni pärast 0°) (joon. 11).

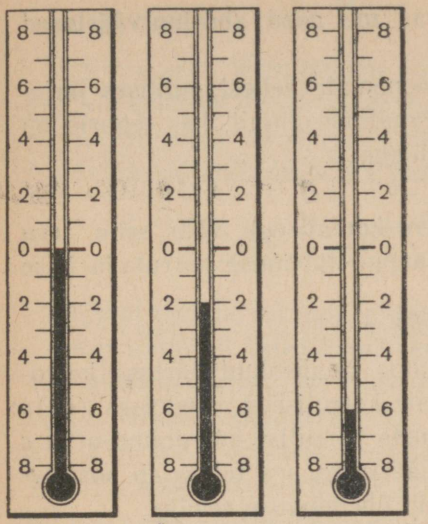
Siit: $(-2) \cdot (-3) = 6$.

Kõrvutame kõik vaadeldud korrutamise juhud:

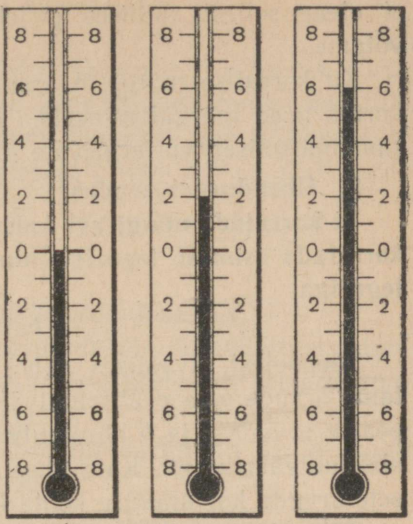
$$2 \cdot 3 = 6;$$
$$(-2) \cdot (-3) = 6;$$
$$(-2) \cdot 3 = -6;$$
$$2 \cdot (-3) = -6.$$

Arvestades saadud tulemusi, saame ratsionaalarvude korrutamiseks järgmise reegli.

Reegel 1. **Et leida kahe ratsionaalarvu korrutist, tuleb korrutada nende absoluutväärtused ja võtta korrutis märgiga pluss, kui tegurid on ühesuguste märkidega, ja märgiga miinus, kui nad on erinevate märkidega.**



Joon. 10.



Joon. 11.

Kooskõlas antud reegliga saame:

$$(-3)\cdot 5 = -15;\quad \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{6}{25};\quad 4\cdot(-25) = -100.$$

Peale selle on mistahes arvu a puhul:

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0.$$

(Mistahes arvu absoluutväärtuse korrutis nulliga on null.)

Reegel 2. **Korrutis on null, kui vähemalt üks tegureist on null.**

§ 21. Korrutamise seadused.

Ratsionaalarvude kohta jäävad kehtima kõik need korrutamise seadused, mis kehtivad positiivsete arvude kohta (§ 7).

1. Vahetuvuse seadus.

Korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel.

$$ab = ba.$$

See järeldub ratsionaalarvude korrutamise definitsioonist. Tõepoolest, me võtame arvude absoluutväärtuste korrutise, kuid see

ei olene sellest, millises järjekorras me need absoluutväärtused võtame.

Ka korrutise märgi määrame olenemata sellest, millises järjekorras need märgid esinesid. Me vaatame ainult, kas tegurid on samamärgilised või erinevate märkidega.

2. Ühenduvuse seadus.

Et korrutada mingi arv kahe arvu korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga ning saadud tulemuse korrutada teise teguriga.

$$a(bc)=(ab)\cdot c.$$

Tõepoolest, avaldises $a(bc)$ peame a absoluutväärtuse korrutama arvude b ja c absoluutväärtuste korrutisega; avaldises $(ab)c$ peame arvude a ja b absoluutväärtuste korrutise korrutama arvu c absoluutväärtusega. Kuid absoluutväärtuste, see tähendab positiivsete arvude korrutamise kohta kehtib ühenduvuse seadus.

Tähendab, võrduse mõlema poole absoluutväärtused on võrdsed. Võib kergesti veenduda, et ka kummagi korrutise märgid on ühesugused, olenemata sellest, millised on arvude a, b ja c märgid.

3. Jaotuvuse seadus.

Et korrutada kahe arvu summa mingi arvuga, võib kummagi liidetava eraldi korrutada selle arvuga ning saadud tulemused liita.

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Veendume selles näidete varal.

1) $[2+(-3)]\cdot 4=2\cdot 4+(-3)\cdot 4.$

Tõepoolest:

$$[2+(-3)]\cdot 4=(-1)\cdot 4=-4.$$
$$2\cdot 4+(-3)\cdot 4=8-12=-4.$$

2) $[(-3)+5]\cdot(-6)=(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6).$

Tõepoolest:

$$[(-3)+5]\cdot(-6)=2\cdot(-6)=-12.$$
$$(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6)=18-30=-12.$$

Nagu vahetuvuse seadus, nii jääb ka ühenduvuse seadus kehtima juhul, kui tegureid on rohkem kui kaks.

Samuti jääb kehtima ka jaotuvuse seadus, kui liidetavaid on rohkem kui kaks.

Näide:

$$[(7+(-3)+(-2)+5)]\cdot(-2)=$$
$$=7\cdot(-2)+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)+5\cdot(-2).$$

Kontrollige selle võrduse õigsust.

§ 22. Mitme arvu korrutamine.

Mitme arvu korrutamisel toimitakse järgmiselt: eelmises paragrahvis esitatud reegli järgi leitakse kahe esimese teguri korrutis, saadud tulemus korrutatakse kolmanda teguriga, uus tulemus korrutatakse neljanda teguriga jne. Näiteks:

$$(-3)\cdot 4\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6 = (-12)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6 = \\ = 24\cdot(-5)\cdot 6 = (-120)\cdot 6 = -720.$$

Enam levinud on aga teistsugune korrutamise viis.

Korrutamisel tuleb kogu aeg korrutada absoluutväärtusi: algul leiame kahe esimese arvu absoluutväärtuste korrutise, seejärel saadud tulemuse absoluutväärtuse ja kolmanda arvu absoluutväärtuse korrutise jne. Tähendab, korrutise absoluutväärtus on võrdne kõigi tegurite absoluutväärtuste korrutisega.

Seepärast võime ülaltoodud näites kõigepealt leida korrutise:

$$3\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 6 = 720.$$

Saame otsitava korrutise absoluutväärtuse.

Jääb veel määrata korrutise märk.

Selleks paneme tähele, et kui paigutame negatiivsed tegurid kõrvuti (seda aga võime teha korrutamise vahetuvuse seaduse põhjal), siis iga kahe teguri korrutis selles reas on positiivne. Järelikult, kui negatiivsete tegurite arv on paarisarv, siis, jagades need tegurid paaridesse ning korrutades iga paari arvud (ühenduvuse seaduse põhjal see ei muuda korrutise tulemust), saame ainult positiivsed arvud. Tähendab, ka kogu korrutis tuleb sel korral positiivne.

Kui aga negatiivsete tegurite arv on paaritu, siis paaridesse jagamisel jääb üks negatiivne tegur üle. Negatiivsete tegurite iga paar annab korrutiseks positiivse arvu, kõigi positiivsete arvude korrutis on muidugi positiivne. Kui me nende korrutise korrutame veel puuduva negatiivse teguriga, siis saame korrutiseks negatiivse arvu.

Seega, kui negatiivsete tegurite arv korrutises on paaritu, siis korrutis on negatiivne.

Siit järgneb, et korrutise märgi määramiseks on küllalt, kui teame, kas negatiivsete tegurite arv korrutises on paaris või paaritu.

Nii saame järgmise reegli mitme arvu korrutamiseks.

Reegel. **Mitme arvu korrutis on võrdne kõigi tegurite absoluutväärtuste korrutisega, mis on võetud plussmärgiga, kui negatiivseid tegureid on paarisarv (või neid pole üldse), ning miinusmärgiga, kui negatiivseid tegureid on paaritu arv.**

Eespool toodud näites on kolm negatiivset tegurit, tähendab, korrutis tuleb võtta miinusmärgiga.

§ 23. Korrutamise omadused.

Tuletame meelde korrutamise omadused, mis jäävad kehtima ka ratsionaalarvude puhul.

1. Summa korrutamine.

Selle asemel et korrutada summa mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga iga liidetava eraldi ja saadud tulemused liita.

Näide.

$$[(+7)+(-3)+(+2)]\cdot(-3)=(+6)\cdot(-3)=-18$$

ja

$$(+7)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-3)+(+2)\cdot(-3)=$$
$$=(-21)+(+9)+(-6)=-18.$$

2. Summaga korrutamine.

Selle asemel et korrutada mistahes arv summaga, võib korrutada selle arvu iga liidetavaga eraldi ja tulemused liita.

Näide.

$$(+8)\cdot[(-2)+(+7)+(-3)]=(+8)\cdot(+2)=16$$

ja

$$(+8)\cdot(-2)+(+8)\cdot(+7)+(+8)\cdot(-3)=$$
$$=(-16)+(+56)+(-24)=16.$$

Mõlemad need omadused tulenevad jaotuvuse seadusest.

3. Korrutise korrutamine.

Selle asemel et korrutada korrutis mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga ühe teguri ja jätta teised tegurid muutmata.

Näide.

$$[4\cdot(-3)\cdot5]\cdot(-2)=(-60)\cdot(-2)=120$$

ja

$$[4\cdot(-2)]\cdot(-3)\cdot5=(-8)\cdot(-3)\cdot5=120$$

4. Korrutisega korrutamine.

Selle asemel et korrutada korrutisega, võib korrutada algul esimese teguriga, saadud korrutise korrutada teise teguriga jne.

Näide.

$$4 \cdot [5 \cdot (-2) \cdot 3] = 4 \cdot (-30) = -120$$

ja

$$(4 \cdot 5) \cdot (-2) \cdot 3 = 20 \cdot (-2) \cdot 3 = (-40) \cdot 3 = -120.$$

Kolmas ja neljas omadus järeldub vahetuvuse seadusest.

§ 24. Astendamine.

Mistahes ratsionaalarvu astet defineerime samal viisil nagu positiivse arvu astetki (§ 5). Nimelt, olgu:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ korda}},$$

kus a on mistahes ratsionaalarv, kuid n — naturaalarv.

Vaatleme negatiivsete arvude astendamist.

Leiame arvu -2 mõned astmed:

$(-2)^1 = -2$ (definitsiooni järgi, vaata § 5);
$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$;
$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$;
$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$;
$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$ jne.

Näeme, et arvu -2 astendamisel paarisarvulise astendajaga saame positiivse arvu, paarituarvulise astendajaga astendades aga negatiivse arvu.

On ilmne, et niisugune märkide vaheldumine esineb mistahes negatiivse arvu astendamisel.

See on ka arusaadav, sest mistahes arvu paarisarvuline aste on korrutis, kus üks ja sama tegur esineb paarisarv korda. Kui aga korrutamisel on negatiivseid tegureid paarisarv, siis korrutis on positiivne (§ 22).

Ja vastupidi, negatiivse arvu paarituarvuline aste on korrutis, kus üks ja sama tegur esineb paaritu arv korda, sel juhul on aga korrutis negatiivne.

Niisiis, teeme järelduse.

Negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne, paarituarvulise astendajaga aste aga negatiivne.

§ 25. Jagamine.

Jagamist defineeritakse kui korrutamise pöördtehet.

Jagada üks arv teisega tähendab leida niisugune kolmas arv, mille korrutis jagajaga on jagatav.

$a : b = c$, kui $bc = a$.

Toetudes sellele definitsioonile, tuletame reegli ratsionaalarvude jagamiseks.

Kõigepealt lepime kokku, et jagaja ei tohi olla null. Nulliga jagamise jätame kõrvale samal põhjusel nagu aritmeetikaski.

Arvu a absoluutväärtus on võrdne arvude b ja c absoluutväärtuste korrutisega. Tähendab, arvu c absoluutväärtus on võrdne arvu a absoluutväärtuse ja arvu b absoluutväärtuse jagatisega.

Määrame jagatise c märgi.

Kui jagatav ja jagaja on ühemärgilised, siis jagatis on positiivne arv.

Tõepoolest, kui a ja b on positiivsed, siis ka jagatis c on positiivne.

Näide. $12 : 4 = 3$, sest $4 \cdot 3 = 12$.

Kui a ja b on negatiivsed, siis ka sel juhul peab jagatis c olema positiivne, sest korrutades arvuga c negatiivset arvu b, peame saama negatiivse arvu a.

Näide. $-12 : (-4) = 3$, sest $(-4) \cdot 3 = -12$.

Kui jagatav ja jagaja on vastandmärgilised, siis jagatis on negatiivne.

Tõepoolest, kui a on positiivne ja b negatiivne, siis c peab olema negatiivne, sest korrutades arvuga c positiivset arvu b, peame saama positiivse arvu a.

Näide. $12 : (-4) = -3$, sest $(-4) \cdot (-3) = 12$.

Kui a on negatiivne ja b positiivne, siis ka sel juhul peab c olema negatiivne, sest korrutades arvuga c positiivset arvu b, peame saama negatiivse arvu a.

Näide. $(-12) : 4 = -3$, sest $4 \cdot (-3) = -12$.

Seega võime sõnastada järgmise reegli.

Reegel. **Et jagada üks arv teisega, tuleb jagatava absoluutväärtus jagada jagaja absoluutväärtusega ja võtta tulemus märgiga pluss, kui mõlemad antud arvud on samamärgilised, ja märgiga miinus, kui nad on vastandmärgilised.**

Tõestame, et ratsionaalarvude kohta jääb kehtima järgmine teoreem.

Teoreem. **Kahe ratsionaalarvu jagatis ei muutu, kui jagatav ja jagaja korrutada ühe ning sama arvuga (mis ei ole võrdne nulliga).**

Antud: $a:b=c.$ (1)

Tuleb tõestada: $am:bm=c,$ (2)

kus m on mistahes nullist erinev ratsionaalarv.

Tõestus. Võrdus (2) on õige, kui jagatise c korrutis jagajaga bm on võrdne jagatavaga am. Kontrollime seda.

Korrutamise ühenduvuse seaduse põhjal saame:

$$c(bm)=(cb)m. \quad (3)$$

Kuid võrdusest (1) järgneb jagamise definitsiooni põhjal

$$cb=a.$$

Asendades võrduses (3) arvu cb temaga võrdse arvuga a, saame:

$$c(bm)=am.$$

Kuid see ongi võrduses (2) jagatav. Tähendab, võrdus (2) on õige ning teoreem on tõestatud.

§ 26. Jagamise omadused.

1. Summa jagamine.

Et jagada summa mingi arvuga, võib jagada selle arvuga iga liidetava eraldi ja saadud tulemused liita.

Näide.

$$[12+(-28)+32]:4=16:4=4 \text{ ja}$$
$$12:4+(-28):4+32:4=3+(-7)+8=4.$$

2. Korrutise jagamine.

Et jagada korrutis mingi arvuga, võib jagada selle arvuga ühe tegureist, jättes teised tegurid muutmata.

Näide.

$$[12\cdot(-18)\cdot 30]:6=(-6480):6=-1080 \text{ ja}$$
$$(12:6)\cdot(-18)\cdot 30=2\cdot(-18)\cdot 30=-1080$$
$$12\cdot[(-18):6]\cdot 30=12\cdot(-3)\cdot 30=-1080$$
$$12\cdot(-18)(30:6)=12\cdot(-18)\cdot 5=-1080.$$

3. **Korrutisega jagamine.**

Et jagada mingi arv korrutisega, võib selle arvu jagada esimese teguriga, saadud tulemuse jagada teise teguriga jne.

N ä i d e.

$$120 : [2 \cdot (-3) \cdot 5] = 120 : (-30) = -4 \text{ ja}$$
$$120 : 2 : [(-3) \cdot 5] = 60 : [(-3) \cdot 5] = -20 : 5 = -4.$$

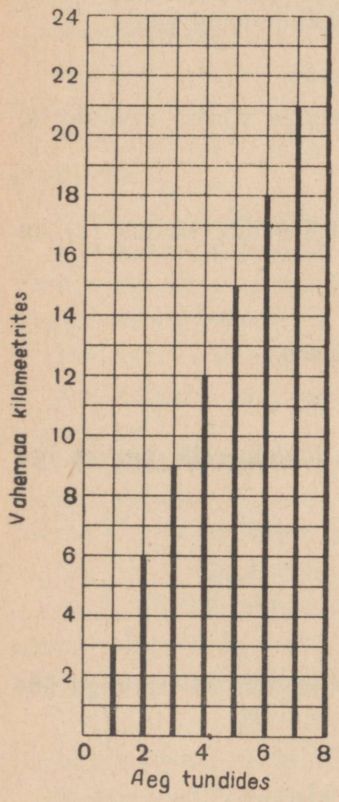
§ 27. Graafikud.

1. **Ühtlase liikumise graafik.** Lahendame ülesande. *Pioneerid liikusid matkal kiirusega 3 km tunnis. Kui pika vahemaa läbisid nad t tunniga?*

Tähistades otsitava tee pikkuse tähega S, saame:

$$S = 3t.$$

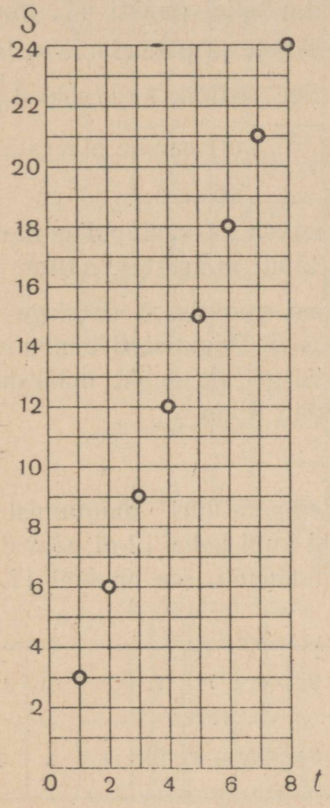
Andes suurusele t väärtusi 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$ jne., leiame S vastavad väärtused, see tähendab, leiame vahemaa, mille läbisid pioneerid 1 tunniga, 2 tunniga, 3 tunniga jne.



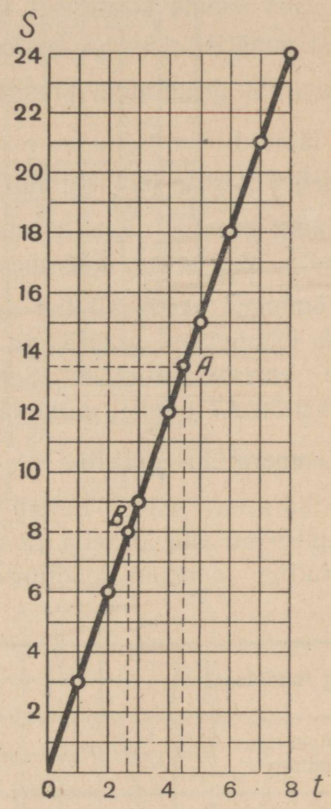
Joon. 12.

Sirglõikude abil võime piltlikult kujutada erinevail ajavahemikel läbitud teepikkusi. Joonisel 12 on ühest punktist tõmmatud kaks teineteisega ristuvat kiirt. Ühte neist nimetatakse h o r i s o n t a a l t e l j e k s, teist v e r t i k a a l t e l j e k s. Horisontaalteljele märgime liikumise aja tundides, kusjuures mõõtühikuks valime vabalt mingi lõigu (näiteks ühe ruudu pikkuse), mis vastab ühele tunnile. Vertikaalteljele märgime teepikkused kilomeetrites (1 km — ühe ruudu pikkus). Horisontaaltelje mistahes punktist sellele teljele tõmmatud ristlõigud kujutavad tee pikkust, mis läbiti vastavas ajavahemikus. Läbitud tee pikkuse saame määrata, kui horisontaalteljele tõmmatud ristlõigu ülemisest otspunktist tõmbame ristlõigu vertikaalteljele.

Kuna meid huvitab ainult iga ristlõigu pikkus, siis võime joonist lihtsustada, märkides joonisele ainult nende ristlõikude otspunktid (joon. 13).



Joon. 13.



Joon. 14.

Näeme, et kõik need punktid asetsevad ühel ja samal sirgel. Kui võtame väiksemad ajavahemikud, siis nendele vastavad uued punktid asetsevad samuti sellel sirgel varem saadud punktide vahel. Joonestame selle sirge (joon. 14).

Saadud sirge on ühtlase liikumise graafik, kui kiirus on 3 km tunnis.

Graafiku mistahes punktist horisontaalteljele joonestatud ristlõigu pikkus määrab vahemaa, mis läbiti ristlõigu aluspunktiga määratud ajavahemikus.

Selle graafiku järgi võime leida mistahes ajavahemikus läbitud tee pikkuse.

Kui me tahame näiteks määrata vahemaad, mis läbiti $4\frac{1}{2}$ tunniga, siis leiame kõigepealt horisontaalteljel punkti $4\frac{1}{2}$, tõmbame sellest punktist ristsirge horisontaalteljele ja pikendame seda kuni lõikumiseni graafikuga punktis A. See ristlõik kujutabki $4\frac{1}{2}$ tunniga läbitud teed. Selle tee pikkust ($13\frac{1}{2}$ km) saame määrata vertikaalteljel olevate jaotuste abil.

Sama graafiku järgi saame lahendada ka vastupidise ülesande: määrata, missuguses ajavahemikus läbiti mingi tee, näiteks 8 km.

Tõmbame vertikaalteljel asetsevast punktist 8 ristsirge sellele teljele lõikumiseni graafikuga punktis B. Punktist B tõmbame ristsirge horisontaalteljele. Selle ristsirge aluspunkt määrabki aja (ligikaudu 2,7 tundi), mille vältel läbiti 8 km.

Temperatuuri graafik.

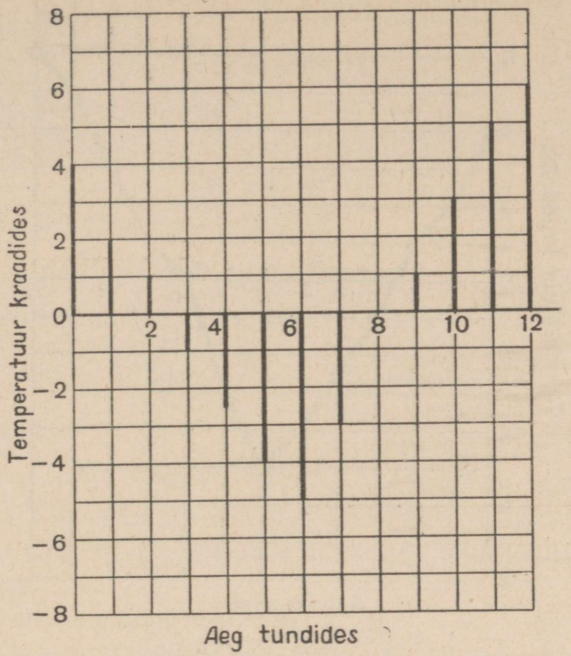
Alljärgnev tabel näitab õhutemperatuuri muutumist ühel novembrikuu päeval kella 12-st öösel kuni kella 12-ni päeval.

Nulliga märgime mõõtmise algmomendi, see on kell 12 öösel.

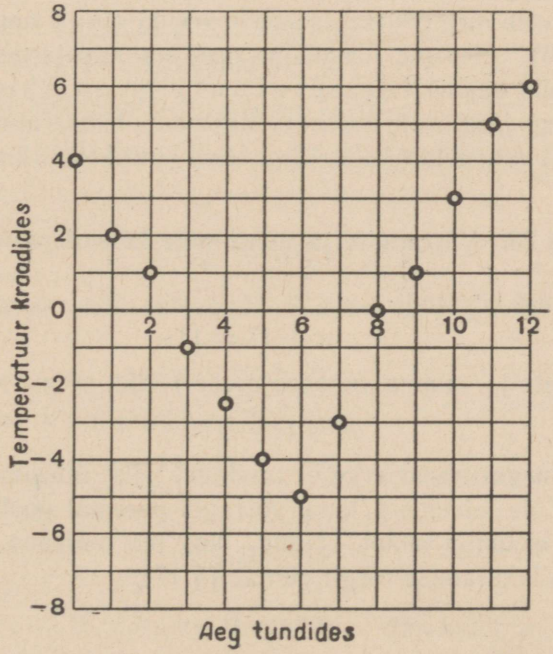
Aeg tundides	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatuur kraadides	4	2	1	−1	$-2\frac{1}{2}$	−4	−5	−3	0	1	3	5	6

Ka seda tabelit võib kujutada graafiliselt. Kanname vabalt valitud mõõtkavas horisontaalteljele aja tundides. Saadud jaotuspunktidest tõmmatud ristlõikude otspunktid määravadki (vastavas mõõtkavas) vastava temperatuuri (kraadide arvu).

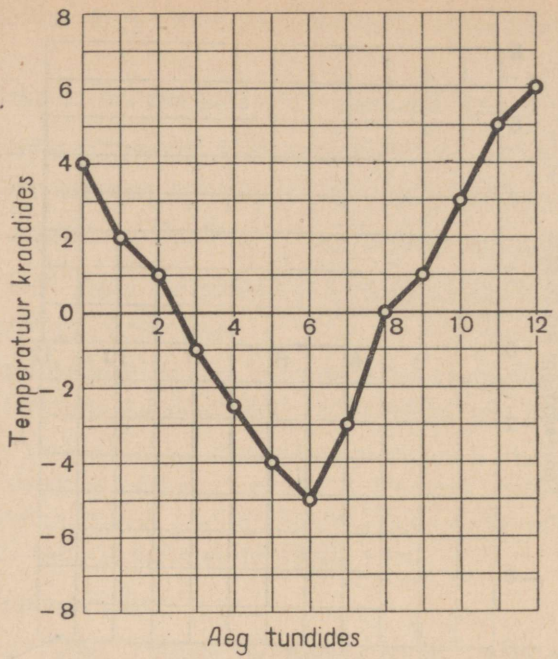
Kuid tabelis ei ole mitte ainult positiivsed arvud, vaid ka negatiivsed. Kuidas märkida neid graafikul? Kui näiteks temperatuuri $+4°$ me kujutame ristlõiguga, mis on tõmmatud horisontaalteljelt ülespoole, siis on loomulik kujutada temperatuuri $-4°$ ristlõiguga, mis on tõmmatud horisontaalteljelt allapoole. Tähendab, me peame vertikaaltelge pikendama allapoole, selleks et märkida nullist madalamaid temperatuure (joon. 15).



Joon. 15.



Joon. 16.



Joon. 17.

Ka siin võib sirglõikude asemel märkida ainult nende otspunktid (joon. 16). Kui me ühendame need punktid järgemööda sirglõikudega, siis saame temperatuuri graafiku (joon. 17). Selle graafiku järgi võib määrata ligikaudu temperatuuri mistahes ajamomendil vahemikus kella 12-st öösel kuni kella 12-ni päeval.

§ 28. Võrrandite ja ülesannete lahendamine.

Lahendame võrrandi:

$$x + 17 = 11.$$

Liidetavate ja summa vahelise seose põhjal võime kirjutada:

$$x = 11 - 17.$$

Kui me negatiivseid arve ei tundnud, siis ütlesime, et antud võrrandil ei ole lahendeid, kuna võrrandi paremal pool saime avaldise, millel ei olnud mõtet. Nüüd, kus me tunneme negatiivseid arve, saame lahutamise reegli põhjal (§ 17):

$$x = -6.$$

Kontrollime lahendi $x = -6$ õigsust, paigutades ta antud võrrandisse. Saame:

$$-6 + 17 = 11.$$

Tähendab, lahend on õige.

Veel üks näide:

$$5x + 14 = 6.$$

Leiame $5x$ kui tundmatu liidetava:

$$5x = 6 - 14; \quad 5x = -8.$$

Nüüd leiame x kui tundmatu teguri:

$$x = -8 : 5 = -\frac{8}{5} = -1{,}6; \quad x = -1{,}6.$$

Kontroll.

$$5 \cdot (-1{,}6) + 14 = -8 + 14 = 6.$$

Tähendab, $x = -1{,}6$ on võrrandi lahendiks.

Tekib küsimus: mida tähendab ülesande lahendamisel saadud negatiivne arv?

Vaatleme mõningaid ülesandeid.

Ülesanne 1. *Ma mõtlesin arvu. Kui liitsin sellega 27 ja tulemuse jagasin 6-ga, siis sain 3. Missuguse arvu ma mõtlesin?*

1) Tähistame mõeldud arvu tähega x.

2) Liidame sellega 27, saame $x + 27$.

3) Jagades tulemuse 6-ga, saame $\frac{x+27}{6}$.

4) Ülesande tingimuse järgi peab tulemus olema 3.

Tähendab:

$$\frac{x+27}{6} = 3.$$

5) Lahendame selle võrrandi. Leiame $x + 27$ kui tundmatu jagatava:

$$x + 27 = 18.$$

Nüüd leiame x kui tundmatu liidetava:

$$x = 18 - 27; \quad x = -9.$$

6) Kontrollime:

$$\frac{-9+27}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Siin on arv -9 ülesande vastuseks. Järelikult ma mõtlesin

arvu — 9, teostasin sellega nimetatud tehted ja sain arvu 3. Negatiivsed arvud on siin tundmatu lubatavateks väärtusteks.

Ülesanne 2. *Õpilane ostis 70-kopikase vihiku ja mõned 10-kopikased pliiatsid. Mitu pliiatsit ostis õpilane, kui kogu kauba eest maksis ta 50 kop.?*

1) Tähistame ostetud pliiatsite arvu tähega x.
2) Siis ostetud pliiatsid maksavad $10x$ kopikat.
3) Pliiatsid ja vihik maksavad kokku $(10x + 70)$ kopikat.
4) Ülesande tingimuse põhjal:

$$10x + 70 = 50.$$

5) Lahendame võrrandi:

$$10x = -20; \quad x = -2.$$

Kuid ei ole võimalik osta «miinus kaks pliiatsit». Pliiatsite arv ei saa olla negatiivne. Negatiivsed arvud ei saa olla siin tundmatu lubatavateks väärtusteks. Tähendab, saadud negatiivne arv näitab, et ülesandel ei ole lahendit. See on ka arusaadav, sest pliiatsite ja vihiku eest ei saa maksta vähem kui maksab üks vihik.

Ülesanne 3. *Auto väljub linnast, sõites kiirusega 60 km tunnis. Käesoleval momendil asetseb auto 240 km kaugusel linnast. Mitme tunni pärast on auto 120 km kaugusel linnast?*

Lahendades eelmise ülesande eeskujul, saame:

$$60x + 240 = 120; \quad 60x = -120; \quad x = -2.$$

Võib teha järelduse, et ka siin näitab negatiivne arv lahendi puudumist. Tõepoolest, kui auto asetseb antud momendil 240 km kaugusel linnast ja jätkab kaugenemist, siis ei saa kunagi tulla momenti, kus auto asetseb 120 km kaugusel linnast, kust ta välja sõitis.

Kuid saadud vastusele võib läheneda ka teisiti. Lepime kokku tähistada aega sellest momendist edasi, mil auto asetseb 240 km kaugusel linnast, positiivsete arvudega, ja tagasi — negatiivsete arvudega.

Selle tingimuse puhul on tundmatu lubatavateks väärtusteks nii positiivsed kui ka negatiivsed arvud ning vastus — 2 omab kindla mõtte — näitab «2 tundi tagasi». Tõepoolest, kahe tunni eest asetses auto linnast $240 - 60 \cdot 2 = 120$ km kaugusel.

Seega, ülesande lahendamisel saadud negatiivne arv kas määrab kindlaks ülesande vastuse või näitab, et ülesandel puudub lahend, olenevalt sellest, kas negatiivne arv on tundmatu lubatavaks väärtuseks või mitte.

§ 29. Ajaloolisi andmeid.

(Negatiivsete arvude ajaloost.)

Juba mitu tuhat aastat tagasi tingisid mõõtmisel esinevad raskused naturaalarvude valla laiendamist, sest selle momendini kasutas inimkond ainult naturaalarve. Võeti kasutusele uued arvud — murdarvud, millede abil sai võimalikuks mõõta pikkust, pindala, kaalu jne. mistahes täpsusega, mida aga lubasid mõõduriistad.

Teisiti oli aga asi negatiivsete arvudega. Oma praktilises tegevuses ei tekkinud inimestel vajadust negatiivsete arvude kasutusele võtmiseks. Negatiivsed arvud leidsid rakenduse alles XVII sajandil.

Matemaatikas endas tekkis arvuvalla laiendamise vajadus juba ammu ning matemaatika kui teaduse arenemisega muutus see vajadus ikka pakilisemaks.

Nii kasutas juba III sajandil kreeka matemaatik Diophantos mitmesuguste teisenduste teostamisel, näiteks teisenduse

$$(2x - 3)(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9$$

juures, negatiivsete arvude korrutamise reeglit, mille ta väljendas järgmiselt: «Äravõetav korrutatud juurdepandavaga annab tulemuseks äravõetava, äravõetav korrutatud äravõetavaga annab aga juurdepandava».

Sellest definitsioonist nähtub, et Diophantos ei tunnustanud veel negatiivsete arvude iseseisvat olemasolu; tema jaoks olid need (s. t. negatiivsed arvud) endised arvud, mingisugusest teisest arvust «äravõetavad». Seepärast, kui näiteks võrrandi lahendamisel saadi negatiivne lahend, siis Diophantos viskas selle ära kui «mittelubatava».

Kuid juba india teadlane Brahmagupta (VII sajandil) kasutas oma arvutustes negatiivseid arve ning andis nendele piltliku tõlgenduse. Ta märkis kasu positiivsete arvudega, võla aga negatiivsete arvudega.

Samasuguses piltlikus vormis andis ta ka reeglid teheteks negatiivsete arvudega, näiteks: «Kahe kasu summa on kasu. Kahe võla summa on võlg. Kasu ja võla summa on võrdne nende vahega, kui nad on aga võrdsed, siis summa on null» jne.

India matemaatik Bhaskara (XII sajandil) kasutas juba negatiivse arvu astet. Oma teoses «Süsteemide kroon» ta kirjutab:

«Nii positiivse kui ka negatiivse arvu ruut on positiivne arv, näiteks:

$$(+5)^2 = 25 \quad \text{ja} \quad (-5)^2 = 25».$$

Euroopa XVI sajandi matemaatikud, kuigi tegelesid mõnikord negatiivsete arvudega, nimetasid neid «üleliigseteks», «segasteks», «väiksemaks kui mitte midagi» jne.

Ainult hollandi matemaatik Girard (XVI—XVII sajandil) kasutas negatiivseid arve võrdselt positiivsetega. Nii näiteks lahendades võrrandit:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

annab ta kolm lahendit:

$$x_1 = +3, \quad x_2 = +1; \quad x_3 = -2.$$

Loodusteaduste ja tehnika tormiline areng XVII sajandil esitas kõrgendatud nõudmisi ka matemaatikale, nõudis tema edasiarendamist ja matemaatilise aparatuuri täiustamist. Negatiivsete arvude mittekasutamine aga oli paljude liigsete raskuste põhjuseks matemaatilistes arvutustes ja teisendustes. Alates XVII sajandist leiavad aga negatiivsed arvud kindla koha matemaatikas ja neid hakatakse rakendama praktikas. Piltliku tõlgenduse arvudele andis prantsuse filosoof ja matemaatik Descartes arvtelje punktide abil. Ta kasutas negatiivseid arve mitmesuguste protsesside ja algebraliste avaldiste graafilisel kujutamisel.

KOLMAS PEATÜKK.

TEHTED ALGEBRALISTE TÄISAVALDISTEGA.

§ 30. Üksliige ja hulkliige.

1. Ratsionaalsed algebralised avaldised. Eelmistes peatükkides vaatlesime viit tehet ratsionaalarvudega. Need olid: liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine.

Käesolevas peatükis vaatleme algebralisi avaldisi, mis on moodustatud nimetatud viie tehte abil. Kõiki niisuguseid avaldisi nimetatakse ratsionaalseteks avaldisteks.

Definitsioon. **Algebralisi avaldisi, mis on moodustatud numbritest ja tähtedest liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise ja astendamise tehete abil, nimetatakse ratsionaalseteks avaldisteks.**

Näiteid ratsionaalsetest avaldistest:

$$a+b;\quad a^2b;\quad \frac{x}{y};\quad \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};\quad 0{,}25;$$

$$a;\quad \frac{x+xy-y^2}{a-b};\quad a+\frac{2}{b};\quad \frac{4}{a-\frac{b}{a}}.$$

2. Algebralised täis- ja murdavaldised.
Vaatleme järgmisi ratsionaalseid avaldisi:

$$a^2-0{,}3ab+1;\quad \frac{5x}{4};\quad a+\frac{2}{b}.$$

Esimene neist avaldistest ei sisalda jagamist. Niisuguseid avaldisi nimetatakse täisavaldisteks.

Teises avaldises on vaja $5x$ jagada 4-ga. Selle jagaja võime aga viia kordajasse (vaata § 26, jagamise teine omadus) ja, jagades kordaja 4-ga, esitada avaldise kujul $\frac{5}{4}x$ ehk $1{,}25x$.

See avaldis ei sisalda enam jagamist. Sellepärast nimetatakse ka neid avaldisi, mis sisaldavad ainult numbritega väljendatud arvuga jagamist, täisavaldisteks (need on kirjutatud ainult murdavaldise kujul, nii nagu aritmeetikaski võib täisarvu, näiteks arvu 3, kirjutada murru kujul: $\frac{6}{2}$, $\frac{15}{5}$ jne.).

Avaldis

$$\frac{3x^2 - 4x + 5}{2}$$

on täisavaldis, kuna seda saab esitada kujul:

$$1{,}5x^2 - 2x + 2{,}5.$$

Selles avaldises jagamistehet ei esine.

Kolmandas avaldises on vaja jagada arvuga, mis on väljendatud tähega. (Öeldakse, et see avaldis sisaldab tähelist jagajat). Seda avaldist me ei saa esitada niisugusel kujul, et jagamistehet ei esineks. Niisuguseid avaldisi nimetatakse murdavaldisteks.

Toome veel näiteid murdavaldistest:

$$\frac{x}{y+1};\ \frac{a+c}{4a};\ \frac{m+1}{m-1};\ 4+\frac{3}{5b}.$$

Definitsioon 2. **Ratsionaalseid algebralisi avaldisi nimetatakse täisavaldisteks, kui nad ei sisalda jagamist tähtavaldisega.**

Definitsioon 3. **Ratsionaalseid algebralisi avaldisi nimetatakse murdavaldisteks, kui nad sisaldavad jagamist tähtavaldisega.**

Lühidalt võib öelda, et ratsionaalseid algebralisi avaldisi nimetatakse täis- või murdavaldisteks olenevalt sellest, kas nad sisaldavad tähelisi jagajaid või mitte.

3. Üksliige. Täisavaldistest on lihtsaimad need, mis sisaldavad ainult korrutamist või astendamist. Näiteks:

$$2a;\ 3a^2b;\ \frac{4}{5}x^2y^2;\ ab^2c^3;\ -0{,}2^3.$$

Niisuguseid avaldisi nimetatakse üksliikmeteks.

Definitsioon 4. **Algebralist avaldist, mis sisaldab ainult korrutamise ja astendamise tehteid, nimetatakse üksliikmeks.**

Järelikult on üksliige numbrilise teguri — kordaja — ja tähtede korrutis, kusjuures iga täht on võetud vastavas astmes.

Märkus. Kui astendamist lugeda korrutamise erijuhuks (näiteks astet a^3 võime kirjutada järgmiselt: aaa), siis võime öelda, et üksliige sisaldab ainult ühte tehet — korrutamist.

Ka ühest tähest (kordaja on 1) koosnevat avaldist nimetatakse üksliikmeks.

Üksliikmeks nimetatakse samuti mistahes numbritega väljendatud arvu.

Avaldis $\frac{3a^2b}{4}$ on ka üksliige, kuigi ta sisaldab jagamist, sest jagaja 4 võime viia kordajasse ja kirjutada avaldise selliselt:

$$\frac{3}{4}a^2b \quad \text{ehk} \quad 0{,}75a^2b.$$

4. Hulkliige. Liitmis- ja lahutamismärkidega seotud üksliikmed moodustavad uue algebralise avaldise, mida nimetatakse hulkliikmeks.

Näiteks:

$$3x^2 - 5xy + 6y^2 - 8.$$

Me juba teame, et lahutamist on alati võimalik asendada liitmisega ning iga algebralist avaldist, mis sisaldab liitmist ja lahutamist, saab esitada algebralise summana. Näiteks võime ülaltoodud avaldise kirjutada järgmiselt:

$$3x^2 + (-5xy) + 6y^2 + (-8).$$

Seetõttu võime hulkliiget defineerida järgmiselt.

Definitsioon. **Mitme üksliikme algebralist summat nimetatakse hulkliikmeks.**

Hulkliikmesse kuuluvaid üksliikmeid nimetatakse hulkliikme liikmeteks.

Hulkliiget, mis koosneb kahest liikmest, nimetatakse ka kaksliikmeks ehk binoomiks; hulkliiget, mis koosneb kolmest liikmest, nimetatakse kolmliikmeks ehk trinoomiks jne.

Kaksliikmed on näiteks avaldised:

$$x^2 + 1; \quad a + b; \quad 3a^2b - 4b^2c.$$

Kolmliikmed on näiteks avaldised:

$$x^2 + x + 1; \quad 3y^3 - 4ay^2 + 4.$$

Üksliiget võib vaadelda kui hulkliikme erijuhtu, nimelt kui hulkliiget, mis koosneb ühest liikmest.

Niisugused avaldised, nagu näiteks:

$$(x+y)b;\quad 2(a^2+3b^2)-6b^2;\quad m(m+n)-m^2$$

ei ole üksliikmed ega hulkliikmed. Kuid õppides edaspidi tundma tehteid üks- ja hulkliikmetega (liitmist, lahutamist, korrutamist), võime mistahes algebralise täisavaldise esitada üksliikme või hulkliikme kujul.

5. Korrastatud hulkliikmed.

Sisaldagu hulkliige ainult ühe tähe mitmesuguseid astmeid, näiteks:

$$8a-3a^3+5a^4-1. \qquad (1)$$

Rakendades liitmise vahetuvuse seadust, võime korrastada selle hulkliikme liikmed tähe a alanevate astmete järjekorras:

$$5a^4-3a^3+8a-1. \qquad (2)$$

Sama hulkliige, korrastatud tähe a tõusvate astmete järjekorras, omab kuju:

$$-1+8a-3a^3+5a^4. \qquad (3)$$

Edaspidi kõneleme ainult niisugustest hulkliikmetest, mis on korrastatud mingi tähe alanevate astmete järjekorras.

Kui hulkliikmes esineb kaks või enam tähte, siis võetakse üks neist peatäheks ja korrastatakse hulkliige selle peatähe astmete järgi. Näiteks, avaldis

$$3x^3-2ax^2+a^4x-5a^2 \qquad (4)$$

on hulkliige, mis on korrastatud tähe x alanevate astmete järjekorras.

Korrastatud hulkliikme esimest liiget, mis sisaldab peatähe kõrgeimat astet, nimetatakse kõrgeimaks liikmeks. Hulkliikme viimast liiget nimetatakse aga madalaimaks liikmeks. Kõrgeima liikme astet nimetatakse ühtlasi ka hulkliikme astmeks.

Hulkliige (2) on peatähe suhtes neljanda astme hulkliige ning hulkliikme (4) — kolmanda astme hulkliige. Kui madalaim liige üldse peatähte ei sisalda, siis nimetatakse teda vabaliikmeks. Hulkliikmetes (2) ja (4) on liikmed -1 ja $5a^2$ vabaliikmed.

Kui hulkliikmes (või ka üksliikmes) on peatäht kindlaks määratud, siis kõiki ülejäänud avaldisi igas liikmes nimetatakse selle peatähe kordajateks. Nii on hulkliikmes (4) x^2 kordajaks avaldis $-2a$, x kordajaks aga avaldis a^4. Tähendab, me laiendame siin

paragrahvis 4 antud kordaja mõistet; kordajaks võib olla mitte ainult numbritega kirjutatud arv, vaid ka tähtavaldis.

Nii on üksliikmes $4ab$ avaldis $4a$ arvu b kordajaks, kuid $4b$ on a kordajaks (sel juhul on õigem kirjutada $4ba$).

§ 31. Samasused ja samasusteisendused.

Olgu antud kaks algebralist avaldist:

$$1)\ 2(x+5)-4 \quad \text{ja} \quad 2)\ 2x+6.$$

Koostame tabeli mõlema avaldise arvuliste väärtuste kohta tähe x mitmesuguste arvuliste väärtuste korral.

Saame:

x	-7	-5	-3	-2	-1	0	1	$1{,}5$	5	7	20	50
$2(x+5)-4$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106
$2x+6$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106

Näeme, et nende väärtuste korral, mis me andsime suurusele x, on mõlema avaldise arvulised väärtused võrdsed. Sama tulemuse saame ka tähe x mistahes teiste väärtuste korral.

Et selles veenduda, teisendame esimest avaldist. Jaotuvuse seaduse põhjal võime kirjutada:

$$2(x+5)-4 = 2x+2\cdot 5-4.$$

Sooritades arvudega näidatud tehted, saame:

$$2x+10-4 = 2x+6.$$

Niisiis, esimene avaldis osutus pärast lihtsustamist samasuguseks nagu teinegi.

Nüüd on ka selge, et x mistahes väärtuste korral on mõlema avaldise arvulised väärtused võrdsed.

Avaldisi, mille arvulised väärtused on neis esinevate tähtede mistahes arvuliste väärtuste korral võrdsed, nimetatakse **samaselt võrdseteks** ehk lihtsalt **samasteks**.

Tähendab, avaldised $2(x+5)-4$ ja $2x+6$ on samaselt võrdsed.

Teeme ühe vajaliku märkuse. Võtame avaldised:

$$1)\ \frac{x^2-9}{x-3}\ \text{ja}\ 2)\ x+3.$$

Kui koostame tabeli nende avaldiste arvuliste väärtuste kohta, siis näeme, et mõlema avaldise arvulised väärtused x mistahes väärtuste korral on võrdsed, välja arvatud juhus, kui $x=3$. Kui $x=3$, siis teise avaldise väärtus on 6, esimesel avaldisel ei ole aga mõtet, sest nimetaja muutub nulliks. (Nulliga jagada ei saa.) Kas saab ütelda, et need avaldised on samaselt võrdsed?

Me leppisime varem kokku, et iga avaldist vaatleme ainult tähtede lubatavate väärtuste korral, s. t. nende väärtuste korral, mille puhul avaldis säilitab mõtte. Järelikult ka siin, võrreldes kahte avaldist, võtame arvesse ainult need tähtede väärtused, mis on lubatavad mõlemale avaldisele. Seepärast jätame väärtuse $x=3$ kõrvale. Kuna aga x kõigi teiste väärtuste korral on nende avaldiste arvulised väärtused võrdsed, siis võime neid avaldisi nimetada samasteks.

Öeldu põhjal võime anda samaste avaldiste jaoks järgmise definitsiooni.

Definitsioon 1. **Avaldisi nimetatakse samasteks, kui nende arvulised väärtused avaldises esinevate tähtede mistahes lubatavate väärtuste korral on võrdsed.**

Ühendades kaks samast avaldist võrdusmärgiga, saame samasuse. Tähendab:

Definitsioon 2. **Samasuseks nimetatakse võrdust, mis kehtib temas esinevate tähtede mistahes lubatavate väärtuste korral.**

Samasusi oleme kohanud ka varem. Näiteks on kõik need võrdused, mis väljendavad liitmise ja korrutamise põhiseadusi, samasused.

Liitmise vahetuvuse seadus:

$$a+b=b+a.$$

Korrutamise ühenduvuse seadus:

$$a(bc)=(ab)c.$$

Need võrdused kehtivad tähtede mistahes väärtuste korral, järelikult on nad samasused.

Samasusteks nimetatakse ka kõiki aritmeetilisi võrdusi, mis on õiged, näiteks:

$$2+5=7;\quad 3\cdot 5\cdot 6=90;\quad (3+6)\cdot 7=63.$$

Algebras on tihti vaja mõnda avaldist asendada teise, temaga samase avaldisega. Olgu näiteks vaja leida avaldise

$$37a+36a+27a$$

arvuline väärtus, kui $a=6{,}53$.

Arvutamine muutub tunduvalt kergemaks, kui antud avaldise asendame temaga samase avaldisega. Jaotuvuse seaduse põhjal võime kirjutada:

$$37a+36a+27a=(37+36+27)a.$$

Sulgudes olev summa on 100. Saame samasuse:

$$37a+36a+27a=100a.$$

Asendades paremal pool tähe a arvuga 6,53, võime kohe peast leida antud avaldise arvulise väärtuse, mis on 653.

Definitsioon 3. **Algebralise avaldise asendamist temaga samase avaldisega nimetatakse selle avaldise samasusteisenduseks.**

Kuna iga algebraline avaldis on võrdne mingi arvuga, kui me selles avaldises esinevad tähed asendame nende lubatavate väärtustega, siis sellest järeldub, et algebraliste avaldiste kohta kehtivad samad seadused ja omadused, mis kehtivad aritmeetiliste tehete kohta ja mida me vaatlesime eelmises peatükis. Seepärast toetume edaspidi algebraliste avaldiste teisendamisel tihti nendele avaldistele ja omadustele.

Asjaolu, et kahe samase algebralise avaldise arvulised väärtused on võrdsed, võimaldab meil kontrollida samasusteisenduse õigsust.

Olgu meil antud algebraline avaldis teisendatud temaga samaseks avaldiseks.

Anname nüüd mõlemas avaldises esinevatele tähtedele võrdsed vabalt valitud arvulised väärtused ja leiame kummagi avaldise arvulised väärtused tähtede nende väärtuste korral.

Kui avaldiste arvulised väärtused ei osutu võrdseteks, siis on teisendamisel tehtud viga. Sel juhul tuleb teisendada uuesti.

Kui aga avaldiste arvulised väärtused osutuvad võrdseteks, siis on väga tõenäoline, et avaldis on teisendatud õigesti.

Tuleb aga märkida, et viimasel juhul ei ole kontrollimise tulemus alati täiesti usaldatav, sest juhuslikult võib valida tähtede

väärtusteks niisugused arvud, et nende väärtuste korral ka kahe mittesamase avaldise arvulised väärtused osutuvad võrdseteks. Näiteks, avaldiste $a^2 + 1$ ja $3a - 1$ arvuliseks väärtuseks on 2, kui $a = 1$, ja 5, kui $a = 2$. Need avaldised ei ole aga samased. Selles võime veenduda, kui asendame tähe a mistahes teise arvuga (näiteks, $a = 0$).

§ 32. Sarnaste liikmete koondamine.

Ülesanne 1. *Vihik maksab a kopikat. Kalju ostis 3 vihikut, Vilma 7 vihikut ning Vello 5 vihikut.* 1) *Kui palju tuli igaühel maksta vihikute eest?* 2) *Kui palju maksid kõik vihikud kokku?*

Esimese küsimuse vastuseks on avaldised:

$$3a;\quad 7a;\quad 5a \text{ kopikat.} \tag{1}$$

Teise küsimuse vastuseks on nende avaldiste summa:

$$(3a + 7a + 5a) \text{ kopikat.} \tag{2}$$

Viimast avaldist võime lihtsustada. Jaotuvuse seaduse põhjal võime kirjutada:

$$3a + 7a + 5a = (3 + 7 + 5)a.$$

Seega me asendasime avaldise (2) temaga samase avaldisega $15a$.

Tähe a mistahes väärtuste korral on avaldise $15a$ arvulist väärtust kergem arvutada kui avaldise (2) arvulist väärtust.

Definitsioon 1. **Hulkliikme liikmeid, mis erinevad üksteisest ainult kordajailt või ei erine üldse, nimetatakse sarnasteks.**

Võrduses $3a + 7a + 5a = 15a$ on sarnaste liikmete algebraline summa asendatud ühe liikmega, mis on selle summaga samane.

Definitsioon 2. **Hulkliikme sarnaste liikmete ühendamist üheks liikmeks, mis on samane hulkliikmega, nimetatakse sarnaste liikmete koondamiseks.**

Et koondada sarnaseid liikmeid, tuleb liita nende kordajad ja saadud summa juurde kirjutada seesama tähtavaldis.

Näide.

$$3a^2b - a^2b + 7{,}4a^2b = (3 - 1 + 7{,}4)a^2b = 9{,}4a^2b.$$

(Kontrollida, kui $a = 2$ ja $b = 5$.)

Kõneldes edaspidi hulkliikmetest, me eeldame, et sarnased liikmed (kui neid esines) on juba koondatud.

§ 33. Üksliikmete ja hulkliikmete liitmine.

1. Üksliikmete liitmine. Olgu meil vaja liita üksliikmed:

$$13x^2;\quad -8x;\quad 4x^3;\quad -5;\quad -3x.$$

Saame:

$$13x^2+(-8x)+(+4x^3)+(-5)+(-3x).$$

Saadud avaldis on algebraline summa. Eespool esitatud tingimuse (vt. § 19) põhjal võime liitmismärgi jätta igal pool ära ja kirjutada lühemalt:

$$13x^2-8x+4x^3-5-3x.$$

Selles avaldises on kaks sarnast liiget. Koondame need ning samal ajal korrastame hulkliikme tähe x alanevate astmete järjekorras.

Saame:

$$4x^3+13x^2-11x-5.$$

(Kontrollida, asendades antud hulkliikmes ja saadud summas x väärtusega: 1) $x=2$; 2) $x=-2$.)

Eeltoodu põhjal võime sõnastada järgmise reegli.

Reegel. **Et liita üksliikmeid, tuleb kirjutada need ühes märkidega üksteise järele ja koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.**

2. Hulkliikmete liitmine. Lahendame järgmise ülesande.

Ühes korvis oli x õuna, teises y õuna rohkem kui esimeses, kolmandas aga 27 õuna vähem kui teises. Mitu õuna oli kolmes korvis kokku?

Lahendus.

1) Esimeses korvis oli x õuna.

2) Teises korvis oli $(x+y)$ õuna.

3) Kolmandas korvis oli $(x+y-27)$ õuna.

4) Kolmes korvis oli kokku $x+(x+y)+(x+y-27)$ õuna.

Saadud vastus kujutab endast üksliikme ja kahe hulkliikme summat.

Lihtsustame saadud vastust.

Me teame, et avaldist $x+y-27$ võib vaadelda kui algebralist summat. Summa liitmise reegli põhjal võime seepärast kirjutada:

$$x+(x+y)+(x+y-27)=x+x+y+x+y-27.$$

Pärast sarnaste liikmete koondamist saame:

$$3x+2y-27.$$

(Leida, mitu õuna oli kolmes korvis kokku, kui:

1) $x = 40$; $y = 30$; 2) $x = 35$; $y = 42$.)

Tähendab, me võime anda järgmise reegli hulkliikmete liitmiseks.

Reegel. **Et liita hulkliikmeid, tuleb nende hulkliikmete kõik liikmed ühes märkidega kirjutada üksteise järele ja koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.**

3. Sulgude avamine. Eelmiste ülesannete lahendamisel tuli meil avada sulud, mille ees oli plussmärk. Võime seepärast teha järelduse:

Kui sulgude ees on plussmärk, siis sulgude avamisel tuleb kirjutada kõik sulgude sees olevad liikmed ühes nende märkidega üksteise järele ilma sulgudeta.

Märkus: Kui avaldis algab sulgudega, mille ees ei ole mingit märki, siis mõeldakse sulgude ees plussmärki, näiteks:

$$(a^2 - 3a + 2) + (3a - 7) = a^2 - 3a + 2 + 3a - 7 = a^2 - 5.$$

4. Sulgudesse asetamine.

Mõnikord on vaja hulkliiget või tema osa asetada sulgudesse. Võtame järgmise näite. Olgu vaja arvutada avaldis:

$$136 + 258 - 238.$$

Ilmselt on siin algul kasulikum 258-st lahutada 238 ning siis saadud vahe 20 liita 136-ga. Et seda näidata, asetame teise ja kolmanda liikme sulgudesse:

$$136 + (258 - 238).$$

Sulud näitavad (§ 6), et kõigepealt on vaja lahutada.

Kui sulgudesse on vaja asetada mingi hulkliige või selle osa ning sulgude ette panna plussmärk, siis võime seda teha järgmise reegli järgi.

Reegel. **Et asetada hulkliige sulgudesse, mille ees on plussmärk, tuleb kirjutada sulgudesse kõik selle hulkliikme liikmed ühes nende märkidega.**

$$a - b + c = +(a - b + c).$$

Selle võrduse õigsust saab kergesti kontrollida, kui avada sulud punktis 3 esitatud reegli põhjal.

5. Vastandhulkliikmed. Kasutades liitmise reeglit, tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem. **Kui kahes hulkliikmes on ühed ja samad liikmed, kuid vastupidiste märkidega, siis nende hulkliikmete arvulised väärtused on vastandmärgilised** (muidugi tähtede samade väärtuste korral).

Olgu antud hulkliige:

$$a - b + c. \qquad (1)$$

Muutes märgid iga liikme ees, saame hulkliikme:

$$-a + b - c.$$

Väitsime, et andes tähtedele mistahes arvulisi väärtusi (mõlemale hulkliikmele ühesuguseid), saame avaldiste arvuliseks väärtuseks vastandarvud.

Tõestame seda. Liites need hulkliikmed, saame:

$$a - b + c - a + b - c.$$

Rakendades vahetuvuse ja ühenduvuse seadusi, võime selle summa kirjutada järgmiselt:

$$(a - a) + (b - b) + (c - c).$$

Nagu näeme, on iga sulgavaldis võrdne nulliga, järelikult on ka kogu summa null.

Niisiis, kahe antud hulkliikme summa on null. Kuid see tähendab (§ 14), et nende arvulised väärtused on vastandarvud.

Märkus. Tõestatud teoreem kehtib ka üksliikme kui ühest liikmest koosneva hulkliikme kohta.

Lühiduse mõttes nimetamegi sarnastest, kuid vastupidiste märkidega liikmetest koosnevaid hulkliikmeid vastandhulkliikmeteks.

6. Korrastatud hulkliikmete liitmine.

Kui hulkliikmed on korrastatud ühe ja sama tähe alanevate või tõusvate astmete järgi, siis on neid lihtsam liita järgmiselt: hulkliikmed kirjutatakse üksteise alla nii, et sarnased liikmed on kohakuti; pärast seda koondatakse sarnased liikmed ja kirjutatakse välja lõpptulemus.

Näide 1.

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 7x^3 + x^2 - 11x - 5 \\ +\ 2x^4 - 4x^3 \qquad + 14x + 2 \\ \hline 5x^4 - 11x^3 + x^2 + 3x - 3 \end{array}$$

Nii liidetakse ka niisuguseid korrastatud hulkliikmeid, milledes esineb rohkem kui üks täht.

Näide 2.

$$\begin{array}{rrrr} & 3a^3 & -5a^2b & +7ab^2 & +b^3 \\ + & -5a^3 & & -6ab^2 & +4b^3 \\ \hline & -2a^3 & -5a^2b & +ab^2 & +5b^3 \end{array}$$

§ 34. Üksliikmete ja hulkliikmete lahutamine.

1. Üksliikmete lahutamine. Olgu meil vaja üksliikmest $5a^2b$ lahutada üksliige $3ab^2$. Kirjutame:

$$5a^2b - (+3ab^2).$$

Paragrahvist 33 järeldub, et üksliige $3ab^2$ on üksliikme $-3ab^2$ vastandarv, see tähendab, et nende arvulised väärtused a ja b mistahes väärtuste korral on vastandarvud.

Kuid me teame, et mistahes arvu lahutamise võib asendada selle arvu vastandarvu liitmisega.

Tähendab:

$$5a^2b - (+3ab^2) = 5a^2b + (-3ab^2).$$

Üksliikmete liitmise reegli põhjal saame:

$$5a^2b + (-3ab^2) = 5a^2b - 3ab^2.$$

Järelikult:

$$5a^2b - (+3ab^2) = 5a^2b - 3ab^2.$$

Kontrollime, liites vahe lahutatavaga.

$$5a^2b - 3ab^2 + (+3ab^2) = 5a^2b.$$

Saime vähendatava. Tähendab, oleme õigesti lahutanud. Siit tuletame järgmise reegli.

Reegel. **Et lahutada üksliige, on vaja võtta see vastandmärgiga, kirjutada vähendatava juurde ning koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.**

2. Hulkliikmete lahutamine. Olgu meil vaja hulkliikmest $5x^2 - 3xy + y^2$ lahutada hulkliige $6x^2 - 8xy + y^3$. Kirjutame selle järgmiselt:

$$(5x^2 - 3xy + y^2) - (6x^2 - 8xy + y^3).$$

Lahutatav hulkliige on tähtede mistahes väärtuste korral võrdne mingi arvuga. Mingi arvu lahutamise võib aga asendada selle arvu vastandarvu liitmisega. Hulkliikmele $6x^2 - 8xy + y^2$ annab vastandarvu hulkliige $-6x^2 + 8xy - y^3$ (§ 33).

Tähendab: $(5x^2 - 3xy + y^2) - (6x^2 - 8xy + y^3) =$
$= (5x^2 - 3xy + y^2) + (-6x^2 + 8xy - y^3) =$
$= 5x^2 - 3xy + y^2 - 6x^2 + 8xy - y^3 =$
$= -x^2 + 5xy + y^2 - y^3.$

Kontrollime liitmise teel:

$(-x^2 + 5xy + y^2 - y^3) + (6x^2 - 8xy + y^3) =$
$= -x^2 + 5xy + y^2 - y^3 + 6x^2 - 8xy + y^3) =$
$= 5x^2 - 3xy + y^2.$

Saime vähendatava. Siit saame reegli.

Reegel. **Et lahutada hulkliige, on vaja vähendatava juurde kirjutada lahutatava hulkliikme kõik liikmed vastandmärgiga ja koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.**

3. Sulgude avamine. Hulkliikmete lahutamise reeglist võime teha järgmise järelduse.

Et avada sulud, mille ees on miinusmärk, tuleb sulgude ees asetsevate liikmete märgid muuta vastupidisteks.

$$-(a - b + c) = -a + b - c.$$

4. Sulgudesse asetamine. Mõnikord on vaja hulkliige või tema osa asetada sulgudesse ning selle ette panna miinusmärk. Seda teeme järgmise reegli põhjal.

Reegel. **Et asetada hulkliige sulgudesse, mille ees on miinusmärk, tuleb kirjutada selle hulkliikme kõik liikmed sulgudesse vastupidiste märkidega.**

$$a - b + c = -(-a + b - c).$$

Selle võrduse õigsuses veendume kergesti, kui avame paremal pool sulud punktis 3 esitatud reegli põhjal.

Näide. Arvutada avaldis:

$$368 - 179 + 149.$$

Asetame teise ja kolmanda liikme sulgudesse, kusjuures sulgude ette paneme miinusmärgi. Vastavalt reeglile saame:

$$368 - (179 - 149).$$

Teostades algul sulgudes oleva tehte, on kerge kogu arvutust sooritada peast.

5. Korrastatud hulkliikmete lahutamine. Korrastatud hulkliikmeid lahutatakse järgmiselt: lahutataval hulkliikmel muudetakse märk iga liikme ees vastupidiseks ning kirjutatakse lahutatav

vähendatatava alla nii nagu liitmise puhulgi ja koondatakse sarnased liikmed.

Näide.

$$\begin{array}{r} (8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18) - (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 7) \\ + \quad 8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18 \\ \quad -5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 4x + 7 \\ \hline 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 11 \end{array}$$

§ 35. Üksliikmete korrutamine.

1. Võrdsete astendatavatega astmete korrutamine.

Korrutame: $2^3 \cdot 2^2$.

$$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Järelikult:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5.$$

Tõepoolest:

$$2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5.$$

Analoogiliselt:

$$3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

$$a^2 \cdot a^4 = aaaaaa = a^6.$$

Näeme, et iga korrutise astendaja on võrdne tegurite astendajate summaga (meenutame, et $a = a^1$). See on ka arusaadav, sest astendatavat tuleb võtta tegurina nii mitu korda, kui suur on astendaja esimeses teguris, ja veel nii mitu korda, kui suur on astendaja teises teguris.

Üldkujul võib selle reegli sõnastada järgmiselt.

Reegel. **Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse, astendatav jääb aga samaks.**

Tähistades tähtedega m ja n mistahes positiivseid täisarve (naturaalarve), võime selle reegli anda järgmise võrduse kujul:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Sama reegel kehtib ka kahe, kolme ja enama teguri korrutamisel. Näiteks:

$$2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+2+3} = 2^7.$$

Üldkujul:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

2. Üksliikmete korrutamine. Olgu vaja korrutada üksliikmed

$$3a^2b^3c \quad \text{ja} \quad 5a^3bc^2d.$$

Korrutamise reegli põhjal saame:

$$3a^2b^3c \cdot 5a^3bc^2d.$$

Kasutades vahetuvuse ja ühenduvuse seadusi, võime selle korrutise kirjutada järgmiselt:

$$(3 \cdot 5)\,(a^2a^3)\,(b^3b)\,(cc^2)\,d.$$

Korrutanud sulgudes olevad tegurid, saame lõplikult: $15a^5b^4c^3d$.

Seega:

$$3a^2b^3c \cdot 5a^3bc^2d = 15a^5b^4c^3d.$$

(Kontrollida, kui $a = 1$; $b = 1$; $c = 2$; $d = 5$.)

Kui tegureid on rohkem kui kaks, siis leiame korrutise samal viisil, näiteks:

$$2x^2y \cdot 0{,}5x^3y \cdot 4y^2z^2 = (2 \cdot 0{,}5 \cdot 4)\,(x^2x^3)\,(yyy^2)\,z^2 = 4x^5y^4z^2.$$

Siit saame reegli.

Reegel. **Et üksliige korrutada üksliikmega, tuleb korrutada nende kordajad, liita ühesuguste tähtede astendajad ja kirjutada need tähed koos saadud astendajatega korrutisesse. Kui mõned tähed esinevad ainult ühes teguris, siis kirjutatakse need korrutisesse oma esialgse astendajaga.**

Selle reegli põhjal võime leida kohe korrutise, ilma et rühmitaksime tegureid nii, nagu seda tegime eelmistes näidetes.

Näide.

$$7x^2y^2z^3 \cdot 2x^3y^2 = 14x^5y^4z^3.$$

§ 36. Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Olgu meil vaja korrutada hulkliige $3a^3 - 5a^2b + 6a^2c$ üksliikmega $4ab^2$.

Hulkliige kujutab endast algebralist summat. Seepärast võime jaotuvuse seaduse põhjal kirjutada:

$$(3a^3 - 5a^2b + 6a^2c) \cdot 4ab^2 = 3a^3 \cdot 4ab^2 - 5a^2b \cdot 4ab^2 + 6a^2c \cdot 4ab^2.$$

Korrutades seejärel üksliikmete korrutamise reegli põhjal, saame:

$$(3a^3 - 5a^2b + 6a^2c) \cdot 4ab^2 = 12a^4b^2 - 20a^3b^3 + 24a^3b^2c.$$

Siit saame järgmise reegli.

Reegel. **Et hulkliige korrutada üksliikmega, tuleb selle hulkliikme iga liige korrutada üksliikmega ja saadud korrutised liita.**

§ 37. Hulkliikmete korrutamine.

Olgu meil vaja korrutada hulkliikmed:

$$a+b-c \quad \text{ja} \quad m-n.$$

Nende korrutis on:

$$(a+b-c)(m-n).$$

Meil tuleb algebraline summa $a+b-c$ korrutada arvuga $m-n$.

Summa korrutamise reegli põhjal saame:

$$a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Kasutades jaotuvuse seadust, saame:

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Lõpuks, avanud sulud, saame:

$$am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Seega:

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Näeme, et viimase avaldise saime pärast seda, kui olime korrutanud hulkliikme $a+b-c$ iga liikme hulkliikme $m-n$ iga liikmega.

Siit saame järgmise reegli.

Reegel. **Et hulkliige korrutada hulkliikmega, tuleb esimese hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita.**

Korrutise liikmete arv. Oletame, et esimeses teguris on 5 liiget, teises 3. Korrutades esimese teguri kõik liikmed teise teguri esimese liikmega, saame 5 liiget; esimese teguri liikmete korrutamisel teise teguri teise ja kolmanda liikmega saame veel 2 korda 5 liiget. Kokku saame 15 liiget.

Korrutise liikmete arv (enne sarnaste liikmete koondamist) on võrdne tegurite liikmete arvude korrutisega.

Hulkliikmete korrutamise reeglit võib rakendada aritmeetiliste arvutuste lihtsustamiseks.

Olgu näiteks vaja korrutada kaks niisugust arvu, mille kümneliste arvud on võrdsed, kuid üheliste summa on 10, näiteks: 43 ja 47; 62 ja 68; 103 ja 107; 51 ja 59.

Tähistame kümneliste arvu tähega a, ühe arvu ühelised tähega b, teise arvu ühelised tähega c. Saame arvud $10a+b$ ja $10a+c$.

Korrutame need arvud hulkliikmete korrutamise reegli järgi:

$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = \\ = 100a^2 + 10a(b + c) + bc.$$

Kuna $b + c = 10$, siis saame:

$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 100a + bc = \\ = 100a(a + 1) + bc.$$

See valem võimaldab kiiresti peast korrutada kahte arvu, mille kümneliste arvud on võrdsed ja üheliste summa on 10.

Valem näitab, et korrutise leidmiseks tuleb kümneliste arv korrutada ühe võrra suurema arvuga ja tulemusele kirjutada juurde üheliste korrutis. Näiteks:

$$43 \cdot 47 = 4 \cdot 5 \cdot 100 + 3 \cdot 7 = 2021;$$
$$62 \cdot 68 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 2 \cdot 8 = 4216;$$
$$103 \cdot 107 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 3 \cdot 7 = 11021;$$
$$51 \cdot 59 = 5 \cdot 6 \cdot 100 + 1 \cdot 9 = 3009.$$

§ 38. Korrastatud hulkliikmete korrutamine.

Selgitame näite varal, kuidas korrutatakse korrastatud hulkliikmeid.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2ax + 5a^2 \\ \times \quad -x^2 + 3ax + 4a^2 \\ \hline -3x^4 + 2ax^3 - 5a^2x^2 \\ \qquad 9ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x \\ \qquad\qquad 12a^2x^2 - 8a^3x + 20a^4 \\ \hline -3x^4 + 11ax^3 + a^2x^2 + 7a^3x + 20a^4 \end{array}$$

Näeme, et hulkliikmed on paigutatud üksteise alla (mõlemad hulkliikmed on korrastatud tähe x alanevate astmete järjekorras).

Esimese teguri kõik liikmed korrutatakse teise teguri esimese liikmega ja tulemus kirjutatakse esimesse ritta joone alla. Seejärel korrutatakse esimese teguri kõik liikmed teise teguri teise liikmega ning tulemus kirjutatakse teise ritta nii, et sarnased liikmed oleksid üksteise all. Siis korrutatakse esimese teguri kõik liikmed teise teguri kolmanda liikmega jne.

Tulemuseks saadakse nii mitu rida, kui palju liikmeid on teises teguris, kusjuures sarnased liikmed asetsevad ühes tulbas. See-

järel koondatakse sarnased liikmed ning lõplik tulemus kirjutatakse joone alla. Korrutiseks saadakse jällegi korrastatud hulkliige.

(Kontrollida asendamise teel, kui: 1) $x = 1$, $a = 1$; 2) $x = 1$, $a = -1$.)

Toome veel ühe näite.

$$
\begin{array}{r}
2x^3 - 5x - 4 \\
\times\ 3x^2 - 7x + 8 \\
\hline
6x^5 \qquad - 15x^3 - 12x^2 \\
\quad - 14x^4 \qquad + 35x^2 + 28x \\
\qquad\quad 16x^3 \qquad - 40x - 32 \\
\hline
6x^5 - 14x^4 + x^3 + 23x^2 - 12x - 32.
\end{array}
$$

Korrutades $2x^3$ ja $3x^2$, saame $6x^5$, mille kirjutame esimesse ritta esimesele kohale. Korrutades $-5x$ ja $3x^2$, saame $-15x^3$. Selle tulemuse kirjutamisel jätame $6x^5$ järele paremale poole vaba ruumi, arvestades seda, et järgnevates korrutistes võib esineda liige, mis sisaldab x^4 (see ka tõepoolest esineb).

Järgnevad korrutised kirjutame jällegi nii, et sarnased liikmed asetseksid üksteise all.

(Kontrollida, kui $x = 1$ ja $x = -1$.)

Vaadeldes esitatud näiteid korrastatud hulkliikmete korrutamise kohta, võime teha järgmised järeldused.

1. Kõrgeim liige korrutises on võrdne hulkliikmete kõrgeimate liikmete korrutisega.

Tõepoolest, korrutades hulkliikmete liikmed, milledes peatähe astendajad on suurimad, saame ka korrutises liikme, kus selle tähe astendaja on suurim.

Korrutises teisi liikmeid sama astendajaga ei ole võimalik saada, sest kõigis ülejäänud osakorrutistes on vähemalt üks korrutatav liige väiksema astendajaga kui vastava hulkliikme kõrgeim liige.

Arutledes samuti nagu eelmisel korral, leiame, et:

2. Madalaim liige korrutises on võrdne hulkliikmete madalaimate liikmete korrutisega.

Seega ei saa korrutises olla ei kõrgeima ega ka madalaima liikmega sarnaseid liikmeid. Järelikult, kui me koondame saadud korrutises sarnased liikmed, siis kõrgeim ja madalaim liige jäävad tingimata püsima, ülejäänud liikmed (kas kõik või mõned) võivad aga koondamisel hävida. Siit järeldub:

3. **Hulkliikmete korrutises on vähemalt kaks liiget.**

Näide.

$$\begin{array}{r} a^3 - 2a^2 + 4a - 8 \\ \times \qquad\qquad a + 2 \\ \hline a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a \\ \qquad 2a^3 - 4a^2 + 8a - 16 \\ \hline a^4 \qquad\qquad\qquad - 16 \end{array}$$

Pärast sarnaste liikmete koondamist saime korrutiseks $a^4 - 16$. Tähendab, jäid järele ainult kõrgeim ja madalaim liige. Teised liikmed koondusid.

(Kontrollida, kui $a = 3$.)

§ 39. Üksliikmete astendamine.

1. **Astmete astendamine.** Võtame a^3 ruutu ja kuupi, saame:

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6;$$
$$(a^3)^3 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^9.$$

Samuti:

$$(x^2)^4 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^8.$$

Üldiselt:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ korda}} = a^{mn}.$$

Tähendab: $(a^m)^n = a^{mn}$.

(Kontrollida:

1) kui $a = 2$, $m = 2$, $n = 3$; 2) kui $a = -3$, $m = 2$, $n = 2$.)

Reegel. **Astme astendamisel astendajad korrutatakse. Astendatav jääb samaks.**

2. **Üksliikmete astendamine.** Võtame üksliikme $4a^2bc^3$ ruutu ja kuupi. Üksliikmete korrutamise reegli põhjal saame:

$$(4a^2bc^3)^2 = 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 = 16a^4b^2c^6;$$
$$(4a^2bc^3)^3 = 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 = 64a^6b^3c^9.$$

Siit saame tuletada järgmise reegli.

Reegel. **Et astendada üksliige, tuleb astendada iga tegur eraldi ja saadud tulemused korrutada.**

Näide.

$$(2x^2y^3z)^4 = 16x^8y^{12}z^4.$$

(Kontrollida, kui $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.)

§ 40. Korrutamise abivalemid.

Mitmesuguste algebraliste teisenduste juures kohtame sageli korrutamise erijuhtusid. Nendel erijuhtudel saadud tulemused on kasulik jätta meelde, et edaspidi, kui need juhtumid esinevad, võiks kohe kirjutada korrutise, ilma et teostaks iga kord liikmeti korrutamist. Niisuguseid korrutisi nimetatakse seepärast korrutamise abivalemiteks.

Samuti on kasulik neid valemeid rakendada ka peastarvutuste juures.

1. **Summa ruut.** Võtame ruutu arvude a ja b summa.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2.$$

Koondades sarnased liikmed, saame:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

See valem tuleb meeles pidada esitatud kujul ja ka sõnalise reeglina.

Kahe arvu summa ruut on võrdne esimese arvu ruuduga pluss esimese ja teise arvu kahekordne korrutis pluss teise arvu ruut.

Näiteid:

1. $(3a+2b)^2=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2=9a^2+12ab+4b^2.$

Tuleb harjuda kirjutama otsekohe lõpptulemust, märkimata vahepealseid tehteid.

2. Seda valemit kasutatakse peast arvutamisel niisuguste arvude ruutu võtmiseks, mis erinevad vähe täiskümnelistest. Näiteks:

$$41^2=(40+1)^2=40^2+2\cdot 40+1=1681.$$
$$32^2=(30+2)^2=30^2+2\cdot 2\cdot 30+2^2=900+120+4=1024.$$

3. Eriti kerge on ruutu võtta arve, mis lõpevad viiega. Oletame, et arvus on a kümnelist ja 5 ühelist. Siis saame selle arvu kirjutada järgmiselt:

$$10a+5.$$

Võtame selle arvu ruutu:

$$(10a+5)^2=100a^2+2\cdot 5\cdot 10a+5^2=$$
$$=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

Saadud avaldis näitab, et viiega lõppevate arvude ruutu võtmisel tuleb selle arvu kümneliste arv korrutada kümneliste arvust ühe võrra suurema arvuga ja tulemusele lisada 25. Näiteks:

$$65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 4225;$$
$$85^2 = 8 \cdot 9 \text{ (sajalist)} + 25 = 7225;$$
$$3{,}5^2 = 3 \cdot 4 + 0{,}25 = 12{,}25.$$

Viimast näidet võib kirjutada nii:

$$\left(3\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3 \cdot 4 + \tfrac{1}{4} = 12\tfrac{1}{4}.$$

Tähendab, segaarvu, murdosaga $\frac{1}{2}$, ruutu võtmisel korrutame täisosa temast ühe võrra suurema arvuga ja tulemusele lisame $\frac{1}{4}$.

$$\left(8\tfrac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot 9 + \tfrac{1}{4} = 72\tfrac{1}{4};$$
$$\left(24\tfrac{1}{2}\right)^2 = 24 \cdot 25 + \tfrac{1}{4} = 600\tfrac{1}{4}.$$

2. Vahe ruut.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Kahe arvu vahe ruut on võrdne esimese arvu ruuduga miinus esimese ja teise arvu kahekordne korrutis pluss teise arvu ruut.

See valem erineb eelmisest valemist ainult keskmise liikme märgi poolest. Seepärast kirjutatakse tihti mõlemad valemid koos selliselt:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Näiteid:

1. $(4a^2b - ab)^2 = 16a^4b^2 - 8a^2b \cdot ab + a^2b^2 =$
$= 16a^4b^2 - 8a^3b^2 + a^2b^2.$

Ka siin tuleb püüda tulemus kohe välja kirjutada, teostades vahepealsed tehted peast.

2. Seda valemit kasutatakse peast arvutamisel niisuguste arvude ruutu võtmiseks, mis erinevad vähe täiskümnelistest. Näiteks:

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 + 1 = 1521;$$
$$48^2 = (50 - 2)^2 = 2500 - 2 \cdot 2 \cdot 50 + 4 = 2304;$$
$$79^2 = (80 - 1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6241.$$

3. Kahe arvu summa ja vahe korrutis.

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2;$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Kahe arvu summa ja vahe korrutis on võrdne nende arvude ruutude vahega.

Näiteid:

1. $(5a + 2b)(5a - 2b) = 25a^2 - 4b^2$.
2. $(2a^2 + 3b^3)(2a^2 - 3b^3) = 4a^4 - 9b^6$.

3. Seda reeglit kasutatakse peast arvutamisel kahe niisuguse arvu korrutamiseks, milledest üks on nii mitme ühelise võrra suurem mingist täiskümnelisest, kui mitme ühelise võrra teine on väiksem samast arvust. Näiteks: 47 ja 53, 68 ja 72.

$$47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2491;$$
$$68 \cdot 72 = 70^2 - 4 = 4896;$$
$$33 \cdot 27 = 900 - 9 = 891.$$

4. Kuid mõnikord on vaja toimida ka vastupidi: kahe arvu ruutude vahe asendada samade arvude summa ja vahe korrutisega. Näiteks:

$$102^2 - 101^2 = (102 - 101)(102 + 101) = 203;$$
$$54^2 - 46^2 = (54 - 46)(54 + 46) = 800;$$
$$\left(7\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(7\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}\right)\left(7\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\right) = 50.$$

4. Summa kuup.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Kahe arvu summa kuup on võrdne esimese arvu kuubiga pluss esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis pluss esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis pluss teise arvu kuup.

Näiteid:

1. $(2a + 3b)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 =$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.
2. $11^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331$.

5. Vahe kuup.

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b).$$

Korrutades ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Kahe arvu vahe kuup on võrdne esimese arvu kuubiga miinus esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis pluss esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis miinus teise arvu kuup.

Näiteid:

1. $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
2. $(3a-2b)^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$.

6. Kuupide summa. Kolmliiget $a^2 - ab + b^2$ nimetatakse arvude a ja b vahe mittetäielikuks ruuduks. Korrutame seda summaga $a + b$.

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ \times \quad a + b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ + a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad\qquad + b^3 \end{array}$$

Siit saame, et

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe mittetäieliku ruudu korrutis on võrdne nende arvude kuupide summaga.

Tavaliselt loetakse seda valemit paremalt vasakule.

Kahe arvu kuupide summa on võrdne nende arvude summa ja samade arvude vahe mittetäieliku ruudu korrutisega.

7. Kuupide vahe.

Kolmliiget $a^2 + ab + b^2$ nimetatakse arvude a ja b summa mittetäielikuks ruuduks. Korrutame seda vahega $a - b$.

$$\begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \\ \quad a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 \qquad\qquad - b^3 \end{array}$$

Siit saame, et

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Kahe arvu vahe ja samade arvude summa mittetäieliku ruudu korrutis on võrdne nende arvude kuupide vahega.

Tavaliselt loetakse seda valemit paremalt vasakule.

Kahe arvu kuupide vahe on võrdne nende arvude vahe ja samade arvude summa mittetäieliku ruudu korrutisega.

§ 41. Üldisi märkusi algebraliste täisavaldiste jagamise kohta.

Nagu me juba aritmeetikast teame, ei ole alati võimalik täisarvude jagamisel saada jagatiseks täisarvu. Sel juhul öeldakse, et jagatav ei jagu jagajaga. Näiteks, 17 ei jagu 5-ga. Niisugusel korral toimitakse kahte viisi.

1) Jagatakse jäägiga. Näiteks:

$$17 : 5 = 3 \text{ (jääk 2)} \quad \text{või} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \underline{-15} & \\ 2 & 3 \end{array}$$

2) Kirjutatakse jagatis murru kujul, võttes lugejaks jagatava ja nimetajaks jagaja. Näiteks:

$$17 : 5 = \frac{17}{5}; \quad 3 : 8 = \frac{3}{8}.$$

Murdude kasutusele võtmine tegi võimalikuks teostada mistahes arvude jagamist (välja arvatud jagamist nulliga).

Samasugune on lugu ka algebraliste täisavaldiste jagamisega. Ka siin ei ole jagatiseks alati algebraline täisavaldis.

Kui kahe algebralise täisavaldise jagamisel on jagatiseks täisavaldis ning jäägiks null, siis öeldakse, et jagamine on teostatav jäägita ehk jagatav jagub jagajaga.

Kui jääk kahe algebralise täisavaldise jagamisel ei ole null, siis öeldakse, et jagatav ei jagu jagajaga.

Näide 1. $2ab : b$.

Siin jagatav jagub jagajaga, sest jagatiseks on täisavaldis $2a$. Tõepoolest, korrutades jagatise jagajaga, saame:

$$2a \cdot b = 2ab.$$

Saime jagatava. Tähendab, avaldis $2ab$ jagus avaldisega b.

Näide 2. $(2ab + c) : b$.

Siin ei ole võimalik leida niisugust täisavaldist, mis b-ga korrutades annaks jagatava $2ab + c$. Tähendab, jäägita jagamine on siin võimatu. Sel juhul toimitakse samuti nagu aritmeetikaski.

1. Jagatakse jäägiga. Näiteks:

$$(2ab + c) : b = 2a \text{ (jääk } c) \quad \text{või} \quad \begin{array}{r|l} 2ab + c & b \\ \underline{-2ab} & \\ +c & 2a \end{array}$$

Kontrollime, korrutades jagatise jagajaga ning liites jäägi.

$$2a \cdot b + c = 2ab + c.$$

Saime jagatava.

2. Kirjutatakse jagatis murru kujul, võttes lugejaks jagatava ja nimetajaks jagaja, näiteks:

$$(2ab + c) : b = \frac{2ab + c}{b}.$$

Teeme veel ühe märkuse. Mistahes algebraliste avaldiste jagamisel me eeldame, et jagaja ei ole null, sest nulliga jagamine on võimatu. Seepärast, kui jagaja sisaldab tähti, siis nendę tähtede lubatavateks väärtusteks on ainult need väärtused, mis ei muuda jagajat nulliks. Seda tingimust tuleb algebraliste avaldiste jagamisel alati meeles pidada.

§ 42. Üksliikmete jagamine.

1. Võrdsete astendatavatega astmete jagamine. Olgu meil vaja jagada 2^5 astmega 2^2.

$$2^5 : 2^2 = 32 : 4 = 8 = 2^3.$$

Järelikult:

$$2^5 : 2^2 = 2^3.$$

Samuti:

$$3^6 : 3^4 = 3^2.$$

Kontroll: $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$.

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

Kontroll: $a^2 \cdot a^3 = a^5$.

Üldiselt, ühe ja sama arvu astmete jagamisel saadakse sama arv niisuguse astendajaga, mis liidetuna jagaja astendajaga annab jagatava astendaja. Tähendab, jagatise astendaja on võrdne jagatava ja jagaja astendajate vahega.

$$a^7 : a^4 = a^3.$$

Üldiselt:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Siin m ja n on naturaalarvud, kusjuures $m > n$.

Märkus. Kui $m = n$, siis jagatav on võrdne jagajaga ja jagatis on üks:

$$a^m : a^m = 1.$$

2. **Üksliikmete jagamine.** Olgu vaja teostada jagamine:

$$10a^5b^3c : 4a^3b.$$

Kasutame jagamise omadusi (§ 26). Jagame jagatava 4-ga. Selleks piisab, kui jagame 4-ga kordaja 10. Saame:

$$2{,}5a^5b^3c.$$

Jagame saadud tulemuse a^3-ga. Selleks piisab, kui a^5 jagame a^3-ga. Saame:

$$2{,}5a^2b^3c.$$

Jagame selle tulemuse b-ga. Selleks tuleb b^3 jagada b-ga. Lõplikult saame:

$$10a^5b^3c : 4a^3b = 2{,}5a^2b^2c.$$

Korrutades $4a^3b$ ja $2{,}5a^2b^2c$, saame jagatava. Tähendab, jagasime õigesti.

Muidugi ei ole tarvis kõiki vahepealseid tulemusi eraldi välja kirjutada. Kõik jagamised teostatakse järk-järgult ning kirjutatakse otsekohe lõplik tulemus.

N ä i d e 1. $18x^6y^2z^3 : 6x^2y^2z = 3x^4z^2$.

Jagame 18 arvuga 6; jagatisesse kirjutame 3.

Jagame x^6 astmega x^2; jagatisesse kirjutame x^4.

Jagame y^2 astmega y^2; jagatiseks saame ühe, mida me aga ei kirjuta.

Jagame z^3 suurusega z; jagatisesse kirjutame z^2.

Tulemuseks saime jagatise $3x^4z^2$.

(Kontrollida, kui $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$.)

N ä i d e 2. Lahendada võrrand:

$$6ax^3 : 3ax^2 = 4.$$

Teostades jagamise, saame:

$$2x = 4; \quad x = 2.$$

Kontrollida, asendades x võrrandis 2-ga.

Järelikult võime anda järgmise reegli.

R e e g e l. **Et üksliige jagada üksliikmega, tuleb:**

1) jagatava kordaja jagada jagaja kordajaga;

2) saadud kordaja juurde kirjutada teguritena kõik jagatavas esinevad tähed niisuguste astendajatega, mis on võrdsed jagatavas ja jagajas olevate samade tähtede astendajate vahega.

Üksliikmete jagamise reeglist järeldub:

1. Kui mingi täht esineb ainult jagatavas, siis jagatises esineb see täht sellesama astendajaga.

2. Kui mingi tähe astendajad jagatavas ja jagajas on võrdsed, siis seda tähte jagatises ei esine.

Samast reeglist järeldub ka, et üksliikmete jagamine jäägita on võimatu, kui:

1. jagajas mingi tähe astendaja on suurem kui selle tähe astendaja jagatavas;

2. jagaja sisaldab niisugust tähte, millist jagatavas ei ole.

§ 43. Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Kasutame summa jagamise reeglit (§ 26).

Rakendame seda reeglit hulkliikme jagamiseks üksliikmega.

Olgu vaja teostada jagamine:

$$(6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3) : 2a^2b.$$

Jagame avaldisega $2a^2b$ selle hulkliikme iga liikme, saame:

$$3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2.$$

Kontrollime, korrutades jagatise jagajaga:

$$(3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2) \cdot 2a^2b = 6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3.$$

Saime jagatava. Tähendab, jagasime õigesti. Siit saame järgmise reegli.

Reegel. **Et hulkliige jagada üksliikmega, tuleb hulkliikme iga liige jagada selle üksliikmega ja saadud jagatised liita.**

Sellest reeglist järeldub, et hulkliige jagub üksliikmega ainult siis, kui hulkliikme iga liige jagub selle üksliikmega.

Teiste sõnadega, on vaja, et jagaja oleks hulkliikme kõikide liikmete ühisjagajaks.

Seepärast saame kohe öelda, kui jagaja sisaldab tähte, millist ei esine hulkliikme üheski liikmes, et jagamine jäägita on võimatu.

Samuti on jäägita jagamine võimatu ka siis, kui jagajas esineva mistahes tähe astendaja on suurem kui sellesama tähe astendaja jagatava hulkliikme kas või üheski liikmes.

§ 44. Hulkliikmete jagamine.

Hulkliikmete jagamisel korrastatakse need hulkliikmed tavaliselt ühe ja sama tähe alanevate astmete järjekorras. Selgitame näidete varal, kuidas jagatakse korrastatud hulkliikmeid:

N ä i d e 1. Olgu vaja jagada $6a^3 - 4a^2$ avaldisega $3a - 2$.

Paigutame jagatava ja jagaja nii nagu aritmeetikaski.

$$6a^3 - 4a^2 \mid \underline{3a - 2}$$

Oletame, et jagamine on teostatav jäägita, s. t. jagatiseks saame mingi hulkliikme (erandjuhul võib see olla ka üksliige). Ka jagatise korrastame tähe a alanevate astmete järjekorras.

Kuna jagatav on võrdne jagaja ja jagatise korrutisega, siis jagatava kõrgeim liige on võrdne jagaja ja jagatise kõrgeimate liikmete korrutisega. Siit järeldub:

Jagatise kõrgeima liikme leidmiseks tuleb jagatava kõrgeim liige jagada jagaja kõrgeima liikmega.

Jagades $6a^3$ avaldisega $3a$, saame $2a^2$ — see on jagatise kõrgeim liige. Vaatame, kas jagatiseks ei ole ainult liige $2a^2$. Selleks korrutame jagaja jagatisega ja vaatame, kas saame tulemuseks jagatava:

$$(3a - 2) \cdot 2a^2 = 6a^3 - 4a^2.$$

Saime jagatava. Tähendab, jäägita jagamine oli siin tõepoolest teostatav ja jagatiseks on $2a^2$.

Kogu jagamise protsess ja kontroll kirjutatakse üles järgmiselt:

$$\begin{array}{r|l} 6a^3 - 4a^2 & 3a - 2 \\ \underline{6a^3 - 4a^2} & \overline{2a^2} \\ 0 & \end{array}$$

Kirjutame jagatisesse leitud kõrgeima liikme ning korrutame sellega jagajat. Saadud korrutise kirjutame jagatava alla ja lahutame selle jagatavast. Saime jäägiks nulli. See näitabki, et jagatise ja jagaja korrutis on võrdne jagatavaga.

N ä i d e 2. Jagada $10x^2 - 7x - 12$ avaldisega $2x - 3$.

Paigutame jagamistehte nii nagu esimeseski näites:

$$10x^2 - 7x - 12 \mid \underline{2x - 3}$$

Oletame jällegi, et jagamine on teostatav jäägita ning jagatiseks on hulkliige. Leiame jagatise kõrgeima liikme, jagades $10x^2$ avaldisega $2x$. Saame $5x$. Seejärel korrutame, nagu ka esimeses näites, jagaja $5x$-ga, kirjutame leitud korrutise jagatava alla ning lahutame selle jagatavast. Kui jääk on null, siis $5x$ ongi jagatiseks. Kogu selle käigu kirjutame üles järgmiselt:

$$\begin{array}{r|l} 10x^2 - 7x - 12 & 2x - 3 \\ \underline{-\,10x^2 - 15x} & \overline{5x} \\ 8x - 12 & \end{array}$$

Saime jäägi, mis erineb nullist. See näitab, et jagatises on rohkem kui üks liige (või et jäägita jagamine on võimatu; seda juhust vaatleme hiljem).

Jagatav on siis võrdne summaga, milles liidetavateks on jagatise esimese liikme ja jagaja korrutis, jagatise teise liikme ja jagaja korrutis jne.

Kuid jagatise esimese liikme ja jagaja korrutise me juba lahutasime jagatavast. Tähendab, jääk $8x - 12$ võib sisaldada ainult jagaja korrutisi jagatise teise ning järgnevate liikmetega. Jäägi kõrgeim liige $8x$ peab olema võrdne jagaja kõrgeima liikme ja jagatise teise liikme korrutisega. Siit järeldub järgmine reegel.

Jagatise teise liikme leidmiseks tuleb esimese jäägi kõrgeim liige jagada jagaja kõrgeima liikmega.

Jagades $8x$ avaldisega $2x$, saame 4. Et veenduda, kas jääk $8x - 12$ ei olegi jagatise teise liikme ja jagaja korrutis, toimime järgmiselt: korrutame jagaja 4-ga, saadud korrutise kirjutame jäägi alla ning lahutame selle jäägist. Saame järgmise kirjutuse:

$$\begin{array}{r|l} 10x^3 - 7x - 12 & 2x - 3 \\ \underline{-\,10x^2 - 15x} & \overline{5x + 4} \\ 8x - 12 & \\ \underline{-\,8x - 12} & \\ 0 & \end{array}$$

Jääk on null. Tähendab, jagamine on sellega lõpetatud ning jagatiseks on $5x + 4$.

Tulemuse kontrollimiseks võime jagaja $2x - 3$ korrutada jagatisega $5x + 4$.

Kui me ka siin oleksime nulli asemel saanud mingi jäägi (teine jääk), siis oleksime jagatise kolmanda liikme leidnud teise jäägi

kõrgeima liikme jagamisel jagaja kõrgeima liikmega jne. Toome veel ühe näite jagamise kohta.

Näide 3. Jagada $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$ avaldisega $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$.

Kogu jagamise käik on näha järgmisest kirjutusest:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5 & x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
\underline{x^5 - 3ax^4 + 3a^2x^3 - a^3x^2} & \overline{x^2 - 2ax + a^2} \\
-2ax^4 + 7a^2x^3 - 9a^3x^2 + 5a^4x - a^5 & \text{. . . esimene jääk} \\
\underline{-2ax^4 + 6a^2x^3 - 6a^3x^2 + 2a^4x} & \\
a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5 & \text{. . . teine jääk} \\
\underline{a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5} & \\
0 & \text{. . . . . kolmas jääk}
\end{array}$$

Jagatiseks on $x^2 - 2ax + a^2$. (Kontrollida võib korrutamise teel.)

Toome lõpuks näite jäägiga jagamise kohta.

Näide 4. Jagada $3m^4 + 10m^3 - 6m^2 + 25m - 1$ avaldisega $m^2 + 4m - 1$.

Jagame niisamuti kui eelmistes näidetes.

$$\begin{array}{l|l}
3m^4 + 10m^3 - 6m^2 + 25m - 1 & m^2 + 4m - 1 \\
\underline{3m^4 + 12m^3 - 6m^2} & \overline{3m^2 - 2m + 5} \\
-2m^3 - 3m^2 + 25m - 1 & \text{. . . . . esimene jääk} \\
\underline{-2m^3 - 8m^2 + 2m} & \\
5m^2 + 23m - 1 & \text{. . . . . teine jääk} \\
\underline{5m^2 + 20m - 5} & \\
3m + 4 & \text{. . . . . kolmas jääk}
\end{array}$$

Kolmanda jäägi kõrgeim liige ei jagu enam jagaja kõrgeima liikmega. See näitabki, et käesoleval juhul on tegemist jäägiga jagamisega. Tulemuseks saime jagatise $3m^2 - 2m + 5$ ja jäägi $3m + 4$. Kontrollimiseks korrutame jagatise jagajaga ning liidame jäägi:

$$(m^2 + 4m - 1)(3m^2 - 2m + 5) + (3m + 4).$$

Teostades nõutud tehted ja koondades sarnased liikmed, saame jagatava.

Toodud näidete põhjal võime anda järgmise reegli niisuguste

hulkliikmete jagamise kohta, mis on korrastatud peatähe alanevate astmete järjekorras.

1. Jagame jagatava kõrgeima liikme jagaja kõrgeima liikmega. Saame jagatise esimese liikme.

2. Korrutame jagaja jagatise esimese liikmega ning saadud korrutise lahutame jagatavast. Saame esimese jäägi.

3. Jagame esimese jäägi kõrgeima liikme jagaja kõrgeima liikmega. Saame jagatise teise liikme.

4. Korrutame jagaja jagatise teise liikmega ning saadud korrutise lahutame esimesest jäägist. Saame teise jäägi.

5. Toimime teise jäägiga niisamuti nagu esimese jäägiga ja jätkame jagamist seni, kuni saame jäägi null või jäägi, mille kõrgeim liige ei jagu jagaja kõrgeima liikmega.

Esimesel juhul on tegemist jäägita jagamisega, teisel juhul jäägiga jagamisega. Viimane jääk ongi antud hulkliikmete jagamisel jäägiks.

§ 45. Jagamine abivalemite abil.

Mõningail juhtumeil võib kohe kirjutada jagatise, ilma et teostaks hulkliikmete jagamise reegli järgi jagamist.

Selleks kasutame paragrahvis 40 esitatud korrutamise abivalemeid.

1. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$

Kahe arvu ruutude vahe ja samade arvude vahe jagatis on võrdne nende arvude summaga.

2. $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$

Kahe arvu ruutude vahe ja samade arvude summa jagatis on võrdne nende arvude vahega.

3. $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$

Kahe arvu kuupide vahe ja samade arvude vahe jagatis on võrdne nende arvude summa mittetäieliku ruuduga.

4. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$

Kahe arvu kuupide summa ja samade arvude summa jagatis on võrdne nende arvude vahe mittetäieliku ruuduga.

NELJAS PEATÜKK.

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE.

§ 46. Tegureiks lahutamise mõiste.

Olgu tarvis leida avaldise

$$ab + ac - ad$$

arvuline väärtus, kui $a = 37$, $b = 26$, $c = 17$ ja $d = 23$.

Asendades avaldises tähed nendele vastavate väärtustega, saame:

$$37 \cdot 26 + 37 \cdot 17 - 37 \cdot 23 = 962 + 629 - 851 = 740.$$

Kuid selle avaldise arvulise väärtuse võib leida palju kiiremini ja kergemini, kui avaldist eelnevalt teisendada.

Jaotuvuse seaduse põhjal võib kirjutada:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

Leiame saadud samase avaldise arvulise väärtuse. Saame:

$$37 \cdot (26 + 17 - 23) = 37 \cdot 20 = 740.$$

Kõik need arvutused on kergesti peast teostatavad.

Seega osutus antud juhul otstarbekaks esitada antud avaldis (algebraline summa) kahe teguri — üksliikme ja hulkliikme — korrutisena.

Avaldiste niisugust teisendamist kasutatakse algebras laialdaselt ning seda teisendamist nimetatakse tegureiks lahutamiseks.

Definitsioon. **Lahutada tegureiks algebraline summa tähendab esitada antud summa korrutise kujul.**

Algebraliste avaldiste tegureiks lahutamine on paljus sarnane täisarvude algtegureiks lahutamisega aritmeetikas. Seal me kohta-

sime tegureiks lahutamist siis, kui oli tarvis taandada murde või teisendada neid ühenimelisteks (murdude liitmisel ja lahutamisel).

Samadel eesmärkidel kasutatakse ka algebraliste avaldiste tegureiks lahutamist. Järgmises peatükis käsitletakse algebralisi murde ja tehteid nendega. Murdude taandamine, murdude teisendamine ühenimelisteks liitmisel ja lahutamisel — kõik see kergendab tunduvalt teisendusi ja arvutusi. Selleks tuleb aga kõigepealt lugeja ja nimetaja avaldada korrutisena (kui see on võimalik), see tähendab, tuleb lahutada nad tegureiks.

Algebras ei kasutata tegureiks lahutamist mitte ainult tehete juures murdavaldistega.

Eespool toodi juba näide selle kohta, kuidas tegureiks lahutamine kergendab algebralise avaldise arvulise väärtuse leidmist.

Tegureiks lahutamist kasutatakse ka mõnede võrrandite lahendamisel ning teistes algebra osades.

Vaatleme enamkasutatavamaid ja lihtsamaid teguriteks lahutamise võtteid.

§ 47. Ühise teguri toomine sulgude ette.

Näide 1. Olgu antud hulkliige:

$$6a^2 - 8ab + 4a.$$

On kerge näha, et kõik liikmed sisaldavad tegurit $2a$, mistõttu võime avaldise kirjutada järgmiselt:

$$2a \cdot 3a - 2a \cdot 4b + 2a \cdot 2.$$

Kasutades jaotuvuse seadust, saame:

$$6a^2 - 8ab + 4a = 2a \cdot (3a - 4b + 2).$$

Seega oleme antud hulkliikme esitanud üksliikme ja hulkliikme korrutisena.

Esitatud näitest selgub, et hulkliikme tegureiks lahutamiseks ühise teguri sulgude ette toomise teel on tarvis:

1) leida see ühine tegur;

2) jagada selle teguriga hulkliige;

3) kirjutada ühise teguri ja saadud jagatise korrutis (kirjutades jagatise sulgudesse).

Selgitame näite abil, kuidas seda harilikult tehakse.

Näide 2. Lahutada tegureiks hulkliige:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3.$$

1) Leiame kõigepealt kordajate suurima ühisteguri. See on 6.

2) Võtame esimese liikme esimese tähe x ja vaatame, missuguses astmes on ta kõikides liikmetes. x kõige väiksemaks astendajaks on 2 (kolmandas liikmes). Siit järgneb, et hulkliikme kõik liikmed jaguvad x^2-ga, s. t. x^2 on nende ühiseks teguriks.

3) Võttes esimese liikme teise tähe y, leiame, et see tuleb võtta esimeses astmes. (Tähte z me ei vaatlegi, sest esimeses liikmes teda ei esine.)

Seega on kõikide liikmete ühiseks teguriks üksliige $6x^2y$.

Jääb veel määrata antud hulkliikme ja leitud ühise teguri jagatis. Selleks, et vältida üleliigseid kirjutusi, toimime järgmiselt. Kirjutame antud hulkliikme, selle järele võrdusmärgi ja siis leitud ühise teguri. Saame:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3 = 6x^2y \ldots$$

Nüüd tõmbame sulu ja selle järele kirjutame kohe jagatised, mis saame iga liikme jagamisel avaldisega $6x^2y$. Saame:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3 = 6x^2y(2x^2y - 3xy + 4z^3).$$

See ongi lõplikuks tulemuseks.

N ä i d e 3. Lahutada tegureiks hulkliige:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a.$$

Siin on kohe näha, et ühiseks teguriks saab olla ainult $2a$, sest kõik liikmed jaguvad nii 2-ga kui ka a-ga; teiselt poolt näeme aga, et viimasel liikmel $2a$ ei ole ühtegi teist tegurit. Toimides nii nagu eelmiseski näites, saame:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a = 2a(5a^2b - 4ab^3 + 1).$$

M ä r k u s. Kuna me jagame antud hulkliikme iga liikme nende ühise teguriga, siis peab sulgudes olevas hulkliikmes olema niisama palju liikmeid kui antud hulkliikmeski. Kui see nii ei ole, siis on selge, et teisendustes on tehtud viga. Viimase näite puhul saame $2a$ jagamisel $2a$-ga jagatiseks arvu 1 ning liikmete arv jääb seega samaks.

Mõnikord kujutavad algebralised avaldised endast kahe või enama liidetava summat, kusjuures igas liidetavas on teguriks üks ja sama hulkliige. Sel juhul võetakse see hulkliige sulgude ette niisamuti nagu üksliigegi.

Näide 4. Lahutada tegureiks algebraline avaldis:

$$5x^3(a-b)-4x^2y(a-b)+7xy^2(a-b).$$

Ühiseks tegureiks on siin $x(a-b)$. Saame:

$$5x^3(a-b)-4x^2y(a-b)+7xy^2(a-b)=$$
$$=x(a-b)(5x^2-4xy+7y^2).$$

§ 48. Rühmitamise meetod.

Näide 1. Lahutada tegureiks avaldis:

$$c(a-b)+d(a-b). \tag{1}$$

Võttes sulgude ette ühise teguri $a-b$, saame:

$$(a-b)(c+d). \tag{2}$$

Kui avaldis (1) oleks antud aga järgmiselt:

$$ac-bc+ad-bd, \tag{3}$$

siis, püüdes rakendada § 47 esitatud teguriteks lahutamise võtet, satuksime raskustesse, sest kõikidele liikmetele ühist tegurit ei ole. Alles siis, kui jagada liikmed kahte rühma:

$$(ac-bc)+(ad-bd)$$

ja võtta esimesest rühmast sulgude ette tegur c ning teisest rühmast tegur d, saame avaldise (1).

$$c(a-b)+d(a-b),$$

milles on selgesti nähtav ühine tegur $a-b$.

Märgime, et avaldises (3) võiksime liikmeid rühmitada ka järgmiselt:

$$(ac+ad)-(bc+bd).$$

Võttes mõlemas rühmas sulgude ette ühise teguri, saame:

$$a(c+d)-b(c+d).$$

Siin on ühiseks teguriks $c+d$. Eraldades selle, saame:

$$(c+d)(a-b).$$

See avaldis erineb avaldisest (2) ainult tegurite järjekorra poolest.

Niisugust tegureiks lahutamise meetodit nimetatakse rühmitamise meetodiks. Toome veel näiteid tegureiks lahutamise kohta selle meetodi põhjal.

Näide 2. $2ac + 3b - bc - 6a$.

Antud hulkliikme kõigil liikmetel ühist tegurit ei ole. Järelikult ei saa kasutada eelmises paragrahvis kirjeldatud meetodit. Proovime kasutada rühmitamise meetodit. Kui rühmitada liikmed kahekaupa samas järjekorras, milles nad on kirjutatud, siis saame:

$$(2ac + 3b) - (bc + 6a).$$

Ilmneb, et kummaski rühmas ei ole ühiseid tegureid ja seepärast ka ühist kaheliikmelist tegurit me ei saa. Katse osutus ebaõnnestunuks. Rühmitame liikmed teisiti, nimelt: esimese kolmandaga ja teise neljandaga.

$$(2ac - bc) + (3b - 6a).$$

Pärast ühiste tegurite sulgude ette võtmist saame:

$$c(2a - b) + 3(b - 2a).$$

Nagu näha, erinevad kaksliikmed $2a - b$ ja $b - 2a$ teineteisest ainult märkide poolest. Selleks et teha neid ühesugusteks, piisab, kui muuta teise sulgavaldise iga liikme märk vastupidiseks; et aga tulemus ei muutuks, tuleb samaaegselt muuta ka sulgude ees olev märk vastupidiseks. Saame:

$$c(2a - b) - 3(2a - b).$$

Nüüd on kerge näha, et antud avaldis on võrdne avaldisega

$$(2a - b)(c - 3).$$

Kui aga ühte rühma võtta antud hulkliikme esimene ja neljas liige ning teise rühma teine ja kolmas liige, siis saame:

$$(2ac - 6a) + (3b - bc) = 2a(c - 3) + b(3 - c) =$$
$$= 2a(c - 3) - b(c - 3) = (c - 3)(2a - b),$$

s. t. sama tulemuse.

Kui on omandatud juba teatud vilumused, siis võib asetada kohe sulgude ette miinusmärgi ja muuta samaaegselt ka sulgudes asetsevate liikmete märgid. Nimelt, märgates, et esimeses rühmas tuleb sulgudes esimeseks liikmeks liige, mis sisaldab tähte c, paigutatakse ka teise rühma liikmed ümber nii, et siin tuleks samuti esimeseks liikmeks liige, mis sisaldab tähte c. Sel juhul oleks teisenduse järjekord säärane:

$$(2ac - 6a) - (bc - 3b) = 2a(c - 3) - b(c - 3) =$$
$$= (c - 3)(2a - b).$$

Näide 3. Lahutada tegureiks:

$$ab - a - b + 1.$$

Arvestades tehtud märkust, võime kohe kirjutada:

$$(ab - a) - (b - 1) = a(b - 1) - (b - 1) = (b - 1)(a - 1).$$

§ 49. Korrutamise abivalemite kasutamine.

Mõnikord saab hulkliiget lahutada tegureiks korrutamise abivalemite (vt. § 40) abil. Kirjutame paragrahvis 40 esitatud kolmanda valemi vastupidises järjekorras:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Selle võrduse vasakul pool on kaksliige, paremal pool on ta aga esitatud korrutisena, s. t. on lahutatud tegureiks.

Tähendab, **kui kaksliige kujutab endast ruutude vahet, siis võib teda avaldada astendatavate summa ja vahe korrutisena.**

Näide.

$$16a^4b^2 - 9x^6 = (4a^2b + 3x^3)(4a^2b - 3x^3).$$

Võtame nüüd valemi:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Tähendab, **kui antud kolmliige kujutab endast ruutude summat, millele on liidetud veel samade astendatavate kahekordne korrutis, siis võib teda avaldada summa ruuduna** (s. o. kahe ühesuguse teguri korrutisena).

Näiteid.

1. $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.
2. $4a^2b^2 + 20abc^2 + 25c^4 = (2ab + 5c^2)^2$.

Täpselt samuti kasutatakse valemit:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Näiteid.

1. $16m^2 - 8m + 1 = (4m - 1)^2$.

2. Leida avaldise $a^2 - 14a + 49$ arvuline väärtus, kui $a = 47$.

Arvutamine on teostatav peast, kui avaldis lahutada tegureiks. Saame:

$$a^2 - 14a + 49 = (a - 7)^2.$$

Asendades a võrrandi paremal pool arvuga 47, saame:

$$(47 - 7)^2 = 40^2 = 1600.$$

Täpselt samuti kasutatakse valemeid:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Näide. Arvutada avaldise

$$a = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

arvuline väärtus, kui $x = 17$.

Lahutades antud avaldise tegureiks, saame:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3.$$

Asendades x arvuga 17, saame:

$$a = 20^3 = 8000.$$

Lõpuks, kui antud kaksliige kujutab endast kuupide summat või vahet, siis kasutatakse tegureiks lahutamisel valemeid:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Näiteid.

1. $27a^3b^3 + 8c^3 = (3ab + 2c)(9a^2b^2 - 6abc + 4c^2)$;
2. $64a^6b^3 - 1 = (4a^2b - 1)(16a^4b^2 + 4a^2b + 1)$.

§ 50. Mitme meetodi kasutamine.

Antud avaldise tegureiks lahutamisel tuleb kõigepealt teha kindlaks, kas selle avaldise kõik liidetavad sisaldavad ühist tegurit või mitte. Kõikide ühiste tegurite sulgude ette võtmine on vaja läbi viia esimeses järjekorras.

Pärast seda tuleb vaadelda sulgudesse jäänud hulkliiget. Võib juhtuda, et seda saab omakorda lahutada tegureiks mõne eespool (§ 48 ja § 49) kirjeldatud meetodi abil. Kui see on võimalik, siis tuleb teha ka seda.

Selgitame öeldut näitega.

Ülesanne. *Tõestada, et mistahes täisarvu kuubi ja selle arvu enda vahe jagub alati 6-ga.*

Tähistame vabalt valitud täisarvu tähega n.

On tarvis tõestada, et avaldis $n^3 - n$ jagub n mistahes täisarvulise väärtuse korral 6-ga.

Lahutame antud avaldise tegureiks. Kõigepealt võtame sulgude ette ühise teguri n. Saame:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1).$$

Ilmneb, et sulgavaldis kujutab endast ruutude vahet. Kasutades eespool toodud valemeid, saame:

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1).$$

Muutes tegurite järjekorra, saame:

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1).$$

See võrdus näitab, et avaldis $n^3 - n$ kujutab endast kolme järjestikuse täisarvu korrutist. Kuid kolmest järjestikusest täisarvust jagub üks tingimata 3-ga ja vähemalt üks 2-ga. Tähendab $n^3 - n$ jagub 2-ga ja 3-ga. Aritmeetikast on teada, et sel juhul $n^3 - 1$ jagub ka 6-ga.

VIIES PEATÜKK.

ALGEBRALISED MURRUD.

§ 51. Algebralise murru mõiste.

1. Algebralise murru definitsioon. Paragrahvis 41 märkisime, et kui kaks algebralist avaldist ei jagu jäägita (tähendab, viimane jääk ei ole null), siis kirjutatakse jagatis murdavaldise kujul, mille lugejaks on jagatav ja nimetajaks jagaja.

Murdavaldiste näiteid:

$$\frac{a}{2b};\quad \frac{a^2-b}{2b-c};\quad \frac{3(x+y)^2-5}{8y^5};\quad \frac{(a+c)^3-(a-c)^2}{x^2+xy+y^2}\quad \text{jne.}$$

Murdavaldise lugeja ja nimetaja võivad ka omakorda olla murdavaldised, näiteks:

$$\frac{\dfrac{a+b}{c}}{5a^2};\qquad \frac{a+\dfrac{b}{c}}{\dfrac{a}{b}-c}.$$

Sagedamini tuleb tegelda niisuguste algebraliste murdavaldistega, mille lugeja ja nimetaja on hulkliikmed (erandjuhul ka üksliikmed). Niisuguseid avaldisi nimetatakse algebralisteks murdudeks.

Definitsioon. **Algebralist murdavaldist, mille lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, nimetatakse algebraliseks murruks.**

Nagu aritmeetikaski, nii nimetatakse ka algebralise murru lugejat ja nimetajat murru liikmeteks.

Märkus. Niisugune murdude eraldamine murdavaldistest esineb üldiselt ka aritmeetikas. Näiteks avaldisi

$$\frac{3+\dfrac{4}{5}}{\dfrac{5}{7}};\qquad \frac{0{,}3}{2{,}25}$$

nimetatakse aritmeetilisteks murdavaldisteks. Aritmeetiliseks murruks (ehk lihtsalt murruks) nimetatakse aga ainult niisuguseid murdavaldisi, mille lugeja ja nimetaja on täisarvud.

Nagu me juba märkisime, võib algebralise murru lugeja ja nimetaja koosneda ka ühest liikmest. Mõnikord võib aga lugejaks olla ka numbritega kirjutatud arv.

Näiteks, avaldised

$$\frac{2}{a};\quad \frac{-4}{x+y};\quad \frac{1{,}3}{a^3+1}$$

on algebralised murrud. Algebralise murru nimetajas peab kindlasti esinema vähemalt üks täht.

Niisugused avaldised, nagu

$$\frac{a}{4};\quad \frac{x^2-y}{0{,}3};\quad \frac{a^3-3a^2b+c}{17-5{,}2},$$

on definitsiooni (§ 30) järgi algebralised täisavaldised, mis on ainult kirjutatud murru kujul.

2. Tähtede lubatavad väärtused. Algebralises murrus esinevate tähtede lubatavate väärtuste kohta on vaja teada järgmist.

Lugejas esinevatel tähtedel võivad olla mistahes väärtused (kui ülesande tingimustes pole selleks antud mingisuguseid täiendavaid kitsendusi).

Nimetajas esinevatel tähtedel on lubatavateks väärtusteks ainult niisugused väärtused, mis ei muuda nimetajat nulliks. Seepärast edaspidi loemegi alati, et algebralise murru nimetaja ei ole null ühegi väärtuse korral, mis kuulub tähtede lubatavate väärtuste hulka.

3. Murru arvuline väärtus. Meil tuleb teha vahet algebralise murru ja tema arvulise väärtuse vahel. Algebralise murru arvuline väärtus võib olla täisarv või murdarv, positiivne arv või negatiivne arv või ka null. Näiteks, murru $\frac{a}{b}$ arvuline väärtus,

kui $a=6$; $b=3$, on 2;
kui $a=-5$; $b=2$, on $\frac{-5}{2}$;
kui $a=0$; $b=5$, on 0.

§ 52. Murru põhiomadus.

Algebraliste murdude kohta jäävad kehtima samad seadused, mis kehtivad murdarvude kohta aritmeetikas.

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugeja ja nimetaja korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

kus m võib olla mistahes arv — täisarv või murdarv, negatiivne arv või positiivne arv, kuid mitte null.

Tõestus.

Murd $\frac{a}{b}$ on definitsiooni järgi arvude a ja b jagatis.

$$a:b=\frac{a}{b},$$

kus a ja b on mistahes ratsionaalarvud ($b \neq 0$).

Kuid paragrahvis 25 oli tõestatud, et ratsionaalarvude jagatise kohta jääb kehtima seadus: jagatis ei muutu, kui jagatav ja jagaja korrutada ühe ja sama arvuga (mis ei ole võrdne nulliga).

Tähendab:

$$am:bm=\frac{a}{b}.$$

Kuid definitsiooni järgi:

$$am:bm=\frac{am}{bm}.$$

Kahe viimase võrduse vasakud pooled on võrdsed. Järelikult on võrdsed ka paremad pooled, s. t. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

§ 53. Murru liikmete märkide muutmine.

Murru põhiomadusest järeldub, et murru väärtus ei muutu, kui tema lugeja ja nimetaja korrutada arvuga — 1.

Näiteks:

$$\frac{6}{4}=\frac{-6}{-4}=1\frac{1}{2};\quad \frac{-6}{4}=\frac{6}{-4}=-1\frac{1}{2}.$$

Kuid mistahes arvu (peale arvu null) korrutamine arvuga — 1 muudab ainult korrutatava märgi vastupidiseks. Tähendab, võime öelda:

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugeja ja nimetaja märgid muuta üheaegselt vastupidisteks.

Niisugust murdude teisendamist kasutatakse näiteks murdude liitmise juures.

N ä i d e.

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}+\frac{-2}{7}=\frac{5+(-2)}{7}=\frac{3}{7}.$$

Vaatame, mis toimub murruga siis, kui muuta märki ainult murru ühe liikme ees:

$$\frac{6}{4}=1\frac{1}{2};\quad \frac{-6}{4}=-1\frac{1}{2};\quad \frac{6}{-4}=-1\frac{1}{2}.$$

Näeme, et kui muuta ainult lugeja või ainult nimetaja märk, siis saame esimese arvu vastandarvu, see tähendab, kogu murru märk muutub vastupidiseks.

Oletame, et me muudame märgi murru ühe liikme ees vastupidiseks. Eespool öeldu põhjal saame siis antud arvu vastandarvu. Kui aga nüüd selle uue murru märk muuta vastupidiseks, siis saame sama murru, mis meil algul oli antud.

N ä i d e. Olgu meil antud murd $\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$. Muudame lugeja märgi, saame $\frac{5}{2}$. Muutes nüüd kogu murru märgi, saame $-\frac{5}{2}$. See aga on murru esialgne väärtus.

Siit järeldame:

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk murru ühe liikme ja samal ajal ka murru enda ees vastupidiseks.

Seda reeglit rakendatakse tehete juures murdudega. Nii võib eespool esitatud näites liita ka järgmiselt:

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Muutnud märgi teise murru nimetajas, muutsime samal ajal ka murru enda märgi.

Toome veel ühe näite:

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}-\frac{-4}{13}=\frac{8-(-4)}{13}=\frac{12}{13}$$

ehk

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}+\frac{4}{13}=\frac{12}{13}$$

Esimesel juhul muutsime teise murru mõlema liikme märgid, jättes murru enda märgi samaks.

Teisel juhul muutsime ainult nimetaja märgi ja samal ajal ka murru enda märgi.

Mõlemal juhul saime ühe ja sama tulemuse, nagu pidimegi saama.

§ 54. Murdude taandamine.

Kui murru põhiomadus (§ 52) kirjutada vastupidises järjekorras:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

siis võib seda sõnastada järgmiselt.

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugeja ja nimetaja jagada ühe ja sama arvuga (mis erineb nullist).

Seda omadust kasutatakse murdude lihtsustamiseks, nimelt: kui murru lugejas ja nimetajas on ühine tegur, siis võib lugeja ja nimetaja jagada selle teguriga, andes seega murrule lihtsama kuju.

Niisugust teisendust nimetatakse murru t a a n d a m i s e k s.

N ä i t e i d.

$$\frac{5a}{10b} = \frac{a}{2b}; \quad \frac{6x^2}{2xy} = \frac{3x}{y}; \quad \frac{18a^4b^3c}{12ab^3c} = \frac{3a^3}{2b}.$$

$$\frac{6a(p-q)}{4n(p-q)} = \frac{3a}{2n}; \quad \frac{5a^2(a^2-ab+b^2)}{6ab(a^2-ab+b^2)} = \frac{5a}{6b}.$$

Kui lugeja või nimetaja (või ka mõlemad) on hulkliikmed, siis tuleb kõigepealt lahutada need tegureiks (kui see on võimalik), ning pärast seda taandada võimaluse korral murd.

N ä i d e.

$$\frac{a^2-5ab}{a^2b-5ab} = \frac{a(a-5b)}{ab(a-5b)} = \frac{1}{b}.$$

§ 55. Murdude teisendamine ühenimelisteks.

Murru põhiomadus võimaldab erinevate nimetajatega murde teisendada võrdsete nimetajatega murdudeks (öeldakse: teisendada murde ühenimelisteks).

Murdude teisendamine ühenimelisteks on vajalik, nagu aritmeetikaski, erinevate nimetajatega murdude liitmisel ja lahutamisel.

Vaatleme mõningaid näiteid ja tuletame siis üldise reegli murdude ühenimelisteks teisendamise kohta.

1. Murrud, mille nimetajaks on üksliige. Teisendame ühenimelisteks murrud:

$$\frac{m}{4ab^5};\quad \frac{n}{6a^3c^2};\quad \frac{p}{9a^4b^2}.$$

Ühine nimetaja peab jaguma kõigi antud nimetajatega. Leiame selle.

1) Ühise nimetaja kordaja peab jaguma arvudega 4, 6 ja 9. Kõige väiksemaks niisuguseks arvuks on nende arvude väikseim ühiskordne, see on 36.

2) Ühine nimetaja peab jaguma arvudega a, a^3 ja a^4. Tähendab, temas peab esinema tegur a^4.

3) Niisamuti leiame, et ühises nimetajas peavad esinema tegurid b^5 ja c^2. Ühiseks nimetajaks saame seega $36a^4b^5c^2$.

Et saada esimese murru nimetajaks $36a^4b^5c^2$, tuleb tema lugeja ja nimetaja korrutada avaldisega $9a^3c^2$. Saame:

$$\frac{m}{4ab^5}=\frac{9a^3c^2m}{36a^4b^5c^2}.$$

Samal viisil leiame, et

$$\frac{n}{6a^3c^2}=\frac{6ab^5n}{36a^4b^5c^2}\text{ ja }\frac{p}{9a^4b^2}=\frac{4b^3c^2p}{36a^4b^5c^2}.$$

Siit saame tuletada järgmise reegli.

Reegel. **Üksliikmeliste nimetajatega algebraliste murdude ühiseks nimetajaks on korrutis, mille teguriteks on antud nimetajate kordajate väikseim ühiskordne ja antud nimetajate iga täheline tegur kõige suurema astendajaga, millega ta esineb antud nimetajais.**

2. Murrud, mille nimetajaks on hulkliige. Teisendame ühenimelisteks murrud:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2};\quad \frac{b}{5x^2+10xy+5y^2};\quad \frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}.$$

Lahutame nimetajad tegureiks:

$$4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)=4(x+y)(x-y);$$
$$5x^2+10xy+5y^2=5(x^2+2xy+y^2)=5(x+y)^2;$$
$$10x^2-20xy+10y^2=10(x^2-2xy+y^2)=10(x-y)^2.$$

Leiame ühise nimetaja samal viisil nagu üksliikmeliste nimetajatega murdude juures.

Ühise nimetaja kordajaks on arvude 4, 5 ja 10 väikseim ühiskordne, see on 20.

Teguri $(x+y)$ võtame suurima astendajaga, millega ta esineb antud nimetajais, see on teine aste. Teguri $(x-y)$ võtame samuti teises astmes.

Väikseimaks ühiseks nimetajaks on seega $20(x+y)^2(x-y)^2$.

Murrud saavad järgmise kuju:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2}=\frac{a}{4(x+y)(x-y)}=\frac{5a(x+y)(x-y)}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$

$$\frac{b}{5x^2+10xy+5y^2}=\frac{b}{5(x+y)^2}=\frac{4b(x-y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$

$$\frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}=\frac{c}{10(x-y)^2}=\frac{2c(x+y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2}.$$

(Kontrollida, kui $x=2$; $y=1$; $a=b=c=10$.)

Siit saame järgmise reegli.

Reegel. **Hulkliikmeliste nimetajatega algebraliste murdude teisendamisel ühenimelisteks tuleb kõigepealt nimetajad lahutada tegureiks. Väikseimaks ühiseks nimetajaks on korrutis, mille teguriteks on antud nimetajate kordajate väikseim ühiskordne ja antud nimetajate iga erinev tegur kõige suurema astendajaga, millega ta esineb antud nimetajais.**

Märkus. Kui mingi nimetaja ei lahutu tegureiks, siis tuleb ta tervenisti võtta ühise nimetaja teguriks.

§ 56. Murdude liitmine.

Ülesanne 1. *Ühes klassis jaotati õpilastele a vihikut, teises b vihikut. Iga õpilane sai m vihikut. Mitu õpilast oli kahes klassis kokku?*

Lahendame ülesande kahel meetodil.

I meetod.

1) Mitu õpilast oli esimeses klassis?

$\frac{a}{m}$ õpilast.

2) Mitu õpilast oli teises klassis?

$$\frac{b}{m} \text{ õpilast.}$$

3) Mitu õpilast oli kahes klassis kokku?

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right) \text{ õpilast.}$$

II meetod.

1) Mitu vihikut jaotati õpilastele kummaski klassis kokku?

$$(a+b) \text{ vihikut.}$$

2) Mitu õpilast oli nendes klassides kokku?

$$\frac{a+b}{m} \text{ õpilast.}$$

Võrreldes vastuseid, järeldame, et

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}. \qquad (1)$$

Selle võrduse õigsust tähtede a, b ja m mistahes ratsionaalarvuliste väärtuste puhul võib tõestada järgmiselt.

Me teame järgmist jagamise omadust (§ 26): et jagada summa mingi arvuga, võib jagada iga liidetava eraldi selle arvuga ja saadud jagatised liita. Tähendab:

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

Lugedes seda võrdust paremalt vasakule, saamegi võrduse (1). Tähendab, me liitsime õigesti.

Reegel 1. **Et liita ühenimelisi murde, tuleb liita nende lugejad ja saadud summa jagada nende ühise nimetajaga.**

Erinimeliste murdude liitmisel tuleb need murrud enne teisendada ühenimelisteks.

Ülesanne 2. *Õpilased sõitsid linna ekskursioonile. Jaama oli a km, kuhu nad sõitsid hobustega, liikudes kiirusega v km tunnis. Seejärel sõitsid nad b km rongiga, mille kiirus oli m korda suurem. Mitu tundi olid õpilased teel?*

Lahendus.

1) Jaama sõitsid õpilased $\frac{a}{v}$ tundi.

2) Rongi kiirus oli mv km tunnis.

3) Õpilased sõitsid rongiga $\frac{b}{mv}$ tundi.

4) Üldse olid õpilased teel $\left(\frac{a}{v}+\frac{b}{mv}\right)$ tundi.

Et lihtsustada saadud vastust, liidame murrud. Kuna murdude nimetajad on erinevad, siis tuleb need murrud teisendada ühenimelisteks. Näeme, et ühiseks nimetajaks on mv.

Tähendab, esimese murru lugeja ja nimetaja tuleb korrutada arvuga m. Saame:

$$\frac{a}{v}+\frac{b}{mv}=\frac{am}{mv}+\frac{b}{mv}=\frac{am+b}{mv}.$$

Reegel 2. **Et liita murde, tuleb nad teisendada ühenimelisteks, seejärel liita lugejad ja saadud summa jagada murdude ühise nimetajaga.**

§ 57. Murdude lahutamine.

Lahutamistehet defineeritakse kui liitmise pöördtehet, nimelt: lahutada ühest avaldisest teine — see tähendab leida niisugune kolmas avaldis, mille liitmisel lahutatavaga saame vähendatava.

Siit järeldub ühenimeliste murdude lahutamise reegel.

Reegel 1. **Et lahutada ühenimelisi murde, tuleb vähendatava lugejast lahutada lahutatava lugeja ja saadud vahe jagada nende murdude ühise nimetajaga.**

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Et tõestada selle võrduse õigsust, liidame lahutatava vahega:

$$\frac{b}{m}+\frac{a-b}{m}=\frac{b+a-b}{m}=\frac{a}{m}.$$

Saime vähendatava. Tähendab, lahutamistehe on sooritatud õigesti. Erinimeliste murdude lahutamisel tuleb need teisendada kõigepealt ühenimelisteks.

Ülesanne 1. *Oli vaja seemendada a hektarit põldu. Plaani järgi pidi kolhoos seemendama b hektarit päevas, kuid seemendas c hektari võrra rohkem. Mitu päeva enne tähtaega lõpetas kolhoos külvi?*

Lahendus.

1) Plaani järgi pidi kolhoos lõpetama külvi $\frac{a}{b}$ päevaga.

2) Tegelikult seemendas kolhoos päevas $(b+c)$ hektarit.

3) Kogu külvi lõpetas kolhoos $\frac{a}{b+c}$ päevaga.

4) Kolhoos lõpetas külvi $\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c}\right)$ päeva enne tähtaega.

Teostame lahutamise. Ühine nimetaja on $b(b+c)$.

Saame:

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} = \frac{a(b+c) - ab}{b(b+c)} = \frac{ac}{b(b+c)}.$$

Reegel 2. **Murdude lahutamisel tuleb nad teisendada ühenimelisteks, seejärel lahutada nende lugejad ja saadud vahe jagada murdude ühise nimetajaga.**

§ 58. Murdude korrutamine.

Algebraliste murdude korrutamise reegel ühtib aritmeetiliste murdude korrutamise reegliga.

Reegel. **Et korrutada murdu murruga, tuleb korrutada lugeja lugejaga ja nimetaja nimetajaga. Esimene korrutis tuleb võtta lugejaks, teine nimetajaks.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Kuna täisavaldist võib vaadelda kui murdu, mille nimetaja on üks, siis jääb esitatud reegel kehtima ka sel juhul, kui mõni tegureist on täisavaldis.

§ 59. Murdude jagamine.

Vaadeldes jagamist korrutamise pöördtehtena, saame murdude jagamiseks järgmise reegli.

Reegel. **Et jagada murdu murruga, tuleb esimene murd korrutada teise murru pöördväärtusega.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Tõestame selle võrdsuse õigsust. Korrutame saadud jagatise jagajaga:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Saime jagatava. Tähendab, jagamistehe on sooritatud õigesti. Kuna iga täisavaldist võib vaadelda murruna, mille lugeja on 1, siis jääb esitatud reegel kehtima ka sel juhul, kui jagatav või jagaja on täisavaldis.

KUUES PEATÜKK.

ÜHE TUNDMATUGA ESIMESE ASTME VÕRRANDID.

§ 60. Üldmõisted.

1. Võrrandi definitsioon.

Olgu antud kaks algebralist avaldist:

$$4x - 5 \text{ ja } 2x + 9.$$

Nende avaldiste arvuline väärtus sõltub tähe x arvulistest väärtustest, nagu see nähtub järgmisest tabelist. Tabeli esimeses reas on antud x väärtused, teises ja kolmandas reas aga antud algebraliste avaldiste vastavad väärtused.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x-5$	-13	-9	-5	-1	3	7	11
$2x+9$	5	7	9	11	13	15	17

Esitame küsimuse: kas leidub x selline väärtus, mille puhul antud avaldiste väärtused on võrdsed?

Teiste sõnadega: milliste x väärtuste puhul on õige võrdus:

$$4x - 5 = 2x + 9.$$

See võrdus sisaldab tähega x tähistatud tundmatut arvu.

Sellist võrdust nimetatakse ühe tundmatuga võrrandiks.

Ühe tundmatuga võrrandiks nimetatakse võrdust, milles üks tähega tähistatud arv on tundmatu.

Märgime, et ühe tundmatuga võrrand võib peale tundmatut tähistava tähe sisaldada ka teisi tähti, mis tähistavad tuntud, määratud arve.

Toome veel ühe tundmatuga võrrandite näiteid.

$$1)\ 5x = 2;\quad 2)\ \frac{6a}{x-11} = 1;\quad 3)\ \frac{5}{x-3} = \frac{2}{x-1};$$

$$4)\ \frac{x^2-1}{x+2} = 3;\quad 5)\ 3x^4 - 5x^2 + 9 = 0;\quad 6)\ x^5 = a.$$

Kõigis neis võrrandeis on tundmatuks arvuks x, aga seal, kus on ka teisi tähti (teises ja kuuendas võrrandis), loeme need teised tähed tuntuiks.

Vasakul ja paremal pool võrdusmärki olevaid avaldisi nimetatakse võrrandi v a s a k u k s ja p a r e m a k s pooleks.

2. Võrrandi lahendid. Olgu antud võrrand:

$$3x - 7 = 29 - 6x.$$

Asendades x arvuga 4, saame:

$$3 \cdot 4 - 7 = 5 \quad \text{ja} \quad 29 - 6 \cdot 4 = 5.$$

Mõlemad võrrandi pooled osutusid võrdseteks ühe ja sama arvuga. Saime samasuse. Vastupidi, kui asendame x mistahes teise arvuga, näiteks 5-ga, siis saame:

$$3 \cdot 5 - 7 = 8;\quad 29 - 6 \cdot 5 = -1.$$

Vasak pool osutus võrdseks 8-ga, parem pool aga — 1-ga.

Saime ebaõige võrduse. Võrrandi lahendamise ülesanne seisnebki selles, et määrata, millistel tundmatu väärtustel võrrandi mõlemad pooled on võrdsed ühe ja sama arvuga. Teiste sõnadega, tuleb leida, millistel tundmatu väärtustel võrdus osutub samasuseks.

Lahendada võrrand tähendab leida kõik need tundmatu väärtused, mis muudavad võrrandi samasuseks.

Kõiki selliseid tundmatu väärtusi nimetatakse võrrandi l a h e n d i t e k s.

Nii on eelmises näites $x = 4$ võrrandi

$$3x - 7 = 29 - 6x$$

lahendiks.

Öeldakse ka, et väärtus $x = 4$ r a h u l d a b v õ r r a n d i t

$$3x - 7 = 29 - 6x.$$

Vastupidi, näiteks, väärtus $x = 5$ ei rahulda seda võrrandit.

3. Võrrandi lahendite arv.

Võrrandil võivad üldse lahendid puududa.

Võtame näiteks võrrandi:

$$x + 5 = x + 1.$$

Millise väärtuse me ka ei annaks tähele x, jääb selle võrrandi vasak pool ikkagi alati 4 võrra suuremaks paremast poolest. Tähendab, ei ole olemas x väärtusi, mis muudaksid selle võrrandi samasuseks. Võrrandil ei ole lahendeid.

Võrrandil võib olla ainult üks lahend.

Näiteks võrrandil:

$$x + 3 = 7$$

on üks lahend, ja nimelt $x = 4$.

Tõepoolest, asendades võrrandis x arvuga 4, saame samasuse:

$$4 + 3 = 7.$$

Asendades antud võrrandis x mistahes teise, 4-st väiksema arvuga, saame pärast arvu 3 liitmist summaks arvu, mis on väiksem kui 7. Võttes aga 4-st suurema arvu, saame selle ja 3 summaks suurema arvu kui 7. Tähendab, arv 4 on ainus, mille summa 3-ga on 7, s. t. arv 4 muudab antud võrrandi samasuseks.

Võrrandil võib olla mitu lahendit.

Võrrandil

$$(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 0$$

on kolm lahendit: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$.

Tõepoolest, $x = 1$ korral muutub nulliks esimene tegur, $x = 2$ korral teine, $x = 5$ korral kolmas. Kui aga kas või üks korrutise tegureist on võrdne nulliga, siis on ka korrutis võrdne nulliga.

Kui asetame võrrandisse x asemele mistahes teise arvu, siis näeme, et ükski vasaku poole tegureist ei muutu nulliks. Järelikult ei muutu nulliks ka nende korrutis.

Võrrandil võib olla lõpmata palju lahendeid.

Olgu antud võrrand:

$$5(x - 3) + 2 = 3(x - 4) + 2x - 1.$$

Asendades x mistahes arvuga, veendume, et iga kord on võr-

randi vasak ja parem pool võrdsed. Tähendab, selle võrrandi lahendiks võib olla mistahes arv. Näitame seda.

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$5x - 15 + 2 = 3x - 12 + 2x - 1$$

ehk

$$5x - 13 = 5x - 13.$$

Näeme, et võrrandi mõlemal poolel on üks ja sama avaldis.

Niisiis, antud võrrand osutus võrduseks, mis on õige mistahes x väärtusel. Me aga teame (§ 31), et niisugust võrrandit nimetatakse samasuseks.

Järelikult võib võrrand osutuda mõnikord ka samasuseks.

Tähendab, samasust võib vaadelda kui võrrandi erijuhtu. See on võrrand, mille lahendeiks võivad olla tundmatu mistahes lubatavad väärtused.

§ 61. Samaväärsed võrrandid.

1. Lahendame võrrandid

$$1)\ 2x - 5 = 11 \quad \text{ja} \quad 2)\ 7x + 6 = 62.$$

Saame:

$$2x = 16 \qquad 7x = 56$$
$$x = 8 \qquad x = 8$$

Mõlemal võrrandil on üks ja sama lahend.

Definitsioon. **Kaht võrrandit nimetame samaväärseiks, kui ühe võrrandi lahendid on ka teise võrrandi lahendeiks ja ümberpöördult.**

Tähendab, ülaltoodud kaks võrrandit on samaväärsed.

Vastupidi, näiteks võrrandid:

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \quad \text{ja} \quad x - 2 = 0$$

ei ole samaväärsed, sest esimese võrrandi lahendeiks on 2 ja 5, teise lahendiks aga ainult 2; seega nende võrrandite lahendid ei ole ühesugused.

Võtame kaks järgmist võrrandit:

$$x + 2 = 2(x + 1) - x \quad \text{ja} \quad 3x = 3(x - 1) + 3.$$

Neid võrrandeid rahuldavad x mistahes väärtused. Et selles veenduda, avame sulud. Saame:

$$x + 2 = 2x + 2 - x \quad \text{ja} \quad 3x = 3x - 3 + 3$$

ehk

$$x + 2 = x + 2 \quad \text{ja} \quad 3x = 3x.$$

Kummagi võrrandi mõlemad pooled kujutavad ühesuguseid algebralisi avaldisi ja seepärast on arusaadav, et x mistahes väärtustel on nende võrrandite mõlemad pooled võrdsed ühe ja sama arvuga.

Vastavalt antud definitsioonile on ka need võrrandid samaväärsed, kuna ühe võrrandi lahendid on ühtlasi ka teise võrrandi lahendeiks ja ümberpöördult.

Lõpuks vaatleme veel kaht sellist võrrandit:

$$x + 2 = x + 5 \quad \text{ja} \quad 2x + 7 = 2x.$$

Veendume, et kummalgi neist ei ole lahendeid. Tõepoolest, üksköik milliseid väärtusi me ka x-le ei annaks, jääb esimese võrrandi parem pool alati 3 võrra suuremaks vasakust poolest ja, järelikult, mitte ühelgi x väärtusel ei ole võrdus õige.

Täpselt samuti jääb teise võrrandi vasak pool x mistahes väärtusel alati 7 võrra suuremaks paremast poolest ja kunagi ei või nad osutuda võrdseteks.

Niisiis, neil võrrandeil ei ole ühtki lahendit.

Ka selliseid võrrandeid, millel ei ole ühtki lahendit, loeme samaväärseiks.

Samaväärsete võrrandite kohta kehtib järgmine teoreem.

T e o r e e m. **Kaks võrrandit, mis on samaväärsed kolmandaga, on samaväärsed.**

Näiteks, võrrandid:

$$3x + 5 = 6x - 7,$$
$$x + 3 = 2x - 1$$

on samaväärsed, kuna neil on üks ja sama lahend $x = 4$.

Võrrandid:

$$2x + 3 = 3x - 1,$$
$$x + 3 = 2x - 1$$

on samuti samaväärsed, sest ka neil on üks ja sama lahend $x = 4$.

Tähendab, ka võrrandid:

$$3x + 5 = 6x - 7,$$
$$2x + 3 = 3x - 1$$

on samaväärsed. Nende võrrandite ainsaks lahendiks on $x = 4$.

Meenutame, kuidas me senini lahendasime võrrandeid.

Lahendame näitena võrrandi:

$$\frac{5x}{8} - 7 = 13. \qquad (1)$$

Vaadeldes $\frac{5x}{8}$ kui tundmatut vähendatavat, võime kirjutada:

$$\frac{5x}{8} = 20. \qquad (2)$$

Vaadeldes $5x$ kui tundmatut jagatavat, saame võrrandi:

$$5x = 160. \qquad (3)$$

Lõpuks, vaadeldes tähte x kui tundmatut tegurit, saame võrrandi:

$$x = 32, \qquad (4)$$

millest järeldame, et selle võrrandi lahendiks, aga samuti ka kõigi eelmiste võrrandite lahendiks on arv 32.

Seega, me asendasime ühe võrrandi teise, lihtsama võrrandiga. Leides, et võrrandi (4) ainsaks lahendiks on 32, järeldasime, et see on ka võrrandite (3), (2) ja lõpuks võrrandi (1) ainsaks lahendiks. Me järelikult arvestasime, et kõik need neli võrrandit on samaväärsed.

Kas aga tegelikult on see nii?

Kas me saime iga teisenduse puhul, millised sooritasime võrrandiga, alati eelmisega samaväärse võrrandi?

Seda küsimust selgitame järgmises paragrahvis.

§ 62. Võrrandi kaks põhiomadust.

Näidete varal võime veenduda võrrandi kahes järgmises tähtsas omaduses.

Omadus 1. **Kui võrrandi mõlema poolega liita üks ja sama arv, siis uus võrrand on samaväärne esialgse võrrandiga.**

Näiteid.

1. Olgu antud võrrand:

$$6x + 7 = 31.$$

Selle võrrandi ainsaks lahendiks on $x = 4$.

Liidame võrrandi mõlema poolega 15

$$6x + 22 = 46.$$

Lahendades selle võrrandi, leiame, et ka sellel on ainult üks lahend, ja nimelt $x = 4$.

Liidame antud võrrandi mõlema poolega -7; $2\frac{1}{2}$; -4. Saame võrrandid:

$$6x = 24; \quad 6x + 9\tfrac{1}{2} = 33\tfrac{1}{2}; \quad 6x + 3 = 27.$$

Lahendades need, saame jälle kõigi võrrandite jaoks ainult ühe lahendi, nimelt $x = 4$.

2. Olgu antud võrrand:

$$2x + 6 = 2(x + 1) + 4.$$

Seda võrrandit rahuldavad tundmatu mistahes väärtused. (Avades sulud, veendume, et tegemist on samasusega.)

Liites mõlema poolega arvud 7, -4, saame võrrandid:

$$2x + 13 = 2(x + 1) + 11;$$
$$2x + 2 = 2(x + 1).$$

Ka neid võrrandeid rahuldavad x mistahes väärtused. Tähendab, mõlemad võrrandid on samaväärsed antud võrrandiga.

3. Lõpuks vaatleme võrrandit:

$$2x + 7 = 2x + 9.$$

Sellel võrrandil lahendid puuduvad, sest x mistahes väärtuse puhul võrrandi parem pool osutub 2 võrra suuremaks vasakust poolest. Liites mõlema poolega arvud 5, -7, -13, saame võrrandid:

$$2x + 12 = 2x + 14;$$
$$2x = 2x + 2;$$
$$2x - 6 = 2x - 4.$$

On kerge veenduda, et ühelgi neist võrrandeist pole lahendeid. Tähendab, nad on samaväärsed antud võrrandiga.

O m a d u s 2. **Kui võrrandi mõlemad pooled korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis uus võrrand on samaväärne esialgse võrrandiga.**

N ä i t e i d.

1. Vaatleme näiteks võrrandit:

$$3x - 5 = 13.$$

Selle võrrandi ainsaks lahendiks on $x = 6$.

Korrutame võrrandi mõlemad pooled 4-ga. Saame:

$$12x - 20 = 52.$$

Lahendades selle võrrandi, leiame, et ka selle ainsaks lahendiks on $x = 6$. Tähendab, mõlemad võrrandid on samaväärsed.

Korrutades antud võrrandi mõlemad pooled — 2-ga, 5-ga, $\frac{1}{3}$-ga, saame võrrandid:

$$-6x + 10 = -26; \quad 15x - 25 = 65; \quad x - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}.$$

Lahendades need, leiame, et kõigil neil võrrandeil on üks ja sama lahend, ja nimelt $x = 6$.

Tähendab, kõik need võrrandid on samaväärsed antud võrrandiga.

2. Võtame võrrandi:

$$2x + 6 = 2(x + 1) + 4.$$

Me juba teame, et seda võrrandit rahuldab tundmatu mistahes väärtus (võrrand on samasus).

Korrutades võrrandi mõlemad pooled arvudega 3; -2; $\frac{1}{2}$, saame võrrandid:

$$6x + 18 = 6(x + 1) + 12;$$
$$-4x - 12 = -4(x + 1) - 8;$$
$$x + 3 = (x + 1) + 2.$$

Avades sulud, võime kergesti veenduda, et ka need võrrandid on samasused. Tähendab, saadud võrrandid on samaväärsed esialgse võrrandiga.

3. Lõpuks vaatleme võrrandit:

$$2x + 7 = 2x + 9.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendeid. Korrutades selle võrrandi mõlemad pooled näiteks arvudega -3; $\frac{1}{2}$, saame võrrandid:

$$-6x - 21 = -6x - 27;$$
$$x + 3\frac{1}{2} = x + 4\frac{1}{2}.$$

On kerge näha, et ka neil võrrandeil ei ole lahendeid ja järelikult on nad samaväärsed antud võrrandiga.

Kasutades vaadeldud omadusi, võime nüüd kõik varem lahendatud võrrandid lahendada tähelepanu pööramata antud arvude ja nendega teostatavate aritmeetiliste tehete tulemuste vahelistele seostele.

Lahendame näiteks võrrandi:

$$\frac{5x}{8} - 7 = 13. \qquad (1)$$

Liidame võrrandi mõlema poolega 7. Esimese omaduse põhjal on saadud võrrand:

$$\frac{5x}{8} = 20 \qquad (2)$$

samaväärne antud võrrandiga (1).

Korrutame selle võrrandi mõlemad pooled 8-ga. Teise omaduse põhjal on saadud võrrand:

$$5x = 160$$

samaväärne võrrandiga (2) ja järelikult ka antud võrrandiga (1) (§ 61, teoreem).

Jagades selle võrrandi mõlemad pooled 5-ga (või korrutades $\frac{1}{5}$-ga), saame võrrandi:

$$x = 32,$$

mis on samaväärne antud võrrandiga (1).

Nüüd võib vastata eelmise paragrahvi lõpus esitatud küsimusele. Ilmneb, et minnes üle ühelt võrrandilt teisele aritmeetiliste tehete komponentide vahelise sõltuvuse põhjal, me tegelikult kasutasime eespool toodud kaht võrrandite omadust ja, järelikult, saime iga kord eelmisega samaväärse võrrandi.

§ 63. Võrrandid, kus tundmatu esineb mõlemal poolel.

Senini me lahendasime võrrandeid, milles tundmatu esines ainult võrrandi ühel poolel. Leidub aga võrrandeid, kus tundmatu esineb võrrandi mõlemal poolel, näiteks:

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Me oskaksime lahendada seda tüüpi võrrandit, kui saaksime seda teisendada nii, et tundmatut sisaldavad liikmed oleksid ainult võrrandi ühel poolel.

Selleks muudame veidi paragrahvis 62 antud esimese omaduse sõnastust.

Me näitasime seal, et liites võrrandi mõlema poolega ühe ja sama arvu, saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi.

Näitame nüüd, et võrrandi mõlema poolega võib liita mitte ainult arvu, vaid ka iga hulkliikme, mis sisaldab tundmatut.

Sõnastame esimese omaduse järgmiselt.

Kui võrrandi mõlema poolega liita üks ja sama tundmatut sisaldav hulkliige, siis saadud võrrand on samaväärne antud võrrandiga.

Selgitame seda näidete abil.

1. Olgu antud võrrand:

$$3x - 7 = 8.$$

Lahendades selle, saame võrrandi lahendiks $x = 5$.

Liidame antud võrrandi mõlema poolega üksliikme $-2x$. Saame võrrandi:

$$3x - 7 - 2x = 8 - 2x;$$
$$x - 7 = 8 - 2x.$$

Asendades selles võrrandis x arvuga 5, veendume, et 5 on ka selle võrrandi lahendiks. Teisi lahendeid sellel võrrandil olla ei saa. Tõepoolest, $x = 5$ puhul on selle võrrandi mõlemad pooled võrdsed ühe ja sama arvuga. Kui anname tundmatule x viiest suurema väärtuse, siis võrrandi $x - 7 = 8 - 2x$ vasak pool suureneb (sest vähendatav suureneb), parem pool aga väheneb (sest lahutatav suureneb) ja võrdus ei jää seega enam kehtima. Kui anname tundmatule x viiest väiksema väärtuse, siis, vastupidi, vasak pool väheneb, parem pool suureneb.

Järelikult, võrrand $x - 7 = 8 - 2x$ on samaväärne võrrandiga $3x - 7 = 8$.

Liidame antud võrrandi $3x - 7 = 8$ mõlema poolega mistahes hulkliikmed, näiteks $3x - 5$; $x^2 - 7x + 3$. Pärast sarnaste liikmete koondamist saame võrrandid:

$$6x - 12 = 3x + 3;$$
$$x^2 - 4x - 4 = x^2 - 7x + 11.$$

Asendades neis võrrandeis x arvuga 5, veendume, et 5 on ka nende võrrandite lahendiks.

2. Võtame võrrandi:

$$3x + 5 = 2(x + 2) + x + 1.$$

Seda võrrandit rahuldavad x mistahes arvulised väärtused.

Liites selle võrrandi mõlema poolega hulkliikme $x^2 - 5x + 1$, saame võrrandi:

$$x^2 - 2x + 6 = 2(x + 2) + x^2 - 4x + 2.$$

Seda võrrandit rahuldab samuti x iga väärtus. (Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, veendume, et võrrandi mõlemad pooled on ühesugused.)

Tähendab, saadud võrrand on samaväärne antud võrrandiga.

3. Lõpuks, võtame võrrandi:

$$x = x + 3.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendeid. Liites mõlema poolega näiteks hulkliikme $x^2 - 3$, saame võrrandi:

$$x^2 + x - 3 = x^2 + x.$$

On ilmne, et ka saadud võrrandil ei ole lahendeid, sest x mistahes väärtusel on parem pool alati 3 võrra suurem vasakust poolest.

Tähendab, ka sel juhul saime samaväärsed võrrandid.

Seega me veendusime näidete varal võrrandite esimese omaduse üldisema sõnastuse õigsuses. Kuna iga arv on üksliige, siis on järelikult paragrahvis 62 esitatud esimene omadus siinesitatu erijuhtumiks.

Kasutades seda omadust, võime kergesti lahendada selle paragrahvi alguses antud võrrandi:

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Liidame mõlema poolega $2x$. Saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi:

$$3x - 17 + 2x = 18 - 2x + 2x$$

ehk pärast lihtsustamist:

$$5x - 17 = 18.$$

Kuid seda võrrandit me juba oskame lahendada. Saame:

$$5x = 35; \quad x = 7.$$

Asendades antud võrrandis x arvuga 7, saame:

$$3 \cdot 7 - 17 = 4; \quad 18 - 2 \cdot 7 = 4; \quad 4 = 4.$$

Lahend on leitud õigesti.

Teeme võrrandite esimesest omadusest mõningad järeldused.

Võtame võrrandi:

$$2x - 5 + 4x = 17 + 4x.$$

Võrrandi mõlemal poolel on üks ja sama liige $4x$. On ilmne, et kui võrrandi mõlema poolega liita $-4x$ (ehk, mis on sama, lahutada $4x$), siis need liikmed mõlemal poolel hävivad ja me saame otsekohe võrrandi $2x - 5 = 17$, mis on samaväärne antud võrrandiga.

Kui võrrandi mõlemal poolel on ühesuguseid liikmeid, siis need võib ära jätta.

Võtame võrrandi:

$$3x + 11 = 26 - 2x.$$

Et tuua tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele, tuleb võrrandi mõlema poolega liita $2x$. Vabaliikmete toomiseks paremale poolele tuleb võrrandi mõlema poolega liita -11.

Saame:

$$3x + 11 + 2x - 11 = 26 - 2x + 2x - 11$$

ehk

$$3x + 2x = 26 - 11.$$

Võrreldes seda võrrandit antud võrrandiga, näeme, et liige $-2x$ on nüüd võrrandi vasakul poolel, 11 aga paremal, kuid mõlema märk on muutunud vastupidiseks. Seepärast võime öelda:

Võrrandi iga liiget võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes seejuures liikme märgi vastupidiseks.

Näide.

$$7x - 11 - 2x + 4 = 3x + 18 + x - 2.$$

Viime kõik tundmatut sisaldavad liikmed vasakule, vabaliikmed aga paremale poolele ja muudame seejuures nende märgid vastupidisteks. Saame:

$$7x - 2x - 3x - x = 18 - 2 + 11 - 4$$

ehk

$$x = 23.$$

§ 64. Ühe tundmatuga esimese astme võrrand.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$ax + b = 0,$$

kus x on tundmatu arv, a (tundmatu juures olev kordaja) — mistahes nullist erinev arv, b (vabaliige) — mistahes arv.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandid on näiteks järgmised:

$$3x - 17 = 0; \quad 0{,}5x + 8 = 0; \quad \frac{5x}{7} - \frac{3}{4} = 0 \text{ jne.}$$

Paljud võrrandid taanduvad pärast mõningaid teisendusi ühe tundmatuga esimese astme võrrandeiks.

Toome näite.

$$\frac{3(x-1)}{2} + \frac{x-4}{3} = 12 - \frac{x+1}{2}.$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled 6-ga. Pärast taandamist saame:

$$9(x-1)+2(x-4)=72-3(x+1).$$

Avame sulud:

$$9x-9+2x-8=72-3x-3.$$

Viime kõik liikmed paremalt poolelt vasakule poolele (vastupidiste märkidega) ja koondame sarnased liikmed. Saame:

$$14x-86=0.$$

Võrrandite esimese ja teise omaduse põhjal on saadud võrrand $14x-86=0$ samaväärne antud võrrandiga. Mõlema võrrandi lahendiks on $x=6\frac{1}{7}$.

Tõestame järgmise teoreemi.

T e o r e e m. **Ühe tundmatuga esimese astme võrrandil on alati üks lahend.**

T õ e s t u s.

Olgu antud võrrand:

$$ax+b=0.$$

Viime b paremale poolele. Saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi:

$$ax=-b.$$

Jagades nüüd võrrandi mõlemad pooled nullist erineva arvuga a, saame tundmatule x ainult ühe väärtuse, ja nimelt:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

(Aritmeetikast teame, et jagamine on ühene tehe, s. t. jagatis on üheselt määratud.)

§ 65. Võrrandite lahendamise üldine eeskiri.

Igasuguse võrrandi lahendamine taandub antud võrrandi asendamisele temaga samaväärse, kuid lihtsama võrrandiga. Saadud võrrandi asendame omakorda kolmandaga ja jatkame seda seni, kuni saame lihtsaima võrrandi kujul $x=a$, mis vahetult ütleb, et tundmatu peab võrduma arvuga a. Järelikult, $x=a$ peab olema ka kõigi eelmiste võrrandite, sealhulgas ka antud võrrandi lahendiks.

Võtame mõned võrrandid ja vaatame, milliseid teisendusi tuleb teostada, et jõuda lihtsaima võrrandini.

Lahendame võrrandi:

$$\frac{x-4}{3}+\frac{2(x+1)}{4}-1=\frac{5(x-3)}{2}+2x-\frac{11x+43}{6}.$$

1) Muudame kõigi liikmete kordajad täisarvudeks. Selleks korrutame võrrandi kõik liikmed nimetajate väikseima ühiskordsega, antud juhul 12-ga. Pärast taandamist saame:

$$4(x-4)+6(x+1)-12=30(x-3)+24x-2(11x+43).$$

2) Et eraldada tundmatut sisaldavad liikmed vabaliikmetest, avame sulud.

$$4x-16+6x+6-12=30x-90+24x-22x-86.$$

3) Viime nüüd tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele, vabaliikmed teisele poolele.

$$4x+6x-30x-24x+22x=-90-86+16-6+12.$$

4) Lihtsustame võrrandit, koondades sarnased liikmed:

$$-22x=-154.$$

5) Jagame mõlemad pooled — 22-ga. Saame:

$$x=7.$$

Selle võrrandi, aga järelikult ka kõigi eelnevate võrrandite lahendiks on 7.

Soovitame õpilastel kontrollida leitud lahendit, asendades igas võrrandis x arvuga 7, ja veenduda, et 7 on kõigi nende võrrandite lahendiks.

Lahendame veel võrrandi:

$$\frac{x-2}{2}-1=\frac{x-4}{a}$$

1) Kõigepealt eeldame, et a ei võrdu nulliga (kirjutatakse $a\neq 0$), kuna $a=0$ korral kaotaks võrrandi parem pool mõtte.

Vabastame võrrandi murrulistest liikmetest. Nimetajate väikseim ühiskordne on $2a$. Korrutades võrrandi mõlemad pooled $2a$-ga, saame pärast taandamist:

$$a(x-2)-2a=2(x-4).$$

2) Avame sulud.

$$ax-2a-2a=2x-8.$$

3) Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele, vabaliikmed teisele poolele.

$$ax-2x=-8+2a+2a.$$

4) Koondame sarnased liikmed.

$$ax - 2x = 4a - 8$$

ehk

$$(a - 2)x = 4(a - 2).$$

Kui a ei ole võrdne 2-ga, siis on meil tegemist esimese astme võrrandiga, mille lahendamiseks jagame mõlemad pooled avaldisega $(a - 2)$:

Saame:

$$x = 4.$$

Kui $a = 2$, siis saame:

$$0 \cdot x = 0,$$

s. t. võrrand ei ole enam esimese astme võrrand.

On ilmne, et see võrdus on õige x mistahes väärtusel, sest korrutades mistahes arvu nulliga, saame tulemuseks ikka nulli.

Selgitame, miks see nii on. Asetame antud võrrandisse a asemele 2. Saame:

$$\frac{x-2}{2} - 1 = \frac{x-4}{2}$$

ehk

$$\frac{x-4}{2} = \frac{x-4}{2}.$$

Seega on antud juhul võrrandi mõlemal poolel ühesugused avaldised. Seepärast on ka arusaadav, et võrdus on õige x mistahes väärtusel.

Esitatud lahenduskäik näitab, et keerukamatel juhtudel võib lahendada võrrandit järgmise eeskirja kohaselt:

1. Vabastada võrrand murrulistest liikmetest.
2. Avada sulud.
3. Viia tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja vabaliikmed teisele poolele.
4. Koondada sarnased liikmed.
5. Kui tundmatu juures olev kordaja on nullist erinev, siis jagada sellega võrrandi mõlemad pooled.

See eeskiri ei pea aga mingil juhul olema kohustuslik igasuguse võrrandi lahendamisel.

Esiteks, lihtsamate võrrandite lahendamisel tuleb sageli alustada mitte esimesest, vaid teisest, kolmandast või isegi viiendast etapist.

Teiseks, mitmesugused vahepealsed etapid võivad osutuda lahendamisel mittevajalikeks.

Näide.

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}.$$

Pärast võrrandi vabastamist murdudest saame:

$$4x-6=3x+4,$$

ning seejärel kohe:

$$4x-3x=4+6.$$

Siit $x=10$.

Sulgusid avada siin ei tulnud.

Kolmandaks (ja see on peamine), mõnikord on otstarbekohane rikkuda eeskirjas ettenähtud järjekorda, kuna siis võrrand lahendub lihtsamini ja lühemalt.

Näiteid.

1. $7(x-3)=56$.

Siin tuleb, jättes sulud avamata, jagada mõlemad pooled 7-ga. Saame:

$$x-3=8;\ x=11.$$

Võrrand lahendus kahe tehtega.

Lahendamine eeskirja järgi oleks nõudnud neli tehet (kaks korrutamist, liitmine ja jagamine).

2. $\frac{17}{2}x+3=\frac{3x}{2}+87$.

Siin on otstarbekohasem alustada kohe kolmandast etapist, kuna on näha, et pärast sarnaste liikmete koondamist on x kordaja täisarv.

Veelgi parem on teostada üheaegselt kolmas ja neljas etapp, s. t. lahutada mõttes $\frac{17}{2}$-st $\frac{3}{2}$ ja 87-st 3 ning kohe kirjutada:

$$7x=84;\quad x=12.$$

§ 66. Ülesannete lahendamine võrrandite abil.

Meenutame, millises järjekorras me seniajani lahendasime ülesandeid võrrandite abil.

1. Märkisime mingi tähega (harilikult tähega x) tundmatu arvu, mille leidmist nõudis ülesande küsimus.

2. Selle tähe ja ülesandes antud arvude abil väljendasime kõik ülejäänud tundmatud arvud, milledest räägiti ülesandes.

3. Koostasime avaldise, mis võrdus ühe ülesandes antud arvuga.

4. Võrrutasime saadud avaldise selle arvuga. Saime võrrandi.

5. Lahendasime ülesande ja saime vastuse ülesande küsimusele.

6. Kui ülesandes nõuti leida mitte üks, vaid mitu arvu, siis teades ühte neist, leidsime ka ülejäänud.

Näitame nüüd, kuidas rakendada neid juhiseid ülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1. *Dnepri ja Doni pikkus kokku on 4255 km. Dnepr on Donist 315 km võrra pikem. Kui pikk on Don ja kui pikk on Dnepr?*

1) Meil tuleb leida kaks arvu: Dnepri pikkus ja Doni pikkus. Märgime ühe neist, näiteks Doni pikkuse, tähega x. Kirjutame:

Doni pikkus on x kilomeetrit.

2) Teine tundmatu arv on Dnepri pikkus. Ülesandes on aga öeldud, et Dnepr on Donist 315 km võrra pikem. Tähendab, Dnepri pikkuse väljendamiseks tuleb Doni pikkusele liita 315 km. Kirjutame:

Dnepri pikkus on $(x + 315)$ kilomeetrit.

3) Ülesandes on antud veel üks suurus — Dnepri ja Doni pikkuste summa. Kuid me võime väljendada selle ühise pikkuse ka teisiti, nimelt liites x kaudu väljendatud Doni ja Dnepri pikkused. Kirjutame:

Doni ja Dnepri pikkus kokku on $x + (x + 315)$ km.

4) Kuna ülesande tingimuste kohaselt Dnepri ja Doni ühine pikkus on 4255 km, siis võime koostada võrrandi.

Ülesande tingimuse kohaselt:

$$x + (x + 315) = 4255.$$

5) Lahendades võrrandi, leiame:

$$x = 1970.$$

Seega Doni pikkus on 1970 km.

6) Nüüd tuleb leida veel Dnepri pikkus. Kuna see on üles kirjutatud teises punktis, siis asendades seal x arvuga 1970, leiame:

Dnepri pikkus on $1970 + 315 = 2285$ (km).

Ülesanne 2. *Lasteaia jaoks osteti 16 suurt ja väikest palli, mille eest maksti kokku 244 rbl. Suur pall maksis 25 rbl., väike 12 rbl. Kui palju osteti suuri ja kui palju väikseid palle?*

Lahenduse viime läbi järgmises järjekorras.

1) Suuri palle osteti x tükki.
2) Väikseid palle osteti $(16 - x)$ tükki.
3) Kõik suured pallid maksid kokku $25x$ rubla.
4) Kõik väiksed pallid maksid kokku $12(16 - x)$ rubla.
5) Kõik suured ja väiksed pallid maksid kokku

$$25x + 12(16 - x) \text{ rubla.}$$

Ülesande tingimuse kohaselt:

$$25x + 12(16 - x) = 244.$$

6) Lahendades võrrandi, leiame, et $x = 4$.
7) Väikseid palle osteti $16 - 4 = 12$ tükki.

Selle ülesande lahendamisel esines kummagi sordi puhul kolm üksteisest sõltuvat suurust: pallide arv, ühe palli hind ja pallide koguhind. See sõltuvus saab selgemaks ja ühtlasi ka võrrandi koostamine kergemaks, kui kogu lahenduskäik kirjutada üles mitte üksikute punktide kaupa, nagu seda tegime eespool, vaid tabeli kujul.

Koostame sellise tabeli:

	Pallide arv	Ühe palli hind	Pallide koguhind
1. Suured pallid			
2. Väiksed pallid			

Täidame selle tabeli ruudud järgmiselt: 1) kirjutame kolmandasse veergu palli hinnad, mis on meil teada; 2) tähistame teises veerus tähega x suurte või väikeste pallide arvu; teiste pallide arv on siis $16 - x$; 3) lõpuks täidame neljanda veeru, korrutades palli hinna pallide arvuga.

Tabel on täidetud. Nüüd tuleb vaid liita neljandas veerus asetsevad avaldised ja saadud summa võrrutada 244-ga. Saame võrrandi.

Kogu lahenduse võib esitada järgmisel kujul:

	Pallide arv	Ühe palli hind	Pallide koguhind
1. Suured pallid	x	25	$25x$
2. Väiksed pallid	$16-x$	12	$12(16-x)$

Ülesande tingimuse kohaselt: $25x+12(16-x)=244$.

Lahendada sama ülesanne tabeli abil, tähistades nüüd aga tähega x väikeste pallide arvu.

Ülesanne 3. *Esimeses laos oli 2300 m³ puid, teises 2800 m³. Teisest laost viidi ära 5 korda rohkem puid kui esimesest ja siis jäi neid mõlemasse lattu ühepalju. Kui palju puid viidi ära kummastki laost?*

Kuna ülesandes on öeldud, et ladudesse jäi puid võrdselt, siis väljendame puude jäägi kummaski laos x abil ja võrdsustame need jäägid.

Lahenduse võib esitada järgmiselt.

1) Esimesest laost viidi ära x m³ puid.
2) Esimesse lattu jäi järele $(2300-x)$ m³ puid.
3) Teisest laost viidi ära $5x$ m³ puid.
4) Teise lattu jäi järele $(2800-5x)$ m³ puid.
5) Ülesande tingimuse kohaselt:

$$2300-x=2800-5x.$$

6) Lahendame saadud võrrandi.

$$4x=500;\quad x=125.$$

7) Esimesest laost viidi ära 125 m³ puid, teisest laost aga $125\cdot 5=625$ m³ puid.

8) Kontroll. $2300-125=2175$; $2800-625=2175$.

Võrrandi koostamiseks on ka siin otstarbekohane kujutada lahenduse käik tabelina:

	Oli	Viidi ära	Jäi järele
Esimene ladu	2300	x	$2300-x$
Teine ladu	2800	$5x$	$2800-5x$

Tingimuse kohaselt: $2300-x=2800-5x$.

§ 67. Võrrandid, kus tundmatu esineb murru nimetajas.

Senini me lahendasime ainult niisuguseid võrrandeid, mis olid täisavaldised tundmatu suhtes, s. t. võrrandeid, mis sisaldasid murde, kuid mille nimetajad ei sisaldanud tundmatuid.

Sageli aga tuleb lahendada võrrandeid, kus tundmatu esineb murru nimetajas.

Näiteid.

1. $\frac{1}{x-3}=2.$ (1)

Et lahendada seda võrrandit, tuleb eelkõige vabaneda murrust. Selleks tuleb võrrandi mõlemad pooled korrutada $(x-3)$-ga, s. t. tundmatut sisaldava hulkliikmega. Kas aga uus võrrand on samaväärne antud võrrandiga? Et vastata sellele küsimusele, lahendame antud võrrandi.

Korrutades võrrandi mõlemad pooled $(x-3)$-ga, saame:

$$1=2(x-3). \quad (2)$$

Lahendades selle esimese astme võrrandi, leiame, et $x=3\frac{1}{2}$.

Niisiis, võrrandil (2) on ainult üks lahend $x=3\frac{1}{2}$.

Asetades selle võrrandisse (1), saame:

$$\frac{1}{3\frac{1}{2}-3}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2; \quad 2=2.$$

Tähendab, $x=3\frac{1}{2}$ on ka võrrandi (1) lahendiks.

Teisi lahendeid võrrandil (1) ei ole. Seda on näha näiteks sellest, et võrrandis (1) peab $x-3$ võrduma jagatava 1 ja jagatise 2 jagatisega, s. t.

$$x-3=1:2=\frac{1}{2}.$$

Siit:

$$x=\frac{1}{2}+3; \quad x=3\frac{1}{2}.$$

Seega on võrrandeil (1) ja (2) kummalgi ainult üks lahend, $x=2\frac{1}{2}$. Tähendab, nad on samaväärsed.

2. Lahendame nüüd järgmise võrrandi:

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{x+1}{x-3}+\frac{8}{(x-1)(x-3)}=0.$$

Väikseim ühine nimetaja on $(x-1)(x-3)$. Korrutame sellega võrrandi kõiki liikmeid. Pärast taandamist saame:

$$(x+5)(x-3)-(x+1)(x-1)+8=0.$$

Avame sulud:

$$x^2+5x-3x-15-x^2+1+8=0.$$

Koondades sarnased liikmed, saame:

$$2x-6=0.$$

Lahendades selle võrrandi, leiame:

$$x=3.$$

Asendades võrrandis (1) x arvuga 3, saame:

$$\frac{8}{2}-\frac{4}{0}+\frac{8}{0}=0.$$

Vasakul poolel saime avaldise, millel puudub mõte.

Tähendab, $x=3$ ei ole võrrandi (1) lahendiks. Siit järgneb, et võrrandid (1) ja (2) ei ole samaväärsed. Sellisel juhul ütleme, et võrrand (1) omandas korrutamisel avaldisega $(x-1)(x-3)$ võõrlahendi.

Seega tuleb eespool esitatud küsimusele vastata ainult nii.

Võrrandi mõlemate poolte korrutamisel tundmatut sisaldava hulkliikmega **võib saada antud võrrandiga mittesamaväärse võrrandi.**

Siit teeme järgmise järelduse. Kui võrrandi lahendamisel tuli võrrandi mõlemad pooled korrutada tundmatut sisaldava hulkliikmega, siis saadud lahendeid tuleb alati kontrollida, asetades need algvõrrandisse. Lahendid, mis algvõrrandit ei rahulda, tuleb jätta kõrvale kui võõrlahendid.

Näiteid.

1. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x+2}$.

Eeldame, et $x\neq 2$ ja $x\neq -2$ (need tundmatu väärtused ei ole lubatavad, kuna nende väärtuste puhul kaotab võrrand mõtte).

Väikseim ühine nimetaja on järgmine:

$$(x-2)(x+2)=x^2-4.$$

Korrutades sellega võrrandi mõlemad pooled ja taandades, saame võrrandi:

$$(x+1)(x+2)=(x-3)(x-2).$$

Lahendades selle, leiame, et $x=\frac{1}{2}$. Kui asendada $x=\frac{1}{2}$ antud võrrandisse, siis näeme et $x=\frac{1}{2}$ on ka selle lahendiks.

2. $$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}. \qquad (1)$$

Ka siin on väikseim ühine nimetaja x^2-4 (kusjuures $x\neq 2$ ja $x\neq -2$). Korrutades sellega võrrandi mõlemad pooled, saame:

$$(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)=12; \qquad (2)$$
$$x^2+3x+2-x^2+5x-6=12;$$
$$8x-4=12;\quad x=2.$$

Võrrandi (2) lahendiks on seega $x=2$. Kuid see on võrrandi (1) võõrlahendiks, kuna 2 ei ole x lubatav väärtus.

Tähendab, võrrandil (1) ei ole lahendeid.

§ 68. Võrratuse mõiste.

Me oleme juba kasutanud märke, mis väljendavad kahe arvu või algebralise avaldise mittevõrdsust (vt. peatükk I, § 2).

Kaks algebralist avaldist, mis on ühendatud märgiga $>$ või $<$, moodustavad võrratuse.

Võrratuste näiteid:

$$5>-2;\quad a+b>c;\quad \frac{x-3}{2}>3x-1;$$

$$-7<-5;\quad x<y;\quad \frac{a+2}{a-1}>2a+5.$$

Kui kahel või enamal võrratusel on ühesugused võrratusmärgid, siis nimetatakse neid võrratusi samapidisteks.

Samapidiste võrratuste näiteid:

$$-3<1;\quad 3a<2a-1;\quad \frac{1}{5}<\frac{5}{7}.$$

Märke $>$ ja $<$ nimetatakse vastupidisteks.

Kui kahel võrratusel on vastupidised võrratusmärgid, siis nimetatakse neid võrratusi vastupidisteks.

Vaatleme võrratust:

$$a+5>a+1.$$

Asendades a mistahes arvuga, veendume, et võrratus on kõigil juhtumeil kehtiv. See on ka arusaadav. Esitame võrratuse järgmisel kujul:

$$a+1+4>a+1.$$

Vasak pool sisaldab sama avaldise mis paremgi ja veel liidetava 4. Tähendab, ükskõik milline arv ka panna a asemele, alati on vasak pool 4 võrra suurem paremast ja võrratus on alati kehtiv.

Definitsioon 1. **Võrratust, mis kehtib temas esinevate tähtede mistahes (lubatavatel) väärtustel, nimetatakse samaseks võrratuseks.**

Võrratuse lubatavad väärtused on sellised, mille puhul võrratusel on mõte.

Vaatleme võrratust:

$$x - 3 > 5.$$

Asendades x arvudega 1, 3, 5 saame mittekehtivad võrratused (näiteks saame, et -2 on suurem kui 5 jne.).

Kuid x väärtustel 9, $10\frac{1}{2}$, 13 jne. saame õiged võrratused:

$$6 > 5;\quad 7\tfrac{1}{2} > 5;\quad 10 > 5 \text{ jne.}$$

Seega osutub antud võrratus x teatud väärtustel kehtivaks, teiste puhul aga mitte.

Definitsioon 2. **Võrratust, mis kehtib ainult temas esinevate tähtede teatavatel kindlatel väärtustel, nimetatakse tundmatuid sisaldavaks võrratuseks.**

§ 69. Võrratuste omadused.

Vaatleme mõningaid võrratuste omadusi.

Esimene omadus. Võtame mingi kehtiva võrratuse, näiteks:

$$8 > 3.$$

Liidame mõlema poolega 1; 5; 17. Näeme, et iga kord jääb võrratus kehtima:

$$9 > 4;\ 13 > 8;\ 25 > 20.$$

Liidame mõlema poolega mistahes negatiivse arvu, näiteks: -1; -5; -8; -17 (ehk, mis on seesama, lahutame 1; 5; 8; 17). Saame jälle kehtivad võrratused:

$$7 > 2;\ 3 > -2;\ 0 > -5;\ -9 > -14.$$

Liidame lõpuks võrratuse mõlema poolega mingi hulkliikme, näiteks $3a - b$.

Saame: $8 + 3a - b > 3 + 3a - b$.

Seda võrratust võib ümber kirjutada järgmiselt:

$$5+3+3a-b>3+3a-b.$$

Millised ka ei oleks a ja b väärtused, ikka esineb võrratuse mõlemal poolel võrdne arv $3+3a-b$, kuid vasakul poolel on veel liidetav 5. Seepärast jääb ka a ja b mistahes väärtuste korral võrratuse vasak pool 5 võrra suuremaks paremast ja võrratus kehtib seega mistahes a ja b väärtuste puhul.

Kui võrratuse $8>3$ asemel võtame mõne vastupidise võrratuse, näiteks:

$$2<7,$$

siis, korrates kõiki eelnevaid arutlusi, leiame, et ka sel juhul jääb võrratus kehtima, kui liita mõlema poolega üks ja sama meelevaldne arv või täheline avaldis.

Seega võib võrratuse esimese omaduse sõnastada järgmiselt:

1. o m a d u s. **Võrratus jääb kehtima, kui tema mõlema poolega liita üks ja sama arv või hulkliige.**

Lühidalt võib seda omadust kirjutada järgmiselt.

Kui $a>b$, siis $a+c>b+c$.

Siin tähistatakse tähega c mistahes ratsionaalarvu või hulkliiget.

Oleks võinud aga kirjutada ka nii: kui $a<b$, siis $a+c<b+c$.

Nagu võrrandite puhul, nii tulenevad ka siin sellest omadusest teatud järeldused.

1. Mistahes võrratuse liiget võib viia ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

2. Kui võrratuse mõlemad pooled sisaldavad ühesuguseid liikmeid, siis võib need ära jätta.

Teine omadus. Võtame jälle mingi kehtiva võrratuse, näiteks:

$$6<8.$$

Korrutame selle mõlemad pooled mistahes positiivse arvuga a. Saame:

$$6a<8a.$$

Ka saadud võrratus on õige. Tõestame seda.

Võrratuse $6<8$ võime esitada järgmisel kujul:

$$6<6+2.$$

Kui korrutada selle võrratuse mõlemad pooled meelevaldse positiivse arvuga a, siis saame:

$$6a < 6a + 2a.$$

Vasak pool võrdub parema poole esimese liidetavaga.

Kuid paremal pool on veel positiivne liidetav $2a$. Seega on vasak pool paremast poolest väiksem.

Kuna jagamist nullist erineva arvuga võib asendada jagaja pöördväärtusega korrutamisega, siis võrratus jääb kehtima ka mõlema poole jagamisel mistahes positiivse arvuga.

Korrutame nüüd võrratuse $6 < 8$ mõlemad pooled mingi negatiivse arvuga, näiteks -3-ga. Siis vasakul poolel saadakse -18, paremal poolel -24. Kuna aga -18 on suurem kui -24, siis saame:

$$6 \cdot (-3) > 8 \cdot (-3).$$

Võrratus muutis märgi, s. t. võrratus muutus vastupidiseks võrratuseks.

Sama juhtub, kui võrratuse mõlemad pooled korrutada mistahes teise negatiivse arvuga, nagu seda näeme järgmistest näidetest.

Võrratus	Korrutaja	Uus võrratus
$6 < 8$	$-\frac{1}{2}$	$-3 > -4$
$7 > 6$	-1	$-7 < -6$
$3 > -1$	-5	$-15 < 5$

Lõpuks, kui mingi võrratuse mõlemad pooled korrutame nulliga, siis mõlemad pooled muutuvad nulliks, s. t. võrratus muutub võrduseks $0 = 0$.

Näiteks:

$$5 > 2;$$
$$5 \cdot 0 = 2 \cdot 0; \quad 0 = 0.$$
$$-2 < 3;$$
$$(-2) \cdot 0 = 3 \cdot 0; \quad 0 = 0.$$

Kõigest esitatust järgneb võrratuse teine omadus.

2. omadus. **Võrratus jääb kehtima, kui selle mõlemad pooled korrutada ühe ja sama positiivse arvuga.**

Võrratus muutub võrduseks $0 = 0$, kui tema mõlemad pooled korrutada nulliga.

Võrratus muutub vastupidiseks, kui selle mõlemad pooled korrutada ühe ja sama negatiivse arvuga.

Lühidalt võib teist omadust väljendada järgmiselt:
Kui $a > b$, siis:

$$c > 0 \text{ korral } ac > bc;$$
$$c = 0 \text{ korral } ac = bc;$$
$$c < 0 \text{ korral } ac < bc.$$

§ 70. Ühe tundmatuga esimese astme võrratused.

Definitsioon 1. **Ühe tundmatuga esimese astme võrratusteks nimetatakse võrratusi, mille mõlemad pooled on tundmatu suhtes esimese astme hulkliikmed:**

$$ax + b > cx + d;$$
$$ax + b < cx + d.$$

Märkus. Erijuhul võivad mõned teguritest a, b, c, d olla nullid ja see või teine võrratuse liige võib sisaldada ainult üht liiget või isegi võrduda nulliga. Näiteks:

$$5x - 3 > 2; \quad 3x + 1 < x; \quad x + 3 > 0.$$

Ainult a ja c ei või olla üheaegselt nullid, kuna sel juhul oleks meil tegemist lihtsalt arvulise võrratusega.

Lahendada võrratus tähendab leida, millistel tundmatu väärtustel võrratus on kehtiv.

Definitsioon 2. **Kaht võrratust nimetatakse samaväärseiks, kui ühe võrratuse lahendid on ka teise võrratuse lahendeiks ja ümberpöördult.**

Võrratuste omaduste põhjal võib tõestada järgmised tundmatut sisaldavate võrratuste omadused.

1. Kui võrratuse mõlema poolega liita üks ja sama arv või hulkliige (tundmatu suhtes), siis uus võrratus on samaväärne antud võrratusega.
2. Kui võrratuse mõlemad pooled korrutada ühe ja sama positiivse arvuga, siis uus võrratus on samaväärne antud võrratusega.
3. Kui võrratuse mõlemad pooled korrutada ühe ja sama negatiivse arvuga ja seejuures muuta võrratusmärk vastupidiseks, siis uus võrratus on samaväärne antud võrratusega.

Me näeme, et võrratuste omadused on sarnased võrrandite omadustega. Seepärast on ka võrratuste lahendamine sarnane võrrandite lahendamisega.

Selgitame seda näite varal.

Lahendame võrratuse:

$$5x - 7 > 3x + 1.$$

Viime tundmatuid sisaldavad liikmed võrratuse ühele poolele, vabaliikmed teisele poolele. Selleks liidame võrratuse mõlema poolega $-3x + 7$ (võrratuse esimene omadus). Saame:

$$5x - 3x > 1 + 7$$

ehk

$$2x > 8.$$

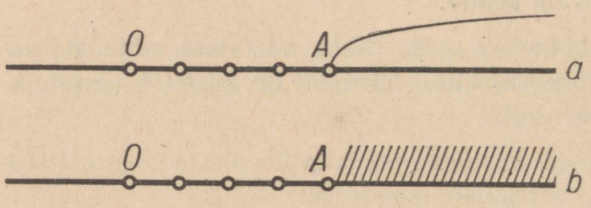
Jagame võrratuse mõlemad pooled 2-ga ehk korrutame $\frac{1}{2}$-ga (võrratuse teine omadus). Saame:

$$x > 4.$$

Seega antud võrratus kehtib x kõigi nende väärtuste puhul, mis on suuremad kui 4.

Leitud lahendit võib kujutada graafiliselt. Võtame arvtelje ja märgime sellel «punkti 4».

Olgu selleks punkt A (joon. 18).



Joon. 18.

Antud võrratust rahuldavad kõik need arvud, mis vastavad punktist A paremal asetsevatele punktidele. Lühiduse mõttes öeldakse: antud võrratust rahuldavad kõik punktist A paremal asetsevad punktid. Seda lahendite p i i r k o n d a märgitakse harilikult kaarega, nagu joonisel 18a, või viirutusega, nagu joonisel 18b.

§ 71. Ajaloolisi andmeid.

(Võrrandite ajaloost.)

Juba kauges minevikus kirjutatud matemaatika-alastes teostes leidus võrrandeid ja võrrandite abil lahenduvaid ülesandeid.

Ühes Egiptuse papüüruses, mis on pärit umbes 2000 aastat e. m. a. (kusjuures selle autor, kirjutaja Ahmes, märgib, et see matemaatiline teos on teise veelgi vanema teose koopia), leidub ülesandeid tundmatu arvu leidmiseks. Tundmatut nimetati sõnaga «*hau*» (kuhi) ja märgiti erilise hieroglüüfiga.

Toome ülesannete näiteid sellest papüürusest.

1) «Tundmatu, tema seitsmendik ja tema terve on 19».

Tänapäeval kirjutatakse see ülesanne nii:

$$\frac{1}{7}x + x = 19.$$

2) «$\frac{2}{3}$ liidetud ja $\frac{1}{3}$ ära võetud; jäi järele 10.»

Otsustades papüüruses esitatud lahenduse järgi, tuleb ülesannet mõista nii: tundmatule on liidetud tema $\frac{2}{3}$ ja lahutatud $\frac{1}{3}$ saadud summast; vahe on 10; leida arv.

Tänapäeval kirjutatakse see ülesanne nii:

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10.$$

Vastus: $x = 9$.

Ühe tundmatuga võrrandeid esineb ka Diophantosel (III sajand, vt. § 29). Näiteks:

«Arvud on 20 ja 100. Väiksema arvuga tuleb liita ja suuremast lahutada üks ja sama arv; saadud summa ja saadud vahe suhe võrdub 4-ga.»

Selle ülesande lahendamiseks tuleb kasutada võrrandit:

$$\frac{20 + x}{100 - x} = 4.$$

VII või VIII sajandist pärinevas india aritmeetika käsikirjas, mis on ühe vanema käsikirja (III—IV sajandist) koopia, on järgmine ülesanne:

«Neljast annetajast andis teine kaks korda rohkem esimesest, kolmas kolm korda rohkem teisest, neljas neli korda rohkem kolmandast, kõik kokku aga andsid 132. Kui palju andis esimene?»

Saame võrrandi:

$$x + 2x + 6x + 24x = 132.$$

Käsikirjas lahendatakse ülesanne «ebaõige oletuse» võttega. (Seda võtet kasutab ka L. Magnitski oma «Aritmeetikas».)

«Kui esimene oleks andnud 1, siis teine oleks andnud 2, kolmas 6, neljas 24, kõik kokku aga 33. Kokku oli aga tegelikult antud 132, s. o. neli korda rohkem. Tähendab, ka iga annetaja andis neli korda rohkem.»

Vastus. 4; 8; 24; 96.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite lahendamise üldvõtte andis IX sajandil Muchammad Al-Khwārizmi.

Oma teoses «Al-džabr ja al-mukābala» ta esitab kaks võrrandite lahendamisel kasutatavat võtet.

Esimene võte «al-džabr» seisneb järgmises. Kui võrrandis esineb negatiivseid (lahutatavaid) liikmeid, siis tuleb need liita võrrandi mõlema poolega ning kõik liikmed muutuvad positiivseiks.

Teine võte «al-mukābala» seisneb võrrandi mõlemast poolest ühesuguste liikmete lahutamises, mis lihtsustab võrrandit.

Olgu näiteks antud võrrand:

$$5x - 17 = 2x - 5.$$

Kasutame esimest võtet: liidame võrrandi mõlema poolega 5 ja 17. Saame:

$$5x + 5 = 2x + 17.$$

Rakendame teist võtet: Lahutame mõlemast poolest $2x$ ja 5. Saame:

$$3x = 12.$$

Siit on x juba kerge leida.

Al-Khwārizmi selle tähelepanuväärse töö ilmumist võib lugeda algebra kui iseseisva matemaatilise distsipliini tekkimise alguseks.

Nimetus «algebra» on võetud selle teose pealkirjast («Al-džabr»).

SEITSMES PEATÜKK.

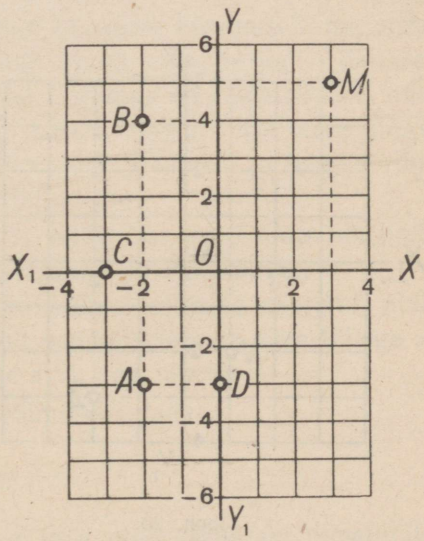
KAHE TUNDMATUGA VÕRRANDID.

§ 72. Punkti koordinaadid tasapinnal.

Võtame tasapinnal kaks ristuvat arvtelge XX_1 ja YY_1 (joon. 19). Nende lõikepunkti O loeme mõlema telje nullpunktiks. Nagu ka varem, kujutame positiivseid arve horisontaalteljel punktidena nullpunktist paremal pool, vertikaalteljel aga nullpunktist ülalpool. Negatiivseid arve kujutame punktidena nullpunktist vasakul pool (horisontaalteljel) ja allpool (vertikaalteljel).

Võtame tasapinnal meelevaldse punkti M ja tõmbame sellest ristsirged telgedele. Nende ristsirgete lõikepunktid telgedega kujutavad kindlaid arve. Neid kahte arvu loeme vastavateks punktile M. Joonisel 19 on need arvud 3 ja 5.

Punktile A joonisel 19 vastab arvude paar: — 2 ja 3, punktile B aga — 2 ja 4.



Joon. 19.

Definitsioon. **Tasapinnal punkti asendit määravaid arve nimetatakse selle punkti koordinaatideks.**

Tähendab, arvud 3 ja 5 on punkti M koordinaatideks, arvud — 2 ja — 3 punkti A koordinaatideks jne.

Tasapinnal punkti asendi määramiseks kasutatavaid arvteigi nimetatakse koordinaatteldegeks.

Et eraldada horisontaalteljel asetsevaid koordinaate vertikaalteljel asetsevatest koordinaatidest, on neile antud erinevad nimetused.

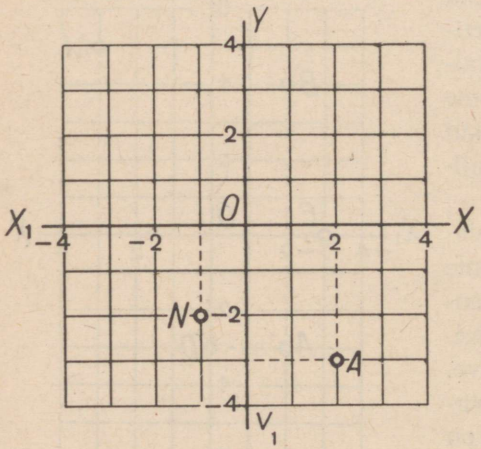
Horisontaalteljel asetsevat koordinaati nimetatakse abstsissiks, vertikaalteljel asetsevat koordinaati — ordinaadiks. Sellest lähtudes nimetatakse ka horisontaaltelge abstsisstelgedeks, vertikaaltelge aga ordinaatteljeks.

Koordinaadid kirjutatakse punkti tähisest paremale sulgudesse. Esimesele kohale kirjutatakse abstsiss, teisele kohale ordinaat.

Nii tähendab kirjutus $M(3; 5)$, et punkti M abstsiss võrdub kolmega, ordinaat — viiega.

Vaatleme punktide mõningaid eriasendeid.

Kui punkt asetseb abstsisstelgel, siis tema ordinaat on null. Nii on näiteks joonisel 19 punkti C koordinaadid — 3 ja 0.



Joon. 20.

Kui punkt asetseb ordinaatteljel, siis on tema abstsiss null [näiteks punkt $D(0; -3)$ (joon. 19)].

Lõpuks, koordinaatide alguse — punkti O — abstsiss ja ordinaat on mõlemad nullid: $O(0; 0)$.

Ülesanne 1. *Ehitada punkt tema antud koordinaatide järgi. Näiteks, ehitada punkt* $A(2; -3)$.

Lahendus Abstsisstelgel (joon. 20) leiame punkti 2 ja tõmbame sellest punktist ristsirge abstsisstelgele. Ordinaatteljel leiame punkti — 3 ja tõmbame sellest punktist ristsirge ordinaatteljele. Ristsirgete lõikepunkt määrabki otsitava punkti A.

Märkus. Kui koordinaatteljed ei ole antud, siis toimime järgmiselt.

Tõmbame kaks ristuvat sirget. Võtame meelevaldse lõigu

ühikuks ja paigutame selle koordinaatide algusest abstsisstelje 2 korda paremale, ordinaatteljel aga 3 korda allapoole. Saadud punktidest tõmbame ristsirged telgedele. Ristsirgete lõikepunkt määrabki otsitava punkti $A(2; -3)$.

Ülesanne 2. *Tasapinnal on antud koordinaatteljed ja meelevaldne punkt N. Määrata selle punkti koordinaadid.*

Lahenduskäik selgub punkti koordinaatide definitsioonist. Tõmbame antud punktist ristsirged koordinaattelgedele. Nende ristsirgete lõikepunktid koordinaattelgedega määravadki punkti koordinaadid.

Nii on joonisel 20 punkti N koordinaadid $(-1; -2)$.

§ 73. Kahe tundmatuga võrrandid.

Ülesanne 1. *Kaks õpilast ostsid kokku 6 vihikut. Mitu vihikut ostis kumbki õpilane?*

Kohe on näha, et kindlat vastust ülesande küsimusele me anda ei saa. Tõepoolest, ülesanne nõuab ainult seda, et kahel õpilasel oleks ostetud kokku 6 vihikut. See tingimus on täidetud, kui näiteks üks õpilane ostis 1 vihiku ja teine 5 vihikut. Ülesande tingimus on täidetud aga ka siis, kui üks ostab 2 vihikut ja teine 4 vihikut või kui mõlemad ostavad 3 vihikut jne.

Seega võib sellel ülesandel olla mitte üks, vaid mitu lahendit. Niisugusel juhtumil öeldakse, et ülesanne on määramatu.

Leiame selle ülesande kõik võimalikud lahendid võrrandi abil.

Tähistame esimese õpilase poolt ostetud vihikute arvu tähega x, teise õpilase poolt ostetud vihikute arvu aga tähega y.

Ülesande tingimuse kohaselt võime kirjutada:

$$x + y = 6.$$

Siin on kaks tundmatut arvu x ja y ning seepärast nimetataksegi võrrandit $x + y = 6$ kahe tundmatuga võrrandiks.

x ja y lubatavate väärtuste iga paar, mis muudab selle võrrandi samasuseks, on võrrandi lahendiks.

Andes x-le ühe lubatavaist väärtusist ja asetades selle antud võrrandisse, leiame vastava y väärtuse.

Kõik võimalikud lahendid võib esitada järgmise tabeli kujul:

Esimese õpilase poolt ostetud vihikute arv	x	1	2	3	4	5
Teise õpilase poolt ostetud vihikute arv	y	5	4	3	2	1
Ostetud vihikute arv kokku . .	$x+y$	6	6	6	6	6

Seega saime 5 erinevat lahendit ja järelikult ka 5 erinevat vastust ülesande küsimusele.

Võtame nüüd teise, esimesega sarnase ülesande.

Ülesanne 2. *Kaks tükki vaske kaalub kokku 6 kG. Kui palju kaalub iga tükk?*

Lahendamisel saame ka siin võrrandi

$$x + y = 6,$$

kuid lahendeid on sellel ülesandel palju rohkem.

Tõepoolest, esimeses ülesandes olid tundmatute lubatavateks väärtusteks ainult naturaalarvud ja seejuures mitte suuremad viiest (ülesande mõtte kohaselt ostis kumbki õpilane kasvõi ühe vihiku). Teises ülesandes on tundmatute lubatavateks väärtusteks mistahes arvust 6 väiksemad positiivsed täis- ja murdarvud.

Andes ühele tundmatutest, näiteks x-le, mingi lubatava väärtuse, leiame vastava y väärtuse. Iga selline väärtuste paar on ülesande lahendiks ja vastuseks ülesande küsimusele. On kerge näha, et selle võrrandi lahendite arv on lõpmata suur.

Osa neist lahendeist on esitatud alljärgnevas tabelis:

Esimene tükk kaalub	x	2	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{2}{5}$	5,4
Teine tükk kaalub	y	4	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{5}$	0,6
Tükid kaaluvad kokku	$x+y$	6	6	6	6

Lõpuks võtame veel järgmise ülesande.

Ülesanne 3. *Kahe arvu summa on 6. Kui suur on kumbki liidetav?*

Ülesanne taandub jällegi võrrandi $x + y = 6$ lahendamisele.

Siin on tundmatute lubatavateks väärtusteks juba kõik ratsionaalarvud, näiteks:

x	6	8	−15	11,3
y	0	−2	21	−5,3
$x+y$	6	6	6	6

Nagu näeme, on ka sellel võrrandil lõpmata palju lahendeid.

Seega, kõigil kolmel äsjavaadeldud juhul võrrand ei andnud ühest vastust ülesande küsimusele. Võrrand näitas vaid teatud sõltuvust kahe tundmatu suuruse vahel. Teades ühe tundmatu väärtust, võisime me selle sõltuvuse põhjal leida ka teise tundmatu väärtuse.

Vaadeldud näidetest võib teha järgmised järeldused.

1. Kahe tundmatuga võrrand väljendab kahe suuruse vahelist sõltuvust.

2. Kahe tundmatuga võrrandil on üldiselt lõpmata palju lahendeid.

Erandiks on näiteks esimese ülesande võrrand, millel võib ülesande mõtte kohaselt olla ainult viis lahendit. Kahe tundmatuga võrrandil võib aga olla ka ainult üks lahend.

Ülesanne 4. *Kassapidaja peab andma tagasi 19 kop. Tal on ainult kolme- ja viiekopikased rahad. Mitu kolme- ja mitu viiekopikalist peab ta selleks andma?*

Kui kolmekopikaliste arv tähistada x-ga, viiekopikaliste arv y-ga, siis saame võrrandi:

$$2x + 5y = 19.$$

Soovitame kontrollida, et võrrandil on ainult üks lahend: $x = 3$ ja $y = 2$ (tuleb silmas pidada tundmatute lubatavaid väärtusi).

Lõpuks võib kahe tundmatuga võrrand olla ka hoopis ilma lahenditeta. Niisugune on näiteks võrrand:

$$x^2 + 2y + 5 = x^2 + 2y.$$

Selliseid juhtumeid esineb aga harva.

§ 74. Kahe tundmatuga võrrandi graafiline kujutamine.

Paragrahvis 72 me ehitasime tasapinnal punkti tema koordinaatide järgi. Seejuures mõlemad koordinaadid anti meelevaldselt, teineteisest sõltumatult.

Kuid võib anda ka sellise ülesande: ehitada kõik punktid, mille koordinaadid on seotud mingi kindla sõltuvusega. Näiteks, iga punkti ordinaat peab olema kolm korda suurem tema abstsissist. Sellist sõltuvust võib väljendada võrrandiga:

$$y = 3x.$$

Või et iga punkti ordinaat oleks 3 ühiku võrra väiksem tema abstsissist. Sellist sõltuvust väljendatakse võrrandiga:

$$y = x - 3.$$

Ehitame näiteks punktid, mille koordinaadid on seotud järgmise sõltuvusega: iga punkti abstsissi ja ordinaadi summa on 6. Seda sõltuvust väljendab võrrand:

$$x + y = 6.$$

Anname ühele koordinaatidest, näiteks x-le, meelevaldsed väärtused. Vastavad y väärtused arvutame valemist

$$y = 6 - x,$$

mille saame esialgsest võrrandist.

Koostame tabeli:

x	-2	-1	0	1	3	5	6	7	8	9
y	8	7	6	5	3	1	0	-1	-2	-3

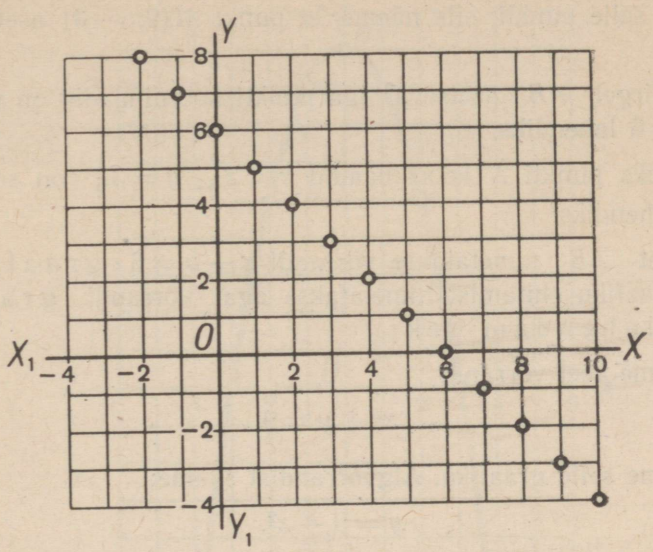
Ehitame vastavad punktid (joon. 21). Nagu jooniselt näeme, asetsevad kõik ehitatud punktid ühel ja samal sirgel.

Kui anname x-le murrulisi väärtusi, mis asetsevad näiteks 0 ja 1 vahel, 7 ja 8 vahel jne., siis uued punktid asetsevad samal sirgel varem ehitatud punktide vahel.

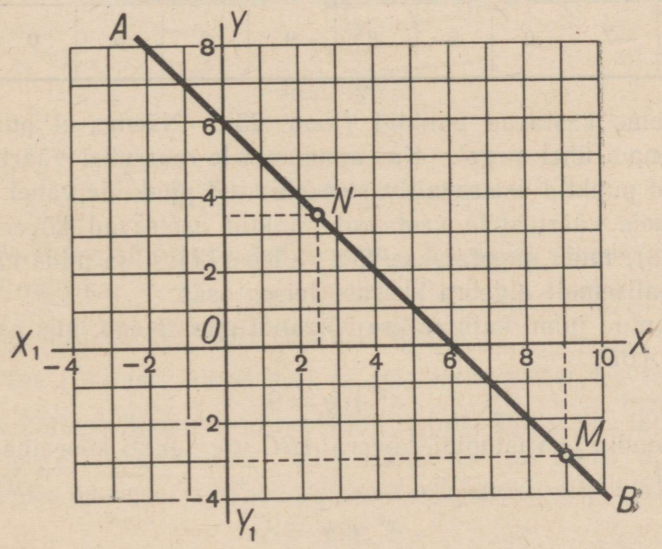
Tõmbame selle sirge (joon. 22).

Võib tõestada, et:

1) Võrrandi iga lahend kujutab mingit punkti vaadeldaval sirgel AB.



Joon. 21.



Joon. 22.

Näiteks $x = 9$ ja $y = -3$ on võrrandi $x + y = 6$ lahendiks. Kui ehitame selle punkti, siis näeme, et punkt $M(9; -3)$ asetseb sirgel AB.

2) Sirgel AB asetseva iga punkti koordinaadid on võrrandi $x + y = 6$ lahendiks.

Näiteks punkti N koordinaadid $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{1}{2}$ on selle võrrandi lahendiks.

Sirget AB nimetatakse võrrandi $x + y = 6$ graafikuks. Selle graafiku ehitamist nimetatakse aga võrrandi graafiliseks lahendamiseks.

Võtame veel võrrandi

$$x^2 + y = 9$$

ja ehitame selle graafiku. Algvõrrandist saame:

$$y = 9 - x^2.$$

Koostame tabeli:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

Ehitame vastavad punktid (joon. 23). Näeme, et punktid ei asetse enam ühel sirgel. Kui anname x-le murrulisi väärtusi, siis vastavad punktid asetsevad varem ehitatud punktide vahel. x kõikvõimalikele väärtustele vastavad punktid asetsevad kõveral ABC (joon. 23), mida nimetatakse paraboo liks ja mida käsitleme üksikasjalisemalt algebra kursuse teises osas.

Ka antud juhul kujutatakse võrrandi punktidena, mis asetsevad kõveral ABC,

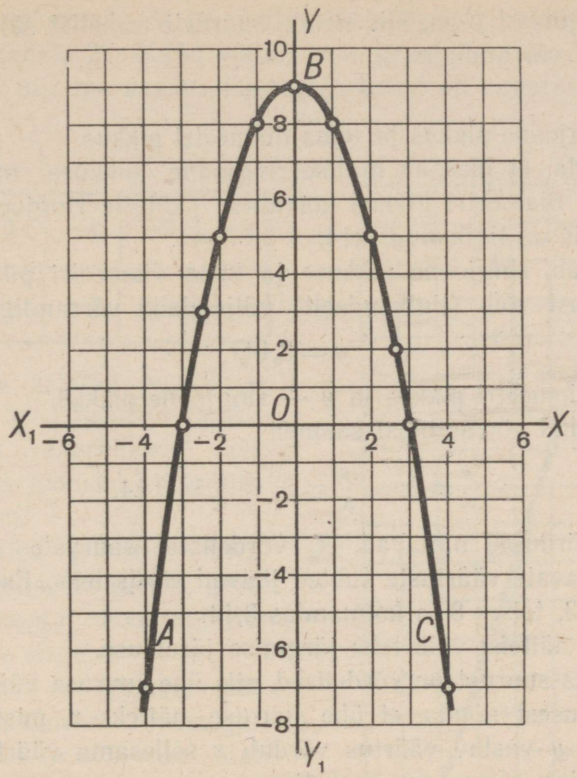
$$x^2 + y = 9$$

kõik lahendid ja vastupidi, kõvera ABC iga punkti koordinaadid on võrrandi

$$x^2 + y = 9$$

lahendiks.

Tähendab, kõver ABC on võrrandi $x^2 + y = 9$ graafikuks ja selle graafiku ehitamine on antud võrrandi graafiline lahendamine.



Joon. 23.

§ 75. Võrdeline sõltuvus.

1. Võrdelise sõltuvuse definitsioon. Võrdelisi suurusi uurisime juba aritmeetikas.

Toome näiteid võrdeliste suuruste kohta.

1) Tee (ühtlasel liikumisel) ja aeg, mille vältel see tee läbiti.

Olgu ühtlase liikumise kiirus 3 km tunnis. Tähistame läbitud tee pikkuse y-ga, tundide arvu, mille vältel see tee läbiti, aga x-ga. Nende kahe suuruse vaheline sõltuvus väljendub siis võrrandiga:

$$y = 3x.$$

2) Riidetüki koguhind ja meetrite arv tükis.

Olgu 1 m riide hind 8 rbl. Kui tähistada meetrite arv tükis x-ga

ja tüki koguhind y-ga, siis nende suuruste vahelist sõltuvust võib väljendada võrrandiga:

$$y = 8x.$$

3) Ringjoone pikkus ja tema diameetri pikkus.

On teada, et ükskõik millise ringjoone pikkuse määramiseks tuleb tema diameetri pikkus korrutada kõigile ringjoontele ühise arvuga, mis on ligikaudu 3,14.

Tähendab, ringjoone pikkuse ja tema diameetri pikkuse vahelist sõltuvust võib (ligikaudselt) väljendada võrrandiga:

$$y = 3{,}14x,$$

kus x on diameetri pikkus ja y — ringjoone pikkus.

Vaadeldud võrranditest saame:

$$\frac{y}{x} = 3; \quad \frac{y}{x} = 8; \quad \frac{y}{x} = 3{,}14.$$

Need võrdused näitavad, et võrdeliste suuruste muutumisel nende vastavate väärtuste suhted jäävad võrdseteks. Esimeses näites on see 3, teises 8 ja kolmandas 3,14.

Toodud näiteist võib teha järgmise järelduse.

Kui kaks suurust on võrdelised, siis ühe suuruse väärtus sõltub teise väärtusest nõnda, et ühe suuruse, näiteks x, mistahes väärtuse puhul y vastav väärtus võrdub x sellesama väärtuse ja iga kord ühe ning sama arvu korrutisega.

Sellist sõltuvust nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks.

Seepärast võib anda võrdelise sõltuvuse kohta järgmise definitsiooni.

D e f i n i t s i o o n. **Kahe suuruse vahelist sõltuvust, mis on väljendatav võrrandiga $y = kx$, kus k on nullist erinev kindel arv, nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks.**

Arvu k nimetatakse v õ r d e t e g u r i k s. Esimeses näites $k = 3$, teises $k = 8$, kolmandas $k = 3{,}14$.

Vaadeldud näidetes võisid x ja y omada ainult positiivseid väärtusi. Nüüd aga, kui me oleme andnud võrdelise sõltuvuse üldise definitsiooni mistahes kahe suuruse jaoks, võime selle kitsenduse ära jätta.

Edaspidi x ja järelikult ka y võivad omada mistahes väärtusi.

2. Võrdelise sõltuvuse graafik. Ehitame võrrandi

$$y = 3x$$

graafiku.

Osa sellest graafikust (x positiivsete väärtuste puhul) ehitasime juba paragrahvis 27. Nüüd võime seda graafikut täiendada nende punktidega, mis me saame, kui x väärtused on negatiivsed ja kui $x = 0$.

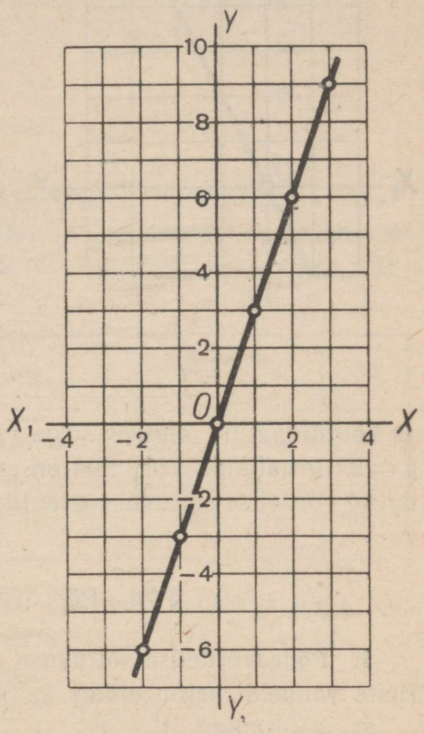
Saame:

x	0	-1	-2	-3
y	0	-3	-6	-9

Ehitades saadud punktid ja ühendades need joonega (arvestades ka x vahepealseid väärtusi), saame joonisel 24 kujutatud graafiku.

Võrrandiga $y = 3x$ väljendatud võrdelise sõltuvuse graafik on seega koordinaatide algust läbiv sirge.

Märgime, et ükskõik milline ka ei oleks võrdeteguri väärtus, kui $x = 0$, on alati ka $y = 0$. See tähendab, et kõik võrdelise sõltuvuse graafikud läbivad punkti $O(0; 0)$.



Joon. 24.

Toodud näited võimaldavad teha järgmise järelduse.

Võrdelise sõltuvuse graafikuks on koordinaatide algust läbiv sirge.

Olles selle kindlaks teinud, võime võrdelise sõltuvuse graafikut ehitada palju lihtsamalt ja kergemalt kui seni.

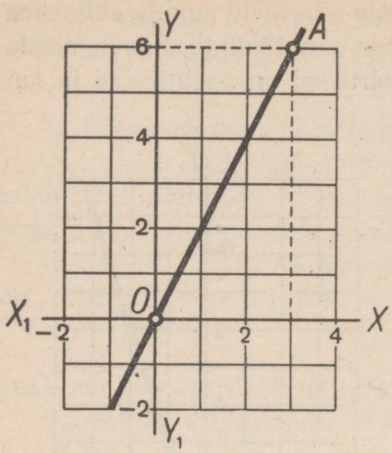
Ehitame näiteks võrrandi

$$y = 2x$$

graafiku.

Me teame, et selle võrrandi graafikuks on koordinaatide algust läbiv sirge.

Geomeetriast on aga teada, et sirge on üheselt määratud kahe



Joon. 25.

punktiga. Tähendab, sirge ehitamiseks piisab tema kahe punkti teadmisest.

Üht punkti, mida peab võrrandi $y = 2x$ graafik läbima, me juba teame. See on punkt $O(0; 0)$ — koordinaatide algus.

Teise punkti leidmiseks anname antud võrrandis x-le meelevaldse väärtuse, näiteks $x = 3$. (Parem on valida arv, mis ei ole nullile liiga lähedal, sest nii saame täpsema joonise.) Saame $y = 6$. Seega punkt $A(3; 6)$ asetseb otsitaval sirgel. Ehitanud punkti $A(3; 6)$, tõmbame läbi selle punkti ja koordinaatide alguse sirge (joon. 25). See sirge ongi võrrandi $y = 2x$ graafikuks ehk, mis on seesama, võrrandiga $y = 2x$ väljendatud võrdelise sõltuvuse graafikuks.

§ 76. Pöördvõrdeline sõltuvus.

1. Pöördvõrdelise sõltuvuse definitsioon. Peale võrdeliste suuruste vaadeldi aritmeetikas ka pöördvõrdelisi suurusi.

Toome näiteid.

1) Ristküliku aluse ja kõrguse pikkus jääva pindala puhul.

Olgu vaja eraldada juurviljaaiaks ristkülikukujuline maatükk pindalaga 600 m².

Me võime näiteks meelevaldselt määrata maatüki pikkuse, kuid siis sõltub maatüki laius sellest, millise pikkuse me valisime. Mitmesugused pikkuse ja laiuse väärtused on esitatud alljärgnevas tabelis.

Pikkus meetrites	20	30	40	50	60
Laius meetrites	30	20	15	12	10
Pindala ruutmeetrites	600	600	600	600	600

Üldiselt, kui märkida maatüki pikkus x-ga ja laius y-ga, siis nendevahelist sõltuvust väljendab võrrand:

$$xy = 600.$$

Avaldades y, saame:

$$y = \frac{600}{x}.$$

Andes x-le meelevaldseid väärtusi, võime leida vastavad y väärtused.

2) Ühtlase liikumise aeg ja kiirus teatud vahemaal.

Olgu kahe linna vahemaa 200 km. Mida suurem on liikumise kiirus, seda vähem aega kulub selle vahemaa läbimiseks. See nähtub järgmisest tabelist:

Tunnikiirus kilomeetrites . . .	10	20	40	50	80
Aeg tundides	20	10	5	4	$2\frac{1}{2}$
Tee pikkus kilomeetrites . . .	200	200	200	200	200

Üldiselt, kui tähistada kiirus x-ga, liikumise aeg aga y-ga, siis nendevaheline sõltuvus väljendub võrrandiga:

$$xy = 200.$$

Seega võime nende näidete põhjal anda pöördvõrdelise sõltuvuse kohta järgmise definitsiooni.

D e f i n i t s i o o n. **Võrrandiga $xy = k$, kus k on mingi kindel nullist erinev arv, väljendatud kahe suuruse vahelist sõltuvust nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.**

Arvu k nimetatakse ka siin v õ r d e t e g u r i k s.

Nii nagu võrdelise sõltuvuse puhul, võivad ka võrrandis $xy = k$ suurused x ja y omada niihästi negatiivseid kui ka positiivseid väärtusi.

Pöördvõrdelise sõltuvuse puhul ei või ükski suurustest võrduda nulliga. Tõepoolest, kui kasvõi üks suurustest x või y oleks null, siis võrrandi $xy = k$ vasak pool võrduks nulliga, paremal poolel oleks aga definitsiooni kohaselt mingi nullist erinev arv. Saame vasturääkivuse.

2. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik. Ehitame võrrandi

$$xy = 9$$

graafiku.

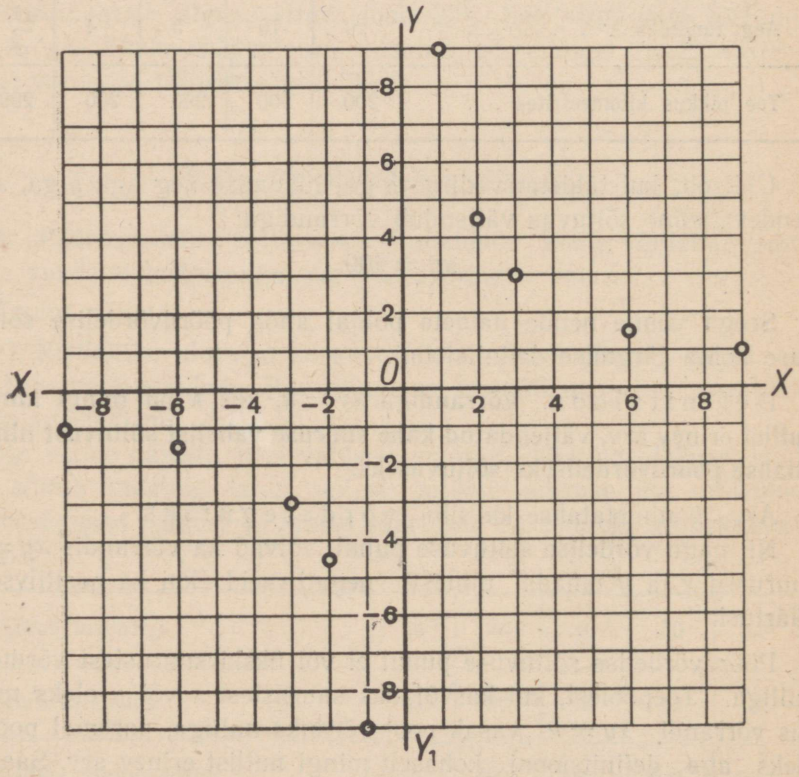
Avaldades y, saame:

$$y = \frac{9}{x}.$$

Anname x-le meelevaldseid (lubatavaid) väärtusi ja arvutame vastavad y väärtused. Saame tabeli:

x	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9
y	-1	$-1\frac{1}{2}$	-3	$-4\frac{1}{2}$	-9	9	$4\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	1

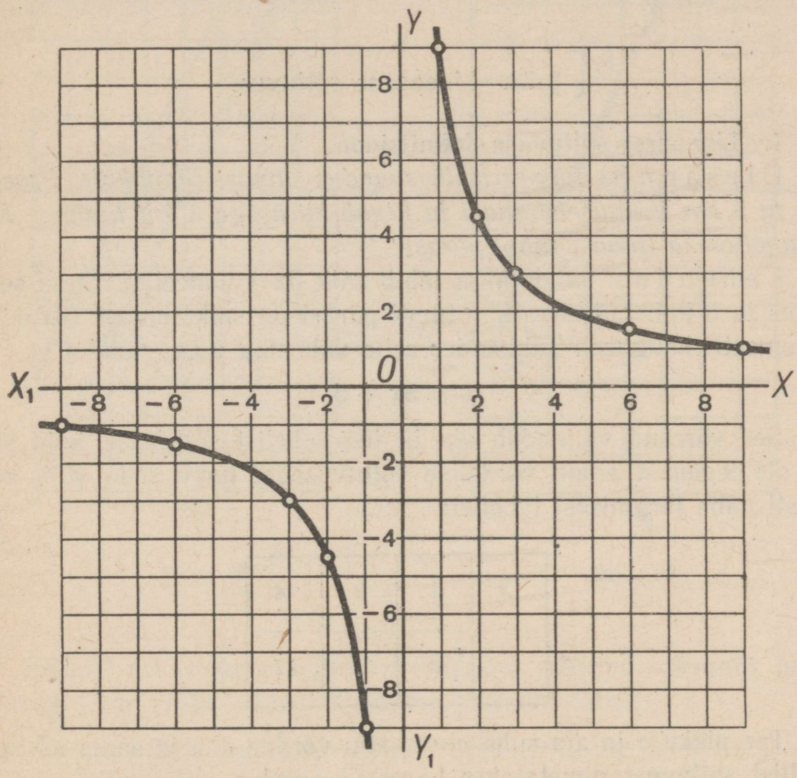
Ehitame vastavad punktid (joon. 26).



Joon. 26.

Kui võtta x väärtused lühema vahemaa tagant, siis ka punktid paiknevad tihedamalt.

x kõikvõimalikke väärtusi kujutavad punktid asetsevad kahel koordinaatide alguse suhtes sümmeetriliselt paikneval kõveral (joon. 27).



Joon. 27.

Näeme, et pöördvõrdelise sõltuvuse graafik koosneb kahest kõverjoonest. Üks saadakse x positiivsete, teine x negatiivsete väärtuste puhul.

Mõlemad need jooned moodustavad geomeetrilise kujundi, mida nimetatakse h ü p e r b o o l i k s.

Seega, **pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on hüperbool.**

Nagu näeme on pöördvõrdelise sõltuvuse graafik keerulisem kui võrdelise sõltuvuse graafik. Võrdelise sõltuvuse korral piisas kahe

punkti konstrueerimisest, et siis joonlaua abil joonestada kogu graafik.

Siin me aga ei saa joonlaua abil ehitada ka kõige väiksematki osa graafikust, sest ükski selle graafiku osa ei ühti sirgega.

Seepärast tuleb siin leida võimalikult palju graafiku punkte, et saada täpne graafik.

§ 77. Lineaarne sõltuvus.

1. Lineaarse sõltuvuse definitsioon.

Ülesanne. *Pioneerisalk suundus linnast rännakule. Praegu on ta* 5 *km kaugusel linnast ja liigub kiirusega* 3 *km tunnis. Kui kaugel on ta linnast tunni pärast?*

Lahendus. x tunniga läbib salk $3x$ kilomeetrit. Enne seda läbis ta 5 km. Järelikult, x tunni pärast on salk linnast $(3x + 5)$ kilomeetri kaugusel. Tähistades selle vahemaa y-ga, saame:

$$y = 3x + 5.$$

See võrrand väljendab aja ja tee vahelist sõltuvust, kuid siin ei ole tegemist enam võrdelise sõltuvusega, nagu seda võib kergesti näha järgmisest tabelist:

x	1	2	4
	8	11	17

Tee pikkuse ja aja suhe ei ole siin võrdne ühe ja sama arvuga. Sellist sõltuvust nimetatakse lineaarseks sõltuvuseks.

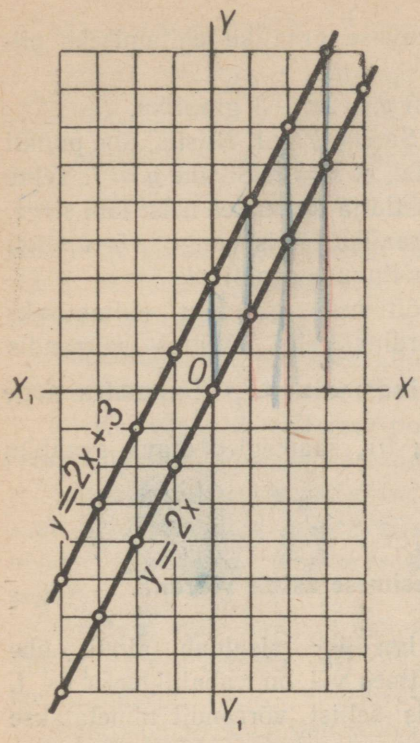
Definitsioon. **Kahe suuruse vahelist sõltuvust, mis on väljendatud võrrandiga $y = kx + b$, kus k ja b on kindlad arvud ning $k \neq 0$, nimetatakse lineaarseks sõltuvuseks.**

Erijuhul, kui $b = 0$, on võrrandil kuju $y = kx$. Tähendab, võrdeline sõltuvus on lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

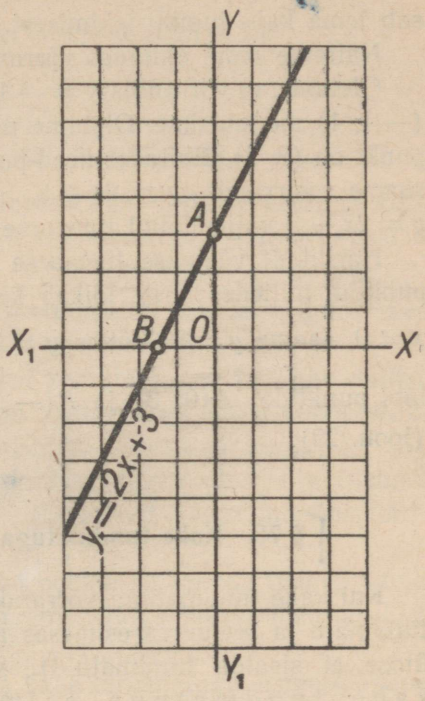
2. Lineaarse sõltuvuse graafik. Ehitame näiteks võrrandiga $y = 2x + 3$ väljendatud lineaarse sõltuvuse graafiku.

Toimime järgmiselt. Ehitame algul võrrandi $y = 2x$ graafiku. See on, nagu me teame, koordinaatide algust läbiv sirge (joon. 28).

Vaatame, kuidas asetsevad selle sirge suhtes võrrandi $y = 2x + 3$ graafiku punktid.



Joon. 28.



Joon. 29.

Selleks arvutame punktide ordinaadid mõlema võrrandi jaoks ühe ja sama abstsissi puhul. Saame järgmise tabeli:

x	-2	-1	0	1	2	3
$2x$	-4	-2	0	2	4	6
$2x+3$	-1		3	5	7	9

Näeme, et abstsissi mistahes väärtusel on teise graafiku ordinaadid 3 võrra suuremad esimese graafiku ordinaatidest.

Ehitades need punktid, saame esimese sirgega paralleelse sirge (joon. 28).

Lineaarse sõltuvuse graafikuks on sirge.

Siit järeldub, et lineaarse sõltuvuse graafiku ehitamiseks piisab tema kahe punkti leidmisest.

Näitame seda, ehitades võrrandi $y = 2x + 3$ graafiku.

Oletame, et võrrandis $x = -1$. Saame $y = 1$. Niisiis, ühe punkti $(-1; 1)$ me leidsime. Oletame nüüd, et $x = 2$. Saame $y = 7$. Teine punkt on $(2; 7)$. Ehitades need punktid ja tõmmates neist läbi sirge, saame võrrandi $y = 2x + 3$ graafiku, mis ongi võrrandiga $y = 2x + 3$ väljendatud lineaarse sõltuvuse graafikuks.

Harilikult võetakse lineaarse sõltuvuse graafiku ehitamiseks punktid, milledes sirge lõikab koordinaattelgi. Võttes võrrandis $x = 0$, saame $y = 3$. Võttes $y = 0$, saame $x = \frac{3}{2}$. Tõmmates sirge läbi punktide $A(0; 3)$ ja $B(-\ ; 0)$, saamegi otsitava graafiku (joon. 29).

§ 78. Kahe tundmatuga esimese astme võrrand.

Kui kahe tundmatuga võrrandi iga liige sisaldab ainult ühe tundmatu ja seejuures esimeses astmes või on vabaliikmeks (s. t. üldse ei sisalda tundmatuid), siis sellist võrrandit nimetatakse kahe tundmatuga esimese astme võrrandiks.

Selliste võrrandite näiteid:

1) $5x - 2x + 3 = 2x + y - 1$;
2) $8x - 1{,}3y = 15$;
3) $y = 1{,}7x$;
4) $y = 4x - 9$;
5) $\frac{x}{3} - 3 = \frac{7y}{5}$.

Kolmandast ja neljandast näitest näeme, et varem vaadeldud võrdelist ja lineaarset sõltuvust väljendavad võrrandid on kahe tundmatuga esimese astme võrrandeiks.

Kuid pöördvõrdelist sõltuvust väljendav võrrand, näiteks:

$$xy = 8,$$

ei ole esimese astme võrrand.

Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi kohta jäävad kehtima ka kõik need omadused, mis olid kehtivad ühe tundmatuga võrrandi puhul (§ 62 ja 63).

1. Kui võrrandi mõlema poolega liita üks ja sama arv või hulkliige (tundmatute suhtes), siis uus võrrand on samaväärne antud võrrandiga.

Nii on võrrandid

$$3x - y = 5 - 2x \text{ ja } 3x - y + 8 = 13 - 2x$$

samaväärsed.

Samaväärsed on ka võrrandid:

$$2x - 5y = 8 - 10y \text{ ja } 2x + 5y = 8,$$

sest teine võrrand on saadud esimesest, kui liidame esimese võrrandi mõlema poolega $10y$. Siit näeme, et ka esimese omaduse järeldus on õige.

Võrrandi iga liiget võib viia ühelt poolelt teisele, muutes seejuures liikme märgi vastupidiseks.

2. Kui võrrandi mõlemad pooled korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis uus võrrand on samaväärne antud võrrandiga.

Siit järeldub, et kui võrrand sisaldab murrulisi kordajaid, siis saab neid kordajaid muuta täisarvudeks, korrutades kõik liikmed nende nimetajate ühiskordsega (tavaliselt väikseima ühiskordsega).

Muidugi võib võrrandi mõlemad pooled ka jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga, sest see on samaväärne jagaja pöördarvuga korrutamisega.

Nende omaduste puhul võib iga kahe tundmatuga esimese astme võrrandile anda nõndanimetatud n o r m a a l k u j u.

Selgitame seda näite varal. Olgu antud võrrand:

$$\frac{7x}{6} - \frac{5y-3}{4} + 1 = \frac{3}{8}x - y + 1\frac{7}{12}.$$

Korrutame selle võrrandi mõlemad pooled nimetajate väikseima ühiskordsega 24 (samaaegselt avame ka sulud vasakpoolse osa teises avaldises).

Saame:

$$28x - 30y + 18 + 24 = 9x - 24y + 38.$$

Viime kõik tundmatut sisaldavad liikmed vasakule, vabaliikmed aga paremale poolele.

$$28x - 30y - 9x + 24y = 38 - 18 - 24.$$

Koondame sarnased liikmed:

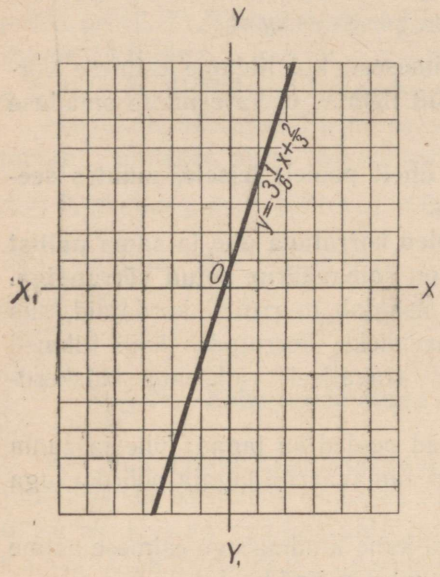
$$19x - 6y = -4.$$

Saadud avaldis ongi võrrandi normaalkuju.

Normaalkujule teisendatud võrrandi vasakul poolel leidub ainult

kaks liiget — üks tundmatuga x ja teine tundmatuga y; parem pool koosneb aga ainult ühest liikmest — vabaliikmest.

Vaatleme kahe tundmatuga esimese astme võrrandi graafiku ehitamist.



Joon. 30.

Me juba nägime, et võrdelise ja lineaarse sõltuvuse puhul, mida väljendab kahe tundmatuga esimese astme võrrand, on graafikuks sirge. Näitame, et iga kahe tundmatuga esimese astme võrrandi graafikuks on sirge.

Võtame võrrandi:

$$19x - 6y = -4.$$

Avaldame tundmatu y. Saame:

$$6y = 19x + 4; \quad y = 3\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}.$$

Võrreldes seda võrrandit eelmises paragrahvis vaadeldud võrrandiga $y = kx + b$, näeme, et antud võrrand kujutab endast lineaarset sõltuvust väljendavat võrrandit, kusjuures $k = 3\frac{1}{6}$ ja $b = \frac{2}{3}$.

Tähendab, ka selle võrrandi graafikuks on sirge (joon. 30). Kuna iga kahe tundmatuga esimese astme võrrandit võib esitada kujul $y = kx + b$, võib teha järgmise järelduse:

Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi graafikuks on sirge.

KAHEKSAS PEATÜKK.

ESIMESE ASTME VÕRRANDISÜSTEEMID.

§ 79. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemid.

Olgu antud kaks kahe tundmatuga võrrandit, näiteks:

$$x + 2y = 13,$$
$$3x - y = 4.$$

Kummalgi neist on lõpmata palju lahendeid.

Esitame küsimuse: kas ei leidu kõigi nende lahendite hulgas selliseid, mis oleksid ühised mõlemale võrrandile?

Niisuguseid lahendeid võib esineda ja võib ka mitte esineda.

Nii on antud võrrandite ühiseks lahendiks $x = 3$, $y = 5$, mida on kerge kontrollida asendamise teel. (Edaspidi näitame, et teisi ühiseid lahendeid neil võrrandeil ei saa olla.)

Kuid näiteks võrranditel:

$$x + 2y = 15,$$
$$x + 2y = 7$$

ei ole ühtki ühist lahendit. Tõepoolest, ükskõik missugused väärtused me ka x-le ja y-le ei annaks, avaldis $x + 2y$ ei saa olla üheaegselt võrdne 15-ga ja 7-ga. Seepärast ei saa mitte ükski esimese võrrandi lahend olla teise võrrandi lahendiks ja ükski teise võrrandi lahend ei saa olla esimese lahendiks.

Kui otsitakse kahe või enama võrrandi ühiseid lahendeid, siis öeldakse, et need võrrandid moodustavad s ü s t e e m i.

Tähendab, võrrandisüsteemis tähistab iga tundmatu üht ja sama arvu süsteemi kõigis võrrandeis.

Lahendada võrrandisüsteem tähendab leida ühised lahendid süsteemi kõigi võrrandite jaoks (kui need lahendid on olemas).

§ 80. Samaväärsed süsteemid.

Definitsioon. **Kaks võrrandisüsteemi on samaväärsed (ekvivalentsed), kui kummagi süsteemi kõik lahendid on ka teise süsteemi lahendeiks.**

Võrrandisüsteemi lahendamisel, nagu ka ühe tundmatuga võrrandite lahendamisel, tuleb antud süsteem teisendada lihtsamaks süsteemiks, see omakorda veelgi lihtsamaks süsteemiks jne., kuni lõpuks saadakse lihtsaim süsteem kujul

$$x = a,$$
$$y = b,$$

millest määratakse kohe tundmatute väärtused.

Tekib küsimus: kas kõik süsteemid, milledega asendatakse antud süsteem, on temaga samaväärsed? Ainult sel juhul, kui see on nii, võime olla kindlad, et saadud lahendid on ka antud esialgse süsteemi lahendeiks.

Nii teooria kui ka kogemused näitavad, et pärast teisendusi mitte alati ei saada antud süsteemiga samaväärset süsteemi.

Esitame siin mõningad teisendused, millede rakendamise puhul võib olla kindel, et uus süsteem on samaväärne antud süsteemiga.

1. Iga võrrandisüsteemi võrrandit võib asendada temaga samaväärse võrrandiga.

Näiteks süsteemid:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases}$$

on samaväärsed, sest esimese süsteemi mõlemad võrrandid on asendatud samaväärsete võrranditega (§ 78, p. 2).

Kui meil on kaks võrrandit $A = B$ ja $C = D$, siis võrrandit $A + C = B + D$ nimetatakse harilikult antud võrrandite summaks, võrrandit $A - C = B - D$ aga nende vaheks.

2. Süsteemi mistahes võrrandit võib asendada antud võrrandite summa või vahega.

Näiteks süsteemid:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 13x = 65 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

on samaväärsed, sest teise süsteemi esimene võrrand on esimese süsteemi võrrandite summa. (Kuna $9x + 6y = 57$, siis liites esi-

mese võrrandi vasaku poolega $9x + 6y$ ja parema poolega 57, me tegelikult liidame mõlema poolega ühe ja sama arvu 57.)

3. Süsteemi ühest võrrandist võib avaldada ükskõik kumma tundmatu teise kaudu ja asetada see avaldis teise võrrandisse. Uus võrrand koos esimesega moodustab antud süsteemiga samaväärse süsteemi.

Näiteks süsteemid:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2(2y + 1) + 3y = 23 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

on samaväärsed (esimeses võrrandis on x asendatud temaga võrdse avaldisega $2y + 1$).

§ 81. Võrrandisüsteemide lahendamine.

Kahest võrrandist koosnevat kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi võib lahendada mitmesuguste erinevate meetoditega.

Tutvustame näidete varal kolme meetodit.

1. Liitmisvõte.

Näiteid.

1. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

y kordajad on mõlemas võrrandis absoluutväärtuse poolest võrdsed ja märgi poolest vastupidised. Kui nüüd võtta näiteks esimese võrrandi asemel antud võrrandite summa, siis liikmed, mis sisaldavad y, vastastikku hävivad. Saame süsteemi:

$$\begin{cases} 7x = 28 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

See süsteem on samaväärne esialgse süsteemiga (§ 80, p. 2). Saadud süsteemi esimeses võrrandis on aga ainult üks tundmatu x.

Lahendades esimese võrrandi, saame $x = 4$.

Asetades selle x väärtuse teise võrrandisse, saame ühe tundmatuga võrrandi:

$$8 + 3y = 11,$$

mille lahendamisel saame $y = 1$.

Antud süsteemi lahendiks on seega arvude paar:

$$x = 4,\ y = 1.$$

Märkus. Harilikult, liitnud võrrandid ja saanud $7x = 28$, ei kirjutata teist võrrandit ümber, vaid, leides saadud võrrandist $x = 4$, asetatakse see ühte antud võrrandeist ja leitakse teise tundmatu väärtus.

2. On antud süsteem:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Soovitame lahendada selle süsteemi, asendades ühe võrrandeist antud võrrandite vahega.

3. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 2 \\ 6x - 11y = 26 \end{cases}$$

x kordaja teises võrrandis on kolm korda suurem kui esimeses. Korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled 3-ga. Saame samaväärse süsteemi (§ 80, p. 1).

$$\begin{cases} 6x - 21y = 6, \\ 6x - 11y = 26 \end{cases}$$

x kordajad on nüüd võrdsed. Leiame nende võrrandite vahe:

$$-10y = -20.$$

Siit:

$$y = 2.$$

Asendades ühes antud võrrandis y arvuga 2, leiame, et $x = 8$. Süsteemi lahendiks on: $x = 8$; $y = 2$.

4. Lahendame veel süsteemi:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 21 \\ 4x - 3y = -5 \end{cases}$$

Võrdsustame ühe tundmatu, näiteks y, kordajad (absoluutväärtuse poolest). Selleks korrutame esimese võrrandi 3-ga, teise 5-ga. Saame samaväärse süsteemi:

$$\begin{cases} 18x + 15y = 63 \\ 20x - 15y = -25 \end{cases}$$

Edasine lahenduskäik on selge.

Me oleksime võinud aga võrdsustada mitte y, vaid x kordajad. Selleks oleks tulnud esimest võrrandit korrutada 2-ga, teist 3-ga. (Meenutame, et 6 ja 4 väiksem ühiskordne on 12.)

Esitatud näiteist on selge, et võrrandisüsteemide lahendamine liitmisvõtte abil seisneb järgnevas.

1) Võrdsustame kordajate absoluutväärtused ühe tundmatu juures.

2) Saadud võrrandid liidame, kui absoluutväärtuselt võrdseil kordajail on vastupidised märgid. Kui neil on aga ühesugused märgid, siis lahutame.

3) Lahendame saadud ühe tundmatuga võrrandi.

4) Asetame tundmatu leitud väärtuse ühte antud võrrandeist ja, lahendades saadud võrrandi, leiame teise tundmatu väärtuse.

2. Asendusvõte. Võtame süsteemi:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 & (1) \\ 2x + 3y = 11 & (2) \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist ühe tundmatu, näiteks x, teise tundmatu kaudu, saame:

$$x = \frac{11 - 3y}{2}. \qquad (3)$$

Asetame selle x avaldise esimesse võrrandisse:

$$5 \cdot \frac{11 - 3y}{2} - 3y = 17. \qquad (4)$$

Võrrandite (3) ja (4) süsteem on samaväärne võrrandite (1) ja (2) süsteemiga (§ 80, p. 3).

Võrrand (4) sisaldab aga ainult ühe tundmatu y.

Lahendades selle võrrandi, leiame: $y = 1$.

Asetades $y = 1$ võrrandisse (3), leiame:

$$x = \frac{11 - 3 \cdot 1}{2}; \quad x = 4.$$

Süsteemi lahend: $x = 4$, $y = 1$.

Sellest näitest selgub, et võrrandisüsteemi lahendamine asendusvõtte abil seisneb järgmises.

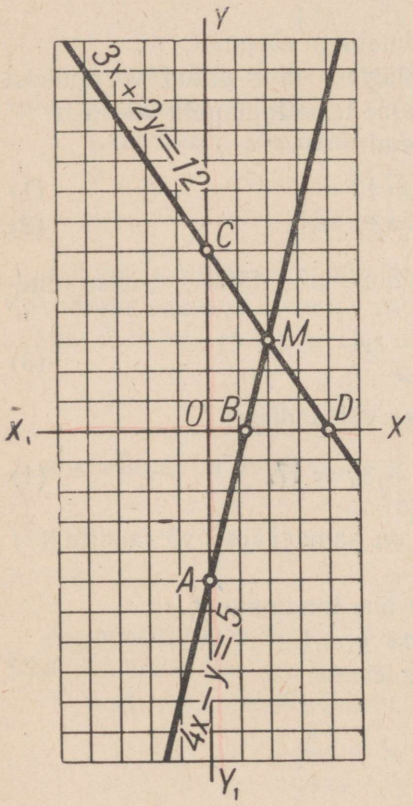
1. Ühest antud võrrandist avaldame ühe tundmatu teise kaudu.
2. Saadud avaldise asetame teise antud võrrandisse.
3. Lahendame saadud ühe tundmatuga võrrandi.
4. Tundmatu leitud väärtuse asetame teise tundmatu avaldisse ja lahendame saadud võrrandi.

Asendusvõtet on otstarbekohane kasutada siis, kui üks tundmatu kordajatest on võrdne ühega.

3. **Graafiline meetod.** Olgu antud võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Ehitame mõlema võrrandi graafikud. Esimese võrrandi graafikuks on sirge AB (joon. 31), mis läbib punkte $A(0; -5)$ ja $B(\frac{5}{4}; 0)$, teise võrrandi graafikuks on aga sirge CD, mis läbib punkte $C(0; 6)$ ja $D(4; 0)$.



Joon. 31.

Sirge AB punktide koordinaadid on esimese võrrandi lahendid, sirge CD punktide koordinaadid aga teise võrrandi lahendid. Tähendab, kui neil võrrandeil on ühine lahend, siis sellele lahendile vastav punkt peab asetsema nii sirgel AB kui ka sirgel CD, s. t. sirgeil AB ja CD peab olema ühine punkt. Jooniselt näeme, et selliseks ühiseks punktiks on punkt M, mille koordinaadid $x = 2$, $y = 3$ ongi antud süsteemi lahendiks. Tõepoolest, kui asendada võrrandisüsteemis x arvuga 2 ja y arvuga 3, siis saame samasused:

$$4 \cdot 2 - 3 = 5;$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12.$$

Võrrandisüsteemi lahendamise graafiline meetod seisneb seega järgmises.

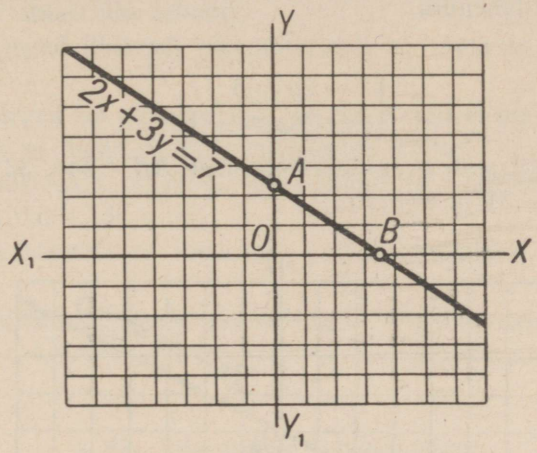
1. Ehitame iga antud võrrandi graafiku.
2. Määrame saadud sirgete lõikepunkti koordinaadid (kui need sirged lõikuvad).

Need koordinaadid ongi süsteemi lahendiks.

4. Süsteemi lahendite arv. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi graafiline lahendusviis võimaldab kergesti määrata süsteemi lahendite arvu.

Kaks sirget võivad lõikuda, ühtida või olla paralleelsed.

Vaatleme kõiki neid kolme juhtu.



Joon. 32.

1. Sirged lõikuvad. Sel juhul on neil üks ühine punkt. (Nagu teada, ei saa kahel sirgel, kui nad lõikuvad, olla üle ühe ühise punkti.) Selle ühise punkti koordinaadid annavadki süsteemi **ainsa lahendi.** Näiteks võib olla vaadeldud süsteem:

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

2. Sirged ühtivad. Sellel juhtumil on antud võrrandite ühise graafiku iga punkti koordinaadid süsteemi lahendiks. Järelikult, süsteemil on **lõpmata palju lahendeid.**

N ä i d e.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$$

Kummagi võrrandi graafikuks on punkte $A(0; 2\frac{1}{3})$ ja $B(3\frac{1}{2}; 0)$ läbiv sirge (joon. 32). Selle sirge iga punkti koordinaadid on antud süsteemi lahendiks. See on ka mõistetav. Kui jagada teise võrrandi mõlemad pooled 2-ga, siis saame temaga samaväärse võrrandi:

$$2x + 3y = 7.$$

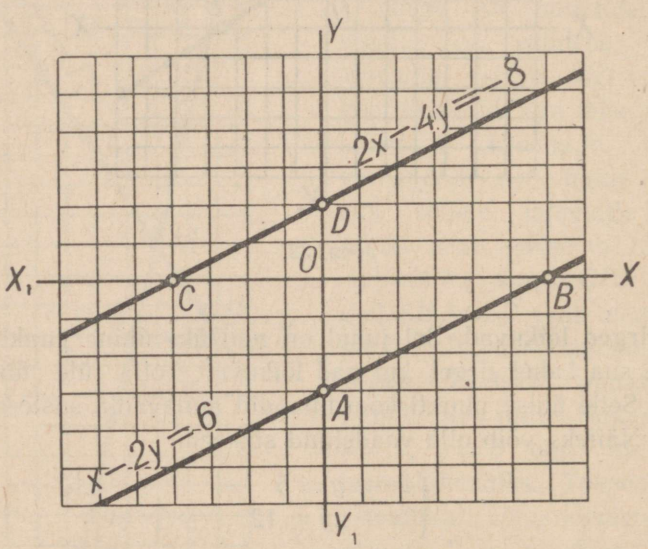
Kuid see on esimene antud võrrand. Tegelikult on meil seega siin tegemist ainult ühe kahe tundmatuga võrrandiga. Sellisel võrrandil on aga, nagu me teame (§ 73), lõpmata palju lahendeid.

3. Sirged on paralleelsed. Sel juhul ei ole sirgeil ühtegi ühist punkti. Tähendab, ka võrrandisüsteemil, mille graafikuks need sirged on, **ei ole lahendit.**

N ä i d e.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

Esimese võrrandi graafikuks on sirge AB (joon. 33), mis läbib punkte $A(0; -3)$ ja $B(6; 0)$.



Joon. 33.

Teise võrrandi graafikuks on sirge CD, mis läbib punkte $D(0; 2)$ ja $C(-4; 0)$.

Nagu näeme on need sirged paralleelsed. Süsteemil ei ole lahendit.

Selles võib veenduda ka järgmiselt.

Jagame teise võrrandi mõlemad pooled 2-ga. Saame samaväärse süsteemi:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Iga x ja y väärtuste paar, mis rahuldab esimest võrrandit, peab andma avaldise $x - 2y$ puhul väärtuse 6 ja ei või järelikult võrduda — 4-ga, nagu seda nõuab teine võrrand.

Seega me näitasime:

1. Kui sirged — antud võrrandite graafikud — lõikuvad, siis süsteemil on ainult üks lahend.

2. Kui sirged ühtivad, siis süsteemil on lõpmata palju lahendeid.

3. Kui sirged on paralleelsed, siis süsteemil ei ole lahendit.

Märgime, et õiged on ka vastupidised väited.

1. Kui süsteemil on ainult üks lahend, siis sirged (antud võrrandite graafikud) lõikuvad.

2. Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis sirged ühtivad.

3. Kui süsteemil ei ole lahendit, siis sirged on paralleelsed.

Kõik need kolm väidet on kergesti tõestatavad vastuväiteliselt.

§ 82. Ülesannete lahendamine.

Väga paljude ülesannete lahendamine võib viia kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendamisele.

Eriti võib neid ülesandeid, kus tuleb leida kaks tundmatut arvu ja milliseid me senini lahendasime ühe tundmatuga võrrandite abil, lahendada ka võrrandisüsteemide abil. Toome näite.

Ülesanne 1. *Lasteaia jaoks osteti 244 rbl. eest 16 suurt ja väikest palli. Suur pall maksis 25 rbl., väike pall aga 12 rbl. Kui palju osteti suuri ja kui palju väikseid palle?*

See ülesanne on meil juba lahendatud (§ 66) ühe tundmatuga võrrandi abil. Lahendame selle nüüd võrrandisüsteemi abil.

Ülesandes tuleb leida kaks tundmatut arvu: suurte ja väikeste pallide arv. Teeme järgmised tähistused:

1) väikseid palle x;

2) suuri palle y;

3) ülesande tingimuse põhjal:

$$x + y = 16. \qquad (1)$$

Üks võrrand on koostatud. Teise võrrandi koostamiseks kasutame ülesande ülejäänud andmeid:

4) kõigi väikeste pallide koguhind on $12x$ rbl.;

5) kõigi suurte pallide koguhind on $25y$ rbl.;
6) ülesande tingimuse põhjal:

$$12x + 25y = 244. \quad (2)$$

Võrrandid (1) ja (2) moodustavad süsteemi. Lahendame selle. Korrutades esimese võrrandi 12-ga ning lahutades saadud võrrandi teisest, saame:

$$13y = 52; \quad y = 4.$$

Asetades leitud y väärtuse esimesse võrrandisse, leiame:

$$x = 12.$$

Seega, väikseid palle osteti 12, suuri aga 4.

Ülesanne 2. *Kahes korvis oli kokku 148 õuna, kusjuures teises korvis oli 3 korda rohkem õunu kui esimeses. Kui palju õunu oli kummaski korvis?*

Ka selles ülesandes tuleb leida kaks tundmatut arvu. Lahendame selle võrrandisüsteemi abil. Tähistame:

1) õunte arvu esimeses korvis x-ga;
2) õunte arvu teises korvis y-ga;
3) ülesande tingimuse kohaselt:

$$x + y = 148; \quad (1)$$

4) teises korvis oli õunu 3 korda rohkem kui esimeses. Järelikult:

$$y = 3x. \quad (2)$$

Saime võrrandisüsteemi. Seda on otstarbekohasem lahendada asendusvõtte abil, kuna võrrandis (2) on üks tundmatutest juba väljendatud teise kaudu. Asendades saame:

$$x + 3x = 148 \quad \text{ehk} \quad x = 37.$$

Asetades selle väärtuse võrrandisse (2), leiame:

$$y = 111.$$

Seega, esimeses korvis oli 37 õuna, teises 111.

§ 83. Kolme tundmatuga võrrandid.

1. Üks võrrand kolme tundmatuga.

Ülesanne 1. *Lasteaed ostis kingituste jaoks kolme sorti kompvekke: 14 rbl., 10 rbl. ja 8 rbl. kilogramm, ning maksis kogu ostu eest 164 rbl. Mitu kilogrammi osteti iga sorti kompvekke?*

Tähistame esimese sordi kompvekkide kilogrammide arvu x-ga,

teise sordi kilogrammide arvu y-ga ja kolmanda sordi kilogrammide arvu z-ga. Siis esimese sordi eest maksti $15x$ rubla, teise sordi eest $10y$ rubla ja kolmanda eest $8z$ rubla.

Ülesande tingimuse kohaselt:

$$15x + 10y + 8z = 164. \qquad (1)$$

Saime kolme tundmatuga võrrandi.

Võib näidata, et võrrandil (1) on lõpmata palju lahendeid. Tõepoolest, võttes x ja y jaoks mingisugused meelevaldsed arvud, näiteks $x = 2$ ja $y = 5$, ning asetades need väärtused võrrandisse, saame:

$$15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 8z = 164$$

ehk

$$80 + 8z = 164.$$

Siit leiame $z = 10\frac{1}{2}$.

Andes x-le ja y-le teistsugused meelevaldsed väärtused, saame ka teistsuguse z väärtuse jne. (loomulikult on siin x, y ja z lubatavateks väärtusteks ainult positiivsed arvud).

Seega, kolme tundmatuga võrrandil võib olla lõpmata palju lahendeid.

2. Süsteem, mis koosneb kahest kolme tundmatuga võrrandist.

Ülesanne 2. *Lasteaed ostis kingituste jaoks 16 kg kolme sorti kompvekke: 15 rbl., 10 rbl. ja 8 rbl. kilogramm, kokku 164 rubla eest. Mitu kilogrammi osteti iga sorti kompvekke?*

Jättes samad tähistused, mis esimeses ülesandes, saame sama võrrandi, mis varemgi:

$$15x + 10y + 8z = 164. \qquad (1)$$

Kuid peale selle järgneb ülesande tingimusest, et

$$x + y + z = 16. \qquad (2)$$

Seega saime süsteemi kahest kolme tundmatuga võrrandist. Näitame, et sellel süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Veendume asendamise teel, et süsteemi rahuldavad näiteks järgmised arvude kolmikud:

1) $x = 2$, $y = 11$, $z = 3$; 2) $x = 4$, $y = 4$, $z = 8$.

Anname nüüd ühele tundmatule, kasvõi x-le, mingi meelevaldse väärtuse, näiteks $x = 2\frac{1}{2}$. Asetades selle väärtuse võrrandeisse (1) ja (2), saame:

$$\begin{cases} 37\frac{1}{2} + 10y + 8z = 164 \\ 2\frac{1}{2} + y + z = 16 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 5y + 4z = 63\frac{1}{4} \\ y + z = 13\frac{1}{2} \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi, leiame $y = 9\frac{1}{4}$, $z = 4\frac{1}{4}$.

Seega on süsteemil veel lahend: $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 9\frac{1}{4}$, $z = 4\frac{1}{4}$.

Andes x-le mingi teise väärtuse, saame uue kahe tundmatuga võrrandisüsteemi, millest leiame y ja z jne.

Tähendab, üldiselt rääkides on kahest kolme tundmatuga võrrandist koosneval süsteemil samuti lõpmata palju lahendeid.

Võib aga anda ka süsteemi, millel ei ole ühtki lahendit, näiteks:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

Millised ka ei oleks x, y ja z väärtused, ei või avaldis $x - y + 2z$ võrduda üheaegselt 5-ga ja 7-ga.

Võib esineda kahest kolme tundmatuga võrrandist koosnevaid süsteeme, milledel on ainult üks või mitu lahendit, kuid selliseid juhtumeid esineb suhteliselt harva.

§ 84. Kolmest kolme tundmatuga võrrandist koosnev süsteem.

Ülesanne 3. *Lasteaed ostis kingituste jaoks 16 kg kolme sorti kompvekke: 15 rbl., 10 rbl. ja 8 rbl. kilogramm, kokku 164 rbl. eest. Mitu kilogrammi osteti iga sorti kompvekke, kui kolmandat sorti osteti kaks korda rohkem kui teist?*

Jättes samad tähistused, mis varem, saame võrrandid:

$$15x + 10y + 8z = 164 \quad (1)$$
$$x + y + z = 16 \quad (2)$$

Kuid ülesande tingimuse kohaselt võime koostada veel ühe võrrandi, nimelt:

$$z = 2y \quad (3)$$

(kolmandat sorti oli ostetud kaks korda rohkem kui teist).

Saame kolmest kolme tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi.

Kõigepealt märgime, et kõik need kolm teoreemi, mida käsitlesime paragrahvis 80, jäävad õigeks ka kolme (ja enam) tundmatuga võrrandisüsteemide puhul. Seepärast kasutame antud süsteemi lahendamisel neidsamu võtteid, milliseid kasutasime kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi lahendamiselgi.

1. Liitmisvõte. Kuna võrrand (3) ei sisalda tundmatut, siis elimineerime võrrandite (1) ja (2) süsteemist tundmatu x. Selleks korrutame võrrandi (2) mõlemad pooled 15-ga. Saame süsteemi:

$$\begin{cases} 15x + 15y + 15z = 240 \\ 15x + 10y + 8z = 164 \end{cases}$$

x kordajad on võrdsed. Lahutades esimesest võrrandist teise, saame:

$$5y + 7z = 76.$$

Saime võrrandi, mis sisaldab kahte tundmatut y ja z. Koos võrrandiga (3) moodustab saadud võrrand kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} 5y + 7z = 76 \\ z = 2y \end{cases}$$

Lahendades selle ühe §-s 81 esitatud võtte abil, leiame:

$$y = 4, \quad z = 8.$$

Asetades need väärtused võrrandisse (1) või (2), leiame, et $x = 4$.

Seega on sellel kolmest kolme tundmatuga võrrandist koosneval süsteemil ainult üks lahend:

$$x = 4; \quad y = 4; \quad z = 8.$$

2. Asendusvõte. Vaadeldud süsteemi lahendamiseks on asendusvõte palju sobivam, sest võrrandis (3) on tundmatu z juba väljendatud y kaudu. Tehes vastavad asendused võrrandites (1) ja (2), saame:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 16y = 164 \\ x + y + 2y = 16 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 15x + 26y = 164 & (4) \\ x + 3y = 16 & (5) \end{cases}$$

Lahendame selle süsteemi ükskõik millise §-s 81 esitatud meetodi abil, näiteks liitmisvõtte abil.

Korrutades võrrandi (5) 15-ga ja lahutades tulemusest võrrandi (4), saame:

$$19y = 76.$$

Siit leiame:

$$y = 4.$$

Asetades leitud y väärtuse võrrandisse (5) leiame, et $x = 4$. Asetades lõpuks y väärtuse võrrandisse (3) leiame, et $z = 8$. Saime sama tulemuse, mis esimese meetodi puhulgi.

Lahendame veel ühe süsteemi liitmisvõtte abil:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ x + 4y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

Elimineerime ühe tundmatuist, näiteks z. Selleks liidame esimese ja teise võrrandi, saame:

$$3x + y = 13.$$

Korrutame nüüd teise võrrandi 2-ga ja liidame kolmandaga, saame:

$$5x + 6y = 26.$$

Mõlemad saadud võrrandid moodustavad kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 5x + 6y = 26 \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi ühe meile tuntud võttega, leiame $x = 4$, $y = 1$. Asetades need väärtused ühte antud võrrandisse, näiteks esimesse, leiame, et $z = 2$. Seega, kui antud süsteemil on lahend, siis võib ta olla ainult niisugune: $x = 4$; $y = 1$; $z = 2$. Asetades need väärtused teise ja kolmandasse võrrandisse, veendume, et need on tõepoolest antud süsteemi lahendeiks.

SISUKORD.

Lk.

Esimene peatükk. **Algebralised avaldised. Võrrandid.**

§ 1. Tähtede kasutamine 3
§ 2. Algebralised avaldised 4
§ 3. Tähtede lubatavad väärtused 7
§ 4. Kordaja 8
§ 5. Astendamine 9
§ 6. Tehete järjekord 11
§ 7. Liitmise ja korrutamise põhiseadused 13
§ 8. Algteadmisi võrranditest 16
§ 9. Ajaloolisi andmeid 19

Teine peatükk. **Ratsionaalarvud.**

§ 10. Positiivsed ja negatiivsed arvud 21
§ 11. Arvtelg 22
§ 12. Ratsionaalarvude võrdlemine 23
§ 13. Arvu absoluutväärtus 24
§ 14. Ratsionaalarvude liitmine 26
§ 15. Liitmise seadused 29
§ 16. Mitme arvu liitmine 30
§ 17. Ratsionaalarvude lahutamine 31
§ 18. Liitmise ja lahutamise omadused 32
§ 19. Algebraline summa 34
§ 20. Korrutamine 35
§ 21. Korrutamise seadused 37
§ 22. Mitme arvu korrutamine 39
§ 23. Korrutamise omadused 40
§ 24. Astendamine 41
§ 25. Jagamine 42
§ 26. Jagamise omadused 43
§ 27. Graafikud 44
§ 28. Võrrandite ja ülesannete lahendamine 48
§ 29. Ajaloolisi andmeid 51

Kolmas peatükk. **Tehted algebraliste täisavaldistega.**

§ 30. Üksliige ja hulkliige 53
§ 31. Samasused ja samasusteisendused 57

§ 32. Sarnaste liikmete koondamine 60
§ 33. Üksliikmete ja hulkliikmete liitmine 61
§ 34. Üksliikmete ja hulkliikmete lahutamine 64
§ 35. Üksliikmete korrutamine 66
§ 36. Hulkliikme korrutamine üksliikmega 67
§ 37. Hulkliikmete korrutamine 68
§ 38. Korrastatud hulkliikmete korrutamine 69
§ 39. Üksliikmete astendamine 71
§ 40. Korrutamise abivalemid 72
§ 41. Üldisi märkusi algebraliste täisavaldiste jagamise kohta . . 76
§ 42. Üksliikmete jagamine 77
§ 43. Hulkliikme jagamine üksliikmega 79
§ 44. Hulkliikmete jagamine 80
§ 45. Jagamine abivalemite abil 83

Neljas peatükk. **Hulkliikmete tegureiks lahutamine.**

§ 46. Tegureiks lahutamise mõiste 84
§ 47. Ühise teguri toomine sulgude ette 85
§ 48. Rühmitamise meetod 87
§ 49. Korrutamise abivalemite kasutamine 89
§ 50. Mitme meetodi kasutamine 90

Viies peatükk. **Algebralised murrud.**

§ 51. Algebralise murru mõiste 92
§ 52. Murru põhiomadus 94
§ 53. Murru liikmete märkide muutmine 94
§ 54. Murdude taandamine 96
§ 55. Murdude teisendamine ühenimelisteks 96
§ 56. Murdude liitmine 98
§ 57. Murdude lahutamine 100
§ 58. Murdude korrutamine 101
§ 59. Murdude jagamine 101

Kuues peatükk. **Ühe tundmatuga esimese astme võrrandid.**

§ 60. Üldmõisted 102
§ 61. Samaväärsed võrrandid 105
§ 62. Võrrandi kaks põhiomadust 107
§ 63. Võrrandid, kus tundmatu esineb mõlemal poolel 110
§ 64. Ühe tundmatuga esimese astme võrrand 113
§ 65. Võrrandite lahendamise üldine eeskiri 114
§ 66. Ülesannete lahendamine võrrandite abil 117
§ 67. Võrrandid, kus tundmatu esineb murru nimetajas 121
§ 68. Võrratuse mõiste 123
§ 69. Võrratuste omadused 124
§ 70. Ühe tundmatuga esimese astme võrratused 127
§ 71. Ajaloolisi andmeid 129

Seitsmes peatükk. **Kahe tundmatuga võrrandid.**

§ 72. Punkti koordinaadid tasapinnal 131
§ 73. Kahe tundmatuga võrrandid 133
§ 74. Kahe tundmatuga võrrandi graafiline kujutamine 136
§ 75. Võrdeline sõltuvus 139
§ 76. Pöördvõrdeline sõltuvus 142
§ 77. Lineaarne sõltuvus 146
§ 78. Kahe tundmatuga esimese astme võrrand 148

Kaheksas peatükk. **Esimese astme võrrandisüsteemid.**

§ 79. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemid 151
§ 80. Samaväärsed süsteemid 152
§ 81. Võrrandisüsteemide lahendamine 153
§ 82. Ülesannete lahendamine 159
§ 83. Kolme tundmatuga võrrandid 160
§ 84. Kolmest kolme tundmatuga võrrandist koosnev süsteem . . 162

Александр Николаевич Барсуков
АЛГЕБРА
Часть I
Учебник для 6 и 7 классов
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе 10.

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja L. Uuspõld
Korrektor S. Vasard

Ladumisele antud 24. IV 1957. Trükkimisele antud 21. VI 1957. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 10,5. Arvutuspoognaid 8,43. Trükiarv 14 000. Tellimise nr. 1590. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 1.85

6—6

Rbl. 1.85

A-21622

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00328065 0