

TIIU PAAS

KVANTITATIIVSED MEETODID MAJANDUSES
(MAJANDUSMATEMAATIKA)

TARTU ÜLIKOOL
Majandusteaduskond
Rahvamajanduse instituut

TIIU PAAS

**KVANTITATIIVSED MEETODID MAJANDUSES
(MAJANDUSMATEMAATIKA)**

Retsenseerinud matemaatikakandidaat Otto Karma (TÜ) ja
EMPÜ informaatika instituudi juhataja, dotsent Jüri Roots

Keeletoimetaja Leonhard Uuspõld

Kaane kujundanud Ain Sakk

Käesolev väljaanne on kirjastatud Avatud Eesti Fondi toetusel

Teine trükk

© Tiiu Paas, 1998

ISBN 9985-4-0013-5

 AS YÖRU TÄHT

SISUKORD

SISSEJUHATUS.....	11
1. MUDELID JA KVANTITATIIVSED MEETODID	
OTSUSTUSPROTSESSIS.....	13
1.1. Mudel ja modelleerimine	13
1.2. Kvantitatiivsed meetodid	16
1.3. Otsustusprotsess	17
1.4. Otsustuskeskkond.....	18
1.5. Stabiilsuse analüüs	22
1.6. Modelleerimise kasutamine otsustusprotsessis	23
1.7. Näide modelleerimise kasutamisest otsustusprotsessis	25
Kokkuvõte	28
2. LINEAARSED PLANEERIMISÜLESANDED.....	31
2.1. Juhtimiseesmärk ja optimeerimisülesanded	31
2.2. Lineaarse planeerimisülesande formuleerimine.....	32
2.3. Põhireeglid majandusprobleemi formuleeri- miseks lineaarse planeerimisülesandena	36
2.4. Lineaarse planeerimisülesande põhikuju ja kanooniline kuju	36
2.5. Lineaarse planeerimisülesande teisendamine <i>max</i> -kanoonilisele kujule	42
2.6. Lineaarse planeerimisülesandega duaalne ülesanne	45
2.7. Duaalsete ülesannete paari näiteid	48
2.8. Seosed duaalsete ülesannete paari lahendite vahel	51

2.9. Üldised reeglid duaalsete ülesannete paari formuleerimise kohta	52
2.10. Lineaarse planeerimisülesande graafilise lahendamine (geomeetria)	55
2.11. Erijuhud lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel	61
Kokkuvõte	66
3. SIMPLEKSMEETOD	69
3.1. Simpleksmeetodi idee	69
3.2. Simplekstabel	70
3.3. Baasitabel	71
3.4. Simpleksteisendused	74
3.5. Simpleksmeetodil saadud lahendi analüüs	76
3.6. Simpleksmeetodi rakendamise näiteid	79
3.7. Simpleksmeetodi rakendamine üldjuhul	90
Kokkuvõte	99
4. TRANSPORDIÜLESANDED	101
4.1. Transpordiülesande põhikuju	101
4.2. Transpordiülesande lahtine ja kinnine esituskuju	105
4.3. Transporditabel	108
4.4. Transpordiülesande lahenduskäik	110
4.5. Lubatava lahendi leidmise meetodid	111
4.5.1. Loodenurga reegel	112
4.5.2. Vähima elemendi reegel	114
4.5.3. Vogeli reegel	115
4.6. Kõdunud lahend	117
4.7. Potentsiaalide meetod	119
4.8. Lubatava lahendi optimaalsuse kontroll	120
4.9. Lahendi optimeerimine	122
4.10. Alternatiivne lahend	126
4.11. Lahendi stabiilsuse analüüs	128
4.12. Transpordiülesandena formuleeritud majandusprobleemi lahendamine	131

4.13. Näide transpordiülesande formuleerimisest ja lahendamisest transpordiga mitteseotud probleemi korral	141
Kokkuvõte	145
5. MITTELINEAARNE PLANEERIMINE	147
5.1. Mittelineaarsed planeerimisülesanded (optimeerimisülesanded)	147
5.2. Kaubavarude planeerimine	147
5.2.1. Probleemi püstitus	147
5.2.2. Kaubavarude mudel	148
5.2.3. Kaubavarude mudeli lahendamine	152
5.2.4. Lahendi stabiilsuse analüüs	155
5.2.5. Kaubavarude planeerimise näiteid	158
5.2.6. Laopinna arvestamine kaubavarude modelleerimisel (lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne)	160
5.2.6.1. Lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne üheliigilise kauba korral ...	160
5.2.6.2. Lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne n erineva kauba korral	163
5.3. Lisatingimustega mittelineaarne tootmise planeerimise ülesanne	166
5.3.1. Probleemi püstitus	166
5.3.2. Tootmise planeerimise ülesande näide	167
Kokkuvõte	170
6. MÄNGUTEOORIA	171
6.1. Mänguteooria olemus	171
6.2. Mänguteooria põhimõisted	172
6.3. Mänguteooria kasutamise tingimused	175
6.4. Mittenullsummaline mäng	175
6.5. Kooperatiivmäng	178
6.6. Nullsummaline mäng	179
6.6.1. Mängu maatriks	179
6.6.2. Mängu hind	182

6.6.3. Domineerivad strateegiad. Mängu lihtsustamine.....	184
6.6.4. Mängu lahendamine lineaarse planeerimis- ülesandena	186
6.6.5. Näide mängu lahendamisest lineaarse planeerimisülesandena	191
6.7. Mäng loodusega	194
6.7.1. Loodusega mängu maatriks.....	194
6.7.2. Riski maatriks.....	194
6.7.3. Loodusega mängu näide.....	195
6.7.4. Erinevad kriteeriumid mängu tulemuse hindamisel	198
Kokkuvõte	202
7. VÕRKPLANEERIMINE.....	205
7.1. Võrkplaneerimise olemus ja kasutamine	205
7.2. Võrkplaneerimise põhimõisted	206
7.3. Võrkgraafiku koostamine.....	207
7.4. Tööde projekt ja sellele vastav võrkgraafik	210
7.5. Kriitiline tee	213
7.6. Sündmuste varaseimad ja hiliseimad toimumisajad	214
7.7. Tööde alustamise ja lõpetamise tähtjad.....	218
Kokkuvõte	222
8. JÄRJEKORRATEOORIA	225
8.1. Järjekorrateooria olemus	225
8.2. Järjekorrateooria põhimõisted.....	227
8.3. Teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamised näitajad	228
8.4. Lihtne sisendvoog.....	230
8.5. Teenindusaeg.....	232
8.6. Järjekorra distsipliin	234
8.7. Teenindussüsteemide liigitamine	236
8.8. Ühekanaliline teenindussüsteem	238

8.9. Ühekanalilise teenindussüsteemi näide	241
8.10. Mitmekanaliline teenindussüsteem	244
8.11. Mitmekanalilise teenindussüsteemi näide	252
8.12. Piiratud järjekorraga teenindussüsteem.....	255
8.13. Piiratud järjekorraga teenindussüsteemi näide	260
Kokkuvõte	264
Kirjandus	267

SISSEJUHATUS

Inimese võime otsuseid vastu võtta on tema ajaloolise arengu tulemus. Et olelusvõitluses ellu jääda, tuli ja tuleb kiiresti otsustada, mida ja kuidas teha ning sellele vastavalt toimida. Otsuseid tuleb langetada ka igapäevases majandustegevuses, et olla turul konkurentsivõimeline ning võimalikult efektiivselt tegutseda piiratud ressursside tingimustes.

Loomulikult langetab edukas majandusmees enamasti otsuseid intuiitselt, tuginedes eelnevatele kogemustele ja läbides otsustamisele aluseks oleva otsustusprotsessi etappe iseenda ja ka kaaslaste jaoks sageli märkamatuult. Kuid mida keerukamaks muutuvad majandussuhted ja majandamiskeskond ning mida tugevam on konkurents, seda enam läheb vaja täiendavat infot. Tunnetatakse vajadust tugineda otsuste langetamisel alternatiivsete otsusevariantide võimalike tagajärgede kvantitatiivse analüüsi tulemustele. Sellise info saamine on suhteliselt lihtne, sest analüüsi läbiviimisega ja täiendava info hankimisega seonduvad tehnilised probleemid saab lahendada arvutil.

Võimalike otsusevariantide analüüsimisel ja hindamisel on oluliseks abivahendiks majandusmatemaatika kui majandusteaduse ja matemaatika integreerumisel arenenud teadusala poolt pakutavad matemaatilised lähenemisviisid ja meetodid majandusprotsesside modelleerimiseks. Neid lähenemisviise ning meetodeid käsitletakse erialakirjanduses sageli ka kui kvantitatiivsete meetodite kasutamist majanduses, mille eesmärgiks on pakkuda otsuse langetajale täiendavat infot oma valikute tegemiseks. Siinjuures tuleb silmas pidada, et otsustajaks jääb alati inimene ning ükski meetod ega võimas arvuti ei ole võimeline seda tegevust enda kanda võtma. Kvantitatiivsete meetodite ja nende

kasutamist toetava arvutitarkvara rolliks jääb otsustamisel ning erinevate otsuste võimalike tagajärgede analüüsimisel olla vaid “informeeritud abistajaks”. Kuivõrd otsustaja sellist abimeest ära kasutada oskab, see sõltub tema võimest probleeme selliselt formuleerida, et nende lahendamisel saab kasutada kvantitatiivsete meetodite abi, ning loomulikult ka oskusest ja kogemustest saadud tulemusi efektiivselt ellu rakendada. Selliseid oskusi ja teadmisi on vaja omandada ning arendada.

Selle raamatu eesmärgiks on pakkuda mõningaid kvantitatiivsete meetodite kasutamise võimalusi erinevate majandusprobleemide lahendamiseks ning täiendava info saamiseks otsuste langetamisel. Raamat on eelkõige mõeldud majandusüliõpilastele, kuid ka perspektiivitundega majandusjuht ja äriees võib raamatust leida infot, mis suunab teda mõtlema oma otsustustegevusele ning võimalustele muuta selle tulemusi efektiivsemaks. Et õigeid otsuseid langetada, on vaja olla informeeritud ja tunnetada keskkonda, milles majandusprotsess toimub, osata keskkonda mõjutada ning ette näha selle mõjutamise võimalikke tulemusi. Selleks läheb vaja oskusi majandusmodelite konstrueerimiseks ning nendega eksperimenteerimiseks. Mõningaid taolisi oskusi ja kogemusi võibki saada käesolevast raamatust.

Raamatu valmimisel on palju abi olnud Tartu Ülikooli rahvamajanduse instituudis töötavate kolleegide kompetentsetest ja heatahtlikest nõuannetest. Raamatu teise trüki ettevalmistamisel on abiks olnud majandusteaduskonna üliõpilaste poolt loengutes ja praktikumides tehtud märkused ja ettepanekud. Käskkirja vormistamisel trükiküpsaks on vaeva näinud arvutiinsener Ain Sakk. Autori südamlük tänu kõigile!

Kõik märkused ja ettepanekud raamatus käsitletud probleemide arendamiseks ja nendele lahendusvõimaluste leidmiseks on teretulnud (e-post: tpaas@mtk.ut.ee).

1. MUDELID JA KVANTITATIIVSED MEETODID OTSUSTUSPROTSESSIS

1.1. Mudel ja modelleerimine

Selleks et tundma õppida ümbritseva maailma objekte, uurida nende omadusi ja prognoosida arengut, on enamasti vaja kasutada selle objekti mudelit ning modelleerimisprotsessi. Kui loodusteadustes saab objektide või subjektide käitumist ning mitmesuguste protsesside kulgemist jälgida eksperimentide abil, siis majanduses on see sageli liialt keerukas, mõnikord praktiliselt võimatu. Loomulikult korraldatakse ka majanduses eksperimente (tihti ka teadmatusel, näiteks, suurendatakse maksu-määrasid, teadmata, kas sellega tegelikult kaasneb riigikassasse täiendav raha juurdetulek; suurendatakse või vähendatakse mingi ressursi kasutamist tootmisprotsessis, teadmata, mis sellega võib kaasneda jne.). Majanduslikud eksperimendid lähevad enamasti väga kalliks maksma. Tavaliselt leitakse mõne aja pärast alati, et majandusprotsesside juhtimisel tuleb odavam ning saavutatakse juhtimiseesmärgi seisukohalt paremaid tulemusi, kui kasutatakse majanduse modelleerimise võimalusi.

Mudel on tunnetusprotsessi vahend. Ta esineb tunnetusprotsessis originaalobjekti asendajana. Mudel peab originaalobjektiga kõigis uuritavates küsimustes võimalikult täpselt sarnanema, ent samas ka sellest erinema, olema lihtsam kui originaalobjekt. Mudel on objekti lihtsustatud kujutis, millest vähemalt mõned objekti või süsteemi omadused on eemaldatud.

Modelleerimisprotsessis osalevad alati subjekt (uurija), uurimisobjekt ning nende suhet vahendav mudel. Sõltuvalt subjektist ja

tema uurimiseesmärgist võib iga objekti kohta koostada palju mudeleid. Need võivad üksteisest erineda nii ülesehituselt kui ka lihtsustatuse astmelt, aga ka mitmete teiste mudelile ja originaalile iseloomulike joonte poolest. Näiteks ettevõtte tegevust võib modelleerida tootmise, turunduse, arvestuse jne. seisukohalt. Ettevõtte tegevus ja selle modelleerimine sõltuvad püstitatud eesmärkidest. Eesmärkideks võivad olla näiteks võimalikult suure kasumi saamine lühikese aja jooksul või uue turu hõlvamine ja seal pikemaks ajaks püsima jäämine. Esimesel juhul on modelleerimisel tegemist kasumi, teisel juhul läbimüügi maksimeerimise ülesandega. Kas riigi majanduse arengu kavandamisel seada esikohale tema kodanike momendi rahulolu saavutamine või majanduse pikaajalise stabiilse arengu tagamine? Tegemist on majanduspoliitilise küsimusega, millele vastuse saamiseks on oluline kvantitatiivselt hinnata ja analüüsida erinevate majanduspoliitiliste otsuste võimalikke tagajärgi. Selleks pakub samuti häid võimalusi modelleerimine kui mudelite konstrueerimise ja kasutamise protsess.

Modelleerimiseks on palju võimalusi. Erialakirjanduses jaotatakse modelleerimisvõimalused tavaliselt kahte suurde gruppi:

- materiaalne (aineline) modelleerimine;
- ideaalne (mõtteline) modelleerimine.

Materiaalne ehk ainealine modelleerimine on toiming, mille tulemusena saadavad mudelid annavad edasi objekti põhilisi füüsikalisi, geomeetrilisi, dünaamilisi ja funktsionaalseid tunnuseid. Näiteks tehakse lennuki mudel ning katsetatakse mudelil lennuki vastupidavust ja lennuomadusi. Originaaliga katsetamine oleks liiga kallis ja ohtlik.

Ideaalsel ehk mõttelisel modelleerimisel koostatakse uurimisobjekti mõtteline analoog. Eristatakse kahte tüüpi mõttelisi mudeleid:

- kujutlusmudelid;
- märkmudelid.

Kujutlusmudelid põhinevad intuiitiivsel ettekujutusel reaalsest objektist (tegelikkusest). Nad ei vaja tavaliselt formaliseerimist ja sageli isegi ei allu formaliseerimisele. Kujutlusmudeliteks võivad olla mitmesugused sõnalised selgitused, definitsioonid jne. Kujutlusmudeli näitena võib tuua ka ärimehhe nägemuse oma firma võimalikust tegevusest. Seda nägemust ei pruugi ta veel osata formaliseerida.

Märkmudel on objekti mõtteline mudel, mis on esitatud teatud märgisüsteemis: valemina, joonisena, tabelina, graafikuna jne. Märkmudelite tähtsaim alaliik on *matemaatiline mudel*, kus uuritavat nähtust või objekti kirjeldatakse matemaatiliste seoste abil. Originaali vahetu uurimine taandub matemaatiliste seoste uurimisele. Matemaatiline mudel võimaldab imiteerida originaali informatsioonilist külge. Millist märkmudelit lugeda matemaatiliseks, millist mitte — see piir on kokkuleppeline. Aritmeetilisi arvutusi ei loeta tavaliselt matemaatiliseks mudeliks, kuid on ka erandeid. Näiteks, kas firma kasumi kui tulude ja kulude vahena kujuneva näitaja arvutuskeemi ning sellele vastavaid mudeleid loetakse matemaatilisteks või ainult märkmudeliteks, sõltub nii kokkuleppest kui ka konkreetsest töö käigust. Märkmudelite konstrueerimine majandusprobleemide formaliseerimiseks eeldab kvantitatiivsete ja kvalitatiivsete lähenemisviiside kombineeritud kasutamist.

Mudel — tunnetusprotsessi vahend, mis asendab originaali ning säilitab uurimiseesmärgi seisukohalt olulised originaali omadused.

Modelleerimine — mudelite loomise ja kasutamise protsess.

Matemaatiline mudel — märkmudel, kus originaali uurimine taandub matemaatiliste seoste uurimisele.

1.2. Kvantitatiivsed meetodid

Kvantitatiivne lähenemine majandusprobleemide formuleerimisele ning võimalike otsusevariantide analüüsimisele ja hindamisele on tänu arvutite ja arvutitarkvara kiirele arengule ja laialdasele kasutamisele kujunenud hinnatavaks täiendava süstematiseeritud info hankimise ja otsuste põhjendamise vahendiks. Ta võimaldab sügavamalt tunnetada majandusprotsesside arengut ning ette näha võimalikke muutusi nende kulgemises vastavalt ümbritseva keskkonna muutustele. Siinjuures on oluline, et nii otsusevariantide analüüsimisel kui ka otsuste vastuvõtmisel tuginetakse kvantitatiivse ja kvalitatiivse lähenemise kombineeritud kasutamise võimalustele.

Kvantitatiivsed meetodid majanduses hõlmavad matemaatilisi võtteid ja lähenemisviise, võimaldamaks konstrueerida nii optimeerimis- kui simuleerimismudeleid majandusprotsesside käitumise uurimiseks. *Optimeerimismudel* võimaldab selgitada parima lahendi kooskõlas juhtimiseesmärgi ning juhtimiseesmärgi saavutamist piiritlevate kitsendustega. Optimeerimismodelite ning nende lahendamist võimaldavate optimeerimismetodite abil on võimalik teha teatud mõttes parimaid valikuid võimalike otsustusvariantide seast.

Simuleerimismudeleid käsitletakse sageli kui "Mis siis, kui ..." tüüpi mudeleid. Nad võimaldavad saada infot selle kohta, mis ühe või teise otsuse või valiku tulemusena võib juhtuda. Simuleerimismodelite abil saab analüüsida erinevaid stsenaariume majandusprotsessi suunamiseks, välja valimata kindla kriteeriumi alusel parimat. Simuleerimismudeleid kasutatakse tavaliselt siis, kui optimeerimismudeleid konstrueerida ei ole võimalik.

Optimeerimis- ja simuleerimismodelite konstrueerimise ning nende lahendusmeetoditega tegelevateks teadusaladeks on matemaatiline majandusteadus (*Mathematical Economics*), operatsiooni-analüüs (*Operations Research*), kvantitatiivsed meetodid (*Quantitative Methods*), juhtimisteadus (*Management Science*).

Eesti keeles kasutatakse ka nimetust “majandusmatemaatika”, tähistamaks sellega matemaatika ja majandusteaduse integreerimisel kujunenud teadusala, mis on suunatud majandusprobleemide kvantitatiivsetele lahendamisvõimalustele.

Kvantitatiivsed meetodid majanduses on lai mõiste, hõlmates mitmesuguseid võimalusi otsustamiseks vajaliku täiendava kvantitatiivse info saamiseks erinevate mudelite baasil. Selles raamatus on kvantitatiivsetest meetoditest käsitletud mõningaid optimeerimisülesannete lahendamismeetodeid, samuti mänguteooriat, võrkplaneerimist ning järjekorrateooriat.

Kvantitatiivsed meetodid majanduses hõlmavad matemaatilisi võtteid ja lähenemisviise, võimaldamaks konstrueerida ning lahendada optimeerimis- ja simuleerimismudeleid majandusprotsesside käitumise uurimiseks.

Optimeerimismudel võimaldab selgitada parima lahendi kooskõlas juhtimiseesmärgi ning juhtimiseesmärgi saavutamist piiritlevate kitsendustega.

Simuleerimismudel võimaldab saada täiendavat infot majandusprotsessi võimaliku käitumise kohta tulenevalt majandusprotsessi eelnevast mõjutamisest (“Mis siis, kui...”).

1.3. Otsustusprotsess

Et suunata majandusprotsesside käiku, on vaja teha valikuid ning langetada otsuseid. Otsustusprotsess on otse- ja tagasisidemetega protsess, hõlmates etappe, mis sisaldavad probleemi defineerimist, sellele vastava mudeli püstitamist (tegemist võib

olla erinevate mudelitega: nii ainelistele kui kujutlus- ja märkmudelitele), otsustamiseks vajalike andmete kogumist ja töötlemist, mudeli lahendamist ja lahendusalternatiivide hindamist ning sellele järgnevat otsuse vastuvõtmist.

Nimetatud on vaid kõige olulisemad otsustusprotsessi etapid. Need võivad omakorda sisaldada veel allosasid. Näiteks mudeli lahendamine võib sisaldada ka selleks vajalike meetodite arendamist ning arvutitarkvara väljatöötamist. Andmete kogumine sisaldab andmevajaduse määratlemist, andmete usaldusvääruse ja representatiivsuse hindamist, andmete süstematiseerimist ja teisi andmete esialgse töötlemise protseduure jne. Olulisim on siinjuures õige probleemipüstitus. Mudeli konstrueerimine, selle lahendamine ja tulemuste analüüs ning otsuse vastuvõtt vale probleemipüstituse alusel on ohtlikum viga, mis otsustusprotsessis võib esineda. Seetõttu on väga oluline probleemipüstitusega koos analüüsida ka otsustamiskeskonda, selle mõju probleemipüstitusele ning võimalikke muutusi probleemipüstituses seoses muudatustega keskkonnas.

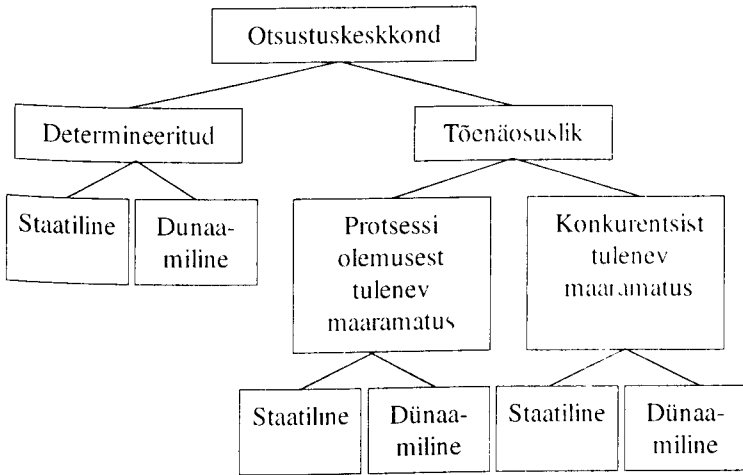
Otsustusprotsessi peamised etapid:

- **probleemi defineerimine**
- **mudeli(te) püstitamine**
- **andmete kogumine**
- **mudeli lahendamine**
- **lahendustulemuste analüüs**
- **otsuse vastuvõtmine**

1.4. Otsustuskeskkond

Otsust, mis ühe või teise majandusprobleemi lahendamiseks vastu võetakse, ei saa vaadelda lahus otsustuskeskkonnast ning

tingimustest, milles otsus on langetatud. Otsustuskeskkonna käsitlemisel modelleerimise ning modelleerimisprotsessis kasutatavate kvantitatiivsete meetodite seisukohalt võib eristada determineeritud ja tõenäosuslikku otsustuskeskkonda (joonis 1.1).



Joonis 1.1. Otsustuskeskkonna esinemisviisid /Knowles, 1989/.

Determineeritud keskkond on keskkond, milles otsuste langetamisel võib loobuda eeldusest, et majandamisprotsess toimub juhuslikkuse või määramatuse tingimustes. Näiteks, koostades firmale tootmisplani tema kasutuses olevate peamiste ressursside (materjal ja tööjõud) korral, võib lähtuda seisukohast, et tegemist on juhuslikkusest suhteliselt vähe mõjutatud majandusprotsessiga. Kuigi ka siin on tegemist teatud mõttes määramatusega (materjal ei saabu kohale õigeaegselt, töötaja võib haigestuda jm.), võib selle määramatuse siiski arvesse võtmata jätta ning püstitada mudeli, mis vastab determineeritud otsustuskeskkonnale. Niisuguste mudelite lahendusmeetoditena on näi-

teks tuntud lineaarse planeerimise põhimeetodid: simpleksmeetod ning potentsiaalide meetod transpordiülesandena formuleeritud probleemipüstituse korral. Kasutatakse ka mittelineaarse planeerimise meetodeid. Majandusprotsesside kulgemisega peaaegu alati kaasnevat teatud määramatust on siinjuures võimalik arvestada lahendi stabiilsuse analüüsimisel.

Tõenäosusliku otsustuskeskkonnaga on näiteks tegemist olukordades, kus tuleb arvestada ostjatega ning nende võimaliku käitumisega ostu-müügi protsessis. Ostjad tulevad kauplusse ning võtavad ostu-müügi protsessist osa juhuslikult. Seda saab hinnata vaid teatud tõenäosusega. Ostjatevoogu kauplusse ei ole tavaliselt võimalik reguleerida, nagu on võimalik reguleerida patsientide tulekut hambaarsti juurde (näiteks iga poole tunni tagant). Otsustamisel toeks olevate mudelitena tuleb kasutada selliseid, mis võimaldavad taolist määramatust ja juhuslikkust teatud tõenäosusega arvesse võtta (näiteks järjekorrateooriale tuginevad mudelid).

Tõenäosuslikus otsustuskeskkonnas võib eristada *protsessi olemusest* või *konkurentsist tulenevat määramatust*. Protsessi olemusest tingitud määramatust võib põhjustada ilm, aga ka näiteks seadusandlus, parlamendi või valitsuse otsus jm. Konkurentsist tulenev määramatus avaldub hindades, nõudmise ja pakkumise mahtudes ja struktuuris jne.

Nii determineeritud kui tõenäosuslikus otsustuskeskkonnas saab eristada *dünaamilist* ja *staatilist* aspekti, millele vastavad dünaamiline või staatiline mudelipüstitus. Dünaamilist mudelit tuleb kasutada näiteks majandusprotsessi puhul, mille kulgemist vaadeldakse ajas muutuvana. Staatilise mudeliga saab piirduda juhul, kui majandusprotsessi kulgemine teatud ajavahemikul (näiteks aasta jooksul) on käsitletav püsivana. Piirid majandusprotsessi staatilise ja dünaamilise kulgemise vahel on suhtelised ning pikemaajalises käsitluses tuleb tavaliselt arvestada majandusprotsesside dünaamilisusega.

Otsustusmudelid, mis on orienteeritud pikaajaliselt kulgevatele majandusprotsessidele ning kus keskkonda käsitletakse dünaamilisena, võimaldavad langetada *strateegilisi otsuseid*. Keskmise kestusega või lühiajaliselt kulgeva majandusprotsessi käitumist imiteerivad mudelid on suunatud eelkõige *taktikaliste* ja *operatiivsete otsuste* vastuvõtmise toetamisele ning nendes saab keskkonda käsitleda enamasti staatilisena.

Otsustuskeskkond on suures osas määratud ka andmetega, mida otsustusprotsessis saab kasutada. Mitte alati ei ole olemas kvantitatiivselt väljendatavaid andmeid iseloomustamiseks adekvaatselt otsustuskeskkonda ning probleemi, mille lahendamiseks tuleb langetada otsus. Vajalike andmete saamiseks kasutatakse sageli eksperthinnanguid. Sellisel teel saadud andmete puhul tuleb alati arvestada nende teatud subjektiivset iseloomu. Statistiliste andmete kasutamisel on oluline hinnata nende representatiivsust ja võrreldavust ning agregeerituse taset. Kui otsustamisel ning selleks sobiva mudeli konstrueerimisel on kasutatud väga palju ning seejuures agregeerimata andmeid, võib mudel kujuneda liialt mahukaks ja kasutaja poolt mittehõlmatavaks. Väga väheste andmete alusel konstrueeritud mudeli korral on oht otsustamisele kuuluva majandusprobleemi liigsele lihtsustamisele ning siit tulenevalt ebaadekvaatsele otsusele.

Otsustuskeskkonda mõjutavad:

- majandusprotsessi iseloom
- majandusprotsessi kestus
- majandusprotsessi käitumist iseloomustavad andmed

1.5. Stabiilsuse analüüs

Mudeli lahendamisel saadud tulemuste analüüsimine on oluline otsustusprotsessi etapp, mille raames toimub lahendi ning mudeli *stabiilsuse* ehk *tundlikkuse analüüs*. Stabiilsuse analüüs võimaldab saada olulist täiendavat infot majandusprotsessi käitumise võimaluste kohta otsustuskeskkonna muutumise või muutmise korral.

Lahendi stabiilsuse analüüsil võib eristada kahte lähenemisi:

- 1) analüüsitakse mudeli parameetrite selliseid muutusi, mis ei too kaasa mudeli ja lahendi struktuuri muutumist;
- 2) analüüsitakse mudeli parameetrite muutusi, millega kaasneb mudeli ja lahendi struktuuri muutumine.

Esimesel juhul analüüsitakse, millistes piirides võib mudeli üks või teine parameeter muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks. Näiteks, milline on tooteühikult saadava kasumi võimaliku muutumise ulatus, et firmale sobivaim tootmise struktuur võiks jääda püsima. Sellist lahendi stabiilsuse analüüsi kasutatakse sagedamini optimeerimismeetodite (simpleksmeetod, potentsiaalide meetod jt.) korral.

Teisel juhul toimub tavaliselt mudeli taaslahendamine eesmärgiga selgitada lahendi võimalikku muutumist, kui muutuvad mudeli parameetrid. Näiteks, milliseks võib kujuneda firma tootmisplaan, kui uute seadmete tootlikkus on 20% kõrgem või kui firma saab suurendada oma käibevahendeid 30% võrra. Taoline lähenemine on kasutatav nii optimeerimis- kui simuleerimismudelite puhul.

Mudeli stabiilsuse analüüs võimaldab selgitada vajalikke muudatusi mudelipüstituses, mis kaasnevad muudatustega otsustuskeskkonnas. Need võivad avalduda majandusprotsessi kestuse (näiteks staatiline protsess muutub dünaamiliseks), iseloomu (determineeritud majandusprotsessi määramatus suureneb jm.),

majandusprotsessi käitumist iseloomustavate andmete muutumises jne. Mudeli stabiilsuse analüüs on samuti oluliseks lisa-info allikaks otsustusprotsessi toetamisel nii optimeerimis- kui simuleerimismudelite abil.

Stabiilsuse analüüs annab täiendavat infot majandusprotsessi võimaliku käitumise kohta otsustuskeskkonna muutumisel.

1.6. Modelleerimise kasutamine otsustusprotsessis

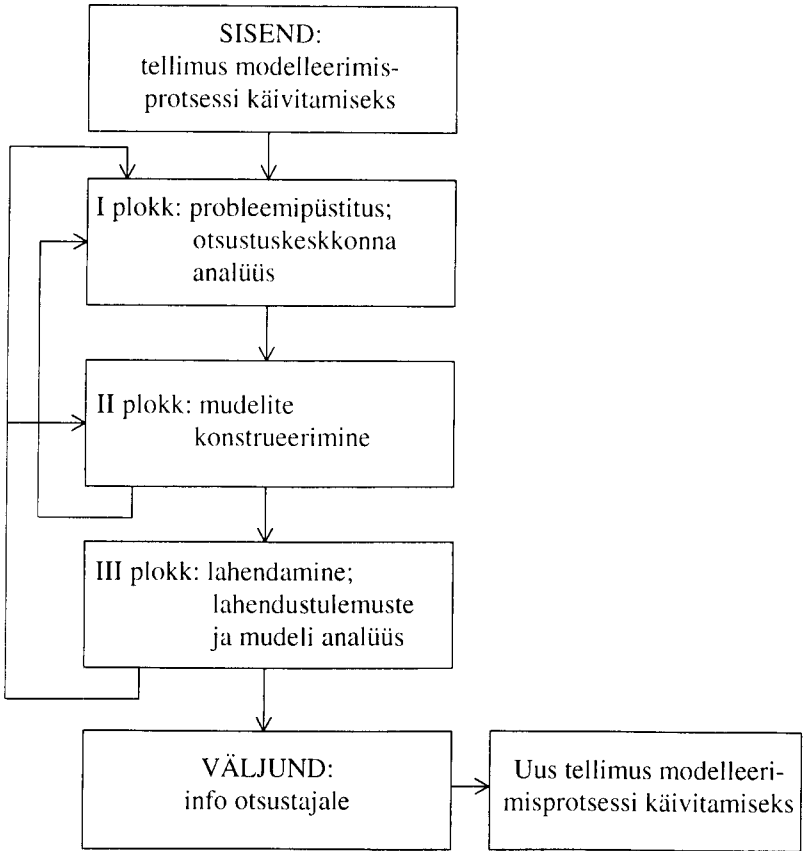
Modelleerimise kasutamisel otsustusprotsessis võib selle etapid agregeerida kolme põhiplokki (joonis 1.2):

I plokk: probleemipüstitus ja otsustuskeskkonna analüüs,

II plokk: üldkujuliste ning konkreetsetele andmetele tuginevate mudelite konstrueerimine,

III plokk: mudeli lahendamine; lahendi ja mudeli stabiilsuse analüüs.

Otsustusprotsessi põhiplokid omavad otse- ja tagasisidemeid. Nende toimimise sisendina võib käsitleda tellimust modelleerimise kui otsustusprotsessi abivahendi kasutamiseks ning väljundina süstematiseeritud lisainfot otsustajale. Mudelite püstitamisel ja lahendamisel tuginetakse nii kvalitatiivsetele kui kvantitatiivsetele meetoditele ning nende kasutamisel avanevatele võimalustele lahendi ja mudeli stabiilsuse analüüsimiseks. Stabiilsuse analüüsil selgunud lahendialternatiivid ning nende kvantitatiivsed hinnangud kujutavad endast olulist lisainfot otsuse langetamiseks, mille kvaliteedist ja kasutamise oskusest sõltuvad omakorda tellimuste esitamised modelleerimisprotsessi käivitamiseks.



Joonis 1.2. Modelleerimine otsustusprotsessis.

1.7. Näide modelleerimise kasutamisest otsustusprotsessis

PROBLEEMIPUSTITUS JA OTSUSTUSKESKKONNA ANALÜÜS

Lihatooteid valmistaval ja müüval ettevõttel "Karn" on võimalik hankida toorainet kahelt ühistult "Vasak" ja "Parem". "Karni" toodanguks on fileetooded, vorst, hakkliha ja töödeldud subproduktid. Ühistute "Vasak" ja "Parem" poolt pakutav tooraine erineb mõnevõrra nii hinnalt kui ka kvaliteedilt. Erinevused tooraine kvaliteedis väljenduvad "Karni" seisukohalt erinevates võimalustes kujundada oma toodangu sortimenti. Tootmisplaani kujundamisel on "Karnil" võimalik arvestada infoga toodete müügihinna, võimaliku müügikoguse ning ligikaudsete tootmiskulude kohta. Eesmärgiks on osta toorainet sisse selliselt, et ettevõtte kasum tootmisest ja toodete müügist oleks võimalikult suur.

Otsustuskeskkonna analüüsimisel võib jõuda järelduseni, et selliselt formuleeritud majandusprobleemi korral on majandusprotsessi määramatus ja juhuslikkus suhteliselt väikesed ning võib koostada determineeritud otsustuskeskkonnale vastava mudeli. Majandusprotsessi käitumist saab teatud ajavahemiku vältel käsitleda stabiilsena. Seega võib piirduda staatilise mudeli püstitusega.

ANDMED JA MUDEL

Probleemi püstitusele ja otsustuskeskkonna analüüsile järgneb majandusprobleemi iseloomustavate andmete kogumine ja esialgne töötlemine ning neile tugineva konkreetse mudeli püstitamine.

"Karnil" on võimalik osta toorainet ühistult "Vasak" hinnaga 24 krooni kilo ning ühistult "Parem" 26 krooni kilo. Ühistutelt ostetud toorainest saab toota erinevas koguses tooteid. Toodete võimalik struktuur on esitatud tabelis 1.1.

Tabel 1.1

Lihatoodete tootmisvõimalused ühe kilo tooraine kohta (%-s)

Toode	Ühistu	
	“Vasak”	“Parem”
Fileeliha	10	20
Vorst	40	40
Hakkliha	20	10
Subproduktid	30	30

Fileeliha müügihind on 60 krooni, vorstil 40 krooni, hakklihal 30 krooni ja töödeldud subproduktidel 15 krooni kilo. Ettevõtte on teinud eelnevat turuanalüüsi, mille tulemuste alusel võib prognoosida, et maksimaalselt on võimalik müüa 600 kilo fileetooteid, 1500 kilo vorsti ja 1000 kilo hakkliha nädalas. Subproduktide puhul on tegemist kaubaga, mille nõudlus ületab pakkumist ning nende toodete osas müügipiiranguid ei ole.

Tooraine töötlemiskulud on mõlemast ühistust ostetud liha korral võrdsed: 5 krooni ühe kilo liha kohta.

ANDMETE ESIALGNE TOÖTLEMINE

Kuna ühistutest ostetud tooraine on mõnevõrra erineva kvaliteediga, mis mõjutab toodangu struktuuri (tabel 1.1), siis “Karni” müügitulu ühistute “Vasak” ja “Parem” korral on samuti mõnevõrra erinev.

Võimalik müügitulu ühistust “Vasak” tooraine ostmisel:

$$0.1 \cdot 60 + 0.4 \cdot 40 + 0.2 \cdot 30 + 0.3 \cdot 15 = 32.5 \text{ krooni.}$$

Võimalik müügitulu ühistust “Parem” tooraine ostmisel:

$$0.2 \cdot 60 + 0.4 \cdot 40 + 0.1 \cdot 30 + 0.3 \cdot 15 = 35.5 \text{ krooni.}$$

Arvestades tooraine erinevate hindadega ühistutes (vastavalt 24 ja 26 krooni kilo) ning töötlemiskuludega (5 krooni kilo), kuju-

neb "Karni" kasumiks ühistust "Vasak" tooraine ostmisel 3.5 krooni ($32.5 - 24 - 5$) ning ühistust "Parem" tooraine ostmisel 4.5 krooni ($35.5 - 26 - 5$) ühe kilo liha kohta.

"Karni" juhtkonda huvitab, kui palju toorainet on otstarbekas kummastki ühistust osta (ühistust "Vasak" ostetava koguse tähis V , ühistu "Parem" korral tähis P), et saadav kasum kujuneks suurimaks:

$$3.5 V + 4.5 P \rightarrow \text{maksimaalne} \quad (1.1)$$

Nõudluse piiratusest (600 kg fileeliha, 1500 kg vorsti ja 1000 kg hakkliha nädalas) tulenevad kitsendused:

$$\begin{cases} 0.1V + 0.2P \leq 600 \\ 0.4V + 0.4P \leq 1500 \\ 0.2V + 0.1P \leq 1000 \end{cases} \quad (1.2)$$

Konstrueeritud on probleemipüstitusest ja otsustuskeskkonnast lähtuv konkreetsetele andmetele tuginev optimeerimismudel, mille lahendamiseks sobivaid võtteid ja meetodeid leiata raamatu järgnevatest osadest. Mudeli lahendiks on ettevõttele "Karn" suurimat kasumit võimaldavad tooraine sisseostukogused ühistutest "Vasak" ja "Parem".

LAHENDI JA MUDELI ANALUUS

Lahendi analüüsimisel on näiteks võimalik selgitada, millistes piirides võivad muutuda tooraine sisseostuhinnad (tooraine sisseostuhindade muutumisega kaasnevad tavaliselt muutused tooraineühiku kohta saadavas kasumis), et säiliks ettevõttele "Karn" suurimat kasumit võimaldav tooraine sisseostu struktuur ühistutest "Vasak" ja "Parem".

Juhul kui muutuvad "Karni" toodangu müügihinnad või turunõudlus, tuleb koostada uute parameetritega mudel. Uue mudeli lahendamisel saadud tulemus võimaldab selgitada, kuivõrd muutused majandusprotsessi kulgu mõjutavas keskkonnas aval-

davad mõju ettevõtte kasumile ning tooraine sisseostu struktuurile ja kogusele.

Lahendi analüüsimisel võib jõuda ka järelduseni, et muutmist vajab kogu mudelipüstitus. Kui ettevõtte tegutsemiskeskond on väga muutuv ja juhuslik, tuleb loobuda determineeritud otsustuskeskkonnale vastavast mudelist ning konstrueerida majandusprotsessi kulgemise juhuslikkust arvestav ehk tõenäosuslikule otsustuskeskkonnale tuginev mudel. Sellisteks mudeliteks on näiteks mitmesugused *ökonomeetrilised mudelid*, mis sisaldavad juhuslikke muutujaid (vähemalt ühte) ning mille lahendamiseks kasutatakse matemaatilise statistika meetodeid.

Kokkuvõte

Majandusprotsesside suunamiseks on vaja teha valikuid ning langetada otsuseid. Otsustusprotsess on otse- ja tagasisidemetega protsess. Otsustusprotsessi etapid sisaldavad majandusprobleemi formuleerimist ja otsustuskeskkonna analüüsi, sellele vastavat mudelipüstitust koos vajalike andmete ettevalmistamisega, mudeli lahendamist ja lahendustulemuste analüüsi ning info ettevalmistamist otsuste langetamiseks. Otsustusprotsessi lõppetapiks on otsuse tegemine.

Otsustusprotsessi erinevatel etappidel on otstarbekas kasutada kvantitatiivseid meetodeid (soovitavalt kombineeritult kvalitatiivsetega), mis võimaldavad konstrueerida majandusprotsesside käitumise uurimiseks ja imiteerimiseks sobivaid matemaatilisi mudeleid, eelkõige optimeerimis- ja simuleerimismudeleid. Optimeerimismudel võimaldab selgitada parima lahendi kooskõlas juhtimiseesmärgi ning selle saavutamist piiravate tingimustega. Simuleerimismudelile tuginevalt on võimalik analüüsida erinevaid arengustsenaariume ning saada täiendavat infot

majandusprotsessi võimaliku käitumise kohta erinevates keskkonnatingimustes.

Otsustusprotsessi toetamiseks konstrueeritavad mudelid tulenevad otsustuskeskkonnast. Majandusprotsessi iseloomust tulenevalt võib eristada determineeritud ja tõenäosuslikku otsustuskeskkonda. Neis saab omakorda eristada dünaamilist ja staatilist aspekti, millele vastavad dünaamiline ja staatiline mudelipüstitus. Otsustuskeskkonda iseloomustavad ja mõjutavad ka kasutada olevad andmed, nende usaldusväärsus ja adekvaatsus.

Otsustamiseks vajaliku täiendava info saamisel on olulise tähtsusega mudelite lahendamisel saadud tulemuste analüüs ning lahendusalternatiivide hindamine. Niisugust tegevust võib käsitleda lahendi ja mudeli stabiilsuse uurimisena ning selle alusel järelduste tegemisena majandusprotsessi tundlikkuse kohta muutuste suhtes.

2. LINEAARSED PLANEERIMISÜLESANDED

2.1. Juhtimiseesmärk ja optimeerimisülesanded

Juhtimisprotsessis on alati tegemist valikuga ja otsuste langetamisega. Et valikut teha, on vaja infot ja kriteeriume, millest lähtuvalt otsustusi tehakse. On vaja teha mingis mõttes parim otsus. Ärimehe tegevuse eesmärk on enamasti kasum. Mõnikord võib võimalikult suure kasumi saavutamiseks olla ka vahe-eesmäärke, näiteks

- suure turuosa hõlvamine,
- suur käive,
- võimalikult väikesed kulud,
- hea maine.

Kõik need vahe-eesmärgid teenivad lõppkokkuvõttes enamasti pikemaajalist eesmärki — kasumit.

Kasumi saamine (või mistahes muu eesmärgi saavutamine) on alati seotud teatud kitsendustega. See tuleneb tavaliselt inimese käsutuses olevate ressursside piiratusest. Globaalses mõttes on inimtegevus piiratud inimkonna poolt tunnetatud universumiga ja maakera pinnaga, millest tuleneb nii loodusressursside kui ka muude ressursside piiratus. Lokaalsel tasandil (riigis, regioonis, ettevõttes, firmas, talus) väljendatakse ressursside piiratud inimtegevuses ja suhtluses loodud vahetusekvivalendi — raha kaudu.

Optimaalne on olemasolevate võimaluste (kitsenduste) ja püstitatud juhtimiseesmärgi korral saavutatav parim tulemus. *Optimaalsuskriteerium* on juhtimiseesmärgi kvantitatiivne hinnang,

näiteks võimalikult suur kasum või müügiimaht, väikesed juhtimiskulud jne. *Optimeerimine* on olemasolevatele kitsendustele ning püstitatud optimaalsuskriteeriumile vastava lahendi leidmine.

Sõltuvalt sellest, kas optimeerimisülesanne on püstitatud lineaarsel või mittelineaarsel kujul, on tegemist vastavalt *lineaarse* või *mittelineaarse planeerimisülesandega*.

Optimaalne — olemasolevate võimaluste ja püstitatud juhtimiseesmärgi korral parim saavutatav tulemus.

Optimaalsuskriteerium — juhtimiseesmärgi kvantitatiivne hinnang.

Optimeerimine — olemasolevatele kitsendustele ning püstitatud optimaalsuskriteeriumile vastava lahendi leidmine.

2.2. Lineaarse planeerimisülesande formuleerimine

Lineaarse planeerimisülesande formuleerimisele eelneb majandusprobleemi sisuline analüüs, mille käigus selgitatakse juhtimiseesmärk (optimaalsuskriteerium) ning selle saavutamist piiritlevad kitsendused. Seejärel määratakse probleemi matemaatiliseks formuleerimiseks vajalikud andmed ning selgitatakse nende olemasolu.

Vaatleme näitena kahe tüüpilise majandusprobleemi formuleerimist lineaarse planeerimisülesandena.

1. Optimaalse tootmisplaani koostamine.

Eesmärgiks on olemasolevate ressursside korral koostada selline tootmisplaan, mille puhul tootmisest ja toodete müügist saadav kasum oleks suurim.

2. Optimaalse segu (või dieedi) koostamine.

Eesmärgiks on etteantud nõuetele vastava odavaima segu koostamine.

Näited on valitud selliselt, et nii juhtimiseesmärki väljendavas funktsioonis kui ka kitsendustes sisalduvad muutujad x_j on esimesel astmel, s.t. on lineaarsed. Seega on tegemist lineaarsete planeerimisülesannetega.

Näide 2.1. Töökoja näide (Tootmisplaani ülesanne)

PROBLEEMI PÜSTITUS

Töökojas toodetakse kahte toodet: toode T_1 ja T_2 . Tooteid töödeldakse kahel seadmel: seade S_1 ja S_2 . Mõlemad seadmed tuleb töökoja omanikul rentida. Omaniku rahakott võimaldab seadet S_1 rentida vaid maksimaalselt 60 tunniks ja seadet S_2 maksimaalselt 40 tunniks. Seadmete tööajakulu tooteühikute valmistamiseks on toodud tabelis 2.1.

Tabel 2.1

	Toode T_1	Toode T_2	Seadme tööaeg
Seade S_1	5	10	60
Seade S_2	4	4	40

Toodete müügist saab töökoja omanik kasumit vastavalt 6 ja 8 krooni toote kohta.

Töökoja omanik on huvitatud korraldada töökoja töö selliselt, et ta saaks oma toodetelt võimalikult suurt kasumit, seejuures

arvestades rahakoti piirastusest tulenevate kitsendustega seadmete võimaliku tööaja kohta.

ÜLESANDE MATEMAATILINE FORMULEERING

Muutujad:

x_1 – toote T_1 tootmise maht,

x_2 – toote T_2 tootmise maht.

Optimaalsuskriteerium ehk *sihifunktsioon*: maksimaalne kasum

$$\max z = 6x_1 + 8x_2 \quad (2.1)$$

Kitsendused: seadmete S_1 ja S_2 tööaeg on piiratud

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases} \quad (2.2)$$

Mittenegatiivsuse nõue:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.3)$$

Näide 2.2. Fotoateljee näide (Dieedi või segude ülesanne)

PROBLEEMI PÜSTITUS

Fotoateljees kasutatakse kolme kemikaali A , B , C . Normaalseks tööks vajab fotoateljee kemikaali A vähemalt 18 ühikut, kemikaali B 12 ühikut ja kemikaali C 16 ühikut päevas. Kemikaale on võimalik saada kahe firma poolt pakutavatest segudest: segu S_1 ja segu S_2 . Segu S_1 ühe paki hind on 5 krooni ja ta sisaldab 6 ühikut kemikaali A , 2 ühikut kemikaali B ja 2 ühikut kemikaali C . Segu S_2 maksab 4 krooni pakk ning selle koostis on järgmine: 3 ühikut A -d, 4 ühikut B -d, 8 ühikut C -d. Fotoateljee on huvitatud kemikaalide A , B ja C vajaliku päevakoguse saamisest vähimate kuludega. Majandusprobleemi formaliseerimiseks vajalikud andmed on koondatud tabelisse 2.2.

Tabel 2.2

	Segu S_1	Segu S_2	Kemikaali vajadus
A	6	3	18
B	2	4	12
C	2	8	16
Segupaki hind	5	4	

ÜLESANDE MATEMAATILINE FORMULEERING

Muutujad:

x_1 – segu S_1 ostetav kogus,

x_2 – segu S_2 ostetav kogus.

Sihifunktsioon: minimaalsed kulud segude ostmiseks

$$\min z = 5x_1 + 4x_2 \quad (2.4)$$

Kitsendused: kemikaalide A, B ja C vajadus

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases} \quad (2.5)$$

Mittenegatiivsuse nõue:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.6)$$

2.3. Põhireeglid majandusprobleemi formuleerimiseks lineaarse planeerimisülesandena

1. Defineerige majandusprobleem, analüüsige seda. Määratlege muutujad, mille väärtus on otsitav (nende suuruse kohta on vaja langetada otsus) – x_j
2. Defineerige sihifunktsioon. Määratlege sihifunktsiooni kordajad, mis otseselt mõjutavad sihifunktsiooni kuuluvate muutujate väärtuste kujunemist.
3. Määratlege kitsendused, nende sisu ja mõju juhtimiseesmärgi saavutamisele.
4. Selgitage ressursside olemasolu ja nende kulunormid (kitsenduste süsteemi kordajad).
5. Määratlege, milliste muutujate kohta kehtib mittenegatiivsuse nõue.
6. Vajadusel ja võimalusel esitage majandussituatsiooni iseloomustavad tunnused ja tingimused tabelina.
7. Formaliseerige matemaatiliste funktsioonidena sihifunktsioon ja kitsendused. Koostage majandusprobleemi matemaatiline mudel.
8. Kontrollige formuleeritud ülesannet. Võrrelge majandusprobleemi ja formuleeritud lineaarset planeerimisülesannet. Valesti formuleeritud ülesande lahendamine on ohtlik! Sellest tulenevad ka valed järeldused majandusprobleemi lahendamiseks.

2.4. Lineaarse planeerimisülesande põhikuju ja kanooniline kuju

Lineaarse planeerimisülesande esituskujudena võib välja tuua *max*-põhikuju, *min*-põhikuju ja kanooniline kuju.

Lineaarse planeerimisülesande max-põhikuju.

Lineaarne planeerimisülesanne on esitatud *max*-põhikujul, kui:

- nõutakse sihifunktsiooni maksimumi;
- kõik muutujad võivad omandada ainult mittenegatiivseid väärtusi (≥ 0);
- kõik kitsendused on antud võrratustena \leq (väiksem või võrdne).

Max-põhikujulise ülesande üldine esitus:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (2.8)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.9)$$

kus

c_1, c_2, \dots, c_n – sihifunktsiooni kordajad (c_j), $j = 1, 2, \dots, n$;

d – sihifunktsiooni vabaliige (töökoja ülesandes näiteks kasumiosa, mis ei sõltu toodetest T_1 ja T_2 ja tootmismahudest);

a_{ij} – kitsenduste süsteemi kordajad (väljendavad tavaliselt ressursside kulu tooteühiku kohta); $i = 1, 2, \dots, m$;
 $j = 1, 2, \dots, n$;

b_i – kitsenduse süsteemi vabaliikmed (ressursside olemasolu);
 $i = 1, 2, \dots, m$.

Summamärki (Σ) kasutades saab max-põhikujulise lineaarse planeerimisülesande esitada lühendatult:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + d \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

Näide 2.1.

Töökoja ülesande matemaatiline esitus vastab *max*-põhikujulisele lineaarsele planeerimisülesandele, kuna on täidetud kõik lineaarse planeerimisülesande *max*-põhikujul esitamise nõuded:

$$\max z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Lineaarse planeerimisülesande min-põhikuju.

Lineaarne planeerimisülesanne on *min*-põhikujul, kui :

- nõutakse sihifunktsiooni miinimumi;
- kõik muutujad võivad omandada ainult mittenegatiivseid väärtusi (≥ 0);
- kõik ülejäänud kitsendused on antud võrratustena \geq (suurem või võrdne).

Min-põhikujulise ülesande üldine esitus:

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \end{cases} \quad (2.14)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.15)$$

Min-põhikujulise ülesande esitus lühendatult:

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + d \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.17)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

Näide 2.2.

Fotoateljee ülesanne on esitatud min-põhikujul:

$$\min z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Lineaarse planeerimisülesande kanooniline kuju.

Lineaarne planeerimisülesanne on *max-kanoonilisel* kujul, kui:

- 1) nõutakse sihifunktsiooni maksimumi;
- 2) kõik muutujad võivad omandada ainult mittenegatiivseid väärtusi (≥ 0);
- 3) kõik ülejäänud kitsendused on antud võrranditena.

Lineaarse planeerimisülesande kanooniline kuju on seega:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.20)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.21)$$

Lineaarne planeerimisülesanne on antud *min-kanoonilisel* kujul, kui:

- 1) nõutakse sihifunktsiooni miinimumi;
- 2), ja 3) samad, mis *max-kanoonilisel* kujul.

Muutujate väärtuste kombinatsiooni (x_1, x_2, \dots, x_n) , mis rahuldab kitsenduste süsteemi, nimetatakse *kitsenduste süsteemi* lahendiks. Kui kitsenduste süsteemi lahendis on kõigi muutujate väärtused mittenegatiivsed, siis sellist lahendit nimetatakse planeerimisülesande *lubatavaks lahendiks* ehk *plaaniks*. Niisugust lubatavat lahendit, mille korral sihifunktsioon omandab maksimaalse või minimaalse väärtuse võrreldes tema väärtustega kõigi teiste lubatavate lahendite puhul, nimetatakse selle planeerimisülesande *optimaalseks lahendiks* ehk *optimaalseks plaaniks*.

Lineaarse planeerimisülesande *max-põhikuju* üldine esitus:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Lineaarse planeerimisülesande *max*-kanoonilise kuju üldine esitus:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Lineaarse planeerimisülesande *min*-põhikuju üldine esitus:

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Lineaarse planeerimisülesande *min*-kanoonilise kuju üldine esitus:

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Tähistused:

z — optimaalsuskriteeriumi (sihifunktsiooni)
kvantitatiivne hinnang;

x_1, x_2, \dots, x_n — muutujad;

c_1, c_2, \dots, c_n — sihifunktsiooni kordajad;

a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) — kitsenduste süsteemi kordajad;

b_1, b_2, \dots, b_m — vabaliikmed.

2.5. Lineaarse planeerimisülesande teisendamine *max*-kanoonilisele kujule

Lineaarsete planeerimisülesannete tavaline lahendusalgorithm nõuab ülesande esitamist *max*-kanoonilisel kujul. Põhireeglid lineaarse planeerimisülesande teisendamiseks *max*-kanoonilisele kujule:

1) kui sihifunktsioonis nõutakse miinimumi

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (2.22)$$

siis selle nõude saab teisendada sihifunktsiooni maksimeerimise nõudeks:

$$\min z = \max(z' = -z) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n \quad (2.23)$$

- 2) kui kitsendused on esitatud võrratustena, siis tuleb kitsenduste süsteemi sisse tuua täiendavaid muutujaid (abimuutujaid);
- 3) kui esialgse ülesande mõne muutuja kohta ei ole esitatud mittenegatiivsuse nõuet, siis võib selle muutuja defineerida kahe mittenegatiivse muutuja vahena, näiteks:

$$\begin{aligned} x_2 &= x'_2 - x''_2 \\ x'_2 &\geq 0, \quad x''_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vaatleme näitena töökoja ja fotoateljee ülesannete (näited 2.1 ja 2.2) teisendamist *max*-kanoonilisele kujule.

Töökoja ülesandes (2.1)–(2.3) on kitsenduste süsteem esitatud võrratustena \leq

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases}$$

kus

x_1, x_2 – põhimuutujad, mille väärtusteks on toodete T_1 ja T_2 tootmisplaanid.

Ülesande teisendamiseks kanoonilisele kujule tuleb kitsenduste süsteemi lisada abimuutujad:

x_3 – seadme S_1 tööaja võimalik ülejääk;

x_4 – seadme S_2 tööaja võimalik ülejääk.

$$x_3, x_4 \geq 0$$

Kitsenduste süsteemi saab seega esitada võrrandite süsteemina:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 60 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \end{cases} \quad (2.25)$$

Töökoja ülesanne *max*-kanoonilisel kujul on:

$$\max z = 6x_1 + 8x_2 \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 60 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \quad (2.28)$$

Fotoateljee ülesande teisendamine max-kanoonilisele kujule.

Fotoateljee ülesandes (2.4)–(2.6) on kitsendused esitatud võrratustena \geq :

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases} \quad (2.29)$$

kus

x_1, x_2 – segu S_1 ja segu S_2 ostetavad kogused. Need on põhi-
muutujad.

Ülesande teisendamiseks kanoonilisele kujule lisatakse kitsenduste süsteemi abimuutujad:

x_3 – kemikaali A nõutust suurem sisaldus ostetud segude komplektis;

x_4 – kemikaali B nõutust suurem sisaldus ostetud segude komplektis;

x_5 – kemikaali C nõutust suurem sisaldus ostetud segude komplektis.

Pärast abimuutujate sissetoomist saab fotoateljee ülesandele vastava kitsenduste süsteemi esitada võrrandite süsteemina

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_5 = 16 \end{cases} \quad (2.30)$$

Kuna fotoateljee ülesande püstituses oli nõutud sihifunktsiooni minimaalset väärtust ($\min z$), siis ülesande teisendamisel *max*-kanoonilisele kujule tuleb teha asendus $z' = (-z)$. *Max*-kanoonilisel kujul esitatud fotoateljee ülesande sihifunktsiooniks on:

$$\max z' = -5x_1 - 4x_2 \quad (2.31)$$

Fotoateljõe ülesanne *max*-kanoonilisel kujul on seega:

$$\max z' = -5x_1 - 4x_2 \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_5 = 16 \end{cases} \quad (2.33)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2.6. Lineaarse planeerimisülesandega duaalne ülesanne

Iga lineaarse planeerimisülesandega on tihedalt seotud duaalne planeerimisülesanne. Seejuures esialgne ülesanne osutub omakorda duaalseks oma duaalsele ülesandele, mistõttu sageli räägitakse vaid duaalsete ülesannete paarist.

Lineaarse planeerimisülesandega duaalne ülesanne on temaga seotud nii formaalselt kui sisuliselt. Formaalselt selles mõttes, et duaalsete ülesannete välises kujus ilmneb tugev sümmeetria.

Esialgne ülesanne max-põhikujul:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (2.36)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.37)$$

Duaalne ülesanne:

$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m + d \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n \end{cases} \quad (2.39)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \quad (2.40)$$

Max-põhikujul antud lineaarsele planeerimisülesandele vastava duaalse ülesande saame, kui :

1. Esialgse ülesande igale kitsendusele seame vastavusse duaalse ülesande tundmatu: y_1, y_2, \dots, y_m .
2. Duaalse ülesande kitsenduste süsteemi vabaliikmeteks on esialgse ülesande sihifunktsiooni kordajad c_1, c_2, \dots, c_n .
Duaalse ülesande kitsenduste arv võrdub esialgse ülesande muutujate arvuga.
3. Duaalse ülesande kitsenduste süsteemi kordajate maatriks on esialgse ülesande kitsenduste süsteemi kordajate maatriksi transponeeritud kuju.
4. Duaalses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni miinimumi.
5. *Max*-põhikujulise ülesandega duaalse ülesande kõik kitsendused on võrratused \geq .
6. *Max*-põhikujulise ülesandega duaalse ülesande muutujatelt y_i nõutakse mittenegatiivsust ($y_i \geq 0$).

Sisuliselt on duaalsed ülesanded omavahel samuti seotud selles mõttes, et duaalse ülesande lahend võimaldab otsustada, kuidas muutub esialgse ülesande sihifunktsiooni optimaalne väärtus, kui muuta esialgse ülesande kitsenduste süsteemi vabaliikmeid. Esialgse ülesande igale kitsendusele vastab duaalses ülesandes üks muutuja. Kui nüüd vaadata i -ndat kitsendust, siis selle vaba-

liikme b_i , muutmine võib tuua kaasa optimaalse lahendi ja sihi-funktsiooni optimaalse väärtuse muutumise. Osutub, et i -nda muutuja väärtus duaalse ülesande lahendis näitab, kui palju vabaliikme b_i väikesel muutmisel muutub esialgse ülesande sihifunktsiooni väärtus (suhteliselt vabaliikme muutumise ühe ühiku kohta). Kui tegemist on tootmisplaani ülesandega (kasumi maksimeerimine piiratud ressursside tingimustes), siis duaalse ülesande lahendid y_i väljendavad täiendavat kasumit, mis oleks võimalik saada, kui i -ndat ressursi oleks ühe ühiku võrra rohkem. Sellisel juhul duaalset tundmatut y_i nimetatakse ka *ressursi fiktiivseks hinnaks*. Tegemist on maksimaalse hinnaga, mida tootja võiks täiendava ressursiühiku eest maksta. Selle hinnaga (või kallimalt) võiks tootja ka ressursi (toorainet) müüa. Näiteks minimaalselt selle hinnaga on otstarbekas maad välja rentida või maksimaalselt selle hinnaga maad juurde rentida. Duaalse ülesande sisuline tõlgendamine sõltub igal konkreetsel juhul ülesande püstitusest.

Duaalsete ülesannete paar

Esialgne ülesanne (*max*-põhikujuline):

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Duaalne ülesanne:

$$\begin{aligned} \min w &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m + d \\ \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n \end{cases} \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

2.7. Duaalsete ülesannete paari näiteid

Jätkame töökoja ja fotoateljee näidetel formuleeritud lineaarsete planeerimisülesannetega ning koostame vastavad duaalsete ülesannete paarid.

Töökoja ülesanne

Esialgne ülesanne, mille lahendamise eesmärgiks on leida töökojale olemasolevate ressursside puhul suurimat kasumit võimaldavad toodete T_1 ja T_2 tootmise plaanid, on formuleeritud *max*-põhikujulise lineaarse planeerimisülesandena:

$$\max z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Toodud *max*-põhikujulisele lineaarsele planeerimisülesandele vastav duaalne ülesanne (*min*-põhikujuline ülesanne):

$$\min w = 60y_1 + 40y_2 \tag{2.41}$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ 10y_1 + 4y_2 \geq 8 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad (2.43)$$

kus

y_1, y_2 – duaalse ülesande muutujad.

Duaalse ülesande (2.41)–(2.43) muutujate optimaalsete väärtuste (y_1^*, y_2^*) sisuline tõlgendamine:

y_1^* – täiendav kasum, kui seadme S_1 tööaeg oleks ühe tunni võrra pikem (maksimaalselt nii palju on otstarbekas selle seadme kasutamise eest tunnis maksta või vähemalt sellise tunnitasu eest võiks seadet edasi rentida);

y_2^* – täiendav kasum, kui seadme S_2 tööaeg oleks ühe tunni võrra pikem.

Seega kajastab duaalse ülesande optimaalne lahend maksimaalset tunnitasu, mida töökoja omanikul on otstarbekas seadmete rentimise eest maksta. Seadmete rentimise tegelik hind kujuneb väljaspool mudelit kajastatavaid tootmiseseoseid. Seetõttu tõlgendatakse sellise duaalse ülesande optimaalset lahendit ressursi fiktiivse hinnana. On selge, et sellise renditasuga (või kallimalt) võib töökoja omanik seadet ka edasi rentida, muidugi ainult teatud piires.

Fotoateljee ülesanne

Esialgne ülesanne on formuleeritud *min*-põhikujulise ülesandena

$$\min z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

millele vastav duaalne ülesanne on *max*-põhikujuline ülesanne:

$$\max w = 18y_1 + 12y_2 + 16y_3 \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 + 8y_3 \leq 4 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \quad (2.46)$$

Duaalsetele ülesannetele (2.44)–(2.46) vastava optimaalse lahendi (y_1^*, y_2^*, y_3^*) sisuline tõlgendamine: kui ostetav segude kombinatsioon sisaldaks kemikaali *A* (vastavalt kemikaali *B* või *C*) ühe ühiku võrra rohkem, siis fotolabori kulutused segude ostmiseks läheksid y_1^* (vastavalt y_2^* või y_3^*) võrra kallimaks.

Duaalse ülesande optimaalne lahend näitab, kuidas muutub esialgse ülesande sihifunktsiooni optimaalne väärtus kitsenduste süsteemi vabaliikme muutumisel.

2.8. Seosed duaalsete ülesannete paari lahendite vahel

Duaalsete ülesannete paari lahendite vahelised seosed on määratud lineaarse planeerimise põhiteoreemidega, mida nimetatakse *duaalsuse teoreemideks*. Duaalsuse põhiteoreemi kohaselt, kui ühel ülesandel duaalsete ülesannete paarist on olemas optimaalne lahend, siis on optimaalne lahend olemas ka teisel, kusjuures sihifunktsioonide ekstremaalsed (optimaalsed) väärtused on võrdsed. Seega duaalsuse põhiteoreemi kohaselt

$$\max z = \min w$$

Duaalsuse põhiteoreemi võimalik majanduslik tõlgendus tootmisplaani optimeerimisülesande korral: maksimaalne kasum = ressursside fiktiivne kogumaksumus (sellise kogumaksumuse eest võiks neid ressursse ka maha müüa ning üldse mitte toota).

Duaalsuse teoreemidest tulenevad ka järgmised peamised *seosed* duaalsete ülesannete paari optimaalsete lahendite (edaspidi "lahendite") vahel:

- kui ühes lahendis duaalse ülesande kitsendus on rahuldatud täpse võrratusena, siis esialgse ülesande k -nda muutuja väärtus on 0. Seega, kui

$$a_{1k}y_1^* + a_{2k}y_2^* + \dots + a_{mk}y_m^* > c_k,$$

$$\text{siis } x_k^* = 0;$$

- kui esialgse ülesande lahend $x_k^* > 0$ ($x_k^* \neq 0$), siis duaalses ülesandes k -s kitsendus on rahuldatud täpse võrdusena:

$$a_{1k}y_1^* + a_{2k}y_2^* + \dots + a_{mk}y_m^* = c_k;$$

- kui esialgses ülesandes k -s kitsendus on rahuldatud täpse võrratusena:

$$a_{k1}x_1^* + a_{k2}x_2^* + \dots + a_{kn}x_n^* < b_k,$$

$$\text{siis duaalse ülesande lahend } y_k^* = 0;$$

- kui duaalse ülesande korral $y_k > 0$, siis esialgse ülesande k -s kitsendus on rahuldatud täpse võrdusena

$$a_{k1}x_1^* + a_{k2}x_2^* + \dots + a_{kn}x_n^* = b_k$$

Duaalsuse põhiteoreem:

kui ühel duaalsetest ülesannetest on olemas optimaalne lahend, siis on see olemas ka teisel, kusjuures sihifunktsioonide optimaalsed väärtused on võrdsed.

2.9. Üldised reeglid duaalsete ülesannete paari formuleerimise kohta

Alati ei ole esialgne ülesanne formuleeritud *max*-põhikujul või *min*-põhikujul. Seega ka duaalne ülesanne ei saa kujuneda täpselt *max*-põhikujuliseks või *min*-põhikujuliseks. Erinevused tulenevad eelkõige juba sellest, kas esialgses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni maksimumi või miinimumi. Järgnevalt vaatlemegi duaalsete ülesannete paari formuleerimist mõlemal juhul.

Kui esialgses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni maksimumi, siis:

- 1) duaalses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni miinimumi;
- 2) duaalse ülesande kitsenduse esitamiseks tulenevalt esialgses ülesandes muutujale esitatavast nõudest mittenegatiivsuse kohta on järgmised võimalused:
 - a) duaalses ülesandes on kitsenduse märgiks \geq , kui esialgses ülesandes duaalse ülesande kitsendusele vastava muutuja kohta oli nõutud mittenegatiivsust ($x_j \geq 0$);

- b) duaalses ülesandes on kitsenduse märgiks \leq , kui sellele kitsendusele vastava muutuja kohta esialgses ülesandes oli esitatud mittepositiivsuse nõue ($x_j \leq 0$);
- c) duaalses ülesandes on kitsendus esitatud võrdusena $=$, kui sellele kitsendusele vastava muutuja kohta esialgses ülesandes ei olnud mittenegatiivsuse ega mittepositiivsuse nõuet (märgi poolest kitsendamata);
- 3) duaalse ülesande muutujatelt (y_i) nõutakse mittenegatiivsust (≥ 0), mittepositiivsust (≤ 0) või jäetakse märgi poolest kitsendamata (\sim) vastavalt sellele, kas antud muutujale vastavas kitsenduses esialgses ülesandes esineb märk \leq , \geq või $=$.

Kui esialgses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni miinimumi, siis:

- 1) duaalses ülesandes nõutakse sihifunktsiooni maksimumi;
- 2) duaalse ülesande k -ndas kitsenduses on märk \leq , \geq , või $=$ sõltuvalt sellest, kas antud kitsendusele vastava muutuja (x_k) kohta esialgses ülesandes oli nõutud mittenegatiivsust (\geq), mittepositiivsust (\leq) või ta oli märgi poolest kitsendamata (\sim);
- 3) duaalse ülesande muutujatelt nõutakse mittenegatiivsust (≥ 0), mittepositiivsust (≤ 0) või on tundmatu märgi poolest kitsendamata vastavalt sellele, kas esialgses ülesandes esineb vastava kitsenduse puhul märk \leq , \geq või $=$.

Üldised reeglid duaalsete ülesannete paari formuleerimiseks:

Esialgne ülesanne

Sihifunktsiooni *max*
j-nda tundmatu (x_j)
 märk

≥ 0

≤ 0

(\sim)

i-nda kitsenduse märk

\leq

\geq

=

Esialgne ülesanne

Sihifunktsiooni *min*
j-nda tundmatu (x_j)
 märk

≥ 0

≤ 0

(\sim)

i-nda kitsenduse märk

\geq

\leq

=

Duaalne ülesanne

Sihifunktsiooni *min*
j-nda kitsenduse märk

\geq

\leq

=

i-nda tundmatu (y_i)
 märk

≥ 0

≤ 0

(\sim)

Duaalne ülesanne

Sihifunktsiooni *max*
j-nda kitsenduse märk

\leq

\geq

=

i-nda tundmatu (y_i)
 märk

≥ 0

≤ 0

(\sim)

2.10. Lineaarse planeerimisülesande graafiline lahendamine (geomeetria)

Graafiliselt saab lahendada kahte muutujat sisaldavat lineaarset planeerimisülesannet. Lineaarse planeerimisülesande kitsendusi rahuldavate muutujate väärtuste paarid kujutavad üldjuhul tasandil hulknurka (kui kitsenduste süsteem on tõkestamata, siis sellist hulkanurka ei teki). Sihifunktsioon saavutab optimaalse väärtuse selle hulknurga mingis tipus või mõne külje kõikides punktides. Juhul kui lineaarne planeerimisülesanne sisaldab n tundmatut, on olukord analoogiline, tegemist on ainult hulka-
hukaga n -dimensionaalses ruumis.

Kahe muutujaga x_1 ja x_2 lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel interpreteeritakse muutujate väärtuste paare x_1x_2 tasandi punktidenä ja leitakse sihifunktsioonile optimaalset väärtust andvate muutujate väärtused joonisel saadava informatsiooni põhjal. Kõigepealt selgitatakse, millised punktid tasandil vastavad lineaarse planeerimisülesande kõiki kitsendusi rahuldavatele muutujate väärtuste paaridele. Kitsendusele vastava võrratuse lahendeid x_1x_2 tasandil kujutavad punktid moodustavad selle võrratuse jaoks nn. *lubatava pooltasandi*. Lubatava pooltasandi tähistamiseks kasutatakse joonisel sageli tema serva viirutamist. Lubatava pooltasandi väljajoonistamiseks tuleb leida tema *piirsirge*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (2.47)$$

Lineaarse planeerimisülesande korral peavad muutujad reeglina rahuldama mitte ainult üht, vaid mitut erinevat kitsendust. Kõiki kitsendusi rahuldavate muutujate väärtustele vastavad x_1x_2 tasandi punktid, mis on ühised kõigile lubatavatele pooltasanditele. Nende punktide hulka nimetatakse *lubatavaks piirkonnaks*.

Kahe muutujaga lineaarse planeerimisülesande muutujate väärtuste paaride interpreteerimisel x_1x_2 tasandi punktidenä kujutab sihifunktsioon

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + d \quad (2.48)$$

geomeetrilist tasandit x_1x_2z ruumis. Ülesande praktilisel lahendamisel võib piirduda sihifunktsiooni samakõrgusjoonte välja joonistamisega sellel tasandil. Sihifunktsiooni väärtusele $z = S$ vastavaks samakõrgusjooneks on x_1x_2 tasandi punktid, mille koordinaadid rahuldavad võrdust

$$c_1x_1 + c_2x_2 + d = S \quad (2.49)$$

Erinevate S väärtuste korral saadakse samakõrgusjoonteks paralleelsed sirged (tõusuga $-c_1/c_2$). Ülesande graafilisel lahendamisel on otstarbekas välja joonistada vaid ühele sihifunktsiooni väärtusele vastav sirge (samakõrgusjoon) ning näidata noolekesega suund, kuhu poole seda sirget iseendaga paralleelselt nihutades (s.o. uusi samakõrgusjooni välja joonistades) sihifunktsiooni väärtus kasvab (maksimumi leidmise ülesande korral) või kahaneb (miinimumi leidmise ülesande korral). Viimane lubatava piirkonna punkt (või viimased punktid), mida sihifunktsiooni samakõrgusjoonele vastav sirge näidatud suunas nihutades läbib, vastabki planeerimisülesande optimaalsele lahendile. Selle punkti(de) koordinaadid määravad muutujate väärtused, mis annavad sihifunktsioonile optimaalse väärtuse. Kui jooniselt ei ole selgelt näha, milline on lubatava piirkonna viimane punkt, mida sihifunktsiooni samakõrgusjoonele vastav sirge läbib, siis on soovitatav arvutada kõigi "kahtlaste" punktide koordinaadid ning võrrelda neis sihifunktsioonide väärtusi.

Järgnevalt lahendame graafiliselt kahe muutujaga lineaarsed planeerimisülesanded, mis on formuleeritud töökoja ja fotolabori näidetel [(ülesanded (2.1)–(2.3) ja (2.4)–(2.6)].

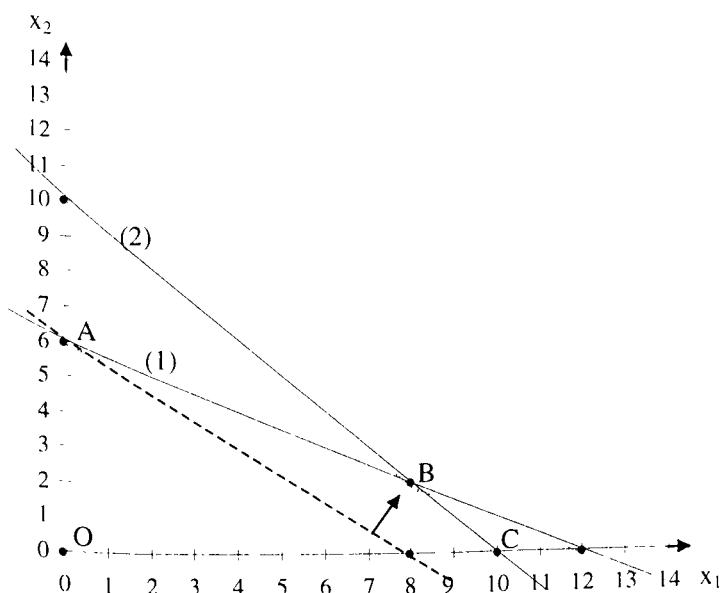
Töökoja ülesanne

$$\max z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Ülesande graafiline lahendamine on toodud joonisel 2.1.



Joonis 2.1. Töökoja ülesande graafiline lahendamine.

Kitsendusega $5x_1 + 10x_2 \leq 60$ on määratud üks lubatav pooltasand ning kitsendusega $4x_1 + 4x_2 \leq 40$ teine lubatav pooltasand. Mittenegatiivsuse nõue ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) määratleb, et lubatav lahend on koordinaatteljestiku esimeses veerandis.

Hulknurk $OABC$ on lubatav piirkond. Sihifunktsiooni $\max z = 6x_1 + 8x_2$ korral kanname joonisele samakõrgusjoone, mis vastab näiteks z -i väärtusele 48 ($z = 48$, tõus $\frac{-c_1}{c_2} = -\frac{6}{8}$).

Nihutades samakõrgusjoont lubatavas piirkonnas (hulknurgas $OABC$) suunas, kus sihifunktsiooni väärtus kasvab, näeme, et lubatava piirkonna viimane punkt, mida sihifunktsiooni samakõrgusjoonele vastav sirge läbib, on punkt B . Selle punkti koordinaadid määravad muutujate x_1 ja x_2 väärtused (töökoja toodete T_1 ja T_2 optimaalsed tootmisplaanid), mille korral sihifunktsiooni väärtus on suurim (töökoda saab sellise tootmisplaaniga korral suurima kasumi).

Töökoja ülesande optimaalne lahend on seega sirgete

$$(1) \quad 5x_1 + 10x_2 = 60$$

$$(2) \quad 4x_1 + 4x_2 = 40$$

lõikepunktis ning seega

$$\begin{cases} x_1 = 12 - 2x_2 \\ x_1 = 10 - x_2 \end{cases}$$

kust saame, et $x_1 = 8$ ja $x_2 = 2$.

Töökoja ülesande optimaalne lahend on seega punktis B : $x_1 = 8$, $x_2 = 2$ ning sellele vastab sihifunktsiooni optimaalne väärtus $z = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 64$.

Kontrollime sihifunktsiooni väärtust ka “kahtlases” punktis C .

Selleks lahendame võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

Seega $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ ning $z = 6 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = 60 < 64$. Punkti C koordinaadid ei ole töökoja ülesande optimaalseks lahendiks.

Fotoateljee ülesanne

$$\min z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

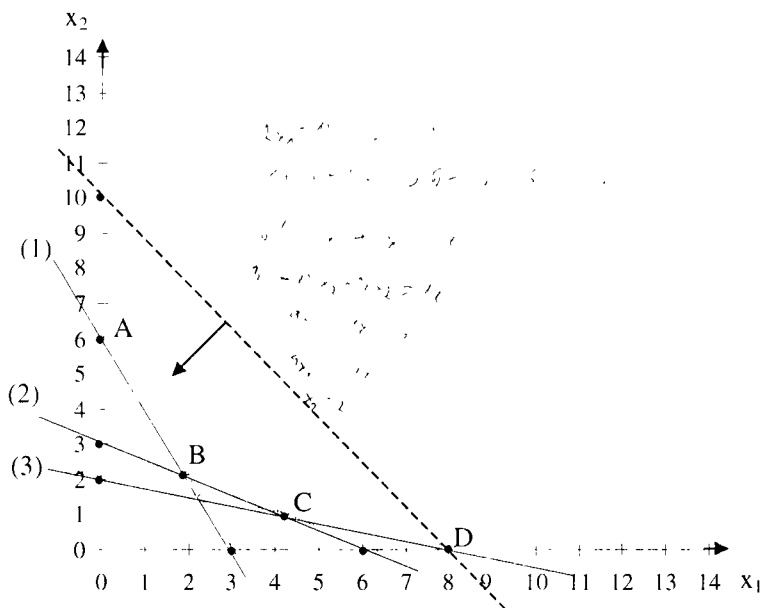
Fotoateljee ülesande graafiline lahendamine on joonisel 2.2. Lubatav piirkond on määratud järgmistele võrranditele vastavate piirsirgetega:

$$(1) \quad 6x_1 + 3x_2 = 18$$

$$(2) \quad 2x_1 + 4x_2 = 12$$

$$(3) \quad 2x_1 + 8x_2 = 16$$

Lubatav piirkond, mis ühelt poolt on määratud punktidega A , B , C ja D , on tõkestamata. Kanname joonisele ka sihifunktsioonile vastava samakõrgusjoone ($-c_1/c_2 = -5/4$) ning nihutame seda suunas, kus sihifunktsiooni väärtus kahaneb (tegemist on sihifunktsiooni miinimumi leidmise ülesandega). Joonise 2.2 põhjal võib väita, et optimaalne lahend on punktis B , seega sirgete (1) ja (2) lõikepunktis.



Joonis 2.2. Fotoateljee ülesande graafiline lahendamine.

Punkti B koordinaatide leidmiseks lahendame võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 18 & \text{by } x_1 = x_1, x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 12, & \text{by } x_2 = x_2, x_1 = 6 \end{cases}$$

kust saame, et $x_1 = 2$ ja $x_2 = 2$ ning sihifunktsiooni väärtus: $z = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 18$.

Kontrollime sihifunktsiooni väärtust ka punktis C ehk sirgete (2) ja (3) lõikepunktis. Näeme, et sihifunktsiooni minimaalne väärtus on tõesti punktis B ning fotoateljeel on otstarbekas osta päevas kumbagi segu kaks karpi. Sellisel juhul on kulutused

segude ostmiseks väikseimad ($z = 18$), kusjuures vajadus vajalike kemikaalide järele on rahuldatud.

Optimaalse lahendi graafiline leidmine sisaldab endas järgmisi samme:

- lubatava pooltasandi määramine
- lubatava piirkonna määramine
- sihifunktsiooni samakõrgusjoone määramine
- optimaalse lahendi leidmine

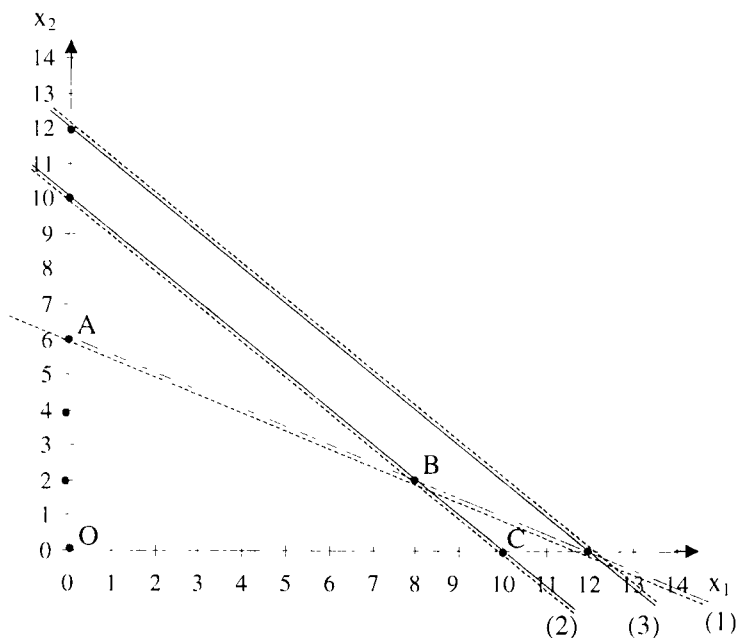
2.11. Erijuhud lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel

Lineaarsel planeerimisülesandel ei pruugi alati olla vaid üks optimaalne lahend. Optimaalne lahend võib ka puududa, kuid võib olla ka mitu samaväärset lahendit (alternatiivsed lahendid) või ka lõpmata palju lahendeid. Vaatleme lähemalt mõningaid erijuhtusid, mis võivad ilmuda lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel.

1. Lahend puudub.

Lahend puudub, kui lubatav piirkond on tühi. Sellisel juhul on kitsendused vasturääkivad.

Kui töökoja ülesandele lisada veel nõue, et töökoja peremees tahab tema käsutuses olevate ressursside juures toota toodangut koguses vähemalt 12 ühikut, ($x_1 + x_2 \geq 12$), siis sellise soovi korral saadakse ülesanne, mille lubatav piirkond on tühi ning ülesandel puudub lahend (joonis 2.3).



Joonis 2.3. Töökoja ülesande graafiline lahendamine lisakitsendusel

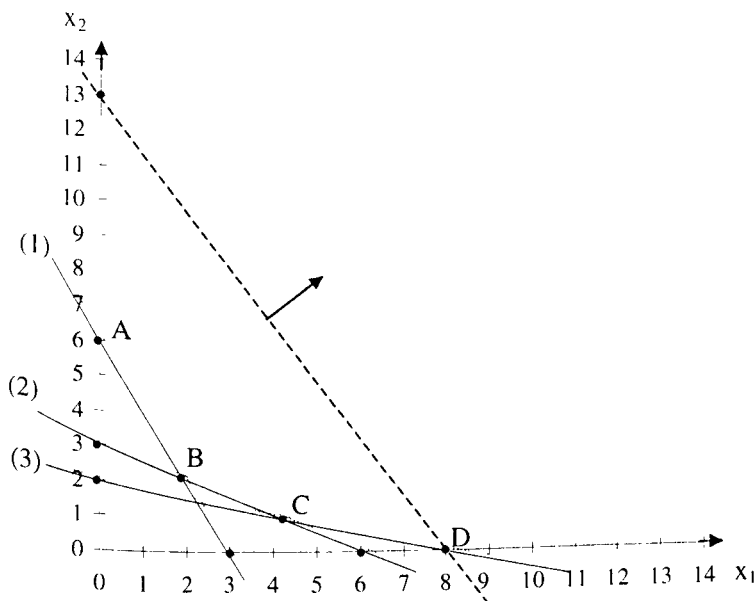
$$x_1 + x_2 \geq 12.$$

Seadmete S_1 ja S_2 võimaliku kasutamisaajaga ($b_1 = 60$, $b_2 = 40$) ning toodete T_1 ja T_2 tootmismahude mittenegatiivsuse nõuetega ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) on määratud võimalik lubatav piirkond $OABC$. Soovitava tootmismahu kitsendusest $x_1 + x_2 \geq 12$ (sirge (3)) tuleneb aga olukord, et puudub kõiki kitsendusi rahuldav lubatav piirkond ning seega ülesandel puudub lahend (nii lubatav kui optimaalne lahend).

Optimaalne lahend võib puududa ka juhul, kui lubatavate lahendite piirkond on tõkestamata ning seda ei tõkestata ka sihifunktsiooniga esitatud maksimeerimise või minimeerimise nõudega.

Näiteks, kui fotoateljee ülesande puhul (selles ülesandes on lubatav piirkond tõkestamata) ei ole tegemist kulude minimeerimisega, vaid nõutakse sihifunktsiooni maksimumi (näiteks kasumi maksimumi), siis kujuneb olukord, et ülesandel optimaalne lahend puudub (küll aga on olemas lubatav lahend).

Olukorda, kus lineaarsel planeerimisülesandel puudub lahend, kuna lubatav piirkond on tõkestamata, illustreerib joonis 2.4.



Joonis 2.4. Tõkestamata lubatava piirkonnaga lineaarne planeerimisülesanne.

2. Alternatiivne lahend.

Ülesandel võib olla mitu erinevat muutujate väärtuste kombinatsiooni, mis annavad sihifunktsioonile optimaalse väärtuse. Sellisel juhul on tegemist alternatiivsete lahenditega.

Töökoja näite puhul maksimaalne kasum (64) saavutatakse siis, kui $x_1 = 8$ ja $x_2 = 2$. Majanduspraktikas esineb sageli olukordi, kus sama suurt kasumit on võimalik saada erineva tootmise struktuuri korral. Tulemuse $z = 64$ võib näiteks saada ka juhul, kui $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ $z = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 = 64$. Antud juhul kitsenduste süsteem (seadmete olemasolu) ei võimalda sellise lahendi saamist, kuid mingi teise kitsenduse süsteemi puhul on see teoreetiliselt võimalik.

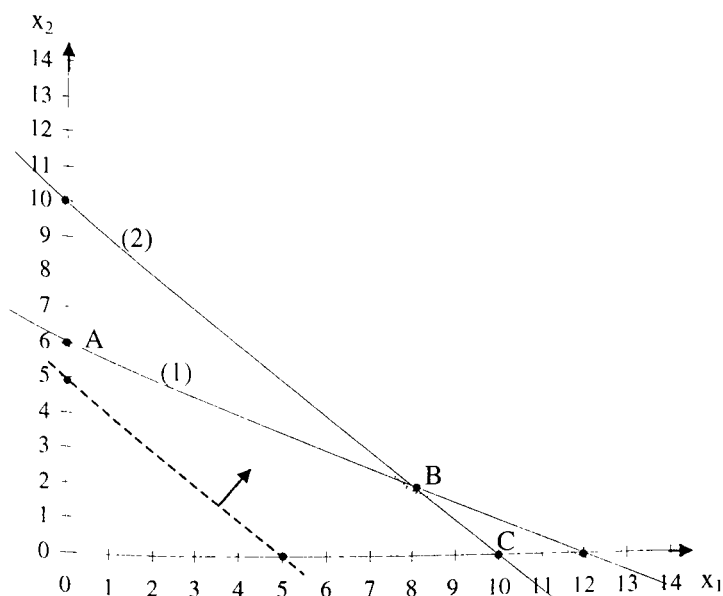
3. Lõpmata palju lahendeid.

Kui töökoja ülesandes sihifunktsioon oleks esitatud kujul

$$z = 5x_1 + 5x_2,$$

kus kasum nii toote T_1 kui toote T_2 ühikult on 5 krooni, siis sihifunktsioonile vastav samakõrgusjoon on paralleelne kitsendusele $4x_1 + 4x_2 \leq 40$ vastava piirsirgega $4x_1 + 4x_2 = 40$.

Kujunenud olukorda illustreerib joonis 2.5.



Joonis 2.5. Töökoja ülesande graafiline lahendamine lõpmata paljude optimaalsete lahendite korral.

Sel juhul optimaalne lahend asub sirglõigul BC . Sellel sirglõigul asuvad x_1 ja x_2 väärtuste paarid on kõik ülesande lahendiks ning nad annavad sihifunktsioonile optimaalse (toodud näite korral maksimaalse) väärtuse. Tegemist on lõpmata paljude lahenditega, kui ei ole nõutud x -de (lahendielementide) täisarvulisust.

Kokkuvõte

Et otsuseid langetada ja valikuid teha on vaja infot ja kriteeriume, millest lähtuvalt otsuseid tehakse. Tuleb püstitada juhtimiseesmärk (optimaalsuskriteerium) ning selgitada selle saavutamist piiravad tingimused (kitsendused). Taoliselt formuleeritud ülesanne on optimeerimisülesanne. Kui optimeerimisülesanne on formuleeritud lineaarsena, on tegemist lineaarse planeerimisülesandega.

Lineaarne planeerimisülesanne koosneb sihifunktsioonist, millega väljendatakse juhtimiseesmärki, kitsenduste süsteemist ja muutujatele esitatavast mittenegatiivsuse nõudest. Igal lineaarsel planeerimisülesandel on olemas temaga duaalne ülesanne. Tegemist on duaalsete ülesannete paariga. Duaalsete ülesannete paaris on ülesanded omavahel seotud nii formaalselt kui sisuliselt. Formaalne seotus väljendub duaalsete ülesannete paari välises kujus ilmnevas sümmeetrias. Duaalsete ülesannete sisulisel seotusel on majanduslik sisu, mis annab täiendavat informatsiooni lineaarse planeerimisülesandena formuleeritud majandusprobleemi lahendamiseks. Kui ühel duaalsetest ülesannetest on olemas optimaalne lahend, siis duaalsuse põhiteoreemist tulenevalt on see olemas ka teisel, kusjuures sihifunktsioonide optimaalsed väärtused on võrdsed. Lahendades duaalsete ülesannete paarist ühe, on võimalik leida ka teise ülesande optimaalne lahend.

Kui lineaarne planeerimisülesanne sisaldab vaid kahte muutujat, siis saab teda lahendada ka graafiliselt. Lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel läbitavad sammud:

- 1) lubatava pooltasandi määramine;
- 2) lubatavate lahendite hulga määramine;
- 3) sihifunktsiooni samakõrgusjoone määramine;
- 4) optimaalse lahendi leidmine.

Lineaarse planeerimisülesande graafilisel lahendamisel võivad ilmnedä järgmised erijuhud:

- lahend puudub;
- ülesandel on mitu erinevat lahendielementide kombinatsiooni, mis annavad sihifunktsioonile optimaalse (maksimaalse või minimaalse) väärtuse. Tegemist on alternatiivsete lahenditega;
- ülesandel on lõpmata palju lahendeid.

3. SIMPLEKSMEETOD

3.1. Simpleksmeetodi idee

Simpleksmeetod on lineaarsete planeerimisülesannete põhiline lahendusmeetod.

Lineaarse planeerimise ühe põhiteoreemi kohaselt asub lahenduva lineaarse planeerimisülesande lahenditest vähemalt üks lubatavate lahendite hulga tipus. Mistahes lineaarse planeerimisülesande puhul võib seega läbi vaadata kõik lubatavate lahendite hulga tipud (m tundmatu korral on tegemist m -dimensioonilise ruumi hulktahukaga) ning valida lahendiks see, kus sihifunktsiooni väärtus on suurim. Vähegi suuremate mõõtmega ülesande korral oleks kõikide selliste hulktahuka tippude leidmine isegi arvuti abil liiga töömahukas.

Kui tegu on m võrrandist ja n tundmatust koosneva lineaarse planeerimisülesandega, siis lubatavate lahendite hulga tippude arv ei ületa arvu, mis on leitav valemiga:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \quad (3.1)$$

Näiteks 4 muutujaga ($n = 4$) ja 2 kitsendusega ($m = 2$) lineaarse planeerimisülesande lubatavate lahendite hulga tippude arv ei ületa kuut:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot (4-1)}{2!} = 6 \quad (3.2)$$

Õnneks saab suurema osa lubatavate lahendite piirkonna tippudest kõrvale jätta, kui kasutada järgmist lihtsat ideed: alati liigu-

takse naabertippudel selle tipu poole, kus sihifunktsiooni väärtus on suurem. Liigutakse edasi seni, kuni sihifunktsioonile enam suuremat väärtust ei saada. Simpleksmeetodi rakendamisel saab alati lõpliku arvu teisenduste järel kätte ülesande optimaalse lahendi või selgub, et lahend puudub.

3.2. Simplekstabel

Simpleksmeetodi algoritmi rakendatakse kanoonilisel kujul esitatud ülesandele. Kanoonilisel kujul esitatud ülesande lahendit saab alati üle kanda esialgsele ülesandele ning seega saab lahendile anda sisulise majandusliku tõlgenduse. Kui kanoonilisel kujul esitatud ülesanne sisaldab n muutujat ja m kitsendust, siis simpleksmeetodil leitud lahendis võivad nullist erineda mitte rohkem kui m muutuja väärtused. Geomeetriliselt tähendab see seda, et simpleksmeetodil leitav lahend asub alati kitsenduste poolt määratud hulktahuka mingis tipus.

Max-kanooniline ülesanne on esitatav kujul:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_n \geq 0$$

(3.3)

Sihifunktsioonis on z samuti käsitletav muutujana. Viies sihifunktsiooni kõik muutujad ühele poole, saadakse sihifunktsioonile esituskuju:

$$z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n = d \quad (3.4)$$

Max-kanoonilisel kujul antud ülesandele võib vastavusse seada *simplekstabeli* (tabel 3.1).

Tabel 3.1

	x_1	x_2	...	x_n	Vabaliige
Sihifunktsioon	$-c_1$	$-c_2$...	$-c_n$	d
1. rida	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2. rida	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...
m . rida	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Simplekstabeli kirjapanekul kasutatakse ka teistsuguseid kirjalpilte. Mõnikord esitatakse sihifunktsiooni rida (0. rida) ka pärast m -ndat rida ning vabaliikmele vastav veerg võib olla tabeli esimeseks veeruks.

Kui kanoonilisel kujul antud ülesanne sisaldab n tundmatut ja m võrrandit, siis simpleksmeetodil leitud lahendis võivad nullist erineda mitte rohkem kui m (kitsenduste arv) tundmatu väärtused, mida nimetame lahendielementideks.

3.3. Baasitabel

Simplekstabelit nimetatakse *baasitabeliks*, kui tabeli elementide a_{ij} (kitsenduste süsteemi kordajad) osas on vähemalt m erinevat ühikveergu ning nendes veergudes sihifunktsiooni reas on nullid. Ühikveerg on veerg, milles nullist erineb vaid üks element, mis seejuures võrdub ühega. Seda m erinevast ühikveerust

koosnevat komplekti nimetatakse *baasiks*. Muutujaid, mis on baasitabelis ühikveergude kohal, nimetatakse *baasimuutujateks* ja ülejäänud muutujaid *vabadeks muutujateks*. Baasitabeli poolt määratud lahend on *baasilahend* ehk *baasiplaan*. Baasilahendi väärtuste komplektis vabade muutujate väärtused võrduvad nulliga, baasimuutujate väärtused leitakse aga nii, et oleksid rahuldatud kõik kitsenduste süsteemi võrrandid. Iga baasimutu-
tuja võrdub vabaliikme veeru elemendi väärtusega selles reas, milles vastavas baasiveerus seisab arv 1. Kui seejuures baasitabeli sihifunktsiooni reas (0 -ndas reas) kõik baasimuutujatele vastavad elemendid ($-c_j$) võrduvad nulliga, siis sihifunktsiooni rea vabaliikme veerus seisev arv näitab sihifunktsiooni väärtust selle baasilahendi korral.

Jätkame 2. peatükis toodud töökoja tootmisplaan koostamise näitega (näide 2.1). Ülesanne on esitatud *max*-põhikujul [(2.1)–(2.3)]:

$$\max z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ülesande teisendamisel kanoonilisele kujule [(2.26)–(2.28)] on sisse toodud *abimuutujad* x_3 ja x_4 (seadmete S_1 ja S_2 kasutamise aegade võimalikud ülejäägid). Baasimuutujateks x_1 ja x_2 on toodete T_1 ja T_2 tootmise mahud. Kitsenduste süsteem *max*-kanoonilisel kujul esitatud ülesandes on:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 60 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \end{cases}$$

Pärast teisendusi sihifunktsiooniga, mille tulemusena kõik tundmatud on viidud ühele poole ($z - 6x_1 - 8x_2 = 0$), saab töökoja

tootmisplaani koostamise ülesandele vastava simplekstabeli esitada kujul, mis vastab baasitabelile (tabel 3.2).

Tabel 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
0. rida	-6	-8	0	0	0
1. rida	5	10	1	0	60
2. rida	4	4	0	1	40

Baasitabelit nimetatakse *lubatavaks*, kui tabelis kõik elemendid b_i on mittenegatiivsed ($b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$). Seega töökoja ülesandele vastav simplekstabel on *lubatav baasitabel*. Lubatavale baasitabelile vastav lahend on *lubatav baasilahend* ehk *baasiplaan*. Baasitabel on *optimaalne*, kui baasitundmatutele vastavad elemendid sihifunktsiooni reas on 0-d ja ülejäänud 0-nda rea (sihifunktsiooni rea) elemendid ($-c_j$) on mittenegatiivsed. Optimaalsele baasitabelile vastavat baasiplaani nimetatakse *optimaalseks baasiplaaniks* ehk *optimaalseks lahendiks*. Töökoja ülesandele vastav baasitabel (tabel 3.2) ei ole optimaalne ning seega ei ole optimaalne ka sellele vastav lahend ($z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 60$, $x_4 = 40$).

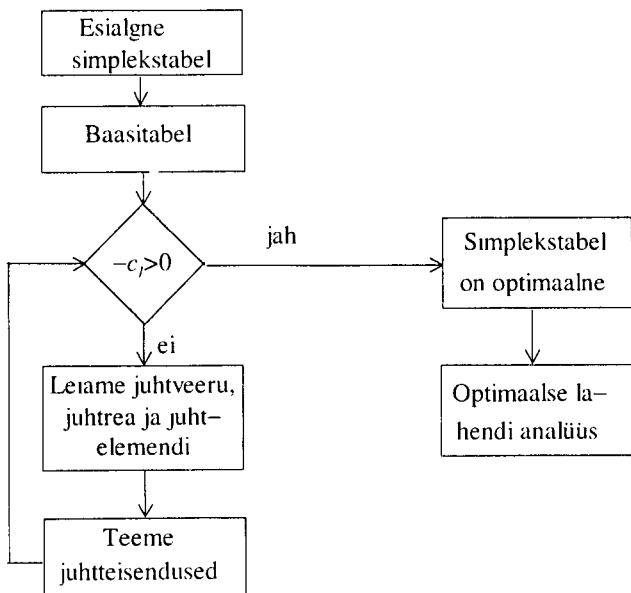
Simplekstabelit nimetatakse baasitabeliks, kui kitsenduste süsteemi kordajatele vastav tabeliosa sisaldab m erinevat ühikveergu (m — kitsenduste arv).

Baasitabel on lubatav, kui kõik elemendid b_i (vabaliikmed) on mittenegatiivsed.

Lubatav baasitabel on optimaalne, kui baasitundmatutele vastavad elemendid sihifunktsiooni reas on 0 -d ja ülejäänud selle rea elemendid $(-c_j)$ on mitte-negatiivsed $(-c_j \geq 0)$.

3.4. Simpleksteisendused

Kui baasitabeli sihifunktsiooni reas (0 -ndas reas) on negatiivseid elemente, siis on võimalik saada paremat lahendit. Selleks tuleb teha *simpleksteisendusi* (joonis 3.1). Simpleksteisendused baseeruvad *Gauss-Jordani meetodil* ehk elimineerimisprotseeduuridel.



Joonis 3.1. Simpleksmeetodi rakendamise sammud.

Põhireeglid simpleksteisendusteks

1. Simpleksteisendused algavad juhtveeru valikuga. Juhtveeruks valitakse veerg, kus 0 -nda rea kordaja on negatiivne ja soovitavalt absoluutväärtuselt suurim.
2. Arvutatakse juhtveeru kõikide positiivsete elementide a_{ij} alusel suhe b_i/a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$).
3. Valitakse juhtrida. Juhtreaks on üks ridadest, kus suhe b_i/a_{ij} on väikseim.
4. Juhtveeru ja juhtrea lõikepunktis on juhtelement. See ümbritsetakse tabelis tavaliselt rõngakesega.
5. Tehakse juhtteisendused. Eesmärgiks on teisendada juhtveerg ühikveeruks, sealjuures juhtelement võrdub ühikveerus 1 -ga. Selleks jagatakse juhtrida läbi juhtelemendiga ning seejärel teisendatakse juhtveerg ühikveeruks (juhtelement = 1 , teised veeru elemendid = 0).

Silmas tuleb pidada, et juhtteisendusi tehakse kogu simplekstabeli ulatuses. Simpleksmeetodi rakendamisel teisendatakse kanoonilisel kujul esitatud planeerimisülesandele vastav simplekstabel tema ridade sobivate arvudega korrutamise ja omavahelise liitmise teel optimaalseks baasitabeliks. Sellisele teisendusele vastab sisuliselt ülesande esitamine mingil teisel, samaväärsel kujul. Seejuures teisendamiseks on kasutatud võrrandite sobivate arvudega korrutamist ja omavahelist liitmist ning osade muutujate asendamist sihifunktsioonis nende avaldistega ülejäänud muutujate kaudu mõnest võrrandist. Teisenduste tulemusena saadud optimaalsele baasitabelile vastav baasilahend ehk baasiplaan ongi kanoonilisel kujul esitatud planeerimisülesande lahend. Kui lineaarne planeerimisülesanne on lahenduv, siis simpleksteisenduste rakendamise tulemusena on ta alati ka leitav. Kui aga ülesanne pole lahenduv, siis selgub see teisenduste käigus. Simpleksmeetodil on omadus, et simpleksteisenduste käigus saadavatest baasilahenditest iga järgmine pole halvem kui eelmised.

3.5. Simpleksmeetodil saadud lahendi analüüs

Simpleksteisenduste tulemusena jõutakse alati uue lubatava baasitabelini, milles uutele baasimuutujatele vastavad suurused $(-c_i)$ võrduvad nulliga. Kui jälgida, et baasitabelid ei hakkaks korduma (selle vältimiseks on olemas formaalsed eeskirjad, näiteks leksikograafilise simpleksmeetodi kasutamine /Kaasik, et al, 1982/, siis lõpliku arvu sammude järel jõutakse alati üheni kahest võimalusest:

- 1) saadud on optimaalne baasitabel, kus baasimuutujatele vastavad elemendid sihifunktsiooni reas on 0-d ja ülejäänud selle rea elemendid on mittenegatiivsed ($-c_i \geq 0$);
- 2) on kujunenud olukord, kus sihifunktsiooni reas mõni element $(-c_i)$ on negatiivne, aga selles reas ei ole ühtegi positiivset arvu a_{ij} ning seega ei saa valida juhtrida. Sellisel juhul *optimaalne lahend puudub*.

Tabelis 3.3 esitatud juhul ongi tegemist optimaalse lahendi puudumisega. Ülesandel on lõpmata palju lubatavaid lahendeid, kusjuures lahendid moodustavad tõkestamata hulga. Alati võib leida selliseid muutujate väärtuste komplekte, mis rahuldavad kõiki kitsendusi ning annavad sihifunktsioonile igast etteantud arvust suurema väärtuse.

Tabel 3.3

z	-2	0	0.8	0	48
x_2	-0.5	1	0.1	0	6
x_4	-2	0	-0.4	1	16

Kui simpleksteisenduste tulemusena on jõutud optimaalse baasitabelini, siis tema poolt määratud baasilahend on optimaalne lahend. Optimaalse lahendi leidmisele järgneb selle *analüüs*.

Optimaalse lahendi analüüsimisel selgitatakse tavaliselt:

- kas ülesandel on ka teisi optimaalseid lahendeid. Kui on mitu baasilahendile vastavate muutujate väärtuste komplekti, mis annavad sihifunktsioonile suurima (või vähima) väärtuse, siis on tegemist *alternatiivsete lahenditega*;
- millistes piirides võivad lineaarse planeerimise ülesande andmed muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks. Tegemist on *lahendi stabiilsuse analüüsiga*.

Alternatiivse lahendi olemasolu võimalikkuse tunnus: optimaalse baasitabeli sihifunktsiooni reas on 0 ka mitteühikveerule vastavas veerus (tabel 3.4).

Tabel 3.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
z	0	0	0.4	0	56
x_2	0	1	0.2	-0.25	2
x_1	1	0	-0.2	0.5	8
z	0	0	0.4	0	56
x_2	0.5	1	0.1	0	6
x_4	2	0	0.4	1	16

Tabel 3.4 on optimaalne baasitabel, kust võib välja lugeda optimaalse lahendi $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$ ning $z = 56$. Kuna sihifunktsiooni reas on 0 ka veerus, mis ei ole ühikveerg, siis viitab see alternatiivse lahendi olemasolu võimalusele. Valime x_4 -le vastava veeru juhtveeruks ning teeme läbi vajalikud simpleksteisendused. Saame alternatiivse lahendi: $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 16$ ning $z = 56$.

Optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsil piirdume juhuga, mille puhul teeme kindlaks, millistes piirides võib muuta esialgse sihifunktsiooni kordajaid c_j (millistes piirides nad võivad muutuda), et leitud optimaalne lahend oleks ka uue (uute) sihifunkt-

siooni kordajaga (kordajatega) ülesande optimaalseks lahendiks. Tähistame sihifunktsiooni kordaja c_k muutuse tähega e_k ning leiame kitsendused, mida e_k peab rahuldama. Kitsenduste leidmiseks, mida peab rahuldama kordaja c_k muutus e_k , tuleb tegutseda järgmiselt:

- lisada optimaalse baasitabeli sihifunktsiooni reas k -ndas veerus seisvale arvule suurus $-e_k$;
- teisendada optimaalne baasitabel uuesti kujule, kus sihifunktsiooni reas baasimuutujatele vastavates veergudes seisavad nullid. Vajadus teisendamiseks kerkib vaid juhul, kui x_k oli optimaalses baasitabelis baasimuutuja. Vajalik teisendus seisneb sel juhul suurusega e_k korrutatud optimaalse baasitabeli sobiva rea liitmiseks sihifunktsiooni reale;
- kirjutada välja kitsendused suuruse e_k jaoks. Nendeks saavad võrratused nõudega, et pärast teisendamist saadavas reas kõik elemendid, v.a. vabaliikme veerus seisev, oleksid mittenegatiivsed. Pärast teisendamist saadavas reas vabaliikme veerus seisev avaldis näitab sihifunktsiooni maksimaalset väärtust pärast kordaja c_k suurendamist;
- lahendada võrratuste süsteem suuruse e_k suhtes.

Analoogiliselt võib analüüsida ka vabaliikmete b_i ja kordajate a_{ij} võimalikke muutusi. Siinjuures on oluline silmas pidada, et iga konkreetse ülesande korral, millel on majanduslik sisu, tuleb algandmete võimalikke muutusi interpreteerida sisuliselt ning saada seeläbi täiendavat infot otsustamiseks.

Alternatiivse lahendi olemasolu võimalikkuse tunnus: optimaalse baasitabeli sihifunktsiooni reas on null ka mitteühikveerule vastavas veerus.

Optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsil selgitatakse, millistes piirides võivad lineaarse planeerimise ülesande andmed muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks.

3.6. Simpleksmeetodi rakendamise näiteid

Näide 3.1. Töökoja tootmisplaani ülesanne

Lahendame simpleksmeetodil teises peatükis formuleeritud töökoja tootmisplaani ülesande, millele vastav baasitabel on esitatud tabelis 3.2. Optimaalse baasitabeli ning sellele vastava optimaalse lahendi leidmiseks tehtavad simpleksteisendused on koondatud tabelisse 3.5, mis koosneb kolmest alamtabelist, millest esimene on esialgne baasitabel.

Sellest võime välja kirjutada lubatava baasilahendi $z = 0$, $x_3 = 60$, $x_4 = 40$, $x_1 = x_2 = 0$. Lahend on lubatav ning vastab ülesande kitsendustele, kuid loomulikult ei rahulda selline lahend töökoja peremeest (kasumit ei ole, seadmed on kasutamata). Parema lahendi saamiseks tuleb teha simpleksteisendusi.

Tabel 3.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
z	-6	-8	0	0	0
x_3	5	10	1	0	60
x_4	4	4	0	1	40
z	-2	0	0.8	0	48
x_2	0.5	1	0.1	0	6
x_4	2	0	-0.4	1	16
z	0	0	0.4	1	64
x_2	0	1	0.2	-0.25	2
x_1	1	0	-0.2	0.5	8

Tabeli 3.5 alumine kolmas alamtabel vastab optimaalse baasitabeli nõuetele (miks?). Seega võime välja kirjutada optimaalse lahendi $x_1 = 8$ (toodangu T_1 maht) ja $x_2 = 2$ (toodangu T_2 maht)

ja $z = 64$ (töökoja kasum). Pärast optimaalse lahendi leidmist on soovitatav kontrollida, kas optimaalsest baasitabelist saadud muutujate väärtused (lahendielemendid) ikka annavad sihifunktsioonile optimaalse väärtuse: $z = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 64$. Selline kontroll on vajalik võimalike arvutusvigade avastamiseks.

Optimaalsest baasitabelist saab välja kirjutada ka duaalse ülesande lahendi. *Max*-põhikujulise lineaarse planeerimisülesandega duaalse ülesande lahend on leitav optimaalsest baasitabelist sihifunktsiooni reast abitundmatute kohalt.

Töökoja ülesandele kui *max*-põhikujulisele lineaarsele planeerimisülesandele vastava duaalse ülesande lahendi leiame seega tabeli 3.5 kolmandast alamtabelist ning see on: $y_1 = 0.4$ ja $y_2 = 1$. Duaalse lahendi alusel saame lisainformatsiooni, et seadme S_1 täiendav töötund annab töökoja omanikule 0.4 krooni kasumit ning seadme S_2 täiendav töötund 1 krooni kasumit. (Kontroll: $w = z = 64$ ning $w = 60 \cdot 0.4 + 1 \cdot 40 = 64$. Miks?)

***Max*-põhikujulise lineaarse planeerimisülesandega duaalse ülesande lahend on leitav optimaalsest baasitabelist sihifunktsiooni reast abitundmatute kohalt.**

Lahendi stabiilsuse analüüs

Analüüsime olukorda, kui töökoja kasum tootelt T_1 ei ole täpselt 6 krooni. Püüame selgitada, kui palju võib kasum tooteühikult muutuda, et lahendi optimaalsus säiliks. Võimaliku kasumi muutuse tähistame e_1 -ga. Lisame e_1 miinusemärgiga optimaalsesse baasitabelisse (miinusemärgiga sellepärast, et simpleksitabelis on sihifunktsiooni kordajad vastandmärgiga, seega $-c_j$). Saame tabeli 3.6.

Tabel 3.6

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
z	$0 - e_1$	0	0.4	1	64
	0	1	0.2	-0.25	2
	1	0	-0.2	0.5	8

Teeme simpleksteisendused, et sihifunktsiooni reas $-e_1$ -st lahti saada. Saame uue sihifunktsiooni rea:

z	0	0	$0.4 - 0.2e_1$	$1 + 0.5e_1$	$64 + 8e_1$
-----	-----	-----	----------------	--------------	-------------

Lubatava baasitabeli optimaalsuse kriteeriumist tulenevalt lahendame võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0.4 - 0.2e_1 \geq 0 \\ 1 + 0.5e_1 \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

kust saame

$$\begin{cases} 0.2e_1 \leq 0.4 \Rightarrow e_1 \leq 2 \\ 0.5e_1 \geq -1 \Rightarrow e_1 \geq -2 \end{cases} \quad (3.6)$$

ning

$$-2 \leq e_1 \leq 2 \quad (3.7)$$

Optimaalne lahend jääb kehtima, kui $6 - 2 \leq c_1 \leq 6 + 2$. Seega kasum tooteühikult võib olla vahemikus 4 kroonist kuni 8 kroonini — ta ei pruugi olla täpselt 6 krooni. Sel juhul on ikkagi otstarbekas toota 8 ühikut toodet T_1 ja 2 ühikut toodet T_2 . Töökoja kasum juhul, kui toote T_1 ühikult saadav kasum on 4 krooni, on $z = 64 - 8 \cdot 2 = 48$ krooni. Juhul kui toote T_1 ühikult

saadav kasum on 8 krooni, kujuneb töökoja kasumiks $z = 64 + 8 \cdot 2 = 80$ krooni.

Analüüsime ka olukorda, mil kasum tootelt T_2 ei ole täpselt $c_2 = 8$, vaid hällbib sellest suuruse e_2 võrra (tabel 3.7).

Tabel 3.7

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
z	0	$0 - e_2$	0.4	1	64
	0	1	0.2	-0.25	2
	1	0	-0.2	0.5	8
z	0	0	$0.4 + 0.2e_2$	$1 - 0.25e_2$	$64 + 2e_2$

Lubatava baasitabeli optimaalsuse nõudest tuleneb:

$$\begin{cases} 0.4 + 0.2e_2 \geq 0 \\ 1 - 0.25e_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

ning

$$\begin{cases} e_2 \geq -2 \\ e_2 \leq 4 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$-2 \leq e_2 \leq 4$$

Seega

$$8 - 2 \leq c_2 \leq 8 + 4 \quad (3.10)$$

Lahendi optimaalsus ($x_1 = 8$, $x_2 = 2$) säilib ka siis, kui toote T_2 ühikult saadav kasum ei ole täpselt 8 krooni, vaid võib muutuda vahemikus 6 kroonist kuni 12 kroonini. Töökoja kasum tootmi-

sest ja toodete müügist muutub sel juhul 60 kroonist 72 krooni.

Näide 3.2. Kaupluse müügiplaani ülesanne

Kaupluses müüakse toidu- ja tööstuskaupu. Toidukauba tingühiku müügist saab kauplus kasumit 6 krooni ning tööstuskauba puhul 9 krooni. Kaupluse läbimüüki limiteerivad kaupluse ruumide pind (800 m^2) ja müüjate tööaeg (200 inimtundi nädalas). Ressursside olemasolu ja nende kulu kaubaühiku müügiks on toodud tabelis 3.8.

Tabel 3.8

	Toidukaup	Tööstuskaup	Ressursside olemasolu
Müügi pind (m^2)	0.6	0.4	800
Tööaeg (inimtundi)	0.1	0.2	200

Kaupluse juhti huvitab selline müügiplaani, mille korral saadav kasum oleks suurim.

Esitatud probleemipüstitusele vastav ülesande matemaatiline formuleering on järgmine:

$$\max z = 6x_1 + 9x_2 \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 \leq 800 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 200 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (3.13)$$

kus

x_1 – toidukaupade müük;

x_2 – tööstuskaupade müük.

Duaalne ülesanne

$$\min w = 800y_1 + 200y_2 \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} 0.6y_1 + 0.1y_2 \geq 6 \\ 0.4y_1 + 0.2y_2 \geq 9 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \quad (3.16)$$

Kaupluse müügiplaani ülesande kui *max*-põhikujulise lineaarse planeerimisülesande *max*-kanooniline kuju on:

$$\max z = 6x_1 + 9x_2 \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 + x_3 = 800 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + x_4 = 200 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad (3.19)$$

kus

x_1, x_2 – baasimuutujad;

x_3, x_4 – abimuutujad, kusjuures x_3 on ruumide pinna võimalik ülejääk ning x_4 müüjate tööaja võimalik ülejääk.

Ülesande lahendamiseks vajalikud simpleksteisendused on koondatud tabelisse 3.9.

Optimaalsest baasitabelist saame ülesande lahendiks $x_1 = 1000$ (toidukaupade käive), $x_2 = 500$ (tööstuskaupade käive). Sellise käibe struktuuri korral on kaupluse kasum suurim: 10 500 krooni ($z = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 500 = 10\,500$).

Tabel 3.9

	x_1	x_2	x_3	x_4	Vabaliige
z	-6	-9 ↓	0	0	0
x_3	0.6	0.4 ↓	1	0	800
x_4	0.1	0.2	0	1	200
z	-1.5 ↓	0	0	45	9000
x_3	0.4 ↓	0	1	-2	400
x_2	0.5	1	0	5	1000
z	0	0	3.75	37.5	10 500
x_1	1	0	2.5	-5	1000
x_2	0	1	-1.25	7.5	500

Duaalse ülesande lahendiks on:

$y_1 = 3.75$ – 1 m² täiendavat kaubanduspinda annab kasumit 3.75 krooni;

$y_2 = 37.5$ – töötaja täiendav töötund annab kasumit 37.5 krooni.

(Kontroll: $w = z = 800 \cdot 3.75 + 200 \cdot 37.5 = 10\,500$)

Lahendi stabiilsuse analüüs toidukauba tingühikult saadava kasumi ($c_1 = 6$) suhtes:

$$\begin{cases} 3.75 + 2.5e_1 \geq 0 \Rightarrow e_1 \geq \frac{-3.75}{2.5} = -1.5 \\ 37.5 - 5e_1 \geq 0 \Rightarrow e_1 \leq \frac{+37.5}{-5} = 7.5 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\text{Seega } -1.5 \leq e_1 \leq 7.5 \text{ ning } 4.5 \leq c_1 \leq 13.5. \quad (3.21)$$

Kaupluse müügiplaani optimaalsus säilib ka siis, kui toidukaupade tingühiku müügilt saadav kasum muutub vahemikus 4.5 kroonist 13.5 kroonini.

Analüüsimise lahendi stabiilsust ka juhul, kui muutub tööstuskaupade tingühiku müügist saadav kasum ($c_2 = 9$). Selleks leiame lahendi võrratuste süsteemile (e_2 on tööstuskaupade müügist saadava kasumi võimalik muutus).

$$\begin{cases} 3.75 - 1.25e_2 \geq 0 & e_2 \leq \frac{3.75}{1.25} = 3 \\ 37.5 + 7.5e_2 \geq 0 & e_2 \geq \frac{-37.5}{7.5} = -5 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$-5 \leq e_2 \leq 3 \quad (3.23)$$

Lahend kehtib, kui tööstuskaupade müügist saadav kasum on vahemikus $4 \leq c_2 \leq 12$.

Analüüsimise ülesande (3.11)–(3.13) lahendi $x_1 = 1000$; $x_2 = 500$ ja $z = 10\,500$ stabiilsust ka juhul, kui samaaegselt võivad muududa mõlemate muutujate x_1 ja x_2 vastavad sihifunktsiooni kordajad c_1 ja c_2 . Pärast sihifunktsiooni kordajate c_1 ja c_2 võimalike muutuste $-e_1$ ja $-e_2$ lisamist omandab optimaalse baasitabeli sihifunktsiooni rida kuju

z	$0 - e_1$	$0 - e_2$	3.75	37.5	10 500
-----	-----------	-----------	------	------	--------

Baasimuutujatele vastavates veergudes seisvate elementide teisendamisel nullideks omandab optimaalse baasitabeli sihifunktsiooni rida kuju

z	0	0	$3.75 +$ $+2.5e_1 - 1.25e_2$	$37.5 -$ $-5e_1 + 7.5e_2$	$10\,500 +$ $+1000e_1 + 500e_2$
-----	---	---	---------------------------------	------------------------------	------------------------------------

Pärast teisendusi saadud sihifunktsiooni reas olevatele elementidele esitatud mittenegatiivsuse nõudest tulenevad kitsendused:

$$\begin{cases} 3.75 + 2.5e_1 - 1.25e_2 \geq 0 \\ 37.5 - 5e_1 + 7.5e_2 \geq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

kust saame

$$-1.5 + 0.5e_2 \leq e_1 \leq 7.5 + 1.5e_2 \quad (3.25)$$

Juhul kui $e_2 = 0$, siis $-1.5 \leq e_1 \leq 7.5$ (vt. ka 3.19) ning juhul kui $e_2 = 1$, siis $-1 \leq e_1 \leq 9$.

Seega, kui tööstuskaupade tingühiku müügist saadav kasum ei ole mitte 9 krooni, vaid 10 krooni ($c_2 + e_2$), siis toidukaupade tingühiku müügist saadav kasum võib muutuda vahemikus 5 kroonist kuni 15 kroonini ($5 \leq c_1 \leq 15$). Sel juhul säilib lahendi $x_1 = 1000$ (toidukaupade müük), $x_2 = 500$ (tööstuskaupade müük) optimaalsus ning kaupluse kasum võib kujuneda 10 000 kroonist ($c_1 = 5$, $c_2 = 10$) kuni 20 000 kroonini ($c_1 = 15$, $c_2 = 10$).

Näide 3.3. Söödaratsiooni ülesanne

On vaja koostada söödaratsioon kanapoegade kasvatamiseks broileriteks. Kanapoegade toitmisel on võimalik kasutada kolme sööta S_1 , S_2 , S_3 . Üks kilo sööta S_1 maksab 10 krooni, sööta S_2 6 krooni ja sööta S_3 4 krooni. Kanapoegade söödaratsioon peab sisaldama vähemalt 10 ühikut vitamiine, vähemalt 20 ühikut mineraalaineid ja vähemalt 15 ühikut valkaineid. Vajalike ainete sisaldus söötades on toodud tabelis 3.10.

Tabel 3.10

	S_1	S_2	S_3
Vitamiinid	5	0	2
Mineraalained	1	2	0
Valkained	0	4	3

Kui palju tuleks erinevaid söötasid kanapoegade söödaratsioonis kasutada, et nende söötmine tuleks võimalikult odav.

Ülesande matemaatiline formuleering antud probleemipüstituse korral on:

$$\min z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 \geq 20 \\ 0x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 15 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0 \quad (3.28)$$

kus

x_1 – sööda S_1 ostetav kogus;

x_2 – sööda S_2 ostetav kogus;

x_3 – sööda S_3 ostetav kogus.

Duaalne ülesanne:

$$\max w = 10y_1 + 20y_2 + 15y_3 \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 + 0y_3 \leq 10 \\ 0y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 6 \\ 2y_1 + 0y_2 + 3y_3 \leq 4 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (3.31)$$

Duaalse ülesande korral on tegemist *max*-põhikujulise lineaarse planeerimisülesandega, mille lahendamine simpleksmeetodil on tehniliselt mugavam. Teisendame *max*-põhikujul esitatud kanapoegade söödaratsiooni koostamise ülesandega duaalse üles-

ande kanoonilisele kujule, tuues sisse mittenegatiivsed abimuutujad y_4, y_5 ja y_6 :

$$\begin{cases} w - 10y_1 - 20y_2 - 15y_3 = 0 \\ 5y_1 + y_2 + y_4 = 10 \\ 2y_2 + 4y_3 + y_5 = 6 \\ 2y_1 + 3y_3 + y_6 = 4 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

Simpleksteisendused kanoonilisel kujul (3.32) esitatud duaalse ülesande (3.29)–(3.31) optimaalse baasitabeli saamiseks on koondatud tabelisse 3.11.

Simplekstabeli 3.11 viimane allosa vastab optimaalse baasitabeli nõuetele, kust saab välja kirjutada ülesandele (3.29)–(3.31) vastava optimaalse lahendi

$$y_1 = 14/10 = 1.4, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = 6/5 = 1.2$$

ning

$$w = 10 \cdot 14/10 + 20 \cdot 3 = 74.$$

Duaalse ülesande muutujate y_1, y_2 ja y_3 optimaalsetele väärtustele saab anda järgmise sisulise tõlgenduse:

- $y_1 = 1.4$ – kui ostetavates segudes on vitamiine ühe ühiku võrra rohkem, siis kanapoegade söötmiskulud kasvavad 1.4 krooni võrra nädalas;
- $y_2 = 3$ – kui ostetavates segudes on mineraalaineid ühe ühiku võrra rohkem, siis kanapoegade söötmiskulud kasvavad 3 krooni võrra nädalas;
- $y_3 = 0$ – kui ostetavates segudes on valkaineid ühe ühiku võrra rohkem, siis kanapoegade söötmiskulud ei suurene.

Tabel 3.11

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
w	-10	-20	-15	0	0	0	0
y_4	5	1	0	1	0	0	10
y_5	0	2	4	0	1	0	6
y_6	2	0	3	0	0	1	4
w	-10	0	25	0	10	0	60
y_4	5	0	-2	1	-1/2	0	7
y_2	0	1	2	0	1/2	0	3
y_6	2	0	3	0	0	1	4
w	0	0	21	2	9	0	74
y_1	1	0	-2/10	2/10	-1/10	0	14/10
y_2	0	1	2	0	1/2	0	3
y_6	0	0	19/5	-2/5	1/5	1	6/5

Tabelist 3.11 saab välja kirjutada ka esialgse ülesande (3.26)–(3.28) lahendi:

$x_1 = 2$ – segu S_1 ostetav kogus;

$x_2 = 9$ – segu S_2 ostetav kogus;

$x_3 = 0$ – segu S_3 ei ole otstarbekas osta.

$z = 10 \cdot 2 + 6 \cdot 9 = 74$ — minimaalsed söötmiskulud.

Seega on kanapoegade söötmisel otstarbekas kasutada kahte segu: segu S_1 2 kilo ja segu S_2 9 kilo. Sel juhul kulutused kanapoegade söötmiseks on vähimad: 74 krooni nädalas.

3.7. Simpleksmeetodi rakendamine üldjuhul

Seni lahendatud ülesannete puhul pidas paika nõue, et *max*-kanoonilisel kujul esitatud ülesannete esialgne simplekstabel oli lubatav baasitabel. Alati ei pruugi lineaarsele planeerimisüles-

andele vastav esialgne simplekstabel olla lubatav baasitabel. Sellisel juhul saab kasutada *üldistatud simpleksmeetodit* ehk *simpleksmeetodi rakendamist üldjuhul*. Simpleksmeetodi rakendamist üldjuhul käsitleme firma tootmisplaani ülesande näitel (näide 3.4).

Näide 3.4. Firma tootmisplaani ülesanne

Firma on saanud oma toodetele T_1 , T_2 ja T_3 ostutellimuse vähemalt 750 \$ eest nädalas. Toodete struktuuri kohta ostja nõudeid ei esita. Sellisel tingimusel on toodete müük võimalik järgmiste müügihindade korral: toode T_1 3 \$, toode T_2 5 \$, toode T_3 2 \$.

Toodete valmistamine on limiteeritud kahe materjaliga M_1 ja M_2 . Materjali M_1 kulub tootele T_1 2 kilo, tootele T_2 3 ja tootele T_3 2 kilo. Materjali M_1 on firmal võimalik hankida 550 kilo nädalas ning eelnevalt sõlmitud sisseostulepingu kohaselt on firma huvitatud materjali M_1 täielikust ärakasutamisest. Materjali M_2 kulub tooteühiku kohta järgmiselt: tootele T_1 3 kg; tootele T_2 1 kg ja tootele T_3 4 kg. Materjali M_2 on firmal võimalik hankida kuni 650 kg nädalas, sealjuures võib materjali kulutada ja seega ka tarnida vähem.

Esialgse kalkulatsiooni kohaselt kujuneb toodangu ühiku omahind järgmiseks: toode T_1 2 \$, toode T_2 3 \$ ja toode T_3 3.5 \$.

Firma on huvitatud tootmisplaanist, mille puhul kõik lepingutingimused oleksid täidetud ning seejuures tootmiskulud (summaarne omahind) oleksid vähimad.

Ülesande matemaatiliseks formuleerimiseks on teadaolevad andmed soovitav esitada tabelina (tabel 3.12).

Tabel 3.12

	Ressursside kulu			Ressursside olemasolu
	Toode T_1	Toode T_2	Toode T_3	
M_1	2	3	2	= 550
M_2	3	1	4	≤ 650

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 750 \text{ (müügiplaan)} \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 550 \text{ (materjali } M_1 \text{ kasutamine)} \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 650 \text{ (materjali } M_2 \text{ kasutamine)} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad (3.35)$$

kus

x_1 – toote T_1 tootmiskaht;

x_2 – “-“ T_2 tootmiskaht;

x_3 – “-“ T_3 tootmiskaht.

Ülesande (3.33)–(3.35) *max*-kanooniline kuju:

$$\min z = \max(-z = z') = \max(-2x_1 - 3x_2 - 3.5x_3) \text{ ehk}$$

$$z' + 2x_1 + 3x_2 + 3.5 = 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 750 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 550 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 650 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad (3.38)$$

kus

x_4 ja x_5 on abimuutujad, kusjuures

x_4 – müügiplaani võimalik ületamine;

x_5 – materjali M_2 võimalik ülejääk;

Max-kanoonilisel kujul lineaarsele planeerimisülesandele (3.36)–(3.38) vastab simplekstabel 3.13.

Tabel 3.13

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Vabaliige
z'	2	3	3.5	0	0	0
1. rida	3	5	2	-1	0	750
2. rida	2	3	2	0	0	550
3. rida	3	1	4	0	1	650

Max-kanoonilisele kujule vastav simplekstabel 3.13 ei ole veel lubatav baasitabel. Simplekstabel on lubatav baasitabel, kui vabaliikmed on mittenegatiivsed (see nõue on täidetud) ning tabelis on m (kitsenduste arv) ühikveergu. Antud juhul on vaid üks ühikveerg, peaks olema aga kolm ($m = 3$). Seega tuleb esialgne simplekstabel teisendada lubatavaks baasitabeliks. Selleks tuleb sisse tuua kunstlikud muutujad x_6 ja x_7 . Tulemusena saame uue kitsenduste süsteemi:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 750 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_7 = 550 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 650 \end{cases} \quad (3.39)$$

Majanduslikust sisust ja võrrandisüsteemist (3.36) tulenevalt peaks kunstlike muutujate x_6 ja x_7 väärtused optimaalses lahendis olema 0-d.

Selleks et optimaalses lahendis kunstlike tundmatute väärtused tuleksid 0-d, tuleb nad lülitada sihifunktsiooni kordajaga $-M$, kusjuures M on suur positiivne arv ($M > 0, M \geq |c_i|$). Kuna tegemist on minimeerimise ülesandega, siis toome kunstlikud tundmatud x_6 ja x_7 sihifunktsiooni sisse kordajaga $+M$. Saame sihifunktsioonile kuju

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + Mx_6 + Mx_7. \quad (3.40)$$

Järgnevalt teeme sihifunktsiooniga teisendused, et viia ülesannet *max*-kanoonilisele kujule:

$$\begin{aligned} \min z &= \max(-z = z') = \\ &= \max(-2x_1 - 3x_2 - 3.5x_3 - Mx_6 - Mx_7) \end{aligned} \quad (3.41)$$

ning

$$z' + 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + Mx_6 + Mx_7 = 0 \quad (3.42)$$

Kunstlikke muutujaid x_6 ja x_7 sisaldav simplekstabel:

Tabel 3.14

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Vabaliige
z'	2	3	3.5	0	0	M	M	0
1. rida	3	5	2	-1	0	1	0	750
2. rida	2	3	2	0	0	0	1	550
3. rida	3	1	4	0	1	0	0	650

Kuna muutujatele x_6 ja x_7 kui baasimuutujatele vastavates veerudes sihifunktsiooni reas on arvud M , siis lubatava baasitabeli saamiseks tuleb need teisendada nullideks. Selleks korrutame tabeli 3.14 1. ja 2. rea läbi $+M$ -ga ja lahutame sihifunktsiooni reast. Saame

$$\begin{aligned} z' + 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + Mx_6 + Mx_7 - 3Mx_1 \\ - 5Mx_2 - 2Mx_3 + Mx_4 - Mx_6 - 2Mx_1 - 3Mx_2 \\ - 2Mx_3 - Mx_7 = 0 - 750M - 550M, \end{aligned} \quad (3.43)$$

kust

$$\begin{aligned} z' + (2 - 5M)x_1 + (3 - 8M)x_2 + \\ + (3.5 - 4M)x_3 + Mx_4 = -1300M \end{aligned} \quad (3.44)$$

Simpleksteisendused saadud lubatava baasitabeli teisendamiseks optimaalseks baasitabeliks on koondatud tabelisse 3.15.

Tabeli 3.15 viimane allosa on optimaalne baasitabel, kust saame välja kirjutada järgmise optimaalse lahendi:

$x_1 = 0$, $x_2 = 550/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 500/3$, $x_5 = 1400/3$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ ja $z' = -550$. Kuna $z' = -z$, siis firma minimaalsed tootmiskulud $z = 550$. (Kontroll: $z = -z' = 3 \cdot 550/3 = 550$).

Kunstlikud muutujad x_6 ja x_7 peavad ülesande lahendamise tingimustest tulenevalt võrduma 0-ga. Kui optimaalses baasitabelis kunstlike muutujate väärtused ei võrdu 0-ga, siis selliselt formuleeritud ülesandel puudub optimaalne lahend. Tegemist on olukorraga, kus ülesandel on lõpmata palju lahendeid, nende hulk on tõkestamata.

Tabel 3.15

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Vabalinge
z'	$2-5M$	$3-8M$	$3,5-4M$	M	0	0	0	$-1300M$
x_6	3	5	2	-1	0	1	0	750
x_7	2	3	2	0	0	0	1	550
x_5	3	1	4	0	1	0	0	650
z'	$1/5-1/5M$	0	$23/10-4/5M$	$3/5-3/5M$	0	$-3/5+8/5M$	0	$-450-100M$
x_2	$3/5$	1	$2/5$	$-1/5$	0	$1/5$	0	150
x_7	$1/5$	0	$4/5$	$3/5$	0	$-3/5$	1	100
x_5	$12/5$	0	$18/5$	$1/5$	1	$-1/5$	0	500
z'	$-3/8$	0	0	$-9/8$	0	$M+9/8$	$M-23/8$	$-1475/2$
x_2	$1/2$	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	100
x_3	$1/4$	0	1	$3/4$	0	$-3/4$	$5/4$	125
x_5	$3/2$	0	0	$-5/2$	1	$5/2$	$-9/2$	50
z'	0	0	$3/2$	0	0	M	$M-1$	-550
x_2	$2/3$	1	$2/3$	0	0	0	$1/3$	$550/3$
x_4	$1/3$	0	$4/3$	1	0	-1	$5/3$	$500/3$
x_5	$7/3$	0	$10/3$	0	1	0	$-1/3$	$1400/3$

Firma tootmisplaani ülesande optimaalse lahendi majanduslik tõlgendamine

Firma minimaalsed tootmiskulud on 550 \$ nädalas, kui ta toodab vaid toodet T_2 koguses $x_2 = \frac{550}{3} \approx 183$ ühikut. Tooteid T_1 ja T_3 ei ole otstarbekas toota ($x_1 = 0, x_3 = 0$).

Sellise tootmisplaani korral ületab firma oma minimaalse müügikohustuse 167 \$ võrra $\left(x_4 = \frac{500}{3} \approx 167 \$\right)$. Materjali M_2 jääb üle ca 467 kilo $\left(x_5 = \frac{1400}{3} \approx 467\right)$, seega piisab materjali M_2 sisse osta vaid 183 kilo (650–467).

Kuna optimaalses baasitabelis sihifunktsiooni reas on 0-line element ja see ei vasta baasitundmatule (ühikveerule), siis võib ülesandel olla ka *alternatiivne lahend*, mille leidmise käik on toodud tabelis 3.16.

Tabel 3.16

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Vabaliige
z'	0	0	3/2	0	0	M	M-1	-550
x_2	2/3	1	2/3	0	0	0	1/3	550/3
x_4	1/3	0	4/3	1	0	-2	5/3	500/3
x_5	7/3	0	10/3	0	1	0	-1/3	1400/3
z'	0	0	3/2	0	0	M	M-1	-550
x_2	0	1	-2/7	0	-2/7	0	3/7	50
x_4	0	0	6/7	1	-1/7	-1	12/7	100
x_1	1	0	10/7	0	3/7	0	-1/7	200

Tabeli 3.16 allosast võime välja kirjutada uue optimaalse lahendi

- $x_1 = 200$ (toote T_1 tootmiskaht),
 $x_2 = 50$ (toote T_2 tootmiskaht),
 $x_3 = 0$ (toodet T_3 pole otstarbekas toota),
 $x_4 = 100$ (müügiplaani ületamine),
 $x_5 = 0$ (materjal M_2 kulutatakse täielikult ära),
 $x_6 = x_7 = 0$ (kunstlikud muutujad võrduvad nulliga),
 $z' = -550$ (minimaalsed tootmiskulud on $z = 550$).

Alternatiivsete lahendite sisuline analüüs

Lahend 1. FIRMAL on otstarbekas toota vaid toodet $T_2 = \frac{550}{3} \approx 183$ ühikut. Toodet T_1 ja T_2 ei ole mõtet toota. Sel juhul summaarsed tootmiskulud on vähimad: 550 \$ nädalas. Müügiplaani ületatakse 167 \$ $\left(x_4 = \frac{500}{3} \approx 167\right)$ võrra. Materjali M_2 jääb üle 467 ühikut $\left(x_5 = \frac{1400}{3} \approx 467\right)$. Firma kasum, mis kujuneb müügihinna ja omahinna vahest, on sel juhul $(5 - 3) \cdot 183 = 366$ \$.

Lahend 2. FIRMAL on otstarbekas toota kahte toodet T_1 ja T_2 vastavalt 200 ja 50 ühikut $(x_1 = 200, x_2 = 50)$. Summaarsed tootmiskulud on 550 \$. Müügiplaani ületatakse 100 \$ võrra. Materjalid M_1 ja M_2 kasutatakse täielikult ära. Võimalik kasum on $(3 - 2) \cdot 200 + (5 - 3) \cdot 50 = 300$ \$.

Kokkuvõte

Simpleksmeetod on lineaarsete planeerimisülesannete põhiline lahendusmeetod. Simpleksmeetodi algoritmi rakendatakse kanoonilisel kujul esitatud lineaarsele planeerimisülesandele. Lineaarse planeerimisülesande saab alati viia kanoonilisele kujule, teisendades kitsenduste süsteemis esinevad võrratused võrdusteks. Selleks tuuakse kitsenduste süsteemi sisse mitte-negatiivsed abimuutujad, mis püstitatud majandusprobleemi seisukohalt omavad sisulist tõlgendust.

Kanoonilisel kujul esitatud lineaarse planeerimisülesande lahendamise simpleksmeetodil koosneb järgmistest sammudest:

- simplekstabeli koostamine;
- simplekstabeli teisendamine baasitabeliks (vajadusel);
- baasitabeli optimaalsuse kontrollimine ja simpleksteisendused optimaalse simplekstabeli leidmiseks;
- optimaalse simplekstabeli analüüs.

Optimaalsest simplekstabelist selgub, kas ülesandel on ka alternatiivseid lahendeid. Simpleksteisendusi rakendades saab leida sihifunktsioonile optimaalset väärtust andvad erinevate lahendielementide võimalikud kombinatsioonid — alternatiivsed lahendid. Samuti saab optimaalsest simplekstabelist leida duaalse ülesande lahendi. Duaalsete ülesannete paari sihifunktsioonide väärtused langevad kokku ning mõlema ülesande lahendil on majandusprobleemi püstituse seisukohalt oluline sisuline tähtsus.

Optimaalse simplekstabeli alusel saab analüüsida ka lahendi stabiilsust. Optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsil selgitatakse, millistes piirides võivad lineaarse planeerimisülesande andmed muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks. Et analüüsida lahendi muutumist lineaarse planeerimisülesandena formuleeritud mudeli parameetrite muutumisel, tuleb sageli koostada ka täiesti uus ülesanne ning simpleksmeetodi eespool nimetatud

samme läbides see uuesti lahendada. Järgneb uue optimaalse lahendi sisuline analüüs ning saadud info ettevalmistamine otsuste langetamiseks.

4. TRANSPORDIÜLESANDED

4.1. Transpordiülesande põhikuju

Majandusprobleemide formuleerimisel lineaarse planeerimisülesandena jõutakse sageli sellise esituskujuni, mille lahendamisel on mugavam kasutada lineaarsete planeerimisülesannete universaalse lahendusmeetodi — simpleksmeetodi asemel sellele esituskujule tunduvamalt sobivamaid lahendusmeetodeid. Üheks selliseks esituskujuks on nn. *transpordiülesandena* formuleeritud lineaarne planeerimisülesanne.

Transpordiülesande esitus vastab järgmisele probleemipüstitusele. On tegemist ühetüübilise kauba vedamisega ladudest (tarnijatelt) tarbijatele (kauplustele, vahendajatele jne.). Kaupa pakuvad m ladu L_1, L_2, \dots, L_m kogustes vastavalt a_1, a_2, \dots, a_m ehk a_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Kaupa veetakse n tarbijale T_1, T_2, \dots, T_n . Tarbijate vajadused on b_1, b_2, \dots, b_n ehk b_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Veokulud kaubaühiku kohta i -ndast laost j -ndale tarbijale on c_{ij} . Eesmärgiks on kaup laiali vedada vähimate kuludega. Seega tuleb leida kaubakogused x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$), mis veetakse i -ndast laost j -ndale tarbijale ning mille korral transpordikulud kujunevad vähimateks.

Sihifunktsioon:

$$\begin{aligned} \min z = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ & + \dots + \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Kitsendused:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

m kitsendust selle kohta, et kaupa saab laost L_i välja vedada mitte rohkem, kui seal kaupa on (a_i).

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

n kitsendust selle kohta, et tarbijale T_j tuleb kaupa vedada vastavalt tellitud kogusele (b_j). Selle kitsenduse puhul võib lubada ka võrratust ($\geq b_j$), kuid on ilmne, et üleliigne vedu suurendab veokulusid, mistõttu üle vajaduse pole üldjuhul mõtet ühelegi tarbijale kaupa vedada.

Muutujate mittenegatiivsuse nõue:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

(transpordiülesandel $m \cdot n$ muutujat)

c_{ij} , a_i ja b_j on mingid arvud, mis rahuldavad tingimusi:

$$a_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad b_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (4.6)$$

Suuruse c_{ij} kohta mingeid kitsendusi ei ole.

Ülesande (4.1)–(4.4) saab esitada ka kujul:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Iga muutujate x_{ij} komplekt, mis rahuldab kõiki tingimusi (4.2)–(4.4) või (4.8)–(4.10), on transpordiülesande *lubatav lahend* ehk *lubatav veoplaan*. Kui lubatava lahendi korral omandab sihi-funktsioon minimaalse väärtuse (on täidetud nõue (4.1) või (4.7)), siis on tegemist transpordiülesande *optimaalse lahendiga* ehk *optimaalse veoplaaniga*.

Ülesandeni (4.1)–(4.4) või (4.7)–(4.10) jõutakse sageli erinevate sisuliste majandusprobleemide formaliseerimisel, mille korral pole alati tegemist tavalises mõttes kauba laialivedamisega.

Transpordiülesande põhikuju:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j,$$

kus

x_{ij} – i -ndast laost j -ndale tarbijale veetav kaubakogus;

c_{ij} – kaubaühiku veokulud i -ndast laost j -ndale tarbijale;

a_i – i -nda lao kaubapakkumine;

b_j – j -nda tarbija tellimus;

m – ladude arv;

n – tarbijate arv.

Transpordiülesande lahend, mis rahuldab ladude pakkumistega ja tarbijate tellimustega esitatud tingimusi ning muutujate x_{ij} mittenegatiivsuse nõuet, on lubatav lahend ehk lubatav veoplaan.

Transpordiülesande lubatav lahend, mille korral si-hifunktsioon (summaarsed veokulud) omandab vähima väärtuse, on optimaalne lahend.

4.2. Transpordiülesande lahtine ja kinnine esituskuju

Transpordiülesandel on *kinnine kuju*, kui ladude pakkumised

$\sum_{i=1}^m a_i$ ja tarbijate nõudmised $\sum_{j=1}^n b_j$ on tasakaalus, st.

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Kinnisel transpordiülesandel on lineaarse planeerimisülesande *kanooniline kuju*. Sellise ülesande lahendamiseks sobib spetsiaalne lahendusalgorithm — *potentsiaalide meetod*.

Transpordiülesandel on lahtine esituskuju ehk tegemist on *lahtise transpordiülesandega*, kui nõudmine ja pakkumine ei ole tasakaalus: $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$.

On kaks võimalust:

1) pakkumine on suurem kui nõudmine: $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$;

2) nõudmine on suurem kui pakkumine: $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$.

Potentsiaalide meetod on välja töötatud transpordiülesande kinnise esituskuju kohta. Seega enne, kui hakata transpordiülesannet lahendada, tuleb kontrollida, kas ülesanne on kinnine. Vajadusel tuleb *lahtine transpordiülesanne teisendada kinniseks*.

Kui $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, siis võib sisse tuua nn. *fiktiivse tarbija* T_f

(või T_{n+1}) kaubavajadusega $b_f = b_{n+1}$:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.11)$$

Suurus x_{ij} (ehk $x_{i, n+1}$) kujutab endast laost L_i fiktiivsele tarbijale T_j (ehk T_{n+1}) veetava kauba kogust, s.o. kauba kogust, mis tegelikult jääb lattu seisma. Kauba ühiku veokulud fiktiivsele tarbijale loetakse kõigi ladude korral võrdseks ühe ja sama (suvalise) konstandiga M (näiteks nulliga). Seda arvu M võib tõlgendada kauba ühiku hoiukuludena ladudes. Kui probleemi sisulisest püstitusest tulenevalt ei ole ükskõik, millistesse ladudesse kaup seisma jääb, siis määratakse suurused M_i diferentseeritult ning nad iseloomustavad hoiukulusid erinevates ladudes. Siinjuures tuleb silmas pidada, et erinevate hoiukulude kasutamisel peavad nad olema sisulises kooskõlas veokuludega. Võrdsete hoiukulude kasutamisel võib arve M valida suvaliselt.

Kui $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$ (tarbijate tellimused on suuremad ladude pakumistest), siis tuleb püstitada uus ülesanne, tuues sisse näiteks fiktiivse lae L_f (või L_{m+1}) kauba kogusega a_f (ehk a_{m+1}):

$$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i = a_f \quad (4.12)$$

Suurus x_{fj} (ehk $x_{m+1, j}$) kujutab endast fiktiivsest laost L_f tarbijale T_j veetava kauba kogust. Tegelikult on see tarbija T_j tellimuse osa, mis jääb täitmata. Kauba ühiku veokulud fiktiivsest laost kõigile tarbijatele võib samuti (analoogiliselt fiktiivse tarbija juhuga) lugeda võrdseks suvalise konstandiga M (selleks võib olla ka null). Konstanti M saab tõlgendada näiteks kui kompensatsiooni või trahvi tellimuse täitmata jätmise eest. Kui probleemi püstitusest tulenevalt ei ole ükskõik, milline tarbija kaubast ilma jääb, siis tuleb leida veokuludega sisulises kooskõlas olevad "trahvi" M_j suurused iga tarbija korral. Sisulistel kaalut-

lustel võib probleemi lahendada ka selliselt, et iga tarbija tellimust korrigeeritakse suuruse a_i/n võrra. Tarbijate T_j tellimusteks on sel juhul $b'_j = b_j - a_i/n$. Kui nõutakse, et kõigil tarbijatel jääks saamata nende vajadustega võrdeline osa kaupa, siis tarbijate vajadusteks b_j asemel on suurused $b_j - a_i \cdot \frac{b_j}{b}$, kus $b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Kinnine transpordiülesanne:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

kus

x_{ij} – i -ndast laost j -ndale tarbijale veetav kaubakogus;

c_{ij} – kaubaühiku veokulud i -ndast laost j -ndale tarbijale;

a_i – i -nda lao kaubapakkumine;

b_j – j -nda tarbija tellimus;

m – ladude arv;

n – tarbijate arv.

4.3. Transporditabel

Transpordiülesande lahendamiseks vajalikud lähteandmed esitatakse tavaliselt transporditabelina ehk veokulude maatriksina (tabel 4.1).

Tabel 4.1

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Transporditabelis 4.1 a_i , b_j ja c_{ij} on ülesande (4.1)–(4.4) või (4.7)–(4.10) poolt määratud arvud. Et kinnine transpordiülesanne on üheselt määratud oma transporditabeliga, siis edaspidi nende ülesannete esitamiseks on kasutatud lihtsalt ülesande transporditabeli esitamist. Transporditabelina on esitatud ka nn. lahtine transpordiülesanne, mida tuleb vastavalt alapunktis 4.2 toodud reeglitele kinniseks teisendada.

Transporditabelit nimetatakse *baasitabeliks*, kui temas on välja eraldatud nn. *baas*: $m + n - 1$ ruutu (m — ladude arv, n — tarbijate arv), mida nimetatakse *baasiruutudeks* ning mis vastavad järgmisele tingimusele: kui baasiruudud ühendada horisontaalsete ja vertikaalsete lõigukestega, siis ei teki kinniseid kontuure ega tsükleid (tabel 4.2).

Tabel 4.2

	300	240	110	100	50
200	○ *				*
260	○ *	○ *	○ *		
340			○ *	○ *	○ *

Tabelis 4.2 ringikestega ja tärnikestega (*) ruudud moodustavad baasi: neid on $n + m - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ tükki ning nad ei moodusta kinnist kontuuri ega tsükli. Ainult *tärnikesega* tähistatud ruudud baasi ei moodusta, sest nende ühendamisel tekib tsükkel. Samuti on neid rohkem kui $m + n - 1$.

Baasiruutudele vastavaid muutujaid (veoseid) nimetatakse *baasimuutujateks* ja ülejäänud muutujaid *vabadeks muutujateks*.

Baasitabel on lubatav, kui talle vastavad baasimuutujad on mittenegatiivsed ning rahuldavad transpordiülesande kitsenduste süsteemi nõudeid (nõuded ladude pakkumiste ja tarbijate vajaduste kohta). Sel juhul vabad muutujad võrduvad nulliga.

Lubatav baasitabel on *optimaalne*, kui baasiruutudes olevate veokulude c_{ij} teisendamisel nullideks ülejäänud veokulud transporditabelis teisenevad mittenegatiivseteks.

Veokulude teisendamisel lahutatakse transporditabeli ridadest ja veergudest sobivaid arve — *potentsiaale*. Siit tuleneb ka transpordiülesannete lahendusmeetodi nimetus — *potentsiaalide meetod*.

Kui transporditabelis õnnestub välja valida selline baas, millele vastav lubatav baasitabel on optimaalne, siis sellise baasitabeli poolt määratud veoplaan ongi kinnise transpordiülesande optimaalne lahend ehk optimaalne veoplaan.

Transporditabel on baasitabel, kui selles on võimalik eraldada $m + n - 1$ baasiruutu, mille ühendamisel horisontaalsete ja vertikaalsete lõigukestega ei teki kinniseid kontuure ehk tsükleid. Baasiruutudele vastavad muutujad on baasimuutujad.

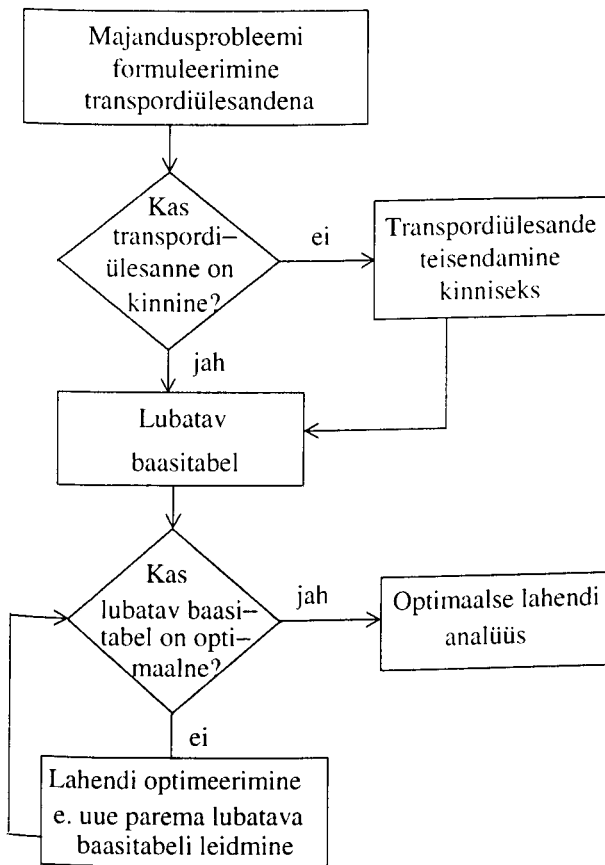
Baasitabel on lubatav, kui baasimuutujad on mitte-negatiivsed ning rahuldavad transpordiülesande kitsenduste süsteemi nõudeid ladude pakkumiste ja tarbijate vajaduste kohta.

Optimaalse transporditabeli tunnus: lubatav baasitabel on optimaalne, kui baasiruutudes olevate veokulude teisendamisel nullideks ülejäänud veokulud transporditabelis teisenevad mittenegatiivseteks.

4.4. Transpordiülesande lahenduskäik

Transpordiülesande lahendamiseks vajalikud *sammud* (joonis 4.1):

1. Majandusprobleemi formuleerimine transpordiülesandena.
2. Transpordiülesande kinnisuse kontroll. Vajadusel lahtise ülesande teisendamine kinniseks.
3. Lubatava baasitabeli ja sellele vastava lubatava lahendi leidmine.
4. Lubatava baasitabeli ja sellele vastava lahendi optimaalsuse kontroll.
5. Lahendi optimeerimine ehk uue ja parema lubatava baasitabeli leidmine.
6. Optimaalse lahendi analüüs.



Joonis 4.1. Transpordiülesande lahenduskäik.

4.5. Lubatava lahendi leidmise meetodid

Transpordiülesandele lubatava lahendi leidmise meetoditest on kasutatavamad:

- loodenurga reegel,
- vähima elemendi reegel,

4.5.1. Loodenurga reegel

Transporditabeli baasiruutude leidmist *loodenurga reegli* kohaselt alustatakse ülemisest vasakpoolsest nurgast (siit tuleneb ka meetodi nimetus). Mööda trepikujulist teed tabelis alla paremale liikudes jõutakse baasimuutujani x_{mn} . Treppjoon läbib $m+n-1$ baasiruutu. Transpordiülesande lubatava lahendi leidmisel läbitakse tavaliselt järgmised sammud:

- 1) transporditabeli ülemises vasakpoolses nurgas olev ruut valitakse baasiruuduks, sellele vastav veokulu ümbritsetakse ringikesega. Soovitav on kirjutada veokulud transporditabeli ruutude vasakusse ülanurka;
- 2) valitud baasiruudule vastava baasimuutuja väärtuseks võetakse nii suur arv kui vähegi võimalik (tühjendatakse täielikult ladu või rahuldatakse täielikult tarbija vajadus);
- 3) teostatakse ladude varude ja tarbijate vajaduste ümberarvutused pärast baasimuutujaga määratud veo sooritamist;
- 4) edaspidises jäetakse vaatluse alt välja täielikult tühjendatud laod ja täielikult rahuldatud tarbijad (vastavad read ja veerud võib transporditabelis maha tõmmata);
- 5) samme (1)–(4) korratakse seni, kuni kõik laod on tühjendatud ja seega ka kõik tarbijad rahuldatud.

Loodenurga reegel on lubatava baasilahendi leidmise üks lihtsamaid meetodeid. Tema abil saadud lubatav lahend erineb optimaalsest tavaliselt üsna palju, sest siin ei ole arvestatud veokulude suurust. Tabelis 4.3 toodud näites on lubatav baasitabel leitud loodenurga reeglit kasutades.

Tabel 4.3

	300	240	110	100	50
200	③ 200	5	7	11	2
260	① 100	④ 160	6	3	1
340	5	⑧ 80	⑫ 110	⑦ 100	① 50

Baasiruutude arv tabelis 4.3 $m+n-1=7$. Baasiruute ühendavad lõigukesed ei moodusta kinnist kontuuri ehk tsükli. Täidetud on transpordiülesande kitsendused ladude pakkumiste ja tarbijate nõudluste kohta. Seega on saadud lubatav baasitabel ning sellele vastav lubatav baasilahend:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 200, & x_{21} &= 100, & x_{22} &= 160, \\
 x_{32} &= 80, & x_{33} &= 110, & x_{34} &= 100, \\
 x_{35} &= 50
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Baasilahendisse kuuluvaid x_{ij} nimetatakse ka *lahendielementideks*.

Transpordiülesande lubatava baasilahendi (4.13) korral on summaarsed veokulud:

$$\begin{aligned}
 z &= 3 \cdot 200 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 160 + 8 \cdot 80 + \\
 &+ 12 \cdot 110 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 4050
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Võib oletada, et loodenurga reeglit kasutades on saadud lubatav baasitabel, millele vastava lubatava veoplaani korral on summaarsed veokulud küllalt suured, tavaliselt suuremad kui luba-

tava lahendi leidmise nende meetodite korral, kus arvestatakse veokulude suurusega.

4.5.2. Vähima elemendi reegel

Kui loodenurga reegli korral baasiruudu valikul veokuludega ei arvestatud, siis *vähima elemendi reegli* rakendamisel eespool toodud sammude (1)–(5) läbimisel lubatava lahendi leidmisel tulevad arvesse ka veokulude suurused. Baasiruuduks valitakse alati ruut, kus veokulu c_{ij} on võimalikult väike. Tabelis 4.4 toodud näites on lubatava baasitabelini jõutud vähima elemendi reeglit kasutades.

Tabel 4.4

	300	240	110	100	50
200	(3) 40	(5) 160	7	11	2
260	(1) 260	4	6	3	1
340	5	(8) 80	(12) 110	(7) 100	(1) 50

Tabelis 4.4 on väiksemad veokulud $c_{21} = 1$, $c_{25} = 1$ ja $c_{35} = 1$. Teeme esimese veose näiteks marsruudil teisest laost esimesele tarbijale: $x_{21} = 260$ ning järgmise kolmandast laost viiendale tarbijale: $x_{35} = 50$.

Järgnevad valikud:

$$x_{11} = 40 \quad (c_{11} = 3)$$

$$x_{12} = 160 \quad (c_{12} = 5)$$

$$x_{34} = 100 \quad (c_{34} = 7)$$

$$x_{32} = 80 \quad (c_{32} = 8)$$

$$x_{33} = 110 \quad (c_{33} = 12)$$

Vähima elemendi reeglit kasutades on saadud lubatav baasilahend:

$$\begin{aligned} x_{11} = 40, x_{12} = 160, x_{21} = 260, x_{32} = 80, x_{33} = 110, \\ x_{34} = 100, x_{35} = 50 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Lubatavale baasilahendile (4.15) vastavad summaarsed veokulud:

$$\begin{aligned} z = 3 \cdot 40 + 5 \cdot 160 + 1 \cdot 260 + 8 \cdot 80 + 12 \cdot 110 + \\ + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 3890 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vähima elemendi reegluga saadud lubatav baasitabel annab sihifunktsiooni väärtuseks 3890, mis on väiksem kui loodenurga reegluga saadud lubatava baasilahendi summaarne veokulu.

4.5.3. Vogeli reegel

Vogeli reegli kasutamisel lubatava baasitabeli leidmiseks arvestatakse samuti veokuludega. *Lihtsustatud Vogeli reegel*: vedu tuleb teostada marsruudil, mille korral kõige odavamast võimalusest järgneva kasutamisel saadav kahju on suurim. Reegli rakendamisel läbitakse järgmised sammud:

- 1) leitakse arv, mis iseloomustab saadavat kahju, kui vastava lao või tarbija puhul ei kasutata vedamiseks kõige odavamat võimalust, vaid sellest järgmist;
- 2) leitakse rida või veerg, kus kahju on suurim;
- 3) baasiruuduks valitakse suurima kahjuga reast või veerust vähima veokuluga ruut. Kui võrdse suurima kahjuga rida- või veerge on mitu, siis valitakse nende seast üks välja suvaliselt.

Tabelis 4.5 on toodud kahjude arvutused ning nendest lähtuvalt lubatava baasiplaani leidmise käik.

Tabel 4.5

	300	240	110	100	50	Kahjud
200	3	⑤ 90	⑦ 110	11	2	1 2 2 2 2
260	① 160	4	6	③ 100	1	0 2 ③ - -
340	⑤ 140	⑧ 150	12	7	① 50	④ 2 3 3 ③
Kahjud	2 2 2 2 2	1 1 1 3 3	1 1 1 ⑤ -	4 ④ - - -	0 - - - -	

Tabelist 4.5 näeme, et esimesel sammul on suurim kahju kolmandas reas ja neljandas veerus (kahju suurus 4). Valime esimese veose kolmandast laost või neljandale tarbijale sõltuvalt sellest, kus on veokulu vähim. Antud juhul on vähim veokulu marsruudil kolmandast laost viiendale tarbijale, kus saame teha veose suurusega 50 ühikut: $x_{35} = 50$. Sellega on viienda tarbija vajadused rahuldatud ($b_5 = 50$) ning edaspidistes arvutustes jätame transporditabeli viienda veeru vaatluse alt välja. Leiame uued kahjud. Teisel sammul on suurim kahju neljandas veerus ning sellele vastav väikseim veokulu $c_{24} = 3$, millele vastab lahendielement $x_{24} = 100$. Neljanda tarbija vajadused on sellega

rahuldatud ning seega jääb neljas veerg vaatluse alt välja. Sama mõttekäiku edasi rakendades, saame lubatava baasilahendi:

$$\begin{aligned}x_{12} &= 90, x_{13} = 110, x_{21} = 160, x_{24} = 100, \\x_{31} &= 140, x_{32} = 150, x_{35} = 50\end{aligned}\quad (4.17)$$

Leitud lubatavale baasilahendile (4.17) vastab summaarne veokulu:

$$\begin{aligned}z &= 5 \cdot 90 + 7 \cdot 110 + 1 \cdot 160 + 3 \cdot 100 + \\&+ 5 \cdot 140 + 8 \cdot 150 + 1 \cdot 50 = 3630\end{aligned}\quad (4.18)$$

Vogeli meetodil leitud lubatav baasiplaan andis sihifunktsioonile väiksema väärtuse kui loodenurga või vähima elemendi reeglite kasutamisel leitud lubatavad baasiplaanid (loodenurga reegli rakendamisel $z = 4050$, vähima elemendi reegli korral $z = 3890$).

Vogeli reegli rakendamisel saadav lubatav lahend annab enamasti sihifunktsioonile optimaalsele küllalt lähedase väärtuse (sageli ka optimaalse). Potentsiaalide meetodi järgneval kasutamisel jõutakse sellest baasilahendist lähtudes optimaalse lahendini tavaliselt kõige kiiremini.

4.6. Kõdunud lahend

Kui lubatud lahendis on lahendielementide arv väiksem kui $m+n-1$, siis on tegemist *kõdunud lahendiga*. Kõdunud lahend tekib näiteks siis, kui lubatavale veoplaanile vastava lahendielemendi leidmisel saab üheaegselt tühjaks ladu ning täielikult rahuldatud tarbija vajadus. Sellisel juhul on otstarbekas kohe vastavasse ritta või veergu lisada nulliline lahendielement. Nullilise lahendielemendi lisamisel tuleb jälgida, et lahendielementidele vastavad ruudud ei moodustaks tsükli. Kui peale nullilise lahendielemendi lisamist jätta alati vaatluse alt välja nii tühjaks

saanud laole vastav rida kui ka täielikult rahuldatud tellimusega tarbijale vastav veerg, siis tsüklit ei teki.

Tabelis 4.6 esitatud andmete puhul vähima elemendi reeglit rakendades kujunes lahendielemendi $x_{12} = 200$ korral olukord, kus üheaegselt sai tühjaks esimene ladu ($a_2 = 200$) ja täielikult rahuldatud teise tarbija vajadus ($b_2 = 200$). Seega tekib kõdunud lahend, kui kohe nullilist lahendielementi ei lisata.

Tabel 4.6

	100	200	300	400
200	2	① 200	3	7
300	④ 100	3	8	④ 200
500	6	2	③ 300	⑥ 200

Rakendades ka järgmiste sammude puhul vähima elemendi reeglit, jõuame lubatava lahendini:

$$x_{12} = 120, x_{33} = 300, x_{21} = 100, x_{24} = 200, x_{34} = 200 \quad (4.19)$$

Lahendis (4.19) on lubatavate lahendielementide arv 5. See on väiksem kui baasitabeli puhul nõutud $n + m - 1 = 6$. Seega olemegi saanud kõdunud lahendi.

Nullilise lahendielemendi võime lisada tabeli 4.6 esimesse ritta või teise veergu, kuid selliselt, et pärast nullilise lahendielemendi lisamist baasiruudud ei moodustaks kinnist ahelat. Valides nulliliseks lahendielemendiks näiteks $x_{32} = 0$, saame lubatava baasitabeli (4.7).

Tabel 4.7

	100	200	300	400
200	2	① 200	3	7
300	④ 100	3	8	④ 200
500	6	② 0	③ 300	⑥ 200

Tabelist 4.7 saab välja kirjutada järgmise kuuest lahendielemendist koosneva lubatava baasilahendi:

$$x_{12} = 200, x_{21} = 100, x_{24} = 200, x_{32} = 200,$$

$$x_{33} = 0, x_{34} = 200 \quad (4.20)$$

Kui transpordiülesande lubatava lahendi lahendielementide arv on väiksem kui $m + n - 1$ (m – ladude arv, n – tarbijate arv), siis on tegemist kõdunud lahendiga.

4.7. Potentsiaalide meetod

Sisuliselt on potentsiaalide meetod kinniste transpordiülesannete puhul sobivalt organiseeritud simpleksmeetodi arvutuskeem. Samal ajal on ta vaadeldav ka täiesti iseseisva meetodina. Potentsiaalide meetod on välja töötatud simpleksmeetodist täiesti sõltumatult.

Potentsiaalide meetodi olulisemad omadused on järgmised:

1. Kui transpordiülesanne sisaldab $m \cdot n$ tundmatut (m – tabeli ridade ehk ladude arv, n – tabeli veergude ehk tarbijate arv), siis potentsiaalide meetodil leitavas lahendis (veoplaanis) võivad nullist erineda maksimaalselt $m + n - 1$ tundmatu (lahendielemendi) väärtused.
2. Meetodi rakendamise käigus leitavatest lahenditest ükski järgmine pole halvem eelmisest.
3. Juhul, kui ülesandes kõik suurused a_i ja b_j on täisarvulised, siis on täisarvulised ka kõik meetodi rakendamise käigus leitavad veoplaanid.

4.8. Lubatava lahendi optimaalsuse kontroll

Lubatava lahendi optimaalsuse kontrollimisel lähtume optimaalse baasitabeli tunnusest ning sellele vastavast optimaalse baasitabeli määratlusest: lubatavat baasitabelit nimetatakse optimaalseks, kui baasiruuutes seisvate veokulude c_{ij} teisendamisel nullideks kõik ülejäänud suurused c_{ij} teisenevad mittenegatiivseteks. Seejuures on lubatud vaid sellised teisendused, mille korral baasitabeli ridadele ja veergudele liidetakse (või lahutatakse) sobivaid arve — potentsiaale. Neid teisendusi tuleb teha kogu tabeli ulatuses.

Kasutame i -ndast reast lahutatava arvu tähisena u_i ja j -ndast veerust lahutatava arvu tähisena r_j . Arvude u_i ja r_j leidmiseks tuleks kõigi baasiruuute korral lahendada võrrandisüsteem:

$$c_{ij} - u_i - r_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.21)$$

Selles süsteemis on tundmatuid $m+n$ ning võrrandeid $m+n-1$. Seetõttu on süsteemil lõpmata palju erinevaid lahendeid, kusjuures ühe tundmatu väärtuse võib suvaliselt ette anda.

Arvude u_i ja r_j (potentsiaalide) praktilisel leidmisel võrrandi-süsteemi (4.21) tavaliselt välja ei kirjutata. Potentsiaalid leitakse vahetult baasitabelil, mille optimaalsust kontrollitakse. Selleks antakse rea või veeru potentsiaalile mingi väärtus, näiteks null. Teised potentsiaalid leitakse järjest, liikudes baasiruutude kesk-punkte ühendavat mõttelist joont mööda: igast baasiruudust saadakse üks seos, mis sisaldab täpselt ühte veel leidmata potentsiaali. Leitavad potentsiaalid kirjutatakse vastava veeru alla või vastava rea järele.

Tabel 4.8

	300	240	110	100	50	
200	(3) 40	(5) 160	7	11	2	0
260	(1) 260	4	6	3	1	+2
340	5	(8) 80	(12) -110	(7) 100	(1) 50	-3
	-3	-5	-9	-4	+2	

Tabelis 4.8 on kontrollitud vähima elemendi reegluga saadud lubatava baasilahendi (4.15) optimaalsust. Tabeli alla ja kõrvale on kirjutatud tabeli optimaalsuse kontrollimisel tehtavate teisen-duste korral tabeli ridadele ja veergudele liidetavad (või lahuta-tavad) arvud — potentsiaalid.

Saadud uus tabel 4.9 on teisendatud veokuludega baasitabel.

Tabel 4.9

	300	240	110	100	50
200	0 40	0 160	-2	7	4
260	0 260	1	-1	1	5
340	-1	0 80	0 110	0 100	0 50

Kuna teisendatud veokuludega baasitabelis on negatiivseid elemente, siis järelikult vähima elemendi reeglina leitud lubatav baasilahend ei ole veel optimaalne. Saab leida uue parema lahendi, mille korral summaarne veokulu on väiksem. Järgnevat teisenduste protseduuri nimetatakse *lahendi optimeerimiseks*.

4.9. Lahendi optimeerimine

Uue parema lahendi leidmiseks teeme teisendatud veokuludega baasitabelis *ülekandeteisendusi*. Ülekandeteisendused sisaldavad järgmisi samme.

1. Moodustame ajutiselt laiendatud baasi. Selleks valime baasiruuduks ühe ruutudest, kus pärast transporditabeli optimaalsuse kontrollile vastavat veokulude teisendamist tekkis negatiivne veokulu. Soovitav on valida ruut, kus negatiivne veokulu on absoluutväärtuselt suurim. Väljavahlitud baasiruudule vastava negatiivse veokulu ümbritseme ringikesega.
2. Moodustame ringikestega tähistatud baasiruutudest (laiendatud baasist) kinnise murdjoone, ühendades ruutude keskpunkte horisontaalsete ja vertikaalsete lõigukestega. Murd-

joon ei pea läbima kõiki baasiruute. Kõik läbitud baasiruudud ei pea olema murdjoone tipus. Murdjoone moodustamist on soovitatav alustada ringikesega ümbritsetud negatiivse veokuluga ruudust.

3. Saadud kinnise murdjoone tippudele vastavatesse ruutu-desse kirjutame mööda murdjoont liikudes kordamööda märgid "+" ja "-". Alustame baasi juurdevõetud ringike-sega ümbritsetud negatiivse veokuluga ruudust, kuhu kirju-tame "+" märgi. Murdjoone tippusid on alati paarisarv.
4. Leiame nn. ülekantava kaubakoguse, milleks on "-" märke-ga ruutudes asuvatest lahendielementidest ehk veokogus-test x_{ij} vähim. Kirjutame ülekantava kaubakoguse vasta-vasse ruutu "+" või "-" märgi järele.
5. Leiame uue baasitabeli. Üks ruutudest, kus kaubakoguseks jääb 0, langeb baasiplaanist välja (kriipsutame ringikese läbi).
6. Kirjutame välja uue baasitabeli. Kontrollime selle opti-maalsust.

Ülekandeteisenduste tulemusena saadakse alati uus lubatav baasitabel. Kui see baasitabel on optimaalne, siis tema poolt määratud baasilahend ongi transpordiülesande parimaks lahendiks. Kui ta ei ole optimaalne, siis temast lähtudes saab jällegi leida uue lubatava baasitabeli jne. Kui jälgida, et baasitabelid ei hakkaks korduma, siis lõpliku arvu sammude järel jõutakse alati optimaalse baasitabelini.

Tabelis 4.9 kui teisendatud veokuludega transporditabelis on negatiivseid elemente. Neist absoluutväärtuselt suurim on lahendielemendile x_{13} vastav teisendatud veokulu -2 . Muudame sellele veokulule vastava ruudu transporditabelis baasiruuduks (tekib laiendatud baas) ja moodustame vastavalt eespool toodud reeglitele kinnise murdjoone ehk tsükli. Ülekantavaks kaubako-guseks on 110 (tabel 4.10).

Tabel 4.10

	300	240	110	100	50
200	(0) 40	(0) - 160	-2 +	7	4
260	(0) 260	1	-1	1	5
340	-1	(0) + 80	(0) 110	(0) 100	(0) 50

Pärast kaubakoguse 110 ülekandmist lahendielemendile x_{13} vastavasse ruutu saame uue transporditabeli (tabel 4.11).

Tabel 4.11

	300	240	110	100	50
200	(0) 40	(0) 50	(-2) 110	7	4
260	(0) 260	1	-1	1	5
340	-1	(0) 190	0	(0) 100	(0) 50

+2

Teisendame uuele baasruudule ning selle lahendielemendile x_{13} vastava veokulu nulliks. Uus transporditabel (4.12) ei ole veel optimaalne, kuna lahendielemendile x_{31} vastab teisendatud veokuludega tabelis negatiivne veokulu. Moodustame uue laiendar-

tud baasi ning teeme uue kaubaülekande. Ülekantavaks kauba-
koguseks on 40.

Tabel 4.12

	300	240	110	100	50	
200	⊖ -	⊕ +	⊖	7	4	
		40	50	110		
260	⊖	1	1	1	5	-1
	260					
340	-1	⊖	2	⊖	⊖	
	+	-190		100	50	
	+1					

Pärast kaubaülekannet ja veokulude teisendamist saame uue
transporditabeli (tabel 4.13).

Tabel 4.13

	300	240	110	100	50	
200	1	⊖	⊖	7	4	
		90	110			
260	⊖	0	0	0	4	
	260					
340	⊖	⊖	2	⊖	⊖	
	40	150		100	50	

Teisendatud veokuludega baasitabelis 4.13 ei ole enam negatiivseid elemente. Seega on leitud optimaalne veoplaan:

$$\begin{aligned}x_{12} = 90, x_{13} = 110, x_{21} = 260, x_{31} = 40, \\x_{32} = 150, x_{34} = 100, x_{35} = 50,\end{aligned}\tag{4.22}$$

mille korral summaarsed veokulud on:

$$\begin{aligned}z = 5 \cdot 90 + 7 \cdot 110 + 1 \cdot 260 + 5 \cdot 40 + \\+ 8 \cdot 150 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 3630.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Summaarsete veokulude leidmisel kasutame esialgseid veokulusid, mis tulenevad ülesande sisulisest püstitusest ning on toodud tabelis 4.3 (ka tabelites 4.4, 4.5 ja 4.8).

Saadud summaarsed veokulud $z = 3890$ (4.23) on väiksemad kui summaarsed veokulud vähima elemendi reegli rakendamisel saadud lubatava veoplaani korral ($z = 3890$). Niisama suure summaarse veokulu andis ka Vogeli reegli kasutamisel leitud lubatav veoplaan (vt. 4.17). Seega olime Vogeli reeglit kasutades juba leidnud ka optimaalse baasitabeli ning sellele vastava optimaalse veoplaani. Lahendid (4.17) ja (4.23) annavad mõlemad sihifunktsioonile vähima väärtuse, kuid nende struktuur on erinev.

4.10. Alternatiivne lahend

Teisendatud veokuludega optimaalses baasitabelis 4.13 on nulliga võrduvaid veokulusid ruutudes, mis ei ole baasiruutudeks (näiteks lahendielementidele x_{22} , x_{23} , x_{24} vastavates ruutudes). See näitab, et ülesandel võib olla veel teisi niisama häid lahendeid — *alternatiivseid lahendeid*. Alternatiivsete lahendite summaarsed veokulud on võrdsed. Lahendielementide kombinatsioon on erinev, s.t. kauba laialivedamiseks võib kasutada erinevaid niisama häid marsruute. Optimaalsete lahendite (4.17) ja (4.22) puhul ongi tegemist alternatiivsete baasilahenditega.

Alternatiivse lahendi leidmiseks teeme kaubaülekande nullilise veokuluga ruutu (tabel 4.14), mis ei olnud baasiruuduks, näiteks lahendielemendile x_{24} vastavasse ruutu.

Tabel 4.14

	300	240	110	100	50
200	1	0	0	7	4
		90	110		
260	0	0	0	0	4
	-260				+
340	0	0	2	0	0
	+40	150		-100	50

Ülekantavaks kaubakoguseks on 100. Pärast kaubaülekannet saame uue optimaalse transporditabeli (tabel 4.15).

Tabel 4.15

	300	240	110	100	50
200	1	0	0	7	4
		90	110		
260	0	2	0	0	4
	160			100	
340	0	0	2	0	0
	140	150			50

Tabelist 4.15 saame välja kirjutada alternatiivse baasilahendi:

$$\begin{aligned}
 x_{12} = 90, x_{13} = 110, x_{21} = 160, x_{24} = 100, \\
 x_{31} = 140, x_{32} = 150, x_{35} = 50,
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

mille korral summaarne veokulu on samuti 3630:

$$\begin{aligned}
 z = 5 \cdot 90 + 1 \cdot 50 + 7 \cdot 110 + 1 \cdot 160 + 3 \cdot 100 + \\
 + 5 \cdot 140 + 8 \cdot 150 + 1 \cdot 50 = 3630
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Transpordiülesande alternatiivsed baasilahendid annavad samasuure summaarse veokulu, kuid nende lahendielementide (x_{ij}) kombinatsioon on erinev. Kauba laialivedamiseks on võimalik kasutada erinevaid marsruute, mille korral summaarsed veokulud on vähimad.

4.11. Lahendi stabiilsuse analüüs

Transpordiülesande optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsi korral selgitatakse, millistes piirides võib kaubaühiku veokulu muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks. Selleks lisatakse optimaalses transporditabelis analüüsitavale veokulule (c_{ij}) vastavasse ruutu tema võimalik muutus e_{ij} ning teostatakse teisen-dusi kogu tabeli ulatuses selliselt, et kõik lahendielementidele vastavad veokulud teiseneksid nullideks. Transporditabeli ülejäänud ruutudes olevatelt veokuludelt nõutakse mittenegatiiv-sust. Mittenegatiivsuse nõudest tulenevate võrratuste süsteemi lahendamisel leitakse suuruste e_{ij} väärtused. Need väljendavad võimaliku muutuse ulatust, mille korral transpordiülesande lahendi optimaalsus säilib.

Järgnevalt analüüsime tabelis 4.5 toodud lahendi optimaalsust juhtudel, kui võivad muutuda järgmised veokulud: 1) $c_{12} = 5$; 2) $c_{21} = 1$.

Teisendamata veokulud, mis vastavad ülesande esialgsele püstitusele, on toodud tabelites 4.3, 4.4, 4.5 ja 4.8.

1. Analüüsime lahendi stabiilsust veokulu $c_{12} = 5$ suhtes. Lisame optimaalsesse baasitabelisse teisendatud veokuludega lahendielemendile x_{12} vastavasse ruutu esialgse veokulu võimaliku muutuse e_{12} . Kontrollime lahendi optimaalsust (tabel 4.16).

Tabel 4.16

	300	240	110	100	50	
200	1	$0+e_{12}$ 90	0	7	4	- e_{12}
260	0	2 160	0	0	4 100	
340	0	0 140	2 150	0	0 50	
						+ e_{12}

Teisendame baasiruumidele vastavad veokulud 0-deks. Ülejäänud veokuludelt nõuame mittenegatiivsust:

$$\begin{cases} 1 - e_{12} \geq 0 \Rightarrow e_{12} \leq 1 \\ 7 - e_{12} \geq 0 \Rightarrow e_{12} \leq 7 \\ 4 - e_{12} \geq 0 \Rightarrow e_{12} \leq 4 \\ 0 + e_{12} \geq 0 \Rightarrow e_{12} \geq 0 \\ 2 + e_{12} \geq 0 \Rightarrow e_{12} \geq -2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Siit tuleneb $0 \leq e_{12} \leq 1$ ning seega $5+0 \leq c_{12} \leq 5+1$. Lahendi optimaalsus säilib seega ka täisarvulise veokulu $c_{12} = 6$ korral.

2. Analüüsimise lahendi stabiilsust veokulu $c_{21} = 1$ suhtes (tabel 4.17).

Tabel 4.17

	300	240	110	100	50	
200	1	0	0	7	4	
		90	110			
260	$0+e_{21}$	0	0	0	4	
	160			100		$-e_{21}$
340	0	0	2	0	0	
	140	150			50	
						$+e_{21}$

Pärast teisendusi koostame mittebaasiruutudele vastavate veokulude mittenegatiivsuse nõudest tuleneva võrratuste süsteemi:

$$\begin{cases} 7+e_{21} \geq 0 \Rightarrow e_{21} \geq -7 \\ e_{21} \geq 0 \\ -e_{21} \geq 0 \Rightarrow e_{21} \leq 0 \\ 4-e_{21} \geq 0 \Rightarrow e_{21} \leq 4 \end{cases} \quad (4.27)$$

Võrratuste süsteemi (4.27) lahendist tuleneb, et $e_{21}=0$ ning seega optimaalne lahend (4.17) kehtib vaid $c_{21} = 1$ korral.

Transpordiülesande optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsi korral selgitatakse, millistes piirides võib kaubaühiku veokulu muutuda, et leitud lahendi optimaalsus säiliks.

4.12. Transpordiülesandena formuleeritud majandusprobleemi lahendamine

Vahendusfirma ostab hooajal kurke neljast talust T_1 , T_2 , T_3 ja T_4 . Leping on sõlmitud selliselt, et esimesest talust saab päevas osta 100 kg kurke, teisest 25 kg, kolmandast 40 kg ja neljandast talust 30 kg. Kurke saab edasi müüa neljale tarbijale (kauplusele K_1 , K_2 , K_3 ja K_4), kes lepingu järgi ostavad päevas vastavalt 50, 40, 80 ja 30 kg kurke. Ühe kilo kurkide veokulud taludest kauplustesse on toodud tabelis 4.18. Vahendusfirma eesmärgiks on toimetada kurgid taludest kauplustesse vähimate kuludega.

Tabel 4.18

Talud (T_i)	Kauplused (K_j)			
	Kauplus 1	Kauplus 2	Kauplus 3	Kauplus 4
Talu 1	4	5	7	2
Talu 2	3	4	6	1
Talu 3	3	2	5	7
Talu 4	6	2	9	3

Kõigepealt kontrollime, kas transpordiülesanne on kinnine:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 100 + 25 + 40 + 30 = 195$$

ja

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 50 + 40 + 80 + 30 = 200.$$

Et $\sum_{i=1}^4 a_i \neq \sum_{j=1}^4 b_j$, siis on tegemist lahtise transpordiülesandega.

Et $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, siis ei ole täidetud transpordiülesande tingimus (4.6). Tuleb formuleerida uus ülesanne.

Kuna taludest saab osta kurke viis kilo vähem, kui kauplused tellivad, siis vastavalt lepingutele tuleb vahendajafirmal neid täiendavalt juurde muretseda $\left(\sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^4 a_i = 200 - 195 = 5 \right)$.

Transpordiülesande formuleerimise seisukohalt võib seda käsitleda fiktiivse talu T_j juurdetoomisena kaubapakkumisega 5 kg: $a_j = 5$. Veokulud fiktiivsest talust tarbijatele c_j ($j = 1, 2, 3, 4$) tähistame mingi arvuga M .

Pärast transpordiülesande ümberformuleerimist kinnisele transpordiülesandele vastavale kujule saame transpordiülesande lahendamiseks vajalikud lähteandmed esitada transporditabelina (tabel 4.19).

Tabel 4.19

		K_1 50	K_2 40	K_3 80	K_4 30
T_1	100	4	5	7	2
T_2	25	3	4	6	1
T_3	40	3	2	5	7
T_4	30	6	2	9	3
T_j	5	M	M	M	M

Transporditabelile 4.19 vastav lubatav tabel 4.20 on leitud vähi-
ma elemendi reeglit kasutades. Sellele vastab lubatav lahend:

$$x_{11} = 50, x_{13} = 45, x_{14} = 5, x_{24} = 25,$$

$$x_{32} = 40, x_{43} = 30, x_{53} = 5$$

(4.28)

Tabel 4.20

	50	40	80	30
100	(4) 50	5	(7) 45	(2) 5
25	3	4	6	(1) 25
40	3	(2) 40	5	7
30	6	2	(9) 30	3
5	M	M	(M) 5	M

Lubatava baasilahendi lahendielementide (baasiruutude) arv peab olema $m + n - l = 5 + 4 - 1 = 8$. Antud juhul on tegemist kõdunud lahendiga, seega tuleb lisada nulliline lahendielement, näiteks $x_{j2} = 0$. Saame lubatava baasitabeli (tabel 4.21).

Tabelist 4.21 saame välja kirjutada lubatavale baasitabelile vastava veoplaani:

$$\begin{aligned}
 x_{11} = 50, \quad x_{13} = 45, \quad x_{14} = 5, \quad x_{24} = 25, \quad x_{32} = 40, \\
 x_{42} = 0, \quad x_{43} = 30, \quad x_{53} = 5,
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

mille korral summaarsed veokulud on:

$$\begin{aligned}
 z = 4 \cdot 50 + 7 \cdot 45 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 25 + \\
 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 0 + 9 \cdot 30 = 900
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

Tabel 4.21

	50	40	80	30
100	(4) 50	5	(7) 45	(2) 5
25	3	4	6	(1) 25
40	3	(2) 40	5	7
30	6	(2) 0	(9) 30	3
5	M	M	(M) 5	M

Järgnevalt kontrollime leitud baasilahendi optimaalsust (tabel 4.22).

Tabel 4.22

	50	40	80	30	
100	(4) 50	5	(7) 45	(2) 5	
25	3	4	6	(1) 25	+1
40	3	(2) 40	5	7	-2
30	6	(2) 0	(9) 30	3	-2
5	M	M	(M) 5	M	-M+7
	-4		-7	-2	

Teisendatud veokuludega baasitabelist 4.23 nähtub, et tegemist ei ole veel optimaalse baasitabeliga. Seega tuleb teha ülekande-teisendusi.

Tabel 4.23

	50	40	80	30
100	0	5	0	0
	50		45	5
25	0	5	0	0
				25
40	-3	0	-4	3
		40		
30	0	0	0	-1
		0	30	
5	3	7	0	5
			5	

Teeme kaubaülekande ruutu, kus teisendatud veokulu on negatiivne (-4). Ülekantavaks kaubakoguseks on 30. Pärast ülekan-deteisendusi saame uue baasitabeli (tabel 4.24), mille optimaal-sust kontrollime.

Tabel 4.24

	50	40	80	30	
100	0	5	0	0	
	50		45	5	
25	0	5	0	0	
				25	
40	-3	0	-4	3	+4
		10	30		
30	0	0	0	-1	+4
		30			
5	3	7	0	5	
			5		

-4

Baasitabeli 4.24 optimaalsuse kontrollimise tulemusena oleme jõudnud uue teisendatud veokuludega baasitabelini (tabel 4.25).

Tabel 4.25

	50	40	80	30	
100	0	1	0	0	
	50		45	5	
25	0	1	0	0	
				25	
40	1	0	0	7	
		10	30		
30	4	0	4	3	
		30			
5	3	3	0	5	
			5		

Teisendatud veokuludega baasitabelis (tabel 4.25) ei ole enam negatiivseid veokulusid. Tegemist on optimaalse baasitabeliga, millest kirjutame välja optimaalse lahendi:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 50 & x_{13} &= 45 & x_{14} &= 5 \\
 x_{24} &= 25 & x_{32} &= 10 & x_{33} &= 30 \\
 x_{42} &= 30 & x_{53} &= 5
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Optimaalse lahendi (4.31) korral on summaarsed veokulud:

$$\begin{aligned}
 z &= 4 \cdot 50 + 7 \cdot 45 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 10 + \\
 &+ 5 \cdot 30 + 2 \cdot 30 = 780
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

Alternatiivne lahend

Kuna optimaalses teisendatud veokuludega baasitabelis 4.25 on nullilised veokulud ruutudes, mis ei vasta lahendielementidele, siis võib ülesandel olla alternatiivseid lahendeid. Alternatiivse lahendi leidmiseks teeme kaubaülekande veokulule c_{21} vastavasse ruutu. Ülekantav kaubakogus on 25 (tabel 4.26).

Tabel 4.26

	50	40	80	30
100	0 -	1	0	0 +
25	0	1	0	0
40	1	0	0	7
30	4	0	4	3
5	3	3	0	5

Additional values from the image:

- Row 1: 50 (under 50), 45 (under 80), 5 (under 30)
- Row 2: 25 (under 30)
- Row 3: 10 (under 40), 30 (under 80)
- Row 4: 30 (under 50), 5 (under 30)

Saame alternatiivsele lahendile vastava baasitabeli 4.27.

Tabel 4.27

	50	40	80	30
100	0 25	1	0 45	0 30
25	0 25	1	0	0
40	1	0 10	0 30	7
30	4	0 30	4	3
5	3	3	0 5	5

Tabelist 4.27 saab välja kirjutada lahendi:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 25, \quad x_{13} = 45, \quad x_{14} = 30, \quad x_{21} = 25, \\
 x_{32} &= 10, \quad x_{33} = 30, \quad x_{42} = 30, \quad x_{53} = 5
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Optimaalsele lahendile (4.33) vastavad summaarsed veokulud:

$$\begin{aligned}
 z &= 4 \cdot 25 + 7 \cdot 45 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 10 + \\
 &+ 5 \cdot 30 + 2 \cdot 30 = 780
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

(Kas ülesandel on veel alternatiivseid lahendeid. Miks?)

Lahendi stabiilsuse analüüs

Firma on huvitatud lahendi stabiilsuse uurimisest veokulude $c_{42} = 2$ ja $c_{14} = 4$ suhtes, kuna firma näeb ette lähemas tulevikus nende veokulude muutumist.

Kõigepealt analüüsime optimaalse lahendi (4.31) stabiilsust veokulu $c_{42} = 2$ suhtes. Selleks lisame teisendatud veokuludega optimaalsesse baasitabelisse lahendielemendile x_{42} vastavale veokulule e_{42} (tabel 4.28).

Tabel 4.28

	50	40	80	30	
100	(0)	1	(0)	(0)	
	50		45	5	
25	0	1	0	(0)	
				25	
40	1	(0)	(0)	7	
		10	30		
30	4	(0+e ₄₂)	4	3	
		30			-e ₄₂
5	3	3	(0)	5	
			5		

Kuna selleks, et oleks täidetud baasitabeli optimaalsuse nõue, peavad teisendatud veokuludega tabelis kõik mittebaasiruutudele vastavad veokulud olema mittenegatiivsed, siis lahendame võrratuste süsteemi:

$$\begin{cases} 4 - e_{42} \geq 0 \\ 3 - e_{42} \geq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Võrratuste süsteemi (4.35) lahendamisel saame $e_{42} \leq 3$. Seega lahend jääb kehtima iga täisarvulise $c_{42} \leq 2 + 3$ korral.

Uurime lahendi (4.31) stabiilsust ka $c_{14} = 2$ suhtes (tabel 4.29).

Tabel 4.29

	50	40	80	30
100	0	1	0	0+e ₁₄
	50		45	5
25	0	1	0	0
				25
40	1	0	0	7
		10	30	
30	4	0	4	3
		30		
5	3	3	0	5
			5	

-e₁₄

Pärast baasitabeli optimaalsuse nõudest tulenevaid teisendusi saame uue baasitabeli (4.30).

Tabel 4.30

	50	40	80	30
100	0	1	0	0
	50		45	5
25	0+e ₁₄	1+e ₁₄	0+e ₁₄	0
				25
40	1	0	0	7-e ₁₄
		10	30	
30	4	0	4	3-e ₁₄
		30		
5	3	3	0	5-e ₁₄
			5	

Tabelist 4.30 kirjutame välja võrratuste süsteemi:

$$\begin{cases} 0 + e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \geq 0 \\ 1 + e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \geq -1 \\ 0 + e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \geq 0 \\ 7 - e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \leq 7 \\ 3 - e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \leq 3 \\ 5 - e_{14} \geq 0 \Rightarrow e_{14} \leq 5 \end{cases} \quad (4.36)$$

Võrratuste süsteemi (4.36) lahendamisel saame, et $0 \leq e_{14} \leq 3$ ning seega veokulu $c_{14} = 2$ võib olla vahemikus $2 + 0 \leq c_{14} \leq 2 + 3$. Sellisel juhul leitud optimaalne lahend (4.31) jääb kehtima.

4.13. Näide transpordiülesande formuleerimisest ja lahendamisest transpordiga mitteseotud probleemi korral

Põllumajandusühistus otsustati külvata otra, nisu ja rukist vastavalt 100, 310 ja 390 ha viiele erineva mullastikuga maatükile M_1, \dots, M_5 suurusega vastavalt 250, 290, 110, 100 ja 50 ha. Tabelis 4.41 on toodud arvatav saamata jääv puhastulu kroonides hektari kohta võrreldes tuluga vilja kasvatamisel temale kõige sobivama mullastikuga maatükil.

Tabel 4.41

	Põld	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Vili		250	290	110	100	50
Oder	100	3	5	7	11	13
Nisu	310	0	4	6	3	15
Rukis	390	5	8	12	7	13

Toodud probleemipüstituse võib formuleerida transpordiülesandena, millele vastava lubatava lahendi saab välja kirjutada lubatava baasitabeli 4.32 alusel.

Tabel 4.32

	250	290	110	100	50
100	3	5	⑦ 100	11	13
310	① 210	4	6	③ 100	15
390	⑤ 40	⑧ 290	⑫ 10	7	⑬ 50

Lubatav baasilahend:

$$\begin{aligned} x_{13} = 100, \quad x_{21} = 210, \quad x_{24} = 100, \\ x_{31} = 40, \quad x_{32} = 290, \quad x_{33} = 10, \quad x_{35} = 50 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Summaarne arvatav saamata jääv puhastulu:

$$\begin{aligned} z = 7 \cdot 100 + 0 \cdot 210 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 40 + \\ + 8 \cdot 290 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 50 = 4290 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Baasitabeli 4.32 optimaalsuse kontrollimise tulemusena jõuame tabelini 4.33.

Tabel 4.33

	250	290	110	100	50	
100	3	5	⑦ 100	11	13	
310	① 210	4	6	③ 100	15	
390	⑤ 40	⑧ 290	⑫ 10	7	⑬ 50	
			-3	-7	-3	-8

-5

Kuna kontrollimise tulemusena selgus, et lubatav baasitabel 4.32 ning sellele vastav baasilahend (4.37) ei ole veel optimaalsed, siis tuleb jätkata ülekandeteisendustega koos järgnevate optimaalsuse kontrollidega (tabelid 4.34 ja 4.35).

Tabel 4.34

	250	290	110	100	50	
100	3	1	0	7	5	-1
310	0	1	-1	0	7	
390	0+	0	0	-1	0	

Dotted box: (310, 250) to (390, 290) with '-210' and '+'.
 Dotted box: (390, 250) to (390, 290) with '40' and '290'.
 Dotted box: (390, 290) to (390, 110) with '10'.
 Dotted box: (390, 110) to (390, 100) with '-'.
 Dotted box: (390, 100) to (390, 50) with '50'.
 Labels: '+1' below table, '-1' to the right of first row.

Tabel 4.35

	250	290	110	100	50	
100	2	1	0	6	4	-1
310	0+	1	0	0-	7	-1
390	0	0	1	-1	0	

Dotted box: (310, 250) to (390, 100) with '200' and '100'.
 Dotted box: (390, 250) to (390, 290) with '-50' and '290'.
 Dotted box: (390, 290) to (390, 110) with '290'.
 Dotted box: (390, 110) to (390, 100) with '+'.
 Labels: '+1' below 250, 110, and 100 columns.

Ülekandeteisenduste tulemusena jõuame teisendatud veokuludega optimaalse baasitabelini 4.36, kust saab välja kirjutada optimaalse baasilahendi.

Tabel 4.36

	250	290	110	100	50
100	2	0	0	6	3
			100		
310	0	0	0	0	6
	250		10	50	
390	1	0	2	0	0
		290		50	50

Optimaalne baasilahend:

$$x_{13} = 100, \quad x_{21} = 250, \quad x_{23} = 10, \quad x_{24} = 50,$$

$$x_{32} = 290, \quad x_{34} = 50, \quad x_{35} = 50 \quad (4.38)$$

Summaarne saamata jääv puhastulu:

$$\begin{aligned} z &= 7 \cdot 100 + 0 \cdot 250 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 50 + \\ &+ 8 \cdot 290 + 7 \cdot 50 + 13 \cdot 50 = 4230 \text{ krooni} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Seega on põllumajandusühistul otstarbekas kasvatada otra vaid kolmandal põllul (M_3 , kokku 100 ha), nisu esimesel, kolmandal ja neljandal põllul (vastavalt 250, 10 ja 50 ha) ning rukist teisel, neljandal ja viiendal põllul (290, 50 ja 50 ha). Sellisel juhul summaarne arvatav saamata jääv puhastulu on vähim (4230 krooni) ning seega võib väita, et leitud külviplaani korral on ühistul võimalik saada suurimat tulu.

Ülesandel on ka alternatiivseid baasilahendeid.

Kokkuvõte

Majandusprobleemide formuleerimisel lineaarse planeerimisülesandena jõutakse sageli ülesande sellise esituskujuni, mille korral on simpleksmeetodi asemel otstarbekam kasutada tunduvalt mugavamaid lahendusmeetodeid. Üheks selliseks esituskujuks on transpordiülesandena formuleeritud lineaarne planeerimisülesanne.

Transpordiülesandena formuleeritud probleemipüstituse korral on üldjuhul tegemist n laost m tarbijale kauba laialivedamise plaani koostamisega, mille puhul summaarsed veokulud (sihifunktsiooni väärtus) on vähimad. Transpordiülesande lahendus-algoritm on välja töötatud kinnise transpordiülesande jaoks, kus "ladude varud" ja "tarbijate vajadused" langevad kokku. Transpordiülesande saab alati teisendada kinniseks, lisades ülesande esialgsesse püstitusse vajaduse korral nn. fiktiivse lao või fiktiivse tarbija või kasutades selleks sisulisest probleemipüstitusest tulenevaid muid teisendamisevõimalusi.

Transpordiülesande lahendamiseks vajalikud lähteandmed esitatakse tavaliselt transporditabelina e. veokulude matriksina. Transpordiülesandena formuleeritud lineaarse planeerimisülesande lahendamisel läbitakse järgmised sammud:

- kinnisele transpordiülesandele vastava transporditabeli koostamine;
- lubatava baasitabeli leidmine;
- lubatava baasitabeli optimaalsuse kontroll;
- lubatava baasilahendi optimeerimine;
- optimaalse transporditabeli analüüs.

Transpordiülesande lubatava lahendi leidmise peamisteks meetoditeks on loodenurga, vähima elemendi ja Vogeli reeglite tuginevad meetodid. Lubatava transporditabeli optimaalsuse kontrollimisel ning lahendi samm-sammulisel optimeerimisel kasutatakse potentsiaalide meetodit.

Optimaalse transporditabeli analüüsimisel on võimalik selgitada alternatiivsed veoplaanid, mille puhul erinevate veomarsruutide kasutamisel summaarsed vähimad veokulud on võrdsed. Optimaalse lahendi stabiilsuse analüüsil selgub, millistes piirides võib kaubaühiku veokulu muutuda, et lahendi optimaalsus säiliks.

Transpordiülesandena saab formuleerida ka kauba laialiveoga mitteseotud majandusprobleeme. Transpordiülesande esituskuju sobib näiteks optimaalse külviplaani koostamise ülesande lahendamiseks.

5. MITTELINEAARNE PLANEERIMINE

5.1. Mittelineaarsed planeerimisülesanded (optimeerimisülesanded)

Suur osa majanduspraktikast tulenevaid planeerimis(optimeerimis)ülesandeid on vähemalt esimeses lähenduses püstitatavad lineaarsetena. Põhilisi majandusnäitajatevahelisi seoseid saab enamasti lähendada lineaarsetega, kuid seda siiski mitte alati. Majandusprobleemi detailsem ja sügavam analüüs toob sageli välja vajaduse mõned kitsendused või sihifunktsioon esitada *mittelineaarselt*. Selliste ülesannetega tegeldakse *mittelineaarse planeerimise* raames.

Oma olemuselt on mittelineaarsed planeerimisülesanded nn. *tingliku ekstreemumi* leidmise ülesanded. Diferentseeruvate funktsioonide ja võrdustena esitatud lisatingimuste puhul kasutatakse ulatuslikult *Lagrange'i meetodit* ning sellele aluseks olevat *Lagrange'i funktsiooni*.

Mittelineaarse planeerimise ülesandeid on käsitletud kahe majandusprobleemi näitel:

- 1) kaubavarude planeerimine;
- 2) tootmise planeerimine.

5.2. Kaubavarude planeerimine

5.2.1. Probleemi püstitus

Kaubavarude juhtimiskulud firmas koosnevad põhiliselt kauba *sisseveokuludest* (või tellimuskuludest) ja varude *hoiukuludest*

laos. Varude hoiustamise võimalus ladudes sõltub laopinnast, selle olemasolust ja üürimise (juurdemuretsemise) kuludest. Firma on huvitatud sisseveetava *kaubapartii optimaalse suuruse* leidmisest, mille korral kaubavarude *juhtimiskulud* oleksid minimaalsed ning firmal oleks võimalik toota või müüa vastavalt kavandatud *mahule* ning hakkama saada olemasoleva *laopinnaga*.

Lisaks sellele tahab firma juht analüüsida:

- 1) kui palju muutuvad juhtimiskulud, kui kaubapartii suurus hälbib optimaalsest;
- 2) kui palju on otstarbekas soodsamate lepingutingimuste saamiseks kaubapartii suurust muuta;
- 3) kui palju on otstarbekas maksta täiendava laopinna üürimise eest.

5.2.2. Kaubavarude mudel

Iga mudeli püstitamisel tuleb eelnevalt läbi mõelda, millistel tingimustel see mudel kehtib. Kui muutuvad tingimused, siis tuleb vajadusel muuta või täpsustada ka mudelit.

Kaubavarude mudeli püstitamisel on üldjuhul lähtunud järgmistest eeldustest:

- 1) modelleeritakse (planeeritakse) vaid üheliigilise kauba varusid;
- 2) varud firmas on kooskõlas planeeritud tootmismahuga või käibemahuga Q (s.o. nõudlusega) ning nad vähenevad ühtlaselt;
- 3) kaupade sissetulek toimub regulaarselt vastavalt tellimustele;
- 4) kaubavarude juhtimiskulud koosnevad veokuludest (tellimiskuludest) ja hoiukuludest.

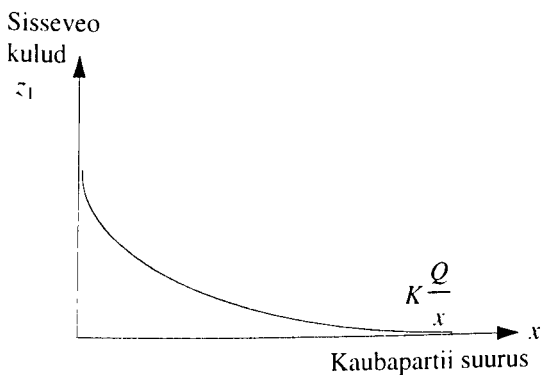
Tähistame plaaniperioodi, mille kohta kaubavarusid planeeritakse T -ga (aasta, kvartal, kuu jne.). Plaaniperioodi nõudlus

kaubavarudele, mis tuleneb tootmise või käibe mahust, on Q . Kaubaühiku säilitamiskulu plaaniperioodi vältel on C ning ühe kaubapartii sisseveokulu ehk tellimiskulu on K . Planeerijat huvitab, millise kaubapartii suuruse x korral kaubavarude juhtimiskulud z , mis koosnevad varude sisseveo- ja hoiukuludest, on vähimad. Plaaniperioodi T vältel saabuvate kaubapartiide arv n on leitav kaubavarude nõudluse Q ja kaubapartii suuruse x suhtena:

$$n = \frac{Q}{x} \quad (5.1)$$

Probleemipüstituse sisust tulenevalt on tegemist ligikaudsete arvudega ning sellest lähtuvalt võib kaubapartiide arvu käsitleda täisarvulisena.

Kaubavarude sisseveokulude ja kaubapartii suuruse vahelist seost illustreerib joonis 5.1. Mida väiksem on kaubapartii suurus, seda enam tuleb plaaniperioodi T vältel kaubapartiisid tellida ja sisse vedada ning seda suuremaks kujunevad kulutused.



Joonis 5.1. Kaubapartii suuruse ja sisseveokulude vaheline seos.

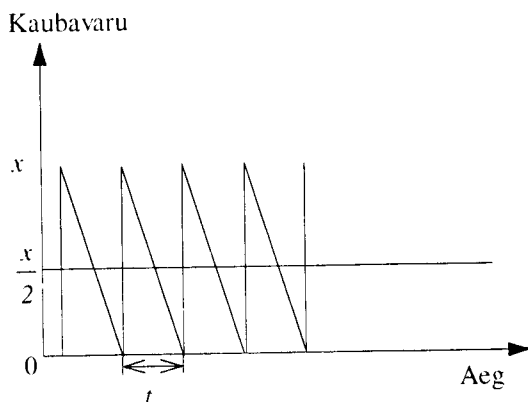
Kuna kulutused ühe kaubapartii sisseveoks on K , siis kulutused kõigi vajalike kaubapartiide sisseveoks kogu plaaniperioodi T vältel on:

$$z_1 = K \cdot n = K \cdot \frac{Q}{x} \quad (5.2)$$

Kaubavarude saabumine toimub eelduse kohaselt regulaarselt kogu plaaniperioodi T vältel. Kui kaubapartii suurus on x ning kaubavarude nõudlus perioodi T vältel on Q , siis ajavahemik kaubapartiide saabumise vahel on:

$$t = \frac{x}{Q} \cdot T \quad (5.3)$$

Kaubavarude seis firmas nende saabumise intervalli t korral illustreerib joonis 5.2. Kui perioodi t algul veetakse sisse kaubapartii suurusega x , siis selle perioodi lõpuks on kaubavaru suurus 0 ning tuuakse sisse uus kaubapartii. Kaubavaru keskmine suurus plaaniperioodi T vältel on $\frac{x}{2}$.

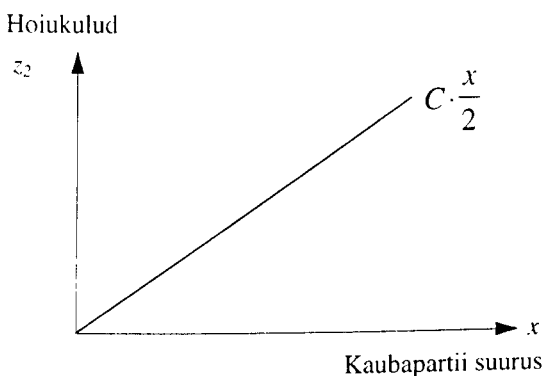


Joonis 5.2. Kaubavarude muutumine ajas.

Kuna kaubaühiku hoiukulu kogu plaaniperioodi T vältel on C , siis kaubavarude hoiukulud on:

$$z_2 = C \cdot \frac{x}{2} \quad (5.4)$$

Kaubapartii suuruse x ja kaubavarude hoiukulude vahelist seost illustreerib joonis 5.3.



Joonis 5.3. Kaubapartii suuruse ja hoiukulude vaheline seos.

Eelduse kohaselt kaubavarude juhtimiskulud z koosnevad kaubapartii sisseveokuludest (z_1) ja hoiukuludest (z_2). Ülesande püstitusest tulenevalt ei ole sisseveetav kaubapartii suurem, kui on kaubavarude nõudlus plaaniperioodil. Kaubapartii suurus on mittenegatiivne. Saame püstitada optimeerimisülesande

$$\min z = K \cdot \frac{Q}{x} + C \cdot \frac{x}{2} \quad (5.5)$$

tingimustel

$$x \leq Q \quad (5.6)$$

ning

$$x \geq 0 \quad (5.7)$$

Majandusprobleemi sisust tulenevalt võib eeldada, et plaani-
perioodi vältel sisseveetavate kaubapartiide suurus x on oluliselt
väiksem kui kaubavarude kogunõudlus (Q) sellel perioodil ning
sisseveetava kaubapartii suurus ei ole null.

5.2.3. Kaubavarude mudeli lahendamine

Kuna kaubavarude mudelis sihifunktsioon on mittelineaarne,
siis lineaarse planeerimise meetodid sel kujul ja tingimustel
püstitatud kaubavarude planeerimisülesande (5.5)–(5.7) lahenda-
damiseks ei sobi.

Leiame kulude funktsiooni z esimese tuletise ja võrdsustame
selle nulliga:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{C}{2} - \frac{KQ}{x^2} = 0, \quad (5.8)$$

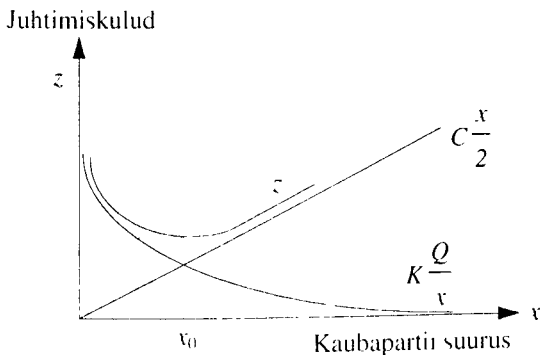
siit saame

$$x = \sqrt{\frac{2KQ}{C}} \quad (5.9)$$

Joonise 5.4 ja ka ülesande püstituse põhjal saame väita, et punk-
tis $x = x_0$ on funktsiooni (5.5) globaalne ekstreemum.

Kaubapartii optimaalne suurus x_0 , mille korral kaubavarude
juhtimiskulud z on minimaalsed, on seega leitav valemiga:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2KQ}{C}}. \quad (5.10)$$



Joonis 5.4. Kaubavarude juhtimiskulud.

Kui optimaalne kaubapartii suurus on $x_0 = \sqrt{\frac{2KQ}{C}}$, siis optimaalsete juhtimiskulude korral

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{K \cdot Q}{\sqrt{\frac{2KQ}{C}}} + \frac{C}{2} \cdot \sqrt{\frac{2KQ}{C}} = \frac{K \cdot Q \cdot \sqrt{C}}{\sqrt{2KQ}} + \frac{C\sqrt{2KQ}}{2\sqrt{C}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2KQC}}{2} + \frac{\sqrt{2KQC}}{2} = \sqrt{2KQC}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Nagu näeme teisendustest (5.11) optimaalse kaubapartii x_0 korral kaubapartiide sisseveokulud ja kaubavarude hoiukulud on võrdsed (see nähtub ka jooniselt 5.4):

$$z_1 = z_2 = \frac{\sqrt{2KQC}}{2} \tag{5.12}$$

Kaubavarude optimaalsed juhtimiskulud z_0 on leitavad valemi-
ga:

$$z_0 = \sqrt{2KQC} \quad (5.13)$$

Optimaalse kaubapartii x_0 alusel saab leida plaaniperioodi T kohta ka järgmised näitajad:

$$\text{optimaalne keskmine varu: } \frac{x_0}{2} \quad (5.14)$$

$$\text{optimaalne kaubapartiide arv: } n_0 = \frac{Q}{x_0} \quad (5.15)$$

optimaalne ajavahemik kahe kaubapartii saabumise vahel:

$$t_0 = \frac{T}{n_0} \quad (5.16)$$

Optimaalne kaubapartii suurus:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2KQ}{C}}$$

Optimaalsed juhtimiskulud:

$$z_0 = \frac{Cx_0}{2} + \frac{KQ}{x_0} = \sqrt{2KQC}$$

Optimaalne keskmine varu: $\frac{x_0}{2}$

Optimaalne kaubapartiide arv: $n_0 = \frac{Q}{x_0}$

Optimaalne ajavahemik kahe kaubapartii saabumise vahel, kui plaaniperioodi pikkus on T : $t_0 = \frac{T}{n_0}$

5.2.4. Lahendi stabiilsuse analüüs

Optimaalse lahendi korral kerkib tavaliselt küsimus, mis juhtub lahendiga, kui muutuvad mõned majandusprotsessi käiku mõjutavad tingimused. Seega soovitakse uurida lahendi stabiilsust. Kaubavarude optimeerimise ülesande korral analüüsime eelkõige kahte võimalikku olukorda:

- tegelik kaubapartii erineb optimaalsest (probleem 1);
- kaubavarude tegelikud juhtimiskulud erinevad optimaalsest (probleem 2).

Probleem 1. Tegelike kaubapartiide suurus hälbib optimaalsest α -kordselt. Kui palju muutuvad sel juhul kaubavarude juhtimiskulud?

Lahenduskäik:

kui $x = \alpha \cdot x_0$, siis

$$\begin{aligned} z &= \alpha \frac{C \cdot x_0}{2} + \frac{K \cdot Q}{\alpha x_0} = \\ &= \frac{\alpha C x_0}{2} + \frac{KQ}{\alpha x_0} + \frac{KQ\alpha}{x_0} - \frac{KQ\alpha}{x_0} = \\ &= \alpha \left(\underbrace{\frac{C x_0}{2} + \frac{KQ}{x_0}}_{=z_0} \right) + \frac{KQ}{\alpha x_0} - \frac{KQ\alpha}{x_0} = \\ &= \alpha z_0 + \frac{KQ}{x_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Et $x_0 = \sqrt{\frac{2KQ}{C}}$, siis

$$\frac{KQ}{x_0} = \frac{\sqrt{2KQC}}{2} = \frac{z_0}{2} \quad (5.18)$$

ja seega

$$\begin{aligned} z &= \alpha z_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \cdot z_0 = \\ &= \left(\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \right) \cdot z_0 = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \cdot z_0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Seega, kui $x = \alpha \cdot x_0$, siis $z = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \cdot z_0$.

Järeldus: kui kaubapartii hälbib optimaalsest α -kordselt, siis kaubavarude juhtimiskulud muutuvad β -kordselt, sealjuures

$$\beta = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \quad (5.20)$$

Märkus. Kaubapartii vähendamisel suurenevad juhtimiskulud rohkem kui kaubapartii suurendamisel samas ulatuses.

Selgitus. Kaubapartii võimalik muutus $\alpha = 1 \pm \gamma$ (γ väljendab kaubapartii vähendamise või suurendamise ulatust) ning seega juhtimiskulude muutus

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(1 \pm \gamma)^2 + 1}{2(1 \pm \gamma)} = \frac{1 \pm 2\gamma + \gamma^2 + 1}{2(1 \pm \gamma)} = \\ &= \frac{2 \pm 2\gamma}{2(1 \pm \gamma)} + \frac{\gamma^2}{2(1 \pm \gamma)} = 1 + \frac{\gamma^2}{1 \pm \gamma} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Seega kaubapartii suurendamisel $\alpha = 1 + \gamma$ kasvavad juhtimiskulud vähem kui kaubapartii vähendamisel $\alpha = 1 - \gamma$, kuna

$$1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} < 1 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma} \quad (5.22)$$

Probleem 2. Firma juht on teinud kalkulatsiooni ja jõudnud järeldusele, et firma püsib ka siis konkurentsivõimelisena, kui kaubavarude juhtimiskulud suurenevad β -kordselt. Kui palju võib sel juhul kaubapartii erineda optimaalsest ($\alpha = ?$)?

Kaubavarude juhtimiskulud muutuvad $\beta = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$ -kordselt,

kusjuures α väljendab kaubapartii võimalikku muutust:.

Kuna

$$2\alpha\beta = \alpha^2 + 1, \text{ siit } \alpha^2 - 2\alpha\beta + 1 = 0 \quad (5.23)$$

Ruutvõrrandi lahend:

$$\alpha = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (5.24)$$

Seega juhtimiskulude suurenemisel β -kordselt võib kaubapartii suurus muutuda suuruse $\alpha = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ -kordselt ning kaubapartii võib olla vahemikus

$$\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\right)x_0 \leq x \leq \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right)x_0 \quad (5.25)$$

Sellisel juhul juhtimiskulud ei suurene rohkem kui β -kordselt.

Kui kaubapartii hälbib optimaalsest α -kordselt, siis kaubavarude juhtimiskulud muutuvad $\beta = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$ -kordselt.

Juhtimiskulude suurendamisel β -kordselt võib kaubapartii suurus muutuda $\alpha = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ -kordselt. Kaubapartii suurus võib olla vahemikus $(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}) \cdot x_0 \leq x \leq (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \cdot x_0$

5.2.5. Kaubavarude planeerimise näiteid

Näide 5.1.

Kaupluse käibe mahuks on kavandatud 50 000 krooni kuus ($T = 30$ päeva). Ühe kaubapartii sisseveokulu on 250 krooni. Kaubaühiku hoiukulu laos 25 krooni kuus. Kaupluse omanikku huvitab, milline peaks olema sisseveetava kaubapartii suurus, et kaubavarude juhtimiskulud, mis koosnevad kauba sisseveokuludest ja hoiukuludest laos, oleksid vähimad.

Probleemipüstitusest tulenevalt on teada:

$Q = 50\,000$ – plaaniperioodi (1 kuu) nõudlus kaubavarude järele;

$K = 250$ – kaubapartii sisseveo kulu;

$C = 25$ – kaubaühiku hoiukulu kuus;

$T = 30$ – plaaniperioodi päevade arv.

Valemi (5.10) alusel saab leida optimaalse kaubapartii suuruse:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2KQ}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,000 \cdot 250}{25}} = \sqrt{1\,000\,000} = 1000$$

Optimaalsest kaubapartiist lähtuvalt saab leida ka järgmised kaubavarude juhtimiseks olulised näitajad:

optimaalne keskmine varu laos: $\frac{1000}{2} = 500$;

$$\text{kaubapartiide arv } n_0 = \frac{50\,000}{1000} = 50;$$

ajavahemik kahe kaubapartii saabumise vahel:

$$t_0 = \frac{30}{50} = 0.6 \approx 0.5, \text{ s.o. kaks kaubapartiid päevas}$$

Kaubavarude optimaalsed juhtimiskulud:

$$z = \frac{25 \cdot 1000}{2} + \frac{250 \cdot 50\,000}{1000} = 25\,000$$

$$\text{ehk } z = \sqrt{2 \cdot 250 \cdot 50\,000 \cdot 25} = 25\,000$$

Optimaalsete juhtimiskulude korral kaubapartii sisseveokulud ja hoiukulud on võrdsed, kumbki 12 500 krooni.

Näide 5.2.

1. Vastavalt sõlmitud lepingule kujuneb tegelik kaubapartii optimaalsest 25% suuremaks, seega $\alpha = 1.25$ ning

$$\beta = \frac{1.25^2 + 1}{2 \cdot 1.25} = \frac{2.5625}{2.5} = 1.025,$$

s.t. juhtimiskulud suurenevad 2.5%.

Optimaalse kaubapartii $x_0 = 1000$ korral on juhtimiskulud 25 000 krooni. Kui kaubapartiid suurendatakse 1250 kroonini ($x = 1.25 \cdot 1000 = 1250$), siis juhtimiskulud on

$$z = 1.025 \cdot 25\,000 = 25\,625 \text{ EEK.}$$

Juhtimiskulude suurenemine on 625 krooni, s.o. 2.5%.

2. Vastavalt lepingule tuleb optimaalset kaubapartiid vähendada

$$25\%, \text{ seega } \beta = \frac{0.75^2 + 1}{2 \cdot 0.75} = \frac{1.5625}{1.5} \approx 1.042. \text{ Juhtimiskulud suu-}$$

renevad sel juhul 4.2%.

Kui optimaalse kaubapartii ($x_0 = 1000$) suurust vähendada 750-ni ($0.75 \cdot 1000$), siis juhtimiskulud suurenevad 4.2% ning on 26 050 krooni ($z = \beta \cdot z_0 = 1.042 \cdot 25\ 000 = 26\ 050$). Juhtimiskulude suurenemine on 1050 krooni.

Saadud tulemused on kooskõlas seostega (5.21) ja (5.22).

Näide 5.3.

Jätkame näites 5.1 toodud probleemi püstitusega. Täiendavalt on teada, et kauplusel on võimalik suurendada kaubavarude juhtimiskulusid 10%, s.t. $\beta = 1.1$. Sel juhul:

$$\alpha = 1.1 \pm \sqrt{1.1^2 - 1} = 1.1 \pm \sqrt{0.21} = 1.1 \pm 0.46$$

ning

$$\alpha_1 = 0.64 \quad \text{ja} \quad \alpha_2 = 1.56$$

Kaubavarude suurust võib vähendada 36% ja suurendada 56%, millega kaasnevalt juhtimiskulud ei suurene rohkem kui 10%. Seega $x_0 = 1000$ korral võib kaubapartii olla vahemikus $640 \leq x_0 \leq 1560$. Sel juhul juhtimiskulud ($z_0 = 25\ 000$) ei kasva rohkem kui $z = 1.1 \cdot 25\ 000 = 27\ 500$ kroonini.

5.2.6. Laopinna arvestamine kaubavarude modelleerimisel (lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne)

5.2.6.1. Lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne üheliigilise kauba korral

Kaubavarude optimeerimisel on tihti kitsendavaks tingimuseks firma käsutuses olev laopind. Lahendame kaubavarude planeerimise ülesande, kus lisaks punktis 5.2.5 toodud teada olevatele

suurustele (Q – plaaniperioodi nõudlus kaubavarude järele, C – kaubaühiku säilitamise kulu, K – kaubapartii sisseveokulu), tuleb arvesse võtta ka kasutada olev laopind B , mille vajadus kaubaühiku säilitamiseks on a . Seega tuleb lahendada ülesanne

$$\min z = \frac{KQ}{x} + \frac{Cx}{2} \quad (5.26)$$

tingimusel

$$ax \leq B \quad (5.27)$$

Ülesande esialgsest püstitusest tulenevalt lisanduvad ka tingimused (5.6) ja (5.7). Kui laopinna kitsendust arvestamata leitud optimaalse kaubapartii suuruse x_0 korral on täidetud tingimus, et $ax_0 \leq B$, siis selline lahend sobib ka uuele ülesande püstitusele.

Kui aga $ax_0 > B$, siis tuleb sisseveetava optimaalse kaubapartii suurust x_0 vähendada, millega kaasneb ka juhtimiskulude suurenemine. Laopinna lisatingimusest tulenevalt kujuneb sisseveetava kaubapartii optimaalseks suuruseks $x = \frac{B}{a}$ (5.28)

Asendades juhtimiskulude funktsioonis (5.26) kaubapartii suuruse x avaldisega (5.28), saame

$$z = \frac{KQ \cdot a}{B} + \frac{C \cdot B}{2a} \quad (5.29)$$

Juhtimiskulude funktsiooni (5.29) alusel saab leida laopinna piirhinna λ :

$$\lambda = -\frac{\partial z}{\partial B}, \quad (5.30)$$

mis on kooskõlas olukorraga, et laopinna suurenedes juhtimiskulud vähenevad.

Laopinna piirhind on seega:

$$\lambda = \frac{KQ \cdot a}{B^2} - \frac{C}{2a} \quad (5.31)$$

Laopinna suurendamisel ühe ühiku (1 m^2) võrra vähenevad kaubavarude juhtimiskulud λ võrra. Seega 1 m^2 laopinna eest ei ole otstarbekas rohkem üüri maksta kui on piirkulu.

Näide 5.4.

Täiendame näites 5.1 toodud probleemi püstitust. Firmal käibega 50 000 krooni kuus on kasutada 500 m^2 laopinda. Kaubaühiku säilitamiseks kulub 1 m^2 laopinda. Kaubaühiku hoiukulu laos on 25 krooni ning kaubapartii sisseveokulu 250 krooni. Firma on huvitatud olemasoleva laopinna puhul sellisest kaubapartii suurusest, mille korral kaubavarude juhtimiskulud, mis koosnevad kauba sisseveo- ja hoiukuludest, oleksid vähi-mad.

Kaubavarude optimeerimise ülesande lahendamiseks on teada järgmised andmed:

$$Q = 50\,000$$

$$C = 25$$

$$K = 250$$

$$a = 1$$

$$B = 500$$

Andmetest on näha, et näites 5.1 saadud optimaalne kaubapartii suurus $x_0 = 1000$ ei ole kooskõlas firma laopinnaga.

Leiame optimaalse kaubapartii suuruse lähtudes olemasolevast laopinnast ja selle vajadusest kaubaühiku hoiustamiseks:

$$x = \frac{500}{1} = 500$$

Keskmine kaubavaru: 250

$$\text{Kaubapartiide arv: } \frac{50\,000}{500} = 100$$

Ajavahemik kahe kaubapartii saabumise vahel: $\frac{30}{100} = 0.3$ päeva.

Kaubavarude optimaalsed juhtimiskulud:

$$z = \frac{25 \cdot 500}{2} + \frac{250 \cdot 50\,000}{500} = 31\,250$$

Laopinna piirkulu:

$$\lambda = \frac{250 \cdot 50\,000}{500 \cdot 500} - \frac{25}{2 \cdot 1} = 37.5$$

Seega rohkem kui 37.5 krooni ei ole otstarbekas 1 m² laopinna eest maksta.

Ülesande lahendamisel (vt. näide 5.1) juhul, kui laopind ei olnud optimaalset kaubapartii suurust mõjutav tegur, kujunesid optimaalsed juhtimiskulud tunduvalt väiksemateks ($z_0 = 25\,000$). Juhul kui firmajuht peab arvestama laopinna piiranguga (igapäevases äripraktikas tuleb selle piiranguga tavaliselt arvestada), kujunevad kaubavarude juhtimiskulud enamasti suuremaks.

5.2.6.2. Lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesanne n erineva kauba korral

Laiendame laopinna arvestamisega kui lisatingimusega kaubavarude optimeerimise ülesannet juhule, kus ei ole enam tegemist üheliigilise kaubaga, vaid on n erinevat kaupa ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ülesande püstitus:

$$\min z = \sum_{i=1}^n \frac{C_i x_i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i Q_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i x_i}{2} + \frac{K_i Q_i}{x_i} \right) \quad (5.32)$$

tingimustel:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq B, \quad x_i \leq Q_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.33)$$

Lisatingimuse $\sum_{i=1}^n a_i x_i = B$ korral saab ülesande lahendamiseks konstrueerida Lagrange'i funktsiooni:

$$F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i x_i}{2} + \frac{K_i Q_i}{x_i} \right) + \lambda \sum_{i=1}^n (a_i x_i - B_i) \quad (5.34)$$

Leiame funktsiooni F tuletised x_i -de ($i = 1, 2, \dots, n$) ja λ suhtes ning võrdsustame 0-ga:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{C_1}{2} - \frac{K_1 Q_1}{x_1^2} + \lambda a_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{C_2}{2} - \frac{K_2 Q_2}{x_2^2} + \lambda a_2 = 0 \\ \dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{C_n}{2} - \frac{K_n Q_n}{x_n^2} + \lambda a_n = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n a_i x_i - B = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = B \quad (5.36)$$

Siit

$$x_i = \sqrt{\frac{2K_i Q_i}{C_i + 2\lambda a_i}} \quad (5.37)$$

λ leiame võrdustest (5.36) ja (5.37):

$$\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{\frac{2K_i Q_i}{C_i + 2\lambda a_i}} = B \quad (5.38)$$

Optimaalne kaubapartii suurus üheliigilise kauba korral, kui arvestada tuleb laopinna (B):

$$x_0 = \frac{B}{a}$$

Laopinna piirkulu:

$$\lambda = \frac{KQ \cdot a}{B^2} - \frac{C}{2a}$$

Kaubavarude optimaalsed juhtimiskulud:

$$z_0 = \frac{C \cdot x_0}{2} + \frac{K \cdot Q}{x_0} = \frac{C \cdot B}{a} + \frac{K \cdot Q \cdot a}{B}$$

Optimaalse kaubapartii suurus n erineva kauba korral ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$x_i = \sqrt{\frac{2K_i Q_i}{C_i + 2\lambda a_i}}$$

Lagrange'i kordaja λ (laopinna piirkulu) on leitav võrdusest:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{\frac{2K_i Q_i}{C_i + 2\lambda a_i}} = B$$

5.3. Lisatingimustega mittelineaarne tootmise planeerimise ülesanne

5.3.1. Probleemi püstitus

Ettevõtte juhil tuleb langetada otsus ettevõtte tootmisplaani kohta etteantud tootmiskulude mahu ja tootmisressursside (tööjõud, materjal) hinna korral. Eesmärgiks on olemasolevate võimaluste juures saada maksimaalset toodangut. Tootmise korraldamisega seotud otsuste langetamiseks on ettevõtte juht huvitatud järgmisest infost:

- milline on maksimaalne võimalik toodangu maht (Q);
- kui palju tuleb palgata tööjõudu ning hankida materjale, et tootmiseks vajalikud ressursid oleksid tasakaalus;
- kui palju suureneb toodangu maht tootmiskulude mahu suurendamisel ühe ühiku võrra, s.o. milline on piirtoodang.

Tootmise planeerimise ülesande lahendamiseks on teada järgmised andmed

S – tootmiskulude maht;

P_M – materjali ühiku hind;

P_L – tööjõu ühiku hind.

Teada on ka statistiliste andmete alusel leitud tootmisfunktsioon, millega on määratud seos toodangu mahu Q ning kasutada olevate ressursside mahtude (M – materjal, L – tööjõud) vahel:

$$Q = F(M, L) \quad (5.39)$$

Probleemi püstitusest ja teada olevatest andmetest tulenevalt saab lahendada ülesande:

$$\max Q = F(M, L) \quad (5.40)$$

tingimusel

$$P_M \cdot M + P_L \cdot L = S \quad (5.41)$$

Ülesande (5.40)–(5.41) lahendamiseks sobib Lagrange'i kordajate meetod. Konstrueerime Lagrange'i funktsiooni

$$Q_\lambda = F(M, L) - \lambda(P_M \cdot M + P_L \cdot L - S) \quad (5.42)$$

Leiame funktsiooni (5.42) osatuletised M , L ja λ suhtes ning võrdsustame need nullidega:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_\lambda}{\partial M} = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Võrranditesüsteemi (5.43) lahendamise tulemusena leiame tootmiseks vajalikud materjalide ja tööjõu mahud (vastavalt M ja L) ning piirtoodangu λ .

5.3.2. Tootmise planeerimise ülesande näide

Näide 5.5.

Statistiliste andmete alusel on leitud tootmisfunktsioon, millega on määratud seos toodangu mahu (Q) ning peamiste tootmistegurite – tööjõu (L) ja materjali (M) vahel:

$$Q = 140L + 160M - 2L^2 - 2M^2$$

Tootmiskuludeks on ette nähtud 900 krooni päevas ($S = 900$). Tööjõu ühiku hind on 18 krooni ($P_L = 18$) ning materjali ühiku hind 36 krooni ($P_M = 36$).

Eesmärgiks on koostada tootmiskuludeks ettenähtud rahasumma (tootmiskulude mahu) ning kehtivate tööjõu ja materjali hindade juures tootmisplaan, mille puhul toodangu maht on suurim. Tuleb lahendada ülesanne

$$\max Q = 140L + 160M - 2L^2 - 2M^2 \quad (5.44)$$

tingimusel

$$18L + 36M = 900, \quad (5.45)$$

s.t. kulutused tööjõule ja materjalile on 900 krooni päevas.

Ülesande (5.44)–(5.45) lahendamiseks koostame Lagrange'i funktsiooni:

$$Q_\lambda = 140L + 160M - 2L^2 - 2M^2 - \lambda(36M + 18L - 900) \quad (5.46)$$

ning leiame funktsiooni tuletised L , M ja λ suhtes ja võrdsustame need nullidega:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_\lambda}{\partial L} = 140 - 4L - 18\lambda = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial M} = 160 - 4M - 36\lambda = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda} = -36M - 18L + 900 = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

Võrrandite süsteemi (5.47) lahendamisel saame:

$$L = 22, M = 14 \quad \text{ning} \quad \lambda = 2.89. \quad (5.48)$$

Lagrange'i kordaja majanduslik sisu: λ on piirtoodang ehk marginaalne toodang tootmiskulude mahu suhtes. Ressursside tasakaalu ($L = 22, M = 14$) korral $\lambda = 2.89$, s.t. lubatud tootmiskulude mahu suurenemisel 1 krooni võrra suureneb toodang 2.89 krooni.

Maksimaalne võimalik toodangu maht päevas:

$$Q = 140 \cdot 22 + 160 \cdot 14 - 2 \cdot 22^2 - 2 \cdot 14^2 = 3960 \text{ krooni}$$

Sihifunktsioon (tootmisfunktsioon):

$$\max Q = F(L, M)$$

Kitsendus:

$$P_M \cdot M + P_L \cdot L = S$$

Lagrange'i funktsioon:

$$Q_\lambda = F(L, M) - \lambda (P_M \cdot M + P_L \cdot L - S)$$

λ — Lagrange'i funktsiooni kordaja ehk piirtoodang tootmiskulude mahu suhtes

Tootmiseks vajalike ressursside M ja L mahud ning piirtoodang λ on leitavad võrrandite süsteemist:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_\lambda}{\partial M} = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Kokkuvõte

Majandusprobleemi detailsema analüüsi ja modelleerimisega kaasneb sageli vajadus esitada mõned ülesande kitsendused või sihifunktsioon mittelineaarselt. Sellisel juhul on tegemist mittelineaarse planeerimisülesandega. Oma olemuselt on mittelineaarsed planeerimisülesanded nn. tingliku ekstreemumi leidmise ülesanded. Diferentseeruvate funktsioonide ja võrdustena esitatud lisatingimuste puhul konstrueeritakse sageli Lagrange'i funktsioon ning sellest lähtuvalt leitakse mittelineaarse planeerimisülesande lahendid.

Mittelineaarsete planeerimisülesannete näidetena on selles peatükis käsitletud kaubavarude ja tootmise planeerimise ülesandeid. Mõlema näiteülesande korral on optimaalsuskriteerium ehk sihifunktsioon formuleeritud mittelineaarsena.

Kaubavarude planeerimise ülesannetes on optimaalsuskriteeriumiks juhtimiskulude minimeerimine. Kaubavarude optimeerimise ülesanne on lahendatud nii laopinna olemasolust tuleneva lisatingimuse korral kui ka ilma lisatingimusega. Lisatingimusega ülesande puhul on läbi viidud lahendi stabiilsuse analüüs nii juhtimiskulude kui ka optimaalse kaubapartii suuruse suhtes. Laopinna olemasoluga arvestava, s.t. lisatingimusega ülesande lahendiks on optimaalse kaubapartii suuruse kõrval ka laopinna piirkulu, mida saab kasutada lisainformatsioonina otsuste langetamisel täiendava laopinna rentimisel makstava tasu suuruse kohta.

Tootmise planeerimise ülesandes on optimaalsuskriteeriumiks maksimaalne toodangu maht. Ülesande lahendamisel selguvad tootmiseks vajaminevate ressursside (materjal ja tööjõud) maht, nende omavahelised proportsioonid ja piirtoodang tootmiskulude mahu suhtes.

6. MÄNGUTEORIA

6.1. Mänguteooria olemus

Igapäevases majanduselus on sageli tegemist *konfliktsituatsioonide* lahendamise, kus tuleb langetada *otsus* teatud probleemi lahendamiseks, valides seejuures mitmete otsusevariantide vahel. On loomulik, et otsustaja soovib langetada temale teada oleva info põhjal parima otsuse, saada oma probleemile optimaalne lahend.

Matemaatilise distsipliinina, mille ülesandeks on leida käitumisreegleid ja tegutsemiseeskirju konfliktsituatsiooni lahendamiseks, ongi üldjuhul defineeritud mänguteooriat.

Suur osa otsuseid langetatakse intuiitiivselt, ilma et nende vastuvõtmisel ja põhjendamisel kasutatakse kvantitatiivseid meetodeid. Mänguteooriat kui meetodit tegutsemiseeskirjade leidmiseks ja optimaalsete otsuste langetamiseks saab loomulikult kasutada ainult juhtudel, kui on võimalik koostada konfliktsituatsiooni matemaatilist mudelit ehk mängu.

Matemaatikaleksikonis /Ü. Kaasik, 1992/ on mängu kui mänguteooria põhimõistet defineeritud matemaatilise mudelina, milles on määratud konfliktis osalejad, nende võimalik tegevus, teada olev info, tingimused, millal mäng lõpeb, eeskirjad iga mängija erinevatest lõpptulemustest huvitatuse kvantitatiivseks mõõtmiseks jne. Mänguteooria põhimõisteteks on mängu definitsioonist tulenevalt sellised mõisted nagu: *mängu käik*, *mängija*, *mängu reeglid*, *mängu strateegia*, *kaotus*, *võit* jt. Nende sisu avaneb tulenevalt konkreetsest majandussituatsioonist.

Mänguteooria rajajaks loetakse Ungari päritolu Ameerika matemaatikut John von Neumanni (1903–1957), kellelt koostöös majandusteadlase O. Morgensterniga ilmus 1944. aastal töö mänguteooria ja majandusliku käitumise kohta: “*Theory of Games and Economic Behavior*”. Mänguteooria on enam rakedamist leidnud sõjaasjanduses ning konkurentsiga seotud majandusprobleemide lahendamisel.

Kuna suur osa mänguteooria ülesandeid on teisendatavad lineaarse planeerimise meetoditega lahendatavateks, siis sellega laienevad oluliselt mänguteooria praktilise kasutamise võimalused ja perspektiivid.

6.2. Mänguteooria põhimõisted

Mäng on matemaatiline mudel konfliktsituatsiooni kirjeldamiseks. *Mängijad* on erinevate huvidega osapooled mängus. Kui mängus on kaks erinevate huvidega osapoolt ehk mängijat, siis on tegemist *kahe isiku mänguga*. Mitme isiku mängu uurimist saab taandada kahe isiku mänguks nn. *koalitsioonide* moodustamise abil. Kui ühe mängija võit konfliktsituatsiooni lahendamisel võrdub teise mängija kaotusega, siis on tegemist *kahe isiku nullsummalise mänguga* ehk *maatriksmänguga*. Näiteks on tegemist nullsummalise mänguga turukonkurents, kus ühe firma kasumi suurenemine tähendab teise firma kasumi vähenemist.

Käik on ühe mänguvõimaluse valimine mängureeglitega määratud käitumisvariantide seast. Kui mängija valib käigu oma tahte kohaselt, siis on tegemist *isikliku käiguga*. Kui mängu käigu otsustab juhus (täringuvise, ilm, juhuslike arvude tabel jt.), siis on tegemist *juhusliku käiguga*. Juhusliku käiguga mängu puhul on vaja teada kõikide võimalike variantide esinemise tõenäosusi (esinemissagedusi). Näiteks täringuviskel on iga tulemuse esinemise tõenäosus $1/6$. Juhusliku käiguga mängu puhul hinna-

takse mängu tulemust võidu keskväärtusega (matemaatilise ootusega). Kui mängu vältel tuleb sooritada *lõplik arv käike* ning iga käigu puhul on võimalik valida *lõpliku arvu variantide vahel*, siis on tegemist *lõpliku mänguga*.

Strateegia on eeskirjade kogu, mis üheselt määrab kõik mängija isiklikud käigud kõikide mängus kujuneda võivate olukordade jaoks. Seega mängu strateegia ei ole mitte ainult ühe käigu väljavalimine, vaid käikude valimine kõikideks võimalikeks olukordadeks, mis esineda saavad. Kombineeritud mängimisstrateegiat, mis seisneb kasutatava strateegia juhuslikus väljavalimises (kuid etteantud sagedusega), nimetatakse *segastrateegiaks*. Segastrateegia erijuht, kus antud strateegia esineb sagedusega 1 ja kõik teised sagedusega 0 , on *puhas strateegia*.

Näiteks, kui on tegemist kahe konkureeriva firmaga, siis nende käikudeks võivad olla erineva hinnaga kaupade pakkumine turul. Strateegiaks on erineva hinnaga kaupade pakkumiste kombinatsioon vastavalt konkurendi tegevusele ja infole konkurendi võimaliku tegevuse kohta. Erinevate kaubapakkumiste kombineerimist konkurentsi tingimustes võib käsitleda segastrateegiaga mänguna.

Mäng on *täielikult kirjeldatud*, kui iga mängija kõikide võimalike strateegiade puhul on iga mängija jaoks teada kvantitatiivselt hinnatav mängu tulemus. Kahe mängija A ja B korral on mäng kirjeldatav arvudega a_{ij} , kusjuures $i = 1, 2, \dots, m$ (m on mängija A strateegiade A_i arv) ja $j = 1, 2, \dots, n$ (n on mängija B strateegiade B_j arv). Näiteks a_{ij} on kasum, mida firma A saab, kui ta kasutab i -ndat kaubapakkumist ja konkureeriv firma vastab sellele omapoolse strateegia ehk kaubapakkumisega j . Firma B kasum on $b_{ij} = -a_{ij}$. Sellisel juhul saab mängu esitada maatriksi kujul.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Mäng on matemaatiline mudel konfliktsituatsiooni kirjeldamiseks.

Mängu käik on ühe mänguvõimaluse valimine mängureeglitega määratud mängijate käitumisvariantide seast. Isikliku käigu korral on käik valitud mängija oma tahte kohaselt. Juhusliku käigu määrab juhus, mille võimalike variantide esinemise tõenäosused on teada.

Strateegia on eeskirjade kogu, mis üheselt määrab mängija isiklikud käigud kõikide mängus kujuneda võivate olukordade jaoks.

Segastrateegia on kombineeritud mängimisstrateegia, mis seisneb mitme strateegia kasutamises juhuslikus järjekorras, kuid etteantud sagedusega.

Puhas strateegia on segastrateegia erijuht, kus antud strateegia esineb sagedusega üks, kõik teised strateegiad esinevad sagedusega null.

6.3. Mänguteooria kasutamise tingimused

Mänguteooria kui konfliktsituatsioonide kirjeldamisele ja otsuste vastuvõtu toetamisele suunatud matemaatilise distsipliini kasutamine sõltub mängijate aktiivsusest ja nende kasutuses olevast infost.

Mängijad on *aktiivsed*, kui nad valivad ise mänguvõimalusi ehk *mängu käike* mängureeglitega määratud variantide hulgast kas juhuslikult või isiklike otsuste alusel, mis tulenevad mängija eesmärkidest, informeeritusest jne.

Aktiivsete mängijatega on tegemist näiteks konkurentide tegevuses kauba hinna kujundamisel. Mängijad on aktiivsed ja kujundavad hinda isiklike käikudena. Aktiivne mängija võib mõnikord mängu käike valida ka juhuslikult. Juhusliku käiguga mängu puhul saab mängu tulemuse esitada mängija võidu (kaotuse) keskväärtusega (matemaatilise ootusega). Näiteks, juhusliku käiguga mänguga on tegemist olukorras, kui mängijad langetavad otsuse visates kulli või kirja. Tõenäosus kummagi tulemuse saavutamiseks on sellisel juhul 50%.

Üks mängijatest ehk osapooltest võib mängu tulemuse suhtes olla ka *passiivne*. Selliseid mängu nimetatakse sageli "*mänguks loodusega*". Mõned näited loodusega mängu kohta.

Firma valib oma tegevusvaldkondi vastavalt ilmastikutingimustele ja ilma prognoosidele. Ilm vastasmängijana ei ole mängu tulemusest huvitatud.

Kauba müük sõltub moest. Moodi kui konfliktsituatsiooni üht osapoolt võib käsitleda passiivse mängijana.

6.4. Mittenullsummaline mäng

Kahe mängija mittenullsummalise mängu korral ühe mängija võit ei võrdu teise mängija kaotusega. Mittenullsummalise män-

gu näitena on alljärgnevalt esitatud “vangide dilemma” ning oligopoolse konkurentsi ühe avaldumisviisina tuntud konflikt-situatsioonid.

“Vangide dilemmana” esitatav konfliktisituatsioon.

Härrased Smith ja Jones on vangistatud süüdistatuna pisivarguses, mille eest neid kumbagi ootab üheaastane vanglakaristus. Mõlemat kahtlustatakse ka ühises tõsises kriminaalkuriteos, mis tooks endaga kaasa kümneaastase vanglakaristuse. Kriminaalkuriteos süüdistamiseks puudub aga vajalik süüdistusmaterjal. Kui mõlemad tunnistavad puhtsüdamlikult oma süüd, saab kumbki viis aastat vanglakaristust. Kui süü tunnistab üles vaid üks vangidest, saab ta karistusest vabaks, kuid teine peab kandma kümme aastat vanglakaristust. Mängu võib kirjeldada tabeli 6.1 abil. Tabelis toodud arvud väljendavad karistusaja pikkust.

Tabel 6.1

		Smith	
		Tunnistab	Ei tunnista
Jones	Tunnistab	$S: 5, J: 5$	$S: 10, J: 0$
	Ei tunnista	$S: 0, J: 10$	$S: 1, J: 1$

Vangide Smithi ja Jonesi käitumine on ettemääramatu, kui neil puudub võimalus mängu käigus kokkuleppeid teha. Mõlemad mängijad võivad mängu käigus oma strateegiat muuta ning mitte kasutada ohutuimat strateegiat: ei tunnista: ei tunnista ($1 : 1$).

Selliste konfliktisituatsioonide lahendusmeetodid ei ole täpselt läbi töötatud ega kindla lahendusalgoritmiga esitatavad. Pole täpselt selge, mis on sellise mängu korral optimaalseks lahendiks.

Oligopoolne konkurents.

“Vangide dilemmale” sarnane situatsioon esineb ka turukonkurents. Kui turul on üks müüja, on tegemist monopoliga; kui tegemist on väikese arvu müüjatega, kes turgu mõjutavad, siis on tegemist oligopoliga. Müüjad võivad ühineda, tõsta hindu, vähendada tootmist ning dikteerida seega ostjale oma kõrgemat hinnatõudmist. Selline administratiivne organisatsioon on tuntud kartellina. Kartelli ühinenult saavad kõik firmad müüa oma kaupa suurema kasumiga, kuna ostjale dikteeritakse tootmise vähendamise kaudu hinda.

Kui mõni kartelli liikmetest kokkulepet murrab ning müüb kokkulepitud hinnast odavamalt, saab ta hõivata suurema turuniš i ning suurema läbimüügi tõttu saab esialgu ka suurema kasumi. Järgneb ka teiste firmade poolne hinnaalandus ning lõpptulemusena tasakaalustub jällegi kõikide firmade osa läbimüügis. Suuremat kasumit ei saa keegi, võidab vaid ostja, kuna hind langeb.

Oligopoolse konkurentsi kui mittenuksümbralise mängu võib esitada järgmise tabelina (tabel 6.2).

Tabel 6.2

		Firma A	
		Hind kõrge	Hind madal
Firma B	Hind kõrge	A: suur kasum B: suur kasum	A: väga suur kasum B: väike kasum
	Hind madal	A: väike kasum B: väga suur kasum	A: keskpärane kasum B: keskpärane kasum

Situatsioon on analoogne “vangide dilemmale”, kus kokkulepetest mittekinnipidamise tulemusena kaotavad kõik osapooled ehk mängijad.

6.5. Kooperatiivmäng

Mittenullsummalise mängu puhul püütakse leida mängu *tasakaalupunkt* ehk *sadulpunkt*. Üldiselt nimetatakse mängu tasakaalupunktiks mängijate strateegiade niisugust komplekti, milles mängija strateegia muutmine vähendab (ei suurenda) tema oodatavat võitu (seda iga mängija korral).

Majandussituatsioone modelleerivate mängude puhul ei ole strateegiade hulgas enamasti lõplikud. Ka ei anna tasakaalupunkt üldiselt parimaid mängus esinevaid tulemusi. Tasakaalupunktiga peavad mängijad leppima juhul, kui paremate tulemusteni ei ole võimalik jõuda ilma omavahelist kokkulepet sõlmimata.

Kui mängijad sõlmivad omavahelise kokkuleppe ja see kokkulepe on kohustuslik, siis on tegemist *kooperatiivmänguga*.

Tabelis 6.3 on toodud kahe firma võimalik kasum ehk mängu seisukohalt oodatavad võidud, kui nad kasutavad vastavaid strateegiaid. Firma A kasutab strateegiaid A_1 ja A_2 ning firma B strateegiaid B_1 ja B_2 .

Tabel 6.3

	B_1		B_2	
	A kasum	B kasum	A kasum	B kasum
A_1	9	2	5	6
A_2	7	8	4	9

Firma A seisukohalt on otstarbekas kasutada strateegiat A_1 . Firma B mõlema strateegia puhul annab strateegia A_1 firmale A suurima kasumi (garanteeritud kasum).

Firmal B on otstarbekam kasutada strateegiat B_2 . Garanteeritud kasumiga arvestades valivad firmad A ja B oma koostgevuseks

ilma eelnevate läbirääkimisteta arvatavasti strateegiad A_1 ja B_2 . FIRMAL A on sel juhul võimalikuks kasumiks 5 ja firmal B 6 krooni kaubaühiku kohta.

Kui mängijad loobuksid garanteeritud kasumit andvatest strateegiatest ja lepiksid kokku kasutada strateegiaid A_2 ja B_1 , siis oleks mõlemal firmal võimalus saada suuremat kasumit: firmal A 7 ja firmal B 8 krooni. Selliste strateegiate valikuks peab mängijate vahel olema aga kindel kokkulepe. Piisab vaid ühel mängijal kokkuleppest mitte kinni pidada ning ta võib saada garanteeritust tunduvalt suurema kasumi, kuid samal ajal jääb teise mängija kasum garanteeritust oluliselt väiksemaks. Näiteks juhul, kui firma A rikuks kokkulepet ja kasutaks kokkulepitud strateegia A_2 asemel strateegiat A_1 , firma B peaks aga kokkulepitud strateegiast B_1 kinni, saaks firma A 7 krooni asemel 9 krooni kasumit, firmal B aga tuleks piirduda vaid 2-kroonise kasumiga kokkuleppelise 8-kroonise kasumi asemel. Sellise kokkuleppe sõlmimist võib takistada asjaolu, et üks firma võidab kokkuleppe korral rohkem kui teine. Toodud näite korral on aga võidud võrdsed, nii firma A kui firma B võit kokkuleppe sõlmimisest on 2 krooni. Selline tulemus peaks kokkuleppe sõlmimist soodustama.

6.6. Nullsummaline mäng

6.6.1. Mängu maatriks

Kahe isiku nullsummalise mängu korral ühe mängija võidu suurus võrdub teise mängija kaotusega.

Vaatleme järgnevalt mängu, milles osalevad mängijad tähistame tähtedega A ja B . Mängija A võimalikud strateegiad on A_1, A_2, \dots, A_m ja mängija B võimalikud strateegiad B_1, B_2, \dots, B_n . Konkreetsetes mängudes kasutatakse sageli ka strateegiate sisu avavaid tähistusi. Kui mängija A kasutuses on

m erinevat strateegiat ja mängija B käsutuses n erinevat strateegiat, siis on tegemist $m \cdot n$ mänguga. Kui mängija A valib oma mingi strateegia A_i ja mängija B valib strateegia B_j , siis nende valikutega on mängu tagajärg (või selle keskväärts) üheselt määratud. Tähistades kummagi mängija võidufunktsiooni $f_1(A_i, B_j) = a_{ij}$ ning $f_2(A_i, B_j) = b_{ij}$, saab kahe isiku nullsummalise mängu olemusest tulenevalt iga indeksite paari i, j korral mängu tulemust iseloomustada üheainsa arvuga a_{ij} , kusjuures $b_{ij} = -a_{ij}$. Kahe mängija A ja B nullsummaline mäng on kirjeldatav arvudega a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$). Need arvud esitatakse tavaliselt tabelina, kus mängija A strateegiatele vastavad tabeli read ja mängija B strateegiatele veerud (tabel 6.4). Sellise tabeli korral on tegemist mängu maatriksiga. Mängu maatriksiga määratud mäng ongi maatriksmäng ehk kahe isiku lõplik nullsummaline mäng.

Tabel 6.4

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Maatriksmängu saab näiteks formaliseerida juhul, kui kaks firmat A ja B võitlevad oma turuosa pärast ning ühe firma osakaalu kasv turul tähendab teise osakaalu vähenemist. Mängu maatriksi element a_{ij} tähistab firma A poolt hõlvatud turuosa, kui ta kasutab strateegiat A_i ning firma B kasutab strateegiat B_j . Arv a_{ij} tähistab sel juhul ka firma B poolt "kaotatavat" turuosa ($b_{ij} = -a_{ij}$). Niisuguse probleempüstituse korral on tegemist

konstantse summaga mänguga, mida saab käsitleda ja analüüsida kui nullsummalist mängu.

Kõikide strateegiate ülelugemine ja mängu maatriksi koostamine võib praktiliste majandusprobleemide formaliseerimisel mänguna kujuneda küllalt keeruliseks ülesandeks, sest võimalik strateegiade arv osutub väga suureks. Järgnevalt on formaliseeritud nullsummaline konstantse summaga mäng.

Näide 6.1.

Tegemist on kahe mängijaga, kes asetavad lauale ühekroonilise metallraha omal vabal valikul kas vapi või kirja poolega. Tähistame vastavad strateegiad mängijal A : A_v ja A_k ning mängijal B : B_v ja B_k . Kui mõlemad mängijad on lauale pannud mündid sama poolega, siis mängija A võidab 1 krooni ning mängija B kaotab sama summa. Vastasel juhul on aga mängijal B 1 krooniline võit. Selliselt esitatud mängu saab kirjeldada tabelis 6.5 toodud maatriksiga.

Tabel 6.5

	B_v	B_k
A_v	$+1$	-1
A_k	-1	$+1$

Kui mängija A püüab välja töötada mingi kindla seaduspära münti lauale asetamiseks (näiteks vaheldumisi, kord vapp, kord kiri või 2 korda kiri, 1 kord vapp), siis on võimalik, et teatud aja pärast mängija B selle seaduspära avastab ning hakkab pidevalt võitma. Kui mängija A asetab münti lauale juhuslikult, siis vastasmängijal B ei ole võimalik tema käitumisega (strateegia valikutega) kohaneda ning ta valib ka oma strateegiaid juhuslikult kartusest, et mängija A võib tema seaduspära arvestada. Kui

mõlemad mängijad valivad oma strateegiad juhuslikult, siis sel-
list mängu käsitleme *segastrateegiaga mänguna*.

Näide 6.2.

Firmad A ja B kauplevad turul konkureerivate kaupadega. Firma A pakub turul kaupu A_1 , A_2 ja A_3 ning firma B kaupu B_1 , B_2 ja B_3 . Mängu maatriksi element a_{ij} väljendab firma A poolt hõivatud turuosa, juhul kui firma A kasutab strateegiat A_i (pakub kaupa A_i) ning firma B vastab strateegiaga B_j (pakub kaupa B_j). Firmade A ja B konkurentsi kirjeldav maatriks on toodud tabelis 6.6.

Tabel 6.6

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.5	0.6	0.8
A_2	0.9	0.7	0.8
A_3	0.7	0.5	0.6

Nagu nähtub tabelist 6.6, saab firma A müüa kaupa A_1 50% osas ja seda juhul, kui firma B paiskab turule konkureeriva kauba B_1 . Kaupade A_2 ja B_2 konkurentsis on firmal A võimalik hoida 70%-list turunišši jne. Tegemist on konstantse summaga maatriksmänguga ($a_{ij} = 1$ korral on firma A kaubaga hõivatud kogu turg).

6.6.2. Mängu hind

Mängu hinna ning sellega seonduvate mõistete selgitamisel lähtume tabelis 6.6 toodud mängu maatriksist. Kauba A_1 korral on firmal A väikseim turunišš, konkureerides kaubaga B_1 ($a_{11} = 0.5$). Mängu seisukohalt on seega strateegia A_1 *garanteeritud võit* 0.5. Strateegia A_2 (kauba A_2 pakkumine) korral on

garanteeritud võit $a_{22} = 0.7$ ning strateegia A_3 garanteeritud võit on $a_{32} = 0.5$.

Garanteeritud võitudest suurim on strateegia A_2 korral ($a_{22} = 0.7$). Seega strateegia A_2 on mängija A ohutuim strateegia. Mängija A garanteeritud võit on mängu alumine hind:

$$a = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{0.5, 0.7, 0.5\} = 0.7 \quad (6.2)$$

Analoogiline olukord on ka mängijaga B . Mängija B soov on muuta mängija A võit võimalikult väikseks. Mängija B ohutuim strateegia annab vastasmängijale A väikseima garanteeritud võidu. Mängu maatriksit veergude kaupa läbi vaadates leiamegi mängija B jaoks halvima tulemuse, milles on mängijale A suurimat võitu andev strateegia ning sellele vastav mängija A poolt hõlvatav turuosa:

$$b_j = \max_i a_{ij} \quad (6.3)$$

Kaubal B_1 on selleks 0.9 , kaubal B_2 0.7 ja kaubal B_3 0.8 . Väikseim garanteeritud võit vastasmängijale on 0.7 . Seega B_2 on mängija B seisukohalt ohutuim strateegia. Mängija B ohutuima strateegia poolt garanteeritud võit on mängu ülemine hind:

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = 0.7 \quad (6.4)$$

Kui $a = b$, siis on tegemist *sadulpunktiga* mänguga. Sadulpunktiga mängu korral võib ohutumaid strateegiaid lugeda *optimaalseteks*, sest nad annavad aruka vastasega mängides parima võimaliku tulemuse. Seega sadulpunkt (kui see on olemas) ongi mängu lahendiks.

Kui kahe isiku nullsummalise mängu alumine ja ülemine hind on võrdsed, siis on tegemist sadulpunktiga mänguga. Sadulpunkt ehk tasakaalupunkt on sellise mängu lahendiks.

6.6.3. Domineerivad strateegiad. Mängu lihtsustamine

Kui mängu maatriksis mängija A strateegiate mingi indeksite paari i ja k puhul osutub, et iga j korral $a_{ij} \geq a_{kj}$, siis strateegia A_k kasutamine ei anna mängijale kunagi paremat tulemust, kui annab strateegia A_i kasutamine. Sel juhul strateegia A_i on A_k suhtes *domineeriv*. Strateegiale A_k vastava rea mängu maatriksist võib maha tõmmata.

Tabel 6.7

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.5	0.7	0.7
A_2	0.9	0.6	0.5
A_3	0.7	0.8	0.3
A_4	0.8	0.6	0.4

Näiteks tabelis 6.7 toodud mängu maatriksi kohta võime öelda, et strateegia A_2 domineerib strateegia A_4 üle, kuna kehtib seos $a_{2j} \geq a_{4j}$, iga $j = 1, 2, 3$ korral ning seega võime A_4 -le vastava rea maatriksist maha tõmmata.

Mängija B seisukohalt on strateegia B_1 strateegia B_2 suhtes domineeriv, kui iga i puhul: $a_{i1} \leq a_{i2}$. Sellisel juhul võib strateegiale B_2 vastava veeru mängu maatriksist maha tõmmata ning mängu sellega lihtsustada.

Tabelis 6.7 esitatud mängu maatriksi strateegia B_3 domineerib strateegia B_2 üle. Seega võime strateegia B_2 maatriksist maha tõmmata. Pärast seda lihtsustub mängu maatriks veelgi, kuna selgub, et pärast strateegia B_2 eemaldamist hakkab strateegia A_2 domineerima strateegia A_3 üle. Seega saame uue lihtsustatud maatriksi (tabel 6.8).

Tabel 6.8

	B_1	B_3
A_1	0.5	0.7
A_2	0.9	0.5

Tabelis 6.6 esitatud mängumatriksi strateegia A_2 domineerib A_1 ning A_3 üle. Strateegia B_2 domineerib B_1 ja B_3 üle. Pärast mängu lihtsustamist ja domineeritud strateegiade eemaldamist jääb järele vaid sadulpunkt $a_{22} = 0.7$ (tabel 6.9).

Tabel 6.9

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.5	0.6	0.8
A_2	0.9	0.7	0.8
A_3	0.7	0.5	0.6

Kui sadulpunkt on olemas, siis on soovitatav see leida seosest $a = b$ (mängu alumine hind = ülemine hind). Mänguna formuleeritud ülesande lahendamise lihtsustamiseks on alati soovitatav määrata domineeritud strateegiad ning vastavalt sellele mitteolulised read ja (või) veerud mängumatriksis maha tõmmata.

Alati ei lihtsustu mäng sedavõrd, et on võimalik leida sadulpunkti ning seega ka mängu lahendit. Iga mängu korral sadulpunkti ei olegi. Sellisel juhul saab mängu lahendamiseks kasutada lineaarse planeerimise meetodeid.

6.6.4. Mängu lahendamine lineaarse planeerimis-ülesandena

Iga lõpliku kahe isiku nullsummalise mängu võib esitada lineaarse planeerimisülesandena ning selle lahendamiseks saab kasutada lineaarse planeerimise üht põhimeetodit — simpleksmeetodit. See suurendab kahtlemata mänguteooria praktilise kasutamise võimalusi ning seda ka mitmesuguste mänguna formuleeritavate majandusprobleemide lahendamisel, öeldes ette käitumise loogika konfliktis mõistliku vastasega.

Tabelis 6.4 esitatud $m \cdot n$ mängumaatriksis on mängija A eesmärgiks leida selline segastrateegia (p_1, p_2, \dots, p_m) , mille puhul mängu tulemuse keskvärtus oleks võimalikult suur, siinjuures

$$p_i \geq 0 \text{ ning } \sum_{i=1}^m p_i = 1. \text{ Sellise segastrateegia rakendamisel on}$$

mängija A garanteeritud võit v ($v > 0$). Mängu saab alati sellisele kujule viia, et tema garanteeritud võit on positiivne.

Mängu garanteeritud võit tähendab seda, et mängu tulemuse keskvärtus peab olema mitte väiksem kui v , sõltumata mängija B poolt valitavast strateegiast. Taoline vahekord peab kehtima mängija B iga puhta strateegia B_j korral ($j = 1, 2, \dots, n$). Mängu tulemuse keskvärtus on seega $a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{mj}p_m$. Teades, et mängija A garanteeritud võit iga $j = 1, 2, \dots, n$ korral on v , saame mängija A otsitava segastrateegia (p_1, p_2, \dots, p_m) leidmiseks järgmise võrratuste süsteemi:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq v \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq v \end{cases} \quad (6.5)$$

Lisaks on teada veel segastrateegia definitsioonist tulenev võrdus:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = I \quad (6.6)$$

ning

$$p_i \geq 0 \quad (6.7)$$

Jagades toodud võrratused ja võrduse läbi garanteeritud võidu suurusega v ning tehes asenduse:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{p_m}{v} \quad (6.8)$$

saame võrratused

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq I \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq I \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq I \end{cases} \quad (6.9)$$

ning võrduse

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{I}{v}. \quad (6.10)$$

Kuna on teada, et $p_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ning mängu garanteeritud võit on positiivne ($v > 0$), siis $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Et mängija A eesmärgiks on muuta oma garanteeritud võit v maksimaalseks, siis on see samaväärne suuruse $\frac{I}{v}$ minimeerimisega.

Seega olemegi saanud lineaarse planeerimisülesande

$$\min \frac{I}{v} = x_1 + x_2 + \dots + x_m \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq I \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq I \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq I \end{cases} \quad (6.12)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0, \quad (6.13)$$

mille lahendamiseks saab kasutada simpleksmeetodit.

Analoogiliselt saab lineaarse planeerimisülesandena esitada ka mängija B optimaalse segastrategia leidmise ülesande. Mängijale B garanteeritud tulemust w ($w > 0$) andev segastrategia (q_1, q_2, \dots, q_n) peab rahuldama kitsendusi:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq w \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq w \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq w \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = I \end{cases} \quad (6.14)$$

Mängijale B annab optimaalse segastrategia toodud kitsenduste süsteemi selline lahend, kus $q_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ning w on võimalikult väike. Tehes asenduse

$$y_j = \frac{q_j}{w} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.15)$$

saame lineaarse planeerimisülesande:

$$\max \frac{I}{w} = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad (6.16)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq I \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq I \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq I \end{cases} \quad (6.17)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0 \quad (6.18)$$

Mängijate A ja B optimaalseid segastrateegiaid määravad lineaarsed planeerimisülesanded on omavahel duaalsed. Siit ka järeldus, et mõlema mängija optimaalse segastrateegia leidmiseks piisab vaid ühe ülesande lahendamisest duaalsete ülesannete paarist, sealjuures $v = w$, s.t. mängijate A ja B garanteeritud võidud on võrdsed.

Kahe isiku nullsummalise mängu lahendamiseks lineaarse planeerimisülesandena saab formuleerida duaalsete ülesannete paari:

$$\min \frac{I}{v} = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq I \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq I \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq I \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

ja

$$\max \frac{I}{w} = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{n1}y_n \leq I \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq I \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq I \end{cases}$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0,$$

$$\text{kus } x_1 = \frac{p_1}{v}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{p_m}{v}$$

$$\text{ning } y_1 = \frac{q_1}{w}, \quad y_2 = \frac{q_2}{w}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{q_n}{w}$$

(p_1, p_2, \dots, p_m) on mängija A segastrateegia ($p_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^m p_i = I$), mille rakendamisel on mängija A garan-

teeritud võit v ($v > 0$)

(q_1, q_2, \dots, q_n) on mängija B segastrateegia, mis annab talle garanteeritud tulemuse w ($w > 0$) ning $q_i \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n q_i = I$$

6.6.5. Näide mängu lahendamisest lineaarse planeerimisülesandena

Näitena mängu lahendamise kohta lineaarse planeerimisülesandena kasutame tabelis 6.7 toodud mängu maatriksit. Pärast mängu lihtsustamist jäid firma A poolt alles strateegiad A_1 ja A_2 (kaubad A_1 ja A_2) ning firma B poolt strateegiad B_1 ja B_3 (kaubad B_1 ja B_3).

Tabel 6.10

	B_1	B_3
A_1	0.5	0.7
A_2	0.9	0.5

Mängija A optimaalse segastrateegia leidmiseks tuleb lahendada lineaarne planeerimisülesanne:

$$\min \frac{l}{v} = x_1 + x_2 \quad (6.19)$$

tingimustel:

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.9x_2 \geq l \\ 0.7x_1 + 0.5x_2 \geq l \end{cases} \quad (6.20)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6.21)$$

Analoogiliselt saab esitada lineaarse planeerimisülesande ka mängija B optimaalse segastrateegia leidmiseks:

$$\max \frac{l}{w} = y_1 + y_3 \quad (6.22)$$

tingimustel:

$$\begin{cases} 0.5y_1 + 0.7y_3 \leq 1 \\ 0.9y_1 + 0.5y_3 \leq 1 \end{cases} \quad (6.23)$$

$$y_1, y_3 \geq 0 \quad (6.24)$$

Kuna tegemist on duaalsete ülesannete paariga, siis võime lahendada kas mängija A või mängija B optimaalse segastrateegia leidmise ülesande, saades üheaegselt kätte mõlema mängija optimaalsed segastrateegiad ($v = w$).

Valime lahendamiseks mängija B optimaalse segastrateegia leidmise ülesande. Ülesande lahendamiseks kasutame simplekssmeetodit.

Viime ülesande (6.22)–(6.24) kanoonilisele kujule, tuues sisse mittenegatiivsed abitundmatud y_4 ja y_5 :

$$\begin{cases} \frac{1}{w} - y_1 - y_3 = 0 \\ 0.5y_1 + 0.7y_3 + y_4 = 1 \\ 0.9y_1 + 0.5y_3 + y_5 = 1 \end{cases} \quad (6.25)$$

Simplekssmeetodi rakendamisega seotud arvutused on koondatud tabelisse 6.11.

Tabeli 6.11 alumisest osast saame välja kirjutada duaalsete ülesannete paari optimaalsed lahendid.

Max-põhikujulise ülesande (6.22)–(6.24) lahendiks saame

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{v} = \frac{30}{19}, \quad y_1 = \frac{10}{19} \quad \text{ja} \quad y_3 = \frac{20}{19} \quad (6.26)$$

Tabel 6.11

	y_1	y_3	y_4	y_5	Vabaliige
$1/w$	-1	-1	0	0	0
y_4	0.5 ↓	0.7	1	0	1
y_5	0.9	0.5	0	1	1
$1/w$	0	-4/9	0	10/9	10/9
y_4	0	19/45 ↓	1	-5/9	4/9
y_1	1	5/9	0	10/9	10/9
$1/w$	0	0	20/19	10/19	30/19
y_3	0	1	45/19	-25/19	20/19
y_1	1	0	25/19	315/171	10/19

Duaalse ülesande (6.19)–(6.21) lahend on

$$x_1 = \frac{20}{19} \text{ ja } x_2 = \frac{10}{19}. \quad (6.27)$$

Pärast asendamist $p_1 = v \cdot x_1$ ja $q_1 = w \cdot y_1$ saame mängijale A optimaalseks segastrateegiaks

$$p_1 = \frac{19}{30} \cdot \frac{20}{19} = \frac{2}{3} \text{ ja } p_2 = \frac{19}{30} \cdot \frac{10}{19} = \frac{1}{3} \quad (6.28)$$

Mängija B optimaalne segastrateegia on

$$q_1 = \frac{1}{3} \text{ ja } q_3 = \frac{2}{3} \quad (6.29)$$

Firmade A ja B konkurents on optimaalne tulemus, kui firma A pakub turul $2/3$ osas kaupa A_1 ning $1/3$ osas kaupa A_2 . Firmal B on otstarbekas pakkuda $1/3$ osas kaupa B_1 ja $2/3$ osas kaupa

B_3 . Sellisel juhul firma A garanteeritud võit $v = \frac{19}{30} = 0.63$.

Seega firmal A õnnestub hõlvata 63% turust ning firmal B 37%.

6.7. Mäng loodusega

Kui kahe mängija puhul üks mängijatest on mängu tulemuse suhtes passiivne, siis sellist mängu nimetatakse *mänguks loodusega*. Passiivseteks vastasmängijateks võivad olla näiteks ilmastikutingimused, mood, tarbijate käitumise muutumine jne.

6.7.1. Loodusega mängu maatriks

Tähistame aktiivse mängija, kes strateegiaid valib, A -ga. Mängija A strateegiad on A_1, A_2, \dots, A_m . Passiivse mängija ehk looduse seisundid (strateegiad) on L_1, L_2, \dots, L_n . Aktiivse mängija A võimalik võit i -nda strateegia kasutamisel, kui passiivne mängija L vastab seisundiga L_j , on a_{ij} . Mängu maatriks on toodud tabelis 6.12.

Tabel 6.12

	L_1	L_2	...	L_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

6.7.2. Riski maatriks

Kui mängija A teaks eelnevalt looduse võimalikku seisundit L_j , siis valiks ta sobivaima strateegia A_i selliselt, et saadav võit oleks suurim:

$$\beta_i = \max_j a_{ij} \quad (6.30)$$

Mängija A võimalik kaotus (r) strateegia A_i rakendamisel looduse seisundi L_j korral on

$$r_{ij} = \beta_i - a_{ij} \geq 0 \quad (6.31)$$

Mängu maatriksi $A = \{a_{ij}\}$ võib asendada võimalike kaotuste maatriksiga $R = \{r_{ij}\}$. Nimetame seda edaspidi *riski maatriksiks*. Tabeli 6.12 mängu maatriksile vastav riski maatriks on esitatud tabelis 6.13.

Tabel 6.13

	L_1	L_2	...	L_n
A_1	$\beta_1 - a_{11}$	$\beta_2 - a_{12}$...	$\beta_n - a_{1n}$
A_2	$\beta_1 - a_{21}$	$\beta_2 - a_{22}$...	$\beta_n - a_{2n}$
...
A_m	$\beta_1 - a_{m1}$	$\beta_2 - a_{m2}$...	$\beta_n - a_{mn}$

Riski maatriksi element r_{ij} väljendab aktiivse mängija võimalikku kaotust, kui ta kasutab strateegiat A_i ning passiivne mängija loodus vastab omapoolse seisundiga L_j .

6.7.3. Loodusega mängu näide

Tabelis 6.14 on toodud puuviljakaubandusega tegeleva firma võimalik kasum strateegiate A_1, A_2, A_3 (erinevad kaubapakkumised) kasutamisel erinevate ilmastikutingimuste L_1, L_2, L_3 ja L_4 korral.

Tabel 6.14

	L_1	L_2	L_3	L_4
A_1	3	4	4	9
A_2	5	8	3	6
A_3	4	6	5	2

Mängija A maksimaalsed võidud erinevate ilmastikutingimuste puhul on järgmised:

$$\beta_1 = 5, \beta_2 = 8, \beta_3 = 5, \beta_4 = 9 \quad (6.32)$$

Mängija A võimalikud kaotused (edaspidi nimetame neid riskideks):

$$r_{11} = 5 - 3 = 2 \quad (6.33)$$

$$r_{24} = 9 - 6 = 3 \text{ jne.}$$

Puuviljakaubandusega tegeleva firma võimalikud kaotused ehk riski maatriks on tabelis 6.15.

Tabel 6.15

	L_1	L_2	L_3	L_4
A_1	2	4	1	0
A_2	0	0	2	3
A_3	1	2	0	7

Mängijal A on otstarbekas valida strateegia, mille korral maksimaalne risk on väikseim. Nagu näeme tabelist 6.15, on mängijal A strateegia A_1 korral maksimaalne risk $r_{12} = 4$, strateegia A_2 korral $r_{24} = 3$ ning strateegia A_3 korral $r_{34} = 7$. Väikseim maksimaalne risk on strateegia A_2 korral:

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min\{4, 3, 7\} = 3 \quad (6.34)$$

Seega ilmastikutingimusi arvestades on firma risk väikseim, kui valitakse strateegia A_2 .

Kui looduse L võimalike seisundite L_1, L_2, \dots, L_n esinemise tõenäosused q_1, q_2, \dots, q_n $\left(\sum_{j=1}^n q_j = 1 \right)$ on teada, siis mängija A

keskmine võit strateegia A_i korral (\bar{a}_i) on leitav järgmiselt:

$$\bar{a}_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j \quad (6.35)$$

Üldjuhul on otstarbekas valida strateegia, mille korral mängija keskmine võit \bar{a}_i on suurim:

$$\bar{a}^* = \max_i \bar{a}_i \quad (6.36)$$

Strateegia võib valida ka riski maatriksi alusel:

$$r_i^* = \min_j \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}q_j \quad (6.37)$$

Firmal on otstarbekas kasutada strateegiat, mille korral keskmine risk on väikseim. Strateegia, mille korral aktiivse mängija keskmine võit (\bar{a}^*) on suurim, langeb kokku strateegiaga, mille puhul keskmine risk (\bar{r}^*) on väikseim.

Tabelis 6.15 esitatud mängu maatriksi kohta on täiendavalt teada, et erinevad ilmastikuolud L_1, L_2, L_3 ja L_4 esinevad vastavalt tõenäosustega $q_1 = 0.1, q_2 = 0.2, q_3 = 0.5$ ja $q_4 = 0.2$. Sel juhul keskmised võidud erinevate strateegiate kasutamisel on järgmised:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= 0.1 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4 + 0.2 \cdot 9 = 4.9 \\ \bar{a}_2 &= 0.1 \cdot 5 + 0.2 \cdot 8 + 0.5 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 4.8 \\ \bar{a}_3 &= 0.1 \cdot 4 + 0.2 \cdot 6 + 0.5 \cdot 5 + 0.2 \cdot 2 = 4.5\end{aligned}\tag{6.38}$$

Suurim keskmine võit on strateegia A_1 kasutamise korral. Seda strateegiat võib lugeda firmale sobivaimaks.

Sama tulemuseni jõuame ka riski maatriksi alusel. Keskmised riskid erinevate strateegiate kasutamisel on:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= 0.1 \cdot 2 + 0.2 \cdot 4 + 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 = 1.5 \\ \bar{r}_2 &= 0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0 + 0.5 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 = 1.6 \\ \bar{r}_3 &= 0.1 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.5 \cdot 0 + 0.2 \cdot 7 = 1.9\end{aligned}\tag{6.39}$$

Väikseim keskmine risk on samuti strateegia A_1 korral, mis kinnitab veel kord, et seda strateegiat võib lugeda sobivaimaks puuviljakaubandusega tegelevale firmale.

6.7.4. Erinevad kriteeriumid mängu tulemuse hindamisel

Otsuste langetamiseks strateegiate valikul ning mänguna formuleeritud konfliktsituatsiooni võimalike tulemuste kvantitatiivseks hindamiseks on kasutusele võetud erinevaid hindamiskriteeriume.

Analüüsimise erinevate hindamiskriteeriumide rakendamist tabelis 6.16 toodud loodusega mängu maatriksi, mille elemendid a_{ij} tähistavad aktiivse mängija võimalikke võite looduse erinevate

seisundite korral, ning sellele vastava riski maatriksi (tabel 6.17) alusel.

Tabel 6.16

	L_1	L_2	L_3	L_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Tabel 6.17

	L_1	L_2	L_3	L_4
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Max min-i ehk Waldi kriteerium.

Selle kriteeriumi kohaselt mängija A iga valiku korral on arvestatud ka kõige halvema võimalusega ning mängija A teeb valiku, mille puhul see halvim tulemus on võimalikult hea:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} \quad (6.40)$$

Tabelis 6.16 toodud mängu maatriksi kohaselt aktiivse mängija A garanteeritud võit strateegia A , rakendamisel on:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \quad (6.41)$$

Waldi kriteeriumi kohaselt on mängija A parim valik, mille korral saadav kasum on 3:

$$W = \max_i \alpha_i = \max\{1, 3, 2\} = 3 \quad (6.42)$$

Seega on mängijal otstarbekas valida strateegia A_2 .

Min max-i riski ehk Savage'i kriteerium.

Aktiivsel mängijal A on soovitav valida strateegia, mille korral maksimaalne risk on väiksem:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} \quad (6.43)$$

Strateegia A_i rakendamisel on mängija A suurim risk:

$$r_i = \max_j r_{ij} \quad (6.44)$$

Savage'i kriteeriumi rakendamise tulemus tabelis 6.17 andmetega esitatud passiivse mängijaga ($L_j, j = 1, 2, \dots, 4$) mängule:

$$S = \min_i r_i = \min\{4, 6, 7\} = 4 \quad (6.45)$$

Seega Savage'i kriteeriumi kohaselt on aktiivsel mängijal A soovitav valida strateegia A_1 .

Nii max min (Waldi kriteerium) kui min max riski kriteerium (Savage'i kriteerium) on pessimistlikult lähenemiselt tulenevad kriteeriumid. *Waldi* kriteerium lähtub võimalikust võidust, *Savage*'i kriteerium aga riskist.

Hurwiczi kriteerium.

Seda kriteeriumi nimetatakse sageli pessimismi-optimismi kriteeriumiks. Kriteerium on esitatav kujul:

$$H = \max_i \left\{ \gamma \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \max_j a_{ij} \right\} \quad (6.46)$$

Koefitsient γ määratakse eksperthinnangute alusel ning ta on vahemikus: $0 \leq \gamma \leq 1$. Kui $\gamma = 1$, siis Hurwiczi kriteerium teiseb *Waldi* kriteeriumiks:

$$H = W = \max_i \min_j a_{ij} \quad (6.47)$$

Sel juhul on tegemist Hurwiczi kriteeriumist lähtuva *pessimistliku* hinnanguga.

Kui $\gamma = 0$, siis Hurwiczi kriteerium annab *optimistliku* hinnangu, soovitades valida strateegiat järgmiselt:

$$H = \max_i \max_j a_{ij} \quad (6.48)$$

Tabelis 6.16 toodud mängu korral on Hurwiczi kriteeriumist lähtuvalt pessimistlikuima lähenemise korral ($\gamma = 1$) soovitav valida strateegia A_2 ning optimistlikuima lähenemise korral ($\gamma = 0$) strateegia A_1 ($\max\{9, 8, 6\} = 9$).

Võttes koefitsiendi γ väärtuseks 0.5 saame Hurwiczi kriteeriumi kasutades:

$$H = \max_i \{(0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 9), (0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 8), (0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 6)\} = 5.5$$

Sel juhul on otstarbekas valida strateegia A_2 .

Strateegia valikul on alati tegemist subjektiivse hinnanguga. Erinevate kriteeriumide kasutamine võimaldab modelleeritavat majandusprobleemi käsitleda erinevatest aspektidest ning otsuste langetamisel vähendada seega võimalikke vigu. Kokkulangevad tulemused erinevate kriteeriumide kasutamisel on toeks otsuse vastuvõtmisel.

Pessimistlikud kriteeriumid mängu tulemuse hindamisel.

Waldi kriteerium: aktiivsel mängijal on soovitav valida strateegia, mis halvima võimaluse kasutamise korral annab parima tulemuse: $W = \max_i \min_j a_{ij}$

Savage'i kriteerium: aktiivsel mängijal on soovitav valida strateegia, mille korral maksimaalne risk on väikseim: $S = \min_i \max_j r_{ij}$

Pessimismi-optimismi ehk Hurwiczi kriteerium:

$$H = \max_i \left\{ \gamma \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \max_j a_{ij} \right\}$$

Koefitsient γ määratakse eksperthinnangute alusel: $0 \leq \gamma \leq 1$.

Kui $\gamma = 1$, siis $H = W = \max_i \min_j a_{ij}$ (pessimistlik hinnang)

Kui $\gamma = 0$, siis $H = \max_i \max_j a_{ij}$ (optimistlik hinnang)

Kokkuvõte

Igapäevases majanduselus on sageli tegemist konfliktsituatsioonide lahendamisega, mille tulemusena tuleb langetada otsus, valides mitmete võimalike otsusevariantide vahel. Matemaatilise distsipliiniina, mille ülesandeks on leida käitumisreeglid ja tegutsemiseeskirju konfliktsituatsiooni lahendamiseks, on üldjuhul defineeritud mänguteooriat. Mänguteooriat kui meetodit tegutsemiseeskirjade leidmiseks ja otsuste langetamiseks saab loomulikult kasutada vaid juhtudel, kui on võimalik koostada konfliktsituatsiooni matemaatilist mudelit ehk mängu.

Mänguteooria kasutamise võimalused ja suunad sõltuvad ülesande püstitusega määratud mängijate aktiivsusest ja nende käsutuses olevast infost. Mängijad on aktiivsed, kui nad valivad ise mänguvõimalusi (käitumisstrateegiaid) mängureeglitega piiritletud variantide hulgast kas juhuslikult (juhuslikud käigud) või isiklike otsuste (isiklikud käigud) alusel. Kui üks mängijatest on mängu tulemuse suhtes passiivne, siis on tegemist nn. mänguga

loodusega. Mäng on täielikult kirjeldatud, kui iga mängija kõikide strateegiate puhul on iga mängija jaoks teada tema kvantitatiivne hinnang mängu tulemusele. Kui kahe isiku mängus ühe mängija võit on teise mängija kaotuseks, siis on tegemist kahe isiku nullsummalise mänguga. Kui mängu jooksul mängijad sooritavad lõpliku arvu käike ning iga käigu puhul on võimalik valida lõpliku arvu variantide vahel, siis on tegemist lõpliku mänguga.

Iga lõpliku täielikult kirjeldatud kahe isiku nullsummalise mängu võib esitada lineaarse planeerimisülesandena ning tema lahendamisel saab kasutada simpleksmeetodit. See suurendab mänguteooria praktilise kasutamise võimalusi mitmesuguste mängudena formuleeritavate majandusprobleemide lahendamisel, öeldes ette käitumise loogika konfliktsituatsiooni korral mõistliku vastasega.

Passiivse mängijaga mängude korral on otstarbekas hinnata aktiivse mängija võimalikku kaotust konfliktsituatsioonis ning kasutada erinevaid kriteeriume (*max min*-i ehk Waldi kriteerium, *min max*-i riski ehk Savage'i kriteerium, Hurwiczi kriteerium jt.) mängu tulemuse hindamiseks ning sobivaimate strateegiate valikuks. Strateegiate valikul on tegemist subjektiivsete hinnangutega. Erinevate kriteeriumide kasutamine võimaldab modelleeritavat majandusprobleemi käsitleda erinevatest aspektidest ning vähendada seega võimalikke vigu otsuste langetamisel. Kokkulangevad tulemused eri kriteeriumide kasutamisel on toeks otsuste vastuvõtmisel.

7. VÕRKPLANEERIMINE

7.1. Võrkplaneerimise olemus ja kasutamine

Praktilises majandustegevuses tuleb sageli koordineerida mitmeid omavahel seotud töid ja töödekomplekse, kusjuures tavaliselt on eesmärgiks kõigi tööde lõpetamine mingiks etteantud tähtajaks või nende võimalikult varajane lõpetamine. Sellisteks kompleksseteks töödeks võivad olla mitmesugused ehitus- ja remonditööd, ettevõtte majandustegevuse auditeerimine, organisatsiooni ümberstruktureerimine, selle tegevuse reorganiseerimine jne.

Tööde kompleks koosneb tavaliselt suurest arvust üksiktöödest. Neist mõningaid saab teha üheaegselt, teisi aga ei saa enne alustada, kui teatud tööd on lõpetatud. Arukas majandusnimene koostab enne selliste tööde kallale asumist tööde läbiviimise plaani ehk projekti. Sellisel juhul võib tööde kompleksi asemel rääkida ka lihtsalt *projektist*.

Projekti elluviimisel on oluline teada vastust järgmistele küsimustele:

- millal tuleb üksiktöid alustada ja millal lõpetada;
- millised üksiktööd võivad takistada projekti õigeaegset elluviimist;
- milliseid töid tuleks forsseerida ning kuidas selleks olemasolevaid ressursse kasutada.

Üheks matemaatiliseks meetodiks, mis võimaldab saada vastuseid püstitatud küsimustele, on *võrkplaneerimine* ehk *võrkanalüüs*. Vanimad tänapäevani kasutusel olevad võrkplaneerimise

meetodid on välja töötatud USA-s 50-ndate aastate teisel poolel. Nendeks on PERT-meetod (PERT — *Program Evaluation and Review Technique* — plaanide hindamise ja läbivaatamise meetodika) ja kriitilise tee meetod. PERT-meetod töötati välja USA Mereväe Eriuuringute Büroos seoses vajadusega efektiivselt kooskõlastada paljude ettevõtete ja uurimisrühmade tööd rakettide “Polaris” loomisel. Kriitilise tee meetod töötati välja USA keemiafirmade tellimisel nende tehasehoonete ehitamise ning seadmete varustamisega seotud töödekompleksi koordineerimiseks.

7.2. Võrkplaneerimise põhimõisted

Võrkplaneerimise keskne mõiste on *võrkgraafik* (võrkskeem). Võrkgraafik on orienteeritud graaf, mille tipud tähistavad olulisi sündmusi projekti elluviimisel, kaared või jooned aga *töid* ehk *toiminguid*, millest tööde kompleks koosneb. *Sündmus* tähistab tööde lõpetamist, mille tulemusena osutub võimalikuks alustada mõningaid uusi töid.

Sündmusi kujutatakse graafikul tavaliselt ringidena, mille sisse märgitakse sündmuste järjekorranumbrid. Sündmusi *i* ja *j* ühendavad tööd ehk toimingud tähistatakse graafikul tavaliselt kaare või joonega. Kaare (joone) juurde märgitakse töö tegemiseks kuluv keskmine aeg ehk töö kestus t_{ij} .

Peale *tegelike tööde* (näiteks kauba kohalevedu avatavasse kauplusesse) on veel *oote-, haldus- ja näivtööd*. Ootamine (ootetöö) on enamasti seotud töö tehnoloogiaga ning selle kestust ei saa organisatsiooniliste abinõudega muuta. Näiteks tuleb oodata värvi kuivamist või betooni kivistumist. Mingeid ressurse sellel ajal ei vajata. Haldustööks on tavaliselt mitmesuguste dokumentide hankimine, kooskõlastamine, kinnitamine. Selle töö kestust on võimalik muuta organisatsiooniliste abinõudega. Näivtöö ei vaja ressurse ega aega. Selle sissetoomi-

sega saab määrata sündmuste ajalist järgnevust ning vältida mitut üheaegselt teostatavat tööd kahe sündmuse vahel. Näivtööga saab ühendada sündmuse, mis ei kuulu samasse tegelike tööde ahelasse, aga siiski on teineteisega seotud. Võrkgraafikule kantakse näivtoiming tavaliselt katkendliku joonega (kaarega) --->, millele töö kestuseks on märgitud null.

Võrkgraafik on orienteeritud graaf, mille tipud tähistavad olulisi sündmuse võrkgraafiku koostamisele aluseks oleva projekti elluviimisel, kaared (jooned) tähistavad töid ehk toiminguid, millest projekt koosneb.

Võrkgraafiku tööd:

- tegelik töö,
- haldustöö,
- näivtöö (--->).

7.3. Võrkgraafiku koostamine

Võrkgraafiku koostamisele eelneb projekti koostamine. Projektis pannakse kirja kõik lõppeesmärgi saavutamiseks vajalikud tööd, nende järgnevus, omavahelised seosed ning kestus. Kui tööde kestus ei ole eelnevalt normeeritud või tehnoloogiaga määratud (näiteks aeg värvi kuivamiseks), tuleb selle leidmiseks kasutada eksperthinnanguid. Projekti alusel koostatakse võrkgraafik.

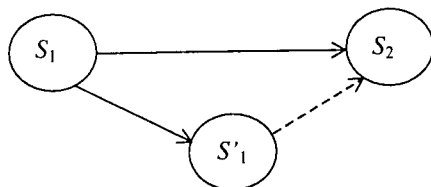
Võrkgraafiku koostamisel tuleb silmas pidada järgmisi põhilisi nõudeid:

- 1) kahe sündmuse S_1 ja S_2 vahel võib olla ainult üks töö (joonis 7.1). Kui mingil põhjusel on vajalik sündmuste

vahel kahe töö olemasolu, siis tuleb sisse tuua näivtöö (--->) ja täiendav sündmus S'_1 (joonis 7.2);



Joonis 7.1

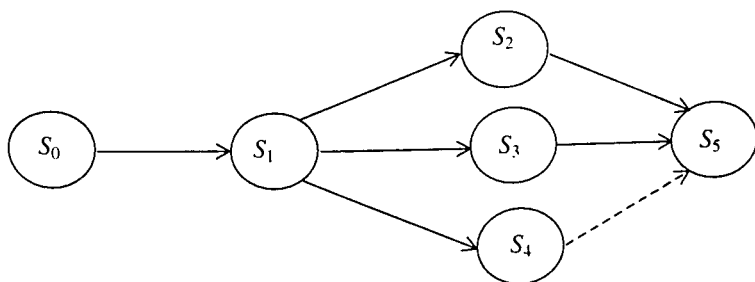


Joonis 7.2

- 2) sündmused ja tööd ei tohi võrkgraafikul moodustada tsüklit;
- 3) kõik sündmused võrkgraafikul (peale esimese) peavad omama sisenevat tööd;
- 4) kõik sündmused võrkgraafikul (peale viimase) peavad omama väljuvat tööd. Kui see nii ei ole ja on tekkinud nn. tupik, siis tuleb sisse tuua näivtöö (joonis 7.3);
- 5) võrkgraafik kulgeb vasakult paremale. Sündmused võib nummerdada suvaliselt, soovitatavalt selliselt, et väiksema numbriga sündmuse toimumise võimalikkus kunagi ei sõltu suurema numbriga sündmuste toimumisest.

Toodud nõuete täidetuse korral sündmust j ja tööd (i, j) nimetatakse sündmusele k eelnevaks sündmuseks, kui võrkgraafikus leidub tee (j, \dots, k) . Sündmust k nimetatakse siis omakorda sündmusele j ja tööle (i, j) järgnevaks sündmuseks. Kui võrk-

graafikus leidub töö (i, j) , siis öeldakse, et sündmus i eelneb vahetult sündmusele j ja sündmus j järgneb vahetult sündmusele i . Töö (i, j) kohta öeldakse, et ta eelneb tööle (k, s) või töö (k, s) järgneb tööle (i, j) , kui võrkgraafikus leidub tee (j, \dots, k) . Kui $j = k$, siis on nende tööde puhul tegemist vahetu eelnevuse või vahetu järgnevusega. Töö (i, j) kestust t_{ij} tõlgendatakse kaare (i, j) pikkusena. Vastavalt sellele nimetatakse võrkgraafikusse kuuluva mistahes tee läbimiseks kuluvat aega selle tee pikkuseks.



Joonis 7.3

Projekti elluviimist interpreteeritakse kui liikumist mööda võrkgraafikut algsündmusest lõppsündmuseni, kusjuures iga kaar (töö) tuleb läbida noole suunas parajasti üks kord. Kaari (tööd), mille hulgas ükski ei eelne teisele, võib läbida üheaegselt, kuid ühegi kaare (töö) läbimist ei saa alustada enne, kui on läbitud kõik eelnevad kaared (tehtud eelnevad tööd).

Võrkgraafiku *analüüs* võimaldab selgitada aja, mille jooksul on reaalselt võimalik kõik tööd ära teha ning seega jõuda lõppeesmärgini. Samuti saab selgitada ka võimalikud ajareservid iga üksiktöö kohta. Viimast on eriti oluline teada, sest igapäevases elus tuleb sageli ette asjaolusid (töötajate haigestumine, ilma kapriisid, varustamisraskused jt.), mis ei võimalda alati plaanili-

sest töö kestusest kinni pidada. Võimaliku ajareservi teadmine iga töö puhul annab juhile võimaluse operatiivselt töökorraldust muuta ning olemasolevaid ressursse selliselt ümber paigutada, et oleks võimalik kõik projektiga määratud tööd õigeaks ajaks lõpetada.

Põhireeglid võrkgraafiku koostamisel:

- kahe sündmuse vahel võib olla ainult üks töö
- sündmused ja tööd ei tohi võrkgraafikul moodustada tsüklit
- kõik sündmused (peale viimase) peavad omama väljuvat tööd ning kõik sündmused (peale esimese) peavad omama sisenevat tööd
- võrkgraafik kulgeb vasakult paremale

7.4. Tööde projekt ja sellele vastav võrkgraafik

Koostame näitena võrkgraafiku tööde koordineerimiseks seoses suvise müügipaviljoni avamisega. Tööde tegemise aluseks on projekt, mis sisaldab müügipaviljoni avamiseks vajalikke sündmusi ning neid sündmusi ühendavaid töid.

Sündmused

- 0 – idee avada suvine müügipaviljon;
- 1 – asukoht välja valitud;
- 2 – krunt renditud;
- 3 – müügipaviljoni projekt tellitud;
- 4 – müügipaviljoni projekt kätte saadud;
- 5 – müügipaviljon paigaldatud;
- 6 – ümbrus korrastatud;
- 7 – töötajad palgatud;

- 8 – kaup hangitud;
 9 – müügipaviljon sisustatud ja kaubaga varustatud;
 10 – töötajad välja õpetatud;
 11 – esmane reklaam tehtud;
 12 – müügipaviljon avatud.

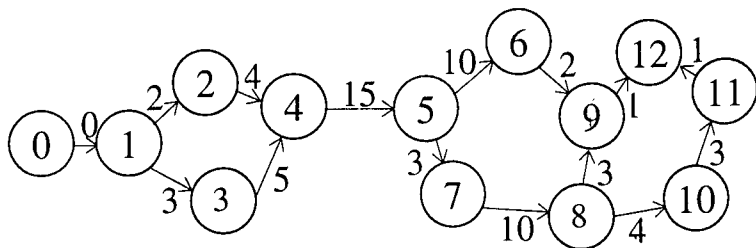
Sündmusi S_1, S_2, \dots, S_{12} ühendavad tööd ja nende kestused on koondatud tabelisse 7.1.

Tabel 7.1

Suvised müügipaviljoni avamiseks vajalikud tööd ja nende kestused

Töö number	Töö nimetus	Töö kestus
(1, 2)	krundi rentimine	2 päeva
(1, 3)	müügipaviljoni projekti tellimine	3 päeva
(2, 4)	krundi ettevalmistamine	4 päeva
(3, 4)	müügipaviljoni projekti tegemine	5 päeva
(4, 5)	müügipaviljoni paigaldamine	15 päeva
(5, 6)	ümbruse korrastamine (valgustus, haljastus)	10 päeva
(5, 7)	töötajate palkamine	3 päeva
(6, 9)	ettevalmistused kauba paigutamiseks (riiulid, mööbel, seadmed)	2 päeva
(7, 8)	kauba hankimine	10 päeva
(8, 9)	töö kaubaga (kohale paigutamine, kujundus)	3 päeva
(8, 10)	töötajate väljaõpe teenindamiseks ja reklaamitöö tegemiseks	4 päeva
(10, 11)	reklaamitöö	3 päeva
(11, 12)	ettevalmistused avamiseks	1 päev
(9, 12)	kauba ettevalmistamine esimeseks müügipäevaks	1 päev

Lähtudes müügipaviljoni avamise projektist ning järgides võrkgraafiku koostamise nõudeid on koostatud müügipaviljoni avamiseks vajalikke sündmusi ja neid ühendavaid töid koordineeriv võrkgraafik (joonis 7.4).

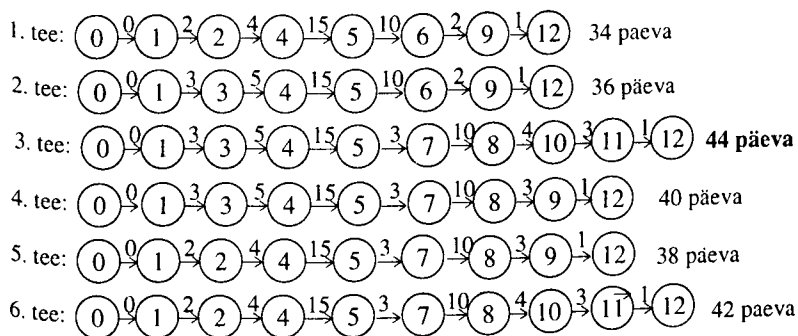


Joonis 7.4. Võrkgraafik suvise müügipaviljoni avamiseks.

Kui võrkgraafik on koostatud, seisneb järgnev töö selle analüüsimises. Saab leida töödekompleksi lõpetamiseks kuluva aja ja ajareservid nii kogu töödekompleksi kui iga töö kohta eraldi ning seejärel analüüsida võimalusi kogu töödekäigu kiirendamiseks. Toodud müügipaviljoni näite puhul on tegemist väikese objektiga, teostatavaid töid on vähe ning nende omavahelised seosed suhteliselt lihtsad. Sellise objekti juhtimine on jõukohane ka võrkgraafikut kasutamata. Kuid kui teostatavaid töid on sadu, nad on tihedates omavahelistes seostes, on erineva kestusega ning nende teostamine nõuab erinevaid tehnoloogilisi ja organisatsioonilisi lahendusi jne., siis jääb juhi intuitsioonist ja kogemustest enamasti vajaka. Siin saab olulist abi anda võrkplaneerimine ning koostatud võrkgraafiku oskuslik kasutamine. Suuremahuliste võrkgraafikute koostamine ja analüüs toimub enamasti arvuti abile toetuvalt.

7.5. Kriitiline tee

Töödega ühendatud sündmused algsündmusest lõppsündmuseni moodustavad võrkgraafiku tee. Võrkgraafikul on tavaliselt mitu teed, neist pikima kestusega on *kriitiline tee*. Kriitilise teega on määratud lühim aeg, millega kõik võrkgraafikule kantud tööd saavad tehtud. Kui kriitilisel teel oleva sündmuse (S_i) toimumis-aeg (T_i) hilineb, siis hilineb kogu töödekompleksi tähtajaline valmimine. Joonisel 7.5 toodud võrkgraafikul on järgmised teed.



Joonis 7.5. Võrkgraafiku teed.

Suvised müügipaviljoni avamisega seotud töid koordineeriva võrkgraafiku kriitilise tee pikkuseks on 44 päeva. See on ka lühim aeg, mille jooksul on võimalik kõik tööd müügipaviljoni avamiseks ära teha. Sündmustel ja töödel, mis asuvad kriitilisel teel, ei ole ajareservi ning nende toimumine ei tohi hilineda. Küll aga omavad ajareservi need tööd ja sündmused, mis asuvad mittekriitilistel teedel. Seda ajareservi nimetatakse *täielikuks ajareserviks*. Joonisel 7.5 toodud võrkgraafikul on 5 mittekriitilist teed, neist esimesel teel on täielik ajareserv 10 päeva ($44 - 34 = 10$), teisel teel 8 päeva, kolmandal teel 4 päeva, neljandal 6 päeva ja viiendal 2 päeva.

Peale kriitilise teega määratud töödekompleksi lõpetamise tähtaaja võib olla ette antud ka mõni muu tähtaeg, millal peab toimuma lõppsündmus, s.t. kõik tööd peavad saama lõpetatud. Seda tähtaega võib nimetada *direktiivajaks*. Kui direktiivaeg on pikem kui kriitiline tee, siis võivad ajareservi omada ka kriitilisel teel olevad sündmused. Kui direktiivaeg on kriitilisest teest lühem, tuleb leida täiendavaid reserve töödekompleksi varasemaks lõpetamiseks.

Kriitiline tee on võrkgraafiku pikim tee. Seostega on määratud lühim aeg, mille jooksul kõik võrkgraafikule kantud tööd saavad tehtud.

Kriitilisel teel olevatel sündmustel ei ole ajareservi. Mittekriitilisel teel olevatel töödel on ajareserv, mida nimetatakse täielikuks ajareserviks.

Direktiivaeg on administratiivselt fikseeritud aeg projekti tegemiseks. Kui direktiivaeg on pikem kriitilisest teest, siis on ajareserv ka kriitilisel teel olevatel sündmustel.

7.6. Sündmuste varaseimad ja hiliseimad toimumisajad

Võrkgraafiku iga sündmuse toimumisaeg sõltub temale eelnevate sündmuste alustamis- ja lõpetamistähtaegadest. Eeldades, et algsündmus toimus ajamomendil 0, saab sündmusele i leida tema varaseima ja hiliseima toimumisaja T_i^v ja T_i^h .

Sündmuse S_i varaseim toimumisaeg on algsündmusest S_0 sündmuseni S_i viiva pikima tee pikkus, s.o. selle tee läbimiseks kuluv aeg.

Suvised müügipaviljoni avamisega (joonis 7.4) seotud sündmuste varaseimad toimumisajad on seega järgmised:

$$T_1^v = 0$$

$$T_2^v = 2$$

$$T_3^v = 3$$

$$T_4^v = \max\{6; 8\} = 8$$

$$T_5^v = 8 + 15 = 23$$

$$T_6^v = 23 + 10 = 33$$

$$T_7^v = 23 + 3 = 26$$

$$T_8^v = 26 + 10 = 36$$

$$T_9^v = \max\{35; 39\} = 39$$

$$T_{10}^v = 36 + 4 = 40$$

$$T_{11}^v = 40 + 3 = 43$$

$$T_{12}^v = \max\{40; 44\} = 44$$

Lõppsündmuse varaseim toimumisaeg on ühtlasi lühim aeg, mille jooksul saab kogu projekti ellu viia. See ongi kriitilise tee pikkus.

Iga sündmuse *hiliseim toimumisaeg* arvutatakse lähtuvalt direktiivajast T^{dir} . See on lõppsündmuse hiliseim toimumisaeg. Direktiivajaks võib võtta ka kriitilise tee pikkuse T^{kr} . Sellisel juhul kriitilisel teel olevatel sündmustel ajareservi ei ole. Sündmuse i hiliseim toimumisaeg T_i^h võrdub direktiivaja (või kriiti-

lise tee pikkuse) ja sündmusest i lõppsündmuse viiva pikima tee pikkuse w_i vahega:

$$T_i^h = T^{dtr} - w_i \quad (7.1)$$

$$\text{või } T_i^h = T^{kr} - w_i \quad (7.2)$$

Lõppsündmuse hiliseim toimumisaeg võrdub direktiivajaga või kriitilise tee pikkusega, kui $T^{dtr} = T^{kr}$.

Tabelis 7.2 on toodud suvise müügipaviljoni avamist koordineerival võrkgraafikul (joonis 7.4) sündmuste varaseimad ja hiliseimad toimumisajad ja nende ajareservid R_i :

$$R_i = T_i^h - T_i^v \quad (7.3)$$

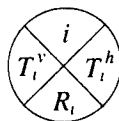
Tabel 7.2

Sündmuste varaseimad ja hiliseimad toimumisajad

Sündmus (S_i)	Varaseim toimumisaeg (T_i^v)	Hiliseim toimumisaeg (T_i^h)	Ajareserv ($R_i = T_i^h - T_i^v$)
1	0	44-44=0	0
2	2	44-40=4	2
3	3	44-41=3	0
4	8	44-36=8	0
5	23	44-21=23	0
6	33	44-3=41	8
7	26	44-18=26	0
8	36	44-8=36	0
9	39	44-1=43	4
10	40	44-4=40	0
11	43	44-1=43	0
12	44	44-0=44	0


Ajareservi omavad vaid sündmused S_2 (krunt renditud), S_6 (müügipaviljoni ümbrus korrastatud) ja S_9 (müügipaviljon sisustatud ja kaubaga varustatud) vastavalt $R_2 = 2$, $R_6 = 8$ ja $R_9 = 4$ päeva.

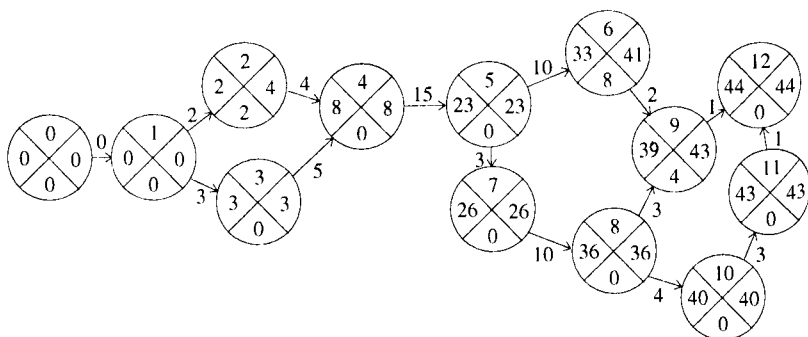
Sündmuse tähistavad ringid esitatakse võrkgraafikudel sageli ka neljasektorilistena (joonis 7.6), kuhu on kantud sündmuse number (i), sündmuse varaseim toimumisaeg T_i^v , sündmuse hiliseim toimumisaeg T_i^h ja ajareserv R_i .



Joonis 7.6. Sündmuse i esitamine võrkgraafikul.

Sündmust S_2 võib seega võrkgraafikul kujutada järgmise neljast

sektorist koosneva ringina , kus on lisaks sündmuse numbrile ($i = 2$) ära toodud ka tema varaseim ($T_i^v = 2$) ja hiliseim ($T_i^h = 4$) toimumisaeg ja ajareserv ($R_i = 2$). Joonisel 7.7 on toodud suvise müügipaviljoni avamist koordineeriv võrkgraafik, kus sündmuse kujutavad ringid sisaldavad lisaks sündmuse numbrile ka infot toimumisaegade ja ajareservide kohta. Selliselt esitatud võrkgraafik on mugav praktiliseks kasutamiseks.



Joonis 7.7. Sündmuste toimumisaegadega ja ajareservidega võrkgraafik.

Sündmuse S_i varaseim toimumisaeg on algsündmusest S_0 sündmuseeni S_i viiv pikim tee (tee läbimiseks kuluv aeg). Lõppsündmuse varaseim toimumisaeg on kriitilise tee pikkus.

Sündmuse S_i hiliseim toimumisaeg on direktiivaja või kriitilise tee ja sündmusest S_i lõppsündmuseeni viiva pikima tee vahe.

Sündmuse S_i ajareserv on tema hiliseima ja varaseima toimumisaja vahe.

7.7. Tööde alustamise ja lõpetamise tähtajad

Sündmuste toimumisaegadega on määratud ka tööde lõpetamise ja alustamise tähtajad. Igale tööle saab leida tema alustamise ja lõpetamise varaseima ja hiliseima tähtaja.

Töö (i, j) varaseim alustamistähtaeg t_{ij}^{va} on sündmuse S_i varaseim toimumisaeg, seega $t_{ij}^{va} = T_i^v$. Sama töö hiliseim lõpetamistähtaeg t_{ij}^{hl} võrdub aga sündmuse S_j hiliseima toimumisaega $t_{ij}^{hl} = T_j^h$. Töö (i, j) varaseim lõpetamistähtaeg t_{ij}^{vl} on leitav sündmuse S_i varaseima alustamisaja ja töö kestuse summana

$$t_{ij}^{vl} = T_i^v + t_{ij} \quad (7.4)$$

ning hiliseim alustamistähtaeg (t_{ij}^{ha}) on määratud sündmuse S_j hiliseima lõpetamistähtaaja ja töö kestuse vahena

$$t_{ij}^{hl} = T_j^h - t_{ij} \quad (7.5)$$

Tabelis 7.3 on toodud suvise müügipaviljoni avamisega seotud tööde alustamise ja lõpetamise tähtajad ja ajareservid.

Igal tööel on olemas täielik ja vaba ajareserv. Töö (i, j) täielik ajareserv on töö alustamise (või lõpetamise) hiliseima ja varaseima tähtaja vahe. Ta näitab, kui palju võib pikeneda töö kestus, ilma et see veel tingiks direktiivaja ületamist (kui teiste eelnevate ja järgnevate tööde kestused ei pikene). Sündmuste S_i ja S_j toimumisaegade kaudu saab leida tööle (i, j) täieliku ajareservi:

$$r_{ij}^{taelik} = T_j^h - T_i^v - t_{ij}, \quad (7.6)$$

kus

T_j^h – sündmuse S_j hiliseim toimumisaeg;

T_i^v – sündmuse S_i varaseim toimumisaeg;

t_{ij} – töö (i, j) kestus.

Tabel 7.3

Tööde alustamise ja lõpetamise tähtsajad

Töö (<i>i, j</i>)	Töö kestus t_{ij}	Töö alustamine		Töö lõpetamine		Ajareserv	
		varasem $t_{ij}^{vu} = T_i^v$	hilisem $t_{ij}^{ha} = T_i^h - t_{ij}$	varasem $t_{ij}^{vl} = T_i^v + t_{ij}$	hilisem $t_{ij}^{hl} = T_i^h$	täielik $T_j^h - T_i^v - t_{ij}$	vaba $T_j^v - T_i^v - t_{ij}$
1.2	2	0	2	2	4	2	0
1.3	3	0	0	3	3	0	0
2.4	4	2	4	6	8	2	2
3.4	5	3	3	8	8	0	0
4.5	15	8	8	23	23	0	0
5.6	10	23	31	33	41	8	0
5.7	3	23	23	26	26	0	0
7.8	10	26	26	36	36	0	0
6.9	2	33	41	35	43	8	0
8.9	3	36	40	39	43	4	0
9.12	1	39	39	40	44	4	4
8.10	4	36	36	40	40	0	0
10.11	3	40	40	43	43	0	0
11.12	1	43	43	44	44	0	0

Töö (i, j) vaba ajareserv (r_{ij}^{vaba}) on ajavahemik, mille võrra võib hilineda selle töö lõpetamine, ilma et lükkuks edasi sündmuse S_j varaseim toimumisaeg:

$$r_{ij}^{vaba} = T_j^v - T_i^v - t_{ij}, \quad (7.7)$$

kus

T_j^v — sündmuse S_j varaseim toimumisaeg;

T_i^v — sündmuse S_i varaseim toimumisaeg.

Vaba ajareserv ei ületa kunagi täielikku ajareservi.

Ajareservide teadmine võimaldab tööde kompleksi juhtimisel ressursse erinevate tööde vahel selliselt ümber paigutada, et oleks tagatud töödekompleksi tähtajaline lõpetamine.

Kui võrkgraafiku kriitiline tee on pikem kui projekti elluviimiseks ettenähtud aeg (direktiivaeg), siis tuleb leida võimalusi mõnede tööde kiiremaks tegemiseks. Üheks võimaluseks on kriitiliselt üle vaadata tööde kestused ning selgitada tingimusi nende kiiremaks tegemiseks. Töö kestus sõltub enamasti (kuid mitte alati) kasutada olevatest ressurssidest. Kui ressursid on piiratud, tuleb võrkgraafiku koostamisel sellega arvestada ning koostada tööde graafik selliselt, et projekt oleks piiratud ressursside korral elluviidav lühima ajaga. Selleks saab kasutada graafiku tihendamist võimaldavaid võtteid. Kui projekti elluviimiseks on võimalik juurde saada täiendavaid ressursse, saab lahendada nende ratsionaalsele kasutamisele suunatud võrkgraafiku optimeerimise ülesandeid.

Töö (i, j) varaseim alustamistähtaeg on sündmuse S_i varaseim toimumisaeg.

Töö (i, j) hiliseim alustamistähtaeg on sündmuse S_j hiliseima lõpetamistähtaja ja töö kestuse t_{ij} vahe.

Töö (i, j) varaseim lõpetamistähtaeg on sündmuse S_i varaseima alustamistähtaja ja töö kestuse t_{ij} summa.

Töö (i, j) hiliseim lõpetamistähtaeg on sündmuse S_j hiliseim toimumisaeg.

Töö (i, j) täielik ajareserv on töö alustamise (või lõpetamise) hiliseima ja varaseima tähtaja vahe.

Töö (i, j) vaba ajareserv on sündmuste S_j ja S_i varaseimate toimumisaegade ning töö kestuse vahe.

Töö vaba ajareserv ei ületa kunagi täielikku ajareservi!

Kokkuvõte

Majandusmehel tuleb sageli koordineerida mitmeid omavahel seotud töid või töödekomplekse. Tavaliselt on eesmärgiks kõigi tööde lõpetamine mingiks etteantud tähtajaks või nende võimalikult varajane lõpetamine. Et eesmärki saavutada, on oluline teada vastust järgmistele küsimustele:

- millal tuleb üksiktöid alustada ja millal lõpetada;
- millised üksiktööd võivad takistada projekti õigeaegset elluviimist;
- milliseid töid forsseerida ning kuidas selleks kasutada olemasolevaid ressursse.

Matemaatiliseks meetodiks, mis võimaldab püstitatud küsimustele vastuseid saada, on võrkplaneerimine. Võrkplaneerimise põhisuuna on võrkgraafiku koostamine ja analüüs. Võrkgraafik on orienteeritud graaf, mille tipud tähistavad olulisi sündmusi võrkgraafiku koostamisele aluseks oleva projekti elluviimisel

ning tippe ühendavad jooned (kaared) on tööde ehk toimingute tähisteks. Võrkgraafiku pikim tee on kriitiline tee. Sellega on määratud lühim aeg, mille jooksul kõik võrkgraafikule kantud tööd saavad tehtud. Kriitilisel teel asuvatel sündmustel ei ole üldjuhul ajareservi. Neil on ajareserv vaid siis, kui direktiivaeg ehk projekti tegemiseks ettenähtud aeg on kriitilisest teest pikem.

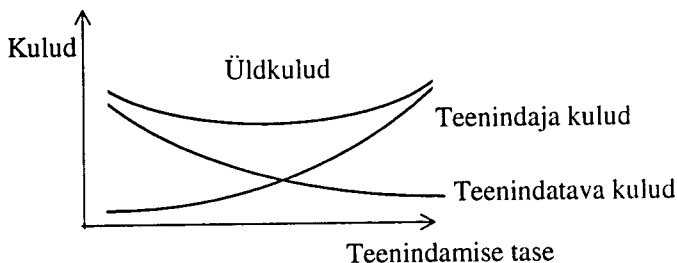
Võrkgraafiku analüüsil selguvad sündmuste varaseimad ja hiliseimad toimumisajad, tööde alustamise ja lõpetamise tähtajad ning võimalikud ajareservid. Saadud info alusel on võimalik langetada otsuseid, kuidas tööde käiku suunata ning selleks ressursse ümber paigutada või võimalusel neid ka juurde muretseda.

8. JÄRJEKORRATEOORIA

8.1. Järjekorrateooria olemus

Järjekorrateooria ehk massteenindusteooria (*Waiting Line Theory, Queceining Theory*) uurimisobjektiks on nähtused, mille sisuks on samalaadsete operatsioonide korduv massiline sooritamine. Korduvaid samalaadseid operatsioone sooritatakse näiteks mingite toodete tegemisel tööpingil, ostjate teenindamisel kaupluses või klientide teenindamisel pangas, autodele tehnohoolduse tegemisel töökojas jne. Taolised massiliselt sooritavad operatsioonid või nende alustamise vajadus sõltuvad tavaliselt juhuslikest asjaoludest. Klientide tulek pankka või kauplusesse on enamasti juhuslik, kliendi teenindamise aeg sõltub samuti juhuslikest asjaoludest (ostu suurus, pangaoperatsiooni keerukus, teenindaja vilumus jne.).

Operatsioonidega seotud juhuslikkus toob endaga kaasa järjekorra või vähemalt selle tekkimise võimaluse. Eesmärgiks on korraldada operatsioonide sooritamine selliselt, et teenindamise kulud ja kulud järjekorrale oleksid vähimad. On vaja leida teatud kompromiss teeninduskulude kahe poole: teenindaja ja teenindatava kulude vahel (joonis 8.1).



Joonis 8.1. Kulud ja teenindamise tase.

Esimesed järjekorrateooria valdkonda kuuluvad tulemused sai taani insener A. K. Erlang (1917. a.). Ta tegeles telefonivõrkude projekteerimisega ning selle töö käigus kerkivate probleemide lahendamisel tegi arvutusi ning jõudis tulemusteni, mis kuulusid järjekorrateooria valdkonda.

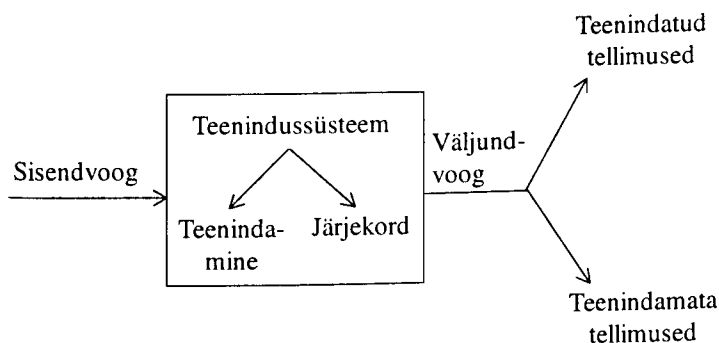
Järjekorrateooria tegeleb massiliselt toimuvate ning juhusest sõltuvate operatsioonidega seotud nähtuste üldiste seaduspärasuste selgitamisega.

Järjekorrateooria uurimisobjektiks on süsteem, milles toimub juhusest sõltuvate operatsioonide korduv sooritamine sellesse süsteemi üldiselt juhuslikult sisenevate objektidega. Järjekorrateooria uurib selliste süsteemide matemaatilise kirjeldamise võimalusi.

8.2. Järjekorrateooria põhimõisted

Järjekorrateooria meetoditega uuritav süsteem on *teenindussüsteem*, milles sooritavat operatsiooni või operatsioonide kompleksi nimetatakse *teenindamiseks*. Teenindussüsteemis on operatsioonide teostajad ehk *teenindajad* (teller pangas, müüja kaupluses, tööpink tehases jne.) ning teenindatavad objektid ehk *tellimused* (klient, töödeldav detail, manipuleeritav seade). Üksteisest sõltumatult iseseisvalt tellimusi täitvaid teenindajaid käsitletakse ka süsteemi *teeninduskanalitena*.

Teenindussüsteemi saabuvad tellimused moodustavad süsteemi *sisendvoo*. Süsteemi saabunud tellimused võivad olla kas järjekorras või teenindamisel (joonis 8.2). Tellimused, mille teenindamine pole veel alanud, moodustavad järjekorra. *Järjekord* on seega süsteemis viibivate tellimuste hulk, mis on teenindamise ootel.



Joonis 8.2. Teenindussüsteem.

Teenindussüsteemist lahkuvad tellimused moodustavad süsteemi *väljundvoo*. Väljundvoog võib peale teenindatud tellimuste sisaldada ka teenindamata tellimusi, mis lahkuvad järjekor-

rast kas kohe saabumisel või pärast mõningat seismist järjekorras. Selliseid tellimusi võib käsitleda nn. *kannatamatute tellimustena*.

Teenindamine — teenindussüsteemis sooritatav operatsioon või operatsioonide kompleks.

Teenindaja — teenindussüsteemi operatsioonide teostaja.

***Tellimus* (teenindatav)** — teenindussüsteemis teenindatav objekt/subjekt.

Teeninduskanal — üksteisest sõltumatult erinevaid tellimusi täitev teenindaja (teenindajad).

Sisendvoog — süsteemi saabuval tellimused (teenindatavad).

Väljundvoog — süsteemist lahkuvad tellimused (teenindatavad).

Järjekord — teeninduse ootel olevate tellimuste hulk süsteemis.

Kannatamatud tellimused — järjekorrast lahkuvad teenindamata tellimused.

8.3. Teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamised näitajad

Teenindussüsteemi funktsioneerimine sõltub üldjuhul juhuslikest asjaoludest. Nii tellimuste saabumine kui ka teenindamiseks kuluv aeg on juhuslikud suurused, mida iseloomustavad andmed juhuslike suuruste iseloomu kohta (keskväärtus, disper-

sioon, jaotusseadused jne.). Sellisteks andmeteks on näiteks ajaühikus saabuvate tellimuste arvu ja ühe tellimuse teenindamiseks kuluva aja keskväärtused ja dispersioonid. Andmete saamiseks tehakse tavaliselt vaatlusi ning tulemuste kvantitatiivseks määratlemiseks kasutatakse statistilist analüüsi.

Järjekorrateooria kasutamine teenindussüsteemide uurimiseks ja nende tegevuse planeerimiseks on võimalik vaid siis, kui on olemas vajalikud andmed teenindussüsteemi iseloomustavate juhuslike suuruste ja nende muutumise iseloomu kohta. Vastasel juhul puudub võimalus teenindussüsteemi võimaliku tegevuse kvantitatiivseks hindamiseks ning tuleb piirduda vaid katsetamisega. Täpsete andmete saamise keerukus on üks põhjus, miks piirdatakse teenindussüsteemide matemaatilisel uurimisel sageli vaid nõ. stabiliseerunud olukorraga. Stabiliseerunud olukorra puhul eeldatakse, et teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamised näitajad on igal ajamomendil samad.

Teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamiselt *järjekorraga, teenindajate koormatusega ning tellimuste rahuldamisega seotud näitajad*. Nende näitajate määramisel ning teenindussüsteemi matemaatilisel uurimisel kasutatakse erinevaid tõenäosusteooria ning diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teooria meetodeid. Käesoleval juhul on suuremat tähelepanu osutatud erinevate majandusprobleemide määratlemisele, mille lahendamiseks saab täiendavat infot järjekorrateooria oskuslikust kasutamisest. Piiratud on vaid selliste olukordadega ja nendele vastavate teenindussüsteemidega, kus kvantitatiivsete tulemuste saamine ei nõua eriti keerulist matemaatilist aparatuuri.

Teenindussüsteemide matemaatilisel uurimisel piirdatakse enamasti stabiliseerunud olukordadega eeldades, et teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamised näitajad ajas ei muutu.

Teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad peamised näitajad:

- teenindussüsteemi koormatus, süsteemi tühiseisaku tõenäosus
- järjekorra tekkimise tõenäosus ja selle pikkuse keskväärts
- tellimuse teenindussüsteemis ja järjekorras oleku keskmine aeg
- ajaühikus rahuldamata jäänud tellimuste arvu keskväärts.

8.4. Lihtne sisendvoog

Teenindussüsteemi matemaatiliseks uurimiseks ning tema tegevust iseloomustavate näitajate leidmiseks on vaja andmeid tellimuste sisendvoo iseloomu kohta. Tellimuste sisenemine teenindussüsteemi on eelduste kohaselt juhuslik protsess. Selle protsessi täielikuks kirjeldamiseks on üldjuhul iga ajamomendi jaoks tarvis teada selleks ajaks järjekorda saabunud tellimuste arvu $X(t)$. Sellisele olukorrale vastava juhusliku funktsiooni struktuur on komplitseeritud. Järjekorrateooria nõuetele vastavate majandusprobleemide formuleerimisel ja nende matemaatilisel uurimisel piirduakse sageli sisendvoo lihtsaima esinemisviisi s.o. *lihtsa sisendvoo* käsitlemisega. *Lihtne sisendvoog on statsionaarne järelmõjuta harilik (ordinaarne) sisendvoog.*

Sisendvoogu nimetatakse *statsionaarseks*, kui mistahes $t > 0$ ja täisarvu $n \geq 0$ korral ajavahemiku $(t_0, t_0 + t)$ vältel täpselt n tellimuse saabumise tõenäosus ei sõltu selle ajavahemiku algmomendist t_0 , küll aga sõltub ajavahemiku pikkusest t ja tellimuste arvust n .

Sisendvoog on *järelmõjuta*, kui mistahes $t > 0$ ja täisarvu $n \geq 0$ korral ajavahemiku $(t_0, t_0 + t)$ jooksul täpselt n tellimuse saabumise tõenäosus ei sõltu enne selle ajavahemiku algmomen-
dini t_0 saabunud tellimuste arvust.

Statsionaarne järelmõjuta sisendvoog on *täielikult kirjeldatuid* kui iga $t > 0$ ja täisarvu $n \geq 0$ puhul on teada, millise tõenäosusega $p_n(t)$ ajavahemiku t (ehk ajavahemiku $(0, t)$) jooksul sise-
neb teenindussüsteemi täpselt n tellimust:

$$p_n(t) = p\{\text{aja } t \text{ vältel saabub } n \text{ tellimust}\} \quad (8.1)$$

On loomulik eeldada, et nulliga võrduva ajavahemiku jooksul tellimusi ei saabu

$$\sum_{n=1}^0 p_n(0) = 0 \quad (8.2)$$

ning iga $t > 0$ puhul mingi arv tellimusi kindlasti saabub:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 \quad (8.3)$$

Toodud eeldustega seondub sisendvoo *harilikkuse* mõiste. Sisendvoog on *harilik*, kui kahe või enama tellimuse praktiliselt üheaegne saabumine on oluliselt vähem tõenäoline kui ühe tellimuse saabumine.

Lihtsa sisendvoo korral ajavahemiku t vältel saabuvate tellimuste arv on kirjeldatav *Poissoni jaotusega* parameetriga λt :

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (8.4)$$

kus

t – ajavahemiku pikkus;

n – ajavahemikus saabuvate tellimuste arv ($n = 0, 1, 2, \dots$);

λ – ajavahemikus saabuvate tellimuste arvu keskvärtus (sisendvoo intensiivsust iseloomustav parameeter).

Ajavahemiku t vältel saabuvate tellimuste arvu keskvärtus on seejuures

$$E(n) = \lambda t \quad (8.5)$$

Lihtne sisendvoog on statsionaarne järelmõjuta harilik sisendvoog.

Lihtne sisendvoog on täielikult kirjeldatud ajaühikus teenindussüsteemi saabuvate tellimuste keskmise arvuga λ . λ on sisendvoo intensiivsust iseloomustav parameeter.

λt on ajavahemiku t vältel teenindussüsteemi saabuvate tellimuste keskmine arv.

8.5. Teenindusaeg

Teenindusaeg ehk teenindamisele kuluv aeg on sisendvoo intensiivsuse kõrval teine oluline teenindussüsteemi iseloomustav näitaja. Teenindusaeg on samuti juhuslik suurus, kuna süsteemi saabuvad tellimused ei ole tavaliselt samaväärsed ning nende teenindamiseks kuluv aeg võib seetõttu erineda. Ka teenindaja olukord mõjutab teenindusaega.

Teenindusaja pikkus on kirjeldatav jaotusfunktsiooniga

$$f(t) = P(s < t), \quad (8.6)$$

mis iga $t > 0$ korral näitab, millise tõenäosusega kestab teenindamine vähem kui t ajaühikut.

Reaalsete teenindussüsteemide korral eeldatakse küllalt sageli, et teenindusaeg jaotub eksponentsiaalselt:

$$f(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (8.7)$$

kus
 μ – ühe ajaühiku vältel keskmiselt teenindatud tellimuste arv ehk teenindamise kiirus.

Eksponentsiaalne teenindusaeg on täielikult iseloomustatud omadusega: teenindamise lõpuni jäänud aeg (aja jaotusfunktsioon) ei sõltu sellest, kui kaua teenindamine juba kestnud on.

Kui eksponentsiaalse teenindusajaga töötaja töötab pidevalt, siis väljundvoog ehk täidetud tellimuste jada rahuldab lihtsale sisenendoole esitatud tingimusi. Sel juhul tõenäosus, et ajavahe-
miku $(0, t)$ jooksul teenindatakse täpselt k tellimust $(q_k(t))$ on leitav järgmiselt:

$$q_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \quad (8.8)$$

Seega võib teenindussüsteemi iseloomustavat parameetrit μ käsitleda ka teeninduskanali *keskmise läbilaskevõimena*. Ühe tellimuse *keskmine teenindusaeg* on $\frac{1}{\mu}$.

Kui teenindusaeg on eksponentsiaalse jaotusega:

$$f(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

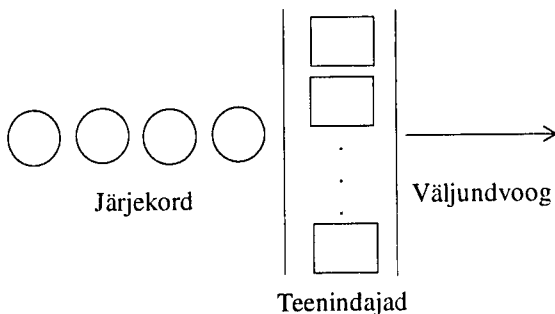
siis teenindussüsteemi parameeter μ iseloomustab teenindamise kiirust ehk tellimuste arvu, mida ajaühikus suudetakse teenindada.

$\frac{1}{\mu}$ – ühe tellimuse keskmine teenindusaeg.

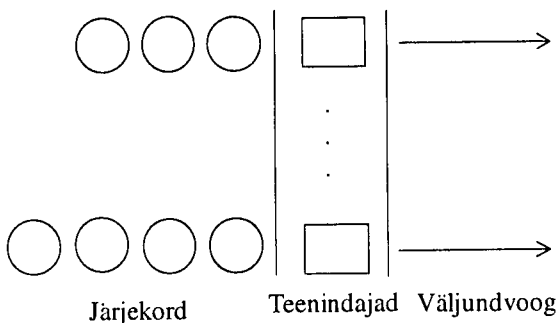
8.6. Järjekorra distsipliin

Järjekorra distsipliiniga on määratud reeglid järjekorra moodustamiseks ning tellimuste teenindamise ajaliseks järgnevuseks.

Vastavalt eelnevalt paikapandud järjekorra distsipliinile võivad teenindussüsteemi saabunud tellimused moodustada kas ühise järjekorra ning neid teenindatakse vastavalt teeninduskanalite vabanemisele (joonis 8.3) või jääb iga tellimus järjekorda konkreetse teeninduskanali juurde ning teda hakatakse teenindama pärast selle teeninduskanali vabanemist (joonis 8.4).



Joonis 8.3. Ühise järjekorraga teenindussüsteem.



Joonis 8.4. Mitme järjekorraga teenindussüsteem.

Näiteks pangas võib iga telleri juurde moodustuda eraldi järjekord (joonis 8.4) või moodustatakse ühine järjekord, kust kliendid lähevad vabanenud telleri juurde (joonis 8.3). Järjekorrateooriale tuginevate arvestuste alusel saab kinnitust arusaam, et ühise järjekorra puhul on kliendi keskmine ooteaeg järjekorras lühem. Paljudes pankades ongi viimasel ajal üle mindud ühisele järjekorrale, mida reguleeritakse kliendi numbritega.

Järjekord võib olla *piiratud* või *piiramata*. See sõltub teenindussüsteemi töö korraldamisest ning klientidest (tellimustest). Näiteks kaubatellimuste vastuvõtt telefoni teel võib olla korraldatud selliselt, et tellimusi vastuvõtva telefoni (telefonide) hõivatusel korral teatud arv helistajaid (näiteks 5) jäetakse järjekorda telefoni(de) vabanemist ootama. Sel juhul on tegemist piiratud järjekorraga.

Järjekorra moodustamine sõltub ka klientide käitumisest. Kliendid võivad teenindussüsteemi lahkuda järjekorda moodustamata või siis teatud ooteaja järel. Näiteks telefoni hõivatusel korral loobub klient kohe kaubatellimusest või teeb seda pärast mitmekordset ebaõnnestunud helistamise katset. Ostja otsustab kauplusest kohe ära minna, kui järjekord ostukorvidele on tema arvates liiga pikk. Ta võib järjekorrast lahkuda ka teatud ooteaja järel. Teenindussüsteemi seisukohalt on sel juhul tegemist nn. kannatamatute tellimustega. Et kannatamatutest tellimustest mitte ilma jääda, on mõnikord otstarbekas teenindussüsteemi töö ümber korraldada ning võimaldada mõnedele klientidele teatud *eelistusi*. Eelistustega on näiteks tegemist teenindussüsteemide korral, kui pangas teenindatakse eelisjärjekorras juriidilisi isikuid või kiirabi teenindab eelkõige teatud diagnoosiga haigeid (näiteks astmahaigeid) jne.

Tavaliselt teenindatakse tellimusi vastavalt nende teenindussüsteemi saabumisele. Kõigepealt võetakse teenindamisele kõige varem saabunud või kõige kauem järjekorras viibinud tellimus (FIFO — *first in, first out* või siis FCFS — *first come, first ser-*

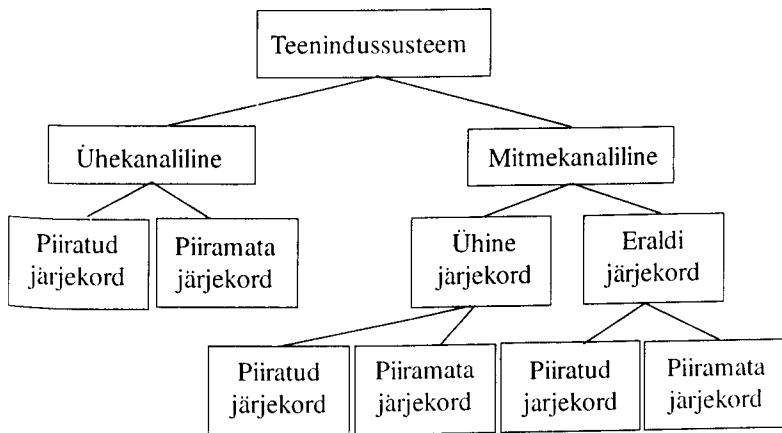
ved). On ka teenindussüsteeme, kus viimasena saabunu teenindatakse esimesena (LIFO — *last in, first out* või LCFS — *last come, first serve*). Taolise järjekorra distsipliiniga on näiteks tegemist mitmesuguste tõstukite töö korraldamisel, kus saabunud tellimused laotakse üksteise peale. On ka olukordi ning neile vastavaid teenindussüsteeme, kus järjekorras olevaid tellimusi rahuldatakse täiesti juhuslikult. Näiteks pressikonverentsil antakse mõnikord võimalusi küsimusi esitada juhuslikult mingit järjekorda arvestamata.

Järjekorra distsipliinist tulenevalt tuleb teenindussüsteemi tegevust iseloomustavate näitajate leidmisel ning nende alusel süsteemi tegevuse analüüsimisel ja kavandamisel kasutada erinevaid lähenemisviise ja arvutuseeskirju.

8.7. Teenindussüsteemide liigitamine

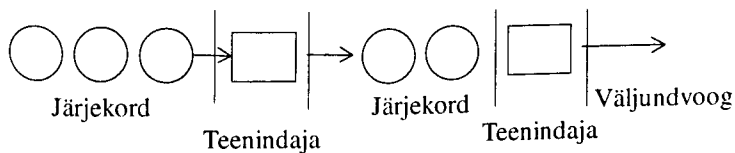
Teenindussüsteemide liigitamiseks on mitmeid erinevaid liigitamisaluseid. Käesoleval juhul on piirdutud teenindussüsteemide liigitamisega vastavalt järjekorra distsipliinile (vt. p. 8.6) ning teeninduskanalite arvule ja paiknemisele.

Teeninduskanalite arvu alusel liigitatakse teenindussüsteemid *ühe-* ja *mitmekanalilisteks teenindussüsteemideks* (joonis 8.5). Ühekanalilise teenindussüsteemi lihtsaimaks näiteks on ühe kontrolör-kassapidajaga kauplus. Kui kauplusesse sisenemist reguleeritakse ostukorvidega, siis on kaupluses sees tegemist *ühekanalilise piiratud järjekorraga teenindussüsteemiga* (järjekorras ei saa olla rohkem inimesi, kui on ostukorve) ning teeninduskanaliks on kontrolör-kassapidaja. Järjekord ostukorvidele on iseloomulik *ühekanalilisele piiramata järjekorraga teenindussüsteemile*. Rohkem kui ühe kontrolör-kassapidajaga kaupluses on mitmekanaliline teenindussüsteem.



Joonis 8.5. Teenindussüsteemide liigitamine.

Mitmekanalilise teenindussüsteemi korral võivad teenindajad paikneda kas *paralleelselt* (vt. joonised 8.3 ja 8.4) või *järjestatult* (joonis 8.6).



Joonis 8.6. Järjestatud teenindussüsteem.

Järjestatud teenindussüsteemiga on näiteks tegemist tehases, kus detaile töödeldakse mitmel erineval seadmel. Niisugusel juhul ühe teenindaja väljundvoog on teise teenindaja sisendvooks, kusjuures teenindajad (seadmed) on tootmistehnoloogia

giast tulenevalt järjestatud. Järjestatud teenindussüsteemiga on tegemist ka konveierlinde korral.

Iga teenindussüsteemi puhul kehtivad omad reeglid süsteemi töö matemaatiliseks uurimiseks ja töökorraldust iseloomustavate näitajate leidmiseks.

Teenindussüsteemi iseloomustamiseks kasutatakse erialakirjanduses sageli spetsiaalset tähistusviisi (*Kendalli tähistusviis*). Selle tähistusviisi korral iseloomustatakse paralleelsete teenindajatega süsteemi tööd kolmest parameetrist koosneva tähisega $X|Y|S$, kus X ja Y tähistavad vastavalt sisendvoo ja teenindusaja jaotusi ja S tähistab kanalite arvu. Poissoni või eksponentsiaalse jaotuse tähiseks on tavaliselt täht M . Suvalist jaotust tähistatakse tähiga G ning determineeritud parameetritega sisendvoogu või teenindusaega tähiga D . Näiteks tähis $M|M|1$ tähistab Poissoni või eksponentsiaalsele jaotusele vastava lihtsa sisendvoo ja teenindusajaga ühekanalilist teenindussüsteemi.

$M|M|S$

Poissoni või eksponentsiaalse jaotusega sisendvoo ja teenindusajaga ning S paralleelse kanaliga teenindussüsteem.

8.8. Ühekanaliline teenindussüsteem

Ühekanalilise lihtsa sisendvooga ning eksponentsiaalse jaotusega (või Poissoni jaotusega) teenindusajaga süsteemi $M|M|1$, mille sisendvoo intensiivsus (ajauhikus saabuvate tellimuste arv) on λ ning teenindamise kiirus (ajauhikus keskmiselt teenindatud tellimuste arv) on μ , iseloomustavad järgmised näitajad:

1. Tõenäosus, et teenindussüsteemis ei ole ühtegi tellimust (teenindatavat):

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (8.9)$$

2. Tõenäosus, et teenindussüsteemis on n tellimust:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 \quad (8.10)$$

3. Teenindussüsteemis olevate tellimuste keskvärtus:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (8.11)$$

4. Järjekorra pikkuse keskvärtus:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (8.12)$$

5. Järjekorras ootamise keskmine aeg:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (8.13)$$

6. Teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (8.14)$$

Valemite (8.9)–(8.14) alusel saab leida ühekanalilist teenindussüsteemi iseloomustavad näitajad juhul, kui $\lambda < \mu$. See tähendab, et ühekanalilise piiramata järjekorraga teenindussüsteemi puhul peab sisendvoo intensiivsus olema väiksem teenindamise kiirusest.

Suurus $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ kui ajayhikute saabuvate ja teenindatavate tellimuste suhe on teenindussüsteemi tervikuna iseloomustav parameeter. Sisuliselt on ρ ühe tellimuse teenindamisele kuluva aja vältel saabuvate tellimuste arvu keskvärtus ehk tinglikult süsteemi koormatuse näitaja. Ta näitab, millise tõenäosusega tuleb

teenindussüsteemi saabunud tellimuse täitmist oodata, see tähendab, milline on tõenäosus järjekorra tekkeks. Selleks et ühekanalilise järjekorra piiranguta süsteemi korral järjekord ei kasvaks lõpmatult, peab olema täidetud tingimus $\rho < 1$.

Ühekanalilist järjekorra piiranguteta teenindussüsteemi $M|M|1$ iseloomustavad peamised näitajad juhul kui $\lambda < \mu$:

- Süsteemi koormatust iseloomustav näitaja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Tõenäosus, et teenindajal on tööseisak (pole tellimust):

$$P_0 = 1 - \rho$$

- Tõenäosus, et süsteemis on n tellimust:

$$P_n = \rho^n \cdot P_0$$

- Teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = L - \rho$$

- Teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

- Järjekorras ootamise keskmine aeg:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

8.9. Ühekanalilise teenindussüsteemi näide

Vaatluste alusel on selgunud, et Postimaja postipakkide leti juurde tuleb keskmiselt 30 klienti tunnis ning ühe kliendi teenindamisele kulub keskmiselt üks minut. Nii sisendvoo intensiivsus kui ka teenindamise kiirus jaotuvad Poissoni jaotuse alusel.

Seega $\lambda = 30$ ja $\mu = 60$ ning teenindussüsteemi koormatuse näitaja

$$\rho = \frac{30}{60} = 0.5 \quad (8.15)$$

Tõenäosus selleks, et kliendil tuleb postipaki leti juures teenindamist oodata, on seega 0.5 ning tõenäosus, et teenindajal on tööseisak, on samuti 0.5:

$$P_0 = 1 - 0.5 = 0.5 \quad (8.16)$$

Tõenäosused n kliendi olemasolu kohta teenindussüsteemis (postipaki leti juures) on toodud tabelis 8.1.

Järjekorra keskmine pikkus leti juures

$$L_q = \frac{30^2}{60(60 - 30)} = 0.5 \quad (8.17)$$

Teenindussüsteemis olevate klientide keskmine arv:

$$L = \frac{30}{60 - 30} = 1 \quad (8.18)$$

Klient on teenindussüsteemis keskmiselt

$$W = \frac{1}{60 - 30} = 0.033 \text{ tundi ehk } ca \text{ 2 minutit} \quad (8.19)$$

Tabel 8.1

Tõenäosus n tellimuse olemasoluks $M|M|1$ teenindussüsteemis, kui $\rho = 0.5$

Tellimuste arv teenindussüsteemis (n)	Tõenäosus $P = 0.5^n \cdot 0.5$
1	0.25
2	0.125
3	0.063
4	0.031
5	0.016
6	0.008
7	0.004
8	0.002
9	0.001
10	0.0004

Keskmine ooteaeg järjekorras:

$$W_q = \frac{30}{60(60-30)} = 0.0167 \text{ tundi ehk ca 1 minut} \quad (8.20)$$

Loomulikult pakub Postimaja postipakkide leti töö korraldajatele huvi, milliseks võib kujuneda olukord teenindussüsteemis, kui muutub sisendvoo intensiivsus, s.o. Postimaja külastatavus. Tabelis 8.2 on toodud teenindussüsteemi tööd iseloomustavad näitajad olukordadeks, kui postipakkide leti juurde tuleb keskmiselt 25, 30, 35, 40, 45, 50 või 55 inimest tunnis, sealjuures keskmine teenindamise kiirus on endiselt 1 inimene minutis ($\mu = 60$ – tunnis teenindatavate inimeste arv).

Tabel 8.2

M|M|1 teenindussüsteemi näitajad sisendvoo erineva intensiivsuse (λ) korral

λ	ρ	P_0	L	L_q	W	W_q
25	0.42	0.58	0.71	0.30	0.029	0.012
30	0.50	0.50	1	0.50	0.033	0.017
35	0.58	0.42	1.4	0.81	0.040	0.023
40	0.67	0.33	2	1.34	0.050	0.034
45	0.75	0.25	3	2.25	0.066	0.050
50	0.83	0.17	5	4.15	0.100	0.083
55	0.92	0.08	11	10.12	0.200	0.184

Tabelist 8.2 nähtub, et süsteem on tundlik sisendvoo intensiivsuse muutustele. Olukorras, kus Postimaja postipakkide leti juurde tuleb keskmiselt 25 inimest tunnis, tekib teenindajal tööseisak (tellimuste puudus ehk süsteemi tühiseisak) tõenäosusega 0.58 ning järjekorra keskmiseks pikkuseks on 0.30 inimest. Kui Postimajja tuleb keskmiselt 55 inimest tunnis, siis järjekorra keskmine pikkus kasvab kümne inimeseni ($L_q = 10.12$) ning süsteemi tühiseisaku tõenäosus on vaid 0.08.

Otsuseid tuleb langetada ka selle kohta, kas on otstarbekas teha lisakulutusi teenindamise parandamiseks (palgata osavam töötaja, osta teenindamise kiirust tõsta võimaldav lisaseade jne.). Analüüsime olukorda, kus $\lambda = 55$ korral tõstetakse teenindamise kiirust 1.5 korda. Seega teenindatakse keskmiselt 90 inimest tunnis. Sel juhul $\rho = \frac{55}{90} = 0.61$ ning tööseisaku tekkimise tõenäosus on 0.39. Teised olulisemad teenindussüsteemi tööd iseloomustavad näitajad:

- teenindussüsteemis olevate klientide keskmine arv:

$$L = \frac{55}{90 - 55} = 1.57 \text{ inimest} \quad (8.21)$$

- järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = 1.22 \cdot 0.61 = 0.96 \quad (8.22)$$

- teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{1}{35} = 0.029 \text{ tundi, s.o. } 1.71 \text{ minutit} \quad (8.23)$$

- keskmine ooteaeg järjekorras:

$$W_q = 0.029 \cdot 0.61 = 0.018 \text{ tundi, s.o. } 1.06 \text{ minutit} \quad (8.24)$$

Teenindamise kiiruse pooleteisekordsel tõstmisel lühenes kliendi teenindussüsteemis oleku aeg ligi seitse korda ning järjekorras ootamise aeg koguni kümme korda. Teenindussüsteemi töökorraldajatel on seega olemas lisainfo otsuste langetamiseks, kas investeerida süsteemi töökorralduse parandamisse või rahulduda süsteemi senise töökorraldusega (omades infot selle toimimisest ning reageerimisest võimalikele muutustele teenindussüsteemi sisendparameetrites) ning lugeda prioriteetseks teisi investeerimisvaldkondi.

8.10. Mitmekanaliline teenindussüsteem

Mitmekanalilise paralleelsete teeninduskanalitega $M|M|S$ teenindussüsteemis sisendvoo intensiivsuse λ ning teenindamise kiiruse μ korral on eeldatud, et kõikidel teeninduskanalitel on ühe tellimuse teenindamiseks kuluv keskmine aeg sama. Järgnevalt on käsitletud olukorda, et süsteemis on n tellimust. Kui $n \leq S$ (S — kanalite arv), siis kõik tellimused saavad teenindamisele ning järjekorda ei teki. Kui $n > S$, siis S tellimust võe-

takse kohe teenindamisele ning $n-S$ tellimust moodustavad järjekorra. Kui $\lambda > \mu S$, siis tuleb teenindussüsteemi tellimusi rohkem, kui S kanalit neid teenindada jõuavad ning järjekord kasvab lõpmatult. Seega S kanaliga piiramata järjekorraga teenindussüsteemi korral tuleb eeldada, et on täidetud tingimus

$$\lambda < \mu S \quad (8.25)$$

$M|M|S$ teenindussüsteemi koormatuse näitaja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu S} \quad (8.26)$$

Teenindussüsteemi teenindamisel olevate tellimuste keskmine arv on

$$\rho' = \frac{\lambda}{\mu} \quad (8.27)$$

Tõenäosus, et süsteemis on n tellimust, on leitav järgmiselt¹:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot P_0 = \frac{(\rho')^n}{n!} \cdot P_0, & \text{kui } 0 \leq n \leq S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{S! S^{n-S}} \cdot P_0 = \frac{(\rho')^n}{S! S^{n-S}}, & \text{kui } n \geq S, \end{cases} \quad (8.28)$$

kus

P_0 – tõenäosus, et süsteemil on tööseisak (ei ole ühtegi

¹ Valemite esitamisel siin ja edaspidi on tuginetud raamatutele **Kaasik, Ü., Kivistik, L.** Operatsioonianalüüs. – Tallinn: Valgus, 1982 ning **Knowless, T. W.** Management Science. Building and Using Models. – Homewood, Illinois, Irwin, 1989.

tellimust):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu S}\right)} \quad (8.29)$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\rho')^n}{n!} + \frac{(\rho')^S}{S!(1-\rho)} \right]}$$

Teenindussüsteemi tööseisaku tõenäosust iseloomustav suurus P_0 erineva kanalite arvu S korral on tabuleeritud (tabel 8.3).

Järjekorra tekkimise tõenäosus:

$$P(n \geq S) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu S}\right)} \cdot P_0 = \frac{(\rho')^S}{S!(1-\rho)} \cdot P_0 \quad (8.30)$$

Järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \frac{\lambda}{\mu S}}{S! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu S}\right)^2} \cdot P_0 = \frac{(\rho')^S \cdot \rho}{S!(1-\rho)^2} \cdot P_0 \quad (8.31)$$

Teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = L_q + \rho' \quad (8.32)$$

Tellimuste teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W_s = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \quad (8.33)$$

Keskmine järjekorras oleku aeg:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (8.34)$$

Mitmekanalilise piiramata järjekorraga $M|M|S$ teenindussüsteemi korral peab olema täidetud tingimus

$$\lambda < \mu S$$

Sel juhul järjekord ei kasva lõpmatult.

$M|M|S$ teenindussüsteemi iseloomustavad peamised näitajad:

- süsteemi koormatuse näitaja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu S}$$

- teenindamisel olevate tellimuste keskmine arv:

$$\rho' = \frac{\lambda}{\mu}$$

- tõenäosus, et süsteemil on n tellimust:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\rho')^n}{n!} \cdot P_0, & \text{kui } 0 \leq n \leq S \\ \frac{(\rho')^n}{S! S^{n-S}} \cdot P_0, & \text{kui } n \geq S \end{cases}$$

- tõenäosus, et teenindajatel ei ole ühtegi tellimust (tööseisak):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\rho')^n}{n!} + \frac{(\rho')^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-\rho}}$$

- järjekorra tekkimise tõenäosus:

$$P(n \geq S) = \frac{(\rho')^S}{S!(1-\rho)} \cdot P_0$$

- järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \frac{\lambda}{\mu S}}{S! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu S}\right)^2} \cdot P_0$$

- teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = L_q + \rho'$$

- tellimuste teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W_S = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

- keskmine järjekorras oleku aeg:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tabel 8.3

 $M | M | S$ teenindussüsteemi tööseisakute tõenäosused (P_0)

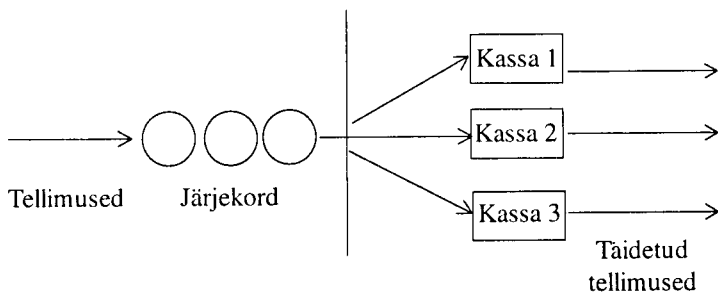
$\frac{\lambda}{\mu S}$	Teeninduskanalite arv (S)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
.02	.98000	.96078	.94176	.92312	.90484	.88692	.86936	.85214	.83527	.81873
.04	.96000	.92308	.88692	.85214	.81873	.78663	.75578	.72615	.69768	.67032
.06	.94000	.88679	.83526	.78663	.74082	.69768	.65705	.61878	.58275	.54881
.08	.92000	.85185	.78659	.72614	.67032	.61878	.57121	.52729	.48675	.44933
.10	.90000	.81818	.74074	.67031	.60653	.54881	.49659	.44933	.40657	.36788
.12	.88000	.78571	.69753	.61876	.54881	.48675	.43171	.38289	.33960	.30119
.14	.86000	.75439	.65679	.57116	.49657	.43171	.37531	.32628	.28365	.24660
.16	.84000	.72414	.61837	.52720	.44931	.38289	.32628	.27804	.23693	.20190
.18	.82000	.69492	.58214	.48660	.40653	.33959	.28365	.23693	.19790	.16530
.20	.80000	.66667	.54795	.44910	.36782	.30118	.24659	.20189	.16530	.13534
.22	.78000	.63934	.51567	.41445	.33277	.26711	.21437	.17204	.13807	.11080
.24	.76000	.61290	.48519	.38244	.30105	.23688	.18636	.14660	.11532	.09072
.26	.74000	.58730	.45640	.35284	.27233	.21007	.16200	.12492	.09632	.07427
.28	.72000	.56250	.42918	.32548	.24633	.18628	.14082	.10645	.08045	.06081
.30	.70000	.53846	.430346	.30017	.22277	.16517	.12241	.09070	.06720	.04978

.32	.68000	.51515	.37913	.27676	.20144	.14644	.10639	.07728	.05612	.04076
.34	.66000	.49254	.35610	.25510	.18211	.12981	.09247	.06584	.04687	.03337
.36	.64000	.47059	.33431	.23505	.16460	.11505	.08035	.05609	.03915	.02732
.38	.62000	.44928	.31367	.21649	.14872	.10195	.06981	.04778	.03269	.02236
.40	.60000	.42857	.29412	.19929	.13433	.09032	.06064	.04069	.02729	.01830
.42	.58000	.40845	.27559	.18336	.12128	.07998	.05267	.03465	.02279	.01498
.44	.56000	.38889	.25802	.16860	.10944	.07080	.04573	.02950	.01902	.01226
.46	.54000	.36986	.24135	.15491	.09870	.06265	.03968	.02511	.01587	.01003
.48	.52000	.35135	.22554	.14221	.08895	.05540	.03442	.02136	.01324	.00820
.50	.50000	.33333	.21053	.13043	.08010	.04896	.02984	.01816	.01104	.00671
.52	.48000	.31579	.19627	.11951	.07207	.04323	.02586	.01544	.00920	.00548
.54	.46000	.29870	.18273	.10936	.06477	.03814	.02239	.01311	.00767	.00448
.56	.44000	.28205	.16986	.09994	.05814	.03362	.01936	.01113	.00638	.00366
.58	.42000	.26582	.15762	.09119	.05212	.02959	.01673	.00943	.00531	.00298
.60	.40000	.25000	.14599	.08306	.04665	.02601	.01443	.00799	.00441	.00243
.62	.38000	.23457	.13491	.07750	.04167	.02282	.01243	.00675	.00366	.00198
.64	.36000	.21951	.12438	.06847	.03715	.01999	.01069	.00570	.00303	.00161
.66	.34000	.20482	.11435	.06194	.03304	.01746	.00918	.00480	.00251	.00131
.68	.32000	.19048	.10479	.05587	.02930	.01522	.00786	.00404	.00207	.00106
.70	.30000	.17647	.09569	.05021	.02590	.01322	.00670	.00338	.00170	.00085

.72	.28000	.16279	.08702	.04495	.02280	.01144	.00570	.00283	.00140	.00069
.74	.26000	.14943	.07875	.04006	.01999	.00986	.00483	.00235	.00114	.00055
.76	.24000	.13636	.07087	.03550	.01743	.00846	.00407	.00195	.00093	.00044
.78	.22000	.12360	.06335	.03125	.01510	.00721	.00341	.00160	.00075	.00035
.80	.20000	.11111	.05618	.02730	.01299	.00610	.00284	.00131	.00060	.00028
.82	.18000	.09890	.04933	.02362	.01106	.00511	.00234	.00106	.00048	.00022
.84	.16000	.08696	.04280	.02019	.00931	.00423	.00190	.00085	.00038	.00017
.86	.14000	.07527	.03656	.01700	.00772	.00345	.00153	.00067	.00029	.00013
.88	.12000	.06383	.03060	.01403	.00627	.00276	.00120	.00052	.00022	.00010
.90	.10000	.05263	.02491	.01126	.00496	.00215	.00092	.00039	.00017	.00007
.92	.08000	.04167	.01947	.00867	.00377	.00161	.00068	.00028	.00012	.00005
.94	.06000	.03093	.01427	.00627	.00268	.00113	.00047	.00019	.00008	.00003
.96	.04000	.02041	.00930	.00403	.00170	.00070	.00029	.00012	.00005	.00002
.98	.02000	.01010	.00454	.00194	.00081	.00033	.00013	.00005	.00002	.00001

8.11. Mitmekanalilise teenindussüsteemi näide

Pärast töökorralduse muutmist moodustavad Postimajja sisenivad kliendid teenindamise ootel ühise järjekorra (joonis 8.7). Teenindajate täiendõppe ning Postimajasises arvutivõrgu tööle hakkamise tulemusena on kõigist kolmest kassast ($S = 3$) võimalik osutada klientidele samu teenuseid. Tunnis teenindab üks kassapidaja keskmiselt 90 inimest ($\mu = 90$). Vaatluste alusel on selgunud, et tööpäeval tuleb Postimajja keskmiselt 200 inimest tunnis ($\lambda = 200$).



Joonis 8.7. $M|M|S$ teenindussüsteem Postimajas.

On täidetud tingimus $\lambda < \mu S$. Seega järjekord Postimajas ei kasva lõpmatult. Teenindussüsteemis teenindamisel olevate tellimuste keskmine arv on 2.22 $\left(\rho' = \frac{200}{90}\right)$.

Teenindussüsteemi koormatuse näitaja:

$$\rho = \frac{200}{3 \cdot 90} = 0.74 \quad (8.35)$$

Tabelist 8.3 leiame, et tõenäosus selleks, et Postimajas ei ole ühtegi klienti on 0.079 (võib leida ka valemi (8.29) alusel).

Tõenäosus, et Postimajas on 3 klienti:

$$P_3 = \frac{2.22^3}{3! 3^0} \cdot 0.079 = 0.144 \quad (8.36)$$

Kui Postimaja klientide arv on suurem kui kolm, siis osal neist tuleb jääda tellimuse täitmise ootele ning tekib järjekord. Järjekorra tekkimise tõenäosus on:

$$P(n \geq 3) = \frac{2.22^3}{3!(1-0.74)} \cdot 0.079 = 0.554 \quad (8.37)$$

ning järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{2.22^3 \cdot 0.74}{3! \cdot 0.26^2} \cdot 0.079 = 1.58 \quad (8.38)$$

Postimajas kui teenindussüsteemis (järjekorras või teenindamisel) olevate klientide keskmine arv:

$$L_s = 1.58 + 2.22 = 3.8 \quad (8.39)$$

Keskmine järjekorras ootamise aeg:

$$W_q = \frac{1.58}{200} = 0.0079 \text{ tundi ehk } ca \text{ } 0.5 \text{ minutit} \quad (8.40)$$

Keskmine teenindussüsteemis oleku aeg:

$$W_s = 0.0079 + \frac{1}{90} = 0.019 \text{ tundi ehk } 1.14 \text{ minutit} \quad (8.41)$$

Pärast ümberkorraldusi toimiv teenindussüsteem peaks tööpäevadel rahuldama nii Postimaja kliente (järjekorras ei tule keskmiselt oodata mitte kauem kui pool minutit ning teenuse saamiseks kulub aega kokku pisut rohkem kui üks minut) kui ka

Postimaja juhtkonda (tõenäosus, et kõik kassad on vabad on vaid 0.079).

Puhkepäevadel tuleb Postimajja kliente mõnevõrra vähem: keskmiselt vaid 155 klienti tunnis ($\lambda = 155$). Postimaja juhtkonda huvitab, milliseks kujuneb teenindussüsteemi olukord, kui puhkepäevadel töötaks vaid kaks kassat ($S = 2$), sealjuures kassapidajate tööviljakus on sama mis tööpäevadelgi (90 inimest tunnis).

Kahe kassa töötamise korral puhkepäevadel on samuti täidetud tingimus (8.25) ($155 < 90 \cdot 2$), seega järjekord ei kasva lõpmatult. Teenindussüsteemi koormatuse näitaja on 0.86 ($\rho = \frac{155}{180}$) ning teenindussüsteemis teenindamisel olevate tellimuste keskmine arv on 1.72 ($\rho' = \frac{155}{90}$).

Tõenäosus, et Postimajas ei ole puhkepäevadel ühtegi klienti: $P_0 = 0.075$ (vt. tabel 8.3).

Järjekorra tekkimise tõenäosus:

$$P(n \geq 2) = \frac{1.72^2}{2 \cdot 0.14} \cdot 0.075 = 0.792 \quad (8.42)$$

Järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{1.72^2 \cdot 0.86}{2 \cdot 0.14^2} \cdot 0.075 = 4.87 \quad (8.43)$$

Järjekorras ootamise keskmine aeg:

$$W_q = \frac{4.87}{155} = 0.031 \text{ tundi ehk } 1.9 \text{ minutit} \quad (8.44)$$

Teenindussüsteemis olevate klientide keskmine arv:

$$L_s = 4.87 + 1.72 = 6.59 \quad (8.45)$$

Klientide teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W_s = 0.031 + 0.011 = 0.042 \text{ tundi ehk } 2.5 \text{ minutit} \quad (8.46)$$

Läbiviidud analüüsist nähtub, et teenindussüsteemi tegevus on tundlik sisendvoo intensiivsuse ning teeninduskanalite arvu muutuste suhtes. Saadud täiendavale infole tuginedes saab Postimaja juhtkond otsustada, kas puhkepäevadel on otstarbekas piirduda vaid kahe kassa avamisega. Postimaja seisukohalt töötab selline süsteem väga intensiivselt (tööseisakute tõenäosus vaid 0.075). Tõenäosus selleks, et tekib järjekord on ligi 80% ning keskmiselt on järjekorras ligi 5 inimest ($L_q = 4.87$).

Teenuse saamiseks (ooteaeg järjekorras ja teenindamine kassa juures) kulub kliendil keskmiselt 2.5 minutit.

8.12. Piiratud järjekorraga teenindussüsteem

Kui $M|M|S$ teenindussüsteemi korral järjekorrakohtade arv (N) on piiratud, siis osa potentsiaalseid tellimusi jääb rahuldamata enne nende teenindussüsteemi saabumist. Teenindussüsteemi seisukohalt tähendab see, et kui $n \geq N$, siis sisendvoo intensiivsus (λ) muutub nulliks:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{kui } n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{kui } n \geq N \end{cases} \quad (8.47)$$

Ühekanalilise ($S = 1$) piiratud järjekorraga teenindussüsteemi tööd iseloomustavad näitajad on leitavad järgmiselt:

- tõenäosus, teenindussüsteemis ei ole ühtegi tellimust (tööseisaku tõenäosus):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \quad (8.48)$$

- tõenäosus, et teenindussüsteemis on n tellimust ($n = 0, 1, \dots, N$)

$$P_n = \left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (8.49)$$

- teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = \sum_{i=1}^N n P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} - \frac{(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \quad (8.50)$$

- järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = L - (1 - P_0) \quad (8.51)$$

- tellimuse teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad (8.52)$$

- tellimuse järjekorras oleku keskmine aeg:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (8.53)$$

kus

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_N) \quad (8.54)$$

Mitmekanalilise ($l < S \leq N$) piiratud järjekorraga (järjekorra-kohtade arvuga N) teenindussüsteemi tööd iseloomustavad näitajad:

- tööseisaku tõenäosus:

$$P_0 = \frac{l}{\left[1 + \sum_{n=1}^S \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \sum_{n=S+1}^N \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{n-S} \right]} \quad (8.55)$$

- tõenäosus, et teenindussüsteemis on n tellimust:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{kui } n = 1, 2, \dots, S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{kui } n = S, S+1, \dots, N \end{cases} \quad (8.56)$$

- järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)}{S! \left(1 - \frac{\lambda}{S\mu}\right)^2}. \quad (8.57)$$

$$\cdot \left[1 - \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{N-S} - (N-S) \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{N-S} \left(1 - \frac{\lambda}{S\mu}\right) \right]$$

- teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = \sum_{n=0}^{S-1} n P_n + L_q + S \left(1 - \sum_{n=0}^{S-1} P_n \right) \quad (8.58)$$

Tellimuste teenindussüsteemis ja järjekorras oleku keskmised ajad on leitavad valemite (8.52) – (8.54) alusel.

Nii ühe- kui mitmekanalilise piiratud järjekorra kohtadega teenindussüsteemi korral on tõenäone, et osa tellimusi jääb rahuldamata (P_{eitus}), kui $n > N$

$$(P_{eitus} = P_n, \text{ kui } n > N).$$

Teenindussüsteemi suhteline läbilaskevõime ehk teenindussüsteemi poolt teenindatud tellimuste osatähtsus:

$$q = 1 - P_{eitus} \quad (8.59)$$

Teenindussüsteemi absoluutne läbilaskevõime ehk ajaühikus teenindatud tellimuste arv:

$$Q = q \cdot \lambda \quad (8.60)$$

Piiratud järjekorakohtade arvuga (N) $M|M|S$ teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad näitajad:

- süsteemi koormatuse näitaja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu S}$$

- tööseisaku tõenäosus:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^S \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \sum_{n=S+1}^N \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{n-S}}$$

- tõenäosus, et teenindussüsteemis on n tellimust:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{kui } n = 1, 2, \dots, S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{kui } n = S, S+1, \dots, N \end{cases}$$

- järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)}{S! \left(1 - \frac{\lambda}{S\mu}\right)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{N-S} - (N-S) \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{N-S} \left(1 - \frac{\lambda}{S\mu}\right) \right]$$

- teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = \sum_{n=0}^{S-1} n P_n + L_q + S \left(1 - \sum_{n=0}^{S-1} P_n \right)$$

- tellimuse teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

- tellimuse järjekorras oleku keskmine aeg:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- keskmine sisendvoo intensiivsus:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda P_n = \lambda (1 - P_N)$$

8.13. Piiratud järjekorraga teenindussüsteemi näide

Infokeskuses vastatakse helistajate küsimustele kahel telefonil. Infosüsteemi töö on korraldatud selliselt, et kummagi telefoni juurde on võimalik ootele jätta kuni kaks helistajat (seega $N = 4$). Tegemist on piiratud järjekorraga $M|M|S$ teenindussüsteemiga, mille kohta on teada, et ühele telefonikõnele vastamiseks kulub keskmiselt 0.33 minutit ($\mu = 3$) ning infokeskusesse tuleb keskmiselt kaks kõnet minutis ($\lambda = 2$).

Tõenäosus, et infokeskuses ei ole ühtegi telefonikõnet:

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1}{1} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2 \cdot 1} \cdot \left[\left(\frac{2}{3 \cdot 2}\right)^1 + \left(\frac{2}{3+2}\right)^2 \right] \right]} = 0.503 \quad (8.61)$$

Tõenäosus, et ootel on

a) üks kõne ($n = 1$):

$$P_1 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1}{1!} \cdot 0.503 = 0.335 \quad (8.62)$$

b) kaks kõnet ($n = 2$):

$$P_2 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2 \cdot 1} \cdot 0.503 = 0.112 \quad (8.63)$$

c) kolm kõnet ($n = 3$)

$$P_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{2! 2^{3-2}} \cdot 0.503 = 0.037 \quad (8.64)$$

d) neli kõnet ($n = 4$)

$$P_4 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{2! 2^2} \cdot 0.503 = 0.012 \quad (8.65)$$

Järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = \frac{0.503 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}}{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right] = 0.062$$

Järjekorras ootamise keskmine aeg:

$$W_q = \frac{0.062}{2(1-0.012)} = \frac{0.062}{1.976} = 0.031 \text{ minutit} \quad (8.66)$$

Teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = 1 \cdot 0.335 + 0.062 + 2(1 - 0.503 - 0.335) = 0.721 \quad (8.67)$$

Tellimuse teenindussüsteemis oleku keskmine aeg:

$$W = \frac{0.721}{1.970} = 0.365 \text{ minutit} \quad (8.68)$$

Kuna puhkepäeval tuleb infokeskusesse tavaliselt poole vähem kõnesid: keskmiselt üks kõne minutis ($\lambda = 1$), siis nendel päeval on kavas tööle rakendada vaid üks telefon. Telefoni juurde on võimalik ootele jätta kuni kaks kõnet ($n = 2$).

Tõenäosus, et infokeskuses ei ole ühtegi telefonikõnet:

$$P_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{1.444} = 0.693 \quad (8.69)$$

Tõenäosus, et infokeskuses on

a) üks telefonikõne ($n = 1$):

$$P_1 = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = 0.231 \quad (8.70)$$

b) kaks telefonikõnet ($n = 2$):

$$P_2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1^3}{3}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.07 \quad (8.71)$$

Teenindussüsteemis olevate tellimuste keskmine arv:

$$L = 1 \cdot 0.231 + 2 \cdot 0.077 = 0.385 \quad (8.72)$$

Järjekorra keskmine pikkus:

$$L_q = 0.381 - (1 - 0.693) = 0.074 \quad (8.73)$$

Keskmine sisendvoo intensiivsus:

$$\bar{\lambda} = 1 \cdot 0.693 + 1 \cdot 0.231 = 0.924 \quad (8.74)$$

Keskmine järjekorras ootamise aeg:

$$W_q = \frac{0.074}{0.924} = 0.080 \text{ minutit} \quad (8.75)$$

Keskmine teenindussüsteemis oleku aeg:

$$W = \frac{0.385}{0.924} = 0.417 \text{ minutit} \quad (8.76)$$

Infokeskuse töö korraldajaid huvitab loomulikult ka, milline osa potentsiaalseid kliente jääb teenindamata, kuna telefon (telefonid) on kinni. Tööpäeval on tõenäosus selleks, et telefonikõnet ei võeta vastu 0.004 (tellimusest öeldakse ära, $P_{\text{etus}} = 0.004$). Tööpäeval töötava teenindussüsteemi suhteline läbilaskevõime on seega 0.996 ning absoluutne läbilaskevõime 1.992 ($Q = 2 \cdot 0.996$) klienti minutis ehk 119.5 klienti tunnis. Tõenäosus selleks, et puhkepäeval saabuvat telefonikõnet ei võeta vastu on: $P_{\text{etus}} = 0.025$, teenindussüsteemi suh-

teline läbilaskevõime 0.975 ning absoluutne läbilaskevõime 0.975 klienti minutis ehk 58.5 klienti tunnis. Seega tööpäevadel jääb infokeskuses teenindamata keskmiselt 0.5 ning puhkepäevadel 1.5 helistajat tunnis.

Kokkuvõte

Järjekorrateooria uurimisobjektiks on nähtused, mille sisuks on samalaadsete operatsioonide korduv massiline sooritamine. Nii-sugused massiliselt sooritatavad operatsioonid või nende alustamise vajadus sõltuvad tavaliselt juhuslikest asjaoludest. Operatsioonidega seotud juhuslikkus toob endaga kaasa järjekorra või vähemalt selle tekkimise võimaluse. Eesmärgiks on korraldada operatsioonide sooritamine selliselt, et teenindamise kulud ja kulud järjekorrale oleksid vähimad. Järjekorrateooria uurib selliste probleemidega süsteemide (teenindussüsteemide) matemaatilise kirjeldamise võimalusi, kusjuures teenindussüsteemide matemaatilisel uurimisel piirduakse enamasti stabiliseerunud olukordadega, eeldades, et teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad näitajad on igal ajamomendil samad.

Olulisemateks lähteandmeteks teenindussüsteemi tegevuse uurimisel on tellimuste sisendvoo iseloom ja intensiivsus ning teenindamise kiirus. Poissoni või eksponentsiaalsele jaotusele vastava sisendvoo (lihtsa sisendvoo) ja teenindusajaga ning S paralleelse teeninduskanaliga süsteemide tähisena kasutatakse kombinatsiooni $M/M/S$.

Teenindussüsteemi tööd iseloomustavad peamised näitajad:

- teenindussüsteemi koormatus, süsteemi tööseisaku tõenäosus;
- järjekorra tekkimise tõenäosus ja selle pikkuse keskväär-tus;

- tellimuse teenindussüsteemis ja järjekorras oleku keskmine aeg;
- teenindussüsteemi suhteline ja absoluutne läbilaskevõime ning ajaühikus teenindamata jäänud tellimuste keskväärts.

Tulenevalt teenindussüsteemi kanalite arvust, süsteemi töö korraldusest, järjekorra distsipliinist jne. on arvutuseeskirjad ja reeglid teenindussüsteemi tegevust iseloomustavate näitajate leidmiseks mõnevõrra erinevad. Seda tuleb iga konkreetse probleemi püstituse korral analüüsida ja arvestada. Oluline on selgelt määratleda majandusprobleem, mille lahendamiseks saab täiendavat infot järjekorrateooria oskuslikust kasutamisest. Analüüsides võimalikke muutusi süsteemi sisendvoo intensiivsuses, teenindamise kiiruses ning süsteemi töökorralduses on võimalik selgitada teenindussüsteemi funktsioneerimise stabiilsust ning leida teenindussüsteemi tegevust iseloomustavad näitajad erinevate majandussituatsioonide tarvis. Saadud info alusel on võimalik kavandada teenindussüsteemi tööd ja ette näha protsesside kulgemise juhuslikkusest tulenevate häirete tõenäosust.

KASUTATUD KIRJANDUS

Abiks majandusmatemaatika õppijale. TPI (Tallinna Tehnikaülikool). Metoodiliste materjalide sari. VII. Matemaatiline planeerimine. - Tln., 1987.

Anderson D. R., Sweeney D. J., Williams Th. A. An Introduction to Management Science. Quantitative Approaches to Decision Making. Sixth Edition. - West Publishing Co, 1991.

Dennis T. L., Dennis L. B. Microcomputing Modules for Management Decision Making: Software and Text. - West Publishing Company, 1993.

Downing D., Clark J., Friedlob G. Th. Quantitative Methods. - New York, London, 1988, Barrons Business Review Series (Äriraamatute seeria).

Kaasik, Ü., Kivistik, L. Operatsioonianalüüs. - Tln.: Valgus, 1982, (I, II, IV, VI ptk.)

Kaasik, Ü. Matemaatiline planeerimine. - Tln.: Valgus, 1976.

Karma, O., Paas, T. Lineaarne planeerimine (I). Põhimõisted. - Tartu, 1978.

Karma, O., Paas, T. Lineaarne planeerimine (II). Simpleksmeetod. - Tartu, 1978.

Karma, O., Paas, T. Lineaarne planeerimine (III). Transpordiülesanne. - Tartu, 1978.

Knowles T. W. Management Science. Building and Using Models. - Homewood, Illinois, 1989.

Lee S. M. Introduction to Management Science. Study Guide. The Dryden Press, 1988.

Markland R. E. Topics in Management Science. - John Wiley & Sons, 1988.

Mathematik für Ökonomen. Hochschulelehrbuch. - Verlag der Wirtschaft, Berlin, 1987.

Paas, T. Matemaatiline modelleerimine kaubanduses. - Tartu, 1987.