

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Henri Peterson
**Stohhastilise SIR-mudeli numbriline
lahendamine**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Kaido Lätt

TARTU 2026

STOHHASTILISE SIR-MUDELI NUMBRILINE

LAHENDAMINE

Bakalaureusetöö

Henri Peterson

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tutvustatakse Itô integraali mõistet, stohhastilisi diferentsiaalvõrrandeid ja stohhastilist SIR-mudelit. Kirjeldatakse meetodit numbrilise lahendi leidmiseks stohhastilisele SIR-mudelile ning analüüsitakse meetodi täpsust. Numbrilise lahendi leidmisel kasutatakse ilmutamata Euleri meetodil põhinevat lähenemist. Lisaks rakendatakse kirjeldatud meetodit kahe näiteülesande puhul.

CERCS teaduseriala: P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine (automaatjuhtimisteooria).

Märksõnad. Itô integraal, stohhastiline diferentsiaalvõrrand, stohhastiline SIR-mudel, ilmutamata Euleri meetod.

NUMERICAL SOLUTION OF THE STOCHASTIC SIR

MODEL

Bachelor's thesis

Henri Peterson

Abstract. The objective of this Bachelor's thesis is to give an overview of the Itô integral, stochastic differential equations, and the stochastic SIR model. A method based on the implicit Euler method for finding the numerical solution of the stochastic SIR model is presented. Convergence of the proposed method is studied. Two numerical examples are also given.

CERCS research specialisation: P170 Computer science, numerical analysis, systems, control.

Key Words: Itô integral, stochastic differential equation, stochastic SIR model, implicit Euler method.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Vajalikud mõisted ja tulemused	5
1.1 Tõenäosusteooria mõisted ja tulemused	5
1.2 Itô integraal	10
1.3 Stohhastilised diferentsiaalvõrrandid	15
2 Stohhastiline SIR-mudel ja selle ligikaudne lahendamine	17
2.1 Stohhastiline SIR-mudel	17
2.2 Meetodi kirjeldus	19
2.3 Meetodi koondumiskiirus	21
3 Numbrilised näited	41
Kasutatud allikad	43
Lisa 1. Mõõduteooria ja võrratused	44
Lisa 2. Pythoni programm	45

Sissejuhatus

Stohhastilised diferentsiaalvõrrandid ja neid sisaldavad süsteemid on tänapäeva matemaatikas valdkond, millega aktiivselt tegeletakse. Sellised võrrandid leiavad rakendust näiteks füüsikas, bioloogias ja finantsmatemaatikas.

Käesolevas bakalaureusetöös defineeritakse Itô integraal ning tõestatakse mõned selle omadused. Tuuakse sisse stohhastilise diferentsiaalvõrrandi mõiste ja kirjeldatakse stohhastilist SIR-mudelit. Lisaks konstrueeritakse numbriline meetod stohhastilise SIR-mudeli ligikaudseks lahendamiseks ja uuritakse meetodi koondumiskiirus. Saadud numbrilist meetodit illustreeritakse kahe näitega.

Töö on jaotatud kolmeks peatükiks. Esimeses peatükis on välja toodud vajalikud definitsioonid ja omadused, defineeritud Itô integraal ja tutvustatud stohhastilise diferentsiaalvõrrandi mõistet.

Teises peatükis tutvustatakse stohhastilist SIR-mudelit ja kirjeldatakse ilmutamata Euleri meetodil põhinevat numbrilist lahendamisskeemi selle mudeli jaoks. Tõestatakse töö põhitulemus numbrilise meetodi koondumiskiiruse kohta.

Viimases peatükis rakendatakse väljatöötatud numbrilist meetodit kahe näiteülesande korral ning võrreldakse saadud numbrilisi tulemusi teoreetilise hinnanguga.

Töö teoreetiline osa põhineb peamiselt raamatutel (Øksendal, 2003), (Baldi, 2017) ja (Shreve, 2004). Numbriline lahendamise meetod ja koondumiskiiruse tõestus on edasiarendus artiklist (Yang, Yang ja Zhang, 2023).

1 Vajalikud mõisted ja tulemused

Selles peatükis esitame töös kasutatavad põhilised mõisted ja abitulemused, defineerime Itô integraali ja stohhastilise diferentsiaalvõrrandi mõiste. Peatükk tugineb raamatutel (Øksendal, 2003), (Baldi, 2017) ja (Shreve, 2004).

1.1 Tõenäosusteooria mõisted ja tulemused

Olgu Ω hulk.

Definitsioon 1. Hulga Ω alamhulkade hulka \mathcal{F} nimetatakse σ -algebraks hulgal Ω kui

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;
2. kui $A \in \mathcal{F}$, siis $A^c \in \mathcal{F}$, kus $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$;
3. kui $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, siis $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definitsioon 2. Kolmikut $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ nimetatakse tõenäosusruumiks, kui \mathcal{F} on hulgal Ω antud σ -algebra ja $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ on funktsioon, mis rahuldab tingimusi

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ ja $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
2. kui $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ iga $i \neq j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) korral, siis

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Järgnevas käsitleme juhuslikke protsesse ja nendega seotud mõisteid lõigus $[0, T]$, kus $T > 0$. See lihtsustab meie tähistust Itô integraali ning stoh-

hastiliste diferentsiaalvõrrandite jaoks. Teiste indeksite hulkadega juhuslike protsesside käsitlemist võib leida raamatust (Baldi, 2017).

Definitsioon 3. Tõenäosusruumi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ σ -algebra kogumit $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ nimetatakse filtratsiooniks, kui iga $0 \leq s \leq t \leq T$ korral $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Kui muutujat t tõlgendada ajana, võib filtratsiooni vaadata kui informatsiooni kasvu toimunud sündmuse kohta aja edasi liikudes.

Definitsioon 4. Juhuslikuks protsessiks nimetatakse juhuslike suuruste X_t , $t \in [0, T]$ kogumit $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, kus juhuslikud suurused on defineeritud ühisel tõenäosusruumil $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definitsioon 5. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tõenäosusruum, $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ juhuslik protsess ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ filtratsioon. Juhuslikku protsessi $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ nimetatakse kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, kui X_t on \mathcal{F}_t -mõõtuv iga $t \in [0, T]$ korral, st iga $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (vt lisa 1) korral $X_t^{-1}(U) \in \mathcal{F}_t$.

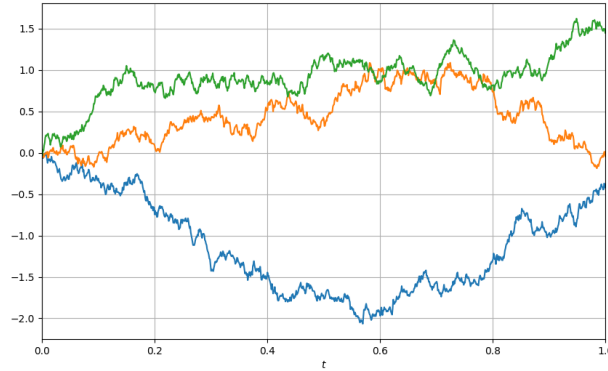
Edaspidises, kui tegutseme juhusliku protsessiga $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, mis on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, siis kasutame filtratsiooni, kus σ -algebra \mathcal{F}_t on defineeritud kui $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, st \mathcal{F}_t on vähim σ -algebra nii, et kõik juhuslikud suurused $X_s, 0 \leq s \leq t$ on \mathcal{F}_t -mõõtuvad. Sellist filtratsiooni nimetatakse loomulikuks filtratsiooniks.

Definitsioon 6. Juhuslikku protsessi $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ nimetatakse Browni liikumiseks, kui

1. $B_0 = 0$ peaaegu kindlasti, st $\mathbf{P}(B_0 \neq 0) = 0$;
2. iga jaotuse $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ korral on juurdekasvud $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, k = 0, \dots, m - 1$ sõltumatud;

3. iga $0 \leq s < t \leq T$ korral $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, st $B_t - B_s$ jaotus on normaaljaotus keskvaertusega 0 ja dispersiooniga $t - s$.

Joonisel 1 on toodud välja kolm Browni liikumise realisatsiooni lõigus $[0, 1]$.



Joonis 1: Browni liikumise realisatsioonid.

Lemma 1. (Baldi, 2017, lk 55) Olgu $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ Browni liikumine, $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ lõigu $[0, T]$ jaotus, kus $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ ja $|\pi| = \max_{0 \leq k \leq m-1} \{t_{k+1} - t_k\}$. Tähistame

$$S_\pi = \sum_{k=0}^{m-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2.$$

Siis

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_\pi = T \tag{1}$$

ruumis $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Tõestus. Näitame, et $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_\pi = T$ ruumis $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Paneme tähele, et $T = \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)$. Seega peame näitama, et

$$\mathbb{E}(S_\pi - T)^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)] \right)^2 \rightarrow 0,$$

kui $|\pi| \rightarrow 0$. Kui $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $0 \leq i < j \leq m-1$, siis Browni liikumise definitsiooni kohaselt on juhuslikud suurused $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)$ ja $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)$ sõltumatud. Järelikult

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left([(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] [(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)] \right) = \\ & = \mathbb{E} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \mathbb{E} [(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)] = \\ & = [\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] [\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)] = 0, \end{aligned}$$

sest definitsiooni 6 kohaselt $B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \sim \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_k)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, millest järeldub, et $\mathbb{E}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = t_{k+1} - t_k$. Kasutades saadud omadust, saame leida, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\pi - T)^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)] \right)^2 = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq m-1} \left([(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot [(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)] \right) \right) = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2 \right). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\pi - T)^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2 \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E} \left([(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2 \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \mathbb{E} \left[\left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \right)^2 - 1 \right]^2.\end{aligned}$$

Iga $k = 0, 1, \dots, m-1$ korral $Z_k := \frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Kuna standardse normaalkaotuse korral neljas moment $\mathbb{E}Z_k^4 = 3$ ja teine moment $\mathbb{E}Z_k^2 = 1$, siis

$$\mathbb{E}(Z_k^2 - 1)^2 = \mathbb{E}Z_k^4 - 2\mathbb{E}Z_k^2 + 1 = 3 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

iga $k = 0, 1, \dots, m-1$ korral. Kokkuvõttes saame, et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\pi - T)^2 &= \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \mathbb{E} \left[\left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \right)^2 - 1 \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} 2(t_{k+1} - t_k)^2 \leq 2|\pi| \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) = 2|\pi|T.\end{aligned}$$

Järelikult oleme näidanud, et $\mathbb{E}(S_\pi - T)^2 \leq 2|\pi|T$. Niisiis $\mathbb{E}(S_\pi - T)^2 \rightarrow 0$, kui $|\pi| \rightarrow 0$ ehk $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_\pi = T$ ruumis $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. \square

Piirväärtust (1) nimetatakse juhusliku protsessi või funktsiooni ruutvariatsiooniks lõigus $[0, T]$. Saab näidata, et iga pidevalt diferentseeruva funktsiooni ruutvariatsioon on 0 (Baldi, 2017). Lemma 1 viitab seega, et Browni liikumise graafikud on ebaregulaarsemad kui pidevalt diferentseeruvate funktsioonide graafikud. See ebaregulaarsus ahendab oluliselt nende funktsioonide klassi, mille puhul on võimalik integraali Browni liikumise suhtes defineerida ana-

loogselt Riemanni integraaliga. Selle kitsaskoha ületamiseks toome sisse Itô integraali mõiste, mille defineerime järgmises alapeatükis.

1.2 Itô integraal

Järgmistes peatükkides olgu $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ Browni liikumine ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ Browni liikumise B loomulik filtratsioon.

Definitsioon 7. Lihtsaks juhuslikuks protsessiks nimetatakse juhuslikku protsessi $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, mis avaldub kujul

$$X_t = \sum_{i=0}^{n-2} \xi_i I_{[t_i, t_{i+1})}(t) + \xi_{n-1} I_{[t_{n-1}, t_n]}(t), \quad (2)$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ on lõigu $[0, T]$ jaotus, $I_{[t_i, t_{i+1})}$ on hulga $[t_i, t_{i+1})$ indikaatorfunktsioon ja $\xi_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ on juhuslikud suurused, mille korral ξ_i on \mathcal{F}_{t_i} -mõõtv ja $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$.

Itô integraali defineerimiseks Browni liikumise B suhtes teeme seda kõigepealt lihtsate juhuslike protsesside jaoks, mille laiendame edasi suuremale klassile juhuslikele protsessidele.

Definitsioon 8. Olgu $0 \leq t \leq T$. Lihtsa juhusliku protsessi X Itô integraaliks lõigus $[0, t]$ Browni liikumise B suhtes nimetatakse juhuslikku suurust

$$\int_0^t X_s dB_s := \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \xi_k (B_t - B_{t_k}), \quad (3)$$

kus $k \in \{0, \dots, n-1\}$ nii, et $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Lihtsa juhusliku protsessi X Itô integraaliga saame defineerida iga $t \in [0, T]$ korral uue juhusliku suuruse $\int_0^t X_s dB_s$. See tähendab, et hulk $\left\{ \int_0^t X_s dB_s \right\}_{t \in [0, T]}$

moodustab juhusliku protsessi. Tõestame nüüd kolm omadust lihtsa juhusliku protsessi Itô integraali kohta.

Lemma 2. (Baldi, 2017, lk 184) Juhuslik protsess $\left\{ \int_0^t X_s dB_s \right\}_{t \in [0, T]}$ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$.

Tõestus. Definiitsiooni 8 kohaselt lihtsa juhuslikku protsessi Itô integraal avaldub kujul

$$\int_0^t X_s dB_s = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \xi_k (B_t - B_{t_k}),$$

kus $k \in \{0, \dots, n-1\}$ nii, et $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Kuna juhuslikud suurused ξ_i on \mathcal{F}_{t_i} -mõõtuvad iga $i = 0, \dots, k$ ja $t_i \leq t$, siis filtratsiooni definiitsiooni järgi $\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$, mis tähendab, et ξ_i on \mathcal{F}_t -mõõtuv iga $i = 0, \dots, k$ korral. Samamoodi saame, et ka B_{t_i} on \mathcal{F}_t -mõõtuv iga $i = 0, \dots, k$ korral. Kuna B on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, siis B_t on \mathcal{F}_t -mõõtuv. Järelikult Itô integraal $\int_0^t X_s dB_s$, mis on moodustatud lõpliku arvu \mathcal{F}_t -mõõtuvate juhuslike suuruste korrutise, summa ja vahena, on ka \mathcal{F}_t -mõõtuv. Kokkuvõttes oleme näidanud, et juhuslik protsess $\left\{ \int_0^t X_s dB_s \right\}_{t \in [0, T]}$ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ \square

Lemma 3. (Baldi, 2017, lk 184) Olgu $0 \leq t \leq T$. Siis

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = 0.$$

Tõestus. Paneme tähele, et iga $i = 0, \dots, k-1$ korral juhuslik suurus ξ_i on \mathcal{F}_{t_i} -mõõtuv ja Browni liikumise juurdekasv $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ on sõltumatu σ -algebrast \mathcal{F}_{t_i} (Baldi, 2017, lk 46). Seega saame, et juhuslikud suurused ξ_i ja $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ on sõltumatud iga $i = 0, \dots, k-1$ korral. Sarnaselt on sõltumatud

ka juhuslikud suurused ξ_k ja $B_t - B_{t_k}$. Järelikult saame leida, et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dB_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \xi_k(B_t - B_{t_k})\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \mathbb{E}(\xi_k)\mathbb{E}(B_t - B_{t_k}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\xi_i) \cdot 0 + \mathbb{E}(\xi_k) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

sest definitsiooni 6 kohaselt iga $0 \leq s < s' \leq T$ korral $B_{s'} - B_s \sim \mathcal{N}(0, s' - s)$, mis tähendab, et $\mathbb{E}(B_{s'} - B_s) = 0$. \square

Lemma 4. (Baldi, 2017, lk 184) Olgu $0 \leq t \leq T$. Lihtsa juhusliku protsessi Itô integraal (3) rahuldab võrdust

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right), \quad (4)$$

kus integraal $\int_0^t X_s^2 ds$ on Lebesgue'i integraal.

Tõestus. Tähistame $D_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, $i = 0, \dots, k-1$ ja $D_k = B_t - B_{t_k}$. Siis saame kirjutada, et $\int_0^t X_s dB_s = \sum_{i=0}^k \xi_i D_i$ ja

$$\left(\int_0^t X_s dB_x\right)^2 = \sum_{i=0}^k \xi_i^2 D_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} \xi_i \xi_j D_i D_j.$$

Näitame, et $\mathbb{E}(\xi_i \xi_j D_i D_j) = 0$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq i < j \leq k$. Paneme tähele, et iga $i < j$ korral juhuslik suurus $\xi_i \xi_j D_i$ on \mathcal{F}_{t_j} -mõõtuv ja Browni liikumise juurdekasv D_j sõltumatu σ -algebrast \mathcal{F}_{t_j} (Baldi, 2017, lk 46). Järelikult $\xi_i \xi_j D_i$ ja D_j on sõltumatud. Kuna definitsiooni 6 kohaselt $\mathbb{E}D_j = 0$, siis

$$\mathbb{E}(\xi_i \xi_j D_i D_j) = \mathbb{E}(\xi_i \xi_j D_i) \mathbb{E}(D_j) = \mathbb{E}(\xi_i \xi_j D_i) \cdot 0 = 0.$$

Paneme tähele, et sarnaselt saame, et juhuslikud suurused ξ_i^2 ja D_i^2 on sõltumatud, sest ξ_i^2 on \mathcal{F}_{t_i} -mõõtuv ja D_i^2 on sõltumatu σ -algebrast \mathcal{F}_{t_i} . Lisaks definitsiooni 6 kohaselt $\mathbb{E}D_i^2 = t_{i+1} - t_i$, kui $i = 0, \dots, k-1$ ja $\mathbb{E}D_k^2 = t - t_k$.

Järelikult

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dB_x \right)^2 \right] &= \sum_{i=0}^k \mathbb{E}(\xi_i^2) \mathbb{E}(D_i^2) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\xi_i^2)(t_{i+1} - t_i) + \mathbb{E}(\xi_k^2)(t - t_k) = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^2(t_{i+1} - t_i) + \xi_k^2(t - t_k) \right). \end{aligned}$$

Kuna juhuslik protsess X on konstantne poolloigul $[t_i, t_{i+1})$, siis saame, et $\xi_i^2(t_{i+1} - t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} X_s^2 ds$. Sarnaselt saame, et $\xi_k^2(t - t_k) = \int_{t_k}^t X_s^2 ds$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_x \right)^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} X_s^2 ds + \int_{t_k}^t X_s^2 ds \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 ds \right).$$

□

Üldiste juhuslike protsesside Itô integraal defineeritakse lihtsa juhuslike protsesside Itô integraali läbi. Tuletame meelde, et $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ on Browni liikumine ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tema loomulik filtratsioon.

Definitsioon 9. Olgu $t \in [0, T]$ ja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ juhuslik protsess, mille korral kehtib, et

1. kujutus $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ on korrutis- σ -algebra $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ -mõõtuv (vt lisa 1);
2. juhuslik protsess X on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$;
3. $\mathbb{E} \left(\int_0^T X_t^2 dt \right) < \infty$.

Juhusliku protsessi X Itô integraaliks lõigus $[0, t]$ nimetatakse juhuslikku suurusust

$$\int_0^t X_s dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \phi_{n,s} dB_s \quad (\text{ruumis } L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})), \quad (5)$$

kus $\{\phi_n\}$ on jada lihtsaid juhuslike protsesse, mis on kohandatud filtratsiooni $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, t]}$ ja

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t (X_s - \phi_{n,s})^2 ds \right) \rightarrow 0, \quad (6)$$

kui $n \rightarrow \infty$.

Definitsiooni 9 korrektsus on tõestatud õpikus (Øksendal, 2003, lk 21 – 33). Järgmine lemma näitab, et lihtsate juhuslike protsesside Itô integraali jaoks tõestatud omadused 2, 3 ja 4 kehtivad ka üldise Itô integraali jaoks.

Lemma 5. (Baldi, 2017, lk 188, 192) Olgu X definitsioonis 9 kirjeldatud omadustega juhuslik protsess. Kehtivad järgmised väited:

1. $\left\{ \int_0^t X_s dB_s \right\}_{t \in [0, T]}$ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$;
2. iga $t \in [0, T]$ korral $\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = 0$;
3. iga $t \in [0, T]$ korral $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 ds \right)$.

Lemma 5 kolmandat omadust nimetatakse ka Itô isomeetriaks. Toome näite Itô integraali leidmisest.

Näide 1. Olgu $t \in [0, T]$. Näitame, et $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$. Defineerime lihtsate juhuslike protsesside jada $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, kus

$$\phi_{n,s} = \sum_{i=0}^{n-2} B_{t_i} I_{[t_i, t_{i+1})}(s) + B_{t_{n-1}} I_{[t_{n-1}, t_n)}(s),$$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ja $\max_{0 \leq k \leq n-1} \{t_{k+1} - t_k\} \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Siis $\{\phi_n\}$ on rahuldab tingimust (6) (Øksendal, 2003, lk 29). Järelikult Browni liikumise Itô integraali Browni liikumise suhtes lõigus $[0, t]$ saame leida definitsiooni 9 põhjal järgmiselt:

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \phi_{n,s} dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left((B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) - (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (B_{t_n}^2 - B_{t_0}^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right). \end{aligned}$$

Kuna definitsiooni 6 kohaselt $B_0 = 0$ peaaegu kindlasti ja lemma 1 kohaselt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = t$ ruumis $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, siis saame, et

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (B_{t_n}^2 - B_{t_0}^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Seega oleme saanud, et $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$, mis näitab, et Itô integraali integreerimisreeglid erinevad Riemanni integraali integreerimisreeglitest.

1.3 Stohhastilised diferentsiaalvõrrandid

Olgu $T > 0$. Vaatleme stohhastilisi diferentsiaalvõrrandeid lõigus $[0, T]$, mis on kujul

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_s, \quad (7)$$

kus $a : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on mõõtuvad funktsioonid, $t \in [0, T]$ ning $B = \{B_s\}_{s \in [0, T]}$ on Browni liikumine, mille loomulik filtratsioon on $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, T]}$. Suurust X_0 võrrandis (7) nimetatakse algtingimuseks. Antud töös vaatleme ainult võrrandeid, kus $X_0 = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Paneme tähele, et võrrandi (7) paremal poolel esimene integraal on Lebesgue'i integraal ja teine on eelmises peatükis sisse toodud Itô integraal. Võrrandit (7) võib esitada ka järgmisel kujul

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t. \quad (8)$$

Definitsioon 10. Stohhastilise diferentsiaalvõrrandi (7) lahendiks nimetatakse juhusliku protsessi $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, mille korral

1. X rahuldab võrrandit (7) iga $t \in [0, T]$ korral ja algtingimust;
2. X on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$;
3. $\mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) < \infty$.

Stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite täpse lahendamise kohta saab lugeda põhjalikumalt raamatust (Øksendal, 2003). Järgmises peatükis vaatleme stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite ligikaudset lahendamist.

2 Stohhastiline SIR-mudel ja selle ligikaudne lahendamine

Selles peatükis tutvustame stohhastilist SIR-mudelit ja sellega seotud stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Lisaks esitame numbrilise meetodi antud süsteemi ligikaudseks lahendamiseks ning tõestame artiklile (Yang, Yang ja Zhang, 2023) tuginedes meetodi koondumiskiiruse.

2.1 Stohhastiline SIR-mudel

Klassikaline SIR-mudel koosneb harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemist, mis modelleerib haiguse levikut populatsioonis. Tähistame suurusega S (ingl *susceptible individuals*) haigusele vastuvõtlike inimeste arvu, suurusega I (ingl *infected individuals*) haigete inimeste arvu, kes nakatavad teisi inimesi ja suurusega R (ingl *removed individuals*) tervenunud inimeste arvu, kes ei saa enam haigeks jääda. Klassikalise SIR-mudeli diferentsiaalvõrrandite süsteem avaldub kujul

$$\begin{cases} dS = (\Lambda - \hat{\beta}SI - \mu S)dt, \\ dI = (\hat{\beta}SI - (\mu + \gamma + \alpha)I)dt, \\ dR = (\gamma I - \mu R)dt, \end{cases} \quad (9)$$

kus Λ on sündide arv, μ üldine suremuskordaja, $\hat{\beta}$ on nakkuse leviku kordaja, γ on tervenemiskordaja ja α haigusega seotud suremuskordaja. Eeldatakse, et kõik süsteemis (9) esinevad kordajad on mittenegatiivsed. Lisaks on antud algtingimus $(S_0, I_0, R_0) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$.

Vaatleme stohhastilist SIR-mudelit, kus nakkuse leviku kordaja $\hat{\beta}$ ei ole kons-

tant, vaid juhuslik protsess. Selleks eeldame, et kehtib $\hat{\beta}dt = \beta dt + \sigma dB_t$, kus $\beta > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ja $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ on Browni liikumine. Nii saame stohhastilise SIR-mudeliga seotud stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite süsteem, mis avaldub kujul

$$\begin{cases} dS = (\Lambda - \beta SI - \mu S)dt - \sigma SI dB_t, \\ dI = (\beta SI - (\mu + \gamma + \alpha)I)dt + \sigma SI dB_t, \\ dR = (\gamma I - \mu R)dt. \end{cases} \quad (10)$$

Lisaks on antud algtingimus $(S_0, I_0, R_0) \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$. Süsteemi (10) saame lühemalt kirjutada vektorkujul

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t, \quad (11)$$

kus

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}, \quad a(t, Z) = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta z_1 z_2 - \mu z_1 \\ \beta z_1 z_2 - (\mu + \gamma + \alpha)z_2 \\ \gamma z_2 - \mu z_3 \end{pmatrix}, \\ b(t, Z) &= \begin{pmatrix} -\sigma z_1 z_2 \\ \sigma z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Teoreem 1. (Ji, Jiang ja Shi, 2012, lk 761) Süsteemil (10) leidub iga algtingimuse $(S_0, I_0, R_0) \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$ korral ühene lahend, kusjuures süsteemi lahend $(S(t), I(t), R(t)) \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$ iga $t \in [0, T]$ korral peaaegu kindlasti.

Märgime, et teoreemis 1 lahendi ühesus tähendab seda, et kui $(S(t), I(t), R(t))$

ja $(\hat{S}(t), \hat{I}(t), \hat{R}(t))$ on lahendid, siis

$$(S(t), I(t), R(t)) = (\hat{S}(t), \hat{I}(t), \hat{R}(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

peaaegu kindlasti (Øksendal, 2003, lk 67).

2.2 Meetodi kirjeldus

Stohhastilise SIR mudeli (10) ligikaudseks lahendamiseks kasutame ilmutamata Euleri meetodit kärbitud Browni liikumisega.

Olgu $N \in \mathbb{N}$. Jaotame lõigu $[0, T]$ N võrdseks osalõiguks, mille pikkus on $h = \frac{T}{N}$. Olgu $n \in \{0, 1, \dots, N\}$. Tähistame $t_n = hn$ ning suurusetga S_n, I_n ja R_n numbrilise meetodiga leitud ligikaudsed lahendid ajahetkel t_n . Olgu $(S_0, I_0, R_0) \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$ mudeli algtingimus. Siis ilmutamata Euleri meetodi skeem kärbitud Browni liikumisega stohhastilise SIR-mudeli (10) lahendamiseks avaldub kujul

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + h(\Lambda - \beta S_n I_{n+1} - \mu S_{n+1}) - \sigma S_n I_n \sqrt{h} \xi_n^h, \\ I_{n+1} &= I_n + h I_{n+1} (\beta S_n - (\mu + \gamma + \alpha)) + \sigma S_n I_n \sqrt{h} \xi_n^h, \\ R_{n+1} &= R_n + h(\gamma I_{n+1} - \mu R_{n+1}), \end{aligned} \quad (13)$$

kus $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ja

$$\xi_n^h = \begin{cases} \xi_n, & \text{kui } |\xi_n| \leq A_h, \\ A_h, & \text{kui } \xi_n > A_h, \\ -A_h, & \text{kui } \xi_n < -A_h, \end{cases} \quad A_h = \sqrt{2|\ln h|}.$$

Avaldame seostest (13) suurused S_{n+1}, I_{n+1} ja R_{n+1} . Teisest võrdusest saame

avaldada I_{n+1} järgmiselt:

$$I_{n+1} = K_n I_n, \quad (14)$$

kus

$$K_n = \frac{1 + \sigma S_n \sqrt{h} \xi_n^h}{1 - h\beta S_n + h(\mu + \gamma + \alpha)}.$$

Seose (14) põhjal saame esimesest võrdusest avaldada S_{n+1} järgmiselt:

$$S_{n+1} = \frac{h\Lambda}{1 + h\mu} + \frac{1 - h\beta K_n I_n - \sigma I_n \sqrt{h} \xi_n^h}{1 + h\mu} S_n. \quad (15)$$

Lõpuks seose (14) põhjal saame kolmandast võrdusest avaldada R_{n+1} järgmiselt:

$$R_{n+1} = \frac{R_n + h\gamma K_n I_n}{1 + h\mu}. \quad (16)$$

Tõestame järgmise tulemuse, mida meil läheb hiljem vaja.

Lemma 6. Olgu $h > 0$ ja $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Siis kehtib, et $\mathbb{E}(\xi - \xi^h)^2 \leq h$.

Tõestus. Kasutades keskväärtuse definitsiooni ja normaaljaotuse tihedusfunktsiooni, saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi - \xi^h)^2 &= \int_{-\infty}^{-A_h} (x + A_h)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{A_h}^{\infty} (x - A_h)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= 2 \int_{A_h}^{\infty} (x - A_h)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Tehes viimases integraalis muutuja vahetuse $y = x - A_h$, saame, et

$$\mathbb{E}(\xi - \xi^h)^2 = 2 \int_0^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+A_h)^2}{2}} dy \leq e^{-\frac{A_h^2}{2}} 2 \int_0^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

kus kasutasime võrratust $-(y + A_h)^2 \leq -y^2 - A_h^2$, kui $y \geq 0$. Standardse

normaaljaotuse teine moment on 1 ehk

$$2 \int_0^\infty y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

Järelikult

$$\mathbb{E}(\xi - \xi^h)^2 \leq e^{-\frac{A_h^2}{2}} = e^{-|\ln h|} \leq h.$$

□

2.3 Meetodi koondumiskiirus

Stohhastilise SIR-mudeli koondumiskiiruse uurimist raskendab asjaolu, et stohhastilise diferentsiaalvõrrandi süsteemi (11) kordajad a ja b (vt 12) ei ole Lipschitz pidevad iga $t \in [0, T]$ korral, st et ei leidu $K > 0$ nii, et

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

iga $x, y \in \mathbb{R}^3$ ja $t \in [0, T]$ korral. Siin $|x|$ tähistab Eukleidilist normi ruumis \mathbb{R}^3 . Funktsioonid a ja b ei ole Lipschitz pidevad üle kogu ruumi \mathbb{R}^3 , sest nad sisaldavad korrutist $z_1 z_2$. Antud probleemi lahendamiseks näitame, et eksisteerib kinnine ja tõkestatud hulk $V \subset \mathbb{R}^3$ nii, et kui algingimus kuulub sellesse piirkonda, siis jäävad sinna hulka peaaegu kindlasti ka süsteemi täpne lahend ja numbrilised lahendid. Siis saame Lipschitzi pidevuse nõude üle ruumi \mathbb{R}^3 asendada funktsioonide Lipschitzi pidevusega hulgal V . Toome sisse vajalikud tähistused ja sõnastame teoreemi, mille põhjal me hiljem uurime numbrilise meetodi (13) koondumiskiirust. Järgnev teoreem põhineb raamatul (Milstein, 1995).

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ tõkestatud ja kinnine hulk. Olgu stohhastiliste dife-

rentsiaalvõrrandite süsteem vektorkujul

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t, \quad (17)$$

kus $a : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pidevad funktsioonid ja X on n -mõõtmeline vektor. Eeldame, et a ja b on Lipschitzi pidevad funktsioonid hulgas V , st leidub $K > 0$ nii, et iga $t \in [0, T]$ ja $x, y \in V$ korral kehtib

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Tähistame suurusega $X_{t,x}$ süsteemi (17) täpset lahendit, mille korral ajahetkel $t \in [0, T]$ on täpse lahendi väärtus $x \in V$ ehk $X_{t,x}(t) = x$. Eeldame ka, et lahend $X_{x,t}$ kuulub peaaegu kindlasti piirkonda V iga $t \in [0, T]$ ja $x \in V$ korral. Tähistame suurusega $\tilde{X}_{t,x}(t+h)$, $0 \leq t < t+h \leq T$ ühesammulist lähendit täpsele lahendile $X_{x,t}$ ajahetkel $t+h$ ehk suurusele $X_{x,t}(t+h)$. Ühesammuline lähend $\tilde{X}_{t,x}(t+h)$ sõltub suursutest x, t, h ja juurdekasvudest $\{B_\theta - B_t : t \leq \theta \leq t+h\}$:

$$\tilde{X}_{t,x}(t+h) = x + A(t, x, h; B_\theta - B_t : t \leq \theta \leq t+h).$$

Lisaks eeldame, et iga $x \in V, h > 0, t \in [0, T-h]$ ja realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral $\tilde{X}_{t,x}(t+h) \in V$. Olgu $N \in \mathbb{N}$. Moodustame lõigu $[0, T]$ ühtlase võrgu $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, N$, kus $h = \frac{T}{N}$. Tähistame suurusega X_k ligikaudset lahendit ajahetkel t_k , mille konstrueerime rekursiivselt ühesammuliste lähendite abil nii, et $X_0 = X(0)$ ja $X_{k+1} = \tilde{X}_{t_k, X_k}(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1$.

Teoreem 2. (vt Milstein, 1995, Theorem 1.1.) Eeldame, et stohhastilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (17) kordajad a ja b on Lipschitzi pidevad hulgas V , süsteemi täpne lahend $X_{t,x}$ jääb hulka V peaaegu kindlasti iga $t \in [0, T]$ ja

$x \in V$ korral ning ühesammuline numbriline lahend $\tilde{X}_{t,x}(t+h)$ jääb hulka V iga $x \in V, h > 0, t \in [0, T-h], \omega \in \Omega$ korral. Kui leidub sammu pikkusest h , ajahetkest t ja punktist x sõltumatu konstant $C_1 > 0$ nii, et iga $0 \leq t \leq T-h$ ja $x \in V$ korral kehtivad võrratused

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}(X_{t,x}(t+h) - \tilde{X}_{t,x}(t+h)) \right| &\leq C_1 h^{p_1}, \\ \left(\mathbb{E} \left| X_{t,x}(t+h) - \tilde{X}_{t,x}(t+h) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C_1 h^{p_2}, \end{aligned}$$

kus $p_2 \geq \frac{1}{2}$ ja $p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}$, siis eksisteerib suurustest h ja k sõltumatu konstant $C_2 > 0$ nii, et iga $k = 0, 1, \dots, N$ korral kehtib hinnang

$$\left(\mathbb{E} \left| X_{0,X(0)}(t_k) - X_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 h^{p_2 - \frac{1}{2}}.$$

Järelikult teoreemi 2 abil on meil võimalik leida vea hinnang numbrilistele lahenditele, kui uurime sammul tekkivat viga. Järgnevalt tõestame, et meie vaadeldava stohhastilise SIR-mudeli (10) jaoks leidub selline kinnine ja tõkestatud hulk V nii, et kui algtingimus kuulub hulka V , siis täpne lahend jääb hulka V ja numbrilised meetodiga (13) leitud lahendid jäävad hulka V iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral.

Lemma 7. Olgu $V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$. Kui algtingimus $(S_0, I_0, R_0) \in V$, siis süsteemi lahend $(S(t), I(t), R(t)) \in V$ iga $t \in [0, T]$ korral peaaegu kindlasti.

Tõestus. Olgu $(S_0, I_0, R_0) \in V$ algtingimus ja $(S(t), I(t), R(t)), t \in [0, T]$ täpne lahend. Teoreemist 1 teame, et $(S(t), I(t), R(t)) \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$ iga $t \in [0, T]$ korral peaaegu kindlasti. Tähistame $Q(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Paneme tähele, et kui me liidame stohhastilise SIR-mudeli süsteemisis (10) kõik võrrandid,

siis saame

$$d(S + I + R) = (\Lambda - \mu(S + I + R) - \alpha I)dt$$

ehk

$$dQ(t) = (\Lambda - \mu Q(t) - \alpha I(t))dt.$$

Kuna teoreemi 1 kohaselt $I(t) \geq 0$, siis

$$dQ(t) \leq (\Lambda - \mu Q(t))dt.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled läbi integreerimisteguriga $e^{\mu t}$, millest saame, et

$$\begin{aligned} e^{\mu t} Q'(t) + \mu e^{\mu t} Q(t) &\leq \Lambda e^{\mu t} \\ (e^{\mu t} Q(t))' &\leq \Lambda e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Integreerides võrratuse mõlemad pooli lõigus $[0, t_0]$ ($t_0 \in [0, T]$), saame

$$\int_0^{t_0} (e^{\mu t} Q(t))' dt \leq \int_0^{t_0} \Lambda e^{\mu t} dt,$$

millest

$$e^{\mu t_0} Q(t_0) - Q(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu} e^{\mu t_0} - \frac{\Lambda}{\mu}$$

ehk

$$Q(t_0) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \left(Q(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t_0} \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Viimane võrratus kehtib, sest $Q(0) = S_0 + I_0 + R_0 \leq \frac{\Lambda}{\mu}$. Järelikult oleme saanud, et $(S(t), I(t), R(t)) \in V$ iga $t \in [0, T]$ korral peaaegu kindlasti. \square

Lemma 8. Olgu $V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$. Leidub $h_0 > 0$ nii, et iga h ($0 < h < h_0$) ja algtingimuse $(S_0, I_0, R_0) \in V$ korral numbrilise

meetodi (13) ligikaudsed lahendid jäävad hulka V iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral.

Tõestus. Kuna $1 - h\beta\frac{\Lambda}{\mu} - |\sigma|\frac{\Lambda}{\mu}\sqrt{2h|\ln h|} \rightarrow 1$, kui $h \rightarrow 0+$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et kui $0 < h < \delta$, siis

$$1 - h\beta\frac{\Lambda}{\mu} - |\sigma|\frac{\Lambda}{\mu}\sqrt{2h|\ln h|} > 0. \quad (18)$$

Võtame $h_0 = \delta$. Olgu sammupikkus $h \in (0, h_0)$, ja $(S_n, I_n, R_n) \in V$. Näitame, et ka $(S_{n+1}, I_{n+1}, R_{n+1}) \in V$, mis on leitud meetodi (13) abil. Märgime, et $(S_n, I_n, R_n) \in V$, mis tähendab, et $0 \leq S_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ja $0 \leq R_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Tõestame, et $I_{n+1} \geq 0$. Kuna $S_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ja iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral $|\xi_n^h| \leq \sqrt{2h|\ln h|}$, siis

$$1 + \sigma S_n \sqrt{h} \xi_n^h \geq 1 - |\sigma| \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{2h|\ln h|} > 0$$

ja

$$1 - h\beta S_n + h(\mu + \gamma + \alpha) \geq 1 - h\beta\frac{\Lambda}{\mu} > 0.$$

Mõlemad võrratused järelduvad võrratusest (18). Seega saame, et $K_n = \frac{1 + \sigma S_n \sqrt{h} \xi_n^h}{1 - h\beta S_n + h(\mu + \gamma + \alpha)} > 0$. Kuna $K_n > 0$ ja $I_n \geq 0$, siis $I_{n+1} = K_n I_n \geq 0$ (vt 14).

Tähistame $Q_k = S_k + I_k + R_k$. Näitame, et $Q_{n+1} \leq \frac{\Lambda}{\mu}$. Liidame meetodi kirjelduses (13) kõik võrdused omavahel. Saame, et

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = S_n + I_n + R_n + h\Lambda - h\mu(S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1}) - h\alpha I_{n+1},$$

millest

$$(1 + h\mu)Q_{n+1} = Q_n + h\Lambda - h\alpha I_{n+1}$$

ehk

$$Q_{n+1} = \frac{Q_n + h\Lambda - h\alpha I_{n+1}}{1 + h\mu}.$$

Viimase võrduse põhjal

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - \frac{\Lambda}{\mu} &= \frac{Q_n + h\Lambda - h\alpha I_{n+1}}{1 + h\mu} - \frac{\Lambda}{\mu} = \\ &= \frac{\mu Q_n + h\mu\Lambda - h\mu\alpha I_{n+1} - (1 + h\mu)\Lambda}{\mu(1 + h\mu)} = \\ &= \frac{\mu Q_n - h\mu\alpha I_{n+1} - \Lambda}{\mu(1 + h\mu)} \leq \frac{\mu \frac{\Lambda}{\mu} - \Lambda}{\mu(1 + h\mu)} = 0, \end{aligned}$$

kus võrratuse saamiseks kasutasime, et $Q_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ja $I_{n+1} \geq 0$.

Näitame nüüd, et $S_{n+1} \geq 0$. Seosest (15) saame

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{h\Lambda}{1 + h\Lambda} + \frac{1 - h\beta K_n I_n - \sigma I_n \sqrt{h\xi_n^h}}{1 + h\mu} S_n \geq \\ &\geq \frac{h\Lambda}{1 + h\Lambda} + \frac{1 - h\beta \frac{\Lambda}{\mu} - |\sigma| \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{2h|\ln h|}}{1 + h\mu} S_n, \end{aligned}$$

kus võrratuse saamiseks kasutasime, et $K_n I_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, $I_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, $S_n \geq 0$ ja $|\xi_n^h| \leq \sqrt{2|\ln h|}$. Kasutades võrratust (18) ja $S_n \geq 0$, saame

$$S_{n+1} \geq \frac{h\Lambda}{1 + h\Lambda} + \frac{1 - h\beta \frac{\Lambda}{\mu} - |\sigma| \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{2h|\ln h|}}{1 + h\mu} S_n \geq \frac{h\Lambda}{1 + h\Lambda} \geq 0.$$

Viimaseks näitame, et $R_{n+1} \geq 0$. Seose (16) põhjal

$$R_{n+1} = \frac{R_n + h\gamma K_n I_n}{1 + h\mu} \geq 0,$$

sest $R_n \geq 0$ ja $K_n I_n \geq 0$.

Kokkuvõttes oleme saanud, et $(S_{n+1}, I_{n+1}, R_{n+1}) \in V$, mis tähendab, et kui

$(S_0, I_0, R_0) \in V$, siis numbrilise meetodiga (13) leitud lahendid jääb piirkonda V iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral. \square

Lemmadega 7 ja 8 oleme tõestanud, et stohhastilise SIR-mudeli (10) täpne lahend jääb hulka V ja meetodiga (13) leitud numbrilised lahendid jäävad hulka V iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral, kus

$$V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

Järgnevalt tõestame, et stohhastilise SIR-mudeli (11) kordajad a ja b (vt 12) on Lipschitzi pidevad hulgas V .

Lemma 9. Olgu $V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$. Siis SIR-mudeli (11) kordajad a ja b (vt 12) rahuldavad hulgas V Lipschitzi pidevuse tingimust iga $t \in [0, T]$ korral, st leidub $K > 0$ nii, et iga $t \in [0, T]$ ja $x, y \in V$ korral kehtib

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Tõestus. Fikseerime $t \in [0, T]$. Fikseeritud t väärtuse korral on mõlemad kordajad a ja b ruumis \mathbb{R}^3 pidevalt diferentseeruvad. Kuna pidevalt diferentseeruv funktsioon kogu ruumis \mathbb{R}^3 rahuldab kinnises ja tõkestatud hulgas Lipschitzi tingimust (Duistermaat ja Kolk, 2004, lk 58), siis a ja b on Lipschitzi pidevad hulgas V . Kuna kordajad a ja b ei sõltu muutujast t , siis nad on Lipschitzi pidevad hulgas V iga $t \in [0, T]$ korral. \square

Edasi uurime stohhastilise SIR-mudeli (10) täpse lahendi käitumist lõigus $[a, b]$, kus $0 \leq a < b \leq T$.

Lemma 10. Olgu $V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$. Eeldame, et algtingimus (S_0, I_0, R_0) kuulub hulka V . Siis leiduvad konstandid C_1, C_2 ja C_3 , nii, et

$$\mathbb{E}|S(b) - S(a)|^2 \leq C_1(b - a),$$

$$\mathbb{E}|I(b) - I(a)|^2 \leq C_2(b - a),$$

$$\mathbb{E}|R(b) - R(a)|^2 \leq C_3(b - a),$$

iga $0 \leq a < b \leq T$ korral.

Tõestus. Stohhastilise SIR-mudeli süsteemist (10) saame (vt 7)

$$S(b) = S(a) + \int_a^b (\Lambda - \beta S(\tau)I(\tau) - \mu S(\tau))d\tau - \int_a^b \sigma S(\tau)I(\tau)dB_\tau, \quad (19)$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b (\beta S(\tau)I(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)I(\tau))d\tau + \int_a^b \sigma S(\tau)I(\tau)dB_\tau, \quad (20)$$

$$R(b) = R(a) + \int_a^b (\gamma I(\tau) - \mu R(\tau))d\tau. \quad (21)$$

Võrdusest (19) ja seost $(d_1 + d_2)^2 \leq 2d_1^2 + 2d_2^2$ saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S(b) - S(a)|^2 &\leq 2\mathbb{E} \left(\int_a^b (\Lambda - \beta S(\tau)I(\tau) - \mu S(\tau))d\tau \right)^2 + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b \sigma S(\tau)I(\tau)dB_\tau \right)^2. \end{aligned}$$

Kasutades viimase võrratuse paremal poolel Jenseni võrratust (vt lisa 1), lemmat 5, saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S(b) - S(a)|^2 &\leq 2\mathbb{E} \left((b - a) \int_a^b (\Lambda - \beta S(\tau)I(\tau) - \mu S(\tau))^2 d\tau \right) + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b (\sigma S(\tau)I(\tau))^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Kuna lemma 7 kohaselt süsteemi (10) täpne lahend jääb hulka V peaaegu kindlasti, siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S(b) - S(a)|^2 &\leq 2T\mathbb{E} \left(\int_a^b \left(\Lambda + \beta \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mu \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 d\tau \right) + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b \left(\sigma \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)^2 d\tau \right) = C_1(b-a), \end{aligned}$$

kus $C_1 = (2T(2\Lambda + \beta \frac{\Lambda^2}{\mu^2})^2 + 2\sigma^2 \frac{\Lambda^4}{\mu^4})$. Võrdusest (20) ja seost $(d_1 + d_2)^2 \leq 2d_1^2 + 2d_2^2$ saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I(b) - I(a)|^2 &\leq 2\mathbb{E} \left(\int_a^b (\beta S(\tau)I(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)I(\tau))d\tau \right)^2 + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b \sigma S(\tau)I(\tau)dB_\tau \right)^2. \end{aligned}$$

Kasutades viimase võrratuse paremal poolel Jenseni võrratust (vt lisa 1), lemmat 5, saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I(b) - I(a)|^2 &\leq 2\mathbb{E} \left((b-a) \int_a^b (\beta S(\tau)I(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)I(\tau))^2 d\tau \right) + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b (\sigma S(\tau)I(\tau))^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Kuna lemma 7 kohaselt süsteemi (10) täpne lahend jääb hulka V peaaegu kindlasti, siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I(b) - I(a)|^2 &\leq 2T\mathbb{E} \left(\int_a^b \left(\beta \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + (\mu + \gamma + \alpha) \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 d\tau \right) + \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\int_a^b \left(\sigma \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)^2 d\tau \right) = C_2(b-a), \end{aligned}$$

kus $C_2 = 2T(\beta \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + (\mu + \gamma + \alpha) \frac{\Lambda}{\mu})^2 + 2\sigma^2 \frac{\Lambda^4}{\mu^4}$. Viimaseks kasutades Jenseni

võrratust (vt lisa 1) ja lemmat 7, saame

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|R(b) - R(a)|^2 &\leq \mathbb{E} \left((b-a) \int_a^b (\gamma I(\tau) - \mu R(\tau))^2 d\tau \right) \leq \\ &\leq T \mathbb{E} \int_a^b \left(\gamma \frac{\Lambda}{\mu} + \mu \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 d\tau = C_3(b-a),\end{aligned}$$

kus $C_3 = T(\gamma \frac{\Lambda}{\mu} + \Lambda)^2$. □

Teoreem 3. *Olgu $V = \left\{ (S, I, R) \in \overline{\mathbb{R}_+^3} : 0 \leq S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$. Eeldame, et süsteemi (10) algtingimus (S_0, I_0, R_0) kuulub hulka V . Leidub konstant $h_0 > 0$ nii, et kui numbrilises meetodis (13) valida osalõikude arvu $N \in \mathbb{N}$ selline, et $h = \frac{T}{N} \in (0, h_0)$, siis*

$$\left(\mathbb{E} |X(t_k) - X_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (22)$$

kus $C > 0$ ei sõltu suurusest N , X on süsteemi (10) täpne lahend algtingimuse (S_0, I_0, R_0) korral, suurused X_k on leitud numbrilise meetodiga (13) ja $t_k = kh$.

Tõestus. Koondumiskiiruse näitamiseks kasutame teoreemi 2. Valime $h_0 > 0$ nii, et

$$1 - h\beta \frac{\Lambda}{\mu} - |\sigma| \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{2h |\ln h|} > 0,$$

kui $0 < h < h_0$ (vt lemmat 8). Olgu numbrilise meetodi (13) osalõikude arv $N \in \mathbb{N}$ selline, et sammupikkus $h = \frac{T}{N} \in (0, h_0)$. Lemmas 8 tõestasime, et sellise sammupikkuse korral numbrilise meetodi (13) lahendid jäävad kinnisesse tõkestatud piirkonda V iga realisatsiooni $\omega \in \Omega$ korral. Lemmas 7 tõestasime, et süsteemi (10) täpne lahend jääb hulka V peaaegu kindlasti. Lemmas 9 näitasime, et süsteemi (10) kordajad a ja b (vt 12) rahuldavad Lipschitzi tingimust hulgas V . Järelikult peame näitama veel, et kehtivad

veahinnangud

$$\left| \mathbb{E}(X_{t,x}(t+h) - \tilde{X}_{t,x}(t+h)) \right| \leq \hat{C}_1 h^{\frac{3}{2}}, \quad (23)$$

$$\left(\mathbb{E} \left| X_{t,x}(t+h) - \tilde{X}_{t,x}(t+h) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \hat{C}_1 h \quad (24)$$

iga $x \in V$ ja $t \in [0, T-h]$ korral. Tähistame $x = (S(t), I(t), R(t))$ ja

$$X_{t,x}(t+h) = \begin{pmatrix} S_{t,S(t)}(t+h) \\ I_{t,I(t)}(t+h) \\ R_{t,R(t)}(t+h) \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_{t,x}(t+h) = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{t,S(t)}(t+h) \\ \tilde{I}_{t,I(t)}(t+h) \\ \tilde{R}_{t,R(t)}(t+h) \end{pmatrix},$$

kus $\tilde{S}_{t,S(t)}(t+h)$, $\tilde{I}_{t,I(t)}(t+h)$ ja $\tilde{R}_{t,R(t)}(t+h)$ on leitud numbrilise meetodiga (13), kui $S_n = S(t)$, $I_n = I(t)$ ja $R_n = R(t)$.

Kuna vektori (x_1, x_2, x_3) Eukleidilist normi ruumis \mathbb{R}^3 saab hinnata järgmiselt:

$$|(x_1, x_2, x_3)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{3}(|x_1| + |x_2| + |x_3|),$$

siis võrratuse (23) näitamiseks piisab tõestada, et

$$\left| \mathbb{E}(S_{t,S(t)}(t+h) - \tilde{S}_{t,S(t)}(t+h)) \right| = O(h^{\frac{3}{2}}), \quad (25)$$

$$\left| \mathbb{E}(I_{t,I(t)}(t+h) - \tilde{I}_{t,I(t)}(t+h)) \right| = O(h^{\frac{3}{2}}), \quad (26)$$

$$\left| \mathbb{E}(R_{t,R(t)}(t+h) - \tilde{R}_{t,R(t)}(t+h)) \right| = O(h^{\frac{3}{2}}), \quad (27)$$

kus $f(h) = O(h^\alpha)$ tähendab, et leidub $M > 0$ nii, et kui $0 < h < h_0$, siis

$f(h) \leq Mh^\alpha$. Analoogiliselt piisab võrratuse (24) kehtimiseks tõestada, et

$$\left(\mathbb{E} \left| S_{t,S(t)}(t+h) - \tilde{S}_{t,S(t)}(t+h) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(h), \quad (28)$$

$$\left(\mathbb{E} \left| I_{t,I(t)}(t+h) - \tilde{I}_{t,I(t)}(t+h) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(h), \quad (29)$$

$$\left(\mathbb{E} \left| R_{t,R(t)}(t+h) - \tilde{R}_{t,R(t)}(t+h) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(h). \quad (30)$$

Kirjapildi lihtsustamiseks jätame kirjutamata alaindeksid edaspidi, näiteks suurust $S_{t,S(t)}(t+h)$ tähistame $S(t+h)$. Tähistame sammul tekivaid vigu

$$\begin{aligned} e(S_{t,S(t)}) &= S(t+h) - \tilde{S}(t+h), \\ e(I_{t,I(t)}) &= I(t+h) - \tilde{I}(t+h), \\ e(R_{t,R(t)}) &= R(t+h) - \tilde{R}(t+h). \end{aligned}$$

Näitame, et (26) ja (29) kehtivad. Stohhastilise SIR-mudeli (10) ja meetodi (13) põhjal näeme, et

$$I(t+h) = I(t) + \int_t^{t+h} [\beta S(\tau)I(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)I(\tau)] d\tau + \int_t^{t+h} \sigma S(\tau)I(\tau) dB_\tau$$

ja

$$\tilde{I}(t+h) = I(t) + h\tilde{I}(t+h)[\beta S(t) - (\mu + \gamma + \alpha)] + \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi^h.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} e(I_{t,I(t)}) &= \int_t^{t+h} (\beta S(\tau)I(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)I(\tau)) d\tau + \int_t^{t+h} \sigma S(\tau)I(\tau) dB_\tau - \\ &\quad - \left(h[I(t+h) - e(I_{t,I(t)})][\beta S(t) - (\mu + \gamma + \alpha)] + \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi^h \right) \end{aligned}$$

ehk

$$e(I_{t,I(t)}) = \frac{1}{1 - h\beta S(t) + h(\mu + \gamma + \alpha)} \left(\int_t^{t+h} ([\beta S(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)][I(\tau) - I(t+h)] + \beta I(t+h)[S(\tau) - S(t)]) d\tau + \int_t^{t+h} [\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)] dB_\tau + \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}(\xi - \xi^h), \right.$$

sest $\int_t^{t+h} \sigma S(t)I(t)dB_\tau = \sigma S(t)I(t)(B_{t+h} - B_t) = \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi$. Paneme tähele, et $S(t)$ on fikseeritud ja kehtib hinnang

$$\frac{1}{|1 - h\beta S(t) + h(\mu + \gamma + \alpha)|} \leq \frac{1}{1 - h\beta \frac{\Lambda}{\mu} + h(\mu + \gamma + \alpha)} =: K.$$

Kuna normaaljaotuse ja kärbitud normaaljaotuse keskväärtus on 0 ja lemma 5 kohaselt Itô integraali keskväärtus on 0, siis

$$|\mathbb{E}(e(I_{t,I(t)}))| \leq K \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (|\beta S(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)| \cdot |I(\tau) - I(t+h)| + |\beta I(t+h)| \cdot |S(\tau) - S(t)|) d\tau \right).$$

Kasutades lemmat 7 ja Tonelli teoreemi (vt lisa 1), saame

$$|\mathbb{E}(e(I_{t,I(t)}))| \leq K \int_t^{t+h} \left(\left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} + (\mu + \gamma + \alpha) \right) \cdot \mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)| + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \mathbb{E}|S(\tau) - S(t)| \right) d\tau.$$

Kuna $\tau \in [t, t+h]$, siis lemma 10 ja Ljapunovi võrratuse (vt lisa 1) kohaselt

$$\mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)| \leq \sqrt{\mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)|^2} \leq \sqrt{C_2(t+h-\tau)} \leq \sqrt{C_2}h^{\frac{1}{2}}$$

ja

$$\mathbb{E}|S(\tau) - S(t)| \leq \sqrt{\mathbb{E}|S(\tau) - S(t)|^2} \leq \sqrt{C_2(\tau - t)} \leq \sqrt{C_1}h^{\frac{1}{2}}.$$

Järelikult oleme saanud, et

$$\int_t^{t+h} \left(\left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} + (\mu + \gamma + \alpha) \right) \mathbb{E}|I(\tau) - I(t_{n+1})| + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \mathbb{E}|S(\tau) - S(t_n)| \right) d\tau = O(h^{\frac{3}{2}}),$$

millest $|\mathbb{E}(e(I_{t,I(t)}))| = O(h^{\frac{3}{2}})$. Nüüd hindame suurust $(\mathbb{E}|e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}}$. Kuna $(d_1 + d_2 + d_3) \leq 3d_1^2 + 3d_2^2 + 3d_3^2$, siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|e(I_{t,I(t)})|^2 &\leq K^2 \left[3\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} ([\beta S(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)][I(\tau) - I(t+h)] + \beta I(t+h) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot [S(\tau) - S(t)]) d\tau \right)^2 + 3\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3\mathbb{E} \left(\sigma S(t)I(t) \sqrt{h}(\xi - \xi^h) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Hindame igat viimase võrratuse paremal pool oleva summa liidetavat eraldi.

Esimese liidetava korral, kasutades lemmat 7, saame, et $S(\tau), I(\tau), R(\tau)$ on tõkestatud kui $\tau \in [t, t+h]$. Järelikult

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} ([\beta S(\tau) - (\mu + \gamma + \alpha)][I(\tau) - I(t+h)] + \beta I(t+h)[S(\tau) - S(t)]) d\tau \right)^2 &\leq \\ &\leq \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} \tilde{C} d\tau \right)^2 = \tilde{C}^2 h^2 = O(h^2), \end{aligned}$$

kus $\tilde{C} > 0$ on konstant. Teise liidetava korral, kasutades lemmat 5, kus on

antud Itô isomeetria omadus, saame

$$\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 = \mathbb{E} \int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t))^2 d\tau$$

Viimase võrduse paremal pool oleva integraalialust funktsiooni saame hinnata järgmiselt:

$$\begin{aligned} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t))^2 &= (\sigma S(\tau)(I(\tau) - I(t)) + \sigma I(t)(S(\tau) - S(t)))^2 \leq \\ &\leq 2\sigma^2 S^2(\tau)(I(\tau) - I(t))^2 + 2\sigma^2 I^2(t)(S(\tau) - S(t))^2. \end{aligned}$$

Järelikult kasutades Tonelli teoreemi (vt lisa 1) ja lemmat 7, saame

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 &\leq \\ &\leq 2\sigma^2 \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int_t^{t+h} [\mathbb{E}(I(\tau) - I(t))^2 + \mathbb{E}(S(\tau) - S(t))^2] d\tau. \end{aligned}$$

Kuna $\tau \in [t, t+h]$, siis lemma 10 kohaselt

$$\mathbb{E}(I(\tau) - I(t))^2 \leq C_2(\tau - t) \leq C_2 h, \quad \mathbb{E}(S(\tau) - S(t))^2 \leq C_1(\tau - t) \leq C_1 h.$$

Järelikult

$$2\sigma^2 \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int_t^{t+h} [\mathbb{E}(I(\tau) - I(t))^2 + \mathbb{E}(S(\tau) - S(t))^2] d\tau = O(h^2),$$

mis annab meile, et ka

$$\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 = O(h^2).$$

Kolmanda liidetava puhul kasutades lemmat 6 ja lemmat 7, saame hinnata, et

$$\mathbb{E}\left(\sigma S(t)I(t)\sqrt{h}(\xi - \xi^h)\right)^2 \leq \sigma^2 \frac{\Lambda^4}{\mu^4} h \mathbb{E}(\xi - \xi^h) \leq \sigma^2 \frac{\Lambda^4}{\mu^4} h^2 = O(h^2).$$

Järelikult $\mathbb{E}|e(I_t, I(t))|^2 = O(h^2)$ ehk ka $\left(\mathbb{E}|e(I_t, I(t))|^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(h)$.

Nüüd näitame analoogselt, et (25) ja (28) kehtivad. Stohhastilise SIR-mudeli (10) ja meetodi (13) põhjal näeme, et

$$S(t+h) = S(t) + \int_t^{t+h} [\Lambda - \beta S(\tau)I(\tau) - \mu S(\tau)] d\tau - \int_t^{t+h} \sigma S(\tau)I(\tau) dB_\tau$$

ja

$$\tilde{S}(t+h) = S(t) + h[\Lambda - \beta S(t)\tilde{I}(t+h) - \mu\tilde{S}(t+h)] - \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi^h.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} e(S_t, S(t)) &= \int_t^{t+h} [-\beta S(\tau)I(\tau) - \mu S(\tau)] d\tau - \int_t^{t+h} \sigma S(\tau)I(\tau) dB_\tau - \\ &\quad - \left(h[-\beta S(t)\tilde{I}(t+h) - \mu(S(t+h) - e(S_t, S(t)))] - \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi^h \right) \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} e(S_t, S(t)) &= \frac{1}{1+h\mu} \left(\int_t^{t+h} [\beta S(t)\tilde{I}(t+h) - \beta S(\tau)I(\tau) + \mu S(t+h) - \mu S(\tau)] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+h} [\sigma S(t)I(t) - \sigma S(\tau)I(\tau)] dB_\tau + \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}(\xi^h - \xi) \right), \end{aligned}$$

sest $\int_t^{t+h} \sigma S(t)I(t) dB_\tau = \sigma S(t)I(t)(B_{t+h} - B_t) = \sigma S(t)I(t)\sqrt{h}\xi$. Tähistame $K = \frac{1}{1+h\mu}$. Kuna normaaljaotuse ja kärbitud normaaljaotuse keskväärus on

0 ja lemma 5 kohaselt Itô integraali keskväärtus on 0, siis

$$|\mathbb{E}(e(S_{t,S(t)}))| \leq K \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} \left[\beta |S(t)| |\tilde{I}(t+h) - I(t+h)| + \beta |S(t)| |I(t+h) - I(\tau)| + \beta |I(\tau)| |S(t) - S(\tau)| + \mu |S(t+h) - S(\tau)| \right] d\tau \right).$$

Kasutades lemmat 7 ja Tonelli teoreemi (vt lisa 1), saame

$$|\mathbb{E}(e(S_{t,S(t)}))| \leq K \int_t^{t+h} \left[\beta \frac{\Lambda}{\mu} (\mathbb{E} |\tilde{I}(t+h) - I(t+h)| + \mathbb{E} |I(t+h) - I(\tau)| + \mathbb{E} |S(t) - S(\tau)|) + \mu \mathbb{E} |S(t+h) - S(\tau)| \right] d\tau. \quad (31)$$

Kasutades eelnevalt näidatud hinnangut (29) ehk $(\mathbb{E} |e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h)$ ja Ljapunovi võrratust (vt lisa 1), saame

$$\mathbb{E} |\tilde{I}(t+h) - I(t+h)| \leq (\mathbb{E} |e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h).$$

Kuna $\tau \in [t, t+h]$, siis lemma 10 ja Ljapunovi võrratuse (vt lisa 1) kohaselt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |I(t+h) - I(\tau)| &\leq \sqrt{\mathbb{E} |I(t+h) - I(\tau)|^2} \leq \sqrt{C_2(t+h-\tau)} \leq \sqrt{C_2} h^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{E} |S(t) - S(\tau)| &\leq \sqrt{\mathbb{E} |S(t) - S(\tau)|^2} \leq \sqrt{C_1(\tau-t)} \leq \sqrt{C_1} h^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{E} |S(t+h) - S(\tau)| &\leq \sqrt{\mathbb{E} |S(t+h) - S(\tau)|^2} \leq \sqrt{C_1(t+h-\tau)} \leq \sqrt{C_1} h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Järelikult on (31) korral integraalilune funktsioon klassist $O(h^{\frac{1}{2}})$, mis annab meile, et $|\mathbb{E}(e(S_{t,S(t)}))| = O(h^{\frac{3}{2}})$. Nüüd hindame suurust $(\mathbb{E} |e(S_{t,S(t)})|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Kuna

$(d_1 + d_2 + d_3)^2 \leq 3d_1^2 + 3d_2^2 + 3d_3^2$, siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|e(S_{t,S(t)})|^2 \leq K^2 & \left[3\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} [\beta S(t)\tilde{I}(t+h) - \beta S(\tau)I(\tau) + \mu S(t+h) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu S(\tau)] d\tau \right)^2 + 3\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 + \right. \\ & \left. + 3\mathbb{E} \left(\sigma S(t)I(t)\sqrt{h}(\xi - \xi^h) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Hinnangu $(\mathbb{E}|e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}}$ juures näitasime ära, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} (\sigma S(\tau)I(\tau) - \sigma S(t)I(t)) dB_\tau \right)^2 &= O(h^2), \\ \mathbb{E} \left(\sigma S(t)I(t)\sqrt{h}(\xi - \xi^h) \right)^2 &= O(h^2). \end{aligned}$$

Kasutades lemmat 7 ja lemmat 8, saame, et liidetava

$$\mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} [\beta S(t)\tilde{I}(t+h) - \beta S(\tau)I(\tau) + \mu S(t+h) - \mu S(\tau)] d\tau \right)^2$$

korral integraali alune funktsioon on tõkestatud, mis tähendab, et ka see liidetav kuulub klassi $O(h^2)$. Järelikult oleme saanud, et $\mathbb{E}|e(S_{t,S(t)})|^2 = O(h^2)$ ehk $(\mathbb{E}|e(S_{t,S(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h)$.

Nüüd näitame analoogselt, et (27) ja (30) kehtivad. Stohhastilise SIR-mudeli (10) ja meetodi (13) põhjal näeme, et

$$R(t+h) = R(t) + \int_t^{t+h} [\gamma I(\tau) - \mu R(\tau)] d\tau$$

ja

$$\tilde{R}(t+h) = R(t) + h[\gamma \tilde{I}(t+h) - \mu \tilde{R}(t+h)].$$

Järelikult

$$e(R_{t,R(t)}) = \int_t^{t+h} [\gamma I(\tau) - \mu R(\tau)] d\tau - h[\gamma \tilde{I}(t+h) - \mu(R(t+h) - e(R_{t,R(t)}))]$$

ehk

$$e(R_{t,R(t)}) = \frac{1}{1+h\mu} \int_t^{t+h} [\gamma I(\tau) - \gamma \tilde{I}(t+h) + \mu R(t+h) - \mu R(\tau)] d\tau.$$

Tähistame $K = \frac{1}{1+h\mu}$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e(R_{t,R(t)}))| &\leq K \mathbb{E} \int_t^{t+h} [\gamma |I(\tau) - I(t+h)| + \gamma |I(t+h) - \tilde{I}(t+h)| + \\ &\quad + \mu |R(t+h) - R(\tau)|] d\tau \end{aligned}$$

Kasutades Tonelli teoreemi (vt lisa 1), saame

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e(R_{t,R(t)}))| &\leq K \int_t^{t+h} [\gamma \mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)| + \gamma \mathbb{E}|I(t+h) - \tilde{I}(t+h)| + \\ &\quad + \mu \mathbb{E}|R(t+h) - R(\tau)|] d\tau. \end{aligned} \tag{32}$$

Kasutades eelnevalt näidatud hinnangut (29) ehk $(\mathbb{E}|e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h)$ ja Ljapunovi võrratust (vt lisa 1), saame

$$\mathbb{E}|\tilde{I}(t+h) - I(t+h)| \leq (\mathbb{E}|e(I_{t,I(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h).$$

Kuna $\tau \in [t, t+h]$, siis lemma 10 ja Ljapunovi võrratuse (vt lisa 1) kohaselt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)| &\leq \sqrt{\mathbb{E}|I(\tau) - I(t+h)|^2} \leq \sqrt{C_2(t+h-\tau)} \leq \sqrt{C_2} h^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{E}|R(t+h) - R(\tau)| &\leq \sqrt{\mathbb{E}|R(t+h) - R(\tau)|^2} \leq \sqrt{C_3(t+h-\tau)} \leq \sqrt{C_3} h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Järelikult on (32) integraalilune funktsioon klassist $O(h^{\frac{1}{2}})$, mis annab meile, et $|\mathbb{E}(e(R_{t,R(t)}))| = O(h^{\frac{3}{2}})$. Nüüd hindame suurust $(\mathbb{E}|e(R_{t,R(t)})|^2)^{\frac{1}{2}}$. Paneme tähele, et

$$\mathbb{E}|e(R_{t,R(t)})|^2 \leq K^2 \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} [\gamma I(\tau) - \gamma \tilde{I}(t+h) + \mu R(t+h) - \mu R(\tau)] d\tau \right)^2.$$

Lemmat 7 ja lemmat 8 kasutades saame, et viimase integraalilune funktsioon on tõkestatud. Järelikult $\mathbb{E}|e(R_{t,R(t)})|^2 = O(h^2)$ ehk $(\mathbb{E}|e(R_{t,R(t)})|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h)$.

Kokkuvõttes, kuna oleme teoreemi 2 kõik eeldused tõestanud, siis oleme saanud, et kui numbrilise meetodi (13) osalõikude arvu $N \in \mathbb{N}$ on piisavalt suur, et sammupikkus $h = \frac{T}{N} \in (0, h_0)$, siis

$$(\mathbb{E}|X(t_k) - X_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (33)$$

kus $C > 0$ ei sõltu N valikust. □

3 Numbrilised näited

Selles peatükis vaatleme stohhastilise SIR-mudeli ligikaudset lahendamist numbrilise meetodiga (13). Kõigi järgnevate numbriliste tulemuste saamiseks on kasutatud autori poolt Pythoni keskkonnas kirjutatud programmi, mis on esitatud lisas 2.

Jaotame lõigu $[0, 1]$ $N \in \mathbb{N}$ võrdseks osalõiguks. Tähistame $t_k = kh$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $h = \frac{1}{N}$. Stohhastilise SIR-mudeli (10) ligikaudsel lahendamisel lõigus $[0, 1]$ tähistame realisatsiooni ω korral ajahetkel t_k numbrilise meetodiga (13) leitud väärtusi vastavalt

$$\begin{aligned} & S_N(t_k, \omega), \\ & I_N(t_k, \omega), \\ & R_N(t_k, \omega), \\ X_N(t_k, \omega) &= (S_N(t_k, \omega), I_N(t_k, \omega), R_N(t_k, \omega)). \end{aligned}$$

Kasutame osalõikude arve $N = 2^n$, $n = 4, 5, 6, 7, 8$. Vigade arvutamisel võtame täpse lahendi rolli numbrilise meetodiga leitud lahendi, kus osalõikude arv $N_0 = 100 \cdot 2^8$.

Olgu $N = 2^n$, $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ osalõikude arv ja $t_k = kh$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $h = \frac{1}{N}$. Numbrilise meetodiga tehtud vea leidmiseks genereerime $M = 4000$ realisatsiooni ω_i , $i = 1, \dots, 4000$. Leiame vead $\varepsilon_{N,S}$ momentide meetodil järgmiselt:

$$\varepsilon_{N,S} = \max_{k=0,1,\dots,N} \left\{ \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |S_{N_0}(t_k, \omega_i) - S_N(t_k, \omega_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Samamoodi defineerime ka vead $\varepsilon_{N,I}$, $\varepsilon_{N,R}$ ja $\varepsilon_{N,X}$, kus $\varepsilon_{N,X}$ korral kasutame

absoluutväärtuse asemel Eukleidilist normi. Lisaks leiame suhted

$$\Theta_{N,S} = \frac{\varepsilon_{\frac{N}{2},S}}{\varepsilon_{N,S}}, \quad \Theta_{N,I} = \frac{\varepsilon_{\frac{N}{2},I}}{\varepsilon_{N,I}}, \quad \Theta_{N,R} = \frac{\varepsilon_{\frac{N}{2},R}}{\varepsilon_{N,R}}, \quad \Theta_{N,X} = \frac{\varepsilon_{\frac{N}{2},X}}{\varepsilon_{N,X}}.$$

Vaatleme konstrueeritud numbrilise meetodi rakendamist kahel erineval juhul. Esimese näite puhul olgu süsteemis (10) algtingimus $(S_0, I_0, R_0) = (0, 7; 0, 2; 0)$ ja parameetrid $\Lambda = 0, 5$, $\beta = 0, 5$, $\mu = 0, 5$, $\gamma = 0, 2$, $\alpha = 0, 2$, $\sigma = 0, 5$. Märkime, et selliste parameetrite korral meie poolt kasutatavad osalõikude arvud on piisavalt suured teoreemi 3 rakendamiseks. Esitame tulemused tabelis 1.

N	$\varepsilon_{N,S}$	$\Theta_{N,S}$	$\varepsilon_{N,I}$	$\Theta_{N,I}$	$\varepsilon_{N,R}$	$\Theta_{N,R}$	$\varepsilon_{N,X}$	$\Theta_{N,X}$
16	$4, 0 \cdot 10^{-3}$		$3, 5 \cdot 10^{-3}$		$7, 0 \cdot 10^{-4}$		$5, 4 \cdot 10^{-3}$	
32	$2, 7 \cdot 10^{-3}$	1, 50	$2, 3 \cdot 10^{-3}$	1, 53	$4, 0 \cdot 10^{-4}$	1, 78	$3, 6 \cdot 10^{-3}$	1, 51
64	$1, 8 \cdot 10^{-3}$	1, 48	$1, 6 \cdot 10^{-3}$	1, 48	$2, 3 \cdot 10^{-4}$	1, 73	$2, 4 \cdot 10^{-3}$	1, 49
128	$1, 2 \cdot 10^{-3}$	1, 48	$1, 0 \cdot 10^{-3}$	1, 49	$1, 4 \cdot 10^{-4}$	1, 64	$1, 6 \cdot 10^{-3}$	1, 48
256	$8, 4 \cdot 10^{-4}$	1, 47	$7, 1 \cdot 10^{-4}$	1, 47	$8, 7 \cdot 10^{-5}$	1, 61	$1, 1 \cdot 10^{-3}$	1, 47

Tabel 1: Esimese numbrilise näite tulemused.

Teise näite puhul olgu süsteemis (10) algtingimus $(S_0, I_0, R_0) = (0, 3; 0, 5; 0, 1)$ ja parameetrid $\Lambda = 0, 5$, $\beta = 1$, $\mu = 0, 5$, $\gamma = 0, 15$, $\alpha = 0, 15$, $\sigma = 0, 15$. Märkime, et selliste parameetrite korral meie poolt kasutatavad osalõikude arvud on piisavalt suured teoreemi 3 rakendamiseks. Esitame tulemused tabelis 2.

N	$\varepsilon_{N,S}$	$\Theta_{N,S}$	$\varepsilon_{N,I}$	$\Theta_{N,I}$	$\varepsilon_{N,R}$	$\Theta_{N,R}$	$\varepsilon_{N,X}$	$\Theta_{N,X}$
16	$1, 4 \cdot 10^{-3}$		$1, 1 \cdot 10^{-3}$		$6, 4 \cdot 10^{-4}$		$1, 9 \cdot 10^{-3}$	
32	$8, 2 \cdot 10^{-4}$	1, 74	$6, 7 \cdot 10^{-4}$	1, 69	$3, 3 \cdot 10^{-4}$	1, 97	$1, 1 \cdot 10^{-3}$	1, 74
64	$5, 2 \cdot 10^{-4}$	1, 58	$4, 4 \cdot 10^{-4}$	1, 53	$1, 7 \cdot 10^{-4}$	1, 97	$7, 0 \cdot 10^{-4}$	1, 59
128	$3, 3 \cdot 10^{-4}$	1, 58	$2, 8 \cdot 10^{-4}$	1, 57	$8, 4 \cdot 10^{-5}$	1, 97	$4, 4 \cdot 10^{-4}$	1, 60
256	$2, 0 \cdot 10^{-4}$	1, 62	$1, 7 \cdot 10^{-4}$	1, 60	$4, 3 \cdot 10^{-5}$	1, 97	$2, 7 \cdot 10^{-4}$	1, 62

Tabel 2: Teise numbrilise näite tulemused.

Teoreemis 3 tõestasime, et suhted $\Theta_{N,X}$ peaksid olema $2^{\frac{1}{2}} \approx 1, 41$. Me näeme, et saadud numbrilised tulemused on kooskõlas teoreetilise hinnanguga.

Kasutatud allikad

- Baldi, Paolo (2017). *Stochastic calculus*. Universitext. An introduction through theory and exercises. Springer, Cham, lk xiv+627. DOI: [10.1007/978-3-319-62226-2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62226-2).
- Duistermaat, J. J. ja J. A. C. Kolk (2004). *Multidimensional real analysis. I. Differentiation*. Kõide 86. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Cambridge University Press, Cambridge, lk xviii+422. DOI: [10.1017/CB09780511616716](https://doi.org/10.1017/CB09780511616716).
- Ji, Chunyan, Daqing Jiang ja Ningzhong Shi (2012). “The behavior of an SIR epidemic model with stochastic perturbation”. *Stoch. Anal. Appl.* 30.5, lk 755–773. DOI: [10.1080/07362994.2012.684319](https://doi.org/10.1080/07362994.2012.684319).
- Milstein, G. N. (1995). *Numerical integration of stochastic differential equations*. Kõide 313. Mathematics and its Applications. Translated and revised from the 1988 Russian original. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, lk viii+169. DOI: [10.1007/978-94-015-8455-5](https://doi.org/10.1007/978-94-015-8455-5).
- Øksendal, Bernt (2003). *Stochastic differential equations*. Sixth. Universitext. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin, lk xxiv+360. DOI: [10.1007/978-3-642-14394-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6).
- Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Continuous-time models. Springer-Verlag, New York, lk xx+550. ISBN: 0-387-40101-6.
- Yang, Xiaochen, Zhanwen Yang ja Chiping Zhang (2023). “Numerical analysis of the linearly implicit Euler method with truncated Wiener process for the stochastic SIR model”. *Math. Comput. Simulation* 208, lk 1–14. DOI: [10.1016/j.matcom.2023.01.010](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.01.010).

Lisa 1. Mõõduteooria ja võrratused

Lisas on toodud mõõduteooria mõisted ja võrratused, mida kasutatakse töö käigus. Definitsioonide ja tulemuste sõnastused on võetud Märt Põldvere Mõõt ja Lebesgue'i integraali loengukonspektist ja Jüri Lemberi Tõenäosusteooria II loengukonspektist.

Definitsioon 11. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Ruumi X Boreli σ -algebraks nimetatakse vähimat σ -algebrat, mis sisaldab X lahtiste hulkade kogumist τ . Boreli σ -algebrat tähistatakse $\mathcal{B}(X)$.

Definitsioon 12. Olgu X ja Y hulgad ja \mathcal{F} ja \mathcal{G} σ -algebrad nendel hulkadel vastavalt. Ruumil $X \times Y$ korrutis- σ -algebrat nimetatakse vähimaks σ -algebraks hulgal $X \times Y$, mis sisaldab kõiki hulki $F \times G$, kus $F \in \mathcal{F}$ ja $G \in \mathcal{G}$. Korrutis- σ -algebrat tähistatakse $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Lemma 11. (Tonelli teoreem) Olgu (X, \mathcal{F}, μ) ja (Y, \mathcal{G}, ν) σ -lõplikud mõõduga ruumid ning olgu $f \in L^+(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$, st $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ on $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -mõõtu. Siis

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu(y).$$

Lemma 12. (Jenseni võrratus) Olgu φ kumer funktsioon ja f ning $\varphi \circ f$ lõigus $[a, b]$ Lebesgue'i mõtte integreeruvad. Siis

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(x) dx$$

Lemma 13. (Ljapunovi võrratus) Kui $0 < p < r$ ja juhuslikku suuruse X , mille korral $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, siis

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Lisa 2. Pythoni programm

Lisas on toodud peatükkis (3) kasutatud Pythoni programm.

```
import numpy as np

#Parameetrid
Lambda = 0.5
beta = 0.5
mu = 0.5
gamma = 0.2
alpha = 0.2
sigma = 0.5
S0 = 0.7
I0 = 0.2
R0 = 0.0
T = 1

#Sammu pikkused ja realisatsioonide arv
h_sammud = [2**(-3), 2**(-4), 2**(-5), 2**(-6), 2**(-7), 2**(-8), 2**(-8)
            *0.01]
M = 4000

#Numbrilise meetodi rakendamise meetod ühe realisatsiooni ja algtingimuste
    jaoks
#S0 - algne tervete arv
#I0 - algne nakatunute arv
#h - sammupikkus
#T - ajavahemik
#N - sammude arv, peab kontrollima, et need oleksid kooskõlas
#normaalJaotus - list N normaaljaotuse N(0,1) väärtusega
def numbrilineLahendaja(S0,I0,R0,h,T,N,normaalJaotus):
    x = np.linspace(0,T,N+1)

    #Normaaljaotuse lõikamine vastvalt h väärtusele
    A_h = np.sqrt(2 * np.abs(np.log(h)))
    lõigatudNormaalJaotus = np.clip(normaalJaotus, -A_h, A_h)

    I = np.zeros(N+1)
    S = np.zeros(N+1)
    R = np.zeros(N+1)
    I[0] = I0
```

```

S[0] = S0
R[0] = R0

#Iteratsioonide tegemine
for i in range(1,N+1):
    K = (1 + sigma * S[i-1] * np.sqrt(h) * lõigatudNormaalJaotus[i-1]) /
        (1 - h * beta * S[i-1] + h * (mu + gamma + alpha))
    I[i] = K * I[i-1]
    S[i] = h * Lambda / (1 + h * mu) + (1 - h * beta * K * I[i-1] -
        sigma * I[i-1] * np.sqrt(h) * lõigatudNormaalJaotus[i-1]) / (1 +
        h * mu) * S[i-1]
    R[i] = (R[i-1] + h * gamma * K * I[i-1]) / (1 + h * mu)
return x, S, I, R

#Numbrilise meetodi rakendamine erinevate sammude korral, aga sama
realisatsiooni korral
#S0 - algne tervete arv
#I0 - algne nakatunute arv
#R0 - algne paranenute arv
#T - ajavahemik
#h_sammud - list sammupikkustest, mis on muidu kaks korda väiksemad järjest,
et leida näidata koondumis kiirust,
#
aga viimane on rohkem kordi väiksem, sest see on meie "täpse"
lahendi asendus
def erinevateSammudeKorral(S0,I0,R0,T,h_sammud):
    #Realisatsiooni genereerimine
    normaalJaotus = np.random.normal(0,1,int(T/h_sammud[-1]))

    Tulemused_x = []
    Tulemused_S = []
    Tulemused_I = []
    Tulemused_R = []

#Numbrilise lahendi rakendamine erinevate sammude korral sama
realisatsiooniga
for h in h_sammud:
    #Normaaljaotuse juurdekasvud h sammu korral
    n = h / h_sammud[-1]
    normaalJaotusH = []
    for i in range(int(T/h)):

```

```

        #h sammul on n h_sammud[-1] sammu, seega peame n juurdekasvu
            liitma, et
        #saada h juurdekasvu samal realisatsioonil ja skaleerima, et see
            oleks  $N(0,1)$ , kuna
        #meetodis endas toimub uuesti skaleerimine tagasi
        normaalJaotusH.append(sum(normaalJaotus[int(i*n):int((i+1)*n)])/
            np.sqrt(n))

x, S, I, R = numbrilineLahendaja(S0,IO,R0,h,T,int(T/h),
    normaalJaotusH)
Tulemused_x.append(x)
Tulemused_S.append(S)
Tulemused_I.append(I)
Tulemused_R.append(R)
#Tulemused on listid, kus iga element on list, mis sisaldab vastavalt x,
    S, I ja R väärtusi erinevate sammude korral
return Tulemused_x, Tulemused_S, Tulemused_I, Tulemused_R

#Vea hinnangu keskvaärtuse leidmine, luues N realisatsiooni
#S0 - terved alghetkel
#IO - haiged alghetkel
#R0 - paranenud alghetkel
#T - ajapiir
#h_sammud - sammude loend, kus viimane on "täpset" lahendit asendav
#M - genereeritud realisatsioonide arv
def veaHinnang(S0,IO,R0,T,h_sammud,M):
    #List listidest, kus iga elemendi listi leiame iga sõlmpunktis
        ruutkeskmise vea,
    #millest pärast leiame maksimaalse vea
    Viga_S = []
    Viga_I = []
    Viga_R = []
    for i in range(len(h_sammud)-1):
        Viga_S.append(np.zeros(int(T/h_sammud[i])+1))
        Viga_I.append(np.zeros(int(T/h_sammud[i])+1))
        Viga_R.append(np.zeros(int(T/h_sammud[i])+1))

    for realisatsioon in range(M):
        np.random.seed(realisatsioon)
        if realisatsioon % 100 == 0:
            print(f"Realisatsioon:_{realisatsioon}")

```

```

_, Tulemused_S, Tulemused_I, Tulemused_R = erinevateSammudeKorral (S0
, IO, RO, T, h_sammud)
for i in range(len(h_sammud)-1):
    for j in range(int(T/h_sammud[i])+1):
        Viga_S[i][j] += (Tulemused_S[i][j] - Tulemused_S[-1][int(
            round(j*(h_sammud[i]/h_sammud[-1])))])**2
        Viga_I[i][j] += (Tulemused_I[i][j] - Tulemused_I[-1][int(
            round(j*(h_sammud[i]/h_sammud[-1])))])**2
        Viga_R[i][j] += (Tulemused_R[i][j] - Tulemused_R[-1][int(
            round(j*(h_sammud[i]/h_sammud[-1])))])**2

#Ruutkeskmise vea leidmine igas sõlmpunktis
for i in range(len(h_sammud)-1):
    for j in range(int(T/h_sammud[i])+1):
        Viga_S[i][j] = Viga_S[i][j]/M
        Viga_I[i][j] = Viga_I[i][j]/M
        Viga_R[i][j] = Viga_R[i][j]/M

#Maksimaalse vea leidmine sõlmpunktides
MaksimaalneViga_S = []
MaksimaalneViga_I = []
MaksimaalneViga_R = []
MaksimaalneViga_X = []
for i in range(len(h_sammud)-1):
    MaksimaalneViga_S.append(np.sqrt(np.max(Viga_S[i])))
    MaksimaalneViga_I.append(np.sqrt(np.max(Viga_I[i])))
    MaksimaalneViga_R.append(np.sqrt(np.max(Viga_R[i])))
    MaksimaalneViga_X.append(np.sqrt(np.max(Viga_S[i] + Viga_I[i] +
        Viga_R[i])))
return MaksimaalneViga_S, MaksimaalneViga_I, MaksimaalneViga_R,
    MaksimaalneViga_X

MaksimaalneViga_S, MaksimaalneViga_I, MaksimaalneViga_R,
    MaksimaalneViga_X = veaHinnang (S0, IO, RO, T, h_sammud, M)

print(f"Osaloike: N={int(T/h_sammud[0])}"),
print(f"Maksimaalne viga S: {MaksimaalneViga_S[0]}")
print(f"Maksimaalne viga I: {MaksimaalneViga_I[0]}")
print(f"Maksimaalne viga R: {MaksimaalneViga_R[0]}")
print(f"Maksimaalne viga X: {MaksimaalneViga_X[0]}")
print()

```

```

for i in range(1, len(h_sammud) - 1):
    print(f"Osaldõike: N={int(T/h_sammud[i])}",
          print(f"Maksimaalne viga S: {MaksimaalneViga_S[i]}")
          print(f"Maksimaalne viga I: {MaksimaalneViga_I[i]}")
          print(f"Maksimaalne viga R: {MaksimaalneViga_R[i]}")
          print(f"Maksimaalne viga X: {MaksimaalneViga_X[i]}")
          print(f"Koondumiskiirus S: {MaksimaalneViga_S[i-1]/MaksimaalneViga_S
                [i]}")
          print(f"Koondumiskiirus I: {MaksimaalneViga_I[i-1]/MaksimaalneViga_I
                [i]}")
          print(f"Koondumiskiirus R: {MaksimaalneViga_R[i-1]/MaksimaalneViga_R
                [i]}")
          print(f"Koondumiskiirus X: {MaksimaalneViga_X[i-1]/MaksimaalneViga_X
                [i]}")
print()

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Henri Peterson,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Stohhastilise SIR-mudeli numbriline lahendamine, mille juhendaja on Kaido Lätt, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Henri Peterson

27.05.2026