

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatikateaduskond
Rakendusmatemaatika instituut
Teoreetilise mehaanika õppetool

Tiina Kraav

PRAOGA VARDA STABIILSUS

Magistritöö

Juhendaja Jaan Lellep, prof, dr (füüs-mat)

Tartu 2006

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Varda stabiilsuse mõiste	5
2 Euleri kriitilise koormuse määramise meetodid	7
3 Elastse konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsese integreerimise meetod	8
4 Tsentrilise koormuse all olev vaba toetusega varras	11
4.1 Konstantse ristlõikega varras	11
4.2 Astmega varras	14
4.3 Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu	18
4.4 Astmega varras, milles on pragu	22
5 Ekstsentrilise koormuse all olev vaba toetusega varras	26
5.1 Konstantse ristlõikega varras	26
5.2 Astmega varras	29
5.3 Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu	32
5.4 Astmega varras, milles on pragu	34
Summary	38
Kasutatud kirjandus	39

Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärgiks on uurida elastset šarniirse kinnitusega varrast olukorras, kus sellele mõjub teljesuunaline koormus. Kui sirge varras on surutud, võib ta üle minna uude kõverdunud tasakaalukujusse, kui temale mõjuv survejõud ületab teatud suuruse, mida nimetatakse kriitiliseks.

Elastsed vardad ja talad leiavad kasutamist paljudes konstruktsioonides, sealhulgas ehitusmehaanikas uuritavates konstruktsioonides.

Elastsete varraste, plaatide ja koorikute stabiilsuse kaole on kirjanduses üsna palju tähelepanu pööratud. Ülevaatlikud monograafiad on avaldanud Volmir [10], Timošenko [9], Iyengar [3] jt. Pragudega nõrgestatud talade stabiilsust on uurinud Li [5], Liang [6], Okamura [7], Rizos [8], Paipetis [1] jt.

Töö koosneb viiest peatükist, millest esimesed kolm on referatiivsed. Neis kasutatakse raamatutes [2], [9] ja [10] saadud tulemusi. Neljandas ja viienads peatükis esitatakse iseseisva töö tulemusi. Neljanda peatüki esimeses punktis on küll toetunud raamatus [2] saadule.

Esimeses peatükis antakse varda stabiilsuse mõiste. Samuti selgitatakse *Euleri* kriitilise koormuse olemust ning tuuakse välja mõned ajaloolised aspektid surutud konstruktsiooni elemendi stabiilsuse kohta.

Teises peatükis selgitatakse kriitilise koormuse määramise meetodeid ning täpsemalt vaadeldakse staatikalise meetodi alaliike.

Kolmandas peatükis näidatakse, kuidas rakendada elastse konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsese integreerimise meetodit. Tuledatakse tasakaaluolukorda kirjeldav diferentsiaalvõrrand ning leitakse selle üldlahend, mis edasistes peatükkides kasutust leiab.

Neljandas peatükis vaadeldakse elastseid vardaid, mis on koormatud tsentriselt. Enam pakub siin huvi astmega varras, millel on astme asukohal pragu. Eelnevalt on võrdluseks välja toodud ka ilma praota ning praoga konstantse ristlõikega varda ning astmega varda kõverdunud kuju kirjeldavad võrrandid.

Samuti on nende varraste puhul uuritud kriitilist koormust.

Viiendas peatükis on vaatluse alla võetud vardad, millele mõjuv koormus on ekstsentriline. Sarnaselt neljanda peatükiga vaadeldakse nelja erinevat koormuse all olevat varrast, leides igäihe puhul survejõu mõjul tekkinud kõverdunud kuju võrrandi ning kriitilise koormuse.

1 Varda stabiilsuse mõiste

Varda kandevõime määramise üks osa on varda tasakaaluolukorra stabiilsuse hindamine. Kui surutud vardale mõjuv surve jõud ületab kriitilise suuruse, võib ta üle minna kõverdunud tasakaalukujusse. Kirjeldatud tasakaaluolukorra muutumist nimetatakse stabiilsuse kaotuseks ehk varraste puhul nõtkedeformatsiooniks.

Keha tasakaaluolukorra võib jagada stabiilseks, labiilseks või indiferentseks tasakaaluolukorraks. Stabiilse tasakaaluolukorra puhul kõrvalise mõju lakkamisel keha endine olukord taastub. Labiilne on tasakaaluolukord siis, kui tasakaaluolukorrast välja viidud keha kõrvalise mõju lakkamisel algsesse olukorda tagasi ei pöördu, hoopis eemaldub sellest või läheb üle uude tasakaaluolukorda. Indiferentse tasakaaluolukorra puhul häiriva mõju lakkamisel jääb keha asendisse, millesse kõrvaline mõju ta viis.

Elastse konstruktsiooni tasakaaluolukord sõltub temale rakendatud koormuse iseloomust ja suuruselt. Kui koormuse suurus jääb alla nn. kriitilist, on konstruktsioon stabiilse tasakaaluolukorras. Suurendades koormust kuni kriitilise suuruseni, saavutab konstruktsioon indiferentse tasakaaluolukorra. Ületades koormuse kriitilise suuruse, läheb aga konstruktsioon üle uude tasakaalukujusse. Konstruktsiooni üleminekuga uude tasakaaluasendisse kaasneb uue deformatsiooni areng. Stabiilsuse kaotust, millega kaasneb kvalitatiivselt uue deformatsiooni kiire areng, nimetatakse esimest liiki (ehk *Euleri*) stabiilsuse kaotuseks. Selline stabiilsuse kaotus toimub äkki. Selle protsessi alguses toimub tasakaaluolukordade hargnemine, st konstruktsioon võib minna üle uude tasakaalukujusse, aga võib ka säilitada veel esialgse.

Elastsetel varrastel võib esineda peale esimest liiki stabiilsuse kaotuse ka teist liiki stabiilsuse kaotust. Sellisel juhul areneb survejõu kasvades algusest peale varda paindedeformatsioon (näiteks ekstsentrilisel surveel). Varda paindedeformatsiooni arenedes tekivad vardas pikijõu suuruselt alates plastse deformatsiooni tsoonid algul varda nõrgusal ning siis ka kumeral poolel. Seetõttu varda turve kasvavale välismõjule väheneb, kuni survejõud saavutab

maksimumi. Alates maksimumjõust suureneb varda läbipaine ilma jõudu suurendamata. Koormust võib ka vähendada, varda paindedeformatsioon seejuures jätkub. Varras on seega labiilses tasakaaluolukorras. Üleminek labiilse tasakaalu olukorda toimus maksimaalse jõu mõjumisel. Seetõttu seda nimetataksegi kriitiliseks. Enne kriitilise jõu mõjumist on varda tasakaaluolukord sarnaselt esimest liiki stabiilsuse kaotusele stabiilne.

Täpse paindeteooria rakendamise eesmärgiks on siiski rohkem varda stabiilsuse kaotuse kvalitatiivse pildi kui kvantitatiivsete suuruste täpsustamine. Konstruktsioonide esimest liiki stabiilsuse kaotust nim. *Euleri* stabiilsuse kaotuseks. Kriitilist koormust, mis sellele stabiilsuse kaotusele vastab, nimetatakse *Euleri* kriitiliseks koormuseks. Viimase arvutamisel eeldatakse, et pinged konstruktsiooni materjalis on elastsuspiiris ning kehtib Hooke'i seadus. Samuti eeldatakse, et deformatsioonid on väga väikesed. Kui elastsele konstruktsioonile mõjub keerukas jõudude süsteem, kusjuures süsteemi üksikud komponendid muutuvad mingi parameetriga, siis nimetatakse konstruktsiooni stabiilsuse kaotusele vastavat parameetrit *Euleri* kriitiliseks koormusparameetriks.

Esimesed uurimused konstruktsiooni surutud elemendi stabiilsuse kohta on tehtud umbes 200 aastat tagasi Leonhard Euleri poolt. Peamised ehitusmaterjalid olid sel ajal kivi ja puit. Et need on suhteliselt nõrgad materjalid, siis valmistati konstruktsioonide elemendid küllalt tusedad. Seejuures ei olnud elastse stabiilsuse küsimused eriti olulised. Seepärast jäid Euleri uurimistööde tulemused saledate varraste stabiilsuse kohta kaua praktiliselt rakendamata. Hiljem, 19. sajandi teisel poolel, leidsid Euleri tööd vajalikku tähelepanu seoses raudteesildade ehitamise ja projekteerimisega [2,9,10].

2 Euleri kriitilise koormuse määramise meetodid

Kriitilise koormuse määramise peamisteks meetoditeks peetakse staatikalise ning energeetilise meetodit.

Staatikalise meetodi aluseks on konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrand, mis on koostatud elastse konstruktsiooni lõpmata väikese elemendi tasakaaluolukorra kohta. Seejuures eeldatakse, et uus seisund on lõpmata lähedane algolukorrale.

Lahenduskäigu iseärasusi arvestades jaotatakse nii staatikaline kui energeetiline meetod veel omakorda alameetoditeks, mille kasutus otsustatakse lähtuvalt ülesande iseloomust ja keerukusest. Väga keerukate objektide korral rahuldutakse ligikaudse lahendiga, kuivõrd täpse lahendi saamine pole võimalik.

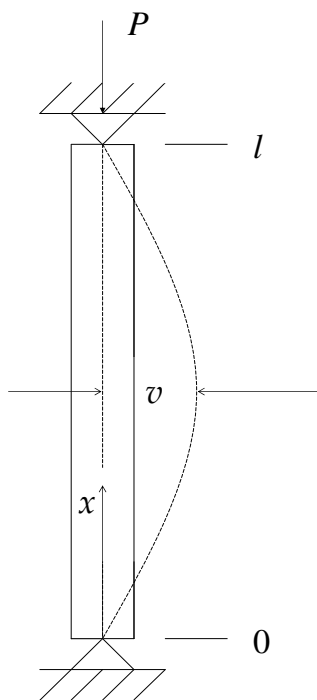
Et käesolevas töös on kasutusel staatikaline meetod, toome siinkohal välja peamised selle meetodi alaliigid *Euleri* kriitilise koormuse määramiseks:

- a) tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsene integreerimine;
- b) tasakaalu diferentsiaalvõrrandi integreerimine otsides lahendit $v(x)$ argumendi astmete rea kujul (meetodit kasutatakse, kui $EI(x)$ ja $P(x)$ on esitatavad x polünoomidena);
- c) spetsiaalsete (nt. *Besseli*) funktsioonide tabelite kasutamine (sel juhul diferentsiaalvõrrandit integreeritakse spetsiaalsete funktsioonidega);
- d) numbriline integreerimine;
- e) järk-järgulise lähenemise meetod;
- f) *Bubnov-Galjorkini* meetod [2].

3 Elastse konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsese integreerimise meetod

Vaadeldav meetod on *Euleri* kriitilise koormuse määramise staatikalise meetodi üks põhivariant. Seepärast võime seda nimetada *Euleri* meetodiks.

Lihtsuse mõttes vaatame esiteks *Euleri* kriitilise jõu määramist ühtlase ristlõikega vardale, mille pikkus on l , paksus h ning mis on surutud tsentriliselt koormusega P (joonis 1). Samuti peame silmas, et deformatsioonid on seejuures väga väikesed. Varda kõverdunud telje ordinaati igas punktis tähistab $v(x)$.



Joonis 1: Tsentriselt surutud ühtlase ristlõikega varras

Olgu varras mõlemast otsast šarniirselt kinnitatud. Sel juhul saame elastse joone diferentsiaalvõrrandi järgmisel kujul:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0,$$

kus E on *Youngi* moodul ning I inertsmoment, kusjuures

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Suurus b tähistab varda ristlõike laiust.

Saadud võrrand on momentide tasakaalutingimus mistahes lõike kohta. Võrrandit saab rakendada ilma lisaeldusteta vaid juhul, kui lõikejõud Q_0 ning paindemoment M_0 tala mõlemas otsas võrduvad nulliga. Kui kinnitustingimused on teistsugused, siis on lõikejõud ja paindemoment tala otstes tundmatud ning momentide tasakaalu tingimus saab kuju

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = Q_0x + M_0.$$

Kui diferentseerime võrrandit x suhtes, on tulemuseks

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) + P \frac{dv}{dx} = Q_0.$$

Teistkordse diferentseerimise järel

$$\frac{d}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) + P \frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Sellega oleme saanud varda tasakaaluvõrrandi, mis kehtib kõigi rajatingimuste korral. Siin puuduvad esialgu tundmatud suurused Q_0 ja M_0 .

Kui veel oletada, et vaadeldav varras on valmistatud ühtlasest materjalist ning I on konstantne, siis ka varda jäikus EI on konstantne. Et võrrandi kuju lihtsustada, kasutame tähistust

$$\lambda^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

ning saame varda tasakaaluvõrrandi järgmisel kujul:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{\lambda^2}{l^2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \quad (1)$$

Tuletatud võrrand kujutab endast lineaarset konstantsete kordajatega teist järku võrrandit. Edasi lahendame saadud homogeenise konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi, kusjuures lahendi esitame kujul

$$v_n = A_n e^{k_n x}.$$

Kui asetame lahendi võrrandisse (1), saame karakteristliku võrrandi

$$k_n^4 + \frac{\lambda^2}{l^2} k_n^2 = 0,$$

mille juured on

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = i \frac{\lambda}{l}, k_4 = -i \frac{\lambda}{l}.$$

Võrrandi (1) üldlahendiks on seetõttu

$$v = A \cos \frac{\lambda x}{l} + B \sin \frac{\lambda x}{l} + C \frac{x}{l} + D,$$

kus A , B , C ja D on integreerimiskonstandid, mille määramiseks kasutatakse rajatingimusi [2,10].

Edasistes peatükkides võtame arvutuste lihtsustamiseks kasutusele dimensioonita koordinaadid, kus varda pikkuseks loeme 1 ning $\xi = \frac{x}{l}$. Varda tasakaaluvõrrandi üldlahend saab edaspidi järgmise kuju:

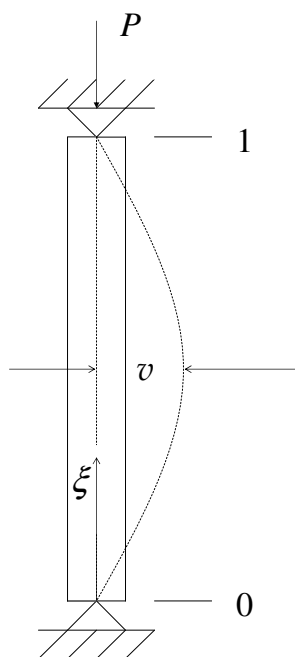
$$v = A \cos \lambda \xi + B \sin \lambda \xi + C \xi + D. \quad (2)$$

4 Tsentrilise koormuse all olev vaba toetusega varras

Käesolevas peatükis on uurimise all šarniirse kinnitusega elastsed vardad, mis on koormatud tsentriselt. Eraldi vaadeldakse juhtumeid, kus varras on konstantse ristlõikega, astmega, praoga ning ilma praota.

4.1 Konstantse ristlõikega varras

Rakendame eelmises peatükis leitud varda tasakaaluvõrrandi üldlahendit (2) konstantse paksusega vardale, mille otsad on šarniirselt kinnitatud (joonis 2).



Joonis 2: Konstantse ristlõikega varras

Sel juhul võime välja kirjutada järgmised rajatingimused:

$$v(0) = 0, \quad (3)$$

$$v(1) = 0, \quad (4)$$

$$v^{II}(0) = 0, \quad (5)$$

$$v^{II}(1) = 0, \quad (6)$$

kus võrdused (3) ja (4) väljendavad seda, et varda otspunktid ei nihku. Seejuures võib varras ümber otspunktide pöörduda. Võrdused (5) ja (6) on saadud tingimusest, et paindemoment šarniirselt kinnitatud otsas peab võrduma nulliga. Teiselt poolt *Hooke*'i seaduse kohaselt

$$M = -EIv^{II}.$$

Et rajatingimusi rakendada, leiame esiteks tasakaaluvõrrandi üldlahendist (2) esimese ning teise tuletise:

$$\begin{aligned} v^I &= -A\lambda \sin \lambda\xi + B\lambda \cos \lambda\xi + C, \\ v^{II} &= -A\lambda^2 \cos \lambda\xi - B\lambda^2 \sin \lambda\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Rajatingimustest (3) ja (5) järeldub, et $A = D = 0$. Tingimused (4) ja (6) annavad aga kaks võrrandit:

$$B \sin \lambda + C = 0,$$

$$B\lambda^2 \sin \lambda = 0.$$

Vaatleme esiteks võrrandit $B\lambda^2 \sin \lambda = 0$. Siin on kolm lahendit: kas $B = 0$, $\lambda = 0$ või $\sin \lambda = 0$. Kui $\lambda = 0$, siis sellest järelduks, et $P = 0$, mis omakorda tähendaks, et varras pole surutud. Kui $B = 0$, siis ka $C = 0$ ning seega oleks surutud varda kogu pikkusel $v = 0$. Kui siiski oletada, et varras on surve

mõjul kõverdunud, siis peab kehtima võrdus $\sin\lambda = 0$, millest saame, et

$$\lambda = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

ning

$$\lambda^2 = n^2\pi^2.$$

Kasutades peatükis 3 sisse toodud tähistust

$$\lambda^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

saame avaldada suuruse P järgmiselt:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}.$$

Surve on minimaalne juhul, kui $n = 1$. Nii võime välja kirjutada *Euleri* kriitiliseks jõuks

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

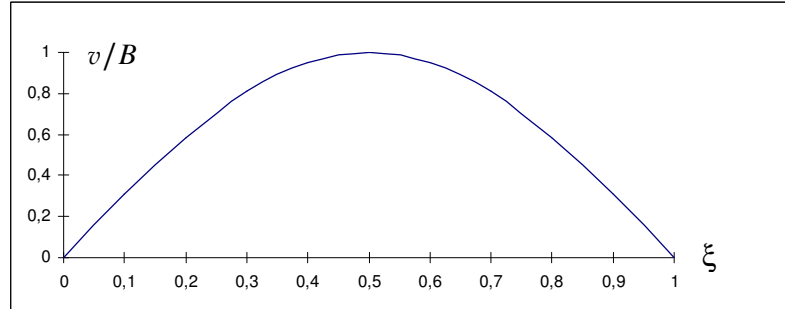
Et $A = C = D = 0$, siis

$$v = B \sin \lambda \xi.$$

Et kriitilise jõu korral $\lambda = \pi$, siis võtab varda telg kuju

$$v = B \sin \pi \xi.$$

Nagu näha, varda kõverdunud telje kuju sõltub seega konstandist B , mida aga antud meetodil pole võimalik täpsemalt määrata [2]. Kvalitatiivse pildi kõverdunud kuju olemusest kogu varda ulatuses annab joonis 3.



Joonis 3: Konstantse ristlõikega varda kõverdunud kuju

4.2 Astmega varras

Vaatleme elastset varrast, mille ristlõige on muutuv. Aste olgu varda alguspunktist kaugusel a , dimensioonita koordinaatides kohal $\alpha = \frac{a}{l}$ (joonis 4). Varda paksus vahemikus $\xi \in (0, \alpha)$ olgu h_0 ning ülejäänud osas h_1 .

Kuna vardal on nüüd kaks piirkonda, siis tasakaaluvõrrand tuleb lahendada mõlemas piirkonnas eraldi. Tõepoolest

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{\lambda_0^2}{l^2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \xi \in (0, \alpha),$$

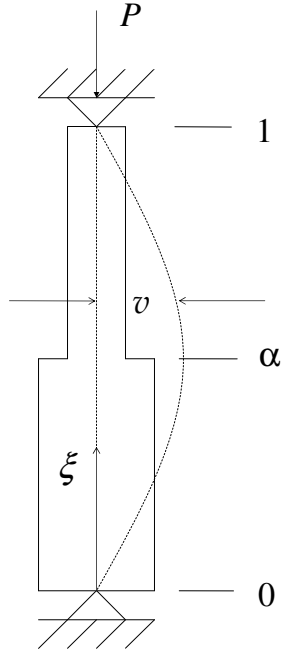
$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{\lambda_1^2}{l^2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \xi \in (\alpha, 1).$$

Seejuures

$$\lambda_0^2 = \frac{Pl^2}{EI_0}, \quad \lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{EI_1}.$$

Inertsmomendid varda vastavates osades on järgmised:

$$I_0 = \frac{bh_0^3}{12}, \quad I_1 = \frac{bh_1^3}{12}.$$



Joonis 4: Astmega varras

Võrrandite lahenditeks on konstantse ristlõikega juhuga analoogselt:

$$\begin{aligned} v_0 &= A_0 \cos \lambda_0 \xi + B_0 \sin \lambda_0 \xi + C_0 \xi + D_0, & \xi \in (0, \alpha), \\ v_1 &= A_1 \cos \lambda_1 \xi + B_1 \sin \lambda_1 \xi + C_1 \xi + D_1, & \xi \in (\alpha, 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Seostes (8) sisalduvad kaheksa tundmatut: $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1$, mille määramiseks kasutame rajatingimusi ning pidevuse tingimusi.

Ka antud ristlõike puhul kehtivad rajatingimused (3) - (6). Muutuva ristlõikega tala korral tuuakse sisse ka pidevuse tingimused. Need on antud juhul järgmised:

$$v(\alpha-) = v(\alpha+), \quad (9)$$

$$v^I(\alpha-) = v^I(\alpha+), \quad (10)$$

$$\frac{v^{II}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{II}(\alpha+)}{\lambda_1^2}, \quad (11)$$

$$\frac{v^{III}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{III}(\alpha+)}{\lambda_1^2}. \quad (12)$$

Tingimused (9) ja (10) näitavad, et pidevad on siire ja kaldenurk. Võrdused (11) ja (12) tähendavad seda, et paindemoment $M = -EIv^{II}$ ja löikejõud $Q = M'$ on pidevad.

Toome siinkohal välja ka tuletised, mida rajatingimuste ning pidevuse tingimuste rakendamiseks kasutame:

$$\begin{aligned} v_0^I &= -\lambda_0 A_0 \sin \lambda_0 \xi + \lambda_0 B_0 \cos \lambda_0 \xi + C_0, \\ v_1^I &= -\lambda_1 A_1 \sin \lambda_1 \xi + \lambda_1 B_1 \cos \lambda_1 \xi + C_1, \\ v_0^{II} &= -\lambda_0^2 A_0 \cos \lambda_0 \xi - \lambda_0^2 B_0 \sin \lambda_0 \xi, \\ v_1^{II} &= -\lambda_1^2 A_1 \cos \lambda_1 \xi - \lambda_1^2 B_1 \sin \lambda_1 \xi, \\ v_0^{III} &= \lambda_0^3 A_0 \sin \lambda_0 \xi - \lambda_0^3 B_0 \cos \lambda_0 \xi, \\ v_1^{III} &= \lambda_1^3 A_1 \sin \lambda_1 \xi - \lambda_1^3 B_1 \cos \lambda_1 \xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Rajatingimustest (3) ja (5) järeldub, et $A_0 = D_0 = 0$. Rajatingimustest (4) ja (6) saame avaldada tundmatu D_1 tundmatu C_1 kaudu: $D_1 = -C_1$. Avaldamata viie konstandi jaoks kirjutame välja viiest võrrandist koosneva süsteemi kasutades ülejäänud rajatingimusi ning pidevuse tingimusi:

$$\begin{cases} A_1 \cos \lambda_1 + B_1 \sin \lambda_1 = 0 \\ B_0 \sin \lambda_0 \alpha + C_0 \alpha - A_1 \cos \lambda_1 \alpha - B_1 \sin \lambda_1 \alpha + C_1(1 - \alpha) = 0 \\ B_0 \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha + C_0 + A_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha - B_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha - C_1 = 0 \\ B_0 \sin \lambda_0 \alpha - A_1 \cos \lambda_1 \alpha - B_1 \sin \lambda_1 \alpha = 0 \\ B_0 \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha + A_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha - B_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Tundmatute B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 suhtes on vastav süsteem lineaarne ning homogeenne. Sellisel võrrandisüsteemil eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul, kui süsteemi kordajatest moodustatud determinant võrdub nulliga. Seepärast

moodustame vastava viirealise determinandi kujul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 & 0 \\ \sin \lambda_0 \alpha & \alpha & -\cos \lambda_1 \alpha & -\sin \lambda_1 \alpha & 1 - \alpha \\ \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha & 1 & \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha & -\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha & -1 \\ \sin \lambda_0 \alpha & 0 & -\cos \lambda_1 \alpha & -\sin \lambda_1 \alpha & 0 \\ \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha & 0 & +\lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha & -\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

Edasi arendame saadud determinandi kolmerealiseks ning leiame selle väärtuse:

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 \\ \sin \lambda_0 \alpha & -\cos \lambda_1 \alpha & -\sin \lambda_1 \alpha \\ \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha & \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha & -\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \alpha \cdot (\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]). \end{aligned}$$

Kui $\Delta = 0$, siis kehtib võrdus

$$\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] = 0, \quad (15)$$

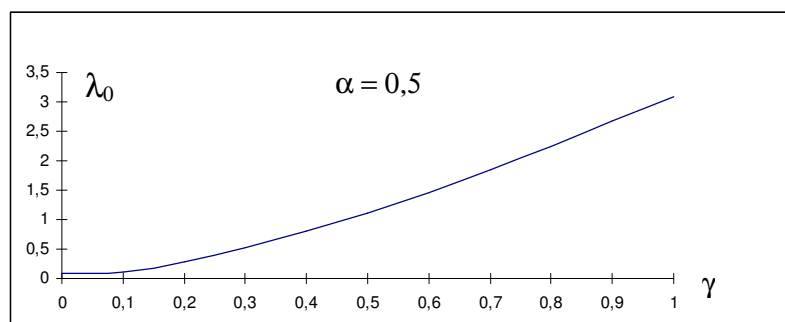
mis annab seose λ_0, λ_1 ning α vahel. Kui toome sisse tähistuse

$$\gamma = \frac{h_1}{h_0},$$

siis saame suuruste λ_0 ja λ_1 vaheliseks seoseks

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma^{-\frac{3}{2}}.$$

Seda arvestades võime võrduse (15) põhjal arvutada seose kriitilise koormuse ja varda paksuse vahel. Joonisel 5 on toodud γ ja λ_0 vaheline seos juhul, kui vardal on aste kohal $\alpha = 0,5$.



Joonis 5: Kriitiline koormus

Kui lahendame süsteemi (14) ja kirjutame välja varda tasakaaluvõrrandi lahendid, on tulemuseks

$$v_0 = -B_1 \cdot \frac{\sin[\lambda_1(1 - \alpha)] \cdot \sin \lambda_0 \xi}{\cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha},$$

$$v_1 = -B_1 \cdot \frac{\sin[\lambda_1(1 - \xi)]}{\cos \lambda_1}.$$

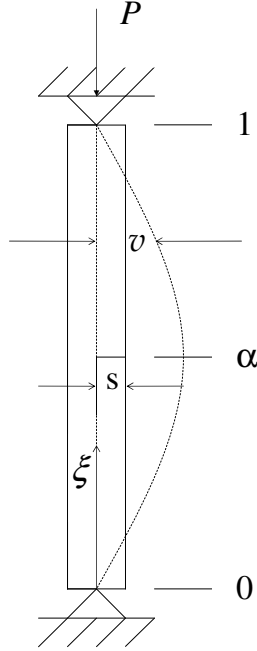
Antud avaldised jäävad sõltuma konstandist B_1 .

4.3 Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu

Olgu meil konstantse ristlõikega varras, milles on kohal α pragu. Prao pikkuseks loeme dimensioonita koordinaatides $s = \frac{c}{h}$ (joonis 6).

Vaadeldaval juhul tuleb tasakaaluvõrrand lahendada kahes piirkonnas nagu ka astmega varda juhul. Lihtsamaks muudab lahenduse aga asjaolu, et siin $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$. Seega varda tasakaaluolukorda kirjeldavad järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} v_0 &= A_0 \cos \lambda \xi + B_0 \sin \lambda \xi + C_0 \xi + D_0, & \xi \in (0, \alpha), \\ v_1 &= A_1 \cos \lambda \xi + B_1 \sin \lambda \xi + C_1 \xi + D_1, & \xi \in (\alpha, 1). \end{aligned} \tag{16}$$



Joonis 6: Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu

Kehtima jäävad rajatingimused (3) - (6). Eelmises punktis arvestatud pidevuse tingimused aga muutuvad prao lisamise tõttu ning sõltuvalt asjaolust, et $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$. Tingimused saavad järgmised:

$$v(\alpha-) = v(\alpha+), \quad (17)$$

$$v^I(\alpha+) - v^I(\alpha-) = kv^{II}(\alpha+), \quad (18)$$

$$v^{II}(\alpha-) = v^{II}(\alpha+), \quad (19)$$

$$v^{III}(\alpha-) = v^{III}(\alpha+). \quad (20)$$

Mitmed autorid, nende hulgas Choidros, Dimarogonas [1], Liang, Hu, Choi [6], Lellep, Sakkov [4], on uurinud pragudega varraste võnkumisi ja stabiilsust. On leitud, et prao mõju varda stabiilsuse kaole ja võnkumisele võib modelleerida seose (18) abil. Tingimuses (18) sisse toodud suurus k avaldub

järgmisel kujul:

$$k = \frac{6\pi hf(1 - \nu^2)}{EI}, \quad (21)$$

kus

$$f(s) = 1,862s^2 - 3,95s^3 + 16,375s^4 - 37,226s^5 + 76,81s^6 - \\ -126,9s^7 + 172,5s^8 - 143,97s^9 + 66,56s^{10}. \quad (22)$$

Suurus ν valemis (21) on *Poisson*'i moodul.

Tuletised, mida rajatingimuste ning pidevusetingimuste rakendamiseks kasutame, on järgmised:

$$\begin{aligned} v_0^I &= -\lambda A_0 \sin \lambda \xi + \lambda B_0 \cos \lambda \xi + C_0, \\ v_1^I &= -\lambda A_1 \sin \lambda_1 \xi + \lambda B_1 \cos \lambda \xi + C_1, \\ v_0^{II} &= -\lambda^2 A_0 \cos \lambda \xi - \lambda^2 B_0 \sin \lambda \xi, \\ v_1^{II} &= -\lambda^2 A_1 \cos \lambda \xi - \lambda^2 B_1 \sin \lambda \xi, \\ v_0^{III} &= \lambda^3 A_0 \sin \lambda \xi - \lambda^3 B_0 \cos \lambda \xi, \\ v_1^{III} &= \lambda^3 A_1 \sin \lambda \xi - \lambda^3 B_1 \cos \lambda \xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Nagu punktis 4.2 saame ka siin võrdustes (16) avaldada rajatingimusi kasutades kolm tundmatut: $A_0 = D_0 = 0$ ning $D_1 = -C_1$. Ülejäänud tundmatute määramise eesmärgil kirjutame võrrandisüsteemi:

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda &= 0 \\ B_0 \sin \lambda \alpha + C_0 \alpha - A_1 \cos \lambda \alpha - B_1 \sin \lambda \alpha + C_1(1 - \alpha) &= 0 \\ B_0 \lambda \cos \lambda \alpha + C_0 + A_1(\lambda \sin \lambda \alpha - k\lambda^2 \cos \lambda \alpha) - \\ - B_1(\lambda \cos \lambda \alpha + k\lambda^2 \sin \lambda \alpha) - C_1 &= 0 \\ B_0 \sin \lambda \alpha - A_1 \cos \lambda \alpha - B_1 \sin \lambda \alpha &= 0 \\ B_0 \cos \lambda \alpha + A_1 \sin \lambda \alpha - B_1 \cos \lambda \alpha &= 0. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Süsteemile (24) vastav determinant on järgmine:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda \alpha & \alpha & -\cos \lambda \alpha & -\sin \lambda \alpha & 1 - \alpha \\ \lambda \cos \lambda \alpha & 1 & \lambda \sin \lambda \alpha + k\lambda^2 \cos \lambda \alpha & -\lambda \cos \lambda \alpha + k\lambda^2 \sin \lambda \alpha & -1 \\ \sin \lambda \alpha & 0 & -\cos \lambda \alpha & -\sin \lambda \alpha & 0 \\ -\cos \lambda \alpha & 0 & -\sin \lambda \alpha & \cos \lambda \alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

Arendame determinandi kolmerealiseks ning seejärel arvutame:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ \sin \lambda \alpha & -\cos \lambda \alpha & -\sin \lambda \alpha \\ -\cos \lambda \alpha & -\sin \lambda \alpha & \cos \lambda \alpha \end{vmatrix} = -\alpha \sin \lambda.$$

Kui eeldame, et $\Delta = 0$, siis kehtib võrdus:

$$\alpha \sin \lambda = 0.$$

Antud juhul on kaks vimalust, kas $\alpha = 0$ või $\sin \lambda = 0$. Kui $\alpha = 0$, siis pragu ei ole. Kui $\sin \lambda = 0$, siis

$$\lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ning

$$\lambda^2 = n^2\pi^2.$$

Surve P avaldub siin järgmiselt:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

ning see on minimaalne juhul, kui $n = 1$. Kirjutame välja *Euleri* kriitiliseks jõuks

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Lahendades võrrandisüsteemi (24), saame leitud konstandid avaldistesse (16) pannes tulemuseks

$$v_0 = -B_1 \cdot \frac{\sin[\lambda(1-\alpha)]}{\cos \lambda} \cdot \left(\frac{\sin \lambda \xi}{\sin \lambda \alpha} + k\lambda^2(1-\alpha) \cdot \xi \right),$$

$$v_1 = -B_1 \cdot \frac{1}{\cos \lambda} \cdot \left(\sin[\lambda(1-\xi)] + k\alpha\lambda^2 \sin[\lambda(1-\alpha)] \cdot (1-\xi) \right).$$

Kriitilise koormuse korral $\lambda = \pi$ ning varda telje kõverdunud kuju on järgmine:

$$v_0 = B_1 \cdot \sin[\pi(1-\alpha)] \cdot \left(\frac{\sin \pi \xi}{\sin \lambda \alpha} + k\pi^2(1-\alpha) \cdot \xi \right),$$

$$v_1 = B_1 \cdot \left(\sin[\pi(1-\xi)] + k\alpha\pi^2 \sin[\pi(1-\alpha)] \cdot (1-\xi) \right).$$

Siire sõltub siin konstandist B_1 .

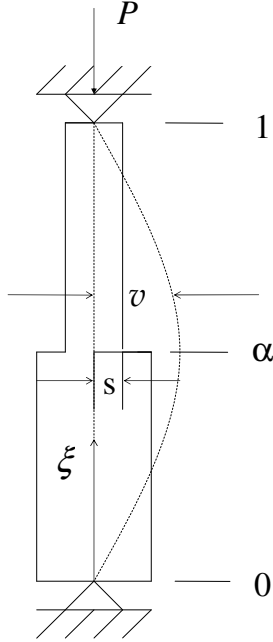
	$s = 0$	$s = 0,3$	$s = 0,5$	$s = 0,7$	$s = 0,9$
$\xi = 0,1$	0,309017	0,3090177	0,3090195	0,3090262	0,3090634
$\xi = 0,3$	0,809017	0,8090191	0,8090245	0,8090447	0,8091561
$\xi = 0,5$	1	1,0000035	1,0000126	1,0000462	1,0002318
$\xi = 0,7$	0,809017	0,8090191	0,8090245	0,8090447	0,8091561
$\xi = 0,9$	0,309017	0,3090177	0,3090195	0,3090262	0,3090634

Tabel 1: Praoga varda siirded

Kõverdunud varda telje kuju (siirdeid) esitab tabel 1. Siin on varda materjaliks pehme teras, st $E = 2,8 \cdot 10^5 MPa$. Varda mõõtmed on $h = 0,06m$, $b = 0,02m$, $l = 1m$.

4.4 Astmega varras, milles on pragu

Järgnevalt uurime juhtu, kus punktis 4.2 vaadeldud vardal on astme asukohal pragu pikkusega s (joonis 7).



Joonis 7: Astmega varras, milles on pragu

Antud varda korral kehtivad samuti varda tasakaaluvõrrandite lahendid (8), milles on kaheksa tundmatut: $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1$. Nende määramiseks kasutame nelja rajatingimust ning nelja pidevuse tingimust. Pragude lisamine ülesande rajatingimusi ei muuda, seega kehtivad tingimused (3) - (6). Pidevuse tingimustest kehtivad (9), (11) ja (12). Pragu arvestav tingimus (18), mis kehtis konstantse ristlõike puhul, siin astme tõttu muutub. Pidevuse tingimused on seega järgmised:

$$v(\alpha-) = v(\alpha+),$$

$$v^I(\alpha+) - v^I(\alpha-) = k_1 v^{II}(\alpha+), \quad (25)$$

$$\frac{v^{II}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{II}(\alpha+)}{\lambda_1^2},$$

$$\frac{v^{III}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{III}(\alpha+)}{\lambda_1^2}.$$

Tingimuses (25) toodud suurus k_1 avaldub valemiga

$$k_1 = \frac{6\pi h_1 f (1 - \nu^2)}{EI}, \quad (26)$$

kus funktsioon f esitub kujul (22).

Nagu punktis 4.2, järeldub rajatingimustest (3) ning (5), et $A_0 = D_0 = 0$. Tingimustest (4) ja (6) saame aga avaldada tundmatu D_1 tundmatu C_1 kaudu: $D_1 = -C_1$. Avaldamata viie tundmatu jaoks kirjutame välja võrrandisüsteemi kasutamata rajatingimustest ja pidevuse tingimustest lähtuvalt:

$$\begin{cases} A_1 \cos \lambda_1 + B_1 \sin \lambda_1 = 0 \\ B_0 \sin \lambda_0 \alpha + C_0 \alpha - A_1 \cos \lambda_1 \alpha - B_1 \sin \lambda_1 \alpha + C_1 (1 - \alpha) = 0 \\ B_0 \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha + C_0 + A_1 (\lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha - k \lambda_1^2 \cos \lambda_1 \alpha) - \\ - B_1 (\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha + k \lambda_1^2 \sin \lambda_1 \alpha) - C_1 = 0 \\ B_0 \sin \lambda_0 \alpha - A_1 \cos \lambda_1 \alpha - B_1 \sin \lambda_1 \alpha = 0 \\ B_0 \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha + A_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha - B_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Tundmatute B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 suhtes on saadud süsteem lineaarne ning homogeenne. Vastav determinant saab kuju

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 & 0 \\ \sin \lambda_0 \alpha & \alpha & -\cos \lambda_1 \alpha & -\sin \lambda_1 \alpha & 1 - \alpha \\ \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha & 1 & \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha - k \lambda_1^2 \cos \lambda_1 \alpha & -\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha + k \lambda_1^2 \sin \lambda_1 \alpha & -1 \\ \sin \lambda_0 \alpha & 0 & -\cos \lambda_1 \alpha & -\sin \lambda_1 \alpha & 0 \\ \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha & 0 & \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha & -\lambda_1 \cos \lambda_1 \alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

Kui arvestame, et $\Delta = 0$, siis saame võrduse

$$\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1 (1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1 (1 - \alpha)] = 0,$$

See on identne punktis 4.2 saadud võrdusega (15), mis seob suurusi λ_0 , λ_1 ning α . Seega võime väita, et antud varda kinnituse korral prao olemasolu kriitilise koormuse määramisel mingit rolli ei mängi.

Edasi lahendame võrrandisüsteemi (27) ning paneme leitud konstandid avaldistesse (8). Tulemus on järgmine:

$$v_0 = -B_1 \cdot \frac{\sin[\lambda_1(1 - \alpha)]}{\cos \lambda_1} \cdot \left(\frac{\sin \lambda_0 \xi}{\sin \lambda_0 \alpha} + k \lambda_1^2 (1 - \alpha) \cdot \xi \right),$$

$$v_1 = -B_1 \cdot \frac{1}{\cos \lambda_1} \cdot \left(\sin[\lambda_1(1 - \xi)] + k \alpha \lambda_1^2 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] \cdot (1 - \xi) \right).$$

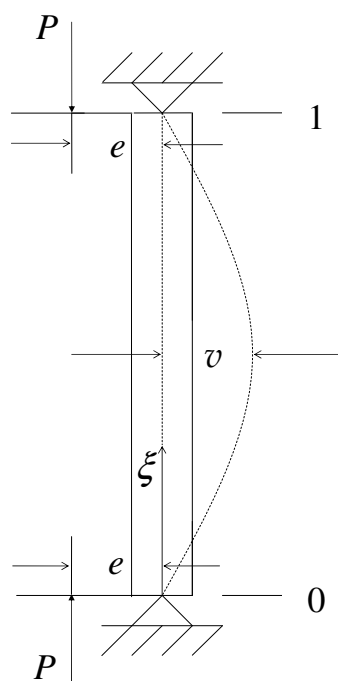
Saadud võrdused kirjeldavad varda kõverdunud kuju suvalisel kohal ξ . Siirde suurus jääb sõltuma konstandist B_1 .

5 Ekstsentrilise koormuse all olev vaba toetusega varras

Käesolevas peatükis võtame vaatluse alla erinevad šarniirise kinnitusega vardad, millele mõjuv jõud P ei asu tsentris vaid suuruse e võrra sellest eemal. Vaatleme konstantse paksusega ning astmelise varda juhtu, samuti olukorda, kus vardas on pragu.

5.1 Konstantse ristlõikega varras

Olgu meil konstantse ristlõikega varras, millele mõjub ekstsentriline koormus P . Koormuse mõju kaugus tsentrist olgu e (joonis 8).



Joonis 8: Konstantse ristlõikega varras

Kuna varda ristlõige on antud juhul konstantne, kehtib tasakaaluvõrrandi üldlahend (2), mille toome siinkohal veelkord välja:

$$v = A \cos \lambda \xi + B \sin \lambda \xi + C \xi + D.$$

Konstantide A , B , C ja D määramiseks kehtivad rajatingimused (3) ja (4). Ekstsentriline koormus muudab aga tingimused (5) ja (6). Antud varda korral on rajatingimused järgmised:

$$v(0) = 0,$$

$$v(1) = 0,$$

$$v^{II}(0) = -\frac{Pl^2 e}{EI}, \quad (28)$$

$$v^{II}(1) = -\frac{Pl^2 e}{EI}. \quad (29)$$

Tingimuste (28) ja (29) tuletamiseks on ühelt poolt kasutatud *Hooke*'i seadust ning teisalt võrdust

$$M = P(v + e).$$

Et varda otstes $v = 0$, siis $M = Pe$.

Toodud tingimuste rakendamiseks kasutame leitud tuletisi (7). Rajatingimustest (3) ja (28) avaldame konstandid A ja D :

$$A = \frac{Pl^2 e}{EI\lambda^2},$$

$$D = -\frac{Pl^2 e}{EI\lambda^2}.$$

Rajatingimustest (4) ja (29) järeldub, et

$$B = \frac{Pl^2 e}{EI\lambda^2} \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda},$$

$$C = 0.$$

Peatükis 3 tööme sisse tähistuse

$$\lambda^2 = \frac{Pl^2}{EI}.$$

Asendame suuruse λ^2 leitud konstantidesse A , B ja D . Tulemuseks on:

$$\begin{aligned} A &= e, \\ B &= \frac{e(1 - \cos \lambda)}{\sin \lambda}, \\ C &= 0, \\ D &= -e. \end{aligned}$$

Varda keskjoon saab seega järgmise kuju:

$$v = \frac{e}{\sin \lambda} \cdot (\sin[\lambda(1 - \xi)] - \sin \lambda + \sin \lambda \xi).$$

Euleri kriitilise koormuse määramiseks vaatame juhtu, kus $v \rightarrow \infty$. Selline olukord kehtib juhul, kui $\sin \lambda \rightarrow 0$, millest järeldub, et

$$\lambda = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

ning

$$\lambda^2 = n^2\pi^2.$$

Surve P avaldub seega kujul

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

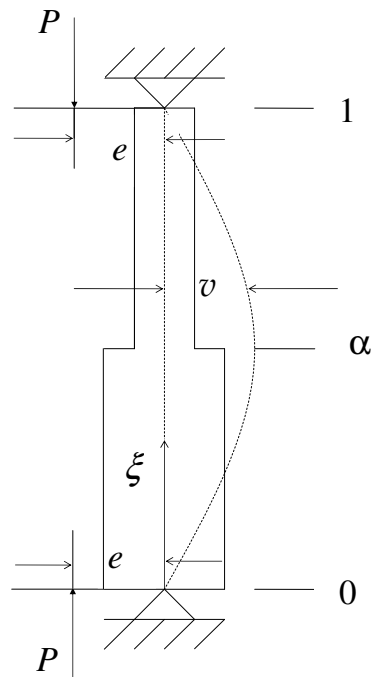
ning see on minimaalne juhul, kui $n = 1$. Kirjutame välja *Euleri* kriitiliseks jõuks

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Sama tulemuse saime ka varda puhul, millele rakendatud koormus oli tsentriline.

5.2 Astmega varras

Käesolevas punktis vaatleme ekstsentrilise koormuse all olevat astmega varrast. Aste olgu kohal α (joonis 9). Varda paksus piirkonnas $\xi \in (0, \alpha)$ olgu h_0 , ülejäänud pikkusel h_1 .



Joonis 9: Astmega varras

Muutuva ristlõike korral kirjeldavad tasakaaluolukorda võrdused (8):

$$v_0 = A_0 \cos \lambda_0 \xi + B_0 \sin \lambda_0 \xi + C_0 \xi + D_0, \quad \xi \in (0, \alpha),$$

$$v_1 = A_1 \cos \lambda_1 \xi + B_1 \sin \lambda_1 \xi + C_1 \xi + D_1, \quad \xi \in (\alpha, 1).$$

Konstantide $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1$ ja D_1 leidmiseks võtame kasutusele rajatingimused ning pidevuse tingimused. Et varda kinnitus ja koormus on samad, mis konstantse ristlõikega varda puhul, kehtivad rajatingimused (3)

ja (4). Tingimused (28) ja (29) muutuvad, kuna varda ristlõige pole antud juhul konstantne. Rajatingimused on antud ülesande puhul järgmised:

$$v(0) = 0,$$

$$v(1) = 0,$$

$$v^{II}(0) = -\frac{Pl^2e}{EI_0}, \quad (30)$$

$$v^{II}(1) = -\frac{Pl^2e}{EI_1}. \quad (31)$$

Astme tõttu kehtivad ka pidevuse tingimused (9) - (12):

$$v(\alpha-) = v(\alpha+),$$

$$v^I(\alpha-) = v^I(\alpha+),$$

$$\frac{v^{II}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{II}(\alpha+)}{\lambda_1^2},$$

$$\frac{v^{III}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{III}(\alpha+)}{\lambda_1^2}.$$

Raja- ning pidevuse tingimuste rakendamiseks kasutame eelpool leitud tulelisi (13). Rajatingimustest (3) ja (30) järeldub, et

$$A_0 = e, \quad D_0 = -e.$$

Tingimused (4) ja (30) lubavad avaldada veel kaks konstanti:

$$D_1 = -e - C_1,$$

$$A_1 = \frac{e}{\cos \lambda_1} - B_1 \cdot \frac{\sin \lambda_1}{\cos \lambda_1}.$$

Pidevuse tingimustest saame avaldada ülejäänud konstandid B_0 , C_0 , B_1 ja C_1 :

$$B_0 = \frac{e \sin[\lambda_1(1-\alpha)]}{\cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha} \cdot \frac{\lambda_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \sin \lambda_1 \alpha}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1-\alpha)]} + \frac{e (\cos \lambda_1 \alpha - \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_0 \alpha)}{\cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha},$$

$$B_1 = -\frac{e (\lambda_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \sin \lambda_1 \alpha)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1-\alpha)]},$$

$$C_0 = 0,$$

$$C_1 = 0.$$

Lõpuks avaldame veel konstante B_1 ja D_1 kasutades konstandid A_1 ning D_1 :

$$A_1 = \frac{e}{\cos \lambda_1} + \frac{e \sin \lambda_1}{\cos \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \sin \lambda_1 \alpha}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1-\alpha)]},$$

$$D_1 = -e.$$

Nii saame välja kirjutada astmega varda telje kuju mõlemas piirkonnas:

$$v_0 = e \left[\frac{\sin[\lambda_1(1-\alpha)] \sin \lambda_0 \xi}{\cos \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha} \cdot \frac{\lambda_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \sin \lambda_1 \alpha}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cos[\lambda_1(1-\alpha)]} + \frac{\sin[\lambda_0(\alpha - \xi)]}{\sin \lambda_0 \alpha} + \frac{\cos \lambda_1 \alpha \sin \lambda_0 \xi}{\cos \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha} - 1 \right],$$

$$v_1 = e \left[\frac{\sin[\lambda_1(1-\xi)]}{\cos \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \sin \lambda_1 \alpha}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cos[\lambda_1(1-\alpha)]} + \frac{\cos \lambda_1 \xi}{\cos \lambda_1} - 1 \right].$$

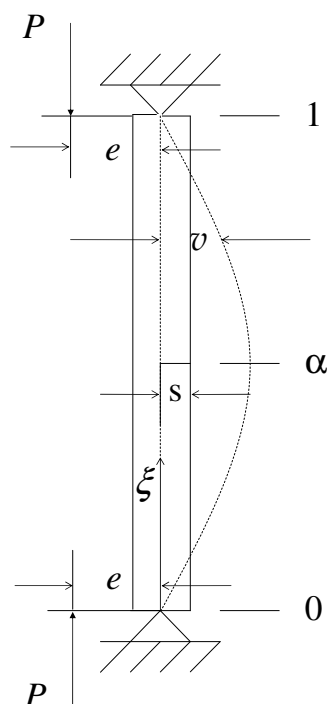
Nagu teada, *Euleri* kriitilise koormuse korral peab kehtima seaduspära: kui $P \rightarrow P_E$, siis $v(\xi_*) \rightarrow \infty$, kus ξ_* on mingi punkt varda keskpunkti lähedal. Sel juhul

$$\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1-\alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1-\alpha)] \rightarrow 0.$$

Võttes selle avaldise piirväärtuseks nulli, saame piirkoormuseks sama tulemuse, mis eespool, kui koormus vardale oli tsentriline (vt 4.2; 4.4).

5.3 Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu

Ekstsentrilise koormuse all olev konstantse ristlõikega varras, milles on pragu pikkusega s , on toodud joonisel 10.



Joonis 10: Konstantse ristlõikega varras, milles on pragu

Praoga varda puhul tuleb vaadelda tasakaaluvõrrandi üldlahendit kahes piirkonnas ehk kehtib lahend (16):

$$v_0 = A_0 \cos \lambda \xi + B_0 \sin \lambda \xi + C_0 \xi + D_0, \quad \xi \in (0, \alpha),$$

$$v_1 = A_1 \cos \lambda \xi + B_1 \sin \lambda \xi + C_1 \xi + D_1, \quad \xi \in (\alpha, 1).$$

Ekstsentrilise koormuse korral kehtivad rajatingimused (3), (4), (28), (29) ning prao tõttu pidevuse tingimused (17) - (20), mille määrame tuletiste

(22) abil. Rajatingimused (3) ning (28) määravad konstandid A_0 ja D_0 :

$$A_0 = e,$$

$$D_0 = -e.$$

Teistest rajatingimustest saame avaldada konstandid A_1 ja D_1 järgmiselt:

$$A_1 = -B_1 \cdot \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} + \frac{e}{\cos \lambda},$$

$$D_1 = -C_1 - e.$$

Pidevuse tingimusi arvestades kirjutame välja ning lahendame ülejäänud nelja tundmatu konstandi suhtes järgmise võrrandisüsteemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 \cos \lambda \cdot \sin \lambda \alpha + C_0 \alpha \cos \lambda + B_1 \sin[\lambda(1 - \alpha)] + C_1 \cos \lambda(1 - \alpha) = \\ = e \cos \lambda \alpha(1 - \cos \lambda) \\ B_0 \lambda \cos \lambda \cdot \cos \lambda \alpha + C_0 \cos \lambda - B_1(\lambda \cos[\lambda(1 - \alpha)] - k \lambda^2 \sin[\lambda(1 - \alpha)]) - \\ - C_1 \cos \lambda = e(k \lambda^2 \cos \lambda \alpha - \lambda \sin \lambda \alpha(1 + \cos \lambda)) \\ B_0 \cos \lambda \cdot \sin \lambda \alpha + B_1 \sin[\lambda(1 - \alpha)] = e \cos \lambda \alpha(1 - \cos \lambda) \\ B_0 \lambda \cos \lambda \cdot \cos \lambda \alpha - B_1 \lambda \cos[\lambda(1 - \alpha)] = -e \sin \lambda \alpha(1 + \cos \lambda). \end{array} \right.$$

Otsitud konstandid on sellised:

$$A_0 = e,$$

$$B_0 = \frac{e(\cos 2\lambda \alpha \cdot \sin[\lambda(1 - \alpha)] - \sin \lambda \cdot \cos \lambda \alpha + \sin \lambda \alpha)}{\sin \lambda \cdot \sin \lambda \alpha},$$

$$C_0 = -ek\lambda^2(\sin[\lambda(1 - \alpha)] \cdot (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda \alpha) - \cos \lambda \alpha) \cdot (1 - \alpha),$$

$$D_0 = -e,$$

$$A_1 = e \cos 2\lambda \alpha,$$

$$B_1 = \frac{e(1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda \alpha)}{\sin \lambda},$$

$$C_1 = ek\lambda^2(\sin[\lambda(1 - \alpha)] \cdot (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda \alpha) - \cos \lambda \alpha),$$

$$D_1 = -e \left(k\alpha\lambda^2 (\sin[\lambda(1-\alpha)]) \cdot (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda\alpha) - \cos \lambda\alpha + 1 \right).$$

Varda kõverdunud kuju võrrand (16) annab

$$v_0 = \frac{e}{\sin \lambda \cdot \sin \lambda\alpha} \left[\sin \lambda \cdot \sin[\lambda(\alpha - \xi)] + (\sin \lambda\alpha + \cos 2\lambda\alpha) \cdot \sin \lambda\xi - \right. \\ \left. - k\lambda^2 \sin \lambda \cdot \sin \lambda\alpha (\sin[\lambda(1-\alpha)]) \cdot (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda\alpha) - \cos \lambda\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \xi \right],$$

$$v_1 = \frac{e}{\sin \lambda} \left[\sin \lambda \cdot \cos 2\lambda\alpha \cdot \cos \lambda\xi + (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda\alpha) \sin \lambda\xi + \right. \\ \left. + \left(k\alpha\lambda^2 \sin \lambda (\cos \lambda\alpha - \sin[\lambda(1-\alpha)]) \cdot (1 - \cos \lambda \cdot \cos 2\lambda\alpha) \right) \cdot (1-\xi) - \sin \lambda \right].$$

Euleri kriitilise koormuse määramisel arvestame juhtu, kus $\sin \lambda \rightarrow 0$. Punktiga 5.1 analoogselt saame siis *Euleri* kriitiliseks koormuseks

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

5.4 Astmega varras, milles on pragu

Vaatleme olukorda, kus ekstsentrilise koormuse all oleval vardal on astme asukohal α pragu pikkusega s (joonis 11).

Kehtib tasakaaluvõrrandi üldlahend (8):

$$v_0 = A_0 \cos \lambda_0 \xi + B_0 \sin \lambda_0 \xi + C_0 \xi + D_0, \quad \xi \in (0, \alpha),$$

$$v_1 = A_1 \cos \lambda_1 \xi + B_1 \sin \lambda_1 \xi + C_1 \xi + D_1, \quad \xi \in (\alpha, 1).$$

Konstantide $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1$ ja D_1 määramisel kasutame rajatingimusi (3), (4), (30), (31):

$$v(0) = 0,$$

$$v(1) = 0,$$

$$v''(0) = -\frac{Pl^2 e}{EI_0},$$

$$v^{II}(1) = -\frac{Pl^2e}{EI_1}$$

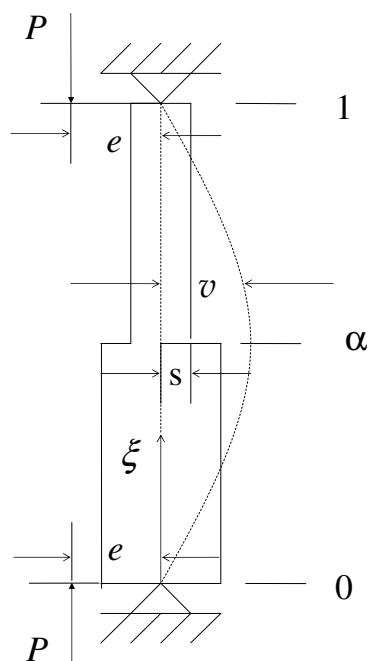
ning pidevuse tingimusi (9), (11), (12), (25):

$$v(\alpha-) = v(\alpha+),$$

$$v^I(\alpha+) - v^I(\alpha-) = k_1 v^{II}(\alpha+),$$

$$\frac{v^{II}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{II}(\alpha+)}{\lambda_1^2},$$

$$\frac{v^{III}(\alpha-)}{\lambda_0^2} = \frac{v^{III}(\alpha+)}{\lambda_1^2}.$$



Joonis 11: Astmega varras, milles on pragu

Tingimuste rakendamiseks kasutame tuletisi (13). Rajatingimuste abil avaldame neli konstanti:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= e, \\
 D_0 &= -e, \\
 A_1 &= -B_1 \cdot \frac{\sin \lambda_1}{\cos \lambda_1} - \frac{e}{\cos \lambda_1}, \\
 D_1 &= -C_1 - e.
 \end{aligned}$$

Pidevuse tingimuste põhjal saame ülejäänud nelja tundmatu suhtes võrrandisüsteemi:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & B_0 \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha + C_0 \alpha \cos \lambda_1 + B_1 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \\
 & + C_1(1 - \alpha) \cos \lambda_1 = e (\cos \lambda_1 \alpha - \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_0 \alpha) \\
 & B_0 \lambda_0 \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_0 \alpha + C_0 \cos \lambda_1 - B_1(\lambda_1 \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] - \\
 & - k \lambda_1^2 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)]) - C_1 \cos \lambda_1 = \\
 & = e(k \lambda_1^2 \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha + \lambda_0 \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha) \quad (32) \\
 & B_0 \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha + B_1 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] = \\
 & = e (\cos \lambda_1 \alpha - \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_0 \alpha) \\
 & B_0 \lambda_0 \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_0 \alpha - B_1 \lambda_1 \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] = \\
 & = e (\lambda_0 \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_0 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha).
 \end{aligned} \right.$$

Süsteemi (32) lahendamiseks asetame kolmanda ja neljanda võrrandi vastavalt esimesse ning teise võrrandisse ning avaldame tundmatud C_0 ja C_1 :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= -B_1 k \lambda_1^2 (1 - \alpha) \cdot \frac{\sin[\lambda_1(1 - \alpha)]}{\cos \lambda_1} + e k \lambda_1^2 (1 - \alpha) \cdot \frac{\cos \lambda_1 \alpha}{\cos \lambda_1}, \\
 C_1 &= B_1 k \alpha \lambda_1^2 \cdot \frac{\sin[\lambda_1(1 - \alpha)]}{\cos \lambda_1} - e k \alpha \lambda_1^2 \cdot \frac{\cos \lambda_1 \alpha}{\cos \lambda_1}.
 \end{aligned}$$

Kolmanda ja neljanda võrrandi lahendamisel saame konstandid B_0 ja B_1 :

$$B_0 = \frac{e (\lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] - \lambda_1 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]},$$

$$B_1 = \frac{e(\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \cos \lambda_1 \alpha + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \sin \lambda_1 \alpha - \lambda_0 \cos \lambda_1)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]}.$$

Asendades need ülejäänud seostesse, on tulemuseks

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{e(\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos \lambda_1 \alpha - \lambda_0 \sin \lambda_1)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]}, \\ C_0 &= \frac{ek\lambda_1^2(1 - \alpha)(\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]}, \\ C_1 &= -\frac{ek\lambda_1^2\alpha(\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]}, \\ D_1 &= \frac{ek\lambda_1^2\alpha(\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha)}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]} - e. \end{aligned}$$

Tasakaaluvõrrandi üldlahend (8) võtab seega järgmise kuju:

$$\begin{aligned} v_0 &= e \left[\frac{\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] \cdot \cos[\lambda_0(\alpha - \xi)] + \lambda_1 \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] \cdot \sin[\lambda_0(\alpha - \xi)]}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k\lambda_1^2\xi(1 - \alpha) \cdot (\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha) + \lambda_1 \sin \lambda_0 \xi}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]} - 1 \right], \\ v_1 &= e \left[\frac{-\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(\alpha - \xi)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(\alpha - \xi)]}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k\lambda_1^2\alpha(1 - \xi) \cdot (\lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha) + \lambda_0 \sin[\lambda_1(1 - \xi)]}{\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)]} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Euleri kriitilise koormuse saab määrata punktiga 5.2 analoogselt. See tähendab, et sel juhul

$$\lambda_0 \cos \lambda_0 \alpha \cdot \sin[\lambda_1(1 - \alpha)] + \lambda_1 \sin \lambda_0 \alpha \cdot \cos[\lambda_1(1 - \alpha)] \rightarrow 0.$$

Piirkoormus on seega antud varda puhul sama, mis ilma praota ülesandes.

Summary

Stability of beams with cracks

Tiina Kraav

Thin walled structures are extensively employed in civil engineering and machinery. It is very important that such structural elements do not lose their stability.

In the present work stability of elastic beams and columns subjected to compressive loads is studied.

The thesis consists of five chapters.

The critical load of *Euler* is introduced in the first chapter. Some historical remarks about the loss of stability of structure are given herein.

Methods of determination of the critical load of *Euler* are presented in the second chapter.

The differential equation of equilibrium is derived in the third chapter. Also, the general solution of the equation is given, which is used in following chapters.

In the fourth chapter of the study, elastic beams under centric load are considered. The first problem considered herein regards to the beam of constant thickness. Secondly, the beam which has a step is studied. For each beam the curved shape of the beam axis and the critical load of *Euler* are developed.

In the fifth chapter, elastic beams under eccentric load are considered. As in the fourth chapter, four different particular cases are studied.

Kasutatud kirjandus

- [1] Dimarogonas A. D., Paipetis S. A. *Analytical Methods in Rotor Dynamics*. London: Applied Science Publishers, 1983.
- [2] Eek R., Poverus L. *Ehitusmehaanika II*. Tallinn, Valgus, 1967.
- [3] Iyengar N. G. R. *Structural Stability of Columns and Plates*. Ellis Horwood, 1990.
- [4] Lellep J., Sakkov E. *Buckling of stepped composite columns*. Mechanics of Composite Materials. Vol. 42, No. 1. P. 87-100, 2006.
- [5] Li Q. S. *Buckling analysis of multi-step non-uniform beams*. Adv. Struct. Eng. No. 3. P. 139-144, 2000.
- [6] Liang R. Y., Hu J., Choy F. *Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures*. J. Eng. Mech. Proc. ASCE. Vol. 118. P. 384-396, 1992.
- [7] Okamura H., Liu H. W., Chu Chorng-Shin, Liebowitz H. *A cracked column under compression*. Eng. Fracture Mech. No. 1. P. 547-564, 1969.
- [8] Rizos P. E., Aspragathos N., Dimarogonas A. D. *Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes*. J. Sound Vibr. Vol. 138. P. 381-388, 1990.
- [9] Тимошенко, С. П. *Устойчивость стержней пластин и оболочек*. Москва, Наука, 1971.
- [10] Вольмир, А. С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967.