EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA

H. ESPENBERG

INTEGRAALARVUTUS

TARTU 1967

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA

H. ESPENBERG

INTEGRAALARVUTUS

TARTU 1967

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Рийа, 12

Х. Эспенберг

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

На эстонском языке

I p e a t ü k k

M Ä Ä R A M A T A   I N T E G R A A L

1. MÄÄRAMATA INTEGRAALI MÕISTE

Paljudes probleemides on vaja leida funktsioon, kui on teada tema tuletis. Teisiti öeldes, etteantud funktsiooni $f(x)$ põhjal tuleb leida selline funktsioon $F(x)$, et $F'(x) = f(x)$.

Kui $F'(x) = f(x)$, siis funktsiooni $F(x)$ nimetame funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks.

D e f i n i t s i o o n. Antud funktsiooni algfunktsiooniks nimetame funktsiooni, mille tuletis võrdub antud funktsiooniga.

Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis ka $F(x) + C$ (kus C on mingi konstant) on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, sest

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Seega: kui funktsioonil $f(x)$ on üks algfunktsioon, siis on tal neid lõpmata palju.

Kehtib

t e o r e e m. Olgu $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon. Siis kujus $F(x) + C$ (kus C on suvaline konstant) sisalduvad funktsiooni $f(x)$ kõik algfunktsioonid.

T õ e s t u s. Olgu $\varphi(x)$ funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon. Näitame, et leidub selline konstant C_1, mille puhul $\varphi(x) = F(x) + C_1$. Et $\varphi'(x) = f(x)$ ja $F'(x) = f(x)$, siis

$$[\varphi(x) - F(x)]' = \varphi'(x) - F'(x) = 0$$

ning järelikult $\Phi(x) - F(x) = C_1$. Seega $\Phi(x) = F(x) + C_1$, m. o. t. t.

Avaldist $F(x) + C$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määramata integraaliks ning tähistatakse

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

D e f i n i t s i o o n. Funktsiooni määramata integraaliks nimetatakse selle funktsiooni kõigi algfunktsioonide hulka.

Nii antud funktsiooni algfunktsiooni kui ka määramata integraali leidmist (mis on sisuliselt samaväärsed ülesanded) nimetatakse antud funktsiooni i n t e g r e e r i m i s e k s. Määramata integraalis $\int f(x)dx = F(x) + C$ nimetatakse argumenti x i n t e g r e e r i m i s m u u t u j a k s, funktsiooni $f(x)$ i n t e g r e e r i t a v a k s f u n k t s i o o n i k s, integreeritava funktsiooni ja integreerimismuutuja diferentsiaali korrutist $f(x)dx$ i n t e g r e e r i t a v a k s a v a l d i s e k s ning konstanti C i n t e g r e e r i m i s k o n s t a n d i k s.

Juhime tähelepanu sellele, et integraali märgi $\int$ järele kirjutatakse mitte integreeritav funktsioon $f(x)$, vaid avaldis $f(x)dx$. Sellise kirjutusviisi otstarbekus selgub käesoleva peatüki neljandas punktis.

2. MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSI

1° Määramata integraali tuletis võrdub integreeritava funktsiooniga, s. o.

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x),$$

mis järeldub vahetult määramata integraali definitsioonist.

2° $$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Ka see omadus järeldub määramata integraali definitsioonist.

3° Nullist erineva konstantse teguri võib tuua integraali märgi ette, s. o.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad \text{kus} \quad k = \text{const.} \neq 0.$$

Selle omaduse põhjendamiseks piisab, kui näitame, et

võrduse parema poole tuletis võrdub integreeritava funktsiooniga kf(x).
Tõepoolest

$$\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left[\int f(x)dx\right]' = kf(x).$$

4° Summat võib integreerida liikmeti, s. o.

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Tõestuseks näitame, et võrduse parema poole tuletis võrdub integreeritava funktsiooniga $f(x) \pm g(x)$. Tõepoolest

$$\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

3. PÕHIINTEGRAALIDE TABEL

1° $\int 0\, dx = C;$

2° $\int dx = x + C;$

3° $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, kui $\alpha \neq -1;$

4° $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

5° $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

6° $\int e^x dx = e^x + C;$

7° $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

8° $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

9° $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$

10° $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$

11° $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C;$

12° $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

13° $\int \operatorname{sh}x\,dx = \operatorname{ch}x + C;$

14° $\int \operatorname{ch}x\,dx = \operatorname{sh}x + C;$

15° $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}x + C;$

16° $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x + C;$

Ülaltoodud integraale nimetatakse p õ h i i n t e g r a a l i d e k s ehk t a b e l i - i n t e g r a a l i d e k s. Nende õigsuses võime veenduda diferentseerimise abil, tuginedes määramata integraali omadusele 1°. Nii näiteks:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ sest}$$

$$\left[\frac{a^x}{\ln a} + C\right]' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x \cdot \ln a = a^x;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ sest } x > 0 \text{ puhul } (\ln|x| + C)' =$$

$$= (\ln x + C)' = \frac{1}{x} \text{ ning } x < 0 \text{ puhul } (\ln|x| + C)' = (\ln(-x)+C)' =$$

$$= \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

4. MÄÄRAMATA INTEGRAALI ARVUTUSVÕTTEID

a) Asendusvõte

Kehtib t e o r e e m: Olgu $\int f(x)dx = F(x) + C$. Siis $\int f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, kus $\varphi(t)$ on diferentseeruv funktsioon.

T õ e s t u s. Et eelduse põhjal $[F(x)]' = f(x)$, siis tõepoolest liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t).$$

See teoreem annab järgmise võimaluse määramata integraali arvutamiseks. Lähme integraalilt $\int f(x)dx$ asendusega $x = \varphi(t)$ üle integraalile $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$. Kui õnnestub see integraal arvutada, siis tarvitseb saadud tulemuses muutujalt t üle minna (seose $x = \varphi(t)$ põhjal) muutujale x, millega saamegi lähteintegraali väärtuse. Seda võtet määramata integraali arvutamiseks nimetataksegi asendusvõtteks.

Nagu eelöeldust näeme, saame asendusvõttel avaldise $f(x)dx$ asemele uueks integreeritavaks avaldiseks $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Järelikult uue integreeritava avaldise leidmiseks asenduse $x = \varphi(t)$ puhul tuleb integreeritavas funktsioonis x asendada t kaudu ning dx asendada funktsiooni $x = \varphi(t)$ diferentsiaaliga $\varphi'(t)dt$.

N ä i d e 1°. Arvutada $I_1 = \int \sin^2 x \cdot \cos x dx$. Teostame asenduse $\sin x = t$. Seega $\cos x dx = dt$ ning

$$I_1 = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

N ä i d e 2°. Arvutada $I_2 = \int \sin^3 x \, dx$.

Teostame asenduse

$$\cos x = t,$$
$$-\sin x \, dx = dt,$$
$$\sin x \, dx = -dt.$$

Seega $I_2 = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx =$

$= -\int (1 - t^2)dt = -\int dt + \int t^2 dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + C =$

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

b) Ositi integreerimine

Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid. Siis

$$(uv)' = uv' + vu',$$
$$uv' = (uv)' - vu',$$
$$\int uv'dx = \int (uv)' dx - \int vu'dx.$$

Arvestades seoseid $v'dx = dv$, $u'dx = du$ ning määramata integraali omadust 2° saame

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(integreerimiskonstandi C jätame kirjutamata, sest ta lisandub $\int vdu$ arvutamisel). Saadud valemit nimetatakse ositi integreerimise valemiks.

N ä i d e 1°. Arvutada $I_1 = \int xe^x dx$.

Valime $u = x$, $dv = e^x dx$. | Siis $du = dx$, $v = e^x$.

Seega $I_1 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

N ä i d e 2°. Arvutada $I_2 = \int \ln x \, dx$.

Valime $u = \ln x$, $dv = dx$. | Siis $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$.

Seega $I_2 = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

5. RATSIONAALMURDUDE INTEGREERIMINE

R a t s i o n a a l m u r r u k s nimetatakse avaldist $\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on reaalsete kordajatega polünoomid. Ratsionaalmurdu nimetatakse korrapäraseks, kui tema lugeja aste on väiksem nimetaja astmest. Vastasel korral nimetame ratsionaalmurdu mittekorrapäraseks. Iga mittekorrapärase ratsionaalmurru saame lugeja jagamisel nimetajaga esitada täisosa ning korrapärase ratsionaalmurru summana. Näiteks

$$\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 4}{x^2 - x - 1} = x^3 + x^2 + x + 4 + \frac{5x+8}{x^2-x-1},$$

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3 - 2x + 2} = 2 + \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x + 2}.$$

Et täisosa integreerimine on vahetult teostatav, siis ülalnimetatud teisendusega saame taandada mittekorrapärase ratsionaalmurru integreerimise korrapärase ratsionaalmurru integreerimisele. Järelikult on küsimus ratsionaalmurdude integreerimisest täielikult lahendatud, kui saame anda eeskirjad korrapäraste ratsionaalmurdude integreerimiseks. Seetõttu asumegi nüüd vaatlema korrapäraste ratsionaalmurdude integreerimist.

Korrapäraseid ratsionaalmurde

$$\frac{A}{x + a}, \quad \frac{B}{(x + a)^k}, \quad \frac{Cx + D}{x^2 + px + q}$$ (kus $p^2 - 4q < 0$,

s. t. nimetaja ei lahutu reaalseteks teguriteks) ja

$$\frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^k}$$ (kus $p^2 - 4q < 0$) nimetatakse a l g m u r d u d e k s. Osutub, et iga korrapärane ratsionaalmurd on esitatav algmurdude summana (ehk nagu öeldakse: iga korrapärane ratsionaalmurd on lahutatav algmurdudeks). Korrapärase ratsionaalmurru lahutamisel algmurdudeks tuginetakse järgmisele algebras tõestatavale teoreemile:

kui $g(x) = (x+a)^{\alpha} (x+b)^{\beta} \dots (x^2+px+q)^{\gamma} (x^2+rx+s)^{\delta} \dots$,

siis on korrapärane ratsionaalmurd $\frac{f(x)}{g(x)}$ esitatav ühesel viisil kujul

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{(x+a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{x+b} + \frac{B_2}{(x+b)^2} +$$

$$+ \dots + \frac{B_{\beta}}{(x+b)^{\beta}} + \dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{C_{\gamma}x + D_{\gamma}}{(x^2+px+q)^{\gamma}} + \frac{E_1x + F_1}{x^2+rx + s} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{E_{\delta}x + F_{\delta}}{(x^2+rx+s)^{\delta}} +$$

$$+ \dots$$

Siinjuures võimaluse $g(x)$ esitamiseks kujul

$$g(x) = (x+a)^{\alpha} (x+b)^{\beta} \dots (x^2+px+q)^{\gamma} (x^2+rx+s)^{\delta} \dots$$

garanteerib meile algebras tõestatav teoreem, mis ütleb, et iga reaalsete kordajatega polünoom $g(x)$ on esitatav esimese ja teise astme reaalsete kordajatega tegurite korrutisena.

Praktikas kasutatakse algmurdudeks lahutamisel tavaliselt nn. määramata kordajate meetodit. Illustreerime seda meetodit mõne näitega.

N ä i d e 1. Lahutada algmurdudeks

$$\frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

Et $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$, siis saame antud murru lahutamisel algmurdudeks:

$$\frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

kus A, B ja C on esialgu tundmatud konstandid. Nende määramiseks korrutame viimast võrdust teguriga $(x-1)(x-2)^2$. Saame

$$x = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1),$$

$$x = (A+B)x^2 + (-4A - 3B + C)x + (4A+2B-C).$$

See võrdus kehtib, kui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A - 3B + C = 1 \\ 4A + 2B - C = 0 \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahend on

$A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Seega

$$\frac{x}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{x-2} \quad \frac{2}{(x-2)^2}.$$

N ä i d e 2. Lahutada algmurdudeks

$$\frac{x^3+3}{(x^2+1)^2}.$$

Antud murd lahutub järgmise kujuga algmurdudeks:

$$\frac{x^3 + 3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Selle võrduse korrutamisel teguriga $(x^2+1)^2$ saame

$$x^3+3 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D),$$

$$x^3+3 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D).$$

Siit

$$A = 1,\ B = 0,\ A + C = 0,\ B + D = 3.$$

Järelikult

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\ D = 3$$

ning

$$\frac{x^3+3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{3-x}{(x^2+1)^2}.$$

Et iga korrapärane ratsionaalmurd on lahutatav algmurdudeks, siis korrapäraste ratsionaalmurdude integreerimiseks piisab oskusest integreerida algmurde. Seetõttu peatumegi järgnevalt algmurdude integreerimisel.

I. $\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\ln|x+a| + C.$

II. $\int \frac{B}{(x+a)^k}\,dx = -\frac{B}{(k-1)(x+a)^{k-1}} + C.$

III. Integraali $I = \int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}\,dx$ leidmiseks arvestame,

et $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x+\frac{p}{2})^2 + a^2$, kus $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Asendades $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$ saame

$$I = \int \frac{C(t-\frac{p}{2}) + D}{t^2 + a^2}\,dt = C\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + (D - \frac{Cp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{C}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a^2}\ (D-\frac{Cp}{2})\int \frac{dt}{(\frac{t}{a})^2+1}.$$

Asendades $\frac{t}{a} = u$, $dt = a\,du$ saame

$$\int \frac{dt}{(\frac{t}{a})^2+1} = a\int \frac{du}{u^2+1} = a \arctan u + C_1 =$$

$= a\cdot\arctan \frac{t}{a} + C_1$, kus C_1 on integreerimiskonstant.

Seega

$$I = \frac{C}{2}\ \ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}(D - \frac{Cp}{2}) \arctan \frac{t}{a} + C_1,$$

millest muutujale x tagasi minnes saame, et

$$I = \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2D - Cp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_1.$$

IV. Integraali

$$\int \frac{Ex + F}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

leidmisel me ei peatu, sest ta esineb praktikas harva ning vajaduse korral võib tema leidmiseks kasutatavat meetodit leida igast integraalarvutuse õpikust. Märgime vaid seda, et ka see integraal (nagu juhtudel I, II ja III vaadeldud integraalidki) avaldub elementaarfunktsioonides. Seega võime öelda, et integraal ratsionaalmurrust avaldub elementaarfunktsioonides. See tulemus on oluline seetõttu, et tervel real juhtudel integraal elementaarfunktsioonist ei avaldu elementaarfunktsioonides. Sellisteks integraalideks on näiteks

$$\int e^{-x^2}dx, \qquad \int \sin(x^2)dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

6. UNIVERSAALNE ASENDUS

Vaatleme integraali $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, kus $R(\sin x, \cos x)$ on mingi funktsioonidest $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ nelja aritmeetilise tehte (liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise) abil moodustatud funktsioon. Sellist kuju omavate integraalide arvutamiseks on alati rakendatav asendus

$$\tan\frac{x}{2} = t,$$

mistõttu seda nimetataksegi universaalseks asenduseks.

Trigonomeetriast on teada, et

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}},$$

mistõttu asendus $\tan\frac{x}{2} = t$ annab:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

Arvestades, et

$$\frac{x}{2} = \arctan t,$$

saame

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} .$$

Seega saame universaalse asenduse rakendamisel, et

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2 \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{dt}{1+t^2} .$$

Viimases integraalis on aga integreeritavaks funktsiooniks mingi ratsionaalmurd t suhtes, mistõttu tema arvutamine on teostatav eelmises punktis vaadeldud meetodi abil.

N ä i d e. Arvutada $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$.

Kasutades universaalset asendust saame

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \int \frac{dt}{t + 1} = \ln|t+1| + C = \ln|\tan \frac{x}{2} + 1| + C.$$

II peatükk

MÄÄRATUD INTEGRAAL

1. MÄÄRATUD INTEGRAALI MÕISTE

Olgu antud lõigul $[a, b]$ funktsioon $y = f(x)$. Jaotame lõigu $[a, b]$ n osalõiguks punktist a punkti b suunas kulgevate jaotuspunktidega $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Tähistame $x_1 - a = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $b - x_{n-1} = \Delta x_n$, $\max \Delta x_i = \Delta x$. Valime igal osalõigul vabalt mingi punkti: lõigul $[a, x_1]$ punkti ξ_1, lõigul $[x_1, x_2]$ punkti ξ_2, ... , lõigul $[x_{n-1}, b]$ punkti ξ_n. Arvutame funktsiooni $y = f(x)$ väärtused $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ... , $f(\xi_n)$ ja moodustame summa

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Summat σ_n nimetame funktsiooni $y = f(x)$ *integraalsummaks*.

Definitsioon. Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$J = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

sõltumata osalõikudeks jaotamise viisist ning punktide ξ_i valikust, siis nimetame seda piirväärtust funktsiooni $y = f(x)$ määratud integraaliks lõigul $[a, b]$.

Vastavalt antud definitsioonile on funktsiooni määratud integraaliks integraalsumma piirväärtus, kui kõikide osalõikude pikkused lähenevad nullile ($\Delta x \to 0$) ning osalõikude arv piiramatult kasvab ($n \to \infty$).

Funktsiooni $y = f(x)$ määratud integraali lõigul $[a, b]$

tähistatakse $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kusjuures arve a ja b nimetatakse vastavalt **integraali alumiseks** ja **ülemiseks rajaks**.

Definitsioon. Funktsiooni, mille puhul eksisteerib määratud integraal lõigul $[a, b]$, nimetatakse sellel lõigul integreeruvaks.

Saab tõestada, et igal lõigul pidev funktsioon on integreeruv sellel lõigul.

2. NEWTON-LEIBNIZI VALEM

Olgu lõigul $[a, b]$ integreeruva funktsiooni $y = f(x)$ üheks algfunktsiooniks $y = F(x)$, s. t. $F'(x) = f(x)$. Jaotades lõigu $[a, b]$ osalõikudeks jaotuspunktidega $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, saame vahe $F(b) - F(a)$ esitada kujul

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + [F(b) - F(x_{n-1})].$$

Lagrange'i teoreemi põhjal

$$F(x_1) - F(a) = F'(\xi_1)\,(x_1 - a) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, \text{ kus } \xi_1 \in [a, x_1]$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi_2)\,(x_2 - x_1) = f(\xi_2)\,\Delta x_2, \text{ kus } \xi_2 \in [x_1, x_2]$$

....

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)\,(b - x_{n-1}) = f(\xi_n)\,\Delta x_n, \text{ kus } \xi_n \in [x_{n-1}, b]$$

Seega

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Et saadud võrduse vasakul poolel esineb funktsiooni $y = f(x)$ integraalsumma, siis minnes selles võrduses piirile, kui $\Delta x \to 0$, saame

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Saadud valemit nimetataksegi N e w t o n - L e i b n i z i v a l e m i k s. Ta võimaldab arvutada määratud integraali, teades integreeritava funktsiooni algfunktsiooni. Et aga $y = f(x)$ algfunktsiooni leidmiseks tuleb leida määramata integraal funktsioonist $y = f(x)$, siis Newton-Leibnizi valem väljendab sisuliselt seost määratud ja määramata integraali vahel.

Funktsiooni väärtuste vahet tähistatakse tavaliselt sümboliga

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Seega võime Newton-Leibnizi valemi anda ka kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Rakendades Newton-Leibnizi valemit leiame näiteks, et

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3},$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3. MÄÄRATUD INTEGRAALI OMADUSI

Olgu $y = F(x)$ ja $y = G(x)$ vastavalt funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ algfunktsioonid. Tõestame järgmised määratud integraali omadused.

1° Määratud integraal ei sõltu integreerimismuutuja tähistusest, s. o.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz = \ldots$$

See omadus järeldub Newton-Leibnizi valemist, mille põhjal

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ja

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2° Integreerimisrajade vahetamisel integraali märk muutub, s. o.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Tõepoolest, Newton-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3° Konstantse teguri võib tuua integraali märgi ette, s. o.

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Et $y = k\, f(x)$ algfunktsiooniks on $y = k\, F(x)$, siis Newton-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\, F(b) - k\, F(a) = k\left[F(b) - F(a)\right] = k\int_a^b f(x)dx.$$

4^0 Integreeruvate funktsioonide summat võib integreerida liikmeti, s. o.

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

Et $y = f(x) \pm g(x)$ algfunktsiooniks on $y = F(x) \pm G(x)$, siis Newton-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \left[F(b) \pm G(b)\right] - \left[F(a) \pm G(a)\right] =$$

$$= \left[F(b) - F(a)\right] \pm \left[G(b) - G(a)\right] = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

5^0 $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

sõltumata sellest, kas c on lõigu [a,b] seesmine või väline punkt.

Tõepoolest, Newton-Leibnizi valemi põhjal

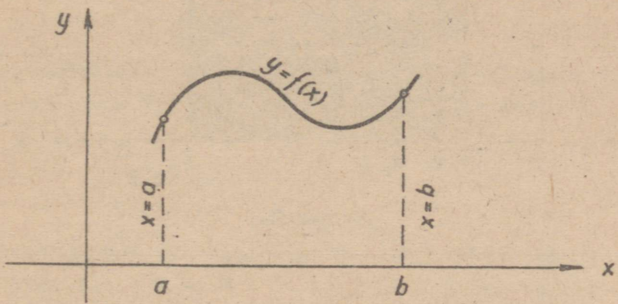
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right] =$$

$$= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Praegu tõestatud omadust nimetatakse määratud integraali aditiivsuse omaduseks.

4. MÄÄRATUD INTEGRAALI GEOMEETRILINE TÄHENDUS

Vaatleme kujundit, mis on piiratud pideva joonega $y = f(x)$ (kus $f(x) \geq 0$), sirgetega $x = a$, $x = b$ ning x-teljega (joon. 1.). Sellist kujundit nimetatakse j o o n-



Joonis 1.

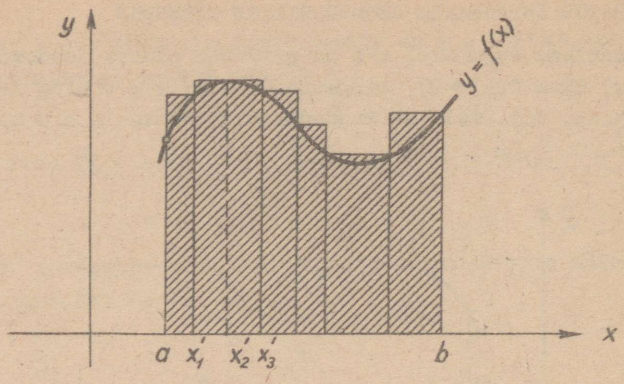
t r a p e t s i k s. Jaotame lõigu [a, b] n osalõiguks. Omandagu funktsioon $y = f(x)$ suurimad väärtused nendel osalõikudel vastavalt punktides x_1', x_2', ..., x_n'. Moodustame funktsiooni $y = f(x)$ integraalsumma

$$\sigma_n' = \sum_{i=1}^{n} f(x_i') \Delta x_i .$$

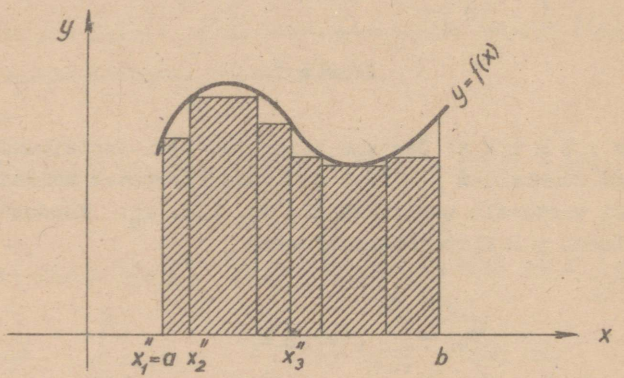
See summa esitab kujundi pindala, mis on piiratud sirgetega $x = a$, $x = b$, x-teljega ning murdjoonega (joon. 2).

Olgu punktid x_1'', x_2'', ..., x_n'' need punktid, milles funktsioon $y = f(x)$ omandab vaadeldavatel osalõikudel vähimad väärtused. Moodustame nüüd funktsiooni $y = f(x)$ integraalsumma järgmiselt:

$$\sigma_n'' = \sum_{i=1}^{n} f(x_i'') \Delta x_i .$$



Joonis 2.



Joonis 3.

See summa esitab joonisel 3 viirutatud kujundi pindala.

Funktsiooni $y = f(x)$ pidevuse tõttu on ta integreeruv lõigul $[a, b]$, s. o. eksisteerib lõplik piirväärtus integraalsummast, kui $\Delta x \to 0$ (sõltumata sellest, kuidas valida punktid osalõikudel). Seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sigma'_n = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma''_n = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Joontrapetsi pindalaks S nimetatakse suuruste σ_n' ja σ_n'' ühist piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$.

Järelikult joonisel 1 kujutatud joontrapetsi pindalaks ongi

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Seega määratud integraali geomeetriline tähendus seisneb järgnevas: kui $f(x) \geqslant 0$, siis määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

esitab joontrapetsi pindala, mis on piiratud joonega $y = f(x)$, sirgetega $x = a$, $x = b$ ning x-teljega. Kui aga $f(x) \leqslant 0$ lõigul $[a, b]$, siis on analoogiliselt eelnevaga kerge veenduda, et määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

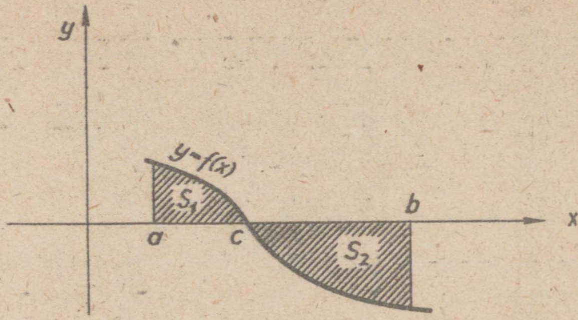
esitab joonega $y = f(x)$, sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning x-teljega piiratud joontrapetsi pindala S negatiivse märgiga, s. o.

$$\int_a^b f(x)\, dx = -S.$$

Peatume veel juhul, kui $f(x)$ muudab märki lõigul $[a, b]$.

Olgu näiteks $f(x) > 0$, kui $a \leqslant x < c$, ning $f(x) < 0$, kui $c < x \leqslant b$. Nagu näeme joonisel 4, tekib nüüd kaks joontrapetsit - üks neist asub ülalpool, teine aga allpool x-telge. Kui nende joontrapetsite pindalad on vastavalt S_1 ja S_2, siis

$$\int_a^c f(x)\, dx = S_1 \quad \text{ning} \quad \int_c^b f(x)\, dx = -S_2.$$



Joonis 4.

Tuginedes määratud integraali aditiivsuse omadusele saame, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = S_1 - S_2.$$

Seega vaadeldaval juhul esitab määratud integraal kahe joontrapetsi pindalade vahe.

5. INTEGRAALARVUTUSE KESKVÄÄRTUSTEOREEM

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi nime kannab järgmine t e o r e e m.

Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$, siis leidub sellel lõigul punkt ξ nii, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

T õ e s t u s. Olgu funktsiooni $y = f(x)$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[a, b]$ vastavalt M ja m. Moodustame selle funktsiooni integraalsumma

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Et $m \leq f(\xi_i) \leq M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siis

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta x_i,$$

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \sigma_n \leq M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i,$$

$$m(b-a) \leq \sigma_n \leq M(b-a).$$

Minnes saadud võrratuses piirile, kui $\Delta x \to 0$, saame

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Siit nähtub, et leidub selline arv μ $(m \leq \mu \leq M)$, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a).$$

Et pidev funktsioon omandab kõik arvude m ja M vahepealsed väärtused, siis leidub selline argumendi väärtus ξ, mille puhul

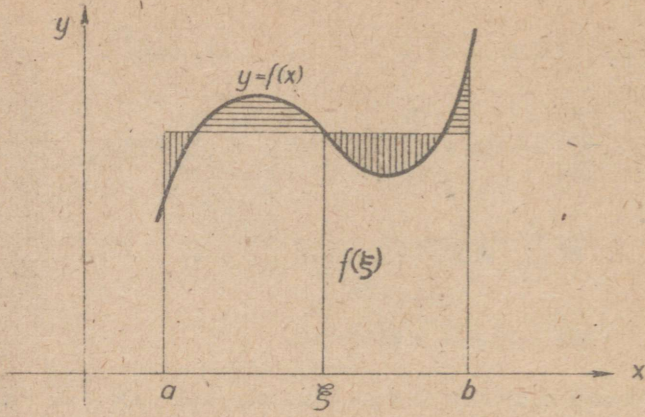
$$f(\xi) = \mu.$$

Seda arvestades saamegi eelnevale võrdusele anda kuju

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Praegu tõestatud keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus on järgmine. Teoreem väidab, et funktsioonil $y = f(x)$ leidub selline ordinaatlõik $f(\xi)$ (joon. 5), et ristkülik mõõdetega $b - a$ ja $f(\xi)$ on pindvõrdne joontrapetsiga, mille pindala esitab määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



Joonis 5.

6. MÄÄRATUD INTEGRAAL MUUTUVA ÜLEMISE RAJAGA

Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev (ja seega ka integreeruv) lõigul $[a, b]$. Vaatleme määratud integraali[1]

$$\int_a^x f(t)\,dt,$$

kus x on mingi punkt lõigult $[a, b]$.

Et x-i muutumisel muutub ka selle integraali väärtus, siis osutub ta argumendi x funktsiooniks $\Phi(x)$, s. o.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Leiame saadud funktsiooni tuletise $\Phi'(x)$. Kui $y = f(x)$ algfunktsiooniks on $y = F(x)$, siis Newton-Leibnizi valemi põhjal

---

[1] Integreerimismuutujaks võtame t (tuginedes määratud integraali omadusele 1°), et teda mitte segi ajada integraali ülemise rajaga.

$$\Phi(x) = F(x) - F(a),$$

$$\Phi'(x) = [F(x) - F(a)]' = F'(x) = f(x).$$

Selle tulemuse sõnastame järgmise t e o r e e m i n a:

Muutuva ülemise rajaga määratud integraali tuletis ülemise raja järgi võrdub integreeritava funktsiooniga, mille argumendiks on ülemine raja.

7. MÄÄRATUD INTEGRAALI ARVUTUSVÕTTEID

a) Asendusvõte

Olgu vaja arvutada määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

kus $y = f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$. Lähme üle uuele integreerimismuutujale t seose

$$x = \varphi(t)$$

põhjal. Eeldame,

1) kui $t = \alpha$, siis $\varphi(\alpha) = a$; kui $t = \beta$, siis $\varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ ja $\varphi'(t)$ on pidevad lõigul $[\alpha, \beta]$.

Neil eeldustel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

T õ e s t u s. Olgu funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsioon $y = F(x)$, s. o. $F'(x) = f(x)$. Siis $y = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ algfunktsioon on $y = F(\varphi(t))$, sest liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal

$$[F(\varphi(t))]' = F'(x) \cdot \varphi'(t) = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Järelikult

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lisame mõned näited määratud integraalide arvutamiseks asendusvõtte abil.

N ä i d e. 1. Arvutada $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Teostame asenduse $x = \sin t$. Arvestades, et $x = 0$ puhul $t = 0$ ning $x = 1$ puhul $t = \frac{\pi}{2}$, saame

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Näide 2. Arvutada $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\,dx.$

Teostame asenduse $x = t^2$. Et $x = 4$ puhul $t = 2$ ning $x = 9$ puhul $t = 3$, siis saame

$$I = \int_2^3 \frac{t}{t-1}\cdot 2t\,dt = \int_2^3 \left(2t + 2 + \frac{2}{t-1}\right) dt = t^2 + 2t +$$

$$+ 2\ln|t - 1|\Big|_2^3 = 9 + 6 + 2\ln 2 - 4 - 4 - 2\ln 1 = 7 + 2\ln 2.$$

b) Ositi integreerimine

Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid. Siis (vt. ptk. I, 4)

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Integreerides selle võrduse mõlemal pool seisvaid funktsioone rajades a-st b-ni, saame

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b vu'dx,$$

millest

$$\int_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Saadud valemit nimetatakse ositi integreerimise valemiks.

N ä i d e.

$$\text{Arvutada } I = \int_0^{\pi} x \sin x\,dx.$$

Valime $u = x$, $dv = \sin x\,dx$.	Siis $du = dx$, $v = -\cos x$.

$$\text{Seega } I = -x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

8. NUMBRILINE INTEGREERIMINE

Eelnevas märkisime (vt. ptk. I, 5), et paljudel juhtudel määramata integraal elementaarfunktsioonist ei avaldu elementaarfunktsioonide kaudu. Kui me aga ei oska leida määramata integraali, siis pole võimalik arvutada ka vastavat määratud integraali Newton-Leibnizi valemi põhjal. Sel juhul tuleb kasutada määratud integraali arvutamiseks ligikaudseid arvutusmeetodeid (nn. numbrilist integreerimist).

Järgnevas peatume kolmel numbrilise integreerimise valemil.

a) <u>Ristkülikvalem</u>. Me teame, et

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

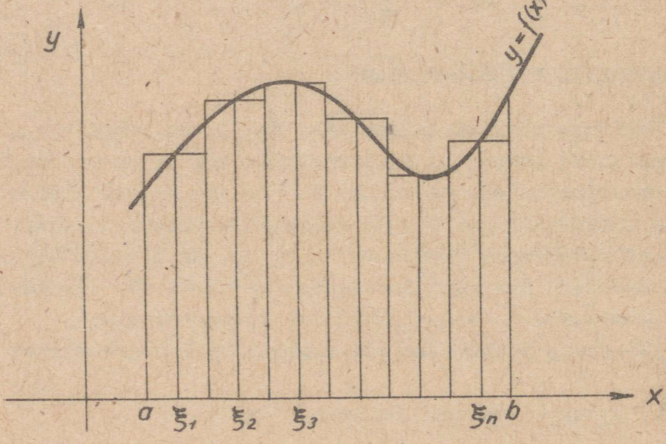
esitab geomeetriliselt joontrapetsi pindala (joon. 6). Seega taandub määratud integraali ligikaudne arvutamine vastava joontrapetsi pindala ligikaudsele arvutamisele. Selleks jaotame lõigu $[a, b]$ n võrdseks osalõiguks. Saadud osalõikude keskpunktid olgu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Nendele osalõikudele kui alustele ehitame ristkülikud vastavalt kõrgustega $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Et iga ristküliku aluse pikkus on $\frac{b-a}{n}$, siis moodustatud ristkülikute pindalad on

$$\frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_1), \quad \frac{b-a}{n} f(\xi_2), \ldots, \frac{b-a}{n} f(\xi_n).$$

Nende ristkülikute pindalade summa on ligikaudu võrdne joontrapetsi pindalaga, mistõttu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Seda ligikaudset valemit nimetataksegi ristkülikvalemiks.



Joonis 6.

N ä i d e. Arvutada ristkülikvalemi põhjal

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

ligikaudne väärtus, võttes n = 10.

Koostame tabeli

ξ_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
e^{ξ_i}	2,858	3,158	3,490	3,857	4,263	4,712	5,207	5,755	6,360	7,029
$f(\xi_i)=\frac{e^{\xi_i}}{\xi_i}$	2,722	2,746	2,792	2,856	2,940	3,040	3,156	3,289	3,438	3,605

Siit leiame, et $\sum\limits_{i=1}^{10} f(\xi_i) = 30{,}584$. Et $\frac{b-a}{n} = 0{,}1$, siis

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx = 3{,}058.$$

b) Trapetsvalem. Jaotame lõigu [a, b] n võrdseks osalõiguks jaotuspunktidega $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ühendades ordinaatlõikude otspunktid sirglõikudega $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ (joon. 7), võime joontrapetsi ligikaudseks pindalaks võtta tekkinud trapetsite pindalade summa. Et nende trapetsite pindalad on

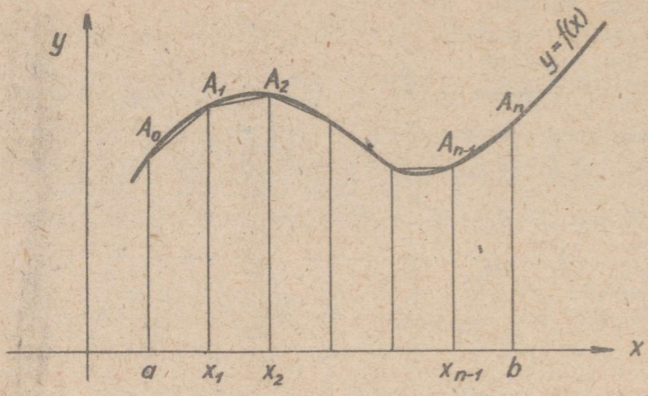
$$\frac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n},\quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ \frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\cdot\frac{b-a}{n},$$

siis saame, et

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right].$$

Saadud valemit nimetatakse trapetsvalemiks.

Arvutame näitena $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ ligikaudse väärtuse trapetsvalemi põhjal, võttes n = 10.



Joonis 7.

Koostame tabeli (siin $x_o = a$, $x_n = b$)

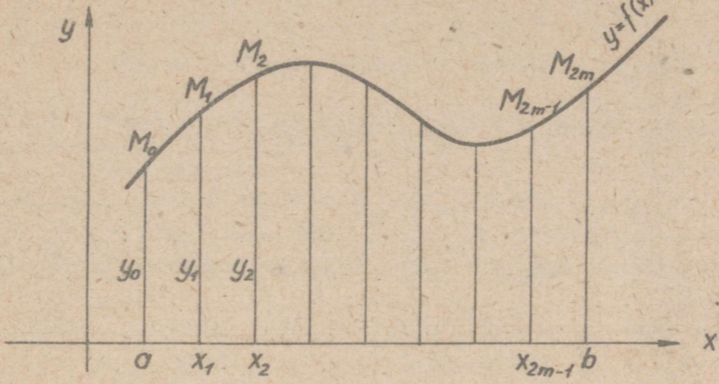
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
e^{x_i}	2,718	3,004	3,320	3,663	4,055	4,482	4,953	5,474	6,050
$f(x_i)=\frac{e^{x_i}}{x_i}$	2,718	2,731	2,767	2,822	2,896	2,988	3,096	3,220	3,361

x_i	1,9	2
e^{x_i}	6,686	7,389
$f(x_i)=\frac{e^{x_i}}{x_i}$	3,519	3,695

Trapetsvalemi põhjal leiame, et

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx = 0,1 \cdot 30,607 = 3,061.$$

c) Simpsoni valem. Jaotame lõigu [a, b] 2m võrdseks osalõiguks (osalõikude arv on paarisarv!) jaotuspunktidega $x_1, x_2, .., x_{2m-1}$ (joon. 8).



Joonis 8.

Tähistame $a = x_o$, $b = x_{2m}$ ning $f(x_o) = y_o$, $f(x_1) = y_1$, ..., $f(x_{2m}) = y_{2m}$. Et iga osalõigu pikkus on $\frac{b-a}{2m} = h$, siis $x_1 = x_o + h$, $x_2 = x_o + 2h$, ..., $x_{2m} = x_o + 2mh$. Asendame lõigu $[x_o, x_2]$ ulatuses funktsiooni $y = f(x)$ graafiku parabooliga $y = A_1x^2 + B_1x + C_1$, mis läbib punkte M_o, M_1, M_2. Kordajad A_1, B_1 ja C_1 parabooli võrrandis saaksime määrata tingimustest

$$A_1x_o^2 + B_1x_o + C_1 = y_o,$$

$$A_1(x_o + h)^2 + B_1(x_o + h) + C_1 = y_1,$$

$$A_1(x_o + 2h)^2 + B_1(x_o + 2h) + C_1 = y_2,$$

ent osutub, et nende kordajate määramine pole vajalik. Arvutame nüüd joontrapetsi pindala S_1, mis on piiratud x-teljega, sirgetega $x = x_o$, $x = x_2$ ning parabooliga $y = A_1x^2 + B_1x + C_1$:

$$S_1 = \int_{x_o}^{x_o+2h} (A_1x^2 + B_1x + C_1)dx = \frac{1}{3} A_1x^3 + \frac{1}{2} B_1x^2 + C_1x \Big|_{x_o}^{x_o+2h}.$$

Nagu edasine arvutuskäik näitab, saame tulemuseks

$$S_1 = \frac{h}{3} (y_o + 4y_1 + y_2).$$

Analoogiliselt saame näidata, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku asendamisel lõigu $[x_2, x_4]$ ulatuses punkte M_2, M_3, M_4 läbiva parabooliga $y = A_2x^2 + B_2x + C_2$ tekkiva joontrapetsi pindala on

$$S_2 = \frac{h}{3} \left[y_2 + 4y_3 + y_4\right].$$

Üldjuhul saame, et

$$S_i = \frac{h}{3} \left[y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\right] (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Et

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_m,$$

siis

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \left[y_o + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right].$$

Seda valemit nimetataksegi Simpsoni valemiks.

Arvutame $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ ligikaudse väärtuse Simpsoni valemi põhjal, võttes $2m = 10$.

x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
e^{x_i}	2,71828	3,00417	3,32012	3,66930	4,05520	4,48169
$y_i=\frac{e^{x_i}}{x_i}$	2,71828	2,73106	2,76677	2,82254	2,89657	2,98779
	2,71828	10,92424	5,53354	11,29016	5,79314	11,95116

x_i	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
e^{x_i}	4,95303	5,47395	6,04965	6,68589	7,38906	
$y_i=\frac{e^{x_i}}{x_i}$	3,09564	3,21997	3,36092	3,51889	3,69453	
	6,19128	12,87988	6,72184	14,07556	3,69453	

Tabeli viimases reas on antud arvud y_0, $4y_1$, $2y_2$, $4y_3$ jne., millede summa esineb Simpsoni valemis. Simpsoni valemi põhjal leiame, et

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot 0,1\cdot 91,77361 = 3,05912.$$

Toome järgnevalt valemid vea ülemmäära R_n leidmiseks ristkülik-, trapets- ja Simpsoni valemi korral:

ristkülikvalemi puhul

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|,$$

trapetsvalemi puhul

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f''(x) \right|,$$

Simpsoni valemi puhul

$$R_{2m} = \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2m)^4} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Leiame vea ülemmäära integraali $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ ülalarvutatud ligikaudsete väärtuste puhul. Et

$$f(x) = \frac{e^x}{x},$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)\,e^x}{x^5},$$

siis

$$\max_{1 \leqslant x \leqslant 2} f''(x) = f''(1) = e,$$

$$\max_{1 \leqslant x \leqslant 2} f^{(4)}(x) = f^{(4)}(1) = 9e.$$

Seega

ristkülikvalemi puhul $R_{10} = \frac{e}{24 \cdot 100} < 0{,}002$,

trapetsvalemi puhul $R_{10} = \frac{e}{12 \cdot 100} < 0{,}003$, Simpsoni valemi puhul $R_{10} = \frac{9e}{180 \cdot 10^4} < 0{,}00002$.

Järelikult Simpsoni valemiga saadud vastuses 3,05912 on neli kohta peale koma õiged.

Olgu märgitud, et ülalvaadeldud numbrilise integreerimise valemitest kasutatakse praktikas kõige enam Simpsoni valemit, sest ta annab sama arvutustööde mahu juures tavaliselt kõige täpsema tulemuse.

9. PÄRATUD INTEGRAALID

Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev piirkonnas $[a, +\infty)$. Seega eksisteerib iga $b \geq a$ puhul

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ja me võime uurida selle integraali piirväärtust, kui $b \to +\infty$.

D e f i n i t s i o o n. Piirväärtust

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

nimetatakse lõpmatu rajaga päratuks integraaliks funktsioonist $y = f(x)$ piirkonnas $[a, +\infty)$.

Selle päratu integraali tähiseks on

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Kui ülaltoodud definitsioonis mainitud piirväärtus on lõplik, siis nimetame vastavat päratut integraali koonduvaks; kui see piirväärtus on aga lõpmatu või ei eksisteeri, siis nimetame päratut integraali hajuvaks.

Analoogiliselt eelnevaga defineeritakse lõpmatute rajadega päratud integraalid

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

vastavalt piirväärtustena

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{ning} \qquad \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

N ä i d e 1. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} =$

$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan b - \arctan 0\right] = \lim_{b\to+\infty} \arctan b =$

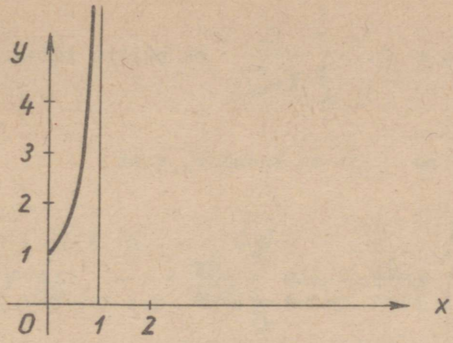
$= \frac{\pi}{2}$. Seega vaadeldav päratu integraal koondub.

N ä i d e 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \cos x\,dx = \lim_{b\to-\infty} \sin x\Big|_{b}^{0} =$

$= -\lim\limits_{b\to-\infty} \sin b$. Et aga $\lim\limits_{b\to-\infty} \sin b$ ei eksisteeri, siis vaadeldav päratu integraal hajub.

Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev, kuid tõkestamata piirkonnas $[a, b)$, kus $a < b$. Selline on näiteks olukord funktsiooni $y = \frac{1}{1-x}$ puhul piirkonnas $[0, 1)$, sest kui $x \to 1-$, siis funktsiooni väärtused tõkestamatult kasvavad (joon. 9). Pidevuse tõttu on funktsioon $y = f(x)$ integreeruv igal lõigul $[a, b-\varepsilon]$, kus ε on suvaline kui tahes väike positiivne arv, s. o. eksisteerib määratud integraal

$$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$



Joonis 9.

D e f i n i t s i o o n. Piirväärtust

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

nimetatakse päratuks integraaliks tõkestamata funktsioonist $y = f(x)$ lõigul $[a, b]$.

Selle päratu integraali tähiseks on

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Siinjuures öeldakse samuti, et see päratu integraal koondub või hajub, vastavalt sellele, kas vaadeldav piirväärtus on lõplik või mitte.

Juhul, kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev ming tõkestamata piirkonnas $(a, b]$ $(a < b)$, siis defineeritakse päratu integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

piirväärtusena $\lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx \qquad (\eta > 0).$

N ä i d e 3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ on päratu integraal, sest

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \infty$. Ta on koonduv, sest

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sqrt{\varepsilon} - 1\right] = 2.$$

N ä i d e 4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ on päratu integraal, sest

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$. Ta aga hajub, sest

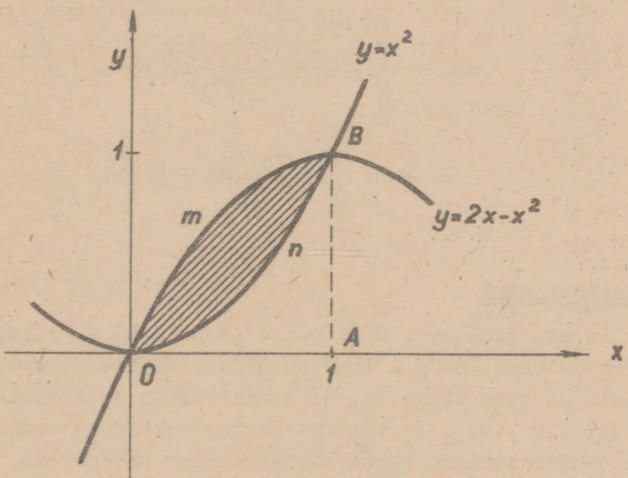
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_\eta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0} \ln x\,\Big|_\eta^1 = -\lim_{\eta\to 0} \ln\eta = \infty.$$

III peatükk

MÄÄRATUD INTEGRAALI GEOMEETRILISI RAKENDUSI

1. TASAPINNALISE KUJUNDI PINDALA

Arvestades määratud integraali geomeetrilist tähendust, saame teda rakendada tasapinnaliste kujundite pindalade arvutamiseks. Leiame näiteks joontega $y = 2x - x^2$ ja $y = x^2$ piiratud kujundi pindala (joon. 10). Et selle kujundi pindala S võrdub joontrapetsite ABmO ja ABnO pindalade vahega,



Joonis 10.

siis

$$S = \int_0^1 (2x-x^2)dx - \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 (2x-2x^2)dx =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Kui joontrapets on piiratud joone kaarega, mis on antud parameetriliste võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$, siis arvutame joontrapetsi pindala S valemi

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y\,\dot{x}\,dt$$

põhjal, kus t_1 ja t_2 on kaare otspunktidele vastavad parameetri väärtused.

Arvutame ellipsi pindala, lähtudes tema parameetrilistest võrranditest $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Esimeses veerandis asuva ellipsi kaare otspunktid $A(0,b)$ ja $B(a,0)$ vastavad parameetri väärtustele $t = \frac{\pi}{2}$ ja $t = 0$.
Seega on ellipsi pindala

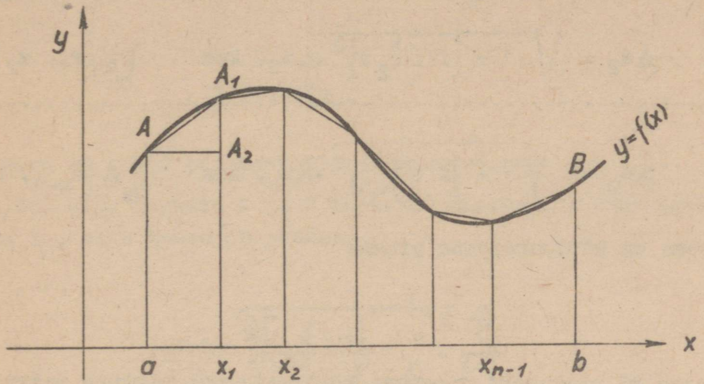
$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt =$$

$$= -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

2. KAARE PIKKUS

Leiame joone $y = f(x)$ kaare AB pikkuse s (joon. 11). Seejuures eeldame, et $y = f(x)$ on diferentseeruv lõigul $[a, b]$. Selleks jaotame lõigu $[a, b]$ n osalõiguks jaotuspunktidega $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ja tõmbame jaotuspunktidest ordinaatlõigud. Need ordinaatlõigud jaotavad kaare AB n osakaareks. Asendame kõik osakaared vastavate kõõludega, mille pikkused olgu $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Tekkinud kõõlmurdjoone pikkus on

$$\Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$



Joonis 11.

Kolmnurgast AA_1A_2

$$\Delta s_1 = \sqrt{(AA_2)^2 + (A_1A_2)^2} = \sqrt{(x_1-a)^2 + [f(x_1)-f(a)]^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1-a}\right]^2} \cdot (x_1-a) =$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\right]^2} \cdot \Delta x_1$$

Et Lagrange'i teoreemi põhjal

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(\xi_1), \text{ kus } \quad \xi_1 \in [a, x_1],$$

siis

$$\Delta s_1 = \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \cdot \Delta x_1$$

Analoogiliselt leiame, et

$$\Delta s_2 = \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2} \cdot \Delta x_2, \text{ kus } \quad \xi_2 \in [x_1, x_2],$$

....

$$\Delta s_n = \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2} \cdot \Delta x_n, \text{ kus } \quad \xi_n \in [x_{n-1}, b].$$

Seega on kõõlmurdjoone pikkus

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i .$$

Kaare AB pikkuseks nimetame kõõlmurdjoone pikkuse piirväärtust, kui murdjoone lülide arv $n \to \infty$ ja $\Delta x \to 0$.

Järelikult

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

ning me saame kaare pikkuse arvutamiseks järgmise valemi:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx .$$

N ä i d e 1. Leida poolkuupparabooli $y = x^{\frac{3}{2}}$ kaare pikkus punktist $A(0,0)$ punktini $B(1,1)$.

$$\text{Et } y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} x},$$

siis

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \, dx.$$

Kasutades asendust $1 + \frac{9}{4} x = t$, $\frac{9}{4} dx = dt$, saame

$$s = \frac{4}{9}\int_{1}^{\frac{13}{4}} \sqrt{t}\, dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{\frac{13}{4}} = \frac{8}{27}\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8).$$

Kui joon on antud parameetriliste võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$ ning punktid A ja B vastavad parameetri väärtustele t_1 ja t_2, siis kaare AB pikkus

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

N ä i d e 2. Leida tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ kaare pikkus punktist $A(0,0)$ punktini $B(2\pi, 2)$.

Et punktid A ja B vastavad parameetri väärtustele $t = 0$ ja $t = \pi$ ning $\dot{x} = 1 - \cos t$, $\dot{y} = \sin t$, siis

$$s = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{\pi} = 4.$$

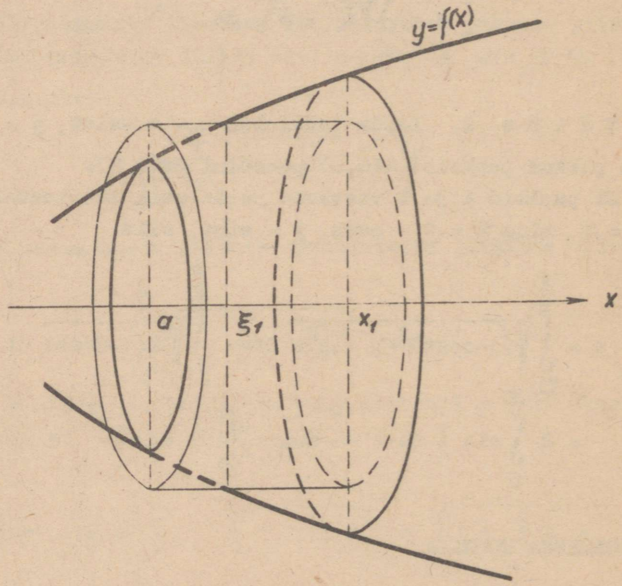
3. PÖÖRDKEHA RUUMALA

Vaatleme joontrapetsit, mis on piiratud pideva joonega $y = f(x)$, sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning x-teljega. Arvutame pöördkeha ruumala V, mis tekib selle joontrapetsi pöörlemisel ümber x-telje. Selleks jaotame lõigu $[a, b]$ n osalõiguks jaotuspunktidega $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ning võtame läbi jaotuspunktide x-teljega ristuvad tasandid. Need tasandid jaotavad vaadeldava pöördkeha n osaks (nn. osakihtideks). Igal osalõigul valime vabalt ühe punkti — olgu nendeks

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n.$$

Arvutame esimese osakihi (joon. 12) ruumala asemel silindri ruumala ΔV_1, mille kõrguseks on esimese osalõigu pikkus Δx_1 ning põhja raadiuseks on $f(\xi_1)$. Saame

$$\Delta V_1 = \pi f^2(\xi_1) \cdot \Delta x_1.$$



Joonis 12.

Analoogiliselt toimime kõigi teiste osakihtide puhul, nimelt asendame nende ruumalad silindrite ruumaladega

$$\Delta V_2 = \pi f^2(\xi_2)\cdot\Delta x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta V_n = \pi f^2(\xi_n)\cdot\Delta x_n.$$

Saadud silindrite ruumalade summa on

$$\pi\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Vaadeldava pöördkeha ruumalaks nimetame silindrite ruumalade summa piirväärtust, kui $n\to\infty$ ja $\Delta x\to 0$.

Järelikult

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \pi\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

ning me saame pöördkeha ruumala arvutamiseks valemi:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

N ä i d e. Leida pöördkeha ruumala, mis tekib joontega $y=\sqrt{x}$, $x = 2$, $y = 0$ piiratud joontrapetsi pöörlemisel ümber x-telje.

Otsitav ruumala on

$$V = \pi\int_0^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^2 = 2\pi.$$

4. PÖÖRDKEHA PINDALA

Asume arvutama pöördkeha pindala S, mille ruumala me leidsime eelmises punktis. Selleks jaotame pöördkeha eelnevas kirjeldatud viisil osakihtideks. Asendame iga osakihi külgpindala samade põhjadega tüvikoonuse külgpindalaga. Esimese osakihi külgpindala asendame seega tüvikoonuse külgpindalaga

$$\Delta S_1 = \pi \left[f(a) + f(x_1)\right] \Delta s_1,$$

kus Δs_1 on tüvikoonuse moodustaja. Eespool me leidsime, et

$$\Delta s_1 = \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \cdot \Delta x_1,$$

mistõttu

$$\Delta S_1 = \pi \left[f(a) + f(x_1)\right] \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \cdot \Delta x_1.$$

Analoogiliselt toimime kõigi teiste osakihtide puhul, nimelt asendame nende külgpindalad tüvikoonuste külgpindaladega

$$\Delta S_2 = \pi \left[f(x_1) + f(x_2)\right] \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2} \cdot \Delta x_2,$$

....

$$\Delta S_n = \pi \left[f(x_{n-1} + f(b)\right] \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2} \cdot \Delta x_n.$$

Vaadeldava pöördkeha pindalaks nimetame tüvikoonuste külgpindalade summa

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \text{ piirväärtust, kui } n \to \infty \text{ ja } \Delta x \to 0.$$

Saab aga näidata, et

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

(s. o. summa $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ piirväärtuse leidmisel tulemus ei muutu, kui igas liidetavas esinevad funktsiooni $y = f(x)$ väärtused osalõigu otspunktides asendada funktsiooni väärtusega vastava osalõigu punktis ξ_i). Seda arvestades saame pöördkeha pindala arvutamiseks valemi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

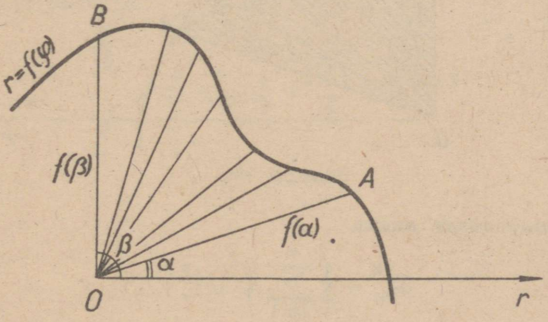
N ä i d e. Leida eelmises punktis näitena toodud pöördkeha pindala. Otsitav pindala on

$$S = 2\pi\int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^2 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{13\pi}{3}.$$

5. JOONSEKTORI PINDALA

Vaatleme pidevat joont, mille võrrand polaarkoordinaatides on $r = f(\varphi)$. Kujundit, mis on piiratud antud joone kaarega $\overset{\frown}{AB}$ ja polaarraadiustega OA ning OB, nimetame j o o n s e k t o r i k s (joon. 13).



Joonis 13.

Olgu punktide A ja B polaarkoordinaadid vastavalt $A(f(\alpha), \alpha$ ja $B(f(\beta), \beta)$. Jaotame joonsektori $\overset{\frown}{AB}$ n osasektoriks polaarraadiustega, mis moodustavad polaarteljega nurgad $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, kusjuures

$$\alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{n-1} < \beta.$$

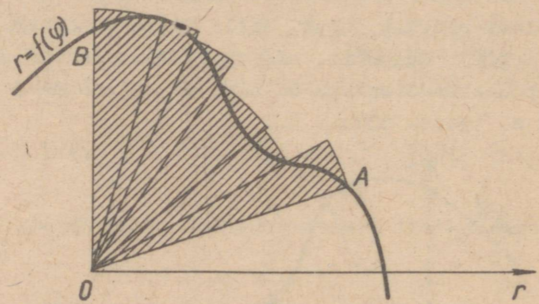
Polaarraadiuste vahelised nurgad on

$$\varphi_1 - \alpha = \Delta\varphi_1,\ \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_2, \ldots,\ \beta - \varphi_{n-1} = \Delta\varphi_n.$$

Omandagu funktsioon $r = f(\varphi)$ suurimad väärtused osalõikudel $[\alpha, \varphi_1]$, $[\varphi_1, \varphi_2]$, ..., $[\varphi_{n-1}, \beta]$ vastavalt punktides φ_1', φ_2', ..., φ_n'. Asendame nüüd kõik osasektorid ringsektoritega, mille raadiused on vastavalt $f(\varphi_1')$, $f(\varphi_2')$, ..., $f(\varphi_n')$ ning pindalad on $\frac{1}{2}f^2(\varphi_1')\Delta\varphi_1$, $\frac{1}{2}f^2(\varphi_2')\Delta\varphi_2$, ..., $\frac{1}{2}f^2(\varphi_n')\Delta\varphi_n$. Seega summa

$$\sigma_n' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i')\Delta\varphi_i$$

esitab joonisel 14 kujutatud viirutatud kujundi pindala. Olgu punktid φ_1'', φ_2'', ..., φ_n'' need punktid, milles funktsioon $r = f(\varphi)$ omandab vaadeldavatel osalõikudel vähimad väär-

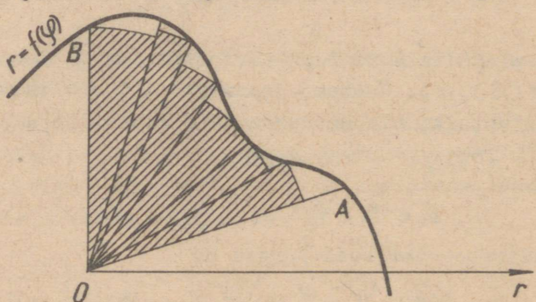


Joonis 14.

tused. Moodustame summa

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i'')\Delta\varphi_i ;$$

mis esitab joonisel 15 kujutatud viirutatud kujundi pindala.



Joonis 15.

Funktsiooni $r = f(\varphi)$ pidevuse tõttu on ka $g(\varphi) = f^2(\varphi)$ pidev ning integreeruv lõigul $[\alpha, \beta]$.
Seega

$$\lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sigma_n' = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sigma_n'' = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi .$$

Joonsektori pindalaks nimetatakse suuruste σ_n' ja σ_n'' ühist piirväärtust, kui $\max \Delta\varphi_i \to 0$.

Järelikult joonsektori pindala

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi .$$

N ä i d e. Leida joontega $r = 2\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$ piiratud joonsektori pindala.

Otsitav pindala

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\varphi^2 d\varphi = \frac{2}{3} \varphi^3 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{96} \pi^3 .$$

S I S U K O R D

I p e a t ü k k

MÄÄRAMATA INTEGRAAL

1. Määramata integraali mõiste 3
2. Määramata integraali omadusi 4
3. Põhiintegraalide tabel 5
4. Määramata integraali arvutusvõtteid 6
5. Ratsionaalmurdude integreerimine 8
6. Universaalne asendus 12

II p e a t ü k k

MÄÄRATUD INTEGRAAL

1. Määratud integraali mõiste 14
2. Newton-Leibnizi valem 15
3. Määratud integraali omadusi 16
4. Määratud integraali geomeetriline tähendus 19
5. Integraalarvutuse keskväärtusteoreem 22
6. Määratud integraal muutuva ülemise rajaga 24
7. Määratud integraali arvutusvõtteid 25
8. Numbriline integreerimine 27
9. Päratud integraalid 35

III p e a t ü k k

MÄÄRATUD INTEGRAALI GEOMEETRILISI RAKENDUSI

1. Tasapinnalise kujundi pindala 39

2. Kaare pikkus 40
3. Pöördkeha ruumala 43
4. Pöördkeha pindala 45
5. Joonsektori pindala 47

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Рийа, I2
Х. Эспенберг
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
На эстонском языке

II trükk
Toimetaja: H. Õiglane
Korrektor: V. Kingo

Paljundamiseks antud 10. II 1967. Paber 60x84/16 cm.
Trükipoognaid 3,25. Tingtrükipoognaid 2,96. Arvestuspoognaid 2,89. Tiraaž 1200. MB 00754. Tell. nr. 29.
EPA rotaprint, Tartu, Riia 12
Hind 8 kop.

Hind 8 kop.