Sammlung

von

INTEGRALTAFELN

zum Gebrauch

für den

Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbe-Institut.

Im Auftrage des Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten

bearbeitet

von

FERDINAND MINDING,

Doctor der Philosophie und Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat.

Berlin, 1849.

in Commission bei Carl Reimarus.

(Gropius'sche Buch- und Kunsthandlung.)

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Integrale rationaler Functionen von der Form $\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu}$.

Zweite Abtheilung.

Integrale irrationaler algèbraischer Functionen.

Dritte Abtheilung.

Integrale exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Vierte Abtheilung.

Bestimmte Integrale und verschiedene Transscendenten.

Fünfte Abtheilung.

Elliptische Functionen.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 3 Zeile 2 v. u. l. $\int_1^x$ statt $\int_1^\infty$

» 12 » 5 v. o. l. $\frac{15 a^2 X^4}{4}$ statt $\frac{15 a^2 X^3}{4}$

» 14 » 6 v. o. l. $\int \frac{\partial x}{x^2 X^3}$ statt $\int \frac{\partial x}{x^2 X}$

» 20 » 1 v. u. l. Arc. Cotang. $\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{-b}}$ statt Arc. Cotang. $x\sqrt{\frac{-b}{a}}$

» 26 » 3 v. u. l. m_λ statt m^λ

» 30 » 3 v. u. l. $\frac{b}{a^6 x^5}$ statt $\frac{b}{5 a^6 x^5}$

» 51 » 6 v. o. l. $-\frac{1}{50 a X}$ statt $+\frac{1}{50 a X}$

» 59 » 11 v. o. l. P_μ statt P

Seite 67 Zeile 7 v. o. l. für $\nu =$ statt für $\lambda =$

» 79 » 1 v. u. l. $+$ (vor dem Ausdruck)

» 81 » 9 v. o. l. $-6c_0c_1c_3$ statt $-6c_1c_2c_3$, und $-\frac{8c_1^4}{9c_0}$ statt $-\frac{8c_1^3}{9c_0}$

» 87 » 5 v. o. l. $(-1)^\nu$ statt $(-1)\nu$

» 89 » 2 v. o. l. $2x^mX^n\sqrt{X}$ statt $2x^m\sqrt{X^nX}$

» 93 » 6 v. o. l. $\int\frac{X^n\partial x}{x^4\sqrt{X}}$ statt $\int\frac{X^n\partial x}{x^4\partial x}$

» 96 » 5 v. u. l. x^m statt x_m

» 101 » 5 v. o. l. Taf. XI. statt Taf. VIII.

» 104 » 7 v. u. l. Taf. XIII. statt Taf. X.

» 105 » 4 v. o. l. Taf. XI. statt Taf. VIII.

» 108 » 4 v. u. l. α_ν statt $\alpha\nu$

» 109 » 10 v. o. l. $-\frac{1}{x}$ statt $\frac{1}{-x}$

» 111 » 6 v. u. l. $a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{r}}$ statt $a^{\frac{m}{n}+\frac{1}{r}}$

» 115 » 4 v. o. l. $n_{n'}$ statt $n^{n'}$

» 119 » 7 v. o. l. $\nu = m'-1$ statt $\nu = m'1$

» 120 » 2 v. u. l. $\frac{\sin x^{m+1}}{m+3}$ statt $\frac{\sin x^{m+1}}{m+1}$, und $\frac{2}{m+1}$ statt $\frac{2}{m+3}$

» 122 » 9 v. o. l. Formel, je nachdem statt Formel je nachden

» 130 » 2 v. o. l. Arc. Sin $\frac{\sin x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$ statt Arc Sin $\frac{\sin x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

» 136 » 5 v. u. l. $(\nu-1)!$ statt $(\nu-1!)$, und $(\lambda-1)!$ statt $(\lambda-1!)$

» 146 » 3 v. u. l. XIX. statt XVII.

» 154 » 7 v. o. l. $(n-1)q$ statt $(n+1)q$

» 154 » 2 v. u. l. $(2\pi)^{q-1}$ statt $(2\pi)^{q-n}$

» 159 » 6 v. u. l. $\frac{\partial x}{x}$ statt ∂x

» 169 » 3 v. o. l. $\sum_1^x$ statt $\sum^x$

» 177 » 3 v. u. l. $\nu(\cos\vartheta$ statt $\nu\cos\vartheta$

» 183 » 9 v. o. l. $\Delta(c_1, \psi)^2$ statt $\Delta^2(c_1, \psi)$

» 183 » 11 v. o. l. $\Delta(c_1, \psi)^2$ statt $\Delta(c', \psi)^2$.

Einleitung.

Der um das Studium der Mathematik sehr verdiente Meyer Hirsch gab im Jahre 1810 die erste ausführliche Sammlung von Integral-Formeln heraus, welche als ein brauchbarer Anhang zu den Lehrbüchern Anerkennung fand und deren Auflage jetzt seit mehrern Jahren vergriffen ist. Bei Ausarbeitung dieser neuen Tafeln ist der im Unterrichte bewährte, auf stufenweisen Fortschritt vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren gegründete Plan der früheren Tafeln im Ganzen beibehalten worden, jedoch mit wesentlichen Abänderungen, nämlich:

1. Das den Tafeln zu Grunde liegende System von allgemeinen Formeln ist in seinen einzelnen Gliedern mehr entwickelt und in das Ganze verwebt worden, indem theils jeder Tafel die ihr entsprechende allgemeine Formel, nach Umständen in mehrern Gestalten, vorangestellt ist, theils die mehrere Tafeln zugleich umfassenden Formeln an den gehörigen Orten eingeschaltet sind.

2. Die Zurückweisungen von einer Tafel auf die andere sind auf ein geringeres Maass beschränkt worden, um überall, so lange nicht allzu grosse Weitläufigkeit entstand, vollständig ausgerechnete Formeln vorzulegen.

3. Integrale, welche durch sehr nahe liegende Substitutionen in andere einfachere übergehen, sind unter der einfacheren Form aufzusuchen. Dies

gilt namentlich von den Formen $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$, $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n+cx^{2n}}$ in der ersten Abtheilung, welche man nur dann unmittelbar in den Tafeln findet, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; so dass z. B. $\int\frac{x\partial x}{a+bx^4}$ in der Form $\frac{1}{2}\int\frac{\partial y}{a+by^2}$, $\int\frac{\partial x}{x(a+bx^4)}$ in der Form $\frac{1}{4}\int\frac{\partial y}{y(a+by)}$ u. s. w. gefunden wird. Durch diese Unterscheidung werden viele störende Wiederholungen vermieden.

4. Mehrere Tafeln über bestimmte Integrale und andere wichtige, erst in neuester Zeit entstandene oder verbreitete, analytische Entwicklungen sind in der vierten und fünften Abtheilung hinzugefügt worden. Hier konnten auch die Beweise der Formeln nicht, wie in den anderen Abtheilungen — wo sie nämlich durch Differentiation der Integrale sich von selbst ergeben — übergangen werden; doch sind sie möglichst kurz gefasst worden, um die tabellarische Form, so weit es anging, auch hier zu bewahren.

Diese Form hat ihre eigenthümlichen Vorzüge, indem sie ohne viele Worte die Sache selbst sprechen lässt.

Zu den Vorkenntnissen, welche nöthig sind, um den Entwicklungen der Tafeln überall zu folgen, gehört besonders auch die Zerlegung algebraischer gebrochener Ausdrücke in einfache Brüche, mit welcher man sich nach Anleitung eines guten Lehrbuches ganz vertraut machen muss.

Bei Aufstellung der Integrale ist die willkürliche Constante, als sich von selbst verstehend, überall weggelassen worden. Bekanntlich ist bei der Bestimmung derselben einige Vorsicht nöthig, auf welche hier wiederholt aufmerksam zu machen nicht unnütz scheint, da über diesen Gegenstand in manchen Schriften sich noch Missverständnisse kundgeben. Hat man nämlich durch Integration gefunden $\int f(x)\partial x = \varphi(x) + \text{Const.}$, so ist nach der allgemeinen Regel $\int_a^x f(x)\partial x = \varphi(x) - \varphi(a)$; oder, wenn auch für die Grenze x ein bestimmter Werth gesetzt wird: $\int_a^b f(x)\partial x = \varphi(b) - \varphi(a)$. Diese Werthbestimmung ist richtig, wenn auf der ganzen Strecke von $x = a$ bis $x = b$ die

Function $\varphi(x)$ stetig fortgeht; wird aber diese Bedingung nicht erfüllt, so muss die Formel so geändert werden, dass die Stetigkeit des von a anfangenden Integralwerthes, so lange solcher überhaupt ein bestimmter ist, nirgends unterbrochen wird. Es sei $a < b$ und c ein Werth von x zwischen a und b, bei welchem die Function $\varphi(x)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, bei welchem also die Differenz $\varphi(c+v) - \varphi(c-u)$, wenn die positiven Grössen u und v kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden, um eine endliche Grösse von Null verschieden ist; so ist der wahre Ausdruck für das Integral $\int_a^b f(x)\partial x$, in so fern die Unterbrechung der Stetigkeit von $\varphi(x)$ bei c die einzige zwischen a und b ist, die Grenze, welcher sich für unendlich abnehmende positive u und v die Summe $\int_a^{c-u} f(x)\partial x + \int_{c+v}^b f(x)\partial x$ nähert, oder es ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = \varphi(b) - \varphi(a) - [\varphi(c+v) - \varphi(c-u)] \text{ für } u = 0,\quad v = 0.$$

Da z. B. $\log x$ bei $x = 0$ unstetig wird, so ist, wenn a und b positiv sind, $\int_{-a}^b \frac{\partial x}{x} = \int_{-a}^{-u}\frac{\partial x}{x} + \int_v^b \frac{\partial x}{x} = \log\frac{bu}{av}$ für $u = 0$, $v = 0$; also ist dieser Integral-Werth gänzlich unbestimmt. Vergl. das Handbuch der Diff.- und Int.-Rechnung vom Herausgeber dieser Tafeln, S. 161 bis 164.

An verschiedenen Stellen sind die den trigonometrischen nachgebildeten hyperbolischen Functionen gebraucht worden, nämlich der hyperbolische Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens von x, bezeichnet durch $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cos}\,x$, $\mathfrak{Tang}\,x$, $\mathfrak{Cotang}\,x$. Man hat bekanntlich: $\mathfrak{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x}$, $\mathfrak{Cotang}\,x = \frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}$. Ferner $\mathfrak{Arcus}$ ($\mathfrak{Sinus} = x$) oder $\mathfrak{Arc.}$ $\mathfrak{Sin}\,x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Cos}\,x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

$$= \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}},\quad \mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Tang}\,x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2},$$

$$\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Cotang}\,x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \int_x^\infty \frac{\partial x}{x^2-1}.$$

Die sonstigen Bezeichnungen sind die allgemein üblichen; also namentlich: das Product $1.2.3.4\ldots\ldots n = n!$, der Binomialcoefficient
$$\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots m-n+1}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ n} = m_n;\ \text{mithin}\ (-m)_n = (-1)^n(m+n-1)_n.$$
An einigen Stellen ist für ein Product aus n Factoren die Bezeichnung durch Π gebraucht, wonach $\prod_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu) = f(1).f(2).f(3)\ldots.f(n)$.

Die Summe $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots.+f(n)$ ist durch $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(\nu)$ bezeichnet; in dem Abschnitte über Summation der Progressionen (vierte Abtheilung) ist jedoch diese Bezeichnung so zu verstehen, dass das letzte Glied $f(n)$ von der Summe ausgeschlossen bleibt.

$\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x. e und π haben die gewöhnlichen Bedeutungen, also

$e = 2,718281828459\ldots.$ $\qquad \pi = 3,14159265358979\ldots$

Für $\sqrt{-1}$ ist die Bezeichnung durch i gebraucht.

Erste Abtheilung.

Integrale rationaler Functionen.

Tafel I.

$$X = a + bx.$$

Allgemeine Formel zu Tafel I bis VI.

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^{m+1}} \int \frac{(X-a)^m \partial X}{X^\mu} = \frac{1}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{m_\nu (-a)^\nu X^{m-\mu-\nu+1}}{m-\mu-\nu+1}.$$

Für $\nu = m - \mu + 1$ verwandelt sich das entsprechende Glied des vorstehenden Integrals in: $m_{\mu-1} \cdot (-a)^{m-\mu+1} \log X$.

$$\int \frac{\partial x}{X^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1) b X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{b} \log X.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = -\frac{1}{bX}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}.$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{(\mu-2)X^{\mu-2}} + \frac{a}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X} = \frac{1}{b^2}\left[X - a \log X\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log X + \frac{a}{X}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{X} + \frac{a}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{a}{3X^3}\right].$$

Tafel II.

$$X = a + bx.$$

$$-\int\frac{x^2\partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{(\mu-3)X^{\mu-3}}+\frac{2a}{(\mu-2)X^{\mu-2}}-\frac{a^2}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{X^2}{2}-2aX+a^2\log X\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{1}{b^3}\left[X-2a\log X-\frac{a^2}{X}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{1}{b^3}\left[\log X+\frac{2a}{X}-\frac{a^2}{2X^2}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{X}+\frac{a}{X^2}-\frac{a^2}{3X^3}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^5} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{2a}{3X^3}-\frac{a^2}{4X^4}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^6} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{3X^3}+\frac{a}{2X^4}-\frac{a^2}{5X^5}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^7} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{4X^4}+\frac{2a}{5X^5}-\frac{a^2}{6X^6}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^8} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{5X^5}+\frac{a}{3X^6}-\frac{a^2}{7X^7}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^9} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{6X^6}+\frac{2a}{7X^7}-\frac{a^2}{8X^8}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{7X^7}+\frac{a}{4X^8}-\frac{a^2}{9X^9}\right].$$

Tafel III.

$$X = a + bx.$$

$$-\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{(\mu-4)X^{\mu-4}}+\frac{3a}{(\mu-3)X^{\mu-3}}-\frac{3a^2}{(\mu-2)X^{\mu-2}}+\frac{a^3}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{1}{b^4}\left[\frac{X^3}{3}-\frac{3aX^2}{2}+3a^2X-a^3\log X\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{1}{b^4}\left[\frac{X^2}{2}-3aX+3a^2\log X+\frac{a^3}{X}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^3} = \frac{1}{b^4}\left[X-3a\log X-\frac{3a^2}{X}+\frac{a^3}{2X^2}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^4} = \frac{1}{b^4}\left[\log X+\frac{3a}{X}-\frac{3a^2}{2X^2}+\frac{a^3}{3X^3}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^5} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{X}+\frac{3a}{2X^2}-\frac{a^2}{X^3}+\frac{a^3}{4X^4}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^6} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{a}{X^3}-\frac{3a^2}{4X^4}+\frac{a^3}{5X^5}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^7} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{3X^3}+\frac{3a}{4X^4}-\frac{3a^2}{5X^5}+\frac{a^3}{6X^6}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^8} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{4X^4}+\frac{3a}{5X^5}-\frac{a^2}{2X^6}+\frac{a^3}{7X^7}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^9} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{5X^5}+\frac{a}{2X^6}-\frac{3a^2}{7X^7}+\frac{a^3}{8X^8}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{6X^6}+\frac{3a}{7X^7}-\frac{3a^2}{8X^8}+\frac{a^3}{9X^9}\right].$$

Tafel IV.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{(\mu-5)X^{\mu-5}} + \frac{4a}{(\mu-4)X^{\mu-4}} - \frac{6a^2}{(\mu-3)X^{\mu-3}} + \frac{4a^3}{(\mu-2)X^{\mu-2}} - \frac{a^4}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{4aX^3}{3} + 3a^2X^2 - 4a^3X + a^4 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^3}{3} - 2aX^2 + 6a^2X - 4a^3 \log X - \frac{a^4}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^2}{2} - 4aX + 6a^2 \log X + \frac{4a^3}{X} - \frac{a^4}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^5}\left[X - 4a \log X - \frac{6a^2}{X} + \frac{2a^3}{X^2} - \frac{a^4}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^5}\left[\log X + \frac{4a}{X} - \frac{3a^2}{X^2} + \frac{4a^3}{3X^3} - \frac{a^4}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{X} + \frac{2a}{X^2} - \frac{2a^2}{X^3} + \frac{a^3}{X^4} - \frac{a^4}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{4a}{3X^3} - \frac{3a^2}{2X^4} + \frac{4a^3}{5X^5} - \frac{a^4}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{a}{X^4} - \frac{6a^2}{5X^5} + \frac{2a^3}{3X^6} - \frac{a^4}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{4a}{5X^5} - \frac{a^2}{X^6} + \frac{4a^3}{7X^7} - \frac{a^4}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{5X^5} + \frac{2a}{3X^6} - \frac{6a^2}{7X^7} + \frac{a^3}{2X^8} - \frac{a^4}{9X^9}\right].$$

Tafel V.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{(\mu-6)X^{\mu-6}} + \frac{5a}{(\mu-5)X^{\mu-5}} - \frac{10a^2}{(\mu-4)X^{\mu-4}} + \frac{10a^3}{(\mu-3)X^{\mu-3}} - \frac{5a^4}{(\mu-2)X^{\mu-2}} + \frac{a^5}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{5aX^4}{4} + \frac{10a^2X^3}{3} - 5a^3X^2 + 5a^4X - a^5 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{5aX^3}{3} + 5a^2X^2 - 10a^3X + 5a^4 \log X + \frac{a^5}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^3}{3} - \frac{5aX^2}{2} + 10a^2X - 10a^3 \log X - \frac{5a^4}{X} + \frac{a^5}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^2}{2} - 5aX + 10a^2 \log X + \frac{10a^3}{X} - \frac{5a^4}{2X^2} + \frac{a^5}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^6}\left[X - 5a \log X - \frac{10a^2}{X} + \frac{5a^3}{X^2} - \frac{5a^4}{3X^3} + \frac{a^5}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^6}\left[\log X + \frac{5a}{X} - \frac{5a^2}{X^2} + \frac{10a^3}{3X^3} - \frac{5a^4}{4X^4} + \frac{a^5}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{X} + \frac{5a}{2X^2} - \frac{10a^2}{3X^3} + \frac{5a^3}{2X^4} - \frac{a^4}{X^5} + \frac{a^5}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{5a}{3X^3} - \frac{5a^2}{2X^4} + \frac{2a^3}{X^5} - \frac{5a^4}{6X^6} + \frac{a^5}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{5a}{4X^4} - \frac{2a^2}{X^5} + \frac{5a^3}{3X^6} - \frac{5a^4}{7X^7} + \frac{a^5}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{a}{X^5} - \frac{5a^2}{3X^6} + \frac{10a^3}{7X^7} - \frac{5a^4}{8X^8} + \frac{a^5}{9X^9}\right].$$

Tafel VI.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^7}\left[-\frac{1}{(\mu-7)X^{\mu-7}} + \frac{6a}{(\mu-6)X^{\mu-6}} - \frac{15a^2}{(\mu-5)X^{\mu-5}} + \frac{20a^3}{(\mu-4)X^{\mu-4}} - \frac{15a^4}{(\mu-3)X^{\mu-3}} + \frac{6a^5}{(\mu-2)X^{\mu-2}} - \frac{a^6}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{1}{b^7}\left[\frac{X^6}{6} - \frac{6aX^5}{5} + \frac{15a^2X^4}{4} - \frac{20a^3X^3}{3} + \frac{15a^4X^2}{2} - 6a^5X + a^6 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^7}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{3aX^4}{2} + 5a^2X^3 - 10a^3X^2 + 15a^4X - 6a^5 \log X - \frac{a^6}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^7}\left[\frac{X^4}{4} - 2aX^3 + \frac{15a^2X^2}{2} - 20a^3X + 15a^4 \log X + \frac{6a^5}{X} - \frac{a^6}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^7}\left[\frac{X^3}{3} - 3aX^2 + 15a^2X - 20a^3 \log X - \frac{15a^4}{X} + \frac{3a^5}{X^2} - \frac{a^6}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^7}\left[\frac{X^2}{2} - 6aX + 15a^2 \log X + \frac{20a^3}{X} - \frac{15a^4}{2X^2} + \frac{2a^5}{X^3} - \frac{a^6}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^7}\left[X - 6a \log X - \frac{15a^2}{X} + \frac{10a^3}{X^2} - \frac{5a^4}{X^3} + \frac{3a^5}{2X^4} - \frac{a^6}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^7}\left[\log X + \frac{6a}{X} - \frac{15a^2}{2X^2} + \frac{20a^3}{3X^3} - \frac{15a^4}{4X^4} + \frac{6a^5}{5X^5} - \frac{a^6}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^7}\left[-\frac{1}{X} + \frac{3a}{X^2} - \frac{5a^2}{X^3} + \frac{5a^3}{X^4} - \frac{3a^4}{X^5} + \frac{a^5}{X^6} - \frac{a^6}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^7}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{2a}{X^3} - \frac{15a^2}{4X^4} + \frac{4a^3}{X^5} - \frac{5a^4}{2X^6} + \frac{6a^5}{7X^7} - \frac{a^6}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^7}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{3a}{2X^4} - \frac{3a^2}{X^5} + \frac{10a^3}{3X^6} - \frac{15a^4}{7X^7} + \frac{3a^5}{4X^8} - \frac{a^6}{9X^9}\right].$$

Tafel VII.

$$X = a + bx.$$

Allgemeine Formel zu Tafel VII bis XIII.

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^\mu} = (-b)^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(m+\nu-1)_\nu}{(\mu-\nu-1)a^{m+\nu}X^{\mu-\nu-1}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m-2} \frac{(-1)^{\nu+1}(\mu+\nu-1)_\nu b^\nu}{(m-\nu-1)a^{\mu+\nu}x^{m-\nu-1}}$$
$$+ (-1)^m (m+\mu-2)_{\mu-1} \frac{b^{m-1}}{a^{m+\mu-1}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{1}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+1}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{a^\mu} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX} = -\frac{1}{a} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^3} = \frac{1}{2aX^2} + \frac{1}{a^2X} - \frac{1}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^4} = \frac{1}{3aX^3} + \frac{1}{2a^2X^2} + \frac{1}{a^3X} - \frac{1}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^5} = \frac{1}{4aX^4} + \frac{1}{3a^2X^3} + \frac{1}{2a^3X^2} + \frac{1}{a^4X} - \frac{1}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^6} = \frac{1}{5aX^5} + \frac{1}{4a^2X^4} + \frac{1}{3a^3X^3} + \frac{1}{2a^4X^2} + \frac{1}{a^5X} - \frac{1}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^7} = \frac{1}{6aX^6} + \frac{1}{5a^2X^5} + \frac{1}{4a^3X^4} + \frac{1}{3a^4X^3} + \frac{1}{2a^5X^2} + \frac{1}{a^6X} - \frac{1}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^8} = \frac{1}{7aX^7} + \frac{1}{6a^2X^6} + \frac{1}{5a^3X^5} + \frac{1}{4a^4X^4} + \frac{1}{3a^5X^3} + \frac{1}{2a^6X^2} + \frac{1}{a^7X} - \frac{1}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel VIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^\mu} = -b \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{\nu+1}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+2}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{a^\mu x} + \frac{\mu b}{a^{\mu+1}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2} = -\frac{b}{a^2X} - \frac{1}{a^2x} + \frac{2b}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^3} = -\frac{b}{2a^2X^2} - \frac{2b}{a^3X} - \frac{1}{a^3x} + \frac{3b}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^4} = -\frac{b}{3a^2X^3} - \frac{b}{a^3X^2} - \frac{3b}{a^4X} - \frac{1}{a^4x} + \frac{4b}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^5} = -\frac{b}{4a^2X^4} - \frac{2b}{3a^3X^3} - \frac{3b}{2a^4X^2} - \frac{4b}{a^5X} - \frac{1}{a^5x} + \frac{5b}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^6} = -\frac{b}{5a^2X^5} - \frac{b}{2a^3X^4} - \frac{b}{a^4X^3} - \frac{2b}{a^5X^2} - \frac{5b}{a^6X} - \frac{1}{a^6x} + \frac{6b}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^7} = -\frac{b}{6a^2X^6} - \frac{2b}{5a^3X^5} - \frac{3b}{4a^4X^4} - \frac{4b}{3a^5X^3} - \frac{5b}{2a^6X^2} - \frac{6b}{a^7X} - \frac{1}{a^7x} + \frac{7b}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^8} = -\frac{b}{7a^2X^7} - \frac{b}{3a^3X^6} - \frac{3b}{5a^4X^5} - \frac{b}{a^5X^4} - \frac{5b}{3a^6X^3} - \frac{3b}{a^7X^2} - \frac{7b}{a^8X} - \frac{1}{a^8x} + \frac{8b}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^9} = -\frac{b}{8a^2X^8} - \frac{2b}{7a^3X^7} - \frac{b}{2a^4X^6} - \frac{4b}{5a^5X^5} - \frac{5b}{4a^6X^4} - \frac{2b}{a^7X^3} - \frac{7b}{2a^8X^2} - \frac{8b}{a^9X}$$
$$- \frac{1}{a^9x} + \frac{9b}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{10}} = -\frac{b}{9a^2X^9} - \frac{b}{4a^3X^8} - \frac{3b}{7a^4X^7} - \frac{2b}{3a^5X^6} - \frac{b}{a^6X^5} - \frac{3b}{2a^7X^4} - \frac{7b}{3a^8X^3} - \frac{4b}{a^9X^2}$$
$$- \frac{9b}{a^{10}X} - \frac{1}{a^{10}x} + \frac{10b}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel IX.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^\mu} = b^2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+2)_2}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+3}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{2a^\mu x^2} + \frac{\mu b}{a^{\mu+1}x} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{a^{\mu+2}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2x} - \frac{b^2}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^2} = \frac{b^2}{a^3X} - \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{2b}{a^3x} - \frac{3b^2}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^3} = \frac{b^2}{2a^3X^2} + \frac{3b^2}{a^4X} - \frac{1}{2a^3x^2} + \frac{3b}{a^4x} - \frac{6b^2}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^4} = \frac{b^2}{3a^3X^3} + \frac{3b^2}{2a^4X^2} + \frac{6b^2}{a^5X} - \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{4b}{a^5x} - \frac{10b^2}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^5} = \frac{b^2}{4a^3X^4} + \frac{b^2}{a^4X^3} + \frac{3b^2}{a^5X^2} + \frac{10b^2}{a^6X} - \frac{1}{2a^5x^2} + \frac{5b}{a^6x} - \frac{15b^2}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^6} = \frac{b^2}{5a^3X^5} + \frac{3b^2}{4a^4X^4} + \frac{2b^2}{a^5X^3} + \frac{5b^2}{a^6X^2} + \frac{15b^2}{a^7X} - \frac{1}{2a^6x^2} + \frac{6b}{a^7x} - \frac{21b^2}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^7} = \frac{b^2}{6a^3X^6} + \frac{3b^2}{5a^4X^5} + \frac{3b^2}{2a^5X^4} + \frac{10b^2}{3a^6X^3} + \frac{15b^2}{2a^7X^2} + \frac{21b^2}{a^8X} - \frac{1}{2a^7x^2} + \frac{7b}{a^8x}$$
$$- \frac{28b^2}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^8} = \frac{b^2}{7a^3X^7} + \frac{b^2}{2a^4X^6} + \frac{6b^2}{5a^5X^5} + \frac{5b^2}{2a^6X^4} + \frac{5b^2}{a^7X^3} + \frac{21b^2}{2a^8X^2} + \frac{28b^2}{a^9X} - \frac{1}{2a^8x^2}$$
$$+ \frac{8b}{a^9x} - \frac{36b^2}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^9} = \frac{b^2}{8a^3X^8} + \frac{3b^2}{7a^4X^7} + \frac{b^2}{a^5X^6} + \frac{2b^2}{a^6X^5} + \frac{15b^2}{4a^7X^4} + \frac{7b^2}{a^8X^3} + \frac{14b^2}{a^9X^2} + \frac{36b^2}{a^{10}X}$$
$$- \frac{1}{2a^9x^2} + \frac{9b}{a^{10}x} - \frac{45b^2}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{10}} = \frac{b^2}{9a^3X^9} + \frac{3b^2}{8a^4X^8} + \frac{6b^2}{7a^5X^7} + \frac{5b^2}{3a^6X^6} + \frac{3b^2}{a^7X^5} + \frac{21b^2}{4a^8X^4} + \frac{28b^2}{3a^9X^3} + \frac{18b^2}{a^{10}X^2}$$
$$+ \frac{45b^2}{a^{11}X} - \frac{1}{2a^{10}x^2} + \frac{10b}{a^{11}x} - \frac{55b^2}{a^{12}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel X.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^\mu} = -b^3 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+3)_3}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+4}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{3a^\mu x^3} + \frac{\mu b}{2a^{\mu+1}x^2} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{a^{\mu+2}x} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{a^{\mu+3}} \log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{b^2}{a^3x} + \frac{b^3}{a^4}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^2} = -\frac{b^3}{a^4X} - \frac{1}{3a^2x^3} + \frac{b}{a^3x^2} - \frac{3b^2}{a^4x} + \frac{4b^3}{a^5}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^3} = -\frac{b^3}{2a^4X^2} - \frac{4b^3}{a^5X} - \frac{1}{3a^3x^3} + \frac{3b}{2a^4x^2} - \frac{6b^2}{a^5x} + \frac{10b^3}{a^6}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^4} = -\frac{b^3}{3a^4X^3} - \frac{2b^3}{a^5X^2} - \frac{10b^3}{a^6X} - \frac{1}{3a^4x^3} + \frac{2b}{a^5x^2} - \frac{10b^2}{a^6x} + \frac{20b^3}{a^7}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^5} = -\frac{b^3}{4a^4X^4} - \frac{4b^3}{3a^5X^3} - \frac{5b^3}{a^6X^2} - \frac{20b^3}{a^7X} - \frac{1}{3a^5x^3} + \frac{5b}{2a^6x^2} - \frac{15b^2}{a^7x} + \frac{35b^3}{a^8}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^6} = -\frac{b^3}{5a^4X^5} - \frac{b^3}{a^5X^4} - \frac{10b^3}{3a^6X^3} - \frac{10b^3}{a^7X^2} - \frac{35b^3}{a^8X} - \frac{1}{3a^6x^3} + \frac{3b}{a^7x^2} - \frac{21b^2}{a^8x} + \frac{56b^3}{a^9}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^7} = -\frac{b^3}{6a^4X^6} - \frac{4b^3}{5a^5X^5} - \frac{5b^3}{2a^6X^4} - \frac{20b^3}{3a^7X^3} - \frac{35b^3}{2a^8X^2} - \frac{56b^3}{a^9X} - \frac{1}{3a^7x^3} + \frac{7b}{2a^8x^2} - \frac{28b^2}{a^9x} + \frac{84b^3}{a^{10}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^8} = -\frac{b^3}{7a^4X^7} - \frac{2b^3}{3a^5X^6} - \frac{2b^3}{a^6X^5} - \frac{5b^3}{a^7X^4} - \frac{35b^3}{3a^8X^3} - \frac{28b^3}{a^9X^2} - \frac{84b^3}{a^{10}X} - \frac{1}{3a^8x^3} + \frac{4b}{a^9x^2} - \frac{36b^2}{a^{10}x} + \frac{120b^3}{a^{11}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^9} = -\frac{b^3}{8a^4X^8} - \frac{4b^3}{7a^5X^7} - \frac{5b^3}{3a^6X^6} - \frac{4b^3}{a^7X^5} - \frac{35b^3}{4a^8X^4} - \frac{56b^3}{3a^9X^3} - \frac{42b^3}{a^{10}X^2} - \frac{120b^3}{a^{11}X} - \frac{1}{3a^9x^3} + \frac{9b}{2a^{10}x^2} - \frac{45b^2}{a^{11}x} + \frac{165b^3}{a^{12}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{10}} = -\frac{b^3}{9a^4X^9} - \frac{b^3}{2a^5X^8} - \frac{10b^3}{7a^6X^7} - \frac{10b^3}{3a^7X^6} - \frac{7b^3}{a^8X^5} - \frac{14b^3}{a^9X^4} - \frac{28b^3}{a^{10}X^3} - \frac{60b^3}{a^{11}X^2} - \frac{165b^3}{a^{12}X} - \frac{1}{3a^{10}x^3} + \frac{5b}{a^{11}x^2} - \frac{55b^2}{a^{12}x} + \frac{220b^3}{a^{13}}\log\frac{X}{x}.$$

Tafel XI.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^\mu} = b^4 \sum_{\nu=o}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+4)_4}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+5}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{4a^\mu x^4} + \frac{\mu b}{3a^{\mu+1}x^3} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{2a^{\mu+2}x^2} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{a^{\mu+3}x} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{a^{\mu+4}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{b^2}{2a^3x^2} + \frac{b^3}{a^4x} - \frac{b^4}{a^5}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^2} = \frac{b^4}{a^5X} - \frac{1}{4a^2x^4} + \frac{2b}{3a^3x^3} - \frac{3b^2}{2a^4x^2} + \frac{4b^3}{a^5x} - \frac{5b^4}{a^6}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^3} = \frac{b^4}{2a^5X^2} + \frac{5b^4}{a^6X} - \frac{1}{4a^3x^4} + \frac{b}{a^4x^3} - \frac{3b^2}{a^5x^2} + \frac{10b^3}{a^6x} - \frac{15b^4}{a^7}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^4} = \frac{b^4}{3a^5X^3} + \frac{5b^4}{2a^6X^2} + \frac{15b^4}{a^7X} - \frac{1}{4a^4x^4} + \frac{4b}{3a^5x^3} - \frac{5b^2}{a^6x^2} + \frac{20b^3}{a^7x} - \frac{35b^4}{a^8}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^5} = \frac{b^4}{4a^5X^4} + \frac{5b^4}{3a^6X^3} + \frac{15b^4}{2a^7X^2} + \frac{35b^4}{a^8X} - \frac{1}{4a^5x^4} + \frac{5b}{3a^6x^3} - \frac{15b^2}{2a^7x^2} + \frac{35b^3}{a^8x} - \frac{70b^4}{a^9}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^6} = \frac{b^4}{5a^5X^5} + \frac{5b^4}{4a^6X^4} + \frac{5b^4}{a^7X^3} + \frac{35b^4}{2a^8X^2} + \frac{70b^4}{a^9X} - \frac{1}{4a^6x^4} + \frac{2b}{a^7x^3} - \frac{21b^2}{2a^8x^2} + \frac{56b^3}{a^9x} - \frac{126b^4}{a^{10}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^7} = \frac{b^4}{6a^5X^6} + \frac{b^4}{a^6X^5} + \frac{15b^4}{4a^7X^4} + \frac{35b^4}{3a^8X^3} + \frac{35b^4}{a^9X^2} + \frac{126b^4}{a^{10}X} - \frac{1}{4a^7x^4} + \frac{7b}{3a^8x^3} - \frac{14b^2}{a^9x^2} + \frac{84b^3}{a^{10}x} - \frac{210b^4}{a^{11}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^8} = \frac{b^4}{7a^5X^7} + \frac{5b^4}{6a^6X^6} + \frac{3b^4}{a^7X^5} + \frac{35b^4}{4a^8X^4} + \frac{70b^4}{3a^9X^3} + \frac{63b^4}{a^{10}X^2} + \frac{210b^4}{a^{11}X} - \frac{1}{4a^8x^4} + \frac{8b}{3a^9x^3} - \frac{18b^2}{a^{10}x^2} + \frac{120b^3}{a^{11}x} - \frac{330b^4}{a^{12}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^9} = \frac{b^4}{8a^5X^8} + \frac{5b^4}{7a^6X^7} + \frac{5b^4}{2a^7X^6} + \frac{7b^4}{a^8X^5} + \frac{35b^4}{2a^9X^4} + \frac{42b^4}{a^{10}X^3} + \frac{105b^4}{a^{11}X^2} + \frac{330b^4}{a^{12}X} - \frac{1}{4a^9x^4} + \frac{3b}{a^{10}x^3} - \frac{45b^2}{2a^{11}x^2} + \frac{165b^3}{a^{12}x} - \frac{495b^4}{a^{13}}\log\frac{X}{x}.$$

Tafel XII.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^\mu} = -b^5 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+5)_5}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+6}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{5a^\mu x^5} + \frac{\mu b}{4a^{\mu+1}x^4} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{3a^{\mu+2}x^3} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{2a^{\mu+3}x^2} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{a^{\mu+4}x} + \frac{(\mu+4)_5 b^5}{a^{\mu+5}} \log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{4a^2x^4} - \frac{b^2}{3a^3x^3} + \frac{b^3}{2a^4x^2} - \frac{b^4}{a^5x} + \frac{b^5}{a^6}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^2} = -\frac{b^5}{a^6X} - \frac{1}{5a^2x^5} + \frac{b}{2a^3x^4} - \frac{b^2}{a^4x^3} + \frac{2b^3}{a^5x^2} - \frac{5b^4}{a^6x} + \frac{6b^5}{a^7}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^3} = -\frac{b^5}{2a^6X^2} - \frac{6b^5}{a^7X} - \frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{4a^4x^4} - \frac{2b^2}{a^5x^3} + \frac{5b^3}{a^6x^2} - \frac{15b^4}{a^7x} + \frac{21b^5}{a^8}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^4} = -\frac{b^5}{3a^6X^3} - \frac{3b^5}{a^7X^2} - \frac{21b^5}{a^8X} - \frac{1}{5a^4x^5} + \frac{b}{a^5x^4} - \frac{10b^2}{3a^6x^3} + \frac{10b^3}{a^7x^2} - \frac{35b^4}{a^8x} + \frac{56b^5}{a^9}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^5} = -\frac{b^5}{4a^6X^4} - \frac{2b^5}{a^7X^3} - \frac{21b^5}{2a^8X^2} - \frac{56b^5}{a^9X} - \frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{4a^6x^4} - \frac{5b^2}{a^7x^3} + \frac{35b^3}{2a^8x^2} - \frac{70b^4}{a^9x} + \frac{126b^5}{a^{10}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^6} = -\frac{b^5}{5a^6X^5} - \frac{3b^5}{2a^7X^4} - \frac{7b^5}{a^8X^3} - \frac{28b^5}{a^9X^2} - \frac{126b^5}{a^{10}X} - \frac{1}{5a^6x^5} + \frac{3b}{2a^7x^4} - \frac{7b^2}{a^8x^3} + \frac{28b^3}{a^9x^2} - \frac{126b^4}{a^{10}x} + \frac{252b^5}{a^{11}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^7} = -\frac{b^5}{6a^6X^6} - \frac{6b^5}{5a^7X^5} - \frac{21b^5}{4a^8X^4} - \frac{56b^5}{3a^9X^3} - \frac{63b^5}{a^{10}X^2} - \frac{252b^5}{a^{11}X} - \frac{1}{5a^7x^5} + \frac{7b}{4a^8x^4} - \frac{28b^2}{3a^9x^3} + \frac{42b^3}{a^{10}x^2} - \frac{210b^4}{a^{11}x} + \frac{462b^5}{a^{12}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^8} = -\frac{b^5}{7a^6X^7} - \frac{b^5}{a^7X^6} - \frac{21b^5}{5a^8X^5} - \frac{14b^5}{a^9X^4} - \frac{42b^5}{a^{10}X^3} - \frac{126b^5}{a^{11}X^2} - \frac{462b^5}{a^{12}X} - \frac{1}{5a^8x^5} + \frac{2b}{a^9x^4} - \frac{12b^2}{a^{10}x^3} + \frac{60b^3}{a^{11}x^2} - \frac{330b^4}{a^{12}x} + \frac{792b^5}{a^{13}}\log\frac{X}{x}.$$

Tafel XIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^\mu} = b^6 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+6)_6}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+7}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{6a^\mu x^6} + \frac{\mu b}{5a^{\mu+1}x^5} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{4a^{\mu+2}x^4} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{3a^{\mu+3}x^3} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{2a^{\mu+4}x^2} + \frac{(\mu+4)_5 b^5}{a^{\mu+5}x} - \frac{(\mu+5)_6 b^6}{a^{\mu+6}} \log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X} = -\frac{1}{6ax^6} + \frac{b}{5a^2x^5} - \frac{b^2}{4a^3x^4} + \frac{b^3}{3a^4x^3} - \frac{b^4}{2a^5x^2} + \frac{b^5}{a^6x} - \frac{b^6}{a^7}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^2} = \frac{b^6}{a^7X} - \frac{1}{6a^2x^6} + \frac{2b}{5a^3x^5} - \frac{3b^2}{4a^4x^4} + \frac{4b^3}{3a^5x^3} - \frac{5b^4}{2a^6x^2} + \frac{6b^5}{a^7x} - \frac{7b^6}{a^8}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^3} = \frac{b^6}{2a^7X^2} + \frac{7b^6}{a^8X} - \frac{1}{6a^3x^6} + \frac{3b}{5a^4x^5} - \frac{3b^2}{2a^5x^4} + \frac{10b^3}{3a^6x^3} - \frac{15b^4}{2a^7x^2} + \frac{21b^5}{a^8x} - \frac{28b^6}{a^9}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^4} = \frac{b^6}{3a^7X^3} + \frac{7b^6}{2a^8X^2} + \frac{28b^6}{a^9X} - \frac{1}{6a^4x^6} + \frac{4b}{5a^5x^5} - \frac{5b^2}{2a^6x^4} + \frac{20b^3}{3a^7x^3} - \frac{35b^4}{2a^8x^2} + \frac{56b^5}{a^9x} - \frac{84b^6}{a^{10}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^5} = \frac{b^6}{4a^7X^4} + \frac{7b^6}{3a^8X^3} + \frac{14b^6}{a^9X^2} + \frac{84b^6}{a^{10}X} - \frac{1}{6a^5x^6} + \frac{b}{a^6x^5} - \frac{15b^2}{4a^7x^4} + \frac{35b^3}{3a^8x^3} - \frac{35b^4}{a^9x^2} + \frac{126b^5}{a^{10}x} - \frac{210b^6}{a^{11}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^6} = \frac{b^6}{5a^7X^5} + \frac{7b^6}{4a^8X^4} + \frac{28b^6}{3a^9X^3} + \frac{42b^6}{a^{10}X^2} + \frac{210b^6}{a^{11}X} - \frac{1}{6a^6x^6} + \frac{6b}{5a^7x^5} - \frac{21b^2}{4a^8x^4} + \frac{56b^3}{3a^9x^3} - \frac{63b^4}{a^{10}x^2} + \frac{252b^5}{a^{11}x} - \frac{462b^6}{a^{12}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^7} = \frac{b^6}{6a^7X^6} + \frac{7b^6}{5a^8X^5} + \frac{7b^6}{a^9X^4} + \frac{28b^6}{a^{10}X^3} + \frac{105b^6}{a^{11}X^2} + \frac{462b^6}{a^{12}X} - \frac{1}{6a^7x^6} + \frac{7b}{5a^8x^5} - \frac{7b^2}{a^9x^4} + \frac{28b^3}{a^{10}x^3} - \frac{105b^4}{a^{11}x^2} + \frac{462b^5}{a^{12}x} - \frac{924b^6}{a^{13}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 X^8} = \frac{b^6}{7a^7X^7} + \frac{7b^6}{6a^8X^6} + \frac{28b^6}{5a^9X^5} + \frac{21b^6}{a^{10}X^4} + \frac{70b^6}{a^{11}X^3} + \frac{231b^6}{a^{12}X^2} + \frac{924b^6}{a^{13}X} - \frac{1}{6a^8x^6} + \frac{8b}{5a^9x^5} - \frac{9b^2}{a^{10}x^4} + \frac{40b^3}{a^{11}x^3} - \frac{165b^4}{a^{12}x^2} + \frac{792b^5}{a^{13}x} - \frac{1716b^6}{a^{14}}\log\frac{X}{x}.$$

Tafel XIV.

$$X = a + bx^2.$$

Reductionsformeln:
$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{2\mu a} \cdot \frac{x}{X^\mu} + \frac{2\mu - 1}{2\mu a} \int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{2\mu a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(\mu - \frac{1}{2})_\nu}{(\mu-1)_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu - \frac{1}{2})_\mu}{a^\mu} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arc.Tang} x \sqrt{\frac{b}{a}},$$ wenn a und b positiv sind.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-b}},$$ wenn a positiv, b negativ ist *).

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{4aX^2} + \frac{3x}{8a^2X} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{6aX^3} + \frac{5x}{24a^2X^2} + \frac{5x}{16a^3X} + \frac{5}{16a^3} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{8aX^4} + \frac{7x}{48a^2X^3} + \frac{35x}{192a^3X^2} + \frac{35x}{128a^4X} + \frac{35}{128a^4} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{10aX^5} + \frac{9x}{80a^2X^4} + \frac{21x}{160a^3X^3} + \frac{21x}{128a^4X^2} + \frac{63x}{256a^5X} + \frac{63}{256a^5} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^7} = \frac{x}{12aX^6} + \frac{11x}{120a^2X^5} + \frac{33x}{320a^3X^4} + \frac{77x}{640a^4X^3} + \frac{77x}{512a^5X^2} + \frac{231x}{1024a^6X} + \frac{231}{1024a^6} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^8} = \frac{x}{14aX^7} + \frac{13x}{168a^2X^6} + \frac{143x}{1680a^3X^5} + \frac{429x}{4480a^4X^4} + \frac{143x}{1280a^5X^3} + \frac{143x}{1024a^6X^2} + \frac{429x}{2048a^7X} + \frac{429}{2048a^7} \int \frac{\partial x}{X}.$$

---

*) Diese Formel kann auch so geschrieben werden: $\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{-ab}}$ Arc. Tang $x\sqrt{\frac{-b}{a}}$, oder auch: $\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{-ab}}$ Arc. Cotg $x\sqrt{\frac{-b}{a}}$.

Tafel XV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b} \int \frac{\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b} \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{2\mu b X^\mu} + \frac{1}{2\mu b} \int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^2} = -\frac{x}{2bX} + \frac{1}{2b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{4X^2} + \frac{1}{8aX}\right] + \frac{1}{8ab} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{6X^3} + \frac{1}{24aX^2} + \frac{1}{16a^2X}\right] + \frac{1}{16a^2b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{8X^4} + \frac{1}{48aX^3} + \frac{5}{192a^2X^2} + \frac{5}{128a^3X}\right] + \frac{5}{128a^3b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{10X^5} + \frac{1}{80aX^4} + \frac{7}{480a^2X^3} + \frac{7}{384a^3X^2} + \frac{7}{256a^4X}\right] + \frac{7}{256a^4b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{12X^6} + \frac{1}{120aX^5} + \frac{3}{320a^2X^4} + \frac{7}{640a^3X^3} + \frac{7}{512a^4X^2} + \frac{21}{1024a^5X}\right] + \frac{21}{1024a^5b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{14X^7} + \frac{1}{168aX^6} + \frac{11}{1680a^2X^5} + \frac{33}{4480a^3X^4} + \frac{11}{1280a^4X^3} + \frac{11}{1024a^5X^2} + \frac{33}{2048a^6X}\right] + \frac{33}{2048a^6b} \int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XVI.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{2\mu X^{\mu}} - \frac{2\mu+1}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}}\right] + \frac{3}{2^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{2b^2X} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{4X^2} - \frac{5}{8X}\right] + \frac{3}{8b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{6X^3} - \frac{7}{24X^2} + \frac{1}{16aX}\right] + \frac{1}{16ab^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{8X^4} - \frac{3}{16X^3} + \frac{1}{64aX^2} + \frac{3}{128a^2X}\right] + \frac{3}{128a^2b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{10X^5} - \frac{11}{80X^4} + \frac{1}{160aX^3} + \frac{1}{128a^2X^2} + \frac{3}{256a^3X}\right] + \frac{3}{256a^3b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{12X^6} - \frac{13}{120X^5} + \frac{1}{320aX^4} + \frac{7}{1920a^2X^3} + \frac{7}{1536a^3X^2} + \frac{7}{1024a^4X}\right] + \frac{7}{1024a^4b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{14X^7} - \frac{5}{56X^6} + \frac{1}{560aX^5} + \frac{9}{4480a^2X^4} + \frac{3}{1280a^3X^3} + \frac{3}{1024a^4X^2} + \frac{9}{2048a^5X}\right] + \frac{9}{2048a^5b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XVII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{2\mu X^{\mu}} + \frac{(4\mu+1)a}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} - \frac{4\mu^2-2\mu+3}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}}\right] + \frac{15}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)b^3}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-2}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = \frac{x}{b^3}\left[\frac{bx^2}{3} - 2a - \frac{a^2}{2X}\right] + \frac{5a^2}{2b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{4X^2} + \frac{9a}{8X} + 1\right] - \frac{15a}{8b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{6X^3} + \frac{13a}{24X^2} - \frac{11}{16X}\right] + \frac{5}{16b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{8X^4} + \frac{17a}{48X^3} - \frac{59}{192X^2} + \frac{5}{128aX}\right] + \frac{5}{128ab^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{10X^5} + \frac{21a}{80X^4} - \frac{31}{160X^3} + \frac{1}{128aX^2} + \frac{3}{256a^2X}\right] + \frac{3}{256a^2b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{12X^6} + \frac{5a}{24X^5} - \frac{9}{64X^4} + \frac{1}{384aX^3} + \frac{5}{1536a^2X^2} + \frac{5}{1024a^3X}\right] + \frac{5}{1024a^3b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{14X^7} + \frac{29a}{168X^6} - \frac{37}{336X^5} + \frac{1}{896aX^4} + \frac{1}{768a^2X^3} + \frac{5}{3072a^3X^2} + \frac{5}{2048a^4X}\right] + \frac{5}{2048a^4b^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XVIII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{2\mu X^{\mu}} - \frac{(6\mu+1)a^2}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} + \frac{(12\mu^2-8\mu+3)a}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}}$$

$$- \frac{8\mu^3-20\mu^2+18\mu+15}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)X^{\mu-3}}\Big] + \frac{105}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)b^4}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-3}}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^5}{5b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^2} = \frac{x^5}{5b^2} - \frac{2ax^3}{3b^3} + \frac{3a^2x}{b^4} + \frac{a^3x}{2b^4X} - \frac{7a^3}{2b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^3} = \frac{x^3}{3b^3} - \frac{3ax}{b^4} - \frac{13a^2x}{8b^4X} + \frac{a^3x}{4b^4X^2} + \frac{35a^2}{8b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b^4} + \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{6X^3} - \frac{19a^2}{24X^2} + \frac{29a}{16X}\Big] - \frac{35a}{16b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{8X^4} - \frac{25a^2}{48X^3} + \frac{163a}{192X^2} - \frac{93}{128X}\Big] + \frac{35}{128b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{10X^5} - \frac{31a^2}{80X^4} + \frac{263a}{480X^3} - \frac{121}{384X^2} + \frac{7}{256aX}\Big] + \frac{7}{256ab^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{12X^6} - \frac{37a^2}{120X^5} + \frac{129a}{320X^4} - \frac{377}{1920X^3} + \frac{7}{1536aX^2} + \frac{7}{1024a^2X}\Big]$$

$$+ \frac{7}{1024a^2b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b^4}\Big[\frac{a^3}{14X^7} - \frac{43a^2}{168X^6} + \frac{107a}{336X^5} - \frac{127}{896X^4} + \frac{1}{768aX^3} + \frac{5}{3072a^2X^2}$$

$$+ \frac{5}{2048a^3X}\Big] + \frac{5}{2048a^3b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XIX.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{2\mu X^{\mu}} + \frac{(8\mu+1)a^3}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} - \frac{(24\mu^2-18\mu+3)a^2}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}}$$

$$+ \frac{(32\mu^3-84\mu^2+64\mu+15)a}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)X^{\mu-3}} - \frac{16\mu^4-88\mu^3+164\mu^2-62\mu+105}{2^5\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)X^{\mu-4}}\Big]$$

$$+ \frac{945}{2^5\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)b^5}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-4}}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X} = \frac{x^9}{9b} - \frac{ax^7}{7b^2} + \frac{a^2x^5}{5b^3} - \frac{a^3x^3}{3b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^2} = \frac{x^7}{7b^2} - \frac{2ax^5}{5b^3} + \frac{a^2x^3}{b^4} - \frac{4a^3x}{b^5} - \frac{a^4x}{2b^5X} + \frac{9a^4}{2b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^3} = \frac{x^5}{5b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{6a^2x}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{4X^2} - \frac{17a^3}{8X}\Big] - \frac{63a^3}{8b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^4} = \frac{x^3}{3b^4} - \frac{4ax}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{6X^3} - \frac{25a^3}{24X^2} + \frac{55a^2}{16X}\Big] + \frac{105a^2}{16b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^5} = \frac{x}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{8X^4} - \frac{11a^3}{16X^3} + \frac{105a^2}{64X^2} - \frac{325a}{128X}\Big] - \frac{315a}{128b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^6} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{10X^5} + \frac{41a^3}{80X^4} - \frac{171a^2}{160X^3} + \frac{149a}{128X^2} - \frac{193}{256X}\Big] + \frac{63}{256b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^7} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{12X^6} + \frac{49a^3}{120X^5} - \frac{253a^2}{320X^4} + \frac{1429a}{1920X^3} - \frac{491}{1536X^2} + \frac{21}{1024aX}\Big]$$

$$+ \frac{21}{1024ab^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^8} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{14X^7} + \frac{19a^3}{56X^6} - \frac{351a^2}{560X^5} + \frac{2441a}{4480X^4} - \frac{253}{1280X^3} + \frac{3}{1024aX^2}$$

$$+ \frac{9}{2048a^2X}\Big] + \frac{9}{2048a^2b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XX.

$$X = a + bx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XIV bis XIX.

Reductionsformeln:

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{2m-1}}{2\mu bX^{\mu}} + \frac{2m-1}{2b\mu}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b^m}\int\frac{(X-a)^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=m} m_\nu(-a)^\nu\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1-m+\nu}}.$$

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = (-1)^m\frac{x}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{\alpha_\nu a^{m-\nu-1}}{X^{\mu-\nu}} + \frac{\beta}{b^m}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-m+1}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_0\ \alpha_1 \ldots\ \alpha_{n-1}\ \beta$ ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\alpha_0 = 1$; $(2\mu-2)\alpha_1-(2\mu-1)\alpha_0 = -m_1$; $(2\mu-4)\alpha_2-(2\mu-3)\alpha_1 = m_2$; $(2\mu-2\nu)\alpha_\nu-(2\mu-2\nu+1)\alpha_{\nu-1} = (-1)^\nu m_\nu$, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots m-1$;

$$\beta = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ \cdots\ 2m-1}{2^m\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-m+1)} = \frac{(m-\frac{1}{2})_m}{\mu_m}.$$

Diese Formel gilt nur, wenn $\mu+1>m$. Die folgende gilt in allen Fällen, wenn m und μ positive ganze Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, bedeuten.

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-\mu-1}\frac{(-1)^\nu(\mu+\nu)_\nu a^\nu x^{2m-2\mu-2\nu-1}}{(2m-2\mu-2\nu-1)b^{\mu+\nu+1}} + \frac{(-1)^m x}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\alpha_\nu a^{m-\nu-1}}{X^{\mu-\nu}}$$
$$+\frac{(-1)^m\gamma a^{m-\mu}}{b^m}\int\frac{\partial x}{X};$$

wo $2\mu\alpha_0 = 1$ und allgemein $(2\mu-2\nu)\alpha_\nu-(2\mu-2\nu+1)\alpha_{\nu-1} = (-1)^\nu m_\nu$, für $\nu = 0, 1, 2, \cdots \mu-1$; oder auch

$$(2\mu-2\nu)\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}\frac{(-1)^\lambda(\mu-\lambda-\frac{1}{2})_{\nu-\lambda}m^\lambda}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}};\ \text{und}\ \gamma = \alpha_{\mu-1}+(-1)^\mu m_\mu.$$

Anmerkung. Integrale von der Form $\int\frac{x^{2m+1}\partial x}{(a+bx^2)^\mu}$ verwandeln sich durch Einsetzung von z für x^2 in $\frac{1}{2}\int\frac{z^m\partial z}{(a+bz)^\mu}$, und finden sich in dieser Form auf Tafel I bis VI.

Tafel XXI.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten $\beta_0,\ \beta_1 \ldots \beta_{\mu-1}$ und γ ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{2\mu}$; $(2\mu-2)\beta_1-(2\mu-1)\beta_0 = 1$; allgem. $(2\mu-2\nu)\beta_\nu-(2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = 1$, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$ und $\gamma = \beta_{\mu-1}+1$.

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx}{2a^2X} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{7}{8aX}\right] - \frac{15b}{8a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{11}{24aX^2} + \frac{19}{16a^2X}\right] - \frac{35b}{16a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^5} = -\frac{1}{a^5x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{5}{16aX^3} + \frac{41}{64a^2X^2} + \frac{187}{128a^3X}\right] - \frac{315b}{128a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^6} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{19}{80aX^4} + \frac{71}{160a^2X^3} + \frac{103}{128a^3X^2} + \frac{437}{256a^4X}\right]$$
$$-\frac{693b}{256a^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^7} = -\frac{1}{a^7x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{23}{120aX^5} + \frac{109}{320a^2X^4} + \frac{361}{640a^3X^3} + \frac{489}{512a^4X^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1979}{1024a^5X}\right] - \frac{3003b}{1024a^7}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3a^{\mu+1}x^3} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x} + \frac{b^2x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$ und allgemein $(2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = \nu+1$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1}+\mu+1$.

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} + \frac{2b}{a^3x} + \frac{b^2x}{2a^3X} + \frac{5b^2}{2a^3}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} + \frac{3b}{a^4x} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{11}{8aX}\right] + \frac{35b^2}{8a^4}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} + \frac{4b}{a^5x} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{17}{24aX^2} + \frac{41}{16a^2X}\right] + \frac{105b^2}{16a^5}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^5} = -\frac{1}{3a^5x^3} + \frac{5b}{a^6x} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{23}{48aX^3} + \frac{259}{192a^2X^2} + \frac{515}{128a^3X}\right]$$
$$+ \frac{1155b^2}{128a^6}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^6} = -\frac{1}{3a^6x^3} + \frac{6b}{a^7x} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{29}{80aX^4} + \frac{443}{480a^2X^3} + \frac{827}{384a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1467}{256a^4X}\right] + \frac{3003b^2}{256a^7}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^7} = -\frac{1}{3a^7x^3} + \frac{7b}{a^8x} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{7}{24aX^5} + \frac{45}{64a^2X^4} + \frac{571}{384a^3X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{4775}{1536a^4X^2} + \frac{7847}{1024a^5X}\right] + \frac{15015b^2}{1024a^8}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Tafel XXIII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{3a^{\mu+2}x^3} - \frac{(\mu+2)_2b^2}{a^{\mu+3}x} - \frac{b^3x}{a^4}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}}$$
$$- \frac{b^3\gamma}{a^{\mu+3}}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$, und allgemein $(2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = (\nu+2)_2$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1}+(\mu+2)_2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^6X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{b^2}{a^3x} - \frac{b^3}{a^3}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{dx}{x^6X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{2b}{3a^3x^3} - \frac{3b^2}{a^4x} - \frac{b^3x}{2a^4X} - \frac{7b^3}{2a^4}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{b}{a^4x^3} - \frac{6b^2}{a^5x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{15}{8aX}\right] - \frac{63b^3}{8a^5}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{4b}{3a^5x^3} - \frac{10b^2}{a^6x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{23}{24aX^2} + \frac{71}{16a^2X}\right]$$
$$- \frac{231b^3}{16a^6}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^5} = -\frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{3a^6x^3} - \frac{15b^2}{a^7x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{31}{48aX^3} + \frac{443}{192a^2X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1083}{128a^3X}\right] - \frac{3003b^3}{128a^7}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^6} = -\frac{1}{5a^6x^5} + \frac{2b}{a^7x^3} - \frac{21b^2}{a^8x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{39}{80aX^4} + \frac{753}{480a^2X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{571}{128a^3X^2} + \frac{3633}{256a^4X}\right] - \frac{9009b^3}{256a^8}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Tafel XXIV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^8 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{7a^{\mu+1}x^7} + \frac{(\mu+1)b}{5a^{\mu+2}x^5} - \frac{(\mu+2)_2 b^2}{3a^{\mu+3}x^3} + \frac{(\mu+3)_3 b^3}{a^{\mu+4}x}$$
$$+ \frac{b^4 x}{a^5}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\gamma b^4}{a^{\mu+4}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten finden sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$; und allgemein $(2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = (\nu+3)_3$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + (\mu+3)_3$.

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X} = -\frac{1}{7ax^7} + \frac{b}{5a^2x^5} - \frac{b^2}{3a^3x^3} + \frac{b^3}{a^4x} + \frac{b^4}{a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^2} = -\frac{1}{7a^2x^7} + \frac{2b}{5a^3x^5} - \frac{b^2}{a^4x^3} + \frac{4b^3}{a^5x} + \frac{b^4x}{2a^5X} + \frac{9b^4}{2a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^3} = -\frac{1}{7a^3x^7} + \frac{3b}{5a^4x^5} - \frac{2b^2}{a^5x^3} + \frac{10b^3}{a^6x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{19}{8aX}\right] + \frac{99b^4}{8a^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^4} = -\frac{1}{7a^4x^7} + \frac{4b}{5a^5x^5} - \frac{10b^2}{3a^6x^3} + \frac{20b^3}{a^7x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{29}{24aX^2} + \frac{109}{16a^2X}\right]$$
$$+ \frac{429b^4}{16a^7}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^5} = -\frac{1}{7a^5x^7} + \frac{b}{5a^6x^5} - \frac{5b^2}{a^7x^3} + \frac{35b^3}{a^8x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{13}{16aX^3} + \frac{225}{64a^2X^2}\right.$$
$$\left.+ \frac{1955}{128a^3X}\right] + \frac{6435b^4}{128a^8}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^6} = -\frac{1}{7a^6x^7} + \frac{6b}{5a^7x^5} - \frac{7b^2}{a^8x^3} + \frac{56b^3}{a^9x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{49}{80aX^4} + \frac{1143}{480a^2X^3}\right.$$
$$\left.+ \frac{1021}{128a^3X^2} + \frac{7543}{256a^4X}\right] + \frac{21879b^4}{256a^9}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8 X^7} = -\frac{1}{7a^7x^7} + \frac{7b}{5a^8x^5} - \frac{28b^2}{3a^9x^3} + \frac{84b^3}{a^{10}x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{59}{120aX^5} + \frac{577}{320a^2X^4}\right.$$
$$\left.+ \frac{10439}{1920a^3X^3} + \frac{23879}{1536a^4X^2} + \frac{52551}{1024a^5X}\right] + \frac{138567b^4}{1024a^{10}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^{10} X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^{\mu+1}} = -\frac{1}{9a^{\mu+1}x^9} + \frac{(\mu+1)b}{7a^{\mu+2}x^7} - \frac{(\mu+2)_2 b^2}{5a^{\mu+3}x^5} + \frac{(\mu+3)_3 b^3}{3a^{\mu+4}x^3} - \frac{(\mu+4)_4 b^4}{a^{\mu+5}x}$$
$$- \frac{b^5 x}{a^6}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{\gamma b^5}{a^{\mu+5}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{2\mu}$; allgemein $(2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = (\nu+4)_4$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + (\mu+4)_4$.

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X} = -\frac{1}{9ax^9} + \frac{b}{7a^2x^7} - \frac{b^2}{5a^3x^5} + \frac{b^3}{3a^4x^3} - \frac{b^4}{a^5x} - \frac{b^5}{a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^2} = -\frac{1}{9a^2x^9} + \frac{2b}{7a^3x^7} - \frac{3b^2}{5a^4x^5} + \frac{4b^3}{3a^5x^3} - \frac{5b^4}{a^6x} - \frac{b^5x}{2a^6X} - \frac{11b^5}{2a^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^3} = -\frac{1}{9a^3x^9} + \frac{3b}{7a^4x^7} - \frac{6b^2}{5a^5x^5} + \frac{10b^3}{3a^6x^3} - \frac{15b^4}{a^7x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{23}{8aX}\right]$$
$$- \frac{143b^5}{8a^7}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^4} = -\frac{1}{9a^4x^9} + \frac{4b}{7a^5x^7} - \frac{2b^2}{a^6x^5} + \frac{20b^3}{3a^7x^3} - \frac{35b^4}{a^8x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{35}{24aX^2}\right.$$
$$\left.+ \frac{155}{16a^2X}\right] - \frac{715b^5}{16a^8}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^5} = -\frac{1}{9a^5x^9} + \frac{5b}{7a^6x^7} - \frac{3b^2}{a^7x^5} + \frac{35b^3}{3a^8x^3} - \frac{70b^4}{a^9x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{47}{48aX^3}\right.$$
$$\left.+ \frac{955}{192a^2X^2} + \frac{3195}{128a^3X}\right] - \frac{12155b^5}{128a^9}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{10} X^6} = -\frac{1}{9a^6x^9} + \frac{6b}{7a^7x^7} - \frac{21b^2}{5a^8x^5} + \frac{56b^3}{3a^9x^3} - \frac{126b^4}{a^{10}x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{59}{80aX^4}\right.$$
$$\left.+ \frac{1613}{480a^2X^3} + \frac{4973}{384a^3X^2} + \frac{13933}{256a^4X}\right] - \frac{46189b^5}{256a^{10}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXVI.

$$X = a + bx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XXI bis XXV.

Reductionsformel: $$\int\frac{\partial x}{x^{2m}X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^{2m}X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{2m-2}X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{2m}X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{(-1)^{\nu-1}(\mu+\nu)_\nu b^\nu}{(2m-2\nu-1)a^{\mu+\nu+1}x^{2m-2\nu-1}} + \frac{(-1)^m b^m x}{a^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}}$$
$$+\frac{(-1)^m b^m \gamma}{a^{\mu+m}}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2\mu}\;;\quad (2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = (m+\nu-1)_\nu\,,$$
$$\text{für } \nu = 1,\,2,\,3,\,\cdots\,\mu-1\quad;\quad \gamma = \beta_{\mu-1} + (m+\mu-1)_\mu\,.$$

Unabhängig von den vorhergehenden Coëfficienten wird β_ν ausgedrückt durch die Formel:

$$(2\mu-2\nu)\beta_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}\frac{(m+\lambda-1)_\lambda(\mu-\lambda-\frac{1}{2})_{\nu-\lambda}}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}}\,.$$

Anmerkung. Die Formel $\int\frac{\partial x}{x^{2m+1}X^{\mu+1}}$ verwandelt sich für $x^2 = z$ in
$$\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z^{m+1}(a+bz)^\mu}$$
und findet sich in dieser Form auf Tafel VII bis XIII.

Tafel XXVII.

$$X = a + bx^3.$$

---

a und b positiv oder negativ, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{3\mu a X^\mu} + \frac{3\mu-1}{3\mu a}\int\frac{\partial x}{X^\mu}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{3a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{1}{3})_\nu}{\mu_\nu(\mu-\nu)a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{1}{3})_\mu}{a^\mu}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{k}{3a}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+k)^2}{x^2-2kx+k^2} + \sqrt{3}\cdot\mathrm{Arc.Tang}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right].$$
$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{3aX} + \frac{2}{3a}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{5}{18aX}\right] + \frac{5}{9a^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{4}{27aX^2} + \frac{20}{81a^2X}\right] + \frac{40}{81a^3}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{11}{108aX^3} + \frac{11}{81a^2X^2} + \frac{55}{243a^3X}\right] + \frac{110}{243a^4}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{7}{90aX^4} + \frac{77}{810a^2X^3} + \frac{154}{1215a^3X^2} + \frac{154}{729a^4X}\right] + \frac{308}{729a^5}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$
$$\int\frac{\partial x}{X^7} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{17}{270aX^5} + \frac{119}{1620a^2X^4} + \frac{1309}{14580a^3X^3} + \frac{1309}{10935a^4X^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1309}{6561a^5X}\right] + \frac{2618}{6561a^6}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Anmerkung. Die folgenden Tafeln für $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}}$ sind nach den Werthen von m, mit Ausschluss der durch 3 theilbaren m, abgetheilt und geordnet, nämlich: $m = 1, 4, 7$; $m = 2, 5, 8$; $m = -1, -4$; $m = -2, -5$.

Tafel XXVIII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{3b\mu X^\mu} + \frac{1}{3\mu b}\int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^2} = -\frac{x}{3bX} + \frac{1}{3b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{1}{18aX}\right] + \frac{1}{9ab}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{1}{54aX^2} - \frac{5}{162a^2X}\right] + \frac{5}{81a^2b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^5} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{1}{108aX^3} - \frac{1}{81a^2X^2} - \frac{5}{243a^3X}\right] + \frac{10}{243a^3b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^6} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{1}{180aX^4} - \frac{11}{1620a^2X^3} - \frac{11}{1215a^3X^2} - \frac{11}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{22}{729a^4b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^7} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{1}{270aX^5} - \frac{7}{1620a^2X^4} - \frac{77}{14580a^3X^3} - \frac{77}{10935a^4X^2}\right.$$
$$\left. - \frac{77}{6561a^5X}\right] + \frac{154}{6561a^5b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^8} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{1}{378aX^6} - \frac{17}{5670a^2X^5} - \frac{17}{4860a^3X^4} - \frac{187}{43740a^4X^3}\right.$$
$$\left. - \frac{187}{32805a^5X^2} - \frac{187}{19683a^6X}\right] + \frac{374}{19683a^6b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXIX.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^3\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{3\mu X^\mu} - \frac{3\mu+1}{3^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{4}{3^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{3b^2X} - \frac{4a}{3b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{7}{18aX}\right] + \frac{2}{9b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{5}{27aX^2} + \frac{2}{81a^2X}\right] + \frac{4}{81ab^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^5} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{13}{108aX^3} + \frac{1}{162a^2X^2} + \frac{5}{486a^3X}\right] + \frac{5}{243a^2b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^6} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{4}{45aX^4} + \frac{1}{405a^2X^3} + \frac{4}{1215a^3X^2} + \frac{4}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{8}{729a^3b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^7} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{19}{270aX^5} + \frac{1}{810a^2X^4} + \frac{11}{7290a^3X^3} + \frac{22}{10935a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{22}{6561a^5X}\right] + \frac{44}{6561a^4b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^8} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{11}{189aX^6} + \frac{2}{2835a^2X^5} + \frac{1}{1215a^3X^4} + \frac{11}{10935a^4X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{44}{32805a^5X^2} + \frac{44}{19683a^6X}\right] + \frac{88}{19683a^5b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXX.

$$X = a + bx^3.$$

---

a und b positiv oder negativ, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{3\mu a X^\mu} + \frac{3\mu-2}{3\mu a}\int\frac{x\,\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{3a}\sum_{\nu=o}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{2}{3})_\nu}{\mu_\nu(\mu-\nu)a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{2}{3})_\mu}{a^\mu}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X} = -\frac{1}{3bk}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} - \sqrt{3}\cdot\text{Arc.Tang}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right].$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{3aX} + \frac{1}{3a}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^3} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{2}{9aX}\right] + \frac{2}{9a^2}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^4} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{7}{54aX^2} + \frac{14}{81a^2X}\right] + \frac{14}{81a^3}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^5} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{5}{54aX^3} + \frac{35}{324a^2X^2} + \frac{35}{243a^3X}\right] + \frac{35}{243a^4}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^6} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{13}{180aX^4} + \frac{13}{162a^2X^3} + \frac{91}{972a^3X^2} + \frac{91}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{91}{729a^5}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^7} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{8}{135aX^5} + \frac{26}{405a^2X^4} + \frac{52}{729a^3X^3} + \frac{182}{2187a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{728}{6561a^5X}\right] + \frac{728}{6561a^6}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^8} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{21X^7} + \frac{19}{378aX^6} + \frac{152}{2835a^2X^5} + \frac{494}{8505a^3X^4} + \frac{988}{15309a^4X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{494}{6561a^5X^2} + \frac{1976}{19683a^6X}\right] + \frac{1976}{19683a^7}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

Tafel XXXI.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x\,\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^2}{3\mu bX^\mu} + \frac{2}{3\mu b}\int\frac{x\,\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^2} = -\frac{x^2}{3bX} + \frac{2}{3b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^3} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{1}{9aX}\right] + \frac{1}{9ab}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^4} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{1}{27aX^2} - \frac{4}{81a^2X}\right] + \frac{4}{81a^2b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^5} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{1}{54aX^3} - \frac{7}{324a^2X^2} - \frac{7}{243a^3X}\right] + \frac{7}{243a^3b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^6} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{1}{90aX^4} - \frac{1}{81a^2X^3} - \frac{7}{486a^3X^2} - \frac{14}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{14}{729a^4b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^7} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{1}{135aX^5} - \frac{13}{1620a^2X^4} - \frac{13}{1458a^3X^3} - \frac{91}{8748a^4X^2}\right.$$
$$\left. - \frac{91}{6561a^5X}\right] + \frac{91}{6561a^5b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^8} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{1}{189aX^6} - \frac{16}{2835a^2X^5} - \frac{52}{8505a^3X^4} - \frac{104}{15309a^4X^3}\right.$$
$$\left. - \frac{52}{6561a^5X^2} - \frac{208}{19683a^6X}\right] + \frac{208}{19683a^6b}\int\frac{x\,\partial x}{X}.$$

Tafel XXXII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{3\mu X^{\mu}} - \frac{3\mu+2}{3^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{10}{3^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2b^2} + \frac{ax^2}{3b^2X} - \frac{5a}{3b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^3} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{4}{9aX}\right] + \frac{5}{9b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^4} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{11}{54aX^2} + \frac{5}{81a^2X}\right] + \frac{5}{81ab^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^5} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{7}{54aX^3} + \frac{5}{324a^2X^2} + \frac{5}{243a^3X}\right] + \frac{5}{243a^2b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^6} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{17}{180aX^4} + \frac{1}{162a^2X^3} + \frac{7}{972a^3X^2} + \frac{7}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{7}{729a^3b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^7} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{2}{27aX^5} + \frac{1}{324a^2X^4} + \frac{5}{1458a^3X^3} + \frac{35}{8748a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{35}{6561a^5X}\right] + \frac{35}{6561a^4b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^8} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{23}{378aX^6} + \frac{1}{567a^2X^5} + \frac{13}{6804a^3X^4} + \frac{65}{30618a^4X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{65}{26244a^5X^2} + \frac{65}{19683a^6X}\right] + \frac{65}{19683a^5b^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXIII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^2X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx^2}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} = 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^2}{3a^2X} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{5}{9aX}\right] - \frac{14b}{9a^3}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{8}{27aX^2} + \frac{59}{81a^2X}\right] - \frac{140b}{81a^4}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^5} = -\frac{1}{a^5x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{11}{54aX^3} + \frac{131}{324a^2X^2} + \frac{212}{243a^3X}\right] - \frac{455b}{243a^5}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^6} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{7}{45aX^4} + \frac{23}{81a^2X^3} + \frac{121}{243a^3X^2} + \frac{727}{729a^4X}\right]$$
$$- \frac{1456b}{729a^6}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^7} = -\frac{1}{a^7x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{17}{135aX^5} + \frac{89}{405a^2X^4} + \frac{259}{729a^3X^3} + \frac{1271}{2187a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{7271}{6561a^5X}\right] - \frac{13832b}{6561a^7}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXIV.

$$X = a + b x^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{4a^{\mu+1}x^4} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} = \nu + 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^2} = -\frac{1}{4a^2x^4} + \frac{2b}{a^3x} + \frac{b^2x^2}{3a^3X} + \frac{7b^2}{3a^3}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^3} = -\frac{1}{4a^3x^4} + \frac{3b}{a^4x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{8}{9aX}\right] + \frac{35b^2}{9a^4}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^4} = -\frac{1}{4a^4x^4} + \frac{4b}{a^5x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{25}{54aX^2} + \frac{131}{81a^2X}\right] + \frac{455b^2}{81a^5}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^5} = -\frac{1}{4a^5x^4} + \frac{5b}{a^6x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{17}{54aX^3} + \frac{281}{324a^2X^2} + \frac{605}{243a^3X}\right]$$
$$+ \frac{1820b^2}{243a^6}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^6} = -\frac{1}{4a^6x^4} + \frac{6b}{a^7x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{43}{180aX^4} + \frac{97}{162a^2X^3} + \frac{1327}{972a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{2542}{729a^4X}\right] + \frac{6916b^2}{729a^7}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^7} = -\frac{1}{4a^7x^4} + \frac{7b}{a^8x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{26}{135aX^5} + \frac{743}{1620a^2X^4} + \frac{1391}{1458a^3X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{17027}{8748a^4X^2} + \frac{30149}{6561a^5X}\right] + \frac{76076b^2}{6561a^8}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXV.

$$X = a + b x^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2a^{\mu+1}x^2} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+2]\beta_{\nu-1} = 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = 2\beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{bx}{3a^2X} - \frac{5b}{3a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^3} = -\frac{1}{2a^3x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{11}{18aX}\right] - \frac{20b}{9a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^4} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{17}{54aX^2} + \frac{139}{162a^2X}\right] - \frac{220b}{81a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^5} = -\frac{1}{2a^5x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{23}{108aX^3} + \frac{73}{162a^2X^2} + \frac{527}{486a^3X}\right]$$
$$- \frac{770b}{243a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^6} = -\frac{1}{2a^6x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{29}{180aX^4} + \frac{499}{1620a^2X^3} + \frac{1403}{2430a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1889}{1458a^4X}\right] - \frac{2618b}{729a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^7} = -\frac{1}{2a^7x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{7}{54aX^5} + \frac{19}{81a^2X^4} + \frac{290}{729a^3X^3} + \frac{3049}{4374a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{19619}{13122a^5X}\right] - \frac{26180b}{6561a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVI.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{2a^{\mu+2}x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+2]\beta_{\nu-1} = \nu + 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \mu - 1$; $\gamma = 2\beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{2a^2x^2} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{b}{a^3x^2} + \frac{b^2x}{3a^3X} + \frac{8b^2}{3a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{2a^4x^2} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{17}{18aX}\right] + \frac{44b^2}{9a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{2b}{a^5x^2} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{13}{27aX^2} + \frac{146}{81a^2X}\right] + \frac{616b^2}{81a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^5} = -\frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{2a^6x^2} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{35}{108aX^3} + \frac{151}{162a^2X^2} + \frac{1403}{486a^3X}\right] + \frac{2618b^2}{243a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^6} = -\frac{1}{5a^6x^5} + \frac{3b}{a^7x^2} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{11}{45aX^4} + \frac{256}{405a^2X^3} + \frac{1834}{1215a^3X^2} + \frac{3049}{729a^4X}\right] + \frac{10472b^2}{729a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^7} = -\frac{1}{5a^7x^5} + \frac{7b}{2a^8x^2} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{53}{270aX^5} + \frac{194}{405a^2X^4} + \frac{3754}{3645a^3X^3} + \frac{48257}{21870a^4X^2} + \frac{74501}{13122a^5X}\right] + \frac{120428b^2}{6561a^8}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVII.

$$X = a + bx^4.$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\partial x}{X} &= \frac{k}{4a\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2 + kx\sqrt{2} + k^2}{x^2 - kx\sqrt{2} + k^2} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2 - x^2}\right]\\ \int \frac{x^2\partial x}{X} &= \frac{k^3}{4a\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2 - kx\sqrt{2} + k^2}{x^2 + kx\sqrt{2} + k^2} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^3 - x^2}\right]\end{aligned}\right\}\text{a und b gleiche Zeichen; } k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\partial x}{X} &= \frac{k}{4a}\left[\log\frac{x+k}{x-k} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right]\\ \int \frac{x^2\partial x}{X} &= \frac{k^3}{4a}\left[\log\frac{x+k}{x-k} - 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right]\end{aligned}\right\}\text{a und b ungleiche Zeichen; } k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{4\mu aX^\mu} + \frac{4\mu - 1}{4\mu a}\int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{4\mu aX^\mu} + \frac{4\mu - 3}{4\mu a}\int \frac{x^2\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{4a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{1}{4})_\nu}{\mu_\nu(\mu-\nu)a^\nu X^{\mu-\nu}} + (\mu-\tfrac{1}{4})_\mu\frac{1}{a^\mu}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{4a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{3}{4})_\nu}{\mu_\nu(\mu-\nu)a^\nu X^{\mu-\nu}} + (\mu-\tfrac{3}{4})_\mu\frac{1}{a^\mu}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVIII.

$$X = a + bx^4.$$

Allgemeine Formeln für $\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$ und $\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}$ s. Taf. XXXVII.

$$\int \frac{\partial x}{X} \text{ (s. T. XXXVII.)}$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{4aX} + \frac{3}{4a}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{7}{32aX}\right] + \frac{21}{32a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{11}{96aX^2} + \frac{77}{384a^2X}\right] + \frac{77}{128a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{16X^4} + \frac{5}{64aX^3} + \frac{55}{512a^2X^2} + \frac{385}{2048a^3X}\right] + \frac{1155}{2048a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{20X^5} + \frac{19}{320aX^4} + \frac{19}{256a^2X^3} + \frac{209}{2048a^3X^2} + \frac{1463}{8192a^4X}\right] + \frac{4389}{8192a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X} \text{ (s. T. XXXVII.)}$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{4aX} + \frac{1}{4a}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{5}{32aX}\right] + \frac{5}{32a^2}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{3}{32aX^2} + \frac{15}{128a^2X}\right] + \frac{15}{128a^3}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^5} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{16X^4} + \frac{13}{192aX^3} + \frac{39}{512a^2X^2} + \frac{195}{2048a^3X}\right] + \frac{195}{2048a^4}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^6} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{20X^5} + \frac{17}{320aX^4} + \frac{221}{3804a^2X^3} + \frac{663}{10240a^3X^2} + \frac{663}{8192a^4X}\right] + \frac{663}{8192a^5}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

Tafel XXXIX.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{4\mu bX^\mu} + \frac{1}{4\mu b}\int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^2} = -\frac{x}{4bX} + \frac{1}{4b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{1}{32aX}\right] + \frac{3}{32ab}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{1}{96aX^2} - \frac{7}{384a^2X}\right] + \frac{7}{128a^2b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^2\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^3}{4\mu bX^\mu} + \frac{3}{4\mu b}\int \frac{x^2\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^2} = -\frac{x^3}{4bX} + \frac{3}{4b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^3} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{3}{32aX}\right] + \frac{3}{32ab}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^4} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{1}{32aX^2} - \frac{5}{128a^2X}\right] + \frac{5}{128a^2b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

Tafel XL.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{4\mu X^{\mu}} - \frac{4\mu+1}{4^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{5}{4^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{4b^2X} - \frac{5a}{4b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{9}{32aX}\right] + \frac{5}{32b^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{13}{96aX^2} + \frac{5}{384a^2X}\right] + \frac{5}{128ab^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{4\mu X^{\mu}} - \frac{4\mu+3}{4^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}}\right] + \frac{21}{4^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3b^2} + \frac{ax^3}{4b^2X} - \frac{7a}{4b^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^3} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{11}{32aX}\right] + \frac{21}{32b^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10} \partial x}{X^4} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{5}{32aX^2} + \frac{7}{128a^2X}\right] + \frac{7}{128ab^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

Tafel XLI.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx^3}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; und allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^3}{4a^2X} - \frac{5b}{4a^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{13}{32aX}\right] - \frac{45b}{32a^3}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{7}{32aX^2} + \frac{67}{128a^2X}\right] - \frac{195b}{128a^4}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3a^{\mu+1}x^3} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein: $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+3]\beta_{\nu-1} + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = 3\beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} - \frac{bx}{4a^2X} - \frac{7b}{4a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{15}{32aX}\right] - \frac{77b}{32a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{23}{96aX^2} + \frac{257}{384a^2X}\right] - \frac{385b}{128a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLII.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x}$$
$$+ \frac{b^2x^3}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} + \nu + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{2b}{a^3x} + \frac{b^2x^3}{4a^3X} + \frac{9b^2}{4a^3}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{a^4x} + \frac{b^2x^3}{a^3}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{21}{32aX}\right] + \frac{117b^2}{32a^4}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{4b}{a^5x} + \frac{b^2x^3}{a^3}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{11}{32aX^2} + \frac{151}{128a^2X}\right]$$
$$+ \frac{663b^2}{128a^5}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^8 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{7a^{\mu+1}x^7} + \frac{(\mu+1)b}{3a^{\mu+2}x^3}$$
$$+ \frac{b^2x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+3]\beta_{\nu-1} + \nu + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = 3\beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X} = -\frac{1}{7ax^7} + \frac{b}{3a^2x^3} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^2} = -\frac{1}{7a^2x^7} + \frac{2b}{3a^3x^3} + \frac{b^2x}{4a^3X} + \frac{11b^2}{4a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^3} = -\frac{1}{7a^3x^7} + \frac{b}{a^4x^3} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{23}{32aX}\right] + \frac{165b^2}{32a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^4} = -\frac{1}{7a^4x^7} + \frac{4b}{3a^5x^3} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{35}{96aX^2} + \frac{533}{384a^2X}\right] + \frac{1045b^2}{128a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLIII.

$$X = a + bx^5.$$

a und b positiv oder negativ; $k = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$.

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2kx\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + k^2\right) = P_0 \quad ; \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}}{k - x\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5}} = Q_0\,;$$

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2 + 2kx\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + k^2\right) = P_1 \quad ; \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}}{k + x\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5}} = Q_1.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{2k}{5a}\left[\frac{1}{2}\log(x+k) - P_0\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + P_1\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5} + Q_1\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}\right].$$

$$\int \frac{x\partial x}{X} = \frac{2k^2}{5a}\left[-\frac{1}{2}\log(x+k) - P_0\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + P_1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5} - Q_1\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}\right].$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X} = \frac{2k^3}{5a}\left[\frac{1}{2}\log(x+k) + P_0\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} - P_1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5} - Q_1\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}\right].$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{X} = \frac{2k^4}{5a}\left[-\frac{1}{2}\log(x+k) + P_0\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} - P_1\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5} + Q_1\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}\right].$$

Allgemeine Reductionsformel.

Es sei r eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, so ist:

$$\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu - r}{5\mu a}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^\mu};$$

$$\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{5a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\left(\mu - \frac{r}{5}\right)_\nu}{(\mu-\nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\left(\mu-\frac{r}{5}\right)_\mu}{a^\mu}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

Tafel XLIV.

$$X = a + bx^5.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-1}{5\mu a}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{5aX} + \frac{4}{5a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{9}{50aX}\right] + \frac{18}{25a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{7}{75aX^2} + \frac{21}{125a^2X}\right] + \frac{84}{125a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{20X^4} + \frac{19}{300aX^3} + \frac{133}{1500a^2X^2} + \frac{399}{2500a^3X}\right] + \frac{399}{625a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-2}{5\mu a}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{5aX} + \frac{3}{5a}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^3} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{4}{25aX}\right] + \frac{12}{25a^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^4} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{13}{150aX^2} + \frac{52}{375a^2X}\right] + \frac{52}{125a^3}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-3}{5\mu a}\int\frac{x^2\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{5aX} + \frac{2}{5a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{7}{50aX}\right] + \frac{7}{25a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{2}{25aX^2} + \frac{14}{125a^2X}\right] + \frac{28}{125a^3}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^5} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{20X^4} + \frac{17}{300aX^3} + \frac{17}{250a^2X^2} + \frac{119}{1250a^3X}\right] + \frac{119}{625a^4}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^4}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-4}{5\mu a}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{x^4}{5aX} + \frac{1}{5a}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^3} = \frac{x^4}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{3}{25aX}\right] + \frac{3}{25a^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^4} = \frac{x^4}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{11}{150aX^2} + \frac{11}{125a^2X}\right] + \frac{11}{125a^3}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLV.

$$X = a + bx^5.$$

$(r = 1, 2, 3, 4.)$

$$\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^r}{5\mu b X^\mu} + \frac{r}{5\mu b}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^5\partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^5\partial x}{X^2} = -\frac{x}{5bX} + \frac{1}{5b}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^5\partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{1}{50aX}\right] + \frac{2}{25ab}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^5\partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{150aX^2} - \frac{3}{250a^2X}\right] + \frac{6}{125a^2b}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^2} = -\frac{x^2}{5bX} + \frac{2}{5b}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^3} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{1}{25aX}\right] + \frac{3}{25ab}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^4} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{75aX^2} - \frac{8}{375a^2X}\right] + \frac{8}{125a^2b}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^7\partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a}{b}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^7\partial x}{X^2} = -\frac{x^3}{5bX} + \frac{3}{5b}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^7\partial x}{X^3} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{3}{50aX}\right] + \frac{3}{25ab}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^7\partial x}{X^4} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{50aX^2} - \frac{7}{250a^2X}\right] + \frac{7}{125a^2b}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{a}{b}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^2} = -\frac{x^4}{5bX} + \frac{4}{5b}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^3} = -\frac{x^4}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{2}{25aX}\right] + \frac{2}{25ab}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^4} = -\frac{x^4}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{2}{75aX^2} - \frac{4}{125a^2X}\right] + \frac{4}{125a^2b}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLVI.

$$X = a + bx^5.$$

(r = 1, 2, 3, 4.)

$$\int\frac{x^{r+9}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^{r+9}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^r}{b^2}\left[\frac{1}{5\mu X^{\mu}} - \frac{5\mu+r}{5^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{(5+r)r}{5^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X} = \frac{x^6}{6b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{5b^2X} - \frac{6a}{5b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{11}{50aX}\right] + \frac{3}{25b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{8}{75aX^2} + \frac{1}{125a^2X}\right] + \frac{4}{125ab^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2b^2} + \frac{ax^2}{5b^2X} - \frac{7a}{5b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^3} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{6}{25aX}\right] + \frac{7}{25b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^4} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{17}{150aX^2} + \frac{7}{375a^2X}\right] + \frac{7}{125ab^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X} = \frac{x^8}{8b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3b^2} + \frac{ax^3}{5b^2X} - \frac{8a}{5b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^3} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{13}{50aX}\right] + \frac{12}{25b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^4} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{3}{25aX^2} + \frac{4}{125a^2X}\right] + \frac{8}{125ab^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X} = \frac{x^9}{9b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^2} = \frac{x^4}{4b^2} + \frac{ax^4}{5b^2X} - \frac{9a}{5b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^3} = \frac{ax^4}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{7}{25aX}\right] + \frac{18}{25b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^4} = \frac{ax^4}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{19}{150aX^2} + \frac{6}{125a^2X}\right] + \frac{6}{125ab^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLVII.

$$X = a + bx^5.$$

(r = 1, 2, 3, 4.)

$$\int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(5-r)a^{\mu+1}x^{5-r}} - \frac{bx^r}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^{\nu}X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

$$\beta_0 = \frac{1}{5\mu}\ ;\quad 5(\mu-\nu)\beta_\nu = [5(\mu-\nu)+5-r]\beta_{\nu-1}+1,$$

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1\ ;\quad \gamma = (5-r)\beta_{\mu-1}+1.$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^4}{5a^2X} - \frac{6b}{5a^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx^4}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{8}{25aX}\right] - \frac{33b}{25a^3}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx^4}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{13}{75aX^2} + \frac{51}{125a^2X}\right] - \frac{176b}{125a^4}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{bx^3}{5a^2X} - \frac{7b}{5a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^3x^2} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{17}{50aX}\right] - \frac{42b}{25a^3}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^4} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{9}{50aX^2} + \frac{113}{500a^2X}\right] - \frac{363b}{250a^4}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} - \frac{b}{a}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} - \frac{bx^2}{5a^2X} - \frac{8b}{5a^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{9}{25aX}\right] - \frac{52b}{25a^3}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{14}{75aX^2} + \frac{187}{375a^2X}\right] - \frac{312b}{125a^4}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X} = -\frac{1}{4ax^4} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^2} = -\frac{1}{4a^2x^4} - \frac{bx}{5a^2X} - \frac{9b}{5a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^3} = -\frac{1}{4a^3x^4} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{19}{50aX}\right] - \frac{63b}{25a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^4} = -\frac{1}{4a^4x^4} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{29}{150aX^2} + \frac{137}{250a^2X}\right] - \frac{399b}{125a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLVIII.

$$X = a + bx^6.$$

1. a und b gleiche Zeichen; $k = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{k}{a}\left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{x^2 + kx\sqrt{3} + k^2}{x^2 - kx\sqrt{3} + k^2} + \frac{1}{6} \text{Arc. Tang} \frac{kx}{k^2 - x^2} + \frac{1}{3} \text{Arc. Tang} \frac{x}{k}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{k^5}{a}\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{x^2 + kx\sqrt{3} + k^2}{x^2 - kx\sqrt{3} + k^2} + \frac{1}{6} \text{Arc. Tang} \frac{kx}{k^2 - x^2} + \frac{1}{3} \text{Arc. Tang} \frac{x}{k}\right].$$

2. a und b ungleiche Zeichen; $k = \sqrt[6]{-\frac{a}{b}}$.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{k}{2a}\left[\frac{1}{6} \log \frac{x^2 + kx + k^2}{x^2 - kx + k^2} + \frac{1}{3} \log \frac{x+k}{x-k} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc. Tang} \frac{kx\sqrt{3}}{k^2 - x^2}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{k^5}{2a}\left[\frac{1}{6} \log \frac{x^2 + kx + k^2}{x^2 - kx + k^2} + \frac{1}{3} \log \frac{x+k}{x-k} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc. Tang} \frac{kx\sqrt{3}}{k^2 - x^2}\right].$$

$\int \frac{x \partial x}{X} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{a + bz^3}$, für $z = x^2$, s. T. XXVII; $\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{1}{3} \int \frac{\partial z}{a + bz^2}$, für $z = x^3$, s. T. XIV; $\int \frac{x^3 \partial x}{X} = \frac{1}{2} \int \frac{z \partial z}{a + bz^3}$, für $z = x^2$, s. T. XXX.

$$\int \frac{x^{r-1} \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{6\mu a X^\mu} + \frac{6\mu - r}{6\mu a} \int \frac{x^{r-1} \partial x}{X^\mu} = \frac{x^r}{6a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\left(\mu - \frac{r}{6}\right)_\nu}{(\mu - \nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}}$$

[illegible] $\frac{\left(\mu - \frac{r}{6}\right)_\mu}{a^\mu} \int \frac{x^{r-1} \partial x}{X}$ (r = 1 oder r = 5.)

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{6aX} + \frac{5}{6a} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^2} + \frac{11}{72aX}\right] + \frac{55}{72a^2} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{18X^3} + \frac{17}{216aX^2} + \frac{187}{1296a^2X}\right] + \frac{935}{1296a^3} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = \frac{x^5}{6aX} + \frac{1}{6a} \int \frac{x^4 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = \frac{x^5}{a}\left[\frac{1}{12X^2} + \frac{7}{72aX}\right] + \frac{7}{72a^2} \int \frac{x^4 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = \frac{x^5}{a}\left[\frac{1}{18X^3} + \frac{13}{216aX^2} + \frac{91}{1296a^2X}\right] + \frac{91}{1296a^3} \int \frac{x^4 \partial x}{X}.$$

Tafel XLIX.

$$X = a + bx^n.$$

Allgemeine Formeln zu den vorigen Tafeln.

r eine positive ganze Zahl, kleiner als n.

Reductionsformeln:

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b} \int \frac{x^{m-n} \partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{m-n} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a} \int \frac{\partial x}{x^{m-n} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^m}{n\mu a X^\mu} + \frac{n\mu - m}{n\mu a} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{X^\mu}.$$

Reduction für $\mu + 1 > m$.

$$\int \frac{x^{mn+r-1} \partial x}{X^{\mu+1}} = (-1)^m \frac{a^{m-1} x^r}{b^m} \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\gamma}{b^m} \int \frac{x^{r-1} \partial x}{X^{\mu+1-m}};$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$, $n(\mu - \nu)\beta_\nu = [n(\mu + 1 - \nu) - r]\beta_{\nu-1} + (-1)^\nu m_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} (-1)^\lambda \frac{\left(\mu - \frac{r}{n} - \lambda\right)_{\nu-\lambda}}{(\mu - \lambda)_{\nu-\lambda}} m_\lambda,$$

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots m - 1$; $\gamma = \frac{\left(m - 1 + \frac{r}{n}\right)_m}{\mu_m}$.

$$\int \frac{x^{mn+r-1} \partial x}{X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-\mu-1} \frac{(-1)^\nu (\mu + \nu)_\nu a^\nu x^{(m-\mu-1)\nu+r}}{[(m - \mu - 1)\nu + r] b^{\mu+\nu+1}}$$

$$+ \frac{(-1)^m a^{m-1} x^r}{b^m} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(-1)^m a^{m-\mu} \gamma}{b^m} \int \frac{x^{r-1} \partial x}{X}.$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$, $n(\mu - \nu)\beta_\nu = [n(\mu + 1 - \nu) - r)\beta_{\nu-1} + (-1)^\nu m_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} \frac{(-1)^\lambda \left(\mu - \frac{r}{n} - \lambda\right)_{\nu-\lambda}}{(\mu - \lambda)_{\nu-\lambda}} m_\lambda, \text{ für } \nu = 1, 2 \cdots \mu - 1;$$

Tafel XLIX. Fortsetzung.

$$X = a + b x^n.$$

$\gamma = (n-r)\beta_{\mu-1} + (-1)^\mu m_\mu$, oder auch, wenn $\mu + 1 > m$,

$$(-1)^m \gamma = \frac{\Gamma\left(m+\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\frac{r}{n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\mu+1-m-\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \quad *)$$

$$= \frac{\left[\frac{r}{n}\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(2+\frac{r}{n}\right)\cdots\cdots\left(m-1+\frac{r}{n}\right)\right]\left[\left(1-\frac{r}{n}\right)\left(2-\frac{r}{n}\right)\cdots\cdots\left(\mu-m-\frac{r}{n}\right)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(\mu-1)\cdot\mu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{mn-r+1} X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(-1)^{\nu-1}(\mu+\nu)_\nu b^\nu}{[(m-\nu)n-r]\, a^{\mu+\nu+1} x^{(m-\nu)n-r}}$$

$$+ \frac{(-1)^m b^m x^r}{a^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(-1)^m b^m \gamma}{a^{\mu+m}} \int \frac{x^{r-1}\partial x}{X},$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$; $\quad n(\mu-\nu)\beta_\nu = [n(\mu+1-\nu)-r]\beta_{\nu-1} + (m+\nu-1)_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} \frac{\left(\mu-\frac{r}{n}-\lambda\right)_{\nu-\lambda}}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}} (m+\lambda-1)_\lambda, \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \cdots\cdots \mu-1;$$

$$\gamma = (n-r)\beta_{\mu-1} + (m+\mu-1)_\mu.$$

$$\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{na} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\left(\mu-\frac{r}{n}\right)_\nu}{(\mu-\nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\left(\mu-\frac{r}{n}\right)_\mu}{a^\mu} \int \frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

---

*) Ueber die Bezeichnung Γ s. Taf. III der vierten Abtheilung.

Tafel L.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a + bx^n}.$$

Reduction. Wenn unter a und b positive Grössen verstanden werden und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = k$, $x = ky$ gesetzt wird, so hat man:

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n} = \frac{k^m}{a}\int\frac{y^{m-1}\partial y}{1+y^n}, \quad \int \frac{x^{m-1}\partial x}{a-bx^n} = \frac{k^m}{a}\int\frac{y^{m-1}\partial y}{1-y^n}.$$

In den folgenden Formeln sind m und n, wie bisher, positive ganze Zahlen und $m < n$.

Bezeichnungen: $\frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2x\,\mathrm{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{n} + 1\right) = P_\mu$;

$$\mathrm{Arc.Tang}\,\frac{x\,\mathrm{Sin}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}}{1 - x\,\mathrm{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}} = Q_\mu.$$

1. **n gerade.**

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = -\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \,\mathrm{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n} + \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu\,\mathrm{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = -\frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu\,\mathrm{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu\,\mathrm{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

2. **n ungerade.**

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} P_\mu\,\mathrm{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} Q_\mu\,\mathrm{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

Tafel L. Fortsetzung.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{2(-1)^{m-1}}{n}\log(1+x) - \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

Bezeichnungen: $\frac{1}{2}\log\left(x^2-2x\operatorname{Cos}\frac{2\mu\pi}{n}+1\right) = P_\mu$;

$$\operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{n}}{1-x\operatorname{Cos}\frac{2\mu\pi}{n}} = Q_\mu.$$

1. **n gerade.**

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\log(1-x) - \frac{(-1)^m}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{2\mu m\pi}{n}$$
$$+\frac{2}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1-x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1-x^n} = -\frac{2}{n}\log(1-x) - \frac{2(-1)^m}{n}\log(1+x) - \frac{4}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

2. **n ungerade.**

Für $x = -y$ wird

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^n} = (-1)^m \int \frac{y^{m-1}\partial y}{1+y^n};\quad \text{s. oben.}$$

Anmerkung. Die Formeln dieser Tafel sind besondere Fälle derjenigen der folgenden Tafel, in welcher sie den Werthen 0 und π der Constanten α entsprechen.

Tafel LI.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n + e^{\alpha i}}.$$
$$(i = \sqrt{-1}\ ;\ \mu = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ n-1.)$$

Bezeichn. $P_\mu = \frac{1}{2}\log\left(x^2-2x\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n}+1\right)$;

$$Q_\mu = \operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n}}{1-x\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n}}.$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\alpha i}} = -\frac{1}{n e^{\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} e^{(2\mu+1)\frac{m\pi i}{n}}(P_\mu + iQ_\mu)$$
$$= -\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[P_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} - Q_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right]$$
$$-\frac{i}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[P_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} + Q_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{m-1}(x^n+\operatorname{Cos}\alpha)\partial x}{x^{2n}+2x^n\operatorname{Cos}\alpha+1} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right.$$
$$\left.-P_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^{2n}+2x^n\operatorname{Cos}\alpha+1} = \frac{1}{n\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right.$$
$$\left.+P_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{n+m-1}\partial x}{x^{2n}+2x^n\operatorname{Cos}\alpha+1} = -\frac{1}{n\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi+m\alpha}{n}\right.$$
$$\left.+P_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi+m\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{2n-m-1})\partial x}{x^{2n}+2x^n\operatorname{Cos}\alpha+1} = \frac{2}{n\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} Q_\mu\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{2n-m-1})\partial x}{x^{2n}+2x^n\operatorname{Cos}\alpha+1} = \frac{2}{n\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} P_\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}.$$

Anmerkung. Die erste Gleichung ergiebt sich durch Zerlegung des Ausdrucks $\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha i}}$ in einfache Brüche; die zweite und dritte folgen aus der ersten durch Trennung des imaginären Theils vom reellen; die vierte folgt aus der Verbindung der zweiten und dritten, und zeigt, dass die dritte Gleichung auch richtig bleibt, wenn in ihr $n+m$ statt m gesetzt wird, oder m überhaupt kleiner als $2n$ ist; die fünfte und sechste Gleichung folgen aus der dritten.

Tafel LII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta X^{\mu}} + \frac{2(2\mu-1)c}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{1}{2})_{\nu}}{(\mu-1)_{\nu}}\left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\nu}\frac{1}{X^{\mu-\nu}} + (\mu-\tfrac{1}{2})_{\mu}\left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\mu}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\,\text{Arc. Tang}\,\frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{wenn } \Delta \text{ positiv ist.}$$

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\partial x}{X} &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\log\frac{2cx+b-\sqrt{-\Delta}}{2cx+b+\sqrt{-\Delta}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\log\frac{2cx+b-\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{X}}\\ &= \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\,\text{Arc. Cotang}\,\frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}}\end{aligned}\right\}, \quad \text{wenn } \Delta \text{ negativ ist.}$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{2cx+b}{\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] + \frac{6c^2}{\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{3X^3} + \frac{5c}{3\Delta X^2} + \frac{10c^2}{\Delta^2 X}\right] + \frac{20c^3}{\Delta^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^5} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{4X^4} + \frac{7c}{6\Delta X^3} + \frac{35c^2}{6\Delta^2 X^2} + \frac{35c^3}{\Delta^3 X}\right] + \frac{70c^4}{\Delta^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^6} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{5X^5} + \frac{9c}{10\Delta X^4} + \frac{21c^2}{5\Delta^2 X^3} + \frac{21c^3}{\Delta^3 X^2} + \frac{126c^4}{\Delta^4 X}\right] + \frac{252c^5}{\Delta^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^7} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{6X^6} + \frac{11c}{15\Delta X^5} + \frac{33c^2}{10\Delta^2 X^4} + \frac{77c^3}{5\Delta^3 X^3} + \frac{77c^4}{\Delta^4 X^2} + \frac{462c^5}{\Delta^5 X}\right] + \frac{924c^6}{\Delta^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel LIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2\mu c X^{\mu}} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bx+2a}{\mu\Delta X^{\mu}} - \frac{(2\mu-1)b}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X} = \frac{1}{2c}\log X - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^2} = -\frac{bx+2a}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^3} = -\frac{bx+2a}{2\Delta X^2} - \frac{3b(2cx+b)}{2\Delta^2 X} - \frac{3bc}{\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^4} = -\frac{bx+2a}{3\Delta X^3} - \frac{5b(2cx+b)}{3\Delta^2}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] - \frac{10bc^2}{\Delta^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{(2\mu-1)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-1)b}{(2\mu-1)c}\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{a}{(2\mu-1)c}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-\frac{x}{c} + \frac{(\mu-1)b}{2\mu c^2}\right]\frac{1}{(2\mu-1)X^{\mu}} + \frac{2ac+(\mu-1)b^2}{2(2\mu-1)c^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{\mu c\Delta X^{\mu}} + \frac{2ac+(\mu-1)b^2}{\mu c\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\log X + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{c\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{2c\Delta X^2} + \frac{(2ac+b^2)(2cx+b)}{2c\Delta^2 X} + \frac{2ac+b^2}{\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{3c\Delta X^3} + \frac{2(ac+b^2)(2cx+b)}{3c\Delta^2}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] + \frac{4(ac+b^2)c}{\Delta^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel LIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu}} - \frac{b}{c}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^2}{2(\mu-1)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-2)b}{2(\mu-1)c}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{a}{(\mu-1)c}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = &-\frac{1}{2\mu c^2X^{\mu-1}} + \left[\frac{3bx}{(2\mu-1)c^2} + \frac{a}{\mu c^2} - \frac{(\mu-2)b^2}{2\mu(2\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{2X^{\mu}}\\ &-\frac{6ac+(\mu-2)b^2}{4(2\mu-1)c^3}b\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = &\left[-\frac{x^2}{c} + \frac{(\mu-2)bx}{(2\mu-1)c^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)}\cdot\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{\mu c^2}\right]\frac{1}{2(\mu-1)X^{\mu}}\\ &-\frac{6ac+(\mu-2)b^2}{4(2\mu-1)c^3}b\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = &\left[-\frac{x^2}{c} + \frac{2(\mu-3)ac-(\mu-2)b^2}{\mu c^2\Delta}bx - \frac{4ac+(\mu-2)b^2}{\mu c^2\Delta}a\right]\frac{1}{2(\mu-1)X^{\mu}}\\ &-\frac{6ac+(\mu-2)b^2}{2\mu c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.\end{aligned}$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2-ac}{2c^3}\log X + \frac{3ac-b^2}{2c^3}b\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{1}{2c^2}\log X + \frac{(3ac-b^2)bx+(2ac-b^2)a}{c^2\Delta X} - \frac{6ac-b^2}{2c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^3} = \left[-\frac{x^2}{c} - \frac{abx}{c\Delta} - \frac{2a^2}{c\Delta}\right]\frac{1}{2X^2} - \frac{3ab}{2c\Delta}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^4} = \left[-\frac{x^2}{c} - \frac{b^3x}{3c^2\Delta} - \frac{4ac+b^2}{3c^2\Delta}a\right]\frac{1}{4X^3} - \frac{6ac+b^2}{6c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X^8}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^5} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{(ac-b^2)bx}{2c^2\Delta} - \frac{2ac+b^2}{2c^2\Delta}\right]\frac{1}{6X^4} - \frac{3ac+b^2}{4c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^6} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{4ac-3b^2}{5c^2\Delta}bx - \frac{4ac+3b^2}{5c^2\Delta}\right]\frac{1}{8X^5} - \frac{6ac+3b^2}{10c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

Tafel LV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^3}{(2\mu-3)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-3)b}{(2\mu-3)c}\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{3a}{(2\mu-3)c}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = &\left[-\frac{x}{c^2} + \frac{(3\mu-5)b}{2(\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-3)X^{\mu-1}} + \left[\left(-\frac{(7\mu-11)b^2}{2c^3} + \frac{2(\mu-2)a}{c^2}\right)x\right.\\ &\left.+\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{4\mu c^4}b^3 - \frac{3(\mu-1)^2ab}{\mu c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)X^{\mu}} + \left[\frac{3a^2}{c^2}\right.\\ &\left.+\frac{3(\mu-2)ab^2}{c^3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^4}{4c^4}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = &\left[-x^3 + \frac{(\mu-3)bx^2}{2(\mu-1)c} - \left(\frac{3a}{(2\mu-1)c} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^2}{2(2\mu-1)(\mu-1)c^2}\right)x\right.\\ &\left.+\frac{(5\mu-3)(\mu-2)ab}{2\mu(2\mu-1)(\mu-1)c^2} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^3}{4\mu(2\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-3)cX^{\mu}} + \left[\frac{3a^2}{c^2}\right.\\ &\left.+\frac{3(\mu-2)ab^2}{c^3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^4}{4c^4}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.\end{aligned}$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx^2}{2c^2} + \frac{b^2-ac}{c^3}x + \frac{(2ac-b^2)b}{2c^4}\log X + \frac{2a^2c^2-4ab^2c+b^4}{2c^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4\partial x}{X^2} = &\frac{x}{c^2} + \left[2\left(\frac{a}{c^2} - \frac{b^2}{c^3}\right)x + \frac{b^3}{2c^4}\right]\frac{1}{X} - \frac{b}{c^3}\log X - \left[\frac{b^4}{2c^4} - \frac{3ab^2}{c^3}\right.\\ &\left.+\frac{3a^2}{c^2}\right]\int\frac{\partial x}{X^2}.\end{aligned}$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^3} = -\left[\frac{x^3}{c} + \frac{bx^2}{2c^2} + \frac{ax}{c^2}\right]\frac{1}{X^2} + \frac{a^2}{c^2}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^3}{3c} + \frac{ax}{5c^2} - \frac{ab}{15c^3}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{a^2}{5c^2} + \frac{ab^2}{5c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4\partial x}{X^5} = &\left[-\frac{x^3}{5c} + \frac{bx^2}{30c^2} - \left(\frac{3a}{35c^2} + \frac{b^2}{105c^3}\right)x + \frac{17ab}{420c^3} + \frac{b^3}{280c^4}\right]\frac{1}{X^4}\\ &+\left[\frac{3a^2}{c^2} + \frac{6ab^2}{c^3} + \frac{b^4}{2c^4}\right]\frac{1}{35}\int\frac{\partial x}{X^5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4\partial x}{X^6} = &\left[-\frac{x^8}{7c} + \frac{6x^2}{28c^2} - \left(\frac{a}{21c^2} + \frac{b^2}{84c^8}\right)x + \frac{11ab}{420c^2} + \frac{b^8}{210c^3}\right]\frac{1}{X^5}\\ &+\left[\frac{3a^2}{c^2} + \frac{9ab^2}{c^8} + \frac{3b^4}{2c^4}\right]\frac{1}{63}\int\frac{\partial x}{X^6}.\end{aligned}$$

Tafel LVI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^4}{2(\mu-2)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-4)b}{2(\mu-2)c}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{2a}{(\mu-2)c}\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}}.\,{}^{*)}$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X} = \frac{x^4}{4c} - \frac{bx^3}{3c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{b^3}{c^4} - \frac{2ab}{c^3}\right)x + \left[\frac{b^4}{2c^5} - \frac{3ab^2}{2c^4} + \frac{a^2}{2c^3}\right]\log X - \left[\frac{b^5}{2c^5} - \frac{5ab^3}{2c^4} + \frac{5a^2b}{2c^3}\right]\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2c^2} - \frac{2bx}{c^3} + \left(\frac{3b^2}{2c^4} - \frac{a}{c^3}\right)\log X + \left[\left(\frac{5b^3}{2c^4} - \frac{5ab}{c^3}\right)x + \frac{3b^4}{4c^5} - \frac{ab^2}{c^4} - \frac{a^2}{2c^3}\right]\frac{1}{X} + \left[\frac{3b^5}{4c^5} - \frac{5ab^3}{c^4} + \frac{15a^2b}{2c^3}\right]\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^3} = \frac{1}{2c^3}\log X + \left[\frac{5bx^3}{2c^2} + \left(\frac{9b^2}{4c^3} + \frac{a}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{b^3}{6c^4} + \frac{7ab}{2c^3}\right)x - \frac{b^4}{24c^5} + \frac{ab^2}{2c^4} + \frac{3a^2}{4c^3}\right]\frac{1}{X^2} - \left[\frac{b^5}{12c^5} - \frac{5ab^3}{6c^4} + \frac{5a^2b}{2c^3}\right]\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^4}{2c} + \frac{bx^3}{6c^2} + \frac{ax^2}{2c^2} + \frac{a^2}{6c^3}\right]\frac{1}{X^3} - \frac{a^2b}{2c^3}\int \frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^5} = -\left[\frac{x^4}{4c} + \frac{ax^2}{6c^2} - \frac{abx}{21c^3} + \frac{ab^2}{56c^4} + \frac{a^2}{24c^3}\right]\frac{1}{X^4} - \left(\frac{ab^3}{14c^4} + \frac{3a^2b}{14c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^5}.$$

---

*) Die vollständige Entwickelung der allgemeinen Formel ist hier und auf der folgenden Tafel ihrer Weitläufigkeit wegen unterblieben.

Tafel LVII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^5}{(2\mu-5)cX^{\mu}} - \frac{\mu-5}{2\mu-5}\cdot\frac{b}{c}\int \frac{x^5 \partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{5a}{(2\mu-5)c}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{x^5}{5c} - \frac{bx^4}{4c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{b^3}{c^4} - \frac{2ab}{c^3}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{b^4}{c^5} - \frac{3ab^2}{c^4} + \frac{a^2}{c^3}\right)x - \left(\frac{b^5}{2c^6} - \frac{2ab^3}{c^5} + \frac{3a^2b}{2c^4}\right)\log X + \left(\frac{b^6}{2c^6} - \frac{3ab^4}{c^5} + \frac{9a^2b^2}{2c^4} - \frac{a^3}{c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3c^2} - \frac{bx^2}{c^3} + \left(\frac{3b^2}{c^4} - \frac{2a}{c^3}\right)x - \left(\frac{2b^3}{c^5} - \frac{3ab}{c^4}\right)\log X - \left[\left(\frac{3b^4}{c^5} - \frac{9ab^2}{c^4} + \frac{3a^2}{c^3}\right)x + \frac{b^5}{c^6} - \frac{5ab^3}{2c^5}\right]\frac{1}{X} - \left(\frac{b^6}{c^6} - \frac{15ab^4}{2c^5} + \frac{15a^2b^2}{c^4} - \frac{5a^3}{c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = \frac{x}{c^3} - \frac{3b}{2c^4}\log X - \left[\left(\frac{9b^2}{2c^3} - \frac{3a}{c^2}\right)x^3 + \left(\frac{19b^3}{4c^4} - \frac{3ab}{2c^3}\right)x^2 + \left(\frac{b^4}{2c^5} + \frac{13ab^2}{2c^4} - \frac{4a^2}{c^3}\right)x - \frac{b^5}{8c^6} + \frac{3ab^3}{2c^5} + \frac{a^2b}{4c^4}\right]\frac{1}{X^2} + \left(\frac{b^6}{4c^6} - \frac{5ab^4}{2c^5} + \frac{15a^2b^2}{2c^4} - \frac{5a^3}{c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^5}{c} + \frac{bx^4}{c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} + \frac{5a}{c^2}\right)\frac{x^3}{3} + \frac{abx^2}{c^3} + \frac{a^2x}{c^3}\right]\frac{1}{X^3} + \frac{a^3}{c^3}\int \frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^5} = -\left[\frac{x^5}{3c} + \frac{bx^4}{12c^2} + \frac{ax^3}{3c^2} + \frac{a^2x}{7c^3} - \frac{3a^2b}{56c^4}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{3a^2b^2}{14c^4} + \frac{a^3}{7c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^6} = -\left[\frac{x^5}{5c} + \frac{ax^3}{7c^2} - \frac{abx^2}{28c^3} + \left(\frac{ab^2}{84c^4} + \frac{a^2}{21c^3}\right)x - \frac{ab^3}{210c^5} - \frac{11a^2b}{420c^4}\right]\frac{1}{X^5} + \left(\frac{ab^4}{420c^5} + \frac{a^2b^2}{7c^4} + \frac{a^3}{21c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LVIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

Allgemeine Formeln zu Tafel LII bis LVII.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta X^{\mu}} + \frac{2(2\mu-1)c}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}. \quad \text{s. Taf. LII.}$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2\mu c X^{\mu}} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}. \quad \text{s. Taf. LIII.}$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-1}}{(2\mu-m+1)cX^{\mu}} - \frac{\mu-m+1}{2\mu-m+1}\cdot\frac{b}{c}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{m-1}{2\mu-m+1}\cdot\frac{a}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{X^{\mu}}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}(\alpha_\nu x^{m-\nu}) + \beta\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta$ folgen aus den Gleichungen:

$(m-2\mu-1)c\alpha_1 = 1$, $(m-2\mu-2)c\alpha_2 + (m-\mu-1)b\alpha_1 = 0$,

$(m-2\mu-\nu)c\alpha_\nu + (m-\mu-\nu+1)b\alpha_{\nu-1} + (m-\nu+2)a\alpha_{\nu-2} = 0$;

(für $\nu = 3, 4, \cdots m$)

und $\beta = \mu b\alpha_m - a\alpha_{m-1}$.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1}\frac{(\mu-\frac{1}{2})_\nu}{(\mu-1)_\nu}\left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\nu}\frac{1}{X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\lambda}{\mu_\lambda}\left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\lambda}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-\lambda+1}}.$$

In dieser Formel kann für λ jede ganze Zahl zwischen 1 und μ genommen werden. Für $\lambda = \mu$ erhält man die Formel in Tafel LII.

Tafel LIX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$; $q = \frac{ac}{\Delta}$.

Reductionen. $$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2\mu a X^{\mu}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2a^{\mu+1}}\log\frac{x^2}{X} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\frac{1}{2\nu a^{\mu-\nu+1}X^{\nu}} - \frac{b}{2a^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu+1}a^{\nu-1}\int\frac{\partial x}{X^{\nu}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2a^{\mu+1}}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^{\mu}}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\left[\frac{1}{\nu} - \frac{b(2cx+b)\alpha_\nu}{\Delta}\right]\frac{a^{\nu-1}}{X^{\nu}} - \frac{b\beta}{2a^{\mu+1}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëffic. sind: $\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-\nu}\frac{(\nu+\lambda-\frac{1}{2})_\lambda}{(\nu+\lambda-1)_\lambda}\cdot\frac{4^\lambda q^\lambda}{\nu+\lambda}$; $\beta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu}(\lambda-\frac{1}{2})_\lambda 4^\lambda q^\lambda$; *)

für $\lambda = 1, 2, 3 \cdots \mu$. Man hat auch

$2(2\nu-1)q\alpha_\nu = (\nu-1)\alpha_{\nu-1} - 1$, für $\nu = 2, 3 \cdots \mu$ und $2q\alpha_1 = \beta - 1$.

$$\int\frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2} = \frac{1}{2a^2}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2aX}\left[1 - \frac{b(2cx+b)}{\Delta}\right] - \frac{b}{2a^2}(1+2q)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^3} = \frac{1}{2a^3}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^2X}\left[1 + \frac{a}{2X}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^2\Delta X}\left[1 + 3q + \frac{a}{2X}\right] - \frac{b}{2a^3}\left[1 + 2q + 6q^2\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^4} = \frac{1}{2a^4}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^3X}\left[1 + \frac{a}{2X} + \frac{a^2}{3X^2}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^3\Delta X}\left[1 + 3q + 10q^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5q}{3}\right)\frac{a}{X} + \frac{a^2}{3X^2}\right] - \frac{b}{2a^4}\left[1 + 2q + 6q^2 + 20q^3\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^5} = \frac{1}{2a^5}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^4X}\left[1 + \frac{a}{2X} + \frac{a^2}{3X^2} + \frac{a^3}{4X^3}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^4\Delta X}\left[1 + 3q + 10q^2 + 35q^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5q}{3} + \frac{35q^2}{6}\right)\frac{a}{X} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7q}{6}\right)\frac{a^2}{X^2} + \frac{a^3}{4X^3}\right] - \frac{b}{2a^5}\left[1 + 2q + 6q^2 + 20q^3 + 70q^4\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

*) Statt dessen kann man auch schreiben $\beta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu}(-\frac{1}{2})_\lambda(-4q)^\lambda$; d. h. β entsteht aus der Entwicklung von $(1-4q)^{-\frac{1}{2}}$.

Tafel LX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2.$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{axX^{\mu}} - \frac{(\mu+1)b}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+1)c}{a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{(\mu+1)b}{2\mu a^2} + \left(\frac{(2\mu+1)c}{\mu a} - \frac{(\mu+1)b^2}{2\mu a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^{\mu}}$$
$$- \frac{(\mu+1)b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}} + \left(\frac{(\mu+1)b^2}{\mu a^2} - \frac{2(2\mu+1)c}{\mu a}\right)\frac{(2\mu-1)c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2 X} = \frac{b}{2a^2}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{ax} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2 X^2} = \frac{b}{a^3}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{a^2x} + \left[\frac{b^3}{a^2} - \frac{3bc}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)cx\right]\frac{1}{\Delta X}$$
$$-\left(\frac{b^4}{a^3} - \frac{6b^2c}{a^2} + \frac{6c^2}{a}\right)\frac{1}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{3b}{4a^2} + \left(\frac{5c}{2a} - \frac{3b^2}{4a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^2} - \frac{3b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^2}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{2a^2} - \frac{5c}{a}\right)\frac{3c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{2b}{3a^2} + \left(\frac{7c}{3a} - \frac{2b^2}{3a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^3} - \frac{4b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^3}$$
$$+\left(\frac{2b^2}{3a^2} - \frac{7c}{3a}\right)\frac{10c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^5} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{5b}{8a^2} + \left(\frac{9c}{4a} - \frac{5b^2}{8a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^4} - \frac{5b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^4}$$
$$+\left(\frac{5b^2}{4a^2} - \frac{9c}{2a}\right)\frac{7c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^6} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{3b}{5a^2} + \left(\frac{11c}{5a} - \frac{3b^2}{5a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^5} - \frac{6b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^5}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{5a^2} - \frac{11c}{5a}\right)\frac{18c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^7} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{7b}{12a^2} + \left(\frac{13c}{6a} - \frac{7b^2}{12a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^6} - \frac{7b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^6}$$
$$+\left(\frac{7b^2}{6a^2} - \frac{13c}{3a}\right)\frac{11c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LXI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2.$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2ax^2X^{\mu}} - \frac{\mu+2}{2}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+1)c}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{(\mu+2)b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^{\mu}} + (\mu+1)\left(\frac{(\mu+2)b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}$$
$$+\frac{(\mu+2)(2\mu+1)bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2x} + \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right)\log\frac{x^2}{X} + \left(\frac{3bc}{2a^2} - \frac{b^3}{2a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X} + \left(\frac{3b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^2} + \frac{9bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^3} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^2} + \left(\frac{6b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^3} + \frac{10bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^4} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{10b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^4} + \frac{35bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^5} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{15b^2}{a^2} - \frac{5c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^5} + \frac{27bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^6} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{7b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^5} + \left(\frac{21b^2}{a^2} - \frac{6c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^6} + \frac{77bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^7} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{4b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^6} + \left(\frac{28b^2}{a^2} - \frac{7c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^7} + \frac{52bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^7}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^8} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{9b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^7} + \left(\frac{36b^2}{a^2} - \frac{8c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^8} + \frac{135bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^8}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^9} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^8} + \left(\frac{45b^2}{a^2} - \frac{9c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^9} + \frac{85bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^9}.$$

Tafel LXII. $X = a + bx + cx^2.$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2.$

$$\int\frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3ax^3X^{\mu}} - \frac{(\mu+3)b}{3a}\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+3)c}{3a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{(\mu+3)b}{6a^2x^2} + \left(\frac{(2\mu+3)c}{3a^2} - \frac{(\mu+2)(\mu+3)b^2}{6a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^{\mu}}$$
$$+ (\mu+1)(\mu+2)\left(\frac{bc}{a^2} - \frac{(\mu+3)b^3}{6a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}$$
$$+ (2\mu+1)\left(\frac{(2\mu+3)c^2}{3a^2} - \frac{(\mu+2)(\mu+3)b^2c}{6a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = \left(\frac{bc}{a^3} - \frac{b^3}{2a^4}\right)\log\frac{x^2}{X} - \frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2x^2} - \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right)\frac{1}{x}$$
$$+ \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{2b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{2a^4}\right)\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x^2} + \left(\frac{5c}{3a^2} - \frac{2b^2}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X} + \left(\frac{6bc}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^2}$$
$$+ \left(\frac{5c}{a^2} - \frac{6b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^2}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{6a^2x^2} + \left(\frac{7c}{3a^2} - \frac{10b^2}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^2} + \left(\frac{12bc}{a^2} - \frac{10b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^3}$$
$$+ \left(\frac{35c^2}{3a^2} - \frac{50b^2c}{3a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^3}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^4} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x^2} + \left(\frac{3c}{a^2} - \frac{5b^2}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{20bc}{a^2} - \frac{20b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^4}$$
$$+ \left(\frac{21c^2}{a^2} - \frac{35b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^4}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^5} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{6a^2x^2} + \left(\frac{11c}{3a^2} - \frac{7b^3}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{30bc}{a^2} - \frac{35b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^5}$$
$$+ \left(\frac{33c^2}{a^2} - \frac{63b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^5}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^6} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{4b}{3a^2x^2} + \left(\frac{13c}{3a^2} - \frac{28b^2}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^5} + \left(\frac{42bc}{a^2} - \frac{56b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^6}$$
$$+ \left(\frac{143c^2}{3a^2} - \frac{308b^2c}{3a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^6}\,.$$

Tafel LXIII.

$X = a + bx + cx^2.$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2.$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^{\mu+1}} = -\frac{1}{4ax^4X^{\mu}} - \frac{(\mu+4)b}{4a}\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+2)c}{2a}\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^{\mu+1}} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{(\mu+4)b}{12a^2x^3} + \left(\frac{(\mu+2)c}{4a^2} - \frac{(\mu+3)(\mu+4)b^2}{24a^3}\right)\frac{1}{x^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)b^3}{24a^4} - \frac{(5\mu^2+23\mu+24)bc}{12a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^{\mu}}$$
$$+ (\mu+1)(\mu+2)\left(\frac{(\mu+3)(\mu+4)b^4}{24a^4} - \frac{(\mu+3)b^2c}{2a^3} + \frac{c^2}{2a^2}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$
$$+ (2\mu+1)\left(\frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)b^3c}{24a^4} - \frac{(5\mu^2+23\mu+24)bc^2}{12a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X} = \left(\frac{b^4}{2a^5} - \frac{3b^2c}{2a^4} + \frac{c^2}{2a^3}\right)\log\frac{x^2}{X} - \frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2x^3} - \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right)\frac{1}{x^2}$$
$$- \left(\frac{2bc}{a^3} - \frac{b^3}{a^4}\right)\frac{1}{x} - \left(\frac{b^5}{2a^5} - \frac{5b^3c}{2a^4} + \frac{5bc^2}{2a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^2} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{12a^2x^3} + \left(\frac{3c}{4a^2} - \frac{5b^2}{6a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{2a^4} - \frac{13bc}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X}$$
$$+ \left(\frac{5b^4}{a^4} - \frac{12b^2c}{a^3} + \frac{3c^2}{a^2}\right)\int\frac{\partial x}{xX^2} + \left(\frac{15b^3c}{2a^4} - \frac{13bc^2}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^2}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^3} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^3} + \left(\frac{c}{a^2} - \frac{5b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{a^4} - \frac{15bc}{2a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^2}$$
$$+ \left(\frac{15b^4}{a^4} - \frac{30b^2c}{a^3} + \frac{6c^2}{a^2}\right)\int\frac{\partial x}{xX^3} + \left(\frac{25b^3c}{a^4} - \frac{75bc^2}{2a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^3}\,.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^4} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{12a^2x^3} + \left(\frac{5c}{4a^2} - \frac{7b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{35b^3}{4a^4} - \frac{23bc}{2a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^3}$$
$$+ \left(\frac{35b^4}{a^4} - \frac{60b^2c}{a^3} + \frac{10c^2}{a^2}\right)\int\frac{\partial x}{xX^4} + \left(\frac{245b^3c}{4a^4} - \frac{161bc^2}{2a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

Tafel LXIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel LIX bis LXIII.

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}X^\mu} - \frac{\mu+m-1}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\mu+1}}$$
$$-\frac{2\mu+m-1}{m-1}\cdot\frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{X^\mu}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{\alpha_\nu}{x^{m-\nu}} + \beta\int\frac{\partial x}{x X^{\mu+1}} + \gamma\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(m-1)a\alpha_1 + 1 = 0 \quad , \quad (m-2)a\alpha_2 + (\mu+m-1)b\alpha_1 = 0,$$
$$(m-\nu-1)\,a\alpha_{\nu+1} + (\mu+m-\nu)\,b\alpha_\nu + (2\mu+m-\nu+1)\,c\alpha_{\nu-1} = 0,$$
$$(\text{für } \nu = 2,\ 3,\ \cdots\ m-2)$$

$$\beta = (\mu+1)[b\alpha_{m-1} + 2c\alpha_{m-2}] \quad \text{und} \quad \gamma = (2\mu+1)c\alpha_{m-1}.$$

Tafel LXV.

$$X = a + bx^2 + cx^4$$

---

1. $b^2 - 4ac$ positiv. Bez. $\sqrt{b^2-4ac} = g$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b+g}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b+g}.$$

2. $b^2 - 4ac$ negativ. Bez. $q = \sqrt[4]{\frac{a}{c}}$; $\operatorname{Cos}\varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{8cq^3\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}}\log\frac{x^2+2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2}{x^2-2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2} + \frac{1}{4cq^3\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2qx\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}{q^2-x^2}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{1}{8cq\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}}\log\frac{x^2-2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2}{x^2+2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2} + \frac{1}{4cq\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2qx\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}{q^2-x^2}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-4}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-4}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-4}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^2+b)x^{m-1}}{2\mu(4ac-b^2)X^\mu} + \frac{(4\mu-m-1)c}{\mu(4ac-b^2)}\int\frac{x^m\partial x}{X^\mu}$$
$$-\frac{(m-1)b}{2\mu(4ac-b^2)}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{bcx^2+b^2-2ac}{2\mu a(b^2-4ac)x^{m-1}X^\mu} + \frac{(4\mu+m-3)bc}{2\mu a(b^2-4ac)}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^\mu}$$
$$+\frac{(2\mu+m-1)b^2-2(4\mu+m-1)ac}{2\mu a(b^2-4ac)}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu}.$$

Tafel LXVI.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^3 + (b^2 - 2ac)x}{2\mu a \Delta X^{\mu}} - \frac{(4\mu - 3)bc}{2\mu a \Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu}} + \frac{2(4\mu - 1)ac - (2\mu - 1)b^2}{2\mu a \Delta}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^3 + bx}{2\mu \Delta X^{\mu}} + \frac{(4\mu - 3)c}{\mu \Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{b}{2\mu \Delta}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$\int \frac{\partial x}{X}$ und $\int \frac{x^2 \partial x}{X}$ s. vorige Tafel.

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^3 + (b^2 - 2ac)x}{2a\Delta X} - \frac{bc}{2a\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X} + \frac{6ac - b^2}{2a\Delta}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^2} = \frac{2cx^3 + bx}{2\Delta X} + \frac{c}{\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X} - \frac{b}{2\Delta}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = -\frac{bcx^3 + (b^2 - 2ac)x}{4a\Delta X^2} + \frac{3(b^2 - 8ac)bcx^3 + (3b^4 - 25ab^2c + 28a^2c^2)x}{8a^2\Delta^2 X} + \frac{3(b^2 - 8ac)bc}{8a^2\Delta^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X} + \frac{3(b^4 - 9ab^2c + 28a^2c^2)}{8a^2\Delta^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} = \frac{2cx^3 + bx}{4\Delta X^2} + \frac{(b^2 + 20ac)cx^3 + (b^2 + 8ac)bx}{8a\Delta^2 X} + \frac{(b^2 + 20ac)c}{8a\Delta^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X} + \frac{(b^2 - 16ac)b}{8a\Delta^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = -\frac{bcx^3 + (b^2 - 2ac)x}{6a\Delta X^3} - \frac{3bc}{2a\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} - \frac{5b^2 - 22ac}{6a\Delta}\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^4} = \frac{2cx^3 + bx}{6\Delta X^3} + \frac{3c}{\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} - \frac{b}{6\Delta}\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

Tafel LXVII.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^2 + b)x^3}{2\mu \Delta X^{\mu}} + \frac{(4\mu - 5)c}{\mu \Delta}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{3b}{2\mu \Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{x}{c} - \frac{a}{c}\int \frac{\partial x}{X} - \frac{b}{c}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = -\frac{bx^3 + 2ax}{2\Delta X} + \frac{a}{\Delta}\int \frac{\partial x}{X} - \frac{b}{2\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = \frac{2cx^5 + bx^3}{4\Delta X^2} - \frac{12bcx^3 + 3(b^2 + 4ac)x}{8\Delta^2 X} + \frac{3(b^2 + 4ac)}{8\Delta^2}\int \frac{\partial x}{X} - \frac{3bc}{2\Delta^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^7 + bx^5}{2\mu \Delta X^{\mu}} + \frac{(4\mu - 7)c}{\mu \Delta}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{5b}{2\mu \Delta}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{ab}{c^2}\int \frac{\partial x}{X} + \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{a}{c}\right)\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = \frac{(b^2 - 2ac)x^3 + abx}{2c\Delta X} - \frac{ab}{2c\Delta}\int \frac{\partial x}{X} + \frac{6ac - b^2}{2c\Delta}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = \frac{2cx^7 + bx^5}{4\Delta X^2} + \frac{(7b^2 - 4ac)x^3 + 12abx}{8\Delta^2 X} - \frac{3ab}{2\Delta^2}\int \frac{\partial x}{X} + \frac{3(b^2 + 4ac)}{8\Delta^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

Tafel LXVIII.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = \frac{2cx^2+b}{2\mu\Delta x^3X^\mu} + \frac{(4\mu+1)c}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^\mu} + \frac{3b}{2\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{2\mu a\Delta x^3X^\mu} - \frac{(4\mu+1)bc}{2\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^\mu} + \frac{2(4\mu+3)ac-(2\mu+3)b^2}{2\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X} - \frac{c}{a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x} + \left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{X} + \frac{bc}{a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = \frac{2cx^2+b}{2\Delta x^3X} - \frac{b}{2a\Delta x^3} - \frac{3b^2+10ac}{2a^2\Delta x} - \frac{3b^3+7abc}{2a^2\Delta}\int\frac{\partial x}{X} + \frac{(3b^2-10ac)c}{2a^2\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{2a\Delta x^3X} + \frac{5b^2-14ac}{6a^2\Delta x^3} + \frac{19abc-5b^3}{2a^3\Delta x} + \frac{24ab^2c-14a^2c^2-5b^4}{2a^3\Delta}\int\frac{\partial x}{X} + \frac{(19ac-5b^2)bc}{2a^3\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = \frac{2cx^2+b}{4\Delta x^3X^2} + \frac{9c}{2\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^2} + \frac{3b}{4\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{4a\Delta x^3X^2} - \frac{5bc}{4a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^2} + \frac{22ac-7b^2}{4a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^2}.$$

Tafel LXIX.

$$X = a + bx^3 + cx^6.$$

1. b^2-4ac positiv. Bez. $\sqrt{b^2-4ac} = g$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

2. b^2-4ac negativ. Bez. $q = \sqrt[6]{\frac{a}{c}}$, $\operatorname{Cos}\varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$,

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{3}(2\pi+\varepsilon), \quad \varepsilon_2 = \tfrac{1}{3}(4\pi+\varepsilon),$$

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2-2qx\operatorname{Cos}\varepsilon_0+q^2) = P_0, \quad \tfrac{1}{2}\log(x^2-2qx\operatorname{Cos}\varepsilon_1+q^2) = P_1;$$
$$\tfrac{1}{2}\log(x^2-2qx\operatorname{Cos}\varepsilon_2+q^2) = P_2.$$

$$\operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\varepsilon_0}{q-x\operatorname{Cos}\varepsilon_0} = Q_0, \quad \operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\varepsilon_1}{q-x\operatorname{Cos}\varepsilon_1} = Q_1$$
$$\operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\varepsilon_2}{q-x\operatorname{Cos}\varepsilon_2} = Q_2.$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^5\operatorname{Sin}\varepsilon}\begin{bmatrix}-P_0\operatorname{Sin}2\varepsilon_0 - P_1\operatorname{Sin}2\varepsilon_1 - P_2\operatorname{Sin}2\varepsilon_2\\ +Q_0\operatorname{Cos}2\varepsilon_0 + Q_1\operatorname{Cos}2\varepsilon_1 + Q_2\operatorname{Cos}2\varepsilon_2\end{bmatrix}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^4\operatorname{Sin}\varepsilon}\begin{bmatrix}-P_0\operatorname{Sin}\varepsilon_0 - P_1\operatorname{Sin}\varepsilon_1 - P_2\operatorname{Sin}\varepsilon_2\\ +Q_0\operatorname{Cos}\varepsilon_0 + Q_1\operatorname{Cos}\varepsilon_1 + Q_2\operatorname{Cos}\varepsilon_2\end{bmatrix}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^2\operatorname{Sin}\varepsilon}\begin{bmatrix}+P_0\operatorname{Sin}\varepsilon_0 + P_1\operatorname{Sin}\varepsilon_1 + P_2\operatorname{Sin}\varepsilon_2\\ +Q_0\operatorname{Cos}\varepsilon_0 + Q_1\operatorname{Cos}\varepsilon_1 + Q_2\operatorname{Cos}\varepsilon_2\end{bmatrix}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{1}{3cq\operatorname{Sin}\varepsilon}\begin{bmatrix}+P_0\operatorname{Sin}2\varepsilon_0 + P_1\operatorname{Sin}2\varepsilon_1 + P_2\operatorname{Sin}2\varepsilon_2\\ +Q_0\operatorname{Cos}2\varepsilon_0 + Q_1\operatorname{Cos}2\varepsilon_1 + Q_2\operatorname{Cos}2\varepsilon_2\end{bmatrix}.$$

Tafel LXX.

$$X = a + bx^3 + cx^6.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-6}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-6}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-6}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^3+b)x^{m-2}}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{2(6\mu-m-1)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^m\partial x}{X^\mu} - \frac{(m-2)b}{3\mu\Delta}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^3 + b^2 - 2ac}{3\mu a\Delta x^{m-1}X^\mu} - \frac{(6\mu+m-4)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^\mu}$$
$$+ \frac{2(6\mu+m-1)ac - (3\mu+m-1)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^4 + (b^2-2ac)x}{3\mu a\Delta X^\mu} - \frac{2(3\mu-2)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu}$$
$$+ \frac{2(6\mu-1)ac - (3\mu-1)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^4 + bx}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{4(3\mu-2)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{3\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^4 + (b^2-2ac)x}{3a\Delta X} - \frac{2bc}{3a\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X} + \frac{2(5ac-b^2)}{3a\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{2cx^4 + bx}{3\Delta X} + \frac{4c}{3\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X} - \frac{b}{3\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^5 + (b^2-2ac)x^2}{3\mu a\Delta X^\mu} - \frac{(6\mu-5)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X^\mu}$$
$$+ \frac{4(3\mu-1)ac - (3\mu-2)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^5 + bx^2}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{2(6\mu-5)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X^\mu} - \frac{2b}{3\mu\Delta}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^5 + (b^2-2ac)x^2}{3a\Delta X} - \frac{bc}{3a\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X} + \frac{8ac-b^2}{3a\Delta}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^2} = \frac{2cx^5 + bx^2}{3\Delta X} + \frac{2c}{3\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X} - \frac{2b}{3\Delta}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel LXXI.

$$X = a + bx^n + cx^{2n}.$$

---

1. $b^2 - 4ac$ positiv. Bez. $b^2 - 4ac = g^2$; $m < n$.

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n + b - g} - \frac{2c}{g}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n + b + g}.$$

$$\int\frac{x^{n+m-1}\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n + b - g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n + b + g}.$$

2. $b^2 - 4ac$ negativ. Bez. $q = \sqrt[2n]{\frac{a}{c}}$; $\mathrm{Cos}\,\varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$; $\varepsilon_\mu = \frac{2\mu\pi + \varepsilon}{n}$;

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2 - 2qx\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_\mu + q^2) = P_\mu \quad ; \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_\mu}{q - x\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_\mu} = Q_\mu.$$

$$m < 2n.$$

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X} = \frac{1}{ncq^{2n-m}\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}[-P_\mu\,\mathrm{Sin}(n-m)\varepsilon_\mu + Q_\mu\,\mathrm{Cos}(n-m)\varepsilon_\mu].$$

$$\int\frac{(q^m x^{2n-m-1} - q^{2n-m}x^{m-1})\partial x}{X} = \frac{2}{nc\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}P_\mu\,\mathrm{Sin}(n-m)\varepsilon_\mu.$$

$$\int\frac{(q^m x^{2n-m-1} + q^{2n-m}x^{m-1})\partial x}{X} = \frac{2}{nc\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}Q_\mu\,\mathrm{Cos}(n-m)\varepsilon_\mu.$$

Anmerkung. Diese drei Formeln kommen auf diejenigen der Tafel LI zurück, wenn man $\pi + \alpha$ statt ε schreibt.

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-2n}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-n}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-2n}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-n}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2n}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^n + b}{\mu n\Delta X^\mu}x^{m-n+1} + \frac{2(2\mu n-m-1)c}{\mu n\Delta}\int\frac{x^m\partial x}{X^\mu} - \frac{(m-n+1)b}{\mu n\Delta}\int\frac{x^{m-n}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^n + b^2 - 2ac}{\mu na\Delta x^{m-1}X^\mu} - \frac{(2\mu n-n+m-1)bc}{\mu na\Delta}\int\frac{\partial x}{x^{m-n}X^\mu}$$
$$\frac{2(2\mu n+m-1)ac - (\mu n+m-1)b^2}{\mu na\Delta}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu}.$$

Tafel LXXII.

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = f(x).$$

Die Gleichung $X = 0$ habe drei ungleiche Wurzeln r_1, r_2, r_3.

$$f'(x) = 3c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2 = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

1. Wenn die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ alle reell sind, so ist:

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{f'(r_1)} \log(x - r_1) + \frac{1}{f'(r_2)} \log(x - r_2) + \frac{1}{f'(r_3)} \log(x - r_3).$$

$$\int \frac{x\partial x}{X} = \frac{r_1}{f'(r_1)} \log(x - r_1) + \frac{r_2}{f'(r_2)} \log(x - r_2) + \frac{r_3}{f'(r_3)} \log(x - r_3).$$

2. Wenn die Gleichung $X = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat, nämlich $r_2 = \alpha + \beta i$, $r_3 = \alpha - \beta i$, und die dritte reelle Wurzel mit r bezeichnet wird, so ist:

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{f'(r)} \left[\log(x-r) - \tfrac{1}{2} \log[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \frac{\alpha - r}{\beta} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x-\alpha}{\beta} \right].$$

$$\int \frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{f'(r)} \left[r \log(x - r) - \tfrac{1}{2} r \log[(x-\alpha)^2 + \beta^2] \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2 - \alpha r + \beta^2}{\beta} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x - \alpha}{\beta} \right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{1}{3c_0} \log X - \frac{2c_1}{3c_0} \int \frac{x\partial x}{X} - \frac{c_2}{3c_0} \int \frac{\partial x}{X}.$$

Fortsetzung. Tafel LXXII.

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_0} \int \frac{x^{m-3} \partial x}{X^{\mu}} - \frac{c_1}{c_0} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_2}{c_0} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_3}{c_0} \int \frac{x^{m-3} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-2}}{(3\mu - m + 2) c_0 X^{\mu}} - \frac{2\mu - m + 2}{3\mu - m + 2} \cdot \frac{c_1}{c_0} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$- \frac{\mu - m + 2}{3\mu - m + 2} \cdot \frac{c_2}{c_0} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{m - 2}{3\mu - m + 2} \cdot \frac{c_3}{c_2} \int \frac{x^{m-3} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3\mu c_0 X^{\mu}} - \frac{2c_1}{3c_0} \int \frac{x \partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_2}{3c_0} \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{3\mu - 1} \left[\left(-\frac{x}{c_0} + \frac{(2\mu - 1) c_1}{3\mu c_0^2} \right) \frac{1}{X^{\mu}} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2(2\mu-1) c_1^2}{3 c_0^2} - \frac{(\mu-1) c_2}{c_0} \right) \int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} + \left(\frac{c_3}{c_0} + \frac{(2\mu-1) c_1 c_2}{3 c_0^2} \right) \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} \right].$$

Bezeichn.: $C_0 = \frac{c_1}{9c_0}$; $C_1 = \frac{2}{3} c_2 - \frac{2c_1^2}{9c_0}$; $C_2 = 3c_0 c_3 - \frac{5}{3} c_1 c_2 + \frac{4c_1^3}{9c_0}$;

$C_3 = -6 c_1 c_2 c_3 - 2 c_0 c_2^2 + 4 c_1^2 c_2 - \frac{8 c_1^3}{9 c_0}$; $C_1 C_3 - C_2 C_2 = D$;

$u_0 = \frac{9c_0^2 C_1}{D}$; $u_1 = -\frac{3 c_0 C_2}{D}$; $v_0 = -\frac{3c_0(C_2 + 2c_1 C_1)}{D}$; $v_1 = \frac{C_3 + 2c_1 C_2}{D}$.

Die vorstehenden Coëfficienten C_0, C_1, C_2, C_3 entspringen aus der Entwickelung:

$$X \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^{-1} = \tfrac{1}{3} x + C_0 + \frac{C_1}{3 c_0 x} + \frac{C_2}{9 c_0^2 x^2} + \frac{C_3}{27 c_0^3 x^3} + \cdots\cdots$$

Reductions-Formeln.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[\tfrac{1}{3} u_0 x^2 + (C_0 u_0 + \tfrac{1}{3} u_1) x + C_0 u_1 + \frac{C_1 u_0}{3 c_0} \right] \frac{1}{\mu X^{\mu}} + \frac{3\mu - 2}{3\mu} u_0 \int \frac{x\partial x}{X^{\mu}}$$
$$+ \frac{(3\mu - 1) u_1 - 3 C_0 u_0}{3\mu} \int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[\tfrac{1}{3} v_0 x^2 + (C_0 v_0 + \tfrac{1}{3} v_1) x + C_0 v_1 + \frac{C_1 v_0}{3 c_0} \right] \frac{1}{\mu X^{\mu}} + \frac{3\mu - 2}{3\mu} v_0 \int \frac{x\partial x}{X^{\mu}}$$
$$+ \frac{(3\mu - 1) v_1 - 3 C_0 v_0}{3\mu} \int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

Tafel LXXIII.

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_3}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{c_2}{c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\mu+1}} - \frac{c_1}{c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}} - \frac{c_0}{c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)c_3 x^{m-1}X^\mu} - \frac{(3\mu+m-1)c_0}{(m-1)c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^{\mu+1}}$$
$$-\frac{(2\mu+m-1)c_1}{(m-1)c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+m-1)c_2}{(m-1)c_3}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{3\mu c_3 X^\mu} - \frac{c_1}{3c_3}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{2c_2}{3c_3}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{1}{c_3}\int\frac{\partial x}{xX^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{3c_3}\log\frac{x^3}{X} - \frac{c_1}{3c_3}\int\frac{x\partial x}{X} - \frac{2c_2}{3c_3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2} = \frac{1}{3c_3X} + \frac{1}{c_3}\int\frac{\partial x}{xX} - \frac{c_1}{3c_3}\int\frac{x\partial x}{X^2} - \frac{2c_2}{3c_3}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{c_3 xX^\mu} - \frac{(3\mu+1)c_0}{c_3}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+1)c_1}{c_3}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$-\frac{(\mu+1)c_2}{c_3}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} = \left[\frac{(\mu+2)c_2}{2c_3^2 x} - \frac{1}{2c_3x^2}\right]\frac{1}{X^\mu} + \frac{(\mu+2)(3\mu+1)c_0c_2}{2c_3^2}\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$+\left(\frac{(\mu+2)(2\mu+1)c_1c_2}{2c_3^2} - \frac{(3\mu+2)c_0}{2c_3}\right)\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$+\left(\frac{(\mu+1)(\mu+2)c_2^2}{2c_3^2} - \frac{(\mu+1)c_1}{c_3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$

Tafel LXXIV.

$$X = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots\cdots + c_{n-1}x + c_n = f(x).$$

$$\frac{\partial^\nu X}{\partial x^\nu} = f^\nu(x).$$

In dieser Tafel ist m eine positive ganze, μ eine beliebige Zahl.

A. $$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_0}\int\frac{x^{m-n}\partial x}{X^\mu} - \frac{1}{c_0}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu\int\frac{x^{m-\nu}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-n+1}}{(n\mu-m+n-1)c_0X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{(n-\nu)\mu-m+n-1}{n\mu-m+n-1}\cdot\frac{c_\nu}{c_0}\int\frac{x^{m-\nu}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{n\mu c_0X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{(n-\nu)c_\nu}{nc_0}\int\frac{x^{n-\nu-1}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X} = \frac{1}{nc_0}\log X - \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{(n-\nu)c_\nu}{nc_0}\int\frac{x^{n-\nu-1}\partial x}{X}.$$

B. $$\int\frac{\partial x}{x^mX^{\mu+1}} = \frac{1}{c_n}\int\frac{\partial x}{x^mX^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\int\frac{\partial x}{x^{m-\nu}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^mX^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)c_nx^{m-1}X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+m-1}{m-1}\cdot\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\int\frac{\partial x}{x^{m-\nu}X^{\mu+1}}.$$

C. $$\int\frac{\partial x}{(x-a)^mX^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)f(a)(x-a)^{m-1}X^\mu}$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+m-1}{\nu!(m-1)}\cdot\frac{f^\nu(a)}{f(a)}\int\frac{\partial x}{(x-a)^{m-\nu}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-a)^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{f(a)(x-a)X^\mu} - (\mu+1)\frac{f'(a)}{f(a)}\int\frac{\partial x}{(x-a)X^{\mu+1}}$$
$$-\sum_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+1}{\nu!}\cdot\frac{f^\nu(a)}{f(a)}\int\frac{(x-a)^{\nu-2}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Tafel LXXIV. Fortsetzung.

$$X = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + c_{n-1} x + c_n = f(x).$$

$$\frac{\partial^\nu X}{\partial x^\nu} = f^\nu(x)\,.$$

r eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, oder $f(r) = 0$.

D. $$\int\frac{\partial x}{(x-r)^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+m)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^m X^\mu} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+m}{\nu!}f^\nu(r)\int\frac{\partial x}{(x-r)^{m-\nu+1}X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-r)X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+1)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r)X^\mu} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+1}{\nu!}f^\nu(r)\int\frac{(x-r)^{\nu-2}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-r)^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+2)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^2 X^\mu} + (\mu+1)f''(r)\int\frac{\partial x}{(x-r)X^{\mu+1}} + \sum_{\nu=3}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+2}{\nu!}f^\nu(r)\int\frac{(x-r)^{\nu-3}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

Die Formel C folgt aus B durch Einsetzung von $x-a$ für x, und von $f(a)$ für c_n, $f'(a)$ für c_{n-1}, $\frac{1}{2}f''(a)$ für c_{n-2}, allgemein $\frac{1}{\nu!}f^\nu(a)$ für $c_{n-\nu}$.

Die Formel D folgt, indem man C mit $f(a)$ multiplicirt, hierauf $a = r$ oder $f(a) = 0$ setzt und $m+1$ für m schreibt. — Sind noch mit $f(r)$ zugleich mehrere Ableitungen Null, nämlich $f'(r) = 0$, $f''(r) = 0$, $\cdots\cdot$ $f^{\lambda-1}(r) = 0$, $f^\lambda(r)$ aber nicht Null, so ergiebt sich folgende Reduction:

$$\int\frac{\partial x}{(x-r)^m X^{\mu+1}} = -\frac{\lambda!}{(\lambda\mu+m+\lambda-1)f^\lambda(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^{m+\lambda-1}X^\mu} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+m+\lambda-1}{\nu!}f^\nu(r)\int\frac{\partial x}{(x-r)^{m+\lambda-\nu}X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-r)X^{\mu+1}} = -\frac{(\lambda-1)!}{(\mu+1)f^\lambda(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^\lambda X^\mu} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{\nu=n}\frac{\nu\mu+\lambda}{\nu!}f^\nu(r)\int\frac{(x-r)^{\nu-\lambda-1}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

Anmerkung. Obgleich die allgemeinen Formeln der ersten Abtheilung zunächst nur von rationalen Functionen gelten, so ist doch die Bedeutung eines grossen Theiles derselben nicht auf ganzzahlige Werthe der Exponenten beschränkt. In wie weit eine Ausdehnung auf gebrochene Exponenten gestattet ist, lässt sich in jedem einzelnen Falle unmittelbar aus der Ansicht der Formel entscheiden.

Zweite Abtheilung.

Integrale irrationaler algebraischer Functionen.

Allgemeiner Satz über die Reduction von $\int\varphi(x)\cdot X^{m+\mu}\partial x$.

Aus der Ansicht der letzten Tafel voriger Abtheilung, wo μ beliebig war, ergiebt sich folgender

Lehrsatz: Das Integral $\int\varphi(x)\cdot X^{m+\mu}\partial x$, in welchem X ein ganzes Polynom in x vom n^{ten} Grade, $\varphi(x)$ eine rationale Function von x bezeichnet, m eine positive oder negative ganze Zahl und μ ein ächter Bruch ist, lässt sich immer zurückführen auf Integrale von folgenden Formen, nämlich:

$$\int V\cdot X^{\mu}\partial x \quad , \quad \int\frac{X^{\mu}\partial x}{x-a} \ ,$$

wo V ein ganzes Polynom in x vom $n-2^{ten}$ Grade (höchstens) und die Constante a nicht Wurzel der Gleichung $X=0$ ist.

Beweis. Man zerlege die rationale Function $\varphi(x)\cdot X^{m}$ in ihren ungebrochenen und gebrochenen Theil, diesen aber in einfache Brüche, so zerfällt das vorliegende Integral in Glieder von folgenden Formen;

$$\int x^{k}X^{\mu}\partial x \quad , \quad \int\frac{X^{\mu}\partial x}{(x-a)^{g}} \ ,$$

wo k und g positive ganze Zahlen sind.

Das Integral $\int x^{k}X^{\mu}\partial x$ lässt sich, wenn $k>n-2$, nach Abtheilung A. der Tafel LXXIV auf $\int VX^{\mu}\partial x$ bringen, wo V ein ganzes Polynom vom $n-2^{ten}$ Grade.

Das Integral $\int\frac{X^{\mu}\partial x}{(x-a)^{g}}$ kommt zurück, wenn a nicht Wurzel von $X=0$, also f(a) nicht Null ist, nach Abtheilung C. auf $\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x-a}$ und $\int VX^{\mu}\partial x$; wenn aber $f(a)=0$, nach Abth. D. auf $\int VX^{\mu}\partial x$, wo überall V ein ganzes Polynom ist, dessen Grad den $n-2^{ten}$ nicht übersteigt. W. z. b. w.

Tafel I.

$$X = a + bx.$$

m eine positive ganze Zahl, μ ein beliebiger Bruch.

Reductionen.

$$\int x^{m}X^{\mu}\partial x = \frac{x^{m}X^{\mu+1}}{(m+\mu+1)b} - \frac{ma}{(m+\mu+1)b}\int x^{m-1}X^{\mu}\partial x.$$

$$\int\frac{x^{m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^{m+1}}{\mu a X^{\mu}} + \frac{\mu-m-1}{\mu a}\int\frac{x^{m}\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int x^{m}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^{\nu}m_{\nu}a^{\nu}X^{m-\nu}}{m+\mu+1-\nu} = \frac{X^{\mu+1}}{(m+\mu+1)b}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^{\nu}m_{\nu}a^{\nu}x^{m-\nu}}{(m+\mu)_{\nu}b^{\nu}}.$$

$$\int X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+1)b}.$$

$$\int xX^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{2}}\left[\frac{X}{\mu+2}-\frac{a}{\mu+1}\right] = \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+2)b}\left(x-\frac{a}{(\mu+1)b}\right).$$

$$\int x^{2}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{3}}\left[\frac{X^{2}}{\mu+3}-\frac{2aX}{\mu+2}+\frac{a^{2}}{\mu+1}\right]$$
$$= \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+3)b}\left[x^{2}-\frac{2ax}{(\mu+2)b}+\frac{2a^{2}}{(\mu+1)(\mu+2)b^{2}}\right].$$

$$\int x^{3}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{4}}\left[\frac{X^{3}}{\mu+4}-\frac{3aX^{2}}{\mu+3}+\frac{3a^{2}X}{\mu+2}-\frac{a^{3}}{\mu+1}\right]$$
$$= \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+4)b}\left[x^{3}-\frac{3ax^{2}}{(\mu+3)b}+\frac{6a^{2}x}{(\mu+2)(\mu+3)b^{2}}-\frac{6a^{3}}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)b^{3}}\right].$$

$$\int x^{4}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{5}}\left[\frac{X^{4}}{\mu+5}-\frac{4aX^{3}}{\mu+4}+\frac{6a^{2}X^{2}}{\mu+3}-\frac{4a^{3}X}{\mu+2}+\frac{a^{4}}{\mu+1}\right].$$

$$\int x^{5}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{6}}\left[\frac{X^{5}}{\mu+6}-\frac{5aX^{4}}{\mu+5}+\frac{10a^{2}X^{3}}{\mu+4}-\frac{10a^{3}X^{2}}{\mu+3}+\frac{5a^{4}X}{\mu+2}-\frac{a^{5}}{\mu+1}\right].$$

$$\int x^{6}X^{\mu}\partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{7}}\left[\frac{X^{6}}{\mu+7}-\frac{6aX^{5}}{\mu+6}+\frac{15a^{2}X^{4}}{\mu+5}-\frac{20a^{3}X^{3}}{\mu+4}+\frac{15a^{4}X^{2}}{\mu+3}-\frac{6a^{5}X}{\mu+2}+\frac{a^{6}}{\mu+1}\right].$$

Tafel II.

$$X = a + bx.$$

m eine positive ganze Zahl, μ ein beliebiger Bruch.

Reductionen.
$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{m}} = -\frac{X^{\mu+1}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{\mu-m+2}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{m-1}}.$$
$$\int\frac{\partial x}{x^{m}X^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu a x^{m-1}X^{\mu}} + \frac{\mu+m-1}{\mu a}\int\frac{\partial x}{x^{m}X^{\mu}}.$$

Es sei $\mu = \pm\frac{p}{q}$, p und q positive ganze Zahlen. Setzt man

$y = X^{\frac{1}{q}}$, so wird

$$\int\frac{X^{\frac{p}{q}}\partial x}{x} = q\int\frac{y^{p+q-1}\partial y}{y^{q}-a} \quad ; \quad \int\frac{\partial x}{xX^{\frac{p}{q}}} = q\int\frac{y^{q-p-1}\partial y}{y^{q}-a}.$$

$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{m}} = -\frac{X^{\mu+1}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(\mu-m+\nu+1)_{\nu}b^{\nu}}{(m-2)_{\nu}a^{\nu}x^{m-\nu-1}} + \frac{\mu_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$

$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{2}} = -\frac{X^{\mu+1}}{ax} + \frac{\mu b}{a}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{3}} = -\frac{X^{\mu+1}}{2a}\left(\frac{1}{x^{2}} + \frac{(\mu-1)b}{ax}\right) + \frac{\mu_{2}b^{2}}{a^{2}}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{4}} = -\frac{X^{\mu+1}}{3a}\left(\frac{1}{x^{3}} + \frac{(\mu-2)b}{2ax^{2}} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)b^{2}}{2a^{2}x}\right) + \frac{\mu_{3}b^{3}}{a^{3}}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$

Reductionen.

n eine positive ganze Zahl.

$$\int\frac{X^{\mu+n}\partial x}{x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{a^{\nu}X^{\mu+n-\nu}}{\mu+n-\nu} + a^{n}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu+1}\partial x}{x} = \frac{X^{\mu+1}}{\mu+1} + a\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+n}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{(\mu+n-\nu-1)a^{\nu+1}X^{\mu+n-\nu-1}} + \frac{1}{a^{n}}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}}.$$
$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu a X^{\mu}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}}.$$

Tafel III.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{x^{m}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2x^{m}\sqrt{X^{n}X}}{(2n+2m+1)b} - \frac{2ma}{(2n+2m+1)b}\int\frac{x^{m-1}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}}.$$
$$\int\frac{x^{m}X^{n}\partial x}{\sqrt{\ }} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^{\nu}m_{\nu}a^{\nu}X^{m-\nu}}{2m+2n-2\nu+1} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{(2m+2n+1)b}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^{\nu}m_{\nu}a^{\nu}x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{1}{2})_{\nu}b^{\nu}}.$$

$$\int\frac{X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{(2n+1)b}.$$
$$\int\frac{xX^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{2}}\left[\frac{X}{2n+3} - \frac{a}{2n+1}\right] = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{(2n+3)b}\left[x - \frac{2a}{(2n+1)b}\right].$$
$$\int\frac{x^{2}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{3}}\left[\frac{X^{2}}{2n+5} - \frac{2aX}{2n+3} + \frac{a^{2}}{2n+1}\right]$$
$$= \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{(2n+5)b}\left[x^{2} - \frac{4ax}{(2n+3)b} + \frac{8a^{2}}{(2n+1)(2n+3)b^{2}}\right].$$
$$\int\frac{x^{3}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{4}}\left[\frac{X^{3}}{2n+7} - \frac{3aX^{2}}{2n+5} + \frac{3a^{2}X}{2n+3} - \frac{a^{3}}{2n+1}\right]$$
$$= \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{(2n+7)b}\left[x^{3} - \frac{6ax^{2}}{(2n+5)b} + \frac{24a^{2}x}{(2n+3)(2n+5)b^{2}}\right.$$
$$\left. - \frac{48a^{3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)b^{3}}\right].$$
$$\int\frac{x^{4}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{5}}\left[\frac{X^{4}}{2n+9} - \frac{4aX^{3}}{2n+7} + \frac{6a^{2}X^{2}}{2n+5} - \frac{4a^{3}X}{2n+3} + \frac{a^{4}}{2n+1}\right].$$
$$\int\frac{x^{5}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{6}}\left[\frac{X^{5}}{2n+11} - \frac{5aX^{4}}{2n+9} + \frac{10a^{2}X^{3}}{2n+7} - \frac{10a^{3}X^{2}}{2n+5} + \frac{5a^{4}X}{2n+3} - \frac{a^{5}}{2n+1}\right].$$
$$\int\frac{x^{6}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{7}}\left[\frac{X^{6}}{2n+13} - \frac{6aX^{5}}{2n+11} + \frac{15a^{2}X^{4}}{2n+9} - \frac{20a^{3}X^{3}}{2n+7} + \frac{15a^{4}X^{2}}{2n+5}\right.$$
$$\left. - \frac{6a^{5}X}{2n+3} + \frac{a^{6}}{2n+1}\right].$$
$$\int\frac{x^{7}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{8}}\left[\frac{X^{7}}{2n+15} - \frac{7aX^{6}}{2n+13} + \frac{21a^{2}X^{5}}{2n+11} - \frac{35a^{3}X^{4}}{2n+9} + \frac{35a^{4}X^{3}}{2n+7}\right.$$
$$\left. - \frac{21a^{5}X^{2}}{2n+5} + \frac{7a^{6}X}{2n+3} - \frac{a^{7}}{2n+1}\right].$$
$$\int\frac{x^{8}X^{n}\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^{n}\sqrt{X}}{b^{9}}\left[\frac{X^{8}}{2n+17} - \frac{8aX^{7}}{2n+15} + \frac{28a^{2}X^{6}}{2n+13} - \frac{56a^{3}X^{5}}{2n+11} + \frac{70a^{4}X^{4}}{2n+9}\right.$$
$$\left. - \frac{56a^{5}X^{3}}{2n+7} + \frac{28a^{6}X^{2}}{2n+5} - \frac{8a^{7}X}{2n+3} + \frac{a^{8}}{2n+1}\right].$$

Tafel IV.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^n \sqrt{X}} = \frac{2x^m \sqrt{X}}{(2m-2n+1)bX^n} - \frac{2ma}{(2m-2n+1)b} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^n \sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{b^{m+1}X^n} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{2m-2n-2\nu+1} = \frac{2\sqrt{X}}{(2m-2n+1)bX^n} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m-n-\frac{1}{2})_\nu b^\nu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-1)bX^n}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^2X^n}\left[\frac{X}{2n-3} - \frac{a}{2n-1}\right] = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-3)bX^n}\left[x + \frac{2a}{(2n-1)b}\right].$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^3X^n}\left[\frac{X^2}{2n-5} - \frac{2aX}{2n-3} + \frac{a^2}{2n-1}\right]$$

$$= -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-5)bX^n}\left[x^2 + \frac{4ax}{(2n-3)b} + \frac{4a^2}{(2n-1)(2n-3)b^2}\right].$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^4X^n}\left[\frac{X^3}{2n-7} - \frac{3aX^2}{2n-5} + \frac{3a^2X}{2n-3} - \frac{a^3}{2n-1}\right].$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^5X^n}\left[\frac{X^4}{2n-9} - \frac{4aX^3}{2n-7} + \frac{6a^2X^2}{2n-5} - \frac{4a^3X}{2n-3} + \frac{a^4}{2n-1}\right].$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^6X^n}\left[\frac{X^5}{2n-11} - \frac{5aX^4}{2n-9} + \frac{10a^2X^3}{2n-7} - \frac{10a^3X^2}{2n-5} + \frac{5a^4X}{2n-3} - \frac{a^5}{2n-1}\right].$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^7X^n}\left[\frac{X^6}{2n-13} - \frac{6aX^5}{2n-11} + \frac{15a^2X^4}{2n-9} - \frac{20a^3X^3}{2n-7} + \frac{15a^4X^2}{2n-5} - \frac{6a^5X}{2n-3} + \frac{a^6}{2n-1}\right].$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^8X^n}\left[\frac{X^7}{2n-15} - \frac{7aX^6}{2n-13} + \frac{21a^2X^5}{2n-11} - \frac{35a^3X^4}{2n-9} + \frac{35a^4X^3}{2n-7} - \frac{21a^5X^2}{2n-5} + \frac{7a^6X}{2n-3} - \frac{a^7}{2n-1}\right].$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^9X^n}\left[\frac{X^8}{2n-17} - \frac{8aX^7}{2n-15} + \frac{28a^2X^6}{2n-13} - \frac{56a^3X^5}{2n-11} + \frac{70a^4X^4}{2n-9} - \frac{56a^5X^3}{2n-7} + \frac{28a^6X^2}{2n-5} - \frac{8a^7X}{2n-3} + \frac{a^8}{2n-1}\right].$$

Tafel V.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{\sqrt{X} + \sqrt{a}}, \quad \text{wenn } a \text{ positiv;}$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arc.Tang} \sqrt{\frac{X}{-a}}, \quad \text{wenn } a \text{ negativ ist.}$$

$$\int \frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2X^n}{(2n-1)\sqrt{X}} + a\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{X}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a^\nu X^{n-\nu}}{2n-2\nu-1} + a^n \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X}{3} + a\right] + a^2\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right] + a^3\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^3\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^3}{7} + \frac{aX^2}{5} + \frac{a^2X}{3} + a^3\right] + a^4\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^4\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^4}{9} + \frac{aX^3}{7} + \frac{a^2X^2}{5} + \frac{a^3X}{3} + a^4\right] + a^5\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^5\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^5}{11} + \frac{aX^4}{9} + \frac{a^2X^3}{7} + \frac{a^3X^2}{5} + \frac{a^4X}{3} + a^5\right] + a^6\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^6\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^6}{13} + \frac{aX^5}{11} + \frac{a^2X^4}{9} + \frac{a^3X^3}{7} + \frac{a^4X^2}{5} + \frac{a^5X}{3} + a^6\right] + a^7\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^7\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^7}{15} + \frac{aX^6}{13} + \frac{a^2X^5}{11} + \frac{a^3X^4}{9} + \frac{a^4X^3}{7} + \frac{a^5X^2}{5} + \frac{a^6X}{3} + a^7\right] + a^8\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^8\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^8}{17} + \frac{aX^7}{15} + \frac{a^2X^6}{13} + \frac{a^3X^5}{11} + \frac{a^4X^4}{9} + \frac{a^5X^3}{7} + \frac{a^6X^2}{5} + \frac{a^7X}{3} + a^8\right] + a^9\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VI.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n-1)aX^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{(2n-2\nu-1)a^\nu X^{n-\nu-1}} + \frac{1}{a^n}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{3X} + \frac{1}{a}\right] + \frac{1}{a^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{5X^2} + \frac{1}{3aX} + \frac{1}{a^2}\right] + \frac{1}{a^3}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^4\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{7X^3} + \frac{1}{5aX^2} + \frac{1}{3a^2X} + \frac{1}{a^3}\right] + \frac{1}{a^4}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^5\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{9X^4} + \frac{1}{7aX^3} + \frac{1}{5a^2X^2} + \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{a^4}\right] + \frac{1}{a^5}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^6\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{11X^5} + \frac{1}{9aX^4} + \frac{1}{7a^2X^3} + \frac{1}{5a^3X^2} + \frac{1}{3a^4X} + \frac{1}{a^5}\right] + \frac{1}{a^6}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^7\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{13X^6} + \frac{1}{11aX^5} + \frac{1}{9a^2X^4} + \frac{1}{7a^3X^3} + \frac{1}{5a^4X^2} + \frac{1}{3a^5X} + \frac{1}{a^6}\right] + \frac{1}{a^7}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^8\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{15X^7} + \frac{1}{13aX^6} + \frac{1}{11a^2X^5} + \frac{1}{9a^3X^4} + \frac{1}{7a^4X^3} + \frac{1}{5a^5X^2} + \frac{1}{3a^6X} + \frac{1}{a^7}\right] + \frac{1}{a^8}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VII.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{2n-2m+3}{2(m-1)}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{X^n\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(n+\nu-m+\frac{1}{2})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + \frac{(n-\frac{1}{2})_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{ax} + \frac{(2n-1)b}{2a}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{2ax}\left[\frac{1}{x} + \frac{(2n-3)b}{2a}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)b^2}{2\cdot 4a^2}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^4\partial x} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{3ax}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{(2n-5)b}{2\cdot 2ax} + \frac{(2n-3)(2n-5)b^2}{2\cdot 4\cdot a^2}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^5\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{4ax}\left[\frac{1}{x^3} + \frac{(2n-7)b}{2\cdot 3ax^2} + \frac{(2n-5)(2n-7)b^2}{2\cdot 4\cdot 3a^2x} + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^6\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{5ax}\left[\frac{1}{x^4} + \frac{(2n-9)b}{2\cdot 4ax^3} + \frac{(2n-7)(2n-9)b^2}{2\cdot 4\cdot 6a^2x^2} + \frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)b}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4a^3x} + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^7\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{6ax}\left[\frac{1}{x^5} + \frac{(2n-11)b}{2\cdot 5ax^4} + \frac{(2n-9)(2n-11)b^2}{2\cdot 4\cdot 10a^2x^3} + \frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10a^3x^2} + \frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 5a^4x} + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot a^6}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}X^n} - \frac{(2m+2n-3)b}{2(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)aX^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(-1)^\nu(m+n-\frac{3}{2})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}}$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}(m+n-\frac{3}{2})_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{axX^n} - \frac{(2n+1)b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2axX^n}\left[\frac{1}{x} - \frac{(2n+3)b}{2a}\right] + \frac{(2n+1)(2n+3)b^2}{2\cdot4\cdot a^2}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{3axX^n}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{(2n+5)b}{2\cdot2ax} + \frac{(2n+3)(2n+5)}{2\cdot4\cdot a^2}\right]$$
$$-\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)b^3}{2\cdot4\cdot6\cdot a^3}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{4axX^n}\left[\frac{1}{x^3} - \frac{(2n+7)b}{2\cdot3ax^2} + \frac{(2n+5)(2n+7)b^2}{2\cdot4\cdot3a^2x}\right.$$
$$\left.-\frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)b^3}{2\cdot4\cdot6\cdot a^3}\right]$$
$$+\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)b^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot a^4}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{5axX^n}\left[\frac{1}{x^4} - \frac{(2n+9)b}{2\cdot4ax^3} + \frac{(2n+7)(2n+9)b^2}{2\cdot4\cdot6a^2x^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^3}{2\cdot4\cdot6\cdot4a^3x} + \frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot a^4}\right]$$
$$-\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot a^5}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{6axX^n}\left[\frac{1}{x^5} - \frac{(2n+11)b}{2\cdot5ax^4} + \frac{(2n+9)(2n+11)b^2}{2\cdot4\cdot10a^2x^3}\right.$$
$$-\frac{(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^3}{2\cdot4\cdot6\cdot10a^3x^2} + \frac{(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot5a^4x}$$
$$\left.-\frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot a^5}\right]$$
$$+\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots\cdots(2n+11)b^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot a^6}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

Tafel IX.

$$X = a + bx.$$

$$\int x^m X^{n-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{3x^mX^{n+\frac{2}{3}}}{(3m+3n+2)b} - \frac{3ma}{(3m+3n+2)b}\int x^{m-1}X^{n-\frac{1}{3}}\partial x.$$

$$\int x^m X^{n-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{3m+3n-3\nu+2} = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3m+3n+2)b}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{1}{3})_\nu b^\nu}.$$

$$\int X^{n-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+2)b}.$$

$$\int xX^{n-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^2}\left[\frac{X}{3n+5} - \frac{a}{3n+2}\right] = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+5)b}\left(x - \frac{3a}{(3n+2)b}\right).$$

$$\int x^2X^{n-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^3}\left[\frac{X^2}{3n+8} - \frac{2aX}{3n+5} + \frac{a^2}{3n+2}\right]$$
$$= \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+8)b}\left[x^2 - \frac{6ax}{(3n+5)b} + \frac{18a^2}{(3n+2)(3n+5)b^2}\right].$$

$$\int x^mX^{n-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{3x^mX^{n+\frac{1}{3}}}{(3m+3n+1)b} - \frac{3ma}{(3m+3n+1)b}\int x^{m-1}X^{n-\frac{2}{3}}\partial x.$$

$$\int x^mX^{n-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{3m+3n-3\nu+1} = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3m+3n+1)b}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{2}{3})_\nu b^\nu}.$$

$$\int X^{n-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+1)b}.$$

$$\int xX^{n-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^2}\left[\frac{X}{3n+4} - \frac{a}{3n+1}\right] = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+4)b}\left[x - \frac{3a}{(3n+1)b}\right].$$

$$\int x^2X^{n-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^3}\left[\frac{X^2}{3n+7} - \frac{2aX}{3n+4} + \frac{a^2}{3n+1}\right]$$
$$= \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+7)b}\left[x^2 - \frac{6ax}{(3n+4)b} + \frac{18a^2}{(3n+1)(3n+4)b^2}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{1}{3}}} = 3\int\frac{y\,\partial y}{y^3-a} \text{ für } y = X^{\frac{1}{3}}. \qquad \int\frac{\partial x}{xX^{\frac{2}{3}}} = 3\int\frac{\partial y}{y^3-a} \text{ für } y = X^{\frac{1}{3}}.$$

Tafel X.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+5}{3(m-1)} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{(m-1)a} \sum_{\nu=0}^{\nu=m-2} \frac{(n-m+\nu+\frac{2}{3})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + (n-\tfrac{1}{3})_{m-1} \frac{b^{m-1}}{a^{m-1}} \int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x} = \frac{3X^{n-\frac{1}{3}}}{3n-1} + a \int \frac{X^{n-\frac{4}{3}} \partial x}{x} = \frac{3}{X^{\frac{1}{3}}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a^\nu X^{n-\nu}}{3n-3\nu-1} + a^n \int \frac{\partial x}{x \cdot X^{\frac{1}{3}}}.$$

(s. Taf. IX. unten).

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x^2} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{ax} + \frac{(3n-1)b}{3a} \int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x^3} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{2a} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{(3n-4)b}{3ax} \right) + \frac{(3n-1)(3n-4)b^2}{18a^2} \int \frac{X^{n-\frac{1}{3}} \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x_m} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+4}{3(m-1)} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{(m-1)a} \sum_{\nu=0}^{\nu=m-2} \frac{(n-m+\nu+\frac{1}{3})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + (n-\tfrac{2}{3})_{m-1} \frac{b^{m-1}}{a^{m-1}} \int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x} = \frac{3X^{n-\frac{2}{3}}}{3n-2} + a \int \frac{X^{n-\frac{5}{3}} \partial x}{x} = \frac{3}{X^{\frac{2}{3}}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a^\nu X^{n-\nu}}{3n-3\nu-2} + a^n \int \frac{\partial x}{x \cdot X^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x^2} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{ax} + \frac{(3n-2)b}{3a} \int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x^3} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{2a} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{(3n-5)b}{3ax} \right) + \frac{(3n-2)(3n-5)b^2}{18a^2} \int \frac{X^{n-\frac{2}{3}} \partial x}{x}.$$

Tafel XI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \left(\sqrt{X} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right),$$ wenn c positiv ist *).

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}},$$ wenn c negativ ist.

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log \left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right),$$ wenn a positiv ist.

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{bx+2a}{x\sqrt{b^2-4ac}},$$ wenn a negativ ist.

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx},$$ wenn a = 0 ist.

Bez. $A = a - bh + ch^2$; $B = b - 2ch.$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \log \left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{A}}{x+h} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right),$$ wenn A positiv ist.

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{B(x+h)+2A}{(x+h)\sqrt{b^2-4ac}},$$ wenn A negativ ist.

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{B(x+h)},$$ wenn A = 0 ist.

---

*) Diese Formel verwandelt sich in $\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$, wenn mit c zugleich auch $4ac - b^2$ positiv ist,

hingegen in $\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arc.Cos} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$, wenn c positiv, $4ac - b^2$ negativ ist.

Tafel XI. Fortsetzung.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $i = \sqrt{-1}$. $A = a - ch^2 - bhi$. $B = b - 2chi$.

$$\int \frac{\partial x}{(x + hi)\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(\frac{\sqrt{X} + \sqrt{A}}{x + hi} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right).$$

Um in dieser Formel den reellen Theil vom imaginären zu trennen, setze man $\sqrt{A} = \alpha + \beta i$, $\frac{B}{2\sqrt{A}} = \gamma + \delta i$, woraus sich für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Werthe ergeben; ferner seien M und φ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{x\sqrt{X} + \alpha x + \beta h}{x^2 + h^2} + \gamma = M \operatorname{Cos}\varphi, \quad \frac{\beta x - \alpha h - h\sqrt{X}}{x^2 + h^2} + \delta = M \sin\varphi$$

wo M eine positive Grösse vorstellt; so ist

$$\int \frac{\partial x}{(x + hi)\sqrt{X}} = \frac{-\alpha + \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} \log M(\operatorname{Cos}\varphi + i \operatorname{Sin}\varphi).$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{X}} = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)h} (\alpha\varphi - \beta \log M).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{X}} = \frac{-1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta\varphi + \alpha \log M).$$

Anmerkung. Aus der ersten Formel dieser Tafel ergeben sich die ihr folgenden durch Verwandlung; setzt man nämlich für ein negatives c, $\sqrt{X} = \mu \operatorname{Cos}\varphi$, $x\sqrt{-c} - \frac{b}{2\sqrt{-c}} = \mu \operatorname{Sin}\varphi$, so wird $\mu = \sqrt{a - \frac{b^2}{4c}}$ und $\log\left(\sqrt{X} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) = \log\mu + \varphi i$, woraus die zweite Formel hervorgeht. Die dritte und vierte folgen aus der ersten und zweiten durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{x}$ und c mit a; die sechste und siebente aus der dritten und vierten durch Vertauschung von x mit $x + h$, a mit A, b mit B; die neunte aus der sechsten durch Vertauschung von h mit hi.

Fortsetzung von **Tafel XI.**

Zusätze zu vorstehender Tafel,

enthaltend einige besonders einfache Fälle, welche sich aus derselben ergeben.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arc.Sin} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{1 - x^2}} = -\mathfrak{Arc.\,Cos}\,\frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x + h)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - 1}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{1 + hx}{x + h}, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x + h)\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - h^2}} \mathfrak{Arc.\,Cos}\,\frac{1 + hx}{x + h}, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x + 1)\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{1 + h^2}} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x\sqrt{1 + h^2}}{h\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \mathfrak{Arc.\,Tang}\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + h^2}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}} = \mathfrak{Arc.\,Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{1 + x^2}} = -\mathfrak{Arc.\,Sin}\,\frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x + h)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \mathfrak{Arc.\,Sin}\,\frac{hx - 1}{x + h}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{h^2 - 1}} \mathfrak{Arc.\,Tang}\,\frac{x\sqrt{h^2 - 1}}{h\sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + h^2)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{1 - h^2}} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x\sqrt{1 - h^2}}{h\sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

Tafel XI. Fortsetzung.

Noch Zusätze zu voriger Tafel.

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{Arc.\,Cof}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arc.Cos}\,\frac{1}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\,\text{Arc. Cos}\,\frac{1+hx}{x+h},\quad\text{wenn } h^2<1.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\,\mathfrak{Arc.\,Cof}\,\frac{1+hx}{x+h},\quad\text{wenn } h^2>1.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{h\sqrt{1+h^2}}\,\mathfrak{Arc.\,Tang}\,\frac{h\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{1+h^2}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,\text{Arc. Tang}\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+h^2}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\,\text{Arc. Tang}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{h^2-1}},\quad\text{wenn } h^2>1.$$

$$\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\,\mathfrak{Arc.\,Tang}\,\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{1+x^2}},\quad\text{wenn } h^2<1.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tafel XII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.\quad \frac{4c}{\Delta} = q.$

$$\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta X^n} + \frac{2(n-1)}{2n-1}q\int\frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{(n-1)_\nu}{(n-\frac{3}{2})_\nu}\cdot\frac{q^\nu}{X^{n-\nu}}.$$

$\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ s. Taf. ~~VIII.~~ XI

$$\int\frac{\partial x}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X}+2q\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{5\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^2}+\frac{4q}{3X}+\frac{8q^2}{3}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{7\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^3}+\frac{6q}{5X^2}+\frac{8q^2}{5X}+\frac{16q^3}{5}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^5\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{9\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^4}+\frac{8q}{7X^3}+\frac{48q^2}{35X^2}+\frac{64q^3}{35X}+\frac{128q^4}{35}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^6\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{11\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^5}+\frac{10q}{9X^4}+\frac{80q^2}{63X^3}+\frac{32q^3}{21X^2}+\frac{128q^4}{63X}+\frac{256q^5}{63}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^7\sqrt{X}} = \frac{2(2cx+b)}{13\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^6}+\frac{12q}{11X^5}+\frac{40q^2}{33X^4}+\frac{320q^3}{231X^3}+\frac{128q^4}{77X^2}+\frac{512q^5}{231X}+\frac{1024q^6}{231}\right].$$

Tafel XIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.\quad \frac{4c}{\Delta} = q.$

$$\int X^n\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)X^n\sqrt{X}}{4(n+1)c} + \frac{2n+1}{2(n+1)q}\int\frac{X^n\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^n\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)X^n\sqrt{X}}{4(n+1)c}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{(n+\frac{1}{2})_\nu}{n_\nu}\cdot\frac{1}{q^\nu X^\nu} + \frac{(n+\frac{1}{2})_{n+1}}{q^{n+1}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{4c} + \frac{1}{2q}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{8c}\left(X + \frac{3}{2q}\right) + \frac{3}{8q^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{12c}\left(X^2 + \frac{5X}{4q} + \frac{15}{8q^2}\right) + \frac{5}{16q^3}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^3\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{16c}\left(X^3 + \frac{7X^2}{6q} + \frac{35X}{24q^2} + \frac{35}{16q^3}\right) + \frac{35}{128q^4}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^4\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{20c}\left(X^4 + \frac{9X^3}{8q} + \frac{21X^2}{16q^2} + \frac{105X}{64q^3} + \frac{315}{128q^4}\right) + \frac{63}{256q^5}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^5\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{24c}\left(X^5 + \frac{11X^4}{10q} + \frac{99X^3}{80q^2} + \frac{231X^2}{160q^3} + \frac{231X}{128q^4} + \frac{693}{256q^5}\right) + \frac{231}{1024q^6}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Einige besondere Fälle sind: $\int\partial x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc.Sin}\,x.$

$\int\partial x\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc.\,Sin}\,x.\qquad \int\partial x\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc.\,Cos}\,x.$

Tafel XIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.\quad \frac{4c}{\Delta} = q.$

$$\int\frac{x\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2n-1)cX^n} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta X^n} - \frac{b(2cx+b)\sqrt{X}}{(2n-1)c\Delta}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{(n-1)_\nu}{(n-\frac{3}{2})_\nu}\cdot\frac{q^\nu}{X^{n-\nu}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{c} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^2\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{3\Delta X\sqrt{X}} - \frac{8b(2cx+b)}{3\Delta^2\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^3\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{5\Delta X^2\sqrt{X}} - \frac{16b(2cx+b)}{15\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X}+2q\right).$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^4\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{7\Delta X^3\sqrt{X}} - \frac{8b(2cx+b)}{35\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{3}{X^2} + \frac{4q}{X} + 8q^2\right).$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2ab}{(2n-1)c\Delta X^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{4ac+(2n-3)b^2}{(2n-1)c\Delta}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8c^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2ab}{c\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{c}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2ab}{3c\Delta X\sqrt{X}} + \frac{2(4ac+b^2)(2cx+b)}{3c\Delta^2\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2ab}{5c\Delta X^2\sqrt{X}} + \frac{2(4ac+3b^2)(2cx+b)}{15c\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right).$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \left(-\frac{x^2}{c} + \frac{2(2n-7)ac-(2n-5)b^2}{(2n-1)c^2\Delta}bx - \frac{8ac+(2n-5)b^2}{(2n-1)c^2\Delta}a\right)\frac{\sqrt{X}}{(2n-3)X^n}$$
$$- \frac{12ac+(2n-5)b^2}{2(2n-1)c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3ab}{4c^2} - \frac{5b^3}{16c^3}\right)\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{c} + \frac{10ac-3b^2}{c^2\Delta}bx + \frac{8ac-3b^2}{c^2\Delta}a\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{12ac-3b^2}{2c^2\Delta}b\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Tafel XV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{xX^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{X^n\sqrt{X}}{(2n+1)c} - \frac{b}{2c}\int \frac{X^n \partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x\partial x\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int \partial x\sqrt{X}. \qquad \int xX\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{X^2\sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int \frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{xX^n\sqrt{X}}{2(n+1)c} - \frac{2n+3}{2(n+1)}\cdot\frac{b}{2c}\int\frac{xX^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{a}{2(n+1)c}\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \left(x - \frac{(2n+3)b}{2(2n+1)c}\right)\frac{X^n\sqrt{X}}{2(n+1)c} + \frac{(2n+3)b^2 - 4ac}{8(n+1)c^2}\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{5b}{6c}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4c} + \frac{5b^2 - 4ac}{16c^2}\int\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^2X\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{7b}{10c}\right)\frac{X^2\sqrt{X}}{6c} + \frac{7b^2 - 4ac}{24c^2}\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^2X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{9b}{14c}\right)\frac{X^3\sqrt{X}}{8c} + \frac{9b^2 - 4ac}{32c^2}\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x. \quad \text{(S. Taf. X.)}$$

$$\int\frac{x^3X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{x^2X^n\sqrt{X}}{(2n+3)c} - \frac{(2n+5)b}{2(2n+3)c}\int\frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{2a}{(2n+3)c}\int\frac{xX^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^3X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \left(x^2 - \frac{(2n+5)bx}{4(n+1)c} + \frac{(2n+3)(2n+5)b^2}{8(2n+1)(n+1)c^2} - \frac{2a}{(2n+1)c}\right)\frac{X^n\sqrt{X}}{(2n+3)c}$$
$$+ \left(\frac{3ab}{4(n+1)c^2} - \frac{(2n+5)b^3}{16(n+1)c^3}\right)\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x^3\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{7bx}{8c} + \frac{35b^2}{48c^2} - \frac{2a}{3c}\right)\frac{X\sqrt{X}}{5c} + \left(\frac{3ab}{8c^2} - \frac{7b^3}{32c^3}\right)\int\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^3X\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{3bx}{4c} + \frac{21b^2}{40c^2} - \frac{2a}{5c}\right)\frac{X^2\sqrt{X}}{7c} + \left(\frac{ab}{4c^2} - \frac{3b^3}{16c^3}\right)\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^3X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{11bx}{16c} + \frac{99b^2}{224c^2} - \frac{2a}{7c}\right)\frac{X^3\sqrt{X}}{9c} + \left(\frac{3ab}{16c^2} - \frac{11b^3}{64c^3}\right)\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

Tafel XVI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.$

$$\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{(2n-1)aX^n} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = \frac{4ac - 2b^2 - 2bcx}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}, \quad \text{(s. Taf. VIII.)}$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3X}\right)\frac{1}{a\sqrt{X}} - \left(\frac{1}{3X} + \frac{8c}{3\Delta} + \frac{1}{a}\right)\frac{b(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{3aX} + \frac{1}{5X^2}\right)\frac{1}{a\sqrt{X}} - \left[\frac{1}{5X^2} + \left(\frac{16c}{15\Delta} + \frac{1}{3a}\right)\frac{1}{X} + \frac{128c^2}{15\Delta^2}\right.$$
$$\left. + \frac{8c}{3a\Delta} + \frac{1}{a^2}\right]\frac{b(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a^3}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{axX^n} - \frac{(2n+1)b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} - \frac{2nc}{a}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X\sqrt{X}} = -\frac{4c(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} - \frac{1}{ax\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2\sqrt{X}} = -\frac{8c(2cx+b)}{3a\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right) - \frac{1}{axX\sqrt{X}} - \frac{5b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3\sqrt{X}} = -\frac{12c(2cx+b)}{5a\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{16c}{3\Delta X} + \frac{128c^2}{3\Delta^2}\right) - \frac{1}{axX^2\sqrt{X}} - \frac{7b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2ax^2X^n} - \frac{(2n+3)b}{4a}\int\frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} - \frac{(2n+1)c}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{X}} = \left(\frac{3b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{X}}{2ax} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X\sqrt{X}} = \left(\frac{5b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2ax\sqrt{X}} + \frac{5bc(2cx+b)}{a^2\Delta\sqrt{X}} + \frac{3(5b^2 - 4ac)}{8a^2}\int\frac{\partial x}{xX\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2\sqrt{X}} = \left(\frac{7b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2axX\sqrt{X}} + \frac{14bc(2cx+b)}{3a^2\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right) + \frac{5(7b^2 - 4ac)}{8a^2}\int\frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}}.$$

Anmerkung. Wenn $a = 0$ ist, s. Taf. XIX.

Tafel XVII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{X^n}{(2n-1)\sqrt{X}} + a\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{X^{n-1}\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,\partial x}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\,\partial x}{x} = \left(\frac{X}{3} + a\right)\sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \sqrt{X}\,\partial x + \frac{ab}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + a^2\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\,\partial x}{x} = \left(\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right)\sqrt{X} + \frac{b}{2}\int X\sqrt{X}\,\partial x + \frac{ab}{2}\int \sqrt{X}\,\partial x + \frac{a^2 b}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}$$
$$+ a^3\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{x} + \frac{(2n-1)b}{2}\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}} + (2n-1)c\int \frac{X^{n-1}\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,\partial x}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} + c\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\,\partial x}{x^2} = \left(-\frac{X}{x} + \frac{3b}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2}{4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + 3c\int \sqrt{X}\,\partial x + \frac{3ab}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\,\partial x}{x^2} = \left(-\frac{X^2}{x} + \frac{5bX}{6} + \frac{5ab}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{5b^2}{4}\int \sqrt{X}\,\partial x + \frac{5ab^2}{4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}$$
$$+ 5c\int X\sqrt{X}\,\partial x + \frac{5a^2 b}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{2n-1}{4}b\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x^2\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{2}c\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,\partial x}{x^3} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8a}\right)\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\,\partial x}{x^3} = -\left(\frac{X}{2x^2} + \frac{3b}{4x} - \frac{3c}{2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8} + \frac{3ac}{2}\right)\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} + \frac{3bc}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Tafel XVIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XIV bis XVII.

---

m und n positive ganze Zahlen.

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{1}{c}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^n\sqrt{X}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{X}}{(2n-m)cX^n} - \frac{(2n-2m+1)b}{2(2n-m)c}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^n\sqrt{X}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m)c}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^m X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}{(2n+m)c} - \frac{(2n+2m-1)b}{2(2n+m)c}\int \frac{x^{m-1}X^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{(m-1)a}{(2n+m)c}\int \frac{x^{m-2}X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m X^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}} - \frac{c}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-2}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}X^n} - \frac{(2n+2m-3)b}{2(m-1)a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}$$
$$-\frac{(2n+m-2)c}{(m-1)a}\int \frac{\partial x}{x^{m-2}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{1}{a^n\sqrt{X}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a^\nu}{(2\nu+1)X^\nu} - \frac{b}{2a^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} a^\nu\int \frac{\partial x}{X^{\nu+1}\sqrt{X}} + \frac{1}{a^n}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{(2n-2m+3)b}{2(m-1)a}\int \frac{X^n\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$+\frac{(2n-m+2)c}{(m-1)a}\int \frac{X^n\partial x}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{2n-1}{2(m-1)}b\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{m-1}c\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

Bez. $A = a - bh + ch^2$, $B = b - 2ch$;
n eine ganze Zahl, positiv oder negativ.

$$\int \frac{X^n \partial x}{(x+h)^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)A(x+h)^{m-1}} + \frac{(2n-2m+3)B}{2(m-1)A}\int \frac{X^n\partial x}{(x+h)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$+\frac{(2n-m+2)c}{(m-1)A}\int \frac{X^n\partial x}{(x+h)^{m-2}\sqrt{X}}.$$

Tafel XVIII. Fortsetzung.

$$X = a + bx + cx^2.$$

m eine positive, n eine positive oder negative ganze Zahl.

$$\int \frac{x^m X^n \partial x}{\sqrt{X}} = X^n \sqrt{X} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu x^{m-\nu} + \beta \int \frac{X^n \partial x}{\sqrt{X}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta$ werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(2n+m)c\alpha_1 = 1\ ;\ 2(2n+m-1)c\alpha_2 + (2m+2n-1)b\alpha_1 = 0.$$

$$2(2n+m-\nu+1)c\alpha_\nu + (2m+2n-2\nu+3)b\alpha_{\nu-1} + 2(m-\nu+2)a\alpha_{\nu-2}$$
$$= 0,\ \text{für}\ \nu = 3, 4, \cdots m.$$

$$2\beta = -(2n+1)b\alpha_m - 2a\alpha_{m-1}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^n \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{X^n} \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{\alpha_\nu}{a^\nu x^{m-\nu}} + \beta \int \frac{\partial x}{x X^n \sqrt{X}} + \gamma \int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{m-1}, \beta, \gamma$ folgen aus den Gleichungen:

$$(m-1)\alpha_1 + 1 = 0.\quad (m-2)\alpha_2 + (m+n-\tfrac{3}{2})b\alpha_1 = 0.$$

$$2(m-\nu)\alpha_\nu + (2m+2n-2\nu+1)b\alpha_{\nu-1} + 2(m+2n-\nu+1)ac\alpha_{\nu-2}$$
$$= 0,\ \text{für}\ \nu = 3, 4, \cdots m-1.$$

$$\beta = \frac{(2n+1)c\alpha_{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{(2n+1)b\alpha_{m-1}}{2a^{m-1}}.$$

$$\gamma = \frac{2nc\alpha_{m-1}}{a^{m-1}}.$$

$$X = bx + cx^2.$$ **Tafel XIX.**

Anmerkung. Die Formeln der Tafel XVI werden unbrauchbar, wenn $a = 0$ ist. Es genügt aber, den Divisor a als Factor auf die linke Seite zu setzen, um für diesen Fall brauchbare Reductionsformeln zu erhalten.

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n+2m-1)bx^m X^n} - \frac{2(2n+m-1)c}{(2n+2m-1)b} \int \frac{\partial x}{x^{m-1} X^n \sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^n \sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n+1)bxX^n} - \frac{4nc}{(2n+1)b} \int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx}. \quad \Big| \quad \int \frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = -\frac{2}{3bx\sqrt{X}} - \frac{4c}{3b} \int \frac{\partial x}{X\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = -\frac{2}{5bxX\sqrt{X}} - \frac{8c}{5b} \int \frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^n \sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{(2n+3)bxX^n}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2c}{b}\right) + \frac{8nc^2}{(2n+3)b^2} \int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{3bx}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2c}{b}\right). \quad \Big| \quad \int \frac{\partial x}{x^2 X\sqrt{X}} = \frac{2}{5bx\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2c}{b}\right) + \frac{8c^2}{5b^2} \int \frac{\partial x}{X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2\sqrt{X}} = \frac{2}{7bxX\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2c}{b}\right) + \frac{16c^2}{7b^2} \int \frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^n \sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{(2n+5)bxX^n}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4(n+1)c}{(2n+3)bx} - \frac{8(n+1)c^2}{(2n+3)b^2}\right)$$
$$- \frac{32n(n+1)c^3}{(2n+3)(2n+5)b^3} \int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{5bx}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4c}{3bx} - \frac{8c^2}{3b^2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X\sqrt{X}} = \frac{2}{7bx\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{8c}{5bx} - \frac{16c^2}{5b^2}\right) - \frac{64c^3}{35b^3} \int \frac{\partial x}{X\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^2\sqrt{X}} = \frac{2}{9bxX\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{12c}{7bx} - \frac{24c^2}{7b^2}\right) - \frac{64c^3}{21b^3} \int \frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

Die Integrale $\int \frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \int \frac{\partial x}{(bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ ergeben sich aus Tafel XII, wenn daselbst $a = 0$ gesetzt wird.

Tafel XX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $i = \sqrt{-1}$; $A = a - ch^2 - bhi$; $B = b - 2chi$.

$$\int\frac{\partial x}{(x+hi)^m\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)A(x+hi)^{m-1}} - \frac{(2m-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{\partial x}{(x+hi)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$-\frac{(m-2)c}{(m-1)A}\int\frac{\partial x}{(x+hi)^{m-2}\sqrt{X}}.$$

$\int\frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}$ s. Taf. XI. | $\int\frac{\partial x}{(x+hi)^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{A(x+hi)} - \frac{B}{2A}\int\frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}$.

$$\int\frac{\partial x}{(x+hi)^3\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{2A(x+hi)^2} + \frac{3B}{4A^2(x+hi)}\right)\sqrt{X} + \frac{3B^2-4Ac}{8A^2}\int\frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{(x+hi)^4\sqrt{X}} = \left[-\frac{1}{3A(x+hi)^3} + \frac{5B}{12A^2(x+hi)^2} - \left(\frac{5B^2}{8A^3} - \frac{2c}{3A^2}\right)\frac{1}{x+hi}\right]\sqrt{X}$$
$$+\left(\frac{3Bc}{4A^2} - \frac{5B^3}{16A^3}\right)\int\frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}.$$

Trennt man in vorstehenden Formeln den reellen Theil vom imaginären, so ergeben sich Gleichungen von der Form:

$$\int\frac{\partial x}{(x+hi)^m\sqrt{X}} = U_m + V_m i \quad , \quad \int\frac{\partial x}{(x-hi)^m\sqrt{X}} = U_m - V_m i.$$

wo U_m und V_m reelle Functionen von x sind, welche sich aus der Tafel finden lassen. Da nun

$$\frac{1}{(x^2+h^2)^n} = \frac{(-1)^n}{(2h)^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{(n+\nu-1)_\nu}{(2h)^\nu}\left(\frac{(-i)^{n+\nu}}{(x+hi)^{n-\nu}} + \frac{(i)^{n+\nu}}{(x-hi)^{n-\nu}}\right),$$

$$\frac{x}{(x^2+h^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2h)^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\frac{(n+\nu-2)_{\nu-1}(n-\nu-1)}{2\nu(2h)^\nu}\left(\frac{(-i)^{n+\nu-1}}{(x+hi)^{n-\nu}} + \frac{(i)^{n+\nu-1}}{(x-hi)^{n-\nu}}\right),$$

so erhält man hierdurch die Integrale: $\int\frac{\partial x}{(x^2+h^2)^m\sqrt{X}}$, $\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^m\sqrt{X}}$.

$\int\frac{\partial x}{(x^2+h^2)^2\sqrt{X}} = -\frac{1}{2h^2}\left(U_2 + \frac{V_1}{h}\right)$. | $\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^2\sqrt{X}} = -\frac{V_2}{2h}$.

$\int\frac{\partial x}{(x^2+h^2)^3\sqrt{X}} = -\frac{1}{4h^3}\left(-V_3 + \frac{3U_2}{2h} + \frac{3V_1}{2h^2}\right)$. | $\int\frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^3\sqrt{X}} = -\frac{1}{4h^2}\left(U_3 + \frac{V_2}{2h}\right)$.

Tafel XXI.

$$X = a + bx^n.$$

Reductions-Formeln.

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^{m-n}X^{p+1} - (m-n)a\int x^{m-n-1}X^p\partial x}{(m+np)b}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^m X^p + npa\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x}{m+np}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^m X^{p+1} - (m+np+n)b\int x^{m+n-1}X^p\partial x}{ma}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{-x^m X^{p+1} + (m+np+n)\int x^{m-1}X^{p+1}\partial x}{(n+np)a}.$$

$$(m+np)(m+np-n)b\int x^{m-1}X^p\partial x + np(m-n)a^2\int x^{m-n-1}X^{p-1}\partial x$$
$$= [npax^{n-m} + (m+pn-n)bx^m]X^p.$$

$$m\int x^{m-1}X^p\partial x + npb\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x = x^m X^p.$$

$$(np+n)b\int x^{m-1}X^p\partial x + (m-n)\int x^{m-n-1}X^{p+1}\partial x = x^{m-n}X^{p+1}.$$

Anmerkung. Durch die Formeln des ersten Absatzes wird nur einer der Exponenten m,p; durch die des zweiten werden beide zugleich reducirt. Der folgende Absatz enthält Verwandlungen des vorliegenden Integrals durch Substitution. q und r sind ganze Zahlen.

$$\int x^{m-1}X^{\frac{q}{r}}\partial x = \frac{r}{nb^{\frac{m}{n}}}\int(y^r-a)^{\frac{m}{n}-1}y^{q+r-1}\partial y, \text{für } y^r = a + bx^n = X.$$

$$\int x^{m-1}X^{\frac{q}{r}}\partial x = -\frac{r}{n}a^{\frac{m}{n}+\frac{1}{r}}\int\frac{y^{q+r-1}\partial y}{(y^r-b)^{\frac{m}{n}+\frac{q}{r}+1}}, \text{ für } y^r = \frac{a}{x^n} + b.$$

Wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, so führt die erste, und wenn $\frac{m}{n} + \frac{q}{r}$ eine ganze Zahl ist, die zweite Formel auf das Integral einer rationalen Function. Für $q = -m$, $r = n$ giebt die zweite Formel:

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}} = \int\frac{y^{n-m-1}\partial y}{b-y^n}, \text{ wo } y^n = \frac{a}{x^n} + b; \quad \text{z. B. für } m = 1:$$

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}} = \int\frac{y^{n-2}\partial y}{b-y^n}, \text{ für } y^n = \frac{a}{x^n} + b.$$

Dritte Abtheilung.

Integrale exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Integration exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Lehrsatz. Bezeichnet $f(e^x)$ eine rationale Function von e^x, so verwandelt sich das Integral $\int f(e^x)\partial x$ durch die Substitution $z = e^x$, $\frac{\partial z}{z} = \partial x$, in $\int f(z)\frac{\partial z}{z}$, also in das Integral einer rationalen Function $\frac{f(z)}{z}$.

Zusatz 1. Das Integral einer rationalen Function von $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$, nämlich $\int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x)\partial x$, lässt sich immer auf die Integration einer rationalen Function zurückführen.

Denn da $\operatorname{Cos} x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, $\operatorname{Sin} x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$, $(i = \sqrt{-1})$, so verwandelt sich durch die Substitution $e^{xi} = z$, $\partial x = \frac{\partial z}{iz}$, das vorgelegte Integral in $\int \psi(z)\cdot\partial z$ wo ψ eine rationale Function ist.

Zusatz 2. Da jedoch durch vorstehende Substitution das Imaginäre eingemischt wird, so ist in der Regel eine andere Substitution vorzuziehen, nämlich $\operatorname{Tang}(\frac{1}{2}x) = u$, woraus $\operatorname{Sin} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\operatorname{Cos} x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\partial x = \frac{2\partial u}{1+u^2}$ folgt, durch welche mithin das Integral $\int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x)\partial x$ auf die Form $\int \varphi(u)\partial u$ gebracht wird, wo φ eine rationale Function ist, wenn f eine solche ist.

Zusatz 3. Da allgemein $\int x\partial\varphi = x\varphi - \int\varphi\partial x$, so lässt sich nach vorstehendem Lehrsatze auch das Integral $\int x\partial\varphi$ immer finden, wenn φ eine beliebige rationale Function von $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$ ist.

Anmerkung 1. Der oben aufgestellte Lehrsatz lässt sich noch etwas allgemeiner so ausdrücken: Es sei $y = \sqrt{a + be^x + ce^{2x}}$ und $f(e^x, y)$ eine rationale Function von e^x und y, so verwandelt sich durch die Substitution $z = e^x$ das Integral

$$\int f(e^x, y)\partial x \text{ in } \int f(z, \sqrt{a+bz+cz^2})\frac{\partial z}{z} = \int\varphi(z)\partial z + \int\frac{\psi(z)\partial z}{\sqrt{a+bz+cz^2}}$$

wo φ und ψ rationale Functionen sind. Durch eine passende Substitution lässt sich dieses Integral stets auf die Integration einer rationalen Function zurückführen. Vergleiche Abtheilung 2.

Anmerkung 2. Die folgenden Tafeln enthalten hauptsächlich Integrale rationaler trigonometrischer Functionen, aus welchen sich die Integrale der entsprechenden Exponential- oder hyperbolischen Functionen durch Vertauschung der veränderlichen Grösse x mit xi sofort herleiten lassen; daher die Aufstellung der letzteren als unnöthig unterblieben ist.

Anmerkung 3. Auch andere Substitutionen, wie $\operatorname{Sin} x = y$ oder $\operatorname{Cos} x = y$ führen die Formeln der folgenden Tafeln grösstentheils auf diejenigen der vorhergehenden Abtheilungen zurück und geben zu Vergleichungen Gelegenheit.

Tafel I.

$\int \operatorname{Cos} x^n \partial x$.

n eine positive ganze Zahl, n′ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl; also

$n' = \frac{n}{2}$ wenn n gerade, $n' = \frac{n-1}{2}$ wenn n ungerade ist.

$$2^{n-1}\operatorname{Cos} x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} n_\nu \operatorname{Cos}(n-2\nu)x + n_{n'}\cdot 2^{n-2n'-1}\operatorname{Cos}(n-2n')x.$$

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Cos} x^2 &= \operatorname{Cos} 2x + 1.\\
4\operatorname{Cos} x^3 &= \operatorname{Cos} 3x + 3\operatorname{Cos} x.\\
8\operatorname{Cos} x^4 &= \operatorname{Cos} 4x + 4\operatorname{Cos} 2x + 3.\\
16\operatorname{Cos} x^5 &= \operatorname{Cos} 5x + 5\operatorname{Cos} 3x + 10\operatorname{Cos} x.\\
32\operatorname{Cos} x^6 &= \operatorname{Cos} 6x + 6\operatorname{Cos} 4x + 15\operatorname{Cos} 2x + 10.\\
64\operatorname{Cos} x^7 &= \operatorname{Cos} 7x + 7\operatorname{Cos} 5x + 21\operatorname{Cos} 3x + 35\operatorname{Cos} x.\\
128\operatorname{Cos} x^8 &= \operatorname{Cos} 8x + 8\operatorname{Cos} 6x + 28\operatorname{Cos} 4x + 56\operatorname{Cos} 2x + 35.\\
256\operatorname{Cos} x^9 &= \operatorname{Cos} 9x + 9\operatorname{Cos} 7x + 36\operatorname{Cos} 5x + 84\operatorname{Cos} 3x + 126\operatorname{Cos} x.\\
512\operatorname{Cos} x^{10} &= \operatorname{Cos} 10x + 10\operatorname{Cos} 8x + 45\operatorname{Cos} 6x + 120\operatorname{Cos} 4x + 210\operatorname{Cos} 2x + 126.
\end{aligned}$$

$$\int \operatorname{Cos} x^n \partial x = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} n_\nu \frac{\operatorname{Sin}(n-2\nu)x}{n-2\nu} + \frac{n_{n'}}{2^{2n'}}\cdot\frac{\operatorname{Sin}(n-2n')x}{n-2n'}. \quad {}^{*)}$$

$$\int \operatorname{Cos} x\,\partial x = \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2\partial x = \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 2x + \frac{1}{2}x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3\partial x = \frac{1}{12}\operatorname{Sin} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{Sin} x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4\partial x = \frac{1}{32}\operatorname{Sin} 4x + \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 2x + \frac{3}{8}x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^5\partial x = \frac{1}{80}\operatorname{Sin} 5x + \frac{5}{48}\operatorname{Sin} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{Sin} x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^6\partial x = \frac{1}{192}\operatorname{Sin} 6x + \frac{3}{64}\operatorname{Sin} 4x + \frac{15}{64}\operatorname{Sin} 2x + \frac{5}{16}x.$$

U. s. f. nach vorstehender Tafel.

*) Für ein gerades n ist $n - 2n' = 0$, daher $\frac{\operatorname{Sin}(n-2n')x}{n-2n'} = x$.

Die Entwickelung von $\int \operatorname{Cos} x^n \partial x$ nach Potenzen s. Taf. III.

Tafel II.

$$\int \mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

$$2^{2n}\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu (2n+1)_\nu \,\mathrm{Sin}(2n-2\nu+1)x.$$

$$2^{2n-1}\,\mathrm{Sin}\,x^{2n} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu (2n)_\nu \,\mathrm{Cos}(2n-2\nu)x + \tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Sin}\,x^2 &= -\mathrm{Cos}\,2x + 1.\\
4\,\mathrm{Sin}\,x^3 &= -\mathrm{Sin}\,3x + 3\,\mathrm{Sin}\,x.\\
8\,\mathrm{Sin}\,x^4 &= \mathrm{Cos}\,4x - 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 3.\\
16\,\mathrm{Sin}\,x^5 &= \mathrm{Sin}\,5x - 5\,\mathrm{Sin}\,3x + 10\,\mathrm{Sin}\,x.\\
32\,\mathrm{Sin}\,x^6 &= -\mathrm{Cos}\,6x + 6\,\mathrm{Cos}\,4x - 15\,\mathrm{Cos}\,2x + 10.\\
64\,\mathrm{Sin}\,x^7 &= -\mathrm{Sin}\,7x + 7\,\mathrm{Sin}\,5x - 21\,\mathrm{Sin}\,3x + 35\,\mathrm{Sin}\,x.\\
128\,\mathrm{Sin}\,x^8 &= \mathrm{Cos}\,8x - 8\,\mathrm{Cos}\,6x + 28\,\mathrm{Cos}\,4x - 56\,\mathrm{Cos}\,2x + 35.\\
256\,\mathrm{Sin}\,x^9 &= \mathrm{Sin}\,9x - 9\,\mathrm{Sin}\,7x + 36\,\mathrm{Sin}\,5x - 84\,\mathrm{Sin}\,3x + 126\,\mathrm{Sin}\,x.\\
512\,\mathrm{Sin}\,x^{10} &= -\mathrm{Cos}\,10x + 10\,\mathrm{Cos}\,8x - 45\,\mathrm{Cos}\,6x + 120\,\mathrm{Cos}\,4x - 210\,\mathrm{Cos}\,2x + 126.
\end{aligned}$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^{2n+1}\,\partial x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu (2n+1)_\nu \frac{\mathrm{Cos}(2n-2\nu+1)x}{2n-2\nu+1}.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^{2n}\,\partial x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu (2n)_\nu \frac{\mathrm{Sin}(2n-2\nu)x}{2n-2\nu} + \frac{(2n)_n}{2^{2n}}\,x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x\,\partial x = -\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^2\,\partial x = -\frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{x}{2}.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^3\,\partial x = \frac{1}{12}\mathrm{Cos}\,3x - \frac{3}{4}\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^4\,\partial x = \frac{1}{32}\mathrm{Sin}\,4x - \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{3}{8}x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^5\,\partial x = -\frac{1}{80}\mathrm{Cos}\,5x + \frac{5}{48}\mathrm{Cos}\,3x - \frac{5}{8}\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^6\,\partial x = -\frac{1}{192}\mathrm{Sin}\,6x + \frac{3}{64}\mathrm{Sin}\,4x - \frac{15}{64}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{5}{16}x.$$

Die Entwicklung dieser Integrale nach Potenzen s. Taf. IV.

Taf. III.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n\,\partial x.$$

n' die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n\,\partial x = \frac{1}{n}\mathrm{Cos}\,x^{n-1}\,\mathrm{Sin}\,x + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Cos}\,x^{n-2}\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n\,\partial x = \frac{1}{n}\mathrm{Sin}\,x \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu}\mathrm{Cos}\,x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{n}{2}\right)_{n'}}\int \mathrm{Cos}\,x^{n-2n'}\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x + \frac{1}{2}x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x = \frac{1}{3}\mathrm{Sin}\,x(\mathrm{Cos}\,x^2 + 2).$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^3 + \frac{3}{2}\mathrm{Cos}\,x\right) + \frac{3}{8}x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^5\,\partial x = \frac{1}{5}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^4 + \frac{4}{3}\mathrm{Cos}\,x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^6\,\partial x = \frac{1}{6}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^5 + \frac{5}{4}\mathrm{Cos}\,x^3 + \frac{15}{8}\mathrm{Cos}\,x\right) + \frac{5}{16}x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^7\,\partial x = \frac{1}{7}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^6 + \frac{6}{5}\mathrm{Cos}\,x^4 + \frac{8}{5}\mathrm{Cos}\,x^2 + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^8\,\partial x = \frac{1}{8}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^7 + \frac{7}{6}\mathrm{Cos}\,x^5 + \frac{35}{24}\mathrm{Cos}\,x^3 + \frac{35}{16}\mathrm{Cos}\,x\right) + \frac{35}{128}x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^9\,\partial x = \frac{1}{9}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^8 + \frac{8}{7}\mathrm{Cos}\,x^6 + \frac{48}{35}\mathrm{Cos}\,x^4 + \frac{64}{35}\mathrm{Cos}\,x^2 + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^{10}\,\partial x = \frac{1}{10}\mathrm{Sin}\,x\left(\mathrm{Cos}\,x^9 + \frac{9}{8}\mathrm{Cos}\,x^7 + \frac{21}{16}\mathrm{Cos}\,x^5 + \frac{105}{64}\mathrm{Cos}\,x^3 + \frac{315}{128}\mathrm{Cos}\,x\right) + \frac{63}{256}x.$$

Die Entwickelung dieses Integrals nach den Sinus der Vielfachen von x s. Taf. I.

Tafel IV.

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

n' die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu} \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{n}{2}\right)_{n'}} \int \operatorname{Sin} x^{n-2n'} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{1}{2} \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x + \frac{1}{2} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^3 \partial x = -\frac{1}{3} \operatorname{Cos} x (\operatorname{Sin} x^2 + 2).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^4 \partial x = -\frac{1}{4} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^3 + \frac{3}{2} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{3}{8} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{1}{5} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^4 + \frac{4}{3} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^6 \partial x = -\frac{1}{6} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^5 + \frac{5}{4} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{15}{8} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{5}{16} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^7 \partial x = -\frac{1}{7} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^6 + \frac{6}{5} \operatorname{Sin} x^4 + \frac{8}{5} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^8 \partial x = -\frac{1}{8} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^7 + \frac{7}{6} \operatorname{Sin} x^5 + \frac{35}{24} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{35}{16} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{35}{128} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^9 \partial x = -\frac{1}{9} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^8 + \frac{8}{7} \operatorname{Sin} x^6 + \frac{48}{35} \operatorname{Sin} x^4 + \frac{64}{35} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^{10} \partial x = -\frac{1}{10} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^9 + \frac{9}{8} \operatorname{Sin} x^7 + \frac{21}{16} \operatorname{Sin} x^5 + \frac{105}{64} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{315}{128} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{63}{256} x.$$

Diese Tafel folgt aus der vorigen durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} - x$.

Die Entwickelung dieses Integrals nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x s. Taf. II.

Tafel V.

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

n' die grösste in $\frac{n}{2}$ und m' die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x = \frac{\operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{Cos} x^{m-2} \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x = \frac{\operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^{n-1}}{m+n} \left[\operatorname{Sin} x^2 - \frac{m-1}{m+n-2}\right] + \frac{(n-1)(m-1)}{(m+n)(m+n-2)} \int \operatorname{Cos} x^{m-2} \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x = \frac{\operatorname{Sin} x^{n+1}}{m+n} \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu} \operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}}{\left(\frac{m+n}{2}\right)_{m'}} \int \operatorname{Cos} x^{m-2m'} \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu} \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{m+n}{2}\right)_{n'}} \int \operatorname{Sin} x^{n-2n'} \operatorname{Cos} x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+1}.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1} \operatorname{Sin} x}{m+2} + \frac{1}{m+2} \int \operatorname{Cos} x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^3 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+3} \left(\operatorname{Sin} x^2 + \frac{2}{m+1}\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^4 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+4} \left(\operatorname{Sin} x^3 + \frac{3}{m+2} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{3}{(m+4)(m+2)} \int \operatorname{Cos} x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{m+5} \left(\operatorname{Sin} x^4 + \frac{4}{m+3} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{8}{(m+3)(m+1)}\right).$$

Tafel V. Fortsetzung.

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^n\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^6\, \partial x = -\frac{\mathrm{Cos}x^{m+1}}{m+6}\left[\mathrm{Sin}x^5 + \frac{5}{m+4}\,\mathrm{Sin}x^3 + \frac{15}{(m+4)(m+2)}\,\mathrm{Sin}x\right] + \frac{15}{(m+6)(m+4)(m+2)}\int \mathrm{Cos}x^m\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^7\, \partial x = -\frac{\mathrm{Cos}x^{m+1}}{m+7}\left[\mathrm{Sin}x^6 + \frac{6}{m+5}\,\mathrm{Sin}x^4 + \frac{24}{(m+5)(m+3)}\,\mathrm{Sin}x^2 + \frac{48}{(m+5)(m+3)(m+1)}\right].$$

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^8\, \partial x = -\frac{\mathrm{Cos}x^{m+1}}{m+8}\left[\mathrm{Sin}x^7 + \frac{7}{m+6}\,\mathrm{Sin}x^5 + \frac{35}{(m+6)(m+4)}\,\mathrm{Sin}x^3 + \frac{105}{(m+6)(m+4)(m+2)}\,\mathrm{Sin}x\right] + \frac{105}{(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\int \mathrm{Cos}x^m\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^9\, \partial x = -\frac{\mathrm{Cos}x^{m+1}}{m+9}\left[\mathrm{Sin}x^8 + \frac{8}{m+7}\,\mathrm{Sin}x^6 + \frac{48}{(m+7)(m+5)}\,\mathrm{Sin}x^4 + \frac{192}{(m+7)(m+5)(m+3)}\,\mathrm{Sin}x^2 + \frac{384}{(m+7)(m+5)(m+3)(m+1)}\right].$$

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^{10}\, \partial x = -\frac{\mathrm{Cos}x^{m+1}}{m+10}\left[\mathrm{Sin}x^9 + \frac{9}{m+8}\,\mathrm{Sin}x^7 + \frac{63}{(m+8)(m+6)}\,\mathrm{Sin}x^5 + \frac{315}{(m+8)(m+6)(m+4)}\,\mathrm{Sin}x^3 + \frac{945}{(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\,\mathrm{Sin}x\right] + \frac{945}{(m+10)(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\int \mathrm{Cos}x^m\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Sin}x^m\, \mathrm{Cos}x\, \partial x = \frac{\mathrm{Sin}x^{m+1}}{m+1}.$$

$$\int \mathrm{Sin}x^m\, \mathrm{Cos}x^2\, \partial x = \frac{\mathrm{Sin}x^{m+1}\,\mathrm{Cos}x}{m+2} + \frac{1}{m+2}\int \mathrm{Sin}x^m\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Sin}x^m\, \mathrm{Cos}x^3\, \partial x = \frac{\mathrm{Sin}x^{m+1}}{m+1}\left(\mathrm{Cos}x^2 + \frac{2}{m+3}\right) \qquad \text{U. s. f.}$$

Diese Integrale ergeben sich aus denen umstehend durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} - x$.

Fortsetzung von Tafel V.

$$\int \mathrm{Cos}x^m\, \mathrm{Sin}x^n\, \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^2\, \mathrm{Sin}\,x^2\, \partial x = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,4x - x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^2\, \mathrm{Sin}x^3\, \partial x = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\,\mathrm{Cos}5x - \frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,3x - 2\,\mathrm{Cos}\,x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^2\, \mathrm{Sin}\,x^4\, \partial x = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\,\mathrm{Sin}\,6x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,4x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2x + 2x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^2\, \mathrm{Sin}\,x^5\, \partial x = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\,\mathrm{Cos}7x - \frac{3}{5}\,\mathrm{Cos}5x + \frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}3x + 5\,\mathrm{Cos}x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^2\, \mathrm{Sin}\,x^6\, \partial x = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{Sin}\,8x - \frac{2}{3}\,\mathrm{Sin}\,6x + \mathrm{Sin}\,4x + 2\,\mathrm{Sin}\,2x - 5x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^3\, \mathrm{Sin}\,x^2\, \partial x = -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\,\mathrm{Sin}5x + \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}3x - 2\,\mathrm{Sin}x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^3\, \mathrm{Sin}x^3\, \partial x = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\,\mathrm{Cos}\,6x - \frac{3}{2}\,\mathrm{Cos}\,2x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^3\, \mathrm{Sin}x^4\, \partial x = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\,\mathrm{Sin}7x - \frac{1}{5}\,\mathrm{Sin}5x - \mathrm{Sin}\,3x + 3\,\mathrm{Sin}x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^3\, \mathrm{Sin}\,x^5\, \partial x = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{Cos}8x - \frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,6x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,4x + 3\,\mathrm{Cos}2x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^3\, \mathrm{Sin}\,x^6\, \partial x = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\,\mathrm{Sin}\,9x - \frac{3}{7}\,\mathrm{Sin}7x + \frac{8}{3}\,\mathrm{Sin}3x - 6\,\mathrm{Sin}\,x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^4\, \mathrm{Sin}x^2\, \partial x = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\,\mathrm{Sin}\,6x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,4x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2x - 2x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^4\, \mathrm{Sin}\,x^3\, \partial x = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\,\mathrm{Cos}7x + \frac{1}{5}\,\mathrm{Cos}5x - \mathrm{Cos}\,3x - 3\,\mathrm{Cos}x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^4\, \mathrm{Sin}x^4\, \partial x = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{Sin}8x - \mathrm{Sin}4x + 3x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^4\, \mathrm{Sin}\,x^5\, \partial x = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\,\mathrm{Cos}\,9x - \frac{1}{7}\,\mathrm{Cos}7x - \frac{4}{5}\,\mathrm{Cos}5x + \frac{4}{3}\,\mathrm{Cos}\,3x + 6\,\mathrm{Cos}x\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}x^4\, \mathrm{Sin}x^6\, \partial x = -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}\,\mathrm{Sin}10x - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,8x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}6x + 2\,\mathrm{Sin}4x + \mathrm{Sin}2x - 6x\right).$$

Die allgemeinen Formeln zu diesen Integralen s. Taf. VI.

Tafel VI.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

Allgemeine Formeln zur Entwickelung dieses Integrals nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von x. (Vergl. Taf. V.)

m und n positive ganze Zahlen.

m' die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$(-1)^n 2^{m+2n-1}\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'-1}\alpha_\nu \mathrm{Cos}(m+2n-2\nu)x + 2^{m-2m'-1}\alpha_{n+m'}\mathrm{Cos}(m-2m')x;$$

$$(-1)^n 2^{m+2n}\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'}\alpha_\nu \mathrm{Sin}(m+2n-2\nu+1)x.$$

Die mit α bezeichneten Coëfficienten ergeben sich entweder für die erste oder für die zweite Formel je nachden man $p = 2n$ oder $= 2n+1$ setzt, aus den $n+m'+1$ ersten Gliedern der Entwickelung von

$$(1+q)^m(1-q)^p = \sum_{\nu=0}^{\nu=m+n}\alpha_\nu q^\nu,$$

und lassen sich allgemein ausdrücken wie folgt:

$$\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}(-1)^\lambda p_\lambda m_{\nu-\lambda}, \text{ oder auch: } \alpha_\nu = (-1)^\nu\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu'}(-1)^\lambda m_\lambda (p-m)_{\nu-2\lambda},$$

oder auch: $\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu'}(-1)^\lambda n_\lambda (m-p)_{\nu-2\lambda}$; wo in den beiden letzten Formen ν' die grösste in $\frac{\nu}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n}\,\partial x = \frac{(-1)^n}{2^{m+2n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'-1}\frac{\alpha_\nu \mathrm{Sin}(m+2n-2\nu)x}{m+2n-2\nu} + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2m'}}\alpha_{n+m'}\cdot\frac{\mathrm{Sin}(m-2m')x}{m-2m'}.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1}\,\partial x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{m+2n}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'}\frac{\alpha_\nu \mathrm{Cos}(m+2n-2\nu+1)x}{m+2n-2\nu+1}.$$

Tafel VII.

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

Algemeine Formeln zu Taf. VIII und IX.

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{(n-1)\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = \frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-1}}{(m-n)\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-2}\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} \quad *).$$

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^n} = -\int\frac{\mathrm{Cos}\,y^m\,\partial y}{\mathrm{Sin}\,y^n}, \text{ für } y = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = \frac{1}{(m-n)\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1}\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m-n}{2}-1\right)_\nu}\mathrm{Cos}\,x^{m-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}}{\left(\frac{m-n}{2}\right)_{m'}}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-2m'}\partial x.}{\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{n-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}\frac{\left(\frac{n-m}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu \mathrm{Sin}\,x^{n-2\nu-1}} + \frac{\left(\frac{n-m}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2n'}} \quad *).$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{n-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu \mathrm{Sin}\,x^{n-2\nu-1}} + \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2n'}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{1}{(n-1)\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} \quad\Big|\quad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \log \mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1}\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-2\nu-1}}{m-2\nu-1} + \int\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-2m'}\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}.$$

$$\int \mathrm{Cotg}\,x^n\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cotg}\,x^{n-1}}{n-1} - \int\mathrm{Cotg}\,x^{n-2}\,\partial x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^{n+2\mu}\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = \frac{1}{2\mu\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\left(\frac{n-1}{2}+\mu\right)_\nu}{(\mu-1)_\nu}\mathrm{Cos}\,x^{n+2\mu-2\nu-1} + \left(\frac{n-1}{2}+\mu\right)_\mu\int\mathrm{Cotg}\,x^n\,\partial x.$$

*) Die Verbindung dieser beiden Reductionsformeln s. Tafel IX am Ende. (S. 127.)

Tafel VIII. $\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}$. $\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^n}$.

Die allgemeinen Formeln zu diesen Integralen s. Taf. VII.

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2}=-\mathrm{Cotang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^2}+2\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^5}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{3}{2\,\mathrm{Sin}\,x}\right)+\frac{3}{8}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^6}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{5}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^4}+\frac{4}{3\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{8}{3}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^7}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{6}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^5}+\frac{5}{4\,\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{15}{8\,\mathrm{Sin}\,x}\right)+\frac{5}{16}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^8}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{7}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^6}+\frac{6}{5\,\mathrm{Sin}\,x^4}+\frac{8}{5\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{16}{5}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^9}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{8}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^7}+\frac{7}{6\,\mathrm{Sin}\,x^5}+\frac{35}{24\,\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{35}{16\,\mathrm{Sin}\,x}\right)$$
$$+\frac{35}{128}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{10}}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{9}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^8}+\frac{8}{7\,\mathrm{Sin}\,x^6}+\frac{48}{35\,\mathrm{Sin}\,x^4}+\frac{64}{35\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{128}{35}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x}=\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right). \qquad \Big| \qquad \int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^2}=\mathrm{Tang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3}=\frac{\mathrm{Sin}\,x}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2}+\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^4}=\frac{\mathrm{Tang}\,x}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^2}+2\right).$$ U. s. f.

Diese Formeln ergeben sich aus den obenstehenden durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2}+x$, wodurch Cos x in $-$ Sin x, Sin x in $+$ Cos x verwandelt wird.

$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}$. Tafel IX.

Allgemeine Formeln zu diesem Integrale s. Taf. VII.

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}=-\frac{1}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}. \qquad \Big| \qquad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\log\mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{(n-2)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}-\frac{1}{n-2}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n};$$
$$=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}-\frac{1}{n-1}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2}}.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\mathrm{Cos}\,x+\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x. \qquad \Big| \qquad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Sin}\,x^2}-\frac{1}{2}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2}=-\mathrm{Cotang}\,x-x. \qquad \Big| \qquad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{\mathrm{Cotang}\,x}{3}.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x^2}{(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}+\frac{2}{(n-1)(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}$$
$$=-\frac{\mathrm{Cos}\,x^2}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}+\frac{2}{(n-1)(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-3}}.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,x^2+\log\mathrm{Sin}\,x. \qquad \Big| \qquad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x^2}{2}-\log\mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2}=-\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x}-\mathrm{Sin}\,x. \qquad \Big| \qquad \int\frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x^2}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{2}{3\,\mathrm{Sin}\,x}.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}=-\frac{1}{(n-4)\,\mathrm{Sin}^{n-1}}\left(\mathrm{Cos}\,x^3-\frac{3}{n-2}\mathrm{Cos}\,x\right)+\frac{3}{(n-2)(n-4)}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}$$
$$=-\frac{\mathrm{Cos}\,x^3}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}-\frac{3}{n-1}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2}}.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\,x^3+\mathrm{Cos}\,x+\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x^3}{\mathrm{Sin}\,x}-\frac{3}{2}\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x-\frac{3}{2}x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3}=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^2}\left(\mathrm{Cos}\,x^3-\frac{3}{2}\mathrm{Cos}\,x\right)-\frac{3}{2}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{\mathrm{Cotang}\,x^3}{3}+\mathrm{Cotang}\,x+x.$$

Tafel IX. Fortsetzung.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-5)\operatorname{Sin} x^{n-1}}\left(\operatorname{Cos} x^4 - \frac{4}{n-3}\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{(n-1)(n-3)}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{4}\operatorname{Cos} x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{Cos} x^2 + \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{3\operatorname{Sin} x}\left(\operatorname{Cos} x^4 + 4\operatorname{Cos} x^2 - 8\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = \frac{1}{2\operatorname{Sin} x^2}(\operatorname{Cos} x^4 - 2) - 2\log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = \frac{1}{\operatorname{Sin} x^3}\left(\operatorname{Cos} x^4 - 4\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = -\frac{1}{4}\operatorname{Cotang} x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{Cotang} x^2 + \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{1}{\operatorname{Sin} x^5}\left(\operatorname{Cos} x^4 - \frac{4}{3}\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{15}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-6)\operatorname{Sin} x^{n-1}}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{5}{n-4}\operatorname{Cos} x^3 + \frac{15}{(n-2)(n-4)}\operatorname{Cos} x\right)$$
$$- \frac{15}{(n-2)(n-4)(n-6)}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\operatorname{Cos} x^5}{5} + \frac{\operatorname{Cos} x^3}{3} + \operatorname{Cos} x + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{4\operatorname{Sin} x}\left(\operatorname{Cos} x^5 + \frac{5}{2}\operatorname{Cos} x^3 - \frac{15}{2}\operatorname{Cos} x\right) - \frac{15}{8}x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = \frac{1}{3\operatorname{Sin} x^2}\left(\operatorname{Cos} x^5 + 5\operatorname{Cos} x^3 - \frac{15}{2}\operatorname{Cos} x\right) - \frac{5}{2}\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = \frac{1}{2\operatorname{Sin} x^3}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{20}{3}\operatorname{Cos} x^3 + 5\operatorname{Cos} x\right) + \frac{5}{2}x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = \frac{1}{\operatorname{Sin} x^4}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{25}{8}\operatorname{Cos} x^3 + \frac{15}{8}\operatorname{Cos} x\right) + \frac{15}{8}\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{1}{5}\operatorname{Cotang} x^5 + \frac{1}{3}\operatorname{Cotang} x^3 - \operatorname{Cotang} x - x.$$

Fortsetzung von **Tafel IX.**

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

Vergleiche Tafel VII.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{Cos} x^{m-1}}{\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2}\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu}\cdot\frac{\operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1}}{\operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}}$$
$$+ (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\lambda}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\lambda}\int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2\lambda}\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2\lambda}}.$$

$$\int \operatorname{Cotang} x^n \,\partial x = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} (-1)^\nu \frac{\operatorname{Cotang} x^{n-2\nu-1}}{n-2\nu-1} + (-1)^{n'}\int \operatorname{Cotang} x^{n-2n'}\,\partial x.$$

(Diese Formel folgt aus der vorigen für $m = n$, wenn $\lambda = n' =$ der grössten in $\frac{n}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl genommen wird.)

Tafel X.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n}.$$

Allgem. Formeln zu Taf. XI.

---

n' die grösste in $\frac{n}{2}$, m' die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = \frac{1}{(m-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2}\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = \frac{(n-1)\operatorname{Sin} x^2 - (m-1)\operatorname{Cos} x^2}{(m-1)(n-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(m-1)(n-1)}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2}\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

Tafel X. Fortsetzung.

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

Allgem. Formeln zu Taf. XI.

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n}=\frac{1}{(m-1)\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1}\frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{m-3}{2}\right)_\nu\mathrm{Cos}\,x^{m-2\nu-1}}$$
$$+\frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_{m'}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{m-2m'}\,\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n}=-\frac{1}{(n-1)\,\mathrm{Cos}\,x^{m-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}\frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu\mathrm{Sin}\,x^{n-2\nu-1}}$$
$$+\frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{n-2n'}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x}=\sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1}\frac{1}{(m-2\nu-1)\,\mathrm{Cos}\,x^{m-2\nu-1}}+\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{m-2m'}\,\mathrm{Sin}\,x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^n}=-\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}\frac{1}{(n-2\nu-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-2\nu-1}}+\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2n'}\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x}=\log\mathrm{Tang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^n\,\mathrm{Sin}\,x^n}=2^{n-1}\int\frac{\partial y}{\mathrm{Sin}\,y^n},\quad \text{für } y=2x.\quad \text{(S. Tafel VIII.)}$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x}+\log\mathrm{Tang}\,\frac{x}{2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2}+\log\mathrm{Tang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^4\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{3\,\mathrm{Cos}\,x^3}+\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x}+\log\mathrm{Tang}\,\frac{x}{2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^5\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{4\,\mathrm{Cos}\,x^4}+\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2}+\log\mathrm{Tang}\,x.$$

Tafel XI.

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

Allgemeine Formeln s. vorige Tafel.

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^2}=\frac{1-m\,\mathrm{Cos}\,x^2}{(m-1)\,\mathrm{Cos}\,x^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,x}+\frac{m(m-2)}{m-1}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{m-2}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^2}=-\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x}+\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x^2}=-2\,\mathrm{Cotang}\,2x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x^2}=\frac{1-3\,\mathrm{Cos}\,x^2}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x}+\frac{3}{2}\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^4\,\mathrm{Sin}\,x^2}=\frac{1}{3\,\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x}-\frac{8}{3}\,\mathrm{Cotang}\,2x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^3}=\frac{2-(m+1)\,\mathrm{Cos}\,x^2}{2(m-1)\,\mathrm{Cos}\,x^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{m+1}{2}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{m-2}\,\mathrm{Sin}\,x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{1}{2\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\log\mathrm{Tang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{3}{2\,\mathrm{Cos}\,x}+\frac{3}{2}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{2\,\mathrm{Cos}\,2x}{(\mathrm{Sin}\,2x)^2}+2\log\mathrm{Tang}\,x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^4\,\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{5}{6\,\mathrm{Cos}\,x^3}+\frac{5}{2\,\mathrm{Cos}\,x}+\frac{5}{2}\log\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{1}{3\,\mathrm{Cos}\,x^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,x^3}+\frac{m+2}{3}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{1}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3}-\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x}+\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{1}{3\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^3}-\frac{8}{3}\,\mathrm{Cotang}\,2x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x^4}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x^3}-\frac{5}{6\,\mathrm{Sin}\,x^3}-\frac{5}{2\,\mathrm{Sin}\,x}+\frac{5}{2}\log\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^4\,\mathrm{Sin}\,x^4}=-\frac{8}{3}\,\mathrm{Cotg}\,2x\left(\frac{1}{(\mathrm{Sin}\,2x)^2}+2\right).$$

Tafel XII. $$\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{Arc.Tang}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\,\mathrm{Cos}\,x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{Arc.Sin}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{Arc.Cos}\,\frac{b+a\,\mathrm{Cos}\,x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}\,;\quad \text{wenn } a^2>b^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathfrak{Arc.Tang}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\,\mathrm{Cos}\,x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\,\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Sin}\,x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}\,;\quad \text{wenn } a^2<b^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{1+\mathrm{Cos}\,x}=\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{1-\mathrm{Cos}\,x}=-\mathrm{Cotang}\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x+c\,\mathrm{Sin}\,x}=\int\frac{\partial y}{a+h\,\mathrm{Cos}\,y}\,;\quad \text{für } h=\sqrt{b^2+c^2}\,,\ b=h\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon,\ c=h\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,,\ y=x-\varepsilon.$$

Andere Formen der vorstehenden Integrale sind:

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,x}=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\log\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{x-\alpha}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{x+\alpha}{2}}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\log\frac{1+\mathrm{Cos}(x-\alpha)}{\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,x}$$
$$=\frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Tang}\left(\mathrm{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{1+\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,x}=\frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left(\mathrm{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,x}.$$

Fortsetzung von **Tafel XII.**

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,\alpha+\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\log\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{x-\alpha}{2}}$$
$$=-\frac{2}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Cotang}\left[\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{1+\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{2}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left[\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathfrak{Cof}\,x+\mathfrak{Cof}\,\alpha}=\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\log\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{x-\alpha}{2}}$$
$$=\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathfrak{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{1+\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,x}=\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathfrak{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathfrak{Sin}\,x+\mathfrak{Sin}\,\alpha}=\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\alpha}\log\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{x-\alpha}{2}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathfrak{Cof}\,x+\mathrm{Cos}\,\alpha}=\frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{1+\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,x}=\frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot\mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

Anmerkung. Bei der Anwendung dieser Formeln dürfen die Grenzen der Integration nicht solche sein, zwischen welchen der Nenner unter dem Integralzeichen verschwindet.

Tafel XII. Fortsetzung.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x + p + qi}.$$

p und q reelle Grössen. $i = \sqrt{-1}$.

Man bestimme die reellen Grössen $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ aus den Gleichungen:

$$A + Bi = \sqrt{1-(p+qi)^2}\ , \quad C = A^2 + B^2, \quad \alpha + \beta i = \sqrt{\frac{1+p+qi}{1-p-qi}},$$

$\gamma = \alpha^2 + \beta^2$, und setze $\operatorname{Tang}\frac{x}{2} = u$, $\mathfrak{Tang}\frac{x}{2} = v$, so ist:

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x+p+qi} = \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha u}{\gamma+u^2} - \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta u}{\gamma-u^2}$$
$$- i\left(\frac{B}{C}\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha u}{\gamma+u^2} + \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta u}{\gamma-u^2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\, x+p+qi} = \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\alpha v}{\gamma-v^2} - \frac{B}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\beta v}{\gamma+v^2}$$
$$- i\left(\frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\alpha v}{\gamma-v^2} + \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\beta v}{\gamma+v^2}\right).$$

$$A + Bi = \sqrt{1-(p+qi)^2}, \quad C = A^2 + B^2, \quad \alpha + \beta i = \sqrt{\frac{1-p-qi}{1+p+qi}},$$

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2\ , \quad w = \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x+p+qi} = -\frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha w}{\gamma+w^2} - \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta w}{w^2-\gamma}$$
$$+ i\left(\frac{B}{C}\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha w}{\gamma+w^2} - \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta w}{w^2-\gamma}\right).$$

$$A + Bi = \sqrt{1+(p+qi)^2}, \quad C = A^2 + B^2\ , \qquad v = \mathfrak{Tang}\frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Sin}\, x+p+qi} = \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2[(Ap+Bq)v-A]}{C+(pv-1)^2+q^2v^2}$$
$$+ \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2[(Aq-Bp)v+B]}{C-(pv-1)^2-q^2v^2}$$
$$- i\left[\frac{B}{C}\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2[(Ap+Bq)v-A]}{C+(pv-1)^2+q^2v^2}\right.$$
$$\left. - \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2[(Aq-Bp)v+B]}{C-(pv-1)^2-q^2v^2}\right].$$

Tafel XIII.

$$\int \frac{\partial x}{a + b\operatorname{Cos} x}.$$

Bez. $a + b\operatorname{Cos} x = X$. (s. vorhergehende Tafel.)

Allgemeine Reductionsformel.

$$\int \frac{\partial x}{X^n} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b\operatorname{Sin} x}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-2}} - \frac{(2n-3)a}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{b\operatorname{Sin} x}{(b^2-a^2)X} - \frac{a}{b^2-a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{1}{(b^2-a^2)^2}\left[\frac{(b^2-a^2)b\operatorname{Sin} x}{2X^2} - \frac{3ab\operatorname{Sin} x}{2X}\right] + \frac{a^2+\frac{1}{2}b^2}{(b^2-a^2)^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{1}{(b^2-a^2)^3}\left[\frac{(b^2-a^2)^2 b\operatorname{Sin} x}{3X^3} - \frac{5(b^2-a^2)ab\operatorname{Sin} x}{6X^2} + \frac{(11a^2+4b^2)b\operatorname{Sin} x}{6X}\right]$$
$$- \frac{a^3+\frac{3}{2}ab^2}{(b^2-a^2)^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{1}{(b^2-a^2)^4}\left[\frac{(b^2-a^2)^3 b\operatorname{Sin} x}{4X^4} - \frac{7(b^2-a^2)^2 ab\operatorname{Sin} x}{12X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{(26a^2+9b^2)(b^2-a^2)b\operatorname{Sin} x}{24X^2} - \frac{5(10a^2+11b^2)ab\operatorname{Sin} x}{24X}\right]$$
$$+ \frac{a^4+3a^2b^2+\frac{3}{8}b^4}{(b^2-a^2)^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{1}{(b^2-a^2)^5}\left[\frac{(b^2-a^2)^4 b\operatorname{Sin} x}{5X^5} - \frac{9(b^2-a^2)^3 ab\operatorname{Sin} x}{20X^4}\right.$$
$$+ \frac{(47a^2+16b^2)(b^2-a^2)^2 b\operatorname{Sin} x}{60X^3} - \frac{(154a^2+161b^2)(b^2-a^2)ab\operatorname{Sin} x}{120X^2}$$
$$\left. + \frac{(274a^4+607a^2b^2+64b^4)b\operatorname{Sin} x}{120X}\right] - \frac{a^5+5a^3b^2+\frac{15}{8}ab^4}{(b^2-a^2)^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x\cdot X} = \frac{b}{a^2-b^2}\log(a+b\operatorname{Cos} x) + \frac{1}{b+a}\log\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{b-a}\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x\cdot X} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{a+b\operatorname{Cos} x}.$$

Tafel XIV.

Zerlegung von Cos nx und Sin nx in Factoren.

$$\operatorname{Cos} nx = 2^{n-1}\prod_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[\operatorname{Cos}x - \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{2n}\right].$$

$$\operatorname{Sin}2nx = 2^{2n-1}\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x\prod_{\mu=1}^{\mu=n-1}\left[\operatorname{Cos}x^2 - \left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n}\right)^2\right].$$

$$\operatorname{Sin}(2n+1)x = 2^{2n}\operatorname{Sin}x\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\left[\operatorname{Cos}x^2 - \left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2\right].$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x\,\partial x}{\operatorname{Cos}2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin}x}{1-\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{Arc.\,Tang}(\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x\,\partial x}{\operatorname{Sin}2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{Tang}\frac{1}{2}.$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x\,\partial x}{\operatorname{Cos}2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{Arc.\,Tang}(\sqrt{2}\cdot\operatorname{Cos}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x\,\partial x}{\operatorname{Sin}2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x\,\partial x}{\operatorname{Cos}3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{Arc.\,Tang}(\sqrt{3}\cdot\operatorname{Tang}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x\,\partial x}{\operatorname{Sin}3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Sin}x - \frac{1}{6}\log\left(\operatorname{Sin}x^2-\frac{3}{4}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x^2\,\partial x}{\operatorname{Cos}3x} = \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Tang}(2\operatorname{Sin}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x^2\,\partial x}{\operatorname{Sin}3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Tang}\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Tang}(2\operatorname{Cos}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x\,\partial x}{\operatorname{Cos}3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Cos}x - \frac{1}{6}\log\left(\operatorname{Cos}x^2-\frac{3}{4}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x\,\partial x}{\operatorname{Sin}3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{Arc.\,Cotang}(\sqrt{3}\cdot\operatorname{Cotang}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x^2\,\partial x}{\operatorname{Cos}3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Tang}(2\operatorname{Sin}x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}x^2\,\partial x}{\operatorname{Sin}3x} = \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Tang}(2\operatorname{Cos}x).$$

Fortsetzung von Tafel XIV.

Durch Zerlegung in einfache Brüche erhält man, wenn beziehungsweise in den folgenden Formeln $m < n$, $m < 2n-1$, $m < 2n$ ist:

$$\frac{\operatorname{Cos}x^m}{\operatorname{Cos}nx} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\frac{(-1)^\mu\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)\pi}{2n}\cdot\left(\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{2n}\right)^m}{\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{2n}}.$$

$$\frac{\operatorname{Cos}x^m}{\operatorname{Sin}2nx} = \frac{1}{2n\operatorname{Sin}x}\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}(-1)^{\mu-1}\left(\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{2n}\right)^2\left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n}\right)^m \left[\frac{1}{\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n}}+\frac{(-1)^m}{\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n}}\right].$$

$$\frac{\operatorname{Cos}x^m}{\operatorname{Sin}(2n+1)x} = \frac{1}{(2n+1)\operatorname{Sin}x}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}(-1)^{\mu-1}\left(\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2\left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^m \left[\frac{1}{\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n+1}}+\frac{(-1)^{m-1}}{\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n+1}}\right].$$

Mit Hülfe der vorigen Tafel finden sich die Integrale dieser Ausdrücke. Vertauscht man x mit $\frac{\pi}{2}-x$, so ergeben sich Brüche von ähnlicher Form, welche im Zähler $\operatorname{Sin}x^m$ statt $\operatorname{Cos}x^m$ haben.

Reduction von $\int\frac{\operatorname{Cos}mx}{\operatorname{Cos}x^n}\,\partial x$.

$$\int\frac{\operatorname{Cos}mx}{\operatorname{Cos}x^n}\,\partial x = 2\int\frac{\operatorname{Cos}(m-1)x}{\operatorname{Cos}x^{n-1}}\,\partial x - \int\frac{\operatorname{Cos}(m-2)x}{\operatorname{Cos}x^n}\,\partial x.$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}mx}{\operatorname{Sin}x^n}\,\partial x = -2\int\frac{\operatorname{Sin}(m-1)x}{\operatorname{Sin}x^{n-1}}\,\partial x + \int\frac{\operatorname{Cos}(m-2)x}{\operatorname{Sin}x^n}\,\partial x.$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}mx}{\operatorname{Cos}x^n}\,\partial x = 2\int\frac{\operatorname{Sin}(m-1)x}{\operatorname{Cos}x^{n-1}}\,\partial x - \int\frac{\operatorname{Sin}(m-2)x}{\operatorname{Cos}x^n}\,\partial x.$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin}mx}{\operatorname{Sin}x^n}\,\partial x = 2\int\frac{\operatorname{Cos}(m-1)x}{\operatorname{Sin}x^{n-1}}\,\partial x + \int\frac{\operatorname{Sin}(m-2)x}{\operatorname{Sin}x^n}\,\partial x.$$

Tafel XV.

$$\int e^x x^m \partial x.$$

$$\int x^m e^x \partial x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x \partial x \text{ (für jedes beliebige m).}$$

$$\int x^m e^x \partial x = m!\, e^x \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu x^{m-\nu}}{(m-\nu)!} \text{ (wenn m eine positive ganze Zahl ist.)}$$

$$\int x e^x \partial x = e^x(x-1). \qquad \int x^3 e^x \partial x = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

$$\int x^2 e^x \partial x = e^x(x^2 - 2x + 2) \qquad \int x^4 e^x \partial x = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24).$$

$$\int x^m e^{kx} \partial x = \frac{1}{k} x^m e^{kx} - \frac{m}{k}\int x^{m-1} e^{kx} \partial x = \frac{1}{k^{m+1}}\int y^m e^y \partial y \text{ (für } y = kx).$$

$$\int (\log x)^m \partial x = \int y^m e^y \partial y. \qquad \int x^n (\log x)^m \partial x = \int y^m e^{(n+1)y} \partial y \left\{\begin{matrix}\text{beide für} \\ y = \log x\end{matrix}\right\}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^m} = -\frac{e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{e^x \partial x}{x^{m-1}} \text{ (für ein beliebiges m).}$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^m} = -e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{1}{\nu!\,(m-1)_\nu\, x^{m-\nu}} + \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{e^x \partial x}{x} \left\{\begin{matrix}\text{für m als posit.} \\ \text{ganze Zahl}\end{matrix}\right\}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x \partial x}{x} \; ^{*)}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^3} = -\frac{1}{2} e^x \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{e^x \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^4} = -\frac{1}{3} e^x \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x \partial x}{x}.$$

$$\int e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{a_\nu}{x^\nu} \partial x = e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{A_\nu}{x^\nu} + n A_n \int \frac{e^x \partial x}{x^{n+1}}. \quad \left(\text{Für } A_\nu = (\nu - 1!) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \frac{a_\lambda}{(\lambda - 1!)}\right).$$

Ist $A_n = 0$, oder $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_4}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$, so lässt sich die Integration vollziehen; z. B.

$$\int e^x \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{2(a_1 + a_2)}{x^3}\right) \partial x = e^x \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1 + a_2}{x^2}\right). \quad \int \frac{x e^x \partial x}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1}.$$

---

*) Das Integral $\int \frac{e^x \partial x}{x}$ s. in der folgenden Abtheilung: Integrallogarithmus.

$$\int x^m \operatorname{Cos} x \, \partial x. \qquad \int x^m \operatorname{Sin} x \, \partial x.$$

Tafel XVI.

$$\int x^m \operatorname{Cos} x \, \partial x = x^m \operatorname{Sin} x - m\int x^{m-1} \operatorname{Sin} x \, \partial x.$$

$$\int x^m \operatorname{Sin} x \, \partial x = -x^m \operatorname{Cos} x + m\int x^{m-1} \operatorname{Cos} x \, \partial x.$$

$$\left.\begin{aligned} \int x^m \operatorname{Cos} x \, \partial x &= m! \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!} \operatorname{Cos}\left(x + \frac{m-\nu-1}{2}\pi\right) \\ \int x^m \operatorname{Sin} x \, \partial x &= m! \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!} \operatorname{Sin}\left(x + \frac{m-\nu-1}{2}\pi\right) \end{aligned}\right\} \text{für ein posit. ganzes m.}$$

$$\int x \operatorname{Cos} x \, \partial x = \operatorname{Cos} x + x \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^2 \operatorname{Cos} x \, \partial x = 2x \operatorname{Cos} x + (x^2 - 2) \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^3 \operatorname{Cos} x \, \partial x = (3x^2 - 6) \operatorname{Cos} x + (x^3 - 6x) \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^4 \operatorname{Cos} x \, \partial x = (4x^3 - 24x) \operatorname{Cos} x + (x^4 - 12x^2 + 24) \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^5 \operatorname{Cos} x \, \partial x = (5x^4 - 60x^2 + 120) \operatorname{Cos} x + (x^5 - 20x^3 + 120x) \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^6 \operatorname{Cos} x \, \partial x = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \operatorname{Cos} x + (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x \operatorname{Sin} x \, \partial x = \operatorname{Sin} x - x \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^2 \operatorname{Sin} x \, \partial x = 2x \operatorname{Sin} x - (x^2 - 2) \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^3 \operatorname{Sin} x \, \partial x = (3x^2 - 6) \operatorname{Sin} x - (x^3 - 6x) \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^4 \operatorname{Sin} x \, \partial x = (4x^3 - 24x) \operatorname{Sin} x - (x^4 - 12x^2 + 24) \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^5 \operatorname{Sin} x \, \partial x = (5x^4 - 60x^2 + 120) \operatorname{Sin} x - (x^5 - 20x^3 + 120x) \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^6 \operatorname{Sin} x \, \partial x = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \operatorname{Sin} x - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \operatorname{Cos} x.$$

Tafel XVII.

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^m}\,. \qquad \int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^m}\,.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^m}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{m-1}\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^{m-1}}\,.$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^m}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^{m-1}}\,.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^m}=-\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{(m-\nu-1)!}{x^{m-\nu}}\,\mathrm{Cos}\left(x+\frac{\nu-1}{2}\pi\right)$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Cos}\left(x+\frac{m-1}{2}\pi\right).$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^m}=-\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{(m-\nu-1)!}{x^{m-\nu}}\,\mathrm{Sin}\left(x+\frac{\nu-1}{2}\pi\right)$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Sin}\left(x+\frac{m-1}{2}\pi\right).$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^2}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{x}-\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^2}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x}+\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^3}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{2x^2}+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^3}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{2x^2}-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^4}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{3x^3}+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{6x^2}+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{6x}+\frac{1}{6}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^4}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{3x^3}-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{6x^2}+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{6x}-\frac{1}{6}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{x^5}=-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{4x^4}+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{12x^3}+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{24x^2}-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{24x}+\frac{1}{24}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Cos}\,x.$$

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\partial x}{x^5}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{4x^4}-\frac{\mathrm{Cos}\,x}{12x^3}+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{24x^2}+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{24x}+\frac{1}{24}\int\frac{\partial x}{x}\,\mathrm{Sin}\,x.$$

Tafel XVIII.

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m}\,. \qquad \int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^m}\,.$$

Reductions-Formeln:

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{m+2}}=\frac{m\,x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{m(m+1)\,\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}+\frac{m}{m+1}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^m}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{m+2}}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x+m\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{m(m+1)\,\mathrm{Sin}\,x^{m+1}}+\frac{m}{m+1}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^m}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^{2n+1}}=\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)_\nu}{n_\nu}\cdot\frac{(2n-2\nu-1)\,x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{(2n-2\nu)(2n-2\nu-1)\,\mathrm{Cos}\,x^{2n-2\nu}}$$
$$+\left(n-\frac{1}{2}\right)_n\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{2n+1}}=-\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)_\nu}{n_\nu}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x+(2n-2\nu-1)\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{(2n-2\nu)(2n-2\nu-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{2n-2\nu}}$$
$$+\left(n-\frac{1}{2}\right)_n\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^3}=\frac{x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Cos}\,x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^5}=\frac{3x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{4\cdot 3\cdot \mathrm{Cos}\,x^4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{2\cdot 1\cdot \mathrm{Cos}\,x^2}+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x^7}=\frac{5x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{6\cdot 5\cdot \mathrm{Cos}\,x^6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{4\cdot 3\cdot \mathrm{Cos}\,x^4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{x\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x}{2\cdot 1\cdot \mathrm{Cos}\,x^2}$$
$$+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x+x\,\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^5}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x+3x\,\mathrm{Cos}\,x}{4\cdot 3\cdot \mathrm{Sin}\,x^4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x+x\,\mathrm{Cos}\,x}{2\cdot 1\cdot \mathrm{Sin}\,x^2}+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}\,.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^7}=-\frac{\mathrm{Sin}\,x+5x\,\mathrm{Cos}\,x}{6\cdot 5\cdot \mathrm{Sin}\,x^6}-\frac{5}{6}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x+3x\,\mathrm{Cos}\,x}{4\cdot 3\cdot \mathrm{Sin}\,x^4}-\frac{5}{8}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x+x\,\mathrm{Cos}\,x}{2\cdot 1\cdot \mathrm{Sin}\,x^2}$$
$$+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\int\frac{x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}\,.$$

Tafel XVIII. Fortsetzung. $\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^m}$. $\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^m}$.

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^{2n+2}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{n_\nu}{\left(n+\frac{1}{2}\right)_\nu} \cdot \frac{(2n-2\nu)\,x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{(2n-2\nu+1)(2n-2\nu)\operatorname{Cos} x^{2n-2\nu+1}} + \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)_n} \int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^2}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^{2n+2}} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{n_\nu}{\left(n+\frac{1}{2}\right)_\nu} \cdot \frac{\operatorname{Sin} x + (2n-2\nu)\,x \operatorname{Cos} x}{(2n-2\nu+1)(2n-2\nu)\operatorname{Sin} x^{2n-2\nu+1}} + \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)_n} \int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^2}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^2} = x \operatorname{Tang} x + \log \operatorname{Cos} x.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^4} = \frac{2x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{6 \operatorname{Cos} x^3} + \frac{2}{3}(x \operatorname{Tang} x + \log \operatorname{Cos} x).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^6} = \frac{4x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{5\cdot 4\cdot \operatorname{Cos} x^5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{2x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{3\cdot 2\cdot \operatorname{Cos} x^3}$$
$$+ \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}(x \operatorname{Tang} x + \log \operatorname{Cos} x).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^8} = \frac{6x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{7\cdot 6\cdot \operatorname{Cos} x^7} + \frac{6}{7}\cdot\frac{4x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{5\cdot 4\cdot \operatorname{Cos} x^5} + \frac{6\cdot 4}{7\cdot 5}\cdot\frac{2x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{3\cdot 2\cdot \operatorname{Cos} x^3}$$
$$+ \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\left(x \operatorname{Tang} x + \log \operatorname{Cos} x\right).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -x \operatorname{Cotg} x + \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Sin} x + 2x \operatorname{Cos} x}{6 \operatorname{Sin} x^3} - \frac{2}{3}(x \operatorname{Cotang} x - \log \operatorname{Sin} x).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{\operatorname{Sin} x + 4x \operatorname{Cos} x}{5\cdot 4\cdot \operatorname{Sin} x^5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + 2x \operatorname{Cos} x}{3\cdot 2\cdot \operatorname{Sin} x^3}$$
$$- \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}(x \operatorname{Cotang} x - \log \operatorname{Sin} x).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^8} = -\frac{\operatorname{Sin} x + 6x \operatorname{Cos} x}{7\cdot 6\cdot \operatorname{Sin} x^7} - \frac{6}{7}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + 4x \operatorname{Cos} x}{5\cdot 4\cdot \operatorname{Sin} x^5} - \frac{6\cdot 4}{7\cdot 5}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + 2x \operatorname{Cos} x}{3\cdot 2\cdot \operatorname{Sin} x^3}$$
$$- \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}(x \operatorname{Cotang} x - \log \operatorname{Sin} x).$$

Anm. Diese Integrationen lassen sich auf Zusatz 3. zu dem an die Spitze dieser Abtheilung gestellten Lehrsatze zurückführen. Für $\int \frac{x\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^2}$ ist das dortige $\varphi = \operatorname{Tang} x$.

Eine allgemeine Formel für die Reduction von $\int x^p \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x$ s. Taf. XX, unten.

$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^n \partial x$. $\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^n \partial x$. **Tafel XIX.**

$$\int e^{(\alpha+i)x} \partial x = \frac{e^{(\alpha+i)x}}{\alpha+i} = \frac{\alpha - i}{1+\alpha^2} e^{\alpha x}(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x). \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x\,\partial x = \frac{e^{\alpha x}(\operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{1+\alpha^2}. \qquad \int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x\,\partial x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)}{1+\alpha^2}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^{n-1}(n \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{n^2+\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^{n-1}(\alpha \operatorname{Sin} x - n \operatorname{Cos} x)}{n^2+\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^2 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x(2 \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+4} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+4)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^2 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x(\alpha \operatorname{Sin} x - 2 \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+4} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+4)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^3 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^2(3 \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+9} + \frac{6 e^{\alpha x}(\operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^3 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^2(\alpha \operatorname{Sin} x - 3 \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+9} + \frac{6 e^{\alpha x}(\alpha \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}.$$

$\int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^n}$. $\int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}$.

$$\int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^n} = -\frac{e^{\alpha x}[\alpha \operatorname{Cos} x - (n-2)\operatorname{Sin} x]}{(n-1)(n-2)\operatorname{Cos} x^{n-1}} + \frac{\alpha^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Cos} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{e^{\alpha x}[\alpha \operatorname{Sin} x + (n-2)\operatorname{Cos} x]}{(n-1)(n-2)\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{\alpha^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{\alpha x}\,\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

Tafel XX.

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x.$$

Reductions-Formeln.

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x = \frac{e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^n \left[\alpha \,\mathrm{Cos}\, x + (m+n)\,\mathrm{Sin}\, x\right]}{(m+n)^2 + \alpha^2}$$
$$- \frac{n\alpha}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \,\partial x$$
$$+ \frac{(m-1)(m+n)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-2} \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x = \frac{e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \left[\alpha \,\mathrm{Sin}\, x - (m+n)\,\mathrm{Cos}\, x\right]}{(m+n)^2 + \alpha^2}$$
$$+ \frac{m\alpha}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \,\partial x$$
$$+ \frac{(n-1)(m+n)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-2} \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x = \frac{e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} (\alpha \,\mathrm{Sin}\, x \,\mathrm{Cos}\, x + m \,\mathrm{Sin}\, x^2 - n\,\mathrm{Cos}\, x^2)}{(m+n)^2 + \alpha^2}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-2} \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-2} \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x = \frac{e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} (\alpha \,\mathrm{Cos}\, x \,\mathrm{Sin}\, x + m \,\mathrm{Sin}\, x^2 - n\,\mathrm{Cos}\, x^2)}{(m+n)^2 + \alpha^2}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^{m-2} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-2} \,\partial x$$
$$+ \frac{(n-m)(n+m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-2} \,\partial x.$$

Fortsetzung von Tafel XX.

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^n \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^n \,\partial x = \frac{e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^{n-1}}{n-1} - \frac{\alpha}{n-1} \int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^{n-1} \,\partial x - \int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^{n-2} \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^2 \,\partial x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} (\alpha \,\mathrm{Tang}\, x - 1) - \alpha \int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^3 \,\partial x = \frac{1}{2} e^{\alpha x} [\mathrm{Tang}\, x^2 - \alpha \,\mathrm{Tang}\, x + 1] + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2) \int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x \,\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x^4 \,\partial x = \frac{e^{\alpha x}}{6\alpha} [2\alpha \,\mathrm{Tang}\, x^3 - \alpha^2 \,\mathrm{Tang}\, x^2 + \alpha(\alpha^2 - 6)\,\mathrm{Tang}\, x - \alpha^2 + 6]$$
$$- \frac{1}{6}\alpha(\alpha^2 - 8) \int e^{\alpha x} \mathrm{Tang}\, x \,\partial x.$$

Reduction von $\int x^p \,\mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x$.

$$(m+n)^2 \int x^p \,\mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x + p(p-1) \int x^{p-2} \,\mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x$$
$$= x^{p-1} \mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^n \,[p \,\mathrm{Cos}\, x + (m+n) x \,\mathrm{Sin}\, x]$$
$$- np \int x^{p-1} \,\mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \,\partial x$$
$$+ (m-1)(m+n) \int x^p \,\mathrm{Cos}\, x^{m-2} \,\mathrm{Sin}\, x^n \,\partial x$$
$$= x^{p-1} \mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \,[p \,\mathrm{Sin}\, x - (m+n) x \,\mathrm{Cos}\, x]$$
$$+ mp \int x^{p-1} \,\mathrm{Cos}\, x^{m-1} \,\mathrm{Sin}\, x^{n-1} \,\partial x$$
$$+ (n-1)(m+n) \int x^p \,\mathrm{Cos}\, x^m \,\mathrm{Sin}\, x^{n-2} \,\partial x.$$

Vierte Abtheilung.

Tafeln einiger bestimmten Integrale und transscendenten Functionen.

Tafel I. Bestimmte Integrale.

a bezeichnet eine positive Grösse.

$$\int_0^1 x^{a-1}\partial x = \frac{1}{a}.$$

Durch Differentiation und Integration nach a ergeben sich hieraus folgende Integrale:

$$\int_0^1 x^{a-1}\log x\,\partial x = -\frac{1}{a^2}. \qquad \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{\log x}\partial x = \log a.$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^2\partial x = \frac{1\cdot 2}{a^3}. \qquad \int_0^1 \left(\frac{x^a-1}{\log x}-ax\right)\frac{\partial x}{x\log x} = a\log a - a.$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^3\partial x = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^4}. \qquad \int_0^1 \left[\left(\frac{x^a-1}{\log x}-a\right)\frac{1}{\log x}-\frac{a^2x}{2}\right]\frac{\partial x}{x\log x} = \frac{1}{4}a^2(2\log a-3).$$

. . . .

Durch Vertauschung von x mit e^{-x} erhält man aus vorstehenden Integralen:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\partial x = \log a.$$

$$\int_0^\infty \left(ae^{-x}-\frac{1-e^{-ax}}{x}\right)\frac{\partial x}{x} = a\log a - a. \quad \text{U. s. f.}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Sin} x\,\partial x = \frac{1}{1+a^2}. \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Cos} x\,\partial x = \frac{a}{1+a^2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}x\operatorname{Sin} x\,\partial x = \frac{2a}{(1+a^2)^2}. \qquad \int_0^\infty e^{-ax}x\operatorname{Cos} x\,\partial x = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\operatorname{Sin} x\,\partial x = \operatorname{Arc.Tang} a. \qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\operatorname{Cos} x\,\partial x = \tfrac{1}{2}\log(1+a^2).$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} kx}{x}\partial x = \pm\frac{\pi}{2};$$ das obere Zeichen gilt für ein positives, das untere für ein negatives k.

Die beiden ersten dieser Integrale folgen aus Tafel XVII, Abth. 3, die anderen aus diesen durch Differentiation und Integration nach a; das letzte linkerhand aus dem vorhergehenden für $a = \infty$.

Bestimmte Integrale. **Tafel II.**

$i = \sqrt{-1}.$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{x+e^{\beta i}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}e^{(a-1)\beta i}. \quad \text{Bedingungen: } 0<a<1. \quad -\pi<\beta<\pi.$$

Dieses Integral folgt aus dem Werthe von $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}}$. T. LI. der ersten Abtheilung, wo m und n positive ganze Zahlen waren und $m<n$; die Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ vollzogen giebt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}} = -\frac{i}{ne^{\beta i}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\left[\pi-\frac{(2\nu+1)\pi+\beta}{n}\right]e^{\frac{(2\nu+1)\pi+\beta}{n}mi}.$$

Um die geforderte Summation auszuführen, bemerke man, dass für eine beliebige Grösse λ:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}e^{\nu\lambda i} = \frac{e^{n\lambda i}-1}{e^{\lambda i}-1}, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\nu e^{\nu\lambda i} = \frac{(n-1)e^{n\lambda i}-ne^{(n-1)\lambda i}+1}{(e^{\lambda i}-1)^2}e^{\lambda i}.$$

Die zweite dieser Formeln folgt aus der ersten durch Differentiation nach λ. Wird hierauf $\lambda = \frac{2m\pi}{n}$ gesetzt, so erhält man:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\nu e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = \frac{n}{e^{\frac{2m\pi i}{n}}-1} = \frac{ne^{-\frac{m\pi i}{n}}}{2i\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}.$$

Folglich ist $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}} = \frac{2\pi i e^{\frac{(\pi+\beta)mi}{n}}}{n^2e^{\beta i}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\nu e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{e^{-\left(1-\frac{m}{n}\right)\beta i}}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}.$$

Wird hier $x^{\frac{1}{n}}$ für x und a für $\frac{m}{n}$ eingesetzt, so folgt die obige Gleichung zunächst für jeden rationalen Werth des ächten Bruches a; man sieht aber sofort, dass sie für jeden Werth von a zwischen 0 und 1 richtig ist, da ihre beiden Seiten stetige Functionen von a darstellen, so lange a zwischen den angegebenen Grenzen bleibt. — Für $\beta = \pm\pi$ gilt die Gleichung nicht mehr; das Integral enthält in diesem Falle unter dem Zeichen $\int$ den Divisor $x-1$ und wird unendlich gross. —

Aus dem obigen Integrale werden die folgenden abgeleitet theils durch Annahme besonderer Werthe der Constanten, theils durch Differentiation und Integration nach Constanten, theils durch Combination der verschiedenen Integrale mit einander.

Tafel II. Fortsetzung

Bestimmte Integrale.

Anmerkung. c bezeichnet überall eine positive Grösse; die Einschränkungen, welchen die Werthe der übrigen Constanten unterliegen, sind neben den Formeln angegeben.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{x+c} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} c^{a-1}. \quad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} \cdot \frac{c^a-1}{c-1}. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x\,\partial x}{x+c} = \frac{\pi c^{a-1}}{\operatorname{Sin} a\pi}(\log c - \pi \operatorname{Cotang} a\pi). \quad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log x\,\partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{\pi}{c-1}\,\frac{c^a \log c \operatorname{Sin} a\pi + (1-c^a)\pi \operatorname{Cos} a\pi}{(\operatorname{Sin} a\pi)^2}. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,\partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{(\log c)^2}{2(c-1)}.$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\partial x \log\frac{(x+1)(x+c^2)}{(x+c)^2} = \frac{\pi(c^a-1)^2}{a \operatorname{Sin} a\pi}. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\log\frac{(x+1)(x+c^2)}{(x+c)^2} = (\log c)^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a - c^{a-b}x^b}{x-c}\,\frac{\partial x}{x} = \pi(\operatorname{Cotang} b\pi - \operatorname{Cotang} a\pi)c^{a-1}. \quad \begin{matrix} 0<a<1. \\ 0<b<1. \end{matrix}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a - x^b}{(x-1)(x+c)}\partial x = \frac{\pi}{1+c}\left(\frac{c^a - \operatorname{Cos} a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} - \frac{c^b - \operatorname{Cos} b\pi}{\operatorname{Sin} b\pi}\right). \quad \begin{matrix} -1<a<1. \\ -1<b<1. \end{matrix}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a - 1}{(x-1)(x+c)}\partial x = \frac{\pi}{1+c}\left(\frac{c^a - \operatorname{Cos} a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} - \frac{\log c}{\pi}\right). \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log x}{x-1}\,\frac{\partial x}{x} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}\right)^2. \quad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log x\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi}{1+c}\left[\frac{\pi + c^a(\operatorname{Sin} a\pi \cdot \log c - \pi \operatorname{Cos} a\pi)}{(\operatorname{Sin} a\pi)^2}\right]. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi^2 + (\log c)^2}{2(1+c)}. \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi^2+(\log c)^2}{6(1+c)}\log c.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^3\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2]^2}{24(1+c)}.$$

Fortsetzung von **Tafel II.**

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^4\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2][7\pi^2+3(\log c)^2]\log c}{360(1+c)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^5\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2]^2[3\pi^2+(\log c)^2]}{720(1+c)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^a - x^{a-b})(x^b - c^b)}{(x-1)(x-c)}\partial x = \frac{\pi \operatorname{Sin} b\pi}{(c-1)\operatorname{Sin} a\pi}\left[\frac{c^{a+b}-1}{\operatorname{Sin}(a+b)\pi} + \frac{c^b - c^a}{\operatorname{Sin}(a-b)\pi}\right].$$
$$-1<a+b<1. \qquad -1<a-b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^b - c^b)(x^{-b}-1)}{(x-1)(x-c)}\partial x = \frac{2\pi(c^b-1)\operatorname{Cotang} b\pi - (c^b+1)\log c}{c-1}. \quad -1<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\left(x^{\frac{b}{2}} - x^{-\frac{b}{2}}\right)^2}{(x-1)^2}\partial x = 2(1 - b\pi \operatorname{Cotang} b\pi). \quad -1<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^a-1)(x^a-c^a)}{(x-1)(x-c)}\partial x = \frac{\pi}{c-1}\left(\frac{c^{2a}-1}{\operatorname{Sin} 2a\pi} - \frac{c^a \log c}{\pi}\right). \quad -1<2a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log\frac{x}{c}\cdot \log x\,\partial x}{(x-1)(x-c)} = \frac{\pi^2[(c^a+1)\log c - 2\pi(c^a-1)\operatorname{Cotang} a\pi]}{(c-1)(\operatorname{Sin} a\pi)^2}. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log\frac{x}{c}\cdot\log x\,\partial x}{(x-1)(x-c)} = \frac{4\pi^2+(\log c)^2}{6(c-1)}\log c. \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2\partial x = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\partial x}{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}\cdot\frac{\operatorname{Sin} a\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma}. \quad -1<a<1. \quad 0<\gamma<\pi.$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\partial x \log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1}} = \frac{\pi}{a\operatorname{Sin} a\pi}(1-\operatorname{Cos} a\gamma). \quad \begin{matrix} -1<a<1. \\ 0<\gamma<\pi. \end{matrix}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1}} = \frac{1}{2}\gamma^2. \quad 0<\gamma<\pi.$$

Tafel III.

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \partial x = \Gamma(a). \quad \text{(a eine positive Grösse.)}$$

Die Bezeichnung durch Γ (Gamma) ist von Legendre in seinem *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* zuerst eingeführt worden. Die folgende Tafel enthält die Haupteigenschaften dieser transscendenten Function, welche besonders dadurch wichtig ist, dass sich viele andere Formen bestimmter Integrale auf sie zurückführen lassen. — Ausser der genannten Schrift ist über diesen Gegenstand noch zu vergleichen eine Abhandlung von L. Dirichlet in Crelle's Journal, Bd. 15, S. 258.

$$\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{a}}} \partial x = a\Gamma(a). \quad \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^a \partial x = \Gamma(1+a). \quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \partial x = \frac{\Gamma(a)}{k^a}.$$

(k positiv.)

Diese Verwandlungen folgen aus der vorangestellten Grundformel, wenn in dieser der Reihe nach x mit $x^{\frac{1}{a}}$, x mit $\log\frac{1}{x}$, x mit kx vertauscht wird.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^a \partial x = a\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \partial x. \quad \text{Oder: } \Gamma(1+a) = a\Gamma(a).$$

Folgt aus der Gleichung $\partial(e^{-x}x^a) = a e^{-x} x^{a-1} \partial x - e^{-x} x^a \partial x$ durch Integration von $x = 0$ bis $x = \infty$.

$$\int_0^\infty e^{-x} \partial x = \Gamma(1) = 1\,; \quad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1\,; \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!;$$

$\Gamma(4) = 3! \ldots;$ $\Gamma(n) = (n-1)!$, wenn n eine ganze Zahl ist.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \partial x}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad \text{(a und b positiv.)}$$

Beweis. Aus der dritten der obigen Formeln im ersten Absatze folgt, wenn $1+x>0$, durch Vertauschung von k mit $1+x$,

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)y} y^{a+b-1} \partial y = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+x)^{a+b}}.$$

Fortsetzung von Tafel III.

Bestimmte Integrale.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $x^{a-1}\partial x$ und integrirt von $x = 0$ bis $x = \infty$, so kommt:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \partial x}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-y} y^{a+b-1} \partial y \left(\int_0^\infty e^{-xy} x^{a-1} \partial x\right) = \Gamma(a) \int_0^\infty e^{-y} y^{b-1} \partial y$$

$$= \Gamma(a) \cdot \Gamma(b), \quad \text{w. z. b. w.}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \partial x = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Folgt aus der vorigen Formel durch Einsetzung von $\frac{x}{1-x}$ für x.

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}. \quad \text{(a ein ächter Bruch.)}$$

Beweis. Aus der vorhergehenden Formel folgt für $b = 1-a$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \partial x}{1+x} = \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a).$$

Nach Tafel II. ist aber $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \partial x}{x+1} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}$; also u. s. w.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \partial x = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Aus der vorigen Formel folgt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, d. i.

$\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} \partial x = \sqrt{\pi}$, oder durch Einsetzung von x^2 für x:

$\int_0^\infty e^{-x^2} \partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, woraus obige Formel hervorgeht.

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{a}{n}\right) \cdot n^{-a} = n^{-a} a \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(1+\frac{a}{\nu}\right) \quad (\text{für } n = \infty.) \quad \text{A.}$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{q}\right)\Gamma\left(a+\frac{3}{q}\right) \cdots \Gamma\left(a+\frac{q-1}{q}\right) = (2\pi)^{\frac{q-1}{2}} q^{\frac{1}{2}-qa} \Gamma(qa). \quad \text{B.}$$

q eine positive ganze Zahl.

Tafel III. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale.

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\cdot 2^{\frac{1}{2}-2a}\cdot\Gamma(2a).\qquad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{3}\right)$$
$$= 2\pi\cdot 3^{\frac{1}{2}-3a}\cdot\Gamma(3a).$$ (Folgt aus B. für $q=2$, $q=3$.)

Beweis von A. Es ist $\frac{\partial\Gamma(a)}{\partial a} = \Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\log x\,\partial x$, und nach Tafel I. $\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}\partial y$; daher

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x\left(\int_0^\infty\frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}\partial y\right) = \Gamma(a)\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right)\partial y.$$

Dieses Integral lässt sich auch ausdrücken durch

$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$ (s. nachstehende Anmerkung), so dass

$$\Gamma'(a)=\Gamma(a)\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y.$$

Bezeichnet nun n eine positive ganze Zahl und setzt man

$$\int_0^\infty\left[\frac{e^{-y}-e^{-ny}}{y}-\frac{e^{-ay}(1-e^{-ny})}{1-e^{-y}}\right]\partial y = S,$$ so kann man $\frac{1-e^{-ny}}{1-e^{-y}}$

ersetzen durch die Reihe: $1+e^{-y}+e^{-2y}+\cdots+e^{-(n-1)y}$, worauf die Integration sich vollziehen lässt. Man erhält:

$$S = \log n - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\cdots+\frac{1}{n-1+a}\right).$$

Für jedes positive y und für $n=\infty$ wird aber $e^{-ny}=0$; folglich

$$S=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\ (\text{für } n=\infty),$$ oder:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log n - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\cdots+\frac{1}{n-1+a}\right)(\text{für } n=\infty),$$

mithin durch Integration:

Bestimmte Integrale. Fortsetzung von Tafel III.

(a positiv.)

$$\log\Gamma(a) = a\log n - \left[\log a+\log(1+a)+\log\left(1+\frac{a}{2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{a}{n-1}\right)\right]$$
$$+\,\text{Const.}(n=\infty),$$ oder

$$\frac{C}{\Gamma(a)} = a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)n^{-a}\ (\text{für } n=\infty).$$

Um die Constante C zu bestimmen, dividire man diese Gleichung mit a und setze dann $a=0$, so wird $a\Gamma(a)=\Gamma(1+a)=\Gamma(1)=1$, und hieraus $C=1$. Dies stimmt mit der zu beweisenden Formel überein, da der hinzugefügte Factor $1+\frac{a}{n}$ für $n=\infty$ der Einheit gleich ist.

Anmerkung. Es sei u eine beliebige positive Grösse, so ist

$$\int_u^\infty\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_u^\infty\frac{e^{-y}\partial y}{y}-\int_u^\infty\frac{\partial y}{y(1+y)^a}.$$

Man setze $z=\log(1+y)$, $v=\log(1+u)$, so wird

$\int_u^\infty\frac{\partial y}{y(1+y)^a} = \int_v^\infty\frac{e^{-az}\partial z}{1-e^{-z}}$. Zur Abkürzung sei $\frac{e^{-az}}{1-e^{-z}}=Z$, so ist $\int_v^\infty Z\partial z$ $=\int_u^\infty Z\partial z+\int_v^u Z\partial z$. Denkt man sich nun u, und mithin auch $v=\log(1+u)$, als sehr kleine positive Grössen, so ist bekanntlich $u>v$ und $u-v<\frac{1}{2}u^2$. Ferner nimmt die Function Z, indem z von Null anfangend wächst, beständig ab, wobei sie immer positiv ist; es ist daher für alle z zwischen v und u, $Z<\frac{e^{-av}}{1-e^{-v}}$ oder $Z<\frac{(1+u)^{1-a}}{u}$; folglich $\int_v^u Z\partial z<\frac{(1+u)^{1-a}}{u}\int_v^u\partial z$, oder weil $\int_v^u\partial z = u-v<\frac{1}{2}u^2$, so ist $\int_v^u Z\partial z<\frac{1}{2}u(1+u)^{1-a}$, woraus folgt, dass dieses Integral für $u=0$ verschwindet.

Nach dem Obigen war $\int_u^\infty\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_u^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$ $-\int_v^u Z\partial z$; also ergiebt sich für $u=0$: $\int_0^\infty\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$, worin die oben behauptete Gleichheit besteht.

Tafel III. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale. $\Gamma(a)$.

(a positiv.)

Beweis der Formel B. Nach Formel A. ist

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = aq(aq+q)(aq+2q)\cdots[aq+(n-1)q]\cdot\frac{n^{-a}}{(n-1)!\,q^n} \text{ (für } n=\infty);$$

und eben so:

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{q})} = (aq+1)(aq+q+1)(aq+2q+1)\cdots[aq+(n-1)q+1]\cdot\frac{n^{-a-\frac{1}{q}}}{(n-1)!\,q^n}.$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{2}{q})} = (aq+2)(aq+q+2)(aq+2q+2)\cdots[aq+(n-1)q+2]\cdot\frac{n^{-a-\frac{2}{q}}}{(n-1)!\,q^n}.$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{q-1}{q})} = (aq+q-1)(aq+2q-1)(aq+3q-1)\cdots\cdots(aq+nq-1)\cdot\frac{n^{-a-\frac{q-1}{q}}}{(n-1)!\,q^n}.$$

Die Multiplication aller dieser Ausdrücke, verbunden mit der Bemerkung, dass

$$aq(aq+1)(aq+2)aq+3)\cdots\cdots(aq+nq-1)\cdot\frac{(nq)^{-aq}}{(nq-1)!} = \frac{1}{\Gamma(aq)} \text{ (für } n=\infty),$$

liefert folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma(aq)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(a+\frac{1}{q})\cdot\Gamma(a+\frac{2}{q})\cdots\Gamma(a+\frac{q-1}{q})}\,q^{-aq} = \frac{(nq-1)!\,n^{-\frac{q-1}{2}}}{[(n-1)!]^q\,q^{nq}} \text{ (für } n=\infty),$$

oder, wenn man zur Abkürzung den Ausdruck linkerhand mit Q bezeichnet,

$$Q = \frac{(nq)!\,n^{\frac{q-1}{2}}}{(n!)^q\,q^{nq+1}}.$$

Nun ist nach Abschnitt c. Tafel VIII dieser Abtheilung für $n=\infty$:

$$n!\,e^n n^{-n-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi},$$

also auch

$$(nq)!\,e^{nq}(nq)^{-nq-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi};$$

daher

$$\frac{(nq)!\,n^{-nq-\frac{1}{2}}q^{-nq-\frac{1}{2}}}{(n!)^q\,n^{-nq-\frac{q}{2}}} = \frac{(nq)!\,n^{\frac{q-1}{2}}}{(n!)^q\,q^{nq+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{q-1}}},$$

und mithin

$$Q = \frac{1}{\sqrt{q(2\pi)^{q-1}}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Tafel IV.

Reihen zur Berechnung von $\log\Gamma(1+a)$.

(a ein ächter Bruch.)

Bezeichnungen. $C = -\Gamma'(1) = 0{,}577215664901.$

$$S_\mu = \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

$$\log\Gamma(1+a) = -Ca + (1+S_2)\frac{a^2}{2} - (1+S_3)\frac{a^3}{3} + (1+S_4)\frac{a^4}{4} - \cdots\cdots$$

$$\log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} + (1-C)a - S_3\frac{a^3}{3} - S_5\frac{a^5}{5} - S_7\frac{a^7}{7} - \cdots$$

Diese Reihen ergeben sich durch Entwicklung des Ausdruckes von

$$\frac{\Gamma'(1+a)}{\Gamma(1+a)} = \log n - \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{n+a}\right) \text{ (für } n=\infty)$$

nach Potenzen von a und Integration nach a, mit Hülfe der Gleichung

$$\log\Gamma(1+a) + \log\Gamma(1-a) = \log\frac{a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}.$$

Die Logarithmen sind natürliche; zur Verwandlung derselben in gemeine muss auf beiden Seiten mit dem Modul 0.4342944819 multiplicirt werden. Die Werthe von S_μ für ungerade μ sind folgende (*Legendre: Traité etc., tome II. p.* 432.)

$S_3 = 0.2020569032$	$S_{15} = 0.0000305882$
$S_5 = 0.0369277551$	$S_{17} = 0.0000076372$
$S_7 = 0.0083492774$	$S_{19} = 0.0000019082$
$S_9 = 0.0020083928$	$S_{21} = 0.0000004769$
$S_{11} = 0.0004941886$	$S_{23} = 0.0000001192$
$S_{13} = 0.0001227133$	$S_{25} = 0.0000000298$

U. s. w.

Tafel IV. Fortsetzung.

Tafel der Werthe von log vulg. $\Gamma(a)$
von $a = 1$ bis $a = 2$, für alle Hunderttheile.

(Auszug aus der Tafel von Legendre.)

a	log vulg. $\Gamma(a)$	a	log vulg. $\Gamma(a)$	a	log vulg. $\Gamma(a)$	a	log vulg. $\Gamma(a)$
1.00	10.00000000	1.26	9.95635916	1.51	9.94772365	1.76	9.96443636
1.01	9.99752873	1.27	9.95544868	1.52	9.94794260	1.77	9.96556062
1.02	9.99512787	1.28	9.95458907	1.53	9.94820145	1.78	9.96671758
1.03	9.99279642	1.29	9.95377978	1.54	9.94849984	1.79	9.96790700
1.04	9.99053340	1.30	9.95302027	1.55	9.94883744	1.80	9.96912866
1.05	9.98833785	1.31	9.95231003	1.56	9.94921391	1.81	9.97038233
1.06	9.98620886	1.32	9.95164853	1.57	9.94962892	1.82	9.97166778
1.07	9.98414552	1.33	9.95103527	1.58	9.95008215	1.83	9.97298478
1.08	9.98214694	1.34	9.95046976	1.59	9.95057329	1.84	9.97433313
1.09	9.98021227	1.35	9.94995151	1.60	9.95110201	1.85	9.97571259
1.10	9.97834067	1.36	9.94948004	1.61	9.95166802	1.86	9.97712296
1.11	9.97653131	1.37	9.94905488	1.62	9.95227100	1.87	9.97856403
1.12	9.97478341	1.38	9.94867559	1.63	9.95291067	1.88	9.98003559
1.13	9.97309618	1.39	9.94834169	1.64	9.95358672	1.89	9.98153742
1.14	9.97146885	1.40	9.94805277	1.65	9.95429887	1.90	9.98306934
1.15	9.96990069	1.41	9.94780837	1.66	9.95504683	1.91	9.98463113
1.16	9.96839097	1.42	9.94760808	1.67	9.95583032	1.92	9.98622261
1.17	9.96693898	1.43	9.94745148	1.68	9.95664907	1.93	9.98784357
1.18	9.96554402	1.44	9.94733815	1.69	9.95750280	1.94	9.98949382
1.19	9.96420541	1.45	9.94726770	1.70	9.95839124	1.95	9.99117318
1.20	9.96292250	1.46	9.94723973	1.71	9.95931413	1.96	9.99288145
1.21	9.96169463	1.47	9.94725385	1.72	9.96027122	1.97	9.99461845
1.22	9.96052117	1.48	9.94730967	1.73	9.96126223	1.98	9.99638399
1.23	9.95940149	1.49	9.94740682	1.74	9.96228693	1.99	9.99817790
1.24	9.95833499	1.50	9.94754494	1.75	9.96334505	2.00	10.00000000
1.25	9.95732108						

Den Logarithmen ist -10 beizufügen.

Die Function $\Gamma(a)$ hat ein Minimum für $a = 1\cdot4616321451$, wo $\log\Gamma(a) = 0\cdot9472391743-1$, $\Gamma(a) = 0\cdot8856031944$, $\Gamma(1\cdot5) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0\cdot8862269254$.

(Leg. p. 436.)

Tafel V.

Einzelne bestimmte Integrale, die sich auf Γ zurückführen lassen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{Cos}x)^n\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{Sin}x)^n\partial x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \quad \text{Bedingung: } n+1>0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{Cos}x)^m(\operatorname{Sin}x)^n\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}. \quad \text{Bedgn.: } n+1>0.\ m+1>0.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta i)x}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha+\beta i)^n}. \quad \text{Bedgn. } n>0. \quad \alpha>0. \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Beweis. Das Integral linkerhand sei $= A$, so ist

$$\frac{\partial A}{\partial\beta} = -i\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta i)x}x^n\partial x,$$

und durch Integration der Formel:

$$\frac{i\,\partial(e^{-(\alpha+\beta i)x}x^n)}{\alpha+\beta i} = \frac{i n e^{-(\alpha+\beta i)x}x^{n-1}\partial x}{\alpha+\beta i} - i e^{-(\alpha+\beta i)x}x^n\partial x$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞, erhält man $\dfrac{\partial A}{\partial\beta} = \dfrac{-inA}{\alpha+\beta i}$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $A = \dfrac{\text{Const.}}{(\alpha+\beta i)^n}$, und weil für $\beta = 0$, $A = \dfrac{\Gamma(n)}{\alpha^n}$ ist, so folgt: Const. $= \Gamma(n)$; w. z. b. w.

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}x^{n-1}\operatorname{Cos}\beta x\,\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\operatorname{Cos}\left(n\operatorname{Arc.Tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}x^{n-1}\operatorname{Sin}\beta x\,\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\operatorname{Sin}\left(n\operatorname{Arc.Tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Diese Formeln, in welchen α und n positiv sein müssen, folgen sofort aus der vorhergehenden. Arc. Tang $\frac{\beta}{\alpha}$ ist zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, wenn β positiv, zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn β negativ.

Tafel V. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty x^{n-1}\operatorname{Cos}x\,\partial x=\Gamma(n)\cdot\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}.\quad \int_0^\infty x^{n-1}\operatorname{Sin}x\,\partial x=\Gamma(n)\cdot\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\left\{\begin{matrix}\text{Beding.}\\ 0<n<1\end{matrix}\right\}.$$

Beweis. $$\int_0^\infty e^{-(\alpha+i)x}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha+i)^n}\left\{\begin{matrix}\text{für positive }\alpha\text{ und }n,\\ \text{nach dem Obigen}\end{matrix}\right\}.$$

Diese Formel bleibt noch richtig für $\alpha = 0$, wenn zugleich n ein ächter Bruch ist, während sie für $\alpha=0$ und $n>1$ unrichtig sein würde. Denn differentirt man den Ausdruck $e^{-xi}x^{n-1}$ und integrirt die einzelnen Glieder der erhaltenen Gleichung zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = \infty$, so folgt, wenn $n<1$: $e^i = i\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x + (1-n)\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-2}\partial x$. Da nun $\int_1^\infty x^{n-2}\partial x$ eine endliche Grösse ist, so ist es $\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-2}\partial x$ um so mehr, folglich ist es, nach vorstehender Gleichung, auch $\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x$. Und da der übrige Theil dieses Integrals von 0 bis 1 (wegen $n<1$) ebenfalls endlich ist, so ist überhaupt $\int_0^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x$ eine bestimmte endliche Grösse, wenn n positiv und kleiner als 1 ist. — Da nun $\int_0^\infty e^{-(\alpha+i)x}x^{n-1}\partial x$ und $\frac{\Gamma(n)}{(\alpha+i)^n}$, so lange sie endliche bestimmte Grössen bleiben, auch stetige Functionen von α sind, so besteht ihre Gleichheit auch noch für $\alpha = 0$, wenn $n < 1$. Also ist $\int_0^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{i^n}=\Gamma(n)\cdot e^{\frac{-n\pi i}{2}}$, da i hier $= e^{\frac{\pi i}{2}}$ gesetzt werden muss. Dies giebt die obigen Formeln.

Vertauscht man x mit βx, wo β positiv ist, so kommt

$$\int_0^\infty e^{-\beta xi}x^{n-1}\partial x=\frac{\Gamma(n)}{\beta^n}e^{-\frac{n\pi i}{2}},$$

oder

$$\int_0^\infty e^{\beta xi}x^{n-1}\partial x=\frac{\Gamma(n)}{\beta^n}e^{\frac{n\pi i}{2}};$$

Fortsetzung von Tafel V.

Bestimmte Integrale.

wenn man für i, $-i$ setzt. Beide Gleichungen zusammengefasst geben

$$\int_0^\infty e^{-\beta xi}x^{n-1}\partial x=\frac{\Gamma(n)}{(\pm\beta)^n}e^{\mp\frac{n\pi i}{2}},$$

in welcher die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem β positiv oder negativ ist.

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{Cos}x\,\partial x}{\sqrt{x}}=\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin}x\,\partial x}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{1-x}\cdot\frac{\partial x}{x}.\qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\Gamma'(1)=\int_0^1\frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x.$$

Beweis. Es ist $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-x}}{x}-\frac{1}{x(1+x)^a}\right]\partial x$ (s. d. T. Beweis der Formel A.), und ein ähnlicher Ausdruck gilt für $\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}$. Hieraus folgt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}=\int_0^\infty\left[\frac{1}{(1+x)^b}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{\partial x}{x},$$

welcher Ausdruck durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{x}-1$ in den obigen übergeht.

Ist a ein rationaler Bruch $=\frac{m}{n}$, so ist nach voriger Formel

$$\frac{\Gamma'(\frac{m}{n})}{\Gamma(\frac{m}{n})}=\Gamma'(1)+n\int_0^1\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^n-1}\partial x.$$

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}[\Gamma'(1)-2\log 2].\quad \Gamma'\left(\frac{1}{3}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left[\Gamma'(1)-\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right].$$

Tafel VI. Bestimmte Integrale.

a und b positiv.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax\cdot\partial x}{x(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}). \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} ax\cdot \partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\operatorname{Cos} ax}{x^2(b^2+x^2)}\partial x = \frac{\pi}{2b^2}\left(a-\frac{1-e^{-ab}}{b}\right).$$

Beweis. Bezeichnet man das erste dieser Integrale mit z, und differentiirt es zweimal nach a, so kommt:

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax\cdot x\partial x}{b^2+x^2}.$$ Zu dieser Gleichung addire man b^2z $= b^2\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax\cdot\partial x}{x(b^2+x)^2}$, so folgt: $b^2z - \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$ (nach Tafel I. d. Abth.), oder wenn $b^2z-\frac{\pi}{2}=b^2u$ gesetzt wird: $\frac{\partial^2u}{\partial a^2}=b^2u$, oder wenn auf beiden Seiten mit $2\partial u$ multiplicirt und integrirt wird: $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 = b^2u^2+\text{Const.}$ Für $a=0$ ist $u=-\frac{\pi}{2b^2}$, $\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\pi}{2b}$, daher Const. $=0$, und $\frac{\partial u}{\partial a}=\pm bu$, oder $u = C\cdot e^{\pm ba}$, wo das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Da aber der Werth von u für ein noch so grosses a nicht unendlich werden kann, und da a und b positiv sind, so kann nur das negative Zeichen gelten; also $u = C\cdot e^{-ba}$, oder mit Rücksicht auf den Werth von u für $a=0$, $u=-\frac{\pi}{2b^2}e^{-ba}$, $z=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ba})$, wie oben.

Die beiden anderen Integrale ergeben sich durch Differentiation und Integration des vorigen nach a. Das zweite giebt auch:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{axi}\partial x}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$, oder auch $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\pm axi}\partial x}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$, wo a und b positiv sind.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-axi}\partial x}{(c+xi)^n(b^2+x^2)}=\frac{\pi}{b}\,\frac{e^{-ab}}{(c+b)^n}.$$ (a, b, c und n positiv.)

Beweis. Es ist $\frac{\Gamma(n)}{(c+yi)^n}=\int_0^\infty e^{-(c+yi)x}x^{n-1}\partial x$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{e^{-ayi}\partial y}{b^2+y^2}$ und integrirt von $y=0$ bis $y=\infty$, so kommt die aufgestellte Formel heraus.

Tafel VII.

$\int\frac{\partial x}{\log\frac{1}{x}}$ (Integral-Logarithmus).

Verwandlung. $\int_0^x \frac{\partial x}{\log\frac{1}{x}} = \int_y^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{y}$ für $y=\log\frac{1}{x}$.

Anmerkung. Die obere Grenze x des vorstehenden Integrals muss positiv sein, wenn dasselbe einen reellen Werth haben soll; auch muss alsdann unter $\log\frac{1}{x}$ nur der relle Werth dieses Ausdruckes verstanden werden. Ferner muss $x<1$ sein, da überhaupt das Integral $\int\frac{\partial x}{\log\frac{1}{x}}$ allemal dann, wenn der Werth $x=1$ zwischen den Grenzen der Integration liegt, gar keinen bestimmten Werth hat.

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x} = C - \log x + x - \frac{x^2}{2!2}+\frac{x^3}{3!3}-\frac{x^4}{4!4}+\frac{x^5}{5!5}-\cdots\cdots \text{ in inf.}$$

Diese aus der Entwickelung von e^{-x} hervorgehende Reihe gilt für jedes positive x; nur die Bestimmung der Constante macht einige Schwierigkeit. Um zu dieser Bestimmung zu gelangen, bemerke man, dass

$$\int_0^x\frac{1-e^{-x}}{x}\partial x = x-\frac{x^2}{2!2}+\frac{x^3}{3!3}-\frac{x^4}{4!4}+\cdots \text{ in inf.}$$

also:
$$\int_x^\infty\frac{e^{-x}\partial x}{x}=C-\log x+\int_0^x\frac{1-e^{-x}}{x}\partial x$$

oder, wenn hier $x=1$ gesetzt wird: $C=\int_1^\infty\frac{e^{-x}\partial x}{x}-\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\partial x.$

Bezeichnet u einen beliebigen positiven ächten Bruch, so ist

$\int_u^1\frac{1-e^{-x}}{x}\partial x=\int_u^1\frac{\partial x}{x}-\int_u^1\frac{e^{-x}\partial x}{x}$. Wird nun $x=1-e^{-y}$ und $u=1-e^{-v}$ gesetzt, so kommt $\int_u^1\frac{\partial x}{x}=\int_v^\infty\frac{e^{-y}\partial y}{1-e^{-y}}=\int_u^\infty\frac{e^{-y}\partial y}{1-e^{-y}}+\log\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)$;

daher erhält man $C=\int_u^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\partial x-\log\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)$ für $u=0$; mithin

Tafel VII. Fortsetzung.

$$\int \frac{\partial x}{\log\frac{1}{x}} \quad \text{(Integral-Logarithmus.)}$$

$C = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\partial x$. Nach Tafel III. ist dieses Integral $= \Gamma'(1)$, also

$C = \Gamma'(1) = \log n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ für $n = \infty$.

Dieser Ausdruck der Constante ist seiner Form wegen bemerkenswerth, aber zur Berechnung wenig geeignet; einen brauchbareren s. T. VIII. Der Werth der Constante ist $C = -0{,}5772156649\cdots = \Gamma'(1)$.

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\log\frac{1}{x}} = C - \log\left(\log\frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{(\log x)^2}{2!2} - \frac{(\log x)^3}{3!3} - \frac{(\log x)^4}{4!4} - \cdots$$

Bedingung: $0 < x < 1$. Die Constante $C = \Gamma'(1)$ wie vorhin.

Diese Reihe folgt aus der obigen durch Vertauschung von x mit $\log\frac{1}{x}$.

Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

Allgemeine Summationsformel. (S. Jacobi in Crelles Journal. Bd. XII. S. 263.)

Lehrsatz. Bezeichnet man die Summe

$$f(a)+f(a+k)+f(a+2k)+\cdots+f[a+(\nu-1)k]$$

durch $\sum_a^{a+\nu k} f(x)$, oder $a+\nu k = x$ gesetzt, durch $\sum_a^x f(x)$ und setzt:

$$\varphi(x) = f(x)+\alpha_1 k f'(x)+\alpha_2 k^2 f''(x)+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}k^{n-1}f^{n-1}(x).$$

ferner: $T_n = \frac{(k-t)^n}{n!}+\frac{\alpha_1 k(k-t)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\alpha_2 k^2(k-t)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\alpha_{n-1}k^{n-1}(k-t)$.

wo die Zahlen-Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ auf nachher anzugebende Weise bestimmt werden; so erhält man für die Summe

$$\sum_a^x f'(x) = f'(a)+f'(a+k)+f'(a+2k)+\cdots+f'(x-k)$$

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

den nachstehenden Ausdruk, nämlich:

$$k\sum_a^x f'(x)+\int_0^k T_n \sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t = \varphi(x)-\varphi(a).$$

Die Coëfficienten sind: $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3!2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{5!6}$, $\alpha_6 = \frac{1}{7!6}$,

$\alpha_8 = -\frac{1}{9!}\cdot\frac{3}{10}$, $\alpha_{10} = \frac{1}{11!}\cdot\frac{5}{6}$, $\alpha_{12} = -\frac{1}{13!}\cdot\frac{691}{210}$, $\alpha_{14} = \frac{1}{15!70}$,

$\alpha_{16} = -\frac{1}{17!}\cdot\frac{3617}{30}$, u. s. f.; alle Coëfficienten mit ungeraden Zeigern von 3 an, nämlich $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \cdots$ sind Null. Ein beliebiger Coëfficient α_μ wird aus den ihm vorhergehenden bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{(\mu+1)!}+\frac{\alpha_1}{\mu!}+\frac{\alpha_2}{(\mu-1)!}+\frac{\alpha_3}{(\mu-2)!}+\cdots+\frac{\alpha_{\mu-1}}{2}+\alpha_\mu = 0.$$

Beweis. Man setze

$$f(z)-\left[f(x)+(z-x)f'x+\frac{(z-x)^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{(z-x)^n}{n!}f^n(x)\right] = \varphi(x)$$

und nehme auf beiden Seiten die Ableitungen nach x, z als constant betrachtend, so erhält man:

$$\varphi'(x) = -\frac{(z-x)^n}{n!}f^{n+1}(x),$$

folglich, da $\varphi(z) = 0$,

$$\varphi(x) = \int_x^z \frac{(z-y)^n}{n!}f^{n+1}(y)\partial y,$$

wenn zur Unterscheidung von den Grenzwerthen die Veränderliche unter dem Integralzeichen mit y bezeichnet wird. Setzt man nun $y = x+t$ und $z-x = k$, so wird

$$\varphi(x) = \int_0^k \frac{(k-t)^n}{n!}f^{n+1}(x+t)\partial t\,; \quad \text{also ist:}$$

$$f(x+k)-f(x) = kf'(x)+\frac{k^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{k^n}{n!}f^n(x)+\int_0^k\frac{(k-t)^n}{n!}f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Setzt man in diese Gleichung für x nach und nach die Werthe a, a+k, a+2k, ... $a+(\nu-1)k = x-k$, so entstehen ν Gleichungen, aus deren Summation folgende Gleichung hervorgeht:

$$f(x)-f(a) = k\sum_a^x f'(x)+\frac{k^2}{2!}\sum_a^x f''(x)+\frac{k^3}{3!}\sum_a^x f'''(x)+\cdots+\frac{k^n}{n!}\sum_a^x f^n(x)$$

$$+\int_0^k\frac{(k-t)^n}{n!}\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

Vertauscht man der Reihe nach f(x) mit f'(x), n mit n−1, sodann f(x) mit f''(x), n mit n−2, u. s. f., so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$f'(x)-f'(a) = k\sum_a^x f''(x)+\frac{k^2}{2!}\sum_a^x f'''(x)+\cdots\cdots+\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}\sum_a^x f^n(x)$$

$$+\int_0^k\frac{(k-t)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

$$f''(x)-f''(a) = k\sum_a^x f'''(x)+\cdots+\frac{k^{n-2}}{(n-2)!}\sum_a^x f^n(x)+\int_0^k\frac{(k-t)^{n-2}}{(n-2)!}\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

. . . .

$$f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a) = k\sum_a^x f^n(x)+\int_0^k(k-t)\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

Von diesen Gleichungen multiplicire man die erste — die für f(x)−f(a) — mit 1, die zweite mit $\alpha_1 k$, die dritte mit $\alpha_2 k^2$, u. s. f., die letzte mit $\alpha_{n-1}k^{n-1}$, bestimme die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ durch die Gleichungen $\alpha_1+\frac{1}{2} = 0$, $\alpha_2+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{1}{3!} = 0$, u. s. w., wie oben angegeben, und addire die Producte; so fallen die Summen $\sum f'(x)$, ... $\sum f^n(x)$ alle heraus, und man erhält die im Lehrsatze aufgestellte Gleichung.

Zusatz. Die im Lehrsatze mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ bezeichneten Coëfficienten sind die der Entwickelung

$$\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h}+\alpha_1+\alpha_2 h+\alpha_3 h^2+\alpha_4 h^3+\cdots$$

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

wovon man sich durch Multiplication mit $e^h-1 = h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots$ überzeugt; und da $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, so hat man:

$$\frac{1}{2}h+\frac{h}{e^h-1} = 1+\alpha_2 h^2+\alpha_3 h^3+\alpha_4 h^4+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}h\left[\frac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}}\right] = \frac{1}{2}h\ \mathfrak{Cotang}\,\frac{h}{2}.$$

Da der letzte Ausdruck durch Vertauschung von h mit −h nicht geändert wird, so müssen in der Entwicklung die ungeraden Potenzen wegfallen, also ist $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 = 0$, u. s. f. Multiplicirt man die Gleichung

$$\frac{1}{2}h\ \mathfrak{Cotang}\,\frac{h}{2} = 1+\alpha_2 h^2+\alpha_4 h^4+\alpha_6 h^6+\cdots$$

auf beiden Seiten mit $\frac{\partial h}{h}$, und integrirt von h = 0 bis h = h, so folgt:

$$\log\left(\frac{2\,\mathfrak{Sin}\frac{h}{2}}{h}\right) = \frac{\alpha_2 h^2}{2}+\frac{\alpha_4 h^4}{4}+\frac{\alpha_6 h^6}{6}+\cdots$$

Bekanntlich aber ist

$$\mathfrak{Sin}\frac{h}{2} = \frac{h}{2}\left(1+\frac{h^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{h^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\right)\cdots \text{ in inf.,}$$

also ist

$$\frac{1}{2}\alpha_2 h^2+\frac{1}{4}\alpha_4 h^4+\frac{1}{6}\alpha_6 h^6+\cdots = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\log\left(1+\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\right)$$

$$= h^2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{1}{(2\mu\pi)^2}-\frac{1}{2}h^4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{1}{(2\mu\pi)^4}+\cdots,$$

daher ist

$$\frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right),$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2^4\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right),$$

und allgemein:

$$(-1)^{\mu-1}\cdot\frac{1}{2}\alpha_{2\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{2\mu}}\left(1+\frac{1}{2^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\frac{1}{4^{2\mu}}+\cdots\right).$$

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der Allgemeinen Formel.

a) Summation der positiven ganzen Potenzen der ganzen Zahlen. (x und n positive ganze Zahlen.)

$$\sum_1^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{\alpha_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots\cdots + \alpha_{n-1} x.$$

$$\sum_1^x x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

$$\sum_1^x x^2 = \frac{1}{6} x(x-1)(2x-1).$$

$$\sum_1^x x^3 = \frac{1}{4} x^2(x-1)^2.$$

$$\sum_1^x x^4 = \frac{1}{30} x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1).$$

$$\sum_1^x x^5 = \frac{1}{12} x^2(x-1)^2(2x^2-2x-1).$$

$$\sum_1^x x^6 = \frac{1}{42} x(x-1)(2x-1)(3x^4-6x^3+3x+1).$$

$$\sum_1^x x^7 = \frac{1}{24} x^2(x-1)^2(3x^4-6x^3-x^2+4x+2).$$

$$\sum_1^x x^8 = \frac{1}{90} x(x-1)(2x-1)(5x^6-15x^5+5x^4+15x^3-x^2-9x-3).$$

$$\sum_1^x x^9 = \frac{1}{20} x^2(x-1)^2(2x^6-6x^5+x^4+8x^3+x^2-6x-3).$$

$$\sum_1^x x^{10} = \frac{1}{66} x(x-1)(2x-1)(3x^8-12x^7+8x^6+18x^5-10x^4-24x^3+2x^2 +15x+5).$$

Anm. Setzt man $k = 1$, so ist nach dem Lehrsatze:

$$T_n = \frac{(1-t)^n}{n!} + \frac{\alpha_1(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_2(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \alpha_{n-1}(1-t);$$

d. h. schreibt man in dem vorstehenden Ausdrucke für

$$\sum_1^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

statt x, $1-t$, so geht er in T_n über.

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

b) Summation der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{x-1} = \sum_1^x \frac{1}{x}$.

Es sei $\varphi(x) = \log x + \frac{\alpha_1}{x} - \frac{\alpha_2}{x^2} \cdots\cdots + \frac{\alpha_{n-1}(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$, so wird nach dem Lehrsatze

$$\sum_1^x \frac{1}{x} = \varphi(x) - \varphi(1) - (-1)^n \int_0^1 n!\, T_n\, \partial t \sum_1^x \frac{1}{(x+t)^{n+1}}.$$

Schreibt man auf der rechten Seite $\sum_1^\infty \frac{1}{(x+t)^{n+1}} - \sum_x^\infty \frac{1}{(x+t)^{n+1}}$ für $\sum_1^x \frac{1}{(x+t)^{n+1}}$, und bemerkt, dass das erste der alsdann entstehenden Integrale sich mit $-\varphi(1)$ in eine Constante zusammenzieht, so folgt hieraus:

$$\sum_1^x \frac{1}{x} = \varphi(x) + C + (-1)^n \int_0^1 n!\, T_n\, \partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+t)^{n+1}} = \varphi(x) + C + R,$$

wenn das zuletzt stehende Integral, welches den Rest ausdrückt, mit R bezeichnet wird. Für ein gegebenes n nähert sich R der Null, wenn x sehr gross wird, und man erhält für $x = \infty$, $\sum_1^x \frac{1}{x} = \log x + C$, also $C = -\Gamma'(1)$; nach T. III. Formel A. Mit Hülfe der obigen genauen Formel lässt sich C schon durch Anwendung eines sehr mässigen Werthes von x berechnen. Man findet für $n = 4$:

$$\sum_1^x \frac{1}{x} = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + C + \int_0^1 t^2(1-t)^2\, \partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+t)^5};$$

für $n = 6$:

$$\sum_1^x \frac{1}{x} = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} + C + \int_0^1 t^2(1-t)^2 (t^2 - t - \tfrac{1}{2})\, \partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+t)^7}.$$

Aus diesen Formeln lässt sich der Betrag des Restes für ein gegebenes x, z. B. für $x = 10$ oder $x = 20$, für welches die Summe $\sum_1^x \frac{1}{x}$ noch leicht zu berechnen ist, und mithin auch der durch Weglassung des Restes bei der Bestimmung von C begangene Fehler beurtheilen. Den Werth von $\Gamma'(1)$ s. T. VII.

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

$$\sum_1^x \frac{1}{x+a} = \varphi(x) - \frac{\Gamma'(1+a)}{\Gamma(1+a)} + R. \quad \varphi(x) = \log(x+a) - \frac{1}{2(x+a)} - \frac{\alpha_2}{(x+a)^2} \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\alpha_{n-1}(-1)^{n-2}(n-2)!}{(x+a)^{n-1}}. \quad R = (-1)^n \int_0^1 n!\,T_n\,\partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+a+t)^{n+1}}.$$

c) $f'(x) = \log(x+a)$. $\quad \varphi(x) = (x+a)\log(x+a) - x - \frac{1}{2}\log(x+a)$

$$+ \frac{\alpha_2}{x+a} + \frac{2\alpha_4}{(x+a)^3} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}}.$$

$$\sum_1^x \log(x+a) = \varphi(x) + C + R. \quad R = (-1)^{n+1}\int_0^1 (n-1)!\,T^n\,\partial t \sum_x^{\infty} \frac{1}{(x+a+t)^n}.$$

Diese Formel folgt aus der allgemeinen Summationsformel, wenn man noch, wie im vorigen Beispiele, $\sum_1^x \frac{1}{(x+a+t)^n}$ in die Differenz der Summen von 1 bis ∞ und von x bis ∞ zerlegt, und das aus dem ersten Theile entstehende Integral mit der Constanten vereinigt. Auch hier wird bei gegebenem n für ein sehr grosses x, $R = 0$ und:

$$\sum_1^x \log(x+a) = (x+a)\log(x+a) - x - \tfrac{1}{2}\log(x+a) + C \text{ (für } x = \infty),$$

wo noch die Constante zu finden ist. Man hat für $x = \infty$:

$\sum_1^x \log(x+a) = \sum_1^x \log x + a\log x - \log\Gamma(1+a)$, zufolge der in T. III. entwickelten Eigenschaften der Function Γ; ferner ist für $x = \infty$, $(x+a)\log(x+a) = (x+a)\log x + a$, $\log(x+a) = \log x$; folglich:

$$\sum_1^x \log x - \log\Gamma(1+a) = (x-\tfrac{1}{2})\log x + a - x + C \text{ (für } x = \infty),$$

oder, wenn man $C + a + \log\Gamma(1+a) = C'$ setzt:

$$\sum_1^x \log x = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + C' \text{ (für } x = \infty).$$

Die Constante C' ist unabhängig von a. Um sie zu finden, benutze man den Werth von $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, wonach:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots2x-1\cdot2x}{(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2x)^2}\sqrt{x} = \frac{(2x)!\sqrt{x}}{2^{2x}\cdot(x!)^2} \text{ für } (x = \infty).$$

Fortsetzung von **Tafel VIII.**

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

Man hat, mit Anwendung der vorstehenden Formel für $\sum_1^x \log x = \log(x-1)!$,

$$-\tfrac{1}{2}\log\pi = \sum_1^{2x}\log x - 2\sum_1^x \log x - 2x\log 2 - \tfrac{1}{2}\log x + \log 2 = (2x-\tfrac{1}{2})\log 2x$$

$$-2x + C' - (2x-1)\log x + 2x - 2C' - 2x\log 2 - \tfrac{1}{2}\log x + \log 2,$$

woraus nach geschehener Reduction hervorgeht: $C' = \frac{1}{2}\log 2\pi$; folglich $C = \frac{1}{2}\log 2\pi - a - \log\Gamma(1+a)$. Also ist:

$$\sum_1^x \log(x+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a - \log\Gamma(1+a) + (x+a-\tfrac{1}{2})\log(x+a) - x$$

$$+ \frac{\alpha_2}{x+a} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}} + R,$$

oder, wenn man die Logarithmen wegschafft, und auf beiden Seiten den Factor $x+a$ hinzufügt, so erhält man folgende Formel:

$$(1+a)(2+a)(3+a)\cdots\cdot(x+a)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+a)}(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}} e^{-x-a+\frac{1}{12(x+a)}-\frac{1}{360(x+a)^3}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}}} \cdot e^R,$$

wo R das oben angegebene Integral ist. Z. B. für $n = 2$ findet man:

$$a(1+a)(2+a)(3+a)\cdots\cdot(x+a)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x-a}\cdot e^{\int_0^1 \frac{t(1-t)}{2}\partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+a+t)^2}}.$$

Daher für $x = \infty$:

$$\frac{a(1+a)(2+a)\cdots\cdot(x+a)e^x}{(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^a\Gamma(a)}. \qquad x!\,x^{-x-\frac{1}{2}}e^x = \sqrt{2\pi}.$$

Fünfte Abtheilung.

Elliptische Functionen.

(Nach **Legendre**, Traité des fonctions elliptiques etc., tome I. Paris, 1825.)

Tafel I.

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4.$$

(α, β, γ, δ, ε reelle Zahlenwerthe.)

Verwandlung von $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in $\frac{\partial y}{\sqrt{A + By^2 + Cy^4}}$.

Es seien a, b, c, d die vier, als ungleich vorausgesetzten, Wurzeln der Gleichuug $X = 0$, und zwar sei, wenn alle vier Wurzeln reell sind, $a > b > c > d$; wenn aber nicht alle Wurzeln reell sind, so verstehe man unter a und b zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln. Man bestimme die Grössen p und q aus den Gleichungen:

$$\frac{p+q}{2} = \frac{ab - cd}{a+b-c-d}, \quad \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}$$

und setze:

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}$$

so wird

$$X = \frac{A + By^2 + Cy^4}{(1+y)^4}$$

und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{(q-p)\partial y}{\sqrt{A + By^2 + Cy^4}}$$

d. h. durch diese Substitution verwandelt sich der Ausdruck $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in einen ähnlichen, welchem die ungeraden Potenzen der veränderlichen Grösse fehlen.

Anmerkung 1. Für p, q, A, B, C werden nach dieser Regel stets reelle Werthe gefunden, die auch endlich sind, wenn nicht $a + b = c + d$ ist. Wenn aber $a + b = c + d = 2m$ ist, so ist

$$X = \varepsilon(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = \varepsilon(x^2 - 2mx + ab)(x^2 - 2mx + cd);$$

setzt man daher $x - m = y$, so wird die verlangte Verwandlung sofort erhalten durch die Formel:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\varepsilon(y^2 + ab - m^2)(y^2 + cd - m^2)}}.$$

Anmerkung 2. Die obige Substitution $x = \frac{p + qy}{1 + y}$ ist auch noch anwendbar, wenn X nur auf den dritten Grad steigt, also $\varepsilon = 0$ ist. Setzt man für diesen Fall in den obigen Ausdrücken $d = \infty$, so kommt $q + p = 2c$, $q - p = 2\sqrt{(a-c)(b-c)} = 2k$ und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{k}\,\partial y}{\sqrt{\delta(m + ny^2)(y^2 - 1)}},$$

wo $m = (c - a - k)(c - b - k)$ und $n = (c - a + k)(c - b + k)$.

Tafel II.

$$X = A + Bx^2 + Cx^4$$

(A, B, C reelle Zahlenwerthe.)

Verwandlung von $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in $\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}$, wo der Modul c ein positiver, ächter Bruch ist.

Man zerlege X in reelle Factoren zweiten Grades; es sei $X = \pm\gamma^2(1 \pm \alpha^2 x^2)(1 \pm \beta^2 x^2)$, α, β, γ reelle Constanten; ferner sei $\alpha^2 > \beta^2$, und es werde $\beta = k\alpha$, $\alpha x = y$ gesetzt; so wird $k^2 < 1$ und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\alpha\gamma\sqrt{\pm(1 \pm y^2)(1 \pm k^2 y^2)}}.$$

Es ergeben sich daher folgende Fälle, in welchen die gesuchte Verwandlung auf die beigefügte Weise erhalten wird:

1) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \sqrt{1-k^2}, \quad x = \operatorname{Tang}\varphi.$$

2) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{-\sqrt{1-c^2}\cdot\partial\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad x = \operatorname{Cos}\varphi.$$

3) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-1)(1+k^2x^2)}} = \frac{c\,\partial\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad x = \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

4) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{-c\,\partial\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad x = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{k}.$$

5) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(k^2x^2-1)}} = \frac{\sqrt{1-c^2}\cdot\partial\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad x = \frac{1}{k\operatorname{Cos}\varphi}.$$

6) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = k, \begin{cases} x = \operatorname{Sin}\varphi, & \text{wenn } x^2 < 1. \\ x = \frac{1}{k\operatorname{Sin}\varphi}, & \text{wenn } x^2 > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

7) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = -\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}. \quad c = \sqrt{1-k^2},$$

$$x^2 = \operatorname{Sin}\varphi^2 + \frac{1}{k^2}\operatorname{Cos}\varphi^2 = \frac{1 - c^2\operatorname{Sin}\varphi^2}{1 - c^2}.$$

Anmerkung. Diese Substitutionen setzen überall nur solche Werthe von x voraus, für welche die Quadratwurzel auf der linken Seite reell bleibt. Die Annahme anderer Werthe von x würde, nach Weglassung des alsdann auftretenden Factors $\sqrt{-1}$, nur von einer dieser Formen auf die andere führen. —

Tafel III.

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale.

$$\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^{2k}\,\partial\varphi}{\Delta} = Z_{2k}. \qquad \text{(Leg. p. 11.)}$$

Reductionsformel:

$$(2k-3)Z_{2k-4}-(1+c^2)(2k-2)Z_{2k-2}+(2k-1)c^2Z_{2k} = \Delta\operatorname{Cos}\varphi\cdot\operatorname{Sin}\varphi^{2k-3}.$$

Durch diese Formel werden die mit Z_{2k} bezeichneten Integrale, in welchen k eine beliebige, positive oder negative, ganze Zahl bezeichnet, sämmtlich auf Z_0 und Z_2, d. i. auf $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}$ und $\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta}$ zurückgeführt. Für $k = 1$ erhält man:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\Delta} = c^2\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta} - \Delta\operatorname{Cotang}\varphi.$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)^k\Delta} = \Pi_k.$$

Reductionsformel:

$$(2k-2)\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_k-(2k-3)\left[1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right]\Pi_{k-1}$$
$$+(2k-4)\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-2}-(2k-5)\frac{c^2}{n^2}\Pi_{k-3} = \frac{\Delta\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)^{k-1}}$$

Durch diese Formel werden die Integrale Π_k, in welchen k eine positive ganze Zahl bezeichnet, sämmtlich auf

$$\Pi_0 = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta},\quad \Pi_1 = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta},\quad \Pi_{-1} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta}+n\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta}$$

zurückgeführt. Man findet z. B. für $k = 2$

$$2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)\Pi_2 = \left[1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right]\Pi_1-\frac{c^2}{n^2}\Pi_{-1}+\frac{\Delta\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{1+n\operatorname{Sin}\varphi^2}.$$

Als besondere Fälle ergeben sich für $n = -1$ und für $n = -c^2$ folgende Formeln:

Fortsetzung von **Tafel III.**

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale.

1) $n = -1$.

$$(2k-3)(1-c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-2}\Delta} = (2k-4)(1-2c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-4}\Delta}$$
$$+(2k-5)c^2\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-6}\Delta}+\frac{\Delta\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-3}}.$$

z. B. für $k = 2$: $\quad (1-c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2\Delta}+c^2\int\frac{\operatorname{Cos}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta} = \Delta\operatorname{Tang}\varphi.$

2) $n = -c^2$.

$$(2k-3)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-1}} = (2k-4)\left(1-\frac{2}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-3}}+\frac{2k-5}{c^2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-5}}$$
$$+\frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{\Delta^{2k-3}}.$$

Für $k = 2$: $\quad \left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{c^2}\int\Delta\,\partial\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{\Delta}$, oder weil

$$\int\Delta\,\partial\varphi = \int\frac{\Delta^2\,\partial\varphi}{\Delta} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta}-c^2\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta},$$

$$\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}-\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{\Delta}.$$

Bezeichnet also Q eine rationale Function von $\operatorname{Sin}\varphi^2$, so wird das Integral $\int\frac{Q\,\partial\varphi}{\Delta}$ mit Hülfe vorstehender Formeln, und nach Weglassung seines algebraischen oder logarithmischen Theiles, auf Integrale folgender drei Formen zurückgeführt, nämlich:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}\quad,\quad\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta}\quad,\quad\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}.$$

Der Coëfficient n im dritten Integrale heisst der Parameter.

Tafel IV.

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

1. **Lehrsatz.** Wenn der Parameter n reel, und sein positiver Werth grösser ist als c, so kann man ihn auf einen andern zurückführen, dessen positiver Werth kleiner ist als c. (Leg. p. 68.)

Beweis. Man setze $(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right) = \alpha$ und $\frac{\operatorname{Tang}\varphi}{\Delta} = p$. Entwickelt man aus diesen Ausdrücken den Werth von $\frac{\partial p}{1+\alpha p^2}$ und zerlegt denselben in einfache Brüche, so kommt:

$$\frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\left(\frac{1}{1+n\operatorname{Sin}\varphi^2} + \frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\operatorname{Sin}\varphi^2} - 1\right)$$

oder: $$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} + \int\frac{\partial\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\operatorname{Sin}\varphi^2\right)\Delta} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \int\frac{\partial p}{1+\alpha p^2},$$

wo die Integration nach p sich sofort ausführen lässt, nach deren Vollzug für p sein Werth $\frac{\operatorname{Tang}\varphi}{\Delta}$ einzusetzen ist. Wenn nun n, abgesehen vom Vorzeichen, grösser war als c, so ist $\frac{c^2}{n}$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als c; mithin wird durch vorstehende Formel die Reduction bewirkt.

Anmerkung. Für $n = c$ und $n = -c$ findet man auf dem vorstehend angedeuteten Wege folgende Reductionen:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+c\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \frac{1}{2(1+c)}\operatorname{Arc.Tang}\frac{(1+c)\operatorname{Tang}\varphi}{\Delta}.$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1-c\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \frac{1}{2(1-c)}\operatorname{Arc.Tang}\frac{(1-c)\operatorname{Tang}\varphi}{\Delta}.$$

2. **Lehrsatz.** Wenn der Parameter n nicht reell ist, so lässt sich das Integral $\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}$ auf zwei ähnliche Integrale mit reellen Parametern zurückführen. (Leg. p. 143.)

Beweis. Man setze $p = \frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{(1+z\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}$, so wird:

Fortsetzung von Tafel IV.

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

$$\frac{\partial p}{1+kp^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\cdot\frac{1-(2+z)\operatorname{Sin}\varphi^2+(1+2z)c^2\operatorname{Sin}\varphi^4 - zc^2\operatorname{Sin}\varphi^6}{(1+z\operatorname{Sin}\varphi^2)^2(1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2)+k\operatorname{Sin}\varphi^2(1-\operatorname{Sin}\varphi^2)}. \qquad (\dagger)$$

In diesen Ausdrücken sind z und k unbestimmte Constanten. Man denke sich den vorstehenden Nenner in drei Factoren zerlegt, und setze demnach, einstweilen x für $\operatorname{Sin}\varphi$ schreibend,

$$(1+zx^2)^2(1-c^2x^2)+kx^2(1-x^2) = (1+nx^2)(1+n'x^2)(1+mx^2),$$

so erhält man durch Vergleichung der höchsten Potenzen von x auf beiden Seiten: $nn'm = -c^2z^2$. Ferner, indem man $x = 1$ und dann $x = \frac{1}{c}$ einsetzt, und $\sqrt{1-c^2}$ mit b bezeichnet:

$$(1+n)(1+n')(1+m) = b^2(1+z)^2, \quad (c^2+n)(c^2+n')(c^2+m) = -kb^2c^2.$$

Sind nun n und n′ gegeben, so kann man aus diesen drei Gleichungen m, k und z bestimmen. Man findet für z die Gleichung:

$$1 = \frac{c^2z^2}{nn'} + \frac{b^2(1+z)^2}{(1+n)(1+n')};$$

und hieraus

$$z = \frac{-b^2 \pm \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n'}\right)(c^2+n)(c^2+n')}}{b^2+c^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n'}\right)};$$

ferner

$$m = -\frac{c^2z^2}{nn'}, \quad k = \frac{-(c^2+n)(c^2+n')(c^2+m)}{b^2c^2}.$$

Es sei nun, ν als positiv vorausgesetzt,

$$n = \nu\operatorname{Cos}\vartheta + i\operatorname{Sin}\vartheta) \quad \text{und} \quad n' = \nu(\operatorname{Cos}\vartheta - i\operatorname{Sin}\vartheta),$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung in z nothwendig reell und ungleich. Man bezeichne sie mit z_1 und z_2, und die entsprechenden

Tafel IV. Fortsetzung.

$$\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

Werthe von m und k mit m_1, m_2, k_1, k_2. Zerlegt man nun den obigen Ausdruck (‡) in einfache Brüche, so kommt:

$$\frac{\partial p}{1+kp^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{z} + \frac{A}{1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} + \frac{A'}{1+n'\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} + \frac{B}{1+m\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right],$$

wo

$$A = \frac{n^3+(2+z)n^2+(1+2z)c^2n+zc^2}{n(n-n')(n-m)},$$

$$A' = \frac{n'^3+(2+z)n'^2+(1+2z)c^2n'+zc^2}{n'(n'-n)(n'-m)},$$

$$B = \frac{m^3+(2+z)m^2+(1+2z)c^2m+zc^2}{m(m-n)(m-n')}.$$

In der vorstehenden Formel sind für z, m, k sowohl die Werthe z_1, m_1, k_1, als z_2, m_2, k_2 einzusetzen, wodurch zwei Gleichungen entstehen, durch welche, wie man sieht, die Integrale

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} \quad\text{und}\quad \int\frac{\partial\varphi}{(1+n'\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta}$$

beide zugleich auf elliptische Integrale mit reellen Parametern m_1 und m_2 zurückgeführt werden. Eliminirt man aus beiden das Integral mit dem Parameter n′, so ergiebt sich ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} = M_1\int\frac{\partial\varphi}{(1+m_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} + M_2\int\frac{\partial\varphi}{(1+m_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta}$$
$$+ N\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + J,$$

wo J der logarithmische Theil des Integrals ist.

Auf diese Weise hat Legendre die Reduction des complexen Parameters $n = \nu(\mathrm{Cos}\,\vartheta + i\,\mathrm{Sin}\,\vartheta)$ auf die reellen Parameter m_1 und m_2 bewerkstelligt.

Tafel V.

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Moduls.

Bezeichnungen: $\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \Delta(c,\varphi)$, $\sqrt{1-c^2} = b$. (b Complement des Moduls.)

$\sqrt{1-c'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi'^2} = \Delta(c',\varphi')$, $\sqrt{1-c'^2} = b'$.

Setzt man $c' = \dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$ und $\mathrm{Sin}\,\varphi' = \dfrac{(1+c)\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}$

so kommt $\dfrac{\partial\varphi'}{\Delta(c',\varphi')} = (1+c)\dfrac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$,

durch welche Formel eine elliptische Function mit dem Modul c′ auf eine andere vom Modul c zurückgeführt wird.

Aus der Formel für $\mathrm{Sin}\,\varphi'$ findet man noch:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi' = \frac{\Delta(c,\varphi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}, \quad \Delta(c',\varphi') = \frac{1-c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2},$$

$$\sqrt{c}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \sqrt{\frac{1-\Delta(c',\varphi')}{1+\Delta(c',\varphi')}}.$$

$$\mathrm{Sin}\,2\varphi' = \frac{2(1+c)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\Delta(c,\varphi)}{(1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)^2},$$

$$c+\mathrm{Cos}\,2\varphi' = (1+c)\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^2-\mathrm{Sin}\,\varphi^2\Delta(c',\varphi')^2}{(1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)^2}.$$

$$b' = \frac{1-c}{1+c}, \quad c = \frac{1-b'}{1+b'},$$

$$\sqrt{c} = \frac{c'}{1+b'}, \quad b = \frac{2\sqrt{b'}}{1+b'}.$$

Da $2 > 1+c$, so ist $c' > \sqrt{c}$; also wird durch die Verwandlung von c′ in c der Modul der Null genähert; durch die umgekehrte Verwandlung von c in c′ wird der Modul der Einheit genähert. Auf diese Weise lässt sich aus einem gegebenen Modul durch wiederholte Verwandlung eine Reihe der steigenden und eine Reihe der fallenden Moduln herleiten; beide nähern sich sehr schnell ihren Grenzen 1 und 0.

Tafel VI.

Addition elliptischer Integrale von gleichem Modul.

$$\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta\varphi \quad , \quad \sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\psi^2} = \Delta\psi.$$

Lehrsatz. Das Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = 0$ ist in folgender Gleichung enthalten:

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi \Delta\psi + \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi \Delta\varphi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2} = \text{Const.}$$

Beweis. Man bezeichne den vorstehenden Ausdruck linkerhand mit u, seinen Zähler mit A, seinen Nenner mit B, so ist

$$u = \frac{A}{B}; \quad \text{oder } \log u = \log A - \log B.$$

Von dieser Gleichung nehme man die partielle Ableitung nach φ, so kommt:

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{P}{\Delta\varphi},$$

wo P folgenden Ausdruck vorstellt:

$$P = \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi \Delta\varphi \Delta\psi - (1-c^2) \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi}{A}$$

$$+ \frac{2 c^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi}{AB} (\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \Delta\varphi \Delta\psi - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi).$$

Bemerkt man nun, dass P eine symmetrische Function von φ und ψ, so folgt, dass auch

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{P}{\Delta\psi}$$

sein muss; mithin ist

$$\frac{\partial u}{u} = P\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\partial\psi}{\Delta\psi}\right).$$

Da aber u = Const., oder du = 0, so folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = 0; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Soll für $\varphi = 0$, $\psi = \mu$ werden, so wird Const. $= \operatorname{Sin}\mu$; die hiedurch entstehende algebraische Gleichung zwischen den trigonometrischen Functionen von φ, ψ, μ vertritt die Stelle der transscendenten Gleichung;

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = \int_0^\mu \frac{\partial\mu}{\Delta\mu}.$$

Fortsetzung von Tafel VI.

Addition elliptischer Integrale von gleichem Modul.

$$\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta\varphi \quad , \quad \sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\psi^2} = \Delta\psi$$

Es ergeben sich daher folgende Relationen zwichen φ, ψ und μ.

$$\operatorname{Sin}\mu = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi \Delta\psi + \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi \Delta\varphi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\operatorname{Cos}\mu = \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \Delta\varphi \Delta\psi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi \Delta\psi - c^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\operatorname{Tang}\mu = \frac{\operatorname{Tang}\varphi \Delta\psi + \operatorname{Tang}\psi \Delta\varphi}{1 - \operatorname{Tang}\varphi \operatorname{Tang}\psi \Delta\varphi \Delta\psi}.$$

Ist insbesondere $\varphi = \psi$, oder

$$2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\mu \frac{\partial\mu}{\Delta\mu}.$$

so hat man für die Verdoppelung der elliptischen Functionen:

$$\operatorname{Sin}\mu = \frac{2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \Delta\varphi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\operatorname{Cos}\mu = \frac{\operatorname{Cos}\varphi^2 - \operatorname{Sin}\varphi^2 \Delta\varphi^2}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi^2 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\operatorname{Tang}\mu = \frac{2 \operatorname{Tang}\varphi \Delta\varphi}{1 - \operatorname{Tang}\varphi^2 \Delta\varphi^2}.$$

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}\mu = \operatorname{Tang}\varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Tafel VII.

Reduction elliptischer Integrale
durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

Bezeichnungen. c Modul, $b = \sqrt{1-c^2}$, $c_1 = \frac{1-b}{1+b}$,

$$b_1 = \sqrt{1-c_1^2} \quad , \quad c_2 = \frac{1-b_1}{1+b_1} \quad , \quad b_2 = \sqrt{1-c_2^2}, \ldots\ldots$$

$c, c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots$ die Reihe der fallenden Moduln; $b, b_1, b_2, \ldots\ldots$ die Reihe ihrer Complemente.

Man hat auch:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}\ , \ c_1 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}\ , \ c_2 = \frac{2\sqrt{c_3}}{1+c_3}\ldots\ldots;\ b = \frac{1-c_1}{1+c_1}\ , b_1 = \frac{1-c_2}{1+c_2}, \ldots$$

Lehrsatz. Berechnet man für einen gegebenen Werth von φ den Werth von φ_1 aus der Gleichung:

$$\mathrm{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b\,\mathrm{Tang}\,\varphi$$

so ist

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}} = \frac{1}{1+b}\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}.$$

Anmerkung. Bei dieser Berechnung muss der Werth von φ_1 so genommen werden, dass er mit φ zugleich, von Null anfangend, stetig wächst. Ist also $\mathrm{Tang}\,\beta = b\,\mathrm{Tang}\,\alpha$, wo $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, und $\varphi = n\pi + \alpha$, so ist auch $\varphi_1 - \varphi = n\pi + \beta$; also $\varphi_1 = 2n\pi + \alpha + \beta$.

Beweis. Setzt man $\mathrm{Sin}\varphi = \frac{(1+c_1)\,\mathrm{Sin}\,\psi}{1+c_1\,\mathrm{Sin}\,\psi^2}$,

so wird nach Tafel V.

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}} = (1+c_1)\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2}}.$$

Setzt man ferner $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\varphi_1 = \mathrm{Tang}\,\psi\cdot\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2}$,

so wird nach Tafel VI. (am Ende)

$$\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\psi^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}.$$

Durch Verbindung beider Substitutionen folgt:

Fortsetzung von Tafel VII.

Reduction elliptischer Integrale
durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}} = \frac{1+c_1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}},$$

und zugleich

$$\frac{1+c_1}{2} = \frac{1}{1+b}.$$

Die dieser Gleichung entsprechende zusammengesetzte Substitution erhält man durch Elimination von ψ aus den beiden vorigen Gleichungen. Man findet nach Tafel V., wenn $\sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2}$ mit $\Delta(c_1,\ \psi)$ bezeichnet wird:

$$\mathrm{Sin}\,2\varphi = \frac{(1+c_1)\,\mathrm{Sin}\,2\psi\,\Delta(c_1\ ,\ \psi)}{(1+c_1\,\mathrm{Sin}\,\psi^2)^2},$$

$$c_1 + \mathrm{Cos}\,2\varphi = (1+c_1)\,\frac{\mathrm{Cos}\,\psi^2 - \mathrm{Sin}\,\psi^2\,\Delta^2(c_1\ ,\ \psi)}{(1+c_1\,\mathrm{Sin}\,\psi^2)^2},$$

und nach Tafel VI.

$$\mathrm{Sin}\ \varphi_1 = \frac{\mathrm{Sin}\,2\psi\,\Delta(c_1\ ,\ \psi)}{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^4}\ ,\quad \mathrm{Cos}\,\varphi_1 = \frac{\mathrm{Cos}\,\psi^2 - \mathrm{Sin}\,\psi^2\,\Delta(c^1,\ \psi)^2}{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^4}.$$

Vergleicht man diese Werthe mit einander, so folgt:

$$(c_1 + \mathrm{Cos}\,2\varphi)\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1 = \mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1\ ,\ \text{oder}\ \mathrm{Sin}(2\varphi - \varphi_1) = c_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1$$

und hieraus durch Umstellung

$$\mathrm{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b\,\mathrm{Tang}\,\varphi \quad , \quad \text{w. z. b. w.}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution wird der Modul c sehr schnell der Null genähert und dadurch der Werth des Integrals

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}},$$

mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erhalten. Berechnet man nämlich die Reihe der fallenden Moduln bis c_n, und die Werthe von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ bis φ_n aus den Gleichungen:

$$\mathrm{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b\,\mathrm{Tang}\,\varphi \quad , \quad \mathrm{Tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = b_1\,\mathrm{Tang}\,\varphi_1\ \text{u. s. f.},$$

Tafel VII. Fortsetzung.

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

so ist, wenn man das Quadrat des sehr kleinen Moduls c_n vernachlässigt,

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_n^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}} = \varphi_n$$

und
$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = \frac{\varphi_n}{(1+b)(1+b_1)(1+b_2)\cdots\cdots(1+b_{n-1})}.$$

Bedient man sich dagegen der Reihe der steigenden Moduln, nämlich $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, $c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$, u. s. f., wobei $b' = \sqrt{1-c'^2}$, $b'' = \sqrt{1-c''^2}, \ldots$ so ergeben sich φ', φ'' u. s. f. aus den Gleichungen:

$$\operatorname{Sin}(2\varphi'-\varphi) = c \operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\operatorname{Sin}(2\varphi''-\varphi') = c' \operatorname{Sin}\varphi', \text{ u. s. f.};$$

und dieselben geben:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2}} = (1+b')\int_0^{\varphi'} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c'^2\operatorname{Sin}\varphi^2}}$$
$$= (1+b')(1+b'')\int_0^{\varphi''} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c''^2\operatorname{Sin}\varphi^2}} \text{ u. s. f.}$$

Wenn nun der Modul c^n der Einheit nahe genug ist, um $1-c^{n^2} = b^{n^2}$ vernachlässigen zu können, so findet sich angenähert:

$$\int_0^{\varphi^n} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^{n2}\operatorname{Sin}\varphi^2}} = \int_0^{\varphi^n} \frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi^n}{2}\right)$$

und
$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2}} = (1+b')(1+b'')(1+b''')\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots(1+b^n)\log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi^n}{2}\right).$$

Tafel VIII.

Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals

$$H = \int_0^{\varphi}\left(A + \frac{B\operatorname{Sin}\varphi^2}{1+n\operatorname{Sin}\varphi^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)}. \quad \text{(Legendre p. 118.)}$$

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta(c,\varphi) \quad , \quad \sqrt{1-c_1^2\operatorname{Sin}\varphi_1^2} = \Delta(c_1,\varphi_1).$$
$$b = \sqrt{1-c^2} \quad , \quad c_1 = \frac{1-b}{1+b}.$$

Dieses Integral, in welchem A und B beliebige Constanten sind, umfasst die Tafel III. aufgezählten drei Arten der elliptischen Functionen.

Man berechne φ_1 aus der Gleichung $\operatorname{Tang}(\varphi_1-\varphi) = b\operatorname{Tang}\varphi$, so wird nach Tafel VII.

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(c_1,\varphi_1)}.$$

Zugleich giebt die vorstehende Gleichung zwischen φ_1 und φ für $\operatorname{Sin}\varphi^2$ folgenden Werth:

$$\operatorname{Sin}\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + c_1\operatorname{Sin}\varphi_1^2 - \Delta(c_1,\varphi_1)\operatorname{Cos}\varphi_1).$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke verwandelt sich H in eine elliptische Function mit dem Modul c_1, nämlich:

$$H = \frac{1+c_1}{2}\left(H_1 - \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int_0^{\varphi_1}\frac{\operatorname{Cos}\varphi\,\partial\varphi}{1+n_1\operatorname{Sin}\varphi^2}\right),$$

wo H_1 ein neues Integral ist, nämlich:

$$H_1 = \int_0^{\varphi_1}\left(A_1 + \frac{B_1\operatorname{Sin}\varphi^2}{1+n_1\operatorname{Sin}\varphi^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c_1,\varphi)},$$

und $n_1 = \frac{n(n+c^2)}{(1+b)^2(1+n)}$, $A_1 = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}$, $B_1 = \frac{1}{2}B\frac{c^2+2n+n^2}{(1+b)^2(1+n)^2}$.

Fortsetzung von Tafel VIII.

Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals

$$H = \int_0^{\varphi}\left(A + \frac{B \operatorname{Sin}\varphi^2}{1 + n \operatorname{Sin}\varphi^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c, \varphi)}. \quad \text{(Legendre p. 118.)}$$

Nach Tafel IV. kann man immer annehmen, dass n reel ist und zwischen $-c$ und $+c$ liegt. Eine Folge hievon ist, dass $\frac{n + c^2}{c(1 + n)}$ zwischen -1 und $+1$, und dass mithin um so mehr

$$\frac{n_1 c}{n c_1} = \frac{c}{c_1(1 + b)^2} \cdot \frac{n + c^2}{1 + n} = \frac{c}{1 - b^2} \cdot \frac{n + c^2}{1 + n} = \frac{n + c^2}{c + cn}$$

ein ächter Bruch, oder $\frac{n_1}{c_1}$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\frac{n}{c}$ ist. Folglich wird durch diese Transformation mit dem Modul zugleich auch der Parameter der Null näher gebracht. Und zwar nähert sich die Reihe der fallenden Parameter $n, n_1, n_2, \cdots$ noch schneller der Null, als die Reihe der fallenden Moduln $c, c_1, c_2, \cdots$, da jedes Glied der ersteren kleiner ist, als das entsprechende der andern.

Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution lässt sich der Zahlenwerth von H mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden.

Druck von J. Petsch in Berlin.