Juured ja ruutwôrrandid.

Algebra ülesannete kogu VIII ja IX õppeaasta jaoks.

Kokku seadnud

Paul Ederberg,

Tallinna linna I. reaalkooli õpetaja.

Tallinn, 1922.

Kirjastus-Ühing „Kool".

J & A. Paalmann'i trükk, Tallinnas.

Eessôna. 2650.

Käesolewa raamatu kokkuseadmiseks on hoogu annud sellekohase raamatu puudus meie matemaatika koolikirjanduses. Raamat on mõeldud kõige pealt abiks õpilasele klassis läbimindud kursuse süwendamisel. Käsitatud peatükkidele on sellepärast lühikesed seletused juure lisatud, mis näitawad, kuidas wäljaarwamisi ja graafilisi esitamisi toimetada, ja on mahutatud raamatusse wastused, sest õpilasel peab wôimalik olema oma kodust tegewust kontrollida. Raamatu kokkuseadmisel on arwesse wõetud matemaatika õpetajate kongressi poolt Tartus 31/III ja 1/IV 1921 a. ülesseatud nõuded ja allikatest on kasutatud töökawa suhtes järgmiste autorite ülesannete kogud: Bardey-Seyffarth, Bardey-Lietzmann, Fenkner, Schülke (Aufgabensammlung aus der reinen und angewandten Mathematik), kuid ülesanded on kõik uuesti kokku seatud. Minu ametiwend hra J. Kiiwet on raamatu käsikirja läbiwaadanud ja oma parandustega ja nõuandmisega töö kõlbtusele palju kaasa aidanud, mille eest mina siin teda tänan. Raamatus weel leiduwatest puudustest ja wigadest palun minulele lahkelt teatada.

Tallinnas, 23. augustil 1921 a.

P. Ederberg.

Sisukord.

§ 1. Astendamise ja juurimise põhiseadused.

A. Astendamise põhireeglid on järgmised 3:

1. Kaswatise aste wõrdub kõikide samal astmel wõetud tegurite kaswatisega, näit. $(abc)^4 = a^4b^4c^4$.

2. Astme astendamiseks kaswatatakse astmenäitajad, näit. $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

3. Murru aste on lugeja ja nimetaja samanimeliste astmete jagatis; näit.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}.$$

Ülesanded arwutamiseks:

1. $(a^3b^2)^5$
2. $(2ab^4)^3$
3. $(-a^2)^2$
4. $(-a^2)^3$
5. $(-a^2)^4$
6. $\left(-\frac{3}{4}a^2b\right)^2$
7. $\left(-\frac{2}{5}ab^6\right)^3$
8. $\left(-a^{2n}\right)^3$
9. $\left(-a^{2n+1}\right)^2$
10. $\left(\frac{a^2b}{2xy^2}\right)^3$
11. $\left(\frac{3ab}{x^2y^5}\right)^4$
12. $\left(-\frac{4a^3bc}{3x^2yz}\right)^2$
13. $\frac{(a^2x^3)^5}{(ax)^4}$
14. $\frac{(a^2)^3(b^4)^2}{(ab)^5}$
15. $(-a)^m(-a)^m$
16. $(-a)^{m-x}(-a)^{m+x}$
17. $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2$
18. $\left(\frac{b}{a} - 2 \cdot \frac{a}{b}\right)^2$.

B. Eelpool nimetatud kolmele astendamise reeglile wastawad 3 juurimise reeglit:

1. Kaswatise juurimiseks wõetakse samanimeline juur igast tegurist, näit.:

$$\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c}.$$

2. Astme juurimiseks jagatakse astmenäitaja juurenäitajaga, näit.:

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3.$$

3. Juur murrust on lugeja ja nimetaja samanimeliste juurte jagatis, näit.:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}.$$

Leida juured järgmistest awaldustest:

19. $\sqrt{81}$

20. $\sqrt[4]{81}$

21. $\sqrt[5]{243}$

22. $\sqrt[7]{a^{14p}}$

23. $\sqrt{\frac{49}{64}}$

24. $\sqrt{20\frac{1}{4}}$

25. $\sqrt[3]{-64}$

26. $\sqrt{25a^2b^2}$

27. $\sqrt[3]{125a^6b^9}$

28. $\sqrt[3]{-8a^{12}b^6}$

29. $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{9x^4y^2}}$

30. $\sqrt[3]{\frac{512a^3x^3}{729b^{12}y^6}}$.

Järgmistes awaldustes enne juurimist lahutada radikand (juuremärgialune awaldus) teguriteks:

31. $\sqrt{50^2 - 48^2}$

32. $\sqrt{53^2 - 45^2}$

33. $\sqrt{74^2 - 24^2}$

34. $\sqrt{169^2 - 119^2}$

35. $\sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2}$

36. $\sqrt{9a^2 - 18ab + 9b^2}$.

Lihtsustada järgmised awaldused:

37. $(4\sqrt{a})^2 + (5\sqrt{b})^2 + (3\sqrt{2a-b})^2 - (7\sqrt{b})^2$

38. $(2\sqrt{a})^2 - (3\sqrt{b})^2 - (5\sqrt{a-2b})^2 - (6\sqrt{b})^2$.

§ 2. Ruutjuure wõtmine arwudest.

A. Leida ruutjuur:

a) täisarwudest:

39. 324	**48.** 6889	**57.** 41616
40. 529	**49.** 7921	**58.** 94864
41. 961	**50.** 30276	**59.** 78400
42. 1444	**51.** 37636	**60.** 5760000
43. 1764	**52.** 85849	**61.** 5294601
44. 2025	**53.** 51529	**62.** 36084049
45. 2304	**54.** 66564	**63.** 3337929
46. 7569	**55.** 11236	
47. 4489	**56.** 11881	

b) murdudest:

64. $1\frac{9}{16}$	**66.** 0,25	**68.** 0,1296	**70.** 0,0196	**72.** 1,69
65. $5\frac{4}{9}$	**67.** 0,81	**69.** 0,2704	**71.** 0,0484	**73.** 3,61

B. Leida ruutjuur näidatud täpisusega:

a) kunni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{10}$ arwudest (wõtta tähendus puudusega!):

74. 42 **75.** 57 **76.** 90

b) kunni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ arwudest (tähendus puudusega wõtta!):

77. 32 **78.** 51

c) kunni 0,01 arwudest (ligem tähendus!):

79. 0,27	**82.** 1,8	**85.** 0,0023
80. 0,4	**83.** 3,85	
81. 1,73	**84.** 5,03	

d) kunni $^1/_{10000}$ arwudest:

86. 0,0034	**88.** 0,000021	**90.** 1,007
87. 0,0318	**89.** 0,00007	

C. Graafilised esitused (mõõdu üksuseks olgu 1 cm).

a) Funktsiooni mõiste. Kui kaks suurust on niisuguses olenewuses, et ühe suuruse muutmisega ka teine suurus muutub, siis öeldakse, et teine suurus on esimese suuruse funktsioon. Näit., wormelis

$$y = x^2 - 3$$

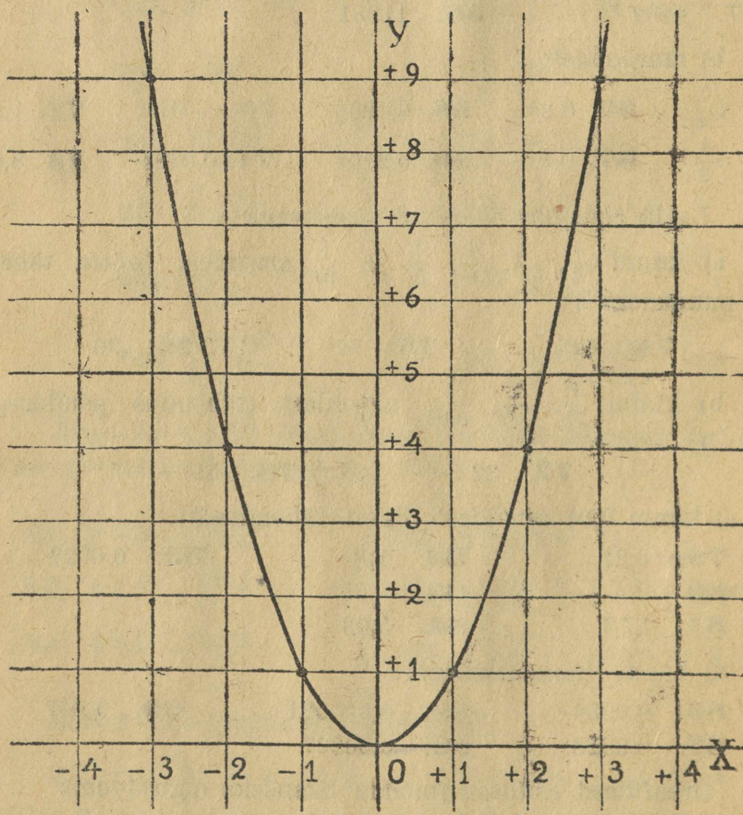
wõib x-ile wabalt tähendusi anda, millest y-i tähendus oleneb; x nimetakse wabalt muutuwaks suuruseks ehk argumendiks, y olenewalt muutuwaks suuruseks ehk funktsiooniks.

Lahendame eelmise wormeli y-i suhtes. Siis saame:

$$x = \pm \sqrt{y + 3}.$$

Kui siin y-ile wabalt tähendusi anda, oleneb temast x. Seega on y — argument, kuid x — funktsioon.

b) Funktsiooni $y = x^2$ graafiline esitus (joon. nr. 1).



Joon. nr. 1.

Funktsiooni $y = x^2$ esitamiseks punktide haawal on soowitaw wõimalikult palju punkte wõtta, kuid niiwiisi neid walida, et seal, kus kõwerus ruttu muutub, neid wõimalikult tihedalt oleks. Antud funktsiooni $y = x^2$ esitamiseks, näit., on tarwis x-i jaoks enam tähendusi wõtta 0 ja ± 1 wahel, kui ± 1 ja ± 2 wahel, ja nende wiimaste (± 1 ja ± 2) wahel enam kui ± 2 ja ± 3 wahel.

Saadus on lahtine kõwerjoon, mis Y-telje kohta sümmeetriline ning 1-ses ja 2-ses kwadrandis asub. Seda kõwerjoont nimetakse paraaboliks. Koordinaatide alguses pöördub paraabol. Niisugust punkti nimetakse paraaboli tipuks.

91. Joonistada funktsiooni $y = \sqrt{x}$ kujutus.

Funktsioon $y = \sqrt{x}$ ehk $y^2 = x$ on seesama, mis $y = x^2$, erineb temast aga ainult oma seisukoha poolest: kõwerjoon on Y-teljest paremal poolel, X-telje kohta sümmeetriline ja riiwab Y-telge koordinatide alguspunktis.

92. Eelmises kujutuses on iga ordinaat ruutjuur temale wastawast abstsissist. Sel põhjal wõtta joonistusest järgmiste juurte wäärtused:

$$\sqrt{0{,}5};\ \sqrt{1{,}5};\ \sqrt{2{,}5};\ \sqrt{3};\ \sqrt{3{,}5};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7}$$

ja wõrrelda need tähendused aritmeetiliselt (= arwutamise teel) leitud tähendustega!

§ 3. Awaldused, millest täpist juurt ei saa wõtta (irratsionaalawaldused).

A. Irratsionaalawalduste teisendamine.

1. Radikaali (juure märgi) alt wäljatoomine.

See sünnib 1 §-i reeglite põhjal, näit.:

$$\sqrt[3]{648a^6b^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4a^6b^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3a^6b^3 \cdot 3b} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{3b} = 2 \cdot 3a^2b\sqrt[3]{3b}$$

Üleminek § 1, B, 1-se reegli põhjal. Üleminek § 1, B, 2-se reegli põhjal.

Siinjuures wõib ka niiwiisi talitada: radikaalalune suurus algteguriteks lahutada ja sealt iga nii mitme ühesuguse teguri asemel, mitu üksust juurenäitajas on, wôtta üks tegur radikaali ette.

Ülesanded:

93. $\sqrt{27}$

94. $\sqrt{147}$

95. $\sqrt{605}$

96. $\sqrt[3]{16}$

97. $\sqrt[3]{625}$

98. $\sqrt[3]{-125}$

99. $\sqrt{25a^5b^3}$

100. $\sqrt{5a^3b^2x^3}$

101. $\sqrt{512a^7x^{11}}$

102. $\sqrt[3]{-320a^8b^2}$

103. $\sqrt[4]{162a^7b^{13}}$

104. $\sqrt{\frac{a^5}{b^8}}$

105. $\sqrt{\frac{0.49a^7}{b^5}}$

106. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{81}a^8b^6}$

107. $\sqrt{81-81a^2}$

108. $\sqrt{72-36a}$

2. Eelmisele wastupidine operatsioon: radikaali alla wiimine.

109. $3\sqrt{5}$

110. $2\sqrt[3]{3}$

111. $a\sqrt{2}$

112. $2b\sqrt[3]{b}$

113. $a^2\sqrt{2a}$

114. $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}$

115. $2ab\sqrt{0,5b}$

116. $(a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

117. $\frac{a-2}{a+2}\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$

3. Sarnased juured. Nõnda nimetakse niisuguseid irratsionaalseid awaldusi, mis on ühesugused juurenäitaja ja radikaalaluse suuruse poolest, näit., $3\sqrt{5}$ ja $7\sqrt{5}$. Et teada saada, kas radikaalawaldused on sarnased, tuleb radikaali alt välja tuua nii palju kui wõimalik, näit. $2\sqrt{99}$ ja $1,5\sqrt{396}$ on sarnased juurawaldused, sest $2\sqrt{99} = 6\sqrt{11}$

$$\text{ja } 1,5\sqrt{396} = 9\sqrt{11}.$$

Näidata, et juured on sarnased:

118. $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{45}$

119. $\sqrt{24}$ ja $\sqrt{150}$

120. $\sqrt[3]{189}$ ja $\sqrt[3]{448}$

121. $\sqrt{50ab^3c^2}$ ja $\sqrt{18a^5b}$

122. $\sqrt[3]{\frac{16}{81}a^2b^6}$ ja $\sqrt[3]{\frac{9}{32}a^2}$.

B. Tehted irratsionaalawaldustega.

1. Juurawaldusi wõib kokku ehk mahaarwata ainult siis, kui nad sarnased on, näit. wahe $7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ on $4\sqrt{5}$, kuna $7\sqrt{5}$-est pole wõimalik ära wõtta $3\sqrt{6}$, kui mitte ligikaudselt wälja arwata.

~~123.~~ $\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$

~~124.~~ $a\sqrt{b} - \sqrt{b}$

~~125.~~ $3\sqrt{a} - 2{,}4\sqrt{b} - 1{,}6\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

~~126.~~ $\sqrt{a} - \sqrt{x} + 2\sqrt{a^3} - 3\sqrt{x} - 8\sqrt{a} - \sqrt{9x}$

~~127.~~ $5\sqrt{3a} - 3\sqrt{a} - \sqrt{25a} + \sqrt{27a} + \sqrt{36a}$

~~128.~~ $4\sqrt{20a^2} + 7\sqrt{16a} - \sqrt{245a^2} + 3\sqrt{80a^2}$

~~129.~~ $5\sqrt[3]{54} - 7\sqrt[3]{-16} + 4\sqrt[3]{-250} + 8\sqrt[3]{128}$

~~130.~~ $\sqrt{(a+b)^2x} - \sqrt{(a-b)^2x} - 2\sqrt{a^2x} - \sqrt{(2-a)^2x} + \sqrt{x}$

~~131.~~ $\sqrt{4+4a^2} - \sqrt{25+25a^2} + \sqrt{a^2+a^4} - 3\sqrt{1+a^2}$.

2. 1 § ist teame, et $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{b}\,\sqrt[4]{c}$

ja $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b}$;

järjelikult ümberpöördult $\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{b}\,\sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{abc}$

ja $\sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, s. t. radikaalawalduste kaswatamiseks, kui juurenäitajad on wõrdsed, kaswatatakse nende radikaalalused suurused, ja ühesuuruse juurenäitajaga radikaalawalduste jagamiseks jagatakse nende radikaalalused suurused, kusjuures juuremärgid endisteks jääwad.

Lihtsustada awaldused:

~~132.~~ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

~~133.~~ $\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}$

134. $\sqrt{20} \cdot \sqrt{35}$

~~135.~~ $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a}$

~~136.~~ $\sqrt[3]{4b^5} \cdot \sqrt[3]{16b^4}$

~~137.~~ $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a}$

~~138.~~ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

~~139.~~ $\sqrt[3]{5a} \cdot \sqrt[3]{25a^4}$

~~140.~~ $(3\sqrt{12} - 5\sqrt{18} - 7\sqrt{48} + 8\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$

~~141.~~ $(4\sqrt{20} + \sqrt{72} - 3\sqrt{125} - \sqrt{50}) \cdot 3\sqrt{6}$

~~142.~~ $(2\sqrt{150} - 8\sqrt{605} - 4\sqrt{54} + 12\sqrt{20}) \cdot 2\sqrt{5}$

~~143.~~ $(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

~~144.~~ $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$

~~145.~~ $(7 - 3\sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$

~~146.~~ $(3\sqrt{x} - 4)(2 - 7\sqrt{x})$

~~147.~~ $(5a - \sqrt{b})(3a - 2\sqrt{b})$

~~148.~~ $\sqrt{\sqrt{34} + 3} \cdot \sqrt{\sqrt{34} - 3}$

~~149.~~ $\sqrt{2\sqrt{6} + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{2\sqrt{6} - \sqrt{15}}$

~~150.~~ $\sqrt{35} : \sqrt{7}$

~~151.~~ $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ — Et j. juurel on arvult tarvis jaurem. korrutada.

~~152.~~ $\sqrt{ab} : \sqrt{ac}$ — $\sqrt[n]{a} = x$ sest $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = x^n$;

~~153.~~ $\sqrt{2ab} : \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ — $\sqrt[n]{a} = x^n$

~~154.~~ $(4\sqrt{12} - 5\sqrt{6} - \sqrt{3}) : \sqrt{3}$

~~155.~~ $(a\sqrt{b} + \sqrt{b}) : \sqrt{b}$

156. $(x - y) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$
[Jagataw lahutada teguriteks!]

~~157.~~ $(4 - a) : (2 - \sqrt{a})$

~~158.~~ $5\sqrt{7} : 7\sqrt{5}$

~~159.~~ $\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$

~~160.~~ $\sqrt[3]{72} : \sqrt[3]{3}$

3. Astme wõtmine.

~~161.~~ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

~~162.~~ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

~~163.~~ $(2+\sqrt{3})^2$

~~164.~~ $(5\sqrt{2}-\sqrt{7})^2$

~~165.~~ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

~~166.~~ $(a-b\sqrt{3})^2$

~~167.~~ $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$

~~168.~~ $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

~~169.~~ $\left(\sqrt{11+\sqrt{21}}-\sqrt{11-\sqrt{21}}\right)^2$

~~170.~~ $\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}-\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)^2$

~~171.~~ $(2b\sqrt{a}-a\sqrt{a})^2$

~~172.~~ $(a\sqrt{b}-3b\sqrt{a})^2$

~~173.~~ $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$

Järgmistes awaldustes wiia radikaaleelne tegur radikaali alla:

~~174.~~ $(\sqrt{6}-2)\sqrt{10+4\sqrt{6}}$

~~175.~~ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

~~176.~~ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

~~177.~~ $(\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{15-6\sqrt{6}}$

~~178.~~ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

~~179.~~ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$.

§ 4. Irratsionaalsuse häwitamine nimetajast.

Olgu antud awaldus $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Arwutamine annab: $\sqrt{3} = 1{,}73205$ (täpilt kunni 0,00001).

$$\begin{array}{r|l} 500000 & 173205 \\ \underline{346410} & 2{,}886 \\ 153590 & \\ \underline{138560} & \\ 15030 & \\ \underline{13856} & \\ 1174 & \\ \underline{1038} & \\ 136 & \end{array}$$

Tarwitades ligikaudse arwamise metoodi (w. O. Perli, Aritmeetika 1918, lhk. 89—91), saame antud awalduse $\frac{5}{\sqrt{3}}$ resultaadiks — kui irratsionaalarwu $\sqrt{3}$ kõik nimetatud wiis kümnendkohta ära kasutada — arwu 2,886 wõrdlemisi pika jagamise resultaadina, misjuures teooria ainult niipalju kindlust annab, et 3 kümnendkohta õiged on.

Wähema peamurdmisega ja suurema täpisusega saame resultaadi, kui meie radikaalawalduse nimetajast ära kaotame, talitades järgmiselt: meie kaswatame lugejat ja nimetajat nimetaja radikaalawaldusega $\sqrt{3}$ ja saame $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; kui siin $\sqrt{3}$-e tähendust 1,73205 kaswatada 5-ega ja jagada 3-ega, siis saame 2,8867 (täpilt kunni 0,0001).

Weel suuremat kasu toob juurte häwitamine nimetajast, kui seal polünoom on, näit. awalduses

$$\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

Otsekohene wäljaarwamine oleks:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} = 2{,}23606 \\ \sqrt{3} = 1{,}73205 \\ \hline 0{,}50401 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 500000 & 50401 \\ \underline{453609} & 9{,}920 \\ 46391 & \\ \underline{45360} & \\ 1031 & \\ \underline{1008} & \\ 23 & \end{array} \text{ (täpilt kunni 0,001).}$$

Kiiremaks ja täpsemaks wäljaarwamiseks kaswatatakse nimetaja ja lugeja nimetaja kaasbinoomiga $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, s. t.

binoomiga, mille liikmed wastupidise märgiga — antud binoomiga wõrreldes — ühendatud on. Meie saame:

$$\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{5}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

Wäljaarwamine oleks:

$$\begin{array}{rl} + \begin{array}{r} \sqrt{5} = 2,23606 \\ \sqrt{3} = 1,73205 \end{array} & \\ \hline 3,96811 & \text{(t. k. 0,00002)} \\ \times 5 & \\ \hline 19,84055 & \underline{|\ 2\qquad} \\ & 9,920275 \ \text{(t. k. 0,0001)} \end{array}$$

Resultaat on 9,9203 — täpsusega kunni 0,0001.

Ka kergendab see operatsioon irratsionaalmurdude kokku- ja mahaarwamist; näit.

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \text{ on } \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 4+\sqrt{11}+$$
$$+2+\sqrt{3} = 6+\sqrt{3}+\sqrt{11}.$$

Mõned teised hõlpsused järgnewad allpool toodud näitustest (nnr. 206—210).

A. ~~180.~~ $\frac{3}{\sqrt{3}}$

~~181.~~ $\frac{10}{\sqrt{15}}$

~~182.~~ $\frac{5}{\sqrt{75}}$

~~183.~~ $\frac{a}{\sqrt{a}}$

~~184.~~ $\frac{a}{\sqrt{a^3}}$

~~185.~~ $\sqrt{\frac{0,6}{2,5}}$

~~186.~~ $\sqrt{\frac{3,5}{2,8}}$

~~187.~~ $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

~~188.~~ $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

~~189.~~ $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$

~~190.~~ $\frac{4}{5+\sqrt{5}}$

~~191.~~ $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

~~192.~~ $\frac{3}{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}$

~~**193.**~~ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

~~**194.**~~ $\dfrac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

~~**195.**~~ $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

~~**196.**~~ $\dfrac{2\sqrt{11}+3\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$

~~**197.**~~ $\dfrac{a}{a-\sqrt{a}}$

198. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

199. $\dfrac{7+\sqrt{a}}{7-\sqrt{a}}$

200. $\dfrac{x\sqrt{a}-y\sqrt{b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

201. $\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{6+\sqrt{6}}$

~~**202.**~~ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

~~**203.**~~ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{4+\sqrt{10}}{5-\sqrt{10}}$

~~**204.**~~ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

205. $\dfrac{a\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

B. Näidata, et radikaalid on sarnased:

206. $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja $2\sqrt{6}$

207. $2\sqrt{0,6}$ ja $\sqrt{15}$

Kokkuarwata:

208. $14\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-15\sqrt{\frac{1}{3}}$

~~**209.**~~ $12\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{6}+40\sqrt{\frac{2}{5}}-10\sqrt{\frac{3}{2}}-4\sqrt{\frac{5}{2}}$

~~**210.**~~ $3\sqrt[3]{40}-5\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{25}}-4\sqrt[3]{54}$.

§ 5. Imaginaararwud.

Imaginaararwu $\sqrt{-1}$ märk on i, s. t. $\sqrt{-1}=i$. — Kui antud on ülesanne, kus imaginaararwud ette tulewad, on soowitaw — eksituste ärahoidmiseks — enne tehete täidesaatmist kirjutada imaginaararw i abil, näit. $\sqrt{-5}$ kirjutada $i\sqrt{5}$ näol, sest

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5}\,\sqrt{-1} = i\sqrt{5}\,.$$

Awaldus, kus reaalarw on liidetud imaginaararwuga, nimetakse kompleksarwuks, näit. $3 + \sqrt{-7}$. Kaks kompleksarwu, mis lahknewad ainult märgi poolest imaginaarosa ees, nimetakse wastastikku kaaskompleksarwudeks.

Kaswatamise täidesaatmisel tuleb arwesse wõtta, et

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = +1$$

Jagamisel kaswatatakse jagataw ja jagaja — jagaja kaaskompleksiga, misläbi jagaja saab reaalarwuks, näit.:

$$(3 - \sqrt{5}) : (2 + \sqrt{-7}) \text{ on}$$

$$\frac{3 - \sqrt{-5}}{2 + \sqrt{-5}} = \frac{3 - i\sqrt{5}}{2 + i\sqrt{5}} = \frac{(3 - i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})}{(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{6 - 2i\sqrt{5} - 3i\sqrt{5} + 5i^2}{4 - 5i^2} = \frac{1 - 5i\sqrt{5}}{9}\,.$$

Järgmised awaldused kirjutada i abil:

211. $\sqrt{-9}$ **213.** $\sqrt{-21}$ **215.** $\sqrt{-a^6b^4}$

212. $\sqrt{-49}$ **214.** $\sqrt{-24}$ **216.** $\sqrt{5-50}$

Lihtsustada awaldused:

217. i^{10}

218. i^{35}

219. $3i\,.\,7i$

220. $i\sqrt{-4}$

221. $i\sqrt{-5}$

222. $\sqrt{-7}\,.\,\sqrt{7}$

223. $\sqrt{-12}\,.\,\sqrt{3}$

224. $\sqrt{-4a}\,.\,\sqrt{-a}$

225. $\sqrt{-xy}\,.\,i\sqrt{xy}$

226. $\frac{1}{i}$

227. $\frac{1}{i^2}$

228. $\frac{1}{i^3}$

229. $\frac{1}{i^5}$

230. $\frac{1}{i^5} - \frac{1}{i^7}$

231. $\frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^8}$

232. $i\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a}$

233. $\sqrt{-64} - \sqrt{-25} + \sqrt{-100}$

234. $3\sqrt{-9} + 2\sqrt{-36} - \sqrt{-121}$

235. $(2-3i) + (7-i)$

236. $(5+7i) - (1+3i)$

237. $(2+3i)(1-5i)$

238. $(3-\sqrt{-4})(6+\sqrt{-9})$

239. $(2+\sqrt{-7})(3-\sqrt{-7})$

240. $(4-3i)^2$

241. $(\sqrt{-6} - \sqrt{-2})^2$

242. $(-1+i\sqrt{3})^2$

243. $(a+bi)^2 - (a-bi)^2$

244. $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3$ **245.** $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$

Jagada:

246. $\frac{7+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ **247.** $\frac{6-i\sqrt{3}}{4+i\sqrt{3}}$ **248.** $\frac{4-i\sqrt{5}}{2+i\sqrt{5}}$

§ 6. Täielikkude ruutwõrrandite lahendamine.

Märkus. Pikkade kaswatamiste ärahoidmiseks on soowitaw enne järgmistele §-idele astumist ruutarwude tabel kokku seada nende arwude järgmise omaduse põhjal: järjekordsetest arwudest saadud ruutude wahed sünnitawad aritmeetilise rea, mille differents 2 on, s. t. kahe ruutarwu wahe on eelmisest ruutarwude wahest 2-he wõrra suurem, näit.

$5^2 - 4^2 = 9$; $6^2 - 5^2 = 11$; $7^2 - 6^2 = 13$ j. n. e.

Üleüldse: olgu a_1, a_2, a_3 kolm järjekordset arwu loomulikus arwreas, nii et $a_2 = a_1 + 1$; $a_3 = a_2 + 1 = a_1 + 2$. Nende ruutude wahed on:

$$a_2^2 - a_1^2 = (a_1 + 1)^2 - a_1^2 = 2a_1 + 1$$
$$a_3^2 - a_2^2 = (a_2 + 1)^2 - a_2^2 = 2a_2 + 1 = 2(a_1 + 1) + 1.$$

Leitud wahe $a_3^2 - a_2^2 = 2(a_1 + 1) + 1$ wõrdub $(2a_1 + 1) + 2$, s. t. ta on eelmiste ruutude wahe liidetud 2-ga. Järjelikult, ruutarwude tabeli kokkuseadmiseks on waja paaritu arwude rida loomulikus arwreas üles tähendada ja antud arwu ruudu leidmiseks eelmise arwu ruudule wastaw paaritu arw juure lisada.

Näitus:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144 j. n. e.

A. I juhus: $x^2 + px + q = 0$ — wõrrand, milles x-i koeffitsient on 1. See wõrrand lahendatakse wormeli

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

abil, kus p ja q wõiwad olla nii positiiwsed, kui ka negatiiwsed arwud.

Näitus. $x^2 - 3x - 40 = 0.$

Siin on

$$p = -3 \text{ ja } q = -40$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 40}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$x_1 = 8\ ;\ x_2 = -5.$$

Lahendada wõrrandid:

249. $x^2 - 6x + 8 = 0$

250. $x^2 - 7x + 6 = 0$

251. $x^2 - 15x + 44 = 0$

252. $x^2 + 2x - 15 = 0$

253. $x^2 - 3x - 4 = 0$

254. $x^2 + 11x + 30 = 0$

255. $x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$

256. $x^2 - 1\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

257. $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$

258. $x^2 + 1\frac{5}{12}x + \frac{1}{2} = 0$

259. $x^2 - 0{,}7x + 0{,}1 = 0$

260. $x^2 - 1{,}9x - 1{,}2 = 0$

261. $x^2 - 2x + 2 = 0$

262. $x^2 - 4x + 13 = 0$

263. $x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$

264. $x^2 - 2a^2x - 3a^4 = 0$

265. $x^2 - 2ax + a^2 - 4b^2 = 0$

266. $(x - 3)^2 = 2(x + 1)$

267. $(2x + 5)^2 = 3x(x + 10)$

II — üldine juhus. $ax^2 + bx + c = 0.$

Lahendamine käib wormeli järele:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lahendada wõrrandid:

268. $4x^2 - 12x + 5 = 0$ (w. ka № 255)

269. $6x^2 - 7x + 2 = 0$ (w. ka № 256)

270. $12x^2 + 17x + 6 = 0$ (w. ka № 258)

271. $2x^2 - 3x - 9 = 0$

272. $4x^2 + 5x - 6 = 0$

273. $2x^2 - 7x - 30 = 0$

274. $12x^2 + 61x - 16 = 0$

275. $6x^2 - 5ax + a^2 = 0.$

III juhus. Eelmise wõrrandi koeffitsient b on paarisarw:

$$b = 2k.$$

Wõrrandi kuju on:

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Sel juhtumisel tuletatakse wormel:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Lahendada wõrrandid:

276. $3x^2 + 4x - 20 = 0$

277. $4x^2 + 20x - 11 = 0$

278. $8x^2 + 42x - 11 = 0$

279. $16x^2 - 160x + 399 = 0$

280. $36x^2 + 24x - 1 = 0$

281. $25x^2 + 20x + 7 = 0$

282. $a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - b^2 = 0.$

283. $(x - 2)^2 - (4x - 3)^2 = 10(7x + 1)$

284. $(3x - 5a)^2 + 9(x + 3a)^2 = 4(2x + 3a)^2.$

B. Murdwõrrandid.

285. $\frac{3x^2 - 7x + 10}{5x^2 + 2x - 8} = \frac{3}{8}$

286. $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 20}{7x^3 - 5x^2 - 6x - 20} = \frac{2}{7}$

287. $\frac{3x^3 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 6} = 3x - 1\frac{1}{2}$

288. $\frac{x^2 - 2x + 5}{3x^2 + x - 4} = \frac{x - 2}{3x + 4}$

289. $3x + \frac{1}{x} = 4$

290. $6x + \frac{3}{x} + 19 = 0$

~~**291.**~~ $\frac{x}{3} - \frac{6 - x}{9 - x} = 2$

292. $\frac{4x - 1}{7} + \frac{3x + 4}{5} = \frac{2}{x} + x$

293. $\frac{2x - 7}{3} - \frac{6 - 5x}{x - 4} = x - 5$

294. $\frac{3x - 7}{3} - \frac{6}{2x + 3} = 2x + 2\frac{2}{3}$

295. $\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{x - 2}{x - 3} = -\frac{3}{2}$

296. $\frac{6 - x}{8} + \frac{4 - 3x}{x - 2} = \frac{5(x - 7)}{4}$

297. $\frac{27}{x} - \frac{5}{x - 2} - \frac{6}{x - 3} = 0$

298. $\frac{4 + x}{1 - x} - \frac{3x - 4}{3x} = \frac{2x}{2 - x}$

299. $\frac{2x - 3}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{9x - 20}{3(x - 2)}$

300. $a - x = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

301. $x - \frac{1}{x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$

302. $x - \frac{1}{x} = \frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b}$

303. $\frac{3a}{2x - a} - \frac{6a}{x - a} + \frac{10a}{4x - a} = 0.$

§ 7. Ruutwõrrandi juurte omadus.

A. Ruutwõrrandi $x^2 + px + q = 0$ juurtel on see omadus, et nende summa wõrdub märgi poolest wastupidiselt wõetud koeffitsiendiga p ja kaswatis on waba liige q (Viete'i lause). Seda omadust silmas pidades, leida järgmiste wõrrandite juured ilma wõrrandi lahendamiseta:

304. $x^2 - 4x + 3 = 0$

305. $x^2 - 8x + 15 = 0$

306. $x^2 - 10x + 24 = 0$

307. $x^2 + 7x + 10 = 0$

308. $x^2 + 6x + 5 = 0$

309. $x^2 - 5x - 14 = 0$

310. $x^2 + x - 12 = 0$.

B. Ümberpöördult: kui on antud arwude paar, wõib leida nendele wastaw ruutwõrrand, s. o. ruutwõrrand, millele need arwud on juurteks.

Mis wõrrandid wastawad järgmistele juurte paaridele:

311. 1 ja 3

312. — 3 ja 8

313. — 5 ja — 4

314. $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$

315. $-\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{4}$

316. $a \pm b$

317. $2a - b$ ja $a + 2b$
(Järelkatsuda, kas seatud wõrrand õige!)

318. $2 \pm \sqrt{3}$

319. $a \pm bi$

320. $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a-b}$

321. 0,4 ja — 0,6

322. k ja $\frac{l}{4}$.

323. Arw 59 lahutada kaheks kokkuarwatawaks, mille kaswatis on 688.

324. Arw 288 lahutada kaheks teguriks, mille summa on 34.

C. Ruutkolmliike lahutamine teguriteks.

Ruutkolmliikmeks nimetakse niisugune kolmliige, kus ühes liikmes teatud täht esineb teisel astmel, teises liikmes — esimesel astmel ja 3-das liikmes teda ei ole, näit. $ka^2 + la + m$ on ruutkolmliige a kohta.

Ruutkolmliikme $x^2 + px + q$ lahutamine teguriteks ei tee raskusi, kui korda läheb leida kaks arwu, mille summa $-p$ ja kaswatis q (w. Th. Koik, Elementaarne algebra I lhk. 276—278). Kui niisuguseid arwusid ei leita ehk kolmliige antud on kujul $ax^2 + bx + c$, on soowitaw ruutwõrrand appi wõtta.

Näitus. Lahutada teguriteks trinoom:

$$2x^2 + 5x - 12.$$

Olgu wõetud ruutwõrrand: $2x^2 + 5x - 12 = 0$.

Tema juured on $\frac{3}{2}$ ja -4.

Teooria õpetab, et trinoomi $ax^2 + bx + c$ lahutus on $a(x - \alpha)(x - \beta)$, kus α ja β on ruutwõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ juured. Seekord on lahutus

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left[x - (-4)\right] \text{ ehk } 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+4) = (2x-3)(x+4).$$

Lahutada teguriteks järgmised trinoomid:

325. $x^2 - 7x + 10$

326. $x^2 - x - 6$

327. $x^2 + x - 6$

328. $3x^2 - 8x + 4$

329. $12x^2 + 7x + 1$

330. $6x^2 - 5x - 6$

331. $x^2 + ax - 2a^2$

332. $x^2 - 2bx - a^2 + b^2$

333. $15x^2 + 2ax - a^2$.

Üles olid tähendatud järgmised teise astme wõrrandid, kuid punktidega märgitud kohti ei olnud enam wõimalik lugeda. Mis arwud olid neil kohtadel?

334. $x^2 + 3x = \ldots$; $x_1 = 5$, $x_2 = \ldots$

335. $x^2 - \ldots x = 21$; $x_1 = 7$, $x_2 = \ldots$

336. $2x^2 - 7x \ldots = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = \ldots$

§ 8. Mittetäielikud ruutwõrrandid.

Täielik ruutwõrrand on $ax^2 + bx + c = 0$.

Mittetäielikud oleksid: 1) $ax^2 + bx = 0$ (puudub liige c)

2) $ax^2 + c = 0$ (puudub bx)

3) $ax^2 = 0$ (puuduwad bx ja c).

Nende lahendamine on järgmine:

1) Wõrrandist $ax^2 + bx = 0$ saame $x(ax + b) = 0$. — Kahe teguri x ja $ax + b$ kaswatis wõib olla 0 ainult siis, kui wähemalt üks nendest teguritest on 0. Sellepärast on kas

1) $x = 0$ (1 juur) ehk

2) $ax + b = 0$, kust $x = -\frac{b}{a}$ (teine juur).

2) Wõrrandist $ax^2 + c = 0$ leiame, et $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ja

3) wõrrandi $ax^2 = 0$ lahendus on ainult null.

NB. 2-se ja 3-da punkti alla käiwaid wõrrandid nimetatakse ka puhtruutwõrranditeks, kuna 1-ne juhus ja eelmise §-i wõrrandid segaruutwõrranditeks nimetakse.

A. Lahendada puhtruutwõrrandid:

337. $15x^2 - 7935 = 0$ 2650

338. $x^2 = a$

339. $x^2 - \frac{a}{b} = 0$

340. $\frac{5}{7}x^2 = 315$

341. $49x^2 - 16 = 0$

342. $11x^2 - 8 = 6x^2 - 5\frac{3}{16}$

343. $(6 + x)(7 - x) + (6 - x)(7 + x) = 76$

344. $\frac{9+x}{9-x} = \frac{x+4}{x-4}$

345. $(x + 6a)^2 + 9(x + 3a)^2 = (3x + 11a)^2$

346. $(a - bx)^2 - (ax - b)^2 = 2b^2(x^2 - 1)$.

B. Lahendada mittetäielikud ruutwõrrandid:

347. $x^2 - 8x = 0$

348. $5x^2 - 6x = 0$

349. $(3x - 4)^2 + (x - 3)^2 = 25$

350. $\frac{x+6}{7x+10} = \frac{x+3}{5-x}$

351. $\frac{x+5}{x+4} + \frac{x-5}{x-4} = \frac{2x-5}{x-2}$.

§ 9. Ruutwõrrandite seadmine.

Märkus: m^2 tähendab — ruutmeeter, m^3 — kantmeeter, cm^2 — ruutsentimeeter, j. n. e.

A. Puhtruutwõrrandid.

352. Leida arw, mille kolmanda ja wiienda osa kaswatis on 1500.

353. Arwu wiiekordse ja neljanda osa kaswatis on 500. Mis arw on see?

354. Teosel on 4 ühesuurust annet ja igal leheküljel on läbistikku nii mitu tähte, mitu lehekülge on teosel. Mitu lehekülge on igas andes, kui terwes teoses loetakse 1690000 tähte.

355. Naine müüs mune ja igaüks nii mitme marga eest, mitu on 6-es osa tema munadest. Mitu muna oli tal, kui ta nende eest sai 150 marka?

356. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 52 m ja üks kateet 48 m. Kui pikk on teine kateet?

357. Wõrdkülgse kolmnurga külg on $a = 18$ cm. Leida kõrgus (täpilt kunni 1 mm).

358. Wõrdkülgse kolmnurga kõrgus on $h = 15$ cm. Kui pikk on külg (täpilt k. 1 mm)?

359. Täisnurkse kolmnurga kateetide wahekord on 3 : 4. Kui pikad on kateedid, kui hüpotenuus on 42,5 cm?

360. Rombis on üks diagonaal $2\frac{2}{5}$ korda pikem kui teine. Leida mõlemad diagonaalid, kui rombi külg on 26 cm.

361. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 90 cm. Kateetide hüpotenuusil wõetud projektsioonide wahekord on 4 : 9. Leida hüpotenuus.

362. Trapeetsi suurem alus on wäiksemast 8 cm pikem, kuna kõrgus mõlema aluse poolsummaga wõrdub. Leida kõrgus, kui trapeetsi pind on 529 cm^2.

363. Kui moodustada teatud arwu ja 5-e summa ja wahe, siis saame leitud arwude kaswatisena 375. Mis arw oli meil wõetud?

364. Leida kaks arwu, millest üks 42-est nii palju suurem on kui teine wähem, ja mille ruutude summa on 3626.

365. Keegi sai kauba müümisel 324 marka kasu. Sega saadi kasu nii mitu protsenti, mitu on 400-jas osa ostuhinnast. Mis summa eest müüs tema kauba?

366. Mööda kahte täisnurga all lõikuwat maanteed sõidawad kaks jalgrattameest A ja B ühel ajal ristpunktist wälja, nendest A kiirusega 210 m ja B 220 m minutis. Mitme minuti pärast on nemad teineteisest 2,433 km kaugel otsejoont mööda arwates?

367. Kaks keha A ja B liiguwad mööda täisnurga külgi. A kaugus täisnurga tipust on 42 m, ja liigub A sealt eemale kiirusega 230 meetrit sekundis. B on tipust 230 m kaugel ja liigub tipu poole kiirusega 42 m. Millal oli nende wahe ja millal on ta uuesti otsejoont mööda 739 m?

368. Lahendada eelmine ülesanne ja graafiliselt kujutada, kui 42 m asemel on 180 m, 230 m asemel 100 m ja 739 m asemel 460 m.

B. Segaruutwõrrandid.

369. Leida arw, mille 15-kordne on tema ruudust 36-e wõrra suurem.

370. Lahutada arw 315 kaheks teguriks, millede wahe oleks 6.

371. Leida kaks arwu, millest üks 8 wõrra suurem on kui teine ja mille ruutude summa on 370.

372. Täisnelinurga pindala on 1584 m^2. Leida külgede pikkused, kui üks külg on teisest 15 m pikem.

373. Täisnelinurga külgede wahe on 12 m. Kui lühem külg oleks oma 5-ma osa wõrra pikem ja pikem külg oma 3-da osa wõrra lühem, siis oleks pind 81 m^2 wähem. Kui pikad on küljed?

374. Täisnelinurga perimeeter on 76 m, pind 352 m^2. Leida küljed.

375. Täisnelinurga diagonaal on 45 cm pikk. Leida küljed, kui alus on kõrgusest 9 cm pikem.

376. Trapeetsi aluste wahe on 6 cm, kõrgus wõrdub wäiksema algusega. Pindala on 460 cm^2. Leida alused.

377. Mis arw on tarwis kummagile teguritest 15 ja 24 juure panna, et kaswatis 126-e wõrra suureneks?

26.7 * **378.** Leida kaks arwu, millede kaswatis on 182 ja millede jagamisel saame wahekorras 3 ning ülejäägis 5.

36.27. * **379.** Kaks arwu suhtuwad kui 4 : 3. Kui igaühele 24 juure panna, on saadud arwude ruutude wahe 999. Leida need arwud.

4 või $1\frac{1}{3}$ ***380.** $5\frac{1}{3}$-u ja otsitawa arwu wahe wõrdub $5\frac{1}{3}$-u ja sama otsitawa arwu jagatisega. Leida see arw.

160.640 **381.** 800 kaheks kokkuarwatawaks lahutada, et nende pöördud wäärtuste summa wõrduks 128-a pöördud wäärtusega.

$9/36 = \frac{1}{4}$ **382.** Murru nimetaja on 27-e wõrra suurem kui lugeja. Kui lugejat 4-ja wõrra wähendada ja nimetajat niisama palju suurendada, on uus murd ainult poolosa endisest. Leida see murd.

$\frac{10}{30}$ või $\frac{12}{28}$ **383.** Murru lugeja ja nimetaja summa on 40. Kui lugeja oleks 6 üksust suurem ja nimetaja 14 üksust wähem, oleks murd 3 korda suurem. Mis murd on wõetud?

72. **384.** Kahekohaga arwul on kümneliste arw üheliste arwust 5-e wõrra suurem. Arwu kaswatis tema ristsummaga on 648. Mis arw on see? (Ristsumma on arwude summa, mida üksikud antud arwu numbrid kujutawad.)

385. Kahekohaga arwu ristsumma on 7. Ümberasendatud numbritega arwu kaswatis esialgse arwuga on 1300. Mis arw oli wõetud?

386. Punktid tasapinnal on niiwiisi asendatud, et mingit kolme punkti ei ole ühe sirgjoone peal. Mitu on punkte, kui punktisid ühendawaid sirgjooni on 21?

387. Mitu külge on paljunurgal, millel a) 5 diagonaali, b) 27 diagonaali?

388. Kahe arwu summa on 11, nende kuupide summa 341. Mis arwud on need?

389. Kui kuubi serwa 2 m pikendada, suureneb ruumala 488 m^3. Kui pikk on serw?

390. Täisnelinurgelise lillepeenra ümber, mille küljed 2 ja 4 m, on mururiba, mille pindala on peenra pindalast 9 korda suurem. Kui lai on riba?

391. Kaupmees ostis kaupa teatud summa eest, peale selle oli tema kanda 5% kulusid. Tema müüs kauba 3339 marga eest, kusjuures tema nii mitu protsenti kasu sai, mitu on 500-jas osa ostuhinnast. Kui suur oli ostuhind?

392. Kapital 6000 marka pandi hoiule; iga aasta lõpul lisati sinna, peale protsentraha, 500 marka juure. 3-da aasta algusel oli kapital 7771,6 marka suur. Mitu protsenti kandis kapital?

393. Kaks meest wõiwad müüri 30 päewaga walmis ehitada. Mitu päewa kuluks igaühel üksikult töötades selle peale aega, kui teisel läheks selleks 11 päewa enam kui esimesel?

394. Kahe toru läbi täidetakse tiik 12-e tunniga, kui mõlemad torud on awatud. Mitme tunniga täidab kumbki toru üksinda tiigi, kui esimesel läheb selleks 7 tundi wähem tarwis kui teisel?

395. Ringjoont mööda, mille pikkus 540 m, liiguwad kaks keha. Esimene keha liigub ühe sekundiga 2 m enam ja wajab ringkäigu jaoks aega 3 sekundi wähem kui teine. Mitu meetrit liigub iga keha ühes tunnis?

396. Mõned isikud sõid koos söögimajas lõunat ja maksid selle eest 567 marka. Kui neid oleks olnud 2 hinge wähem, oleks igaüks sama kogusumma juures 18 marga eest enam süüa wõinud. Mitu isikut sõid söögimajas?

397. Mõnel mehel on maksta söögimajas kokku 360 marka. Kui mehi oleks 4-ja wõrra rohkem ja kui igaühel oleks maksta 5 marka wähem, tuleks arwe suurus 550 marka. Mitu meest oli koos?

398. Seltsi aastapäewa pühitsemiseks oli 3300 marka tarwis, mis liikmete wahel ühetasaselt pidi jaotatama. Just aastapäewaks astusid seltsi weel 3 liiget, mispärast oli wõimalik liikmele maksu 10 marga wõrra wähendada. Mitu liiget oli aastapäewaks seltsis?

399. Poes oli kahte sorti nisujahu: esimese sordi nael oli teise sordi naelast 2 marka kallim. Ostjal oli kaasas 550 marka. Kui ainult ühest sordist wõtta, oleks wõinud tema osta oma raha eest esimest sorti $2\frac{1}{2}$ naela wähem kui teist. Kui palju maksis kummagi sordi nael?

400. Osteti kahte seltsi paela. 1 meeter esimest seltsi oli teise seltsi meetrist 5 marka kallim. Ainult ühte seltsi kaupa ostes saaks 504 marga eest esimest seltsi 1,4 m wähem kui teist. Kui palju maksab meeter kummagist seltsist?

401. Kaks töölist *A* ja *B* olid kahesuguse palgaga ühekauaks töö peale palgatud. *A* puudus 2 päewa ja sai 2000 marka, *B* puudus 3 päewa ja sai 1820 mk. Kui *A* oleks puudunud 3 päewa ja *B* 2 päewa, oleks *B* 330 marka enam saanud kui *A*. Mitmeks päewaks olid nemad palgatud?

402. Wankri eelmine ratas teeb 4,5 km pikkuse tee peal 750 tiiru enam kui tagumine. Leida rataste ümbermõõdud, kui eelmise ratta ümbermõõt tagumise omast 1 m wähem on.

403. Linnast *A* saadetakse kuller linna *B*, kuhu tema 10 tunni pärast peab jõudma. Linnast, mis teisel pool *A* 20 km, saadetakse samal ajal ja samas sihis teine kuller, kes esimesega ühel ajal *B*-sse peab jõudma ja sellepärast iga kilomeetri $1\frac{1}{2}$ minutit rutem ära sõidab. Kui suur on linnade *A* ja *B* wahe?

404. Kahest linnast *A* ja *B*, mille wahe 81 km, lähewad kaks rändajat ühel ajal wälja ja jõuawad teineteisele wastu 9 tunni pärast. Kui kaua käib iga rändaja ühe kilomeetri ära, kui esimesel teekäijal on selleks 3 minutit wähem tarwis kui teisel?

405. Kaks keha *A* ja *B* liiguwad mööda kaht täisnurga all lõikuwat sirgjoont kiirustega 6 ja 5 m sekundis. *A* kaugus lõikepunktis on 54 m ja ta liigub nimetatud punkti poole, *B* kaugus on 7 m ja ta liigub sealt eemale. Millal oli *A* ja *B* kaugus otsejoont mööda 40 m?

Meie arwsüsteem — kümnesüsteemi — omadus on, et iga kümme üksust koos sünnitawad järgmise kõrgema järgu üksuse; seitsme süsteemis, näit., sünnitaksid iga seitse üksust kõrgema järgu üksuse jne., nii et arw

$$278 = 2 \,.\, 10^2 + 7 \,.\, 10^1 + 8$$

oleks 7-me süsteemis $5 \,.\, 7^2 + 4 \,.\, 7^1 + 5$ ehk 545, 6-e süsteemis $1 \,.\, 6^3 + 1 \,.\, 6^2 + 4 \,.\, 6^1 + 2$ ehk 1142 jne.

406. Mis alused on arwsüsteemidel, kus alal järgnewaist esimene arw, mis kümnesüsteemi kuulub, teise arwu kuju all esineb:

73 . . . 111

93 . . . 333

67 . . . 403

942 . . . 666

7201 . . . 201

407. Mis arwsüsteemides on kaswatised õiged:

2 . 20 = 100

14 . 20 = 300

13 . 25 = 347

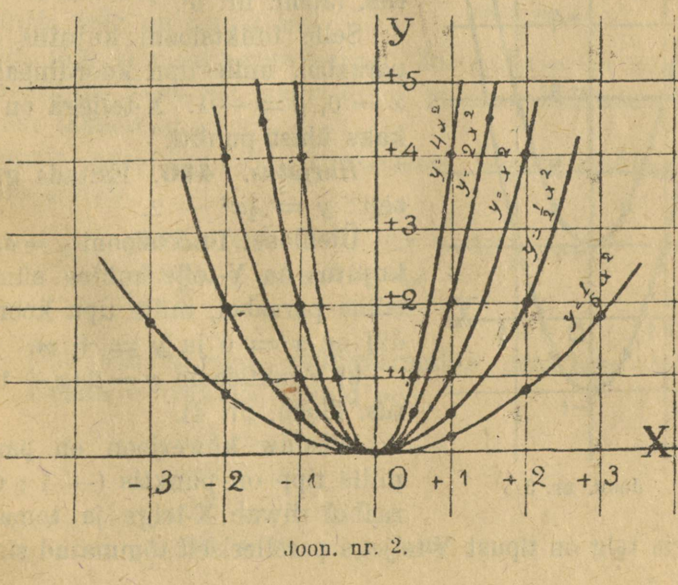
23 . 32 = 766

11 . 21 = 1001

§ 10. Ühe tundmatuga ruutwõrrandi graafiline lahendamine.

I. Paraboolfunktsioonide graafiline esitamine.

1) a) Funktsioonide $y = 4x^2$, $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{5}x^2$ graafilised esitused. (Joon. nr. 2.)



Joon. nr. 2.

Kõikide nende funktsioonide kujutused on paraabolid, ülalpool X-telge, sümmeetrilised Y-telje suhtes ja ühise tipuga koordinaatide alguspunktis. Mida suurem x^2 koeffitsient, seda lähemal on Y-teljele kõwerjoone harud.

b) **408.** Joonistada funktsioonidele $y = -2x^2$, $y = -x^2$ wastawad kujutused. Need on ka paraabolid, kuid allpool X-telge.

Üleüldse: funktsioon $y = ax^2$ esitab paraabolit, mis Y-telje kohta sümmeetriline ja mille tipp on koordinaatide alguspunktis. Koeffitsienti, mis kõwerjoone kuju määrab, siin näit. a, nimetatakse parameetriks.

2) a) Funktsiooni $y = 2x^2 + 1$ graafiline esitus. (Joon. nr. 3.)

Tema kujutus on Y-telje suhtes sümmeetriline paraabol, mille tipp on punktis $(0; +1)$. Ühiseid punkte sellel kõwerjoonel X-teljega ei ole.

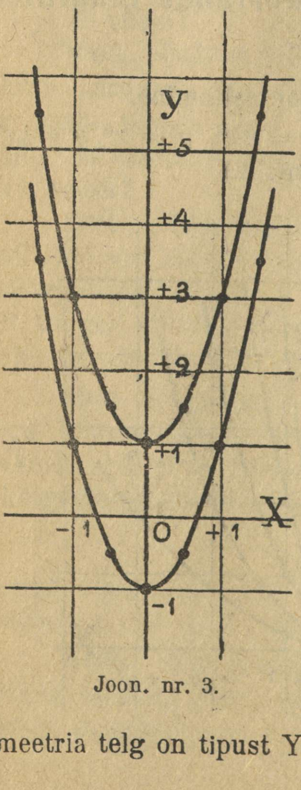
Harjutus. **409.** Esitada graafiliselt: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

b) Funktsiooni $y = 2x^2 - 1$ esitus. (Joon. nr. 3).

Selle funktsiooni kujutus on ka paraabol, mille tipu koordinaadid on $x = 0$, $y = -1$. X-teljega on temal kaks ühist punkti.

Harjutus. **410.** Esitada graafiliselt: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Üleüldse: funktsiooni $y = ax^2 \pm m$ kujutus on Y-telje suhtes sümmeetriline paraabol, mille tipu koordinaadid on $x = 0$ ja $y = \pm m$.



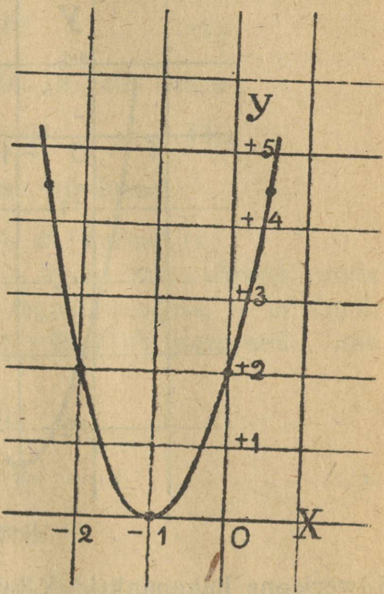
Joon. nr. 3.

3) Funktsiooni $y = 2(x+1)^2$ esitus. (Joon. nr. 4).

Wastaw kõwerjoon on paraabol, mille tipp on punktis $(-1; 0)$. Paraabol riiwab X-telge ja tema sümmeetria telg on tipust Y-teljega paralleelselt tõmmatud sirgjoon.

411. Esitada graafiliselt: $y = (x - 2)^2$; $y = 3(x - 2)^2$; $y = (x + 3)^2$.

Üleüldse, funktsiooni $y = a(x \pm n)^2$ kujutus on paraabol, mille tipu koordinaadid on $x = \mp n$ ja $y = 0$. Tipust Y-teljega paralleelselt tõmmatud sirgjoone suhtes on paraabol sümmeetriline.



Joon. nr. 4.

4) Funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiline esitus on paraabol, sest sellele funktsioonile wõib anda kuju $y = a(x + n)^2 + m$, mispõhjal funktsioon eelmiste juhuste alla käib.

Näitus. Kujutada wõrrand $y = 2x^2 - 4x - 2\frac{1}{2}$. (Joon. nr. 5.)

Siit saame

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) - 4\tfrac{1}{2}$$

ehk $$y = 2(x - 1)^2 - 4\tfrac{1}{2}.$$

Kujutus on paraabol tipuga punktis $(1\,;\, -4\frac{1}{2})$. Paraaboli sümmeetria telg on tipust minew joon, mis Y-teljega paralleelne. Joonistusest on näha, et kõwerjoonel on X-teljega kaks ühist punkti: funktsioonil on kaks 0-list tähendust.

Esitada graafiliselt ja joonistusest lugeda, millise x-i juures on y null:

412. $y = x^2 + 2x - 5\frac{1}{4}$

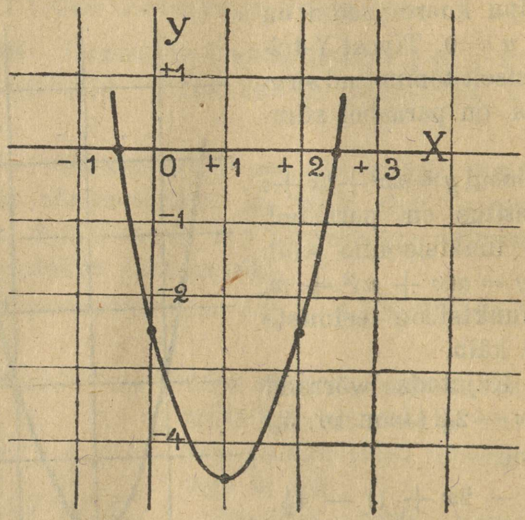
413. $y = 2x^2 - 4x - 1$

414. $y = x^2 + 4x$

II. Ühe tundmatuga ruutwõrrandite **graafiline lahendamine.** Nende wõrrandite tüübid on:

$$ax^2 = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 + bx = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Nendes wõrrandites igaühe pahempoolse awalduse wõrdame y-ga ja joonistame funktsioonile wastawa paraaboli.



Joon. nr. 5.

Kõwerjoone lõikepunktid X-teljega annawad nõutawad tähendused, sest siis on funktsiooni wäärtus 0 ja sellele wäärtusele wastawad x-i tähendused on wõrrandi juured.

Näitus. Lahendada graafiliselt wõrrand $2x^2 - 4x - 2\frac{1}{2} = 0$. Wastaw funktsioon on $y = 2x^2 - 4x - 2\frac{1}{2}$ (joon. nr. 5). Kui selle funktsiooni wäärtus on 0, esitab tema antud wõrrandit $2x^2 - 4x - 2\frac{1}{2} = 0$ ja wõrrandi juuri esitawad wäärtusele $y = 0$ wastawad x-i tähendused $2\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{2}$, s. t. kõwerjoone lõikepunktid X-teljega.

Lahendada graafiliselt ja kontrollida, kuiwõrd saawutatud resultaadid eralduwad aritmeetiliselt (= arwutamise teel) leitud resultaatidest:

415. $\frac{1}{5}x^2 = 0$

416. $x^2 - 2 = 0$

417. $3x^2 - 4 = 0$

418. $x^2 - 5x = 0$

419. $x^2 + 5x + 3 = 0$

420. $x^2 - 3x + 1\frac{1}{4} = 0$.

§ 11. Juurwõrrandite lahendamine.

Olgu antud wõrdus: $A = B$ . . . . . . (1).
Teisel astmel on ta: $A^2 = B^2$. . . . . . (2).

Kui wõtta ruutjuure wormelist (2), siis saame:

$$A = \pm B \quad . . . . . (3),$$

s. t. wormel (3) seisab koos kahest wõrdusest:

1) $A = + B$ [wormel (1)]

ja 2) $A = - B$ — uus wõrdus, mida esialgu, kui (1)-se wormeli peale tagasi waadata, — ei olnud. Niisugune wõrrandite lahendamise wiis wõib juuri anda, mis alguswõrrandit ei rahulda.

Näitus. Olgu antud wõrrand:

$$\sqrt{x + 10} = \sqrt{6x} - 2 \quad . . . . (1).$$

Peale astendamist kahega saame:

$$x + 10 = 6x - 4\sqrt{6x} + 4.$$

Kui üks radikaalawaldus on üle jäänud, tuleb teda eraldada, et teda kergem oleks kaotada:

$$4\sqrt{6x} = 5x - 6 \quad . . . . (2).$$

Peale teist korda astendamist kahega saame:

$$96x = 25x^2 - 60x + 36$$

ehk $25x^2 - 156x + 36 = 0$ . . . . (3),
mille juured on 6 ja 0,24.

Kui (2)-se wõrrandisse asendada 6 ja 0,24, siis leiame, et nendest mõlemast rahuldab seda wõrrandit ainult arw 6. 0,24 ei ole (2)-se wõrrandi juur, waid ta wastab wõrrandile

$$- 4\sqrt{6x} = 5x - 6.$$

Seega on ka antud wõrrandi juur ainult 6.

Tähendab, peale wõrrandi lahendamist astendamise abil tuleb järele katsuda, kas leitud arwud rahuldawad antud wõrrandit.

Lahendada juurwõrrandid:

421. $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = \frac{x-7}{\sqrt{x+8}}$

422. $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-35} = \frac{6}{\sqrt{x+6}}$

423. $\sqrt{x+11} - \sqrt{2x-34} = \frac{12}{\sqrt{x+11}}$

424. $\sqrt{1-x} + \frac{3}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{15x+16}$

425. $\sqrt{x+1} = \frac{4}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{4x - \frac{1}{3}}$

426. $2\sqrt{4 + x\sqrt{x^2-7}} = x + 4$

427. $\sqrt{9 + 7x - 2x\sqrt{x^2-9}} = x - 3$

428. $\sqrt{2a-x} + \sqrt{x-b} = \sqrt{2a-b}$

429. $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{5}$

430. $\sqrt{50+x} + \sqrt{50-x} = 14$

431. $\sqrt{29+x} - \sqrt{29-x} = 4$

432. $\sqrt{1-11x} - \sqrt{1-20x} = \sqrt{x}$

433. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{9x+1}$

434. $\sqrt{12x+1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{16x+9}$

435. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-12} = \sqrt{2x+7}$

436. $\sqrt{x+ab} - \sqrt{x-3ab} = 2b$

437. $\sqrt{a-x} + \sqrt{3a-x} = \frac{a}{\sqrt{a-x}}$

438. $\frac{\sqrt{x+3a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+3a} - \sqrt{x-a}} = \frac{2x+a}{2a}$

439. $$\frac{\sqrt{x+6a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+6a}-\sqrt{x+a}}=\frac{2a+x}{a}$$

440. Leida kaks arwu, millest üks nii palju 200-st wähem on, kui teine 200-st suurem, ja mille ruutjuurte summa on 28.

441. Sama ülesanne, 200 asemel olgu aga $144\frac{1}{2}$ ja 28 asemel 23.

442. Kahe arwu summa on 150. Ruutjuur esimesest arwust liidetud teise arwuga wõrdub 18-ga. Leida need arwud.

443. Leida kaks arwu, mille summa on 260 ja ruutjuurte summa 22.

444. $$\frac{\sqrt[3]{x+28}+\sqrt[3]{x-28}}{\sqrt[3]{x+28}-\sqrt[3]{x-28}}=3$$

Juhatus: 3 kaswatada nimetajaga ja pärast, kui juured eraldatud, mõlemad pooled 3-ga astendada.

445. $$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{5}{3}$$

[Tarwitada proportsiooni omadust.]

§ 12. Polünoomide teine aste.

Kaswatamise teel wõib saada wormeli

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+$$
$$+2ad+2bc+2bd+2cd,$$

s. t. polünoomi ruut on kõikide liikmete ruutude ja kõikide kahe kaupa wõetud liikmete kahekordsete kaswatiste summa.

Sel korral, kui mõned liikmed, näit. b ja c, on neegatiiwsete eesmärkidega, tuleb wormelisse b ja c asemele $-b$ ja $-c$ asendada, mispärast saame

$$(a-b-c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+$$
$$+2ad+2bc-2bd-2cd,$$

s. t. leitud algebralises summas on märgiga „—“ need kahekordsed kaswatised, mille teguritest ainult üks esines antud polünoomis negatiiwse liikmena.

Teisel astmel wõtta polünoomid:

446. $(a - b -)c^2$

447. $(x^2 - x - 1)^2$

448. $(2a^2 - ab - 3b^2)^2$

449. $(1 + \sqrt{t} + t)^2$

450. $(4 - \sqrt{5} + \sqrt{10})^2$

451. $(\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

452. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 5\sqrt{3})^2$

Neljaga astendada binoomid:

453. $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$ **454.** $\left(3a - \frac{1}{a}\right)^4$

Häwitada nimetajast radikaalid:

455. $\frac{2(5\sqrt{2} - 3\sqrt{5})}{5 + \sqrt{5} - \sqrt{10}}$ **456.** $\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 10}{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

§ 13. Radikaalawalduse näitajate koondamine ja radikaalawalduste samanimelisteks tegemine. Tehted juurawaldustega.

A. Algebras näidatakse, et juur ei muutu, kui juurenäitajat ja radikandi (radikaalaluse arwu) astmenäitajat jagada ehk kaswatada sama arwuga, näit.:

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2} \text{ ja } \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}$$

Koondades näitajaid lihtsustada järgmised awaldused:

457. $\sqrt[4]{9}$ **460.** $\sqrt[6]{27}$ **463.** $\sqrt[6]{8a^9b^{12}}$

458. $\sqrt[4]{49}$ **461.** $\sqrt[6]{216}$ **464.** $\sqrt[12]{729a^6b^{18}}$

459. $\sqrt[4]{100}$ **462.** $\sqrt[8]{16}$

Samanimelisteks (samanäitajalisteks) teha irratsionaalarwud:

465. $\sqrt{a}$ ja $\sqrt[3]{a}$

466. $\sqrt[3]{2a}$ ja $\sqrt[6]{2a}$

467. $\sqrt[4]{5a^2}$ ja $\sqrt[6]{7a^5}$

468. $\sqrt{0,5a}$, $\sqrt[3]{0,2a^2}$ ja $\sqrt[4]{0,1a^3}$.

B. Tehted radikaalawaldustega.

a) Kaswatamine ja jagamine.

Kui kaswatamisel wõi jagamisel juurenäitajad ei ole ühesugused, tuleb enne juured teisendada samanimelisteks (ühisnäitajalisteks) ja siis saadud awaldustes kaswatada wõi jagada juurealused awaldused, jättes juurenäitajaks ühisnäitaja.

Ülesanded kaswatamiseks:

469. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{4}$

470. $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{100}$

471. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

472. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

473. $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$

474. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{b}$

475. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$

476. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} \cdot \sqrt[4]{\frac{27}{32}}$

477. $\left(2\sqrt{15} - 3\sqrt[3]{9} - 5\sqrt[4]{5}\right) \cdot \sqrt{3}$

Jagada awaldused:

478. $\sqrt{8} : \sqrt[3]{4}$

479. $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$

480. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[4]{27}$

481. $\sqrt[3]{a} : \sqrt{a}$

482. $\sqrt[3]{x} : \sqrt[4]{x}$

483. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$

484. $\left(6\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{2a^3}\right) : 2\sqrt{a}$

b) Astendamine.

Algebras näidatakse, et juure astendamiseks tuleb wõtta juuralune arw samal astmel, näit.:

$$\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^4 = \sqrt[5]{a^{12}}$$

Ülesanded astendamiseks:

485. $(\sqrt{7})^4$

486. $(0{,}2\sqrt{a})^3$

487. $\left(\sqrt[4]{8}\right)^3$

488. $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2$

489. $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^4$

490. $\left(ab\sqrt[3]{a^2b}\right)^4$

491. $(a\sqrt{a} + \sqrt{2a})^3$

492. $a(\sqrt{2a} - \sqrt{a})^3$

c) Juurimine.

Teooria õpetab, et juur juurest on juur, mille juurenäitaja on esialgsete juurenäitajate kaswatis, näit.:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$$

Kui antud juure ees on koeffitsient, wiiakse see koeffitsient enne uut juurimist radikaali alla, näit.:

$$\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[15]{a^5} = \sqrt[3]{a}$$

Ülesanded juurimiseks:

493. $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$

494. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{625}}$

495. $\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$

496. $\sqrt{a\sqrt{a}}$

497. $\sqrt[8]{a^2\sqrt{a}}$

498. $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

499. $\sqrt[4]{c\sqrt[5]{c^4}}$

2650

§ 14. Murdnäitajad.

Arw murrulise astmenäitajaga esitab juurt, mille näitajaks on murru nimetaja ja millel radikaali märgi all on arw, kus astmenäitajaks on endise murru lugeja, näit.: $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$; teiste sõnadega $a^{\frac{4}{3}}$ on ainult juure $\sqrt[3]{a^4}$ teistsugune wäline kujutus. Tähendatud kujutuse abil on tihti ülesande lahendamine ülewaatlikum ja lihtsam kui muidu, kuna arwutamise operatsioonid samasugusteks jääwad, nagu täisarwuliste juurenäitajate tarwitamisel.

Näitus:

$$\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}} \text{ on } \left(a \,.\, a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

(wrdl. juurimise näitusega 36 leheküljel.)

Kirjutada murdnäitajatega:

500. $\sqrt[5]{a^3}$	**503.** $\sqrt[3]{a^2 - b^2}$	**506.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$
501. $\sqrt[4]{a}$	**504.** $\sqrt[5]{a^3 b^3}$	**507.** $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$
502. $\sqrt{x - y}$	**505.** $\sqrt{25a^2 + 4b^2}$	**508.** $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

Murdastmed kujutada juurtena:

509. $a^{\frac{3}{4}}$	**512.** $a^{-0,4}$	**515.** $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$
510. $x^{\frac{3}{2}}$	**513.** $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$	**516.** $(27x^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}$
511. $a^{0,4}$	**514.** $x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{4}}$	**517.** $(8a^3 b^3)^{\frac{2}{3}}$

Lihtsustada järgmised awaldused; kui resultaadis esineb murdnäitaja, kirjutada tema ka juurena.

518. $9^{\frac{1}{2}}$	**522.** $\left(a^6\right)^{\frac{1}{2}}$	**526.** $\left(k^{14}\right)^{\frac{2}{7}}$
519. $64^{\frac{1}{3}}$	**523.** $a^{-\frac{2}{3}} \,.\, a^{\frac{1}{3}}$	**527.** $a^{\frac{1}{3}} : \sqrt{a}$
520. $4^{\frac{3}{2}}$	**524.** $a \,.\, a^{-\frac{1}{4}}$	**528.** $\left(p^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$
521. $(-8)^{\frac{1}{3}}$	**525.** $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{4}}$	

Toime saata alal näidatud tehted:

529. $\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$ **531.** $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

530. $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$ **532.** $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Ülal toodud näitused annawad meile ettekujutuse sellest, mis tähtsus on murdnäitajatel matemaatiliste operatsioonide üldistamise suhtes. Weel selgemaks teewad seda matemaatilise analüüsi peatükid, mis siia ei kuulu.

§ 15. Kahe tundmatuga ruutwõrrandite süsteemide aritmeetiline lahendamine.

A. Kui süsteemis on üks wõrrand $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ täieline teise astme wõrrand (wõib wõetud olla ka mitte täieline wõrrand), teine aga $kx + ly + f = 0$ esimese astme wõrrand, on esimese astme wõrrandite süsteemide lahendamisel omandatud teadmistega alati wõimalik ka niisugust süsteemi lahendada, asendades esimese astme wõrrandist ilmutatud ühe tundmatu antud teise astme wõrrandisse.

Lahendada järgmised süsteemid asendamise wiisil:

533. $\begin{cases} 7x + 2y = 29 \\ xy = 12 \end{cases}$ **536.** $\begin{cases} x^2 - xy = 45 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases}$

534. $\begin{cases} 8x - 3y = 11 \\ xy = 28 \end{cases}$ **537.** $\begin{cases} x^2 + xy = 24 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$

535. $\begin{cases} x^2 - xy = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ **538.** $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ (x - 1) : (y - 1) = 2 : 3 \end{cases}$

539. $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29 \\ 2\,(x + 3) + 3\,(y - 2) = 1 \end{cases}$

540. $\begin{cases} \sqrt{x + 1} - \sqrt{y + 1} = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$

541. $\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 6y^2 + x - y + 19 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$

542. $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y - 10 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0. \end{cases}$

Tihti tulewad ette järgmised süsteemid:

1) $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = a \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$

Kõiki neid wõrrandid wõib ülal nimetatud wiisil lahendada, kuid töö kiirustamiseks on soowitaw järgmiselt talitada:

1-ne juhus: $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -10 \end{cases}$; x ja y on wõrrandi $z^2 + 3z - 10 = 0$ juured, kust nad ka leitakse.

2-ne juhus lahendatakse samal wiisil, kui juurteks wõtta x ja $-y$.

3-as juhus: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 65. \end{cases}$ Esimene wõrrand astendakse kahega ja arwatakse teine wõrrand maha; niiwiisi saadakse: $xy = -28$, mis wõrrand ühes wõrrandiga $x + y = 3$ kujutab esimesele juhusele wastawat süsteemi.

Analoogiliselt lahendatakse 4-jas süsteem.

5-es ja 6-es süsteem on lihtsad; kõige pealt esimene wõrrand jagada teisega. —

Lahendada süsteemid:

543. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -24 \end{cases}$ **544.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 28 \end{cases}$

545. $\begin{cases} x + y = 9 \\ (x + 1)(y + 1) = 28 \end{cases}$

546. $\begin{cases} x + y = 8 \\ (x - 6)(y + 2) = 3 \end{cases}$

547. $\begin{cases} x + y = 9 \\ (x - 5)(y + 3) = 0 \end{cases}$

548. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ xy = 4 \end{cases}$

549. $\begin{cases} x + y = 2b \\ xy = b^2 - a^2 \end{cases}$

550. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ xy = 4. \end{cases}$

(Juhatus: teine wôrrand astendada 3-ga ja siis olgu x^3 ja y^3 uued tundmatud).

551. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

552. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases}$

553. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18\frac{1}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$

554. $\begin{cases} x(x-2) + y(y-2) = 11 \\ x + y = 3 \end{cases}$

555. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ x + y = 10 \end{cases}$

556. $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 17 \\ x - y = -11 \end{cases}$

557. $\begin{cases} x(x + a) + y(y + a) = 2a^2 + b^2 - ab \\ x + y = b \end{cases}$

558. $\begin{cases} x + y = 16 \\ x^2 - y^2 = 96 \end{cases}$

559. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

560. $\begin{cases} x - y = 11 \\ x^2 - y^2 = 165 \end{cases}$

561. $\begin{cases} x^2 - (y - 2)^2 = 39 \\ x + y = 5 \end{cases}$

562. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 15 \\ x - y = 15 \end{cases}$

563. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3a^2 \\ x - y = 3a. \end{cases}$

B. a) Kahe täieliku ruutwõrrandi süsteemi lahendamine wiiks meid neljanda astme wõrrandi lahendamisele. Sellepärast meie käsitame siin ainult mõned niisugused süsteemid, mis elementaarsel wiisil saab lahendada.

Kõige pealt paneme tähele järgmised süsteemid:

1) $\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$

1-ne juhus: $\begin{cases} xy = 14 \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$

Teise wõrrandi kahekordse kaswatise arwame esimesele wõrrandile kord juure ja kord temast maha; siis saame:

$(x + y)^2 = 81$ ja

$(x - y)^2 = 25$, kust leitakse: $\begin{cases} x + y = \pm 9 \text{ ja} \\ x - y = \pm 5. \end{cases}$

Antud süsteemi juured leiame järgmistest süsteemidest:

$\begin{cases} x + y = +9 \\ x - y = +5 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -9 \\ x - y = +5 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = +9 \\ x - y = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -9 \\ x - y = -5 \end{cases}$

Need juurte paarid on:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 7 & x_2 = 2 & x_3 = -2 & x_4 = -7 \\ y_1 = 2 & y_2 = 7 & y_3 = -7 & y_4 = -2 \end{array}$$

2-ne juhus: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ xy = 32. \end{cases}$

Kui teine wõrrand on astendatud kahega, on meil süsteem:

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ x^2 y^2 = 1024 \end{cases}$; x^2 ja $-y^2$ on wõrrandi $z^2 - 48z - 1024 = 0$ lahendused, s. t.

$$x^2 = 64$$

$-y^2 = -16$ ja $x_1 = 8$, $y_1 = 4$; $x_2 = -8$; $y_2 = -4$.

3-mas süsteem: kokku ja mahaarwamise läbi leitakse kõige pealt x^2 ja y^2.

b) Eelpool toodud kolm süsteemi on ühtlased (homogeensed) teise astme süsteemid liikmete suhtes, milles **tundmatud** esinewad, s. t. niisugused süsteemid, kus liikmed tundmatuga kuuluwad kõik teise mõõtesse. — Ühtlasi süsteemé (tähendab ka ülal käsitatud kolme süsteemi) wõib lahendada wiisil, mida selgitab järgmine näitus:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 44 \\ y^2 - 5xy = 56. \end{cases}$$

Olgu $y = xt$, kus t on uus abitundmatu. Antud wõrrandid on siis:

$$\begin{cases} x^2(3 + 2t^2) = 44 \\ x^2(t^2 - 5t) = 56. \end{cases}$$

Esimest wõrrandit teisega jagades saame $\frac{3 + 2t^2}{t^2 - 5t} = \frac{11}{14}$ ehk $17t^2 + 55t + 42 = 0$, kust $t_1 = -\frac{21}{17}$ ja $t_2 = -2$.

Kui need wäärtused asendada ühte antud wõrranditest, näit. wõrrandisse $x^2(3 + 2t^2) = 44$, siis saame: $x_1 = \pm \frac{34}{\sqrt{159}}$, $x_2 = \pm 2$; millele wastawad $y_1 = \mp \frac{42}{\sqrt{159}}$ ja $y_2 = \mp 4$.

Lahendada süsteemid:

564. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

565. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$

566. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ xy = 18 \end{cases}$

567. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24 \end{cases}$

568. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8\frac{1}{2} \\ 4xy = -15 \end{cases}$

569. $\begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 = 148 \\ x^2 - xy + y^2 = 109 \end{cases}$

570. $\begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 = 10a^2 \\ xy = 2a^2 \end{cases}$

571. $\begin{cases} x^2 - xy = 3 \\ y^2 + xy = 1\frac{1}{4} \end{cases}$

572. $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{5}{16} \\ xy = \frac{3}{8} \end{cases}$

573. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

574. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 - y^2 = 4^2 \end{cases}$

575. $\begin{cases} 2x^2 + 5y^2 = 53 \\ xy = 6 \end{cases}$

576. $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 5xy + 24 \\ x^2 - 5y^2 = 4xy - 5 \end{cases}$

577. $\begin{cases} 6x^2 + xy = 30 \\ 4xy - y^2 = -39 \end{cases}$

578. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2 \\ \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1 \end{cases}$

579. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 351 \\ y^2 (x + y) = 441 \end{cases}$

580. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 513 \\ x^2(x - y) = 243 \end{cases}$

581. $\begin{cases} (9 - 4x)^2 + (12 - 4y)^2 = 10^2 \\ (9 - 8x)^2 + (12 - 8y)^2 = 5^2. \end{cases}$

(Juhatus: esimese wõrrandi klambriawaldused kaswatada 2-ga.)

Lisa: kahekordse radikaalawalduse $\sqrt{k \pm \sqrt{l}}$ lihtsustamine.

On teada (w. nnr. 178 ja 179),

$$\text{et } (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = a - b$$

$$\text{ja } (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = a - b.$$

$$\text{Sellepärast: } \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\text{wõi } \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ ja}$$

$$\sqrt{a + b - \sqrt{4ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

[Tuleta wiimased 2 wormelit teistwiisi otsemalt: wormelite põhjal $(a + b)^2$ ja $(a - b)^2$ jaoks.]

Kui $a + b$ wõrrata k-ga ja $4ab$ — l-ga, wõime ütelda, et kahekordset juurt $\sqrt{k \pm \sqrt{l}}$ wõib esitada kahe juure summa wõi wahena:

$\sqrt{k \pm \sqrt{l}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, kus a ja b on ruutwõrrandi $z^2 - kz + \frac{l}{4} = 0$ juured (wrdl. ülesandega nr. 322).

Summa wõi wahena esitada järgmised kahekordsed juured:

582. $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ **583.** $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

584. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ **586.** $\sqrt{6+\sqrt{11}}$

585. $\sqrt{19-6\sqrt{10}}$ **587.** $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

§ 16. Ülesanded ruutwõrrandite süsteemide seadmiseks.

588. Kahe arwu ruutude summa, liidetud esimese arwuga, on 137, teise arwuga 139. Leida mõlemad arwud.

589. Kahe arwu kaswatis, liidetud esimese arwuga, on 40, liidetud teisega — 45. Leida need arwud.

590. Kahe arwu produkt (kaswatis), kaswatatud nende arwude summaga, on 120, kaswatatud nende wahega — 30. Mis arwud on need?

591. Leida kaks arwu, mille ruutude summa, jagatud esimese arwuga, annab jagatises 19 ja ülejäägis 1; kui aga jagada ruutude summa teise arwuga, siis on jagatis 8 ja ülejääk 2.

592. Kahe arwu summa ja nende arwude ruutude summa on kokku 188. Arwude wahe ja arwude ruutude wahe on kokku 76. Leida arwud.

593. Kahe arwu ruutude summa on 65. Kui esimene arw oleks 2-e wõrra ja teine 3-e wõrra suurem, oleks ruutude summa 136. Leida arwud.

594. Täisnelinurga diagonaal on 20 m. Kui iga külge 1 m pikendada, kaswab pindala 29 m^2 wõrra. Leida küljed.

595. Täisnelinurga diagonaal on $\sqrt{1586}$ m pikk. Kui iga külg oleks 4 m lühem, oleks diagonaal $\sqrt{1170}$ m. Leida küljed.

596. Täisnelinuga diagonaal on 45 m. Kui wäiksem külg oleks 2 m lühem ja suurem külg 1 m pikem, jääks diagonaal endiseks. Kui pikad on küljed?

597. Üks kolmnurga külg on 26 m pikk, mõlema teise külje summa 46 m ja nurk nende wahel 60^0. Kui pikad on teine ja kolmas külg?

598. Üks kolmnurga külg on 19 m, mõlema teise wahe 11 ja nurk nende wahel 120⁰. Leida mõlemad teised küljed.

599. Kahe arwu summa on 16. Kui ühest arwust 3 ja teisest 4 maha arwata, wõrdub saadud arwude pöördud väärtuste summa 2-he pöördud väärtusega. Mis arwud on need?

600. Kahe ruudulise põranda peale läks laudu 89 m^2. Kui pikk (ehk lai) on iga tuba, kui ühe pikkus (laius) on teise omast 3 m enam?

601. Põllumees müüs wilja 5400 marga eest. Kui tema oleks müünud 3 puuda rohkem ja iga puuda eest wõtnud 10 marka enam, oleks tema saanud 6900 marka. Mitu puuda müüs tema ja kui kallilt iga puud?

602. Perenaine müüs turul mune 450 marga eest. Kui tal oleks olnud 5 muna rohkem ja iga ühe eest oleks wõtnud 50 penni enam, oleks ta saanud 520 marka. Mitu muna oli tal ja kui palju sai tema tüki eest?

603. Wäeosale ulatab leiwatagawara 14 päewaks. Kui oleks olnud 300 sõdurit rohkem, peaks igaüks $\frac{1}{4}$ naela päewas wähem saama, et tagawaraga läbi saada. Kui oleks aga olnud 300 meest wähem, wõiks iga mees $\frac{1}{4}$ naela juure saada ja leiba jätkuks weel 15 päewaks. Mitu meest oli wäeosas ja kui palju leiba sai igaüks päewas?

604. 6 kilomeetrit pika tee peal teeb wankri eelmine ratas 500 tiiru rohkem kui tagumine. Kui iga ratta ümbermõõt oleks 1 m suurem, teeks eelmine ratas sama tee peal ainult 300 tiiru enam. Leida mõlema ratta ümbermõõdud.

605. Osteti kahte sorti nisujahu. Esimese sordi nael oli teise sordi naelast $1\frac{1}{2}$ marka kallim. Kallimat jahu osteti 4 naela wähem kui odawamat. Kogu esimese sordi eest maksti 220, teise eest 287 marka. Mitu naela osteti ja kui palju maksis nael igat sorti?

606. Keegi ostis 15 naela nisujahu ja 25 naela suhkrut, mille eest ta maksis 915 marka. Hinnad suhtuwad nii, et 168 marga eest saab jahu 1 nael rohkem kui suhkrut. Kui palju maksis nael jahu ja kui palju nael suhkrut?

607. Mööda ringjoont, mis 600 m pikk, liiguwad kaks keha *A* ja *B*. Ringkäigu peale läheb *A*-le 6 sekundi enam kui

B-le. Kui kehad ühes sihis liiguwad, saawad nemad kokku iga 120 sekundi pärast. Mitu meetrit liigub igaüks sekundis?

608. Kapital ühes intressidega kaswas aasta jooksul 8320 marka suureks. Kui kapital oleks 600 mk. suurem olnud ja tooks kasu $\frac{1}{2}\%$ rohkem, oleks kapital aasta lõpuks 8987 marga peale kaswanud. Leida see kapital ja protsendi kõrgus.

609. Ühise ettewõtte jaoks andsid *A* ja *B* kokku 60 tuhat marka. Osawõtja *A* kapital oli 10 kuud äris ja *A* sai siis tagasi 39 tuhat mk., kuid *B* 11 kuu pärast 26,2 tuhat mk. Kui palju andis igaüks raha?

Keerulisemad wõrrandid.

610. Kui kahekohaga arwu numbrid ümber asendada, on uus arw esialgsest arwust 9-a wõrra wähem. Mõlema arwu kaswatis on 736. Leida esialgne arw.

(Juhatus: tundmatuteks olgu esialgne ja uus arw.)

611. Leida kahekohaga arw, mille wahekord oma numbrite kaswatisega on 2 ja mille numbrite ümberasendamisel uue arwu wahekord antud arwuga on 7 : 4.

612. Kahekohaga arw, jagatud oma numbrite kaswatisega, annab jagatises 5 ja ülejäägis 2. Kui numbrid ümber asendada ja siis jagada, on jagatis 1 ja ülejääk 12. Mis arw on see?

613. Nimetada kahekohaga arw, mis 4-ja wõrra suurem, kui tema numbrite ruutude summa, ja 8-a wõrra suurem, kui nende kahekordne kaswatis.

914. Kahe arwu summa on 20. Kui üht nendest 3-e wõrra suurendada ja teist 6-e wõrra wähendada, on uute arwude kuupide summa 1853. Mis arwud on need?

615. Leida arwude paar, mille summa on 9 ja mille kuupide summa, jagatud ruutude summaga, on 5,4.

616. Kahe arwu summa kaswatis nende arwude ruutude summaga on 175, wahe kaswatis ruutude wahega on 7. Leida need arwud.

(Juhatus: peale wõrrandite jagamist arwesse wõtta § 15, B, b).

617. Kahe arwu summa on 2060, nende arwude kolmandate juurte summa 20. Mis arwud on need?

(Juhatus: w. ülesanded nr. 500—508 ja olgu $y^{\frac{1}{3}} = tx^{\frac{1}{3}}$.)

618. 60^0-lise nurga külgede peal on punktid A ja B; nende kaugus teineteisest otsejoones on 19 m. Kui A nihkub 13 m nurga tipu poole, on kaugus otsejoones ainult weel 7 m. Kui kaugel tipust on A ja B?

619. Mööda täisnurga külgi liiguwad tipu poole kaks keha A ja B. A kaugus tipust on 22 m, B kaugus 10 m. Kahe sekundi pärast on nende kaugus otsejoonel teineteisest 17 m, 4-ja sekundi pärast 10 m. Kui suure kiirusega liiguwad mõlemad kehad?

(Märkus: w. ülesanne nr. 581.)

§ 17. Teise astme funktsioonide graafiline esitamine.

Paraboolfunktsioonide graafiline esitamine on käsitatud § 10. Siin harutame teisi funktsioone.

I. Ring.

620. a) Esitada graafiliselt funktsioon: $x^2 + y^2 = 16$.

Lahendades wõrrandit y-i suhtes ja wõttes wastawaid x-i ja y-i wäärtuste paare, leiame, et funktsiooni kujutus on koordinaatide alguspunkti ümber joonistatud ring, mille raadius on 4.

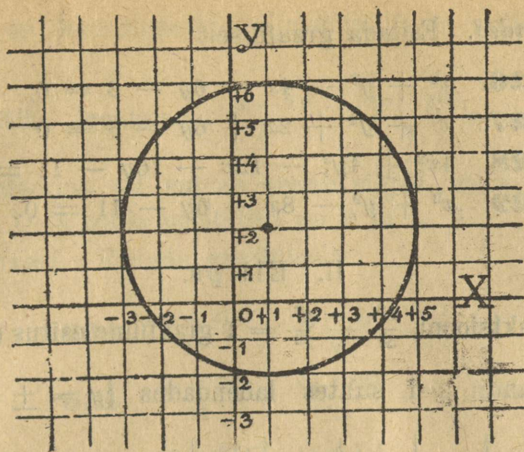
621. Esitada graafiliselt; $x^2 + y^2 = 9$.

Üleüldse: funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ kujutus on koordinaatide alguspunkti ümber raadiusega r joonistatud ring.

b) Funktsiooni $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ kujutus (joon. nr. 6).

Wastaw kõwerjoon on ring, mille tsenter on punktis $(1; 2)$ ja mille raadius 4.

Üleüldse: funktsioon $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ esitab ringi, mille keskpunkti koordinaadid on $x = + p$ ja $y = + q$ ja mille raadius r.



Joon. nr. 6.

Ülesanded. Esitada graafiliselt:

622. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

623. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$

624. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

625. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36.$

c) Eelmised kaks juhust kokku wõttes, wõib ütelda, et funktsiooni tüüp

$$ax^2 + ay^2 + dx + ey + f = 0$$

(x^2 ja y^2 juures on üks ja sama koeffitsient ja liige xy puudub) esitab ringi, sest teda wõib eelnimetatud wõrranditeks taandada.

Näitus. Joonistada: $2x^2 + 2y^2 - 10x - 6y - 1 = 0.$

Seda wõrrandit wõib järgmiselt teisendada:

$$x^2 + y^2 - 5x - 3y - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$x^2 - 5x + \tfrac{25}{4} + y^2 - 3y + \tfrac{9}{4} - 9 = 0$$
$$(x - 2\tfrac{1}{2})^2 + (y - 1\tfrac{1}{2})^2 = 3^2.$$

Funktsioon esitab ringi, mille tsenter on punktis ($2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$) ja mille raadius on 3.

Ülesanded. Esitada graafiliselt:

626. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

627. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$

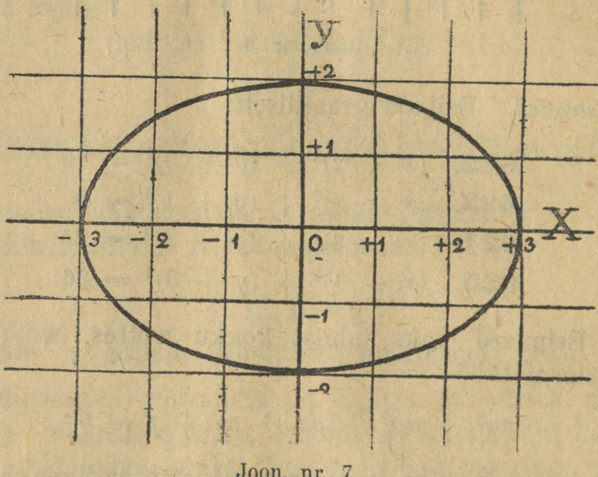
628. $4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 11 = 0$

629. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0.$

II. Ellips.

a) Funktsiooni $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ graafiline esitus (joon. nr. 7).

Võrrandit y-i suhtes lahendades $\left[y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\right]$



Joon. nr. 7.

leiame, et kujutus on ellips, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja mille poolteljed on 3 ja 2.

Harjutused. Joonistada:

630. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

631. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

632. $x^2 + 4y^2 = 16.$

Üleüldse: funktsioon $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ kujutab ellipsi, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja mille poolteljed on m ja n.

b) **633.** Joonistada: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$

Lahendamine y-i suhtes annab ellipsi, mille tsenter on punktis (2 ; 1) ja mille poolteljed on 3 ja 2.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

634. $\frac{(x+4)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

635. $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

636. $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

c) Üleüldse: funktsioon $ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$ esitab ellipsi, kui a ja b eesmärgid on ühesugused, sest teda wõib muuta wõrrandiks $\frac{(x-p)^2}{m^2} + \frac{(y-q)^2}{n^2} = 1.$

Näitus. Mis kõwerjoont esitab wõrrand $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$?

Seda wõrrandit wõib järgmiselt teisendada:

$$16\,(x^2 - 4x) + 25\,(y^2 + 6y) = 111$$
$$16\,(x^2 - 4x + 4) + 25\,(y^2 + 6y + 9) = 111 + 16\,.\,4 + 25\,.\,9$$
$$16\,(x-2)^2 + 25\,(y+3)^2 = 400$$
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Otsitaw kõwerjoon on ellips, mille keskpunkti koordinaadid on $x = 2$ ja $y = -3$ ja mille poolteljed on 5 ja 4.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

637. $9x^2 + 16y^2 + 54x + 64y + 1 = 0$

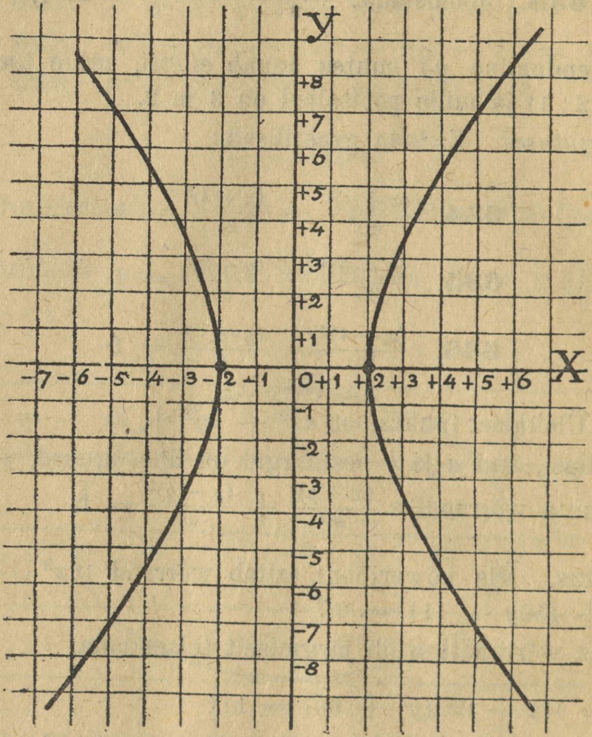
638. $4x^2 + 9y^2 - 40x - 72y + 100 = 0$

639. $9x^2 + 25y^2 + 72x - 50y - 56 = 0$

640. $x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 32 = 0.$

III. Hüperbol.

a) Funktsiooni $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ kujutus (joon. nr. 8).



Joon. nr. 8.

Lahendades wõrrandit y-i suhtes $[y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}]$ leiame kõwerjoone — hüperboli. — Kõwerjoonel on kaks teineteisest eraldatud haru, mis koordinaatide telgede kohta sümmeetrilised. Y-telge kõwerjoon ei lõika, X-telge lõikab ta kahes punktis, mida hüperboli tippudeks nimetakse. Tippusid ühendaw joon on hüperboli telg.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

641. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **643.** $x^2 - y^2 = 9.$

642. $4x^2 - y^2 = 16$

Üleüldse: funktsioon $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ esitab hüperbolit, mis koordinaatide telgede suhtes sümmeetriline ja mille tippude kaugus koordinaatide alguspunktist on m.

b) **644.** Leida funktsiooni $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ kujutus.

Wõrrand kujutab hüperbolit keskpunkti koordinaatidega $x = +3$ ja $y = +1$.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

645. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

646. $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

647. $(x+5)^2 - (y+3)^2 = 9$

Üleüldse: funktsioon $\frac{(x-p)^2}{m^2} - \frac{(y-q)^2}{n^2} = 1$ esitab hüperbolit, mille keskpunkti koordinaadid on $x = +p$ ja $y = +q$ ja mille pooltelg (n. n. reaalpooltelg) on X-teljega paralleelne ja mille suurus m.

c) Funktsioon $ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$ esitab hüperbolit, kui a ja b on wastupidiste märkidega, sest teda wõib teisendada funktsiooniks $\frac{(x-p)^2}{m^2} - \frac{(y-q)^2}{n^2} = 1$.

Näitus. Mis kõwerjoont esitab wõrrand $25x^2 - 9y^2 - 50x - 36y - 236 = 0$?

Lahendus:

$$25(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) = 236$$
$$25(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) = 236 + 25 - 9 \cdot 4$$
$$25(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = 225$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1 \quad \text{Hüperbol!}$$

Harjutused. Esitada graafiliselt:

648. $16x^2 - 9y^2 + 128x - 36y + 76 = 0$

649. $36x^2 - 25y^2 - 216x + 50y - 601 = 0$

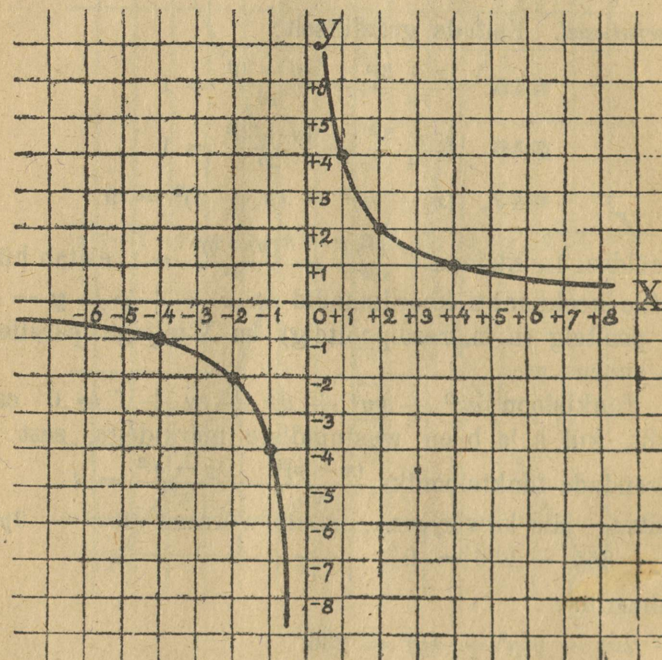
650. $25x^2 - 9y^2 + 100x + 72y - 269 = 0$

651. $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 21 = 0.$

IV. Täisnurkne hüperbol.

a) Kui funktsioonis $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ on nimetajad wõrdsed $(m = n)$, omandab funktsioon kuju $x^2 - y^2 = m^2$; niisugust hüperbolit nimetakse täisnurkseks hüperboliks. — Joonistada see hüperbol, kui $m = 2\sqrt{2}$.

b) Funktsiooni $xy = 4$ graafiline esitus (joon. nr. 9).



Joon. nr. 9.

Kujutus on täisnurkne hüperbol. Analüütiline geomeetria tõestab, et see hüperbol on eelmise täisnurkse hüperboliga $x^2 - y^2 = 8$ identiline (samane). Ainult koordinaatide teljed on eelmise kujutusega wõrreldes 45° wastu päewa pöördud.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

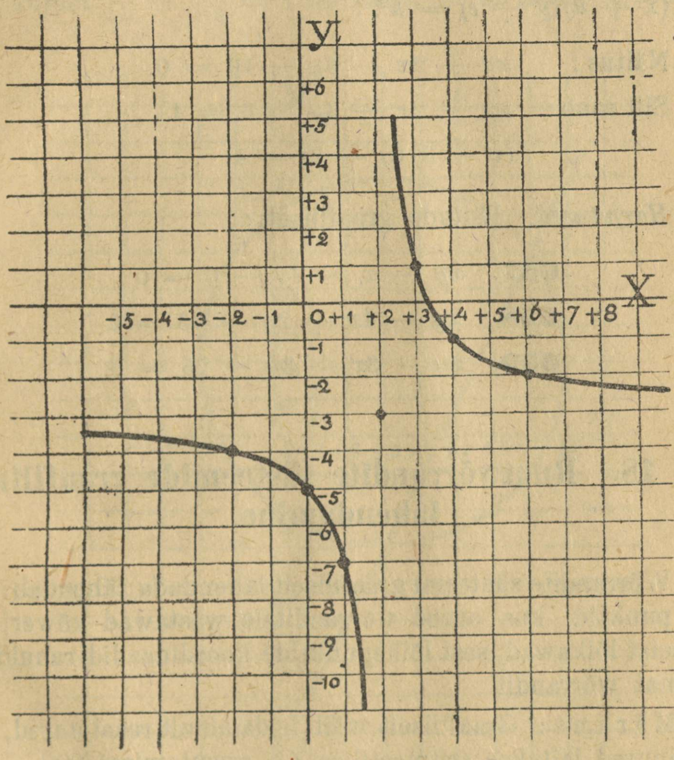
652. $xy = 1$

635. $xy = 9$

654. $4xy = 25$.

Üleüldse: funktsioon $xy = k^2$ esitab täisnurkset hüperbolit. Koordinaatide telgede suhtes on kõwerjoon sümmeetriline, kui seda teljestikku 45^0 wõrra pöörda. Hüperboli pooltelje pikkus on $m = k\sqrt{2}$.

c) Funktsiooni $(x - 2)(y + 3) = 4$ graafiline esitus. (Joon. nr. 10).



Joon. nr. 10.

Kõwerjoon on täisnurkne hüperbol, keskpunkti koordinaatidega $x = +2$ ja $y = -3$. Pooltelje pikkus on $2\sqrt{2}$.

Harjutused. Esitada graafiliselt:

655. $(x + 3)(y + 2) = 9$

656. $(x - 4)(y - 1) = 16$.

Üleüldse: funktsioon $(x + d)(y + e) = k^2$ esitab täisnurkset hüperbolit, mille keskpunkti koordinaadid on $x = - d$ ja $y = - e$ ja mille pooltelg $k\sqrt{2}$.

d) Funktsiooni tüüp

$$xy + dx + ey + f = 0$$

esitab täisnurkset hüperbolit, sest teda wõib taandada wõrrandiks $(x + d)(y + e) = k^2$.

Näitus: $xy + 2x - 3y - 10 = 0.$

Siit saab: $xy + 2x - 3y - 6 = 4$

$(x - 3)(y + 2) = 4.$

Harjutused. Esitada graafiliselt:

657. $xy - x - 3y - 6 = 0$

658. $xy - 4x + 2y - 33 = 0$

659. $xy - 3x + 3y - 25 = 0.$

§ 18. Ruutwõrrandite süsteemide graafiline lahendamine.

Wõrrandite süsteemi graafiliselt lahendada tähendab: leida need punktid, kus antud wõrranditele wastawad kõwerjooned teineteist lõikawad, sest lõikepunktide koordinaadid rahuldawad mõlemat wõrrandit.

Märkus: Graafiliselt wõib leida ainult reaaljuured, kompleksjuured leitakse aritmeetilisel (= arwutamise) teel.

A. Kui süsteemis on üks wõrrand lineaarne, teine ruudune — esitab esimene sirgjoont, teine kõwerjoont.

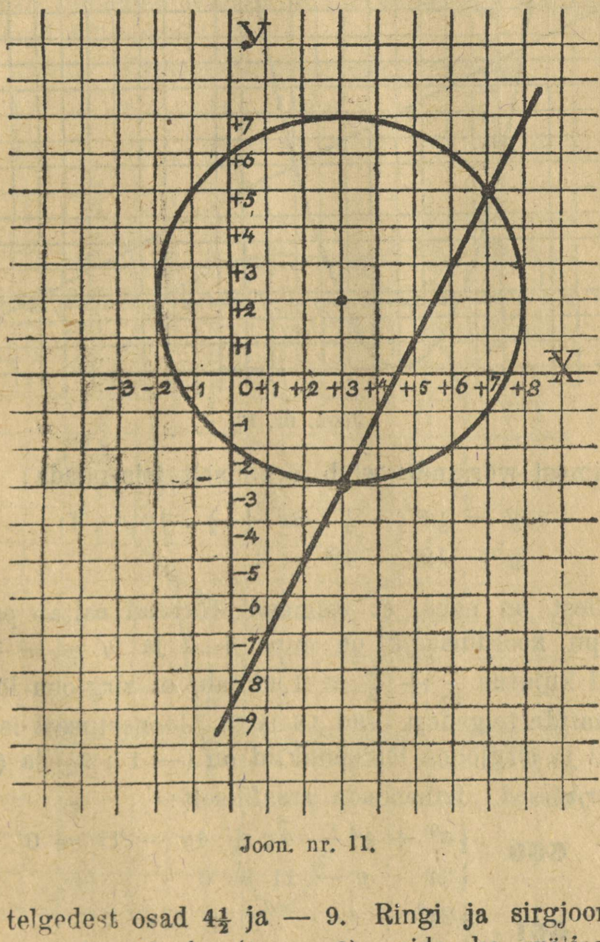
1-ne näitus. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$$ (Joon. nr. 11).

Esimesele wõrrandile wõib järgmise kuju anda:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2,$$

kust on näha, et ta ringi esitab, mille keskpunkti koordinaadid on $x = +3$ ja $y = +2$. Teine wõrrand esitab sirgjoont; tema kujust $\frac{x}{4,5} + \frac{y}{-9} = 1$ on näha, et ta lõikab ära koordi-

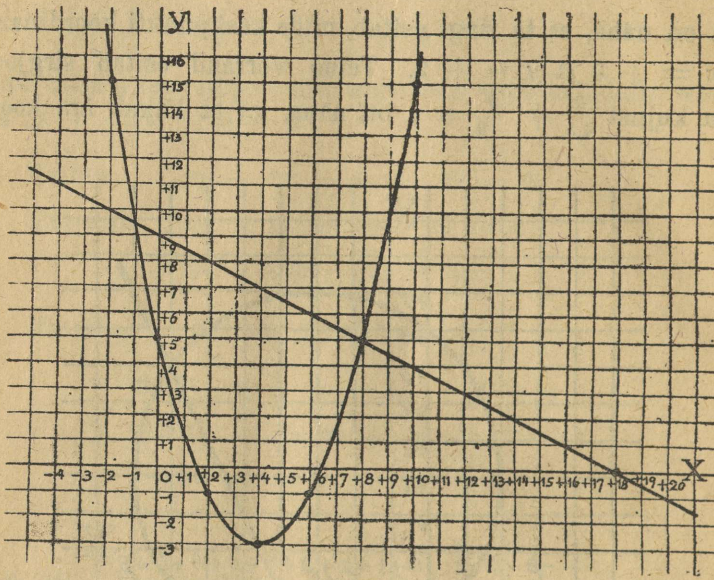


Joon. nr. 11.

naatide telgedest osad $4\frac{1}{2}$ ja — 9. Ringi ja sirgjoone lõikepunktid on (7 ; 5) ja (3 ; — 3), mida ka wäljaarwamine annab.

2-ne näitus. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$\begin{cases} x^2 - x8 - 2y + 10 = 0 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{(Joon. nr. 12).}$$



Joon. nr. 12.

Esimest wõrrandit wõib järgmiselt teisendada:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \,.\, 8x + \tfrac{1}{2} \,.\, 16 - 3$$
$$y = \tfrac{1}{2}(x - 4)^2 - 3.$$

Sellest on näha, et esimene wõrrand esitab paraabolit, mille tipu koordinaadid on $x = +4$ ja $y = -3$. Teise wõrrandi kujutus $\frac{x}{18} + \frac{y}{9} = 1$ näitab, et sirgjoon lõikab ära koordinaatide telgedest osad 18 ja 9. Joonestusest leiame, et paraaboli ja sirgjoone lõikepunktid on $(-1\,;\,9\tfrac{1}{2})$ ja $(8\,;\,5)$.

Harjutused. Lahendada graafiliselt:

660. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 11 = 0 \end{cases}$

661. $\begin{cases} 2x^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

662. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x = y \end{cases}$

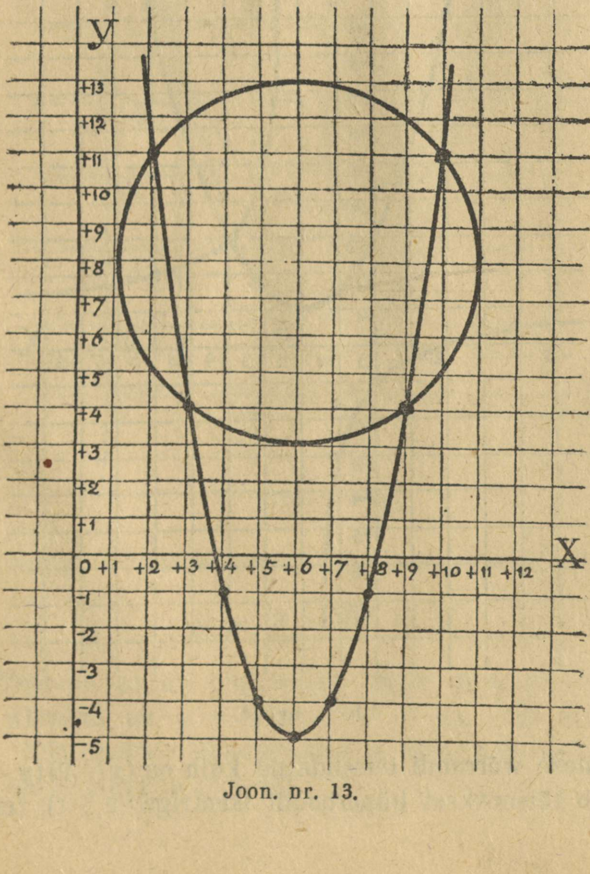
663. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 1 = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$

664. Graafiliselt lahendada ülesanded nr. 544 (Juhatus: $\sqrt{28}$ konstruitakse awalduse $\sqrt{4 \,.\, 7}$ abil), 545, 546, 547 (Märkus: $(x - 5)(y + 3) = 0$ esitab korraga kaks sirgjoont: $x - 5 = 0$ ja $y + 3 = 0$), 551, 554, 556, 559.

B. Kui mõlemad wõrrandid on ruudused, esitawad nemad mõlemad kõwerjooni.

1-ne näitus. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0 \\ x^2 - 12x - y + 31 = 0 \end{cases} \qquad \text{(Joon. nr. 13).}$$



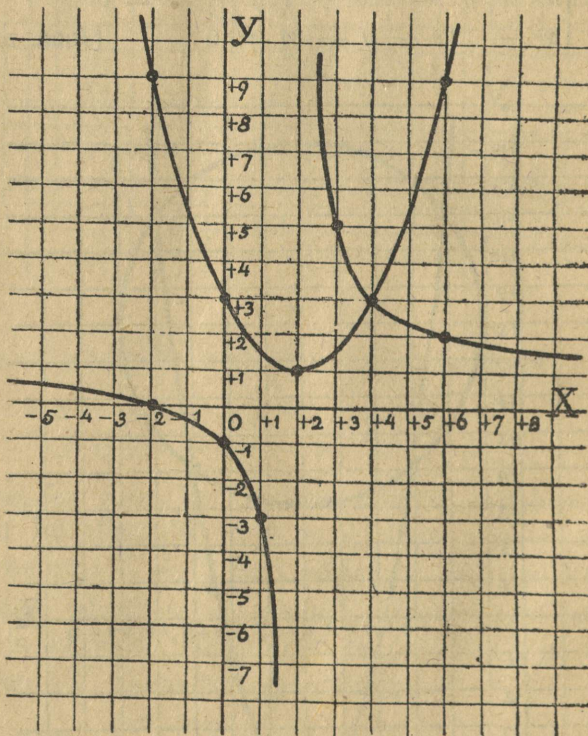
Joon. nr. 13.

Esimesele wõrrandile wõib anda kuju $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 5^2$, kust näha, et wõrrand esitab ringi raadiusega 5 ja keskpunktiga (6 ; 8). Teine wõrrand kujuneb järgmiselt: $y = (x - 6)^2 - 5$; temale wastab paraabol, mille tipp on punktis (6 ; — 5).

Joonistus näitab, et ringi ja paraabooli lõikepunktide koordinaadid on (3 ; 4), (9 ; 4), (2 ; 11) ja (10 ; 11). Need arwude paarid on antud süsteemi lahendused.

2-ne näitus. Graafiliselt lahendada süsteem:

$$\begin{cases} xy - x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 - 4x - 2y + 6 = 0 \quad \text{(Joon. nr. 14).} \end{cases}$$

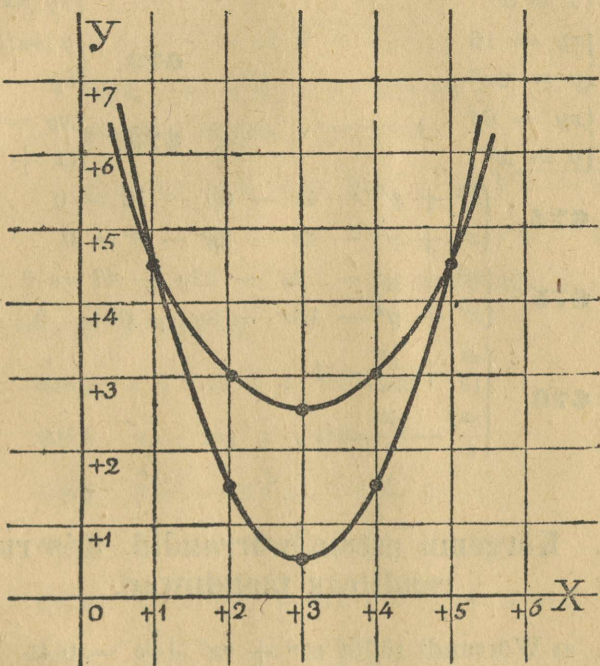


Joon. nr. 14.

Esimese wõrrandi teisendatud kuju on $(x - 2)(y - 1) = 4$, mis esitab täisnurkset hüperboolit tsentriga (2 ; 1); teine wõrrand on $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$... paraabol. Joonistus näitab, et antud süsteemil on ainult üks lahenduste paar $x = 4$ ja $y = 3$.

3-mas näitus. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$\begin{cases} 2x^2 - 12x - 2y + 19 = 0 \\ x^2 - 6x - 2y + 14 = 0 \end{cases} \quad \text{(Joon. nr. 15).}$$



Joon. nr. 15.

Esimest wõrrandit wõib järgmiseks teisendada:

$$y = (x - 3)^2 + \tfrac{1}{2}.$$

Wõrrand esitab paraabolit, mille tipp punktis $(3 ; \frac{1}{2})$. Teine wõrrand on $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2\frac{1}{2}$, mis ka paraabolit esitab. Kõwerjoonte lõikepunktid ja järjelikult süsteemi lahendused on $(1 ; 4\frac{1}{2})$ ja $(5 ; 4\frac{1}{2})$.

Harjutused. Lahendada graafiliselt:

665. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$ **666.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 13 \end{cases}$

667. Graafiliselt lahendada ülesanded nnr. 564, 566, 573 ja 574.

668. $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 13 \\ y = x^2 \end{cases}$ **671.** $\begin{cases} y = x^2 \\ 2y = x^2 + 4 \end{cases}$

669. $\begin{cases} xy = 16 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ **672.** $\begin{cases} y = x^2 \\ 5y - 25 = x^2 \end{cases}$

670. $\begin{cases} xy = 64 \\ y = x^2 \end{cases}$ **673.** $\begin{cases} xy = 4 \\ (x + 5)\, y = 9 \end{cases}$

674. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

675. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 12y + 47 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x - 8y + 67 = 0 \end{cases}$

676. $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

§ 19. Kõrgema astme wõrrandid, mis ruutwõrranditeks taanduwad.

A. a) Wõrrandi tüübi $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (n. n. bikwadraatwõrrandi) lahendamine.

Näitus: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Olgu $x^2 = z$; siis on antud wõrrand $z^2 - 10z + 9 = 0$ ja $z_1 = 1$, $z_2 = 9$ ehk

1) $x^2 = 1$ ja 2) $x^2 = 9$, kust leiame, et $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 3$.

Lahendada bikwadraatwõrrandid:

677. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

678. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

679. $25x^4 - 109x^2 + 36 = 0$

680. $144x^4 - 145x^2 + 36 = 0$

681. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

682. $36x^4 + 25x^2 + 4 = 0.$

b) Samasugusel wiisil lahendatakse ülesanded, kus mõne awalduse uue tundmatuga ära tähendades, saame wõrrandi selle tundmatu suhtes.

Näitus: $\sqrt{x-4} - 6\sqrt[4]{x-4} + 8 = 0$

Olgu $\sqrt[4]{x-4} = z$; siis on $\sqrt{x-4} = z^2$ ja wôrrand esineb järgmisena:

$$z^2 - 6z + 8 = 0, \text{ kust } z_1 = \sqrt[4]{x-4} = 4$$

$$z_2 = \sqrt[4]{x-4} = 2$$

$$\text{ja } x_1 = 260,\ x_2 = 20.$$

Lahendada wôrrandid:

683. $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$

684. $x - 15\sqrt{x} + 56 = 0$

685. $\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 5 = 0$

686. $(\sqrt{x} - 10)(7 - \sqrt{x}) = 2$

687. $3\sqrt{x-1} - 5\sqrt[4]{x-1} + 2 = 0$

688. $(\sqrt[3]{x} - 3)^2 + \sqrt[3]{x} = 3$

689. $2x^2 - 17\sqrt{x^2+11} + 52 = 0$

690. $x^2 - 2x + 6 - 7\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 0$

691. $10\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2 - 11\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + 3 = 0$

692. $\frac{7}{2}\left(\frac{x-a}{x+b}\right) - \left(\frac{x-a}{x+b}\right)^2 = 3$

693. $\frac{x-5}{2x-6} + \frac{2x-6}{x-5} = \frac{10}{3}$

694. $\frac{x+a}{x+b} - \frac{x+b}{x+a} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$

695. $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$

696. $2^{2x} - 257 \cdot 2^{x-3} + 4 = 0$

697. $16\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 65 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 = 0.$

c) Sarnasel wiisil lahendatakse ka wõrrandid, kus kolmandad juured olemas.

Näitus: $\sqrt[3]{36 + x} + \sqrt[3]{36 - x} = 6.$

Peale teise juurawalduse ülewiimist paremale poolele ja astendamist kolmega, saame:

$$(36 - x)^{\frac{2}{3}} - 6(36 - x)^{\frac{1}{3}} + 8 = 0.$$

Siin olgu $(36 - x)^{\frac{1}{3}} = z$; siis on meie wõrrand $z^2 - 6z + 8 = 0$, kust leiame:

$$1) \quad z_1 = (36 - x)^{\frac{1}{3}} = 4 \text{ ja}$$

$$2) \quad z_2 = (36 - x)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

Sellepärast on $36 - x$, kas 4^3 wõi 2^3 ja $x_1 = -28$, $x_2 = +28$.

Lahendada wôrrandid:

698. $\sqrt[3]{112 + x} + \sqrt[3]{112 - x} = 8$

699. $\sqrt[3]{66{,}5 + x} + \sqrt[3]{66{,}5 - x} = 7$

700. $\sqrt[3]{x + 49} - \sqrt[3]{x - 49} = 2.$

d) Järgmised wõrrandid — tüübist $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ — lahendatakse asendamise $x^n = z$ abil.

701. $x^6 - 35x^3 + 216 = 0$

702. $27x^6 - 35x^3 + 8 = 0$

703. $x^{\frac{4}{3}} - 13x^{\frac{2}{3}} + 36 = 0$

704. $x^{\frac{3}{2}} - 28x^{\frac{3}{4}} + 27 = 0.$

B. Järgmiste wõrrandite juured leitakse teguriteks lahutamise abil. — Lahendada wõrrandid:

705. $x^3 - 16x = 0.$

706. $25x^3 - 49x = 0$

707. $4x^3 + 5x = 12x^2$

708. $x^3 - 1 = 0.$ [Järele katsuda, kas leitud kolm arwu rahuldawad wõrrandit, arwesse wõttes § 5; w. seal ka nr. 244 ja 245.]

709. $x^3 + 1 = 0$

710. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

711. $x^3 - 7x^2 + 8x - 56 = 0$

712. $x^3 - a^3 = 0$ [Järelkatsuda!]

713. $x^3 = \frac{5x+6}{6x-5}$

714. $\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)^3 + \sqrt[3]{x^2} + 8 = 6\sqrt[3]{x}$

715. $x^6 - 1 = 0$ [Lahutada kui kuupide wahet]

716. $x^6 + 1 = 0$

717. $x^6 - 64 = 0$

718. $\sqrt[3]{10 + x} + \sqrt[3]{10 - x} = \sqrt[3]{20}$ [Juhatus: astendada 3-ga, siis lahutada! Ära seletada lahutamise wiis!]

C. Graafilised esitused.

I. Funktsiooni $y = x^3$ graafiline esitus („Kubiline paraabol"). (Joon. nr. 16).

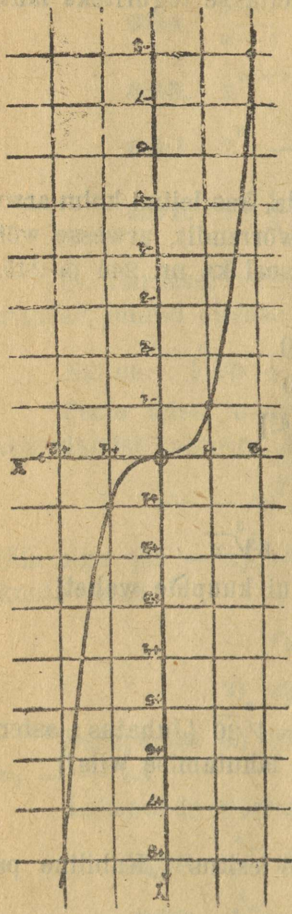
Kõwerjoon asub 1-ses ja 3-das weerandis ja läheb läbi keskpunkti.

719. Graafiliselt esitada järgmised funktsioonid, eelmine esitus appi wõttes:

$$y = 2x^3\ ;\ y = \frac{x^3}{2}\ ;\ y = \frac{x^3}{5}\ .$$

Graafiliselt lahendada süsteemid (graafiliselt on wõimalik leida ainult reaaljuuri):

720. $\begin{cases} y = x^3 \\ y - 3x + 2 = 0 \end{cases}$



Joon. nr. 16.

721. $\begin{cases} y = x^3 \\ y + 6x - 20 = 0 \end{cases}$

722. $\begin{cases} y = x^3 \\ y - 3\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

Kas on wõimalik, et süsteemil mitte üht lahendust ei ole?

Lahendada graafiliselt järgmised kolmanda astme wõrrandid, kuubiline paraabol appi wõttes (wõimalik leida ainult reaaljuured):

723. $x^3 - 2x + 4 = 0$

724. $x^3 - 3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = 0$

725. $4x^3 - 7x - 3 = 0$

II. Esitada graafiliselt funktsioon $y = x^4$ ja tema abil järgmised:

726. $y = \frac{x^4}{2}$; $y = \frac{x^4}{4}$; $y = \frac{x^4}{5}$.

Lahendada järgmised wõrrandid wastawate paraabolite abil:

727. $x^4 - 1 = 0$

728. $x^4 - 16 = 0$

729. $x^4 - \frac{1}{16} = 0$

730. $x^4 - x - 2 = 0$.

Wastused.

„l. w.“ — ligikaudne **wastus.**

§ 1.

15. a^{2m}
16. a^{2m}
30. $\frac{8ax}{9b^4y^2}$
31. 14
32. 28
33. 70
34. 120
35. $2\ (a+b)$
36. $3\ (a-b)$
37. $34a - 33b$
38. $5b - 21a$

§ 2.

39. 18
40. 23
41. 31
42. 38
43. 42
44. 45
45. 48
46. 87
47. 67
48. 83
49. 89
~~**50.** 174~~
~~**51.** 194~~
~~**52.** 293~~
~~**53.** 227~~
~~**54.** 258~~
55. 106
56. 109
57. 204
58. 308
59. 280
60. 2400
61. 2301
62. 6007
63. 1827
66. 0,5
67. 0,9
68. 0,36
69. 0,52
70. 0,14
71. 0,22
72. 1,3
73. 1,9
74. 6 ; $6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{4}$; $6\frac{2}{5}$; 6,4.
75. $7\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{3}$; $7\frac{1}{2}$; $7\frac{2}{5}$; 7,5
76. 9 ; $9\frac{1}{3}$ $9\frac{1}{4}$; $9\frac{2}{5}$; 9,4
77. 5,6 ; 5,65 ; 5,656
78. 7,1 ; 7,14 ; 7,141
~~**79.** 0,52~~
~~**80.** 0,63~~
~~**81.** 1,32~~

82. 1,34
83. 1,96
84. 2,24
85. 0,05
86. 0,0583
87. 0,1783
88. 0,0046
89. 0,0084
90. 1,0035

§ 3.

106. $\frac{a^2 b^2}{2} \sqrt[3]{\frac{a^2}{3}}$
123. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
124. $(a-1)\sqrt{b}$
125. $1{,}4\sqrt{a} + 4{,}6\sqrt{b}$
126. $(2a-7)\sqrt{a} - 7\sqrt{x}$
127. $8\sqrt{3a} - 2\sqrt{a}$
128. $13a\sqrt{5} + 28\sqrt{a}$
129. $41\sqrt[3]{2}$
130. $(2b - a - 1)\sqrt{x}$
131. $(a-6)\sqrt{1+a^2}$
140. $2 - 22\sqrt{6}$
141. $6\sqrt{3} - 21\sqrt{30}$
142. $-4\sqrt{30} - 640$
143. $3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$
144. $11\sqrt{15} - 33$
145. $\sqrt{5} - 1$
146. $34\sqrt{x} - 8 - 21x$
147. $15a^2 + 2b - 13a\sqrt{b}$
148. 5
149. 3
154. $7 - 5\sqrt{2}$
158. $\sqrt{\frac{5}{7}}$
159. 5
160. $2\sqrt[3]{3}$
161. $7 + 2\sqrt{10}$
~~**162.**~~ $8 - 2\sqrt{15}$
163. $7 + 4\sqrt{3}$
164. $57 - 10\sqrt{14}$
165. $a + b - 2\sqrt{ab}$
166. $a^2 + 3b^2 - 2ab\sqrt{3}$
167. $a + \frac{1}{a} + 2$
168. 30
169. 2
170. 4
171. $4ab^2 + a^3 - 4a^2 b$
172. $a^2 b + 9ab^2 - 6ab\sqrt{ab}$
~~**173.**~~ $\cancel{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}$
174. 2
175. 2
176. 2
177. 3
178. $a - b$
179. $a - b$

§ 4.

187. $\sqrt[3]{4}$
188. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}$
189. $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
190. $\frac{5-\sqrt{5}}{5}$
191. $4(\sqrt{7} + \sqrt{5})$
192. $\sqrt{15} + 2\sqrt{3}$
193. $\frac{5-2\sqrt{21}}{2}$
194. $\frac{5}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3}) + \sqrt{2} - 1$

195. $-1-0{,}5\sqrt{6}$

196. $\frac{43+5\sqrt{77}}{4}$

197. $\frac{a+\sqrt{a}}{a-1}$

198. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

199. $\frac{49+a+14\sqrt{a}}{49-a}$

200. $\frac{a^2x-b^2y+(xb-ay)\sqrt{ab}}{a^3-b^3}$

201. $\frac{27+3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}{60}$

202. $2\sqrt{3}$

203. $\frac{75+5\sqrt{3}+18\sqrt{10}}{30}$

204. $1-\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

205. $\sqrt{a^2-b^2}$

208. $11\sqrt{2}-7\sqrt{3}$

209. $6\sqrt{10}-4\sqrt{6}$

210. $6{,}4\sqrt[3]{5}-14{,}5\sqrt[3]{2}$

§ 5.

230. $-2i$

231. 0

232 $\begin{cases} a-b, \text{ kui } b>a \\ b-a, \text{ kui } b<a \end{cases}$

233. $13i$

234. $10i$

235. $9-4i$

236. $4+4i$

237. $17-7i$

238. $24-3i$

239. $13+\sqrt{-7}$

240. $7-24i$

241. $-8+4\sqrt{3}$

242. $-2-2i\sqrt{3}$

243. $4abi$

244. 1

245. 1

246. $1+2i\sqrt{3}$

247. $\frac{21-10i\sqrt{3}}{19}$

248. $\frac{1-2i\sqrt{5}}{3}$

§ 6.

249. 2 ; 4

250. 1 ; 6

251. 4 ; 11

252. 3 ; -5

253. 4 ; -1

254. -6 ; -5

255. $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$

256. $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$

257. $\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$

258. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$

259. 0,2 ; 0,5

260. 2,4 ; $-0{,}5$

261. $1\pm i$

262. $2\pm 3i$

263. a ; $5a$

264. $3a^2$; $-a^2$

265. $a\pm 2b$

266. 1 ; 7

267. 5

268. $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$

269. $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$

270. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$

271. 3 ; $-1\frac{1}{2}$

272. $\frac{3}{4}$; -2

273. 6 ; $-2\frac{1}{2}$

274. $\frac{1}{4}$; $-5\frac{1}{3}$

275. $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{3}$
276. 2 ; $-3\frac{1}{3}$
277. $\frac{1}{2}$; $-5\frac{1}{2}$
278. $\frac{1}{4}$; $-5\frac{1}{2}$
279. $4\frac{3}{4}$; $5\frac{1}{4}$
280. $\frac{-2 \pm \sqrt{5}}{6}$
281. $\frac{-2 \pm i\sqrt{3}}{5}$
282. $\frac{a \pm b}{a}$
283. $-\frac{1}{3}$; -3
284. $5a$; $7a$
285. 4 ; $2\frac{8}{9}$
286. 5 ; $-3\frac{3}{11}$
287. 2 ; $\frac{11}{21}$
288. $-1\frac{1}{3}$; -3
289. 1 ; $\frac{1}{3}$
290. -3 ; $-\frac{1}{6}$
291. 12 ; 6
292. 2 ; $-5\frac{5}{6}$
293. 2 ; 25
294. -3 ; $-3\frac{1}{2}$
295. 4 ; $-\frac{1}{2}$
296. 4 ; $2\frac{8}{11}$
297. $4\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$
298. -2 ; -4
299. $2\frac{1}{2}$; 0,4
300. a ; $-\frac{1}{a}$
301. $\frac{b}{a}$; $-\frac{a}{b}$
302. $\frac{a-b}{a+b}$; $-\frac{a+b}{a-b}$
303. $\frac{7}{16}a$; $-a$

§ 7.

304. 1 ; 3
305. 3 ; 5
306. 4 ; 6
307. -2 ; -5
308. -1 ; -5
309. -2 ; 7
310. -4 ; 3
323. 16 ; 43
324. 16 ; 18
328. $(x-2)(3x-2)$
329. $(3x+1)(4x+1)$
330. $(2x-3)(3x+2)$
331. $(x-a)(x+2a)$
332. $(x+a-b)(x-a-b)$
333. $(3x+a)(5x-a)$

§ 8.

337. ± 23
340. ± 21
341. $\pm \frac{4}{7}$
342. $\pm \frac{3}{4}$
343. ± 2
344. ± 6
345. $\pm 2a$
346. ± 1
347. 0 ; 8
348. 0 ; 1, 2
349. 0 ; 3
350. 0 ; -4
351. 0 ; 8

§ 9.

352. 150
353. 20
354. 325 lk.
355. 30 muna
356. 20 m.
357. 15,6 cm. (l. w.)
358. 17,3 cm. (l. w.)
359. 25,5 cm ; 34 cm.

360. 20 cm ; 48 cm.
361. 195 cm.
362. 23 cm.
363. 20
364. 49 ; 35
365. 3924 mk.
366. 8 min. (l. w.)
367. 3 min. (l. w.)
368. 2 min. (l. w.)
369. 3 wõi 12
370. 15 ; 21
371. 9 ; 17
372. 33 m ; 48 m.
373. 15 m ; 27 m.
374. 16 m ; 22 m.
375. 27 cm ; 36 cm.
376. 20 cm ; 25 cm.
377. 3
378. 26 ; 7
379. 36 ; 27
380. 4 wõi $1\frac{1}{3}$
381. 160 ; 640
382. $^9/_{36}$
383. $\frac{10}{30}$ wõi $\frac{12}{28}$
384. 72
385. 25 wõi 52
386. 7
387. a) 5, b) 9 külge
388. 5 ; 6
389. 8 m.
390. 3 m.
391. 3000 mk.
392. 6%
393. 55 p.; 66 päewa
394. 21 ja 28 tundi
395. 20 ja 18 m.
396. 9
397. 6
398. 33
399. 22 ja 20 mk.
400. 45 ja 40 mk.
401. 10 päewaks
402. 2 ja 3 m.
403. 80 km.
404. 12 ja 15 min.
405. 5 ja 4,5 sek. (l. w.)
406. 8 ; 5 ; 4 ; 12 ; 60
407. 4 ; 8 ; 8 ; 7 ; 3

§ 11.

421. 17
422. 30 ; — 7
423. 25
424. 0 ; $\frac{7}{16}$
425. $^7/_9$
426. 4
427. 5
428. $2a$; b
429. 3 ; 8
430. $\pm$ 14
431. $\pm$ 20
432. 0 ; $^1/_{36}$
433. 11
434. 10
435. 21
436. $a^2 + ab + b^2$
437. $\frac{3}{4}a$
438. $\frac{3a}{2}$
439. $3a$; $-a$
440. 144 ; 256
441. 64 ; 225
442. 6 ; 144
443. 64 ; 225
444. 36
445. $\pm\sqrt{\frac{63}{65}}$

§ 12.

446. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab -$
$- 2ac + 2bc$

447. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

448. $4a^4 - 11a^2b^2 - 4a^3b +$
$+ 6ab^3 + 9b^4$

449. $1 + 3t + t^2 + 2\sqrt{t}(t + 1)$

450. $31 - 10\sqrt{2} - 8\sqrt{5} +$
$+ 8\sqrt{10}$

451. $11 - 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

452. $117 - 60\sqrt{2} - 24\sqrt{3} +$
$+ 30\sqrt{6}$

453. $a^4 + 6a + \frac{1}{a^2} -$
$- 4\sqrt{a}\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$

454. $81a^4 - 108a^2 + 54 -$
$- \frac{12}{a^2} + \frac{1}{a^4}$

455. $1 + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

456. $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

§ 13.

470. $10 . \sqrt[6]{10}$.

475. $a\sqrt[6]{\frac{a}{b^3}}$

476. $\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$

477. $6\sqrt{5} - 9\sqrt[6]{3} - 5\sqrt[4]{45}$

480. $\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$

481. $\sqrt[6]{\frac{1}{a}}$

482. $\sqrt[12]{x}$

483. $\sqrt[6]{a}$

484. $3 - 1{,}5\sqrt[6]{a} + \sqrt[4]{a}$

485. 49

487. $4\sqrt[4]{2}$

488. $5\sqrt[3]{5}$

489. $a\sqrt[5]{a^3}$

490. $a^6b^5\sqrt[3]{a^2b}$

491. $(a^4 + 6a^2)\sqrt{a} +$
$+ (3a^3 + 2a)\sqrt{2a}$

492. $(2a^4 + 3a^2)\sqrt{2a} -$
$- (6a^3 + a)\sqrt{a}$

493. $\sqrt[3]{5}$

494. $\sqrt[3]{5}$

497. $\sqrt[6]{a^5}$

498. $\sqrt[4]{a^3}$

499. $\sqrt[20]{c^9}$

§ 14.

520. 8

529. $a^2 - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b^2$

530. $2 - (ab)^{\frac{1}{3}} - (ab)^{-\frac{1}{3}}$

531. $a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b$

532. $a + b + 3(ab)^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}} -$
$- 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}$

§ 15.

533. $x = 1\frac{1}{7}$; 3 ; $y = 10\frac{1}{2}$; 4

534. $x = 4$; $- 2\frac{5}{8}$;
$y = 7$; $- 10\frac{2}{3}$

535. $x = 5$; $- 1{,}5$; $y = 2$; $8{,}5$

536. $x = 9; -2; y = 4; 20\frac{1}{2}$
537. $x = 4; -3\frac{3}{4}; y = 2; -2{,}65$
538. $x = 5; 1; y = 7; 1$
539. $x = -4; 4\frac{10}{13}; y = 3; -2\frac{11}{13}$
540. $x = 8; y = 3.$
541. $x = 3; 28; y = 4; -8\frac{1}{2}$
542. $x = 2; -2; y = 2; -1$
543. $6; -4$
544. $x = 7; -4; y = 4; -7$
545. $3; 6$
546. $x = 7; 9; y = \pm 1$
547. $x = 5; 12; y = 4; -3$
548. $x = 4; y = 1.$
549. $b + a; b - a.$
550. $1; 4.$
551. $2; 5$
552. $x = 8; -3; y = 3; -8$
553. $x = 3\frac{1}{2}; -2\frac{1}{2}; y = 2\frac{1}{2}; -3\frac{1}{2}$
554. $4; -1$
555. $x = 9; y = 1$
556. $x = -4; -7; y = 7; 4$
557. $a; b - a$
558. $x = 11; y = 5$
559. $x = 5; y = 3$
560. $x = 13; y = 2$
561. $x = 8; y = -3$
562. $x = 64; y = 49$
563. $x = a; y = -2a$
564. $\pm 2; \pm 3$
565. $\pm 5; \pm 6$
566. $\pm 3; \pm 6$
567. $x = \pm 8; y = \pm 8$
568. $\pm 2\frac{1}{2}; \mp 1\frac{1}{2}$
569. $\pm 5; \mp 7$
570. $\pm 2a; \pm a$
571. $x = \pm 2; \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}; y = \pm \frac{1}{2}; \mp \frac{15}{6\sqrt{2}}$
572. $x = \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{1}{2}i; y = \pm \frac{1}{2}; \mp \frac{3}{4}i$
573. $x = \pm 5; y = \pm 2\sqrt{6}$
574. $x = \pm\sqrt{20{,}5}; y = \pm\sqrt{4{,}5}$
575. $x = \pm 2; \pm 1{,}5\sqrt{10}; y = \pm 3; \pm 0{,}4\sqrt{10}$
576. $x = \pm 4; y = \pm 1$
577. $x = \pm \frac{2\sqrt{15}}{5}; \pm 2\frac{1}{2}; y = \pm \frac{13}{5}\sqrt{15}; \mp 3$
578. $x = \pm 5; y = \pm 12$
579. $x = 2; y = 7$
580. $x = 9; \frac{9}{2}; y = 6; -7\frac{1}{2}$
581. $x = \frac{3}{4}; y = 1$
582. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
583. $\sqrt{7} - \sqrt{2}$
584. $2 + \sqrt{3}$
585. $\sqrt{10} - 3$
586. $\frac{1}{2}(\sqrt{22} + \sqrt{2})$
587. $\frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{2})$

§ 16.

588. 7 ; 9
589. 4 ; 9
590. 5 ; 3
591. 3 ; 7
592. 11 ; 7
593. 4 ja 7 wõi $4\frac{12}{13}$ ja $6\frac{5}{13}$
594. 12 m. ; 16 m.
595. 25 ja 31 m.
596. 21,1 ja 39,7 m.

597. 16 m ; 30 m.
598. 5 m ; 16 m.
599. 9 ja 7 wõi 6 ja 10
600. 5 ja 8 m.
601. 12 puuda à 450 mk.
602. 75 muna à 6 mk.
603. 1500 sõdurit ; $1\frac{1}{2}$ ℔ päe-was
604. 3 ja 4 m.
605. 14 ℔ à $20\frac{1}{2}$ mk. ja 10 ℔ à 22 mk.
606. 21 ja 24 mk.
607. 20 ja 25 m.
608. 8000 mk. ; 4%
609. 36 tuhat ja 24 tuhat mk.
610. 32
611. 36
612. 82
613. 24
614. 9 ja 11 wõi 2 ja 18
615. 3 ; 6
616. 3 ; 4
617. 729 ; 1331
618. 21 ja 5 m.
619. $3\frac{1}{2}$ ja 1 m.

§ 18.

660. (6 ; 1), (2 ; — 7)
661. (— 3,5 ; $6\frac{3}{4}$), (1 ; 4,5)
662. $\pm$ 1,7 (l. w.)
663. (7,3 ; 6,3) , (0,7 ; — 0,3) [l. w.]
665. ($\pm$ 3 ; 4), (0 ; — 5)
666. ($\pm$ 3 ; — 4), ($\pm$ 4 ; 3)
668. ($\pm$ 2 ; 4)
669. (2 ; 8)
670. (4 ; 16)
671. ($\pm$ 2 ; 4)
672. ($\pm$ 2,5 ; $6\frac{1}{4}$)
673. (4 ; 1)
674. (— 1 ; — 1), (5 ; — 1)
675. (6 ; 1) , (11 ; 6)
676. ($\pm$ 3,2 ; 3,7) , ($\pm$ 3,2 ; —3,7) [l. w.]

§ 19.

677. $\pm 2 ; \pm 5$
678. $\pm 3 ; \pm 4$
679. $\pm \frac{3}{5} ; \pm 2$
680. $\pm \frac{2}{3} ; \pm \frac{3}{4}$
681. $\pm 2i ; \pm 3i$
682. $\pm \frac{1}{2}i ; \pm \frac{2}{3}i$
683. 9 ; 25
684. 49 ; 64
685. 1 ; 125
686. 64 ; 81
687. $1\frac{16}{81}$; 2
688. 8 ; 27
689. $\pm 5 ; \frac{i}{2}\sqrt{19}$
690 $5 ; -3 ; 1 \pm \sqrt{23}$
691. $\frac{a}{4} ; \frac{a}{3}$
692. $-a - 2b ; -2a - 3b$
693. 2, 6 ; 9
694. $-(a+b) ; -\frac{2ab}{a+b}$
695. 2 ; — 1
696. 5 ; — 3
697. 4 ; — 2
698. $\pm$ 104
699. $\pm 58\frac{1}{2}$
700. $\pm$ 76
701. $2 ; 3 ; -1 \pm i\sqrt{3} ; \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

702. $1 ; \frac{2}{3} ; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{3}$

703. $\pm 8 ; \pm 27$

704. $1 ; 81 ; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} ;$

$\frac{81}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

705. $0 ; \pm 4$

706. $0 ; \pm 1{,}4$

707. $0 ; 2\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}$

708. $+1 ; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

709. $-1 ; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

710. $\pm 2 ; 3$

711. $7 ; \pm 2i\sqrt{2}$

712. $a ; \frac{a}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

713. $-\frac{2}{3} ; 1\frac{1}{2} ; \pm i$

714. $0 ; 8 ; 27$

715. $\pm 1 ; \pm \sqrt{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$

716. $\pm i ; \pm \sqrt{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$

717. $\pm 2 ; \pm \sqrt{2(-1 \pm i\sqrt{3})}$

718. ± 10

720. $x = 1 ; -2$

721. $x = +2$

722. $x = \frac{1}{2} ; 2\frac{1}{2} ; -2$

723. -2

724. $-1\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; +2$

725. $-1 ; -\frac{1}{2} ; +1\frac{1}{2}$

730. $-1 ; 1{,}4$ (l. w.)

2650.