K. RATASSEPP

ALGEBRA

KESKKOOLI X KLASSILE

RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

K. RATASSEPP

ALGEBRA

KESKKOOLI X KLASSILE

2., TÄIENDATUD TRÜKK

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN 1947

Peatükk I.

Arvutamine ligikaudsete arvudega.

§ 1. Täpsed ja ligikaudsed arvud.

Kõiki toiminguid, millede tulemuseks on arv, võib jaotada kolme suurde liiki: loendamine, mõõtmine ja arvutamine.

Õigesti teostatud loendamise tulemuseks on alati täpne arv ja mõõtmise tulemuseks on alati ligikaudne arv. Arvutamine aga võib anda tulemusena täpse või ligikaudse arvu, vastavalt sellele, kas arvutamisel kasutatud andmetest kõik on täpsed arvud või mõni neist on ligikaudne.

Kui näiteks 7 töölisele palgapäeval makstakse à 81,50 rbl., siis arvutades palga kogusumma saame täpse arvu

$$7 \cdot 81{,}50 = 570{,}50 \text{ rbl.},$$

sest mõlemad andmed 7 ja 81,50, kui loendamise tulemused, on täpsed arvud.

Kui on veetud 15 autokoormat liiva à 2,5 m^3, siis arvutades veetud liiva koguse saame ligikaudse arvu

$$15 \cdot 2{,}5 = 37{,}5 \text{ m}^3,$$

sest üks andmetest 2,5, kui mõõtmise tulemus, on ligikaudne.

Kui 48 m köit kaalub 40,8 kg, siis arvutades 1 m köie kaalu saame ligikaudse arvu

$$40{,}8 : 48 = 0{,}85 \text{ kg},$$

sest mõlemad andmed 48 ja 40,8, kui mõõtmise tulemused, on ligikaudsed.

Täpsete arvude j a g a t i s t, kuigi see on alati täpne arv, pole sagedasti võimalik kümnendsüsteemis täpselt üles tähendada, nagu näiteks arvude 1 ja 3 jagatist. Sagedasti pole ka täpse arvu j u u r t mitte ainult kümnendsüsteemis, vaid ka üldse võimalik täpselt üles tähendada, kuigi ka see on täpne arv. Säärastel juhtudel lepitakse sellega, et arvutatakse ainult tulemuse kõrgemat järku numbrid. Seega ollakse sunnitud paljudel juhtudel ka täpseid arvutustulemusi väljendama ligikaudselt, s. o. andma arvutustulemuse asemel tema ligikaudne väärtus.

Loendamise, mõõtmise või arvutamise tulemused sisaldavad sagedasti niivõrd palju numbreid, et saadud kujul on neid tülikas andmetena kasutada. Nii on näiteks tülikas meeles pidada ja kasutada arvutamiseks, et ekvaatori raadius on 6378,79 km või et ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on 3,14159265. Arvutamise ning meelespidamise hõlbustamiseks nii ligikaudsed kui ka täpsed arvud sagedasti asendatakse nendest ü m a r d a m i s e teel saadud lihtsamate arvudega, s. o. jällegi arvudega, milledes on üles tähendatud ainult nende arvude kõrgemat järku numbrid. Kõik niiviisi saadud arvud on ligikaudsed.

Mingi arvu ja selle arvu ligikaudse väärtuse vahet nimetatakse ligikaudse väärtuse a b s o l u u t s e k s v e a k s. Nii on näiteks täpse arvu 3,2564 ümardatud väärtuse 3,26 absoluutne viga

$$3{,}2564 - 3{,}26 = -0{,}0036.$$

Enamasti ei ole teada ligikaudse arvu absoluutse vea märk ega ta absoluutväärtus, sest pole teada selle arvu täpsem väärtus; küll on aga ikka võimalik näidata arvu, mida vea absoluutväärtus ei ületa. Seda arvu nimetatakse ligikaudse arvu absoluutse vea *ülemmääraks*. Nii võime näiteks arvutamise teel leida, et $\sqrt{2}$ ligikaudne väärtus on 1,41 veaga mitte üle 0,005; on leitud, et mõõtes massi ühikuga 10^{-28} g, elektroni massi mõõtarv on 9,035 veaga mitte üle 0,01.

On tavaks ligikaudseid arve, kui võimalik, esitada nii, et absoluutne viga ei ületa ligikaudse arvu viimase järgu $\frac{1}{2}$ ühikut.

Ümardamisel on see alati võimalik, sest on teada arvu täpsem väärtus. Et ümardada arvu veaga mitte üle ümardatud arvu viimase järgu $\frac{1}{2}$ ühiku, selleks tuleb arvu kõrgemates järkudes säilitada samad numbrid, mis on täpsemal arvul samades järkudes, ja juhul, kui esimene ärajäetav number on 5 või enam, suurendada viimast säilitatavat numbrit 1 võrra. Nii oli ümardatud ülal arv 3,2564 veaga, mis ei ületa arvu 3,26 viimase järgu, s. o. sajandike 0,5 ühikut.

Kui ligikaudne arv on esitatud veaga mitte üle ta viimase järgu $\frac{1}{2}$ ühiku, siis öeldakse, et kõik numbrid on *õiged*.

Kui ligikaudse arvu viga võib küündida tema viimase järgu 1 kuni 5 ühikuni, s. o. kui ta numbrid on õiged peale viimase, mis võib erineda õigest 1 kuni 5 ühikut, siis ütleme, et ta viimane number on ainult *arvatav*.

Kui ligikaudsel arvul viimane number on arvatav, siis on seda soovitatav näidata ka kirjas ja nimelt sel teel, et arvatav number kirjutatakse väiksema kirjaga. Kui arvu 12,64 viimane number on arvatav, siis kirjutame 12,64. Väikese kirjaga on soovitav kirjutada ka need nullid, mis ligikaudse arvu kirjutises asendavad täpse arvu üheliste, kümneliste jne. järkude numbreid. Nii näiteks ümardades ekvaatori raadiuse pikkuse veaga mitte üle 50 km, tuleb raadiuse täpse väärtuse 6378,79 km asemel kirjutada 64oo km.

Matemaatilistes ja paljudes muudes tabelites antakse arvude ligikaudsed väärtused eranditult õigete numbritega. Igapäevases elus, majanduses ja tehnikas lepitakse tavaliselt mõõtmis- ja arvutamistulemustega, millede viimane number võib olla ka arvatav.

§ 2. Ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine.

Arvutamisel ligikaudsete arvudega tuleb alati arvestada asjaolu, et iga ligikaudne arv annab ainult mõned numbrid mingist täpsemast arvust, jättes näitamata, mis numbrid on ses täpsemas arvus ligikaudse arvu viimasest järgust madalamates järkudes. Seoses sellega tuleb arvutamisel ligikaudsete arvudega pidada silmas järgmist endastmõistetavat tõsiasja:

kui ühe liidetava (või lahutatava) väärtus on teadmata, siis jääb teadmatuks ka kogu summa (või vahe) väärtus,

ning järgmist endastmõistetavat nõuet:

arvutustulemuses kirjutada välja ainult need numbrid, mis on saadud t u n t u d arvude liitmisest või lahutamisest.

N ä i d e 1. Arvutame ligikaudsete arvude 2,536 ja 3,2 summa.

Kui antud arvud oleksid täpsed, siis võiksime teise neist esitada ka kujul 3,200 ja liites selle arvu esimesega saaksime arvu 5,736, milles on õiged kõigi järkude numbrid.

Kuid et antud arvud on ligikaudsed, siis pole teada, mitu sajandikku ja tuhandikku on teises liidetavas. Seetõttu jääb teadmatuks ka sajandike ja tuhandike arv summas ja anda summa samal kujul, nagu ülal oli saadud, on mõttetu. Nende ligikaudsete arvude summas tuleb näidata ainult üheliste ja kümnendike kohtadel seisvad numbrid, nagu on tehtud kõrvalolevas arvutuses.

$$\begin{array}{r} 2{,}536 \\ +3{,}2 \\ \hline 5{,}7 \end{array}$$

N ä i d e 2. Arvutame ligikaudsete arvude 162o ja 7,8 vahe.

Et vähendatavas on juba üheliste arv teadmata, siis jääb see ka vahes teadmatuks ja on mõttetu kirjutada selles vahes numbreid üheliste ja kümnendike kohtadel. Seepärast ümardame lahutatava arvuks 1o ja lahutame s e l l e arvu vähendatavast. Siis saame tulemuse 161o.

$$\begin{array}{r} 162\text{o} \\ -\ \ 7{,}8 \\ \hline 161\text{o} \end{array}$$

Seega saame ligikaudsete arvude liitmiseks ja lahutamiseks järgmise juhise:

Ligikaudsete arvude summat ja vahet tuleb arvutada ainult selle j ä r g u n i, milles k õ i g i l andmeil on veel õigeid numbreid.

Kui on vaja liita suurem hulk eri järkudes lõppevate numbritega arve, siis on kasulik kõik arvesse võtmata jäävad numbrid eraldada teistest püstjoonega.

$$\begin{array}{rl} 352{,}8 & |61 \\ 0{,}2 & |563 \\ +\ \ 8{,}1 & | \\ 67{,}3 & |6 \\ \hline 428{,}6 & \end{array}$$

N ä i d e 3. Arvutame kõrvalolevate ligikaudsete arvude summa.

Et liidetava 8,1 numbrid lõpevad kõrgemas järgus kui kõigil teistel liidetavatel, siis asetame püstjoone selle arvu viimase numbri järele ja arvutame ainult selle joone ette jäävate arvude summa.

Et vältida ümardamisvigade kuhjumist, arvutame siiski ka püstjoone taga seisvate e s i m e s t e numbrite summa ja ümardanud selle järgmise kõrgema järgu ühikuisse, liidame ta joone ees seisvate arvudega.

Nii saame selles näites joone taga seisvate esimeste kohtade summana 17 (sajandikku). Ümardanud selle 2-ks (kümnendikuks), liidame ta joone ees seisvate kohtadega.

Nii leiame, et antud arvude summa on 428,6.

Ülesanne.

1. Arvutada järgmised summad ja vahed:

Täpsed arvud on trükitud jämeda kirjaga.

1.
3,46 + 0,678
3,46 — 0,678
502o + 42,3
5020 + 42,3
0,05 — 0,002

2.
1320ooo + 6542o + 7535
2,000 + 13,85 + 0,047 — 0,361
2 + 13,85 + 0,047 — 0,361
43o — 58,4 — 21,0
17,08 — 6,6 — **5**

3.
0,005427
0,02536
+ 0,7222
3,831

4.
0,6548
4,506
+ 24,11
807,2

5.
15,63 + **6**
5,64 + **0,072**
10 — 0,84
73oo + **129**
94,2 — 2,95

6.
54oo + 32o + **7243**
124,83 — **12,5** — 31,6
15,5 — 1,55 — 0,155
253 + **37,22** — 0,895
343 + **125** + 15oo

§ 3. Relatiivne viga ja õigete tüvenumbrite arv.

Ühe ja sama arvu ligikaudsetest väärtustest on see täpsem, mille absoluutne viga on väiksem. Nii on näiteks arvu π ligikaudsetest väärtustest 3,14 ja 3,1416 teine täpsem kui esimene, sest teise ligikaudse väärtuse absoluutne viga ei ületa 0,5 kümnetuhandikku, esimese väärtuse absoluutne viga on aga ligikaudu $3{,}1416 - 3{,}14 = 0{,}0016$, s. o. 1,6 tuhandikku. Siit on ilmne ka, et ühe ja sama arvu see ligikaudne väärtus on täpsem, millel on rohkem õigeid numbreid.

K a h e arvu ligikaudsete väärtuste täpsust ei saa aga hinnata ainult nende absoluutsete vigade järgi. On ilmne, et kui kaks kaugust näiteks 2102 km ja 21 km on mõõdetud ühe ja sama absoluutse veaga 0,5 km, siis ei saa öelda, et nad on mõõdetud ühteviisi täpselt, vaid esimese kauguse mõõtmist tuleb hinnata palju täpsemaks kui teise kauguse mõõtmist.

Kahe arvu täpsuse võrdlemiseks on kohane kasutada kummagi arvu absoluutse vea ja arvu enda suhet.

Ligikaudse arvu absoluutse vea ja selle arvu suhet nimetatakse ligikaudse arvu r e l a t i i v s e k s v e a k s. Relatiivne viga väljendatakse tavaliselt protsentides või promillides.

Eelmises näites toodud kauguste relatiivsed vead on vastavalt:

$$\frac{0{,}5}{2102} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\% = 0{,}25‰$$

ja

$$\frac{0{,}5}{21} \approx 0{,}025 = 2{,}5\% = 25‰.$$

Seega on esimese mõõtmistulemuse relatiivne viga 100 korda väiksem kui teise oma. Selle järgi hinnatakse esimest mõõtmistulemust 100 korda täpsemaks kui teist.

Tõestame teoreemi:

Ligikaudse arvu ja täpse arvu korrutise (ja jagatise) relatiivne viga on võrdne ligikaudse arvu relatiivse veaga.

Olgu täpse arvu A ligikaudne väärtus a. Siis arvu a absoluutne viga on $A - a$ ja ta relatiivne viga on

$$\frac{A-a}{a}.$$

Kui korrutame ligikaudse arvu a mingi täpse arvuga n, siis korrutis na on täpse arvu nA ligikaudne väärtus. Seega on korrutise absoluutne viga $nA - na$ ehk $n(A - a)$ ja ta relatiivne viga on

$$\frac{n(A-a)}{na} = \frac{A-a}{a}.$$

Seega arvu na relatiivne viga võrdub arvu a relatiivse veaga.

Samal viisil võib tõestada, et ligikaudse arvu a ja täpse arvu jagatise relatiivne viga võrdub arvu a relatiivse veaga.

Nii on näiteks arvude π, 1000π ja $\frac{\pi}{100}$ ligikaudsetel väärtustel 3,14, 314o ja 0,0314 üks ja sama relatiivne viga

$$\frac{\pi - 3{,}14}{3{,}14} \approx \frac{3{,}1416 - 3{,}14}{3{,}14} = \frac{0{,}0016}{3{,}14} \approx 0{,}0005 = 0{,}5‰.$$

Samuti on samade täpsete arvude ligikaudsetel väärtustel 3,1, 31oo ja 0,031 üks ja sama relatiivne viga

$$\frac{\pi - 3{,}1}{3{,}1} \approx \frac{0{,}0416}{3{,}1} \approx 0{,}013 = 13‰.$$

Arvkuju, mis jääb muutmatuks antud arvu korrutamisel (ja jagamisel) järkarvudega (10, 100, . . ., 0,1, 0,01, . . .), nimetame antud arvu tüveks ja numbreid, milledega on kirjutatud arvu tüvi, nimetame selle arvu **tüvenumbriteks**.

Nii on näiteks ligikaudse arvu 3,14 tüveks arvkuju 314, sest korrutades arvu 3,14 järkarvudega, saame arvud 31,4, 314, 314o, . . ., 0,314, 0,0314, . . ., milledes kõigis muutmatult esineb arvkuju 314.

Seega arvu tüvi on ta avanullidele järgnev ja arvatavatele lõppnullidele eelnev arvkuju.

Ülaltoodud kuuest arvust, millede relatiivsed vead me arvutasime, on arvudel 3,14, 314o ja 0,0314 peale ühise relatiivse vea 0,5‰ veel ühine see, et nad kõik on esitatud **kolme** tüvenumbriga, ning arvudel 3,1, 31oo ja 0,031 on peale ühise relatiivse vea 13‰ veel ühine see, et nad kõik on esitatud **kahe** tüvenumbriga.

Et ligikaudse arvu ja järkarvu korrutisel on sama tüvi ja sama relatiivne viga, mis ligikaudsel teguril, siis järeldub, et ühtede ja samade õigete tüvenumbritega arvudel on üks ja sama relatiivse vea ülemmäär. Õigete tüvenumbrite arvu muutudes aga muutub ka relatiivse vea ülemmäär: mida suurem on ligikaudse arvu õigete tüvenumbrite arv, seda väiksem on ta relatiivse vea ülemmäär. Nii on kahe õige tüvenumbriga arvu 51oo relatiivse vea ülemmäär

$$\frac{50}{51oo} \approx 10‰$$

ja kolme õige tüvenumbriga arvu 510o relatiivse vea ülemmäär on

$$\frac{5}{510o} \approx 1‰.$$

Kuid ka muutmatu õigete tüvenumbrite arvuga tüve enda muutudes, muutub teatavates piirides ka relatiivse vea ülemmäär, nagu nähtub allolevast tabelist.

Õigete tüvenumbrite arv	Tüvi	Relatiivse vea ülemmäär
1	1 . . . 9	500⁰/oo . . . 56⁰/oo
2	10 . . . 99	50⁰/oo . . . 5⁰/oo
3	100 . . . 999	5⁰/oo . . . 0,5⁰/oo
5	1000 . . . 9999	0,5⁰/oo . . . 0,05⁰/oo

Sellest tabelist nähtub näiteks, et 3 õige tüvenumbriga arvude relatiivse vea ülemmäär kõigub 0,5‰-st 5‰-ni. See on praktilise elu tarvete seisukohalt juba niivõrd väike viga, et praktikas enamasti kasutataksegi 3 tüvenumbriga, harva 4 tüvenumbriga arve. Suuremat tüvenumbrite arvu kasutatakse ainult matemaatikas, füüsikas ja muudes täppisteadustes esinevate tähtsate suuruste väljendamiseks.

Ühtlasi on kolme või enama tüvenumbriga arvude relatiivse vea kõikumised niivõrd tähtsusetud, et võib öelda, et

praktiliselt on ühe ja sama õigete tüvenumbrite arvuga (kolm või enam) ligikaudsetel arvudel üks ja sama relatiivse vea ülemmäär.

Nii võib kolme õige tüvenumbriga arvude relatiivse vea ülemmäära hinnata 1‰ suurusena.

Valdaval enamikul juhtudel on õige ka ümberpöördud väide:

ühe ja sama relatiivse veaga arvudel on ühepalju õigeid tüvenumbreid.

Nii olgu näiteks vaja arvud 25679 ja 0,8424 ümardada nii, et kummagi arvu relatiivne viga oleks 1‰ ümber. Siis esimese arvu absoluutne viga võib olla umbes 26, s. o. selle arvu tüve kolmanda järgu 0,26 ühikut, ja teise arvu absoluutne viga võib olla umbes 0,00084, s. o. teise arvu tüve kolmanda järgu 0,84 ühikut. Seega mõlemad arvud tuleb ümardada tüve kolmanda järguni, s. o. esitada nad mõlemad kolme tüvenumbriga: 257oo ja 0,842.

Tavaliselt iseloomustatakse ligikaudseid arvusid nende tüvenumbrite järgi, nimetades neid ühe-, kahe-, kolmekohalisteks jne. Ka matemaatilisi tabeleid nimetatakse kolme-, nelja-, viiekohalisteks jne. selle järgi, mitme õige tüvenumbriga on neis antud andmed. Nii on meil koolis tarvitusel neljakohalised matemaatilised tabelid, milledes andmed on antud nelja õige tüvenumbriga.

Paljude lõppnullide kirjutamist suurtes ligikaudsetes arvudes ja avanullide kirjutamist väikestes kümnendmurdudes saab vältida sellega, et säärased arvud esitatakse korrutise näol, mille esimeseks teguriks on arvu tüvi ja teiseks teguriks on vastav järkarv, mis on lühidalt kirjutatud arvu 10 astme näol. Nii kirjutatakse näiteks, et maakera raadiuse pikkus on $64 \cdot 10^2$ km, ja arvu 0,0000273 asemel kirjutatakse lühidalt $273 \cdot 10^{-7}$.

On soovitatav siiski arvu $64 \cdot 10^2$ asemel kirjutada $6{,}4 \cdot 10^3$ ja arvu $273 \cdot 10^{-7}$ asemel $2{,}73 \cdot 10^{-5}$, s. o. kirjutada järkarvu ees seisev tegur ikka ühekohalise täisosaga arvuna. Niisugust arvu kirjutist nimetatakse arvu s t a n d a r d k u j u k s. Arvu kirjutamisel standardkujul on veel see paremus, et kümne astendaja annab otseselt arvu suurusjärgu.

Ülesanded.

2. Kirjutada järgmised arvud standardkujul:

1. 560	2. 0,0067
204000	0,000183
4800000	26,4
0,57	458,32
0,0831	7134,6

3. Kirjutada järgmised standardkujul antud ligikaudsed arvud tavalisel viisil:

1. $2{,}53 \cdot 10^4$	2. $3{,}50 \cdot 10^5$
$1{,}34 \cdot 10^3$	$7{,}80 \cdot 10^{-3}$
$5{,}8 \cdot 10^{-3}$	$4{,}000 \cdot 10^4$
$6{,}32 \cdot 10^{-4}$	$5{,}200 \cdot 10^{-2}$
$1{,}08 \cdot 10^{-6}$	$8{,}030 \cdot 10^{-3}$

§ 4. Ligikaudsete arvude korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine.

Et ligikaudse arvu ja täpse arvu korrutise relatiivne viga võrdub ligikaudse teguri relatiivse veaga ja et ühe ning sama relatiivse veaga arvudel valdaval enamikul juhtudel on ühepalju õigeid tüvenumbreid, siis järeldub, et valdaval enamikul juhtudel

ligikaudse arvu ja täpse arvu korrutises on samapalju õigeid tüvenumbreid kui ligikaudsel teguril.

Näiteks, kui arvu 0,0116 kõik kolm tüvenumbrit on õiged, s. o. kui ta absoluutne viga ei ületa 0,5 kümnetuhandikku, siis näiteks korrutise

$$9 \cdot 0{,}0116 = 0{,}1044$$

absoluutse vea ülemmäär on $9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$ kümnetuhandikku ehk 0,45 tuhandikku.

Et see viga moodustab korrutise tüve neljanda järgu 4,5 ühikut, siis korrutise neljas tüvenumber on arvatav; et see viga aga moodustab korrutise tüve kolmanda järgu 0,45 ühikut, siis korrutise k o l m a s tüvenumber on õ i g e. Seega on korrutises 0,1044 samuti kolm õiget tüvenumbrit nagu ligikaudses teguris 0,0116.

Kui see arv on mingi arvutuse lõpptulemus, siis on kohane esitada teda ümardatuna kolmekohaliseks: 0,104. Heites kõrvale seejuures 4 kümnetuhandikku, me suurendasime ta absoluutse vea ülemmäära, mis niigi oli 4,5 kümnetuhandikku, 8,5 kümnetuhandikuni, milline asjaolu teeb juba kolmandagi tüvenumbri arvatavaks (kaheldavaks). Arvutuse lõpptulemuses pole sel seigal praktilises elus olulist tähtsust. Kuid kui me sellise korrutise väärtust kasutame veel edasiseks arvutamiseks, siis ei ole soovitav teda koormata ümardamisveaga, sest see halvendab edasiste arvutustulemuste täpsust. Seepärast edasisteks arvutusteks tuleb see korrutis jätta ümardamata, kuid näidata siiski, et viimane number on arvatav, kirjutades ta väiksemas kirjas:

$$9 \cdot 0{,}116 = 0{,}104{\scriptstyle 4}.$$

Järgmises näites selgitame, kuipalju õigeid numbreid on kahe ligikaudse arvu korrutises.

N ä i d e 1. Arvutame kolmekohalise ligikaudse arvu 254 ja viiekohalise ligikaudse arvu 921,31 korrutise, eeldades, et mõlema arvu kõik numbrid on õiged.

```
. 254
 921,31
———————
228|6
  5|08
   |254
   | 762
   |  254
———————
234ooo
```

Parema selgituse otstarbel võtame korrutatavaks väiksema tüvenumbrite arvuga teguri (mida tegelikul korrutamisel tavaliselt ei tehta).

Kõrval teostatud arvutuses on esimeses osakorrutises kolm õiget numbrit, sest korrutatavas 254 on kolm õiget tüvenumbrit ja korrutajaks on täpne arv 9. Et teiste osakorrutiste õiged numbrid lõpevad madalamates järkudes kui esimesel osakorrutisel, siis tuleb osakorrutiste liitmisel rakendada erinevates järkudes lõppevate ligikaudsete arvude liitmise juhist. Seda teostame sel teel, et esimese osakorrutise kolmanda numbri järele asetame püstjoone ja liidame need osakorrutiste osad, mis jäävad selle joone ette (ja esimeste numbrite summa ülekandejoone tagant). Nii saame korrutise tüvena kolmekohalise arvu 234. Korrutise ülejäänud täisosa kohad täidame väikeste nullidega. Seega saame korrutisena kolme tüvenumbriga arvu 234ooo.

Toetudes sellele näitele võime täiesti üldiselt arutella järgmiselt.

Et esimene osakorrutis on alati suurem kõigist teistest, siis (suurel enamikul juhtudel) osakorrutiste summas, s. o. antud arvude korrutises ei ole numbreid kõrgemates järkudes kui esimesel osakorrutisel.

Et esimese osakorrutise õiged numbrid lõpevad alati kõrgemas järgus kui teistel osakorrutistel, siis korrutises ei ole kunagi õigeid numbreid madalamates järkudes kui esimesel osakorrutisel.

Seega (suurel enamikul juhtudel) korrutises on sama palju õigeid tüvenumbreid kui esimesel osakorrutisel.

Et esimeseks osakorrutiseks võib olla väiksema õigete tüvenumbrite arvuga teguri korrutis teise teguri esimese numbriga, s. o. täpse arvuga, siis esimeses osakorrutises on samapalju õigeid numbreid kui väiksema õigete numbrite arvuga teguris.

Kõigest ülal-öeldust saame järelduse, et suurel enamikul juhtudel

kahe ligikaudse arvu korrutises on samapalju õigeid tüvenumbreid, kui neid on väiksema tüvenumbrite arvuga teguris.

Näites 1 toodud arvutisest ilmneb veel, et kui ühes teguris on kolm õiget tüvenumbrit, siis teise teguri neljas number ainult vähe mõjutab korrutise õigeid numbreid, viies number aga ei mõjuta neid sugugi, sest neljas ja viies osakorrutis jäävad liitmisel hoopis arvestamata. Seepärast on asjatute arvutuste vähendamise otstarbel kohane ümardada suurema õigete tüvenumbrite arvuga tegur nii, et temas on samapalju tüvenumbreid või, et vältida ümardamisest tekkida võivat ebatäpsust, ainult ühe numbri võrra rohkem kui teises teguris.

Ülesanne.

4. Arvutada järgmiste arvude korrutised andmetekohase õigete numbrite arvuga:

1.	**5** $\cdot$ 3,62	2.	**181** $\cdot$ 0,20	3.	0,66 $\cdot$ 2,3
	23 $\cdot$ 5,48		**1253** $\cdot$ 0,31		30,8 $\cdot$ 4,2
	16 $\cdot$ 92		**56** $\cdot$ 1,30		30,8 $\cdot$ 4,20
	0,12 $\cdot$ 245,8		1,1 $\cdot$ **745**		256 $\cdot$ 78,1
	128 $\cdot$ 0,5607		0,623 $\cdot$ **69**		10089 $\cdot$ 483

4.	**4** $\cdot$ $7{,}80 \cdot 10^{-2}$	5.	$1{,}24 \cdot 10^{3} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-4}$
	6024 $\cdot$ $3{,}18 \cdot 10^{3}$		$5{,}084 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}91 \cdot 10^{-1}$
	1526 $\cdot$ $8{,}45 \cdot 10^{-3}$		$4{,}1 \cdot 10^{7} \cdot 8{,}54 \cdot 10^{-5}$
	0,8 $\cdot$ $1{,}56 \cdot 10^{9}$		$9{,}00 \cdot 10^{13} \cdot 2{,}99 \cdot 10^{10}$
	$2\pi \cdot 6{,}6 \cdot 10^{3}$		$6{,}4 \cdot 10^{5} \cdot 4{,}80 \cdot 10^{-7}$

Nagu me ligikaudsete arvude korrutise õigete numbrite selgitamisel tugesime ligikaudsete arvude liitmise juhisele, nii tuleb ligikaudsete arvude jagamisel tugeda ligikaudsete arvude lahutamise juhisele. Järgmiste näidete varal jõuame selgusele, kuipalju õigeid numbreid on ligikaudsete arvude jagatises.

N ä i d e 2. Jagame täpse arvu 56 ligikaudse arvuga 241.

$$560 : 2\cancel{4}\cancel{1} = 0{,}232$$

$$\begin{array}{r|} \underline{482} \\ 78 \\ \underline{72} \\ 6 \\ \underline{5} \\ 1 \end{array}$$

Et 56 on väiksem kui 241, siis jagatise esimene number on 0. Jagatava kui täpse arvu võime esitada ka kujul 56,0, s. o. kirjutada talle juurde nulli. Jagades nüüd 560 arvuga 241 saame jagatise teise numbri 2. Esimene osakorrutis on siis $2 \cdot 241 = 482$, milles on 3 õiget numbrit nagu jagajaski. Et me selle osakorrutise viimasest numbrist paremal pool enam ei saa õigeid numbreid, seda näitame sellega, et asetame selle järele kohe püstjoone.

Esimese jäägina saame $560 - 482 = 78$. Sellele arvule nulli juurde kirjutada, s. o. seda arvu 10 korda suurendada pole enam mõtet, sest püstjoonest paremale tulevad numbrid ei vääri ju enam usaldust. Selle asemel peame vähendama jagajat, s. o. lugema ta nüüd arvuks 24,1; seda on kõige parem niiviisi märkida, et me jagaja kolmanda numbri läbi kriipsutame.

Jagades nüüd esimese jäägi jagaja ülejäänud tüvega 24, saame jagatise kolmanda numbrina 3. Teine osakorrutis on seega $3 \cdot 24{,}1 = 72$ ja teine jääk on $78 - 72 = 6$. Vähendanud jagajat jälle 10 korda, s. o. kriipsutanud läbi jagaja teise numbri 4, jagame jäägi jagaja ülejäänud osaga 2,4; siis saame jagatise kolmanda numbri 2. Kolmas osakorrutis on siis $2 \cdot 2{,}4 = 5$ ja kolmas jääk on $6 - 5 = 1$. Selle jäägi jagamisest jälle 10 korda vähendatud jagajaga 0,2 me ei saa enam õigeid numbreid. Seega tuleb jagamine siin lõpetada.

Nagu nähtub sellest näitest, täpse ja ligikaudse arvu jagatises saab samapalju õigeid t ü v e n u m b r e i d, kui neid on ligikaudses jagajas.

N ä i d e 3. Jagame ligikaudse arvu 7634 täpse arvuga 132.

$$
\begin{array}{r|l}
7634 & : 1\cancel{3}\cancel{2} = 578{,}4 \\
\underline{660} & \\
1034 & \\
\underline{924} & \\
110 & \\
\underline{105} & \\
5 & \\
\underline{5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Kuni jagatise teise numbri ja teise jäägi leidmiseni jagamine toimub selles näites nagu tavaliselt.

Teine jääk on 110 ja seda ei saa jagada arvuga 132; numbrit talle juurde kirjutada ka ei saa, sest jagatava õiged numbrid on lõppenud ja meil ei ole teada jagatava järgnevad numbrid. Seepärast vähendame jagajat 10 korda, märkides seda ta kolmanda numbri läbikriipsutamisega.

Jagades nüüd teise jäägi jagaja ülejäänud osaga 13, saame jagatise kolmanda numbri 8. Kolmas osakorrutis on seega $8 \cdot 13{,}2 = 105$ ja kolmas jääk on $110 - 105 = 5$.

Vähendanud jagajat jällegi 10 korda, s. o. kriipsutanud läbi ta teise numbri, jagame kolmanda jäägi jagaja ülejäänud osaga 1,3; siis saame jagatise neljanda numbri 4. Neljas osakorrutis on seega $4 \cdot 1{,}3 = 5$ ja neljas jääk on 0. Seega oleme saanud jagatise kõik õiged numbrid ja jagamine tuleb lõpetada.

Nagu nähtub sellest näitest, ligikaudse arvu ja täpse arvu jagatises saab samapalju õigeid t ü v e n u m b r e i d, kui neid on ligikaudses jagatavas.

Samal viisil võib näidata, et (suurel enamikul juhtudel) on õige järgmine väide, mis hõlmab ka nendest kahest näitest tehtud järeldused, kui täpsed arvud lugeda arvudeks, milledes on loendamata palju õigeid numbreid:

kahe ligikaudse arvu jagatises on samapalju õigeid tüvenumbreid, kui neid on väiksema tüvenumbrite arvuga andmes.

Ülesanne.

5. Arvutada järgmised jagatised andmetekohase õigete numbrite arvuga:

1. $3 : 0{,}567$	2. $81{,}2 : 3{,}71$
$520 : 3{,}06$	$122{,}0 : 0{,}52$
$88{,}34 : 42$	$1899 : 2{,}7$
$5843 : 3{,}14$	$0{,}433 : 729{,}4$
$0{,}21 : 1256$	$5{,}008 : 2{,}2$
3. $5{,}41 \cdot 10^8 : 2{,}82 \cdot 10^3$	4. $2 \cdot 10^4 : 2\pi$
$6{,}03 \cdot 10 : 8{,}37 \cdot 10^4$	$9{,}81 : 7 \cdot 10^5$
$1{,}2 \cdot 10^2 : 1{,}03 \cdot 10^5$	$2{,}0 \cdot 10^6 : 6{,}3$
$3465 : 5{,}88 \cdot 10^4$	$45 : 4{,}10 \cdot 10^3$
$2{,}00 \cdot 10^2 : 0{,}6798$	$9{,}99 \cdot 10^4 : 5 \cdot 10$

Et arvu astendamine on sisuliselt järkjärguline korrutamine ühe ja sama arvuga, siis iga uue korrutamise tagajärjel korrutisse kuhjub ikka uusi vigu, nii et kõrgemates astmetes õigete tüvenumbrite arv järjest väheneb. Siiski võib näidata, et enamikul juhtudel

ligikaudse arvu ruudus ja kuubis on samapalju õigeid tüvenumbreid, kui neid on astendatavas,

seejuures on aga ruudu ja kuubi viimane tüvenumber vähem usaldatav kui astendatava viimane tüvenumber.

Tegelikult arvude ruudud ja kuubid võetakse tavaliselt tabelitest. Koolis tarvitatavad neljakohalised matemaatilised tabelid annavad kõigi täpsete neljakohaliste arvude ligikaudsed ruudud ja kuubid nelja õige tüvenumbriga. Kui antud astendatavas on õigeid tüvenumbreid vähem kui neli, siis tabelist võetud ruut või kuup tuleb ümardada astendatava õigete tüvenumbrite arvuni. Kui aga astendatavas on õigeid tüvenumbreid enam kui neli ja astet nõutakse nelja õige tüvenumbriga, siis tuleb astendatav enne ümardada neljakohaliseks ja seejärel kasutada neljakohalisi tabeleid. Kui aga enam kui neljakohalise astendatava ruutu või kuupi nõutakse samapaljude õigete tüvenumbritega, kui neid on astendatavas, siis tuleb kasutada vastavalt viie-, kuue- või seitsmekohalisi tabeleid.

N ä i d e 4. Leiame ligikaudse arvu 0,254 ruudu.

Neljakohalisest ruutude tabelist leiame, et täpse arvu 2,54 ruut esimese nelja tüvenumbriga on 6,452.

Et antud astendatav on 10 korda väiksem kui tabeli astendatav, siis ta ruut on 100 korda väiksem kui tabeli ruut. Et antud astendatavas on ainult 3 õiget tüvenumbrit, siis tuleb ta ruut kirjutada ka ainult kolme tüvenumbriga. Seega on

$$0{,}254^2 = 0{,}0645.$$

Ülesanne.

6. Leida tabelite abil järgmiste ligikaudsete arvude astmed andmetekohase õigete numbrite arvuga:

1. $3{,}26^2$	2. $2{,}4^3$	3. 25900^2
$5{,}8^2$	24^3	14000^3
$0{,}278^2$	$52{,}34^3$	$19{,}9^3$
1570^2	$0{,}733^3$	$0{,}07^3$
$46{,}34^2$	$0{,}40^3$	$0{,}099^2$

4. $(4{,}04 \cdot 10^2)^2$
$(5{,}19 \cdot 10^{-3})^2$
$(2{,}4 \cdot 10^{-4})^2$
$(7{,}8 \cdot 10^2)^2$
$(7{,}80 \cdot 10^{-4})^2$

5. $(5{,}65 \cdot 10^{-1})^3$
$(9{,}90 \cdot 10^2)^3$
$(9{,}9 \cdot 10^3)^3$
$(1{,}506 \cdot 10^{-2})^3$
$(8{,}23 \cdot 10^{-3})^3$

Ligikaudse arvu juurimisel on olukord õigete numbritega just vastupidine astendamisele: võib tõestada, et mida kõrgema juure me ligikaudsest arvust võtame, seda väiksem on juure viga ja seda enam on seega juures õigeid tüvenumbreid. Juba ruutjuures võib olla enam õigeid tüvenumbreid kui juuritavas, milles võime veenduda järgmise näite varal.

N ä i d e 5. Arvutame algoritmi abil ruutjuure ligikaudsest arvust 374.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt{347} & = 19{,}34 \\
 & 1 & \\ \cline{2-2}
29 & 274 & \\
9 & 261 & \\ \cline{1-2}
3\cancel{8}\cancel{3} & 13 & \\
3 & 11 & \\ \cline{1-2}
\cancel{3}\cancel{8}\cancel{6}4 & 2 & \\
4 & 2 & \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Kuni juuritava teise numbri ja teise jäägi arvutamiseni toimub selles näites juurimine nagu tavaliselt.

Teisele jäägile 13 me ei saa enam juurde kirjutada juuritava järgnevaid numbreid ja seega teda suurendada umbes 100 korda, sest me neid ei tea. Seepärast selle asemel vähendame juure seni leitud osa kahekordset, arvu 38 kümme korda ja jagame saadud arvuga 3,8 teise jäägi 13. Nii leiame, et juure kolmas number on 3, et kolmas osakorrutis on $3 \cdot 3{,}8 = 11$ ja kolmas jääk on $13 - 11 = 2$.

Et ka sellele jäägile pole võimalik juurde kirjutada järgnevaid numbreid juuritavast, siis vähendame kahekordset veelgi 10 korda ja jagame saadud arvuga 0,4 jääki 2. Siis leiame juure neljanda numbri 4 ja neljanda osakorrutise $4 \cdot 0{,}4 = 2$ ning neljanda jäägina saame 0.

Seega saime kolme õige tüvenumbriga arvu ruutjuure nelja õige tüvenumbriga.

Võib näidata üldiselt, et

ligikaudse arvu ruut- ja kuupjuures on vähemalt samapalju õigeid tüvenumbreid, kui neid on juuritavas;

seejuures on juure viimane number usaldatavam kui juuritava viimane number.

Tegelikult võetakse ruut- ja kuupjuured alati tabelitest. Juurte tabelite kasutamise kohta kehtib sama, mis ülal oli öeldud astmete tabelite kasutamise kohta.

Näide 6. Leiame kahekohalise ligikaudse arvu 24000 kuupjuure.

Neljakohalisest kuupjuurte tabelist leiame, et täpse arvu 24 kuupjuur esimese nelja tüvenumbriga on 2,884.

Et antud juuritav on 1000 korda suurem kui tabeli juuritav, siis ta kuupjuur on 10 korda suurem kui tabeli juur. Et antud juuritavas on ainult kaks õiget tüvenumbrit, siis tuleb ka ta kuupjuur esitada ainult kahe tüvenumbriga. Seega on

$$\sqrt[3]{24000} = 29.$$

Kui seda kuupjuurt oleks vaja teada kolme õige tüvenumbriga, siis võime öelda, et

$$\sqrt[3]{24000} = 28{,}8,$$

sest on väga usutav, et kahekohalise arvu kuupjuures on ka kolmas number õige.

Ülesanne.

7. Leida tabelite abil järgmiste ligikaudsete arvude juured andmetekohase õigete numbrite arvuga:

1. $\sqrt{35,4}$ $\sqrt{0,57}$ $\sqrt{420}$ $\sqrt{613000}$ $\sqrt{0,000148}$

2. $\sqrt[3]{8,9}$ $\sqrt[3]{0,0781}$ $\sqrt[3]{5000}$ $\sqrt[3]{98,56}$ $\sqrt[3]{0,003}$

3. $\sqrt[4]{13,8}$ $\sqrt[4]{710}$ $\sqrt[6]{0,063}$ $\sqrt[6]{8,2}$ $\sqrt[9]{0,318}$

4. $\sqrt{1,59 \cdot 10^2}$ $\sqrt{6,08 \cdot 10^4}$ $\sqrt{2,9 \cdot 10^3}$ $\sqrt{9,072 \cdot 10^5}$ $\sqrt{3,36 \cdot 10^{-1}}$

5. $\sqrt[3]{4,27 \cdot 10^3}$ $\sqrt[3]{5,081 \cdot 10^4}$ $\sqrt[3]{7,6 \cdot 10^5}$ $\sqrt[3]{2,05 \cdot 10^{-1}}$ $\sqrt[3]{6,73 \cdot 10^{-2}}$

Kõige selles paragrahvis öeldu kokkuvõttena saame järgmise juhise:

ligikaudsete arvude korrutis, jagatis, ruut ja kuup ning ruut- ja kuupjuur tuleb esitada samapaljude tüvenumbritega, kui neid on väiksema õigete tüvenumbrite arvuga ligikaudses andmes.

Kui täpsed arvud lugeda arvudeks, milledel on loendamatult palju õigeid numbreid, siis see juhis hõlmab ka juhud, mil mõni andmetest on täpne arv.

Et vältida ümardamisvigade kuhjumise halvendavat mõju pikema arvutuse lõpptulemuse täpsusele, siis

vahepealsetes arvutustulemustes tuleb säilitada ühe tüvenumbri võrra rohkem, kui seda soovitab eelmine juhis;

seda lisanumbrit on kohane kirjutada väiksema kirjaga. Lõpptulemuses jäetakse lisanumber kirjutamata.

Järgides neid juhiseid arvutaja säästab palju aega ja vaeva ning sellega vähendab ka eksimuste võimalusi arvutamisel.

Ülesanded.

8. Teostada järgmised tehted ja anda tulemus andmetekohase õigete tüvenumbrite arvuga:

1. $(0{,}43 + 25{,}85) \cdot \mathbf{123}$

$(1{,}28 + 25) \cdot 1{,}23$

$(47{,}64 - 47{,}33) \cdot 39{,}465$

$\dfrac{36400 + 167}{50210 + 3142}$

$\dfrac{12 + \mathbf{8{,}346}}{78{,}86 + 12{,}324}$

2. $\sqrt{9{,}8^2 + 15{,}24^2}$

$\sqrt{55{,}0} + \sqrt{5{,}5}$

$\sqrt[3]{\mathbf{100}} : \sqrt[3]{25}$

$\dfrac{5{,}83}{47{,}8} + \dfrac{24}{5{,}2}$

$\dfrac{\sqrt{44{,}2}}{5{,}63^2} + \dfrac{5{,}63^2}{\sqrt{44{,}2}}$

3. $50{,}12 \cdot (134{,}6 - 129{,}7)$

$\mathbf{6081} \cdot (352{,}5 - 352{,}1)$

$\sqrt{38{,}5 + \dfrac{1}{38{,}5}}$

$\sqrt{0{,}385 + \dfrac{1}{0{,}385}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{0{,}064}} - \dfrac{1}{\sqrt{6{,}4}}$

4. $\sqrt{\mathbf{5}} \cdot \sqrt{4{,}0}$

$\pi \cdot 3{,}246^2$

$\dfrac{\pi \cdot 600^2}{7{,}2}$

$\dfrac{\mathbf{1}}{12{,}4} + \dfrac{\mathbf{1}}{2{,}6}$

$\sqrt[3]{226{,}2} + \sqrt[3]{6{,}2} + \sqrt[3]{0{,}2}$

9. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused nelja õige tüvenumbritega:

1. $3{,}8 \cdot 342{,}563$	2. $\sqrt{543 : 2\pi}$
$\sqrt{52 : 14}$	$\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{0{,}08}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$	$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$
$\pi : \sqrt{120}$	$(\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{25})^3$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{28}{47} + \frac{37}{54}$

10. Arvutada avaldise

$$r\left(\sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1\right)$$

väärtus andmetekohase õigete tüvenumbrite arvuga, kui $R = 952$, $p = 206{,}6$ ja $r = 17{,}5$.

11. Arvutada avaldise

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{5 - 3x} - \sqrt{2}$$

väärtus andmetekohase õigete tüvenumbrite arvuga, kui $x = 0{,}2473$.

Peatükk II.

Logaritm.

§ 5. Arvu kümnendlogaritm.

Mõnede tehete teostamist on võimalik tunduvalt kergendada, kui arvud, millega tehteid tuleb teha, kirjutame ühe ja sama arvu astmetena. Teades näiteks, et

$$32 = 2^5, \qquad 512 = 2^9 \quad \text{ja} \quad 16384 = 2^{14},$$

võime korrutise $32 \cdot 512$ arvutada järgmiselt:

$$32 \cdot 512 = 2^5 \cdot 2^9 = 2^{14} = 16384.$$

Arvu kirjutamine astmena kergendab eriti juurimise teostamist. Sel viisil leiame näiteks, et

$$\sqrt[7]{16384} = \sqrt[7]{2^{14}} = 2^2 = 4.$$

Samuti on võimalik kergendada jagamise ja astendamise teostamist.

Ülesanne.

12. Koostada arvu 2 astmete tabel kuni 12-nda astmeni ja teostada selle tabeli abil järgmised tehted:

1. $16 \cdot 64$	4. $\sqrt[5]{1024}$
2. $128 \cdot 32$	5. $\sqrt[3]{512}$
3. $4096 : 256$	6. $\sqrt[4]{4096} \cdot \sqrt[6]{4096}$

Et ülalkirjeldatud arvutamise kergendamise võte oleks üldisemalt rakendatav, peame oskama kirjutada iga vajalikku arvu ühe ja sama arvu astmena. Valime selleks arvuks meie arvusüsteemi aluse, s. o. arvu 10. Seega peame oskama leida arvu a puhul niisugust astendajat x, et

$$10^x = a.$$

Niisugust arvu x nimetatakse arvu a kümnendlogaritmiks[1] ehk logaritmiks alusel 10 ja tähistatakse sümboliga log a; seega

antud arvu kümnendlogaritm on arv, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Nii näiteks on arvu 100 kümnendlogaritm 2, sest $10^2 = 100$. Logaritmi sümboli abil kirjutatakse seda järgmiselt:

$$\log 100 = 2.$$

Nii kirjutatakse ka, et

$$\log 1000 = 3, \qquad \text{sest } 10^3 = 1000,$$

ja

$$\log 0{,}1 = -1, \qquad \text{sest } 10^{-1} = \tfrac{1}{10} = 0{,}1,$$

ning

$$\log \sqrt{10} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{sest } 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

Kümnendlogaritmi definitsiooni järgi on üldiselt

$$\log a = x, \qquad \text{kui } 10^x = a.$$

---

[1] Oskussõna logaritm on moodustatud kreekakeelsetest sõnadest lógos = sõna, mõistus, aru, suhe ja arithmós = arv. Logaritmid leiutasid sõltumatult teineteisest inglane J. Napier ja šveitslane J. Bürgi XVII saj. alguses.

Elimineerides kahest viimasest võrdusest tähe x, saame võrduse

$$\boxed{10^{\log a} = a}$$

elimineerides sealtsamast tähe a, saame võrduse

$$\boxed{\log 10^x = x}$$

Mõlemad saadud võrdused väljendavad kümnendlogaritmi definitsiooni logaritmi sümboli abil.

Arvu logaritmi leidmist nimetatakse selle arvu logaritmimiseks. Arvu, mida logaritmitakse, nimetatakse *logaritmitavaks*. Arvu 10 nimetatakse kümnendlogaritmide *aluseks*.

Järgnevatel lehekülgedel tegeleme peamiselt ainult kümnendlogaritmidega, seepärast nimetame neid edaspidi lühidalt logaritmideks.

Ülesanded.

13. Kirjutada järgmised arvud arvu 10 astmetena ja leida nende logaritmid:

1. 100	**2.** $\frac{1}{10}$	**3.** 1	**4.** $\frac{1}{10000}$
1000	0,01	10000	1000000
10	0,001	0,0001	0,0000001
5. $\sqrt{10}$	**6.** $\sqrt[3]{10}$	**7.** $\sqrt[5]{10}$	**8.** $\sqrt[10]{10}$
$\sqrt{1000}$	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[5]{10000}$	$\sqrt{10^n}$
$\sqrt{0,1}$	$\sqrt[3]{0,01}$	$\sqrt[6]{0,001}$	$\sqrt[n]{0,0001}$

14. Logaritmida järgmised avaldised:

1. 10^4 $\quad 10^6$ $\quad 10^{-2}$ $\quad 10^{-4}$ $\quad 10^0$
2. $10^{\frac{1}{2}}$ $\quad 10^{\frac{1}{3}}$ $\quad 10^{1\frac{1}{2}}$ $\quad 10^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 10^{-\frac{1}{4}}$

15. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1.	2.	3.
$10^{\log 100}$	$10^{\log 3} \cdot 10^{\log 4}$	$10^{-\log 3}$
$10^{\log 1}$	$10^{\log 2} \cdot 10^{\log 5}$	$10^{-\log 2}$
$10^{\log 2}$	$10^{\log 6} : 10^{\log 2}$	$(10^{\log 4})^2$
$10^{\log 0,6}$	$10^{\log 20} : 10^{\log 4}$	$(10^{\log 2})^3$
$10^{\log 2,4}$	$1 : 10^{\log 2}$	$\sqrt{10^{\log 36}}$

16. Leida arvud, millede logaritmid on:

1. $3 \quad 4 \quad 6 \quad 0$
2. $-1 \quad -3 \quad -5 \quad -8$

17. Kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid, leida arvud, millede logaritmid on:

1.	2.	3.	4.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{6}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{6}$

§ 6. Logaritmi graafik.

Et saada selge kujutlus arvu logaritmist, selleks valmistame logaritmi graafiku, s. o. kujutame graafiliselt, kuidas muutub $\log a$ arvu a muutumisel. Selleks tuleks anda arvule a rida väärtusi, arvutada neile vastavad $\log a$ väärtused, kujutada saadud a ja $\log a$ väärtusepaarid punktidena ning ühendada need punktid sileda kõvera abil.

Kuid *antud arvu* logaritmi arvutamine nõuab, nagu näeme paragrahvis 4, tunduvat aega ja vaeva. Et kiiremini jõuda eesmärgile, selleks kasutame vastupidist teed: anname ette mitte logaritmitava väärtused, vaid mõned lihtsad logaritmi väärtused, nagu

$$-1,\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},$$

ja arvutame (nagu ülesannetes nr. 16 ja 17) nendele $\log a$ väärtustele vastavad a väärtused.

Viimaste arvutamine toimub järgmisel viisil:

kui $\log a = -1$, siis $a = 10^{-1} = 0{,}1$;

seega $\log 0{,}1 = -1$;

kui $\log a = -\frac{1}{2}$, siis $a = 10^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32$;

seega $\log 0{,}32 \approx -\frac{1}{2} = -0{,}5$;

kui $\log a = -\frac{1}{4}$, siis $a = 10^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{0{,}1}} \approx 0{,}56$;

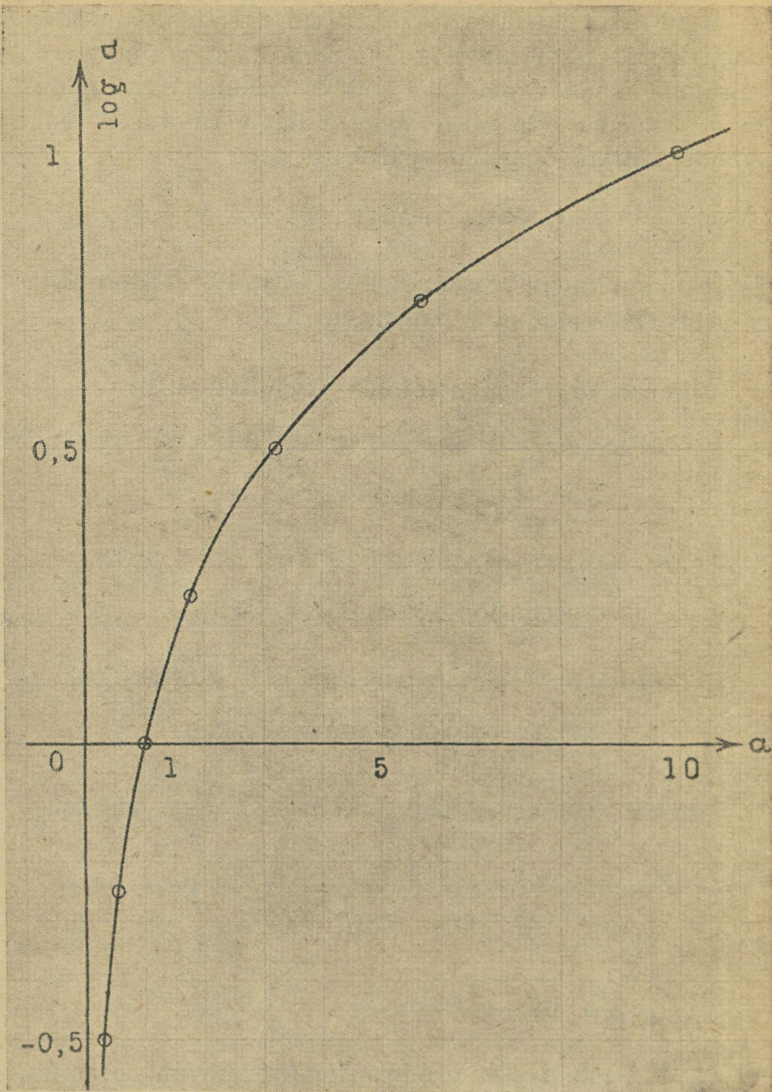
seega $\log 0{,}56 \approx -\frac{1}{4} = -0{,}25$;

. . . .

Niiviisi arvutust jätkates saame koostada järgmise tabeli:

a	0,1	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$\log a$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,50	0,75	1

Saadud tabeli põhjal joonestame logaritmi graafiku (joonis 1), võttes arvu a kujutamisel ühikuks 10 mm ja $\log a$ kujutamisel ühikuks 100 mm.



Joonis 1.

Joonestatud graafikust saame leida 0,1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritme. Näiteks on

$$\log 2 \approx 0{,}30 \qquad \log 5 \approx 0{,}70 \qquad \log 0{,}5 = -0{,}30.$$

Seda graafikut saame kasutada ka vastupidiseks ülesandeks: määrata -1 ja $+1$ vahel asetsevatele logaritmidele vastavaid arve.

Näiteks leiame, et

$$\text{kui } \log a = 0{,}54, \text{ siis } a \approx 3{,}5.$$

Graafikust leitavad $\log a$ ja a väärtused on ligikaudsed. Suurema täpsuse saavutamiseks, kui seda võimaldab joonis, tuleb kasutada numbrilisi arvutusvõtteid.

Ülesanded.

18. Leida joonise 1 abil järgmiste logaritmide väärtused:

log 3	log 4	log 5	log 8
log 0,4	log 0,5	log 0,7	log 0,8

19. Leida joonise 1 abil arvud, mille logaritmid on:

0,14	0,20	0,54	0,85
—0,10	—0,20	—0,25	—0,40

§ 7. Logaritmi omadusi.

Eelmistes paragrahvides astendasime arvu 10 ratsionaalarvudega, s. o. täis- ja murdarvudega. On selge, et astendades arvu 10 positiivse või negatiivse täisarvuga, saame ikka kümnendsüsteemi mingi järkarvu: 10, 100, 1000, ... või 0,1, 0,01, 0,001, ...; astendades arvu 10 arvuga 0, saame täisarvu 1. Kuid astendades arvu 10 mingi taandamatu murdarvuga, saame alati mingi juure mingist järkarvust, s. o. alati irratsionaalse arvu.

Tõestame nüüd teoreemi, et arvu 10 astendamisel ratsionaalarvuga ei saa kunagi järkarvust erinevat ratsionaalarvu ehk, teiste sõnadega,

ratsionaalsete mittejärkarvude logaritmid on irratsionaalarvud.

Tõestame selle teoreemi kahes osas — enne täisarvude ja hiljem murdarvude kohta.

Teoreemi esimese osa tõestus tugeb täisarvuliste järkarvude sellele omadusele, et iga säärane järkarv sisaldab algteguritena ainult arve 2 ja 5 ning seejuures kumbagi tegurit võrdsel arvul, kuna aga kõik muud täisarvud sisaldavad kas hoopis muid tegureid või peale 2 ja 5 ka muid tegureid või ka ainult neid tegureid, kuid mitte võrdsel arvul.

Oletame, et mingi täisarvulise mittejärkarvu t logaritm x on ratsionaalarv. Siis võime selle logaritmi esitada mingi murruna $\frac{m}{n}$:

$$x = \frac{m}{n}.$$

Siis oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = t.$$

Astendades selle võrduse kummagi poole arvuga n, saame, et

$$10^m = t^n.$$

Seega viimase võrduse vasak pool oleks mingi järkarv, parem pool aga mingi täisarvuline mittejärkarv. Säärane võrdumine on aga võimatu. Järelikult täisarvulise mittejärkarvu logaritm ei või olla ratsionaalarv, vaid on irratsionaalarv.

Tõestame nüüd teoreemi teise osa. Olgu arv $\frac{p}{q}$ mingi taandumatu murdarvuline mittejärkarv. Kui selle murru logaritm oleks mingi ratsionaalarv $\frac{m}{n}$, siis oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q}$$

ehk

$$10^m = \frac{p^n}{q^n}.$$

Vaatleme eraldi juhtumeid, kui m on 0, kui m on positiivne ja kui m on negatiivne.

Kui $m = 0$, siis oleks

$$\frac{p^n}{q^n} = 10^0 = 1$$

ja järelikult ka $\frac{p}{q} = 1$, mis on vastuolus eeldusega, et $\frac{p}{q}$ on taandumatu murd.

Kui m on positiivne, siis täisarv 10^m võrduks murruga

$$\frac{p^n}{q^n},$$

mis on võimatu.

Kui m on negatiivne arv, siis võime ta kujutada arvuna $-\mu$, kus μ tähendab arvu m absoluutväärtust. Siis võime viimase võrduse kirjutada kujul:

$$10^{-\mu} = \frac{p^n}{q^n},$$

kust saame, et

$$10^{\mu} = \frac{q^n}{p^n}.$$

Selle võrduse paremal poolel seisev avaldis on kas murdarv või täisarvuline mittejärkarv. Seega see võrdus tähendaks, et järkarv 10^{μ} võrdub murruga või täisarvulise mittejärkarvuga. Nii üks kui teine on võimatu. Seega ka murrulise mittejärkarvu logaritm ei või olla ratsionaalarv. Järelikult kõigi ratsionaalsete mittejärkarvude logaritmid on irratsionaalarvud.

Ülesanne.

20. Otsustada, millised järgmise tabeli tühjad lahtrid tuleb täita sõnadega: „täisarv", „murdarv" ja „irratsionaalarv":

<table>
<tr><td rowspan="3">Logaritmitav</td><td colspan="2">Ratsionaalarv</td><td colspan="3">Irratsionaalarv</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Järkarv</td><td rowspan="2">Mittejärkarv</td><td>Järkarvu</td><td>Mittejärkarvu</td><td rowspan="2">Muud irratsionaalarvud</td></tr>
<tr><td colspan="2">täisarvulise juurijaga juur</td></tr>
<tr><td>Logaritm</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Ratsionaal- või irratsionaalarv, sõltuvalt logaritmitava irratsionaalsuse loomust</td></tr>
</table>

Varajasemas algebra kursuse osas oli arvu aste defineeritud ainult ratsionaalse (täis- ja murdarvulise) astendaja korral. Defineerime nüüd p o s i t i i v s e arvu astme ka irratsionaalse astendaja korral.

Kui irratsionaalarvu p lähendid on ratsionaalarvud $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$, siis p o s i t i i v s e arvu a astmega a^p tähistatakse arvu, mille lähendid on

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{ja} \quad a^{\frac{m+1}{n}}.$$

Negatiivset arvu irratsionaalse astendajaga ei astendata; niisugusel astmel puuduks arvu tähendus.

Näide 1. Arvutame astme $10^{\sqrt{2}}$ mõned lähendid.

Et selle arvu lähendid on defineeritud arvu $\sqrt{2}$ lähendite kaudu, siis leiame arvu $\sqrt{2}$ lähendid $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$. Põhjusel, mis selgub allpool, peame need lähendid väljendama kahendmurdudes, s. o. lähendite nimetajatena kasutama arvu 2 astmeid:

$$n = 2^k,$$

kus k on positiivne täisarv.

Leidnud proovimise teel, et

$$(1\tfrac{1}{4})^2 < 2 < (1\tfrac{2}{4})^2$$

ehk

$$1\tfrac{1}{4} < \sqrt{2} < 1\tfrac{1}{2},$$

saame, et

$$10^{1\frac{1}{4}} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1\frac{1}{2}}.$$

Seega astme $10^{\sqrt{2}}$ lähendid on $10^{1\frac{1}{4}}$ ja $10^{1\frac{1}{2}}$.

Arvutame nende lähendite väärtused. Ruutjuurte tabelite abil leiame, et

$$10^{1\frac{1}{2}} = 10\sqrt{10} = 10 \cdot 3{,}162 = 31{,}62$$

ja et

$$10^{1\frac{1}{4}} = 10\sqrt[4]{10} = 10\sqrt{\sqrt{10}} = 10\sqrt{3{,}162} =$$
$$= 10 \cdot 1{,}779 = 17{,}79.$$

Seega arvu $10^{\sqrt{2}}$ esimeste lähendite väärtused on 17,79 ja 31,62.

Et nende lähendite vahe on veel liialt suur, siis peame otsima paremaid lähendeid, s. o. suruma arvu $10^{\sqrt{2}}$ kitsamatesse piiridesse. Selleks surume arvu $\sqrt{2}$ kitsamatesse piiridesse. Proovimise teel leiame näiteks, et

$$\left(1\frac{26}{64}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{27}{64}\right)^2$$

ehk

$$1\frac{26}{64} < \sqrt{2} < 1\frac{27}{64},$$

kust saame, et

$$10^{1\frac{13}{32}} < \sqrt{2} < 10^{1\frac{27}{64}}$$

ehk

$$10\sqrt[32]{10^{13}} < 10^{\sqrt{2}} < 10\sqrt[64]{10^{27}}.$$

Juure $\sqrt[32]{10^{13}}$ väärtuse leiame järk-järgulise ruutjuure arvutamise teel:

$$\sqrt{10^{13}} = \sqrt{10 \cdot 10^{12}} = 3{,}162 \cdot 10^6,$$

$$\sqrt[4]{10^{13}} = \sqrt{3{,}162 \cdot 10^6} = 1{,}779 \cdot 10^3,$$

$$\sqrt[8]{10^{13}} = \sqrt{1{,}779 \cdot 10^3} = \sqrt{17{,}79 \cdot 10^2} = 4{,}218 \cdot 10 = 42{,}18,$$

$$\sqrt[16]{10^{13}} = \sqrt{42{,}18} = 6{,}494,$$

$$\sqrt[32]{10^{13}} = \sqrt{6{,}494} = 2{,}549.$$

Samasugusel viisil leiame, et

$$\sqrt[64]{10^{27}} = 2{,}642.$$

Seega arvu $10^{\sqrt{2}}$ lähendid on

$$10 \cdot 2{,}549 = 25{,}49$$

ja

$$10 \cdot 2{,}642 = 26{,}42.$$

Valides teise nendest lähenditest arvu $10^{\sqrt{2}}$ ligikaudseks väärtuseks, saame tulemuse:

$$10^{\sqrt{2}} = 26.$$

Meie siht selles näites oli näidata, kuidas võime meile seni tuttavate tehete abil leida positiivse arvu irratsionaalse astendajaga astme lähendid. Seejuures tuli meil astendada arvu 10 nende lähenditega, mis aga muu hulgas nõudis ka juurimise tehete teostamist. Et me juurimisalgoritmidest tunneme ainult ruutjuure algoritmi, siis pidid astendajad olema valitud nii, et astendamist oleks olnud võimalik teostada ainult ruutjuure algoritmi abil. Selleks olidki astendajad väljendatud kahendmurdudes.

Tegelikult aga võime siiski arvutamise lihtsustamiseks kasutada juba varem arvutatud ruutjuurte väärtusi, võttes neid ruutjuurte tabelist.

Ülesanded.

21. Arvutada arvu $10^{\sqrt{2}}$ ligikaudne väärtus, võttes astendaja lähenditeks $1\frac{53}{128}$ ja $1\frac{107}{256}$.

22. Arvutada arvu $10^{\sqrt[3]{3}}$ ligikaudne väärtus, võttes astendaja lähenditeks $1\frac{23}{32}$ ja $1\frac{47}{64}$.

23. Arvutada arvu $10^{\sqrt[3]{5}}$ ligikaudne väärtus, võttes astendaja lähenditeks $1\frac{45}{64}$ ja $1\frac{91}{128}$.

Eelmiste klasside algebrast on teada, et kui arv a on suurem kui 1 ja m on positiivne täisarv, siis $a^m > 1$ ja ka $\sqrt[m]{a}$ ehk $a^{\frac{1}{m}}$ on suurem kui 1.

Sellest saab järeldada, et kui arv a on suurem kui 1 ja r on positiivne ratsionaalarv, siis alati $a^r > 1$.

Tõesti, iga positiivset ratsionaalarvu võib esitada kahe positiivse täisarvu m ja n jagatise kujul: $r = \frac{m}{n}$; seega

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Viimases avaldises on juuritav a^m ülalöeldu põhjal suurem kui 1, järelikult ka juur on suurem kui 1.

Näitame nüüd, et iga positiivse irratsionaalarvu p puhul samuti

$$a^p > 1, \text{ kui } a > 1.$$

Selleks võtame arvesse, et iga positiivne irratsionaalarv p asetseb kahe positiivse ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$, tema lähendite vahel:

$$\frac{m}{n} < p < \frac{m+1}{n},$$

ja seejuures

$$a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m+1}{n}},$$

sest $a^{\frac{m+1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[n]{a}$ ning $\sqrt[n]{a} > 1$.

Sümboliga a^p tähistame, nagu nägime ülal, sellist arvu, mille lähend puudusega on $a^{\frac{m}{n}}$ ja lähend liiaga on $a^{\frac{m+1}{n}}$; seega

$$a^{\frac{m}{n}} < a^p < a^{\frac{m+1}{n}}.$$

Et, nagu eespool selgus, $a^{\frac{m}{n}}$ on suurem kui 1, siis järeldubki nüüd, et ka $a^p > 1$.

Kokkuvõetult kõigist eelnenud juhtumeist saame, et kui $a > 1$, siis m i s t a h e s positiivse arvu q puhul alati

$$a^q > 1.$$

Kasutades seda teoreemi juhtumil, kus $a = 10$, saame mistahes positiivse astendaja q puhul:

$$10^q > 1.$$

Negatiivse astendaja puhul on aste määratud teatavasti järgmiselt: $10^{-q} = \frac{1}{10^q}$; järelikult iga positiivse q puhul on 10^{-q} küll positiivne, kuid väiksem kui 1, — lühidalt

$$0 < 10^{-q} < 1.$$

Arvestades veel kokkulepet, et $10^0 = 1$, võime järeldada, et

arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed

(sest kümmet nulliga või negatiivse arvuga astendades saaksime tulemuse 1 või väiksema kui 1).

arvu 1 logaritm on 0 ning

arvust 1 väiksemate positiivsete arvude logaritmid on negatiivsed.

Eelnenud teoreemist ja järeldusist selgub ka, et avaldisega 10^l saab esitada ainult positiivseid arve. Seega **nullil ega negatiivsetel arvudel pole kümnendlogaritme.**

Tõestame nüüd teoreemi, et

kümne aste suureneb astendaja suurenemisel.

Selleks olgu p ja q mistahes arvud ning $q > p$. Siis vahe $q - p$ on mingi positiivne arv v. Seega $q = p + v$ ja

$$10^q = 10^{p+v} = 10^p \cdot 10^v > 10^p,$$

sest positiivse v puhul teatavasti $10^v > 1$ (ning ka 10^p on positiivne).

Sellest teoreemist järeldub, et

$$\log b > \log a, \text{ kui } b > a, \text{ — ehk:}$$

kahest logaritmist on see suurem, millel on suurem logaritmitav.

Et logaritmi definitsiooni järgi $\log 10^m = m$, siis

$\log 1 = 0,$	
$\log 10 = 1,$	$\log 0{,}1 = -1,$
$\log 100 = 2,$	$\log 0{,}01 = -2,$
$\log 1000 = 3,$	$\log 0{,}001 = -3,$
. . . . . .	. . . .

Eelnenud teoreemi põhjal järeldame siit, et kõigil arvudel, mis on 1 ja 10 vahel, on logaritmid 0 ja 1 vahel; samuti 10 ja 100 vahel olevate arvude logaritmid asetsevad 1 ja 2 vahel jne.; 1 ja 0,1 vahel olevate arvude logaritmid asetsevad aga 0 ja —1 vahel; 0,1 ja 0,01 vahel olevate arvude logaritmid asetsevad —1 ja —2 vahel jne.

Ülesanded.

24. Arvutada järgmiste astmete väärtused ja järeldada, missuguste positiivsete astendatavate puhul on üldiselt kehtiv lause, et astendaja suurenedes aste suureneb:

1.		2.		3.		4.		5.	
	$(\frac{1}{2})^2$		$0{,}2^{-2}$		$0{,}16^{\frac{1}{2}}$		1^3		3^{-2}
	$(\frac{1}{2})^3$		$0{,}2^{-1}$		$0{,}16^{\frac{1}{4}}$		1^4		3^{-1}
	$(\frac{1}{2})^4$		$0{,}2^0$		$0{,}16^{\frac{3}{4}}$		1^5		3^2

25. Leida, missugused järgmistest logaritmidest on positiivsed ja missugused on negatiivsed:

$$\log 2, \quad \log \tfrac{1}{3}, \quad \log 0{,}04, \quad \log 600.$$

26. Leida, missuguse kahe järjestikuse täisarvu vahel asetseb igaüks järgmistest logaritmidest:

$\log 5,\qquad \log 20,\qquad \log 5300,$

$\log 0{,}3,\qquad \log 0{,}007,\qquad \log \frac{1}{16}$

§ 8. Antud arvu logaritmi arvutamise näide.

Täpsemad logaritmide väärtused, kui neid on võimalik saada graafikust, saame numbrilise arvutamise teel.

Arvutame näiteks arvu 2 logaritmi ligikaudse väärtuse, s. o. leiame sellise arvu x, et oleks

$$10^x = 2.$$

Et arv 2 asetseb arvude 1 ja 10 vahel ehk 10^0 ja 10^1 vahel:

$$10^0 < 2 < 10^1,$$

siis arv x asetseb arvude 0 ja 1 vahel:

$$0 < x < 1.$$

Järelikult võime arvu x esitada arvust 10 väiksema positiivse arvu y ja arvu 10 jagatisena:

$$x = \frac{y}{10}.$$

Seega võime oma esialgse võrrandi nüüd kirjutada kujul:

$$10^{\frac{y}{10}} = 2.$$

Astendades selle võrrandi kummagi poole arvuga 10, saame, et

$$10^y = 2^{10}$$

ehk

$$10^y = 1024.$$

Et arv 1024 asetseb järkarvude 10^3 ja 10^4 vahel, siis astendaja y asetseb arvude 3 ja 4 vahel:

$$3 < y < 4.$$

Järelikult me võime arvu y esitada kujul:

$$y = 3 + \frac{z}{10},$$

kus z on mingi positiivne arv, mis on väiksem kui 10.

Seega võime viimase võrrandi nüüd kirjutada kujul:

$$10^{3+\frac{z}{10}} = 1024$$

ehk

$$1000 \cdot 10^{\frac{z}{10}} = 1024$$

ehk

$$10^{\frac{z}{10}} = 1{,}024.$$

Astendades selle võrrandi kummagi poole arvuga 10, saame, et

$$10^z = 1{,}024^{10}.$$

Otsese korrutamise teel või 10-ndate astmete tabelist leiame, et

$$1{,}024^{10} \approx 1{,}2677,$$

millises tulemuses on lõpust jäetud kirjutamata meile tarbetud 26 numbrit. Seega viimane võrrand nõuab, et

$$10^z \approx 1{,}2677.$$

Et arv 1,2677 asetseb arvude 10^0 ja 10^1 vahel, siis arv z asetseb arvude 0 ja 1 vahel. Järelikult võime arvu z esitada kujul:

$$z = \frac{u}{10},$$

kus u on mingi positiivne arv, mis on väiksem kui 10. Seega võime viimase võrrandi kirjutada kujul:

$$10^{\frac{u}{10}} \approx 1{,}2677$$

ehk

$$10^u \approx 1{,}2677^{10}.$$

Otsese korrutamise teel või tabelist leiame, et

$$1{,}2677^{10} \approx 10{,}72.$$

Seega on

$$10^u = 10{,}72.$$

Et arv 10,72 asetseb arvude 10 ja 10^2 vahel, siis arv u asetseb arvude 1 ja 2 vahel. Valime arvu u ligikaudseks väärtuseks esimese nendest arvudest:

$$u = 1.$$

Siis saame, et

$$z = \frac{u}{10} = 0{,}1$$

ja

$$y = 3 + \frac{z}{10} = 3{,}01$$

ning lõpuks, et

$$x = \frac{y}{10} = 0{,}301.$$

Seega oleme leidnud log 2 ligikaudse väärtuse kolmekohalise murdosaga:

$$\log 2 = 0{,}301.$$

Ülesanne.

27. Arvutada log 3 ligikaudne väärtus kahekohalise murdosaga, teades, et $3^{10} = 59049$ ja $5{,}9049^{10} = 5{,}15 \cdot 10^7$

§ 9. Logaritmi kirjutusviis.

Nagu nägime paragrahvis 7,

järkarvude logaritmid on täisarvud;

näiteks

$$\log 10000 = \log 10^4 = 4,$$

$$\log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4.$$

Seal oli ka tõestatud, et k õ i g i t e i s t e r a t s i o n a a l s e t e a r v u d e l o g a r i t m i d o n i r r a t s i o n a a l s e d. Niisugused logaritmid avalduvad lõpmatute kümnendmurdudena, mis ei taandu harilikeks murdudeks. Nii on

$$\log 3 = 0{,}47712\ldots,$$

$$\log 0{,}041 = -1{,}38722\ldots$$

Logaritmid antakse l i g i k a u d s e t e n a, tavaliselt kas 4, 5 või 7 kohaga. Enamik tegelikkuse poolt seatud ülesandeid ei vaja lahendamiseks enam kui neljakohalisi logaritme. Me kirjutame neid kujul

$$\log 3 = 0{,}4771,$$

$$\log 0{,}041 = -1{,}3872,$$

pidades meeles, et võrdusmärki siin üldiselt ikka tuleb mõista ligikaudse võrdumise sümbolina.

Logaritm koosneb t ä i s o s a s t ja m u r d o s a s t; näiteks on $\log 473 = 2{,}6749$; siin on logaritmi täisosa 2 ja murdosa 0,6749; edasi $\log 0{,}0854 = -1{,}0685$; siin on täisosa —1 ja murdosa —0,0685.

On otstarbekohane logaritme kirjutada nii, e t n e n d e m u r d o s a i g a l j u h u l o n p o s i t i i v n e. Kui logaritm on negatiivne, siis liidame selle murdosaga arvu 1 ja et logaritmi väärtus ei muutuks, liidame tema täisosaga arvu —1.

N ä i d e.

$$\begin{aligned}\log 0{,}041 &= -1{,}3872 = -1 + (-0{,}3872) = \\ &= (-1 - 1) + (1 - 0{,}3872) = \\ &= -2 + 0{,}6128.\end{aligned}$$

Lühidalt kirjutame selle teisenduse ja tulemuse nii üles:

$$\log 0{,}041 = -1{,}3872 = \overbrace{-1{,}}^{-1+1,}3872 = \bar{2}{,}6128.$$

Seda kirjutist loeme järgmiselt:

log 0,041 on kaks miinusega koma kuuskümmend üks kakskümmend kaheksa.

Sääraselt väljendatud negatiivsete logaritmide kohta ütleme, et nad on väljendatud p o o l n e g a t i i v s e l kujul.[1]

Et poolnegatiivsel kujul väljendatud logaritmi saada täisnegatiivsel kujul, selleks tuleb teda teisendada nii, et ta murdosa saaks negatiivseks: murdosaga tuleb liita arv —1 ja, et logaritmi väärtus ei muutuks, tuleb tema täisosaga liita arv 1.

N ä i d e:

$$\begin{aligned}\log 0{,}041 &= \bar{2}{,}6128 = -2 + 0{,}6128 = \\ &= (-2 + 1) + (-1 + 0{,}6128) = \\ &= -1 + (-0{,}3872) = -1{,}3872.\end{aligned}$$

Lühidalt kirjutame selle teisenduse nii üles:

$$\log 0{,}041 = \bar{2}{,}6128 = \overbrace{\bar{2}{,}}^{+1-1,}6128 = -1{,}3872.$$

[1] Logaritmi täisosa nimetatakse ka tema k a r a k t e r i s t i k u k s ja positiivset murdosa — tema m a n t i s s i k s.

28. Väljendada järgmised negatiivsed arvud poolnegatiivsel kujul:

1.	2.	3.	4.
—0,6	—0,8	—1,2	—1,7
—1,0	—2,65	—3,12	—1,98
—2,046	—3,557	—4,001	—3,0021

29. Teisendada järgmised poolnegatiivsel kujul antud arvud täisnegatiivseteks:

1.	2.	3.	4.
$\bar{1},3$	$\bar{1},8$	$\bar{2},4$	$\bar{2},9$
$\bar{2},73$	$\bar{3},82$	$\bar{1},301$	$\bar{1},477$
$\bar{3},000$	$\bar{2},903$	$\bar{3},8062$	$\bar{4},6911$

Kahe logaritmi vahe arvutatakse alati nii, et selle murdosa on positiivne. Kui vahe on negatiivne, siis tuleb ta väljendada poolnegatiivsel kujul. Kuid otstarbekam on vahe arvutada vahetult poolnegatiivsel kujul. Seda saavutatakse sellega, et lahutatava murdosa lahutatakse vähendatava murdosast igal juhul, ka siis, kui vähendatav ise on väiksem kui lahutatav. Viimane asjaolu leiab väljenduse alles täisosade lahutamisel: vahe täisosa tuleb negatiivne.

N ä i d e 1. Leiame arvude 1,47 ja 2,34 vahe pool negatiivsel kujul.

$$\begin{array}{r} 1,47 \\ -2,34 \\ \hline \bar{1},13 \end{array}$$

Lahutades murdosast 0,47 murdosa 0,34 saame vahe murdosa positiivsena 0,13. Lahutades täisosast 1 täisosa 2 saame vahe täisosana —1. Seega nende arvude vahe poolnegatiivne kuju on $\bar{1},13$.

Kui vähendatava murdosa on väiksem kui lahutatava murdosa, siis tuleb esimest suurendada 1 ühelise võrra, mille võrra peab siis ka vähendama vähendatava täisosa („laenamine"), mida märgime punktiga vähendatava täisosal.

N ä i d e 2. Leiame arvude 2,16 ja 3,84 vahe poolnegatiivsel kujul.

$$\begin{array}{r} \dot{2},16 \\ -3,84 \\ \hline \bar{2},32 \end{array}$$

Suurendanud vähendatava murdosa 1 ühelise võrra ja lahutanud arvust 1,16 murdosa 0,84, saame vahe murdosa 0,32 positiivsena. Lahutades vähendatava täisosast, kuhu nüüd on jäänud 1 üheline, lahutatava täisosa 3, saame vahe täisosana —2. Seega nende arvude vahe poolnegatiivsel kujul on $\bar{2},32$.

Allpool toome mõned näited tehetest poolnegatiivsel kujul antud arvudega.

N ä i d e 3. Liidame arvud $\bar{1},4823$ ja $\bar{2},9145$.

$$\begin{array}{r} \bar{1},4823 \\ +\bar{2},9145 \\ \hline \bar{2},3968 \end{array}$$

Nende arvude murdosade summa on 1,3968, mille murdosa ongi antud arvude summa murdosa. Selle arvu täisosa 1 liidame liidetavate täisosadega: $\bar{1} + \bar{2} + 1 = \bar{2}$. Seega antud arvude summa on $\bar{2},3968$.

N ä i d e 4. Lahutame arvust $\bar{3},2687$ arvu $\bar{1},8342$.

$$\begin{array}{r} \dot{\bar{3}},2687 \\ -\bar{1},8342 \\ \hline \bar{3},4345 \end{array}$$

Et vähendatava murdosa on väiksem kui lahutatava oma, siis suurendame seda 1 ühelise võrra, mille võrra vähendame vähendatava täisosa („laenamine"), mida märgime punktiga vähendatava täisosal. Lahutades arvust 1,2687 murdosa 0,8342, saame vahe murdosa 0,4345. Vähendatava täisosa on nüüd $\bar{3} - 1 = \bar{4}$; lahutades sellest täisosa $\bar{1}$, saame $\bar{4} - \bar{1} = -4 - (-1) = -4 + 1 =$ $= -3 = \bar{3}$. Seega antud arvude vahe on $\bar{3},4345$.

N ä i d e 5. Arvutame korrutise $4 \cdot \bar{1},573$.

$$\begin{array}{r} \bar{1},573 \\ \cdot\ 4 \\ \hline \bar{2},292 \end{array}$$

Korrutades neljaga murdosa 0,573, saame arvu 2,292, mille murdosa on nõutud korrutise murdosa. Selle arvu täisosa liidame korrutatava täisosa korrutamisest saadud arvuga: $4 \cdot \bar{1} + 2 =$ $= \bar{4} + 2 = \bar{2}$. Seega antud arvude korrutis on $\bar{2},292$. Kui korrutaja on mitmekohaline arv, siis on soovitav korrutada selle arvuga eraldi poolnegatiivse arvu murdosa ja täisosa ning hiljem kirjalikult liita tulemused.

N ä i d e 6. Arvutame korrutise $\overline{12} \cdot 1,643$.

$$\begin{array}{r} \bar{1},643 \\ \cdot\ 12 \\ \hline 1286 \\ 643 \\ \hline 7,716 \\ +\ \overline{12} \\ \hline \bar{5},716 \end{array}$$

Korrutades eraldi murdosa 0,643 ja täisosa $\bar{1}$ arvuga 12, saame 7,716 ja $\overline{12}$. Nende summa on $\bar{5},716$. See ongi otsitav korrutis.

Poolnegatiivsel kujul antud arvu jagamisel mingi täisarvuga peab juhul, kui ta täisosa ei jagu jagajaga, täisosa täiendama sellise arvuni, mis jagub jagajaga. Et seejuures jagatava suurus ei muutuks, tuleb murdosaga liita tehtud täiendusega absoluutväärtuselt võrdne, kuid märgilt vastupidine arv.

N ä i d e 7. Arvutame jagatise $\bar{1},564 : 4$.

Täiendame jagatava täisosa 4-ga jaguva arvuni —4. Selleks lisame täisosale arvu —3 ja murdosale lisame 3 ühelist.

$$\bar{1},564 : 4 = \overset{-3+3,}{\bar{1},564} : 4 = (\bar{4} + 3,356) : 4 =$$
$$= \bar{1} + 0,891 = \bar{1},891.$$

Poolnegatiivsel kujul antud arvu korrutamisel murruga tuleb täpsema tulemuse saamiseks, nagu tavalisi arvegi, e n n e korrutada lugejaga ja alles selle järel jagada nimetajaga.

Ülesanded.

30. Arvutada järgmised summad poolnegatiivsel kujul:

1. $\bar{2},1 + 1,7$
$\bar{2},7 + 1,8$
$\bar{1},5 + \bar{3},2$

2. $\bar{1},2 + \bar{2},5$
$\bar{3},8 + \bar{2},3$
$\bar{1},7 + \bar{1},4$

3. $\bar{1},5674 + 2,4589 + \bar{3},1224$
$0,7009 + \bar{1},4851 + \bar{2},2156$
$\bar{1},5620 + \bar{1},4730 + \bar{1},8566$
$\bar{2},8862 + \bar{3},4973 + \bar{1},3338 + \bar{2},9001$

31. Arvutada järgmised vahed poolnegatiivsel kujul:

1. $2,8 - 3,5$
$\bar{2},5 - 0,8$
$5,4 - \bar{1},2$

2. $0,7 - 2,4$
$\bar{2},6 - 1,2$
$0,5 - \bar{1},6$

3. $1,2 - 4,7$
$\bar{3},4 - 1,9$
$\bar{2},3 - \bar{1},8$

4. $1,4285 - 1,9342$
$1,0512 - 3,6701$
$\bar{1},5383 - 1,7811$
$\bar{2},5060 - \bar{2},8040$

5. $2,7006 - 3,8004$
$\bar{1},4276 - 0,2086$
$\bar{1},0896 - 2,9003$
$\bar{2},4896 - \bar{4},5672$

32. Arvutada järgmised korrutised poolnegatiivsel kujul:

1. $3 \cdot \bar{1},2$ | 2. $10 \cdot \bar{2},4$ | 3. $5 \cdot \bar{1},7$
$10 \cdot \bar{1},3$ | $2 \cdot \bar{2},9$ | $15 \cdot \bar{1},8$
$4 \cdot \bar{1},4$ | $12 \cdot \bar{1},6$ | $6 \cdot \bar{2},3$
$4 \cdot \bar{2},5672$ | $11 \cdot \bar{1},9873$ | $-2 \cdot \bar{1},3824$
$3 \cdot \bar{1},7004$ | $24 \cdot \bar{1},9991$ | $-3 \cdot \bar{1},4410$

33. Arvutada järgmised jagatised poolnegatiivsel kujul:

1. $\bar{2},8 : 2$ | 2. $\bar{2},5 : 3$ | 3. $\bar{2},8 : 4$
$\bar{1},4 : 3$ | $\bar{4},7 : 2$ | $\bar{3},6 : 2$
$\bar{1},4 : 2$ | $\bar{3},6 : 4$ | $\bar{1},6 : 5$

4. $\bar{3},4812 : 3$ | 5. $\bar{2},5341 : 3$ | 6. $\bar{1},4384 : 2$
$\bar{2},2668 : 4$ | $\bar{1},6723 : 4$ | $\bar{4},2403 : 10$
$\bar{1},4242 : 5$ | $\bar{2},6723 : 6$ | $\overline{12},0072 : 16$

34. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused poolnegatiivsel kujul, teades, et $\log 0,041 = \bar{2},6128$ ja $\log 0,002 = -2,6990$:

1. $2 \log 0,041$ | 2. $\log 0,041 + \log 0,002$ | 3. $\frac{2}{3} \log 0,041$
$4 \log 0,002$ | $2 \log 0,041 - 4 \log 0,002$ | $\frac{3}{4} \log 0,002$

35. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused, teades, et $10^{0,4971} = \pi$ ja $10^{\bar{1},6990} = \frac{1}{2}$:

1. $\log \frac{1}{2} + \log \pi$ | 2. $\frac{2}{5} \log \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \log \pi$
$\log \frac{1}{2} - \log \pi$ | $12 \log \frac{1}{2} + 4 \log \pi$

§ 10. Logaritmi täisosa määramine.

Tõestame teoreemi:

Arvu a korrutamisel järkarvuga 10^m jääb arvu logaritmi murdosa endiseks, täisosa aga muutub arvu m absoluutväärtuse võrra suuremaks või väiksemaks, vastavalt sellele, kas m on positiivne või negatiivne,

mis kehtib ka negatiivse logaritmi kohta, kui see on esitatud poolnegatiivsel kujul.

Tõestuseks korrutame võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole järkarvuga 10^m. Siis saame, et

$$10^m \cdot a = 10^m \cdot 10^{\log a}$$

ehk

$$10^m \cdot a = 10^{m + \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal saame viimasest võrdusest, et

$$\log (10^m \cdot a) = m + \log a.$$

Sellest nähtub, et arvu $10^m \cdot a$ logaritm erineb arvu a logaritmist t ä i s a r v u m võrra; seetõttu on arvu $10^m \cdot a$ ja arvu a logaritmidel üks ja sama murdosa.

Teades, et

$$\log 2 = 0{,}301,$$

võime äsja tõestatud teoreemi põhjal öelda, et

$$\log 20 = 1{,}301 \qquad \log 200 = 2{,}301 \qquad \log 20000 = 4{,}301$$
$$\log 0{,}2 = \bar{1}{,}301 \qquad \log 0{,}02 = \bar{2}{,}301 \qquad \log 0{,}0002 = \bar{4}{,}301$$

Nendest näidetest nähtub, et logaritmi täisosa kohta kehtib järgmine juhis:

1. Arvudel, mis on suuremad kui 1, on logaritmi täisosa ühe võrra väiksem selle arvu täisosa numbrite arvust.

2. Positiivsetel kümnendmurdudel, mis on väiksemad kui 1, on logaritmi täisosa negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub selle arvu avanullide arvuga.

Selle juhise põhjendamiseks paneme tähele, et kõik ühekohalise täisosaga arvud asetsevad 1 ja 10 vahel; järelikult nende arvude logaritmid asetsevad 0 ja 1 vahel; seega nende arvude logaritmide täisosa on 0. Nii näiteks on $\log 7,85 = 0,8949$.

Seega on ülalantud juhis ühekohalise täisosaga arvude kohta õige. Kuid varem tõestatud teoreemi abil saame nüüd järeldada, et see juhis on kehtiv iga arvu kohta. Tõepoolest, iga n-kohalise täisosaga arvu saab sellesama tüvega ühekohalise täisosaga arvust, kui seda korrutada järkarvuga 10^{n-1}. Selle korrutamise tagajärjel logaritmi täisosa, mis enne oli 0, saab võrdseks arvuga $n - 1$, mis ongi kooskõlas ülalantud juhisega. Näiteks arvu 785 saame, kui korrutame arvu 7,85 arvuga 10^{3-1} ehk 10^2. Et $\log 7,85$ täisosa on 0, siis $\log 785$ täisosa peab olema 2. Seega on $\log 785 = 2,8949$.

Korrutades ühekohalise täisosaga arvu järkarvuga 10^{-n}, saame n avanulliga arvu. Seejuures arvu logaritmi täisosa muutub n võrra väiksemaks. Et enne korrutamist logaritmi täisosa oli 0, siis pärast korrutamst see on $-n$. Seega on ülalantud juhis õige ka 1-st väiksemate positiivsete arvude puhul. Nii on näiteks $\log 0,0785$ täisosa -2 ja seega on $\log 0,0785 = \bar{2},8949$.

Ülalöeldust järeldub, et 1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritmide tundmisest piisab, et saada kõigi teiste arvude logaritme. Kui on näiteks teada, et

$$\log 5,27 = 0,7218,$$

siis teame kohe, et $\log 52,7 = 1,7218$, $\log 5270 = 3,7218$, $\log 0,527 = \bar{1},7218$, $\log 0,000527 = \bar{4},7218$ jne.

Ülesanded.

36. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1.	2.	3.
log 19	log 82	log 345
log 7	log 5793	log 11
log 765,8	log 1,764	log 4739,48
log 16000	log 555694	log 47,3948

37. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1.	2.	3.
log 0,7	log 0,084	log 0,00076
log 0,0163	log 0,00357	log 0,9837
log 0,00002	log 0,0101	log 0,00400

§ 11. Logaritmide tabel.

Nagu allpool näeme, omavad logaritmid suurt väärtust arvutusabinõuna. Logaritmide kiireks ja hõlpsaks leidmiseks on koostatud logaritmide tabelid. Et logaritmi täisosa määramine ülaltoodud eeskirja järgi toimub vaevata, siis antakse logaritmide tabelis ainult logaritmide murdosad. Juuresolevalt näeme väljalõiget K. Ratassepa „Matemaatilistes tabelites" leiduvast neljakohaliste logaritmide tabelist:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6

Selle tabeli esimene veerg sisaldab kahekohalisi logaritmitavaid ja teine veerg (pealkirjaga 0) sisaldab nende arvude logaritmide murdosasid. Nende kahe veeru abil võib leida iga ühe- ja kahekohalise arvu logaritmi.

N ä i d e 1. Leiame arvu 6,4 logaritmi.

Eelmises paragrahvis antud juhise järgi selle arvu logaritmi täisosa on 0; tema murdosa leiame logaritmide tabeli teisest veerust esimese veeru arvu 64 kohalt: see on 8062.

Seega

$$\log 6{,}4 = 0{,}8062.$$

Kolmekohaliste arvude logaritmid on selles tabelis toodud veergudes, millede pealkirjaks on arvud 0, 1, 2, . . . , 9. Mingi kolmekohalise arvu logaritmi murdosa leitakse reast, mille ette on trükitud (esimeses veerus) selle arvu esimesest kahest numbrist moodustatud arv, ja veerust, mille pealkirjaks on selle arvu kolmas number.

N ä i d e 2. Leiame arvu 0,698 logaritmi poolnegatiivsel kujul.

Selle arvu logaritmi täisosa on —1. Logaritmi murdosa leiame reast, mille ette on trükitud 69, ja veerust, mille pealkirjaks on 8: see on 8439.

Seega

$$\log 0{,}698 = \bar{1}{,}8439.$$

Neljakohaliste logaritmide tabel ei anna otseselt neljakohaliste arvude logaritme, vaid need leitakse kolmekohaliste arvude logaritmide kaudu, tehes neis neljandale numbrile vastava paranduse.

N ä i d e 3. Leiame arvu 6324 logaritmi.

Selle arvu logaritmi täisosa on 3. Logaritmi murdosa, mida tabelis ei leidu, leiame järgmiselt. Tabelist nähtub, et arvu 6320 logaritmi murdosa on 8007 ja et arvu 6330 logaritmi murdosa on 8014. Seega logaritmitava kasvades viimase koha 10 ühiku võrra, logaritmi murdosa kasvab tabeli selles osas viimase koha 7 ühiku võrra. L u g e d e s l o g a r i t m i t a v a j a l o g a r i t m i j u u r d e k a s v u d v õ r d e l i s t e k s, leiame, et logaritmitava juurdekasvule 4 vastab logaritmi juurdekasv $\frac{4 \cdot 7}{10} = 2{,}8$ ehk ümardatult 3 viimase koha ühikut.

Seega arvu 6324 logaritmi murdosa on $8007 + 3 = 8010$ ja

$$\log 6324 = 3{,}8010.$$

Seda logaritmi leidmise võtet kirjutatakse kokkuvõtlikult järgmises skeemis:

$$\begin{array}{r} \log 6320 = 3{,}8007 \\ 4 \quad . \ . \ . \ . \quad 3 \\ \hline \log 6324 = 3{,}8010. \end{array}$$

Logaritmitava neljandale numbrile vastavad parandused logaritmi murdosale on siin tsiteeritud tabelis antud valmitena nn. p a r a n d u s v e e r g u d e s pealkirjaga 1, 2, 3, . . . , 9. Nõutav parandus leitakse samast reast, millest leiti logaritmi murdosa, ja veerust, mille pealkirjaks on logaritmitava neljas number. Nii leiame viimases näites arvutatud paranduse 3 reast 63 ja veerust 4.

Need on teatavad keskmised parandused, mis kehtivad ainult vastava rea kohta ja üldiselt muutuvad realt reale. See muutumine on eriti kiire tabeli alguses. Esimeses reas (10) toimub murdosa muutumine nii kiiresti, et pole võimalik anda kogu rea kohta kehtivaid parandusi. Seepärast puuduvad tabeli selles reas need parandused. Seetõttu tuleb arvude 1001 kuni 1099 neljandale kohale vastavad parandused leida arvutamise teel või kasutada selleks „Matemaatiliste tabelite" kaantel toodud võrdeliste osade tabelit.

Võrdeliste osade tabeli esimene veerg (pealkirjaga D) sisaldab nn. tabelivahesid, s. o. logaritmitava neljanda järgu 10 ühiku suurusele juurdekasvule vastavaid logaritmi murdosa juurdekasve murdosa viimase järgu ühikuis.

Nõutav parandus leitakse võrdeliste osade tabelist tabelivahele vastavast reast ja logaritmitava viimasele numbrile vastavast veerust.

Nii leiame arvu 6324 (vt. näide 3) neljandale numbrile 4 vastava logaritmi murdosa paranduse reast 7 (sest tabelivahe on 7) ja veerust 4 (mõnes trükis on veeru pealkiri 0,4); see on 2,8, nagu varemgi oli leitud.

Logaritmide tabelit saab kasutada ka vastupidiseks otstarbeks — antud logaritmi järgi leida logaritmitav ehk antud astendaja järgi leida arvu 10 aste.

Selleks tuleb logaritmide tabelit kasutada niiöelda vastupidises suunas — logaritmi murdosa järgi otsida logaritmitava tüvenumbreid.

Näide 4. Leida arv, mille logaritm on 2,8375 ehk, teiste sõnadega, leida avaldise $10^{2,8375}$ väärtus.

Et logaritmi täisosa on —2, siis logaritmitavas on kaks avanulli.

Logaritmitava tüvi on määratud logaritmi murdosaga 8375. Kuid tabelis seda murdosa ei leidu. Tabelist nähtub aga, et murdosale 8370 vastab tüvi 6870 ja järgmisele suuremale murdosale 8376 vastab tüvi 6880. Seega logaritmi murdosa kasvades viimase järgu 6 ühiku (tabelivahe) võrra, logaritmitav kasvab viimase järgu 10 ühiku võrra. Järelikult murdosa juurdekasvule 8375 — 8370 = = 5 vastab logaritmitava juurdekasv $\frac{5 \cdot 10}{6} = 8{,}3$ ehk ümardatult 8 viimase järgu ühikut. Seega logaritmitava neljas tüvenumber on 8 ja logaritmitav on 0,06878.

See logaritmitava leidmine kirjutatakse üles järgmise skeemi näol:

$$\begin{array}{ll} 10^{\bar{2},8370} = 0{,}0687 \\ \quad 5 \;.\;.\;.\;.\; 8 \\ \hline 10^{\bar{2},8375} = 0{,}06878 \end{array} \qquad \text{või} \qquad \begin{array}{ll} \bar{2},8370 = \log 0{,}0687 \\ \quad 5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 8 \\ \hline \bar{2},8375 = \log 0{,}06878. \end{array}$$

Logaritmitava neljanda tüvenumbri võime võtta ka valmina parandusveergudest, ta vastab logaritmi murdosa juurdekasvule võrreldes tabelimurdosaga. Selleks on vaja samast reast, millest võeti logaritmi murdosa, leida murdosa juurdekasv parandusveergudes; vastava veeru pealkiri ongi logaritmitava otsitav neljas tüvenumber. Nii leiame, et reas 68 murdosa juurdekasv 5 esineb veerus pealkirjaga 8; seega logaritmitava neljas tüvenumber on 8.

Samuti võime logaritmitava neljanda tüvenumbri leida ka võrdeliste osade tabeli abil, kasutades seda endisele vastupidises suunas. Tabelivahele 6 vastavas reas murdosa juurdekasvule 5 lähima arvuna leiame arvu 4,8. See asetseb veerus, mille pealkiri on 8; seega saame jällegi, et logaritmitava neljas tüvenumber on 8.

Ülesanded.

38. Kirjutada järgmiste arvude logaritmid, leides nende täisosa peast ja võttes nende murdosa tabelist:

1.	2.	3.	4.
19	23	37	65
74	79	86	98
130	280	450	890
274	338	641	973
497	521	763	888

39. Kasutades logaritmide tabelit, leida järgmiste avaldiste väärtused:

1.	2.	3.	4.
log 30	log 300	log 0,3	log 0,03
log 700	log 0,7	log 7000	log 0,007
log 86	log 8,6	log 860	log 0,0086
log 4,83	log 4830	log 0,483	log 0,000483
log 958	log 95800	log 9,58	log 0,00958

40. Leida logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.	4.
0,87	0,34	0,575	0,982
1,4	5,7	3,79	8,46
60,8	47,3	59,7	78,2
0,05	0,067	0,0145	0,0653
0,0082	0,0195	0,00418	0,000781

41. Leida logaritmide tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1.	2.	3.
0,0719	0,2068	1,2856
2,6902	1,7993	3,9823
$\bar{1},4314$	0,8751	$\bar{2},9685$
3,2989	2,8007	0,5988
$\bar{2},1790$	$\bar{1},2765$	$\bar{1},7050$

42. Kujutada järgmised arvud 10 astmetena:

1.	2.	3.	4.
2,3	356	0,153	0,0247
4,8	7805	0,3472	0,00681
84	8325	0,4851	0,000734

43. Kasutades logaritmide tabelit, leida järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.
$1,3 \cdot 10^4$	$5,8 \cdot 10^6$	$9,7 \cdot 10^8$
$38,7 \cdot 10^{-2}$	$59,6 \cdot 10^{-4}$	$7,54 \cdot 10^{-6}$
$0,084 \cdot 10^{-3}$	$0,62 \cdot 10^{-5}$	$0,0092 \cdot 10^{-4}$

44. Leida logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1. 2582	2. 3094	3. 6768	4. 8346
35,74	56,65	580,8	7,344
7,833	0,06348	95720	0,6104
0,4560	1,745	0,6389	9,372
0,005962	0,0009834	837,5	748900

45. Leida tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1. 0,9157	2. 1,9482	3. 2,9892
2,7106	0,8290	1,9040
$\overline{1},6174$	$\overline{2},6613$	$\overline{1},6450$
$\overline{3},3394$	$\overline{1},4526$	$\overline{2},0316$
0,8735	$\overline{3},7908$	$\overline{4},6080$

46. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1. $10^{0,3010}$	2. $10^{\overline{1},6021}$	3. $10^{-0,2941}$
$10^{0,7076}$	$10^{\overline{2},7380}$	$10^{-1,9191}$
$10^{1,4771}$	$10^{\overline{2},6940}$	$10^{-2,1923}$

47. Leida tabeli abil järgmiste arvude logaritmid, ümardades arvud enne neljakohalisteks:

1. 6538,76	2. 903764	3. 10,9975
72,7462	5,69728	0,010083
8,56956	1850063	0,00207486
0,0123456	0,0076543	9754682
0,00078935	0,0891347	34678,910

48. Leida tabeli abil järgmiste logaritmide järgi logaritmitavad, ümardades logaritmid enne neljakohalisteks:

1. 1,17613	2. 0,010574	3. $\overline{1},45667$
2,39875	0,377592	$\overline{2},700937$
3,04967	0,476150	$\overline{4},790164$
0,48927	1,93456	0,39848
0,03584	3,72184	0,00478

49. 1. Kui suur on

log log 10 log log 2 log log 6310?

2. Leida arv x, teades, et log log x = $\bar{2}$,9210.

3. Leida arv x, teades, et log log x = $\bar{1}$,6128.

§ 12. Avaldiste logaritmimine.

Avaldise logaritmi avaldamist avaldises esinevate arvude logaritmide abil nimetatakse avaldise logaritmimiseks.

Logaritmimine toimub järgmise nelja teoreemi alusel.

1. Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

Eespool (§ 6) tutvusime juba selle lause erijuhtumiga, kui üks tegureist on järkarv 10^m. Seal nägime, et

$$\log (a \cdot 10^m) = \log a + m,$$

ehk

$$\log (a \cdot 10^m) = \log a + \log (10^m).$$

Siin tõestame selle lause üldjuhtumi.

T õ e s t u s. Olgu korrutise kaks tegurit a ja b ning olgu teada ka nende tegurite logaritmid. Logaritmi definitsiooni järgi kirjutame

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b}.$$

Korrutades nende võrduste vasakuid pooli teineteisega ja paremaid pooli teineteisega, leiame, et

$$ab = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldame siit, et

$$\boxed{\log (ab) = \log a + \log b}$$

Saab tõestada, et väide on õige ka siis, kui tegureid on enam kui kaks. Olgu korrutises kolm tegurit a, b ja c. Siis eelmise põhjal

$$\begin{aligned}\log(abc) &= \log(ab \cdot c) = \log ab + \log c = \\ &= \log a + \log b + \log c.\end{aligned}$$

2. Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega

T õ e s t u s. Olgu jagatav a ja jagaja b. Et

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b},$$

siis

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = 10^{\log a - \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\boxed{\log \frac{a}{b} = \log a - \log b}$$

J ä r e l d u s. Võttes jagatise logaritmi valemis $a = 1$ ja sellele vastavalt $\log a = 0$, leiame

$$\log \frac{1}{b} = -\log b,$$

millest nähtub, et

arvu ja tema pöördarvu logaritmid erinevad ainult märgilt.

3. Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

T õ e s t u s. Olgu astendatav a ja astendaja n. Astendades võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole arvuga n, saame

$$a^n = (10^{\log a})^n$$

ehk

$$a^n = 10^{n \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\boxed{\log a^n = n \log a}$$

4. Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

T õ e s t u s. Olgu juuritav a ja juurija n. Võttes võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

mõlemast poolest n-nda juure, saame

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^{\log a}}$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = 10^{\frac{\log a}{n}}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\boxed{\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}}$$

Ülesanded.

50. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $pq \qquad pqr \qquad 3ab \qquad 2\pi r \qquad 9 \cdot 78\, mn$

2. $\frac{p}{q} \qquad \frac{pq}{r} \qquad \frac{ab}{cd} \qquad \frac{5\, mn}{abc} \qquad \frac{47\, uv}{8\, st}$

51. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $a^2 \qquad a^4 \qquad (ab)^3 \qquad ab^4 \qquad a^3 : b^2$

2. $a^2\, b^3 \qquad 2\pi r^2 \qquad \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \frac{p^2}{q^3\, r^2}$

3. $\sqrt{a}$ $\quad \sqrt[3]{a}$ $\quad \sqrt[5]{ab}$ $\quad a\sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt{a^3}$

4. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ $\quad \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^4}$ $\quad \sqrt[4]{(ab)^5}$ $\quad \sqrt[4]{ab^5}$ $\quad \frac{a}{\sqrt{b}}$

5. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$ $\quad \sqrt{ab} : \sqrt[4]{xy^3}$

§ 13. Logaritm arvutusvahendina.

Mitmekohaliste arvude korrutiste, jagatiste, astmete ja juurte otsene arvutamine on üldiselt tülikas töö. Seejuures tuleb sageli arvutada hulgaliselt ka niisuguseid kohti, mis tulemuses tuleb kustutada, sest et neil kohtadel ülesande loomu järgi ei ole mõtet.

Olgu näiteks vaja arvutada $0{,}4726^5$. Otsene arvutamine annaks tulemuses 20 kohta koma järel; neist kohtadest säilitaksime vahest kõigest 4 ja kustutaksime kõik 16 ülejäänut.

Väga tunduvat aja ja vaeva kokkuhoidu võimaldab siin logaritmide kasutamine. Seda selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada $0{,}4726^5$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x; siis

$$x = 0{,}4726^5.$$

Siit

$$\log x = 5 \cdot \log 0{,}4726.$$

Leiame nüüd tabeli abil log 0,4726, korrutame selle 5-ga ja otsime saadusele kui logaritmile vastava arvu x. Töö kujuneb nii:

$$\log 0{,}4726 = \bar{1}{,}6745,$$

$$5 \log 0{,}4726 = \bar{2}{,}3725,$$

seega

$$\log x = 2{,}3725$$

ja

$$x = 0{,}02358$$

ehk ümardatult

$$0{,}4726^5 = 0{,}0236.$$

Ülesanne 2. Arvutada jagatis

$$\frac{17{,}85^2 \cdot 9{,}357}{0{,}3814 \cdot 5{,}382^3}.$$

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

$$\log x = 2 \cdot \log 17{,}85 + \log 9{,}357 -$$
$$- (\log 0{,}3814 + 3 \cdot \log 5{,}382).$$

Arvutused teostame korrastatult, käesoleval juhtumil näiteks järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{lrr}
2 \cdot \log 17{,}85 = 2 \cdot 1{,}2516 = & 2{,}5032 & \\
\log\ 9{,}357 = & 0{,}9711 & \\
\hline
 & & 3{,}4743 \\
\log\ 0{,}3814 = & \bar{1}{,}5814 & \\
3 \cdot \log\ 5{,}382 = 3 \cdot 0{,}7310 = & 2{,}1930 & \\
\hline
 & & 1{,}7744 \\
\log x = & & 1{,}6999 \\
x = 50{,}11. & &
\end{array}$$

Ülesanne 3. Arvutada jagatis

$$\frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c}},$$

kui $a = 0{,}07845$, $b = 10{,}68$ ja $c = 3984$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Avaldist logaritmides saame siis, et

$$\log x = \tfrac{1}{2} \log a + \tfrac{2}{3} \log b - \tfrac{1}{5} \log c.$$

Tähtede antud arvulistel väärtustel on seega

$$\log x = \tfrac{1}{2}\log 0{,}07845 + \tfrac{2}{3}\log 10{,}68 - \tfrac{1}{5}\log 3984.$$

Arvutustöö võib korraldada siin näiteks järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{lcl}
\tfrac{1}{2}\log 0{,}07845 & = \tfrac{1}{2}\cdot\overline{2},8946 = & 1{,}4473 \\
\tfrac{2}{3}\log 10{,}68 & = \tfrac{2}{3}\cdot 1{,}0286 = & 0{,}6857 \\
\hline
 & & 0{,}1330 \\
\tfrac{1}{5}\log 3984 & = \tfrac{1}{5}\cdot 3{,}6003 = & 0{,}7201 \\
\hline
 & \log x = & 1{,}4129 \\
 & x = 0{,}2588. &
\end{array}$$

Ülesanded.

52. Arvutada logaritmide abil järgmised korrutised ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$2{,}36\cdot 64{,}4 \qquad 3{,}28\cdot 6{,}95 \qquad 2{,}64\cdot 32{,}5$

53. Arvutada logaritmide abil järgmised korrutised:

1.	2.
$23{,}6\cdot 567$	$8{,}34\cdot 16{,}9\cdot 671$
$15{,}68\cdot 2{,}968$	$6{,}125\cdot 0{,}8032\cdot 0{,}01879$
$7462\cdot 0{,}009517$	$15{,}09\cdot 306{,}2\cdot 0{,}07654$
$808{,}2\cdot 0{,}0008438$	$70{,}06\cdot 0{,}007825\cdot 652$
$0{,}9876\cdot 0{,}05412$	$0{,}0714\cdot 0{,}6398\cdot 0{,}0043$

54. Arvutada logaritmide abil järgmised jagatised ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$38{,}1 : 5{,}12 \qquad 2880 : 6{,}81 \qquad 389 : 604$

55. Arvutada logaritmide abil järgmised jagatised:

1.	2.	3.
$\dfrac{802}{44390}$	$\dfrac{4{,}062}{0{,}5968\cdot 3{,}92}$	$\dfrac{1{,}054\cdot 36{,}96}{15{,}72\cdot 4{,}006}$
$\dfrac{19{,}84}{5{,}912}$	$\dfrac{47{,}08\cdot 6{,}082}{17{,}86}$	$\dfrac{16{,}68\cdot 0{,}9508}{19{,}88\cdot 0{,}08616}$
$\dfrac{100{,}5}{567{,}8}$	$\dfrac{35{,}84}{3{,}265\cdot 7{,}602}$	$\dfrac{0{,}1058\cdot 0{,}04052}{0{,}08465\cdot 0{,}009061}$
$\dfrac{0{,}1725}{0{,}06983}$	$\dfrac{0{,}576\cdot 0{,}482}{0{,}08973}$	$\dfrac{4{,}3623\cdot 5{,}009}{0{,}09988\cdot 0{,}7641}$
$\dfrac{0{,}00956}{0{,}80679}$	$\dfrac{73{,}692}{0{,}338\cdot 0{,}124}$	$\dfrac{0{,}004002\cdot 172{,}9}{0{,}6091\cdot 5353}$

56. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$50{,}4^2$ $\quad 45{,}9^3$ $\quad 3{,}93^3$ $\quad 1{,}71^3$ $\quad 14{,}8^4$

57. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed:

753^3 $\quad 502^4$ $\quad 645^5$ $\quad 22{,}1^{10}$ $\quad 1{,}21^{10}$

58. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed:

1.	2.	3.
$1{,}793^3$	$31 \cdot 19^4$	$(3{,}142 \cdot 2{,}718)^3$
$29{,}95^4$	$89^2 \cdot 38^3$	$\left(\frac{54{,}86}{63{,}58}\right)^2$
$1{,}057^5$	$\left(\frac{15}{23}\right)^5$	$\left(\frac{7{,}473}{5{,}086}\right)^5$
$0{,}0789^2$	$\left(\frac{85}{74}\right)^{-2}$	$\left(\frac{0{,}9085}{1{,}456}\right)^{-1}$
$0{,}7364^3$	$\left(\frac{113}{355}\right)^3$	$\left(\frac{0{,}5947}{0{,}0506}\right)^{-3}$

59. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

$\sqrt{49{,}7}$ $\quad \sqrt{0{,}0635}$ $\quad \sqrt{0{,}935}$ $\quad \sqrt{70{,}4}$

$\sqrt[3]{756}$ $\quad \sqrt[3]{0{,}00402}$ $\quad \sqrt[5]{43600}$ $\quad \sqrt[6]{0{,}171}$

60. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

1.	2.	3.
$\sqrt{13}$	$\sqrt[3]{19}$	$\sqrt[5]{187}$
$\sqrt{35}$	$\sqrt[3]{2058}$	$\sqrt[4]{5431}$
$\sqrt{0{,}7543}$	$\sqrt[3]{0{,}9048}$	$\sqrt[5]{0{,}0784}$
$\sqrt{3{,}845}$	$\sqrt[3]{0{,}00864}$	$\sqrt[4]{0{,}3580}$
$\sqrt{\frac{95}{74}}$	$\sqrt[3]{45\frac{3}{7}}$	$\sqrt[5]{3\frac{29}{52}}$

61. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

1. $\sqrt{17^3}$ 2. $\sqrt[3]{109^2}$ 3. $\sqrt[4]{75^3}$

$\sqrt[5]{11{,}28^2}$ $\sqrt[4]{0{,}917^3}$ $\sqrt[3]{1{,}234^5}$

$\sqrt[3]{0{,}872^4}$ $\sqrt{0{,}0576^3}$ $\sqrt[5]{0{,}0098^3}$

$\sqrt[4]{\left(\frac{23}{29}\right)^3}$ $\sqrt[3]{\left(\frac{10}{57}\right)^2}$ $\sqrt{\left(\frac{355}{113}\right)^5}$

$\sqrt[10]{\frac{14^3}{37^3}}$ $\sqrt[6]{\frac{27^5}{43^4}}$ $\sqrt[5]{33^2 \cdot 87^3}$

62. Logaritmida järgmised avaldised:

1. mn^2 2. $n^x x^n$ 3. $3m^2 : \sqrt{7n^3}$

$x^2y^3z^{-1}$ $\sqrt{ab^2c^3}$

$(ax)^3$ $ab^2\sqrt[3]{c^3}$ $\sqrt{a} : \sqrt[3]{b^2}$

$\frac{5a^4}{17h^5}$ $\sqrt{\frac{pq}{s^3}}$ $\sqrt{a\sqrt{b}}$

$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3bx^2}$ $\frac{a\sqrt[3]{b}}{c\sqrt[5]{d}}$ $3 \cdot 10^{a-b}$

$a \cdot 10^{a:b}$

63. Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\frac{2{,}68^2 \cdot 19{,}64}{586{,}8}$ 2. $\frac{0{,}876 \cdot \sqrt{72}}{8{,}405}$

$\frac{4{,}56^3 \cdot 0{,}08824}{36{,}54 \cdot 0{,}6502}$ $\frac{1{,}06\sqrt[3]{3{,}867}}{45{,}66\sqrt{0{,}5480}}$

$\frac{0{,}964^3 \cdot 0{,}4982}{80{,}26 \cdot 0{,}346^2}$ $\sqrt{0{,}382\sqrt{0{,}6666}}$

$\frac{15{,}2^{3,5} \cdot 12{,}84^{2,4}}{272{,}4^{1,3}}$ $\sqrt[3]{\frac{0{,}742}{\sqrt[5]{9{,}4848}}}$

$\frac{15^{25}}{25^{15}}$ $\sqrt[5]{\frac{2{,}57^3 \cdot 42{,}6^4}{\sqrt[3]{529}}}$

64. Lahendada logaritmide abil järgmised võrrandid:

1. $3{,}518x = 1$	2. $x^3 = \frac{0{,}9874}{0{,}0361}$
$x^2 = 0{,}9716$	$x^3 = \frac{2{,}48 \cdot 792}{\pi}$
$\frac{22}{7}x^2 = 10$	$x^5 = 300$
$9x^3 = 84{,}1$	$29x^4 = 17$
$x^2 = \sqrt[3]{42}$	$\sqrt{x} = \sqrt[3]{120}$

Kui avaldis sisaldab ainult korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise tehteid, siis logaritmidega arvutades leitakse lõpptulemus, ilma et oleks vaja leida vahepealsete arvutustulemuste väärtusi. Kui aga avaldises esineb ka liitmise või lahutamise tehe, siis seetõttu, et neid tehteid pole võimalik teostada logaritmide abil, tuleb leida vahepealsete tulemuste väärtused ja need otseselt liita või lahutada; kui liitmisele või lahutamisele veel järgneb kõrgemaid tehteid, siis edasi arvutatakse jälle logaritmide abil.

Ülesanne 4. Arvutada avaldise

$$\sqrt[5]{3{,}82^5 + 4{,}34^5}$$

väärtus.

Lahendus. Logaritmide abil arvutame viiendad astmed juuritavas:

$$5 \log 3{,}82 = 5 \cdot 0{,}5821 = 2{,}9105; \quad 3{,}82^5 = 814$$
$$5 \log 4{,}34 = 5 \cdot 0{,}6375 = 3{,}1875; \quad 4{,}34^5 = 154o$$ [1]
$$3{,}82^5 + 4{,}34^5 = 235o$$

Seejärel, liites need astmed, leiame, et juuritav on 235o.

[1] Liidetavate viimased numbrid on kirjutatud väiksemas kirjas, sest kolme õige tüvenumbriga arvu viienda astme kolmas tüvenumber on ainult arvatav.

Edasi arvutame jälle logaritmide abil. Tähistades otsitava juure väärtuse tähega x, leiame, et

$$\log x = \tfrac{1}{5} \cdot \log 2350 = \tfrac{1}{5} \cdot 3{,}3711 = 0{,}6742,$$

kust saame, et

$$x = 4{,}72.$$

Juhtudel, kui avaldises esinevaid liidetavaid on võimalik arvutada mõnede teiste tabelite abil, tuleb seda võimalust alati kasutada, sest arvutamine logaritmide abil on ikka tülikam kui tabelite abil, mis annavad otseselt nõutava arvu.

Ülesanne 5. Arvutada avaldise

$$\sqrt[5]{7{,}36^2 + 5{,}58^2}$$

väärtus.

Lahendus. Siin on otstarbekohane arvutada juuritav ruutude tabelite abil:

$$7{,}36^2 = 54{,}17$$
$$5{,}58^2 = 31{,}14$$
$$7{,}36^2 + 5{,}58^2 = 85{,}3$$

Viienda juure arvutame aga logaritmide abil. Tähistades juure väärtuse tähega x, leiame, et

$$\log x = \tfrac{1}{5} \log 85{,}3 = \tfrac{1}{5} \cdot 1{,}9309 = 0{,}3862,$$

kust saame, et

$$x = 2{,}43.$$

Kui viimases ülesandes oleks viienda juure asemel olnud vaja arvutada ruut- või kuupjuur, siis ei oleks tarvitsenud arvutamiseks üldsegi kasutada logaritme, vaid juure oleks võinud leida otseselt vastavast tabelist.

Üldse tuleb iga avaldise puhul kaaluda, millised arvutusvahendid on antud avaldise arvutamiseks kõige otstarbekohasemad. Logaritmide kasutamine arvutusvahendina on otstarbekohane, kui avaldises esineb rohkesti mitmekohaliste arvude korrutisi, jagatisi ja kõrgeid astmeid, ning on möödapääsematu, kui on vaja arvutada kõrgeid juuri.

Ülesanded.

65. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $(a+x)^3$ 2. $\frac{a-b}{m^2}$ 3. $\sqrt{\frac{ax}{a-x}}$

$24a^2(a+x)^5$ p^2+q^2 $\frac{ax}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

$\frac{(a-b+c)^2}{\sqrt{3abc}}$ $\sqrt{l^2-h^2}$ $\sqrt[3]{H(H^2-a^2)}$

$\frac{(m-n)^2}{(m+1)^2}$ $\frac{1}{a(m+n)^2}$ $\sqrt[5]{m^2(m+x)^3}$

66. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused, vajaduse korral kasutades logaritme:

1. $(735{,}4+278{,}9)^3:51{,}43$ 2. $\sqrt{32{,}5^2+49{,}9^2}$

$\pi(66{,}44-39{,}87)^2$ $\sqrt{83{,}71^2-58{,}17^2}$

$\pi(7{,}69^2-3{,}24^2)$ $\sqrt{25{,}43(25{,}43^2-6{,}72^2)}$

$(1{,}07^{10}-1):(1{,}07-1)$ $\sqrt[5]{0{,}984^2(0{,}984+1{,}456)^3}$

67. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$, kui $a=12{,}6$, $b=24{,}82$, $c=30{,}14\cdot$
2. $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3$, kui $a=0{,}524$, $b=2{,}008$
3. $\frac{\pi\sqrt[5]{a}}{bc^2}+\frac{1}{3a^3b^2}-\frac{2}{c}$, kui $a=-2{,}93$, $b=-0{,}68$, $c=7{,}35$
4. $\sqrt[7]{4\sqrt{a}+2\sqrt[3]{b}}$, kui $a=5{,}21$ ja $b=7{,}37$
5. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^6$, kui $a=134$ ja $b=50{,}8$

68. Olgu $F=\frac{Pv^2}{2gs}$. Arvutada 1) F väärtus, kui $P=0{,}78$, $v=3{,}25$, $g=9{,}81$, $s=12{,}7$, 2) v väärtus, kui $F=8{,}42$, $P=1{,}32$, $g=9{,}81$ ja $s=12{,}7$.

69. Olgu $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$. Arvutada 1) S väärtus, kui $V = 0{,}4892$, 2) V väärtus, kui $S = 21{,}65$.

70. Olgu $C = gh - \sqrt{gh}$. Arvutada C väärtus, kui $g = 9{,}81$ ja $h = 129$.

71. Olgu $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Arvutada s väärtus, kui $a = 37{,}4$, $n = 9$ ja $q = 1{,}28$.

72. Olgu $v^2 = u^2 + 2gs$. Arvutada v väärtus, kui $u = 26{,}4$, $g = 9{,}81$ ja $s = 27{,}35$.

73. Risttahuka põhjaks on ruut küljega 0,4578 m; risttahuka kõrgus on 0,6834 m. Arvutada risttahuka ruumala.

74. Kolmnurga alus on 4,860 meetrit, kolmnurga kõrgus on 0,7692 meetrit. Arvutada kolmnurga pindala.

75. Ringi raadius on 25,38 cm. Kui pikk on selle ringjoone kaar, mis vastab kesknurgale $34°28'$?

76. Täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab hüpotenuusi osadeks 193,6 mm ja 78,4 mm. Arvutada kolmnurga kõrgus.

77. Ristküliku küljed on 123,5 m ja 376,4 m. Arvutada ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg.

78. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 4560 m ja 8407 m. Arvutada kolmnurga hüpotenuus.

79. Risttahuka servad on 143 cm, 206 cm ja 844 cm. Arvutada risttahuka ruumala.

80. Vaskkuubid servadega 13,84 cm ja 8,63 cm sulatatakse üheks kuubiks. Kui suur on selle kuubi serv?

81. Kui laev sõidab kiirusega v sõlme[1], siis veepinnale tekivad lained, mille pikkus meetrites

$$L = \frac{v^2}{5{,}80}.$$

Kui suur on laeva kiirus, kui laine pikkus on 40 m? Kui pikad lained tekivad veepinnale, kui laeva kiirus on 24 sõlme?

82. Horisontaalseks lennuks lennuk peab arendama kiiruse

$$v = 5{,}4 \sqrt{\frac{W}{S}} \text{ km tunnis,}$$

kus W on lennuki ja koorma kaal kilogrammides ning S on kandepindade pindala ruutmeetrites. Kui suure kiiruse peab arendama lennuk horisontaalseks lennuks, kui $W = 120$ ja $S = 15$?

83. 1) Arvutada tähe S väärtus valemist

$$S = \sqrt[3]{\frac{cPD^2}{1017\left(2 + \frac{D^2}{d^2}\right)}},$$

kui $c = 66{,}8$, $P = 35{,}4$, $D = 124{,}6$ ja $d = 46{,}7$.

2) Arvutada tähe P väärtus, kui $S = 27{,}3$, $c = 52{,}5$, $D = 135{,}2$ ja $d = 51{,}4$.

84. Arvutada h väärtus valemist

$$h = W\left(\sqrt{q} + \frac{2}{\sqrt{q^3}}\right),$$

kui $W = 5671$ ja $q = 1{,}54$.

85. Arvutada avaldise

$$\sqrt[3]{\frac{uv}{u^2 - v^2}}$$

väärtus, kui $u = 37{,}54$ ja $v = 21{,}39$.

---

[1] Sõlm on laeva kiiruse ühik. 1 sõlm = 1 meremiil tunnis. 1 meremiil = 1,852 km.

Näpunäide. Et kogu arvutust oleks võimalik teostada logaritmide abil, selleks lahutada murru nimetaja teguriteks.

86. Arvutada logaritmide abil avaldise

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab}}$$

väärtus kui $a = 7{,}23$ ja $b = 10{,}18$.

87. Arvutada avaldise

$$\sqrt[5]{24a^7} + \sqrt[5]{3a^4x^3} - \sqrt[5]{81ax^6}$$

väärtus, kui $a = 205{,}6$ ja $x = -174{,}2$.

88. Arvutada avaldise

$$\frac{(4 + \sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4 - \sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6 + \sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6 - \sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

väärtus.

89. Arvutada ringi pindala, kui ringi raadius on 59,43 cm.

90. Ringi raadius on 19,4 cm; sektori kesknurk on 102° 35′. Arvutada sektori pindala.

91. Rõnga välimine raadius on 38,54 cm ja sisemine raadius on 15,59 cm. Arvutada rõnga pindala.

§ 14. Arvu logaritm kümnest erineval alusel.

Varem antud logaritmi definitsiooni järgi nimetatakse arvu kümnendlogaritmiks sellist arvu, millega kümmet astendades saame antud arvu. Üldistame nüüd logaritmi mõistet, andes tema definitsiooni järgmiselt:

arvu logaritmiks antud alusel nimetatakse niisugust arvu, millega logaritmi alust astendades saame antud arvu.

Selle definitsiooni järgi on c arvu a logaritm alusel b, kui

$$b^c = a.$$

Arvu a logaritmi alusel b märgitakse sümboliga

$$\log_b a.$$

Nagu juurimine $\sqrt[c]{a} = b$ on astendamise $b^c = a$ pöördtehe, mille abil antud astme a (juuritav) ja astendaja c (juurija) järgi leitakse a s t e n d a t a v b (juur), nii on ka logaritmimine $\log_b a = c$ astendamise $b^c = a$ pöördtehe, mille abil aga antud astme a (logaritmitav) ja astendatava b (logaritmi alus) järgi leitakse a s t e n d a j a c (logaritm).

Seega vastandina liitmisele ja korrutamisele, milledest kummalgi on ainult üks pöördtehe — lahutamine ja jagamine, on astendamisel kaks pöördtehet — juurimine ja logaritmimine. See erinevus tuleneb sellest, et liitmine ja korrutamine on kommutatiivsed tehted, kuna aga astendamine ei ole kommutatiivne.

Nii on näiteks

$$\log_2 8 = 3, \text{ sest } 2^3 = 8;$$
$$\log_3 \tfrac{1}{3} = -1, \text{ sest } 3^{-1} = \tfrac{1}{3};$$
$$\log_{0,2} 25 = -2, \text{ sest } 0{,}2^{-2} = 25.$$

Logaritmide aluseks kõlbab iga positiine arv, välja arvatud arv 1. Viimane ei kõlba logaritmide aluseks, sest kõik arvu 1 astmed on võrdsed. Ka negatiivsed arvud ei sobi logaritmide aluseks, sest negatiivse arvu murrulise ja irratsionaalse astendajaga astmetel, nagu

$$(-2)^{\frac{1}{2}}, \quad (-10)^{\frac{1}{4}}, \quad (-10)^{\sqrt{2}},$$

puudub arvu tähendus. Tegeliku arvutamise seisukohalt ei oma logaritmid kümnest erinevail aluseil suuremat tähtsust, sest arvutamisel kasutatakse ikka kümnendlogaritme.

Kui arvude kümnendlogaritmid on teada, saame arvutada arvude logaritme ka teistel alustel. Selgitame seda järgmise ülesandega.

Ülesanne. Leida $\log_3 7$, kasutades kümnendlogaritmide tabeleid.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

$$x = \log_3 7$$

ehk

$$3^x = 7.$$

Logaritmides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame

$$x \log 3 = \log 7,$$

seega

$$x = \frac{\log 7}{\log 3}.$$

Võttes tabelist log 7 ja log 3, saame

$$x = \frac{0{,}8451}{0{,}4771} = 1{,}771$$

ehk

$$\log_3 7 = 1{,}771.$$

Ülesanded.

92. Väljendada järgmised võrdused üheainsa logaritmisümboli abil:

1.		2.		3.	
	$32 = 2^5$		$3 = \sqrt{9}$		$6^1 = 6$
	$16 = 4^2$		$1 = 12^0$		$216 = 6^3$
	$729 = 3^6$		$0{,}25 = 2^{-2}$		$b = \sqrt{a}$
	$2048 = 2^{11}$		$8 = 4\sqrt{4}$		$5^{-2} = 0{,}04$

93. Kontrollida järgmiste võrduste kehtivust:

1.		2.		3.	
	$\log_2 64 = 6$		$0 = \log_a 1$		$\log_{81} 27 = 0{,}75$
	$\log_7 49 = 2$		$-1 = \log_5 0{,}2$		$\log_5 0{,}008 = -3$
	$\log_4 64 = 3$		$\frac{1}{2} = \log_{100} 10$		$\log_8 \frac{1}{128} = -2\frac{1}{3}$
	$\log_3 81 = 4$		$\frac{2}{3} = \log_8 4$		$\log_{0,1} 100 = -2$

94. Anda järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\log_2 8$	2. $\log_3 9$	3. $\log_2 \frac{1}{4}$	4. $\log_4 8$
$\log_2 16$	$\log_3 81$	$\log_3 \frac{1}{81}$	$\log_{25} 125$
$\log_2 64$	$\log_5 5$	$\log_4 2$	$\log_9 \frac{1}{27}$
$\log_2 1024$	$\log_a a^3$	$\log_{27} 3$	$\log_4 \frac{1}{32}$

95. Leida logaritmitav igas järgmises võrduses:

1. $\log_2 x = 5$	2. $\log_5 x = \frac{1}{3}$	3. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$
$\log_3 x = 4$	$\log_7 x = -\frac{1}{2}$	$\log_{\sqrt{2}} x = 10$
$\log_9 x = \frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} x = 3$	$\log_{\sqrt{3}} x = -\frac{1}{2}$

96. Leida logaritmi alus igas järgmises võrduses:

1. $\log_x 16 = 4$	2. $\log_x \sqrt{27} = 1\frac{1}{2}$	3. $\log_x 3 = 2$
$\log_x 16 = 2$	$\log_x 9 = 4$	$\log_x 15 = 4$
$\log_x 625 = 4$	$\log_x 8 = -3$	$\log_x 12 = -3$

97. Näidata, et võrrandi

$$\log_x a = b$$

lahend $x = \sqrt[b]{a}$.

98. Näidata, et võrrandi

$$\sqrt[x]{a} = b$$

lahend $x = \log_b a$.

§ 15. Eksponentvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb astendajas või juurijas, nimetatakse e k s p o n e n t v õ r r a n d i k s.

Eksponentvõrrandid on näiteks järgmised võrrandid:

$$2^x = 32, \qquad 3^{2x} + 3^{x+1} = 90,$$

$$\sqrt[x]{243} = 3.$$

Allpool tutvume näidete varal eksponentvõrrandite lahendamise tähtsamate juhtudega.

N ä i d e 1. Olgu antud lahendada kaheliikmeline eksponentvõrrand

$$2^x = 32.$$

Selle võrrandi liikmeid on võimalik kujutada ühe ja sama arvu astmetena:

$$2^x = 2^5.$$

Tugedes tõsiasjale, et arvudest 0 ja 1 erineva arvu astmed on võrdsed ainult siis, kui astendajad on võrdsed, järeldame, et

$$x = 5.$$

N ä i d e 2. Kui kaheliikmelise eksponentvõrrandi liikmeid ei suudeta kujutada ühe ja sama arvu astmetena, siis kasutatakse võrrandi mõlema poole logaritmimise võtet, tugedes tõsiasjale, et võrdsete arvude logaritmid on võrdsed. Näiteks võrrand

$$6^x = 14{,}7$$

laheneb nii, et võetakse võrdseks võrrandi kummagi poole logaritmid

$$x \log 6 = \log 14{,}7,$$

millest avaldame tundmatu:

$$x = \frac{\log 14{,}7}{\log 6}$$

ehk, võttes tabelist logaritmide väärtused,

$$x = \frac{1{,}1673}{0{,}7782}$$

ehk

$$x = 1{,}5.$$

N ä i d e 3. Olgu vaja lahendada võrrand

$$2^{x+2} + 5 \cdot 2^x = 72.$$

Võttes võrrandi vasakul poolel avaldise 2^x sulgude ette, saame

$$2^x (2^2 + 5) = 72$$

ehk taandades 9-ga

$$2^x = 8.$$

Et $8 = 2^3$, siis

$$x = 3.$$

N ä i d e 4. Olgu antud lahendada võrrand

$$3^{2x} - 3^{x+1} = 54.$$

Kirjutades selle võrrandi kujul

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 54 = 0$$

ja võttes avaldise 3^x uueks tundmatuks, mille tähistame tähega y, saame ruutvõrrandi

$$y^2 - 3y - 54 = 0,$$

mille lahendid on

$$y_1 = 9 \text{ ja } y_2 = -6.$$

Seega avaldise 3^x väärtus on kas 9 või —6. Kuid et positiivse arvu aste ei või olla negatiivne arv, siis pole olemas niisugust tähe x väärtust, mille puhul oleks

$$3^x = -6.$$

Seega lähtevõrrandi ainsaks lahendiks on tähe x väärtus, mille puhul on

$$3^x = 9.$$

Et $9 = 3^2$, siis

$$x = 2.$$

Ülesanded.

99. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $3^x = 729$
2. $2^x = 512$
3. $256^x = 4$
4. $16^{\frac{1}{x}} = 2$
5. $\sqrt[x]{125} = 5$
6. $2^x = \frac{1}{32}$
7. $5^x = 0{,}04$
8. $27^x = 9$
9. $(\sqrt{2})^x = 16$
10. $4^x = 2\sqrt{2}$

100. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$
2. $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{625}{81}$
3. $1{,}5^{x+1} = \frac{32}{243}$
4. $1{,}1^{x-3} = \frac{1}{121}$
5. $27 \cdot 4^x = 64 \cdot 3^x$
6. $0{,}2^{2x-3} = 0{,}008$
7. $3^x = (\sqrt{3})^{x+4}$
8. $5^x = (\sqrt[3]{5})^{x-2}$
9. $2^x = 4\sqrt{4}$
10. $3^{x+2} = \frac{1}{9}\sqrt[4]{27}$

101. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $3^{x^2} = 27 \cdot 3^x$
2. $5^{x^2} = 625 \cdot 5^{3x}$
3. $4^{x^2+x} = 8^{3x-1}$
4. $(5^{1-x})^x = 5^x$
5. $(a^{3-x})^{2-x} = 1$
6. $(30^{5-x})^{x-6} = \frac{1}{900}$

102. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $10^x = 20$
2. $2^x = 5$
3. $5^{\frac{x}{2}} = 8{,}55$
4. $3{,}42^x = 40$
5. $(\sqrt{6})^x = 60$
6. $4 \cdot 7^{x-1} = 64$
7. $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 4\sqrt{3}$
8. $2^x = 3^x$
9. $2^{x+1} = 3^x$
10. $\sqrt[x]{1{,}371} = \sqrt[10]{10}$

103. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2^x - 2^{x-3} = 7$
2. $3^x + 3^{x+2} = 30$
3. $5^x + 5^{x-5} = 625{,}2$
4. $7^x + 7^{x-0{,}4} = 27$
5. $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$
6. $9 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 5500$

104. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x = 24$
2. $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 99$
3. $5^{2x} - 7 \cdot 5^x - 450 = 0$
4. $3^x + 9^x = 756$
5. $9 \cdot 9^x - 10 \cdot 9^{-x} = 91$
6. $4^{x+1} + 64 \cdot 4^{-x} = 257$

105. Arvutada avaldiste 3^{2a}, 3^{a^2} ja 3^{2^a} väärtused, kui $3^a = 12$.

106. Olgu $a^b = c$. Väljendada avaldis a^{b^3}

1. ainuüksi tähtede a ja c kaudu;
2. ainuüksi tähtede b ja c kaudu.

107. Asendada võrrand $\log_2 3 = x$ eksponentvõrrandiga ja lahendada see.

108. Eelmise ülesande eeskujul arvutada järgmised logaritmid:

$\log_3 15$	$\log_2 28$	$\log_{100} 30$	$\log_{2,718} 10$
$\log_2 10$	$\log_4 20$	$\log_5 0{,}5$	$\log_4 0{,}8$

§ 16. Logaritmvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas, nimetatakse l o g a r i t m v õ r r a n d i k s.

Logaritmvõrrandid on näiteks järgmised võrrandid:

$$\log (x + 1) - \log x = 0{,}3,$$

$$(\log x)^2 - 3 \log x + 2 = 0.$$

Allpool tutvume näidete varal logaritmvõrrandite mõne tähtsama lahendamisvõttega.

N ä i d e 1. Olgu antud lahendada võrrand

$$\log x + \log (x - 3) = 1.$$

Seda võrrandit on võimalik kirjutada niisugusel kujul, et tema kumbki pool esineb mingi avaldise logaritmina:

$$\log x (x - 3) = \log 10.$$

Tugedes tõsiasjale, et logaritmid on võrdsed ainult siis, kui logaritmitavad on võrdsed, võime selle võrrandi asendada võrrandiga

$$x(x-3)=10$$

ehk võrrandiga

$$x^2-3x-10=0.$$

Viimase võrrandi lahendid on 5 ja —2.

Asendades lähtevõrrandis tähe x arvuga —2, saame vasakul poolel avaldised log (—2) ja log (—5), milledel puudub arvväärtus. Seepärast ruutvõrrandi lahend —2 ei saa olla antud logaritmvõrrandi lahendiks.

Teostades kontrolli lahendiga 5, saame lähtevõrrandi vasakul poolel

$$\log 5+\log 2 \text{ ehk } \log 10 \text{ ehk } 1,$$

s. o. sama arvu, mis seisab võrrandi paremal poolel. Seega antud logaritmvõrrandi ainus lahend on 5.

Sellest näitest selgub, et logaritmvõrrandiga antud logaritmide vahelise seose asendamisel logaritmitavate vahelise seosega võime saada lahendeid, mille puhul mõni logaritmitav omandab negatiivse väärtuse, mistõttu võrrand kaotab mõtte. Seepärast peab selgitama iga leitud lahendi kõlblikkust tema asetamisega lähtevõrrandisse.

N ä i d e 2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\log x\cdot(\log x+2)=3.$$

Avades sulud, saame võrrandi

$$(\log x)^2+2\log x-3=0,$$

milles võib log x lugeda tundmatuks.

Selle võrrandi lahendid on

$$\log x_1=1 \text{ ja } \log x_2=-3.$$

Siit järeldame, et

$$x_1 = 10 \text{ ja } x_2 = 0{,}001.$$

Nende väärtuste asetamisel antud võrrandisse selgub, et mõlemad arvud rahuldavad seda võrrandit.

Ülesanded.

109. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log x - \log 2 = \log 3$
2. $\log (x - 1) = 2 - 2 \log 5$
3. $\log (x + 9) = \log 3x$
4. $\log (x + a) = -\log (x - a)$
5. $\log (x - a) = \log x - \log a$
6. $\log (x + a) = \log x + a$
7. $\log x^2 = \log x + 0{,}3010$
8. $\log (3x^2 + 7) - \log (3x - 2) = 1$

110. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log (x - 2) + \log (x - 5) = 1$
2. $\log (x^2 - 10x + 25) = \log (x - 5) + \log 3$
3. $\log (x - 2) + \log (x - 1) = 1 + \log 2$
4. $\frac{1}{3} \log (271 + 3\sqrt{2x}) - 1 = 0$
5. $\frac{1}{2} \log (x - 2) - 1 = \frac{1}{2} \log 13{,}75 - \log \sqrt{2x + 1}$
6. $x^{\log x} = 10$
7. $x^{\log x} = 100x$
8. $\log x \cdot \log 2x = 0{,}0995$

111. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log_2 (x + 2\frac{1}{2}) = 2 \log_2 x - 1$
2. $\log_3 (2x + 7) = 5 - \log_3 (x - 1)$
3. $\log_3 x \cdot \log_3 9x = 24$
4. $\log_2 x + \log_8 x + 8 = 0$
5. $\log_5 x = \log_{25} 2x$

Peatükk III.

Arvjadad.

§ 17. Aritmeetiline jada.

Aritmeetiliseks jadaks nimetatakse niisugust arvude jada ehk progressiooni, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu vahe on muutumatu.

Nii on paarituarvude jada

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

aritmeetiline jada, sest

$$3-1=5-3=7-5=9-7=\ldots;$$

seevastu algarvude jada

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

ei ole aritmeetiline jada, sest

$$3-2\neq 5-3.$$

Aritmeetilist jada moodustavaid arve nimetame selle jada elementideks* ehk liikmeiks. Jada liikmeid tähistame sümbolitega

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

1, 2, 3, ..., n on liikmete järjenumbrid; nad näitavad, mitmendal kohal liige jadas asetseb. Arve a_1 ja a_n nimetame vastavalt jada esimeseks ja viimaseks liikmeks. Jada liikme ja eelneva liikme vahet nimetame jada vaheks. Jada vahet tähistame tähega d. Jada vahe võib olla positiivne või negatiivne. Aritmeetilist jada nimetatakse tõusvaks, kui jada vahe on positiivne, ja alanevaks, kui jada vahe on negatiivne.

112. Kirjutada 6-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 2 ja vahe on 5.

113. Kirjutada 12-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 4 ja teine liige on $4\frac{3}{4}$.

114. Kirjutada 7-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 10 ja vahe on —3.

115. Aritmeetilise jada 5. liige on 17 ja 6. liige 24. Kui suur on selle jada 7. liige?

116. Aritmeetilise jada 9. liige on 22 ja 11. liige on 28. Kui suur on selle jada 10. liige?

§ 18. Aritmeetilise jada üldliige.

Olgu antud aritmeetiline jada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n,$$

mille vahe on d. Kohal k seisev jada liige on a_k; selle ees, kohal $k - 1$ seisev liige on a_{k-1}. Aritmeetilise jada definitsiooni järgi

$$a_k - a_{k-1} = d$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} + d.$$

See tähendab, et

aritmeetilise jada iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja jada vahe summaga.

Andes järjenumbrile k väärtused 2, 3, 4, ..., n, saame

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$\boxed{a_k = a_1 + (k - 1)\, d}$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest, valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 + (1 - 1) d = a_1 + 0 \cdot d = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on a_k kas esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast jada üldliikmeks. Et jada üldliikme valemis esinev arv $k - 1$ näitab, mitu liiget seisab jadas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

aritmeetilise jada liige võrdub summaga, mis saadakse esimese liikme liitmisel jada vahe ja kõigi eelnevate liikmete arvu korrutisega.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1, \ d, \ k, \ a_k$$

kolm suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näitena toome järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Aritmeetilise jada esimene liige on 15, jada vahe on -4. Kui suur on jada kümnes liige?

Lahendus. Võttes aritmeetilise jada üldliikme valemis k väärtuseks 10 ja asendades a_1 ning d antud väärtusega, saame

$$a_{10} = 15 + (10 - 1) \cdot (-4) = 15 + 9 \cdot (-4) =$$
$$= 15 - 36 = -21.$$

Vastus. Jada 10. liige on -21.

Ülesanne 2. Aritmeetilise jada esimene liige on $-8\frac{1}{2}$; jada vahe on $3\frac{1}{2}$. Mitmes liige on $12\frac{1}{2}$?

Lahendus. Andmeiks on

$$a_1 = -8\tfrac{1}{2}, \quad d = 3\tfrac{1}{2}, \quad a_k = 12\tfrac{1}{2};$$

otsitavaks on k. Asetades andmed aritmeetilise jada üldliikme valemisse, saame

$$12\tfrac{1}{2} = -8\tfrac{1}{2} + (k - 1) \cdot 3\tfrac{1}{2};$$

siit leiame, et

$$k = 7.$$

Vastus. $12\frac{1}{2}$ on antud jada 7. liige.

Ülesanded.

117. Avaldada iga järgmise jada puhul k-ndal kohal seisev liige (jada üldliige) arvu k kaudu.

1. 3, 5, 7, 11, ...
2. 7, 15, 23, 31, 39, ...
3. —100, —95, —90, —85, —80, ...
4. 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, 2, ...
5. $2\frac{1}{3}$, 3, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$, 5, ...

118. Aritmeetilise jada 1. liige on 3 ja vahe on 4. Leida selle jada 8. liige.

119. Leida aritmeetilise jada 7. ja 11. liige, kui jada 1. liige on 6 ja vahe on $2\frac{1}{2}$.

120. Leida aritmeetilise jada 10. ja 15. liige, kui jada 1. liige on 14 ja 2. liige on 20.

121. Sportlane hüppas kõrgust esimesel treeningukuul keskmiselt 170 cm. Tema keskmine saavutus tõusis igal kuul 5 cm võrra. Mitu sentimeetrit hüppas ta keskmiselt 5. kuul?

122. Ratsanik ratsutas 1. tunnis 20 km ja igas järgnevas tunnis 0,4 km võrra vähem kui eelnevas. Mitu kilomeetrit ratsutas ta 6. tunnis?

123. Galileo Galilei avastas kehade langemise seaduse, mis kõlab järgmiselt: vabalt langev keha kulgeb esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m võrra enam kui eelnevas. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha 3. sekundis? Mitu meetrit kulgeb ta 9. sekundis?

124. Ülesvisatud keha kulgeb õhuta ruumis igas sekundis 9,8 m vähem kui eelnevas sekundis. Mitu meetrit kulgeb ülesvisatud keha 8. sekundis, kui ta 1. sekundis kulgeb 100 m?

125. Leida aritmeetilise jada 1. liige, kui 9. liige on 53 ja vahe on 4.

126. Leida aritmeetilise jada 1. liige, kui 15. liige on 68 ja vahe on $-2\frac{1}{2}$.

127. Leida aritmeetilise jada vahe, kui 1. liige on 7 ja 17. liige on 87.

128. Leida aritmeetilise jada vahe, kui 1. liige on 125 ja 25. liige on 65.

129. Aritmeetilise jada 1. liige on 3 ja 31. liige on 48. Leida jada vahe.

130. Paigutada arvude 7 ja 35 vahele 6 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline jada.

131. Sportlane tõukab kuuli esimesel treeningunädalal 15,58 m. Mitme sentimeetri võrra peaks iga järgneva nädala saavutus ületama eelneva nädala oma, et 7. nädalal korraldatavail võistlusil sportlane saaks tõugata kuuli 16 m?

132. Paigutada arvude 100 ja 40 vahele 4 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline jada.

133. Aritmeetilise jada esimene liige on 8 ja vahe on 7. Mitmes liige selles jadas on 120?

134. Aritmeetilise jada 1. liige on $-2{,}5$ ja 2. liige on 1. Mitmes liige selles jadas on 39,5?

135. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille 1. liige on 6, 2. liige on $10\frac{1}{3}$ ja viimane liige on 136?

136. Mitu 7-ga jagatavat arvu on arvude 28 ja 154 vahel?

137. Trapetsikujulisel peenral on esimeses reas 23 taime, teises 26, kolmandas 29 ja viimases 89 taime. Mitu rida taimi on peenral?

138. Mitmendal kohal seisab liige 2,25 aritmeetilises jadas 1,05; 1,10; 1,15; . . . ?

139. Kui suur on ühekohaliste loomulike arvude [1] hulk? — kahekohaliste loomulike arvude hulk? — kolmekohaliste loomulike arvude hulk? — neljakohaliste loomulike arvude hulk?

140. Mitu aritmeetilise jada 9, 13, . . . liiget on väiksemad kui 100?

141. Mitu aritmeetilise jada 137, 123, . . . liiget on positiivsed?

142. Leida aritmeetilise jada 7. liige, kui selle jada 4. liige on 21 ja 11. liige on —28.

143. Aritmeetilise jada 21. liige on 103 ja 33. liige on 157. Leida selle jada 27. liige.

144. Aritmeetilise jada 1. liige on 7, jada vahe 5 ja liikmete arv 21. Kui suur on jada liige, mis asetseb jada keskel?

145. Olgu aritmeetilise jada liige $a_2 = 17$ ja $a_{101} = -16$. Kui suur on liige a_1?

146. Olgu aritmeetilise jada liige $a_{37} = 4{,}6$ ja $a_{73} = 8{,}2$. Missugused on esimesed 3 jada liiget?

147. Olgu aritmeetilise jada liige $a_{13} = 89$, $a_{57} = 397$ ja $a_n = 503$. Leida arv n.

---

[1] Loomulikeks arvudeks nimetatakse positiivseid täisarve 1, 2, 3, . . .

148. Aritmeetilise jada 14. liige on 66, 134. liige on 666 ja viimane liige on 6666. Kui suur on jada 1. liige ja kui palju on jadas liikmeid?

149. Täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks on kolm järjestikust aritmeetilise jada liiget, mille vahe on 7. Arvutada komnurga külgede mõõtarvud.

150. Näidata, et avaldise $3 + 5x$ väärtused moodustavad aritmeetilise jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud 1, 2, 3, . . .

151. Näidata, et avaldise $10 - \frac{1}{2}x$ väärtused moodustavad aritmeetilise jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

152. Näidata, et avaldise $x^2 + 4$ väärtused ei moodusta aritmeetilist jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

153. Näidata, et täisarvude jada liikmete ruutude järjestikused vahed moodustavad aritmeetilise jada.

§ 19. Aritmeetilise jada summa.

Aritmeetilise jada liikmete summat nimetatakse aritmeetilise jada summaks ehk aritmeetiliseks reaks.

Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Hõlpsamini jõuame eesmärgile aritmeetilise jada summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks kirjutame otsitava summa üks kord alates esimese liikmega, teine kord alates viimase liikmega:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d];$$
$$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d].$$

Nii kirjutades satuvad kohakuti jada esimene ja viimane liige, teine ja eelviimane liige, kolmas ja eel-eelviimane liige, jne. Nende võrduste teineteisega kohakuti olevate liikmete liitmisel leiame, et

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \\ + \ldots + (a_1 + a_n).$$

Siit näeme, et

aritmeetilise jada algusest ja lõpust ühekaugusel asetsevate liikmete summad on võrdsed.

Saadud võrduse parem pool koosneb nii mitmest liidetavast $a_1 + a_n$, kui palju on liikmeid antud aritmeetilises jadas; seega

$$2s = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

millest

$$\boxed{s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Tulemuse võime sõnastada nõnda:

aritmeetilise jada summa võrdub jada esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Asendades viimases valemis jada viimase liikme a_n tema avaldisega

$$a_1 + (n - 1)\, d,$$

saame, et

$$s = \frac{a_1 + a_1 + (n - 1)\, d}{2} \cdot n$$

ehk

$$\boxed{s = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n}$$

See aritmeetilise jada summa valemi teisend võimaldab arvutada jada summa otseselt esimese liikme, jada vahe ja liikmete arvu järgi.

Tuletatud summa valemite rakendamist selgitame järgmiste ülesannetega.

Ü l e s a n n e 1. Arvutada esimese n loomuliku arvu summa.

L a h e n d u s. Et need arvud moodustavad aritmeetilise jada, siis nõutav summa

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Ü l e s a n n e 2. Arvutada esimese n paarituarvu summa.

L a h e n d u s. Esimesed n paarituarvu moodustavad aritmeetilise jada $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$; seega nõutav summa

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=\frac{2n}{2}\cdot n=n^2.$$

Ü l e s a n n e 3. Aritmeetilise jada esimene liige on 5 ja jada vahe on 3. Arvutada selle jada esimese 10 liikme summa.

Kasutades summa valemi teisendit, leiame, et

$$s=\frac{2\cdot 5+9\cdot 3}{2}\cdot 10=\frac{37}{2}\cdot 10=185.$$

Ülesanded.

154. Mitu silma on kogusummas täringu 6 tahul?

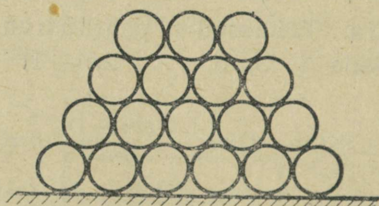
155. Mitu lööki lööb öö-päeva jooksul seinakell, mis märgib ainult täied tunnid vastava arvu löökidega?

156. Tööline on võtnud käivitada ja valvata 12 kudumismasinat. Iga masin koob tunnis 8 m riiet. Tööline käivitab esimese masina kl. 7 ja teised 5-minutiste ajavahemikkude järele. Mitu meetrit riiet on masinad kudunud kella 15-ks?

157. Vabaõhuteatris on vaatlejate istekohad asetatud amfiteatriliselt, ringides ümber ringikujulise näitelava.

Esimese ringi raadius on 6 m, teise 7 m, kolmanda 8 m, jne. viimaseni, mille raadius on 20 m. Arvates iga vaatleja kohta 0,5-meetrilise osa istepingist, arvutada rahvahulk, mis teatri pinkidele ära mahub. Arvutamisel võtta ümmarguselt $\pi = 3$.

158. Suurem hulk ühe ja sama läbimõõduga torusid on laotud virna, nagu näitab joonis 2. Alumises reas on neid 20, järgnevas 19, järgnevas 18, jne. 8-ni. Mitu toru on virnas?



Joonis 2.

159. Tallu viiva tee äärde istutatakse 100 puud, paigutades nad iga 5 m järele. Esimese puu kaugus talu õues asetsevast kaevust on 20 m. Iga puud kastetakse 1 ämbri veega. Kui pika tee käiks ära puid kastev mees, kui ta peaks iga ämbritäie vett võtma kaevust ja kandma puuni, alustades oma teed kaevult ja lõpetades selle sealsamas?

160. Trapetsikujuline katus on kaetud katusekividega. Laiemal küljel asetseb 80 kivi, igas järgnevas reas kaks kivi vähem kui eelnevas. Teades, et kivide ridu on 20, leida katuse katmiseks kulunud kivide arv.

161. On antud aritmeetiline jada 4, 1, —2, . . . Leida jada esimese 20 liikme summa.

162. Täita tühjad kohad järgmises tabelis:

Jada number	Esimene liige a_1	Jada vahe d	Liikmete arv n	Viimane liige a_n	Jada summa s_n
1.	11	-3	12		
2.	-16	4	20		
3.	-7		15	21	
4.	8		21	-32	
5.	19	-11		-25	
6.	-10	6		56	

163. Aritmeetilises jadas on 9 liiget, teise ja kaheksanda liikme summa on 15. Kui suur on jada summa?

164. 1. Arvutada esimese 100 loomuliku arvu summa.
2. Arvutada esimese 100 paarisarvu summa.
3. Arvutada esimese 100 paarituarvu summa.

165. Kui suur on kõigi kolmekohaliste loomulike arvude summa?

166. Arvutada kõigi 3-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 200.

167. Arvutada kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 99 kuni 1001.

168. Aritmeetilise jada vahe on —2; jada viimane liige on —10 ja jada summa on —24. Arvutada jada esimesed 5 liiget.

169. 9-liikmelise aritmeetilise jada summa on 558 ja esimene liige on 52. Leida jada vahe.

170. 10-liikmelise aritmeetilise jada summa on 10 ja jada vahe on —3. Leida jada esimene liige.

171. Kui suured on viisnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise jada, mille vahe on 20°?

172. Kui suured on kuusnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise jada, mille esimene liige on 80°?

173. Jaotada 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{8}$ mõõtu vähem kui eelmine. (A h m e s, umbes 1700 a. e. m. a.)

174. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille esimene liige on 12, vahe 4,2 ja summa 696?

175. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille esimene liige on —20, teine liige —15 ja summa 1000?

176. Saapavabrik sai tellimise 13 200 saapapaarile. Sotsialistliku võistluse korras pidi vabrik esimesel nädalal valmistama 100 paari saapaid päevas ja igal järgneval nädalal suurendama oma päevast toodangut 50 paari võrra. Mitme nädalaga oli tellimine täidetud?

177. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha t sekundi jooksul? (Vt. nr. 123.)

178. Mitme sekundiga kulgeb vabalt langev keha 314 m? (Vt. nr. 123 ja 177.)

179. Hulknurga nurgad moodustavad aritmeetilise jada 70°, 90°, 110°, ... Mitu nurka on hulknurgal?

180. Kas on võimalik niisugune hulknurk, mille nurgad moodustaksid aritmeetilise jada 45°, 55°, 65°, ... ?

181. Mitu paarituarvu 1, 3, 5, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks 500?

182. Mitu loomulikku arvu 1, 2, 3, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks arvu 1000?

183. Kujutada arv 325 aritmeetilise reana, teades, et esimene liige on 1 ja viimane liige on 64.

184. On antud aritmeetiline jada:

$$(a + x)^2, \quad a^2 + x^2, \quad (a - x)^2, \quad \ldots$$

Leida selle jada n liikme summa.

185. Leida 11 järjestikust loomulikku arvu, mille summa võrdub järgneva 10 järjestikuse loomuliku arvu summaga.

186. Mitu järjestikust loomulikku arvu peab võtma, alates arvust 3, et nende summa võrduks järgneva 5 järjestikuse loomuliku arvu summaga?

§ 20. Geomeetriline jada.

Geomeetriliseks jadaks nimetatakse niisugust arvude jada ehk progressiooni, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu jagatis on muutumatu.

Nii on arvu 2 astmete jada

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \ldots$$

geomeetriline jada, sest

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \cdots;$$

seevastu täisarvude ruutude jada

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots$$

ei ole geomeetriline jada, sest

$$\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4}.$$

Geomeetrilist jada moodustavaid arve nimetame selle jada *elementideks* ehk *liikmeiks*. Nagu aritmeetilise jada puhul, nii tähistame ka geomeetrilise jada liikmeid sümbolitega

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_n$$

ja nimetame esimest ja viimast neist arvudest vastavalt jada esimeseks ja viimaseks liikmeks. Geomeetrilise jada liikme ja eelneva liikme jagatist nimetame selle **jada teguriks**. Jada tegurit tähistame tähega q.

Geomeetrilise jada teguri märgi ja absoluutväärtuse järgi saab jada iseloomustada järgmiselt:

1. Kui jada tegur on positiivne ($q > 0$), siis kõik jada liikmed on ühe ja sama märgiga; seda näeme näiteks jadade puhul

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$$

ja

$$-2,\ -6,\ -18,\ -54,\ -162,$$

kus kummaski $q = 3$.

2. Kui jada tegur on negatiivne ($q < 0$), siis jada liikmete märgid vahelduvad; see juhtum esineb meil näiteks jada puhul

$$2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,$$

kus $q = -3$.

3. Kui jada teguri absoluutväärtus on suurem kui 1, siis jada liikmete absoluutväärtused kasvavad; seda näeme näiteks jadade puhul

$$4,\ 6,\ 9,\ 13{,}5,\ 20{,}25, \quad \text{kus } q = 1{,}5;$$
$$-4,\ -6,\ -9,\ -13{,}5,\ -20{,}25, \quad \text{kus } q = 1{,}5;$$
$$4,\ -6,\ 9,\ -13{,}5,\ 20{,}25, \quad \text{kus } q = -1{,}5.$$

4. Kui jada teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis jada liikmete absoluutväärtused kahanevad; seda näeme näiteks jadade puhul

$$405,\ 135,\ 45,\ 15,\ 5, \quad \text{kus } q = \tfrac{1}{3};$$
$$-405,\ -135,\ -45,\ -15,\ -5, \quad \text{kus } q = \tfrac{1}{3};$$
$$405,\ -135,\ 45,\ -15,\ 5, \quad \text{kus } q = -\tfrac{1}{3}.$$

Ülesanded.

187. Kirjutada 6-liikmeline geomeetriline jada, mille esimene liige on 4 ja tegur on 3.

188. Kirjutada 7-liikmeline geomeetriline jada, mille esimene liige on 32 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

189. Geomeetrilise jada esimene liige on 1, jada tegur on $\frac{2}{3}$. Anda jada esimesed 5 liiget.

190. Geomeetrilise jada esimene liige on 7776, jada tegur on $\frac{5}{6}$. Anda jada esimesed 5 liiget.

191. Geomeetrilise jada 1. liige on 16 ja 2. liige on 24. Kui suur on selle jada 3. liige?

192. Geomeetrilise jada 7. liige on 108 ja 8. liige on 36. Kui suur on selle jada 9. liige?

193. Geomeetrilise jada 4. liige on 10 ja 5. liige on 25. Leida jada 3. liige.

194. Geomeetrilise jada 6. liige on 15 ja 7. liige on 21. Leida selle jada 8. liige.

195. Geomeetrilise jada 12. liige on 28 ja 13. liige on 49. Leida selle jada 11. liige.

§ 21. Geomeetrilise jada üldliige.

Olgu antud geomeetriline jada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n,$$

mille tegur on q. Kohal k seisev jada liige on a_k; selle ees, kohal $k-1$ seisev liige on a_{k-1}. Geomeetrilise jada definitsiooni järgi on

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} \cdot q.$$

See tähendab, et

geomeetrilise jada iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja jada teguri korrutisega.

Andes arvule k järjest väärtused 2, 3, 4, . . . , n, saame

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$\boxed{a_k = a_1 \cdot q^{k-1}}$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest, valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on liige a_k kas jada esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast j a d a ü l d l i i k m e k s. Et jada üldliikme valemis esinev arv $k - 1$ näitab, mitu liiget seisab jadas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

geomeetrilise jada liige võrdub arvuga, mis saadakse jada esimese liikme korrutamisel jada teguri astmega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1, \quad q, \quad k, \quad a_k$$

kolm suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näitena toome järgmised ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. Geomeetrilise jada esimene liige on 1000, jada tegur on $\frac{1}{2}$. Kui suur on jada 11. liige?

L a h e n d u s. Võttes geomeetrilise jada üldliikme valemis $a_1 = 1000$, $q = \frac{1}{2}$ ja $k = 11$, saame

$$a_{11} = 1000 \cdot (\tfrac{1}{2})^{11-1} = 1000\,(\tfrac{1}{2})^{10} =$$
$$= 1000 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1000}{1024}$$

ehk taandades

$$a_{11} = \frac{125}{128}.$$

Ülesanne 2. Geomeetrilise jada esimene liige on 5, kaheksas liige $\frac{5}{2187}$. Kui suur on jada tegur?

Lahendus. Andmeiks on

$$a_1 = 5, \quad k = 8, \quad a_k = \frac{5}{2187};$$

otsitavaks on q. Asetades andmed geomeetrilise jada üldliikme valemisse, saame

$$\frac{5}{2187} = 5 \cdot q^{8-1},$$

seega

$$\frac{1}{2187} = q^7$$

ehk

$$q^7 = \frac{1}{2187}.$$

Logaritmides saame

$$7 \log q = -\log 2187,$$

millest

$$\log q = -\frac{\log 2187}{7}.$$

Logaritmide tabeli abil leiame

$$\log 2187 = 3{,}3398,$$

seega

$$\log q = -0{,}4771,$$

ehk

$$\log \frac{1}{q} = 0{,}4771,$$

millest

$$\frac{1}{q} = 3{,}000$$

ja

$$q = \tfrac{1}{3}.$$

Ülesanded.

196. Geomeetrilise jada esimene liige on 15, jada tegur on 2. Kui suur on jada 5. liige?

197. Geomeetrilise jada 1. liige on 6 ja 2. liige on 6,3. Kui suur on jada 10. liige?

198. Geomeetrilise jada esimene liige on 2,6, jada tegur on 1,75. Kui suur on 20. liige?

199. Leida geomeetrilise jada 32, 48, 72, ... kuues liige.

200. Leida geomeetrilise jada $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$ kümnes liige.

201. Leida geomeetrilise jada $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{8}$, ... seitsmes liige.

202. On antud arvude jada, mille iga liige moodustab 25% eelnevast liikmest. Näidata, et see jada on geomeetriline jada. Kui suur on jada tegur?

203. On antud arvude jada, mille iga liige moodustab 120% eelnevast liikmest. Näidata, et need arvud moodustavad geomeetrilise jada. Kui suur on jada tegur?

204. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada iga liige on 1% võrra suurem eelnevast.

205. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada iga liige on 3% võrra väiksem eelnevast.

206. Õhukindlas anumas on 24 g õhku. Õhupumba iga tõmbega imetakse $\frac{3}{8}$ anumas olevast õhust. Mitu grammi on jäänud anumasse 15 tõmbe järel?

207. Õhupumba kupli all on õhk normaalrõhumisel. Pumba iga tõmbega imetakse kupli alt 2% seal olevast õhust. Kui suur on õhurõhumine kupli all 20 tõmbe järel?

208. Näidata, et geomeetrilise jada mistahes liige on temale eelneva ja temale järgneva liikme keskmine võrdeline ehk geomeetriline keskmine.

209. Leida geomeetrilise jada 10. liige, teades, et 9. liige on 6 ja 11. liige on 54.

210. Leida geomeetrilise jada 23. liige, teades, et 22. liige on $\frac{8}{9}$ ja 24. liige $\frac{32}{81}$.

211. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on $\frac{1}{2}$ ja 5. liige on $\frac{1}{162}$.

212. Klaveri a-keele võnkearv on 435, a'-keele (järgmise kõrgema oktaavi a) võnkearv on 2 korda suurem. Vahepealsete keelte: ais, h, c', cis', d', dis', e', f', fis', g' ja gis' võnkearvud koos keelte a ja a' võnkearvudega moodustavad geomeetrilise jada. Leida selle jada tegur ja c'-keele võnkearv.

213. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on 20 ja 7. liige on 312 500.

214. Logaritme kasutamata arvutada geomeetrilise jada tegur, kui jada 2. liige on 6 ja 11. liige on 118 098.

215. Geomeetrilise jada 5. liige on 9, sama jada 8. liige on 72. Anda jada esimesed kolm liiget.

216. Paigutada arvude 1 ja 2197 vahele kaks niisugust arvu, et tekiks geomeetriline jada.

217. Paigutada arvude $\frac{10}{243}$ ja 21 870 vahele 11 niisugust arvu, et tekiks geomeetriline jada.

218. On antud geomeetriline jada 1, 2, 4, . . . Paigutada iga kahe järjestikuse liikme vahele üks arv nõnda, et antud arvud koos vahelepaigutatud arvudega moodustaksid jälle geomeetrilise jada.

219. Geomeetrilise jada esimene liige on 3 ja tegur on 2. Mitmes liige selles jadas on 3072?

220. Geomeetrilise jada esimene liige on $\frac{1}{16}$ ja tegur on 4. Mitmes liige selles jadas on 4096?

221. Mitmes liige geomeetrilises jadas 6, 12, 24, ... on $3 \cdot 2^{16}$?

222. Mitmes liige geomeetrilises jadas 625, 250, 100, ... on $2^{10} \cdot 5^{-6}$?

223. Mitu liiget geomeetrilises jadas 1000, 500, 250, ... on suuremad kui $12\frac{1}{2}$?

224. Mitu liiget geomeetrilises jadas $\frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27}, \ldots$ on suuremad kui 0,0001?

225. Arvud 6, x ja 96 moodustavad antud järjekorras geomeetrilise jada. Määrata arv x.

226. Leida arv a, kui arvud $a - 2$, a ja $a + 4$ moodustavad geomeetrilise jada.

227. Leida arvud x ja y, kui arvud 8, x, y ja 27 moodustavad geomeetrilise jada.

228. Missuguse arvu võrra peab suurendama arve 3, 5 ja 8, et saadused moodustaksid geomeetrilise jada?

229. Aritmeetilise jada esimene liige on 2. Jada esimene, neljas ja kümnes liige moodustavad geomeetrilise jada. Leida aritmeetilise jada vahe.

230. Näidata, et geomeetrilise jada liikmete logaritmid moodustavad aritmeetilise jada.

§ 22. Orgaanilise kasvamise seadus.

Väga paljude looduses toimuvate protsesside kirjeldamiseks sobib kasutada geomeetrilist jada.

Rakud, need elementaarsed osised, milledest koosnevad nii loomade kui taimede kehad, paljunevad p o o l-d u m i s e teel. Seetõttu on rakkude arv igas põlvkonnas 2 korda suurem kui rakkude arv eelnevas põlvkonnas. Seega järjestikuste põlvkondade rakkude arvud moodustavad geomeetrilise jada, mille tegur on 2.

Kõrgemail olestel esineb tavaliselt kahesooline paljunemine, s. t. ema- ja isaindiviid annavad oma eluea kestel teatava arvu järglasi. See kahest vanemast põlvnevate järglaste arv on eri oleste liikidel erinev: ühed liigid paljunevad kiiremini kui teised.

Kui mingi liigi esimese põlvkonna indiviidide arv on a_1 ja igast kahest vanemast sigib n järglast, siis teise põlvkonna indiviidide arv on

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \cdot n$$

ehk

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{n}{2},$$

kolmanda põlvkonna indiviidide arv on

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{n}{2}$$

jne. Seega järjestikuste põlvkondade indiviidide arvud moodustavad jällegi geomeetrilise rea teguriga $\frac{n}{2}$.

Tegelikult ei toimu paljunemine muidugi nii lihtsalt, kui siin oli käsiteldud, vaid paljunemisnähtus on palju keerukam seetõttu, et

1) põlvkonnad ei järgne üksteisele kattumiseta, vaid nad osaliselt kattuvad ajas, nii et järglased elavad ühtaegu vanematega ja vanavanematega;

2) paljud indiviidid hukkuvad enne küpsusikka jõudmist ja jäävad seetõttu või ka muil põhjusil järglasteta;

3) järglaste arv pole antud liigi igal paaril üks ja sama, vaid kõigub teatavates piirides.

Seepärast tuleb meil näiteks loobuda vaatlemast indiviidide arvusid põlvkondade järgi ja edaspidi vaatleme indiviidide arvusid ajamomentidel, mis järgnevad üksteisele võrdsete ajavahemikkude, näiteks ajaühiku tagant.

Loodusvaatlused näitavad, et ülal loeteldud põhjustele vaatamata teatavates muutumatutes arenemistingimustes liigi indiviidide arvud ajaühiku tagant järgnevatel momentidel moodustavad jada, mis on kaunis lähedane geomeetrilisele jadale, s. o.

ajaühiku jooksul liigi indiviidide arv kasvab enam-vähem püsiva arvu kordseks.

Seda elava looduse indiviidide arvu kasvamise kirjeldust nimetatakse orgaanilise massi kasvamise seaduseks ehk lühidalt o r g a a n i l i s e k a s v a m i s e s e a d u s e k s.

Olgu esimesel ajamomendil mingi orgaanilise massi, näiteks teatava piirkonna elanike arvu, suurus a_1, teisel ajamomendil, näiteks 1 aasta pärast olgu selle massi suurus $a_2 = a_1 q$, kus q on mingi võrdlemisi püsiv kasvutegur ehk i n d e k s, nagu teda nimetatakse majandusteadustes. Siis kolmandal ajamomendil, s. o. 2 aasta pärast, selle massi suurus on $a_3 = a_2 q$ jne.

Seega esimese aasta jooksul mass sai juurdekasvu

$$a_2 - a_1 = a_1 q - a_1$$

ehk

$$a_2 - a_1 = a_1 (q - 1)$$

ja teise aasta mass sai juurdekasvu

$$a_3 - a_2 = a_2 q - a_2$$

ehk

$$a_3 - a_2 = a_2 (q - 1).$$

Jagades teise aasta juurdekasvu esimese aasta juurdekasvuga:

$$\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_2 (q - 1)}{a_1 (q - 1)},$$

saame pärast taandamist võrde

$$\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Seega võime orgaanilise massi kasvamise seadust väljendada ka järgmiselt:

ajaühikuis toimunud massi juurdekasvud on võrdelised eelnevate massi väärtustega.

Järelikult, kui orgaaniline mass tõesti kasvab (juurdekasv on positiivne), siis toimub see kasvamine üha kiiremalt, ja kui mass kahaneb (juurdekasv on negatiivne), siis toimub see kahanemine üha aeglasemalt.

Ajaühikus toimunud juurdekasv moodustab orgaanilise kasvamise korral teatava, antud tingimustes püsiva osamäära eelnevast massi väärtusest. See osamäär on $q - 1$, ehk indeksi ja arvu 1 vahe. See osamäär väljendatakse sagedasti protsentides; majandusteadustes nimetatakse seda osamäära t e m p o k s.

Kui orgaanilise massi kasvutegur ehk indeks on näiteks 1,25, siis massi iga juurdekasv moodustab eelnevast massi väärtusest 25%. Öeldakse ka, et tempo on 25%.

Ka rahvamajanduses on orgaanilise kasvamise seadusel väga suur tähtsus. Et rahvaarv kasvab orgaanilise kasvamise seaduse järgi (geomeetrilises jadas), siis ka rahvamajanduse toodang, mis peab rahuldama elanikkonna tarbimise vajadusi, peab samuti kasvama geomeetrilises jadas. Kui rahvamajanduse toodangu indeks võrdub rahvaarvu indeksiga, siis elanike tarvete rahuldamine jääb ikka ühele ja samale tasemele.

Nõukogude rahvamajanduse eesmärk on saavutada töötavate masside üha suuremat heaolu, s. o. nende tarbimise vajaduste rahuldamist üha suuremas ulatuses. Seepärast näeb nõukogude plaanimajandus rahvamajanduse toodangule ette suurema indeksi kui rahvaarvu indeks. Nii näeme, et neljas stalinlik rahvamajanduse taastamise ja arendamise viisaasta plaan näeb ette, et NSV Liidu tööstuslik toodang, mis 1940. a. oli 138,5 miljardit rbl., peab 1950. aastaks tõusma 205 miljardi rublani. See tähendab, et tööstusliku toodangu keskmise indeksina on ajavahemikule 1940—1950 ette nähtud

$$\sqrt[10]{\frac{205}{138,5}} = \sqrt[10]{1,48} = 1,04,$$

sellal kui NSVL rahvaarv kasvab aastas umbes 2% võrra (rahvaarvu indeks on 1,02).

Orgaanilise kasvamise seaduse (geomeetrilise jada) abil on võimalik kirjeldada ka paljusid eluta looduses toimuvaid protsesse. Füüsikas ja keemias esineb palju nähtusi, milledes mingi suuruse juurdekasv on võrdeline selle suuruse eelneva väärtusega. Nii näiteks toimub keha jahtumine seda aeglasemalt, mida väiksem on selle keha ja teda ümbritseva keskkonna temperatuuride vahe. Täpsemalt, keha temperatuuri langus (negatiivne juurdekasv) ajaühikus moodustab antud soojusjuhtivuse, — konvektsiooni ja -kiirgamise tingimustes ikka ühe ja sama osa keha eelneva temperatuuri ja keskkonna temperatuuri vahest.

N ä i d e. Toas, mille temperatuur on 20°, on keha, mille temperatuur on 100°. Olgu keha soojusisolatsiooni tingimused sellised, et keha temperatuur langeb igas minutis 2% võrra keha temperatuuri ja toatemperatuuri vahest. Arvutame, milleni langeb selle keha temperatuur poole tunni jooksul.

Esimese minuti algul keha ja toa temperatuuri vahe t_1 on 80°. Seega esimese minuti jooksul keha temperatuur langeb 2% võrra 80 kraadist, s. o. 0,02 · 80° võrra. Järelikult teise minuti algul temperatuuride vahe

$$t_2 = 80° - 0{,}02 \cdot 80°$$

ehk

$$t_2 = 80° \cdot 0{,}98.$$

Seega on geomeetrilise jada tegur 0,98 ning üldliiget ehk keha ja toa temperatuuride vahet n-nda minuti algul määrab valem

$$t_n = 80° \cdot 0{,}98^{n-1}.$$

Järelikult on pool tundi pärast jahtumise algust, s. o. 31-se minuti algul temperatuuride vahe

$$t_{31} = 80° \cdot 0{,}98^{30}.$$

Arvutades logaritmide abil, leiame, et selle avaldise väärtus on 35,6°. Seega on keha temperatuur poole tunni pärast 20° + 35,6°, s. o. 55,6°.

Nähtuste hulka, mida peegeldab orgaanilise kasvamise seadus, kuuluvad muuhulgas veel:

õhurõhu muutumine olenevalt kõrgusest (merepinnalt),

energia, näiteks valgusenergia neeldumine keskkonnas,

elektrikondensaatori tühjenemine laengust,

radioaktiivsete ainete lagunemine,

keemilises reaktsioonis tekkiva aine kontsentratsiooni muutumine,

segu kontsentratsiooni muutumine läbivooluga anumas

ja palju teisi nähtusi.

Ülesanded.

231. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelneva aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu 4. aastal, kui ta 1. aastal kasvab 25 cm võrra?

232. Keha, viibinud 15 minutit termostaadis, mille temperatuur on 0°, jahtus 30-kraadisest temperatuurist 22,5-kraadise temperatuurini. Milline on keha temperatuur $1\frac{1}{2}$ tundi pärast katse algust?

233. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada iga aasta 15% võrra võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse aastatoodang viisaastaku jooksul?

234. Klaasplaat laseb läbi 96% temale langevast valguse hulgast, neelates ülejäänud osa. Kui suure osa temale langenud valguse hulgast laseb läbi kümnest sääräsest plaadist koosnev pakk?

235. Ühekordse klaasiga aken neelab 15% temale langevast valgusest. Mitu protsenti valgusest neelab kahe- ja kolmekordse klaasiga aken?

236. Vaadist, milles on 150 liitrit puhast piiritust, võetakse 10 korda järgemööda 5 liitrit piiritust, täites iga kord tühjaks jäänud ruumi veega. Kui palju puhast piiritust jääb veel vaati?

237. NSV Liidus toodeti 1925. a. $3 \cdot 10^6$ t ja 1937. a. $18 \cdot 10^6$ t terast. Mitme protsendi võrra suurenes keskmiselt iga-aastane terase toodang võrreldes eelneva aastaga?

238. 20-st täiesti ühesugusest klaasplaadist koosnev pakk laseb läbi 60% esimesele plaadile langevast valguse hulgast. Kui suure osa temale langevast valguse hulgast laseb läbi üksik plaat?

239. Õhurõhumise kohta pealpool maapinda kehtib seadus: 100-meetrilisele tõusule vastab õhurõhumise vähenemine 1,2% võrra. Arvutada, kui suur on õhurõhumine 400 m kõrgusel, kui maapinnal valitseb normaalne rõhumine. Arvutada, millises kõrguses on õhurõhumine 665 mm, kui maapinnal valitseb 750-millimeetriline rõhumine.

240. Radioaktiivse aine uraan X_1 aatomeist laguneb öö-päeva vältel 2,8%. Mitme öö-päeva vältel laguneb pool selle aine aatomitest?

241. Keha, mille temperatuur oli 25°, paigutati termostaati, mille temperatuur hoiti 0°-l. Arvutada, millise aja jooksul selle keha temperatuur langeb 10°-ni, kui ta 20 minuti jooksul langes 20°-ni.

242. Pärmikultuuri aktiivse fermendi kogus kasvab orgaanilise kasvamise seaduse järgi. 1 g suurune fermendi kogus oli 1 tunni jooksul kasvanud 1,2 grammini. Kui suur on fermendi kogus 5 tundi pärast katse algust?

243. Kuumutamisel vesiniku ülihapend laguneb valemi

$$H_2O_2 = H_2O + O$$

järgi. 10 min. pärast reaktsiooni algust H_2O_2 kontsentratsioon oli $8 \frac{g}{l}$ ja 20 min. pärast reaktsiooni algust $4{,}8 \frac{g}{l}$. Arvutada vesiniku ülihapendi esialgne kontsentratsioon. Mitme protsendi võrra väheneb selles katses kontsentratsioon minutis?

244. Kinnises anumas on vedela väävli kohal algul 1 g vesinikku. Reaktsiooni $H_2 + S = H_2S$ tõttu on vesiniku hulk 12 tunni jooksul vähenenud 0,832 grammini. Arvutada, kui palju vesinikku on anumas 24 tunni pärast, arvestades, et väävliauru kontsentratsioon vedela väävli juuresolu tõttu jääb muutumatuks ja et vedel väävel neelab H_2S.

245. Kondensaatori laeng on 5 kuloni; halva isolatsiooni tõttu kaotab ta igas minutis 5% oma hetkel olemas olevast laengust. Mitme minuti pärast on kondensaatori laeng 1 kulon?

246. Rahvaarvu aastane indeks on 1,01. Kui suur peab olema põllumajandusliku toodangu indeks, et 15 aasta pärast ühele elanikule osanev põllumajandussaaduste kogus oleks 2 korda suurem kui praegu?

247. Eesti kohaliku tööstuse aastatoodang peab 1946.—1950. viisaastaku jooksul kasvama 2,3-kordseks. Kõige suurem kasv on ette nähtud tekstiiltööstuse aastatoodangule, mis 1945. aasta tasemelt — $2{,}33 \cdot 10^6$ m riiet, peab 1950. aastaks tõusma $15{,}16 \cdot 10^6$ meetrini. Arvutada, kui suured peavad olema selle plaani kohaselt 1949. aasta kohaliku tööstuse ja tekstiiltööstuse toodangud võrreldes 1945. a. toodanguga.

248. Moskvas oli 1931. aastal 2,8 milj. elanikku. 1939. aastaks tõusis Moskva elanike arv 4,14 miljonile. Kui suur on Moskvas elanike arvu iga-aastane juurdekasv protsentides ehk tempo?

§ 23. Geomeetrilise jada summa.

Geomeetrilise jada liikmete summat nimetatakse geomeetrilise jada summaks ehk geomeetriliseks reaks.

Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Kiiremini jõuame eesmärgile geomeetrilise jada summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks avaldame liikmed $a_2, a_3, \ldots, a_n$ esimese liikme ja jada teguri kaudu ning korrutame saadud võrduse

$$s = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

kummagi poole teguriga q

$$sq = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame

$$sq - s = -a_1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + a_1q^n$$

ehk

$$s(q - 1) = a_1q^n - a_1,$$

millest

$$s = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}$$

ehk

$$\boxed{s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Et geomeetrilise jada viimane liige a_n võrdub avaldisega a_1q^{n-1}, siis geomeetrilise jada summa valemis võib avaldise a_1q^n ehk $a_1q^{n-1} \cdot q$ asendada avaldisega a_nq. Nii saame summa valemi teisendi

$$\boxed{s = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}},$$

mida on sobiv kasutada, kui on antud jada esimene liige a_1, viimane liige a_n ja jada tegur q.

Ü l e s a n n e 1. Geomeetrilise jada esimene liige on 3 ja jada tegur on 2. Arvutada selle jada esimese 6 liikme summa.

L a h e n d u s. Kasutades summa valemit

$$s = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

leiame, et antud jada summa

$$s = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3\,(2^6 - 1) = 3\,(64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ülesanne 2. Geomeetrilise jada esimene liige on 1, viimane liige on 243 ja jada tegur on 3. Arvutada selle jada summa.

Lahendus. Kasutades summa valemit

$$s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

leiame, et antud jada summa

$$s = \frac{243 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = 364.$$

Kui geomeetrilise jada tegur on väiksem kui 1, siis nimetaja jada summa valemis on negatiivne. Sel puhul on kohane teisendada murdu lugeja ja nimetaja märkide muutmisega. Nii saame geomeetrilise jada summa valemist järgmised teisendid

$$s = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ja

$$s = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

mida kasutatakse juhtudel, kui $q < 1$.

Ülesanne 3. Leida summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}.$$

Lahendus. Siin on $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ja $n = 11$; järelikult nõutav summa

$$s = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= 2 - \frac{1}{1024} = 1\,\frac{1023}{1024}.$$

Märkus. Geomeetrilise jada summa valemit ei saa rakendada ainult sel juhul, kui $q = 1$. Tõepoolest, sellel

q väärtusel valemi parem pool saab kuju $a_1 \cdot \frac{0}{0}$, milles esinev sümbol $\frac{0}{0}$ peaks jagamise definitsiooni järgi tähendama arvu, mis nulliga korrutamisel annab nulli; et iga arvu korrutamisel nulliga saame nulli, siis ei ole sümbolil $\frac{0}{0}$ ühest tähendust ja seega puudub ühene tähendus ka korrutisel $a_1 \cdot \frac{0}{0}$.

Sel erijuhul, kus $q = 1$, saame geomeetrilise jada summa arvutada otseselt. Tõepoolest, tehtud eeldusel on kõik geomeetrilise jada liikmed võrdsed esimese liikmega a_1, järelikult

$$s = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1;$$

et liikmeid on n, siis

$$s = na_1.$$

Ülesanded.

249. Leida geomeetrilise jada 3, 6, 12, . . . esimese kaheksa liikme summa.

250. Leida geomeetrilise jada esimese 5 liikme summa, kui jada algab arvuga 2 ja jada tegur on 3.

251. Leida geomeetrilise jada $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . . esimese kümne liikme summa.

252. Geomeetrilise jada esimene liige on 7, jada tegur on $\frac{3}{2}$. Arvutada jada esimese 12 liikme summa.

253. Kui suur on summa $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$?

254. Hindu kuningas Š i i r a m oli nõnda vaimustatud malemängust, et avaldas nõusoleku maksta mängu leiutajale S i s s a I b n D a h i r'ile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades, ja nimelt 1 tera malelaua 1. ruudule, $1 \cdot 2$ tera teisele, $1 \cdot 2 \cdot 2$ kolmandale, $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 hl sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera ja kaalub ümmarguselt 70 kg; ühe kaubavaguni kandejõud on 17 tonni.

255. Mõned haigust tekitavad bakterid poolituvad iga poole tunni tagant. Mitu bakterit on organismis 24 tundi pärast nakatust, millega organismi sattus 10 bakterit?

256. Kummipall, langenud mingilt kõrguselt põrandale, põrkab tagasi ja tõuseb kõrgusele, mis on $\frac{1}{3}$ langemiskõrgusest. Kui pika tee on kulgenud 3 m kõrguselt langetatud pall, kui ta neljandat korda puudutab põrandat?

257. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 85% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu kõrgus 5 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 30 cm?

258. Leida geomeetrilise jada $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{8}$ ... esimese 8 liikme summa.

259. Leida geomeetrilise jada $2\sqrt{3}$, 6, ... esimese 6 liikme summa.

260. Leida jada $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ... esimese 10 liikme summa.

261. Leida jada $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$, ... esimese $2n$ liikme summa.

262. Leida jada $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{3}$, 1, ... esimese 6 liikme summa.

263. 7-liikmelise geomeetrilise jada esimene liige on 1 ja viimane 64. Leida jada tegur ja summa.

264. Geomeetrilise jada 4. liige on 6 ja 12. liige on 1536. Kui suur on selle jada esimese 11 liikme summa?

265. On antud geomeetrilise jada 1. liige a ja 5. liige u. Kui suur on selle jada esimese 5 liikme summa?

266. Teisendada avaldis $1 + x + x^2$ üksliikmeks.

267. Teisendada avaldis $a^2 + ab + b^2$ üksliikmeks.

268. Lihtsustada avaldis $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$.

269. Lihtsustada avaldis $ab + a^2b^3 + a^3b^5 + a^4b^7$.

270. Lihtsustada avaldis
$k + 1 + (k + 1)^2 + (k + 1)^3 + \ldots + (k + 1)^6$.

271. 6-liikmelise geomeetrilise jada summa on 252, jada tegur on 2. Leida jada 1. liige.

272. 5-liikmelise geomeetrilise jada summa on 1562, rea tegur on 5. Leida jada 1. liige.

273. Leida geomeetrilise jada 1. liige, kui jada tegur on $\frac{1}{2}$ ja 6 liikme summa on $47\frac{1}{4}$.

§ 24. Lõpmatu alaneva geomeetrilise jada summa.

Vaatleme, kuidas muutub alaneva geomeetrilise jada summa väärtus, kui selles jadas võetakse üha rohkem liikmeid. Selleks teisendame geomeetrilise jada summa valemit järgmiselt:

$$s = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}.$$

Viimase avaldise liige $\frac{a_1}{1 - q}$ ei sisalda jada liikmete arvu n; seega ta jääb muutumatuks suuruse n kasvamisel. Seevastu teine liige $\frac{a_1 q^n}{1 - q}$ sisaldab teguri̇na astet q^n; seega suuruse n kasvamisel teine liige muutub.

Et alaneva geomeetrilise jada tegur q on absoluutväärtuselt väiksem kui 1, siis astendaja n kasvamisel aste q^n muutub üha väiksemaks. Seetõttu ka liige $\frac{a_1 q^n}{1-q}$ hakkab üha vähem erinema nullist; ta saab kuitahes vähe erinevaks nullist, kui jada liikmete arv on võetud küllalt suur.

Seega küllalt suure liikmete arvu puhul alaneva geomeetrilise jada summa on kuitahes vähe erinev avaldise

$$\frac{a_1}{1-q}$$

väärtusest, kus a_1 ja q tähendavad jada esimest liiget ja tegurit.

Jada, mille liikmete hulk on piiramatu — igale liikmele järgneb veel liikmeid —, nimetatakse lõpmatuks jadaks.

Et on võimatu üles kirjutada lõpmatu jada kõiki liikmeid, siis lõpmatut jada kirjutatakse tema esimeste liikmete abil ja nende järele kirjutatakse kolm punkti (mida loetakse: „ja nii edasi"). Nii tähendab kirjutis

$$2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \ldots$$

lõpmatut alanevat geomeetrilist jada, mille esimene liige on 2 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

Ülal saadud avaldist $\frac{a}{1-q}$ nimetatakse *lõpmatu geomeetrilise jada summa* väärtuseks, kui a ja q on jada esimene liige ja tegur.

Selles tähenduses kirjutatakse:

$$\boxed{a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}, \text{ kui } |q| < 1}$$

Vasakul pool võrdusmärki seisvat kirjutist nimetatakse ka *lõpmatuks geomeetriliseks reaks*. Paremal pool võrdusmärki on selle rea väärtus, avaldatuna üksliikme kujul.

N ä i d e 1. Lõpmatu alaneva geomeetrilise jada

$$2, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots$$

summa on

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

N ä i d e 2. Perioodilist kümnendmurdu 3,5222 ... mõistetakse summana

$$3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots,$$

mille liikmed alates kolmandast moodustavad lõpmatu alaneva geomeetrilise rea esimese liikmega $\frac{2}{100}$ ja teguriga $\frac{1}{10}$.

Seega

$$3{,}5222\ldots = 3\tfrac{1}{2} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots =$$

$$= 3\tfrac{1}{2} + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 3\tfrac{1}{2} + \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{10}} = 3\tfrac{1}{2} + \frac{2}{90} = 3\frac{47}{90}.$$

Ülesanded.

274. Arvutada lõpmatu geomeetrilise rea $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ väärtus.

275. Leida lõpmatu geomeetrilise jada 4, 2, 1, ... summa väärtus.

276. Leida lõpmatu geomeetrilise rea $12 + 6 + 3 + \ldots$ väärtus.

277. Arvutada rea $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ väärtus.

278. Arvutada rea $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \ldots$ väärtus.

279. Teisendada rida $1 + \sin a + \sin^2 a + \ldots$ üksliikmeks.

280. Arvutada järgmiste ridade väärtused:

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$
2. $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \ldots$
3. $5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \ldots$
4. $a + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots$
5. $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots$
6. $u - \frac{u}{1-u} + \frac{u}{(1-u)^2} - \ldots$

281. Arvutada rea $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$ väärtus.

282. Arvutada rea $\sqrt{5} + \sqrt{2{,}5} + \sqrt{1{,}25} + \ldots$ väärtus.

283. Missugusel tingimusel lõpmatu geomeetriline jada $\frac{x}{4}, \frac{4}{x}, \ldots$ on alanev jada?

Mis on sel puhul jada summa väärtus?

284. On antud ruut, mille diagonaal on d. Ehitatakse ruut, mille diagonaaliks on antud ruudu külg; ehitatakse kolmas ruut, mille diagonaaliks on teise ruudu külg, jne. Arvutada kõikide eespool nimetatud ruutude pindalade summa.

285. Võrdkülgse kolmnurga külg on a. Sellesse kolmnurka kujutatakse ring; kolmnurga ühte nurka kujutatakse ring, mis puutub esimest ringi ja nurga haarasid; samasse nurka kujutatakse ring, mis puutub teist ringi ja nurga haarasid, jne. lõpmatult. Arvutada, missuguse osa kolmnurga pindalast moodustab nende ringide pindalade summa.

286. Võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus on a, haara pikkus on b. Kolmnurka joonestatakse ringid niiviisi, et esimene puudutab alust ja mõlemat haara, teine puudutab esimest ringi ja mõlemat haara, kolmas eelmist ringi ja mõlemat haara, jne. lõpmatult. Leida kõigi sel viisil tekkivate ringide ümbermõõtude summa.

287. Arendada murd $\frac{16}{33}$ kümnendmurruks. Kui suur on geomeetrilise rea esimene liige ja tegur, kui seda kümnendmurdu vaadelda geomeetrilise reana?

288. Arendada murd $\frac{1}{37}$ kümnendmurruks. Kui suur on tekkinud geomeetrilise rea esimene liige ja tegur?

289. Kirjutada järgmised perioodilised kümnendmurrud harilikkude murdudena:

1. 0,444 . . .	2. 0,121212 . . .	3. 0,2111 . . .
0,666 . . .	0,252525 . . .	0,4232323 . . .
0,999 . . .	0,030303 . . .	0,25161616 . . .

290. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on 20 ja jada tegur on $\frac{3}{4}$. Leida jada esimene liige.

291. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $2\frac{1}{2}$ ja jada tegur on 0,2. Leida jada esimene liige.

292. Lõpmatu geomeetrilise rea väärtus on 6 ja esimene liige on 4. Kui suur on tegur.

293. Leida lõpmatu geomeetrilise jada tegur, kui jada esimene liige on 1 ja jada summa on 5.

294. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $\frac{4}{9}$ ja jada tegur on 0,1. Avaldada jada üldliige tema kohanumbri kaudu. Kirjutada jada summa lõpmatu kümnendmurruna.

295. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $\frac{16}{99}$ ja jada tegur on 0,01. Arvutada jada üldliige tema kohanumbri kaudu. Kirjutada jada summa lõpmatu kümnendmurruna.

296. Kirjutada arv 6 lõpmatu geomeetrilise jada summana, võttes jada teguriks $\frac{1}{3}$.

297. Arendada avaldis $\frac{1}{1-a}$ geomeetriliseks reaks, mille tegur on a. Missuguste arvu a väärtuste puhul on antud avaldis selle rea väärtuseks?

§ 25. Liht- ja liitintress.

Nõukogude riik, võttes kodanike raha hoiule tööhoiukassades, kasutab seda raha sotsialistlikuks ülesehitustööks ja maksab raha kasutamise eest selle omanikule tasu; seda tasu nimetatakse **intressiks**. Intress arvatakse võrdeliseks kasutatava rahasumma suurusega ja võrdeliseks kasutamise kestusega. Intress arvutatakse riigi poolt kindlaks määratud **intressimäära** alusel.

Intressimääraks nimetatakse arvu, mis näitab, millise osa hoiusest moodustab ühe aasta intress.

Seega väljendust „raha on hoiustatud intressimääral 4%" või ka väljendust „hoius kannab 4% intressi" tuleb mõista nii, et riik maksab hoiuse omanikule selle hoiuse **üheaastase** kasutamise eest intressi 4% hoiuse suurusest.

Intressi arvutamisel loetakse aasta võrdseks mitte 365 või 366 päevaga, vaid 360 päevaga; sel puhul on kuu mitte 31, 30, 28 või 29 päeva, nagu kalendris, vaid ikka 30 päeva. Aasta ümardamine 360 päevaks hõlbustab tunduvalt intressi arvutamist: ühe kuu intress on ikka $\frac{1}{12}$ aastaintressist, 20 päeva intress $\frac{1}{18}$ aastaintressist, 10 päeva intress $\frac{1}{36}$ aastaintressist, jne.

Intressi tasumine võib toimuda kahel viisil: intressi võib tasuda raha kasutusaja lõpul ja intressi võib kindlate ajavahemikkude järel liita kasutatava rahasummaga, mistõttu see summa järk-järgult suureneb. Esimesel juhul öeldakse, et rahasumma kannab **lihtintressi**, teisel juhul öeldakse, et rahasumma kannab **liitintressi**. Seega

rahasumma kasvab lihtintressil, kui intress arvutatakse kogu rahasumma kasvamise kestuselt rahasumma algväärtuse järgi;

rahasumma kasvab liitintressil, kui intress kindlate ajavahemikkude järel liidetakse rahasummaga ja seega igas sääruses ajavahemikus intress arvutatakse selle väärtuse järgi, milleni rahasumma ajavahemiku alguseks oli kasvanud.

Töö-hoiukassades liidetakse intress iga aasta lõpul hoiusega. Seega töö-hoiukassades hoiused kasvavad liitintressil. Hoiuselt, mille hoiuaeg on alla ühe aasta, töö-hoiukassad maksavad lihtintressi.

§ 26. Rahasumma kasvamine lihtintressil.

Ülesanne 1. Rahasumma k rubla kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab see summa n aasta jooksul?

Lahendus. Rahasummalt saadav aastaintress on $k \cdot \frac{p}{100}$ rubla; seega n aasta intress on $k \cdot \frac{n \cdot p}{100}$ rubla. Järelikult rahasumma suurus n-nda aasta lõpuks on rubladés

$$k + k \cdot \frac{np}{100};$$

tähistades otsitavat tähega K, saame

$$\boxed{K = k\left(1 + \frac{np}{100}\right)}$$

Ülesanne 2. Rahasumma k rubla kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab see summa n päeva jooksul?

Lahendus. Rahasummalt saadav

aastaintress on rublades $k \cdot \frac{p}{100}$,

ühe päeva intress „ „ $k \cdot \frac{p}{360 \cdot 100}$,

n päeva intress „ „ $k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$.

Järelikult summa suurus n-nda päeva lõpuks on rublades

$$k + k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$$

ehk

$$k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Tähistades rahasumma lõppväärtuse tähega K, saame ülesande vastuse kujul

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Kui ülesannete 1 ja 2 lahendamisel saadud valemeis esinevast neljast suurusest k, p, n ja K on kolm suurust teada, siis neljanda saame ikka leida. Et need suurused esinevad kõnesolevais valemeis esimesel astmel, siis nõuab nende arvutamine antud suuruste järgi vaid lineaarvõrrandi lahendamist. Näiteina lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ülesanne 3. Mitme päeva jooksul rahasumma k rubla, kandes $p\%$ intressi, kasvab summaks K rubla?

Lahendus. Eelnevast on teada, et

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

ehk

$$K = k + \frac{knp}{36000};$$

seega

$$K - k = \frac{knp}{36000}$$

ehk

$$knp = 36000\,(K - k)$$

ja siit otsitav päevade arv

$$n = \frac{36000\,(K-k)}{kp}.$$

Ü l e s a n n e 4. Missugune rahasumma, kandes 6% intressi, kasvab 60 päeva jooksul summani 505 rubla?

L a h e n d u s. Märgime otsitava summa tähega k. Varem tuletatud valemist

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

leiame, et

$$k = \frac{K}{1 + \frac{np}{36000}}.$$

Asendades siin sümbolid K, n ja p nende antud väärtustega, saame

$$k = \frac{505}{1 + \frac{60 \cdot 6}{36000}}$$

ehk

$$k = \frac{505}{1 + \frac{1}{100}} = \frac{505 \cdot 100}{101} = 500.$$

V a s t u s. Otsitav summa on 500 rubla.

Ülesanded.

298. Töölise hoiuarve on 31. detsembril 844 rubla. Summa seisab puutumata ning hoiukassa maksab $3\frac{1}{2}$% intressi. Kui suur summa seisab aasta pärast töölise nimel?

299. Järgmistes näidetes on antud hoius, intressimäär ja hoiuse kasvamise kestus. Arvutada intress.

	Hoius rublades	Intressi-määr	Aeg kuudes
1.	860	4 %	8
2.	675	$5\frac{1}{2}$%	6
3.	2370	3,6%	4
4.	840	$2\frac{1}{2}$%	11
5.	4860	4,2%	3

300. Järgmistes näidetes on antud hoius, intressimäär ja hoiuse kasvamise kestus. Arvutada intress.

	Hoius rublades	Intressimäär	Aeg päevades
1.	128	$6\frac{2}{5}\%$	125
2.	576	$7\frac{1}{2}\%$	256
3.	4260	$4\frac{3}{4}\%$	200
4.	785	$2\frac{1}{3}\%$	40
5.	96,40	3 %	320

301. Järgmistes näidetes on antud hoiuletoodud summa, hoiuletoomise päev ja intressimäär. Arvutada aasta lõpuks kogunenud intress ja hoiuse suurus järgmise aasta alguses.

	Hoius rublades	Hoiuletoomise päev	Intressimäär
1.	240	1. VII	4 %
2.	585	15. X	3 %
3.	2954	10. V	$4\frac{1}{2}\%$
4.	3640	6. III	$2\frac{3}{4}\%$
5.	7654	20. VIII	$3\frac{1}{3}\%$

302. Teenistuja saab pangalt 2250 rubla laenu elamu taastamiseks $1\frac{1}{2}$ aasta peale 2%-ga. Kui suur summa tuleb tal tähtajal pangale tasuda?

303. Töölisel on aasta algul töö-hoiukassas hoiul 2650 rubla. 24. aprillil ta võtab sellest summast 850 rubla välja.. Hoiukassa maksab 3% intressi. Kui suur summa seisab töölisel hoiul järgmise aasta alguseks?

304. Kui suur hoius annab 49 rubla intressi, olles hoiul 4 kuud $3\frac{1}{2}\%$-ga.

305. Kui suur on hoius, mis olles 6 kuud 4%-ga hoiul, kasvas 6120 rubla suuruseks?

306. Hoiusele, mis oli 2%-ga 25. oktoobrist aasta lõpuni hoiukassas, arvas hoiukassa 23,40 rubla intressi juurde. Kui suur oli see hoius järgneva aasta alguses?

307. Uusmaasaaja tasus 16. septembril 6070 rublaga sama aasta 17. veebruaril tehtud laenu ja selle intressi. Kui suur oli laen, kui intressi võeti 2%?

308. Mitme protsendiga on hoiul 4200 rubla, mis aasta vältel kasvab 4326 rublaks?

309. Mitmel protsendil kasvab 4800 rubla 90 päeva jooksul 4827 rublaks?

310. Kooperatiivi vaba raha 2700 rubla oli 12. juunist 2. septembrini hoiukassas hoiul ja kasvas selle aja vältel 2721 rublaks. Mitu protsenti maksis hoiukassa intressi?

311. Missuguse aja vältel kasvab 2880 rubla, olles hoiul $2\frac{1}{2}$%-ga, 2904 rublaks?

312. Missuguse aja vältel kasvab 900 rubla, olles hoiul $3\frac{1}{2}$%-ga, 911,25 rublaks?

313. 22. jaanuaril anti 585 rubla 3%-ga hoiule. Mis kuupäevaks see summa kasvab 600 rublaks?

§ 27. Rahasumma kasvamine liitintressil.

Ülesanne. Kui suure summani kasvab hoius k rubla n aasta jooksul, kui intressimääraks on p% ja intress liidetakse hoiusega iga aasta lõpul?

Lahendus. Tähistame hoiuse lõppväärtuse rublades tähega K. Ühe aasta jooksul kasvab summa k rubla intressimääral p% summani rublades

$$k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

sellest näeme, et hoiuse suurus aasta lõpul saadakse hoiuse väärtusest aasta alguses korrutamisel teguriga $1 + \frac{p}{100}$. Tähistame selle teguri lühiduse mõttes tähega q. Öeldu põhjal kasvab k rubla

1. aasta lõpuks summani kq,
2. " " " $kq \cdot q = kq^2$,
3. " " " $kq^2 \cdot q = kq^3$,

. . . .

n. " " " $kq^{n-1} \cdot q = kq^n$.

Asendades q tema väärtusega $1 + \frac{p}{100}$, saame

$$\boxed{K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

N ä i d e. Rahasumma 1000 rubla, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga lihtintressi kandes summaks rublades

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 20}{100}\right) = 2000.$$

Sama rahasumma 1000 rubla, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga liitintressi kandes summaks rublades

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = 1000 \cdot 1{,}05^{20} =$$
$$= 1000 \cdot 2{,}654 = 2654.$$

Kui valemis

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

esinevast neljast suurusest

$$k, \quad p, \quad n, \quad K$$

kolm on teada, siis saame arvutada neljanda. Selle selgitamiseks lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ülesanne 1. Kui suure summa peab paigutama hoiule intressimääral 4%, et ta 20 aasta jooksul kasvaks 2000 rubla suuruseks?

Lahendus. Rakendades varem tuletatud valemit

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

saame andmeil

$$K = 2000, \quad p = 4, \quad n = 20,$$

et

$$2000 = k\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20}$$

ehk

$$2000 = k \cdot 1{,}04^{20}$$

millest

$$k = \frac{2000}{1{,}04^{20}} = \frac{2000}{2{,}191} \approx 913.$$

Seega peab paigutama panka summa 913 rubla.

Ülesanne 2. Mitme aasta jooksul hoius kasvab kahekordseks, kui intressimääraks on 3%?

Lahendus. Antud juhul $K = 2k$ ja $p = 3$. Rakendades varemini tuletatud valemit

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

saame

$$2k = k\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n,$$

seega

$$2 = 1{,}03^n$$

ja

$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}03,$$

millest

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}3010}{0{,}0128} \approx 23{,}5.$$

Seega hoius kahekordistub ümmarguselt 24 aastaga.

Ülesanded.

314. 100-rublane summa antakse aasta alguses hoiule. Hoiukassa maksab sellelt 2% intressi aastas, mis iga aasta lõpul lisatakse hoiusele. Arvutada, kui suureks kasvab hoius 1., 2., 3., 4. ja 5. hoiuaasta lõpuks. Arvutused teostada otseselt.

315. Hoius 4000 rubla kannab 4% liitintressi. Kui suureks kasvab hoius 15 aasta jooksul?

316. Kui suureks kasvab 5800 rubla suurune hoius 8 aasta jooksul, kandes 3% liitintressi?

317. Kui suureks kasvab 2600 rubla suurune hoius 10 aasta jooksul, kandes $2\frac{1}{2}$% liitintressi?

318. Missuguseks summaks oleks kasvanud praeguseks ajaks 1 $ liitintressil 4%-ga aastas, kui ta oleks pandud kasvama Ameerika avastamisel (a. 1492)?

319. Kui suur summa, kandes $3\frac{1}{2}$% liitintressi, kasvab 20 aastaga 1000 rubla suuruseks summaks?

320. Kui suur hoius, kandes 4% liitintressi, kasvab 6 aastaga 1000 rubla võrra?

321. Töö-hoiukassasse on makstud 8 aasta eest summa 172 rubla. Vahepeal on see summa kasvanud 226,5 rublaks. Mitu protsenti liitintressi maksab hoiukassa?

322. Hoius 2500 rubla, kandes liitintressi, kasvas 17 aasta jooksul 3500 rubla suuruseks summaks. Kui suur oli intressimäär?

323. Missuguse intressimäära puhul hoius kasvab 35 aasta jooksul kahekordseks, kui kasvamine toimub liitintressil?

324. Mitu protsenti liitintressi kannab hoius, kui ta 28 aasta jooksul kasvab kolmekordseks?

325. Mitme aasta jooksul kasvab 786 rubla suurune hoius, kandes $3\frac{1}{2}\%$ liitintressi, 1000 rubla suuruseks?

326. Tööstuse sisseseade maksis uuena 150 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade vananemise ja kulumise arvel 8% eelkäivast väärtusest. Kui suurena arvestatakse sisseseade väärtust 10 aasta pärast?

327. Vabriku sisseseade maksis uuena 225 000 rubla. Kui kõrgelt tuleb hinnata vabriku sisseseadet 15 aasta pärast, kui iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade kulumise arvel 7% sisseseade eelmise aasta väärtusest?

328. Puumaja väärtus väheneb iga aastaga 2% võrra eelmise aasta väärtusest. Kui suur on maja väärtus 10 aasta pärast, kui ta praegune väärtus on 200 000 rubla?

329. Tööstuse sisseseade väärtus väheneb iga aastaga 7% võrra. Mitme aastaga on sisseseade väärtus langenud poolele esialgsest väärtusest?

P e a t ü k k IV.

Ühendid ja binoomrida.

§ 28. Ühendid.

Nii looduses kui inimtegevuse kõigil aladel näeme toimuvat ühtede esemete ühendamist teistega. Kõnelemisel ühendatakse üksikud häälikud sõnadeks ja sõnad lauseteks. Kirjutamisel ühendatakse üksikud tähed sõnakujudeks ja numbrid arvkujudeks. Arvutamisel ühendatakse üksikud arvud nende summaks, vaheks, korrutiseks ja jagatiseks. Algebras ühendatakse üksikud sümbolid avaldisteks ja võrdusteks, geomeetrias punktid ja sirged kujunditeks. Looduses toimub keemiliste elementide ühinemine keemilisteks ühenditeks.

Asudes vaatlema kõigi niisuguste ühendamiste üldisi, matemaatilisi omadusi, nimetame ühendatavaid esemeid e l e m e n t i d e k s ja nende ühendamise tulemusi ü h e n d i t e k s. Üksikuid elemente tähistame tähtedega, näiteks a, b, c, . . . ja nende ühendeid tähistame nagu korrutisi ab, ac, ba, abc, bca, . . .

Ülesanded.

330. Koostada kõik võimalikud kolmetähelised sõnakujud tähtedest a, s, i. Mitu sõnakuju saab neist moodustada?

331. Moodustada kõik väärtuselt erinevad kahe teguri korrutised, milledes teguritena esinevad suuruste

a, s ja i esimesed astmed. Mitu niisugust korrutist on võimalik moodustada?

332. Koostada õpilaste X, Y ja Z kõik võimalikud järjestused rivis.

333. Koostada numbritest 1, 2, 3 ja 4 kõik võimalikud kolmekohalised arvkujud, milles ükski numbritest ei kordu. Mitu niisugust arvkuju saab koostada?

334. Koostada arvudest 1, 2, 3 ja 4 kõik võimalikud korrutised, milledes teguritena esinevad nende arvude esimesed astmed kolmekaupa. Mitu suuruselt erinevat korrutist on võimalik saada?

335. Võtta tasapinnal 5 punkti nii, et nende hulgas ei leidu kolme punkti, mis asetseks ühel ja samal sirgel, ja joonestada kõik võimalikud sirged läbi nende punktide. Mitu sirget saab joonestada?

336. Võtta tasapinnal 4 punkti nii, et need ei asetse ühel ja samal ringjoonel, ja joonestada kõik võimalikud ringjooned, mida need punktid määravad. Mitu ringjoont on võimalik joonestada?

On olemas ühendeid, millede puhul võib muuta nende elementide järjestust, ilma et nad ise seejuures sisuliselt muutuksid. Nii ei muutu korrutise väärtus, kui muudetakse tegurite järjestust: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Samuti ei muutu summa väärtus, kui muudetakse liidetavate järjestust: $2 + 4 + 7 = 2 + 7 + 4$. Seepärast kahte sedaliiki ühendit, kui nad sisaldavad ühtesid ja samu elemente erinevates järjestustes, loetakse üheks ja samaks ühendiks. Et näiteks üks korrutis erineks teisest, on tarvilik, et nad erineksid vähemalt ühe teguri poolest.

Ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks ainult siis, kui nad erinevad vähemalt ühelt elemendilt, nimetatakse kombinatsioonideks.

Kommutatiivse tehtega koostatud avaldised, nagu summa ja korrutis, on kombinatsioonid.

Teiselt poolt on olemas ühendeid, mida nende iseloomust tingitult tuleb lugeda üksteisest erinevaiks ka siis, kui nad erinevad ainult oma elementide järjestuse poolest. Niisuguseiks ühendeiks on näiteks kahe arvu vahe ja jagatis; muutes arvude järjestust vahes või jagatises, muutub ka nende väärtus: $5 - 3 \neq 3 - 5$, samuti $5:3 \neq \neq 3:5$. Samuti muutub arvkuju tähendus, kui muuta tema numbrite järjestust: $19 \neq 91$.

Ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks, kui nad erinevad elementidelt või ka ainult nende järjestuselt, nimetatakse variatsioonideks.

Mittekommutatiivse tehtega koostatud avaldised, nagu vahe ja jagatis, on variatsioonid.

Ülesanded.

337. Kumba ühendite liiki kuuluvad Morse'i tähestiku tähed? Missugustest elementidest nad koosnevad?

338. Mis liiki ühendid on numbritega 1, 2 ja 4 kirjutatud arvkujud?

339. Mis liiki ühendid on arvudest 1, 2 ja 4 kahekaupa moodustatud summad, nagu $1 + 2$, $1 + 4$, $2 + 4$ jne.

340. Missugusesse ühendite liiki kuulub igaüks järgmistest avaldistest:

1. $2(a+b)$	4. $a-b$	7. $a:b$	10. $\sqrt[b]{a}$
2. $2a+b$	5. $(a-b)^2$	8. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$	11. $a^{\log b}$
3. $\sin(a+b)$	6. $\cos(a-b)$	9. a^b	12. $\log_b a$

§ 29. Variatsioonid.

Olgu antud kolm elementi a, b ja c. Moodustame nende kõik võimalikud variatsioonid, s. o. ühendid, mis üksteisest võivad erineda nii elementidelt kui ka nende järjestuselt. Elemente endid võime vaadelda kui variatsioone, milles elemendid esinevad ühekaupa.

Seega antud elementidest saame moodustada 3 variatsiooni ühekaupa:

$$a, \ b, \ c,$$

6 variatsiooni kahekaupa:

$$ab, \ ac, \ ba, \ bc, \ ca, \ cb$$

ja 6 variatsiooni kolmekaupa:

$$abc, \ acb, \ bac, \ bca, \ cab, \ cba.$$

Tuletame nüüd valemi, mis võimaldab leida, mitu variatsiooni on võimalik moodustada mingist arvust elementidest, ühendades neid ühe-, kahe-, kolme- jne. kaupa. Kõigi variatsioonide arvu, mis on võimalik moodustada n elemendist, ühendades neid k-kaupa ($k \leq n$), tähistame sümboliga V_n^k (lugeda: V n-ist k-kaupa).

Olgu antud n elementi: $a, b, c, d, \ldots, g, h$. Elemente võime vaadelda kui nende variatsioone ühekaupa. Seega saab n elemendist n variatsiooni ühekaupa ehk

$$V_n^1 = n.$$

Ühendame nüüd antud elemendid variatsioonideks kahekaupa. Selleks ühendame esmalt elemendiga a kord b, kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n - 1$ elemendist. Nii saame $n - 1$ variatsiooni kahekaupa, mille esimeseks elemendiks on a. Seejärel ühendame elemendiga b kord a, kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n - 1$ elemendist. Nii saame jälle $n - 1$ variatsiooni kahekaupa, kõigil esimeseks elemendiks b. Ühendades nii iga elemendi iga elemendiga ülejäänud $n-1$ elemendist, saame kokku järgmised variatsioonid:

$$n\ \text{rida} \left\{ \begin{array}{ll} ab, ac, ad, \ldots, ag, ah & (n-1 \text{ variatsiooni}), \\ ba, bc, bd, \ldots, bg, bh & (n-1 \quad \text{"} \quad), \\ ca, cb, cd, \ldots, cg, ch & (n-1 \quad \text{"} \quad), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ga, gb, gc, \ldots, \quad gh & (n-1 \quad \text{"} \quad), \\ ha, hb, hc, \ldots, \quad hg & (n-1 \quad \text{"} \quad). \end{array} \right.$$

Et kõiki elemente on n ja et ühe ning sama elemendiga algavaid variatsioone kahekaupa on $n-1$, siis n elemendist kahekaupa ühendatud elementide variatsioonide koguarv on $n(n-1)$ ehk

$$V_n^2 = n(n-1).$$

Nii näiteks $V_3^2 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$, nagu selgus juba eespoolgi.

Ühendame nüüd antud elemendid variatsioonideks kolmekaupa. Selleks ühendame esmalt elementide a ja b variatsiooniga ab kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n-2$ elemendist. Nii saame $n-2$ variatsiooni kolmekaupa, mis kõik algavad variatsiooniga ab. Seejärel ühendame variatsiooniga ac kord b, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n-2$ elemendist. Nii saame $n-2$ variatsiooni kolmekaupa, mis kõik algavad variatsiooniga ac. Nii ühendades iga kahekaupa moodustatud variatsiooniga iga elemendi ülejäänud $n-2$ elemendist, saame järgmised variatsioonid kolmekaupa:

$$n(n-1)\ \text{rida} \left\{ \begin{array}{ll} abc, abd, \ldots, abg, abh & (n-2 \text{ variatsiooni}), \\ acb, acd, \ldots, acg, ach & (n-2 \quad \text{"} \quad), \\ adb, adc, \ldots, adg, adh & (n-2 \quad \text{"} \quad), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ hga, hgb, \ldots\ldots\ldots & (n-2 \quad \text{"} \quad). \end{array} \right.$$

Et kahekaupa variatsioone on $n(n-1)$ ja et ühe ja sama kahekaupa variatsiooniga algavaid kolmekaupa variatsioone on $n-2$, siis n elemendist kolmekaupa moodustatud variatsioonide koguarv on $n(n-1)(n-2)$ ehk

$$V_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Nii näiteks

$$V_3^3 = 3(3-1)(3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

nagu nägime juba eespoolgi.

Analoogiliselt võib näidata, et

$$V_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$V_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

ja üldiselt

$$\boxed{V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}$$

Selle valemi võime sõnastada järgmiselt:

Variatsioonide arv n elemendist k-kaupa võrdub k järjestikuse loomuliku arvu korrutisega, milledest suurim on n.

N ä i d e 1. Leiame, mitmel erineval viisil on võimalik 7 kandidaadist määrata 4 isikut neljale erinevale ametikohale.

Seame ametikohad mingisse kindlasse järjekorda. Siis nende täitmise võimalused kujutavad endist kandidaatide ühendeid, milles kandidaatide järjestus on oluline, seega need ühendid on variatsioonid. Oma küsimusele vastuse saamiseks peame leidma variatsioonide arvu 7 elemendist 4-kaupa

$$V_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

Seega saab 7 kandidaadist 4 isikut paigutada neljale erinevale töökohale 840 erineval viisil.

N ä i d e 2. Klassis on 11 eri õppeainet ja 6 eri õppetundi päevas. Leiame, mitmel viisil on võimalik koostada päevast tunniplaani.

Kõik võimalikud klassitundide jaotused päevas esitavad variatsioone 11 elemendist 6-kaupa. Seega klassi päevast tunniplaani on võimalik koostada V_{11}^6 ehk $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ ehk 332 640 erineval viisil.

Ülesanded.

341. Koostada elementide x, y ja z kõik võimalikud variatsioonid 2 elemendi kaupa.

342. Koostada elementide *a*, *b*, *c* ja *d* kõik võimalikud variatsioonid 2 elemendi kaupa.

343. Koostada elementide *a*, *b*, *c* ja *d* kõik võimalikud variatsioonid 3 elemendi kaupa.

344. Mitu kahekohalist arvkuju on võimalik kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4 ja 5 nii, et iga number esineks arvkujus ainult üks kord.

345. Presiidium koosneb 10 isikust. Nad valivad endi seast esimehe, esimehe asetäitja ja sekretäri. Mitu erinevat tulemust võib anda valimine?

346. Mitmel viisil on võimalik ühe oktaavi helisid ühendada kolmkõlaks?

347. Arvutada V_5^5, V_6^1, V_7^4 ja V_8^3.

348. Lahendada võrrand $V_x^2 = 8x$.

349. Leida niisugune elementide arv, mille 20-kordne võrdub nendest elementidest 3-kaupa moodustatud variatsioonide arvuga.

350. Lahendada võrrand $V_x^3 = \frac{5}{12} V_{x+2}^3$.

§ 30. Permutatsioonid.

Variatsioonide eriliigiks on variatsioonid, mis sisaldavad kõiki antud elemente ja seetõttu ei erine üksteisest elementidelt, vaid ainult nende järjestuselt. Need on variatsioonid n elemendist n-kaupa. Niisuguseid variatsioone nimetatakse **permutatsioonideks**. Näiteks elementide a ja b permutatsioonid on nende elementide variatsioonid kahekaupa: ab ja ba, ning kolme elemendi a, b ja c permutatsioonid on nende variatsioonid kolmekaupa: abc, acb, bac, bca, cab ja cba.

Kõigi permutatsioonide arvu, mis on võimalik saada n elemendist, tähistame sümboliga P_n (lugeda: P n-ist).

n elemendi permutatsioonide arv võrdub n elemendi n-kaupa moodustatud variatsioonide arvuga

$$P_n = V_n^n .$$

Seega permutatsioonide arvu jaoks saame valemi

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ehk

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

***n* elemendi permutatsioonide arv võrdub esimese *n* loomuliku arvu korrutisega.**

Esimese n loomuliku arvu korrutist nimetatakse arvu n **faktoriaaliks** ja tähistatakse sümboliga $n!$ (lugeda: n faktoriaal). Seepärast võib permutatsioonide arvu valemit kirjutada ka kujul

$$\boxed{P_n = n!}$$

Näide. Leiame, mitmel erineval viisil on võimalik koostada rivi 6 õpilasest.

Et üksikud rivistused saadakse ühtede ja samade õpilaste ümberjärjestamisega, siis need ühendid on permutatsioonid. Seega kõiki võimalikke viise rivi moodustamiseks 6 õpilasest on

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ülesanded.

351. Koostada elementide x, y ja z kõik võimalikud permutatsioonid.

352. Koostada elementide p, q, r ja s kõik võimalikud permutatsioonid.

353. Mitmel viisil on võimalik koostada rivi 5 õpilasest?

354. Mitmel viisil on võimalik jaotada 7 töölist 7-le eri töökohale?

355. Arvutada P_8 ja P_9.

356. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2!$	2. $2 \cdot 3!$	3. $3! + 4!$
$3!$	$(2 \cdot 3)!$	$(3 + 4)!$
$4!$	$\frac{6!}{2}$	$\frac{8!}{6!}$
$5!$	$\left(\frac{6}{2}\right)!$	$\frac{9!}{4! \cdot 5!}$.

357. Arvutada logaritmide abil 15!

Mõnikord on vaja moodustada permutatsioone ka sellistest elementidest, mis pole kõik üksteisest erinevad, eriti on vaja osata arvutada sel juhtumil permutatsioonide arvu. Kui nõutakse, näiteks, moodustada kõik võimalikud kolmetähelised sõnakujud tähtedest *e*, *s*, *e*, siis tähtede *e* ja *e* teineteisega vahetamine ei anna veel uut sõnakuju. Ilmselt saab antud tähtedest seepärast ainult 3 üksteisest erinevat permutatsiooni:

ese, *see*, *ees*.

Esinegu antud elementide hulgas üks element k korda, mingi teine element l korda, mingi järgmine element m korda jne. ning lõpuks viimast liiki element v korda; küsitagu, kui suur on kõigist antud elementidest moodustatavate permutatsioonide arv.

Tähistame otsitava permutatsioonide arvu tähega x ja asume tema leidmisele. Selleks arutleme järgmiselt: kujutleme, et oleme kuidagiviisi moodustanud antud elementidest kõik võimalikud üksteisest erinevad permutatsioonid; kui nüüd teeme igas permutatsioonis k ühesugust elementi üksteisest erinevateks (kasvõi sel teel, et nummerdame nad, — nii saaksime eelmises näites elemendid e_1, s, e_2), siis ainult nende k elemendi omavaheliste ümberpaigutuste abil saame iga senise permutatsiooni asemele $k!$ üksteisest erinevat permutatsiooni, mistõttu permutatsioonide üldarv muutub $k!$ korda suuremaks.

Kui ka teist liiki ühesugused elemendid teeme üksteisest erinevaiks, siis võimalikkude permutatsioonide arv suureneb veel $l!$ korda. Nii edasi toimides jõuame viimast liiki elementideni ja teeme ka need üksteisest erinevaiks, suurendades sellega permutatsioonide arvu veel $v!$ korda. Sel viisil saame üldse

$$x \cdot k!\, l!\, m! \ldots v!$$

üksteisest erinevat permutatsiooni.

Et niiviisi toimides on kõik elemendid tehtud üksteisest erinevaiks, siis meil on nüüd

$$k + l + m + \ldots + v$$

erinevat elementi ja, nagu nägime eespool, nende elementide kõigi võimalike permutatsioonide arv on

$$(k + l + m + \ldots + v)!\,.$$

Järelikult

$$x \cdot k!\, l!\, m! \ldots v! = (k + l + m \ldots + v)!,$$

kust saame, et

$$\boxed{x = \frac{(k+l+m\ldots+v)!}{k!\,l!\,m!\ldots v!}}$$

Nimetades arvud k, l, m, . . . , v elementide kordumisarvudeks, saame selle tulemuse väljendada järgmiselt:

korduvate elementidega permutatsioonide arv on elementide üldarvu faktoriaali jagatis kõigi kordumisarvude faktoriaalidega.

Ülesanne.

358. Mitu erinevat sõnakuju saab moodustada iga järgmise sõna tähtedest?

1. t ö ö
2. r a a m a t
3. j a g a j a
4. k e s k k o o l
5. m a t e m a a t i k a
6. a s j a a j a j a

Selle asemel, et, nagu paragrahvis 29, välja kirjutada täielikult iga moodustatavat variatsiooni, võime nad registreerida ka järgmisel viisil, mis annab isegi parema ülevaate nendest.

a	*b*	*c*	*d*
1	2		
1		2	
1			2
2	1		
	1	2	
	1		2
2		1	
	2	1	
		1	2
2			1
	2		1
		2	1

Valmistame tabeli, milles igal elemendil on oma veerg ja millesse kanname iga variatsiooni ise reana sel teel, et iga moodustatavasse kombinatsiooni kuuluva elemendi veergu märgime numbriga, mitmendal kohal see element antud variatsioonis esineb.

Kõrvalolevas tabelis on sellel viisil registreeritud kõik võimalikud kahe elemendi kaupa moodustatavad variatsioonid neljast elemendist a, b, c ja d.

Esimeses kolmes reas on registreeritud variatsioonid, milledes element a on esimesel kohal ning teisel kohal on kord element b, kord element c ja **kord** element d. Neljandas, viiendas ja kuuendas reas on registreeritud need variatsioonid, milledes esimesel kohal on element b ning teisel kohal esinevad vaheldumisi elemendid a, c ja d, jne.

Tabeli vaatlemisest selgub, et tabeli read on ühtlasi permutatsioonid kolme liiki elementidest: element 1, element 2 ja elemendid „lüngad reas". Iga nende elementide permutatsioon on üks tabeli rida, mis saadi teatava variatsiooni registreerimisel. Seejuures on ilmne, et kui on moodustatud kõik võimalikud kahekaupa variatsioonid neljast elemendist, siis on ka neljast elemendist 1, 2, lünk ja lünk moodustatud kõik võimalikud permutatsioonid.

Järelikult neljast elemendist saab moodustada variatsioone kahe elemendi kaupa niisama palju, kui permutatsioone neljast elemendist, milledest kaks elementi on erinevad ja ülejäänud kaks elementi on ühesugused. Et see permutatsioonide arv on

$$\frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12,$$

siis ka variatsioonide arv $V_4^2 = 12$.

On ilmne, et registreerides samal viisil n elemendist k elemendi kaupa moodustatavad variatsioonid, saame tabeli, mis esitab kõik võimalikud permutatsioonid n elemendist, milledest k elementi on erinevad kohanumbrid 1, 2, 3, ... ning ülejäänud $n-k$ elementi on kõik ühesugused lüngad. Seega üldiselt

variatsioone n elemendist k elemendi kaupa on niisama palju kui permutatsioone k erinevast elemendist ja $n-k$ ühesugusest elemendist.

Et iga erineva elemendi kordumisarv on 1 ja $n-k$ ühesuguse elemendi kordumisarv on $n-k$, siis see permutatsioonide arv on

$$\frac{n!}{1!\,1!\,1!\ldots 1!\,(n-k)!}$$

ehk

$$\frac{n!}{(n-k)!},$$

siis selgub, et

$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Näitame, et viimane valem on sama varem tuletatud variatsioonide arvu valem, ainult faktoriaali sümboli abil kompaktsemalt üleskirjutatud. Selleks esitame valemis esinevad faktoriaalid hargkujul:

$$V_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-k) \cdot [n-(k-1)] \ldots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-k)}.$$

Taandades viimase murru tema nimetajaga saame:

$$V_n^k = [n-(k-1)] \cdots (n-1)n,$$

s. o. varem tuletatud valemi.

§ 31. Kombinatsioonid.

Kui elementide a, b ja c kahekaupa koostatud variatsioonidest

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

valime välja need ühendid, mis üksteisest erinevad vähemalt ühelt elemendilt, siis saame elementide a, b ja c kahekaupa moodustatud kombinatsioonid. Need on näiteks

$$ab,\ ac,\ bc.$$

Koostame nüüd iga üksiku kombinatsiooni elementide kõik võimalikud permutatsioonid

$$\begin{matrix} ab & ac & bc \\ ba & ca & cb \end{matrix}\ .$$

Nii saame elementide a, b ja c kõik võimalikud ühendid, mis erinevad üksteisest kas elemendilt või nende järjestuselt, — need ühendid on elementide a, b ja c kõik võimalikud variatsioonid.

Sama mõttekäiku võime rakendada mistahes elementide arvu puhul. Selle mõttekäigu võime lühidalt väljendada lausega:

kombinatsioonides elemente permuteerides saame variatsioonid.

Tähistame n elemendist k-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu sümboliga $\binom{n}{k}$ (lugeda: „n üle k")[1] ja tuletame selle arvu valemi.

Olgu n elemendist moodustatud kõik võimalikud kombinatsioonid k-kaupa. Et elementide arv kõigis kombinatsioonides on k, siis iga kombinatsiooni elementidest saab moodustada P_k permutatsiooni. Kõik need permutatsioonid kokku moodustavad antud elementide kõik võimalikud variatsioonid k-kaupa. Seega variatsioonide arv V_n^k võrdub kombinatsioonide arvu $\binom{n}{k}$ ja permutatsioonide arvu P_k korrutisega:

$$V_n^k = \binom{n}{k} P_k.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga P_k saame kombinatsioonide arvu valemi:

$$\binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k}$$

ehk, asendades sümbolid V_n^k ja P_k nende avaldistega:

$$P_k = k!$$

ja

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]$$

ehk

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

---

[1] Sagedasti tähistatakse n elemendist k elemendi kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu ka sümboliga C_n^k.

leiame, et

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}}$$

ehk

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Nii leiame selle valemi järgi, et neljast elemendist kahekaupa moodustatud kombinatsioonide arv

$$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$$

ja viiest elemendist neljakaupa moodustatud kombinatsioonide arv

$$\binom{5}{4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5.$$

N ä i d e 1. Moodustame elementide *a, b, c, d* ja *e* kõik võimalikud kombinatsioonid kolme elemendi kaupa.

Et kombinatsioonides elementide järjestus pole oluline, siis võime valida mingi kindla järjestuse, milles esitame elemente üksikutes kombinatsioonides. Selleks sobib see järjestus, milles elemendid on antud. Võttes esimesed kolm elementi antud järjestuses, saame esimese kombinatsiooni *abc*. Kõik järgnevad kombinatsioonid koostame nii, et varem saadud kombinatsioonides esinevad elemendid järk-järgult asendame neile antud elementide reas j ä r g n e v a t e elementidega.

Asendades kombinatsiooni *abc* viimase elemendi *c* järk-järgult elementidega *d* ja *e*, saame kõik kombinatsioonid, milledes esinevad elemendid *a* ja *b*, — nad moodustavad all toodud tabeli esimese veeru.

abc					
abd	*acd*		*bcd*		
abe	*ace*	*ade*	*bce*	*bde*	*cde*

Nüüd moodustame kõik puuduvad kombinatsioonid, milledes esinevad elemendid a ja c. Selleks asendame esimese veeru kombinatsioonides, alates teisest, elemendi b elemendiga c. Nii saame tabeli teise veeru.

Et saada kõik puuduvad kombinatsioonid, milledes esinevad veel elemendid a ja d, asendame teise veeru kombinatsioonides, alates teisest, elemendi c elemendiga d. Siis saame tabeli kolmanda veeru. Nii oleme saanud kõik kombinatsioonid, milledes esineb a, — nad moodustavad tabeli esimese osa (1., 2. ja 3. veerg).

Nüüd koostame kõik puuduvad kombinatsioonid, milledes esineb veel element b. Selleks asendame tabeli esimese osa kombinatsioonides, alates teisest veerust, elemendi a elemendiga b. Nii saame tabeli teise osa (4. ja 5. veerg).

Asendades tabeli teise osa kombinatsioonides, alates teisest veerust, elemendi b elemendiga c, saame ainsa puuduva kombinatsiooni, milles veel esineb element c, — see moodustab tabeli kolmanda osa (6. veerg).

Nii oleme saanud k õ i k nõutavad kombinatsioonid. Saadud kombinatsioonide hulgas on ka kõik kombinatsioonid, milledes esinevad elemendid d ja e. Tõesti, kui tahaksime veel koostada mingi kombinatsiooni, milles esineb üks neist või mõlemad, siis teise ja kolmanda elemendina peaksime nendega ühendama veel kas a, b või c; kuid kõik kombinatsioonid nende elementidega on juba moodustatud.

Üldse saime 10 kombinatsiooni. Sama arvu saame ka valemist

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Selle asemel, et iga kombinatsiooni täielikult välja kirjutada, nagu näites 1, võime nad registreerida tabelisse, milles igal elemendil on oma veerg ja millesse kanname iga kombinatsiooni ise reana sel teel, et iga moodustatavasse kombinatsiooni kuuluva elemendi veergu kirjutame märgi +.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
+	+	+		
+	+		+	
+	+			+
+		+	+	
+		+		+
+			+	+
	+	+	+	
	+	+		+
	+		+	+
		+	+	+

Kõrvalolevas tabelis on kombinatsioonid moodustatud samas järjekorras, nagu eespool näites 1: esimeses reas on märgitud kombinatsioon *abc*, element *c* on teises reas asendatud elemendiga *d* ja kolmandas reas elemendiga *e*; neljandas reas on teise rea kombinatsioonis *abd* element *b* asendatud elemendiga *c*, jne. Nagu ridade loendamisel näeme, oli võimalik moodustada 10 kombinatsiooni, nagu varemgi.

Tabeli vaatlemisest selgub, et tabeli read on ühtlasi p e r m u t a t s i o o n i d kahesugustest elementidest: ühed elemendid on märgid + ja teised elemendid on lüngad ridades; iga nende elementide permutatsioon on üks tabeli rida, mis saadi teatava kombinatsiooni registreerimisel. Järelikult:

k o m b i n a t s i o o n e v i i e s t elemendist kolme elemendi kaupa saab moodustada niisama palju kui p e r m u t a t s i o o n e k o l m e s t ühesugusest ja k a h e s t teistsugusest elemendist.

On ilmne, et registreerides samal viisil n elemendist k elemendi kaupa moodustatavaid kombinatsioone, saame tabeli, mis esitab kõik võimalikud permutatsioonid k elemendist + ja $n - k$ elemendist „lünk". Seega üldiselt

kombinatsioone n elemendist k elemendi kaupa on niisama palju kui permutatsioone k ühesugusest ja $n - k$ teistsugusest elemendist.

Et k ühesugusest ja $n-k$ teistsugusest elemendist moodustatavate permutatsioonide arv on

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

siis ka sellel viisil selgub, et

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Näide 2. Leiame, mitmel viisil on võimalik valida 7 kandidaadist 4 isikut ühele ja samale ametile.

Et isikud valitakse ühele ja samale ametile (näiteks vedurijuhtideks), siis valitavate järjestus ühendites pole oluline. Seega need ühendid on kombinatsioonid ja nende arv on

$$\binom{7}{4}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=35.$$

Näide 3. Mitu suuruselt erinevat korrutist on võimalik saada arvudest a, b, c ja d?

Et korrutamise tehe on kommutatiivne, s. o. et korrutise suurus ei olene tegurite järjestusest, siis nõutavad ühendid on kombinatsioonid. Antud arvudest võime saada korrutisi, võttes tegureid nii kahe- kui kolme- ja neljakaupa. Seega otsitav korrutiste arv on

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=$$
$$=6+4+1=11.$$

Tuletame nüüd kombinatsioonide arvu tähtsa omaduse, mis mõnedel juhtudel suurel määral lihtsustab kombinatsioonide arvu leidmist.

Kui n elemendist võetakse korduvalt k elementi nii, et iga järgnev ühend erineb eelnevast vähemalt ühe elemendi poolest, siis igakord järele jäänud $n-k$ elemendi ühendid erinevad üksteisest samuti vähemalt ühe elemendi poolest. Järelikult, kui n elemendist koostatakse kombinatsioone k elemendi kaupa, siis ülejäänud elemendid moodustavad n elemendi kombinatsioonid $n-k$ elemendi kaupa: igale k-kaupa kombinatsioonile vastab üks $(n-k)$-kaupa kombinatsioon ja ümberpöördult. Seega n elemendist k elemendi kaupa ja $n-k$ elemendi kaupa koostatud kombinatsioonide arvud on võrdsed:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Samale tulemusele jõuame ka tuntud valemi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

abil. Asendades selles valemis tähe k avaldisega $n-k$, leiame, et

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Võrreldes viimast kaht valemit, järeldame, et

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

See ongi seos, mis võimaldab suurel määral lihtsustada kombinatsioonide arvu leidmist nimelt juhtudel, kui $k > \frac{n}{2}$.

Näiteks:

$$\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$$

$$\binom{33}{31} = \binom{33}{2} = \frac{33 \cdot 32}{1 \cdot 2} = 528.$$

$$\binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1001.$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{n-2} = \binom{u}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Kui võrduses

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

võtta $k = n$, siis saame võrduse

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0},$$

mille paremal poolel seisval sümbolil $\binom{n}{0}$ puudub sisu, nagu puudub sisu ütlusel: koostada kombinatsioonid **0** elemendi kaupa. Kuid et võrduse paremal poolel seisval sümbolil $\binom{n}{n}$ on täiesti konkreetne sisu ja ta väärtus on 1, siis on kohane lugeda ka sümboli $\binom{n}{0}$ väärtuseks arvu 1, talle muud sisu andmata.

Ülesanded.

359. Koostada elementide p, q ja r kõik võimalikud kombinatsioonid 2 elemendi kaupa.

360. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud kombinatsioonid 2 elemendi kaupa.

361. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud kombinatsioonid 3 elemendi kaupa.

362. Koostada kõigi eelmises ülesandes saadud kombinatsioonide elementide permutatsioonid ja võrrelda neid a, b, c ja d kolme elemendi kaupa moodustatud variatsioonidega.

363. Mitmel viisil on võimalik arvudest 2, 3, 5 ja 7 moodustada korrutisi, milles need arvud esinevad teguritena kahekaupa?

364. Mitmel viisil on võimalik arvudest 1, 2, 3, 4 ja 5 moodustada summasid, milles need arvud esinevad liidetavatena kolmekaupa?

365. Tööjuhatajal on vaja 12 töölisest saata teatavale tööle 5 töölist. Mitmel viisil võib ta teostada tööliste valikut?

366. Mitmel viisil on võimalik jaotada 10 eset kahte rühma nii, et ühes rühmas oleks 7 ja teises 3 eset?

367. Mitu sirget saab joonestada läbi 6 punkti, mille hulgas pole kolme punkti, mis asetseksid ühel ja samal sirgel?

368. Mitu ringjoont saab joonestada läbi 5 punkti, mille hulgas pole nelja punkti, mis asetseksid ühel ja samal ringjoonel?

369. Mitu diagonaali on nelinurgal, viisnurgal, kuusnurgal?

370. Jaamas on 6 tagavarateed. Mitmel viisil on võimalik neile paigutada 3 rongi?

371. Mitu isesugust kahe vedeliku segu on võimalik valmistada 4 vedelikust?

372. 8 tähest $a, b, c, \ldots$ on koostatud kombinatsioonid 3 tähe kaupa. Mitu kombinatsiooni nendest sisaldavad tähte a? Mitu kombinatsiooni sisaldavad tähti a ja b?

373. Arvutada $\binom{20}{18}$, $\binom{30}{27}$ ja $\binom{48}{46}$.

374. Lahendada võrrandid:

1. $\binom{x}{3} : \binom{x}{4} = 2$	4. $\binom{x}{3} + \binom{x}{2} = 15\,(x-1)$
2. $\binom{18}{x} = \binom{18}{x+2}$	5. $\binom{x}{4} = \frac{15}{4} V_x^2$
3. $\binom{x+1}{x-1} = 28$	6. $8\binom{x+1}{5} = 3\,V_x^3$

---

375. Mitmel viisil on võimalik valida 15 raamatut riiulilt, millel on 16 raamatut?

376. Raudteel on 25 jaama. Mitut eri liiki ühekordse sõidu pileteid on vaja lasta trükkida selle raudtee jaoks?

Mitut eri liiki edasi-tagasi sõidu pileteid on vaja lasta trükkida?

377. Mitmel viisil võib klaverimängija asetada mõlema käe sõrmedest 5 sõrme klaviatuurile?

378. Mitmel viisil võib 18 võistlejast kolm tulla esimesele kolmele kohale?

379. Mitu erinevat sõnakuju saab moodustada sõna k o o l i m a j a tähtedest?

380. Mitu erisugust arvkuju saab kirjutada numbritega 1, 2 ja 3, milledest igaüks esineb arvkujus kaks korda?

381. Mitu kolmekohalist arvkuju saab moodustada numbritega 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9, milledest igaüks esineb arvkujus üks kord? Mitu 5-ga jaguvat arvu on nende hulgas? Mitu paaris ja mitu paaritut arvu on nende hulgas?

382. Mitu erinevat ülekandearvu on võimalik saavutada viie vahetatava hammasratta abil, neid paarikaupa ühendades?

383. Mitu erinevat tähte peab olema vähemalt kasutada, et neist saaks moodustada 100 kolmetähelist sõnakuju, milles ükski täht ei kordu.

384. Mitu erinevat arvu peab olema vähemalt kasutada, et neist saaks moodustada 100 kolmeliikmelist summat, milles ükski liidetav ei kordu?

§ 32. Newtoni binoomvalem.

Kaksliikme korrutamisel kaksliikmega saadakse, nagu teame, neliliige:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Et mingi hulkliikme korrutamisel kaksliikmega tuleb hulkliiget korrutada kaksliikme kummagi liikmega eraldi ja siis tulemused liita, siis korrutises saadakse 2 korda enam liikmeid, kui oli hulkliikmelisel teguril. Nii oleks korrutises

$$(a + b)(c + d)(e + f)$$

8 liiget, sest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ühesuguste kaksliikmete korrutis ehk kaksliikme aste on samuti hulkliige, milles aga on võimalik teostada mõningaid sarnaste liikmete koondamisi. Nii on näiteks

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = \\ &= aaaa + aaab + aabb + abbb + bbbb + \\ &\qquad + aaba + abab + babb + \\ &\qquad + abaa + abba + bbba + \\ &\qquad\qquad + baba + \\ &\qquad\qquad + bbaa.\end{aligned}$$

Siin on paigutatud üksteise alla need liikmed, mis osutuvad sarnasteks seetõttu, et korrutis ei olene tegurite järjekorrast; küll on aga korrutise tegelikul teostamisel tähtis pidada silmas tegurite järjekorda selleks, et hulkliikmes ei jääks mõni liige vahele. Näiteks liikme *aaab* saamiseks on võetud esimesest kolmest kaksliikmest liige *a* ja neljandast kaksliikmest liige *b*; liikmega *aaab* on sarnased kõik need hulkliikme liikmed, milles on 3 tegurit *a* ja üks tegur *b*, olgu see *b* võetud siis kolmandast, teisest või esimesest kaksliikmest.

On ilmne, et kaksliikme $a + b$ neljas aste sisaldab enne koondamist $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ehk 16 liiget; pärast koondamist aga jääb 5 liiget, millede kordajad näitavad vastavate sarnaste liikmete arvu:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Nende kordajate tähendus on näha hulkliikme tekkimise käigust: liikmeid a^3b saadakse niisama palju kui permutatsioone kolmest elemendist a ja ühest elemendist b; järelikult liikme a^3b kordajaks on $\frac{4!}{3!1!}$ ehk $\binom{4}{3}$ ehk $\binom{4}{1}$, mis ongi teatavasti 4; samal põhjusel on liikme a^2b^2 kordajaks $\binom{4}{2}$, see on 6.

Seesama arutelu võimaldab kaksliikme $(a+b)^n$ kohta öelda järgmist:

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + b^n}$$

ehk, asendades sulgkordajad nende avaldistega,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 +$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \cdots + b^n.$$

Seda valemit nimetatakse **Newtoni**[1] **binoomvalemiks**; valemi paremal poolel seisvat polünoomi nimetatakse **bionoomreaks**.

Bionoomi ruudu ja kuubi arendise valemid, milledega oleme tutvunud juba varemalt, on Newtoni binoomvalemi astendaja n väärtustele 2 või 3 vastavad erikujud. Nii on näiteks

$$(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + \frac{3}{1} a^2b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Vaadeldes binoomrida, sedastame tema järgmisi tähtsamaid omadusi:

1. Binoomrea esimeses liikmes tähe a astendaja võrdub binoomi astendajaga n; igas järgnevas liikmes tähe a astendaja väheneb 1 võrra, kuni ta viimases liikmes

[1] Isaac Newton, kuulus inglise matemaatik, füüsik ja astronoom, elas 1643—1727.

saab võrdseks 0-ga. Seevastu tähe b astendaja on esimeses liikmes 0; igas järgnevas liikmes ta suureneb 1 võrra, kuni ta viimases liikmes saab võrdseks binoomi astendajaga n. Seetõttu tähtede a ja b astendajate summa püsib kõigis liikmeis muutumatuna ja võrdub binoomi astendajaga n.

2. Et binoomrea liikmelt liikmele tähe b astendaja suureneb 1 võrra, siis binoomreas on samapalju liikmeid kui astendajal väärtusi. Astendaja väärtused on: 0 ja loomulikud arvud 1-st kuni n-ni. Seega on binoomrea liikmete arv $n+1$, s. o. 1 võrra suurem kui binoomi astendaja.

3. Binoomrea kordajateks on: esimesel liikmel arv 1, teisel liikmel binoomi astendaja n ehk $\binom{n}{1}$, kolmandal liikmel $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$, jne. Üldiselt $(k+1)$-se liikme kordaja on n elemendist k elemendi kaupa moodustatud kombinatsioonide arv

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}.$$

Viimase liikme kordaja on $\binom{n}{n}$ ehk 1.

Arve

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$$

ehk

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2!}, \ldots, \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}, \ldots, 1$$

nimetatakse ka **b i n o o m k o r d a j a t e k s**.

4. **Binoomrea algusest ja lõpust ühekaugusel seisvate liikmete kordajad on võrdsed:**

esimese ja viimase liikme kordaja on 1; teise ja eelviimase liikme kordajad on $\binom{n}{1}$ ja $\binom{n}{n-1}$, kuid $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$; kolmanda ja eel-eelviimase liikme kordajad on $\binom{n}{2}$ ja $\binom{n}{n-2}$, kuid $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$; jne.

5. Kui binoomrea liiget tähistada sümboliga L_{k+1}, milles täht k tähistab eelnevate liikmete arvu või $k+1$ on liikme koha number, siis võime kirjutada, et

$$L_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!} a^{n-k}b^k.$$

See on binoomrea üldliikme valem; selle valemi järgi leiame rea mistahes liikme, kui asendame temas tähe k eelnevate liikmete arvuga.

6. Võrreldes binoomrea kaht järjestikust liiget:

$$L_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a^{n-k}bk$$

ja

$$L_{k+2} = \frac{n(n-1)(n-2)[n-(k-1)](n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k(k+1)} a^{n-k+1}b^{k+1}$$

paneme tähele, et

binoomrea mingi liikme kordaja leidmiseks tuleb eelneva liikme kordaja korrutada tähe *a* astendajaga eelnevas liikmes ja jagada kõigi eelnevate liikmete arvuga

ehk sümbolites

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}}$$

Kasutades binoomrea omadusi 6 ja 4 on mingi konkreetse n puhul hõlpus saada rea liikmeid eelnevate liikmete kaudu.

Näitena arvutame astmele $(a+b)^6$ vastava binoomrea liikmed. Esmalt kirjutame esimesed kaks liiget

$$a^6 + 6a^5b.$$

Kolmanda liikme kordaja saame, kui teise liikme kordaja 6 korrutame tähe a astendajaga 5 ja jagame kolmandale liikmele eelnevate liikmete arvuga 2; see kordaja on $\frac{6\cdot 5}{2}$ ehk 15. Seega kolmas liige on

$$15a^4b^2.$$

Korrutades kordaja 15 astendajaga 4 ja jagades liikmete arvuga 3, saame neljanda liikme kordaja $\frac{15 \cdot 4}{3}$ ehk 20. Seega neljas liige on

$$20a^3b^3.$$

Viienda liikme kordajat ei tarvitse enam arvutada, sest viies liige algusest on kolmas lõpust (kuna binoomi kuuenda astme arendises on 7 liiget); seega viienda liikme kordaja võrdub kolmanda liikme kordajaga. Samuti on kuuenda liikme kordaja võrdne teise liikme kordajaga ja seitsmenda liikme kordaja võrdub esimese liikme kordajaga. Seega võime nüüd nõutava arendise kirjutada täielikult:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

7. Nagu selgus eelmises punktis, binoomrea kordajad tekivad eelnevatest kordajatest, neid järjest vähenevate arvudega ($n - 1$, $n - 2$, ...) korrutades ja järjest suurenevate arvudega (2, 3, ...) jagades. Seetõttu kordajad algul suurenevad (seni kui korrutajad on suuremad kui jagajad), kuid hiljem hakkavad vähenema. Et algusest ja lõpust ühekaugusel seisvad kordajad on võrdsed, siis suurim kordaja esineb rea keskel. Kui rea liikmete arv on paaritu (s. o. kui binoomi astendaja on paarisarv), siis suurimaks kordajaks on keskmise liikme kordaja. Kui rea liikmete arv on paarisarv (s. o. kui binoomi astendaja on paaritu arv), siis real pole keskmist liiget, aga rea keskel on kaks liiget võrdsete kordajatega, mis on suuremad kõigist teistest kordajatest. Nii on näiteks binoomi viienda astme arendise

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

keskel kaks liiget, mille kordaja 10 on suurem kõigist teistest. Nagu nägime eelmises punktis, on binoomi kuuenda astme arendise suurimaks kordajaks keskmise liikme kordaja 20.

8. Binoomrea kordajate summa on 2^n.

Tõesti, võttes Newtoni binoomvalemis $a = b = 1$, saame

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + 1.$$

Nii on näiteks kuuenda astme binoomrea kordajate summa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6.$$

9. Asendades Newtoni binoomvalemis tähe b avaldisega $-b$, saame

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 - \cdots +$$
$$+ (-1)^n b^n,$$

milles märgid $+$ ja $-$ esinevad vaheldumisi.

10. Võttes viimases võrduses $a = b = 1$, leiame, et

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n.$$

Seega

paaritunumbrilistel kohtadel seisvate bionoomkordajate summa võrdub paarisnumbrilistel kohtadel seisvate bionoomkordajate summaga.

11. Liites n-nda astme binoomrea kaks järjestikust kordajat $\binom{n}{k}$ ja $\binom{n}{k+1}$, leiame punktis 6 sedastatud binoomkordajate omaduse tõttu, et

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} =$$
$$= \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

ehk, asendades paremal poolel $\binom{n}{k}$ avaldisega $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \, \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Viimase võrduse parema poole võime esitada kujul

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}.$$

See on aga $\binom{n+1}{k+1}$ ehk $(n+1)$-se astme binoomrea $(k+2)$-se liikme kordaja. Järelikult

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

ehk lühidas sõnastuses:

binoomrea kahe järjestikuse kordaja summa võrdub ühe võrra kõrgema astme binoomrea kordajaga.

Nii on näiteks teise astme binoomrea esimese ja teise kordaja summa $1+2$ võrdne kolmanda astme binoom-

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

. . . .

rea teise kordajaga 3 ning teise ja kolmanda kordaja summa $2+1$ võrdub kolmanda astme binoomrea kolmanda kordajaga 3. Samuti saame kolmanda astme binoomrea kordajate liitmisel neljanda astme binoomrea kordajad peale esimese ja viimase:

$$1+3=4, \quad 3+3=6, \quad 3+1=4.$$

Nii võime järk-järgulise l i i t m i s e teel leida mistahes astme binoomrea kordajad. Arvutust on sobiv korraldada kõrvaloleva skeemi järgi, kirjutades kõrvuti seisvate kordajate summad liidetavate alla nende vahekohta ning saadud rida esimese ja viimase kordajaga 1 täiendades. Kui kõige ülemisse ritta kirjutada 1 kui 0-astme binoomkordaja (sest $(a+b)^0 = 1$) ja selle alla kaks ühte kui esimese astme binoomkordajad, siis tabel omandab kolmnurga kuju. Seda tabelit nimetatakse P a s c a l i[1] k o l m n u r g a k s.

Ülesanded.

385. Arendada järgmised astmed binoomridadeks:

1. $(x+a)^4$	6. $(2a+b)^4$	11. $(a^2+b)^5$
2. $(a+b)^5$	7. $(a-3b)^5$	12. $(x^3-a^2)^6$
3. $(x+1)^7$	8. $(3a-2)^6$	13. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$
4. $(a-b)^6$	9. $(4a-\frac{1}{2})^5$	14. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^6$
5. $(1-a)^8$	10. $(\frac{x}{2}+\frac{1}{3})^4$	15. $(x+\frac{1}{x})^8$

386. Lihtsustada ja arendada binoomridadeks järgmised avaldised:

1. $(x-1)^4(x-1)^3$	4. $\sqrt{x+10}\,\big)^{10}$
2. $(x+2)^3(x^2+4x+4)$	5. $\sqrt[3]{(2x+5)^{18}}$
3. $[(a-b)^3]^3$	6. $\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}\right)^7$

7. $\dfrac{(x+1)^7}{x^3+3x^2+3x+1}$

8. $\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^2-2x+1}$

9. $\dfrac{(x+a)^{10}}{(x+b)^3}$, kui $a = b = 1$

[1] Blaise P a s c a l, prantsuse matemaatik ja filosoof, elas 1623—1662.

387. Lihtsustada avaldis

$$(\sqrt{3}+1)^6+(\sqrt{3}-1)^6.$$

388. Arendada ridadeks järgmised avaldised:

1. $(x+2)^4+(x+3)^4$
2. $(a+3)^5-(a+1)^5$.

389. Leida $(a+b)^{10}$ arendise 5. liige.

390. Leida $(a-b)^{12}$ arendise 8. liige.

391. Leida $(x+y)^{14}$ arendise keskmine liige.

392. Leida $(x+a)^{12}$ arendise suurim kordaja.

393. Kui suur on $(x+y^2)^5$ arendises kordaja liikmel, milles tähtede x ja y astendajate summa on 7?

394. Kui suur on $(a^2-b^3)^7$ arendise kordaja liikmel, milles tähtede a ja b astendajate summa on 18?

395. Arvutada logaritmide abil $(a+b)^7$ arendise esimese nelja liikme summa, kui $a=5{,}84$ ja $b=12{,}36$.

396. Arvutada logaritmide abil $(a+2b)^8$ arendise paarisnumbriliste liikmete summa, kui $a=-3{,}08$ ja $b=6{,}92$.

397. Arvutada avaldise $(x+0{,}01)^{10}$ väärtus kuue õige tüvenumbriga, kui $x=2$.

398. Arvutada avaldise $(x+0{,}001)^6$ väärtus viie õige tüvenumbriga, kui $x=3$.

399. Näidata, et kehtib samasus

$$0\cdot a^n+1\cdot na^{n-1}b+2\cdot\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+$$
$$+(n-2)\cdot\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+(n-1)\cdot nab^{n-1}+n\cdot b^n=$$
$$=nb(a+b)^{n-1}.$$

Peatükk V.

Kordamisülesandeid.

400. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+3}{x-4}$
2. $\frac{x-1}{2x-a}=\frac{a}{x+1}$
3. $x+\frac{2x-3}{5}-\frac{x-7}{10}=\frac{5x+2}{20}$
4. $\frac{x}{x-1}-\frac{5}{6}=\frac{x+1}{6x-12}$

401. Laev sõidab mööda jõge 12 km üles ja 12 km alla 1 tunni 12 minutiga. Kui suur on laeva kiirus vee suhtes, kui on teada, et jõe voolu kiirus on 3 km tunnis?

402. Lennuk peab ühendust kahe linna vahel, millede kaugus teineteisest on 300 km. Sõites ühest linnast teise vastu tuult, mille kiirus oli 13 km tunnis, ja tagasi alla tuult, mille kiirus oli 24 km tunnis, kulus lennukil edasi-tagasi sõiduks 3 tundi 18 minutit. Kui suur oli lennuki kiirus õhu suhtes?

403. Korrutades kahte arvu, milledest üks oli 195 võrra väiksem teisest, õpilane eksis ja kirjutas korrutise 3 sajalise võrra väiksemana. Selle tõttu, jagades saadud korrutise väiksema teguriga, ta sai jagatiseks 430 ja jäägiks 174. Leida need tegurid.

404. Tarbijate kooperatiiv müüs käesoleval aastal 20% võrra enam kaupu kui eelmisel aastal, kusjuures hinnad olid 5% võrra madalamad kui eelmisel aastal.

Mitme protsendi võrra oli käesoleval aastal müüdud kaupade maksumus suurem kui eelmisel aastal?

405. Tehase toodang oli suurenenud 27% võrra eelmise kvartaaliga võrreldes. Toodangu omahind oli eelmise kvartaali omahinnast 2% võrra madalam. Mitme protsendi võrra ületas toodangu maksumus eelmise kvartaali toodangu maksumuse?

406. Esimesel nädalal tehas tootis 320 üksust saadust A ja 530 üksust saadust B ning sellega seotud tootmiskulud olid 4100 rbl. Teisel nädalal tehas tootis 480 üksust saadust A ja 610 üksust saadust B ning tootmiskulud olid sel nädalal 5300 rbl. Arvutada kummagi saaduse üksuse omahind.

407. Tööline valmistas esimesel päeval 8 tunni jooksul 15 masinavõlli ja 10 hammasratast. Teisel päeval, töötades sama tempoga, ta valmistas sama aja jooksul 20 võlli ja 8 hammasratast. Kolmandal päeval tööline tõstis oma tööproduktiivsust ja valmistas 8 tunni jooksul 21 võlli ja 10 hammasratast. Mitme protsendi võrra oli tõusnud töölise tööproduktiivsus kolmandal päeval?

408. Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

1. $\begin{cases} 5x + 4y = 10 \\ 7x + 6y = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 11x + 10y + 7 = 0 \\ 5x + 7y + 9 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 5 = 3y \\ 7 - 2x = 4y \end{cases}$

4. $\frac{2x + 9y + 31}{2} = \frac{8x - 7y - 35}{3} = 6$

5. $3(x + \frac{1}{2}) = 5(y - \frac{1}{3}) = 2x + 3y - 4$

6. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y = 2 \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 6 \end{cases}$

409. Arvutada avaldise

$$\frac{x^2-6x+8}{x^2+x-20} \cdot \frac{x^2+3x-10}{x^2-8x+12}$$

väärtus, kui x = 10,452.

410. Arvutada avaldise

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \cdot \frac{2x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$$

väärtus, kui x = 152,37.

411. Arvutada järgmise avaldise väärtus:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

412. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused nelja õige tüvenumbriga:

1. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{\sqrt{7\pi}}{\sqrt{12\pi}+\sqrt{\pi}}$
2. $\sqrt{2\pi}+\sqrt{3\pi}$
5. $(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{15})^3$
3. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$
6. $\sqrt{82}:\sqrt[3]{4}+\sqrt{21}:\sqrt[3]{5}$

413. Arvutada avaldise

$$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

väärtus kolme õige tüvenumbriga, kui $a = 42{,}8$ ja $b = 20{,}4$.

414. Arvutada läätse valemi

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}$$

järgi kujutise kaugus läätsest k, kui fookuse kaugus f on 4,9 cm ja eseme kaugus a on 32,4 cm. Jagamised teostada pöördarvude tabeli abil.

415. Arvutada tabelite abil avaldise

$$a^{-2}+b^{-2}$$

väärtus, kui $a = 0{,}56$ ja $b = 1{,}08$.

416. Arvutada tabelite abil avaldise

$$(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})^{-2}$$

väärtus, kui $a = 16{,}4$ ja $b = 3{,}28$.

417. Arvutada avaldise

$$2{,}43^{-2} + 5{,}81^{-2} + 10{,}4^{-2}$$

väärtus kolme õige tüvenumbriga.

418. Arvutada avaldise

$$\cfrac{1}{3{,}98 + \cfrac{1}{4{,}56 + \cfrac{1}{5{,}03}}}$$

väärtus kolme õige tüvenumbriga.

419. Lihtsustada avaldis

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

ja arvutada selle väärtus andmetekohase õigete tüvenumbrite arvuga, kui $a = 8{,}43 \cdot 10^3$ ja $b = 2{,}67 \cdot 10^2$.

420. Leida tähe r väärtus võrrandist

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 207,$$

kui $h = 4{,}52$.

421. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 5u + 6v = 12(u - v) + 17 \\ 6u + 5v = 2(u + v) + 20 \end{cases}$$

leitavad arvud u ja v. Ruutvõrrandi kordajad arvutada kolme õige tüvenumbriga. Kontrolliks lahendada see võrrand.

422. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+2} = \frac{3}{2} \\ \dfrac{x+5}{y+6} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

423. Lahendada võrrand $x + x^{-1} = 4$.

424. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $(x+3)^2 = 49$	4. $(x^2 - 5)^2 = 36$
2. $(x-2)^2 = 30$	5. $(x^3 - 10)^2 = 54$
3. $(2x+7)^2 = 128$	6. $(3x^2 - 8)^2 = 110$

425. Pärast seda, kui ruudu külge vähendati 5 cm võrra, oli ruudu pindala 70 cm^2. Kui suur oli ruudu pindala enne?

426. Pärast seda, kui kuubi serva vähendati 2 cm võrra, oli kuubi ruumala 64 cm^3. Kui suur oli kuubi ruumala enne?

427. Lahendada võrrandid:

1. $(x + 1)^3 = 27$	4. $(2x^2 + 9)^3 = 1200$
2. $(4x - 15)^3 = 100$	5. $(x^2 - x)^2 = 34$
3. $(x^2 - 22)^3 = 250$	6. $(x^2 + 4x)^3 = 268$

428. Ristküliku ühte külge suurendati 5% võrra ja teist külge suurendati 8% võrra. Mitme protsendi võrra suurenes ristküliku pindala?

429. Ristküliku ühte külge suurendati 10% võrra ja teist külge vähendati 7% võrra. Mitme protsendi võrra suurenes või vähenes ristküliku pindala?

430. Kas ristküliku pindala suureneb või väheneb, kui ta ühte külge suurendatakse *p*% võrra ja teist külge vähendatakse *p*% võrra? Mitu protsenti moodustab see pindala suurenemine või vähenemine?

431. Ringi raadiust suurendati 12% võrra. Mitme protsendi võrra suurenevad ringi ümbermõõt ja ringi pindala?

432. Mitme protsendi võrra peab vähendama ringi raadiust, et ringi pindala väheneks 19% võrra?

433. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $(x - 7)(x - 13) = 0$
2. $(2x + 5)(x - 2) = 0$
3. $3x(x + 8) = (x + 8)(x - 1)$
4. $(x - 6)(x + 5) + (x - 15)(x - 6) = 0$
5. $(x^2 - 3x)^2 = (x - 3)^2$
6. $(x^2 - 12)^2 = (x + 5)^2$

434. Kuidas muutub risttahuka ruumala, kui ta ühte serva suurendatakse 10% võrra, teist serva suurendatakse 20% võrra ja kolmandat serva vähendatakse 30% võrra?

435. Arv *a* on 25% võrra suurem kui arv *b*. Mitme protsendi võrra on *b* väiksem kui *a*?

436. Arv *a* on 50% võrra suurem kui arv *b*. Mitme protsendi võrra on *b* väiksem kui *a*?

437. Leida, mitme protsendi võrra on hektaar väiksem kui tiin, teades, et 1 tiin = 2400 ruutsülda ja et 1 süld = 2,134 m.

438. Metsas on 48% okaspuid. Kuuski on 40% võrra rohkem kui mände. Mitu protsenti on metsas kuuski ja mitu protsenti mände?

439. Linna elanikest oli aasta algul 53% naised. Aasta jooksul suri 3% naistest ja 5% meestest. Mitu protsenti linna elanikest suri aasta jooksul?

440. Mitme protsendi võrra suureneb 100 rbl. eest saadava kauba kogus, kui kauba hind langeb 20% võrra?

441. Rongi kiirus on 25% võrra väiksem kui auto kiirus. Mitme protsendi võrra kulub rongil enam aega kui autol ühe ja sama tee kulgemiseks?

442. Üks rotatsioonmasin trükib 1000 eksemplari ajalehte 45 minutiga, teine aga 36 minutiga. Mitme minutiga trükivad mõlemad masinad üheaegselt töötades 2000 eksemplari?

443. Kahe rotatsioonmasina üheaegselt töötades trükitakse 20 minutiga 1000 eksemplari ajalehte. Kui 12-minutilise töötamise järel jäeti seisma üks masinaist, siis kulus teisel masinal 1000-ni puuduvate eksemplaride

trükkimiseks veel 18 minutit. Mitme minutiga trükib kumbki masin üksi töötades 1000 eksemplari?

444. Elektrivoolu ahela pinge on 220 volti. Kui suured on voolutugevus ja takistus, kui takistuse suurendamisel 11 oomi võrra voolutugevus langeb 1 ampri võrra?

445. 40-vatise ja 100-vatise elektrilambi kaugus teineteisest on 7 m. Kui kaugel 40-vatisest lambist asetseb punkt, mida kumbki lamp valgustab ühe ja sama tugevusega?

446. Millisel hetkel kella 6 ja 6.35 vahel ajanäitaja osutid moodustavad teineteisega täisnurga? Anda vastus nii 12-tunnise kui 24-tunnise numbrilauaga ajanäitaja kohta.

447. Vaia pool pikkust on maa sees, $\frac{4}{5}$ ülejäävast osast on vee sees ja 1 meetri pikkune lõpposa ulatub üle veepinna. Kui pikk on vai?

448. Ajanäitaja osutite tippude kaugus teineteisest on kella 6 ajal 12,6 cm ja kella 9 ajal 9,0 cm. Kui pikad on osutid?

449. Arvutada murdude $\frac{4}{13}$, $\frac{32}{51}$ ja $\frac{3}{89}$ summa veaga mitte üle 0,005.

450. Arvutada arvude 292,1 ja $3\frac{8}{1}$ korrutis kolme õige tüvenumbriga. Kui suur on selle korrutise absoluutse vea ülemmäär? Kui suur on korrutise relatiivse vea ülemmäär?

451. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused kolme õige tüvenumbriga:

1. $\sqrt{\frac{2}{7}}$	4. $1\frac{3}{11} \cdot 2\frac{5}{12}$	7. $1\frac{5}{7} : 1\frac{7}{8}$
2. $(2\frac{1}{9})^2$	5. $\frac{9}{25} \cdot 14\frac{12}{29}$	8. $123\frac{2}{7} : 5\frac{1}{3}$
3. $\sqrt[3]{15\frac{4}{17}}$	6. $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$	9. $24{,}8349 : 1\frac{2}{3}$

452. Vasktraadi pikkus on 10° temperatuuris 215 m. Mitme millimeetri võrra pikeneb see traat soojenemisel 32 kraadini, kui vase joonpaisumise koefitsient on $1{,}71 \cdot 10^{-5}$?

453. Kaks koormist tasakaalustuvad kangil, kui nende kaugused toest on 80 cm ja 70 cm. Kui kumbagi koormist suurendada 4 kg võrra, siis tasakaalustuvad nad, asetsedes 160 cm ja 150 cm kaugusel toest. Kui suured on need koormised?

454. Hapnik on 16 korda, lämmastik 14 korda ja õhk 14,42 korda raskem kui vesinik. Mitu protsenti ruumala järgi on õhus hapnikku ja mitu protsenti lämmastikku, kui jätta arvestamata muud õhus olevad ained nende vähesuse tõttu? Mitu protsenti on kaalu järgi õhus hapnikku ja mitu protsenti lämmastikku?

455. Lahendada iga järgmine valem nurksulgudes seisva tähe suhtes:

1.	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$[r]$	5.	$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$	$[v]$
2.	$S = 2\pi r(r + h)$	$[h]$	6.	$S = 2(ab + bc + ac)$	$[c]$
3.	$S = \pi(R^2 - r^2)$	$[R]$	7.	$y = \sqrt{r^2 - x^2}$	$[x]$
4.	$a = 8(k - h)^2$	$[k]$	8.	$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$	$[g]$

456. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{4x + 5} \cdot \sqrt{7x + 1} = 30$
2. $x - 2\sqrt{x + 6} = 2$
3. $10\,(8 - \sqrt{2x}) = x + 2$
4. $\sqrt{2x + 1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x + 1}}$
5. $\frac{a + x}{\sqrt{a} + \sqrt{a + x}} = \frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{a + x}}$

457. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

1. $h^3 - h^2 + k^2 - k^3$
2. $x^4 - y^4$

3. $t^3 - t^2 - t + 1$
4. $6ac + 15bd + 9bc + 10ad$
5. $u^2 + 20u - 525$
6. $ab(c + d)^2 + cd(a + b)^2 - 4abcd$
7. $(a + 3b)^2 - (b - 3a)^2$
8. $m^2 - 1 + 2n - n^2$
9. $v^3 + 4v^2 + 4v$
10. $x^3 - x^5$

458. Aednikul on lõigatud 45 ühevärvilist roosi, 60 ühevärvilist nelgiõit ja 105 sparglioksa. Ülimalt mitu ühe ja sama koostisega lillekimpu saab aednik valmistada nendest lilledest ja okstest?

459. Veduri eesmiste rataste läbimõõt on 54 cm, tagumiste rataste läbimõõt on 104 cm ja vaguniratasté läbimõõt on 86 cm. Kui pika maa peab rong sõitma, et kõik kolm rataste liiki jõuaks esimest korda jälle samasse seisu, milles nad olid liikumise alguses?

460. Kolme ühes ja samas sihis leviva lainetuse lainepikkused on λ, 6λ ja 10λ. Milliste võrdsete kauguste tagant järgnevad üksteisele punktid, milledes kõigi kolme lainetuse faasid ühtivad?

461. Rongi kiirus on v km tunnis. Kui rongil kuluks ühe kilomeetri kulgemiseks v sekundit vähem, siis ta kiirus oleks kaks korda suurem. Leida kiirus v.

462. Mis toimub murru väärtusega, kui nii lugejat kui nimetajat suurendada $p\%$ võrra?

463. Mis toimub murru väärtusega, kui lugejat suurendada 50% võrra ja nimetajat suurendada 25% võrra?

464. Mitme protsendi võrra muutub murru $\frac{12+5}{3+7}$ väärtus, kui teist liidetavat lugejas ja nimetajas suurendada 10% võrra?

465. Ruudukujulise plekitüki nurkadest lõigatakse välja ruudud külgedega 4 cm. Ülejäänud plekitükk murtakse kokku lahtiseks karbiks. Kui suur peab olema plekitükk, et karbi ruumala oleks 100 cm^3. Mitu protsenti plekist läheb kaotsi karbi valmistamisel?

466. Kaks arvu suhtuvad nagu 9 : 4; nende geomeetriline keskmine on 600. Leida need arvud.

467. Mitu protsenti rauda läheb kaotsi vähemalt, kui ruudukujulise ristlõikega raudlatt treitakse ümmarguseks?

468. Kahe asula vaheline kaugus on ühte teed mööda 32 km ja teist teed mööda 37 km. Jalgrattur sõidab ühest asulast teise ühte teed mööda ja tagasi teist teed mööda. Tagasisõidul on ta tunnikiirus 2 km võrra väiksem kui sinnasõidul. Ta leiab, et kasutades sinnasõiduks pikemat teed tal kulub sinna- ja tagasisõiduks 6 minutit vähem kui kasutades sinnasõiduks lühemat teed. Arvutada jalgratturi kiirus sinnasõidul.

469. Arvutada avaldise $a^2 + b^2$ väärtus, teades, et $a + b = 8$ ja $ab = 6$.

470. Arvutada avaldise $a^3 + b^3$ väärtus, kui $a + b = 16$ ja $ab = 50$.

471. Võrrandit

$$x^2 - 12x + 22 = 0$$

lahendamata arvutada selle võrrandi lahendite ruutude summa.

472. Võrrandit

$$x^2 + 10x - 20 = 0$$

lahendamata arvutada selle võrrandi lahendite kuupide summa.

473. Kahel brigaadil A ja B kulub 252 auto osadest kokkumonteerimiseks 12 8-tunnist tööpäeva. Üksi töötades kulub brigaadil A selleks tööks 7 päeva vähem kui brigaadil B. Mitu minutit kulub brigaadil A ühe auto kokkumonteerimiseks?

474. Rong väljub jaamast A kl. 10.00 ja saabub jaama B kl. 18.30. Teine rong väljub B-st kl. 11.00 ja saabub A-sse kl. 18.00. Millal kohtuvad rongid?

475. Raudtee- ja trammiliin kulgevad paralleelselt. Rong jõuab igas 3 minutis järele ühele trammivagunile ja kohtab igas 2 minutis ühte trammivagunit. Mitme minuti tagant järgnevad üksteisele trammivagunid ning kui suur on rongi ja trammi kiiruste suhe?

476. Jalgrattur väljub A-st kl. 12.00 ja saabub B-sse kl. 16.00. Auto väljub B-st kl. 12.50 ja saabub A-sse kl. 14.50. Millal jalgrattur kohtab autot?

477. Lahendada võrrand

$$\frac{x}{5{,}32} + \frac{x}{4{,}96} - \frac{x}{7{,}82} = 1.$$

478. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $$\frac{1}{2{,}1 + \cfrac{1}{4{,}2 - \cfrac{1}{x}}} = 0{,}36$$

2. $$\frac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{x}}} = 1$$

479. Lihtsustada järgmised avaldised:

1. $\dfrac{18^{5m}}{3^{8m} \cdot 2^{2m}}$ 2. $\dfrac{24^{m+2}}{2^{4m} \cdot 3^{m+4}}$

ja arvutada nende väärtused, kui $m = 2$.

480. Lihtsustada avaldis

$$\frac{5^{n+1} \cdot 4^n}{10^{2n+1}} + \frac{12^n}{60^{n-1} \cdot 30}$$

ja arvutada selle väärtus, kui $n = 15$.

481. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2^{\log_2 6}$	2. $3^{2\log_3 5}$	3. $10^{\frac{2}{3}\log_{10} 8}$
$3^{-\log_3 7}$	$5^{\frac{1}{2}\log_5 36}$	$10^{-\frac{1}{4}\log_{10} 81}$
$10^{\log_{10} 5}$	$10^{2\log_{10} 3}$	$10^{-\log_{10} 6}$
$10^{0,6990}$	$10^{1,5011}$	$10^{-0,9031}$
$10^{0,4786}$	$10^{2,0294}$	$10^{-1,8000}$

482. Leida järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log_2 32$	2. $\log_2 0,25$	3. $\log_{10} 0,001$
$\log_5 125$	$\log_5 0,04$	$\log_{10} \sqrt[3]{0,1}$
$\log_3 \frac{1}{9}$	$\log_2 \sqrt[3]{4}$	$\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{0,01}}$
$\log_4 \frac{1}{2}$	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$	$\log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

483. Lahendada võrrandid:

1. $\log_x 49 = 2$	2. $\log_x 6 = \frac{1}{2}$	3. $\log_x \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$
$\log_x \frac{1}{8} = -3$	$\log_x \sqrt{125} = 1,5$	$\log_x \sqrt{0,001} = 1,5$
$\log_3 x = 4$	$\log_{10} x = -2$	$\log_2 x = 7$
$\log_4 x = -2$	$\log_{10} x = \frac{1}{2}$	$\log_{0,2} x = -3$

484. Kirjutada avaldised, mille logaritmid on:

1. $\log m + 2\log n$

$\log a + \log b - (\log c + \log d)$

$3\log a + 2\log b - 4\log c$

$2\log x + 2\log y - 5\log z - 4\log u$

2. $2\log a + 2\log b$	3. $\frac{1}{3}\log a$
$3\log(a+b)$	$\frac{m}{n}\log b$
$\log(x+y) - \log(x-y)$	$\frac{1}{2}(\log a + 5\log b)$
$4\log u - 4\log v$	$\frac{1}{3}(2\log u - 4\log v)$

485. Lihtsustada avaldised:

1. $\log\sin x - \log\cos x$

$\log\tan x + \log\cot x$

$\log\tan x + \log\cos x$

2. $10^{\log\sin x}$

$10^{\frac{1}{2}\log\sin x - \frac{1}{2}\log\cos x}$

$10^{2\log\sin x} + 10^{2\log\cos x}$

486. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $\frac{1}{m}\sqrt{\frac{ab}{a-b}}$

$\sqrt[3]{\frac{mx^2}{(x-a)^2}}$

$\sqrt[3]{\frac{ax+b^2}{2x\sqrt{a^2+b^2}}}$

2. $\frac{16a(a+1)^3}{25\sqrt[3]{a^2-1}}$

$\frac{a^2\sqrt{a(bx-c)}}{\sqrt[3]{ax+b}}$

$\frac{1}{m^2\sqrt{a^2-x^2}}$

487. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt[3]{\frac{1{,}274^2}{\sqrt{0{,}9645}}}$

$\frac{\sqrt[3]{28{,}9}\cdot\sqrt[4]{17{,}5^3}}{\sqrt[5]{6{,}149^2}}$

$3\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$

$11\sqrt[5]{4\sqrt{124}}$

2. $\frac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}$

$\sqrt{\frac{52-3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8{,}7}}}$

$\sqrt[5]{\sqrt[4]{0{,}2}-\sqrt[3]{0{,}9}}$

488. Arvutada avaldise $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ väärtus, kui $a = 6{,}48$, $b = 8{,}62$, $c = 9{,}24$ ja $2p = a + b + c$.

489. Olgu $z^5 = \left(\frac{s}{t}\right)^4$. 1) Kui suur on z, kui $s = 0{,}48$ ja $t = 1{,}51$? 2) Kui suur on s, kui $t = 0{,}98$ ja $z = 2{,}36$?

490. Arvutada valemist $C = e^{-rt}$ tähe C väärtus, kui $e = 2{,}718$, $r = 6$ ja $t = 0{,}7$. Kui suur on t, kui $C = 0{,}5$ ja $r = 7{,}2$?

491. Olgu $a = 2\sqrt{\dfrac{f}{\sqrt{3}}}$. Arvutada a väärtus, kui $f = 0{,}8457$.

492. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $25^x = \frac{1}{5}$
2. $25^x = 100$
3. $2^x - 2^{x-2} = 3$
4. $6^{x+1} + 6^x = 252$
5. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$
6. $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
7. $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$
8. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
9. $10^x = \sqrt[x]{3}$
10. $(\frac{1}{2} \cdot 4^x)^x = 8^{x+3}$
11. $100^x - 2 \cdot 10^x = 15$
12. $20^x - 12 = \sqrt{20^x}$

493. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log x = -\log (x + 1)$
2. $\log (x - 2) = \log x - \log 2$
3. $100^{\log (x-10)} = 1000$
4. $0{,}1^{-x^2+5x-8} = 100$
5. $\log (2^x + x - 4) = x (1 - \log 5)$
6. $\log_x 10 = \log_{2x} 40$

494. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $x^5 = 20$
2. $6x^4 = 57$
3. $(x - 3)^3 = 60$
4. $(x - 5)^4 = 99{,}3$
5. $(x + 7)^5 = 340$
6. $(2x - 9)^{10} = 32$
7. $(x^2 - 27)^7 = 84$
8. $(\frac{x}{3} + 4)^3 = 124$

495. Cheops'i püramiidi põhjaks on ruut küljega 233 m; püramiidi kõrgus on 148 m. Käigud ja kambrid moodustavad väga väikese osa püramiidi ruumalast. Kivi erikaal, millest püramiid ehitatud, on 2,75. Mitu tonni kivimassi kulus püramiidi ehitamiseks?

496. Ringi läbimõõt on 13,58 cm. Arvutada ringi ümbermõõt ja pindala.

497. Baromeetritoru seesmine läbimõõt on 0,84 cm. Vaatluse ajal seisis elavhõbe 74,8 cm kõrgusel. Elavhõbeda erikaal on 13,60. Kui palju kaalub elavhõbedasammas?

498. Leida avaldise $\frac{23}{27} \cdot 14{,}4^4$ väärtus.

499. Leida avaldise $\frac{2k(t_2 - t_1)}{\log r_2 - \log r_1}$ väärtus, kui $k = 0{,}86$, $t_1 = 69{,}8$, $t_2 = 85{,}7$, $r_1 = 1{,}15$ ja $r_2 = 1{,}45$.

500. Lahendada võrrand $24{,}9x^5 = 2{,}84$.

501. Leida x-i väärtus, kui $10^x = 6^{20}$.

502. Kui suur peab olema ratta läbimõõt, et ta, tehes n pööret sekundis, kulgeks n km tunnis?

503. Leida, kumb arvudest 2^{160} ja 3^{100} on suurem.

504. Olgu teada, et $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. Näidata, et siis $a^2 + b^2 = 7ab$.

505. Arvutada logaritmide abil avaldis

$$(a^2 - b^2)^{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}},$$

kui $a = 8{,}495$, $b = 4{,}324$, $\alpha = 46° 38'$, $\beta = 36° 48'$.

506. Lahendada võrrand $ab = \sqrt[x]{c}$.

507. Leida aritmeetilise jada -4, -1, ... kümnes liige.

508. Leida aritmeetilise jada $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, ... sajas liige.

509. Leida jada -48, -45, -42, ... n-es liige.

510. Leida aritmeetilise jada 5. liige, kui jada 1. liige on 1 ja 10. liige on 100.

511. Mitu liiget aritmeetilises jadas 9, 14, ... on väiksemad kui 350?

512. Mitmes liige aritmeetilises jadas 15, 20, ... on 135?

513. Mitu liiget aritmeetilises jadas —66, —59, ... on negatiivsed?

514. Mitmes liige aritmeetilises jadas 7, 13, ... on lähim arvule 210?

515. Aritmeetilise jada esimese 5 liikme summa on 20 ja esimese 7 liikme summa on 98. Leida jada esimese 12 liikme summa.

516. Arvutada summa $7 + 11 + 15 \ldots + 71$.

517. Arvutada esimese 60 loomuliku arvu summa.

518. Arvutada esimese 45 paarisarvu summa.

519. Kulgegu ülespaisatud keha esimeses sekundis 81 m; igas järgnevas sekundis ta tõuseb 4,5 m vähem kui eelnevas. Kui kaua kestab keha liikumine ülespoole?

520. Arvutada kõigi vahemikus 102 kuni 300 asetsevate kolmega jagumatute arvude summa.

521. Arvutada kõigi 7-ga jagumatute arvude summa vahemikus 100 kuni 300.

522. Olgu teada, et aritmeetilise jada liige $a_8 = 2a_{13}$. Näidata, et siis $a_3 = 3a_{13}$.

523. Aritmeetilise jada üldliige $a_k = 4k + 1$. Määrata esimese n liikme summa.

524. On antud aritmeetiline jada üldliikmega $a_k = 27 — 2k$. Mitu liiget jada algusest arvates tuleb võtta, et saada summa 144?

525. Kui suur on aritmeetilise jada

$$a, 2a - x, 3a - 2x, \ldots$$

esimese n liikme summa?

526. Näidata, et järjestikuste loomulikkude arvude ruutude vahed moodustavad aritmeetilise jada.

527. Kui suur on n järjestikuse täisarvu summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu summa vahe?

528. Kui suur on n järjestikuse täisarvu ruutude summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu ruutude summa vahe?

529. Leida $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

530. Leida $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille ruutude summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu ruutude summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

531. Geomeetrilise jada tegur on 3 ja jada 4. liige on 162. Leida jada 1. liige.

532. Leida geomeetrilise jada 1. liige ja tegur, kui jada 6. liige on 144 ja 3. liige 18.

533. Leida geomeetrilise jada 9. liige, kui jada 2. liige on 7 ja 7. liige 224.

534. Geomeetrilise jada 6. liige on mn^6 ja 4. liige on mn^2. Leida jada 1. liige.

535. Leida geomeetrilise jada 8. liige, kui 2. liige on 2 ja 3. liige on 3.

536. Leida 10-liikmelise geomeetrilise jada 1. liige, kui jada tegur on 2 ja jada summa on $2557\frac{1}{2}$.

537. Leida 8-liikmelise geomeetrilise jada summa, kui jada 3. liige on 29,7 ja jada 5. liige on 267,3.

538. Leida jada $2, 3, 4\frac{1}{2}, \ldots$ kümnes liige ja jada kümne liikme summa.

539. Leida jada $2, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, \ldots$ kümnes liige ja jada kümne liikme summa.

540. Geomeetrilise jada esimese kahe liikme summa on $7\frac{1}{2}$ ning esimese ja neljanda liikme summa on $157\frac{1}{2}$. Leida jada tegur.

541. Geomeetrilise jada esimese kolme liikme summa on $3^3 - \frac{2^6}{3^6}$ ja esimese kuue liikme summa on $3^3 - \frac{2^{12}}{3^{15}}$. Leida jada 1. liige.

542. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on 3 ning 2. ja 3. liikme summa on 60.

543. Leida jada $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ 20 liikme korrutis.

544. Leida jada $ab, a^2b^3, a^3b^5, a^4b^7, \ldots$ n liikme korrutis.

545. Lihtsustada avaldis $1+a+a^2+\ldots+a^{13}+a^{14}$.

546. Lihtsustada avaldis

$$x^9 + x^8y + x^7y^2 + \ldots + xy^8 + y^9.$$

547. Lihtsustada avaldis

$$1 + x + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots + (1 + x)^{12}.$$

548. Avaldada järgmiste geomeetriliste ridade väärtused:

$$\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \ldots + \sin^{12}\varphi$$
$$\tan^2\psi + \sin^2\psi + \ldots + \sin^2\psi \cdot \cos^6\psi.$$

549. Arvutada geomeetrilise jada $2, 3, \ldots$ esimese 5 liikme summa.

550. Arvutada summa $\sqrt{3} + 3 + \sqrt{27} + \ldots + 243$

551. Mitmes liige jadas $2, 8, 32, \ldots$ on 8^{33}?

552. Leida arv x, kui arvud $x - 4$, x ja $x + 6$ moodustavad geomeetrilise jada.

553. Leida arv x, kui arvud x, 3x ja $x + 12$ moodustavad aritmeetilise jada.

554. Geomeetrilise jada igast liikmest lahutatakse temale eelnev liige. Näidata, et saadud vahed moodustavad geomeetrilise jada.

555. Leida kuusnurga nurgad, teades, et nad moodustavad geomeetrilise jada, mille tegur on 2.

556. Mitu lööki teeb tornikell ööpäeva jooksul, kui ta märgib veerandtunni ühe löögiga, pooltunni kahe löögiga, kolmveerandtunni kolme löögiga, täistunni nelja löögiga ja keskööst või keskpäevast möödunud tundide arvu vastava hulga löökidega?

557. Mitme aasta jooksul elanike arv kasvab kahekordseks, kui aastas elanike arv kasvab 1,5% võrra?

558. Maantee äärde püstitatakse uued kilomeetripostid. Autokoormas on 50 posti; iga post kaalub 60 kg. Iga kilomeetri tagant pannakse maha üks post. Arvutada, kui suur on auto veotöö maantee algusest saadik kuni kõik postid on maha laaditud.

Veotööd mõõdetakse *tonnkilomeetriga*, s. o. tööga, mis kulub 1 tonni vedamiseks 1 kilomeetri kaugusele.

559. Elektriventilaatori propeller teeb 1. sekundil pärast voolu katkestamist 50 pööret, 2. sekundil $46\frac{2}{3}$ pööret ja 3. sekundil $43\frac{1}{3}$ pööret. Kui kaua pärast voolu katkestamist kestab veel propelleri pöörlemine?

560. 50 m paksune udukiht on neelanud 50% valgusest. Mitu protsenti valgusest on neelanud 1 m paksune udukiht?

561. Lumepall, mille mass oli algul 5 kg, veeres mööda lumist mäenõlva, mille kaldenurk on 40°. Iga meetri võrra veeredes kogus pall endale 1 kg lund juurde. Kui suure töö oli pall teinud raskustungi sihis, kui ta oli veerenud mööda nõlva 20 meetrit?

562. Klaasplaat neelab 5% temale langevast valgusehulgast. Mitmest samasugusest plaadist koosnev pakk neelab 45% esimesele plaadile langevast valgusehulgast?

563. Leida, missuguses kõrguses on õhurõhumine 9% võrra väiksem kui maapinnal, teades, et 100-meetrilisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine.

564. Teades, et 100-meetrilisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine, näidata, et maapinna läheduses 11-meetrisele tõusule vastab 1-millimeetrine õhurõhumise vähenemine.

565. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu 4 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 24 cm?

566. Keha elektrilaeng on algul 10 kuloni. Halva isolatsiooni tõttu on laeng 5 minuti jooksul vähenenud 8 kulonini. Mitme minuti jooksul väheneb laeng 2 kulonini?

567. Õhk klassis, mille ruumala on 150 m^3, sisaldas tunni lõpul 0,12% söehappegaasi. Mitu kuupmeetrit värsket õhku, mis sisaldab 0,04% CO_2, peab ventilaator puhuma igas minutis klassi, et 10 minuti jooksul söehappegaasi sisaldus klassiõhus langeks 0,06%-ni?

568. Õlisse paigutatud ketas, mis algul pöörles kiirusega 3 pööret sekundis, tegi 1 minuti pärast 2 pööret sekundis. Arvutada, mitu pööret teeb ketas 3 minutit pärast liikumise algust, teades, et igas minutis kiirus väheneb suuruse võrra, mis on võrdeline kiirusega selle minuti algul.

569. Ketas, mille algkiirus oli 5 pööret sekundis, pöörles 2 minuti pärast kiirusega 3 pööret sekundis. Mitu minutit pärast liikumise algust ta kiirus on 1 pööre sekundis.

570. On antud jada

$$1 + x, \quad 2 + 3x, \quad 4 + 5x, \quad 8 + 7x, \quad 16 + 9x, \ldots$$

Leida jada esimese 20 liikme summa.

571. Tõestada, et kahe arvu geomeetrilise keskmise logaritm on võrdne arvude logaritmide aritmeetilise keskmisega.

572. Arvutada lõpmatu geomeetrilise jada

$$25, 5, 1, \ldots$$

summa.

573. Arvutada lõpmatu geomeetrilise rea

$$1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9} + \ldots$$

väärtus.

574. Arvutada rea

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \ldots$$

väärtus.

575. Teisendada järgmised perioodilised murrud harilikkudeks murdudeks:

1. 0,555 ...	2. 0,6888 ...
0,161616 ...	2,3242424 ...
1,717171 ...	8,2232323 ...

576. Arendada murd $\frac{3}{7}$ lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga $\frac{1}{3}$.

577. Arendada arv 1 lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga 0,1.

578. Arendada arv 2 lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga 0,1.

579. Kui suureks kasvab 2800-rublane hoius, mis on hoiul $4\frac{1}{2}\%$-ga 20. maist sama aasta 1. oktoobrini?

580. Kui suur rahasumma, olles 3 kuud ja 10 päeva hoiul 3%-ga, kasvab hoiuaja lõpuks 726 rublaks?

581. Mitme protsendiga hoiul olles annab hoius 8 kuuga 3% intressi?

582. Mitme kuuga kasvab hoius 1,025-kordseks, kui hoiukassa maksab 4% intressi aastas?

583. Missuguse jada moodustavad hoiuselt 1, 2, 3, ... aasta jooksul saadava intressi summad, kui hoius kannab 1) lihtintressi, 2) liitintressi?

584. Kui suur hoius, kandes $3\frac{1}{2}\%$ liitintressi, kasvab 30 aastaga 20 000 rublaks?

585. Kui suureks kasvab 3700-rublane hoius 8 aastaga, kandes $4\frac{1}{2}\%$ liitintressi?

586. Mitu protsenti liitintressi peab kandma 1200-rublane hoius, et ta 6 aastaga kasvaks 1560 rublaks?

587. Leida, kui palju intressi saab 4 aasta jooksul 3200 rublalt,

1. kui hoius kannab 2% liitintressi,
2. „ „ „ 3% „
3. „ „ „ 5% „

Kas kolmandal juhul saadav intress võrdub esimesel ja teisel juhul saadavate intresside summaga?

588. Maakonna elanike arv kasvab 0,5% võrra aastas. Mitme protsendi võrra kasvab selle maakonna elanike arv 25 aasta jooksul?

589. Mitu protsenti lihtintressi peaks aastas maksma hoiuselt, et ta n aastaga kasvaks niisama suureks kui kandes $p\%$ liitintressi?

N ä i t e i d. 1. $n = 10$, $p = 5$. Arvutada nõutav intressimäär.

2. $n = 20$, $p = 5$. Arvutada nõutav intressimäär.

590. 12 aasta eest mets sisaldas 49 000 m^3 puitu. Sellest ajast on puidu hulk kasvanud 62 000 kuupmeetriks. Mitme protsendi võrra on puidu hulk kasvanud aastas?

591. Riigi metsatüki puiduhulka hinnati 1937. a. 1800 m^3-le. Kui suur on metsa puiduhulk 1947. a., kui metsa vahepeal ei raiuta ja puidu aastane juurdekasv on 2%?

592. Linna elanike arv kasvab aastas 3 8% võrra. Missugust elanike arvu võib oodata 10 aasta pärast, kui praegu linnas elab 62 400 inimest?

593. Väikelinna elanike arv on 10 aasta jooksul kasvanud 2148 hingelt 3796 hingele. Kui suur oleks selle linna elanike arv 10 aastat hiljem, kui linna elanikkonna kasvamine toimuks edasi niisama kiiresti nagu ennemingi?

594. Maakonna rahvaarv kasvab aastas p‰ võrra. Mitme aasta järel on selle maakonna rahvaarv suurenenud q% võrra, võrreldes praeguse rahvaarvuga?

N ä i d e. $p = 21$, $q = 50$. Arvutada nõutud aastate arv.

595. Õhupump hõrendab 100 edasi-tagasi käiguga röntgenitorus oleva õhu kuni ühe viiekümnetuhandikuni alguses seal olnud õhuhulgast, imedes iga käiguga ühe ja sama protsendimäära torus parajasti olevast õhust. Kui suur on see protsendimäär?

596. Gruusia NSV-s toodeti elekrienergiat 1928. a. $42 \cdot 10^6$ kWh ja 1936. a. $436 \cdot 10^6$ kWh. Mitme protsendi võrra suurenes keskmiselt elektrienergia toodang aastas?

597. NSV Liidu suurtööstus tootis 1928. a. saadusi 16,8 milj. rubla väärtuses, 1932. a. 38,8 milj. rubla väärtuses ja 1936. a. 80,9 milj. rubla väärtuses. Mitme protsendi võrra kasvas keskmiselt suurtööstuse toodang aastas 1) ajavahemikus 1928—1932, 2) ajavahemikus 1932—1936 ja 3) ajavahemikus 1928—1936?

598. Mitmel viisil on võimalik paigutada lauda istuma 5 inimest?

599. Mitu signaali on võimalik anda 7 erineva lipuga, kui igas signaalis võib kasutada ülimalt 5 lippu?

600. Moodustada tähtede *a*, *b*, *c*, *d* ja *e* kõik võimalikud variatsioonid 3 tähe kaupa.

601. Moodustada tähtede *a*, *b*, *c*, *d* ja *e* kõik võimalikud kombinatsioonid 3 tähe kaupa.

602. Mitmest elemendist on võimalik moodustada 120 kombinatsiooni 2 elemendi kaupa?

603. Mitmest esemest on võimalik moodustada 78 erinevat paari?

604. Arvutada V_{10}^{4}, $\binom{12}{8}$ ja P_9.

605. 10 tähest *a*, *b*, *c*, ... on moodustatud variatsioonid 5 tähe kaupa. Mitu variatsiooni sisaldavad tähte *c*? Mitu variatsiooni sisaldavad tähte *c* ja *e*?

606. Mitmest elemendist 3 elemendi kaupa moodustatud variatsioonide arv on 20 korda suurem kui elementide arv.

607. Moodustada tähtede *a*, *b*, *c* ja *d* kõik võimalikud permutatsioonid.

608. Arendada järgmised astmed binoomridadeks:

1. $(x + a)^6$	3. $(a^2 + b)^4$	5. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^5$
2. $(x - a)^8$	4. $(a - 2b)^5$	6. $(u - \frac{1}{u})^6$

609. Leida $(x + a)^{10}$ arendise 4. liige.

610. Leida $(x - a)^{20}$ arendise keskmine liige.

611. Kui suur on $(x^2 + 3)^7$ arendise kordajate summa?

612. Arendada binoomridadeks avaldised:

1. $(x + a)^2 (x + b)^3$, kui $a = b = 1$,
2. $[(x + a)(x + b)]^2$, kui $a = b = 2$.

613. Lihtsustada avaldis

$$1 + (x + 1) + (x + 1)^2 + (x + 1)^3 + (x + 1)^4.$$

614. Näidata, et kehtib samasus

$$a + \binom{n}{1}(a + 1) + \binom{n}{2}(a + 2) + \ldots + \binom{n}{n}(a + n) =$$
$$= \left(a + \frac{n}{2}\right) \cdot 2^n.$$

615. Näidata, et kehtib samasus

$$0^2 + \binom{n}{1} \cdot 1^2 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{n}{n} n^2 =$$
$$= n(n + 1) \cdot 2^{n-2}.$$

616. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $2) + \binom{n+1}{2} = n^2$
2. $\binom{n}{3} + 4\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = n^3$
3. $\binom{n}{4} + 11\binom{n+1}{4} + 11\binom{n+2}{4} + \binom{n+3}{4} = n^4$

617. Arvutada avaldise

$$(a + 0{,}002)^7$$

väärtus viie õige tüvenumbriga, kui $a = 1$.

618. Arvutada avaldise

$$(a - 0{,}0003)^6$$

väärtus viie õige tüvenumbriga, kui $a = 2$.

619. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $a^{\log b} = b^{\log a}$ 2. $a^{\log \log b} = (\log b)^{\log a}$

3. $a^{\frac{\log b}{\log a}} = b$

Vastused.

1. 1. 4,14
2,78
5060
5062
0,05
2. 1393000
15,84
16
350
5,5
3. 4,584
4. 836,5

4. 1. 18,1
126
1500
29,50
71,77
2. 36
390
72,8
820
43,0
3. 1,5
130
129
20000
$4,87 \cdot 10^{6}$

5. 1. 5,29
170
2,102
1860
$1,7 \cdot 10^{-4}$
2. 21,9
230
700
$5,94 \cdot 10^{-3}$
2,3
3. $1,92 \cdot 10^{5}$
$7,20 \cdot 10^{-4}$
$5,89 \cdot 10^{-2}$
$1,2 \cdot 10^{-3}$
$2,94 \cdot 10^{-2}$
4. $3,18 \cdot 10^{3}$
$1 \cdot 10^{-5}$
$3.2 \cdot 10^{5}$
$11,0 \cdot 10^{3}$
$2 \cdot 10^{3}$

8. 1. 3232,44
32,3
12
0,669
0,2231
2. 18,12
9,76
1,6
4,7
4,98
3. 250
2000
6,21
1,73
3,6

10. 4,5

11. 2,4513

21. 25,94

22. 54,25

27. 0,48

49. 1. 0
1,4786
0,5798
2. $x = 1,212$
3. $x = 2,57$

51. 5. $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}(\log a + \log b) - \frac{1}{4}(\log x + 3 \log y)$

53. 2. $9,46 \cdot 10^{4}$
$9,244 \cdot 10^{-7}$
$3,537 \cdot 10^{2}$
$3,574 \cdot 10^{2}$
$1,964 \cdot 10^{-4}$

55. 3. 0,6186
9,259
5,590
2,863
$2{,}122 \cdot 10^{-4}$

58. 3. 622,8
0,7445
6,84
1,603
$6{,}16 \cdot 10^{-4}$

60. 3. 2,847
8,584
0,601
0,7735
1,289

61. 3. 25,4
1,42
0,0623
17,5
59,0

63. 2. 0,884
0,0492
0,5585
0,7792
23,33

64. 2. $x = 3{,}201$
$x = 8{,}55$
$x = 3{,}13$
$x = 0{,}875$
$x = 24{,}3$

66. 2. 59,5
60,21
404,1
1,712

67. 1. 35,48
2. 28,36
3. —0,195
4. 1,444
5. 7,96

68. 1. $F = 0{,}033$
2. $v = 39{,}9$

69. 1. $S = 3{,}002$
2. $V = 9{,}473$

70. $C = 1230$

71. $s = 1100$

72. $v = 35{,}12$

75. 15,27 cm

80. 14,88 cm

81. 15 sôlme, 100 m

83. 1. $S = 0{,}526$
2. $P = 1{,}98$

84. $h = 12980$

85. 0,9450

86. 0,3063

87. 4066

88. 0,538

90. 337 cm²

91. 3903 cm²

95. 3. $x = 9$
$x = 32$
$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

96. 3. $x = \sqrt{3}$
$x = \sqrt[4]{15}$
$x = \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

100. 7. $x = 4$

8. $x = -1$
10. $x = -3\frac{1}{4}$

101. 1. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$
3. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$
5. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
6. $x_1 = 4$, $x_2 = 7$

102. 2. $x = 2{,}322$
3. $x = 2{,}667$
5. $x = 4{,}417$
7. $x = -1{,}080$
9. $x = 1{,}709$

103. 1. $x = 3$
3. $x = 4$
4. $x = 1{,}500$
5. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

105. $3^{2a} = 144$
$3^{a^2} = 12^a = 276{,}3$
$3^{2^a} = 194{,}4$

106. 1. $a^{\left(\frac{\log e}{\log a}\right)^3} = a^{(\log_a c)^3}$
2. c^{b^2}

107. $x = 1{,}585$

108.
$\log_3 15 = 2{,}465$
$\log_2 28 = 4{,}808$
$\log_{100} 30 = 0{,}7386$
$\log_{2,718} 10 = 2{,}303$

109. 2. $x = 1{,}08$
4. $x = \pm\sqrt{a^2 + 1}$
6. $x = \frac{a}{10^a - 1}$
8. $x_1 = 9$, $x_2 = 1$

110. 2. $x = 8$
3. $x = 6$
4. $x = 29524{,}5$
5. $x = 27$
6. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$
8. $x_1 = 0{,}3162$,
$x_2 = 1{,}581$

111. 1. $x = 3{,}45$
3. $x_1 = 81$, $x_2 = \frac{1}{46656}$

117. 2. $a_k = 7 + 8\,(k - 1)$
4. $a_k = 1 + \frac{k-1}{4}$

125. $a_1 = 21$

126. $a_1 = 103$

129. $d = 1\frac{1}{2}$

132. 88, 76, 64 ja 52

133. $k = 17$

135. $n = 31$

136. 17

138. $k = 25$

139. 9, 90, 900, 9000

140. 23

141. 10

142. $a_7 = 0$

144. $a_{11} = 57$

147. $n = 72$

149. 21, 28, ja 35

156. 654 m

157. 2300

160. 1020

164. 2. 10100
3. 10000

166. 4950

167. 995500

171. 68°, 88°, . . .

172. 80°, 96°, . . .

173. $\frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \dots$
174. 16
176. 8 nädalaga
177. $4{,}9\ t^2$ m
179. 6 nurka
181. 23
182. 45
184. $n\,[(a + x)^2 - nax]$
185. 100, 101, . . .
186. 10 arvu
197. 9,31
201. $8\sqrt{2}$
202. 0,75
203. 1,20
204. 1,01
205. 0,97
206. $24 \cdot (\frac{5}{8})^{15} = 0{,}021$ g
207. $760 \cdot 0{,}98^{20} = 507$ mm
210. $\sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{32}{81}} = \frac{16}{27}$
211. $q = \frac{1}{3}$
212. $q = 1{,}059$, 517,3
215. $q = \frac{1}{3}$
216. 13 ja 169
217. $\frac{10}{81}, \frac{10}{27}, \dots$
219. $k = 11$
222. $k = 11$
223. 7 liiget
224. 10 liiget
226. $a = 4$
227. $x = 12$, $y = 18$
228. 1 võrra
229. $d = \frac{2}{3}$

231. 12,8 cm
232. 5,4°
233. 101%
234. 33,5%
235. 32%, 52%
236. 107 l
237. 16%
238. 97,6%
239. 725 mm, 1000 m
240. 24,5 ööp.
241. 82 min
242. 2,5 g
243. 13,3 g
244. 0,692 g
245. 31 min
246. 1,06
247. koh. tööst. 1,95-kordne, tekstiiltööst. $10\ 4 \cdot 10^6$ m
248. 5,0%
249. 765
250. 242
251. $\frac{1023}{1024}$
252. 7382830
254. $4{,}7 \cdot 10^{11}$ vagunitäit
255. $1{,}67 \cdot 10^8$
256. $\frac{1093}{243} = 4{,}5$ m
257. 111,3 cm
258. 51,21
259. 123,0
260. 23,955
261. $5{,}9136 \cdot 2^n$

262. 5,824

266. $\frac{1-x^3}{1-x}$

269. $ab\,\frac{1-a^4b^8}{1-ab^2}$

271. $a_1 = 4$

273. $a_1 = 24$

276. 24

277. 3

278. 3,6

280. 4 $\frac{ax}{x-1}$, kui $x > a$

5. $1 + x$, kui $x > 0$

6. $\frac{u^2-u}{u-2}$, kui $u > 2$

281. 4,8284

282. 7,6344

283. $\frac{x^3}{4x^2-64}$, kui $|x| < 4$

284. d^2

285. $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$

286. $\sqrt{4b^2-a^2}$

287. $a_1 = 0{,}48$, $q = 0{,}01$

288. $a_1 = 0{,}027$, $q = 0{,}001$

289. 3. $\frac{19}{90}$

$\frac{419}{990}$

$\frac{2491}{9900}$

296. $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$

297. $1 + a + a^2 + \ldots$, kui $a < 1$

299. 2. 18,56 rbl.

4. 19,25 rbl.

300. 2. 30,72 rbl.

4. 2,03 rbl.

301. 2. 3,65 rbl.

3. 84,92 rbl.

4. 81,74 rbl.

5. 92,13 rbl.

302. 2317,50 rbl.

303. 1862,07 rbl.

304. 4200 rbl.

305. 6000 rbl.

306. 6503,40 rbl.

307. 6000 rbl.

309. $2\frac{1}{4}\%$

310. $3\frac{1}{2}\%$

315. 7205 rbl.

316. 7347 rbl.

317. 3328 rbl.

318. $5{,}624 \cdot 10^7$ \$

319. 502,6 rbl.

320. 790,5 rbl.

321. $3\frac{1}{2}\%$

322. 2%

323. 2%

324. 4%

325. 7 a.

326. 65200 rbl.

327. 75800 rbl.

328. 163000 rbl.

330. 6

331. 3

333. 24

334. 4

335. 10

336. 4

344. 20
345. 720.
346. 336
348. $x = 9$
349. 6
350. $x = 7$
353. 120
354. 5040
357. $1,308 \cdot 10^{12}$
358. 2. 120
4. 3360
6. 504
363. 6
364. 10
365. 792
366. 120
367. 15
368. 10
370. 20
372. $\binom{7}{2} = 21$; $\binom{6}{1} = 6$
374. 1. $x = 5$
2. $x = 8$
3. $x = 7$
4. $x = 9$
5. $x = 12$
6. $x = 8$
375. 16
376. 600; 300
377. 252
378. 816
379. 90720
380. 90
381. 504; 56; 224 paaris-arvu
382. 20
383. 6
384. 10
387. 416
389. $210a^6b^4$
390. $-792a^5b^7$
391. $3432x^7y^7$
392. 924
393. 10
394. 21
395. $1,023 \cdot 10^8$
396. $-3,27 \cdot 10^9$
397. 1076,37
398. 730,46
401. $20,4 \ \frac{\text{km}}{\text{tund}}$
402. $178 \ \frac{\text{km}}{\text{tund}}$
403. 432 ja 237
404. 14,0%
405. 24,5%
406. 5,21 rbl. ja 4,59 rbl.
407. 15%
409. 1,898
410. 1,0132
411. 0
412. 1. 7,035
2. 5,577
3. 12,81
4. 0,5927
5. 98,65
6. 4,350
413. 87,4
414. 5,8 cm
415. 4,0

416. 1,57

417. 0,208

418. 0,239

419. $2{,}25 \cdot 10^6$

420. $r = 6{,}17$

424. 4. $x = \pm 3{,}317$

5. $x_1 = 2{,}588$,
$x_2 = 1{,}384$

6. $x = \pm 2{,}483$

425. 179 cm^2

426. 216 cm^3

427. 2. $x = 4{,}91$

3. $x = \pm 5{,}32$

4. $x = \pm 0{,}90$

5. $x_1 = 2{,}966$,
$x_2 = —1{,}966$

6. $x_1 = 1{,}233$,
$x_2 = —5{,}233$

428. 13,4%

429. +2,3%

430. $-\frac{p^2}{100}$ %

431. 12%; 25,4%

432. 10%

433. 5. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$,
$x_3 = 3$, $x_4 = —1$

6. $x_1 = 4{,}653$,
$x_2 = —3{,}653$,
$x_3 = 2{,}193$,
$x_4 = —3{,}193$

434. —7,6%

435. 20%

436. 33,3%

437. 8,5%

438. Kuuski 33,6%,
mände 14,4%

439. 4%

440. 25%

441. 33,3%

442. 40 min

443. 36 min ja 45 min

444. 5 A, 44Ω

445. 2,71 m

446. Kell 6 t. 16 min 21,8 sec
„ 6 t. 31 min 18,3 sec

448. 5,4 cm ja 7,2 cm

449. 0,97

450. 988

451. 1. 0,535

3. 2,48

5. 4,99

7. 0,914

9. 14,9

452. 8,1 cm

453. $3\frac{1}{2}$ kg ja 4 kg

454. Hapnikku ruumala
järgi 21%,
kaalu järgi 23,3%

456. 1. $x = 5$

2. $x = 10$

3. $x = 18$

4. $x = 4$

5. $x = a \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

457. 3. $(t — 1)^2 (t + 1)$

4. $(2a + 3b)(3c + 5d)$

5. $(u + 35)(u — 15)$

6. $(ac + bd)(ad + bc)$

7. $4(b+2a)(2b-a)$
8. $(m+n-1)(m-n+1)$
10. $x^2(1-x)(1+x+x^2)$

458. 15

459. 120744 m

460. 30

461. 42,43 $\frac{\text{km}}{\text{tund}}$

463. $+20\%$

464. $-3{,}8\%$

465. 13 13 cm², 37,9%

467. 27,3%

468. 11 $\frac{\text{km}}{\text{tund}}$

469. 52

470. 1696

471. 100

472. —1600

473. 40 min ja $53\frac{1}{3}$ min

474. kell 14.23

475. 12 min; $V = 5v$

476. kell 13.53

477. $x = 3{,}82$

478. 1. $x = 0{,}37$
2. $x = 3$

479. 1. 72^m
2. $2^{6-m} : 9$

480. $\frac{1}{2} \cdot 5^{1-n} = 8{,}18 \cdot 10^{-11}$

481. 2. 25
6
9
31,7
107

482. 2. -2
-2
$\frac{2}{3}$
$-\frac{3}{2}$

483. 3. $x = 10$
$x = 0{,}1$
$x = 128$
$x = 125$

487. 1. 1,183
12,70
0,2942
2. 1,859
3,98
—0,78

488. 26,8

489. 1. $z = 0{,}40$
2. $s = 2{,}9$

490. 1. $C = 0{,}015$
2. $t = -0{,}96$

491. 1,4

492. 3. $x = 2$
4. $x = 2$
5. $x = 6$
6. $x = -4{,}070$
7. $x = 3$
8. $x_1 = 1,\ x_2 = 4$
9. $x = \pm 0{,}6908$
10. $x_1 = 3{,}345,$
$x_2 = -1{,}345$
11. $x = 0{,}6990$
12. $x = 0{,}9255$

493. 1. $x = 0{,}618$
3. $x = 14{,}6542$

5. $x = 4$
6. $x = 3{,}162$

494. 4. $x_1 = 8{,}16$,
$x_2 = 1{,}84$
5. $x = -3{,}79$
6. $x_1 = 5{,}2071$
$x_2 = 3{,}7929$
7. $x = \pm 5{,}374$
8. $x = 2{,}94$

497. 560 g
500. $x = 0{,}648$
501. $x = 15{,}564$
502. $d = 87{,}3$ cm
505. 91,25
511. $n = 69$
513. $n = 10$
514. $k = 17$
515. 468
519. 19 sec
520. 24522
521. 34313
523. $2n^2 + 3n$
524. $n_1 = 8$, $n_2 = 18$
527. n^2
528. $n^2 (2n + 2a - 1)$, kus a on esimene täisarv
529. $n = 1$, siis $1 + 2 = 3$,
$n = 2$, siis $4 + 5 + 6 = 7 + 8$,
$n = 3$, siis $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$,
jne.
530. $n = 1$, $3^2 + 4^2 = 5^2$,
$n = 2$, $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$,
$n = 3$, $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$,
jne.
540. 5 või -4
541. $\frac{23}{9}$
542. 4 või -5
543. a^{210}
544. $a^{\frac{n^2+n}{2}} b^{n^2}$
545. $\frac{1 - a^{15}}{1 - a}$
546. $\frac{x^{10} - y^{10}}{x - y}$
547. $\frac{(1 + x)^{13} - 1}{x}$
548. $\frac{1 - \sin^{14} \varphi}{\cos^2 \varphi}$
549. $\frac{1 - \cos^{10} \psi}{\cos^2 \psi}$
552. $x = 12$
553. $x = 3$
555. $11\frac{3}{7}^0$, $22\frac{6}{7}^0$, . . .
557. 46 a.
558. 76,5 tonnkilomeetrit
559. 16 sec
560. 1,4%
561. 193 kgm
562. 12
563. 790 m
565. 71 m

566. 36 min

567. 17 m^3

568. $\frac{8}{9}$ pööret

569. 6,3 min

575. 2. $\frac{31}{45}$

$2\frac{107}{330}$

$8\frac{221}{990}$

576. $\frac{2}{7}+\frac{2}{21}+\frac{2}{63}+\ldots$

577. 0,999 . . .

578. $1{,}8+0{,}18+0{,}018+\ldots$

580. 720 rbl.

581. $7\frac{1}{2}$ kuuga

586. $4\frac{1}{2}\%$

588. 13,3%

595. 10,3%

596. 34%

597. 23,3%, 20,2%, 21,7%

598. 120

599. 2520

602. 16

603. 13

605. $V_{10}^{5}-V_{9}^{5}$,

$V_{10}^{5}-2V_{9}^{5}+V_{8}^{5}$

606. 6

610. $\binom{20}{10}a^{10}x^{10}$

611. 128

613. $\frac{(x+1)^5-1}{x}$

617. 1,0141

618. 63,942

SISUKORD.

III täiendatud trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.
Keeleline toimetaja M. Tamm.

Ladumisele antud 9. VII 1947. Trükkimisele antud 1. IX 1947. Trükiarv 8200. Paber 56 : 79, 1/16. Trükipoognaid 12,5. Trükitähti trükipoognas 32.256. Arvutuspoognaid 10,0. MB-05902. Trükikoda „Tartu Kommunist“, Tartu, Ülikooli 21/23. Tellimise nr. 1298.

На эстонском языке.
К. Ратассепп. Алгебра для X класса.

1

TRÜKIVIGADE ÕIENDUSI.

	On trükitud:	Peab olema:
Lk. 26, ül. 2. rida	tüvenumbritega:	tüvenumbriga:
„ 150, alt 1. „	$\binom{n}{n-2}=\binom{u}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$	$\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$
„ 169, alt 9. „	$3\frac{8}{1}$	$3\frac{8}{21}$
„ 170, ül. 18. „	5. $\frac{1}{u}=-+\frac{1}{w}$	5. $\frac{1}{u}=\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$

RBL. 10.—

RBL. 10.–

K. RATASSEPP · ALGEBRA · KESKKOOLI X KLASSILE

K. RATASSEPP

ALGEBRA

KESKKOOLI X KLASSILE

RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“