

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut

Kärt Soieva

**GRAVITATSIOONILAINETE LEVIK ÜLDISTES
RUUTLIHKMETEGA TELEPARALLEELSETES
GRAVITATSIOONITEOORIADES**

Magistritöö (30 EAP)

Füüsika eriala

Juhendaja:
Manuel Hohmann, PhD

Tartu 2024

Gravitatsioonilainete levik üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates

Einsteini üldrelatiivsusteooria, mis on hetkel üldaktsepteeritud gravitatsiooniteooria, üheks otseseks järelduseks on gravitatsioonilainete olemasolu. Alles aastal 2015 mõõdeti seda nähtust otseselt ja 2017. aastal kinnitasid vaatlusandmed üldrelatiivsusteooria ennustust, et gravitatsioonilained levivad valguse kiirusel. Samas leidub nähtusi, mida üldrelatiivsusteooria ei suuda ilma problemaatiliste aspektide, nagu tumeaine ja -energia, sisse toomiseta rahuldavalt selgitada. See tõsiasi on suunanud meid alternatiivsete gravitatsiooniteooriate uurimisele. Üheks selliseks teooriate grupiks on üldised ruutliikmetega teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad, kus gravitatsioon on ruumi väändest ning mittemeetrilisusest tulenev nähtus. Gravitatsioonilainete leviku uurimine sellistes teooriates aitab hinnata teooriate elujõulisust. Käesolevas töös tuletatakse gravitatsioonilainete leviku kiirust ja polarisatsioone kirjeldavad valemid üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates. Seejärel uuritakse selle teooriate grupi erinevaid juhte eraldi ja analüüsitakse, mis juhtub erinevate konstantide komplektide puhul.

Märksõnad: gravitatsioonilained, gravitatsioon, modifitseeritud gravitatsiooniteooriad

CERCS: P190 — Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Propagation of gravitational waves in general quadratic teleparallel gravity theories

General theory of relativity, which is currently the widely accepted theory of gravity, directly predicts the existence of gravitational waves. This phenomenon was directly measured only in 2015 and in 2017 observational data confirmed the prediction that gravitational waves propagate at the speed of light. However, there are phenomena that general relativity cannot satisfactorily explain without introducing problematic concepts such as dark matter and dark energy. This has led us towards the investigation of alternative theories of gravity. One such group of theories is the general quadratic teleparallel theories of gravity, where gravity results from the torsion and non-metricity of space. Studying the propagation of gravitational waves in such theories helps assess the viability of these theories. In this work, formulas describing the speed and polarisations of gravitational waves in general quadratic teleparallel theories of gravity are derived. Then, different cases of this group of theories are separately examined and analysed to see what happens with different sets of constants.

Keywords: gravitational waves, gravity, modified gravity

CERCS: P190 — Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Gravitatsiooniteooriad	6
1.1 Aegeumi geomeetria	6
1.2 Meetrilis-afiinsed gravitatsiooniteooriad	8
1.3 Üldised ruutliikmetega teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad	9
2 Gravitatsioonilained	11
2.1 Gravitatsioonilainete kiiruse arvutuseeskiri	12
2.2 Gravitatsioonilainete mõju osakeste süsteemile	13
2.2.1 Newman-Penrose formalism	14
3 Gravitatsioonilainete kiirus	16
3.1 Väljavõrrandite lineariseerimine	16
3.2 Peapolünoomi arvutamine	18
3.3 Gravitatsioonilainete kiirus erinevate konstantide puhul	24
3.3.1 Gravitatsioonilainete kiirus ÜRT ekvivalentsses teoorias	28
4 Gravitatsioonilainete polarisatsioon	29
4.1 Teooriate jagunemine võimalike gravitatsioonilainete polarisatsioonide järgi . . .	31
4.1.1 Polarisatsioonid ÜRT ekvivalentsses teoorias	35
5 Tulemused ja arutelu	36
Kokkuvõte	37
Tänuavaldused	38
Kirjandus	39
Lisa A. Alamhulkade kontroll	41
Lihtlitsents	47

Sissejuhatus

Gravitatsioonilained on võimas nähtus, mille käigus ruum ise võngub [1]. Selle fenomeni teoreetilist olemasolu ennustati juba 19. sajandi lõpus ning tegemist on ühe otsese üldrelatiivsusteooria ehk hetkel üldaktsepteeritud gravitatsiooniteooria järeltulekuga [2]. Aastakümneid olid gravitatsioonilained lihtsalt teoreetilised ja pikalt vaieldi, kas tegemist on üldse füüsilise nähtusega või lihtsalt üldrelatiivsusteooria kõrvalsaadusega [2]. Esimesed vaatuslikud tõendid gravitatsioonilainetest pärinevad 1970. aastatest, kuid 2015. aastal mõõdeti ka otseselt gravitatsioonilainete möödumist [2, 3]. Aastal 2023 mõõdeti madalasageduslikke gravitatsioonilaineid ning lähitulevikus on kavandatud mitmeid eri tüüpi detektoreid, et seda põnevat nähtust laiemalt kaardistada [4, 5].

Sarnaselt elektromagnetkiirgusega saame gravitatsioonilainete puhul rääkida nende lainete levikukiirusest ja polarisatsioonist [1]. Üldrelatiivsus ennustab, et gravitatsioonilainetel leidub kaks erinevat polarisatsiooni ja lained levivad valguse kiirusel [1]. 2017. aastal tehtud mõõtmised kinnitasid üldrelatiivsusteooria ennustust, et gravitatsioonilained levivad valguse kiirusel, kuid lainete polarisatsiooni ei ole suudetud veel kindlalt määrata [6]. Tulevikus võib juhtuda, et hetkel veel planeeritavad masinad mõõdavad gravitatsioonilainete puhul selliseid polarisatsioone, mis üldrelatiivsusteoorias on keelatud [7, 8]. See viitab otseselt üldrelatiivsusteooria vajakajäämisele ning sunnib meid praeguses üldaktsepteeritud gravitatsiooniteoorias muudatusi tegema või seda koguni kõrvale heitma.

Kuigi üldrelatiivsusteooria on hetkel parim gravitatsiooniteooria, mida kinnitavad ka paljud vaatlused, ei suuda see seletada teatud nähtusi ilma tumeaine ja -energia sisse toomiseta. Nende mõistatuste selgitamiseks on välja pakutud erinevaid lahendusi. Üks ettepanek on muuta gravitatsiooniteooriat ennast, kuid ka seda saab teha paljudel eri meetoditel. Üldrelatiivsusteooria selgitab gravitatsiooni kui ruumi kõverusest tulenevat nähtust, kuid alternatiivina võime uurida teooriaid, kus teised ruumi omadused, nagu vääne ja mittemeetrilisus, põhjustavad gravitatsiooni. Selliseid teooriaid, kus käsitletakse lisaks ruumi kõverusele ka väänet ja mittemeetrilisust, nimetatakse meetrilis-afinseteks teooriateks. Nende üheks alamklassiks, kus eeldatakse tasast seostust, on üldised teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad. [9, 10]

Käesoleva töö eesmärk on tuletada gravitatsioonilainete levikukiirust ja polarisatsioone kirjeldavad valemid üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates. Esimeses kahes peatükis anname ülevaate vajalikest kontseptsioonidest ja matemaatilistest tööriistadest. Kolmas ja neljas peatükk sisaldavad töö põhilisi arvutusi, analüüsi ning tulemusi. Viimasena arutleme töö tulemuste üle ning esitame kokkuvõtte.

Kokkulepped ja tähistused

- Olulise mõiste esmakordsel mainimisel on see tähistatud rasvase kirjaga.
- Lihtsuse huvides rakendame ühikutesüsteemi, kus valguse kiirus c on võrdne ühega.
- Meetrika signatuur on $(-, +, +, +)$.
- Kasutame Einsteini summeerimiskokkulepet, mille kohaselt toimub korduvate indeksite puhul alati summeerimine kujul

$$x^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3.$$

- Lühiduse huvides kirjutame osatuletised koordinaatide järgi kujul

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu.$$

- Kaarsulud indeksite ümber tähistab sümmeetrilist osa ehk näiteks

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}).$$

- Kandilised sulud indeksite ümber tähistab antisümmeetrilist osa ehk näiteks

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}).$$

1 Gravitatsiooniteooriad

Küsimuse „Mis on gravitatsioon?“ üle on filosoferitud pikalt ja tuletatud on mitmeid erinevaid teooriaid, mis seda nähtust käsitlevad [1, 2, 11]. Hetkel kõige üldtunnustatum gravitatsiooniteooria on Einsteini üldrelatiivsusteooria (ÜRT), mida kinnitavad mitmed vaatlused ja eksperimendid [11]. ÜRT ja selle modifikatsioonid on geomeetrilised teooriad, mille kohaselt gravitatsioon on aegruumi geometriast tulenev nähtus [1]. Järgnevalt kirjeldame matemaatilisi tööriistu, mida gravitatsiooni geomeetriliseks kirjeldamiseks kasutatakse, ja erinevaid gravitatsiooniteooriaid.

1.1 Aegruumi geometria

Alapeatükk põhineb allikal [1]. Üks oluliseimaid aegruumi geometriat kirjeldavaid objekte on **meetrika**. Meetrika on vajalik, kuna aegruum on muutkond ja sellel puudub vajalik struktuur, mille abil kirjeldada objektide vahelisi kaugusi ja nurki. Meetrika ehk meetriline tensor $g_{\mu\nu}$ on teist järku sümmeetriline kovariantne tensor. Arvestades, et meie koordinaatsüsteemi baasvektorid on \vec{e}_μ , siis $g_{\mu\nu}$ on nende skalaarkorrutis

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu. \quad (1.1)$$

Meetrika abil saame defineerida sündmuste vahelise kauguse neljadimensionaalses aegruumis ehk **intervalli**, mis infinitesimaalsel kujul on defineeritud kui

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2)$$

x^μ ja x^ν tähistavad aegruumi koordinaate ehk kreeka tähed omavad väärtusi nullist kolmeni. Teisisõnu $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Kusjuures annab intervall infot sündmuste põhjuslikkuse kohta. Intervall saab omada nii positiivset, negatiivset kui ka nullväärtust. Esimesel juhul on sündmused seotud **ruumisarnaste** vektoritega ja nad ei saa olla põhjuslikult seotud. Väärtuse null puhul on tegemist sündmustega, mida ühendavad **valgusesarnased** vektorid ja ainult valguse kiirusel leviv signaal saab sündmuse siduda. Negatiivse intervalli puhul on tegemist **ajasarnaste** vektoritega ja sündmused saavad vabalt olla põhjuslikult seotud. Vektorite \vec{a} ja \vec{b} skalaarkorrutis on meetrika abil defineeritud järgnevalt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^\mu \vec{e}_\mu \cdot b^\nu \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (1.3)$$

kus a^μ , b^ν on vektorite komponendid. Meetrika abil saame langetada indekseid ehk lühemalt tähistades kirjutame, et

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^\mu k_\mu, \quad (1.4)$$

kus k^μ on vektori \vec{k} komponendid. Meetrikaga käib kaasas **pöördmeetrika** $g^{\mu\nu}$ ehk teist järku kontravariantne tensor, mille abil saab indekseid tõsta ja mis on meetrikaga seotud järgnevalt

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\rho} = \delta^\nu_\rho = \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad (1.5)$$

kus δ^ν_ρ on **Kroneckeri delta**. Tasast aegruumi kirjeldab **Minkowski meetrika** $\eta_{\mu\nu}$, mida kasutatakse tihti taustmeetrikana

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.6)$$

Samas ei piisa üldisel juhul ainult meetrikast ja vaja on defineerida **seostus** $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, mis kirjeldab tensorite käitumist paralleelnihetel ja annab seose lähedastes punktides asuvate tensorite vahel. Seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ ei ole ise tensor. Seostuse abil defineeritakse tensorite **kovariantne tuletis** ∇_μ , mis on tavalise osatuletise üldistus. Vektori V^ν kovariantne tuletis on defineeritud kui

$$\nabla_\rho V^\nu = \partial_\rho V^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} V^\sigma. \quad (1.7)$$

Seostuse kaudu defineeritakse ka **geodeetilised** ehk sirgjoonte üldistused kõveras ruumis: parametrizeeritud kõver $x^\mu(\lambda)$ on geodeetiline kui järgnev võrrand on rahuldatud

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (1.8)$$

Kõik aegruumi **kõverust**, **väänet** ja **mittemeetrilisust** kirjeldavad suurused on defineeritud seostuse abil. Kõverust kirjeldab **Riemanni kõverustensor**

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\tau\rho} \Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\tau\sigma} \Gamma^\tau_{\nu\rho}. \quad (1.9)$$

Lisaks Riemanni kõverustensorile kasutatakse kõveruse iseloomustamiseks ka sellest tuletatud **Ricci tensorit** $R_{\mu\nu}$ ja **Ricci skalaari** R

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Väänet kirjeldab **väändetensor** $T^\mu_{\nu\rho}$, mis tuleneb seostuse alumiste indeksite antisümmeetriast

$$T^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho}. \quad (1.11)$$

Mittemeetrilisust kirjeldab meetrika kovariantne tuletis ehk **mittemeetrilisuse tensor** $Q_{\mu\nu\rho}$

$$Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\nu\sigma}. \quad (1.12)$$

Üldiselt on meetrika ja seostus omavahel sõltumatud, kuid ÜRT-is on seostus defineeritud meetrika kaudu

$$\mathring{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}). \quad (1.13)$$

Seda seostust nimetatakse **Levi-Civita seostuseks** ja selle komponente **Christoffeli sümbooliteks**. Eristamaks seda üldisest seostusest, tähistame selle väikese ringikesega. ÜRT-is väänet ja mittemeetrilisust ei esine.

1.2 Meetrilis-afiinsed gravitatsiooniteooriad

Üldrelatiivsusteooria selgitab gravitatsiooni kui aegruumi kõverusega kaasnevat nähtust ja seda põhjustab ainult üks dünaamiline väli - meetrika. ÜRT-i **mõjufunktsionaali** saab kirjutada kui

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{\text{EH}} + S_{\text{aine}}, \quad (1.14)$$

kus G on **Newtoni gravitatsioonikonstant**, S_{aine} kirjeldab aine panust ja S_{EH} ehk **Einstein-Hilberti mõjufunktsionaal** aegruumi geomeetria. S_{EH} on defineeritud kui

$$S_{\text{EH}} = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (1.15)$$

kus g on meetrika determinant ja R Ricci skalaar (1.10). Mõjufunktsionaal võtab kokku süsteemi dünaamika ja sellest on võimalik väljade järgi varieerimisel tuletada **väljavõrrandid**, milleks ÜRT-is ongi kuulsad **Einsteini väljavõrrandid**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

kus $T_{\mu\nu}$ on **energia-impulsi tensor**. [1]

Samas saame eelnevas alapeatükis kirjeldatud tööriistadega üles ehitada analoogseid, aga palju üldisemaid teooriaid kui ÜRT. Selliseid teooriaid, kus käsitletakse nii aegruumi kõverust, väänet kui ka mittemeetrilisust, nimetatakse **meetrilis-afiinseteks teooriateks**. ÜRT lähtub ainult aegruumi kõverusest. Meetrilis-afiinsed teooriad on põhimõtteliselt ÜRT-i üldistused ja jagunevad vastavalt sellele, millised kolmest tensorist - kõverus, vääne, mittemeetrilisus - on nullist erinevad. Meetrilis-afiinsete gravitatsiooniteooriate puhul saame analoogiliselt Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliga (1.15) konstrueerida aegruumi geomeetria mõjufunktsionaali järgnevalt

$$S_{\text{MA}} = \int \sqrt{-g} \mathcal{G} d^4x, \quad (1.17)$$

kus \mathcal{G} on teooriat kirjeldav **gravitatsiooniskalaar**. \mathcal{G} täpne kuju sõltub vastavast teooriast, kuid üldiselt võib see sõltuda nii kõverusest, väändest kui ka mittemeetrilisusest. Mõjufunktsionaalist (1.17) tulenevad meetrika ja seostuse järgi varieerimisel väljavõrrandid. [9]

1.3 Üldised ruutliikmetega teleparalleelsed gravitatsiooni-teooriad

Teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad on meetrilis-afinsete teooriate alamklass, milles aegruumi kirjeldav üldine seostus on tasane ehk $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ võib sõltuda ainult väändest ja mittemeetrilisusest. [9] Üldised teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad on sellised, kus [9]

$$T^\mu_{\nu\rho} \neq 0, \quad Q_{\mu\nu\rho} \neq 0. \quad (1.18)$$

Üldised ruutliikmetega gravitatsiooniteooriad on niisugused teooriad, mida kirjeldab üldine mõjufunktsionaal (1.17), kus gravitatsiooniskalaar \mathcal{G} sisaldab väände- ning mittemeetrilisuse tensorite kõikvõimalike kombinatsioonide ruutliikmeid [12]

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & a_1 T^{\mu\nu\rho} T_{\mu\nu\rho} + a_2 T^{\mu\nu\rho} T_{\rho\nu\mu} + a_3 T^\mu_{\mu\rho} T^\nu_{\nu\rho} \\ & - b_1 Q^{\mu\nu\rho} T_{\rho\nu\mu} - b_2 Q^{\rho\mu}_{\mu} T^\nu_{\nu\rho} - b_3 Q_\mu^{\mu\rho} T^\nu_{\nu\rho} \\ & + c_1 Q^{\mu\nu\rho} Q_{\mu\nu\rho} + c_2 Q^{\mu\nu\rho} Q_{\rho\mu\nu} + c_3 Q^{\rho\mu}_{\mu} Q_{\rho\nu}{}^\nu + c_4 Q^\mu_{\mu\rho} Q_\nu{}^{\nu\rho} + c_5 Q^\mu_{\mu\rho} Q^{\rho\nu}{}_\nu, \end{aligned} \quad (1.19)$$

kus $a_1, \dots, a_3, b_1, \dots, b_3, c_1, \dots, c_5$ on suvalised teooriat defineerivad konstandid. \mathcal{G} saame kirja panna ka **moonutuse** (inglise keeles *distortion*) $M^\mu_{\nu\rho}$ abil. Moonutus on üldise ja Levi-Civita seostuse vahe [10]

$$M^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \overset{\circ}{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}. \quad (1.20)$$

Kasutades moonustust ja uusi konstante k_1, \dots, k_{11} saame kirjutada [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & M^{\mu\nu\rho} (k_1 M_{\mu\nu\rho} + k_2 M_{\nu\rho\mu} + k_3 M_{\mu\rho\nu} + k_4 M_{\rho\nu\mu} + k_5 M_{\nu\mu\rho}) + k_6 M_{\rho\mu}{}^\mu M^{\rho\nu}{}_\nu \\ & + k_7 M_{\mu\rho}{}^\mu M^{\nu\rho}{}_\nu + k_8 M^\mu_{\mu\rho} M_\nu{}^{\nu\rho} + k_9 M_{\mu\rho}{}^\mu M_\nu{}^{\nu\rho} + k_{10} M^\mu_{\mu\rho} M^{\rho\nu}{}_\nu + k_{11} M_{\rho\mu}{}^\mu M^{\nu\rho}{}_\nu. \end{aligned} \quad (1.21)$$

See tähendab, et kehtivad seosed [10]

$$\begin{aligned} k_1 = 2a_1 - b_1 + 2c_1, \quad k_2 = -2a_2 + b_1 + 2c_2, \quad k_9 = -2a_3 + 2b_2 - b_3 + 2c_5, \\ k_4 = a_2 + c_2, \quad k_5 = a_2 - b_1 + 2c_1, \quad k_6 = c_4, \quad k_7 = a_3 + b_3 + c_4, \\ k_8 = a_3 - 2b_2 + 4c_3, \quad k_3 = -2a_1 + b_1 + c_2, \quad k_{10} = -b_3 + 2c_5, \quad k_{11} = b_3 + 2c_4. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Kordajad k_1, \dots, k_{11} on üldiselt suvalised, seega esindab mõjufunktsionaal (1.17) koos käesoleva gravitatsiooniskalaariga teooriate klassi. Andes konstantidele k_1, \dots, k_{11} kindlad väärtused, saame ühe konkreetse teooria. Näiteks juhul kui

$$k_{11} = -k_2 = 1, \quad k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = k_9 = k_{10} = 0, \quad (1.23)$$

saame üldise teleparalleelse gravitatsiooniteooria ÜRT ekvivalentse teooria (GTEGR) [10, 12].

Mõjufunktsionaalist (1.17) koos gravitatsiooniskalaariga (1.21) saame eraldi meetrika ja seostuse järgi varieerides tuletada väljavõrrandid [10]. Meetrika väljavõrrand on järgnevalt

$$\mathcal{U}_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\nabla}_\rho(\mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}g_{\mu\nu} = \kappa^2\Theta_{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

kus $\kappa = 8\pi G$ ja $\overset{\circ}{\nabla}_\rho$ on kovariantne tuletis Levi-Civita seostuse (1.13) järgi [10]. Seostuse väljavõrrand on kujul

$$\nabla_\tau \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau} - M^\omega{}_{\tau\omega} \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau} = 2\kappa^2(\nabla_\tau H_\mu{}^{\nu\tau} - M^\omega{}_{\tau\omega} H_\mu{}^{\nu\tau}), \quad (1.25)$$

kus ∇_ρ on kovariantne tuletis üldise tasase seostuse järgi [10]. Väljavõrrandite paremal poolel esinevad tensorid $\Theta_{\mu\nu}$ ja $H_\mu{}^{\nu\rho}$ on vastavalt energia-impulsi ja hüperimpulsi (inglise keeles *hypermomentum*) tensorid. Esimene kirjeldab meetrika ja teine seostuse sidusust ainega. Vaadeldes vaakumvõrrandeid, on need tensorid võrdsed nulliga. Ülejäänud tensorid $\mathcal{U}^{\mu\nu}$, $\mathcal{V}^{\rho\mu\nu}$ ja $\mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\rho}$ on defineeritud järgnevalt [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\mu\nu} = & k_1(M^{\mu\rho\sigma}M^\nu{}_{\rho\sigma} - M^{\rho\mu}{}_\sigma M_\rho{}^{\nu\sigma} - M_{\rho\sigma}{}^\mu M^{\rho\sigma\mu}) - k_2 M_\rho{}^{\sigma(\mu} M_{\sigma}{}^{\nu)\rho} \\ & + k_3(M^{\mu\rho\sigma}M^\nu{}_{\sigma\rho} - 2M^{\rho\sigma(\mu} M_{\rho}{}^{\nu)\sigma}) - k_4 M^{\rho\mu}{}_\sigma M^{\sigma\nu}{}_\rho - k_5 M^{\rho\sigma\mu} M_{\sigma\rho}{}^\nu \\ & + k_6 M^{\mu\rho}{}_\rho M^{\nu\sigma}{}_\sigma - k_7 M^{\rho\mu}{}_\rho M^{\sigma\nu}{}_\sigma - k_8 M_\rho{}^{\rho\mu} M_\sigma{}^{\sigma\nu} - k_9 M_\rho{}^{\rho(\mu} M_{\sigma}{}^{\nu)\sigma} \\ & - (2k_6 M_{\rho\sigma}{}^\sigma + k_{11} M_{\sigma\rho}{}^\sigma + k_{10} M^\sigma{}_{\sigma\rho}) M^{\rho(\mu\nu)}, \end{aligned} \quad (1.26a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\rho\mu\nu} = & -2k_6 g^{\rho(\mu} M^{\nu)\sigma}{}_\sigma - k_{11} g^{\rho(\mu} M_{\sigma}{}^{\nu)\sigma} - k_{10} M_\sigma{}^{\sigma(\mu} g^{\nu)\rho} \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [(2k_6 - k_{10} - k_{11}) M^{\rho\sigma}{}_\sigma + (k_{11} - 2k_7 - k_9) M^{\sigma\rho}{}_\sigma + (k_{10} - 2k_8 - k_9) M_\sigma{}^{\sigma\rho}] \\ & + (k_4 - k_5 - k_1 - k_3) M^{(\mu\nu)\rho} + (k_5 - k_4 - k_1 - k_3) M^{(\mu|\rho|\nu)} \\ & + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 - k_5) M^{\rho(\mu\nu)}, \end{aligned} \quad (1.26b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\rho} = & 2k_1 M_\mu{}^{\nu\rho} + k_2 (M^{\nu\rho}{}_\mu + M^\rho{}_\mu{}^\nu) + 2k_3 M_\mu{}^{\rho\nu} + 2k_4 M^{\rho\nu}{}_\mu + 2k_5 M^\nu{}_\mu{}^\rho \\ & + 2k_6 M_{\mu\sigma}{}^\sigma g^{\nu\rho} + 2k_7 M^{\sigma\nu}{}_\sigma \delta_\mu{}^\rho + 2k_8 M_\sigma{}^{\sigma\rho} \delta_\mu{}^\nu + k_9 (M_\sigma{}^{\rho\sigma} \delta_\mu{}^\nu + M_\sigma{}^{\sigma\nu} \delta_\mu{}^\rho) \\ & + k_{10} (M^{\rho\sigma}{}_\sigma \delta_\mu{}^\nu + M^\sigma{}_{\sigma\mu} g^{\nu\rho}) + k_{11} (M^{\nu\sigma}{}_\sigma \delta_\mu{}^\rho + M^\sigma{}_{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (1.26c)$$

2 Gravitatsioonilained

Gravitatsioonilainete olemasolu on üldrelatiivsuse üks otseseid järeldusi, kuid idee, et gravitatsioon võib levida lainetena nagu valgus, pärineb juba aastast 1893 [2]. Toona ennustas O. Heaviside, et gravitatsioonilised ja elektromagnetilised lained on analoogilised [13]. Poincaré arutles samuti 1905. aastal ilmunud artiklis gravitatsioonilainete olemasolu üle, kuid täpne matemaatiline kirjeldus sai sündida koos sobiva gravitatsiooniteooriaga - üldrelatiivsusteooriaga [2, 14].

ÜRT-i kohaselt on gravitatsioonilained **lineariseeritud väljavõrrandite** lahendid, mis tulenevad otseselt väljavõrranditest (1.16). Väljavõrrandite lineariseerimine tähendab, et kõik esinevad väljad, nagu meetrika ja seostus, asendatakse selle taustliikme ja esimest järku väikese häirituse summaga ning uuritakse allesjäänud võrrandi lineaarset osa. Kõrgemaid häirituse järke ei arvestata, kuna häiritused ise on väikesed ehk nende ruudud ja kõrgemad astmed on kaduvväikesed. [1]

ÜRT-is tähendab väljavõrrandite lineariseerimine eeldust, et üldise meetrika $g_{\mu\nu}$ saab kirjutada taustliikme, milleks valitakse tihti Minkowski meetrika $\eta_{\mu\nu}$, ja väikese häirituse $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ summamana. Seda eeldust nimetatakse **nõrga välja eelduseks**, mis tähendab, et uurime gravitatsiooni kaugel massiivsetest objektidest. ÜRT-is on meetrika ainuke dünaamiline väli, seega on vaja kirjeldada ainult selle häiritust. Pärast võrrandite lineariseerimist leiame ÜRT-is asjakohase kalibratsiooni valimisega, et häirituse levimist vaakumis kirjeldab klassikaline homogeenne lainevõrrand [1]

$$\square h_{\mu\nu} = \partial_\sigma \partial^\sigma h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

Lainevõrrandi lahendiks on tasalainet kirjeldav võrrand

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad k_\sigma k^\sigma = 0, \quad (2.2)$$

kus $A_{\mu\nu}$ on laine amplituud ja k_α laine 4-kovektor, mis kannab informatsiooni laine leviku kohta [1]. See tähendab, et meetrika häiritused levivad lainetena, mis ongi gravitatsioonilained. Kusjuures, kuna ÜRT-is $k_\sigma k^\sigma = 0$ ehk k_σ on valgusesarnane vektor, siis levivad gravitatsioonilained ÜRT-is valguse kiirusel [1].

Kuigi ÜRT ennustab otseselt gravitatsioonilainete olemasolu, siis ei uskunud ka A. Einstein ise nendesse üpris kaua. Arutleti, et tegemist võib olla lihtsalt teooria matemaatilise kirjelduse kõrvalnähtusega ja füüsikaliselt ei oma gravitatsioonilained mingit tähendust. Avaldati artikleid, milles üritati nende olemasolu ümber lükata, kuid need ei osutunud vett pidavaks. Alles 1950. aastate lõpuks oli gravitatsioonilainetest saanud üldiselt aktsepteeritud füüsikaline nähtus, mida

veel ei suudetud vaadelda. Ühtlasi jõuti ka arusaamale, et gravitatsioonilained kannavad energiat. [2, 15]

Esimesed vaatluslikud tõendid gravitatsioonilainete olemasolust pärinevad 1974. aastast, kui R. A. Hulse ja J. H. Taylor vaatlesid binaarset pulsarite süsteemi, mille tiirlemisperioodi muutus vastab otseselt energiale, mida gravitatsioonilained peaksid teoreetiliselt süsteemist eemale kandma [16]. Esimene otsene gravitatsioonilainete edukas mõõtmine viidi läbi 2015. aastal, kui kaks detektorit tuvastasid samaaegselt signaali, mille allikaks oli kahe musta augu ühinemine GW150914 [3]. Aastal 2017 tuvastati kahe neutrontähe ühinemisel tekkinud gammapurske signaal [17] põhimõtteliselt samaaegselt gravitatsioonilise signaaliga [6], mis tõestas, et gravitatsioonilained levivad valguse kiirusele väga lähedastel kiirustel. Täpsemalt on gravitatsioonilainete kiirus vahemikus [6]

$$-3 \times 10^{-15} < c_{\text{gravitatsioon}} - 1 < 7 \times 10^{-16}. \quad (2.3)$$

See kinnitab ÜRT-i ennustust, et gravitatsioonilained levivad valguse kiirusel, kuid modifitseeritud gravitatsiooniteooriates ei pruugi see nii olla [18].

2.1 Gravitatsioonilainete kiiruse arvutuseeskiri

Nüüdseks on vaatlustest teada, et gravitatsioon levib valguse kiirusele väga lähedastel kiirustel [6]. Järelikult peab iga elujõuline gravitatsiooniteooria samuti seda tõsiasja ennustama. Matemaatiliselt saame teooriast gravitatsioonilainete kiiruse tuletada **peasümboli** (*principal symbol*) ja **peapolünoomi** (*principal polynomial*) kaudu [7, 8, 19, 20]. Peasümbol kirjeldab diferentsiaaloperaatori kõrgeimat järku ja kannab selle tehte olulisimat informatsiooni [19]. Arvestades, et käesolevas töös analüüsitavad väljavõrrandid on teist järku diferentsiaalvõrrandid, siis uuritavad kõrgeimat järku diferentsiaaloperaatorid on samuti teist järku. Teist järku diferentsiaaloperaatori \mathcal{D} saame Fourier' ehk lainete ruumis, mida kirjeldavad lainekovektorid k_μ kirjutada kujul

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta\rho\sigma} k_\rho k_\sigma + \text{madalamad liikmed}, \quad (2.4)$$

kus $\mathcal{D}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta\rho\sigma} k_\rho k_\sigma = P_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ ongi peasümbol [19]. Peapolünoom $P(k)$ on sellisel juhul determinant peasümbolist [7, 8]. Lained, mille levikut iseloomustab kovektor k_μ ja mis tulenevad diferentsiaalvõrranditest, mida kirjeldab peasümbol $P_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$, levivad selliselt, et kehtib $P(k) = 0$ [20]. See seos kannab teavet k_μ kohta ja seega iseloomustab ka lainete leviku kiirust [20].

2.2 Gravitatsioonilainete mõju osakeste süsteemile

Oluline aspekt gravitatsioonilainete uurimisel on analüüsida nende mõju osakeste süsteemile, sest just seda suudame me tuvastada. Vajalik on rääkida osakeste süsteemist, sest matemaatiliselt võime tõestada, et üksiku osakese abil ei saa kindlalt väita, kas gravitatsioonilaine möödus või mitte. Gravitatsioonilainete mõju arvutamiseks kasutatakse **geodeetilise deviatsiooni võrrandit**

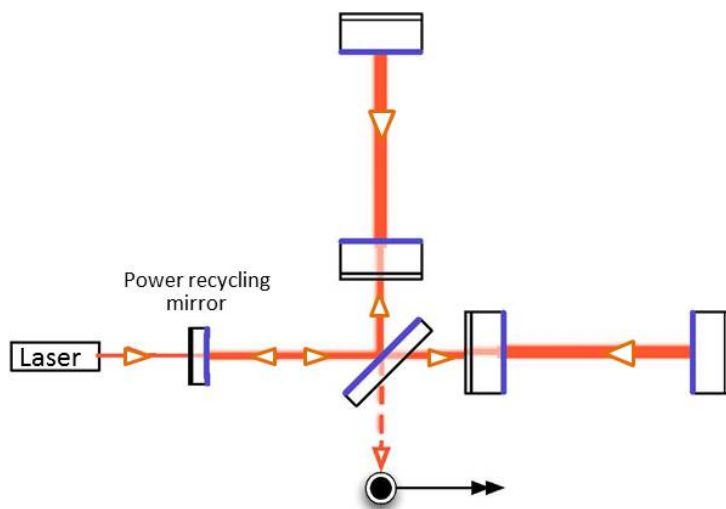
$$\frac{D^2 v^\mu}{Dt^2} = R^\mu_{\sigma\alpha\beta} u^\sigma u^\alpha v^\beta, \quad (2.5)$$

kus u ja v on koordinaatjooned, mis parametrizeerivad kahemõõtmelist pinda: $x^\mu = x^\mu(u, v)$ [1]. Siin

$$\frac{Dv^\mu}{Dt} = \frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} v^\nu \frac{dx^\beta}{dt} \quad (2.6)$$

on mööda kõverat defineeritud vektorvälja absoluutne tuletis. Geodeetilise deviatsiooni võrrand kirjeldab, kuidas naabergeodeetilised nihkuvad ehk millise kiirenduse saavad naaberosakesed üksteise suhtes (võrrandi vasak pool) sõltuvalt ruumi geometriast (parem pool). Geodeetilised jooned on sirgjoone üldistused kõveras ruumis ehk kirjeldavad osakese trajektoore aegruumis. [1]

Järgnevatel eeldustel on võimalik sellest võrrandist tuletada kõik võimalikud gravitatsioonilaine **polarisatsioonid** ehk viisid, kuidas gravitatsioonilaine võib osakeste süsteemi mõjutada. Nimelt, vaatleme kõige tüüpilisemat gravitatsioonilainete detektorit ehk Michelsoni interferomeetrit, mida kasutatakse ka LIGO ja VIRGO detektorites [3, 21]. See seade, mida on kujutatud ka joonisel 2.1, on L-tähe kujuline ja mõõdab, kuidas ühe detektori haara pikkus muutub teise suhtes: kui pikkus muutub, saadakse interferentsi tulemusena signaal, mis viitab, et detektorit läbis gravitatsioonilaine [21].



Joonis 2.1: LIGO interferomeetri joonis [21].

Arvestame, et ruumiliste koordinaatide alguse võime valida keskse poolläbilaskva peegli asukohas. Lisaks võime kasutada Fermi koordinaate ehk selliseid koordinaate, mille puhul selle peegli trajektooris läbi aegruumi on Christoffeli sümbolid võrdsed nulliga. Lisaks arvestame, et taustmeetrika on Minkowski meetrika $\eta_{\mu\nu}$ ja aine mõjufunktsionaal sõltub ainult meetrikast. Sellistel kaalutlustel saame geodeetilise deviatsiooni võrrandist seose

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -R_{0i0j} x^j, \quad (2.7)$$

kus kuut Riemanni tensori komponenti R_{0i0j} nimetatakse **elektrilisteks komponentideks**. Need annavad kuus eri võimalust, kuidas gravitatsioonilained saavad osakeste süsteemi mõjutada, ehk polarisatsiooni. Nende analüüsimiseks on arukas kasutada **Newman-Penrose formalismi**. [22]

2.2.1 Newman-Penrose formalism

Newman-Penrose formalismi aluseks on uude kompleksesse valgusesarnasesse baasi $l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu$ üle minek. See, neljast valgusesarnasest vektorist koosnev baas, on tavalises (t, x, y, z) koordinaatsüsteemis antud järgnevalt [22]

$$l^\mu = (1, 0, 0, 1), \quad n^\mu = \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1), \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \quad (2.8)$$

Tegemist on valgusesarnaste baasivektoritega, sest

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0. \quad (2.9)$$

Minkowski meetrika $\eta_{\mu\nu}$ (1.6) võtab Newman-Penrose baasis kuju

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Kasutades neid koordinaate vaatleme meetrika häiritust, mis levib tasalainena z -telje positiivses suunas. Seda kirjeldav võrrand on

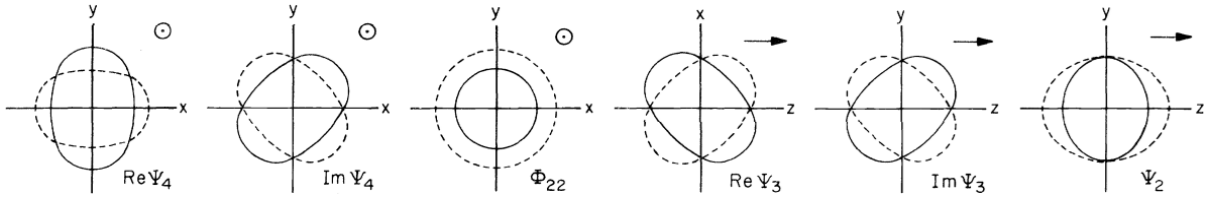
$$h_\mu = \hat{h}_{\mu\nu} e^{-i\omega l_\sigma x^\sigma} = \hat{h}_{\mu\nu} e^{i\omega(t-z)} = \hat{h}_{\mu\nu} e^{i\omega u}, \quad (2.11)$$

kus $\hat{h}_{\mu\nu}$ on laine amplituud ja $u = t - z$ **taandatud aeg** (*retarded time*) [23]. Arvestades, et ka teiste teoorias esinevate väljade häirituste χ levikut kirjeldab tasalaine võrrand $\chi = \hat{\chi} e^{i\omega u}$, sõltuvad kõik häiritustest konstrueeritud suurused ainult taandatud ajast u .

Arvutades välja Riemanni tensori elektrilised komponendid (2.7), selgub, et need on Newman-Penrose baasis lihtsalt meetrika häirituse vastavate komponentide tuletised

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{nlnl} = \frac{1}{12}\ddot{h}_{ll}, & \Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{nlm\bar{m}} = -\frac{1}{2}\overline{R_{nlm}} = \frac{1}{4}\ddot{h}_{l\bar{m}} = \frac{1}{4}\overline{\ddot{h}_{lm}} \\ \Psi_4 &= -R_{m\bar{m}n\bar{n}} = \overline{R_{nmnm}} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{\bar{m}\bar{m}} = \frac{1}{2}\overline{\ddot{h}_{mm}}, & \Phi_{22} &= -R_{nmn\bar{m}} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{m\bar{m}},\end{aligned}\quad (2.12)$$

kus täpid viitavad tuletisele u järgi [23]. Riemanni tensori elektriliste komponentide abil näeme, kuidas erinevad polarisatsioonid mõjutavad osakete süsteemi [23]. Seda on kujutatud joonisel 2.2



Joonis 2.2: Kuus erinevat viisi, kuidas gravitatsioonilained ainet mõjutada võivad [23].

Lorentzi invariantisusest tulenevalt saame seosed erinevate polarisatsioonide vahel. Nimelt, esinevad polarisatsioonid teatud alamhulkadena, kus ainult teatud polarisatsioonid on lubatud. Kokku on kuus alamhulka ja need on järgnevad [23].

- II_6 : kõik kuus polarisatsiooni on lubatud;
- III_5 : $\Psi_2 = 0$, aga ülejäänud viis polarisatsiooni on lubatud;
- N_3 : $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$, $\Psi_4 \neq 0$ ja $\Phi_{22} \neq 0$, kokku on lubatud 3 polarisatsiooni;
- N_2 : $\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0$ ja $\Psi_4 \neq 0$, kokku on lubatud 2 polarisatsiooni;
- O_1 : kõik polarisatsioonid peale Φ_{22} on keelatud;
- O_0 : kõik polarisatsioonid on keelatud, gravitatsioonilaineid ei ole.

Lorentzi invariantisusest saame informatsiooni ka antud polarisatsiooniga lainete **spiraalsuse** kohta. Spiraalsus on spinni projektsioon impulssi suunale. Ψ_2 ja Φ_{22} polarisatsiooniga lainete spiraalsus on 0, seega nimetatakse neid skalaarseteks moodideks. $\text{Re}(\Phi_3)$ ja $\text{Im}(\Phi_3)$ lainete spiraalsus on ± 1 ehk nad on vektormoodid. $\text{Re}(\Psi_4)$ ja $\text{Im}(\Psi_4)$ kirjeldab spiraalsus ± 2 , mis teeb neist tensormoodid. [23]

ÜRT ennustab, et gravitatsioonilainetel on kaks polarisatsiooni: „pluss“- ja „rist“. Need on oma olemuselt tensormoodid ja neid kirjeldab käesolevas tähistuses Ψ_4 . [1]

3 Gravitatsioonilainete kiirus

Peatükis uurime gravitatsioonilainete kiirust üldistes ruutliikmetega tereparalleelsetes gravitatsiooniteooriates. Selleks lineariseerime väljavõrrandid ja tuletame nendest peapolünoomi. Kõik järgnevad arvutused on tehtud Wolfram Mathematica tensorarvutuse paketi xAct abiga [24].

3.1 Väljavõrrandite lineariseerimine

Gravitatsioonilained on lineariseeritud väljavõrrandite lahendid, seega tuleb kõigepealt väljavõrrandid (1.24) ja (1.25) lineariseerida. Esmalt arvestame, et otsime vaakumlahendeid ehk võtame võrrandite (1.24) ja (1.25) paremad pooled võrdseks nulliga.

Lineariseerimisel eeldame nõrka välja ehk üldise meetrika ning seostuse saame kirjutada taustliikme ja väikese häirituse summana. Meetrika puhul valime taustaks Minkowski meetrika $\eta_{\mu\nu}$ (1.6) ja väike häiritus on $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Üldise tasase seostuse saame häirituse lineaarse funktsioonina kirjutada kujul

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} + \overset{1}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}, \quad (3.1)$$

kus ülakriips tähistab taustliiget ja „1“ esimest järku häiritust. Valime seostuse nii, et taustliige on võrdne nulliga. Seostuse esimest järku häiritus tuleneb tasasuse tingimusest ning on kujul

$$\overset{1}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} = \bar{\nabla}_\rho \overset{1}{\lambda}^\mu{}_\nu = \bar{\nabla}_\rho w^\mu{}_\nu, \quad (3.2)$$

kus $\overset{1}{\lambda}^\mu{}_\nu = w^\mu{}_\nu$ on suvaline esimest järku tensorväli [10]. Kuna seostuse taustliige on võrdne nulliga, siis jääb kovariantsest tuletisest $\bar{\nabla}_\rho$ alles ainult osatuletis.

Analüüsime, kuidas avaldub lineaarses lähenduses väljavõrrandites esinev moonutus $M^\mu{}_{\nu\rho}$ (1.20)

$$\begin{aligned} M^\mu{}_{\nu\rho} &= \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \overset{\circ}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} = \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \\ &= \partial_\rho w^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) [\partial_\nu (\eta_{\sigma\rho} + h_{\sigma\rho}) + \partial_\rho (\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) - \partial_\sigma (\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho})]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Minkowski meetrika $\eta_{\mu\nu}$ (1.6) ei sõltu koordinaatidest, seega osatuletised sellest koordinaatide järgi on võrdsed nulliga. Lisaks sisaldab liige $h^{\mu\nu} (\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\rho})$ esimest järku häirituste omavahelisi korrutisi ehk on tervikuna teist järku ja seega võime selle lineaarses lähenduses kõrvale jätta. Tulemusena saame, et moonutus avaldub kujul

$$M^\mu{}_{\nu\rho} = \partial_\rho w^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\rho}). \quad (3.4)$$

Asendades nüüd selle väljavõrrandites (1.24) ja (1.25) esinevatesse liikmetesse $\mathcal{U}_{\mu\nu}$, $\overset{\circ}{\nabla}_\rho(\mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu})$, \mathcal{G} , $\nabla_\tau \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau}$ ja $M^\omega{}_{\tau\omega} \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau}$, saame lineaarses lähenduses, et

$$\mathcal{U}_{\mu\nu} = \mathcal{G} = M^\omega{}_{\tau\omega} \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau} = 0, \quad (3.5)$$

sest need sisaldavad moonutuse ruutliikmeid ja moonutus on juba ise esimest järku. Seega $M^\mu{}_{\nu\rho}$ ruutliikmed on teist järku. Alles jäävad ainult liikmed $\overset{\circ}{\nabla}_\rho(\mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu})$ ja $\nabla_\tau \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau}$, kus kovariantsed tuletised saavad olla ainult taustseostuste järgi ehk esimest järku, sest $\mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau}$ ja $\mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu}$ sõltuvad moonutusest lineaarselt. Järelikult kuna taustseostused on võrdsed nulliga, siis jäävad kovariantsetest tuletistest alles ainult osatuletised.

Kokkuvõttes on lineariseeritud vaakumväljavõrrandid kujul

$$\partial_\rho \mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\tau \mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau} = 0, \quad (3.6)$$

kus $\mathcal{V}^\rho{}_{\mu\nu}$ on antud võrrandiga (1.26b) ja $\mathcal{Z}_\mu{}^{\nu\tau}$ seosega (1.26c). Nendes esinev moonutus avaldub kujul (3.4) ja üldine meetrika peab olema taustmeetrika $\eta_{\mu\nu}$ (1.6), et võrrandid oleksid häiritustest lineaarselt sõltuvad.

Wolfram Mathematica abil saame võrranditesse moonutuse sisse asendada ja avaldada väljavõrrandid häirituste kaudu. Tulemusena võtab meetrika väljavõrrand kuju

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2}k_{11}\partial_\alpha\partial_\mu w^\alpha{}_\nu - \frac{1}{2}k_{11}\partial_\alpha\partial_\nu w^\alpha{}_\mu - \frac{1}{2}(k_1+k_3-k_4+k_5)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\nu\rho}\partial_\beta\partial_\alpha w^\rho{}_\mu \\ & - \frac{1}{2}(k_1+k_3-k_4+k_5)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\rho}\partial_\beta\partial_\alpha w^\rho{}_\nu + \frac{1}{2}(k_{10}-2k_8-k_9)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_\beta\partial_\alpha w^\rho{}_\rho \\ & + k_6\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu h_{\nu\alpha} - k_6\eta^{\alpha\beta}\eta_{\nu\gamma}\partial_\beta\partial_\mu w^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{2}(k_1+k_3+k_4-k_5)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\nu\rho}\partial_\beta\partial_\mu w^\rho{}_\alpha \\ & + k_6\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\nu h_{\mu\alpha} - k_6\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\gamma}\partial_\beta\partial_\nu w^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{2}(k_1+k_3+k_4-k_5)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\rho}\partial_\beta\partial_\nu w^\rho{}_\alpha \\ & + \frac{1}{2}(k_{10}+k_{11}-2k_6)\eta^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(k_{10}-2k_6+2k_7+k_9)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\beta w^\rho{}_\alpha \\ & + \frac{1}{2}(3k_1-k_2+3k_3-k_4-k_5)\eta^{\alpha\rho}\partial_\rho\partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{10}+k_{11}-2k_6)\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\rho}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\beta h_{\alpha\gamma} \\ & + \frac{1}{2}(-k_{10}-k_{11}+k_6+k_7+k_8+k_9)\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\rho}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\gamma h_{\alpha\beta} - k_{10}\partial_\nu\partial_\mu w^\alpha{}_\alpha \\ & + \frac{1}{2}(-k_1+k_2-k_3+k_4+k_5)\eta^{\alpha\rho}\partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}(k_1-k_2+k_3-k_4-k_5)\partial_\rho\partial_\mu w^\rho{}_\nu \\ & + \frac{1}{2}(-k_1+k_2-k_3+k_4+k_5)\eta^{\alpha\rho}\partial_\rho\partial_\nu h^1_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}(k_1-k_2+k_3-k_4-k_5)\partial_\rho\partial_\nu w^\rho{}_\mu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Seostuse väljavõrrand avaldub kui

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} (k_{11} - 2k_7 - k_9) \eta^{\beta\gamma} \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} (k_{10} + k_{11} - 2k_6) \eta^{\beta\rho} \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\rho} \\
& + (k_9 + k_{10}) \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu w_\beta^\beta + 2k_8 \delta_\mu^\nu \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha w_\rho^\rho + 2k_7 \eta^{\nu\alpha} \partial_\beta \partial_\mu w_\alpha^\beta \\
& - k_{11} \eta^{\beta\gamma} \eta^{\nu\alpha} \partial_\gamma \partial_\mu h_{\alpha\beta} - (k_1 + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6) \eta^{\beta\rho} \eta^{\nu\alpha} \partial_\rho \partial_\alpha h_{\mu\beta} \\
& + k_{11} \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\mu w_\alpha^\nu + k_2 \eta^{\alpha\rho} \partial_\rho \partial_\mu w_\alpha^\nu + 2(k_3 + k_6) \eta^{\beta\gamma} \eta^{\nu\alpha} \eta_{\mu\rho} \partial_\gamma \partial_\alpha w_\beta^\rho \\
& + (k_{10} + k_9) \delta_\mu^\nu \eta^{\alpha\beta} \partial_\rho \partial_\beta w_\alpha^\rho + 2k_4 \eta^{\nu\alpha} \partial_\rho \partial_\mu w_\alpha^\rho + 2k_1 \eta^{\beta\gamma} \eta^{\nu\alpha} \eta_{\mu\rho} \partial_\gamma \partial_\beta w_\alpha^\rho \\
& + \frac{1}{2} (k_{10} - 2k_8 - k_9) \delta_\mu^\nu \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\rho} \partial_\rho \partial_\gamma h_{\alpha\beta} + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 - k_5) \eta^{\beta\rho} \eta^{\nu\alpha} \partial_\rho \partial_\mu h_{\alpha\beta} \\
& + 2k_5 \eta^{\alpha\rho} \partial_\rho \partial_\alpha w_\mu^\nu - (k_1 + k_3 - k_4 + k_5) \eta^{\beta\rho} \eta^{\nu\alpha} \partial_\rho \partial_\beta h_{\mu\alpha} \\
& + (k_{11} + k_2) \eta^{\nu\alpha} \partial_\rho \partial_\alpha w_\mu^\rho - k_{10} \delta_\mu^\nu \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\rho} \partial_\rho \partial_\beta h_{\alpha\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Need ongi lineariseeritud väljavõrrandid, mida järgnevatel arvutustes kasutame.

3.2 Peapolünoomi arvutamine

Analüüsime väljavõrrandite peapolünoomi, mille arvutamiseks uurime väljavõrrandeid Fourier' ehk lainete ruumis. Käesoleval juhul tähendab üleminek Fourier' ruumi asendust $\partial \rightarrow ik$, kus k tähistab laine kovektorit. Arvestades, et uuritavaks teooriaks on üldine teleparalleelne gravitatsiooniteooria peaks väljavõrranditel kalibratsioonivabadusest leiduma triviaalseid lahendeid [12]. Triviaalsed lahendid tähendavad, et häiritused on sellisel kujul, et väljavõrrandites taanduvad kõik liikmed vastastikku välja ehk väljavõrrandid on triviaalselt lahendatud. Selliste häirituste puhul ei ole nende dünaamika määratud. Võib öelda et nad on kalibratsiooni vabadusastmed, millel ei ole füüsikalist mõju, kuna nad määravad ainult koordinaatsüsteemi valikut. Triviaalsete lahendite leidmiseks ja peapolünoomi arvutamiseks on mõistlik lineariseeritud väljavõrrandid viia plokk-diagonaalsele maatrikskujule

$$\mathcal{M}\hat{x} = 0, \tag{3.9}$$

kus \mathcal{M} on plokk-diagonaalne maatriks ja \hat{x} sisaldab häiritusi. Täpsemalt öeldes, koosneb \hat{x} häirituste taandumatutest komponentidest. \mathcal{M} ja \hat{x} leidmiseks peame väljavõrrandid lagundama ehk kirjutama need häirituste taandumatute komponentide kaudu. Arvestame, et meetrika häirituse $h_{\mu\nu}$ saame kirjutada kui

$$h_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + 2k_{(\alpha} V_{\beta)} + \frac{1}{3} \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^\sigma k_\sigma} \right) T + \left(k_\alpha k_\beta - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} k^\sigma k_\sigma \right) U, \tag{3.10}$$

kus $S_{\alpha\beta}$ on sümmeetriline divergentsivaba jäljeta tensorosa, V_μ divergentsivaba vektor, skalaarsed suurused T ja U on vastavalt jälg $T = h_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$ ning $U = \frac{4}{3} \frac{h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}{(k^\sigma k_\sigma)^2}$ on kaalutud topeltdivergents [8]. $S_{\alpha\beta}$ ja V_ν rahuldavad seoseid

$$\eta^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0, \quad k^\alpha S_{\alpha\beta} = 0, \quad k^\alpha V_\alpha = 0. \quad (3.11)$$

Seostuse saame lagundada järgnevalt

$$w_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta \mathcal{U} + \mathcal{V}_\alpha k_\beta + k_\alpha \mathcal{W}_\beta + Q_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

kus \mathcal{U} on skalaarne osa, \mathcal{V}_α ja \mathcal{W}_β vektoriaalsed komponendid ning $Q_{\alpha\beta}$ tensorosa [7]. Nende liikmete puhul kehtivad võrdused

$$k_\alpha \mathcal{V}^\alpha = 0, \quad k_\alpha \mathcal{W}^\alpha = 0, \quad k_\alpha Q^\alpha_\beta = 0, \quad k_\alpha Q_\beta^\alpha = 0. \quad (3.13)$$

Tensorosa $Q_{\alpha\beta}$ saame veel omakorda kirjutada sümmeetrilise $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ osa, antisümmeetrilise osa $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ ja jälje summana

$$Q_{\alpha\beta} = \mathcal{S}_{\alpha\beta} + \mathcal{A}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^\sigma k_\sigma} \right) Q^\rho_\rho. \quad (3.14)$$

Rakendades lagundamisi (3.10), (3.12), (3.14) ning arvestades vastavaid tingimusi (3.11), (3.13), saame meetrika lineaariseeritud väljavõrrandi (3.7) viia kujule

$$\begin{aligned} E_{1,\mu\nu} = & \frac{1}{2} (-3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5) S_{\mu\nu} (k_\alpha k^\alpha) + (k_1 + k_3 - k_4 + k_5) \mathcal{S}_{\mu\nu} (k_\alpha k^\alpha) \\ & - (k_1 + k_3 + k_6) (k_\alpha k^\alpha) V_\mu k_\nu + (k_1 + k_3 + k_6) (k_\alpha k^\alpha) \mathcal{V}_\mu k_\nu \\ & - (k_1 + k_3 + k_6) (k_\alpha k^\alpha) V_\nu k_\mu + (k_1 + k_3 + k_6) (k_\alpha k^\alpha) \mathcal{V}_\nu k_\mu \\ & + \frac{1}{2} (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k_\alpha k^\alpha) \mathcal{W}_\mu k_\nu + \frac{1}{2} (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k_\alpha k^\alpha) \mathcal{W}_\nu k_\mu \\ & + \frac{1}{8} U (k_\alpha k^\alpha) \left[-2(3k_1 + k_2 + 3k_3 + k_4 + k_5 + 6k_6) k_\mu k_\nu \right. \\ & \left. + (3k_1 - 3k_{10} - 3k_{11} - k_2 + 3k_3 - k_4 - k_5 + 6k_6) (k_\alpha k^\alpha) \eta_{\mu\nu} \right] \\ & + \mathcal{U} (k_\alpha k^\alpha) \left[(k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) k_\mu k_\nu \right. \\ & \left. + (-k_6 + k_7 + k_8 + k_9) (k_\alpha k^\alpha) \eta_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{6} Q^\alpha_\alpha \left[-2(k_1 - 3k_{10} + k_3 - k_4 + k_5) k_\mu k_\nu \right. \\ & \left. + (2k_1 - 3k_{10} + 2(k_3 - k_4 + k_5 + 3k_8) + 3k_9) (k_\alpha k^\alpha) \eta_{\mu\nu} \right] \\ & + \frac{1}{6} T \left[(3k_1 - 3k_{10} - 3k_{11} - k_2 + 3k_3 - k_4 - k_5 + 6k_6) k_\mu k_\nu \right. \\ & \left. + (-3k_1 + 3k_{10} + 3k_{11} + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5 - 3(k_6 + k_7 + k_8 + k_9)) (k_\alpha k^\alpha) \eta_{\mu\nu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Siin on vaja skalaarsed, vektoriaalsed ja tensorliikmed üksteisest eraldada. Selleks leiame kirjandusega [8] analoogilised liikmed. Skalaarsed liikmed saame eraldada leides jälje $E_1^\mu_\mu$ ja avaldise $E_{1,\mu\nu} k^\mu k^\nu$. Saame, et

$$E_1^\mu_\mu = k^\sigma k_\sigma \left[\frac{1}{2} s_1 T + \frac{3}{4} s_2 (k^\sigma k_\sigma) U + s_3 (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{U} + s_4 Q^\alpha_\alpha \right] = 0, \quad (3.16)$$

$$E_{1,\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^\sigma k_\sigma \left[\frac{1}{2} s_5 (k^\sigma k_\sigma) T - \frac{3}{8} s_6 (k^\sigma k_\sigma)^2 U + s_7 (k^\sigma k_\sigma)^2 \mathcal{U} + \frac{1}{2} s_8 (k^\sigma k_\sigma) Q^\alpha_\alpha \right] = 0, \quad (3.17)$$

kus lühendasime konstantide k_1, \dots, k_{11} kombinatsioone järgnevalt

$$\begin{aligned}
s_1 &= -3k_1 + 3k_{10} + 3k_{11} + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5 - 2[k_6 + 2(k_7 + k_8 + k_9)], \\
s_2 &= k_1 - 2k_{10} - 2k_{11} - k_2 + k_3 - k_4 - k_5 + 2k_6, \\
s_3 &= k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 - 2k_6 + 4(k_7 + k_8 + k_9), \\
s_4 &= k_1 - k_{10} + k_3 - k_4 + k_5 + 4k_8 + 2k_9, \\
s_5 &= k_6 - k_7 - k_8 - k_9, & s_6 &= k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6, \\
s_7 &= k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8 + k_9, & s_8 &= k_{10} + 2k_8 + k_9.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Vektorosa saame eraldada kui

$$\begin{aligned}
0 &= E_{1,\mu\nu} k^\nu - \frac{k_\mu}{k^\sigma k_\sigma} E_{1,\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k^\sigma k_\sigma \left[-(k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) V_\mu \right. \\
&\quad \left. + (k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{V}_\mu + \frac{1}{2} (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{W}_\mu \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Viimasena saame meetrika väljavõrrandist kätte tensorosa

$$\begin{aligned}
0 &= E_{1,\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^\sigma k_\sigma} \right) E_1^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^\sigma k_\sigma} \right) \frac{E_{1,\rho\tau} k^\rho k^\tau}{k^\gamma k_\gamma} - 2 \frac{k_{(\mu} E_{1|\tau|\nu)} k^\tau}{k^\sigma k_\sigma} \\
&= k^\sigma k_\sigma \left[\frac{1}{2} (-3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5) S_{\mu\nu} + (k_1 + k_3 - k_4 + k_5) \mathcal{S}_{\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Analüüsime nüüd analoogiliselt seostuse lineariseeritud väljavõrrandit (3.8) Fourier' ruumis. Asendame lagundatud häiritused (3.10), (3.12), (3.14) võrrandisse ning arvestame taaskord seoseid (3.11), (3.13). Seostuse väljavõrrand (3.8) saab järgneva kuju

$$\begin{aligned}
E_{2,\mu\nu} &= (k_1 + k_3 - k_4 + k_5) S_{\mu\nu} (k^\sigma k_\sigma) - 2(k_1 + k_5) \mathcal{S}_{\mu\nu} (k^\sigma k_\sigma) + 2(-k_1 + k_5) \mathcal{A}_{\mu\nu} (k^\sigma k_\sigma) \\
&\quad + 2(k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) V_\mu k_\nu - 2(k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{V}_\mu k_\nu \\
&\quad + (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) V_\nu k_\mu - (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{V}_\nu k_\mu \\
&\quad - (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{W}_\mu k_\nu - 2(k_1 + k_4 + k_7) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{W}_\nu k_\mu \\
&\quad + \frac{1}{4} U (k^\sigma k_\sigma) \left[(4k_1 + 3k_{11} + 3k_2 + 4k_3 + 2k_4 + 4k_5 + 6k_6) k_\mu k_\nu \right. \\
&\quad \left. - (k_1 - 3k_{10} + k_3 - k_4 + k_5) (k^\sigma k_\sigma) \eta_{\mu\nu} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3} Q^\alpha{}_\alpha \left[(2k_1 - 3k_{10} + 2k_5 - 3k_9) k_\mu k_\nu - 2(k_1 + k_5 + 3k_8) (k^\sigma k_\sigma) \eta_{\mu\nu} \right] \\
&\quad - \mathcal{U} (k^\sigma k_\sigma) \left\{ [2k_1 + k_{10} + 2(k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7) + k_9] k_\mu k_\nu \right. \\
&\quad \left. + (k_{10} + 2k_8 + k_9) (k^\sigma k_\sigma) \eta_{\mu\nu} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} T \left\{ [-2k_1 + 3k_{10} - 2(k_3 - k_4 + k_5 + 3k_6 - 3k_7) + 3k_9] k_\mu k_\nu \right. \\
&\quad \left. + [2k_1 - 3k_{10} + 2(k_3 - k_4 + k_5 + 3k_8) + 3k_9] (k^\sigma k_\sigma) \eta_{\mu\nu} \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Eraldame sarnaselt kirjandusega [8] erinevat tüüpi liikmed. Skalaarsete komponentide jaoks saame, et

$$E_2^\mu{}_\mu = k^\sigma k_\sigma \left[\frac{1}{2} s_9 T + \frac{3}{4} s_{10} (k^\sigma k_\sigma) U - s_{11} (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{U} - s_{12} Q^\alpha{}_\alpha \right] = 0, \quad (3.22)$$

$$E_{2,\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^\sigma k_\sigma \left[-s_5 (k^\sigma k_\sigma) T + \frac{3}{4} s_6 (k^\sigma k_\sigma)^2 U - 2s_7 (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{U} - s_8 (k^\sigma k_\sigma) Q^\alpha{}_\alpha \right] = 0, \quad (3.23)$$

kus s_5, \dots, s_8 on defineeritud eelnevalt (3.18) ja s_9, \dots, s_{12} tähistavad järgnevaid k_1, \dots, k_{11} kombinatsioone

$$\begin{aligned} s_9 &= 2k_1 - 3k_{10} + 2(k_3 - k_4 + k_5 - k_6 + k_7 + 4k_8) + 5k_9, \\ s_{10} &= 4k_{10} + k_{11} + k_2 + 2(k_4 + k_6), \\ s_{11} &= 2k_1 + 5k_{10} + 2(k_{11} + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + 4k_8) + 5k_9, \\ s_{12} &= 2k_1 + k_{10} + 2k_5 + 8k_8 + k_9. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vektorosa saame eraldada järgnevalt

$$\begin{aligned} 0 &= E_{2,\xi\mu} k^\xi - \frac{k_\mu}{k^\sigma k_\sigma} E_{2,\rho\gamma} k^\rho k^\gamma = k^\sigma k_\sigma \left[(k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) V_\mu \right. \\ &\quad \left. - (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{V}_\mu - 2(k_1 + k_4 + k_7) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{W}_\mu \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} 0 &= E_{2,\mu\xi} k^\xi - \frac{k_\mu}{k^\sigma k_\sigma} E_{2,\rho\gamma} k^\rho k^\gamma = k^\sigma k_\sigma \left[2(k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) V_\mu \right. \\ &\quad \left. - 2(k_1 + k_3 + k_6) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{V}_\mu - (k_{11} + k_2 + 2k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{W}_\mu \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Antisümmeetrilise tensori osa saame kätte avaldisega

$$0 = E_{2[\mu\nu]} - \frac{k_{[\mu} E_{2|\gamma|v]} k^\gamma}{k^\sigma k_\sigma} - \frac{\left(E_{2[\mu|\xi|} k^\xi - \frac{E_{2\rho\gamma} k^\rho k^\gamma k_{[\mu}}{k^\alpha k_\alpha} \right) k_{\nu]}}{k^\sigma k_\sigma} = 2(-k_1 + k_5) (k^\sigma k_\sigma) \mathcal{A}_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

ning viimasena jääb alles sümmeetriline tensorosa, mille leidmiseks kasutame järgnevat seost

$$\begin{aligned} 0 &= E_{(\mu\nu)} - \frac{k_{(\mu} E_{2|\gamma|v)} k^\gamma}{k^\sigma k_\sigma} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^\sigma k_\sigma} \right) E_2^\alpha{}_\alpha \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^\sigma k_\sigma} \right) \frac{E_{2,\rho\gamma} k^\rho k^\gamma}{k^\beta k_\beta} - \frac{\left(E_{2(\mu|\xi|} k^\xi - \frac{E_{2\rho\gamma} k^\rho k^\gamma k_{(\mu}}{k^\beta k_\beta} \right) k_{\nu)}}{k^\sigma k_\sigma} \\ &= k^\sigma k_\sigma \left[(k_1 + k_3 - k_4 + k_5) S_{\mu\nu} - 2(k_1 + k_5) \mathcal{S}_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Võttes nüüd kõik valemid (3.16)-(3.20) ja (3.22)-(3.28) kokku, saame järgneva plokk-diagonaalse maatrikskuju

3.3 Gravitatsioonilainete kiirus erinevate konstantide puhul

Uurime, mis juhtub erinevate konstantide komplektide puhul. Eelnevas alapeatükis 3.2 eeldasime, et konstandid k_1, \dots, k_{11} ja nende kombinatsioonid on üldjuhul suvalised, üksteisest sõltumatud ja nullist erinevad. See andis, et meil on kaks triviaalset lahendit ja võrrandis (3.38) diagonaalil esinevate ruutmaatriksite astakud (*rank*) on võrdsed nende dimensiooniga.

Vaatleme nüüd juhte, mil konstantide kombinatsioonid ei ole enam üksteisesest sõltumatud ja annavad täiendavaid triviaalseid lahendeid. Alustame skalaarsetest liikmetest ja analüüsime maatriksit $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ defineeritud valemiga (3.35). Selleks, et teoorias leiduks täiendavaid triviaalseid lahendeid, peab $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ astak olema võrdne nulli, ühe või kahega. Kõige lihtsamal juhul on maatriksi astak võrdne nulliga ehk kõik $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ elemendid on nullid. Kasutades tähistusi s_1, \dots, s_{12} , mis on defineeritud avaldistes (3.18), (3.24), peab $\text{rank}(\mathcal{M}_{\text{skal}}) = 0$ korral olema rahuldatud

$$s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = s_6 = s_8 = s_9 = s_{10} = s_{12} = 0. \quad (3.40)$$

Juhul, kui see valem kehtib, ei sisalda väljavõrrandid skalaarseid liikmeid $\mathcal{H}, \mathcal{L}, Q^\alpha_\alpha$ ehk nende dünaamika ei ole määratud ja nad ei ole füüsikaliselt vaadeldavad. Teooriates, kus (3.40) ei ole rahuldatud, võivad skalaarsed häirituste liikmed olla füüsikalised, kuid lubatud kuju sõltub $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ astakust. Selleks, et maatriksi astak oleks võrdne ühega, peab vähemalt üks maatriksi element olema nullist erinev ning kõik read või veerud olema üksteise kordsed. Maatriksi $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ puhul tähendab astaku võrdumine ühega, et üks järgnevatest tingimustest on rahuldatud.

- Esimene rida ei koosne ainult nullidest ehk $(s_1, s_2, s_4) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} (k^\sigma k_\sigma) (-4s_5, 3s_6 (k^\sigma k_\sigma), -4s_8) &= \alpha (2s_1, 3s_2 (k^\sigma k_\sigma), 4s_4), \\ (2s_9, 3s_{10} (k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}) &= \beta (2s_1, 3s_2 (k^\sigma k_\sigma), 4s_4). \end{aligned} \quad (3.41)$$

- Teine rida ei koosne ainult nullidest ehk $(s_5, s_6, s_8) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} (2s_1, 3s_2 (k^\sigma k_\sigma), 4s_4) &= \alpha (k^\sigma k_\sigma) (-4s_5, 3s_6 (k^\sigma k_\sigma), -4s_8), \\ (2s_9, 3s_{10} (k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}) &= \beta (k^\sigma k_\sigma) (-4s_5, 3s_6 (k^\sigma k_\sigma), -4s_8). \end{aligned} \quad (3.42)$$

- Kolmas rida ei koosne ainult nullidest ehk $(s_9, s_{10}, s_{12}) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} (2s_1, 3s_2 (k^\sigma k_\sigma), 4s_4) &= \alpha (2s_9, 3s_{10} (k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}), \\ (k^\sigma k_\sigma) (-4s_5, 3s_6 (k^\sigma k_\sigma), -4s_8) &= \beta (2s_9, 3s_{10} (k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

- Esimene veerg ei koosne ainult nullidest ehk $(s_1, s_5, s_9) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} 3 (k^\sigma k_\sigma) (s_2, s_6 (k^\sigma k_\sigma), s_{10}) &= 2\alpha (s_1, -2s_5 (k^\sigma k_\sigma), s_9), \\ 2 (s_4, -s_8 (k^\sigma k_\sigma), -s_{12}) &= \beta (s_1, -2s_5 (k^\sigma k_\sigma), s_9). \end{aligned} \quad (3.44)$$

- Teine veerg ei koosne ainult nullidest ehk $(s_2, s_6, s_{10}) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} 2(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) &= 3\alpha(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}), \\ 4(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}) &= 3\beta(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

- Kolmas veerg ei koosne ainult nullidest ehk $(s_4, s_8, s_{12}) \neq (0, 0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} (s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) &= 2\alpha(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}), \\ 3(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}) &= 4\beta(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Siin tähistavad α ja β suvalisi kordajaid, mis ühe võrrandi raames omavad samu väärtusi. Kusjuures võivad α ja β võrduda nulliga. Maatriksi $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ astaku võrdumine ühega tähendab, et leidub kaks täiendavat triviaalset lahendit. Võrdeliste ridade puhul on üks triviaalne lahend kujul

$$(s_1, s_5, s_9)\mathcal{K} = (-2s_4, -s_8, 2s_{12})Q^\alpha_\alpha, \quad \mathcal{L} = 0 \quad (3.47)$$

ja teine

$$2(s_1, 2s_5, s_9)\mathcal{K} = 3(-s_2, s_6, -s_{10})(k^\sigma k_\sigma)\mathcal{L}, \quad Q^\alpha_\alpha = 0. \quad (3.48)$$

Analüüsides veerge, saame järgnevad triviaalsed lahendid.

- Juhul, kui esimene veerg on nullist erinev ja kehtib (3.44), saame triviaalsed lahendid kujul

$$\mathcal{K} = -\beta Q^\alpha_\alpha, \quad \mathcal{L} = 0 \quad \text{ja} \quad \mathcal{K} = -\alpha\mathcal{L}, \quad Q^\alpha_\alpha = 0. \quad (3.49)$$

- Juhul, kui teine veerg on nullist erinev ja kehtib (3.45), saame triviaalsed lahendid kujul

$$\alpha\mathcal{K} = -\beta Q^\alpha_\alpha, \quad \mathcal{L} = 0 \quad \text{ja} \quad \alpha\mathcal{K} = -\mathcal{L}, \quad Q^\alpha_\alpha = 0. \quad (3.50)$$

- Juhul, kui kolmas veerg on nullist erinev ja kehtib (3.46), saame triviaalsed lahendid kujul

$$\alpha\mathcal{K} = -Q^\alpha_\alpha, \quad \mathcal{L} = 0 \quad \text{ja} \quad \alpha\mathcal{K} = -\beta\mathcal{L}, \quad Q^\alpha_\alpha = 0. \quad (3.51)$$

Need on lahendid $\text{rank}(\mathcal{M}_{\text{skal}}) = 1$ puhul. Urime nüüd juhtu $\text{rank}(\mathcal{M}_{\text{skal}}) = 2$. Selleks, et maatriksi astak võrduks kahega on kaks võimalust: üks rida või veerg koosneb ainult nullidest; üks rida või veerg on teiste lineaarkombinatsioon nii, et ülejäänud on üksteisest sõltumatud. Kokku leidub kuus võimalust, et need tingimused oleksid rahuldatud.

- Esimene rida koosneb ainult nullidest või on viimase kahe rea lineaarne kombinatsioon nii, et viimased kaks rida on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} (2s_1, 3s_2(k^\sigma k_\sigma), 4s_4) &= \alpha(k^\sigma k_\sigma)(-4s_5, 3s_6(k^\sigma k_\sigma), -4s_8) + \beta(2s_9, 3s_{10}(k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}), \\ (k^\sigma k_\sigma)(-4s_5, 3s_6(k^\sigma k_\sigma), -4s_8) &\neq \gamma(2s_9, 3s_{10}(k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}), \\ (s_5, s_6, s_8) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_9, s_{10}, s_{12}) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.52)$$

- Teine rida koosneb ainult nullidest või on esimese ja viimase rea lineaarne kombinatsioon nii, et need read on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} (k^\sigma k_\sigma)(-4s_5, 3s_6(k^\sigma k_\sigma), -4s_8) &= \alpha(2s_1, 3s_2(k^\sigma k_\sigma), 4s_4) + \beta(2s_9, 3s_{10}(k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}), \\ (2s_1, 3s_2(k^\sigma k_\sigma), 4s_4) &\neq \gamma(2s_9, 3s_{10}(k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}), \\ (s_1, s_2, s_4) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_9, s_{10}, s_{12}) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.53)$$

- Kolmas rida koosneb ainult nullidest või on esimeste ridade lineaarne kombinatsioon nii, et need read on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} (2s_9, 3s_{10}(k^\sigma k_\sigma), -4s_{12}) &= \alpha(2s_1, 3s_2(k^\sigma k_\sigma), 4s_4) + \beta(k^\sigma k_\sigma)(-4s_5, 3s_6(k^\sigma k_\sigma), -4s_8), \\ (2s_1, 3s_2(k^\sigma k_\sigma), 4s_4) &\neq \gamma(k^\sigma k_\sigma)(-4s_5, 3s_6(k^\sigma k_\sigma), -4s_8), \\ (s_1, s_2, s_4) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_5, s_6, s_8) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.54)$$

- Esimene veerg koosneb ainult nullidest või on viimase kahe veeru lineaarne kombinatsioon nii, et viimased kaks veergu on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} 2(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) &= 3\alpha(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}) + 4\beta(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}), \\ 3(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}) &\neq 4\gamma(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}), \\ (s_2, s_6, s_{10}) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_4, s_8, s_{12}) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.55)$$

- Teine veerg koosneb ainult nullidest või on esimese ja viimase veeru lineaarne kombinatsioon nii, et need veerud on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} 3(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}) &= 2\alpha(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) + 4\beta(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}), \\ 2(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) &\neq 4\gamma(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}), \\ (s_1, s_5, s_9) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_4, s_8, s_{12}) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.56)$$

- Kolmas veerg koosneb ainult nullidest või on esimeste veergude lineaarne kombinatsioon nii, et need veerud on sõltumatud ja nullist erinevad ehk kehtivad seosed

$$\begin{aligned} 4(s_4, -s_8(k^\sigma k_\sigma), -s_{12}) &= 2\alpha(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) + 3\beta(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}), \\ 2(s_1, -2s_5(k^\sigma k_\sigma), s_9) &\neq 3\gamma(k^\sigma k_\sigma)(s_2, s_6(k^\sigma k_\sigma), s_{10}), \\ (s_1, s_5, s_9) &\neq (0, 0, 0), \quad (s_2, s_6, s_{10}) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Siin tähistavad α , β ja γ taaskord suvalisi kordajaid, mis ühe võrrandi raames omavad sama väärtust. α ja β võivad võrduda nulliga, kuid γ mitte. Kõigi nende kuue juhu puhul saame, et leidub üks lisalahend, mille puhul on väljavõrrand triviaalselt võrdne nulliga. Saame nendel kuuel juhul triviaalseteks lahenditeks järgnevad avaldised:

- juhul (3.52) on triviaalne lahend

$$(2s_{10}s_5 + s_6s_9)\mathcal{K} = 2(s_{12}s_6 - s_{10}s_8)Q^\alpha_\alpha, \quad 3(2s_{10}s_5 + s_6s_9)(k^\sigma k_\sigma)\mathcal{L} = 4(2s_{12}s_5 + s_8s_9)Q^\alpha_\alpha, \quad (3.58)$$

- juhul (3.53) on triviaalne lahend

$$(s_2s_9 - s_1s_{10})\mathcal{K} = 2(s_{12}s_2 + s_{10}s_4)Q^\alpha_\alpha, \quad 3(s_1s_{10} + s_2s_9)(k^\sigma k_\sigma)\mathcal{L} = 4(s_1s_{12} + s_4s_9)Q^\alpha_\alpha, \quad (3.59)$$

- juhul (3.54) on triviaalne lahend

$$(2s_2s_5 + s_1s_6)\mathcal{K} = -2(s_4s_6 + 2s_2s_8)Q^\alpha_\alpha, \quad 3(2s_2s_5 + s_1s_9)(k^\sigma k_\sigma)\mathcal{L} = 4(s_1s_8 - 2s_4s_5)Q^\alpha_\alpha, \quad (3.60)$$

- juhul (3.55) on triviaalne lahend

$$\beta\mathcal{K} = -Q^\alpha_\alpha, \quad \beta\mathcal{L} = \alpha Q^\alpha_\alpha, \quad (3.61)$$

- juhul (3.56) on triviaalne lahend

$$\beta \mathcal{H} = \alpha Q^\alpha{}_\alpha, \quad \beta \mathcal{L} = -Q^\alpha{}_\alpha, \quad (3.62)$$

- juhul (3.57) on triviaalne lahend

$$\mathcal{H} = -\alpha Q^\alpha{}_\alpha, \quad \mathcal{L} = -\beta Q^\alpha{}_\alpha. \quad (3.63)$$

Järelikult peame teooriates, kus konstantidele kehtib üks seos avaldistest (3.52)–(3.57), arvestama lisalahendiga (3.58)–(3.63). Juhul, kui ükski seos (3.40), (3.41)–(3.46), (3.52)–(3.57) ei kehti, saame $\text{rank}(\mathcal{M}_{\text{skal}}) = 3$ ja ainuke triviaalne lahend on eelnevalt leitud üldine lahend (3.33).

Järgmisena vaatleme vektorosa kordajamaatriksit \mathcal{M}_{vek} (3.37), mille astak on üldjuhul kaks, kuid kui konstandid rahuldavad seost

$$k_1 + k_3 + k_6 = k_{11} + k_2 + 2k_5 = k_1 + k_4 + k_7 = 0 \quad (3.64)$$

on \mathcal{M}_{vek} astak võrdne nulliga. See tähendab, et vektorliikmete $\mathcal{Y}_\mu, \mathcal{W}_\mu$ dünaamika ei ole määratud. Juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\text{vek}}) = 1$, valem (3.64) ei kehti, kuid üks järgnevatest tingimustest on rahuldatud

$$\left((k_1 + k_3 + k_6), \frac{1}{2}(k_{11} + k_2 + 2k_5) \right) = -\alpha \left((k_{11} + k_2 + 2k_5), 2(k_1 + k_4 + k_7) \right) \neq (0, 0), \quad (3.65a)$$

$$k_1 + k_3 + k_6 \neq 0, \quad k_{11} + k_2 + 2k_5 = k_1 + k_4 + k_7 = 0, \quad (3.65b)$$

$$k_1 + k_4 + k_7 \neq 0, \quad k_{11} + k_2 + 2k_5 = k_1 + k_3 + k_6 = 0, \quad (3.65c)$$

mingi suvalise kordaja α puhul. Võrdeliste ridade ja veergude puhul (3.65a) lisandub triviaalne lahend kujul

$$\mathcal{Y}_\mu = -\frac{k_{11} + k_2 + 2k_5}{2(k_1 + k_3 + k_6)} \mathcal{W}_\mu = -\frac{2(k_1 + k_4 + k_7)}{k_{11} + k_2 + 2k_5} \mathcal{W}_\mu = \frac{1}{2\alpha} \mathcal{W}_\mu, \quad (3.66)$$

kuid kui kehtib (3.65b) on triviaalseks lahendiks $\mathcal{Y}_\mu = 0, \mathcal{W}_\mu \neq 0$ ehk \mathcal{W}_μ ei ole väljavõrranditega määratud. Analoogselt, kui kehtib (3.65c), on triviaalseks lahendiks $\mathcal{W}_\mu = 0, \mathcal{Y}_\mu \neq 0$ ehk \mathcal{Y}_μ ei ole füüsikaliselt vaadeldav. Juhul, kui kumbki valem (3.64) ega (3.65) ei ole teooria konstantide puhul rahuldatud, leidub selles teoorias ainult üldine triviaalne lahend (3.36).

Viimasena analüüsime tensorosa maatrikseid \mathcal{M}_s ja \mathcal{M}_a (3.32). Juhul, kui kehtib

$$k_1 + k_5 = 0, \quad (3.67)$$

on maatriksi \mathcal{M}_a astak võrdne nulliga ja $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ ei esine väljavõrrandites. Selleks, et $\text{rank}(\mathcal{M}_s) = 0$, peab olema rahuldatud

$$-3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5 = k_1 + k_3 - k_4 + k_5 = k_1 + k_5 = 0, \quad (3.68)$$

mis sisaldab endas ka tingimust (3.67) ehk kui teoorias ei ole sümmeetrilised tensorliikmed füüsikalised, ei esine selles ka antisümmeetrilist tensorosa. $\text{rank}(\mathcal{M}_s)$ on üldjuhul võrdne kahega ja selleks, et $\text{rank}(\mathcal{M}_s) = 1$ peab kehtima üks järgnevatest seostest

$$\left(\frac{1}{2}(-3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5), (k_1 + k_3 - k_4 + k_5) \right) = -\alpha \left((k_1 + k_3 - k_4 + k_5), -2(k_1 + k_5) \right) \neq 0, \quad (3.69a)$$

$$-3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5 \neq 0, \quad k_1 + k_3 - k_4 + k_5 = k_1 + k_5 = 0, \quad (3.69b)$$

$$k_1 + k_5 \neq 0, \quad k_1 + k_3 - k_4 + k_5 = -3k_1 + k_2 - 3k_3 + k_4 + k_5 = 0, \quad (3.69c)$$

kus α on suvaline kordaja. Kusjuures, kui kehtib (3.69b), ei ole $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ dünaamika määratud. Juhul (3.69a) leidub täiendav triviaalne tensorlahend kujul

$$\frac{2(k_1 + k_3 - k_4 + k_5)}{3k_1 - k_2 + 3k_3 - k_4 - k_5} S_{\mu\nu} = \frac{2(k_1 + k_5)}{k_1 + k_3 - k_4 + k_5} S_{\mu\nu} = \mathcal{S}_{\mu\nu}. \quad (3.70)$$

Juhul, kui on rahuldatud (3.69b) on triviaalseks lahendiks $S_{\mu\nu} = 0$, $\mathcal{S}_{\mu\nu} \neq 0$ ehk liige $\mathcal{S}_{\mu\nu} \neq 0$ ei ole selles teoorias füüsikaline. Analoogiliselt, kui on täidetud (3.69c), ei ole $S_{\mu\nu}$ dünaamika määratud. Järelikult, kui teooria puhul ei kehti (3.68) ega (3.69) võivad füüsikalised häiritused igal juhul sümmeetrilisi tensorliikemeid $S_{\mu\nu}$, $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ sisaldada. Kui valem (3.67) ei ole rahuldatud, leidub teoorias ka antisümmeetriline tensorosa $\mathcal{A}_{\mu\nu}$.

3.3.1 Gravitatsioonilainete kiirus ÜRT ekvivalentses teoorias

Võttes arvesse eelnevat konstantide analüüsi, uurime, millisesse juhtu kuulub üldrelatiivsuse ekvivalentne teooria GTEGR, mille puhul on konstantide väärtused antud valemiga (1.23). Konstantide kombinatsioonid s_1, \dots, s_{12} saavad seega järgnevad väärtused

$$s_1 = 2, \quad s_2 = -1, \quad s_4 = s_5 = s_6 = s_8 = s_9 = s_{10} = s_{12} = 0. \quad (3.71)$$

Sellisel juhul on maatriks $\mathcal{M}_{\text{skal}}$ kujul

$$\mathcal{M}_{\text{skal}, \text{ÜRT}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4}(k^\sigma k_\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

ehk selle astak on üks ja tegemist on juhuga (3.41) või ekvivalentsetl (3.44)–(3.45). Järelikult on täiendavad skaalaarsed lahendid kujul (3.47) ja (3.48) või (3.49)–(3.50), mis etteantud konstantide väärtuste puhul saavad kuju

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} = 0, \quad Q^\alpha{}_\alpha \neq 0 \quad \text{ja} \quad \mathcal{H} = \frac{3}{4}(k^\sigma k_\sigma) \mathcal{L}, \quad Q^\alpha{}_\alpha = 0. \quad (3.73)$$

Siit näeme, et teoorias ei ole liige $Q^\alpha{}_\alpha$ dünaamiline. ÜRT ekvivalentse teooria puhul on \mathcal{M}_{vek} kõik elemendid nullid ehk ÜRT ekvivalentses teoorias ei ole häirituse vektorliikmed füüsikalised. Sümmeetrilise tensorosa maatriks (3.32) on kujul

$$M_{s, \text{ÜRT}} = -(k^\sigma k_\sigma) \text{diag}(1, 0) \quad (3.74)$$

ehk $S_{\mu\nu} = 0$, $\mathcal{S}_{\mu\nu} \neq 0$ on triviaalne lahend, millest järeldub, et GTEGR teoorias ei ole $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ füüsikaline. Samuti on $k_1 + k_5 = 0$ ehk $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ ei esine väljavõrrandites. Järelikult saame konkreetse teoorias, et ainult häirituse liikmed $S_{\mu\nu}$, \mathcal{H} , \mathcal{L} on füüsikalised ja levivad valguse kiirusel.

4 Gravitatsioonilainete polarisatsioon

Gravitatsioonilainete polarisatsiooni analüüsimiseks uurime taaskord lineariseeritud väljavõrrandeid (3.7) ja (3.8) Fourier' ruumis ehk asendame võrrandites $\partial \rightarrow ik$. Polarisatsioonide leidmiseks kasutame Newman-Penrose baasi (2.8) ja eeldame, et kõik häiritused levivad tasalainetena kujul (2.11) ja valguse kiirusega ehk kehtib $k^\mu k_\mu = 0$.

See tähendab, et uurime laineid, mis levivad sagedusega ω z -telje positiivses suunas ehk laine 4-kovektori k_μ komponendid (t, x, y, z) -koordinaatides on kujul

$$k_\mu = \omega (1, 0, 0, -1). \quad (4.1)$$

Teisendades lainevektori Newman-Penrose baasi, on tulemuseks

$$k_l = 0, \quad k_n = \omega, \quad k_m = 0, \quad k_{\bar{m}} = 0. \quad (4.2)$$

Vektori komponendid on vastavalt (t, x, y, z) -koordinaatides ja uues baasis

$$k^\mu = \omega (-1, 0, 0, -1), \quad k^l = -\omega, \quad k^n = 0, \quad k^m = 0, \quad k^{\bar{m}} = 0. \quad (4.3)$$

Kasutades käesoleva lainevektori komponentide väärtusi, lainevõrrandit ja teisendust Newman-Penrose baasi, saame meetrika väljavõrrandist, et

$$E_{1, ll} = E_{1, lm} = E_{1, l\bar{m}} = E_{1, ml} = E_{1, mm} = E_{1, \bar{m}l} = E_{1, \bar{m}\bar{m}} = 0. \quad (4.4)$$

Nullist erinevad komponendid on

$$\begin{aligned} E_{1, ln} = E_{nl} &= \frac{1}{2} [(-k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 - k_3 + k_4 + k_5) \ddot{h}_{ll} + (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_4 + 2k_7 + k_9) \ddot{w}^n_l], \\ E_{1, nm} &= (k_{10} + k_{11} - k_1 + k_2 - k_3 + k_4 + k_5) (\ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n) + (-k_{10} - k_{11} + 2k_6) \ddot{h}_{m\bar{m}} \\ &\quad + (k_1 + k_{10} + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6) \ddot{w}^l_l + k_{10} (\ddot{w}^m_m + \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}}), \\ E_{1, nm} = E_{mn} &= \frac{1}{2} [(-k_1 + k_2 - k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) \ddot{h}_{ml} + (-k_1 + k_{11} + k_2 - k_3 + k_4 + k_5) \ddot{w}^n_m \\ &\quad - (k_1 + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6) \ddot{w}^{\bar{m}}_l], \\ E_{1, n\bar{m}} = E_{\bar{m}n} &= \frac{1}{2} [(-k_1 + k_2 - k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) \ddot{h}_{\bar{m}l} + (-k_1 + k_{11} + k_2 - k_3 + k_4 + k_5) \ddot{w}^n_{\bar{m}} \\ &\quad - (k_1 + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6) \ddot{w}^m_l], \\ E_{1, m\bar{m}} = E_{\bar{m}m} &= -\frac{1}{2} [(k_{10} + k_{11} - 2k_6) \ddot{h}_{ll} + (k_{10} - 2k_6 + 2k_7 + k_9) \ddot{w}^n_l]. \end{aligned}$$

Seostuse lineariseeritud väljavõrrandist (3.8) tuletame, et

$$E_{2, ln} = E_{2, lm} = E_{2, l\bar{m}} = E_{2, mn} = E_{2, m\bar{m}} = E_{2, \bar{m}n} = E_{2, \bar{m}\bar{m}} = 0 \quad (4.5)$$

ja ülejäänud liikmed on

$$\begin{aligned}
E_{2,ll} &= (k_1 + k_{10} + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6)\ddot{h}_{ll} + (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_3 + 2k_6 + k_9)\dot{w}^n_l, \\
E_{2,nl} &= (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_4 + 2k_7 + k_9)\ddot{h}_{ln} - (k_{10} - 2k_6 + 2k_7 + k_9)\ddot{h}_{m\bar{m}} \\
&\quad + (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_3 + 2k_6 + k_9)\dot{w}^l_l + (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_4 + 2k_7 + k_9)\dot{w}^n_n \\
&\quad + (k_{10} + k_9)\ddot{w}^m_m + (k_{10} + k_9)\ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}}, \\
E_{2,nn} &= (-k_1 + k_{10} + k_{11} + k_2 - k_3 + k_4 + k_5)\ddot{h}_{ll} + (k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_4 + 2k_7 + k_9)\dot{w}^n_l, \\
E_{2,nm} &= (k_1 - k_{11} - k_2 + k_3 - k_4 - k_5)\ddot{h}_{l\bar{m}} + (k_{11} + k_2)\dot{w}^m_l - 2(k_4 + k_7)\dot{w}^n_{\bar{m}}, \\
E_{2,m\bar{m}} &= ((k_1 - k_{11} - k_2 + k_3 - k_4 - k_5)\ddot{h}_{lm} + (k_{11} + k_2)\dot{w}^{\bar{m}}_l - 2(k_4 + k_7)\dot{w}^n_m), \\
E_{2,ml} &= (k_1 + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6)\ddot{h}_{lm} + (k_{11} + k_2)\dot{w}^n_m - 2(k_3 + k_6)\dot{w}^{\bar{m}}_l, \\
E_{2,mm} &= E_{2,\bar{m}\bar{m}} = k_{10}\ddot{h}_{ll} + (k_{10} + k_9)\dot{w}^n_l, \\
E_{2,\bar{m}l} &= (k_1 + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6)\ddot{h}_{l\bar{m}} + (k_{11} + k_2)\dot{w}^n_{\bar{m}} - 2(k_3 + k_6)\dot{w}^m_l.
\end{aligned}$$

Kõik need liikmed peavad võrduma nulliga, sest $E_{1,\mu\nu} = E_{2,\mu\nu} = 0$, kus $\mu, \nu \in \{l, n, m, \bar{m}\}$.

Tähistame konstantide üksteisest sõltumatud lineaarkombinatsioonid järgnevalt

$$\begin{aligned}
k_{10} &= d_1, & k_{10} + k_9 &= d_2, & k_{11} + k_2 &= d_3, & k_{10} + k_{11} - 2k_6 &= d_4, \\
k_1 + k_{10} + k_3 + k_4 - k_5 + 2k_6 &= d_5, & k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_3 + 2k_6 + k_9 &= d_6, & & & & \\
k_{10} + k_{11} - k_1 + k_2 - k_3 + k_4 + k_5 &= d_7, & k_{10} + k_{11} + k_2 + 2k_4 + 2k_7 + k_9 &= d_8. & & & &
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Võtame samu häirituste liikmeid sisaldavad avaldised kokku. Saame järgnevad võrrandite grupid.

- Esimene grupp võrrandeid sisaldab häirituse liikmeid \ddot{h}_{ll} ja \dot{w}^n_l

$$\begin{aligned}
d_7\ddot{h}_{ll} + d_8\dot{w}^n_l &= 0, & d_5\ddot{h}_{ll} + d_6\dot{w}^n_l &= 0, \\
d_4\ddot{h}_{ll} + (2d_1 + d_8 - d_5 - d_7)\dot{w}^n_l &= 0, & d_1\ddot{h}_{ll} + d_2\dot{w}^n_l &= 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Sellest grupist saame tingimused Ψ_2 polarisatsiooni jaoks, kuna võrrandid sisaldavad \ddot{h}_{ll} liiget ja $\Psi_2 = \frac{1}{12}\ddot{h}_{ll}$ (2.12).

- Teine rühm sisaldab häirituse liikmeid $\ddot{h}_{l\bar{m}}$, \ddot{h}_{lm} , $\dot{w}^n_{\bar{m}}$, \dot{w}^n_m ja $\dot{w}^{\bar{m}}_l$, \dot{w}^m_l

$$\begin{aligned}
(d_7 - d_4)\ddot{h}_{lm} + (d_7 - d_1)\dot{w}^n_m + (d_1 - d_5)\dot{w}^{\bar{m}}_l &= 0, \\
(d_7 - d_4)\ddot{h}_{l\bar{m}} + (d_7 - d_1)\dot{w}^n_{\bar{m}} + (d_1 - d_5)\dot{w}^m_l &= 0, \\
(d_1 - d_7)\ddot{h}_{lm} + (d_2 + d_3 - d_8)\dot{w}^n_m + d_3\dot{w}^{\bar{m}}_l &= 0, \\
(d_1 - d_7)\ddot{h}_{l\bar{m}} + (d_2 + d_3 - d_8)\dot{w}^n_{\bar{m}} + d_3\dot{w}^m_l &= 0, \\
(d_5 - d_1)\ddot{h}_{lm} + d_3\dot{w}^n_m + (d_2 + d_3 - d_6)\dot{w}^{\bar{m}}_l &= 0, \\
(d_5 - d_1)\ddot{h}_{l\bar{m}} + d_3\dot{w}^n_{\bar{m}} + (d_2 + d_3 - d_6)\dot{w}^m_l &= 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

See grupp kirjeldab Ψ_3 polarisatsiooni, sest $\Psi_3 = \frac{1}{4}\ddot{h}_{l\bar{m}}$ (2.12).

- Kolmas grupp sisaldab häiritusi \ddot{h}_{ln} , \ddot{w}^n_n , $\ddot{h}_{m\bar{m}}$, \dot{w}^l_l ja \dot{w}^m_m , $\dot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}}$

$$\begin{aligned} d_7(\ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n) + d_5\dot{w}^l_l + d_1(\dot{w}^m_m + \dot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}}) - d_4\ddot{h}_{m\bar{m}} &= 0, \\ d_8(\ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n) + d_6\dot{w}^l_l + d_2(\dot{w}^m_m + \dot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}}) - (2d_1 + d_8 - d_5 - d_7)\ddot{h}_{m\bar{m}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Siit saame teavet Φ_{22} polarisatsiooni kohta, sest $\Phi_{22} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{m\bar{m}}$ (2.12).

Kokkuvõttes näeme, et väljavõrrandid (3.7), (3.8) annavad tingimused $\Psi_2, \Psi_3, \Phi_{22}$ polarisatsioonide jaoks, kuna teisendatud võrrandid sisaldavad häirituse liikmeid $\ddot{h}_{ll}, \ddot{h}_{l\bar{m}}, \ddot{h}_{m\bar{m}}$. Liikme $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ jaoks ei saa me väljavõrranditest ühtegi seost, mis tähendab, et $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ võib olla igal juhul nullist erinev ehk $\Psi_4 \neq 0$ ja see on alati lubatud.

4.1 Teooriate jagunemine võimalike gravitatsioonilainete polarisatsioonide järgi

Analüüsime, milliste konstantide kombinatsioonide puhul on erinevad polarisatsioonid lubatud. Lähtume alamhulkadest $O_0, O_1, N_2, N_3, III_5, II_6$, mille kirjeldused on toodud nimekirjas (2.2.1). Eelnevatest arvutustest selgus, et Ψ_4 on alati lubatud, seega üldiseid ruutliikmetega gravitatsiooniteooriaid kirjeldav alamhulk ei saa ühegi konstantide kombinatsiooni puhul olla O_0, O_1 . Minimaalselt on teoorias lubatud Ψ_4 ja teised polarisatsioonid keelatud.

Tuletame tingimused konstantide komplektidele, et erinevad polarisatsioonid Φ_{22}, Ψ_3 ja Ψ_2 oleksid lubatud. Ψ_2 olemasolu tingimused on määratud võrranditega (4.7), mille saame maatrikskujul kirja panna kui

$$\mathcal{M}_{\Psi_2} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{ll} \\ \ddot{w}^n_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 & d_8 \\ d_5 & d_6 \\ d_1 & d_2 \\ d_4 & (2d_1 + d_8 - d_5 - d_7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{ll} \\ \ddot{w}^n_l \end{pmatrix} = 0. \quad (4.10)$$

Lähtuvalt \mathcal{M}_{Ψ_2} astakust, saame viis erinevat võimalust lahendite olemasoluks.

1. Maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_2} astaku võrdumine nulliga on võimalik vaid siis, kui kõik selle elemendid on nullid. Selles olukorras võivad \ddot{h}_{ll} ja \ddot{w}^n_l omada suvalisi väärtusi, et võrrandid (4.7) oleksid rahuldatud. Seega võib \ddot{h}_{ll} olla nullist erinev ja Ψ_2 on lubatud.
2. Teine võimalus on see, et maatriksi astak on võrdne ühega, kuna esimese veeru elemendid on kõik nullid. Sellisel juhul peab \ddot{w}^n_l olema võrdne nulliga, aga \ddot{h}_{ll} võib olla nullist erinev. Järelikult on Ψ_2 lubatud.
3. Kolmas juht on sarnane eelmisele juhule, kuid maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_2} astak võrdub ühega, sest teine veerg koosneb ainult nullidest. See tähendab, et $\ddot{h}_{ll} = 0$ ja \ddot{w}^n_l võib omada suvalisi väärtusi. Käesoleval juhul ei ole Ψ_2 lubatud.

4. Neljandal juhul võrdub maatriksi astak ühega, kuid kumbki veergudest ei ole nullvektor. Järelikult ei ole maatriksi veerud sõltumatud. Sellisel juhul saame, et lahendiruum on sirge, kus mõlemad \ddot{h}_{ll} ja \ddot{w}^n_l võivad nullist erineda ehk Ψ_2 on lubatud.
5. Viimasel juhul on maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_2} astak maksimaalne ehk võrdub kahega. Järelikult on veerud sõltumatud ja ainuke viis, kuidas maatriksvõrrand saaks olla rahuldatud on juhul, kui $\ddot{h}_{ll} = \ddot{w}^n_l = 0$ ehk Ψ_2 ei ole lubatud.

Ψ_2 on seega teoorias lubatud kui konstantide puhul kehtib üks järgnevatest tingimustest: $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_2}) = 0$ või $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_2}) = 1$ ja $(d_8, d_6, d_2, (2d_1 + d_8 - d_5 - d_7)) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Selleks, et Ψ_3 oleks lubatud, peab $\ddot{h}_{ml} = \ddot{h}_{\bar{m}\bar{l}}$ olema nullist erinev. Nendele häirituse liikmetele seatud piirangud on antud võrranditega (4.8), mille saame maatrikskujul kirja panna järgnevalt

$$\mathcal{M}_{\Psi_3} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{lm} \\ \ddot{w}^n_m \\ \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_4 - d_7) & (d_1 - d_7) & (d_5 - d_1) \\ (d_1 - d_7) & (d_2 + d_3 - d_8) & d_3 \\ (d_5 - d_1) & d_3 & (d_2 + d_3 - d_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{lm} \\ \ddot{w}^n_m \\ \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{l}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Kusjuures näeme, et see maatriks on sümmeetriline ehk edasipidises analüüsis on ridade ja veergude käsitlemine ekvivalentne. Urime, millistes olukordades on Ψ_3 lubatud, lähtudes maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astakust.

1. Maatriksi astaku võrdumine nulliga tähendab, et kõik selle elemendid on nullid. Järelikult $\ddot{h}_{ml} = \ddot{h}_{\bar{m}\bar{l}}$ võib olla nullist erinev ja Ψ_3 on lubatud.
2. Selleks, et maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrduks ühega peab minimaalselt üks selle element olema nullist erinev ja kõik veerud on üksteisest sõltuvad. Eeldusel, et nullist erinev element leidub esimeses veerus, saame kirja panna tingimuse $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 1$ jaoks.

$$\begin{aligned} ((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3) &= \alpha((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1)), \\ ((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6)) &= \beta((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Analoogiliselt, kui teine veerg ei koosne ainult nullidest, saame, et

$$\begin{aligned} ((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1)) &= \alpha((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3), \\ ((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6)) &= \beta((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ja viimase veeru nullist erinevuse puhul

$$\begin{aligned} ((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1)) &= \alpha((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6)), \\ ((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3) &= \beta((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Siin on α ja β taaskord suvalised kordajad, mis võivad võrduda nulliga. Juhul, kui kõik

veerud on nullist erinevad ehk üheski eelnevas tingimuses $\alpha, \beta \neq 0$, on lahendiruumiks tasand, kus kõik häirituse liikmed $\ddot{h}_{lm}, \ddot{w}^n_m, \ddot{w}^{\bar{m}}_l$ võivad omada nullist erinevaid väärtusi. Seega on Ψ_3 lubatud. Sama põhimõtte kehtib olukorras, kus kaks veergu sisaldavad nullist erinevaid elemente ehk ka siis on lahendiruumiks tasand, kus kõik häirituse liikmed võivad nullist erineda. Ainuke juhtum, kus \ddot{h}_{lm} peab võrduma nulliga ehk Ψ_3 ei ole lubatud, on siis, kui esimene veerg on ainuke nullist erinev. See tähendab, et seostes (4.12) kehtib $\alpha = \beta = 0$.

3. Juhul, kui maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdub kahega, siis $\ddot{h}_{ml} = \ddot{h}_{\bar{m}l} = 0$ olukorras, mil maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} teine ja kolmas veerg on lineaarselt sõltuvad, aga esimene neist sõltumatu. See tähendab, et leidub selline kordaja α , et kehtiks

$$\left((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3 \right) = \alpha \left((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6) \right), \quad (4.15)$$

või selline kordaja β , et järgnev seos oleks rahuldatud

$$\left((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6) \right) = \beta \left((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3 \right), \quad (4.16)$$

kuid ei leidu ühtegi kordajat γ, ζ , et

$$\begin{aligned} \left((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1) \right) &= \gamma \left((d_1 - d_7), (d_2 + d_3 - d_8), d_3 \right), \\ \left((d_4 - d_7), (d_1 - d_7), (d_5 - d_1) \right) &= \zeta \left((d_5 - d_1), d_3, (d_2 + d_3 - d_6) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ võivad omada ka nullväärtust. Käesoleval juhul on lahendiruum ühemõõtmeline ja asub $\ddot{w}^n_m - \ddot{w}^{\bar{m}}_l$ tasandil, kus $\ddot{h}_{lm} = 0$. Järelikult ei ole Ψ_3 lubatud.

4. Teistel juhtudel, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 2$ ja eelnev tingimus ei ole rahuldatud, asub lahendiruum tasandil, kus \ddot{h}_{lm} võib nullist erineda ja seega on Ψ_3 lubatud.
5. Olukorras, kus $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 3$ on kõik read ja veerud sõltumatud. See tähendab, et ainuke viis, kuidas maatriksvõrrand ehk väljavõrrandid oleksid rahuldatud, on $\ddot{h}_{lm} = \ddot{w}^n_m = \ddot{w}^{\bar{m}}_l = 0$. Järelikult ei ole sel juhul Ψ_3 lubatud.

Saame kolm juhtu, mil Ψ_3 on lubatud. Esimeses olukorras kehtib $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 0$. Teisel juhul on \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdne ühega ja teine ning kolmas veerg ei koosne ainult nullides. Kolmas võimalus, et Ψ_3 saaks olla nullist erinev on juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 2$ ja teine ning kolmas veerg ei ole lineaarselt sõltuvad.

Järgmisena analüüsime, millal on lubatud Φ_{22} . Selle jaoks on kaks tingimust, mis on antud võrranditega (4.9). Paneme need analoogilisel eelnevaga kirja maatrikskuju.

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n \\ \ddot{w}^l_l \\ \ddot{w}^m_m + \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}} \\ \ddot{h}_{m\bar{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 & d_5 & d_1 & -d_4 \\ d_8 & d_6 & d_2 & -(2d_1 + d_8 - d_5 - d_7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n \\ \ddot{w}^l_l \\ \ddot{w}^m_m + \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}} \\ \ddot{h}_{m\bar{m}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Analoogiliselt Ψ_2 ja Ψ_3 polarisatsioonidega uurime, millal on Φ_{22} lubatud analüüsides maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astakut. Vaatleme viit olukorda.

1. Juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 0$ on kõik maatriksi elemendid võrdsed nulliga ja $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ võib omada suvalisi väärtusi ja Φ_{22} on lubatud.
2. Juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$, on $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ võrdne nulliga ainult siis, kui viimane veerg on ainuke nullist erinev veerg. See tähendab, et $d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0$ ja $d_4 \neq 0$. Selline konstantide kombinatsioon tähendab, et lahendiruum on kolmemõõtmeline hüpertasand, mille moodustavad $(\ddot{h}_{ln} + \ddot{w}^n_n)$, \ddot{w}^l_l ja $(\ddot{w}^m_m + \ddot{w}^{\bar{m}}_{\bar{m}})$ ehk alamruum, kus $\ddot{h}_{m\bar{m}} = 0$. Järelikult käesoleval juhul on Φ_{22} keelatud. Teistes olukordades, kus $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$, võib $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ nullist erineda ja Φ_{22} on lubatud.
3. $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astak võrdub maksimaalselt kahega. Sellisel juhul ei ole Φ_{22} lubatud ainult ühel juhul. Nimelt, kui kehtib

$$d_1 = \alpha d_2, \quad d_5 = \alpha d_6, \quad d_7 = \alpha d_8, \quad (4.19)$$

mingi suvalise kordaja α korral, kuid sama α korral ei ole rahuldatud

$$d_4 = \alpha(2d_1 + d_8 - d_5 - d_7), \quad (4.20)$$

saame võrranditest (4.9) võtta sellise lineaarkombinatsiooni, kus kõik liikmed peale $\ddot{h}_{m\bar{m}}$ välja taanduvad, mis tähendab, et $\ddot{h}_{m\bar{m}} = 0$ ja Φ_{22} ei ole lubatud. Ekvivalentset saame selle tingimuse kirja panna veergude abil, nimelt, kui suvaliste kordajate ζ ja β puhul kehtivad seosed

$$d_7 = \zeta d_1, \quad d_8 = \zeta d_2, \quad d_5 = \beta d_2, \quad d_6 = \beta d_2, \quad (4.21)$$

kuid ei leidu ühtegi kordajat κ , mille puhul kehtiks $-d_4 = \kappa d_1$ ega $-(2d_1 + d_8 - d_5 - d_7) = \kappa d_2$. Ülejäänutel juhtudel, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$ on Φ_{22} lubatud.

Tulemuseks saame, et Φ_{22} on lubatud, kui teooria konstantide komplekti puhul on maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astak võrdne nulliga, $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$ ja $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ esimesed kolm veergu ei koosne ainult nullidest või $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$ ja ühegi kordaja α puhul ei kehti $d_1 = \alpha d_2$, $d_5 = \alpha d_6$, $d_7 = \alpha d_8$.

On võimalik kontrollida, mis on toodud käesoleva töö lisas A, et Ψ_2 olemasolust järeldub otseselt $\Psi_3 \neq 0$ tingimuste kehtivus ning Ψ_3 tähendab koheselt, et $\Phi_{22} \neq 0$. Järelikult on eelnevalt tuletatud $\Psi_2 \neq 0$, $\Psi_3 \neq 0$, $\Phi_{22} \neq 0$ tingimused kooskõlas polarisatsioonide esinemisega kindlates gruppides.

4.1.1 Polarisatsioonid ÜRT ekvivalentsses teoorias

Arvestades eelnevaid tingimusi erinevate polarisatsioonide olemasoluks, vaatleme, millised polarisatsioonid esinevad ÜRT ekvivalentsses üldises teleparalleelses gravitatsiooniteoorias. Selles teoorias on konstantide komplekt kujul

$$k_{11} = -k_2 = 1, \quad k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = k_9 = k_{10} = 0 \quad (4.22)$$

ehk konstandid d_1, \dots, d_8 on

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0, \quad d_4 = 1. \quad (4.23)$$

Siit näeme kohe, et maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ (4.18) kõik veerud peale viimase koosnevad ainult nullidest. See tähendab, et $\ddot{h}_{m\bar{m}} = 0$ ja Φ_{22} ei ole lubatud. Kuna Φ_{22} ei ole lubatud, siis on ka Ψ_3 ja Ψ_2 keelatud. Järelikult on ÜRT ekvivalentsses teoorias esindatud Ψ_4 polarisatsioon ja tegemist on N_2 teooriaga.

5 Tulemused ja arutelu

Töö tulemusena jõudsimme väljavõrrandeid kirjeldava peapolünoomi avaldiseni (3.39) ning kahe üldise triviaalse lahendini (3.34) ja (3.36). Nendest järeldub, et füüsilised häiritused levivad valguse kiirusel. Triviaalsete lahendite puhul (3.34) ja (3.36) ei ole nende häirituste dünaamika määratud. Need tulemused on kooskõlas varasemate teleparalleelsete [7] ja sümmeetriliste teleparalleelsete teooriate [8] analüüsidega.

Erinevate konstantide komplektide analüüsis tõestasime, et sõltuvalt konstantidest ja kordajatest võivad häiritused maksimaalselt koosneda kaheksast taandumatust komponendist. Minimaalselt, et gravitatsioonilained oleksid olemas, peab vähemalt üks häiritus sisaldama füüsilisi ehk valguse kiirusel levivaid liikmeid. See, millised need füüsilised komponendid täpsemalt on, sõltub konstantidest, mille uurimiseks tuletasime töös igale juhule vastavad tingimused.

Teine oluline töö tulemus oli polarisatsioonide olemasolu piiravate avaldiste (4.7), (4.8), (4.9) leidmine. Selgus, et Ψ_4 polarisatsiooni jaoks ühtegi seost väljavõrranditest ei tulene ehk üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates võivad gravitatsioonilained alati omada kaht tensorpolarisatsiooni, mida kirjeldab Ψ_4 . See vastab teada olevate tulemustega teleparalleelsete [7] ja sümmeetriliste teleparalleelsete teooriate [8] analüüsist. Kindlate konstantide komplektide puhul on lubatud vastavalt kuus, viis, kolm või kaks erinevat polarisatsiooni. Nende võimaluste jaoks tuletasime erinevad tingimused ja viisime läbi kontrolli, et polarisatsioonid esinevad tõepoolest Lorentzi invariantisusest tulenevalt teatud gruppidega.

Lisaks uurisime üldiste ruutliikmetega teleparalleelsete teooriate ÜRT ekvivalentset teooriat GTEGR [12]. Tulemusena leidsime, et valguse kiirusel levivad häirituse üks sümmeetriline tensorliige ja kaks skalaarset komponenti, mis on täpselt sama tulemus, mis allikas [8]. Siiski, nagu nenditi ka artiklis [8], ei ole see lõplik tulemus ning on võimalik analüüsida, et ka skalaarsed liikmed on võrdsed nulliga [11]. Lisaks leidsime GTEGR teoorias, et lubatud on ainult Ψ_4 polarisatsioon, mis kirjeldab kaht tensormoodi. See on samuti kooskõlas üldrelatiivsusteooria ennustusega, et gravitatsioonilainetel on kaks polarisatsiooni [1].

Töö edasiarendusena on võimalik uurida gravitatsioonilainete levikut käesolevas gravitatsiooniteoorias, kuid arvestades kosmoloogilist taustmeetrikat, mitte Minkowski meetrikat, mida selles töös rakendati. Samuti on võimalik täiendada analüüsi, et kaasata ka teisi uuritava teooriaklassi kitsendusi, mis on toodud allikas [12]. Lisaks loob töö teoreetilise aluse, mida on võimalik tulevikus uute vaatlusandmetega [4, 5] võrrelda, et üldiseid ruutliikmetega teleparalleelseid gravitatsiooniteooriad kitsendada või koguni ümber lükata.

Kokkuvõte

Töö eesmärk oli tuletada gravitatsioonilainete levikukiirust ja polarisatsioone kirjeldavad valemid ning neid analüüsida. Eesmärk sai täidetud. Tulemusena nägime, et gravitatsioonilained levivad uuritavas gravitatsiooniteoorias valguse kiirusel ning omavad vähemalt kaht polarisatsiooni, mis on kooskõlas ÜRT-iga. Teooria kindlate konstantide puhul võivad gravitatsioonilained omada kuni kuut polarisatsiooni.

Esimeses kahes peatükis andsime ülevaate vajalikest matemaatilistest tööriistadest ja kontseptsioonidest, mida on vaja gravitatsioonilainete uurimiseks modifitseeritud gravitatsiooniteooriates, nagu üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates.

Kolmas ja neljas peatükk sisaldab töö põhilisi arvutusi ning analüüsi. Kõik arvutused viidi läbi Wolfram Mathematica tensorarvutuse paketi xAct abil. Kolmandas peatükis lineariseerisime esmalt väljavõrrandid, millest arvutasime polünoomi. Peapolünoomist tulenevad gravitatsioonilainete kiirus ja mittefüüsikalised häirituste kujud. Neljas peatükk käsitles võimalikke gravitatsioonilainete polarisatsioone. Arvutustes kasutasime Newman-Penrose formalismi, mis väljavõrranditele rakendades andis tingimused erinevate polarisatsioonide olemasoluks. Lisaks analüüsisime nii kolmandas kui neljandas peatükis ÜRT ekvivalentset teooriat tuletatud raamistikos.

Viimasena võrdlesime saadud tulemusi varasemate teadmistega. Selgus, et kõik töö tulemused on analoogilised ja kooskõlas varasemate analüüsidega.

Käesolevat tööd on võimalik jätkata arvestades keerulisemat taustmeetrikat praeguse Minkowski meetrika asemel ja analüüsides põhjalikult kõiki üldiste ruutliikmetega teleparalleelsete gravitatsiooniteooriate kitsendusi.

Tänuavaldused

Tänan Morten Piibelehte, kes lõi dokumendi tooriku, mida oma töös kasutasin. Tänan südamest oma juhendajat Manuel Hohmanni, ilma kelle nõu ega abita, poleks töö kunagi ilmavalgust näinud. Lisaks suured tänud Joosep Lemberile ja oma teistele ülikoolikaaslastele vaimse toetuse eest. Aitäh Tartu Ülikooli muuseumile töötamise kõrvalt õpingute lõpetamise soodustamise eest.

Kärt Soieva

Kirjandus

1. S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (2004).
2. T. Rothman, „The Secret History of Gravitational Waves“, *American Scientist* 106, 96–104 (2018).
3. LIGO Scientific Collaboration ja Virgo Collaboration, „GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO“, *Physical Review D* 93 (2016).
4. NANOGrav Collaboration, A. Gabriella *et al.*, „The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background“, *The Astrophysical Journal Letters* 951, L8 (2023).
5. NASA, „LISA - Laser Interferometer Space Antenna - NASA Home Page“, <https://lisa.nasa.gov/>, vaadatud 24.11.2024.
6. LIGO Scientific Collaboration ja Virgo Collaboration, „GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral“, *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101 (2017).
7. M. Hohmann, M. Krššák, C. Pfeifer ja U. Ualikhanova, „Propagation of gravitational waves in teleparallel gravity theories“, *Physical Review D* 98 (2018).
8. M. Hohmann, C. Pfeifer, U. Ualikhanova ja J. L. Said, „Propagation of gravitational waves in symmetric teleparallel gravity theories“, *Physical Review D* 99 (2019).
9. S. Bahamonde *et al.*, „Teleparallel gravity: from theory to cosmology“, *Reports on Progress in Physics* 86, 026901 (2023).
10. M. Hohmann, *Modified and Quantum Gravity* peatükk „Teleparallel Gravity“, lk 145–198, Springer International Publishing (2023).
11. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press II edition (2018).
12. J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, D. Iosifidis, A. Jiménez-Cano ja T. S. Koivisto, „General teleparallel quadratic gravity“, *Physics Letters B* 805, 135422 (2020).
13. O. Heaviside, „A gravitational and electromagnetic analogy“, *The Electrician* 31, 281–282 (1893).

14. T. Damour, „Poincaré, the dynamics of the electron, and relativity“, *Comptes Rendus Physique* 18, 551–562 (2017).
15. J. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri ja G. Smoot, „A Brief History of Gravitational Waves“, *Universe* 2, 22 (2016).
16. J. H. Taylor, L. A. Fowler ja P. M. McCulloch, „Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913 + 16“, *Nature* 277, 437–440 (1979).
17. LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, Fermi Gamma-Ray Burst Monitor ja INTEGRAL, „Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A“, *The Astrophysical Journal* 848, L13 (2017).
18. D. Bettoni, J. M. Ezquiaga, K. Hinterbichler ja M. Zumalacárregui, „Speed of gravitational waves and the fate of scalar-tensor gravity“, *Phys. Rev. D* 95, 084029 (2017).
19. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators: Distribution theory and Fourier analysis*, Springer-Verlag (1983).
20. C. Pfeifer ja D. Siemssen, „Electromagnetic potential in pre-metric electrodynamics: Causal structure, propagators and quantization“, *Physical Review D* 93 (2016).
21. LIGO Laboratory, „LIGO’s Interferometer“, <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo>, vaadatud 03.12.2024.
22. E. Newman ja R. Penrose, „An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients“, *J. Math. Phys.* 3, 566–578 (1962).
23. D. M. Eardley, D. L. Lee ja A. P. Lightman, „Gravitational-Wave Observations as a Tool for Testing Relativistic Gravity“, *Phys. Rev. D* 8, 3308–3321 (1973).
24. J. M. Martin-Garcia, „xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language“, <https://josmar493.dreamhosters.com/>, vaadatud 03.12.2024.
25. Wolfram Research, „NullSpace, Wolfram Language function“, <https://reference.wolfram.com/language/ref/NullSpace.html>, vaadatud 03.12.2024.

Lisa A. Alamhulkade kontroll

Lisana on toodud kontroll, et polarisatsioonid esinevad tõepoolest gruppidega III_6 ja II_5 . Tõestame, et Ψ_2 olemasolust järeldub otseselt, et Ψ_3 on lubatud ning Ψ_3 eksistents tähendab, et $\Phi_{22} \neq 0$.

Esmalt kontrollime, kas $\Psi_3 \neq 0$ tingimused on rahuldatud, kui $\Psi_2 \neq 0$. $\Psi_2 \neq 0$ jaoks saime kaks võimalust. Analüüsime nendel juhtudel Ψ_3 olemasolu.

1. $\Psi_2 \neq 0$, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_2}) = 0$. See tähendab, et $d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0$ ehk esimene veerg matriksis \mathcal{M}_{Ψ_3} (4.11) koosneb ainult nullidest ja Ψ_3 on lubatud.
2. $\Psi_2 \neq 0$, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_2}) = 1$ ja teine veerg ei koosne ainult nullidest. See olukord on rahuldatud kahel juhul: \mathcal{M}_{Ψ_2} esimene veerg koosneb nullidest või veerud on võrdelised. Uurime neid juhte eraldi.

- Juhul, kui \mathcal{M}_{Ψ_2} esimene veerg koosneb ainult nullidest, kehtivad seosed $d_1 = d_4 = d_5 = d_7 = 0$, mis tähendab taaskord, et \mathcal{M}_{Ψ_3} esimene veerg koosneb ainult nullidest ja Ψ_3 on lubatud.
- Juhul, kui \mathcal{M}_{Ψ_2} veerud on võrdelised ja nullist erinevad, leidub selline kordaja $\alpha \neq 0$, mille puhul kehtivad seosed

$$d_1 = \alpha d_2, \quad d_4 = \alpha(2d_1 + d_8 - d_5 - d_7), \quad d_5 = \alpha d_6, \quad d_7 = \alpha d_8. \quad (5.1)$$

Maatriksis \mathcal{M}_{Ψ_3} saame liikmed d_1, d_4, d_5, d_6 asendada, mis annab

$$\mathcal{M}_{\Psi_3} = \begin{pmatrix} \alpha(2\alpha d_2 - \alpha d_6 - \alpha d_8) & \alpha(d_2 - d_8) & \alpha(d_6 - d_2) \\ \alpha(d_2 - d_8) & (d_2 + d_3 - d_8) & d_3 \\ \alpha(d_6 - d_2) & d_3 & (d_2 + d_3 - d_6) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

kus näeme, et

$$\begin{aligned} \alpha(2\alpha d_2 - \alpha d_6 - \alpha d_8) &= \alpha(\alpha(d_2 - d_8) - \alpha(d_6 - d_2)) \\ \alpha(d_2 - d_8) &= \alpha((d_2 + d_3 - d_8) - d_3), \quad \alpha(d_6 - d_2) = \alpha(d_3 - (d_2 + d_3 - d_6)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ehk esimene rida on teise ja kolmanda rea lineaarne kombinatsioon. Üldjuhul on siis maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdne kahega ja Ψ_3 ei ole lubatud ainult siis, kui \mathcal{M}_{Ψ_3} teine ja kolmas veerg on üksteisest lineaarselt sõltuvad. Selleks peab kehtima võrdus

$$d_3 = \frac{(d_2 - d_8)(d_6 - d_2)}{(d_6 + d_8 - 2d_2)}. \quad (5.4)$$

Samas selgub, et kui see võrdus kehtib, on maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdne ühega

ehk ka esimene veerg on viimaste veergude kordne. See tähendab, et kui viimased kaks veergu koosnevad ainult nullidest, ei leidu ka esimeses veerus nullist erinevat elementi. Seega on Ψ_3 lubatud.

Järelikult näeme, et igal juhul kui Ψ_2 on lubatud, esineb ka Ψ_3 .

Teisena kontrollime, kas Ψ_3 olemasolu tagab kohe, et Φ_{22} on lubatud. $\Psi_3 \neq 0$ jaoks saime kolm tingimust, mida on lihtsam uurida alamjuhtudena.

1. Lihtsaim olukord, mil $\Psi_3 \neq 0$, on juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 0$. See tähendab, et

$$d_1 = d_4 = d_5 = d_7, \quad d_2 = d_6 = d_8 \quad (5.5)$$

ehk maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ on antud valemiga

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & -d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 & -d_2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

ja selle astak on maksimaalselt võrdne ühega. Ainuke olukord, kus Φ_{22} saaks olla keelatud, oleks kui viimane veerg erineks ainukesena nullist, kuid näeme, et see ei ole võimalik, sest kõik veerud on võrdelised. Järelikult on Φ_{22} lubatud.

2. Teine juht, mil $\Psi_3 \neq 0$, on kui kehtib $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 1$ ja esimene veerg ei erine ainukesena nullist. Sellisel juhul saame põhimõtteliselt \mathcal{M}_{Ψ_3} kirja panna sümboolselt kui

$$\mathcal{M}_{\Psi_3} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

kus α , β , ja γ on suvalised kordajad, mille jaoks ei kehti $\beta = \gamma = 0$, kui $\alpha \neq 0$. Avaldisele (5.7) vastab \mathcal{M}_{Ψ_3} üldkuju (4.11), mis tähendab, et

$$\begin{aligned} d_3 &= \beta\gamma, & d_4 &= d_1 + \alpha^2 - \alpha\beta, & d_5 &= d_1 + \alpha\gamma, \\ d_6 &= d_2 + \beta\gamma - \gamma^2, & d_7 &= d_1 - \alpha\beta, & d_8 &= d_2 - \beta^2 + \beta\gamma. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Asendades need $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ avaldisse (4.18), saame järgneva kuju

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 - \alpha\beta & d_1 + \alpha\gamma & d_1 & -d_1 + \alpha(-\alpha + \beta) \\ d_2 + \beta(-\beta + \gamma) & d_2 + (\beta - \gamma)\gamma & d_2 & -d_2 - (\alpha - \beta)(\beta - \gamma) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Sellest saame järeldada, et kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$ ja $\Phi_{22} = 0$, peavad maatriksi kõik veerud peale viimase koosnema ainult nullidest. See on võimalik, kui kehtivad seosed $d_1 = d_2 = \beta = \gamma = 0$. Samas on sellel juhul maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdne ühega nii, et ainult esimene veerg erineb nullist. See tähendab aga, et Ψ_3 on keelatud, mis läheb vastuollu probleemipüstitusega. Järelikult, käesoleval juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$, on Φ_{22} lubatud.

Vaatleme olukorda, kus $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Sellisel juhul on $\Phi_{22} = 0$ ainult siis, kui $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ saab esitada kujul

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}=0} = \begin{pmatrix} d_1 \kappa & d_1 \zeta & d_1 & -d_4 \\ d_2 \kappa & d_2 \zeta & d_1 & -\kappa d_2 + d_1(-2 + \zeta + \kappa) \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

mis vastab tingimusele (3) ja kus κ, ζ on suvalised kordajad. Paneme avaldised võrduma ja analüüsime, kas see on lubatud. Eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$, saame β ja γ avaldada kui

$$\beta = \frac{d_1 \kappa - d_1}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{d_1 \zeta - d_1}{\alpha} \quad (5.11)$$

ja asendada need avaldisse (5.9), mis annab

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 \kappa & d_1 \zeta & d_1 & -\alpha^2 - d_1 \kappa \\ d_2 - \frac{d_1^2(-1+\kappa)(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} & d_2 - \frac{d_1^2(-1+\zeta)(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} & d_2 & -d_2 + \frac{d_1(\alpha^2 + d_1(-1+\kappa))(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Lahutame saadud maatriksi avaldisest (5.10).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d_4 + \alpha^2 + d_1 \kappa \\ (-1 + \kappa) \left(d_2 + \frac{d_1^2(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} \right) & (-1 + \zeta) \left(d_2 + \frac{d_1^2(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} \right) & 0 & -\frac{(-1+\kappa)(d_2 \alpha^2 + d_1^2(-2+\zeta+\kappa))}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Eeldusel, et Ψ_3 on lubatud, kuid Φ_{22} on keelatud, peame saama, et see vahe võrdub nulliga. Üks viis, kuidas see saab tõsi olla, on juhul, kui $\kappa = \zeta = 1$, kuid sellisel juhul ka $\beta = \gamma = 0$ ehk \mathcal{M}_{Ψ_3} ainuke nullist erinev element on esimeses veerus. See tähendab aga, et Ψ_3 on keelatud, mis läheb meie algsete eeldustega vastuollu ehk $\kappa = \zeta = 1$ ei saa kehtida. Jääb üle vaid avaldada α, d_1 või d_2 eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$. Saame, et

$$\alpha = -\frac{d_1 \sqrt{(\kappa-1)(\kappa+\zeta-2)}}{\sqrt{d_2-d_2\kappa}}, \quad d_1 = -\frac{\alpha \sqrt{d_2-d_2\kappa}}{\sqrt{(\kappa-1)(\kappa+\zeta-2)}}, \quad d_2 = -\frac{d_1^2(\kappa+\zeta-2)}{\alpha^2}. \quad (5.14)$$

Ükskõik millise neist me avaldisse (5.12) asendame, saame tulemuseks, et maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astak võrdub ühega, kuid see on vastuolus põhieeldusega, et $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Järelikult ei leidu käesoleva $\Psi_3 \neq 0$ tingimuse puhul selliseid kordajaid, et tingimus (3) oleks rahuldatud ehk praegusel juhul, kui $\Psi_3 \neq 0$, saame järeldusena, et $\Phi_{22} \neq 0$.

3. Kolmas juht, mil Ψ_3 on lubatud, on kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Psi_3}) = 2$ ning teine ja kolmas veerg ei ole üksteisest sõltuvad nii, et esimene oleks neist sõltumatu. Selle tingimuse täitmiseks on kolm võimalust. Analüüsime neid eraldi.

- Esimene veerg koosneb ainult nullidest ja ülejäänud veerud on üksteisest sõltumatud. See tähendab, et $d_1 = d_4 = d_5 = d_7$ ja $d_2 + d_3 - d_8 \neq \alpha d_3$, $d_3 \neq \alpha(d_2 + d_3 - d_6)$ ühegi kordaja α puhul. Sellisel juhul saame maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ kirja panna kui

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & -d_1 \\ d_8 & d_6 & d_2 & -d_8 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Φ_{22} on keelatud ainult juhul, kui viimane veerg on ainus nullist erinev, kuid näeme, et see tingimus ei saa olla täidetud, kuna viimane veerg on negatiivne esimene veerg. Järelikult on Φ_{22} käesoleval juhul lubatud.

- Esimene ja teine veerg on lineaarselt sõltuvad ja nullist erinevad. Järelikult saame \mathcal{M}_{Ψ_3} kirja panna sümboolselt kui

$$\mathcal{M}_{\Psi_3} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \xi^2 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

kus α , β , γ on suvalised kordajad ja ξ suvaline nullist erinev kordaja, millele vastab \mathcal{M}_{Ψ_3} üldkuju (4.11). See tähendab, et

$$\begin{aligned} d_3 &= \beta\gamma, & d_4 &= d_1 + \alpha^2 - \alpha\beta, & d_5 &= d_1 + \alpha\gamma, \\ d_6 &= d_2 + \beta\gamma - \xi^2, & d_7 &= d_1 - \alpha\beta, & d_8 &= d_2 - \beta^2 + \beta\gamma. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Asendades need $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ avaldisse (4.18), saame järgneva kuju

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 - \alpha\beta & d_1 + \alpha\gamma & d_1 & -d_1 + \alpha(-\alpha + \beta) \\ d_2 + \beta(-\beta + \gamma) & d_2 + \beta\gamma - \xi^2 & d_2 & -d_2 - (\alpha - \beta)(\beta - \gamma) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Sellest saame järeldada, et kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$ ja $\Phi_{22} = 0$, peavad maatriksi kõik veerud peale viimase koosnema ainult nullidest. See on võimalik, kui kehtivad seosed $d_1 = d_2 = \beta = \gamma = \xi = 0$. Samas on sellel juhul maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} esimene veerg ainus nullist erinev. See tähendab aga, et Ψ_3 on keelatud, mis läheb vastuollu probleemipüstitusega. Järelikult, praegusel juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$, on $\Phi_{22} \neq 0$.

Vaatleme olukorda, kus $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Sellisel juhul on $\Phi_{22} = 0$ ainult siis, kui $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ saab esitada kujul

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}=0} = \begin{pmatrix} d_1\kappa & d_1\zeta & d_1 & -d_4 \\ d_2\kappa & d_2\zeta & d_1 & -\kappa d_2 + d_1(-2 + \zeta + \kappa) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

mis vastab tingimusele (3) ja kus κ , ζ on suvalised nullist erinevad kordajad. Paneme avaldised võrduma ja analüüsime, kas see on lubatud. Eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$, saame β , γ ja ξ^2 avaldada kui

$$\beta = \frac{d_1(1 - \kappa)}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{d_1(\zeta - 1)}{\alpha}, \quad \xi^2 = -\frac{(\zeta - 1)(d_2\alpha^2 + d_1^2(\kappa - 1))}{\alpha^2} \quad (5.20)$$

ja asendada need avaldisse (5.18), mis annab

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 \kappa & d_1 \zeta & d_1 & -\alpha^2 - d_1 \kappa \\ d_2 - \frac{d_1^2(-1+\kappa)(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} & d_2 \zeta & d_2 & -d_2 + \frac{d_1(\alpha^2 + d_1(-1+\kappa))(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Lahutame saadud maatriksi avaldisest (5.19), arvestades seoseid (5.17) ja (5.20). Tulemuseks on

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1+\kappa) \left(d_2 + \frac{d_1^2(-2+\zeta+\kappa)}{\alpha^2} \right) & 0 & 0 & -\frac{(-1+\kappa)(d_2 \alpha^2 + d_1^2(-2+\zeta+\kappa))}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Eeldusel, et Ψ_3 on lubatud, kuid Φ_{22} on keelatud, peame saama, et see vahe võrdub nulliga. Üks viis, kuidas see saab tõsi olla, on juhul, kui $\kappa = 1$, kuid sellisel juhul ka $\beta = 0$. See annab, et \mathcal{M}_{Ψ_3} teine veerg koosneb ainult nullidest ja ülejäänud veerud on sõltumatud. Sellel juhul on aga Ψ_3 keelatud ehk lahend $\kappa = 1$ ei kuulu meie uuritavasse olukorda. Jääb üle avaldada α^2 , d_1 või d_2 eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$. Saame, et

$$\alpha^2 = -\frac{d_1^2(\kappa + \zeta - 2)}{d_2}, \quad d_1 = -\frac{\alpha \sqrt{d_2 - d_2 \kappa}}{\sqrt{(\kappa - 1)(\kappa + \zeta - 2)}}, \quad d_2 = -\frac{d_1^2(\kappa + \zeta - 2)}{\alpha^2}. \quad (5.23)$$

Ükskõik millise neist me avaldisse (5.21) asendame, saame tulemuseks, et maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astak võrdub ühega, kuid see on vastuolus põhieeldusega, et $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Järelikult ei leidu käesoleva $\Psi_3 \neq 0$ tingimuse puhul selliseid kordajaid, et tingimus (3) oleks rahuldatud ehk praegusel juhul, kui $\Psi_3 \neq 0$, saame samuti, et $\Phi_{22} \neq 0$.

- Esimene ja viimane veerg on lineaarselt sõltuvad ja nullist erinevad. Järelikult saame \mathcal{M}_{Ψ_3} kirja panna sümboolselt kui

$$\mathcal{M}_{\Psi_3} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \xi^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

kus α , β , γ on suvalised kordajad ja ξ suvaline nullist erinev kordaja. Avaldisele (5.24) vastab \mathcal{M}_{Ψ_3} üldkuju (4.11). See tähendab, et

$$\begin{aligned} d_3 &= \beta\gamma, & d_4 &= d_1 + \alpha^2 - \alpha\beta, & d_5 &= d_1 + \alpha\gamma, \\ d_6 &= d_2 + \beta\gamma - \gamma^2, & d_7 &= d_1 - \alpha\beta, & d_8 &= d_2 - \xi^2 + \beta\gamma. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Asendades need $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ avaldisse (4.18), saame järgneva kuju

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 - \alpha\beta & d_1 + \alpha\gamma & d_1 & -d_1 + \alpha(-\alpha + \beta) \\ d_2 + \beta\gamma - \xi^2 & d_2 + (\beta - \gamma)\gamma & d_2 & -d_2 - \beta\gamma + \alpha(\gamma - \beta) + \xi^2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Sellest saame järeldada, et kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$ ja $\Phi_{22} = 0$, peavad maatriksi kõik veerud peale viimase koosnema ainult nullidest. See on võimalik, kui kehtivad seosed $d_1 = d_2 = \beta = \gamma = \xi = 0$. Samas on sellel juhul maatriksi \mathcal{M}_{Ψ_3} astak võrdne ühega nii,

et ainult esimene veerg erineb nullist. See tähendab aga, et Ψ_3 on keelatud, mis läheb vastuollu probleemipüstitusega. Järelikult, käesoleval juhul, kui $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 1$, on Φ_{22} lubatud.

Vaatleme olukorda, kus $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Sellisel juhul on $\Phi_{22} = 0$ ainult siis, kui $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ saab esitada kujul

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}=0} = \begin{pmatrix} d_1 \kappa & d_1 \zeta & d_1 & -d_4 \\ d_2 \kappa & d_2 \zeta & d_1 & -\kappa d_2 + d_1(-2 + \zeta + \kappa) \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

mis vastab tingimusele (3) ja kus κ, ζ on suvalised kordajad. Paneme avaldised võrduma ja analüüsime, kas see on lubatud. Eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$, saame β , γ ja ξ^2 avaldada kui

$$\beta = \frac{d_1(1 - \kappa)}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{d_1(\zeta - 1)}{\alpha}, \quad \xi^2 = -\frac{(\kappa - 1)(d_2 \alpha^2 + d_1^2(\zeta - 1))}{\alpha^2} \quad (5.28)$$

ja asendada need avaldisse (5.26), mis annab

$$\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 \kappa & d_1 \zeta & d_1 & -\alpha^2 - d_1 \kappa \\ d_2 \kappa & d_2 - \frac{d_1^2(-1 + \zeta)(-2 + \zeta + \kappa)}{\alpha^2} & d_2 & -d_2 \kappa + d_1(-2 + \zeta + \kappa) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Lahutame saadud maatriksi avaldisest (5.27), arvestades seoseid (5.25) ja (5.28). Tulemuseks on

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\zeta - 1) \left(d_2 + \frac{d_1^2(-2\zeta + \kappa)}{\alpha^2} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Eeldusel, et Ψ_3 on lubatud, kuid Φ_{22} on keelatud, peame saama, et see vahe võrdub nulliga. Üks viis, kuidas see saab tõsi olla, on juhul, kui $\zeta = 1$, kuid sellisel juhul $\gamma = 0$. See annab, et \mathcal{M}_{Ψ_3} kolmas veerg koosneb ainult nullidest ja ülejäänud veerud on sõltumatud. Sellel juhul on aga Ψ_3 keelatud ehk lahend $\zeta = 1$ ei kuulu meie uuritavasse olukorda. Jääb üle vaid avaldada α^2 , d_1 või d_2 eeldusel, et $\mathcal{M}_{\Phi_{22}} = \mathcal{M}_{\Phi_{22}=0}$. Saame, et

$$\alpha^2 = -\frac{d_1^2(\kappa + \zeta - 2)}{d_2}, \quad d_1 = -\frac{\alpha \sqrt{d_2 - d_2 \zeta}}{\sqrt{(\zeta - 1)(\kappa + \zeta - 2)}}, \quad d_2 = -\frac{d_1^2(\kappa + \zeta - 2)}{\alpha^2}. \quad (5.31)$$

Ükskõik millise neist me avaldisse (5.29) asendame, saame tulemuseks, et maatriksi $\mathcal{M}_{\Phi_{22}}$ astak võrdub ühega, kuid see on vastuolus põhieeldusega, et $\text{rank}(\mathcal{M}_{\Phi_{22}}) = 2$. Järelikult ei leidu käesoleva $\Psi_3 \neq 0$ tingimuse puhul selliseid kordajaid, et tingimus (3) oleks rahuldatud ehk praegusel juhul, kui $\Psi_3 \neq 0$, saame järeldusena, et $\Phi_{22} \neq 0$.

Need olid kõik juhud, mil $\Psi_3 \neq 0$ ning igas olukorras nägime, et Φ_{22} on lubatud. Seega olemegi tõestanud, et Ψ_3 olemasolust järeldub $\Phi_{22} \neq 0$.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kärt Soieva,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Gravitatsioonilainete levik üldistes ruutliikmetega teleparalleelsetes gravitatsiooniteooriates,

mille juhendaja on Manuel Hohmann, PhD, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. olen teadlik, et punktis 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Kärt Soieva,

Tartu, 3. detsember 2024. a.