TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 355 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XV

ТАРТУ 1975

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 355 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XV

TARTU 1975

Redaktsioonikolleegium:

G. Kangro (esimees), S. Baron (vast. toimetaja), J. Hion, Ü. Lepik, Ü. Lumiste, E. Reimers (toimetaja), E. Tamme.

Редакционная коллегия:

Г. Кангро (председатель), С. Барон (отв. редактор), Ю. Лепик, Ю. Лумисте, Э. Реймерс (редактор), Э. Тамме, Я. Хион.

© Тартуский государственный университет, 1975

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ Я. ГАБОВИЧА

Доцент Яков Габович родился 30 августа 1914 г. в городе Тарту. После окончания в 1932 г. частной гимназии в Таллине, он год учился в Электрохимическом институте в Гренобле (во Франции), а в 1934 г. поступил в Тартуский университет, вначале на химический, а в 1935 г. на естественно-математический факультет. Вынужденный несколько раз прерывать учебу по материальным и семейным обстоятельствам, он окончил Тартуский университет экстерном уже после Великой Отечественной войны, в 1945 г. Последовали аспирантура при том же университете (1946—1949), защита диссертации (1950) и работа на кафедре математического анализа (1949—1952). Начиная с 1952 г. Я. Габович работает на кафедре математики Эстонской сельскохозяйственной академии, с 1960 г. в должности доцента этой кафедры.

Научные интересы юбиляра всегда были весьма обширными, причем превалировала тяга к теории чисел, которой посвящено 17 работ из общего числа 52 опубликованных трудов. В 12 работах рассматриваются различные вопросы алгебры и анализа. Геометрии и астрофизике посвящено по 8 статей. В шести работах [17, 28, 35, 38, 40, 47] автор занимается вопросами истории математики и математической терминологии.

В довоенных статьях [1—8] рассматриваются вопросы теоретической астрофизики. В статьях [1—3] речь идет о необходимости учета поглощения света парами окиси титана при вычислении физических характеристик звезд типа M. В [4] выводится зависимость между массой и светимостью для двойных звезд. Статьи [5—8] посвящены вопросу о совпадении плоскостей орбит в кратных звездных системах.

Двенадцать работ юбиляра посвящены разным вопросам диофантова анализа. В статье [10] получено общее решение уравнения $x^3+y^3=u^3+v^3$ в рациональных числах поля $K(\varepsilon)=\{a+b\varepsilon\colon\ a, b\in \mathbf{Q},\ \ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0\}$. В статье [20] положительно решена проблема Серпинского о бесконечности числа натуральных решений уравнения $x^3+y^3+z^3-t^3=1$. В статье [49] доказывается бесконечность числа нетривиальных решений каждого из уравнений $x^4+y^4-z^2=1$ и $x^4-y^4+z^2=-1$.

Из других работ по теории чисел укажем на статью [12], в которой дан конструктивный алгоритм для разложения в цепную дробь любого рационального числа чисто кубического поля, т. е. числа вида $a+bk^{1/3}+ck^{2/3}$, где $k\neq n^3$ и $a, b, c\in\mathbf{Q}$.

Совместно с Л. Кивистиком составлен учебник по теории чисел [43], содержащий, кроме традиционного материала, еще две главы, посвященные детальному изучению теории цепных дробей, алгебраическим и трансцендентным числам, а также аддитивной теории чисел. Учебник содержит разнообразные упражнения по всем разделам рассматриваемого материала.

В публикациях [18, 23, 44, 51] решаются различные задачи геометрии тетраэдра, в частности, вычисление объема по данным линейным элементам (медианам, бимедианам и т. д.).

Статьи [14, 21, 26, 34] посвящены вычислительной математике. В работе [21] дан эффективный метод решения алгебраических уравнений, в [34] выведена формула

$$\frac{\pi}{4}=44\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}-12\arctan\frac{1}{682}+24\arctan\frac{1}{12943},$$

приводящая к весьма быстро сходящимся рядам для вычисления числа π.

Наконец, отметим две работы по математическому анализу. В [24] введена новая постоянная

$$\lambda=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}x^2\ln\tan x\,dx,$$

через которую выражается весьма большой класс интегралов, применяемых в механике (в статье указано 56 таких интегралов). В работе [45] дан общий метод для вычисления целого ряда величин и функций, широко применяемых в исчислении конечных разностей. В явном виде даны выражения для производных гамма-функции, чисел Стирлинга, многочленов Бернулли, чисел и многочленов Эйлера и т. д.

Многосторонность Я. Габовича в научной работе отражалась и на его лекциях. Мы, будучи студентами, имели возможность слушать его интересные лекции по математическому анализу и теории чисел, переплетенные юмористическими моментами и неожиданными ситуациями. Все это делало его лекции захватывающими и надолго запоминающимися. Мы восхищались его умением разъяснять трудный материал доступно шуточными выпадами и манерами, чем он прививал нам всем интерес к изучаемому предмету.

Юбиляр очень любит и хорошо знает художественную литературу. Одна его статья [29] даже посвящена истории литературы. Он отличный шахматист, составитель шахматных задач. Он неоднократно принимал участие в шахматном первенстве городов Европы по переписке. Если мы добавим, что он еще и музыкант, компонирующий и хорошо играющий на всех инструментах, то и тогда мы еще не перечислили всех его умений и интересов.

Вместе со всеми математиками ЭССР поздравляем доцента Я. Габовича со знаменательной датой и пожелаем хорошего здоровья и дальнейших успехов в его многогранной деятельности.

С. Барон, Ю. Каазик, Э. Реймерс

Труды Я. Габовича

1. The Densities of Visual Binary Stars. Publ. Obs. Tartu, 1935, **28,** № 3, 1—16 (соавт. Э. Эпик).
2. The *TiO* Colour Effect, and the Densities of *M* Stars. Publ. Obs. Tartu, 1936, **28,** № 5, 1—25.
3. The Pulsation Theory of Mira Ceti. Publ. Obs. Tartu, 1936, **29,** № 3, 1—28.
4. On the Empirical Mass — Luminosity Relation. Publ. Obs. Tartu, 1938, **30,** № 1, 3—7.
5. On the Orientation of the Orbital Planes in Multiple Systems. Publ. Obs. Tartu, 1938, **30,** № 1, 8—10.
6. On the Mass Ratio of Spectroscopic Binaries with One Spectrum Visible. Publ. Obs. Tartu, 1938, **30,** № 1, 11—12.
7. On the Orientation of the Orbital Planes in the Multiple System 6 Trianguli. Publ. Obs. Tartu, 1941, **30,** № 7, 3—4.
8. Multiple Stars and Equipartition of Energy. Publ. Obs. Tartu, 1941, **30,** № 7, 5—14 (соавт. Э. Эпик и В. Рийвес).
9. Периодические непрерывные дроби высших иррациональностей. Диссертация. Тарту, 1950, **82** стр.
10. Ühest üldisest meetodist diofantiliste võrrandite lahendamiseks. Loodus ja matemaatika, 1959, **1**, 123—133.
11. О вычислении некоторых механических величин. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, 11, 159—170.
12. О разложении в непрерывную дробь некоторых кубических иррациональностей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, 11, 171—177.
13. О построении параболы. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 178—183.
14. Polünoomi ratsionaalsete ruuttegurite leidmisest. Loodus ja matemaatika, 1960, **2**, 114—123.
15. О связи между методом матриц и цепными дробями. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22,** 119—139 (соавт. А. Хованский).
16. Решение диофантовых уравнений методом определителей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22,** 140—165.
17. Миндинг и его вклад в теорию цепных дробей. Наука в Прибалтике в 19-м веке. Рига, 1962, 52—55 (соавт. А. Хованский).
18. О вычислении объема тетраэдра по данным ребрам. Матем. в школе, 1963, № 6, 58.
19. Horneri skeem. Matemaatika, **1**, Tallinn, 1963, 31—47.
20. O rozwiazaniach rownania $x^3+y^3+z^3-t^3=1$ w liczbach naturalnych. Wiadom. math., 1963, **7**, 63—64.

21. О приближенном решении алгебраических уравнений. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 118—125 (соавт. Э. Тамме).
22. О суммировании арифметико-геометрических рядов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 126—135.
23. Объем тетраэдра как функция некоторых его элементов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 136—146.
24. Таблица некоторых новых определенных интегралов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 147—170.
25. О степени алгебраического числа. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 82—87.
26. О вычислении квадратных корней с помощью одночленно-периодических цепных дробей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 88—96.
27. Об одном кубическом диофантовом уравнении. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., **31**, 97—103.
28. Об одной задаче Ю. Нута и ее обобщениях. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 104—110.
29. О некоторых примечаниях, комментариях и утверждениях. Русская Литература, 1964, № 2, 168—169.
30. Trigonomeetriliste funktsioonide täpsete väärtuste arvutamisest. Matem. ja kaasaeg, 1964, **2**, 59—63.
31. Veidi kolmnurga aritmeetikat. Matem. ja kaasaeg, 1964. **5**, 57—66.
32. Hüperbooli konstrueerimisest. Matemaatika, **2**, Tallinn, 1964, 74—80.
33. О некоторых диофантовых уравнениях с арккотангенсами. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 103—116.
34. О вычислении арктангенсов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 117—126.
35. Matemaatilise terminoloogia probleeme. Matem. ja kaasaeg, 1964, **6**, 89—90.
36. Euleri probleem. Matem. ja kaasaeg, 1964, **8**, 77—81.
37. Erinurksed kolmnurgad. Matem. ja kaasaeg, 1965, **9**, **58—62** (kaasautor S. Zetel).
38. Малый эстонско-русский и русско-эстонский математический словарь. Тарту, 1965, 92 стр. (соавт. Х. Эспенберг и др.).
39. Об арифметических прогрессиях с равными произведениями членов. Colloq. math., 1966, **15**, № 1, 45—48.
40. Об отображениях Пеано. Colloq. math., 1966, **15**, № 2, 199 (соавт., Г. Бровкин).
41. О двух последовательностях интегралов, связанных с числами Стирлинга. Publikacije Univerziteta u Beogradu, 1966, № 161, 15—16.
42. Primitiivsed automediaansed kolmnurgad. Matem. ja kaasaeg, 1966, **10**, 57—59.
43. Arvuteooria. Tartu, 1968, 228 lk. (kaasautor L. Kivistik).
44. Три задачи на вычисление объема тетраэдра. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 98—103 (соавт. Х. Эспенберг).
45. О высших производных функции, логарифмическая производная которой задана. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 223—232.
46. Murdjooned. Matem. ja kaasaeg, 1972, **18**, 81—95 (kaasautor H. Espenberg).
47. Arv π. Matem. ja kaasaeg, 1973, **19**, 106—116.
48. Arvuteooria (teine, ümbertöötatud trükk). Tartu, 1974, 320 lk. (kaasautor L. Kivistik).
49. Два диофантовых уравнения четвертой степени. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 28—32.
50. Kolme kuubi summa. Matem. ja kaasaeg, 1975, **20**, 13—16 (kaasautor H. Kilov).
51. Ratsionaalsed tetraeedrid. Matem. ja kaasaeg, 1975, **20**, 81—90 (kaasautor H. Kilov).
52. Частные решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Настоящий сборник, стр. 20—26.

СЕМАНТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ФОРМУЛ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

В данной статье исследуется логика, подобная интуиционистской, только с той разницей, что формулы могут быть бесконечными. При этом применяют модели, похожие на модели Крипке и Бета в [3].

В [1] определена обобщенная модель Бета. Она играет роль таблиц истинности для бесконечных формул, причем интерпретация берется в псевдобулевых алгебрах. Однако, оказывается, что среди достаточно мощных формул существуют такие, которые тождественно истинны во всех обобщенных моделях Бета, но не во всех псевдобулевых алгебрах. Рассмотрим, например, формулу

$$\bigwedge_{\iota\in C}(X'_\iota \vee X''_\iota)\to \bigvee_{A\in J}\bigvee_{f\in 2^A}\left(\bigwedge_{\iota\in A} X_\iota^{f(\iota)}\right),$$

где C — множество мощности континуума, J — множество всех счетных подмножеств множества C, а 2^A — множество функций $f: A\to\{\mathrm{I},\mathrm{II}\}$. Эта формула не тождественно истинна во всех псевдобулевых алгебрах. Контрпримером является, например, псевдобулева алгебра всех открытых множеств в пространстве функций вещественной переменной в топологии поточечной сходимости.

Но во всех обобщенных моделях Бета эта формула тождественно истинна. Действительно, пусть в некотором аспекте α_0 все дизъюнкции $X'_\iota \vee X''_\iota$ истинны. Пусть ξ — произвольная цепь, содержащая α_0. Тогда для каждого $\iota\in C$ цепь ξ содержит аспект α_ι такой, что или X'_ι, или X''_ι, или оба в нем истинны. Но так как множество C имеет мощность континуума, то не может быть, что для каждого $\alpha\in\xi$ неравенство $\alpha_\iota\leqslant\alpha$ имеет место только для конечного числа значений индекса ι. Однако, если некоторому $\alpha\in\xi$ предшествуют бесконечно много аспектов α_ι, то существует $A\in J$, такое, что для каждого $\iota\in A$ в α имеет место либо X'_ι, либо X''_ι. Но тогда при некотором $f\in 2^A$ истинно $\bigwedge_{\iota\in A} X_\iota^{f(\iota)}$. Это доказывает, что в α_0 истинно $\bigvee_{A\in J}\bigvee_{f\in 2^A}\left(\bigwedge_{\iota\in A} X_\iota^{f(\iota)}\right)$.

Теперь поставим себе целью построить модель, в которой не было бы тавтологий такого типа. Выше мы видели, что тавтология здесь возникает из-за того, что в любой цепи ξ, проходящей через α_0, должны реализоваться все дизъюнкции, имеющие место в α_0. Положение изменилось бы, если для каждой дизъюнкции имелась бы специальная группа цепей. С другой стороны, если J содержит хотя бы одно конечное множество, то формула должна остаться тавтологичной, так как в этом случае она тавтологична и во всех псевдобулевых алгебрах. Из этого вытекает, что если $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$, то в α_1 имеют место все дизъюнкции, которые имеют место в α_0. Исходя из этих соображений, мы и определим новую семантическую модель, включая в определение и аналог условия, существующего в определении обобщенной модели Бета и обеспечивающего равносильность одночленной дизъюнкции с ее единственным членом.

В двух следующих параграфах исследуются некоторые специальные виды частично упорядоченных множеств, необходимые для дальнейших конструкций.

§ 2. Семантическая структура

Будем называть *семантической структурой* структуру, полученную следующим образом:

а) Задано некоторое частично упорядоченное множество M, элементы которого будем называть *аспектами.* Если для $\alpha, \beta \in M$ имеет место $\alpha < \beta$, то будем говорить, что α *абстрактнее* β, а β *конкретнее* α или что β является *конкретизацией* α.

б) Каждому $\alpha \in M$ поставлено в соответствие некоторое непустое множество m_α таким образом, что при $\alpha \neq \beta$ имеет место $m_\alpha \cap m_\beta = \varnothing$. Элементы любого из множеств m_α будем называть *направлениями.*

в) Каждому направлению q из множества m_α поставлено в соответствие некоторое — может быть, пустое — множество N_q таких аспектов β, при которых имеет место $\alpha < \beta$, т. е. $N_q \subseteq \subseteq \{\beta : \alpha < \beta\}$. Элементы множества N_q будем называть *непосредственными конкретизациями* аспекта α в направлении q, хотя мы не требуем, чтобы они действительно непосредственно следовали аспекту α относительно порядка во множестве M. Отметим, что при $q \in m_\alpha$ и $p \in m_\beta$ множества N_q и N_p могут пересекаться и даже совпадать.

Выбором направлений для данной семантической структуры будем называть функцию Ω, ставящую каждому аспекту α в соответствие некоторое направление из множества m_α, т. е. $\Omega(\alpha) \in \in m_\alpha$ для каждого аспекта α.

Если Ω есть выбор направлений, то *цепью*, согласующейся с выбором Ω, будем называть множество аспектов $\xi \subseteq M$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) Множество ξ является вполне упорядоченным подмножеством множества M.

б) Если β непосредственно следует за α во множестве ξ, то β является непосредственной конкретизацией α в направлении $\Omega(\alpha)$.

в) Если $\beta \in \xi$ не имеет во множестве ξ непосредственного предшественника, но не является и первым элементом множества ξ, то $\beta = \sup \{\alpha : \alpha \in \xi, \alpha < \beta\}$, где sup берется в смысле множества M.

г) Не существует множества $\eta \subseteq M$, удовлетворяющего требованиям а), б) и в), такого, что $\xi = \{\alpha : \alpha \in \eta, \alpha < \beta\}$ при некотором $\beta \in \eta$, т. е. такого, что ξ является начальным отрезком для η.

Тот факт, что цепь ξ согласуется с выбором Ω, будем обозначать через $\xi \sim \Omega$.

В случае, если выполнены условия а), б) и в), мы будем говорить о предцепи, согласованной с Ω.

Мы будем говорить, что множество $A \subseteq M$ *исчерпывает* аспект α, если существует такой выбор направленный Ω, что для любой цепи ξ, согласующейся с Ω и начинающейся с α, выполнено условие (π):

(π): *цепь ξ содержит такой аспект β, что $\beta \geqslant \gamma$ при некотором $\gamma \in A$.*

В этом случае будем говорить, что выбор Ω *реализует исчерпаемость* аспекта α множеством A.

Будем называть семантическую структуру *правильной*, если выполнены следующие условия:

1) Каждое вполне упорядоченное и ограниченное сверху подмножество множества аспектов M имеет верхнюю грань.

2) Если для аспектов α и β имеет место $\alpha \leqslant \beta$, то существуют выбор направлений Ω и цепь ξ такие, что $\xi \sim \Omega$, причем ξ начинается с α и $\beta \in \xi$.

3) Если $A = \{\alpha\}$, т. е. A — одноэлементное множество, то А исчерпывает только такие аспекты β, при которых $\alpha \leqslant \beta$.

4) Если $\alpha \leqslant \beta$ и A исчерпывает α, то A исчерпывает β.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правильные семантические структуры.

Пусть Ω — некоторый выбор направлений в некоторой правильной семантической структуре. Пусть ξ — предцепь, согласованная с выбором Ω. Поставим вопрос: существует ли цепь, согласующаяся с Ω и являющаяся продолжением для ξ, т. е. такая, что ξ является ее начальным отрезком.

Рассмотрим все предцепи η, согласованные с Ω и являющиеся продолжением для ξ. Их можно частично упорядочить так:

$\eta_1 < \eta_2$ будет означать, что η_2 есть продолжение для η_1. Тогда условия леммы Цорна будут выполнены и среди множеств η существует максимальное, которое является поэтому цепью.

Итак, доказана

Лемма 1. *Если Ω есть выбор направлений и ξ есть предцепь, согласованная с Ω, то ξ можно продолжить до цепи, согласующейся с Ω.*

В частном случае, беря в роли ξ одноэлементное множество $\{\alpha\}$, которое, очевидно, всегда является предцепью, получим

Следствие. *Для каждого выбора направлений Ω и аспекта α существует цепь, начинающаяся с α и согласующаяся с Ω.*

Из условия 1) определения правильности семантической структуры следует, что если цепь не имеет последнего аспекта, то она сверху не ограничена. В случае, когда цепь имеет последний аспект β, то β не имеет непосредственных конкретизаций в направлении $\Omega(\beta)$.

Непосредственно ясно, что если Ω_1 и Ω_2 — выборы направлений и ξ — такая цепь, что $\xi \sim \Omega_1$, а для каждого $\alpha \in \xi$ имеет место $\Omega_1(\alpha) = \Omega_2(\alpha)$, то $\xi \sim \Omega_2$.

Пусть α — некоторый аспект и Ω — некоторый выбор направлений. Рассмотрим все такие цепи ξ, начинающиеся с α, при которых $\xi \sim \Omega$. Пусть Ω_1 — такой выбор направлений, что для каждого аспекта β, принадлежащего некоторой из указанных цепей ξ, имеет место $\Omega(\beta) = \Omega_1(\beta)$. Ввиду сказанного выше, имеет место $\xi \sim \Omega_1$ для всех указанных цепей ξ. Возникает вопрос: существует ли еще некоторая цепь $\eta \sim \Omega_1$, начинающаяся с α, но не согласующаяся с Ω. Если такая цепь η существует, то для η и Ω не выполнено хоть одно из требований б) и г) из определения согласованности, так как только эти требования зависят от Ω.

Пусть не выполнено требование б). Тогда в η существует первый такой аспект β, которому в η следует аспект γ, не являющийся непосредственной конкретизацией аспекта β в направлении $\Omega(\beta)$. Но тогда часть цепи η до аспекта β включительно является предцепью, согласованной с Ω, и по лемме 1 является начальным отрезком некоторой цепи, согласующейся с Ω. Поэтому $\Omega(\beta) = \Omega_1(\beta)$. Из $\eta \sim \Omega_1$ получим, что γ есть непосредственная конкретизация для β в направлении $\Omega_1(\beta)$, а значит, и в направлении $\Omega(\beta)$, что приводит к противоречию.

В случае, когда не выполнено только требование г), по лемме 1 вся цепь η является начальным отрезком некоторой цепи, согласующейся с Ω. Но в этом случае на η выборы Ω и Ω_1 совпадают, и, так как $\eta \sim \Omega_1$, то должно иметь место и $\eta \sim \Omega$, что противоречит предположению. Значит, имеет место

Лемма 2. *Множество цепей, начинающихся с α, не изменится, если выбор Ω заменить на выбор Ω_1, совпадающей с Ω на цепях, начинающихся с α и согласующихся с Ω.*

§ 3. Выбор направлений, стремящийся к множеству

Пусть A — некоторое множество аспектов в некоторой семантической структуре. Пусть аспект α исчерпывается множеством A. Значит, существует и выбор направлений, реализующий эту исчерпаемость. Если α_1 есть некоторый другой аспект, исчерпаемый множеством A, то эту исчерпаемость реализует, наверно, некоторый другой выбор направлений. Можно ли найти выбор, реализующий обе эти исчерпаемости. Дальше можно аналогичным образом поставить вопрос об одновременной реализуемости любого множества исчерпаемостей. Ключ к решению этой проблемы дает нам лемма 2. Из нее следует, что для реализации исчерпаемости аспекта α важно только поведение выбора на некоторой части семантической структуры. Это ведет нас к понятию *частичного выбора направлений.*

Определение частичного выбора направлений аналогично определению выбора направлений. Разница только в том, что частичный выбор Ω может быть определен не на множестве всех аспектов M, а на некоторой части его. Конечно, каждый частичный выбор можно продолжить до выбора направлений.

Будем говорить, что частичный выбор Ω *определяет* цепи, начинающиеся с α, если для каждого (достаточно, если для некоторого) выбора направлений Ω', являющегося его продолжением, область определения частичного выбора Ω содержит все цепи, начинающиеся с α и согласующиеся с Ω'. Из предыдущего следует, что множество цепей, начинающихся с α и согласующихся с продолжением частичного выбора Ω, не зависит в этом случае от способа продолжения этого частичного выбора. Поэтому, если A есть некоторое множество аспектов и некоторое продолжение частичного выбора Ω реализует исчерпаемость аспекта α множеством A, то все продолжения Ω реализуют ее. Поэтому о частичном выборе, определяющем цепи, начинающиеся с α, мы будем говорить, что он *реализует исчерпаемость* аспекта α множеством A, если эту исчерпаемость реализуют его продолжения.

Пусть A есть некоторое множество аспектов в некоторой семантической структуре.

Рассмотрим частичные выборы направлений, имеющие следующие свойства:

1) Если некоторый аспект α принадлежит области определения данного частичного выбора, то этот выбор определяет цепи, начинающиеся с α.

2) Если некоторый аспект α принадлежит области определения данного частичного выбора и α исчерпается множеством A, то данный частичный выбор реализует эту исчерпаемость.

Множество всех частичных выборов такого рода мы упорядочим так, что за каждым частичным выбором следуют его продолжения. Тогда предположения леммы Цорна будут выполнены и, следовательно, существует некоторый максимальный выбор Ω с указанными свойствами. Пусть область определения выбора Ω будет B.

Поставим вопрос, может ли множество A исчерпывать некоторый $\alpha \notin B$. Предположим, что такой α существует. Тогда существует выбор направлений Ω_1, реализующий эту исчерпаемость. Определим частичный выбор Ω', областью определения B_1 которого будет объединение множества B и всех цепей, начинающихся с α и согласующихся с Ω_1. Частичный выбор Ω' определим так, что на B он совпадает с Ω, а на $B_1 \setminus B$ с Ω_1.

Проверим выполненность условий 1) и 2) для частичного выбора Ω'. Если $\beta \in B$, то для такого β условия 1) и 2) выполнены, так как Ω' есть продолжение выбора Ω. Пусть $\beta \in B_1 \setminus B$. Тогда существует цепь ξ с $\xi \sim \Omega_1$, начинающаяся с α и содержащая β. В этом случае ввиду $\alpha \leqslant \beta$ аспект β исчерпывается множеством A. Рассмотрим произвольную цепь η, начинающуюся с β и согласующуюся с некоторым продолжением частичного выбора Ω'. Различаем два случая: η либо не пересекается с B, либо пересекается с B.

Рассмотрим первый случай. Если η не содержится в B_1 и γ есть первый элемент цепи η, не принадлежащий множеству B_1, то отрезок цепи η от β до γ включительно можно по лемме 1 продолжить до цепи, согласующейся с Ω_1, что противоречит определению B_1. Следовательно, такого γ не существует, цепь η целиком содержится в B_1, и, значит, условие 1) для такого η выполнено. Кроме того, на η выбор Ω' совпадает с Ω_1 и поэтому $\eta \sim \Omega_1$. Если к началу цепи прибавить отрезок цепи ξ от α до β, то полученная цепь η_1 тоже согласуется с Ω_1. А так как Ω_1 реализует исчерпаемость аспекта α множеством A, то цепь η_1, а, значит, и η, содержат аспект γ, который следует за некоторым элементом множества A. Следовательно, η удовлетворяет условие (π) из определения исчерпаемости аспекта β множеством A.

Рассмотрим второй случай. Пусть γ есть первый элемент цепи η, принадлежащий множеству B. Тогда часть цепи η, начинающаяся с γ, содержится в B, так как эта часть есть цепь, начинающаяся с $\gamma \in B$ и согласующаяся с некоторым продолжением частичного выбора Ω. Как и в первом случае цепь η не может до элемента γ содержать элемента вне множества B_1. Значит, условие 1) и теперь выполнено. Кроме того, так как $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то A исчерпает и γ, и, так как Ω реализует эту исчерпаемость, то часть цепи η, начинающаяся с γ, имеет элемент, следующий за некоторым элементом множества A, т. е. и теперь η удовлетворяет условию (π) из определения исчерпаемости аспекта β множеством A. Таким образом, мы видели, что частичный выбор Ω' тоже обладает свойствами 1) и 2), но из-за $\alpha \in B_1 \setminus B$ выбор Ω' является собственным продолжением выбора Ω, что противоречит максимальности выбора Ω. Следовательно, вне множества B не может быть аспектов, исчерпываемых множеством A. Но если вне множества B каждый аспект является неисчерпываемым множеством A, то произвольное продолжение выбора Ω, определенное на множестве всех аспектов, имеет свойства 1) и 2). Следовательно, из максимальности выбора Ω следует, что B совпадает с множеством всех аспектов, т. е. Ω оказывается не частичным, а просто выбором направлений.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для каждого множества аспектов A существует выбор направлений, реализующий исчерпаемость множеством A всех тех аспектов, которые исчерпываемы множеством A.*

О выборе Ω с описанным в теореме 1 свойством мы будем говорить, что *Ω стремится к A*, и обозначать это $\Omega \Rightarrow A$. Отметим, что выбор может стремиться к нескольким множествам, также и к множеству могут стремиться несколько выборов.

§ 4. Значения истинности

Подмножество A множества всех аспектов некоторой семантической структуры будем называть *значением истинности*, если A исчерпывает только (а значит, в точности) те аспекты, которые принадлежат A.

Если $\alpha \in A$, где A — значение истинности, и $\alpha \leqslant \beta$, то β исчерпывается множеством A и поэтому $\beta \in A$. Следовательно, каждое значение истинности имеет т. н. *свойство монотонности*: вместе с каждым своим элементом оно содержит и все следующие аспекты.

Пусть α есть некоторый аспект и $A = \{\beta\colon\ \beta \geqslant \alpha\}$. Тогда множеством A исчерпываются в точности те аспекты, которые исчерпываются одноэлементным множеством $\{\alpha\}$, а по условию 3) в определении правильности семантической структуры множеством $\{\alpha\}$ исчерпываются только элементы множества A. Значит, A является значением истинности. Но не всякое значение истинности имеет такой вид. Значениями истинности являются, например, и пустое множество и множество всех аспектов. В некоторой семантической структуре, где $\alpha \leqslant \beta$ равносильно $\alpha = \beta$, значениями истинности являются все подмножества множества всех аспектов.

Для каждого подмножества A множества всех аспектов обозначим через $[A]$ множество всех аспектов, исчерпываемых множеством A. Непосредственно ясно, что $A \subseteq [A]$ при каждом A и из $A \subseteq B$ вытекает $[A] \subseteq [B]$. Из-за условия 4) определения правильности множество $[A]$ имеет свойство монотонности. По определению, A является значением истинности в точности тогда, когда $[A] = A$.

Исследуем множество $[[A]]$, где A — некоторое множество аспектов. Пусть $\alpha \in [[A]]$, т. е. α исчерпывается множеством $[A]$. Пусть Ω — выбор направлений, реализующий эту исчерпаемость, а Ω_0 — выбор направлений, стемящийся к A. Пусть Ω' — выбор направлений, совпадающий с выбором Ω_0 на множестве $[A]$ и с выбором Ω на дополнении множества $[A]$. Пусть ξ — произвольная цепь, начинающаяся с α и согласующаяся с Ω'. Если предположить, что ξ не пересекается с $[A]$, то на ξ выборы Ω и Ω' совпадают и, следовательно, $\xi \sim \Omega$. Но так как Ω реализует исчерпаемость аспекта α множеством $[A]$, то в этом случае из-за свойства монотонности множества $[A]$ цепь ξ должна пересекаться с $[A]$, что приводит к противоречию. Следовательно, существует первый элемент β пересечения цепи ξ с множеством $[A]$. Но часть цепи ξ, начиная с β, находится целиком в $[A]$ и поэтому на этой части выборы Ω' и Ω_0 совпадают. Значит, эта часть является цепью, начинающейся с β и согласующейся с Ω_0. Но так как β исчерпывается множеством A и $\Omega_0 \Rightarrow A$, то Ω_0 реализует эту исчерпаемость и ξ должна содержать некоторый аспект γ, следующий некоторому элементу множества A. Но это значит, что Ω' реализует исчерпаемость аспекта α множеством A, и, следовательно, $\alpha \in [A]$. Таким образом, мы доказали, что $[[A]] \subseteq [A]$. Так как обратное включение тривиально, то $[[A]] = [A]$, т. е. имеет место

Теорема 2. *Для всякого множества A множество $[A]$ является значением истинности.*

Замечание. Если X есть некоторое значение истинности, содержащее множество аспектов A, то каждый $\alpha \in [A]$ исчерпывается также множеством X и поэтому $\alpha \in X$. Значит, $[A] \subseteq X$, т. е. $[A]$ есть наименьшее значение истинности, содержащее A. Его будем называть значением истинности, *порожденным* множеством A. Непосредственно видно, что если A пробегает совокупность всех подмножеств множества всех аспектов данной семантической структуры, то $[A]$ пробегает совокупность всех значений истинности.

Значения истинности частично упорядочены по включению. Обозначим их включение знаком $\leqslant$. Наибольшее из них — множество всех аспектов, а наименьшее — пустое множество.

Пусть $\{A_\iota : \iota \in I\}$ — некоторая совокупность значений истинности. Пусть $A = \bigcap_\iota A_\iota$. Исследуем множество $[A]$. Если $\alpha \in [A]$, то α исчерпывается множеством A и, следовательно, произвольным из множеств A_ι. Но так как множества A_ι — значения истинности, то $\alpha \in A_\iota$ при каждом $\iota \in I$ и, следовательно, $\alpha \in A$, т. е. $[A] = A$ и A является значением истинности. Значение истинности $\bigcap_\iota A_\iota$ обозначается через $\bigwedge_\iota A_\iota$. Оно является нижней гранью значений истинности A_ι, $\iota \in I$.

Через $\bigvee_\iota A_\iota$ будем обозначать значение истинности $[\bigcup_\iota A_\iota]$. Оно является верхней гранью значений истинности A_ι, $\iota \in I$.

Пусть A и B — значения истинности. Определим множество аспектов $A \to B$ следующим образом: $\alpha \in A \to B$, если каждый аспект $\beta \geqslant \alpha$, принадлежащий A, принадлежит и B. Проверим, является ли $A \to B$ значением истинности.

Пусть некоторый аспект α не принадлежит $A \to B$. Тогда существует $\beta \geqslant \alpha$ такой, что $\beta \in A \setminus B$. Может ли множество $A \to B$ исчерпывать α? Если да, то оно исчерпывает и β. Пусть Ω — выбор направлений, реализующий исчерпаемость аспекта β множеством $A \to B$. Так как $\beta \notin B$ и B — значение истинности, то B не исчерпывает β. Значит, существует цепь $\xi \sim \Omega$, начинающаяся с β и не пересекающаяся с B. Так как $\beta \in A$, то цепь ξ целиком содержится в A ввиду свойства монотонности множества A. Поэтому для каждого $\gamma \in \xi$ имеет место $\gamma \in A \setminus B$ и поэтому $\gamma \notin A \to B$. Но в этом случае ξ есть цепь, начинающаяся с β, согласующаяся с Ω и не пересекающаяся с множеством $A \to B$, что противоречит определению выбора Ω. Следовательно, α не исчерпывается множеством $A \to B$ и последнее является значением истинности.

Если некоторый аспект α принадлежит множеству $A \wedge (A \to B)$, то $\alpha \in A$ и $\alpha \in A \to B$, а, так как $\alpha \leqslant \alpha$, то $\alpha \in B$. Значит, $A \wedge (A \to B) \leqslant B$.

Пусть X — такое значение истинности, что $X \wedge A \leqslant B$. Пусть $\alpha \in X$. Если $\beta \geqslant \alpha$, то $\beta \in X$. Если, кроме того, $\beta \in A$, то $\beta \in X \wedge A$, и, следовательно, $\beta \in B$. Значит, каждый $\beta \geqslant \alpha$, принадлежащий A, принадлежит и B, т. е. $\alpha \in A \to B$. Таким образом, мы доказали, что $X \leqslant A \to B$, т. е. $A \to B$ есть наибольшее из таких значений истинности X, при которых $X \wedge A \leqslant B$.

Из сказанного следует

Теорема 3. *Значения истинности образуют полную псевдобулеву алгебру.*

Значения истинности $\neg A$ и $A \leftrightarrow B$ определим также, как в [1], стр. 4.

Рассмотрим семантическую структуру, имеющую такой выбор направлений Ω, что каждая цепь, согласующаяся с Ω, оканчивается аспектом, не имеющим других конкретизаций, кроме самого себя. Пусть A — произвольное значение истинности данной семантической структуры. Если α — произвольный аспект, то образуем все цепи, начинающиеся с α и согласующиеся с Ω. Концевой аспект каждого из этих цепей принадлежит или A, или $\neg A$, значит, принадлежит $A \vee \neg A$. Следовательно, $A \vee \neg A$ исчерпывает α и поэтому $\alpha \in A \vee \neg A$. Итак, $A \vee \neg A$ есть множество всех аспектов, т. е. наибольшее значение истинности. Из этого следует, что значения истинности такой семантической структуры образуют булеву алгебру. В частном случае это имеет место для любой конечной семантической структуры.

§ 5. Интерпретирование формул

Понятия сигнатуры, типа и формулы определяются как в [2]. Понятие семантической модели, обобщающее понятие обобщенной модели Бета из [1], тем более модели Бета из [3], определяется следующим образом:

1) Задана правильная семантическая структура M.

2) Для каждого аспекта α из M и типа a'' задан класс $\mathsf{O}(\alpha, a'')$, элементы которого будем называть объектами. При этом требуется, что если при некотором объекте a и типе a'' множество таких аспектов β, при которых $a \in \mathsf{O}(\beta, a'')$, исчерпает аспект α, то $a \in \mathsf{O}(\alpha, a'')$.

3) Если тип a'' имеет вид $\langle a''_\iota : \iota \in I\rangle$ и $a \in \mathsf{O}(\alpha, a'')$, то объекту a и аспекту α поставлен в соответствие класс $\mathsf{T}(\alpha, a)$ семейств вида $\langle a_\iota : \iota \in \mathrm{I}\rangle$, где $a_\iota \in \mathsf{O}(\alpha, a''_\iota)$ при каждом $\iota \in I$. При этом требуется, что если при некотором объекте a и семействе $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle$ множество таких аспектов β, при которых $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{T}(\beta, a)$, исчерпывает аспект α, то $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle \in$ $\in \mathsf{T}(\alpha, a)$.

4) Пусть тип a'' имеет вид $\langle a''_\iota : \iota \in I\rangle$, $a \in \mathsf{O}(\alpha, a'')$, а семейства объектов $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle$ и $\langle b_\iota : \iota \in I\rangle$ такие, что

а) при каждом $\iota \in I$ имеют место $a_\iota \in \mathsf{O}(\alpha, \ a''_\iota)$ и $b_\iota \in$ $\in \mathsf{O}(\alpha, a''_\iota)$;

б) если a''_ι — элементарный тип, то $a_\iota = b_\iota$;

в) если a''_ι неэлементарный тип, то $\mathsf{T}(\beta, a_\iota) = \mathsf{T}(\beta, b_\iota)$ при всех $\beta \geqslant \alpha$.

Требуется, чтобы в этих условиях принадлежности $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{T}(\alpha, a)$ и $\langle b_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{T}(\alpha, a)$ были бы равносильными.

Грубо говоря, $\mathsf{O}(\alpha, a'')$ есть класс объектов типа a'', существующих в аспекте α, а $\mathsf{T}(\alpha, a)$ есть область истинности предиката a в аспекте α.

Из данного определения следует, что для каждого объекта a множество таких аспектов α, при которых $a \in \mathsf{O}(\alpha, a'')$, есть значение истинности, что вытекает из пункта 2) определения модели. Это значение истинности будем называть *значением истинности существования* объекта a и его обозначим через a^*. Аналогично для объекта a и семейства объектов $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle$ будет по пункту 3) этого определения значением истинности множество таких аспектов α, при которых $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{T}(\alpha, a)$. Это значение истинности будем называть *значением истинности отношения* $a\langle a_\iota : \iota \in I\rangle$ и обозначать $a\langle a_\iota : \iota \in I\rangle^*$. При этом имеет место неравенство $a\langle a_\iota : \iota \in I\rangle^* \leqslant a^* \wedge (\bigwedge_\iota a^*_\iota)$. Наконец, имеет место

$$\bigwedge_{\iota \in I'} \bigwedge_{<x^\iota_\nu : \nu \in I_\iota>} (a_\iota \langle x^\iota_\nu : \nu \in I_\iota\rangle^* \leftrightarrow b_\iota \langle x^\iota_\nu : \nu \in I_\iota\rangle^*) \leqslant$$
$$\leqslant a \langle a_\iota : \iota \in I\rangle^* \leftrightarrow a \langle b_\iota : \iota \in I\rangle^*,$$

где I' есть множество тех $\iota \in I$, при которых a''_ι есть неэлементарный тип, а

$$\bigwedge_{<x'_\nu : \nu \in I_\iota>}$$

есть конъюнкция по всевозможным семействам объектов, при которых типом семейства будет a''_ι.

Как и в [2], определим интерпретацию как отображение класса констант в класс объектов, ставящее каждой константе a' типа a'' в соответствие некоторый объект $a = \varphi(a')$ такой, что $a \in \mathsf{O}(\alpha, a'')$ при всех аспектах α.

Теперь определим 0-*исчисление* в данной семантической модели таким образом, что для каждого аспекта α и каждой интерпретации φ указывается класс высказываний ранга 0, который мы будем обозначать через $\mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$. Принадлежность высказывания $\mathfrak{A}$ к $\mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ определяется индуктивно, предполагая, что для более простых высказываний эта принадлежность для всех φ и α уже определена. Грубо говоря, $\mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ есть класс высказываний, истинных в α при интерпретации φ.

Дадим индуктивное определение, соответствующее определению формулы из [2], состоящее из следующих семи этапов:

1) $P\langle\,\rangle \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда $\langle\,\rangle \in \mathsf{T}(\alpha, \varphi(P))$.

2) $\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда для каждого ι имеет место $\mathfrak{A}_\iota \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$.

3) $\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда α исчерпывается множеством таких аспектов β, при которых существует такой ι, что $\mathfrak{A}_\iota \in \mathsf{A}_0(\varphi, \beta)$.

4) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда для каждого $\beta \geqslant \alpha$, при котором $\mathfrak{A} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \beta)$, имеет место $\mathfrak{B} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \beta)$.

5) $\neg\mathfrak{A} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда $\mathfrak{A} \notin \mathsf{A}_0(\varphi, \beta)$ при всех $\beta \geqslant \alpha$.

6) $\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда $\mathfrak{A}' \in \mathsf{A}_0(\varphi', \beta)$ при каждом $\beta \geqslant \alpha$ и при всех продолжениях φ' интерпретации φ, где $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой переменных x'_ι на константы a'_ι соответствующих типов, не содержащихся в $\mathfrak{A}$, а φ' есть произвольное такое продолжение интерпретации φ, что $\varphi'(a'_\iota) \in \mathsf{O}(\beta, x''_\iota)$. Здесь x''_ι есть тип переменной x'_ι, а φ' рассматривается интерпретацией в модели, получаемой сужением аспектом β (см. [2]).

7) $\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A} \in \mathsf{A}_0(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда α исчерпывается множеством таких аспектов β, при которых существует такое продолжение φ' интерпретации φ, что $\mathfrak{A}' \in \mathsf{A}_0(\varphi', \beta)$. Здесь $\mathfrak{A}'$ и φ' понимаются так, как в предыдущем случае.

Семантическая модель называется 0-*нормальной*, если для каждой формулы $\mathfrak{A}$ типа a'' и ранга 0 и для каждого семейства объектов, типы a''_ι которых соответствуют типам констант формулы $\mathfrak{A}$, существует объект $a = \varphi(\mathfrak{A})$ со следующими свойствами:

1. объект a имеет тип a'';

2. объект a принадлежит классам $\mathsf{O}(\alpha, a'')$ при всех таких α, при которых объекты указанного семейства принадлежат соответствующим классам $\mathsf{O}(\alpha, a''_\iota)$;

3. Объект a таков, что $\mathfrak{A}' \in \mathsf{A}_0(\varphi', \alpha)$ в точности тогда, когда семейство значений φ' на прибавленных в $\mathfrak{A}'$ константах принадлежит $\mathsf{T}(\alpha, a)$.

Здесь опять $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой свободных переменных на константы, а φ' есть продолжение интерпретации φ, рассматриваемое как интерпретация в модели, суженной аспектом α, где φ есть интерпретация, ставящая константам формулы $\mathfrak{A}$ в соотвествие объекты указанного семейства.

Далее для 0-нормальных моделей определяется 1-*исчисление*, указывающее для каждого аспекта α и каждой интерпретации φ класс $\mathsf{A}_1(\varphi, \alpha)$, состоящий из высказываний ранга 0 и 1. Определение 1-исчисления аналогично определению 0-исчисления; единственной разницей является определение отношения $P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{A}_1(\varphi, \alpha)$, заменяющее пункт 1 и являющееся обобщением последнего: если a'_ι, $\iota \in I$, — термы ранга 0, то $P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{A}_1(\varphi, \alpha)$ в точности тогда, когда $\langle a_\iota : \iota \in I\rangle \in \in \mathsf{T}(\alpha, \varphi(P))$; здесь $a_\iota = \varphi(a'_\iota)$, если a'_ι — терм элементарного типа, а если $a'_\iota = \mathsf{d}\langle x'^{\iota}_{\nu} : \nu \in I_\iota\rangle \mathfrak{B}_\iota$, то в качестве a_ι надо взять объект $\varphi(\mathfrak{B}_\iota)$ в смысле определения 0-нормальности.

Пусть для всех $\mu' < \mu$ определены понятия μ'-исчисления и μ'-нормальности. Тогда μ-исчисление, указывающее классы $\mathsf{A}_\mu(\varphi, \alpha)$, определяется аналогично 1-исчислению, только отношение $P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle \in \mathsf{A}_\mu(\varphi, \alpha)$ определяется здесь для случая, когда ранги термов a'_ι, $\iota \in I$, меньше μ; определение этого отношения отличается от соответствующего определения для 1-исчисления только тем, что объекты $a_\iota = \varphi(\mathfrak{B}_\iota)$ для неэлементарных термов a'_ι выбираются соответственно μ_ι-нормальности, где $\mu_\iota < \mu$ есть ранг терма a'_ι. Понятие μ-нормальности определяется аналогично понятию 0-нормальности, применяя $\mathsf{A}_\mu(\varphi', \alpha)$ вместо $\mathsf{A}_0(\varphi', \alpha)$.

Семантическая модель, являющаяся μ-нормальной при всех ординалах μ, называется нормальной. Для нормальной модели при любом аспекте α и любой интерпретации φ существуют все классы $\mathsf{A}_\mu(\varphi, \alpha)$, отличающиеся друг от друга при увеличении μ только тем, что добавляются высказывания высших рангов. Теперь определим для нормальной модели *исчисление*, указывающее для каждого аспекта α и каждой интерпретации φ класс $\mathsf{A}(\varphi, \alpha)$, являющийся объединением классов $\mathsf{A}_\mu(\varphi, \alpha)$ по всем ординалам μ.

Для каждого высказывания $\mathfrak{A}$ и каждой интерпретации φ, как и в [2], доказывается, что множество тех аспектов α, при которых $\mathfrak{A} \in \mathsf{A}(\varphi, \alpha)$, является значением истинности. Имеют место аналоги свойств 2)—7), приведенных на стр. 18 из [2].

Литература

1. Таутс А., Связь обобщенных моделей Бета с топологическими псевдо-булевыми алгебрами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 3—8.
2. Таутс А., Семантическая интерпретация формул в обобщенных моделях Бета и в псевдо-булевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 9—20.
3. Schütte, K., Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Berlin—Heidelberg, 1968.

Поступило
15 XII 1973

SEMANTILINE MUDEL LÕPMATUTE VALEMITE JAOKS

A. Tauts

Resümee

Artiklis esitatakse mudel, millel on Kripke ja Bethi mudelitega võrreldes mõningaid paremusi lõpmatute valemite interpreteerimisel. Antud mudel on Bethi mudeli modifikatsioon, olles viimasest mõnevõrra keerulisem. Iga selline mudel määrab analoogiliselt Bethi mudeliga pseudo-Boole'i algebra. Analoogiliselt artiklis [2] antuga defineeritakse siin valemite interpretatsioon.

DAS SEMANTISCHE MODELL FÜR UNENDLICHE FORMELN

A. Tauts

Zusammenfassung

In dem Artikel wird ein Modell dargelegt, das im Vergleich mit dem Kripke-Modell und mit dem Beth-Modell den Vorzug hat, daß es in Beziehung auf unendliche Formeln den pseudo-Booleschen Algebren näher steht als die obengenannten Modelle. Dieses Modell ist eine Modifikation von dem Beth-Modell, wobei es etwas komplizierter ist als das Letztgenannte. Jedes solche Modell bestimmt analogisch dem Beth-Modell eine pseudo-Boolesche Algebra. Ebenso wie in dem Artikel [2] definiert man die Interpretation von Formeln.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $x^2+y^2+z^2=t^2$

Я. Габович

Эстонская сельскохозяйственная академия

1. Диофантово уравнение

$$x^2+y^2+z^2=t^2 \tag{1}$$

издавна привлекало внимание математиков в связи с его многочисленными приложениями (параллелепипеды с рациональными ребрами и диагональю; целочисленные точки на сфере; векторы, длина и координаты которых рациональны, и т. д.). Простой метод последовательного получения всех решений в натуральных числах уравнения (1) дан в книге В. Серпинского [3]. Табулированием *основных* решений уравнения (1) (т. е. решений во взаимно простых натуральных числах) занимались Ф. Штейгер [6] при $t<100$ и Ф. Микса [5] при $t\leqslant 207$.

В настоящей статье устанавливается связь между уравнением (1) и диофантовым уравнением

$$\arctan\frac{a}{s}=\arctan\frac{a}{v}+\arctan\frac{a}{w}, \tag{2}$$

где a — заданное натуральное число, причем каждому решению в натуральных числах s, v, w уравнения (2) соответствуют некоторые решения уравнения (1). Решения уравнения (2) в свою очередь оказываются тесно связанными с числами Фибоначчи и с подходящими дробями разложения в правильную цепную дробь числа $2^{1/2}$. Таким образом, удается установить некоторые частные решения уравнения (1), зависящие от вышеназванных числовых последовательностей.

2. Известно, что в любом основном решении уравнения (1) одно из чисел x, y, z нечетно, остальные два четны. Следовательно, t нечетно, и поэтому число $x-y-z+t$ будет всегда четным. Введем обозначение

$$x-y-z+t=2a,$$

откуда

$$t=y+z-x+2a. \tag{3}$$

Пусть

$$x=s+a,\quad y=v-a,\quad z=w-a. \tag{4}$$

Из (1), (3) и (4) следует, что

$$(s+a)^2+(v-a)^2+(w-a)^2=(v+w-s-a)^2. \tag{5}$$

После упрощений это уравнение принимает вид

$$s(v+w)=vw-a^2. \tag{6}$$

В силу натуральности чисел s, v, w левая (а значит и правая) часть равенства (6) положительна, откуда следует, что

$$\frac{a^2}{vw}<1. \tag{7}$$

При выполнении этого неравенства из (2) получаем

$$\arctan\frac{a}{s}=\arctan\frac{a(v+w)}{vw-a^2}.$$

Отсюда опять приходим к уравнению (6), и тем самым искомая связь между уравнениями (1) и (2) установлена.

Если вместо (3) и (4) принять

$$x=s-a, \quad y=v+a, \quad z=w+a, \quad t=y+z-x-2a, \tag{8}$$

то дальнейшие рассуждения, включая неравенство (7), остаются прежними, и мы приходим к тождеству

$$(s-a)^2+(v+a)^2+(w+a)^2=(v+w-s+a)^2. \tag{9}$$

Таким образом, каждому решению (s, v, w) уравнения (2) соответствует два решения уравнения (1), выражаемые тождествами (5) и (9). Эти тождества можно объединить в одно:

$$(s\pm a)^2+(v\mp a)^2+(w\mp a)^2=(v+w-s\mp a)^2. \tag{10}$$

3. В статье [2] рассматривалось диофантово уравнение

$$\arctan\frac{1}{s}=\arctan\frac{1}{v}+\arctan\frac{1}{w}, \tag{11}$$

т. е. уравнение (2) при $a=1$, причем были получены различные последовательности частных решений этого уравнения. Каждое из этих решений, как было выяснено в предыдущем пункте, приводит к двум решениям уравнения (1).

Таблица 1

x	y	z	t
$u_{2n}+1$	$u_{2n+1}-1$	$u_{2n+2}-1$	$2u_{2n+1}-1$
$u_{2n}-1$	$u_{2n+1}+1$	$u_{2n+2}+1$	$2u_{2n+1}+1$
$3\,u_{2n}u_{2n-1}$	$3\,u^2_{2n}-1$	$3\,u_{2n}u_{2n+1}$	$6u^2_{2n}+1$
$3\,u_{2n}u_{2n+1}$	$3\,u^2_{2n+1}+1$	$3\,u_{2n+1}u_{2n+2}$	$6u^2_{2n+1}-1$
$9\,u_{4n}+5$	$9\,u_{4n+1}+11$	$9\,u_{4n+2}-5$	$18u_{4n+1}+3$
$9\,u_{4n}+3$	$9\,u_{4n+1}+13$	$9\,u_{4n+2}-3$	$18u_{4n+1}+5$
$9\,u_{4n-2}-3$	$9\,u_{4n-1}-13$	$9\,u_{4n}+3$	$18u_{4n-1}-5$
$9\,u_{4n-2}-5$	$9\,u_{4n-1}-11$	$9\,u_{4n}+5$	$18u_{4n-1}-3$

В таблице 1 даны некоторые наиболее интересные решения уравнения (1), выведенные из теорем 1, 2 и 4 статьи [2] и связанные с числами Фибоначчи

$$u_0=0, \quad u_1=1, \quad u_{k+1}=u_k+u_{k-1} \quad (k\geqslant 1).$$

При выводе данных этой таблицы мы, кроме преобразований (3), (4) и (8), использовали некоторые известные свойства чисел Фибоначчи (см. [1] или [2]).

Полиномиального типа решения уравнения (1) можно получить, исходя из теоремы 5 статьи [2]. Некоторые из этих решений приведены в таблице 2.

Таблица 2

x	y	z	t
n^2+n	$2n^2+n+3$	$2n^2+3n+4$	$3n^2+3n+5$
n^2+n+2	$2n^2+n+1$	$2n^2+3n+2$	$3n^2+3n+3$
$2n^2+3n+2$	$3n^2+5n+6$	$6n^2+7n+9$	$7n^2+9n+11$
$2n^2+3n+4$	$3n^2+5n+4$	$6n^2+7n+7$	$7n^2+9n+9$
$6n^2+7n+7$	$10n^2+11n+14$	$15n^2+19n+22$	$19n^2+23n+27$
$6n^2+7n+9$	$10n^2+11n+12$	$15n^2+19n+20$	$19n^2+23n+25$
$15n^2+19n+20$	$24n^2+31n+35$	$40n^2+49n+56$	$49n^2+61n+69$
$15n^2+19n+22$	$24n^2+31n+33$	$40n^2+49n+54$	$49n^2+61n+67$

Каждое из решений этой таблицы может быть путем замены $n=a/b$ обобщено на двупараметрическое решение уравнения (1). Так, например, из третьего решения таблицы 2 указанным путем получаем

$$(2a^2+3ab+2b^2)^2+(3a^2+5ab+6b^2)^2+(6a^2+7ab+9b^2)^2=$$
$$=(7a^2+9ab+11b^2)^2.$$

Наконец, отметим решения уравнения (1), связанные с числителями P_k и знаменителями Q_k подходящих дробей разложения $2^{1/2}$ в правильную цепную дробь. Последовательности P_k и Q_k определяются, как известно, следующим образом ($k\geqslant 1$):

$$P_0=1, \quad P_1=3, \quad P_{k+1}=2P_k+P_{k-1},$$
$$Q_0=1, \quad Q_1=2, \quad Q_{k+1}=2Q_k+Q_{k-1}.$$

Из (10) и теоремы 9 статьи [4] легко вывести тождества

$$(P_{2n}\pm 1)^2+(Q_{2n+1}\mp 1)^2+(P_{2n+1}\mp 1)^2=(Q_{2n+2}-P_{2n}\mp 1)^2.$$

4. Перейдем к рассмотрению случая $a=2$, т. е. к вопросу о решениях диофантова уравнения

$$\operatorname{arctan}\frac{2}{s}=\operatorname{arctan}\frac{2}{v}+\operatorname{arctan}\frac{2}{w}, \tag{12}$$

равносильного, как мы видели, уравнению

$$s(v+w)=vw-4. \tag{13}$$

Можно установить шесть последовательностей решений уравнения (12); все они собраны нами в таблице 3. Для доказательства достаточно подставить данные этой таблицы в (13) и воспользоваться в первых трех случаях формулой Бинэ (см. [2], формула (21)), а в остальных случаях формулами (40) статьи [2].

Таблица 3

s	v	w
u_{2n}	$2u_{2n-1}$	$2u_{2n+2}$
$2u_{2n-2}$	u_{2n}	$2u_{2n+1}$
$u_{2n-2}+u_{2n}$	$2u_{2n}$	$2u_{2n-1}+2u_{2n+1}$
Q_{2n}	$2P_{2n-1}$	$2P_{2n+1}$
$2Q_{2n-1}$	Q_{2n}	$2Q_{2n+1}$
$P_{2n}+Q_{2n+1}$	$2Q_{2n+1}$	$2P_{2n+2}+2Q_{2n}$

Каждому решению таблицы 3 соответствует, как мы уже знаем, два решения уравнения (1). Таким образом, мы получаем двенадцать последовательностей частных решений уравнения (1), данных в таблице 4.

Таблица 4

x	y	z	t
$u_{2n}\pm 2$	$2u_{2n-1}\mp 2$	$2u_{2n+2}\mp 2$	$u_{2n+3}+2u_{2n-1}\mp 2$
$2u_{2n-2}\pm 2$	$u_{2n}\mp 2$	$2u_{2n+1}\mp 2$	$u_{2n+3}-2u_{2n-2}\mp 2$
$u_{2n-2}+u_{2n}\pm 2$	$2u_{2n}\mp 2$	$2u_{2n-1}+2u_{2n+1}\mp 2$	$3u_{2n-1}+2u_{2n+1}\mp 2$
$Q_{2n}\pm 2$	$2P_{2n-1}\mp 2$	$2P_{2n+1}\mp 2$	$7Q_{2n}\mp 2$
$2Q_{2n-1}\pm 2$	$Q_{2n}\mp 2$	$2Q_{2n+1}\mp 2$	$5Q_{2n}\mp 2$
$P_{2n}+Q_{2n+1}\pm 2$	$2Q_{2n+1}\mp 2$	$2P_{2n+2}+2Q_{2n}\mp 2$	$P_{2n+3}-Q_{2n-1}\mp 2$

5. Для получения дальнейших результатов воспользуемся следующим, доказанным Каталаном [4], свойством чисел Фибоначчи:

$$u_{m-k}u_{m+k}=u_m^2-(-1)^{m-k}u_k^2.$$

Если здесь принять $m=k+2n-1$, то получим

$$u_{2n-1}u_{2k+2n-1}=u_k+u_{k+2n-1}^2. \tag{14}$$

Рассмотрим диофантово уравнение

$$\operatorname{arctan}\frac{u_k}{s}=\operatorname{arctan}\frac{u_k}{v}+\operatorname{arctan}\frac{u_k}{w},$$

т. е. уравнение (2) при $a=u_k$. Докажем, что оно имеет решение

$$\begin{aligned} s&=u_{k+2n-1},\\ v&=u_{2n-1}+u_{k+2n-1},\\ w&=u_{k+2n-1}+u_{2k+2n-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Действительно, из этих равенств следует, что

$$u_{2n-1}=v-s, \qquad u_{2k+2n-1}=w-s.$$

Подставляя в (14), получаем

$$(v-s)(w-s)=a^2+s^2$$

или

$$s(v+w)=vw-a^2,$$

т. е. уравнение (6), равносильное уравнению (2).

Равенства (10) и (15) приводят к следующим любопытным тождествам:

$$(u_{k+2n-1}\pm u_k)^2+(u_{2n-1}+u_{k+2n-1}\mp u_k)^2+$$
$$+(u_{k+2n-1}+u_{2k+2n-1}\mp u_k)^2=$$
$$=(u_{2n-1}+u_{k+2n-1}+u_{2k+2n-1}\mp u_k)^2.$$

Особое внимание заслуживает случай $k=4$. В этом случае $a=3$, т. е. имеем уравнение

$$\operatorname{arctan}\frac{3}{s}=\operatorname{arctan}\frac{3}{v}+\operatorname{arctan}\frac{3}{w}$$

с решением

$$s=u_{2n+3}, \qquad v=u_{2n-1}+u_{2n+3}, \qquad w=u_{2n+3}+u_{2n+7}.$$

Этому решению легко придать вид

$$s=u_{2n+3}, \qquad v=3u_{2n+1}, \qquad w=3u_{2n+5} \tag{16}$$

что, кстати, приводит к тождеству

$$\operatorname{arccot} u_{2n+1}+\operatorname{arccot} u_{2n+5}=\operatorname{arccot}\frac{u_{2n+3}}{3},$$

Из (10) и (16) получаем следующие решения уравнения (1):

$$(u_{2n+3}\pm 3)^2+(3u_{2n+1}\mp 3)^2+(3u_{2n+5}\mp 3)^2=(8u_{2n+3}\mp 3)^2.$$

6. В заключение рассмотрим некоторые конечные и бесконечные ряды арккотангенсов, связанные с решениями уравнения (2). Вопрос о суммировании таких рядов был подробно разобран в статье [2], к которой и отсылаем читателя.

Поэтому ограничимся лишь приведением окончательных результатов:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\operatorname{arccot} u_{2k+1}=\operatorname{arccot} 3-(-1)^n\operatorname{arccot}(u_{2n+1}+u_{2n+3}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arccot}\frac{Q_{2k}}{2}=\operatorname{arccot} 2-\operatorname{arccot} Q_{2n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\operatorname{arccot}\frac{Q_{2k}}{2}=\operatorname{arccot} 3-(-1)^n\operatorname{arccot} P_{2n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\operatorname{arccot}\frac{u_{4k-1}}{3}=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\operatorname{arccot} u_{4n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \operatorname{arccot} \frac{u_{4k+1}}{3} = \operatorname{arccot} 2 - (-1)^n \operatorname{arccot} u_{4n+3},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \operatorname{arccot} u_{2k+1} = \operatorname{arccot} 3,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccot} \frac{Q_{2k}}{2} = \operatorname{arccot} 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \operatorname{arccot} \frac{Q_{2k}}{2} = \operatorname{arccot} 3,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \operatorname{arccot} \frac{u_{4k-1}}{3} = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \operatorname{arccot} \frac{u_{4k+1}}{3} = \operatorname{arccot} 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccot} u_{4k-1} = 0{,}5 \operatorname{arccot} 0{,}5,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccot} u_{4k+1} = 0{,}5 \operatorname{arccot} 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccot} \frac{Q_{4k}}{2} = 0{,}5 \operatorname{arccot} 7,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccot} \frac{Q_{4k-2}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Литература

1. Воробьев Н., Числа Фибоначчи. Москва, 1964.
2. Габович Я., О некоторых диофантовых уравнениях с арккотангенсами. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 103—116.
3. Серпинский В., Пифагоровы треугольники. Москва, 1959.
4. Catalan, E., Memoires de la Societe R. des sciences de Liege, Ser. 2, 1886, **13**, 319.
5. Miksa, F., A table of integral solutions of $a^2+b^2+c^2=r^2$. Math. Teacher, 1955, **48**, № 4, 251—255.
6. Steiger, F., Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$. Elem. Math., 1956, **11**, № 5, 105—108.

Поступило
3 X 1973

DIOFANTILISE VÕRRANDI $x^2+y^2+z^2=t^2$ ERILAHENDID

J. Gabovitš

Resümee

Käsitletakse diofantilisi võrrandeid (1) ja (2). Leitakse erilahendeid, mis sõltuvad Fibonacci arvudest ning arvu $2^{1/2}$ ahelmurruks arenduse lähismurdudest. Saadud lahendid viivad mõningate lõplike ja lõpmatute arkuskootangensridade summeerimisele.

PARTIELLE LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $x^2+y^2+z^2=t^2$

J. Gabovitsch

Zusammenfassung

Es werden verschiedene partielle Lösungsfolgen der unbestimmten Gleichungen (1) und (2) ermittelt, die zu interessanten endlichen und unendlichen Arkuskotangensreihen führen.

ЗАМЕТКИ О РЕДУКТИВНЫХ ПАРАХ

А. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

1. Введение. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли g и H — замкнутая подгруппа в ней с подалгеброй Ли h. Однородное пространство $M = G/H$ называется *редуктивным* [5, 8], если в g существует подпространство m такое, что выполняются условия

1) $g = h \dot{+} m$, т. е. $g = h + m$ и $h \cap m = 0$,

2) $\mathrm{ad}(H)m \subset m$.

Условие 2) влечет

2′) $[h, m] \subset m$

и, обратно, если H связна, то 2′) влечет 2).

Пара (g, h) называется *редуктивной парой* [9], если в алгебре g существует такое подпространство m, что удовлетворяются условия 1) и 2′). Известно, что пара (g, h) является редуктивной, например, всегда, когда h компактна или полупроста [8].

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы, связанные с редуктивными парами. Относительно двух редуктивных пар (g, h) и (g, h_1), где h_1 — подалгебра в h, показано, что пара (g, h_1) редуктивна тогда и только тогда, когда редуктивна пара (h, h_1). Выясняется соотношение понятий неприводимости пары (g, h) и максимальности подалгебры h. Оказывается, что из неприводимости пары (g, h) следует максимальность h. В терминах структуры общей тройной системы Ли, естественно возникающей на подпространстве m, вводятся и исследуются подпары редуктивной пары.

2. О заменах в редуктивных парах.

Лемма 1. *Пусть (g, h_1) — редуктивная пара и h — такая подалгебра в g, что $h_1 \subset h \subset g$. Тогда пара (h, h_1) является редуктивной.*

Доказательство. Пусть $g = h_1 \dot{+} E$ и $[h_1, E] \subset E$. Так как $h_1 \subset h$, то $h \cap E \neq \varnothing$. Заметим, что $h_1 \cap (h \cap E) = 0$, так как $h_1 \cap E = 0$. Далее, для любых подпространств U, V и W некоторого векторного пространства справедливо равенство

$$U \cap (U \cap V + W) = U \cap V + U \cap W.$$

Следовательно,

$$h = h \cap g = h \cap (h_1 + E) = h \cap (h \cap h_1 + E) = h \cap h_1 + h \cap E = h_1 + h \cap E.$$

Включение $[h_1, h \cap E] \subset [h, h_1] \cap [h_1, E] \subset h \cap E$ указывает на редуктивность пары (h, h_1) с разложением $h = h_1 \dotplus h \cap E$.

Теорема 1. *Пусть (g, h) — редуктивная пара и h_1 — подалгебра в h. Тогда пара (g, h_1) является редуктивной тогда и только тогда, когда редуктивна пара (h, h_1).*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из леммы 1.

Достаточность. Пусть (g, h) и (h, h_1) — редуктивные пары. Тогда $g = h \dotplus m$ и $h = h_1 \dotplus K$, откуда следует $g = h_1 \dotplus K \dotplus m$. В силу включений $[h_1, K \dotplus m] \subset [h_1, K] \dotplus [h_1, m] \subset K \dotplus m$ пара (g, h_1) является редуктивной.

Редуктивная пара (g, h) с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$ называется:

1) *симметрической*, если $[m, m] \subset h$ (тогда универсальное накрывающее многообразие пространства G/H является симметрическим однородным пространством);

2) *групповой* [3], если $[m, m] \subset m$ (тогда универсальная накрывающая группа для G является полупрямым произведением $H * M$ подгруппы H и нормального делителя M, а универсальное накрывающее многообразие пространства G/H — многообразием группы M).

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если (g, h) — групповая пара и h_1 — подалгебра в h, то пара (g, h_1) является групповой тогда и только тогда, когда таковой является пара (h, h_1).*

Действительно, это следует из включений

$$[h \cap E, h \cap E] \subset h \cap E \quad \text{и} \quad [K \dotplus m, K \dotplus m] \subset K \dotplus m.$$

Редуктивная пара (g, h) с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$ называется *приводимой* [8], если m содержит собственное $\mathrm{ad}h$-инвариантное подпространство; она называется *неприводимой*, если $\mathrm{ad}h$-инвариантны только m и 0.

Теорема 3. *Пусть (g, h_1) — редуктивная пара. Если в g существует такая подалгебра h, что $h \supset h_1$ и $h \neq h_1$, то (g, h_1) является приводимой редуктивной парой.*

Доказательство. По условию теоремы $g = h_1 \dotplus E$ и $[h_1, E] \subset E$. По лемме 1 пара (h, h_1) также редуктивна с разложением $h = h_1 \dotplus h \cap E$. Но тогда $K = h \cap E$ является $\mathrm{ad}h_1$-инвариантным подпространством в E и теорема доказана.

Следствие. *Если редуктивная пара (g, h) неприводима, то подалгебра h максимальна.*

Это следствие устанавливает связь между исследованиями неприводимых редуктивных пар в [4, 12] и пар с максимальными h в [2]. Ниже будут даны некоторые дальнейшие результаты о неприводимых редуктивных парах.

3. Неприводимость пары и максимальность стационарной подалгебры. Будем отмечать проекцию вектора или подпространства из алгебры g на h (соответственно m) индексом h (соответственно m); так, например, для любого $X \in g$ справедливо разложение $X = X_h + X_m$.

Пусть (g, h) — редуктивная пара с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$. Тогда мы можем превратить m в неассоциативную алгебру. Именно, для $X, Y \in m$ определим умножение $X \cdot Y$ в m следующим образом:

$$X \cdot Y = [X, Y]_m.$$

Алгебра m была впервые рассмотрена А. Сэйглом в работах [9—11].

Из тождеств алгебры Ли g следуют равенства:

1) $X \cdot Y = -Y \cdot X$;

2) $[X, Y]_h = -[Y, X]_h$;

3) $[[X, Y]_h, Z] = [[X, Z], Y]_h + [X, [Y, Z]_h]$;

4) $[X \cdot Y, Z] = [X, Z] \cdot Y + X \cdot [Y, Z]$,

где $X, Y \in m$ и $Z \in h$. Из равенства 4), в частности, следует, что отображение

$$\mathrm{ad}_m Z : m \to m, \quad X \to [X, Z] \text{ для } X \in m,\ Z \in h$$

является дифференцированием алгебры m.

Подалгеброй (соответственно *идеалом*) алгебры m называется такое подпространство $n \subset m$, что $n \cdot n \subset n$ (соответственно $n \cdot m \subset n$). Алгебра m называется *простой*, если $m^2 \neq 0$ и m не содержит собственных идеалов.

Теорема 4. *Пусть (g, h) — редуктивная пара с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$. Если она неприводима, то h — максимальная подалгебра в g. Обратно, если h — максимальная подалгебра в g и из* ad$h$*-инвариантности подпространства n в m следует, что n — подалгебра в m, то пара (g, h) неприводима.*

Доказательство. Первое утверждение совпадает со следствием из теоремы 3. Второе утверждение легко доказать непосредственно. Пусть пара (g, h) приводима с инвариантным подпространством $n \subset m$. В силу включений

$$[h, h] \subset h, \quad [h, n] \subset n, \quad [n, n] = n \cdot n \dotplus [n, n]_h \subset n \dotplus h, \quad (1)$$

подпространство $h^* = h \dotplus n$ является подалгеброй в g, строго содержащей h, что противоречит максимальности h.

Следствие. *В случае приводимой редуктивной пары (g, h) с максимальной h ни одно из собственных* ad$h$*-инвариантных подпространств в m не может являться подалгеброй в m.*

Лемма 2 (см. [9]). *Пусть $\mathfrak{L}$ — неассоциативная алгебра такая, что $\mathfrak{L}^2 \neq 0$. Если $\mathfrak{L}$ содержит собственный идеал, то $\mathfrak{L}$ содержит собственный $D(\mathfrak{L})$-инвариантный идеал, где $D(\mathfrak{L})$ — алгебра дифференцирований алгебры $\mathfrak{L}$.*

Теорема 5. *Пусть (g,h) — редуктивная несимметрическая пара. Если h является максимальной подалгеброй в g, то алгебра m проста.*

Доказательство. В силу несимметричности пары (g,h) имеем $m^2 \neq 0$. Если m не проста, то по лемме 2 алгебра m содержит собственный $\mathrm{ad}_m h$-инвариантный идеал n. Из включений (1) непосредственно вытекает, что $h^* = h \dotplus n$ есть собственная подалгебра в g, строго содержащая h, что противоречит максимальности h.

Сопоставляя этот результат с теоремой 4, получим следующую теорему.

Теорема 6. *Если (g,h) — редуктивная несимметрическая неприводимая пара, то алгебра m проста.*

Редуктивная пара (g,h) с разложением $g = h \dotplus m$ называется *эффективной*, если h не содержит нетривиальных идеалов алгебры g. Назовем ее *плотной*, если $h = [m, m]_h$.

Предложение 1. *Пусть (g,h) — редуктивная пара с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$. Если h проста, то пара (g,h) является либо групповой, либо плотной.*

Доказательство. Как показано в работе [8], подпространство $h' = [m, m]_h$ является идеалом в h, и потому, в силу простоты h, имеем $[m, m]_h = 0$ либо $[m, m]_h = h$, что доказывает утверждение.

Из леммы 1 работы [7] следует, что эффективная пара Киллинга плотна.

Теорема 7. *Пусть (g,h) — эффективная редуктивная плотная пара. Если алгебра m проста, то алгебра Ли g не содержит нормальных*[1] *идеалов.*

Доказательство. Допустим, что в g существует нормальный идеал g'. Тогда $g' = g'_h + g'_m$, причем, ввиду эффективности, $g'_m \neq 0$. По условию $[g', m] = [g'_h + g'_m, m] \subset \subset g'_h + g'_m$, и потому $[g'_m, m]_m + [g'_h, m] \subset g'_m$. Но $[g'_h, m] \subset m$ (ввиду редуктивности) и $[g'_h, m] \subset g'_h + g'_m$ (так как g' — идеал в g); поэтому $[g'_h, m] \subset m \cap (g'_h + g'_m) = g'_m$. Следовательно, $[g'_m, m]_m = g'_m \cdot m \subset g'_m$, т. е. g'_m — идеал в m. Ввиду простоты m возможно лишь $g'_m = m$. Тогда необходимо $[g'_h + m, m] \subset g'_h + m$, и потому $[m, m]_h \subset g'_h$. Но по условию $[m, m]_h = h$, что влечет $g'_h = h$. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Подпары редуктивной пары. Следующее понятие было впервые введено в работах [13, 14]. Наше изложение следует работе [6] и распространяет изложенные там результаты на случай редуктивных пар.

---

[1] Подалгебра g^* алгебры Ли g называется *нормальной* (в смысле А. М. Васильева), если $g^* = g^*_h + g^*_m$.

Общей тройной системой (о. т. с.) называется конечномерное векторное пространство L, на котором заданы две алгебраические операции, билинейная и трилинейная:

$$L\times L\to L, \qquad (X, Y)\mapsto X*Y;$$
$$L\times L\times L\to L, \qquad (X, Y, Z)\mapsto[X, Y, Z],$$

причем выполняются следующие условия

$X*X=0,$

$[X, X, Y]=0,$

$[X, Y, Z]+[Y, Z, X]+[Z, X, Y]-(X*Y)*Z-(Y*Z)*X-$
$-(Z*X)*Y=0,$

$[X, Y [Z, U, V]]=[[X, Y, Z], U, V]+[Z, [X, Y, U], V]+$
$+[Z, U, [X, Y, V]],$

$[X*Y, Z, U]+[Y*Z, X, U]+[Z*X, Y, U]=0,$

$[X, Y, Z*U]+U*[X, Y, Z]+Z*[X, Y, U]=0$

для $X, Y, Z, V, U\in L$.

Конечномерная алгебра Ли становится о. т. с., если положить

$$X*Y=[X, Y], \quad [X, Y, Z]=[[X, Y], Z].$$

Теорема 8 (см. [13]). *Пусть* (g, h) — *редуктивная пара с разложением* $g = h \dotplus m$. *Определим на векторном пространстве* m *билинейную и трилинейную композиции при помощи формул*

$$X*Y=X\cdot Y,$$
$$[X, Y, Z]=\frac{1}{4}[[X, Y]_h, Z].$$

Тогда m *станет о. т. с.*

Общая тройная система m называется о. т. с. редуктивной пары (g, h).

Векторное подпространство n в о. т. с. m называется *подсистемой*, если

$$n*n\subset n, \qquad [n, n, n]\subset n,$$

и *идеалом*, если

$$n*m\subset n \qquad [n, m, m]\subset n.$$

Пусть (g, h) — редуктивная пара с разложением $g = h \dotplus m$. Пару (g', h') назовем *подпарой* пары (g, h), если g' — нормальная подалгебра Ли в g и $h' = g'\cap h$. Подпара (g', h') называется *нормальной*, если g' есть идеал в g.

Непосредственно проверяется, что подпара (g', h') редуктивной пары (g, h) сама является редуктивной парой, и потому обладает общей тройной системой $m' = m\cap g'$.

Теорема 9. *Пусть* (g, h) — *редуктивная пара и* m — *ее о. т. с.*

а) *Если* (g', h') — *подпара пары* (g, h), *то ее о. т. с.* m' *есть подсистема в* m.

б) *Обратно, если* m' — *подсистема в* m, *то существует такая подпара* (g', h') *пары* (g, h), *для которой* m' *является ее о. т. с.*

Доказательство. а) Нам необходимо показать, что $m' \cdot m' \subset m'$ и $[[m', m']_h, m'] \subset m'$. Произведение $m' \cdot m'$ содержится в m (по определению) и в g' (так как g' — подалгебра), поэтому $m' \cdot m' \subset m \cap g' = m'$, что доказывает первое утверждение. Далее, $[m', m']_h \subset h$ и $[m', m']_h \subset g'$, тогда $[m', m']_h \subset \subset h \cap g' = h'$. Но (g', h') — редуктивная пара и потому $[h', m'] \subset m'$, что доказывает и второе утверждение.

б) Положим

$$g' = [m', m']_h + m'.$$

Для $X, Y, Z, V \in m'$ имеем

$$[X, Y] = [X, Y]_h + X \cdot Y \in g', \tag{2}$$

$$[[X, Y]_h, Z] \in m' \subset g', \tag{3}$$

так как m' — подсистема в m. Далее,

$$[[X, Y]_h, [Z, V]_h] = [[X, Y]_h, [Z, V]] - [[X, Y]_h, Z \cdot V]; \tag{4}$$

$$[[X, Y]_h, Z \cdot V] \in m' \subset g', \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&[[X, Y]_h, [Z, V]] = -[Z, [V, [X, Y]_h]] - [V, [[X, Y]_h, Z]] = \\ &= -[Z, [V, [X, Y]_h]]_h - [Z, [V, [X, Y]_h]]_m - \\ &\quad - [V, [[X, Y]_h, Z]]_h - [V, [[X, Y]_h, Z]]_m \in [m', m']_h + m',\end{aligned} \tag{6}$$

так как m' — подсистема в m. Из (2)—(6) следует, что g' есть подалгебра в алгебре Ли g и подпара $(g', [m', m']_h)$ — искомая.

Теорема 10. *Пусть (g, h) — редуктивная плотная пара и m ее о. т. с.*

а) *Если (g', h') — нормальная подпара пары (g, h), то ее о. т. с. m' есть идеал в m.*

б) *Обратно, если m' — идеал в о. т. с. m, то существует такая нормальная подпара (g', h') пары (g, h), для которой m' является ее о. т. с.*

Доказательство. а) Для $X \in m'$, $Y, Z \in m$ имеем $[X, Y] = [X, Y]_h + X \cdot Y$. Произведение $X \cdot Y$ содержится в m (по определению) и в g' (так как g' — идеал в g), поэтому оно содержится и в их пересечении m'. Далее, $[[X, Y]_h, Z] \in m'$ так как $[X, Y]_h \in h'$. Итак, m' есть идеал в о. т. с. m.

б) Покажем, что подпространство

$$g' = [m', m]_h + m'$$

есть идеал в алгебре $g = h \dotplus m$. Пусть $X, Y, Z \in m'$; $V, W \in m$; $U \in h$. Тогда

$$[X, V] = [X, V]_h + X \cdot V \in [m', m]_h + m' = g', \tag{7}$$

$$[[X, V]_h, W] \in m' \subset g', \tag{8}$$

так как m' — идеал в m. Теперь, используя свойство $[m, m]_h = = h$, запишем

$$\begin{aligned}&[h, m'] = [h, m']_m = [[m, m]_h, m']_m \subseteq [[m, m], m']_m \subseteq \\ &\quad \subseteq [[m, m'], m]_m = [[m, m']_h, m]_m + [m, m']_m \cdot m \subset m',\end{aligned}$$

и поэтому

$$[U, X] = [[V, W]_h, X] \in m' \subset g'. \tag{9}$$

Имеем

$$[U, [X, V]] = [U, [X, V]_h] + [U, X \cdot V]. \tag{10}$$

Скобка $[U, X \cdot V]$, как было показано выше, содержится в m'. Далее,

$$\begin{aligned}[U, [X, V]] &= -[X, [V, U]] - [V, [U, X]] = \\ &= -[X, [V, U]]_h - X \cdot [V, U] - [V, [U, X]]_h - \\ &\quad - V \cdot [U, X] \in g'.\end{aligned} \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем

$$[U, [X, V]_h] \in g'. \tag{12}$$

Соотношения (7), (8), (9) и (12) показывают, что g' есть идеал в алгебре Ли g и подпара $(g', [m', m]_h)$ — искомая.

Выражаю искреннюю признательность проф. Ю. Лумисте за ценные замечания и внимание к работе.

Литература

1. Джекобсон Н., Алгебры Ли. Москва, 1964.
2. Дынкин Е. Б., Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли. Матем. сб., 1952, **30**, № 2, 349—462.
3. Лумисте Ю. Г., Связность в расслоенном пространстве с однородными редуктивными слоями. Тр. I Респ. конф. математиков Белоруссии, Минск, 1965, 247—258.
4. Мантуров О. В., Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1966, **13**, 68—145.
5. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1952, **9**, 49—74.
6. Феденко А. С., Пространства с симметриями. Докторская диссертация, Минск, 1973.
7. Фляйшер А., Об одном классе редуктивных пространств. Тр. Геом. семинара, Ин-т науч. информ. АН СССР, 1974, **6**, 267—276.
8. Nomizu K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, **76**, 33—65.
9. Sagle A. A., A note on simple anticommutative algebras obtained from reductive homogeneous spaces. Nagoya Math., J., 1968, **31**, № 1, 105—124.
10. Sagle A. A., On homogeneous spaces, holonomie and non-associative algebras. Nagoya Math., J., 1968, **32**, № 6, 373—394.
11. Sagle A. A., On anticommutative algebras and homogeneous spaces. J. Math. and Mech., 1967, **16**, 1381—1394.
12. Wolf J. A., The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces. Acta math., 1968, **120**, № 1—2, 59—148.
13. Yamaguti K., On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems). J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, **A 21**, № 2, 107—113.
14. Yamaguti K., On the Lie triple systems and its generalizations. J. Sci. Hiroshima Univ., 1958, **A 21**, № 2, 155—160.

Поступило
18 III 1974

REDUKTIIVSETEST PAARIDEST

A. Fljaišer

Resümee

Olgu g Lie algebra ja h ta alamalgebra. Paari (g, h) nimetatakse reduktiivseks paariks, kui Lie algebras g eksisteerib selline alamruum m, et $g = h + m$ (alamruumide otsesumma) ja $[h, m] \subset m$ (vt. [5, 8]). Artiklis vaadeldakse reduktiivseid paare (g, h) ja (g, h_1), kus h_1 on h alamalgebra ja näidatakse, et paar (g, h_1) on reduktiivne parajasti siis, kui paar (h, h_1) on reduktiivne. Selgitatakse algebra g lihtsuse, alamalgebra h maksimaalsuse ja paari (g, h) taandumatuse vahekordi. Näiteks, kui paar (g, h) on taandumatu, siis h on g maksimaalne alamalgebra. Uuritakse ka reduktiivsete paaride alampaare.

NOTES ON REDUCTIVE PAIRS

A. Fleischer

Summary

Let g be a Lie algebra and h its subalgebra. The pair (g, h) is called a reductive pair if in the Lie algebra g there exists a subspace m such that $g = h + m$ (subspace direct sum) and $[h, m] \subset m$ (see [5, 8]). In this paper we study some questions, connected with reductive pairs. We consider reductive pairs (g, h) and (g, h_1) where h_1 is a subalgebra in h and show, that the pair (g, h_1) is reductive iff (h, h_1) is reductive. The correspondence between simplicity of algebra g, maximality of subalgebra h and irreducibility of pair (g, h) is established. For example, if (g, h) is irreducible, then h is a maximal subalgebra in g. The subpairs of reductive pairs are investigated.

О n-ЦИКЛИЧЕСКИХ И ν-РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

В данной работе рассматриваются n-циклические [3] и ν-редуктивные [1] однородные пространства, являющиеся естественным обобщением хорошо изученных симметрических [5] и редуктивных [2, 6] пространств. Даны некоторые необходимые и достаточные условия n-цикличности комплексного однородного пространства, из которых, в частности, следует, что такое пространство является вполне приводимым редуктивным пространством. С другой стороны, доказано, что каждое ν-редуктивное пространство порождает вполне приводимое редуктивное пространство. Краткое изложение результатов содержится в [4].

Однородное пространство G/H называется (локально) n-циклическим [3] если в алгебре Ли g группы G существует аналитический автоморфизм Φ, удовлетворяющий условию $\Phi^n = \mathrm{id}$ $(n > 1)$, при котором подалгебра h, соответствующая подгруппе H, состоит из всех Φ-неподвижных элементов алгебры g.

Теорема 1. *Для того чтобы комплексное однородное пространство G/H являлось (локально) n-циклическим, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли g допускала разложение $g = K_0 \dotplus K_1 \dotplus \ldots \dotplus K_{n-1}$, где $K_0 \equiv h$, и удовлетворялись условия $[K_\alpha, K_\beta] \subset K_\gamma$ для любых таких α, β и γ из множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, что $\gamma = \alpha + \beta \pmod n$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G/H является комплексным n-циклическим однородным пространством. В надлежащим образом выбранном базисе аналитический автоморфизм Φ задается жордановой матрицей T, удовлетворяющей условию

$$T^n = E,$$

т. е. матрицей

$$T = (\varepsilon_0 E_{k_0},\ \varepsilon_1 E_{k_1},\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1} E_{k_{n-1}}), \tag{1}$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — различные корни n-ой степени из единицы и E_{k_i} — единичная матрица порядка k_i. Отсюда следует, что g распадается в прямую сумму инвариантных подпространств, т. е. $g = K_0 \dot{+} K_1 \dot{+} \ldots \dot{+} K_{n-1}$, где подалгебра $K_0 \equiv h$ отвечает корню $\varepsilon_0 = 1$, а подпространства $K_1, \ldots, K_{n-1}$ — соответственно корням $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Тогда

$$h^\Phi = h, \quad K_\alpha{}^\Phi = \varepsilon_\alpha K_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1).$$

Пусть X_{i_l} составляют базис для K_{i_l}, где $K_0 \equiv h$ и $l = 0, 1, \ldots \ldots, n-1$, причем $i_s = \dim(K_0 \dot{+} \ldots \dot{+} K_{s-1}) + 1, \ldots \ldots, \dim(K_0 \dot{+} \ldots \dot{+} K_s)$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$. Тогда для любых $A_\alpha \in K_\alpha$ и $A_\beta \in K_\beta$ имеем

$$[A_\alpha, A_\beta] = C_{\alpha\beta}^{i_0} X_{i_0} + C_{\alpha\beta}^{i_1} X_{i_1} + \ldots + C_{\alpha\beta}^{i_{n-1}} X_{i_{n-1}}. \tag{2}$$

Применим к обеим частям равенства (2) автоморфизм Φ. Получим

$$\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta [A_\alpha, A_\beta] = C_{\alpha\beta}^{i_0} X_{i_0} + \varepsilon_1 C_{\alpha\beta}^{i_1} X_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{n-1} C_{\alpha\beta}^{i_{n-1}} X_{i_{n-1}}. \tag{3}$$

Но $\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, где $\gamma = \alpha + \beta (\mathrm{mod}\, n)$, и корню ε_γ отвечает инвариантное подпространство K_γ. После умножения обеих частей равенства (2) на ε_γ и вычитания из соответствующих частей равенства (3) имеем

$$0 = (1 - \varepsilon_\gamma) C_{\alpha\beta}^{i_0} X_{i_0} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_\gamma) C_{\alpha\beta}^{i_1} X_{i_1} + \ldots +$$
$$+ (\varepsilon_{\gamma-1} - \varepsilon_\gamma) C_{\alpha\beta}^{i_{\gamma-1}} X_{i_{\gamma-1}} + (\varepsilon_{\gamma+1} - \varepsilon_\gamma) C_{\alpha\beta}^{i_{\gamma+1}} X_{i_{\gamma+1}} + \ldots +$$
$$+ (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_\gamma) C_{\alpha\beta}^{i_{n-1}} X_{i_{n-1}}.$$

Это указывает на то, что

$$C_{\alpha\beta}^{i_0} X_{i_0} = 0, \ \ldots, \ C_{\alpha\beta}^{i_{\gamma-1}} X_{i_{\gamma-1}} = 0, \quad C_{\alpha\beta}^{i_{\gamma+1}} X_{i_{\gamma+1}} = 0, \quad C_{\alpha\beta}^{i_{n-1}} X_{i_{n-1}} = 0,$$

и потому $[A_\alpha, A_\beta] = C_{\alpha\beta}^{i_\gamma} X_{i_\gamma}$ или $[K_\alpha, K_\beta] \subset K_\gamma$.

Достаточность. Пусть теперь G/H — такое комплексное однородное пространство, что $g = h \dot{+} K_1 \dot{+} \ldots \dot{+} K_{n-1}$ и $[K_\alpha, K_\beta] \subset K_\gamma$, $\alpha + \beta = \gamma (\mathrm{mod}\, n)$. Покажем, что в этом случае G/H является локально n-циклическим пространством. Для этого построим отображение $\Phi : g \to g$ следующим образом:

$$h^\Phi = h, \quad K_\alpha^\Phi = \varepsilon_\alpha K_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1),$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — корни n-ой степени из единицы, отличные от единицы. Матрица этого преобразования имеет вид (1) и потому $\Phi^n = \mathrm{id}$. Осталось показать, что отображение Φ будет автоморфизмом алгебры g, т. е. что для любых $X, Y \in g$ имеем $[X, Y]^\Phi = [X^\Phi, Y^\Phi]$. Пусть базисы подпространств $h, K_1, \ldots, K_{n-1}$ выбраны как выше векторами X_{i_l}, и надо показать, что $[X_{i_\alpha}, X_{j_\beta}]^\Phi = [X_{i_\alpha}^\Phi, X_{j_\beta}^\Phi]$. Знаем, что, $[X_{i_\alpha}, X_{j_\beta}] = C_{i_\alpha j_\beta}^{k_\gamma} X_{k_\gamma}$; отсюда

$$[X_{i_\alpha}, X_{j_\beta}]^\Phi = C^{k_\gamma}_{i_\alpha j_\beta} (X_{k_\gamma})^\Phi = \varepsilon_\gamma C^{k_\gamma}_{i_\alpha j_\beta} X_{k_\gamma}.$$

С другой стороны,

$$[X^\Phi_{i_\alpha}, X^\Phi_{j_\beta}] = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta [X_{i_\alpha}, X_{j_\beta}] = \varepsilon_\gamma [X_{i_\alpha}, X_{j_\beta}] = \varepsilon_\gamma C^{k_\gamma}_{i_\alpha j_\beta} X_{k_\gamma},$$

что доказывает утверждение.

Заметим, что указанное требование является необходимым и в случае действительного (локально) n-циклического пространства.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает $[h, K_\alpha] \subset K_\alpha$. Отсюда получается следующее

Следствие. *Однородное комплексное n-циклическое пространство является вполне приводимым редуктивным пространством.*

Заметим, что при $n = 2$ имеем дело с симметрическими пространствами, для которых достаточность условий $g = h \dotplus K$, $[h, K] \subset K$, $[K, K] \subset h$ хорошо известна.

Однородное пространство G/H называется *ν-редуктивным*, если стационарная подалгебра h имеет разложение

$$h = h_1 \dotplus h_2 \dotplus \ldots \dotplus h_\nu \quad (h_\nu \neq 0),$$

причем в g существует дополнительная к h плоскость E, такая, что

$$[h_i, E] \subset h_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu \quad (h_0 \equiv E).$$

Редуктивные пространства получаются отсюда при значении $\nu = 1$.

Лемма (см. [1]). *Во всяком ν-редуктивном однородном пространстве имеют место включения $[h_i, h_k] \subset h_{i+k-1}$ ($i = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$), причем $h_l = 0$ при $l > \nu$.*

Теорема 2. *Пусть G/H — однородное ν-редуктивное пространство с разложением $g = h_1 \dotplus h_2 \dotplus \ldots \dotplus h_\nu \dotplus E$. Тогда G/H_1 является вполне приводимым редуктивным пространством, где H_1 — подгруппа в H, соответствующая подалгебре h_1.*

Доказательство. По лемме $[h_1, h_1] \subset h_1$ и потому h_1 — подалгебра. Далее, $[h_1, h_k] \subset h_k$ ($k = 0, 1, \ldots$) и потому G/H_1 является вполне приводимым редуктивным пространством.

Таким образом, с каждым ν-редуктивным пространством связывается некоторое вполне приводимое редуктивное пространство. Ставим теперь обратный вопрос: пусть G/H_1 — редуктивное пространство; при каких условиях существует ν-редуктивное пространство ($\nu > 1$) G/H такое, что H_1 вложима в H как подгруппа? Частный ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *Для комплексного 3-циклического пространства G/H_1 с разложением алгебры Ли $g = h_1 \dotplus K_1 \dotplus K_2$, где $[K_1, K_1] = 0$, всегда существует комплексное 2-редуктивное пространство G/H такое, что H_1 — подгруппа в H.*

Доказательство. Сразу ясно, что $h = h_1 \dotplus K_1$ является подалгеброй в g. Переобозначим $K_1 \equiv h_1$, $K_2 \equiv E$. Из теоремы 1 следуют включения

$$[h_1, h_1] \subset h_1, \quad [h_1, h_2] \subset h_2, \quad [h_1, E] \subset E, \quad [h_2, E] \subset h_1, \quad [h_2, h_2] = 0,$$

которые и доказывают, что пространство G/H является 2-редуктивным.

Литература

1. Кантор И. Л., Транзитивно-дифференциальные группы и инвариантные связности на однородных пространствах. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1966, **13**, 310—398.
2. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1952, **9**, 49—74.
3. Степанов Н. А., Основные факты теории φ-пространств. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, **3**, 88—95.
4. Фляйшер А. Г., О некоторых классах однородных пространств. Материалы IV Прибалтийской геометрической конференции, Тарту, 1973, 133—134.
5. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1964.
6. Nomizu K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, **76**, 33—65.

Поступило
22 IV 1974

MÕNDA n-TSÜKLILISTEST JA ν-REDUKTIIVSETEST RUUMIDEST

A. Fljašer

Resümee

Artiklis vaadeldakse n-tsüklilisi [3] ja ν-reduktiivseid [1] homogeenseid ruume, mis on sümmeetriliste ja reduktiivsete homogeensete ruumide üldistuseks. Homogeensete n-tsükliliste ruumide jaoks antakse mõned tarvilikud ja piisavad tingimused, millest järeldub, et nimetatud ruumid on täielikult taanduvad. Näidatakse, et iga ν-reduktiivne homogeenne ruum indutseerib täielikult taanduva reduktiivse homogeense ruumi.

ÜBER n-ZYKLISCHE UND ν-REDUKTIVE HOMOGENRÄUME

A. Fleischer

Zusammenfassung

Im Artikel betrachtet man n-zyklische [3] und ν-reduktive [1] Homogenräume, welche gut bekannte symmetrische und reduktive Homogenräume verallgemeinern. Es sind einige notwendige und hinreichende Bedingungen für n-zyklische homogene Räume gegeben, aus welchen folgt, daß solche Räume vollständig reduzibel sind. Anderseits zeigt man, daß jeder ν-reduktive Homogenraum einen vollständig reduzibel reduktiven Homogenraum erzeugt.

ПОДГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_5 И ИХ ОРБИТЫ. III

К. Рийвес

Кафедра алгебры и геометрии

В статьях [4—5] была дана классификация нетранзитивных подгрупп Ли группы движений $O(5) * T_5$ вещественного евклидова пространства R_5, орбиты V_k максимальных размерностей которых имеют размерности $k = 1, 2, 3$. Другими словами, перечислялись все подгруппы классов $\mathfrak{K}^{5,1}$, $\mathfrak{K}^{5,2}$, $\mathfrak{K}^{5,3}$ (здесь мы применяем обозначения, введенные в [5]). При помощи применяемого метода подвижного орторепера Картана все подгруппы $K^{5,k} \in \mathfrak{K}^{5,k}$ $(k = 1, 2, 3)$ задавались вполне интегрируемыми пфаффовыми системами с постоянными коэффициентами. Были найдены дифференциально-геометрические свойства орбит V_k этих подгрупп $K^{5,k}$. Для полного решения поставленной задачи осталось перечислить подгруппы Ли классов $\mathfrak{K}^{5,4}$, $\mathfrak{K}^{5,5}$. Это и делается в настоящей статье. Подгруппы $K^{5,4}$ выделяются, как и в [3—5], в ходе изучения их орбит — однородных гиперповерхностей $V_4 \subset R_5$. Для классификации транзитивных подгрупп Ли $K^{5,5} \in \mathfrak{K}^{5,5}$ применяется комбинированный метод [3], позволяющий перечислить все $K^{5,5}$, если нетранзитивные подгруппы Ли известны.

В конце статьи дана сводка результатов всех трех частей работы — полная перечень типов подгрупп Ли группы движений $O(5) * T_5$.

§ 1. Подгруппы Ли класса $\mathfrak{K}^{5,4}$

1. Перечисление всех типов подгрупп $K^{5,4} \in \mathfrak{K}^{5,4}$. По результатам Картана ([1], стр. 247) дифференциальные инварианты всех порядков орбиты V_4 (т. е. коэффициенты в линейных выражениях форм инфинитезимального перемещения канонического ортонормированного репера через базисные формы) являются постоянными. Канонизация подвижного ортонормированного репера $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5\}$, присоединенного к точке M гиперповерхности V_4 в R_5, стандартная. Вектор e_5 выбирается вдоль нормали гиперповерхности V_4 и векторы e_1, e_2, e_3, e_4 по ее главным направлениям. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M}=\omega^I \boldsymbol{e}_I, \qquad I,\ K,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ 5,\\ &d\boldsymbol{e}_I=\omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K, \qquad \omega^K{}_I+\omega^I{}_K=0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

имеют место соотношения

$$\omega^5=0, \quad \omega^5{}_1=k_1\omega^1, \quad \omega^5{}_2=k_2\omega^2, \quad \omega^5{}_3=k_3\omega^3, \quad \omega^5{}_4=k_4\omega^4. \tag{1.2}$$

Если V_4 является орбитой некоторой $K^{5,4}$, то k_1, k_2, k_3, k_4 — постоянные. Тогда дифференциальное продолжение уравнений (1.2) приводит, с учетом условий интегрируемости

$$\begin{aligned} d\omega^I&=\omega^L \wedge \omega^I{}_L,\\ d\omega^K{}_I&=\omega^L{}_I \wedge \omega^K{}_L \end{aligned} \tag{1.3}$$

уравнений (1.1), к системе

$$\begin{aligned} (-k_1+k_2)\,\omega^2{}_1&=A_1\omega^3+A_2\omega^4,\\ (-k_1+k_3)\,\omega^3{}_1&=A_1\omega^2+A_3\omega^4,\\ (-k_1+k_4)\,\omega^4{}_1&=A_2\omega^2+A_3\omega^3,\\ (-k_2+k_3)\,\omega^3{}_2&=A_1\omega^1+A_4\omega^4,\\ (-k_2+k_4)\,\omega^4{}_2&=A_2\omega^1+A_4\omega^3,\\ (-k_3+k_4)\,\omega^4{}_3&=A_3\omega^1+A_4\omega^2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 также некоторые постоянные. Имеются следующие возможности

1°. $k_1=k_2=k_3=k_4\equiv k$;

2°. $k_1=k_2=k$, $\quad k_3=k_4=l$, $\quad k\neq l$;

3°. $k_1=k_2=k_3=k$, $\quad k_4\neq k$;

4°. $k_1=k_2=k$, $\quad k_3\neq k$, $\quad k_3\neq k_4$, $\quad k_4\neq k$;

5°. все k_i $(i=1,\ \ldots,\ 4)$ попарно различные.

Дальнейшее исследование показывает, что главные кривизны орбит V_4 подгруппы $K^{5,4}\in\mathfrak{K}^{5,4}$ любого типа удовлетворяют одним из условий 1°, 2° или 3°, и не существует орбиты V_4 (тем самым также соответствующей подгруппы $K^{5,4}$), главные кривизны которой удовлетворяли бы условиям 4° или 5°. Для доказательства этого утверждения надо решать систему (1.4) при соответствующих предположениях. Последние две возможности, приводящие к противоречиям со сделанными предположениями, рассматриваются отдельно в п. 2 настоящего параграфа.

Пусть $k_1=k_2=k$. Тогда, в силу независимости форм ω^3, ω^4, в системе (1.4) имеет место $A_1=A_2=0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
(-k+k_3)\,\omega^3{}_1&=A_3\omega^4,\\
(-k+k_4)\,\omega^4{}_1&=A_3\omega^3,\\
(-k+k_3)\,\omega^3{}_2&=A_4\omega^4,\\
(-k+k_4)\,\omega^4{}_2&=A_4\omega^3,\\
(-k_3+k_4)\,\omega^4{}_3&=A_3\omega^1+A_4\omega^2.
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

Форма $\omega^2{}_1$ осталась параметрической. Решаем полученную систему в частных случаях 1°—3°.

1°. Если $k_3 = k_4 = k$, то соответствующая 10-параметрическая подгруппа Ли $K^{5,4}$ выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^5 = \omega^5{}_1 - k\omega^1 = \omega^5{}_2 - k\omega^2 = \omega^5{}_3 - k\omega^3 = \omega^5{}_4 - k\omega^4 = 0. \qquad (1.6)$$

При $k = 0$ формы $\omega^5{}_1$, $\omega^5{}_2$, $\omega^5{}_3$, $\omega^5{}_4$ равняются нулю и соответствующей *орбитой* V_4 *будет гиперплоскость* $R_4 \subset R_5$, *проходящая через точку* M *с направляющими векторами* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$. *Выделенная подгруппа является подгруппой* $K^{5,4}$ $\{4\}$. Она имеет, в свою очередь, подгруппы Ли движений, транзитивные на ее орбитах R_4: 7-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}$ $[1;\ 4\}$, 6-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}$ $[2;\ 4\}$, 5-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}$ $[1,\ 2;\ 4\}$ и 4-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}$ $[1, 2, 3; 4\}$. Так как в группе движений пространства R_4 кроме транзитивных подгрупп стационарности некоторых флагов существуют также винтовые подгруппы, транзитивные на R_4 (см. [3], стр. 29), то в рассматриваемом случае им соответствуют следующие: $K_4{}^{5,4}$ $[1, 2; 4\}$, $K_5{}^{5,4}$ $[2; 4\}$, $K_7{}^{5,4}$ $\{4\}$, $K_8{}^{5,4}$ $\{4\}$.

Если в системе (1.6) предположить $k \neq 0$, то существует точка, неподвижная относительно действия соответствующей $K^{5,4}$. Действительно, для точки $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M} + k^{-1}\boldsymbol{e}_5$ имеет место $d\boldsymbol{C} = 0$ и, следовательно, системой (1.6) выделяется 10-*параметрическая подгруппа* $K^{5,4}\{0\}$. *Ее орбитами являются гиперсферы* $S_4 \subset R_5$.

Подгруппа $K^{5,4}\{0\}$ *не содержит собственных подгрупп, которые были бы транзитивными на ее орбитах* S_4.

Чтобы доказать последнее утверждение, допустим, что такая собственная подгруппа существует, и рассмотрим линейную группу изотропии в точке гиперсферы (ср. [3], стр. 25), т. е. полагаем в (1.6), что $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. Эта группа изотропии является собственной подгруппой вращений касательного пространства R_4 к S_4 в точке M. Она будет либо 3-параметрической подгруппой вращений вокруг прямой ($K^{4,2}\{0, 1\}$), либо 2-параметрической подгруппой вращений вокруг двумерной плоскости ($K^{4,2}\{0, 2\}$), либо 1-параметрической подгруппой $K^{4,1}\{0, 1, 2\}$, либо тривиальной подгруппой, состоящей только из тождественного преобразования ([3], стр. 14). Так как доказательство несуществования винтовых подгрупп группы

$K^{5,4}\{0\}$ во всех указанных случаях одинаковое, то приведем здесь первое, наиболее общее из них.

Направляя вектор $\boldsymbol{e}_4$ вдоль упомянутой оси вращения, имеем $\omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4}$, т. е.

$$\omega^4{}_1 = a_i\omega^i, \quad \omega^4{}_2 = b_i\omega^i, \quad \omega^4{}_3 = c_i\omega^i \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Тогда, в силу (1.6), из структурных уравнений (1.3) получим

$$d\omega^1 = \omega^2{}_1 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_1 \wedge \omega^3 + a_i\omega^i \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^2 = -\omega^2{}_1 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^3 + b_i\omega^i \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^3 = -\omega^3{}_1 \wedge \omega^1 - \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + c_i\omega^i \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^4 = (a_2 - b_1)\omega^1 \wedge \omega^2 + (a_3 - c_1)\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_3 - c_2)\omega^2 \wedge \omega^3 +$$
$$+ a_4\omega^1 \wedge \omega^4 + b_4\omega^2 \wedge \omega^4 + c_4\omega^3 \wedge \omega^4.$$

С учетом полученных соотношений и структурных уравнений (1.3) внешнее дифференцирование выражения для $\omega^4{}_1$ дает, в силу независимости форм ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$, следующие равенства

$$a_1 = b_2 = c_3, \qquad a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = b_4 = c_1 = c_2 = c_4 = 0,$$
$$a_1^2 + a_4^2 = -k^2 \qquad (k \neq 0).$$

Последнее из них противоречит предположению действительности всех встречающихся величин. Следовательно, соответствующей 7-параметрической винтовой подгруппы в $K^{5,4}\{0\}$ не существует.

2°. Если $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = k_4 = l$ и $k \neq l$, то из системы (1.5) следует, в силу независимости форм ω^1, ω^2, что $A_3 = A_4 = 0$ и $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = 0$. Дифференциальное продолжение последних соотношений дает $kl = 0$. Пусть $l = 0$, тогда $\omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0$. В этом случае $d(\boldsymbol{M} + k^{-1}\boldsymbol{e}_5) = \omega^3\boldsymbol{e}_3 + \omega^4\boldsymbol{e}_4$, $d\boldsymbol{e}_3 = \omega^4{}_3\boldsymbol{e}_4$, $d\boldsymbol{e}_4 = -\omega^4{}_3\boldsymbol{e}_3$. Следовательно, 6-параметрическая подгруппа Ли, выделяемая вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^5 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 - k\omega^1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 =$$
$$= \omega^5{}_2 - k\omega^2 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0,$$

является *подгруппой* $K^{5,4}\{2\}$. *Ее орбитами* V_4 *являются гиперцилиндры с двумерными образующими* R_2, *построенные на сферах* S_2 *плоскости* R_3, *вполне ортогональной к образующим* $R_2 \subset R_5$. Существует 5-*параметрическая подгруппа, транзитивная на этих цилиндрах* — $K^{5,4}[1; 2\}$.

Случай $k = 0$ отличается от рассмотренного только взаимной заменой индексов 1, 2 и 3, 4.

3°. Если $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $k_4 \neq k$, то из системы (1.5) получаются равенства $A_3 = A_4 = 0$, $\omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0$. Внешнее дифференцирование последних с учетом структурных уравнений дает соотношение $kk_4 = 0$. Следовательно, либо $k \neq 0$,

$k_4 = 0$, либо $k = 0$, $k_4 \neq 0$. Вполне интегрируемой пфаффовой системой, определяющей для обеих указанных возможностей соответствующие 7-параметрические подгруппы Ли, будет

$$\omega^5 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 - k\omega^1 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_2 - k\omega^2 = \\ = \omega^4{}_3 = \omega^5{}_3 - k\omega^3 = \omega^5{}_4 - k_4\omega^4 = 0. \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что при $k \neq 0$, $k_4 = 0$ имеют место $d(\boldsymbol{M} + k^{-1}\boldsymbol{e}_5) = \omega^4\boldsymbol{e}_4$, $d\boldsymbol{e}_4 = 0$, т. е. исследуемая подгруппа $K^{5,4}$ будет *подгруппой* $K^{5,4}\{1\}$. *Ее орбитами* V_4 *являются гиперцилиндры с прямолинейными образующими, построенные на сферах* S_3 *гиперплоскости* R_4, *вполне ортогональной к образующим. Существуют винтовые подгруппы*, транзитивные на описанных цилиндрических поверхностях, соответствующие винтовым подгруппам $K_4{}^{4,3}\{0\}$ и $K_3{}^{4,3}\{0\}$ (см. [3], стр. 15). Ими будут $K_5{}^{5,4}\{1\}$ и $K_4{}^{5,4}\{1\}$, соответственно.

Если же $k = 0$, $k_4 \neq 0$, то в силу (1.7), получим $d(\boldsymbol{M} + k_4{}^{-1}\boldsymbol{e}_5) = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^3\boldsymbol{e}_3$, $d\boldsymbol{e}_1 = \omega^2{}_1\boldsymbol{e}_2 + \omega^3{}_1\boldsymbol{e}_3$, $d\boldsymbol{e}_2 = -\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_1 + \omega^3{}_2\boldsymbol{e}_3$, $d\boldsymbol{e}_3 = -\omega^3{}_1\boldsymbol{e}_1 - \omega^3{}_2\boldsymbol{e}_2$. Следовательно, выделенная подгруппа $K^{5,4}$ является *подгруппой* $K^{5,4}\{3\}$. *Ее орбитами* V_4 *будут цилиндры с трехмерными образующими, построенные на окружностях* S_1 *плоскости* R_2, *вполне ортогональной к образующим*. Подгруппа $K^{5,4}\{3\}$, в свою очередь, имеет подгруппы Ли, транзитивные на ее орбитах: 5-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}[1; 3\}$ и 4-*параметрическую подгруппу* $K^{5,4}[1, 2; 3\}$. Кроме того, подгруппа $K^{5,4}[1; 3\}$ *содержит винтовую подгруппу* $K_4{}^{5,4}[1; 3\}$, транзитивную на описанных цилиндрах V_4 (см. [3], стр. 25).

2. Несуществование орбит $V_4 \subset R_5$ с главными кривизнами, удовлетворяющими условиям 4° или 5°. Покажем, что при предположениях 4° или 5° внешнее дифференцирование решений системы (1.4) с учетом (1.2), (1.3) приводит к противоречивым соотношениям.

4°. Пусть $k_1 = k_2 = k$, $k_3 \neq k$, $k_3 \neq k_4$, $k_4 \neq k$. Тогда решением системы (1.4) будут уравнения

$$\omega^3{}_1 = (-k+k_3)^{-1}A_3\omega^4, \qquad \omega^3{}_2 = (-k+k_3)^{-1}A_4\omega^4,$$
$$\omega^4{}_1 = (-k+k_4)^{-1}A_3\omega^3, \qquad \omega^4{}_2 = (-k+k_4)^{-1}A_4\omega^3,$$
$$\omega^4{}_3 = (-k_3+k_4)^{-1}(A_3\omega^1 + A_4\omega^2).$$

Внешнее дифференцирование последних с учетом структурных уравнений (1.3) приводит к системе

$$A_4\omega^2{}_1 \wedge \omega^1 = A_3\omega^2{}_1 \wedge \omega^2 = A_3\omega^2{}_1 \wedge \omega^3 = A_3\omega^2{}_1 \wedge \omega^4 = \\ = A_4\omega^2{}_1 \wedge \omega^3 = A_4\omega^2{}_1 \wedge \omega^4 = 0, \quad A_3A_4 = 0, \tag{1.8А}$$

$$\begin{gathered} 2A_3{}^2 = 2A_4{}^2 = kk_3(-k+k_4)(-k_3+k_4), \\ 2A_3{}^2 = 2A_4{}^2 = kk_4(-k+k_3)(-k_3+k_4), \\ 2(A_3{}^2 + A_4{}^2) = k_3k_4(-k+k_3)(-k+k_4). \end{gathered} \tag{1.8Б}$$

Из последнего уравнения (1.8А) следует, что по крайней мере один из коэффициентов A_3, A_4 должен равняться нулю. Тогда первые два равенства (1.8Б) дают $A_3 = A_4 = 0$. Поэтому $kk_3 = kk_4 = k_3k_4 = 0$, которые выполнены, если либо $k_3 = k_4 = 0$, либо $k = k_3 = 0$, либо $k = k_4 = 0$. Но все эти возможности противоречат сделанным предположениям.

5°. Пусть в системе (1.4) все k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ попарно различные. Обозначим $k_{12} = -k_1 + k_2$, $k_{13} = -k_1 + k_3$, $k_{14} = -k_1 + k_4$, $k_{23} = -k_2 + k_3$, $k_{24} = -k_2 + k_4$, $k_{34} = -k_3 + k_4$. Тогда решением системы (1.4) будет

$$\omega^2{}_1 = k_{12}^{-1}(A_1\omega^3 + A_2\omega^4), \qquad \omega^3{}_1 = k_{13}^{-1}(A_1\omega^2 + A_3\omega^4),$$
$$\omega^4{}_1 = k_{14}^{-1}(A_2\omega^2 + A_3\omega^3), \qquad \omega^3{}_2 = k_{23}^{-1}(A_1\omega^1 + A_4\omega^4),$$
$$\omega^4{}_2 = k_{24}^{-1}(A_2\omega^1 + A_4\omega^3), \qquad \omega^4{}_3 = k_{34}^{-1}(A_3\omega^1 + A_4\omega^2).$$

После внешнего дифференцирования последних уравнений с учетом (1.3) получается система:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_1^2}{k_{13}k_{23}} + \frac{A_2^2}{k_{14}k_{24}} = \frac{1}{2}k_1k_2, \qquad \frac{A_1^2}{k_{12}k_{23}} - \frac{A_3^2}{k_{14}k_{34}} = -\frac{1}{2}k_1k_3,\\
&\frac{A_1^2}{k_{12}k_{13}} + \frac{A_4^2}{k_{24}k_{34}} = \frac{1}{2}k_2k_3, \qquad \frac{A_2^2}{k_{12}k_{24}} + \frac{A_3^2}{k_{13}k_{34}} = -\frac{1}{2}k_1k_4,\\
&\frac{A_2^2}{k_{12}k_{14}} - \frac{A_4^2}{k_{23}k_{34}} = \frac{1}{2}k_2k_4, \qquad \frac{A_3^2}{k_{13}k_{14}} + \frac{A_4^2}{k_{23}k_{24}} = \frac{1}{2}k_3k_4;
\end{aligned} \tag{1.9А}$$

$$\begin{aligned}
&(k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23})A_1A_2 = 0, \qquad (k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23})A_3A_4 = 0,\\
&(k_{12}k_{34} - k_{14}k_{23})A_1A_3 = 0, \qquad (k_{12}k_{34} - k_{14}k_{23})A_2A_4 = 0,\\
&(k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24})A_1A_4 = 0, \qquad (k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24})A_2A_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.9Б}$$

В этой системе все A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ не могут одновременно равняться нулю. Действительно, если бы это было так, то из (1.9А) получились бы соотношения $k_1k_2 = k_1k_3 = k_1k_4 = k_2k_3 = k_2k_4 = k_3k_4 = 0$. Последние могли бы быть выполненными тогда, когда по крайней мере три из k_i равнялись бы нулю. Но это противоречит сделанным предположениям.

Пусть из A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ какие-нибудь три равняются нулю. Например, пусть $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 \neq 0$. Тогда (1.9А) представима в виде

$$A_4^2 = \frac{1}{2}k_2k_3k_{24}k_{34},$$

$$k_1k_2 = k_1k_3 = k_1k_4 = 0,$$

$$k_3k_{24} + k_4k_{23} = 0, \qquad k_2k_{34} - k_4k_{23} = 0.$$

Уравнения для определения k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяются при $k_1 = 0$, $k_2 = k_3$. Но последнее равенство противоречит предположениям.

Если среди A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ какие-нибудь два равняются нулю, то оказывается, что и какой-то третий обращается в нуль, т. е. этот случай приводится к предыдущему — противоречивому. Действительно, пусть например, $A_1 = A_2 = 0$. Тогда первое уравнение (1.9А) дает $k_1 k_2 = 0$, т. е. либо $k_1 = 0$, либо $k_2 = 0$. В первом случае из остальных уравнений (1.9А) получим $A_3 = 0$, во втором — $A_4 = 0$, что и требовалось доказать.

Если среди всех A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ по меньшей мере три отличны от нуля, то в (1.9Б) все коэффициенты равняются нулю:

$$k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23} = 0,$$
$$k_{12}k_{34} - k_{14}k_{23} = 0,$$
$$k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} = 0.$$

Эти уравнения являются зависимыми. Их система равносильна следующей:

$$k_1(k_2 + k_3 - 2k_4) + k_2(-2k_3 + k_4) + k_3k_4 = 0,$$
$$k_1(2k_2 - k_3 - k_4) - k_2(k_3 + k_4) + 2k_3k_4 = 0.$$

Здесь случай, когда $k_2 + k_3 - 2k_4 = 0$, не может иметь места, так как при $k_2 = -k_3 + 2k_4$ первое уравнение превращается в $2(k_3 - k_4)^2 = 0$, что противоречит предположению $k_3 \neq k_4$.

Если же $k_2 + k_3 - 2k_4 \neq 0$, то

$$k_1 = \frac{k_2(2k_3 - k_4) - k_3k_4}{k_2 + k_3 - 2k_4}$$

и после подстановки этого выражения во второе уравнение, получим

$$3(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4) = 0,$$

что противоречит предположениям.

§ 2. Подгруппы класса $\mathfrak{K}^{5,5}$

1. Основные леммы. В работе [3] (стр. 27—28) доказана основная лемма, при помощи которой можно перечислить все транзитивные в R_n подгруппы Ли $K^{n,n}$ группы движений $O(n) * T_n$, т. е. подгруппы класса $\mathfrak{K}^{n,n}$, если все нетранзитивные подгруппы уже известны. Для целостности изложения приведем здесь ее формулировку.

Лемма 1. *Если $K \cap T_n = T' \neq \{0\}$ для некоторой подгруппы Ли K движений в R_n, то K обладает структурой полупрямого произведения $K' * T_0'$, где T_0' — связная компонента нулевого элемента в подгруппе T' и K' — приводимая подгруппа Ли дви-*

жений в R_n с некоторой инвариантной плоскостью R_m размерности $m = n - \dim T_0'$, вполне ортогональной к векторному подпространству T_0'. Если K транзитивна в R_n, то K' — транзитивна в R_m.

Отметим, что инвариантный флаг ([3], стр. 13) транзитивной подгруппы Ли $K^{n,n}$ группы движений $O(n) * T_n$ может по определению флага быть только векторным, так как в R_n не существует никакой инвариантной относительно действия $K^{n,n}$ плоскости, определяющей точечный или векторно-точечный флаг.

Так как размерность орбиты подгруппы Ли движений K в пространстве R_n не превосходит $\dim K$, то для подгруппы $K^{n,n}$ должно иметь место $\dim K^{n,n} \geqslant n$.

Прежде чем сформулировать и доказать следующие леммы, приводим некоторые прямые следствия из определения понятия приводимой подгруппы Ли движений K с инвариантным флагом Φ (обозначаемой через $K(\Phi)$) и понятий точечного и векторно-точечного флага ([3], стр. 13). Из этих определений следует, что каждую подгруппу Ли движений K' с инвариантным векторно-точечным флагом $\Phi = [m_1, \ldots, m_l; m_{l+1}, \ldots, m_k\}$ можно определить с помощью подгруппы K'', инвариантным флагом которой является точечный флаг $\Phi_1 = \{m_1, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots, m_k\}$. Именно, имеет место соотношение

$$K'(\Phi) = K''(\Phi_1) * T_{m_{l+1}-m_l}, \tag{2.1}$$

в котором через $T_{m_{l+1}-m_l}$ обозначена некоторая $(m_{l+1} - m_l)$-параметрическая подгруппа параллельных переносов такая, что $T_{m_{l+1}} = T_{m_l} \oplus T_{m_{l+1}-m_l}$, где $T_{m_{l+1}}$ и T_{m_l} — подгруппы параллельных переносов, определяемых векторами, соответственно, плоскости $R_{m_{l+1}}$ и векторного подпространства V_{m_l}, инвариантных относительно действия подгруппы $K'(\Phi)$. Кроме того, если $K'(\Phi)$ — подгруппа стационарности флага Φ, то и $K''(\Phi_1)$ — подгруппа стационарности флага Φ_1. Если же $K'(\Phi)$ есть r-параметрическая винтовая подгруппа с инвариантным флагом Φ, то $K''(\Phi_1)$ есть $(r - m_{l+1} + m_l)$-параметрическая винтовая подгруппа с инвариантным флагом Φ_1. Имеет место и обратное.

Лемма 2. *Транзитивная подгруппа Ли движений $K^{n,n} = K' * T_0'$ (см. лемма 1) будет подгруппой стационарности векторного флага $[m_1, \ldots, m_k]$ тогда и только тогда, когда* $\dim T_0' = n$, т. е. $T_0' = T_n$ *и K' является подгруппой стационарности точечного флага $\Phi = \{0, m_1, \ldots, m_k\}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $T_0' = T_n$ и K' является подгруппой стационарности точечного флага Φ. Так как любой инвариантной плоскостью R_m определено пространство V_m ее векторов, инвариантное относительно действия всей группы параллельных переносов T_n в R_n, то по определениям $K^{n,n} = K' * T_0'$ содержит все движения в R_n, относительно действия которых векторный флаг $[m_1, \ldots, m_k]$ остается инвариантным. Следовательно, $K^{n,n} \equiv K^{n,n}[m_1, \ldots, m_k]$. При этом, если K' будет тривиальной подгруппой группы $K^{n,n-1}\{0\}$, состоящей только из тождественного преобразования, то $K^{n,n} \equiv K^{n,n}[1, 2, \ldots, n-1]$, если же $K' \equiv K^{n,n-1}\{0\}$, то $K^{n,n} \equiv O(n) * T_n$.

Необходимость. Пусть $K^{n,n} = K' * T_0' = K^{n,n}[m_1, \ldots, \ldots, m_k]$. По предположению стационарности подгруппы $K^{n,n}$ и лемме 1, подгруппа K' является подгруппой стационарности некоторого флага Φ, содержащего инвариантную плоскость R_m при $m = n - \dim T_0'$ и действующей на R_m транзитивно. Но так как любое векторное подпространство V_{m_s}, $s = 1, \ldots, k$, является инвариантной относительно всех параллельных переносов в R_n, то, в силу стационарности подгруппы $K^{n,n}$, подгруппа T_0' совпадает со всей T_n, т. е. $\dim T_0' = n$. Отсюда следует, что $m = 0$, тем самым R_m оказывается некоторой инвариантной относительно действия подгруппы K' точкой и векторные подпространства $V_{m_1}, \ldots, V_{m_k}$ определяют проходящие через нее инвариантные плоскости $R_{m_1}, \ldots, R_{m_k}$. Следовательно, $K' = K^{n,m'}\{0, m_1, \ldots, m_k\}$, $m' \leqslant n-1$. Лемма доказана.

Следствие. *Если K' — винтовая подгруппа подгруппы стационарности точечного флага $\{0, m_1, \ldots, m_k\}$, то подгруппа $K^{n,n} = K' * T_n$ будет винтовой подгруппой подгруппы стационарности векторного флага $[m_1, \ldots, m_k]$. Если K' — винтовая подгруппа подгруппы стационарности флага $\{0\}$, то $K^{n,n} = K' * T_n$ инвариантого флага не имеет.*

Лемма 3. *Пусть дана подгруппа Ли движений $K^{n,n} = K' * T_0'$ и $T_0' \neq \{0\}$, $T_0' \neq T_n$. Тогда нетранзитивная в R_n подгруппа Ли движений K' является винтовой подгруппой. Ее инвариантным флагом является точечный флаг $\Phi = \{m, m_1, \ldots, m_k\}$, где $1 \leqslant m = n - \dim T_0' \leqslant n-1$, $m < m_1 < \ldots < m_k < n$, $k \geqslant 1$. При этом $K^{n,n}$ — винтовая подгруппа подгруппы стационарности векторного флага $[m, m_1, \ldots, m_k]$.*

Доказательство. Так как по предположению, подгруппа $K^{n,n} = K' * T_0'$ транзитивна в R_n, то по лемме 1 подгруппа K' действует транзитивно на плоскости R_m, где в рассматриваемом случае $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Первое утверждение настоящей леммы доказывается от противного. Допустим, что K' является подгруппой стационарности некоторого флага Φ, содержащего R_m. Так как K' транзитивна на R_m, то этот флаг Φ не может содержать внутри R_m инвариантной относительно K' плоскости меньшей размерности, чем m, т. е. Φ может внутри R_m содержать только векторную часть. Кроме того, так как K' — подгруппа стационарности флага Φ, то K' должна содержать все параллельные переносы вдоль R_m. Тем самым подгруппой T_0' — связной компонентой нулевого элемента в подгруппе $K^{n,n} \cap T_n$ — будет в рассматриваемом случае T_n, что противоречит предположению $T_0' \neq T_n$. Поэтому при предположениях леммы подгруппа K', действующая на R_m транзитивно, может быть только винтовой подгруппой некоторого флага Φ в R_n, содержащего R_m.

Для полного доказательства леммы осталось исследовать возможный тип флага Φ. Так как, по вышесказанному, Φ содержит плоскость R_m, инвариантную относительно действия K', то по определению флага, Φ не является векторным.

Пусть размерностью подгруппы $T' = K^{n,n} \cap T_n$ будет n_1, т. е. $\dim(K^{n,n} \cap T_n) = n_1$. В силу предположений леммы $1 \leqslant n_1 \leqslant \leqslant n-1$. Покажем, что подгруппа K' не может быть винтовой подгруппой некоторого векторно-точечного флага $\Phi = [m_1, \ldots ; \ldots ; m, \ldots , m_k\}$. Действительно, если бы K' была такой подгруппой K'_r, то, в силу (2.1), мы имели бы

$$K'_r[m_1, \ldots; m, \ldots, m_k\} = K''_{r-m+m_1}\{m_1, \ldots, m, \ldots, m_k\} * T_{m-m_1},$$
$$m - m_1 > 0,$$

вследствие чего $K^{n,n} = K' * T_0' = K'' * T_0''$, где $\dim T_0'' = = n_1 + m - m_1 > n_1$. Отсюда следовало бы $T_0'' \subset K^{n,n} \cap T_n$ и $\dim(K^{n,n} \cap T_n) > n_1$, что противоречит предположению $\dim(K^{n,n} \cap T_n) = n_1$.

Покажем, что при $\Phi = \{m\}$ подгруппа $K' * T_0'$ может быть транзитивной в R_n только тогда, когда $T_0' = T_n$. Действительно, пусть K' винтовая подгруппа с инвариантным флагом $\{m\}$. Так как K' транзитивна на R_m и действует на ней без инвариантных флагов, то K' должна содержать все параллельные переносы вдоль R_m. Тем самым $T_0' = T_n$, что не может иметь места.

В силу вышесказанного, осталась единственная возможность — K' является винтовой подгруппой точечного флага $\Phi = \{m, m_1, \ldots , m_k\}$, $m < m_1 < \ldots < m_k < n$, $k \geqslant 1$. Тогда подгруппа $K^{n,n} = K' * T_0'$ — винтовая подгруппа с инвариантным векторным флагом $[m, m_1, \ldots , m_k]$. Лемма полностью доказана.

2. Перечисление всех типов подгрупп $K^{5,5}$. Для перечисления подгрупп $K^{5,5}$ группы движений пространства R_5 применяются результаты, полученные в предыдущем пункте. В рассматриваемом случае $\dim K^{5,5} \geqslant 5$. Оказывается, что подгруппы $K^{5,5} = K' * T_0' \in O(5) * T_5$ существуют только при $\dim T_0' \geqslant 4$.

Предложение. *Подгруппа $K = K' * T_0' \in O(5) * T_5$ не будет транзитивной в R_5, если $\dim T_0' = 0$ (т. е. если $K \cap T_n = T'$ дискретна).*

Доказательство. Пусть параметрами r-параметрической ($r \geqslant 5$) подгруппы K' являются формы $\omega^k{}_j$, где $j, k \in \in \{1, \ldots , 5\}$, $j < k$ и число пар (j, k) равен r. Действие подгруппы K будет в R_5 транзитивным тогда и только тогда, когда

$$\omega^I = a^I{}_{(jk)}\omega^k{}_j, \quad I=1, \ldots, 5, \tag{2.2}$$

где $a^I{}_{(jk)}$ — постоянны и

$$\operatorname{rang} \|a^I{}_{(jk)}\| = 5.$$

По результатам п. 1 § 1 настоящей работы и 1° г) п. 2 § 2 работы [5] подгруппой K' может служить либо 10-параметрическая подгруппа $K^{5,4}\{0\}$, либо 6-параметрическая подгруппа $K^{5,3}\{0, 1\}$ из $O(5) * T_5$.

В первом случае решение линейной относительно $a^I{}_{(jk)}$ системы, полученной внешним дифференцированием выражений (2.2) с учетом структурных уравнений (1.3), представляется матрицей

$$\|a^I{}_{(jk)}\| = \begin{Vmatrix} a & b & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & b & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & c & -a & 0 & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -a & -b & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -a & -b & -d \end{Vmatrix},$$

где $a, b, c, d, e = \text{const}$. Но $\operatorname{rang} \|a^I{}_{(jk)}\| \neq 5$, так как между строками этой матрицы существует линейная зависимость:

$$ca^1{}_{(jk)} - aa^2{}_{(jk)} - ba^3{}_{(jk)} - da^4{}_{(jk)} - ea^5{}_{(jk)} = 0.$$

Следовательно, формы ω^I — линейно зависимые и K не будет транзитивной в R_5.

Во втором случае имеет место $\omega^5{}_I = 0$. В силу (1.3), тогда $d\omega^5 = 0$. Поэтому из выражения (2.2) формы $\omega^5 = a^5{}_{(jk)}\omega^k{}_j$ получается $a^5{}_{(jk)}d\omega^k{}_j = 0$. Но так как, в силу (1.3), с учетом независимости $\omega^k{}_j$ сейчас $d\omega^k{}_j \neq 0$, то все $a^5{}_{(jk)} = 0$ и $\omega^5 = 0$. Последнее равенство не может иметь места при транзитивных подгруппах Ли движений в R_5. Предложение доказано.

Осталось показать, что при $1 \leqslant \dim T_0' \leqslant 3$ подгруппа $K = K' * T_0'$ также не может быть транзитивной. Действительно, если бы при сделанных предположениях существовала транзитивная в R_5 подгруппа Ли движений K, то в силу леммы 3, она была бы винтовой подгруппой в $O(5) * T_5$ и K' — соответственно, винтовой подгруппой с инвариантным точечным флагом $\{m, m_1, \ldots, m_k\}$, $m < m_1 < \ldots < m_k$, $m = 4, 3, 2$, $k \geqslant 1$, действующей на R_m транзитивно. Но из результатов работ [4, 5] и § 1 настоящей работы, сводка которых дана в таблице 2 § 3, видно, что винтовых подгрупп K', удовлетворяющих этим условиям, не существует. Следовательно, не существует также транзитивных подгрупп $K = K' * T_0'$ при $1 \leqslant \dim T_0' \leqslant 3$.

В случае $\dim T_0' = 4$ существуют транзитивные винтовые подгруппы группы движений в R_5. Одна из них является полупрямым произведением $K' * T_0'$, где $K' = K_1{}^{5,1}\{1, 2, 3\}$ (см. [4], § 1) и ее инвариантная прямая R_1 — ось винтовой линии $\Gamma_{(3)}$

некоторой плоскости $R_3 \supset R_1$, ортогональная к T_0'. Если выбрать подвижный ортонормированный репер в R_5 так, чтобы M и $\boldsymbol{e}_1$ принадлежали прямой R_1, а $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ так, чтобы $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ являлся полным репером плоскости R_3, то рассматриваемая подгруппа выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=0, \qquad \omega^1=k\omega^3{}_2 \qquad (k=\text{const}),$$
$$\omega^4{}_2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3=\omega^5{}_4=0.$$

Она является подгруппой $K_5{}^{5,5}$ $[1,2,3]$, так как из формул инфинитезимального перемещения репера следует $d\boldsymbol{e}_1=0$, $d\boldsymbol{e}_4=0$, $d\boldsymbol{e}_5=0$.

Если $K'=K_1{}^{5,1}\{1,3\}$ (см. [4], § 1), то инвариантной прямой R_1 будет ось винтовой линии $\Gamma_{(5)}\subset R_5$, где R_1 — ортогональная к T_0'. Канонизируем ортонормированный подвижный репер в R_5 так, чтобы M и $\boldsymbol{e}_1$ принадлежали R_1, а $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$ определяли бы двумерные направления в T_0', инвариантные относительно рассматриваемого винтового движения. Тогда вполне интегрируемая пфаффовая система

$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=0, \quad \omega^1=k_1\omega^3{}_2,$$
$$\omega^4{}_2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3=0, \quad \omega^5{}_4=k_2\omega^3{}_2,$$

где $k_1=\text{const}$, $k_2=\text{const}$, определяет винтовую подгруппу $K_5{}^{5,5}[1,3]$, так как теперь $d\boldsymbol{e}_1=0$, $d\boldsymbol{e}_2=\omega^3{}_2\boldsymbol{e}_3$. $d\boldsymbol{e}_3=-\omega^3{}_2\boldsymbol{e}_3$.

При точно такой же канонизации репера, как описанная в предыдущем случае, вполне интегрируемая пфаффовая система

$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=0, \quad \omega^1=k\omega^3{}_2 \quad (k=\text{const}),$$
$$\omega^4{}_2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3=0$$

выделяет 6-параметрическую винтовую подгруппу $K_6{}^{5,5}[1,3]$, соответствующую подгруппе $K_2{}^{5,2}\{1,3\}$ (см. [4], п. 4 § 2).

Если $\dim T_0'=5$, т. е. $T_0'=T_5$, то каждой подгруппе K' группы вращений в R_5 соответствует подгруппа K в $O(5)*T_5$, транзитивная в R_5 и являющаяся полупрямым произведением $K'*T_5$.

Подгруппами стационарности будут: 11-*параметрическая* $K^{5,5}[1]$, 9-*параметрическая* $K^{5,5}[2]$, 8-*параметрическая* $K^{5,5}[1,2]$, 7-*параметрическая* $K^{5,5}[1,3]$, 6-*параметрическая* $K^{5,5}[1,2,3]$ и 5-*параметрическая* $K^{5,5}[1,2,3,4]$. Кроме них *существуют еще четыре винтовые транзитивные в* R_5 *подгруппы* $K'*T_5$, которые соответствуют винтовым подгруппам K' группы вращений в R_5.

При $K'=K_1{}^{5,1}\{0,2,3\}$ (см. [4], § 1), системой

$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=\omega^4{}_2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3=0,$$
$$\omega^5{}_4=k\omega^3{}_2 \quad (k=\text{const})$$

выделяется подгруппа $K_6{}^{5,5}[1,3]$, так как $d\boldsymbol{e}_1=0$, $d\boldsymbol{e}_2=\omega^3{}_2\boldsymbol{e}_3$, $d\boldsymbol{e}_3=-\omega^3{}_2\boldsymbol{e}_2$.

Если $K' = K_3^{5,3}\{0\}$ (см. [5], § 3), то пфаффовая система

$$\omega^2{}_1 \pm \omega^4{}_3 = \omega^3{}_1 \mp \omega^4{}_2 = \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 \mp 0{,}5\omega^4{}_1 =$$
$$= \omega^5{}_2 \mp \sqrt{1{,}5}(\omega^4{}_2 - \omega^4{}_3) = \omega^5{}_3 \pm \sqrt{1{,}5}(\omega^4{}_2 + \omega^4{}_3) = \omega^5{}_4 = 0$$

определяет 8-параметрическую транзитивную винтовую подгруппу, не имеющую в R_5 инвариантного флага.

Если $K' = K_3^{5,3}\{0, 1\}$ (см. [5], 1° г) п. 2 § 2), то соответствующая 8-параметрическая подгруппа выделяется системой

$$\omega^2{}_1 = \omega^4{}_3, \quad \omega^3{}_1 = -\omega^4{}_2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^4{}_1, \quad \omega^5{}_1 = \omega^5{}_2 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0.$$

Она будет подгруппой $K_8^{5,5}$ [1], так как $de_5 = 0$.

Подгруппе $K' = K_4^{5,3}\{0, 1\}$ (см. [5], 1° г) п. 2 § 2) соответствует $K_9^{5,5}$ [1], выделяемая системой

$$\omega^3{}_1 = -\omega^4{}_2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^4{}_1, \quad \omega^5{}_1 = \omega^5{}_2 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0.$$

§ 3. Перечень всех типов подгрупп $K^{5,m}$ $(1 \leqslant m \leqslant 5)$ и их характеристика

Окончательная классификация подгрупп Ли движений $K \subset O(5) * T_5$ вещественного евклидова пространства R_5 проводится с помощью соответствующих им инвариантных флагов Φ. В продолжении всей работы (см. также [4, 5]) флаги Φ указаны вместе с нахождением вполне интегрируемых пфаффовых систем, определяющих подгруппы $K \subset O(5) * T_5$.

Перечисление подгрупп Ли стационарности флагов $K^{5,m}(\Phi)$ равносильно перечислению представителей всех классов эквивалентности флагов Φ в R_5. Эти классы следующие:

a) точечные флаги: $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4\}$;

b) векторные флаги: $[1]$, $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 2, 3]$, $[1, 2, 3, 4]$, $[2]$;

c) векторно-точечные флаги: $[1; 2\}$, $[1; 3\}$, $[1; 4\}$, $[1; 2, 3\}$, $[1; 3, 4\}$, $[1, 2; 3\}$, $[1, 2; 4\}$, $[1; 2, 3, 4\}$, $[1, 2; 3, 4\}$, $[1, 2, 3; 4\}$, $[2; 4\}$.

Поскольку классов эквивалентности 34, то в 15-параметрической группе движений $O(5) * T_5$ пространства R_5 существует 34 типа подгрупп Ли стационарности флагов. Их основные характеристики и соответствующие орбиты максимальных размерностей указаны в таблице 1.

Кроме перечисленных подгрупп Ли стационарности флагов, в группе $O(5) * T_5$ имеется еще 24 типа винтовых подгрупп Ли. Они приведены вместе с характеристикой их орбит максимальных размерностей в таблице 2. (Относительно звездочки при номере некоторых подгрупп см. ниже.)

Таблица 1

Подгруппы Ли стационарности флагов группы движений в R_5

№ подгруппы	Максим. разм. орбиты	Инвариантный флаг	Число параметров подгруппы	Орбиты максимальной размерности
1.	1	{1, 2, 3, 4}	1	прямые R_1
2.		{0, 1, 2, 3}	1	окружности $S_1 \subset R_2$
3.	2	[1; 2, 3, 4}	2	плоскости R_2
4.		{1, 2, 3}	2	цилиндры вращения в R_3
5.		{0, 2, 3}	2	поверхности Клиффорда в R_4
6.		{2, 3, 4}	3	плоскости R_2
7.		{0, 1, 2}	3	сферы $S_2 \subset R_3$
8.	3	[1, 2; 3, 4}	3	плоскости R_3
9.		[1; 2, 3}	3	цилиндры вращения с плоскими образующими $(R_2 \times S_1)$
10.		{1, 3}	3	цилиндры на поверхностях Клиффорда из R_4
11.		[1; 3, 4}	4	плоскости R_3
12.		{2, 3}	4	$R_2 \times S_1$
13.		{1, 4}	4	цилиндры вращения с прямолинейными образующими $(R_1 \times S_2)$
14.		{0, 2}	4	поверхности переноса $S_2 \times S_1$
15.		{3, 4}	6	плоскости R_3
16.		{0, 1}	6	сферы $S_3 \subset R_4$
17.	4	[1,2,3; 4}	4	гиперплоскости R_4
18.		[1,2; 3}	4	гиперцилиндры с трехмерными образующими $(R_3 \times S_1)$
19.		[1,2; 4}	5	гиперплоскости R_4
20.		[1; 3}	5	$R_3 \times S_1$
21.		[1; 2}	5	гиперцилиндры с плоскими образующими $(R_2 \times S_2)$
22.		[2; 4}	6	гиперплоскости R_4
23.		{2}	6	$R_2 \times S_2$
24.		[1; 4}	7	гиперплоскости R_4
25.		{1}	7	гиперцилиндры с прямолинейными образующими $(R_1 \times S_3)$
26.		{3}	7	$R_3 \times S_1$
27.		{4}	10	гиперплоскости R_4
28.		{0}	10	гиперсферы S_4
29.	5	[1, 2, 3, 4]	5	все R_5
30.		[1, 2, 3]	6	„
31.		[1, 3]	7	„
32.		[1, 2]	8	„
33.		[2]	9	„
34.		[1]	11	„

Таблица 2

Винтовые подгруппы Ли группы движений в R_5

№ подгруппы	Максим. разм. орбиты	Инвариантный флаг	Число параметров подгруппы	Орбиты максимальной размерности
1.	1	{1, 2, 3}	1	винтовые линии $\Gamma_{(3)} \subset R_3$
2.		{0, 2, 3}	1	винтовые линии $\Gamma_{(4)} \subset R_4$
3.		{1, 3}	1	винтовые линии $\Gamma_{(5)} \subset R_5$
4.	2	[1; 2, 3}	2	цилиндры на винтовых линиях $\Gamma_{(3)}$
5.		{1, 3}	2	а) винтовые поверхности б) цилиндры на винтовых линиях $\Gamma_{(4)}$ в) поверхности переноса $(\Gamma_{(3)} \times S_1)$
6.	3	[1; 3, 4}	3	плоскости R_3
7.		[1, 2; 3}	3	цилиндры на винтовых линиях $\Gamma_{(3)}$ с плоскими образующими $(R_2 \times \Gamma_{(3)})$
8.*		{0, 1}	3	сферы $S_3 \subset R_4$
9.*		{0}	3	поверхности V_3 на сферах S_4
10.*		{0, 1}	4	сферы $S_3 \subset R_4$
11.		[1; 3}	4	$R_2 \times \Gamma_{(3)}$
12.	4	[1, 2; 4}	4	гиперплоскости R_4
13.*		{1}	4	гиперцилиндры с прямолинейными образующими $(R_1 \times S_3)$
14.		[1; 3}	4	гиперцилиндры с трехмерными образующими $(R_3 \times S_1)$
15.		[2; 4}	5	гиперплоскости R_4
16.*		{1}	5	$R_1 \times S_3$
17.*		{4}	7	гиперплоскости R_4
18.*		{4}	8	„
19.	5	[1, 2, 3]	5	все R_5
20.		[1, 3]	5	„
21.		[1, 3]	6	„
22.*		[1]	8	„
23.*		—	8	„
24.*		[1]	9	„

Среди всех 58 типов собственных подгрупп Ли группы движений в R_5 существует 29 типов подгрупп Ли, орбиты максимальных размерностей которых не лежат в некоторой гиперплоскости $R_4 \subset R_5$. Их орбитами максимальной размерности (сгруппированными по возрастанию размерности) являются:

1 — винтовые линии в R_5;

2 — винтовые поверхности, полученные винтовым движением некоторой линии постоянной кривизны поверхности Клиффорда плоскости R_4, и получаемые из них предельным переходом либо цилиндры на винтовых линиях плоскости R_4, либо поверхности переноса винтовых линий плоскости R_3 вдоль окружностей плоскости R_2, вполне ортогональной к R_3;

3 — цилиндры с прямолинейными образующими на поверхностях Клиффорда плоскости R_4, поверхности переноса сфер плоскости R_3 вдоль окружностей плоскости R_2, вполне ортогональной к R_3, цилиндры на винтовых линиях в R_3 с плоскими образующими, поверхности V_3 на гиперсферах $S_4 \subset R_5$;

4 — гиперцилиндры вращения с 1-, 2-, 3-мерными образующими, гиперсферы;

5 — все транзитивные подгруппы Ли движений имеют своей орбитой пространство R_5.

К упомянутым 29 типам подгрупп Ли добавляются 28 типов собственных подгрупп Ли движений пространства R_4 (см. [3], стр. 14—15) и подгруппа $K^{5,4}\{4\} \equiv O(4) * T_4$.

Многие подгруппы Ли движений имеют орбиты, размерность которых ниже максимального. Например, для всех подгрупп вращений орбитой размерности нуль является инвариантная относительно ее действия точка в пространстве R_5. Кроме того, все подгруппы, орбитами максимальной размерности которых являются цилиндры вращения с p-мерными ($p = 1, 2, 3$) образующими, имеют своей орбитой также осевую плоскость R_p, проходящую через один из центров вращения в плоскости, вполне ортогональной к R_p.

Наиболее интересные орбиты размерностей, меньшей чем максимальная, встречаются у подгруппы стационарности флага $\{1, 3\}$ (тип 10 по таблице 1) и у винтовой подгруппы с инвариантным флагом $\{0\}$ (тип 9 по таблице 2). Первая из них имеет своей двумерной орбитой цилиндр вращения в R_3 и вторая — максимально-симметричную поверхность (поверхность Веронезе).

В группе $O(5) * T_5$ имеется 10 типов подгрупп Ли вращений. Этот результат согласуется[1] с результатами в [6, 7, 2]. Для всех остальных 48 типов подгрупп группы $O(5) * T_5$ в пространстве R_5 не существует инвариантной относительно них точки, т. е. они являются собственными подгруппами группы движений $O(5) * T_5$, но не группы вращений $K^{5,4}\{0\}$.

---

[1] Как указал В. Г. Копп в личном письме автору, в [2] надо учитывать, что 7-параметрической подгруппы не существует, так как базис операторов не замкнутый. Кроме того, указанные там же 6-параметрические подгруппы получаются одна из другой внутренним автоморфизмом.

Для большинства полученных типов собственных подгрупп Ли группы движений в R_5 существует с точностью до внутреннего автоморфизма только одна подгруппа данного типа. Таковыми являются все группы стационарности флагов и 10 типов винтовых подгрупп, отмеченных в таблице звездочкой. Для остальных винтовых подгрупп существует либо 1-, либо 2-параметрическое семейство несопряженных подгрупп Ли рассматриваемого типа (параметрами являются «шаги» винтовых движений). Отметим также, что некоторые классы винтовых подгрупп разделяются дальше по глобальным свойствам орбит их подгрупп. Например, в случае семейства подгрупп $K_2^{5,2}\{1,3\}$ глобальные свойства орбит V_2 будут различными в зависимости от того, является ли ее образующая линия постоянной кривизны на поверхности Клиффорда плоскости R_4 замкнутой или незамкнутой. В настоящей работе в подобных случаях соответствующее разбиение классов винтовых подгрупп не учтено, т. е. в этих случаях мы ограничивались локальной классификацией подгрупп с точностью до сопряженности.

Особое место среди семейств винтовых подгрупп, зависящих от параметров, занимает 2-параметрическое семейство подгрупп типа 21 (по таблице 2). Если один из параметров семейства равняется нулю, то любая подгруппа из такого 1-параметрического семейства содержит всю подгруппу параллельных переносов T_5 в R_5. В противном случае каждая подгруппа этого 2-параметрического семейства содержит лишь $T_4 \subset T_5$. Следует отметить, что семейство винтовых подгрупп всегда содержит подгруппы стационарности некоторых флагов.

Литература

1. Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.
2. Копп В. Г., О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1966, **126**, № 1, 13—22.
3. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстые R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 12—30.
4. Рийвес К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 96—126.
5. Рийвес К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 83—109.
6. Medici S., Sui gruppi di rotazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1908, **10**, 159—160.
7. Teleman C., Grupurile de mişcare transitive ale spaţiilor riemanniene V_5. Studii şi. cercetări mat., Acad. RPR, 1953, **4**, № 3—4, 503—526.

Поступило
19 III 1974

EUKLEIDILISE RUUMI R_5 LIIKUMISTE RÜHMA LIE ALAMRÜHMAD JA NENDE ORBIIDID. III

K. Riives

Resümee

Käesoleva artikliga lõpeb tulemuste avaldamine, mis on saadud reaalse eukleidilise ruumi R_5 liikumiste rühma $O(5) * T_5$ kõigi sidusate paarikaupa mittekonjugeeritud Lie alamrühmade klassifitseerimisel [4, 5]. On leitud kõik sellised alamrühmad, mille maksimaalse mõõtmega orbiitideks on hüperpinnad V_4 ruumis R_5 ja kirjeldatud vastavate orbiitide diferentsiaalgeomeetrilisi omadusi. Kõigi transitiivsete Lie alamrühmade määramiseks liikumiste rühmas $O(5) * T_5$ rakendatakse kombneeritud meetodit, mis tugineb töös tõestatud kahele lemmale (vt. ka [3]). Viimases paragrahvis on antud nii nende kui ka varasemate [4, 5] tulemuste kokkuvõte.

LIE SUBGROUPS IN THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_5 AND THEIR ORBITS. III

K. Riives

Summary

In this paper the publication of the results received in classification of connected Lie subgroups unconjugated in pairs of the group of motions $O(5) * T_5$ in Euclidean space R_5 [4, 5] is accomplished. All subgroups, the orbits of maximal dimension of which are hypersurfaces V_4 in R_5, are found, and the differentialgeometric properties of these orbits are investigated. To determine all transitive Lie subgroups of the group of motions $O(5) * T_5$ a combined method is applied, that is founded on two lemmas proved in the paper (see also [3]). In the last paragraph a summary of these and earlier [4, 5] results is given.

ГРАССМАНОВО ОТОБРАЖЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ 2-ПЛОСКОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. Маазикас

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

1. Основы локальной дифференциальной геометрии многообразий m-плоскостей в n-мерном евклидовом или эллиптическом пространствах даны в работах В. В. Вагнера [18] и Б. А. Розенфельда [11—13]. В этих работах основное внимание уделялось построению систем инвариантных объектов, в том числе инвариантных точек и направлений в каждой m-плоскости многообразия. Обзор дальнейших исследований в этой области дан Р. М. Гейдельманом в [1]. Новые идеи дал Ю. Лумисте в [4], рассматривая многообразие m-плоскостей в евклидовом пространстве R_n как базис канонического расслоенного пространства с индуцированной внутренней связностью. Общие основы теории канонических расслоений и внутренних связностей, включающей в качестве примера вышеуказанный случай, даны им в [3].

2. Возможен другой подход к изучению этих многообразий m-плоскостей евклидова или эллиптического пространств. Именно, m-плоскость этих многообразий можно считать образующим элементом нового пространства — грассманова многобразия. Так рассматривал многообразие m-плоскостей евклидова пространства R_n уже Б. А. Розенфельд. Он, в частности, определил геодезические грассманова многообразия относительно инвариантной аффинной связности [12]. Из работ К. Лейхтвейсса [16], К. Телемана [17] и Ю. Вонга [19] известно, что в грассманово многообразие m-мерных подпространств n-мерного собственно-евклидова векторного пространства E_n можно внести инвариантную риманову метрику. Инвариантная псевдориманова структура в грассмановом многобразии неизотропных m-мерных подпространств псевдоевклидова векторного пространства ${}^lE_n$ определена и исследована автором в [6], а в более частной постановке также Т. Ханганом [15].

3. В настоящей статье, используя названный результат, рассматривается конгруэнция неизотропных 2-мерных плоскостей в евклидовом или псевдоевклидовом пространствах ${}^{l}R_n$. Определяется образ этой конгруэнции в грассмановом многообразии ${}^{k,l}G_{2,n}$ двумерных подпространств ${}^{k}E_2$ векторного пространства ${}^{l}E_n$ [7]. Этот образ является $(n-2)$-мерным подмногообразием в $2(n-2)$-мерном ${}^{k,l}G_{2,n}$. В § 1 даны необходимые в дальнейшем сведения о N-мерных подмногообразиях V_N риманова пространства V_{2N}, а также известные из ранних работ результаты по теории грассмановых многообразий ${}^{k,l}G_{m,n}$. В § 2 для образа рассматриваемой конгруэнции 2-плоскостей, как для подмногообразия, строится его второй фундаментальный тензор и в случае, когда метрика на нем не вырождена, к нему присоединяется полуканонический репер, $n-2$ векторов которого касательны к нему, а остальные $n-2$ векторов ортогональны к ним. В § 3 и 4 изучаются конгруэнции неизотропных 2-плоскостей пространств R_4 и ${}^{1}R_4$ и их грассмановы образы. В частности, в § 4 выясняется, когда образ конгруэнции 2-плоскостей пространства ${}^{1}R_4$ в соответствующем грассмановом многообразии обладает вырожденной метрикой.

§ 1. Подмногообразия в римановых пространствах. Грассмановы многообразия

1. Как указано во введении, в дальнейшем придется заниматься изучением $(n-2)$-мерных подмногообразий $2(n-2)$-мерного грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{2,n}$. Поэтому здесь дадим необходимые в дальнейшем сведения из теории N-мерных подмногообразий V_N в римановом пространстве V_{2N}, укажем для них в полуканоническом репере инвариантные метрический и второй фундаментальный тензоры.

Пусть V_{2N} является римановым пространством (возможно, знаконеопределенной метрики), а $T_p(V_{2N})$ и $T^*{}_p(V_{2N})$, соответственно касательное и кокасательное пространства к V_{2N} в точке $p \in V_{2N}$. Пусть система $2N$ линейно независимых 1-форм $\{\omega^I\}$, где $I, J, \ldots = 1, \ldots, 2N$, обозначает произвольный элемент расслоения его касательных кобазисов, т. е. базис в некотором $T^*{}_p(V_{2N})$. Базис в $T_p(V_{2N})$, дуальный к базису $\{\omega^I\}$, обозначим $\{e_I\}$. Тогда основную метрическую форму для V_{2N} можно представить в виде

$$ds^2 = G_{IJ}\omega^I\omega^J,$$

а уравнения структуры пространства V_{2N} в виде

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I{}_K, \tag{1.1}$$

$$d\omega^I{}_J = \omega^K{}_J \wedge {}^I{}_K + \frac{1}{2} R^I{}_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L, \tag{1.2}$$

где $R^I{}_{JKL}$ — компоненты тензора кривизны. С помощью этого тензора для каждого 2-направления σ, определяемого простым бивектором $\sigma^{IK} = \mathrm{x}^{[I}\mathrm{y}^{K]}$, где $\mathrm{x}^I\mathrm{e}_I$ и $\mathrm{y}^K\mathrm{e}_K$ — линейно независимые векторы в $T_p(V_{2N})$, вводится риманова кривизна $K(\sigma)$ для V_{2N} формулой (см. [2])

$$K(\sigma) = \frac{R_{IJKL}\sigma^{IJ}\sigma^{KL}}{(G_{IK}G_{JL} - G_{IJ}G_{KL})\,\sigma^{IJ}\sigma^{KL}}, \tag{1.3}$$

где

$$R_{IJKL} = G_{IH}R^H{}_{JKL}.$$

Следуя А. З. Петрову [10], риманова кривизна $K(\sigma)$ называется стационарной в 2-направлении σ, если

$$\frac{\partial K(\sigma)}{\partial \sigma^{IK}} = 0,$$

при всех $I < K$ и $\sigma^{I[J}\sigma^{KL]} = 0$.

Пусть в V_{2N} дано N-мерное риманово подмногообразие V_N и пусть $\iota : V_N \to V_{2N}$ является его каноническим вложением. Расслоение касательных к V_{2N} базисов $\{e_I\}$, ограниченное на V_N, допускает приведение к расслоению таких базисов, что $\{e_\alpha\}$, где $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, N$, является образом при ι^T некоторого элемента расслоения касательных базисов на V_N, а любой $h_\beta = \mathrm{e}_{N+\beta}$ ортогонален к любому e_α. Такой базис будем называть *полуканоническим для* V_N; его элементы h_β образуют базис в нормальном к V_N векторном подпространстве $N_p(V_N) \subset \subset T_p(V_{2N})$. Для расслоения дуальных кобазисов тогда справедливо $\iota^*\omega^{N+\alpha} = 0$, а метрическая форма для V_{2N}, ограниченная на V_N, принимает вид

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta + H_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\vartheta^\beta,$$

где

$$H_{\alpha\beta} = G_{N+\alpha, N+\beta}, \qquad \vartheta^\alpha = \omega^{N+\alpha}.$$

Если обозначить $\iota^*\omega^\alpha = \tau^\alpha$, то риманова метрика на V_N определяется с помощью

$$ds^{*2} = G^*{}_{\alpha\beta}\tau^\alpha\tau^\beta, \tag{1.4}$$

где $G^*{}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \circ \iota$. С помощью

$$(ds^\perp)^2 = H_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\vartheta^\beta \tag{1.5}$$

определяется метрика в расслоении $N(V_N)$ нормальных к V_N векторов. Обозначим

$$\iota^*\omega^\beta{}_\alpha = \tau^\beta{}_\alpha, \qquad \iota^*\omega^{N+\beta}{}_\alpha = \varrho^\beta{}_\alpha, \qquad \iota^*\omega^\beta{}_{N+\alpha} = \sigma^\beta{}_\alpha, \qquad \iota^*\omega^{N+\beta}{}_{N+\alpha} = \vartheta^\beta{}_\alpha.$$

Применяя ι^* к структурным уравнениям (1.1) при $I > N$ получим

$$\tau^\alpha \wedge \varrho^\beta{}_\alpha = 0,$$

и по лемме Картана

$$\varrho^\beta{}_\alpha = b^\beta{}_{\alpha\gamma}\tau^\gamma, \tag{1.6}$$

где $b^\beta{}_{\alpha\gamma} = b^\beta{}_{\gamma\alpha}$. Здесь $b^\beta{}_{\alpha\gamma}$ составляют второй фундаментальный тензор для V_N. Подмногообразия V_N, для которых $b^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\equiv 0$, называются *вполне геодезическими*. Из $G_{N+\alpha,\beta}=0$ и (1.6) следует, что

$$\sigma^{\beta}{}_{\alpha}=-G_{\alpha\gamma}H^{\beta\delta}\varrho^{\gamma}{}_{\delta}=-G_{\alpha\gamma}H^{\beta\delta}b^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon}\tau^{\varepsilon},$$

где $H_{\alpha\beta}H^{\beta\delta}=\delta^{\delta}{}_{\alpha}$. Применяя ι^* к остальным уравнениям (1.1) структуры, получим, в частности, структурные уравнения для V_N

$$d\tau^{\alpha}=\tau^{\beta}\wedge\tau^{\alpha}{}_{\beta},$$

$$d\tau^{\alpha}{}_{\beta}=\tau^{\gamma}{}_{\beta}\wedge\tau^{\alpha}{}_{\gamma}+\frac{1}{2}\,{}^{*}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\tau^{\gamma}\wedge\tau^{\delta},$$

где

$${}^{*}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=H_{\varepsilon\lambda}G^{\alpha\mu}b^{\lambda}{}_{\beta[\delta}\,b^{\varepsilon}{}_{|\mu|\gamma]}+R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$$

— тензор кривизны для V_N. Структурными уравнениями главного расслоения базисов в $N_p(V_N)$, присоединенного к $N(V_N)$, будут

$$d\vartheta^{\beta}{}_{\alpha}=\vartheta^{\gamma}{}_{\alpha}\wedge\vartheta^{\beta}{}_{\gamma}+\frac{1}{2}S^{\beta}{}_{\alpha\gamma\delta}\tau^{\gamma}\wedge\tau^{\delta},$$

где

$$S^{\beta}{}_{\alpha\gamma\delta}=H_{\alpha\lambda}G^{\varepsilon\mu}b^{\lambda}{}_{\varepsilon[\delta}\,b^{\beta}{}_{|\mu|\gamma]}+R^{N+\beta}{}_{N+\alpha,\gamma\delta}$$

— объект кривизны для $N(V_N)$.

2. Множество всех m-мерных неизотропных плоскостей n-мерного собственно- или псевдоевклидова пространства ${}^{l}R_n$ (где k и l — числа отрицательных коэффициентов в канонических видах метрических форм, соответственно, пространств ${}^{k}R_m$ и ${}^{l}R_n$) называется *грассмановым многообразием* неизотропных m-плоскостей индекса k в ${}^{l}R_n$ и обозначается через ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$.

Пользуемся в ${}^{l}R_n$ подвижным репером $\{M, \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_\alpha\}$ и присоединим его к каждой m-плоскости так, что начало репера и векторы $\boldsymbol{e}_a$, где $a, b, \ldots = 1, \ldots, k, \; l+1, \ldots, l+m-k$, принадлежат данной m-плоскости, а векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$, где $(\alpha, \beta, \ldots = k+1, \ldots, l, \; l+m-k+1, \ldots, n$, ортогональны к ним. Тогда формулы инфинитезимального перемещения репера имеют вид

$$dM=\omega^{a}\boldsymbol{e}_{a}+\omega^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

$$d\boldsymbol{e}_{a}=\omega^{b}{}_{a}\boldsymbol{e}_{b}+\omega^{\alpha}{}_{a}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

$$d\boldsymbol{e}_{\alpha}=\omega^{a}{}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{a}+\omega^{\beta}{}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta},$$

в которых в силу $g_{a\alpha}=(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_\alpha)=0$, имеет место

$$\omega^{a}{}_{\alpha}=-g^{ab}g_{\alpha\beta}\omega^{\beta}{}_{b}.$$

В таком случае 1-формы ω^{α} и $\omega^{\alpha}{}_{a}$ можно принять за кобазисные на ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$.

Одновременно можно рассматривать пространство векторов в ${}^{l}R_n$, являющееся n-мерным собственно- или псевдоевклидовым векторным пространством ${}^{l}E_n$, и в нем множество всех неизотропных m-мерных подпространств индекса k. Это множество является дифференцируемым многообразием размерности $m(n-m)$ и для него кобазисными являются формы $\omega^\alpha{}_a$. Обозначим его через ${}^{k,l}G_{m,n}$ и назовем *грассмановым многообразием* неизотропных m-мерных векторных подпространств индекса k в ${}^lE_n$. Существует естественная проекция $\varphi: {}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n} \to {}^{k,l}G_{m,n}$, сопоставляющая каждой m-плоскости как точки из ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$ ее m-мерное направление как точку в ${}^{k,l}G_{m,n}$. Поскольку

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^b \wedge \omega^a{}_b + \Sigma^a, \\ d\omega^a{}_b &= \omega^c{}_b \wedge \omega^a{}_c + \Omega^a{}_b, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\Sigma^a = \omega^\alpha \wedge \omega^a{}_\alpha = \frac{1}{2} T^a{}_{\alpha,b\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta{}_b,$$

$$\Omega^a{}_b = \omega^\alpha{}_b \wedge \omega^a{}_\alpha = \frac{1}{2} R^a{}_{b,c\gamma,d\delta}\omega^\gamma{}_c \wedge \omega^\delta{}_d,$$

и

$$T^a{}_{\alpha,b\beta} = -2g^{ab}g_{\alpha\beta}, \qquad R^a{}_{b,c\gamma,d\delta} = g_{\gamma\delta}(g^{ad}\delta^c{}_b - g^{ac}\delta^d{}_b),$$

то, согласно теореме Г. Ф. Лаптева [5], формы ω^a и $\omega^b{}_a$ являются формами внутренней связности для канонического расслоения над ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$, а формы $\omega^b{}_a$ — формами внутренней связности для канонического расслоения над ${}^{k,l}G_{m,n}$. По этой же теореме, в силу

$$d\omega^\beta{}_\alpha = \omega^\gamma{}_\alpha \wedge \omega^\beta{}_\gamma + \Omega^\beta{}_\alpha, \tag{1.8}$$

где

$$\Omega^\beta{}_\alpha = \omega^a{}_\alpha \wedge \omega^\beta{}_a = \frac{1}{2} \mathrm{R}^\beta{}_{\alpha,a\gamma,b\delta}\omega^\gamma{}_a \wedge \omega^\delta{}_d,$$

и

$$R^\beta{}_{\alpha,a\gamma,b\delta} = g^{ab}(g_{\alpha\delta}\delta^\beta{}_\gamma - g_{\alpha\delta}\delta^\beta{}_\gamma),$$

формы $\omega^\beta{}_\alpha$ определяют внутреннюю связность в расслоении над ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$ векторов, ортогональных к m-плоскостям из ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{m,n}$.

3. Как уже отмечалось, 1-формы $\omega^\alpha{}_a$ являются базисными в кокасательном пространстве $T^*{}_p({}^{k,l}G_{m,n})$ к грассманову многообразию ${}^{k,l}G_{m,n}$. Обозначим элементы дуального базиса, т. е. базисные векторы в касательном $T_p({}^{k,l}G_{m,n})$ к ${}^{k,l}G_{m,n}$ пространстве через $e^a{}_\alpha$. Тогда $\omega^\alpha{}_a(e^b{}_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta\delta^b{}_a$. Основные результаты, полученные в [6], резюмирует следующая лемма.

Лемма 1. *Грассманово многообразие ${}^{k,l}G_{m,n}$ можно превратить в пространство Эйнштейна постоянной скалярной кривизны $(n-2)(n-m)m$, определяя в нем инвариантную риманову метрику формулой*

$$ds^2 = G_{a\alpha,b\beta}\omega^\alpha{}_a\omega^\beta{}_b, \tag{1.9}$$

где

$$G_{a\alpha,b\beta} = g^{ab}g_{\alpha\beta}.$$

Его структурные уравнения имеют вид

$$d\omega^a{}_\alpha = \omega^\beta{}_b \wedge \omega^{a\alpha}{}_{b\beta},$$

$$d\omega^{a\alpha}{}_{b\beta} = \omega^{c\gamma}{}_{b\beta} \wedge \omega^{a\alpha}{}_{c\gamma} + R^{a\alpha}{}_{b\beta,c\gamma,d\delta}\omega^\gamma{}_c \wedge \omega^\delta{}_d,$$

где

$$\omega^{a\alpha}{}_{b\beta} = \delta^b{}_a\omega^\alpha{}_\beta - \delta^\alpha{}_\beta\omega^b{}_a,$$

и

$$R^{a\alpha}{}_{b\beta,c\gamma,d\delta} = 2\delta^b{}_a g^{cd}\delta^\alpha{}_{[\delta}g_{\gamma]\beta} + 2\delta^\alpha{}_\beta g_{\gamma\delta}\delta^{[d}{}_a g^{c]b}$$

— *тензор кривизны для* ${}^{k,l}G_{m,n}$.

Метрическая форма (1.9) индуцирует скалярное произведение, которое мы обозначим через $<\ ,\ >$.

В статье [6] для грассмановых многообразий ${}^{k,l}G_{2,4}$ найдены все 2-направления σ, в которых их риманова кривизна стационарна в смысле определения, данного в п. 1. Резюмируем полученные там результаты.

Пусть базис $\{\boldsymbol{e}_i\}$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, присоединенный к подпространствам ${}^kE_2$ пространства ${}^lE_4$ $(k, l = 0, 1, 2)$, выбранный в начале п. 2, является ортонормированным. Тогда $g_{ij} = 0$, при $i \neq j$, а $g^{ii} = g_{ii} = \varepsilon_i$, где ε_i равно 1 или -1. Переобозначим касательные к ${}^{k,l}G_{2,4}$ векторы $e^a{}_\alpha$ следующим образом: $e^1{}_3 = e_1$, $e^1{}_4 = e_2$, $e^2{}_3 = e_3$, $e^2{}_4 = e_4$. Если $\xi = \xi^i e_i$ и $\eta = \eta^j e_j$ — линейно независимые векторы из $T_p({}^{k,l}G_{2,4})$, то они определяют 2-направление σ, которое определяется простым бивектором $\sigma^{ij} = \xi^{[i}\eta^{j]}$. Имеет место

Лемма 2. *Риманова кривизна $K(\sigma)$ грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$ в 2-направлении σ в вышеуказанном базисе для неизотропных σ вычисляется по формуле*

$$K(\sigma) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\sigma^{12} + \varepsilon_2\sigma^{34})^2 + \varepsilon_3\varepsilon_4(\varepsilon^3\sigma^{13} + \varepsilon_4\sigma^{24})^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varrho + (\sigma^{14})^2 + (\sigma^{23})^2 + \varepsilon_3\varepsilon_4\varrho'}, \qquad (1.10)$$

где σ^{ij} — компоненты простого бивектора, определяющего σ и $\varrho = (\sigma^{12})^2 + (\sigma^{34})^2$ и $\varrho' = (\sigma^{13})^2 + (\sigma^{24})^2$. Ее стационарные значения получаются в следующих случаях:

А) *независимо от значений k и l:*

I) *при* $\sigma^{34} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^{12}$, $\sigma^{24} = -\varepsilon_3\varepsilon_4\sigma^{13}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2(\sigma^{12})^2 = \sigma^{14}\sigma^{23} + \varepsilon_3\varepsilon_4(\sigma^{13})^2$, *имеем* $K(\sigma) = 0$;

II) *при* $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$, $\sigma^{13}\sigma^{24} = (\sigma^{14})^2$ *имеем* $K(\sigma) = 1$;

III) *при* $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$, $\sigma^{12}\sigma^{34} = (\sigma^{14})^2$ *имеем* $K(\sigma) = 1$;

В) *в случае, если $k = l = 0$ или $k = 1$, $l = 2$ или $k = l = 2$, имеем*

IV) *при* $\sigma^{34} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^{12}$, $\sigma^{24} = \varepsilon_3\varepsilon_4\sigma^{13}$, $\sigma^{14} = \sigma^{23} = 0$, $\sigma^{13} = \pm\sigma^{12}$, *получается* $K(\sigma) = 2$.

§ 2. Конгруэнции неизотропных 2-плоскостей и их грассмановы отображения

1. Пусть в грассмановом многообразии ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{2,n}$ дано $(n-2)$-мерное подмногообразие ${}^{k,l}\mathfrak{K}_{2,n}$, т. е. конгруэнция 2-плоскостей индекса k в ${}^{l}R_n$. В дальнейшем мы часто будем обозначать его просто через $\mathfrak{K}$, если это не приводит к недоразумениям. Пусть $\iota:\mathfrak{K}\to{}^{k,l}\mathfrak{G}_{2,n}$ является его каноническим вложением. Если 1-формы τ^α являются для $\mathfrak{K}$ кобазисными, то для кобазисных 1-форм ω^α и $\omega^\alpha{}_a$ для ${}^{k,l}\mathfrak{G}_{2,n}$ имеют место формулы

$$\begin{aligned}\iota^*\omega^\alpha&=\Lambda^\alpha{}_\beta\tau^\beta,\\ \iota^*\omega^\alpha{}_a&=\Lambda^\alpha{}_{a\beta}\tau^\beta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Система Пфаффа $\tau^\alpha=0$ должна являться вполне интегрируемой, так что

$$d\tau^\alpha=\tau^\beta\wedge\tau^\alpha{}_\beta.\tag{2.2}$$

Внешнее дифференцирование уравнений систем (2.1) с учетом (2.2) и последующее применение леммы Картана дают

$$\begin{aligned}d\Lambda^\alpha{}_\beta&=\Lambda^\alpha{}_\gamma\tau^\gamma{}_\beta-\Lambda^\gamma{}_\beta\omega^\alpha{}_\gamma+\Lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}\tau^\gamma,\\ d\Lambda^\alpha{}_{a\beta}&=\Lambda^\alpha{}_{b\beta}\omega^b{}_a+\Lambda^\alpha{}_{a\gamma}\tau^\gamma{}_\beta-\Lambda^\gamma{}_{a\beta}\omega^\alpha{}_\gamma=b^\alpha{}_{a\beta\gamma}\tau^\gamma,\end{aligned}\tag{2.3}$$

причем $\Lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}=\Lambda^\alpha{}_{\gamma\beta}$, $b^\alpha{}_{a\beta\gamma}=b^\alpha{}_{a\gamma\beta}$. Отметим, что здесь вместо $\omega^b{}_\beta$ и $\omega^\beta{}_\alpha$ следовало бы писать $\iota^*\omega^b{}_a$ и $\iota^*\omega^\beta{}_\alpha$, но мы будем, для простоты, здесь и в дальнейшем, применять следующие отождествления: $\iota^*\omega^b{}_a=\omega^b{}_a$, $\iota^*\omega^\beta{}_\alpha=\omega^\beta{}_\alpha$, $\iota^*\omega^a=\omega^a$, так как применение ι^* к указанным 1-формам не дает существенно новых соотношений. С помощью (1.7) и (2.1) найдем структурные уравнения канонического расслоения над $\mathfrak{K}$

$$\begin{aligned}d\omega^a&=\omega^c\wedge\omega^a{}_c+{}^*\Sigma^a,\\ d\omega^a{}_b&=\omega^c{}_b\wedge\omega^a{}_c+{}^*\Omega^a{}_b.\end{aligned}$$

Здесь 2-формы

$${}^*\Sigma^a=\iota^*\Sigma^a=\frac{1}{2}\,{}^*T^a{}_{\alpha\beta}\tau^\alpha\wedge\tau^\beta,\tag{2.4}$$

$${}^*\Omega^a{}_b=\iota^*\Omega^a{}_b=\frac{1}{2}\,{}^*R^a{}_{b\alpha\beta}\tau^\alpha\wedge\tau^\beta\tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}{}^*T^a{}_{\alpha\beta}&=T^c{}_{\gamma,b\delta}\Lambda^\gamma{}_{[\alpha}\Lambda^\delta{}_{|b|\beta]},\\ {}^*R^a{}_{b\alpha\beta}&=R^a{}_{b,c\gamma,d\delta}\Lambda^\gamma{}_{c\alpha}\Lambda^\delta{}_{d\beta},\end{aligned}$$

называются, соответственно, *формами кручения и кривизны* указанной связности [4]. В [4] также показано, что значения 2-форм ${}^*\Sigma^a$ зависят от выбора точки в 2-плоскости конгруэнции $\mathfrak{K}$; в ее произвольной точке X с радиусом-вектором $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}+x^a\boldsymbol{e}_a$

$${}^*\Sigma(X)={}^*\Sigma^c+x^b\,{}^*\Omega^c{}_b.\tag{2.6}$$

Точки X, в которых ${}^*\Sigma(X)=0$, называются *точками нулевого кручения.*

Точка X с радиусом-вектором $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}+x^a\boldsymbol{e}_a$ в 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$, для которой существует направление в $T_p(\mathfrak{R})$, такое, что $d\boldsymbol{X}$, вычисленный для этого направления, принадлежит данной 2-плоскости p, называется *фокусом*. Множество всех фокусов в каждой 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$ является некоторой алгебраической линией порядка $n-2$, которая называется *фокальной линией конгруэнции*. Она имеет уравнение (см. [4])

$$\det|\Lambda^\alpha{}_\beta+x^a\Lambda^\alpha{}_{a\beta}|=0. \tag{2.7}$$

Ее бесконечно удаленные точки, которые в данной 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$ могут быть интерпретированы как направления, определяемые векторами $x^a\boldsymbol{e}_a$, для которых $\det|x^a\Lambda^\alpha{}_{a\beta}|=0$, называются *фокусными направлениями*.

2. Если для конгруэнции $\mathfrak{R}$ 2-плоскостей индекса k в ${}^lR_n$ фиксирована какая-нибудь точка W в каждой ее 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$, то к каждой p можно присоединить $(n-2)$-плоскость пространства ${}^lR_n$, проходящую через эту точку W и являющуюся вполне ортогональной к p. Возникает многообразие ${}^{l-k,l}\mathfrak{N}_{n-2,n}$ $(n-2)$-плоскостей, присоединенное к данной конгруэнции $\mathfrak{R}$. В дальнейшем мы обозначим его просто $\mathfrak{N}$. В случае $n=4$ многообразие $\mathfrak{N}$ является также конгруэнцией 2-плоскостей. Начало репера можно перенести в точку W, и тогда $\omega^a=M^a{}_\beta\tau^\beta$. Фокус для $\mathfrak{N}$ определяется как указано выше. Множество всех фокусов в данной $(n-2)$-плоскости $q\in\mathfrak{N}$ называется *фокальным многообразием*. В случае $n=4$, т. е. когда $\mathfrak{N}$ является конгруэнцией, фокальное многообразие в каждой $q\in\mathfrak{N}$ является линией второго порядка, уравнение которой имеет вид

$$\det|M^a{}_\beta-g^{ab}g_{\alpha\gamma}\Lambda^\gamma{}_{b\beta}y^\alpha|=0. \tag{2.8}$$

С помощью (1.8) и (2.1) найдем структурные уравнение канонического расслоения над $\mathfrak{R}$ векторов, ортогональных к 2-плоскостям из $\mathfrak{R}$:

$$d\omega^\beta{}_\alpha=\omega^\gamma{}_\alpha\wedge\omega^\beta{}_\gamma+{}^*\Omega^\beta{}_\alpha,$$

где

$$^*\Omega^\beta{}_\alpha=\iota^*\Omega^\beta{}_\alpha=\frac{1}{2}\,{}^*R^\beta{}_{\alpha\gamma\delta}\tau^\gamma\wedge\tau^\delta, \tag{2.9}$$

и

$$^*R^\beta{}_{\alpha\gamma\delta}=R^\beta{}_{\alpha,a\pi,b\tau}\Lambda^\pi{}_{a\gamma}\Lambda^\tau{}_{b\delta}.$$

3. С помощью канонического вложения $\iota:{}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,n}\to{}^{k,l}\mathfrak{G}_{2,n}$ и проекции $\varphi:{}^{k,l}\mathfrak{G}_{2,n}\to{}^{k,l}G_{2,n}$ определяется отображение $\psi=\varphi\circ\iota:{}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,n}\to{}^{k,l}G_{2,n}$, которое будем называть *грассмановым отображением конгруэнции* ${}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,n}$ в ${}^{k,l}G_{2,n}$. Отображение ψ сопоставляет каждой 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$ ее 2-направление как точку в ${}^{k,l}G_{2,n}$. Обозначим этот образ $\psi(\mathfrak{R})$ конгруэнции $\mathfrak{R}$ при ψ через K.

В дальнейшем целесообразно несколько ограничить выбор подвижного репера, присоединенного к точке M в 2-плоскости p конгруэнции $\mathfrak{R}$. Именно, пусть $\boldsymbol{e}_a$ в 2-плоскости $p\in\mathfrak{R}$ ортонормированы, т. е. $g_{ab}=0$, если $a \neq b$ и $g_{aa}=\varepsilon_a=\pm 1$, и пусть $\boldsymbol{e}_1$ не имеет фокальное направление, т. е. $\det|\Lambda^\alpha{}_{1\beta}| \neq 0$. Тогда в качестве базисных форм τ^α для $\mathfrak{K}$ можно выбрать формы $\tau^\alpha = \iota^*\omega^\alpha{}_1$. После этого в уравнениях (2.1) имеют место $\Lambda^\alpha{}_{1\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$, и, следовательно, конгруэнцию $\mathfrak{K}$ можно определить системой

$$\begin{aligned} \iota^*\omega^\alpha &= \Lambda^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_1, \\ \iota^*\omega^\alpha{}_2 &= \Lambda^\alpha{}_{2\beta}\omega^\beta{}_1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где, как мы условились, в правых частях этих уравнений опущен ι^*.

Теорема 1. *Касательное подпространство образа K конгруэнции $\mathfrak{K}$ 2-плоскостей пространства ${}^lR_n$, как касательное пространство $(n-2)$-мерного подмногообразия в грассмановом многообразии ${}^{k,l}G_{2,n}$ натянуто при выбранном выше репере на векторы*

$$f_\alpha = e^1{}_\alpha + \Lambda^\beta{}_{2\alpha}e^2{}_\beta. \tag{2.11}$$

Риманова метрика (1.9) *индуцирует на K инвариантную симметрическую квадратичную форму*

$$ds^{*2} = G_{\alpha\beta}\omega^\alpha{}_1\omega^\beta{}_1, \tag{2.12}$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \varepsilon_1 g_{\alpha\beta} + \varepsilon_2 g_{\gamma\delta}\Lambda^\gamma{}_{2\alpha}\Lambda^\delta{}_{2\beta}. \tag{2.13}$$

Второй фундаментальный тензор для K относительно подвижного репера $\{\psi(p),\ f_\alpha,\ e^2{}_\beta\}$ совпадает с объектом $b^\alpha{}_{2\beta\gamma}$, определенном в (2.3).

Доказательство. Введем формы ϑ^α формулой

$$\vartheta^\alpha = -\Lambda^\alpha{}_{2\beta}\omega^\beta{}_1 + \omega^\alpha{}_2. \tag{2.14}$$

Согласно уравнениям (2.10) имеем $\iota^*\vartheta^\alpha=0$; следовательно, этой системой в ${}^{k,l}G_{2,n}$ выделяется подмногообразие K размерности $n-2$, которое является образом конгруэнции $\mathfrak{K}$. В силу

$$\vartheta^\beta(f_\alpha) = \Lambda^\gamma{}_{2\alpha}\omega^\beta{}_2(e^2{}_\gamma) - \Lambda^\beta{}_{2\gamma}\omega^\gamma{}_1(e^1{}_\alpha) = \Lambda^\beta{}_{2\alpha} - \Lambda^\beta{}_{2\alpha} = 0$$

векторы f_α являются касательными к K. Поскольку они и линейно независимы, то они образуют базис для $T_{\psi(p)}(K) \subset T_{\psi(p)}({}^{k,l}G_{2,n})$. Легко видеть, что $\{f_\alpha, e^2{}_\beta\}$ и $\{\omega^\alpha{}_1, \vartheta^\beta\}$ можно принять за новые базисы соответственно для касательного $T_{\psi(p)}({}^{k,l}G_{2,n})$ и кокасательного $T^*{}_{\psi(p)}({}^{k,l}G_{2,n})$ пространств к грассманову многообразию ${}^{k,l}G_{2,n}$. Внешнее дифференцирование уравнений $\vartheta^\alpha=0$ дает $d\vartheta^\alpha = \omega^\beta{}_1 \wedge \Delta^\alpha{}_\beta$, где

$$\Delta^\alpha{}_\beta = d\Lambda^\alpha{}_{2\beta} - \Lambda^\alpha{}_{2\gamma}(\omega^\gamma{}_\beta - \Lambda^\gamma{}_{2\beta}\omega^2{}_1) - \delta^\alpha{}_\beta\omega^1{}_2 + \Lambda^\gamma{}_{2\beta}\omega^\alpha{}_\gamma.$$

Следовательно, $\Delta^\alpha{}_\beta = b^\alpha{}_{2\beta\gamma}\omega^\gamma{}_1$, и объект $b^\alpha{}_{2\beta\gamma}$ является вторым фундаментальным тензором для K. Наконец, метрическая форма (1.9) индуцирует как раз метрику на K формулой (2.12). Теорема доказана.

В следующей теореме укажем, как к подмногообразию K присоединить полуканонический репер, описанный для N-мерных подмногообразий V_N риманова пространства V_{2N} в § 1, п. 1. В доказательстве нам понадобится следующая

Лемма 3 (см. [14], стр. 196). *Квадратичная $(2N\times 2N)$-матрица A вида*

$$A=\begin{Vmatrix} E & B \\ C & D \end{Vmatrix}, \tag{2.15}$$

где E единичная, а B, C и D — произвольные $(N\times N)$-матрицы, регулярна тогда и только тогда, когда регулярна $(N\times N)$-матрица $D-CB$; если матрица A регулярна, то обратной к ней матрицей A^{-1} является

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} E+B(D-CB)^{-1}C & -B(D-CB)^{-1} \\ -(D-CB)^{-1}C & (D-CB)^{-1} \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда $\det|G_{\alpha\beta}|\neq 0$, тензор (2.13) определяет на $\mathfrak{K}$ риманову или псевдориманову метрику и верна

Теорема 2. *Пусть тензор* (2.13) *определяет на K риманову или псевдориманову метрику. Тогда K можно отнести к подвижному полуканоническому реперу $\{\psi(p),\ \mathfrak{f}_\alpha,\ h_\beta\}$, где векторы $\mathfrak{f}_\alpha$ определяются формулами* (2.11) *и*

$$h_\beta=-\varepsilon_2 g_{\beta\varepsilon}G^{\gamma\delta}\Lambda^\varepsilon{}_{2\gamma}e^1{}_\delta+(\delta^\delta{}_\beta-\varepsilon_2 g_{\beta\gamma}G^{\rho\sigma}\Lambda^\delta{}_{2\rho}\Lambda^\gamma{}_{2\sigma})\,e^2{}_\delta \tag{2.16}$$

— ортогональные к ним векторы. Кобазис $\{\pi^\alpha,\ \vartheta^\beta\}$, дуальный базису $\{\mathfrak{f}_\alpha,\ h_\beta\}$, составляют формы

$$\pi^\alpha=\varepsilon_1 g_{\beta\gamma}G^{\alpha\beta}\omega^\gamma{}_1+\varepsilon_2 g_{\gamma\delta}G^{\alpha\beta}\Lambda^\delta{}_{2\beta}\omega^\gamma{}_2, \tag{2.17}$$

и ϑ^β, определяемые формулами (2.14).

Относительно репера $\{\psi(p),\ \mathfrak{f}_\alpha,\ h_\beta\}$ метрика на K определяется формулой (2.12), *а метрика в расслоении $N(K)$ формулой*

$$(ds^\perp)^2=H_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\vartheta^\beta, \tag{2.18}$$

где

$$H_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}G^{\pi\tau}\Lambda^\gamma{}_{2\pi}\Lambda^\delta{}_{2\tau}. \tag{2.19}$$

В этом репере структурными уравнениями для K являются

$$d\omega^\alpha{}_1=\omega^\beta{}_1\wedge\tau^\alpha{}_\beta, \tag{2.20}$$

$$d\tau^\alpha{}_\beta=\tau^\gamma{}_\beta\wedge\tau^\alpha{}_\gamma+\frac{1}{2}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\omega^\gamma{}_1\wedge\omega^\delta{}_1, \tag{2.21}$$

где

$$\tau^\alpha{}_\beta=\omega^\alpha{}_\beta-\Lambda^\alpha{}_{2\beta}\omega^2{}_1+g_{\rho\sigma}G^{\alpha\delta}b^\rho{}_{2\beta\gamma}\Lambda^\sigma{}_{2\delta}\omega^\gamma{}_1, \tag{2.22}$$

и

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=K^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}+L^\alpha{}_{\beta\gamma\delta},$$

тензор его кривизны, состоящий из тензора

$$K^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=H_{\pi\tau}G^{\alpha\varepsilon}b^\pi{}_{2\beta[\gamma}b^\tau{}_{|2\varepsilon|\delta]}, \tag{2.23}$$

и следующего ограничения тензора кривизны грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{2,n}$:

$$L^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=2[\varepsilon_1 g_{\varepsilon\tau}G^{\alpha\tau}(\varepsilon_1 g_{\beta[\gamma}\delta^{\varepsilon}{}_{\delta]}+\varepsilon_2 g_{\pi\beta}\Lambda^{\pi}{}_{2[\gamma}\Lambda^{\varepsilon}{}_{|2|\delta]}+$$

$$+\varepsilon_2\Lambda^{\pi}{}_{2\beta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{2[\gamma}g_{\delta]\pi})+\varepsilon_2 g_{\varepsilon\pi}G^{\alpha\tau}\Lambda^{\pi}{}_{2\tau}(\varepsilon_1\delta^{\varepsilon}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{2[\delta}g_{\gamma]\rho}+$$

$$+\varepsilon_1\delta^{\varepsilon}{}_{[\delta}g_{\gamma]\rho}\Lambda^{\rho}{}_{2\beta}+\varepsilon_2 g_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{2\beta}\Lambda^{\sigma}{}_{2[\gamma}\Lambda^{\varepsilon}{}_{|2|\delta]})].$$

Доказательство. Ищем векторы h_β в виде линейной комбинации $h_\beta = X^{\alpha}{}_{\beta}e^1{}_{\alpha} + Y^{\alpha}{}_{\beta}e^2{}_{\alpha}$. Из требования $\vartheta^{\alpha}(h_\beta) = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ вытекают соотношения $Y^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \Lambda^{\alpha}{}_{2\gamma}X^{\gamma}{}_{\beta}$. Теперь из требования $<f_\alpha, h_\beta> = 0$ взаимной ортогональности векторов f_α и h_β получается система

$$G_{\alpha\delta}X^{\delta}{}_{\gamma}=-\varepsilon_2\Lambda^{\delta}{}_{2\alpha}g_{\gamma\delta},$$

решение которой в случае $\det|G_{\alpha\delta}|\neq 0$ дает $X^{\beta}{}_{\gamma} = -\varepsilon_2 g_{\gamma\delta}G^{\alpha\beta}\Lambda^{\delta}{}_{2\alpha}$, где $G_{\alpha\delta}G^{\delta\beta} = \delta^{\beta}{}_{\alpha}$. Следовательно, искомые векторы h_β выражаются по формуле (2.16). Выписывая матрицу коэффициентов при $e^1{}_{\alpha}$ и $e^2{}_{\beta}$ из выражений (2.11) и (2.16), получаем $2(n-2)\times 2(n-2)$-матрицу вида (2.15), где

$$B=\|\Lambda^{\beta}{}_{2\alpha}\|,\quad C=\|-\varepsilon_2 g_{\gamma\delta}G^{\alpha\beta}\Lambda^{\delta}{}_{2\alpha}\|,$$
$$D=\|\delta^{\beta}{}_{\gamma}-\varepsilon_2 g_{\gamma\delta}G^{\alpha\varepsilon}\Lambda^{\delta}{}_{2\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{2\varepsilon}\|.$$

Поскольку здесь $D - CB = \|\delta^{\beta}{}_{\gamma}\|$, то матрица A регулярна и, следовательно, $\{f_\alpha, h_\beta\}$ можно рассматривать как новый базис для $T_{\psi(p)}({}^{k,l}G_{2,n})$. Дуальным к нему является кобазис $\{\pi^{\alpha}, \vartheta_\beta\}$, который получается из кобазиса $\{\omega^{\alpha}{}_1, \omega^{\beta}{}_2\}$ при помощи матрицы $(A^{-1})^T$. Выражая теперь из формул (2.14) и (2.17) формы $\omega^{\alpha}{}_1$ и $\omega^{\beta}{}_2$ через новые базисные формы π^{α} и ϑ^{β}, получим

$$\omega^{\alpha}{}_1=G^{\alpha\beta}(\varepsilon_1 g_{\beta\gamma}\pi^{\gamma}-g_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma 2}{}_{\beta}\vartheta^{\delta})$$
$$\omega^{\alpha}{}_2=\varepsilon_1 g_{\gamma\delta}G^{\beta\delta}\Lambda^{\alpha}{}_{2\beta}\pi^{\gamma}+(\delta^{\alpha}{}_{\delta}-\varepsilon_2 g_{\delta\varepsilon}G^{\beta\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{2\beta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{2\gamma})\vartheta^{\delta}.$$

Подстановка найденных выражений в (1.9) дает

$$ds^2=G_{\alpha\beta}\pi^{\alpha}\pi^{\beta}+H_{\alpha\beta}\vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta},$$

где $H_{\alpha\beta}$ выражается согласно (2.19). Следовательно, метрика на K определяется формой (2.12), а на $N(K)$ формой (2.10).

Для вывода структурных уравнений для K продифференцируем сначала выражения (2.17), учитывая, что на K справедливо $\vartheta^{\beta} = 0$. Вследствие этого получим уравнения (2.20), где формы $\tau^{\alpha}{}_{\gamma}$ выражаются согласно (2.22). Внешнее дифференцирование последних форм дает нам вторую группу структурных уравнений для K, в которых тензор кривизны $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ является суммой тензоров (2.23) и (2.24). Теорема доказана.

§ 3. Конгруэнции неизотропных 2-плоскостей пространств R_4 и ${}^1R_4$ и их грассмановы отображения

1. В этом параграфе рассмотрим конгруэнцию ${}^{k,l}\mathfrak{K}_{2,4}$ неизотропных 2-плоскостей пространства R_4 и ${}^1R_4$. Парой (k, l) здесь может быть одна из пар (0,0), (1,1) или (0,1). Для простоты обозначим соответствующие им конгруэнции ${}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,4}$ через $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}''$, а присоединенные к ним описанным в § 2, п. 2, способом конгруэнции через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}''$ и $\mathfrak{N}'$. Систему (2.10) перепишем здесь в виде

$$\omega^3 = \pi\omega^3{}_1 + \varrho\omega^4{}_1, \qquad \omega^4 = \sigma\omega^3{}_1 + \tau\omega^4{}_1, \tag{3.1}$$

$$\omega^3{}_2 = \varkappa\omega^3{}_1 + z\omega^4{}_1, \qquad \omega^4{}_2 = \zeta\omega^3{}_1 + k\omega^4{}_1, \tag{3.2}$$

применяя для $\Lambda^{\alpha}{}_{2\beta}$ обозначения, принятые в [4, 8, 9] и опуская ι^*. Кроме того, в ортонормированном репере, где $g_{11} = \varepsilon_1$, $g_{33} = \varepsilon_3$, $g_{22} = g_{44} = 1$, имеют место

$$\omega^1{}_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_3\omega^3{}_1, \quad \omega^2{}_3 = -\varepsilon_3\omega^3{}_2, \quad \omega^1{}_4 = -\varepsilon_1\omega^4{}_1, \quad \omega^2{}_4 = -\omega^4{}_2,$$
$$\omega^1{}_2 = -\varepsilon_1\omega^2{}_1, \quad \omega^3{}_4 = -\varepsilon_3\omega^4{}_3.$$

(в случаях $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}''$ имеем соответственно $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = -1$ или $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = 1$). Внешнее дифференцирование уравнений (3.2) и последующее применение леммы Картана дают

$$\begin{aligned} d\varkappa + (\varkappa^2 + z\zeta + \varepsilon_1)\omega^2{}_1 - (z + \varepsilon_3\zeta)\,\omega^4{}_3 &= a\omega^3{}_1 + \beta\omega^4{}_1, \\ dz + \quad z(k+\varkappa)\omega^2{}_1 + \varepsilon_3(\varkappa - k)\,\omega^4{}_3 &= \beta\omega^3{}_1 + \gamma\omega^4{}_1, \\ d\zeta + \quad \zeta(k+\varkappa)\omega^2{}_1 + \quad (\varkappa - k)\,\omega^4{}_3 &= c\omega^3{}_1 + b\omega^4{}_1, \\ dk + (k^2 + z\zeta + \varepsilon_1)\omega^2{}_1 + (z + \varepsilon_3\zeta)\,\omega^4{}_3 &= b\omega^3{}_1 + a\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнение (2.7) фокальной линии имеет вид (ср. [4])

$$\begin{aligned} &(x^1)^2 + (k+\varkappa)\,x^1x^2 + (k\varkappa - z\zeta)\,(x^2)^2 + (\pi + \tau)\,x^1 + \\ &+ (k\pi + \varkappa\tau - \zeta\varrho - z\sigma)\,x^2 + (\pi\tau - \varrho\sigma) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Допустим, что на каждой 2-плоскости $p \in {}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,4}$ фиксирована какая-нибудь точка и начало репера перенесено в эту точку. Тогда к данной конгруэнции присоединяется конгруэнция 2-плоскостей, описанная в § 2. В таком случае

$$\omega^1 = p\omega^3{}_1 + r\omega^4{}_1, \qquad \omega^2 = s\omega^3{}_1 + q\omega^4{}_1,$$

и уравнение (2.8) фокальной линии присоединенной конгруэнции имеет вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 z(y^3)^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3(k - \varkappa)\,y^3y^4 - \varepsilon_1\zeta\,(y^4)^2 + \varepsilon_3(\varkappa r - \varepsilon_1 q - zp)\,y^3 + \\ &+ (\varepsilon_1 s + \zeta r - kp)\,y^4 + (pq - rs) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Формулы (2.4), (2.5) и (2.9) дают для 2-форм кручения и кривизны конгруэнции ${}^{k,l}\mathfrak{R}_{2,4}$ и 2-форм кривизны присоединенной к ней конгруэнции следующие выражения

$$\begin{aligned} &{}^*\Sigma^1 = T^1\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1, && {}^*\Sigma^2 = T^2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1, \\ &{}^*\Omega^1{}_1 = {}^*\Omega^2{}_2 = 0, && {}^*\Omega^2{}_1 = -\varepsilon_1\,{}^*\Omega^1{}_2 = R\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1, \\ &{}^*\Omega^3{}_3 = {}^*\Omega^4{}_4 = 0, && {}^*\Omega^4{}_3 = -\varepsilon_3\,{}^*\Omega^3{}_4 = S\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1, \end{aligned}$$

где

$$T^1 = \varepsilon_1(\varepsilon_3\varrho - \sigma), \qquad T^2 = \varepsilon_3(\varrho\varkappa - \pi z) + \tau\zeta - \varepsilon_3 kz, \tag{3.6}$$

$$R = \zeta - \varepsilon_3 z, \tag{3.7}$$

$$S = -\varepsilon_3(k\varkappa - z\zeta + \varepsilon_1). \tag{3.8}$$

2. В случае конгруэнции $\mathfrak{K}$ в R_4 базисные векторы e_a и e_α можно выбрать в главных направлениях фокальных линий (3.4) и (3.5). Тогда $k+\varkappa=0$ и $k-\varkappa=0$, вследствие чего $k=\varkappa=0$ (ср. [4, 8]). Уравнение (3.4) фокальной линии для $\mathfrak{K}$ имеет вид

$$(x^1)^2-z\zeta(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1-(\zeta\varrho+z\sigma)x^2+(\pi\tau-\varrho\sigma)=0. \qquad (3.9)$$

3. В случае конгруэнции $\mathfrak{K}'$ можем аналогично, за счет выбора векторов e_α в главных направлениях фокальной линии (3.5), принять $k=\varkappa$. Относительно возможностей упрощения уравнений (3.2) путем поворота векторов e_a имеются следующие случаи.

1) Если $|2k|<|k^2+1-z\zeta|$, то будем говорить о *конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа* 1. Тогда можно принять $k=0$, и тем самым привести уравнение (3.4) фокальной линии к виду (3.6). Если $z\zeta\geqslant 0$, у этой линии существуют асимптотические направления, которые определяются из

$$x^1:x^2=\pm\sqrt{z\zeta}:1.$$

Поскольку

$$(\pm\sqrt{z\zeta}\,e_1+e_2,\ \pm\sqrt{z\zeta}\,e_1+e_2)=1-z\zeta,$$

то оба асимптотические направления либо евклидовы (если $0\leqslant z\zeta<1$), либо псевдоевклидовы (если $z\zeta>1$).

2) Если $|2k|>|k^2+1-z\zeta|$, то будем говорить о *конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа* 2. В этом случае можно принять $k^2+1-z\zeta=0$ и привести уравнение (3.4) фокальной линии к виду

$$(x^1)^2+2kx^1x^2-(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1+\left[k(\pi-\tau)-\frac{\varrho}{z}(k^2+1)-z\sigma\right]x^2+$$
$$+(\pi\tau-\varrho\sigma)=0.$$

Эта линия имеет всегда асимптотические направления, которые определяются соотношением

$$x^1:x^2=(-k\pm\sqrt{k^2+1}):1.$$

Поскольку

$$(e,e)=-2k(k\mp\sqrt{k^2+1}),$$

где

$$e=e_2+(-k\pm\sqrt{k^2+1})e_1,$$

то одно асимптотическое направление евклидово, другое — псевдоевклидово.

3) В оставшемся случае, когда $|2k|=|k^2+1-z\zeta|$, будем говорить о *конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа* 3. Тогда уравнение (3.4) фокальной линии для $\mathfrak{K}'$ можно переписать в виде

$$(x^1)^2+2kx^1x^2-(1\mp 2k)(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1+$$
$$+[k(\pi+\tau)-z\sigma-\zeta\varrho]x^2+\pi\tau-\varrho\sigma=0, \qquad (3.10)$$

где z и ζ связаны соотношением $z\zeta=(k\mp 1)^2$. Эта линия имеет 2 асимптотических направления, в которых $x^1:x^2=(\mp 1):1$ и $x^1:x^2=(-2k\pm 1):1$; из них первое является изотропным. Следовательно, конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 3 характеризуются наличием у фокальной линии изотропного асимптотического направления.

4. В случае конгруэнции $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$ можем аналогично тому, как это делается в п. 2 для $\mathfrak{K}$, за счет выбора векторов $\boldsymbol{e}_a$ в главных направлениях фокальной линии (3.4) сделать $k+\varkappa=0$.

1) Если теперь $|2k|<|z-\zeta|$, то присоединенная к этой конгруэнции конгруэнция псевдоевклидовых 2-плоскостей является конгруэнцией типа 1 и будем говорить о *конгруэнции* $\mathfrak{K}''$ *типа* 1. В этом случае можем принять $k=0$, и уравнение (3.4) фокальной линии принимает вид (3.6).

2) Если $|2k|>|z-\zeta|$, то присоединенная конгруэнция является конгруэнцией типа 2, и будем говорить о *конгруэнции* $\mathfrak{K}''$ *типа* 2. В этом случае можем принять $z=\zeta$, вследствие чего уравнение (3.4) принимает вид

$$(x^1)^2-(k^2+z^2)(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1+[k(\pi-\tau)+z(\varrho+\sigma)]x^2+$$
$$+\pi\tau-\varrho\sigma=0.$$

3) В случае, когда $|2k|=|z-\zeta|$, присоединенная конгруэнция является либо конгруэнцией типа 3, либо является конгруэнцией, у которой фокальная линия — прямая. В обоих случаях будем говорить о конгруэнции $\mathfrak{K}''$ типа 3.

$$(x^1)^2-\frac{z+\zeta}{z}(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1-\left[\zeta\varrho+z\sigma\pm\frac{1}{2}(\zeta-z)(\pi-\tau)\right]x^2+$$
$$+\pi\tau-\varrho\sigma=0.$$

5. Переходим к изучению образа K, K' или K'' конгруэнции $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ или $\mathfrak{K}''$ в грассмановом многообразии, $G_{2,4}$, ${}^{1,1}G_{2,4}$, ${}^{0,1}G_{2,4}$ соответственно. Как выяснилось в п. 2—4 настоящего параграфа, всегда при рассмотрении конгруэнции $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ или $\mathfrak{K}''$ можно за счет выбора репера сделать $\varkappa=\varepsilon_3 k$. Пользуемся пока только такими ортонормированными реперами, где выполняется последнее соотношение. Тогда, согласно теореме 1, матрицей основного метрического тензора образа K, K' или K'' является

$$\|G_{\alpha\beta}\|=\|\varepsilon_1 g_{\alpha\beta}+g_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{2\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{2\beta}\|=\begin{Vmatrix}\zeta^2+\varepsilon_3k^2+\varepsilon_1\varepsilon_3 & k(z+\zeta)\\ k(z+\zeta) & k^2+\varepsilon_3z^2+\varepsilon_1\end{Vmatrix}. \quad (3.11)$$

Каждой точке $\psi(p)$ подмногообразия ${}^{k,l}K_{2,4}$ можем сопоставить риманову кривизну (§ 1, п. 2) грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$ в 2-направлении σ касательного к ${}^{k,l}K_{2,4}$ в этой точке подпространства $T_{\psi(p)}({}^{k,l}K_{2,4})$. По теореме 1 касательными к ${}^{k,l}K_{2,4}$ являются векторы $f_3=e^1{}_3+\varepsilon_3ke^2{}_3+\zeta e^2{}_4$, $f_4=e^1{}_4+ze^2{}_3+ke^2{}_4$;

следовательно, 2-направление σ касательного пространства $T_{\psi(p)}({}^{k,l}K_{2,4})$ определяется бивектором

$$\sigma^{12}=1,\quad \sigma^{13}=z,\quad \sigma^{14}=k,\quad \sigma^{23}=-\varepsilon_3 k,\quad \sigma^{24}=-\zeta,$$
$$\sigma^{34}=\varepsilon_3 k^2-z\zeta. \tag{3.12}$$

Риманова кривизна $K(\sigma)$ в этом 2-направлении согласно (1.10) равна

$$K(\sigma)=\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_3 k^2-z\zeta)^2+\varepsilon_3(\varepsilon_3 z-\zeta)^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_1(\varepsilon_3 k^2-z\zeta)^2+2k^2+\varepsilon_3(z^2+\zeta^2)}. \tag{3.13}$$

Для конгруэнции $\mathfrak{K}$ пространства R_4, в репере, указанном в п. 2, последняя формула принимает вид

$$K(\sigma)=\frac{(1-z\zeta)^2+(z-\zeta)^2}{(1+z^2)(1+\zeta^2)}=1-\frac{4z\zeta}{(1+z^2)(1+\zeta^2)}. \tag{3.14}$$

Из результатов статьи [20] известно, что риманова кривизна $K(\sigma)$ грассмановых многообразий $G_{m,n}$ (в частности для $m=2$, $n=4$) удовлетворяет неравенствам $0\leqslant K(\sigma)\leqslant 2$. Теперь непосредственное сравнение (3.9) и (3.14) дает нам следующую теорему.

Теорема 3. *Фокальная линия конгруэнции 2-плоскостей пространства R_4 является линией эллиптического (соответственно гиперболического или параболического) типа тогда и только тогда, когда образ K этой конгруэнции в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ имеет риманову кривизну $1<K(\sigma)\leqslant 2$ (соответственно $0\leqslant K(\sigma)<1$ или $K(\sigma)=1$).*

З а м е ч а н и е. Для образов K' и K'' конгруэнции $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$ аналогичной теоремы нельзя получить, так как $K(\sigma)$ для них не имеет точных границ и для некоторых 2-направлений является даже неопределенной.

§ 4. Исследование метрики подмногообразий

Метрика на подмногообразии K в $G_{2,4}$ является всегда положительно определенной римановой метрикой. Иначе обстоит дело в многообразиях ${}^{1,1}G_{2,4}$ и ${}^{0,1}G_{2,4}$, где метрика на подмногообразиях K' и K'' может быть положительно или отрицательно определенной, неопределенной или вырожденной. Из (3.11) получается, что

$$G=\det|G_{\alpha\beta}|=\varepsilon_3[k^4+2k^2(\varepsilon_1-\varepsilon_3 z\zeta)+(z^2-1)(\zeta^2-1)].$$

Следовательно, в случае $G>0$ метрика риманова (она положительно или отрицательно определена), в случае $G<0$ псевдориманова, и в случае $G=0$ вырождена.

1. Так как для конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 1 можно принять $k=0$, то для ней

$$G=(\zeta^2-1)(z^2-1), \tag{4.1}$$

и получается

Теорема 4. *Образ K' конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 1 в грассмановом многообразии ${}^{1,1}G_{2,4}$ несет риманову (соответственно псевдориманову или вырожденную) метрику тогда и только тогда, когда кривизна R ее, и кривизна S присоединенной к ней конгруэнции $\mathfrak{N}''$ ортогональных 2-плоскостей, связаны неравенством $R^2 < (S-2)^2$ (соответственно неравенством $R^2 > (S-2)^2$ или равенством $R^2 = (S-2)^2$).*

Доказательство следует непосредственно из формул (3.7—8) и (4.1).

Для конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 2, в силу $k^2 = z\zeta - 1$, имеем, что $G = -4k^2 - (z-\zeta)^2$. Здесь предположение $G = 0$ влечет за собой $k = 0$ и $z = \zeta = \pm 1$. Оказывается, что такая конгруэнция не существует. Действительно, из системы (3.3) тогда следовало бы $\omega^4{}_3 = 0$, но $d\omega^4{}_3 = -2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1 \neq 0$. Поэтому пополучается

Теорема 5. *Образ K' конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 2 несет псевдориманову метрику.*

Для конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 3, в силу $|2k| = |1 + k^2 - z\zeta|$, имеем $G = -(z-\zeta)^2$. При сравнении этого выражения с (3.7) получаем следующую теорему:

Теорема 6. *Образ K' конгруэнции $\mathfrak{K}'$ типа 3 несет псевдориманову метрику тогда и только тогда, когда кривизна R этой конгруэнции отлична от нуля, и вырожденную метрику тогда и только тогда, когда $R = 0$; последняя конгруэнция существует с произволом двух функций двух аргументов.*

2. Аналогичные результаты получим для конгруэнции $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$. Для конгруэнции $\mathfrak{K}''$ типа 1, в силу $k = 0$, имеем $G = (z^2 - 1)(1 - \zeta^2)$ и получается

Теорема 7. *Образ K'' конгруэнции $\mathfrak{K}''$ типа 1 в грассмановом многообразии ${}^{0,1}G_{2,4}$ несет риманову (соответственно псевдориманову или вырожденную) метрику тогда и только тогда, когда кривизна R ее и кривизна S, присоединенной к ней конгруэнции $\mathfrak{N}'$ ортогональных 2-плоскостей, связаны неравенством $R^2 > (S-2)^2$ (соответственно неравенством $R^2 < (S-2)^2$ или равенством $R^2 = (S-2)^2$).*

Для конгруэнции $\mathfrak{K}''$ типа 2, так как $z = \zeta$, имеем, что $G = -k^2(k^2 + 2z^2 + 2) - (z^2 - 1)^2$. В случае $G = 0$ из системы (3.3) в силу $k = 0$ и $z = \zeta = \pm 1$ следовало бы, что $\omega^2{}_1 = 0$, в то время, как $d\omega^2{}_1 = \pm 2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1$. Получается

Теорема 8. *Образ K'' конгруэнции $\mathfrak{K}''$ типа 2 несет всегда псевдориманову метрику.*

Для конгруэнции K'' типа 3 в силу $|2k| = |z - \zeta|$ имеем $G = -(k^2 + z\zeta - 1)^2$. При сравнении с (3.8) получается

Теорема 9. *Образ K'' конгруэнции K'' типа 3 несет псевдориманову метрику тогда и только тогда, когда кривизна S присоединенной к ней конгруэнции, отлична от нуля и несет вырожденную метрику тогда и только тогда, когда $S = 0$; по-*

следняя конгруэнция существует с произволом двух функции двух аргументов.

4. Возможно, что метрика подмногообразия K' в ${}^{1,1}G_{2,4}$ является вполне вырожденной. Такие конгруэнции описывает

Теорема 10. *Метрика на подмногообразии K' в ${}^{1,1}G_{2,4}$ является вполне вырожденной тогда и только тогда, когда прообраз его — конгруэнция $\mathfrak{K}'$ пространства ${}^1R_4$ — имеет нулевую кривизну и фокальная линия на каждой 2-плоскости конгруэнции является такой нецентральной линией второго порядка, что для нее асимптотическим является изотропное направление этой 2-плоскости.*

Доказательство. Если метрика на K' является вполне вырожденной, то в (3.11) должно выполняться

$$k(z+\zeta)=0, \quad k^2+\zeta^2=1, \quad k^2+z^2=1.$$

Из последних равенств следует 1) или $z+\zeta=0$ и $k^2+z^2=1$; 2) или $k=0$ и $z^2=\zeta^2=1$. Здесь второй случай отпадает, так как он ведет к несовместной системе (см. п. 2.). Поэтому остается первый случай. Параметризуем равенство $k^2+z^2=1$ следующим образом: $k=\cos\varphi$, $z=\sin\varphi$. Здесь $k=0$ приведет ко второму случаю, поэтому предполагаем, что $k\neq 0$. Система (3.3) в этом случае равносильна следующей

$$\begin{gathered}-\sin\varphi(d\varphi+2\sin\varphi\omega^2{}_1)=\alpha\omega^3{}_1+\beta\omega^4{}_1,\\ \cos\varphi(d\varphi+2\sin\varphi\omega^2{}_1)=\beta\omega^3{}_1-\alpha\omega^4{}_1,\end{gathered}$$

из которой следует, что $\sin\varphi=0$ и $\alpha=\beta=0$. Таким образом, имеем $z=\zeta=0$, $k=\pm 1$, и указанное подмногообразие в ${}^{1,1}G_{2,4}$ определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega^3{}_2=\pm\omega^3{}_1, \quad \omega^4{}_2=\pm\omega^4{}_1. \tag{4.2}$$

Здесь можно ограничиться системой (4.2) с верхними знаками, так как преобразованием $\boldsymbol{e}'_3=-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}'_4=\boldsymbol{e}_4$ случай $k=-1$ тоже сводится к нему. Прообразом этого подмногообразия K' является конгруэнция $\mathfrak{K}'$ типа 3, которая имеет нулевую кривизну, фокальная линия которой имеет уравнение

$$(x^1)^2\pm 2x^1x^2+(x^2)^2+(\pi+\tau)(x^1\pm x^2)+\pi\tau-\varrho\sigma=0,$$

откуда видно, что направление изотропного вектора $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1\mp\boldsymbol{e}_2$ является для этой линии асимптотическим.

Обратно, пусть конгруэнция $\mathfrak{K}'$ имеет нулевую кривизну и пусть фокальные линии ее, для которых асимптотическим является изотропное направление 2-плоскости конгруэнции, нецентральные. Тогда выполняются

$$\zeta-z=0, \quad z\zeta=0, \quad k^2=1.$$

Отсюда немедленно следует, что вполне интегрируемая система (4.2) определяет в ${}^{1,1}G_{2,4}$ подмногообразие с вполне вырожденной метрикой. Теорема доказана.

Замечание. В силу теоремы 1 и вышеизложенного это подмногообразие с вполне вырожденной метрикой является и вполне геодезическим.

Наконец, отметим, что образ K'' конгруэнции $\mathfrak{K}''$ не может обладать вполне вырожденной метрикой, так как система (3.2) при условиях

$$k(z+\zeta)=0, \quad k^2+1=\zeta^2, \quad k^2+1=z^2,$$

является несовместной.

Литература

1. Гейдельман Р. М., Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 323—374.
2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом. Москва, 1971.
3. Лумисте Ю. Г., Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности. Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. М., 1973, **4**, 285—307.
4. Лумисте Ю. Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 12—46.
5. Лумисте Ю. Г., Связности в однородных расслоениях. Матем. сб., 1966, **69**, № 3, 434—469.
6. Маазикас И., Образ конгруэнции 2-плоскостей псевдоевклидова пространства в грассмановом многообразии. В сб. «Материалы Четвертой Приб. геом. конф.-ии». Тарту, 1973, 70—71.
7. Маазикас И., К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 76—82.
8. Машанов В. И., К теории конгруэнций прямых трехмерного пространства Римана. Тр. Томского ун-та, 1962, **161**, 154—163.
9. Машанов В. И., Теория конгруэнции прямых пространства Лобачевского. Тр. Томского ун-та, 1962, **160**, 138—146.
10. Петров А. З., Пространства Эйнштейна. Москва, 1961.
11. Розенфельд Б. А. Внутренная геометрия множества m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1941, **5**, 353—368.
12. Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества прямых эллиптического пространства. М., Уч. зап. ун-та, 1944, **73**, 49—58.
13. Розенфельд Б. А., Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, **11**, № 3, 283—308.
14. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры. Москва—Ленинград, 1963.
15. Hangan, Th., Struktures pseudoriemanniennes sur l'ensemble des p-plans d'un espace pseudoeuclidean. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1965, **9**, № 4, 265—278.
16. Leichtweiss, K., Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z., 1961, **76**, № 4, 334—366.
17. Teleman, C., Sur les variétés de Grassmann. Bull. math. Soc. sci et phys. RPR, 1958, **2**, № 2, 203—224.

18. W a g n e r, V., Differential geometry of the family of R_k's in R_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}'s in S_{n-1} of positive curvature. Матем. сб., 1942, **10**, 165—212.
19. W o n g, Y. C., Differential geometry of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1967, **57**, № 3, 589—594.
20. W o n g, Y. C., Sectional curvatures of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, **60**, № 1, 75—79.

Поступило
15 II 1974

EUKLEIDILISTE RUUMIDE 2-TASANDITE KONGRUENTSI GRASSMANNI KUJUTUS

I. Maasikas

R e s ü m e e

Artiklis vaadeldakse eukleidilise või pseudoeukleidilise ruumi 2-mõõtmeliste mitteisotroopsete tasandite kongruentsi. Defineeritakse selle kongruentsi kujutus vastava eukleidilise või pseudoeukleidilise vektorruumi 2-mõõtmeliste alamruumide Grassmanni muutkonda. Töö üheks põhiülesandeks on selle kujutise kui Grassmanni muutkonna alammuutkonna poolkanoonilise reeperi konstrueerimine, mis lahendatakse teises paragrahvis. Kolmandas ja neljandas paragrahvis uuritakse ruumide R_4 ja ${}^1R_4$ 2-tasandite kongruentse ja nende Grassmanni kujutisi. On antud rida teoreeme, mis iseloomustavad kongruentsi fokaalsete omaduste vahekordi tema kujutisel määratud sisemeetrikaga. Täielikult lahendatakse küsimus, millal kujutise sisemeetrika on täiesti kidunud.

DIE GRASSMANNSCHE ABBILDUNG DER EBENENKONGRUENZEN DER 2-DIMENSIONALEN EBENEN IN EUKLIDISCHEN RÄUMEN

I. Maasikas

Z u s a m m e n f a s s u n g

Im Artikel betrachtet man die Ebenenkongruenzen von nichtisotropen 2-dimensionalen Ebenen in den euklidischen oder pseudoeuklidischen Räumen. Man definiert die Abbildung dieser Kongruenz in der grassmannschen Mannigfaltigkeit der 2-dimensionalen Unterräume der betreffenden euklidischen oder pseudoeuklidischen Vektorräume. Mit dieser Abbildung verbindet man ein semikanonisches $2(n-2)$-Bein und für sie leitet man die Strukturgleichungen und den Krümmungstensor ab.

Weiter werden Kongruenzen in R_4 und ${}^1R_4$ untersucht. Es sind einige Theoreme gegeben, die die Fokaleigenschaften der betrachteten Kongruenzen mit den Eigenschaften der Abbildungsmetrik verbinden. Zum Abschluß werden alle Kongruenzen mit voll-isotroper Abbildungsmetrik ausgesucht und charakterisiert.

КОНГРУЭНЦИИ 2-ПЛОСКОСТЕЙ С ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ГРАССМАНОВЫМИ ОБРАЗАМИ

И. Маазикас

Кафедра алгебры и геометрии

1. Настоящая статья тесно примыкает к статье [1]. Поэтому в ней применяются введенные там понятия и обозначения. Здесь исследуются конгруэнции неизотропных 2-плоскостей пространств R_4 и ${}^1R_4$, образ которых при их грассмановом отображении [1] является 2-мерным вполне геодезическим подмногообразием грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$.

В [1] показано, что фундаментальный объект $b^{\alpha}{}_{2\beta\gamma}$ второго порядка конгруэнции $\mathfrak{K}$ является для образа K этой конгруэнции вторым фундаментальным тензором. Но, поскольку в теории конгруэнции 2-плоскостей хорошо изучены инвариантные объекты первой дифференциальной окрестности для $\mathfrak{K}$, то наиболее сильные связи свойств самой конгруэнции $\mathfrak{K}$ и ее образа K выявляются в случае, когда этот образ является вполне геодезическим подмногообразием. В статье находятся все конгруэнции с вполне геодезическими грассмановыми образами и даются их геометрические характеристики. Отметим, что статья обогащает знания и по теории самих подмногообразий грассманова многообразия, например, показывается, что вполне геодезические подмногообразия в ${}^{k,l}G_{2,4}$ проходят только в тех 2-направлениях, в которых риманова кривизна многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$ стационарна.

2. Как в статье [1], так и здесь предполагаем, что рассматриваемая конгруэнция определяется системой

$$\omega^3=\pi\omega^3{}_1+\varrho\omega^4{}_1,\qquad \omega^4=\sigma\omega^3{}_1+\tau\omega^4{}_1, \tag{1a}$$

$$\omega^3{}_2=\varepsilon_3 k\omega^3{}_1+z\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=\zeta\omega^3{}_1+k\omega^4{}_1. \tag{1b}$$

Продолжение уравнений (1b) дает

$$\begin{aligned}
&dk+(k^2+z\zeta+\varepsilon_1)\omega^2{}_1-(z+\varepsilon_3\zeta)\omega^4{}_3=a\omega^3{}_1+\beta\omega^4{}_1,\\
&dz+kz(1+\varepsilon_3)\omega^2{}_1+\varepsilon_3 k(1-\varepsilon_3)\omega^4{}_3=\beta\omega^3{}_1+\gamma\omega^4{}_1,\\
&d\zeta+k\zeta(1+\varepsilon_3)\omega^2{}_1+k(1-\varepsilon_3)\omega^4{}_3=c\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\
&\varepsilon_3 dk+(k^2+z\zeta+\varepsilon_1)\omega^2{}_1+(z+\varepsilon_3\zeta)\omega^4{}_3=b\omega^3{}_1+a\omega^4{}_1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Согласно определению вполне геодезического подмногообразия и теоремы 1 из [1] образ конгруэнций $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ или $\mathfrak{K}''$ в соответствующем грассмановом многообразии является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда в системе (2)

$$\alpha=\beta=\gamma=a=b=c=0. \tag{3}$$

Выведем условия совместности системы (1b, 2) при условиях (3). Для этой цели продифференцируем уравнения (2) с учетом (3).

В случае конгруэнции $\mathfrak{K}$ пространства R_4 и конгруэнции $\mathfrak{K}'$ пространства ${}^1R_4$ в предположении (3) из крайних уравнений системы (2) следует $(z+\zeta)\omega^4{}_3=0$. Пусть сперва $z+\zeta=0$; тогда (2) сводится к системе

$$dk+(k^2-z^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=0, \qquad dz+2kz\omega^2{}_1=0.$$

Путем внешнего дифференцирования отсюда получаются соотношения

$$(k^2-z^2+\varepsilon_1)z=0, \qquad kz^2=0.$$

Независимо от значения ε_1 последняя система удовлетворена при $z=0$, т. е. вполне геодезическое K или K' определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega^3{}_2=k\omega^3{}_1, \qquad \omega^4{}_2=k\omega^4{}_1, \qquad dk+(k^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=0. \tag{4}$$

Для случая $\varepsilon_1=1$ (для конгруэнции $\mathfrak{K}$ пространства R_4) прибавляется возможность $k=0$ и $z=-\zeta=\pm1$, следовательно, вполне интегрируемая система

$$\omega^3{}_2=\pm\omega^4{}_1, \qquad \omega^4{}_2=\mp\omega^3{}_1, \tag{5}$$

определяет тоже вполне геодезическое K в $G_{2,4}$. Здесь можно ограничиться системой (5) с верхними знаками, так как преобразование $e'_3=e_4$, $e'_4=e_3$ переводит систему с нижними знаками к ней.

Рассмотрим теперь случай $\omega^4{}_3=0$. Внешнее дифференцирование последнего уравнения приводит к равенству $k^2=z\zeta-\varepsilon_1$, вследствие чего первое уравнение системы (2) можно представить в виде $dk+2(k^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=0$, из которого, после внешнего дифференцирования получается $z=\zeta$. Поскольку $z=\zeta=0$ приводит к системе (4), то считаем, что здесь $z=\zeta\neq0$. Параметризуем для конгруэнции K пространства R_4 конечное соотношение $z^2-k^2=1$, положив $z=\operatorname{ch}\varphi$, $k=\operatorname{sh}\varphi$. Тогда вполне интегрируемая система.

$$\begin{aligned}&\omega^3{}_2=\omega^3{}_1\operatorname{sh}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{ch}\varphi, && \omega^4{}_2=\omega^3{}_1\operatorname{ch}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{sh}\varphi,\\ &\omega^4{}_3=0, && d\varphi=-2\omega^2{}_1\operatorname{ch}\varphi,\end{aligned} \tag{6}$$

определяет в $G_{2,4}$ вполне геодезическое подмногообразие K. Для конгруэнции $\mathfrak{K}'$ пространства ${}^1R_4$ можно конечное соотношение $k^2-z^2=1$ параметризовать, положив $k=\operatorname{ch}\varphi$, $z=\operatorname{sh}\varphi$, и тогда вполне интегрируемая система

$$\omega^3{}_2=\omega^3{}_1\operatorname{ch}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{sh}\varphi,\qquad \omega^4{}_2=\omega^3{}_1\operatorname{sh}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{ch}\varphi,$$
$$\omega^4{}_3=0,\qquad d\varphi=-2\omega^2{}_1\operatorname{sh}\varphi, \tag{7}$$

определяет в ${}^{1,1}G_{2,4}$ вполне геодезическое подмногообразие K'. В итоге можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Образ K конгруэнции 2-плоскостей пространства R_4 в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ является вполне геодезическим подмногообразием тогда и только тогда, когда эта конгруэнция определяется системой* (1a) *и одной из вполне интегрируемых систем* (4), (5) *или* (6). *Такие конгруэнции существуют с произволом двух функций двух аргументов.*

Теорема 2. *Образ K' конгруэнции 2-плоскостей пространства ${}^1R_4$ в грассмановом многообразии ${}^{1,1}G_{2,4}$ является вполне геодезическим подмногообразием тогда и только тогда, когда эта конгруэнция определяется системой* (1a) *и одной из вполне интегрируемых систем* (4) *или* (7). *Такие конгруэнции существуют с произволом двух функций двух аргументов.*

Для конгруэнции $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$ в предположении (3) из крайних уравнений системы (2) следует $(k^2+z\zeta+1)\omega^2{}_1=0$. Рассмотрим сначала случай $\omega^2{}_1=0$. Внешнее дифференцирование этого уравнения дает $z+\zeta=0$, вследствие чего система (2) сводится к системе $dk=2z\omega^4{}_3$, $dz=2k\omega^4{}_3$, из которой получается либо $k=z=0$, либо $k^2=z^2+1$. Последнее соотношение параметризуем следующим образом: $k=\operatorname{ch}\varphi$, $z=\operatorname{sh}\varphi$. Остается рассмотреть случай $k^2+z\zeta+1=0$. В этом случае путем внешнего дифференцирования из средних уравнений системы (2) следует $k^2+z\zeta-1=0$, но одновременное выполнение последних двух равенств невозможно и этот случай отпадает. В итоге получается

Теорема 3. *Образ K'' конгруэнции $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$ в грассмановом многообразии ${}^{0,1}G_{2,4}$ является вполне геодезическим подмногообразием тогда и только тогда, когда эта конгруэнция определяется системой* (1a) *и одной из вполне интегрируемых систем*

$$\omega^3{}_2=0,\qquad \omega^4{}_2=0,\qquad \omega^2{}_1=0, \tag{8}$$

или

$$\omega^3{}_2=-\omega^3{}_1\operatorname{ch}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{sh}\varphi,\qquad \omega^4{}_2=-\omega^3{}_1\operatorname{sh}\varphi+\omega^4{}_1\operatorname{ch}\varphi,$$
$$\omega^2{}_1=0,\qquad d\varphi=2\omega^4{}_3. \tag{9}$$

Такие конгруэнции существуют с произволом двух функций двух аргументов.

3. Для вполне геодезического подмногообразия K или K', определяемого вполне интегрируемой системой (4), 2-направление σ касательного к ним $T_{\psi(p)}(K)$ или $T_{\psi(p)}(K')$, определяется бивектором (см. [1], стр. 71)

$$\sigma^{12}=1,\qquad \sigma^{13}=\sigma^{24}=0,\qquad \sigma^{14}=-\sigma^{23}=k,\qquad \sigma^{34}=k^2.$$

Такое σ удовлетворяет условию III стационарности римановой кривизны и для него $K(\sigma)=1$ (см. [1], § 1, п. 3). То же самое верно для вполне геодезического K'' в ${}^{0,1}G_{2,4}$, определяемого вполне интегрируемой системой (8) лишь с той разницей, что в этом случае имеет место еще $k=0$.

Для вполне геодезического K в $G_{2,4}$, определяемого вполне интегрируемой системой (5), 2-направление σ, касательного к нему $T_{\psi(p)}(K)$, определяется бивектором $\sigma^{12}=\sigma^{34}=1$, $\sigma^{13}=$ $=\sigma^{24}=1$, $\sigma^{14}=\sigma^{23}=0$, который удовлетворяет условию IV стационарности римановой кривизны в этом 2-направлении и для которого $K(\sigma)=2$. Наконец, касательное 2-направление σ, к вполне геодезическому K, K' или K'', которое определяется соответственно вполне интегрируемой системой (6), (7) или (9), определяется бивектором

$$\sigma^{12}=1, \quad \sigma^{13}=-\varepsilon_3, \quad \sigma^{24}=z, \quad \sigma^{14}=-\varepsilon_3\sigma^{23}=k, \quad \sigma^{34}=-\varepsilon_1.$$

В этом 2-направлении $K(\sigma)=0$ и, так как компоненты σ^{ij} удовлетворяют условию I из [1] стационарности $K(\sigma)$, то риманова кривизна является стационарной.

Ставим теперь обратную задачу: найти все подмногообразия K, K' и K'', риманова кривизна $K(\sigma)$ которых стационарна. В этом случае бивектор σ^{ij}, определяющий касательное 2-направление $T_{\psi(p)}(K)$, $T_{\psi(p)}(K')$ или $T_{\psi(p)}(K'')$, должен удовлетворять одному из условий I—IV стационарности римановой кривизны $K(\sigma)$, которые даны в [1]. В случае, когда выполняется условие I стационарности, из него с учетом (3.12) из [1] следует, что $\zeta=\varepsilon_3 z$, $k^2=z^2-\varepsilon_1\varepsilon_3$. Сравнение этих равенств с выражениями (3.7) и (3.8) из [1] дает следующий результат.

Теорема 4. *Образ K, K' или K'' конгруэнции $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ или $\mathfrak{K}''$ в грассмановом многообразии является подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=0$ тогда и только тогда, когда эта конгруэнция и присоединенная к ней конгруэнция имеют нулевую кривизну.*

Замечание. В общем случае подмногообразия K, K' и K'' стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=0$ не являются вполне геодезическими.

Из условий III стационарности римановой кривизны $K(\sigma)$ получается, что для K и K' должны иметь место $z=\zeta=0$, а для K'', кроме того, $k=0$. Получается

Теорема 5. *Всякое подмногообразие K, K' и K'' стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=1$ является вполне геодезическим и определяется вполне интегрируемой системой, соответственно* (6), (7) *или* (9).

Из условий IV стационарности $K(\sigma)$ для подмногообразия K в $G_{2,4}$ получается

Теорема 6. *Подмногобразие K стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=2$ в $G_{2,4}$ является вполне геодезическим; оно определяется вполне интегрируемой системой* (5).

В [4] подмногообразие римановой кривизны $K(\sigma)=2$ в $G_{2,4}$ называется *вполне геодезической 2-сферой* и в [2, 3] показано, что оно представляет собой множество попарно изоклинных 2-плоскостей.

4. Переходим к подробному изучению конгруэнции 2-плоскостей, образ которых является вполне геодезическим подмногообразием.

Теорема 7. *Для конгруэнции $\mathfrak{K}$ (или $\mathfrak{K}'$) 2-плоскостей пространства R_4 (соответственно ${}^1R_4$) следующие утверждения эквивалентны:*

1) *ее образ в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ (соответственно ${}^{1,1}G_{2,4}$) является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=1$;*

2) *у всех 2-плоскостей конгруэнции $\mathfrak{K}$ (соответственно $\mathfrak{K}'$) существует общее 1-направление;*

3) *конгруэнция $\mathfrak{K}$ (соответственно $\mathfrak{K}'$) имеет нулевую кривизну и ее фокальные линии — нецентральные.*

Доказательство. Если образ конгруэнции $\mathfrak{K}$ (или $\mathfrak{K}'$) в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ (соответственно ${}^{1,1}G_{2,4}$) является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=1$, то она определяется системой (1а, 4). Поскольку в этом случае $d(k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=-k\omega^2{}_1(k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$, то направление вектора $k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ является общим для всех 2-плоскостей конгруэнции, следовательно, из 1) вытекает 2).

Если у всех 2-плоскостей конгруэнции $\mathfrak{K}$ (или $\mathfrak{K}'$) существует общее 1-направление $\boldsymbol{e}=t\boldsymbol{e}_1+(1-t)\boldsymbol{e}_2$, то из этого требования выводим условия

$$\begin{gathered} dt-[t^2+\varepsilon_1(1-t)^2]\omega^2{}_1=0, \\ k+t(1-k)=0, \qquad z(1-t)=0, \qquad \zeta(1-t)=0. \end{gathered} \tag{10}$$

Последние три из них дают

$$t\neq 1, \qquad z=\zeta=0, \qquad t=\frac{k}{k-1}.$$

Теперь в силу $z=\zeta=0$, кривизна $R=\zeta-z$ конгруэнции равна нулю и фокальные линии, уравнения которых

$$(x^1)^2+2kx^1x^2+k^2(x^2)^2+(\pi+\tau)x^1+k(\pi+\tau)x^2+\pi\tau-\varrho\sigma=0,$$

являются нецентральными. Следовательно, из 2) вытекают 3).

Если конгруэнция K (или K') имеет нулевую кривизну и ее фокальные линии нецентральные, то выполняются $\zeta-z=0$ и $z\zeta=0$, из которых следует $z=\zeta=0$. Теперь система (2) принимает вид

$$dk+(k^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=a\omega^3{}_1, \qquad dk+(k^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=a\omega^4{}_1,$$

следовательно $dk+(k^2+\varepsilon_1)\omega^2{}_1=0$, и вполне интегрируемая система (6), (соответственно (7)) определяет в $G_{2,4}$ (соответственно ${}^{1,1}G_{2,4}$) вполне геодезическое подмногообразие стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=1$. Итак, из 3) следует 1).

Теорема 8. *Образ K'' конгруэнции 2-плоскостей пространства ${}^1R_4$ в грассмановом многообразии ${}^{0,1}G_{2,4}$ является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=1$ тогда и только тогда, когда у всех 2-плоскостей конгруэнции $\mathfrak{K}''$ существует общее 1-направление.*

Доказательство. Указанное вполне геодезическое подмногообразие K'' в ${}^{0,1}G_{2,4}$ определяется вполне интегрируемой системой (8). Поскольку $de_2=0$, то направление вектора e_2 является общим для всех 2-плоскостей конгруэнции.

Обратно, из требования существования у всех 2-плоскостей конгруэнции общего 1-направления $e=te_1+(1-t)e_2$, получается система

$$dt-[t^2+(1-t)^2]\omega^2{}_1=0,$$

$$z(1-t)=0, \quad \zeta(1-t)=0, \quad k+t(1-k)=0, \quad k-t(1-k)=0.$$

Из последних четырех уравнений получается $k=z=\zeta=0$; система (2) сводится к системе $\omega^2{}_1=a\omega^3{}_1$, $\omega^2{}_1=a\omega^4{}_1$, откуда заключаем, что $\omega^2{}_1=0$. Теперь вполне интегрируемая система (8) определяет названное подмногообразие в ${}^{0,1}G_{2,4}$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Образ K конгруэнции $\mathfrak{K}$ 2-плоскостей пространства R_4 в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ является вполне геодезической 2-сферой тогда и только тогда, когда фокальная линия на каждой 2-плоскости из $\mathfrak{K}$ — окружность и кривизна конгруэнции $R=\mp 2$.*

Доказательство. Если K является вполне геодезической 2-сферой, то $\mathfrak{K}$ определяется системой (1а, 5); следовательно, кривизна $R=\zeta-z=\mp 2$, и фокальная линия конгруэнции — окружность, ее уравнение (3.9) можно привести к виду

$$\left(x^1+\frac{\pi+\tau}{2}\right)^2+\left(x^2\pm\frac{\varrho-\sigma}{2}\right)^2=\left(\frac{\pi-\tau}{2}\right)^2+\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)^2. \quad (12)$$

Обратно, если кривизна конгруэнции $R=\mp 2$ и фокальные линии — окружности, то из формул (3.7) и (3.9) статьи [1] получаем $\zeta-z=\mp 1$, $z\zeta=-1$, и отсюда получаем $z=-\zeta=\mp 1$. Теперь немедленно следует, что подмногообразие K является вполне геодезической 2-сферой, которая определяется системой (5). Теорема доказана.

В случае, когда для конгруэнции $\mathfrak{K}$ кривизна $R\neq 0$, то в каждой ее 2-плоскости существует однозначно определенная точка T нулевого кручения [1], она определяется из системы

$$T^1-x^2R=0, \quad T^2-x^1R=0.$$

Подставляя здесь для T^1, T^2 и R их выражения (3.6) и (3.7) из [1], получаем, что точка T имеет координаты

$$T=\left(\frac{\pi z-\tau\zeta}{\zeta-z}, \frac{\varrho-z}{\zeta-z}\right). \quad (13)$$

Теорема 10. *В случае конгруэнции $\mathfrak{K}$ с центральной нераспадающей фокальной линией на каждой 2-плоскости ее образ K в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ является вполне геодезической 2-сферой тогда и только тогда, когда эта линия является окружностью и точка T нулевого кручения совпадает с центром C этой окружности.*

Если конгруэнция $\mathfrak{K}$ не состоит из 2-плоскостей, проходящих через одну фиксированную точку, а фокальная линия на каждой ее 2-плоскости вырождается в точку, то образ ее в $G_{2,4}$ является вполне геодезической 2-сферой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ представляет собой конгруэнцию касательных плоскостей к такой двумерной минимальной поверхности, у которой индикатриса нормальной кривизны является окружностью.

Доказательство. Если K является вполне геодезической 2-сферой, то $\mathfrak{K}$ определяется системой (1а, 5) и, согласно теореме 9, ее фокальная линия есть окружность. При помощи (13) находим, что точка T нулевого кручения имеет координаты $T = (-(\pi + \tau)/2, \mp(\varrho - \sigma)/2)$, и из (12) видно, что она совпадает с центром фокальной окружности.

Если теперь эта фокальная окружность вырождается в точку, то $\pi = \tau$ и $\varrho + \sigma = 0$. Перенесение начала репера в эту точку влечет за собой $\pi = \tau = \varrho = \sigma = 0$, следовательно, $\omega^3 = \omega^4 = 0$. Внешнее дифференцирование последних уравнений и применение леммы Картана дают

$$\omega^1 = \alpha' \omega^3{}_1 + \beta' \omega^4{}_1, \qquad \omega^2 = -\beta' \omega^3{}_1 + \alpha' \omega^4{}_1. \tag{14}$$

Здесь предположение $\alpha' = \beta' = 0$ привело бы к конгруэнциям, состоящих из 2-плоскостей, имеющих общую точку, которые исключены из рассмотрения. Поэтому можем в нашем случае обозначить $(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 1/A$. Тогда из (14) и (5) получим

$$\omega^3{}_1 = A(\alpha' \omega^1 - \beta' \omega^2), \qquad \omega^4{}_1 = A(\beta' \omega^1 + \alpha' \omega^2),$$
$$\omega^3{}_2 = -A(\beta' \omega^1 - \alpha' \omega^2), \quad \omega^4{}_2 = A(\alpha' \omega^1 - \beta' \omega^2).$$

Отсюда видно, что такая $\mathfrak{K}$ является конгруэнцией касательных плоскостей к минимальной поверхности, индикатриса нормальной кривизны которой есть окружность, уравнение которой

$$(y^3)^2 + (y^4)^2 = A.$$

Перейдем к доказательству обратных утверждений теоремы. Если фокальная линия на каждой 2-плоскости конгруэнции есть окружность, то уравнение (3.9) из [1] можем, в силу $z\zeta = -1$, переписать в виде

$$\left(x^1 + \frac{\pi - \tau}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{\sigma z^2 - \varrho}{2z}\right)^2 = \left(\frac{\pi - \tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varrho + \sigma z^2}{2}\right)^2.$$

Если теперь центр C ее совпадает с точкой T нулевого кручения, то имеют место

$$\frac{\pi z^2+1}{z^2+1}=\frac{\pi+\tau}{2}, \qquad \frac{(\varrho-\sigma)z}{z^2+1}=\frac{\varrho-\sigma z^2}{2z}$$

которые равносильно соотношениям

$$(z^2-1)(\pi-\tau)=0, \qquad (z^2-1)(z^2\sigma+\varrho)=0.$$

Здесь одновременное выполнение равенств $\pi=\tau$ и $z^2\sigma+\varrho=0$ привело бы к распадению фокальной линии. Поэтому в случае нераспадающей линии $z^2=1$. Следовательно, вполне интегрируемая система (5) определяет в $G_{2,4}$ указанное подмногообразие K.

Рассмотрим теперь случай, когда фокальная линия на каждой 2-плоскости конгруэнции $\mathfrak{K}$ вырождается в точку. Тогда имеем

$$z\zeta<0, \qquad \pi-\tau=0, \qquad \varrho\zeta-\sigma z=0.$$

В таком случае точки с радиусами-векторами $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}+\pi\boldsymbol{e}_1-(\varrho/z)\boldsymbol{e}_2$ описывают некоторую 2-мерную поверхность $\mathfrak{K}^*$, для которой 2-плоскости конгруэнции являются касательными. Помещая начало репера в точку касания, имеем, в силу $\pi=\tau=\varrho=\sigma$, что $\omega^3=\omega^4=0$. Путем внешнего дифференцирования и применения леммы Картана из последних равенств следует

$$\omega^1=\alpha'\omega^3{}_1+\beta'\omega^4{}_1, \qquad \omega^2=\frac{\beta'}{z}\omega^3{}_1+\frac{\alpha'}{z}\omega^4{}_1. \tag{15}$$

Поскольку здесь предположение $\alpha'=\beta'=0$ приводит опять к конгруэнциям, которые исключены из рассмотрения, можем в нашем случае обозначить $(\alpha')^2/\zeta-(\beta')^2/z=1/A$. Тогда из (15) и (1b) следует

$$\omega^3{}_1=A\left(\frac{\alpha'}{z\zeta}\omega^1-\beta'\omega^2\right), \qquad \omega^4{}_1=A\left(-\frac{\beta'}{z}\omega^1+\frac{\alpha'}{z}\omega^2\right),$$

$$\omega^3{}_2=A(-\beta'\omega^1+\alpha'\omega^2), \qquad \omega^4{}_2=A\left(\frac{\alpha'}{z}\omega^1+\beta'\zeta\omega^2\right).$$

Отсюда видно, что эта поверхность является минимальной тогда и только тогда, когда $z\zeta+1=0$. Для минимальной $\mathfrak{K}^*$ уравнение индикатрисы нормальной кривизны имеет вид

$$(y^3)^2+z^2(y^4)^2=A^2\left[(\alpha')^2+\frac{(\beta')^2}{z^2}\right].$$

Если $z^2=1$, то эта индикатриса является окружностью. В последнем случае K является вполне геодезической 2-сферой, которая определяется вполне интегрируемой системой (5). Теорема доказана.

Теорема 11. *Образ конгруэнции $\mathfrak{K}$ (или $\mathfrak{K}'$) пространства $R_4({}^1R_4)$ в грассмановом многообразии является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=0$ тогда и только тогда, когда сама эта конгруэнция имеет нулевую кривизну и параллельными в расслоении над $\mathfrak{K}$ (соответственно $\mathfrak{K}'$) нормальных векторов являются поля единичных векторов в главных направлениях фокальной линии конгруэнции $\mathfrak{N}$ (соответственно $\mathfrak{N}''$).*

Замечание. Для конгруэнции $\mathfrak{K}'$ в ${}^1R_4$ сюда включаются и конгруэнции, описанные теоремой 8 из [1], для которых риманова кривизна $K(\sigma)$ их образа не определена.

Доказательство приведем для конгруэнции $\mathfrak{K}$, ибо для $\mathfrak{K}'$ оно совершенно аналогично. Конгруэнции $\mathfrak{K}$, образ которых обладает в теореме указанными свойствами, определяются системами (1a) и (6); в силу последней из них соответствующая кривизна $R=0$, и поля векторов e_3 и e_4 — главных направлений фокальной линии (3.5) из [1] являются параллельными в расслоении над $\mathfrak{K}$ нормальных векторов.

Обратно, если для конгруэнции $\mathfrak{K}$ имеет место $R=0$, то согласно (3.7) из [1]

$$\zeta - z = 0,$$

В репере, где $k=\varkappa$, главными направлениями для фокальной линии (3.5) из [1] являются направления векторов e_3 и e_4; из требования параллельности этих векторных полей в расслоении над $\mathfrak{K}$ нормальных векторов вытекает $\omega^3{}_4=0$. Но в таком случае система (2) принимает вид

$$dk + 2z^2\omega^2{}_1 = \alpha\omega^3{}_1 + \beta\omega^4{}_1, \qquad dz + 2kz\omega^2{}_1 = \beta\omega^3{}_1 + \alpha\omega^4{}_1,$$

Внешнее дифференцирование равенства $k^2 - z^2 + \varepsilon_1 = 0$ дает $k\alpha = z\beta$, $k\beta = z\alpha$, откуда, в силу $k^2 + z^2 \neq 0$, заключаем, что $\alpha=\beta=0$. Теперь K в $G_{2,4}$ определяется вполне интегрируемой системой (6) и является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=0$. Теорема доказана.

Для конгруэнции $\mathfrak{K}''$ имеет место аналогичная

Теорема 12. *Образ конгруэнции $\mathfrak{K}''$ пространства ${}^1R_4$ в грассмановом многообразии ${}^{0,1}G_{2,4}$ является вполне геодезическим подмногообразием стационарной римановой кривизны $K(\sigma)=0$ тогда и только тогда, когда присоединенная к ней конгруэнция $\mathfrak{N}'$ имеет нулевую кривизну, и поле единичных векторов в главных направлениях фокальной кривой для $\mathfrak{K}''$ является параллельным в каноническом расслоении над $\mathfrak{K}''$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 11 и мы его опускаем.

Литература

1. Маазикас И., Грассманово отображение конгруэнции 2-плоскостей в евклидовых пространствах. Настоящий сборник, стр. 57—75.
2. Wolf, J. A., Geodesic spheres in Grassmann manifolds. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 3, 425—446.
3. Wong, Y. C., Isoclinic n-planes in Euclidean $2n$-spaces, Clifford parallels in elliptic $(2n-1)$-space and the Hurwitz matrix equations. Mem. Amer. Math. Soc., 1961, № 41, 1—112.
4. Wong, Y. C., Sectional curvatures of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, **60**, № 1, 75—79.

Поступило
17 IV 1974

KAHEMÕÕTMELISTE TASANDITE KONGRUENTSID, MILLE GRASSMANNI KUJUTIS ON TÄIELIKULT GEODEETILINE

I. Maasikas

Resümee

Käesolevas artiklis jätkatakse artiklis [1] alustatud eukleidilise ruumi R_4 ja pseudoeukleidilise ruumi ${}^1R_4$ mitteisotroopsete 2-tasandite kongruentsi ja tema Grassmanni kujutise omaduste uurimist. Leitakse kõik kongruentsid, mille kujutiseks Grassmanni muutkonnas on täielikult geodeetiline alammuutkond ja tuuakse välja neid iseloomustavad geomeetrilised omadused.

DIE KONGRUENZEN DER 2-DIMENSIONALEN EBENEN, DEREN GRASSMANNSCHE ABBILDUNG VOLLGEODÄTISCH IST

I. Maasikas

Zusammenfassung

Diese Arbeit ist eng mit dem Artikel [1] verbunden. Man betrachtet die Ebenenkongruenz von 2-dimensionalen Ebenen in R_4 und von nichtisotropen 2-dimensionalen Ebenen in ${}^1R_4$. Im Artikel werden alle obengenannten Kongruenzen in R_4 und ${}^1R_4$ ausgesucht, deren Abbildung in der grassmannschen Mannigfaltigkeit eine vollgeodätische Untermannigfaltigkeit ist.

КЛАССИФИКАЦИИ КОНГРУЭНЦИЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА Sp_4 ПО ТИПАМ ФОКАЛЬНОЙ КРИВОЙ И ГРУППАМ ГОЛОНОМИЙ

А. Парринг

Кафедра алгебры и геометрии

Настоящая работа является продолжением статей [2, 3]. Рассматривается конгруэнция двумерных симплектических плоскостей в 4-мерном аффинно-симплектическом пространстве, пользуясь формулами и понятиями из [2]. С конгруэнцией двумерных симплектических плоскостей связывается ее каноническое расслоение, слоями которого являются плоскости конгруэнции [1, 2]. При этом возникают формы кривизны и кручения внутренней связности, по которым происходит классификация конгруэнций.

В § 1 необходимые в дальнейшем формулы приводятся в нужной здесь форме. В § 2 дается классификация конгруэнций по формам кривизны. Даны еще классификации по типам фокальной кривой (§§ 2, 3) и группам голономий (§ 4). Выяснено взаимное отношение этих трех классификаций.

§ 1. Внутренние связности

1. Формы Пфаффа ω^I и $\omega^I{}_K$ $(I, K, \ldots = 1, \ldots, 4)$ в формулах перемещения

$$d\boldsymbol{M}=\omega^I \boldsymbol{e}_I, \qquad d\boldsymbol{e}_I=\omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K$$

подвижного репера $\{M; \boldsymbol{e}_I\}$ в 4-мерном аффинно-симплектическом пространстве Sp_4 удовлетворяет структурным уравнениям

$$d\omega^I=\omega^K \wedge \omega^I{}_K, \qquad d\omega^I{}_K=\omega^L{}_K \wedge \omega^I{}_L \tag{1.1}$$

и уравнениям

$$dg_{IK}=g_{LK}\omega^L{}_I+g_{IL}\omega^L{}_K, \tag{1.2}$$

где $\|g_{IK}\|$ — кососимметрическая регулярная матрица, определяющая метрику в Sp_4.

В Sp_4 рассматривается конгруэнция B симплектических плоскостей. Применяется следующий репер $\{M; \boldsymbol{e}_I\}$: начало M и векторы $\boldsymbol{e}_i$ $(i, j, \ldots, o = 1, 2)$ принадлежат плоскости конгруэнции, $\boldsymbol{e}_p$ $(p, q, \ldots = 3, 4)$ перпендикулярны векторам $\boldsymbol{e}_i$ и

$$\|g_{IK}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Из (1.2) следует, что тогда матрица $\|\omega^I{}_K\|$ имеет следующее строение

$$\left\| \begin{matrix} \omega^1{}_1 & \omega^2{}_1 & \omega^3{}_1 & \omega^4{}_1 \\ \omega^1{}_2 & -\omega^1{}_1 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 \\ -\omega^4{}_2 & \omega^4{}_1 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 \\ \omega^3{}_2 & -\omega^3{}_1 & \omega^3{}_4 & -\omega^3{}_3 \end{matrix} \right\|. \tag{1.3}$$

Конгруэнция B определяет свое каноническое расслоение $\pi : E \to B$, слоями которого являются плоскости конгруэнции, как точечные многообразия в Sp_4, и базой которого является сама конгруэнция B, как 2-мерное многообразие. Структурной группой расслоения $\pi : E \to B$ является эквиаффинная группа $SGL(2; \mathbf{R}) * T_2$, где $SGL(2; \mathbf{R})$ — группа 2×2-матриц A с $\det A = 1$, а T_2 — группа сдвигов. Если $\{\theta^p\}$ — корепер в произвольной точке некоторой области $U \subset B$, то

$$d\theta^p = \theta^q \wedge \theta^p{}_q. \tag{1.4}$$

Уравнения конгруэнции имеют вид

$$\omega^p = \Lambda^p{}_q \theta^q, \qquad \omega^p{}_i = \Lambda^p{}_{iq} \theta^q. \tag{1.5}$$

Продолжая эти уравнения, получим

$$\nabla \Lambda^p{}_q = \Lambda^p{}_{iq} \omega^i + \Lambda^p{}_{qs} \theta^s, \qquad \Lambda^p{}_{[qs]} = 0$$

и

$$\nabla \Lambda^p{}_{iq} = \Lambda^p{}_{iqs} \theta^s, \qquad \Lambda^p{}_{i[qs]} = 0. \tag{1.6}$$

Ортогональные дополнения к слоям расслоения $\pi : E \to B$ индуцируют в нем внутреннюю связность со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i{}_j + \Omega^i,$$
$$d\omega^i{}_j = \omega^k{}_j \wedge \omega^i{}_k + \Omega^i{}_j,$$

где

$$\Omega^i = \frac{1}{2} T^i{}_{pq} \theta^p \wedge \theta^q, \qquad \Omega^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jpq} \theta^p \wedge \theta^q$$

и

$$T^i{}_{pq} = 2 g^{ik} g_{rs} \Lambda^r{}_{[p} \Lambda^s{}_{|k|q]}, \qquad R^i{}_{jpq} = 2 g^{ik} g_{rs} \Lambda^r{}_{j[p} \Lambda^s{}_{|k|q]}. \tag{1.7}$$

Вместе с расслоением $\pi: E \to B$ возникает векторное расслоение $p: V \to B$ двумерных симплектических направлений, ортогонально дополняющих плоскости конгруэнции, т. е. натянутых на векторы $\boldsymbol{e}_p$ выбранного нами репера. Возникает также внутренняя связность расслоения $p: V \to B$ со структурными уравнениями

$$d\omega^p{}_q = \omega^r{}_q \wedge \omega^p{}_r + \Omega^p{}_q, \tag{1.8}$$

где

$$\Omega^p{}_q = \frac{1}{2} R^p{}_{qst} \theta^s \wedge \theta^t \tag{1.9}$$

— формы кривизны. Здесь

$$R^p{}_{qst} = 2g^{ik} q_{qr} \Lambda^r{}_{k[s} \Lambda^p{}_{|i|t]}. \tag{1.10}$$

Структурной группой расслоения $p: V \to B$ является группа $SGL(2; \mathbf{R})$.

Продолжая (1.7) и (1.10), получим соответственно

$$\begin{aligned} &\nabla T^i{}_{sr} = R^i{}_{jsr} \omega^j + T^i{}_{srt} \theta^t, \\ &\nabla R^p{}_{qsr} = R^p{}_{qsrt} \theta^t, \\ &\nabla R^i{}_{jsr} = R^i{}_{jsrt} \theta^t, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned} &T^i{}_{srt} = 2g^{ik} g_{pq} (\Lambda^p{}_{[s|t} \Lambda^q{}_{k|r]} + \Lambda^p{}_{[s} \Lambda^q{}_{|k|r]t}), \\ &R^i{}_{jsrt} = 2g^{ik} g_{pq} (\Lambda^p{}_{j[s|t} \Lambda^q{}_{k|r]} + \Lambda^p{}_{j[s} \Lambda^q{}_{|k|r]t}), \\ &R^p{}_{qsrt} = 2g^{ik} g_{qu} (\Lambda^u{}_{k[s|t} \Lambda^p{}_{i|r]} + \Lambda^u{}_{k[s} \Lambda^p{}_{|i|r]t}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

2. Применим теперь эти общие формулы к случаю нашей конгруэнции плоскостей в Sp_4, обозначая для простоты

$$T^i = T^i{}_{34}, \quad R^i{}_j = R^i{}_{j34}, \quad R^p{}_q = R^p{}_{q34}.$$

Из (1.7) и (1.10) получим:

$$\begin{aligned} &T^1 = \Lambda^3{}_3 \Lambda^4{}_{24} - \Lambda^3{}_4 \Lambda^4{}_{23} - \Lambda^4{}_3 \Lambda^3{}_{24} + \Lambda^4{}_4 \Lambda^3{}_{23}, \\ &T^2 = -(\Lambda^3{}_3 \Lambda^4{}_{14} - \Lambda^3{}_4 \Lambda^4{}_{13} - \Lambda^4{}_3 \Lambda^3{}_{14} + \Lambda^4{}_4 \Lambda^3{}_{13}), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &R^1{}_1 = -R^2{}_2 = \Lambda^3{}_{13} \Lambda^4{}_{24} - \Lambda^4{}_{13} \Lambda^3{}_{24} + \Lambda^3{}_{23} \Lambda^4{}_{14} - \Lambda^3{}_{14} \Lambda^4{}_{23}, \\ &R^2{}_1 = -2(\Lambda^3{}_{13} \Lambda^4{}_{14} - \Lambda^4{}_{13} \Lambda^3{}_{14}), \\ &R^1{}_2 = 2(\Lambda^3{}_{23} \Lambda^4{}_{24} - \Lambda^4{}_{23} \Lambda^3{}_{24}), \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} &R^3{}_3 = -R^4{}_4 = \Lambda^4{}_{23} \Lambda^3{}_{14} - \Lambda^4{}_{24} \Lambda^3{}_{13} - \Lambda^4{}_{13} \Lambda^3{}_{24} + \Lambda^4{}_{14} \Lambda^3{}_{23}, \\ &R^4{}_3 = 2(\Lambda^4{}_{14} \Lambda^4{}_{23} - \Lambda^4{}_{13} \Lambda^4{}_{24}), \\ &R^3{}_4 = -2(\Lambda^3{}_{23} \Lambda^3{}_{14} - \Lambda^3{}_{24} \Lambda^3{}_{13}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Непосредственная проверка покажет теперь, что имеет место следующее важное в дальнейшем равенство:

$$\det \|R^i{}_j\| = \det \|R^q{}_p\|. \tag{1.16}$$

Аналогично (1.11) и (1.12) дают:

$$dT^1 = -T^1\omega^1{}_1 - T^2\omega^1{}_2 + R^1{}_1\omega^1 + R^1{}_2\omega^2 + T^1(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + T^1{}_3\theta^3 + T^1{}_4\theta^4,$$
$$dT^2 = -T^1\omega^2{}_1 + T^2\omega^1{}_1 + R^2{}_1\omega^1 - R^1{}_1\omega^2 + T^2(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + T^2{}_3\theta^3 + T^2{}_4\theta^4, \tag{1.17}$$

$$dR^1{}_1 = R^1{}_2\omega^2{}_1 - R^2{}_1\omega^1{}_2 + R^1{}_1(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^1{}_{13}\theta^3 + R^1{}_{14}\theta^4,$$
$$dR^2{}_1 = 2R^2{}_1\omega^1{}_1 - 2R^1{}_1\omega^2{}_1 + R^2{}_1(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^2{}_{13}\theta^3 + R^2{}_{14}\theta^4, \tag{1.18}$$
$$dR^1{}_2 = 2R^1{}_1\omega^1{}_2 - 2R^1{}_2\omega^1{}_1 + R^1{}_2(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^1{}_{23}\theta^3 + R^1{}_{24}\theta^4,$$

$$dR^3{}_3 = R^3{}_4\omega^4{}_3 - R^4{}_3\omega^3{}_4 + R^3{}_3(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^3{}_{33}\theta^3 + R^3{}_{34}\theta^4,$$
$$dR^4{}_3 = 2R^4{}_3\omega^3{}_3 - 2R^3{}_3\omega^4{}_3 + R^4{}_3(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^4{}_{33}\theta^3 + R^4{}_{34}\theta^4, \tag{1.19}$$
$$dR^3{}_4 = -2R^3{}_4\omega^3{}_3 + 2R^3{}_3\omega^3{}_4 + R^3{}_4(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R^3{}_{43}\theta^3 + R^3{}_{44}\theta^4;$$

здесь обозначено

$$T^i{}_{34p} = T^i{}_p, \qquad R^i{}_{j34p} = R^i{}_{jp}, \qquad R^p{}_{q34r} = R^p{}_{qr}.$$

Обозначая

$$R = \det\|R^i{}_j\| = \det\|R^p{}_q\|, \qquad \Lambda = \det\|\Lambda^p{}_q\|,$$

получим

$$dR = -R(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) + R_p\theta^p,$$
$$d\Lambda = \Lambda(\theta^3{}_3 + \theta^4{}_4) - T^2\omega^1 + T^1\omega^2 + \Lambda_p\theta^p. \tag{1.20}$$

3. Множество точек F с $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + x^i\boldsymbol{e}_i$ плоскости, принадлежащих конгруэнции B, для которых в некотором касательном к B направлении $d\boldsymbol{F} = \lambda^i\boldsymbol{e}_i$, называется *фокальной кривой данной плоскости* и обозначается через f. Из этого определения следует, что F является точкой фокальной кривой тогда и только, когда

$$\det\|\Lambda^p{}_q + x^i\Lambda^p{}_{iq}\| = 0.$$

Последнее уравнение для конгруэнции плоскостей в Sp_4 сводится в силу (1.13) и (1.14) к

$$R^2{}_1(x^1)^2 - 2R^1{}_1x^1x^2 - R^1{}_2(x^2)^2 + 2T^2x^1 - 2T^1x^2 - 2\Lambda = 0. \tag{1.21}$$

При переносе начала репера M в новую точку M' с $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + x^i\boldsymbol{e}_i$ и с сохранением векторов $\boldsymbol{e}_I$ неизменными, имеют место

$$'T^i = T^i + x^jR^i{}_j, \tag{1.22}$$

а величины R_j и $R^p{}_q$ не изменяются, как это следует из (1.18) и (1.19).

Так как матрицы величин

$$R_{ki} = g_{kj}R^j{}_i, \qquad R_{pq} = g_{pr}R^r{}_q$$

симметричны, то их можно подходящим выбором векторов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_p$, соответственно, привести независимо друг от друга к одному из видов (напомним, что составленные из них базисы определены с точностью до эквиаффинной группы):

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$. Итак, матрицы $\|R^k{}_i\|$ и $\|R^p{}_q\|$ к одному из видов

$$(\mathrm{I}) = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{Vmatrix}, \quad (\mathrm{II}) = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix},$$
$$(\mathrm{III}) = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (\mathrm{IV}) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1.23}$$

Далее через $R(\mathrm{I})$, $R(\mathrm{II})$, $R(\mathrm{III})$, $R(\mathrm{IV})$ и $r(\mathrm{I})$, $r(\mathrm{II})$, $r(\mathrm{III})$, $r(\mathrm{IV})$ обозначим классы конгруэнций B, у которых матрицы $\|R^j{}_i\|$ и $\|R^q{}_p\|$ имеют соответственно виды I, II, III, IV. В силу (1.16) получаем $R(\mathrm{I}) = r(\mathrm{I})$ и $R(\mathrm{II}) = r(\mathrm{II})$. Итак, справедлива

Теорема 1. *Конгруэнции B плоскостей в Sp_4 делятся на следующие непересекающиеся классы* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{A} = R(\mathrm{I}) = r(\mathrm{I})$, $\mathfrak{B} = R(\mathrm{II}) = r(\mathrm{II})$, $\mathfrak{C} = R(\mathrm{III}) \cap r(\mathrm{III})$, $\mathfrak{D} = R(\mathrm{III}) \cap r(\mathrm{IV})$, $\mathfrak{E} = R(\mathrm{IV}) \cap r(\mathrm{III})$ *и* $\mathfrak{F} = R(\mathrm{IV}) \cap r(\mathrm{IV})$.

Вопросы существования конгруэнций этих классов рассматривается ниже.

4. Возьмем на плоскости $p^{-1}(\alpha)$, где $\alpha \in B$, некоторый симплектический репер $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$. После его параллельного перенесения относительно внутренней связаности вдоль всевозможных малых петель l_α базисного многообразия B получим в слое $p^{-1}(\alpha)$ новые реперы $\{'M; '\boldsymbol{e}_i\}$, которые получаются из $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ при помощи некоторых элементов группы $SGL(2; R) * T_2$. Множество таких элементов является подгруппой, которая называется *локальной неоднородной группой голономии* (см. [1]). Обозначим ее через X. Если здесь вместо репера $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ рассматривать базис $\{\boldsymbol{e}_i\}$, то получается *локальная однородная группа голономии*, которую обозначим Ψ. Аналогично возникает *локальная однородная группа голономии* Φ внутренней связности векторного расслоения $p: V \to B$. Как известно, алгебра Ли локальной группы голономии есть подалгебра в алгебре Ли структурной группы расслоения. Для групп X, Ψ и Φ она определяется значениями форм, соответственно, $(\Omega^i{}_j, \Omega^i)$, $\Omega^i{}_j$ и $\Omega^p{}_q$.

§ 2. Исследование конгруэнций с центральными фокальными кривыми

1. Пусть дана конгруэнция B симплектических плоскостей в Sp_4 с центральной фокальной кривой f на каждой ее плоскости $\alpha \in B$. Из (1.21) следует, что $R = \det \|R^i{}_j\| \neq 0$, т. е. конгруэнция принадлежит одному из классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Каждая плоскость $\alpha \in B$ конгруэнции определяет однозначно новую симплектическую плоскость α', проходящую через центр C фокальной кривой $f \subset \pi^{-1}(\alpha)$ и ортогонально дополняющую α. Следовательно, данная конгруэнция B индуцирует новую конгруэнцию B' симплектических плоскостей. Если векторы репера выбрать также как в § 1, п. 1, а начало репера выбрать не на плоскости $\alpha \in B$, а на плоскости α', то вместо первых из уравнений (1.5) будут уравнения

$$\omega^i = \Lambda^i{}_p \theta^p.$$

Конгруэнция B' определяет также свое каноническое расслоение $\pi' : E' \to B'$. Формулы (1.4) и (1.8) вместе с формулами

$$d\omega^p = \omega^q \wedge \omega^p{}_q + \Omega^p, \tag{2.1}$$

где

$$\Omega^p = \omega^i \wedge \omega^p{}_i = \frac{1}{2} T^p{}_{qr} \theta^q \wedge \theta^r$$

и

$$T^p{}_{qr} = 2\Lambda^i{}_{[q} \Lambda^p{}_{|i|r]}, \tag{2.2}$$

составляют структурные уравнения расслоения $\pi' : E' \to B'$. Структурной группой этого расслоения является $SGL(2; R) * T_2$. Координаты точки X с $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^p \boldsymbol{e}_p$ фокальной линии f' на плоскости $\alpha' \in B'$ удовлетворяют уравнению

$$R^4{}_3 (x^3)^2 - 2R^3{}_3 x^3 x^4 - R^3{}_4 (x^4)^2 + 2T^4 x^3 - 2T^3 x^4 - 2\lambda = 0, \tag{2.3}$$

где обозначено

$$T^p = T^p{}_{34}, \qquad \lambda = \det \|\Lambda^i{}_p\|.$$

2. Для более подробного исследования конгруэнции B с центральными фокальными кривыми выбираем репер $\{M; \boldsymbol{e}_I\}$ следующим образом: начало M перенесем в центр фокальной кривой f, а $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_p$ направим соответственно в сопряженные направления фокальных кривых f и f'. Тогда $\|R^i{}_j\|$ и $\|R^p{}_q\|$ одновременно имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & a \\ -\varepsilon a & 0 \end{Vmatrix},$$

где $a \neq 0$ и $\varepsilon = \pm 1$; здесь верхний знак соответствует классу $\mathfrak{A}$ и нижний знак классу $\mathfrak{B}$. Выбранный репер определяется с точности преобразований

$$\begin{aligned} &'\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos \sqrt{\varepsilon}\, \varphi + \boldsymbol{e}_2 \sqrt{\varepsilon^3} \sin \sqrt{\varepsilon}\, \varphi, \quad '\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cos \sqrt{\varepsilon}\, \psi + \boldsymbol{e}_4 \sqrt{\varepsilon^3} \sin \sqrt{\varepsilon}\, \psi, \\ &'\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1 \sqrt{\varepsilon} \sin \sqrt{\varepsilon}\, \varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos \sqrt{\varepsilon}\, \varphi, \quad '\boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}_3 \sqrt{\varepsilon} \sin \sqrt{\varepsilon}\, \psi + \boldsymbol{e}_4 \cos \sqrt{\varepsilon}\, \psi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В каждом таком репере

$$\begin{aligned} &T^i = R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = R^4{}_4 = 0, \\ &R^2{}_1 = -\varepsilon R^1{}_2 = a \neq 0, \quad R^4{}_3 = -\varepsilon R^3{}_4 = \pm a \neq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из формул (1.5) и (1.14) следует, что

$$-2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1 = a\theta^3 \wedge \theta^4. \tag{2.6}$$

Следовательно, формы $\omega^3{}_1$ и $\omega^4{}_1$ линейно независимы и их можно выбрать за базисные формы θ^p, т. е. в (1.5) можно считать $\theta^p = \omega^p{}_1$. Тогда

$$\Lambda^p{}_{1q} = \delta^p{}_q. \tag{2.7}$$

Система уравнений для определения $\Lambda^p{}_q$ и $\Lambda^p{}_{2q}$, получаемая из (1.13)—(1.15) и (2.5), дает следующее решение

$$\Lambda^4{}_4 = -\Lambda^3{}_3,\ \Lambda^4{}_3 = \varepsilon\Lambda^3{}_4,\ \Lambda^3{}_{23} = \Lambda^4{}_{24} = 0,\ \Lambda^4{}_{23} = \pm 1,\ \Lambda^3{}_{24} = \mp\varepsilon. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$R^2{}_1 = -2, \quad R^1{}_2 = 2\varepsilon, \quad R^4{}_3 = \pm 2, \quad R^3{}_4 = \mp 2\varepsilon,$$
$$R = 4\varepsilon, \qquad \Lambda = -(\Lambda^3{}_3)^2 - \varepsilon(\Lambda^4{}_3)^2.$$

Уравнения (1.5) получают вид

$$\begin{aligned} &\omega^3 = \Lambda^3{}_3\omega^3{}_1 + \varepsilon\Lambda^4{}_3\omega^4{}_1, && \omega^4 = \Lambda^4{}_3\omega^3{}_1 - \Lambda^3{}_3\omega^4{}_1, \\ &\omega^3{}_2 = \mp\varepsilon\omega^4{}_1, && \omega^4{}_2 = \pm\omega^3{}_1, \end{aligned} \tag{2.9}$$

а уравнения (1.21) и (2.3) фокальных кривых f и f' сводятся к

$$\begin{aligned} &(x^1)^2 + \varepsilon(x^2)^2 + \Lambda = 0, \\ &\pm(x^3)^2 \pm \varepsilon(x^4)^2 + T^4x^3 - T^3x^4 - \lambda = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Так как теперь $\theta^3 = \omega^3{}_1 = \pm\omega^4{}_2$ и $\theta^4 = \omega^4{}_1 = \mp\varepsilon\omega^3{}_2$ в силу (2.9), то

$$2d\theta^3 = d\omega^3{}_1 \pm d\omega^4{}_2 = \theta^4 \wedge [\pm(\varepsilon\omega^2{}_1 - \omega^1{}_2) - (\varepsilon\omega^4{}_3 - \omega^3{}_4)],$$
$$2d\theta^4 = d\omega^4{}_1 \mp d\omega^3{}_2 = \theta^3 \wedge \varepsilon[\mp(\varepsilon\omega^2{}_1 - \omega^1{}_2) + (\varepsilon\omega^4{}_3 - \omega^3{}_4)].$$

Сравнивая результаты с (1.4), получим

$$\theta^3{}_4 = -\varepsilon\theta^4{}_3 = \frac{1}{2}[\pm(\varepsilon\omega^2{}_1 - \omega^1{}_2) - (\varepsilon\omega^4{}_3 - \omega^3{}_4)],\ \theta^3{}_3 = \theta^4{}_4 = 0. \tag{2.11}$$

Вторые соотношения из (1.6) получают вид

$$\begin{aligned} -\omega^1{}_1 + \omega^3{}_3 &= A\omega^3{}_1 + B\omega^4{}_1, \\ \pm(\varepsilon\omega^2{}_1 + \omega^1{}_2) + (\varepsilon\omega^4{}_3 + \omega^3{}_4) &= 2(B\omega^3{}_1 + C\omega^4{}_1), \\ \mp(\omega^2{}_1 + \varepsilon\omega^1{}_2) + (\omega^4{}_3 + \varepsilon\omega^3{}_4) &= 2(a\omega^3{}_1 + b\omega^4{}_1), \\ -\omega^1{}_1 - \omega^3{}_3 &= b\omega^3{}_1 + c\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} &A = \Lambda^3{}_{133} = \mp\Lambda^4{}_{233}, && a = \Lambda^4{}_{133} = \pm\varepsilon\Lambda^3{}_{233}, \\ &B = \Lambda^3{}_{134} = \mp\Lambda^4{}_{234}, && b = \Lambda^4{}_{134} = \pm\varepsilon\Lambda^3{}_{234}, \\ &C = \Lambda^3{}_{144} = \mp\Lambda^4{}_{244}, && c = \Lambda^4{}_{144} = \pm\varepsilon\Lambda^3{}_{244}. \end{aligned}$$

Из (1.18) и (1.19) получим равносильные к (2.12) соотношения

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon\omega^2{}_1 + \omega^1{}_2) &= -R^1{}_{13}\omega^3{}_1 - R^1{}_{14}\omega^4{}_1, \\ 2(\varepsilon\omega^4{}_3 + \omega^3{}_4) &= \pm R^3{}_{33}\omega^3{}_1 \pm R^3{}_{34}\omega^4{}_1, \\ 4\omega^1{}_1 &= R^2{}_{13}\omega^3{}_1 + R^2{}_{14}\omega^4{}_1, \\ 4\omega^3{}_3 &= \mp R^4{}_{33}\omega^3{}_1 \mp R^4{}_{34}\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Имеет место
$$R^2{}_{1p}=\varepsilon R^1{}_{2p}, \qquad R^4{}_{3p}=\varepsilon R^3{}_{4p}.$$
Сравнивая (2.12) и (2.13), получим
$$\begin{aligned} &R^1{}_{13}=-R^2{}_{23}=\pm 2(\varepsilon a-B), \quad R^2{}_{13}=R^1{}_{23}=-2(A+b),\\ &R^1{}_{14}=-R^2{}_{24}=\pm 2(\varepsilon b-C), \quad R^2{}_{14}=R^1{}_{24}=-2(B+c) \end{aligned} \tag{2.14}$$
и
$$\begin{aligned} &R^3{}_{33}=-R^4{}_{43}=\pm 2(B+\varepsilon a), \quad R^4{}_{33}=R^3{}_{43}=\mp 2(A-b),\\ &R^3{}_{34}=-R^4{}_{44}=\pm 2(C+\varepsilon b), \quad R^4{}_{34}=R^3{}_{44}=\mp 2(B-c). \end{aligned} \tag{2.15}$$
Теперь из (1.6) получим выражения для дифференциалов $d\Lambda^3{}_3$, $d\Lambda^4{}_4$ и $d\Lambda^4{}_3$, $d\Lambda^3{}_4$. Вместо них применим равносильные им выражения, получая их при помощи сложения и вычитания соответственно двух первых и двух последних между собой
$$\begin{aligned} &\Lambda^4{}_3(\varepsilon\omega^4{}_3+\omega^3{}_4)+2\Lambda^3{}_3\omega^3{}_3-2\omega^1=\\ &\qquad=(\Lambda^3{}_{33}+\Lambda^4{}_{43})\omega^3{}_1+(\Lambda^3{}_{34}+\Lambda^4{}_{44})\omega^4{}_1,\\ &\Lambda^3{}_3(\omega^4{}_3+\varepsilon\omega^3{}_4)-2\Lambda^4{}_3\omega^3{}_3\mp 2\omega^2=\\ &\qquad=(\Lambda^4{}_{33}-\varepsilon\Lambda^3{}_{43})\omega^3{}_1+(\Lambda^4{}_{34}-\varepsilon\Lambda^3{}_{44})\,\omega^4{}_1 \end{aligned} \tag{2.16}$$
и
$$\begin{aligned} &2d\Lambda^3{}_3+\Lambda^4{}_3[\pm(\varepsilon\omega^2{}_1-\omega^1{}_2)-2(\varepsilon\omega^4{}_3-\omega^3{}_4)]=\\ &\qquad=(\Lambda^3{}_{33}-\Lambda^4{}_{43})\omega^3{}_1+(\Lambda^3{}_{34}-\Lambda^4{}_{44})\omega^4{}_1,\\ &2d\Lambda^4{}_3-\varepsilon\Lambda^3{}_3[\pm(\varepsilon\omega^2{}_1-\omega^1{}_2)-2(\varepsilon\omega^4{}_3-\omega^3{}_4)]=\\ &\qquad=(\Lambda^4{}_{33}+\varepsilon\Lambda^3{}_{43})\omega^3{}_1+(\Lambda^4{}_{34}+\varepsilon\Lambda^3{}_{44})\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{2.17}$$
Из (1.17) или из (2.16) находим
$$\begin{aligned} &2\omega^1=T^2{}_3\omega^3{}_1+T^2{}_4\omega^4{}_1,\\ &2\varepsilon\omega^2=-T^1{}_3\omega^3{}_1-T^1{}_4\omega^4{}_1, \end{aligned} \tag{2.18}$$
где
$$\begin{aligned} &T^1{}_3=\pm[(\varepsilon\Lambda^4{}_{33}-\Lambda^3{}_{43})-\Lambda^3{}_3(\varepsilon a+B)-\varepsilon\Lambda^4{}_3(b-A)],\\ &T^1{}_4=\pm[(\varepsilon\Lambda^4{}_{34}-\Lambda^3{}_{44})-\Lambda^3{}_3(b+\varepsilon C)-\varepsilon\Lambda^4{}_3(c-B)],\\ &T^2{}_3=-[(\Lambda^3{}_{33}+\Lambda^4{}_{43})+\Lambda^3{}_3(b-A)-\Lambda^4{}_3(a+B)],\\ &T^2{}_4=-[(\Lambda^3{}_{34}+\Lambda^4{}_{44})+\Lambda^3{}_3(c-B)+\Lambda^4{}_3(b+C)]. \end{aligned} \tag{2.19}$$
Теперь по (2.18) можно уточнить, что в (2.3)
$$\begin{aligned} &T^3=-\frac{1}{2}(T^2{}_4\mp T^1{}_3), \qquad T^4=-\frac{1}{2}(\mp\varepsilon T^1{}_4-T^2{}_3),\\ &\lambda=\frac{1}{4}\varepsilon(T^1{}_3T^2{}_4-T^2{}_3T^1{}_4). \end{aligned} \tag{2.20}$$
Так как
$$\begin{aligned} &d\omega^2{}_1=2\omega^1{}_1\wedge\omega^2{}_1+2\omega^3{}_1\wedge\omega^4{}_1,\\ &d\omega^1{}_2=-2\omega^1{}_1\wedge\omega^1{}_2-2\varepsilon\omega^3{}_1\wedge\omega^4{}_1,\\ &d\omega^4{}_3=\mp 2\omega^3{}_1\wedge\omega^4{}_1+2\omega^3{}_3\wedge\omega^4{}_3,\\ &d\omega^3{}_4=\pm 2\varepsilon\omega^3{}_1\wedge\omega^4{}_1-2\omega^3{}_3\wedge\omega^3{}_4, \end{aligned}$$
то
$$\omega^2{}_1\neq 0, \quad \omega^1{}_2\neq 0, \quad \omega^4{}_3\neq 0, \quad \omega^3{}_4\neq 0.$$

3. Исследуем вопрос существования конгруэнции с центральной фокальной кривой f, применяя методику и обозначения, данные в [4]. Из уравнений конгруэнции (2.9), получим $s_1 = 4$ новых квадратичных внешних уравнений. Все они имеют вид

$$\Delta_1 \wedge \omega^3{}_1 + \Delta_2 \wedge \omega^4{}_1 = 0,$$

где Δ_α — левые части формул (2.12), (2.16) и (2.17). Их число 8. Если f является эллипсом ($\varepsilon = 1$) или гиперболой ($\varepsilon = -1$), то $\Lambda \neq 0$ и формы Δ_α независимы. В этом случае $q = 8$, $s_2 = 4$ и число Картана $Q = 4 + 4 \cdot 2 = 12$. С другой стороны, по лемме Картана $N = 12$. Итак, *конгруэнция, фокальными кривыми которой являются эллипсы или гиперболы, существует с произволом четырех функций двух аргументов.*

Если f является мнимыми (вещественными) пересекающимися прямыми, то $\Lambda = 0$. При мнимых прямых всегда $\Lambda^3{}_3 = \Lambda^4{}_3 = 0$, а при вещественных прямых придется добавочно рассматривать случай $\operatorname{rang} \|\Lambda^q{}_p\| = 1$, т. е. $\Lambda^3{}_3 = \pm\Lambda^4{}_3 \neq 0$. Но в этом добавочном случае $q = 7$, $s_1 = 4$, $s_2 = 3$, $Q = 10$ и $N = 10$. Так как $Q = N$, то *конгруэнция, имеющая фокальной кривой вещественные пересекающиеся прямые при* $\operatorname{rang} \|\Lambda^q{}_p\| = 1$, *существует с произволом трех функций двух аргументов.* В основном случае при обоих типах фокальных кривых $q = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 2$ и $Q = N = 8$. Итак, *конгруэнция, фокальной кривой которой — мнимые или вещественные пересекающиеся прямые с* $\operatorname{rang} \|\Lambda^q{}_p\| = 0$, *существует с произволом двух функций двух аргументов.* Величины $\Lambda^p{}_q = 0$.

На каждой плоскости конгруэнции есть центр C. Многообразие центров обозначим через Π. Так как

$$d\boldsymbol{C} = d\boldsymbol{M} = \left(\frac{1}{2} T^2{}_3 \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon T^1{}_3 \boldsymbol{e}_2 + \Lambda^3{}_3 \boldsymbol{e}_3 + \Lambda^4{}_3 \boldsymbol{e}_4\right) \omega^3{}_1 + \left(\frac{1}{2} T^2{}_4 \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon T^1{}_4 \boldsymbol{e}_2 + \varepsilon \Lambda^4{}_3 \boldsymbol{e}_3 - \Lambda^3{}_3 \boldsymbol{e}_4\right) \omega^4{}_1,$$

то векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_3 &= \frac{1}{2} T^2{}_3 \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon T^1{}_3 \boldsymbol{e}_2 + \Lambda^3{}_3 \boldsymbol{e}_3 + \Lambda^4{}_3 \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{a}_4 &= \frac{1}{2} T^2{}_4 \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon T^1{}_4 \boldsymbol{e}_2 + \varepsilon \Lambda^4{}_3 \boldsymbol{e}_3 - \Lambda^3{}_3 \boldsymbol{e}_4 \end{aligned} \tag{2.21}$$

являются касательными векторами многообразия Π. В системе $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ может быть 2, 1 или 0 линейно независимых векторов. Соответственно, Π является поверхностью, кривой или точкой, и мы будем говорить о *средней поверхности, средней кривой* или *средней точке конгруэнции.* В случае средней поверхности Π ее метрика определяется, в силу (2.21), тензором

$$\begin{Vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{Vmatrix},$$

где

$$a = \Lambda + \lambda.$$

Если $a \neq 0$, то средняя поверхность является симплектической, а если $a = 0$, то аффинной. Из (2.21) получим еще следующие выводы.

Если фокальная кривая является эллипсом или гиперболой, то касательная плоскость средней поверхности пересекает плоскости конгруэнции только в точке С. Кроме того, конгруэнция является нормальной (т. е. каждая плоскость конгруэнции пересекает Π перпендикулярно) *тогда и только тогда, когда* $T^i{}_p = 0$.

Если фокальной кривой является пара мнимых или вещественных пересекающихся прямых с $\Lambda^p{}_\alpha = 0$, *то*

a) *при* $\operatorname{rang}\|T^i{}_p\| = 2$ *конгруэнция состоит из касательных плоскостей средней поверхности,*

b) *при* $\operatorname{rang}\|T^i{}_p\| = 1$ *является* Π *кривой, которой касаются все плоскости конгруэнции,*

c) *при* $T^i{}_p = 0$ $(\operatorname{rang}\|T^i{}_p\| = 0)$ *конгруэнция является двупараметрической связкой с центром в* C *и* Π *совпадает с* C.

4. На каждой плоскости конгруэнции могут существовать некоторые инвариантные точки W с $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M} + w^i \boldsymbol{e}_i$, так называемые *точки Вагнера* (см., например, [2]). Для вычислений координат w^i надо найти следующие величины:

$$Q_{ijrs} = g_{pq}\Lambda^p{}_{ir}\Lambda^q{}_{js}, \qquad Q_{rs} = g^{jl}Q_{jlrs}, \qquad Q_{ij} = Q_{ijrs}Q^{rs} \qquad (2.22)$$

и

$$P_{irs} = g_{pq}\Lambda^p{}_r\Lambda^q{}_{is}, \qquad P_i = P_{irs}Q^{rs}, \qquad w^k = P_iQ^{ki}. \qquad (2.23)$$

Здесь Q^{rs} и Q^{ki} — обратные матрицы к матрицам Q_{rs} и Q_{ij}. При рассматриваемой конгруэнции с центральной фокальной кривой в выбранном репере

$$\|Q_{11rs}\| = \varepsilon\,\|Q_{22rs}\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$\|Q_{12rs}\| = -\|Q_{21rs}\| = \pm\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{matrix}\right\|,$$

из которых следует

$$\|Q_{rs}\| = \mp 2\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{matrix}\right\|, \qquad \|Q^{rs}\| = \mp\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{matrix}\right\|,$$

и при помощи последних

$$\|Q_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad \|Q^{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Так как

$$\|P_{1rs}\| = \left\|\begin{matrix} -\Lambda^4{}_3 & \Lambda^3{}_3 \\ \Lambda^3{}_3 & \varepsilon\Lambda^4{}_3 \end{matrix}\right\|, \qquad \|P_{2rs}\| = \pm\left\|\begin{matrix} \Lambda^3{}_3 & \varepsilon\Lambda^4{}_3 \\ \varepsilon\Lambda^4{}_3 & -\Lambda^3{}_3 \end{matrix}\right\|$$

то

$$P_i = (0,\ 0), \qquad w^k = (0,\ 0).$$

Итак, на произвольной плоскости конгруэнции с центральной фокальной кривой f точка Вагнера W, центр C кривой f и точка T, в которой кручение равняется нулю, совпадают.

5. Рассмотрим прямые, пересекающие перпендикулярно плоскость π и ее бесконечно близкую плоскость конгруэнции. Точки пересечения этих прямых с π дают некоторое множество точек на π, называемое *стрикционной индикатрисой плоскости* π. Обозначим ее через S. Известно, что фокальная кривая f является подмножеством стрикционной индикатрисы, т. е. $f \subset S$. По [2] координаты x^k, такие что $X \in S$ при $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^k \boldsymbol{e}_k$, вычисляются из системы

$$(P_{irs} + x^k Q_{kirs}) \theta^r \theta^s = 0, \tag{2.24}$$

из которой в данной ситуации следует

$$\begin{aligned} &(-\Lambda^4{}_3 \mp x^2)(\omega^3{}_1)^2 + 2\Lambda^3{}_3 \omega^3{}_1 \omega^4{}_1 + \varepsilon(\Lambda^4{}_3 \mp x^2)(\omega^4{}_1)^2 = 0, \\ &(\Lambda^3{}_3 + x^1)(\omega^3{}_1)^2 + 2\varepsilon\Lambda^4{}_3 \omega^3{}_1 \omega^4{}_1 + \varepsilon(-\Lambda^3{}_3 + x^1)(\omega^4{}_1)^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Если фокальной кривой f является эллипс или гипербола, то по (2.17) можно взять $\Lambda^4{}_3 = 0$ и $\Lambda^3{}_3 \neq 0$, так как $\Lambda \neq 0$. Система (2.25) получит вид

$$\begin{aligned} &x^2(\omega^3{}_1)^2 \mp 2\Lambda^3{}_3 \omega^3{}_1 \omega^4{}_1 + \varepsilon x^2 (\omega^4{}_1)^2 = 0, \\ &(\Lambda^3{}_3 + x^1)(\omega^3{}_1)^2 + \varepsilon(-\Lambda^2{}_3 + x^1)(\omega^4{}_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда исключением форм $\omega^3{}_1$ и $\omega^4{}_1$ получается следующее уравнение стрикционной индикатрисы S:

$$(x^1)^2 + \varepsilon (x^2)^2 + \Lambda = 0,$$

и поэтому $S = f$.

Если фокальной кривой является пара вещественных прямых с условием $\operatorname{rang} \|\Lambda^p{}_\alpha\| = 1$, то $(\Lambda^4{}_3)^2 = (\Lambda^3{}_3)^2$, т. е.

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$$

и поэтому $S = f$.

Если фокальной кривой является пара пересекающихся прямых с $\Lambda^q{}_p = 0$, то (2.25) получает вид

$$x^i [(\omega^3{}_1)^2 + \varepsilon (\omega^4{}_1)^2] = 0. \tag{2.26}$$

В случае мнимых прямых ($\varepsilon = 1$) получим $x^i = 0$. Значит, S состоит из одной точки $C = W = T$, которая совпадает с единственной вещественной точкой фокальной кривой. В случае вещественных прямых ($\varepsilon = -1$) в направлении $(\omega^3{}_1)^2 = (\omega^4{}_1)^2$ координаты каждой точки плоскости конгруэнции удовлетворяют системе (2.26).

Итак, если фокальной кривой f конгруэнции является эллипс, гипербола или пара пересекающихся прямых с $\operatorname{rang} \|\Lambda^p{}_\alpha\| = 1$, *то стрикционная индикатриса S совпадает с фокальной кривой f, а если пара вещественных пересекающихся прямых с* $\operatorname{rang} \|\Lambda^p{}_\alpha\| = 1$, *то S совпадает со всей плоскостью конгруэнции.*

§ 3. Исследование конгруэнций с нецентральными фокальными кривыми

Нецентральную фокальную кривую имеют классы $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$ конгруэнций.

3.1. Конгруэнции класса $\mathfrak{C}$. Векторы $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_p$ направим соответственно в сопряженные направления матриц $\|R^i{}_j\|$ и $\|R^p{}_q\|$. Тогда по (1.23) все компоненты этих матриц равны нулю, кроме $R^2{}_1$ и $R^4{}_3$. Уравнение фокальной кривой имеет вид

$$R^2{}_1(x^1)^2+2T^2x^1-2T^1x^2-2\Lambda=0. \tag{3.1}$$

Она является либо параболой, либо парой параллельных (вещественных и мнимых) прямых, либо парой сливающихся прямых. Во всех случаях можно взять $\omega^3{}_1$ и $\omega^4{}_1$ за базисные формы, поскольку

$$2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1=R^2{}_1\theta^3 \wedge \theta^4;$$

тогда $\Lambda^q{}_{1p} = \delta^q{}_p$. Из $R^1{}_1 = R^1{}_2 = R^3{}_3 = R^3{}_4 = 0$, $R^2{}_1 \neq 0$ и $R^4{}_3 = 0$ следует, в силу (1.14) и (1.15), что

$$\Lambda^3{}_{23}=\Lambda^4{}_{24}=\Lambda^3{}_{24}=0, \qquad \Lambda^4{}_{23}\neq 0;$$

кроме того, последние два из (1.6) сводятся к

$$\begin{gathered}-\omega^1{}_2+\Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4=a\omega^3{}_1,\\ d\Lambda^4{}_{23}+2\Lambda^4{}_{23}(\omega^1{}_1-\omega^3{}_3)=A\omega^3{}_1+B\omega^4{}_1,\\ -\Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4-\omega^1{}_2=B\omega^3{}_1+C\omega^4{}_1.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Не ограничивая общности, можно взять $\Lambda^4{}_{23} = \pm 1$. Из (3.1) следует, что $\boldsymbol{e}_2$ имеет направление либо оси параболы, либо центральной прямой. Начало репера M переносим в такую точку параболы, в которой $\boldsymbol{e}_1$ является направляющим вектором касательной в этой точке, либо в некоторую точку центральной прямой. Во всех случаях по (3.1) число $T^2 = 0$, а по (1.13), в свою очередь, $\Lambda^4{}_4 = -\Lambda^3{}_3$. Сравнивая (1.4) с выражениями для $d\omega^p{}_1$, получим:

$$\begin{aligned}\theta^3{}_3&=-\omega^1{}_1+\omega^3{}_3, & \theta^3{}_4&=\omega^3{}_4,\\ \theta^4{}_3&=\mp\omega^2{}_1+\omega^4{}_3, & \theta^4{}_4&=-\omega^1{}_1-\omega^3{}_3.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Из первых двух уравнений (1.6) следует

$$\begin{aligned} d\Lambda^3{}_3+\Lambda^3{}_3\omega^1{}_1+\Lambda^3{}_4(\pm\omega^2{}_1-\omega^4{}_3)-\omega^1+\Lambda^4{}_3\omega^3{}_4&=a_1\omega^3{}_1+a_2\omega^4{}_1,\\ d\Lambda^3{}_4-2\Lambda^3{}_3\omega^3{}_4+\Lambda^3{}_4(\omega^1{}_1+2\omega^3{}_3)&=a_2\omega^3{}_1+a_3\omega^4{}_1,\\ d\Lambda^4{}_3+\Lambda^4{}_3(\omega^1{}_1-2\omega^3{}_3)+\Lambda^3{}_3(\mp\omega^2{}_1+2\omega^4{}_3)\mp\omega^2&=b_1\omega^3{}_1+b_2\omega^4{}_1,\\ -d\Lambda^3{}_3-\Lambda^3{}_3\omega^1{}_1-\Lambda^4{}_3\omega^3{}_4+\Lambda^3{}_4\omega^4{}_3-\omega^1&=b_2\omega^3{}_1+b_3\omega^4{}_1,\end{aligned} \tag{3.4}$$

а из (1.17)

$$\begin{aligned}dT^1&=-3T^1\omega^1{}_1+T^1{}_3\omega^3{}_1+T^1{}_4\omega^4\\ 0&=-T^1\omega^2{}_1-2\omega^1+T^2{}_3\omega^3{}_1+T^2{}_4\omega^4{}_1,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$
\begin{aligned}
&T^1{}_3 = \mp a_2 + \Lambda^3{}_3(B-a) - \Lambda^3{}_4 A,\\
&T^1{}_4 = \mp a_3 + \Lambda^3{}_3 C - \Lambda^3{}_4 B,\\
&T^2{}_3 = -(a_1+b_2),\\
&T^2{}_4 = -(a_2+b_3).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

1. Если f является параболой, то $T^1 = -\Lambda^3{}_4\Lambda^4{}_{23} \neq 0$ и $\Lambda = 0$. Значит, $\Lambda^3{}_4 \neq 0$ и

$$
(\Lambda^3{}_3)^2 + \Lambda^4{}_3\Lambda^3{}_4 = 0.
\tag{3.7}
$$

Учитывая допустимое преобразование $'e_1 = \lambda e_1$ и $'e_2 = \lambda^{-1}e_2$, можно взять $T^1 = \pm 1$. Это ясно и по (3.5). Преобразование $'e_1 = -e_1$ и $'e_2 = -e_2$ позволяет ограничиваться случаем $T^1 = -1$. Итак, $\Lambda^3{}_4 = \pm 1$. Из (3.4) и (3.7) последовательно выводим $\Lambda^3{}_3 = 0$ и $\Lambda^4{}_3 = 0$.

В выбранном репере уравнения (1.5) имеют вид

$$
\omega^3{}_2 = 0, \quad \omega^4{}_2 = \pm\omega^3{}_1, \quad \omega^3 = \pm\omega^4{}_1, \quad \omega^4 = 0,
$$

и уравнение фокальной кривой имеет вид

$$
(x^1)^2 - x^2 = 0;
$$

при этом $R^2{}_1 = -2$ и $R^4{}_3 = \pm 1$. Из (3.2) и (3.4) следует

$$
\begin{aligned}
&\omega^1{}_2 = -\frac{1}{2}(a+B)\,\omega^3{}_1 - \frac{1}{2}C\omega^4{}_1,\\
&\omega^3{}_4 = \pm\frac{1}{2}(a-B)\,\omega^3{}_1 \mp \frac{1}{2}C\omega^4{}_1,\\
&\omega^1{}_1 - \omega^3{}_3 = \pm\frac{1}{2}A\omega^3{}_1 \pm \frac{1}{2}B\omega^4{}_1,\\
&\omega^2{}_1 \mp \omega^4{}_3 - \omega^1 = a_1\omega^3{}_1 + a_2\omega^4{}_1,\\
&\omega^1{}_1 + 2\omega^3{}_3 = \pm a_2\omega^3{}_1 \pm a_3\omega^4{}_1,\\
&\omega^2 = \mp b_1\omega^3{}_1 \mp b_2\omega^4{}_1,\\
&\pm\omega^4{}_3 - \omega^1 = b_2\omega^3{}_1 + b_3\omega^4{}_1.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Из (2.22) и (2.23) в этом случае следует

$$
\begin{aligned}
&\|Q_{11rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|Q_{12rs}\| = \begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\\
&\|Q_{21rs}\| = \begin{Vmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|Q_{22rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

и

$$
\|P_{1rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad \|P_{2rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.
$$

При помощи последних матриц, формулы (2.24) превращаются в

$$
\begin{aligned}
&x^2(\omega^3{}_1)^2 - (\omega^4{}_1)^2 = 0,\\
&\pm x^1(\omega^3{}_1)^2 + \omega^3{}_1\omega^4{}_1 = 0.
\end{aligned}
$$

В направлении $\{\omega^3{}_1; \omega^4{}_1\}$, где $\omega^4{}_1 = \mp x^1\omega^3{}_1$ и $\omega^3{}_1 \neq 0$, эта система дает

$$(x^1)^2 - x^2 = 0.$$

Итак, стрикционная индикатриса совпадает с фокальной кривой f. Из (1.22) следует, что на плоскости конгруэнции нет точки с нулевым кручением $\Omega = 0$. При рассмотрении вопроса существования конгруэнций этого типа в качестве форм Δ_α $(\alpha = 1, \ldots, 8)$ будут левые части равенств (3.2) и (3.4) в таком виде, как они получаются после нашего выбора репера. Линейно независимых среди них имеется $q = 7$. Так как $s_1 = 4$ и $s_2 = 3$, то число Картана $Q = 10$. По лемме Картана формы Δ_α, как следует из (3.2) и (3.4), выражаются через $\omega^3{}_1$ и $\omega^4{}_1$ с $N = 10$ новыми коэффициентами. Следовательно, *подкласс класса $\mathfrak{C}$, конгруэнции которого имеют своими фокальными кривыми параболы, существуют с произволом трех функций двух аргументов.*

2. Если f является парой (вещественных или мнимых) параллельных прямых, то $T^1 = 0$ и $\Lambda R^2{}_1 > 0$. Следовательно, случай мнимых параллельных прямых отпадает. По (3.4) можно сдвигать начало репера по центральной прямой в точку, в которой $\Lambda^4{}_3 = 0$, и после этого можно взять $\Lambda^3{}_3 = 1$. Итак, $\Lambda^q{}_{1p} = 0$, $\Lambda^3{}_{23} = \Lambda^4{}_{24} = \Lambda^3{}_{24} = 0$, $\Lambda^4{}_{23} = \pm 1$, $\Lambda^3{}_3 = -\Lambda^4{}_4 = 1$, $\Lambda^3{}_4 = \Lambda^4{}_3 = 0$, $R^2{}_1 = -2$ и $R^4{}_3 = \pm 2$. Уравнения (1.5) имеют вид

$$\omega^3{}_2 = 0, \quad \omega^4{}_2 = \pm\omega^3{}_1, \quad \omega^3 = \omega^3{}_1, \quad \omega^4 = -\omega^4{}_1,$$

а уравнение фокальной кривой f имеет вид $(x^1)^2 = 1$. Среди форм Δ_α линейно независимых $q = 6$. Поскольку $s_1 = 4$ и $s_2 = 2$, то $Q = 8$. По лемме Картана формы Δ_α выражаются через 10 величин, на которые наложены, в силу (3.5) два ограничения $T^1{}_p = 0$. Итак, $N = 10 - 2 = 8$. *Данный подкласс $\mathfrak{C}$, конгруэнции которого имеют своими фокальными кривыми пары параллельных вещественных прямых, существует с произволом двух функций двух аргументов.* Используя (3.9) (они одинаковы для всего класса $\mathfrak{C}$) и

$$\|P_{1rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|P_{2rs}\| = \begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

для стрикционной индикатрисы получаем систему

$$\mp x^2(\omega^3{}_1)^2 + 2\omega^3{}_1\omega^4{}_1 = 0,$$
$$(1 + x^1)(\omega^3{}_1)^2 = 0.$$

В направлении, где $\omega^3{}_1 = 0$, эта система удовлетворяется при каждой точке X плоскости конгруэнции с $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^i\boldsymbol{e}_i$. Итак, *стрикционной индикатрисой является вся плоскость конгруэнции. При данном подклассе центральные прямые образуют двупараметрическое семейство.* Учитывая (1.22), можем заключить, что *в точках центральной прямой и только там кручение равно нулю.*

3. Если фокальной кривой является пара сливающихся прямых, то $T^i = \Lambda = 0$, т. е. $\Lambda^3{}_4 = \Lambda^3{}_3 = 0$. Поскольку в нашем распоряжении еще сдвиг по f, то можно сделать еще $\Lambda^4{}_3 = 0$, Итак, для данного подкласса мы имеем

$$\Lambda^q{}_{1p} = \delta^q{}_p, \quad \Lambda^3{}_{23} = \Lambda^4{}_{24} = \Lambda^3{}_{24} = 0, \quad \Lambda^4{}_{23} = \pm 1, \quad \Lambda^q{}_p = 0.$$

Уравнения (1.5) принимают вид

$$\omega^3{}_2 = 0, \quad \omega^4{}_2 = \pm\omega^3{}_1, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0, \tag{3.10}$$

их продолжение приводит, в силу (3.2) и (3.4), к

$$\begin{gathered} -\omega^1{}_2 \pm \omega^3{}_4 = a\omega^3{}_1, \\ \pm 2(\omega^1{}_1 - \omega^3{}_3) = A\omega^3{}_1 + B\omega^4{}_1, \\ \mp\omega^3{}_4 - \omega^1{}_2 = B\omega^3{}_1 + C\omega^4{}_1, \\ \omega^1 = a_1\omega^3{}_1, \\ \mp\omega^2 = b_1\omega^3{}_1 - a_1\omega^4{}_1. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Уравнением фокальной кривой является $(x^1)^2 = 0$. Из (3.11) следует, что среди форм Δ_α независимых $q = 5$ и $s_1 = 4$, $s_2 = 1$, $Q = N = 6$. *Итак, данный подкласс конгруэнции класса, имеющий фокальной кривой пару сливающихся прямых, существует с произволом одной функции двух аргументов.* Так как $P_{irs} = 0$ и учитывая (3.9), то стрикционная индикатриса определяется уравнениями

$$x^2(\omega^3{}_1)^2 = 0, \quad x^1(\omega^3{}_1)^2 + \omega^3{}_1\omega^4{}_1 = 0.$$

В направлении $\{\omega^3{}_1; \omega^4{}_1\} = \{0, \lambda\}$ каждая точка плоскости конгруэнции удовлетворяет системе. Следовательно, стрикционная индикатриса совпадает со всей плоскостью конгруэнции. Из двух последних уравнений (3.11) следует, что точка, в которой находится начало репера M, определяется однозначно на каждой плоскости конгруэнции. Эта точка описывает некоторую 2-мерную поверхность π с уравнениями $\omega^p = 0$. Результаты их продолжения

$$\omega^p{}_i = A^p{}_{ij}\omega^j, \quad A^p_{[ij]} = 0$$

связаны величинами из формул (3.11) следующим образом:

$$A^3{}_{11} = \frac{1}{a_1}, \quad A^3{}_{12} = A^3{}_{21} = A^3{}_{22} = 0,$$

$$A^4{}_{11} = \frac{b_1}{(a_1)^2}, \quad A^4{}_{12} = A^4{}_{21} = \pm\frac{1}{a_1}, \quad A^4{}_{22} = 0,$$

где $a_1 \neq 0$. Следовательно, *конгруэнция состоит из касательных плоскостей поверхности π, на которой фокальная прямая в каждой точке идет по асимптотическому направлению.* Из (1.22) следует, что *кручение равно нулю во всех точках $X \in f$* с $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^2\boldsymbol{e}_2$ и только в них.

Для всего класса $\mathfrak{C}$ по (2.22)

$$Q_{rs} = 2\begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, точки Вагнера не существуют.

3.2. Конгруэнции класса $\mathfrak{D}$. Здесь все компоненты $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$ равны нулю, кроме $R^2{}_1$, что позволяет взять $\omega^3{}_1$ и $\omega^4{}_1$ за базисные формы, так как

$$2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1 = -R^2{}_1\theta^3 \wedge \theta^4.$$

Итак, $\Lambda^p{}_{1q} = \delta^p{}_q$ и $R^2{}_1 = -2$. Из $R^1{}_1 = R^1{}_2 = R^q{}_p = 0$ следует, что $\Lambda^q{}_{2p} = 0$, и поэтому $T^1 = 0$. Для всего класса $\mathfrak{D}$ имеем $Q_{i2rs} = Q_{2irs} = 0$ и

$$\|Q_{11rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Так как Q_{rs} сингулярна, то точка Вагнера не существует. Уравнение фокальной кривой имеет вид

$$(x^1)^2 - T^2x^1 + \Lambda = 0.$$

Мы имеем право перенести начало репера на центральную прямую, получая при этом

$$-T^2 = \Lambda^3{}_3 + \Lambda^4{}_4 = 0.$$

Продолжение уравнений конгруэнции $\omega^3{}_2 = 0$ и $\omega^4{}_2 = 0$ даст $\omega^1{}_2 = 0$. Поскольку $d\boldsymbol{e}_2 = \omega^2{}_2\boldsymbol{e}_2$, то центральные прямые всех плоскостей конгруэнции параллельны и они образуют 2-параметрическое семейство. Соответственно случаям $\Lambda > 0$, $\Lambda < 0$ и $\Lambda = 0$ фокальная кривая f является парой вещественных, мнимых или сливающихся прямых. Сравнивая выражений $d\omega^p{}_1$ с (1.4), получим

$$\theta^3{}_3 = -\omega^1{}_1 + \omega^3{}_3, \qquad \theta^3{}_4 = \omega^3{}_4,$$
$$\theta^4{}_4 = -\omega^1{}_1 - \omega^3{}_3, \qquad \theta^4{}_3 = \omega^4{}_3.$$

Из первых (1.6) следует

$$\begin{aligned} d\Lambda^3{}_3 + \Lambda^3{}_3\omega^1{}_1 - \Lambda^3{}_4\omega^4{}_3 + \Lambda^4{}_3\omega^3{}_4 - \omega^1 &= a_1\omega^3{}_1 + a_2\omega^4{}_1, \\ d\Lambda^3{}_4 - 2\Lambda^3{}_3\omega^3{}_4 + \Lambda^3{}_4(\omega^1{}_1 + 2\omega^3{}_3) &= a_2\omega^3{}_1 + a_3\omega^4{}_1, \\ d\Lambda^4{}_3 + 2\Lambda^3{}_3\omega^4{}_3 + \Lambda^4{}_3(\omega^1{}_1 - 2\omega^3{}_3) &= b_1\omega^3{}_1 + b_2\omega^4{}_1, \\ -d\Lambda^3{}_3 - \Lambda^3{}_3\omega^1{}_1 + \Lambda^3{}_4\omega^4{}_3 - \Lambda^4{}_3\omega^3{}_4 - \omega^1 &= b_2\omega^3{}_1 + b_3\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

4. При параллельных фокальных прямых ($\Lambda \neq 0$) все компоненты $\Lambda^q{}_p$ не равны нулю. Не ограничивая общности, можно предполагать $\Lambda^4{}_3 \neq 0$, так как здесь (и далее в аналогичных случаях) можно сделать следующее. Преобразование $'\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_4$ и $'\boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}_3$ переставит местами $\Lambda^4{}_3$ и $\Lambda^3{}_4$. Преобразование

$$'\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4), \qquad '\boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4)$$

допускает при $\Lambda^4{}_3 = \Lambda^3{}_4 = 0$ превратить $\Lambda^3{}_3$ в $\Lambda^4{}_3$, так как

$$'\Lambda^3{}_3 = -\frac{1}{2}(\Lambda^4{}_3 + \Lambda^3{}_4), \qquad '\Lambda^4{}_3 = \Lambda^3{}_3 + \frac{1}{2}(\Lambda^4{}_3 - \Lambda^3{}_4),$$

$$'\Lambda^3{}_4 = \Lambda^3{}_3 + \frac{1}{2}(-\Lambda^4{}_3 + \Lambda^3{}_4), \qquad '\Lambda^4{}_4 = \frac{1}{2}(\Lambda^4{}_3 + \Lambda^3{}_4).$$

Наконец, преобразование $'\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1$ и $'\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2$ меняет знак у $\Lambda^4{}_3$. Все эти преобразования допустимы, т. е. они определяются элементами группы $SGL(2; \mathbf{R})$ и сохраняют ранее фиксированные величины. По (3.12) можно взять $\Lambda^4{}_3 = 1$, $\Lambda^3{}_3 = 0$ и $\Lambda^3{}_4 = \mp 1$. Здесь верхний знак соответствует вещественным, а низкий знак — мнимым параллельным фокальным прямым: $(x^1)^2 = \pm 1$. В выбранном репере уравнения (1.5) и результаты их продолжения имеют вид

$$\omega^3{}_2 = 0, \qquad \omega^4{}_2 = 0, \qquad \omega^3 = \mp \omega^4{}_1, \qquad \omega^4 = \omega^3{}_1$$

и

$$\omega^1{}_2 = 0$$

$$\pm \omega^4{}_3 + \omega^3{}_4 - \omega^1 = a_1 \omega^3{}_1 + a_2 \omega^4{}_1,$$

$$\mp (\omega^1{}_1 + 2\omega^3{}_3) = a_2 \omega^3{}_1 + a_3 \omega^4{}_1,$$

$$\omega^1{}_1 - 2\omega^3{}_3 = b_1 \omega^3{}_1 + b_2 \omega^4{}_1,$$

$$\mp \omega^4{}_3 - \omega^3{}_4 - \omega^1 = b_2 \omega^3{}_1 + b_3 \omega^4{}_1.$$

На основании последних $q = 5$, $s_1 = 4$, $s_2 = 1$ и $Q = N = 6$. Следовательно, *подкласс класса $\mathfrak{D}$, конгруэнции которого имеют своими фокальными кривыми пары параллельных вещественных или мнимых прямых, существует с произволом одной функции двух аргументов.* Так как

$$\|P_{1rs}\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \qquad \|P_{2rs}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то стрикционная индикатриса имеет одно существенное уравнение

$$-(\omega^3{}_1)^2 \pm (\omega^4{}_1)^2 = 0.$$

В случае вещественных фокальных прямых в направлении с $\omega^3{}_1 : \omega^4{}_1 = 1 : \pm 1$ это уравнение удовлетворяется при всех точках плоскости конгруэнции. В случае мнимых фокальных прямых такого направления не существует. Тогда стрикционная индикатриса вещественных точек не имеет.

5. При сливающихся прямых имеем $-\Lambda = (\Lambda^3{}_3)^2 + \Lambda^4{}_3 \Lambda^3{}_4 = 0$. Тогда либо $\Lambda^q{}_p = 0$, либо $\Lambda^4{}_3 \neq 0$.

В первом случае $\omega^p{}_2 = 0$ и $\omega^p = 0$, продолжение которых дает $\omega^1{}_2 = 0$ и $\omega^1 = 0$. Система вполне интегрируема. На фокальной прямой f фиксированная точка M, в которой находится начало репера, описывает кривую π. Вектор $\boldsymbol{e}_2$ является ее касательным вектором. Так как $d\boldsymbol{e}_2 = \omega^2{}_2 \boldsymbol{e}_2$, то π является прямой. Следовательно, конгруэнция — пучок с осью π. Уравнения стрикционной индикатрисы вырождаются. Все точки плоскости являются точками индикатрисы.

Во втором случае (3.12) позволяет взять $\Lambda^4{}_3 = 1$ и $\Lambda^3{}_3 = 0$, а $\Lambda^3{}_4 = 0$ следует уже из $\Lambda = 0$. Уравнения конгруэнции и их продолжения получают вид

$$\omega^p{}_2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = \omega^3{}_1$$

и

$$\begin{aligned} \omega^1{}_2 &= 0, \\ \omega^3{}_4 - \omega^1 &= a_1\omega^3{}_1, \\ \omega^1{}_1 - 2\omega^3{}_3 &= b_1\omega^3{}_1 + b_2\omega^4{}_1, \\ -\omega^3{}_4 - \omega^1 &= b_2\omega^3{}_1 + b_3\omega^4{}_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $q = 4$, $Q = N = 4$. *Конгруэнция в этом случае существует с произволом четырех функций одного аргумента.* Так как $P_{2rs} = 0$ и

$$\|P_{1rs}\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

то стрикционная индикатриса имеет уравнение $(\omega^3{}_1)^2 = 0$. Итак, вся плоскость является стрикционной индикатрисой. Так как $d\boldsymbol{e}_2 = \omega^2{}_2\boldsymbol{e}_2$ и $d\boldsymbol{M} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^4\boldsymbol{e}_4$, то фокальные прямые всех плоскостей конгруэнции параллельны и образуют 1-параметрическое семейство. Уравнение $\omega^3 = 0$ даст 3-мерную поверхность. Плоскости конгруэнции являются двумерными подпространствами касательных плоскостей этой поверхности. *У конгруэнций всего класса $\mathfrak{D}$ на центральной прямой и только там $\Omega = 0$.*

3.3. Конгруэнции класса $\mathfrak{E}$. Здесь все компоненты $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$ равны нулю, кроме $R^4{}_3$. Так как

$$-2\omega^4{}_1 \wedge \omega^4{}_2 = R^4{}_3\vartheta^3 \wedge \vartheta^4,$$

то $\omega^4{}_1$ и $\omega^4{}_2$ можно взять базисными формами. Следовательно, $\Lambda^4{}_{13} = 1$, $\Lambda^4{}_{14} = \Lambda^4{}_{23} = 0$ и $\Lambda^4{}_{24} = 1$. Разрешая ограничения, наложенные на $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$, получим добавочно $\Lambda^3{}_{ip} = 0$. Значит, $\omega^3{}_i = 0$, продолжение которых дает $\omega^3{}_4 = 0$. Так как $d\boldsymbol{e}_4 = -\omega^3{}_3\boldsymbol{e}_4$, то вектор $\boldsymbol{e}_4$ направлен в некоторое инвариантное направление. Кроме того, конгруэнции класса $\mathfrak{E}$ находятся в трехмерном пространстве, так как $\omega^3{}_i = \omega^3{}_4 = 0$. Компонентами кручения являются $T^1 = \Lambda^3{}_3$ и $T^2 = \Lambda^3{}_4$. Сравнивая $d\omega^3{}_1$ и $d\omega^4{}_2$ с (1.4), получим

$$\vartheta^3{}_3 = -(\omega^1{}_1 + \omega^3{}_3), \qquad \vartheta^3{}_4 = -\omega^2{}_1,$$

$$\vartheta^4{}_4 = \omega^1{}_1 - \omega^3{}_3, \qquad \vartheta^4{}_3 = -\omega^1{}_2.$$

Так как $Q_{ijrs} = 0$, то $Q_{pq} = 0$, и точка Вагнера не существует. Из

$$T^2x^1 - T^1x^2 - \Lambda = 0$$

следует, что фокальные точки образуют либо прямую, либо не существуют, либо заполняют всю плоскость конгруэнции.

6. В случае прямой переносим M на эту прямую. Получим $T^1=0$, $T^2\neq 0$ и $\Lambda=0$. Следовательно, $\Lambda^3{}_3=\Lambda^4{}_3=0$ и $\Lambda^3{}_4\neq 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \Lambda^3{}_4\omega^1{}_2 &= a_1\omega^4{}_1+a_2\omega^4{}_2,\\ d\Lambda^3{}_4+\Lambda^3{}_4(-\omega^1{}_1+2\omega^3{}_3)+\Lambda^4{}_4\omega^3{}_4 &= a_2\omega^4{}_1+a_3\omega^4{}_2,\\ -\omega^1 &= b_1\omega^4{}_1+b_2\omega^4{}_2,\\ d\Lambda^4{}_4-\Lambda^4{}_4\omega^1{}_1+\Lambda^3{}_4\omega^4{}_3-\omega^2 &= b_2\omega^4{}_1+b_3\omega^4{}_2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

то сдвиг по фокальной прямой позволяет взять $\Lambda^4{}_4=0$, а из (3.13) следует $\Lambda^3{}_4=1$. Итак, при данном подклассе уравнения конгруэнции и их продолжения имеют вид

$$\omega^3{}_1=0,\qquad \omega^3{}_2=0,\qquad \omega^3=\omega^4{}_2,\qquad \omega^4=0$$

и

$$\begin{aligned} \omega^3{}_4=0,\quad \omega^1{}_2 &= a_1\omega^4{}_1+a_2\omega^4{}_2,\\ -\omega^1{}_1+2\omega^3{}_3 &= a_2\omega^4{}_1+a_3\omega^4{}_2,\\ -\omega^1 &= b_1\omega^4{}_1+b_2\omega^4{}_2,\\ \omega^4{}_3-\omega^2 &= b_2\omega^4{}_1+b_3\omega^4{}_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $s_1=4$, $s_2=1$, $q=5$ и $Q=N=6$. Следовательно, *подкласс класса $\mathfrak{E}$, конгруэнции которого имеют фокальной кривой прямую, существуют с произволом одной функции двух аргументов*. Так как

$$\|P_{1rs}\|=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\end{Vmatrix},\qquad \|P_{2rs}\|=\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix},$$

то стрикционную индикатрису находим из системы

$$\omega^4{}_1\omega^4{}_2=0,\qquad (\omega^4{}_2)^2=0.$$

В направлении $\{\omega^4{}_1,\omega^4{}_2\}=\{\lambda;0\}$ этой системе удовлетворяет каждая точка плоскости конгруэнции. Уравнение $\omega^4=0$ определяет трехмерную поверхность. Плоскости конгруэнции являются двумерными подпространствами ее касательных плоскостей. При этом конгруэнция сама находится в трехмерном пространстве.

7. В остальных случаях класса $\mathfrak{E}$ имеет место $T^i=0$, т. е. $\Lambda^3{}_3=\Lambda^3{}_4=0$, и, следовательно, $\Lambda=0$. Каждая точка плоскости конгруэнции является фокальной точкой. Так как $\Lambda=0$, то случай, когда фокальные точки не существуют, отпадает. По (1.6)

$$\begin{aligned} d\Lambda^4{}_3+\Lambda^4{}_3\omega^1{}_1+\Lambda^4{}_4\omega^1{}_2-\omega^1 &= b_1\omega^4{}_1+b_2\omega^4{}_2,\\ d\Lambda^4{}_4+\Lambda^4{}_3\omega^2{}_1-\Lambda^4{}_4\omega^1{}_1-\omega^2 &= b_2\omega^4{}_1+b_3\omega^4{}_2. \end{aligned}$$

Итак, существует однозначно определенная точка, в которой $\Lambda^4{}_3=\Lambda^4{}_4=0$. В выбранном репере данный подкласс определяется уравнениями

$$\omega^3{}_1=0,\qquad \omega^3{}_2=0,\qquad \omega^3=0,\qquad \omega^4=0,$$

и их продолжениями

$$\omega^1=b_1\omega^4{}_1+b_2\omega^4{}_2,\qquad \omega^2=b_2\omega^4{}_1+b_3\omega^4{}_2,\qquad \omega^3{}_4=0.$$

Отсюда следует $s_1 = s_2 = 1$, $q = 2$ и $N = Q = 3$. *Значит, подкласс класса* $\mathfrak{E}$, *конгруэнции которого имеют фокальными точками все точки плоскости конгруэнции, существует с произволом одной функции двух аргументов.* На каждой плоскости конгруэнции однозначно определенная точка M описывает двумерную симплектическую поверхность. Ее касательные плоскости образуют рассматриваемую конгруэнцию, которая сама уже находится в трехмерном пространстве. Прямые $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + t\boldsymbol{e}_4$ образуют двупараметрическое семейство параллельных прямых.

3.4. Конгруэнция класса $\mathfrak{F}$. Все компоненты $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$ равны нулю. Формы $\omega^p{}_i$ попарно зависимы, так как внешнее произведение каждой пары равно нулю. Уравнение фокальной кривой

$$T^2x^1 - T^1x^2 - \Lambda = 0.$$

8. Если фокальной кривой f является прямая, то при $M \notin f$ можно взять ω^3 и ω^4 базисными формами. Тогда $\Lambda^q{}_p = \delta^q{}_p$. Вектор $\boldsymbol{e}_2$ берем параллельным к прямой f. Тогда $T^1 \neq 0$ и $T^2 = 0$, из которых следует $\Lambda^3{}_{23} + \Lambda^4{}_{24} \neq 0$ и $\Lambda^3{}_{13} + \Lambda^4{}_{14} = 0$. На основании (1.17) можно взять $T^1 = \Lambda^3{}_{23} + \Lambda^4{}_{24} = 1$. Так как ранг матрицы системы

$$\omega^p{}_i = \Lambda^p{}_{iq}\omega^q \tag{3.14}$$

равен единице, то при помощи преобразования $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ можно добиться $\Lambda^p{}_{i4} = 0$. Итак, $\Lambda^3{}_{23} = 1$. Ограничения, наложенные на $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$, удовлетворены. Поскольку

$$\theta^3{}_3 = \omega^3{}_3 - \omega^2, \qquad \theta^3{}_4 = \omega^3{}_4,$$

$$\theta^4{}_3 = \omega^4{}_3 - \Lambda^4{}_{13}\omega^1 - \Lambda^4{}_{23}\omega^2, \qquad \theta^4{}_4 = -\omega^3{}_3,$$

то из первых (1.6) следует

$$\begin{gathered}
(-\omega^2{}_1 + \Lambda^4{}_{13}\omega^3{}_4) \wedge \omega^3 = 0,\\
[d\Lambda^4{}_{13} - \Lambda^4{}_{13}(\omega^1{}_1 + 2\omega^3{}_3 - \omega^2) - \Lambda^4{}_{23}\omega^2{}_1] \wedge \omega^3 - \Lambda^4{}_{13}\omega^3{}_4 \wedge \omega^4 = 0,\\
(\omega^1{}_1 + \omega^2 + \Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4) \wedge \omega^3 - \omega^3{}_4 \wedge \omega^4 = 0,\\
[d\Lambda^4{}_{23} - \Lambda^4{}_{13}\omega^1{}_2 + \Lambda^4{}_{23}(\omega^1{}_1 - 2\omega^3{}_3 + \omega^2) + \omega^4{}_3] \wedge\\
\wedge \omega^3 - \Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4 \wedge \omega^4 = 0.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Последние уравнения позволяют предполагать $\Lambda^4{}_{23} = 0$, а $\Lambda^4{}_{13} = 0$ или $\Lambda^4{}_{13} = \pm 1$. Уравнения конгруэнции в первом случае следующие

$$\omega^3{}_1 = 0, \quad \omega^4{}_1 = 0, \quad \omega^3{}_2 = \omega^3, \quad \omega^4{}_2 = 0.$$

Их продолжения по (3.15) имеют вид

$$\omega^2{}_1 = a_1\omega^3, \quad \omega^1{}_1 + \omega^2 = a_2\omega^3 + a_3\omega^4, \quad -\omega^3{}_4 = a_3\omega^3 + a_4\omega^4, \quad \omega^4{}_3 = a_5\omega^3.$$

Уравнение $\omega^4{}_1 = 0$ вполне интегрируемо, вследствие чего возникает некоторое многообразие M. В силу остальных уравнений конгруэнции $s_1 = 3$, $s_2 = 1$; $q = 4$ и $Q = N = 5$. Во втором случае

$$\omega^3{}_1 = 0, \quad \omega^4{}_1 = \pm\omega^3, \quad \omega^3{}_2 = \omega^3, \quad \omega^4{}_2 = 0.$$

Из (3.15) получим

$$\begin{gathered}\omega^1{}_1+2\omega^3{}_3-\omega^2=a_1\omega^3+a_2\omega^4,\\ \omega^3{}_4=a_2\omega^3+a_3\omega^4,\\ \omega^1{}_1+\omega^2=a_4\omega^3-a_2\omega^4,\\ \mp\omega^1{}_2+\omega^4{}_3=a_5\omega^3,\\ \omega^2{}_1\mp\omega^3{}_4=a_6\omega^3.\end{gathered}$$

Отсюда $q=5$, $s_1=4$, $s_2=1$ и $Q=N=6$. Следовательно, *подкласс класса $\mathfrak{F}$, конгруэнции которого имеют своими фокальными кривыми прямую, существует.*

Если фокальные точки не существуют, то $T^i=0$ или $\Lambda^3{}_{i3}+\Lambda^4{}_{i4}=0$. Здесь есть две возможности: ранг матрицы системы (3.14) равен нулю или единице. В первом случае $\Lambda^p{}_{iq}=0$, т. е. $\omega^p{}_i=0$. Их продолжение новых уравнений не дает. Следовательно, система вполне интегрируема. Мы имеем дело с конгруэнцией параллельных плоскостей. Во втором случае $\Lambda^p{}_{i4}=0$. Из (1.6) следует

$$\begin{gathered}\Lambda^4{}_{13}\omega^3{}_4\wedge\omega^3=0,\\ [d\Lambda^4{}_{13}-\Lambda^4{}_{13}(\omega^1{}_1+2\omega^3{}_3)-\Lambda^4{}_{23}\omega^2{}_1]\wedge\omega^3-\Lambda^4{}_{13}\omega^3{}_4\wedge\omega^4=0,\\ \Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4\wedge\omega^3=0,\\ [d\Lambda^4{}_{23}-\Lambda^4{}_{13}\omega^1{}_2+\Lambda^4{}_{23}(\omega^1{}_1-2\omega^3{}_3)]\wedge\omega^3-\Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4\wedge\omega^4=0.\end{gathered}\tag{3.16}$$

Так как преобразованием $'\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1$ и $'\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_2$ можно $\Lambda^4{}_{13}$ и $\Lambda^4{}_{23}$ переставить, то можно предполагать $\Lambda^4{}_{13}\neq0$. Уравнения (3.16) позволяют взять $\Lambda^4{}_{13}=1$ и $\Lambda^4{}_{23}=0$. Сделав в (3.16) подстановку фиксированных величин, видим, что третье уравнение отпадает. Оставшиеся трое уравнений получены дифференцированием уравнений $\omega^3{}_1=0$, $\omega^4{}_1=\pm\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_2=0$. Эта система выделяет некоторое многообразие M, поскольку $s_1=3$, $Q=3$, $s_2=0$, $N=3$. Прибавлением уравнения $\omega^3{}_2=0$, из M выделяется данная конгруэнция в силу полной интегрируемости. Так как $\omega^1{}_4=\omega^2{}_4=\omega^3{}_4=0$, то направление вектора $\boldsymbol{e}_4$ инвариантно.

Если все точки плоскости являются фокальными точками, то $\operatorname{rang}\|\Lambda^p{}_q\|=1$. Преобразование $'\theta^p=A^p{}_q\theta^q$ позволяет взять $\Lambda^3{}_3=\Lambda^4{}_3=\Lambda^3{}_4=0$ и $\Lambda^4{}_4=1$, т. е. $\omega^3=0$ и $\omega^4=\theta^4$. Векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ можем направить так, чтобы $\Lambda^p{}_{i4}=0$, так как в системе

$$\omega^p{}_i=\Lambda^p{}_{iq}\theta^q$$

ранг матрицы системы единица. Из $T^i=0$, следует $\Lambda^3{}_{13}=\Lambda^3{}_{23}=0$. Одна из величин $\Lambda^4{}_{13}$ и $\Lambda^4{}_{23}$ отлична от нуля. Имея ввиду $'\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$ и $'\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1$, можно предполагать $\Lambda^4{}_{13}\neq0$. Беря за базисные формы $'\theta^3=(\Lambda^4{}_{13})^{-1}\theta^3=\omega^4{}_1$ и $\theta^4=\omega^4$, получим $\Lambda^4{}_{13}=1$. Поскольку

$$\begin{aligned}\theta^3{}_3&=-(\omega^1{}_1+\Lambda^4{}_{23}\omega^2{}_1+\omega^3{}_3), &\qquad \theta^3{}_4&=0,\\ \theta^4{}_3&=-(\omega^1+\Lambda^4{}_{23}\omega^2), &\qquad \theta^4{}_4&=-\omega^3{}_3,\end{aligned}$$

то из (1.6) следует

$$\begin{gathered}\omega^3{}_4=a\omega^4{}_1,\qquad \Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_4=0,\\ d\Lambda^4{}_{23}-\omega^1{}_2+\Lambda^4{}_{23}(2\omega^1{}_1+\Lambda^4{}_{23}\omega^2{}_1)=b\omega^4{}_1.\end{gathered}$$

Мы можем фиксировать $\Lambda^4{}_{23}=0$. Отсюда следует, что *данный подкласс с уравнениями* $\omega^3=0$, $\omega^p{}_2=0$, $\omega^3{}_1=0$, *существует с произволом одной функции одного аргумента.*

На основании этого и результатов предыдущих параграфов имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *По фокальной кривой* f *конгруэнции* $\pi: E\to B$ *делятся на следующие классы* $a, b, \ldots, k$. *Фокальная кривая* f *является соответственно*

a) *эллипсом,*
b) *парой мнимых пересекающихся прямых,*
c) *гиперболой,*
d) *парой пересекающихся прямых,*
e) *параболой,*
f) *парой параллельных прямых,*
g) *парой мнимых параллельных прямых,*
h) *парой сливающихся прямых,*
i) *одной прямой,*
j) *пустым множеством,*
k) *плоскостью конгруэнции.*

Ни один из этих классов не является пустым.

Теорема 3. *Классификации в теоремах* 1 *и* 2 *связаны следующим образом:* $a\cup b=\mathfrak{A}$, $c\cup d=\mathfrak{B}$, $e\subset\mathfrak{C}$, $f\cup h\subset\mathfrak{C}\cup\mathfrak{D}$, $g\subset\mathfrak{D}$, $j\subset\mathfrak{F}$ *и* $i\cup k\subset\mathfrak{E}\cup\mathfrak{F}$. *Ни один из классов* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{F}$ *не является пустым.*

§ 4. Классификация конгруэнций по группам голономий

В этом параграфе рассматриваются группы голономий классов конгруэнций, выделенных по типам фокальных кривых. Исходные понятия даны в § 1. Локальные однородные группы голономии Ψ и Φ соответственно расслоений $\pi: E\to B$ и $p: V\to B$ являются подгруппами группы $SGL(2;\mathbf{R})$ Ее подгруппы следующие:

1) собственная ортогональная группа $^+O_2$,
2) собственная псевдоортогональная группа $^1O_2$,
3) параболическая группа Γ,
4) группа из единичного элемента $\{1\}$.

Элементы параболической группы имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Этим группам соответствуют алгебры Ли, элементы которых имеют в подходящим образом выбранном базисе соответственно вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С другой стороны, алгебры Ли однородных групп голономий Ψ и Φ состоят соответственно из матриц $\|\Omega^j{}_i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\|$ и $\|\Omega^p{}_q(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\|$, где $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ — любые векторы касательного пространства базисного многообразия.

Теорема 4. *Классам конгруэнций $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{F}$ соответствуют следующие пары однородных групп голономий* (Ψ, Φ):

$$({}^+O_2, {}^+O_2),\ ({}^1O_2, {}^1O_2),\ (\Gamma, \Gamma),\ (\Gamma, \{1\}),\ (\{1\}, \Gamma),\ (\{1\}, \{1\}). \tag{4.1}$$

Пара матриц $(\|R^j{}_i\|, \|R^p{}_q\|)$ *для каждого класса конгруэнций остается неизменной относительно преобразований групп соответствующей пары* (4.1).

Доказательство. В случае класса $\mathfrak{A}$ алгебры Ли групп Ψ и Φ состоят по (1.23) из элементов вида

$$\|\Omega^j{}_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\| = \frac{1}{2}\|R^j{}_i\vartheta^3 \wedge \vartheta^4(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\| = \begin{Vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{Vmatrix}$$

и

$$\|\Omega^q{}_p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\|R^q{}_p\vartheta^3 \wedge \vartheta^4(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\| = \begin{Vmatrix} 0 & \varpi \\ -\varpi & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, $\Psi = {}^+O_2$ и $\Phi = {}^+O_2$.

При параллельном переносе базисов $\{\boldsymbol{e}_i\}$ и $\{\boldsymbol{e}_p\}$ по петлям базисного многообразия получим новые базисы $'\boldsymbol{e}_i = A^j{}_i\boldsymbol{e}_j$ и $'\boldsymbol{e}_p = A^q{}_p\boldsymbol{e}_q$, где $\|A^j{}_i\|$ и $\|A^q{}_p\|$ — элементы группы ${}^+O_2$. При этом

$$'R^j{}_i = A^k{}_iR^l{}_kB^j{}_l, \qquad 'R^q{}_p = A^r{}_pR^s{}_rB^q{}_s,$$

где $\|B^j{}_l\|$ и $\|B^q{}_p\|$ — обратные матрицы к матрицам $\|A^j{}_i\|$ и $\|A^q{}_p\|$. Учитывая по (1.23) виды $R^j{}_i$ и $R^q{}_p$, в случае класса $\mathfrak{A}$

$$'R^j{}_i = R^j{}_i, \qquad 'R^q{}_p = R^q{}_p.$$

В случае класса $\mathfrak{A}$ теорема доказана. Доказательства для остальных классов аналогичны.

Далее рассматривается локальная неоднородная группа голономии X расслоения $\pi : E \to B$. Ее алгебра Ли состоит из элементов вида $(\Omega^i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}),\ \Omega^j{}_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$. Здесь $\{\Omega^i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\}$ является алгеброй Ли некоторой подгруппы G группы сдвигов T_2. Иначе, G есть подгруппа векторного пространства T_2 как группы относительно сложения.

В случае класса $\mathfrak{A}$ (класса $\mathfrak{B}$) в центре фокальной кривой M компоненты кручения равны нулю: $T^i = 0$. Значит, $\Omega^i{}_M(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 0$ и, следовательно, $G = \{\boldsymbol{O}\}$. С фокальной кривой связанный репер $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ преобразуется при параллельных переносах по петлям базисного многообразия в новые реперы $\{'M; '\boldsymbol{e}_i\}$, где $'\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a}$ и $'\boldsymbol{e}_i = A^j{}_i\boldsymbol{e}_j$, а $\boldsymbol{a} \in \{\boldsymbol{O}\}$ и $\|A^j{}_i\| \in \Psi$. Итак, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{O}$ и $'M = M$. Имея еще в виду вторую половину теоремы 4, заключаем, что справедлива следующая

Теорема 5. *Если фокальной кривой конгруэнции является эллипс или пара мнимых пересекающихся прямых, то локальная неоднородная группа голономии X сопряжена с локальной* *однородной группой голономии Ψ, изоморфна группе $^{+}O_2$ и оставляет инвариантной фокальную кривую. Если фокальной кривой является гипербола или пара пересекающихся прямых, то $^{+}O_2$ надо заменить на $^{1}O_2$.*

Класс $\mathfrak{C}$ по типам фокальной кривой f делится на три подкласса. Если f является параболой, то репер $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ в § 3 был выбран следующим образом: M — точка параболы, $\boldsymbol{e}_1$ направлен по касательной к параболе в точке M, а $\boldsymbol{e}_2$ направлен в инвариантное направление оси параболы. При параллельном переносе такого репера $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ по петлям получим новые реперы $\{'M; \boldsymbol{e}_i\}$. Векторы $\boldsymbol{e}_i$ по теореме 4 преобразуются элементами из группы Γ. Так как $(T^1, T^2) = (-1, 0)$, то

$$(\Omega^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \quad \Omega^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) = (t; 0),$$

где $t \in \mathbf{R}$. Итак, $G = T_1$ есть одномерное векторное пространство, являющееся направляющим пространством касательной прямой в точке M. Следовательно, M переходит в точку $'M$ с $'\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \in T_1$. При параллельных и сливающихся прямых $G = \{\boldsymbol{O}\}$, поскольку $T^i = 0$, а $\Psi = \Gamma$ по теореме 4. Итак, справедлива

Теорема 6. *Если фокальной кривой конгруэнции является парабола, то локальная неоднородная группа голономии X изоморфна группе $\Gamma * T_1$. В точке M параболы T_1 является направляющим вектором касательной в этой точке. Парабола при параллельных переносах инвариантна. Если у класса $\mathfrak{C}$ фокальной кривой является пара параллельных или сливающихся прямых, то X сопряжена с группой Ψ, изоморфна группе Γ и оставляет инвариантной фокальную кривую.*

Класс $\mathfrak{D}$ по типам фокальной кривой f имеет три подкласса: f является парой вещественных параллельных, мнимых параллельных или сливающихся прямых. У репера $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$ начало лежит на центральной прямой, а $\boldsymbol{e}_2$ является направляющим вектором этой прямой. Поскольку в точке M имеем $T^i = 0$, то $G = \{\boldsymbol{o}\}$. Если фокальной кривой является прямая (под рассмотрением часть классов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$), то в репере $\{M; \boldsymbol{e}_i\}$, где M находится на прямой и $\boldsymbol{e}_2$ — направляющий вектор этой прямой, $T^i = (0; 1)$. Следовательно, $G = \{\lambda \boldsymbol{e}_2\} = T_1$. Если фокальные точки не существуют или фокальными точками являются все точки плоскости конгруэнции, то в любой точке $T^i = 0$, и, следовательно, $G = \{0\}$. Справедлива

Теорема 7. *В случае класса $\mathfrak{D}$ фокальная неоднородная группа голонимии X сопряжена с однородной группой голономии Ψ, изоморфна группе Γ и оставляет инвариантной фокальную кривую. Если фокальной кривой конгруэнции является прямая, то X сопряжена с группой T_1 и оставляет инвариантной фокальную прямую. Если фокальные точки не существуют или заполняют всю плоскость конгруэнции, то $X = \{1\}$.*

Кроме того, из результатов этого параграфа следует

Теорема 8. *По паре* (X, Φ), *где* X *и* Φ *локальная неоднородная и однородная группы голономии внутренней связности, соответственно расслоении* $\pi : E \to B$ *и* $p : V \to B$, *конгруэнции делятся на следующие классы:*

$$\alpha = ({}^{+}0_2 * \{\boldsymbol{0}\}, {}^{+}0_2), \quad \beta = ({}^{1}0_2 * \{\boldsymbol{0}\}, {}^{1}0_2), \quad \gamma = (\Gamma * T_1, \Gamma),$$
$$\delta = (\Gamma * \{\boldsymbol{0}\}, \Gamma), \quad \varepsilon = (\Gamma * \{\boldsymbol{0}\}, \{1\}), \quad \zeta = (T_1 * \{1\}, \Gamma),$$
$$\eta = (\{1\} * \{\boldsymbol{0}\}, \Gamma), \quad \vartheta = (\{1\} * T_1, \{1\}), \quad \iota = (\{1\} * \{\boldsymbol{0}\}, \{1\}).$$

Теорема 9. *Классификации по группам голономий и по типам фокальной кривой связаны следующим образом:* $\alpha = a \cup b$, $\beta = c \cup d$, $\gamma = e$, $\delta = (f \cup h) \cap \mathfrak{C}$, $\varepsilon = (f \cup g \cup h) \cap \mathfrak{D}$, $\zeta = i \cap \mathfrak{E}$, $\eta = k \cap \mathfrak{E}$, $\vartheta = i \cap \mathfrak{F}$, $\iota = (j \cup k) \cap \mathfrak{F}$.

Литература

1. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий. Москва, 1961.
2. Парринг А., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 21—45.
3. Парринг А., О строении фокальных поверхностей конгруэнций симплектических $2m$-плоскостей со специальными внутренними связностями. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 51—62.
4. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.

Поступило
21 III 1974

RUUMI Sp_4 KONGRUENTSIDE KLASSIFITSEERIMINE FOKAALKÕVERA TÜÜPIDE JA HOLONOOMIARÜHMADE JÄRGI

A. Parring

Resümee

Käesolev artikkel on artiklite [2, 3] järg. Afiinses sümplektilises ruumis Sp_4 vaadeldakse sümplektiliste tasandite kongruentse. Uurimisel kasutatakse artiklis [2] antud mõisteid ja valemeid. Kongruentsiga seotakse tema kanooniline kihtkond, mille kihtideks on kongruentsi tasandid [2, 3]. Tekivad siseseostuse kõveruse ja väändevormid, mille abil toimub kongruentside klassifitseerimine.

DIE KLASSIFIKATIONEN DER KONGRUENZEN DES RAUMES Sp_4 NACH DEN FOKALKURVEN UND DEN HOLONOMIEGRUPPEN

A. Parring

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel ist eine Fortsetzung der Artikel [2, 3]. Im affinen symplektischen Raum Sp_4 werden die Kongruenzen der symplektischen Ebenen betrachtet. Die Kongruenz wird als Faserraum behandelt, wobei die Fasern symplektische Ebenen sind. Es entstehen Torsions- und Krümmungsformen des inneren Zusammenhangs. Zuerst werden zur Untersuchung notwendige Formeln gegeben (§ 1), danach werden die Kongruenzen nach der Torsion (§ 1), nach den Typen der Fokalkurven (§§ 2, 3) und nach den Holonomiegruppen klassifiziert. Außerdem wird das Verhältnis zwischen diesen Klassifikationen erläutert.

СФЕРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА Sp_4

А. Парринг

Кафедра алгебры и геометрии

Симплектическое векторное пространство V_4, связанное с аффино-симплектическим пространством Sp_4, отображается в шестимерное бивекторное пространство $\Lambda^2(V_4)$. Пространство $\Lambda^2(V_4)$ является псевдоевклидовым пространством ${}^2E_6$ со структурной группой ${}^2O_6{}^+$. В ${}^2E_6$ можно определить длину $|\boldsymbol{x}|$ любого вектора $\boldsymbol{x}$. Если $|\boldsymbol{x}| \neq 0$, то каждому такому $\boldsymbol{x}$ можно сопоставить вектор $\boldsymbol{x}_0 = \lambda \boldsymbol{x}$ длины $|\boldsymbol{x}_0|^2 = \pm 1$. Вектор $\boldsymbol{x}$ является элементом единичной сферы S^5. Это соответствие применяется для отображения конгруэнции симплектических плоскостей B пространства Sp_4 в $S^5 \subset {}^2E_6$. Полученное отображение $B \to S^5$ будем называть сферическим отображением конгруэнции B. В данной заметке исследуется это отображение и образ конгруэнции B как поверхность в S^5. Применяются символика, понятия и нужные результаты статьи [2].

1. Пусть Sp_4 — аффинно-симплектическое пространство метрикой

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $I, J, \ldots = 1, 2, 3, 4$. Реперы $\{M; e_I\}$, относительно которых G имеет данный вид, называются *симплектическими.* Формы Пфаффа ω^I и $\omega^I{}_K$ в формулах перемещения

$$d\boldsymbol{M} = \omega^I \boldsymbol{e}_I, \qquad d\boldsymbol{e}_I = \omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K \tag{1.1}$$

симплектического репера $\{M; \boldsymbol{e}_K\}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I{}_K, \qquad d\omega^I{}_K = \omega^L{}_K \wedge \omega^I{}_L, \tag{1.2}$$

где

$$\|\omega^I{}_K\| = \left\| \begin{matrix} \omega^1{}_1 & \omega^2{}_1 & \omega^3{}_1 & \omega^4{}_1 \\ \omega^1{}_2 & -\omega^1{}_1 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 \\ -\omega^4{}_2 & \omega^4{}_1 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 \\ \omega^3{}_2 & -\omega^3{}_1 & \omega^3{}_4 & -\omega^3{}_3 \end{matrix} \right\|. \tag{1.3}$$

2. Обозначим через Γ_1 группу направляющего пространства V_4 симплектического пространства Sp_4, а через Γ_2 — группу автоморфизмов бивекторного пространства $\Lambda^2(V_4)$. Каждый симплектический базис $\{\boldsymbol{e}_K\}$ пространства V_4 индуцирует базис $\{\boldsymbol{E}_\alpha\}$, где $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, 6$, бивекторного пространства $\Lambda^2(V_4)$, причем

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_4, \\ &\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{E}_5 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_4, \quad \boldsymbol{E}_6 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь для каждой пары индексов $(I; K)$ применяется один собирательный индекс α:

$$\begin{aligned} &(1;2) \to 1, \quad (1;3) \to 2, \quad (1;4) \to 3, \\ &(2;3) \to 4, \quad (2;4) \to 5, \quad (3;4) \to 6. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Непрерывное инъективное отображение $H: \Gamma_1 \to \Gamma_2$, данное законом

$$H: A^I{}_J \to A^K{}_{[M} A^L{}_{N]}$$

является гомоморфизмом. Образ $A^K{}_{[M} A^L{}_{N]}$ перепишем в виде 6×6 матрицы, используя (1.5). При любой паре $A, B \in \Gamma_1$ имеет место свойство гомоморфизма

$$H(AB) = H(A)\, H(B)$$

и

$$H(A^{\mathrm{T}}) = H(A)^{\mathrm{T}}, \tag{1.6}$$

где T — знак транспонирования. Условие $A \in \Gamma_1$ равносильно условию

$$AGA^{\mathrm{T}} = G,$$

откуда при помощи (1.6) следует

$$H(A)\, H(G)\, H(A)^{\mathrm{T}} = H(G).$$

Следовательно, $H(\Gamma_1)$ является подгруппой группы $\Gamma_3 \subset \Gamma_1$. Здесь через Γ_3 обозначена группа, которая сохраняет тензор метрики

$$H(G) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Теперь применим к группе Γ_2 еще некоторый внутренний автоморфизм

$$\varphi_L : \Gamma_2 \to \Gamma_2,$$

данный формулой

$$\varphi_L(\mathfrak{A}) = L\mathfrak{A}L^{-1},$$

где $L \in \Gamma_2$ — такая ортогональная матрица, которая приводит $H(G)$ к диагональному виду. Значит, $L^T = L^{-1}$. Группа $\varphi_L \circ H(\Gamma_1)$ изоморфна группе $H(\Gamma_1)$. Пусть, например,

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\varepsilon & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}. \tag{1.7}$$

Тогда $\varphi_L \circ H(G) = \mathsf{G}$ получает вид

$$\mathsf{G} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Матрицы L таковы, что они приводят $H(G)$ к диагональным видам, которые отличаются между собой расположением $+1$ и -1. Виды матриц (1.8) находят применения при исследовании конгруэнции с центральными фокальными кривыми, т. е. классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ статьи [2]. Группа $\varphi_L \circ H(\Gamma_1)$ сохраняет метрику G. Значит, $\varphi_L \circ H(\Gamma_1) \subset {}^2O_6$, где ${}^2O_6$ — псевдоортогональная группа пространства ${}^2V_6$. Так как при любом $A \in \Gamma_1$ имеем $\det\|A\| = 1$ и, с другой стороны, $\varphi_L \circ H$ — непрерывное отображение, $\det\|\varphi_L \circ H(G)\| = 1$ по (1.8) и $G \in \Gamma_1$, то $\varphi_L \circ H(\Gamma_1) \subset {}^2O_6^+$. Итак, у нас доказана

Теорема 1. *Образом симплектической группы Γ_1 при отображении $\varphi_L \circ H$ является подгруппа группы ${}^2O_6^+$.*

Для каждого бивектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{IJ}\boldsymbol{e}_I \wedge \boldsymbol{e}_J = X^{\alpha'}\boldsymbol{E}_\alpha$ относительно метрики (1.8) определяется длина $|\boldsymbol{x}|$ по формуле

$$|\boldsymbol{x}|^2 = (X^1)^2 \mp (X^2)^2 \mp (X^3)^2 \pm (X^4)^2 \pm (X^5)^2 + (X^6)^2.$$

Отметим, что эта формула в общем виде такова (см. [1])

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x^{IJ}x^{KL}g_{IK}g_{JL}.$$

3. Каждой симплектической плоскости пространства Sp_4 соответствует простой бивектор $\boldsymbol{x}$, который определяется однозначно до точности коэффициента. Так как в случае симплектической плоскости $|\boldsymbol{x}| \neq 0$, то $\boldsymbol{x}$ можно нормировать, т. е. $|\boldsymbol{x}| = 1$, после чего рассматриваемое соответствие становится однозначным. Возникает отображение

$$\psi : M \to \mathrm{S}^5,$$

где M — множество симплектических плоскостей в Sp_4, а S^5 5-мерная единичная сфера в ${}^2E_6$. Называем отображение Ψ *сферическим*. Если параллельные плоскости отождествить, то отображение Ψ инъективное. Кроме того, $\Psi(M) \subset S^5$, так как отображению Ψ подчинены только простые бивекторы. Называем $\Psi(M)$ *грассмановым многообразием*. Находим структурные уравнения грассманова многообразия $\Psi(M)$. При преобразовании (1.8) базис $\{\boldsymbol{E}_\alpha\}$ переходит в базис $\{'\boldsymbol{E}_\alpha\}$, причем формулы перехода суть

$$\begin{aligned} &'\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_1, \quad '\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{E}_4), \quad '\boldsymbol{E}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon\boldsymbol{E}_2\mp\boldsymbol{E}_5),\\ &'\boldsymbol{E}_6=\boldsymbol{E}_6, \quad '\boldsymbol{E}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{E}_4), \quad '\boldsymbol{E}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\varepsilon\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_5). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Используя формулы (1.9) и их обратные, а также (1.4), (1.2) и (1.3), получаем, что формы $\Sigma^\beta{}_\alpha$ и $\omega^K{}_I$ в формулах инфинитезимальных перемещений

$$d'\boldsymbol{E}_\alpha=\Sigma^\beta{}_\alpha{}'\boldsymbol{E}_\beta, \qquad d\boldsymbol{e}_I=\omega^K{}_I\boldsymbol{e}_K \tag{1.10}$$

связаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Sigma^1{}_1=\ldots=\Sigma^6{}_6=\Sigma^6{}_1=\Sigma^1{}_6=0,\\
&\Sigma^2{}_1=\pm\Sigma^1{}_2=\mp\Sigma^6{}_2=-\Sigma^2{}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3{}_1\mp\omega^4{}_2),\\
&\Sigma^3{}_1=\pm\varepsilon\,\Sigma^1{}_3=\mp\varepsilon\,\Sigma^6{}_3=-\Sigma^3{}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\omega^4{}_1+\varepsilon\omega^3{}_2),\\
&\Sigma^4{}_1=\mp\Sigma^1{}_4=\pm\Sigma^6{}_4=-\Sigma^4{}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3{}_1\pm\omega^4{}_2),\\
&\Sigma^5{}_1=\mp\varepsilon\Sigma^1{}_5=\pm\varepsilon\,\Sigma^6{}_5=-\Sigma^5{}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^4{}_1\mp\varepsilon\omega^3{}_2),\\
&\Sigma^3{}_2=-\varepsilon\Sigma^2{}_3=\frac{1}{2}[\,(\omega^2{}_1-\varepsilon\omega^1{}_2)\pm(\omega^4{}_3-\varepsilon\omega^3{}_4)\,],\\
&\Sigma^4{}_2=\Sigma^2{}_4=-\omega^1{}_1+\omega^3{}_3,\\
&\Sigma^5{}_2=\varepsilon\Sigma^2{}_5=\frac{1}{2}[\pm(\omega^2{}_1+\varepsilon\omega^1{}_2)+(\omega^4{}_3+\varepsilon\omega^3{}_4)\,],\\
&\Sigma^4{}_3=\varepsilon\,\Sigma^3{}_4=\frac{1}{2}[-(\varepsilon\omega^2{}_1+\omega^1{}_2)\pm(\varepsilon\omega^4{}_3+\omega^3{}_4)\,],\\
&\Sigma^5{}_3=\Sigma^3{}_5=\mp(\omega^1{}_1+\omega^3{}_3),\\
&\Sigma^5{}_4=-\varepsilon\,\Sigma^4{}_5=\frac{1}{2}[\mp(\omega^2{}_1-\varepsilon\omega^1{}_2)+(\omega^4{}_3-\varepsilon\omega^3{}_4)\,].
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Отсюда видим, что подгруппа $\varphi_L \circ H(\Gamma_1)$ задается с десятью формами, как и сама группа Γ_1. Применяя преобразование

$$''\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}('\boldsymbol{E}_1 + '\boldsymbol{E}_6), \qquad ''\boldsymbol{E}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}('\boldsymbol{E}_1 - '\boldsymbol{E}_6),$$

можем уточнить теорему 1. Имеет место

Теорема 2. *Образом симплектической группы Γ_1 при отображений $\varphi_L \circ H$ является группа ${}^2O_5^+$.*

Внешнее дифференцирование первых из (1.10), дает структурные уравнения пространства ${}^2E_6$:

$$d\,\Sigma^\beta{}_\alpha = \Sigma^\gamma{}_\alpha \wedge \Sigma^\beta{}_\gamma. \tag{1.12}$$

Если $\Sigma^\beta{}_\alpha$ удовлетворяют еще (1.11), то (1.12) являются структурными уравнениями пространства ${}^2E_6$ со структурной группой $\varphi \circ H(\Gamma_1)$. Если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ находятся на симплектической плоскости π, то ей соответствует однозначно определенный простой нормированный бивектор

$$\psi(\pi) = \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = '\boldsymbol{E}_1,$$

который далее обозначим через $\boldsymbol{M}$. Переобозначим

$$\boldsymbol{u}_I = '\boldsymbol{E}_{I+1}, \qquad \vartheta^I = \Sigma_1{}^{I+1}, \qquad \vartheta^J{}_I = \Sigma^{J+1}{}_{I+1}. \tag{1.13}$$

Как следует из (1.10) и (1.11) грассманово многообразие $\psi(M)$ удовлетворяет следующим формулам перемещения и структур

$$d\boldsymbol{M} = \vartheta^I \boldsymbol{u}_I, \qquad d\vartheta^I{}_K = \vartheta^L{}_K \wedge \vartheta^I{}_L + \frac{1}{2}\Pi^I{}_K$$

и

$$d\vartheta^I = \vartheta^K \wedge \vartheta^I{}_K, \qquad d\boldsymbol{u}_I = \vartheta^K{}_I \boldsymbol{u}_K, \tag{1.14}$$

где $\Pi^I{}_K = P^I{}_{KLM}\vartheta^L \wedge \vartheta^M$ — формы кривизны. У тензора кривизны $P^I{}_{KLM}$ отличны от нуля компоненты только при $L = K$ и $M = I$. Обозначим $P^I{}_K = P^I{}_{KKI}$. При этом

$$\|P^I{}_K\| = \pm 2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{Vmatrix}.$$

Итак, $\Psi(M)$ является 4-мерной сферой. Обозначим $\Psi(M)$ через S^4. Эта сфера S^4 находится в некотором 5-мерном пространстве. Так как $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_6 \neq \boldsymbol{0}$ — постоянный вектор, то ортогональное дополнение $\{\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_6)^\perp$ к пространству $\{\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_6\}$ содержит S^4. Оно является пространством типа ${}^2E_5$. Каждая касательная плоскость $\pi \in {}^2E_5$ к сфере S^4 имеет ввиду (1.8) метрику

$$\begin{Vmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\varepsilon \end{Vmatrix}. \tag{1.15}$$

Так как формы

$$\vartheta^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3{}_1\mp\omega^4{}_2),\qquad \vartheta^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\omega^4{}_1+\varepsilon\omega^3{}_2),$$
$$\vartheta^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3{}_1\pm\omega^4{}_2),\qquad \vartheta^4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^4{}_1\mp\varepsilon\omega^3{}_2)\tag{1.16}$$

линейно независимы, то многообразие S^4 определяется и формами $\omega^p{}_i$. Первая квадратичная форма

$$ds^2=\mp(\vartheta^1)^2\mp\varepsilon(\vartheta^2)^2\pm(\vartheta^3)^2\pm\varepsilon(\vartheta^4)^2\tag{1.17}$$

выражается через $\omega^p{}_i$ следующим обпразом:

$$ds^2=g_{pq}g^{ji}\omega^p{}_i\omega^q{}_j.\tag{1.18}$$

Здесь и далее $i, j, \ldots, o=1, 2$, а $p, q, \ldots=3, 4$.

4. Рассмотрим конгруэнцию $B\subset M$ симплектических плоскостей в Sp^4. Симплектический подвижной репер выберем так, чтобы начало репера M и $\boldsymbol{e}_i$ находился на симплектической плоскости конгруэнции. Конгруэнция, как 2-параметрическое семейство симплектических плоскостей, выделяет в грассмановом многообразии S^4 некоторое подмногообразие $\Psi(B)$, которое выделяется уравнениями

$$\omega^p{}_i=\Lambda^p{}_{iq}\theta^q,\tag{1.19}$$

где $\{\theta^q\}$ — кобазис 2-мерного многообразия параметров. Рассмотрим конгруэнции с центральными фокальными кривыми, т. е. классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ предыдущей статьи. Существует репер в которой (1.18) имеет вид

$$\omega^3{}_2=\mp\varepsilon\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=\pm\omega^3{}_1,$$

т. е. $\theta^3=\omega^3{}_1$ и $\theta^4=\omega^4{}_1$. Здесь $\varepsilon=+1$ соответствует классу $\mathfrak{A}$, а $\varepsilon=-1$ соответствует классу $\mathfrak{B}$. Из (1.15) следует, что $\psi(B)$ в случае данных классов выделяется уравнениями

$$\vartheta^1=0,\qquad \vartheta^2=0.$$

Метрический тензор G_{rs} в первой квадратичной форме

$$ds^2=G_{rs}\vartheta^r\vartheta^s$$

в выбранном репере выражается по (1.15)

$$\|G_{rs}\|=\|(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_s)\|=\pm\begin{Vmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{Vmatrix}.$$

Кроме того, из (1.15) следует, что

$$\|G_{ij}\|=\|(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\|=\mp\begin{Vmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{Vmatrix}.\tag{1.21}$$

Продолжая (1.20), учитывая при этом (1.16), получим

$$\vartheta^i{}_p=A^i{}_{pq}\vartheta^q,\qquad A^i_{[pq]}=0.\tag{1.22}$$

При этом по (1.11) и (1.13)

$$\vartheta^1{}_3=\vartheta^3{}_1,\qquad \vartheta^2{}_3=\vartheta^3{}_2,\qquad \vartheta^1{}_4=\varepsilon\vartheta^4{}_1,\qquad \vartheta^2{}_4=\vartheta^4{}_2.$$

На основании (1.14) находим структурные уравнения подмногообразия $\psi(B)$. Первые из них дают

$$d\vartheta^3=\vartheta^4\wedge\vartheta^3{}_4,\qquad d\vartheta^4=\vartheta^3\wedge\vartheta^4{}_3. \tag{1.23}$$

Вторые из них по (1.22) переписываются в виде

$$d\vartheta^q{}_p=\Delta^q{}_p, \tag{1.24}$$

где $\Delta^q{}_p$ — формы кривизны. Они выражаются через компоненты тензора кривизны

$$\Delta^q{}_p=r^q{}_{prs}\vartheta^r\wedge\vartheta^s.$$

Обозначим его существенные компоненты через $r^q{}_p = r^q{}_{p34}$. В этих обозначениях (1.24) получит вид

$$d\vartheta^4{}_3=r^4{}_3\vartheta^3\wedge\vartheta^4,\qquad d\vartheta^3{}_4=r^3{}_4\vartheta^3\wedge\vartheta^4. \tag{1.25}$$

При этом

$$r^4{}_3=-\varepsilon r^3{}_4=\varepsilon[A^1{}_{33}A^1{}_{44}-(A^1{}_{33})^2]+[A^2{}_{33}A^2{}_{44}-(A^2{}_{34})^2]\mp 2.$$

Назовем $r^4{}_3$ *кривизной многообразия* $\psi(B)$. Формулы (1.23) и (1.25) являются структурными уравнениями $\psi(B)$. Переписывая (1.14) для индексов i и j, получим

$$d\vartheta^j{}_i=r^j{}_{ist}\vartheta^s\wedge\vartheta^t,$$

откуда

$$d\vartheta^2{}_1=r^2{}_1\vartheta^3\wedge\vartheta^4,\qquad d\vartheta^1{}_2=r^1{}_2\vartheta^3\wedge\vartheta^4.$$

Здесь обозначено $r^j{}_i = r^j{}_{i34}$. Величины $r^2{}_1$ и $r^1{}_2$ выражаются

$$r^2{}_1=-\varepsilon r^1{}_2=(A^1{}_{33}A^2{}_{34}-A^2{}_{33}A^1{}_{34})+\varepsilon(A^2{}_{44}A^1{}_{34}-A^1{}_{44}A^2{}_{43}).$$

Здесь $r^2{}_1$ называется *римановой кривизной* многообразия $\psi(B)$. Продолжение формул (1.20) дает

$$\begin{aligned}
dA^1{}_{33}-2A^1{}_{34}\vartheta^4{}_3-\varepsilon A^2{}_{33}\vartheta^2{}_1&=a_1\vartheta^3+a_2\vartheta^4,\\
dA^1{}_{34}+(\varepsilon A^1{}_{33}-A^1{}_{44})\vartheta^4{}_3-\varepsilon A^2{}_{34}\vartheta^2{}_1&=a_2\vartheta^3+a_3\vartheta^4,\\
dA^1{}_{44}+2\varepsilon A^1{}_{34}\vartheta^4{}_3-\varepsilon A^2{}_{44}\vartheta^2{}_1&=a_3\vartheta^3+a_4\vartheta^4
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
dA^2{}_{33}-2A^2{}_{33}\vartheta^4{}_3+A^1{}_{33}\vartheta^2{}_1&=b_1\vartheta^3+b_2\vartheta^4,\\
dA^2{}_{34}+(\varepsilon A^2{}_{33}-A^2{}_{44})\vartheta^4{}_3+A^1{}_{34}\vartheta^2{}_1&=b_2\vartheta^3+b_3\vartheta^4,\\
dA^2{}_{44}+2\varepsilon A^2{}_{43}\vartheta^4{}_3+A^1{}_{44}\vartheta^2{}_1&=b_3\vartheta^3+b_4\vartheta^4.
\end{aligned}$$

На многообразии $\psi(B)$ можно определить ряд известных величин:

a) вторые основные формы

$$b^i=A^i{}_{pq}\vartheta^p\vartheta^q.$$

b) вектор средней кривизны

$$\boldsymbol{H}=G^{pq}A^i{}_{pq}\boldsymbol{u}_i,$$

c) нормальная кривизна $h=|\boldsymbol{H}|$. По (1.21)

$$h^2=\mp[(H^1)^2+\varepsilon(H^2)^2],$$

где обозначено $H^i = G^{pq}A^i{}_{pq}$, причем в выбранном репере

$$H^i=\pm(A^i{}_{33}+\varepsilon A^i{}_{44}).$$

При $b^i = 0$ называется многообразие $\psi(B)$ *вполне геодезическим,* а при $A^i{}_{pq} = \lambda^i G_{pq}$ — *омбилическим.* Можно еще выделить такой класс многообразия $\psi(B)$, когда $\boldsymbol{H}$ *параллельно* *переносим* относительно связонсти, т. е. $\nabla H^i=0$, или иначе

$$dH^j+H^i\vartheta^j{}_i=0,$$

откуда

$$dH^1-\varepsilon H^2\vartheta^2{}_1=0, \qquad dH^2+H^1\vartheta^2{}_1=0.$$

Значит,

$$a_1+\varepsilon a_3=0, \qquad a_2+a_4=0, \qquad b_1+\varepsilon b_3=0, \qquad b_2+b_4=0.$$

Литература

1. Парринг А., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 21—45.
2. Парринг А., Классификации конгруэнций плоскостей пространства Sp_4 по типам фокальной кривой и группам голономий. Настоящий сборник, стр. 86—110.

Поступило
30 IV 1974

RUUMI Sp_4 SÜMPLEKTILISTE TASANDITE KONGRUENTSI SFÄÄRILINE KUJUTUS

A. Parring

Resümee

Afiinse-sümplektilise ruumiga Sp_4 seotud sümplektiline vektorruum V_4 kujutatakse kuuemõõtmeliseks bivektorruumiks $\Lambda^2(V_4)$. Vektorruumi V_4 sümplektilisuse tõttu osutub $\Lambda^2(V_4)$ pseudoeukleidiliseks ruumiks ${}^2E_6$. Ruumis ${}^2E_6$ on võimalik defineerida vektori x pikkus. Juhul, kui $|x|\neq 0$, saab vektorile x seada vastavusse sellise vektori $x_0=\lambda x$, mil $|x|^2=\pm 1$. Vektor $|x|$ on ühiksfääri S^5 element. Tekkinud kujutust kasutatakse ruumi Sp_4 sümplektiliste tasandite kongruentsi B kujutamiseks sfääri $S^5\subset {}^2E_6$. Nimelt igale sümplektilisele tasandile $\pi\in B$ vastab kordaja täpsuseni määratud ruumi ${}^2E_6$ vektor. Kuna selle vektori pikkus on nullist erinev, siis saab viimast normeerida. Kongruents B kujutub S^5. Nimetame seda kujutust *sfääriliseks kujutuseks*. Käesolevas lühiartiklis on leitud kongruentsi B põhiliste valemite kujutised sfäärilisel kujutusel. Kasutatakse antud kogumiku artikli [2] sümboolikat, mõisteid ja vajalikke tulemusi.

DIE SPHÄRISCHE ABBILDUNG DER KONGRUENZEN DER SYMPLEKTISCHEN EBENEN DES RAUMES Sp_4

A. Parring

Zusammenfassung

Den mit dem affinen symplektischen Raum verbundenen symplektischen Vektorraum V_4 bildet man in den 6-dimensionalen Bivektorraum $\Lambda^2(V_4)$ ab. Der Abbildungsraum ist der pseudoeuklidische Vektorraum ${}^2E_6$. Dabei entsteht eine Abbildung Ψ der symplektischen Ebenen der Kongruenz B in der Einheitssphäre $S^5\subset {}^2E_6$ mit Hilfe des Einheitsbivektors der symplektischen Ebene. In diesem Kurzartikel definiert man *die sphärische Abbildung* und man untersucht die Strukturgleichungen der Abbildungsmannigfaltigkeit $\Psi(B)$ und ihren von den Strukturgleichungen der Kongruenz B hergeleiteten Zusammenhang.

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ТИПА S^1_{42} С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbf{R}^3$ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

1. *Системой типа* S^1_{m2} называется система m дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях и двух независимых переменных. Такая система при m различных характеристиках обозначается через $S^1_{m2(1)}$. В работе [4] автора с помощью метода Картана строилась общая теория квазилинейных систем $S^1_{m2(1)}$ при произвольном m, а именно, давались инвариантные условия существования у таких систем промежуточного интеграла, необходимый и достаточный признаки систем, приводящихся к линейным, рассматривались вопросы, связанные с законами сохранения и обобщенными функциями тока, а также связь последних с промежуточными интегралами. Те же вопросы при $m = 3$ рассматривались А. М. Васильевым [2]. В работе [4] автор вдобавок к указанным вопросам изучала внутреннюю геометрию интегральных многообразий квазилинейных систем $S^1_{m2(1)}$. Изучался вопрос существования у системы решений с постоянным двойным отношением некоторых четырех характеристических корней, рассматривались аффинные связности без кручения с абсолютным параллелизмом направлений, присоединяемые к триткани, заданной общими дифференциальными уравнениями на двумерном многообразии. Результаты последней задачи использовались для исследования вопроса существования у системы решений с некоторой тройкой характеристик, образующих шестиугольную триткань.

В настоящей работе рассмотрим конкретную геометрическую задачу, в которой встречается некоторая квазилинейная система $S^1_{m2(1)}$. Оказывается, что рассмотрение изотермической поверхности в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ приводит при продолжении к квазилинейной системе $S^1_{42(1)}$. Нашей целью является исследование всех указанных проблем общей теории в случае этой конкретной системы.

2. Формулы инфинитезимального перемещения подвижного репера $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_p)$ в $\mathbf{R}^3$ имеют вид

$$d\boldsymbol{M}=\omega^p\boldsymbol{e}_p, \quad d\boldsymbol{e}_p=-\omega^q{}_p\boldsymbol{e}_q, \quad p,\ q,\ r=1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Поскольку в $\mathbf{R}^3$ репер ортонормирован, то

$$\omega^p{}_p=0, \quad \omega^p{}_q+\omega^q{}_p=0, \tag{2}$$

и выполняются уравнения структуры

$$d\omega^p=\omega^p{}_q\wedge\omega^q, \quad d\omega^p{}_q=\omega^p{}_r\wedge\omega^r{}_q. \tag{3}$$

Изотермические поверхности[1] *в* $\mathbf{R}^3$ — это поверхности, линейный элемент которых может быть приведен к виду $ds^2=A(d\xi^2+d\eta^2)$, где ξ и η — параметры линий кривизны. Присоединим к каждой точке изотермической поверхности в $\mathbf{R}^3$ трехгранник Дарбу, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ которого лежат на главных касательных поверхности. Обозначив буквами a и c главные кривизны и учитывая формулы (1), получим сначала уравнения

$$\omega^3=0, \quad \omega^3{}_1=a\omega^1, \quad \omega^3{}_2=c\omega^2. \tag{4}$$

При этом, система $S_{12}:\omega^1=0,\ \omega^2=0$ вполне интегрируема.

Поскольку линии кривизны определяются уравнениями $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$, а

$$ds^2=A(d\xi^2+d\eta^2)=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2, \tag{5}$$

то взяв ξ за параметр линий кривизны $\omega^1=0$, а η за параметр линий кривизны $\omega^2=0$, из равенства (3) следует, что должна существовать функция u такая, что

$$u\omega^1=d\xi, \quad u\omega^2=d\eta. \tag{6}$$

Дифференцируем внешним образом уравнения (6) и (4):

$$du\wedge\omega^1-u\omega\wedge\omega^2=0, \qquad du\wedge\omega^2+u\omega\wedge\omega^1=0, \tag{7}$$

$$\frac{da}{a-c}\wedge\omega^1-\omega\wedge\omega^2=0, \qquad \frac{dc}{a-c}\wedge\omega^2-\omega\wedge\omega^1=0, \tag{8}$$

где $\omega=\omega^2{}_1=-\omega^1{}_2$.

Уравнения (4), (7), (8) образуют замкнутую дифференциальную систему и определяют изотермические поверхности. При этом, подсистема квадратичных уравнений (7), (8) самостоятельная и ее можно рассматривать отдельно. По ней уравнения (4) восстанавливаются интегрированием. Значит, можно утверждать, что изотермические поверхности в $\mathbf{R}^3$ определяются системой (7), (8). Изучением этой системы и займемся.

Система (7), (8) имеет четыре характеристики

$$\omega^1=0, \quad \omega^2=0, \quad \Omega^1\equiv\omega^2-i\omega^1=0, \quad \Omega^2\equiv\omega^2+i\omega^1=0.$$

---

[1] См. [3], но в [3] в структурных уравнениях (3) пишется $d\omega^p{}_q=\omega^r{}_q\wedge\omega^p{}_r$, что дает некоторое различие в знаках наших формул от соответствующих формул в [3].

Берем другие линейные комбинации левых частей уравнений (7), (8), т. е. приводим систему (7), (8) к характеристикам:

$$\left(\frac{du}{u}-\frac{da}{a-c}\right)\wedge\omega^1=0,\qquad\left(\frac{du}{u}+\frac{dc}{a-c}\right)\wedge\omega^2=0,$$
$$\left(\omega-i\frac{du}{u}\right)\wedge\Omega^1=0,\qquad\left(\omega+i\frac{du}{u}\right)\wedge\Omega^2=0. \tag{9}$$

Мы пришли к системе квадратичных уравнений (9), причем система S_{12} вполне интегрируема.

В таком случае (см. [4], § 2) система (9) эквивалентна некоторой квазилинейной системе $S^1{}_{42(1)}$. Полученная система рассматривается уже на некотором продолженном многообразии.

3. Введем обозначения

$$\omega^3=s^3{}_3\left(\frac{du}{u}-\frac{da}{a-c}\right)+s^3{}_1\omega^1,\qquad\omega^5=s^5{}_5\left(\omega-i\frac{du}{u}\right)+s^5{}_1\Omega^1,$$
$$\omega^4=s^4{}_4\left(\frac{du}{u}+\frac{dc}{a-c}\right)+s^4{}_2\omega^2,\qquad\omega^6=s^6{}_6\left(\omega+i\frac{du}{u}\right)+s^6{}_2\Omega^2, \tag{10}$$

где параметрам $s^\alpha{}_\alpha$, $s^\alpha{}_\lambda$ $(\alpha=3, 4, 5, 6;\ \lambda=1, 2)$ можно давать любые значения; параметры $s^\alpha{}_\alpha$ при этом, отличны от нуля [2]. Теперь система (10) перепишется в виде

$$\omega^3\wedge\omega^1=0,\qquad\omega^4\wedge\omega^2=0,\qquad\omega^5\wedge\Omega^1=0,\qquad\omega^6\wedge\Omega^2=0. \tag{11}$$

Приступим к нахождению структурных уравнений задачи. Из уравнений (3) следует, что в $\mathbf{R}^3$ при соотношениях (4), т. е. на изотермических поверхностях

$$d\omega^1=-\omega\wedge\omega^2,\qquad d\omega^2=\omega\wedge\omega^1,\qquad d\omega=ac\omega^1\wedge\omega^2, \tag{12}$$

откуда

$$d\Omega^1=i\omega\wedge\Omega^1,\qquad d\Omega^2=-i\omega\wedge\Omega^2. \tag{13}$$

Выразим из (10) формы ω, du/u, $da/(a-c)$, $dc/(a-c)$ через главные формы задачи ω^α, ω^λ, дифференцируем формы (10) внешним образом и выразим последние дифференциалы через формы ω^α, ω^λ, получим

$$d\omega^3=\omega^3{}_1\wedge\omega^1+\omega^3{}_3\wedge\omega^3+a^3{}_{45}\omega^4\wedge\omega^5+a^3{}_{46}\omega^4\wedge\omega^6+$$
$$+a^3{}_{42}\omega^4\wedge\omega^2+a^3{}_{52}\omega^5\wedge\omega^2+a^3{}_{62}\omega^6\wedge\omega^2,$$
$$d\omega^4=\omega^4{}_2\wedge\omega^2+\omega^4{}_4\wedge\omega^4+a^4{}_{35}\omega^3\wedge\omega^5+a^4{}_{36}\omega^3\wedge\omega^6+$$
$$+a^4{}_{31}\omega^3\wedge\omega^1+a^4{}_{51}\omega^5\wedge\omega^1+a^4{}_{61}\omega^6\wedge\omega^1,$$
$$d\omega^5=\omega^5{}_5\wedge\omega^5+\omega^5{}_1\wedge\Omega^1,\qquad d\omega^6=\omega^6{}_6\wedge\omega^6+\omega^6{}_2\wedge\Omega^2.$$

---

[2] В дальнейшем форма ω^3 понимается во введенном в формулах (10) смысле.

Выразим $d\omega^1$, $d\omega^2$, $d\Omega^1$, $d\Omega^2$ также через формы ω^α, ω^λ.

$$d\omega^1 = a^1{}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + a_5\omega^5 \wedge \omega^2 + a_6\omega^6 \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^2 = a^2{}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 - a_5\omega^5 \wedge \omega^2 - a_6\omega^6 \wedge \omega^2,$$
$$d\Omega^1 = A^1{}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 - i(a_5\omega^5 + a_6\omega^6) \wedge \Omega^1,$$
$$d\Omega^2 = A^2{}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + i(a_5\omega^5 + a_6\omega^6) \wedge \Omega^2.$$

Здесь $a^j{}_{kl}$, a_Λ, $A^\lambda{}_{\mu\eta}$, где j, k, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\Lambda = 5, 6$ — определенные выражения через $s^j{}_k$ и их дифференциалы, а выражения $\omega^j{}_k$ содержат вдобавок еще формы ω^j. Произведем канонизацию, положив $a_5 = a_6 = -1$, $a^3{}_{45} = -a^3{}_{46} = a^4{}_{35} = -a^4{}_{36} = i$, т. е. $s^5{}_5 = s^6{}_6 = 0{,}5$; $s^3{}_3 = -s^4{}_4$. После этого можно $a^3{}_{\alpha 2}$, $a^4{}_{\alpha 1}$, $a^1{}_{12}$, $a^2{}_{12}$, $A^1{}_{12}$, $A^2{}_{12}$ привести к нулю, положив $s^3{}_1 = s^4{}_2 = s^5{}_1 = s^6{}_2 = 0$. Закончим канонизацию, положив $a^3{}_{43} = i$, $a^4{}_{34} = -i$, тогда $\omega^3{}_3 = i(\omega^4 - \omega^5 - \omega^6)$, $\omega^4{}_4 = -i(\omega^3 + \omega^5 - \omega^6)$. Производив такую канонизацию, приходим к структурным уравнениям

$$\begin{gathered}
d\omega^1 = \omega^2 \wedge (\omega^5 + \omega^6), \qquad d\omega^2 = (\omega^5 + \omega^6) \wedge \omega^1, \\
d\Omega^1 = i(\omega^5 + \omega^6) \wedge \Omega^1, \qquad d\Omega^2 = i\Omega^2 \wedge (\omega^5 + \omega^6), \\
d\omega^3 = d\omega^4 = i(\omega^5 - \omega^6 + \omega^3) \wedge (\omega^5 - \omega^6 - \omega^4), \\
d\omega^5 = d\omega^6 = i/4 \cdot ac\Omega^1 \wedge \Omega^2, \\
da = i(a - c)(\omega^5 - \omega^6 + \omega^3), \\
dc = -i(a - c)(\omega^5 - \omega^6 - \omega^3).
\end{gathered} \tag{14}$$

4. Исследуем вопрос промежуточных интегралов (определение см. в [2], § 3) системы (11). В данном случае система $S_{15} : \Omega^1 = 0$, $\omega^5 = 0$, система $S_{26} : \Omega^2 = 0$, $\omega^6 = 0$ и система $S_{1256} : \Omega^1 = 0$, $\Omega^2 = 0$, $\omega^5 = 0$, $\omega^6 = 0$ вполне интегрируемы, причем каждая из них совпадает со своим характеристическим. Значит (см. [4], § 4), уравнение $\omega^5 \wedge \Omega^1 = 0$, уравнение $\omega^6 \wedge \Omega^2 = 0$ и подсистема $\omega^5 \wedge \Omega^1 = 0$, $\omega^6 \wedge \Omega^2 = 0$ нашей системы (11) дают промежуточные интегралы. Этим промежуточным интегралам можно дать следующую интерпретацию. Рассмотрим комплексную плоскость. Уравнения $\omega^5 \wedge \Omega^1 = 0$ и $\omega^6 \wedge \Omega^2 = 0$ задают на ней линии уровня гармонических функций, а системой $\omega^5 \wedge \Omega^1 = 0$, $\omega^6 \wedge \Omega^2 = 0$ задаются уравнения Коши—Римана. Значит, *самостоятельной подсистемой* $\omega^5 \wedge \Omega^1 = 0$, $\omega^6 \wedge \Omega^2 = 0$ *задается сеть линий кривизны на поверхности, затем добавляют уравнения* $\omega^3 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^4 \wedge \omega^2 = 0$, *которые задают саму кривизну этой поверхности.* Построенная поверхность изотермическая.

5. Задача нахождения связностей, присоединенных к триткани характеристик, в данном случае упрощается в силу постоянства характеристических корней λ. Мы не будем следить за процессом упрощения соответствующих общих формул из

[4], а вспомним нужное нам рассуждение из книги В. Бляшке [1]. Если триткань задана на двумерной поверхности дифференциальными уравнениями $\pi^1 = 0$, $\pi^2 = 0$, $\pi^1 + \pi^2 = 0$, то $d\pi^1 = \varphi \wedge \pi^1 + a\pi^1 \wedge \pi^2$, $d\pi^2 = \varphi \wedge \pi^2 + b\pi^1 \wedge \pi^2$. Введя форму $\Theta = \varphi - a\pi^2 + b\pi^1$, получаем $d\pi^1 = \Theta \wedge \pi^1$, $d\pi^2 = \Theta \wedge \pi^2$, $d\Theta = R\pi^1 \wedge \pi^2$. Последние формулы показывают, что к данной триткани присоединяется связность с формой Θ и кривизной R. Как и в общем случае, эта связность будет с абсолютным параллелизмом, ибо имеется лишь одна форма связности Θ.

Ищем связность, присоединенную к триткани характеристик $\pi^1 \equiv i\omega^1 = 0$, $\pi^2 \equiv -\omega^2 = 0$, $\pi^1 + \pi^2 \equiv \Omega^1 = 0$ на двумерных интегральных поверхностях данной системы (9). На них

$$\omega - i\,du/u = 2\nu(\omega^2 - i\omega^1), \qquad \omega + i\,du/u = 2\mu(\omega^2 + i\omega^1), \tag{15}$$

откуда

$$\omega = (\nu + \mu)\omega^2 + i(\mu - \nu)\omega^1. \tag{16}$$

Значит, $d\omega^1 = -i(\mu - \nu)\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^2 = -(\mu + \nu)\omega^1 \wedge \omega^2$. Для данной триткани

$$d\pi^1 = -i(\mu - \nu)\pi^1 \wedge \pi^2, \qquad d\pi^2 = i(\mu + \nu)\pi^1 \wedge \pi^2,$$

$$\Theta = i(\mu - \nu)\omega^2 + i(\mu + \nu)\omega^1.$$

Вычислим $d\Theta$:

$$d\Theta = (id\mu + \mu\omega) \wedge \Omega^2 - (id\nu - \nu\omega) \wedge \Omega^1. \tag{17}$$

Сюда нужно подставить выражения $d\nu$, $d\mu$, получаемые при продолжении (15) с учетом (16):

$$\begin{aligned} d\nu &= [-\nu\mu + \nu^2 + 0{,}5(ac - iL)]\omega^1 + [i\nu(\nu + \mu) + 0{,}5L]\omega^2, \\ d\mu &= i[-\nu\mu - \mu^2 + 0{,}5(ac - iM)]\omega^2 + [\mu(\mu - \nu) + i0{,}5M]\omega^1, \end{aligned} \tag{18}$$

где M и L — новые произвольные переменные. Подставим полученные выражения (16), (18) форм $d\nu$, $d\mu$, ω на интегральных многообразиях в (17), получим $d\Theta = 0$. Значит, $R = 0$.

Следовательно, *триткань характеристик* $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\Omega^1 = 0$ *определяет на интегральных поверхностях системы* (9) *связность с единственной формой* $\Theta = i(\mu + \nu)\omega^1 + i(\mu - \nu)\omega^2$ *и нулевой кривизной.* В силу последнего (см. [4], § 8) эта триткань характеристик является шестиугольной на всех интегральных многообразиях системы. Поскольку характеристические числа постоянны, то и их гармоническое отношение постоянно. Следовательно (см. [4], § 7), *любая тройка характеристик определяет ту же самую указанную выше связность и образует шестиугольную триткань на всех интегральных поверхностях системы.*

6. Исследуем существование законов сохранения (или интегралов) у системы (11). Как и в общем случае (см. [4], § 9) квазилинейных систем $S^1{}_{m2(1)}$, нульмерных интегралов не существует, ищем одномерные интегралы Θ, вернее, замкнутые формы Ω такие, что $d\Theta = \Omega$ и

$$\Omega = A\omega^3 \wedge \omega^1 + B\omega^4 \wedge \omega^2 + C\omega^5 \wedge \Omega^1 + D\omega^6 \wedge \Omega^2. \tag{19}$$

Требование замкнутости формы Ω дает после разложения по лемме Картана

$$\begin{aligned} &dA - iA(2\omega^5 - 2\omega^6 - \omega^4) + B(\omega^5 + \omega^6) = A_1\omega^1 + A_3\omega^3,\\ &dB - iB(2\omega^5 - 2\omega^6 + \omega^3) - A(\omega^5 - \omega^6) = B_2\omega^2 + B_4\omega^4,\\ &dC + iC(\omega^5 + \omega^6) + (A + iB)(\omega^3 - \omega^4) = C_1\Omega^1 + C_5\omega^5,\\ &dD - iD(\omega^5 + \omega^6) + (A - iB)(\omega^3 - \omega^4) = D_2\Omega^2 + D_6\omega^6. \end{aligned} \tag{20}$$

Надо определить величины A, B, C, D по системе (20). Изучим систему (20) на совместность и произвол в выборе решения. Внешнее дифференцирование уравнений (20) приводит к условиям совместности

$$A_1 = B_2, \quad B_2 = -iB, \quad A_3 = iA \tag{21}$$

и, после введения обозначения $A_1 = B_2 = E$, к уравнениям

$$\begin{aligned} &dE - iE(2\omega^5 - 2\omega^6 + \omega^3 - \omega^4) + ac(A\omega^1 + B\omega^2) = 0,\\ &[dC_1 + 2iC_1(\omega^5 + \omega^6) - 0{,}5ac(C + 0{,}5iC_5)\Omega^2 +\\ &\quad + iE(\omega^3 - \omega^4)] \wedge \Omega^1 + [dC_5 + iC_5\omega^6 + 3(iA - B)(\omega^3 - \omega^4)] \wedge \omega^5 = 0,\\ &[dD_2 - 2iD_2(\omega^5 + \omega^6) + 0{,}5ac(-D + 0{,}5iD_6)\Omega^1 -\\ &\quad - iE(\omega^3 - \omega^4)] \wedge \Omega^2 + [dD_6 - iD_6\omega^5 - 3(B + iA)(\omega^3 - \omega^4)] \wedge \omega^6 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Полученная система замкнутая, в инволюции и *определяет решение с произволом в две функции двух аргументов.*

Функциональный произвол объясняется существованием функций тока (определение см. [2], § 3). Функции тока $\Theta = H\Omega^1$ для характеристик $\Omega^1 = 0$ определяются из условия $d(H\Omega^1) = \Omega$ (см. (19)), что приводит к уравнению

$$dH + iH(\omega^5 + \omega^6) = H_1\Omega^1 + H_5\omega^5. \tag{23}$$

Дифференцирование уравнения (23) дает

$$\begin{aligned} &[dH_1 + 2iH_1(\omega^5 + \omega^6) - 0{,}5(0{,}5H_5 + H)ac\Omega^2] \wedge \Omega^1 +\\ &\quad + [dH_5 + iH_5(\omega^5 + \omega^6)] \wedge \omega^5 = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

т. е. *функции тока $\Theta = H\Omega^1$ существуют с произволом в одну функцию двух аргументов.* Здесь простейшее решение Θ_0 мы получим при $H_1 = H_5 = 0$, остальные, в соответствии с общей теорией [4], определяются интегралами φ вполне интегрируемой системы $S_{15}: \Omega^1 = 0$, $\omega^5 = 0$, т. е. представляются в виде $\Theta = \varphi\Theta_2$. При $H_5 = 0$ получим тривиальные функции тока, для которых $d\Theta = 0$ во всем пространстве, и которые существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.

Полагая в уравнениях (20), (21), (22) величины $A = B = D = 0$, $C = H$, $C_1 = H_1$, $C_5 = H_5$, получим систему, равносильную системе (23), (24). Следовательно, *все интегралы, для которых* $A = B = D = 0$, *определяются функциями тока* $\Theta = H\Omega^1$.

Аналогичный результат верен и для функций тока $\Theta = K\Omega^2$.

Функций тока $\Theta = M\omega^3 + N\omega^1$ для характеристик $\omega^1 = 0$ не существует, также как функций тока $\Theta = M\omega^4 + N\omega^2$ для характеристик $\omega^2 = 0$.

Ищем функции тока $\Theta = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^1 + S\omega^2$ для характеристического многообразия $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$. Требование, чтобы $d\Theta = \Omega$, дает [4] для определения P, Q, R, S дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} dP - i(P+Q)(\omega^5 - \omega^6 - \omega^4) &= P_1\omega^1 + P_3\omega^3, \\ dQ - i(P+Q)(\omega^5 - \omega^6 + \omega^3) &= Q_2\omega^2 + Q_4\omega^4, \\ dR + S(\omega^5 + \omega^6) &= R_1\omega^1 + R_3\omega^3, \\ dS - R(\omega^5 + \omega^6) &= S_2\omega^2 + S_4\omega^4. \end{aligned}$$

Внешнее дифференцирование приводит к условиям совместности

$$P_1 = Q_2 = 0, \quad P_3 + Q_4 = 0, \quad R_1 - S_2 = 0, \quad R_3 = S_4 = 0,$$

и, обозначив $P_3 = -Q_4 = V$, $R_1 = S_2 = T$, к уравнениям

$$\begin{aligned} dV - 2iV(\omega^5 - \omega^6 + \omega^3 - \omega^4) &= 0, \\ dT + ac(S\omega^2 + R\omega^1) &= 0. \end{aligned}$$

Условия совместности последнего уравнения дают $S = R = 0$. Произвол лишь в постоянных. Но эта функция тока Θ тривиальная, т. е. $d\Theta = 0$ тождественно во всем пространстве.

На этом изучение системы (11) закончим.

Литература

1. Бляшке В., Введение в геометрию тканей. Москва, 1959.
2. Васильев А. М., Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория). Матем. сб., 1966, **70**, № 4, 457—480.
3. Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Москва, 1962.

4. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория). Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 63—85.

Поступило
28 II 1974

RUUMI R^3 ISOTERMILIST PINDA MÄÄRAV ERINEVATE KARAKTERISTIKUTEGA $S^1{}_{42}$ TÜÜPI KVAASILINEAARNE SÜSTEEM (GEOMEETRILINE TEOORIA)

H. Kilp

Resümee

Autor on oma varasemas artiklis [4] välja arendanud esimest järku osatuletistega m diferentsiaalvõrrandi süsteemide geomeetrilise teooria kahe sõltumatu muutuja juhu jaoks. Käesolevas töös käsitletakse selle teooria põhitulemusi ühe konkreetse ülesande puhul tekkiva diferentsiaalvõrrandite süsteemi korral. Vaadeldakse eukleidilise ruumi $\mathbf{R}^3$ isotermilisi pindu määravat süsteemi, mis osutub erinevate karakteristikutega nelja võrrandi süsteemiks. Töös uuritakse selle süsteemi geomeetrilisi omadusi selliste mõistete valguses nagu vahepealsed integraalid, karakteristikute kolmnurgas ja sellega seotud afiinne seostus, säilivusseadused ning üldistatud voolufunktsioonid.

QUASI-LINEAR SYSTEM WITH DIFFERENT CHARACTERISTICS OF TYPE $S^1{}_{24}$ DETERMINING AN ISOTHERMIC SURFACE IN SPACE $\mathbf{R}^3$ (GEOMETRIC THEORY)

H. Kilp

Summary

In paper [4] the geometric theory of systems of m first degree partial differential equations has been developed by the author. In this paper she applies the general results of this theory in investigating the system of differential equations, which arises in a concrete problem. The system defining isothermic surfaces in Euclidean space $\mathbf{R}^3$ is considered. This system consists of four equations with different characteristics. The geometric properties of this system are examined in the light of such notions as intermediate integrals, affine connections related to three fields of characteristics and generalised current functions.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА $S^1{}_{42}$ С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В R^4 С НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ И КРУЧЕНИЕМ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

Нас будут интересовать конкретные примеры квазилинейных систем типа $S^1{}_{m2}$, для которых построена общая теория в работе автора [5]. *Системой типа* $S^1{}_{m2}$ — называется системы m дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка при m искомых функциях и двух независимых переменных. Такая система с различными характеристиками обозначается через $S^1{}_{m2(1)}$. Как известно [4], любая система дифференциальных уравнений при продолжении приводится в продолженных переменных к квазилинейной. Нас интересуют при этом системы с различными характеристиками.

Пример системы типа $S^1{}_{42(1)}$, получившийся в результате продолжения при рассмотрении изотермической поверхности в $\mathbf{R}^3$, изучался в работе автора [6]. В настоящей работе рассмотрим конкретную геометрическую задачу, а именно, двумерную поверхность с сетью линий кривизны и нулевой гауссовой кривизной в $\mathbf{R}^4$, в которой при продолжении получаются некоторые две квазилинейные системы типа $S^1{}_{42(1)}$, отличившиеся друг от друга выбором независимых переменных. Исследуем все проблемы общей теории в случае этих двух конкретных систем.

§ 1

1. Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство $\mathbf{R}^4$. Формулы инфинитезимального перемещения подвижного репера $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_p)$ в $\mathbf{R}^4$ имеют вид

$$d\boldsymbol{M}=\omega^p \boldsymbol{e}_p, \quad d\boldsymbol{e}_p=-\omega^q{}_p \boldsymbol{e}_q, \quad p, q, r=1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Поскольку в $\mathbf{R}^4$ репер ортонормирован, то

$$\omega^p{}_p=0, \quad \omega^p{}_q+\omega^q{}_p=0. \tag{2}$$

Выполняются уравнения структуры

$$d\omega^p=\omega^p{}_q\wedge\omega^q,\qquad d\omega^p{}_q=\omega^p{}_r\wedge\omega^r{}_q. \tag{3}$$

Пусть в $\mathbf{R}^4$ задана двумерная поверхность V_2. На поверхности V_2 всегда существует ровно одна сопряженная сеть, вообще говоря, не ортогональная. Предполагается, что эта сеть ортогональная, т. е. является сетью линий кривизны, и, значит, кручение поверхности равна нулю. Пусть еще гауссова кривизна поверхности V_2 равна нулю. Присоединим к каждой точке M поверхности V_2 репер $(\boldsymbol{e}_p)$, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ которого направлены по главным касательным. Тогда поверхность V_2 задается уравнениями

$$\omega^3=0,\qquad \omega^4=0, \tag{4}$$

причем система $S_{12}:\omega^1=0,\ \ \omega^2=0$ вполне интегрируема. Формы ω^1, ω^2 — главные формы на многообразии V_2. В силу уравнений структуры (2), (3), полной интегрируемости системы S_{12} и предположений на поверхность V_2 в результате продолжения системы (4) получим

$$\omega^3{}_1=a\omega^1,\qquad \omega^3{}_2=0,\qquad \omega^4{}_1=0,\qquad \omega^4{}_2=c\omega^2. \tag{5}$$

Продифференцируем полученные равенства (5) внешним образом:

$$\begin{aligned}&da\wedge\omega^1-a\omega\wedge\omega^2=0,\qquad a\omega\wedge\omega^1+c\omega^2\wedge\Omega=0,\\ &dc\wedge\omega^2+c\omega\wedge\omega^1=0,\qquad c\omega\wedge\omega^2+a\omega^1\wedge\Omega=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\omega=\omega^2{}_1=-\omega^1{}_2,\ \ \Omega=\omega^4{}_3=-\omega^3{}_4$.

Система (4), (5), (6) замкнутая и определяет в $\mathbf{R}^4$ двумерные поверхности с сетью линий кривизны и нулевой гауссовой кривизной. Здесь самостоятельная подсистема квадратичных уравнений является существенной, т. к. по ней уравнения (4), (5) в $\mathbf{R}^4$ в подходяще выбранном репере при предположении полной интегрируемости системы S_{12} восстанавливаются интегрированием. Значит, можно говорить, что двумерные поверхности с сетью линий кривизны и нулевой гауссовой кривизны в $\mathbf{R}^4$ определяются системой (6). Нашей целью является изучение этой системы (6).

Система (6) имеет четыре характеристики

$$\omega^1=0,\qquad \omega^2=0,\qquad \Omega^1\equiv a\omega^1+c\omega^2=0,\qquad \Omega^2\equiv a\omega^1-c\omega^2=0.$$

Берем другие линейные комбинации левых частей уравнений (6):

$$\begin{aligned}&(p\,da-l\Omega)\wedge\omega^1=0,\qquad (\omega-\Omega)\wedge\Omega^1=0,\\ &(q\,dc+m\Omega)\wedge\omega^2=0,\qquad (\omega+\Omega)\wedge\Omega^2=0,\end{aligned} \tag{7}$$

где введены обозначения $p=1/a,\ \ q=1/c,\ \ l=a/c,\ \ m=c/a$.

Мы пришли к системе четырех квадратичных уравнений с различными характеристиками, причем система S_{12} вполне интегрируема. В таком случае система (7) эквивалентна (см. [5], § 2) некоторой квазилинейной системе $S^1_{42(1)}$. Следует отметить, что система (7) получилась в результате продолжения, т. е. рассматривается уже на некотором продолженном многообразии.

2. Введем обозначения

$$\begin{aligned}&\omega^3=s^3_3(p\,da-l\Omega)+s^3_1\omega^1, \quad &\omega^5=s^5_5(\omega-\Omega)+s^5_1\Omega^1,\\ &\omega^4=s^4_4(q\,dc+m\Omega)+s^4_2\omega^2 \quad &\omega^6=s^6_6(\omega+\Omega)+s^6_2\Omega^2,\end{aligned} \tag{8}$$

где параметрам[1] s^α_α, s^α_λ можно давать любые значения; параметры s^α_α полагаются, при этом, отличными от нуля[2].

Во введенных обозначениях (8) система (7) запишется в виде

$$\omega^3\wedge\omega^1=0, \quad \omega^4\wedge\omega^2=0, \quad \omega^5\wedge\Omega^1=0, \quad \omega^6\wedge\Omega^2=0. \tag{9}$$

Приступим к нахождению структурных уравнений задачи. Из структурных уравнений (3) следует, что в $\mathbf{R}^4$ при соотношениях (4) и (5)

$$d\omega^1=-\omega\wedge\omega^2, \quad d\omega^2=\omega\wedge\omega^1, \quad d\omega=0, \quad d\Omega=0. \tag{10}$$

Выразим дифференциалы форм (8) через главные формы задачи

$$\begin{aligned}d\omega^3=&\,\omega^3_3\wedge\omega^3+\omega^3_1\wedge\omega^1+a^3_{45}\omega^4\wedge\omega^5+a^3_{46}\omega^4\wedge\omega^6+\\&+a^3_{42}\omega^4\wedge\omega^2+a^3_{52}\omega^5\wedge\omega^2+a^3_{62}\omega^6\wedge\omega^2,\\ d\omega^4=&\,\omega^4_4\wedge\omega^4+\omega^4_2\wedge\omega^2+a^4_{35}\omega^3\wedge\omega^5+a^4_{36}\omega^3\wedge\omega^6+\\&+a^4_{31}\omega^3\wedge\omega^1+a^4_{51}\omega^5\wedge\omega^1+a^4_{61}\omega^6\wedge\omega^1,\\ d\omega^5=&\,\omega^5_5\wedge\omega^5+\omega^5_1\wedge\Omega^1+a^5_{31}\omega^3\wedge\omega^1+a^5_{42}\omega^4\wedge\omega^2+a^5_{62}\omega^6\wedge\Omega^2,\\ d\omega^6=&\,\omega^6_6\wedge\omega^6+\omega^6_2\wedge\Omega^2+a^6_{31}\omega^3\wedge\omega^1+a^6_{42}\omega^4\wedge\omega^2+a^6_{51}\omega^5\wedge\Omega^1.\end{aligned}$$

Выразим $d\omega^1$, $d\omega^2$, $d\Omega^1$, $d\Theta^2$ также через формы ω^α, ω^λ:

$$\begin{aligned}d\omega^1&=a^1_{12}\omega^1\wedge\omega^2+a_5\omega^5\wedge\omega^2+a_6\omega^6\wedge\omega^2,\\ d\omega^2&=a^2_{12}\omega^1\wedge\omega^2-a_5\omega^5\wedge\omega^1-a_6\omega^6\wedge\omega^1,\\ d\Omega^1&=A_3\omega^3\wedge\omega^1+A_4\omega^4\wedge\omega^2+A^1_{51}\omega^5\wedge\Omega^1+A^1_{62}\omega^6\wedge\Omega^2,\\ d\Omega^2&=A_3\omega^3\wedge\omega^1-A_4\omega^4\wedge\omega^2+A^2_{51}\omega^5\wedge\Omega^1+A^2_{62}\omega^6\wedge\Omega^2.\end{aligned}$$

Здесь[3] a^i_{kl}, a_Λ, $a^\lambda_{\Lambda\mu}$, A_P, где $\Lambda=5,6$; $P=3,4$ — определенные выражения от s^i_k и их дифференциалов, а выражения ω^i_k содержат в добавок еще формы ω^i. Произведем канонизацию, положив $a^3_{45}=-a^3_{46}=-1$, $a^4_{35}=-a^4_{36}=1$, $A_3=l$, $A_4=m$,

---

[1] В течение всей статьи $\alpha, \beta, \gamma, \ldots=3, 4, 5, 6$; а $\lambda, \mu, \eta, \ldots=1, 2$.

[2] Формы ω^3 и ω^4 в дальнейшем понимаются в смысле (8).

[3] В течение всей статьи $j, k, l, \ldots=1, \ldots, 6$.

т. е. $s^5{}_5 = s^6{}_6 = 1/2$, $s^3{}_3 = c$, $s^4{}_4 = a$. За счет этого еще $a_5 = a_6 = -1$, $A^1{}_{51} = -A^2{}_{62} = m - l$, $A^1{}_{62} = -A^2{}_{51} = l + m$. После этого можно $a^\lambda{}_{\mu\eta}$, $a^\alpha{}_{\beta\lambda}$ привести к нулю, положив $s^3{}_1 = s^4{}_2 = s^5{}_1 = s^6{}_2 = 0$. Тогда

$$\omega^3{}_3 = p\omega^4 + (m-l)(\omega^6 - \omega^5), \quad \omega^4{}_4 = q\omega^3 + (l-m)(\omega^6 - \omega^5),$$

$$\omega^3{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_5 = \omega^5{}_1 = \omega^6{}_6 = \omega^6{}_2 = 0.$$

В результате такой канонизации получим структурные уравнения:

$$\begin{aligned}
&d\omega^1 = \omega^2 \wedge (\omega^5 + \omega^6), \quad d\omega^2 = (\omega^5 + \omega^6) \wedge \omega^1,\\
&d\Omega^1 = l\omega^3 \wedge \omega^1 + m\omega^4 \wedge \omega^2 + (m-l)\omega^5 \wedge \Omega^1 + (m+l)\omega^6 \wedge \Omega^2,\\
&d\Omega^2 = l\omega^3 \wedge \omega^1 - m\omega^4 \wedge \omega^2 - (m+l)\omega^5 \wedge \Omega^1 - (m-l)\omega^6 \wedge \Omega^2,\\
&d\omega^3 = [p\omega^4 + (l-m)(\omega^6 - \omega^5)] \wedge \omega^3 - \omega^4 \wedge (\omega^5 - \omega^6),\\
&d\omega^4 = [q\omega^3 + (l-m)(\omega^6 - \omega^5)] \wedge \omega^4 + \omega^3 \wedge (\omega^5 - \omega^6),\\
&d\omega^5 = d\omega^6 = 0,\\
&da = l\omega^3 + al(\omega^6 - \omega^5), \quad dc = m\omega^4 - cm(\omega^6 - \omega^5).
\end{aligned} \tag{11}$$

3. Применив все общие соображения (см. [5], § 4) для исследования существования промежуточных интегралов, оказывается, что *у системы* (9) *не существует промежуточных интегралов.*

4. Вопрос связности решим по той же упрощенной схеме как и в [6], п. 5. Рассмотрим на интегральных многообразиях системы триткань $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\Omega^2 \equiv a\omega^1 - c\omega^2 = 0$, т. е. берем $\pi^1 = a\omega^1$, $\pi^2 = -c\omega^2$. Запишем систему (7) на интегральных многообразиях

$p\,da - l\Omega = \alpha\omega^1$, $q\,dc + m\Omega = \beta\omega^2$, $\omega - \Omega = 2\nu\Omega^1$, $\omega + \Omega = 2\mu\Omega^2$, откуда

$$\omega = a(\nu+\mu)\omega^1 + c(\nu-\mu)\omega^2, \quad da = [a\cdot l(\mu-\nu) + a\alpha]\omega^1 - a^2(\nu+\mu)\omega^2,$$

$$\Omega = a(\mu-\nu)\omega^1 - c(\nu+\mu)\omega^2, \quad dc = -c^2(\mu-\nu)\omega^1 + [cm(\nu+\mu) + c\beta]\omega^2.$$

Будем иметь

$$d\pi^1 = d(a\omega^1) = -a^2(\nu+\mu)\omega^2 \wedge \omega^1 - a^2(\nu+\mu)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$d\pi^1 = d(c\omega^2) = -c^2(\mu-\nu)\omega^1 \wedge \omega^2 + c^2(\nu-\mu)\omega^2 \wedge \omega^1 = 0.$$

Значит, $\Theta = 0$, $d\Theta = 0$, $R = 0$. *Триткань* $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\Omega^2 = 0$ *определяет связность с нулевой формой* Θ *и нулевой кривизной* R *на двумерных интегральных поверхностях данной системы.* На всех интегральных поверхностях эта триткань характеристик шестиугольника (см. [5], § 7). Поскольку гармоническое отношение характеристических корней $1/0$, 0, a/c, $-a/c$ постоянно, то и *любая тройка семейств характеристик образует шестиугольную триткань на всех интегральных поверхностях системы.*

5. Для определения одномерных законов сохранения Θ ищем (см. [5], § 9) замкнутые квадратичные формы Ω, обращающиеся в нуль на всех интегральных многообразиях системы, так чтобы $d\Theta = \Omega$, т. е. замкнутые формы Ω вида

$$\Omega = D\omega^3 \wedge \omega^1 + E\omega^4 \wedge \omega^2 + F\omega^5 \wedge \Omega^1 + G\omega^6 \wedge \Omega^2. \tag{12}$$

Требование замкнутости формы Ω дает для определения величин D, E, F, G систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dD + D[p\omega^4 - m\omega^{65}] + l[(E-F)\omega^5 + (E-G)\omega^6] = D_1\omega^1 + D_3\omega^3, \\ dE + E[q\omega^3 + l\omega^{65}] + m[-(D+F)\omega^5 + (G-D)\omega^6] = E_2\omega^2 + E_4\omega^4, \\ dF + (D+E)(q\omega^3 - p\omega^4) + G(l+m)\omega^6 + F(l-m)\omega^5 = F_1\Omega^1 + F_5\omega^5, \\ dG - (D-E)(q\omega^3 - p\omega^4) - F(l+m)\omega^5 + G(m-l)\omega^6 = G_2\Omega^2 + G_6\omega^6, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\omega^{65} = \omega^6 - \omega^5$. Изучим систему (13) на совместность и произвол в выборе решения. Внешнее дифференцирование уравнений (13) приводит к условиям совместности

$$F_1 = -G_2 = qF_2 - pD_1 = 0, \quad D_3 = qD, \quad E_4 = pE, \quad D_1 = E_2 = 0, \tag{14}$$

и к уравнениям

$$\begin{gathered} [dF_5 + F(l+m)^2\omega^6 + (D+E)(m-l)(q\omega^3 - p\omega^4)] \wedge \omega^5 = 0, \\ [dG_6 + G(l+m)^2\omega^5 + (D-E)(l-m)(q\omega^3 - p\omega^4)] \wedge \omega^6 = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Система (13), (14), (15) *в инволюции и определяет решение с произволом в две функции одного аргумента.*

Говорят, что система обладает *обобщенной функцией тока*, если у нее есть интеграл, обращающийся в нуль на каждом интегральном многообразии вдоль одного семейства характеристик.

Находим функции тока для характеристик Ω^1. Такая функция тока определяется формой вида

$$\Theta = H\Omega^1 + K\omega^5, \tag{16}$$

замкнутой на всяком интегральном многообразии, т. е. форма $d\Theta$ должна иметь вид (12). Таким образом, функции тока (16) существуют с произволом в две функции одного аргумента, а при $K = 0$, т. е. функции тока

$$\Theta = H\Omega^1, \tag{17}$$

также как при $H = 0$, т. е. функции тока

$$\Theta = K\omega^5, \tag{18}$$

существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.

Аналогичные результаты верны соответственно для функций тока $\Theta = H\Omega^2 + K\omega^6$, $\Theta = H\Omega^2$, $\Theta = K\omega^6$.

Находим функции тока для характеристических подмногообразий $\Omega^1 = 0$, $\Omega^2 = 0$, т. е. формы

$$\Theta = H_1\Omega^1 + H_2\Omega^2 + K_1\omega^5 + K_2\omega^6, \tag{19}$$

замкнутые на каждом интегральном многообразии. В общем случае такие функции тока существуют с произволом в четыре функции одного аргумента, а функции тока

$$\Theta = H_1\Omega^1 + H_2\Omega^2, \tag{20}$$

также как функции тока

$$\Theta = K_1\omega^5 + K_2\omega^6, \tag{21}$$

существуют с произволом в две функции одного аргумента.

Функций тока $\Theta = H\omega^1 + K\omega^3$, $\Theta = H\omega^2 + K\omega^4$, $\Theta = H_1\omega^1 + H_2\omega^2 + K_1\omega^3 + K_2\omega^4$ не существует.

Такой широкий произвол в существовании функций тока объясняется полной интегрируемостью уравнений $\omega^5 = 0$ и $\omega^6 = 0$. В силу этого среди форм (16)—(20) могут содержаться такие, дифференциал которых равен нулю во всем пространстве, следовательно, и на интегральных многообразиях. Они не дают функций тока в полном смысле этого слова, но дают лишний произвол. Поэтому, чтобы получить нетривиальные функции тока, надо профакторизовать все полученные формы Θ, для которых $d\Theta$ имеет вид (12), по тем формам Θ, для которых $d\Theta = 0$ во всем пространстве. Находим последние. Для того, чтобы $d\Theta = 0$, надо для характеристик $\Theta^1 = 0$ в форме (16) полагать $H = 0$. Значит, *все формы* (18) *задают тривиальные функции тока, а формы* (17) — *нетривиальные функции тока.* Аналогично, *для характеристических подмногообразий* $\Omega^1 = 0$, $\Omega^2 = 0$ *все нетривиальные функции тока задаются формой* Θ *вида* (20) *и только.*

Положим в (13) величины $D = E = 0$. Тогда из (14) следует, что $E_4 = D_3 = 0$, а тогда из (13) вытекает, что $F = G = 0$. Значит, *законов сохранения с формой* $\Omega = F\omega^5 \wedge \Omega^1 + G\omega^6 \wedge \Omega^2$ *не существует.* Существование таких законов сохранения обеспечило бы и существование промежуточного интеграла (см. [5], теорема 8), но промежуточных интегралов у рассматриваемой системы (9) не существует (см. п. 3). Не существует и законов сохранения, определяемых функциями тока, поскольку для последних надо обязательно полагать $D = E = 0$.

§ 2

1. Исходим из той же задачи, что в § 1, но полученную там систему (5) перепишем в виде

$$\omega^1 = A\omega^3{}_1, \quad \omega^3{}_2 = 0, \quad \omega^4{}_1 = 0, \quad \omega^2 = C\omega^4{}_2, \tag{22}$$

т. е. за независимые формы задачи берем формы

$$\Theta \equiv \omega^3{}_1, \quad \Theta^2 \equiv \omega^4{}_2. \tag{23}$$

С точки зрения системы квадратичных уравнений, которая получилась в результате продолжения исходной пфаффовой системы (4), и которая является у нас объектом изучения, так поступить можно, поскольку эта система квадратичных уравнений рассматривается на продолженном многообразии и ее можно считать уже не связанным с самим многообразием V_2, на котором независимыми являются формы ω^1, ω^2.

Продифференцируем систему (22) внешним образом

$$\begin{aligned} &dA \wedge \Theta^1+C\omega \wedge \Theta^2=0, \quad \omega \wedge \omega^3{}_1-\Omega \wedge \Theta^2=0,\\ &dC \wedge \Theta^2+A\omega \wedge \Theta^1=0, \quad \omega \wedge \omega^4{}_2-\Omega \wedge \Theta^1=0. \end{aligned} \tag{24}$$

В замкнутой системе (4), (22), (24) подсистема (24) самостоятельная и имеет четыре характеристики

$$\Theta^1=0, \quad \Theta^2=0, \quad \Theta^1+\Theta^2=0, \quad \Theta^1-\Theta^2=0.$$

Берем другие линейные комбинации левых частей (23)

$$\begin{aligned} &(dA+C\omega) \wedge \Theta^1=0, \quad (\omega-\Omega) \wedge (\Theta^1+\Theta^2)=0,\\ &(dC-A\omega) \wedge \Theta^2=0, \quad (\omega+\Omega) \wedge (\Theta^1-\Theta^2)=0. \end{aligned} \tag{25}$$

Мы получили систему четырех квадратичных уравнений с различными характеристиками, причем, система $S_{12}: \Theta^1=0$, $\Theta^2=0$ вполне интегрируема. Тем самым мы получили (см. [5], § 2) пример квазилинейной системы $S^1{}_{42(1)}$, притом, отличный от рассмотренного в § 1. Нашей дальнейшей целью является изучение этой системы (25).

2. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\Theta^3=s^3{}_3(dA+C\omega)+s^3{}_1\Theta^1, \quad \Theta^5=s^5{}_5(\omega-\Omega)+s^5{}_1(\Theta^1+\Theta^2),\\ &\Theta^4=s^4{}_4(dC-A\omega)+s^4{}_2\Theta^2, \quad \Theta^6=s^6{}_6(\omega+\Omega)+s^6{}_2(\Theta^1-\Theta^2), \end{aligned} \tag{26}$$

где $s^\alpha{}_\alpha \neq 0$ и $s^\alpha{}_\lambda$ — произвольные величины. Тогда система (25) запишется в виде

$$\Theta^3 \wedge \Theta^1=0, \quad \Theta^4 \wedge \Theta^2=0, \quad \Theta^5 \wedge (\Theta^1+\Theta^2)=0, \quad \Theta^6 \wedge (\Theta^1-\Theta^2)=0. \tag{27}$$

Приступим к нахождению структурных уравнений задачи. Для этого следует вспомнить введенные обозначения (23), уравнения (22) и формулы (3). По последним в $\mathbf{R}^4$

$$d\Theta^1=0, \quad d\Theta^2=0, \quad d\omega=0, \quad d\Omega=0. \tag{28}$$

Выразим дифференциалы форм (26) через главные формы задачи Θ^α, Θ^λ: Имеем

$$\begin{aligned} d\Theta^3=&\Theta^3{}_3 \wedge \Theta^3+\Theta^3{}_1 \wedge \Theta^1+a^3{}_{45}\Theta^4 \wedge \Theta^5+a^3{}_{46}\Theta^4 \wedge \Theta^6+\\ &+a^3{}_{42}\Theta^4 \wedge \Theta^2+a^3{}_{52}\Theta^5 \wedge \Theta^2+a^3{}_{62}\Theta^6 \wedge \Theta^2,\\ d\Theta^4=&\Theta^4{}_4 \wedge \Theta^4+\Theta^4{}_2 \wedge \Theta^2+a^4{}_{35}\Theta^3 \wedge \Theta^5+a^4{}_{36}\Theta^3 \wedge \Theta^6+\\ &+a^4{}_{31}\Theta^3 \wedge \Theta^1+a^4{}_{51}\Theta^5 \wedge \Theta^1+a^4{}_{61}\Theta^6 \wedge \Theta^1,\\ d\Theta^5=&\Theta^5{}_5 \wedge \Theta^5+\Theta^5{}_1 \wedge (\Theta^1+\Theta^2), \quad d\Theta^6=\Theta^6{}_6 \wedge \Theta^6+\Theta^6{}_2 \wedge (\Theta^1-\Theta^2). \end{aligned}$$

Здесь $a^i{}_{hl}$ — определенные выражения от $s^i{}_k$ и их дифференциалов, а выражения для $\omega^i{}_k$ содержат вдобавок к этому еще формы ω^i. Произведем канонизацию, положив $a^3{}_{45}=a^3{}_{46}=1$, $a^4{}_{35}=a^4{}_{36}=-1$, т. е. $s^5{}_5=s^6{}_6=1/2$, $s^3{}_3=s^4{}_4$. Обозначив $d\ln s^3{}_3=\Theta$, получим $\Theta^3{}_3=\Theta^4{}_4=\Theta$. Остальные коэффициенты приводятся к нулю за счет $s^3{}_1=s^4{}_2=s^5{}_1=s^6{}_2=0$. Тогда $\Theta^3{}_1=\Theta^4{}_2=\Theta^5{}_1=\Theta^6{}_2=\Theta^5{}_5=\Theta^6{}_6=0$. В результате такой канонизации получим структурные уравнения задачи

$$
\begin{gathered}
d\Theta^1=0, \quad d\Theta^2=0, \quad d\Theta^3=\Theta\wedge\Theta^3+\Theta^4\wedge(\Theta^5+\Theta^6), \\
d\Theta^4=\Theta\wedge\Theta^4-\Theta^3\wedge(\Theta^5+\Theta^6), \quad d\Theta^5=0, \quad d\Theta^6=0, \quad d\Theta=0,
\end{gathered} \tag{29}
$$

которые являются структурными уравнениями Картана для семипараметрической группы преобразований, допускаемой системой (24), *и оставляющей инвариантными проканонизированные формы* (26).

3. Выбрав за независимые формы задачи $\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_2$, мы получили систему (24), которая, в отличие от системы (6), имеет промежуточные интегралы (см. § 1, п. 3). Действительно, система $\Theta^5=0$, $\Theta^1+\Theta^2=0$, система $\Theta^6=0$, $\Theta^1-\Theta^2=0$ и система $\Theta^5=0$, $\Theta^6=0$, $\Theta^1=0$, $\Theta^2=0$ вполне интегрируемы и совпадают со своими характеристическими. Значит, уравнение $\Theta^5\wedge(\Theta^1+\Theta^2)=0$, уравнение $\Theta^6\wedge(\Theta^1-\Theta^2)=0$ и подсистема $\Theta^5\wedge(\Theta^1+\Theta^2)=0$, $\Theta^6\wedge(\Theta^1-\Theta^6)=0$ нашей системы (27) дают промежуточные интегралы.

Этим промежуточным интегралам можно дать следующую интерпретацию. Рассмотрим проекцию четырехмерного касательного к V_2 пространства на бесконечно удаленную гиперплоскость. Получим трехмерное проективное пространство, но с метрикой, т. е. трехмерное эллиптическое пространство. Семейство двумерных плоскостей касательного пространства переходит в семейство прямых этого эллиптического пространства. Формы Θ^1, Θ^2, ω и Ω являются главными на трехмерном множестве прямых в эллиптическом пространстве. Последнее находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством пар точек двух двумерных сфер [1, 2], причем движению в эллиптическом пространстве соответствует пара вращений сфер в себя, так как четырехмерная ортогональная группа, каждый элемент которой представляется в виде матрицы

$$
\begin{Vmatrix}
0 & \omega & \Theta^1 & 0 \\
-\omega & 0 & 0 & \Theta^2 \\
-\Theta^1 & 0 & 0 & \Omega \\
0 & -\Theta^2 & -\Omega & 0
\end{Vmatrix},
$$

распадается в прямое произведение двух двумерных

$$
\begin{Vmatrix}
\omega-\Omega & 0 \\
0 & \Theta^1+\Theta^2
\end{Vmatrix}, \quad
\begin{Vmatrix}
\omega+\Omega & 0 \\
0 & \Theta^1-\Theta^2
\end{Vmatrix}.
$$

Промежуточный интеграл $\omega^5 \wedge (\Omega^1 + \Omega^2) = 0$ $\omega^6 \wedge (\Omega^1 - \Omega^2) = 0$, *где* $\omega^5 = 0{,}5(\omega - \Omega)$, $\omega^6 = 0{,}5(\omega + \Omega)$, *определяет двухпараметрическое семейство прямых в тремерном эллиптическом пространстве, т. е. конгруэнцию, такую, что на сферах уравнения* $\Theta^5 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) = 0$ *и* $\Theta^6 \wedge (\Theta^1 - \Theta^2) = 0$ *соответственно выделяют однопараметрические кривые.*

Аналогично [6], п. 4., отсюда можно уследить возможность задания поверхности V_2 с сетью линий кривизны и нулевой гауссовой кривизной в $\mathbf{R}^4$, задав на некоторой двумерной поверхности сначала системой $\Theta^5 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) = 0$, $\Theta^6 \wedge (\Theta^1 - \Theta^2) = 0$ определенную структуру касательного пространства, а затем, добавляя уравнения $\Theta^3 \wedge \Theta^1 = 0$, $\Theta^4 \wedge \Theta^2 = 0$, определяющие главные кривизны поверхности.

4. Поскольку характеристики задаются на интегральных многообразиях системы (30) уравнениями $\Theta^1 = 0$, $\Theta^2 = 0$, $\Theta^1 + \Theta^2 = 0$, $\Theta^1 - \Theta^2 = 0$, а $d\Theta^1 = 0$, $d\Theta^2 = 0$, то *все тройки семейств характеристик определяют одну и ту же тривиальную связность с нулевой формой и нулевой кривизной и образуют шестиугольную триткань на всех интегральных поверхностях системы.*

5. Величины D, E, F, G, дающие замкнутые формы

$$\Omega = D\Theta^1 \wedge \Theta^2 + E\Theta^4 \wedge \Theta^2 + F\Theta^5 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) + G\Theta^6 \wedge (\Theta^1 - \Theta^2) \tag{31}$$

для определения одномерных законов сохранения, определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &dD + D\Theta - E(\Theta^5 - \Theta^6) = D_1\Theta^1 + D_3\Theta^3,\\ &dE + E\Theta + D(\Theta^5 - \Theta^6) = E_2\Theta^2 + E_4\Theta^4,\\ &dF + D\Theta^4 - E\Theta^3 = F_1(\Theta^1 + \Theta^2) + F_5\Theta^5,\\ &dG + D\Theta^4 + E\Theta^3 = G_2(\Theta^1 - \Theta^2) + G_6\Theta^6. \end{aligned} \tag{32}$$

Изучим систему (32) на совместность и произвол в выборе решения. Продолжение уравнений (31) дает условия совместности $D_1 = E_2 = D_3 = E_4 = 0$ и уравнения

$$dE + D(\Theta^5 - \Theta^6) = 0, \qquad dF_1 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) + dF_5 \wedge \Theta^5 = 0,$$
$$dD - E(\Theta^5 - \Theta^6) = 0, \qquad dG_6 \wedge (\Theta^1 - \Theta^2) + dG_6 \wedge \Theta^6 = 0,$$

после чего система становится замкнутой, и *общее решение содержит две функции двух аргументов.*

Функциональный произвол объясняется существованием функций тока и полной интегрируемостью уравнений $\Theta^5 = 0$, $\Theta^6 = 0$. Последнее обстоятельство дает опять (см. § 1, п. 5) среди всевозможных функций тока некоторое множество тривиальных.

Форма $\Theta = H(\Theta^1 + \Theta^2) + K\Theta^5$ будет определять функцию тока, если $d\Theta$ имеет вид (31). Условия для этого

$$
\begin{gathered}
dH = H_1(\Theta^1 + \Theta^2) + H_5\Theta^5,\\
dK = K_1(\Theta^1 + \Theta^2) + K_5\Theta^5,\\
dH_1 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) + dH_5 \wedge \Theta^5 = 0,\\
dK_1 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) + dK_5 \wedge \Theta^5 = 0
\end{gathered} \tag{33}
$$

определяют решение с произволом в две функции двух аргументов. Среди них тривиальные получаются при $H_5 = K_1$, которые существуют с произволом в одну функцию двух аргументов.

Для функций тока $\Theta = H(\Theta^1 + \Theta^2)$ определяющими уравнениями будут

$$
dH = H_1(\Theta^1 + \Theta^2) + H_5\Theta^5, \quad dH_1 \wedge (\Theta^1 + \Theta^5) + dH_5 \wedge \Theta^5 = 0. \tag{34}
$$

Такие функции тока существуют с произволом в одну функцию двух аргументов. Среди них нетривиальные определяются уравнениями $dH = H_5\Theta^5$, $dH_5 \wedge \Theta^5 = 0$ и существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.

Для функций тока $\Theta = K\Theta^5$ имеем

$$
dK = K_1(\Theta^1 + \Theta^2) + K_5\Theta^5, \quad dK_1 \wedge (\Theta^1 + \Theta^2) + dK_5 \wedge \Theta^5 = 0. \tag{35}
$$

Произвол в одну функцию двух аргументов. Среди них тривиальные определяются уравнениями $dK = K_5\Theta^5$, $dK_5 \wedge \Theta^5 = 0$ и существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.

Аналогичные результаты верны для функций тока $\Theta = H(\Theta^1 - \Theta^2) + K\Theta^6$, $\Theta = H(\Theta^1 - \Theta^2)$, $\Theta = K\Theta^6$.

Для функций тока $\Theta = H_1(\Theta^1 + \Theta^2) + H_2(\Theta^1 - \Theta^2) + K_5\Theta^5 + K_6\Theta^6$ получим

$$
\begin{gathered}
dH_1 = H_{11}(\Theta^1 + \Theta^2) + H_{15}\Theta^5, \quad dH_2 = H_{22}(\Theta^1 - \Theta^2) + H_{26}\Theta^6,\\
dK_5 = K_{51}(\Theta^1 + \Theta^2) + K_{55}\Theta^5, \quad dK_6 = K_{62}(\Theta^1 - \Theta^2) + K_{66}\Theta^6
\end{gathered}
$$

и существуют они с произволом в четыре функции двух аргументов. Среди них для тривиальных $H_{15} = K_{51}$, $H_{26} = K_{62}$ и произвол их в две функции двух аргументов.

Положим в уравнениях (32) величины $D = E = G = 0$. Если, кроме того, в них положить 1) $F = H$, $K = 0$; или 2) $F = K$, $H = 0$; или 3) $F = H$, или 4) $F = K$, получим систему, равносильную соответственно системе (33) в случаях 1) и 2); системе (34) в случае 3); и системе (35) в случае 4). Следовательно, *все законы сохранения, для которых $D = E = G = 0$, могут быть определены функциями тока $\Theta = H(\Theta^1 + \Theta^2) + K\Theta^5$.*

Сравнив еще систему (32) с системой (36), можно утверждать, что *произвольный закон сохранения может быть определен одной из следующих функций тока $\Theta = H_1(\Theta^1 + \Theta^2) + H_5(\Theta^1 - \Theta^2)$, $\Theta = H_1'(\Theta^1 + \Theta^2) + K_6\Theta^6$, $\Theta = H_2(\Theta^1 - \Theta^2) + K_5\Theta^5$.* Все они существуют с произволом в две функции двух аргументов, а тривиальные среди них с произволом в две функции одного аргумента.

Функции тока $\Theta = H_1\Theta^1$, $\Theta = H_2\Theta^2$ существуют с произволом в одну функцию одного аргумента, а функции тока $\Theta = H_1\Theta^1 + H_2\Theta^2$ с произволом в две функции одного аргумента. С этим всевозможные функции тока рассмотрены.

Литература

1. Бланк Я. П., Клиффордово-сопряженные сети. Докл. АН СССР, 1948, **59**, 1231—1234.
2. Бланк Я. П., О поверхностях сдвига эллиптического пространства. Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та Харьк. матем. о-ва, 1950, **20**, 61—76.
3. Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Москва, 1962.
4. Курант Р., Уравнения с частными производными. Москва, 1964.
5. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория). Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 63—85.
6. Кильп Х. О., Квазилинейная система типа $S^1{}_{42}$ с различными характеристиками, определяемая изотермической поверхностью, заданной в $\mathbf{R}^3$. Настоящий сборник, стр. 119—126.

Поступило
22 IV 1974

RUUMI R^4 NULLISE GAUSSI KÕVERUSE JA VÄÄNDEGA KAHEMÕÕTMELIST PINDA MÄÄRAVAD ERINEVATE KARAKTERISTIKUTEGA $S^1{}_{42}$ TÜÜPI KVAASILINEAARSED SÜSTEEMID (GEOMEETRILINE TEOORIA)

H. Kilp

Resümee

Samuti nagu eelmises töös [6] annab autor siin oma artiklis [4] välja-arendatud kahe sõltumatu muutujaga esimest järku osatuletistega m diferentsiaalvõrrandi süsteemide üldise teooria põhitulemuste rakendusi ühe konkreetse ülesande käsitlemisest tulenenud süsteemi puhul. Vaadeldakse neljamõõtmelise eukleidilise ruumi nullise Gaussi kõveruse ja väändega kahemõõtmelisi pindu määravat kaht süsteemi, mis saadakse baasivormide kahe erineva valiku korral. Uuritakse nende süsteemide omadusi selliste mõistete valguses nagu vahelpealsed integraalid, karakteristikute kolmkangas ja sellega seotud afiinne seostus, säilituvusseadused ning üldistatud voolufunktsioonid.

QUASI-LINEAR SYSTEMS WITH DIFFERENT CHARACTERISTICS OF TYPE $S^1{}_{42}$ DETERMINING A TWO-DIMENSIONAL SURFACE OF ZERO GAUSSIAN CURVATURE AND TORSION IN SPACE R^4 (GEOMETRIC THEORY)

H. Kilp

Summary

As in the previous paper [6] the author here puts forward some applications of the main results in general theory of m first deqree equations with two independent variables developed in her paper [4]. The properties of two systems, that determine two-dimensional surfaces of zero Gaussian curvature and torsion in four-dimensional Euclidean space and correspond to two different sets of basic forms, are investigated in the light of such notions as intermediate integrals, affine connections related to three fields of characteristics and generalized current functions.

О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕЗУСЛОВНОГО ШАУДЕРОВА РАЗЛОЖЕНИЯ В БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ

Э. Оя

Кафедра математического анализа

В статье [9] мы определили безусловное шаудерово разложение (см. определение 1) для отделимого локально выпуклого пространства, которое обобщает понятие безусловного базиса. Одним из хорошо известных обобщений банахова пространства с безусловным базисом является циклическое пространство ([16, 17]; см. определение 3). Недавно А. И. Векслер [2] показал, что циклическое пространство может быть превращено в банахову структуру. В настоящей статье изучается вопрос о существовании безусловного шаудерова разложения в банаховых структурах. Вводится понятие $(m\infty)$-пространства (см. определение 4), которое оказывается весьма полезным при изучении этого вопроса. Доказывается, например, что любое банахово $K_\sigma N$-пространство, которое не является $(m\infty)$-пространством, имеет безусловное шаудерово разложение (см. теорему 2). Кстати, отсюда вытекает существование безусловного шаудерова разложения для всякого циклического пространства (см. следствие 4). Значит, понятие банахова пространства с безусловным шаудеровым разложением обобщает понятие циклического пространства. С другой стороны, показывается, что $(m\infty)$-пространства не могут иметь безусловных шаудеровых разложений определенного типа (см. теоремы 3 и 4 и следствие 5).

Определение 1 (см. [15, 9]). *Шаудеровым разложением банахова пространства*[1] *X называется такая последовательность*[2] *(P_n) непрерывных ненулевых проекторов в пространстве X, что*

$$P_k \circ P_n = 0, \text{ если } k \neq n, \text{ и } x = \Sigma P_n x \text{ для каждого } x \in X,$$

где ряд сходится по норме. Шаудерово разложение (P_n) пространства X называется безусловным, если ряд $\Sigma P_n x$ безусловно сходится[3] *к $x \in X$.*

---

[1] Рассматриваются бесконечномерные пространства.

[2] Если пределы изменения индексов не указаны, то индексы пробегают все значения 1, 2, ...

[3] По поводу безусловной сходимости см. [4], стр. 102 и 124; [8], стр. 119.

Мы будем рассматривать шаудеровы разложения в банаховых структурах, согласованные в известном смысле с упорядочением данной банаховой структуры[4]. Установим сначала некоторые простые свойства таких шаудеровых разложений.

Определение 2. *Шаудерово разложение* (P_n) *банаховы структуры* X *будем называть дизъюнктным, если* $P_k X \mathrm{d} P_n X$ *при* $k \neq n$.

Предложение 1. *Дизъюнктное шаудерово разложение является безусловным.*

Доказательство. Пусть $x = \Sigma P_k x$. Так как $\left|\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} P_k x\right| = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} |P_k x|$, то из (b)-непрерывности структурных операций вытекает сходимость ряда $\Sigma |P_k x|$. А тогда при любой расстановке знаков $\lambda_k = \pm 1$ частичные суммы ряда $\Sigma \lambda_k P_k x$ образуют (b)-фундаментальную последовательность. В силу (b)-полноты пространства X ряд $\Sigma \lambda_k P_k x$ сходится, т. е. ряд $\Sigma P_k x$ сходится безусловно.

Предложение 2. *Пусть для шаудерова разложения* (P_n) *банаховой структуры* X *найдется целое число* $m \geqslant 0$ *такое, что*[5] $QX\mathrm{d}(I - Q)X$, *где* $Q = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant m} P_k$, *и* $P_n > 0$ *при* $n > m$. *Тогда* (Q_n), *где* $Q_1 = Q$ *и* $Q_n = P_{n+m-1}$ *при* $n \geqslant 2$, *является дизъюнктным шаудеровым разложением пространства* X.

Доказательство. Из определения ясно, что (Q_n) будет шаудеровым разложением пространства X. Проверим его дизъюнктность. Поскольку $Q_n x = (I - Q) Q_n x$ при $n \geqslant 2$, то $Q_1 X \mathrm{d} Q_n X$ для $n \geqslant 2$. Положим $x = |Q_k y| \wedge |Q_n z|$, где $k, n \geqslant 2$ и $k \neq n$. Так как $0 \leqslant x \leqslant Q_k(|Q_k y|)$ и $x \leqslant Q_n(|Q_n z|)$, то $x \mathrm{d} Q_1 X$ и (ввиду положительности Q_i) $Q_i x = 0$ при $i \geqslant 2$, т. е. $x = Q_1 x = 0$. Значит, $Q_k X \,\mathrm{d}\, Q_n X$. Предложение доказано.

Если же $m = 0$ (в обозначениях предложения 2), то разложение (P_n) можно охарактеризовать еще точнее.

Предложение 3. *Если все проекторы* P_n *шаудерова разложения* (P_n) *банаховой структуры* X *положительны, то они являются операторами проектирования в* K*-линеале*[6] X.

Доказательство. Если $x \geqslant 0$, то $x \geqslant P_k x$, поскольку $x = \Sigma P_k x$ и $P_k x \geqslant 0$. Тогда и $0 \leqslant Q_k x \leqslant x$, где $Q_k = I - P_k$. Рассмотрим проектор P_k. Положим $X_k = \{x \in X\colon\ P_k x = x\}$ и $Y_k = \{x \in X\colon\ Q_k x = x\}$. Дословно повторяя первую часть доказательства утверждения 2.23 главы III из [5], мы установим, что X_k и Y_k являются компонентами K-линеала X. Покажем,

---

[4] Мы будем в основном пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в монографии [3]. Отметим одно исключение: символ Σ всюду указывает на сходимость по норме.

[5] Через I обозначим единичное отображение в пространстве X, через O — нулевое отображение.

[6] Определения компоненты и проекции элемента на компоненту (см. [3], стр. 97 и 98) имеют смысл в любом K-линеале.

что Y_k является дизъюнктным дополнением компоненты X_k. Поскольку $0 \leqslant P_k(|x|) \leqslant |x|$, то из $x\mathrm{d}X_k$ следует, что $P_k(|x|) = 0$. Но тогда $P_k(x_+) = P_k(x_-) = 0$; значит $P_kx = 0$, т. е. $x \in Y_k$. С другой стороны, из нормальности X_k и Y_k вытекает, что $z = |P_kx| \wedge |Q_ky| \in X_k \cap Y_k$, т. е. $z = 0$. Теперь, так как для любого $x \in X$ имеем $x = P_kx + Q_kx$, то по теореме о единственности представления [7]

$$P_kx = \mathrm{Pr}_{X_k}x, \qquad x \in X.$$

Таким образом, P_k — оператор проектирования.

Переходим к доказательству существования безусловного шаудерова разложения в KN-пространствах с непрерывной нормой [8].

Лемма 1. *Во всяком бесконечномерном KN-линеале X существует последовательность попарно дизъюнктных ненулевых элементов.*

Доказательство. Рассмотрим множество S_d всех дискретных элементов [9] $x \in X$ таких, что $x > 0$ и $\|x\| = 1$. Так как в X выполнен принцип Архимеда (см. [3], стр. 192), то элементы множества S_d являются попарно дизъюнктными. Действительно, если x и y из архимедова K-линеала дискретны, то или $x\mathrm{d}y$ или $x = \lambda y$ при некотором λ (см. [3], стр. 88), но второе условие в множестве S_d не выполняется. Если S_d будет бесконечным множеством, то оно содержит требуемую последовательность. А если S_d — конечное множество, то (ввиду бесконечномерности пространства X) существует [10] $0 < u \notin \mathrm{lm}\, S_d$. Так как u не дискретен, то существуют y_1 и z_1 такие, что $y_1\mathrm{d}z_1$ и $0 < y_1, z_1 \leqslant u$. Покажем, что, по крайней мере, y_1 можно выбрать так, что $y_1 \notin \mathrm{lm}\, S_d$. Действительно, допустим, что $z_1 \in \mathrm{lm}\, S_d$. Мы можем считать, что z_1 дискретен, так как для него существует дискретный элемент x, удовлетворяющий условию $0 < x \leqslant z_1$. Тогда найдется такое число $\lambda > 0$, что $u - \lambda z_1 > 0$ и $(u - \lambda z_1)\mathrm{d}z_1$ (см. [3], стр. 88). Положим $y_1 = u - \lambda z_1$. Так как $u = y_1 + \lambda z_1 \notin \mathrm{lm}\, S_d$, то $y_1 \notin \mathrm{lm}\, S_d$. Аналогичным образом находим y_2 и z_2 такие, что $y_2\mathrm{d}z_2$, $0 < y_2$, $z_2 \leqslant y_1$ и $y_2 \notin \mathrm{lm}\, S_d$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательности (y_n) и (z_n), при которых выполняются соотношения [11] $0 < y_n$, $z_n \leqslant y_{n-1}$ и $y_n\mathrm{d}z_n$, из которых вытекает, что (z_n) — последовательность попарно дизъюнктных элементов.

Лемма 2. *Если в банаховом KN-пространстве X с непрерывной нормой задана последовательность (z_n) попарно дизъюнкт-*

---

[7] Эта теорема (см. [3], стр. 99) имеет место [6] в любом K-линеале.

[8] Норма в KN-линеале X называется *непрерывной*, если она удовлетворяет условию: $x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0$.

[9] Элемент x K-линеала X называется *дискретным*, если не существует дизъюнктных между собой элементов $y > 0$ и $z > 0$ таких, что $y \leqslant |x|$ и $z \leqslant |x|$.

[10] Символ $\mathrm{lm}\, Y$ обозначает линейную оболочку множества $Y \subset X$.

[11] Считаем $y_0 = u$.

ных ненулевых элементов, то существует безусловное шаудерово разложение (P_n) *пространства* X *такое, что* $P_n > 0$ *и* $z_n \in P_n X$.

Доказательство. Положим $y_n = |z_n|/(2^n \|z_n\|)$. Поскольку $y_n \leqslant \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant m} y_k$, где $m \geqslant n$, и ряд Σy_k сходится, последовательность (y_n) ограничена по упорядочению. Положим $u = \bigvee y_n$. Рассмотрим компоненту X_u, порожденную элементом u. Компонента X_u является K-пространством с единицей u относительно индуцированного из X упорядочения, а попарно дизъюнктные элементы y_n образуют полное множество в X_u. Тогда компоненты $X_n \subset X_u$, порожденные соотвественно элементами y_n, образуют разложение пространства X_u и любой $x \in X_u$ представим в виде $x = \mathrm{S} Q_n x$, где Q_n — оператор проектирования пространства X_u на компоненту X_n (см. [3], стр. 107). Ввиду непрерывности нормы $x = \Sigma Q_n x$ при всех $x \in X_u$.

Если теперь оператор проектирования пространства X на компоненту X_u обозначить через P, то положительные проекторы $P_1 = Q_1 \circ P + I - P$, $P_2 = Q_2 \circ P$, $P_3 = Q_3 \circ P, \ldots$ образуют шаудерово разложение пространства X, которое в силу предложений 2 и 1 будет безусловным. При этом $z_n \in P_n X$, так как $y_n \in P_n X$.

Из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема 1. *Во всяком банаховом* KN*-пространстве с непрерывной нормой существует безусловное шаудерово разложение* (P_n), *где* $P_n > 0$.

Следствие 1. *Любое* KB*-пространство имеет безусловное шаудерово разложение* (P_n), *где* $P_n > 0$.

Замечание. Ввиду теоремы 1 из [9], любое безусловное шаудерово разложение KB-пространства является ограниченно полным[12], так как в KB-пространстве нет подпространства, изоморфного[13] c_0 (см. [6]).

Следствие 2. *Всякая банахова структура содержит подпространство с натягивающим или ограниченно полным безусловным базисом*[14].

Доказательство. Если банахова структура X содержит подпространство Z, изоморфное c_0, то Z — пространство с натягивающим безусловным базисом. Если же в X нет подпространства, изоморфного c_0, то X является KB-пространством [6] и (в силу следствия 1 и замечания к нему) имеет ограниченно полное безусловное шаудерово разложение (P_n). Возь-

---

[12] Шаудерово разложение (P_n) банахова пространства X называется *ограниченно полным,* если каждая ограниченная последовательность $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится.

[13] Здесь и всюду в дальнейшем термин «изоморфизм» будет использоваться только в смысле теории нормированных пространств.

[14] По поводу натягивающего, ограниченно полного и безусловного базисов см. [4], стр. 119—129.

мем произвольные ненулевые $x_n \in P_n X$. Из определений безусловных шаудеровых разложения и базиса и ограниченной полноты вытекает, что (x_n) является ограниченно полным безусловным базисом для[15] $\mathrm{clm}\,\{x_n\}$.

Замечание. Следствие 2 показывает, что гипотеза (см. [8], стр. 160) «всякое банахово пространство содержит подпространство с безусловным базисом» справедлива для банаховых пространств, имеющих подпространство, изоморфное банаховой структуре. О возникновении этой гипотезы см. [8], стр. 160—161.

Рассмотрим KN-линеал X. Введем следующие обозначения[16]: $X^1 = X^*$, $X^2 = X^{**}$, ... Недавно Ю. А. Абрамович и Г. Я. Лозановский [1] показали, что X^{2n+1} является KB-пространством при каждом $n = 0, 1, \ldots$, если X удовлетворяет условию[17]

$$\varliminf \frac{1}{n} \|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| = 0, \tag{S}$$

где $x_i \geqslant 0$ и $\|x_i\| \leqslant 1$. Таким образом, имеет место

Следствие 3. *Если KN-линеал X удовлетворяет условию (S), то пространство X^{2n+1}, где $n = 0, 1, \ldots$, имеет ограниченно полное безусловное шаудерово разложение (P_n) с $P_n > 0$.*

Замечание. Следствие 3 обобщает аналогичный результат Резерфорда [14]. У Резерфорда $X = m$ (очевидно, что (S) выполняется в m и, вообще, в любом KN-линеале ограниченных элементов) и он доказывает существование ограниченно полного шаудерова разложения в пространствах X^{2n+1} с помощью известной теоремы Бессаги и Пелчинского (см. [11], теорема 4): банахово пространство X имеет топологически дополняемое подпространство, изоморфное l_1, тогда и только тогда, когда в X^* существует подпространство, изоморфное m.

Определение 3 (см. [10, 2]). *Банахово пространство X с σ-полной булевой алгеброй $\mathfrak{B}$ коммутирующих непрерывных проекторов[18] называется циклическим пространством $(X, \mathfrak{B}, e)$, если существует $e \in X$, для которого $X = \mathrm{clm}\,\{Ae\colon A \in \mathfrak{B}\}$, и выполняется условие: если $A = \bigvee \{A_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, то $AX = \mathrm{clm}\,\{A_\alpha X\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$.*

Поскольку всякое циклическое пространство $(X, \mathfrak{B}, e)$ согласно [2] может быть превращено в банахово KN-пространство с единицей и непрерывной нормой, то, имея в виду это отношение порядка и выбирая в качестве (z_n) (см. лемму 2) полную в X последовательность попарно дизъюнктных элементов, получим

Следствие 4. *В любом циклическом пространстве $(X, \mathfrak{B}, e)$ существует безусловное шаудерово разложение $(P_n) \subset \mathfrak{B}$.*

---

[15] Символ $\mathrm{clm}\,Y$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $Y \subset X$.

[16] Символ X^* обозначает сопряженное пространство пространства X.

[17] В [1] приводятся и другие условия, эквивалентные (S).

[18] Булевы операции определяются соотношениями: $A \vee B = A + B - AB$, $A \wedge B = AB$; роль единицы играет I, роль нуля — 0.

Непрерывность нормы не является необходимым условием существования безусловного шаудерова разложения в банаховом $K_\sigma N$-пространстве. Действительно, рассмотрим множество $S(X)=\{(x_n)\colon\ x_n\in X,\quad (\|x_n\|)\in S\}$, где $S=c_0$ или $S=l_p$ $(p\geqslant 1)$ и X — некоторое банахово $K_\sigma N$-пространство, норма которого не является непрерывной. Множество $S(X)$, наделенное нормой $\|(x_n)\|=\|(\|x_n\|)\|_S$ и упорядоченное положительным конусом $K=\{(x_n)\in S(X)\colon\ x_n\geqslant 0\}$, оказывается банаховым $K_\sigma N$-пространством, норма которого не является непрерывной. Но $S(X)$ имеет безусловное шаудерово разложение (P_n), если P_n определить соотношением $P_n(x_k)=(\delta_{nk}x_k)$.

Чтобы выделить класс банаховых $K_\sigma N$-пространств с безусловным шаудеровым разложением, введем следующее

Определение 4. *Будем говорить, что банахова структура X является $(m\infty)$-пространством, если при любом непрерывном положительном бесконечномерном проекторе $P\colon X\to X$ пространство PX содержит подпространство, изоморфное пространству m.*

Теорема 2. *Если банахово $K_\sigma N$-пространство X не является $(m\infty)$-пространством, то оно имеет безусловное шаудерово разложение (P_n), где $P_n>0$ при $n\geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть P — такой положительный непрерывный проектор в X, что бесконечномерное пространство PX не содержит подпространства, изоморфного m. Пространство PX, как подпространство пространства X, является частично упорядоченным банаховым пространством. Если определить для любых $x,y\in PX$ их супремум по формуле

$$x\vee_1 y=P(x\vee y),$$

то PX превращается в K-линеал. Покажем, что PX является K_σ-пространством. Допустим, что последовательность $(x_n)\subset PX$ ограничена по упорядочению в PX. Тогда существует $\bigvee x_n=z$. Так как $x_n\leqslant Pz$ и из соотношения $x_n\leqslant y\in PX$ вытекает $z\leqslant y$, следовательно, $Pz\leqslant y$, то $Pz=\bigvee_1 x_n$. В PX можно ввести эквивалентную монотонную норму (см. [3], стр. 194), поскольку первоначальная норма следующим образом согласована с упорядочением: если $\|x_n\|\to 0$, а $|y_n|_1\leqslant|x_n|_1$, где $|x|_1$ — модуль элемента $x\in PX$, то и $\|y_n\|\to 0$. В самом деле, $|x|_1=x\vee_1(-x)=P(|x|)\geqslant|Px|=|x|$, так что $|y_n|\leqslant|y_n|_1\leqslant|x_n|_1=P(|x_n|)$. Отсюда вытекает, что $\|y_n\|\leqslant\|P\|\|x_n\|$, т. е. из $\|x_n\|\to 0$ следует $\|y_n\|\to 0$. Обозначим через Y пространство PX с его структурой K-линеала и эквивалентной монотонной нормой. Таким образом, Y является банаховым $K_\sigma N$-пространством с непрерывной нормой, поскольку в нем нет подпространства, изоморфного m (см. [7]). По теореме 1 в Y существует безусловное шаудерово разложение (Q_n) с $Q_n>0$. Положим $P_1=I-P$ и $P_n=T^{-1}\circ Q_{n-1}\circ T\circ P$ для $n\geqslant 2$, где $T\colon PX\to Y$

— тождественное отображение на PX. Проекторы (P_n) образуют требуемое разложение пространства X. Теорема доказана.

Теперь легко привести примеры $(m\infty)$-пространств. Именно, $(m\infty)$-пространствами являются все банаховы $K_\sigma N$-пространства, в которых нет шаудерова разложения. Единственные известные нам примеры таких пространств исчерпываются теми, которые были найдены Дином [13]. По результатам Дина можно сказать, что пространства, изометричные $C(H)$, где H — экстремальный бикомпакт, т. е. KN-пространства ограниченных элементов, являются $(m\infty)$-пространствами.

В заключение статьи установим несколько результатов, в некотором смысле обратных по отношению к теореме 2.

Теорема 3. *Если $(m\infty)$-пространство X имеет шаудерово разложение (P_n) такое, что $P_n > 0$ при $n \geqslant m$, где m — некоторое натуральное число, то (P_n) является ограниченно полным* [12] *и натягивающим* [19].

Доказательство. Положим $P = I - \Sigma_{1 \leqslant n \leqslant m-1} P_n$. Очевидно, что P — положительный непрерывный проектор. Точно так же, как в доказательстве теоремы 2, превратим PX в банахову структуру Y и обозначим через $T : PX \to Y$ тождественное отображение на PX. Введем проекторы $Q_n = T \circ P_{m+n-1} \circ T^{-1}$. Легко проверяется, что (Q_n) — шаудерово разложение для Y. Так как $Q_n > 0$, то шаудерово разложение (Q_n) является дизъюнктным (по предложению 2) и поэтому безусловным (по предложению 1).

Допустим сначала, что (P_n) не ограниченно полно. Тогда и (Q_n) будет таким же (см. [12], лемма 3.2). По теореме 1 из [9] существуют такие $z_i = U_{\sigma(i)} z_i \neq 0$, где $U_{\sigma(i)} = \Sigma_{k \in \sigma(i)} Q_k$ и $\sigma(i)$ — попарно непересекающиеся конечные подмножества натурального ряда, что $Z = \mathrm{clm}\,\{z_i\} \subset Y$ изоморфно пространству c_0. При этом выполняются неравенства

$$K_1 \sup |t_i| \leqslant \| \sum t_i z_i \| \leqslant K_2 \sup |t_i|, \tag{1}$$

где $(t_i) \in c_0$ и $K_1, K_2 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от (t_i). Так как

$$\| \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} |t_i z_i| \| = \| \sum_{i=1}^{n} |t_i| |z_i| \| = \| \sum_{i=1}^{n} t_i |z_i| \|,$$

то элементы z_i можно считать положительными. Тогда для каждого z_i существует такой положительный функционал $g_i \in Y^*$, что $g_i(z_i) = 1$ и $\|g_i\| = 1/\|z_i\| \leqslant 1/K_1$. Теперь можем, полагая $h_i = g_i \circ U_{\sigma(i)}$ и повторяя рассуждения из доказательства до-

---

[19] Шаудерово разложение (P_n) банахова пространства X называется *натягивающим*, если (P_n^*), где P_n^* — сопряженный оператор оператора P_n, является шаудеровым разложением пространства X^* в топологии, порожденной нормой.

статочности теоремы 1 из [9], построить непрерывный проектор S пространства Y на Z, который, благодаря положительности функционалов h_i и элементов z_i, будет положительным. Но тогда существование проектора $T^{-1} \circ S \circ T \circ P$ в X противоречит предположению теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается совершенно аналогично предыдущей. В самом деле, если допустить, что (P_n) — не натягивающее шаудерово разложение, то и (Q_n) не натягивающее (см. [12], лемма 3.2). Тогда по теореме 2 из [9] существуют такие ненулевые элементы $z_i = U_{\sigma(i)} z_i$, что $Z = \operatorname{clm}\{z_i\}$ изоморфно пространству l_1. При этом справедливы неравенства, аналогичные (1), только вместо норм в c_0 — нормы в l_1. Кроме того, и здесь можно считать, что $z_i > 0$. Теперь продолжим доказательство буквально так же, как в первой части, только вместо теоремы 1 из [9] применим теорему 2 из [9].

В связи с теоремой 3 возникает следующая

Проблема 1. *Может ли $(m\infty)$-пространство иметь шаудерово разложение (P_n) такое, что $P_n > 0$ при $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое натуральное число?*

Эта проблема ослабляется, если рассматривать $(m\infty)$-пространства, которые являются, например, $K_\sigma N$-пространствами.

Пока единственные примеры $(m\infty)$-пространств, которые у нас имеются, суть пространства без шаудерова разложения, то возможно и более сильное утверждение.

Проблема 2. *Может ли $(m\infty)$-пространство иметь (дизъюнктное) (безусловное) шаудерово разложение?*

Следующие утверждения касаются проблемы 2.

Теорема 4. *Если банахово $K_\sigma N$-пространство является $(m\infty)$-пространством, то оно не имеет дизъюнктного шаудерова разложения (P_n) такого, чтобы бесконечно многие из $P_n X$ содержали дискретный элемент.*

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что $0 \neq x_k \in P_{n(k)} X$, где $n(k) < n(k+1)$, — дискретные элементы. Пусть Q_k — оператор проектирования на одномерную (в силу теоремы IV. 12.1 из [3]) компоненту, порожденную элементом x_k. Введем проекторы S_n, отображающие X в $Y = \operatorname{clm}\{x_k\}$, соотношением $S_n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} Q_k$. Поскольку они являются операторами проектирования, то они положительны и $\|S_n\| = 1$. Так как $Q_k(P_n x) = 0$ при $n \neq n(k)$ и любом $x \in X$ (ввиду дизъюнктности (P_n)), то существует $\lim S_n x$ на всюду плотном в X множестве $\{\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} P_k x\colon x \in X,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Теперь по теореме Банаха—Штейнгауза заключаем, что предел $\lim S_n x = Sx$ существует для всех $x \in X$ и отображение S — непрерывный проектор пространства X на Y. Кроме того, из $S_n > 0$ вытекает $S > 0$. Так как в сепарабельном пространстве $Y = SX$ нет подпространства, изоморфного m, то мы приходим к противоречию.

Следствие 5. *Если дискретное*[20] *банахово $K_\sigma N$-пространство является $(m\infty)$-пространством, то оно не имеет дизъюнктного шаудерова разложения.*

Доказательство. Покажем, что если дискретное пространство X имеет дизъюнктное шаудерово разложение (P_n), то дискретные элементы содержатся в бесконечно многих из P_nX. Сначала отметим, что для любого дискретного элемента $0 \neq x \in X$ найдется число n такое, что $x \in P_nX$. Действительно, так как $x = \Sigma P_kx$, то $|x| = \Sigma |P_kx|$. Поскольку $|x| \geqslant |P_kx|$, то по дискретности элемента x имеем $P_kx = 0$ при всех k, кроме одного. Если теперь допустить, что все дискретные элементы содержатся в множестве $\bigcup_{n\leqslant m} P_nX$, то произвольный элемент вида

$$P_kx = \mathbf{S}_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha,$$

где $k > m$ и x_α — дискретные элементы, равняется нулю, так как $P_kx \,\mathrm{d}\, x_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Но это противоречит условию $P_k \neq 0$ в определении шаудерова разложения.

Замечание. Из предложения 2 и следствия 5 вытекает, что если дискретное банахово $K_\sigma N$-пространство X имеет шаудерово разложение, удовлетворяющее условию предложения 2, то X не является $(m\infty)$-пространством.

Литература

1. Абрамович Ю. А., Лозановский Г. Я., О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов. Матем. заметки, 1973, **14**, № 5, 723—732.
2. Векслер А. И., Банаховы циклические пространства и банаховы структуры. Докл. АН СССР, 1973, **213**, № 4, 770—773.
3. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
4. Дэй М., Нормированные линейные пространства. Москва, 1961.
5. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
6. Лозановский Г. Я., О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности. Докл. АН СССР, 1968, **183**, № 3, 521—523.
7. Лозановский Г. Я., Меклер А. А., Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 11, 47—53.
8. Мильман В. Д., Геометрическая теория пространств Банаха, ч. I, Теория базисных и минимальных систем. Успехи матем. наук, 1970, **25**, № 3, 113—173.

---

[20] *Дискретным* называется K-линеал X, если каждый $x \in X$ представим в виде

$$x = \mathbf{S}_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha,$$

где x_α — дискретные элементы. (Здесь определение дискретного K-пространства (см. [5], стр. 104) перенесено на случай K-линеала.)

9. О я Э., Безусловные шаудеровские разложения и рефлексивность бочечных пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 122—134.
10. B a d e, W. G., On Boolean algebras of projections and algebras of operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, 345—359.
11. B e s s a g a, C z., P e l c z y n s k i, A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia math., 1958, **17**, № 2, 151—164.
12. C h a d w i c k, J. J. M., Schauder decompositions in non-separable Banach spaces. Bull. Austral. Math. Soc., 1972, **6**, № 1, 133—144.
13. D e a n, D. W., Schauder decompositions in (m). Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, № 4, 619—623.
14. R e t h e r f o r d, J. R., Some remarks on Schauder bases of subspaces, II. Rev. roum. math. pures et appl., 1968, **13**, № 4, 521—527.
15. R u c k l e, W. H., The infinite sum of closed subspaces of an F-space. Duke Math. J., 1964, **31**, № 3, 543—554.
16. T z a f r i r i, L., Reflexivity of cyclic Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**, № 1, 61—68.
17. T z a f r i r i, L., Reflexivity in Banach lattices and their subspaces. J. Funct. Anal., 1972, **10**, № 1, 1—18.

Поступило
31 X 1974

TINGIMATU SCHAUDERI LAHUTUSE OLEMASOLU BANACHI VÕREDES

E. Oja

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis leitakse Banachi võrede klass, milles on olemas tingimatu Schauderi lahutus. Uuritakse ka, missugustes Banachi võredes ei saa olla teatud tüüpi Schauderi lahutusi.

ON THE EXISTENCE OF UNCONDITIONAL SCHAUDER DECOMPOSITIONS IN BANACH LATTICES

E. Oja

S u m m a r y

A sequence of continuous projections (P_n), $n = 1, 2, \ldots$, in a Banach space X is called an *unconditional Schauder decomposition of* X iff $P_k \cdot P_n = 0$ when $k \neq n$ and for each $x \in X$ the series $\Sigma P_n x$ unconditionally converges to x. We say that a Banach lattice X is a $(m\infty)$*-space* iff for any monotone infinite-dimensional continuous projection P in X the space PX contains a subspace isomorphic to m. The next existence-theorem (Theorem 2) is proved. *If a boundedly σ-complete Banach lattice X is not a $(m\infty)$-space then X has an unconditional Schauder decomposition (P_n) with monotone P_n for $n \geqslant 2$.* It follows from this theorem that *any cyclic space has an unconditional Schauder decomposition.* On the other hand, Theorem 3 asserts: *if a $(m\infty)$-space X has a Schauder decomposition (P_n) with monotone P_n for $n \geqslant n_0$ then (P_n) is shrinking and boundedly complete.* It is also shown (Corollary 5) that *any discrete boundedly σ-complete $(m\infty)$-space X does not have a Schauder decomposition (P_n) such that $|P_k x| \wedge |P_n y| = 0$ when $k \neq n$ and $x, y \in X$.* Finally, let us mention one more result (Corollary 2). *Every Banach lattice contains a subspace with a shrinking or boundedly complete unconditional basis*

ЯДРО КНОППА И ЯДРО ПОЧТИ-СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ m. II

Л. Лооне

Кафедра математического анализа

Понятие ядра элемента в отделимом локально выпуклом пространстве E введено в статье [2]. Там же введены понятия сходящегося по ядру элемента и ограниченного по ядру элемента.

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над **R** или **C**, и E' — топологически сопряженное пространство к E. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый фильтр в E' с базисом $\mathfrak{B} = \{K_i : i \in I)$ из выпуклых слабо замкнутых множеств. Пусть

$$K_i(x) = \{\langle x, f\rangle : f \in K_i\}.$$

Пересечение замыканий множеств $K_i(x)$, где $i \in I$, называется *ядром $K(x)$ элемента x по фильтру $\mathfrak{F}$.* Говорят, что элемент *$x \in E$ ограничен по ядру, если ядро $K(x)$* является непустым и ограниченным множеством. Если ядро $K(x)$ содержит только один элемент, то говорят, что *x сходится по ядру.* Как доказано в статье [3], в бэровском пространстве, в случае счетного I, пространство ограниченных элементов E_m или равняется пространству E или является в нем множеством первой категории. При этом, если $E = E_m$, то найдется слабо бикомпактное множество K, такое что $K(x) = \{\langle x, f\rangle : f \in K\}$ совпадает с ядром элемента x (см. [2], предложение 1, и [3], предложение 5).

В статье [4] мы рассматривали два ядра в пространстве m всех ограниченных последовательностей. Оба эти ядра определены фильтрами со счетным базисом, и при этом множество ограниченных элементов по этим ядрам совпадает с простран-
§ 3). Это ядро, определенное слабо бикомпактным множеством
ством m. Одним из этих ядер является *ядро Кноппа* (см. [2],
K° всех таких элементов f из m', которые удовлетворяют условиям

$$1^\circ\ \langle e_\nu, f\rangle = 0, \quad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{0.1}$$

$$2^\circ\ \langle e,\ f\rangle = 1, \tag{0.2}$$

$$3^\circ\ \|f\| \ = 1. \tag{0.3}$$

Второе ядро, рассмотренное в **[4]**, это — *ядро почти-сходимости*, которое определено множеством F всех банаховых функционалов, т. е. множеством всех функционалов из K°, удовлетворяющих кроме (0.1)—(0.3) еще следующему условию

$$4^\circ \ \langle Sx - x, f\rangle = 0 \qquad \forall x \in m, \tag{0.4}$$

где S — оператор левого сдвига (т. е. если $x = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$, то $Sx = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$). Целью статьи **[4]**, продолжением которой является настоящая, было изучение свойств этих ядер и отношений между ними. К сожалению, в статье [4] имеются некоторые ошибки. На странице 132 в ней перед равенством (1.1) необходимо вставить: «При данном определении порядка для каждого множества H, *содержащего верхние грани всех своих конечных подмножеств* и имеющего верхнюю грань в $\operatorname{Re} m$, и для любой положительной f из $\operatorname{Re} m'$ выполняется равенство

$$\sup_{x \in H} \langle x, f\rangle = \langle \sup H, f\rangle,$$

(см. [1], стр. 239)». Оказывается, что доказательство леммы 1.1 из [4] верно лишь для определенного класса матричных преобразований, в который входят, например, компактные матричные преобразования и все те преобразования, для которых множество $H = \{Ax : \|x\| \leqslant 1\}$ удовлетворяет вышеупомянутому условию.

Основной целью настоящей статьи является изучение структуры множества банаховых функционалов F. В пространстве m' определяется так назывемый метод арифметических средних $\mathfrak{A}$ (см. § 1) и показывается, что множество F является подмножеством всех $f \in K^\circ$, которые суммируемы методом $\mathfrak{A}$. При помощи этого результата пересматриваются также доказательства предложений 3.2—3.4 из [4], где применялась лемма 1.1 и выясняется, что предложение 3.2 из [4] остается верным в общем случае.

Однако, в предложении 3.3 из [4] условие (3.14) и в предложении 3.4 из [4] условия (3.18) и (3.19) не являются необходимыми (см. предложения 2.2—2.3 в настоящей статье). Автор выражает свою благодарность С. А. Рудакову (Уральский госуниверситет), обратившему на это внимание.

В дальнейшем нам потребуются следующие результаты.

Предложение 0.1. *Пусть K — множество в пространстве m', топологически сопряженном к пространству m. Пусть A — линейный непрерывный оператор*[1] *на m и пусть $K_A = \{{}^tAf : f \in K\}$, где ${}^tA$ — сопряженный оператор к A. Если K — слабо биком-*

[1] Мы говорим, что A — *оператор на* m, если $A : m \to m$. Для матричного преобразования $A = (a_{nk})$ это значит, что $\sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| \leqslant \infty$.

пактное множество, определяющее ядро в m, то и K_A определяет ядро в m, причем $K(Ax) = K_A(x)$ для каждого $x \in m$.

Доказательство см. [2], стр. 129.

Предложение 0.2. *Пусть K_1 и K_2 — слабо бикомпактные множества в m', определяющие ядра в m. Для того чтобы $K_1(x) \subset K_2(x)$ для всех $x \in m$, необходимо и достаточно, чтобы $K_1 \subset K_2$.*

Доказательство см. [2], предложение 2.

Предложение 0.3. *Пусть $A = (a_{nk})$ — матричное преобразование на m.*

I. *Для того чтобы A преобразовала все ограниченные последовательности в нульпоследовательность*[2], *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0. \tag{0.5}$$

II. *Для того чтобы A преобразовало все ограниченные последовательности в почти-нульпоследовательность, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_m \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_k \Big| \sum_{i=n}^{n+m} a_{ik} \Big| = 0. \tag{0.6}$$

Доказательство см. в статье [5], теорема 4.

§ 1. Множество банаховых функционалов

Рассмотрим в пространстве m' всех непрерывных на m линейных функционалов g последовательности $\mathfrak{z} = \{g_k\}$ с $g_k = {}^tS_k g$, где S_k есть k-кратный оператор левого сдвига, т. е. $S_k x = \{\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots\}$ и ${}^tS_k$ — сопряженный оператор к S_k.

Рассмотрим *метод $\mathfrak{A}$ арифметических средних* на множестве последовательностей $\mathfrak{z}$ как оператор, который преобразует последовательность $\mathfrak{z}$ в последовательность $\mathfrak{A}\mathfrak{z} = \{{}^tT_m g\}$, где

$${}^tT_m g = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} {}^tS_k g. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что функционал g *суммируем методом* $\mathfrak{A}$, если последовательность $\mathfrak{A}\mathfrak{z}$ сходится поточечно.

Если $g \in K^\circ$ или $g \in F$, то и $\mathfrak{A}\mathfrak{z} \subset K^\circ$ или соответственно $\mathfrak{A}\mathfrak{z} \subset F$. В самом деле, если $g \in K^\circ$, то полагая $e_{-n} = \{0, 0, \ldots\}$ для каждого n, получаем

1° $\langle e_k, {}^tT_m g\rangle = \langle T_m e_k, g\rangle = \langle e_{k-m}, g\rangle = 0,$

2° $\langle e, {}^tT_m g\rangle = \langle T_m e, g\rangle = \langle e, g\rangle = 1,$

3° $\|{}^tT_m g\| \leqslant \|T_m\| \, \|g\| = 1,$

откуда, учитывая что $\langle e, {}^tT_m g\rangle = 1$, вытекает, что $\|{}^tTg\| = 1$.

---

[2] Мы говорим, что $x = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ — *нульпоследовательность*, если $\lim_k \xi_k = 0$.

Если $g \in F$, то

$$4^\circ \ \langle Sx - x, {}^tT_m g\rangle = \langle T_m(Sx - x), g\rangle = \\ = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\langle S_{k+1}x - S_k x, g\rangle = 0.$$

Рассмотрим оператор арифметических средних на элементах из K°.

Предложение 1.1. *Для любого $g \in K^\circ$ все предельные точки последовательности $\mathfrak{A}g$ являются банаховыми функционалами.*

Доказательство. Пусть t — некоторая предельная точка последовательности $\mathfrak{A}g$, т. е. найдется возрастающаяся последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел такая, что

$$t = \lim_k \frac{1}{m_k+1}\sum_{k=0}^{k} {}^tS_k g. \tag{1.2}$$

Покажем, что для t выполняются условия (0.1)—(0.4).

Первые три условия вытекают непосредственно из того, что операторы ${}^tT_m g$ удовлетворяют этим условиям. Покажем, что имеет место и (0.4). Действительно

$$|\langle Sx - x, t\rangle| = \lim_k \left|\frac{1}{m_k+1}\sum_{i=0}^{m_k}\langle S_{i+1}x - S_i x, g\rangle\right| = \\ = \lim_k \frac{1}{m_k+1}|\langle (S_{m_k+1} - S_0)x, g\rangle| \leqslant \\ \leqslant \lim_k \frac{2}{m_k+1}\|g\|\,\|x\| = 0.$$

Предложение доказано.

Предложение 1.2. *Подмножество функционалов из K°, суммируемых оператором арифметических средних, совпадает с множеством F всех банаховых функционалов.*

Доказательство. Если $g \in F$, то $\langle x, g_m\rangle = \langle x, g\rangle$ для любого $x \in m$ и $\lim T_m g = g$. Значит, каждый банаховый функционал суммируем оператором арифметических средних, причем пределом является он сам. Наоборот, пусть $g \in K^\circ$, причем существует

$$t = \lim_m \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} {}^tS_k g. \tag{1.3}$$

Покажем, что $g \in F$. Поскольку, по предложению 1.1, элемент $t \in F$, то для $g \in F$ достаточно показать, что $\langle x, t\rangle = \langle x, g\rangle$ для любого $x \in c_F$. Так как

$$t = \lim_m \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} {}^tS_k t, \tag{1.4}$$

и для любого $x \in c_F$ имеет место

$$\lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} S_k x = x$$

(здесь рассматривается сходимость в банаховом пространстве m), то

$$0 = \langle x,\ t - t\rangle = \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \langle S_k x,\ t - g\rangle =$$

$$= \lim_m \left\langle \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} S_k x,\ t - g \right\rangle = \langle x,\ t - g\rangle.$$

Следовательно, предложение доказано.

Следствие 1.2.1. *Опорной*[3] *функцией множества банаховых функционалов является функция*

$$h(x) = \sup_{f \in K^\circ} \left(\overline{\lim_m} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \langle S_k x, f\rangle \right). \tag{1.5}$$

Доказательство. Поскольку из $t \in F$ вытекает (1.4), то $\sup(\langle x, t\rangle : t \in F) \leqslant h(x)$. Докажем и обратное неравенство. Пусть $f \in K^\circ$ и

$$\overline{\lim_m} \left\langle x, \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} {}^tS_k f \right\rangle = \alpha. \tag{1.6}$$

Поскольку $\{\langle T_m x, f\rangle : m \in \mathbf{N}\}$ — числовая последовательность, то найдется возрастающая последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел, такая что

$$\lim_k \langle T_{m_k} x, f\rangle = \alpha.$$

Так как ${}^tT_m f \in K^\circ$ для любого m и K° — слабо бикомпактное множество, то найдется подпоследовательность $\{m_{k(j)}\}$ последовательности $\{m_k\}$ такая, что существует

$$\lim_j \frac{1}{m_{k(j)}+1} \sum_{k=0}^{m_{k(j)}+1} {}^tS_k f = g,$$

причем

$$\langle x, g\rangle = \alpha. \tag{1.7}$$

По предложению 1.1 функционал $g \in F$, и, значит, для любого $f \in K^\circ$ и $x \in m$ найдется $g \in F$ такой, что из (1.6) вытекает (1.7).

Следствие полностью доказано.

---

[3] Функцию $g(x) = \sup\{\langle x, f\rangle : f \in M\}$ называют *опорной функцией* множества M.

§ 2. Ядерное включение матричных методов

Предложение 2.1. *Пусть* $A=(a_{nk})$ *матричное преобразование на* m. *Чтобы для каждого* $x\in m$ *имело место*

$$K^{\circ}(Ax)\subset F(x), \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^{\circ}\ \lim_n a_{nk}=0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{2.2}$$

$$2^{\circ}\ \lim_n \sum_k a_{nk}=1, \tag{2.3}$$

$$3^{\circ}\ \lim_n \sum_n |a_{nk}|=1, \tag{2.4}$$

$$4^{\circ}\ \lim_n \sum_k |a_{nk}-a_{nk+1}|=0. \tag{2.5}$$

Доказательство. По предложениям 0.1 и 0.2 включение (2.1) равносильно включению $F\subset K^{\circ}$.

Необходимость. Поскольку $F\subset K^{\circ}$, то из (0.1)—(0.3) вытекает необходимость условий (2.2)—(2.4). Необходимость условия (2.5) вытекает из соотношения $\cdot$ (0.4). В самом деле,

$$\langle A(Sx-x), f\rangle=0 \quad \forall f\in K^{\circ}, \quad \forall x\in m \tag{2.6}$$

равносильно требованию, чтобы метод $A(S-E)$ преобразовал все элементы из m в c_0. Значит, по предложению 0.3 условия (2.5) и (2.6) равносильны.

Достаточность. Если A удовлетворяет условиям (2.2)—(2.5), то для всякого $f\in K^{\circ}$ функционал $g={}^tAf$ удовлетворяет условиям (0.1)—(0.4), т. е. $g\in F$.

Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Пусть* $A=(a_{nk})$ — *матричное преобразование на* m. *Чтобы для каждого* $x\in m$ *имело место*

$$F(Ax)\subset K^{\circ}(x), \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^{\circ}\ F\text{-}\lim a_{nk}=0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{2.8}$$

$$2^{\circ}\ F\text{-}\lim_n \sum_k a_{nk}=1, \tag{2.9}$$

$$3^{\circ}\ \lim_m \sup_n \sum_k \frac{1}{m+1}\left|\sum_{i=m}^{n+m} a_{ik}\right|=1. \tag{2.10}$$

Доказательство опирается на предложения 0.1 и 0.2. Из них вытекает, что для (2.7) необходимо и достаточно, чтобы

а) $\langle Ae_k, f\rangle=0, \quad \forall f\in F \quad (k=0,\ 1,\ \ldots)$,

б) $\langle Ae, f\rangle=1, \quad \forall f\in F$,

в) $\|{}^tAf\|=1$.

Условия а) и б) равносильны соответственно условиям (2.8) и (2.9).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем, что при условии (2.9) из (2.10) вытекает в). В самом деле, если $f \in F$, то

$$ {}^tAf = \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m} {}^t(S_kA)f. \tag{2.11} $$

Следовательно,

$$ \|{}^tAf\| \leqslant \overline{\lim_m} \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m} {}^t(S_kA)f \right\|. $$

Пусть

$$ A_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m} S_kA. \tag{2.12} $$

Следовательно, для любого f из F

$$ \|{}^tAf\| \leqslant \overline{\lim_m} \|{}^tA_m\| = \overline{\lim_m} \|A_m\|. \tag{2.13} $$

Поскольку

$$ \|A_m\| = \sup_n \sum_k \frac{1}{m+1} \left| \sum_{i=n}^{n+m} a_{ik} \right|, \tag{2.14} $$

то из (2.9), (2.10) и (2.13) вытекает в).

Н е о б х о д и м о с т ь. Докажем от противного. Пусть имеет место (2.7) и

$$ \overline{\lim_m} \|A_m\| = \alpha > 1. \tag{2.15} $$

Пусть $\{n(m)\}$ — любая последовательность натуральных чисел, и

$$ b_{mi} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} & \text{при } n(m) \leqslant i \leqslant n(m)+m \\ 0 & \text{при } n(m) > i \text{ и } n(m)+m < i. \end{cases} \tag{2.16} $$

Метод $B = (b_{mi})$ удовлетворяет условиям предложения 2.1, следовательно,

$$ K^\circ(Bx) \subset F(x) \qquad \forall x \in m. \tag{2.17} $$

Из включения (2.7) вытекает

$$ K^\circ(BAx) \subset K^\circ(x) \qquad \forall x \in m. \tag{2.18} $$

Значит, метод $C = BA$ удовлетворяет условиям теоремы Кноппа, и, следовательно,

$$ \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_k \left| \sum_{i=n(m)}^{n(m)+m} a_{ik} \right| = 1 \tag{2.19} $$

для любой $\{n(m)\}$. Итак, из (2.7) вытекает (2.19), т. е. если имеет место (2.7), то не может иметь места (2.15).

Предложение доказано.

Следствие 2.2.1. *Почти-регулярное преобразование A удовлетворяет условию (2.7) тогда и только тогда, когда*

$$\lim_m \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_k \left| \sum_{i=n}^{n+m} a_{ik} \right| = 1.$$

Предложение 2.3. *Пусть $A = (a_{nk})$ — матричное преобразование на m. Чтобы для каждого $x \in m$ имело место*

$$F(Ax) \subset F(x), \tag{2.20}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^\circ \ F\text{-}\lim_n a_{nk} = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{2.21}$$

$$2^\circ \ F\text{-}\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{2.22}$$

$$3^\circ \ \lim_m \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_k \left| \sum_{i=n}^{n+m} a_{ik} \right| = 1, \tag{2.23}$$

$$4^\circ \ \lim_m \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_k \left| \sum_{i=n}^{n+m} (a_{ik} - a_{ik+1}) \right| = 0. \tag{2.24}$$

Доказательство. По предложению 0.1 включение (2.20) равносильно включению $F_A \subset F$. Поскольку $F \subset K^\circ$, то по определениям F и K° для $F_A \subset F$ необходимо и достаточно, чтобы имели место

а) $F_A \subset K^\circ$,

б) $\langle A(Sx - x), f \rangle = 0, \quad \forall x \in m, \quad \forall f \in F.$

По предложению 2.2 условия (2.21) и (2.23) необходимы и достаточны для а). По предложению 0.3 условие б) равносильно условию (2.24).

Предложение доказано.

Следствие 2.3.1. *Почти-сильное*[4] *регулярное преобразование удовлетворяет условию (2.20) тогда и только тогда, когда*

$$\lim_m \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_k \left| \sum_{i=n}^{n+m} a_{ik} \right| = 1.$$

Доказательство. В самом деле, условия (2.21), (2.22) и (2.24) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы A было почти-сильно регулярным (см. [5], стр. 550—551).

---

[4] *Почти-сильное регулярное преобразование A* — это преобразование, которое переводит все почти-сходящиеся последовательности в почти-сходящиеся последовательности, сохраняя при этом F-предел.

Литература

1. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
2. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 125—135.
3. Лооне Л., Об ограниченных по ядру элементах в локально выпуклом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **128**, 86—90.
4. Лооне Л., Ядро Кноппа и ядро почти-сходимости в пространстве m. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 131—144.
5. Bell, H. T., Order summability and almost convergence. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 548—552.

Поступило
11 XI 1974

KNOPPI TUUM JA PEAAEGU KOONDUVUSE TUUM RUUMIS m. II

L. Loone

Resümee

Artiklis jätkatakse töös [4] püstitatud probleemide lahendamist. Uuritakse peaaegu koonduvuse tuuma määrava hulga F struktuuri, kasutades nn. aritmeetiliste keskmiste operaatorit kaasruumis m'.

KNOPP'S CORE AND ALMOST CONVERGENCY CORE IN SPACE m. II

L. Loone

Summary

This paper is a continuation of [4]. A *method of arithmetical means* A is defined in space m' of all continuous linear functionals on m (see (1.1)). It is shown to be possible to describe the set of all Banach functionals as such a subset of K° that is summable by the method A (where K° denotes the subset of m' defining Knopp's core). It is shown that a linear functional $g \in K^\circ$ is a Banach functional iff

$$\lim_m {}^tT_m g = g.$$

The necessary and sufficient conditions are established for inclusions (2.1), (2.7) and (2.20) to be valid for any matrix method in space m; in those formulae A denotes a matrix method, $F(x)$ denotes the set of all Banach limits of x, and $K^\circ(x)$ denotes Knopp's core of the element x.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ БАЗИСОВ СУММИРОВАНИЯ И МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

Т. Тяхт

Кафедра математического анализа

В работе [2] даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы полная минимальная система с тотальной сопряженной являлась соответственно безусловным базисом, базисом или чезаровским базисом в пространстве Банаха. В настоящей статье приведен такой-же результат (теорема 5) для таких базисов суммирования, где в поле суммируемости имеет место A-сходимость по отрезкам. Это понятие (определения 1 и 2) обобщает известное понятие сходимости по отрезкам (см. [5], стр. 37) и позволяет найти (теоремы 1 и 2) эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости в более широком классе матриц, чем метод Пейеримхоффа (см. [1], § 25).

В последнем параграфе приведены некоторые результаты о вложении методов суммирования и множителей суммируемости.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть $\{e_n, f_n\}$ означает[1] биортогональную систему в пространстве Банаха E. *Мультипликатором* M системы $\{e_n, f_n\}$ называется множество числовых последовательностей $\{\mu_n\}$, таких, что для каждого элемента $x \in E$ найдется $y \in E$, так что $\mu_n(x, f_n) = (y, f_n)$.

Если множество $\{e_n\}$ полно в пространстве E и сопряженная система $\{f_n\}$ тотальна, то систему $\{e_n\}$ называют *базисом Маркушевича* (короче *М-базисом*) в пространстве E.

Если при каждом $x \in E$ ряд[2] $\Sigma (x, f_n) e_n$ суммируем регулярным методом A, то будем говорить, что последовательность $\{e_n\}$ является *A-базисом* в пространстве E.

---

[1] Здесь и далее множеством значений индексов является $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

[2] Если пределы суммирования не указаны, то индекс пробегает все целочисленные значения $1, 2, \ldots$

Матрицы преобразования ряда в последовательность обозначаем $A=(\alpha_{nk})$, $B=(\beta_{nk})$. В случае преобразования последовательности в последовательность используем обозначение $\mathfrak{A}=(a_{nk})$.

Символом A^*l_1 (соответственно $\mathfrak{A}^*l_1$) обозначаем множество последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ таких, что

$$\varepsilon_k=\sum_n \alpha_{nk}c_n$$

(или

$$\varepsilon_k=\sum_n a_{nk}c_n$$

соответственно), где $\{c_n\}\in l_1$.

Если метод A обратим, то множество c_A всех A-суммируемых последовательностей является пространством Банаха с нормой

$$\|\{\xi_n\}\|=\sup_m\Big|\sum_n a_{mn}\xi_n\Big|,$$

где $\{\xi_n\}\in c_A$. При этом множество $c^0{}_A$ всех A-суммируемых к нулю последовательностей оказывается замкнутым подпространством пространства c_A.

Пространством Банаха является также множество γ_A всех A-суммируемых рядов, если норму ряда $\Sigma\, u_n\in\gamma_A$ определить равенством

$$\Big\|\sum u_n\Big\|=\sup_m\Big|\sum_n \alpha_{mn}u_n\Big|.$$

Символом $(\mathfrak{A},B)$ обозначается класс множителей суммируемости первого рода, т. е. класс последовательностей $\{\varepsilon_n\}$ таких, что для каждой последовательности $\{\xi_n\}\in c_A$ ряд $\Sigma\,\varepsilon_n\xi_n\in\gamma_B$.

Класс множителей суммируемости второго рода, т. е. класс таких последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, что для каждого ряда $\Sigma u_n\in\gamma_A$ ряд $\Sigma\,\varepsilon_n u_n\in\gamma_B$, обозначается символом (A,B). Подмножество сходящихся к нулю множителей суммируемости $\{\varepsilon_n\}\in(A,B)$ будем обозначать символом $(A,B)^0$. Отметим, что каждый $\varepsilon\in\in(A,B)$ однозначно разлагается на сумму $\varepsilon=\varepsilon^0+\alpha\delta$, где α — число, $\varepsilon^0\in(A,B)^0$ и $\delta=\{1,1,1,\ldots\}$.

§ 2. Сходимость по отрезкам

Определение 1. *Пусть A — регулярный обратимый метод. Если последовательности $\delta_k=\{\delta_{nk}\}$ образуют B-базис в пространстве $c^0{}_A$, то будем говорить, что в пространстве $c^0{}_A$ имеет место B-сходимость по отрезкам.*

Лемма 1. *В пространстве $c^0{}_A$ с тотальным множеством $\{\delta_n\}$ имеет место B-сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k a_{mk}\beta_{nk}\xi_k=O(1) \tag{1}$$

для каждой $\{\xi_k\}\in c^0{}_A$.

Доказательство. Для того, чтобы последовательности δ_k образовали B-базис в пространстве $c^0{}_A$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $\{\xi_k\} \in c^0{}_A$ имело место

$$\|\sum_k \beta_{nk}\xi_k\delta_k\| = O(1),$$

а это эквивалентно условию (1).

Лемма 2. *Пусть в пространстве $c^0{}_A$ имеет место B-сходимость по отрезкам, где метод B треуголен. Тогда*

$$\lim_m \sum_k a_{mk}\beta_{nk}\xi_k = 0$$

равномерно по n при каждой $\{\xi_k\} \in c^0{}_A$.

Доказательство. Возьмем $\{\xi_k\} \in c^0{}_A$. Из доказательства леммы 1 заключаем, что существует постоянная K, такая что

$$|\sum_k a_{mk}\beta_{nk}\xi_k| \leqslant K\|\{\xi_k\}\|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое число s, что

$$\|\{\xi_n\} - \sum_k \beta_{sk}\xi_k\delta_k\| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Теперь выберем число M_ε так, чтобы при каждом $m > M_\varepsilon$ было

$$|\sum_k a_{mk}\beta_{nk}\beta_{sk}\xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно, так как A регулярен и B треуголен. Тогда

$$|\sum_k a_{mk}\beta_{nk}\xi_k| \leqslant |\sum_k a_{mk}\beta_{nk}(\xi_k - \beta_{sk}\xi_k)| + |\sum_k a_{mk}\beta_{nk}\beta_{sk}\xi_k| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Определение 2. *Говорим, что в пространстве γ_A имеет место B-сходимость по отрезкам, если ряды*

$$\varrho_k = \sum_n \delta_{kn} \tag{2}$$

образуют B-базис в пространстве γ_A.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 3. *В пространстве γ_A с тотальным множеством $\{\varrho_n\}$ имеет место B-сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k a_{mk}\beta_{nk}u_k = O(1) \tag{3}$$

для каждого ряда

$$\sum u_k \in \gamma_A.$$

Следующие две теоремы показывают связь между сходимостью по отрезкам и множителями суммируемости.

Теорема 1. *Пусть A — регулярный обратимый, B — регулярный метод. В пространстве $c^0{}_A$ имеет место B-сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$(\mathfrak{A}, B) = \mathfrak{A}^* l_1. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть в пространстве $c^0{}_A$ имеет место B-сходимость по отрезкам. Учитывая общий вид непрерывного линейного функционала в пространстве c_A (см. [5], стр. 27), видим, что для каждой последовательности $\{\varepsilon_k\} \in \mathfrak{A}^* l_1$ найдется непрерывный линейный функционал f такой, что $\varepsilon_k = (\delta_k, f)$.

Пусть $\{\xi_k\} = c_A$. Обозначая

$$\xi = \lim_n \sum_k a_{nk}\xi_k,$$

получаем

$$\sum_k \beta_{nk}\varepsilon_k\xi_k = (\sum_k \beta_{nk}(\xi_k - \xi)\delta_k, f) + \xi \sum \beta_{nk}\varepsilon_k. \tag{5}$$

Первое слагаемое сходится, ибо имеет место B-сходимость по отрезкам. Сходимость второго слагаемого следует из того, что $\{\varepsilon_k\} \in \mathfrak{A}^* l_1$. Таким образом, $\{\varepsilon_k\} \in (\mathfrak{A}, B)$ и $\mathfrak{A}^* l_1 \subset (\mathfrak{A}, B)$.

С другой стороны, $\mathfrak{A}^* l_1 \supset (\mathfrak{A}, B)$ даже без требования B-сходимости ([5], стр. 29). Следовательно, $\mathfrak{A}^* l_1 = (\mathfrak{A}, B)$.

Достаточность условия (4) следует из (5), если иметь в виду, что теорема о совпадении понятий слабого и сильного базисов ([4], стр. 621) остается справедливой и для базисов суммирования.

Теорема 2. *Пусть A — регулярный обратимый, B — регулярный метод. В пространстве γ_A имеет место B-сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$(A, B)^0 = A^* l_1.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

В общем случае понятия сходимости по отрезкам для пространств $c^0{}_A$ и γ_A самостоятельны. Однако, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть A — регулярный нормальный транслятивный слева метод. В пространстве $c^0{}_A$ имеет место A-сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда это имеет место в пространстве γ_A.*

Доказательство. Для сходимости по отрезкам в пространстве γ_A достаточно, чтобы это имело место в пространстве A-суммируемых к нулю рядов $\gamma^0{}_A$. Возьмем $\Sigma u_k \in \gamma^0{}_A$ и обозначим

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Тогда $\{\xi_n\} \in c^0{}_A$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \delta_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \varrho_k - R_n,$$

где

$$R_n = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ нулей}}, \xi_n, \xi_n, \ldots\}.$$

Тогда

$$\|\sum_k a_{mk}R_k\| = \sup_n |\sum_{\nu=2}^{n} a_{n\nu} \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{mk}\xi_k| =$$

$$= \sup_n |\sum_{k=1}^{n-1} a_{mk}\xi_k \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{n\nu}| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n-1} a_{mk}a_{nk+1}\xi_k|.$$

Учитывая транслятивность метода A, получаем по лемме 2, что

$$\lim_m \|\sum_n a_{mn}R_n\| = 0.$$

Таким образом, A-суммируемость ряда $\Sigma \xi_k \delta_k$ эквивалентно A-суммируемостью ряда $\Sigma u_k \varrho_k$. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $A = C^\alpha$ — метод Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$. По теореме 22.2 из книги [1] имеем $(A, A)^0 = A^* l_1$, т. е. в пространстве γ_A имеет место A-сходимость по отрезкам (теорема 2). Теперь заключаем из теоремы 3, что A-сходимость по отрезкам имеет место и в пространстве $c^0{}_A$, так что $(\mathfrak{A}, A) = \mathfrak{A}^* l_1$.

Пример 2. Пусть $A = (R, p_n)$ — метод взвешенных средних Рисса. Тогда в пространстве $c^0{}_A$ имеет место A-сходимость по отрезкам ([1], стр. 185), и, следовательно, по теореме 3 имеет место А-сходимость по отрезкам и в пространстве γ_A.

§ 3. Базисы и мультипликаторы

Теорема 4. *Пусть B — регулярный метод, последовательность $\{e_n\}$ образует A-базис в пространстве Банаха E, M — мультипликатор базиса $\{e_n\}$. Тогда $M \supset (A, B)$.*

Доказательство. Обозначаем сопряженную к $\{e_n\}$ систему через $\{f_n\}$. Возьмем $\{\varepsilon_n\} \in (A, B)$. Тогда для каждого $x \in E$ ряд

$$\sum \varepsilon_n (x, f_n) e_n \tag{5}$$

является слабо B-суммируемым. По теореме Банаха—Штейнгауза ([4], стр. 636) ряд (5) является B-суммируемым к некоторому элементу $y \in E$ и $(y, f_n) = \varepsilon_n(x, f_n)$. Таким образом, $\{\varepsilon_n\} \in M$. Теорема доказана.

Используя теорему о замкнутом графике, можно доказать следующую лемму ([3], стр. 134).

Лемма 4. *Пусть E_1 и E_2 — пространства Банаха, $\{e^i{}_n, f^i{}_n\}$ есть M-базис в пространстве E_i, где $i = 1, 2$. Если для каждого $x \in E_1$ найдется $y \in E_2$ такой; что $\varepsilon_n(x, f^1{}_n) = (y, f^2{}_n)$, то преобразование $A_\varepsilon : E_1 \to E_2$, определяемое равенствами $A_\varepsilon e^1{}_n = \varepsilon_k e^2{}_n$, является непрерывным.*

Лемма 5. *Пусть A — регулярный обратимый метод, $\delta_k = \{\delta_{kn}\}$. Тогда система $\{\varrho_n\} \subset l_1$, определяемая равенствами*

$$\delta_n = \sum_k a_{nk} \varrho_k,$$

является М-базисом в пространстве l_1. Сопряженным к $\{\varrho_n\}$ в пространстве l_1 является система $\{\psi_n\}$ с

$$\psi_n = \sum_k a_{kn}\varphi_k,$$

где $\{\varphi_k\}$ — сопряженная система к $\{\delta_k\}$ в пространстве l_1.

Доказательство. Так как сопряженное пространство $l^*{}_1 = m$ и $a_{nk} = O(1)$, то $\{\psi_n\} \subset l^*{}_1$. Пусть $(a^{-1}{}_{nk})$ — матрица преобразования, обратного к A. Из того, что $(\varrho_i, \varphi_k) = a^{-1}{}_{ik}$, получаем

$$(\varrho_i, \psi_n) = \sum_k a_{kn} a^{-1}{}_{ik} = \delta_{in}$$

т. е. $\{\varrho_n, \psi_n\}$ — биортогональная система. Полнота системы $\{\varrho_n\}$ следует из полноты системы $\{\delta_n\}$. Остается доказать, что множество $\{\psi_n\}$ тотально. Пусть $\xi = \{\xi_n\} \in l_1$ и $(\xi, \psi_n) = 0$. Тогда

$$\xi_n = (\xi, \varphi_n) = \sum_k a^{-1}{}_{kn} (\xi, \psi_k) = 0,$$

т. е. $\xi = 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть A — регулярный обратимый метод, M — мультипликатор М-базиса $\{e_k\}$ в пространстве Банаха E. Если $A^*l_1 \subset M$, то система $\{e_k\}$ образует A-базис в пространстве E.*

Доказательство. Пусть $\{\varrho_n\}$ и $\{\delta_n\}$ означают то же, что и в лемме 5. Для каждого $x \in E$ определяем линейный оператор $A_x : l_1 \to E$ равенствами $A_x\varrho_n = (x, f_n)e_n$. Так как $A^*l_1 \subset M$, то по леммам 4 и 5 операторы A_x непрерывны. Из равенства

$$A_x\delta_n = \sum a_{nk}(x, f_k)e_k$$

и ограниченности множества $\{\delta_n\} \subset l_1$ следует теперь ограниченность множества $\{A_x\delta_n\}$. По теореме Банаха—Штейнгауза $\lim A_x\delta_n = x$ при каждом $x \in E$, т. е. $\{e_k\}$ является A-базисом в пространстве E. Лемма доказана.

Следующая теорема является следствием теорем 2 и 4 и леммы 6.

Теорема 5. *Если в пространстве γ_A имеет место В-сходимость по отрезкам, то для того, чтобы М-базис $\{e_k\}$ в пространстве Банаха E был A-базисом, необходимо и достаточно, чтобы мультипликатор $M \supset (A, B)$.*

§ 4. Множители суммируемости

Как мы видели, в случае сходимости по отрезкам легко найти множители суммируемости (см. теодемы 1 и 2). Приведем несколько результатов относительно вложения методов и множителей суммируемости, используя сходимость по отрезкам.

Везде в этом параграфе A — регулярный обратимый, B — регулярный метод.

Предложение 1. *Пусть* $(A, B)^0 = A^*l_1$. *Тогда* $(A, A) \supset \supset (B, C)$, *где* C — *произвольный регулярный метод.*

Доказательство. Так как мультипликатором системы (2) является (A, A), то по теоремам 2 и 4 получаем $(A, A) \supset \supset (B, C)$.

Предложение 2. *Если* $(A, B)^0 = A^*l_1$, *то* $A \subset B$.

Доказательство. Учитывая общий вид непрерывного линейного функционала в пространстве γ_A и лемму 4, получаем $(A, A)^0 \subset A^*l_1$, т. е. $(A, A) \subset (A, B)$, откуда следует, что $A \subset B$.

Следствие. *Если* $(A, B)^0 = A^*l_1$ *и* $(B, A)^0 = B^*l_1$, *то* $A \sim B$ *и* $A^*l_1 = B^*l_1$.

Предложение 3. *Если* $(A, A)^0 = A^*l_1$, *то* $(A, A) = (A, B)$ *тогда и только тогда, когда* $A \subset B$.

Доказательство. Уже из того, что $(A, A) \subset (A, B)$, следует $A \subset B$. Наоборот, пусть $A \subset B$. Тогда по теореме 2 имеет место $(A, B)^0 = A^*l_1$, т. е. $(A, A) = (A, B)$.

Пример. Если $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$, то $(C^\alpha, C^\alpha) = (C^\alpha, C^\beta)$.

Замечание. Впервые A-сходимость по отрезкам исследовал Целлер [6].

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кадец М. И., Базисы и их пространства коэффициентов. Доповіді АН УРСР, 1964, **9**, 1139—1141.
3. Мильман В. Д., Геометрическая теория пространств Банаха I. Успехи матем. наук, 1970, **25**, № 3, 113—174.
4. Эдвардс Р., Функциональный анализ, Москва, 1969.
5. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, **55**, 23—54.
6. Zeller, K. Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math., 1953, **4**, № 5/6, 425—431.

Поступило
22 IV 1974

SUMMEERIMISBAASIDE MULTIPLIKAATORID JA SUMMEERUVUSTEGURID

T. Täht

Resümee

Käesolevas artiklis on esitatud tarvilik ja piisav tingimus selleks, et täielik minimaalne süsteem totaalse kaassüsteemiga oleks summeerimisbaas Banachi ruumis. Seejuures kasutatakse A-lõikekoonduvuse mõistet, mis on üldistuseks tuntud lõikekoonduvuse mõistele [5] ja võimaldab leida efektiivseid tarvilikke ja piisavaid tingimusi summeeruvustegurite jaoks laiemas menetluste klassis, kui Peyerimhoffi meetod ([1], § 25).

MULTIPLIERS OF THE SUMMABILITY BASES AND SUMMABILITY FACTORS

T. Täht

Summary

In the given article is presented the necessary and sufficient condition in order that the complete minimal system with total conjugate system was the summability base in Banach space. Here the meaning of A-convergence on segments is used which is the generalization of the well-known meaning of the convergence on segments [5] and enables us to find effective necessary and sufficient conditions for the summability factors in a wider class of matrix than the Peyerimhoff method ([1], § 25).

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

А. Кивинукк

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Настоящая статья содержит некоторые оценки порядка приближения операторами Н. П. Купцова [3].

Пусть $\mathfrak{B}$ — комплексное банахово пространство, в котором действует (см. [3], стр. 121—122) сильно непрерывная полугруппа операторов $\{V_\tau : 0 \leqslant \tau < \infty\}$. Порождающий оператор Q для полугруппы $\{V_\tau\}$ предполагаем s-регулярным, т. е. при натуральном s существует действительное число θ такое, что резольвента $R_\lambda(Q^*)$ оператора $Q^* = e^{i\theta}Q^s$ удовлетворяет неравенству [1] ([3], стр. 137)

$$\|R_\lambda(Q^*)\| \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Рассмотрим случай, когда оператор Q^* имеет дискретный бесконечный спектр. Из s-регулярности оператора Q следует, что все точки спектра оператора Q^* являются вещественными собственными значениями ([3], стр. 148). Точкой сгущения собственных значений служит бесконечность. Модули собственных значений обозначаем

$$m_1 < m_2 < \dots .$$

Пусть Γ_n — окружность с центром в нуле и радиусом $\varrho_n \in (m_n, m_{n+1})$. Введем проектирующие операторы

$$P_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_n} R_\lambda(Q^*)\,d\lambda + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{n-1}} R_\lambda(Q^*)\,d\lambda & \text{при } n>1, \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1} R_\lambda(Q^*)\,d\lambda & \text{при } n=1, \end{cases} \tag{1.1}$$

которые проектируют $\mathfrak{B}$ на подпространства $\mathfrak{B}_n \subset D(Q^*)$, где $D(Q^*)$ — область определения оператора Q^*. Операторы P_n

---

[1] Везде константы обозначаем через C, C_1, C_2 и т. д.

обладают свойством $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$, где δ_{nm} — символ Кронекера.

Обозначим

$$\mathfrak{B}^{(n)} = \{f \in \mathfrak{B} : f = \sum_{j=1}^{n} f_j,\ f_j \in \mathfrak{B}_j\}.$$

Тогда наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{B}$ элементами подпространства $\mathfrak{B}^{(n)}$ имеет вид [3], стр. 148—151):

$$E_n(f) = \inf_{f_j \in \mathfrak{B}_j} \|f - \sum_{j=1}^{n} f_j\|.$$

Полугруппа $\{V_\tau\}$ позволяет для каждого $f \in \mathfrak{B}$ определить модуль непрерывности

$$\omega_k(f, \delta) = \sup_{\tau \leqslant \delta} \|(V_\tau - E)^k f\|,$$

где E — тождественный оператор. Модуль непрерывности обладает свойствами:

а) $\omega_k(f, \delta) \downarrow 0$ при $\delta \to 0$ для любого $f \in \mathfrak{B}$;

б) для любого $\delta_0 > 0$ существует $C = C(\delta_0) > 0$ такое, что для всех $f \in \mathfrak{B}$ и всех $\alpha\delta, \delta \in [0, \delta_0]$ справедливо неравенство

$$\omega_k(f, \alpha\delta) \leqslant C^k (1+\alpha)^k \omega_k(f, \delta); \tag{1.2}$$

в) $\omega_k(f, \delta)$ непрерывна по f при всяком фиксированном δ;

г) если $k \geqslant l$, то для $\delta_0 > 0$ существует $C = C(\delta_0) > 0$ такое, что при $\delta \in [0, \delta_0]$ имеет место

$$\omega_k(f, \delta) \leqslant C^{k-l} \omega_l(f, \delta); \tag{1.3}$$

в частным случае $l = 0$ имеем

$$\omega_k(f, \delta) \leqslant C^k \|f\|. \tag{1.4}$$

Свойства а) — в) доказаны в работе [3], стр. 122—123. Свойство г) следует из неравенств

$$\begin{aligned}\omega_k(f, \delta) &= \sup_{\tau \leqslant \delta} \|(V_\tau - E)^k f\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\tau \leqslant \delta} \|(V_\tau - E)^{k-l}\| \sup_{\tau \leqslant \delta} \|(V_\tau - E)^l f\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\tau \leqslant \delta} \|(V_\tau - E)\|^{k-l} \omega_l(f, \delta) = C^{k-l} \omega_l(f, \delta).\end{aligned}$$

При помощи операторов (1.1) определяем оператор Фурье ([3], стр. 149)

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu$$

и оператор Зигмунда порядка $\varkappa$

$$Z^{\varkappa}{}_n = \sum_{\nu=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{m_\nu}{m_{n+1}}\right)^{\varkappa}\right] P_\nu.$$

Справедлива ([3], стр. 155)

Теорема 1.1. *Пусть для s-регулярного оператора Q, порождающего сильно непрерывную полугруппу $\{V_\tau\}$, существует ограниченный линейный правый обратный оператор Q^{-1}. Тогда при $\varkappa = 2$ для всех $f \in \mathfrak{B}$ имеет место неравенство*

$$\|f - Z^{\varkappa}{}_n f\| \leqslant C(s, \varkappa, m_1)\, \omega_{\varkappa s}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right). \tag{1.5}$$

Замечание. В дальнейшем считаем оценку (1.5) справедливым для всех четных $\varkappa s$, так как в работе [3] приведенное доказательство имеет место и в этом случае.

Из теоремы 1.1 и из определения наилучшего приближения вытекает следующая ([3], стр. 156)

Теорема 1.2. *В предположениях теоремы* 1.1 *для всякого элемента $f \in \mathfrak{B}$ и любых натуральных n и p справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant C(p, m_1)\, \omega_p\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right).$$

Введем оператор [2]

$$U_r = \sum_{k=1}^{\infty} g(m_k, r) P_k, \tag{1.6}$$

где для любого натурального k величина $g(m_k, r)$ является вещественной функцией от параметра r. Область определения параметра r обозначаем через $\mathfrak{R}$, в которой фиксируется некоторая точка сгущения ϱ.

Наряду с оценкой (1.5) в работе [3] доказаны некоторые оценки порядка приближения операторами (1.6) в случае, когда вместо функции g участвует треугольная матрица чисел. Порядок приближения оценивается через наилучшие приближения.

В следующих параграфах изучаются порядки приближения операторами (1.6) через модули непрерывности. Операторы (1.6) предполагаются такими, что функция g является в некотором смысле аналитической. В качестве применения рассмотрим задачу А. Х. Турецкого [7].

§ 2. Оператор Зигмунда нечетного порядка

Для установления ограниченности совокупности операторов служит ([3], стр. 154)

$$U_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(n) P_\nu$$

[2] Предполагается сильная сходимость ряда (1.6).

Лемма 2.1. *Пусть элементы $\lambda_\nu(n)$ вещественной матрицы таковы, что*

1) $\lambda_\nu(n) = 0$ *для* $\nu \geqslant n+1$,

2) $|\lambda_\nu(n)| = O(1)$ *равномерно по* ν *и* n,

3) *при некотором четном* k *для* $\nu \leqslant n$ *имеет место неравенство*

$$\frac{\lambda_\nu(n)-\lambda_{\nu+1}(n)}{m^k_{\nu+1}-m^k_\nu} \geqslant \frac{\lambda_{\nu+1}(n)-\lambda_{\nu+2}(n)}{m^k_{\nu+2}-m^k_{\nu+1}}.$$

Тогда

$$\|U_n\| = O(1).$$

Введем линейное многообразие[3]

$$\mathfrak{B}' = \left\{ f \in \mathfrak{B} : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} P_k f \right\| < \infty \right\}.$$

Может оказаться, что $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$. Кроме того, если для $f \in \mathfrak{B}'$ обозначим

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} P_k f, \tag{2.1}$$

то в общем случае $g \notin \mathfrak{B}'$. Но линейное многообразие $\mathfrak{B}'$ обязательно непусто, так как $\mathfrak{B}^{(n)} \subset \mathfrak{B}'$.

Теорема 2.1. *В предположениях теоремы* 1.1, *где* s — *нечетное, для всякого элемента* $f \in \mathfrak{B}'$ *и для любых нечетных* $\varkappa$ *справедлива оценка*

$$\|f - Z^\varkappa_n f\| = O_{\varkappa,s,m_1}\left\{ \omega_{(\varkappa+1)s}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right) + m_{n+1}\omega_{(\varkappa+1)s}\left(g, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right)\right\},$$

где элемент $g \in \mathfrak{B}$ *определяется равенством* (2.1).

Доказательство. Учитывая свойство нормы, получим ввиду линейности оператора $Z^\varkappa_n$ неравенство

$$\|f - Z^\varkappa_n f\| \leqslant \|f - Z^{\varkappa+1}_n f\| + \|Z^\varkappa_n (f - Z^{\varkappa+1}_n f)\| + \\ + \|Z^{\varkappa+1}_n f - Z^\varkappa_n Z^{\varkappa+1}_n f\|. \tag{2.2}$$

Если в условии 3) леммы 2.1 взять $k = 2\varkappa$, то получим $\|Z^\varkappa_n\| = O(1)$. Следовательно, по теореме 1.1 можем первое и второе слагаемое правой стороны неравенства (2.2) оценить через величину

$$C_1(\varkappa, s)\,\omega_{(\varkappa+1)s}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right),$$

так как $\varkappa + 1$ — четное.

[3] Если $m_1 = 0$, то полагаем $(m_1)^{-1} P_1 f = 0$.

Рассмотрим третье слагаемое правой стороны неравенства (2.2). По определениям операторов $Z^{\varkappa}{}_n$ и P_ν для $f \in \mathfrak{B}'$ имеет место равенство

$$Z^{\varkappa+1}{}_n f - Z^{\varkappa+1}{}_n Z^{\varkappa}{}_n f = m_{n+1}{}^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu{}^{\varkappa+1} P_\nu Z^{\varkappa+1}{}_n g,$$

где элемент $g \in \mathfrak{B}$ определяется равенством (2.1). Если $t_n \in \mathfrak{B}^{(n)}$, то $S_n t_n = t_n$ и по теореме 1.1 имеем

$$\|\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu{}^k P_\nu t_n\| \leqslant C_2(k, s)\, m_{n+1}{}^k \omega_{ks}\left(t_n, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right),$$

где k — четное число. Учитывая, что $Z^{\varkappa+1}{}_n g \in \mathfrak{B}^{(n)}$ и $\varkappa+1$ — четное число, получим

$$\|Z^{\varkappa+1}{}_n f - Z^{\varkappa+1}{}_n Z^{\varkappa}{}_n f\| \leqslant C_3(\varkappa, s)\, m_{n+1} \omega_{(\varkappa+1)s}\left(Z^{\varkappa+1}{}_n g, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right).$$

Из свойства модуля непрерывности (1.4) следует

$$\omega_{(\varkappa+1)s}(Z^{\varkappa+1}{}_n g, \circ) \leqslant \omega_{(\varkappa+1)s}(g, \circ) + \omega_{(\varkappa+1)s}(g - Z^{\varkappa+1}{}_n g, \circ) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_{(\varkappa+1)s}(g, \circ) + C_4(\varkappa, s, m_1)\, \|g - Z^{\varkappa+1}{}_n g\|.$$

Используя для нормы $\|g - Z^{\varkappa+1}{}_n g\|$ теорему 1.1, получим окончательно

$$\|Z^{\varkappa+1}{}_n f - Z^{\varkappa+1}{}_n Z^{\varkappa}{}_n f\| \leqslant C_5(\varkappa, s, m_1)\, m_{n+1} \omega_{(\varkappa+1)s}\left(g, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right).$$

С этим все слагаемые правой стороны неравенства (2.2) оценены и теорема доказана.

Отметим, что теорему 2.1 для периодических функций доказал М. Ф. Тиман [6].

§ 3. Операторы приближения общего вида

Для точки сгущения ϱ области определения $\mathfrak{R}$ параметра r оператора (1.6) фиксируем семейство $\{V_\rho(p) : p > 0\}$ окрестностей со свойством: для любого $C \geqslant 1$ справедливо включение $V_\rho(Cp) \subset V_\rho(p)$. Так как $m_{k+1} > m_k$, то $V_\rho(m_{k+1}) \subset \subset V_\rho(m_k)$ и

$$V_\rho(m_{n+1}) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_\rho(m_k). \tag{3.1}$$

Для функции

$$G(m_k, r) = 1 - g(m_k, r)$$

сформулируем

Условие А. *Пусть существуют натуральное число λ и функции $c_\nu(r)$, где $c_\lambda(r) \neq 0$, такие, что при $r \in V_\rho(m_k)$ имеет место* *разложение*

$$G(m_k, r)=\sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\, m_k{}^\nu$$

с бесконечным радиусом сходимости.

Введем функцию

$$|G|(m_k, r)=\sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)|\, m_k{}^\nu,$$

тогда для оператора (1.6) справедлива

Теорема 3.1. *Пусть для функции G выполнено условие* А. *Тогда существует константа $C \geqslant 1$ такая, что при $\|U_r\| = O(1)$ для всех $f \in \mathfrak{B}$ и $r \in V_\rho(m_{n+1})$ имеет место неравенство*[4]

$$\|f-U_rf\| \prec |G|(Cm_{n+1}, r)\, \|f-Z^\lambda{}_n f\|.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $f \in \mathfrak{B}$ существует $t_n \in \mathfrak{B}^{(n)}$ так, что $\|f-t_n\| \leqslant E_n(f) + \varepsilon$. Ввиду линейности оператора (1.6) имеем

$$\|f-U_r\| \leqslant \|f-t_n\| + \|t_n - U_rt_n\| + \|U_r(t_n-f)\| \leqslant$$
$$\leqslant (1+\|U_r\|)(E_n(f)+\varepsilon) + \|S^G{}_n t_n\|, \tag{3.2}$$

где

$$S^G{}_n = \sum_{k=1}^{n} G(m_k, r) P_k.$$

Пусть $r \in V_\rho(m_{n+1})$. Тогда по (3.1) условие А выполнено, и имеем

$$S^G{}_n = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r) \sum_{k=1}^{n} m_k{}^\nu P_k = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\, m_{n+1}{}^\nu \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k}{m_{n+1}}\right)^\nu P_k =$$

$$= \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\, m_{n+1}{}^\nu (S_n - Z^\nu{}_n),$$

откуда

$$\|S^G{}_n t_n\| \leqslant \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)|\, m_{n+1}{}^\nu \|t_n - Z^\nu{}_n t_n\|, \tag{3.3}$$

так как при $t_n \in \mathfrak{B}^{(n)}$ имеет место $S_n t_n = t_n$.

Для оператора $Z^\nu{}_n$ имеем

$$\|t_n - Z^\nu{}_n t_n\| = \|(E-Z^1{}_n)(E-Z^{\nu-1}{}_n)t_n\| \leqslant (1+\|Z^1{}_n\|)\, \|t_n - Z^{\nu-1}{}_n t_n\|,$$

откуда при $\nu \geqslant \lambda$ по индукции получим

$$\|t_n - Z^\nu{}_n t_n\| \leqslant C^{\nu-\lambda} \|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\|,$$

где $C \geqslant 1 + \|Z^1{}_n\|$. Следовательно, из (3.3) получаем

$$\|S^G{}_n t_n\| \leqslant C^{-\lambda} |G|(Cm_{n+1}, r)\, \|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\|. \tag{3.4}$$

[4] Здесь $\alpha \prec \beta$ означает, что $\alpha \leqslant C\beta$, где $C > 0$ — некоторая константа.

Учитывая неравенства

$$E_n(f) \leqslant \|f - Z^\lambda{}_n f\|$$

и

$$\|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\| \leqslant \|t_n - f\| + \|f - Z^\lambda{}_n f\| + \|Z^\lambda{}_n (f - t_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \|Z^\lambda{}_n\|)(E_n(f) + \varepsilon) + \|f - Z^\lambda{}_n f\|,$$

из (3.2) и (3.4) получаем

$$\|f - U_r f\| \leqslant (C_1 + C_2 |G| (C m_{n+1}, r))(\|f - Z^\lambda{}_n f\| + \varepsilon),$$

где $C_1 \geqslant 1 + \|U_r\|$ и $C_2 \geqslant (2 + \|Z^\lambda{}_n\|) C^{-\lambda}$.

Устремив в последнем неравенстве ε к нулю, завершаем доказательство.

Доказанная теорема показывает, что порядок приближения операторами (1.6) можно оценить через порядок приближения операторов Зигмунда.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1.1, *и пусть, кроме того,* $m_{n+1}/m_n = O(1)$ *и функция* G *удовлетворяет условию* А. *Если существует функция* Θ *с* $0 \leqslant \leqslant \Theta(r) \uparrow \infty$ *при* $r \to \varrho$ *такая, что* $V_\rho(\Theta(r)) = \mathfrak{R}$ *и*

$$|G|(C\Theta(r), r) = O_C(1), \tag{3.5}$$

то для всех $f \in \mathfrak{B}'$ (*при четных* λs *для всех* $f \in \mathfrak{B}$) *и для любого параметра* r *имеет место неравенство*

$$\|f - U_r f\| < \begin{cases} \omega_{\lambda s}(f, \Theta(r)^{-1/s}), & \lambda s \text{ — четное}, \\ \omega_{(\lambda+1)s}(f, \Theta(r)^{-1/s}) + \\ \quad + \Theta(r)\,\omega_{(\lambda+1)s}(g, \Theta(r)^{-1/s}), & \lambda s \text{ — нечетное} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть λs — четное число. Тогда по теоремам 1.1 и 3.1 получаем

$$\|f - U_r f\| < |G|(C m_{n+1}, r)\, \omega_{\lambda s}(f, m_{n+1}{}^{-1/s}), \tag{3.6}$$

где $r \in V_\rho(m_{n+1})$. Возьмем теперь для любого параметра r такое натуральное n, что справедливы неравенства

$$m_{n+1} \leqslant \Theta(r) < m_{n+2}.$$

Тогда получаем неравенство

$$|G|(C m_{n+1}, r) \leqslant |G|(C\Theta(r), r)$$

и включение

$$V_\rho(\Theta(r)) \subset V_\rho(m_{n+1}).$$

Если $r \in V_\rho(\Theta(r))$, то имеет место (3.6), где в аргументе модуля непрерывности соотношение $m_{n+1}/m_n = O(1)$ допускает замену величины m_{n+1} функцией Θ из-за свойства (1.2). Предположения теоремы о функции Θ завершают доказательство при четных λs.

Доказательство теоремы при нечетных λs проводится аналогично, только вместо теоремы 1.1 надо применить теорему 2.1.

§ 4. Задача Турецкого

В классе непрерывных 2π-периодических функций А. Х. Турецкий [7] поставил следующую задачу: для данного метода приближения U_n найти класс функций, в котором имеет место

$$\|f - U_n f\| = O_f\{E_n(f)\}.$$

Рассмотрим эту задачу для операторов (1.6). Воспользуемся следующими общими теоремами.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Если* $m_{n+1}/m_n = O(1)$, *то для* $f \in \mathfrak{B}$ *и* $k, n = 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$\omega_{ks}(f, \delta) \leqslant C_1\{E_n(f) + \delta^{ks} \sum_{j=1}^{n} (m_{j+1}{}^k - m_j{}^k) E_j(f) + \delta^{ks} m_1{}^k \|f\|\},$$

где C_1 *не зависит от* n, δ *и* f.

Теорема 4.1 приведена в [4] и доказывается так, как теорема 2.9 из [3].

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Если* $m_1 = 0$ *и* $m_{\mu n+1}/m_{n+1} = O_\mu(1)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, *то условие*

$$\delta^{ks} \int_{\delta}^{m_2^{-1/s}} \frac{\omega_{ks}(f, t)}{t^{ks+1}}\, dt = O_f\{\omega_{ks}(f, \delta)\} \qquad (\delta \to 0) \tag{4.1}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы имело место

$$\frac{1}{m_{n+1}{}^k} \sum_{j=1}^{n} (m_{j+1}{}^k - m_j{}^k) E_j(f) = O_f\{E_n(f)\}. \tag{4.2}$$

Доказательство необходимости аналогично случаю периодических функций ([5], стр. 416—417).

Достаточность. Пусть $m_{n+2}{}^{-1/s} < \delta \leqslant m_{n+1}{}^{-1/s}$. Тогда, учитывая соотношение $m_{n+1}/m_n = O(1)$, из свойств модуля непрерывности а) и б) получим

$$\delta^{ks} \int_{\delta}^{m_2^{-1/s}} \frac{\omega_{ks}(\cdot, t)}{t^{ks+1}}\, dt > \frac{1}{m_{n+2}{}^k} \int_{m_{n+1}^{-1/s}}^{m_2^{-1/s}} \frac{\omega_{ks}(\cdot, t)}{t^{ks+1}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{m_{n+2}{}^k} \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{m_{\nu+2}^{-1/s}}^{m_{\nu+1}^{-1/s}} \frac{\omega_{ks}(\cdot, t)}{t^{ks+1}}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{m_{n+2}{}^k} \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega_{ks}\left(\cdot, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{\nu+2}}}\right) \int_{m_{\nu+2}^{-1/s}}^{m_{\nu+1}^{-1/s}} \frac{dt}{t^{ks+1}} >$$

$$> \frac{1}{m_{n+1}{}^k} \sum_{\nu=1}^{n-1} (m_{\nu+1}{}^k - m_\nu{}^k)\, \omega_{ks}\left(\cdot, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{\nu+2}}}\right).$$

Отсюда по условию (4.1) и по теореме 1.2 заключаем

$$\frac{1}{m_{n+1}{}^k}\sum_{\nu=1}^{n}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)E_\nu(f)<$$

$$<\frac{1}{m_{n+1}{}^k}\sum_{\nu=1}^{n}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)\,\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\nu+1}}}\right)<\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right). \qquad (4.3)$$

В теореме 4.1 сделаем подстановки $n\mapsto\mu n$ $(\mu=1,2,\ \ldots)$ и $\delta\mapsto m_{\mu n+1}{}^{-1/s}$. Тогда по теореме 4.1 в силу (4.3) имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\mu n}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)E_\nu(f)=\sum_{\nu=1}^{\mu n}\ldots-\sum_{\nu=1}^{n}\ldots>$$

$$>m_{\mu n+1}{}^k\left\{\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\mu n+1}}}\right)-E_{\mu n}(f)\right\}-m_{n+1}\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right).$$

При $m\geqslant n$ справедливо $E_m(f)\leqslant E_n(f)$, и, следовательно,

$$\sum_{\nu=n+1}^{\mu n}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)E_\nu(f)\leqslant E_n(f)\,(m_{\mu n+1}{}^k-m_{n+1}{}^k)\leqslant$$
$$\leqslant m_{\mu n+1}{}^kE_n(f).$$

Из этих неравенств получим

$$E_n(f)>\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\mu n+1}}}\right)-\left(\frac{m_{n+1}}{m_{\mu n+1}}\right)^k\omega_{ks}\left(f,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right). \qquad (4.4)$$

По свойству модуля непрерывности б) имеем

$$\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right)<\left(\frac{m_{jn+1}}{m_{n+1}}\right)^k\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{jn+1}}}\right)$$

и ввиду этого из (4.3) следует

$$\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\mu n+1}}}\right)>\frac{1}{m_{\mu n+1}{}^k}\sum_{\nu=1}^{\mu n}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)\,\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\nu+1}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{m_{\mu n+1}{}^k}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\nu=(j-1)n+1}^{jn}(m_{\nu+1}{}^k-m_\nu{}^k)\,\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{\nu+1}}}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{m_{\mu n+1}{}^k}\sum_{j=1}^{\mu}\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{jn+1}}}\right)(m_{jn+1}{}^k-m_{(j-1)n+1}{}^k)>$$

$$>\left(\frac{m_{n+1}}{m_{\mu n+1}}\right)^k\omega_{ks}\left(\cdot,\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right)\sum_{j=1}^{\mu}\left\{1-\left(\frac{m_{(j-1)n+1}}{m_{jn+1}}\right)^k\right\}.$$

Следовательно, из (4.4) получим

$$E_n(f) > (\sigma(\mu) - 1)\left(\frac{m_{n+1}}{m_{\mu n+1}}\right)^k \omega_{ks}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right),$$

где

$$\sigma(\mu) \neq \sum_{j=1}^{\mu}\left\{1 - \left(\frac{m_{(j-1)n+1}}{m_{jn+1}}\right)^k\right\}.$$

Так как $1 < \sigma(\mu) \uparrow$ при $\mu \to \infty$, то μ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$E_n(f) > \sigma(\mu)\left(\frac{m_{n+1}}{m_{\mu n+1}}\right)^k \omega_{ks}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{m_{n+1}}{m_{\mu n+1}}\right)^k \omega_{ks}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right).$$

Но предположение $m_{\mu n+1}/m_{n+1} = O_\mu(1)$ допускает неравенство

$$E_n(f) > \omega_{ks}\left(f, \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}}\right),$$

которое вместе с оценкой (4.3) доказывает лемму.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы 1.1 и условия 1) и 3) леммы 2.1, а для $\{m_n\}$ справедливы соотношения $m_1 = 0$ и $m_{n+1}/m_n = O(1)$, то для всех $f \in \mathfrak{B}$ имеет место неравенство*

$$\|f - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(n) P_\nu f\| < \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu(n) - \lambda_{\nu+1}(n)) E_\nu(f),$$

где $\lambda_1(n) \equiv 1$.

Доказательство см. [3], стр. 161—162.

Следующая теорема устанавливает порядок приближения операторами (1.6) через наилучшие приближения.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1, функция G удовлетворяет условию А, а для $\{m_n\}$ справедливы соотношения $m_1 = 0$, $m_{n+1}/m_n = O(1)$ и $n/m_{n+1} = O(1)$. Если существует функция Θ с $0 \leqslant \Theta(r) \uparrow \infty$ при $r \to \varrho$ такая, что $V_\varrho(\Theta(r)) = \mathfrak{R}$ и справедливо (3.5), то для всех $f \in \mathfrak{B}$ и при любом $r \in \mathfrak{R}$ имеет место*

$$\|f - U_r f\| < \Theta(r)^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{[\Theta(r)]} (m_{\nu+1}{}^\lambda - m_\nu{}^\lambda) E_\nu(f).$$

Доказательство. Так как числа $\lambda_\nu(n) = 1 - (m_\nu/m_{n+1})^\lambda$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2, то справедливо

$$\|f - Z_n{}^\lambda f\| < m_{n+1}{}^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} (m_{\nu+1}{}^\lambda - m_\nu{}^\lambda) E_\nu(f),$$

и из теоремы 3.1 получаем

$$\|f-U_rf\| < m_{n+1}^{-\lambda}|G|(Cm_{n+1}, r)\sum_{\nu=1}^{n}(m_{\nu+1}^{\lambda}-m_{\nu}^{\lambda})E_{\nu}(f).$$

Используя теперь соотношение (4.5) и предположение о последовательности $\{m_n\}$, получаем требуемое неравенство.

Одно возможное решение задачи Турецкого дает

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и пусть функция G удовлетворяет условию* A, *причем $m_1=0$ и $n < m_n < n$. Если существует функция Θ с $0\leqslant\Theta(r)\uparrow\infty$ при $r\to\varrho$ такая, что справедливо* (3.5), *то для всех $f\in\mathfrak{B}$ удовлетворяющихся условию* (4.1) *при $k=\lambda$ имеет место*

$$\|f-U_rf\|=O_f\{E_{[\Theta(r)]}(f)\}\qquad(r\to\varrho). \tag{4.5}$$

Доказательство утверждения следует из теоремы 4.3 и из достаточности леммы 4.1.

§ 5. Применения для периодических функций

Пусть $\mathfrak{B}=C_{2\pi}$ (непрерывные 2π-периодические функции) или $\mathfrak{B}=L^p{}_{2\pi}$ (измеримые 2π-периодические функции, p-ая степень модуля которых интегрируема) общеизвестными нормами.

Для каждой $f\in\mathfrak{B}$ определим полугруппу $\{V_\tau\}$ соотношением $V_\tau f(x)=f(x+\tau)$. Так как $\|V_\tau\|=1$, то порождающий оператор $Q=d/dx$ есть 1-регулярный ([3], стр. 136—137). Оператор Q имеет правый обратный $Q^{-1}f(x)={}_0\int^x f(t)\,dt$. Оператор $Q^*=e^{i\pi/2}Q$ имеет область определения

$$D(Q^*)=D(Q)=\{f\in\mathfrak{B}: f \text{ абсолютно непрерывна и } f'\in\mathfrak{B}\}$$

и модули собственных значений $m_{n+1}=n$ (см. [8], стр. 66). Кроме того, как показано в [3], стр. 146,

$$P_{k+1}f=A_kf\equiv\begin{cases} a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx & \text{при}\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\\ \frac{1}{2}a_0(f) & \text{при}\quad k=0,\end{cases}$$

где $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in\mathfrak{B}$.

Следовательно, операторы (1.6) являются классическими операторами приближения, построенные на базе ряда Фурье.

Теорема 5.1. *Пусть функция G удовлетворяет условию* A. *Если существует функция Θ с $0\leqslant\Theta(r)\uparrow\infty$ при $r\to\varrho$ такая, что $V_\rho(\Theta(r))=\mathfrak{R}$ и справедливо* (3.5), *то для всех $f\in\mathfrak{B}$, имеющихся тригонометрическую сопряженную $f^*\in L_{2\pi}$, имеет место*

$$\|f-U_rf\| < \begin{cases}\omega_\lambda(f,\ \Theta(r)^{-1}), & \lambda \text{ — четное},\\ \omega_{\lambda+1}(f,\ \Theta(r)^{-1})+\Theta(r)\,\omega_{\lambda+1}(g,\Theta(r)^{-1}), & \lambda \text{ — нечетное}.\end{cases}$$

Доказательство. Уяснения требует только условие $f^* \in L_{2\pi}$, остальное следует непосредственно из теоремы 3.2.

Существование сопряженной $f^* \in L_{2\pi}$ означает (см. [5], стр. 168), что $-b_k$ и a_k ее коэффициенты Фурье. Но тогда по теореме 8.7 из [1], стр. 101, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k} \tag{5.1}$$

равномерно сходится. Следовательно, $f \in \mathfrak{B}'$ и теорема 3.1 применима. Для четных λ условие $f^* \in L_{2\pi}$ излишне.

Замечание. В работе [6] показано, что теорема 2.1 справедлива для всех периодических функций $f \in \mathfrak{B}$. Именно, в ходе доказательства достаточно предполагать существования функции $g \in \mathfrak{B}$ с рядом Фурье (5.1), а не сходимости по норме ряда (5.1). Обстоятельство, что $g \in \mathfrak{B}$ имеет ряд Фурье (5.1), следует из результатов книги [1], гл. IV, § 11. Тем самым доказана теорема 5.1 для всех $f \in \mathfrak{B}$.

Теорема 5.2. *Пусть функция G удовлетворяет условию* А. *Если существует функция Θ с $0 \leqslant \Theta(r) \uparrow \infty$ при $r \to \varrho$ такая, что $V_\varrho(\Theta(r)) = \mathfrak{R}$ и справедливо* (3.5), *то для всех $f \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющихся условию*

$$\delta^\lambda \int_\delta^1 \frac{\omega_\lambda(f, t)}{t^{\lambda+1}} dt = O_f\{\omega_\lambda(f, \delta)\} \qquad (\delta \to 0), \tag{5.2}$$

имеет место (4.5).

Доказательство основывается на теореме 4.4.

Сравниваем теорему 5.1 с результатом Турецкого (см. [7], теорема 1).

Теорема 5.3. (А. Х. Турецкий). *Пусть $f \in C_{2\pi}$ разлагается в ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \qquad (a_k \geqslant 0), \tag{5.3}$$

сходящийся равномерно для всех x. Если операторы (1.6) *при $r \equiv n$ удовлетворяют условиям $g_0(n) \equiv 1$, $g_k(n) = 0$ $(k > n)$ и*

$$\left(\frac{k}{n}\right)^\nu < 1 - g_k(n) < \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

при натуральном ν, существуют число $\alpha \in (0, \nu)$ и целое $m \geqslant 0$, такие, что

$$\frac{(\ln k)^m}{k^{1+\alpha}} < a_k < \frac{(\ln k)^m}{k^{1+\alpha}} \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{5.5}$$

то имеет место (4.5), *где $\Theta(r) = r \equiv n$.*

Покажем, что если G удовлетворяет условию А, то из (5.4) и (5.5) при $\nu - 1 < \alpha < \nu$ следует (5.2).

Сопоставление (5.4) с условием А дает $\nu=\lambda$. Если

$$a_k < \frac{(\ln k)^m}{k^{1+\alpha}} \qquad (\lambda-1<\alpha<\lambda,\ m\geqslant 0),$$

то

$$a_k < \frac{(\ln k)^m}{k^{\lambda+\beta}} \qquad (0<\beta<1,\ m\geqslant 0).$$

Отсюда по теореме 2 из [7] существует производная $f^{(\lambda-1)}$ такая, что

$$\omega(f^{(\lambda-1)},\ \delta)=O_f(\delta^{\beta}|\ln\delta|^m).$$

По свойству модуля непрерывности (см. [5], стр. 116) имеем

$$\omega_\lambda(f,\ \delta)=O_f(\delta^{\lambda+\beta-1}|\ln\delta|^m).$$

Полученный модуль непрерывности удовлетворяет при $0<\beta<1$ условию (5.2).

При помощи условия А обобщаем теорему 5.3.

Теорема 5.4. *Пусть для* $f\in C_{2\pi}$ *имеет место* (5.3), *существуют число* $\alpha\in(0,\lambda)$ *и целое* $m\geqslant 0$, *такие, что справедливо* (5.5). *Если* G *удовлетворяет условию* А *и существует функция* Θ *с* $0\leqslant\Theta(r)\uparrow\infty$ *при* $r\to\varrho$ *такая, что справедливо* (3.5), *то и справедливо* (4.5).

Доказательство. Прежде всего отметим, что для периодических функций теорема 3.1 верна с константой $C=1$ (см. [2], неравенство (2.2)). Таким образом, из теоремы 3.1 следует

$$\|f-U_rf\|<|G|(n,r)\,\|f-Z^\lambda{}_nf\|.$$

Так как оператор Зигмунда удовлетворяет условиям теоремы 5.3, то получим

$$\|f-U_rf\|=O_f\{|G|(n,r)\,E_n(f)\}.$$

Положим $n=[\Theta(r)]$ и учитывая предположение (3.5), получаем требуемое утверждение.

Литература

1. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1. Москва, 1965.
2. Кивинукк А., О порядке приближения периодических функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 238—246.
3. Купцов Н. П., Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов. Успехи матем. наук, 1968, **23**, № 4, 117—178.
4. Купцов Н. П., Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространстве Банаха и разложения Фурье. Матем. заметки, 1970, **7**, № 6, 765—778.
5. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
6. Тиман М. Ф., О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда. Докл. АН СССР, 1968, **181**, № 1, 29—34.

7. Турецкий А. Х., О классе функций, для которых данный метод суммирования дает приближение порядка наилучшего. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 132—139.
8. Butzer, P. L., Berens, H., Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin—Heidelberg—New York, 1967.

Поступило
14 III 1974

LÄHENDAMISKIIRUSEST BANACHI RUUMIS

A. Kivinukk

Resümee

N. Kuptsov [3] tõestas lähendamisteooria põhilised otsesed ning pöördteoreemid Banachi ruumis, kus tegutseb tugevalt pidev operaatorite poolrühm.

Käesolevas artiklis on Banachi ruumis defineeritud lähendamisoperaatorid (1.6) ja tõestatud nende operaatorite lähendamiskiiruste hinnangud. Tõestustes kasutatakse operaatorite (1.6) koonduvustegurite g teatud mõttes analüütilisust ja lähendamisteooria põhiteoreeme.

ÜBER DEN APPROXIMATIONSGRAD IM BANACHRAUM

A. Kivinukk

Zusammenfassung

N. Kupzow [3] bewies die Grundsätze der Approximationstheorie im Banachraum, wo die starke stetige Operatorenhalbgruppe verfährt.

Im vorliegenden Artikel sind die Approximationsoperatoren (1.6) im Banachraum definiert. Für die Operatoren (1.6) beweist man die Abschätzungen des Approximationsgrads, wenn in (1.6) die Konvergenzfaktoren g in gewissem Sinn analytisch sind.

О МНОЖИТЕЛЯХ ПОЧТИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА (A, A)

В. Соомер

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть $A = (a_{nk})$ — метод суммирования, переводящий последовательность $x = \{x_k\}$ в последовательность[1] $Ax = \{y_n\}$ с

$$y_n = \sum a_{nk} x_k. \tag{1}$$

Обозначим через c, f и m соответственно пространства сходящихся, почти сходящихся и ограниченных последовательностей; через c_A — поле суммируемости и через f_A — поле почти суммируемости метода A, т. е.

$$f_A = \{x\colon\ Ax \in f\}.$$

Напомним, что последовательность x является *почти сходящейся* к числу s тогда и только тогда, когда

$$f\text{-}\lim x = s,$$

где[2]

$$f\text{-}\lim x = u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} x_i. \tag{2}$$

Метод A называется *почти регулярным* (см. [7]), если $c \subset f_A$ и $f\text{-}\lim Ax = \lim x$ для любой $x \in c$.

Последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ называется *мультипликатором множества* $f_A \cap m$ *или множителем почти суммируемости типа* (A, A), *если* $\varepsilon x = \{\varepsilon_k x_k\} \in f_A \cap m$ для любой $x = \{x_k\} \in f_A \cap m$.

Обозначим множество всех мультипликаторов некоторого множества K через $\mathfrak{M}(K)$.

---

[1] Для краткости обозначим $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}$ соответственно через $\sum\limits_{k}$ или Σ_k, и $\lim\limits_{n}$ или $\lim_n$.

[2] Через $u\text{-}\lim f(n, p)$ обозначен предел $\lim_p f(n, p)$, равномерный относительно n.

Если A — метод типа $c \to f$, т. е. $c \subset f_A$, и $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$, то метод $C = (c_{nk})$, где $c_{nk} = \varepsilon_k a_{nk}$, также должен быть методом типа $c \to f$, т. е. должен существовать предел $f\text{-}\lim \Sigma_k a_{nk}\varepsilon_k$ (см. [7], теорема 3). Следовательно, $\mathfrak{M}(f_A \cap m) \subset f_A \cap m$.

Последовательность x называется *сильно суммируемой* методом A к числу α, если

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}|\,|x_k - \alpha| = 0.$$

Аналогично введем понятие сильной почти суммируемости. Последовательность x назовем *сильно почти суммируемой* методом A к числу α, если

$$f\text{-}\lim \sum_k |a_{nk}|\,|x_k - \alpha| = 0.$$

В статье рассматриваются почти регулярные матричные методы, удовлетворяющие следующему условию:

(a): *для любой последовательности* $\{\delta_m\}$ *с* $0 < \delta_m \to 0$, *найдется последовательность натуральных чисел* $\{\lambda(m)\}$, *такая, что*

$$\sum_{k=\lambda(m)}^{\infty} \frac{1}{m+1} \Big|\sum_{i=n}^{n+m} a_{ik}\Big| \leqslant \delta_m.$$

В § 1 доказан аналог теоремы Мазура—Орлича—Брудно, при помощи которого в § 2 показано, что мультипликаторы множества $f_A \cap m$ сильно почти суммируемы, если $a_{nk} \geqslant 0$, $n, k = 0, 1, \ldots$.

В § 3 доказывается, что $\mathfrak{M}(f_A \cap m)$ является пересечением множеств множителей суммируемости некоторых типов.

Ниже используем следующие теоремы из работ [5, 7].

Теорема 1. *Матричный метод A является почти регулярным тогда и только тогда, когда*[3]

$$f\text{-}\lim a_{nk} = a_k = 0, \tag{3}$$

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk} = 1, \tag{4}$$

$$\sum_k |a_{nk}| = O(1). \tag{5}$$

Пусть

$$f_0 = \{x \in f,\ f\text{-}\lim x = 0\}.$$

Теорема 2. *Почти регулярный метод A является методом типа $m \to f_0$, тогда и только тогда, когда*

$$u\text{-}\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \Big|\sum_{i=n}^{n+p} a_{ik}\Big| = 0. \tag{6}$$

[3] Во всей статье свободные индексы принимают все значения 0, 1, ...

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{S}$ — *семейство всех сильно регулярных матриц. Имеет место равенство*

$$\mathfrak{M}(f) = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \mathfrak{M}(c_A).$$

Теорема 4. *Пусть* A — *регулярный метод с* $a_{nk} \geqslant 0$. *Последовательность* $x \in \mathfrak{M}(c_A \cap m)$ *тогда и только тогда, когда она сильно* A-*суммируема.*

§ 2. Аналог теоремы Мазура—Орлича—Брудно

Распространим известную теорему Мазура—Орлича—Брудно о совместности регулярных методов на множестве ограниченных последовательностей на множество $f_A \cap m$. Для этого нам нужна

Лемма 1. *Если* A *и* B — *почти регулярные методы, удовлетворяющие условию* (а), *почти суммируют ограниченную последовательность* $x = \{x_k\}$ *к различным значениям, то существует ограниченная последовательность, почти суммируемая методом* A, *но почти не суммируемая методом* B.

Доказательство. Пусть (a_{nk}) и (b_{nk}) — соответственно матрицы методов A и B. Обозначим

$$\alpha_{pkn} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} a_{ik}, \qquad \beta_{pkn} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} b_{ik}. \tag{7}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$f\text{-}\lim A_n(x) = \lim_p \sum_k \alpha_{pkn} x_k = 0,$$

$$f\text{-}\lim B_n(x) = \lim_p \sum_k \beta_{pkn} x_k = 1.$$

Так как методы A и B почти регулярны и выполнено условие (а), то мы можем выбрать последовательность $\{\delta_p\}$ с $0 < \delta_p \to 0$, последовательность натуральных чисел $\{p_j\}$ и целочисленные неубывающие функции натурального аргумента $\lambda(p)$ и $\mu(p)$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{\lambda(p)} |\alpha_{pkn}| \leqslant \delta_p, \qquad \sum_{k=1}^{\lambda(p)} |\beta_{pkn}| \leqslant \delta_p, \tag{9}$$

$$\sum_{k=\mu(p)}^{\infty} |\alpha_{pkn}| \leqslant \delta_p, \qquad \sum_{k=\mu(p)}^{\infty} |\beta_{pkn}| \leqslant \delta_p, \tag{10}$$

причем $\lambda(p_j) = \mu(p_j - 1), \quad j = 1, 2, 3, \ldots$.

Построив теперь последовательность $z = \{z_k\}$ таким же образом, как это сделано Питерсеном ([1], стр. 367, 368), можно на основании условий (9) и (10) показать, что $f\text{-}\lim A_n(z) = 0$, а предел $f\text{-}\lim B_p(z)$ не существует.

Из леммы 1 непосредственно следует

Теорема 5. *Если A и B — почти регулярные методы, удовлетворяющие условию* (a), *и $f_A \cap m \subset f_B \cap m$, то для любой $x \in f_A \cap m$ имеет место равенство $f\text{-}\lim Ax = f\text{-}\lim Bx$.*

§ 3. Мультипликаторы множества $f_A \cap m$ и сильная почти суммируемость

Теорема 5 дает нам возможность доказать, что $\varepsilon x \to f\text{-}\lim A(\varepsilon x)$ является мультипликативным оператором, если $x \in f_A \cap m$ и $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$.

Теорема 6. *Если последовательность $\varepsilon \in M(f_A \cap m)$, то для любой $x \in f_A \cap m$ имеет место*

$$f\text{-}\lim A(\varepsilon x) = f\text{-}\lim A\varepsilon \cdot f\text{-}\lim A(x). \tag{11}$$

Доказательство. 1) Пусть $f\text{-}\lim A\varepsilon \neq 0$. Построим матрицу $B = (b_{nk})$, положив $b_{nk} = a_{nk}\varepsilon_k / f\text{-}\lim A\varepsilon$. Ввиду почти регулярности метода A, метод B будет также почти регулярным. Следовательно, если $x \in f_A \cap m$, то $\varepsilon x \in f_A \cap m$, т. е.

$$B_n(x) = A_n(\varepsilon x) / f\text{-}\lim A\varepsilon.$$

Тогда $x \in f_B \cap m$. Итак, доказано, что $f_A \cap m \subset f_B \cap m$. Теперь из теоремы 5 вытекает, что

$$f\text{-}\lim Ax = f\text{-}\lim Bx = \\ = f\text{-}\lim A(\varepsilon x) / f\text{-}\lim A\varepsilon,$$

и, значит,

$$f\text{-}\lim A(\varepsilon x) = f\text{-}\lim Ax \cdot f\text{-}\lim A\varepsilon$$

2) Если $f\text{-}\lim A\varepsilon = 0$, то выберем $b_{nk} = a_{nk}\varepsilon_k + a_{nk}$.

Методами, развитыми Хиллом и Следдом [5] для исследования мультипликаторов множества $c_A \cap m$, можно исследовать и мультипликаторы множества $f_A \cap m$. Для этого докажем следующие предложения.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$ и X — компактное множество вещественных чисел, состоящее из замыкания области изменения последовательности ε и из точки $f\text{-}\lim A\varepsilon$.*

Если *F — непрерывная функция с вещественными значениями на множеств*е *X и $y_k = F(\varepsilon_k)$, то $y \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$, и для любой $z \in f_A \cap m$ имеет место*

$$f\text{-}\lim A(yz) = f\text{-}\lim Az \cdot F(f\text{-}\lim A\varepsilon). \tag{12}$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что

$$f\text{-}\lim A(z\varepsilon^n) = f\text{-}\lim Az \cdot [f\text{-}\lim A\varepsilon]^n$$

для любой $z \in f_A \cap m$ и $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$. Значит, теорема верна, если F — многочлен. Но, так как $f\text{-}\lim Az$ непрерывна в пространстве m с нормой $\|z\| = \sup_k |z_k|$ (см. [7]), то из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами и вытекают утверждения теоремы.

Охарактеризуем теперь мультипликаторы множества $f_A \cap m$ при помощи сильной почти суммируемости.

Теорема 7. *Пусть метод A таков, что $a_{nk} \geqslant 0$. Если $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$, то последовательность ε сильно почти суммируема матрицей A.*

Доказательство вытекает из теоремы 7, полагая в ней $F(t) = |t|$ и $z_k = 1$. Если $\varepsilon \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$, то $\varepsilon \in f_A \cap m$ и

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk}(\varepsilon_k - f\text{-}\lim A\varepsilon) = 0.$$

На основании леммы 2 получим, что

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk} |\varepsilon_k - f\text{-}\lim A\varepsilon| = 0.$$

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Имеет место

Теорема 8. *Если A — почти регулярный метод с $a_{nk} \geqslant 0$, то ограниченная последовательность x является сильно почти A-суммируемой к числу a тогда и только тогда, когда найдется множество $Z \subset N$, такое, что характеристическая функция $\chi_{Z \setminus N}$ почти A-суммируема к нулю и*

$$\lim_{k \in Z} x_k = a.$$

Доказательство. Достаточность. Допустим, что условия теоремы выполнены. Пусть $x_1 = \{x^1_k\} = \chi_Z \cdot x$ и $x_2 = \{x^2_k\} = \chi_{N \setminus Z} \cdot x$. Тогда $x = x_1 + x_2$ и

$$\sum_k a_{nk} |x_k - a| = \sum_{k \in Z} |x^1_k - a| + \sum_{k \in N \setminus Z} |x^2_k - a|.$$

По теореме 1 матрица $(a_{nk}\chi_Z(k))$ является матрицей типа $c_0 \to f_0$, а матрица $(a_{nk}\chi_{N \setminus Z}(k))$ удовлетворяет условиям теоремы 2, т. е. является матрицей типа $m \to f_0$. Так как

$$\lim_{k \in Z} (x^1_k - a) = 0,$$

а последовательность $\{x^2_k - a\} \in m$, то

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk} |x_k - a| = 0. \qquad (13)$$

Необходимость. Допустим, что равенство (13) выполнено. Определим множества $E(r)$ следующим образом:

$$E(r) = \{k, |x_k - a| \geqslant 1/r\},$$

тогда, учитывая формулы (7),

$$\sum_k a_{pkn}\chi_{E(r)}(k) \leqslant r \sum_k a_{pkn}|x_k - \alpha|,$$

откуда для любого $r = 1, 2, \ldots$

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk}\chi_{E(r)}(k) = 0. \tag{14}$$

Из-за почти регулярности метода A и условия (a) можно выбрать последовательности $\{m_r\}$ и $\{p_r\}$, такие, что

$$\lim_r \max_{p_r \leqslant p \leqslant p_{r+1}} \Big(\sum_{k<m_r} a_{pkn} + \sum_{k>m_{r+2}} a_{pkn} \Big) = 0$$

равномерно относительно n. Из (14) вытекает, что

$$\lim_r \max_{p>p_r} \sum_k a_{pkn}\chi_{E(r+1)}(k) = 0.$$

Пусть теперь

$$F_r = \{k \in E(r);\ m_r \leqslant k \leqslant m_{r+2}\},$$

тогда $N \setminus Z = \bigcup F_r$. Если $p_r \leqslant p \leqslant p_{r+1}$, то

$$\sum_k a_{pkn}\chi_{N\setminus Z}(k) \leqslant \sum_{k<m_r} a_{pkn} +$$

$$+ \sum_{k>m_{r+2}} a_{pkn} + \sum_k a_{pkn}\chi_{E(r+1)}(k).$$

Значит,

$$f\text{-}\lim \sum_k a_{nk}\chi_{N\setminus Z}(k) = 0.$$

Если теперь $k \in Z$ и $m_r \leqslant k \leqslant m_{r+2}$, то $|x_k - \alpha| < 1/r$, т. е. $\lim\limits_{k \in Z} |x_k - \alpha| = 0$.

В частном случае, когда $A = E$ и $\mathfrak{M}(f_A \cap m) = \mathfrak{M}f$, из теоремы 8 вытекает результат о мультипликаторах пространства f, доказанный Чинг Чоу [3].

§ 4. Множество $\mathfrak{M}(f_A \cap m)$ как пересечение множеств множителей суммируемости некоторых матричных методов

Пусть A — почти регулярный метод, а $\mathfrak{T}$ — семейство матриц $T = (t_{pk})$, где $t_{pk} = a_{pkn}$ при некотором n.

В статье [2] была доказана следующая

Теорема 9. *Имеет место равенство*

$$f_A = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} c_T. \tag{15}$$

Оказывается, что аналогичный результат можно получить и для множества $\mathfrak{M}(f_A \cap m)$.

Теорема 10. *Пусть метод А почти регулярен и удовлетворяет условию* $a_{nk} \geqslant 0$. *Тогда*

$$\mathfrak{M}(f_A \cap m) = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{M}(c_T \cap m). \tag{16}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, но мы используем полученные результаты о множестве $\mathfrak{M}(f_A \cap m)$ и теорему 9.

Докажем, что

$$\mathfrak{M}(f_A \cap m) \subseteq \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{M}(c_T \cap m). \tag{17}$$

Действительно, если $x \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$, то на основании теоремы 4 она сильно почти A-суммируема и тогда из теоремы 8 вытекает существование такого числа α, что

$$\lim_{k \in Z} |x_k - \alpha| = 0,$$

и $\chi_{N \setminus Z}$ почти A-суммируема к нулю.

Из (15) вытекает, что $\chi_{N \setminus Z}$ является T-суммируемой к нулю, а из-за положительности T эта суммируемость сильная. Но тогда x сильно T-суммируема к числу α (см. [5], теорема 4.1), и из теоремы 4 будет вытекать, что $x \in \mathfrak{M}(c_T \cap m)$ для любого $T \in \mathfrak{T}$, т. е. условие (17) выполнено.

Пусть

$$x \in \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{M}(c_T \cap m)$$

и $y \in f_A \cap m$. Так как ввиду теоремы 9 для любого $T \in \mathfrak{T}$,

$$f_A \cap m \subseteq c_T \cap m,$$

то для любого $T \in \mathfrak{T}$

$$xy \in c_T \cap m.$$

Следовательно,

$$xy \in \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (c_T \cap m) = f_A \cap m,$$

т. е. $x \in \mathfrak{M}(f_A \cap m)$. Мы получили, что

$$\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{M}(c_T \cap m) \subset \mathfrak{M}(f_A \cap m). \tag{19}$$

Из условий (17) и (19) теперь вытекает условие (16).

Литература

1. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
2. Соомер В., О полях почти суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 156—162.
3. Ching Chou., The multipliers of the space of almost convergent sequences. Illin. J. Math., 1972, **16**, 687—694.

4. D u r a n, P, Strongly regular matrices, almost convergence and Banach limits. Duke Math. J., 1972, **39**, 497—502.
5. H i l l, J. D., S l e d d, W. T., Approximation in bounded summability fields. Canad. J. Math., 1968, **20**, 410—415.
6. L o r e n t z, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta math., 1948, **80**, 167—190.
7. S t i e g l i t z, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklärte Konvergenzbegriffe. Stuttgart, 1971.

Поступило
12 XI 1974

PEAAEGU SUMMEERUVUSTEGURITEST TÜÜPI (A, A)

V. Soomer

R e s ü m e e

Artiklis vaadeldakse jada-jada teisenduse (1) kujul antud maatriksmenetlusi. Jada $x = \{x_k\}$ nimetatakse *peaaegu summeeruvaks menetlusega* $A = (a_{nk})$, kui jada $Ax = \{y_n\}$ on peaaegu koonduv, s. t. kehtib tingimus (2). Kõik maatriksmenetlusega A peaaegu summeeruvad jadad moodustavad menetluse A peaaegu summeeruvusvälja, mille tähistame f_A.

Juhul, kui menetlus A rahuldab tingimust (a), on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused, et kompleksarvud ε_n oleksid hulga $f_A \cap m$ multiplikaatorid, s. t. $\varepsilon x = \{\varepsilon_k x_k\} \in f_A \cap m$ iga $x \in f_A \cap m$ puhul.

Teatavate lisaeelduste puhul on tõestatud Mazur-Orlicz-Brudno teoreemi analoog. On näidatud, et hulga $f_A \cap m$ multiplikaatorite hulk on teatavate summeeruvustegurite hulkade ühisosa.

ON ALMOST SUMMABILITY FACTORS OF (A, A) TYPE

V. Soomer

S u m m a r y

In this note are considered sequences-to-sequences summability methods. The sequence $x = \{x_k\}$ is called *almost summable by the matrix method* $A = (a_{nk})$, if the sequence Ax defined by (1), is almost convergent. The set of all sequences which are almost summable by method A, is called the almost summability field of method A and is observed by f_A.

In the case (a) is fulfilled, the necessary and sufficient conditions for multipliers of $f_A \cap m$ are founded.

In § 4 it is shown, that the multipliers of $f_A \cap m$ are the intersection of summability factors of certain matrix methods. An analogue of well known Mazur-Orlicz-Brudno theorem is proved.

К ВОПРОСУ ОБ r-КРАТНОЙ СВЕРТКЕ МЕТОДА $(C, 1)$

Д. Коган

Свердловский государственный педагогический институт

§ 1. В работе [6], стр. 209, был введен метод суммирования $(C, 1)_i{}^{r*}$ следующим образом: пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

и

$$\tau_\omega = \frac{1}{\omega^r} \int_0^\omega d\omega_1 \int_0^\omega d\omega_2 \ldots \int_0^\omega \Big(\sum_{k \leqslant \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_r} u_k \Big) d\omega_r,$$

где ω — любое положительное число; если существует конечный

$$\lim_{\omega \to \infty} \tau_\omega = S,$$

то будем говорить, что ряд (1.1) суммируем методом $(C, 1)_i{}^{r*}$ к S. Этот метод является интегральным аналогом для r-кратной свертки метода $(C, 1)$, которая изучалась в [8]. Перечислим некоторые результаты, полученные в [6], стр. 210—214.

Пусть $I_{2\pi}$ — класс вещественных 2π-периодических ограниченных функций, интегрируемых в промежутке $[-\pi, \pi]$ по Лебегу, а $L_\omega{}^{(r)}(f; x)$ означают $(C, 1)_i{}^r$-средние для ряда Фурье функции f. Отметим, что $L_\omega{}^{(1)}$ представляет собой известный оператор Фейера ([5], стр. 155).

Лемма 1.1. *Если* $f \in I_{2\pi}$, *то*

$$L_\omega{}^{(r)}(f; x) = \frac{2^r}{\pi \omega^r} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin^r \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega r t}{2}}{t^{r+1}} dt. \tag{1.2}$$

Имеют место следующие свойства оператора $L_\omega{}^{(r)}$:

I. $L_\omega{}^{(r)}(\cos t; x) = \left(1 - \frac{1}{\omega^r \cdot r!}\right) \cos x$ при любом $\omega > 1$;

II. $L_\omega{}^{(r)}(\sin t; x) = \left(1 - \frac{1}{\omega^r \cdot r!}\right) \sin x$ при любом $\omega > 1$;

III. $L_\omega{}^{(r)}(1; x) = 1$ при любом $\omega > 0$.

В работе [6] изучались приближения 2π-периодических функций линейными операторами $L_\omega^{(r)}$. Целью настоящей статьи является продолжение изучения свойств метода $(C, 1)_i^{r*}$, который в дальнейшем для краткости будем обозначать через $C_i^{(r)}$.

§ 2. Метод $C_i^{(r)}$ можно представить (см. [2], стр. 9) как преобразование ряда в последовательность или как преобразование последовательности в последовательность, определенные соответственно матрицами (α_{mn}) и (a_{mn}). Определим матрицу (α_{mn}).

Лемма 2.1. *Матрица* (α_{mn}) *имеет следующий вид:*

$$\alpha_{mn}=\varphi\left(\frac{n}{m}\right),$$

где

$$\varphi(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{r!}\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant|t|}(-1)^k\dbinom{r}{k}(|t|-k)^r & \textit{при} \quad |t|\leqslant r;\\ 0 & \textit{при} \quad |t|>r.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $f\in I_{2\pi}$ и

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx} \tag{1.3}$$

является ее рядом Фурье. Рассмотрим $L_\omega^{(r)}$. В силу леммы 1.1 можно записать

$$L_\omega^{(r)}(f;x)=\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)K[\omega(u-x)]du,$$

где

$$K(x)=\frac{2^r\sin^r\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{rx}{2}}{\pi x^{r+1}}.$$

Теперь введем функцию

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x)e^{-itx}\,dx, \tag{2.1}$$

которая с точностью до числового множителя представляет преобразование Фурье функции K. Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (2.1). Можно записать, что $\varphi(t)=$ $=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$, где

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^r\frac{\sin r(1+2t/r)x}{x}\,dx,$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^r\frac{\sin r(1-2t/r)x}{x}\,dx.$$

Используя известные формулы ([3], стр. 470—472):

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^r \frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \tag{2.2}$$

при $b \geqslant r$,

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^r \frac{\sin arx}{x}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^{r-1}\cdot r!}\sum_{0\leqslant k\leqslant r(1-a)/2}(-1)^k\binom{r}{k}(r-ar-2k)^r\right] \tag{2.3}$$

при $0<a\leqslant 1$, получаем

$$\varphi(t)=1-\frac{1}{r!}\sum_{0\leqslant k\leqslant |t|}(-1)^k\binom{r}{k}(|t|-k)^r \tag{2.4}$$

при $|t|<r/2$. Используя также формулы (2.2) и (2.3), убеждаемся, что

$$\varphi(t)=\frac{1}{r!}\sum_{0\leqslant k\leqslant r-|t|}(-1)^k\binom{r}{k}(r-|t|-k)^r \tag{2.5}$$

при $r/2<|t|\leqslant r$; причем $\varphi(t)=0$ при $|t|>r$ и $\varphi(t)=1/2$ при $|t|=r/2$. Покажем, что $\varphi(t)$ можно записать одной формулой (2.4) при $|t|\leqslant r$. В сумме, стоящей в правой части равенства (2.5), сделаем подстановку $r-k=j$; тогда при $r/2<|t|\leqslant r$ имеем

$$\varphi(t)=1-\frac{1}{r!}\sum_{0\leqslant j\leqslant |t|}(-1)^j\binom{r}{j}(|t|-j)^r.$$

Мы здесь учли, что

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}(|t|-j)^r=\Delta^r y=r!,$$

где $y=x^r$ и $x=-|t|$. Итак, используя, что при $|t|=r/2$

$$1-\frac{1}{r!}\sum_{0\leqslant k\leqslant |t|}(-1)^k\binom{r}{k}(|t|-k)^r=\frac{1}{2},$$

получаем, что имеет место формула (2.4) при $|t|\leqslant r$. Чтобы в дальнейшем применить теорему Харди—Юнга ([1], стр. 141), надо доказать, что K имеет ограниченную вариацию на всей оси. В силу того, что K является четной функцией, достаточно доказать, что она имеет ограниченную вариацию на положительной полуоси. Существует конечный промежуток $[0,\delta]$, где K монотонна. Следовательно, в промежутке $[0,\delta]$ она имеет ограниченную вариацию. Теперь покажем, что K имеет ограниченную вариацию в промежутке $[\delta, +\infty)$. Имеем

$$K(x)=\int_{\delta}^{x} K'(t)\,dt,$$

причем

$$\int_{\delta}^{\infty} |K'(x)|\,dx \leqslant C_1\int_{\delta}^{\infty}\frac{dx}{x^{r+1}}+C_2\int_{\delta}^{\infty}\frac{dx}{x^{r+2}}=O(1).$$

Остается применить известную теорему (см. [7], стр. 77—78). Итак, K имеет ограниченную вариацию на всей оси. Используя теорему Харди—Юнга и четность функции K, получаем, что

$$L_{\omega}^{(r)}(f;x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k\omega\int_{-\infty}^{\infty} K[\omega(u-x)]e^{iku}\,du=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\varphi\left(\frac{k}{\omega}\right)c_k e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{\omega}\right)c_k e^{ikx}.$$

Пусть $\omega=m$, где m — любое натуральное число. Тогда

$$L_{\omega}^{(r)}(f;x)=\sum_{k=-mr}^{mr}\varphi\left(\frac{k}{m}\right)c_k e^{ikx}.$$

Итак, лемма доказана.

Замечание 2.1. При $r=1$ имеем

$$a_{mk}=\begin{cases}1-\dfrac{|k|}{m} & \text{при} \quad |k|\leqslant m\\[2mm] 0 & \text{при} \quad |k|>m,\end{cases}$$

т. е. получаем известную матрицу для $(C,1)$.

Замечание 2.2. Матрицы, соответствующие методам $C_i^{(r)}$ и r-кратной свертке для $(C,1)$, введенной в работе [8], не совпадают.

Лемма 2.2. *Матрица* (a_{mn}) *является регулярной.*

Доказательство. Проверим выполнение условий регулярности (см. [2], стр. 17). Пусть $r>1$. Во-первых,

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{|n|^r}{r!\,m^r}\right)=1$$

при любом $|n| = 1, 2, \ldots$. Теперь покажем, что второе условие регулярности также выполняется. Если воспользоваться интегральной формой для $\varphi(t)$, т. е. учитывая, что

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^r x}{x^{r+1}}\sin r\left(1-\frac{2n}{mr}\right)x\,dx,$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{mr}|\Delta\alpha_{mn}| = \sum_{n=0}^{mr}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\infty \frac{\sin^r x}{x^{r+1}}\sin\frac{x}{m}\cos\left(r-\frac{2n+1}{m}\right)x\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{mr}\frac{2}{\pi m}\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|^r dx=O(1).$$

Теорема 2.1. *Для методов $C_i^{(r)}$ и Чезаро (C, r), где r — натуральное число, имеет место совместное включение*

$$C_i^{(r)}\supset(C,r).$$

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что $\alpha_{mn} = 0$ при $|n| > mr$, т. е. матрица (α_{mn}) конечнострочна. Рассмотрим матрицу (a_{mn}), где

$$a_{mn}=\alpha_{mn}-\alpha_{m,n+1}$$

Очевидно, что $a_{m,n} = 0$ при $n > mr$. Методы, определяемые матрицами (α_{mn}) и (a_{mn}) равносильны ([5], стр. 141—142). Для доказательства нашей теоремы применим теорему Кука (см. [8], стр. 88). Остается показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^r|\Delta^r a_{mn}|\leqslant M, \tag{2.6}$$

где M — постоянная, не зависящая от m. Воспользовавшись интегральной формой для элементов матрицы (α_{mn}), получаем

$$a_{mn}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^r x}{x^{r+1}}\sin\frac{x}{m}\cos\left(r-\frac{2n+1}{m}\right)x\,dx,$$

ввиду чего можно записать

$$\Delta^r a_{mn}=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}a_{m,n+k}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^r x\sin x/m}{x^{r+1}}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\cos\left[r-\frac{2(n+k)+1}{m}\right]x\,dx.$$

Используя тождество

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\cos\left[r-\frac{2(n+k)+1}{m}\right]x=$$
$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\exp\left[r-\frac{2(n+k)+1}{m}\right]xi, \qquad (2.7)$$

получаем

$$l_{mn}(x)=2^r\operatorname{Re}\{i^r[\cos(mr-2n-r-1)x/m+$$
$$+i\sin(mr-2n-r-1)x/m]\}\sin^r x/m,$$

где через $l_{mn}(x)$ обозначена левая часть равенства (2.7). Следовательно,

$$l_{mn}(x)=\pm 2^r\sin(mr-2n-r-1)x/m\cdot\sin^r x/m$$

или

$$l_{mn}(x)=\pm 2^r\cos(mr-2n-r-1)x/m\cdot\sin^r x/m$$

в зависимости от r.

Пусть

$$l_{mn}(x)=2^r\sin(mr-2n-r-1)x/m\cdot\sin^r x/m,$$

тогда

$$\Delta^r a_{mn}=\frac{2^{r+1}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^r x\sin^{r+1}x/m\cdot\sin(mr-2n-r-1)x/m}{x^{r+1}}\,dx.$$

Сделав в интеграле подстановку $x/m=u$, получаем

$$\Delta^r a_{mn}=\frac{2^{r+1}}{\pi m^r}\int_0^\infty\frac{\sin^r mu\cdot\sin^{r+1}u\cdot\sin[r(m-1)-2n-1]u}{u^{r+1}}\,du.$$

Отсюда

$$|\Delta^r a_{mn}|\leqslant\frac{2^{r+1}}{\pi m^r}\int_0^\infty\left|\frac{\sin u}{u}\right|^{r+1}du\leqslant\frac{l}{m^r},$$

где l — постоянная, не зависящая от m.

Итак,

$$\Delta^r a_{mn}=O(m^{-r}). \qquad (2.8)$$

В остальных случаях доказательство оценки (2.8) аналогичное. Так как a_{mn} является полиномом порядка r относительно n, то a_{mn} представляет собой полином порядка $r-1$ относительно n при $(p-1)m<n<pm$, где $p=1, 2, \ldots, r$. При $n>mr$ имеем $a_{mn}=0$; в остальных случаях a_{mn} — полином не более r-го порядка относительно n. Отсюда вытекает, что $\Delta^r a_{mn}$ может быть отлично от нуля только при конечном числе значений $n=n_1, n_2, \ldots, n_s$, где s не зависит от m, причем $n_j=c_jm+d_j$ $(j=1, 2, \ldots, s)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_s, d_1, d_2, \ldots, d_s$ — постоянные, не зависящие от m. Следовательно, учитывая оценку (2.8), получаем (2.6). Итак, теорема доказана.

Лемма 2.3. *Если* $f \in I_{2\pi}$ *и* (1.3) — *ее ряд Фурье, то*

$$W \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_m^{(r)}(f; x) e^{-ikx} dx = c_k \left(1 - \frac{|k|^r}{r! m^r}\right)$$

при $|k| \leqslant m$.

Доказательство. Учитывая (1.2), а также изменяя порядок интегрирования и проводя замену переменной, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_m^{(r)}(f; x) e^{-ikx} dx = \frac{c_k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^r u \cdot \sin ru \cdot \cos 2ku/m}{u^{r+1}} du = W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^r \frac{\sin(r + 2k/m) u}{u} du$$

$$W_2 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^r \frac{\sin(r - 2k/m) u}{u} du.$$

Из доказательства леммы 2.1 следует, что

$$W_1 = c_k \varphi_1\left(\frac{k}{m}\right), \quad W_2 = c_k \varphi_2\left(\frac{k}{m}\right).$$

Следовательно,

$$W = c_k \left[\varphi_1\left(\frac{k}{m}\right) + \varphi_2\left(\frac{k}{m}\right)\right] = c_k \varphi\left(\frac{k}{m}\right).$$

При $|k| \leqslant m$ из леммы 2.1 следует, что

$$\varphi\left(\frac{k}{m}\right) = 1 - \frac{|k|^r}{r! m^r}.$$

Теорема 2.2. *Если* $f \in I_{2\pi}$ *и* $L_m^{(r)}(f; x) - f(x) = o(1/m^r)$ *равномерно по* x, *то* $f(x) = \text{const}$.

Доказательство. Учитывая лемму 2.3, можно записать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - L_m^{(r)}(f; x)] e^{-ikx} dx = \frac{c_k |k|^r}{r! m^r} \tag{2.9}$$

при $|k| \leqslant m$. Так как $f(x) - L_m^{(r)}(f; x) = o(1/m^r)$ равномерно по x, то получаем

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m^r [f(x) - L_m^{(r)}(f; x)] e^{-ikx} dx = 0.$$

Следовательно, на основании равенства (2.9) имеем $c_k = 0$ при любом $k \neq 0$. Отсюда следует, что $f(x) \equiv c_0$.

Следствие. *Если* $f \in I_{2\pi}$ *и* $f(x) \neq \mathrm{const}$, *то* $(C, 1)_i{}^{r*}$*-средние ряда Фурье функции* f *не дают приближение порядка* $o(m^{-r})$.

§ 3. Интеграл в правой части равенства (1.2), который обозначим теперь $I_\omega(f; x)$, имеет смысл при более общих предположениях, чем те, которые были нами сделаны ранее. Пусть $L(-\infty, +\infty)$ — класс всех измеримых на оси функций f, для которых существует конечный интеграл Лебега

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Пусть

$$g(x) = (1 + |x|^{r+1})^{-1} f(x),$$

Ясно, что, если f измерима на оси и $g \in L(-\infty, \infty)$, то интеграл $I_\omega(f; x)$ существует.

Рассмотрим теперь более общий оператор G_ω, где при $\omega > 0$

$$G_\omega(f; x) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, K[\omega(x-t)]\, dt, \tag{3.2}$$

причем будем предполагать, что ядро K удовлетворяет следующим условиям:

а) $K(-x) = K(x)$,

б) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1$,

в) K ограничено в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

г) $x^{r+1}K(x)$ ограничено на всей оси, где r — натуральное число.

Очевидно, что если f — измеримая на оси функция и $g \in L(-\infty, \infty)$, то интеграл (3.2) существует для любого $\omega > 0$. Ядро оператора I_ω удовлетворяет вышеуказанным условиям.

Теорема 3.1. *Пусть измеримая на оси функция* f *удовлетворяет условию* $g \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда*

1) *если*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| dt = 0,$$

где $h > 0$, *то*

$$\lim_{\omega \to \infty} G_\omega(f; x) = s;$$

2) *если* $f(x)$ *непрерывна в конечном интервале* (α, β), *то*

$$\lim_{\omega \to \infty} G_\omega(f; x) = f(x)$$

равномерно в любом замкнутом интервале $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Доказательство проводится аналогично, как в теореме, доказанной в [1], стр. 145—147.

Литература

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1963.
4. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики. Москва, 1963.
5. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
6. Коган Д. А., Обобщение одной матричной свертки и ее применение к рядам Фурье. Научн. тр. Свердл. пед. ин-т, 1974, **219**, 208—222.
7. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Москва, 1969.
8. Moustafa, M. D., Convolution of Cesàro methods. J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 85—100.

Поступило
8 I 1974

MENETLUSE $(C, 1)$ KORDSEST KONVOLUTSIOONIST

D. Kogan

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse menetluse $C_i^{(r)}$ omadusi, mis on töös [8] käsitletud menetluse $(C, 1)^{r*}$ integraalne analoog.

ABOUT r-MULTIPLE CONVOLUTION OF THE $(C, 1)$-METHOD

D. Kogan

Summary

In the present paper we consider properties of the $C_i^{(r)}$-method, that is the integral analogy of the $(C, 1)^{r*}$-method, which has been considered [8].

СУММИРУЕМОСТЬ ФОРМАЛЬНОГО УМНОЖЕНИЯ РЯДОВ МЕТОДОМ РИССА

Н. Веске

Кафедра математического анализа

Пусть даны ряды[1]

$$\sum u_n \tag{1}$$

и

$$\sum v_n. \tag{2}$$

Составим по правилу Коши ряд-произведение

$$\sum w_n, \tag{3}$$

где

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

Подчиняем ряд (1) некоторому ограничению и оставим почти произвольным ряд (2). Ищем условия для Σv_n, чтобы ряды (1) и (3) были одновременно сходящимися или суммируемыми.

Обозначим

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Тогда

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu v_{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \sum_{k=\nu}^{n} v_{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu V_{n-\nu}.$$

Пусть $B = (b_{nk})$ — матрица преобразования последовательности в последовательность разрывного метода Рисса (R^*, λ, β), т. е. B — треугольная матрица[2] с

$$b_{nk} = \Delta r_{nk}, \quad r_{nk} = (1 - \lambda_k/\lambda_{n+1})^\beta,$$

где $\lambda = \{\lambda_n\}$ и $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, а $\beta > -1$.

Пусть $A = (a_{nk})$ — метод Чезаро (C, α) целого порядка $\alpha \geqslant 0$. Обозначим $A^{-1} = (a'_{nk})$, тогда

$$a_{nk} = A_{n-k}^{\alpha-1} / A_n^\alpha, \quad a'_{nk} = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все значения 0, 1, 2, ...

[2] Во всей статье

$$\Delta s_{nk} = \Delta^1 s_{nk} = s_{nk} - s_{n,k+1},$$

$$\Delta^{\alpha+1} s_{nk} = \Delta(\Delta^\alpha s_{nk}).$$

Рассмотрим следующую задачу формального умножения рядов:

каким должен быть ряд (2) *и число* V, *чтобы при всякой* (C, α)*-суммируемой к нулю последовательности*

$$\{u_n\} \tag{4}$$

последовательность

$$\{W_n - VU_n\} \tag{5}$$

была (R^*, λ, β)*-суммируемой к нулю.*

В этом случае говорят, что последовательности $\{W_n\}$ и $V\{U_n\}$ *равносуммируемы* методом (R^*, λ, β).

Обозначая A-средние последовательности (4) через $\{U'_n\}$, а B-средние последовательности (5) через $\{W'_n\}$, имеем

$$W'_n = \sum_{k=0}^{n} d_{nk} U'_k, \tag{6}$$

где (см. [2], стр. 119)

$$d_{nk} = \sum_{\nu=0}^{n-k} (V_\nu - V) \sum_{\varkappa=\nu+k}^{n} b_{n\varkappa} A_k^{\alpha} A_{\varkappa-\nu-k}^{-\alpha-1} =$$

$$= A_k^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-k} (V_\nu - V) \Delta^{\alpha} b_{n,k+\nu}, \tag{7}$$

ибо ввиду треугольности метода B имеем $b_{nk} = 0$ при $k > n$ и, следовательно, (7) справедливо при всех $0 \leqslant k + \nu \leqslant n$.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к матричному преобразованию (6) последовательности $\{U'_n\}$ в последовательность $\{W'_n\}$, где d_{nk} даны формулой (7). Теперь мы можем сформулировать поставленную задачу следующим образом:

каким условиям должны удовлетворять ряд (2) и число V, чтобы преобразование (6) переводило все сходящиеся к нулю последовательности $\{U'_n\}$ в сходящиеся к нулю последовательности $\{W'_n\}$.

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, полученная применением леммы 1 из статьи 2 к преобразованию (6).

Теорема 1. *Для того, чтобы последовательность* (5) *была* (R^*, λ, β)*-суммируемой к нулю для всякой* (C, α)*-суммируемой к нулю последовательности* (4), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum_{\nu=0}^{n-k} (V_\nu - V) \Delta^{\alpha} b_{n,k+\nu} = o(1), \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} \left| \sum_{\nu=0}^{n-k} (V_\nu - V) \Delta^{\alpha} b_{n,k+\nu} \right| = O(1). \tag{9}$$

Чтобы найти более простые достаточные условия, докажем некоторые вспомогательные результаты:

Лемма 1. *Если последовательность*

$$\{\Delta^\alpha r_{nk}\} \qquad (k \leqslant n) \tag{10}$$

монотонна по индексу k, то

$$\sum_{k=0}^{n-\nu} A_k^\alpha \left|\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}\right| = O(1) \qquad (\nu \leqslant n). \tag{11}$$

Доказательство. Ввиду монотонности последовательности (10) по k, находим

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \left|\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}\right| = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \Big| \sum_{\varkappa=k+\nu}^{n} A_{\varkappa-k-\nu}^{-\alpha-1} b_{n\varkappa}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{\varkappa=\nu}^{n} b_{n\varkappa} \sum_{k=0}^{\varkappa-\nu} A_k^\alpha A_{\varkappa-k-\nu}^{-\alpha-1}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{\varkappa=\nu}^{n} b_{n\varkappa}\Big| = |r_{n\nu}| = O(1).$$

Лемма 2. *Для того, чтобы $(R^*, \lambda, \beta) \supset (C, \alpha)$ совместно, необходимо и достаточно выполнение условия* (11) *при $\nu = 0$.*

Доказательство. Для того, чтобы $B = (R^*, \lambda, \beta) \supset (C, \alpha) = A$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G = BA^{-1} = (g_{nk})$ удовлетворяла условиям теоремы Теплица (см. [1], теоремы 12.1 и 1.2). Так как

$$g_{nk} = A_k^\alpha \Delta^\alpha b_{nk},$$

то ввиду регулярности метода (R^*, λ, β) и, учитывая доказательство леммы 1, имеем[3]

$$\lim g_{nk} = A_k^\alpha \Delta^{\alpha+1} 1 = 0,$$

$$\lim \sum_{k=0}^{n} g_{nk} = \lim r_{n0} = 1.$$

Из леммы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если последовательность* (10) *монотонна, то $(R^*, \lambda, \beta) \supset (C, \alpha)$ совместно.*

Замечание 1. При $\alpha = 0$ мы получаем из условия (11) требование регулярности метода (R^*, λ, β), так как условие

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| = O(1)$$

— одно из условий регулярности этого метода (см. [1], теорема 1.3).

Постараемся упростить условия теоремы 1. При этом мы получаем следующие четыре теоремы.

Теорема 2. *Последовательность* (5) *является (R^*, λ, β)-суммируемой к нулю для всякой (C, α)-суммируемой к нулю последовательности* (4), *если*

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} (V_k - V)\Big| = O(1), \tag{12}$$

[3] Всюду lim означает предел при $n \to \infty$.

а последовательность

$$\{\Delta^\alpha b_{nk}\} \text{ монотонна} \tag{13}$$

(по индексу k, где $k \leqslant n$) и члены ее одного знака.

Доказательство. Если выполнены условия (12) и (13), то условие (8) теоремы 1 выполнено, так как

$$\begin{aligned}
&\lim \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^\alpha b_{n,k+\nu}(V_\nu - V) = \\
&= \lim \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^{\alpha+1} b_{n,k+\nu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} (V_\varkappa - V) = \\
&= O(1) \lim \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^{\alpha+1} b_{n,k+\nu} = \\
&= O(1) \lim \Delta^\alpha b_{nk} = 0.
\end{aligned}$$

Левая часть формулы (9) при выполнении условия (13) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^{\alpha+1} b_{n,k+\nu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} (V_\varkappa - V) \right| = O(1) \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha |\Delta^\alpha b_{nk}|,$$

что по доказательству леммы 1 ограничена.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 остается справедливым, если вместо условия (12) требовать выполнения

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (V_k - V_n) \right| = O(1). \tag{14}$$

А так как

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (V_k - V_n) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k+1}^{n} v_\nu \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} k v_k \right|,$$

то условие (14) можно заменить условием

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k v_k \right| = O(1).$$

Теперь применяем к преобразованию

$$W'_n = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^\alpha b_{n,k+\nu}(V_\nu - V) U'_k \tag{15}$$

следующую лемму (см. [5], стр. 83).

Лемма 3. *Билинейное преобразование*

$$W'_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} h_{nk\nu} U'_k (V_\nu - V)$$

переводит пространство $l \times c_0$ в пространство c_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim h_{nk\nu} = 0$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} |h_{nk\nu}| = O(1).$$

На основании леммы 3 мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Последовательность* (5) *является* (R^*, λ, β)*-суммируемой к нулю для всякой* (C, α)*-суммируемой к нулю последовательности* (4), *если*

$$\sum |V_n - V| < \infty, \tag{16}$$

и последовательность (10) *монотонна.*

Доказательство. В данном случае $h_{nk\nu} = A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha} b_{n,k+\nu}$. Для того, чтобы $\{W'_n\}$ сходилась к нулю, по лемме 3 необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim \Delta^{\alpha} b_{n,k+\nu} = 0 \tag{17}$$

и выполнилось условие (11). Эти условия выполнены по лемме 1, если последовательность 10 монотонна.

Замечание 3. Условие (11) выполнено по лемме 2, если $(R^*, \lambda, \beta) \supset (C, \alpha)$.

Напомним определение сходимости со скоростью μ или μ-сходимости (см. [3], стр. 387): пусть $\mu = \{\mu_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Сходящаяся последовательность $\{V_n\}$ с $\lim V_n = V$ называется *μ-сходящейся*, если существует конечный предел

$$\lim \mu_n (V_n - V) = V^*.$$

Последовательность $\{V_n\}$ называется B^{μ}-ограниченной значением V (см. [4], стр. 114), если

$$\mu_n \left(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} V_k - V \right) = O(1).$$

Методом, развитым И. Куллем [6] для билинейного преобразования, можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Билинейное преобразование*

$$W'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{nk\nu} U'_k (V_\nu - V)$$

переводит пространство $l \times c_0$ *в пространство* c_0 *тогда и только тогда, когда*

$$\lim C_{nk\nu} = 0$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_{nk\nu}| = O(1).$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \geqslant 1$. *Последовательность* (5) *является* (R^*, λ, β)*-суммируемой к нулю для всякой со скоростью* $\mu = \{n+1\}$ *к нулю* (C, α)*-суммируемой последовательности* (4), *если*

$$V = \sum v_n, \tag{18}$$

$$\sum |v_n| < \infty \tag{19}$$

и

$$\{\Delta^{\alpha-1} r_{nk}\} \text{ монотонна.} \tag{20}$$

Доказательство. В силу выполнения условия (18) преобразование (15) имеет вид

$$W'_n=\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-k}(V_\nu-V)\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}(k+1)U'_k=$$
$$=-\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-k}\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}\sum_{l=\nu+1}^{\infty}v_l(k+1)U'_k=$$
$$=-\sum_{k=0}^{n}\Big[\sum_{l=1}^{n-k}v_l\sum_{\nu=0}^{l-1}\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}+$$
$$+\sum_{l=n-k+1}^{\infty}v_l\sum_{\nu=0}^{n-k}\Delta^\alpha b_{n,k+\nu}\Big]A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}(k+1)U'_k.$$

Отсюда при билинейном преобразовании получаем

$$c_{nkl}=\begin{cases}-A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}\Delta^\alpha(r_{nk}-r_{n,k+l}) & (1\leqslant l\leqslant n-k),\\ -A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}\Delta^\alpha r_{nk} & (l>n-k)\end{cases}$$

и по лемме 4 необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность $\{W'_n\}$ сходилась к нулю при $(C,\alpha)^\mu$-суммируемой к нулю последовательности (4) и при условиях (18) и (19), являются

$$\lim\Delta^\alpha(r_{nk}-r_{n,k+l})=0, \tag{21}$$

$$\lim\Delta^\alpha r_{nk}=0, \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}(k+1)^{-1}|\Delta^\alpha(r_{nk}-r_{n,k+l})|=O(1)\quad(1\leqslant l\leqslant n). \tag{23}$$

Условия (21) и (22) выполнены, а условие (23) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha-1}|\Delta^\alpha r_{nk}|=O(1). \tag{24}$$

Но по лемме 1 для справедливости (24) достаточно выполнение условия (20).

Замечание 4. Условие (24) выполнено (по лемме 2), если $(R^*,\lambda,\beta)\supset(C,\alpha-1)$.

Пусть теперь метод (R^*,λ,β) транслативен слева. Имеет место

Теорема 5. *Последовательность* (5) *является* (R^*,λ,β)*-суммируемой к нулю для всякой сходящейся к нулю последовательности* $\{(n+1)^\delta u_n\}$ *и* (R^*,λ,β)*-ограниченной со скоростью* $\{(n+1)^\gamma\}$ *последовательности* $\{V_n-V\}$ *тогда и только тогда, когда*

а) $\delta+\gamma\geqslant 1$, *где* $\delta>0$ *и* $\gamma>0$,
или
б) $\gamma>1$, *где* $\delta=0$.

Доказательство. Преобразование (6) имеет при $\alpha=0$ вид:

$$W'_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-k}(V_\nu-V)\,b_{n,k+\nu}u_k.$$

Для того, чтобы последовательность $\{W'_n\}$ сходилась к нулю для сходящейся к нулю последовательности $\{(n+1)^\delta u_n\}$, по теореме 1 необходимо и достаточно выполнение условий

$$\lim\sum_{\nu=0}^{n-k}(V_\nu-V)\,b_{n,k+\nu}=0, \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots) \tag{25}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^\delta}\left|\sum_{\nu=0}^{n-k}(V_\nu-V)\,b_{n,k+\nu}\right|=O(1). \tag{26}$$

Но, так как условие

$$(n-k+1)^\gamma\left|\sum_{\nu=0}^{n-k}(V_\nu-V)\,b_{n,k+\nu}\right|=O(1)$$

означает, что последовательность $\{V_n-V\}$ является B^μ-ограниченной, где метод $B=(R^*,\lambda,\beta)$ слева транслятивен и $\mu_n=(n+1)^\gamma$, то условие (25) выполнено, т. е.

$$\lim\,(n-k+1)^{-\gamma}\cdot O(1)=0 \quad \text{при} \quad \gamma>0.$$

Но условие (26) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\delta}(n-k+1)^{-\gamma}=O(1). \tag{27}$$

По теореме 2 статьи [7] условие (27) справедливо тогда и только тогда, когда

а) $\delta+\gamma\geqslant 1$ при $\delta>0$, $\gamma>0$
или
б) $\gamma>1$ при $\delta=0$.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Веске Н., Суммируемость методом Чезаро формального произведения рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 118—128.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора—Харди для заданной скорости. II. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, **18**, № 4, 387—395.
4. Кангро Г., О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, **20**, № 2, 111—120.

5. Кангро Г., Ламп Ю., Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 80—91.
6. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
7. Третьяков В. П., К вопросу о формальном умножении рядов. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1969, **129**, № 3, 152—161.

Поступило
26 XII 1973

RIDADE FORMAALSE KORRUTISE SUMMEERUVUS RIESZI MENETLUSEGA

N. Veske

Resümee

Jätkatakse töös [2] alustatud probleemide uurimist ridade võrdsummeeruvusest. Leitakse piisavad tingimused menetlust (R^*, λ, β) iseloomustava jada $\{\lambda_n\}$, jada $\{v_n\}$ ja arvu V kohta selleks, et jada (5) oleks menetlusega (R^*, λ, β) nulliks summeeruv iga menetlusega (C, α) nulliks summeeruva jada (4) korral. Vaadeldav probleem on üldistatud ka juhule, kus jada (4) menetlusega (C, α) nulliks summeeruvus asendatakse kiirusega μ nulliks koonduvusega.

SUMMIERBARKEIT DES FORMALEN PRODUKTS DER REIHEN NACH RIESZ-VERFAHREN

N. Veske

Zusammenfassung

Im Artikel wird die Summierbarkeit der formalen Produktsreihe (3) der Reihen (1) und (2) nach Riesz-Verfahren (R^*, λ, β) im Fall, wenn die Folge (4) gegen Null (C, α)-summierbar ist, oder die Folge $\{(n+1)^\delta u_n\}$ eine Nullfolge ist, behandelt. Zum Beispiel gelten folgende Sätze.

Satz 3. *Wenn die Bedingung* (16) *erfüllt ist, und die Folge* (10) *monoton ist, dann ist die Folge* (5) *gegen Null* (R^*, λ, β)*-summierbar bei jeder gegen Null* (C, α)*-summierbaren Folge (4).*

Satz 4. *Wenn die Bedingungen* (18) *und* (19) *erfüllt sind, und die Folge* (20) *monoton ist, dann ist die Folge* (5) *gegen Null* (R^*, λ, β)*-summierbar bei jeder mit der Geschwindigkeit* μ *gegen Null* (C, α)*-summierbaren Folge* (4).

О ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ДЛЯ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

1. Рассмотрим систему φ интегрируемых по Лебегу на $e=[a,b]$ функций φ_k.

Говорят, что ряд[1]

$$\sum \xi_k\varphi_k(t), \tag{1}$$

где $x=\{\xi_k\}\in l^2$, является почти всюду на e *сильно* AB_r-*суммируемым* или $A[B]_r$-*суммируемым*, если существует линейный непрерывный оператор f из пространства l^2 в пространство всех измеримых, конечных почти всюду на e функции M_e со значениями $f(x,t)$ так, чтобы почти всюду на e

$$\lim_{n\to\infty} F_n(r,A,B,x,t)=0, \tag{2}$$

где

$$F_n(r,A,B,x,t)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}|\beta_k(x,t)-f(x,t)|^r,$$

$$\beta_k(x,t)=\sum_{\nu=0}^{k}\beta_{k\nu}\xi_\nu\varphi_\nu(t), \tag{3}$$

$A=(a_{nk})$ — треугольная регулярная матрица преобразования последовательности в последовательность с $a_{nk}\geqslant 0$ и $B=(\beta_{nk})$ — произвольная регулярная треугольная матрица преобразования ряда в последовательность, причём $r\geqslant 1$.

В работе [6] мы исследовали равносильность методов сильного суммирования в предположении, что ряд (1) для всех $x\in l^2$ сходится по метрике $L^2{}_e$. В настоящей работе мы откажемся от этого предположения и находим достаточное условие для $A[B]_r$-суммируемости ряда (1) почти всюду на e при помощи функций Лебега системы φ для методов суммирования A и B.

---

[1] Через Σu_k мы обозначаем ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Роль функций Лебега для суммируемости ряда (1) почти всюду на e показывает теорема А, доказанная в [5] (см. теорему 1).

Теорема А. *Пусть регулярная треугольная матрица* $C=(\gamma_{nk})$ *преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условию*

$$\sum_{l=0}^{n}\sup_{p\geqslant n}\left|\sum_{\nu=l}^{n}\gamma_{\nu l}^{-1}\gamma_{n\nu}\gamma_{p\nu}\right|\leqslant M, \tag{4}$$

где $(\gamma_{\nu l}^{-1})=C^{-1}$, *и функции Лебега*

$$L_n(C,t)=\int_a^b\left|\sum_{k=0}^{n}\gamma_{nk}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)\right|d\tau$$

почти всюду на е удовлетворяют условию

$$L_n(C,t)=O_t(1).$$

Тогда ряд (1) *для всех* $x\in l^2$ *почти всюду на е является С-суммируемым.*

Мы докажем следующие теоремы, обозначая

$$\Lambda_n(B,t)=\int_a^b\sup_{l\geqslant n}\left|\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}\beta_{lk}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)\right|d\tau.$$

Теорема 1. *Если почти всюду на е*

$$\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\Lambda^r{}_k(B,t)=O_t(1), \tag{5}$$

то для каждого $x\in l^2$ *и для каждого оператора* $\mathfrak{f}$ *из* l^2 *в* M_e *почти всюду на е*

$$F_n(r,A,B,x,t)=O_t(1).$$

Теорема 2. *Если методы В и АВ удовлетворяют условию* (4) *и почти всюду на е*

$$\sum_{k=0}^{n}a_{nk}L_k^r(B,t)=O_t(1), \tag{6}$$

то почти всюду на е ряд (1) *является* $A[B]_r$*-суммируемым для всех* $x\in l^2$.

Пусть выполнено условие (6) с $r=1$, причем A и B суть методы Рисса P, для которого условие (4) при P и PP выполнено. Тогда по теореме 2 ряд (1) почти всюду на e является $P[P]_1$-суммируемым, и, следовательно также PP-суммируемым для всех $x\in l^2$. Если, кроме того, ряд (1) для всех $x\in l^2$ сходится по мере, то по теореме Никишина (см. [3], стр. 339) для каждого $\varepsilon>0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon\subset e$ с $\operatorname{mes}T_\varepsilon>b-a-\varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon>0$ такие, что

$$\left\{\int_{T_\varepsilon}\left|\sum_{k=0}^{n}\xi_k\varphi_k(t)\right|^2dt\right\}^{1/2}\leqslant M_\varepsilon\|x\|. \tag{7}$$

Так как теорема 1 из [6] верна в случае, если условие (1.4) из [6] заменить на условие (7), то мы заключаем, что теперь из PP-суммируемости ряда (1) почти всюду на e вытекает его P-суммируемость почти всюду на e. Итак, нами доказана следующая

Теорема 3. *Если ряд* (1) *для всех* $x \in l^2$ *сходится по мере на* e, *то для* P-*суммируемости ряда* (1) *почти всюду на* e *для всех* $x \in l^2$ *достаточно, чтобы почти всюду на* e

$$\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(P, t) = O_t(P_n). \tag{8}$$

Очевидно, что если почти всюду на e $L_n(P, t) = O_t(1)$, то подавно выполнено условие (8). Следовательно, теорема 3 уточняет теорему A в случае, когда ряд (1) сходится по мере на e для всех $x \in l^2$ и $C = P$.

Прямым обобщением теоремы 3 является следующая

Теорема 4. *Пусть ряд* (1) *для всех* $x \in l^2$ *сходится по мере на* e, *тогда для его* P-*суммируемости почти всюду на* e *для всех* $x \in l^2$ *достаточно, чтобы для некоторого натурального числа* m *почти всюду на* e

$$L_n(m, P, t) = O_t(1),$$

где

$$L_n(1, P, t) = L_n(P, t)$$

и при $j \geqslant 2$

$$L_n(j, P, t) = P_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} p_k L_k(j-1, P, t).$$

Так как теорем 4 верна при $P_k = k + 1$, т. е. в случае метода арифметических средних C^1, то теорема 4 обобщает известную теорему Качмажа (см. [2], стр. 227).

2. Доказательство теоремы 1. В силу леммы 3 из [4] мы должны показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, что равномерно относительно всех разбиений множества T_ε на произвольное число $m + 1$ измеримых непересекающихся частей $\mathfrak{M}^\varepsilon{}_{mn}$ имеет место неравенство

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon}_{mn}(t) \left\{\sum_{k=0}^{n} a_{nk} |\beta_k(x, t)|^r\right\}^{1/r} dt \leqslant M_\varepsilon, \tag{9}$$

где $\chi^\varepsilon{}_{mn}$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{M}^\varepsilon{}_{mn}$.

Найдем теперь по теореме о достаточном числе функционалов функции $\Theta_{nk}(x, t)$ такие, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n} |\Theta_{nk}(x, t)|^{r'} = 1$$

для $1/r' + 1/r = 1$ и

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_{nk} |\beta_k(x, t)|^r\right\}^{1/r} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x, t) \beta_k(x, t),$$

где $b^r{}_{nk} = a_{nk}$.

Следовательно, нам надо вместо неравенства (9) доказать неравенство

$$|A_m(x)| \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{m} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) \beta_k(x,t)\, dt \right| \leqslant M_\varepsilon. \qquad (10)$$

Изменяя порядок суммирования и воспользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$|A_m(x)| \leqslant \|x\| \left(\sum_{\nu=0}^{m} B_{m\nu}^2\right)^{1/2}, \qquad (11)$$

где

$$B_{m\nu} = \int_a^b \varphi_\nu(t) \sum_{n=\nu}^{m} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=\nu}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) \beta_{k\nu}.$$

Заменяя в правой части неравенства (11) квадрат интеграла на двойной интеграл, при помощи замены порядка суммирования и интегрирования, находим

$$\sum_{\nu=0}^{m} B_{m\nu}^2 = C_m + D_m + E_m + F_m, \qquad (12)$$

где

$$C_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{n=0}^{m} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) \sum_{p=k+1}^{m} \chi_{mp}^{\varepsilon}(\tau) \sum_{l=k+1}^{p} b_{pl} \Theta_{pl}(x,\tau) R_{kl}(t,\tau)\, dt\, d\tau,$$

$$D_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^{m} \chi_{mp}^{\varepsilon}(\tau) \sum_{l=0}^{p} b_{pl} \Theta_{pl}(x,\tau) \sum_{n=p}^{m} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=p}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) S_{kl}(t,\tau)\, dt\, d\tau,$$

$$E_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^{m} \chi_{mp}^{\varepsilon}(\tau) \sum_{l=0}^{p} b_{pl} \Theta_{pl}(x,\tau) \sum_{n=p}^{m} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=l}^{p-1} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) S_{kl}(t,\tau)\, dt\, d\tau,$$

$$F_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^{m} \chi_{mp}^{\varepsilon}(\tau) \sum_{l=0}^{p} b_{pl} \Theta_{pl}(x,\tau) \sum_{n=l}^{p-1} \chi_{mn}^{\varepsilon}(t) \sum_{k=l}^{n} b_{nk} \Theta_{nk}(x,t) S_{kl}(t,\tau)\, dt\, d\tau,$$

$$R_{kl}(t,\tau) = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{k\nu} \beta_{l\nu} \varphi_\nu(t) \varphi_\nu(\tau),$$

и

$$S_{kl}(t,\tau) = \sum_{\nu=0}^{l} \beta_{k\nu} \beta_{l\nu} \varphi_\nu(t) \varphi_\nu(\tau).$$

Далее имеем

$$|C_m| \leqslant \int_{T_\varepsilon} \sup_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} |\Theta_{nk}(x,t)| \operatorname*{vraisup}_{\tau \in e} \sup_p \sum_{l=0}^{p} b_{pl} |\Theta_{pl}(x,\tau)|\, \Lambda_k(B,t)\, dt,$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{p} b_{pl} |\Theta_{pl}(x,t)| \leqslant \left(\sum_{l=0}^{p} a_{pl}\right)^{1/r},$$

то в силу регулярности метода A, найдется постоянная $M > 0$ такая, что

$$|C_m| \leqslant M \int_{T_\varepsilon} \sup_n \left\{\sum_{k=0}^{n} a_{nk} \Lambda_k^r (B,t)\right\}^{1/r} dt.$$

Теперь из условия (5) вытекает существование постоянной $M_\varepsilon > 0$ такой, что

$$|C_m| \leqslant M_\varepsilon/4.$$

Аналогично доказывается, что также $|D_m| \leqslant M_\varepsilon/4$, $|E_m| \leqslant M_\varepsilon/4$ и $|F_m| \leqslant M_\varepsilon/4$. При помощи неравенств (12) и (11) заключаем теперь, что имеет место неравенство (10). Теорема доказана.

3. Для доказательства теоремы 2 нам нужна

Лемма. *Пусть H_n — непрерывные однородные операторы из пространства l^2 в пространство M_e, причем для значений этих операторов $H_n(x,t)$ почти всюду на e*

$$|H_n(x_1+x_2, t)| \leqslant |H_n(x_1, t)| + |H_n(x_2, t)|.$$

Если для каждого $x \in l^2$ почти всюду на e

1° $H_n(x,t) = O_t(1)$

и для каждого x из некоторого тотального в l^2 множества

2° $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x,t) = 0,$

то почти всюду на e для всех $x \in l^2$

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x,t) = 0. \qquad (13)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [1] (см. стр. 361). Действительно, определим операторы V_n, V и W из l^2 в M_e соответственно равенствами

$$V_n(x,t) = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |H_k(x,t)|,$$

$$V(x,t) = \sup_k |H_k(x,t)|,$$

и

$$W(x,t) = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geqslant m} |H_k(x,t)|.$$

Из определения оператора V_n вытекает его непрерывность и свойства

$$\|V_n(x_1+x_2)\| \leqslant \|V_n(x_1)\| + \|V_n(x_2)\|, \qquad (14)$$

$$\|V_n(\alpha x)\| = \||\alpha|\, V_n(x)\|$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму в M_e, а $x_1, x_2 \in M_e$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Далее, из условия 1° вытекает неравенство

$$\|V_n(x)\| \leqslant \|V(x)\| < \infty,$$

вследствие чего равномерно по n в пространстве M_e имеем $\alpha V_n(x) \to \Theta$, при $\alpha \to 0$. Итак, множество $\{V_n(x)\}$ поточечно ограничено в M_e, откуда при помощи принципа равнонепрерывности (см. [1], стр. 65, лемма 13) имеем, что равномерно по n в пространстве M_e

$$\lim_{x\to\Theta} V_n(x) = \Theta.$$

Так как $V(x) = \lim V_n(x)$ для всех $x \in l^2$, то оператор V непрерывен в точке $\theta \in l^2$. Итак, из неравенства

$$\|W(x)\| \leqslant \|V(x)\|$$

вытекает непрерывность оператора W в точке $\theta \in l^2$.

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} |W(x_1, t) - W(x_2, t)| &= \lim_{m\to\infty} \Big| \sup_{k\geqslant m} |H_k(x_1, t)| - \sup_{k\geqslant m} |H_k(x_2, t)| \Big| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geqslant m} \big| |H_k(x_1, t)| - |H_k(x_2, t)| \big| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geqslant m} |H_k(x_1 - x_2, t)| = \\ &= W(x_1 - x_2, t), \end{aligned}$$

то и подавно

$$\|W(x_1) - W(x_2)\| \leqslant \|W(x_1 - x_2)\|,$$

вследствие чего заключаем, что оператор W непрерывен всюду в l^2. Но по условию 2° имеем $W(x) = \theta$ для всех x из некоторого тотального в l^2 множества, следовательно, всюду в l^2 имеем $W(x) = \theta$, откуда вытекает равенство (13). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Покажем сначала, что из условия (6) вытекает существование требуемого оператора f из определения $A[B]_r$-суммируемости.

Определим оператор f из l^2 в M_e равенством

$$f(x, t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\beta_k(x, t). \tag{15}$$

Если мы докажем, что предел (15) существует в M_e для всех x из l^2, то по теореме 17 из [1] оператор f линеен и непрерывен. В силу неравенства

$$\begin{aligned} L_n(AB, t) &= \int_a^b \Big| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{k\nu}\varphi_\nu(t)\varphi_\nu(\tau) \Big| d\tau \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} a_{nk} L_k(B, t) \leqslant \\ &\leqslant \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \Big\}^{1/r'} \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk} L^r{}_k(B, t) \Big\}^{1/r}, \end{aligned}$$

имеем при помощи условия (6), что почти всюду на e

$$L_n(AB, t) = O_t(1).$$

Так как по предположению теоремы 2 метод AB удовлетворяет условию (4), то по теореме А ряд (1) для всех $x \in l^2$ является AB-суммируемым почти всюду на e. Следовательно, подавно в M_e существует предел (15).

В работе [5], стр. 207, мы доказали, что при условии (4)

$$L_n(B,t) \geqslant M_1 \Lambda_n(B,t),$$

вследствие чего, из теоремы 1 и регулярности метода A, имеем, что почти всюду на e

$$F_n(r, A, B, x, t) = O_t(1).$$

Кроме того, если $x = e_i$, то в силу регулярности методов A и B почти всюду на e имеем $f(x,t) = \varphi_i(t)$, вследствие чего почти всюду на e для каждого $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(r, A, B, e_i, t) = 0.$$

Следовательно, предположения леммы для операторов H_n, определенные равенством

$$H_n(x,t) = \{F_n(r, A, B, x, t)\}^{1/r},$$

выполнены, т. е. почти всюду на e

$$\lim_{n\to\infty} F_n(r, A, B, x, t) = 0$$

для всех $x \in l^2$. Теорема доказана.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1968.
3. Никишин Е. М., О системах сходимости по мере для l^2. Матем. заметки, 1973, **13**, № 3, 337—340.
4. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 140—151.
5. Тюрнпу Х., О суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1973, **305**, 199—212.
6. Тюрнпу Х., Лыхмус К., Салуяэр Т., О сильной суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 193—213.

Поступило
14 III 1974

LEBESGUE'I FUNKTSIOONIDE TÄHTSUSEST FUNKTSIONAALRIDADE TUGEVA SUMMEERUVUSE KORRAL

H. Türnpu

Resümee

Käesolevas töös leitakse piisavad tingimused funktsionaalridade (1) tugevaks AB_r-summeeruvuseks peaaegu kõikjal Lebesgue'i funktsioonide kaudu.

Tõestatakse, et kui menetluse B Lebesgue'i funktsioonid $L_n(B,t)$ rahuldavad peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ tingimust (6), siis on rida (1) iga $x \in l^2$

korral peaaegu kõikjal tugevalt AB_r-summeeruv. Järeldusena saadakse Kaczmarz'i tuntud tulemuse täpsustus Lebesgue'i funktsioonide osast ortogonaalridade summeerimisel Cesàro menetlusega.

LEBESGUESCHE FUNKTIONEN UND STARKE SUMMIERBARKEIT DER FUNKTIONENREIHEN FAST ÜBERALL

H. Türnpu

Zusammenfassung

Es sei $\varphi = \{\varphi_k\}$ ein Funktionensystem, wo die Funktionen φ_k im Sinne von Lebesgue meßbar und fast überall endlich sind. Wir nennen die Reihe in Form (1) fast überall stark AB_r-summierbar, wenn fast überall in $[a, b]$ der Grenzwert (2) existiert. Wir beweisen folgenden

Satz. *Wenn für Lebesguesche Funktionen $L_n(B, t)$ fast überall in $[a, b]$ die Bedingung* (6) *erfüllt ist, dann ist die Reihe* (1) *für jede $x \in l^2$ fast überall in $[a, b]$ stark AB_r-summierbar.*

Aus diesem Satz folgt eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Kacmarz über Cesàrosche Summierbarkeit der Orthogonalreihen fast überall.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ ЧЕЗАРО-СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

1. Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ — система измеримых конечных почти всюду на $e = [a, b]$ функций такая, для которых ряд[1]

$$\sum \xi_k \varphi_k(t) \tag{1}$$

для всех $x = \{\xi_k\} \in l^p$ $(1 < p < \infty)$ сходится по мере на e.

Говорят, что ряд (1) почти всюду на e является абсолютно суммируемым методом Чезаро C^α, или $|C^\alpha|$-суммируемым, если почти всюду на e

$$\sum n^{-1} |\tau^\alpha{}_n(x, t)| < \infty,$$

где

$$\tau^\alpha{}_n(x, t) = (A^\alpha{}_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\, k\, \xi_k\, \varphi_k(t).$$

Ниже мы воспользуемся следующими обозначениями

$$A_m^{(p)} = \{ \sum_{k=r(m)+1}^{r(m+1)} |\xi_k|^p \}^{1/p},$$

$$E_m^{(p)} = \{ \sum_{k=m}^{\infty} |\xi_k|^p \}^{1/p},$$

где $r(m) = 2^m$, $s(m) = 2^{r(m)}$ и $(\alpha, q) = (1 - \alpha q)/(q - 1)$.

Если φ — ортогональная система и $p = 2$, то Лейндлером [8], в частности, доказана

Теорема А. *Для $|C^\alpha|$-суммируемости почти всюду на e ортогонального ряда* (1) *достаточно, чтобы при $\alpha > 1/2$ имело место*

$$\sum A_m^{(2)} < \infty,$$

при $\alpha = 1/2$ —

$$\sum \sqrt{m} A_m^{(2)} < \infty,$$

и при $-1 < \alpha < 1/2$ —

$$\sum r(m/2 - m\alpha) A_m^{(2)} < \infty.$$

---

[1] Через Σu_k мы обозначаем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$.

В этом же случае Грепачевской [2, 3], в частности, доказана

Теорема B. *Для* $|C^\alpha|$*-суммируемости почти всюду на e ортогонального ряда* (1) *достаточно, чтобы при* $\alpha > 1/2$ *имело место*

$$\sum \frac{E_{n+2}^{(2)}}{(n+2)\sqrt{\lg(n+2)}} < \infty,$$

при $\alpha = 1/2$ —

$$\sum \frac{E_{n+1}^{(2)}}{n+1} < \infty,$$

и при $-1 < \alpha < 1/2$ —

$$\sum \frac{E_{n+1}^{(2)}}{(n+1)^{\alpha+1/2}} < \infty.$$

Кроме того, Барон [1] и Грепачевская в [2, 3] установили, что имеет место

Теорема C. *Пусть* $\omega(n) \uparrow \infty$ *и*

$$\sum \frac{1}{n\omega(n)} < \infty.$$

Ортогональный ряд (1) *почти всюду на e является* $|C^\alpha|$*-суммируемым для тех* $x \in l^2$, *для которых при* $\alpha > 1/2$ *имеет место*

$$\sum \xi^2{}_k \omega(k) < \infty,$$

при $\alpha = 1/2$ —

$$\sum \xi^2{}_{k+1} \omega(k+1) \lg(k+1) < \infty,$$

и при $-1 < \alpha < 1/2$ —

$$\sum \xi^2{}_k \omega(k) k^{1-2\alpha} < \infty.$$

В настоящей работе мы докажем следующие обобщения теорем A, B и C, полагая $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

Теорема 1. *Если ряд* (1) *для всех* $x \in l^p$ *сходится по мере на e, то он почти всюду на e является* $|C^\alpha|$*-суммируемым для тех* $x \in l^p$, *для которых при* $\alpha > 1/q$ *имеет место*

$$\sum A_m^{(p)} < \infty, \tag{2}$$

при $\alpha = 1/q$ —

$$\sum m^{1/p} A_m^{(p)} < \infty, \tag{3}$$

и при $-1 < \alpha < 1/q$ —

$$\sum r(m/q - m\alpha) A_m^{(p)} < \infty. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если ряд* (1) *для всех* $x \in l^p$ *сходится по мере на* e, *то он почти всюду на* e *является* $|C^\alpha|$-*суммируемым для тех* $x \in l^p$, *для которых при* $\alpha > 1/q$ *имеет место*

$$\sum \frac{E_{n+2}^{(p)}}{(n+2)\lg^{1/p}(n+2)} < \infty, \tag{5}$$

при $\alpha = 1/q$ —

$$\sum \frac{E_{n+1}^{(p)}}{n+1} < \infty, \tag{6}$$

и при $-1 < \alpha < 1/q$ —

$$\sum (n+1)^{-(\alpha+1/p)} E_{n+1}^{(p)} < \infty. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $\omega(n) \uparrow \infty$ *и*

$$\sum \frac{1}{(n+1)[\omega(n+1)]^{q-1}} < \infty. \tag{8}$$

Если ряд (1) *для всех* $x \in l^p$ *сходится по мере на* e, *то он почти всюду на* e *является* $|C^\alpha|$-*суммируемым для тех* $x \in l^p$, *для которых при* $\alpha > 1/q$ *имеет место*

$$\sum |\xi_k|^p \omega(k) < \infty, \tag{9}$$

при $\alpha = 1/q$ —

$$\sum |\xi_{k+1}|^p \omega(k+1) \lg(k+1) < \infty, \tag{10}$$

и при $-1 < \alpha < 1/q$ —

$$\sum |\xi_k| \, \omega(k) k^{(\alpha, q)} < \infty. \tag{11}$$

Отметим, что аналогичные теоремы для метода Рисса доказаны нами в работе [6].

2. Для доказательства теорем 1—3 мы воспользуемся следующим утверждением Никишина (см. [5], стр. 158, теорема 7).

Лемма 1. *Если ряд* (1) *для всех* $x \in l^p$ *сходится по мере на* e, *то для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдутся измеримое подмножество* $T_\varepsilon \subset e$ *с* $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ *и постоянная* $M_\varepsilon > 0$ *такие, что для всех чисел* $\{c_k\}$

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right| dt \leqslant M_\varepsilon \left\{ \sum_{k=0}^{n} |c_k|^p \right\}^{1/p}.$$

Кроме того, нам нужна еще следующая лемма (см. [7], стр. 142, лемма 2).

Лемма 2. *Для того, чтобы измеримая на* e *функция* g *была конечной почти всюду на* e, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое измеримое подмножество* $T_\varepsilon \subset e$ *с* $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$, *что*

$$\int_{T_\varepsilon} |g(t)| \, dt < \infty.$$

Далее заметим, что для $|C^\alpha|$-суммируемости ряда (1) почти всюду на e достаточно, чтобы почти всюду на e

$$\sup_m \sum_{n=0}^{m} n^{-1} |\tau^\alpha{}_n(x, t)| < \infty.$$

По лемме 2 и теореме Леви последнее место, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что

$$\sum_{n=0}^{m} n^{-1} \int_{T_\varepsilon} |\tau^\alpha{}_n(x, t)|\, dt \leqslant M_{\varepsilon x}.$$

Но из леммы 1 выводим, что

$$\int_T n^{-1} |\tau^\alpha_n(x, t)|\, dt \leqslant M_\varepsilon \{ \sum_{k=0}^{n} (nA^\alpha_n)^{-p} (A^{\alpha-1}_{n-k} k)^p |\xi_k|^p \}^{1/p}.$$

Итак, $|C^\alpha|$-суммируемость ряда (1) почти всюду на e вытекает из сходимости ряда

$$I \equiv \sum_n (\sum_{k=0}^{n+2} B^{\alpha p}_{n+2,\,k})^{1/p},$$

где

$$B^{\alpha p}_{nk} = (nA^\alpha_n)^{-p} (A^{\alpha-1}_{n-k} k)^p |\xi_k|^p.$$

Ниже мы исследуем сходимость этого ряда.

3. Доказательство теоремы 1. Так как

$$I = \sum_m \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (\sum_{k=0}^{n} B^{\alpha p}_{nk})^{1/p},$$

то при помощи неравенства Гельдера получаем оценку

$$I \leqslant \sum r(m/q) (\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} \sum_{k=0}^{n} B^{\alpha p}_{nk})^{1/p}.$$

Далее, учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{n} B^{\alpha p}_{n+2,k} = O(1) \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=r(l)+1}^{\min\{r(l+1),n\}} B^{\alpha p}_{n\nu} + O(n^{-2p})$$

и

$$B^{\alpha p}_{nk} = O(1) [n^{-p(\alpha+1)} |\xi_k|^p k^p (n-k+1)^{p(\alpha-1)}],$$

находим

$$I = O(1) \sum_m [r(mp/q - mp\alpha - mp) \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=r(l)+1}^{\min\{r(l+1),n\}} \times$$

$$\times (n+1-\nu)^{p\alpha-p} \nu^p |\xi_\nu|^p]^{1/p} + O(1) =$$

$$= O(1) \sum_m [r(-m - mp\alpha) \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=r(l)+1}^{r(l+1)} \nu^p |\xi_\nu|^p \sum_{n=\max\{r(m)+1,\nu\}}^{r(m+1)} \times$$

$$\times (n-\nu+1)^{p\alpha-p}]^{1/p} + O(1). \tag{12}$$

a) Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha > 1/q$. Тогда $p\alpha - p > -1$ и, следовательно, учитывая, что

$$\sum_{n=\nu}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{p\alpha-p} = O(1)\, r(mp\alpha - mp + m),$$

имеем

$$I = O(1) \sum_m [r(-mp) \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=r(l)+1}^{r(l+1)} \nu^p |\xi_\nu|^p]^{1/p} + O(1) =$$

$$= O(1) \sum_m r(-m) \sum_{l=0}^{m} [\sum_{\nu=r(l)+1}^{r(l+1)} \nu^p |\xi_\nu|^p]^{1/p} + O(1) =$$

$$= O(1) \sum_m r(-m) \sum_{l=0}^{m} r(l) A_l^{(p)} + O(1) =$$

$$= O(1) \sum A_l^{(p)} + O(1).$$

Теорема 1 при $\alpha > 1/q$ доказана.

b) Пусть теперь $\alpha = 1/q$. Тогда $p\alpha - p = -1$, и, следовательно, из оценки (12) выводим

$$I = O(1) \sum_m [r(-mp) \sum_{l=0}^{m-2} \sum_{\nu=r(l)+1}^{r(l+1)} \nu^p |\xi_\nu|^p \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1}]^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum_m [r(-mp) \sum_{\nu=r(m-1)+1}^{r(m)} \nu^p |\xi_\nu|^p \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1}]^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum [r(-mp) \sum_{\nu=r(m)+1}^{r(m+1)} \nu^p |\xi_\nu|^p \sum_{n=\nu}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1}]^{1/p} + O(1).$$

Так как при $\nu \leqslant r(m-1)$

$$\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1} = O(1),$$

а при $\nu \leqslant r(m)$

$$\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1} = O(1)\, m, \qquad \sum_{n=\nu}^{r(m+1)} (n+1-\nu)^{-1} = O(1)\, m,$$

то получаем оценку

$$I = O(1) \sum_{l=0}^{m-2} r(-m) \sum_{l=0}^{m-2} r(l+1) A_l^{(p)} +$$

$$+ O(1) \sum m^{1/p} A_m^{(p)} + O(1) \sum m^{1/p} A_m^{(p)} + O(1) =$$

$$= O(1) \sum A_l^{(p)} + O(1) \sum m^{1/p} A_m^{(p)} + O(1).$$

Теорема 1 при $\alpha = 1/q$ доказана.

c) Рассмотрим, наконец, случай, когда $-1 < a < 1/q$. Из оценки (12) получаем

$$I = O(1)\sum[r(-mpa-m)\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{\nu=r(l)+1}^{r(l+1)}\nu^p|\xi_\nu|^p\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}]^{1/p}+$$

$$+O(1)\sum[r(-mpa-m)\sum_{\nu=r(m-1)+1}^{r(m)}\nu^p|\xi_\nu|^p\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}]^{1/p}+$$

$$+O(1)\sum[r(-mpa-m)\sum_{\nu=r(m)+1}^{r(m+1)}\nu^p|\xi_\nu|^p\sum_{n=\nu}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}]^{1/p}+O(1).$$

Так как теперь $pa-p<-1$, то при $\nu\leqslant r(m-1)$

$$\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}\leqslant r(mpa-mp+m),$$

и при $\nu\leqslant r(m)$

$$\sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}=O(1),\qquad \sum_{n=\nu}^{r(m+1)}(n+1-\nu)^{p\alpha-p}=O(1).$$

Следовательно,

$$I=O(1)\sum\{r(-mp)\sum_{l=0}^{m}r(lp)[A_l^{(p)}]^p\}^{1/p}+$$

$$+O(1)\sum\{r(-mpa-m)r(mp)[A_{m-1}^{(p)}]^p\}^{1/p}+$$

$$+O(1)\sum\{r(-mpa-m)r(mp+p)[A_m^{(p)}]^p\}^{1/p}+O(1)=$$

$$=O(1)\sum A_l^{(p)}r(l)\sum_{m=l}^{\infty}r(-m)+$$

$$+O(1)\sum r(m-m/p-ma)A_{m-1}^{(p)}+$$

$$+O(1)\sum r(m-m/p-ma)A_m^{(p)}+O(1),$$

в результате чего, доказательство теоремы 1 закончено.

4. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что условия (2), (3) и (4) вытекают соответственно из условий (5), (6) и (7).

Покажем сначала, что из условия (5) вытекает условие (2). На самом деле, так как

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}E_n^{(p)}\lg^{-1/p}n=\sum\sum_{n=r(i)+1}^{r(i+1)}n^{-1}\lg^{-1/p}nE_n^{(p)}\geqslant$$

$$\geqslant\sum r(-i-1)\lg^{-1/p}r(i+1)\sum_{n=r(i)+1}^{r(i+1)}E_{r(i+1)+1}^{(p)}\geqslant$$

$$\geqslant\sum(i+1)^{-1/p}\{\sum_{m=i+1}^{\infty}[A_m^{(p)}]^p\}^{1/p},$$

то положив в неравенстве (см. [4], теорема 345)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^{1/p} \leqslant M_2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_k|\right)^{1/p},$$

$z_i = [A^{(p)}{}_i]^p$ получаем, что при некотором $M > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} E_n^{(p)} \lg^{-1/p} n \geqslant M \sum A_m^{(p)},$$

что и требовалось доказать.

Далее, положив в неравенстве (см. [4], теорема 344)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n |z_n|)^{1/p} \leqslant M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |z_k|\right)^{1/p},$$

$z_k = [A^{(p)}{}_k]^p$ получаем

$$\sum n^{1/p} A_n^{(p)} \leqslant M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} [A_k^{(p)}]^p\right\}^{1/p} \leqslant M_3 \sum_{n=1}^{\infty} E_{r(n)}^{(p)}.$$

Учитывая, что $E^{(p)}{}_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ заключаем, что ряд $\Sigma E^{(p)}{}_{r(n)}$ сходится, если сходится ряд $\Sigma n^{-1} E^{(p)}{}_n$. Итак, из условия (6) вытекает условие (3).

Пусть $-1/q \leqslant \alpha < 1/q$. Заметив, что

$$\sum r(m) r(-m/p - m\alpha) E_{r(m)}^{(p)} \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} r(m/q - m\alpha) A_m^{(p)}$$

и сходимость ряда $\Sigma r(m/q - m\alpha) E^{(p)}{}_{r(m)}$ вытекает из сходимости ряда $\Sigma m^{-(1/p+\alpha)} E^{(p)}{}_m$, получаем, что в данном случае из условия (7) вытекает условие (4).

Пусть наконец $-1 < \alpha < -1/q$. Тогда из неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(1/p+\alpha)} E_n^{(p)} = \sum \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} n^{-(1/p-\alpha)} E_n^{(p)} \geqslant$$

$$\geqslant \sum r(m - m/p - m\alpha) E_{r(m)+1}^{(p)} \geqslant$$

$$\geqslant \sum r(m/q - m\alpha) A_m^{(p)}$$

выводим, что и теперь из условия (7) вытекает условие (4). Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что при выполнении условия (8) из условий (9)—(11) вытекают соответственно условия (5)—(7). Покажем сначала, что из условия (9) вытекает условие (5). Для этого заметим сперва, что условие (5) равносильно сходимости ряда

$$J \equiv \sum r(n/q) E_{s(n)}^{(p)}.$$

Учитывая возрастание $\omega(n)$, получаем оценку

$$J=\sum r(n/q)\,(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=s(k)}^{s(k+1)-1}|\xi_i|^p)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\sum r(n/q)\,\{\sum_{k=n}^{\infty}\omega^{-1}(s(k))\sum_{i=s(k)}^{s(k+1)-1}|\xi_i|^p\omega(i)\}^{1/p}.$$

Положив теперь в неравенстве (ср. [2], лемма 6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}r(n/q)\,(\sum_{k=n}^{\infty}|\zeta_k|)^{1/p}\leqslant M_p\sum_{n=1}^{\infty}r(n/q)|\zeta_n|^{1/p}, \tag{13}$$

$$\zeta_n=\omega^{-1}(s(n))\sum_{i=s(n)}^{s(n+1)-1}|\xi_i|^p\omega(i)$$

получаем

$$J\leqslant M_p\sum r(n/q)\,\omega^{-1/p}(s(n))\,(\sum_{i=s(n)}^{s(n+1)-1}|\xi_i|^p\omega(i))^{1/p}.$$

Применив неравенство Гельдера, выводим

$$J\leqslant M_p\{\sum r(n)\,\omega^{-q/p}(s(n))\}^{1/q}[\sum|\xi_n|^p\omega(n)]^{1/p}.$$

Так как из условия (8) вытекает сходимость ряда

$$\sum r(n)\,\omega^{1-q}(s(n)), \tag{14}$$

то из условия (9) следует условие (5).

Покажем, далее, что из условия (10) вытекает условие (6). Учитывая, что условие (6) равносильно сходимости ряда

$$K\equiv\sum r(n)\,E^{(p)}_{s(n)}, \tag{15}$$

надо лишь доказать, что из условия (10) вытекает сходимость ряда (15). Но

$$K=\sum r(n)\,(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=s(k)}^{s(k+1)-1}|\xi_i|^p)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\sum r(n)\,\{\sum_{k=n}^{\infty}r(-k)\,\omega^{-1}(s(k))\sum_{i=s(k)}^{s(k+1)-1}\omega(i)|\xi_i|^p\lg i\}^{1/p}.$$

Следовательно, применяя неравенство (13) и неравенство Гельдера, выводим

$$K\leqslant M_p\sum_{k=1}^{\infty}r(k)\,[r(k)\,\omega(s(k))]^{-1/p}(\sum_{i=s(k)}^{s(k+1)-1}|\xi_i|^p\omega(i)\lg i)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant M_p\{\sum r(-k)\,[\omega(s(k))]^{1-q}\}^{1/q}\{\sum|\xi_k|^p\omega(k)\lg k\}^{1/p}.$$

В силу того, что из условия (8) вытекает сходимость ряда (14), мы получим, что из условия (10) вытекает сходимость ряда (15), что и требовалось доказать.

Покажем, наконец, что условие (11) влечет за собой условие (7). На самом деле, так как для $-1 < \alpha < 1/q$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p+\alpha)} E_n^{(p)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p+\alpha)} \Big(\sum_{k=[\lg n]}^{\infty} \sum_{i=r(k)}^{r(k+1)-1} |\xi_i|^p \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p+\alpha)} \Big\{ \sum_{k=[\lg n]}^{\infty} [\omega(r(k)) r(k-\alpha qk]^{-1} \sum_{i=r(k)}^{r(k+1)-1} |\xi_i|^p \omega(i) i^{(q,\alpha)} \Big\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p+\alpha)} \sum_{k=[\lg n]}^{\infty} [\omega(r(k)) r(k(q,\alpha))]^{-1/p} \Big[\sum_{i=r(k)}^{r(k+1)-1} |\xi_i|^p \omega(i) i^{(q,\alpha)} \Big]^{1/p},$$

то, изменяя порядок суммирования, имеем

$$L \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} [\omega(r(k)) r(k(q,\alpha))]^{-1/p} \Big(\sum_{i=r(k)}^{r(k+1)-1} |\xi_i| \omega(i) i^{(q,\alpha)} \Big)^{1/p} \sum_{n=1}^{r(k+1)} n^{-(1/p+\alpha)}.$$

Но, так как $-1 < \alpha < 1/q$, то для некоторого $M > 0$

$$\sum_{n=1}^{r(k+1)} n^{-(1/p+\alpha)} \leqslant Mr(-k/p+k-\alpha k) = Mr(k/q-k\alpha),$$

вследствие чего применение неравенства Гельдера дает

$$L \leqslant M \Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} [\omega(r(k))]^{1-q} \Big\}^{1/q} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \omega(i) i^{(q,\alpha)} \Big)^{1/p}.$$

Учитывая, что из сходимости ряда (8), вытекает сходимость ряда $\Sigma[\omega(r(k))]^{1-q}$, мы заключим, что условие (11) влечет за собой условие (7). Теорема полностью доказана.

Литература

1. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 165—181.
2. Грепачевская Л. В., Абсолютная суммируемость ортогональных рядов. Матем. сб., 1964, **65**, № 3, 370—389.
3. Грепачевская Л. В., Абсолютная суммируемость ортогональных рядов. Сиб. матем., 1965, **6**, № 4, 737—774.
4. Харди Г., Литтльвуд Дж. Е., Полия Г., Неравенства. Москва, 1948.
5. Никишин Е. М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1970, **25**, № 1, 129—191.
6. Тюрнпу Х., О значении функции Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду. Ann. Univ. Sci. Budapest, Sec. math., 1973, **16**, 125—132.
7. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 140—151.
8. Leindler, L., Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen. Acta scient. math., 1961, **22**, 243—268.

Поступило
14 III 1974

FUNKTSIONAALRIDADE ABSOLUUTSEST SUMMEERUVUSEST PEAAEGU KÕIKJAL CESÀRO MENETLUSEGA

H. Türnpu

Resümee

Töödes [1, 2, 3, 8] on leitud piisavad tingimused ortogonaalridade $|C\alpha|$-summeeruvuseks peaaegu kõikjal (vt. teoreemid A, B ja C). Käesolevas töös tõestatakse teoreemid 1, 2 ja 3, kus süsteem φ ortogonaalsus on asendatud rea (1) mõõdu järgi koonduvuse nõudega iga $x \in l^p (1 < p < \infty)$ korral. Seega on siin tõestatu teoreemide A, B ja C üldistuseks.

ÜBER ABSOLUTE SUMMIERBARKEIT DER FUNKTIONENREIHEN

H. Türnpu

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden verschiedene hinreichende Kriterien für die fast überall absolute Cesàrosche Summierbarkeit der Funktionenreihen in Form (1) gefunden. Im Spezialfall, wenn $p = 2$ und φ ein Orthogonalsystem ist, haben Leindler [8], Baron [1] und Grepatschevskaja [2, 3] Sätze A, B und C bewiesen. In den Sätzen 1, 2 und 3 sind die obenerwähnten Ergebnisse verallgemeinert.

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ СО СКОРОСТЬЮ

Я. Сикк

Кафедра математического анализа

Введение

Настоящая статья посвящена изучению свойств некоторых подпространств заданного пространства тригонометрических рядов.

В силу известного результата С. Н. Бернштейна непрерывная 2π-периодическая функция удовлетворяет условию Липшица степени $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$\|f - \sigma_n f\|_C = O(n^{-\alpha}), \tag{1}$$

где $\sigma_n f$ — средние Фейера функции f. Аналогичные характеристики известны и для других классов функций (см. например, [6], стр. 346, 350, 362 и 384; [1], стр. 197, и [9], стр. 174). Понятие λ-ограниченности, введенное в работах Г. Кангро (см. [2], стр. 136), позволяет определять конструктивные пространства $X_{T\lambda}$ и X_λ как подпространства заданного банахова пространства тригонометрических рядов, которые удовлетворяют условию, аналогичному (1). Частный случай пространства X_λ рассматривается в работах А. А. Конюшкова [3] и П. Л. Ульянова [8].

В настоящей статье исследуются некоторые свойства пространства $X_{T\lambda}$, а также T^λ-дополнительного пространства (X, T^λ), которое тесно связано с пространством $X_{T\lambda}$. При этом понятие пространства (X, T^λ) является обобщением T-дополнительного пространства, свойства которого изучали Гёс [10, 11] и М. Тыннов [7].

Через X мы обозначаем банахово пространство действительных функций f. Норму в пространстве X обозначаем через $\|f\|_X$.

Ряд Фурье, соответствующий функции f, обозначим $f^\circ = (a_k, b_k)$. Пространство всех $\{f^\circ\}$, если $f \in X$, является нормированным пространством с нормой $\|f^\circ\|_X = \|f\|_X$ (см. [10], предложение 2.1). Обозначим это пространство через X.

Обозначаем:

1. $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство всех функций f, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty,$$

причем, при $p = 1$ пишем $L^1 = L$;

2. M — пространство всех ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_M = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)| < \infty;$$

следовательно, $L^\infty = M$;

3. C — пространство всех непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_M;$$

4. V — пространство всех функций ограниченной вариации с нормой

$$\|f\|_V = \int_{-\pi}^{\pi} |df| < \infty;$$

5. L_Φ — пространство Орлича всех функций f, для которых

$$\|f\|_\Phi = \sup_{g \in M_\Psi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) g(t)| \, dt < \infty,$$

где M_Ψ — множество всех g, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(|g|) \, dx \leqslant 1,$$

причем Ψ есть дополнительная N-функция к N-функции Φ, а функция Φ удовлетворяет так называемому Δ_2-условию: существуют такие постоянные $\alpha > 0$ и $u_0 \geqslant 0$, что $\Phi(2u) \leqslant \alpha\Phi(u)$ при $u \geqslant u_0$ (см. [4], стр. 34 и 83, или [13], стр. 76—79).

6. L_Ψ — пространства Орлича, где дополнительная N-функция Φ к N-функции Ψ удовлетворяет Δ_2-условию. Если $\Phi(u) = c|u|^p$ с $1 < p < \infty$ и $c > 0$, то $L_\Phi = L^p$ и $L_\Psi = L^q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (см. [4], стр. 25, 86, или [13], стр. 25 и 26).

7. dX — пространство всех $f^\circ = (a_k, b_k)$, для которых

$$F^\circ = \left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in X.$$

Если X — нормированное пространство, то и dX — нормированное пространство с нормой $\|f^\circ\|_{dX} = \|F^\circ\|_X$ (см. [7], стр. 67);

8. P — множество всех тригонометрических полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Пусть T — треугольный метод суммирования Теплица, определенный матрицей (τ_{nk}) преобразования ряда в последовательность. Если[1] $f^\circ = \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, то обозначаем

$$\sigma_n f^\circ = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Напомним следующие понятия, введенные Г. Кангро (ср. [2], стр. 136).

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Последовательность $x = \{\xi_n\}$, сходящаяся к пределу ξ в банаховом пространстве X, называется *λ-ограниченной*, или *ограниченной со скоростью* λ, если

$$\lambda_n \|\xi_n - \xi\|_X = O(1). \tag{2}$$

Пусть A — некоторый метод суммирования последовательностей, переводящих x в последовательность Ax. Если Ax является λ-ограниченной, то *последовательность* x называется A^λ-*ограниченной. Ряд* Σu_k называется A^λ-*ограниченным*, если последовательность частичных сумм этого ряда A^λ-ограничена.

Пусть $\{E_n(x)\}$ — последовательность наилучших приближений для x в метрике пространства X.

Нам понадобится следующая теорема С. Н. Бернштейна (ср. [6], стр. 51).

Теорема. *Если бесконечная последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых элементов замкнута в X, а пространство X полно, то для всякой монотонно убывающей к нулю числовой последовательности $\{E_n\}$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $E_n(x) = E_n$ при любом $n \in N$.*

§ 1. Пространства $X_{T\lambda}$ и X_λ

Определение 1. *Пространство всех $f^\circ \in X$, для которых найдется последовательность тригонометрических полиномов $\{P_n\}$ такая, что*

$$\lambda_n \|P_n - f^\circ\|_X = O(1), \tag{3}$$

будем называть λ-конструктивным пространством к X и обозначать через X_λ.

Определение 2. *Пространство всех $f^\circ \in X$, для которых*[2]

$$1^\circ \ \lim_n \|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_X = 0 \tag{4}$$

и

$$2^\circ \ \lambda_n \|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_X = O(1), \tag{5}$$

---

[1] Если у знака Σ пределы индексов суммирования опущены, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 1 до ∞.

[2] Все пределы в данной статье конечны. Под знаком предела указание $\to \infty$ всюду опущено.

будем называть T^λ-конструктивным пространством к X и обозначать через $X_{T\lambda}$.

Предложение 1. *Если X является BK-пространством*[3] *в котором множество P всех полиномов всюду плотно, то и $X_{T\lambda}$ является BK-пространством с нормой*

$$\|f^\circ\|_{T\lambda}=\|f^\circ\|_X+\sup_n\{\lambda_n\|\sigma_n f^\circ-f^\circ\|_X\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пространство $X_{T\lambda}$ является векторным пространством, если для любых его элементов $f^\circ_1=(a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$, и $f^\circ_2=(a_k^{(2)}, b_k^{(2)})$ и любого $\alpha\in\mathbf{R}$ определить

$$f^\circ_1+f^\circ_2=(a_k^{(1)}+a_k^{(2)}, b_k^{(1)}+b_k^{(2)}),$$

и

$$af^\circ_1=(aa_k^{(1)}, ab_k^{(1)}).$$

По определению 2 получаем, что $\|f^\circ\|_X<\infty$ и

$$\sup_n\{\lambda_n\|\sigma_n f^\circ-f^\circ\|_X\}<\infty.$$

Отсюда вытекает, что $\|f^\circ\|_{T\lambda}<\infty$. Поскольку метод суммирования линеен, то $\|f^\circ\|_{T\lambda}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Докажем теперь, что $X_{T\lambda}$ — полное пространство. Пусть $f^\circ_p=(a_k^{(p)}, b_k^{(p)})\in X_{T\lambda}$ — последовательность Коши в пространстве $X_{T\lambda}$, т. е. для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число N, что

$$\|f^\circ_p-f^\circ_{p+i}\|_{T\lambda}=\|f^\circ_p+f^\circ_{p+i}\|_X+ \\ +\sup_n\{\lambda_n\|f^\circ_p-f^\circ_{p+i}-\sigma_n(f^\circ_p+f^\circ_{p+i})\|_X\}<\varepsilon \tag{7}$$

при $p>N$ и при каждой i. Так как $\{f^\circ_p\}$ является последовательностью Коши и в пространстве X, то существует предел

$$\lim_k\|f^\circ_k-f^\circ\|_X=0.$$

Поскольку условие (7) выполняется для каждого i, то имеет место неравенство

$$\|f^\circ_p-f^\circ\|_X+\sup_n\{\lambda_k\|\sigma_n(f^\circ_p-f^\circ)-(f^\circ_p-f^\circ)\|_X\}<\varepsilon. \tag{8}$$

Остается доказать, что $f^\circ\in X_{T\lambda}$. Для этого надо показать, что имеет место (5). Имея в виду, что выполнено условие (8) и $f^\circ_p\in X_{T\lambda}$ получаем

$$\lambda_n\|\sigma_n f^\circ-f^\circ\|_X=\lambda_n\|\sigma_n f^\circ-f^\circ-\sigma_n f^\circ_p+f^\circ_p+\sigma_n f^\circ_p-f^\circ_p\|_X\leqslant \\ \leqslant\lambda_n\|\sigma_n(f^\circ-f^\circ_p)-(f^\circ-f^\circ_p)\|_X+ \\ +\lambda_n\|\sigma_n f^\circ_p-f^\circ_p\|_X=O(1).$$

Сходимость по координатам следует из того, что топология пространства $X_{T\lambda}$ сильнее, чем топология пространства X, а X есть BK-пространство. Предложение доказано.

---

[3] Банахова пространство X называется BK-пространством, если из сходимости $\{f^\circ_n\}$ по норме X следует сходимость числовых последовательностей $\{a_k^{(n)}\}$ и $\{b_k^{(n)}\}$ при каждом k.

Предложение 2. *Если $f^\circ \in X_{T\lambda}$, то при каждом $\varphi \in X^*$ последовательность $\{\varphi(\sigma_n f^\circ)\}$ является λ-ограниченной.*

Доказательство вытекает из того, что слабая сходимость следует из сильной сходимости.

Предложение 3. *При каждой скорости λ существует тригонометрический ряд $f^\circ \in X$, такой, что имеет место соотношение $f^\circ \in X_\lambda$.*

Доказательство следует из теоремы С. Н. Бернштейна, положив в ней последовательность $\{E_n\} = \{\lambda_n^{-1}\}$.

Приведем примеры конструктивных пространств.

1. Пусть $T = (\tau_{nk})$ — треугольный метод суммирования Теплица, который удовлетворяет условию

$$\sup_n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\tau_{n0}}{2} + \sum_k \tau_{nk} \cos ku \right| du < \infty. \tag{9}$$

Если λ — ограниченная скорость, то пространства C и $C_{T\lambda}$, а также L_Φ и $L_{\Phi T\lambda}$ совпадают (см. [7], стр. 69 и 70).

2. Пусть $T = C^1$ — метод арифметических средних. Если $\lambda = \{n^\alpha\}$ при $\alpha \in (0, 1)$, то

$$C_{T\lambda} = C_\lambda = \Lambda_\alpha,$$

где Λ_α — класс Липшица степени α (см. [1], стр. 197).

3. Пусть $\lambda = \{n^{k+\beta}\}$, где k — целое число и $\beta \in (0, 1)$. Тогда класс C_λ совпадает с классом функций, имеющих k непрерывных производных, причем $f^{(k)} \in \Lambda_\alpha$ (см. [1], стр. 197).

4. Пусть $\lambda = \{n^{k+1}\}$, где k — целое число. Тогда класс C_λ совпадает с классом функций, имеющих k непрерывных производных[4] и $f^{(k)} \in \Lambda^*$ (см. [1], стр. 197).

5. Пространство C_λ совпадает с пространством C^∞ тогда и только тогда, когда $n^r = o(\lambda_n)$ для каждого $r = 0, 1, \ldots$ (см. [6], стр. 351).

6. Пусть $T = (Z, r)$ — метод Зигмунда. Тогда $\tau_{nk} = 1 - k^r (n+1)^{-r}$. Далее пусть $\lambda = \{n^r\}$. Если $r > 0$ четное[5], то $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}\,(1, p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $f \in L^p{}_{T\lambda}$, а если $r > 0$ нечетное, то $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}\,(1, p)$ тогда и только тогда, когда $g \in L^p{}_{T\lambda}$, где g — функция, сопряженная к f (см. [12], стр. 369).

7. Пусть $\omega_k(f; t)_p$ — модуль гладкости в пространстве L^p и $\lambda = \{n^\alpha\}$.

а) Если $0 < \alpha < k$, то $L^p{}_\lambda$ есть класс всех функций $f \in L^p$, для которых

$$\omega_k(f; t)_p = O(t^\alpha).$$

---

[4] Класс Λ^* состоит из всех непрерывных функций f, для которых

$$\{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\} = O(h).$$

[5] Функция $f \in L$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(1, p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = O(h).$$

б) Если $\alpha = k$, то $L^p{}_\lambda$ принадлежит к классу всех функций из $f \in L^p$, для которых

$$\omega_k(f; t)_p = O(t_k/\ln k).$$

в) Если $\alpha > k$, то $L^p{}_\lambda$ принадлежит к классу всех функций из L^p, для которых

$$\omega_k(f; t)_p = O(t_k)$$

(см. [6], стр. 347).

8. Если скорость λ удовлетворяет условию

$$\sum_k k^{r-1}\lambda_k^{-1} < \infty,$$

то $L^p{}_\lambda \subset C^r$ и $C_\lambda \subset C^r$ (см. [6], стр. 347).

§ 2. О T^λ-дополнительных пространствах

Предложение 4. *Пусть метод T удовлетворяет условию* (9). *Тогда для того, чтобы $f^\circ \in L_{\Phi T\lambda}$, необходима и достаточна T^λ-ограниченность ряда*

$$\sum (a_k c_k + b_k d_k) \tag{10}$$

при каждом $g^\circ \in (c_k, d_k) \in L_\Psi$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^\circ \in L_{\Phi T\lambda}$. Из определения пространства $X_{T\lambda}$ вытекает, что

$$1^\circ \ \lim_n \|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Phi = 0, \tag{11}$$

и

$$2^\circ \ \lambda_n \|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Phi = O(1). \tag{12}$$

Последовательность

$$\varphi_n(g^\circ) = \sum_{k=1}^n \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n f^\circ(x))\, g(x)\, dx \tag{13}$$

является последовательностью непрерывных линейных функционалов в L_Ψ (см. [13], стр. 124, примечание 2). Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

также есть непрерывный функциональный в L_Ψ (см. [13], стр. 142, примечание 2), то в силу (11) и неравенства

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n f^\circ) g^\circ\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\circ g^\circ\, dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Phi \|g^\circ\|_\Psi$$

ряд (10) является T^λ-ограниченным при каждом $g^\circ \in L_\Psi$.

Достаточность. Пусть ряд (10) является T^λ-ограниченным для каждом $g^\circ \in L_\Psi$. Тогда в силу неравенства

$$\frac{1}{2}\|\sigma_n f^\circ - \sigma_{n+i} f^\circ\|_\Phi \leqslant \sup_{\|g^\circ\|_\Psi \leqslant 1} \left|\int_{\pi}^{\pi} [\sigma_n f^\circ - \sigma_{n+i} f^\circ] g^\circ\, dx, \right. \tag{14}$$

$\sigma_n f^\circ$ является фундаментальной последовательностью в L_Φ (см. [13], стр. 142, примечание 2). Так как L_Φ есть полное пространство (см. [4], стр. 83, теорема 1), то $\sigma_n f^\circ$ сходится в L_Φ по норме. Так как неравенство (14) выполнено при каждом i, то

$$\frac{1}{2}\|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Phi \leqslant \sup_{\|g\|^\circ_\Psi \leqslant 1} \left|\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_n f^\circ - f^\circ] g^\circ\, dx\right|,$$

из которого выводим, что $f^\circ \in L_{\Phi T\lambda}$. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть метод T удовлетворяет условию* (9). *Тогда для того, чтобы $f^\circ \in L_{\Psi T\lambda}$, необходима и достаточна T^λ-ограниченность ряда* (10) *при каждом $g^\circ \in L_\Phi$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.

Следствие 1. *Пусть метод T удовлетворяет условию* (9). *Тогда для того, чтобы f° принадлежал к $L_{T\lambda}$, $L^p{}_{T\lambda}$ $(1 < p < \infty)$ или M, необходимо и достаточно, чтобы ряд* (10) *являлся T^λ-ограниченным при каждом g°, соответственно из M, L^q или L.*

Предложение 6. *Если метод T удовлетворяет условию* (9), *то для $f^\circ \in (dV)_{T\lambda}$ необходима и достаточна T^λ-ограниченность ряда* (10) *при каждом $g^\circ \in C$.*

Доказательство. Необходимость. Если $f^\circ = (a_k, b_k) \in dV$, то $F^\circ = (-b_k/k, a_k/k)$ и существует непрерывный линейный функционал

$$\sum_k \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n f^\circ dF(x),$$

где $g^\circ = (c_k, d_k) \in C$ (см. [4], стр. 254). Так как выполнено условие (9), то последовательность $\{\sigma_n g^\circ\}$ сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$ для каждого $g^\circ \in C$ (см. [7], стр. 70, теорема 3). Имея в виду, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n g^\circ dF^\circ(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^\circ dF^\circ(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_n g^\circ - g^\circ] dF(x)\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\|\sigma_n g^\circ - g^\circ\|_C \|F^\circ\|_V,$$

получаем, что существует предел

$$\lim_n \sum_k \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^\circ(x) F^\circ(x).$$

Поскольку

$$\lambda_n\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\circ d(\sigma_n F^\circ(x)) - \int_{-\pi}^{\pi} f^\circ dF^\circ(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n \|f^\circ\|_C \|\sigma_n F^\circ(x) - F^\circ(x)\|_V,$$

то ряд (10) является T^λ-ограниченным.

Достаточность. Пусть ряд (10) является T^λ-ограниченным при каждом $g^\circ \in C$. Поскольку (10) является непрерывным линейным функционалом в C при каждом n, то по теореме Банаха—Штейнгауза предел

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^\circ(x)\, dF^\circ{}_1(x)$$

есть непрерывный линейный функционал. Кроме того,

$$\lim_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^\circ \sigma_n f^\circ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^\circ dF^\circ{}_1(x)$$

для каждого $g^\circ \in C$. Если $g^\circ(x) = \cos kx$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos dF^\circ(x) = \lim_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n f^\circ)\cos kx\, dx = \lim_n \tau_{nk} a_k = a_k.$$

Аналогично, при $g^\circ(x) = \sin kx$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dF^\circ{}_1(x) = b_k.$$

Значит, $f^\circ \in (dV)_{T\lambda}$. Предложение доказано.

Определение 3. *Пространство всех (a_k, b_k), для которых ряд $\Sigma\,(a_k c_k + b_k d_k)$ является T^λ-ограниченным при каждом $(c_k, d_k) \in X$, называется T^λ-дополнительным пространством к пространству X и обозначается (X, T^λ).*

Если при некоторых k все коэффициенты c_k, либо d_k, либо c_k и d_k вместе равны нулю для всех $(c_k, d_k) \in X$, то при тех же k полагается соответственно a_k, либо b_k, либо a_k и b_k вместе равным нулю для всех $(a_k, b_k) \in (X, T^\lambda)$ (ср. [7], стр. 75, определение 1).

Предложение 7. *Если T удовлетворяет условию (9), то имеют место следующие равенства*

$$(L_\Phi, T^\lambda) = L_{\Psi T\lambda}; \qquad (L_\Psi, T^\lambda) = L_{\Phi T\lambda}$$

$$(L, T^\lambda) = M_{T\lambda}; \qquad (L^p, T^\lambda) = L^q{}_{T\lambda} \quad \text{при} \quad 1/p + 1/q = 1;$$

$$(M, T^\lambda) = L_{T\lambda}; \qquad (C, T^\lambda) = (dV)_{T\lambda}.$$

Доказательство получается непосредственно, если воспользоваться предложениями 4, 5 и 6 и определением 3.

Предложение 8. *Пусть X является BK-пространством, причем P всюду плотно в X. Тогда (X, T^λ) является BK-пространством с нормой*

$$\|f^\circ\|_{(X,T^\lambda)}=\|f^\circ\|_{(T\lambda)}=\pi\{\sup_k \sup_{\|g^\circ\|_X\leqslant 1} |\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle|+$$

$$+\sup_k \sup_{\|g^\circ\|_X\leqslant 1} \lambda_k |\langle\sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ\rangle|\}, \tag{15}$$

где

$$\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle=\langle f^\circ, \sigma_n g^\circ\rangle=\sum_{k=1}^{n}\tau_{nk}(a_k c_k+b_k d_k)$$

и

$$\langle\sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ\rangle=(\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle-\lim\langle\sigma_i f^\circ, g^\circ\rangle).$$

Доказательство. Покажем сперва, что (X,T^λ) является векторным пространством. Определим линейные операции в пространстве (X,T^λ) так же, как в пространстве $X_{T\lambda}$. Пусть $f^\circ\in(X,T^\lambda)$, тогда и $af^\circ\in(X,T^\lambda)$. Действительно, по определению 3

$$\lim_n\sum_{k=1}^{n}\tau_{nk}(a_k c_k+b_k d_k)=S \tag{16}$$

для всех $(c_k; d_k)\in X$ и

$$\lambda_i\{\sum_{k=1}^{i}\tau_{ik}(a_k c_k+b_k d_k)-S\}=O(1). \tag{17}$$

Тогда

$$\lim_n\sum_k\tau_{nk}(\alpha a_k c_k+\alpha b_k d_k)=\alpha S$$

и

$$\lambda_i\{\sum_{k=1}^{i}\tau_{ik}(\alpha a_k c_k=\alpha b_k d_k-\alpha S\}=O(1)$$

Пусть теперь f°_1, $f^\circ_2\in(X,T^\lambda)$, тогда и $f^\circ_1+f^\circ_2\in(X,T^\lambda)$. Действительно, так как T — линейный метод суммирования и существуют пределы S^1 и S^2 типа (16), то существует и предел

$$\lim_n\sum_{k=1}^{n}\tau_{nk}(a_k^1 c_k+a_k^2 c_k+b_k^1 d_k+b_k^2 d_k)=S^1+S^2.$$

Так как имеет место

$$\lambda_i[\sum_{k=1}^{i}\tau_{ik}(a_k^1 c_k+a_k^2 c_k+b_k^1 d_k+b_k^2 d_k)-(S^1+S^2)]=$$

$$=\lambda_i[\sum_{k=1}^{i}\tau_{ik}(a_k^1 c_k+b_k^1 d_k)-S^1]+$$

$$+\lambda_i[\sum_{k=1}^{i}\tau_{ik}(a_k^2 c_k+b_k^2 d_k)-S^2]=O(1),$$

то (X,T^λ) — линейное пространство.

Докажем теперь, что (15) является нормой в пространстве (X,T^λ). Если $f^\circ=(0,0)$, то все суммы (15) равны нулю, значит $\|f^\circ\|_{(T\lambda)}=0$. Если $\|f^\circ\|_{(T\lambda)}=0$, то все суммы $<\sigma_n, f^\circ, g^\circ>$ равны нулю. Эти суммы могут быть нулевыми во-первых тогда, когда $X = \{\theta\}$, но тогда по определению 3 имеем $(X, T^\lambda) = \{\theta\}$. Предположим, что $X \neq \{\theta\}$. Пусть $g(x) = c_k \cos kx \in X$ такая, что $c_k \neq 0$. Из того, что $\|f^0\|_{(T\lambda)} = 0$ вытекает, что и $a_k = 0$. Аналогично можем рассуждать о каждом k, при для котором $c_k \neq 0$. Следовательно, $a_k = 0$ для каждого k. Аналогично получается, что $b_k = 0$ при каждом k, следовательно, $f^0 = (0, 0)$.

Покажем, что $\|f^\circ\|_{(T\lambda)}$ является конечной. По определению нормы (15) для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_k \sup_{\|g^\circ\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_k f^\circ, g^\circ\rangle| < \infty, \tag{18}$$

и

$$\sup_k \sup_{\|g^\circ\|_X \leqslant 1} \lambda_k |\langle \sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ\rangle| < \infty. \tag{19}$$

Функционал

$$\langle \sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k)$$

является непрерывным линейным функционалом в X. Если $f^\circ \in (X, T^\lambda)$, то $<\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ сходится при каждом $g^\circ \in X$. По принципу равномерной ограниченности получим

$$\sup_n \|\varphi_n\| = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle| < \infty,$$

из чего вытекает (18). Кроме того, функционал $\lim <\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ является непрерывным линейным функционалом в X. Следовательно, и $\lambda_n < (\sigma_n f^\circ - f^\circ), g^\circ>$ является непрерывным линейным функционалом в X. Так как $f^\circ \in (X, T^\lambda)$, то последовательность $\{\lambda_n < (\sigma_n f^\circ - f^\circ),\ g^\circ>\}$ ограничена при каждом $g^\circ \in X$. По принципу равномерной ограниченности

$$\sup_n \|\langle (\sigma_n f^\circ - f^\circ), g^\circ\rangle\|_X = \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_X \leqslant 1} |\langle (\sigma_n f^\circ - f^\circ), g^\circ\rangle| < \infty,$$

откуда следует (19).

Докажем теперь, что (X, T^λ) — полное пространство. Пусть $f^\circ_p = (a_k^{(p)},\ b_k^{(p)}) \in (X, T^\lambda)$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ — последовательность Коши в пространстве X, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что

$$\|f^\circ_p - f^\circ_{p+i}\|_{(T\lambda)} < \varepsilon \tag{20}$$

при $p > N$ и при каждом i. Если $g^\circ(x) = c_k \cos kx$, то из (15) получаем $|\tau_{nk}(a_k^{(p)} - a_k^{(p+i)}) c_k| < \varepsilon$ при $p > N$ и всех i. Из этого вытекает, что $a_k^{(p)} \to a_k$ при $p \to \infty$ и каждом k. Аналогично, выбирая $g^\circ(x) = d_k \sin kx$, получаем, что $b_k^{(p)} \to b_k$ при $p \to \infty$ и каждом k. Но так как условие (20) выполнено для каждого i, то

$$\|f^\circ_p - f^\circ\|_{(T\lambda)} < \varepsilon.$$

Покажем, что $f^\circ = (a_k, b_k) \in (X, T^\lambda)$. По определению для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_i \sum_{k=1}^{i} \tau_{ik}(a_k c_k + b_k d_k) = \delta(g^\circ) \tag{21}$$

и

$$\lambda_i |\langle \sigma_i f^\circ, g^\circ \rangle - \delta(g^\circ)| = O(1) \tag{22}$$

для всех $g^\circ \in X$. Допустим обратное: пусть найдется $g^\circ{}_1 = (c_k^{(1)}, d_k^{(1)}) \in X$ такой, что $<\sigma_n f^\circ, g^\circ{}_1>$ не сходится. Так как $<\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ — непрерывный, линейный функционал в X, то мы можем предполагать, что $\|g^\circ{}_1\|_X \leqslant 1$. В силу неравенства (20) для любого $\varepsilon > 0$ существует $p > N$ такое, что

$$\pi |\langle \sigma_n f^\circ{}_p, g^\circ{}_1 \rangle - \langle \sigma_n f^\circ, g^\circ{}_1 \rangle| < \varepsilon.$$

Поскольку последовательность $<\sigma_n f^\circ{}_p, g^\circ{}_1>$ сходится при каждом $p > N$, то в силу последнего неравенства $<\sigma_n f^0, g^0{}_1>$ также сходится, что отвергает обратное предложение. Остается показать, что выполняется равенство (22). По условию (20) для любого $\varepsilon > 0$ существует $p > N$, такое что

$$\pi \sup_i \sup_{\|g^\circ\|_X \leqslant 1} |\lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ{}_p - f^\circ{}_p), g^\circ \rangle - \lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ - f^\circ), g^\circ \rangle| < \varepsilon$$

для всех $g^\circ \in X$. Из этого вытекает, что

$$\begin{aligned} |\lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ - f^\circ), g^\circ \rangle| \leqslant & |\lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ - f^\circ), g^\circ \rangle - \\ & - \lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ{}_p - f^\circ{}_p), g^\circ \rangle| + \\ & + |\lambda_i \langle (\sigma_i f^\circ{}_p - f^\circ{}_p), g^\circ \rangle| = \\ & = O(1). \end{aligned}$$

Значит, $f^\circ \in (X, T^\lambda)$. Сходимость по координатам следует из неравенств

$$|a_k^{(p)} - a_k|\, |a_{nk}| \leqslant (1/\pi) \|f^\circ{}_p - f^\circ\|_{(T\lambda)} \|\cos k \cdot\|_X$$

и

$$|b_k^{(p)} - b_k|\, |a_{nk}| \leqslant (1/\pi) \|f^\circ{}_p - f^\circ\|_{(T\lambda)} \|\sin k \cdot\|_X$$

(ср. [7], стр. 78). Предложение полностью доказано.

Предложение 9. *Если $X \cap P$ всюду плотно в ВК-пространстве X, то $f^\circ \in (X, T^\lambda)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|f^\circ\|_{(T\lambda)} < \infty. \tag{23}$$

Доказательство. Необходимость условия (23) следует из того, что норма $\|f^\circ\|_{(T\lambda)}$ в (X, T^λ) конечна.

Достаточность. Пусть условие (23) выполнено. Покажем, что $<\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ сходится при каждом $g^\circ \in X$. Последовательность норм непрерывных линейных функционалов $\varphi_n(g^\circ) = <\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ ограничена. Если $g^\circ \in (X \cap P)$, то

$$g^\circ = \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

и последовательность $\{<\sigma_n f^\circ, g^\circ>\}$ сходится. Так как $X \cap P$ всюду плотно в X, то по теореме Банаха—Штейнгауза последовательность $\{<\sigma_n f^\circ, g^\circ>\}$ сходится в X. То, что последовательность $\{<\sigma_n f^\circ, g^\circ>\}$ является λ-ограниченной непосредственно следует из (22). Предложение доказано.

Предложение 10. *Если X — инвариантное относительно сдвига*[6] *ВК-пространство, то (X, T^λ) — инвариантное относительно сдвига ВК-пространство.*

Доказательство. Используя определение нормы в пространстве (X, T^λ) и понятие сдвига, получаем

$$\begin{aligned}\|f^\circ{}_t\|_{(T\lambda)} &= \pi[\sup_n \sup_{\|g^\circ\|_X\leqslant 1} \lambda_n |\langle\sigma_n f^\circ{}_t, g^\circ\rangle - \langle f^\circ{}_t, g^\circ\rangle| + \\ &+ \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_X\leqslant 1} |\langle\sigma_n (f^\circ{}_t, g^\circ\rangle|] = \\ &= \pi[\sup_n \sup_{\|g^\circ{}_t\|_X\leqslant 1} \lambda_k |\langle\sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ{}_t\rangle| + \\ &+ \sup_n \sup_{\|g^\circ{}_t\|_X\leqslant 1} |\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ{}_t\rangle| = \\ &= \|f^\circ\|_{(T\lambda)}.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 11. *Если T удовлетворяет условию* (9) *и X является одним из пространств L_Φ, L_Ψ, $L^p (1 < p < \infty)$ или M, то при $a \in [1/2, 1]$ имеет место равенство*

$$\|f^\circ\|_{(T\lambda)}| = a \sup_n \|\sigma_n f^\circ\|_{X^*_{T\lambda}}. \tag{24}$$

Доказательство. В пространстве L_Φ выражения $\pi<\sigma_n f^\circ, g^\circ>$ и $\pi<(\sigma_n f^\circ - f^\circ), g^\circ>$ являются непрерывными линейными функционалами (см. доказательство предложения 8). Из свойств пространства L_Φ вытекает, что

$$\|\sigma_n f^\circ\|_\Psi \leqslant 2\pi \sup_{\|g^\circ\|_\Phi\leqslant 1} |\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle| \leqslant 2\|\sigma_n f^\circ\|_\Psi \tag{25}$$

и

$$\begin{aligned}\lambda_n\|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Psi &\leqslant 2\pi \sup_{\|g^\circ\|_\Phi\leqslant 1} \lambda_n \ \langle\sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ\rangle| \leqslant \\ &\leqslant 2\lambda_n\|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Psi\end{aligned} \tag{26}$$

(см. [10], стр. 142). Так как (25) и (26) имеет место для всех n, то

$$\begin{aligned}&(1/2) (\sup_n \|\sigma_n f^\circ\|_\Psi + \sup_n (\lambda_n\|\sigma_n f^\circ - f^\circ\|_\Psi) \leqslant \\ &\leqslant \pi(\sup_n \sup_{\|g^\circ\|_\Phi\leqslant 1} |\langle\sigma_n f^\circ, g^\circ\rangle| + \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_\Phi\leqslant 1} \lambda_n |\langle\sigma_n f^\circ - f^\circ, g^\circ\rangle|) \leqslant \\ &\leqslant \sup_n \|\sigma_n f^\circ\|_\Psi + \sup_n \lambda_n \|\sigma_n (f^\circ) - f^\circ\|_\Psi.\end{aligned}$$

---

[6] Нормированное пространство X называется инвариантным относительно сдвига t, если $f^\circ{}_t \in X$ и $\|f^\circ\|_X = \|f^\circ{}_t\|_X$, где $f^\circ{}_t(x) = f^\circ(x+t)$.

Из последнего неравенства выводим, что имеет место (24).

Аналогичное рассуждение применимо и для пространства L_Ψ.

Если $\Phi(u) = cu^p$, где $c > 0$, то $L_\Phi = L^p$ и $L_\Psi = L^q$, где $1/p + 1/q = 1$ при $p > 1$, а $L_\Psi = M$ при $p = 1$.

Предложение полностью доказано.

Литература

1. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I, Москва, 1965.
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 136—154.
3. Конюшков А. А., Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Матем. сб., 1958, **44**, 53—84.
4. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва, 1958.
5. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
6. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
7. Тыннов М., Т-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.
8. Ульянов П. Л., Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках. Матем. сб., 1971, **81**, 104—131.
9. Butzer, P. L., Scherer, K., On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Steckin. Aeq. Math. 1969, **3**, 170—185.
10. Goes, G., *BK*-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
11. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.
12. Kralik, D., Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen. Acta Math. Acad. scient. hung., 1969, **20**, № 3—4, 361—373.
13. Zaanen, A. C., Linear Analysis. Amsterdam—Groningen, 1953.

Поступило
25 V 1974

FOURIER' KORDAJATE TÄIENDRUUMID KIIRUSEGA

J. Sikk

Resümee

Artiklis üldistatakse Goes'i ja Tõnnovi töödes [10, 11, 7] vaadeldud T-täiendruumi mõistet λ-tõkestatuse juhule, kasutades Kangro poolt [2] sisse toodud λ-tõkestatuse mõistet. Töös leitakse T^λ-täiendruumide omadusi põhiliste funktsiooniruumide korral.

COMPLEMENTARY SPACES WITH RAPIDITY OF FOURIER COEFFICIENTS

J. Sikk

Summary

The purpose of this paper is to generalize the notion of the complementary spaces investigated by Goes [10, 11] and by Tõnnov [7], to the rapidity, by means of the notion of λ-boundition, introduced by Kangro [2].

Let X be a Banach space of trigonometric series and $\lambda=\{\lambda_k\}$ with $\lambda_k>0$ the rapidity. We define the space $X_{T\lambda}$ as the set of all $f^\circ \in X$, that satisfies conditions (4) and (5). It is shown in the article that $X_{T\lambda}$ is a Banach space with the norm (6).

We define the space (X, T^λ) as the set of all $f^\circ=(a_k, b_k)$, than the series (10) is λ-bounded for all $(c_k, d_k)\in X$. When the coefficients c_k or d_k, or c_k and d_k together are zeroes for all $(c_k, d_k)\in X$ for some k, then we suppose respectively that the coefficients a_k or b_k, or a_k and b_k together for all $(a_k, b_k)\in(X, T^\lambda)$ are zeroes for exactly the same k.

The space (X, T^λ) is the Banach space with the norm (15). It is proved that $(L_\Phi, T^\lambda)=L_{\Psi T\lambda}$; $(L_\Psi, T_\lambda)=L_{\Phi T\lambda}$; $(L, T^\lambda)=M_{T\lambda}$, $(C, T^\lambda)=(dV)_{T\lambda}$.

Some topological properties of complementary spaces with rapidity for main functional spaces are studied.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

А. Онопер

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{r=1}^{n} L_r u - au^2 - bu + f, \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\geqslant 0, \qquad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u=0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\Sigma_T, \tag{3}$$

где

$$L_r u = p_r\frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2}+q_r\frac{\partial u}{\partial x_r},$$

а

$$\Omega=\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_n):\ 0<x_r<l_r,\ 1\leqslant r\leqslant n\}$$

— прямоугольный параллелепипед с границей Γ, $Q_T=\Omega\times(0,T]$ — цилиндр и $\Sigma_T=\Gamma\times[0,T]$ — его боковая поверхность. Всюду в этой заметке предположим, что функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ ограничены и неотрицательны, а $p_r(x,t)$ ограничена и положительна в замкнутом цилиндре $[Q_T]$.

Пусть требуется найти решение $u(x,t)$ задачи (1)—(3), неотрицательное в цилиндре Q_T. Задачи такого типа встречаются в приложениях. При помощи принципа максимума несложно показать, что рассматриваемая задача не имеет более одного неотрицательного решения. Предположим, что задача (1)—(3) имеет неотрицательное решение, и построим для вычисления этого решения более эффективную разностную схему, чем общие разностные схемы для решения квазилинейных параболических уравнений (см., например, [1, 2]).

Покрываем цилиндр $[Q_T]$ сеткой $[Q_{Th}]$. Для этого выбираем натуральные числа $N_r\geqslant 2$, $r=1,2,\ \ldots,\ n$, и шаги $h_r=$ $=l_r/N_r>0$, $\tau>0$. Параллелепипед Ω покрываем сеткой

$$[\Omega_h]=\{x_i=(i_1h_1,\ \ldots,\ i_nh_n):\ 0\leqslant i_r\leqslant N_r,\ 1\leqslant r\leqslant n\},$$

где $i=(i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс. Обозначим через $\Omega_h = [\Omega_h] \cap \Omega$ множество внутренних узлов и через $\Gamma_h = [\Omega_h] \cap \Gamma$ множество граничных узлов этой сетки. Затем введем сетку

$$[Q_{Th}] = \{(x_i, t_k):\ x_i \in [\Omega_h],\ 0 \leqslant t_k = k\tau \leqslant T\}$$

и обозначим $Q_{Th} = [Q_{Th}] \cap Q_T$.

Пусть $y = y_{ik} = y(x_i, t_k)$ сеточная функция, определенная на сетке $[Q_{Th}]$. Введем обозначения

$$I_r^{\pm 1} y = I_r^{\pm 1} y_{ik} = y(i_1 h_1, \ldots, (i_r \pm 1) h_r, \ldots, i_n h_n, t_k),$$

$$\partial_r y = \frac{1}{h_r}(I_r y - y), \qquad I_r = I_r^{+1},$$

$$\bar{\partial}_r y = \frac{1}{h_r}(y - I_r^{-1} y), \qquad \tilde{\partial}_r y = \frac{1}{2}(\partial_r y + \bar{\partial}_r y).$$

Аппроксимируем дифференциальное выражение $L_r u$ разностным

$$L_{rh} y = p_r \partial_r \bar{\partial}_r y + q_r \tilde{\partial}_r y = A_r I_r^{-1} y - B_r y + C_r I_r y,$$

где $p_r = p_r(x_i, t_k)$, $q_r = q_r(x_i, t_k)$ и

$$A_r = \frac{1}{h_r^2}\left(p_r - \frac{h_r q_r}{2}\right), \quad B_r = \frac{2}{h_r^2} p_r, \quad C_r = \frac{1}{h_r^2}\left(p_r + \frac{h_r q_r}{2}\right).$$

В дальнейшем предположим, что в цилиндре Q_T выполнены условия

$$h_r |q_r(x,t)| \leqslant 2 p_r(x,t), \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда коэффициенты A_r, B_r и C_r неотрицательны и $A_r + C_r = B_r$. При доказательстве лемм 1—3 пользуемся только этими свойствами коэффициентов A_r, B_r и C_r. Поэтому эти леммы остаются в силе и при других аппроксимациях выражения $L_r u$, удовлетворяющих этим условиям.

Для решения задачи (1)—(3) пользуемся экономичной разностной схемой (ср. например [1, 3])

$$\frac{y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}}{\tau} = L_{\nu h} y^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4}$$

$$\frac{y - y^{(n-1)}}{\tau} = L_{nh} y - a y^2 - b y + f, \tag{5}$$

$y^{(\nu)} = y_i^{(\nu)} = 0$ и $y = y_{ik} = 0$ при $x_i \in \Gamma_h$, где $a = a(x_i, t_k)$, $b = b(x_i, t_k)$, $f = f(x_i, t_k)$, $y^{(0)} = y_{i,k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, [T/\tau]$, $y_{i0} = \varphi(x_i)$. Нелинейное уравнение (5) решаем итерационным методом

$$\frac{y^{(\nu)} - y^{(n-1)}}{\tau} = L_{nh} y^{(\nu)} - a y^{(\nu-1)} y^{(\nu)} - b y^{(\nu)} + f, \quad \nu = n, n+1, \ldots, \tag{6}$$

$y^{(\nu)} = 0$ при $x_i \in \Gamma_h$.

Последовательность $y^{(\nu)}$ имеет следующие свойства.

Лемма 1. *Если* $y^{(0)} \geqslant 0$ *и* $0 < k\tau \leqslant T$, *то*
$$0 \leqslant y^{(\nu)} \leqslant \max_{x_i \in \Omega_h} y_i^{(0)} + \tau \max_{x_i \in \Omega_h} f_{ik}, \qquad \nu = 1,\ 2,\ \ldots$$

Доказательство. Неотрицательность $y^{(\nu)}$ докажем от противного. Пусть $y^{(0)} \geqslant 0, \ \ldots, \ y^{(\nu-1)} \geqslant 0$ и $\min y_i^{(\nu)} = y_j^{(\nu)} < 0$. Тогда при $\nu < n$
$$y_j^{(\nu)} = y_j^{(\nu-1)} + \tau\left(A_{\nu jk} I_\nu^{-1} y_j^{(\nu)} - B_{\nu jk} y_j^{(\nu)} + C_{\nu jk} I_\nu y_j^{(\nu)}\right) \geqslant y_j^{(\nu-1)} \geqslant 0.$$
При $\nu \geqslant n$ аналогично
$$y_j^{(\nu)} = y_j^{(n-1)} + \tau\left(L_{nh} y_j^{(\nu)} - a_{jk} y_j^{(\nu-1)} y_j^{(\nu)} - b_{jk} y_j^{(\nu)} + f_{jk}\right) \geqslant$$
$$\geqslant y_j^{(n-1)} + \tau f_{jk} \geqslant 0.$$
В обеих случаях получаем противоречие, что доказывает неотрицательность $y^{(\nu)}$.

Оценку сверху для $y^{(\nu)}$ получим при помощи принципа максимума. Пусть $\max y_i^{(\nu)} = y_j^{(\nu)}$. Если $\nu \leqslant n-1$, то
$$y_j^{(\nu)} \leqslant y_j^{(\nu-1)} + \tau L_{\nu h} y_j^{(\nu)} \leqslant y_j^{(\nu-1)} \leqslant \max_i y_i^{(\nu-1)},$$
откуда
$$y_j^{(\nu)} = \max_i y_i^{(\nu)} \leqslant \max_i y_i^{(\nu-1)} \leqslant \max_i y_i^{(\nu-2)} \leqslant \ldots \leqslant \max_i y_i^{(0)}.$$
При $\nu \geqslant n$
$$y_j^{(\nu)} = y_j^{(n-1)} + \tau\left(L_{nh} y_j^{(\nu)} - a_{jk} y_j^{(\nu-1)} y_j^{(\nu)} - b_{jk} y_j^{(\nu)} + f_{jk}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max_i y_i^{(n-1)} + \tau f_{jk} \leqslant \max_i y_i^{(0)} + \tau \max_i f_{ik}.$$
Лемма доказана.

Лемма 2. *Уравнение* (5) *имеет при* $0 < k\tau \leqslant T$ *решение* $y = y_{ik} \geqslant 0$ *и последовательность* $y^{(\nu)}$, $\nu = n, n+1, \ \ldots$, *сходится к этому решению со скоростью геометрической прогрессии*
$$\max_{x_i \in \Omega_h} \left|y_i^{(\nu)} - y_{ik}\right| \leqslant \frac{q^{\nu-n+1}}{1-q} \max_{x_i \in \Omega_h} \left|y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}\right|, \tag{7}$$
где
$$q = \frac{\tau\varkappa}{1+\tau\varkappa} < 1, \qquad \varkappa \geqslant \sup_{\substack{x_i \in \Omega_h \\ \mu \geqslant n}} a_{ik} y_i^{(\mu)} \geqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим $z^{(\nu)} = y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}$. При $\nu \geqslant n$ из (6) получим
$$z^{(\nu)} = \tau\left(L_{nh} z^{(\nu)} - a y^{(\nu)} z^{(\nu)} - a y^{(\nu)} z^{(\nu-1)} - b z^{(\nu)}\right),$$
откуда следует, что
$$\max_i \left|z_i^{(\nu)}\right| \leqslant q \max_i \left|z_i^{(\nu-1)}\right| \leqslant \ldots \leqslant q^{\nu-n+1} \max_i \left|z_i^{(n-1)}\right|.$$
Так как $q < 1$, то из этих неравенств вытекает сходимость последовательности $y^{(\nu)}$ и оценка (7). Переходя в равенстве (6) к пределу $\nu \to \infty$, получим, что предел $y = \lim y^{(\nu)}$ является решением уравнения (5). Таким образом все утверждения леммы 2 доказаны.

Из доказанных лемм следует, что при любом начальном условии $y_{i0}=\varphi(x_i)\geqslant 0$ разностная схема (4), (5) имеет неотрицательное решение y_{ik}, которое можно найти при помощи формул (4) и (6), и что это решение удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant y_{ik}\leqslant \max_{x_j\in\Omega_h} y_{j0}+T\max_{(x_j,t_\mu)\in Q_{Th}} f_{j\mu}\quad\text{при}\quad (x_i,t_k)\in Q_{Th}.$$

Об устойчивости разностной схемы (4), (5) имеет место

Лемма 3. *Если y_{ik} и v_{ik} являются неотрицательными решениями разностной схемы* (4), (5), *соответственно, при неотрицательным начальным условиям y_{i0} и v_{i0} и при неотрицательным свободным членам f_{ik} и g_{ik}, то*

$$\max_{(x_i,t_k)\in Q_{Th}}|y_{ik}-v_{ik}|\leqslant\max_{x_i\in\Omega_h}|y_{i0}-v_{i0}|+T\max_{(x_i,t_k)\in Q_{Th}}|f_{ik}-g_{ik}|. \tag{8}$$

Доказательство. Для $z=y-v$ и $z^{(\nu)}=y^{(\nu)}-v^{(\nu)}$ получим из (4) и (5) соотношения

$$z^{(\nu)}-z^{(\nu-1)}=\tau L_{\nu h}z^{(\nu)},\qquad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,$$
$$z-z^{(n-1)}=\tau[L_{nh}z-a(y+v)z-bz+f-g].$$

При помощи принципа максимума оценим

$$\max_i|z_i^{(\nu)}|\leqslant\max_i|z_i^{(\nu-1)}|,\qquad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,$$
$$\max_i|z_{ik}|\leqslant\max_i|z_{i,k-1}|+\tau\max_i|f_{ik}-g_{ik}|,$$

откуда следует оценка (8). Лемма доказана.

О сходимости разностного метода (4), (5) имеет место

Теорема. *Если задача* (1)—(3) *имеет в области* $[Q_T]$ *достаточно гладкое неотрицательное решение $u(x,t)$ и в этой области также a, b, f, p_r и q_r достаточного гладки, то приближения $y_{ik}\geqslant 0$, найденные из схемы* (4), (5), *сходятся к этому решению со скоростью*

$$\max_{(x_i,t_k)\in Q_{Th}}|u(x_i,t_k)-y_{ik}|\leqslant TM(|h|^2+\tau),$$

где M — положительная постоянная и $|h|^2=h_1^2+h_2^2+\ldots+h_n^2$.

Доказательство. Исключая из (4), (5) вспомогательные величины $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $\ldots$, $y^{(n-1)}$, получим соотношение

$$(E-\tau L_{1h})(E-\tau L_{2h})\ldots(E-\tau L_{nh})y=y_{i,k-1}-$$
$$-\tau(E-\tau L_{1h})\ldots(E-\tau L_{n-1,h})(ay^2+by-f),$$

где E — единичная матрица. Подставляя сюда вместо y значения $u=u_{ik}=u(x_i,t_k)$ решения задачи (1)—(3), получим

$$(E-\tau L_{1h})(E-\tau L_{2h})\ldots(E-\tau L_{nh})u=u_{i,k-1}-$$
$$-\tau(E-\tau L_{1h})\ldots(E-\tau L_{n-1,h})(au^2+bu-f)+\tau\psi.$$

Открывая скобки и учитывая гладкость решения и коэффициентов уравнения (1), нетрудно убедиться, что $|\psi_{ik}|\leqslant M(|h|^2+\tau)$ при $x_{ik}\in Q_{Th}$. Для погрешности $z=u-y$ получим соотношение

$$(E-\tau L_{1h})(E-\tau L_{2h})\dots(E-\tau L_{nh})z=z_{i,k-1}-$$
$$-\tau(E-\tau L_{1h})\dots(E-\tau L_{n-1,h})[a(y+u)z+bz]+\tau\psi.$$

Переход от $z_{i,k-1}$ к $z=z_{ik}$ можно осуществить также при помощи формул

$$z^{(1)}-z_{i,k-1}=\tau L_{1h}z^{(1)}+\tau\psi,$$
$$z^{(\nu)}-z^{(\nu-1)}=\tau L_{\nu h}z^{(\nu)},\quad \nu=2,\dots,n-1,$$
$$z-z^{(n-1)}=\tau[L_{nh}z-a(y+u)z-bz],$$

откуда

$$|z_{ik}|\leqslant\max_i|z_i^{(n-1)}|\leqslant\dots\leqslant\max_i|z_i^{(1)}|\leqslant\max_i|z_{i,k-1}|+\tau\max_i|\psi_{ik}|.$$

Из этих неравенств следует утверждение теоремы ввиду оценки

$$\max_{(x_i,t_k)\in Q_{Th}}|z_{ik}|\leqslant T\max_{(x_i,t_k)\in Q_{Th}}|\psi_{ik}|\leqslant TM(|h|^2+\tau).$$

Литература

1. Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, Вып. 2. Москва, 1972.
2. Карчевский М. М., Лапин А. В., Ляшко А. Д., Экономичные разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 3, 23—31.
3. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.

Поступило
20 I 1974

DIFERENTSSKEEM RUUTMITTELINEAARSUSEGA PARABOOLSE VÕRRANDI LAHENDAMISEKS

E. Tamme ja A. Onoper

Resümee

Vaadeldakse ülesande (1)—(3) mittenegatiivse lahendi leidmist risttahukakujulises piirkonnas. Ülesanne aproksimeeritakse ökonoomse diferentsskeemiga (4)—(5), tõestatakse selle stabiilsus ja koonduvus kiirusega $O(|h|^2+\tau)$. Mittelineaarse algebralise võrrandisüsteemi lahendamiseks antakse iteratsioonimeetod (6) ning tõestatakse selle koonduvus.

EIN DIFFERENZENSCHEMA FÜR DIE LÖSUNG DER PARABOLISCHEN GLEICHUNG MIT DER QUADRATISCHEN NICHTLINEARITÄT

E. Tamme ja A. Onoper

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird die Ermittlung der nicht negativen Lösung für die Aufgabe (1)—(3) im Quader betrachtet. Die Aufgabe wird mit dem Differenzenschema (4)—(5) approximiert. Es werden die Stabilität und die Konvergenz (mit der Geschwindigkeit $O(|h|^2+\tau)$) dieses Verfahrens bewiesen. Für die Lösung des nicht linearen algebraischen Gleichungssystems wird die Iterationsmethode (6) dargeboten und ihre Konvergenz bewiesen.

О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ АБСОЛЮТНО ГИБКОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ С НАЧАЛЬНЫМ ПРОГИБОМ

Л. Роотс

Кафедра теоретической механики

Рассмотрим изгиб абсолютно гибкой упругой мембраны, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p. Мембрана круглая (радиус c) и закреплена так, что радиальные смещения на контуре невозможны. Начальный прогиб осесимметричен относительно оси z.

Дифференциальные уравнения абсолютно гибкой мембраны, на которую действует равномерно распределенная нагрузка p, имеют вид

$$h\sigma_r\left(\frac{dw}{dr}+\frac{dw_0}{dr}\right)+\frac{pr}{2}=0,$$

$$\frac{d}{dr}\nabla^2\Phi=-\frac{E}{r}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\frac{dw}{dr}\frac{dw_0}{dr}\right]; \qquad (1)$$

где обозначено

w_0 — начальный прогиб,
w — дополнительный прогиб,
h — толщина мембраны,
Φ — функция напряжений;

$$\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}=\sigma_r; \qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2}=\sigma_\Theta.$$

Переходим к безразмерным величинам

$$w_0{}^*=\frac{w_0}{h},$$

$$w^*=\frac{w}{h},$$

$$\sigma_r{}^*=\frac{\sigma_r}{E}\left(\frac{c}{h}\right)^2,$$

$$\sigma_\Theta{}^*=\frac{\sigma_\Theta}{E}\left(\frac{c}{h}\right)^2,$$

$$p^*=\frac{p}{E}\left(\frac{c}{h}\right)^4.$$

Учитывая, что

$$\sigma_\Theta=\frac{d}{dr}(r\sigma_r)$$

и вводя, следуя работе [1], вместо r координату

$$x=\frac{r^2}{c^2},$$

можно уравнения (1) преобразовать к виду

$$4\sigma_r^*\left(\frac{dw^*}{dx}+\frac{dw_0^*}{dx}\right)+p^*=0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x\sigma_r^*)=-\frac{1}{2}\left(\frac{dw^*}{dx}\right)^2-\frac{dw^*}{dx}\frac{dw_0^*}{dx},$$

а далее, введя новые переменные

$$y=x\sigma_r^*\left(\frac{32}{p^{*2}}\right)^{1/3},$$

$$w'_0=w_0^*\left(\frac{2}{p^*}\right)^{1/3},$$

$$w'=w^*\left(\frac{2}{p^*}\right)^{1/3}$$

к виду

$$\frac{dw'}{dx}=-\frac{x}{y}-\frac{dw'_0}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x^2}{y^2}+\left(\frac{dw'_0}{dx}\right)^2.$$

К уравнениям (2) принадлежат граничные условия:

1) в центре мембраны $\sigma_r=\sigma_\Theta$, или

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{y}{x}\right|_{x=0}; \tag{3}$$

2) на контуре $u_r=0$ и $w'=0$, или

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{1+\nu}{2}\left.y\right|_{x=1}, \tag{4}$$

и

$$w'|_{x=1}=0. \tag{5}$$

В качестве конкретного примера рассматриваем мембрану с начальным прогибом

$$w_0=f\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)=f(1-x),$$

где $f=\text{const}$, Здесь

$$\frac{dw_0'}{dx}=-\frac{f}{h}\left(\frac{2}{p^*}\right)^{1/3}=-\lambda=\text{const};$$

уравнения (2) принимают вид

$$\frac{dw'}{dx}=\lambda-\frac{x}{y},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2-\frac{x^2}{y^2}. \tag{6}$$

Граничные условия (3) и (4) удовлетворены, если задать
$$y=A\sin\alpha x,$$
где α — решение уравнения
$$\tan\alpha=\frac{2\alpha}{1+\nu}.$$

Применяя затем к решению второго уравнения в системе уравнений (6) метод Галеркина, получим для определения коэффициента A уравнение
$$I_1A^3+I_2A^2+I_3=0,$$
где
$$I_1=\alpha^2\int_0^1\sin^4\alpha x\,dx,$$
$$I_2=\lambda^2\int_0^1\sin^3\alpha x\,dx,$$
$$I_3=-\int_0^1 x^2\sin\alpha x\,dx.$$

Далее, из первого уравнения системы уравнений (6) находим
$$w'=\lambda x-\frac{1}{A}\int_0^x\frac{x\,dx}{\sin\alpha x}+C.$$

Из граничного условия (5)
$$C=\frac{1}{A}\int_0^1\frac{x\,dx}{\sin\alpha x}-\lambda,$$
следовательно,
$$w'=\frac{1}{A}\int_x^1\frac{x\,dx}{\sin\alpha x}+\lambda(x-1).$$

Прогиб в центре мембраны
$$w(0)=h\left(\frac{p^*}{2}\right)^{1/3}w'(0)=$$
$$=h\left(\frac{p^*}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{A}\int_0^1\frac{x\,dx}{\sin\alpha x}-\lambda\right).$$

Вычисление проведены для стальной мембраны ($\nu=0{,}3$; $E=2{,}1\cdot10^6$ $кГ/см^2$) при значениях параметров $c=200\,h$; $p=7$ $кГ/см^2$; $f/h=3$; в этом случае $w(0)=3{,}78\,h$.

Литература

1. Вольмир, А. С., Гибкие пластинки и оболочки. Москва, 1956.

Поступило
15 III 1974

ALGLÄBIPAINDEGA MEMBRAANI SUURTEST LÄBIPAINETEST

L. Roots

Resümee

Artiklis vaadeldakse telgsümmeetrilise algläbipaindega ümmarguse elastse membraani suuri läbipaindeid ühtlaselt jaotatud koormuse mõjul. Esitatakse niisuguse membraani diferentsiaalvõrrandid, mis on tuletatud analoogiliselt tasapinnalise membraani diferentsiaalvõrranditele töös [1]. Ühel erijuhul on leitud neile võrranditele ligikaudne lahend Galerkini meetodi abil.

ON THE GREAT DEFLECTIONS OF A MEMBRANE WITH AN INITIAL DEFLECTION

L. Roots

Summary

In this paper the great deflections of an elastic membrane with axisymmetrical initial deflections under uniformly distributed normal pressure are considered. In one case the approximate solution by using the Galerkin method is found.

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ БАЛОК В СЛУЧАЕ МАТЕРИАЛОВ С РАЗНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Я. Леллеп

Кафедра теоретической механики

Установившаяся ползучесть конструкций в случае анизотропного материала рассматривалась в работах [2, 4, 6]. В статье [4] исследовалась анизотропная ползучесть дисков, причем поведение анизотропного материала в условиях ползучести описывалась уравнениями

$$\varepsilon_k = B(\lambda_k \sigma)^n \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Здесь ε_k — скорости деформации вдоль главных осей анизотропии, σ — напряжение, B, n и λ_k — некоторые постоянные, определяемые экспериментально.

В работе [5] исследуется ползучесть материалов, поведение которых является различным при растяжении и сжатии. Обнаружено, что у таких сплавов, как магниевые и титановые, скорости деформации ползучести при одних и тех же напряжениях на растяжение и сжатие отличаются более, чем в три раза. Приведены результаты экспериментов, проведенных на образцах, вырезанных из цилиндрической заготовки алюминиево-магниевого сплава при температуре 200° С. Экспериментальные данные аппроксимируются функцией

$$\varepsilon = \exp(-K_k + \beta_k |\sigma|),$$

где ε — скорость деформации, K_k и β_k — постоянные, имеющие различные значения, как для различных образцов, так и при растяжении и сжатии. Например, при растяжении образца, вырезанного из осевого направления заготовки, $K = 13{,}0$ и $\beta = 0{,}75$ *мм²/кГ*, а при сжатии того же образца $K = 14{,}1$ и $\beta = 0{,}75$ *мм²/кГ*.

В статье [1] исследуется установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала. Допускается, что поведение разномодульного материала при растяжении и сжатии (аналогично анизотропному материалу) описывается уравнениями

$$\varepsilon = \begin{cases} B(\lambda\sigma)^n, & \sigma \geqslant 0, \\ -B|\sigma|^n, & \sigma \leqslant 0, \end{cases}$$

где показатель степени n имеет одинаковое значение при растяжении и сжатии.

Ниже рассматривается установившаяся ползучесть балок при изгибе под действием распределенной нагрузки. Допускается, что балки изготовлены из материала с разными свойствами на растяжение и сжатие. Задача решается в случаях экспоненциального и степенного законов ползучести.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим изгиб прямой балки длины $2l$, нагруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой интенсивности P. Допустим, что балка имеет постоянное поперечное сечение вида прямоугольника ширины 1 и высоты h. Концы балки считаем свободно опертыми. Координатную систему Oxy введем следующим образом: за ось x, определяющую положение сечений балки, выбираем ось недеформированной балки, а ось y направим вертикально вниз. Начало координат поместим в центре тяжести левого конца балки. Дополнительно введем вспомогательную координату z, остающейся в процессе деформации перпендикулярной к оси балки и показывающей расстояние волокон от оси балки. Из-за симметрии рассмотрим в дальнейшем лишь левую половину балки.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P, \qquad \frac{dT}{dx} = 0, \tag{1.1}$$

где M — изгибающий момент и T — осевая сила.

Геометрические соотношения представляются в виде

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} - z\frac{d^2W}{dx^2}, \tag{1.2}$$

где ε — скорость деформации, U — скорость горизонтального перемещения и W — скорость прогиба.

Изгибающий момент и осевая сила выражаются через нормальное напряжение по формулам

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z\, dz, \qquad T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma\, dz. \tag{1.3}$$

Для удобства введем следующие величины:

$$\xi=\frac{x}{l}; \quad \eta=\frac{2z}{h}; \quad u=\frac{U}{l};$$
$$\mu=\frac{4M}{h^2}; \quad t=\frac{2T}{h}; \quad w=\frac{hW}{2l^2}; \quad p=\frac{4l^2P}{h^2}. \tag{1.4}$$

С помощью величин (1.4) можно уравнения равновесия (1.1) представить в виде

$$\mu''=-p; \quad t'=0, \tag{1.5}$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ. Формула (1.2) примет вид

$$\varepsilon=u'-\eta w''. \tag{1.6}$$

Вместо (1.3) имеем

$$\mu=\int_{-1}^{1}\sigma\eta\,d\eta; \quad t=\int_{-1}^{1}\sigma\,d\eta. \tag{1.7}$$

Интегрируя уравнения равновесия (1.5) с учетом граничных условий $\mu(0)=0$, $\mu'(1)=0$, $t(0)=0$, получим

$$\mu=\frac{p}{2}(2\xi-\xi^2); \quad t=0. \tag{1.8}$$

Обозначим безразмерную координату волокна балки, в котором скорость деформации равна нулю, через η_1. Из формулы (1.6) выясняется, что

$$\eta_1=\frac{u'}{w''}. \tag{1.9}$$

С помощью (1.9) формула (1.6) примет вид

$$\varepsilon=\varkappa(\eta-\eta_1), \tag{1.10}$$

где для удобства введено обозначение $\varkappa=-w''$.

§ 2. Экспоненциальный закон ползучести

О. В. Сосниным [5] обнаружено, что поведение материала с разными свойствами на растяжение и сжатие хорошо согласуется с экспоненциальным законом ползучести, который можно представить в виде

$$\varepsilon=\begin{cases} Be^{m\sigma}, & \sigma>0,\\ -De^{-n\sigma}, & \sigma<0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Хотя соотношения типа (2.1) в согласии с экспериментальными данными, они имеют некоторые недостатки. Важнейший недостаток заключается в том, что они не в силах описывать процесс ползучести при малых значениях скорости деформации.

Определяем из формул (2.1) напряжение

$$\sigma=\begin{cases} \frac{1}{m}\ln\frac{\varepsilon}{B}, & \sigma>0, \\ -\frac{1}{n}\ln\frac{-\varepsilon}{D}, & \sigma<0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Примем, что первое из соотношений (2.2) справедливо лишь при $\varepsilon > B$, а второе — при $\varepsilon < -D$. При остальных значениях скорости деформации, т. е. при $-D \leqslant \varepsilon \leqslant B$, считаем напряжение σ равным нулю. Таким образом, формула (2.2) приобретает вид

$$\sigma=\begin{cases} -\frac{1}{n}\ln\frac{-\varepsilon}{D}, & \varepsilon<-D, \\ 0, & -D\leqslant\varepsilon\leqslant B, \\ \frac{1}{m}\ln\frac{\varepsilon}{B}, & \varepsilon>B. \end{cases} \tag{2.3}$$

Предположим, что при $-1 \leqslant \eta < \eta_1$ волокна балки сжаты, а при $\eta_1 < \eta \leqslant 1$ растянуты. Тогда с учетом (1.10) соотношения (2.3) примут вид

$$\sigma=\begin{cases} -\frac{1}{n}\ln\left[\frac{\varkappa}{D}(\eta_1-\eta)\right], & -1\leqslant\eta<\eta_1-\frac{D}{\varkappa}, \\ 0, & \eta_1-\frac{D}{\varkappa}\leqslant\eta\leqslant\eta_1+\frac{B}{\varkappa}, \\ \frac{1}{m}\ln\left[\frac{\varkappa}{B}(\eta-\eta_1)\right], & \eta_1+\frac{B}{\varkappa}<\eta\leqslant 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Вычисляя t по формулам (1.7) и (2.4), имеем

$$t=\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{B}{m}-\frac{D}{n}\right)+\frac{1-\eta_1}{m}\left\{\ln\left[\frac{\varkappa}{B}(1-\eta_1)\right]-1\right\}-$$
$$-\frac{1+\eta_1}{n}\left\{\ln\left[\frac{\varkappa}{D}(1+\eta_1)\right]-1\right\}, \tag{2.5}$$

откуда с учетом (1.8) получим

$$\ln\varkappa=1+\frac{mn}{m(1+\eta_1)-n(1-\eta_1)}\left[\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{B}{m}-\frac{D}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\eta_1}{m}\ln\frac{1-\eta_1}{B}-\frac{1+\eta_1}{n}\ln\frac{1+\eta_1}{D}\right]. \tag{2.6}$$

Изгибающий момент μ определяем согласно (1.7). Применяя при этом формулу (2.4), имеем

$$\mu=\frac{1}{4n}\left(\frac{D}{\varkappa}\right)^2+\frac{1}{4m}\left(\frac{B}{\varkappa}\right)^2+\frac{\eta_1}{\varkappa}\left(\frac{B}{m}-\frac{D}{n}\right)+$$
$$+\frac{(1+\eta_1)^2}{4n}\left[2\ln\frac{\varkappa(1+\eta_1)}{D}-1\right]-\frac{\eta_1(1+\eta_1)}{n}\left[\ln\frac{\varkappa(1+\eta_1)}{D}-1\right]+$$
$$+\frac{(1-\eta_1)^2}{4m}\left[2\ln\frac{\varkappa(1-\eta_1)}{B}-1\right]+$$
$$+\frac{\eta_1(1-\eta_1)}{m}\left[\ln\frac{\varkappa(1-\eta_1)}{B}-1\right]. \tag{2.7}$$

Заменяя в (2.7) величину $\ln\varkappa$ выражением (2.6) и учитывая первое из равенств (1.8), приходим к формуле

$$\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{B^2}{m}+\frac{D^2}{n}\right)+\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{B}{m}-\frac{D}{n}\right)\frac{m(1+\eta_1)^2+n(1-\eta_1)^2}{m(1+\eta_1)-n(1-\eta_1)}+$$
$$+\frac{2(1-\eta_1^2)(m+n)}{m(1+\eta_1)-n(1-\eta_1)}\left[\frac{1-\eta_1}{m}\ln\frac{1-\eta_1}{B}-\frac{1+\eta_1}{n}\ln\frac{1+\eta_1}{D}\right]+ \tag{2.8}$$
$$+\frac{m(1+\eta_1)^2+n(1-\eta_1)^2}{mn}+2(1-\eta_1^2)\left[\frac{1}{n}\ln\frac{1+\eta_1}{D}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m}\ln\frac{1-\eta_1}{B}\right]-2p(2\xi-\xi^2)=0.$$

Соотношение (2.8) можно рассматривать в качестве квадратного уравнения для определения величины $\varkappa$. Поставляя его решение в (2.6), получим уравнение для определения величины η_1.

Следует отметить, что в случае $B=D$, $m=n$, правая часть соотношения (2.5) равна тождественно нулю при $\eta_1=0$, и вместо (2.8) имеем

$$\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{B}{\varkappa}\right)^2+2\ln\frac{\varkappa}{B}-1\right]-\frac{p}{2}(2\xi-\xi^2)=0.$$

Этот результат и ожидался (см. [3], стр. 427)

§ 3. Степенной закон ползучести

Допустим, что поведение образца при растяжении и сжатии описывается уравнениями

$$\varepsilon=\begin{cases} B(\lambda\sigma)^m, & \sigma\geqslant 0,\\ -B\,|\sigma|^n, & \sigma\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

В отличие от формул (2.1) соотношения (3.1) способны описывать процесс ползучести и в случае малых скоростей деформации.

Разрешая уравнения (3.1) относительно напряжения σ, имеем

$$\sigma=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\varepsilon}{B}\right)^{1/m}, & \sigma\geqslant 0,\\ -\left(\dfrac{-\varepsilon}{B}\right)^{1/n}, & \sigma\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

Допуская, что в верхней части балки действуют сжимающие и в нижней части растягивающие усилия и имея в виду (1.10), соотношения (3.2) приобретают вид

$$\sigma=\begin{cases}-\left[\dfrac{\varkappa}{B}(\eta_1-\eta)\right]^{1/n}, & -1\leqslant\eta<\eta_1,\\ \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{\varkappa}{B}(\eta-\eta_1)\right]^{1/m}, & \eta_1<\eta\leqslant 1.\end{cases} \tag{3.3}$$

Вычисляя изгибающий момент и усилие по формулам (1.7) и (3.3), получим соответственно

$$\mu=\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/n}\left[\frac{n}{2n+1}(1+\eta_1)^{2+1/n}-\frac{n\eta_1}{n+1}(1+\eta_1)^{1+1/n}\right]+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/m}\left[\frac{m}{2m+1}(1-\eta_1)^{2+1/m}+\frac{m\eta_1}{m+1}(1-\eta_1)^{1+1/m}\right], \tag{3.4}$$

и

$$t=-\frac{n}{n+1}\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/n}(1+\eta_1)^{1+1/n}+\frac{m}{\lambda(m+1)}\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/m}(1-\eta_1)^{1+1/m}. \tag{3.5}$$

Соотношения (1.8) позволяют написать формулы (3.4) и (3.5) в виде

$$\frac{n[1+n(1-\eta_1)]}{(n+1)(2n+1)}\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/n}(1+\eta_1)^{1+1/n}+$$
$$+\frac{m[1+m(1+\eta_1)]}{\lambda(m+1)(2m+1)}\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{1/m}(1-\eta_1)^{1+1/m}-\frac{p}{2}(2\xi-\xi^2)=0, \tag{3.6}$$

и

$$\left(\frac{\varkappa}{B}\right)^{(m-n)/mn}=\frac{m(n+1)}{\lambda n(m+1)}\cdot\frac{(1-\eta_1)^{1+1/m}}{(1+\eta_1)^{1+1/n}}. \tag{3.7}$$

Далее, придется различать два случая. В о - п е р в ы х, если $m=n$, то из (3.7) следует

$$\eta_1=\frac{1-(\lambda)^{1+1/n}}{1+(\lambda)^{1+1/n}}=\text{const}. \tag{3.8}$$

Из уравнения (3.6) с помощью формулы (3.8) получим

$$\varkappa = B\left[\frac{1+(\lambda)^{1+1/n}}{2}\right]^{n+1}\cdot\left[\frac{p(2n+1)}{4n}(2\xi-\xi^2)\right]^n. \qquad (3.9)$$

Учитывая то, что $\varkappa = -w''$, можно путем двойного интегрирования при граничных условиях $w(0)=0$, $w'(1)=0$, найти из (3.9) скорость прогиба. Во-вторых, если $m \neq n$, то из уравнения (3.7) определяем

$$\varkappa = B\left[\frac{m(n+1)}{\lambda n(m+1)}\right]^{mn/(m-n)}\cdot\frac{(1-\eta_1)^{n(m+1)/(m-n)}}{(1+\eta_1)^{m(n+1)/(m-n)}}. \qquad (3.10)$$

Подставляя в соотношение (3.6) вместо $\varkappa$ ее выражение (3.10), получим уравнение для определения величины η_1:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{m}{\lambda(m+1)}\right)^m\cdot\frac{(1-\eta_1)^{m+1}}{(1+\eta_1)^{n+1}}\right]^{1/(m-n)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1+n(1-\eta_1)}{2n+1}+\frac{1+m(1+\eta_1)}{2m+1}\right]+\frac{p}{2}(\xi^2-2\xi)=0. \qquad (3.11)$$

Скорость прогиба находим из (3.10) путем численного интегрирования после решения уравнения (3.11) и замены величины η_1 ее численными значениями.

Проведено численное решение уравнения (3.11) при $p=40$. Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2. Таблица 1 соответствует случаю $n=3$, $m=5$, а таблица 2 случаю $n=5$, $m=3$.

Таблица 1

ξ \ λ	0,5	1,5
0,1	0,0767	—0,3410
0,2	—0,0245	—0,4255
0,4	—0,1149	—0,4956
0,6	—0,1567	—0,5265
0,8	—0,1772	—0,5412
1,0	—0,1819	—0,5456

Таблица 2

ξ \ λ	0,5	1,5
0,1	0,5347	0,1672
0,2	0,6413	0,3237
0,4	0,7197	0,4502
0,6	0,7514	0,5043
0,8	0,7658	0,5295
1,0	0,7700	0,5370

Литература

1. Л е л л е п Я., Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 323—333.
2. М а л и н и н Н. И., К теории анизотропной ползучести. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1964, № 3, 16—23.
3. Р а б о т н о в Ю. Н., Ползучесть элементов конструкций. Москва, 1966.
4. С о с н и н О. В., Установившаяся анизотропная ползучесть дисков. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1963, № **4**, 128—131.
5. С о с н и н О. В., О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1970, № 5, 136—139.
6. B e r m a n I., P a i D. H., A theory of anisotropic steady-state creep. Int. J. Mech. Sci., 1966, **8**, № 5, 341—352.

Поступило
24 I 1974

TALADE STATSIONAARNE ROOMAVUS MATERJALIDE KORRAL, MIS KÄITUVAD ERINEVALT TÕMBEL JA SURVEL

J. Lellep

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis vaadeldakse otstest vabalt toetatud talade painet ühtlaselt jaotatud ristkoormuse mõjul. Eeldatakse, et materjali käitumist iseloomustab roomavusseadus, mille parameetritel on tõmbe- ja survepingete korral erinevad väärtused. Probleemi uuritakse kahel juhul, kui roomavusseadus on esitatud vastavalt astme- ja eksponentfunktsiooni kujul.

STEADY CREEP OF BEAMS, MADE FROM MATERIALS, WHICH BEHAVE DIFFERENTLY IN TENSION AND COMPRESSION

J. Lellep

S u m m a r y

Creep bending of a simply supported beam under uniformly distributed load is studied. It is assumed, that material of the beam behaves diferently in tension and compression. The analysis has been carried out in two cases; when creep rate is a power function of stress and a exponential function of stress respectively. In both cases the functions have different parametres in tension and compression.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета
Выпуск 355
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XV

На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Ответственный редактор С. Барон

Корректоры Г. Ноппель, О. Мутт, К. Уусталу
Сдано в набор 25/IV 1974. Подписано к печати 15/IV 1975. Бумага типографская № 2, 60×90.1/16. Печ. листов 16,0 + 1 вклейка. Учетно-издат. листов 16,78. Тираж 450. МВ 03312. Заказ № 2670.
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 1 руб. 68 коп.

2—2