



TARTU ÜLIKOOL

Eve Oja, Peeter Oja

FUNKTSIONAALANALÜÜS

TARTU 1991

TARTU ÜLIKOOL

Matemaatilise analüüsi kateeder

Arvutusmatemaatika kateeder

Eve Oja, Peeter Oja

FUNKTSIONAALANALÜÜS

Tartu 1991

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
21. juunil 1991.a.

Retsenseerinud G. Vainikko, J. Sikk.

Эве Оя, Пеэтер Оя.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.
На эстонском языке.
Тартуский университет.
ЭР, 202400, г.Тарту, ул.Дликооли, 18.
Vastutav toimetaja T. Leiger.
Paljundamisele antud 22.07.1991.
Formaat 60x84/16.
Kirjutuspaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoogmaid 17,90.
Arvestuspoogmaid 17,35. Trükipoogmaid 19,25.
Trükiarv 300.
Tell. nr. 367.
Hind 8.
TÜ trükikoda. EV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

© Eve Oja, Peeter Oja, 1991

E e s s õ n a

XX sajandi alguseks oli mitmetes matemaatika harudes kogunenud palju sarnaseid tulemusi, mis kirjeldasid erinevaid objekte. Nendest kõige olulisema väljaeraldamisel kujuneski kaasaegse matemaatika üks keskseid harusid - funktsionaalanalüüs. Tema põhiliste ideede ja meetodite allika-teks võib lugeda matemaatilist analüüsi, geomeetriat ja lineaaralgebrat. Esimeste fundamentaalsete funktsionaalanalüüsi-alaste tööde autorid on M. Fréchet, D. Hilbert, F. Riesz. Iseseisev teadusharu kujunes temast välja S. Banachi töödega. Suurt mõju funktsionaalanalüüsi arengule avaldas seejuures asjaolu, et tema mõisted ja meetodid osutusid efektiivseks teoreetilise füüsika probleemide lahendamisel.

Kui matemaatilises analüüsis uuritakse näiteks jadasid, funktsioone ja nende mitmesuguseid omadusi, siis funktsionaalanalüüsis ühendatakse kindlate omadustega funktsioonid, jadad või muud abstraktsed objektid ühtseks kogumiteks — ruumideks — ning seatakse omaette eesmärgiks ruumide struktuuri uurimine. Erilise tähelepanu all on funktsionaalanalüüsis funktsiooni mõiste üldistus — operaator. Uuritakse mitmesugustes ruumides tegutsevaid operaatoreid ning operaatorite klasse. Funktsionaalanalüüsi mõistete üldisuse tõttu on ta paljudele teistele matemaatika valdkondadele "keeleks". Näiteks on funktsionaalanalüüsi kasutamine möödapääsmatu vähegi tõsisemate probleemide käsitlemisel matemaatilise füüsika võrrandite või arvutusmeetodite teoorias.

Käesoleva õpiku näol on tegemist funktsionaalanalüüsi traditsioonilise põhikursusega nagu teda loetakse ülikoolides teisel või kolmandal aastal. Me vaatleme funktsionaalanalüüsi põhilisi mõisteid ja tulemusi ning nendevahelisi vahekordi. Me ei seadnud eesmärgiks anda ülevaadet teooria kasutusvalade mitmekesisusest, kuid püüdsime siiski tuua näiteid üksikutest olulistest rakendustest.

Õpik on mõeldud võimalikult laiale lugejaskonnale - tema sisu mõistmiseks on vaja üksnes mõningaid eelteadmisi matemaatilisest analüüsist ja lineaaralgebrast. Erinevalt paljudest funktsionaalanalüüsi õpikutest ei eelda antud

Õpik mitte mingisuguseid teadmisi üldisest topoloogiast. Me oleme püüdnud õpiku materjali organiseerida nii, et lugeja tööd tema mõistmisel võimalikult hõlbustada. Seda eesmärki teenivad ka üksikasjalikud selgitused, mida me tõestustes ja arutlustes jagame. Nii on käesolev õpik oma esituse poolest elementaarsem kui enamik olemasolevaid funktsionaalanalüüsi õpikuid ning on seega sobiv aine iseseisvaks omandamiseks.

Osale paragrahvidest, ülesannetest, märkustest ja tõestustest on lisatud sümbol *. Esialgel funktsionaalanalüüsi õppimisel võib need vahele jätta, see ei sega põhiteksti mõistmist. Selle materjali sees on mõndagi, mida pole tavaliselt ülikooli põhikursuste programmides. Autorite arvates on aga kogu tärniga märgistatud materjal oluline funktsionaalanalüüsist tervikliku pildi saamisel.

Õpiku lõpus on ära toodud tekstis esinenud matemaatikute eluaastad ja päritolu. Seejuures on lisatud viited lehekülgedele, kus asuvad nende nimedega seotud mõisted või tulemused. Raamatu lõpuosa sisaldab veel kolme nimestikku kirjanduse kohta. Esimeses on eesti keeles ilmunud funktsionaalanalüüsi-alane materjal, teises lugejale kättesaadavamad funktsionaalanalüüsi õpikud, kolmandasse on koondatud rida monograafiaid, mis võimaldavad lugejal tutvuda mõnede üldisema iseloomuga teemadega põhjalikumalt, kui seda lubavad traditsioonilised õpikud. Viimase nimestiku juurde lisatud kommentaar aitab lugejal temas orienteeruda.

Avaldame südamlikku tänu prof. G. Vainikkole, kes tutvus käsikirjaga ning abistas autoreid väärtuslike märkuste ja täiendusettepanekutega, ning K. Kolgile ja H. Terale hoolika töö eest käsikirja vormistamisel.

Tartus 1991. a.

Autorid

I Meetrilised ruumid

§ 1. Meetrilise ruumi mõiste

Matemaatilise analüüsi üks olulisemaid mõisteid on jada koonduvus. Arvjadade, aga ka näiteks tasandi või ruumi punktidest moodustatud jadade koonduvuse mõiste tugineb asjaolule, et arvsirgel, tasandil või ruumis on olemas punktide vaheline kaugus. Idee defineerida elementidevaheline kaugus suvaliste hulkade jaoks viib meetrilise ruumi mõisteni.

Definitsioon. Hulka X nimetatakse meetriliseks ruumiks, kui igale tema elementide paarile $x, y \in X$ on vastavusse seatud reaalarv $\varrho(x, y)$ nii, et on täidetud tingimused:

- 1° $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 2° $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- 3° $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Arvu $\varrho(x, y)$ nimetatakse elementide x ja y vaheliseks kauguseks.

Tingimusi 1°-3° nimetatakse meetrika aksioomideks, 1° on identsuse ehk samasuse aksioom, 2° sümmeetria aksioom, 3° kolmnurga võrratus. Meetrilise ruumi aksiomaatika võttis kasutusele M. Fréchet 1906.a.

Näide. Olgu $X = \mathbb{R}^n = \{x : x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_i \in \mathbb{R}\}$. Defineerime elementide $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ja $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ vahelise kauguse

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

Aksioomide 1° ja 2° kehtivus on vahetult näha, kolmnurga võrratuse tõestame hiljem üldisemal juhul.

Järgnevalt esitame mõned järeldused aksioomidest.

Järeldus 1. Kaugus on mittenegatiivne, s.t. $\varrho(x, y) \geq 0$.

Tõestuseks märgime, et

$$0 = \varrho(x, x) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x) = 2\varrho(x, y).$$

Järeldus 2 (nelinurga võrratus). Kehtib

$$|\varrho(x, y) - \varrho(u, v)| \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Tõestus. Võrratusest

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y)$$

saame võrdust $\varrho(v, y) = \varrho(y, v)$ arvestades

$$\varrho(x, y) - \varrho(u, v) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Analoogiliselt saame, et

$$\varrho(u, v) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v),$$

mis koos eelmise võrratusega annab nelinurga võrratuse.

Järeldus 3 (tagurpidi kolmnurga võrratus). Kehtib

$$|\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leq \varrho(y, z).$$

Tõestuseks piisab võtta nelinurga võrratuses $u = x$ ja $v = z$.

Järeldus 4. Meetrilise ruumi X mistahes osahulk on meetriline ruum, kui osahulgas elementide vaheliseks kauguseks lugeda nende vahelist kaugust ruumis X .

Meetrilise ruumi osahulka nimetatakse ka alamruumiks.

Hulka X nimetatakse poolmeetriliseks ruumiks, kui temas kõrvuti aksioomidega 2° ja 3° kehtib aksioomi 1° nõrgendatud variant: $\varrho(x, x) = 0, x \in X$. Järeldused 1-3 ning järelduse 4 analoog kehtivad ka poolmeetrilises ruumis.

§ 2. Koonduvus meetrilises ruumis

Kauguse olemasolu lubab meetrilise ruumi juhule üldistada arvjada koonduvuse mõiste. Koonduvad jaded moodustavad meetriliste ruumide probleemide uurimisel piisavalt üldise vahendi.

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Öeldakse, et jada $x_n \in X$ koondub elemendiks $x \in X$, kui $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$ protsessis $n \rightarrow \infty$.

Jada x_n koondumine elemendiks x tähendab, et iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et kui $n > N$, siis $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$.

Jada x_n koondumist elemendiks x tähistatakse $x_n \rightarrow x$, $\lim x_n = x$, $x_n \xrightarrow{n} x$, $\lim_n x_n = x$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ või $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Jada x_n nimetatakse statsionaarseks, kui leidub N nii, et $x_N = x_{N+1} = \dots$ (mingist kohast alates on kõik jada elemendid võrdsed). Statsionaarne jada koondub alati, sest kui $n > N$, siis $\varrho(x_n, x_N) = 0$. Statsionaarne on näiteks mistahes konstantne jada, s.t. selline jada, mille kõik elemendid on võrdsed. Seega on kõik konstantsed jaded koonduvad.

Kui jada ei koondu, siis nimetatakse teda hajuvaks.

Lause 1. Koonduva jada mistahes osajada koondub samaks piirelemendiks.

Tõestuseks märgime, et kui $x_n \rightarrow x$, s.t. $\varrho(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$, siis $\varrho(x_{n_k}, x) \xrightarrow{k} 0$ (sest koonduva arvjada osajada koondub samaks piirväärtuseks); seega $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$.

Lause 2. Koonduva jada piirelement on ainus.

Tõestus. Kui $x_n \rightarrow x$ ja $x_n \rightarrow y$, s.t. $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$ ja $\varrho(x_n, y) \rightarrow 0$, siis

$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) = \varrho(x_n, x) + \varrho(x_n, y) \rightarrow 0$, seega $\varrho(x, y) \leq 0$. Järelikult $\varrho(x, y) = 0$ ehk $x = y$.

Lause 3. Kaugus on pidev järgmises mõttes: kui $x_n \rightarrow x$ ja $y_n \rightarrow y$, siis $\varrho(x_n, y_n) \rightarrow \varrho(x, y)$.

Tõestus on ilmne, kui kasutada nelinurga võrratust

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Erijuhuna saame lausest 3 kauguse pidevuse ühe argumendi järgi: kui $x_n \rightarrow x$, siis $\varrho(x_n, y) \rightarrow \varrho(x, y)$. Põhjenduseks tarvitseb vaadelda lauses 3 konstantset jada, kus $y_n = y$ iga n korral.

§ 3. Meetriliste ruumide näiteid

(konkreetsed meetrilised ruumid)

Me asume vaatlema meetriliste ruumide näiteid, mis oma mitmekesisusega illustreerivad meetrilise ruumi mõiste suurt üldisust ja mille tundmine aitab paremini mõista järgnevas esitamisele tulevat teooriat. Samal ajal on need konkreetsed meetrilised ruumid tähtsad uurimisobjektid ja vahendid mitmesuguste teoreetiliste probleemide lahendamisel. Näidete esitamisel iseloomustame ka jada koonduvust vaadeldavas meetrilises ruumis.

1. Reaalarvude hulk \mathbb{R} ja kompleksarvude hulk \mathbb{C} on meetrilised ruumid kaugusega $\varrho(x, y) = |x - y|$ (absoluutväärtus või moodul arvude x ja y vahest). Meetrika aksioomid on absoluutväärtuse või mooduli tuntud omadused.

Koondumine $x_n \rightarrow x$ (s.t. $|x_n - x| \rightarrow 0$) tähendab tavalist arvjada koondumist.

Kuna meetrilise ruumi iga osahulk on meetriline ruum, kui temas säilitada elementide vaheline kaugus, siis on näiteks lõik $[a, b]$ või ratsionaalarvude hulk \mathbb{Q} , varustatult ruumi \mathbb{R} kaugusega, meetrilised ruumid.

Edaspidi tähistagu \mathbb{K} ruumi \mathbb{R} või ruumi \mathbb{C} .

2. Olgu X suvaline hulk. Defineerime kauguse

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Meetrika aksioomide 1° ja 2° kehtivus on ilmne. Uurime kolmnurga võrratust $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$. Kui $x = y$, siis võrratus kehtib. Kui aga $x \neq y$, siis võrratuse vasakul poolel on $\varrho(x, y) = 1$. Samal ajal $x \neq z$ või $y \neq z$ (sest kui $x = z$ ja $y = z$, siis $x = y$), s.t. $\varrho(x, z) = 1$

või $\varrho(z, y) = 1$. Seega ka sellel juhul võrratus kehtib.

Vaadeldavat ruumi nimetatakse diskreetseks meetriliseks ruumiks.

Lause. Diskreetse meetrilises ruumis koonduvad ainult statsionaarsed jadad.

Tõestus. Olgu $x_n \rightarrow x$, s.t. $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$. Võtame $\varepsilon = 1$ (võib võtta $0 < \varepsilon \leq 1$). Siis leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\varrho(x_n, x) < 1$. See on võimalik ainult siis, kui

$$\varrho(x_n, x) = 0, \text{ s.t. } x_n = x, \text{ kui } n > N.$$

Diskreetne meetrika antud hulgas X on äärmuslik selles mõttes, et ta on tugevaim võimalike meetrikate seas: ta seab jadade koonduvuseks kõige tugevama tingimuse — jadade statsionaarsuse; meenutame, et statsionaarsed jadad koonduvad igas meetrikas. Seega on ruumi X elementidest moodustatud koonduvate jadade hulk minimaalne just diskreetse meetrika korral. Taolist diskreetse meetrika äärmuslikkust on kasulik meeles pidada näiteks kontranaidete konstrueerisel.

Alljärgnevas vaatleme kolme olulist näidete rühma — n -komponendiliste vektorite ruume, jadaruume ja funktsionaalruume.

3. Olgu $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ kõigi n -komponendiliste vektorite hulk. Tähistame hulga X elemente $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Meenutame, et võrdus $x = y$ tähendab seda, et $\xi_k = \eta_k$, $k = 1, \dots, n$. Vaadeldavas hulgas X on olemas mitu üldkasutatavat võimalust kauguse defineerimiseks, vastavalt erinevad ka ruumide tähised.

1) Ruumis m_n defineeritakse kaugus

$$\varrho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|.$$

Aksioomide 1° ja 2° kehtivuse kontroll on vahetu. Peatume kolmnurga võrratusel. Iga indeksi κ korral

$$\begin{aligned} |\xi_\kappa - \eta_\kappa| &= |\xi_\kappa - \zeta_\kappa + \zeta_\kappa - \eta_\kappa| \leq \\ &\leq |\xi_\kappa - \zeta_\kappa| + |\zeta_\kappa - \eta_\kappa| \leq \\ &\leq g(x, z) + g(z, y). \end{aligned}$$

Leides vasakul maksimumi κ järgi, saame

$$g(x, y) \leq g(x, z) + g(z, y).$$

2) Olgu $1 \leq p < \infty$. Ruumis l_p^n defineeritakse kaugus

$$g(x, y) = \left(\sum_{\kappa=1}^n |\xi_\kappa - \eta_\kappa|^p \right)^{1/p}.$$

Oluliste erijuhtudena märgime ruume l_1^n , kus $g(x, y) =$

$$= \sum_{\kappa=1}^n |\xi_\kappa - \eta_\kappa|, \text{ ja } l_2^n, \text{ kus } g(x, y) = \left(\sum_{\kappa=1}^n |\xi_\kappa - \eta_\kappa|^2 \right)^{1/2}.$$

Viimast ruumi tähistatakse ka \mathbb{R}^n või \mathbb{C}^n (üldiselt \mathbb{K}^n).

Ruumi \mathbb{R}^n nimetatakse n -mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks.

Kauguse aksioomide 1° ja 2° kehtivuse kontrollimine ei valmista raskusi. Ruumis l_1^n järeldub kolmnurga võrratus 3° vahetult absoluutväärtuse või mooduli omadustest. Üldjuhul on aga aksioomi 3° kehtivuse tõestamine keerulisem. Selle juurde järgnevalt asumeegi.

Lemma (Hölder'i võrratus). Kui $a_\kappa, b_\kappa \in \mathbb{K}$, $\kappa = 1, \dots, n$, ja $1 < p < \infty$ ning arv q on määratud võrdusega $1/p + 1/q = 1$, siis kehtib võrratus

$$\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa b_\kappa| \leq \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{\kappa=1}^n |b_\kappa|^q \right)^{1/q}.$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = t^{1/p} - \frac{t}{p}$, $t > 0$.

Siis $\varphi'(t) = \frac{1}{p} t^{-1/p} - 1$ ning $\varphi'(t) > 0$, kui $0 < t < 1$, ja $\varphi'(t) < 0$, kui $t > 1$. Seepärast $\varphi(t) \leq \varphi(1)$, $t > 0$, mis annab võrratuse

$$t^{1/p} - \frac{t}{p} \leq 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

ehk

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + 1/q.$$

Kui nüüd $a, b > 0$, siis $t = a^p/b^q$ korral saame võrratuse

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (1)$$

mis kehtib ka siis, kui $a=0$ või $b=0$.

Märgime, et Hölderi võrratus on ilmne kui $a_\kappa = 0, \kappa = 1, \dots, n$, või $b_\kappa = 0, \kappa = 1, \dots, n$. Seepärast vaatleme vastupidist olukorda ning võtame võrratuses (1)

$$a = \frac{|a_\kappa|}{\left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa|^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{|b_\kappa|}{\left(\sum_{\kappa=1}^n |b_\kappa|^q\right)^{1/q}}.$$

Indeksi κ väärtustel $1, \dots, n$ saadud võrratused summeerime, mille tulemusena

$$\frac{\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa b_\kappa|}{\left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\kappa=1}^n |b_\kappa|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lemma on tõestatud.

Lemma (Minkowski võrratus). Kui $a_\kappa, b_\kappa \in \mathbb{K}, \kappa = 1, \dots, n$, ja $1 \leq p < \infty$, siis kehtib võrratus

$$\left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa + b_\kappa|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\kappa=1}^n |b_\kappa|^p\right)^{1/p}.$$

Tõestus. Kui $p = 1$, siis on Minkowski võrratus vahetu järeldus absoluutväärtuse või mooduli tuntud omadustest.

Seepärast olgu $p > 1$. Lähtudes võrratustest

$$\begin{aligned} |a_\kappa + b_\kappa|^p &= |a_\kappa + b_\kappa| |a_\kappa + b_\kappa|^{p-1} \leq \\ &\leq |a_\kappa| |a_\kappa + b_\kappa|^{p-1} + |b_\kappa| |a_\kappa + b_\kappa|^{p-1}, \quad \kappa = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

saame nende liitmisel ja Hölderi võrratuse abil

$$\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa + b_\kappa|^p \leq \sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa| |a_\kappa + b_\kappa|^{p-1} + \sum_{\kappa=1}^n |b_\kappa| |a_\kappa + b_\kappa|^{p-1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa} + b_{\kappa}|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \\ + \left(\sum_{\kappa=1}^n |b_{\kappa}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa} + b_{\kappa}|^{q(p-1)} \right)^{1/q}.$$

Kui $\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa} + b_{\kappa}|^p = 0$, siis Minkowski võrratus muidugi kehtib. Kui aga $\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa} + b_{\kappa}|^p > 0$, siis arvestame seost $q(p-1) = p$ ning peale viimase võrratuse jagamist avaldisega

$$\left(\sum_{\kappa=1}^n |a_{\kappa} + b_{\kappa}|^p \right)^{1/q}$$

jõuame Minkowski võrratuseni.

Lemma on tõestatud.

Pöördume nüüd tagasi kolmnurga võrratuse juurde ruumis l_p^n . Pema tõestamiseks tarvitseb võtta Minkowski võrratuses $a_{\kappa} = \xi_{\kappa} - \zeta_{\kappa}$ ja $b_{\kappa} = \zeta_{\kappa} - \eta_{\kappa}$, sest siis $a_{\kappa} + b_{\kappa} = \xi_{\kappa} - \eta_{\kappa}$.

Ülesanne. Näidata, et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{\kappa=1}^n |\xi_{\kappa} - \eta_{\kappa}|^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq \kappa \leq n} |\xi_{\kappa} - \eta_{\kappa}|.$$

Ülesandes esitatud tulemuse põhjal on kaugus ruumis m_n ruumide l_p^n kauguste piirjuht, seepärast on õigustatud mõnikord kasutatav tähistus $m_n = l_{\infty}^n$.

Antud punktis vaadeldud ruumides elementide jada $x_m = (\xi_1^m, \dots, \xi_n^m)$, $m = 1, 2, \dots$, koondumine elemendiks $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ (s.t. $\rho(x_m, x) \rightarrow 0$) on samaväärne sellega, et $\xi_{\kappa}^m \rightarrow \xi_{\kappa}$, $\kappa = 1, \dots, n$. Öeldakse ka, et koondumine on samaväärne komponentide ehk koordinaatide koondumisega. See väide on lihtsalt järeldatav võrratustest

$$|\xi_{\kappa}^m - \xi_{\kappa}| \leq \max_{1 \leq \kappa \leq n} |\xi_{\kappa}^m - \xi_{\kappa}| \leq \left(\sum_{\kappa=1}^n |\xi_{\kappa}^m - \xi_{\kappa}|^p \right)^{1/p}.$$

4. Käesolevas punktis vaatleme nn. jadaruumi, kus meetrilise ruumi X elementideks on arvjadad $(\xi_{\kappa}) = (\xi_{\kappa})_{\kappa=1}^{\infty}$, $\xi_{\kappa} \in \mathbb{K}$. Tähistame ruumi X elemente $x = (\xi_{\kappa})$, $y = (\eta_{\kappa})$,

$z = (\xi_\kappa)$. Võrdus $x = y$ tähendab seda, et $\xi_\kappa = \eta_\kappa$ iga $\kappa = 1, 2, \dots$ korral.

1) Tõkestatud jadade ruum m on hulgana kirjeldatav järgmiselt:

$$m = \{ (\xi_\kappa) : \xi_\kappa \in \mathbb{K}, \sup |\xi_\kappa| < \infty \},$$

s.t. $x = (\xi_\kappa) \in m$ parajasti siis, kui leidub arv M , mis võib sõltuda elemendist x , nii, et $|\xi_\kappa| \leq M, \kappa = 1, 2, \dots$. Ruumis m defineeritakse kaugus võrdusega

$$\rho(x, y) = \sup |\xi_\kappa - \eta_\kappa|.$$

Sellise definitsiooniga seatakse elemendipaarile x, y vastavusse reaalarv, sest kui $x, y \in m$, siis leiduvad arvud M ja N nii, et $|\xi_\kappa| \leq M$ ja $|\eta_\kappa| \leq N, \kappa = 1, 2, \dots$, ning $|\xi_\kappa - \eta_\kappa| \leq |\xi_\kappa| + |\eta_\kappa| \leq M + N$, seega $\sup |\xi_\kappa - \eta_\kappa| \leq M + N$.

Kauguse aksioomide kehtivuse kontroll ruumis m on põhimõtteliselt samasugune nagu ruumis m_n .

Kui $x_n = (\xi_\kappa^n)_{\kappa=1}^\infty, n = 1, 2, \dots$, ja $x = (\xi_\kappa)$, siis koondumine $x_n \rightarrow x$ on samaväärne sellega, et $\sup |\xi_\kappa^n - \xi_\kappa| \rightarrow 0$, mis omakorda on väljendatav järgmiselt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, |\xi_\kappa^n - \xi_\kappa| \leq \varepsilon, n > N, \kappa = 1, 2, \dots$$

Niisiis, koondumine ruumis m tähendab koordinaatide ühtlast koondumist.

Märgime, et kasutatakse ka tähistust $m = l_\infty$.

2) Koonduvate jadade ruum c on hulk

$$c = \{ (\xi_\kappa) : \xi_\kappa \in \mathbb{K}, \exists \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \xi_\kappa \in \mathbb{K} \}.$$

Koonduv jada on tõkestatud, s.t. $c \subset m$. Kaugus ruumis c defineeritakse nagu ruumis m . Seega on ruum c ruumi m alamruum.

3) Nulliks koonduvate jadade ruum c_0 on hulk

$$c_0 = \{ (\xi_\kappa) : \xi_\kappa \in \mathbb{K}, \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \xi_\kappa = 0 \}.$$

Kaugus ruumis C_0 defineeritakse nagu ruumis m . On selge, et $C_0 \subset C \subset m$, kusjuures on tegemist üksteise alamruumidega.

4) Olgu $1 \leq p < \infty$. Ruum l_p on hulk

$$l_p = \left\{ (\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\},$$

milles kaugus defineeritakse võrdusega

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}.$$

Kauguse definitsioonis esineva rea koonduvuse põhjendamise Minkowski võrratuse abil. Kuna

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{1/p} < \infty, \end{aligned}$$

siis osasummade jada $\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p$, $n = 1, 2, \dots$, on tõkestatud ning rida koondub.

Kauguse aksioomide 1° ja 2° kehtivus on näha vahetult. Kolmnurga võrratuse põhjendamiseks saame, kasutades kolmnurga võrratust ruumis l_p^n ,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \zeta_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |\zeta_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \zeta_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

misjärel võtame vasakul piirväärtuse protsessis $n \rightarrow \infty$

Märgime tõestuseta, et kui $x_n = (\xi_k)_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$, ja $x = (\xi_k)$, siis koondumine $x_n \xrightarrow{n} x$ ruumis l_p on samaväärne järgmiste tingimuste samaaegse täidetusega:

- 1) $\xi_k^n \xrightarrow{n} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots$ (koordinaatide koondumine),
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists K, \sum_{k=K+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$ (read

$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ koonduvad ühtlaselt n suhtes).

Kehtivad hulgateoreetilised sisalduvused $l_1 \subset l_p \subset l_q \subset$

$\subset C_0$, kus $1 \leq p \leq q < \infty$, seejuures siin ei ole tegemist alamruumidega meetriliste ruumide mõttes. Samuti nagu eespool ruumide l_p^n ja m_n kauguste vahekorra kohta, saab ka siin tõestada, et $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} = \sup_k |\xi_k|$, $(\xi_k) \in \bigcup_{p \geq 1} l_p$, seepärast on õigustatud mõnikord kasutatav tähistus $C_0 = l_\infty$. Ruumide l_p hulgas märgime tähtsate erijuhtudena ruume l_1 ja l_2 .

5) Kõigi arvjadade ruumis $S = \{(\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ defineeritakse kaugus

$$\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Kuna $\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} < 1$, siis kauguse definitsioonis esinev rida koondub. Paneme tähele, et iga elemendipaari x, y korral $\varrho(x, y) < 1$ ruumis S .

Identsuse ja sümmeetria aksioomide kehtivuses veendumine ei valmista raskusi. Peatume kolmnurga võrratusel. Vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$. Siis $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, mistõttu funktsioon φ on kasvav. Seepärast mistahes $a, b \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} &= \frac{|\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k|} \leq \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1+|\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1+|\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

Saadud võrratusi korrutame teguriga $\frac{1}{2^k}$ ja summeerime $k = 1, 2, \dots$ järgi ning tulemuaeka saamegi kolmnurga võrratuse ruumia S .

Lause. Koondumine $x_n \rightarrow x$ ruumis S on samaväärne koordinaatide koondumisega, s.t. $\xi_k^n \rightarrow \xi_k, k=1, 2, \dots$

Tõestus. Kui $x_n \rightarrow x$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} \rightarrow 0$, millest järeldub, et $\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} \rightarrow 0, k=1, 2, \dots$, ehk $|\xi_k^n - \xi_k| \rightarrow 0, k=1, 2, \dots$

Eeldame vastupidi, et $\xi_k^n \rightarrow \xi_k, k=1, 2, \dots$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime m nii suure, et $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Seejärel valime N nii, et kui $n > N$, siis $|\xi_k^n - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}, k=1, \dots, m$ (iga k jaoks leidub oma N , võtame neist suurima). Kui nüüd $n > N$, siis

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lause on tõestatud.

5. Selles punktis vaatleme funktsioonide ruume ehk nn. funktsionaalruume.

1) Ruum $M[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ tõkestatud funktsioonide hulk kaugusega

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Nii nagu ruumi m juures saab ka siin näidata, et sellel definitsiooniga seatakse funktsioonipaarile x, y vastavusse reaalarv. Kauguse eksioomide kontroll on põhimõtteliselt sama, mis ruumis m .

Koondumine $x_n \rightarrow x$ ruumis $M[a, b]$ on funktsioonide jada x_n ühtlane koondumine funktsiooniks x lõigul $[a, b]$, s.t. igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et kui $n > N$, siis

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

2) Ruum $C[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk, kus kaugus defineeritakse nagu ruumis $M[a, b]$. Selline kauguse definitsioon on korrektne, sest teatavasti on lõigus pidev funktsioon ka seal tõkestatud. Järelikult $C[a, b] \subset M[a, b]$, kusjuures ruum $C[a, b]$ on ruumi $M[a, b]$ alamruum. Kuna lõigus pidev funktsioon saavutab supreemumi, siis võib kirjutada $x, y \in C[a, b]$ korral

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

Märgime, et ruum $C[a, b]$ on üks tähtsamaid rakendustes kasutatavaid ruume.

3) Ruum $C^n[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk, s.t. $C^n[a, b] = \{x : x^{(n)} \in C[a, b]\}$, kaugusega

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|,$$

kus loeme $x^{(0)}(t) = x(t)$. Ruum $C^n[a, b]$ on küll osahulk ruumis $C[a, b]$, aga mitte alamruum, sest tema meetrika erineb ruumi $C[a, b]$ meetrikast.

4) Olgu $1 \leq p < \infty$. Ruum $L_p(a, b)$ on kõigi funktsioonide $x = x(t)$ hulk, mille korral eksisteerib lõplik Lebesgue'i integraal

$$\int_a^b |x(t)|^p dt,$$

kaugusega

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Võrdus $x = y$ tähendab ruumis $L_p(a, b)$ seda, et $x(t) = y(t)$ peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$.

Identsuse aksioom on siin täidetud just seetõttu, et me samastame peaaegu kõikjal ühtivad funktsioonid (seega $L_p(a, b)$ elementideks on peaaegu kõikjal ühtivate funktsioonide klassid). Kolmnurga võrratuse tõestamiseks ruumis

$L_p(a, b)$ lähtume võrratusest (1) ja ruumi l_p juhuga analoogiliste ideede abil jõuame Hölder'i võrratuse integraalkujuni

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q},$$

millest omakorda saame Minkowski võrratuse integraalkuju

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Sellest järeldub aga vahetult kolmnurga võrratus ruumi $L_p(a, b)$ kauguse jaoks. Samuti tuleneb viimasest võrratusest kauguse definitsiooni korrektsus, s.t. $\varrho(x, y) \in \mathbb{R}$ iga $x, y \in L_p(a, b)$ korral.

Tähtsate erijuhtudena märgime integreeruvate funktsioonide ruumi $L_1(a, b)$, mida tähistatakse ka $L(a, b)$, ja integreeruva ruuduga funktsioonide ruumi $L_2(a, b)$. Koondumist ruumis $L_1(a, b)$ nimetatakse keskmiseks koondumiseks (s.t. $\int_a^b |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0$), koondumist ruumis $L_2(a, b)$ aga ruutkeskmiseks koondumiseks ($\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^2 dt \rightarrow 0$).

Järgmise näite tarvis meenutame, et lõigul $[a, b]$ määratud funktsiooni x nimetatakse absoluutselt pidevaks, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et mistahes omavahel mittelõikuvate vahemike süsteemi $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, puhul tingimusest $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ järeldub, et $\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$. Absoluutselt pidev funktsioon x on diferentseeruv peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ ning tema tuletis $x' \in L(a, b)$.

5) Olgu $1 \leq p < \infty$ ja $n \in \mathbb{N}$. Ruum $W_p^n(a, b)$ on kõigi funktsioonide x hulk, mille korral $x^{(n-1)}$ on absoluutselt pidev lõigus $[a, b]$ ja $x^{(n)} \in L_p(a, b)$, kaugusega

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{k=0}^n \int_a^b |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Ruumi $W_p^n(a, b)$ nimetatakse Sobolevi ruumiks.

Identsuse aksiomi kontrollimiseks paneme tähele, et kui

$g(x, y) = 0$, siis võrdus $x = y$ järeldub funktsiooni $x - y$ pidevuse tõttu juba sellest, et $\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt = 0$

Kolmnurga võrratuse põhjendamiseks ruumis $W_p^n(a, b)$ kasutame kolmnurga võrratust ruumis $L_p(a, b)$ ning Minkowski võrratust, saades

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left(\sum_{k=0}^n \int_a^b |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n \left(\left(\int_a^b |x^{(k)}(t) - z^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |z^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \right)^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n \int_a^b |x^{(k)}(t) - z^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^n \int_a^b |z^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} = \\ &= g(x, z) + g(z, y). \end{aligned}$$

Lõpetuseks märgime, et vaadeldud kolme näidete rühma ruumide puhul kasutatakse mõisteid "reaalne ruum" ja "kompleksne ruum". Näiteks räägitakse reaalsest ruumist $C[a, b]$, kui vaadeldakse reaalarvuliste väärtustega funktsioone, ning komplekssest ruumist $C[a, b]$, kui vaadeldakse kompleksarvuliste väärtustega funktsioone.

§ 4. Hulgad meetrilistes ruumides

1. Kerad. Lähtised ja kinnised hulgad. Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Olgu $a \in X$ ja $r > 0$. Hulka

$$B(a, r) = \{x \in X : g(x, a) < r\}$$

nimetatakse lähtiseks keraks ning hulka

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X : g(x, a) \leq r\}$$

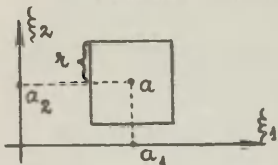
kinniseks keraks. Elementi a nimetatakse kera keskpunktiks ja arvu r raadiuseks.

Näited. 1. Kui $X = \mathbb{R} = m_1 = \mathbb{R}^1$ (viimased kaks ruumi reaalsetes), siis $B(a, r) = \{x: |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$ ja $\bar{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

2. Kui $X = \mathbb{C} = m_1 = \mathbb{C}^1$ (viimased kaks ruumi komplekssetes), siis $B(a, r) = \{x \in \mathbb{C}: |x - a| < r\}$ ja $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{C}: |x - a| \leq r\}$



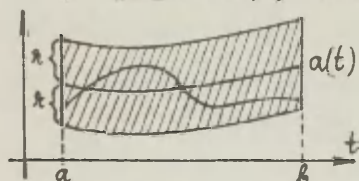
3. Reaalsetes ruumis m_2 , kui $a = (a_1, a_2)$, siis $B(a, r) = \{(\xi_1, \xi_2): \max\{|\xi_1 - a_1|, |\xi_2 - a_2|\} < r\}$
 $= \{(\xi_1, \xi_2): |\xi_1 - a_1| < r, |\xi_2 - a_2| < r\}$



Ülesanne. Kirjeldada kerased (teha joonised) reaalsetes ruumides $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^p, p > 2$.

4. Ruumis $C[a, b]$ koosneb kera $\bar{B}(a, r) =$

$= \{x \in C[a, b]: \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - a(t)| \leq r\}$
 lõigul $[a, b]$ määratud pidevatest funktsioonidest,



mille graafikud paiknevad viirutatud ribas.

Ülesanne. Kirjeldada kerased $B(a, 1)$ ja $\bar{B}(a, 1)$ diskreetsetes meetrilises ruumis.

Vahetult definitsioonist järeldub

Lause. Kui $r_1 \leq r_2$, siis $B(a, r_1) \subset B(a, r_2)$ ja $\bar{B}(a, r_1) \subset \bar{B}(a, r_2)$.

Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist, milles leiduvad kerad $B(a_1, r_1)$ ja $B(a_2, r_2)$ nii, et $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$, aga $r_1 > r_2$.

Definitsioon. Punkti $a \in X$ ümbruseks nimetatakse suvalist hulka $U \subset X$, mille puhul leidub lahine kera $B(a, r)$ (teisiti öeldes, leidub $r > 0$) nii, et $B(a, r) \subset U$.

Punkti a ümbrusteks on näiteks kõik lahtised kerad $B(a, r)$, $r > 0$, aga ka kinnised kerad $\bar{B}(a, r)$, sest $\bar{B}(a, r) \supset B(a, r)$.

Definitsioon. Hulka $G \subset X$ nimetatakse lahtiseks, kui hulga G igale punktile leidub teda ümbritsev lahtine kera, mis sisaldub hulgas G .

Vahetult definitsioonist tuleneb

Lause. Hulk G on lahtine parajasti siis, kui hulga G igal punktil leidub ümbrus, mis sisaldub hulgas G .

Lause. Lahtine kera on lahtine hulk.

Tõestus. Vaatleme kera $B(a, r)$ suvalist punkti b , siis $\rho(b, a) < r$. Olgu $r_1 = r - \rho(b, a)$. Kui $x \in B(b, r_1)$, s.t. $\rho(x, b) < r_1$, siis

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < r_1 + \rho(b, a) = r,$$

seega $x \in B(a, r)$, millega oleme näidanud, et $B(b, r_1) \subset B(a, r)$.

Definitsioon. Hulga A punkti a nimetatakse hulga A sisepunktiks, kui punktil a leidub ümbrus, mis siseldub hulgas A .

Järeldus. Hulk on lahtine parajasti siis, kui kõik tema punktid on sisepunktid.

Meitame järnevas lahtiste hulkade põhilisi omadusi.

Lause 1. Hulgad \emptyset ja X on lahtised.

Põhjenduseks märgime, et kui mingi punkt nendes hulka-des siseldub, siis ta on sisepunkt.

Lause 2. Mistahes hulga lahtiste hulkade ühend on lahtine.

Tõestus. Olgu hulgad G_α lahtised. Velime vabalt $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$. Siis leidub selline indeks α_0 , et $x \in G_{\alpha_0}$. Hulk G_{α_0} on lahtine, mistõttu leidub $B(x, r) \subset G_{\alpha_0}$. Siis aga $B(x, r) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$, millega oleme näidanud, et x on hulga $\bigcup_\alpha G_\alpha$ sisepunkt. Seega $\bigcup_\alpha G_\alpha$ on lahtine.

Lause 3. Lõpliku hulga lahtiste hulkade ühisosa on lahtine.

Tõestus. Olgu hulgad $G_i, i=1, \dots, n$, lahtised. Valime vabalt $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$, siis $x \in G_i, i=1, \dots, n$. Hulkade G_i lahtisuse tõttu leiduvad kerad $B(x, r_i) \subset G_i$. Olgu $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$; on selge, et $r > 0$. Seejuures $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset G_i, i=1, \dots, n$, mistõttu $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$. Hulga $\bigcap_{i=1}^n G_i$ lahtisus on näidatud.

Üldiselt ei saa väita, et lõpmatu hulga lahtiste hulkade ühisosa oleks lahtine. Näiteks ruumis \mathbb{R}^1 , kus vahemikud on lahtised hulgad, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$, aga hulk $\{0\}$ ei ole lahtine, sest $B(0, r) \not\subset \{0\}$ mitte ühegi arvu $r > 0$ korral.

Ülesanne. Tõestada leuset 2 kasutades, et diskreetse meetrilises ruumis on kõik hulgad lahtised.

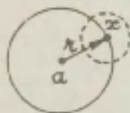
Definitsioon. Ruumi X punkti nimetatakse hulga $A \subset X$ rajapunktiks, kui tema iga ümbrus sisaldab nii hulga A punkte kui ka tema täiendhulga $X \setminus A$ punkte.

Järeldus 1. Hulkade A ja $X \setminus A$ rajapunktid ühtivad.

Järeldus 2. Kui $a \in A$, siis a on kas hulga A sisepunkt või tema rajapunkt.

Tõestuseks märgime, et kui $a \in A$ ei ole hulga A sisepunkt, siis punkti a iga ümbrus sisaldab $X \setminus A$ punkte.

Näide. Kui $X = \mathbb{R}^2$, siis kera $B(a, r)$ rajapunktid on sellised punktid $x \in \mathbb{R}^2$, kus $g(x, a) = r$. Igas sellisele punktile x valitud ümbruses on kera $B(x, \epsilon)$, mis sisaldab hulkade $B(a, r)$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus B(a, r)$ punkte.



Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist, tema kerast $B(a, r)$ ja punktist x nii, et $g(x, a) = r$, kuid x ei ole kera $B(a, r)$ rajapunkt.

Definitsioon. Hulka nimetatakse kinniseks, kui ta sisaldab kõik oma rajapunktid.

Teoreem. Hulk on kinnine parajasti siis, kui tema täiend on lahtine.

Tõestus. 1) Olgu hulk A kinnine. Vaatleme suvalist punkti $x \in X \setminus A$. See punkt saab olla hulgale $X \setminus A$ sisevõi rajapunkt. Oletame, et ta on rajapunkt. Siis on ta rajapunkt ka hulgale A ja A kinnisuse tõttu $x \in A$. Vastuolu sisalduvusega $x \in X \setminus A$ ütleb, et x on hulgale $X \setminus A$ sisepunkt. Seega $X \setminus A$ on lahtine.

2) Olgu hulk $X \setminus A$ lahtine. Vaatleme hulga A rajapunkti x . Kui oletada, et $x \notin A$, siis $x \in X \setminus A$ ja $X \setminus A$ lahtisuse tõttu leidub $B(x, r) \subset X \setminus A$, s.t. x ei ole rajapunkt hulgale A . Saadud vastuolu tõttu $x \in A$, millega on näidatud hulga A kinnisus.

Teoreem on tõestatud.

Kinniste hulkade põhiomadusi väljendavad järgmised laused.

Lause 4. Hulgad \emptyset ja X on kinnised.

Lause 5. Mistahes hulga kinniste hulkade ühisosa on kinnine.

Lause 6. Lõpliku hulga kinniste hulkade ühend on kinnine.

Laused 4-6 järelduvad lausetest 1-3, äsjatõestatud teoreemist ja hulgateoreetilistest võrdustest

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha}),$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha}).$$

Leidub hulki, mis ei ole ei lahtised ega kinnised, näiteks poollõik $(0, 1]$ ruumis \mathbb{R} .

Enamasti kasutatakse järgmist jerdade keeles väljendavat hulga kinnisuse tunnust.

Teoreem. Hulk meetrilises ruumis on kinnine parajasti siis, kui iga tema elementidest moodustatud koonduva jada piiirelement kuulub sellesse hulka.

Tõestus. 1) Olgu hulk A kinnine. Olgu $x_n \rightarrow x, x_n \in A$. Kui oletada, et $x \in X \setminus A$, siis hulga $X \setminus A$ lahtisuse tõttu leidub kera $B(x, r) \subset X \setminus A$. Teiselt poolt, koondumise $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$ tõttu leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\varrho(x_n, x) < r$ ehk $x_n \in B(x, r) \subset X \setminus A$, mis on vastuolus eelsalduvusega $x_n \in A$. Seepärast $x \in A$.

2) Olgu x hulga A rajapunkt. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $B(x, \frac{1}{n})$ sisaldab A punkte. Valime $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Sellega oleme saanud, et $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, s.t. $x_n \rightarrow x$. Kuna samal ajal $x_n \in A$, siis $x \in A$. Järelikult on näisatud, et A on kinnine.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Kinnine kera on kinnine hulk.

Tõestus. Olgu $x_n \rightarrow x$, kusjuures $x_n \in \bar{B}(a, r)$, s.t. $\varrho(x_n, a) \leq r$. Kauguse pidevuse tõttu $\varrho(x_n, a) \rightarrow \varrho(x, a)$, seega $\varrho(x, a) \leq r$, mis ütleb, et $x \in \bar{B}(a, r)$.

Analoogiliselt tõestatakse

Järeldus 2. Sfäär $S(a, r) = \{x \in X : \varrho(x, a) = r\}$ on kinnine hulk.

Ülesanne. Tõestada, et ühepunktiline hulk on kinnine ning järeldada sellest, et mistahes lõplik hulk on kinnine.

2. Hulga sisemus, raja ja sulund. Olgu A meetrilise ruumi X osahulk.

Definitsioon. Hulga A sisemuseks nimetatakse hulga A sisepunktide hulka, sisemust tähistatakse A° (ka $\text{int } A$).

Definitsioon. Hulga A rajeks nimetatakse hulga A rajapunktide hulka, raja tähistatakse ∂A

Definitsioon. Hulga A sulundiks nimetatakse hulga A ja tema raja ∂A ühendit, sulundit tähistatakse \bar{A} .

Kuna hulga punktid on kas sisepunktid või rajapunktid, siis hulga sulund on ka hulga sisemuse ja raja ühend.

Ülesanne. Tõestada, et kui $A \subset X$, siis $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist ja tema kerast $B(a, r)$ nii, et $\overline{B(a, r)} \neq \bar{B}(a, r)$.

Teoreem. Hulk on kinnine parajasti siis, kui ta ühtib oma sulundiga.

Tõestuseks märgime, et hulga A kinnisus on samaväärne sisalduvusega $\partial A \subset A$, mis aga võrduse $\bar{A} = A \cup \partial A$ tõttu on samaväärne sellega, et $A = \bar{A}$.

Hulga sulundit meetrilises ruumis kirjeldab järgmine

Teoreem. Kui $A \subset X$ ja $x \in X$, siis järgmised tingimused on samaväärsed:

- 1) $x \in \bar{A}$;
- 2) $\exists y_n \in A, y_n \rightarrow x$;
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A, \rho(x, y) < \varepsilon$.

Tõestus. 1) \Rightarrow 2). Olgu $x \in \bar{A} = A \cup \partial A$. Kui $x \in A$, siis võib võtta $y_n = x, n \in \mathbb{N}$. Kui aga $x \in \partial A$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $y_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Kuna $\rho(y_n, x) < \frac{1}{n}$, siis $y_n \rightarrow x$.

2) \Rightarrow 3). Kuna $y_n \rightarrow x, y_n \in A$, siis suvalisele arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et $\rho(y_N, x) < \varepsilon$. Ning elemendiks y sobib y_N .

3) \Rightarrow 1). Kui oletada, et $x \notin \bar{A}$, siis $x \in X \setminus A$ ja $x \notin \partial A$ ning seepärast leidub $\varepsilon > 0$ nii, et kera $B(x, \varepsilon)$ ei sisalda hulga A elemente, mis on aga vastuolus tingimusega 3).

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Hulga sulund on kinnine hulk.

Tõestus. Kasutame hulga kinnisuse tunnust jdsde keeles. Olgu $x_n \in \bar{A}$ ja $x_n \rightarrow x$. Näitame, et $x \in \bar{A}$. Tingimuse 3) kohaselt leiduvad elemendid $y_n \in A$ nii, et $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.

Kuna

$$\varrho(y_n, x) \leq \varrho(y_n, x_n) + \varrho(x_n, x) \rightarrow 0,$$

siis $y_n \rightarrow x$ ning implikatsiooni 2) \Rightarrow 1) tõttu $x \in \bar{A}$.

Kuna hulga sulund on kinnine ja kinnine hulk ühtib oma sulundiga, siis kehtib

$$\text{Järeldus 2. } \overline{\bar{A}} = \bar{A}.$$

Samaväärsusele 1) \Leftrightarrow 2) toetudes on ilmne

Järeldus 3 (sulundi monotonsus). Olgu $A, B \subset X$. Kui $A \subset B$, siis $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Järeldus 4 (sulundi aditiivsus). Olgu $A, B \subset X$, siis $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Tõestus. Kuna $A, B \subset A \cup B$, siis $\bar{A}, \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Järelikult

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Teiselt poolt, $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, mistõttu $\overline{A \cup B} \subset \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$. Kuid $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$, sest kinniste hulkade \bar{A} ja \bar{B} ühend on kinnine. Seega ka

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Ülesanne. Tõestada võrdust $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$ kasutades, et

- 1) A° on lahtine;
- 2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;
- 3) kui $A \subset B$, siis $A^\circ \subset B^\circ$;
- 4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

§ 5. Separaablid meetrilised ruumid

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Öeldakse, et hulk $A \subset X$ on kõikjal tihe (ehk kõikjal tihe ruumis X), kui $\bar{A} = X$.

Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemist, mis kirjeldab hulga sulundit, järeldub vahetult

Lause. Kui $A \subset X$, siis järgmised tingimused on samaväärsed:

- 1) A on kõikjal tihe;
- 2) $\forall x \in X \exists y_n \in A, y_n \rightarrow x$;
- 3) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists y \in A, \rho(x, y) < \varepsilon$.

Definitsioon. Meetrilist ruumi nimetatakse separaabliliks, kui temas leidub kõikjal tihe ülimalt loenduv hulk.

Separaablid ruumid on olulised matemaatika rakenduslikes harudes.

Järgnevas peatume konkreetsete ruumide separaablusel.

Ruumid m_n ja l_p^n on separaablid, kusjuures kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks A võib võtta kõigi ratsionaalsete komponentidega vektorite hulga. Täpsemalt, kui on tegemist reaalsete ruumidega, siis $A = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) : \eta_k \in \mathbb{Q}\}$, kompleksel juhul aga $A = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) : \eta_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}\}$. Nende hulkade A kõikjal tihedus ruumides m_n ja l_p^n üldistab matemaatilise analüüsi kursusest tuntud võrdust $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Jadaruumidest, mida vaatlesime, pole separaabel üksnes tõkestatud jadade ruum m .

Näitame, et ruum l_p on separaabel. Kõigepealt märgime, et hulgad $A_n = \{(\eta_1, \dots, \eta_n, 0, \dots) : \eta_k \in \mathbb{Q} \text{ (või } \eta_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q})\}$ on loenduvad. Seega ka hulk

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on loenduv. Valime vabalt $x = (\xi_k) \in l_p$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu arv n selline, et $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Tä-

histame $x_n = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$. Siis $\rho(x, x_n) =$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Seejärel valime } y = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, \dots) \in$$

$$A_n \subset A \text{ nii, et } \rho(x_n, y) = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < \varepsilon$, siis A on kõikjal tihedus ruumis L_p .

Sama mõttekäiguga saab tõestada, et ka ruumid C_0, C ja S on separaablid.

Tõestame, et ruum m ei ole separaabel. Oletame vastuväiteliselt, et m on separaabel. Olgu $A = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ temas kõikjal tihedus hulk. Valime arvu $\varepsilon > 0$ nii, et $2\varepsilon \leq 1$. Siis iga element $x \in m$ satub vähemalt ühte kerasse $B(y_n, \varepsilon)$, s.t. $m = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n, \varepsilon)$. Vaatleme nüüd ruumi m elemente $x = (\xi_k)$, kus $\xi_k = 0$ või $\xi_k = 1$. Niisuguseid omavahel erinevaid elemente on mitteloenduv hulk. Seepärast satub vähemalt ühte kerasse $B(y_{n_0}, \varepsilon)$ kaks elementi x_1, x_2 sellest hulgast. Ühelt poolt $\varrho(x_1, x_2) = 1$, teiselt poolt $\varrho(x_1, x_2) \leq \varrho(x_1, y_{n_0}) + \varrho(y_{n_0}, x_2) < 2\varepsilon \leq 1$, millega oleme jõudnud vastuoluni.

Märgime tõestuseta, et funktsionaalruumidest, mida vastlesime, pole separaabel ainult ruum $M[a, b]$. Ülejäänud ruumid $C[a, b], C^m[a, b], L_p(a, b)$ ja $W_p^m(a, b), 1 \leq p < \infty$, on separaablid. Näiteks saab Weierstrassi lähendusteoreemile toetudes üsna lihtsalt tõestada, et ruumis $C[a, b]$ on kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk $\{\xi_0 + \xi_1 t + \dots + \xi_n t^n : n = 0, 1, \dots, \xi_k \in \mathbb{Q}\}$.

Ülesanne. Näidata, et diskreetne meetriline ruum on separaabel parajasti siis, kui tema elementide hulk on ülimalt loenduv.

Ülesanne. Tõestada, et separaabli ruumi alamruum on separaabel.

§ 6. Täielikud meetrilised ruumid

Täielikkus on meetrilise ruumi üks olulisemaid omadusi. Paljud funktsionaalanalüüsi fundamentaalsed tulemused kehti-

vad just täielikes ruumides.

Definitsioon. Meetrilise ruumi elementide jada x_n nimetatakse Cauchy jadaks ehk fundamentaaljadaks, kui $\varrho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ protsessis $n, m \rightarrow \infty$, s.t. iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et kui $n, m > N$, siis $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jada fundamentaalsust saab väljendada ka järgmiselt: igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\varrho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ iga $p = 1, 2, \dots$ korral.

Arvjada x_n puhul tähendab fundamentaalsus seda, et $|x_n - x_m| \rightarrow 0$, kui $n, m \rightarrow \infty$. Seega arvjadade korral Cauchy jada on just niisugune jada, mis rahuldab Cauchy kriteeriumi, s.t. koonduv jada. Üldisel juhul kehtib

Lause. Iga koonduv jada on Cauchy jada.

Tõestus. Olgu $x_n \rightarrow x$, s.t. $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$. Kuna $\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) \rightarrow 0$, kui $n, m \rightarrow \infty$, siis ka $\varrho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ protsessis $n, m \rightarrow \infty$.

Definitsioon. Meetrilist ruumi nimetatakse täielikuks, kui temas iga Cauchy jada koondub.

Kuna reaalarvude ruumis \mathbb{R} iga Cauchy jada koondub, siis on \mathbb{R} täielik.

Vaatleme ratsionaalarvude ruumi \mathbb{Q} tavalise kaugusega (s.t. vaatleme ruumi \mathbb{Q} kui ruumi \mathbb{R} alamruumi). Valime $x_n \in \mathbb{Q}$ nii, et $x_n \rightarrow \pi$ (s.t. $|x_n - \pi| \rightarrow 0$). Siis x_n on Cauchy jada (ta koondub ruumis \mathbb{R}), aga ta ei koondub ruumis \mathbb{Q} , sest $\pi \notin \mathbb{Q}$. Seega ei ole ruum \mathbb{Q} täielik.

Võib öelda, et jada fundamentaalsus on jada sisemine omadus, jada koonduvus on aga seotud tingimata mingi kindla ruumiga.

Ülesanne. Näidata, et kui fundamentaaljada x_n mingi osajada koondub elemendiks x , siis ka jada x_n koondub samaks elemendiks x .

Teoreem. Meetrilise ruumi täielik alamruum on kinnine. Täieliku meetrilise ruumi kinnine alamruum on täielik.

Tõestus. 1) Olgu A meetrilise ruumi täielik alamruum. Vaatleme jada $x_n \in A, x_n \rightarrow x$. Kuna x_n on Cauchy jada ruumis A , siis ta koondub ruumis A . Seega $x \in A$.

2) Olgu X täielik meetriline ruum ja A tema kinnine alamruum. Vaatleme Cauchy jada $x_n \in A$. Jada x_n koondub ruumis X . Kuna A on kinnine, siis jada x_n piirelement kuulub alamruumi A . Seega koondub x_n ruumis A . Niisiis, ruum A on täielik.

Teoreem on tõestatud.

Eespool (§ 3) vaadeldud konkreetsete ruumide on kõik täielikud. Tõestame järgnevas nendest mõnede täielikkuse.

Vaatleme ruume m_n ja l_p^n . Olgu $x_m = (\xi_1^m, \dots, \xi_n^m)$, $m=1, 2, \dots$, Cauchy jada. Nendes ruumides $|\xi_i^m - \xi_i^k| \leq \rho(x_m, x_k) \rightarrow 0$, kui $m, k \rightarrow \infty$. Seega koordinaatide jadad $(\xi_i^m)_{m=1}^{\infty}, i=1, \dots, n$, on Cauchy arvjadad, mis koonduvad, s.t. $\xi_i^m \rightarrow \xi_i$. Ruumides m_n ja l_p^n on aga koondumine samaväärne koordinaatide koondumisega, mistõttu

$$x_m = (\xi_1^m, \dots, \xi_n^m) \xrightarrow{m} (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Põhimõtteliselt samuti saab kontrollida ruumi S täielikkust, sest ka seal on koondumine samaväärne koordinaatide koondumisega.

Asume tõestama ruumi m täielikkust. Olgu $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots)$ Cauchy jada, s.t. $\rho(x_n, x_m) = \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^m| \xrightarrow{n, m} 0$. Kuna iga fikseeritud k korral $|\xi_k^n - \xi_k^m| \leq \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^m|$, siis on jadad $(\xi_k^n)_{n=1}^{\infty}, k=1, 2, \dots$, Cauchy arvjadad, mis koonduvad, s.t. $\xi_k^n \xrightarrow{n} \xi_k, k=1, 2, \dots$. Vaatleme jada $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Näitame, et $x \in m$ ja $x_n \rightarrow x$ ruumis m . Jada x_n fundamentaalsuse tõttu võime öelda, et vabalt valitud $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et $\rho(x_n, x_m) =$

$= \sup_k |\xi_k^m - \xi_k^n| < \varepsilon$, kui $n, m \geq N$. Siit järeldame, et

$|\xi_k^m - \xi_k^n| < \varepsilon$, kui $n, m \geq N$ ja $k = 1, 2, \dots$. Nendest võrratustest saame protsessis $m \rightarrow \infty$ (lugedes n ja k fikseerituks)

$$|\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon, \text{ kui } n \geq N, k = 1, 2, \dots,$$

millest omakorda

$$\sup_k |\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon, \text{ kui } n \geq N. \quad (1)$$

Võrratusest $|\xi_k| \leq |\xi_k - \xi_k^N| + |\xi_k^N|$ saame tingimust (1) kasutades

$$\sup_k |\xi_k| \leq \sup_k |\xi_k - \xi_k^N| + \sup_k |\xi_k^N| < \infty,$$

sest $x_N \in m$, millega on näidatud, et $x \in m$. Ühtlasi võime (1) põhjal väita, et $x_n \rightarrow x$ ruumis m .

Ruumi C täielikkuse tõestame sel teel, et näitame tema kinnisust ruumis m . Eeldame, et $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots) \rightarrow x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ruumis m , kusjuures $x_n \in C$, $n = 1, 2, \dots$. Näitame järgnevas, et $x \in C$, s.t. (ξ_k) on koonduv arvjada. Valime vabalt $\varepsilon > 0$. Koondumise $x_n \rightarrow x$ tõttu leidub n_0 nii, et

$$|\xi_k^{n_0} - \xi_k| \leq \varrho(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{3}, k = 1, 2, \dots$$

Kuna x_{n_0} , olles koonduv arvjada, on ühtlasi fundamentaalne, siis leidub N nii, et $|\xi_k^{n_0} - \xi_l^{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}$, kui $k, l > N$.

Seega kui $k, l > N$, siis

$$|\xi_k - \xi_l| \leq |\xi_k - \xi_k^{n_0}| + |\xi_k^{n_0} - \xi_l^{n_0}| + |\xi_l^{n_0} - \xi_l| < \varepsilon,$$

mis tähendab arvjada $x = (\xi_k)$ fundamentaalsust, järelikult ka koonduvust.

Ruumi C_0 täielikkuse põhjendab

Ülesanne. Näidata, et ruum C_0 on kinnine ruumis m .

Ruumi $M[a, b]$ täielikkust saab kontrollida sama tões-

tusskeemi järgi nagu ruumi m puhul.

Ruumi $C[a, b]$ täielikkuse tõestamiseks piisab veenduda selles, et ta on kinnine ruumis $M[a, b]$. Viimane asjaolu tuleneb aga matemaatilise analüüsi kursusest tuntud väitest, et lõigus pidevate funktsioonide ühtlaselt koonduva jada piirfunktsioon on pidev (meenutame, et koondumine ruumis $M[a, b]$ on just ühtlane koondumine lõigul $[a, b]$).

Järgnevalt tõestame kaks täielikke meetrilisi ruume iseloomustavat üldist tulemust, mis on aluseks paljudele fundamentaalsetele väidetele. Esimese tulemuse ajalooliseks lähtekohaks on ruumis \mathbb{R} kehtiv Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest.

Teoreem (teoreem üksteisesse sisestatud keradest). Meetriline ruum on täielik parajasti siis, kui temas üksteisesse sisestatud kinniste kerade jadas kerade raadiuste nullile lähenemisest järeldub, et neil keradel on ühine punkt.

Ülesanne. Näidata, et kerade ühine punkt, millest räägib teoreem, on ainus.

Teoreemi tõestus. 1) Eeldame, et täielikus meetrilises ruumis on antud kinniste kerade jada $B_n = \bar{B}(a_n, r_n)$ nii, et $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ ja $r_n \rightarrow 0$. Näitame kõigepealt, et keskpunktide jada a_n on fundamentaalne. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline ja N selline, et $n > N$ korral $r_n < \varepsilon$. Kui nüüd $n, m > N$ ja näiteks $m \geq n$, siis $a_m \in B_m \subset B_n = \bar{B}(a_n, r_n)$, mistõttu $\rho(a_m, a_n) \leq r_n < \varepsilon$, kui $n, m > N$. Ruumi täielikkuse tõttu võime öelda, et $a_n \rightarrow a$. Näitame, et $a \in B_n$ iga $n = 1, 2, \dots$ korral. Valime vabalt B_n . Kuna $a_n, a_{n+1}, \dots \in B_n, a_{n+k} \rightarrow a$ ja B_n on kinnine, siis $a \in B_n$.

2) Vaatleme suvalist fundamentaaljada x_n . Meie eesmärgiks on tõestada tema koonduvus. Selleks tarvitseb jadedast x_n eraldada mingi koonduv osajada. Jada x_n funda-

mentaalsuse tõttu leidub selline liige x_{n_1} , et

$g(x_{n_1}, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$, $n \geq n_1$ korral. Kui on valitud liikmed $x_{n_1}, \dots, x_{n_{k-1}}$, kusjuures $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$, siis leiame x_{n_k} nii, et $n_k > n_{k-1}$ ja $g(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ kõikide $n \geq n_k$ korral. Vaatleme kinniste kerade jada $B_k = \overline{B}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$, $k=1, 2, \dots$. Need kerad on üksteisesse sisestatud, sest kui $x \in B_{k+1}$, s.t. $g(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$, siis $g(x, x_{n_k}) \leq g(x, x_{n_{k+1}}) + g(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, mistõttu $x \in B_k$. Et kerade B_k raadiused $\frac{1}{2^{k-1}}$ lähenevad nullile, siis on neil keradel ühine punkt x . Seejuures $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$, sest $g(x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow{k} 0$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi tingimus, et kerade raadiused lähenevad nullile, on oluline nagu näitab

Ülesanne. Leida näide täielikust meetrilisest ruumist ja tema üksteisesse sisestatud kinniste kerade jadast nii, et nendel keradel puuduks ühine punkt.

Näpunäide. Vaadelda ruumis \mathbb{N} kõrgusega

$$g(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{kui } m \neq n, \\ 0, & \text{kui } m = n, \end{cases}$$

kerasid $\overline{B}(n, 1 + \frac{1}{2n})$.

Teoreem (Baire'i teoreem). Kui täielik meetriline ruum avaldub loenduva hulga kinniste hulkade ühendina, siis vähemalt üks neist hulkadest sisaldab mingit kera.

Tõestus. Avaldagu täielik meetriline ruum X ühendina $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kus hulgad F_n on kinnised. Oletame väitevastaselt, et ükski hulkadest F_n ei sisalda ühtegi kera.

Anneme ette positiivse arvjada $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Kuna X sisaldab kerasid, siis $F_1 \neq X$, s.t. $X \setminus F_1 \neq \emptyset$. Hulk $X \setminus F_1$ on lahtine, järelikult sisaldab ta mingit kinnist kera $B_1 =$

$= \bar{B}(x_1, r_1)$ (kui $x_1 \in X \setminus F_1$, siis leidub kera $B(x_1, r_0) \subset X \setminus F_1$; võtame näiteks $r_1 = \frac{1}{2} r_0$, siis $\bar{B}(x_1, r_1) \subset B(x_1, r_0)$), kusjuures me võime eeldada, et $r_1 < \varepsilon_1$.

Hulk F_2 ei sisalda kerastid, ta ei sisalda ka kera $B(x_1, r_1)$. Seega $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1) \neq \emptyset$ (kui $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1) = \emptyset$, siis $B(x_1, r_1) \subset X \setminus (X \setminus F_2) = F_2$). Kuna hulk $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1)$ on lahtine, siis sisaldab ta mingit kin-
nist kera $B_2 = \bar{B}(x_2, r_2)$, $r_2 < \varepsilon_2$. Analoogiliselt jätkates saame, et $(X \setminus F_n) \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ sisaldab mingit kera $B_n = \bar{B}(x_n, r_n)$, $r_n < \varepsilon_n$, ning niiviisi moodustub üksteisesse sisestatud kinniste kerade jada $B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$, kusjuures $B_n \subset X \setminus F_n$ ja kerade raadiused lähenevad nullile. Eelmise teoreemi põhjal on keradel B_n ühine punkt a . Seega $a \in B_n \subset X \setminus F_n$, $n = 1, 2, \dots$, millest järeldub, et $a \notin F_n$ ühegi n korral. See aga tähendab, et $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, mis on vastuolus võrdusega $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Teoreem on tõestatud.

§ 7*. Meetrilise ruumi täielikuksamine

Matemaatilise analüüsi kursuses laiendatakse ratsionaalarvude hulk reaalarvude hulgan. Selle tulemusena seadakse arvuhulk, mis on meetrilise ruumina täielik. Me näeme käesolevas paragrahvis, et iga meetrilise ruumi korral on võimalik analoogiline laiendus täieliku meetrilise ruumini, kusjuures laiendamise tulemusena saadav täielik ruum on oma struktuuri poolest üheselt määratud.

Definitsioon. Meetrilisi ruume X_0 ja X_1 vastavalt

kaugustega ϱ_0 ja ϱ_1 nimetatakse isomeetrilisteks, kui leidub sürjektsoon (s.t. pealekujutus) $\varphi: X_0 \rightarrow X_1$, mis säilitab elementidevahelise kauguse, s.t.

$$\varrho_1(\varphi(x), \varphi(y)) = \varrho_0(x, y) \quad \forall x, y \in X_0.$$

Elementidevahelist kaugust säilitavat sürjektiooni*) φ nimetatakse isomeetriaks.

Definitsioon. Meetrilise ruumi X_0 täiendiks nimetatakse niisugust täielikku meetrilist ruumi X , mille puhul X_0 on isomeetiline ruumi X mingi kõikjal tiheda alamruumiga.

Näiteks \mathbb{Q} täiendiks on \mathbb{R} , mis on ka selge alljärgnevast lihtsast tulemusest.

Lause. Täieliku meetrilise ruumi alamruumi täiendiks on tema sulund.

Tõestus. Olgu X_0 täieliku meetrilise ruumi alamruum. Tema sulund $\overline{X_0}$, olles täieliku meetrilise ruumi kinnine osahulk, on täielik meetriline ruum, milles X_0 on kõikjal tihed. Isomeetriaks on aga ühikteisendus $I: X_0 \rightarrow X_0, Ix = x, x \in X_0$.

Teoreem. Igal meetrilisel ruumil leidub täield, mis on isomeetria täpsuseni üheselt määratud.

Tõestus. Olgu X_0 meetriline ruum kaugusega ϱ_0 . Konstrueerime ruumile X_0 täieldi.

Vaatleme ruumi X_0 elementidest moodustatud Cauchy jadade hulka. Cauchy jadad (x_n) ja (y_n) loeme ekvivalentseteks, kui $\varrho_0(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Tegemist on tõepoolest ekvivalentsiseosega, sest Cauchy jada (x_n) on iseendaga ekvivalentne (refleksiivsus); kui (x_n) ja (y_n) on ekvivalentsed, siis kauguse ϱ_0 sümmeetrilisuse tõttu on ka (y_n) ja (x_n) ekvi-

*) Kuna isomeetria säilitab kauguse, siis on ta injektsoon. Seega on isomeetria bijektsoon. Märgime, et lugeja, kes ei tunne injektsooni, sürjektsooni ja bijektsooni mõisteid, võib nendega tutvuda järgmises peatükis.

valentsed (sümmeetrilisus); lõpuks, kui (x_n) ja (y_n) , samuti (y_n) ja (z_n) on ekvivalentsed, siis kolmnurga võrratusest $\varphi_0(x_n, z_n) \leq \varphi_0(x_n, y_n) + \varphi_0(y_n, z_n)$ järeldub, et $\varphi_0(x_n, z_n) \rightarrow 0$, s.t. (x_n) ja (z_n) on ekvivalentsed (transitiivsus). Seega tekib kõigi ruumi X_0 elementidest moodustatud Cauchy jadade hulgas klassijaotus, s.t. iga Cauchy jada kuulub parajasti ühte omavahel mittelõikuvatest klassidest. Loeme hulga X elementideks omavahel ekvivalentsete Cauchy jadade klassid (s.t. X on kõigi Cauchy jadade hulga faktorhulk vaadeldava ekvivalentsiseose järgi).

Järgnevalt muudame hulga X meetriliseks ruumiks. Kui $x, y \in X$, siis valime suvalised Cauchy jaded $(x_n) \in x$ ja $(y_n) \in y$ ning defineerime

$$\varphi(x, y) = \lim_n \varphi_0(x_n, y_n).$$

Veendume kõigepealt sellise definitsiooni korrektsuses. Nelinurga võrratusest

$$|\varphi_0(x_n, y_n) - \varphi_0(x_m, y_m)| \leq \varphi_0(x_n, x_m) + \varphi_0(y_n, y_m)$$

järeldub, et jada $\varphi_0(x_n, y_n)$ on Cauchy arvjada, järelikult ta koondub ning $\lim_n \varphi_0(x_n, y_n)$ eksisteerib. Kui me valiksime klassidest x ja y teised Cauchy jaded $(x'_n) \in x$ ja $(y'_n) \in y$, siis nelinurga võrratusest

$$|\varphi_0(x'_n, y'_n) - \varphi_0(x_n, y_n)| \leq \varphi_0(x'_n, x_n) + \varphi_0(y'_n, y_n)$$

saaksime, et $\lim_n \varphi_0(x'_n, y'_n) = \lim_n \varphi_0(x_n, y_n)$. Seega on φ definitsioon korrektne: igale elemendipaarile $x, y \in X$ seatakse vastavusse kindel arv $\varphi(x, y)$.

Näitame, et φ rahuldab meetrika aksioome. Kui $x = y$, siis $\varphi(x, y)$ arvutamiseks vajaminevad Cauchy jaded on ekvivalentsed, s.t. $\varphi(x, y) = 0$. Vastupidi, kui $\varphi(x, y) = 0$, siis Cauchy jaded $(x_n) \in x$ ja $(y_n) \in y$ on ekvivalentsed, mistõttu nad peavad kuuluma samasse klassi, seega $x = y$. Kauguse φ sümmeetrilisuse põhjendame võrdusega

$$\varrho(x, y) = \lim_n \varrho_0(x_n, y_n) = \lim_n \varrho_0(y_n, x_n) = \varrho(y, x).$$

Lõpuks, kui $(x_n) \in x, (y_n) \in y$ ja $(z_n) \in z$, siis võrratus

$$\varrho_0(x_n, y_n) \leq \varrho_0(x_n, z_n) + \varrho_0(z_n, y_n)$$

annab piiril, kui $n \rightarrow \infty$, kolmnurga võrratuse kauguse ϱ jaoks.

Vaatleme ruumi X osahulka X_1 , mis koosneb niisugustest ekvivalentsiklassidest, mis sisaldavad mingit ruumi X_0 elementide konstantset jada. Defineerime kujutuse $\varphi: X_0 \rightarrow X_1$, seades elemendile $x_0 \in X_0$ vastavusse konstantset jada

(x_0, x_0, \dots) sisaldava ekvivalentsiklassi. Ruumi X_1 ja kujutuse φ definitsioonidest on selge, et φ on surjektsioon. Olgu $x_0, y_0 \in X_0$, siis $(x_0, x_0, \dots) \in \varphi(x_0)$ ja $(y_0, y_0, \dots) \in \varphi(y_0)$, mistõttu

$$\varrho(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) = \lim \varrho_0(x_0, y_0) = \varrho_0(x_0, y_0).$$

Sellelega oleme näidanud, et $\varphi: X_0 \rightarrow X_1$ on isomeetria.

Tõestame alamruumi X_1 kõikjal tiheduse ruumis X . Valime vabalt $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $(x_n) \in x$. Siis leidub N nii, et $\varrho_0(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $n, m \geq N$. Olgu y ekvivalentsiklass, mis sisaldab konstantset jada (x_N, x_N, \dots) .

Siis $y \in X_1$ ja

$$\varrho(x, y) = \lim_n \varrho_0(x_n, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Oleme tõestanud, et $\overline{X_1} = X$.

Veendume ruumi X täielikkuses. Olgu $x^{(n)} \in X$ Cauchy jada. Ruumi X_1 kõikjal tiheduse tõttu saame leida elemendid $y^{(n)} \in X_1$ nii, et $\varrho(y^{(n)}, x^{(n)}) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Iga klass $y^{(n)}$ sisaldab mingi konstantse jada (y_n, y_n, \dots) , kus $y_n \in X_0$. Seejuures jada (y_n) ise on Cauchy jada ruumis X_0 , sest

$$\begin{aligned} \varrho_0(y_n, y_m) &= \varrho(y^{(n)}, y^{(m)}) \leq \\ &\leq \varrho(y^{(n)}, x^{(n)}) + \varrho(x^{(n)}, x^{(m)}) + \varrho(x^{(m)}, y^{(m)}) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varrho(x^{(n)}, x^{(m)}) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0, \text{ kui } n, m \rightarrow \infty.$$

Niisiis leidub $x \in X$, kuhu kuulub jada (y_n) . Seejuures

$$\begin{aligned} \varrho(x^{(n)}, x) &\leq \varrho(x^{(n)}, y^{(n)}) + \varrho(y^{(n)}, x) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(y_n, y_m). \end{aligned}$$

Jada (y_n) fundamentaalsuse tõttu leidub antud $\varepsilon > 0$ korral N nii, et kui $n, m > N$, siis $\varrho(y_n, y_m) < \varepsilon$. Seega, kui $n > N$, siis $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(y_n, y_m) \leq \varepsilon$, mis ütleb, et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(y_n, y_m) &\xrightarrow{n} 0. \text{ Järelikult} \\ \varrho(x^{(n)}, x) &\xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Ruumi X täielikkus on näidatud.

Praeguseks oleme tõestanud ruumi X_0 täielidi olemasolu.

Lõpuks veendume täielidi ühesuses isomeetria täpsuseni.

Olgu X ja Y ruumi X_0 täielidid vastavalt kaugustega ϱ ja ϱ' , kusjuures $\overline{X_1} = X, \overline{Y_1} = Y$ ning $\varphi: X_0 \rightarrow X_1$ ja $\psi: X_0 \rightarrow Y_1$ on isomeetriad. Meil tuleb tõestada, et X ja Y on isomeetrilised. Kohe võib öelda, et $\psi \varphi^{-1}: X_1 \rightarrow Y_1$ on isomeetria. Laiendame $\psi \varphi^{-1}$ isomeetriani $\chi: X \rightarrow Y$. Olgu $x \in X$. Leiame $x_n \in X_1$ nii, et $x_n \rightarrow x$. Et $\psi \varphi^{-1}$ on isomeetria, siis $\psi \varphi^{-1}(x_n)$ on Cauchy jada ruumis Y , mis ruumi Y täielikkuse tõttu koondub. Defineerimegi

$$\chi(x) = \lim_n \psi \varphi^{-1}(x_n).$$

Seejuures, kui veel $x'_n \rightarrow x$ (kus $x'_n \in X_1$), siis $\varrho(x'_n, x_n) \rightarrow 0$, samuti $\varrho'(\psi \varphi^{-1}(x'_n), \psi \varphi^{-1}(x_n)) \rightarrow 0$, s.t.

$\lim_n \psi \varphi^{-1}(x'_n) = \lim_n \psi \varphi^{-1}(x_n)$ ning $\chi(x)$ ei sõltu jada x_n valikust. Kujutuse $\chi: X \rightarrow Y$ sürjektiivsuse tõestamiseks valime vabalt $y \in Y$ ja leiame $y_n \in Y_1$ nii, et $y_n \rightarrow y$. Siis $x_n = \varphi \psi^{-1}(y_n) \in X_1$ on Cauchy jada, mis koondub mingiks elemendiks $x \in X$. Seejuures $\chi(x) = \lim_n \psi \varphi^{-1}(x_n) =$

$= \lim_n y_n = y$. Jääb veel näidata, et \mathcal{X} säilitab kauguse. Kui $x, x' \in X$ ja $x_n, x'_n \in X_1$ nii, et $x_n \rightarrow x$ ja $x'_n \rightarrow x'$, siis tuginedes kauguse pidevusele, saame

$$\begin{aligned} g(\mathcal{X}(x), \mathcal{X}(x')) &= \lim_n g(\psi\varphi^{-1}(x_n), \psi\varphi^{-1}(x'_n)) = \\ &= \lim_n g(x_n, x'_n) = g(x, x'). \end{aligned}$$

Sellelega on lõpetatud X ja Y isomeetrisuse tõestus.

Teoreem on tõestatud.

Tihti samastatakse (loetakse võrdseks) täielikustatav ruum X_0 ja temaga isomeetriline täielikult X alamruum $\varphi(X_0)$. Seda väljendatakse lühidalt sisalduvusega $X_0 \subset X$. Nii tuleb mõista ka näiteks ratsionaal- ja reaalarvude vahet $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

§ 8. Kompaktsus meetrilises ruumis

Matemaatilisest analüüsist on teada Bolzano-Weierstrassi teoreem: igast tõkestatud arvjadast saab eraldada koonduva osajada. Koonduva osajada eraldamise idee oligi aluseks kompaktsuse mõiste väljakujunemisel.

Definitsioon. Hulka K meetrilises ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktsuks, kui igast K elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon. Hulka nimetatakse kompaktsuks, kui ta on suhteliselt kompaktnine ja kinnine.

Märgime, et kui hulk K on kompaktnine, siis tema elementidest moodustatud jada osajada piirelement kuulub hulka K .

Meetriline ruum ise on alati kinnine hulk, seepärast tema korral suhtelise kompaktsuse ja kompaktsuse mõisted ühtivad. Kompaktsust meetrilist ruumi nimetatakse ka kompaktsuks.

Näide 1. Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal iga tõ-

kestatud hulk reaalarvude ruumis \mathbb{R} on suhteliselt kompaktne ning tõkestatud kinnine hulk on kompaktne.

Näide 2. Ka kompleksarvude ruumis \mathbb{C} on iga tõkestatud hulk suhteliselt kompaktne, sest tõkestatud hulga elementidest moodustatud jadast saab algul eraldada osajada, mille liikmete reaalosad koonduvad, ning saadud osajadast omakorda osajada, kus koonduvad ka liikmete imaginaariosad. (See arutelu on erijuht allpool toodava lause tõestusest, kus näidatakse tõkestatud hulga suhtelist kompaktsust ruumides \mathbb{R}^n , sest \mathbb{C} ja reaalne ruum \mathbb{R}^2 on sama meetrilise struktuuriga). Järelikult on iga tõkestatud kinnine hulk ruumis \mathbb{C} kompaktne.

Näide 3. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ei ole suhteliselt kompaktne ruumis \mathbb{R} .

Näide 4. Lõplik hulk on kompaktne, sest tema elementidest moodustatud jadas vähemalt üks element esineb lõpmatu arv kordi, mis lubab sellest jadast eraldada konstantse osajada.

Definitsioon. Hulka meetrilises ruumis nimetatakse tõkestatuks, kui ta sisaldub mingis keras.

See definitsioon on kooskõlas matemaatilise analüüsi kursusest tuntud arvuhulga tõkestatuse mõistega nagu näitab

Ülesanne. Tõestada, et arvuhulk $A \subset \mathbb{K}$ on tõkestatud (s.t. leidub $M > 0$ nii, et $|x| \leq M, x \in A$) parajasti siis, kui A on tõkestatud hulk meetrilises ruumis \mathbb{K} .

Lause. Suhteliselt kompaktne hulk on tõkestatud.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et suhteliselt kompaktne hulk K ruumis X ei ole tõkestatud. Valime mingi elemendi $a \in X$. Kuna $K \not\subset B(a, 1)$, siis leidub $x_1 \in K$ nii, et $\varrho(x_1, a) \geq 1$. Kuna $K \not\subset B(a, 2)$, siis leidub

$x_2 \in K$ nii, et $g(x_2, a) \geq 2$. Niiviisi jätkates leiame $x_n \in K$ nii, et $g(x_n, a) \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, mistõttu $g(x_n, a) \rightarrow \infty$. Hulga K suhteline kompaktsus lubab eraldada jadast x_n koonduva osajada $x_{n_k} \xrightarrow{k} x \in X$. Kauguse pidevuse tõttu $g(x_{n_k}, a) \xrightarrow{k} g(x, a)$, mis on vastuolus tingimusega $g(x_{n_k}, a) \xrightarrow{k} \infty$.

Lause on tõestatud.

Ülesanne. Tõestada, et iga Cauchy jada meetrilises ruumis on tõkestatud.

Lause. Suhteliselt kompakse hulga sulund on kompaktn.

Tõestus. Et hulga sulund on alati kinnine, siis piisab tõestada, et suhteliselt kompakse hulga K sulund \bar{K} on suhteliselt kompaktn. Vaatleme suvalist jada $x_n \in \bar{K}$. Valime $y_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $g(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Hulga K suhtelise kompaktsuse tõttu võime leida jada y_n osajada, s.t. võime leida lõpmatu osahulga $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $y_n \xrightarrow{n \in N'} x$. Kuid siis saame võrratuse $g(x_n, x) \leq g(x_n, y_n) + g(y_n, x)$ abil, et $x_n \xrightarrow{n \in N'} x$.

Lause on tõestatud.

Lause. Kompaktn meetriline ruum on täielik.

Tõestus. Eelduse kohaselt saab igast Cauchy jadast eraldada koonduva osajada. Kui aga Cauchy jada mingi osajada koondub, siis koondub ka jada ise.

Definitsioon. Olgu X meetriline ruum ja $\varepsilon > 0$. Hulga $A \subset X$ ε -võrguks nimetatakse hulka $B \subset X$, mille puhul iga $x \in A$ korral leidub $y \in B$ nii, et $g(x, y) < \varepsilon$.

Geomeetriliselt võib asjaolu, et hulk B on ε -võrguks hulgale A , iseloomustada sisalduvusega $A \subset \bigcup_{y \in B} B(y, \varepsilon)$.

Näiteks, kui $\varepsilon > \frac{1}{2}$, siis täisarvude hulk \mathbb{Z} on ε -võrguks ruumile \mathbb{R} (ka igale osahulgale $A \subset \mathbb{R}$), sest vahemikud $B(k, \varepsilon)$, $k \in \mathbb{Z}$, katavad ruumi \mathbb{R} .

Teoreem (Hausdorffi teoreem). Meetrilise ruumi X osa-

hulga K suhteliseks kompaktsuseks on tarvilik ning ruumi X täielikkuse korral ka piisav, et iga $\varepsilon > 0$ korral leiduks hulgale K lõplik ε -võrk.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu hulk K suhteliselt kompaktnene. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $\varepsilon > 0$, mille korral lõplikku ε -võrku ei eksiteeri. Valime vabalt $x_1 \in K$. Siis leidub $x_2 \in K$ nii, et $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$, sest vastasel juhul $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ iga $x \in K$ korral ja hulk $\{x_1\}$ oleks üheelemendiline ε -võrk. Edasi leidub $x_3 \in K$ nii, et $\rho(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ ja $\rho(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ (vastasel juhul oleks suvalise elemendi $x \in K$ korral $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ või $\rho(x, x_2) < \varepsilon$, mis tähendaks, et hulk $\{x_1, x_2\}$ oleks lõplik ε -võrk). Nii jätkates leiame $x_n \in K$ nii, et $\rho(x_n, x_1) \geq \varepsilon, \dots, \rho(x_n, x_{n-1}) \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Saadud jada $x_n \in K$ rahuldab tingimust $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, kui $n \neq m$. Selle jada ükski osajada ei ole fundamentaalne, mistõttu temast ei saa eraldada koonduvat osajada. See on aga vastuolus hulga K suhtelise kompaktsusega.

Piisavus. Olgu ruum X täielik. Eeldame, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulgale K lõplik ε -võrk. Valime jada $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$. Vastavalt igale arvule ε_n moodustame lõpliku ε_n -võrgu B_n , seega $K \subset \bigcup_{y \in B_n} B(y, \varepsilon_n), n = 1, 2, \dots$

Vaatleme jada $x_k \in K$. Et $x_k \in \bigcup_{y \in B_1} B(y, \varepsilon_1)$, kui $k \in \mathbb{N}$, siis vähemalt üks kera $B(y_1, \varepsilon_1), y_1 \in B_1$, sisaldab jada $x_k, k \in \mathbb{N}$, mingit osajada $x_k, k \in N_1$ (kus $N_1 \subset \mathbb{N}$). Et $x_k \in \bigcup_{y \in B_2} B(y, \varepsilon_2)$, kui $k \in N_1$, siis leiduvad $y_2 \in B_2$ ja $N_2 \subset N_1$ nii, et jada $x_k, k \in N_2$, sisaldub kerades $B(y_2, \varepsilon_2)$. Niiviisi jätkates leiame lõpmatud hulgad N_n ja elemendid $y_n \in B_n$ nii, et $N_1 \supset \dots \supset N_n \supset \dots$ ja $\{x_k : k \in N_n\} \subset B(y_n, \varepsilon_n)$, kui $n \in \mathbb{N}$. Moodustame nüüd jada $x_{k_n}, n \in \mathbb{N}$, kus $x_{k_n} \in$

$\in \{x_{\kappa} : \kappa \in N_1\}$ on suvaline, $x_{\kappa_2} \in \{x_{\kappa} : \kappa \in N_2\}$ on valitud nii, et $\kappa_2 > \kappa_1$; üldiselt, $x_{\kappa_n} \in \{x_{\kappa} : \kappa \in N_n\}$ on valitud nii, et $\kappa_n > \kappa_{n-1}$. Jada x_{κ_n} on esialgse jada x_{κ} osajada. Seejuures (kui näiteks $m \gg n$) $\rho(x_{\kappa_n}, x_{\kappa_m}) \leq \rho(x_{\kappa_n}, y_n) + \rho(x_{\kappa_m}, y_n) < 2\varepsilon_n \rightarrow 0$, kui $n, m \rightarrow \infty$. Ruumi X täielikkuse tõttu jada x_{κ_n} koondub. Niisiis on K suhteliselt kompaktne.

Teoreem on tõestatud.

Hausdorffi teoreemi abil lahendub lihtsalt järgmine

Ülesanne. Näidata, et kompaktne meetriline ruum on separabel.

Järgmine lause võimaldab Hausdorffi teoreemi kasutada kujul, kus piisavuse osas on lõplik ε -võrk asendatud suhteliselt kompaktse ε -võrguga.

Lause. Hulgal meetrilises ruumis on iga $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε -võrk parajasti siis, kui tal on iga $\varepsilon > 0$ korral suhteliselt kompaktne ε -võrk.

Tõestus. Kuna iga lõplik hulk on kompaktne, siis jääb tõestada, et suhteliselt kompaktse ε -võrgu olemasolust mistahes $\varepsilon > 0$ korral järeldub ka lõpliku ε -võrgu olemasolu. Valime vabalt $\varepsilon > 0$. Leiame vaadeldavale hulgale A suhteliselt kompaktse $\frac{\varepsilon}{2}$ -võrgu B , s.t. iga $x \in A$ korral leidub $y \in B$ nii, et $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Et B on suhteliselt kompaktne, siis tal on lõplik $\frac{\varepsilon}{2}$ -võrk C , s.t. iga $y \in B$ korral leidub $z \in C$ nii, et $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seega iga $x \in A$ korral leidub $z \in C$ nii, et $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon$. Seega on C hulgale A lõplik ε -võrk.

Järgnevalt leiame hulga suhtelise kompaktsuse kriteeriume mõningates konkreetsetes meetrilistes ruumides. Hausdorffi teoreem on ka kriteerium hulga suhteliseks kompaktsuseks, kuid ta on liiga üldine ja ei ole seetõttu praktilisel kasutamisel

küllaldiselt efektiivne.

Eespool põhjendasime juba, et hulk ruumis \mathbb{K} on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud. Praegu laiendame selle kriteeriumi ruumidele m_n ja l_p^n , edaspidi näeme, et ta üldistub ka kõikidele lõplikumõõtmeliste normeeritud ruumidele.

Lause. Ruumides m_n ja l_p^n on hulk suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Tõestus. Suhteliselt kompaktne hulk on alati tõkestatud, seepärast tõestame, et antud juhul kehtib ka vastupidine väide. Oletame, et hulk K on tõkestatud, s.t. leidub kera $B(a, r)$, milles sisaldub K . Vaatleme jada $x_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \in K$, $k \in \mathbb{N}$. Arvjada $\xi_1^k, k \in \mathbb{N}$, on tõkestatud, sest kui $a = (a_1, \dots, a_n)$, siis $|\xi_1^k - a_1| \leq \rho(x_k, a) < r$. Eraldame jadast $\xi_1^k, k \in \mathbb{N}$, koonduva osajada, s.t. leiame lõpmatu hulga $N_1 \subset \mathbb{N}$ nii, et $\xi_1^k \xrightarrow[k \in N_1]{} \xi_1$. Järgnevalt vaatleme jada $x_k, k \in N_1$. Kuna ka arvjada $\xi_2^k, k \in N_1$, on tõkestatud, siis leidub $N_2 \subset N_1$ nii, et $\xi_2^k \xrightarrow[k \in N_2]{} \xi_2$, samuti toimub koondumine $\xi_1^k \xrightarrow[k \in N_2]{} \xi_1$. Niiviisi jätkates leiame lõpuks $N_n \subset \dots \subset N_1$ nii, et $\xi_1^k \xrightarrow[k \in N_n]{} \xi_1, \dots, \xi_n^k \xrightarrow[k \in N_n]{} \xi_n$. Seega $x_k \xrightarrow[k \in N_n]{} x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Lause on tõestatud.

Vaatleme veel hulga suhtelise kompaktsuse kriteeriumi ruumis $C[a, b]$. Selnevalt tutvume paari selleks vajamineva mõistega. Koosnegu hulk A lõigul $[a, b]$ määratud funktsioonidest.

Definitsioon. Üeldakse, et funktsioonide hulk A on ühtlaselt tõkestatud (funktsioonid hulgast A on ühtlaselt tõkestatud), kui leidub arv M nii, et $|x(t)| \leq M$ iga $x \in A$ ja iga $t \in [a, b]$ korral.

Definitsioon. Öeldakse, et funktsioonide hulk A on võrdpidev (funktsioonid hulgast A on võrdpidevad), kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$, kui $|t_1 - t_2| < \delta$ ja $x \in A$.

Kui hulk A koosneb ühest funktsioonist, siis hulga A võrdpidevus tähendab selle funktsiooni ühtlast pidevust lõigus $[a, b]$.

Teoreem (Arzelà-Ascoli teoreem). Hulk ruumis $C[a, b]$ on suhteliselt kompaktnel parajasti siis, kui ta on ühtlaselt tõkestatud ja võrdpidev.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu hulk $A \subset C[a, b]$ suhteliselt kompaktnel. Pidades silmas, et iga $\varepsilon > 0$ korral on hulgal A olemas lõplik ε -võrk, vaatleme tema 1-võrku $\{x_1, \dots, x_n\}$. Kui nüüd $x \in A$, siis leidub x_i nii, et $\varrho(x, x_i) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_i(t)| < 1$, millest saame, et

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_i(t)| + |x_i(t)| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \max_{a \leq t \leq b} |x_i(t)|$$

iga $t \in [a, b]$ korral, s.t. hulga A funktsioonid on ühtlaselt tõkestatud.

Näitame hulga A võrdpidevust. Anname vabalt ette $\varepsilon > 0$. Moodustame hulgale A lõpliku $\frac{\varepsilon}{3}$ -võrgu $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Funktsioonid x_i on ühtlaselt pidevad lõigul $[a, b]$, seepärast leiduvad $\delta_i > 0$ nii, et kui $|t_1 - t_2| < \delta_i$, siis $|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Olgu $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$. Siis $|t_1 - t_2| < \delta$

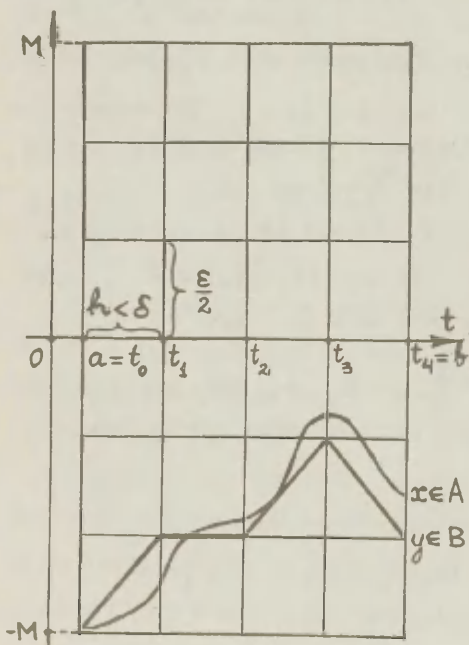
korral $|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $i = 1, \dots, n$. Olgu $x \in A$ suvaline funktsioon. Valime x_i nii, et $\varrho(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Kui nüüd $|t_1 - t_2| < \delta$, siis

$$\begin{aligned} |x(t_1) - x(t_2)| &\leq |x(t_1) - x_i(t_1)| + \\ &+ |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x(t_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Piisavus. Tõestame piisavuse juhul, kui $C[a, b]$ koos-

neb lõigus $[a, b]$ pidevatest reaalistest väärtustega funktsioonidest. Komplekssete väärtustega funktsioonide korral võib kasutada alljärgnevat tõestust samaaegselt reaali- ja imaginaarosa jaoks.

Olgu hulk $A \subset C[a, b]$ ühtlaselt tõkestatud ja võrdpidev. Näitame, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub talle lõplik ε -võrk. Anname vabalt ette $\varepsilon > 0$. Hulga A ühtlase tõkestatuse tõttu leidub M nii, et kui $x \in A$, siis $|x(t)| \leq M$ iga $t \in [a, b]$ korral, s.t. funktsioonide $x \in A$ graafikud paiknevad ristkülikus $[a, b] \times [-M, M]$. Kui vaja, siis suurendame arvu M nii, et $\frac{\varepsilon}{2}$ mahuks lõiku $[0, M]$ täisarv kordi. Hulga A võrdpidevus võimaldab leida δ nii, et kui $|t - t'| < \delta$, siis $|x(t) - x(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$ kõikide $x \in A$ korral. Olgu $h = \frac{b-a}{n}$ selline, et $h < \delta$, $t_i = a + ih, i = 0, \dots, n$. Sellega on $[a, b]$ jaotatud osalõikudeks $[t_i, t_{i+1}]$, mille pikkused on väiksemad



kui δ . Jaotame lõigu $[-M, M]$ vertikaalteljel osalõikudeks pikkusega $\frac{\varepsilon}{2}$. Tõmmates läbi lõikude $[a, b]$ ja $[-M, M]$ jaotuspunktide telgedega paralleelsed sirged, jaotame ristküliku $[a, b] \times [-M, M]$ väikes-teks ristkülikuteks. Olgu $B \subset C[a, b]$ kõikvõimalike pidevate funktsioonide hulk, mis läbivad väikeste ristkülikute tippe ning

mia on lineaarsed igas osalõigus $[t_i, t_{i+1}]$. On selge, et hulk B on lõplik. Näitame, et B on hulga A ε -võrk. Vaatleme suvalist funktsiooni $x \in A$ ning valime teda lähendava funktsiooni $y \in B$ nii, et iga $i = 0, \dots, n$ korral $(t_i, y(t_i))$ oleks punktile $(t_i, x(t_i))$ võimalikult lähedal. Sellega saavutame, et $|x(t_i) - y(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, $i = 0, \dots, n$, ja $|y(t_i) - y(t_{i+1})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 0, \dots, n-1$. Kui nüüd $t \in [a, b]$ ja t_i on talle lähim lõigu $[a, b]$ jaotuspunkt, siis $|x(t) - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$, sest $|t - t_i| < \delta$. Kuna $|t_i - t| \leq \frac{\delta}{2}$, siis $|y(t_i) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Järelikult

$$\begin{aligned}
 |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - y(t_i)| + \\
 &\quad + |y(t_i) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

mistõttu $\mathcal{G}(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| < \varepsilon$.

Teoreem on tõestatud.

§ 9*. Topoloogilised ruumid

1. Topoloogilise ruumi mõiste. Paljudes matemaatika harudes tekivad probleemid, mis on seotud piirprotsessiga, kuid mida ei õnnestu rahuldavalt lahendada meetriliste ruumide teooria raames. Tihti on siis kasutatav meetrilistest ruumidest palju üldisemate topoloogiliste ruumide teooria.

Definitsioon. Hulka X nimetatakse topoloogiliseks ruumiks, kui temas on välja eraldatud osahulkade süsteem τ , mis rahuldab tingimusi:

(G1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ (tühi hulk ja terve ruum kuuluvad süsteemi τ);

(G2) kui $G_\alpha \in \tau$, siis $\bigcup G_\alpha \in \tau$ (süsteemi τ kuuluvate hulkade mistahes ühend kuulub sinna);

(G3) kui $G_1, \dots, G_n \in \tau$, siis $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$ (süsteemi τ kuuluvate hulcade lõplik ühisosa kuulub sinna).

Osahulkade süsteemi τ nimetatakse topoloogiaks ja temasse kuuluvaid hulki lahtisteks.

Näited. 1) Meetrilise ruumi lahtised hulgad moodustavad topoloogia.

2) Täpselt samuti, nagu meetrilises ruumis, saab defineerida lahtised kerad ja lahtised hulgad poolmeetrilises ruumis. Ka poolmeetrilise ruumi lahtised hulgad moodustavad topoloogia.

3) Olgu $\tau = \{\emptyset, X\}$, see on topoloogia hulgas X , milles on kõige vähem lahtisi hulki; öeldakse, et see on nõrgim topoloogia hulgas X .

4) Olgu $\tau = \{A : A \subset X\}$ hulga X kõigi osahulkade süsteem. Ka hulga X diskreetne meetrika annab sama topoloogia, sest diskreetses meetrilises ruumis on kõik hulgad lahtised. Selle nn. diskreetse topoloogia korral on ruumis X lahtisi hulki kõige rohkem, seepärast nimetatakse teda tugevaimaks topoloogiaks hulgas X .

Me nägime, et iga meetriline ruum on ühtlasi ka topoloogiline ruum. Vastupidine väide aga ei kehti, nagu näitab

Ülesanne. Olgu antud kaheelemendiline hulk $X = \{a, b\}$. Tõestada, et X on topoloogiline ruum topoloogiaga $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Tõestada, et see topoloogiline ruum ei ole meetriline ruum (s.t. ruumi X ei saa muuta meetriliseks ruumiks nii, et τ osutuks tema lahtiste osahulkade süsteemiks).

2. Hulgad topoloogilistes ruumides. Paljud meetrilise ruumi põhimõisted on üldistatavad topoloogilisse ruumi. Topoloogilises ruumis defineeritakse need mõisted reeglina

nii, et nad meetrilises ruumis kui topoloogilises ruumis langeksid kokku meetrilises ruumis juba olemasolevate mõistetega.

Definitsioon. Hulka topoloogilises ruumis nimetatakse kinniseks, kui tema täiend on lahtine.

Kinnistel hulkadel topoloogilises ruumis X on järgmised põhiomadused:

(F1) \emptyset, X on kinnised;

(F2) kui hulgad F_α on kinnised, siis $\bigcap_\alpha F_\alpha$ on kinnine;

(F3) kui hulgad F_1, \dots, F_n on kinnised, siis $\bigcup_{i=1}^n F_i$ on kinnine.

Need omadused järelduvad lahtiste hulkade põhiomadustest (G1) – (G3) ja hulgateoreetilistest võrdustest

$$X \setminus \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha), \quad X \setminus \left(\bigcap_\alpha A_\alpha \right) = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha).$$

Nüüd on näha, et topoloogilise ruumi mõiste võib anda ka kinniste hulkade kaudu: hulka X nimetatakse topoloogiliseks ruumiks, kui temas on välja eraldatud nn. kinniste osshulkade süsteem, mis rahuldab tingimusi (F1) – (F3).

Definitsioon. Olgu X topoloogiline ruum. Punkti $x \in X$ ümbruseks nimetatakse suvalist hulka $U \subset X$, mille puhul leidub lahtine hulk G nii, et $x \in G \subset U$.

Märgime, et kui U_1 ja U_2 on punkti x ümbrused, siis ka $U_1 \cap U_2$ on punkti x ümbrus. Tõepoolest, leiduvad lahtised hulgad G_1 ja G_2 nii, et $x \in G_1 \subset U_1$ ja $x \in G_2 \subset U_2$, millest järeldub, et $x \in G_1 \cap G_2 \subset U_1 \cap U_2$, kusjuures $G_1 \cap G_2$ on lahtine.

Definitsioon. Topoloogilise ruumi X elementi x nimetatakse hulga $A \subset X$ puutepunktiks, kui elemendi x igas ümbruses leidub hulga A elemente. Hulga A kõigi puutepunktide hulka nimetatakse hulga A sulundiks ja tähistata-

takse \bar{A} .

Ülesanne. Tõestada, et meetrilise ruumi osahulga sulund ühtib tema sulundiga meetrilises ruumis kui topoloogilises ruumis.

Sulundil on järgmised põhilised omadused:

$$(C1) \quad \bar{\emptyset} = \emptyset,$$

$$(C2) \quad A \subset \bar{A},$$

$$(C3) \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A},$$

$$(C4) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Ülesanne. Tõestada sulundi põhiomadused (C1) – (C4).

Saab tõestada, et hulk on kinnine parajasti siis, kui ta ühtib oma sulundiga. Ka sulundi mõiste kaudu on võimalik defineerida topoloogiat: kui hulga X igale osahulgale A on seatud vastavusse hulk $\bar{A} \subset X$ (ütleme, et on entud sulundamise operaator ehk sulundamine) nii, et on rahuldatud tingimused (C1) – (C4), siis hulgad $F \subset X$, mille korral $\bar{F} = F$, rahuldavad tingimusi (F1) – (F3), s.t. määravad topoloogia kinniste hulkade kaudu. Seejuures niiviisi defineeritud topoloogilises ruumis X hulga sulundi võtmine ühtib algselt olemasoleva sulundamisega.

Definitsioon. Topoloogilise ruumi osahulga A elementi a nimetatakse hulga A sisepunktiks, kui a sisaldub hulgas A koos mingi oma ümbrusega. Hulga A sisemuseks nimetatakse tema kõigi sisepunktide hulka.

Definitsioon. Topoloogilise ruumi X elementi nimetatakse hulga $A \subset X$ rajapunktiks, kui tema iga ümbrus sisaldab nii A kui ka $X \setminus A$ punkte. Hulga A rajeks nimetatakse tema kõigi rajapunktide hulka.

Enamik hulkade sulundi, sisemuse ja raja kohta käivaid väiteid, mida esitasime meetrilistes ruumides (täpselt, kõik väited, mida saab sõnastada ilma kaugust, jadade koonduvust või kerast kasutamata), on vahetult tõestatavad ka

topoloogilistes ruumides.

Topoloogilist ruumi on võimalik defineerida ka elementide ümbruste süsteemi, elemendi hulgale puutepunktiks olemise ja hulga sisemuse võtmise kaudu.

3. Koonduvus topoloogilises ruumis. Koonduvusteooriat topoloogilistes ruumides ehitatakse üles enamasti kas suunatud pere või filtri mõistele toetudes.

Definitsioon. Hulka \mathcal{O} nimetatakse suunatud hulgaks, kui temas on antud seos \geq (s.t. on antud osahulk $\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, kus $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$ korral kirjutatakse $\alpha \geq \beta$), mis rahuldab tingimusi:

- 1) kui $\alpha \in \mathcal{O}$, siis $\alpha \geq \alpha$,
- 2) kui $\alpha \geq \beta$ ja $\beta \geq \gamma$, siis $\alpha \geq \gamma$,
- 3) iga $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ korral leidub $\gamma \in \mathcal{O}$ nii, et $\gamma \geq \alpha$ ja $\gamma \geq \beta$.

Suunatud hulkade häited. 1) Naturaalarvude hulk \mathbb{N} loomuliku järjestuse mõttes.

2) Ruum \mathbb{R}^n järjestusega $(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq (\eta_1, \dots, \eta_n)$ parajasti siis, kui $\xi_i \geq \eta_i$ iga $i=1, \dots, n$ korral.

3) Suvalise hulga osahulkade hulk, kusjuures $A \geq B$ parajasti siis, kui $A \supset B$.

4) Suvalise hulga lõplike osahulkade hulk, kusjuures $A \geq B$ parajasti siis, kui $A \supset B$.

5) Topoloogilise ruumi punkti ümbruste hulk, kusjuures $U \geq V$ parajasti siis, kui $U \subset V$.

Definitsioon. Suunatud pereks ehk pereks hulgas X nimetatakse kujutust $x_\alpha, \alpha \in \mathcal{O}$ (lühemalt, (x_α) ehk x_α), mille määramispiirkond \mathcal{O} on suunatud hulk ja väärtused x_α kuuluvad hulka X .

Kui suunatud hulgaks \mathcal{O} on naturaalarvude hulk \mathbb{N} , siis suunatud pereks on jada.

Meetriliste ruumide korral me nägime, et hulk on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõik temasse kuuluvate koonduvate jadade piirelemendid. Topoloogilistes ruumides see väide üldiselt ei kehti, mistõttu topoloogiliste ruumide uurimisel jadaladel erilist tähtsust ei ole.

Definitsioon. Üeldakse, et pere $x_\alpha, \alpha \in \mathcal{O}$, topoloogilises ruumis X koondub elemendiks $x \in X$, ehk x on pere x_α piirelement, kui elemendi x iga ümbruse U korral leidub $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ nii, et kui $\alpha \geq \alpha_0$, siis $x_\alpha \in U$.

Pere $x_\alpha, \alpha \in \mathcal{O}$, piirelementide hulka tähistatakse $\lim_{\alpha \in \mathcal{O}} x_\alpha$ või $\lim x_\alpha$. Kui $\lim x_\alpha = \{x\}$, siis kirjutatakse $\lim x_\alpha = x$.

Lause. Element x kuulub hulga \bar{A} sulundisse parajasti siis, kui leidub pere, mille liikmed on hulgas A ja mis koondub elemendiks x .

Tõestus. Kui taoline pere leidub, siis x on hulga A puutepunkt ja seega $x \in \bar{A}$. Kui aga $x \in \bar{A}$, siis vaatleme punkti x ümbruste süsteemi \mathcal{U} suunatud hulganähtena, kus ümbruste U ja V korral $U \supseteq V$ tähendab, et $U \subset V$. Pere $x_U, U \in \mathcal{U}$, kus x_U on hulga $A \cap U$ suvaline punkt, koondub elemendiks x .

Järeldus. Hulk topoloogilises ruumis on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab koos iga temasse kuuluva perega (s.t. pere liikmed kuuluvad sellesse hulka) ka kõik selle pere piirelemendid.

Märgime, et igat topoloogiat on võimalik määrata koonduvate perede abil, s.t. saab anda perede klassi, mida loetakse koonduvateks, nende abil (tuginedes ülaltoodud lausele) defineerida hulga sulundamise, millega tekibki esialgsuga ühtiv topoloogia.

Definitsioon. Filtriiks hulgas X nimetatakse hulga X osahulkade süsteemi \mathcal{F} , mis rahuldab tingimusi:

- 1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- 2) kui $A, B \in \mathcal{F}$, siis $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- 3) kui $A \in \mathcal{F}$ ja $A \subset B \subset X$, siis $B \in \mathcal{F}$.

Näited. 1) Kui $X \neq \emptyset$, siis filtriiks on $\{X\}$.

2) Valime hulgas X osahulga $A \neq \emptyset$. Filtriiks on $\{B \subset X : A \subset B\}$ – kõik hulka A sisaldavad osahulgad.

3) Kui X on lõpmatu hulk, siis filtriika on kõigi tema lõplike osahulkade tälenditest koosnev süsteem. Juhul $X = \mathbb{N}$ nimetatakse taolist filtrit Fréchet' filtriiks.

4) Kui X on topoloogiline ruum, siis filtriiks on fikseeritud elemendi kõigi ümbruste süsteem.

Definitsioon. Üeldakse, et filter \mathcal{F} topoloogilisea ruumis X koondub elemendiks $x \in X$ (x on filtri \mathcal{F} piir-element), kui punkti x iga ümbrus kuulub filtrisse \mathcal{F} .

Filtri \mathcal{F} piirelementide hulka tähistatakse $\lim \mathcal{F}$.

Järgnevalt selgitame filtrite ja perede vahetõrda topoloogilises ruumis koonduvuse seisukohalt.

Olgu $x_\alpha, \alpha \in \mathcal{O}$, pere topoloogilises ruumis X . Defineerime süsteemi \mathcal{F} , kuhu kuuluvad kõik hulgad $A \subset X$ järgmise omadusega: hulgale A leidub $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ nii, et kui $\alpha \geq \alpha_0$, siis $x_\alpha \in A$ (s.t. iga $A \in \mathcal{F}$ korral leidub α_0 nii, et $\bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} \{x_\alpha\} \subset A$). Siis \mathcal{F} on filter ning $\lim \mathcal{F} = \lim_{\alpha \in \mathcal{O}} x_\alpha$.

Olgu \mathcal{F} filter topoloogilises ruumis X . Defineerime \mathcal{O} kui kõigi selliste paaride (x, A) hulga, kus $x \in A \in \mathcal{F}$. Järjestuse $(x_1, A_1) \geq (x_2, A_2)$, kui $A_1 \subset A_2$, suhtes on \mathcal{O} suunatud hulk. Vaatleme peret x_α , kus $x_\alpha = x$, kui $\alpha = (x, A) \in \mathcal{O}$. Siis $\lim_{\alpha \in \mathcal{O}} x_\alpha = \lim \mathcal{F}$.

4. Eralduvuse aksiomid. Piiirprotseesi omadusi topoloogilises ruumis on võimalik täpsemalt kirjeldada, kui ruumilt nõutakse nn. eralduvuse aksiomide täidetust.

Topoloogilist ruumi X nimetatakse T_0 -ruumiks, kui iga kahe erineva elemendi $x, y \in X$ korral vähemalt ühel neist leidub ümbrus, mis teist elementi ei sisalda.

Topoloogilist ruumi X nimetatakse T_1 -ruumiks, kui iga kahe erineva elemendi $x, y \in X$ korral mõlemal neist leidub ümbrus, mis teist elementi ei sisalda.

Näide. Kui $X = \{a, b\}$ on kaheelemendiline hulk, siis topoloogia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ puhul on tegemist T_0 -ruumiga, aga mitte T_1 -ruumiga.

Topoloogilist ruumi X nimetatakse T_2 -ruumiks ehk eralduvaks ruumiks ehk Hausdorffi ruumiks ehk separaatseks ruumiks, kui igal kahel erineval elemendil $x, y \in X$ leiduvad mittelõikuvad ümbrused.

Näide. Olgu X lõpmatu hulk. Loeme temas lahtisteks kõik lõplike hulkade täiendid (X kaasa arvatud) ja tühja hulga \emptyset . Saadud topoloogiline ruum on T_1 -ruum, kuid mitte T_2 -ruum, sest ühelgi erinevate elementide paaril ei leidu mittelõikuvaid ümbrusi.

Näiteks T_2 -ruumist sobib iga meetriline ruum, sest kui $x \neq y$, siis $r = \frac{1}{2}g(x, y)$ korral $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

Märgime, et poolmeetriline ruum ei tarvitse olla isegi T_0 -ruum, sest kui $x \neq y$ ja $g(x, y) = 0$, siis kõik kerad $B(x, r)$ ja $B(y, r)$, $r > 0$, sisaldavad mõlemat elementi x ja y .

Topoloogilist ruumi X nimetatakse regulaarseks, kui iga $x \in X$ ja iga kinnise hulga $F \subset X$ korral, kus $x \notin F$, leiduvad mittelõikuvad lahtised hulgad G_1 ja G_2 nii, et $x \in G_1$ ja $F \subset G_2$. Regulaarset T_1 -ruumi nimetatakse

T_3 -ruumiks.

Topoloogilist ruumi X nimetatakse normaalseks, kui iga kahe mittelõikuva kinnise hulga $F_1 \subset X$ ja $F_2 \subset X$ korral leiduvad mittelõikuvad lahtised hulgad G_1 ja G_2 nii, et $F_1 \subset G_1$ ja $F_2 \subset G_2$. Normaalset T_1 -ruumi nimetatakse T_4 -ruumiks.

Märgime tõestuseta, et iga meetriline ruum on T_4 -ruum. Pole raske näidata, et T_1 -ruumis kõik üheelemendilised hulgad on kinnised. Seetõttu on selge, et iga T_4 -ruum on T_3 -ruum ning T_3 -ruum on T_2 -ruum. (On täiesti ilmne, et T_2 -ruum on T_1 -ruum ja T_1 -ruum on T_0 -ruum). Saab konstrueerida T_2 -ruume, mis ei ole T_3 -ruumid, samuti T_3 -ruume, mis ei ole T_4 -ruumid.

Topoloogilises ruumis ei tarvitse pere (sealhulgas jada) või filtri piirelement olla ühene. Näiteks nõrgima topoloogiaga ruumis X , kus $\tau = \{\emptyset, X\}$, on mistahes pere või filtri piirelementideks kõik ruumi X elemendid.

Lause. Topoloogiline ruum on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui iga pere või filter saab koonduda ülimalt üheks elemendiks.

Tõestus. 1) Olgu X Hausdorffi ruum. Oletame, et pere x_α koondub elementideks x ja y , kusjuures $x \neq y$. Leiame elementide x ja y ümbrused U_1 ja U_2 nii, et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Siis leiduvad α_1 ja α_2 nii, et kui $\alpha \geq \alpha_1$, siis $x_\alpha \in U_1$, ja kui $\alpha \geq \alpha_2$, siis $x_\alpha \in U_2$. Valime α_0 nii, et $\alpha_0 \geq \alpha_1$ ja $\alpha_0 \geq \alpha_2$. Siis $x_{\alpha_0} \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$, mis on võimatu.

2) Oletame, et X ei ole Hausdorffi ruum. Olgu $x, y \in X$ sellised, et $x \neq y$ ning elemendi x iga ümbrus U lõikub elemendi y iga ümbrusega V . Siis filter $\mathcal{F} =$

$= \{A \subset X : \text{leiduvad elementide } x \text{ ja } y \text{ ümbrused } U \text{ ja } V \text{ nii, et } U \cap V \subset A\}$ sisaldab kõik elementide x ja y ümbrused, s.t. kopndub elementideks x ja y .

Lause on tõestatud.

5. Kompaktsus topoloogilises ruumis. Matemaatilise analüüsi kursusest on tuntud Heine—Boreli—Lebesgue'i lemma: lõigu igast lahtisest kattest saab eraldada lõpliku osakatte. See asjaolu on aluseks kompaktsuse mõistele topoloogilises ruumis.

Topoloogilise ruumi X osahulga $A \subset X$ katteks nimetatakse osahulkade $A_\alpha \subset X$ süsteemi, mille puhul $A \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$. Katet nimetatakse lahtiseks, kui kõik kattesse kuuluvad hulgad A_α on lahtised.

Definitsioon. Topoloogilist ruumi nimetatakse kompaktsiks, kui tema igast lahtisest kattest saab eraldada lõpliku osakatte.

Märgime tõestuseta, et meetriline ruum on kompaktnel (s.t. igast tema elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada) parajasti siis, kui ta on kompaktnel topoloogilise ruumina.

Definitsioon. Antud hulga osahulkade süsteemi nimetatakse tsentreerituks, kui tema mistahes lõplikku osasüsteemi kuuluvate hulkade ühisosa ei ole tühi.

Teoreem. Topoloogiline ruum on kompaktnel parajasti siis, kui tema mistahes kinniste osahulkade tsentreeritud süsteemi kuuluvate hulkade ühisosa ei ole tühi.

Tõestus. 1) Olgu X kompaktnel. Eeldame, et kinnised hulgad F_α moodustavad tsentreeritud süsteemi. Kui oletada, et $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$, siis $X \setminus (\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha) = X$. Seega moodustavad hulgad $X \setminus F_\alpha$ ruumile X lahtise katte. Eraldame temast lõpliku osakatte $X \setminus F_{\alpha_1}, \dots, X \setminus F_{\alpha_n}$, s.t.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_{\alpha_i}) = X$. Siis aga $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{\alpha_i} = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_{\alpha_i})) = \emptyset$,

mis on vastuolus süsteemi F_{α} tsentreeritusega.

2) Oletame, et X ei ole kompaktnel. Valime ruumile X lahtise katte A_{α} (siis $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = X$), mille ükski lõplik osa

$A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}$ ei kata ruumi X , s.t. $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}) \neq \emptyset$. Kuna $\bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_{\alpha_i}) \neq \emptyset$, siis hulgad $X \setminus A_{\alpha}$ moodusta-

vad kinniste hulkade tsentreeritud süsteemi. Seepärast

$\bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha}) \neq \emptyset$ ning järelikult $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = X \setminus (\bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha})) \neq X$,

mis on vastuolus võrdusega $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = X$.

Teoreem on tõestatud.

II Pidevad operaatorid meetrilistea ruumides

§ I. Operaatoritega seotud põhimõisted

Matemaatilisest analüüsist tuntud funktsiooni mõistest on välja kasvanud temast palju üldisem mõiste — operaator. Mitmesugustes ruumides tegutsevad operaatorid ja nende omadused on üks olulisemaid funktsionaalanalüüsi uurimisvaldkondi.

Definitsioon. Kui on antud eeskiri f , mis seab hulga X igale elemendile x vastavusse hulga Y kindla elemendi y , siis öeldakse, et on defineeritud operaator f , ja kirjutatakse $f: X \rightarrow Y$ või $y = f(x), x \in X$, või $y = fx, x \in X$, või $f: x \rightarrow y, x \in X$.

Operaatori asemel räägitakse ka kujutusest või teisendusest, samuti funktsioonist.

Hulka X nimetatakse operaatori f määramispiirkonnaks. Öeldakse, et operaatori f väärtuste piirkond asub hulgas Y . Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x kujutiseks, elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks. Kui $A \subset X$, siis hulka $f(A) = \{y \in Y: y = f(x), x \in A\}$ nimetatakse hulga A kujutiseks. Kui aga $B \subset Y$, siis hulka $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ nimetatakse hulga B originaaliks. Võib juhtuda, et $f^{-1}(B) = \emptyset$, kuigi $B \neq \emptyset$, näiteks $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puhul $\sin^{-1}([2, 3]) = \emptyset$.

Hulkade kujutistel on järgmised põhilised omadused:

- 1) $f(\emptyset) = \emptyset, f(X) \subset Y$,
- 2) kui $A_1 \subset A_2$, siis $f(A_1) \subset f(A_2)$,
- 3) $f(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha})$,
- 4) $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$.

Ülesanne. Tõestada omadused 2)–4) ja leida näide operaatorist, kus omaduses 4) ei ole võrdust.

Hulkade originaalidel on järgmised põhilised omadused:

- 1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$,
- 2) kui $B_1 \subset B_2$, siis $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
- 3) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$,
- 4) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$,
- 5) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

Ülesanne. Tõestada originaalide omadused 2)–5).

Kujutise ja originaali järjestikust võtmist iseloomustavad järgmised omadused:

- 1) kui $A \subset X$, siis $A \subset f^{-1}(f(A))$,
- 2) kui $B \subset Y$, siis $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Nendest omadustest järeldub kohe, et

$$f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$$

Ülesanne. Tõestada omadused 1) ja 2) ning leida näited operaatoritest nii, et nendes omadustes ei oleks võrduseid.

Definitsioon. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse injekttiivseks (üksüheseks), kui $x_1 \neq x_2$ korral $f(x_1) \neq f(x_2)$ (ehk, teisiti öeldes, tingimusest $f(x_1) = f(x_2)$ järeldub, et $x_1 = x_2$), s.t. ühelgi elemendil hulgast Y ei ole üle ühe originaali.

Definitsioon. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse surjekttiivseks (pealekujutuseks), kui $f(X) = Y$, s.t. igal elemendil hulgast Y leidub originaal.

Definitsioon. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse bijekttiivseks (üksüheseks vastavuseks), kui ta on injekttiivne ja surjekttiivne, s.t. igal elemendil hulgast Y leidub parajasti üks originaal.

Kui operaator $f: X \rightarrow Y$ on bijektiivne, siis saab defineerida pöördoperaatori $f^{-1}: Y \rightarrow X$; see on operaator, mis igale elemendile $y \in Y$ seab vastavusse tema originaali $x \in X$, s.t.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Seetõttu, kui öeldakse, et operaatoril f on olemas pöördoperaator või f on pööratav, mõeldakse selle all, et f on bijektiivne.

Operaatorite $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Y \rightarrow Z$ korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse operaatorit, mis igale elemendile $x \in X$ seab vastavusse elemendi $g(f(x))$. Korrutist tähistatakse gf või $g \circ f$, seega

$$(gf)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Operaatorite korrutise mõiste üldistab matemaatilisest analüüsist tuntud liitfunktsiooni mõistet.

Operaatorit $I: X \rightarrow X$, mis on defineeritud võrdusega

$Ix = x$, $x \in X$, nimetatakse ühikoperaatoriks. Pöördoperaatori f^{-1} definitsioonist on selge, et $f^{-1}f = I$ ja $f f^{-1} = I$.

Lause. Kui $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Y \rightarrow X$ ning $gf = I$ ja $fg = I$, siis on olemas f^{-1} ning $f^{-1} = g$.

Tõestus. Operaator f on injektiivne, sest kui $f(x_1) = f(x_2)$, siis $x_1 = (gf)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (gf)(x_2) = x_2$. Operaator f on surjektiivne, sest iga $y \in Y$ korral $f(g(y)) = (fg)(y) = y$. Kuna f on bijektiivne, siis on olemas $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Seejuures

$$f^{-1} = f^{-1}(fg) = (f^{-1}f)g = g.$$

Lause on tõestatud.

Järeldus. Kui operaator f on pööratav, siis on pööratav ka tema pöördoperaator f^{-1} ning $(f^{-1})^{-1} = f$.

Tõestuseks rakendame lauset eeldustel $ff^{-1} = I$ ja $f^{-1}f = I$.

§ 2. Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides

Meenutame, et matemaatilises analüüsis nimetatakse funktsioonil f pidevaks punktis a , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Olgu X ja Y meetrilised ruumid.

Definitsioon. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse pidevaks punktis $a \in X$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $g(x, a) < \delta$, siis $g(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse pidevaks, kui ta on pidev ruumi X igas punktis.

On selge, et operaatori f pidevus punktis a tähendab järgmist: iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ ehk, mis on selle sisalduvusega samaväärne, $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$.

Teoreem. Operaator $f: X \rightarrow Y$ on pidev punktis $a \in X$ parajasti siis, kui mistahes koonduva jada $x_n \rightarrow a$ korral $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Tõestus. 1) Olgu operaator f pidev punktis a . Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et võrratusest $g(x, a) < \delta$ järeljub võrratus $g(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Vaatleme koonduvat jada $x_n \rightarrow a$. Koonduvuse tõttu leidub N nii, et kui $n > N$, siis $g(x_n, a) < \delta$. Kuid siis $g(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Seega $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

2) Eeldame, et $x_n \rightarrow a$ korral $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Oletame vastuväiteliselt, et operaator f ei ole pidev punktis a . Siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $\delta > 0$ korral leidub x_δ , mille puhul $g(x_\delta, a) < \delta$, kuid $g(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Valime jada $\delta_n \rightarrow 0$ (näiteks $\delta_n = \frac{1}{n}$) ning vastavad elemendid x_n , mille korral $g(x_n, a) < \delta_n$, aga $g(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Siis $x_n \rightarrow a$, aga $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Operaator on pidev parajasti siis, kui lahtiste hulkade originaalid on lahtised.

Tõestus. 1) Olgu $f: X \rightarrow Y$ pidev. Olgu hulk $G \subset Y$ lahtine. Vaatleme suvalist elementi $a \in f^{-1}(G)$. Siis $f(a) \in G$ ning hulga G lahtisuse tõttu leidub kera $B(f(a), \varepsilon) \subset G$. Operaatori f pidevuse tõttu leidub kera $B(a, \delta)$ nii, et $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Seepärast $B(a, \delta) \subset f^{-1}(G)$, s.t. element a sisaldub hulgas $f^{-1}(G)$ koos teda ümbritseva keraga. Seega $f^{-1}(G)$ on lahtine.

2) Eeldame, et $f^{-1}(G)$ on lahtine alati, kui $G \subset Y$ on lahtine. Valime vabalt $a \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna $B(f(a), \varepsilon) \subset Y$ on lahtine, siis $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ on lahtine. Järelikult leidub punktil $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ ümbrus $B(a, \delta)$ nii, et $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, mis tähendab operaatori f pidevust punktis a . Kuna $a \in X$ oli suvaline punkt, siis f on pidev.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Operaator on pidev parajasti siis, kui kinniste hulkade originaalid on kinnised.

Tõestus. Vaadeldes kõiki kinniseid hulki $F \subset Y$, pane me tähele, et hulgad $Y \setminus F$ esindavad parajasti kõiki lahtiseid hulki ruumis Y . Hulk $f^{-1}(F) \subset X$ on kinnine parajasti siis, kui hulk $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ on lahtine. Eelmise teoreemi põhjal aga on f pidev parajasti siis, kui hulga $Y \setminus F$ lahtisusest järeldub $f^{-1}(Y \setminus F)$ lahtisus.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Järgmised tingimused on samaväärsed:

- 1) operaator $f: X \rightarrow Y$ on pidev,
- 2) iga $A \subset X$ korral $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,
- 3) iga $B \subset Y$ korral $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$,
- 4) iga $B \subset Y$ korral $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$.

Tõestus. $1) \Rightarrow 2)$. Eeldame, et f on pidev. Sisalduvu-
sest $f(A) \subset \overline{f(A)}$ järeldub, et $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$
ning $A \subset f^{-1}(f(A))$ tõttu $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Et aga $\overline{f(A)}$
kinnisuse ja f pidevuse tõttu $f^{-1}(\overline{f(A)})$ on kinnine, siis
 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, millest järeldub, et $f(\overline{A}) \subset \overline{f(f^{-1}(\overline{f(A)}))} \subset \overline{f(A)}$.

$2) \Rightarrow 3)$. Valime vabalt $B \subset Y$ ning rakendame hulgale
 $A = f^{-1}(B)$ tingimust 2). Siis $f(f^{-1}(B)) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$,
mille abil saame $f^{-1}(\overline{B}) \subset f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(\overline{B})$.

$3) \Rightarrow 4)$. Kui $B \subset Y$, siis tingimuse 3) põhjal
 $f^{-1}(Y \setminus B) \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$. Arvestades võrdust $B^{\circ} = Y \setminus \overline{Y \setminus B}$
(mille esitasime sulundi ja sisemuse mõistega tutvudes),
saame nüüd

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^{\circ}) &= f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset \\ &\subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = (f^{-1}(B))^{\circ}. \end{aligned}$$

$4) \Rightarrow 1)$. Kui $G \subset Y$ on lahtine, siis $G = G^{\circ}$. Tingi-
muse 4) põhjal $f^{-1}(G) \subset (f^{-1}(G))^{\circ}$, mistõttu $f^{-1}(G)$ on
lahtine. Seega on tõestatud, et f on pidev.

Teoreem on tõestatud.

Märkus*. Olgu X ja Y topoloogilised ruumid. Operaato-
rit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse pidevaks punktis $a \in X$, kui
punkti $f(a)$ iga ümbruse V korral leidub punkti a ümbrus
 U nii, et $f(U) \subset V$. Kui X ja Y on meetrilised ruu-
mid, siis see definitsioon on samaväärne paragrahvi algul
toodud operaatori f pidevuse definitsiooniga punktis a : iga
 $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.
Operaatori pidevus topoloogilises ruumis defineeritakse samu-
ti nagu pidevus meetrilises ruumis — pidevusena ruumi igas
punktis. Märkime, et topoloogilistes ruumides jäävad kehtima
kõik selle paragrahvi teoreemid ja nende tõestused, kusjuures
kõikjal, kus esineb jadasid, tuleb need asendada peredega.

§ 3. Banaohti püsipunkti printsiip

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Operaatori $f: X \rightarrow X$ püsipunktiks nimetatakse sellist elementi $x^* \in X$, et $f(x^*) = x^*$.

Teisiti väljendudes võime öelda, et operaatori $f: X \rightarrow X$ püsipunktid on parajasti võrrandi $x = f(x)$ lahendid.

Käesolevas paragrahvis tõestame püsipunkti olemasolu ja ühesuse nn. ahendava operaatori korral.

Definitsioon. Üeldakse, et operaator $f: X \rightarrow X$ on ahendav (ehk lähenemisoperaator ehk suruv operaator), kui leidub $q < 1$ nii, et

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Ahendavatest operaatoritest laiem klass on Lipschitzi tingimust rahuldavad operaatorid: leidub arv L nii, et

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Lipschitzi tingimust rahuldav ning seega ka ahendav operaator on pidev, sest kui $x_n \rightarrow a$, s.t. $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$, siis tingimuse $\rho(f(x_n), f(a)) \leq L \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ tõttu $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Teoreem (Banaohti püsipunkti printsiip). Kui X on täielik meetriline ruum, siis ahendaval operaatoril $f: X \rightarrow X$ on parajasti üks püsipunkt.

Tõestus. Valime vabalt $x_0 \in X$. Olgu $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$. Näitame, et jada x_n on Cauchy jada. Kuna

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q \rho(x_{n-1}, x_n) \leq \\ &\leq q^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n \rho(x_0, x_1), \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} g(x_n, x_{n+p}) &\leq g(x_n, x_{n+1}) + \dots + g(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq q^n g(x_0, x_1) + \dots + q^{n+p-1} g(x_0, x_1) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} g(x_0, x_1) = \frac{q^n}{1-q} g(x_0, x_1) \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Siit on näha, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et kui $n > N$, siis $g(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ iga $p = 1, 2, \dots$ korral. Ruumi X täielikkuse tõttu $x_n \rightarrow x^*$. Ning operaatori f pidevusest järeldub nüüd, et

$$f(x^*) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

s.t. x^* on operaatori f püsipunkt.

Tõestame veel püsipunkti ainsuse. Kui lisaks püsipunktile $x^* = f(x^*)$ leidub $x^{**} = f(x^{**})$, siis

$$g(x^*, x^{**}) = g(f(x^*), f(x^{**})) \leq q g(x^*, x^{**}),$$

mis tingimuse $q < 1$ tõttu kehtib parajasti siis, kui

$$g(x^*, x^{**}) = 0. \text{ Kuid sel juhul } x^* = x^{**}.$$

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et ülaltoodud teoreemis püsipunkti olemasolu tõestus on konstruktiivne — temas näidatakse ära konkreetne tee püsipunkti leidmiseks. Nimelt tõestatakse, et kui x_0 on suvaline punkt ruumis X , siis eeskirja $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, järgi moodustatud jada x_n koondub püsipunktiks x^* .

Kui $f: X \rightarrow X$, siis tähistame $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$.

Teoreem. Kui X on täielik meetriline ruum ja leidub n nii, et operaator f^n on ahendav, siis operaatoril f on parajasti üks püsipunkt.

Tõestus. Banaachi püsipunkti printsiibi põhjal leidub operaatoril f^n parajasti üks püsipunkt $x^* = f^n(x^*)$. Kuna $f(x^*) = f(f^n(x^*)) = f^n(f(x^*))$, siis ka $f(x^*)$ on operaatori f^n püsipunkt. Seepärast $f(x^*) = x^*$. Kui veel

$x^{**} = f(x^{**})$, siis $x^{**} = f^n(x^{**})$, seega $x^{**} = x^*$.

§ 4. Banachi püsipunkti printsiibi rakendus

1. Tõestame püsipunkti printsiibi abil diferentsiaalvõrrandite kursusest tuntud Cauchy teoreemi, mis väidab, et kui funktsioon $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on piirkond (s.t. laheline sidus hulk), on pidev ja rahuldab muutuja y järgi Lipschitzi tingimust (leidub L nii, et $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$, $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{D}$), siis algtingimusega ülesandel

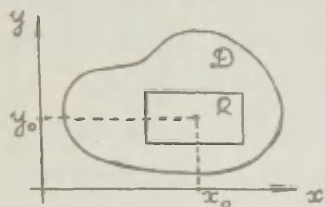
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on iga $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ korral parajasti üks lahend.

Vaadeldav algtingimusega ülesanne on samaväärne integraalvõrrandiga

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Võtame punkti (x_0, y_0) ümber kinnise ristküliku $R \subset \mathcal{D}$



nii, et (x_0, y_0) oleks talle keskpunkt. Funktsioon f on pidevuse tõttu tõkestatud kinnisel ristkülikul R , s.t. $|f(x, y)| \leq M$, kui $(x, y) \in R$.

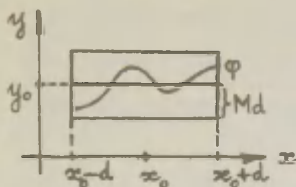
Valime $d > 0$ nii, et

- 1) kui $|x - x_0| \leq d$ ja $|y - y_0| \leq Md$, siis $(x, y) \in R$,
- 2) $Ld < 1$.

Vaatleme hulka $B = \{ \varphi \in C[x_0 - d, x_0 + d] :$

$|\varphi(x) - y_0| \leq Md$, kui $x \in [x_0 - d, x_0 + d] \}$. Hulk B koosneb lõigul $[x_0 - d, x_0 + d]$ määratud pidevatest funktsioonidest, mille graafik paikneb ribas ümber funktsiooni $y = y_0$.

Kuna $B = \bar{B}(y_0, Md) = \{\varphi : \varphi(y_0) \leq Md\}$ (siin y_0 on



konstantne funktsioon) on kinnine hulk (kinnine kera) täielikus meetrilises ruumis $C[x_0 - d, x_0 + d]$, siis B on ka ise täielik meetri-line ruum.

Vaatleme operaatorit g , mis määratakse võrdusega

$$(g(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad y \in B.$$

Näitame, et $g: B \rightarrow B$ ja g on ahendav. Kui $y \in B$, siis $x \in [x_0 - d, x_0 + d]$ korral

$$\begin{aligned} |(g(y))(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \right| \leq Md, \end{aligned}$$

sest $(s, y(s)) \in R$ ning $|f(s, y(s))| \leq M$. Seega $g(y) \in B$. Kui aga $y_1, y_2 \in B$, siis

$$\begin{aligned} \rho(g(y_1), g(y_2)) &= \max_{|x - x_0| \leq d} |(g(y_1))(x) - (g(y_2))(x)| = \\ &= \max_{|x - x_0| \leq d} \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \right|, \end{aligned}$$

millest hinnangu

$$|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \leq L \max_{|x - x_0| \leq d} |y_1(x) - y_2(x)|$$

abil saame, et

$$\rho(g(y_1), g(y_2)) \leq Ld \rho(y_1, y_2).$$

Tingimuse $Ld < 1$ tõttu on g ahendav.

Püsipunkti printsiibi põhjal on võrrandil $y = g(y)$ parajasti üks lahend, see ongi vaadeldava integraalvõrrandi ja ka algtingimusega ülesande ainus lahend.

2. Vaatleme Fredholmi integraalvõrrandit

$$x(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b],$$

kus antud on ruudul $[a, b] \times [a, b]$ määratud funktsioon

$\mathcal{K}(t, s)$ (integraalvõrrandi tuum) ja lõigul $[a, b]$ määratud funktsioon $f(t)$ (võrrandi vabaliige), otsitavaks on funktsioon $x(t)$. Näitame, et kui \mathcal{K} ja f on pidevad ning $\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds < 1$, siis Fredholmi integraalvõrrandil on parajasti üks lõigus $[a, b]$ pidev lahend.

Defineerime integraaloperaatori $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ võrdusega

$$(K(x))(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)ds + f(t), \quad x \in C[a, b], \quad t \in [a, b].$$

(funktsiooni $t \rightarrow (K(x))(t)$ pidevus järeldub integraali omadustest). Näitame, et tehtud eeldustel on operaator K ahendav.

Kui $x_1, x_2 \in C[a, b]$, siis

$$\begin{aligned} \rho(K(x_1), K(x_2)) &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x_1(s)ds - \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x_2(s)ds \right| = \\ &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t, s)(x_1(s) - x_2(s))ds \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Püsipunkti printsiibi põhjal on operaatoril K parajasti üks püsipunkt, mis on ühtlasi Fredholmi integraalvõrrandi ainsaks pidevaks lahendiks.

3. Vaatleme veel Volterra integraalvõrrandit

$$x(t) = \int_a^t \mathcal{K}(t, s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [a, b],$$

kus tuum \mathcal{K} ja vabaliige f on antud ning otsitavaks on funktsioon x . Tõestame, et kui \mathcal{K} ja f on pidevad, siis Volterra integraalvõrrandil on parajasti üks lõigus $[a, b]$ pidev lahend.

Siin defineerime integraaloperaatori $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ võrdusega

$$(K(x))(t) = \int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in C[a,b], t \in [a,b],$$

(funktsiooni $t \rightarrow (K(x))(t)$ pidevus järeldeb jällegi integraali omadustest). Näitame, et küllalt suure naturaalarvu n korral on K^n ahendav. Valides vabalt $x_1, x_2 \in C[a,b]$, saame

$$\begin{aligned} |(K(x_1))(t) - (K(x_2))(t)| &= \left| \int_a^t \mathcal{K}(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds \right| \leq \\ &\leq M(t-a) \max_{a \leq s \leq t} |x_1(s) - x_2(s)|, \end{aligned}$$

kus $M = \max_{a \leq t, s \leq b} |\mathcal{K}(t,s)|$. Järelikult

$$\begin{aligned} |(K^2(x_1))(t) - (K^2(x_2))(t)| &\leq \int_a^t |\mathcal{K}(t,s)| |(K(x_1))(s) - (K(x_2))(s)| ds \leq \\ &\leq M^2 \int_a^t (t-s) \max_{a \leq \tau \leq s} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| ds \leq \\ &\leq \frac{M^2(t-a)^2}{2} \max_{a \leq s \leq t} |x_1(s) - x_2(s)|. \end{aligned}$$

Analoogiliselt jätkates jõuame võrratuseni

$$|(K^n(x_1))(t) - (K^n(x_2))(t)| \leq \frac{M^n(t-a)^n}{n!} \max_{a \leq s \leq t} |x_1(s) - x_2(s)|,$$

mille tõttu

$$\begin{aligned} \rho(K^n(x_1), K^n(x_2)) &= \max_{a \leq t \leq b} |(K^n(x_1))(t) - (K^n(x_2))(t)| \leq \\ &\leq \frac{M^n(b-a)^n}{n!} \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Küllalt suure arvu n korral $\frac{M^n(b-a)^n}{n!} < 1$, mis tähendab

K^n ahendavust ning lubab väita Volterra integraalvõrrandi ühest lahenduvust.

§ 5. Kompaktsel hulgal määratud funktsionaalid

Matemaatilisest analüüsist on tuntud Weierstrassi teoreem, mis väidab, et lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon on

tõkestatud ja saavutab oma ekstreemaaleed väärtused (ülemise ja alumise raja). Järgnevas näeme, et lõigu $[a, b]$ võib asendada suvalise kompaktsel hulga.

Definitsioon. Operaatorit, mille väärtused on arvud (s.t. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ või $f: X \rightarrow \mathbb{C}$) nimetatakse funktsionaaliks (vastavalt reaalseks või kompleksseks).

Teoreem. Kompaktsel hulgal pidev funktsionaal on tõkestatud.

Tõestus. Vaatleme pidevat funktsionaali $f: K \rightarrow \mathbb{K}$, kus K on kompaktnen hulk meetrilises ruumis. Näitame funktsionaali f tõkestatust, s.t. näitame, et $|f(x)| \leq M$ iga $x \in K$ ja mingi M korral. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole tõkestatud. Siis leidub jada $x_n \in K$ nii, et $|f(x_n)| \rightarrow \infty$. Hulga K kompaktsus võimaldab leida osajada $x_{n_k} \rightarrow x \in K$. Funktsionaali f pidevuse tõttu $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in \mathbb{K}$, mis on vastuolus tingimusega $|f(x_{n_k})| \rightarrow \infty$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Kompaktsel hulgal pidev reaalne funktsionaal saavutab oma ülemise ja alumise raja.

Tõestus. Olgu funktsionaal $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ pidev kompaktsel hulgal K . Eelmise teoreemi põhjal on hulk $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ tõkestatud, seega $M = \sup f(K) \in \mathbb{R}$ ja $m = \inf f(K) \in \mathbb{R}$. Teoreem väidab, et leiduvad $x^*, x_* \in K$ nii, et $f(x^*) = M$ ja $f(x_*) = m$.

Tõestame, et f saavutab oma ülemise raja. Supreemumi definitsiooni kohaselt leidub jada $x_n \in K$ nii, et $f(x_n) \rightarrow M$. Hulga K kompaktsus võimaldab leida osajada $x_{n_k} \rightarrow x^* \in K$. Kuna funktsionaali f pidevuse tõttu $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x^*)$ ning samal ajal $f(x_{n_k}) \rightarrow M$, siis $f(x^*) = M$.

Analoogiliselt tõestatakse, et f saavutab oma alumise

raja.

Teoreem on tõestatud.

§ 6*. Üldistatud Arzelà-Ascoli teoreem

Arzelà-Ascoli teoreem andis tarviliku ja piisava tingimuse hulga suhteliseks kompaktsuseks lõigus pidevate funktsioonide ruumis. Käesolevas paragrahvis üldistame selle teoreemi meetrilistea ruumides tegutsevatele pidevatele operaatoritele. Alustame aga vajaminevatest mõistetest ja abitulemustest.

Olgu X ja Y meetrilised ruumid. Operaatorit $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse ühtlaselt pidevaks, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $x_1, x_2 \in X$ ja $\rho(x_1, x_2) < \delta$, siis $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Olgu K kompaktsu meetriline ruum ja Y meetriline ruum. Vaatleme kõigi pidevate operaatorite $f: K \rightarrow Y$ hulka $C(K; Y)$.

Lause. Hulka $C(K; Y)$ kuuluvad operaatorid on ühtlaselt pidevad.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $f \in C(K; Y)$, mis ei ole ühtlaselt pidev. Siis leiduvad $\varepsilon > 0$ ja elemendid $x_n, x'_n \in K, n \in \mathbb{N}$, nii, et $\rho(x_n, x'_n) \rightarrow 0$, kuid $\rho(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Hulga K kompaktsuse tõttu saame eraldada koonduva osajada $x_n, n \in N' \subset \mathbb{N}$. Olgu $x_n \xrightarrow[n \in N']{} x \in K$, siis ka $x'_n \xrightarrow[n \in N']{} x$. Kuna operaatori f pidevuse tõttu $f(x_n) \xrightarrow[n \in N']{} f(x)$ ja $f(x'_n) \xrightarrow[n \in N']{} f(x)$, siis

$$\rho(f(x_n), f(x'_n)) \leq \rho(f(x_n), f(x)) + \rho(f(x'_n), f(x)) \xrightarrow[n \in N']{} 0,$$

millega oleme jõudnud vastuoluni.

Lause. Hulka $C(K; Y)$ kuuluvad operaatorid on tõkestatud, s.t. iga $f \in C(K; Y)$ korral leidub arv M ja element $a \in Y$ nii, et $\rho(f(x), a) \leq M$, kui $x \in K$ (operaatori $f \in C(K; Y)$ väärtused paiknevad mingis kerases $\bar{B}(a, M) \subset Y$).

Tõestus. Oletame, et mingi operaator $f \in C(K; Y)$ ei ole tõkestatud, s.t. leiduvad $x_n \in K$ ja $a \in Y$ nii, et $\rho(f(x_n), a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Hulga K kompaktsuse tõttu saame eraldada $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $x_n \xrightarrow{n \in N'} x \in K$. Kuna $f(x_n) \xrightarrow{n \in N'} f(x)$, s.t. $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{n \in N'} 0$, siis $\rho(f(x_n), a) \leq \rho(f(x_n), f(x)) + \rho(f(x), a) \xrightarrow{n \in N'} \rho(f(x), a)$, mis on vastuolus tingimusega $\rho(f(x_n), a) \xrightarrow{n \in N'} \infty$.

Definiime kauguse

$$\rho(f, g) = \max_{x \in K} \rho(f(x), g(x)), \quad f, g \in C(K; Y)$$

(märgime, et funktsionaal $x \rightarrow \rho(f(x), g(x))$, olles pidev kompaktsel hulgal K , saavutab ülemise raja); vahetu kontroll näitab, et $C(K; Y)$ on meetriline ruum.

Operaatorite hulka $A \subset C(K; Y)$ nimetatakse ühtlaselt tõkestatuks, kui leidub arv M ja element $a \in Y$ nii, et, $\rho(f(x), a) \leq M$ iga $f \in A$ ja iga $x \in K$ korral (kõikide operaatorite $f \in A$ väärtused paiknevad ühes kerases $\bar{B}(a, M) \subset Y$).

Operaatorite hulka $A \subset C(K; Y)$ nimetatakse võrdpidevaks, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, kui $x_1, x_2 \in K$, $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ja $f \in A$.

Alljärgnevas teoreemis on meetriline ruum Y selline, et tema iga tõkestatud hulk on suhteliselt kompaktne. Märkime, et niisugune ruum on täielik, sest iga tema elementi-

dest moodustatud Cauchy jada, olles tõkestatud, sisaldab koonduva osajada ning koondub seetõttu ka ise. Taolisteks ruumideks on kõik lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid (vt. järgmine peatükk), aga ka kõik kompaktsed meetrilised ruumid.

Teoreem (üldistatud Arzelà-Ascoli teoreem). Olgu \mathcal{Y} niisugune meetriline ruum, kus iga tõkestatud hulk on suhteliselt kompaktne. Hulk ruumis $\mathcal{C}(K; \mathcal{Y})$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on ühtlaselt tõkestatud ja võrdpidev.

Tõestus. Tingimuste tarvilikkus hulga suhteliseks kompaktsuseks tõestatakse samuti nagu Arzelà-Ascoli teoreemi puhul (toetudes äsjatõestatud lausetele). Asume tõestama piisavust.

Vaatleme kõigi tõkestatud operaatorite $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$ hulka $M(K; \mathcal{Y})$, mis on kauguse

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in K} \rho(f(x), g(x)), \quad f, g \in M(K; \mathcal{Y}),$$

suhtes meetriline ruum. Samuti nagu ruumi $M[a, b]$ korral, saab tõestada ruumi $M(K; \mathcal{Y})$ täielikkuse (meenutame, et \mathcal{Y} on täielik teoreemi eelduse põhjal). Ruum $\mathcal{C}(K; \mathcal{Y})$ on kinine ruumis $M(K; \mathcal{Y})$, mis järeldeb asjaolust, et ühtlaselt koonduvate pidevate operaatorite piiroperaator on samuti pidev (tõestus on põhimõtteliselt sama, mis matemaatilises analüüsis funktsioonide juhul). Seepärast piisab tõestada vaadeldava hulga $A \subset \mathcal{C}(K; \mathcal{Y})$ suhtelist kompaktsust ruumis $M(K; \mathcal{Y})$, siin aga tuginevime Hausdorffi teoreemile.

Anname ette $\varepsilon > 0$ ning kasutades hulka A kuuluvate operaatorite võrdpidevust, leiame $\delta > 0$ nii, et kui $x_1, x_2 \in K$, $\rho(x_1, x_2) < \delta$, $f \in A$, siis $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hulga K kompaktsuse tõttu saame talle leida lõpliku $\frac{\delta}{2}$ -võrgu, seega $K = \bigcup_{i=1}^n B_i$, kus B_i on kerad raadiusega $\frac{\delta}{2}$.

Moodustame hulgid $E_1 = B_1$, $E_i = B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$, $i = 2, \dots, n$.

Siis $E_i \cap E_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $K = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Üldisast kitsendamata võime eeldada, et $E_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, vastasel korral jätame tühjad hulgid vaatluse alt välja. Valime veel vabalt elemendid $e_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n$, ning märgime, et kui $x \in E_i$, siis $\rho(x, e_i) < \delta$.

Hulka A kuuluvad operaatorid on ühtlaselt tõkestatud, s.t. nende väärtused paiknevad mingis keras $\bar{B}(a, M) \subset Y$. Belduse kohaselt on $\bar{B}(a, M)$ kompaktne, mistõttu saame tal leida lõpliku $\frac{\varepsilon}{2}$ -võrgu $\{y_1, \dots, y_m\}$. Olgu B kõigi selliste operaatorite $g: K \rightarrow Y$ hulk, mis hulkadel E_i omandavad konstantselt väärtusi y_j , s.t. kui $g \in B$, siis iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leidub y_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, nii, et $g(x) = y_j$, kui $x \in E_i$. On selge, et hulk B on lõplik. Näitame, et B on ε -võrk hulgale A ruumis $M(K; Y)$. Vaatleme suvalist operaatorit $f \in A$. Siis $f(e_i) \in \bar{B}(a, M)$, $i = 1, \dots, n$. Sõltuvalt indeksist i leiame punktid y_j nii, et $\rho(f(e_i), y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ ning moodustame operaatori $g \in B$ nii, et $g(e_i) = y_j$, $i = 1, \dots, n$. Vaatleme elementi $x \in K$, ta satub ühte hulkadest E_i . Võrratusest

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(e_i)) + \rho(f(e_i), g(e_i)) + \rho(g(e_i), g(x))$$

saame

$$\rho(f, g) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in E_i} \rho(f(x), f(e_i)) + \max_{1 \leq i \leq n} \rho(f(e_i), g(e_i)) < \varepsilon.$$

Teoreem on tõestatud.

III Normeeritud ruumid

Tavaliselt kasutavad funktsionaalsnlüüs ja tema rakedused ruume, mille elemente on võimalik liita ja arvudega korrutada ehk, teisiti öeldes, lineaarse struktuuriga ruume. Erinevalt lineaaralgebrast, kus taolised ruumid on iseseisvaks uurimisobjektiks, nõutakse funktsionaalanalüüsis, et ruumides oleks veel algebraaliste teheteiga kooskõlas olev topoloogiline struktuur, näiteks meetrika. Normeeritud ruumid on nende hulgas küllalt üldine, kuid samal ajal rakedustes laialdaselt esinev ruumide klass.

§ 1. Vektorruumid

1. Vektorruumi mõiste. Olgu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definitsioon. Hulka X nimetatakse vektorruumiks üle korpuse \mathbb{K} , kui

a) igale elemendipaarile $x, y \in X$ on vastavusse seatud kindel element $x + y \in X$ (summa) nii, et

1° $x + y = y + x$ (kommutatiivsus),

2° $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assotsiatiivsus),

3° leidub nn. nullelement $0 \in X$ nii, et $x + 0 = x$ iga $x \in X$ korral,

4° iga $x \in X$ korral leidub nn. vastandelement $-x \in X$ nii, et $x + (-x) = 0$,

b) igale arvule $\lambda \in \mathbb{K}$ ja elemendile $x \in X$ on vastavusse seatud kindel element $\lambda x \in X$ (korrutis) nii,

et

5° $1x = x$,

6° $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

8° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

} (distributiivsus)

Aksiomid 1°-4° ütlevad, et tegemist on liitmise suhtes kommutatiivse rühmaga (Abeli rühmaga). Lisaks liitmisele on vektorruumis defineeritud arvuga korrutamise tehe, mis rahuldab tingimusi 5°-8°.

Kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis räägitakse reaalsest vektorruumist, kui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, siis komplekssest vektorruumist.

Märgime, et 0 tähistab nii arvu "null" kui ka vektorruumi nullelementi. Vektorruumi X elemente nimetatakse mõnikord vektoriteks, korpusse \mathbb{K} elemente aga skalaarideks. Vektorruumi nimetatakse ka lineaarseks ruumiks.

2. Järeldusi aksiomidest. Esitame aksinomidest mõned järeldused, mida edaspidistes arutlustes sageli kasutame.

1) Nullelement $0 \in X$ on ainus.

2) Iga $x \in X$ korral on vastandelement $-x$ ainus.

Järeldused 1) ja 2) kehtivad mistahes rühmas.

3) Vastandelemendi ühesus lubab defineerida lahutamistehte võrdusega

$$x - y = x + (-y).$$

4) $x = y$ parajasti siis, kui $x - y = 0$.

5) $0x = 0$ iga $x \in X$ korral, $\lambda 0 = 0$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral.

6) $(-1)x = -x$.

7) Kui $\lambda x = 0$, siis $\lambda = 0$ või $x = 0$.

Lähtudes vektorruumi aksiomidest on ülaltoodud järeldusi üsna lihtne tõestada. Näiteks viimase järelduse põhjendamiseks märgime, et kui $\lambda \neq 0$, siis $x = 1x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0 = 0$; aga kui $x \neq 0$, siis $\lambda = 0$, sest $\lambda \neq 0$ toob endaga kaasa võrduse $x = 0$.

Definitsioon. Vektorruumi alamruumiks nimetatakse sellist mittetühja alamhulka, mis on kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes, s.t. $Y \subset X$ on alamruum, kui

$Y \neq \emptyset$ ja

1) iga $x, y \in Y$ korral $x + y \in Y$,

2) iga $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Y$ korral $\lambda x \in Y$.

Vektorruumi alamruum on ise vektorruum, sest aksioomide 1°, 2°, 5°-8° kehtivus on vahetult selge, aksioomi 3° kehtivus järeldub sellest, et kui $x \in Y$, siis $0 \in \mathbb{K}$ tõttu $0x = 0 \in Y$ ja aksioomi 4° kehtivus sellest, et kui $x \in Y$, siis $-x = (-1)x \in Y$.

Vektorruumi alamruumi asemel räägitakse ka vektoralamruumist või lineaarsest hulgast. Selline terminoloogia on vajalik näiteks juhul, kui vektorruum kujutab endast samal ajal ka meetrilist ruumi, kuid tema alamruumis on antud mingi teine meetrika, s.t. tegemist on alamruumiga vektorruumis, kuid mitte meetrilises ruumis.

3. Vektorruumide näiteid. Kõik eespool vaadeldud konkreetseid meetrilised ruumid, välja arvatud diskreetne ruum, on tegelikult vektorruumid.

Näide 1. Hulk $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on vektorruum (üle \mathbb{K}), kui defineerida

$$\begin{aligned}(\xi_1, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \dots, \eta_n) &= (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n), \\ \lambda (\xi_1, \dots, \xi_n) &= (\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_n),\end{aligned}$$

s.t. vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine toimub koordinaatide kaupa. Nullelemendiks selles ruumis on $0 = (0, \dots, 0)$.

Näide 2. Ruum $S = \{(\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on vektorruum (üle \mathbb{K}), kui defineerida

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2, \dots) + (\eta_1, \eta_2, \dots) &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots), \\ \lambda (\xi_1, \xi_2, \dots) &= (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots).\end{aligned}$$

Nullelemendiks ruumis S on $0 = (0, 0, \dots)$.

Teised jadaruumid $\ell_p \subset C_0 \subset C \subset M \subset S$, mida eespool vaatlesime, on samuti vektorruumid, sest nad on ruumis S vektoralamruumid. Selle näitamiseks tuleks veenduda, et liitmine ja skalaariga korrutamine ei vii nendest ruumidest välja. Näiteks, kui $x, y \in m$, siis $x + y \in m$, sest kahe tõkestatud jada summa on ka tõkestatud. Analoogiliselt, kui $x \in m$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, siis $\lambda x \in m$.

Näide 3. Hõigi funktsioonide $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ hulk $F[a, b]$ on vektorruum, kui defineerida

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad t \in [a, b],$$

$$(\lambda x)(t) = \lambda x(t), \quad t \in [a, b],$$

s.t. liitmine ja arvuga korrutamine toimub punktiviisi. Nullelemendiks ruumis $F[a, b]$ on nullfunktsioon $x(t) = 0$, $t \in [a, b]$.

Ka ruumi $F[a, b]$ alamruumid $C^k[a, b] \subset W_p^k[a, b] \subset C[a, b] \subset M[a, b] \subset F[a, b]$ on vektorruumid. Tõestuse juures on näiteks $C[a, b]$ puhul vaja silmas pidada, et kahe pideva funktsiooni summa on pidev funktsioon ning pideva funktsiooni korrutis arvuga on samuti pidev funktsioon.

Ka $L_p(a, b)$ on vektorruum, kui temas tehted defineerida nagu ruumis $F[a, b]$. Nullelemendiks ruumis $L_p(a, b)$ on nende funktsioonide klass, mis ühtivad nullfunktsiooniga pea-aegu kõikjal lõigus $[a, b]$.

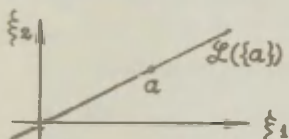
Meetrilise ruumi iga osahulk on ise ka meetriline ruum (meetrilise ruumi alamruum). Vektorruumi osahulk aga ei tarvitse vektorruum olla, näiteks vektorruumis \mathbb{R} osahulk $[0, 1]$ ei ole vektoralamruum, sest $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in [0, 1]$, kuid $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \notin [0, 1]$.

4. Hulga lineaarne kate. Olgu X vektorruum üle \mathbb{K} . Elementide $x_1, \dots, x_n \in X$ lineaarseks kombinatsiooniks nimetatakse igat elementi, mida saab esitada kujul $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, kus $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Definitsioon. Hulga $A \subset X$ lineaarseks kateks $\mathcal{L}(A)$ nimetatakse hulga A elementide kõikvõimalike lineaarsete kombinatsioonide hulka, s.t.

$$\mathcal{L}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Näide. Olgu $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{a\}$, $a \neq 0$. Siis $\mathcal{L}(\{a\}) = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ on sirge, mis läbib punkte 0 ja a .



Lause. Hulga A lineaarne kate on vähim alamruum, mis sisaldab hulka A .

Tõestus. 1) Näitame, et $\mathcal{L}(A)$ on alamruum. Kui

$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, $a_i \in A$, ja $y = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$, $b_i \in A$, siis $x + y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$ on ka hulga A elementide lineaarne kombinatsioon, seega $\mathcal{L}(A)$ element. Ning kui $\lambda \in \mathbb{K}$, siis $\lambda x = \sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i a_i \in \mathcal{L}(A)$.

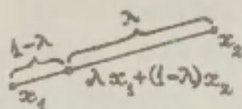
2) Näitame, et kui $A \subset Y$ ja Y on alamruum, siis $\mathcal{L}(A) \subset Y$. Olgu $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, $a_i \in A$. Kuna $a_i \in Y$ ja Y on alamruum, siis $x \in Y$. Seega $\mathcal{L}(A) \subset Y$.

Lause on tõestatud.

5. Kumerad hulgad, hulga kumer kate. Olgu X vektorruum.

Definitsioon. Hulka $A \subset X$ nimetatakse kumeraks, kui iga $x_1, x_2 \in A$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$. Geomeetriliselt tõlgendatuna moodustavad punktid

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda \in [0, 1]$, punkte x_1 ja x_2 ühendava sirglõigu. Seega tähendab hulga kumerus, et hulk sisaldab koos iga kahe oma punktiga ka nendevahelise sirglõigu.



Kumeruse mõiste on kooskõlas meie geomeetrilise kujutlusega: näiteks tasandi \mathbb{R}^2 niisugused punktihulgad nagu ringid, ristkülikud, sirged, pooltasandid on kumerad. Ka kõik lahtised ja kinnised kerad meie poolt vaadeldud konkreetsetes ruumides, erijuhul vahemikud ja lõigud ruumis \mathbb{R} on kumerad hulgad.

Lause. Kumerate hulkade ühisosa on kumer hulk.

Tõestus. Olgu $A = \bigcap A_\alpha$ ning hulgad A_α kumerad. Kui $x_1, x_2 \in A$, siis $x_1, x_2 \in A_\alpha$ iga α korral ning iga hulk A_α sisaldab punkte x_1 ja x_2 ühendava sirglõigu. Järelikult sisaldub see sirglõik hulgas A . Sellega on A kumerus tõestatud.

Märgime, et kumerate hulkade ühend ja vahe ei tarvitse olla kumerad.

Elementide $x_1, \dots, x_n \in X$ kumeraks kombinatsiooniks nimetatakse igat elementi, mida saab esitada kujul $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, kus $\lambda_i \geq 0$ ja $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Lause. Kumer hulk sisaldab oma elementide kõikvõimalikud kumerad kombinatsioonid.

Tõestus. Olgu hulk A kumer. Vaatleme kumeraid kombinatsioone $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, kus $a_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Kui $n=1$, siis kumer kombinatsioon $\lambda a_1 = a_1 \in A$. Kui aga $n=2$, siis $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1)a_2 \in A$, sest $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ning $\lambda_1 \in [0, 1]$. Oletame induktsioonieeldusena, et $(n-1)$ -liikmelised kumerad kombinatsioonid kuuluvad hulka A . Kumeras kombinatsioonis $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ võime

eeldada, et $\lambda_n \neq 1$ (vastasel korral oleks $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_n \in A$). Seega

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \lambda_n a_n + (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} a_i \in A,$$

sest $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} a_i \in A$, kuna $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \geq 0$ ning

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_n} (1-\lambda_n) = 1.$$

Lause on tõestatud.

Definitsioon. Hulga A kumeraks katteks $\mathcal{K}(A)$ nimetatakse hulga A kõikvõimalike kumerate kombinatsioonide hulka, s.t.

$$\mathcal{K}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lause. Hulga A kumer kate on vähim kumer hulk, mis sisaldab hulka A .

Tõestus. 1) Näitame, et $\mathcal{K}(A)$ on kumer. Kui

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ ja}$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i, b_i \in A, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1, \text{ siis } \lambda \in (0, 1)$$

korral $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^m (1-\lambda)\mu_i b_i$, kusjuures $\lambda \lambda_i \geq 0$, $(1-\lambda)\mu_i \geq 0$ ning $\sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i + \sum_{i=1}^m (1-\lambda)\mu_i = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Sellega on $\mathcal{K}(A)$ kumerus tõestatud.

2) Näitame, et kui $A \subset Y$ ja Y on kumer hulk, siis $\mathcal{K}(A) \subset Y$. Viimane sisalduvus järeldub aga sellest, et Y kui kumer hulk sisaldab oma osahulga A elementide kumerad kombinatsioonid.

Lause on tõestatud.

§ 2. Normeeritud ruumi ja Banachi ruumi mõiste

Definitsioon. Vektorruumi X nimetatakse normeeritud

ruumiks, kui igale tema elemendile $x \in X$ on vastavusse seatud kindel reaalarv $\|x\|$, mida nimetatakse elemendi x normiks, nii, et on täidetud tingimused:

$$1^\circ \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$2^\circ \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$3^\circ \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tingimusi 1° - 3° nimetatakse normi aksioomideks, 1° on samasuse aksioom, 2° homogeensuse aksioom ning 3° on kolmnurga võrratus.

Lause. Normeeritud ruum on meetriline ruum kaugusega

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Tõestus. Lause põhjendavad järgmised võrduste ja sama-
väärsuste ahelad:

$$1^\circ \quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$2^\circ \quad \begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(x - y)\| = \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

$$3^\circ \quad \begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = \varrho(x, z) + \varrho(z, y). \end{aligned}$$

Lause järeldusena märgime (see järeldub ka vahetult normi aksioomidest), et $\|x\| \geq 0$, sest $\|x\| = \varrho(x, 0)$ ja kahe elemendi vaheline kaugus on alati mittenegatiivne.

Et normeeritud ruum on meetriline ruum, siis on temas olemas ka kõik meetrilises ruumis vaadeldavad mõisted. Näiteks lahtine kera $B(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}$, kinnine kera $\bar{B}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leq r\}$, kinnised ja lahtised hulgad, sisemus, raja, sulund, separaablus, täielikkus.

Definitsioon. Täielikku normeeritud ruumi nimetatakse Banachi ruumiks.

Paneme normide abil kirja mõned mõisted ja omadused, mis osaliselt esinesid juba meetriliste ruumide käsitlemisel.

1) Koondumine $x_n \rightarrow x$ tähendab, et $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

2) Jada x_n on fundamentaalne parajasti siis, kui

$$\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

3) Tagurpidi kolmnurga võrratus omandab kuju $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Põhjenduseks tarvitseb võrratuses

$$|\varphi(x, z) - \varphi(y, z)| \leq \varphi(x, y) \text{ võtta } z = 0.$$

4) Normi pidevus tähendab, et kui $x_n \rightarrow x$, siis

$\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Põhjenduseks kasutame kauguse pidevust ühe argumendi järgi: kui $x_n \rightarrow x$, siis $\varphi(x_n, 0) \rightarrow \varphi(x, 0)$.

5) Algebraised tehted - liitmine ja arvuga korrutamine - on pidevad, s.t. kui $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ja $\lambda_n \rightarrow \lambda$, siis $x_n + y_n \rightarrow x + y$ ja $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$. Tõestuseks märgime, et

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)\| \leq \\ &\leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \rightarrow |\lambda| 0 + 0 \|x\| = 0. \end{aligned}$$

Tehete pidevuse (omadus 5)) kohta öeldakse ka, et normeeritud ruumis on topoloogiline struktuur (meetrika) ja algebraalne struktuur omavahel kooskõlas.

Eespool vaadeldud konkreetsetest ruumidest on normeeritud ruumid:

m_n normiga

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in m_n;$$

l_p^n normiga

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p}, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in l_p^n;$$

m, c, c_0 normiga

$$\|x\| = \sup_{1 \leq k < \infty} |\xi_k|, \quad x = (\xi_k) \in m;$$

$l_p, 1 \leq p < \infty$, normiga

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}, \quad x = (\xi_k) \in l_p;$$

$M[a, b]$ normiga

$$\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x = x(t) \in M[a, b];$$

$C[a, b]$ normiga

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x = x(t) \in C[a, b];$$

$C^n[a, b]$ normiga

$$\|x\| = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|, \quad x = x(t) \in C^n[a, b];$$

$L_p(a, b)$ normiga

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad x = x(t) \in L_p(a, b);$$

$W_p^n(a, b)$ normiga

$$\|x\| = \left(\sum_{k=0}^n \int_a^b |x^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad x = x(t) \in W_p^n(a, b).$$

Normi aksioomide kontroll kõigi nende näidete puhul tugineb samadele ideedele, mida kasutasime meetrika aksioomide põhjendamisel. Seejuures väärib märkimist, et Minkowski vörratus ongi kolmnurga vörratus ruumi l_p^n normi jaoks.

On selge, et kõigi ülaltoodud näidete puhul normi poolt defineeritud kaugus (s.t. elementide vahe norm) ühtib antud ruumis juba olemasoleva kaugusega. Kuna kõik vaadeldud ruumid on täielikud, siis nad on kõik Banachi ruumid.

Kõigi jadade ruum S on samaaegselt vektorruum ja meetriline ruum. Kuid ruumis S ei eksisteeri sellist normi, mis määraks ruumis S olemasoleva kauguse. Selle kohta öeldakse, et ruum S ei ole normeeruv. Põhjus on siin järgmine. Niipea, kui normeeritud ruumis leidub $x_0 \neq 0$, on seal olemas ka element, mille norm võrdub mistahes etteantud positiivse arvuga λ (selliseks elementiks on näiteks

$\frac{\lambda}{\|x_0\|} x_0$). Seetõttu võib normeeritud ruumis kaugus

$\rho(x, 0) = \|x\|$ olla kuitahes suur. Aga ruumis S on

$\rho(x, y) < 1$ kõikide elementide x ja y korral.

Olgu X samaaegselt vektorruum ja meetriline ruum. Küsime, millal saab ruumi X muuta normeeritud ruumiks (s.t. temas defineerida normi) nii, et norm määraks ruumis X juba olemasoleva kauguse?

Me teame, et kui X on normeeritud ruum, siis tema kaugus $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ rahuldab meetrika aksioome 1°-3°. Lisaks kehtivad veel tingimused

$$4^\circ \quad \varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y),$$

$$5^\circ \quad \varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \varrho(x, y),$$

mida põhjendame järgmiselt:

$$\varrho(x+z, y+z) = \|x+z - (y+z)\| = \|x - y\| = \varrho(x, y),$$

$$\varrho(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| \varrho(x, y).$$

Lause. Kui vektorruum on meetriline ruum, kus peale kauguse aksioomide 1°-3° kehtivad ka tingimused 4° ja 5°, siis seosega $\|x\| = \varrho(x, 0)$ defineeritakse norm, mis määrab olemasoleva kauguse.

Tõestus. Normi aksioomide kehtivuse põhjendavad järgmised samaväärsuste ja võrduste ahelad:

$$1^\circ \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow \varrho(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$2^\circ \quad \|\lambda x\| = \varrho(\lambda x, 0) = \varrho(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| \varrho(x, 0) = |\lambda| \|x\|,$$

$$3^\circ \quad \|x+y\| = \varrho(x+y, 0) \leq \varrho(x+y, y) + \varrho(y, 0) = \varrho(x, 0) + \varrho(y, 0) = \|x\| + \|y\|.$$

Normi poolt määratud kaugus $\bar{\varrho}(x, y) = \|x - y\|$ ühtib olemasolevaga, sest

$$\bar{\varrho}(x, y) = \|x - y\| = \varrho(x - y, 0) = \varrho(x - y + y, 0 + y) = \varrho(x, y).$$

Lause on tõestatud.

Märgime, et äsjatoodud lause tõestuses kasutasime kauguse omadusi 1° ja 3°-5°, kuid mitte kauguse sümmeetria

aksioomi 2°.

Ülesanne. Näidata, et kauguse sümmeetria aksioom järel-
dub tingimustest 4° ja 5°.

Meenutame, et hulka A meetrilises ruumis nimetatakse
tõkestatuks, kui leidub kera $\bar{B}(a, r) \supset A$.

Lause. Hulk A normeeritud ruumis on tõkestatud para-
jasti siis, kui leidub arv M nii, et $\|x\| \leq M$ iga $x \in A$
korral.

Tõestus. 1) Kui $A \subset \bar{B}(a, r)$, siis iga $x \in A$ korral
 $\|x - a\| \leq r$, mistõttu $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| +$
 $\|a\| \leq r + \|a\|$ ning tõkkeks sobib $M = r + \|a\|$.

2) Leidugu $M > 0$ nii, et $\|x\| \leq M$ iga $x \in A$ korral.
Siis $A \subset \bar{B}(0, M)$.

Lause on tõestatud.

On selge, et normeeritud ruumi vektoralamruum on ise ka
normeeritud ruum. Teda nimetatakse normeeritud ruumi alam-
ruumiks.

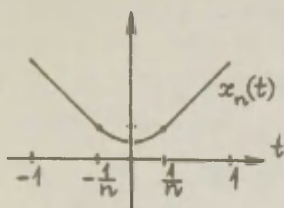
Normeeritud ruumi tehete pidevusest järel-
dub, et normeeritud ruumi vektoralamruumi sulund on (kinnine) alamruum.

Meetriliste ruumide käsitlemisel nägime, et täielikus
meetrilises ruumis osahulk on meetrilise ruumina täielik pa-
rajasti siis, kui ta on kinnine. Sellega on põhjendatud järg-
mine

Lause. Banachi ruumi vektoralamruum on täielik parajas-
ti siis, kui ta on kinnine.

Sellele lausele tuginedes toome näite mittetäielikust
normeeritud ruumist. Vaatleme ruumi $C[-1, 1]$ vektoralam-
ruumi $C^1[-1, 1]$ ja varustame ta ruumi $C[-1, 1]$ normiga.
Olgu see normeeritud ruum $\tilde{C}^1[-1, 1]$. Näitame, et $\tilde{C}^1[-1, 1]$
pole kinnine Banachi ruumis $C[-1, 1]$. Vaatleme funktsiooni-

de jada



$$x_n(t) = \begin{cases} |t|, & \text{kui } |t| > \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}t^2 + \frac{1}{2n}, & \text{kui } |t| \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Siis

$$x'_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t > \frac{1}{n}, \\ nt, & \text{kui } |t| < \frac{1}{n}, \\ -1, & \text{kui } t < -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Vahetu kontroll näitab, et funktsioonid x_n ja x'_n on pidevad lõigus $[-1, 1]$ mistõttu $x_n \in \tilde{C}^1[-1, 1]$. Olgu $x_0(t) = |t|$, $t \in [-1, 1]$. Et $\|x_n - x_0\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$, siis x_n on Cauchy jada ruumis $\tilde{C}^1[-1, 1]$. Aga ta ei koondunud ruumis $\tilde{C}^1[-1, 1]$, sest $x_0 \notin \tilde{C}^1[-1, 1]$.

Paljud autorid, rääkides Banaachi ruumi alamruumist, mõtlevad selle all kindlasti vektoralamruumi (seega täielikku alamruumi).

Ühes ja samas vektorruumis võib olla rohkem kui üks norm. Ruumis $X = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ võib vaadelda näiteks norme

$$\|x\|_{\ell_1^n} = \sum_{k=1}^n |\xi_k|,$$

$$\|x\|_{\ell_2^n} = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Definitsioon. Üeldakse, et vektorruumis X antud norm $\|\cdot\|_1$ on tugevam samas ruumis antud normist $\|\cdot\|_2$ (norm $\|\cdot\|_2$ on normist $\|\cdot\|_1$ nõrgem), kui leidub $c > 0$ nii, et $\|x\|_2 \leq c \|x\|_1$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon. Norme $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ vektorruumis X nimetatakse ekvivalentseteks, kui leiduvad positiivsed konstandid c_1 ja c_2 nii, et $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$

iga $x \in X$ korral.

Lause. Kui jada koondub tugevamas normis, siis koondub ta ka nõrgemas normis.

Tõestus. Kui $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ ja $\|\cdot\|_2 \leq c \|\cdot\|_1$, siis $\|x_n - x\|_2 \leq c \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, millest $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$.

Järeldus. Ekvivalentsetes normides jaded koonduvad või hajuvad samaaegselt.

Näide. Vaatleme ruumis $C[a, b]$ lisaks tavalisele normile $\|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ veel normi $\|x\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)| dt$.

Siis

$$\|x\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)| dt \leq \int_a^b \|x\|_C dt = (b-a) \|x\|_C,$$

s.t. norm $\|\cdot\|_C$ on normist $\|\cdot\|_{L_1}$ tugevam. Need normid ei

ole aga ekvivalentsed, sest funktsioonide $x_n(t) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n, \quad t \in [a, b], \quad \text{korral } \|x_n\|_C = 1, \quad \text{aga } \|x_n\|_{L_1} = \\ &= \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n dt = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

§ 3. Lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid

Lõplikumõõtmeliseks nimetatakse niisugust normeeritud ruumi, mis vektorruumina on lõplikumõõtmeline. Järgnevas tuleb meelde, mis on vektorruumi lõplikumõõtmelisus.

Definitsioon 1. Üeldakse, et vektorruum X üle \mathbb{K} on n -mõõtmeline, ja kirjutatakse $\dim X = n$, kui leiduvad elemendid $e_1, \dots, e_n \in X$ nii, et iga $x \in X$ avaldub üheselt kujul

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Meenutame, et vektorruumi elemente x_1, \dots, x_n nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui võrdus $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ leiab aset ainult juhul $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Kui x_1, \dots, x_n ei ole lineaarselt sõltumatud, siis nimeta-

takse neid lineaarselt sõltuvateks. Elementide x_1, \dots, x_n lineaarne sõltuvus tähendab seda, et leiduvad skalaarid $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nii, et $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| \neq 0$ ning $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. Vektorruumi osahulka A nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui mistahes lõplik hulk elemente hulgast A on lineaarselt sõltumatu.

Lineaaralgebra kursuses tõestatakse, et definitsooniga 1 on samaväärne

Definitsioon 2. Vektorruumi nimetatakse n -mõõtmeliseks, kui temas leidub n lineaarselt sõltumatut elementi, kuid mistahes $n+1$ elementi on lineaarselt sõltuvad.

Definitsioonis 1 esinevaid elemente e_1, \dots, e_n nimetatakse ruumi X baasiks. Baasiks võivad olla ruumi X mistahes n lineaarselt sõltumatut elementi.

Õeldakse, et vektorruum X on lõplikumõõtmeline, ja kirjutatakse $\dim X < \infty$, kui $X = \{0\}$ või leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\dim X = n$.

Näide. Vektorruumis $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ moodustavad baasi elemendid $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Iga $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ esitab üheselt kujul $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$. Selline vektorruumi struktuur on normeeritud ruumides

m_n, ℓ_p^n , sealhulgas ruumides \mathbb{R}^n ja \mathbb{C}^n .

Teoreem. Olgu X n -mõõtmeline normeeritud ruum baasiga e_1, \dots, e_n . Siis leiduvad positiivsed konstandid c_1 ja c_2 nii, et iga $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in X$ korral

$$c_1 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \|x\| \leq c_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|.$$

Tõestus. 1) Vahetu hindamisega saame, et

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\lambda_k e_k\| = \\ &= \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|e_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\| \right), \end{aligned}$$

seega tarvitseb võtta $c_2 = \sum_{k=1}^n \|e_k\|$.

2) Vaatleme funktsionaali $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$ määratuna ruumi m_n ühiksfaaril $S = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| = 1\}$. Funktsionaal f on pidev, sest tagurpidi kolmnurga võrratuse põhjal

$$\begin{aligned} |f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - f(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)| &= \left| \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^n \lambda'_k e_k \right\| \right| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) e_k \right\| \leq c_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k - \lambda'_k|, \end{aligned}$$

s.t. f rahuldab Lipschitzi tingimust. Sfäär S on kompaktne kui tõkestatud kinnine hulk ruumis m_n . Seepärast saavutab funktsionaal f oma alumise raja μ mingis punktis $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) \in S$, s.t.

$$\mu = f(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = \min_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On selge, et $\mu \geq 0$. Kui kehtiks $\mu = 0$, siis

$f(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 e_k \right\| = 0$ ehk $\sum_{k=1}^n \lambda_k^0 e_k = 0$, millest järelduks, et $\lambda_1^0 = \dots = \lambda_n^0 = 0$. See aga nii ei ole, sest $\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k^0| = 1$. Seega $\mu > 0$.

Näitame nüüd, et teoreemis väidetud vasakpoolne võrratus kehtib, kui võtta $c_1 = \mu$. Võrratus kehtib, kui eeldada, et $\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| = 0$. Kui aga $\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| = \lambda > 0$,

siis $\max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{\lambda_k}{\lambda} \right| = 1$, mistõttu

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\| = \lambda \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} e_k \right\| \\ &= \lambda f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) \geq \lambda \mu = \mu \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Olgu X n -mõõtmeline normeeritud ruum baasiga e_1, \dots, e_n . Ruumis X leiab aset koondumine

$$x_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

parajasti siis, kui

$$\lambda_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n$$

(s.t. koondumine on samaväärne koordinaatide koondumisega).

Tõestus seisneb järgmises samaväärsuste ahelas:

$$\begin{aligned} x_m \xrightarrow{m} x &\Leftrightarrow \|x_m - x\| = \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda_k^m - \lambda_k) e_k \right\| \xrightarrow{m} 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k^m - \lambda_k| \xrightarrow{m} 0 \Leftrightarrow \lambda_k^m \xrightarrow{m} \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Järeldus 2. Lõplikumõõtmelises ruumis on kõik normid paarikaupa ekvivalentssed.

Tõestus. Olgu n -mõõtmelises ruumis X antud kaks normi $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$. Teoreemile tuginedes võime väita, et leiduvad $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ nii, et

$$a_1 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \|x\|_1 \leq a_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$$

ja

$$b_1 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \|x\|_2 \leq b_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$$

iga $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in X$ korral. Kuid siis

$$\|x\|_1 \leq a_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \frac{a_2}{b_1} \|x\|_2$$

ja

$$\|x\|_2 \leq b_2 \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \leq \frac{b_2}{a_1} \|x\|_1,$$

s.t. normid on ekvivalentssed.

Järeldus 3. Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis on hulk suhteliselt kompaktna parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Tõestus. Meenutame, et suhteliselt kompaktna hulk meetrilises ruumis on alati tõkestatud. Eeldame nüüd, et K on n -mõõtmelise normeeritud ruumi tõkestatud osahulk. Vaatleme jada $x_m \in K, m \in \mathbb{N}$. Siis $x_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k$ ning teoreemist järeldub, et jada $\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k^m|, m \in \mathbb{N}$, on tõkestatud, mis tähendab jada $(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m), m \in \mathbb{N}$, tõkestatust ruumis m_n . Kuna ruumis m_n tõkestatud hulgad on suhteliselt kom-

paktsed, siis saame eraldada osajada $N' \subset N$ nii, et

$$(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) \xrightarrow{m \in N'} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{ruumis } m_n. \text{ Kuna}$$

$$\lambda_k^m \xrightarrow{m \in N'} \lambda_k, \quad k=1, \dots, n, \quad \text{siis } x_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k \xrightarrow{m \in N'}$$

$$\xrightarrow{m \in N'} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k. \text{ Sellega on hulga } K \text{ suhteline kompaktsus}$$

tõestatud.

Järeldus 4. Lõplikumõõtmeline normeeritud ruum on täielik.

Tõestus. Olgu $x_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k$ Cauchy jada n -mõõtmelises normeeritud ruumis. Siis

$$\|x_m - x_l\| = \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda_k^m - \lambda_k^l) e_k \right\| \xrightarrow{m, l} 0,$$

mis on teoreemi põhjal samaväärne sellega, et

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k^m - \lambda_k^l| \xrightarrow{m, l} 0 \quad \text{ehk } (\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m), m \in N,$$

on Cauchy jada ruumis m_n . Ruumi m_n täielikkuse tõttu

$$(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) \xrightarrow{m} (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \text{ Kuid siis } x_m =$$

$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k \xrightarrow{m} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \quad \text{millega on ruumi täielikkus}$$

tõestatud.

Kuna täielik alamruum on kinnine, siis kehtib

Järeldus 5. Normeeritud ruumi lõplikumõõtmeline alamruum on kinnine.

§ 4. Riesz'i lemma peaaegu perpendikulaarist ja ühiksfaari mittekompaktsus lõpmatumõõtmelises ruumis

1. Olgu X normeeritud ruum. Elemendi $x \in X$ kauguseks osahulgast $Y \subset X$ nimetatakse arvu

$$\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

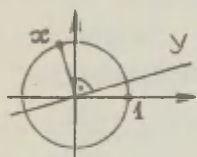
On selge, et kui $x \in Y$, siis $\varrho(x, Y) = 0$. Näitame, et $\varrho(x, Y) > 0$ juhul, kui Y on kinnine ja $x \notin Y$. Oletame, et $\varrho(x, Y) = 0$. Infimumi mõiste kohaselt leiduvad

elemendid $y_n \in Y$ nii, et $\|x - y_n\| \xrightarrow{n} 0$, s.t. $y_n \rightarrow x$.
 Hulga Y kinnisuse tõttu $x \in Y$, mis on vastuolus eeldusega.

Lemma (F.Riesz, lemma peaaegu perpendikulaarist). Olgu X normeeritud ruum ja Y tema kinnine alamruum, kusjuures $Y \neq X$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x_\varepsilon \in X$ nii, et $\|x_\varepsilon\| = 1$ ja $\varrho(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Märgime, et alati, kui Y on alamruum ja $\|x\| = 1$, siis $\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \leq \|x - 0\| = 1$.

$$X = \mathbb{R}^2$$



Ruumis \mathbb{R}^2 saab näiteks leida elemendi x nii, et $\|x\| = 1$ ja $\varrho(x, Y) = 1$. Selleks tuleb juhu, kui $\dim Y = 1$, tõmmata läbi nullpunkti sirgele Y rist-

sirge ehk perpendikulaar.

Lemma tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Valime elemendi $x \in X$ nii, et $x \notin Y$. Olgu $\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = d$, me teame, et $d > 0$. Infimumi mõiste kohaselt leidub $y_\varepsilon \in Y$ nii, et $d \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq (1 + \varepsilon)d$. Näitame, et lemma väidet rahuldab element

huldab element

$$x_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|}$$

On selge, et

$$\|x_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \|x - y_\varepsilon\| = 1.$$

Valime vabalt $y \in Y$. Kuna $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y \in Y$, siis

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y\| &= \left\| \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{\|x - (y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y)\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq \\ &\geq \frac{d}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{(1 + \varepsilon)d} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

millest $\varrho(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon$.

Lemma on tõestatud.

2. Vektorrüümi nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks, kui ta ei ole lõplikumõõtmeline. Vektorrüüm on lõpmatumõõtmeline parajasti siis, kui temas leidub lõpmatu lineaarselt sõltumatu osahulk. Näiteks on lõpmatumõõtmelised kõik konkreetsed jadaruumid ja funktsionaalruumid, mida me eespool vaatlesime. Vaadeldud jadaruumides on hulk $\{e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), n \in \mathbb{N}\}$ lineaarselt sõltumatu, funktsionaalruumides on lineaarselt sõltumatu aga hulk $\{1, t, \dots, t^n, \dots\}$.

Ühiksfääriks normeeritud ruumis X nimetatakse hulka $S(0, 1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Ühiksfäär on kinnine hulk.

Teoreem. Ühiksfäär lõpmatumõõtmelises normeeritud ruumis ei ole kompaktné.

Tõestus. Olgu X lõpmatumõõtmeline normeeritud ruum. Konstrueerime jada $x_n \in S(0, 1)$ nii, et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$, $n \neq m$. Kuna jada x_n ükski osajada ei ole Cauchy jada, siis ei saa tema ükski osajada ka koonduda.

Valime vabalt $x_1 \in S(0, 1)$. Oletame, et on leitud x_1, \dots, x_n nii, et $\|x_m - x_l\| \geq \frac{1}{2}$, kui $m \neq l$, $m, l \leq n$, ja näitame, kuidas leida x_{n+1} . Kuna $\dim \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\}) < \infty$, siis $\mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$ on kinnine ja $\mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\}) \neq X$. Riesz'i lemma (kus võtame $\varepsilon = \frac{1}{2}$, s.t. $1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$) lubab leida $x_{n+1} \in S(0, 1)$ nii, et $\rho(x_{n+1}, \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})) \geq \frac{1}{2}$, mistõttu $\|x_{n+1} - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \dots, \|x_{n+1} - x_n\| \geq \frac{1}{2}$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Olgu X normeeritud ruum. Järgmised tingimused on samaväärsed:

- 1) $\dim X < \infty$,
- 2) ruumi X iga tõkestatud osahulk on suhteliselt kompaktné,
- 3) ruumi X ühiksfäär $S(0, 1)$ on kompaktné.

Tõestamiseks kasutame skeemi $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$, meenutades seejuures, et lõplikumäätmelises ruumis tõkestatud hulga on suhteliselt kompaktsed.

§ 5. Rea normeeritud ruumides

Rea normeeritud ruumides tuuakse sisse kui arvridade vahetu üldistus.

Olgu X normeeritud ruum. Reaks ruumis X nimetatakse formaalset avaldist $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, kus $x_k \in X$. Elemente x_k nimetatakse rea liikmeteks, summasid $\sum_{k=1}^n x_k, n=1, 2, \dots$, rea osasummadeks.

Üeldakse, et rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub ruumis X , kui ruumis X koondub tema osasummade jada $\sum_{k=1}^n x_k, n \in \mathbb{N}$. Osasummade jada piirväärtust $x \in X$ nimetatakse selle rea summaks ja kirjutatakse $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Niisiis, koonduva rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ puhul

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub (elemendiks x), siis

1) tema üldliige läheneb nullile ($x_n \rightarrow 0$), sest

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k - x \right) - \left(\sum_{k=1}^n x_k - x \right) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k - x \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n x_k - x \right\| \xrightarrow{n} 0, \end{aligned}$$

2) kehtib üldistatud kolmnurga võrratus

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|,$$

sest

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| = \left\| \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| = \lim_n \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq$$

$$\leq \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Ülesanne. Tõestada rea summa linearsuse omadus: kui

$$\text{read } \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ koonduvad, siis } \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x_k + \mu y_k) = \\ = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub arvrida $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Teoreem. Normeeritud ruum on Banaohi ruum parajasti siis, kui temas iga absoluutselt koonduv rida koondub.

Tõestus. 1) Olgu X Banaohi ruum ja koondugu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|, x_k \in X. \text{ Olgu } S_n = \sum_{k=1}^n x_k. \text{ Kuna} \\ \|S_n - S_{n+p}\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{n+p} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \\ \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow{n} 0,$$

siis S_n on Cauchy jada. Ruumi täielikkuse tõttu S_n koondub.

2) Olgu X niisugune normeeritud ruum, kus rea absoluutselt koonduvusest järeldub tema koonduvus. Vaatleme Cauchy jada $x_n \in X$. Tõestamiseks, et jada x_n koondub, eraldame temast koonduva esajada x_{n_m} . Kuna x_n on Cauchy jada, siis saame leida indeksi n_1 nii, et

$$\|x_{n_1} - x_{n_1+p}\| < \frac{1}{2} \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

seejärel indeksi $n_2 > n_1$ nii, et

$$\|x_{n_2} - x_{n_2+p}\| < \frac{1}{2^2} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Analoogiliselt jätkates leiame indeksite jada $n_1 < n_2 < \dots$ nii, et

$$\|x_{n_k} - x_{n_k+p}\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Kuna

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

siis $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$, mistõttu rida

$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ koondub. Seega koondub osasummade jada

$\sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$, $m \in \mathbb{N}$, järelikult ka jada

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m}, m \in \mathbb{N}.$$

Sellega oleme tõestanud, et ruum X on täielik.

Teoreem on tõestatud.

Pole raske tuua näidet koonduva rea kohta, mis ei koonu absoluutselt. Selleks sobib mistahes tingimisi koonduv arvrida.

Matemaatilisest analüüsist teame, et arvrea absoluutne koonduvus on samaväärne selle rea kõigi ümberjärjestuste koondumisega (samaks summaks). Alljärgnevatest ülesannetest selgub, et normeeritud ruumides see samaväärsus enam kehtima ei jää.

Ülesanne 1. Tõestada, et normeeritud ruumis absoluutselt koonduva rea iga ümberjärjestus koondub samaks summaks.

Ülesanne 2. Näidata, et ruumides C_0 ja ℓ_p , $p > 1$, rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$, kus $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$, ei koonduda absoluutselt, kuid iga tema ümberjärjestus koondub elementideks $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

§ 6. Faktorruum

1. Defineerime kõigepealt faktorhulga mõiste. Olgu X hulk. Ekvivalentseoseks hulgas X nimetatakse niisugust seost $R \subset X \times X$ (kui $(x, y) \in R$, siis kirjutame $x R y$), mis on refleksiivne ($x R x$ iga $x \in X$ korral), sümmeetriline (kui $x R y$, siis $y R x$) ja transitiivne (kui $x R y$ ja $y R z$, siis $x R z$). Elementidega $a \in X$ ekvivalentsete elementide hulka $X_a = \{x \in X : x R a\}$ nime-

tatakse elemendi a poolt määratud ekvivalentsiklassiks.

Hulga X faktorhulgaks X/R nimetatakse kõigi ekvivalentsiklasside $X_a, a \in X$, hulka. Kujutust $\alpha: X \rightarrow X/R, \alpha(a) = X_a, a \in X$, nimetatakse kanooniliseks kujutuseks.

Faktorhulga definitsioonist on näha, et kanooniline kujutus $\alpha: X \rightarrow X/R$ on sürjektiivne. On selge, et $X_a = X_b$ parajasti siis, kui $a R b$. Seepärast $\alpha(a) = \alpha(b)$ parajasti siis, kui $a R b$, mistõttu kanooniline kujutus ei tarvitse olla injektiivne. Kuna $x \in X_a$ parajasti siis, kui $x R a$, siis

$$\alpha(x) = X_a \Leftrightarrow x \in X_a.$$

Faktorhulga X/R käsitlemisel on kasulik silmas pidades, et R tekitab hulgas X klassijaotuse: $X = \bigcup_{a \in X} X_a$ ja $X_a \neq \emptyset$ (sest mistahes $a \in X$ puhul $a \in X_a$) ning kui $X_a \neq X_b$, siis $X_a \cap X_b = \emptyset$ (sest kui leidub $x \in X_a \cap X_b$, siis $x R a$ ja $x R b$; järelikult $a R b$ ehk $X_a = X_b$).

2. Olgu nüüd X vektorruum üle \mathbb{K} ja \mathbb{Z} tema alamruum. Defineerime ruumis X ekvivalentsiseose R samaväärsusega

$$x R y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Ülesanne. Näidata, et R on ekvivalentsiseos.

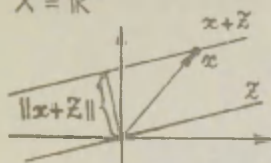
Faktorhulka X/R nimetatakse ruumi X faktorruumiks alamruumi \mathbb{Z} järgi ja tähistatakse X/\mathbb{Z} .

Vaatleme alamruumi \mathbb{Z} nihkeid $a + \mathbb{Z} = \{a + z : z \in \mathbb{Z}\}$, $a \in X$. Kuna

$$x \in X_a \Leftrightarrow x R a \Leftrightarrow x - a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in a + \mathbb{Z},$$

siis $X_a = a + \mathbb{Z}$. Seega faktorruum X/\mathbb{Z} on alamruumi \mathbb{Z} kõigi nihete $a + \mathbb{Z}, a \in X$, hulk, kusjuures $a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z}$ parajasti siis, kui $a - b \in \mathbb{Z}$. Ning kanoonilist kujutust

$$X = \mathbb{R}^2$$



$\alpha: X \rightarrow X/Z$ kirjeldab võrdus
 $\alpha(a) = a + Z, a \in X$.

Lause. Faktorruum X/Z on vektorruum üle \mathbb{K} tehete

$$(x+Z) + (y+Z) = (x+y) + Z, \quad x, y \in X,$$

$$\lambda(x+Z) = \lambda x + Z, \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{K},$$

suhtes, tema nullelement on Z .

Tõestus. Näitame, et liitmistehe on korrektselt defineeritud. Olgu $x+Z = x'+Z$ ja $y+Z = y'+Z$. Siis $(x+y)+Z = (x'+y')+Z$, sest $(x+y) - (x'+y') = (x-x') + (y-y') \in Z$, kuna $x-x', y-y' \in Z$. Analogiliselt saab kontrollida, et arvuga korrutamise tehe on korrektselt defineeritud. Vektorruumi aksioomid kanduvad aga ruumist X vahetult üle ruumi X/Z .

3. Lõpuks olgu X normeeritud ruum ja Z tema kinnine alamruum.

Teoreem. Faktorruum X/Z on normeeritud ruum normiga

$$\|x+Z\| = \inf_{z \in Z} \|x+z\| = \inf_{y \in x+Z} \|y\| = \inf_{\alpha(y)=x+Z} \|y\|.$$

Tõestus. Kuna ruumi X/Z nullelement on Z ja $x+Z = Z$ parajasti siis, kui $x \in Z$, siis samasuse aksioom väidab, et

$$\|x+Z\| = 0 \Leftrightarrow x \in Z.$$

Kui $\|x+Z\| = \inf_{y \in x+Z} \|y\| = 0$, siis leidub jada

$y_n \in x+Z$ nii, et $y_n \rightarrow 0$. Kuna $y_n - x \in Z$ ja $y_n - x \rightarrow 0 - x = -x$, siis alamruumi Z kinnisuse tõttu $-x \in Z$. Ning järelikult ka $x \in Z$. Vastupidi, kui eeldada, et $x \in Z$, siis $-x \in Z$, mistõttu

$$0 = x + (-x) \in x + Z. \text{ Järelikult } \|x + Z\| = \inf_{y \in x + Z} \|y\| = \|0\| = 0.$$

Homogeensuse aksioom kehtib, sest

$$\begin{aligned} \|\lambda(x + Z)\| &= \|\lambda x + Z\| = \inf_{z \in Z} \|\lambda x + z\| = \\ &= \inf_{\lambda z \in Z} \|\lambda x + \lambda z\| = |\lambda| \inf_{z \in Z} \|x + z\|. \end{aligned}$$

Kolmnurga võrratuse tõestamiseks vaatleme ekvivalentssiklasse $x_1 + Z$ ja $x_2 + Z$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline etteantud arv. Faktorruumi normi definitsiooni kohaselt leiduvad elemendid $y_k \in x_k + Z$ nii, et $\|y_k\| \leq \|x_k + Z\| + \frac{\varepsilon}{2}, k=1,2$.

Kuna seejuures $y_1 + y_2 \in (x_1 + x_2) + Z$, siis

$$\begin{aligned} \|(x_1 + Z) + (x_2 + Z)\| &= \inf_{y \in x_1 + x_2 + Z} \|y\| \leq \|y_1 + y_2\| \leq \\ &\leq \|y_1\| + \|y_2\| \leq \|x_1 + Z\| + \|x_2 + Z\| + \varepsilon, \end{aligned}$$

millest piiril, kui $\varepsilon \rightarrow 0$, tekibki kolmnurga võrratus.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Kui X on Banachi ruum ja Z tema kinnine alamruum, siis X/Z on Banachi ruum.

Tõestus. Ruumi X/Z täielikkuse tõestamiseks näitame, et temas iga absoluutselt koonduv rida koondub. Eeldame, et $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k + Z\| < \infty$. Valime $y_k \in x_k + Z$ nii, et $\|y_k\| \leq \|x_k + Z\| + \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$. Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty$ ja ruum X on täielik, siis eksisteerib summa $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Tõestuse lõpetamiseks veendume, et $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + Z) = y + Z$. Kuna $\sum_{k=1}^n y_k - y \in (\sum_{k=1}^n x_k - y) + Z$, siis

$$\|\sum_{k=1}^n (x_k + Z) - (y + Z)\| = \|(\sum_{k=1}^n x_k - y) + Z\| \leq \|\sum_{k=1}^n y_k - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et kui räägitakse normeeritud ruumi X faktorruumist X/Z , siis eeldatakse alati, et Z on ruumi X

kinnine alamruum.

§ 7*. Topoloogilised vektorruumid

1. Topoloogilised vektorruumid ja nende nulliümbrused.

Topoloogiliste vektorruumide teooria uurib küsimusi, mis tulenevad algebraalse ja topoloogilise struktuuri kooskõlast.

Definitsioon. Topoloogiliseks vektorruumiks nimetatakse niisugust vektorruumi, mis on ühtlasi topoloogiline ruum ning milles elementide liitmine ja arvuga korrutamine on pidevad tehted.

Olgu X topoloogiline vektorruum üle \mathbb{K} . Liitmise ja arvuga korrutamise pidevus temas tähendab järgmist:

1) kui $x, y \in X$ ja U_{x+y} on summa $x+y$ suvaline ümbrus, siis leidub punkti x ümbrus U_x ja punkti y ümbrus U_y nii, et *)

$$U_x + U_y \subset U_{x+y};$$

2) kui $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ ja $U_{\lambda x}$ on korrutise λx suvaline ümbrus, siis leidub $\varepsilon > 0$ ja punkti x ümbrus U_x nii, et

$$\mu U_x \subset U_{\lambda x}$$

niipea, kui $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Liitmise ja arvuga korrutamise pidevusest järeldub nende tehete pidevus kummagi argumendi järgi eraldi, sest ülaltoodud tähistustes $x + U_y \subset U_{x+y}$, $U_x + y \subset U_{x+y}$, $\lambda U_x \subset U_{\lambda x}$ ning $\mu x \in U_{\lambda x}$, kui $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Iga normeeritud ruum on topoloogiline vektorruum, sest

*) Meenutame, et $A, B \subset X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $x \in X$ korral $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$, $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$, kusjuures $-A = (-1)A$ ja $x+A = A+x = \{x+a : a \in A\}$.

olles meetriline ruum, on ta topoloogiline ruum, kusjuures liitmine ja arvuga korrutamine temas on pidevad tehted. Ka ruum S on topoloogiline vektorruum. Nõrgima topoloogiaga $\tau = \{\emptyset, X\}$ varustatud vektorruum X on topoloogiline vektorruum, sest X on mistahes oma punkti ainus ümbrus. Tugevama topoloogiaga, s.o. diskreetse topoloogiaga varustatud vektorruum $X \neq \{0\}$ aga ei ole topoloogiline vektorruum, sest temas on rikutud arvuga korrutamise pidevus: kui $x \neq 0$, siis $U_{0x} = \{0\}$ ja $\mu \neq 0$ korral $\mu x \notin U_{0x}$.

Topoloogilises vektorruumis on erilise tähtsusega nulli-
elemendi ümbrused ehk nulliümbrused, sest nende nihetena saab kätte mistahes punkti ümbrused. Seda näitab

Lause. Kui U on nulliümbrus, siis $x + U$ on punkti x ümbrus. Kui U_x on punkti x ümbrus, siis $U_x = x + U$ mingi nulliümbruse U korral.

Tõestus. Kuna $-x + x = 0$, siis nulliümbrusele U leidub punkti x ümbrus U_x nii, et $-x + U_x \subset U$ ehk $U_x \subset x + U$, mistõttu $x + U$ on punkti x ümbrus. Kuna $x + 0 = x$, siis ümbrusele U_x leidub nulliümbrus V nii, et $x + V \subset U_x$ ehk $V \subset -x + U_x$. Seega on $U = -x + U_x$ nulliümbrus, kusjuures $U_x = x + U$.

Lause on tõestatud.

Lause näitab, et iseloomustades nulliümbrusi, iseloomustame me ühtlasi mistahes punkti ümbrusi. Vaatleme järgnevalt nulliümbruste lihtsamaid omadusi.

Lause. Olgu U nulliümbrus. Siis λU on nulliümbrus iga $\lambda \in K \setminus \{0\}$ korral ning leidub nulliümbrus V nii, et $V + V \subset U$.

Tõestus. Kuna $\frac{1}{\lambda} 0 = 0$, siis leidub nulliümbrus V nii, et $\frac{1}{\lambda} V \subset U$ ehk $V \subset \lambda U$, mistõttu λU on ka

nulliümbrus. Kuna $0+0=0$, siis leiduvad nulliümbrused V' ja V'' nii, et $V'+V'' \subset U$. Võttes $V = V' \cap V''$, saame nõutava nulliümbruse V .

Lause on tõestatud.

Et iga nulliümbruse U korral $-U$ on samuti nulliümbrus, siis $x-U$ on punkti x ümbrus. Ning punkti x mistahes ümbrust U_x võib esitada ka kujul $x-U$, kus U on mingi nulliümbrus.

Definitsioon. Nulliümbruste süsteemi \mathcal{L} nimetatakse nulliümbruste baasiks, kui iga nulliümbruse U korral leidub $V \in \mathcal{L}$ nii, et $V \subset U$.

Näide. Olgu X normeeritud ruum ja $B = B(0, 1)$ tema ühikker. Siis $\{\frac{1}{n}B : n \in \mathbb{N}\}$ on ruumi X nulliümbruste baas.

Põhjendus. Iga nulliümbrus U sisaldab mingit kera $B(0, r)$. Valides $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{n} \leq r$, saame $\frac{1}{n}B = B(0, \frac{1}{n}) \subset B(0, r) \subset U$.

Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumi osahulk A on tasakaalus, kui tingimusest $|\lambda| \leq 1$ järelneb, et $\lambda A \subset A$.

Lause. Iga nulliümbrus sisaldab tasakaalus nulliümbrust ehk, teisiti öeldes, tasakaalus nulliümbrused moodustavad nulliümbruste baasi.

Tõestus. Olgu U suvaline nulliümbrus. Kuna $0 \cdot 0 = 0$, siis leidub $\varepsilon > 0$ ja nulliümbrus V nii, et $\mu V \subset U$ niipea, kui $|\mu| \leq \varepsilon$. Tähistades $W = U \{ \mu V : |\mu| \leq \varepsilon \}$, näeme, et $W \subset U$. Et näiteks εV on nulliümbrus ja $\varepsilon V \subset W$, siis W on ka nulliümbrus. Jääb kontrollida, et W on tasakaalus. Eeldame, et $|\lambda| \leq 1$ ja vaatleme $x \in W$. Kuna $x \in \mu V$ mingi μ korral, kus $|\mu| \leq \varepsilon$, siis $\lambda x \in \lambda \mu V \subset W$, sest $|\lambda \mu| \leq \varepsilon$. Seega $\lambda W \subset W$.

Lause on tõestatud.

2. Hulgad topoloogilistes vektorruumides. Olgu X topoloogiline vektorruum.

Lause. Kui $A, B \subset X$ ja \mathcal{L} on ruumi X alamruum, siis

1) $\overline{A} = \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{L}\}$ mistahes nulliümbruste baasi \mathcal{L} korral,

$$2) \overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B},$$

$$3) \lambda \overline{A} = \overline{\lambda A}, \lambda \neq 0,$$

4) \overline{Y} on alamruum,

5) kui A on lahtine hulk, siis $A + B$ on lahtine hulk.

Tõestus. 1) Olgu $x \in \overline{A}$. Siis mistahes $U \in \mathcal{L}$ korral $(x - U) \cap A \neq \emptyset$, sest $x - U$ on punkti x ümbrus. Seega $x - u = a$ ehk $x = a + u$ mingi $u \in U$ ja $a \in A$ korral. Järelikult $x \in A + U$.

Olgu $x \in \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{L}\}$. Oletame, et $x \notin \overline{A}$. Siis leidub punktile x niisugune ümbrus U_x , et $U_x \cap A = \emptyset$. Olgu $U_x = x - U$, kus U on mingi nulliümbrus. Valime $V \in \mathcal{L}$ nii, et $V \subset U$. Sel juhul $x - V \subset U_x$, mistõttu $(x - V) \cap A = \emptyset$ ehk $x \notin A + V$, mis on võimatu.

2) Olgu $x \in \overline{A}$ ja $y \in \overline{B}$. Sisalduvuse $x + y \in \overline{A + B}$ näitamiseks kasutame tingimust 1). Olgu U suvaline nulliümbrus ja V niisugune nulliümbrus, et $V + V \subset U$. Kuna tingimuse 1) kohaselt $x \in A + V$ ja $y \in B + V$, siis $x + y \in A + B + V + V \subset A + B + U$, mistõttu $x + y \in \overline{A + B}$.

3) Olgu \mathcal{L} kõigi nulliümbruste süsteem. Siis $\lambda \neq 0$ korral

$$\begin{aligned}\lambda \bar{A} &= \lambda (\cap \{A + U : U \in \mathfrak{L}\}) = \cap \{\lambda A + \lambda U : U \in \mathfrak{L}\} = \\ &= \cap \{\lambda A + U : U \in \mathfrak{L}\} = \overline{\lambda A}.\end{aligned}$$

4) Mittetühi hulk \mathcal{Y} on alamruum parajasti siis, kui $\mathcal{Y} + \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ ja $\lambda \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral. Et sel juhul $\overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Y}} \subset \overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Y}} \subset \overline{\mathcal{Y}}$ ja $\lambda \overline{\mathcal{Y}} = \overline{\lambda \mathcal{Y}} \subset \overline{\mathcal{Y}}$, kui $\lambda \neq 0$, ja $0 \overline{\mathcal{Y}} = \{0\} \subset \mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}}$, siis $\overline{\mathcal{Y}}$ on alamruum.

5) Kuna $A + B = \cup \{A + b : b \in B\}$, siis tarvitseb näidata, et $A + b$ on lahtine hulk. Iga $a + b \in A + b$ korral leidub nulliümbrus U nii, et $a + U \subset A$ (sest A on lahtine), seega $a + b + U \subset A + b$, mistõttu viimane hulk on lahtine.

Lause on tõestatud.

Järeldus. Iga nulliümbrus sisaldab kinnist nulliümbrust ehk, teisiti öeldes, kinnised nulliümbrused moodustavad nulliümbruste baasi.

Tõestus. Mistahes nulliümbruse U korral leidub nulliümbrus V nii, et $V + V \subset U$. Kuid siis $\overline{V} = \cap \{V + W : W \text{ on nulliümbrus}\} \subset V + V \subset U$.

3. Topoloogilise vektorruumi eralduvus. Viimasele järeldusele tuginedes pole raske tõestada, et iga topoloogiline vektorruum on topoloogilise ruumina regulaarne.

Teoreem. Topoloogiline vektorruum on eralduv parajasti siis, kui $\cap \{U : U \in \mathfrak{L}\} = \{0\}$ mingi nulliümbruste baasi \mathfrak{L} korral.

Tõestus. Olgu eralduvas topoloogilises vektorruumis $x \neq 0$. Siis leidub $U \in \mathfrak{L}$ nii, et $x \notin U$. Seega $x \notin \cap \{U : U \in \mathfrak{L}\}$, mistõttu $\cap \{U : U \in \mathfrak{L}\} = \{0\}$.

Eeldame nüüd, et $\cap \{U : U \in \mathfrak{L}\} = \{0\}$ ja vaatleme punkte $x \neq y$. Et $x - y \neq 0$, siis leidub $U \in \mathfrak{L}$ nii,

et $x - y \notin U$. Valime nulliümbruse V nii, et $V + V \subset U$. Jääb kontrollida, et ümbrused $x - V$ ja $y + V$ ei lõiku. Kui nad lõikuksid, siis leiduksid $v_1, v_2 \in V$ nii, et $x - v_1 = y + v_2$ ehk $x - y = v_1 + v_2 \in V + V \subset U$, mis on võimatu.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Topoloogiline vektorruum on eralduv parajasti siis, kui $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Tõestuseks meenutame, et $\overline{\{0\}} = \bigcap \{ \{0\} + U : U \in \mathcal{L} \} = \bigcap \{ U : U \in \mathcal{L} \}$.

Järeldus 2. Topoloogiline vektorruum on eralduv ehk T_2 -ruum parajasti siis, kui ta on T_0 -ruum.

Tõestus. Me teame, et iga T_2 -ruum on T_0 -ruum. Beldame, et topoloogiline vektorruum on T_0 -ruum. Siis iga $x \neq 0$ korral leidub nulliümbrus U nii, et $x \notin U$ või $0 \notin x - U$, mis on ka samaväärne sellega, et $x \notin U$. Seega $x \notin \bigcap \{ U : U \text{ on nulliümbrus} \}$, mistõttu viimane ühisosa on $\{0\}$ ning tegemist on T_2 -ruumiga.

Märgime, et kui vektorruumis $X \neq \{0\}$ vaadelda topoloogiat $\{\emptyset, X\}$, siis saame näite topoloogilisest vektorruumist, mis ei ole T_0 -ruum.

4. Neelavad ja tõkestatud hulgad. Olgu X vektorruum ja $A, B \subset X$. Üeldakse, et hulk B neelab hulga A , kui leidub $\mu > 0$ nii, et $|\lambda| \leq \mu$ korral $\lambda A \subset B$. Tasakaalus hulk B neelab hulga A parajasti siis, kui leidub $\mu > 0$ nii, et $\mu A \subset B$, sest $|\lambda| \leq \mu$ korral $|\frac{\lambda}{\mu}| \leq 1$ ning $\lambda A = \frac{\lambda}{\mu} \mu A \subset \frac{\lambda}{\mu} B \subset B$.

Kui hulk B neelab iga ühepunktilise hulga, siis öeldakse, et B on neelav hulk.

Näide. Topoloogilise vektorruumi mistahes nulliümbrus on neelav hulk.

Põhjendus. Olgu U nulliümbrus. Vaatleme suvalist elementi $x \in X$ ja näitame, et U neelab hulga $\{x\}$. Kuna $0x = 0$, siis leidub $\mu > 0$ nii, et $|\lambda| \leq \mu$ korral $\lambda x \in U$ ehk $\lambda \{x\} \subset U$.

Olgu X vektorruum ja hulk $A \subset X$ neelav. Siis iga $x \in X$ korral leidub $\mu > 0$ nii, et $\mu x \in A$, ehk, teisiti öeldes, leidub $\lambda > 0$ nii, et $x \in \lambda A$. See asjaolu võimaldab hulgale A vastavusse seada võrdusega

$$p_A(x) = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda A \}, \quad x \in X,$$

defineeritud funktsionaali $p_A : X \rightarrow [0, \infty)$. Funktsionaali p_A nimetatakse hulga A Minkowski funktsionaaliks.

On selge, et neelav hulk sisaldab nullelementi. Järelikult

$$p_A(0) = \inf \{ \lambda > 0 : 0 \in \lambda A \} = \inf \{ \lambda > 0 \} = 0.$$

Edaspidi läheb meil veel tarvis järgmist Minkowski funktsionaali omadust.

Lause. Kui neelav hulk A vektorruumis X on kumer ja tasakaalus, siis p_A on poolnorm ruumil X , s.t. mistahes $x, y \in X$ ja $\mu \in \mathbb{K}$ korral

$$1^\circ \quad p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y),$$

$$2^\circ \quad p_A(\mu x) = |\mu| p_A(x).$$

Tõestus. Valime jadad $\alpha_n, \beta_n > 0$ nii, et

$$\alpha_n \xrightarrow{n} p_A(x), \quad x \in \alpha_n A \quad \text{ja} \quad \beta_n \xrightarrow{n} p_A(y), \quad y \in \beta_n A.$$

Kuna A on kumer ja $\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} = 1$, siis

$$x+y \in \alpha_n A + \beta_n A = (\alpha_n + \beta_n) \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} A + \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} A \right) \subset (\alpha_n + \beta_n) A.$$

Seetõttu

$$p_A(x+y) \leq \alpha_n + \beta_n,$$

millest piiril protsessis $n \rightarrow \infty$ tekibki võrratus 1° .

Kui $\mu = 0$, siis võrdus 2° kehtib. Eeldame, et $\mu \neq 0$.

Kuna A on tasakaalus, siis mistahes $v \in \mathbb{K}$ korral ilm-

selt

$$\forall x \in A \Leftrightarrow |\nu| x \in A.$$

Seda arvestades saame

$$\begin{aligned} p_A(\mu x) &= \inf \{ \lambda > 0 : \mu x \in \lambda A \} = \\ &= \inf \{ \lambda > 0 : \frac{\mu}{\lambda} x \in A \} = \\ &= \inf \{ \lambda > 0 : \frac{|\mu|}{\lambda} x \in A \} = \\ &= \inf \{ |\mu| \nu > 0 : \frac{1}{\nu} x \in A \} = \\ &= |\mu| \inf \{ \nu > 0 : x \in \nu A \} = |\mu| p_A(x), \end{aligned}$$

s.t. 2° kehtib.

Lause on tõestatud.

Definitsioon. Üeldakse, et hulk A on tõkestatud, kui teda neelab iga nulliümbrus.

Hulga tõkestatuseks piisab nõuda, et teda neelab iga nulliümbrus mingist nulliümbruste baasist \mathcal{L} . Tõepoolest, igale nulliümbrusele U leidub $V \in \mathcal{L}$ nii, et $V \subset U$. Kui leidub $\mu > 0$ nii, et $|\lambda| \leq \mu$ korral $\lambda A \subset V$, siis ka $\lambda A \subset U$. Seega U neelab A .

Arvestades, et tasakaalus nulliümbrused moodustavad nulliümbruste baasi, saame

Lause. Hulk A on tõkestatud parajasti siis, kui iga nulliümbruse U korral leidub $\mu > 0$ nii, et $\mu A \subset U$.

Näide. Normeeritud ruumi osahulk on tõkestatud parajasti siis, kui ta on tõkestatud selles normeeritud ruumis kui topoloogilises vektorruumis.

Põhjendus. Olgu $B = B(0, 1)$ normeeritud ruumi ühik-kera. Siis $\{ \frac{1}{n} B : n \in \mathbb{N} \}$ on selle normeeritud ruumi kui topoloogilise vektorruumi nulliümbruste baas. Hulga A tõkestatus normi järgi tähendab, et $A \subset B(0, \varepsilon)$ mingi $\varepsilon > 0$ korral. Näitame, et $\frac{1}{n} B$ neelab hulga A .

Selleks valime $\mu = \frac{1}{n^2}$. Kui $|\lambda| \leq \mu$, siis $\lambda A \subset \lambda \cap B \subset \mu \cap B = \frac{1}{n} B$. Teiselt poolt, oletades, et A on tõkestatud kui topoloogilise vektorruumi osahulk, saame, et teda neelab ühikera B . Järelikult leidub $\mu > 0$ nii, et $\mu A \subset B$ ehk $A \subset \frac{1}{\mu} B = B(0, \frac{1}{\mu})$.

Järgmisest tulemusest selgub, et üks tõkestatud nulliümbrus määrab täielikult ära topoloogilise vektorruumi topoloogia (nii on see näiteks normeeritud ruumis).

Lause. Kui topoloogilises vektorruumis leidub tõkestatud nulliümbrus U , siis mistahes jada $\delta_n > 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, korral on süsteem $\{\delta_n U : n \in \mathbb{N}\}$ selles ruumis nulliümbruste baas.

Tõestus. Et U on nulliümbrus, siis $\delta_n U$ on samuti nulliümbrus. Olgu V suvaline nulliümbrus. Kuna U on tõkestatud, siis leidub $\mu > 0$ nii, et $\lambda U \subset V$, kui $|\lambda| \leq \mu$. Valides nüüd $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\delta_n \leq \mu$, saame sisalduvuse $\delta_n U \subset V$.

5. Kolmogorovi teoreem. Iga normeeritud ruum on topoloogiline vektorruum, kusjuures tema nulliümbruste baasiks võib võtta süsteemi $\{\frac{1}{n} B(0, 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Üeldakse, et topoloogiline vektorruum osutub normeeritud ruumiks ehk on normeeruv, kui tema topoloogiat saab anda normi abil; täpsemalt, kui temal leidub norm nii, et $\{\frac{1}{n} B(0, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ moodustab selle topoloogilise vektorruumi nulliümbruste baasi.

Teoreem (Kolmogorovi teoreem). Eralduv topoloogiline vektorruum on normeeruv parajasti siis, kui temas leidub kumer tõkestatud nulliümbrus.

Tõestus. Tarvilikkus. Normeeritud ruumis kujutab ühikera endast kumerat ja tõkestatud nulliümbrust.

Piisavus. Olgu X vaadeldav eralduv topoloogiline vektorruum. Valime tema kumeras tõkestatud nulliümbruses sisal-

duva tasakaalus nulliümbruse ja tähistame selle kumera kätte tähega U . Pole raske vahetult kontrollida, et tasakaalus hulga kumer kate on ka ise tasakaalus. Niisiis on U tõkestatud kumer tasakaalus nulliümbrus. Järelikult kujutab tema Minkewski funktsionaal p_U endast poolnormi ruumil X .

Näitame, et p_U on tegelikult norm. Kuna $p_U(0) = 0$, siis jääb kontrollida, et $x = 0$, kui $p_U(x) = 0$. Olgu

$p_U(x) = 0$. Siis saame valida jada $\delta_n > 0$ nii, et $\delta_n \rightarrow 0$ ja $x \in \bigcap \{ \delta_n U : n \in \mathbb{N} \}$. Edasi kasutame seda, et nulliümbruse U tõkestatuse tõttu on $\{ \delta_n U : n \in \mathbb{N} \}$ nulliümbruste baas ning ruumi eralduvuse tõttu $\bigcap \{ \delta_n U : n \in \mathbb{N} \} = \{0\}$. Järelikult $x = 0$.

Niisiis oleme näidanud, et p_U on norm topoloogilisel vektorruumil X . Olgu $B = B(0, 1) = \{x \in X : p_U(x) < 1\}$. Jääb tõestada, et $\{ \frac{1}{n} B : n \in \mathbb{N} \}$ kujutab endast ruumi X nulliümbruste baasi. Seejuures kasutame ära asjaolu, et $\{ \frac{1}{n} U : n \in \mathbb{N} \}$ on ruumi X nulliümbruste baas. Pole raske vahetult kontrollida, et $\frac{1}{2} U \subset B \subset U$. Kuna B sisaldab nulliümbrust $\frac{1}{2} U$, siis on B ise ning seega ka kõik hulgad $\frac{1}{n} B$ nulliümbrused. Need hulgad moodustavad nulliümbruste baasi, sest mistahes nulliümbruse V korral leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{n} U \subset V$ ning seetõttu $\frac{1}{n} B \subset \frac{1}{n} U \subset V$.

Teoreem on tõestatud.

6. Vektorruumi topologiseerimisest. Olgu X vektorruum ning olgu antud tema alamhulkade süsteem \mathcal{B} . Meid huvitab, missuguseid tingimusi peaks \mathcal{B} rahuldama, et teda võiks võtta nulliümbruste baasiks mingile topoloogilise vektorruumi topoloogiale ruumis X . Vastuse sellele küsimusele annab järgmine tulemus, mille toome ära tõestuseta.

Teoreem (vektorruumi topologiseerimisest). Olgu X

vektorruum ja \mathcal{L} ruumi X esahulkade süsteem. Kui \mathcal{L} täidab tingimusi

1) iga $U, V \in \mathcal{L}$ korral leidub $W \in \mathcal{L}$ nii, et $W \subset U \cap V$;

2) iga $U \in \mathcal{L}$ korral leidub $V \in \mathcal{L}$ nii, et $V + V \subset U$;

3) iga $U \in \mathcal{L}$ on neelav ja tasakaalus;

siis ruumis X on olemas parajasti üks topoloogia, milles X on topoloogiline vektorruum ja mille jaoks \mathcal{L} on nulliümbruste baas.

§ 8*. Lokaalselt kumerad ruumid

1. Lokaalselt kumer topoloogia ja poolnermid. Lokaalselt kumerad ruumid paistavad üldiste topoloogiliste vektorruumide seas välja eelkõige selle poolest, et nende topoloogia on kirjeldatav analüütiliselt, nimelt poolnermide abil. See asjaolu teeb lokaalselt kumerate ruumide kasutamise rakendustes eriti käepäraseks.

Definitsioon. Lokaalselt kumeraks ruumiks nimetatakse niisugust topoloogilist vektorruumi, mille iga nulliümbrus sisaldab kumerat nulliümbrust ehk, teisiti öeldes, milles leidub kumeratest hulkadest koosnev nulliümbruste baas. Lokaalselt kumera ruumi topoloogiat nimetatakse lokaalselt kumeraks topoloogiaks.

Kuna topoloogilise vektorruumi iga nulliümbrus sisaldab tasakaalus nulliümbrust, siis moodustades kumera nulliümbruse sees asuvale tasakaalus nulliümbrusele kumera katte, saame, et mistahes kumer nulliümbrus sisaldab kumerat tasakaalus nulliümbrust. Järelikult võib lokaalselt kumerat ruumi defineerida kui niisugust topoloogilist vektorruumi, milles leidub kumeratest tasakaalus hulkadest koosnev nulliümbruste baas.

Olgu X lokaalselt kumer ruum ja \mathcal{L} tema nulliümbruste baas, mis koosneb kumeratest tasakaalus hulkadest. Tähistame

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p_u : u \in \mathcal{L}\},$$

kus p_u on hulga u Minkewski funktsionaal. Kuna iga $u \in \mathcal{L}$ on kumer ja tasakaalus, siis iga p_u kujutab endast poolnermi ruumil X ning $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ näol on meil tegemist poolnormide süsteemiga ruumil X . Vastupidist olukorda kirjeldab

Teoreem I. Olgu vektorruumil X antud poolnormide süsteem \mathcal{P} . Koosnegu süsteem \mathcal{L} hulkade $U(p; \lambda) = \{x \in X : p(x) < \lambda\}$, $p \in \mathcal{P}$, $\lambda > 0$, kõikvõimalikest lõplikest ühisosadest. Siis on ruumis X olemas parajasti üks lokaalselt kumer topoloogia, mille jaoks \mathcal{L} on nulliümbruste baas.

Tõestus. Kuna p on poolnorm, siis pole raske vahetult kontrollida, et hulgad $U(p; \lambda)$ on kumerad ja tasakaalus. Iga hulk $U(p; \lambda)$ on ka neelav, sest ta on tasakaalus ja $p\left(\frac{\lambda}{p(x)+1}x\right) = \frac{\lambda}{p(x)+1}p(x) < \lambda$ tõttu $\frac{\lambda}{p(x)+1}x \in U(p; \lambda)$. Et nimetatud omadused säilivad lõplike ühisosade moodustamisel, siis koosneb \mathcal{L} kumeratest neelavatest tasakaalus hulkadest, täites seega vektorruumi topologiseerimise teoreemi tingimust 3). On selge, et \mathcal{L} rahuldab nimetatud teoreemi tingimust 1). Kuna $\frac{1}{2}U(p; \lambda) = U(p; \frac{\lambda}{2})$, siis iga $u \in \mathcal{L}$ puhul $\frac{1}{2}u \in \mathcal{L}$ ja u kumeruse tõttu $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset u$. Seega on täidetud ka topologiseerimise teoreemi tingimus 2).

Tõestuse lõpetamiseks rakendame vektorruumi topologiseerimise teoreemi ja arvestame, et \mathcal{L} koosneb kumeratest hulkadest.

Teoreem on tõestatud.

Definitsioon. Topoloogiat, mille olemasolu väidab teoreem 1, nimetatakse poolnormide süsteemi \mathcal{P} poolt määratud

või tekitatud topoloogiaks.

Teoreemi 1 kohaselt on poolnormide süsteemi poolt tekitatud topoloogia lokaalselt kumer. Alljärgnevas näitame, et kehtib ka vastupidine väide - mistahes lokaalselt kumer topoloogia tekitab teatud poolnormide süsteemi poolt.

Esipool sidusime lokaalselt kumera ruumi X tasakaalus kumeratest hulkadest koosneva nulliümbruste baasiga \mathcal{B} poolnormide süsteemi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$. Tema tekitabki ruumi X topoloogia nagu väidab

Teoreem 2. Lokaalselt kumera ruumi topoloogia on määratud tema poolnormide süsteemi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ poolt.

Tõestus. Võib vahetult kontrollida, et iga $U \in \mathcal{B}$ ja $\lambda > 0$ korral

$$\frac{\lambda}{2} U \subset U(p_U; \lambda) \subset \lambda U. \quad (1)$$

Arvestades teoreemi 1, tarvitseb meil näidata, et hulgad $U(p_U; \lambda)$, $U \in \mathcal{B}$, $\lambda > 0$, moodustavad vaadeldavas lokaalselt kumeras ruumis nulliümbruste baasi. Vasakpoolsest sisalduvusest (1) on selge, et iga $U(p_U; \lambda)$ on nulliümbrus. Kuna suvalisele nulliümbrusele V leidub $U \in \mathcal{B}$ nii, et $U \subset V$, siis parempoolse sisalduvuse (1) tõttu $U(p_U; \lambda) \subset V$.

Teoreem on tõestatud.

2. Poolnormide keel. Olgu lokaalselt kumera ruumi X topoloogia määratud poolnormide süsteemi \mathcal{P} poolt. Ruumi X topoloogiaga seotud mõisteid on võimalik väljendada ka poolnormide abil n.ö. poolnormide keeles. Peatume alljärgnevas topoloogia eralduvusel, hulga tõkestatusel ja pere (või jada) koonduvusel.

Lause 1. Ruum X on eralduv parajasti siis, kui

$$p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 0. \quad (2)$$

Tõestus. Olgu $A = \bigcap \{ U(p, \lambda) : p \in \mathcal{P}, \lambda > 0 \}$. Me tea-

me, et X on eralduv parajasti siis, kui $A = \{0\}$. Kui $x \in A$, siis $p(x) < \lambda$ iga $\lambda > 0$ ja $p \in \mathcal{P}$ korral ning seega $p(x) = 0$ iga $p \in \mathcal{P}$ korral. Teiselt poolt on ilmne, et kui $p(x) = 0, p \in \mathcal{P}$, siis $x \in A$. Niisiis

$$A = \{x \in X : p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}\},$$

mistõttu ruumi X eralduvus (s.o. $A = \{0\}$) on samaväärne tingimusega (2)..

Lause 2. Hulk $A \subset X$ on tõkestatud parajasti siis, kui hulgal A on tõkestatud iga poolnorm $p \in \mathcal{P}$, s.t.

$$\sup_{x \in A} p(x) < \infty \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Tõestus. Olgu A tõkestatud ja $p \in \mathcal{P}$. Siis leidub $\mu > 0$ nii, et $\mu A \subset U(p; 1)$ ehk $p(x) < \frac{1}{\mu}$ iga $x \in A$ korral.

Eeldame nüüd, et mistahes $p \in \mathcal{P}$ on hulgal A tõkestatud. Hulga A tõkestatuse näitamiseks veendume, et suvaline baasiümbrus $U = \bigcap_{\kappa=1}^n U(p_\kappa; \lambda_\kappa)$ neelab hulga A . Olgu

$\sup_{x \in A} p_\kappa(x) \leq M_\kappa$, kus $M_\kappa > 0$, $\mu = \min \left\{ \frac{\lambda_1}{M_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{M_n} \right\}$ ja $|\lambda| \leq \mu$. Kui $x \in A$, siis $p_\kappa(\lambda x) \leq \mu p_\kappa(x) \leq \frac{\lambda_\kappa}{M_\kappa} M_\kappa = \lambda_\kappa, \kappa = 1, \dots, n$. Seega $\lambda A \subset U$.

Lause on tõestatud.

Samasugune vahetu arutlus nagu lause 2 tõestuses tõestab ka

Lause 3. Suunatud pere x_α koondub ruumis X elemendiks x parajasti siis, kui $\lim_{\alpha} p(x_\alpha - x) = 0$ iga $p \in \mathcal{P}$ korral.

3. Lokaalselt kumerate ruumide näiteid. Selles punktis aelgub muuhulgas, et lokaalselt kumera ruumi mõiste on oluliselt üldisem, kui normeeritud ruumi mõiste.

Näide 1. Normeeritud ruum normiga $\|\cdot\|$ on lokaalselt

kumer ruum. Tema topoloogia on määratud süsteemi $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$ poolt, sest $\mathcal{U}(\|\cdot\|; \lambda) = B(0, \lambda)$ ja $\{B(0, \lambda) : \lambda > 0\}$ on normeeritud ruumi nulliümbruste baas.

Näide 2. Kõigi arvjadade ruum S on lokaalselt kumer ruum. Tema topoloogia on määratud poolnormide süsteemi

$\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ poolt, kus

$$p_n((\xi_1, \xi_2, \dots)) = |\xi_n|, \quad (\xi_1, \xi_2, \dots) \in S.$$

See, et \mathcal{P} tekitab sama topoloogia, mille ruumi S kauguski, selgub järgmises punktis tõestatavast teoreemist.

Näidet 2 üldistab

Näide 3. Olgu T suvaline mittetühi hulk ja $F(T)$ hulgal T määratud arvuliste väärtustega funktsioonide vektorruum. Poolnormide süsteemi $\mathcal{P} = \{p_t : t \in T\}$, kus

$$p_t(x) = |x(t)|, \quad x \in F(T),$$

poolt määratud lokaalselt kumerat topoloogiat ruumis $F(T)$ nimetatakse punktiviisi koonduvuse topoloogiaks.

Näide 4. Olgu $C^\infty[a, b]$ lõigus $[a, b]$ lõpmatult diferentseeruvate funktsioonide vektorruum. Defineerime iga $n = 0, 1, \dots$ korral

$$p_n(x) = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|,$$

kus $x^{(0)}(t) = x(t)$. Pole raske veenduda, et iga p_n on norm. Osutub, et süsteemi $\mathcal{P} = \{p_n : n = 0, 1, \dots\}$ poolt määratud lokaalselt kumerat topoloogiat ruumis $C^\infty[a, b]$ ei ole võimalik tekitada üheainsa mormiga.

Näide 5. Põhifunktsioonide ruum $\mathcal{D}(a, b)$ koosneb vahemikus (a, b) lõpmatult diferentseeruvatest funktsioonidest x , mille korral $\text{supp } x = \overline{\{t \in (a, b) : x(t) \neq 0\}}$ on kompaktne. Vaatleme $\mathcal{D}(a, b)$ alamruume $\mathcal{D}_K(a, b) = \{x \in \mathcal{D}(a, b) : \text{supp } x \subset K\}$, kus $K \subset (a, b)$ on kompaktne hulk. On selge, et $\mathcal{D}(a, b) = \bigcup_{K \subset (a, b)} \mathcal{D}_K(a, b)$. Ruumis $\mathcal{D}_K(a, b)$

määratakse lokaalselt kumer topoloogia normide

$$p_{n,K}(x) = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{t \in K} |x^{(k)}(t)|, \quad n = 0, 1, \dots,$$

poolt. Ruumi $\mathcal{D}(a, b)$ nulliümbruste baas moodustatakse ta-sakaalus kumeratest hulkadest $U \subset \mathcal{D}(a, b)$, mille puhul $U \cap \mathcal{D}_K(a, b)$ on ruumis $\mathcal{D}_K(a, b)$ nulliümbrus iga K korral. Kirjeldatud nulliümbruste baas määrab lokaalselt kumera topoloogia ruumis $\mathcal{D}(a, b)$. Märgime, et ruum $\mathcal{D}(a, b)$ ei ole metriseeruv.

4. Metriseeruvad lokaalselt kumerad ruumid ja Fréchet' ruumid. Võib juhtuda, et topoloogiline vektorruum kujutab endast ühtlasi ka meetrilist ruumi (nagu näiteks kõikide jadade ruum S). Kui topoloogilise vektorruumi topoloogia ühtib mingi meetrilise ruumi topoloogiaga, siis öeldakse, et see topoloogiline vektorruum on metriseeruv. Kuna meetrilise ruumi topoloogia on alati eralduv, siis metriseeruv topoloogiline vektorruum peab olema eralduv.

Teoreem. Kui eralduva lokaalselt kumera ruumi X topoloogia on määratud ülimalt loenduva poolnormide süsteemi $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, poolt, siis X on metriseeruv, kusjuures kaugust temas võib defineerida võrdusega

$$S(x, y) = \sum_{i \in I} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}, \quad x, y \in X.$$

Tõestus. Kauguse aksiomide kontroll on põhimõtteliselt sama, mis ruumis S , kusjuures identsuse aksiomi juures tuleb arvestada, et lokaalselt kumera topoloogia eralduvuse tõttu tingimusest $p_i(x-y) = 0, i \in I$, järeldeb, et $x - y = 0$ ehk $x = y$.

Meil jääb veel tõestada, et lokaalselt kumera topoloogia mõttes lahtised hulgad on täpselt need samad, mis meetrilise ruumi topoloogiaski. Selleks piisab näidata, et iga lahtine kera $B(a, r)$ sisaldab punkti a mingit ümbrust kujul

$a + U$, kus $U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U(p_{i_k}, \lambda_k)$, ning iga niisugune ümbrus $a + U$ sisaldab mingit lahtist kera $B(a, r)$.

Vaatleme kera $B(a, r)$. Valime n nii, et $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2}$ ja moodustame $U = \bigcap_{\substack{i \in I \\ i \leq n}} U(p_i; \frac{r}{2})$. Kui $x \in a + U$ ehk $x - a \in U$, siis $p_i(x-a) \leq \frac{r}{2}, i \in I, i \leq n$, ja järelikult $\rho(x, a) < \frac{r}{2} \sum_{\substack{i \in I \\ i \leq n}} \frac{1}{2^i} + \frac{r}{2} < r$ ehk $x \in B(a, r)$. Seega $a + U \subset B(a, r)$.

Vaatleme nulliümbrust $U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U(p_{i_k}; \lambda_k)$, kus $i_1 < \dots < i_n$. Olgu $\lambda = \min \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Kui $\rho(x, a) < \frac{\lambda}{2^{i_n+1}}$, siis $\frac{p_{i_n}(x-a)}{1 + p_{i_n}(x-a)} < \frac{\lambda}{2}$ ehk $p_{i_n}(x-a) < \frac{\lambda}{2-\lambda}$, millest järeldub, et $p_{i_k}(x-a) < \lambda, k = 1, \dots, n$.

On selge, et sel juhul $x - a \in U$ ehk $x \in a + U$.

Seega $B(a, \frac{\lambda}{2^{i_n+1}}) \subset a + U$.

Teoreem on tõestatud.

Osutub, et teoreemi väide on pööratav: kui lokaalselt kumer ruum on metriseeruv, siis leidub ülimalt loenduv poolnormide süsteem, mis määrab selle lokaalselt kumera topoloogia.

Definitsioon. Lokaalselt kumerat metriseeruvat ruumi, mis on täielik, nimetatakse Fréchet' ruumiks.

Näiteks iga Banachi ruum on Fréchet' ruum. Ka S on Fréchet' ruum.

IV Lineaarsed operaatorid normeeritud ja
Banachi ruumides

Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama korpuse \mathbb{K} .

Definitsioon. Operaatorit $A: X \rightarrow Y$ nimetatakse lineaarseks, kui

- 1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, x_1, x_2 \in X$ (aditiivsus),
- 2) $A(\lambda x) = \lambda Ax, x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ (homogeensus).

Märgime, et kui A on lineaarne operaator, siis $A0 = 0$

ning

$$A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k Ax_k, \lambda_k \in \mathbb{K}, x_k \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Näide 1. Olgu $X = Y = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ ja olgu (a_{ij}) , kus $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $n \times n$ maatriks. Siis maatriksoperaator $A: X \rightarrow Y$,

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + \dots + a_{nn}\xi_n \end{pmatrix},$$

on lineaarne.

Näide 2. Olgu funktsioon $\mathcal{K}(t, s)$ pidev ruudus $[a, b] \times [a, b]$. Siis võrdusega

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds, t \in [a, b],$$

määratud integraaloperaator $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on lineaarne.

Näide 3. Olgu $X = C^1[a, b], Y = C[a, b]$. Siis diferentseerimisoperaator $D = \frac{d}{dt}: X \rightarrow Y, (Dx)(t) = x'(t)$, on lineaarne.

§ 1. Pidevad lineaarsed operaatorid

Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Siis, nagu meetrilistes ruumides ikka, tähendab operaatori $A: X \rightarrow Y$ pidevus seda, et koondumisest $x_n \rightarrow x$ järgeldub koondumine $Ax_n \rightarrow Ax$. Kui operaator A on pidev ja lineaarne, siis

$$A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A x_k$$

iga koonduva rea $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ puhul ruumist X , sest

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) &= A\left(\lim_n \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \lim_n A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^n \lambda_k A x_k. \end{aligned}$$

Lause 1. Lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ on pidev punktis $x \in X$ parajasti siis, kui ta on pidev punktis 0 .

Tõestus. 1) Olgu A pidev punktis 0 . Kui $x_n \rightarrow x$, siis $x_n - x \rightarrow 0$ ning $A(x_n - x) \rightarrow 0$, s.t. $Ax_n - Ax \rightarrow 0$ ehk $Ax_n \rightarrow Ax$.

2) Olgu A pidev punktis x . Kui $x_n \rightarrow 0$, siis $x_n + x \rightarrow x$ ning $A(x_n + x) \rightarrow Ax$, s.t. $Ax_n + Ax \rightarrow Ax$, mis annab koondumise $Ax_n \rightarrow 0$.

Järeldus 1. Lineaarne operaator on pidev parajasti siis, kui ta on pidev punktis 0 .

Järeldus 2. Lineaarne operaator on kas pidev või ei ole pidev mitte üheski punktis.

Definitsioon. Lineaarset operaatorit $A: X \rightarrow Y$ nimetatakse tõkestatuks, kui leidub arv M nii, et $\|Ax\| \leq M\|x\|$ iga $x \in X$ korral.

On selge, et lineaarse operaatori $A: X \rightarrow Y$ tõkestatus tähendab arvuhulga $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$ tõkestatust.

Lause 2. Lineaarne operaator on tõkestatud parajasti siis, kui ta teisendab iga tõkestatud hulga tõkestatud hulgaks.

Tõestus. Eeldame algul, et lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ on tõkestatud, s.t. leidub arv M nii, et $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $x \in X$. Kui hulk E on tõkestatud, siis leidub $r > 0$ nii, et $\|x\| \leq r, x \in E$. Seepärast, kui $x \in E$, siis $\|Ax\| \leq M\|x\| \leq Mr$, s.t. hulk AE on tõkestatud.

Eeldame nüüd, et operaator A teisendab iga tõkestatud hulga tõkestatud hulgaks. Siis hulk $A\bar{B}(0,1)$ on tõkestatud, s.t. leidub arv M nii, et $\|Ax\| \leq M, x \in \bar{B}(0,1)$. Sellest aga järeldub, et mistahes $x \in X \setminus \{0\}$ korral $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq M$, mistõttu A on tõkestatud.

Lause on tõestatud.

Teoreem. Lineaarne operaator on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Tõestus. 1) Olgu $A: X \rightarrow Y$ tõkestatud, s.t. $\|Ax\| \leq M\|x\|$ iga $x \in X$ korral. Olgu $x_n \rightarrow 0$. Siis $\|Ax_n\| \leq M\|x_n\| \rightarrow 0$, mistõttu $Ax_n \rightarrow 0$. Lause 1 põhjal on A pidev.

2) Olgu $A: X \rightarrow Y$ pidev. Oletame vastuväiteliselt, et A ei ole tõkestatud. Siis leiduvad elemendid $x_n \in X \setminus \{0\}$ nii, et $\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \infty$, seega $\frac{\|x_n\|}{\|Ax_n\|} \rightarrow 0$ (me võime eeldada, et $Ax_n \neq 0$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral) ehk $\frac{x_n}{\|Ax_n\|} \rightarrow 0$. Kuna $\|A\left(\frac{x_n}{\|Ax_n\|}\right)\| = \frac{\|Ax_n\|}{\|Ax_n\|} = 1$, siis $A\left(\frac{x_n}{\|Ax_n\|}\right) \not\rightarrow 0$, mis on vastuolus A pidevusega.

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Näidata, et reaalsetes normeeritud ruumides tegutsev pidev aditiivne operaator on homogeenne, järelikult lineaarne. Näpunäide: tõestada, et kui operaator A on aditiivne, siis $A(\lambda x) = \lambda Ax$ iga $\lambda \in \mathbb{Q}$ korral.

Teoreem. Lõplikumõõtmelistes normeeritud ruumides tegutsev lineaarne operaator on pidev.

Tõestus. Olgu X ja Y lõplikumõõtmelised normeeritud

ruumid ning $A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator. Näitame, et A on tõkestatud. Olgu ruumi X baas e_1, \dots, e_n ja ruumi Y baas e'_1, \dots, e'_m . Vaatleme suvalist elementi $x =$

$= \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \in X$. Siis $Ax = A\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi_j A e_j$. Avaldades elemendid $A e_j \in Y$ ruumi Y baasi kaudu, saame

$$A e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

mistõttu

$$Ax = \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) e'_i.$$

Me teame eelnevast, et leiduvad $c_1, c_2 > 0$ nii, et

$$c_1 \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right\| \leq c_2 \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|;$$

samuti leiduvad $c'_1, c'_2 > 0$ nii, et

$$c'_1 \max_{1 \leq i \leq m} |\eta_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \eta_i e'_i \right\| \leq c'_2 \max_{1 \leq i \leq m} |\eta_i|.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) e'_i \right\| \leq c'_2 \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right| \leq \\ &\leq c'_2 \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq \\ &\leq \frac{c'_2}{c_1} \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right\| = M \|x\|, \end{aligned}$$

kus M ei sõltu elemendist x .

Teoreem on tõestatud.

Märkus. Teoreemi tõestusest selgub, et igat lõplikumõõtmelistes vektorruumides tegutsevat lineaarset operaatorit $A: X \rightarrow Y$ võib vaadelda matriksoperaatorina. Selleks tuleb valida ruumides X ja Y mingid baasid e_1, \dots, e_n ja e'_1, \dots, e'_m . Siis elementide $A e_j$ esitused (1) annavad $m \times n$ matriksi (a_{ij}) , kusjuures suvalise elemendi $x =$

$= \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \in X$ kujutise $Ax = \sum_{i=1}^m \eta_i e'_i$ koordinaadid

η_1, \dots, η_m saadakse järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix}.$$

Järeldus. Lõplikumõõtmelisel normeeritud ruumil määratud lineaarne operaator on pidev.

Tõestus. Olgu normeeritud ruumidest X ja Y ruum X lõplikumõõtmeline ning olgu $A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator. Võib vahetult kontrollida, et AX on vektorslamruum ruumis Y . Näitame, et $\dim AX \leq \dim X$. Olgu $\dim X = n$. Oletame vastuväiteliselt, et $\dim AX > n$. Siis leiduvad lineaarselt sõltumatud elemendid $y_1, \dots, y_{n+1} \in AX$. Valime neile originaalid $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$, s.t. $Ax_i = y_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Kuna $\dim X = n$, siis x_1, \dots, x_{n+1} on lineaarselt sõltuvad, mistõttu leiduvad $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ nii, et $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_{n+1}| \neq 0$ ja $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0$. Siis aga $A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{n+1} y_{n+1} = 0$, mis on vastuolus y_1, \dots, y_{n+1} lineaarse sõltumatusega.

Lõpuks jääb üle operaatorile $A: X \rightarrow AX$, mis tegutseb lõplikumõõtmelistes ruumides, rakendada teoreemi.

Järeldus on tõestatud.

Vaatleme veel paari pidevate ja mittepidevate lineaarsete operaatorite näidet lõpmatumõõtmelistes ruumides. Peatume eespool defineeritud integraal- ja diferentseerimisoperaatoril.

Integraaloperaator $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on tõkestatud, seega ka pidev, sest

$$\begin{aligned} \|Kx\| &\leq \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |x(s)| ds \leq \\ &\leq \left(\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds \right) \|x\|, \quad x \in C[a, b]. \end{aligned}$$

Ka diferentseerimisoperaator $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on tõkestatud, sest

$$\begin{aligned} \|Dx\|_{C[a, b]} &= \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = \|x\|_{C^1[a, b]}. \end{aligned}$$

Kuid diferentseerimisoperaator $D: \tilde{C}^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ — kus $\tilde{C}^1[a, b]$ on ruumi $C[a, b]$ normiga varustatud vektorruum $C^1[a, b]$ — ei ole tõkestatud, sest valides

$$x_n(t) = e^{nt}, \quad \text{saame } x_n'(t) = n e^{nt} = n x_n(t), \quad \text{mistõttu}$$

$$\|Dx_n\| = n \|x_n\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{ja } \frac{\|Dx_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \infty.$$

§ 2. Pidevate lineaarsete operaatorite ruum

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle korpuse \mathbb{K} .

Vaatleme hulka $\mathcal{L}(X, Y) = \{A: A \text{ on pidev lineaarne operaator ruumist } X \text{ ruumi } Y\}$. Kui $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, siis defineerime

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad x \in X,$$

$$(\lambda A)x = \lambda Ax, \quad x \in X.$$

Pole raske kontrollida, et $A+B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\lambda A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Veelgi enam, $\mathcal{L}(X, Y)$ on vektorruum üle \mathbb{K} , kusjuures nullelemendiks temas on nulloperatoor O , mis on m aratud tingimusega

$$Ox = O \quad \forall x \in X.$$

Osutub, et vektorruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ saab loomulikult viisil muuta normeeritud ruumiks.

Olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$; siis leidub M nii, et $\|Ax\| \leq M\|x\|$ iga $x \in X$ korral. Seega $\{\|Ax\|: \|x\| \leq 1\} \subset [0, M]$. Järelikult $\sup\{\|Ax\|: \|x\| \leq 1\} \in \mathbb{R}$. Defineerime

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Normi aksioomide kehtivust põhjendavad järgmised sama-v aruste, v rduste ja v rratuste ahelad:

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad \|A\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|Ax\| = 0, \quad x \in X, \quad \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Ax = 0, \quad x \in X, \quad \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X,
\end{aligned}$$

sest kui $\|x\| > 1$, siis eelviimasest tingimusest järeldub, et $Ax = \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$, kuns $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$,

$$2^\circ \quad \|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|,$$

$$\begin{aligned}
3^\circ \quad \|A+B\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A+B)x\| \leq \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

Olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Märgime, et

$$\|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow \|A\| \leq M, \quad (1)$$

sest $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \in [0, M]$. Kehtib ka võrratus

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in X, \quad (2)$$

sest kui $x = 0$, siis $Ax = 0$; kui aga $x \neq 0$, siis

$\|Ax\| = \|x\| \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|x\| \|A\|$. Tingimustest (1) ja (2) järeldub

kohe, et

$$\|A\| = \min \{M \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Ülesanne. Tõestada, et $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Teoreem. Kui X on normeeritud ruum ja Y Banachi ruum, siis $\mathcal{L}(X, Y)$ on Banachi ruum.

Tõestus. Olgu $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ Cauchy jada, s.t.

$\|A_n - A_m\| \xrightarrow{n, m} 0$. Näitame, et A_n koondub, s.t. leidub $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $\|A_n - A\| \xrightarrow{n} 0$.

Valime vabalt $x \in X$ ja vaatleme jada $A_n x \in Y$. See jada on fundamentaalne, sest $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \rightarrow 0$, kui $n, m \rightarrow \infty$. Ruumi Y täielikkuse tõttu $A_n x$ koondub.

Defineerime operaatori $A: X \rightarrow Y$ seosega

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad x \in X.$$

Operaator A on lineaarne, sest $A(x_1 + x_2) = \lim_n A_n(x_1 + x_2) = \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2$ ja $A(\lambda x) = \lim_n A_n(\lambda x) = \lambda \lim_n A_n x = \lambda Ax$.

Näitame operaatori A tõkestatust. Jada A_n , olles Cauchy jada, on tõkestatud, s.t. leidub arv M nii, et $\|A_n\| \leq M$. Et aga $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq M \|x\|$ iga $x \in X$ korral ning normi pidevuse tõttu $\|A_n x\| \xrightarrow{n} \|Ax\|$, siis $\|Ax\| \leq M \|x\|$ iga $x \in X$ korral.

Lõpuks näitame, et $\|A_n - A\| \xrightarrow{n} 0$. Jada A_n fundamentaalsust võime väljendada järgmiselt: iga $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$, kui $n, m > N$. Seega

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

iga $x \in X$ korral, kui $n, m > N$. Minnes selles võrratuses piirile protsessis $m \rightarrow \infty$, saame normi pidevuse tõttu

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X,$$

kui $n > N$. Seega

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon,$$

kui $n > N$, mis tähendab, et $\|A_n - A\| \xrightarrow{n} 0$.

Teoreem on tõestatud.

Märkus. Teoreemi väide on pööratav: kui normeeritud ruumide $X \neq \{0\}$ ja Y korral $\mathfrak{L}(X, Y)$ on Banachi ruum, siis Y on Banachi ruum.

Lause. Kui X, Y, Z on normeeritud ruumid, $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ ja $B \in \mathfrak{L}(Y, Z)$, siis $BA \in \mathfrak{L}(X, Z)$ ning $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

Tõestus. Operaatori BA lineaarsuse põhjendavad võrdused

$$\begin{aligned} (BA)(x_1 + x_2) &= B(A(x_1 + x_2)) = B(Ax_1 + Ax_2) = \\ &= B(Ax_1) + B(Ax_2) = (BA)x_1 + (BA)x_2, \end{aligned}$$

$$(BA)(\lambda x) = B(A(\lambda x)) = B(\lambda Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda (BA)x.$$

Kuna

$$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|,$$

siis operaator BA on tõestatud ja $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

Lause on tõestatud.

Järeldus. Kui $A_n \rightarrow A$ ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ ja $B_n \rightarrow B$ ruumis $\mathcal{L}(Y, Z)$, siis $B_n A_n \rightarrow BA$ ruumis $\mathcal{L}(X, Z)$.

Tõestuseks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \|B_n A_n - BA\| &= \|(B_n - B)A_n + B(A_n - A)\| \leq \\ &\leq \|B_n - B\| \|A_n\| + \|B\| \|A_n - A\| \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \|A\| + \|B\| 0 = 0. \end{aligned}$$

Äsjatõestatud lausest nähtub, et ruumis $\mathcal{L}(X, X)$ on liitmise ja arvuga korrutamise tehte kõrval olemas veel operaatorite korrutamise tehe: kui $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$, siis $AB \in \mathcal{L}(X, X)$, kusjuures kehtib võrratus $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Lause järeldus väidab aga korrutamistehte pidevust. Niisiis on kõik kolm algebralist tehet ruumis $\mathcal{L}(X, X)$ pidevad.

Märgime, et korrutamistehe ruumis $\mathcal{L}(X, X)$ ei ole üldiselt kommutatiivne, selle kohta pakuvad näiteid juba matricsoperaatorid.

Kuna korrutamistehe ei vii välja ruumist $\mathcal{L}(X, X)$, siis operaatori $A \in \mathcal{L}(X, X)$ astmed

$$A^n = AA^{n-1}, \quad A^0 = I, \quad n = 1, 2, \dots,$$

kuuluvad ruumi $\mathcal{L}(X, X)$, kusjuures

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n,$$

sest $\|A^n\| \leq \|A\| \|A^{n-1}\| \leq \|A\|^2 \|A^{n-2}\| \leq \dots \leq \|A\|^n$.

§ 3. Operaatorite normi arvutamise näiteid

Enamasti on operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ normi $\|A\|$ arvutamise definitsiooni

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad (1)$$

põhjal küllalt tülilike. Seepärast tehakse tavaliselt nii, et kõigepealt tuletatakse (võimalikult täpne) hinnang

$$\|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X, \quad (2)$$

millest järeldub, et

$$\|A\| \leq M.$$

Kuna

$$\|A\| = \min \{ M : \|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X \},$$

siis võib oodata, et täpse hindamise (2) korral $\|A\| = M$.

Viimase võrduse põhjendamiseks jääb tõestada, et $\|A\| \geq M$, mida tehakse tavaliselt definitsioonile (1) tuginedes. Sage- li aitab siin järgmine lihtne

Lause. Kui leiduvad elemendid $x_n \neq 0$ ja arvud M_n nii, et $\|Ax_n\| \geq M_n \|x_n\|$ iga n korral ja $M_n \rightarrow M$, siis $\|A\| \geq M$.

Tõestuseks märgime, et iga n korral

$$M_n \leq \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\|A\| \|x_n\|}{\|x_n\|} = \|A\|,$$

millest protsessis $n \rightarrow \infty$ saamegi võrratuse $M \leq \|A\|$.

Mõnikord õnnestub leida element $x_0 \neq 0$ nii, et

$\|Ax_0\| \geq M \|x_0\|$ (üldiselt ei tarvitse niisugust elementi x_0 olemas olla), ning siis kehtib lause põhjal (kus $x_n = x_0$ ja $M_n = M$ iga n korral) võrratus $\|A\| \geq M$.

Näide 1. Eespool nägime, et maatriksoperaator $A: m_n \rightarrow m_n$,

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in m_n,$$

on lineaarne. Ta on ka pidev nagu mistahes lineaarne operaator lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis. Leiame $\|A\|$. Ku-

na $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, siis

$$\|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x_j\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|.$$

Seega $\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Maksimum saavutatakse mingi indeksi i_0 korral, seega

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|.$$

Olgu $x_0 = (\operatorname{sgn} a_{i_0 1}, \dots, \operatorname{sgn} a_{i_0 n})$, kus

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} \frac{a}{|a|}, & \text{kui } a \neq 0, \\ 1, & \text{kui } a = 0. \end{cases}$$

Siis $\|x_0\| = 1$ ja

$$\|Ax_0\| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \operatorname{sgn} a_{i_0 j} \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x_0\|,$$

mistõttu $\|A\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\|A\|_{m_n \rightarrow m_n} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Näide 2. Ülesanne. Tõestada, et sama matriksoperaatori norm ruumis l_1^n on

$$\|A\|_{l_1^n \rightarrow l_1^n} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Näide 3. Eespool tuletatud hinnangu põhjal võime öelda, et võrdusega

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

määratud integraaloperaatori $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ norm on hinnatav järgmiselt:

$$\|K\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds.$$

Pidev funktsioon $t \rightarrow \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds$ saavutab lõigu $[a, b]$ mingis punktis t_0 maksimumi, s.t.

$$\int_a^b |\mathcal{K}(t_0, s)| ds = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds.$$

Vaatleme funktsiooni $z(s) = \operatorname{sgn} \mathcal{K}(t_0, s)$, $s \in [a, b]$, (kus sgn on sama tähendusega nagu näites 1). Üldjuhul ei ole z ruumi $C[a, b]$ element, küll aga on z mõttuv ning $|z(s)| \leq 1$ iga $s \in [a, b]$ korral. Luzini teoreemi põhjal võib väita, et iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $x_0 \in C[a, b]$ ja $E \subset [a, b]$ nii, et $\mu(E) < \varepsilon$, $|x_0(s)| \leq 1$, kui $s \in [a, b]$, ja $x_0(s) = z(s)$, kui $s \in [a, b] \setminus E$. Et $\|x_0\| \leq 1$, siis

$$\begin{aligned} \|K\| &\geq \|K x_0\| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x_0(s) ds \right| \geq \\ &\geq \left| \int_a^b \mathcal{K}(t_0, s) x_0(s) ds \right| = \left| \int_{[a, b] \setminus E} \mathcal{K}(t_0, s) x_0(s) ds + \int_E \mathcal{K}(t_0, s) x_0(s) ds \right| = \\ &= \left| \int_a^b \mathcal{K}(t_0, s) z(s) ds - \int_E \mathcal{K}(t_0, s) z(s) ds + \int_E \mathcal{K}(t_0, s) x_0(s) ds \right| \geq \\ &\geq \int_a^b |\mathcal{K}(t_0, s)| ds - \int_E |\mathcal{K}(t_0, s)| |z(s)| ds - \int_E |\mathcal{K}(t_0, s)| |x_0(s)| ds \geq \\ &\geq \int_a^b |\mathcal{K}(t_0, s)| ds - 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

kus $C = \max_{a \leq t, s \leq b} |\mathcal{K}(t, s)|$. Kuna ε on suvaline, siis $\|K\| \geq$

$\int_a^b |\mathcal{K}(t_0, s)| ds$ ning kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\|K\|_{C[a, b] \rightarrow C[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| ds.$$

Näide 4. Eespool saadud hinnangu põhjal võime öelda, et diferentseerimisoperaatori $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Dx = x'$, puhul $\|D\| \leq 1$. (Paneme tähele, et siin ei leidu funktsiooni $x_0 \neq 0$ nii, et kehtiks võrratus $\|Dx_0\| \geq \|x_0\|$, sest sel juhul $0 \geq \max_{a \leq t \leq b} |x_0(t)|$ ehk $x_0 = 0$.) Võttes $x_n(t) = e^{nt}$, saame $Dx_n = x'_n = nx_n$. Olgu $\lambda_n = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t)|$.

Kuna $\|Dx_n\| = n\lambda_n$ ja $\|x_n\| = \|Dx_n\| + \lambda_n = (n+1)\lambda_n$, siis

$\|Dx_n\| = \frac{n}{n+1} \|x_n\|$, millest järeldub, et $\|D\| \geq$

$\geq \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$. Seega

$$\|D\|_{C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]} = 1.$$

§ 4. Zabreiko teoreem

1. Poolnormid ja nendega seotud hulgad. Olgu X vektorruum. Poolnormiks ruumil X nimetatakse kujutust

$p: X \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimusi

$$1^\circ p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$2^\circ p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Kuna $p(0) = 0$ (tingimuse 1° põhjal), siis poolnormil jääb normi omadustest puudu vaid järgmine: kui $p(x) = 0$, siis $x = 0$.

Poolnormi definitsioonist järeldub, et $p(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral, sest

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

Näited. 1) Kui X on normeeritud ruum, siis

$p(x) = \|x\|, x \in X$, on poolnorm.

2) Kui X on vektorruum, Y normeeritud ruum ja

$A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator, siis $p(x) = \|Ax\|, x \in X$, on poolnorm.

Olgu vektorruumil X antud poolnorm p . Defineerime $\lambda > 0$ korral hulga

$$U_\lambda = \{x \in X : p(x) \leq \lambda\}$$

(U_λ on kinnise kera analoog). Meil läheb vaja hulkade

U_λ järgmisi omadusi.

Omadus 1. Kui $x \in U_\lambda$, siis $-x \in U_\lambda$.

Tõestus. Kui $p(x) \leq \lambda$, siis $p(-x) = p(x) \leq \lambda$.

Omadus 2. Kui $x_1, x_2 \in U_s$, siis $\frac{x_1+x_2}{2} \in U_s$.

Tõestus. Kui $p(x_1) \leq s$ ja $p(x_2) \leq s$, siis $p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(p(x_1) + p(x_2)) \leq \frac{1}{2}p(x_1) + \frac{1}{2}p(x_2) \leq s$.

Omadus 3. Kui $x \in U_s$, siis $\varepsilon x \in U_{\varepsilon s}$ iga $\varepsilon > 0$ korral.

Tõestus. Kui $p(x) \leq s$, siis $p(\varepsilon x) = \varepsilon p(x) \leq \varepsilon s$.

Olgu nüüd ja järgnevas X normeeritud ruum. Olgu p ruumil X antud poolnorm ning $U_s, s > 0$, temaga seotud hulgad. Normeeritud ruumi tehete pidevuse tõttu jäävad omadused 1-3 kehtima, kui nendes U_s ja $U_{\varepsilon s}$ asendada vastavalt sulunditega \bar{U}_s ja $\bar{U}_{\varepsilon s}$. Põhjendame seda näiteks omaduse 1 korral. Olgu $x \in \bar{U}_s$. Siis leidub $x_n \in U_s, x_n \rightarrow x$. Kuna $-x_n \in U_s$ ja $-x_n \rightarrow -x$, siis $-x \in \bar{U}_s$.

Lemma. Kui

$$\bar{B}(a, r) \subset \bar{U}_s,$$

siis iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\bar{B}(0, \varepsilon r) \subset \bar{U}_{\varepsilon s}.$$

Tõestus. 1) Näitame, et $\bar{B}(-a, r) \subset \bar{U}_s$. Olgu

$x \in \bar{B}(-a, r)$. Siis $-x \in \bar{B}(a, r)$, sest

$$\| -x - a \| = \| x - (-a) \| \leq r,$$

mistõttu $-x \in \bar{U}_s$. Järelikult ka

$$x = -(-x) \in \bar{U}_s.$$

2) Näitame, et $\bar{B}(0, r) \subset \bar{U}_s$. Kui $x \in \bar{B}(0, r)$, siis $x+a \in \bar{B}(a, r)$ ning $x-a \in \bar{B}(-a, r)$, mistõttu $x+a \in \bar{U}_s$ ja $x-a \in \bar{U}_s$. Järelikult $x = \frac{(x+a) + (x-a)}{2} \in \bar{U}_s$.

3) Lõpuks näitame, et $\bar{B}(0, \varepsilon r) \subset \bar{U}_{\varepsilon s}$. Kui $x \in \bar{B}(0, \varepsilon r)$, siis $\frac{x}{\varepsilon} \in \bar{B}(0, r)$, mistõttu $\frac{x}{\varepsilon} \in \bar{U}_s$. Järelikult $x = \varepsilon \frac{x}{\varepsilon} \in \bar{U}_{\varepsilon s}$.

Lemma on tõestatud.

2. Zabreiko teoreem. Olgu p poolnorm normeeritud ruumil X .

Definitsioon. Üeldakse, et p on tõkestatud, kui leidub arv M nii, et

$$p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Definitsioon. Üeldakse, et p on loenduvalt pooladitiivne, kui mistahes koonduva rea $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ korral

$$p(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k).$$

Teoreem (Zabreiko teoreem). Loenduvalt pooladitiivne poolnorm Banachi ruumil on tõkestatud.

Tõestus. Olgu p loenduvalt pooladitiivne poolnorm Banachi ruumil X . Vaatleme hulki $U_n = \{x \in X : p(x) \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Siis $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, sest iga $x \in X$ korral $p(x) \in \mathbb{R}$,

mistõttu leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $p(x) \leq n$ ning järelikult $x \in U_n$. Kuna kehtib ka võrdus $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n$, siis Baire'i

teoreemi põhjal vähemalt üks (kinnistest) hulkadest \bar{U}_n , $n \in \mathbb{N}$, sisaldab mingit kera, kusjuures võib eeldada, et

see kera on kinnine (sest iga lahtine kera sisaldab kinnist kera). Niisiis võime öelda, et mingi $N \in \mathbb{N}$ korral

$\bar{U}_N \supset \bar{B}(a, r)$. Olgu $M = \frac{N}{r}$. Alljärgnevas tõestame, et $p(x) \leq M \|x\|$ iga $x \in X$ korral. Seejuures tugineme sisalduvusele

$$\bar{B}(0, \varepsilon r) \subset \bar{U}_{\varepsilon N} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

mis kehtib lemma põhjal.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime $\varepsilon_n > 0$ nii, et

$N \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$ (võttes näiteks $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n N}$). Olgu $x \in X$.

Siis $x \in \bar{B}(0, \|x\|) = \bar{B}(0, \frac{\|x\|}{N} r)$, mistõttu

$x \in \bar{U}_{\frac{\|x\|}{N}}$. Valime $x_1 \in U_{\frac{\|x\|}{N}}$ nii, et

$$\|x - x_1\| \leq \varepsilon_1 r.$$

Tähistades $y_1 = x - x_1$, saame $x = x_1 + y_1$, kusjuures

$y_1 \in \bar{B}(0, \varepsilon_1 r)$. Kuna $y_1 \in \bar{U}_{\varepsilon_1 N}$, siis leidub $x_2 \in U_{\varepsilon_1 N}$ nii, et

$$\|y_1 - x_2\| \leq \varepsilon_2 r.$$

Tähistsedes $y_2 = y_1 - x_2$, saame $y_1 = x_2 + y_2$, kusjuures $y_2 \in \bar{B}(0, \varepsilon_2 r)$. Niiviisi jätkstes konstrueerime jadad x_n ja y_n nii, et

$$y_n = x_{n+1} + y_{n+1},$$

$$x_{n+1} \in U_{\varepsilon_n N}, \quad y_{n+1} \in \bar{B}(0, \varepsilon_{n+1} r).$$

Kehtib võrdus $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, sest

$$x = x_1 + y_1 = x_1 + x_2 + y_2 = \dots = x_1 + \dots + x_n + y_n,$$

mistõttu

$$\|x - \sum_{k=1}^n x_k\| = \|y_n\| \leq \varepsilon_n r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poolnormi p loenduva pooladitiivsuse põhjal

$$\begin{aligned} p(x) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \leq \frac{\|x\|}{r} N + \varepsilon_1 N + \dots + \varepsilon_n N + \dots = \\ &= M \|x\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n N = M \|x\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Et $\varepsilon > 0$ on suvaline, siis $p(x) \leq M \|x\|$.

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Tõestada, et normeeritud ruumil määratud poolnormi tõkestatusest järeldub tema loenduv pooladitiivsus.

§ 5. Ühtlase tõkestatuse printsiip

Vaatleme pidevate lineaarsete operaatorite jada $A_n \in \mathcal{L}(X, Y_n)$, kus X ja Y_n on normeeritud ruumid.

Definitsioon. Öeldakse, et jada A_n on punktiviisi tõkestatud kõikjal ruumis X , kui iga $x \in X$ korral arvjada $\|A_n x\|$ on tõkestatud (s.t. leidub arv M (mis sõltub üldiselt elemendist x) nii, et $\|A_n x\| \leq M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral).

Märgime, et kui $\|A_n\|$ on tõkestatud, siis jada A_n on tõkestatud punktiviisi, sest $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq$

$$\leq \left(\sup_n \|A_n\| \right) \|x\|.$$

Teoreem (ühtlase tõkestatuse printsiip). Olgu X Banachi ruum ja $Y_n, n \in \mathbb{N}$, normeeritud ruumid. Kui jada $A_n \in \mathcal{L}(X, Y_n)$ on punktiviisi tõkestatud, siis normide jada $\|A_n\|$ on tõkestatud.

Tõestus. Olgu jada A_n punktiviisi tõkestatud. Siis saame defineerida funktsionaali $p(x) = \sup_n \|A_n x\|, x \in X$, mis on poolnorm, sest

$$1^\circ p(\lambda x) = \sup_n \|A_n(\lambda x)\| =$$

$$= |\lambda| \sup_n \|A_n x\| = |\lambda| p(x),$$

$$2^\circ p(x_1 + x_2) = \sup_n \|A_n(x_1 + x_2)\| \leq$$

$$\leq \sup_n (\|A_n x_1\| + \|A_n x_2\|) \leq$$

$$\leq \sup_n \|A_n x_1\| + \sup_n \|A_n x_2\| =$$

$$= p(x_1) + p(x_2).$$

Näitame, et see poolnorm p on loenduvalt pooladitiivne. Olgu $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Arvestades, et A_n on pidev ja lineaarne, saame

$$p(x) = \sup_n \|A_n(\sum_{k=1}^{\infty} x_k)\| = \sup_n \|\sum_{k=1}^{\infty} A_n x_k\| \leq$$

$$\leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|A_n x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_n \|A_n x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k).$$

Zabreiko teoreemi põhjal on p tõkestatud, s.t. leidub arv M nii, et

$$\sup_n \|A_n x\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X,$$

millest järeldub, et

$$\|A_n x\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ehk $\|A_n\| \leq M$ igal $n \in \mathbb{N}$ korral.

Teoreem on tõestatud.

§ 6. Banach-Steinhausi teoreem

Olgu X ja Y normeeritud ruumid.

Definitsioon. Öeldakse, et operaatorite jada $A_n: X \rightarrow Y$ koondub punktiviisi ehk kõikjal ruumis X , kui iga $x \in X$ korral jada $A_n x$ koondub ruumis Y .

Kõikjal koonduva operaatorite jada $A_n: X \rightarrow Y$ korral saab defineerida piiroperatori $A: X \rightarrow Y$ võrdusega

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad x \in X.$$

Lause. Kui $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ koondub kõikjal Banachi ruumis X ja A on jada A_n piiroperatuur, siis $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Tõestus. Piiroperatori aditiivsuse saame järgmiste võrdustega:

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) &= \lim_n A_n(x_1 + x_2) = \lim_n (A_n x_1 + A_n x_2) = \\ &= \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2, \end{aligned}$$

homogeensus põhjendatakse analoogiliselt.

Näitame piiroperatori tõkestatust. Et iga $x \in X$ korral $A_n x$ koondub, siis jada $\|A_n x\|$ on tõkestatud ning ühtlase tõkestatuse printsiibi põhjal leidub arv M nii, et $\|A_n\| \leq M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kasutades normi pidevust, saame nüüd, et

$$\|Ax\| = \|\lim_n A_n x\| = \lim_n \|A_n x\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Lause on tõestatud.

Definitsioon. Hulka $E \subset X$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X , kui $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$ (s.t. hulga E lineaarne kate on kõikjal tihe).

Teoreem (Banach-Steinhausi teoreem). Olgu X ja Y Banachi ruumid ning E põhihulk ruumis X . Jada $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ koondub kõikjal ruumis X parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

- 1) $\exists M \in \mathbb{R}, \|A_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- 2) $\exists \lim_n A_n x \quad \forall x \in E.$

Tõestus. Tarvilikkus. Tingimus 1) järeldub ühtlase tõkestatuse printsibist, sest kuna jada $A_n x, n \in \mathbb{N}$, koondub, siis on ta ka tõkestatud. Tingimus 2) on triviaalselt täidetud.

Piisavus. Näitame kõigepealt, et

$$\exists \lim_n A_n x \quad \forall x \in \mathcal{L}(E).$$

Olgu $x \in \mathcal{L}(E)$. Siis $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, kus $x_i \in E$ ja $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Kuna iga $i = 1, \dots, m$ korral jada $A_n x_i$ koondub, siis koondub ka jada $A_n x = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_n x_i$.

Olgu nüüd $x \in X$. Tõestame, et jada $A_n x$ koondub. Ruumi \mathcal{Y} täielikkuse tõttu piisab näidata, et $A_n x$ on Cauchy jada. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Et $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$, siis leidub $z \in \mathcal{L}(E)$ nii, et $\|x - z\| \leq \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$. Seda arvestades saame, et

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &= \|A_n(x-z) + (A_n z - A_m z) + A_m(z-x)\| \leq \\ &\leq \|A_n\| \|x-z\| + \|A_n z - A_m z\| + \|A_m\| \|z-x\| \leq \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3(M+1)} + \|A_n z - A_m z\| + M \cdot \frac{\varepsilon}{3(M+1)} < \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \|A_n z - A_m z\|. \end{aligned}$$

Kuna $z \in \mathcal{L}(E)$, siis $A_n z$ koondub, olles seetõttu Cauchy jada. Järelikult leidub N nii, et kui $n, m > N$, siis

$$\|A_n z - A_m z\| < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ Seega kui } n, m > N, \text{ siis}$$

$$\|A_n x - A_m x\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Teoreem on tõestatud.

Eespool tõestatud lauset arvestades saab Banach-Steinhausi teoreemi esitada järgmiselt.

Teoreem. Olgu X Banachi ruum, \mathcal{Y} normeeritud ruum ja

E põhihulk ruumis X . Jada $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ koondub punktiiviisi operaatoriks $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ (s.t. $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in X$ korral) parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

$$1) \exists M \in \mathbb{R}, \|A_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$2) A_n x \rightarrow Ax \quad \forall x \in E.$$

Tõestus. Tingimuste tarvilikkuse põhjendamisel ei muutu midagi võrreldes eelmise teoreemiga, seepärast vaatleme piisavust.

Analoogiliselt eelmise teoreemi piisavuse osa tõestusega saab näidata, et kuna $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in E$ korral, siis $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in \mathcal{L}(E)$ korral. Olgu antud suvaline $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Valime $z \in \mathcal{L}(E)$ nii, et $\|x - z\| \leq$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} \max\left\{\frac{1}{M+1}, \frac{1}{\|A\|+1}\right\},$$

ning seejärel arvu N nii, et $\|A_n z - Az\| < \frac{\varepsilon}{3}$, kui $n > N$. Kui nüüd $n > N$, siis

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n x - A_n z\| + \|A_n z - Az\| +$$

$$+ \|Az - Ax\| < M\|x - z\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A\|\|z - x\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Seega $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in X$ korral.

Teoreem on tõestatud.

Märkus. Kummagi teoreemi piisavuse osa tõestamisel ei kasutatud ruumi X täielikkust.

Näide, millest selgub, et ühtlase tõkestamise printsiibis ja Banach-Steinhausi teoreemis on ruumi X täielikkus oluline.

Vaatleme ruumi l_2 alamruumi $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) : n \in \mathbb{N}\}$, mis koosneb nn. finitsetest jadadest (s.t. jadadest, milles võib olla ainult lõplik arv nullist erinevaid liikmeid). Ruum X ei ole ruumis l_2 kinnine, sest $X \neq l_2$, kuid $\overline{X} = l_2$, mistõttu $X \neq \overline{X}$. Seega ei ole ruum X

täielik. Defineerime operaatorite jada

$$A_n(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, {}^n\xi_{n+1}, {}^n\xi_{n+2}, \dots), (\xi_k) \in X.$$

Siis $A_n \in \mathcal{L}(X, l_2)$, kusjuures $\|A_n\| = n$. Kuid iga $x \in X$ korral $A_n x \rightarrow 0$, sest $A_n x = 0$, kui n on küllalt suur.

Banach-Steinhausi teoreemi rakendamisel on kasulik tunda põhihulkasid konkreetsetes Banachi ruumides. On selge, et lõplikumõõtmelistes ruumides $X = m_n$ ja $X = l_p^n$ on põhihulgaks näiteks hulk $E = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$, sest siin isegi $\mathcal{L}(E) = X$. Hulk $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, kus $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots)$, on põhihulk jadaruumides c_0 ja l_p , sest iga element $x = (\xi_k)$ nendes ruumides avaldub kujul $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ (mida võib vahetult kontrollida, vt. ka § 2 järgmisest peatükist). Olgu veel $e = (1, 1, \dots)$. Siis $\{e, e_k : k \in \mathbb{N}\}$ on põhihulk jadaruumis c_1 , sest (nagu jällegi vahetult kontrollida võib) iga $x = (\xi_k)$, mille puhul $\lim \xi_k = \xi$, avaldub kujul $x = \xi e + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi) e_k$. Ruumis $C[a, b]$ on põhihulgaks $E = \{1, t, \dots, t^n, \dots\}$, sest kõigi polünoomide hulk $\mathcal{L}(E)$ on kõikjal tihe ruumis $C[a, b]$. Luzini teoreemile toetudes saab näidata, et sama hulk moodustab põhihulga ka ruumides $L_p(a, b)$, $p \geq 1$.

§ 7. Banachi teoreemid pöördoperaatorist

Meenutame, et kui operaator $A : X \rightarrow Y$ on bijektiivne (s.t. injektiivne ja sürjektiivne), siis on võimalik defineerida pöördoperaator $A^{-1} : Y \rightarrow X$ võrdusega $A^{-1}y = x$, kus $Ax = y$.

Lause. Olgu X ja Y vektorruumid ja operaator $A : X \rightarrow Y$ bijektiivne. Kui A on lineaarne, siis $A^{-1} : Y \rightarrow X$ on ka lineaarne.

Tõestus. Kui $y_1, y_2 \in Y$ ja $A^{-1}y_1 = x_1, A^{-1}y_2 = x_2$, s.t.

$y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$, siis tuginedes operaatori A aditiivsusele, saame

$$\begin{aligned} A^{-1}(y_1 + y_2) &= A^{-1}(Ax_1 + Ax_2) = A^{-1}A(x_1 + x_2) = \\ &= x_1 + x_2 = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 \end{aligned}$$

Analoogiliselt, kui $y \in Y$ ja $A^{-1}y = x$, s.t. $y = Ax$, siis operaatori A homogeensust kasutades saame

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}y$$

Teoreem. Olgu X ja Y Banachi ruumid ning operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiivne. Siis $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Tõestus. Me teame juba, et $A^{-1}: Y \rightarrow X$ on lineaarne. Seega tarvitseb näidata tema tõkestatust. Defineerime ruumil Y poolnormi p võrdusega

$$p(y) = \|A^{-1}y\|, \quad y \in Y.$$

On selge, et operaatori A^{-1} tõkestatus on samaväärne poolnormi p tõkestatusega, mis omakorda järeldeb, nagu väidab Zabreiko teoreem, p loenduvast pooladitiivsusest. Näitame niisiis, et p on loenduvalt pooladitiivne. Olgu

$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ koonduv rida ruumis Y . Kui $\sum_{k=1}^{\infty} p(y_k) = \infty$, siis loenduva pooladitiivsuse võrratus $p(y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(y_k)$ kehtib triviaalselt. Kui $\sum_{k=1}^{\infty} p(y_k) < \infty$, s.t. $\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}y_k\| < \infty$, siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k$ koondudes absoluutselt, koondub ruumis X . Olgu $x = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k$. Ku-

na $Ax = A(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} AA^{-1}y_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$, siis

$$\begin{aligned} p(y) &= p(Ax) = \|A^{-1}Ax\| = \|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} p(y_k). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Tõestatud teoreemi sisu väljendatakse ka järgmiselt: Banachi ruumide korral algebraalne isomorfism (s.o. bijektiivne lineaarne operaator (ka tema pöördoperaator on line

aarne)), mis on pidev, on ühtlasi ka topoloogiline isomorfism (s.o. bijektiivne pidev operaator, mille pöördoperaator on pidev).

Märgime, et normeeritud ruumides tegutseva pideva lineaarse operaatori pöördoperaator ei tarvitse pidev olla.

Näide. Olgu $X = C[0, 1]$ ja $Y = \{y \in C^1[0, 1] : y(0) = 0\}$ varustatud ruumi $C[0, 1]$ normiga. Vaatleme integreerimisoperaatorit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$, $t \in [0, 1]$, ja diferentseerimisoperaatorit $D: Y \rightarrow X$, $(Dy)(t) = y'(t)$, $t \in [0, 1]$. Võib vahetult kontrollida, et $DA = I$ ja $AD = I$. Järelikult on A bijektiivne ning $A^{-1} = D$. Seejuures D ei ole pidev, sest jada $y_n = \frac{1}{n} \sin nt$ puhul $\|y_n\| \rightarrow 0$, kuid $\|Dy_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |\cos nt| = 1 \not\rightarrow 0$.

Kuna normeeritud ruumide korral ülaltoodud teoreemi pöördoperaatori pidevusest üldiselt rakendada ei saa, siis osutub kasulikuks

Lause. Kui X ja Y on normeeritud ruumid ning lineaarse sürjektsiooni $A: X \rightarrow Y$ puhul leiduvad arvud $m, M > 0$ nii, et

$$m \|x\| \leq \|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X,$$

siis A on bijektsioon, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Tõestus. Kuna $m \|x\| \leq \|Ax\|$, siis tingimusest $Ax = 0$ järeldub, et $x = 0$. Seega operaator A on bijektiivne ning A^{-1} lineaarne. Et $\|Ax\| \leq M \|x\|$, siis $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kuna $\|A^{-1}(Ax)\| = \|x\| \leq \frac{1}{m} \|Ax\|$, siis $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Lause on tõestatud.

Lause eeldusi rahuldab näiteks isomeetiline isomorfism (ehk lineaarne isomeetria), s.o. niisugune lineaarne sürjektsioon $A: X \rightarrow Y$, mis säilitab normi, s.t.

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Vaatleme Banachi ruumi X ühikoperaatorit $I \in \mathcal{L}(X, X)$.

On selge, et I on pööratav ja $I^{-1} = I$. Alljärgnevast teoreemist ja tema järeldustest selgub, et kui operaatorit I pisut muuta, vaadeldes tema asemel operaatorit $I \pm A$, kus $\|A\|$ on piisavalt väike, siis $I \pm A$ on samuti pööratav, kusjuures on olemas ka pöördoperaatori $(I \pm A)^{-1}$ arvutamise valem.

Teoreem (teoreem ühikoperaatorile lähedase operaatori pööratavusest). Olgu X Banachi ruum ja operaator $A \in \mathcal{L}(X, X)$ selline, et $\|A\| < 1$. Siis operaatoril $I - A$ on olemas pöördoperaator $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$; seejuures

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad (1)$$

kus rida (1) koondub ruumis $\mathcal{L}(X, X)$.

Tõestus. Kuna $\|A\| < 1$, siis $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty$, mistõttu rida (1) koondub absoluutselt. Et $\mathcal{L}(X, X)$ on Banachi ruum, siis rida (1) koondub ruumis $\mathcal{L}(X, X)$. Olgu

$B = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Jääb tõestada, et on olemas pöördoperaator $(I - A)^{-1}$ ja $(I - A)^{-1} = B$. Selleks tarvitseb kontrollida võrduseid $B(I - A) = I$ ja $(I - A)B = I$. Piirdume neist esimesega, teist kontrollitakse analoogiliselt. Operaatorite korrutamise pidevust kasutades saame, et

$$\begin{aligned} B(I - A) &= \left(\lim_n \sum_{k=0}^n A^k \right) (I - A) = \lim_n \left(\sum_{k=0}^n A^k - \sum_{k=0}^n A^{k+1} \right) = \\ &= \lim_n \left(\sum_{k=0}^n A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k \right) = \lim_n (I - A^{n+1}) = \\ &= I - \lim_n A^{n+1} = I - 0 = I, \end{aligned}$$

sest $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n} 0$.

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Tõestada operaatori $I - A$ pööratavus äsja tõestatud teoreemi eeldustel, rakendades võrrandile $x = Ax + y$ Banachi püsipunkti printsiipi.

Järeldus 1. Teoreemis operatori A kohta tehtud eeldustel on olemas $(I+A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ ja

$$(I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k.$$

Tõestuseks rakendame teoreemi operaatorile $-A$.

Teoreemi ja järeldust 1 üldistab

Järeldus 2 (teoreem pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest). Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ja $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, siis on olemas $(A+B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ning

$$(A+B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k A^{-1}, \quad (2)$$

kusjuures rida (2) koondub ruumis $\mathcal{L}(Y, X)$.

Tõestus. Paneme tähele, et $A+B = A(I+A^{-1}B)$. Kuna $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|B\| < 1$, siis eksisteerib $(I+A^{-1}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k$. Järelikult on olemas ka $(A+B)^{-1} = (I+A^{-1}B)^{-1} A^{-1}$ ning kehtib võrdus (2).

Märkus. Avaldistest (1) ja (2) järelduvad vastavalt hinnangud $\|(I \pm A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$ ja $\|(A+B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}$.

§ 8. Lineaarsed operaatorvõrrandid

Selles paragrahvis puudutame ainult kõige üldisemaid võrranditega seotud mõisteid ja omadusi ilma võrrandite teooriat sügavamalt käsitlemata.

Olgu X ja Y vektorruumid ning $A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator.

Definitsioon. Operaatori A tuumaks ehk nullruumiks nimetatakse hulka $A^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : Ax = 0\}$, A tuuma

tähistatakse sümboliga $\text{Ker } A$ või $N(A)$. Operaatori A väärtuste hulgaks nimetatakse hulka $AX = \{Ax : x \in X\}$, teda tähistatakse ka sümboliga $\text{Im } A$ või $R(A)$.

Operaator A on injektiivne parajasti siis, kui $\text{Ker } A = \{0\}$. Tema sürjektiivsus tähendab aga võrdust $\text{Im } A = Y$.

Vaatleme võrrandit

$$Ax = y, \quad (1)$$

kus $y \in Y$ on antud ja $x \in X$ on otsitav element. Elementi y nimetatakse võrrandi (1) vabaliikmeks. Võrrandil (1) eksisteerib lahend parajasti siis, kui $y \in \text{Im } A$. Lahend on olemas iga $y \in Y$ korral parajasti siis, kui $\text{Im } A = Y$ ehk A on sürjektiivne. Lahendeid ei saa mitte ühegi vabaliikme $y \in Y$ korral olla rohkem kui üks parajasti siis, kui A on injektiivne ehk $\text{Ker } A = \{0\}$. Võrrand (1) on iga $y \in Y$ korral üheselt lahenduv parajasti siis, kui $\text{Ker } A = \{0\}$ ja $\text{Im } A = Y$, s.t. A on bijektiivne, mis tähendab veel seda, et eksisteerib $A^{-1}: Y \rightarrow X$. Sel juhul on võrrandi (1) (ainsaks) lahendiks antud y korral $x = A^{-1}y$.

Võrrandile (1) vastavaks homogeenseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$Ax = 0.$$

Tema lahenditeks on parajasti $\text{Ker } A$ elemendid.

Ülesanne. Näidata, et $\text{Ker } A$ on vektoralamruum ruumis X ja $\text{Im } A$ on vektoralamruum ruumis Y .

Lause. Kui X ja Y on normeeritud ruumid ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis $\text{Ker } A$ on kinnine alamruum ruumis X .

Tõestuseks märgime, et kui $x_n \in \text{Ker } A$ (s.t. $Ax_n = 0$) ja $x_n \rightarrow x$, siis A pidevuse tõttu $Ax_n = 0 \rightarrow Ax$. Seega $Ax = 0$ ehk $x \in \text{Ker } A$.

Ülesanne. Leida näide pidevast lineaarsest operaatorist

A , mille väärtuste hulk $\text{Im } A$ ei ole kinnine.

Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis operaatori $A^{-1}: Y \rightarrow X$ pidevus tähendab võrrandi (1) lahendi x pidevat sõltuvust vabaliikmest y ; e.t. kui vabaliikmete jada y_n koondub vabaliikmeks y , siis vastavate lahendite jada x_n koondub lahendiks x . Eelmise paragrahvi tulemused annavad piisavaid tingimusi võrrandi (1) üheseks lahenduvuseks iga vabaliikme y korral ning lahendi pidevaks sõltuvuseks vabaliikmest.

§ 9. Lahtise kujutuse printsiip

Pidevat operaatorit iseloomustab teatavasti asjaolu, et lahtiste hulkade originaalid on lahtised. Seevastu lahtise hulga kujutis pideva operaatori rakendamisel ei tarvitse üldiselt lahtine olla. Operaatorit, mis kujutab kõik lahtised hulgad lahtisteks, nimetatakse lahtiseks.

Lause. Bijektiivne operaator on lahtine parajasti siis, kui tema pöördoperaator on pidev.

Tõestus. Olgu $A: X \rightarrow Y$ bijektiivne. Kuna $A(G) = (A^{-1})^{-1}(G)$, $G \subset X$, siis $A(G)$ on lahtine iga lahtise hulga $G \subset X$ korral parajasti siis, kui operaator A^{-1} on pidev.

Lause. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ on lahtine parajasti siis, kui iga $r > 0$ korral leidub $r' > 0$ nii, et $B(0, r') \subset AB(0, r)$.

Tõestua. 1) Kui A on lahtine, siis lahtine hulk $AB(0, r)$ peab sisaldama mingit kera $B(0, r')$, sest $0 \in AB(0, r)$.

2) Olgu $G \subset X$ lahtine hulk. Näitame, et hulk AG on lahtine. Vaatleme suvalist elementi $y \in AG$. Siis lei-

dub $x \in G$ nii, et $y = Ax$. Hulga G lahtisuse tõttu on olemas $B(x, r) \subset G$. Näitame, et $B(y, r') \subset AG$. Vaatleme suvalist elementi $y' \in B(y, r')$. Siis $y' - y \in B(0, r') \subset AB(0, r)$, mistõttu leidub $z \in B(0, r)$ nii, et $Az = y' - y = y' - Ax$ ehk $y' = Az + Ax = A(z+x)$. Kuna $\|z+x-x\| = \|z\| < r$, siis $z+x \in B(x, r) \subset G$, mistõttu $y' \in AG$.

Lause on tõestatud.

Järeldus. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning $A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator. Kui A on lahtine, siis ta on eürjektiivne.

Tõestus. Lause põhjal leidub $r > 0$ nii, et $\overline{B(0, r)} \subset AB(0, 1) \subset \text{Im } A$. Kui $y \in Y \setminus \{0\}$, siis $\frac{r}{\|y\|} y \in \overline{B(0, r)} \subset \text{Im } A$, mistõttu leidub $x \in X$ nii, et $\frac{r}{\|y\|} y = Ax$ ehk $y = A\left(\frac{\|y\|}{r} x\right)$.

Näide. Olgu X/Z normeeritud ruumi X faktorruum ja $\alpha: X \rightarrow X/Z$ kanooniline kujutus. Siis iga $r > 0$ korral $\alpha B(0, r) = B(0, r)$ ning seega on α lahtine kujutus.

Põhjendus. Võrratuse $\|\alpha(x)\| = \inf_{\alpha(y)=\alpha(x)} \|y\| \leq \|x\|$ põhjal võime öelda, et kui $\|x\| < r$, siis $\|\alpha(x)\| < r$, mistõttu $\alpha B(0, r) \subset B(0, r)$. Kui aga $\alpha(x) \in B(0, r)$, siis $\|\alpha(x)\| = \inf_{\alpha(y)=\alpha(x)} \|y\| < r$ ning seepärast leidub $y \in X$ nii, et $\alpha(y) = \alpha(x)$ ja $\|y\| < r$. See aga tähendab, et $\alpha(x) \in \alpha B(0, r)$, millega on näidatud ka sisalduvus $B(0, r) \subset \alpha B(0, r)$.

Teoreem (lahtise kujutuse printsiip). Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kui A on sürjektiivne, siis ta on lahtine, kusjuures on olemas niisugune arv $M > 0$, et iga $y \in Y$ korral leidub $x \in X$ nii, et $y = Ax$ ja $\|x\| \leq M \|y\|$.

Tõestus. Olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sürjektiivne. Olgu $Z = \text{Ker } A$. Siis Z on ruumi X kinnine alamruum. Vaatleme kanoonilist kujutust $\alpha: X \rightarrow X/Z$. Kuna α on sürjektiivne, siis saame

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & Y \\ \alpha \downarrow & & \uparrow A_0 \\ & X/Z & \end{array}$$

me defineerida operaatori

$A_0: X/Z \rightarrow Y$ võrdusega $A_0(\alpha(x)) = Ax$, $x \in X$. Operaator A_0 on korrektselt defineeritud, sest kui

$\alpha(x) = \alpha(x')$, siis $x - x' \in Z$,

mistõttu $A(x - x') = 0$ ehk $Ax = Ax'$. Operaatorite A ja α lineaarsusest ning α sürjektiivsusest järeldub operaatori

A_0 lineaarsus. Kuna $\|A_0(\alpha(x + z))\| \leq \|Ax'\| \leq \|A\| \|x'\|$, $\alpha(x') = x + z$, siis $\|A_0(\alpha(x + z))\| \leq \|A\| \|x'\| = \|A\| \|x + z\|$, mistõttu A_0 on ka tõkestatud. Et A on sürjektiivne, eie

A_0 on samuti sürjektiivne. Kuna $A_0(\alpha(x + z)) = 0$ puhul $Ax = 0$ ehk $x \in Z$, siis $\alpha(x + z) = z$. Et aga Z on ruumi X/Z null-element, siis A_0 on ka injektiivne. Niisiis on A_0 Banachi ruumide pidev lineaarne bijektsioon. Rakendades Banachi teoreemi pöördoperaatorist, saame, et A_0^{-1} on pidev operaator, mistõttu A_0 ise on lahtine operaator. Kuna α ja A_0 on lahtised, siis ka $A = A_0 \alpha$ on lahtine operaator.

Näitame, et teoreemi teine väide kehtib mistahes

$M > \|A_0^{-1}\|$ korral. Vaatleme suvalist elementi $y \in Y$. Kui $y = 0$, siis võttes $x = 0$, näeme, et $\|x\| \leq M \|y\|$. Olgu $y \neq 0$. Tähistades $z = A_0^{-1} y$, saame $\|z\| \leq \|A_0^{-1}\| \|y\| < M \|y\|$. Kuna $z \in B(0, M \|y\|) = \alpha B(0, M \|y\|)$, siis leidub

$x \in B(0, M \|y\|)$ ja seega $\|x\| < M \|y\|$ nii, et $z = \alpha x$ ehk

$$y = Ax.$$

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Järeldada lahtise kujutuse printsibist Banachi teoreem pöördoperaatorist, mis väidab, et Banachi ruu-

midee teguteeva bijektiivese pideva lineaarse operaatori pöördoperaator on pidev.

§ 10. Teoreem kinniseet graafikust

Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Meenutame, et ruumide X ja Y otsekorrutiseke nimetatakse hulka $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Otsekorrutis $X \times Y$ on vektorruum, kuaajuuree tehted temae on defineeritud võrdustega

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

ning nullelemendike on $(0, 0)$. Otsekorrutisee võib normi mitmeti defineerida. Varustame otsekorrutise $X \times Y$ normiga

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Koondumine ruumis $X \times Y$ on samaväärne koordinaatide koon- dumisega: $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ tähendab seda, et $x_n \rightarrow x$ ja $y_n \rightarrow y$. Kui X ja Y on Banachi ruumid, siis ka $X \times Y$ on Banachi ruum.

Definitsioon. Operaatori $A : X \rightarrow Y$ graafikuks nimeta- takse otsekorrutise $X \times Y$ osahulka $\{(x, Ax) \in X \times Y : x \in X\}$.

Operaatori graafiku mõiste üldistab vahetult matemaati- lisest analüüsist tuntud funktsiooni graafiku mõistet.

Lause. Lineaarse operaatori $A : X \rightarrow Y$ graafik on vektor- alamruum ruumis $X \times Y$.

Tõestus. Vaadeldes operaatori A graafiku elemente (x_1, Ax_1) ja (x_2, Ax_2) , näeme, et $(x_1, Ax_1) + (x_2, Ax_2) = (x_1 + x_2, Ax_1 + Ax_2) = (x_1 + x_2, A(x_1 + x_2))$ kuulub graafikusse, samuti kuulub graafikusse $\lambda(x, Ax) = (\lambda x, \lambda Ax) = (\lambda x, A(\lambda x))$.

Lause. Pideva operaatori $A : X \rightarrow Y$ graafik on kinnine

ruumis $X \times Y$.

Tõestus. Vaatleme koonduvat jada $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, y)$. Siia $x_n \rightarrow x$ ja $Ax_n \rightarrow y$. Operaatori A pidevuse tõttu $Ax_n \rightarrow Ax$, mistõttu $y = Ax$ ning piirelement $(x, y) = (x, Ax)$ kuulub A graafikusse. Seega operaatori A graafik on kinnine.

Teoreem (teoreem kinnisest graafikust). Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $A: X \rightarrow Y$ lineaarne operaator. Kui operaatori A graafik on kinnine ruumis $X \times Y$, siis A on pidev.

Tõetuseks näitame, et operaator A on tõkestatud. On selge, et A tõkestatus on samaväärne poolnormi $p: X \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \|Ax\|$, $x \in X$, tõkestatuaega, mis omakorda järeldub, nagu väidab Zabreiko teoreem, p loenduvast pooladitiivusest. Näitame niisiis viimast. Olgu $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koonduv rida ruumis X . Kui $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = \infty$, siis loenduva pooladitiivuse võrratus $p(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k)$ kehtib triviaalselt. Kui $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| < \infty$, siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ koondub. Olgu $y = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$. Kuna $\sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n} x$ ja $A(\sum_{k=1}^n x_k) = \sum_{k=1}^n Ax_k \xrightarrow{n} y$, siis operaatori A graafiku kinnisuse tõttu $y = Ax$. Järelikult

$$p(x) = \|Ax\| = \|y\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k).$$

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Vaatleme operaatorit $T: G(A) \rightarrow X$, kus $G(A)$ on operaatori $A: X \rightarrow Y$ graafik ja T on defineeritud võrdusega $T(x, Ax) = x$, $x \in X$. Tõestada teoreem kinnisest graafikust, rakendades operaatorile T Banachi teoreemi pöördoperaatorist.

§ 11. Operaatorite laiendamisest

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ja X_0 ruumi X alamruum. Vaatleme operaatoreid $A: X \rightarrow Y$ ja $A_0: X_0 \rightarrow Y$. Kui $Ax = A_0x$ iga $x \in X$ korral, siis öeldakse, et A on operaatori A_0 laiend ehk jätk (ruumile X). Sel juhul öeldakse ka, et A_0 on operaatori A ahend alamruumile X_0 ja kirjutatakse $A|_{X_0} = A_0$.

Pideva lineaarse operaatori laiendamisel tema norm ei saa väheneda, sest kui $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on operaatori $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ laiend, siis

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\| \leq 1}} \|A_0x\| = \|A_0\|.$$

Alamruumil antud pidevat lineaarset operaatorit ei ole üldiselt võimalik laiendada kogu ruumil määratud pidevaks lineaarseks operaatoriks. Näiteks saab tõestada, et ühikoperaatorit $I: \mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_0$ pole võimalik jätkata ruumil m määratud pidevaks lineaarseks operaatoriks, mille väärtused kuuluvad ruumi \mathbb{C}_0 . Isegi kui alamruumil määratud pideva lineaarse operaatori laiendamine on võimalik, võib juhtuda, et seejuures operaatori norm ei säili - laiendi norm tuleb rangelt suurem. Näiteks ühikoperaatori $I: \mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_0$ jätkamisel ruumile \mathbb{C} tuleb laiendi norm alati vähemalt 2 (seejuures leidub laiend, mille norm on 2).

Järgnev teoreem näitab, et pidevat lineaarset operaatorit saab jätkata pidevaks lineaarseks operaatoriks (isegi üheselt), kui ta on määratud kõikjal tihedal alamruumil.

Teoreem. Olgu X normeeritud ruum, Y Banachi ruum ja $X_0 \subset X$ ruumi X alamruum. Kui X_0 on kõikjal tihe ruumis X , siis igal operaatoril $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ on olemas ühene jätk $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Seejuures $\|A\| = \|A_0\|$.

Tõestus. Olgu $x \in X$ suvaline element. Kuna $\overline{X_0} = X$, siis leidub jada $x_n \in X_0$ nii, et $x_n \rightarrow x$. Jada $A_0 x_n$ on fundamentaalne, sest

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| = \|A_0(x_n - x_m)\| \leq \|A_0\| \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m} 0.$$

Ruumi Y täielikkuse tõttu eksisteerib $\lim_n A_0 x_n$. Näitame, et $\lim_n A_0 x_n$ ei sõltu elemendiks x koonduva jada $x_n \in X_0$ valikust. Kui veel $x'_n \rightarrow x, x'_n \in X_0$, siis

$$\lim_n A_0 x'_n - \lim_n A_0 x_n = \lim_n A_0(x'_n - x_n) = 0,$$

sest $x'_n - x_n \rightarrow 0$ ja $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$. Järelikult saame defineerida operaatori $A: X \rightarrow Y$ võrdusega

$$Ax = \lim_n A_0 x_n, \quad x = \lim_n x_n, \quad x_n \in X_0.$$

Operaator A on operaatori A_0 laiend, sest kui $x \in X_0$, siis võime võtta $x_n = x$ iga n korral, mistõttu $Ax = \lim_n A_0 x_n = \lim_n A_0 x = A_0 x$.

Näitame, et operaator A on lineaarne ja pidev. Kui $x, x' \in X$ ning $x_n, x'_n \in X_0$ on sellised, et $x_n \rightarrow x, x'_n \rightarrow x'$, siis

$$\begin{aligned} A(x+x') &= \lim_n A_0(x_n + x'_n) = \\ &= \lim_n A_0 x_n + \lim_n A_0 x'_n = Ax + Ax'. \end{aligned}$$

Analoogiliselt kontrollitakse operaatori A homogeensust.

Operaatori A definitsioonist lähtudes saame

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| \lim_n A_0 x_n \right\| = \lim_n \|A_0 x_n\| \leq \\ &\leq \lim_n \|A_0\| \|x_n\| = \|A_0\| \|x\|, \quad x \in X, \end{aligned}$$

mistõttu A on tõkestatud ja $\|A\| \leq \|A_0\|$. Viimane võrratus koos üldiselt kehtiva vastupidise võrratusega annab ka nõutud võrduse $\|A\| = \|A_0\|$.

Lõpuks näitame laiendi ühesust. Oletame, et leidub veel $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $Bx = A_0 x, x \in X_0$. Valides suvalisele elemendile $x \in X$ jada $x_n \in X_0$ nii, et $x_n \rightarrow x$, saame

$$Bx = B\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n Bx_n = \lim_n A_0 x_n = Ax,$$

mistõttu $B = A$.

Teoreem on tõestatud.

Kui operaatorit laiendatakse teoreemis kirjeldatud viisil, siis räägitakse operaatori pidevast jätkamisest ehk laiendamisest või ka sulundamisest; ühest jätku kutsutakse aga operaatori pidevaks jätkuks ehk laiendiks või sulundika.

Rakendustes kasutatakse teoreemi pidevast laiendamisest nii, et vajaliku pideva lineaarse operaatori saamiseks defineeritakse see esialgu ainult ruumi kõikjal tihedal alamruumil ja seejärel jätkatakse pidevalt tervele ruumile. Nii jätkatakse näiteks mittetäielikul normeeritud ruumil defineeritud pidevat lineaarset operaatorit selle ruumi täielikule.

Näitame, et teoreemi eeldustel on ruumide $\mathcal{L}(X_0, Y)$ ja $\mathcal{L}(X, Y)$ vahel olemas loomulik isomeetriline isomorfism.

Rahuldagu X, Y ja $X_0 \subset X$ teoreemi eeldusi. Võib vahetult kontrollida, et kujutus $T: \mathcal{L}(X_0, Y) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, mis igale operaatorile $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ seab vastavusse tema pideva jätku $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on lineaarne. Operaator T on surjektiivne, sest kui $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis $T(A|_{X_0})$ ja A on operaatori $A|_{X_0}$ pidevad lineaarsed jätkud, mis ühtivad teoreemi põhjal, s.t. $T(A|_{X_0}) = A$. Kuna T säilitab ka normi, siis T on isomeetriline isomorfism. Seda isomeetrilist isomorfismi silmas pidades samastatakse sageli operaator tema pideva jätkuga ning ruum $\mathcal{L}(X_0, Y)$ ruumiga $\mathcal{L}(X, Y)$. Sel juhul kirjutatakse $\mathcal{L}(X_0, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

§ 12*. Kinnised operaatorid

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Siis normiga $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, $x \in X, y \in Y$, varustatud otsekorrutis $X \times Y$ on Banachi ruum. Vaatleme lineaarset operaatorit

$$A: D \rightarrow Y, D \subset X,$$

kus D on ruumi X vektoralamruum. Operaatori A määramispiirkonna D jaoks kaautatakse ka tähistust $D(A)$ või D_A , väärtuste piirkonna $\text{Im } A$ jaoks tähistust $R, R(A)$ või R_A . Operaatori A graafikuks $G(A)$ nimetatakse ruumi $X \times Y$ osahulka $\{(x, Ax) : x \in D\}$. Operaatori A linearsuse tõttu on tema graafik $G(A)$ vektoralamruum ruumis $X \times Y$.

Definitsioon. Operaatorit A nimetatakse kinniseks, kui tema graafik $G(A)$ on kinnine ruumis $X \times Y$.

Definitsioonist on selge, et operaator A on kinnine parajasti siis, kui koondumistest $x_n \rightarrow x, x_n \in D$, ja $Ax_n \rightarrow y$ järelneb, et $x \in D$ ja $y = Ax$ (ruumis $X \times Y$ koonduva jada $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ piirelement (x, y) kuulub graafikusse $G(A)$).

Ülesanne. Näidata, et kinnise operaatori A tuum $\text{Ker } A = \{x \in D : Ax = 0\}$ on kinnine ruumis X .

Näited. 1) Operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on kinnine, sest, nagu nägime eespool, tema graafik on kinnine ruumis $X \times Y$.

2) Olgu $X = Y = C[a, b]$. Näitame, et diferentseerimisoperaator $A = \frac{d}{dt} : D \rightarrow X, (Ax)(t) = x'(t), t \in [a, b], x \in D = C^1[a, b]$, on kinnine. On selge, et A on lineaarne operaator. Olgu jada $x_n \in D$ selline, et $x_n \rightarrow x$ ja $Ax_n = x_n' \rightarrow y$ ruumis $C[a, b]$. Siis

$$\begin{aligned} & |x_n(t) - (x(a) + \int_a^t y(s) ds)| = \\ & = |x_n(t) - x_n(a) - \int_a^t y(s) ds + x_n(a) - x(a)| \leq \\ & \leq \left| \int_a^t x_n'(s) ds - \int_a^t y(s) ds \right| + |x_n(a) - x(a)| \leq \\ & \leq (b-a) \max_{a \leq s \leq b} |x_n'(s) - y(s)| + |x_n(a) - x(a)| \xrightarrow{n} 0, \end{aligned}$$

mistõttu $x(t) = x(a) + \int_a^t y(s) ds$. Sellest järeldub aga, et $x'(t) = y(t)$, $t \in [a, b]$. Seega $x \in C^1[a, b]$ ja $y = x' = Ax$, millega on A kinnisus tõestatud.

Kinniste operaatorite summa ei tarvitse olla kinnine operaator. Nimelt saab tuua näite kinnistest operaatoritest $A_1: D_1 \rightarrow Y$, $D_1 \subset X$, ja $A_2: D_2 \rightarrow Y$, $D_2 \subset X$, mille korral operaator $A_1 + A_2$, mis määratakse võrdusega

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x, \quad x \in D_1 \cap D_2,$$

ei ole kinnine ega ole isegi laiendatav kinniseks operaatoriks.

Lause. Kui operaator $A_1: D_1 \rightarrow Y$, $D_1 \subset X$, on kinnine ja operaator $A_2 \in \mathcal{L}(D_2, Y)$, $D_2 \subset X$, kusjuures $D_1 \subset D_2$, siis operaator $A_1 + A_2: D_1 \rightarrow Y$ on kinnine.

Tõestus. Olgu $x_n \in D_1$, $x_n \rightarrow x \in X$ ja $(A_1 + A_2)x_n \rightarrow y$. Kuna operaatori A_2 tõkestatuse tõttu A_2x_n on Cauchy jada, siis $A_2x_n \rightarrow z$. Seega $A_1x_n = (A_1 + A_2)x_n - A_2x_n \rightarrow y - z$. Operaatori A_1 kinnisus lubab nüüd väita, et $x \in D_1$ ja $y - z = A_1x$. Et $x \in D_2$ ja $x_n \rightarrow x$, siis $A_2x_n \rightarrow A_2x$, mistõttu $z = A_2x$ ning $y = A_1x + z = (A_1 + A_2)x$. Sellega on $A_1 + A_2$ kinnisus tõestatud.

Vaatleme nüüd lisaks operaatorile $A: D \rightarrow Y$, $D \subset X$, operaatorit $A_1: D_1 \rightarrow Y$, $D_1 \subset X$. On selge, et A_1 on operaatori A laiend parajasti siis, kui $G(A) \subset G(A_1)$.

Teoreem. Operaatoril A leidub kinnine laiend parajasti siis, kui tema graafiku sulund $\overline{G(A)}$ ei sisalda mitte ühtegi elementi kujul $(0, y)$, kus $y \neq 0$. Kui see tingimus on täidetud, siis operaatoril A leidub vähim kinnine laiend, kusjuures $\overline{G(A)}$ kujutab endast selle laiendi graafikut.

Tõestus. 1) Eeldame, et operaatoril A leidub kinnine laiend A_1 . Siis sisalduvuse $G(A) \subset G(A_1)$ tõttu

$\overline{G(A)} \subset \overline{G(A_1)} = G(A_1)$. Kuna $A_1 0 = 0$, siis hulgas $G(A_1)$ ei ole mitte ühtegi elementi kujul $(0, y)$, $y \neq 0$. Seega pole niauguseid elemente ka hulgas $\overline{G(A)}$.

2) Eeldame, et $\overline{G(A)}$ ei sisalda mitte ühtegi elementi kujul $(0, y)$, $y \neq 0$. Et $G(A)$ on ruumi $X \times Y$ vektoralamruum, siis ka tema sulund $\overline{G(A)}$ on vektoralamruum ruumis $X \times Y$. Paneme tähele, et $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{G(A)}$ korral tingimata $y_1 = y_2$ (sest sisalduvuse $(x, y_1) - (x, y_2) = (0, y_1 - y_2) \in \overline{G(A)}$ tõttu $y_1 - y_2 = 0$ ehk $y_1 = y_2$). Järelikult saame defineerida operaatori $\bar{A}: \{x \in X: (x, y) \in \overline{G(A)}\} \rightarrow Y$ tingimusega

$$\bar{A} x = y \Leftrightarrow (x, y) \in \overline{G(A)}.$$

Definitsiooni põhjal on selge, et $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$. Kuna $G(A) \subset \overline{G(A)} = G(\bar{A})$, siis \bar{A} on operaatori A laiend. Hulga $\overline{G(A)}$ lineaarsus ja kinnisus tagavad vastavalt operaatori \bar{A} lineaarsuse ja kinnisuse.

3) Osade 1) ja 2) põhjal võime öelda, et kui A_1 on operaatori A mingi kinnine laiend, siis $G(\bar{A}) = \overline{G(A)} \subset G(A_1)$. Seega \bar{A} on operaatori A vähim kinnine laiend. Teoreem on tõestatud.

Operaatori vähimat kinnist laiendit nimetatakse selle operaatori sulundiks. Kui operaatoril leidub kinnine laiend, siis öeldakse, et operaator on sulundatav (sel juhul, nagu nägime, operaatoril eksisteerib sulund).

Näide operaatorist, millel ei leidu kinnist laiendit. Olgu X üks ruumidest c_0 või l_p ja $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Siis iga element $x = (\xi_k) \in X$ avaldub kujul $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ (seda võib vahetult kontrollida, vt. ka § 2 järgmisest peatükist). Olgu $L = \mathcal{L}(\{e_1, e_2, \dots\})$ ja $x \notin L$ (elemendiks x sobib iga selline element, mille esituses $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ on lõpmatu arv nullist erinevaid

koordinaate ξ_k). Hulk $D = \{(\lambda x + y) \in X : \lambda \in \mathbb{K}, y \in L\}$ on vektoralamruum ruumis X . Defineerime lineaarse operaatori $A: D \rightarrow X$ võrdusega

$$A(\lambda x + y) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{K}, y \in L.$$

Pidades silmas esitust $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, saame

$$\begin{aligned} & \left(x - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, A \left(x - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) \right) = \\ & = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k, x \right) \xrightarrow{n} (0, x), \end{aligned}$$

mistõttu $(0, x) \in \overline{G(A)}$. Sellega oleme näidanud, et operaatoril A ei leidu kinnist laiendit, s.t. A ei ole sulundatav.

Teoreem kinnisest graafikust väidab, et kinnine operaator $A: X \rightarrow Y$ on pidev ja seega $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Lause. Operaator $A \in \mathcal{L}(D, Y)$, $D \subset X$, on kinnine parajasti siis, kui tema määramispiirkond D on kinnine.

Tõestus. Kui D on kinnine, siis ta on Banachi ruum ning operaator $A \in \mathcal{L}(D, Y)$ on kinnine. Feldame nüüd, et operaator A on kinnine ning vaatleme jada $x_n \in D$, $x_n \rightarrow x$. Operaatori A tõkestatuse tõttu on Ax_n Cauchy jada Banachi ruumis Y . Seega $Ax_n \rightarrow y$ ning operaatori A kinnisust arvestades saame, et $x \in D$. Hulga D kinnisus on tõestatud.

Üldiselt ei tarvitse kinnise operaatori määramispiirkond kinnine olla. Selles veenab meid eespool vaadeldud näide diferentseerimisoperaatorist.

Ülesanne. Leida näide kinnisest operaatorist, mille määramispiirkond ja väärtuste hulk ei ole kinnised.

Olgu $A \in \mathcal{L}(D, Y)$, $D \subset X$. Teoreem operaatori pidevast laiendamisest väidab, et A on üheselt laiendatav operaatoriks

$\bar{A} \in \mathcal{L}(\bar{D}, Y)$, kusjuures \bar{A} on kinnine viimati tõestatud lause põhjal. Seega igal pideval lineaarsel operaatoril leidub kinnine laiend. Kuna $G(\bar{A}) = \{(x, \bar{A}x) : x \in \bar{D}\} \subset \overline{\{(x, Ax) : x \in D\}} = \overline{G(A)}$, siis operaatori A pidev laiend \bar{A} on tema vähim kinnine laiend.

Kui operaator $A: D \rightarrow Y, D \subset X$, on injektiivne, siis $A: D \rightarrow R$ on bijektiivne ning seetõttu võime vaadelda pöördoperaatorit $A^{-1}: R \rightarrow X, R \subset Y$.

Teoreem. Olgu operaator A injektiivne. Pöördoperaator A^{-1} on kinnine parajasti siis, kui A on kinnine.

Tõestus. Kuna

$$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y,$$

siis

$$(x, y) \in G(A) \Leftrightarrow (y, x) \in G(A^{-1}).$$

Arvestades, et $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ parajasti siis, kui $(y_n, x_n) \rightarrow (y, x)$, võime öelda, et $G(A) \subset X \times Y$ ja $G(A^{-1}) \subset Y \times X$ saavad olla kinnised või mitte ainult üheaegselt.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Kui kinnine operaator A on bijektiivne, siis $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Tõestuseks märgime, et tehtud eeldustel on operaator $A^{-1}: Y \rightarrow X$ kinnine ning seega ka pidev.

Järeldus 1 üldistab Banachi teoreemi pöördoperaatorist, kus eeldati operaatori A kinnisuse asemel, et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Järeldust 1 saab tõlgendada järgmiselt: kui kinnise operaatoriga võrrand $Ax = y$ on iga $y \in Y$ korral üheselt lahenduv, siis lahend x sõltub pidevalt vabaliikmest y .

Järeldus 2. Kui operaatori A väärtuste hulk on kinnine ja leidub $m > 0$ nii, et

$$\|Ax\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in D,$$

siis A on kinnine.

Tõestus. Kuna A on injektiivne, siis eksisteerib $A^{-1}: R \rightarrow X$, mis on tõkestatud (sest $\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m} \|y\|, y \in R$). Et $A^{-1} \in \mathcal{L}(R, X)$ ja R on kinnine, siis A^{-1} on kinnine. Järelikult ka A on kinnine.

Näide. Olgu $X = Y = C[a, b], D = C^1[a, b]$ ja A diferentseerimisoperaator, s.t. $Ax = x', x \in D$. Vaatleme operaatori

A ahendeid $A_i, i = 0, 1, 2$, kus

$$A_0: D_0 \rightarrow X, \quad D_0 = \{x \in D: x(a) = x(b) = 0\},$$

$$A_1: D_1 \rightarrow X, \quad D_1 = \{x \in D: x(a) = 0\},$$

$$A_2: D_2 \rightarrow X, \quad D_2 = \{x \in D: x(b) = 0\}.$$

Operaatorid $A_i, i = 0, 1, 2$, on injektiivsed, sest kui

$A_i x = 0$, siis x on konstantne funktsioon, kuid sisalduvuse $x \in D_i$ tõttu $x = 0$. Operaatorid A_1 ja A_2 on sür-

jektiivsed, sest kui $y \in C[a, b]$ ja $x(t) = \int_a^t y(s) ds$, siis

$$A_1 x = y, \text{ ning kui } x(t) = -\int_t^b y(s) ds, \text{ siis } A_2 x = y. \text{ Äsja-}$$

toodud võrdused tähendavad ühtlasi, et $(A_1^{-1} y)(t) =$

$$= \int_a^t y(s) ds \quad \text{ja} \quad (A_2^{-1} y)(t) = -\int_t^b y(s) ds, \quad y \in C[a, b], \text{ mistõttu}$$

A_1^{-1} ja A_2^{-1} on pidevad lineaarsed operaatorid. Ka

A_0^{-1} on pidev lineaarne operaator kui operaatori A_1^{-1}

(või A_2^{-1}) ahend. Pole raske kontrollida, et $\{y \in C[a, b]:$

$\int_a^b y(s) ds = 0\}$ on operaatori A_0 väärtuste piirkond ning

ta on kinnine. Kuna operaatorite A_i^{-1} määramispiirkonnad

on kinnised, siis need operaatorid ning järelikult ka ope-

raatorid $A_i, i = 0, 1, 2$, on kinnised.

Definitsioon. Olgu $A: D \rightarrow Y, D \subset X$, lineaarne operaator,

kusjuures $\bar{D} = X$. Olgu $D(A^*) = \{g \in Y^*: gA \in D^*\}$. Operaatori

A kaasoperaatoriks A^* nimetatakse operaatorit

$A^*: D(A^*) \rightarrow X^*$, mis igale funktsionaalile $g \in D(A^*)$ seab vastavusse funktsionaali $gA \in D^*$ pideva jätku.

Pideva jätku ühesuse põhjal võib öelda, et operaatori A kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit $A^*: D(A^*) \rightarrow X^*$, mis on defineeritud tingimusega

$$A^*g = f \Leftrightarrow f|_D = gA$$

ehk

$$(A^*g)(x) = (gA)(x) \quad \forall x \in D.$$

Pole raske vahetult kontrollida, et A^* on lineaarne operaator.

Lause. Kaasoperaator A^* on kinnine.

Tõestus. Olgu jada $g_n \in D(A^*)$ selline, et $g_n \rightarrow g \in Y^*$ ja $A^*g_n \rightarrow f \in X^*$. Kuna iga $x \in D$ korral $(A^*g_n)(x) \rightarrow f(x)$ ja $(A^*g_n)(x) = (g_nA)(x) = g_n(Ax) \rightarrow g(Ax) = (gA)(x)$, siis $(gA)(x) = f(x)$, $x \in D$. Seega $gA = f|_D \in D^*$, mistõttu $g \in D(A^*)$ ja $f = A^*g$.

Lause on tõestatud.

Märkus. Vaatleme kinnist operaatorit $A: D \rightarrow Y$, $D \subset X$. Varustame vektorruumi D normiga (normi aksioome on siin kerge kontrollida)

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D.$$

Näitame, et D on Banachi ruum. Kui $\|x_n - x_m\|_A \xrightarrow{n, m} 0$, siis $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ja $\|Ax_n - Ax_m\| \rightarrow 0$, mistõttu jada (x_n, Ax_n) on fundamentaalne Banachi ruumi $X \times Y$ kinnises alamruumis $G(A)$. Seega leidub $x \in D$ nii, et $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, Ax)$ ehk $\|x_n - x\|_A \rightarrow 0$. On selge, et $A \in \mathcal{L}(D, Y)$, sest $\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$, $x \in D$. Niisiis võib iga kinnist operaatorit vaadelda Banachi ruumides tegutseva pideva lineaarse operaatorina. Seda võimalust kasutatakse siiski harva, sest Banachi ruum D sõltub operaatorist A ning tema struktuuri uurimine tähendab sisuliselt operaatori A uurimist.

V Pidevad lineaarsed funktsionaalid
normeeritud ruumidel

§ 1. Normeeritud ruumi kaasruum

Olgu X normeeritud ruum üle \mathbb{K} . Lineaarseks funktsionaaliks ruumil X nimetatakse lineaarset operaatorit $f: X \rightarrow \mathbb{K}$. Belmises peatükis toodud lineaarseid operaatoreid puudutavad tulemused kehtivad muidugi ka vaadeldaval erijuhul. Näiteks lineaarne funktsionaal on pidev parajasti siis, kui ta on tõekestatud (leidub arv M nii, et $|f(x)| \leq M \|x\|$ iga $x \in X$ korral).

Pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ nimetatakse ruumi X kaasruumiks ja tähistatakse X^* . Belmisele peatükile toetudes võime öelda, et $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ on Banachi ruum (sest \mathbb{K} on Banachi ruum) normiga

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|, \quad f \in X^*.$$

Olgu X normeeritud ruum ja $X_0 \subset X$ tema alamruum, kusjuures $\overline{X_0} = X$. Nagu nägime peale operaatorite pideva laiendamise teoreemi, kehtib siis võrdus $\mathcal{L}(X_0, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ehk $X_0^* = X^*$. Oma sisult tähendab see võrdus isomeetrilist isomorfismi, mis samastab omavahel funktsionaali $f_0 \in X_0^*$ ja tema pideva jätku $f \in X^*$.

Kui X on kompleksne vektorruum, siis me võime teda vaadelda ka vektorruumina üle \mathbb{R} . Seejuures muutub mõningal määral ruumi struktuur. Näiteks $\mathbb{C}^n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{C}\}$ on kompleksse ruumina n -dimensionaalne, tema baas on $e_k = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, n$, ja iga $x \in \mathbb{C}^n$ on esitatav kujul $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $\xi_k \in \mathbb{C}$. Reaalse ruumina on \mathbb{C}^n aga $2n$ -dimensionaalne, tema baas on $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ ja iga $x \in \mathbb{C}^n$ on esitatav kujul

$$x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k + \sum_{k=1}^n \eta_k (i e_k), \quad \xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}.$$

Olgu X normeeritud ruum üle \mathbb{C} . Vaadeldes ruumi X reaalse normeeritud ruumina, saame rääkida tema kaasruumist $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, mida tähistame sümboliga X_R^* . Uurime järgnevas, milline on vaherkord kaasruumide X^* ja X_R^* vahel.

Vaatleme kõigepealt suvalist funktsionaali $f \in X^*$ ning seame talle vastavusse funktsionaali $f_R : X \rightarrow \mathbb{R}$, defineerides

$$f_R(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad x \in X.$$

On selge, et f_R on aditiivne ja homogeenne üle \mathbb{R} . Kuna $|f_R(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, siis $f_R \in X_R^*$, kusjuures $\|f_R\| \leq \|f\|$. Vastupidise võrratuse saamiseks paneme tähele, et kui $f(x) = r e^{i\theta}$ (kus $r \geq 0$ ja $\theta \in \mathbb{R}$), siis

$$\begin{aligned} |f(x)| = r &= f(e^{-i\theta} x) = f_R(e^{-i\theta} x) \leq \\ &\leq \|f_R\| |e^{-i\theta}| \|x\| = \|f_R\| \|x\|. \end{aligned}$$

Seega $\|f_R\| = \|f\|$.

Vaatleme nüüd suvalist funktsionaali $g \in X_R^*$ ning seame talle vastavusse funktsionaali $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, defineerides

$$f(x) = g(x) - i g(ix), \quad x \in X$$

(juhime tähelepanu sellele, et $ix \in X$, sest X on kompleksne ruum). Kuna g on aditiivne ja homogeenne üle \mathbb{R} , siis ka f on samade omadustega. Arvestades, et

$$f(ix) = g(ix) - i g(-x) = i(-i)g(ix) + i g(x) = i f(x),$$

võime öelda, et f on homogeenne ka üle \mathbb{C} , sest

$$f((\alpha + i\beta)x) = \alpha f(x) + i\beta f(x) = (\alpha + i\beta)f(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad \text{Kuna}$$

$$|f(x)| \leq |g(x)| + |g(ix)| \leq \|g\| \|x\| + \|g\| \|ix\| =$$

$$= 2 \|g\| \|x\|, \quad \text{siis } f \in X^*. \quad \text{Funktsionaali } f \text{ definitsi-}$$

oonist on selge, et ${}^{\circ}R_a f(x) = g(x)$, $x \in X$. Seega $f_R = g$ ja $\|f\| = \|f_R\| = \|g\|$. Lisaks oleme saanud funktsionaale f ja f_R siduva võrduse

$$f(x) = f_R(x) - i f_R(ix), x \in X.$$

Võrdusega $Tf = f_R$, $f \in X^*$, on meil defineeritud normi säilitav sürjektiivne operaator $T: X^* \rightarrow X_R^*$. Arvestades, et T on ka aditiivne ja homogeenne üle \mathbb{R} , mida võib vahetult kontrollida, saame öelda, et T on injektiivne, seega bijektiivne operaator. Järelikult, vaadeldes ruumi X^* reaalse normeeritud ruumina, on T isomeetiline isomorfism ruumide X^* ja X_R^* vahel.

§ 2. Kaasruumide kirjeldusi

Osutub, et enamkasutatavate konkreetsete Banachi ruumide kaasruumid on kirjeldatavad mingi konkreetse Banachi ruumina. Kirjeldame kõigepealt ruumi l_1 kaasruumi l_1^* .

Teoreem 1. Kujutus $T: m \rightarrow l_1^*$, kus

$$(T(\alpha_k))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, (\alpha_k) \in m, x = (\xi_k) \in l_1, \quad (1)$$

on isomeetiline isomorfism ruumide m ja l_1^* vahel.

Teoreemist 1 on selge, et kui $f \in l_1^*$, siis leidub parajasti üks $(\alpha_k) \in m$ nii, et $f = T(\alpha_k)$, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, x = (\xi_k) \in l_1. \quad (2)$$

Ning teiselt poolt, iga $(\alpha_k) \in m$ puhul defineerib võrdus (2) funktsionaali $f \in l_1^*$. Seejuures $\|f\| = \|(\alpha_k)\|$.

Teoreemi 1 tõestus. Veendume kõigepealt kujutuse T definitsiooni korrektsuses. Olgu $a = (\alpha_k) \in m$ ja $x = (\xi_k) \in l_1$.

Kuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| |\xi_k| \leq \sup_k |\alpha_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|a\| \|x\|,$$

siis rida $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{\kappa} \xi_{\kappa}$ koendub. Järelikult on võrdusega (1) iga $a = (\alpha_{\kappa}) \in m$ korral defineeritud funktsionaal $Ta: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$. Definitsioonist (I) on selge, et funktsionaal Ta on lineaarne, ning äsjatõestatud võrratusest järeljub, et

$$|(Ta)(x)| \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_{\kappa} \xi_{\kappa}| \leq \|a\| \|x\|,$$

mistõttu $Ta \in \ell_1^*$ ning

$$\|Ta\| \leq \|a\| \quad \forall a \in m. \quad (3)$$

Niisiis võime öelda, et (1) defineerib kujutuse $T: m \rightarrow \ell_1^*$.

Kujutuse T linearsus on vahetult kontrollitav. Näitame, et T on sürjektiivne. Olgu $f \in \ell_1^*$. Valime vabalt

$x = (\xi_{\kappa}) \in \ell_1$. Näitame, et $x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \xi_{\kappa} e_{\kappa}$, kus

$e_{\kappa} = (0, \dots, 0, \underset{\kappa}{1}, 0, \dots)$. See võrdus kehtib, kuna

$$\|x - \sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa} e_{\kappa}\| = \|(\xi_{\kappa})_{\kappa=n+1}^{\infty}\| = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} |\xi_{\kappa}| \rightarrow 0,$$

sest $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\xi_{\kappa}| < \infty$. Tähistades $f(e_{\kappa}) = \alpha_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \dots$,

saame funktsionaali f pidevust ja linearsust kasutades

$$f(x) = f\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \xi_{\kappa} e_{\kappa}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \xi_{\kappa} f(e_{\kappa}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{\kappa} \xi_{\kappa}.$$

Kuna seejuures

$$|\alpha_{\kappa}| = |f(e_{\kappa})| \leq \|f\| \|e_{\kappa}\| = \|f\|,$$

mistõttu $a = (\alpha_{\kappa}) \in m$, siis $Ta = f$ ning

$$\|a\| = \sup_{\kappa} |\alpha_{\kappa}| \leq \|f\| = \|Ta\|. \quad (4)$$

Sellega on kujutuse T sürjektiivsus tõestatud. Lisaks saame võrratustest (3) ja (4), et

$$\|Ta\| = \|a\| \quad \forall a \in m,$$

s.t. T säilitab normi.

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi 1 sisu märgitakse lühidalt võrdusega $\ell_1^* = m$ (või $m = \ell_1^*$). See võrdus tähendab isomeetrilist isomorfismi,

mis samastab omavahel tingimusega (1) seotud funktsionaali $f = T(\alpha_k) \in \ell_1^*$ ja jada $(\alpha_k) \in m$. Viimast samastamist silmas pidades kirjutatakse, et $f = (\alpha_k)$, mistõttu võrdus (1) saab kuju

$$(\alpha_k)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, \quad x = (\xi_k) \in \ell_1.$$

Teoreemiga 1 analoogiliselt saab kirjeldada kaasruume C_0^* ja ℓ_p^* , $p > 1$ (kusjuures ℓ_p^* puhul tuleb summa $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k|$ hindamiseks kasutada Hölderi võrratust).

Teoreem 2. Kehtib võrdus $C_0^* = \ell_1$, mis tähendab, et kujutus $T: \ell_1 \rightarrow C_0^*$, kus

$$(T(\alpha_k))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, \quad (\alpha_k) \in \ell_1, \quad x = (\xi_k) \in C_0,$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_1 ja C_0^* vahel.

Teoreem 3. Olgu $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siis kehtib võrdus $\ell_p^* = \ell_q$, mis tähendab, et kujutus $T: \ell_q \rightarrow \ell_p^*$, kus

$$(T(\alpha_k))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, \quad (\alpha_k) \in \ell_q, \quad x = (\xi_k) \in \ell_p,$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_q ja ℓ_p^* vahel.

Ruumid m_n , ℓ_p^n on lõplikumõõtmelised, mistõttu iga nendel määratud lineaarne funktsionaal on pidev. Lineaarsete funktsionaalide kirjeldamine on lineaaralgebraalne probleem, ta on seotud ruumiga kui vektorruumiga. Vektorruumil $X = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ saab kõik lineaarsed funktsionaalid esitada kujul

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}.$$

Ruumi normi peab aga silmas pidama siis, kui leitakse funktsionaali normi. Näiteks võib teoreemi 1 tõestuse põhjal öelda, et

$$\|f\|_{(\ell_1^n)^*} = \|(\alpha_k)\|_{m_n} = \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$$

Analoogiliselt saab kontrollida, et

$$\|f\|_{(m_n)^*} = \|(\alpha_k)\|_{\ell_1^n} = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|,$$

$$\|f\|_{(L_p)^*} = \|(\alpha_n)\|_{l_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q\right)^{1/q}, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Järelikult kehtivad võrdused $(l_1^*)^* = m_n$, $m_n^* = l_1^n$ ning $(l_p^*)^* = l_q$, kus $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lõpuks esitame tõestuseta mõned funktsionaalruumide kaasruumide kirjeldused.

Üeldakse, et funktsioon $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on tõkestatud muuduga, kui leidub arv M nii, et lõigu $[a, b]$ mistahes jaotuse $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, korral

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M.$$

Tõkestatud muuduga funktsiooni täisvariatsioon on

$$\bigvee_a^b g = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ruumi $C[a, b]$ kaasruumi saab kirjeldada järgmiselt.

Teoreem 4 (F. Riesz'i teoreem). Funktsionaal $f \in (C[a, b])^*$ parajasti siis, kui $f(x) = \int_a^b x(t) d g(t)$ (Stieltjesi integraal), kus g on mingi lõigul $[a, b]$ tõkestatud muuduga funktsioon, mis on funktsionaaliga f üheselt määratud.

Seejuures $\|f\| = \bigvee_a^b g$.

Teoreem 5 (F. Riesz'i teoreem). Olgu $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siis kehtib võrdus $(L_p(a, b))^* = L_q(a, b)$, mis tähendab, et kujutus $T: L_p(a, b) \rightarrow (L_p(a, b))^*$, kus

$$(T\alpha)(x) = \int_a^b \alpha(t) x(t) dt, \quad \alpha \in L_q(a, b), x \in L_p(a, b),$$

on isomeetriline isomorfism.

Lõpuks vajame me veel Banachi ruumi $L_\infty(a, b)$, mis koosneb kõigist niisugustest lõigul $[a, b]$ mõõtuvatest funktsioonidest x , mille puhul

$$\|x\| = \inf_{\mu(E)=0} \sup_{t \in [a, b] \setminus E} |x(t)| < \infty$$

(viimast arvu tähistatakse $\operatorname{ess\,sup}_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ või

$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$). Nagu ruumides $L_p(a, b)$ defineeritakse ka ruumis $L_\infty(a, b)$ võrdus $x = y$ tingimusega, et $x(t) = y(t)$ peaaegu kõikjal lõigul $[a, b]$.

Teoreem 6 (Steinhausi teoreem). Kehtib võrdus $(L_1(a, b))^* = L_\infty(a, b)$, mis tähendab, et kujutus $T: L_\infty(a, b) \rightarrow (L_1(a, b))^*$, kus

$$(Tx)(x) = \int_a^b x(t) \alpha(t) dt, \quad \alpha \in L_\infty(a, b), \quad x \in L_1(a, b),$$

on isomeetriline isomorfism.

§ 3. Hahn-Banachi teoreem

Olgu X normeeritud ruum ja X_0 ruumi X alamruum. Kui $f \in X^*$ on funktsionaali $f_0 \in X_0^*$ jätk, siis, nagu me teame, $\|f\| \geq \|f_0\|$. Linearse funktsionaalanalüüsi üks põhiprintsiipe on

Teoreem (Hahn-Banachi teoreem). Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum. Kui $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub talle pidev lineaarne jätk $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ nii, et $\|f\| = \|f_0\|$.

Kahes alljärgnevas punktis teeme teoreemi tõestusele eeltööd.

1. Lemma elementaarsest jätkust. Olgu X reaalne normeeritud ruum ja X_0 tema alamruum. Eeldame, et $X_0 \neq X$ ja valime $x_1 \in X \setminus X_0$. Olgu

$$X_1 = \{x_0 + \lambda x_1 : x_0 \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On kerge vahetult kontrollida, et X_1 on ruumi X alamruum ja $X_0 \subset X_1$.

Lemma. Olgu $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ pidev lineaarne funktsionaal. Siis leidub talle pidev lineaarne jätk $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et $\|f_1\| = \|f_0\|$.

Tõestus. Veendume kõigepealt selles, et iga element ruumist X_1 on esitatav kujul $x_0 + \lambda x_1$, $x_0 \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ühesel viisil. Olgu $x_0 + \lambda x_1 = x'_0 + \lambda' x_1$, $x'_0 \in X_0$, $\lambda' \in \mathbb{R}$. Siis $x_0 - x'_0 = (\lambda' - \lambda) x_1$. Kui $\lambda' - \lambda \neq 0$, siis $x_1 = \frac{1}{\lambda' - \lambda} (x_0 - x'_0) \in X_0$, mis on aga võimatu.

Seega $\lambda' - \lambda = 0$ ehk $\lambda' = \lambda$ ja järelikult ka $x_0 = x'_0$.

Olgu $c \in \mathbb{R}$. Toetudes elemendi $x \in X_1$ ühesele esitusele kujul $x = x_0 + \lambda x_1$, $x_0 \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, defineerime funktsionaali $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ võrdusega

$$f_1(x) = f_0(x_0) + \lambda c, \quad x = x_0 + \lambda x_1 \in X_1.$$

Näitame, et funktsionaal f_1 on lineaarne ja kujutab endast funktsionaali f_0 jätku. Kui $x = x_0 + \lambda x_1$ ja $x' = x'_0 + \lambda' x_1$, $x_0, x'_0 \in X_0$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, siis $x + x' = x_0 + x'_0 + (\lambda + \lambda')x_1$ ning

$$\begin{aligned} f_1(x + x') &= f_0(x_0 + x'_0) + (\lambda + \lambda')c = \\ &= f_0(x_0) + \lambda c + f_0(x'_0) + \lambda'c = f_1(x) + f_1(x'), \end{aligned}$$

millega on näidatud f_1 aditiivsus. Analoogiliselt kontrollitakse f_1 homogeensust. Kui $x \in X_0$, siis $x = x + 0x_1$, kus $x \in X_0$. Seepärast $f_1(x) = f_0(x)$, $x \in X_0$, ning f_1 on funktsionaali f_0 jätk.

Lemma tõestamiseks piisab näidata, et leidub selline arv c , mille abil defineeritud funktsionaal f_1 rahuldab tingimust

$$|f_1(x)| \leq \|f_0\| \|x\| \quad \forall x \in X_1, \quad (1)$$

sest (1) koos jätku puhul alati kehtiva võrratusega

$$\|f_0\| \leq \|f_1\| \text{ annab võrduse } \|f_1\| = \|f_0\|.$$

Tingimus (1) on esitatav kujul

$$|f_0(x_0) + \lambda c| \leq \|f_0\| \|x_0 + \lambda x_1\| \quad \forall x_0 \in X_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ehk

$$|f_1(x_0 + \lambda x_1)| \leq \|f_0\| \|x_0 + \lambda x_1\| \quad \forall x_0 \in X_0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(sest $\lambda = 0$ korral võrratus kehtib). Viimane tingimus on samaväärne sellega, et

$$|f_0\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) + c| \leq \|f_0\| \left\| \frac{x_0}{\lambda} + x_1 \right\| \quad \forall x_0 \in X_0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ehk

$$|f_0(x_0) + c| \leq \|f_0\| \|x_0 + x_1\| \quad \forall x_0 \in X_0. \quad (2)$$

Paneme tähele, et (2) on samaväärne tingimusega

$$-f_0(x_0) - \|f_0\| \|x_0 + x_1\| \leq c \leq -f_0(x_0) + \|f_0\| \|x_0 + x_1\| \quad \forall x_0 \in X_0. \quad (3)$$

Kuid mistahes elementide $x_0, x'_0 \in X_0$ korral kehtib võrratus

$$-f_0(x_0) - \|f_0\| \|x_0 + x_1\| \leq -f_0(x'_0) + \|f_0\| \|x'_0 + x_1\|, \quad (4)$$

sest

$$\begin{aligned} f_0(x'_0) - f_0(x_0) &= f_0(x'_0 - x_0) \leq \|f_0\| \|x_0 - x'_0\| = \\ &= \|f_0\| \|x_0 + x_1 - x'_0 - x_1\| \leq \|f_0\| \|x_0 + x_1\| + \|f_0\| \|x'_0 + x_1\|. \end{aligned}$$

Leides võrratuses (4) supreemumi üle elementide $x_0 \in X_0$ ning seejärel infimumi üle $x'_0 \in X_0$, näeme, et saadud supreemum ei ületa infimumit. Seepärast leidub arv c nii, et

$$\sup_{x_0 \in X_0} \{-f_0(x_0) - \|f_0\| \|x_0 + x_1\|\} \leq c \leq \inf_{x_0 \in X_0} \{-f_0(x_0) + \|f_0\| \|x_0 + x_1\|\},$$

mistõttu kehtib tingimus (3) ning seega ka (1).

Lemma on tõestatud.

2. Kuratowski-Zorni lemma. Hahn-Banachi teoreemi tõestus tugineb Kuratowski-Zorni lemmale, mis on pärit hulgateooriast. Tema sõnastamiseks vajame alljärgnevaid mõisteid.

Üeldakse, et hulk A on osaliselt järjestatud, kui temas on antud järjestusseos \prec , s.t. on antud seos $S \subset A \times A$, kusjuures $(a, b) \in S$ puhul kirjutatakse $a \prec b$, nii, et

- 1° $a \prec a$ iga $a \in A$ korral (refleksiivsus),
- 2° kui $a \prec b$ ja $b \prec c$, siis $a \prec c$ (transitiivsus),
- 3° kui $a \prec b$ ja $b \prec a$, siis $a = b$ (antisümmeetria).

Olgu A osaliselt järjestatud hulk. Osahulka $B \subset A$ nimetatakse täielikult järjestatuks, kui iga $a, b \in B$ korral $a \prec b$ või $b \prec a$. Üeldakse, et osahulgal $B \subset A$ on olemas ülemine tõke, kui leidub $a \in A$ nii, et $b \prec a$ iga $b \in B$ korral. Elementi $a \in A$ nimetatakse maksimaalseks

hulgas A , kui $a < b$, $b \in A$, korral $a = b$ (ei ole olemas elementidele a järgnevaid ja seejuures temast erinevaid elemente).

Kuratowski-Zorni lemma. Kui osaliselt järjestatud hulga A igal täielikult järjestatud osahulgal on olemas ülemine tõke, siis hulgas A leidub maksimaalne element.

3. Hahn-Banachi teoreemi tõestus. 1) Tõestame teoreemi juhul, kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis võime kasutada lemmat elementaarsest jätkust.

Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum ja $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ pidev lineaarne funktsionaal. Moodustame funktsionaali f_0 kõigi pidevate lineaarsete normi säilitavate jätkude hulga

$$F = \{f \in X_0^* : X_f \text{ on ruumi } X \text{ alamruum, } X_0 \subset X_f, \\ f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in X_0, \|f\| = \|f_0\|\}.$$

Märgime, et $F \neq \emptyset$, sest $f_0 \in F$. Pole raske vahetult kontrollida, et F on osaliselt järjestatud hulk, kui defineerida $f < g$, $f, g \in F$, parajasti siis, kui $X_f \subset X_g$, $f(x) = g(x)$, $x \in X_f$ (s.t. kui g on funktsionaali f jätk).

Kontrollime Kuratowski-Zorni lemma eelduste täidetust. Olgu $G \subset F$ täielikult järjestatud osahulk. Defineerime funktsionaali $f': X' \rightarrow \mathbb{R}$, kus $X' = \bigcup_{g \in G} X_g$, võrdusega $f'(x) = g(x)$, $x \in X_g$. Funktsionaali f' väärtused on üheselt määratud, sest kui $x \in X'$ ning juhtub, et $x \in X_g$ ja $x \in X_h$, kus $g, h \in G$, siis G täieliku järjestatuse tõttu (näiteks) $g < h$ ning seepärast $X_g \subset X_h$ ja $g(x) = h(x)$. Järgnevalt näitame, et $f' \in F$ ning f' on hulga G ülemine tõke. Hulk X' on alamruum, sest kui võtta $x, y \in X'$, siis $x \in X_g, y \in X_h$, kus $g, h \in G$, ning G täieliku järjestatuse tõttu (näiteks) $x, y \in X_g \subset X_h$, millest saame, et $x + y \in X_g \subset X'$; samuti $\lambda x \in X_g \subset X'$, sest $x \in X_g$.

Funktsionaal f' on lineaarne, sest kui $x, y \in X'$, siis $x \in X_g, y \in X_h$, kus $g, h \in G$, ning (näiteks) $x, y \in X_g \subset X_h$, mistõttu $f'(x+y) = g(x+y) = g(x) + g(y) = f'(x) + f'(y)$; samuti $f'(\lambda x) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda f'(x)$. Kuna $|f'(x)| = |g(x)| \leq \|g\| \|x\| = \|f_0\| \|x\|, x \in X'$, siis f' on ka pidev ning $\|f'\| = \|f_0\|$. Et f' on mistahes funktsionaali $g \in G$ jätk ja g on funktsionaali f_0 jätk, siis $\|f'\| \geq \|f_0\|$. Seega f' on funktsionaali f_0 normi säilitav jätk. Niisiis oleme näidanud, et $f' \in F$ ja f' on hulga G ülemine tõke.

Nüüd võime Kuratowski-Zorni lemma põhjal öelda, et hulgas F leidub maksimaalne element f . Seejuures f on määratud kogu ruumil X , sest vastasel juhul ($X_f \neq X$) lubaks lemma elementaarsest jätkust laiendada funktsionaali f temast erinevaks normi säilitavaks jätkuks, mis on aga vastuolus f maksimaalsusega.

2) Tõestame teoreemi juhul, kui $K = \mathbb{C}$. Selleks kasutame vastavust ruumide X^* ja X_R^* ning X_0^* ja X_{0R}^* vahel.

Vaatleme ruume X_0 ja X reaalsete normeeritud ruumidena. Olgu $f_{0R}(x) = R_e f_0(x), x \in X_0$; siis $f_{0R} \in X_{0R}^*$ ja $\|f_{0R}\| = \|f_0\|$. Kasutades Hahn-Banachi teoreemi reaalsete ruumide juhul, leiame funktsionaalile

$f_{0R} \in X_{0R}^*$ normi säilitava jätku $f_R \in X_R^* = \{R_e f : f \in X^*\}$.

Siis talle vastava funktsionaali $f \in X^*$ puhul $\|f\| = \|f_R\| = \|f_{0R}\| = \|f_0\|$ ning kui $x \in X_0$, siis ka $ix \in X_0$ ja

$$f(ix) = f_R(ix) = if_R(ix) = if_{0R}(ix) = if_0(ix) = f_0(ix).$$

Seega f on funktsionaali f_0 normi säilitav jätk.

Teoreem on tõestatud.

4. Järeldusi Hahn-Banachi teoreemist. Olgu X normeeritud ruum üle \mathbb{K} ja X^* tema kaasruum.

Järeldus 1 (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest). Olgu $X \neq \{0\}$. Siis iga $x \in X$ korral leidub $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$.

Tõestus. Eeldame esialgu, et $x \neq 0$. Moodustame alamruumi $X_0 = \mathcal{L}(\{x\}) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ ning defineerime temal funktsionaali f_0 võrdusega $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\lambda x \in X_0$. On selge, et f_0 on lineaarne. Kuna

$$|f_0(\lambda x)| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\|,$$

siis f_0 on tõkestatud ja $\|f_0\| = 1$. Hahn-Banachi teoreemi põhjal leidub funktsionaalile f_0 jätk $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = \|f_0\| = 1$. Et $x \in X_0$, siis $f(x) = f_0(x) = \|x\|$.

Eeldame nüüd, et $x = 0$. Olgu $f \in X^*$ suvaline funktsionaal, mille korral $\|f\| = 1$ (eelnevas tõestasime, et selliseid funktsionaale leidub). Siis $f(x) = f(0) = 0 = \|x\|$.

Järeldus 1 on tõestatud.

Järeldus 2 (teoreem normeeritud ruumi punktide eraldamisest). Olgu $x, y \in X$. Kui $x \neq y$, siis leidub $f \in X^*$ nii, et $f(x) \neq f(y)$.

Tõestus. Kui $x \neq y$, siis $x - y \neq 0$, ning valides funktsionaali $f \in X^*$ järeldusest 1, saame $f(x - y) = \|x - y\| \neq 0$. Järelikult $f(x) \neq f(y)$.

Järeldust 2 on sageli mugav kasutada järgmisel kujul.

Järeldus 3. Kui $f(x) = f(y)$ iga $f \in X^*$ korral, siis $x = y$.

Tõestus. Kui kehtiks $x \neq y$, siis eelmise järelduse põhjal leiduks $f \in X^*$ nii, et $f(x) \neq f(y)$.

Järeldus 4. Iga $x \in X$ korral $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$.

Tõestus. Kui $x = 0$, siis võrdus ilmselt kehtib. Kui aga $x \neq 0$, siis ühelt poolt

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\| \|x\| \leq \|x\|.$$

Teiselt poolt, valides järelduse I põhjal funktsionaali $f_0 \in X^*$ nii, et $\|f_0\| = 1$ ja $f_0(x) = \|x\|$, saame

$$\|x\| = f_0(x) = |f_0(x)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

Järeldus 5. Kui $Y \subset X$ on kinnine alamruum ja $x \notin Y$, siis leidub $f \in X^*$ nii, et $f(x) = 1$ ja $f(y) = 0$ iga $y \in Y$ korral.

Tõestus. Vaatleme alamruumi $X_0 = \{y + \lambda x : y \in Y, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Defineerime $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ võrdusega

$$f_0(y + \lambda x) = \lambda, \quad y + \lambda x \in X_0.$$

See definitsioon sarnaneb funktsionaali f_1 definitsioonile lemmas elementaarsest jätkust. Ning nii nagu selle lemma tõestuses, saab ka siin kontrollida, et f_0 on lineaarne funktsionaal. Lisaks paneme tähele, et $f_0(y) = 0$, kui $y \in Y$, ja $f_0(x) = 1$. Näitame, et f_0 on tõkestatud. Vaatleme suvalist elementi $z = y + \lambda x \in X_0$. Kui $\lambda = 0$, siis $f_0(z) = f_0(y) = 0$, ja tõkestatuse võrratus kehtib triviaalselt. Kui aga $\lambda \neq 0$, siis $z \neq 0$, ning järelikult

$$\begin{aligned} |f_0(z)| &= |\lambda| = \frac{|\lambda|}{\|y + \lambda x\|} \|z\| = \\ &= \frac{1}{\|\frac{y}{\lambda} + x\|} \|z\| \leq \frac{1}{g(x, Y)} \|z\|, \end{aligned}$$

sest

$$\|\frac{y}{\lambda} + x\| = \|x - (-\frac{y}{\lambda})\| \geq \inf_{y \in Y} \|x - y\| = g(x, Y) > 0.$$

Sellega oleme tõestanud, et $f_0 \in X_0^*$. Jääb vaid üle jätkata f_0 funktsionaaliks $f \in X^*$.

Järeldus 5 on tõestatud.

§ 4. Normeeritud ruumi teine kaasruum

ja refleksiivsus

Olgu X normeeritud ruum üle \mathbb{K} ja X^* tema kaasruum. Kuna X^* on Banachi ruum, siis saab ka temale moodustada kaasruumi $(X^*)^* = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$. Ruumi $(X^*)^*$ tähistatakse X^{**} ja nimetatakse ruumi X teiseks kaasruumiks.

Näitame, et $X^{**} \supset \{F_x : x \in X\}$, kus $F_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ on defineeritud võrdusega

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

Definitsioonist lähtudes saab vahetult kontrollida, et F_x on lineaarne. Kuna $|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|$, $f \in X^*$, siis $F_x \in X^{**}$. Lisaks võimaldab Hahn-Banachi teoreemi järeldus 4 arvutada

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|.$$

Näitame, et ruum X on loomulikult viisil samastatav ruumi X^{**} alamruumiga. Selleks defineerime kujutuse $\pi : X \rightarrow X^{**}$ võrdusega $\pi x = F_x$, $x \in X$. Kujutust π nimetatakse ruumi X loomulikuks (kanooniliseks) kujutuseks (sisestuseks) teise kaasruumi X^{**} .

On selge, et $\|\pi x\| = \|x\|$, $x \in X$. Kujutus π on ka lineaarne, sest

$$\begin{aligned} \pi(x_1 + x_2)(f) &= F_{x_1 + x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \\ &= F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f) = \pi x_1(f) + \pi x_2(f), \\ \pi(\lambda x)(f) &= F_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \pi x(f). \end{aligned}$$

Järelikult on π isomeetriline isomorfism ruumide X ja $\pi(X) = \{F_x : x \in X\}$ vahel. Seda silmas pidades kirjutatakse sageli, et $X = \pi(X)$ ja $X \subset X^{**}$.

Näited. 1) Me teame, et $c_0^* = l_1$ ja $l_1^* = m$. Seega

$c_0^{**} = m$, kusjuures viimase võrduse sisu on antud kahe eelmise võrdusega. Samastamise $c_0^{**} = m$ tõttu $\pi: c_0 \rightarrow m$. Kirjeldame seda kujutust π . Olgu $x = (\xi_\alpha) \in c_0$. Kuna $x \in m = l_1^*$ ja $l_1 = c_0^*$, siis iga $f = (\alpha_\alpha) \in l_1$ korral

$$x(f) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \xi_\alpha \alpha_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha_\alpha \xi_\alpha = f(x).$$

Järelikult $F_x = x$, mistõttu $\pi x = x$ iga $x \in c_0$ korral.

2) Analoogiliselt võib veenduda, et $l_p^{**} = l_p$, $p > 1$, kusjuures $\pi x = x$ iga $x \in l_p$ korral.

Lause. Alamruum $\pi(X)$ on kinnine ruumis X^{**} parajasti siis, kui X on Banachi ruum.

Tõestuseks märgime, et täieliku ruumi X^{**} alamruum $\pi(X)$ on kinnine parajasti siis, kui ta on täielik. Kuid $\pi(X)$ ja X kas on või ei ole täielikud samaaegselt, sest π ja $\pi^{-1}: \pi(X) \rightarrow X$ säilitavad jadade fundamentaalsuse ja koonduvuse.

Definitsioon. Kui π on sürjektiivne, s.t. $\pi(X) = X^{**}$ ehk $X^{**} = \{F_x: x \in X\}$, siis öeldakse, et ruum X on refleksiivne.

Refleksiivse ruumi X korral kirjutatakse sageli $X = X^{**}$, võrduse sisu on aga ikka selles, et $\pi(X) = X^{**}$.

Ülaltõestatud lausest on selge, et iga refleksiivne ruum on Banachi ruum. Seetõttu mittetäielik normeeritud ruum refleksiivne olla ei saa. Banachi ruumide seas on nii refleksiivseid kui ka mitterefleksiivseid ruume. Kuna $\pi(l_p) = l_p = l_p^{**}$, $p > 1$, ja $\pi(c_0) = c_0 \neq m = c_0^{**}$, siis l_p , $p > 1$, on refleksiivne, c_0 aga mitte. Kasutades kaasaruumide kirjeldusi, saab nagu l_p , $p > 1$, ning c_0 puhul näidata, et $L_p(a, b)$, $p > 1$, ja kõik lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid on refleksiivsed ning $c, m, l_1, M[a, \xi], C[a, \xi], C^\infty[a, b], L_1(a, b)$ ei ole refleksiivsed.

Toome lõpuks ühe lihtsalt sõnastatava, kuid suhteliselt

raskesti tõestatava refleksiivsuse kriteeriumi, kus kasutatakse nõrga koonduvuse mõistet, mida me vaatleme järgmises paragrahvis.

Teoreem. Banachi ruum on refleksiivne parajasti siis, kui igast tema tõkestatud jadast saab eraldada nõrgalt koonduva osajada.

§ 5. Nõrk ja $*$ -nõrk koonduvus

1. Nõrga koonduvuse mõiste. Olgu X normeeritud ruum ja X^* tema kaasruum.

Definitsioon. Üeldakse, et jada $x_n \in X$ koondub nõrgalt (w -koondub) elemendiks $x \in X$, kui

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X^*, \quad (1)$$

ja kirjutatakse $x_n \xrightarrow{w} x$ või $w\text{-}\lim_n x_n = x$.

Belmises paragrahvis vaatlesime funktsionaale $F_x \in X^{**}$, mis defineeriti võrdusega $F_x(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Neid kasutades võime nõrga koondumise $x_n \xrightarrow{w} x$ kirjutada kujul

$$F_{x_n}(f) \rightarrow F_x(f) \quad \forall f \in X^*. \quad (2)$$

Seega tähendab nõrk koondumine $x_n \xrightarrow{w} x$ funktsionaalide jada F_{x_n} punktiviisilist koondumist funktsionaaliks F_x .

Banach-Steinhausi teoreemi põhjal on punktiviisiline koondumine (2) samaväärne tingimustega

1) leidub arv M nii, et $\|F_{x_n}\| \leq M$,

2) $F_{x_n}(f) \rightarrow F_x(f)$ iga $f \in E \subset X^*$ korral, kus $\overline{\mathcal{L}(E)} = X^*$.

Arvestades, et $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$, jõuame järgmise tulemuseni.

Teoreem (nõrga koondumise kriteerium). Normeeritud ruumi X elementide jada x_n koondub nõrgalt elemendiks x parajasti siis, kui

1) leidub arv M nii, et $\|x_n\| \leq M$ (jada x_n on tõ-

kestatud),

2) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ iga $f \in E \subset X^*$ korral, kus $\mathcal{L}(E) = X^*$.

Ülesanne. Tõestada, et kui X on kompleksne normeeritud ruum, siis

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X^* \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X_R^*.$$

2. Nõrga ja normi järgi koonduvuse vahetamine. Meenutame, et normi järgi koonduvus ehk lihtsalt koonduvus $x_n \rightarrow x$ tähendab, et $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Lause. Jada koondumisest järeldub tema nõrk koondumine samaks piirelemendiks.

Tõestus. Olgu $x_n \rightarrow x$. Et iga $f \in X^*$ on pidev, siis $f(x_n) \rightarrow f(x)$, s.t. $x_n \xrightarrow{w} x$.

Vastupidine väide üldiselt ei kehti. Seda põhjendab järgmine

Näide. Vaatleme jada $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots) \in \ell_2$. Kui $m < n$, siis

$$\begin{aligned} \|e_m - e_n\| &= \|(0, \dots, 0, \underset{m}{1}, 0, \dots, 0, \underset{n}{-1}, 0, \dots)\| = \\ &= (1^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Seega e_n ei ole Cauchy jada, mistõttu ta ei saa koonduda.

Näitame nüüd, et $e_n \xrightarrow{w} 0$. Olgu $f = (\alpha_k) \in \ell_2 = \ell_2^*$, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, \quad x = (\xi_k) \in \ell_2.$$

Siis $f(e_n) = \alpha_n \xrightarrow{n} 0 = f(0)$, sest eelduse

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \quad \text{tõttu} \quad |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{ehk} \quad \alpha_n \rightarrow 0.$$

Jada y_n nimetatakse jada x_n kumerate kombinatsioonide jadaks, kui leiduvad indeksid $m_1 = 0 < m_2 < m_3 < \dots$

ja arvud $\lambda_k \geq 0$ nii, et $\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_k = 1$ ja

$y_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_k x_k, n \in \mathbb{N}.$ Järgmine väide, mida me siinkohal ei tõesta, iseloomustab samuti jadade nõrga ja normi järgi koonduvuse vahetõrget.

Teoreem. Kui jada koondub nõrgalt, siis leidub niisugune tema kumerate kombinatsioonide jada, mis koondub normi järgi samaks piirelemendiks.

Ülesanne. Tõestada, et lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis nõrkja normi järgi koonduvus ühtivad. Näpunäide: kasutada lineaarse funktsionaali üldkuju lõplikumõõtmelises ruumis ja asjaolu, et lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis on koondumine samaväärne koordinaatide koondumisega.

Märgime tõestuseta, et jadade nõrk ja normi järgi koonduvus ühtivad ka ruumis ℓ_1 .

3. Nõrgalt koonduvate jadade omadusi väljendavad alljärgnevad laused.

Lause 1. Nõrgalt koonduva jada piirelement on ühene.

Tõestus. Eeldame, et $x_n \rightharpoonup x$ ja $x_n \rightharpoonup y$. Kuna $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ja $f(x_n) \rightarrow f(y)$, siis $f(x) = f(y)$ iga $f \in X^*$ korral. Järelikult $x = y$.

Nõrga koondumise kriteeriumist järeldub

Lause 2. Nõrgalt koonduv jada on tõkestatud.

Lause 3. Pidev lineaarne operaator teisendab nõrgalt koonduva jada nõrgalt koonduvaks jadaks.

Tõestus. Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle \mathbb{K} , $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ning $x_n \rightharpoonup x$ ruumis X . Näitame, et $Ax_n \rightharpoonup Ax$ ruumis Y . Valime vabalt $g \in Y^* \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$. Kuna $gA \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$, siis

$$g(Ax_n) = (gA)(x_n) \rightarrow (gA)(x) = g(Ax).$$

4. \ast -nõrk koondumus. Seda koondumusliiki vaadeldakse üksnes kaasruumides. Olgu X^\ast normeeritud ruumi X kaasruum. Üeldakse, et jada $f_n \in X^\ast$ koondub \ast -nõrgalt (w^\ast -koondub) funktsionaaliks $f \in X^\ast$, kui

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in X,$$

ja kirjutatakse $f_n \xrightarrow{w^\ast} f$ või $w^\ast\text{-lim } f_n = f$.

Kuna \ast -nõrk koondumine $f_n \xrightarrow{w^\ast} f$ pole midagi muud, kui funktsionaalide jada f_n punktiviisiline koondumine funktsionaaliks f , siis Banach-Steinhausi teoreem annab meile otsekohe \ast -nõrga koondumise kriteeriumi.

Teoreem (\ast -nõrga koondumise kriteerium). Olgu X Banachi ruum. Funktsionaalide jada $f_n \in X^\ast$ koondub \ast -nõrgalt funktsionaaliks $f \in X^\ast$ parajasti siis, kui

1) leidub arv M nii, et $\|f_n\| \leq M$,

2) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ iga $x \in E \subset X$ korral, kus

$$\overline{\mathcal{L}(E)} = X.$$

Nõrga ja \ast -nõrga koonduvuse võrdlemiseks paneme tähele, et nõrk koondumine $f_n \xrightarrow{w} f$ normeeritud ruumi X kaasruumis X^\ast tähendab, et

$$F(f_n) \longrightarrow F(f) \quad \forall F \in X^{\ast\ast},$$

aga \ast -nõrk koondumine $f_n \xrightarrow{w^\ast} f$ tähendab, et

$$F_x(f_n) \longrightarrow F_x(f) \quad \forall x \in X.$$

Kuna $X^{\ast\ast} \supset \{F_x : x \in X\}$, siis jada nõrgast koondumisest järeldub tema \ast -nõrk koondumine samaks piirelemendiks. Ühtlasi on selge, et kui X on refleksiivne (s.t. kui $X^{\ast\ast} = \{F_x : x \in X\}$), siis nõrk ja \ast -nõrk koondumus ühtivad. Vahemärkusena olgu lisatud, et jadade nõrk ja \ast -nõrk koondumus võivad ühtida ka mitterefleksiivsetes ruumides, näiteks on see nii ruumis m^\ast .

Lõpetuseks toome näite \ast -nõrgalt koonduvast jadast, mis nõrgalt ei koondub. Vaatleme jada $e_n \in c_0^* = \ell_1$. Kuna

$$e_n(x) = \xi_n \rightarrow 0 \quad \forall x = (\xi_n) \in c_0,$$

siis $e_n \xrightarrow{w^*} 0$. Kuid valides $F = (1, -1, 1, -1, \dots) \in m = c_0^{**}$, saame $F(e_1) = 1, F(e_2) = -1, F(e_3) = 1, F(e_4) = -1, \dots$, mistõttu $F(e_n)$ ei koondub. Järelikult jada e_n ei koondub nõrgalt ruumis c_0^* .

§ 6. Pideva lineaarse operaatori kaasoperaator

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle \mathbb{K} ning X^* ja Y^* nende kaasruumid.

Definitsioon. Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit $A^*: Y^* \rightarrow X^*$, mis on määratud võrdusega

$$A^*g = gA, \quad g \in Y^*.$$

Selgituseks märgime, et $gA \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, sest $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $g \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$.

Teoreem. Kui $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ja $\|A^*\| = \|A\|$.

Tõestus. Operaatori A^* lineaarsuse põhjendavad võrdu-
sed

$$A^*(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)A = g_1A + g_2A = A^*g_1 + A^*g_2,$$

$$A^*(\lambda g) = (\lambda g)A = \lambda(gA) = \lambda A^*g.$$

Kuna

$$\|A^*g\| = \|gA\| \leq \|g\| \|A\| = \|A\| \|g\|,$$

siis $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ja kehtib võrratus $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Vastupidine võrratus kehtib, kui $Y = \{0\}$, sest siis $A = 0$.

Olgu $Y \neq \{0\}$ ja $x \in X$ suvaline element. Valime funktsionaali $g \in Y^*$ nii, et $\|g\| = 1$ ja $g(Ax) = \|Ax\|$

(seda võimaldab teha teoreem piisavast arvust funktsionaali-

dest). Seega

$\|A \times\| = g(Ax) = (A^*g)(x) \leq \|A^*\| \|g\| \|x\| = \|A^*\| \|x\|$,
millest saame $\|A\| \leq \|A^*\|$.

Teoreem on tõestatud.

Lause. Kehtivad võrdused $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* =$
 $= \lambda A^*$, $(AB)^* = B^*A^*$.

Tõestus. Lähtudes kaasoperaatori definitsioonist, on võrduseid kerge kontrollida. Tõestame näiteks viimase võrduse. Olgu $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$, siis saab moodustada operaatori $AB \in \mathcal{L}(X, Z)$. Et $B^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ja $A^* \in \mathcal{L}(Z^*, Y^*)$, siis $B^*A^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$. Muidugi ka $(AB)^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$ ning suvalise $h \in Z^*$ korral

$$(AB)^*h = h(AB) = (hA)B = (A^*h)B = B^*(A^*h) = (B^*A^*)h.$$

Lause on tõestatud.

Lause. Kui $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja on olemas $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, siis on olemas ka $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ ning $(A^*)^{-1} =$
 $= (A^{-1})^*$.

Tõestus. Kui $f \in X^*$, siis $A^*(A^{-1})^*f = A^*fA^{-1} =$
 $= fAA^{-1} = f$; kui aga $g \in Y^*$, siis $(A^{-1})^*A^*g =$
 $= (A^{-1})^*gA = gA^{-1}A = g$. Seepärast $A^*(A^{-1})^* = I$ ja $(A^{-1})^*A^* = I$, millest järelduvadki lause väited.

Definitsioon. Olgu X normeeritud ruum ja X^* tema kaasruum. Alamruumi $Z \subset X$ annulaatoriks nimetatakse hulka $Z^\perp = \{f \in X^* : f(z) = 0 \text{ iga } z \in Z \text{ korral}\}$. Alamruumi $W \subset X^*$ annulaatoriks (ruumis X) nimetatakse hulka $W_\perp = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ iga } f \in W \text{ korral}\}$.

Pole raske kontrollida, et annulaator on kinnine alamruum.

Lemma. Olgu Z normeeritud ruumi X alamruum. Siis $(Z^\perp)_\perp = \overline{Z}$.

Tõestus. Vaatleme suvalist elementi $z \in Z$. Kuna

$f(z) = 0$ iga $f \in Z^\perp$ korral, siis $z \in (Z^\perp)^\perp$. Seega $Z \subset (Z^\perp)^\perp$ ning ka $\overline{Z} \subset \overline{(Z^\perp)^\perp} = (Z^\perp)^\perp$ annulaatori kinnisuse tõttu. Kui nüüd oletaksime, et $\overline{Z} \neq (Z^\perp)^\perp$, siis leiduks $x \in (Z^\perp)^\perp$ nii, et $x \notin \overline{Z}$. Hahn-Banachi teoreemi järelalus lubaks valida $f \in X^*$ nii, et $f|_{\overline{Z}} = 0$, kuid $f(x) \neq 0$. Kuna $f \in Z^\perp$ ja $x \in (Z^\perp)^\perp$, siis $f(x) = 0$, mis oleks võimatu. Seega $\overline{Z} = (Z^\perp)^\perp$.

Märkus. Kaasruumi X^* alamruumi W puhul üldiselt $(W^\perp)^\perp \neq \overline{W}$.

Teoreem. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ja $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Siis kehtivad järgmised võrdused:

- 1) $\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^\perp$,
- 2) $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$,
- 3) $\overline{\text{Im } A} = (\text{Ker } A^*)^\perp$,
- 4) kui X ja $\text{Im } A$ on täielikud, siis $\text{Im } A^* = (\text{Ker } A)^\perp$.

Tõestus. Võrdus 1) kehtib, sest

$$x \in \text{Ker } A \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow g(Ax) = 0 \quad \forall g \in Y^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A^*g)(x) = 0 \quad \forall g \in Y^* \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall f \in \text{Im } A^*.$$

Võrdus 2) põhjendatakse analoogilise samaväärsuste ahelaga ning 3) järeljub lemma põhjal võrdusest 2).

Tõestame võrduse 4). Vaatleme suvalist funktsionaali hulgast $\text{Im } A^*$. Ta avaldub kujul A^*g , kus $g \in Y^*$. Kuna $x \in \text{Ker } A$ korral $(A^*g)(x) = g(Ax) = 0$, siis $A^*g \in (\text{Ker } A)^\perp$. Seega $\text{Im } A^* \subset (\text{Ker } A)^\perp$. Näitame, et $(\text{Ker } A)^\perp \subset \text{Im } A^*$. Vaatleme suvalist funktsionaali $f \in (\text{Ker } A)^\perp$. Defineerime f abil alamruumil $\text{Im } A$ funktsionaali g_0 võrdusega $g_0(Ax) = f(x)$, $x \in X$. Funktsionaal g_0 on korrektselt defineeritud, sest kui $Ax_1 = Ax_2$ ehk $A(x_1 - x_2) = 0$, siis $x_1 - x_2 \in \text{Ker } A$,

mistõttu $f(x_1 - x_2) = 0$ ehk $f(x_1) = f(x_2)$. On selge, et g_0 on lineaarne. Lahtise kujutuse printsiibi kohaselt on olemas niisugune arv $M > 0$, et iga $y \in \text{Im } A$ korral leidub $x \in X$ nii, et $y = Ax$ ja $\|x\| \leq M \|y\|$. Seetõttu $|g_0(y)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq M \|f\| \|y\|$. Järelikult $g_0 \in (\text{Im } A)^*$. Tähistame tähega g funktsionaali g_0 sama normiga jätku tervele ruumile X . Kuna $g(Ax) = g_0(Ax) = f(x)$ ehk $(A^*g)(x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral, siis $A^*g = f$, mistõttu $f \in \text{Im } A^*$.

Teoreem on tõestatud.

Olgu $X_0 \subset X$ ja $Y_0 \subset Y$ Banachi ruumide X ja Y vektoralamruumid, kusjuures $\overline{X_0} = X$ ja $\overline{Y_0} = Y$. Teame, et operaator $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$, olles vaadeldav operaatorina $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$, on pidevalt laiendatav operaatoriks $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Lause. Kui arvestame, et $X_0^* = X^*$ ja $Y_0^* = Y^*$, siis operaatorid $A_0^* \in \mathcal{L}(Y_0^*, X_0^*)$ ja $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ühtivad.

Tõestus. Lause väidab, et $A^*g \in X_0^*$ laiend mistahes $g_0 \in Y_0^*$ ja tema pideva jätku $g \in Y^*$ korral. See väide kehtib, sest

$$(A_0^*g_0)(x) = g_0(A_0x) = g_0(Ax) = (A^*g)(x) \quad \forall x \in X_0.$$

Lause on tõestatud.

Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatorile $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ võime omakorda moodustada kaasoperaatori $A^{**} = (A^*)^* \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Olgu $\pi_1: X \rightarrow X^{**}$ ja $\pi_2: Y \rightarrow Y^{**}$ ruumide loomulikud sisestused oma teise kaasruumi.

Lause. Kehtib võrdus

$$A^{**}\pi_1 = \pi_2 A.$$

Tõestus. Kui $x \in X$ ja $g \in Y^*$, siis

$$\begin{aligned}
 (A^{**}\pi_1 x)(g) &= (\pi_1 x)(A^*g) = F_x(A^*g) = \\
 &= (A^*g)(x) = g(Ax) = F_{Ax}(g) = (\pi_2 Ax)(g),
 \end{aligned}$$

mis tähendabki lauses väidetud võrdust.

Äsjatõestatud lauset võib tõlgendada nii, et kui samastada X ja $\pi_1(X)$ (s.t. vaadelda ruumi X ruumi X^{**} alamruumina), samuti Y ja $\pi_2(Y)$, siis $A^{**}x = Ax$, $x \in X$, s.t. operaator A^{**} on operaatori A laiend.

VI Operaatorite diferentsiaalarvutus

§ 1. Operaatori diferentseeruvus Gâteaux' mõttes ehk nõrk diferentseeruvus

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle \mathbb{K} ning $U \subset X$ lahtine mittetühi hulk. Vaatleme operaatorit $f: U \rightarrow Y$.

Definitsioon. Üeldakse, et operaator f on Gâteaux' mõttes diferentseeruv (või nõrgalt diferentseeruv) punktis $x \in U$, kui iga $h \in X$ korral eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \quad (1)$$

ruumis Y . Piirväärtust (1) tähistatakse $\mathcal{D}f(x; h)$ ja nimetatakse operaatori f Gâteaux' diferentsiaaliks (või nõrgaks diferentsiaaliks) punktis x suunas h .

Märgime, et U lahtisuse tõttu küllalt väikese t korral $x+th \in U$, mistõttu saab püstitada küsimuse piirväärtuse (1) olemasolust.

Definitsioonist on näha, et $\mathcal{D}f(x; 0) = 0$.

Ülesanne. Näidata, et Gâteaux' mõttes diferentseeruvuse definitsioonis võib piirduda elementidega $h \in X$, $\|h\| = 1$.

Näide 1. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, s.t. olgu f matemaatilise analüüsi kursusest tuntud ühe muutuja funktsioon. Siis $h \neq 0$ korral

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = h \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{th} = h f'(x),$$

s.t. funktsiooni diferentseeruvus Gâteaux' mõttes tähendab tema tavalist diferentseeruvust, kusjuures $\mathcal{D}f(x; h) = h f'(x)$ ning $\mathcal{D}f(x; 1) = f'(x)$.

Näide 2. Olgu $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$, s.t. olgu f matemaatilise analüüsi kursusest tuntud n muutuja funktsioon. Definitsioonist on näha, et kui $\|h\| = 1$, siis Gâteaux' diferentsiaal $\delta f(x; h)$ on n muutuja funktsiooni f tuletis suunas h . Seega tähendab n muutuja funktsiooni diferentseeruvus Gâteaux' mõttes, et funktsioonil on olemas tuletised mistahes suunas. Matemaatilise analüüsi kursusest on teada, et tuletist suunas h võib esitada kujul

$$\delta f(x; h) = (\text{grad } f(x), h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) h_n,$$

kus $\text{grad } f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$, $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Märgime, et kui $h = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, siis

$\delta f(x; h) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Niisiis tagab n muutuja funktsiooni nõrk diferentseeruvus punktis x osatuletiste $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$,

$i = 1, \dots, n$, olemasolu. Mitme muutuja funktsiooni osatuletiste olemasolu aga ei kindlusta tuletise olemasolu mistahes suunas ehk nõrka diferentseeruvust. Seda põhjendab alljärgnev

Näide 3. Vaatleme kahe muutuja funktsiooni

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = (x_1, x_2) = 0, \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{kui } x \neq 0. \end{cases}$$

Siis

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

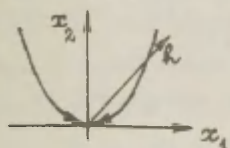
analoogiliselt $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$. Aga f ei ole nõrgalt diferentseeruv punktis $x = (0, 0)$, sest kui $h = (1, 1)$, siis

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{2t},$$

millel ei ole ruumis \mathbb{R} piirväärtust, kui $t \rightarrow 0$.

Operaatori diferentseeruvusest Gâteaux' mõttes ei järeldu üldiselt tema pidevus. See on nii juba kahe muutuja funktsioonide juures.

Näide 4. Olgu kahe muutuja funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ antud järgmiselt:



$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x_2 = x_1^2, x_1 \neq 0, \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

On selge, et f ei ole pidev punktis $(0,0)$. Aga $f(0,0) = 0$ ning vabalt valitud $h = (h_1, h_2)$ korral $f(th_1, th_2) = 0$ kui t on küllalt väike. Seega $\delta f(0; h) = 0$.

§ 2. Operaatori diferentseeruvus ehk diferentseeruvus Fréchet' mõttes ehk tugev diferentseeruvus

Olgu X ja Y normeeritud ruumid, $U \subset X$ lahtine hulk ja $f: U \rightarrow Y$.

Definitsioon. Üeldakse, et operaator f on diferentseeruv (Fréchet' mõttes) punktis $x \in U$, kui leidub pidev lineaarne operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0. \quad (1)$$

Tähistades $\alpha(x; h) = f(x+h) - f(x) - Ah$, võime tingimuse (1) kirjutada kujul $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(x; h)}{\|h\|} = 0$. Tingimust (1) väljendatakse ka võrdusega $f(x+h) - f(x) = Ah + o(\|h\|)$ ehk $\alpha(x; h) = o(\|h\|)$, mis tähendab, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\|h\| \leq \delta$, siis $\|\alpha(x; h)\| \leq \varepsilon \|h\|$.

Teoreem. Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis on ta punktis x ka nõrgalt diferentseeruv ning $\delta f(x; h) = Ah$.

Tõestus. Vaatleme avaldist

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{A(th) + \alpha(x; th)}{t} = Ah + \frac{\alpha(x; th)}{t}$$

Teoreemi tõestamiseks piisab näidata, et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(x; th)}{t} = 0$ iga $h \in X$ korral. Võrduse $\alpha(x; 0) = 0$ tõttu piisab vaadelda juhtu, kus $h \neq 0$. Siis aga $\frac{\alpha(x; th)}{t} = \frac{\|t\| \|h\|}{t} \frac{\alpha(x; th)}{\|th\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, sest $\frac{\|t\| \|h\|}{t}$ on tõkestatud ja $\|th\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, mistõttu $\frac{\alpha(x; th)}{\|th\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis tingimust (1) rahuldav pidev lineaarne operaator A on üheselt määratud.

Tõestus. Kui leidub veel $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $f(x+h) - f(x) = Bh + o(\|h\|)$, siis teoreemi põhjal $Bh = \delta f(x; h)$. Seega $Bh = Ah$ iga $h \in X$ korral, s.t. $B = A$.

Operaatorit A nimetatakse operaatori f (Fréchet') tuletiseks punktis x ja teda tähistatakse $f'(x)$. Elementi $f'(x)h = d f(x; h)$ nimetatakse operaatori f (Fréchet') diferentsiaaliks punktis x , täpsemalt (Fréchet') diferentsiaaliks punktis x , mis vastab argumenti juurdekasvule $h \in X$.

Vahetu järeldusena äsjatõestatud teoreemist ja viimast definitsioonist võib öelda, et kui operaator f on diferentseeruv, siis tema diferentsiaal $d f(x; h)$ ja nõrk diferentsiaal $\delta f(x; h)$ ühtivad.

Teoreem. Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis on ta punktis x pidev.

Tõestus. Olgu $x_n \rightarrow x, x_n \in U$. Tähistame $h_n = x_n - x$, siis $h_n \rightarrow 0$. Operaatori f diferentseeruvuse tõttu saame

$f(x_n) - f(x) = f(x + h_n) - f(x) = f'(x)h_n + \alpha(x; h_n) \rightarrow 0$, sest $f'(x)h_n \rightarrow 0$ ja $\alpha(x; h_n) \rightarrow 0$. Seega $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Teoreem on tõestatud.

Me nägime, et operaatore diferentseeruvusest järeldub tema nõrk diferentseeruvus. Esjatõestatud teoreemi abil võime väita, et diferentseeruvus on rangelt tugevam nõue kui nõrk diferentseeruvus, sest eelmise paragrahvi näites 4 toodud funktsioon on nõrgalt diferentseeruv, kuid ei ole pidev, seega ei ole ka diferentseeruv.

§ 3. Näiteid operaatore tuletise leidmisest

Olgu kahes esimeses näites X ja Y normeeritud ruumid.

Näide 1. (Konstantse operaatore tuletis). Olgu $f: X \rightarrow Y$ defineeritud võrdusega $f(x) = y_0$, $x \in X$ (f on konstantne operatoor). Siis $f(x+h) - f(x) = y_0 - y_0 = 0$, seega $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ igas punktis $x \in X$.

Näide 2 (pideva lineaarse operaatore tuletis). Olgu $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ (f on pidev lineaarne operatoor). Siis $f(x+h) - fx = fx + fh - fx = fh$ ja $\alpha(x, h) = 0$, seega $f'(x) = f$ igas punktis $x \in X$.

Näide 3. Olgu $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, s.t. olgu f n muutuja funktsioon. Operaatore f tuletis $f'(x)$ kuulub ruumi $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ ning arvestades selle ruumi kirjeldust, võime f diferentseeruvust Fréchet' mõttes punktis $x \in U$ väljendada järgmiselt: leidub $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ nii, et

$$f(x+h) - f(x) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(\|h\|),$$

kus $h = (h_1, \dots, h_n)$ ja $\|h\| \rightarrow 0$. See on aga n muutuja funktsiooni diferentseeruvust defineeriv tingimus. Niisiis tähendab n muutuja funktsiooni diferentseeruvus Fréchet' mõttes tema tavalist diferentseeruvust, kusjuures Fréchet' diferentsiaal ja täisdiferentsiaal ühtivad. Kui f on diferentseeruv, siis $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$, seega $f'(x) = \text{grad } f(x) \in \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Erijuhul

$n = 1$ ehk tavalise ühe muutuja funktsiooni f korral saame siit $f'(x)(h) = f'(x)h$, kus vasakul $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on Fréchet' tuletis ja paremal funktsiooni f kui ühe muutuja funktsiooni tuletis.

Näide 4. Olgu $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Operaatorit f saab esitada kujul $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in U$, kus $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Et tuletis $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, siis saab teda vaadelda maatriksoperaatorina, mistõttu f diferentseeruvuse tingimus punktis $x \in U$ omandab järgmise kuju: leidub $m \times n$ maatriks $A = (a_{ij})$ nii, et

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(x; h),$$

kus $\frac{\alpha(x; h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, kui $h \rightarrow 0$, $h \in \mathbb{R}^n$. Koordinaatide

kaupa võib seda väljendada võrdustega

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{in}h_n + \alpha_i(x; h), \quad i = 1, \dots, m,$$

kus $\alpha(x; h) = (\alpha_1(x; h), \dots, \alpha_m(x; h))$. Kuna koondumine ruumis \mathbb{R}^m on samaväärne koordinaatide koondumisega,

siis $\frac{\alpha(x; h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ parajasti siis, kui $\frac{\alpha_i(x; h)}{\|h\|} \rightarrow 0$,

$i = 1, \dots, m$, protsessis $h \rightarrow 0$. Seega on operaatori f diferentseeruvus samaväärne tema komponentide f_i diferentseeruvusega ning et näite 3 põhjal $f'_i(x) =$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right) = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad \text{siis}$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Näide 5. Olgu operaator $f: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ defineeritud võrdusega

$$(f(x))(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [a, b],$$

kus funktsioonid $\mathcal{K}(t, s, u)$ ja $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, u)$ on pidevad hulgal $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ (märgime, et $f(x) \in C[a, b]$, sest

$\int_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s)) ds$ on muutuja $t \in [a, b]$ pidev funktsioon).
 Valime vabalt $x \in C[a, b]$. Kasutades Lagrange'i keskväär-
 tusteoreemi, saame iga $h \in C[a, b]$ korral

$$\begin{aligned} & (f(x+h) - f(x))' = \int_a^b (\mathcal{K}(t, s, x(s)+h(s)) - \mathcal{K}(t, s, x(s))) ds = \\ & = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, \xi(t, s)) h(s) ds = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) h(s) ds + \\ & + \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, \xi(t, s)) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) \right) h(s) ds, \end{aligned}$$

kus $x(s) \leq \xi(t, s) \leq x(s)+h(s)$ või $x(s)+h(s) \leq \xi(t, s) \leq x(s)$.

Kuna funktsioon $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s))$ on pidev ruudus

$(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, siis võrdusega

$$(K_x h)(t) = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) h(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

on antud integraaloperaator $K_x \in \mathcal{L}(C[a, b], C[a, b])$.

Funktsioon $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}$ on ühtlaselt pidev (näiteks) kinnisel

tõkestatud hulgal $[a, b] \times [a, b] \times [-\|x\| - 1, \|x\| + 1]$, mistõttu

iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta \in (0, 1]$ nii, et kui $\|h\| \leq \delta$,

siis

$$\left| \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, \xi(t, s)) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Seega, kui $\|h\| \leq \delta$, siis

$$\alpha(x; h)(t) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, \xi(t, s)) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) \right) h(s) ds$$

rahuldab tingimust $\|\alpha(x; h)\| \leq \varepsilon \|h\|$, s.t. $\|\alpha(x; h)\| = o(\|h\|)$

protsessis $h \rightarrow 0$. Järelikult on f diferentseeruv ja

$f'(x) = K_x$ ehk

$$(f'(x)h)(t) = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u}(t, s, x(s)) h(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

§ 4. Tuletise omadusi

Operaatori tuletisele laienevad mitmed olulised reaale muutuja funktsiooni tuletise omadused.

Lause 1 (diferentseerimise lineaarsus). Kui operaatorid $f: U \rightarrow V$ ja $g: U \rightarrow V$ on diferentseeruvad punktis $x \in U$, siis

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Tõestus. Kui $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x; h)$ ja $g(x+h) - g(x) = g'(x)h + \beta(x; h)$, kus $f'(x), g'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\|\alpha(x; h)\| = o(\|h\|), \|\beta(x; h)\| = o(\|h\|)$, siis $(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = (f'(x) + g'(x))h + \alpha(x; h) + \beta(x; h)$, kusjuures $f'(x) + g'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\|\alpha(x; h) + \beta(x; h)\| = o(\|h\|)$. Analoogiliselt veendutakse ka diferentseerimise homogeensuses.

Lause on tõestatud.

Lause 2 (operaatorite korrutise diferentseerimine).

Kui $f: U \rightarrow V$ on diferentseeruv punktis $x \in U, f(x) \in V$ ja $g: V \rightarrow Z$ on diferentseeruv punktis $f(x)$, siis $gf: U \rightarrow Z$ on diferentseeruv punktis x ning

$$(gf)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Tõestus. Eelduse kohaselt $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x; h)$ ja $g(y+l) - g(y) = g'(y)l + \beta(y; l)$, kus $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y), \|\alpha(x; h)\| = o(\|h\|)$ ja $y = f(x), g'(y) \in \mathcal{L}(Y, Z), \|\beta(y; l)\| = o(\|l\|)$. Tähistades $l = f'(x)h + \alpha(x; h)$, saame

$$\begin{aligned} (gf)'(x+h) - (gf)'(x) &= g'(f(x+h)) - g'(f(x)) = \\ &= g'(y + f'(x)h + \alpha(x; h)) - g'(y) = \\ &= g'(y+l) - g'(y) = g''(y)l + \beta(y; l) = \\ &= g''(y)(f'(x)h + \alpha(x; h)) + \beta(y; l) = \end{aligned}$$

$$= (g'(f(x))f'(x))h + g'(y)\alpha(x; h) + \beta(y; h).$$

Olgu $\gamma(x; h) = g'(y)\alpha(x; h) + \beta(y; h)$. Jääb tõestada, et $\|\gamma(x; h)\| = o(\|h\|)$. Kuna

$$\begin{aligned} \|\gamma(x; h)\| &\leq \|g'(y)\| \|\alpha(x; h)\| + \|\beta(y; h)\| = \\ &= \|g'(y)\| o(\|h\|) + o(\|h\|) = o(\|h\|) + o\left(\frac{\|h\|}{\|h\|} \|h\|\right), \end{aligned}$$

siis piisab näidata, et $\frac{\|h\|}{\|h\|} = O(1)$ protsessis $h \rightarrow 0$.

Kuid

$$\frac{\|h\|}{\|h\|} \leq \frac{\|f'(x)\| \|h\| + \|\alpha(x; h)\|}{\|h\|} = \|f'(x)\| + \frac{\|\alpha(x; h)\|}{\|h\|} = O(1).$$

Lause on tõestatud.

Märgime, et operaatorite korrutise diferentseerimise eeskiri üldistab matemaatilisest analüüsist tuntud liitfunktsiooni diferentseerimise valemit.

§ 5. Lagrange'i keskväärtushinnang

Matemaatilisest analüüsist on teada Lagrange'i keskväärtusteoreem: kui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ja vahemikus (a, b) diferentseeruv, siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Operaatorite korral kehtib alljärgnev Lagrange'i keskväärtushinnang.

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle \mathbb{K} ning $U \subset X$ lahtine hulk.

Teoreem (Lagrange'i keskväärtushinnang). Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on pidev lõigus $[x, x+h] = \{x + \lambda h : \lambda \in [0, 1]\} \subset U$ ja diferentseeruv vahemikus $(x, x+h) = \{x + \lambda h : \lambda \in (0, 1)\}$, siis kehtib hinnang

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{0 < \lambda < 1} \|f'(x + \lambda h)\| \|h\|.$$

Tõestus. Kõigepealt märgime, et juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vaatleme ruume X ja Y reaalsete normeeritud ruumidena. Teoreem

piisavast arvust funktsionaalidest lubab valida $g \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$ nii, et $\|g\| = 1$ ja $g(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$. Vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = g(f(x+th))$, $t \in [0, 1]$, mis on kolme pideva operaatori, $\ell: [0, 1] \rightarrow X$, kus $\ell(t) = x+th$, f ja g korrutis. Operaatori ℓ tuletis on $\ell'(t) = h$, $t \in (0, 1)$, täpsemalt, $\ell'(t)a = ah$, $a \in \mathbb{R}$. (Seda tuletist on kerge leida nii vahetult definitsioonist lähtudes kui ka silmas pidades, et ℓ on konstantse ja lineaarse operaatori summa, mille tuletisi me aga teame.) Arvestades, et $g'(y) = g$ iga $y \in Y$ korral, võime öelda, et funktsioon φ on lõigus $[0, 1]$ pidev ja vahemikus $(0, 1)$ diferentseeruv. Seejuures operaatorite korrutise diferentseerimise reegli kohaselt $\varphi'(t) = \delta \varphi(t; 1) = (g(f'(\ell(t)) \ell'(t)))(1) = g(f'(x+th)h)$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub $\lambda \in (0, 1)$ nii, et $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda)$ ehk

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(f'(x+\lambda h)h).$$

Seega

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\| &= g(f(x+h) - f(x)) = g(f(x+h)) - g(f(x)) \leq \\ &\leq \|g\| \|f'(x+\lambda h)\| \|h\| = \|f'(x+\lambda h)\| \|h\| \leq \\ &\leq \sup_{0 < \lambda < 1} \|f'(x+\lambda h)\| \|h\|. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Kui Lagrange'i keskväärtushinnangu tõestuses võtta $Y = \mathbb{R}$ ja $g = I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siis tõestuse käigus jõuame järgmise tulemuseni.

Lause. Kui funktsionaal $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev lõigus $[x, x+h] \subset U$ ja diferentseeruv vahemikus $(x, x+h)$, siis leidub $\lambda \in (0, 1)$ nii, et

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\lambda h)h.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi ei saa üldistada operaatoritele, mille väärtuste ruumi dimensioon on suurem kui 1.

(Teda ei saa üldistada isegi reaalmuutuja kompleksväärtustega funktsioonidele, sest näiteks funktsiooni $f(x) = e^{2\pi i x}$ puhul $f(0) = f(1)$, kuid $f'(x) = 2\pi i e^{2\pi i x} \neq 0$ iga $x \in (0, 1)$ korral. Juhime tähelepanu sellele, et kui siin ruumi \mathbb{C} vaadelda kahedimensionaalse vektorruumina üle \mathbb{R} , siis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.)

Lagrange'i keskväertushinnangut üldistab formaalselt

Järeldus 1. Kui on täidetud teoreemi eeldused ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis kehtib hinnang

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \sup_{0 < \lambda < 1} \|f'(x+\lambda h) - A\| \|h\|.$$

Tõestuseks rakendame keskväertushinnangut operaatorile $x \rightarrow f(x) - Ax + Ah$, mille tuletis on $f'(x) - A$.

Märgime, et järelduses 1 võime võtta näiteks $A = f'(x)$, kui operaator f on diferentseeruv punktis x .

Järeldus 2. Olgu $U \subset X$ lahtine kumer hulk. Kui operaator $f: \bar{U} \rightarrow Y$ on pidev ja hulgal U diferentseeruv ning $L = \sup_{x \in U} \|f'(x)\| < \infty$, siis f rahuldab hulgal \bar{U} Lipschitzi tingimust kordajaga L .

Tõestus. Olgu antud $x_1, x_2 \in \bar{U}$. Valime jada $\xi_n^1, \xi_n^2 \in U$ nii, et $\xi_n^1 \rightarrow x_1, \xi_n^2 \rightarrow x_2$. Keskväertushinnangut kasutades saame iga n korral

$$\begin{aligned} \|f(\xi_n^1) - f(\xi_n^2)\| &\leq \sup_{0 < \lambda < 1} \|f'(\xi_n^2 + \lambda(\xi_n^1 - \xi_n^2))\| \|\xi_n^1 - \xi_n^2\| \\ &= \sup_{x \in (\xi_n^2, \xi_n^1)} \|f'(x)\| \|\xi_n^1 - \xi_n^2\| \leq \\ &\leq L \|\xi_n^1 - \xi_n^2\|, \end{aligned}$$

millest piiril protsessis $n \rightarrow \infty$ tekib nõutav võrratus

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Järeldus on tõestatud.

§ 6. Kahe muutuja operaatorid

Olgu X, Y ja Z normeeritud ruumid üle \mathbb{K} ning otsekorrutis $X \times Y$ varustatud normiga $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Operaatorit $F: X \times Y \rightarrow Z$ nimetatakse kahe muutuja operaatoriks. Nii üldistatakse matemaatilisest analüüsist tuntud kahe muutuja funktsiooni mõistet. Funktsioonidelt üldistub kahe muutuja operaatoritele ka osatuletise mõiste.

Definitsioon. Üeldakse, et $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ on operaatori $F: X \times Y \rightarrow Z$ osatuletis muutuja x järgi punktis (x, y) , kui

$$F(x+h, y) - F(x, y) = Ah + o(\|h\|)$$

protsessis $\|h\| \rightarrow 0$. Samuti öeldakse, et $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ on operaatori F osatuletis y järgi punktis (x, y) , kui

$$F(x, y+l) - F(x, y) = Bl + o(\|l\|)$$

protsessis $\|l\| \rightarrow 0$.

Operaatori F osatuletisi tähistatakse $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$

ja $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

Olgu operaator $F: X \times Y \rightarrow Z$ diferentseeruv punktis (x, y) . Siis leidub $C \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ nii, et

$$F(x+h, y+l) - F(x, y) = C(h, l) + o(\|h\| + \|l\|).$$

Võttes siin $l = 0$, saame

$$F(x+h, y) - F(x, y) = C(h, 0) + o(\|h\|).$$

Olgu $Ah = C(h, 0)$. Siis, nagu vahetult kontrollida võib,

$A \in \mathcal{L}(X, Z)$. Seega $C(h, 0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h$. Analoogiliselt näeme, et $C(0, l) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)l$. Kuna $C(h, l) =$

$= C(h, 0) + C(0, l)$, siis

$$F(x+h, y+l) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)l + o(\|h\| + \|l\|).$$

Kaha muutuja funktsioonide juhul on see võrdus matemaatilisest analüüsist teada. Matemaatilisest analüüsist tuntud tulemust üldistab ka järgmine

Teoreem. Kui operaatoril $F: X \times Y \rightarrow Z$ eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ mingis punkti (x, y) ümbritses kerases $B = B((x, y), r)$ ning kujutused $\frac{\partial F}{\partial x}: B \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}: B \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$ on pidevad punktis (x, y) , siis operaator F on diferentseeruv punktis (x, y) .

Tõestus. Vaatleme võrdusega $C(h, l) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)l$, $(h, l) \in X \times Y$, määratud operaatorit. Võib vahetult kontrollida, et C on lineaarne. Kuna

$$\begin{aligned} \|C(h, l)\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right\| \|h\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| \|l\| \leq \\ &\leq \max \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right\|, \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| \right\} (\|h\| + \|l\|), \end{aligned}$$

siis $C \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$. Olgu $\gamma = F(x+h, y+l) - F(x, y) - C(h, l)$. Näitame, et $\gamma = o(\|h\| + \|l\|)$ protsessis $\|h\| + \|l\| \rightarrow 0$. Võrdusest

$$\begin{aligned} \gamma &= F(x+h, y+l) - F(x, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)l = \\ &= F(x+h, y+l) - F(x, y+l) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \\ &+ F(x, y+l) - F(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)l \end{aligned}$$

saame Lagrange'i keskväärtushinnangut (täpsemalt, tema järeldust 1) kasutades, et

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &\leq \sup_{0 < \lambda < 1} \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x + \lambda h, y+l) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right\| \|h\| + \\ &+ \sup_{0 < \lambda < 1} \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y + \lambda l) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| \|l\|. \end{aligned}$$

Kui nüüd $\|h\| + \|l\| \rightarrow 0$, siis $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevuse tõttu

$$\|\gamma\| \leq o(1) \|h\| + o(1) \|l\| = o(1) (\|h\| + \|l\|),$$

millest nähtubki, et $\gamma = o(\|h\| + \|l\|)$.

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et käesolevas paragrahvis esitatut saab vahe-
tult laiendada mitme muutuja operaatoritele.

§ 7. Teoreem ilmutamata operaatorist

Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

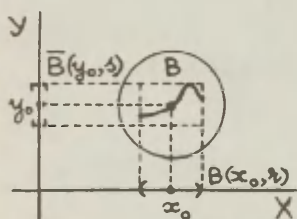
kus $F: X \times Y \rightarrow Z$ on kahe muutuja operaator. Kui (ühe muu-
tuja) operaator $f: U \rightarrow Y$, $U \subset X$, on selline, et paarid
 $(x, f(x))$, $x \in U$, rahuldavad võrrandit (1), siis öeldakse,
et võrrand (1) määrab (ühe muutuja) operaatori f .

Teoreem (teoreem ilmutamata operaatorist). Olgu X ja
 Z normeeritud ruumid, Y Banaachi ruum ning $(x_0, y_0) \in X \times Y$.
Rahuldagu operaator $F: X \times Y \rightarrow Z$ järgmisi tingimusi:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$,
- 2) F on pidev punktis (x_0, y_0) ,
- 3) leidub kera $B = B((x_0, y_0), R)$ nii, et iga

$(x, y) \in B$ korral eksisteerib $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, kusjuures kujut-
tus $\frac{\partial F}{\partial y}: B \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$ on pidev punktis (x_0, y_0) ja ek-
sisteerib $(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$.

Siis leiduvad $r > 0$ ja $s > 0$ nii, et iga $x \in B(x_0, r)$



korral on võrrandil $F(x, y) = 0$
parajasti üks lahend $y \in \bar{B}(y_0, s)$.
Seejuures lahendipaaride (x, y)
poolt defineeritud operaator
 $f: B(x_0, r) \rightarrow \bar{B}(y_0, s)$, $f(x) = y$,
on pidev punktis x_0 ning kehtib

võrdus $y_0 = f(x_0)$.

Tõestus. I) Tõestame võrrandi $F(x, y) = 0$ ühese lahen-
duvuse kohta käiva väite.

Tähistame $\Gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}$. Fikseerime suvalise elemendi $x \in X$ ja defineerime operaatori $g_x: Y \rightarrow Y$ võrdusega $g_x(y) = y - \Gamma F(x, y), y \in Y$. Kasutades Γ bijektiivsust, saame samaväärsused

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Gamma F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = y - \Gamma F(x, y) \Leftrightarrow y = g_x(y).$$

Seega (x, y) on võrrandi $F(x, y) = 0$ (ainus) lahend parajasti siis, kui y on operaatori g_x (ainus) püsipunkt. Niisiis, tuginedes Banachi püsipunkti printsiibile, võime öelda, et meil tarvitseb leida $\rho > 0$ ja $\delta > 0$ nii, et kui $x \in B(x_0, \rho)$, siis $g_x: \bar{B}(y_0, \delta) \rightarrow \bar{B}(y_0, \delta)$ ja g_x on ahendav keras $\bar{B}(y_0, \delta)$.

Operaatori g_x ahendavuse tõestamise juures kavatsame me kasutada keskväärtushinnangu seda järeldust, mis võimaldab kontrollida Lipschitzi tingimuse täidetust. Seetõttu huvitab meid

$$g'_x(y) = I - \Gamma \frac{\partial F}{\partial y}(x, y). \text{ Märgime, et } g'_{x_0}(y_0) = \\ = I - \Gamma \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = I - I = 0. \text{ Tuginedes kujutuse}$$

$\frac{\partial F}{\partial y}: B \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$ pidevusele, leiame $\delta \in (0, \frac{R}{2}]$ nii, et kui $\|x - x_0\| < \delta$ ja $\|y - y_0\| \leq \delta$ (sel juhul $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| = \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < 2\delta \leq R$), siis

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right\| \leq \frac{1}{2\|\Gamma\|}.$$

Seega, kui $\|x - x_0\| < \delta$ ja $\|y - y_0\| \leq \delta$, siis

$$\|g'_x(y)\| = \|g'_x(y) - g'_{x_0}(y_0)\| = \\ = \left\| \Gamma \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right\| \leq \\ \leq \|\Gamma\| \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Nimetatud keskväärtushinnangu järelduse kohaselt saame nüüd, et kui $x \in B(x_0, \delta)$ ja $y_1, y_2 \in \bar{B}(y_0, \delta)$, siis

$$\|g_x(y_1) - g_x(y_2)\| \leq \sup_{y \in B(y_0, \delta)} \|g'_x(y)\| \|y_1 - y_2\| \leq \frac{\delta}{2} \|y_1 - y_2\|,$$

millega oleks näidatud operaatori g_x ahendavus keras $\bar{B}(y_0, \delta)$, kui me teaksime, et $g_x: \bar{B}(y_0, \delta) \rightarrow \bar{B}(y_0, \delta)$.

Olgu $y \in \bar{B}(y_0, \delta)$. Kui $x \in B(x_0, \delta)$, siis

$$\begin{aligned} \|g_x(y) - y_0\| &\leq \|g_x(y) - g_x(y_0)\| + \|g_x(y_0) - y_0\| = \\ &= \|g_x(y) - g_x(y_0)\| + \|\Gamma F(x, y_0)\| \leq \\ &\leq \frac{\delta}{2} \|y - y_0\| + \|\Gamma\| \|F(x, y_0)\|. \end{aligned} \quad (2)$$

Tuginedes operaatori F pidevusele, leiame $\epsilon > 0$ nii, et $\epsilon \leq \delta$ ja $\|F(x, y_0)\| \leq \frac{\delta}{2\|\Gamma\|}$, kui $\|x - x_0\| < \epsilon$. Seega, kui

$x \in B(x_0, \epsilon)$ ja $y \in \bar{B}(y_0, \delta)$, siis tingimuse (2) kohaselt $\|g_x(y) - y_0\| \leq \epsilon$, millega on näidatud, et

$$g_x: \bar{B}(y_0, \delta) \rightarrow \bar{B}(y_0, \delta).$$

2) Näitame, et lahendipaaride poolt defineeritud operaator $f: B(x_0, \epsilon) \rightarrow \bar{B}(y_0, \delta)$ on pidev punktis x_0 ja $f(x_0) = y_0$.

Et $F(x_0, y_0) = 0$, siis $f(x_0) = y_0$. Olgu $x \in B(x_0, \epsilon)$ ja $y = f(x)$. Siis $F(x, y) = 0$ ehk y on operaatori g_x püsipunkt. Seetõttu saame võrratusest (2), et

$$\|y - y_0\| \leq 2 \|\Gamma\| \|F(x, y_0)\|$$

ehk

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq 2 \|\Gamma\| \|F(x, y_0)\|.$$

Kui nüüd $x_n \rightarrow x_0$, siis F pidevuse kohaselt

$F(x_n, y_0) \rightarrow F(x_0, y_0) = 0$, millest viimase võrratuse tõttu järeldeb, et $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem (teoreem ilmutamata operaatori diferentseeruvusest). Kui operaator $F: X \times Y \rightarrow Z$ rahuldab eelmise teoreemi eeldusi ja iga $(x, y) \in B$ korral eksisteerib $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, kusjuures kujutus $\frac{\partial F}{\partial x}: B \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ on pidev punktis (x_0, y_0) , siis eelmise teoreemi operaator f on diferentseeruv punktis x_0 ning $f'(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Tõestus. On selge, et $-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tähistades nagu eelmises teoreemis $\Gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}$, toome sisse

$$\alpha(x_0; h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) h.$$

Teoreemi tõestamiseks piisab näidata, et $\|\alpha(x_0; h)\| = o(\|h\|)$.

Olgu $l = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Siis

$$\alpha(x_0; h) = \Gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) l \right),$$

mistõttu

$$\|\alpha(x_0; h)\| \leq \|\Gamma\| \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) l \right\|.$$

Teoreemi eeldustel on operaator F diferentseeruv punktis (x_0, y_0) , mistõttu

$$F(x_0 + h, y_0 + l) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) l + o(\|h\| + \|l\|).$$

Arvestades, et $F(x_0 + h, y_0 + l) = F(x_0 + h, f(x_0 + h)) = 0$ ja $F(x_0, y_0) = 0$, saame $\|\alpha(x_0; h)\| = o(\|h\| + \|l\|)$.

Paneme tähele, et kui $h \rightarrow 0$, siis $l \rightarrow 0$ (sest f on pidev punktis x_0). Olgu nüüd $\varepsilon \in (0, 1)$ suvaline arv. Pidades silmas, et $\|h\| + \|l\| \rightarrow 0$ protsessis $h \rightarrow 0$, valime $\delta > 0$ nii, et kui $\|h\| < \delta$, siis $\|\alpha(x_0; h)\| \leq \varepsilon(\|h\| + \|l\|)$.

Kasutades seejuures hinnangut

$$\begin{aligned} \|h\| &= \left\| f(x_0+h) - f(x_0) + \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h - \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h \right\| \leq \\ &\leq \| \alpha(x_0; h) \| + \left\| \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| \|h\|, \end{aligned}$$

saame $\|h\| < \delta$ korral võrratuse

$$\| \alpha(x_0; h) \| \leq \varepsilon (\|h\| + \| \alpha(x_0; h) \| + \left\| \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| \|h\|),$$

millest järeldub, et

$$\| \alpha(x_0; h) \| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(1 + \left\| \Gamma \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| \right) \|h\|.$$

Sellega on näidatud, et $\| \alpha(x_0; h) \| = o(\|h\|)$.

Teoreem on tõestatud.

§ 8. Kõrgemat järku tuletised ja Taylori valem

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle \mathbb{K} , $U \subset X$ lah-
tine hulk ning $f: U \rightarrow Y$. Eeldame, et f on diferentseeruv
igas punktis $x \in U$. Siis võib vaadelda operaatorit

$f': U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, mis igale elemendile $x \in U$ seab vas-
tavusse $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Kui operaator f' on pidev, siis nimetatakse operaatorit
 f pidevalt diferentseeruvaks.

Kui f' on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis öeldak-
se, et f on kaks korda diferentseeruv punktis x . Tuletist

$(f')'(x)$ nimetatakse operaatori f' teiseks tuletiseks ja
tähistatakse $f''(x)$. Niisiis tähendab operaatori f kahe-
kordne diferentseeruvus punktis x seda, et leidub

$f''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ nii, et

$$f'(x+h) - f'(x) = f''(x)h + \beta(x; h), \quad (1)$$

kus $\frac{\beta(x; h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, kui $\|h\| \rightarrow 0$.

Võrdus (1) tähendab, et

$$f'(x+h)l - f'(x)l = f''(x)hl + \beta(x; h)l \quad \forall l \in X.$$

Teoreem 1. Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on kaks korda diferentseeruv punktis $x \in U$, siis $f''(x)h^2$ on sümmeetriline h ja h suhtes, s.t.

$$f''(x)h^2 = f''(x)hh \quad \forall h, h \in X.$$

Tõestus. Eeldame, et $h \neq 0$ ja $h \neq 0$, sest vastasel korral on sümmeetrilisuse võrdus triviaalselt täidetud. Hulga U lahtisuse tõttu leidub $r > 0$ nii, et $B(x, r) \subset U$. Seejuures $x + th, x + tl, x + t(h+l) \in B(x, r)$, kui

$$0 < t < \frac{r}{\|h\| + \|h\|}. \text{ Olgu}$$

$$\delta(t) = f(x + t(h+l)) - f(x + th) - f(x + tl) + f(x), \quad 0 < t < \frac{r}{\|h\| + \|h\|}.$$

Me tõestame, et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta(t)}{t^2} = f''(x)hh. \quad (2)$$

Kuna $\delta(t)$ on sümmeetriline h ja h suhtes, siis on h ja h suhtes sümmeetriline ka $\delta(t)/t^2$ piirväärtus $f''(x)hh$, mida väidabki teoreem.

Vaadeldes parameetrist t sõltuvat operaatorit

$$g: B(0, \|h\|) \rightarrow Y, \quad g(\xi) = f(x + t(\xi + h)) - f(x + t\xi), \quad \text{näeme, et}$$

$$\delta(t) = g(h) - g(0).$$

Operaator g on diferentseeruv ja tema tuletis avaldub kujul

$$g'(\xi) = t f'(x + t(\xi + h)) - t f'(x + t\xi).$$

Rakendades operaatorile g Lagrange'i keskäärtushinnangu

järeldust 1, kus $A = t^2 f''(x)h$, saame

$$\begin{aligned} \|\delta(t) - Ah\| &\leq \sup_{\xi \in (0, h)} \|g'(\xi) - A\| \|h\| = \\ &= t \|h\| \sup_{\xi \in (0, h)} \|f'(x + t(\xi + h)) - f'(x + t\xi) - t f''(x)h\|. \end{aligned}$$

Kuna f' on diferentseeruv punktis x , siis

$$f'(x + t(\xi + h)) - f'(x) = f''(x)(t(\xi + h)) + \beta(x; t(\xi + h)),$$

$$f'(x + t\xi) - f'(x) = f''(x)t\xi + \beta(x; t\xi),$$

kus $\beta(x; t(\xi+l)) = o(\|t(\xi+l)\|)$, $\beta(x; t\xi) = o(\|t\xi\|)$.

Neid võrdusi arvestades saame hinnangu

$$\begin{aligned} \|\delta(t) - A_h\| &\leq t \|h\| \sup_{\xi \in (0, h)} \|\beta(x; t(\xi+l)) - \beta(x; t\xi)\| \leq \\ &\leq t^2 \|h\| \sup_{\xi \in (0, h)} \left(\frac{\|\beta(x; t(\xi+l))\|}{t} + \frac{\|\beta(x; t\xi)\|}{t} \right). \end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime $\delta > 0$ nii, et kui $\|t(\xi+l)\|, \|t\xi\| < \delta$, siis $\|\beta(x; t(\xi+l))\| \leq \varepsilon \|t(\xi+l)\|$ ja $\|\beta(x; t\xi)\| \leq \varepsilon \|t\xi\|$. Seetõttu kehtib $t < \frac{\delta}{\|h\| + \|l\|}$ korral hinnang

$$\begin{aligned} \|\delta(t) - A_h\| &\leq t^2 \|h\| \sup_{\xi \in (0, h)} (\varepsilon \|\xi+l\| + \varepsilon \|\xi\|) \leq \\ &\leq \varepsilon t^2 \|h\| (2 \|h\| + \|l\|), \end{aligned}$$

millest järeldubki võrdus (2).

Teoreem on tõestatud.

Võttes teoreemi 1 eeldustes $X = \mathbb{R}^n$ ja $Y = \mathbb{R}$ ning $h = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ja $l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, saame matemaatilisest analüüsist tuntud tulemuse, et punktis x kahekordselt diferentseeruva n muutuva funktsiooni f puhul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Analoogiliselt teist järku tuletisega defineeritakse operaatori $f: U \rightarrow Y$, $U \subset X$, kõrgemat järku tuletised $f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots))$ ja räägitakse operaatori f n kordsest diferentseeruvusest. Kui vastavus $x \rightarrow f^{(n)}(x)$ on pidev, siis nimetatakse operaatorit f n korda pidevalt diferentseeruvaks.

Teoreem 2. Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on n korda diferentseeruv punktis $x \in U$, siis $f^{(n)}(x)$ on sümmeetriline oma argumentide suhtes, s.t. kui i_1, \dots, i_n on indeksite $1, \dots, n$ suvaline ümberjärjestus, siis

$$f^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = f^{(n)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_n} \quad \forall h_1, \dots, h_n \in X.$$

Töestus. Teoreem on tõestatud teist järku tuletise jaoks. Olgu $n \geq 3$. Eeldame, et teoreem kehtib $n-1$ järku tuletiste korral. Näitame, et ta kehtib ka n järku tuletiste korral.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus $i_1 = 1$, s.t. esimene argument jääb paigale. Siis

$$f^{(n-1)}(\xi) h_2 \dots h_n = f^{(n-1)}(\xi) h_{i_2} \dots h_{i_n}$$

iga ξ korral punkti x mingist ümbrusest. Tuginedes võrdusele

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x + t h_1) h_2 \dots h_n - f^{(n-1)}(x) h_2 \dots h_n = \\ = t f^{(n)}(x) h_1 \dots h_n + \beta(x; t h_1) h_2 \dots h_n, \end{aligned}$$

kus $\|\beta(x; t h_1)\| = o(\|t h_1\|)$, ja analoogilisele võrdusele, kus $h_2 \dots h_n$ asemel on $h_{i_2} \dots h_{i_n}$, saame küllalt väikese $t \neq 0$ korral, et

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) h_1 \dots h_n + \frac{1}{t} \beta(x; t h_1) h_2 \dots h_n = \\ = f^{(n)}(x) h_1 h_{i_2} \dots h_{i_n} + \frac{1}{t} \beta(x; t h_1) h_{i_2} \dots h_{i_n}, \end{aligned}$$

mis piiril $t \rightarrow 0$ annab võrduse

$$f^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = f^{(n)}(x) h_1 h_{i_2} \dots h_{i_n}.$$

Seejärel paneme tähele, et tänu teoreemi 1 tõttu kehtivale võrdusele

$$(f^{(n-2)})''(x) h_1 h_2 = (f^{(n-2)})''(x) h_2 h_1$$

saame

$$f^{(n)}(x) h_1 h_2 h_3 \dots h_n = f^{(n)}(x) h_2 h_1 h_3 \dots h_n,$$

s.t. kahte esimest argumenti võib omavahel vahetada.

Eeldame lõpuks, et $i_1 \neq 1$. Jättes indeksi 1 (s.t. esimese argumenti h_1) paigale, järjestame indeksid $2, \dots, n$ nii, et i_1 asetuks teisele kohale. Seejärel vahetame kaks

esimest argumenti, mille tulemusena indeks i_1 asetub esimesele kohale. Jättes lõpuks indeksi i_1 paigale, viime ülejäänud indeksid vajalikku järjestusse i_2, \dots, i_n .

Teoreem on tõestatud.

Tähistame elementi $f^{(n)}(x) \frac{h \dots h}{n}$ sümboliga $f^{(n)}(x) h^n$.

Kasutades $f^{(n)}(x)$ sümmeetrilisust oma argumentide suhtes, pole raske kontrollida, et $f^{(n)}(x)(h+l)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) h^{n-k} l^k$.

Teoreem 3 (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul). Kui

$f: U \rightarrow V$ on n korda diferentseeruv punktis $x \in U$, siis

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!} + \alpha_n(x; h),$$

kus $\alpha_n(x; h) = o(\|h\|^n)$ protsessis $h \rightarrow 0$.

Tõestus. Kui $n=1$, siis teoreem kehtib tuletise definitsiooni põhjal. Olgu $n \geq 2$. Eeldame, et teoreem kehtib $n-1$ korda diferentseeruvate operaatorite korral ja näitame, et siis $\alpha_n(x; h) = o(\|h\|^n)$.

Vaatleme operaatorit

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dots - \frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!} = \alpha_n(x; h), \quad h \in B(0, r),$$

kus $r > 0$ on validud nii väike, et $x+h \in U$, kui $h \in B(0, r)$. Paneme tähele, et $g(0) = 0$. Näitame, et g on diferentseeruv. Selleks leiame operaatorite $h \rightarrow f^{(k)}(x)h^k$, $h \in B(0, r)$, tuletise. Kuna

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x)(h+l)^k - f^{(k)}(x)h^k &= \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j f^{(k)}(x)h^{k-j}l^j - f^{(k)}(x)h^k = \\ &= k f^{(k)}(x)h^{k-1}l + O(\|l\|^2) = \\ &= k (f')^{(k-1)}(x) h^{k-1}l + o(\|l\|) \end{aligned}$$

protsessis $l \rightarrow 0$, siis $k (f')^{(k-1)}(x) h^{k-1}$ ongi otsitav tuletis. Nüüd on selge, et g on diferentseeruv ja

$$g'(h) = f'(x+h) - f'(x) - \dots - \frac{(f')^{(n-1)}(x) h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Et f' on $n-1$ korda diferentseeruv punktis x , siis $\|g'(h)\| = o(\|h\|^{n-1})$ protsessis $h \rightarrow 0$. Lagrange'i kesk-
väärtusteoreemi abil saame

$$\begin{aligned} \|\alpha_n(x; h)\| &= \|g(h)\| = \|g(h) - g(0)\| \leq \sup_{\xi \in (0, h)} \|g'(\xi)\| \|h\| = \\ &= \sup_{\xi \in (0, h)} \frac{\|g'(\xi)\|}{\|\xi\|^{n-1}} \|\xi\|^{n-1} \|h\| \leq \sup_{\xi \in (0, h)} \frac{\|g'(\xi)\|}{\|\xi\|^{n-1}} \|h\|^n. \end{aligned}$$

Seejuures $\sup_{\xi \in (0, h)} \frac{\|g'(\xi)\|}{\|\xi\|^{n-1}} \rightarrow 0$ protsessis $h \rightarrow 0$, sest

antud $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\|\xi\| < \delta$, siis $\frac{\|g'(\xi)\|}{\|\xi\|^{n-1}} < \varepsilon$, mistõttu $\|h\| < \delta$ korral $\sup_{\xi \in (0, h)} \frac{\|g'(\xi)\|}{\|\xi\|^{n-1}} \leq \varepsilon$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem 4 (Taylori valem jääkliikme Lagrange'i hinnangu-
ga). Kui operaator $f: U \rightarrow Y$ on n korda pidevalt dife-
rentseeruv lõigus $[x, x+h] \subset U$ ja $n+1$ korda diferent-
seeruv vahemikus $(x, x+h)$, siis

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!} + \alpha_n(x; h),$$

kus $\|\alpha_n(x; h)\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \|h\|^{n+1}$.

Tõestus. Märgime, et juhul $K = \mathbb{C}$ vaatleme ruume X
ja Y reaalsete normeeritud ruumidena. Tõestada tuleb jääk-
liikme hinnang. Valime vabalt $g \in \mathcal{F}(Y, \mathbb{R})$ ja vaatleme
funktsiooni $\varphi(t) = g(f(x+th))$, $t \in [0, 1]$. Funktsioon φ
on n korda pidevalt diferentseeruv ja vahemikus $(0, 1)$
 $n+1$ korda diferentseeruv, kusjuures $\varphi^{(k)}(t) =$
 $= g(f^{(k)}(x+th) h^k)$. (Viimase valemi põhjendamisel läh-
tume võrdusest $\varphi'(t) = g(f'(x+th)h)$ ehk

$\varphi(t) = g \circ F \circ f'(x+th) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, kus $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), Y)$ on defineeritud tingimusega $F(A) = Ah$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Kuna $F(A) = F$ iga $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ korral, siis $\varphi''(t) = (g \circ F \circ f'(x+th))'(1) = g(F \circ f''(x+th)h) = g(f''(x+th)h^2)$.

Analoogiliselt jätkates leitakse ka φ kõrgemat järku tule-
tised. Funktsiooni φ korral kehtib Taylori valem

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\lambda g)}{(n+1)!},$$

kus $\lambda g \in (0, 1)$ sõltub üldiselt funktsionaalist g . Arves-
tades, et $\varphi^{(k)}(0) = g(f^{(k)}(x)h^k)$ ja $\varphi(1) = g(f(x+h))$, saame

$$g(\alpha_n(x; h)) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\lambda g)}{(n+1)!} = g\left(\frac{f^{(n+1)}(x+\lambda g h)h^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

Valime nüüd funktsionaali g nii, et $\|g\| = 1$ ja $g(\alpha_n(x; h)) = \|\alpha_n(x; h)\|$. Siis

$$\begin{aligned} \|\alpha_n(x; h)\| &= g\left(\frac{f^{(n+1)}(x+\lambda g h)h^{n+1}}{(n+1)!}\right) \leq \\ &\leq \|g\| \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}(x+\lambda g h)\| \|h\|^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \|h\|^{n+1}. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui funktsionaal $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ on n korda pide-
valt diferentseeruv lõigus $[x, x+h] \subset U$ ja $n+1$ kore-
da diferentseeruv vahemikus $(x, x+h)$, siis leidub $\lambda \in (0, 1)$
nii, et

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x+\lambda h)h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tõestus. Võtame teoreemi 4 tõestuses $Y = \mathbb{R}$ ja $g = I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Siis funktsioon $\varphi(t) = f(x+th)$ on n korda pidevalt diferent-
seeruv lõigus $[0, 1]$ ja $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus
 $(0, 1)$. Teoreemi 4 tõestuses olev Taylori valem funktsiooni φ

jaoks ongi just see valem, mille kehtivust väidab järeldus.

§ 9. Funktsionaalide ekstreemumülesanded

Olgu X normeeritud ruum üle \mathbb{K} ning $U \subset X$ lahtine hulk. Vaatleme funktsionaali $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Punkti $x_0 \in U$ nimetatakse funktsionaali f ekstreemumpunktiks, kui leidub kera $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ nii, et $f(x) \geq f(x_0)$ iga $x \in B(x_0, \varepsilon)$ korral või $f(x) \leq f(x_0)$ iga $x \in B(x_0, \varepsilon)$ korral. Esimesel juhul räägitakse funktsionaali f miinimumpunktist x_0 , teisel juhul maksimumpunktist.

Teoreem. Kui funktsionaal f on punktis x_0 Gâteaux' mõttes diferentseeruv ja x_0 on funktsionaali f ekstreemumpunkt, siis $\delta f(x_0; h) = 0$ iga $h \in X$ korral.

Tõestus. Olgu x_0 näiteks miinimumpunkt (maksimumpunkti puhul on arutelu analoogiline), kusjuures $f(x) \geq f(x_0)$ iga $x \in B(x_0, \varepsilon)$ korral. Vaatleme suvalist elementi $h \in X$. Kui $|t|$ on küllalt väike, siis $x_0 + th \in B(x_0, \varepsilon)$, mistõttu

$$\delta f(x_0; h) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \geq 0$$

ja

$$\delta f(x_0; h) = \lim_{t \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \leq 0.$$

Seega $\delta f(x_0; h) = 0$.

Teoreem on tõestatud.

Kui $X = \mathbb{R}$, siis f diferentseeruvus Gâteaux' mõttes tähendab teatavasti tema tavalist diferentseeruvust. Ning äsjatõestatud teoreem on sellel erijuhul tuntud Fermat' teoreemina.

Järeldus. Kui funktsionaal f on punktis x_0 diferentseeruv ja x_0 on tema ekstreemumpunkt, siis $f'(x_0) = 0$.

Tõestus. Kui f on diferentseeruv, siis on ta diferentseeruv Gâteaux' mõttes. Teoreemi põhjal $\delta f(x_0; h) = 0$ ehk

$f'(x_0)h = 0$ iga $h \in X$ korral, mis tähendabki, et $f'(x_0) = 0$.

Teoreem. Olgu funktsionaal f punktis x_0 kaks korda diferentseeruv. Kui x_0 on selline, et $f'(x_0) = 0$ ja leidub $\gamma > 0$ nii, et $f''(x_0)h^2 \geq \gamma \|h\|^2$ iga $h \in X$ korral ($f''(x_0)h^2 \leq -\gamma \|h\|^2$ iga $h \in X$ korral), siis x_0 on funktsionaali f miinimumpunkt (maksimumpunkt).

Tõestus. Tõestame väite miinimumpunkti kohta (maksimumpunkti korral on tõestus analoogiline). Oletame vastuväiteliselt, et punktis x_0 ei ole miinimumi. Siis leidub jada $x_n \rightarrow x_0$ nii, et $f(x_n) < f(x_0)$. Olgu $h_n = x_n - x_0$. Arvestades, et $h_n \rightarrow 0$ ja kasutades Tayloriga valemit

$f(x_0 + h_n) = f(x_0) + f'(x_0)h_n + \frac{1}{2} f''(x_0)h_n^2 + o(\|h_n\|^2)$
ning tingimusi $f'(x_0) = 0$ ja $f(x_0 + h_n) < f(x_0)$, saame, et

$$0 > \frac{1}{2} f''(x_0)h_n^2 + o(\|h_n\|^2) \geq \frac{\gamma}{2} \|h_n\|^2 + o(\|h_n\|^2)$$

ehk

$$0 > \gamma + o(1)$$

protsessis $h_n \rightarrow 0$. Seega $0 \geq \gamma$, mis on võimatu.

Teoreem on tõestatud.

VII Kompaktsed operaatorid

§ 1. Kompaktse lineaarse operaatori mõiste ja omadused

Meenutame, et hulka normeeritud ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktses, kui igast tema elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Lineaarset operaatorit $A: X \rightarrow Y$ nimetatakse kompaktses, kui ta teisendab iga ruumis X tõkestatud hulga suhteliselt kompaktses hulgaks ruumis Y (s.t. kui $E \subset X$ on tõkestatud, siis $AE \subset Y$ on suhteliselt kompaktnes).

Lause. Lineaarset operaatorit A kompaktsusega on samaväärsed järgmised tingimused:

- 1) kui jada x_n on tõkestatud, siis jadast Ax_n saab eraldada koonduva osajada,
- 2) $A\bar{B}(0,1)$ on suhteliselt kompaktnes,
- 3) $AB(0,1)$ on suhteliselt kompaktnes.

Tõestus. On selge, et operaatorit A kompaktsusest järeldub tingimus 1).

Näitame, et tingimusest 1) järeldub tingimus 2). Oletame vastuväiteliselt, et 2) ei kehti, s.t. hulgas $A\bar{B}(0,1)$ leidub jada y_n , millel ei ole ühtegi koonduvat osajada. Elementide y_n originaalid $x_n \in \bar{B}(0,1)$ moodustavad tõkestatud jada. Seetõttu peab jada $y_n = Ax_n$ tingimuse 1) kohaselt sisaldama koonduvat osajada, mis on võimatu.

Tingimusest 2) järeldub kohe 3), sest $AB(0,1) \subset A\bar{B}(0,1)$.

Lõpuks tõestame, et tingimusest 3) järeldub operaatorit A kompaktsus. Olgu hulk E tõkestatud. Siis leidub $n > 0$

nii, et $E \subset B(0, r)$. Näitame, et hulk AE on suhteliselt kompaktne. Vaatleme suvalist jada $y_n \in AE$. Olgu $x_n \in E$ elementide y_n originaalid. Kuna $\frac{x_n}{n} \in B(0, 1)$, siis jadast $A \frac{x_n}{n} = \frac{y_n}{n}$ saab eraldada koonduva osajada $\frac{y_{n_k}}{n_k}$. Kuid siis koondub ka y_{n_k} .

Lause on tõestatud.

Lause. Kompaktne lineaarne operaator on pidev.

Tõestus. Me teame, et iga suhteliselt kompaktne hulk on tõkestatud. Niisiis teisendab kompaktne lineaarne operaator iga tõkestatud hulga tõkestatud hulgaks. Kompaktne lineaarne operaator on seega tõkestatud ning järelikult ka pidev.

Kompaktset lineaarset operaatorit nimetatakse ka täielikult pidevaks operaatoriks.

Teoreem. Kompaktne lineaarne operaator teisendab nõrgalt koonduva jada koonduvaks.

Tõestus. Olgu lineaarne operaator A kompaktne ning $x_n \xrightarrow{w} x$. Me teame, et operaatori A pidevuse tõttu $A x_n \xrightarrow{w} Ax$. Oletame vastuväiteliselt, et jada $A x_n$ ei koondunud elemendiks Ax . Siis leidub $\varepsilon > 0$ ja osajada $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et

$$\|A x_n - Ax\| \geq \varepsilon \quad \forall n \in N'. \quad (1)$$

Jada $x_n, n \in N'$, koondub nõrgalt, järelikult on ta tõkestatud. Seetõttu, toetudes operaatori A kompaktsusele, saame eraldada osajada $N'' \subset N'$ nii, et $A x_n \xrightarrow{w, n \in N''} y$. Arvestades koondumist $A x_n \xrightarrow{w} Ax$, näeme, et $y = Ax$. Seega $A x_n \xrightarrow{w, n \in N''} Ax$, mis on aga vastuolus tingimusega (1).

Teoreem on tõestatud.

Lineaarne operaator, mis teisendab iga nõrgalt koonduva jada koonduvaks jadaks, ei tarvitse üldiselt kompaktne olla. Näiteks ruumi ℓ_1 ühikoperaator teisendab nõrgalt koonduvad jaded koonduvateks, sest ruumis ℓ_1 jada nõrk koonduvus on

samaväärne tema normi järgi koonduvusega. Kuid ruumi ℓ_1 ühikoperaator ei ole kompaktne (vt. järgmise paragrahvi näidet 3).

Teoreem. Teisendagu lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ iga nõrgalt koonduva jada koonduvaks. Kui X on refleksiivne, siis A on kompaktne.

Tõestuseks näitame, et tõkestatud jada $x_n \in X$ korral saab jadast Ax_n eraldada koonduva osajada. Ruumi X refleksiivsus lubab jadast x_n eraldada nõrgalt koonduva osajada x_{n_k} . Järelikult jada Ax_{n_k} koondub.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem (Schauderi teoreem). Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Kui lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ on kompaktne, siis tema kaasoperaator A^* on kompaktne. Kui A^* on kompaktne ja Y täielik, siis A on kompaktne.

Tõestus.* 1) Olgu lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ kompaktne. Näitame, et $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ teisendab kinnise ühikera $B = \{y \in Y^* : \|y\| \leq 1\}$ suhteliselt kompaktseks.

Hulk $K = A\overline{B}(0,1) \subset Y$ on kompaktne kui suhteliselt kompaktse hulga $A\overline{B}(0,1)$ sulund. Olgu $\Phi = \{g|_K : g \in B\}$ kerasse B kuuluvate funktsionaalide ahendite hulk. Siis $\Phi \subset C(K; \mathbb{K})$. Hulk Φ on ühtlaselt tõkestatud, sest mistahes $g \in B$ ja $y \in K$ korral

$$\begin{aligned} |g|_K(y)| &\leq \sup_{y \in A\overline{B}(0,1)} |g(y)| = \sup_{y \in A\overline{B}(0,1)} |g(y)| \\ &= \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} |g(Ax)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|g\| \|Ax\| \leq \|A\|. \end{aligned}$$

Ta on ka võrdpidev, sest mistahes $g \in B$ korral

$$\begin{aligned} |g|_K(y_1) - g|_K(y_2)| &= |g(y_1 - y_2)| \leq \\ &\leq \|g\| \|y_1 - y_2\| = \|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in K. \end{aligned}$$

Üldistatud Arzelà-Ascoli teoreemi põhjal on Φ suhteliselt kompaktnel ruumis $C(K; \mathbb{K})$.

Konstrueerime nüüd isomeetria $F: \Phi \rightarrow A^*B$. Defineerime $F(g|_K) = A^*g, g \in B$. Kui $g|_K = g'|_K$ mingite $g, g' \in B$ korral, siis $A^*g = A^*g'$, sest

$$\begin{aligned} (A^*g)(x) &= g(Ax) = g|_K(Ax) = g'|_K(Ax) = \\ &= g'(Ax) = (A^*g')(x) \quad \forall x \in \bar{B}(0,1). \end{aligned}$$

Niisiis on F hulgal Φ määratud kujutus. Tema väärtuste hulk on definitsiooni põhjal A^*B , seega F on surjektiivne. Kuna iga $g, g' \in B$ puhul

$$\begin{aligned} \rho(g|_K, g'|_K) &= \max_{y \in K} |g|_K(y) - g'|_K(y)| = \\ &= \max_{y \in \bar{B}(0,1)} |(g-g')(y)| = \sup_{y \in \bar{B}(0,1)} |(g-g')(y)| = \\ &= \sup_{x \in \bar{B}(0,1)} |(g-g')(Ax)| = \sup_{x \in \bar{B}(0,1)} |A^*(g-g')(x)| = \\ &= \|A^*(g-g')\| = \|A^*g - A^*g'\|, \end{aligned}$$

siis F säilitab kauguse. Niisiis on F isomeetria.

Lõpuks näitame, et A^*B on suhteliselt kompaktnel hulk ruumis X^* . Vaatleme jada $f_n \in A^*B$. Siis $f_n = F\varphi_n$, kus $\varphi_n \in \Phi$. Kuna Φ on suhteliselt kompaktnel, siis φ_n sisaldab fundamentaalse osajada φ_{n_k} . Et F on isomeetria, siis ka $F\varphi_{n_k} = f_{n_k}$ on fundamentaalne. Jada f_{n_k} koondub ruumi X^* täielikkuse tõttu.

2) Eeldame, et A^* on kompaktnel ja Y täielik. Tõestatu põhjal on operaatori A^* kaasoperaator $A^{**}: X^{**} \rightarrow Y^{**}$ kompaktnel. Vaatleme ruume X ja Y alamruumidena vastavalt ruumides X^{**} ja Y^{**} . Siis $A = A^{**}|_X$. Operaatori A kompaktsuse tõestamiseks vaatleme suvalist tõkestatud jada $x_n \in X$. Operaatori A^{**} kompaktsuse tõttu si-

saldab $A x_n = A^* x_n$ ruumis Y^{**} koonduva osajada. Et aga Y , olles täielik, on kinnine ruumis Y^{**} , siis see osajada koondub tegelikult ruumis Y .

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et Schauderi teoreemi teises osas on ruumi Y täielikkuse eeldus oluline. Seda põhjendab järgmise paragrahvi näide 5.

§ 2. Kompaktsete lineaarsete operaatorite näiteid

Lineaarset operaatorit $A: X \rightarrow Y$, kus X ja Y on vektorruumid, nimetatakse lõplikumõõtmeliseks, kui alamruum $I_m A = \{Ax: x \in X\}$ on lõplikumõõtmeline.

Näide 1. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Kui operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on lõplikumõõtmeline, siis ta on kompaktne.

Põhjenduseks märgime, et kui hulk $E \subset X$ on tõkestatud, siis on tõkestatud ka $AE \subset I_m A$. Ruumi $I_m A$ lõplikumõõtmelisuse tõttu on aga AE suhteliselt kompaktne.

Märgime, et juhul, kui $d_m X < \infty$, on iga lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ pidev ja lõplikumõõtmeline ning seega kompaktne.

Näitest 1 tuleneb vahetult

Näide 2. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Kui Y on lõplikumõõtmeline, siis iga operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on kompaktne.

Näite 2 põhjal on kõik pidevad lineaarsed funktsionaalid kompaktsed.

Näide 3. Lõpmatumõõtmelise normeeritud ruumi ühikoperaator ei ole kompaktne.

Põhjendus. Lõpmatumõõtmelise ruumi ühikoperaator tekitab ühiksfaäri, mis on tõkestatud hulk, ühiksfaäriks, aga

see pole suhteliselt kompaktn.

Näide 4. Vaatleme integraaloperaatorit K , mis defineeritakse võrdusega

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1)$$

Alljärgnevas teoreemis ja tema järeldustes esitatakse piisavaid tingimusi selleks, et $K: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ oleks kompaktn.

Teoreem. Rahuldagu operaatori K tuum $\mathcal{K}: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tingimusi

1) leidub M nii, et $\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)| ds \leq M$ iga $t \in [a,b]$ korral,

2) iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $|t_1 - t_2| < \delta$, siis $\int_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| ds < \varepsilon$.

Siis $K: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ on kompaktn lineaarne operaator.

Tõestus. Olgu $x \in C[a,b]$. Kuna

$$|\mathcal{K}(t,s)x(s)| \leq |\mathcal{K}(t,s)| \|x\|$$

ja eksisteerib $\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)| ds$, siis on olemas $Kx =$

$$= \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)ds. \text{ Tingimuse 2) kohaselt}$$

$$|(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)| \leq \int_a^b |(\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s))x(s)| ds \leq$$

$$\leq \int_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| ds \|x\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad (2)$$

kui $|t_1 - t_2| < \delta$. Järelikult $Kx \in C[a,b]$ ja K on niisiis ruumis $C[a,b]$ tegutsev operaator. Tema lineaarsus on vaheult kontrollitav. Tõestamiseks, et K on kompaktn, vaatleme suvalist tõkestatud hulka $E \subset C[a,b]$ ning näitame Arzelà-Asooli teoreemi abil, et $KE \subset C[a,b]$ on suhteliselt kompaktn hulk.

Et E on tõkestatud, siis leidub $\eta > 0$ nii, et

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq r \quad \forall x \in E.$$

Kuna

$$\begin{aligned} |(Kx)(t)| &\leq \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)| ds \leq \\ &\leq \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)| ds \|x\| \leq M r \quad \forall x \in E, \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

siia KE on ühtlaselt tõkestatud. Tingimuse 2) kohaselt saame võrratust (2) kasutades, et mistahes $x \in E$ korral $|(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)| < \varepsilon r$, kui $|t_1 - t_2| < \delta$. Järelikult on KE ka võrdpidev.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Pideva tuumaga integraaloperaator on kompaktne.

Tõestuseks veendume, et teoreemi tingimused 1) ja 2) on täidetud. Et pidev funktsioon \mathcal{K} on kinnisel hulgal $[a, b] \times [a, b]$ tõkestatud, siis leidub M_0 nii, et $|\mathcal{K}(t,s)| \leq M_0$, kui $t, s \in [a, b]$. Seetõttu

$$\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)| ds \leq M_0 \int_a^b ds = M_0(b-a) = M.$$

Kuna \mathcal{K} on ühtlaselt pidev, siis antud $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $|t_1 - t_2| < \delta$ ja $s \in [a, b]$, siis

$$|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Seega, kui $|t_1 - t_2| < \delta$, siis

$$\int_a^b |\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| ds < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b ds = \varepsilon.$$

Järeldus 1 on tõestatud.

Tuuma \mathcal{K} kujul

$$\mathcal{K}(t, s) = \frac{\mathcal{K}_0(t, s)}{|t-s|^\alpha},$$

kus $0 < \alpha < 1$ ja \mathcal{K}_0 on pidev, nimetatakse nõrgalt singulaarseks tuumaks ja temale vastavat integraaloperaatorit (1) nõrgalt singulaarseks integraaloperaatoriks.

Järeldus 2. Nõrgalt singulaarne integraaloperaator on kompaktne.

Ülesanne.* Tõestada järeldus 2.

Olgu funktsioon $\mathcal{K}(t, s)$ määratud hulgal $\Delta = \{s, t \in [a, b]: s \leq t\}$. Võrdusega

$$(Kx)(t) = \int_a^t \mathcal{K}(t, s) x(s) ds, \quad a \leq t \leq b,$$

määratud integraaloperaatorit K nimetatakse Volterra integraaloperaatoriks.

Järeldus 3. Pideva tuumaga Volterra integraaloperaator on kompaktne.

Tõestus. Vaatleme operaatorit K kui integraaloperaatorit (1) tuumaga

$$\bar{\mathcal{K}}(t, s) = \begin{cases} \mathcal{K}(t, s), & \text{kui } s \leq t, \\ 0, & \text{kui } s > t. \end{cases}$$

Tuum $\bar{\mathcal{K}}$ rahuldab teoreemi tingimust 1), sest funktsioon \mathcal{K} , olles pidev kinnisel tõkestatud hulgal Δ , on seal tõkestatud. Funktsiooni \mathcal{K} ühtlase pidevuse tõttu hulgal Δ leidub antud $\varepsilon > 0$ korral $\delta > 0$ nii, et kui $|t_1 - t_2| < \delta$ ja $t_1, t_2 \geq a$, siis

$$|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Seejuures valime δ nii väikese, et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2M_0}$, kus

$|\mathcal{K}(t, s)| \leq M_0$ ja $M_0 > 0$. Kui nüüd $|t_1 - t_2| < \delta$ (olgu näiteks $t_1 < t_2$), siis

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\bar{\mathcal{K}}(t_1, s) - \bar{\mathcal{K}}(t_2, s)| ds = \\ & = \int_a^{t_1} |\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| ds + \int_{t_1}^{t_2} |\mathcal{K}(t_2, s)| ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_1 - a) + M_0(t_2 - t_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Järeldus 3 on tõestatud.

Märkus. Järeldust 3 saab põhjendada ka järelduse 2 abil,

sest tuuma $\overline{\mathcal{K}}$ järelduse 3 tõestusest saab esitada näiteks kujul

$$\overline{\mathcal{K}}(t, s) = \frac{\mathcal{K}_0(t, s)}{|t-s|^{1/2}},$$

kus $\mathcal{K}_0(t, s) = |t-s|^{1/2} \overline{\mathcal{K}}(t, s)$ on pidev ruudus $[a, b] \times [a, b]$.

Näide 5. Olgu $\tilde{C}^1[-1, 1]$ ruumi $C[-1, 1]$ (teatavasti mittetäielik) alamruum, mis koosneb lõigul $[-1, 1]$ pidevalt diferentseeruvatest funktsioonidest. Vaatleme integreerimisoperaatorit

$$(Tx)(t) = \int_{-1}^t x(s) ds, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Järelduse 3 põhjal on $T: C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ kompaktneline operaator. Lisaks paneme tähele, et $T \in \mathcal{L}(C[-1, 1], \tilde{C}^1[-1, 1])$, sest eksisteerib $(Tx)'(t) = x(t)$ iga $x \in C[-1, 1]$ korral. Näitame, et $T: C[-1, 1] \rightarrow \tilde{C}^1[-1, 1]$ ei ole kompaktneline, kuid tema kaasoperaator T^* on kompaktneline.

Vaatleme jada

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & \text{kui } 0 < t \leq 1/n, \\ 1, & \text{kui } 1/n < t \leq 1. \end{cases}$$

Siis $x_n \in C[-1, 1]$ ja $\|x_n\| = 1$. Veendume, et Tx_n ei sisalda ruumis $\tilde{C}^1[-1, 1]$ koonduvat osajada. Kuna

$$(Tx_n)(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 \leq t \leq 0, \\ \frac{nt^2}{2}, & \text{kui } 0 < t \leq 1/n, \\ t - \frac{1}{2n}, & \text{kui } 1/n < t \leq 1, \end{cases}$$

siis jada Tx_n koondub ruumis $C[-1, 1]$ funktsiooniks

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 \leq t \leq 0, \\ t, & \text{kui } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

sest $\max_{-1 \leq t \leq 1} |(Tx_n)(t) - x(t)| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$. Seetõttu koonduvad ruumis $C[-1, 1]$ funktsiooniks x kõik Tx_n osajadad. Funkt-

sioon α ei kuulu aga ruumi $\tilde{C}^1[-1,1]$, mistõttu $T\alpha_n$ ükski osajada ei koondunud ruumis $\tilde{C}^1[-1,1]$.

Operaatori $T: C[-1,1] \rightarrow \tilde{C}^1[-1,1]$ kaasoperaator on kompaktne, sest ta ühtib kompaktse lineaarse operaatori $T: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$ kaasoperaatoriga (kuna $\overline{\tilde{C}^1[-1,1]} = C[-1,1]$). Märgime lõpuka, et $T: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$ on näide kompaktselt lineaarsest operaatorist, mille korral kinnise ühik-kera kujutia $T(\bar{B}(0,1))$ ei ole kompaktne, sest ta ei ole kinnine (eespool vaadeldud jada $T\alpha_n$ piiirelement α ei kuulu T väärtuste hulka).

§ 3. Kompaktsete lineaarsete operaatorite ruum

Olgu $\mathcal{K}(X, Y)$ kõigi normeeritud ruumiat X normeeritud ruumi Y tegutsevate kompaktsete lineaarsete operaatorite hulk.

Lause. Hulk $\mathcal{K}(X, Y)$ on vektoralamruum ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Tõestus. Olgu $A, B \in \mathcal{K}(X, Y)$ ja $x_n \in X$ tõkestatud jada. Näitame, et jadast $(A+B)x_n$ saab eraldada koonduva osajada. Selleks eraldame esmalt koonduva osajada $Ax_n, n \in N' \subset N$. Seejärel eraldame jadaat $Bx_n, n \in N''$, koonduva osajada $Bx_n, n \in N'' \subset N'$. Siis osajada $(A+B)x_n = Ax_n + Bx_n, n \in N''$, koondub.

Samasugune arutlus näitab, et kui $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, siis $\lambda A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Lause on tõestatud.

Teoreem. Kui Y on Banachi ruum ja jada $A_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ koondub normi järgi operaatoriks $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, s.t. $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, siis $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ (teisiti öeldes, kui Y on Banachi ruum, siis $\mathcal{K}(X, Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ kinnine alamruum).

Tõestuseks veendume, et $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ on suhteliselt kom-

paktne. Selleks leiame hulga $AB(0,1)$ suhteliselt kompaktse ε -võrgu, millest Hausdorffi teoreemile tuginedes järeldubki tema suhteline kompaktsus.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime talle n_0 nii, et $\|A - A_{n_0}\| < \varepsilon$. Operaatori A_{n_0} kompaktsuse tõttu on $A_{n_0}B(0,1)$ suhteliselt kompaktne. Ta on (suhteliselt kompaktne) ε -võrk hulga $AB(0,1)$, sest kui $y \in AB(0,1)$, siis leidub $x \in B(0,1)$ nii, et $Ax = y$; seejuures $A_{n_0}x \in A_{n_0}B(0,1)$ ning

$$\begin{aligned} \|y - A_{n_0}x\| &= \|(A - A_{n_0})x\| \leq \\ &\leq \|A - A_{n_0}\| \|x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Kui $A \in \mathcal{K}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ ja $C \in \mathcal{L}(Z, X)$, siis $BA \in \mathcal{K}(X, Z)$ ja $AC \in \mathcal{K}(Z, Y)$ (kui pidevate lineaarsete operaatorite korrutises vähemalt üks teguritest on kompaktne, siis on kompaktne ka korrutis).

Tõestus. Näitame, et BA on kompaktne. Olgu jada $x_n \in X$ tõkestatud. Siis jadal Ax_n leidub koonduv osajada Ax_{n_k} . Järelikult koondub ka BAx_{n_k} .

Näitame, et AC on kompaktne. Olgu jada $z_n \in Z$ tõkestatud. Siis on tõkestatud ka jada Cz_n . Järelikult leidub jadal ACz_n koonduv osajada ACz_{n_k} .

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui vähemalt üks normeeritud ruumidest X ja Y on lõpmatumõõtmeline, siis operaatoril $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ ei saa olla pidevat pöördoperaatorit.

Tõestus. Kui eksisteeriks $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, siis $I = A^{-1}A \in \mathcal{K}(X, X)$ ja $I = AA^{-1} \in \mathcal{K}(Y, Y)$, aga lõpmatumõõtmelise ruumi ühikoperaator ei ole mitte kunagi kompaktne.

§ 4. Fredholmi teoreemid kompakitse lineaarse
operaatoriga teist liiki võrrandite jaoks

Selles paragrahvis arendatavat operaatorvõrrandite la-
henduvuse teooriat kutsutakse ka Riesz-Schauderi teooriaks.

Olgu X Banachi ruum ja $T \in \mathcal{L}(X, X)$. Vaatleme nn. teist
liiki operaatorvõrrandit

$$x = Tx + y, \quad (1)$$

kus $y \in X$ on vabaliige ning $x \in X$ otsitav. Tähistades

$A = I - T$, võime võrrandi (1) esitada ka nn. esimest liiki
võrrandina

$$Ax = y.$$

Võrrandi (1) kaasvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f = T^*f + g \quad (2)$$

ehk

$$A^*f = g,$$

kus T^* ja $A^* = I - T^*$ on operaatorite T ja A kaasope-
raatorid. Järgneva teooria seisukohalt on oluline, et, nagu
väidab Schauderi teoreem, $T^* \in \mathcal{L}(X^*, X^*)$.

Vaatleme ka vastavaid homogeenseid võrrandeid $x = Tx$
ehk $Ax = 0$ ja $f = T^*f$ ehk $A^*f = 0$.

Enne Fredholmi teoreemide juurde asumist tõestame mõned
abitulemused.

Lemma. Operaatori $I - T$ tuum $\text{Ker}(I - T)$ on lõpliku-
mõõtmeline.

Tõestus tugineb asjaolule, et ruum on lõplikumõõtmeline
parajasti siis, kui iga tema tõkestatud osahulk on suhteli-
selt kompaktne. Olgu E tõkestatud hulk ruumis $\text{Ker}(I - T) =$
 $= \{x \in X : x = Tx\}$. Siis $E = TE$ on operaatori T kompaktsu-
se tõttu suhteliselt kompaktne. Seega $\dim \text{Ker}(I - T) < \infty$.

Järeldus. Iga $n = 1, 2, \dots$ korral on $\text{Ker}((I-T)^n)$ lõplikumõõtmeline.

Tõestuseks paneme tähele, et $(I-T)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k T^k =$
 $= I - T \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k T^{k-1} \right) = I - S$, kus $S \in \mathcal{L}(X, X)$, ning rakendame lemmat.

Lemma. Opéraatori $I-T$ väärtuste hulk $\text{Im}(I-T)$ on kinnine.

Tõestus. 1) Tähistame nagu varemgi $A = I-T$. Näitame kõigepealt, et mistahes elemendi $y \in \text{Im} A$ originaalide hulgas leidub selline, mille norm on minimaalne. Olgu $Ax = y$. Paneme tähele, et siis iga $z \in \text{Ker} A$ korral ka $A(x+z) = y$. Teiselt poolt, kui $Ax' = y$, siis $x' = x + z$, kus $z = x' - x \in \text{Ker} A$. Niisiis on $\{x+z : z \in \text{Ker} A\}$ elemendi y kõigi originaalide hulk. Tähistame $d = \inf_{z \in \text{Ker} A} \|x+z\|$ ning

valime $z_n \in \text{Ker} A$ nii, et $\|x+z_n\| \rightarrow d$. Kuna jada $x+z_n$ on tõkestatud, siis on tõkestatud ka jada z_n , mis $\text{Ker} A$ lõplikumõõtmelisuse tõttu sisaldab koonduva osajada $z_{n_k} \rightarrow z \in \text{Ker} A$. Järelikult $\|x+z_{n_k}\| \rightarrow \|x+z\|$, mistõttu $\|x+z\| = d$, s.t. $x+z$ on elemendi y minimaalse normiga originaal.

2) Näitame, et leidub arv M nii, et iga $y \in \text{Im} A$ ja tema minimaalse normiga originaali x korral kehtib võrratus $\|x\| \leq M \|y\|$. Oletame vastuväiteliselt, et see võrratus ei kehti. Siis leiduvad elemendid $y_n \in \text{Im} A$, $y_n \neq 0$, nii, et nende minimaalse normiga originaalide x_n korral $\frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} \rightarrow \infty$ (kuna $y_n \neq 0$, siis $x_n \neq 0$). Me võime eeldada, et $\|x_n\| = 1$, sest vastasel korral võiksime elementide y_n asemel vaadelda elemente $\frac{y_n}{\|x_n\|} \in \text{Im} A$ ja nende originaale $\frac{x_n}{\|x_n\|}$, kusjuures pole raske kontrollida, et originaalide

normi minimaalsus säilib. Et jada x_n on tõkestatud ja T kompaktnel, siis leidub osajada $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $Tx_n \xrightarrow{n \in N'} x$. Kuna $y_n \rightarrow 0$, siis saame võrdust $x_n = Tx_n + y_n$ arvestades koondumise $x_n \xrightarrow{n \in N'} x$. Operaatori T pidevuse tõttu $Tx_n \rightarrow Tx$. Järelikult $x = Tx$ ehk $x \in \text{Ker } A$. Kuna ka $-x \in \text{Ker } A$, siis $A(x_n - x) = y_n$ iga n korral. Et aga x_n oli elemendi y_n minimaalse normiga originaal, siis $\|x_n - x\| \geq \|y_n\| = 1$, mis on vastuolus koondumisega $x_n \xrightarrow{n \in N'} x$.

3) Hulga $\text{Im } A$ kinnisuse tõestamiseks näitame, et mis tahes koonduva jada $y_n \in \text{Im } A$ piirelement $y = \lim y_n$ kuulub hulka $\text{Im } A$. Olgu $y_n = Ax_n$, kus x_n on elemendi y_n minimaalse normiga originaal. Kuna y_n on tõkestatud jada, siis osa 2) põhjal on selge, et ka jada x_n on tõkestatud. Operaatori T kompaktsuse tõttu sisaldab Tx_n koonduva osajada $Tx_n, n \in N' \subset \mathbb{N}$. Et $x_n = Ax_n + Tx_n = y_n + Tx_n$ ja $y_n \rightarrow y$, siis ka $x_n, n \in N'$, koondub mingiks elemendiks x . Seega A pidevuse tõttu

$$Ax = \lim_{n \in N'} Ax_n = \lim_{n \in N'} y_n = y$$

Seega $y \in \text{Im } A$

Lemma on tõestatud.

Eespool tõestasime, et $\overline{\text{Im } A} = (\text{Ker } A^*)^\perp$ ja täieliku $\text{Im } A$ puhul $\text{Im } A^* = (\text{Ker } A)^\perp$. Seega kehtivad viimase lemma tõttu kaks alljärgnevat teoreemi.

Teoreem 1. (Fredholmi I teoreem). Võrrand $x = Tx + y$ on antud vabaliikme $y \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui $f(y) = 0$ homogeense kaasvõrrandi $f = T^*f$ iga lahendi f korral. Teisiti öeldes,

$$y \in \text{Im } (I - T) \Leftrightarrow f(y) = 0 \quad \forall f \in \text{Ker } (I - T^*)$$

ehk

$$\text{Im } (I - T) = (\text{Ker } (I - T^*))^\perp.$$

Järeldus. Võrrand $x = Tx + y$ on iga $y \in X$ korral la-

henduv parajasti siis, kui võrrandil $f = T^*f$ on ainult triviaalne lahend. Teisiti öeldes,

$$\text{Im}(I - T) = X \Leftrightarrow \text{Ker}(I - T^*) = \{0\}.$$

Tõestuseks märgime, et mistahes alamruumi $W \subset X^*$ korral

$$W^\perp = X \Leftrightarrow W = \{0\}.$$

Teoreem 2. (Fredholmi I teoreem kaasvõrrandi jaoks).

Võrrand $f = T^*f + g$ on antud vabaliikme $g \in X^*$ korral lahenduv parajasti siis, kui $g(x) = 0$ homogeense võrrandi $x = Tx$ iga lahendi x korral. Teisiti öeldes,

$$g \in \text{Im}(I - T^*) \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in \text{Ker}(I - T)$$

ehk

$$\text{Im}(I - T^*) = (\text{Ker}(I - T))^\perp.$$

Järeldus. Võrrand $f = T^*f + g$ on iga $g \in X^*$ korral lahenduv parajasti siis, kui võrrandil $x = Tx$ on ainult triviaalne lahend. Teisiti öeldes,

$$\text{Im}(I - T^*) = X^* \Leftrightarrow \text{Ker}(I - T) = \{0\}.$$

Tõestuseks märgime, et mistahes alamruumi $Z \subset X$ korral

$$Z^\perp = X^* \Leftrightarrow Z = \{0\}.$$

Siiani seostasime võrrandi lahenduvuse vastava homogeense võrrandi kaasvõrrandi lahendite omadustega, järgnevalt uurime võrrandi ja vastava homogeense võrrandi lahenduvuse vahekorda.

Teoreem 3 (Fredholmi II teoreem ehk Fredholmi alternatiiv). Võrrand $x = Tx + y$ on iga $y \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil $x = Tx$ on ainult triviaalne lahend. Teisiti öeldes,

$$\text{Im}(I - T) = X \Leftrightarrow \text{Ker}(I - T) = \{0\}$$

(ehk operaator $I - T$ on sürjektiivne parajasti siis, kui ta on injektiivne). Sel juhul on võrrand $x = Tx + y$ iga $y \in X$ korral üheselt lahenduv.

Märkus. Mõnikord sõnastatakse Fredholmi alternatiiv ka järgmisel teoreemi väitega samaväärsel kujul. Esineb kaks teineteist välistavat võimalust:

1) võrrand $x = Tx + y$ on lahenduv iga vabaliikme $y \in X$ korral, sel juhul on lahend ka ühene;

2) homogeenisel võrrandil $x = Tx$ on olemas mittetriviaalne lahend.

Fredholmi alternatiivi tõestamisel kasutame alljärgnevat abitulemust.

Lemma. Leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\text{Ker}((I-T)^n) = \text{Ker}((I-T)^{n+1})$.

Tõestus. Kasutame jällegi tähistust $A = I-T$. Olgu $K_n = \text{Ker } A^n$, $n=1,2,\dots$. Me teame, et $\dim K_n < \infty$ iga n korral. On selge, et $K_n \subset K_{n+1}$, sest kui $A^n x = 0$, siis ka $A^{n+1} x = A(A^n x) = 0$. Oletame vastuväiteliselt, et $K_n \neq K_{n+1}$, $n=1,2,\dots$. Siis lemma peaaegu perpendikulaarist võimaldab iga n korral leida niisuguse elemendi $x_n \in K_{n+1}$, et $\|x_n\| = 1$ ja $\varrho(x_n, K_n) \geq \frac{1}{2}$. Operaatori T kompaktsuse tõttu saab jadast Tx_n eraldada koonduva osajada. Vastuolu saamiseks veendume, et jada Tx_n ükski osajada ei saa olla fundamentaalne ning seega ei saa ka koonduda. Anname ette suvaliselt indeksid $m > n$ ja vaatleme avaldist

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \|x_m - (Ax_m + x_n - Ax_n)\|.$$

Kuna $x_n \in K_{n+1}$ ja $x_m \in K_{m+1}$, siis

$$A^m(Ax_m + x_n - Ax_n) = A^{m+1}x_m + A^m x_n - A^{m+1}x_n = 0$$

ehk $Ax_m + x_n - Ax_n \in K_m$, mistõttu $\|Tx_m - Tx_n\| \geq \varrho(x_m, K_m) \geq \frac{1}{2}$.

Lemma on tõestatud.

Teoreemi 3 tõestus. 1) Eeldame, et $\text{Im}(I-T) = X$. Kasutades eelmise lemma tähistusi, oletame vastuväiteliselt, et $K_1 \neq \{0\}$. Siis leidub $x_1 \in K_1$, $x_1 \neq 0$. Kuna $\text{Im } A = X$,

siis leidub x_2 nii, et $x_1 = Ax_2$. Seejuures $x_2 \in K_2 \setminus K_1$, sest $A^2x_2 = Ax_1 = 0$, aga $Ax_2 = x_1 \neq 0$. Kuna $\text{Im } A = X$, siis leidub x_3 nii, et $x_2 = Ax_3$, kusjuures $x_3 \in K_3 \setminus K_2$. Nii jätkates saab leida jada x_n nii, et $x_{n+1} \in K_{n+1} \setminus K_n$. Järelikult $K_n \neq K_{n+1}$ iga n korral, mis lemma tõttu on võimatu.

2) Kui $\text{Ker}(I-T) = \{0\}$, siis teoreemi 2 järelduse põhjal $\text{Im}(I-T^*) = X^*$. Sellest järeldub käesoleva teoreemi juba tõestatud osa 1) alusel, et $\text{Ker}(I-T^*) = \{0\}$, millest omakorda saame teoreemi 1 järelduse abil, et $\text{Im}(I-T) = X$.

3) Eeldame, et võrrand (1) on lahenduv iga $y \in X$ korral, s. t. $\text{Im}(I-T) = X$. Siis, nagu juba on tõestatud, $\text{Ker}(I-T) = \{0\}$. Seega on operaator $I-T$ bijektiivne, mistõttu eksisteerib pöördoperaator $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ ning võrrandil $x = Tx + y$ on iga $y \in X$ korral ainus lahend $x = (I-T)^{-1}y$.

Teoreem on tõestatud.

Enne järgmise teoreemi juurde asumist tõestame paar üldisema iseloomuga abitulemust.

Öeldakse, et vektorruumi X elemendid x_1, \dots, x_n ja ruumil X määratud lineaarsed funktsionaalid f_1, \dots, f_n moodustavad biortogonaalse süsteemi, kui

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Biortogonaalsesse süsteemi kuuluvad elemendid x_1, \dots, x_n , samuti funktsionaalid f_1, \dots, f_n on lineaarselt sõltumatud, sest kui näiteks $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, siis funktsionaali f_i rakendamine annab võrduse $\lambda_i = 0$, mis tähendab elementide x_1, \dots, x_n lineaarset sõltumatust. Analoogiliselt näidatakse funktsionaalide f_1, \dots, f_n lineaarset sõl-

tumatust.

Lemma. Kui vektorruumil X määratud lineaarsed funktsionaalid f_1, \dots, f_n on lineaarselt sõltumatud, siis leiduvad elemendid x_1, \dots, x_n nii, et moodustuks biortogonaalne süsteem.

Tõestus. Kui $n=1$, siis $f_1 \neq 0$ ning leidub $y \in X$ nii, et $f_1(y) \neq 0$. Nüüd tarvitseb võtta $x_1 = \frac{y}{f_1(y)}$ ja saamegi $f_1(x_1) = 1$. Jätkates induktsiooniga, eeldame, et iga $n-1$, kus $n \geq 2$, lineaarselt sõltumatu funktsionaali korral saab leida $n-1$ elementi nii, et moodustuks biortogonaalne süsteem. Olgu antud lineaarselt sõltumatud funktsionaalid f_1, \dots, f_n . Fikseerime suvaliselt $k \in \{1, \dots, n\}$

ja konstrueerime elemendi x_k nii, et $f_j(x_k) = \delta_{jk}$, $j=1, \dots, n$. Leiame kõigepealt $x'_1, \dots, x'_{k-1}, x'_{k+1}, \dots, x'_n$ nii, et $f_i(x'_j) = \delta_{ij}$, $i, j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.

Vaatleme suvalise $x \in X$ korral elementi $y = x -$

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j(x) x'_j. \text{ Siis iga } i=1, \dots, n, i \neq k, \text{ korral } f_i(y) =$$

$$= f_i(x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j(x) f_i(x'_j) = f_i(x) - f_i(x) = 0. \text{ Samal ajal pole}$$

võimalik, et $f_k(y) = 0$ iga $x \in X$ korral, sest siis oleks

$$f_k(x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j(x) f_k(x'_j) = 0 \text{ iga } x \in X \text{ korral, s.t.}$$

$$f_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_k(x'_j) f_j = 0, \text{ mis räägiks vastu funktsionaalide}$$

f_1, \dots, f_n lineaarsele sõltumatusele. Järelikult leidub $x' \in X$

$$\text{nii, et } y' = x' - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j(x') x'_j \text{ korral } f_k(y') \neq 0.$$

Võttes nüüd $x_k = \frac{y'}{f_k(y')}$, saame $f_k(x_k) = 1$. Ühtlasi on

meil eespool näidatud, et $f_i(y') = 0$, seega ka $f_i(x_\kappa) = 0$, kui $i = 1, \dots, \kappa-1, \kappa+1, \dots, n$.

Lemma on tõestatud.

Lemma. Kui normeeritud ruumi X elemendid x_1, \dots, x_n on lineaarselt sõltumatud, siis leiduvad funktsionaalid $f_1, \dots, f_n \in X^*$ nii, et moodustuks biortogonaalne süsteem.

Tõestus. Kasutades loomulikku sisestust $X \subset X^{**}$, vaatleme elemente x_1, \dots, x_n lineaarsete funktsionaalidena ruumil X^* . Eelmise lemma põhjal leiduvad ruumi X^* elemendid f_1, \dots, f_n nii, et nad koos elementidega x_1, \dots, x_n moodustavad biortogonaalse süsteemi.

Jätkame kompaktselt lineaarse operaatoriga võrrandite lahendamise omaduste uurimist. Me oleme juba tõestanud, et $\dim \text{Ker}(I-T) < \infty$. Et T^* on kompaktneline lineaarne operaator, siis ka $\dim \text{Ker}(I-T^*) < \infty$.

Teoreem 4 (Fredholmi III teoreem). Võrranditel $x = Tx$ ja $f = T^*f$ on võrdne arv lineaarselt sõltumatuid lahendeid, teisiti öeldes

$$\dim \text{Ker}(I-T) = \dim \text{Ker}(I-T^*).$$

Tõestus. Tähistame $n = \dim \text{Ker}(I-T)$ ja $n^* = \dim \text{Ker}(I-T^*)$. Olgu x_1, \dots, x_n baas ruumis $\text{Ker}(I-T)$ ja f_1, \dots, f_{n^*} baas ruumis $\text{Ker}(I-T^*)$. Valime äsjatõestatud lemmadele toetudes $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ ja $z_1, \dots, z_{n^*} \in X^*$ nii, et $\varphi_i(z_j) = \delta_{ij}$ ja $f_i(z_j) = \delta_{ij}$.

1) Tõestame, et $n^* \leq n$. Oletame vastuväiteliselt, et $n < n^*$. Vaatleme operaatorit $S: X \rightarrow X$

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{n^*} \varphi_i(x) z_i, \quad x \in X.$$

Operaator S on lineaarne ja kompaktneline, sest esimene liidetav T on kompaktneline lineaarne operaator ning teine liidetav on lõplikumõõtmeline pidev lineaarne operaator, kuna tema väärtused kuuluvad ruumi $\mathcal{L}(\{z_1, \dots, z_{n^*}\})$ ja

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) z_i \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\| \|z_i\| \right) \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Näitame, et $\text{Ker}(I-S) = \{0\}$. Olgu $x \in \text{Ker}(I-S)$, s.t.

$(I-S)x = 0$. Siis $j = 1, \dots, n$ korral

$$\begin{aligned} 0 &= f_j((I-S)x) = f_j((I-T)x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) f_j(z_i) = \\ &= ((I-T^*)f_j)(x) - \varphi_j(x) = 0 - \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Kuna $\varphi_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, siis $Sx = Tx$ ja seega ka $(I-T)x = 0$ ehk $x \in \text{Ker}(I-T)$. Järelikult esitub x kujul

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i. \text{ Seejuures } \varphi_j(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_j(x_i) = \xi_j = 0, \\ j = 1, \dots, n, \text{ tõttu } x = 0.$$

Kuna $\text{Ker}(I-S) = \{0\}$, siis teoreemi 3 põhjal

$\text{Im}(I-S) = X$. Seega leidub $z \in X$ nii, et $z_{n^*} = (I-S)z$. Järelikult

$$\begin{aligned} 1 &= f_{n^*}(z_{n^*}) = f_{n^*}(z - Sz) = \\ &= f_{n^*}((I-T)z - \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) z_i) = \\ &= ((I-T^*)f_{n^*})(z) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) f_{n^*}(z_i) = 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

mis on võimatu.

2) Tähistame veel $n^{**} = \dim \text{Ker}(I-T^{**})$ (ka $n^{**} < \infty$, sest T^{**} on kompaktne). Tõestuse esimese osa põhjal võime öelda, et $n^{**} \leq n^* \leq n$. Teiselt poolt, vaadeldes ruumi X oma teise kaasruumi X^{**} alamruumina ja arvestades, et $(I-T^{**})x = (I-T)x$ iga $x \in X$ korral, näeme, et $\text{Ker}(I-T) \subset \text{Ker}(I-T^{**})$, mistõttu $n \leq n^{**}$. Järelikult $n = n^{**}$ ja $n^* = n$.

Teoreem on tõestatud.

§ 5. Schauderi püsipunkti printsiip ja tema kasutamine Peano teoreemi tõestamisel

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning $K \subset X$ mittetühi hulk.

Definitsioon. Operaatorit $A: K \rightarrow Y$ nimetatakse kompaktsiks, kui ta hulga K iga tõkestatud osahulga teisendab suhteliselt kompaktsiks hulgaks ruumis Y .

Märgime, et operaator A ei tarvitse olla lineaarne.

Definitsioon. Kompaktset operaatorit, mis on pidev, nimetatakse täielikult pidevaks operaatoriks.

Me teame, et kompaktneline lineaarne operaator on pidev, mittelineaarsete operaatorite korral see nii ei tarvitse olla.

Teoreem (Schauderi püsipunkti printsiip). Kui K on tõkestatud kinnine kumer hulk Banachi ruumis ja operaator $A: K \rightarrow K$ on täielikult pidev, siis operaatoril A leidub püsipunkt hulgas K .

Teoreemi me ei tõesta, sest tema tõestamiseks vajaminevad ideed väljuvad funktsionaalanalüüsi traditsioonilise põhikursuse raamidest.

Schauderi püsipunkti printsiip üldistab temast märksa varem tõestatud Bohl-Brouweri püsipunkti printsiipi: kui K on tõkestatud kinnine kumer hulk ruumis \mathbb{R}^n ja operaator $A: K \rightarrow K$ on pidev, siis operaatoril A leidub püsipunkt hulgas K .

Schauderi püsipunkti printsiibi rakendusena tõestame diferentsiaalvõrrandite teooria kursusest tuntud Peano teoreemi: kui piirkonnas (s.t. lahtises sidusas hulgas) $D \subset \mathbb{R}^2$ määratud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis algtingimusega ülesandel

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on iga $(x_0, y_0) \in D$ korral vähemalt üks lahend.

Vaadeldav algtingimusega ülesanne on samaväärne integraalvõrrandiga.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (1)$$

Olgu $R \subset D$ niisugune kinnine ristkülik, mille keskpunkt on (x_0, y_0) , ja olgu $|f(x, y)| \leq M, (x, y) \in R$. Valime $d > 0$ nii, et kui $|x - x_0| \leq d$ ja $|y - y_0| \leq Md$, siis $(x, y) \in R$. Banachi ruumi $Y = C[x_0 - d, x_0 + d]$ kinnine kera $B = \overline{B}(y_0, Md) = \{y \in Y: \max_{|x - x_0| \leq d} |y(x) - y_0| \leq Md\}$ on tõkestatud kinnine kumer

hulk. Vaatleme võrdusega

$$(g(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad y \in B,$$

määratud operaatorit g . Cauchy teoreemi tõestamisel (vt. Banachi püsipunkti printsiibi rakendusi) nägime, et $g: B \rightarrow B$. Peano teoreemi tõestamiseks piisab näidata, et g on täielikult pidev, sest g püsipunkt y on võrrandi (1) ning seega ka algtingimusega ülesande lahend.

Operaatori g kompaktsuse näitamiseks veendume Arzelà-Ascoli teoreemile tuginedes, et hulk $g(B)$ on suhteliselt kompaktne. Kui $y \in B$ ja $|x - x_0| \leq d$, siis

$$|(g(y))(x)| \leq |y_0| + \left| \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \right| \leq |y_0| + Md,$$

sest integraalialuses avaldises $(s, y(s)) \in R$. Hulk $g(B)$ on seega ühtlaselt tõkestatud. Kui $y \in B$ ja $x_1, x_2 \in [x_0 - d, x_0 + d]$, siis

$$|(g(y))(x_1) - (g(y))(x_2)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(s, y(s))| ds \right| \leq M |x_1 - x_2|,$$

millest järeldub $g(B)$ võrdpidevus.

Tõestame, et operaator g on pidev. Eeldame, et $y_n \rightarrow y$, $y_n, y \in B$. Kuna $\max_{|x - x_0| \leq d} |y_n(x) - y(x)| \xrightarrow{n} 0$, siis funktsioonid

siis on f ühtlase pidevuse tõttu ristkülikus R saame
mistahes $\varepsilon > 0$ korral leida N nii, et kui $n > N$, siis

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| < \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - d, x_0 + d].$$

Seega

$$\|g(y_n) - g(y)\| = \max_{|x - x_0| \leq d} \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))) ds \right| < \varepsilon d,$$

kui $n > N$. Järelikult $g(y_n) \rightarrow g(y)$.

VIII Hilberti ruumid

Hilberti ruumid moodustavad Banachi ruumide ühe küllalt olulise spetsiifiliste mõistete ja meetoditega alamklassi. Hilberti ruume eraldab Banachi ruumide seast välja asjaolu, et seal on defineeritud elementide skalaarkorrutis.

§ 1. Skalaarkorrutisega ruumid

Definitsioon. Vektorruumi H üle korpuse \mathbb{K} nimetatakse skalaarkorrutisega ruumiks, kui igale elemendipaarile $x, y \in H$ on vastavusse seatud kindel arv $(x, y) \in \mathbb{K}$, mida nimetatakse elementide x ja y skalaarkorrutiseks, nii, et on täidetud järgmised tingimused:

$$1^\circ (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$2^\circ (x, y) = \overline{(y, x)},$$

$$3^\circ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad (\text{aditiivsus l. teguri suhtes}),$$

$$4^\circ (\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad (\text{homogeensus l. teguri suhtes}).$$

Kui H on vektorruum üle \mathbb{R} , siis definitsiooni põhjal $(x, y) \in \mathbb{R}$ ning tingimus 2° omandab seetõttu kuju $(x, y) = (y, x)$. Reaalne skalaarkorrutis on niisiis kommutatiivne.

Kui ülaltoodud definitsioonis aksioom 1° on kujul $(x, x) \geq 0$, siis räägitakse poolskalaarkorrutisest (x, y) ja poolskalaarkorrutisega ruumist H .

On selge, et (pool-)skalaarkorrutisega ruumi vektoralamruum on samuti (pool-)skalaarkorrutisega ruum.

Selle paragrahvi ülejäänud osas tuletame aksioomidest $1^\circ - 4^\circ$ lähtudes rea skalaarkorrutise omadusi. Märgime, et kõik need omadused on olemas ka poolskalaarkorrutisel.

Lause 1. Skalaarkorrutisel on järgmised omadused:

- 1) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ (aditiivsus
2. teguri suhtes),
- 2) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)$ (kaashomogeensus
2. teguri suhtes),
- 3) $(x, 0) = (0, y) = 0 \quad \forall x, y \in H$,
- 4) $(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2 (x, y)$.

Tõestuseks on järgmised võrduste ahelad:

- 1) $(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x) + (y_2, x)} =$
 $= \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2);$
- 2) $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda} (x, y);$
- 3) $(x, 0) = (x, 0x) = 0 (x, x) = 0,$
 $(0, y) = (\bar{y}, 0) = \bar{0} = 0;$
- 4) $(\lambda x, \lambda y) = \lambda (x, \lambda y) = \lambda \bar{\lambda} (x, y) = |\lambda|^2 (x, y).$

Lause 2 (Cauchy-Bunjakovski-Schwarz'i võrratus). Kehtib võrratus

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \quad \forall x, y \in H.$$

Tõestus tugineb tuntud tõsiasiule, et kui $a^2 + 2b\lambda + c \geq 0$ (kus $a, b, c \in \mathbb{R}$) iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral, siis $b^2 - ac \leq 0$.

Olgu $x, y \in H$. Kui $(x, y) = 0$, siis Cauchy-Bunjakovski-Schwarz'i võrratus kehtib poolskalaarkorrutise omaduse 1^o tõttu. Eeldame, et $(x, y) \neq 0$, ja vaatleme ruutfunktsiooni

$$\varphi(\lambda) = (x + \lambda(x, y)y, x + \lambda(x, y)y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Poolskalaarkorrutise omaduse 1^o tõttu $\varphi(\lambda) \geq 0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral. Et

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (x, x) + \lambda(x, y)(y, x) + \lambda \overline{(x, y)}(x, y) + \\ &+ \lambda^2 |(x, y)|^2 (y, y) = \\ &= \lambda^2 |(x, y)|^2 (y, y) + 2\lambda |(x, y)|^2 + (x, x) \geq 0, \end{aligned}$$

siis

$$|(\alpha, \beta)|^4 - |(\alpha, \alpha)|^2(\beta, \beta) \leq 0.$$

Kuna $|(\alpha, \beta)|^2 > 0$, siis viimane võrratus on samaväärne võrratusega

$$|(\alpha, \beta)|^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

mis aga omakorda on samaväärne Cauchy-Bunjakovski-Schwartzi võrratusega.

Lause on tõestatud.

Ülesanne. Tõestada, et skalaarkorrutisega ruumis Cauchy-Bunjakovski-Schwarz'i võrratuses leiab aset võrdus parajasti siis, kui skalaarkorrutises esinevad elemendid on lineaarselt sõltuvad.

§ 2. Skalaarkorrutisega ruum kui normeeritud ruum, Hilberti ruumi mõiste

Olgu H skalaarkorrutisega ruum.

Teoreem. Skalaarkorrutisega ruum H on normeeritud ruum normiga $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in H$.

Tõestus. Normi aksioomide täidetust põhjendavad järgmised samaväärsused, võrdused ja võrratused:

$$1^\circ \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x, x)} = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2^\circ \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)};$$

$$3^\circ \|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + \|y\|^2} = \\ &= \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Tõestusest on näha, et poolskalaarkorrutisega ruumis kujutab $\sqrt{(x,x)}$ endast poolnormi.

Märgime, et teoreemi tõestamise käigus tuletasime me muuhulgas võrduse

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \quad \forall x,y \in H.$$

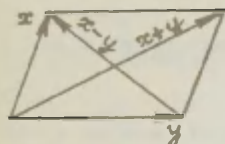
Teoreemi arvestades võib Cauchy-Bunjakovski-Schwarz'i võrratuse kirjutada kujul

$$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x,y \in H.$$

Lause. Kehtib rööpküliku võrdus

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x,y \in H.$$

Tõestuseks on võrduste ahel



$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \\ &+ \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 = \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Rööpküliku võrdus üldistab tasandi geometriast tuntud fakti, mille kohaselt rööpküliku diagonaalide pikkuste ruutude summa võrdub selle rööpküliku kõigi külgede pikkuste ruutude summaga.

Ülesanne *. Näidata, et kui normeeritud ruumis X kehtib rööpküliku võrdus, siis saab selles ruumis defineerida skalaarkorrutise võrdusega

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x,y \in X,$$

kui X on reaalne ruum, või võrdusega

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2), \quad x,y \in X,$$

kui X on kompleksne ruum. Veenduda, et ruumi X esialgne norm ja tema abil saadud skalaarkorrutis on seotud võrdusega $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$.

Lause ja ülesande väidete kokkuvõttena võib öelda, et normeeritud ruum osutub skalaarkorrutisega ruumiks parajasti siis, kui temas kehtib rööpküliku võrdus.

Lause (skalaarkorrutise pidevus). Kui $x_n \rightarrow x$ ja $y_n \rightarrow y$, siis $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Tõestus. Kuna

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| = \\ &= |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow \\ &\rightarrow \|x\| \cdot 0 + 0 \cdot \|y\| = 0, \end{aligned}$$

siis $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Et skalaarkorrutisega ruum on normeeritud ruum, siis saab rääkida tema täielikkusest.

Definitsioon. Täielikku skalaarkorrutisega ruumi nimetatakse Hilberti ruumiks.

Niisiis moodustavad Hilberti ruumid Banachi ruumide alamklassi. Eespool nägime, et Banachi ruumi vektoralamruum on täielik parajasti siis, kui ta on kinnine. Seega kehtib

Lause. Hilberti ruumi vektoralamruum on täielik parajasti siis, kui ta on kinnine.

Märgime, et paljud autorid, rääkides Hilberti ruumi alamruumist, mõtlevad selle all kinnist vektoralamruumi.

Eespool vaadeldud konkreetsetest ruumidest on Hilberti ruumid üksnes alljärgnevad:

$\mathbb{K}^n = \ell_2^n$ skalaarkorrutisega

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \ell_2^n,$$

l_2 skalaarkorrutisega

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = (\xi_k), \quad y = (\eta_k) \in l_2,$$

$L_2(a, b)$ skalaarkorrutisega

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x = x(t), y = y(t) \in L_2(a, b),$$

$W_2^n(a, b)$ skalaarkorrutisega

$$(x, y) = \sum_{k=0}^n \int_a^b x^{(k)}(t) \overline{y^{(k)}(t)} dt, \quad x, y \in W_2^n(a, b).$$

Reaalsetes ruumides omandavad need skalaarkorrutised vastavalt kuju $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$, $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$, $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$ ja $(x, y) = \sum_{k=0}^n \int_a^b x^{(k)}(t) y^{(k)}(t) dt$. Juhime lu-
geja tähelepanu asjaolule, et kõigis neis ruumides skalaar-
korrutise poolt defineeritud norm $\sqrt{(\cdot, \cdot)}$ ühtib ruumi esi-
algse normiga.

Alates järgmisest paragrahvist arendame Hilberti ruumide teooriat, pööramata seejuures tähelepanu asjaolule, et nii mõnigi selle teooria väide kehtib ka ilma ruumi täielikkuse eelduseta, s.t. skalaarkorrutisega ruumis. Mis puutub aga teooria tähtsamatesse väidetesse, siis nende tõestamisel on ruumi täielikkus juba oluline.

§ 3. Ortogonaalsus ja ortogonaalne täiend. Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida

Olgu H Hilberti ruum, $x, y \in H$ ja $A, B \subset H$.

Üeldakse, et elemendid x ja y on ortogonaalsed, ning kirjutatakse $x \perp y$, kui $(x, y) = 0$. Üeldakse, et element x on ortogonaalne hulgaga A , ja kirjutatakse $x \perp A$, kui $x \perp y$ iga $y \in A$ korral. Üeldakse, et hulgad A ja B on ortogonaalsed, ning kirjutatakse $A \perp B$, kui $x \perp y$ iga $x \in A$ ja $y \in B$ korral.

Skalaarkorrutise aksioomidest on selge, et

$$1) x \perp x \Leftrightarrow x = 0,$$

$$2) x \perp y \Leftrightarrow y \perp x,$$

$$3) x \perp \{y_1, \dots, y_n\} \Rightarrow x \perp (y_1 + \dots + y_n),$$

$$4) x \perp y \Rightarrow x \perp \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Skalaarkorrutise pidevusest järeldub lihtsalt, et

$$5) x \perp y_n, n = 1, 2, \dots, y_n \rightarrow y \Rightarrow x \perp y.$$

Lause 1. Kui $x \perp A$, siis $x \perp \overline{\mathcal{L}(A)}$.

Tõestus. Kui $x \perp A$, siis $x \perp \mathcal{L}(A)$, sest tingimustest 3) ja 4) järeldub, et x on ortogonaalne hulga A elementide mistahes lineaarse kombinatsiooniga. Vaatleme suvalist elementi $y \in \overline{\mathcal{L}(A)}$ ja valime $y_n \in \mathcal{L}(A)$ nii, et $y_n \rightarrow y$. Arvestades ortogonaalsusi $x \perp y_n$, saame tingimuse 5) kohaselt, et $x \perp y$. Seega $x \perp \overline{\mathcal{L}(A)}$.

Järeldus. Kui x on ortogonaalne ruumi H põhihulgaga, siis $x = 0$.

Tõestus. Olgu A ruumi H põhihulk, s.t. $\overline{\mathcal{L}(A)} = H$. Kui $x \perp A$, siis $x \perp H$. Et aga $x \in H$, siis $x \perp x$, s.t. $x = 0$.

Definitsioon. Hulga A ortogonaalseks täiendiks A^\perp nimetatakse kõigi hulga A ortogonaalsete elementide hulka, s.t.

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow x \perp A.$$

Järeldus. Kehtib võrdus $A^\perp = \overline{\mathcal{L}(A)}^\perp$.

Tõestuseks märgime, et ilmselt kehtib lause 1 väitele vastupidine väide. Seega

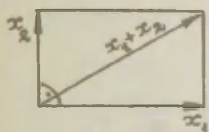
$$x \perp A \Leftrightarrow x \perp \overline{\mathcal{L}(A)}.$$

Lause 2. Ortogonaalne täiend A^\perp on kinnine alamruum.

Tõestus. Kuna $0 \perp A$, siis $0 \in A^\perp$ ja $A^\perp \neq \emptyset$.

Tingimustest 3) ja 4) järeldub, et A^\perp on kinnine liitmine ja arvuga korrutamise suhtes, ning tingimusest 5), et A^\perp sisaldab oma koondvate jadade piirelemendid, s.t. A^\perp on kinnine.

Olgu x_1, \dots, x_n paarikaupa ortogonaalsed elemendid,



s.t. $x_j \perp x_k$, kui $j \neq k$. Siis

kehtib Pythagorase teoreemi üldistav võrdus

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{j,k=1}^n (x_j, x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k, x_k) = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

Järgmine tulemus kujutab endast samuti Pythagorase teoreemi üldistust.

Teoreem. Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub Hilberti ruumis H parajasti siis, kui $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$. Seejuures kehtib võrdus

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2. \quad (1)$$

Tõestus. Eeldame, et rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub. Siis

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 &= \left\| \lim_n \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \left(\lim_n \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \right)^2 = \\ &= \lim_n \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

Seega $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$ ning võrdus (1) kehtib.

Eeldame, et $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime arvu N nii, et kui $n > N$ ja $p = 1, 2, \dots$, siis

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Seega mistahes $n > N$ ja $p = 1, 2, \dots$ korral

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2$$

ehk

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon,$$

millest ruumi H täielikkuse tõttu tuleneb rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koonduvus.

Teoreem on tõestatud.

§ 4. Parima lähendi olemasolu kinnises alamruumis

Meenutame, et elemendi $x \in H$ kaugus alamruumist $L \subset H$ defineeritakse võrdusega

$$\varrho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Teoreem. Olgu L Hilberti ruumi H kinnine alamruum ja $x \in H$. Siis leidub $y \in L$ nii, et $\|x - y\| = \varrho(x, L)$.

Definitsioon. Elementi y nimetatakse elemendi x parimaks lähendiks alamruumis L .

Teoreemi tõestus. Tähistame $d = \varrho(x, L)$. Infimumi mõiste kohaselt leidub jada $y_n \in L$ nii, et $\|x - y_n\| \rightarrow d$. Näitame, et y_n on Cauchy jada. Rööpküliku võrduse põhjal

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = \\ &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2. \end{aligned}$$

Arvestades, et

$$\|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 = 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \geq 4d^2,$$

sest $\frac{y_n + y_m}{2} \in L$, saame

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\leq 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4d^2 \xrightarrow{n, m} \\ &\rightarrow 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$

Ruumi H täielikkuse tõttu jada y_n koondub. Olgu $y = \lim y_n$. Kuna L on kinnine, siis $y \in L$. Seejuures

$$\|x - y\| = \|x - \lim_n y_n\| = \lim_n \|x - y_n\| = d.$$

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne. Näidata, et parim lähend on üheselt määratud.

Soovitus: kasutada rööpküliku võrdust.

Märkus. Teoreem parima lähendi olemasolust ja ülesandes toodud väide tema ühesusest jäävad kehtima, kusjuures ei muutu ka tõestused, kui kinnine alamruum asendada suvalise kinnise kumera hulgaga.

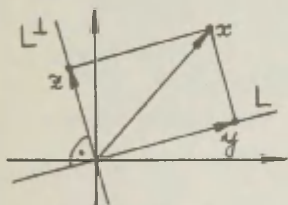
§ 5. Teoreem projektsioonidest

Teoreem projektsioonidest on Hilberti ruumide teooria üks põhitulemusi.

Teoreem (projektsioonide teoreem). Kui L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum, siis iga element $x \in H$ esitub ühesel viisil summana

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp. \quad (1)$$

$H = \mathbb{R}^2$



Tõestus. Valime vabalt $x \in H$.

Näitame kõigepealt esituse (1) olemasolu. Olgu $y \in L$ elementi x parim lähend. Tähistame $z = x - y$. Siis $x = y + z$ ning piisab näidata, et $z \in L^\perp$, s.t. $(z, u) = 0$ iga $u \in L$

korral. Kuna $(z, 0) = 0$, siis eeldame, et $u \in L \setminus \{0\}$. Et uurida skalaarkorrutist (z, u) , vaatleme suvalise $\lambda \in \mathbb{K}$ korral avaldist

$$\begin{aligned} \|z - \lambda u\|^2 &= \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(z, \lambda u) + |\lambda|^2 \|u\|^2 = \\ &= \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda}(z, u) + |\lambda|^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\|z - \lambda u\|^2 &= \|x - y - \lambda u\|^2 = \|x - (y + \lambda u)\|^2 \geq \\ &\geq \|x - y\|^2 = \|z\|^2,\end{aligned}$$

sest $y + \lambda u \in L$. Järelikult

$$|\lambda|^2 \|u\|^2 \geq 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} (z, u).$$

Püüame valida λ nii, et $\bar{\lambda} (z, u) = |\lambda|^2 \|u\|^2$. Meile sobib

$\lambda = (z, u) / \|u\|^2$, sest siis $(z, u) = \lambda \|u\|^2$ ja $\bar{\lambda} (z, u) =$
 $= \bar{\lambda} \lambda \|u\|^2 = |\lambda|^2 \|u\|^2$. Nii valitud λ korral

$$|\lambda|^2 \|u\|^2 \geq 2 |\lambda|^2 \|u\|^2$$

ehk $\lambda = 0$, mistõttu $(z, u) = \lambda \|u\|^2 = 0$.

Näitame lõpuks esituse (1) ühesust. Oletame, et võrdusele (1) lisaks kehtib võrdus $x = y' + z'$, kus $y' \in L$ ja $z' \in L^\perp$. Kuna

$$0 = x - x = (y - y') + (z - z'),$$

siis $y - y' = z' - z = w$. Et aga $w = y - y' \in L$ ja $w = z' - z \in L^\perp$, siis $w \perp w$, s.t. $w = 0$. Seega $y' = y$ ja $z' = z$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum, siis elemendi $x \in H$ parim lähend alamruumis L on üheselt määratud.

Põhjenduseks märgime, et kui elemendil $x \in H$ oleks lisaks parimale lähendile $y \in L$ olemas veel parim lähend $y' \in L$, siis $x = y' + (x - y')$, kus $y' \in L$ ja teoreemi tõestuse põhjal $x - y' \in L^\perp$, ning elemendi x esitus (1) ei oleks enam ühene.

Definitsioon. Elementi y esituses (1) nimetatakse elemendi x ortogonaalseks projektsiooniks alamruumile L , elementi z aga elemendi x ortogonaalseks projektsiooniks alamruumi L ortogonaalsele täiendile L^\perp .

Definitsioon. Olgu X vektorruum ning Y ja Z tema alamruumid. Kui iga element $x \in X$ esitub ühesel viisil summana

$$x = y + z, \quad y \in Y, \quad z \in Z,$$

siis öeldakse, et ruum X on alamruumide Y ja Z otsesumma.

Definitsioon. Olgu H Hilberti ruum ning L ja M tema kinnised alamruumid. Kui iga element $x \in H$ esitub kujul

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in M, \quad (2)$$

ning $L \perp M$, siis öeldakse, et ruum H on alamruumide L ja M ortogonaalsumma, ning kirjutatakse $H = L \oplus M$.

Lause. Hilberti ruumi alamruumide ortogonaalsumma on ühtlasi nende otsesumma.

Töestuseks tuleb näidata esituse (2) ühesust. Seda tehakse aga täpselt nii nagu esituse (1) puhul (vt. teoreemi töestuse lõpuosa).

Ortogonaalsumma mõistet kasutades võib projektsioonide teoreemi sõnastada ka järgmiselt: kui L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum, siis $H = L \oplus L^\perp$.

Ülesanne (ortogonaalsumma ühesus). Näidata, et kui $H = L \oplus M$ ja $H = L \oplus M'$, siis $M' = M$.

Lause. Mistahes osahulga $A \subset H$ korral $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

Töestus. Kui L on ruumi H kinnine alamruum, siis liitmise kommutatiivsuse tõttu $H = L \oplus L^\perp = L^\perp \oplus L$. Kuna samal ajal $H = L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp$, siis ortogonaalsumma ühesuse tõttu $(L^\perp)^\perp = L$. Eespool me tõestasime, et $A^\perp = \overline{\mathcal{L}(A)}^\perp$. Seepärast $(A^\perp)^\perp = (\overline{\mathcal{L}(A)}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

§ 6. Pideva lineaarse funktsionaali

üldkuju Hilberti ruumis

Käesolevas paragrahvis tõestame F. Riesz'i teoreemi pideva lineaarse funktsionaali üldkujust. See teoreem on projektsioonide teoreemi kõrval Hilberti ruumide teooria teine põhitulemus.

Olgu H Hilberti ruum. Valime vabalt elemendi $y \in H$ ja vaatleme funktsionaali $f: H \rightarrow \mathbb{K}$, mis defineeritakse seosega

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H.$$

Skalaarkorrutise lineaarsusest esimese teguri järgi järeldub funktsionaali f lineaarsus. Funktsionaal f on ka tõkestatud, sest

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| = \|y\| \|x\| \quad \forall x \in H.$$

Seega $f \in H^*$ ja $\|f\| \leq \|y\|$. Kuna $\|y\|^2 = (y, y) = f(y) \leq \|f\| \|y\|$, siis $\|y\| \leq \|f\|$. Järelikult $\|f\| = \|y\|$.

Teoreem (F. Riesz'i teoreem). Iga pideva lineaarse funktsionaali $f \in H^*$ korral leidub parajasti üks element $y \in H$ nii, et

$$f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H.$$

Seejuures $\|f\| = \|y\|$.

Tõestus. Teoreemi viimane väide on meil juba tõestatud. Näitame elemendi y olemasolu. Olgu $N = \text{Ker } f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Eelnevast teame, et N on ruumi H kinnine alamruum. Kui $N = H$, siis $f(x) = 0$ iga $x \in H$ korral ning tarvitseb võtta $y = 0$. Olgu $N \neq H$. Kuna $H = N \oplus N^\perp \neq N$, siis $N^\perp \neq \{0\}$. Valime vabalt $y_0 \in N^\perp \setminus \{0\}$.

Paneme tähele, et $y_0 \notin N$, sest vastasel korral saaksime $y_0 \in N^\perp$ tõttu $y_0 \perp y_0$ ehk $y_0 = 0$. Järelikult $f(y_0) \neq 0$. Mistahes elemendi $x \in H$ korral

$$f(x) = f(x) \frac{f(y_0)}{f(y_0)} = f\left(\frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right)$$

ehk

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right) = 0.$$

Seega

$$x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in N$$

ning sisalduvuse $y_0 \in N^\perp$ tõttu

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0, y_0\right) = 0.$$

Sellest saame

$$(x, y_0) = \left(\frac{f(x)}{f(y_0)} y_0, y_0\right) = f(x) \frac{\|y_0\|^2}{f(y_0)},$$

millest omakorda

$$f(x) = \frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2} (x, y_0) = \left(x, \frac{\overline{f(y_0)} y_0}{\|y_0\|^2}\right).$$

Siit on näha, et elemendiks y sobib

$$y = \frac{\overline{f(y_0)} y_0}{\|y_0\|^2}.$$

Näitame elemendi y ühesust. Kui veel $f(x) = (x, y')$ iga $x \in H$ korral, siis $(x, y') = (x, y)$ ehk $(x, y' - y) = 0$ iga $x \in H$ korral. Kuid viimane on võimalik vaid siis, kui

$$y' = y$$

Teoreem on tõestatud.

Rieszi teoreemist saab Hilberti ruumide juhul lihtsalt järeldada Hahn-Banachi teoreemi. Näitame seda.

Olgu L ruumi H alamruum ja $f \in L^*$. Me võime eeldada, et L on kinnine, sest kui L ei ole kinnine, siis

saab funktsionaali f üheselt jätkata kinnisele alamruumile \bar{L} nii, et tema norm ei muutu. Kinnise (ja seetõttu täieliku) alamruumi L korral leidub Riesz'i teoreemi põhjal $y \in L$ nii, et $f(x) = (x, y)$, $x \in L$, kusjuures $\|y\| = \|f\|$. Defineerime funktsionaali $F \in H^*$ seosega $F(x) = (x, y)$, $x \in H$. Funktsionaal F on funktsionaali f jätk ja $\|F\| = \|y\| = \|f\|$.

Märgime, et Hilberti ruumide juhul ei ole Hahn-Banachi teoreem kaugeltki nii oluline tulemus kui normeeritud ruumide korral.

Paragrahvi alguses nägime, et iga $y \in H$ korral määrab seos $f(x) = (x, y)$, $x \in H$, pideva lineaarse funktsionaali $f \in H^*$. Vaatleme operaatorit $J: H \rightarrow H^*$, mis defineeritakse võrdusega $Jy = f$ ehk

$$(Jy)(x) = (x, y), \quad x \in H.$$

Operaator J on nn. kaaslineaarne, sest

$$(J(y_1 + y_2))(x) = (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = (Jy_1)(x) + (Jy_2)(x)$$

ehk

$$J(y_1 + y_2) = Jy_1 + Jy_2 \quad (\text{aditiivsus})$$

ning

$$(J(\lambda y))(x) = (x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y) = \bar{\lambda}(Jy)(x)$$

ehk

$$J(\lambda y) = \bar{\lambda} Jy \quad (\text{kaashomogeensus}).$$

Reaalse ruumi H juhul on J lineaarne. Riesz'i teoreem väidab, et operaator J on bijektiivne (igal funktsionaalil $f \in H^*$ leidub parajasti üks originaal $y \in H$) ja isomeetriline ($\|Jy\| = \|y\|$). Operaatorit J nimetatakse kaanoniliseks isomorfismiks Hilberti ruumi ja tema kaasruumi vahel. Operaator $J^{-1}: H^* \rightarrow H$ on samuti kaaslineaarne (juhul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lineaarne) ja isomeetriline.

Järeldus 1. Elemendi $x \in H$ norm avaldub kujul

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |(x, y)|.$$

Tõestus. Hahn-Banaohi teoreemi ühe järelduse põhjal saame

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|y\| \leq 1} |(\mathcal{J}y)(x)| = \sup_{\|y\| \leq 1} |(x, y)|.$$

Järeldus 2. Operaatori $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ (kus H_1 ja H_2 on Hilberti ruumid) norm avaldub kujul

$$\|A\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax, y)|.$$

Tõestus. Arvestades järeldust 1, saame

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax, y)|.$$

§ 7. Hilberti ruumi kaasruum ja refleksiivsus

Kuna Hilberti ruum on normeeritud ruum, siis tema kaasruum on Banachi ruum.

Teoreem. Hilberti ruumi kaasruum on Hilberti ruum.

Tõestus. Olgu H Hilberti ruum. Näitame, et ruumi H^* norm on määratud mingi skalaarkorrutise poolt. Olgu $\mathcal{J}: H \rightarrow H^*$ kanooniline isomorfism. Defineerime ruumis H^* skalaarkorrutise võrdusega

$$(f, g) = (\mathcal{J}^{-1}g, \mathcal{J}^{-1}f), \quad f, g \in H^*.$$

Võib vahetult kontrollida, et skalaarkorrutise aksioomid kehtivad; näiteks

$$\begin{aligned} (\lambda f, g) &= (\mathcal{J}^{-1}g, \mathcal{J}^{-1}(\lambda f)) = (\mathcal{J}^{-1}g, \overline{\lambda} \mathcal{J}^{-1}f) = \\ &= \lambda (\mathcal{J}^{-1}g, \mathcal{J}^{-1}f) = \lambda (f, g) \end{aligned}$$

Seejuures

$$\sqrt{(f, f)} = \sqrt{(\mathcal{J}^{-1}f, \mathcal{J}^{-1}f)} = \|\mathcal{J}^{-1}f\| = \|f\|,$$

s.t. skalaarkorrutis määrab ruumi H^* esialgse normi.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Hilberti ruum on refleksiivne.

Tõestuseks tuleb näidata, et loomulik sisestus

$\pi: H \rightarrow H^{**}$ on sürjektiivne, s.t. iga $F \in H^{**}$ korral leidub $x \in H$ nii, et $\pi x = F$ ehk $F_x = F$, kus $F_x \in H^{**}$ on defineeritud võrdusega

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in H^*.$$

Valime vabalt $F \in H^{**} = (H^*)^*$. Rieszi teoreemi põhjal leidub $g \in H^*$ nii, et

$$F(f) = (f, g) \quad \forall f \in H^*.$$

Tähistades $J^{-1}g = x$, saame

$$(f, g) = (J^{-1}g, J^{-1}f) = (x, J^{-1}f) = (J(J^{-1}f))(x) = f(x).$$

Seega

$$F(f) = f(x) \quad \forall f \in H^*,$$

s.t. $F = F_x$.

Teoreem on tõestatud.

§ 8. Ortonormeeritud süsteemid

Hilberti ruumi elementide süsteemi (x_α) nimetatakse ortogonaalseks, kui tema elemendid on paarikaupa ortogonaalsed, s.t. $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, kui $\alpha \neq \beta$. Süsteemi (x_α) nimetatakse ortonormeerituks, kui ta on ortogonaalne ning $\|x_\alpha\| = 1$ iga α korral.

Arvestades, et $\|x_\alpha\| = 1$ parajasti siis, kui $(x_\alpha, x_\alpha) = \|x_\alpha\|^2 = 1$, võime öelda, et süsteemi (x_α) nimetatakse ortonormeerituks, kui

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{kui } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Vaatleme ortonormeeritud süsteemide näiteid.

Näide 1. Ruumis \mathbb{K}^n on $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ ortonormeeritud süsteem.

Näide 2. Ruumis ℓ_2 on $e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots$ ortonormeeritud süsteem.

Näide 3. Ruumis $L_2(-\pi, \pi)$ on trigonomeetiline süsteem

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$$

ortogonaalne, sest

$$(1, \cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = 0,$$

$$(1, \sin nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = 0,$$

$$(\cos nt, \cos mt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = 0, \text{ kui } n \neq m,$$

$$(\sin nt, \sin mt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = 0, \text{ kui } n \neq m,$$

$$(\cos nt, \sin mt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt \, dt = 0.$$

Seejuures

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi \neq 1,$$

$$\|\sin nt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \, dt = \pi,$$

$$\|\cos nt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \pi,$$

mistõttu vaadeldav süsteem ei ole ortonormeeritud. Ortonormeeritud on aga ruumis $L_2(-\pi, \pi)$ süsteem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Näide 4. Kompleksses ruumis $L_2(0, 1)$ on

$$e^{i2\pi nt}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ortonormeeritud süsteem, sest kui $n \neq m$, siis

$$\int_0^1 e^{i2\pi nt} \overline{e^{i2\pi mt}} \, dt = \int_0^1 e^{i2\pi(n-m)t} \, dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\cos 2\pi(n-m)t + i \sin 2\pi(n-m)t) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi(n-m)} (\sin 2\pi(n-m)t - i \cos 2\pi(n-m)t) \Big|_{t=0}^1 = 0
\end{aligned}$$

ning

$$\int_0^1 e^{i2\pi nt} \overline{e^{i2\pi nt}} dt = \int_0^1 e^0 dt = 1.$$

Ülesanne. Näidata, et süsteem $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ ei ole ortogonaalne ruumis $L_2(a, b)$.

Lause. Ortogonaalne süsteem, mis ei sisalda nullelementi, on lineaarselt sõltumatu.

Tõestus. Valime ortogonaalsest süsteemist vabalt lõpliku hulga elemente x_1, \dots, x_n . Kui

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0,$$

siis

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, x_j \right) = \lambda_j (x_j, x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

millest $(x_j, x_j) \neq 0$ tõttu $\lambda_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Lause on tõestatud.

Järeldus. Ortonormeeritud süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Teoreem (ortogonaliseerimisteoreem). Olgu $x_i, i \in I$, kus $I = \{1, \dots, n\}$ või $I = \mathbb{N}$, lineaarselt sõltumatu süsteem Hilberti ruumis. Siis leidub selline ortonormeeritud süsteem $e_i, i \in I$, et

$$\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_i\}) = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_i\}) \quad \forall i \in I.$$

Tõestus. Olgu $e_1 = x_1 / \|x_1\|$. Siis $\mathcal{L}(\{e_1\}) = \mathcal{L}(\{x_1\})$. Teeme induktsioonieelduse, et on leitud ortonormeeritud süsteem e_1, \dots, e_{i-1} nii, et $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_{i-1}\}) = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_{i-1}\})$. Püüame leida elementi y_i kujul

$$y_i = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + x_i$$

niis, et $y_i \perp e_j$, $j=1, \dots, i-1$. Ortogonaalsuse nõuded $(y_i, e_j) = 0$ on samaväärsed võrdustega $\lambda_j = -(x_i, e_j)$, $j=1, \dots, i-1$. Seega

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} (x_i, e_j) e_j. \quad (1)$$

Element $y_i \neq 0$, sest vaetasel juhul $x_i \in \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_{i-1}\}) = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_{i-1}\})$, mis on võimatu. Olgu $e_i = y_i / \|y_i\|$. Siis e_1, \dots, e_i on ortonormeeritud süsteem.

Kuna $e_j \in \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_{i-1}\})$, $j=1, \dots, i-1$, siis võrduse (1) põhjal on e_i elementide x_1, \dots, x_i lineaarne kombinatsioon. Seega $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_i\}) \subset \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_i\})$. Võrduse (1) põhjal on x_i elementide e_1, \dots, e_i lineaarne kombinatsioon, seega $\mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_i\}) \subset \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_i\})$. Järelikult $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_i\}) = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_i\})$.

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi tõestuses esitatud üleminekut linearselt sõltumatult süsteemilt ortonormeeritud süsteemile nimetatakse Graa-Schmidti ortogonaliseerimisprotseseiks.

§ 9. Täielikud ortonormeeritud süsteemid

Olgu H Hilberti ruum ja $(x_\alpha) = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, (kui A on indeksite hulk) tema elementide süsteem. Selle süsteemi kõigi elementide hulka $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ tähistame lühidalt $\{x_\alpha\}$.

Definitsioon. Süsteemi (x_α) nimetatakse täielikuks, kui tema elemendid moodustavad põhihulga ruumis H , s.t.

$$\mathcal{L}(\{x_\alpha\}) = H.$$

Lause. Süsteem (x_α) on täielik parajasti siis, kui sellest, et $x \perp x_\alpha$ iga α korral, järeldub võrdus $x=0$.

Tõestus. Kui (x_α) on täielik ja $x \perp x_\alpha$ iga α korral, siis x on ortogonaalne ruumi H põhihulgaga. Järelikult $x=0$.

Beldame nüüd, et kui $x \perp x_\alpha$ iga α korral, siis $x = 0$. Olgu $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})}$. Projektsioonide teoreemi põhjal $H = L \oplus L^\perp$. Kui oletada, et $L \neq H$, siis $L^\perp \neq \{0\}$. Seega leiduks $x \neq 0$ nii, et $x \perp L$. Kuid sel juhul $x \perp x_\alpha$ iga α korral, mistõttu $x = 0$. Saadud vastuolu tõestab, et $L = H$, s.t. süsteem (x_α) on täielik.

Lause on tõestatud.

Saab tõestada, et kõik eelmise paragrahvi näidetes vaadeldud ortonormeeritud süsteemid on täielikud. Mendes näidetes kogetut üldistab

Teoreem. Igas separaablis Hilberti ruumis on olemas ülimalt loenduv täielik ortonormeeritud süsteem.

Tõestus. Olgu H separaabel Hilberti ruum ja $\{x_\kappa : \kappa \in \mathbb{N}\}$ ruumi H kõikjal tihe osahulk (s.t. $\overline{\{x_\kappa : \kappa \in \mathbb{N}\}} = H$). Viskame hulgast $\{x_\kappa : \kappa \in \mathbb{N}\}$ välja nullelemendi ning kõik elemendid x_κ , mis avalduvad talle eelnevate elementide $x_1, \dots, x_{\kappa-1}$ lineaarse kombinatsioonina. Järelejäänud süsteem $x_\kappa, \kappa \in I$, kus $I \subset \mathbb{N}$, on lineaarselt sõltumatu ning $\{x_\kappa : \kappa \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(\{x_\kappa : \kappa \in I\})$. Järelikult $\overline{\mathcal{L}(\{x_\kappa : \kappa \in I\})} = H$. Rakendades süsteemile $x_\kappa, \kappa \in I$, ortogonaliseerimisteoreemi, leiame ortonormeeritud süsteemi $e_\kappa, \kappa \in I$, nii, et $\mathcal{L}(\{e_\kappa : \kappa \in I\}) = \mathcal{L}(\{x_\kappa : \kappa \in I\})$, mistõttu ka $\overline{\mathcal{L}(\{e_\kappa : \kappa \in I\})} = H$, s.t. (e_κ) on täielik.

Teoreem on tõestatud.

§ 10. Fourier' read

Olgu H Hilberti ruum ja $(x_\kappa) = (x_\kappa)_{\kappa=1}^\infty$ loenduv ortonormeeritud süsteem ruumis H .

Definitsioon. Elemendi $x \in H$ Fourier' kordajateks

(süsteemi (x_k) järgi) nimetatakse arve $c_k = (x, x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, ning elemendi x Fourier' reaks (süsteemi (x_k) järgi) nimetatakse rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k.$$

Alljärgnevas veendume, et Fourier' rida koondub alati. Uurime ka, millal elemendi x Fourier' rida koondub selleks elemendiks x . Tulemuste sõnastamisel kasutame definitsioonis toodud tähistusi.

Lemma. Olgu $S_n = \sum_{k=1}^n c_k x_k$ (Fourier' rea osasumma). Siis $(x - S_n) \perp S_n$ ja

$$\|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Tõestus. Et S_n on elementide $x_k, k = 1, \dots, n$, lineaarne kombinatsioon, siis ortogonaalsuseks $(x - S_n) \perp S_n$ piisab näidata, et

$$x - S_n \perp x_k, k = 1, \dots, n.$$

Kuid

$$\begin{aligned} (x - S_n, x_k) &= (x, x_k) - (S_n, x_k) = \\ &= c_k - \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i, x_k \right) = c_k - c_k = 0. \end{aligned}$$

Kuna $x = (x - S_n) + S_n$, $(x - S_n) \perp S_n$ ja S_n on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega summa, siis

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|c_k x_k\|^2 = \\ &= \|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

Lemma on tõestatud.

Järeldus 1 (Besseli võrratus). Kehtib võrratus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Põhjenduseks märgime, et lemma põhjal $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2$ iga n korral, millest järeldub rea $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ koonduvus ja Besseli võrratus.

Järeldus 2. Ortonormeeritud süsteemi (x_k) puhul

$$x_k \xrightarrow{w} 0.$$

Tõestus. Nõrk koondumine $x_k \xrightarrow{w} 0$ tähendab, et

$f(x_k) \rightarrow 0$ iga $f \in H^*$ korral. See on aga Rieszi teoreemi põhjal samaväärne koondumisega $(x_k, x) \rightarrow 0$ iga $x \in H$ korral. Kuid koondumine $(x_k, x) = \bar{c}_k \rightarrow 0$ järeldub rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \text{ koondumisest.}$$

Teoreem 1. Iga elemendi $x \in H$ Fourier' rida koondub

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = y,$$

kus y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile

$$\mathcal{L}(\{x_k\}).$$

Tõestus. Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ on paarikaupa ortogonaalsete

liikmetega rida ja $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, siis see rida

koondub. Tähistame tema summa $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ ning näitame,

et y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile

$$L = \mathcal{L}(\{x_k\}).$$

Kuna $y \in L$ ja $x = y + (x - y)$, siis projektsioonide teoreemi arvestades piisab näidata ortogonaalsust

$(x - y) \perp L$. Selleks piisab veenduda, et $(x - y) \perp x_k$

iga k korral. Kuid kasutades skalaarkorrutise pidevust, saame

$$(x - y, x_k) = (x, x_k) - \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j, x_k \right) =$$

$$= c_k - \sum_{j=1}^{\infty} c_j (x_j, x_k) = c_k - c_k = 0.$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreem 2. Elemendi x Fourier' rida koondub elemendiks

x parajasti siis, kui selle elemendi korral kehtib nn.

Parsevali võrdus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$$

ehk teisiti väljendades, parajasti siis, kui selle elemendi korral Besseli võrratuses leiab aset võrdus.

Tõestuseks paneme tähele, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x \Leftrightarrow S_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x - S_n\|^2 \rightarrow 0,$$

kuid lemma põhjal

$$\|x - S_n\|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreem 3. Mistahes elemendi $x \in H$ Fourier' rida ortonormeeritud süsteemi (x_k) järgi koondub elemendiks x parajasti siis, kui süsteemi (x_k) on täielik.

Tõestus. Me nägime, et $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = y$, kus y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile $L = \mathcal{L}(\{x_k\})$.

Seetõttu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x$ ehk x ühtib oma projektsiooniga $y \in L$ iga $x \in H$ korral parajasti siis, kui $L = H$, mis tähendab süsteemi (x_k) täielikkust.

Teoreem on tõestatud.

Näide. Trigonomeetriline süsteem $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},$

$\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots$ on ortonormeeritud ruumis

$L_2(-\pi, \pi)$. Elemendi $x \in L_2(-\pi, \pi)$ Fourier'kordajad selle süsteemi järgi on

$$c_1 = \left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt,$$

$$c_2 = \left(x, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos t dt,$$

$$c_3 = \left(x, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t dt,$$

..... ;

tema Fourier' rida on

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos t dt \right) \cos t + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t dt \right) \sin t + \dots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \end{aligned}$$

$$\text{kus } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt.$$

Vaadeldava trigonomeetrilise süsteemi täielikkus tõestatakse trigonomeetriliste ridade teoorias. Seega iga elemendi $x \in L_2(-\pi, \pi)$ Fourier' rida koondub ruumis $L_2(-\pi, \pi)$ selleks elemendiks x .

§ 11. Separaablite Hilberti ruumide samastamine ruumiga l_2

Me nägime, et kui $(x_k) = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ on ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H , siis iga elemendi $x \in H$ Fourier' kordajad $c_k = (x, x_k)$ rahuldavad Besseli võrratust $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$, mistõttu $(c_k) \in l_2$. Olukorda täpsustab

Teoreem (Riesz-Fischeriteoreem). Olgu (x_k) ortonormeeritud süsteem ruumis H ja arvud $a_k, k=1, 2, \dots$, sellised, et $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ (s.t., $(a_k) \in l_2$). Siis leidub parajasti üks element $x \in H$ nii, et $a_k = (x, x_k)$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|x\|^2$ (ning seega $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = x$).

Tõestus. Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida ja $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, siis see rida koondub. Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = x$. Et seejuures $(x, x_k) = (\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, x_k) = a_k$, siis eelmise paragrahvi teoreemi 2

põhjal kehtib Parsevali võrdus $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|x\|^2$.

Veendume elemendi x ühesuses. Kui leidub veel element $y \in H$ nii, et $(y, x_k) = a_k$ iga $k = 1, 2, \dots$ korral ning $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|y\|^2$, siis sama teoreemi 2 põhjal $y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, mistõttu $y = x$.

Teoreem on tõestatud.

Definitsioon. Olgu H ja H' Hilberti ruumid üle \mathbb{K} . Lineaarset sürjektsiooni $\varphi: H \rightarrow H'$, mis säilitab skalaarkorrutise, s.t. $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ iga $x, y \in H$ korral, nimetatakse (Hilberti ruumide) isomorfismiks. Ruume H ja H' nimetatakse isomorfseteks, kui leidub isomorfism $\varphi: H \rightarrow H'$.

Märgime, et isomorfism φ on tegelikult bijektsioon, kuna sellest, et $\varphi x = 0$ ehk $(\varphi x, \varphi x) = (x, x) = 0$, järeldub, et $x = 0$.

Teoreem. Iga separaabel lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum üle \mathbb{K} on isomorfe ruumiga ℓ_2 üle \mathbb{K} .

Tõestus. Olgu H separaabel lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum üle \mathbb{K} . Tänu ruumi H separaablusele leidub temas ülimalt loenduv täielik ortonormeeritud süsteem, mis aga ei saa olla lõplik, sest H on lõpmatumõõtmeline. Olgu see süsteem (x_k) . Seega iga $x \in H$ korral $\|x\|^2 =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, kus $c_k = (x, x_k)$, ning me võime defineerida operaatori $\varphi: H \rightarrow \ell_2$ võrdusega $\varphi x = (c_k)$. On

kerge vahetult kontrollida, et φ on lineaarne. Riesz-Fischeri teoreemi kohaselt on φ ka bijektiivne. Lõpuks, kui $x, y \in H$ ja $c_k = (x, x_k)$, $d_k = (y, x_k)$, siis

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} d_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k = (\varphi x, \varphi y),$$

mistõttu φ säilitab skalaarkorrutise.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kõik separaablid lõpmatumõõtmelised reaalsed Hilberti ruumid on omavahel isomorfsed ning kõik separaablid lõpmatumõõtmelised kompleksed Hilberti ruumid on omavahel isomorfsed.

Niisiis on reaalne ruum $L_2(a, b)$ isomorfsne reaalse ruumiga l_2 ja kompleksne ruum $L_2(a, b)$ isomorfsne kompleksse ruumiga l_2 .

Banachi ruumides tegutsevate lineaarsete operaatorite kohta käivad tulemused on olulised ka Hilberti ruumide juhu-
 hul. Käesolevas peatükis käsitleme aga mõningaid küsimusi,
 mis on iseloomulikud just Hilberti ruumides tegutsevatele
 operaatoritele.

§ 1. Ortoprojektor kinnisele alamruumile

Kõigepealt olgu X vektorruum.

Definitsioon. Lineaarset operaatorit $P: X \rightarrow X$ nime-
 tatakse projektoriks, kui $P^2 = P$.

Olgu $P: X \rightarrow X$ projektor. Eelnevast teame, et $\text{Im } P$
 on ruumi X alamruum. Näitame, et

$$\text{Im } P = \{x \in X : Px = x\}. \quad (1)$$

Ühelt poolt on selge, et kui $Px = x$, siis $x \in \text{Im } P$. Tei-
 selt poolt, kui $x \in \text{Im } P$, siis leidub $y \in X$ nii, et $Py =$
 $= x$. Kuid siis $Px = P^2y = Py = x$.

Lause 1. Olgu Y ruumi X alamruum. Lineaarne operaator
 $P: X \rightarrow X$ on projektor ja $\text{Im } P = Y$ parajasti siis, kui
 $\text{Im } P \subset Y$ ja $Py = y$ iga $y \in Y$ korral.

Tõestus. Võrduse (1) tõttu on tarvilikkus ilmne. Pii-
 savuse näitamiseks vaatleme suvalist elementi $x \in X$. Kuna
 $\text{Im } P \subset Y$, siis $Px = y \in Y$. Seega $P^2x = Py = y = Px$, mis-
 tõttu $P^2 = P$. Võrdusest (1) saame nüüd, et $Y \subset \text{Im } P$, mis-
 tõttu $\text{Im } P = Y$.

Lause 2. Kui X on normeeritud ruum ja projektor
 $P: X \rightarrow X$ on pidev, siis $\text{Im } P$ on kinnine ja $P \neq 0$ korral
 $\|P\| \geq 1$.

Tõestus. Vaatleme jada $x_n \in \text{Im } P$, kus $x_n \rightarrow x$. Operaator

tori P pidevuse tõttu $Px_n \rightarrow Px$. Kuna $Px_n = x_n$, siis ka $x_n \rightarrow Px$, mistõttu $Px = x$. Seega $x \in \text{Im } P$ ning sellega on $\text{Im } P$ kinnisus tõestatud.

Kuna $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$, siis $\|P\| \notin (0, 1)$, sest vastasel juhul oleks $\|P\|^2 < \|P\|$.

Lause on tõestatud.

Olgu H Hilberti ruum ja L tema kinnine alamruum. Tuginedes teoreemile projektsioonidest, saame iga elemendi $x \in H$ avaldada üheselt kujul $x = y + z$, kus $y \in L$ ja $z \in L^\perp$. Defineerime operaatori $P_L: H \rightarrow H$ seosega $P_L x = y$. Tuleta meelde, et elementi y nimetatakse elemendi x ortogonaalseks projektsiooniks alamruumile L .

Definitsioon. Operaatorit P_L , mis Hilberti ruumi H igale elemendile seab vastavusse tema ortogonaalse projektsiooni kinnisele alamruumile L , nimetatakse ortoprojektoreks (alamruumile L).

Teoreem. Ortoprojektoril $P_L: H \rightarrow H$ on järgmised omadused:

- 1) P_L on projektor ja $\text{Im } P_L = L$;
- 2) kui $L \neq \{0\}$, siis $\|P_L\| = 1$;
- 3) P_L on sümmeetriline, s. t.

$$(P_L x, y) = (x, P_L y) \quad \forall x, y \in H.$$

Tõestus. 1) Näitame, et P_L on lineaarne operaator. Kui $x_1 = y_1 + z_1$ ja $x_2 = y_2 + z_2$, kus $y_1, y_2 \in L$ ja $z_1, z_2 \in L^\perp$, siis $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$, kus $y_1 + y_2 \in L$ ja $z_1 + z_2 \in L^\perp$, mistõttu $P_L(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = P_L x_1 + P_L x_2$. Analoogiliselt näidatakse, et P_L on homogeenne.

Veendume nüüd, kasutades lauset 1, et P_L on projektor ja $\text{Im } P_L = L$. Operaatori P_L definitsiooni põhjal $\text{Im } P_L \subset L$. Vaatleme suvalist elementi $y \in L$. Kuna $y = y + 0$, kusjuures $y \in L$ ja $0 \in L^\perp$, siis $P_L y = y$.

2) Et mistahes $x \in H$ korral $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$, siis $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, millest $\|y\| \leq \|x\|$ ehk $\|P_L x\| \leq \|x\|$. Seega $P_L \in \mathcal{L}(H, H)$ ja $\|P_L\| \leq 1$. Kui $L \neq \{0\}$, a.t.

$\text{Im } P_L \neq \{0\}$, siis $P_L \neq 0$ ehk $\|P_L\| \neq 0$ ning lause 2 põhjal $\|P_L\| \geq 1$. Järelikult $\|P_L\| = 1$.

3) Kui $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, kus $x_1, y_1 \in L$ ja $x_2, y_2 \in L^\perp$, siis

$$(P_L x, y) = (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1)$$

ning samuti

$$(x, P_L y) = (x_1 + x_2, y_1) = (x_1, y_1).$$

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne 1. Tõestada, et kui $P^2 = P$ ja $\|P\| = 1$, siis P on ortoprojektor (ruumi H kinnisele alamruumile $\text{Im } P$).

Ülesanne 2. Tõestada, et kui lineaarse operaatori $P: H \rightarrow H$ puhul $P^2 = P$ ja $(Px, y) = (x, Py)$ iga $x, y \in H$ korral, siis P on ortoprojektor.

Kinnise alamruumi L ortogonaalne täiend L^\perp on samuti kinnine alamruum, mistõttu saame rääkida ka ortoprojektorist P_{L^\perp} (alamruumile L^\perp). On selge, et $P_L + P_{L^\perp} = I$. Operaatorit P_{L^\perp} nimetatakse projektori P_L täiendprojektoriks.

§ 2. Kaasoperaator Hilberti ruumis

Olgu H Hilberti ruum ja $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Valime vabalt $y \in H$ ning vaatleme funktsionaali $x \rightarrow (Ax, y)$, $x \in H$. Operaatori A linearsus ja skalaarkorrutise linearsus esimese teguri suhtes tagavad selle funktsionaali linearsuse; ta on ka tõkestatud, sest $|(Ax, y)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq (\|A\| \|x\|) \|y\|$. Niisiis on meil tegemist pideva lineaarse funktsionaaliga. Me teame, et Riesz'i teoreemi põhjal võib selle funktsionaali realiseerida parajasti ühe elemendi $z \in H$ abil kujul $x \rightarrow (x, z)$, $x \in H$.

Seega leidub parajasti üks element $z \in H$ nii, et

$$(Ax, y) = (x, z) \quad \forall x \in H.$$

Operaatorit $A^*: H \rightarrow H$, mis elemendile $y \in H$ seab vaadeldud viisil vastavusse elemendi $z \in H$, nimetatakse operaatori A kaasoperaatoriks (Hilberti ruumide mõttes).

Niisiis on kaasoperaator A^* defineeritud mistahes $A \in \mathfrak{L}(H, H)$ korral, kusjuures

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x, y \in H.$$

Antud operaatorile kaasoperaatori leidmine tugineb enamasti järgmisele lihtsale tulemusele.

Lause 1. Kui operaatorid $A \in \mathfrak{L}(H, H)$ ja $B: H \rightarrow H$ rahuldavad tingimust

$$(Ax, y) = (x, By) \quad \forall x, y \in H,$$

siis $B = A^*$.

Tõestus. Kuna $(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, By)$, siis $(x, A^*y - By) = 0$ iga $x, y \in H$ korral, s.t. $(A^*y - By) \perp H$ iga $y \in H$ korral. Seega $A^*y - By = 0, y \in H$, ehk $A^* = B$.

Meenutame, et normeeritud ruumide mõttes oli kaasoperaator $A' \in \mathfrak{L}(H^*, H^*)$ (tähistust A' kasutame ainult käesolevas paragrahvis) defineeritud seosega

$$\mathfrak{f}(Ax) = (A'\mathfrak{f})(x), \quad \mathfrak{f} \in H^*, x \in H.$$

Selgitame, kuidas on omavahel seotud operaatorid A^* ja A' . Kasutame seejuures kanoonilist isomorfismi $\mathfrak{J}: H \rightarrow H^*$, mis teatavasti defineeritakse võrdusega

$$(\mathfrak{J}y)(x) = (x, y), \quad x, y \in H.$$

Kuna

$$\begin{aligned} (A'\mathfrak{J}y)(x) &= (\mathfrak{J}y)(Ax) = (Ax, y) = (x, A^*y) = \\ &= (\mathfrak{J}A^*y)(x) \quad \forall x, y \in H, \end{aligned}$$

siis

$$A'Jy = JA^*y \quad \forall y \in H$$

ehk $A'J = JA^*$, mida võib kirjutada ka kujul

$$A' = JA^*J^{-1}$$

või

$$A^* = J^{-1}A'J. \quad (1)$$

Lause 2. Kui $A \in \mathcal{L}(H, H)$, siis $A^* \in \mathcal{L}(H, H)$ ja $\|A^*\| = \|A\|$.

Tõestus. Operaator $A^* = J^{-1}A'J$, olles aditiivsete operaatorite korrutis, on ise ka aditiivne. Ta on ka homogeenne, sest

$$\begin{aligned} A^*(\lambda x) &= J^{-1}A'J(\lambda x) = J^{-1}A'(\bar{\lambda}Jx) = J^{-1}(\bar{\lambda}A'Jx) = \\ &= \lambda J^{-1}A'Jx = \lambda A^*x. \end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq 1} \|J^{-1}A'Jx\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A'Jx\| = \sup_{\|Jx\| \leq 1} \|A'Jx\| = \\ &= \|A'\| = \|A\|, \end{aligned}$$

siis $A^* \in \mathcal{L}(H, H)$ ja $\|A^*\| = \|A\|$.

Märkus. Võrduse $\|A^*\| = \|A\|$ võib tõestada ka näiteks järgmiselt:

$$\begin{aligned} \|A^*\| &= \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(A^*x, y)| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(x, Ay)| = \\ &= \sup_{\|y\|, \|x\| \leq 1} |(Ay, x)| = \|A\|. \end{aligned}$$

Lause 3. Kui $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

- 1) $A^{**} = A$;
- 2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- 3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;
- 4) $(AB)^* = B^*A^*$;
- 5) kui eksisteerib $A^{-1}: H \rightarrow H$, siis $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$;
- 6) $\|AA^*\| = \|A\|^2$

Tõestus. Kui $x, y \in H$, siis

$$(A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$$

ning lause 1 põhjal kehtib võrdus 1). Võrdused 2) - 4) saadakse vahetult seose (1) ja operaatorite A', B' vaatavate omaduste abil. Omaduse 5) tõetamisaeka eeldame, et eksisteerib $A^{-1}: H \rightarrow H$. Siis Banachi teoreemi põhjal

$A^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$ ning lause 2 tõttu $(A^{-1})^* \in \mathcal{L}(H, H)$. Seejuures

$$(A^{-1})^* = J^{-1}(A^{-1})'J = J^{-1}(A')^{-1}(J^{-1})^{-1} = (J^{-1}A'J)^{-1} = (A^*)^{-1}.$$

Lõpuks, kui $x \in H$, siis

$$\|A^*x\|^2 = (A^*x, A^*x) = (AA^*x, x) \leq \|AA^*\| \|x\|^2,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \|A^*\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A^*x\|^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|AA^*\| \|x\|^2 = \\ &= \|AA^*\| \leq \|A\| \|A^*\| = \|A\|^2. \end{aligned}$$

Seega kehtib ka võrdus 6).

Lause on tõestatud.

Näide 1. Meenutame, et Hilberti ruumis \mathbb{K}^n on skalaarkorrutis defineeritud võrdusega $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i$, kus

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ja $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Vaatleme operaatorit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Me teame, et A on maatrikeoperaator, s.t. $A = (a_{ij})$ ehk, täpsemalt,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j,$$

kus $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j = 1, \dots, n$. Kuna

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) \bar{\eta}_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{\eta}_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} \eta_i \right)} = \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\left(\sum_{i=1}^n a_{ji}^* \eta_i \right)} = (x, A^*y), \end{aligned}$$

kui $a_{ji}^* = \bar{a}_{ij}$, siis

$$(A^*y)_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}^* \eta_j,$$

s.t. $A^* = (a_{ji}^*) = (\bar{a}_{ij})$. Seega tuleb maatriksi A^* saamiseks transponeerida maatriks A , minnes seejuures üle ele-

mentide kaaekompleksidele.

Näide 2. Vaatleme Hilberti ruumis $L_2(a, b)$ integraaloperaatorit K tuumaga $\mathcal{K}(t, s)$, s.t.

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Eeldame, et $K \in \mathcal{L}(L_2(a, b), L_2(a, b))$ (see on nii näiteks, kui \mathcal{K} on pidev funktsioon või, üldisemalt, tõkestatud mõõtv funktsioon). Siis

$$\begin{aligned} (Kx, y) &= \int_a^b (Kx)(t) \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s) ds \right) \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b \mathcal{K}(t, s) \overline{y(t)} dt \right) ds = \\ &= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b \overline{\mathcal{K}(t, s)} y(t) dt \right) ds = \\ &= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b \mathcal{K}^*(s, t) y(t) dt \right) ds = (x, K^*y), \end{aligned}$$

kus $\mathcal{K}^*(s, t) = \overline{\mathcal{K}(t, s)}$. Seega K^* on integraaloperaator tuumaga $\mathcal{K}^*(t, s) = \overline{\mathcal{K}(s, t)}$.

Ülesanne. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Analoogiliselt juhuga $A \in \mathcal{L}(H, H)$ defineerida kaasoperaator $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ ning näidata, et tema korral jäävad kehtima selle paragrahvi tulemused.

§ 3. Enesekaassed operaatorid

Olgu H Hilberti ruum.

Definitsioon. Operaatorit $A \in \mathcal{L}(H, H)$ nimetatakse enesekaasseks, kui $A^* = A$.

Eelneva põhjal võime öelda, et operaator $A \in \mathcal{L}(H, H)$ on enesekaasne parajasti siis, kui

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in H.$$

Viimast tingimust rahuldavad lineaarsed operaatorid $A: H \rightarrow H$ nimetatakse sümmeetriliseks operaatoriks.

Operaatori enesekaassuse kindlakstegemisel tuginetakse enamasti järgmisele olulisele tulemusele.

Teoreem (Hellinger-Toeplitzi teoreem). Kui $A: H \rightarrow H$ on sümmeetriline operaator, siis $A \in \mathfrak{L}(H, H)$ ning seega on A enesekaasne operaator.

Tõestuseks piisab näidata, et operaator A on tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et ta seda ei ole. Siis leidub jada $x_n \neq 0$ nii, et $\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \infty$. Võttes $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, saame $\|y_n\| = 1$ ning $\|Ay_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \infty$. Olgu $f_n \in H^*$ funktsionaal, mis määratakse elemendi Ay_n poolt seosega

$$f_n(x) = (x, Ay_n), \quad x \in H.$$

Kuna $\|f_n\| = \|Ay_n\|$, siis $\|f_n\| \rightarrow \infty$. Teiselt poolt, iga $x \in H$ korral

$|f_n(x)| = |(x, Ay_n)| = |(Ax, y_n)| \leq \|Ax\| \|y_n\| = \|Ax\|$, s. t. funktsionaalide jada f_n on punktiviisi tõkestatud. Ühtlase tõkestatuse printsiibi põhjal on siis ka jada $\|f_n\|$ tõkestatud, mis on vastuolus sellega, et $\|f_n\| \rightarrow \infty$.

Teoreem on tõestatud.

Hellinger-Toeplitzi teoreemi abil põhjendatakse

Näide 1. Olgu operaator $A: L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$ defineeritud võrdusega $(Ax)(t) = tx(t)$, $t \in [a, b]$. On selge, et A on lineaarne. Kuna ka

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b (Ax)(t) \overline{y(t)} dt = \int_a^b tx(t) \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_a^b x(t) \overline{ty(t)} dt = (x, Ay), \end{aligned}$$

siis A on enesekaasne operaator.

Pidades silmas eelmises paragrahvis väedeldud kaasope-

raatorite näiteid, saame kohe kaks alljärgnevat näidet enesekaasete operaatorite kohta.

Näide 2. Operaator $A = (a_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ on enesekaasne parajasti siis, kui $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Reaalsete elementidega maatriksi korral tähendab see tingimus maatriksi sümmeetrilisust.

Näide 3. Tuuma \mathcal{K} poolt määratud integraaloperaator $K \in \mathcal{L}(L_2(a, b), L_2(a, b))$ on enesekaasne parajasti siis, kui $\overline{\mathcal{K}(s, t)} = \mathcal{K}(t, s)$, $s, t \in [a, b]$. Reaalsete väärtustega tuuma puhul tähendab see tingimus tuuma sümmeetrilisust.

Tuginedes ortoprojektorite kohta käivatele teadmistele, võime öelda, et on põhjendatud

Näide 4. Hilberti ruumis tegutsev projektor on enesekaasne parajasti siis, kui ta on ortoprojektor.

Kompleksse Hilberti ruumi puhul kasutatakse operaatori enesekaasuse kindlakstegemiseks Hellinger-Toeplitzi teoreemi asemel järgmist sellele teoreemile põhinevat tulemust.

Teoreem. Olgu H kompleksne Hilberti ruum ja $A: H \rightarrow H$ lineaarne operaator. Siis järgmised tingimused on samaväärsed:

- 1) A on enesekaasne,
- 2) $(Ax, x) = (x, Ax) \quad \forall x \in H$,
- 3) $(Ax, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

Tõestus. Tingimused 2) ja 3) on samaväärsed, sest

$$(Ax, x) = (x, Ax) \Leftrightarrow (Ax, x) = \overline{(Ax, x)} \Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}.$$

Implikatsioon $1) \Rightarrow 2)$ on ilmne. Näitame lõpuks, et $2) \Rightarrow 1)$. Paneme tähele, et iga $x, y \in H$ korral (nagu vahetult kontrollida võib)

$$(Ax, y) = \frac{1}{4} ((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy)). \quad (1)$$

Seega eelduse 2) kohaselt

$$\begin{aligned}
 (Ax, y) &= \frac{1}{4}((x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) + \\
 &\quad + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy))) = \\
 &= (x, Ay) \quad \forall x, y \in H.
 \end{aligned}$$

Hellinger-Toeplitzi teoreemi põhjal on operaator A enesekaasne.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem. Enesekaasne operaatori A norm avaldub kujul

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Tõestus. Kui $\|x\|=1$, siis

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\|,$$

mistõttu

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leq \|A\|.$$

Tähistame $\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ ja näitame, et $\|A\| \leq \mu$.

Kui $A=0$, siis see võrratus kehtib triviaalselt. Kui $A \neq 0$, siis

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ Ax \neq 0}} \|Ax\|.$$

Seepärast eeldame alljärgnevas, et $\|x\| \leq 1$ ja $Ax \neq 0$.

Olgu $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Arvestades, et tänu operaatori A enesekaasusele $(Az, z) \in \mathbb{R}$ iga $z \in H$ korral, saame võrdust

(1) kasutades, et

$$\begin{aligned}
 \|Ax\| &= \frac{(Ax, Ax)}{\|Ax\|} = (Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}) = (Ax, y) = \\
 &= \operatorname{Re} (Ax, y) = \frac{1}{4}((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)).
 \end{aligned}$$

Paneme tähele, et kui $z \neq 0$, siis

$$|(Az, z)| = |(A \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|})| \|z\|^2 \leq \mu \|z\|^2, \quad (2)$$

kusjuures see võrratus kehtib triviaalselt ka $z=0$ korral. Võrratust (2) ning rööpküliku võrdust kasutades saame,

et

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leq \frac{1}{4}(|\langle Ax+y, x+y \rangle| + |\langle Ax-y, x-y \rangle|) \leq \\ &\leq \frac{\mu}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{\mu}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \mu,\end{aligned}$$

mistõttu $\|A\| \leq \mu$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Olgu operaatorid $A, B: H \rightarrow H$ lineaarsed. Kui on täidetud üks tingimustest: 1) H on kompleksne ruum, 2) H on reaalne ruum ning A ja B sümmeetrilised operaatorid, siis võrdusest

$$\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle \quad \forall x \in H$$

järeldub, et $A = B$.

Tõestus. Vaatleme lineaarset operaatorit $A - B$. Kuna

$$\langle (A - B)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle - \langle Bx, x \rangle = 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H,$$

siis juhul 1) on operaator $A - B$ enesekaasne. Ta on seda ka juhul 2) kui enesekaassete operaatorite A ja B vahe.

Seega

$$\|A - B\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (A - B)x, x \rangle| = 0,$$

mistõttu $A = B$.

Järeldus 2. Enesekaasne operaatori A norm avaldub ku-

jul

$$\|A\| = \max \{M, -m\},$$

kus $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ ja $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$.

Tõestus. Kuna $-m = -\inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \{-\langle Ax, x \rangle\}$, siis

$$\begin{aligned}\max \{M, -m\} &= \sup_{\|x\|=1} \{\langle Ax, x \rangle, -\langle Ax, x \rangle\} = \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| = \|A\|,\end{aligned}$$

sest $|\langle Ax, x \rangle| = \langle Ax, x \rangle$ või $|\langle Ax, x \rangle| = -\langle Ax, x \rangle$.

Definitsioon. Lineaarset operaatorit $A: H \rightarrow H$ nimetatakse mittenegatiivseks, kui $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ iga $x \in H$ korral.

Kompleksse ruumi H juhul järeldub operaatori A mittenegatiivsusest tema enesekaassus, sest siis $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ iga $x \in H$ korral.

Näide 5. Ortoprojektor on mittenegatiivne enesekaasne operaator.

Järeldus 3. Mittenegatiivse enesekaasne operaatori A norm avaldub kujul

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Põhjenduseks märgime, et tehtud eeldustel

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \geq 0, \text{ mistõttu } -m \leq 0 \text{ ja } \max\{M, -m\} = M.$$

§ 4. Kompaktsete enesekaassete operaatorite omaväärtused ja omavektorid

Olgu X vektorruum üle \mathbb{K} ja $A: X \rightarrow X$ lineaarne operaator. Arvu $\lambda \in \mathbb{K}$ nimetatakse operaatori A omaväärtuseks, kui leidub $x \in X, x \neq 0$, nii, et $Ax = \lambda x$. Elementi x nimetatakse sel juhul operaatori A omaväärtusele λ vastavaks omavektoriks ehk omaelemendiks.

Üldiselt on omaväärtuste olemasolu tõestamine ja nende leidmine raske ülesanne. Vähemalt teoreetiliselt on see lahendatud näiteks maatriksite korral. Nimelt on lineaaralgebrast teada, et $n \times n$ maatriksil A , vaadelduna lineaarse operaatorina ruumis \mathbb{C}^n , on kordsusi arvestades täpselt n omaväärtust: need on karakteristliku võrrandi $\det(A - \lambda I) = 0$ juured. Suhteliselt tervikliku pildi omaväärtustest saab anda Hilberti ruumis tegutseva kompaktse enesekaasne operaatori korral.

Tähistagu alljärgnevas A Hilberti ruumis H tegutsevat operaatorit. Kui $A \in \mathcal{L}(H, H)$, siis $\{x: Ax = \lambda x\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$ on iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral kinnine alamruum ruumis

H. Tähistame seda alamruumi sümboliga H_λ . Kui λ on operaatori A omaväärtus, siis nimetatakse alamruumi H_λ omaväärtusele λ vastavaks omaalamruumiks. On selge, et omaalamruum H_λ koosneb nullelemendist ning kõigist omaväärtusele λ vastavatest omavektoritest. Muuhulgas võib tähele panna, et iga omavektori $x \in H_\lambda$ puhul $\frac{x}{\|x\|} \in H_\lambda$, kusjuures $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$. Seega võiks A omaväärtuse λ defineerida ka tingimusega: leidub $x \in H$, $\|x\| = 1$, nii, et $Ax = \lambda x$.

Kui A on kompaktneline lineaarne operaator ja $\lambda \neq 0$, siis $\frac{A}{\lambda}$ on ka kompaktneline lineaarne operaator ja $H_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(I - \frac{A}{\lambda})$, mistõttu, nagu nägime Fredholmi teoreemide juures, $\dim H_\lambda < \infty$. Järelikult saab ruumis H_λ olla ainult lõplik arv lineaarselt sõltumatuid elemente, seega saab seal olla ka üksnes lõplik arv ortonormeeritud elemente. Sellega oleme tõestanud

Lause 1. Kompaktse lineaarse operaatori nullist erinevale omaväärtusele vastab ainult lõplik arv ortonormeeritud omavektoreid.

Lause 2. Enesekaasse operaatori kõik omaväärtused on reaalsed.

Tõestus. Olgu $Ax = \lambda x$, kus $\|x\| = 1$. Kuna enesekaasse operaatori A korral $(Ax, x) \in \mathbb{R}$, siis $\lambda = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$.

Lause 2 järeldusena märgime, et reaalsete elementidega sümmeetrilise maatriksi omaväärtused on reaalsed.

Lause 3. Enesekaasse operaatori omavektorid, mis vastavad erinevatele omaväärtustele, on ortogonaalsed.

Tõestus. Olgu $Ax = \lambda x$ ja $Ay = \mu y$, kus $\lambda \neq \mu$. Kuna enesekaasse operaatori A korral

$$(\lambda - \mu)(x, y) = \lambda(x, y) - \mu(x, y) = (\lambda x, y) - (x, \mu y) =$$

$$= (Ax, y) - (x, Ay) = 0$$

ja $\lambda - \mu \neq 0$, siis $(x, y) = 0$.

Ülesanne. Olgu X vektorruum ja $A: X \rightarrow X$ lineaarne operaator. Näidata, et kui $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on operaatori A paari-kaupa erinevad omaväärtused (s.t. $\lambda_i \neq \lambda_j$, kui $i \neq j$) ja x_1, \dots, x_n neile vastavad omavektorid, siis x_1, \dots, x_n on lineaarselt sõltumatud.

Lause 4. Kompaktsel enesekaassel operaatoril saab iga $\delta > 0$ korral olla vaid lõplik hulk niisuguseid omaväärtusi λ , mis rahuldavad tingimust $|\lambda| > \delta$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et kompaktsel enesekaassel operaatoril A leiduvad mingi $\delta > 0$ korral omaväärtused λ_n , $n = 1, 2, \dots$, kus $\lambda_n \neq \lambda_m$, kui $n \neq m$, nii, et $|\lambda_n| > \delta$. Olgu $Ax_n = \lambda_n x_n$, kus $\|x_n\| = 1$. Lause 3 tõttu $x_n \perp x_m$, kui $n \neq m$. Kuna jada x_n on tõkestatud ja operaator A kompaktne, siis saab jadast Ax_n eraldada koonduva osajada. Teiselt poolt aga ei saa jada Ax_n ükski osajada koonduda, sest iga $n \neq m$ korral

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax_m\|^2 &= \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = \\ &= \|\lambda_n x_n\|^2 + \|\lambda_m x_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > 2\delta^2 \end{aligned}$$

Saadud vastuolu lõpetab lause tõestuse.

Lause 5. Kompaktse enesekaasse operaatori kõigi omaväärtuste hulk on ülimalt loenduv.

Tõestus. Olgu Λ_0 vaadeldava kompaktselt enesekaasse operaatori kõigi nullist erinevate omaväärtuste hulk. Lause 4 põhjal on hulgal $\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda_0 : |\lambda| > \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \dots$, lõplikud (nende seas võib olla ka tühjasid hulkasid). Kuna ilmselt $\Lambda_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, siis Λ_0 on ülimalt loenduv hulk. Seega kõigi omaväärtuste hulk, mis võib lisaks hulgale Λ_0 sisaldada veel arvu 0, on samuti ülimalt loenduv.

Järgmisest tulemusest selgub, et kompaktses enesekaas-
se operaatori kõigi omaväärtuste hulk, mis on ülimalt loen-
duv, ei ole tühi.

Teoreem. Kompaktsel enesekaas-
sel operaatoril A leidub
niisugune omaväärtus λ , et $|\lambda| = \|A\|$.

Tõestus. Me võime eeldada, et $A \neq 0$, sest kui $A = 0$,
siis $\lambda = 0$ on selle operaatori omaväärtus ning $|\lambda| = \|A\| =$
 $= 0$.

Eespool nägime, et $\|A\| = \max\{M, -m\}$, kus $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$
ja $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Tähistame

$$\lambda = \begin{cases} M, & \text{kui } M \geq -m, \\ m, & \text{kui } M < -m. \end{cases}$$

Siis $\|A\| = |\lambda| > 0$. Jääb näidata, et λ on operaatori A
omaväärtus, s.t. leida $x \neq 0$ nii, et $Ax - \lambda x = 0$.

Supreemumi või infimumi mõiste kohaselt leidub jada x_n
nii, et $\|x_n\| = 1$ ja $(Ax_n, x_n) \rightarrow \lambda$. Näitame kõigepealt, et

$$Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0. \quad (1)$$

Kuna $\lambda, (Ax_n, x_n) \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \|\lambda x_n\|^2 \leq \\ &\leq \|A\|^2 \|x_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \|x_n\|^2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \xrightarrow{n} \\ &\xrightarrow{n} \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0, \end{aligned}$$

mistõttu tingimus (1) kehtib. Jada x_n tõkestatus ja ope-
raatori A kompaktsus lubavad eraldada koonduva osajada

$Ax_n, n \in N', N' \subset N$. Tingimuse (1) kohaselt koondub aga siis ka
jada $\lambda x_n, n \in N'$, seega ka jada $x_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda x_n), n \in N'$. Olgu $x =$
 $= \lim_{n \in N'} x_n$. Paneme tähele, et $x \neq 0$, täpsemalt, $\|x\| = 1$,
sest $\|x_n\| = 1$ iga n korral. Seejuures koondumise (1) tõttu

$$Ax - \lambda x = A\left(\lim_{n \in N'} x_n\right) - \lambda \lim_{n \in N'} x_n =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \in N'} Ax_n - \lim_{n \in N'} \lambda x_n = \\
&= \lim_{n \in N'} (Ax_n - \lambda x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Kompaktsel enesekaassel nullist erineval operaatoril leidub vähemalt üks nullist erinev omaväärtus.

Märgime, et kui λ on operaatori $A \in \mathcal{L}(X, X)$ (kus X on normeeritud ruum) omaväärtus ja $Ax = \lambda x, x \neq 0$, siis $|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ ehk $|\lambda| \leq \|A\|$.

Järelikult saame teoreemist, et $\|A\|$ on kompakitse enesekaasse operaatori A omaväärtuste absoluutväärtuste seas kõige suurem arv, s.t. kehtib

Järeldus 2. Olgu Λ kompakitse enesekaasse operaatori A kõigi omaväärtuste hulk. Siis $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$.

§ 5. Hilbert-Schmidti teoreem

Üheks olulisemaks tulemuseks Hilberti ruumides tegutsevate operaatorite teoorias on alljärgnev

Teoreem (Hilbert-Schmidti teoreem). Kompaktsel enesekaassel operaatoril $A \neq 0$ Hilberti ruumis H leidub ülimalt loenduv ortonormeeritud omavektorite süsteem (x_κ) , $x_\kappa \perp \text{Ker } A$, nii, et iga $x \in H$ esitub kujul

$$x = \sum_{\kappa} c_{\kappa} x_{\kappa} + z, \quad c_{\kappa} = (x, x_{\kappa}), \quad z \in \text{Ker } A. \quad (1)$$

Kui seejuures iga κ korral λ_{κ} on omaväärtus, millele vastab omavektor x_{κ} , siis

$$Ax = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} c_{\kappa} x_{\kappa}, \quad (2)$$

kusjuures loenduva süsteemi (x_{κ}) puhul $\lambda_{\kappa} \rightarrow 0$.

Tõestus. Olgu Λ_0 operaatori A kõigi nullist erinevate omaväärtuste hulk. Me teame, et $\Lambda_0 \neq \emptyset$ ja Λ_0 on ülimalt loenduv, s.t. $\Lambda_0 = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ või $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$.

Me teame ka, et $n_\kappa = \dim H_{\mu_\kappa} < \infty$ iga κ korral. Olgu x_1, \dots, x_{n_1} ruumi H_{μ_1} ortonormeeritud baas (tema saamiseks piisab rakendada Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi suvalisele H_{μ_1} baasile). Tähistame $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}$ ruumi H_{μ_2} ortonormeeritud baasi. Nii jätkates jõuame omavektorite süsteemini (x_κ) , mis on lõplik või loenduv olevalt sellest, kas Λ_0 on lõplik või loenduv hulk. Kuna erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed, siis $H_{\mu_\kappa} \perp H_{\mu_\ell}$, kui $\kappa \neq \ell$. Järelikult on (x_κ) ortonormeeritud süsteem. Seejuures $x_\kappa \perp \text{Ker} A$, sest kui $u \in \text{Ker} A, u \neq 0$, siis $Au = 0u$, s.t. u on omaväärtusele 0 vastav omavektor, ning x_κ ja u on ortogonaalsed kui erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid.

Vaatleme ruumi $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_\kappa\})}$. Kuna L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum, siis on ta ka ise Hilberti ruum, kusjuures (x_κ) on ruumis L täielik ortonormeeritud süsteem. Olgu $x \in H$ suvaline element. Teoreem projektsioonidest väidab, et leidub ühene lahutus

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp.$$

Element $y \in L$ on esitatav lõpliku summana või Fourier' reana kujul

$$y = \sum_{\kappa} (y, x_\kappa) x_\kappa.$$

Seejuures

$$(y, x_\kappa) = (x - z, x_\kappa) = (x, x_\kappa) = c_\kappa,$$

sest $(z, x_\kappa) = 0$ sisalduvuste $z \in L^\perp$ ja $x_\kappa \in L$ tõttu. Võrduse (1) tõestamiseks jääb näidata veel, et $z \in \text{Ker} A$, s.t. $Az = 0$. Kuna $z \in L^\perp$, siis piisab tõestada, et $A|_{L^\perp} = 0$.

Veendume kõigepealt, et $A(L^\perp) \subset L^\perp$. Selleks paneme tähele, et $A(L) \subset L$, kuna mistahes $y = \sum_{\kappa} d_\kappa x_\kappa \in L$ korral $Ay = \sum_{\kappa} d_\kappa A x_\kappa = \sum_{\kappa} d_\kappa \lambda_\kappa x_\kappa \in L$ (kus λ_κ on omaväärtus, millele vastab x_κ). Kui nüüd $u \in L^\perp$, siis $(Au, y) = (u, Ay) = 0$

iga $y \in L$ korral, a. t. $Au \in L^\perp$.

Vaatleme operaatorit $A|_{L^\perp}$ tegutsevana Hilberti ruumis L^\perp . On selge, et operaatori A enesekaassuse ja kompaktsuse tõttu ka operaator $A|_{L^\perp}$ on samade omadustega. Kui $A|_{L^\perp}$ ei oleks nulloperatoor, siis leiduksid $\lambda \neq 0$ ja $u \neq 0, u \in L^\perp$, nii, et $A|_{L^\perp} u = \lambda u$ ehk $Au = \lambda u$, mistõttu $\lambda \in \Lambda_0$. Järelikult $\lambda = \mu_\kappa$ mingi κ korral ning $u \in H_{\mu_\kappa} \subset L$. Seega $u \perp u$ ehk $u = 0$. Saadud vastuolu tõestab, et $A|_{L^\perp} = 0$.

Olgu λ_κ omaväärtus, millele vastab omavektor x_κ , s. t. $Ax_\kappa = \lambda_\kappa x_\kappa$ iga κ korral. (Omaväärtuste süsteemi (λ_κ) täpne kirjeldus on järgmine: $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} = \mu_1, \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_1+n_2} = \mu_2, \dots$. Kuid see kirjeldus pole teoreemi tõestuse jaoks oluline.) Rakendades võrduse (1) mõlemale poolele operaatorit A , saame kohe võrduse (2).

Kui süsteem (x_κ) on loenduv, siis tema ortonormeerituse tõttu $x_\kappa \xrightarrow{\kappa} 0$. Operaatori A kompaktsus annab seega koondumise $Ax_\kappa \rightarrow 0$. Kuid siis $|\lambda_\kappa| = \|\lambda_\kappa x_\kappa\| = \|Ax_\kappa\| \rightarrow 0$, s. t. $\lambda_\kappa \rightarrow 0$.

Teoreem on tõestatud.

Rakendame Hilbert-Schmidti teoreemi operaatorvõrrandi lahendi valemi tuletamisel. Vaatleme teist liiki operaatorvõrrandit

$$x = \mu Ax + y, \quad (3)$$

kus $\mu \neq 0$ on arvuline parameeter ja $A \neq 0$ on kompaktnen enesekaasne operaator Hilberti ruumis H . Alljärgnevas teoreemis tähistab (x_κ) Hilbert-Schmidti teoreemiga antud omavektorite ortonormeeritud süsteemi, λ_κ omaväärtust, millele vastab omavektor x_κ , ning Λ_0 operaatori A kõigi nullist erinevate omaväärtuste hulka.

Teoreem. Võrrand (3) on lahenduv iga vabaliikme $y \in H$

korral parajasti siis, kui $\mu \notin \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \Lambda_0 \right\}$. Kui võrrand (3) on lahenduv iga vabaliikme $y \in H$ korral, siis tema lahend on ühene ja avaldub kujul

$$x = \sum_{\kappa} \frac{\mu \lambda_{\kappa}}{1 - \mu \lambda_{\kappa}} (y, x_{\kappa}) x_{\kappa} + y. \quad (4)$$

Tõestus. Fredholmi alternatiivi kohaselt esineb kaks teineteist välistavat võimalust:

1) võrrand (3) on lahenduv iga vabaliikme $y \in H$ korral, kusjuures sel juhul on lahend ka ühene;

2) võrrandil $x = \mu Ax$ on olemas mittetriviaalne lahend.

Kuna võimalus 2) on samaväärne sellega, et leidub $x \neq 0$ nii, et $Ax = \frac{1}{\mu} x$, s.t. $\frac{1}{\mu} \in \Lambda_0$ ehk $\mu \in \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \Lambda_0 \right\}$, siis teoreemi esimene väide on põhjendatud. On põhjendatud ka lahendi ühesus eeldusel, et võrrand (3) on lahenduv iga $y \in H$ korral. Vaatleme sel juhul võrrandi (3) lahendit x .

Tingimuse (2) tõttu kehtib võrdus

$$x = \mu \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} c_{\kappa} x_{\kappa} + y, \quad (5)$$

mille skalaarsel korrutamisel omavektoriga x_j näeme, et iga j korral

$$c_j = \mu \lambda_j c_j + (y, x_j)$$

ehk

$$c_j = \frac{(y, x_j)}{1 - \mu \lambda_j}.$$

Asetades leitud kordajad võrdusesse (5), saamegi valemi (4).

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne 1. Olgu $\mu \in \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \Lambda_0 \right\}$ ning $I = \{ \kappa : \mu \lambda_{\kappa} = 1 \}$.

Tõestada, et võrrand (3) on lahenduv parajasti siis, kui $(y, x_{\kappa}) = 0$ iga $\kappa \in I$ korral. Näidata, et kui see tingimus on täidetud, siis võrrandi (3) kõik lahendid avalduvad kujul

$$x = \sum_{\kappa \in I} \alpha_{\kappa} x_{\kappa} + \sum_{\kappa \notin I} \frac{\mu \lambda_{\kappa}}{1 - \mu \lambda_{\kappa}} (y, x_{\kappa}) x_{\kappa} + y,$$

kus $\alpha_k \in \mathbb{K}$ on suvalised arvud.

Kui Hilbert-Schmidti teoreemis loobuda operaatori A enesekaassusest, siis kehtib selle teoreemiga analoogiline

Teoreem (Schmidti lahtusus)*. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning $A: H_1 \rightarrow H_2$ lineaarne operaator, kusjuures $A \neq 0$. Kui operaator A on kompaktne, siis leiduvad ortonormeeritud süsteemid $x_k \in H_1, y_k \in H_2, k \in I, I \subset \mathbb{N}$, ja arvud $\lambda_k > 0, k \in I$, nii, et

$$A x_k = \lambda_k y_k, A^* y_k = \lambda_k x_k \quad \forall k \in I, \quad (6)$$

iga $x \in H_1$ esitub kujul (1) ning iga $x \in H_1$ korral

$$A x = \sum_{k \in I} \lambda_k c_k y_k, \quad c_k = (x, x_k). \quad (7)$$

Kui seejuures hulk I on loenduv, siis $\lambda_k \rightarrow 0$.

Arvused λ_k nimetatakse operaatori A singulaarseteks arvudeks ehk λ -arvudeks.

Ülesanne 2*. Tõestada ülalsõnastatud teoreem järgmise skeemi alusel.

1) Näidata, et A^*A on kompaktne enesekaasne operaator ja $\text{Ker } A^*A = \text{Ker } A$, ning esituse (1) saamiseks rakendada operaatorile A^*A Hilbert-Schmidti teoreemi.

2) Näidata, et operaatori A^*A omaväärtused λ_k (millega vastavad omavektorid x_k) on positiivsed.

3) Olgu $\lambda_k = \sqrt{\lambda_k}$ ja $y_k = \frac{1}{\lambda_k} A x_k$. Näidata, et (y_k) on ortonormeeritud süsteem, $A^* y_k = \lambda_k x_k$ ning kehtib lahutus (7).

Ülesanne 3*. Järeldada tingimusest (6), et

$$x_k \perp \text{Ker } A, \quad y_k \perp \text{Ker } A^* \quad \forall k \in I;$$

järeldada lahutusest (7), et iga $y \in H_2$ korral

$$A^* y = \sum_{k \in I} \lambda_k d_k x_k, \quad d_k = (y, y_k);$$

viimasele lahutusele tuginedes tõestada, et iga $y \in H_2$ esitub kujul

$$y = \sum_{k \in I} d_k y_k + w, \quad d_k = (y, y_k), \quad w \in \text{Ker } A^*.$$

§ 6*. Kaasoperaator, sümmeetrilised ja enesekaas-
sed operaatorid

Eespool (IV ptk., § 12) tutvusime Banachi ruumides tegutsevate tõkestamata lineaarsete operaatoritega. Erilisel kohal nende hulgas olid kinnised operaatorid, millele laienevad mitmed tõkestatud operaatorite puhul kehtivad olulised tulemused. Järgnevas vaatleme tõkestamata operaatoreid, mis tegutsevad Hilberti ruumis.

Kuna Hilberti ruum on loomulikult viisil isomorfne oma kaasruumiga, siis Hilberti ruumis tegutseva lineaarse operaatori kaasoperaator on defineeritav samas ruumis tegutseva operaatorina.

Olgu käesolevas paragrahvis H Hilberti ruum ja $A: D \rightarrow H$, $D \subset H$, lineaarne operaator, kusjuures $\bar{D} = H$.

Definitsioon. Olgu

$$D(A^*) = \{y \in H : \exists z \in H, (Ax, y) = (x, z) \quad \forall x \in D\}.$$

Operaatori A kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit $A^*: D(A^*) \rightarrow H$, mis elemendile $y \in D(A^*)$ seab vastavusse niisuguse elemendi $z \in H$, mille korral

$$(Ax, y) = (x, z) \quad \forall x \in D.$$

Kaasoperaatori A^* definitsioon on korrektne, sest kui $(Ax, y) = (x, z) = (x, z')$ iga $x \in D$ korral, siis $(z - z') \perp D$. Kuna $\bar{D} = H$, siis $z - z' = 0$ ehk $z = z'$.

Definitsioonist on selge, et operaatorid A ja A^* on seotud võrdusega

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x \in D, \quad \forall y \in D(A^*). \quad (1)$$

Pole raske vahetult kontrollida, et A^* on lineaarne operaator.

Ülesanne. Näidata, et kui defineerida operaatori $A: D \rightarrow H$, $D \subset H$, kaasoperaator $A': D(A') \rightarrow H^*$, $D(A') \subset H^*$, nagu Banachi ruumides tegutseva tõkestamata operaatori kaasoperaator, siis $A^* = \mathcal{J}^{-1} A' \mathcal{J}$, kuu $\mathcal{J}: H \rightarrow H^*$ on kanooniline isomorfism.

Vaatleme otsekõrrutist

$$H \times H = \{ \langle x, y \rangle : x \in H, y \in H \}.$$

Võib vahetult kontrollida, et $H \times H$ on Hilberti ruum skalaarkorrutisega

$$\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle.$$

Kasutame kõrvuti operaatori A graafikuga $G(A) = \{ \langle x, Ax \rangle : x \in D \} \subset H \times H$ ka tema pöördgraafikut $G^{-1}(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in D \} \subset H \times H$.

Lemma. Kehtivad võrdused $G(A^*) = (G^{-1}(-A))^{\perp}$ ja $G^{-1}(A^*) = (G(-A))^{\perp}$.

Tõestus. Olgu $\langle y, z \rangle \in H \times H$. Siis

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle \in (G^{-1}(-A))^{\perp} &\Leftrightarrow \langle y, z \rangle \perp G^{-1}(-A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle -Ax, x \rangle \perp \langle y, z \rangle \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle -Ax, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in D, \end{aligned}$$

mis on samaväärne sellega, et $y \in D(A^*)$ ja $A^*y = z$, s.t. $\langle y, z \rangle \in G(A^*)$. Esimene võrdus on tõestatud. Teise võrduse näitamiseks paneme tähele, et kõik ülaltoodud ekvivalentsed tingimused on samaväärsed ka tingimustega $\langle z, y \rangle \in G^{-1}(A^*)$ ja $\langle x, -Ax \rangle \perp \langle z, y \rangle$, $x \in D$, ehk $\langle z, y \rangle \perp G(-A)$.

Lemma on tõestatud.

Kuna ortogonaalne tälend on kinnine hulk, siis kehtib

Järeldus. Kaasoperaator A^* on kinnine.

Ülesanne. Tõestada kaasoperaatori A^* kinnisus, kasu-

tades kaasoperaatori $A' : D(A') \rightarrow H^*$, $D(A') \subset H^*$, kinnisust.

Järeldus lubab tuletada Hellinger-Toeplitzi teoreemi kinnise graafiku teoreemist, sest kui lineaarne operaator $A : H \rightarrow H$ rahuldab võrdust

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad x, y \in H,$$

siis $A^* = A$, mistõttu A on kinnine ning järelikult

$$A \in \mathcal{L}(H, H).$$

Kui $\overline{D(A^*)} = H$, siis saab defineerida teise kaasoperaatori $A^{**} = (A^*)^*$.

Teoreem. Võrdus $\overline{D(A^*)} = H$ kehtib parajasti siis, kui operaatoril A leidub kinnine laiend. Kui see tingimus on täidetud, siis A^{**} kujutab endast operaatori A vähimat kinnistlaiendit.

Tõestus. Eeldame algul, et $\overline{D(A^*)} = H$. Siis saab defineerida operaatori A^{**} määramispiirkonnaga

$$D(A^{**}) = \{u \in H : \exists v \in H, (A^*y, u) = (y, v) \quad \forall y \in D(A^*)\}.$$

Et tingimuse (1) tõttu

$$(A^*y, x) = (y, Ax) \quad \forall y \in D(A^*), \quad \forall x \in D,$$

siis $D \subset D(A^{**})$, kusjuures iga $x \in D$ korral $A^{**}x = Ax$.

Seega on A^{**} operaatori A kinnine laiend.

Eeldame nüüd, et operaatoril A leidub kinnine laiend. Oletame vastuväiteliselt, et $\overline{D(A^*)} \neq H$. Siis leidub $z \neq 0$ nii, et $z \perp D(A^*)$. Vastuolu saamiseks näitame, et $\langle 0, z \rangle \in \overline{G(A)}$. Kuna $\overline{G(A)} = ((\overline{G(A)})^\perp)^\perp = (\overline{G(A)})^\perp$ ja lemma põhjal $(\overline{G(A)})^\perp = G^{-1}(-A^*)$, siis $\overline{G(A)} = (G^{-1}(-A^*))^\perp$. Kuid $\langle 0, z \rangle \perp G^{-1}(-A^*)$, sest $\langle 0, z \rangle \perp \langle -A^*y, y \rangle$ iga $y \in D(A^*) = D(-A^*)$ korral.

Veendume lõpuks, et A^{**} ühtib operaatori A vähima kinnise laiendiga. Kuna $G(\bar{A}) = \overline{G(A)} = (G^{-1}(-A^*))^\perp$ ja lemma tõttu ka $G(A^{**}) = (G^{-1}(-A^*))^\perp$, siis $G(A^{**}) = G(\bar{A})$ ehk $A^{**} = \bar{A}$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui A on kinnine, siis $\overline{D(A^*)} = H$ ja $A^{**} = A$.

Ülesanne. Tõestada, et $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$, ning kui A on kinnine, siis $\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^\perp$.

Kui operaatoril A on pöördoperaator $A^{-1}: R \rightarrow H$, kus $R = \text{Im } A$, siis

$G(A^{-1}) = \{ \langle y, A^{-1}y \rangle : y \in R \} = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in D \} = G^{-1}(A)$.
Seega võrduse $(A^{-1})^{-1} = A$ tõttu $G^{-1}(A^{-1}) = G(A)$.

Teoreem. Kui operaatoril A on olemas pöördoperaator $A^{-1}: R \rightarrow H$ ning $\overline{R} = H$, siis eksisteerib ka $(A^*)^{-1}$ ning $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Tõestus. Märgime kõigepealt, et kuna $\overline{R} = H$, siis on olemas $(A^{-1})^*$. Näitame, et A^* on injektiivne. Kui $A^*y = 0$, siis võrdusest (1) järeldub, et $\langle Ax, y \rangle = 0$ iga $x \in D$ korral ehk $y \perp R$. Kuna aga $\overline{R} = H$, siis $y = 0$. Operaatori A^* injektiivsuse tõttu eksisteerib $(A^*)^{-1}$. Operaatorid $(A^{-1})^*$ ja $(A^*)^{-1}$ on võrdsed, sest lemma tõttu

$$\begin{aligned} G((A^{-1})^*) &= (G^{-1}(-A^{-1}))^\perp = (G(-A))^\perp = \\ &= G^{-1}(A^*) = G((A^*)^{-1}). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Kui lineaarne operaator $B: D' \rightarrow H, D' \subset H$, on operaatori A laiend, s.t. $D \subset D'$ ja $Ax = Bx, x \in D$, ehk, teisiti väljendudes, $G(A) \subset G(B)$, siis kirjutame ka $A \subset B$.

Lause. Kui $A \subset B$, siis $B^* \subset A^*$.

Tõestus. Kaasoperaatori määramispiirkonna definitsioonist on selge, et $D(B^*) \subset D(A^*)$. Olgu $y \in D(B^*)$ ja $B^*y = z$. Kuna

$$\begin{aligned} (Bx, y) = (x, z) \quad \forall x \in D' &\Rightarrow (Bx, y) = (x, z) \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (Ax, y) = (x, z) \quad \forall x \in D \Leftrightarrow A^*y = z, \end{aligned}$$

siis $B^*y = A^*y$.

Lause on tõestatud.

Definitsioon. Operaatorit A nimetatakse sümmeetriliseks, kui

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in D.$$

Kaasoperaatori definitsiooni arvestades saame järgmise

Lause. Operaator A on sümmeetriline parajasti siis, kui $A \subset A^*$.

Lause. Kui operaator A on sümmeetriline, siis $\overline{D(A^*)} = H$ ja operaator A^{**} on sümmeetriline.

Tõestus. Kuna $D \subset D(A^*)$ ja $\overline{D} = H$, siis $\overline{D(A^*)} = H$. Seega operaator A^{**} eksisteerib. Eespool nägime, et $A \subset A^{**}$, mistõttu $\overline{D(A^{**})} = H$. Järelikult eksisteerib ka $A^{***} = (A^{**})^*$. Et $A \subset A^*$, siis $A^{**} \subset A^*$ ja seega $A^{***} \subset A^{**}$, mis tähendabki operaatori A^{**} sümmeetrilisust.

Järeldus. Igal sümmeetrilisel operaatoril A on olemas vähim kinnine sümmeetriline laiend A^{**} .

Lause. Kui sümmeetrilise operaatori A puhul $\overline{R} = H$, siis on olemas pöördoperaator $A^{-1}: R \rightarrow H$ ning A^{-1} on sümmeetriline.

Tõestus. Näitame, et A on injektiivne. Kui $Ax = 0$, siis $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$ iga $y \in D$ korral, mistõttu $x \perp R$. Et $\overline{R} = H$, siis $x = 0$. Operaatori A injektiivsuse tõttu eksisteerib $A^{-1}: R \rightarrow H$. Kuna

$$\begin{aligned} G(A) \subset G(A^*) &\Leftrightarrow G^{-1}(A) \subset G^{-1}(A^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow G(A^{-1}) \subset G((A^*)^{-1}) \end{aligned}$$

ja $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, siis $G(A^{-1}) \subset G((A^{-1})^*)$ ehk $A^{-1} \subset (A^{-1})^*$, mis tähendabki A^{-1} sümmeetrilisust.

Teoreem. Sümmeetriline operaator A on tõkestatud parajasti siis, kui $D(A^*) = H$.

Tõestus. Olgu sümmeetriline operaator A tõkestatud. Näitame, et $D(A^*) = H$. Vaatleme suvalist elementi $y \in H$. Kuna $\bar{D} = H$, siis leidub jada $y_n \in D(A^*)$ nii, et $y_n \rightarrow y$. Tänu operaatori A tõkestatusele on jada $A y_n$ fundamentaalne, mistõttu eksisteerib $\lim A y_n = z$. Kuna iga $x \in D$ korral $(Ax, y) = \lim (Ax, y_n) = \lim (x, Ay_n) = (x, z)$, siis $y \in D(A^*)$ ning võrdus $D(A^*) = H$ on sellega tõestatud.

Olgu $D(A^*) = H$. Kuna A^* on kinnine, siis kinnise graafiku teoreemi põhjal $A^* \in \mathcal{L}(H, H)$. Seega ka $A^{**} \in \mathcal{L}(H, H)$. Et $A \subset A^{**}$, siis A on tõkestatud.

Teoreem on tõestatud.

Definitsioon. Operaatorit A nimetatakse enesekaasaks, kui $A^* = A$.

Niisiis võib öelda, et A on enesekaasne parajasti siis, kui A on sümmeetriline (s.o. $A \subset A^*$) ja $D(A^*) \subset D$. Muuhulgas on siit selge, et tervel ruumil määratud operaatori puhul on sümmeetrilisus ja enesekaasus samaväärsed mõisted.

Kuna iga kaasoperaator on kinnine, siis kehtib

Lause. Enesekaasne operaator on kinnine.

Eelmisest teoreemist tuleneb vahetu

Järeldus. Enesekaasne operaator on tõkestatud parajasti siis, kui ta on määratud tervel ruumil.

Teoreem. Olgu operaatoril A olemas pöördoperaator $A^{-1}: R \rightarrow H$, kusjuures $\bar{R} = H$. Operaator A on enesekaasne parajasti siis, kui A^{-1} on enesekaasne.

Tõestuseks on järgmine samaväärsuste ahel

$$\begin{aligned} G(A) = G(A^*) &\Leftrightarrow G^{-1}(A) = G^{-1}(A^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow G(A^{-1}) = G((A^*)^{-1}) \Leftrightarrow G(A^{-1}) = G((A^{-1})^*). \end{aligned}$$

Järeldus. Kui sümmeetrilise operaatori A puhul $R = H$, siis A on enesekaasne ja tal on olemas tõkestatud

pöördoperaator A^{-1} .

Tõestus. Eespool nägime, et tehtud eeldustel eksisteerib pöördoperaator $A^{-1}: H \rightarrow H$, mis on ka sümmeetriline. Operaator A^{-1} , olles sümmeetriline ja tervel ruumil määratud, on enesekaasne ning ka tõkestatud. Operaatori A^{-1} enesekaassus toob endaga kaasa operaatori A enesekaassuse.

Alljärgnevate näidete tarvis meenutame, et funktsioon x on absoluutselt pidev lõigus $[a, b]$ parajasti siis, kui ta on esitatav määramata integraalina, s.t. leidub $z \in L_1(a, b)$ nii, et $x(t) = x(a) + \int_a^t z(s) ds$, $t \in [a, b]$. Absoluutselt pidev funktsioon x on diferentseeruv peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ ning tema tuletis $x' \in L_1(a, b)$ ja ühtib funktsiooniga z peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$, s.t. $x' = z$.

Näide 1, kus ühele diferentsiaaloperaatorile A leitakse kaasoperaator A^* . Vaatleme kompleksset ruumi $H = L_2(a, b)$. Olgu D kõigi lõigul $[a, b]$ absoluutselt pidevate funktsioonide hulk, mille puhul $x' \in L_2(a, b)$. Kuna polünoomid on absoluutselt pidevad ja moodustavad kõikjal tiheda hulga ruumis H , siis $\bar{D} = H$. Vaatleme diferentsiaaloperaatorit $A: D \rightarrow H$, $Ax = ix'$, $x \in D$. On selge, et $\bar{\text{Im}} A = H$, sest iga $z \in H$ puhul $z = x'$, kus $x(t) = \int_a^t z(s) ds$.

Kui $x, y \in D$, siis ositi integreerimise abil saame

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b ix'(t) \overline{y(t)} dt = \\ &= i [x(b)\overline{y(b)} - x(a)\overline{y(a)}] + \int_a^b x(t) \overline{iy'(t)} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Võrdusest (2) on selge, et $D_0 = \{y \in D: y(a) = y(b) = 0\} \subset D(A^*)$ ja $A^*y = iy'$, $y \in D_0$. Näitame, et tegelikult $D(A^*) = D_0$.

Olgu $y \in D(A^*)$ ning $A^*y = z$. Siis

$$(Ax, y) = \int_a^b x(t) \overline{z(t)} dt \quad \forall x \in D, \quad (3)$$

millest $x(t) = 1$ korral järeldub, et $\int_a^b \overline{z(t)} dt = 0$ ehk

$\int_a^b z(t) dt = 0$. Olgu $u(t) = \int_a^t z(s) ds$; siis $u \in D$, $u(a) = u(b) = 0$, s.t. $u \in D_0$, ning $u' = z$. Integreerides ositi võrduse (3) paremat poolt, saame

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b x(t) \overline{z(t)} dt = \int_a^b x(t) \overline{u'(t)} dt = \\ &= - \int_a^b x'(t) \overline{u(t)} dt = (Ax, -iu) \quad \forall x \in D, \end{aligned}$$

millest võrduse $\operatorname{Im} A = H$ tõttu järeldub, et $y + iu = 0$.

Et $u \in D_0$, siis ka $y = -iu \in D_0$.

Niisiis oleme tõestanud, et $D(A^*) = D_0$. Võrdus (2) lubab kaasoperaatorit A^* kirjeldada järgmiselt:

$$A^*: D_0 \rightarrow H, \quad A^*y = iy', \quad y \in D_0.$$

Järgmise näite tarvis tähistame $A_0 = A^*$.

Näide 2, millest selgub, et $A_0^* = A$ ehk $A^{**} = A$. Vaatleme lineaarset operaatorit $A_0: D_0 \rightarrow H$, $A_0x = ix'$, $x \in D_0 = \{x \in D: x(a) = x(b) = 0\}$. Funktsionaalruumide teoorias tõestatakse, et põhifunktsioonide hulk $\mathcal{D}(a, b)$ on kõikjal tihe ruumis $L_2(a, b)$. Kuna aga $\mathcal{D}(a, b) \subset D_0$, siis $\overline{D_0} = H$. Märkime, et iga $z \in H$ korral leiduvad $x \in D_0$ ja $c \in \mathbb{C}$ nii, et $z = x' + c$ (võib võtta näiteks $c = \int_a^b z(s) ds$ ja $x(t) = \int_a^t z(s) ds - c \frac{t-a}{b-a}$). Seega leiduvad iga $z \in H$ korral ka $x \in D_0$ ja $c \in \mathbb{C}$ nii, et $z = A_0x + c$. Järelikult võib öelda, et $H = \operatorname{Im} A + \mathbb{C}$.

Kui $x \in D_0$ ja $y \in D$, siis võrduse (2) põhjal

$$(A_0x, y) = \int_a^b x(t) \overline{iy'(t)} dt. \quad (2')$$

Siit on selge, et $D \subset D(A_0^*)$ ja $A_0^*y = Ay$, $y \in D$.

Näitame, et $D(A_0^*) \subset D$. Olgu $y \in D(A_0^*)$ ja $A_0^*y = z$.

Siis

$$(A_0x, y) = \int_a^b x(t) \overline{z(t)} dt \quad \forall x \in D_0. \quad (3')$$

Tähistades $u(t) = \int_a^t z(s) ds$ ja pannes tähele, et $u \in D$, saame võrduse (3') paremat poolt ositi integreerides ning tingimusi $x(a) = x(b) = 0$ kasutades, et

$$(A_0 x, y) = \int_a^b x(t) \overline{u'(t)} dt = (A_0 x, -iu) \quad \forall x \in D_0.$$

Valime $x \in D_0$ ja $c \in \mathbb{C}$ nii, et $y + iu = A_0 x + c$. Arvestades, et võrduse (2') tõttu $(A_0 x, c) = 0$, saame $0 = (A_0 x, y + iu) = (A_0 x, A_0 x) + (A_0 x, c) = (A_0 x, A_0 x)$ ehk $A_0 x = 0$ ning seega $y = c - iu$. Kuna $u \in D$, siis ka $y \in D$.

Niisiis oleme tõestanud, et $D(A_0^*) = D$ ja $A_0^* = A$.

Näidete 1 ja 2 põhjal võime öelda, et operaatorid A_0 ja A on kinnised, sest nad on teineteise kaasoperaatorid. Kuna $A_0 \subset A = A_0^*$ ja $A \not\subset A_0 = A^*$, siis A_0 on sümmeetriline, A aga mitte, kusjuures kumbki neist pole enesekaasne. Operaatorid A_0 ja A on tõkestamata, sest nende tõkestatuse korral peaksid A_0 ja A määramispiirkonnad olema kinnised (kuna need operaatorid on kinnised) ja seega ühtima ruumiga H , mis on võimatu.

Põhjus, miks A_0 ja A pole enesekaasned, seisneb selles, et operaatori A_0 määramispiirkond on liiga kitsas, operaatori A määramispiirkond aga liiga lai. Operaatori A_0 laiendamiseks (või A ahendamiseks) enesekaasuseni on vaja leida rajatingimused, mis tagaksid operaatori ja tema kaasoperaatori määramispiirkondade kokkulangevuse.

Näide 3 enesekaassete operaatorite süsteemist A_α , $|\alpha| = 1$, mille puhul $A_0 \subset A_\alpha \subset A$. Olgu $D_\alpha = \{x \in D : x(b) = \alpha x(a)\}$, kus $\alpha \in \mathbb{C}$ on selline, et $|\alpha| = 1$. Defineerime operaatori $A_\alpha : D_\alpha \rightarrow H$ võrdusega $A_\alpha x = ix'$, $x \in D_\alpha$.

On selge, et $D_0 \subset D_\alpha \subset D$, mistõttu $A_0 \subset A_\alpha \subset A$ ja $\overline{D_\alpha} = H$. Kui $\alpha \neq 1$, siis $\text{Im } A_\alpha = H$, sest iga $z \in H$ korral leidub $x \in D_\alpha$ nii, et $z = x'$ (võib võtta näiteks $x(t) =$

$$= \int_a^t z(s) ds + \frac{1}{\alpha-1} \int_a^b z(s) ds). \text{ Kui } \alpha = 1, \text{ siis } A_0 \subset A_1 \text{ ja}$$

$\text{Im } A_0 + \mathbb{C} = H$ tõttu $\text{Im } A_1 + \mathbb{C} = H$. (Märgime, et $\text{Im } A_1 \neq H$, sest võttes näiteks $z(t) = i(t-a)$, pole raske veenduda, et $z \notin \text{Im } A_1$).

Paneme tähele, et

$$x(b)\overline{y(b)} - x(a)\overline{y(a)} = (\alpha\bar{\alpha} - 1)x(a)\overline{y(a)} = 0 \quad \forall x, y \in D_\alpha, \quad (4)$$

sest $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$. Seepärast saame võrdusest (2)

$$(A_\alpha x, y) = (x, A_\alpha y) \quad \forall x, y \in D_\alpha, \quad (5)$$

mis tähendab, et operaator A_α on sümmeetriline. Tema enesekaassuse näitamiseks veendume, et $D(A_\alpha^*) \subset D_\alpha$.

Olgu $y \in D(A_\alpha^*)$ ja $A_\alpha^* y = z$. Siis

$$(A_\alpha x, y) = \int_a^b x(t)\overline{z(t)} dt \quad \forall x \in D_\alpha. \quad (3'')$$

Vaatleme algul juhtu, kus $\alpha \neq 1$. Tähistades $u(t) =$

$= \int_a^t z(s) ds + \frac{1}{\alpha-1} \int_a^b z(s) ds$ ja panema tähele, et $u \in D_\alpha$, saame võrduse (3'') paremat poolt ositi integreerides ning tingimust (4) arvestades, et

$$(A_\alpha x, y) = \int_a^b x(t)\overline{u'(t)} dt = (A_\alpha x, -iu) \quad \forall x \in D_\alpha,$$

millest võrduse $\text{Im } A_\alpha = H$ tõttu järeldub, et $y + iu = 0$. Et $u \in D_\alpha$, siis ka $y = -iu \in D_\alpha$.

Olgu lõpuks $\alpha = 1$. Valides u nii nagu näites 1, saame sealset arutlust korrates, et $u \in D_0$ ja

$$(A_1 x, y) = (A_1 x, -iu) \quad \forall x \in D_1.$$

Valime $x \in D_1$ ja $c \in \mathbb{C}$ nii, et $y + iu = A_1 x + c$. Arvestades, et võrduse (5) põhjal $(A_1 x, c) = 0$, näeme nagu näites 2, et $y = c - iu$. Kuna $u \in D_0$, siis $y \in D_1$.

Operaatorite A_α enesekaassus on tõestatud.

Operaatorid A_α kujutavad endast sümmeetrilise operaatori A_0 enesekaasseid laiendeid. Vastukaaluks sellele märgime, et on olemas näiteid mitteenesekaasestest kinnistest

summeetrilistest operaatoritest, mida ei saa laiendada enesekaasaks.

Eestikeelset funktsionaalanalüüsi-alast kirjandust

1. Kaasik Ü. Funktsionaalanalüüs. Tartu, TRÜ, 1959.
2. Kangro G. Matemaatiline analüüs, II. Tln., Valgus, 1968.
3. Kangro G. Funktsionaalanalüüs. Tartu, TRÜ, 1978.
4. Leiger T. Operaatorid Hilberti ruumis. Tartu, TRÜ, 1982.
5. Lumiste Ü. Topoloogia. Tartu, TRÜ, 1987.
6. Sõrmus T. Meetrilised ruumid. Tln., TPedI, 1979.
7. Tauts A., Tõnnov M., Türrpu H. Matemaatilise analüüsi praktikum, Tartu, TRÜ, 1971.
8. Vainikko G. Mõnda funktsionaalanalüüsist I, Matemaatika ja kaasaeg 1969, XVI, 3-19; II, 1970, XVII, 35-43; III, 1972, XVIII, 13-22.

Funktsionaalanalüüsi õpikud

1. Антоневи́ч А.Б., Кня́зев П.Н., Рады́но Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Высшая школа, 1978.
2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М., Наука, 1967.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977, 1984.
4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
5. Князев П.Н. Функциональный анализ. Минск, Высшая школа, 1965.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1968, 1972, 1976, 1981, 1989.
7. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Новосибирск, Наука, 1963.

8. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
10. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М., Мир, 1983.
11. Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.
12. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Из-во Моск. ун-та, 1986.
13. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.
14. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М., Наука, 1984.

Monograafiad

1. Diestel J. Geometry of Banach spaces-selected topics. Lecture Notes in Math., 485, Springer, 1975.
2. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Sequence spaces. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Function spaces. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.
4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1966.
5. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.
6. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М., Наука, 1969.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., Наука, 1965.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М., Мир, 1966.
10. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., Мир, 1964.
11. Дэй М.М. Линейные нормированные пространства. М., ИЛ, 1961.
12. Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967.

13. Като К. Теория возмущения линейных операторов. М., Мир, 1972.
14. Келли Дж. Л. Общая топология. М., Наука, 1968, 1981.
15. Морен К. Методы гильбертова пространства. М., Мир, 1965.
16. Пли А. Операторные идеалы. М., Мир, 1982.
17. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь В. Лекции по функциональному анализу. М., Мир, 1979.
18. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1967.
19. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М., Физматгиз, 1963.
20. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., Мир, 1970.
21. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ., 1962.
22. Шварц Л. Анализ т. I. М., Мир, 1972.
23. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1971.
24. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., Мир, 1969.
25. Энгелькинг Р. Общая топология. М., Мир, 1986.

Ülaltoodud monograafiad pakuvad olulist lisamaterjali näiteks järgmiste teemade kohta: meetrilised ruumid [14,25], püsipunkti printsiibid [24], topoloogilised ruumid [14,25], normeeritud ruumid ja Banachi ruumid [1,2,3,8,11], lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid [6,13,19], topoloogilised vektorruumid ja lokaalselt kumerad ruumid [5,12,18,23,24], pidevad lineaarsed operaatorid normeeritud ja Banachi ruumides [2,3,7,8,12,13,16,17,21], kinnised operaatorid [13, 21], pidevad lineaarsed funktsionaalid [8,12,21,23,24], operaatorite diferentsiaalarvutus [10,22], kompaktsed lineaarsed operaatorid [8,12,13,17,24], Hilberti ruumid [8, 12,15,20], lineaarsed operaatorid Hilberti ruumides [4,7, 9,13,15,17,20].

Nimede register

- Niels Henrik Abel (1802-1829), norra matemaatik, 76
Cesare Arzelà (1847-1912), itaalia matemaatik, 45,73
Giulio Ascoli (1843-1896), itaalia matemaatik, 45,73
René Louia Baire (1874-1932), prantauae matemaatik, 33
Stefan Banach (1892-1945), poola matemaatik, 64,82,135,138, 165
Friedrich Wilhelm Beaael (1784-1846), aakaa aatronoom, geodeet, matemaatik, 253
Piera Bohl (1865-1921), läti matemaatik, sündinud Valkaa, lõpetanud Tartu Ülikooli, 229
Bernard Bolzano (1781-1848), tšehhi matemaatik, filosoof, teoloog, 39
Félix Édouard Juatin Émile Borel (1871-1956), prantauae matemaatik ja poliitik, 56
Luitzen Egbertua Jan Brouwer (1881-1966), hollandi matemaatik ja loogik, 229
Viktor Jakovlevitš Bunjakovski (1804-1889), vene matemaatik, 233
Georg Cantor (1845-1918), aakaa matemaatik, 32
Auguatin Louia Cauchy (1789-1857), prantause matemaatik, 29, 66,233
Pierre de Fermat (1601-1665), prantauae matemaatik, 207
Ernat Sigiamund Fischer (1875-1954), sakaa matemaatik, 256
Jean Baptiate Joseph de Fourier (1768-1830), prantause matemaatik, 252
Maurice René Fréchet (1878-1973), prantauae matemaatik, 5, 53,117,185
Erik Ivar Fredholm (1866-1927), rootsi matemaatik, 67, 220
René Eugène Gâteaux (aunniaaata teadmata - 1914), prantsuae matemaatik, 183
Jorgen Pedersen Gram (1850-1916), taani matemaatik, 251
Hana Hahn (1879-1934), austria matemaatik, 165
Felix Hausdorff (1868-1942), saksa matemaatik, 41,54
Heinrich Eduard Heine (1821-1881), saksa matemaatik, 56
Ernst Hellinger (1883-1950), saksa matemaatik, 266
David Hilbert (1862-1943), saksa matemaatik, 236,274
Ludwig Otto Hölder (1859-1937), saksa matemaatik, 10,18
Andrei Nikolajevitš Kolmogorov (1903-1987), nõukogude matemaatik, 109

- Kazimierz Kuratowski (1896-1980), poola matemaatik, 168
- Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), prantsuse matemaatik ja mehaanik, 191,205
- Henri Léon Lebesgue (1875-1941), prantsuse matemaatik, 17, 56
- Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), saksa matemaatik, 64
- Nikolai Nikolajevitš Luzin (1883-1950), nõukogude matemaatik, 129
- Hermann Minkowski (1864-1909), saksa matemaatik ja füüsik, 11,18,107
- Marc Antoine Parseval (1755-1836), prantsuse matemaatik, 254
- Giuseppe Peano (1858-1932), itaalia matemaatik, 204,229
- Friges Riesz (1880-1956), ungari matemaatik, 93, 164, 220 244,256
- Juliusz Pawel Schauder (1899-1943), poola matemaatik, 211, 220,229
- Erhard Schmidt (1876-1959), saksa matemaatik, sündinud Tartus, lõpetanud Tartu Ülikooli, 251, 274,278
- Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), saksa matemaatik, 233,
- Sergei Lvovitš Sobolev (1908-1989), nõukogude matemaatik ja mehaanik, 19
- Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972), poola matemaatik, 135, 165
- Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), hollandi matemaatik, 164
- Brook Taylor (1685-1731), inglise matemaatik, 204,205
- Otto Toeplitz (1881-1940), saksa matemaatik, 266
- Vito Volterra (1860-1940), itaalia matemaatik, 68
- Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), saksa matemaatik, 28,39,69
- Pjotr Petrovitš Zabreiko (1939), nõukogude matemaatik, 132
- Max Zorn (1906), šveitsi matemaatik, 168

Aineregister

- Abeli rühm 76
- absoluutselt koonduv rida normeeritud ruumis 96
- pidev funktsioon 18
- aditiivne operaator 118
- ahendav operaator 64
- alamruum
- Banachi ruumis 87
 - Hilberti ruumis 236
 - meetrilises ruumis 6
 - normeeritud ruumis 86
 - vektorruumis 76
- alamruumi nihe 98
- algebraaliste tehete pidevus
- - - normeeritud ruumis 83
 - - - topoloogilises vektorruumis 101
- annulaator 179
- antisümmeetriline seos 167
- Arzelà-Ascoli teoreem 45,73
- Baas lõplikumõõtmelises ruumis 89
- Baire'i teoreem 33
- Banach-Steinhausi teoreem 135,136
- Banachi ruum 82
- püsipunkti printsiip 64
 - teoreem pöördoperaatorist 139,141
- Besseli võrratus 253
- bijektiivne operaator e. bijektsioon 59
- biortogonaalne süsteem 225
- Bohl-Brouweri püsipunkti printsiip 229
- Bolzano-Weierstrassi teoreem 39
- Cantori teoreem 32
- Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus 233
- Cauchy jada 29
- kriteerium 29
 - teoreem diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust ja ühesusest 66
- Diferentseerimisoperaator 118

- diferentseeruv e. Fréchet' mõttes diferentseeruv operaator 185
- diferentsiaal e. Fréchet' diferentsiaal 186
- diskreetne meetriline ruum 9
 - meetrika 8
 - topoloogia 48
- Ekstreemumpunkt 207
- ekvivalentsed jadad 35
 - normid 87
- ekvivalentsiklass 98
- ekvivalentsiseos 97
- elemendi kaugus osahulgast 92
- enesekaasne operaator 265,284
- eralduv topoloogiline ruum 54
- eralduvuse aksioomid 54-55
- esimest liiki operaatorvõrrand 220
- eukleidiline ruum 10
- Faktorhulk 98
- faktorruum 98
- Fermat' teoreem 207
- filter 53
- finiitne jada 137
- Fourier' kordajad 252
 - rea osasumma 253
 - rida 253
- Fréchet' diferentsiaal 186
 - mõttes diferentseeruvus e. diferentseeruvus 185
 - ruum 117
 - tuletis 186
- Fredholmi alternatiiv 223,224
 - integraaloperaator 68
 - integraalvõrrand 67
 - I teoreem 222
 - I teoreem kaasvõrrandi jaoks 223
 - II teoreem e. Fredholmi alternatiiv 223,224
 - III teoreem 227
- fundamentaaljada 29
- funktsionaal 70
- funktsionaalruumid 16

funktsioon 58
 funktsiooni pidevus 61

 Gâteaux' diferentsiaal e. nõrk diferentsiaal 183
 graafik 147
 Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsess 251

 Hahn-Banachi teoreem 165
 hajuv jada 7
 Hausdorffi ruum 54
 Heine-Boreli-Lebesgue'i lemma 56
 Hellinger-Toeplitzi teoreem 266
 Hilbert-Schmidti teoreem 274
 Hilberti ruum 236

- ruumi refleksiivsus 248
- ruumide isomorfism 257

 homöogeenne operaator 118

- võrrand 143

 homogeensuse aksioom 82
 Hölder'i võrratus 10

- võrratuse integraalkuju 18

 Injektiivne operaator e. injektsioon 59
 integraaloperaator 68, 118
 integraalvõrrandi tuum 68

- vabaliige 68

 integreerimisoperaator 140
 isomeetria 35
 isomeetriline isomorfism e. lineaarne isomeetria 140

 Jada fundamentaalsus 29
 jadaruumid 12
 järjestusseos 167

 Kaashomöogeenne operaator 246
 kaaslineaarne operaator 246
 kaasoperaator 157, 178, 279

- Hilberti ruumide mõttes e. Hilberti ruumis 262

 kaasruum 159
 kaasvõrrand 220
 kahe muutuva operaator 194
 kaks korda diferentseeruv operaator 200
 kandja 115

kanooniline isomorfism Hilberti ruumi ja tema kaasruumi va-
 hel 246
 - kujutus 98,172
 - sisestus 172
 kate 56
 kaugus 5
 kauguse pidevus 7
 kera 19
 - keskpunkt 19
 - raadius 19
 keskmine koondumine 18
 kinnine kera 19
 - hulk 23,49
 - operaator 152
 kinnise graafiku teoreem 148
 klassijaotus 98
 kolmnurga võrratus
 - - meetrilises ruumis 5
 - - normeeritud ruumis 82
 Kolmogorovi teoreem 109
 kompakt 39
 kompaktne hulk 39
 - lineaarne operaator 209
 - meetriline ruum 39
 - operaator 229
 - topoloogiline ruum 56
 kompaktsete lineaarsete operaatorite ruum 218
 kompleksne funktsionaal 70
 - ruum 19
 - vektorruum 76
 kompositsioon 60
 konstantne jada 7
 konstantse operaatori tuletis 187
 koonduv filter 53
 - jada
 - - meetrilises ruumis 6
 - - normeeritud ruumis 82
 - pere 52
 - rida 95
 kujutis 58
 kujutus 58

kumer hulk 79
 - kate 81
 - kombinatsioon 80
 kumerate kombinatsioonide jada 175
 Kuratowski-Zorni lemma 168
 kõikjal tihe hulk 26
 kõrgemat järku tuletised 202

 Lagrange'i keskväärtushinnang 191
 - keskväärtusteoreem 191
 lahendi pidev sõltuvus vabaliikmest 144
 lahtine hulk 21,48
 - kate 56
 - kera 19
 - operaator 144
 lahtise kujutuse printsiip 145
 lemma elementaarsest jätkust 165
 - peaaegu perpendikulaarist 93
 lineaarne hulk 77
 - kate 79
 - kombinatsioon 79
 - operaator 118
 - operaatorvõrrand 143
 - ruum 76
 - sõltumatus 88
 - sõltuvus 89
 Lipschitzi tingimus 64
 loenduvalt pooladitiivne poolnorm 132
 lokaalselt kumer ruum 111
 - - topoloogia 111
 Luzini teoreem 129
 lõplikumõõtmeline lineaarne operaator 213
 - normeeritud ruum 88
 - vektorruum 89
 lõpmatumõõtmeline vektorruum 94
 lähenemisoperaator 64

 Matriksoperaator 118
 maksimaalne element 167
 maksimumpunkt 207
 meetrika 5
 - aksioomid 5

meetriline ruum 5
 meetrilieste ruumide isomeetrisus 34
 metriaeruv topoloogiline vektorruum 116
 minimumpunkt 207
 Minkowski funktsionaal 107

- võrratus 11
- võrratuse integraalkuju 18

 määramispiirkond 58

 Neelav hulk 106
 nelinurga võrratus 6
 norm 82
 normaalne ruum 55
 normeeritud ruum 81

- ruumi loomulik (kanooniline) kujutus (sisestus) teise
 kaeruumi 172

 normeeruv ruum 84,85,109
 normi pidevus 83
 nullelement 75
 nulliümbruste baas 103
 nulloperaatore 123
 nullruum e. tuum 142
 nõrga koondumise kriteerium 174
 * - nõrga koondumise kriteerium 177
 nõrgalt singulaarne integraaloperaator 215

- - tuum 215

 nõrgem norm 87
 nõrgim topoloogia 48
 nõrk e. Gateaux' diferentsiaal 183

- - mõttes diferentseeruvus 183
- koonduvus 174

 * - nõrk koonduvus 177

 Omaalamruum 271
 omavektor e. omaelement 270
 omaväärtus 270
 operaator 58
 operaatori ahend 149

- laiend e. jätk 149
- pidev laiend e. pidev jätk 151
- sulund 151,154

 operaatorite korrutis e. kompositsioon 60

- korrutise diferentseerimine 190
- originaal 58
- ortogonaalne projektsioon alamruumile 242
 - süsteem 248
 - täiend 238
- ortogonaalsumma 243
 - ühesus 243
- ortogonaalsus 237
- ortogonaliseerimisteoreem 250
- ortonormeeritud süsteem 248
- ortoprojektor 260
- osaline järjestus 167
- osatuletis 194
- otsekorrutis 147
- otsesumma 243

- Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida 239
- Parsevali võrdus 254
- parim lähend 240
- pealekujutus e. sürjektsioon 59
- Peano teoreem diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust 229,230
- pere 51
- pidev lineaarne operaator 119
 - operaator 61,63
- pideva lineaarse funktsionaali üldkuju Hilberti ruumis 244
 - - operaatori norm 123
 - - operaatori tuletis 187
- pidevalt diferentseeruv operaator 200
- pidevate lineaarsete operaatorite ruum 123
- poolmeetriline ruum 6
- poolnorm 107,130
- poolskalaarkorrutis 232
- poolskalaarkorrutisega ruum 232
- projektor 259
- projektsioonide teoreem 241
- punktiivisi koonduvus e. kõikjal koonduvus 135
 - koonduvuse topoloogia 115
 - e. kõikjal tõkestatud operaatorite jada 133
- puutepunkt 49
- põhihulk 135
- pööratav operaator 60

pöördgraafik 280
 pöördoperaator 60
 püsipunkt 64

 Raja 24,50
 rajapunkt 22,50
 rea summa linearsus 96
 reaalne funktsionaal 70
 - ruum 19
 - vektorruum 76
 refleksiivne ruum 173
 - seos 97
 refleksiivsuse kriteerium 174
 regulaarne ruum 54
 Riesz-Fischeri teoreem 256
 Riesz-Schauderi teooria 220
 Riesz'i teoreem 164,244
 rida normeeritud ruumis 95
 ruum
 \mathbb{R} 8
 \mathbb{C} 8
 \mathbb{K} 8
 m_n 9,83
 L_p^n 10,83
 \mathbb{R}^n 10
 \mathbb{C}^n 10
 l_∞^n 12
 m 13,83
 l_∞ 13
 c 13,83
 c_0 13,83
 l_p 14,83
 l_1 14,15
 l_2 15
 s 15,77,84
 $M[a,b]$ 16,84
 $C[a,b]$ 17,84
 $C^\infty[a,b]$ 17,84
 $L_p(a,b)$ 17,84
 $L_1(a,b)$ 18

$L_2(a, b)$ 18
 $W_p^n(a, b)$ 18, 84
 $F[a, b]$ 78
 $F(T)$ 115
 $C^\infty[a, b]$ 115
 $\mathfrak{D}_K(a, b)$ 115
 $\mathfrak{D}(a, b)$ 115
 $L_\infty(a, b)$ 164
 T_0 -ruum 54
 T_1 -ruum 54
 T_2 -ruum 54
 T_3 -ruum 55
 T_4 -ruum 55
 ruutkeskmise koondumise 18
 rööpküliku võrdus 235

 Samasuse e. identsuse aksioom
 - - - meetrilises ruumis 5
 - - - normeeritud ruumis 82
 Schauderi püsipunkti printsiip 229
 - teoreem 211
 Schmidt'i lahutus 278
 separaabel ruum 27
 separaatne ruum 54
 sfäär 24
 singulaarsed arvud e. s-arvud 278
 sisemus 24, 50
 sisepunkt 21, 50
 skalaar 76
 skalaarkorrutis 232
 skalaarkorrutise pidevus 236
 skalaarkorrutisega ruum 232
 Sobolevi ruum 19
 statsionaarne jada 7
 Steinhausi teoreem 165
 Stieltjesi integraal 164
 suhteliselt kompaktnel hulk 39
 suhtelise kompaktsuse kriteeriumid 43
 sulund 25, 49
 sulundamine 50
 suruv operaator 64

- suunatud hulk 51
 - pere 51
- sümmeetria aksioom meetrilises ruumis 5
- sümmeetriline operaator 266,283
 - seos 97
- sürjektiivne operaator e. sürjektsioon 59
- Tagurpidi kolmnurga võrratus
 - - - meetrilises ruumis 6
 - - - normeeritud ruumis 83
- tasakaalus hulk 103
- Taylori valem jääkliikme Lagrange'i hinnanguga 205
 - - jääkliikmega Peano kujul 204
- teine kaasoperaator 281
 - kaasruum 172
- teisendus 58
- teist liiki operaatorvõrrand 220
- teoreem ilmutamata operaatori diferentseeruvusest 199
 - - operaatorist 196
 - kinnisest graafikust 148
 - normeeritud ruumi punktide eraldamisest 170
 - piisavast arvust funktsionaalidest 170
 - projektsioonidest 241
 - pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest 142
 - vektorruumi topologiseerimisest 110
 - ühikoperaatorile lähedase operaatori pööratavusest 141
 - üksteisesse sisestatud keradest 32
- topoloogia 48
- topoloogiline ruum 47
 - vektorruum 101
- transitiivne seos 97
- trigonomeetriline süsteem 249
- tsentreeritud osahulkade süsteem 56
- tugevaim topoloogia 48
- tugevam norm 87
- tuletis e. Fréchet' tuletis 186
- tuum e. nullruum 142
- tõkestatud hulk
 - - meetrilises ruumis 40
 - - normeeritud ruumis 86
 - - topoloogilises vektorruumis 108

- lineaarne operaator 119
- muuduga funktsioon 164
- poolnorm 132
- täielik 35
- täielik järjestus 167
 - meetriline ruum 29
 - ortonormeeritud süsteem 251
- täielikult pidev operaator 210,229
- täiendprojektor 261
- täisvariatsioon 164

- Vabaliige 68, 143
- vaatandelement 75
- vektor 76
- vektorruum 75
- Volterra integraaloperaator 69,216
 - integraalvõrrand 68
- võrdpidevad funktsioonid 45
 - operaatorid 72
- \mathcal{E} - võrk 41
- väärtuste piirkond 58

- Weierstrassi teoreem 69

- Ühiksfaar 94
- ühtlase tõkestatuse printsiip 134
- ühtlaselt pidev operaator 71
 - tõkestatud funktsioonid 44
 - - operaatorid 72
- üksühene operaator e. injektsioon 59
 - vastavus e. bijektsioon 59
- üldistatud Arzelà-Asooli teoreem 73
 - kolmnurga võrratus 95
- ülemine tõke 167
- ümbrus 20,49

- Zabreiko teoreem 132
- Zorni lemma e. Kuratowski-Zorni lemma 168

Sisukord

Eessõna	3
I Meetrilised ruumid	5
§ 1. Meetrilise ruumi mõiste	5
§ 2. Koonduvus meetrilises ruumis	6
§ 3. Meetriliste ruumide näiteid (konkreetsed meetrilised ruumid)	8
§ 4. Hulgad meetrilistes ruumides	19
1. Kerad. Lahtised ja kinnised hulgad	19
2. Hulga sisemus, raja ja sulund	24
§ 5. Separaablid meetrilised ruumid	26
§ 6. Täielikud meetrilised ruumid	28
§ 7*. Meetrilise ruumi täielikuastamine	34
§ 8. Kompaktsus meetrilises ruumis	39
§ 9*. Topoloogilised ruumid	47
1. Topoloogilise ruumi mõiste	47
2. Hulgad topoloogilistes ruumides	48
3. Koonduvus topoloogilises ruumis	51
4. Eralduvuse aksioomid	54
5. Kompaktsus topoloogilises ruumis	56
II Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides	58
§ 1. Operaatoritega seotud põhimõisted	58
§ 2. Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides	61
§ 3. Banachi püsipunkti printsiip	64
§ 4. Banachi püsipunkti printsiibi rakendusi	66
§ 5. Kompaktsel hulgal määratud funktsionaalid	69
§ 6*. Üldistatud Arzelà-Ascoli teoreem	71
III Normeeritud ruumid	75
§ 1. Vektorruumid	75
1. Vektorruumi mõiste	75
2. Järeldusi aksioomidest	76
3. Vektorruumide näiteid	77
4. Hulga lineaarne kate	79
5. Kumerad hulgad, hulga kumer kate	79
§ 2. Normeeritud ruumi ja Banachi ruumi mõiste	81
§ 3. Lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid	88

§ 4. Riesz'i lemma peaaegu perpendikulaarist ja ühik-sfääri mittekompaktsus lõpmatumõõtmelises ruumis	92
§ 5. Read normeeritud ruumides	95
§ 6. Faktorruum	97
§ 7*. Topoloogilised vektorruumid	101
1. Topoloogilised vektorruumid ja nende nulli-ümbrused	101
2. Hulgad topoloogilistes vektorruumides	104
3. Topoloogilise vektorruumi eralduvus	105
4. Neelavad ja tõkestatud hulgad	106
5. Kolmogorovi teoreem	109
6. Vektorruumi topologiseerimisest	110
§ 8*. Lokaalselt kumerad ruumid	111
1. Lokaalselt kumer topoloogia ja poolnormid.	111
2. Poolnormide keel	113
3. Lokaalselt kumerate ruumide näiteid	114
4. Metriseeruvad lokaalselt kumerad ruumid ja Fréchet' ruumid	116
 IV Lineaarsed operastorid normeeritud ja Banachi ruumides	 118
§ 1. Pidevad lineaarsed operaatorid	119
§ 2. Pidevate lineaarsete operaatorite ruum	123
§ 3. Operaatorite normi arvutamise näiteid	126
§ 4. Zabreiko teoreem	130
1. Poolnormid ja nendega seotud hulgad	130
2. Zabreiko teoreem	132
§ 5. Ühtlase tõkestatuse printsiip	133
§ 6. Banach-Steinhausi teoreem	135
§ 7. Banachi teoreemid pöördoperaatorist	138
§ 8. Lineaarsed operaatorvõrrandid	142
§ 9. Lahtise kujutuse printsiip	144
§ 10. Teoreem kinnisest graafikust	147
§ 11. Operaatorite laiendamisest	149
§ 12*. Kinnised operaatorid	151
 V Pidevad lineaarsed funktsionaalid normeeritud ruumidel	 159
§ 1. Normeeritud ruumi kaasruum	159
§ 2. Kaasruumide kirjeldusi	161

§ 3. Ortogonaalsus ja ortogonaalne täiend. Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida	237
§ 4. Parima lähendi olemasolu kinnises alamruumis . .	240
§ 5. Teoreem projektsioonidest	241
§ 6. Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju Hilberti ruumis	244
§ 7. Hilberti ruumi kaasruum ja refleksiivsus	247
§ 8. Ortonormeeritud süsteemid	248
§ 9. Täielikud ortonormeeritud süsteemid	251
§ 10. Fourier' read	252
§ 11. Separaablite Hilberti ruumide samastamine ruumiga l_2	256
IX Lineaarsed operaatorid Hilberti ruumides . .	259
§ 1. Ortoprojektor kinnisele alamruumile	259
§ 2. Kaasoperaator Hilberti ruumis	261
§ 3. Enesekaassed operaatorid	265
§ 4. Kompaktsete enesekaassete operaatorite omaväärtused ja omavektorid	270
§ 5. Hilbert-Schmidti teoreem	274
§ 6*. Kaasoperaator, sümmeetrilised ja enesekaassed operaatorid	279
Eestikeelset funktsionaalanalüüsi-alast kirjandust. .	289
Funktsionaalanalüüsi õpikud	289
Monograafiad	290
Nimede register	292
Aineregister	294

Rbl. 8-