ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек"

I

ТАРТУ 1966

32112

XI
1А-13535
III

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек"

Тарту - Кяэрику, 22-31 июля 1966 г.

I

Обзорные доклады

ТАРТУ 1966

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
32112

Предисловие

С 22 по 31 июля 1966 г. на спортивной базе Кяэрику (Эст. ССР) проводилась летняя школа, посвященная физически и геометрически нелинейным задачам теории пластин и оболочек. Школа была организована Научным советом по проблеме "Научные основы прочности и пластичности" АН СССР, секцией математики, механики и астрономии научно-технического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР и Тартуским государственным университетом. Подготовка и проведение школы осуществлялись Оргкомитетом в составе: Н.А.Алумяэ, Ю.Р.Лепик (зам.председателя), Х.М.Муштари (председатель), П.М.Огибалов, Л.М.Роотс (ответств. секретарь).

Целью летней школы являлось: 1) ознакомление слушателей с исследованиями в области физически и геометрически нелинейной теории пластин и оболочек; 2) проведение дискуссий в рамках тематики летней школы; 3) расширение личных контактов и обмен мнениями; 4) содействие дальнейшему развитию названной отрасли теории пластин и оболочек в СССР.

В работе школы приняли участие 51 человек, в том числе 12 докторов наук и 24 кандидата наук. По городам участники распределялись следующим образом: Москва - 15, Тарту - 11, Таллин - 7, Казань - 4, Рига - 3, Ленинград, Ереван и Новосибирск - по 2, Баку, Тула, Воронеж, Львов и Калинин - по одному человеку.

В школе было заслушано и обсуждено 9 обзорных докладов и 14 кратких сообщений. Продолжительность обзорного доклада составляла 1-2 часа. Что касается кратких сообщений, то, имея в виду, что эти тексты были опубликованы уже до начала школы во второй части данного сборника, докладчикам давалось для выступления лишь 10 минут, после чего проводилось обсуждение сообщения. Обстоятельство, что повестка дня не была перегружена, оставило много времени для дискуссии.

В данный сборник включено большинство обзорных докладов, заслушанных в летней школе; отсутствуют лишь доклад А.А.Ильюшина "О постановке задач нелинейной вязкоупругости пластин и оболочек" и доклад П.А.Лукаша "Современные методы расчета пластин и оболочек из нелинейно-упругих материалов".

Три доклада, отпечатанных в этом сборнике, а именно: совместный доклад Г.Н.Савина, А.Н.Гузя, И.А.Цурпала и доклады М.Ш.Микеладзе и Н.Ф.Ершова, были взяты в программу школы, но не были доложены, так как докладчики не смогли принять участия в работе школы.

Три кратких сообщения, доложенных в школе, были взяты в программу дополнительно, вследствие чего во второй части данного сборника тексты этих сообщений не были опубликованы. Тексты двух из них (сообщения Н.Н.Малинина и М.С.Корнишина и др.) включены в данный сборник; отсутствует сообщение Г.В. Иванова "Об аппроксимации напряжений в задачах о ползучести оболочек".

РОЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН В РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ

Б.М.Броуде

ЦНИИСК, Москва

Пластины являются наиболее распространенным элементом несущих и ограждающих металлических конструкций, будь то промышленные или инженерные сооружения, конструкции вагонов или корпусов судов. Подавляющую массу проката стали составляют плоские листы и фасонные профили, которые можно трактовать как системы пластин.

В современных конструкциях широко применяются гибкие пластины, что нередко влечет за собой необходимость учета геометрической нелинейности при составлении уравнений равновесия и совместности деформаций. Учет физической нелинейности необходим при исследовании предельного состояния конструкций, что является неотъемлемой частью расчета.

В дальнейшем рассматриваются только металлические пластины, поскольку для них учет нелинейных эффектов особенно важен.

Между теорией и практикой расчета существует значительный разрыв. Это объясняется тем, что в теоретических исследованиях обычно рассматриваются упрощенные модели и схемы, далекие от реальных конструкций. Разумеется, любая попытка математического описания какого-либо явления неизбежно связана с его схематизацией, но необходимо следить за тем, чтобы важные стороны описываемого явления не были игнорированы.

К сожалению, в теоретических исследованиях прочности и устойчивости конструкций этот принцип нередко нарушается. Иллюстрацией служат многочисленные работы по теории устойчивости, в которых рассматриваются идеально прямые стержни, абсолютно плоские пластины, оболочки идеальной формы. Критическим состоянием здесь является момент бифуркации (ответвление от безмоментного состояния). В действительности неизбежные начальные отклонения от идеальной формы приводят к тому, что вместо точек бифуркации появляются предельные точки в смысле Пуанкаре. В большинстве случаев это сопровождается значительным понижением критической нагрузки, что необходимо учитывать в расчете конструкций. Как известно, точки бифуркации разыскиваются с помощью линеаризованных уравнений, тогда как разыскание предельных точек представляет собою нелинейную задачу. Это показывает важность нелинейной теории для практических приложений.

I. Прочность пластин. При расчете гибких упругих пластин на действие поперечной нагрузки $q(x,y)$ и усилий в серединной плоскости пользуются уравнениями Кармана, которые записаны ниже в общем виде с учетом начального искривления пластины $w_0 = w_0(x,y)$ и наличия остаточных напряжений, характеризуемых функцией Эри $\varphi_0(x,y)$:

$$\begin{aligned} (D/t)\Delta\Delta w &= \Phi(\varphi; w+w_0)+\Phi(\varphi_0; w)+q/t, \\ \Delta\Delta\varphi &= -E\Phi(w; w/2+w_0) \end{aligned} \qquad (I)$$

с соответствующими граничными условиями, которые не выписываются. Здесь w, φ – прогиб и функция напряжений, t –

постоянная толщина пластины; D - цилиндрическая жесткость;

$$\Phi(f,q)=f_{,xx}g_{,xx}+g_{,xx}f_{,yy}-2f_{,xy}g_{,xy}.$$

Основными допущениями, сделанными при выводе уравнений (I), являются: I) замена точных выражений кривизн вторыми производными, 2) игнорирование перемещений в серединной плоскости в квадратичных членах выражений для деформаций

$$\varepsilon_{ij}=0{,}5\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right). \qquad (2)$$

Этим определяется граница применимости уравнений Кармана. Для плоской пластинки Л.А.Колесников [I] нашел, что уравнениями (I) можно пользоваться, если углы поворота не превышают 5^0 x). Это приблизительно выполняется, если $w_*/l < 1/36$, где l - длина хорды, на которой наибольший прогиб равен w_*. Предположим, что l/t принимает значения 50, 100, 150, 200. Этому соответствует $w_*/t <$ 1,4; 2,8; 4,2; 5,6.

Таким образом, уравнения Кармана пригодны для расчета в тех случаях, когда критерием предельного состояния является прогиб, не превосходящий указанных выше значений. При больших перемещениях уравнения Кармана нуждаются в уточнении - введении более точных выражений для кривизн и учете всех компонентов перемещений в формуле (2). Один из вариантов модификации уравнений Кармана предложен Л.А.Колесниковым [I].

---

x) Граница применимости линейных уравнений установлена в работе [I] (угол поворота должен быть менее 15').

В общем случае расчет пластины на прочность требует рассмотрения ее поведения за пределом упругости. Такая задача дважды нелинейна, так как приходится рассматривать конечные (немалые) перемещения (геометрическая нелинейность), а также учитывать нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями (физическая нелинейность). Основные уравнения задачи составлены Ю.Р.Лепиком [2] на основе теории деформаций.

Общая схема расчета построена на итерационном принципе при отправлении от упругого решения. Аналогичной задачей занимался Н.Ф.Ершов [3], о чем будет сказано в дальнейшем.

Среди результатов, допускающих непосредственное использование в расчетах отметим решение С.Д.Лейтеса [4] в случае цилиндрического изгиба пластины с закрепленными кромками. Известное до сих пор решение Бубнова-Папковича относится лишь к упругой пластине.

Если для пластины с шарнирно опертыми краями еще можно использовать решение в пределах упругости, принимая за предельное состояние появление фибровой текучести, то для пластинки с защемленными краями необходимо учитывать развитие пластических деформаций хотя бы на участках, примыкающих к опорам, без чего предельная нагрузка будет существенно преуменьшена. Уравнение равновесия для пластинки из материала, следующего диаграмме Прандтля, имеет вид

$$w'' = \alpha\left(\beta \pm M/Nt\right)^{K} \qquad (3)$$

где $K = 1$ для упругой пластины, $K = -2$ при односторонней

и $K = -1/2$ при двусторонней текучести; M, N - момент и осевая сила; t - толщина пластины; α, β - параметры.

Условие неизменности расстояния между опорами имеет форму

$$\int_0^{0.5l} w'^2 dx = \sigma_0 l/E . \qquad (4)$$

В случае равномерной нагрузки q уравнение (3) интегрируется квадратурами. Результаты решения при различных критериях предельного состояния представлены на графике (рис.I), дающем нагрузку q в функции от l/t (при заданных σ_T и E).

Иначе говоря, все геометрически подобные пластинки с одним и тем же отношением l/t и при одной и той же нагрузке q находятся в одинаковых условиях работы.

В случае защемленных краев дана зависимость $q = f(l/t)$ при образовании пластических шарниров на опорах и появлении краевой текучести в пролете. Хотя в этом состоянии работоспособность пластины еще не исчерпана, достигнутая нагрузка существенно больше, чем для шарнирно закрепленной пластины.

За последние годы при конструировании различного рода настилов широкое распространение получили пластины (металлические листы), подкрепленные ребрами (конструктивно ортотропные пластины). Если высота ребер мала по сравнению с размером пластины, следует учитывать развитие мембранных напряжений в листе. Такая задача рассмотрена в работе У.Фогеля [5]. Компоненты напряжений выражаются через функцию напряжений

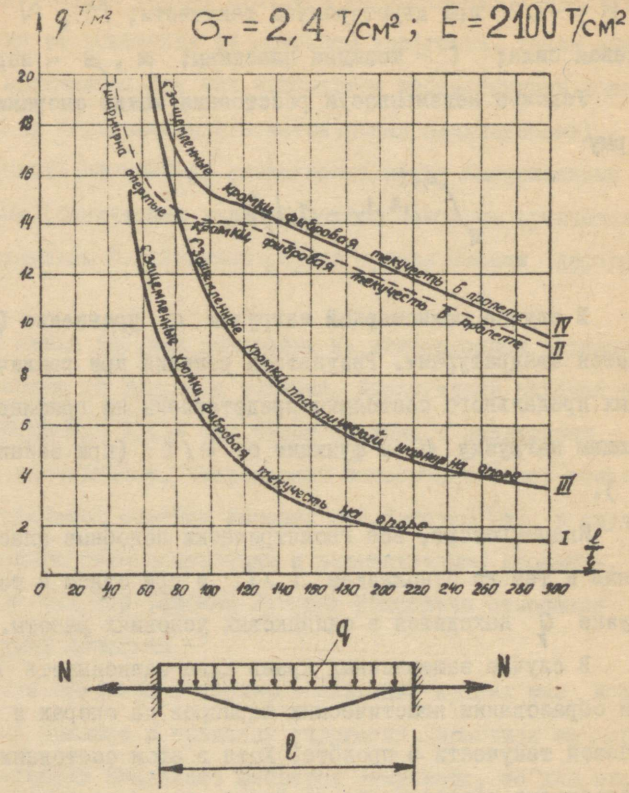


Рис. I.

$\varphi(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_x = \varphi_{,yy}\, t/t_x\,,\quad \sigma_y = \varphi_{,xx}\, t/t_y\,,\quad \tau_{xy} = -\varphi_{,xy}$$

и уравнение совместимости деформаций записывается в виде

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\frac{t}{t_y}+2\varkappa\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\frac{t}{t_x}-E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0,\quad(5)$$

где t_x , t_y – приведенные толщины, $\varkappa=1+\nu-0{,}5\nu(t/t_x+t/t_y)$ (ν – коэффициент Пуассона).

Рассматривается свободно опертая пластина, несущая равномерно распределенную поперечную нагрузку. Функция напряжений приближенно разыскивается в виде $\varphi=\varphi_0+\varphi_1+A\cos^2(\pi x/a)\cdot\cos^2(\pi y/b)$, где φ_1 подбирается так, чтобы удовлетворялись условия на контуре $\varphi=\varphi_{1\,sn}=0$, а коэффициент A принимается равным полусумме значений, найденных из условий минимума среднего квадратического уклонения от нуля левой части уравнения (5) и минимума дополнительной энергии. Далее применяется метод Ритца. Аналогичная задача решалась А.З.Локшиным [6] методом Прескотта-Папковича.

2. Устойчивость и закритическое поведение пластин.

Пластинки – единственный элемент конструкций, для которого критическая нагрузка, отвечающая точке бифуркации, может быть использована как критерий надежности в практических расчетах, хотя во многих случаях этот критерий преуменьшает работоспособность пластинки. Это объясняется значительной протяженностью закритической стадии в пластинках и возможностью существенного превышения бифуркационной нагрузки. Известно, что начало выпучивания идеально плоской пластинки (момент бифуркации) не означает исчерпания ее работоспособности. В зависимости от гибкости пластинки; условий закрепления краев

в ее плоскости и вида нагружения, критическая (бифуркационная) нагрузка может быть существенно превзойдена вследствие развития мембранных напряжений. Изучение закритического поведения пластинки возможно только на основе нелинейных уравнений равновесия и совместности деформаций (I).

Итак, бифуркационная нагрузка плоской пластинки нередко может быть превзойдена. Существуют, однако, конструкции, в которых такое превышение недопустимо, как например, стенки подкрановых балок при больших давлениях катков и вообще в случае тяжелого режима работы. Не следует допускать выпучивания стенок при регулярных переменных нагрузках. В пластинках, теряющих устойчивость за пределом упругости, при малых колебаниях интенсивности напряжений, протяженность закритической стадии незначительна и предельная нагрузка практически совпадает с бифуркационной. Очевидно, что работоспособность длинных пластинок со свободным краем (полки балок, колонн) также определяется моментом бифуркации.

Большое практическое значение имеет задача об устойчивости за пределом упругости бесконечно длинной полосы с одной свободной, а другой упруго-защемленной стороной при одноосном напряженном состоянии. В таких условиях находятся сжатые полки неравнобоких уголков, швеллеров и двутавров.

Начало выпучивания полки (пояса) швеллера или двутавра быстро приводит к исчерпанию работоспособности стержня, поэтому бифуркационная нагрузка здесь является предельной.

В работах П.Бийлаарда рассмотрены полосы с одной свободно опертой стороной из материала, следующего диаграмме

Прандтля. Результаты непосредственно применимы к расчету полок равнобоких уголков или швеллеров. В двутавровых профилях следует учитывать упругое защемление полок. Это сделано в диссертации Е.В.Борисова [7]. Там же исследована устойчивость прямоугольных пластин, опертых по трем сторонам и подкрепленных ребром вдоль четвертой стороны. Результаты последней работы важны для расчета полок гнутых профилей.

Необходимо остановиться на часто встречающейся ошибочной трактовке принципа равноустойчивости пластинки, входящей в состав сжатого стержня и стержня в целом. Так, например, Ф.Блейх, рассматривая устойчивость пластинок, образующих двутавровый сжатый стержень, приравнивает критическое напряжение полки (пластинки с тремя опертыми и одной свободной сторонами) критическому напряжению идеально прямого центрально-сжатого стержня. В пределах упругости получается

$$b/t = 0{,}2\,\lambda,$$

где b - ширина свеса полки; t - толщина; λ - гибкость стержня. Допустим $\lambda = 150$. Для стального стержня это означает равномерно распределенное критическое напряжение, равное $\sim 0{,}92$ т/см^2 и $b/t = 30$. В действительности необходимо учитывать начальные несовершенства стержня, что приводит к эпюре критических напряжений в опасном сечении, показанной на рис. 2.

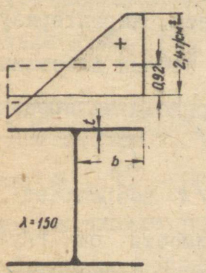


Рис. 2.

На одном из краев полки напряжение достигает предела текучести. Для стали Ст.3 этому соответствует $b/t = 24$; для низколегированной стали (I5ХСНД) $b/t = 20$. Таким образом, при выполнении условия равноустойчивости следует учитывать влияние начальных несовершенств и вытекающую из этого неравномерность распределения напряжений в отдельных пластинках.

Примером учета взаимосвязи пластин служит расчет сжатой полки двутавра. В результате неизбежного начального искривления двутавра в плоскости меньшей жесткости сжатая полка находится в условиях внецентренного сжатия.

Игнорируя жесткую связь стенки с полкой, считаем полку шарнирно опертой на стенку и рассматриваем только взаимодействие двух половин полки. Наиболее напряженную часть полки трактуем как упруго-защемленную пластинку. Предполагая менее напряженную пластину упругой, получаем следующее приближенное выражение для коэффициента упругости защемления

$$\tilde{\gamma} = 2(1-\nu)(\pi^2/\mu^2)\left[\frac{1}{\vartheta} - (1-\alpha)(k_1/k_2)\right], \qquad (6)$$

где k_1, k_2 – первые собственные значения для обеих пластин, предполагаемых упругими; α – параметр, характеризующий наклон эпюры деформаций, μ – отношение сторон пластины, ϑ – коэффициент, отражающий влияние перехода за предел упругости.

При $\alpha = 0{,}5$ допустимое значение b/t возрастает за счет защемления в I,4÷I,56 раза (в зависимости от глубины пластической зоны), при $\alpha = 1/3$ – от I,2 до I,47 раза.

Некоторые стальные конструкции, как например, неразрез-

ные балки и рамы рассчитываются в предположении образования пластических шарниров. Очевидно, что столь высокий уровень напряженности всех частей сечения возможен лишь при обеспечении местной устойчивости всех элементов стержня вблизи пластического шарнира.

Схематизируя работу стенки, рассматриваем прямоугольную свободно опертую пластину, подверженную комбинации чистого изгиба с чистым сдвигом (рис. 3). Используя результаты

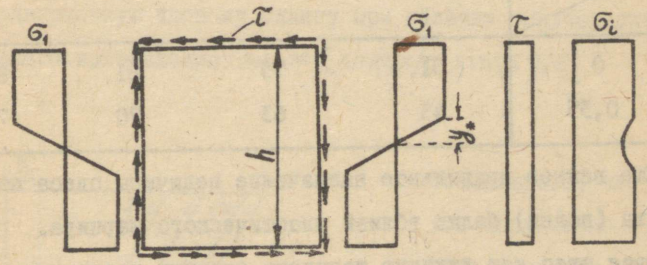


Рис. 3.

П.Бийлаарда для бесконечно длинной полосы из идеального упруго-пластического материала, получаем уравнение взаимодействия в виде [8]

$$(\sigma_т/\sigma_0)\left[(\sigma_1/\sigma_т)^2+(\sigma_0/\tau_0)^2/(3+\sigma_1^2/\tau^2)\right]^{1/2}=\vartheta^*, \qquad (7)$$

где σ_0, τ_0 - критические напряжения при чистом изгибе и чистом сдвиге упругой пластины; σ_1 - критическое краевое нормальное напряжение при двухосном напряженном состоянии; τ - критическое касательное напряжение при $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_т$ -

предел текучести; $\vartheta^* < 1$ – коэффициент, отражающий влияние перехода за предел упругости.

Ниже приводятся предельные значения h/t для стенки при $\sigma_т = 2{,}4$ т/см^2 в функции от высоты упругой зоны стенки $2y_*$ и значения τ/σ_1 (табл.I).

Таблица I

Предельные значения h/t при $\sigma_т = 2{,}4$ т/см^2, $E = 2100$ т/см^2

τ/σ_1 \ $2y_*/h$	0,1	0,2	0,25	0,3
0	51	73	81	89
0,35	45	63	70	77

Еще важнее правильное назначение величины свеса поясного листа (полки) балки вблизи пластического шарнира. Рассматривая свес как длинную шарнирно опертую пластинку, подверженную равномерному сжатию, и пользуясь соотношениями теории деформаций, получаем следующее выражение для критического напряжения стальной пластины

$$\sigma_x = 0{,}081\,(100\ t/b)^2 \ \text{т/см}^2,$$

где $\vartheta = E_s/E$.

Отсюда находим при $\sigma_т = 2{,}4$ т/см^2

E_s/E =	0,1	0,2	0,25	0,3
b/t =	6,8	8,2	9,2	10,1

Закритическое поведение изучалось главным образом для неограниченно упругих пластин. В большинстве случаев исследования сводились к установлению зависимости между нагрузкой

и прогибом или напряжением в какой-либо точке. Как правило, в такой постановке задачи нельзя получить представления о несущей способности пластин и приходится удовлетворяться некоторыми качественными результатами.

Не останавливаясь на общеизвестных фактах замедления роста прогибов и изгибных напряжений вследствие развития растягивающих мембранных напряжений, обратимся к оценке влияния начальных несовершенств с помощью нелинейной теории. М.Шкалоуд [9] рассмотрел квадратную свободно опертую пластину, подверженную чистому сдвигу при наличии синусоидального начального искривления $w_0 = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$.

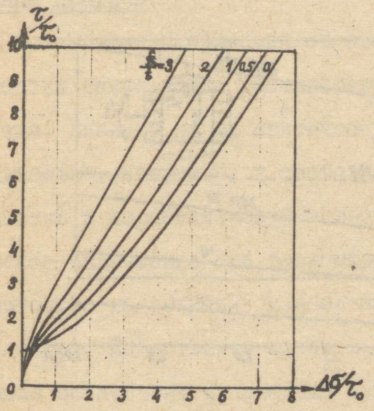


Рис. 4.

Установлено, что краевое напряжение от изгиба в центре пластины убывает при возрастании f_0/t (рис. 4). Если применить какой-либо условный критерий предельного состояния, например, записать его в виде

$$\max \sigma_i = \sigma_T$$

понимая под σ_i интенсивность краевых напряжений, то понижение критической нагрузки за счет начального искривления в достаточно гибких пластинах ($a/t > 150$) получается значи-

тельно меньшим, чем по линейной теории. Еще важнее тот факт, что увеличение амплитуды начального прогиба мало изменяет величину критической нагрузки в особенности для гибких пластин.

Другой пример, взятый из работы [10], относится к квадратной свободно опертой пластинке, стороны которой могут смещаться параллельно в своей плоскости. Пластинка равномерно сжата в направлении одной из сторон и имеет синусоидальное начальное искривление. Принимается условный критерий

$$\sup\left[(1/2a)\left|\int_{-a}^{a}(\chi_{,yy}+\Delta\sigma_x/E)\,dy\right|\right]=\sigma_T. \qquad (8)$$

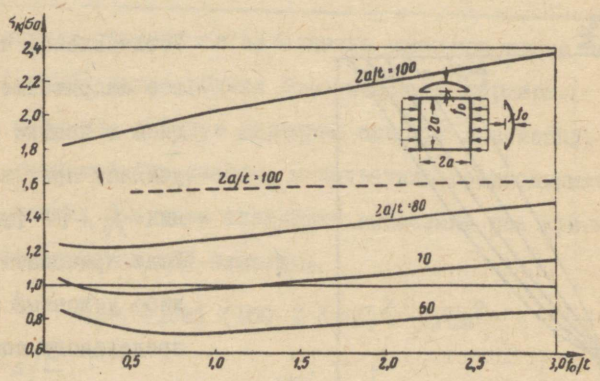


Рис. 5.

На графике (рис. 5) показана зависимость отношения от величин $2a/t$ и f_0/t для пластины из Ст.3 ($\sigma_к$ – критическое напряжение по условию (8); σ_0 – критическое напряжение

при бифуркации для плоской пластинки). Как видно, в достаточно тонких пластинках критическая нагрузка возрастает вместе с f_0/t и существенно превышает бифуркационную нагрузку. Это справедливо и в том случае, когда критерий исчерпания работоспособности принимается в виде

$$\sup\left|\sigma_x + \Delta\sigma_x/\sqrt{2}\right| = \sigma_т , \qquad (9)$$

что заведомо преуменьшает критическую нагрузку (пунктирная кривая на рис. 5). В менее гибких пластинках ($2a/t < 70$), наоборот, критическая нагрузка меньше бифуркационной.

Из сказанного можно сделать важный для практики вывод, что <u>в гибких пластинах не опасны довольно значительные начальные прогибы</u>.

Остаточные напряжения от сварки, прокатки, термической обработки также можно рассматривать как начальные несовершенства. Влияние их на критическую (бифуркационную) нагрузку значительно. Например, в свободно опертой прямоугольной пластинке с параболической эпюрой остаточных напряжений критическое напряжение при равномерном сжатии уменьшается приблизительно на величину наибольшего остаточного сжимающего напряжения. Естественно ожидать, что в закритической стадии влияние остаточных напряжений будет уменьшаться с увеличением гибкости пластины. Это подтверждается исследованием М.Шкалоуда и Ж.Донеа [II], рассмотревших квадратную пластину. На рис. 6 приведена зависимость между $f = w_{max}/t$ и σ/σ_*, где σ - среднее напряжение сжатия; σ_* - критическое (бифуркационное) напряжение идеальной пластины, σ_r - остаточ-

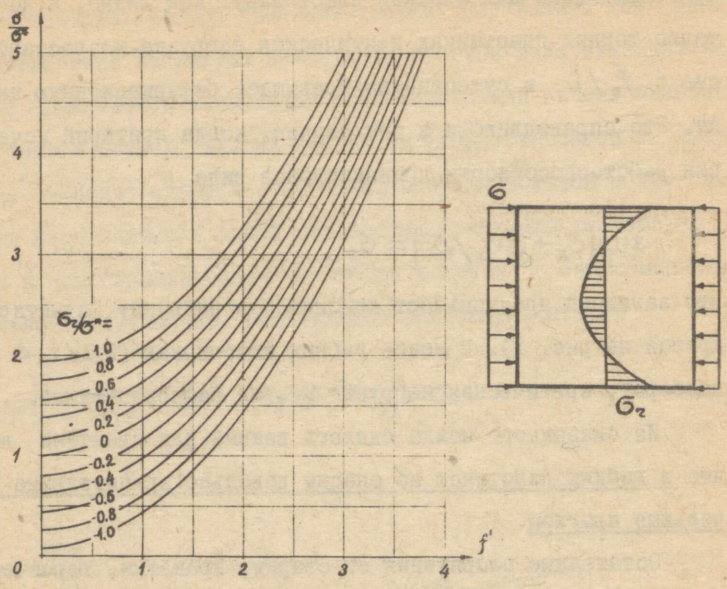


Рис. 6.

ное напряжение у края пластины при самоуравновешенной эпюре (сжатию соответствует знак минус).

Экспериментальная проверка закритического поведения была проведена М.Шкалоудом [I2]. Испытывались стальные балки ⊓-образного профиля пролетом I,8 м. Балки испытывались на изгиб двумя симметрично приложенными сосредоточенными силами, так что зона чистого изгиба составляла I м. Ширина сжатого пояса 200 мм, толщина от I до 2 мм. Предел текучести изменялся от 2,34 до 2,77 т/см^2.

В пяти из шести испытанных балок предельное состояние

наступило вследствие образования пространственного пластического шарнира в сжатом поясе. При этом у краев пластины преобладали мембранные, а посередине изгибные напряжения. Установлено, что формула Винтера для определения величины приведенной ширины b_m сжатой пластины

$$b_m/t = 1{,}9\sqrt{E/\sigma_т}\left[1-0{,}475(t/b)\sqrt{E/\sigma_т}\right] \qquad (10)$$

дает консервативные (преуменьшенные) значения.

С другой стороны формула Кармана $b_m/t = 1{,}9\sqrt{E/\sigma_т}$ дает преувеличенные значения. Можно модифицировать эту формулу, подставляя ϑE вместо E, чем учитывается переход напряжений у краев пластины за предел упругости. Например, при $\vartheta = E_s/E$ получается

$$b_m/t = 1{,}9\sqrt{E_s/\sigma_т}\,. \qquad (11)$$

Из сказанного следует, что до сих пор отсутствует удовлетворительное теоретическое решение задачи разыскания предельного состояния сжатой пластины. Поэтому представляет большой интерес попытка Н.Ф.Ершова получить приближенное решение уравнений Ю.Р.Лепика на основе упрощающих предположений о виде функций Ω_i, характеризующих влияние пластических деформаций. Таким путем уже получены некоторые интересные результаты (3).

Переходим к рассмотрению пластин, укрепленных ребрами.

Как известно, в линейной теории формулируются условия, при которых ребра не изгибаются при выпучивании пластины и устанавливается соответствующая минимальная относительная жесткость ребра γ_*. Превышение жесткости ребра над γ_* не

изменяет критического напряжения пластины. При изучении закритического поведения пластин на основе нелинейной теории выясняется, что ребро изгибается с пластиной и, следовательно, увеличение жесткости ребра сопровождается ростом воспринимаемой нагрузки, хотя этот рост и носит характер асимптотического приближения к некоторому пределу.

М.Шкалоуд и Р.Новотный [I3,I4] рассмотрели свободно опертую пластинку, укрепленную одним или двумя ребрами, делящими высоту ее на равные части. Пластина равномерно сжата параллельно ребрам (оси X). Задача решалась методом Ритца при выборе формы искривления в виде

$$w = f_1 \sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b) + f_2 \sin(k\pi x/a)\sin(n\pi y/b).$$

Целочисленные значения k, n выбирались в зависимости от γ; например, в случае двух ребер для малых значений γ принималось $k = I$, $n = 5$, для больших значений $k = n = 3$.

Граничные условия в плоскости контура принимались в двух вариантах: I) неподвижность сторон $y = 0, b$; 2) параллельное смещение тех же сторон.

За критерий предельного состояния принималось уравнение

$$(1/a)\int_0^a \sigma_{xm}\, dx = \sigma_T, \qquad (I2)$$

где σ_{xm} - мембранное нормальное напряжение, параллельное оси x, на краю пластины.

Характер зависимости нагрузки от γ показан на рис. 7, из которого видно, что при небольшом превышении γ_* рост нагрузки значителен, далее он замедляется и максимум достига-

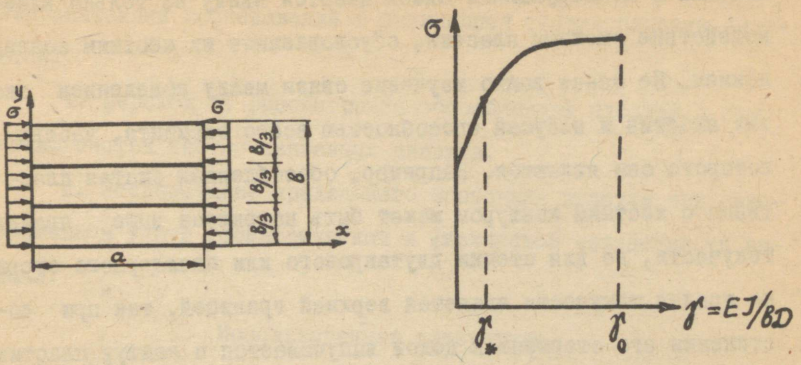


Рис. 7.

ется при γ/γ_* порядка 3–4. При этом значении $\gamma_0 = (3 \div 4)\gamma_*$ ребро остается практически прямым в закритической стадии работы пластины. Учитывая неизбежность начального искривления ребер Ш.Массонне [15] рекомендует принимать $\gamma_0 = (4 \div 9)\gamma_*$. Такую рекомендацию нельзя признать обоснованной, так как небольшое повышение предельной нагрузки не компенсирует значительного увеличения веса ребер.

Эксперимент М.Шкалоуда [16] подтверждает результаты теоретического исследования лишь качественно. Испытанию на изгиб подвергались балки $\sqcap$ -образного сечения. Сжатый лист балки усиливался посередине треугольным гофром.

Отношение b/t изменялось от 96 до 196, высота гофра от $4{,}4\,t$ до $8{,}8\,t$. При $\gamma > 1{,}3\gamma_*$ дальнейшего роста предельной нагрузки не наблюдалось. Это также говорит не в пользу рекомендаций проф. Массонне.

В заключение подчеркнем важность изучения взаимосвязи

пластин в конструкциях. Здесь имеется ввиду не только взаимодействие смежных пластин, обусловленное их жестким соединением. Не менее важно изучение связи между поведением сжатых пластин и несущей способностью всего элемента, частью которого они являются. Например, обособленная сжатая пластинка с жестким контуром может быть напряжена выше предела текучести, но для стенки двутаврового или швеллерного стержня предел текучести является верхней границей, так при достижении его стержень в целом выпучивается и контур пластины перестает быть плоским.

Изучение взаимозависимости местной и общей устойчивости имеет большое значение при отыскании оптимального решения. Ф.Шенли [17], рассматривая тонкостенную трубу квадратного сечения, подверженную осевому сжатию, приходит к заключению, что трубы со стенками, не теряющими устойчивости, имеют меньший вес, чем в случае стенок, работающих в закритической стадии. Этот вывод получается из сравнения показателей оптимальности конструкции ("индексов" конструкции), вычисленных в двух предположениях. Для стенок, сохраняющих устойчивость вплоть до предельного состояния "индекс" равен

$$\varkappa = P/EL^2 = (12{,}6/\pi^2)(\sigma_1/E_t E)^{5/4}.$$

Для выпучивающихся стенок

$$\varkappa = (25{,}2/\pi^2)\sigma_2^2\sqrt{\sigma_м}/E^{5/2},$$

где E_t - касательный модуль, $\sigma_м$ - напряжение в вершине угла. Показывается, что $\sigma_1 > \sigma_2$.

Из сказанного можно сделать заключение, что важнейшими

направлениями исследований в нелинейной теории пластин являются:

I. Переход от рассмотрения обособленных пластин к изучению систем жестко связанных пластин.

2. Исследование предельного состояния пластин при одновременном учете геометрической и физической нелинейности задачи.

Использованная литература

I. Л.А.Колесников, Труды Харьковского авиационного института. 1961, вып. 18.
2. Ю.Р.Лепик, Инженерный сборник. 1956, т. 24.
3. Н.Ф.Ершов, Строительная механика и расчет сооружений. 1962, № 3.
4. С.Д.Лейтес, Материалы по стальным конструкциям. ГПИ "Проектстальконструкция", М., 1958, вып. 3.
5. V.Vogel, Diss., Techn. Hochschule, Stuttgart, 1961.
6. А.З.Локшин, Строительная механика и расчет сооружений. 1966, № 2.
7. Е.В.Борисов, Исследование устойчивости полок тонкостенных профилей и т.д. Автореферат диссертации. М., Центральный научно-исследовательский ин-т строит.конструкций, 1966.
8. Б.М.Броуде, Сборник "К 80-летию Н.С.Стрелецкого". Стройиздат, 1966.
9. M.Škaloud, The Structural Engineer, 1961 (December).
10. Б.М.Броуде, Предельные состояния стальных балок. Госстройиздат, 1953.
11. M.Škaloud, J.Donéa, Acta Technica ČSAV, 1963, N6.
12. M.Škaloud, Acta Technica ČSAV, 1965, N6.
13. M.Škaloud, R.Novotný, Acta Technica ČSAV, 1964, N3.
14. M.Škaloud, R.Novotný, Acta Technica ČSAV, 1964, N6.
15. Ch.Massonnet, Mém. Soc. Roy. Sci. Belg., 1963, v.8, N5.
16. M.Škaloud, Acta Technica ČSAV, 1963, N5.
17. E.Shanley, Mém. Soc. Roy. Sci. Belg. 1963, v. 8, N5.

ПОСЛЕКРИТИЧЕСКАЯ РАБОТА ПЛАСТИН И ИНЖЕРЕНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ*

Н.Ф. Ершов

Горьковский политехнический институт

I. Введение. Работоспособность сжатых конструкций, включающих в себя жесткие связи - ребра и пластины, в значительной степени определяется поведением пластин.

Исследование сжатых или подвергнутых сдвигающим деформациям пластин ведется в нескольких направлениях: а) определение критических напряжений, при которых идеализированная плоская пластина теряет устойчивость, б) изучение поведения пластин после потери ими устойчивости. (К этому же направлению примыкают вопросы сжатия или сдвига пластин, имеющих начальное искривление), в) расчет пластин при совместном действии на них сжимающей (сдвигающей) и поперечной нагрузок.

В инженерных расчетах участие сжатых пластин в работе тонкостенных конструкций оценивается обычно редукционным коэффициентом, а в заграничной практике - приведенной шириной пластины. Для сжатых в одном направлении пластин редукционный коэффициент

$$\varphi = \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{m}} \quad ,$$

* Подробная библиография по послекритической работе пластин приведена в [4], [5]. Настоящий обзорный доклад затрагивает некоторые новые вопросы, относящиеся к расчету тонкостенных конструкций.

где $\sigma_{ср}$ - средняя величина напряжений, сжимающих пластину, $\sigma_{ж}$ - напряжения в жестких связях (кромочные напряжения). В ряде областей (например, в судостроении) при расчетах тонкостенных конструкций определенную часть пластины, потерявшей устойчивость, относят к жестким связям, а оставшуюся часть редуцируют по формуле

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_э}{|\sigma_ж|},$$

где $\sigma_э$ - напряжение, при котором плоская пластина упруго теряет устойчивость (критическое напряжение).

Чтобы установить величину редукционных коэффициентов, необходимо решить задачу о поведении пластин после потери устойчивости, или задачу о продольном изгибе, если пластины имеют начальное искривление и к нему приложена поперечная нагрузка. Это можно сделать, применив аппарат теории изгиба гибких пластин больших прогибов.

Расчетные уравнения в упругой области имеют следующий вид:

Уравнение равновесия

$$D\nabla^2\nabla^2 w - t\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial x\,\partial y}\right] = q. \qquad (I)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\phi = \left[\frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial x\,\partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+w_c)}{\partial y^2} -$$

$$-\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2}\right]. \qquad (2)$$

Здесь D - цилиндрическая жесткость пластин, t - толщина пластины, E - модуль Юнга, ϕ - функция напряжений, w - функция прогиба, w_c - функция начального искривления (прогиба), q - интенсивность поперечной нагрузки. Оси x, y расположены в плоскости пластины.

2. Пластины, вытянутые в поперечном направлении. Применительно к пластинам, шарнирно опертым по своим кромкам и сжатым в одном направлении (когда $q = 0$, $w_c = 0$), задача определения редукционных коэффициентов была решена в 1932 году П.А.Соколовым [20].

Задача решалась при следующих условиях: кромки пластины не могут искривляться, по сжатым кромкам задана средняя величина сжимающих направлений, по противоположным кромкам средняя величина напряжений равна нулю, жесткостью ребер, расположенных по кромкам пластины, на кручение пренебрегается.

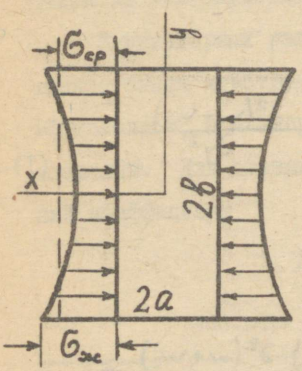


Рис. I.

Рассматривались пластины, подкрепленные поперечным набором, т.е. такие, у которых $b > a$ (рис.I). При отношениях $b:a = 2$, равных двум и трем, принималось

$$w = \left(A_1 \cos\frac{\pi y}{2b} + \right.$$

$$+A_{13}\cos\frac{3\pi y}{2b}+A_{15}\cos\frac{5\pi y}{2b}\Big)\cos\frac{\pi x}{2a}$$

Для квадратной пластины

$$w=\Big(A_{11}\cos\frac{\pi x}{2a}+A_{31}\cos\frac{3\pi x}{2a}\Big)\cos\frac{\pi y}{2b}+A_{13}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}.$$

Задача решалась методом Бубнова-Галеркина.

Как результат обработки этого решения П.Ф.Папковичем предложена формула для редукционного коэффициента, нашедшая широкое распространение и вошедшая в справочники [I8],

$$\varphi=0{,}44\,\frac{a}{b}\Big(1-\frac{\sigma_э}{|\sigma_ж|}\Big)+\frac{\sigma_э}{|\sigma_ж|}. \qquad (3)$$

Для квадратной пластины

$$\varphi=0{,}44+0{,}56\,\frac{\sigma_э}{|\sigma_ж|}. \qquad (4)$$

Длинная пластина, если она по контуру шарнирно оперта, при потере устойчивости разбивается полуволнами на квадраты. На этом основании формула (4) была распространена и на пластины, у которых размер a значительно больше b (продольной системы набора). При этом предполагалось, что и после потери устойчивости число полуволн пластины не меняется.

Редуцирование по формуле (3) приводит к любопытным выводам. На рис. 2 показана зависимость средних сжимающих напряжений в кг/мм^2 в функции от размера a при данном уровне $\sigma_ж$ и при заданных b и t. Видно, что с определенного момента рост размера a ведет к увеличению $\sigma_{ср}$, т.е. работоспособность пластины повышается. Несложный анализ показывает, что подобная зависимость существует, когда

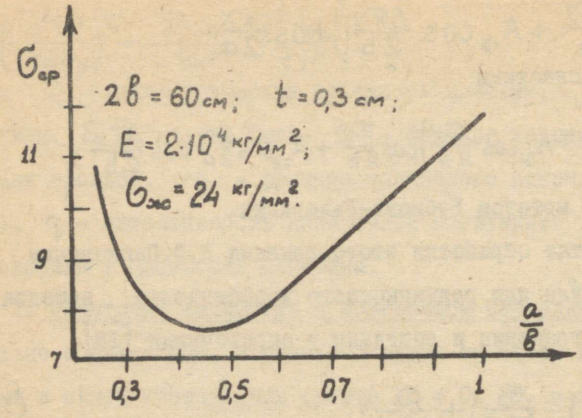


Рис. 2.

$$\frac{12\left(1-\mu^2\right)\left|\sigma_{ж}\right|}{\pi^2 E\left(\frac{100t}{2b}\right)^2} > 4{,}6,$$

т.е. для гибких пластин с относительно высоким уровнем напряжений в жестких связях.

Для конструктора это положение реализуется в возможности более редкой постановки поперечных ребер с целью увеличения прочности панели на сжатие, что в подавляющем большинстве случаев является сомнительным.

Задача Соколова тем же методом, но в более точной постановке (в выражении для функции прогиба бралось до I5 членов ряда), решалась H.G.Schultz [26] с просчетами на электронных вычислительных машинах. На базе уравнений (I), (2) просчитаны также сжатые пластины с $a<b$, имеющие регуляр-

ное начальное искривление (по форме потери устойчивости). Эти просчеты дали результаты, отличные от результатов Соколова особенно в зоне больших $\frac{b}{a}$. Некоторые сравнительные цифры приведены в таблице I.

Таблица I

	$\frac{b}{a}$	8	I,5
$\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_э} = I,2$	φ [I8]	0,259	0,7I4
	φ [26]	0,442	0,772
$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_э} = I,6$	φ [I8]	0,I34	0,525
	φ [26]	0,I75	0,590

3. Пластины квадратные. Значительное число работ посвящено исследованию послекритической работы сжатых квадратных пластин. Результаты этих работ частично обобщены в [4 , 32]. Следует указать на приближенные формулы Кармана

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_э}{|\sigma_ж|}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

и Маргера

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$$

и уточненное решение М.Леви.

Последующие исследования Ростовцева Г.Г. [I9], Калинина В.С. [II], Алексеева С.А. [I], Вольмира А.С. [5], Биркгана А.Ю. [4] показали, что после потери устойчивости по мере развития деформаций происходит изменение числа полуволн, образующихся по длине пластины. Это приводит к некоторому

уменьшению редукционных коэффициентов. Установлено, что у квадратной сжатой пластины, шарнирно опертой по контуру, первое увеличение числа полуволн (перескок от одной полуволны к двум) по длине происходит по Калинину (энергетический метод) при $n=\frac{|\sigma_{кр}|}{\sigma_э}=3$, по Алексееву (метод последовательных приближений) при n = 3,43, по Биркгану (метод сеток) при n = = 3,5. Считается [4], что на данный период для квадратных пластин наиболее точные значения редукционных коэффициентов получены методом сеток, если контур пластины жесткий.

Вопрос о поведении сжатых пластин после потери ими устойчивости с учетом кручения и изгиба подкрепляющих ребер рассмотрен в [I7]. Выяснилось, что при обычных инженерных соотношениях размеров пластин и подкрепляющих их ребер, в частности в судостроении, прогибом ребер в плоскости их наибольшей жесткости при определении редукционных коэффициентов можно пренебречь. Учет скручивания ребер, происходящего при потере устойчивости и при деформации пластины после потери устойчивости, приводит к некоторому увеличению редукционных коэффициентов пластин по сравнению с полученными Папковичем П.Ф. Не оказывает существенного влияния на величину редукционного коэффициента и учет касательных напряжений в местах связи ребер с пластиной [I6].

4. Анизотропные пластины. Исследование в первом приближении послекритической работы сжатых в одном направлении анизотропных квадратных пластин без учета последующего волнообразования показало [2I], что сдвиговые характеристики материала не оказывают влияния на редукционные коэффициенты

пластин. По-видимому, это положение требует проверки.

Результаты расчета во втором приближении пластмассовых пластин [13] и в первом приближении пластин из стеклопластика с параллельно-диагональной схемой армирования выявили [21] практическое совпадение их редукционных коэффициентов с коэффициентами для изотропных пластин. Число полуволн, образующихся по направлению сжатия, существенным образом зависит от отношения жесткостей D_1/D_2. Пластина с малой жесткостью D_1 выпучивается при прочих равных условиях по большему числу полуволн, чем изотропная пластина [4].

5. Пластины, вытянутые в продольном направлении ($a>b$). Поведение в послекритической стадии сжатой изолированной квадратной пластины и образовавшегося после потери устойчивости квадрата вытянутой пластины различно. Рассмотрим пластину, шарнирно закрепленную по контуру.

В квадратной пластине в закритической стадии перескок от одной полуволны к двум, как указывалось в п.3, происходит при $n = 3{,}4 \div 4{,}0$ (по данным различных авторов). В вытянутой же пластине перескок от m числа полуволн (числа квадратов, на которые разбилась пластина) происходит к $m+1$ полуволнам и т.д. При изменении числа полуволн происходит скачкообразное уменьшение редукционного коэффициента, но как показывают исследования, это уменьшение не превышает нескольких процентов. В таблице 2 по результатам расчета в первом приближении* в зависимости от m приведены значения n, при кото-

* Результаты исследований автора.

Таблица 2

m	I	2	3	4
n	3,40	I,865	I,498	I,I09

рых происходит перескок от m к $m+1$ полуволнам.

Дальнейший перескок происходит от $m+1$ к $m+2$ полуволнам. Соответствующие значения n приведены в таблице 3.

Таблица 3

m	I	3	I0
n	75	4,8	I,53

Как видно из таблиц, дробление полуволн у вытянутых пластин происходит тем чаще, чем больше отношение длины пластины к ширине. Расчетная кривая редукционных коэффициентов для вдоль вытянутых пластин лежит несколько ниже кривой для квадратной пластины.

6. Влияние начальной погиби и поперечной нагрузки. На работу сжатых пластин, вытянутых в поперечном направлении ($a<b$), начальная погибь оказывает отрицательное влияние, если форма погиби соответствует форме потери устойчивости пластины [22]. Начальная погибь пластины, вытянутой вдоль, практически не оказывает влияния на длину волн, образующихся после потери устойчивости [3 , 33]. Погибь не предотвращает появления обычной выпученной формы пластины. Следует сделать ряд замечаний о влиянии начальной погиби на величину критических напряжений. Опыты показали, что если погибь не

регулярная (пластина со случайными неправильностями формы), то она практически не оказывает влияния на величину критических напряжений. При регулярной погиби наблюдаются явления, идентичные явлениям при воздействии на сжатую пластину поперечной распределенной нагрузки. Если стрелка прогиба меньше 50% толщины пластины ($\frac{f}{t}<0,5$), то имеется только одно верхнее критическое напряжение, и поперечная нагрузка практически не изменяет величины этого напряжения для только сжатой пластины [3]. Как и начальное искривление, поперечная нагрузка не предотвращает появления обычной выпученной формы пластины и мало влияет на длину волн в закритической стадии работы.

Если стрелка прогиба превосходит $0,5\,t$, то имеются два критических сжимающих напряжения. В инженерной практике расчет ведется по нижнему критическому напряжению *. Роль верхнего критического напряжения сказывается в процессе потери устойчивости и в закритической стадии работы пластины, ибо в процессе хлопка в материале могут появиться пластические деформации. В таблице 4 дана зависимость между $\frac{f}{t}$ и размерами пластины, вытянутой вдоль, когда в процессе хлопка в материале появляются пластические деформации. Подсчеты проведены автором в первом приближении, верхнее крити-

* В случае более сложного нагружения, когда, например, сжимающие напряжения возрастают пропорционально увеличению интенсивности поперечной нагрузки, в зависимости от коэффициента пропорциональности критических напряжений может быть несколько, но может и не быть ни одного.

Таблица 4

$\frac{f}{t}$	$\sqrt{\frac{E\pi^2}{\sigma_т}} = 87$	$\sqrt{\frac{E\pi^2}{\sigma_т}} = 73{,}3$
0,8	$\frac{a}{t} <$ 79,3	$\frac{a}{t} <$ 66,8
I,0	87	73,3
I,2	93	78,5
I,4	98,2	83
I,5	I02	86,2

ческое напряжение бралось по Блейху [3], за нижнее бралось критическое напряжение плоской пластины.

Отметим еще одно важное обстоятельство с точки зрения инженерных расчетов. Имеется много работ [IO], [24], [27], [37] и др., где рассматривается поведение сжатых квадратных пластин, имеющих начальную погибь. Но эти результаты необоснованно распространяются на вдоль вытянутые пластины. На работу квадратной пластины начальная погибь, взятая по форме потери устойчивости, всегда оказывает отрицательное влияние. Вытянутая же пластина с начальной погибью уже при $\frac{a}{b} = 2$ работает практически как жесткая связь до верхнего критического напряжения.

7. Пластины, подкрепленные упругими ребрами. Подкрепление упругими ребрами применяется в качестве одной из эффективных конструктивных мер по увеличению несущей способности пластин. В основе расчетов подкрепленных пластин на устойчивость и продольный изгиб лежат следующие физические модели.

I) Конструктивно ортотропная модель, получаемая путем "размазывания" жесткостных параметров подкрепляющих связей. Эта модель широко используется в задачах устойчивости, колебаний и приводит к удовлетворительным результатам. Однако в ряде случаев, как показывают сравнительные расчеты, учет дискретности расположения ребер может привести к поправкам в значениях необходимой жесткости ребер до 20%. Критические напряжения, получаемые по теории конструктивной ортотропии, оказываются завышенными. Послекритическое поведение сжатых в одном направлении пластин на базе этой теории рассмотрено в работе [26]. Исходными при решении задачи брались уравнения гибких ортотропных пластин большого прогиба. Для пластин, подкрепленных в одном и в двух направлениях, определялись редукционные коэффициенты и сжимающие напряжения, при которых в материале потерявших устойчивость пластин появлялись пластические деформации.

2) Модель, позволяющая учесть дискретность расположения подкрепляющих ребер и плоскостного характера напряженного состояния, возникающего в пластине. Однако дискретность расположения упругих связей и характер их взаимодействия с пластиной учитываются приближенно, путем введения в состав профиля подкрепляющего ребра некоторого присоединенного пояска обшивки. Послекритическое состояние сжатой пластины, подкрепленной поперечными упругими ребрами, рассмотрено в работе [I4]. Решение проведено в первом приближении энергетическим методом, а функция напряжений отыскивалась из уравнения неразрывности Кармана. В функции от жесткости

подкрепляющих ребер исследуются условия изменения числа полуволн в процессе деформации, определяются редукционные коэффициенты.

Вторая модель приводит к более правильным качественным и количественным результатам, чем первая. Однако и здесь требуется, по-видимому, решение в более высоких приближениях, т.к. при высоких значениях сжимающих напряжений расчеты приводят к результатам, не отвечающим физическому смыслу.

3) Третья модель требует строгого соблюдения условий сопряжения подкрепляющих ребер с пластиной, что позволяет наиболее точно описать совместную работу отдельных частей рассматриваемой конструкции. Однако здесь приходится предъявлять весьма жесткие требования к выбору расчетного метода. На базе этой модели пока что решены лишь отдельные задачи, относящиеся к изгибу, устойчивости и колебаниям подкрепленных пластин [I7].

Не получила еще решения и интересная задача о послекритическом поведении пластин, в подкрепляющих ребрах которых в процессе их продольного изгиба появляются пластические деформации.

8. Влияние пластических деформаций. Предельное состояние конструкций по прочности оценивается или по фибровой текучести элементов, или же по предельному моменту. Числовые расчеты, проведенные на базе уравнений (I),(2), показали,что для широкого диапазона размеров пластин пластические деформации в материале задолго до того, как напряжения в жестких связях достигнут предела текучести [7], [23], [26]. На ри-

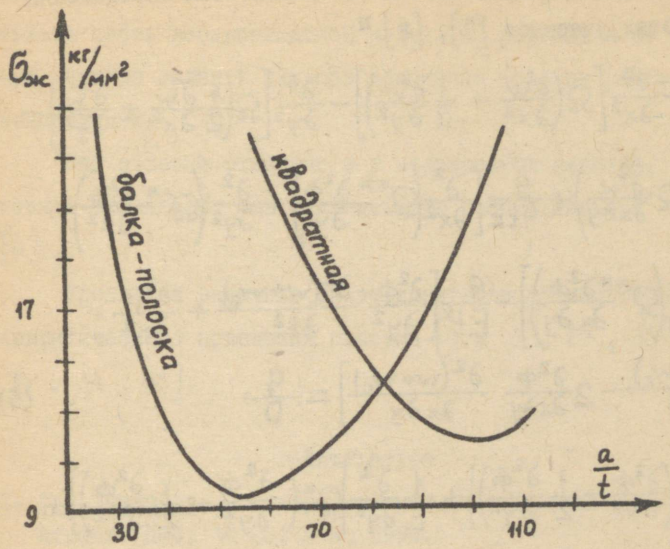


Рис. 3.

сунке 3 для материала пластины с $\sigma_т = 24$ кг/мм^2 приведены значения $\sigma_ж$ в функции от $\frac{a}{t}$, при которых в шарнирно опертой по кромкам сжатой пластине после потери ею устойчивости появляются пластические деформации.

Поэтому при анализе прочности сжатых тонкостенных конструкций необходимо решать задачу послекритического поведения пластин, упруго потерявших устойчивость, с учетом появляющихся в определенных зонах пластических деформаций. Решению этих вопросов посвящен ряд работ автора [6], [7], [8], [9], а также [37] и [38].

Трудности решения задачи для пластин с конечным отношением сторон заключаются в совместном интегрировании уравнений (1), (2) для упругих участков и уравнений (5), (6) для

упруго пластических участков с необходимостью определения границы этих участков [7], [8].*

$$\nabla^2\nabla^2 w - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Omega\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Omega\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \frac{9}{4tE}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) -\right.$$

$$\left. - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right)\right] - \frac{9}{Et^2}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial x \partial y}\right] = \frac{q}{D}. \qquad (5)$$

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Omega^x\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Omega^x\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{3}{E}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\Omega^x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right) - \frac{t}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) -\right.$$

$$\left. - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\Omega^{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] = \left[\frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial x \partial y}\right]^2 - \left(\frac{\partial^2 w_c}{\partial x \partial y}\right)^2 -$$

$$- \frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 (w+w_c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2}. \qquad (6)$$

В уравнениях (5), (6) параметры Ω являются функциями интенсивности напряжений.

С инженерной точки зрения важность задачи подчеркивается тем обстоятельством, что с появлением пластических дефор-

---

* Уравнения для случая $w_c = 0$ получены Ю.Р.Лепиком [15].

маций гибкая сжатая связь в определенных условиях может сбрасывать часть воспринимаемой нагрузки, передавая ее на соседние жесткие связи и ухудшая тем самым условия работы всей конструкции.

Это явление отмечено и у неразрезных пластин, несущих, помимо сжимающей, еще и поперечную распределенную нагрузку [9].

Уделяется внимание экспериментальному исследованию послекритического поведения пластин [3, 5, 29, 30, 31, 33, 34, 36].

Литература

I. С.А.Алексеев, Послекритическая работа гибких упругих пластинок. ПММ, V. 20, № 6, 1956.

2. В.П.Белкин, Работа после потери устойчивости элементов палубных перекрытий. Судпромгиз, Л., 1956.

3. Ф.Блейх, Устойчивость металлических конструкций. ГИФМЛ, М., 1959.

4. А.С.Вольмир, Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.

5. А.С.Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.

6. Н.Ф.Ершов, К расчету по предельным состояниям сжатых конструкций с элементами различной жесткости. Строительная механика и расчет сооружений, № 1, 1960.

7. Н.Ф.Ершов, Упруго-пластический изгиб сжатых гибких пластин. Труды Горьковского инженерно-строительного ин-та, вып. 39, 1961.

8. Н.Ф.Ершов, Об упруго-пластическом изгибе пластинок при больших прогибах. Строительная механика и расчет сооружений, № 3, 1962.

9. Н.Ф.Ершов, Упруго-пластическое состояние сжато изогнутых пластин. Строительная механика корабля. Труды НТО судостроительной промышленности, Л., 1963.

10. Б.И.Забавников, О сжатии прямоугольных пластинок с начальной погибью. Труды Воронежского инженерно-строительного ин-та, № 8, 1961.

11. В.С.Калинин, Работа палубного настила после потери устойчивости. Труды ВНИТОСС, т. 6, в. 2, 1955.

12. М.А.Колтунов, Поведение пластинок после потери устойчивости. Вест. МГУ, № 10, 1953 и № 6, 1962.

13. М.Н.Кузьмичев, А.З.Локшин, Нелинейный изгиб пластин из пластмасс. Судостроение, № 5, 1964.

14. Я.И.Короткин, Поведение палубных пластин при поперечной системе набора после потери устойчивости. Труды НТО судостроительной промышленности, вып. 35, 1960.

15. Ю.Р.Лепик, Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инженерный сборник, т. XXIУ, 1956.

16. Х.М.Муштари, Приближенное определение редукционного коэффициента подкрепленной пластинки при осевом сжатии. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-математических наук, вып. 7, 1955.

17. В.А.Постнов, Поведение после потери устойчивости сжатых пластин, подкрепленных продольными ребрами. Диссертация, ЛКИ, 1954. Изгиб, устойчивость и колебания судовых пластин, перекрытий и оболочек, подкрепленных упругими связями. Диссертация, ЛКИ, 1966.

18. П.Ф.Папкович, Строительная механика корабля, ч.2, Судпромгиз, Л., 1941.

19. Г.Г.Ростовцев, Продольно-поперечный изгиб прямоугольной пластины, соединенной на контуре с ребрами. Инженерный сборник, т. УШ, 1950.

20. П.А.Соколов, О напряжениях в сжатых пластинах после потери устойчивости. Труды НИИСа, вып. 7, 1932.

21. М.К.Смирнов, Б.П.Соколов, Я.С.Сидорин, А.П.Иванонов, Прочность корпуса судна из стеклопластика. Изд. Судостроение, Л., 1965.

22. Г.О.Таубин, О влиянии начальной погиби на редукционные коэффициенты. Труды ЦНИИ им. Крылова, вып. 150, 1959.

23. Ю.А.Шиманский, Изгиб листов сжатых корпусных перекрытий после потери ими устойчивости. Судостроение, № 1, 1945.

24. Ö. Csellár, E. Elás, Voilement des plagues minces en cas d'une courbure initiale. Acta techn. Acad. sci. hung, 11, N 3-4, 1955.

25. M. Škaloud, Post-critical behaviour of compressed Webs. Consult. Engr (Engl.), 26, N 6, 1964.

26. H.G. Schultz, Über die effektive Breite druckbeanspruchter Schiffsplatten und das effektive Widerstandsmoment des Schiffskastenträgers mit ausbeulendem Längsverband. Schiff und Hafen, H. 8, 1964.

27. H.G. Schultz, Neue Ergebnisse der Schiffs festigkeitsforschung. Schiff und Hafen, H. 12, 1964.

28. J.M. Murray, Образование волнистости в местах обшивки судна. Bulletin Technigue du Bureau "Veritas", VIII, T. 37, N 8, 1955.

29. N. Yamaki, Experiments on the posthuckling behaviour of square plates loaded in edge compression. Trans. ASME, E 28, N2, 1961.

30. R.C. Tennyson, An experimental investigation of the behaviour of stiffend plates in axial compression. UTIA Techn. Note, N 57, 1961.

31. I.S., Chapman, S.R. Sparkes, Experiments on box girdes. Trans. Inst. Engrs. und Shipbuilders Scotland, 99, N3, 1955-1956.

32. A. Neut, Postbuckling behaviour of structures. J. Roy. Aeronaut. Soc., 61, N 563, 1957.

33. D.J. Ferrar, Investigation of skin buckling. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, N 2652, 1953.
34. K.C. Rockey, F. Jenkins, The behaviour of welsplates of plate girders subjected to pure bending. Struct. Engr., 35, N 5, 1957.
35. M. Škaloud, Effet d'une courbure intiale sur be comportement, postcritique d'une aime comprimée uniformément et renforcée par un raidisseur longitudianal. Acier, 30, N 5, 1965.
36. B. Sc. Jaroszynski, Experiments on compression of double-bottom plating. International Shipbuilding Progress, V. 9, N 90, 1962.
37. N. Yamaki, Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs., N A-59, 1958, N APMW-22, 1959.
38. M. Škaloud, Limiting State of Webplates. "Acta techn. ČSAV" 7, N 5, 1962.

О ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

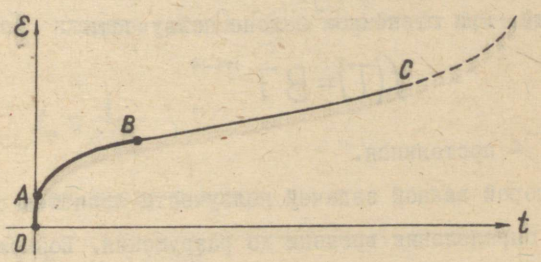
Л.М.Качанов

Ленинградский государственный университет

I. Введение. Рассмотрим вопросы разрушения металлических оболочек, испытывающих ползучесть. Аналогичные построения иногда пригодны и для анализа прочности оболочек, изготовленных из полимеров.

Под ползучестью понимается медленная текучесть под действием нагрузки. Явление ползучести металлов известно давно. С увеличением температуры и напряжений скорость ползучести резко возрастает. С развитием новой техники учет явления ползучести стал совершенно необходимым. К этой же необходимости приводит и все расширяющееся применение разнообразных легких сплавов, для которых заметная ползучесть обнаруживается при нормальной или слегка повышенной температуре.

На фиг. I показана типичная кривая ползучести при одно-



Фиг. I.

осном растяжении при постоянной нагрузке.

Скорость ползучести ξ_1 на участке установившейся ползучести BC - нелинейная функция напряжения σ_1. Наиболее часто используется степенная аппроксимация

$$\xi_1 = B_1 \sigma_1^m , \qquad (I.I)$$

где B_1, m - постоянные, характерные для данного материала при данной температуре; как правило, $m > I$ и доходит иногда до I0÷I2 и выше.

В проблеме ползучести можно выделить два важных аспекта. Во-первых, это - задача определения напряжений и деформаций в теле; данная задача аналогична соответствующей задаче для упругого тела, отличаясь от последней нелинейным законом течения [6]

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} f(T) S_{ij} , \qquad (I.2)$$

где ξ_{ij} - скорости деформации, S_{ij} - компоненты девиатора напряжения, $T = (\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij})^{1/2}$ - интенсивность касательных напряжений. При степенном законе ползучести

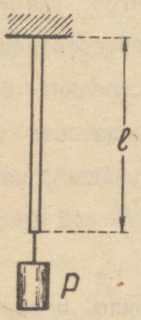
$$f(T) = B T^{m-1} , \qquad (I.3)$$

где B - постоянная.

Второй важной задачей ползучести является своеобразная задача определения времени до разрушения. Возможны два крайних типа разрушения: "вязкое", характеризуемое большими деформациями и происходящее обычно при значительных напряжениях, и "хрупкое", характеризуемое малой деформацией при отно-

сительно малой нагрузке.

Для определения времени "вязкого разрушения" анализируется неограниченное квазивязкое течение детали под действием заданных нагрузок. В качестве примера рассмотрим растяжение цилиндрического стержня под действием постоянного усилия (фиг. 2). По условию несжимаемости



Фиг. 2.

$$lF = l_0 F_0, \qquad (I.4)$$

где l, F - текущие, а l_0, F_0 - начальные значения длины и площади поперечного сечения. Скорость деформации $\xi_1 = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$ связана с напряжением $\sigma_1 = P/F$ степенным законом (I.I). Выполняя интегрирование, получаем:

$$\xi_0 m t = 1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^m,$$

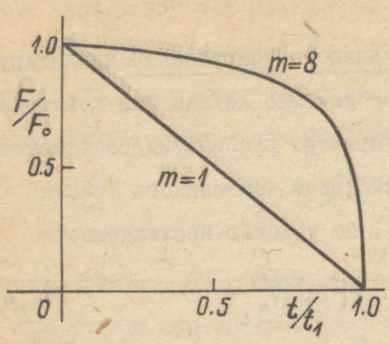
где $\xi_0 = B_1 \sigma_0^m$ есть скорость деформации при начальном напряжении. Определим время вязкого разрушения t_1 как время, для которой площадь $F = 0$ (или $l = \infty$). Очевидно, что [I]

$$t_1 = \frac{1}{m\xi_0}. \qquad (I.5)$$

Согласно полученному решению

$$\frac{F}{F} = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (I.6)$$

Характер течения существенно зависит от показания m.



Фиг. 3.

При больших m деформация вначале развивается сравнительно медленно, затем скорость процесса резко возрастает (фиг. 3).

"Хрупкое" разрушение объясняется постепенным развитием трещин. Состояние трещиноватости (или "поврежденности") материала характеризуется скалярной величиной $0 \leq \psi \leq 1$ ("сплошностью").

Функция ψ описывает рассеянное разрушение материала. При значительном уровне поврежденности в конечной стадии разрушения возникают магистральные трещины (фиг. 4). Конечная стадия относительно кратковременна, поэтому подобные эффекты (как и появление шейки в теории вязкого разрушения) не рассматриваются.



Фиг. 4.

Сплошность ψ удовлетворяет уравнению [6]

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{max}}{\psi}\right)^n, \qquad (I.7)$$

где A, $n \geq 0$ - постоянные. Под σ_{max} понимается истинное максимальное растягивающее напряжение в данной точке.

При малых деформациях развивается чисто хрупкое разрушение, тогда $\sigma_{max} = const = \sigma_0$ и из (I.7) следует, что

$$1-\psi^{n+1}=A(n+1)\sigma_0^n t\,.$$

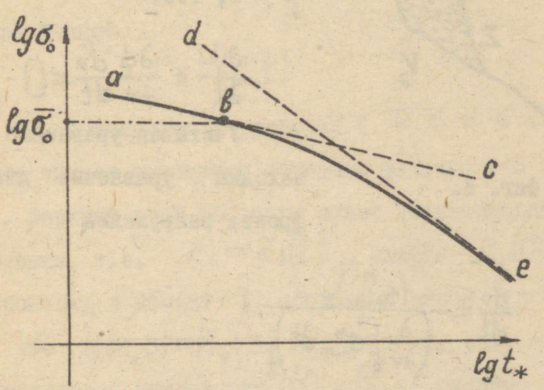
В момент разрушения t' сплошность $\psi = 0$, откуда находим

$$t'=\frac{1}{(n+1)A\sigma_0^n}\,. \qquad (I.8)$$

Процесс трещинообразования может происходить в условиях значительных деформаций, тогда $\sigma_{max} = P/F$, причем F определяется зависимостью (I.6). Внося это значение в (I.7) и выполняя интегрирование, находим время разрушения t_*, отвечающее значению $\psi = 0$

$$\frac{t_*}{t_1}=1-\left(1-\frac{m-n}{m}\,\frac{t'}{t_1}\right)^{\frac{m}{m-n}}. \qquad (I.9)$$

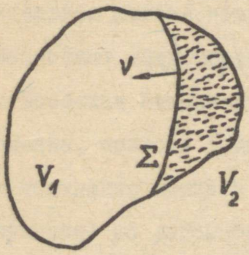
Это уравнение имеет смысл при $t_* < t_1$.



Фиг. 5.

Рассмотренные случаи показаны на фиг. 5 в логарифмической сетке координат. Прямая abc соответствует решению Хоффа, прямая de – зависимости (I.8) для чистого хрупкого разрушения. Хрупкое разрушение, развивающееся на фоне растущих деформаций ползучести, описывается кривой be.

При неоднородном напряженном состоянии тела необходимо различать две стадии разрушения. В первой стадии ("стадии скрытого разрушения") $0 \leq t \leq t_1$ в каждой точке тела сплошность $\psi > 0$. В момент $t = t_1$ в некоторой точке (или области) тела возникает местное разрушение. Распространение местных разрушений приводит к разрушению всего тела. Пусть в момент $t > t_1$ разрушение захватывает область V_2 (фиг. 6). Последняя отделена от области V_1 поверхностью Σ – фронтом разрушения, на котором $\psi = 0$, т.е.



Фиг. 6.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0.$$

Учитывая уравнение для ψ, находим уравнение движения фронта разрушения

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{(\sigma^n_{max})_\Sigma}{\left(\frac{\partial}{\partial v}\int_0^t \sigma^n_{max}\,dt\right)_\Sigma}. \qquad (I.10)$$

2. Вязкое разрушение безмоментных оболочек вращения.

При больших деформациях безмоментная схема приобретает не-

сомненное значение.

Напряженное состояние безмоментных оболочек при больших пластических деформациях изучено в статьях Д.С.Григорьева [9] и др.авторов. В работах Ф.Одквиста [10,11] и И.Г.Терегулова [12] рассмотрена ползучесть мембран и оболочек при конечных перемещениях, но малых по сравнению с единицей удлинения.

Рассмотрим задачу о больших деформациях ползучести тонкой безмоментной оболочки вращения, испытывающей действие внутреннего давления p и осевого усилия P. Значения нагрузок могут, вообще говоря, зависеть от времени. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ срединная поверхность оболочки задана уравнением

$$r = r_0(z), \qquad (0 \leqslant z \leqslant z_{10})$$

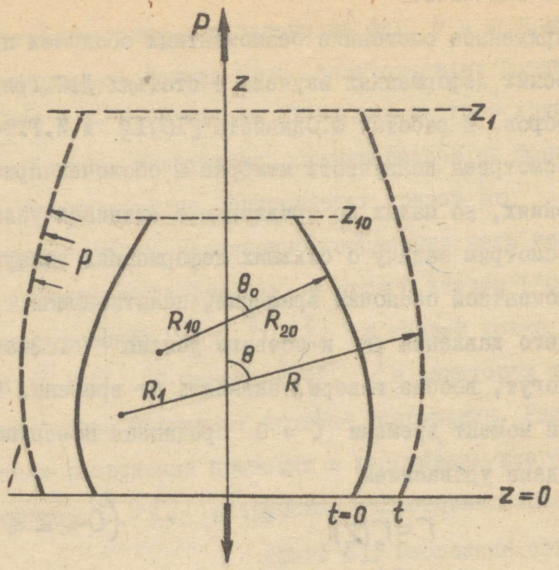
где r, z - цилиндрические координаты; начальная толщина оболочки равна $h_0 = h_0(z)$.

В момент времени t срединная поверхность характеризуется уравнением

$$r = r(z,t)$$

причем z изменяется в пределах ($0 \leqslant z \leqslant z_1$). Таким образом, нижнее основание оболочки фиксировано на уровне $z=0$. Верхний край оболочки может перемещаться в осевом направлении, т.е. $z_1 = z_1(t)$, причем $z_1(0) = z_{10}$. Толщину оболочки в момент t обозначим через $h = h(z,t)$; очевидно, что $h(z,0) = h_0(z)$. Пусть σ_1, σ_2 - меридиональное и кольцевое напряжения, R_1, R_2 - главные радиусы кривизны, θ - угол между нормалью к поверхности и осью z

ТАУ Репозиторий



Фиг. 7.

(фиг. 7). Тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{h}\,, \tag{2.1}$$

$$2\pi r h \sigma_1 \sin\theta = P\,, \tag{2.2}$$

где P - осевое усилие в данном сечении.

По известным формулам дифференциальной геометрии имеем

$$R_1 = -\frac{1}{r''}\left(1+r'^2\right)^{3/2};\quad R_2 = r\left(1+r'^2\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+r'^2}};\quad \operatorname{ctg}\theta=r' \tag{2.4}$$

Штрихами мы отличаем частные производные r по z (например, $r'=\frac{\partial r}{\partial z}$, $r''=\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$,...).

Из соотношений установившейся ползучести (I.2) для случая плоского напряженного состояния получаем

$$2\xi_1=f(T)(\sigma_1-\sigma);\ 2\xi_2=f(T)(\sigma_2-\sigma), \tag{2.5}$$

где среднее давление σ и интенсивность касательных напряжений T соответственно равны

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2);\ 3T^2=\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2. \tag{2.6}$$

Для скоростей деформации ξ_1 , ξ_2 можно получить формулы

$$\xi_1=\frac{1}{R_1}\left(V_r+\frac{\partial V_t}{\partial\theta}\right),\quad \xi_2=\frac{V_r}{r}, \tag{2.7}$$

где V_r - радиальная составляющая скорости, а V_t - составляющая скорости по касательной к меридиану. Скорость деформации по толщине оболочки ξ_3 определяется по уравнению несжимаемости

$$\xi_3=-\xi_1-\xi_2. \tag{2.8}$$

Дифференцируя полным образом толщину оболочки $h=h(z,t)$ по времени t и деля результат на текущее значение h , имеем также

$$\xi_3=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z}V_z\right). \tag{2.9}$$

Наконец, так как $r=r(z,t)$, то

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t} + r' v_z \cdot \qquad (2.10)$$

Внося в (2.5) напряжения и скорости деформации, привлекая условие несжимаемости, получаем систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций r, h, v_r, v_z:

$$\frac{v_r}{r} = \frac{1}{6} f(T)(2\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t} + r' v_z, \qquad (2.11)$$

$$\frac{1}{1+r'^2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + r' \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = \frac{1}{6} f(T)(2\sigma_1 - \sigma_2),$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = -\frac{1}{6} f(T)(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot$$

Интегрирование этой нелинейной системы в общем случае затруднительно. В случае малых перемещений напряжения σ_1, σ_2 вычисляются по характеристикам начальной конфигурации оболочки, а скорости v_r, v_z сразу определяются из приведенных уравнений (2.11).

Задача о времени вязкого разрушения длинной цилиндрической трубы под действием внутреннего давления p и осевого усилия P имеет замкнутое решение. Например, в важном случае, когда по оси трубы действует сила внутреннего давления ("труба с донышками", $P = p\pi r^2$), задача значительно упрощается; тогда $\xi_1 = 0$ (т.е. $l = l_0$), $\frac{h}{h_0} = \frac{r}{r_0}$, а $T = \frac{pr^2}{2r_0 h_0}$; из второго соотношения (2.5) сразу находим

$$t(r) = 2\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r f(T) T} \cdot$$

Время "вязкого" разрушения равно

$$t_1 = t(\infty).$$

Можно также рассмотреть и несколько более сложные задачи, когда добавляется внешнее давление и скручивающий момент.

Элементарное решение имеет также задача о времени вязкого разрушения сферической оболочки под действием внутреннего давления.

В общем случае, когда форма оболочки в произвольный момент времени t неизвестна, возможно применение численного интегрирования методом "шагов по времени" [8]. При этом за время разрушения целесообразно принимать время, за которое достигается предельное состояние, если исходить из значения предела текучести при данной температуре. В ряде случаев приближенное решение задачи можно получить, исходя из вариационного уравнения ползучести оболочки. Пусть в некоторый момент времени t оболочка имеет конфигурацию $r = r(z,t)$. Следуя принципу Журдена, сообщим частицам оболочки бесконечно малые скорости δv_r, δv_z, совместные с кинематическими связями. Очевидно, что при $Z = 0$ $\delta v_z = 0$. По принципу Журдена мощность внутренних сил на вариациях скоростей равна мощности внешних сил δL, т.е.

$$\delta \int_0^{z_1} \Delta r h \sqrt{1+r'^2}\, dz = \delta L, \qquad (2.12)$$

где Δ - функция рассеяния [6].

Опираясь на некоторые допущения геометрического харак-

тера и используя метод Ритца, можно разыскивать приближенные решения вариационного уравнения (2.I2).

3. Чисто хрупкие разрушения оболочек. Анализ чисто хрупких разрушений приводится сравнительно просто, если известно решение задачи о ползучести оболочки в условиях малых деформаций. Тогда, при данном σ_{max} определяется время локального разрушения по формуле (I.8). Появление таких разрушений (трещин) обычно исключает дальнейшую эксплуатацию оболочки.

4. Разрушения смешанного типа. Будем рассматривать лишь безмоментные оболочки вращения. Необходимо прослеживать падение сплошности ψ с учетом влияния изменений геометрии оболочки: последние описываются системой дифференциальных уравнений (2.II).

Анализ существенно упрощается, если по условиям нагружения в любой момент времени известна форма оболочки (случаи длинной трубы, сферы). Тогда картина разрушений качественно аналогична [6] картине разрушения растягиваемого стержня (фиг. 5).

Если же форма оболочки неизвестна, необходимо использование численных методов, в частности - метода "шагов по времени".

Литература

I. N. Hoff, The necking and the rupture of roads, Journ. Appl. Mech., 1953, V.20, 1.
2. Ш.Н.Кац, Ползучесть и разрушение труб, Изв. АН СССР, ОТН, I957, № I0.

3. F.Rimrot, Creep of thick-walled tubes, Journ. Appl. Mech., 1959, V.26, 2.
4. В.И.Розенблюм, Время до разрушения вращающегося диска, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
5. F.Rimrot, Versagenzeit beim Kriechen, Ing. Archiv, B.27, H.3, 1959.
6. Л.М.Качанов, Теория ползучести, Физматгиз, 1960.
7. Л.М.Качанов, Время разрушения в условиях ползучести. Проблемы механики сплошной среды, изд. АН СССР, 1961.
8. Л.М.Качанов, Ползучесть безмоментных оболочек вращения при больших деформациях. Исслед. по упругости и пластичности, изд. ЛГУ, 1965, сб. 4.
9. А.С.Григорьев, Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях, ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
10. F.Odqvist, J.Hult, Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Berlin, 1962.
11. F.Odqvist, Mathematical theory of creep and creep rupture, Oxford, 1966.
12. И.Г.Терегулов, К вариационным методам решения задач установившейся ползучести пластин и оболочек в случае конечных перемещений, ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

М.С.Корнишин, М.М.Сулейманова, А.Н.Спиваковская

Казанский физико-технический институт АН СССР

В статье методом конечных разностей решается задача о больших прогибах круглой пластины ступенчато-переменной жесткости.

§ I. Малые прогибы круглой пластины ступенчато-переменной жесткости

Точное решение задачи о малых прогибах круглой пластины ступенчато-переменной жесткости здесь нам понадобится для суждения о погрешности метода конечных разностей и о влиянии на эту погрешность полного или частичного удовлетворения условиям сопряжения решений на границе скачка жесткости.

Уравнение малых осесимметричных прогибов круглой пластины, имеющей жесткость $D_1=\frac{E_1 t_1^3}{12(1-\nu^2)}$ в центральной части с радиусом $r=b$ и жесткость $D_2=\frac{E_2 t_2^3}{12(1-\nu^2)}$ в остальной части (коэффициент Пуассона ν считаем одинаковым), можно записать в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}-\frac{1}{\xi^2}\theta=\frac{12(1-\nu^2)}{\alpha\xi}\int_0^{\xi}p^*(\xi)\xi\,d\xi, \qquad (I.I)$$

где $\xi=r/a$, r - радиальная координата, a - радиус пластины; $\theta=\frac{a\varphi}{t_1}$ - параметр поворота ($\varphi=\frac{dw}{dr}$ - поворот, w - прогиб, t_1 - толщина центральной части пластины); $p^*(\xi)=\frac{p(\xi)a^4}{E_1 t_1^4}$ - параметр нагрузки, E_1 - модуль упругости цент-

ральной части; α = I для центральной части и $\alpha = D_2/D_1$ - для остальной части. Сечение пластин считаем симметричным относительно срединной поверхности.

Если на пластину действует нагрузка P_0, сосредоточенная в центре, то

$$\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} p^*(\xi)\xi\, d\xi = \frac{P_0^*}{2\pi\xi}, \qquad (I.2)$$

где $P_0^* = \frac{P_0 a^2}{E_1 t_1^2}$.

Безразмерный прогиб $\zeta = \frac{w}{t_1}$, найдется из уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \theta \qquad (I.3)$$

с учетом соответствующих условий на контуре для ζ.

Решения уравнения (I.I) записываем отдельно для участков с жесткостью D_1 и D_2 и затем сопрягаем их при $r=b$. Условия сопряжения включают в себя равенство в соответствующем сечении прогибов, поворотов, моментов и перерезывающих сил.

Ниже приводятся выражения для безразмерных параметров прогиба $\zeta = \frac{w}{t_1}$ и напряжения $\sigma_r^{*u} = \frac{\sigma_r^u a^2}{E_1 t_1^2}$ для центральной части пластины (с индексом I) и для остальной части (с индексом П), полученного в результате точного, в рамках допущений теории, решения задачи о малых прогибах.

I. Пластина с шарнирно опертыми краями.

а) Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности.

$$\zeta_{\underline{I}}=\frac{3(1-\nu)p^*}{8\alpha}\left\{\frac{B(\alpha-1)\left\{2(1+\nu)\eta^2\ln\eta+(1-\nu)\left[\alpha(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]\right\}}{A}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha-1)\eta^2\left[2(3+\nu)-(1+\nu)\eta^2\right]+\alpha\xi^2\left[(1+\nu)\xi^2-2(3+\nu)\right]}{2}+5+\nu\right\},$$

$$\zeta_{\underline{II}}=\frac{3(1-\nu)p^*}{8\alpha}\left\{\frac{B(\alpha-1)\left[(1-\nu)(\xi^2-1)+2(1+\nu)\ln\xi\right]\eta^2}{A}+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi^2\left[(1+\nu)\xi^2-2(3+\nu)+5+\nu\right]}{2}\right\};\qquad\text{(I.4)}$$

$$\sigma^{*u}_{r,I}=\frac{3(1-\nu)p^*(\alpha-1)(1-\eta^2)B}{8A}+\frac{3(3+\nu)p^*(1-\xi^2)}{8},$$

$$\sigma^{*u}_{r,II}=\left\{\frac{3(1-\nu)p^*(\alpha-1)B\eta^2}{8A}\left(\frac{1}{\xi^2}-1\right)+\frac{3(3+\nu)p^*(1-\xi^2)}{8}\right\}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2,$$

где $\eta=\frac{b}{r}$, $A=(1-\nu)(\eta^2-1)\alpha-(1-\nu)\eta^2-1-\nu$, $B=3+\nu-(1+\nu)\eta^2$.

б) Нагрузка сосредоточена в центре.

$$\zeta_{\underline{I}}=\frac{3(1-\nu)P_0^*}{2\pi\alpha}\left\{\frac{(\alpha-1)\left\{(1-\nu)(\eta^2-1)\left[\alpha(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]+2(1+\nu)\eta^2\ln\eta\right\}C}{A}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha-1)\left[3+\nu-2(1+\nu)\ln\eta\right]\eta^2-\alpha\left[3+\nu-2(1+\nu)\ln\xi\right]\xi^2+3+\nu}{2}\right\},$$

$$\zeta_{\underline{II}}=\frac{3(1-\nu)P_0^*}{2\pi\alpha}\left\{\frac{(\alpha-1)\left[2(1+\nu)\ln\xi-(1-\nu)(1-\xi^2)\right]\eta^2C}{A}+\frac{3+\nu-\left[3+\nu-2(1+\nu)\ln\xi\right]\xi^2}{2}\right\};$$

$$\sigma^{*u}_{r,I}=\frac{3P_0^*}{2\pi}\left\{\frac{(1-\nu)(\alpha-1)(1-\eta^2)C}{A}-(1+\nu)\ln\xi\right\},\qquad\text{(I.5)}$$

$$\sigma^{*u}_{r,II}=\frac{3P_0^*}{2\pi}\left\{\frac{(1-\nu)(\alpha-1)\eta^2C}{A}\left(\frac{1}{\xi^2}-1\right)-(1+\nu)\ln\xi\right\}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2,$$

где $\eta = b/r$, $A=(1-\nu)(\eta^2-1)(\eta^2-1)\alpha-(1-\nu)\eta^2-1-\nu$, $C=1-(1+\nu)\ln\eta$.

2. Пластина с заделанными краями.

а) Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности.

$$\zeta_{r,I}=\frac{3(1-\nu^2)p^*}{8\alpha}\left\{\frac{[2\eta^2\ln\eta+(1-\eta^2)\xi^2]B}{A}+\frac{1-2\xi^2(1-\eta^2)+(\alpha-1)\eta^4}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\eta^2\xi^2\alpha+\alpha\xi^4}{2}\right\},$$

$$\zeta_{r,II}=\frac{3(1-\nu^2)p^*}{8\alpha}\left\{\frac{\eta^2(1-\xi^2+2\ln\xi)B}{A}+\frac{(1-\xi^2)^2}{2}\right\};$$

$$\sigma^{*u}_{r,I}=\frac{3}{8}p^*\left\{-\frac{(1+\nu)(1-\eta^2)B}{A\alpha}+\frac{(1+\nu)(1-\eta^2)}{\alpha}+(1+\nu)\eta^2-(3+\nu)\xi^2\right\},$$

$$\sigma^{*u}_{r,II}=\frac{3}{8}p^*\left\{\frac{\eta^2[(1+\nu)\xi^2+1-\nu]B}{A\xi^2}-(3+\nu)\xi^2+1+\nu\right\}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2, \qquad (I.6)$$

где $\eta=b/r$, $A=(1-\eta^2)(1+\nu)+(1+\nu)\alpha\eta^2+(1-\nu)\alpha$, $B=(1+\nu)(1-\eta^2)(1-\alpha)$.

б) Нагрузка сосредоточена в центре.

$$\zeta_{r,I}=\frac{3(1-\nu^2)P_o^*}{2\pi\alpha}\left\{\frac{[(1-\eta^2)\xi^2+2\eta^2\ln\eta]B}{A}+\frac{2\alpha\xi^2\ln\xi-2(\alpha-1)\xi^2\ln\eta}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha-1)\eta^2-\alpha\xi^2+1}{2}\right\},$$

$$\zeta_{r,II}=\frac{3(1-\nu^2)P_o^*}{2\pi\alpha}\left\{\frac{\eta^2(2\ln\xi+1-\xi^2)B}{A}+\frac{2\xi^2\ln\xi+1-\xi^2}{2}\right\};$$

$$\sigma^{*u}_{r,I}=\frac{3(1+\nu)P_o^*}{2\pi\alpha}\left\{-\frac{B(1-\eta^2)}{A}+(\alpha-1)\ln\eta-\alpha\ln\xi\right\}-\frac{3P_o^*}{2\pi}, \qquad (I.7)$$

$$\sigma_{r,\theta}^{*u}=\left[\frac{3(1+\nu)P_0^*}{2\pi\alpha}\left[\frac{B\eta^2(1+\xi^2-\nu)}{A\xi^2}-\ln\xi\right]-\frac{3P_0^*}{2\pi}\right]\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2,$$

где $\eta=b/r$; $A=(1-\eta^2)(1+\nu)+(1+\nu)\alpha\eta^2+(1-\nu)\alpha$, $B=(1+\nu)(\alpha-1)\ln\eta$.

Полагая в (I.4)-(I.7) $\alpha = I$, придем к соотношениям для пластины постоянной жесткости.

Решим эти задачи методом конечных разностей и найдем получающуюся при этом погрешность.

Поделим радиус внутренней области пластины на j равных частей и оставшийся отрезок $a-b$ на $\kappa = n-j$ равных частей, причем в общем случае шаг для внутренней области целесообразно брать отличным от шага для внешней области, т.е. $\frac{b}{j}\neq\frac{a-b}{\kappa}$. Записывая (I.I) для каждого узла, кроме нулевого и j -го, в конечных разностях, получим систему уравнений:

$$\xi_i^2\cdot\frac{\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}}{\Delta^2}+\xi_i\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\Delta}-\theta_i=\frac{12(1-\nu^2)}{\alpha}\int_0^{\xi_i}p^*(\xi)\xi\,d\xi, \quad (I.8)$$

где Δ - шаг сетки, причем $\Delta=\Delta_1=\frac{b}{j}$ и $\alpha = I$ для внутренней части с жесткостью D_1, $\Delta=\Delta_2=\frac{a-b}{\kappa}$, $\alpha=D_2/D_1$ для остальной части ($j+\kappa=n$).

На контуре пластины (в узле n) записываем не только граничное условие, но также и уравнение равновесия. В случае шарнирного опирания эти соотношения служат для определения контурного и законтурного значений θ.

В центре пластины (узел 0) имеем $\theta_0 = 0$. В узле j, где имеет место скачек жесткости, уравнение (I.I) запишем дважды: отдельно для внутренней и внешней части пластины.

Для внутренней части

$$\xi_j^2 \frac{\theta'_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}}{\Delta_1^2} + \xi_j \frac{\theta'_{j+1} - \theta_{j-1}}{2\Delta_1} - \theta_j = 12(1-\nu^2)\xi_j \int_0^{\xi_j} p^*(\xi)\xi\, d\xi \qquad (I.9)$$

Для внешней части

$$\xi_j^2 \frac{\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta'_{j-1}}{\Delta_2^2} + \xi_j \frac{\theta_{j+1} - \theta'_{j-1}}{2\Delta_2} - \theta_j = \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha} \xi_j \int_0^{\xi_j} p^*(\xi)\xi\, d\xi. \qquad (I.10)$$

Здесь θ'_{j+1} и θ'_{j-1} фиктивные значения параметра θ, подлежащие определению из условий сопряжения решений.

Из соотношений (I.9), (I.10) следует равенство перерезывающих сил $Q_{I,j} = Q_{II,j}$. Кроме того, полагаем $\theta_{I,j} = \theta_{II,j} = \theta_j$. Условие $M^j_{r,I} = M^j_{r,II}$ приводит к соотношению

$$\frac{\theta'_{j+1} - \theta_{j-1}}{2\Delta_1} + \nu \frac{\theta_j}{\xi_j} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\theta_{j+1} - \theta'_{j-1}}{2\Delta_2} + \nu \frac{\theta_j}{\xi_j}\right). \qquad (I.11)$$

Таким образом, имеем систему $(n+3)$ уравнений (включая граничное условие) для определения $n+3$ неизвестных θ_i $(i = 1,2,\ldots n, n+1)$, θ'_{j-1}, θ'_{j+1}.

Аппроксимируя уравнения (I.3) с погрешностью $O(\Delta^3)$, получим систему для определения ζ через θ_i.

Как показали вычисления, метод конечных разностей оказывается весьма эффективным в задачах изгиба пластин ступенчато-переменной жесткости.

Для иллюстрации приведем результаты, полученные этим методом, когда $b = 0{,}5a$ и $D_1/D_2 = 8$ $(\alpha = \frac{1}{8})$. Радиус был поделен на $n = 8$ равных частей.

На рис. I для равномерно загруженной пластины с шар-

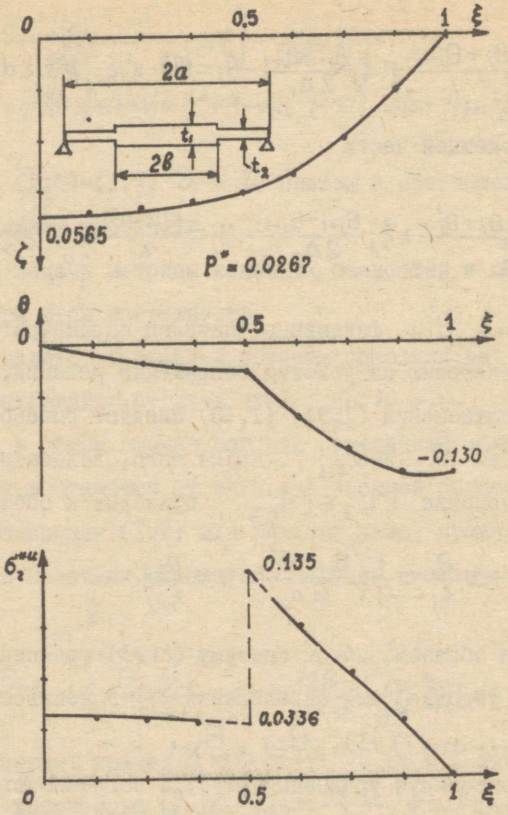


Рис. I.

нирно опертыми краями изображены кривые, характеризующие изменение вдоль радиуса параметров перегиба, поворота и напряжений (при $E_1 = E_2$, $t_2 = \frac{1}{2} t_1$). Сплошные линии соответствуют точному решению, точки – решению методом конечных разностей.

В таблице I указаны абсолютные величины относительной погрешности приближенного решения в % ($\varepsilon_i = \left| \frac{\theta_{i,m} - \theta_{i,n}}{\theta_{i,m}} \right|$ 100%, где $\theta_{i,m}$, $\theta_{i,n}$ - соответственно точное и приближенное значение параметра поворота при $\xi = \xi_i$). В первом варианте решения удовлетворялись все условия сопряжения, кроме равенства перерезывающих сил. Во втором выражении выполнялись все без исключения условия сопряжения.

Таблица I

Решение	ε_2	ε_4	ε_6	ε_8
шарнир				
I вариант	3,4I	3,44	I,I4	0,69
II вариант	I,56	I,83	0,I4	0,08
заделка				
I вариант	I,8	2,2	I,0	0
II вариант	0,69	I,4	0,05	0

Из рис. I и таблицы I видно, что и для шарнирного опирания, и для жесткой заделки уже при $n = 8$ получаются удовлетворительные результаты, в особенности когда все условия сопряжения выполнены (2-й вариант). Погрешности в величине прогибов и напряжений того же порядка, что и для θ_i . В случае, когда $D_1/D_2 = \frac{1}{8}$, погрешности примерно в полтора-два раза больше.

§ 2. Большие прогибы круглой пластины

Большие прогибы круглой пластины ступенчато-переменной жесткости под действием осесимметричной нагрузки описываются

системой нелинейных дифференциальных уравнений вида [I]:

$$\xi \frac{d^2N}{d\xi^2} + 3\frac{dN}{d\xi} = -\beta\frac{\theta^2}{2\xi}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} - \frac{\theta}{\xi^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha}\left[N\theta + \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} P^*(\xi)\,\xi\,d\xi\right]. \qquad (2.2)$$

Здесь $N = \frac{N_r a^2}{E_1 t_1^3}$ – параметр радиального усиления; $\beta = 1$ при $0 \le \xi \le \xi_j$ и $\beta = K_1/K_2$ – при $\xi_j \le \xi \le 1$; K_1 , K_2 – жесткости на растяжение (сжатие) соответственно внутренней и внешней части пластины. Остальные обозначения те же, что и в § I.

Поделив радиус пластины a на n частей, как указано в § I, уравнения (2.I), (2.2) заменяем системой разностных уравнений:

$$\xi_i \frac{N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}}{\Delta^2} + 3\frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2\Delta} = -\beta\frac{\theta_i^2}{2\xi_i}, \qquad (2.3)$$

$$\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\xi_i}\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta} - \frac{\theta_i}{\xi_i^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha}\left[N_i\theta_i + \frac{1}{\xi_i}\int_0^{\xi} P^*(\xi)\,\xi\,d\xi\right], \qquad (2.4)$$

где $\Delta = \Delta_1 = \frac{b}{j}$ при $i = 1, 2, \ldots, j-1$ и $\Delta = \Delta_2 = \frac{a-b}{n-j}$ при $i = j+1, \ldots n$. В узле j , совпадающем с расположением скачка, уравнения (2.I), (2.2) записываем дважды – один раз для внутренней части пластины и второй раз для внешней части

Для внутренней части

$$\xi_j \frac{N'_{j+1} - 2N_j + N_{j-1}}{\Delta_1^2} + 3\frac{N'_{j+1} - N_{j-1}}{2\Delta_1} = -\frac{\theta_j}{2\xi_j}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{\theta'_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1}}{\Delta_1^2}+\frac{1}{\xi_j}\frac{\theta'_{j+1}-\theta_{j-1}}{2\Delta_1}-\frac{\theta_j}{\xi_j^2}=12(1-\nu^2)\left[N_j\theta_j+\frac{1}{\xi_j}\int_0^{\xi_j}\bar{P}^*(\xi)\,\xi\,d\xi\right]. \qquad (2.6)$$

Для внешней части

$$\xi_j\frac{N_{j+1}-2N_j+N'_{j-1}}{\Delta_2^2}+3\frac{N_{j+1}-N'_{j-1}}{2\Delta_2}=-\frac{\theta_j^2}{2\xi_j}, \qquad (2.7)$$

$$\frac{\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta'_{j-1}}{\Delta_2^2}+\frac{1}{\xi_j}\frac{\theta_{j+1}-\theta'_{j-1}}{2\Delta_2}-\frac{\theta_j}{\xi_j^2}=\frac{12(1-\nu^2)}{\alpha}\left[N_j\theta_j+\frac{1}{\xi_j}\int_0^{\xi_j}\bar{P}^*(\xi)\,\xi\,d\xi\right]. \qquad (2.8)$$

Равенство перерезывающих сил выполняется вследствие (2.6), (2.8). Кроме того, полагаем

$$N_{\underline{I},j}=N_{\underline{II},j},\ \theta_{\underline{I},j}=\theta_{\underline{II},j}. \qquad (2.9)$$

Условия равенства касательных составляющих перемещения ($U_{\underline{I},j}=U_{\underline{II},j}$) и изгибающих моментов ($M^j_{r,\underline{I}}=M^j_{r,\underline{II}}$) запишутся в виде:

$$(1-\nu)N_j+\varepsilon_j\frac{N'_{j+1}-N_{j-1}}{2\Delta_1}=\beta\left[(1-\nu)N_j+\xi_j\frac{N_{j+1}-N'_{j-1}}{2\Delta_2}\right], \qquad (2.10)$$

$$\frac{\theta'_{j+1}-\theta_{j-1}}{2\Delta_1}+\nu\frac{\theta_j}{\xi_j}=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\theta_{j+1}-\theta'_{j-1}}{2\Delta_2}+\nu\frac{\theta_j}{\xi_j}\right]. \qquad (2.11)$$

В (2.5)-(2.11) $\theta'_{j+1},\theta'_{j-1},N'_{j+1},N'_{j-1}$ – фиктивные значения параметров θ и N, введенные для удовлетворения условиям сопряжения решений.

Уравнения (2.1), (2.2) записываются также и для контур-

ных точек [2].

Ниже приводится часть результатов машинного счета, когда $b = 0{,}5a$, и $\alpha = \frac{1}{8}$, $\beta = 2$ и когда действует нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности пластины.

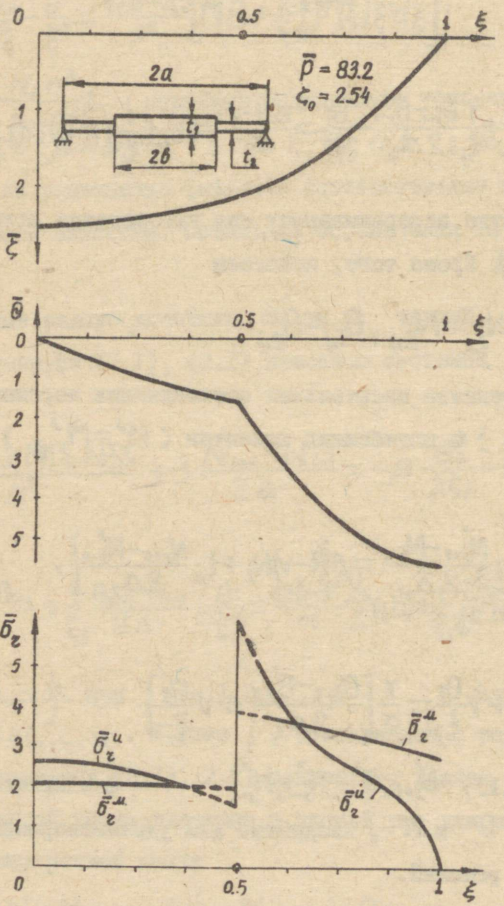


Рис. 2.

Здесь рассмотрен случай, когда скачок жесткости обусловлен скачком толщины при постоянстве модуля упругости ($t_2 = \frac{1}{2} t_1, E_1 = E_2$).

Для условий шарнирного закрепления вычисления проведены с числом делений $n = 8$, а для жесткой заделки с $n = 12$. Система нелинейных разностных уравнений решалась методом, описанным в работе [1].

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие изменение вдоль радиуса пластины параметров прогиба, поворота, изгибных и мембранных напряжений в равномерно загруженной круглой пластине с шарнирно закрепленными краями, а в таблице 2 для возрастающей последовательности значений параметра нагрузки приведены значения параметра прогиба в центре, а также параметров изгибных и мембранных напряжений в центре, в месте скачка и на краю.

В отличие от предыдущего здесь использованы обозначения:

$$\bar{p} = \frac{p a^4}{E t_2^4}, \quad \zeta = \frac{w_0}{t_2} \quad (w_0 - \text{прогиб в центре}), \quad \theta = \frac{a}{t_2} \frac{dw}{dr},$$

$$\bar{\sigma}_r^u = \frac{\sigma_r^u a^2}{E t_2^2}, \quad \bar{\sigma}_r^M = \frac{\sigma_r^M a^2}{E t_2^2}.$$

Действительная картина напряженного состояния в месте скачка толщины и в его ближайшей окрестности вследствие концентрации напряжений и других факторов, которые не учитываются элементарной теорией, будет иной, поэтому здесь на графике и в таблицах напряжения $\sigma_{r,b\pm0}^u$, $\sigma_{r,b\pm0}^M$ $(b = 0{,}5a)$ приведены условно.

Таблица 2

$\bar{P}$	$\bar{\xi}_0$	$\bar{\sigma}^{u}_{r,0}$	$\bar{\sigma}^{M}_{r,0}$	$\bar{\sigma}^{u}_{r,b+0}$	$\bar{\sigma}^{M}_{r,b+0}$	$\bar{\sigma}^{u}_{\theta,a}$	$\bar{\sigma}^{M}_{r,a}$
			Шарнир				
0.427	0.II2	0.I66	0.0083	0.535	0.0I62	0.I26	0.0II
0.962	0.239	0.356	0.0375	I.I4	0.0736	0.268	0.050
2.I6	0.454	0.688	0.I36	2.I7	0.266	0.5I0	0.I83
4.87	0.750	I.I8	0.370	3.58	0.720	0.838	0.495
II.0	I.I2	I.87	0.820	5.36	I.59	I.25	I.I0
24.7	I.59	2.86	I.64	7.6I	3.I6	I.75	2.I7
55.5	2.I8	4.30	3.08	I0.5	5.89	2.39	4.05
I24.8	2.95	6.32	5.56	I4.4	I0.7	3.22	7.33
			Заделка				
0.675	0.048	0.I32	0.00I5	0.322	0.0028	-0.407	0.002
I.52	0.I08	0.296	0.008	0.722	0.0I46	-0.9I5	0.0I0
3.42	0.239	0.656	0.039	I.60	0.072I	-2.04	0.049
7.69	0.503	I.38	0.I73	3.34	0.320	-4.38	0.2I6
I7.3	0.939	2.56	0.600	6.I3	I.II	-8.72	0.755
38.9	I.52	4.I6	I.58	9.62	2.92	-I6.0	I.99
87.6	2.25	6.I4	3.43	I3.6	6.33	-28.I	4.36
I97.I	3.I7	8.64	7.62	I8.I	I2.4	-48.6	8.62

В заключение отметим, что описанный метод позволяет решать линейные и нелинейные задачи изгиба круглых пластин ступенчато-переменной жесткости при любом числе и любом расположении ступеней. Решение таких задач методом конечных

разностей принципиально не отличается от решения задач изгиба пластины постоянной толщины, если не считать некоторого повышения порядка системы разностных уравнений.

Литература

1. М.С.Корнишин, Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. Изд. "Наука", М., 1964.
2. Я.Д.Лившиц, Критерий нелинейности пластин. "Прикладная механика", 1965, т. I, № 8, Киев.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГИБКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Ю.Р. Лепик

Тартуский государственный университет

Данная статья ставит себе целью дать обзор работ по теории гибких пластин и оболочек за пределом упругости, выполненных в Тарту в течение последнего десятилетия. Следуя этой цели, из трудов других исследовательских центров цитируются лишь те, которые непосредственно связаны с работами, проведенными в Тарту, или анализ которых является целесообразным при составлении данной статьи.

Обзор состоит из трех разделов. В первом разделе представляются результаты, связанные с упруго-пластическим материалом. Второй и третий разделы посвящены жестко-пластическим пластинам и оболочкам; во втором разделе рассматриваются однородные пластины, а в третьем - пластины и оболочки с идеализированным двуслойным сечением.

I. Большие прогибы упруго-пластических пластин

Первые работы по теории гибких пластин и оболочек за пределом упругости принадлежат А.А.Ильюшину [I], который подробно исследовал связи между внутренними силами и деформациями в оболочке. А.А.Ильюшиным решен также ряд конкретных проблем, в том числе и задача о деформации цилиндрической оболочки, находящейся под действием осесимметричного внешнего давления.

Развивая идеи А.А.Ильюшина, в 1954-1957 гг. нами был разработан метод расчета гибких упруго-пластических пластин, который в общих чертах состоит в следующем [2, 3].

Будем исходить из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций, которые для плоского напряженного состояния несжимаемого материала можно написать в форме

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} E(1-\omega)\left(e_{ij} + e_{kk}\delta_{ij}\right). \qquad (I.1)$$

Здесь σ_{ij} , e_{ij} - тензоры напряжений и деформаций, δ_{ij} - тензор Кронеккера, E - модуль упругости, ω - модуль пластичности, индексы i , j , k имеют значения I, 2.

Допустим, что пластина настолько тонка, что гипотезы Кирхгоффа применимы; тогда имеем (ε_{ij} - компоненты деформаций срединной поверхности, $\varkappa_{ij}$ - искривления):

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3 \varkappa_{ij}. \qquad (I.2)$$

Величины ε_{ij} , $\varkappa_{ij}$ связаны с перемещениями u_1 , u_2 и с прогибом $u_3 = w$ формулами

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} = w_{,i} w_{,j}, \qquad (I.3)$$

$$\varkappa_{ij} = -w_{,ij}.$$

Вместо напряжений σ_{ij} введем усилия T_{ij} и моменты M_{ij} (h - толщина пластины):

$$T_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\, dx_3 , \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\, x_3\, dx_3 . \qquad (I.4)$$

Учитывая соотношения (I.I), (I.2), формулы (I.4) можем переписать в виде

$$\frac{3}{2Eh}T_{ij}=\left(1-\tfrac{1}{2}\Omega_1\right)\left(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)-\frac{h}{4}\Omega_2\left(\varkappa_{ij}+\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right),$$

(I.5)

$$\frac{18}{Eh^3}M_{ij}=-\frac{3}{h}\Omega_2\left(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)+\left(1-\tfrac{3}{2}\Omega_3\right)\left(\varkappa_{ij}+\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right).$$

Здесь обозначено (α = I, 2, 3):

$$\Omega_\alpha=\int_{-1}^{+1}\omega z^{\alpha-1}dz \qquad \left(z=\frac{2}{h}x_3\right). \tag{I.6}$$

Ограничимся случаем линейного упрочнения материала. Обозначая символом $\lambda=\text{const}$ параметр упрочнения, имеем

$$\omega=\begin{cases}0 & \text{при } e_i\leqslant e_s,\\ \lambda\left(1-e_s/e_i\right) & \text{при } e_i\geqslant e_s.\end{cases} \tag{I.7}$$

Символом e_i обозначена интенсивность деформаций

$$e_i=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{e_{ij}e_{ij}+e_{ii}e_{jj}}\ . \tag{I.8}$$

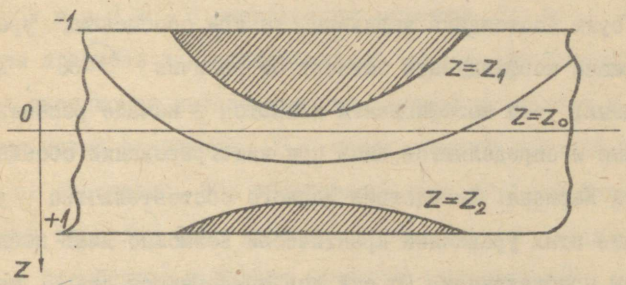
Для дальнейшего целесообразно ввести обозначения

$$z_0=-\frac{2P(\varepsilon_{ij},\varkappa_{ij})}{hP(\varkappa_{ij},\varkappa_{ij})},\quad z_\varepsilon^2=\frac{4P(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij})}{h^2P(\varkappa_{ij},\varkappa_{ij})},\quad z_s^2=\frac{3e_s^2}{h^2P(\varkappa_{ij},\varkappa_{ij})},$$
$$z_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2+z_s^2-z_\varepsilon^2}\ , \tag{I.9}$$

где под символом P понимается квадратичная форма

$$P(s_{ij},t_{ij})=\tfrac{1}{2}\left(s_{ij}t_{ij}+s_{ii}t_{jj}\right) \qquad \left(s_{ij}=s_{ji},\ t_{ij}=t_{ji}\right).$$

Символы Z_0, Z_1, Z_2 имеют конкретные значения: именно $Z = Z_0$ является поверхностью наименьшей интенсивности деформаций, а поверхности $Z = Z_1$ и $Z = Z_2$ определяют границы зон пластических деформаций (фиг. I).



Фиг. I.

В случае линейного упрочнения интегралы (I.6) можно взять в квадратурах. Для краткости мы этих формул здесь выписывать не будем; отметим лишь, что величины $\frac{1}{\lambda}\Omega_\alpha$ зависят только от введенных выше величин: Z_0, Z_ε, Z_s, Z_1 и Z_2.

Уравнения равновесия и уравнение неразрывности деформации элемента пластинки имеют вид

$$T_{ij,j} = 0, \quad M_{ij,ij} + T_{ij} w_{ij} + q = 0, \qquad (I.10)$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = \varkappa_{12}^2 - \varkappa_{11}\varkappa_{22}.$$

Уравнения $T_{ij,j} = 0$ удовлетворим, если введем функцию напряжений формулой $T_{ij} = F_{,kk}\delta_{ij} - F_{,ij}$. Вычисляя из соотношений (I.5) величины ε_{ij}, M_{ij} и подставляя их в уравнения (I.10), приходим к двум дифференциальным уравнени-

ям четвертого порядка относительно величин w и F [*]. Имея в виду обстоятельство, что в чисто-упругом случае полученные уравнения совпадают с уравнениями Кармана, будем их в дальнейшем называть обобщенными уравнениями Кармана. Следует отметить, что если в упругом случае коэффициенты уравнений Кармана суть постоянные величины, то при обобщенных уравнениях Кармана коэффициенты зависят от величин Ω_α и их производных; эти коэффициенты являются в начале решения неизвестными и определяются лишь при интегрировании обобщенных уравнений Кармана. Вследствие данного обстоятельства удовлетворение этих уравнений практически возможно лишь последовательным приближением. До сих пор применяются два метода интегрирования.

а) Метод упругих решений. Здесь в качестве начального приближения выбирается упругое решение; тогда $\Omega_\alpha^{(1)} = 0$ и величины $F^{(1)}$, $w^{(1)}$ можно определить из уравнений Кармана. При помощи формул (I.8), (I.7), (I.9) и (I.6) вычисляем следующее приближение для величин θ_i, ω, Z_0, Z_1, Z_2, Z_ε, Z_s, Ω_α, а из обобщенных уравнений Кармана определяем вторые приближения $F^{(2)}$ и $w^{(2)}$. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Проведенные вычисления показали в большинстве случаев очень быструю скорость сходимости процесса. Например, в случае сжатой прямоугольной полосы для параметра нагрузки получены следующие значения: 2.508 (упр. решение), 0.7315, 0.7307; в случае круглой пластины под дей-

[*] См. уравнения (I.5) и (I.6) в работе [2].

ствием равномерного поперечного давления мы имеем соответственно 44.13 (упр. решение), 25.69, 24.97, 24.92. Хорошая сходимость была констатирована и при вычислении величин T_{ij}, M_{ij}, z_0, z_1, z_2.

б) Метод последовательного нагружения. С уменьшением величины z_s (т.е. с увеличением прогибов или относительной толщины пластинки) скорость сходимости метода упругих решений уменьшается, и при весьма малых значениях z_s метод упругих решений может вообще не сходиться. Это обусловлено тем, что при более значительных прогибах роль упругих деформаций постепенно уменьшается и все больше и больше начинают доминировать пластические деформации; но в таком случае и понятно, что чисто-упругое решение не может быть удовлетворительным приближением реального напряженного состояния. Поэтому более целесообразно решать задачу методом последовательного нагружения. Здесь мы считаем, что при некотором значении параметра нагрузки $p = p_*$ обобщенные уравнения Кармана уже проинтегрированы. Переходя к следующему значению $p = p_* + \Delta p$, в качестве начального приближения выбираем решение задачи при $p = p_*$; уточнение этого решения происходит по схеме, приведенной выше в случае метода упругих решений.

По вышеуказанному методу до сих пор решены следующие задачи.

1. Цилиндрический изгиб прямоугольных пластин [4].

2. Исследование послекритической стадии сжатой полосы [2, 5, 6].

3. Большие прогибы круглых пластин под действием поперечной нагрузки [3, 7].

4. Продольно-поперечный изгиб круглых пластин с заделанным краем [3].

5. Большие прогибы прямоугольных пластин (теоретическая часть опубликована в [8]).

6. Анализ работы прямоугольной пластины в послекритической стадии (эта задача рассматривалась Н.Ф.Ершовым в [9]).

7. Упруго-пластическое деформирование пологих арок [10-12].

Все эти задачи были решены или при помощи вариационных методов (методы Галеркина и Ритца), или методом конечных разностей. Вычисления были проведены на ЭВЦМ "Стрела", "Урал I" и "Урал 4".

Рассматриваемый в данном разделе метод позволяет учитывать и ряд дополнительных факторов, которые не были приняты в расчет при первоначальной формулировке проблемы. Из таких обобщений метода отметим следующие.

I. Учет сжимаемости материала. Из теории упругих пластин известно, что гипотеза о несжимаемости может при определении нагрузки и напряжений привести к погрешностям до 30-40 %. Следовательно и при пластинах, в которых области пластических деформаций мало распространены, нельзя пренебрегать влиянием сжимаемости материала. Так как точный учет сжимаемости затруднителен, то, на наш взгляд, наиболее целесообразным является приближенный вариант, при котором влияние сжимаемости учитывается лишь в зоне упругих деформаций

[13]; соответствующие обобщения для соотношений (I.I)-(I.9) даны в работе [14].

2. Случай нелинейного упрочнения. Рассматриваемый метод применим принципиально для любой формы диаграммы $\sigma_i - e_i$, но в таком случае для определения величин Ω_α в (I.6) нельзя получить замкнутых формул, и эти интегралы следует вычислить численно.

3. Учет термических напряжений. Исходя из принципа Дюгамеля-Неймана, в вышерассмотренные соотношения можно ввести и температурные члены (см. работу [14]).

4. Учет неоднородности материала. В работе [14] выведены основные уравнения изгиба гибких пластин для случая, когда механические характеристики материала (модуль Пуассона, предел текучести, модуль упругости и т.д.) являются известными функциями координат пластины. Такие переменные характеристики могут быть обусловлены многими факторами (например, неоднородностью поля температуры, нейтронным облучением и т.д.). Как частные случаи из найденных соотношений можно получить формулы для расчета слоистых пластин с переменной толщиной.

5. Учет влияния разгрузки. Вопрос об определении остаточного прогиба и остаточных усилий при частотном или полном снятии нагрузки был обсужден в работе [15]; при этом учитывается также обстоятельство, что при разгружении часть материала пластины может вновь выйти за предел упругости (в таком случае в пластине возникают т.н. зоны вторичных пластических деформаций). Отметим еще, что при определении оста-

точного прогиба или остаточных усилий можно использовать с небольшими изменениями программу, составленную для ЭВЦМ в случае активного нагружения.

6. Обобщение метода для оболочек. Хотя до сих пор речь шла только о пластинах, использованный метод может быть без существенных изменений перенесен и на случай гибких оболочек; такое обобщение было сделано Н.Ф.Ершовым [I6].

Наконец, сопоставим рассматриваемый метод с шаговым методом, предложенным В.И.Феодосьевым [I7, I8]. По нашему мнению, главным достоинством предложенного нами метода является очень небольшое машинное время при проведении вычислений *. Отметим еще, что при применении шагового метода надо знать решение проблемы для всех предыдущих этапов нагружения. В случае же метода, рассмотренного в данной статье, это не необходимо: при помощи метода упругих решений можно построить решения для любой заданной нагрузки и, таким образом, проведя вычисления для некоторых более характерных нагрузок, легко построить диаграмму "нагрузка-прогиб" в целом.

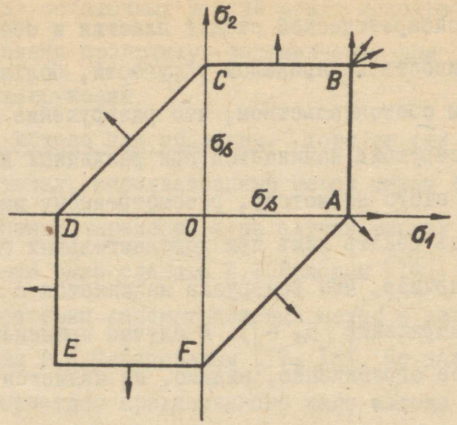
Недостатком нашего метода является обстоятельство, что он связан с теорией малых упруго-пластических деформаций и не позволяет учитывать влияния сложного нагружения. Кроме того, при некоторых задачах специального типа более целесообразным может оказаться шаговый метод. Например, при иссле-

* Так, например, при цилиндрическом изгибе прямоугольных пластин машинное время на "Урал 4" для одного значения поперечной нагрузки равнялось I5-30 сек [4]; в случае круглых пластин [3] машинное время для ЭВЦМ "Стрела" было меньше одной минуты.

довании послекритической стадии пластин и оболочек, потерявших устойчивость за пределом упругости, большие затруднения обусловлены обстоятельством, что разгружение в различных точках конструкций начинается при различных напряжениях. Вследствие этого по методу, рассмотренному выше, такие задачи удавалось решать лишь при дополнительных гипотезах (допуская, например, что разгрузка начинается с критического значения напряжений [5, 6]). В случае применения шагового метода такое ограничение, видимо, не является нужным.

II. Осесимметрические задачи жестко-пластических пластин и оболочек

При развитых пластических деформациях можно пренебрегать упругими деформациями и считать материал конструкции жестко-пластическим. Как известно, такая концепция является весьма полезной при определении несущей способности пластин и оболочек. Переход к кусочно-линейным условиям текучести и применение ассоциированного закона течения значительно упростили математическую сторону задачи, вследствие чего оказалось возможным получить точные и замкнутые решения ряда задач о несущей способности осесимметрических конструкций. При этом в качестве условия текучести обычно выбирается условие Треска, которое показано на фиг. 2 (σ_1, σ_2 - главные напряжения, σ_s - предел текучести); стрелками отмечены направления скорости пластического деформирования (в угловых точках шестиугольника единственность отсутствует). В большинстве работ от напряжений σ_1 , σ_2 переходят к "обобщенным на-



Фиг. 2.

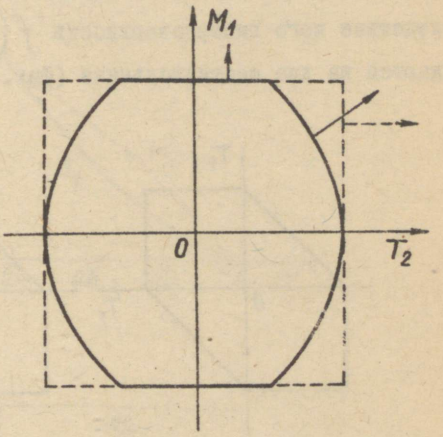
пряжениям", т.е. к усилиям и моментам; это можно делать при помощи формул

$$T_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\alpha \, dz \,, \quad M_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\alpha z \, dz \quad (\alpha = 1,2). \tag{2.1}$$

Вместо шестиугольника Треска в четырехразмерном пространстве получим теперь гиперповерхность $f(T_1, T_2, M_1, M_2) = 0$; обобщенный вектор скорости имеет компоненты $\vec{v} = (\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varkappa}_1, \dot{\varkappa}_2)$, где точками отмечены производные по времени. Ассоциированный закон течения принимает форму $\vec{v} = \operatorname{grad} f(T_1, T_2, M_1, M_2)$. Следует отметить, что такой подход к обобщенным напряжениям и скоростям связан с двумя неудобствами.

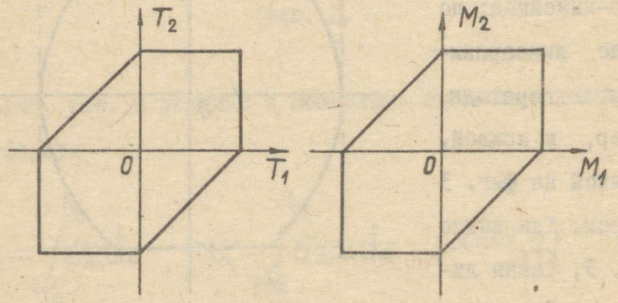
I) Гиперповерхность $f(T_1, T_2, M_1, M_2) = 0$ уже не

является кусочно-линейной, и для упрощения вычислений ее следует линеаризировать. В качестве примера рассмотрим осесимметрические деформации цилиндрической оболочки без осевого натяжения (тогда $T_1 = 0$). Так как величина M_2 не входит в уравнения равновесия, то границу текучести можно представить в двумерном пространстве (T_2, M_1); эта граница отмечена сплошной линией на фиг. 3. Как видно из этого чертежа граница текучести не кусочно-линейная; но ее можно линеаризировать, переходя, например, к кривой, отмеченной на фиг. 3 пунктиром. Как видно из фиг. 3, такая линеаризация может привести к довольно большим изменениям в направлении вектора скорости деформации. Правда, величина несущей способности конструкции является обычно мало чувствительной к таким изменениям. Иначе обстоит дело в случае гибких пластин и оболочек; здесь существует непосредственная связь между прогибом и нагрузкой, вследствие этого всякие изменения в геометрии деформированной конструкции могут оказать значительное влияние на величину нагрузки.



Фиг. 3.

2) При решении конкретных задач исследование линеаризированных гиперповерхностей текучести и обобщенных скоростей в четырехразмерном пространстве является весьма сложным и мало обозримым. Из-за этого был предложен ряд приближенных методов расчета; из них рассмотрим т.н. метод "ограниченного взаимовлияния обобщенных напряжений", который был предложен Ф.Ходжем [I9]. Согласно этому методу пренебрегают взаимосвязью между мембранными усилиями и изгибающими моментами, вследствие чего гиперповерхность $f(T_1, T_2, M_1, M_2)=0$ распадается на два шестиугольника (фиг. 4). Хотя этот прием и



Фиг. 4.

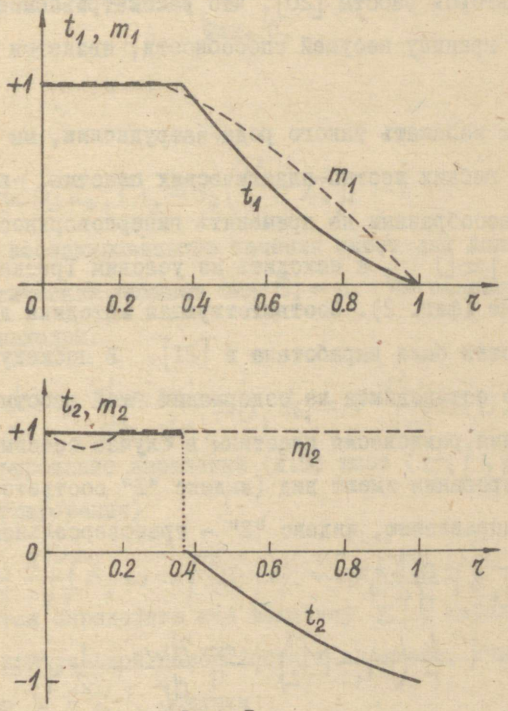
успешно применен для решения ряда задач о несущей способности оболочек Ходжем и его сотрудниками, однако следует все-таки отметить, что игнорирование взаимосвязи между усилиями и моментами может привести к нереальному распределению напряжений в оболочке.

В качестве иллюстраций проанализируем некоторые результаты, полученные для свободно опертой конической оболочки в

работе [20]. Диаграммы, показывающие изменение безразмерных величин

$$t_\alpha = \frac{T_\alpha}{\sigma_s h}, \quad m_\alpha = \frac{4M_\alpha}{\sigma_s h^2} \tag{2.2}$$

как функции от безразмерной радиальной координаты оболочки r, представлены на фиг. 5. Как видно из этого чертежа, в



Фиг. 5.

средней части оболочки выполняются условия $t_1 = m_1 = 1$, однако такая пара значений является статически недопустимой.

Действительно, если $t_1 = I$, то из соотношений (2.I)-(2.2) вытекает, что $\sigma_1 = \sigma_2$ и, следовательно, должно быть $m_1 = 0$. Таким же образом можно показать, что пары значений $t_2 = m_2 = I$ и $t_2 = -I$, $m_2 = I$, взятые из графиков на фиг. 5, тоже не являются совместными. Так как поле напряжений, представленное на фиг. 5 не является статически допустимым, то утверждение авторов работы [20], что рассматриваемое решение дает нижнюю границу несущей способности, является сомнительным.

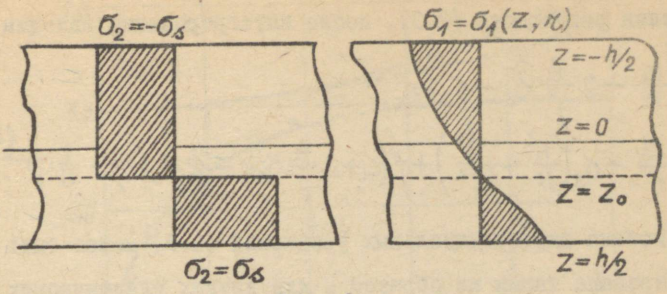
С целью избежать такого рода затруднения, мы при построении теории гибких жестко-пластических пластин и оболочек считали целесообразным не применять гиперповерхность $f(T_1, T_2, M_1, M_2) = 0$, а исходить из условия Треска в его начальной форме (фиг. 2). Соответствующая методика для расчета круглых пластин была выработана в [2I]. В последующем изложении кратко остановимся на содержании этой работы.

Уравнения равновесия пластины в случае осесимметрического деформирования имеют вид (индекс "I" соответствует радиальному направлению, индекс "2" - трансверсальному):

$$T_2 = T_1 + r\frac{dT_1}{dr},$$

$$\frac{dM_1}{dr} + \frac{1}{r}(M_1 - M_2) + T_1\frac{dw}{dr} + \frac{1}{2}qr = 0. \qquad (2.3)$$

В пластине существует поверхность $Z = Z_0$, на которой напряжения претерпевают разрывы. Допустим для конкретности, что при $-\frac{h}{2} \le Z < Z_0$ в пластине существует пластический режим EF из фиг. 2, а при $Z_0 < Z \le \frac{h}{2}$ режим BC; тогда эпюры напряжений имеют вид, указанный на фиг. 6. В силу (2.I)



Фиг. 6.

имеем

$$T_2=-2\sigma_s z_0,\ M_2=\sigma_s\left(\frac{h^2}{4}-z_0^2\right). \tag{2.4}$$

Закон ассоциированного течения имеет для данной комбинации пластических режимов вид $\dot{e}_1 = 0$. На основании гипотез Кирхгоффа находим:

$$\dot{\varepsilon}_1=\frac{d\dot{u}}{dr}+\frac{dw}{dr}\cdot\frac{d\dot{w}}{dr}\equiv 0,\ \dot{\varkappa}_1=-\frac{d^2\dot{w}}{dr^2}\equiv 0. \tag{2.5}$$

Интегрирование выражений (2.5) дает ($e, f, \dot{f}$ - постоянные интегрирования)

$$\dot{u}=\dot{e}-f\dot{f}r,\ w=f(a-r),\ \dot{w}=\dot{f}(a-r). \tag{2.6}$$

Остается определить еще величину z_0, характеризующую положение нейтральной поверхности в пластине, Учитывая, что $\dot{e}_2 = 0$ при $z = z_0$, получим

$$z_0=-\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varkappa}_2}=fr-\frac{\dot{e}}{\dot{f}}. \tag{2.7}$$

Подставляя найденные результаты (2.4), (2.6) и (2.7) в

уравнения равновесия (2.3), после интегрирования находим

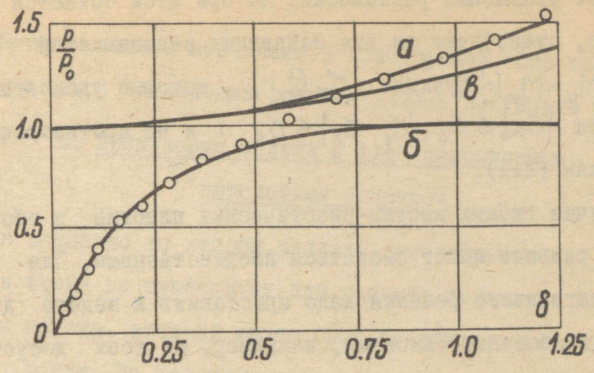
$$T_1 = \frac{c_1}{r} + 2\frac{\dot{e}}{\dot{f}}\sigma_s - \sigma_s f r,$$

$$M_1 = \frac{c_2}{r} + \sigma_s\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\dot{e}^2}{\dot{f}^2}\right) + f\left(c_1 + 2\frac{\dot{e}}{\dot{f}}\sigma_s r - \frac{2}{3}\sigma_s f r\right) - \frac{1}{6}q r^2. \qquad (2.8)$$

Система дифференциальных уравнений (2.3) может быть проинтегрирована таким же образом и для других пластических режимов. Постоянные интегрирования определим из граничных условий, а также из условий непрерывности на границе областей отдельных режимов.

В качестве примера рассмотрим свободно опертую пластину с неподвижным краем. Из проведенных вычислений вытекает, что если максимальный прогиб w_0 меньше, чем половина толщины пластины, то во всей пластине реализируются режимы EF–BC; но если $w_0 > \frac{h}{2}$, то в средней части пластины во всем поперечном сечении ее имеем состояние B. Так как в этом состоянии $M_1 = M_2 = 0$, то средняя часть пластины работает мембраной. С увеличением нагрузки протяженность этой части увеличивается и происходит асимптотический переход к мембранному решению.

В работе [21] рассматривалась и пластина, точки контура которой смещаются свободно; полученные результаты были сопоставлены с экспериментальными данными. Соответствующий чертеж из работы [21] повторяется на фиг. 7, где экспериментальные данные отмечены кружками, теоретическое решение обозначено буквой "а", буквой "б" отмечено решение, найденное по геометрически линейной теории (с учетом влияния упругих де-



Фиг. 7.

формаций). Поскольку для рассматриваемого решения упругие деформации не принимались во внимание, то при нагрузках, близких к предельной, экспериментальные и теоретические кривые на фиг. 7 расходятся; но с увеличением величины $\delta = w_0/h$ теоретические результаты хорошо согласуются с опытными. Кривая "b" на фиг. 7 соответствует решению, найденному для жестко-пластической пластины на основании "теории деформаций" (см.ниже).

Дальнейшие приложения метода можно найти в работах [22, 23], где рассматривается пластическое течение круглых защемленных по контуру пластин. Задача о больших прогибах пологой сферической оболочки решена О.Н.Шаблией [24].

Следует подчеркнуть, что изложенный выше метод не является математически вполне строгим. Дело в том, что из четырех величин T_1, T_2, M_1, M_2 две мы вычисляем на основании выбранных нами пластических режимов, а две остальные оп-

ределяем из уравнений равновесия. Но при этом остается открытым вопрос, существуют ли для найденных зависимостей $T_\alpha = T_\alpha(r), M_\alpha = M_\alpha(r)$ функции $\sigma_\alpha(z,r)$, которые удовлетворяют неравенства $|\sigma_\alpha| \le \sigma_s, |\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_s$ и не противоречат соотношениям (2.I).

В случае гибких жестко-пластических пластин и оболочек найденное решение может оказаться неединственным. Для получения единственного решения надо приставить к задаче дополнительные требования (выбирая, например, из всех допустимых значений нагрузки наименьшее) или уменьшить степень абстракции конструкций (например, принимая в расчет влияние упругих деформаций или упрочнение материала).

Наконец, обратим внимание еще на одну аналогию. Для соотношений теории типа течения имеет место ассоциированный закон течения в форме (f - пластический потенциал):

$$\dot{e}_\alpha = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\alpha} \quad (\alpha = 1,2). \qquad (2.9)$$

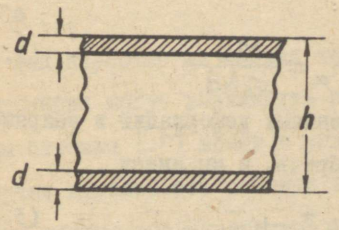
Но, с другой стороны, зависимости типа (2.9) действительны и в теории деформаций, если только скорости деформаций заменить деформациями e_α. Эта аналогия может оказаться полезной в двух отношениях: I) решая поставленную задачу как по теории течения, так и по теории деформаций, можем оценить влияние сложного нагружения; 2) решение задачи по теории течения значительно сложнее, чем по теории деформаций, так как приходится интегрировать закон течения по времени. Вследствие этого целесообразно решить поставленную задачу сначала по теории деформаций и выяснить какие комбинации

пластических режимов возникают в конструкции. Эта информация облегчает нам и нахождение решения задачи по теории течения.

Ш. Применение модели с идеализированным двуслойным сечением

Как показано во втором разделе рассматриваемой работы, в данное время не существует для расчета гибких пластин и оболочек метода, который можно было бы считать математически вполне строгим. Но нетрудно получить для проблемы точные и замкнутые решения, если от одного сечения оболочки перейти к идеализированному двуслойному сечению.

Модель оболочки идеализированного двуслойного сечения состоит из двух слоев толщиной d, работающих как мембраны; эти слои разделены заполнителем, передающим лишь сдвиговые усилия (фиг. 8); допускается, что $d \ll h$ (h - толщина оболочки). Применение такой модели значительно упрощает математическую сторону проблемы.



Фиг. 8.

Модель оболочки с идеализированным двуслойным сечением может быть трактована как некоторая идеализация реальной трехслойной конструкции. Но при этом нельзя недооценивать ее значения при расчете однородных конструкций. В первую очередь, следует отметить, что в большинстве случаев решение, полученное на основе этой модели, описывает правильно общее поведение действительных конструкций и может

служить для получения качественных результатов, которые могут быть уточнены другими методами (например, при помощи двуслойной модели можно выяснить какие пластические режимы можно ожидать в отдельных участках конструкции, увеличится или уменьшится нагрузка с увеличением прогибов и т.д.). Во-вторых, на основании решения о двуслойной модели можно легко найти нижнюю и верхнюю границы несущей способности однородной оболочки; на возможность построения таких границ обратил внимание Ф.Ходж [25].

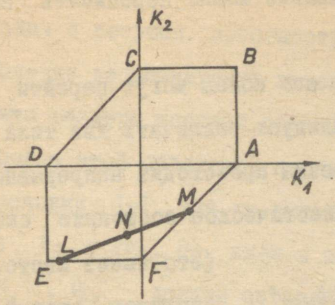
С применением модели двуслойного сечения связаны некоторые особенности, которые рассмотрим ниже. Отметим все величины для слоя, находящегося на отрицательной стороне оси Z, верхним индексом " - ", а величины для слоя на положительной стороне оси Z - индексом " + ". Введем следующие безразмерные величины:

$$k_\alpha^{\pm}=\frac{\sigma_\alpha^{\pm}}{\sigma_s},\quad t_\alpha=\frac{T_\alpha}{2\sigma_s d},\quad m_\alpha=\frac{M_\alpha}{\sigma_s h d}. \tag{3.1}$$

Так как $d \ll h$, то изменениями деформаций и напряжений по толщине слоев можно пренебречь, и мы имеем

$$2t_\alpha=k_\alpha^{+}+k_\alpha^{-},\quad 2m_\alpha=k_\alpha^{+}-k_\alpha^{-}. \tag{3.2}$$

Этим формулам можно в плоскости (K_1, K_2) дать простое геометрическое истолкование. Напряженное состояние оболочки можно полностью охарактеризовать отрезком LM, лежащим в шестиугольнике на фиг. 9. Действительно, средняя точка отрезка N имеет координаты (t_1, t_2), а проекции отрезка на оси K_1 и K_2 дадут $2m_1$ и $2m_2$. При переходе к другому сечению оболочки положение отрезка меняется, но он должен



Фиг. 9.

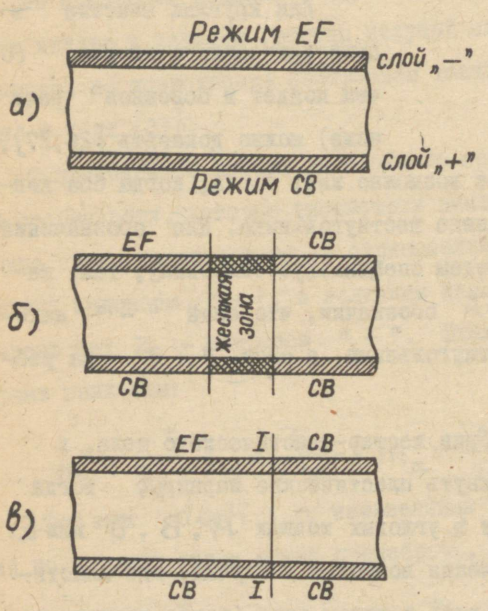
остаться внутри шестиугольника или на его границе. Такая интерпретация движения отрезка является весьма удобной и облегчает выбор подходящих режимов течения.

Для круглых пластин и цилиндрических оболочек (о чем пойдет в основном речь ниже) можно доказать [26,27], что пластическое течение возможно лишь тогда, когда оба конца отрезка лежат на границе шестиугольника. Для обозначений пластических режимов введем специальную символику; так, например, символом $EF-FA$ обозначим, что слой " - " находится на ребре EF шестиугольника, а слой " + " - на ребре FA.

Как известно из теории жестко-пластического тела, в конструкции могут возникнуть пластические шарниры; тогда концы отрезка LM лежат в угловых точках A, B, D или E. В случае двуслойного сечения возможен и случай, где пластический шарнир возникает лишь в одном слое (такие шарниры целесообразно называть полушарнирами). Следует отметить, что в случае полушарнира имеет место дополнительное условие непрерывности компонентов скоростей деформаций. В качестве примера рассмотрим полушарнир типа $EF-A$. Так как здесь в слое " - " шарнира не возникает, то должно быть $\left[\dot{e}_2^-\right] = 0$ (знак $\left[\right]$ отмечает величину скачка при переходе полушарнира); на осно-

вании гипотез Кирхгоффа это условие можно переписать еще в форме $\left(\dot{\varepsilon}_2 - \frac{1}{2}\dot{\varkappa}_2\right)\Big] = 0$.

При движении отрезка LM его концы могут перейти на другие грани шестиугольника. Следует различать два типа таких переходов: I) движение отрезка происходит непрерывно, 2) отрезок переходит в новое пластическое состояние скачком (это имеет место, если например, сжатый элемент слоя переходит скачком в растянутое состояние). Исследуем поближе второй тип перехода. С целью сделать следующее рассуждение более наглядным, ограничимся одним конкретным примером. Допустим, что произошел переход из режима $EF-CB$ в режим $CB-CB$ (фиг. I0). Строго говоря, между режимами EF и CB должна находиться жесткая зона (фиг. I0б), так как в противном случае не удастся выполнить требования непрерывности величин t_1 и m_1 *) в точке со-



Фиг. I0.

*) Здесь и в дальнейшем индекс "I" соответствует радиальному направлению в случае круглых пластин и осевому направлению при цилиндрических оболочках. Требование непрерывности t_1 и m_1 вытекает из уравнений равновесия элемента пластины или оболочки.

прикосновения режимов EF и CB. Как известно, при большинстве задач о несущей способности жестких областей в пластине или оболочке не возникает; вследствие этого можно предположить, что размеры жесткой области на фиг. 10б незначительны. Пренебрегая этой областью, переходим к фиг. 10в. В таком случае в сечении I-I уже не выполняются условия непрерывности величин t_1 и m_1. Но, имея в виду, что в сечении I-I величины κ_1^+, κ_2^+ должны оставаться непрерывными, в силу (3.2) приходим к требованиям $\left(t_1+m_1\right)\rceil=\left(t_2+m_2\right)\rceil=0$. (Эти условия следует считать приближенными, их точность тем лучше, чем меньше размеры жесткой области.) Так как в точке перехода пластического шарнира не возникает, то должно быть выполнено условие $\dot{e}_2^-\rceil = 0$, из чего вытекает, что $\dot{e}_2^- = 0$.

Подобные соотношения нетрудно получить и для других переходов разрывного типа. Следует подчеркнуть, что при решении задач о пластическом течении пластин и оболочек гипотеза о вырождаемости жесткой области не является неизбежной, но все-таки в значительной мере облегчает решение таких задач.

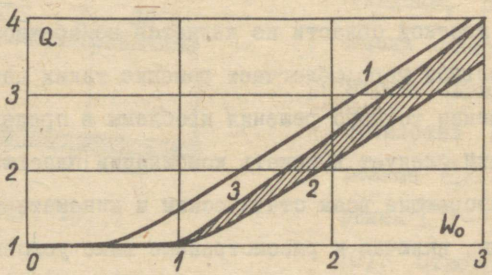
Для получения точного решения проблемы в пределах сделанных допущений следует выискать комбинации пластических режимов, удовлетворяющие всем статическим и кинематическим условиям проблемы, включая и рассмотренные выше условия непрерывности. Этот метод пока был применим для решения некоторых задач пластического деформирования круглых пластин и цилиндрических оболочек. В дальнейшем ознакомимся и с некоторыми полученными результатами.

Начнем со случая свободно опертой круглой пластины [26],

нагруженной равномерным поперечным давлением при контурном условии $U = 0$ (решение этой задачи для однородной пластины было рассмотрено во втором разделе работы). Вместо нагрузки q и прогиба в центре пластины w_0 введем следующие безразмерные величины (a - радиус пластины):

$$W_0 = \frac{w_0}{h}, \quad Q = \frac{q a^2}{6 \sigma_s h d}. \tag{3.3}$$

Из проведенных вычислений вытекает, что при $W_0 < 1/2$ во всей пластине реализуется режим $EF-CB$, безразмерная нагрузка имеет значение $Q = 1$, при $W_0 = 1/2$ в центре пластины происходит скачкообразный переход слоя " - " из состояния E и B ; при $W_0 > 1/2$ вблизи центра пластины имеем режим $B-B$. Кривая "нагрузка-прогиб" для этого случая приведена на фиг. II (кривая I). Если решать ту же задачу на ос-



Фиг. II.

новании теории деформаций, то уже нельзя получить единую кривую $Q = Q(W_0)$; нижняя и верхняя границы для этого решения отмечены кривыми 2 и 3 на фиг. II (при практических рас-

четах здесь, конечно, следует предпочитать кривую 2, так как она дает более безопасные значения для нагрузки).

Указанная выше методика была применена также для определения несущей способности растянуто-изогнутых пластин и для исследования поведения сжатых пластин в послекритической стадии [26]. В связи с последней задачей следует отметить, что при задаче устойчивости модель жестко-пластического тела не применена, так как при потере устойчивости существенное значение имеют упругие деформации, и пренебрегать ими нельзя. Но проведенные вычисления показывают, что в послекритической стадии уже при сравнительно малых прогибах в пластине возникают вторичные пластические деформации, область которых быстро увеличивается. Это обстоятельство дает основание полагать, что при изучении послекритической стадии при не слишком малых прогибах концепция жестко-пластического материала дает вполне приемлемые приближения для поведения реальной конструкции.

Пластическое деформирование осесимметрических цилиндрических оболочек рассмотрено в работах [27-29]. В работе [27] изучаются большие прогибы оболочки со свободно опертыми концами при совместном действии осевого растяжения и равномерного внешнего давления; допускается, что осевое растяжение T_1 остается неизменным во всем процессе нагружения. Следует отметить, что при этой задаче решение также неединственное. например, если ограничиться случаем достаточно малых прогибов, то вблизи края имеем режим FA-FA ; что касается центральной части оболочки, то здесь могут быть реализирова-

ны или режим F-FA, или EF-FA. В отношении диаграммы "нагрузка-прогиб" можно отметить, что она практически не зависит от выбора этих режимов. Последнее обстоятельство дало возможность получить для расчета оболочек простую формулу

$$\alpha^2 Q_* = \begin{cases} t_1 + 2W_0 t_1, & \text{при } t_1 \le 0{,}5, \\ 1 - t_1 + 2W_0 t_1, & \text{при } t_1 \ge 0{,}5. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Здесь введены обозначения (R - радиус оболочки, $2l$ - ее длина):

$$\alpha = \frac{l}{\sqrt{Rh}}, \quad t_1 = \frac{T_1}{2\sigma_s d}, \quad Q = \frac{qR}{2\sigma d}, \quad Q_* = Q + t_1 - 1, \quad W_0 = \frac{w_0}{h}.$$

Вычисления, проведенные на основании теории течения и теории деформаций, дали совпадающие результаты. Из этого можно сделать вывод, что в данном случае влияние сложного нагружения незначительное.

Проблема больших прогибов цилиндрической оболочки с заделанными краями под действием внутреннего давления и осевого растяжения была решена в работе Л.М.Кулля [28]. Но, имея в виду, что эта работа опубликована во второй части данного сборника, мы ее здесь подробнее анализировать не будем.

Случай оболочки, кромки которой свободно оперты и не могут перемещаться в осевом направлении (т.е. $U = 0$ при $X = 0$ и $X = 2l$), рассмотрен в [29]; основные результаты этой работы получены на основании теории деформаций. Выяснилось, что при $t_1 < 0.5$ поведение оболочек существенно зависит от параметра α. Если в случае оболочек, нагруженных внутренним давлением, имеем $\alpha < 1.047$ или $\alpha < \pi/2$ при

внешнем давлении, то пластическое деформирование оболочки первоначально происходит при $t_1 = 0$ (т.е. без осевого растяжения); от некоторого предельного прогиба $W_0 = W_0^*$ начинается возрастание величины t_1. Что касается длинных оболочек (где $\alpha < 1.047$ или соответственно $\alpha = \pi/2$), то при $t_1 < 0.5$ пластического деформирования практически не происходит и оболочка остается жесткой. При более развитых пластических деформациях, где $t_1 > 0.5$, качественные различия в механизме деформирования в зависимости от параметра оболочки α уже не встречаются.

Отметим, что рассмотренная в [29] задача была решена для однородной оболочки в работе М.Душек [30]. Применяя линеаризированную гиперповерхность обобщенных напряжений, М.Душек приходит к выводу, что переход к безмоментному решению происходит уже при прогибе, меньшем половины толщины оболочки. Интересно сравнить этот результат с данными работы [29] для двуслойной оболочки. Оказывается, что переход от моментного решения к безмоментному происходит при прогибе, величина которого составляет полторы толщины оболочки.

В работе [29] указано также, как решать поставленную задачу на основании теории течения. Наиболее удобным является здесь метод интегрирования закона течения, предложенный Ф.Ходжем [31]. Идея метода состоит в следующем: если концы отрезка LM на фиг. 9 переходят на ребро шестиугольника непосредственно из жесткой области, то закон течения можно прямо интегрировать по времени; в результате получим закон типа деформации. Более сложным является случай, где происхо-

дит переход от одного ребра к другому; здесь при интегрировании закона течения надо учитывать и историю процесса нагружения. Для иллюстрации приведем следующий пример. Допустим, что с течением времени некоторая часть оболочки переходит из режима $CB-CD$ в $CB-CB$ (переход от ребра CD к ребру CB происходит в слое "+"). Закон течения для режима $CB-CB$ имеет вид $\dot{e}_1^- = \dot{e}_1^+ = 0$, интегрирование которого дает $e_1^- = (e_1^-)_*$, $e_1^+ = (e_1^+)_*$ (индекс "$*$" обозначает значения соответствующих величин в точке перехода, т.е. в угловой точке C). Если допустить, что режим $CB-CD$ был достигнут из жесткой области, то для этого режима имеем $e_1^- = 0$, $e_1^+ + e_2 = 0$; следовательно, в момент перехода выполняются требования $(e_1^-)_* = 0$, $(e_1^+)_* = -(e_2)_*$. Таким образом, интегрирование закона $CB-CD$ для рассматриваемого процесса нагружения дает

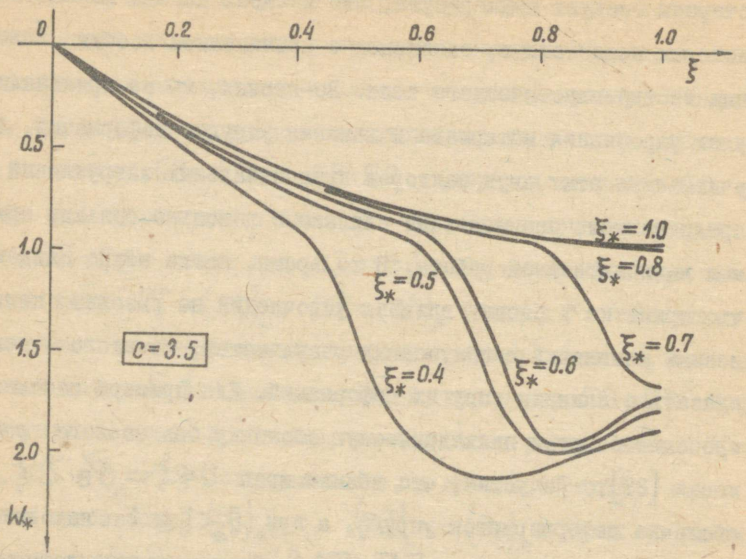
$$e_1^- = 0, \quad e_1^+ = (e_2)_*$$

Величина $(e_2)_*$ зависит от координаты x; эту функцию можно построить, если разбить весь процесс нагружения на малые участки и вычислить для каждой нагрузки величину e_2 в некотором сечении $x = x_*$, где выполняется режим $CB-C$. Подробности, связанные с применением этого метода, указаны в [29].

Выше шла речь о некоторых достоинствах при применении модели оболочки с идеализированным двуслойным сечением. Мы видели, что эта модель позволяет найти для ряда задач математически точные и замкнутые решения, кроме того, имеется возможность оценить влияние сложного нагружения. Но с другой

стороны следует подчеркнуть, что и здесь нельзя избежать некоторых недостатков, связанных с применением вообще концепции жестко-пластического тела. Во-первых, мы не принимали в учет упрочнения материала и влияния упругих деформаций. Хотя учитывание этих двух факторов принципиальных затруднений не представляет, оно все-таки связано с довольно большим объемом вычислительной работы. В то время, когда можно ожидать, что принятие в расчет влияния упрочнения не вызовет качественных изменений в полученных результатах, то этого нельзя сказать о влиянии упругих деформаций. Для примера рассмотрим свободно опертую цилиндрическую оболочку без осевого растяжения [27]. Допустим, что вблизи края $0 \le \xi = x/e < \xi_*$ оболочка деформируется упруго, а при $\xi_* < \xi \le 1$ находится в пластическом состоянии $EF-FA$. Считая полные деформации состоящими из упругих и пластических составляющих, можно построить кривые прогиба $W = W(\xi)$; которые показаны в случае $C = \alpha\sqrt{2} = 3.5$ для различных значений ξ_* на фиг. I2. Что касается величины безразмерной нагрузки Q, то оказывается, что она с увеличением зон пластических деформаций (т.е. уменьшением величины ξ_*) почти не изменяется и для $C = 3.5$ равна $Q \approx 0.82$, что меньше предельной нагрузки $Q = 1$, предсказываемой теорией для жестко-пластического материала. Обстоятельство, что жестко-пластическая теория дает для несущей способности цилиндрических оболочек преувеличенные значения, установлено и экспериментально [32].

Серьезным ограничением при применении концепции жестко-пластического тела для расчета гибких пластин и оболочек яв-



Фиг. I2.

ляется отсутствие единственности решения; таким образом, получив некоторое решение проблемы, нет уверенности в том, что не существует еще другая комбинация пластических режимов, которая может дать для параметра нагрузки меньшее значение, чем первая.

Литература

I. А.А.Ильюшин, Пластичность. Гостехиздат, I948.

2. Ю.Р.Лепик, Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инж.сб., т. 24, I956.

3. Ю.Р.Лепик, О равновесии гибких пластинок за пределом упругости. ПММ, т. 2I, вып. 6, I957.

4. К.П.Соонетс, О цилиндрическом изгибе упруго-пластической пластинки. В сб.: Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек", ч. П, Тарту, 1966.

5. Ю.Р.Лепик, Э.Э.Сакков, Исследование послекритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости (работа будет опубликована в Трудах У Всесоюзной конф. по теории пластин и оболочек).

6. Э.Э.Сакков, Исследование послекритической стадии упруго-пластических пластин при цилиндрической форме потери устойчивости (работа будет опубликована в Уч. зап.Тартуск. гос. ун-та).

7. Э.Ааренд, Ю.Лепик, Л.Лухт, Большие прогибы гибкой круглой упруго-пластической пластинки, свободно опертой по контуру. Уч.зап. Тартуск. гос. ун-та, № 102, 1961.

8. К.П.Соонетс, О равновесии гибких упруго-пластических прямоугольных в плане панелей при больших прогибах. Уч.зап. Тартуск. гос. ун-та, № 177, 1965.

9. Н.Ф.Ершов, Упруго-пластический изгиб сжатых гибких пластин. Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, вып. 39, 1961.

10. Э.А.Йынги, К расчету упруго-пластических пологих арок. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 129, 1962.

11. Э.А.Йынги, Симметричная деформация упруго-пластической пологой круговой арки. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 150, 1964.

12. Э.А.Йынги, Об устойчивости упруго-пластической пологой круговой арки двутаврового поперечного сечения с учетом термических напряжений. В сб.: Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек", ч. П, Тарту, 1966.

13. Ю.Р.Лепик, Л.Я.Лухт, О влиянии сжимаемости на изгиб упруго-пластических пластинок. Труды IУ Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, Ереван, 1964.

I4. Ю.Р.Лепик, Температурные напряжения в гибких неоднородных пластинах за пределом упругости. Уч.зап. Тартуск. гос. ун-та, № I77, I965.

I5. Ю.Р.Лепик, Определение остаточного прогиба и остаточных усилий при разгружении гибких упруго-пластических пластинок. Изв. АН СССР. Отд. техн.н. Механика и машиностроение, I959, № 3.

I6. Н.Ф.Ершов, Равновесие гибких упруго-пластических оболочек и пластин (на укр. языке). Прикл. механіка, т. 8, вып. 5, I962.

I7. В.И.Феодосьев, Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, т. 27, вып. 2, I963.

I8. В.И.Феодосьев, Применения шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. ПММ, т. 27, вып. 5, I963.

I9. P.G.Hodge, Yield conditions rotationally symmetric shells under axisymmetric loading. J. Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E, V. 27, 1960, №2.

20. R.W. Kuech, S.L.Lee, Limit analysis of simply supported conical shells subjected to uniform internal pressure. Journal Franklin Inst., V. 280, 1965, №1.

2I. Ю.Р.Лепик, Пластическое течение гибких круглых пластин из жестко-пластического материала. Изв. АН СССР. Отд. техн.н. Механика и машиностроение, I960, № 2.

22. Ю.Р.Лепик, Большие прогибы круглых жестко- пластических пластинок, защемленных по контуру. Труды конф. по теории пластин и оболочек, I960. Казань, I96I.

23. А.Круусмаа, Некоторые вопросы о несущей способности кольцевых пластинок из жестко-пластического материала. Труды инст. физ. и астрон. АН Эст. ССР, № I9, Тарту, I962.

24. О.Н.Шаблий, Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки. В сб.: Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически линейные задачи теории пластин и оболочек", ч.П, Тарту, 1966.

25. P.G.Hodge, Piecewise-linear bounds on the yield-point load of shells. J.Mech. Phys. Solids, V.11, 1963, №1

26. Ю.Р.Лепик, К осесимметричному изгибу гибких круглых жестко-пластических пластин. Механика твердого тела, 1966, № 4.

27. Ü.Lepik, Large deflections of cylindrical rigid-plastic shells under axial tension and external pressure. Nuclear Engineering and Design. V. 4, 1966, №1.

28. Л.М.Кулль, Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения. В сб.: Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек", ч. П, Тарту, 1966.

29. Ю.Р.Лепик, Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего или внешнего давления (работа будет опубликована в трудах IУ конф. по теории оболочек и пластин).

30. M.Duszek, Effect on geometry changes on the carring capacity of cylindrical shells. Bull. Acad polon. sci. Sér sci techn., 1965, № 4.

31. Ф.Ходж, Минимальные принципы кусочно-линейной изотропной теории пластичности. Сб. "Механика" 1958, № I (47). (Русский перевод статьи „Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity"). Journ. Rational Mech. and Analysis, V.5, 1965, №6.

32. G.Augusti, S. d'Agostino, Tests of cylindrical shells in the plastic range. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. V. 90, 1964, №EM1.

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПОЛОСЫ И ЛИСТА

Н.Н.Малинин
МВТУ им. Н.Э.Баумана

Исследование больших деформаций при пластическом изгибе полосы и листа имеет большое практическое значение для теории обработки металлов давлением.

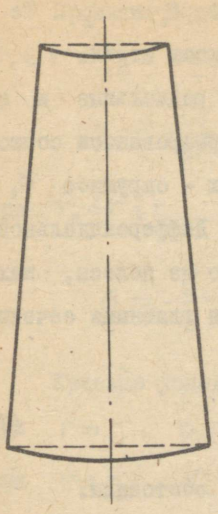
В настоящем сообщении рассматривается физически и геометрически нелинейные задачи чистого пластического изгиба полосы и листа. Предполагается, что материал жестко пластичен. При изгибе полосы принимается, что напряженное состояние является плоским, и используется критерий Треска-Сен-Венана. Изгиб листа изучается в условиях плоского деформированного состояния.

Рассмотрим вначале чистый пластический изгиб полосы, толщина которой b_0 (в недеформированном состоянии) произвольно меняется по высоте [I], [2]. Высоту полосы в недеформированном состоянии обозначим через h_0.

Заметим, что допущение о плоском напряженном состоянии полосы не позволяет исследовать искривление меньшей стороны поперечного сечения и вместо действительной формы сечения, изображенной на фиг. I сплошными линиями, ведет к форме, представленной на фиг. I штриховыми линиями.

Для определенности примем, что при изгибе среднее сечение полосы не поворачивается и нижняя точка этого сечения неподвижна.

Сопоставим полосу в двух близких друг к другу деформи-

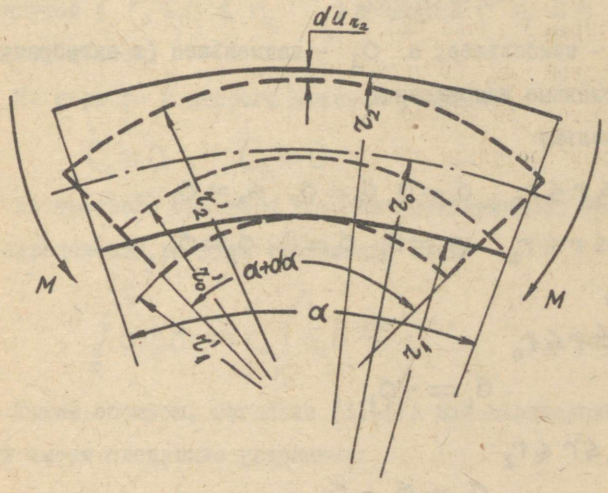


Фиг. I.

рованных состояниях. Первое изображено на фиг. 2 сплошными линиями, второе - штриховыми.

Допустим, что при переходе от первого состояния ко второму деформации и перемещения можно считать малыми.

Назовем геометрическое место точек, разделяющих растянутую в окружном направлении область от сжатой, граничным слоем. Радиус кривизны граничного слоя в первом деформированном состоянии обозначим через r_0, а внутренний и наружный радиусы кривизны



Фиг. 2.

в этом же состоянии - соответственно через r_1 и r_2. Те же величины во втором состоянии отметим индексом штрих.

Из симметрии деформации следует, что радиальные и окружные сечения полосы, находящейся в деформированном состоянии, являются главными, а напряжения в них - окружное σ_t и радиальное σ_r - главными напряжениями. Дифференциальное уравнение равновесия элемента, вырезанного из полосы, находящейся в деформированном состоянии, двумя главными сечениями, имеет вид

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r b r) - \sigma_t b = 0, \qquad (I)$$

где b - ширина полосы в деформированном состоянии.

Согласно критерию Треска-Сен-Венана интенсивность напряжений σ_i равна

$$\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3, \qquad (2)$$

где σ_1 - наибольшее, а σ_3 - наименьшее (в алгебраическом смысле) главные напряжения.

Поскольку

при $r_1 \le r \le r_0$ $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_t$,

а при $r_0 \le r \le r_2$ $\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_r$,

то имеем:

при $r_1 \le r \le r_0$

$$\sigma_i = -\sigma_t . \qquad (3)$$

а при $r_0 \le r \le r_2$

$$\sigma_i = \sigma_t - \sigma_r . \qquad (4)$$

Проинтегрируем (I), учитывая (3) и (4). При $r_1 \le r \le r_0$ получим

$$\sigma_r = \frac{C_1}{br} - \frac{1}{br}\int_{r_1}^{r} \sigma_i b\,dr, \qquad (5)$$

при $r_0 \le r \le r_2$

$$\sigma_r = \frac{C_2}{b} - \frac{1}{b}\int_{r}^{r_2} \sigma_i b \frac{dr}{r}. \qquad (6)$$

Краевые условия

при $r = r_1 \quad \sigma_r = 0,$

при $r = r_2 \quad \sigma_r = 0,$

при $r = r_0 \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2},$

где индексами "I" и "2" отмечены напряжения соответственно в растянутой ($r_0 \le r \le r_2$) и сжатой ($r_1 \le r \le r_0$) областях полосы.

Из первого и второго краевых условий

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \qquad (7)$$

Из третьего краевого условия устанавливаем уравнение для определения радиуса граничного слоя:

$$\int_{r_1}^{r_0} \sigma_i b\,dr = r_0 \int_{r_0}^{r_2} \sigma_i b \frac{dr}{r}. \qquad (8)$$

Таким образом, согласно (3)-(7) для определения напряжений имеем следующие уравнения:

при $r_1 \le r \le r_0$

$$\sigma_r = -\frac{1}{br}\int_{r_1}^{r_0} \sigma_i\, b\, dr, \quad \sigma_t = -\sigma_i, \tag{9}$$

при $r_0 \leq r \leq r_2$

$$\sigma_r = -\frac{1}{b}\int_{r_0}^{r_2} \sigma_i\, b\, \frac{dr}{r}, \quad \sigma_t = \sigma_i + \sigma_r. \tag{10}$$

Если записывать моменты внутренних сил относительно линии пересечения граничной поверхности с поперечным сечением, то выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t\, b\,(r - r_0)\, dr. \tag{11}$$

Перейдем к рассмотрению деформаций и перемещений. Зависимости между приращениями радиальной и окружной деформации соответственно $d\varepsilon_r$ и $d\varepsilon_t$ и приращениями радиального и окружного перемещения du_r и du_t при переходе от первого деформированного состояния (фиг. 2 - сплошные линии) ко второму (фиг. 2 - штриховые линии) имеют такой же вид, как и зависимости деформаций от перемещений при условии малости этих величин [3] :

$$d\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r}(du_r), \; d\varepsilon_t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(du_t) + \frac{du_r}{r}. \tag{12}$$

Из симметрии деформации следует, что $d\gamma_{rt} = 0$; поэтому [3]

$$\frac{\partial}{\partial r}(du_t) - \frac{du_t}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(du_r) = 0. \tag{13}$$

Исключая du_r и du_t из (I2) и (I3), получаем условие совместности приращений деформаций

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(d\varepsilon_r\right)+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(d\varepsilon_t\right)-r\frac{\partial}{\partial r}\left(d\varepsilon_r\right)+2r\frac{\partial}{\partial r}\left(d\varepsilon_t\right)=0.$$

В рассматриваемой задаче первый член в этом соотношении равен нулю. Поэтому оно принимает вид:

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(d\varepsilon_t\right)\right]+\frac{d}{dr}\left(d\varepsilon_t-d\varepsilon_r\right)=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$r\frac{d}{dr}\left(d\varepsilon_t\right)+d\varepsilon_t-d\varepsilon_r+D=0, \qquad (I4)$$

где D - постоянная интегрирования.

Из геометрических соображений легко показать [3], что относительное изменение центрального угла $d\varphi$ равно

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}=r\frac{d}{dr}\left(d\varepsilon_t\right)+d\varepsilon_t-d\varepsilon_r.$$

Таким образом, согласно (I4) постоянная интегрирования D имеет следующий геометрический смысл:

$$D=-\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}. \qquad (I5)$$

Представим (I4) в виде

$$\frac{d}{dr}\left(d\varepsilon_t\right)+\frac{d\varepsilon_t-d\varepsilon_r}{r d\varepsilon_t}\,d\varepsilon_t+\frac{D}{r}=0.$$

Интеграл этого уравнения

$$d\varepsilon_t = \exp\left(-\int_{r_1}^{r} \frac{d\varepsilon_t - d\varepsilon_r}{d\varepsilon_t}\,\frac{dr}{r}\right)\left(B - D\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r}\exp\int_{r_1}^{r}\frac{d\varepsilon_t - d\varepsilon_r}{d\varepsilon_t}\,\frac{dr}{r}\right).$$

Для связи B и D используем условие равенства нулю приращения окружной деформации на граничной поверхности при $r = r_o$. Тогда

$$B = D\int_{r_1}^{r_o}\frac{dr}{r}\exp\int_{r_1}^{r}\frac{d\varepsilon_t - d\varepsilon_r}{d\varepsilon_t}\,\frac{dr}{r},$$

следовательно,

$$d\varepsilon_t = -D\exp\left(-\int_{r_1}^{r}\frac{d\varepsilon_t - d\varepsilon_r}{d\varepsilon_t}\,\frac{dr}{r}\right)\int_{r_o}^{r}\frac{dr}{r}\exp\int_{r_1}^{r}\frac{d\varepsilon_t - d\varepsilon_r}{d\varepsilon_t}\,\frac{dr}{r}. \quad (16)$$

Зависимости приращений деформаций от напряжений для жестко пластического тела при плоском напряженном состоянии имеют вид [4]

$$d\varepsilon_t = \frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}\left(2\sigma_t - \sigma_r\right),\quad d\varepsilon_r = \frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}\left(2\sigma_r - \sigma_t\right),\quad d\varepsilon_z = -\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}\left(\sigma_r - \sigma_t\right), \quad (17)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, $\overline{d\varepsilon_i}$ – интенсивность приращений деформаций [4].

Используя эти соотношения, преобразуем (16):

$$d\varepsilon_t = -D\exp\left(-3\int_{r_1}^{r}\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2\sigma_t - \sigma_r}\,\frac{dr}{r}\right)\int_{r_o}^{r}\frac{dr}{r}\exp\left(3\int_{r_1}^{r}\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2\sigma_t - \sigma_r}\,\frac{dr}{r}\right). \quad (18)$$

Заметим, что по (I8) приращение окружной деформации на внутреннем радиусе

$$d\varepsilon_{t1}=D\int_{r_1}^{r_0}\frac{dr}{r}\exp\left(3\int_{r_1}^{r}\frac{\sigma_t-\sigma_r}{2\sigma_t-\sigma_r}\frac{dr}{r}\right). \qquad (I9)$$

Установим зависимость между внутренними радиусами кривизны r_1 и r_1' соответственно в первом (фиг.2 - сплошные линии) и втором (фиг. 2 - штриховые линии) деформированных состояниях. Выражение для приращения окружной деформации на внутреннем радиусе

$$d\varepsilon_{t1}=\frac{r_1'(d\varphi+\Delta d\varphi)-r_1 d\varphi}{r_1 d\varphi},$$

откуда, используя (I5), имеем:

$$r_1'=\frac{r_1(1+d\varepsilon_{t1})}{1-D}. \qquad (20)$$

Выразим теперь приращения радиальной и осевой деформаций через приращение окружной деформации. Из (I7) имеем:

$$d\varepsilon_r=\frac{2\sigma_r-\sigma_t}{2\sigma_t-\sigma_r}d\varepsilon_t,\quad d\varepsilon_z=-\frac{\sigma_t+\sigma_r}{2\sigma_t-\sigma_r}d\varepsilon_t \qquad (2I)$$

Получим приращение радиального перемещения точек вертикального сечения. При этом учтем, что по принятому выше условию нижняя точка этого сечения неподвижна. Согласно (I2) имеем:

$$du_r=\int_{r_1}^{r}d\varepsilon_r dr. \qquad (22)$$

Установим теперь изменение толщины при переходе из первого деформированного состояния (фиг. 2 - сплошные линии) во второе (фиг. 2 - штриховые линии). Согласно (2I)

$$db = b d\varepsilon_z = -b \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r} d\varepsilon_t . \qquad (23)$$

Приведем порядок расчета. Расчет начинается с рассмотрения полосы в недеформированном состоянии (нулевое состояние). Для того, чтобы по схеме жестко пластического тела полоса начала деформироваться, необходимо приложение изгибающего момента, равного предельному моменту для прямого бруса.

При переходе из нулевого состояния в первое деформированное приращения окружных деформаций изменяются по линейному закону как в прямом брусе. Изменение высоты поперечного сечения при этом равно нулю. После выбора численного значения величины $d\varepsilon_{t1}$ при переходе из нулевого состояния в первое деформированное определяются внутренний и наружный радиусы кривизны, ширина полосы и интенсивности приращений деформаций в различных точках поперечного сечения. По графику зависимости σ_i от $\int d\varepsilon_i$, который для жестко пластического тела совпадает с диаграммой растяжения материала, определяется интенсивность напряжений σ_i в тех же точках. Затем по (8) вычисляется радиус кривизны нейтрального слоя r_0 , по (9) и (I0) - напряжения, а по (II) - изгибающий момент. Интегралы в этих формулах берутся численно.

После подсчета напряжений в первом состоянии, выбрав численное значение величины $d\varepsilon_{t1}$ при переходе из первого состояния во второе, по (I9) вычисляем величину D , а затем

из (I8) определяем приращения окружных деформаций в остальных точках поперечного сечения.

Внутренний радиус кривизны во втором состоянии определяется из (20).

Для подсчета наружного радиуса кривизны во втором состоянии вначале по (2I) определяется приращение радиальных деформаций, а затем по (22) устанавливается приращение радиального перемещения точек наружной поверхности при переходе из первого состояния во второе. Потом подсчитывается наружный радиус кривизны во втором состоянии.

По (23) вычисляется изменение толщины поперечного сечения, а затем - толщина поперечного сечения во втором состоянии.

Далее находятся величины интенсивностей приращений деформаций $d\varepsilon_i$ в тех же точках поперечного сечения, что и раньше. Суммируя эти величины с полученными ранее, определяется абсцисса точки на диаграмме растяжения, ордината которой дает интенсивность напряжений σ_i .

Поведение материала в точках между нейтральным слоем нулевого состояния и нейтральным слоем в текущий момент имеет некоторые особенности. Вначале, в процессе изгиба, материал в этих точках испытывает сжатия в окружном направлении. Затем в момент совпадения нейтрального слоя с данным материальным слоем он мгновенно (вследствие равенства модуля упругости бесконечности) разгружается. Потом материал испытывает растяжение в окружном направлении. Для определения интенсивности напряжений в точках этой области без учета эффекта

Баушингера нужно с момента прохождения нейтрального слоя через эти точки откладывать интенсивность приращений деформаций на диаграмме растяжения материала от начала координат.

После определения интенсивности напряжений в различных точках поперечного сечения по (8) вычисляется радиус кривизны нейтрального слоя r_0, по (9) и (10) - напряжения, а из (11) - изгибающий момент.

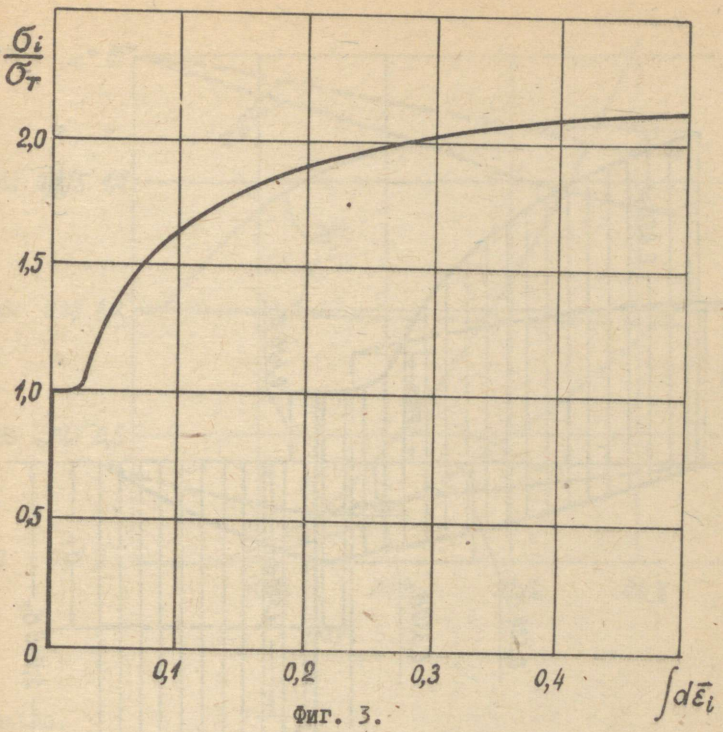
Повторяя подобные расчеты, можно получить радиусы кривизны, форму поперечного сечения, напряжения и изгибающий момент для любой величины окружной деформации на внутреннем радиусе.

Вышеизложенным методом были произведены расчеты изгиба полосы прямоугольного поперечного сечения из стали 30, действительная диаграмма растяжения которой изображена на фиг.3 [2].

На фиг. 4 представлены формы поперечного сечения и распределение напряжений для величины окружной деформации на внутреннем волокне, равной 40%. Приращение окружной деформации на внутреннем волокне принималось равным 5%.

На фиг. 5 приведены графики зависимостей безразмерных величин изменения высоты поперечного сечения h°, расстояния от нейтрального слоя до точек внутренней поверхности r° и изгибающего момента M° в зависимости от величины окружной деформации в точках внутренней поверхности ε_{t1}; при этом

$$h^\circ = \frac{h_0 - h}{h_0} 10^4, \quad r^\circ = \frac{r_0 - r_1}{h_0}, \quad M^\circ = \frac{4M}{\sigma_T b_0 h_0^2}.$$

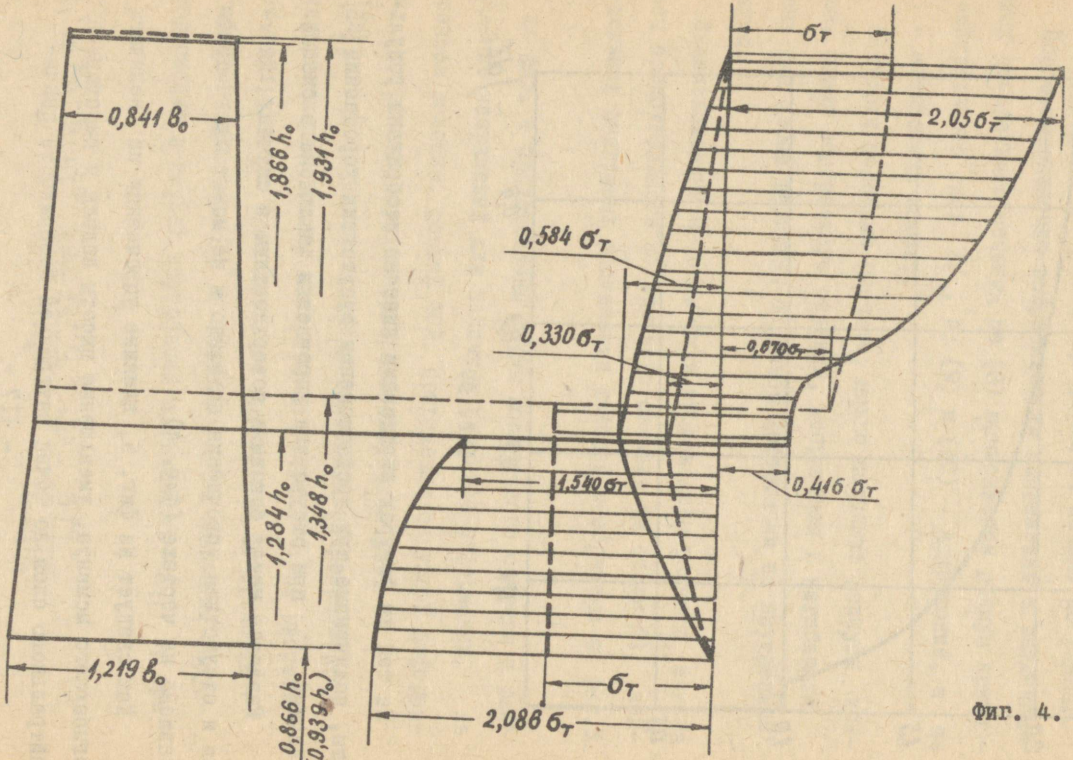


Фиг. 3.

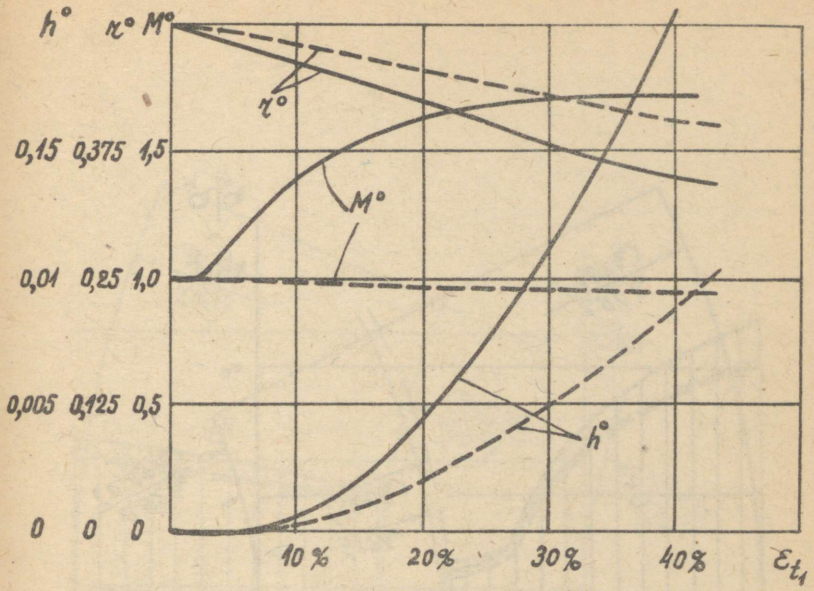
На тех же фигурах штриховыми линиями изображены результаты, полученные при предположении отсутствия упрочнения [I]. Величина r_1 при отсутствии упрочнения заключена в скобки.

Различие между боковыми поверхностями в случаях наличия и отсутствия упрочнения невелико и не может быть представлено на чертеже (фиг. 4).

Как следует из фиг. 5, влияние упрочнения на величины изгибающего момента, уменьшение высоты полосы и расстояния нейтрального слоя до точек внутренней поверхности значи-


0,841 B_o
1,866 h_o
1,931 h_o
1,284 h_o
1,348 h_o
1,219 B_o
0,866 h_o
(0,939 h_o)
σ_T
2,05 σ_T
0,584 σ_T
0,330 σ_T
0,870 σ_T
1,540 σ_T
0,416 σ_T
σ_T
2,086 σ_T

Фиг. 4.

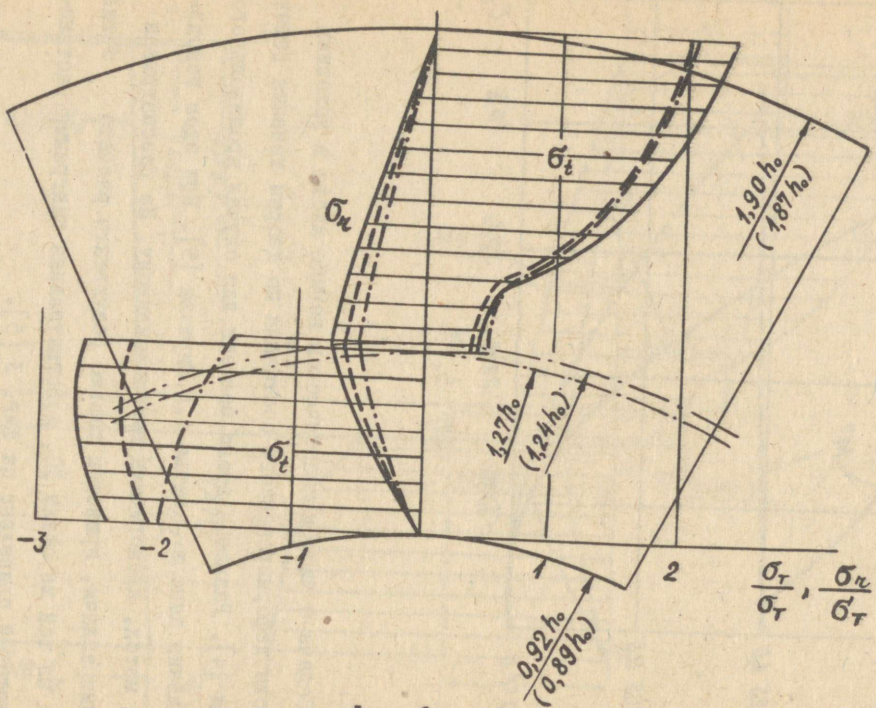


Фиг. 5.

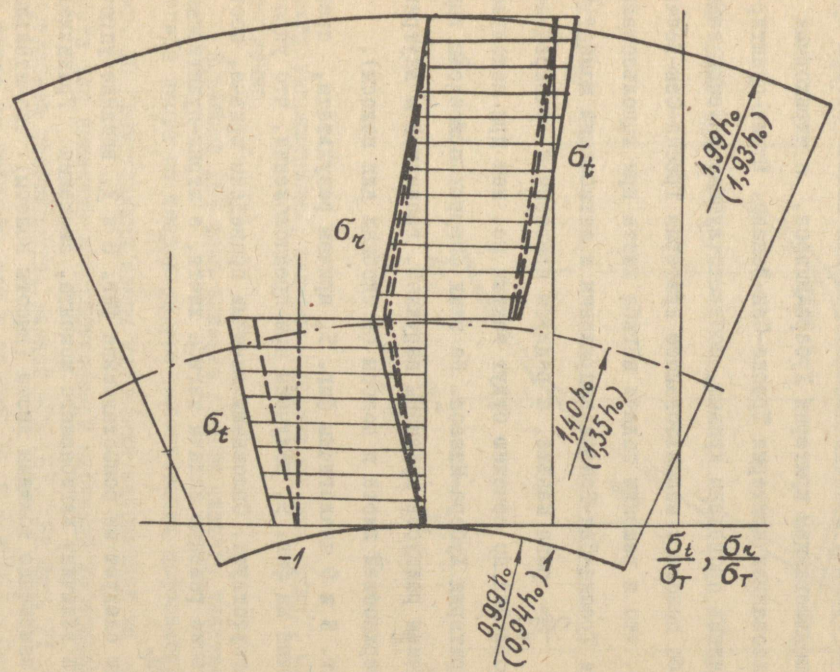
тельно.

Задача о чистом пластическом изгибе листа в условиях плоского деформированного состояния по теории течения решена Хиллом [4]. Развитие этого решения для случая произвольного упрочнения дано в статье А.А.Ширшова [5]. При этом использован метод, аналогичный вышеизложенному. Не рассматривая решения задачи, приведем только результаты расчета изгиба листа из той же стали 30, действительная диаграмма растяжения которой приведена на фиг. 3 [5].

На фиг. 6 и 7 представлено распределение напряжений по толщине листа для той же величины окружной деформации на


σ_t
σ_n
σ_t
1,90 h_0
(1,87 h_0)
1,27 h_0
(1,24 h_0)
0,92 h_0
(0,89 h_0)
-3
-2
-1
1
2
$\frac{\sigma_\tau}{\sigma_\tau}$, $\frac{\sigma_n}{\sigma_\tau}$

Фиг. 6.



σ_t
σ_r
σ_t
$\frac{1,99h_0}{(1,93h_0)}$
$\frac{1,40h_0}{(1,35h_0)}$
$\frac{0,99h_0}{(0,94h_0)}$
-1
1
$\frac{\sigma_t}{\sigma_T}, \frac{\sigma_r}{\sigma_T}$

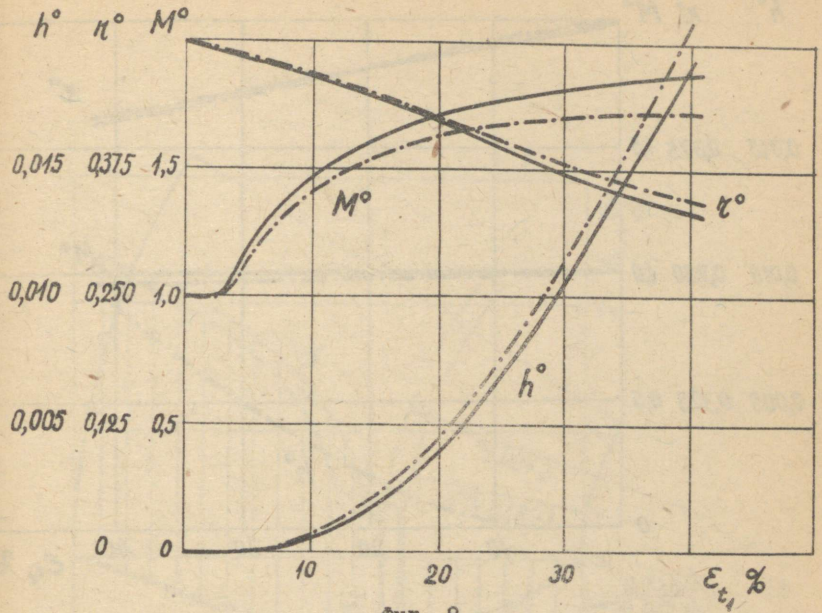
Фиг. 7.

16.

внутреннем волокне, равной 40%. Приращение окружной деформации на внутреннем волокне принималось равным 5%. Результаты, представленные на фиг. 7, получены при предположении, что упрочнение отсутствует. На обоих фигурах сплошными линиями проведены кривые, соответствующие решению задачи изгиба листа с использованием критерия Хубера-Мизеса, а штриховыми - с использованием критерия Треска-Сен-Венана. Штрих-пунктирными линиями проведены кривые, соответствующие решению задачи изгиба полосы с использованием критерия Треска-Сен-Венана. Заметим, что в решении задачи изгиба листа при использовании критерия Треска-Сен-Венана напряжения и изгибающий момент будут в $\frac{2}{\sqrt{3}}$ раза меньше, а радиусы кривизны и распределение деформаций по сечению будут такими же, как при использовании критерия Хубера-Мизеса. На этих фигурах приведены также величины радиусов кривизны наружной, граничной и внутренней поверхностей листа и полосы (в скобках для полосы).

Фиг. 8 и 9 аналогичны фиг. 5, причем результаты, представленные на фиг. 9, получены при предположении, что упрочнение отсутствует. Сплошными линиями проведены кривые, соответствующие решению задачи изгиба листа, а штрих-пунктирными - полосы.

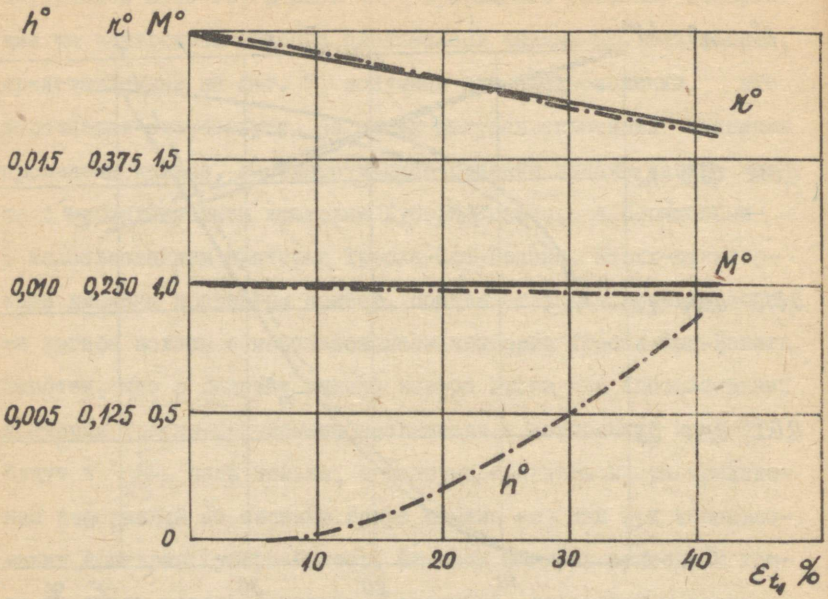
Как следует из сопоставления фиг. 8 и 9, влияние упрочнения на величину изгибающего момента, смещения граничного слоя и изменение толщины листа (высоты полосы) значительно. Различие между этими величинами, полученными при решении задачи в условиях плоского деформированного состояния (лист) и плоского напряженного состояния (полоса), невелико. Различие



Фиг. 8.

между напряжениями, как это следует из фиг. 6 и 7, более существенно.

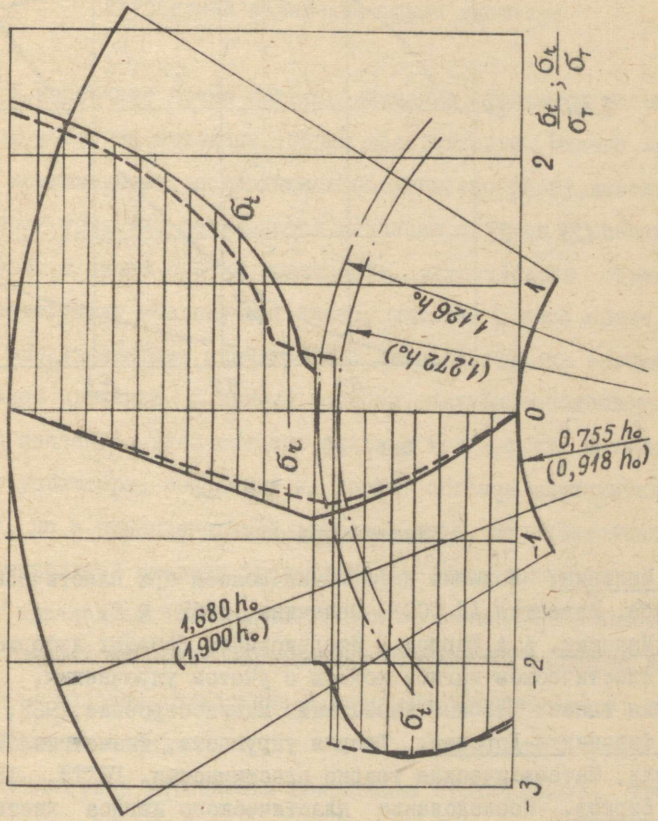
В работе [6] дано решение задачи чистого пластического изгиба листа по теории упруго-пластических деформаций. На фиг. 10 представлены эпюры изменения напряжений по толщине листа для величины логарифмической окружной деформации на внутренней поверхности, равной 40% [6]. На фиг. 11 приведены такие же графики, как и на фиг. 5, 8 и 9 [6]. Сплошными линиями на фиг. 10 и 11 изображены результаты, полученные по теории упруго-пластических деформаций, а штриховыми - по теории течения [5]. Величины радиусов кривизны по теории



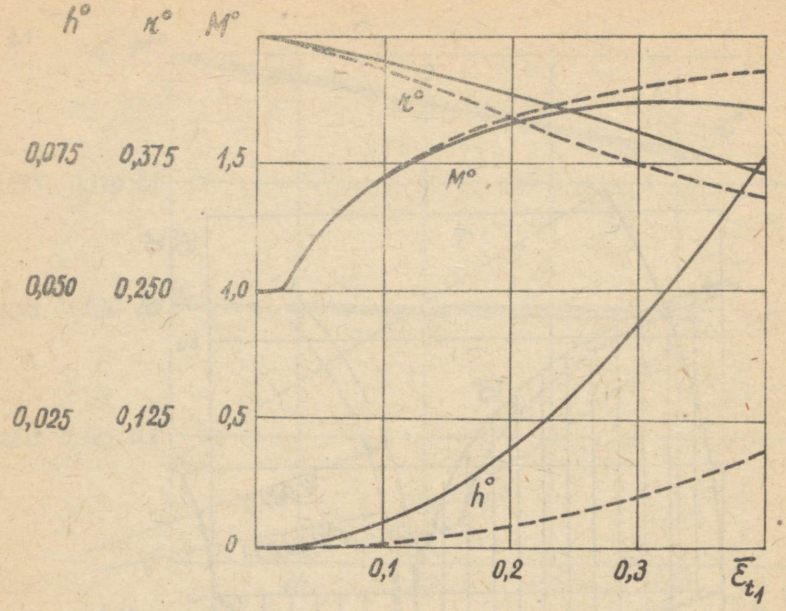
Фиг. 9.

течения на фиг. I0 указаны в скобках.

Как следует из фиг. I0 и II, различие в результатах решений по двум теориям в напряжениях и изгибающем моменте невелико, в то время как изменение толщины листа и расстояние граничного слоя от точек внутренней поверхности различаются существенно. Вопрос о том, какая из теорий лучше соответствует действительности, может быть решен только экспериментально.


$\frac{\sigma_t}{\sigma_T}; \frac{\sigma_t}{\sigma_T}$
2
1
0
-1
-2
-3
σ_t
σ_t
σ_t
1,428 h_o
(1,272 h_o)
0,755 h_o
(0,918 h_o)
1,680 h_o
(1,900 h_o)

Фиг. 10.



Фиг. II.

Литература

I. Н.Н.Малинин, Большие деформации полосы при пластическом изгибе. Известия АН СССР, Механика, I965, № 2.

2. Н.Н.Малинин, А.А.Ширшов, Исследование больших деформаций при пластическом изгибе полосы с учетом упрочнения, Известия высших учебных заведений. Машиностроение,I965, №2.

3. М.М.Филоненко-Бородич, Теория упругости, Физматгиз,I959.

4. Р.Хилл, Математическая теория пластичности, ГИТТЛ, I956.

5. А.А.Ширшов, Исследование пластического изгиба листа с учетом упрочнения. Известия высших учебных заведений. Машиностроение, I965, № 7.

6. Н.Н.Малинин, А.А.Ширшов, Пластический изгиб листа при больших деформациях. Известия высших учебных заведений. Машиностроение, I965, № 8.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

М.Ш. Микеладзе

Грузинский политехнический институт

В настоящее время большое внимание уделяется расчету тонких оболочек методами теории пластичности. Однако, за редкими исключениями, подавляющее большинство работ, выполненных в данной области, посвящается изучению случаев с осевой симметрией. В связи с этим возникает естественное стремление расширить круг исследуемых задач, включив в него общие случаи, представляющие значительный интерес с точки зрения инженерной практики. С другой стороны, изучение подобного рода задач связано с преодолением больших трудностей математического характера, вызванных не только объемом вычислительных работ, но и принципиальной стороной дела. Это обстоятельство в значительной степени предопределяет пути дальнейшего развития прикладной теории пластичных оболочек, центральное место в которой занимают определение несущей способности конструкций и вопросы, связанные с проблемой оптимального проектирования последних.

Прибегая к упрощающим допущениям статического, геометрического и физического характера, можно исследовать достаточно широкий класс задач, содержание и способ решения которых способствуют в какой-то степени формированию технической теории пластичных оболочек.

Настоящее сообщение посвящается краткому обзору некоторых результатов, полученных автором в данной области.

§ I. Оценка несущей способности оболочек [I,2,3,4,5]

Имея в виду главным образом пологие и круговые цилиндрические оболочки, основным статическим и геометрическим соотношениям можно придать вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}+q_1=0,\quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+q_2=0,\\
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2}-\frac{T_1}{R_1}-\frac{T_2}{R_2}+q_n=0,\\
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}=N_1,\quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2}=N_2;
\end{aligned}\right\}\quad (I.1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{w}{R_1},\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \alpha_2}+\frac{w}{R_2},\\
&\omega=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2},\quad \varkappa_1=-\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2},\\
&\varkappa_2=-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2},\qquad \chi=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1\partial \alpha_2};
\end{aligned}\right\}\quad (I.2)$$

где A_1 и A_2 – параметры Ламе, α_1 и α_2 – координатные линии, R_1 и R_2 – радиусы кривизны, q_1, q_2, q_n – компоненты внешней нагрузки, T_1 и T_2 – нормальные усилия, S – сдвигающее усилие, N_1 и N_2 – перерезывающие усилия, M_1 и M_2 – изгибающие моменты, H – крутящий момент, u, v и w – соответственно проекции вектора скорости перемещения произвольной точки срединной поверхности, ε_1, ε_2 и ω –

скорости относительных удлинений и сдвига, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и χ характеризуют скорость изменения кривизны и кручения срединной поверхности.

При построении соотношений физического характера предполагается, что материал оболочки является анизотропной, жестко-пластичной средой, главные направления анизотропии которой совпадают с координатными линиями на поверхности. В целях максимального упрощения жестко-пластичной расчетной схемы не только упругие, но и упруго-пластичные части оболочки рассматриваются как жесткие. Такое допущение вместе с предположением о неискривляемости нормального элемента позволяет удовлетворить условию текучести лишь в некотором интегральном виде.

В результате принятых упрощений условие пластичности и закон течения материала оболочки принимают следующий вид:

$$F(T_1,T_2,S,M_1,M_2,H)\equiv\frac{1}{h^2}\left(\frac{T_1^2}{\sigma_{s1}^2}-\frac{T_1T_2}{\sigma_{s1}\sigma_{s2}}+\frac{T_2^2}{\sigma_{s2}^2}+\frac{S^2}{\tau_s^2}\right)+$$
$$+\frac{12}{h^4}\left(\frac{M_1^2}{\sigma_{s1}^2}-\frac{M_1M_2}{\sigma_{s1}\sigma_{s2}}+\frac{M_2^2}{\sigma_{s2}^2}+\frac{H^2}{\tau_s^2}\right)=1, \qquad (I.3)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\partial F/\partial T_1}=\frac{\varepsilon_2}{\partial F/\partial T_2}=\frac{\omega}{\partial F/\partial S}=\frac{\varkappa_1}{\partial F/\partial M_1}=\frac{\varkappa_2}{\partial F/\partial M_2}=\frac{\chi}{\partial F/\partial H}=\frac{1}{2}D, \qquad (I.4)$$

где h - толщина оболочки, σ_{s1}, σ_{s2}, τ_s - значения характерных пределов текучести при чистом растяжении и сдвиге, а D - скорость диссипации механической энергии, отнесенной к единице площади срединной поверхности:

$$D=2h\left[\frac{1}{3}\left(\sigma_{s1}^2\varepsilon_1^2+\sigma_{s1}\sigma_{s2}\varepsilon_1\varepsilon_2+\sigma_{s2}^2\varepsilon_2^2\right)+\frac{\tau_s^2\omega^2}{4}+\right. \qquad (I.5)$$

$$\left.+\frac{h^2}{36}\left(\sigma_{s1}^2\varkappa_1^2+\sigma_{s1}\sigma_{s2}\varkappa_1\varkappa_2+\sigma_{s2}^2\varkappa_2^2\right)+\frac{\tau_s^2h^2}{48}\chi^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Располагая соотношениями (I.I)-(I.5), можно провести оценку несущей способности оболочки при помощи известных теорем о предельном равновесии.

При этом оказывается, что

I) оценку снизу можно получить путем последовательного решения двух относительно менее сложных задач: плоской задачи и задачи о предельном равновесии некоторой плоской плиты;

2) при определении верхней границы несущей способности целесообразно реальную оболочку заменить некоторой идеальной двухслойной моделью, поскольку для такой конструкции подсчет мощности работы, совершаемой внутренними силами, сводится по существу к подбору лишь одной функции - скорости нормального перемещения w;

3) при исследовании оболочек, шарнирно закрепленных по контуру, можно получить оценки, позволяющие сопоставить несущую способность оболочки с несущей способностью плоской плиты. Так например, для круговой цилиндрической оболочки ($A_1=A_2=1$, $\frac{1}{R_1}=0$, $R_2=R$), шарнирно закрепленной по контуру и находящейся под действием лишь равномерной нормальной нагрузки ($q_n=q$), соответствующие оценки имеют вид:

$$q>\frac{2h\sigma_{s2}}{\sqrt{3}R},\quad q>q_{пл},\quad q<\frac{2h\sigma_{s2}}{\sqrt{3}R}+q_{пл},$$

где $q_{пл}$ обозначает несущую способность плоской плиты, получаемой развертыванием цилиндра.

Оценки несущей способности конструкции получены и для других случаев: для анизотропной пологой оболочки с эллиптическим контуром, для пологой оболочки вращения, а также для растянуто-изогнутых круглых плит, растяжение которых, в частности, может быть вызвано действием центробежных сил.

§ 2. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек и оболочек, близких к ним по очертанию [6,7,8]

Полубезмоментная теория упругих цилиндрических оболочек предложена независимо друг от друга Власовым и Финстерваль-дером тридцать с лишним лет тому назад. Теория основывается на упрощающих допущениях статического и кинематического характера. При рассмотрении пластичных оболочек достаточно сохранить лишь первую группу допущений, согласно которым крутящий момент, продольный изгибающий момент и соответствующая перерезывающая сила приравниваются к нулю. Отсутствие этих двух моментов и перерезывающей силы приводит к такому пластическому состоянию, которое характеризуется симметричным относительно срединной поверхности течением и пропорциональной зависимостью между нормальными усилиями

$$T_2 = \frac{H}{H+F} T_1 , \qquad (2.1)$$

где H и F - известные параметры, фигурирующие в условии текучести Хилла для ортотропного тела.

Кстати сказать, это условие, выраженное посредством усилий и момента, имеет (приближенно) вид

$$\frac{GH+HF+FG}{(H+F)h^2}T_1^2+\frac{2N}{h^2}S^2+\frac{16(H+F)}{h^4}M_2^2=1, \qquad (2.2)$$

где

$$2G=\sigma_{sn}^{-2}+\sigma_{s1}^{-2}-\sigma_{s2}^{-2},\quad 2H=\sigma_{s1}^{-2}+\sigma_{s2}^{-2}-\sigma_{sn}^{-2},$$

$$2F=\sigma_{s2}^{-2}+\sigma_{sn}^{-2}-\sigma_{s1}^{-2},\quad 2N=\tau_s^{-2},$$

а σ_{sn} обозначает предел текучести при растяжении по направлению нормали.

Соотношения (2.I) и (2.2) вместе с уравнениями равновесия и соответствующими граничными условиями позволяют определить как неизвестные усилия и момент, так и толщину оболочки.

Существенно отметить, что задача определения усилий и момента является линейной и статически определимой. Вся нелинейность, характерная для теории пластичности вообще, сводится к решению уравнения (2.2), биквадратного относительно неизвестной толщины оболочки h.

Таким образом, задача заключается в отыскании такого закона изменения толщины оболочки, при котором вся конструкция в целом переходит в пластическое состояние под действием заданной системы сил.

Разрешающее уравнение задачи, составленное относительно поперечного нормального усилия T_2, в случае круговой цилиндрической оболочки ($R_2=a$) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial\theta^2}=\frac{a^2(H+F)}{H}\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}-T_2-aq_n-a\frac{\partial q_2}{\partial\theta}+a^2\frac{\partial q_1}{\partial z},$$

где z и θ - цилиндрические координаты точки срединной

поверхности ($z = \alpha_1$, $\theta = \alpha_2/a$).

Если торцы оболочки свободны, а продольные края закреплены шарнирно, то граничные условия задачи будут иметь вид:

$$T_2(\theta,0) = T_2(\theta,l) = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = -aq_2, \quad T_2(0,z) = 0,$$

где l - длина оболочки.

При формулировке граничных условий как сама конструкция, так и действующая нагрузка предполагаются симметричными относительно плоскости $\theta = 0$.

К рассмотренной граничной задаче приводит также исследование некоторых других случаев, встречающихся в технике: случай оболочки, продольные края которой свободны, а торцы опираются на диафрагмы, жесткие лишь в своей плоскости, или случай консольной оболочки, заделанной вдоль одного из продольных краев с тремя остальными свободными. При этом отсчет координатного угла θ следует проводить от свободного продольного края. Аналогичный вид имеют разрешающие уравнения и в случае некруговых цилиндрических оболочек, а также оболочек, срединная поверхность которых мало отличается от кругового цилиндра. В качестве таковых принято считать оболочки, очерченные по поверхности, вдоль которых можно пренебречь величиной $\frac{1}{R_1}$ и производными от R_2 , A_1 и A_2 по α_1 и α_2.

Наконец, заметим, что с точки зрения математической, расчет пластичных оболочек по полубезмоментной теории упирается в решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа. Единственность и непрерывная зависимость решения

от начальных условий доказывается в известной книге И.Г.Петровского, посвященной лекциям об уравнениях с частными производными.

§ 3. Теория равнопрочных оболочек [1,2,3,4]

Равнопрочной будем называть такую оболочку, переход которой в пластическое состояние происходит мгновенно. В зависимости от расчетной схемы, состояние, предшествующее пластическому, может быть упругим или жестким. Соответственно приходим к двум путям исследования задачи, которые в принципе мало отличаются друг от друга и приводят к идентичной разрешающей системе уравнений в случае изотропного несжимаемого материала.

Равнопрочности конструкции можно достичь по-разному, в частности, путем отыскания такого закона изменения толщины оболочки h, который обеспечивает мгновенное наступление текучести. Соответствующая разрешающая система уравнений состоит из уравнений равновесия (I.I), условия текучести (I.3) и трех условий совместности, которые с учетом (I.2) имеют следующий вид:

$$\frac{\varkappa_1}{R_2}+\frac{\varkappa_2}{R_1}+\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial\alpha_1^2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\alpha_2^2}=0,$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_1},\quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial\varkappa_2}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_2}.$$

В этих соотношениях $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, χ, ε_1, ε_2 и ω должны быть выражены через моменты и усилия согласно закону Гука, или, в случае жестко-пластичной расчетной схемы, со-

гласно закону течения (I.4) в предположении постоянства отношения D/h. Окончательно в результате исключения перерезывающих сил N_1 и N_2 приходим к разрешающей системе из семи уравнений относительно семи неизвестных величин: T_1, T_2, S, M_1, M_2, H и h.

Путем анализа соответствующих зависимостей нетрудно уловить идентичность двух проблем, касающихся равнопрочности и минимального веса (точнее, минимального объема).

Имея в виду пологие оболочки, можно предложить и иной подход к задаче о равнопрочности: при заданной нагрузке и толщине конструкции искать рациональное очертание ее срединной поверхности. При этом структура соответствующей разрешающей системы уравнений остается прежней. Несколько видоизменяются лишь некоторые из уравнений (равновесия и неразрывности деформации) за счет появления дополнительных членов, учитывающих кручение искомой поверхности, поскольку нельзя утверждать заранее, что выбранные оси α_1 и α_2 будут совпадать с линиями главных кривизн.

Наконец, заметим, что изложенные выше приемы способствуют оптимальному проектированию не только однородных, но и слоистых конструкций.

Построены конкретные решения для конструкции обоих типов.

Литература

I. М.Ш.Микеладзе, Статика анизотропных пластичных оболочек. Изд. АН ГССР, Тбилиси, 1963.

2. М.Ш.Микеладзе, Теория пологих анизотропных пластичных оболочек. ДАН СССР, т. I60, № 4, I965.

3. M. Sh. Mikeladze, Shallow Anisotropic Plastic Shells. Nuclear Structural Engineering 1 (1965) 414–418. North-Holland Publishing Comp., Amsterdam.

4. М.Ш.Микеладзе, Техническая теория пластичных тонких оболочек. Сообщения АН ГССР, т. X , в. 3, I965.

5. М.Ш.Микеладзе, Оценка несущей способности пологих оболочек вращения и растянуто-изогнутых круглых плит. Прикладная Механика, т. I, в. 2, I965.

6. М.Ш.Микеладзе, Полубезмоментная теория цилиндрических пластичных оболочек. ДАН СССР, т. I54, № 2, I964.

7. М.Ш.Микеладзе, Основные уравнения полубезмоментной теории цилиндрических ортотропных пластичных оболочек. Прикладная Механика, т. I, в. I, I965.

8. M. Sh. Mikeladze, Semi-Momentless Theory of Thin Plastic Shells Slightly Different from Cylindrical Ones. J. Mech. Phys. Solids, V. 14, 89-94, 1966.

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ РЕОНОМНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

П.М.Огибалов, М.А.Колтунов

Московский государственный университет

Внедрение в практику новых синтетических материалов, пластмасс, стеклопластиков, обладающих целым рядом свойств, не присущих металлам, бетону, дереву, как, например, химическая стойкость, радиопрозрачность и др., требует создания теории их деформации, новых методов решения инженерных задач, учитывающих реономность их свойств.

Явление упругого последействия, открытое в 1834 г. Викатом, а затем Вебером, который по заданию Гаусса провел ряд опытов по изучению этого эффекта, привлекло в середине прошлого столетия внимание таких крупных ученых как Кольрауш, Клаузиус, Максвелл, Томсон, Больцман и др. Согласовывая свою теорию с результатами опытов, Больцман приходит к двум основным гипотезам: I) напряжение зависит не только от деформации в данный момент, но и от предшествующих деформаций, влияние которых тем меньше, чем больше времени прошло с момента их возникновения; 2) к упругим силам применим закон независимости действия сил. На этом основании соотношения между напряжениями и деформациями во времени, предложенные Больцманом, могут быть представлены в виде:

$$\sigma(t)=E\varepsilon(t)-E\int_0^t \Gamma(t-s)\varepsilon(s)ds,$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\frac{1}{E}\int_0^t K(t-s)\sigma(s)\,ds. \qquad (I)$$

В начале нынешнего столетия Вольтерра разработал теорию интегральных уравнений, из которой, в частности, следует связь между ядром K и резольвентой Γ.

$$K(t)-\Gamma(t)=\int_0^t K(s)\,\Gamma(t-s)\,ds. \qquad (2)$$

Некоторые нелинейные эффекты ползучести для несжимаемой среды могут быть описаны с помощью уравнения

$$\Psi(\sigma)=\sigma+\int_0^t K(t-s)\sigma(s)\,ds,$$

предложенного Лидерманом и Розовским, где функция $\Psi(\sigma)$ выводится из условия подобия кривых ползучести и уравнения

$$\varphi(\varepsilon)=\sigma(t)+\int_0^t K(t-s)\sigma(s)\,ds, \qquad (3)$$

предложенного Ю.Н.Работновым, где функция $\varphi(\varepsilon)$ строится из условия подобия изохронных кривых и характеризует деформации при быстром нагружении. А.А.Ильюшиным [I] предложено представлять общую связь $\sigma\sim\varepsilon\sim t$ между напряжениями, деформациями и временем тензорно линейным оператором. Это направление широко развивалось многими авторами, однако эффективной замкнутой теории нелинейной вязко-упругости, обладающей необходимой общностью, не было создано. В 60-х годах появляются работы А.А.Ильюшина, П.М.Огибалова [2], где с

учетом температурно-временной аналогии [3] строятся соотношения $\sigma \sim \varepsilon \sim t$, обладающие большой общностью

$$\varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \int_0^t K(t-t')\sigma(t')dt' +$$

$$+ \int_0^{t'}\int_0^{t''}\int_0^{t'''} K(t-t', t-t'', t-t''')\sigma(t')\sigma(t'')\sigma(t''')dt'dt''dt''' + \dots \qquad (4)$$

Здесь t' , t'' , t''' – промежуточные значения времени в интервале $0 \sim t$, $\sigma(t')$, $\sigma(t'')$ ... – величины напряжений, создающие в первую очередь линейный вклад в деформацию $\varepsilon(t)$, причем каждое со своим коэффициентом влияния; их совокупность дает вклад $\int_0^t K(t',t)\sigma(t')dt'$, затем будет вклад тройного обменного влияния, то есть совместного влияния напряжений σ', σ'' , σ''' с их совместным коэффициентом влияния $K(t', t'', t''', t)$, что дает тройной интеграл с ядром, зависящим от четырех аргументов, и т.д. Учет температурно-временной аналогии означает замену времени t' , t'' , ... t местными временами:

$$dt'_м = \frac{dt'}{f(T')}, \quad dt''_м = \frac{dt''}{f(T'')}, \dots, dt_м = \frac{dt}{f(T)}. \qquad (5)$$

Здесь $f(T)$ – универсальная функция температуры. В основе $T-t$ аналогично лежит предположение о том, что все временные константы пропорциональны одной и той же общей для всех универсальной функции температуры $f(T)$, и поэтому время входит с общим делителем $dt/f(T)$. При нестационарных температурных режимах местное время будет

$$t_м = \int_0^t \frac{du}{f(T(u))},$$

а при изотермических - $t_м = \frac{t}{f(T)}$.

Функцию $f(T)$ иногда обозначают $a_T(T)$ и называют коэффициентом температурного сдвига в связи со способом экспериментального определения a_T. Для пояснения роли $f(T)$ приведем пример. Представим модуль релаксации $\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_{рас}$ в виде $E_{рас}(t) = E + \Sigma E_n \exp(-t/\tau_к)$.

Если пренебречь линейной зависимостью модуля пружины от абсолютной температуры вследствие малости этой зависимости и считать, что все характерные времена релаксации $\tau_к$ зависят от температуры в соответствии с (5), то есть $\tau_к = \tau_м f(T)$. , то модуль релаксации не будет изменяться с изменением температуры при условии, что все физические времена делятся на $f(T)$. В 1965 г. А.А.Ильюшин и П.М.Огибалов [4] предложили замкнутую квазилинейную квадратичную теорию вязко-упругости сред, обладающих физической нелинейностью. Здесь уже установлены все основные взаимно однозначные соотношения между тензорами σ_{ij} , ε_{ij} и временем, получены связи между вторичными ядрами ползучести и релаксации и между ними и соответствующими ядрами линейной теории. Важность этой работы очевидна, и здесь имеет смысл рассмотреть основные положения предложенной теории.

Пусть $S_{ij}(t_0)$, $S_{ij}(t_1)$, ... , $S_{ij}(t_к)$, ... , $S_{ij}(t_N)$ - напряжения в моменты времени t_0 , t_1 , ... $t_к$, ... $t_N = t$ интервала $[t_0, t]$ (t - момент, в ко-

торый надо определить напряжение в теле), действующие в течение малого интервала Δt. Пусть требуется изучить функцию процесса z_{ij} в момент t, например, деформацию, которая образована действием всей совокупности импульсов напряжений $S_{ij}(t_к)$. Сумма вкладов отдельных импульсов с соответствующей функцией влияния даст представление z_{ij} в виде линейного оператора от S_{ij} [типа (I)], что является первым приближением. Следующими приближениями будут совместное влияние двух импульсов S_{ij} в моменты t_p и t_e, которое будет пропорционально произведению $S_{im}(t_p)\,S_{mj}(t_e)$ на совместную функцию влияния пары, - трех импульсов в моменты t_p, t_e и $t_к$ - пропорциональному произведению $S_{im}(t_p)\,S_{mn}(t_e)\,S_{nj}(t_к)$ на функцию влияния совместного действия этих трех напряжений и т.д. Для девиаторов тензоров напряжений и деформаций соотношение $\sigma \sim \varepsilon \sim t$ должно быть нечетным, поскольку при неизменном значении $3\sigma = \sigma_{ij}\,\delta_{ij}$ изменение направления сдвига на обратное должно изменить знак S_{ij}. Постулат изотропии утверждает, что в соотношение $\sigma \sim \varepsilon \sim t$ должно входить тройное произведение, дающее квазилинейный тензор $S_{ij}(t_к)\,S_{mn}(t_p)\,S_{mn}(t_e)$. В результате для процесса z_{ij} (например, деформаций) получено

$$z_{ij}(t) = \int_0^t K(t,\tau)\,S_{ij}(\tau)\,d\tau + \int_0^t S_{ij}(\tau)\,d\tau \int_0^t \int_0^{\xi} K_3(t,\tau,\xi,\eta)\,S(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi . \quad (6)$$

Решением этой системы интегральных уравнений относительно напряжений S_{ij} будет

$$S_{ij}(T)=\int_0^T \Gamma(T-t)\,z_{ij}(t)\,dt+\int_0^T z_{ij}(t)\,dt\int_0^T\int_0^{\xi}\Gamma_3(T,t;\xi,\eta)\,z(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (7)$$

Соотношения (6) и (7) выражают свойство взаимности - ядра K, Γ, K_3, Γ_3 должны быть связаны интегральными уравнениями, не зависящими от z и S. Свойства резольвенты Γ_3 должны быть аналогичны свойствам ядра K_3, в частности, должно соблюдаться свойство симметрии для Γ_3 по аргументам ξ, η. Интегральным уравнением, связывающим ядра K, K_3 и резольвенты Γ, Γ_3, будет

$$\int_0^t K(t,\tau)\,\Gamma_3(\tau,\tau',p,q)\,d\tau = \qquad (8)$$

$$=-\int_{\tau'}^{t}\Gamma(\tau,\tau')\,d\tau\int_p^t\Gamma(\xi,p)\,d\xi\int_q^{\xi}\Gamma(\eta,q)\,K_3(t,\tau,\xi,\eta)\,d\eta.$$

Решением этого уравнения будет

$$-\Gamma_3(t,\tau;\xi,\eta)=$$

$$=\int_{\max(\xi;\tau)}^{t}\Gamma(t,x)\,dx\int_{\tau}^{x}\Gamma(y,\tau)\,dy\int_{\xi}^{x}\Gamma(u,\xi)\,du\int_{\eta}^{u}\Gamma(v,\eta)\,K_3(x,y;u,v)\,dv. \qquad (9)$$

Вследствие симметрии свойств ядер K и Γ можно написать выражение K_3 через Γ_3 :

$$-K_3(t,\tau;\xi,\eta)=$$

$$= \int_{\max(\xi,\tau)}^{t} K(t,x)\,dx \int_{\tau}^{x} K(y,\tau)\,dy \int_{\xi}^{x} K(u,\xi)\,du \int_{\eta}^{u} K(v,\eta)\,\Gamma_3(x,y,u,v)\,dv. \qquad (10)$$

Ясно, что чем ближе моменты времени t_K, t_e, t_p к моменту t, тем большее влияние на изучаемый процесс оказывают значения $S_{ij}(t_m)$. Это означает, что в выражения K, Γ, K_3, Γ_3 должны входить δ-функции Дирака.

$$\tilde{K}(t,x) = \delta(t-x) + K(t,x), \quad \tilde{\Gamma}(t,x) = \delta(t-x) - \Gamma(t,x), \qquad (11)$$

где K, Γ – регулярные ядра (например типа $\Gamma(t) = me^{-mt}$).

Общая форма сингулярного ядра $\tilde{R}$ (а значит $\tilde{K}_3(x)$, $\tilde{\Gamma}(x)$), являющегося скаляром, имеет вид:

$$\tilde{R}(x) = R(x) + R_{ij}\beta_{ij}(x) + R_{ij,kl}\beta_{ij}(x)\beta_{kl}(x) +$$

$$+ R_{ij,kl,mn}\beta_{ij}(x)\beta_{kl}(x)\beta_{mn}(x),$$

где

$$\beta_{ij}(x) = \begin{cases} \delta(x_i) & i=j, \\ \delta(x_{ij}) & i\neq j. \end{cases}$$

R с индексами образует совокупность трех "тензоров" второго, четвертого и шестого порядков регулярных ядер, зависящих от X. Выражения $\tilde{K}_3$, $\tilde{\Gamma}_3$ через δ-функции и регулярные ядра более сложны и здесь не приводятся (с ними можно ознакомиться в статье [4]).

Приводимая теория является обобщением существующих теорий линейной вязко-упругости и описывает также нелинейные процессы. В построении теории пластин и оболочек с реономными свойствами материала, видимо, вначале следует построить

соотношения, где в качестве физического закона следует взять первое приближение упомянутой теории, данное для линейных процессов Больцманом-Вольтерра, в виде (I), (2). При этом можно выбирать ядро K либо с особенностью при $t = 0$, либо в виде суммы некоторого D-ядра, отражающего начало процесса и регулярного K_1, так что связь $\sigma \sim \varepsilon \sim t$ запишется в виде

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \lambda \int_0^t D(t-s)\,\varepsilon(s)\,ds - \int_0^t K_1(t-s)\,\varepsilon(s)\,ds\right].$$

Перейдем к построению уравнений упруго-вязких оболочек, понимая ниже под R и K либо сумму вида $\lambda D + K_1$, либо ядра с особенностью при $t = 0$.

Поскольку широкое применение для изготовления пластин и оболочек находят стеклопластики, которые в большинстве обладают ортотропией свойств, то будем строить уравнения теории оболочек применительно к гибким (то есть с учетом геометрической нелинейности) ортотропным пологим оболочкам, материал которых обладает свойствами линейной наследственности. Как показано в работе [5], к стеклопластиковым пластинам применима гипотеза прямых нормалей, которая здесь принимается. Кроме того, предположим, что напряжения действующие нормально к срединной поверхности, пренебрежимо малы по отношению к другим компонентам, и будем считать, что ортотропия сохраняется в течение всего процесса деформирования.

Выберем систему координат (X, Y, Z), направив оси Ox и Oy вдоль основы и утка (основная система), а Oz нормально к координатной поверхности (x, y). Для деформаций

срединного слоя оболочки кривизны примем следующие выражения через перемещения срединного слоя:

$$e_{11}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - K_1 w\ , \quad \varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,$$

$$e_{22}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - K_2 w\ , \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ , \qquad (12)$$

$$e_{12}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\ , \quad \varkappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\ .$$

В силу гипотезы Кирхгоффа, перемещения и деформации в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной поверхности, будут

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}\ , \quad v = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}\ ,$$

$$e_{11} = e_{11}^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \ e_{22} = e_{22}^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ , \ e_{12} = e_{12}^0 - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\ . \qquad (13)$$

Связь между напряжениями и деформациями для ортотропных материалов запишем в виде [6] :

$$\sigma_{11} = B_{11}e_{11} - \int_0^t R'_{11}(t-\tau)\,e_{11}(\tau)\,d\tau + B_{12}e_{22} - \int_0^t R'_{12}(t-\tau)\,e_{22}(\tau)\,d\tau,$$

$$\sigma_{22} = B_{21}e_{11} - \int_0^t R'_{21}(t-\tau)\,e_{11}(\tau)\,d\tau + B_{22}e_{22} - \int_0^t R'_{22}(t-\tau)\,e_{22}(\tau)\,d\tau, \qquad (14)$$

$$\sigma_{12} = 2Be_{12} - 2\int_0^t R'(t-\tau)\,e_{12}(\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$B_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2},\ B_{12}=B_{21}=\frac{\nu_1E_2}{1-\nu_1\nu_2}=\frac{\nu_2E_1}{1-\nu_1\nu_2},\ B_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2},$$

$$2B=C_T=\frac{E_{45^\circ}}{2(1+\nu_{45^\circ})},\ \nu_1=\nu_{21}=\left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right|,\ \nu_2=\nu_{12}=\left|\frac{e_{11}}{e_{22}}\right| \qquad (15)$$

компоненты тензора модулей упругой анизотропии и коэффициенты Пуассона при растяжении вдоль основы и вдоль утка,

$$R'_{11}=B_{11}R_{11}(t),\ R'_{22}=B_{22}R_{22}(t),\ R'_{12}=B_{12}R_{12}(t),\ R'=BR \qquad (16)$$

компоненты тензора ядер релаксации.

Усилия и моменты на единицу ширины сечения элемента оболочки -

$$T_\kappa=\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{\kappa\kappa}\,dz,\ M_\kappa=\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{\kappa\kappa}z\,dz,\ S=S_1=S_2=\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{12}\,dz,\ H=H_1=H_2=\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{12}z\,dz,$$

а σ_{mn} дано формулами (14).

Внесем сюда (12), (13), (14), (16). Получим:

$$T_1=hB_{11}\left(e^\circ_{11}-I_{11}e^\circ_{11}\right)+hB_{12}\left(e^\circ_{12}-I_{12}e^\circ_{22}\right),$$

$$T_2=hB_{11}\left(e^\circ_{11}-I_2e^\circ_{11}\right)+hB_{22}\left(e^\circ_{22}-I_{22}e^\circ_{22}\right), \qquad (17)$$

$$S=2hB\left(e^\circ_{12}-Ie^\circ_{12}\right),$$

где

$$I_{ij}e^\circ_{ik}=\int_0^t R_{ij}(t-\tau)e^\circ_{ik}(\tau)\,d\tau.$$

После преобразования по Лапласу соотношения (I7) примут вид:

$$T_1^* = hB_{11}^* e_{11}^{o*} + hB_{12}^* e_{22}^{o*},$$
$$T_2^* = hB_{12}^* e_{11}^{o*} + hB_{22}^* e_{22}^{o*}, \qquad (I8)$$
$$S^* = 2hB^* e_{12}^{o*}.$$

Здесь

$$B_{ij}^* = B_{ij}(1 - R_{ij}^*); \quad R_{ij}^* = \int_0^\infty R_{ij}(t) e^{-pt} dt. \qquad (I9)$$

Из (I8) найдем:

$$e_{11}^{o*} = \frac{1}{h} \frac{T_1^* B_{22}^* - T_2^* B_{12}^*}{B_{11}^* B_{22}^* - B_{12}^* B_{21}^*}, \quad e_{22}^{o*} = \frac{1}{h} \frac{B_{11}^* T_2^* - B_{21}^* T_1^*}{B_{11}^* B_{22}^*},$$

$$e_{12}^{o*} = \frac{S^*}{2hB^*}.$$

Составим тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[2B^*\left(B_{22}^* T_1^* - B_{12}^* T_2^*\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[2B^*\left(B_{11}^* T_2^* - B_{21}^* T_1^*\right)\right] -$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[B_{11}^* B_{22}^* - B_{12}^* B_{21}^*\right] S^* = 2hB^*\left(B_{11}^* B_{22}^* - B_{12}^* B_{21}^*\right) \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(e_{11}^{o*}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e_{22}^{o*}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(e_{12}^{o*}\right)\right]. \qquad (20)$$

Внося сюда выражения e_{ij}^{o*} из предыдущих равенств, совершая упрощения и вводя функцию напряжений φ по формулам

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{h} T_1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{h} T_2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{h} S, \qquad (2I)$$

в которых тоже совершим преобразование Лапласа

$$T_1^* = h\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2},\quad T_2^* = h\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2},\quad S^* = -h\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x\partial y}, \tag{22}$$

получим уравнение неразрывности [6] для ортотропной гибкой оболочки, материал которой обладает линейными наследственными свойствами, в операторной форме:

$$B_{11}^*\frac{\partial^4\varphi^*}{\partial x^4} + \frac{1}{2B^*}\left(B_{11}^*B_{22}^* - B_{12}^*B_{21}^* - 4B^*B_{12}^*\right)\frac{\partial^4\varphi^*}{\partial x^2\partial y^2} + B_2^*\frac{\partial^4\varphi^*}{\partial y^4} =$$

$$= \left(B_{11}^*B_{22}^* - B_{12}^*B_{21}^*\right)\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^* - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^* - K_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - K_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}\right\}. \tag{23}$$

В правой части (23) имеются нелинейные члены. В дальнейшем будем допускать возможность представления прогиба в виде $w(x,y,t) = w_0(x,y)w_1(t)$, где функция $w_1(t)$, ее производные и их квадраты допускают преобразование Лапласа. Выражения для моментов с учетом (I4) имеют вид:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\sigma_{11}\,dz = -\frac{h^3}{12}\left\{B_{11}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_0^t R_{11}(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau\right] + \right.$$

$$\left. + B_{12}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \int_0^t R_{12}(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}d\tau\right]\right\},$$

$$M_2 = -\frac{h^3}{12}\left\{B_{21}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_0^t R_{21}(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau\right] + \right.$$

$$\left. + B_2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \int_0^t R_{22}(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}d\tau\right]\right\} \tag{24}$$

$$H = -\frac{h^3}{12}B\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \int_0^t R(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}d\tau\right].$$

Внося M_1, M_2, H из (24) и T_1, T_2, S из (21) в уравнение равновесия упругой оболочки

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+T_1\left(k_1+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+T_2\left(k_2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+q=0$$

и совершая преобразование Лапласа, получим уравнение равновесия [6] для гибкой ортотропной оболочки из материала с линейными наследственными свойствами:

$$B_{11}^*\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4}+2\left(B_{12}^*+4B^*\right)\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2\partial y^2}+B_{22}^*\frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4}-\frac{12}{h^2}\left[k_2\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+k_1\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}\right]-$$

$$-\frac{12}{h^2}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^*+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^*-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^*\right]-\frac{12}{h^3}q^*=0. \qquad (25)$$

Здесь по-прежнему $B_{ij}^*=B_{ij}\left(1-R_{ij}^*\right)$ есть известная функция. В промежуточных вычислениях получены формулы

$$M_1^*=-\frac{h^3}{12}\left(B_{11}^*\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+B_{12}^*\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2^*=-\frac{h^3}{12}\left(B_{21}^*\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+B_{22}^*\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \qquad (26)$$

$$H=-\frac{h^3}{3}B^*\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y}.$$

Таким образом, имеем два разрешающих уравнения (23) и (25) относительно неизвестных функций напряжения $\varphi(x,y,t)$ и прогиба $w(x,y,t)$.

Заметим, что в уравнения (23) и (25) входят слагаемые двух типов: типа $B_{11}^*\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4}$, в которых коэффициенты B_{ij}

являются известными функциями комплексного параметра p, а изображение неизвестных функций входит линейно, и типа $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^*$, где по существу предполагаемого метода одна из функций (например, w), стоящих в скобках, будет рассматриваться как известная функция координат и времени, задаваемая с точностью до неопределенных констант; таким образом, по отношению к искомым, не задаваемым функциям (например, φ), рассматриваемое произведение будет линейным. Для пояснения метода рассмотрим одно из возможных приближенных решений системы уравнений (23) и (25).

Пусть имеется прямоугольная в плане ортотропная пластинка или слабо изогнутая панель из стеклопластика, для которой известны кривые релаксации напряжений в растянутых образцах, представимые, например, в виде

$$\sigma(t)=\sigma_0\left[1-\gamma\left(1-e^{-\alpha t}\right)\right]. \tag{27}$$

Ядром релаксации, очевидно, будет

$$R=\gamma\alpha e^{-\alpha t}\quad\left(0<\gamma<1,\ 0<\alpha<1\right), \tag{28}$$

где α, γ будут зависеть от ориентации образца. Изображением резольвенты будет

$$R^*=\frac{\gamma\alpha}{p+\alpha}. \tag{29}$$

Примем для простоты, что все

$$B_{ik}^*=B_{ik}\left(1-R^*\right). \tag{30}$$

Будем считать, что функцию прогибов w представили в виде

$$w(x,y,t)=w_0(x,y)w_1(t), \tag{31}$$

где $w_0(x,y)$ - упругое решение, а функция $w_1(t)$ выбирается с точностью до неопределенных параметров λ и μ в форме

$$w_1(t)=\lambda-\mu e^{-\alpha t}, \quad \lambda-\mu=1. \tag{32}$$

Функцию напряжений φ будем искать в виде

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_0(x,y)\varphi_1(t), \tag{33}$$

где $\varphi_0(x,y)$ - упругое решение, а $\varphi_1(t)$ при заданном виде функции $w_1(t)$ подлежит определению. Преобразование $w_1(t)$ по Лапласу дает

$$w_1^*(p)=\frac{\lambda}{p}-\frac{\mu}{p+\alpha}. \tag{34}$$

Внося в уравнение неразрывности (23) выражения (30), (31) и (33), получим

$$\varphi_1^*=\varkappa_1\xi(1-R^*)w_1^*+\eta_1\xi(1-R^*)(w_1^2)^*, \tag{35}$$

где

$$\varkappa_1=-\frac{\nabla_k^2 w_0}{\nabla^2\nabla^2\varphi_0}=\frac{-\left(K_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+K_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)}{B_{11}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}+C\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^2\partial y^2}+B_{22}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial y^4}},$$

$$C=\frac{1}{2B}\left(\xi-4BB_{12}\right),$$

$$\xi=B_{11}B_{22}-B_{12}^2,$$

$$\eta_1 = \frac{N_0}{\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}}{\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_0}.$$

Внося в соотношение (35) выражения (29) и (34) и замечая, что

$$\frac{1}{(p+\kappa\alpha)(p+m\alpha)} = \frac{1}{(m-\kappa)\alpha(p+\kappa\alpha)} - \frac{1}{(m-\kappa)\alpha(p+m\alpha)},$$

получим

$$\varphi_1^* = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+\alpha} + \frac{A_3}{p+2\alpha} + \frac{A_4}{(p+\alpha)^2}, \qquad (36)$$

что после обращения дает

$$\varphi(t) = A_1 + A_2 e^{-\alpha t} + A_3 e^{-2\alpha t} + A_4 t e^{-\alpha t}, \qquad (37)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \xi(1-\gamma)(\lambda\varkappa_1 + \lambda^2\eta_1), \\ A_2 &= \eta_1\xi(\gamma\lambda^2 - 2\lambda\mu - \gamma\mu^2) - \varkappa_1\xi(\mu - \lambda\gamma), \\ A_3 &= \eta_1\xi\mu^2(1+\gamma), \\ A_4 &= \xi\gamma\alpha(\varkappa_1\mu + 2\eta_1\lambda\mu). \end{aligned} \qquad (38)$$

Для определения искомых параметров λ и μ внесем (31) и (33), учитывая (32) и (37), в уравнение равновесия (25). Получим

$$\frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+\alpha} + \frac{K_3}{p+2\alpha} + \frac{K_4}{p+3\alpha} + \frac{K_5}{(p+\alpha)^2} + \frac{K_6}{(p+2\alpha)^2} = 0,$$

что после обращения дает уравнение связи нагрузки и прогиба в виде

$$K_1 + K_2 e^{-\alpha t} + K_3 e^{-2\alpha t} + K_4 e^{-3\alpha t} + K_5 t e^{-\alpha t} + K_6 t e^{-2\alpha t} = 0. \qquad (39)$$

Здесь

$$K_1 = \nabla^2\nabla^2\tilde{w}_0\,\lambda(1-\gamma) - \frac{12}{h^2}\nabla_k^2\varphi_0 A_1 - \frac{12}{h^2}M_0\lambda A_1 - \frac{12}{h^3}q(t),$$

$$K_2 = -\nabla^2\nabla^2\tilde{w}_0(\mu - \lambda\gamma) - \frac{12}{h^2}\nabla_k^2\varphi_0 A_2 - \frac{12}{h^2}M_0(\lambda A_2 - \mu A_1),$$

$$K_3 = -\frac{12}{h^2}\nabla_k^2\varphi_0 A_3 - \frac{12}{h^2}M_0(\lambda A_3 - \mu A_2),$$

$$K_4 = \frac{12}{h^2}M_0\mu A_3,$$

$$K_5 = \nabla^2\nabla^2\tilde{w}_0\,\gamma\alpha\mu - \frac{12}{h^2}\nabla_k^2\varphi A_4 - \frac{12}{h^2}\lambda A_4 M_0,$$

$$K_6 = \frac{12}{h^2}M_0\mu A_4.$$

Из уравнения (39) получим

$$\begin{aligned} &K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 0 && \text{при } t = 0, \\ &K_1 = 0 && \text{при } t = \infty. \end{aligned} \qquad (40)$$

Для определения λ внесем A_1 из (38) в (40). Получим, например, для $q = q_0 = const$

$$\lambda^3 - (\varkappa_2 - \varkappa_1)\lambda^2 - \left(\frac{h^2}{12\xi}\frac{m_1}{n_1} + \varkappa_1\varkappa_2\right)\lambda + \frac{q_0 m}{h(1-\gamma)} = 0. \qquad (41)$$

Здесь обозначено

$$\mathcal{H}_1=\frac{\nabla_к^2 w_0}{N_0},\ \mathcal{H}_2=\frac{\nabla_к^2 \varphi}{M_0},\ m_1=\frac{\nabla^2\nabla^2\tilde{w}_0}{M_0},\ n_1=\frac{N_0}{\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_0},$$

$$m=\frac{\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_0}{\xi N_0 M_0},\ M_0=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}$$

упруго-вязкое изложенным выше методом. Из решения для а) постоянной нагрузки следует, что значения критических нагрузок не изменяются по сравнению с упругими, а критические прогибы увеличиваются; б) переменной во времени нагрузки следует, что критические нагрузки уменьшаются, а прогибы увеличиваются по сравнению с упругими значениями. Так, $\hat{P}_{в.у}$ = 0,558, $\hat{P}_{в.у-в}$ = = 0,483, $\hat{P}_{н.у}$ = 0,171, $\hat{P}_{н.у-т}$ =,0,137. Заметим, что значения "верхних" и "нижних" критических нагрузок для упруго-вязких оболочек существенно зависят от скорости нагружения: с увеличением скорости значение верхней критической нагрузки повышается.

Литература

1. А.А.Ильюшин, ПММ, 1947, 9.
2. А.А.Ильюшин, П.М.Огибалов, Механика полимеров. 1965, 3, 33.
3. Д.Ферри, Вязко-упругие свойства полимеров. М., 1963.
4. А.А.Ильюшин, П.М.Огибалов, Механика полимеров. 1966, 2, 170.
5. А.Л.Рабинович, Докторская диссертация. 1965.
6. М.А.Колтунов, ВМУ, 1964, 5, 79.

РАСЧЕТ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

А.Р.Ржаницын

ЦНИИСК, Москва

Известно, что большинство конструктивных материалов могут считаться упругими лишь в ограниченных пределах. Поэтому расчет, основанный на уравнениях теории упругости, не может дать истинного представления ни о характере разрушения, ни о несущей способности конструкций. В полной мере это относится к расчету пластин и оболочек. Однако, в то время как для стержневых конструкций из металла и железобетона уже давно существуют методы расчета, учитывающие пластические свойства материалов, расчет оболочек и др. пространственных систем за пределом упругости до последнего времени представлялся слишком сложным для практического использования. Как известно, впервые задача о точном расчете пластин и оболочек в пластической стадии их работы была поставлена А.А.Ильюшиным [I]. Им были найдены конечные соотношения между внутренними усилиями в сечении, находящемся в состоянии предельного равновесия. Рядом отечественных и зарубежных исследователей были получены решения для наиболее простых случаев расчета пластин и оболочек из жестко- и упруго-пластического материала. Однако эти решения не обладали универсальностью и простотой практических методов расчета, используемых инженерами.

Между тем, в теории пластичности уже давно существовало

направление, которое может быть названо инженерным и которое нашло широкое применение в практических расчетах стержневых систем. Строгое теоретическое обоснование применяемых в нем методов было дано в 1938 г. А.А.Гвоздевым [2] и распространено в дальнейшем на более сложные и общие задачи теории пластичности Марковым [3], а позже Гринбергом и Прагером [4]. Здесь имеются в виду вариационные принципы теории пластичности, лежащие в основе двух главных методов расчета по стадии предельного равновесия: статического и кинематического. Для цельности изложения необходимо рассмотреть основной вариационный принцип, относящийся к кинематическому методу, и внести в него некоторые обобщения.

I. Обоснование кинематического метода

Ограничиваясь случаями простого деформирования*, будем считать, что для данного материала существуют пластический потенциал Π, то есть что работа, затраченная на заданную деформацию, зависит только от компонентов этой деформации. Если материал изотропный, то этот потенциал и работа внутренних сил T зависят только от инвариантов тензора деформаций I_1, I_2, I_3 или от главных деформаций ε_1, ε_2, ε_3, которые являются частным случаем трех независимых инвариантов тензора деформаций. В первом случае

$$T=-\int \Pi\left(I_1,I_2,I_3\right)d\sigma, \qquad (I.1)$$

* Простым деформированием по аналогии с простым загружением будем называть такое изменение деформаций, при котором соотношения между компонентами тензора деформаций в каждой точке остаются постоянными.

во втором

$$T=-\int\Pi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\,d\sigma. \qquad (I.2)$$

Интеграл в формулах (I.I) и (I.2) берется по всему объему тела.

Работу внешних сил V можно представить в виде произведения некоторой обобщенной силы или нагрузки P на соответствующее перемещение f :

$$V=Pf. \qquad (I.3)$$

Во всех состояниях равновесия системы

$$\delta U=\delta(V+T)\leq 0, \qquad (I.4)$$

где $U=V+T$ - работа, затраченная на деформацию системы, δU - вариация этой работы.

Считая внешние силы постоянными, получим, что

$$\delta V=P\delta f. \qquad (I.5)$$

Тогда, согласно (I.4),

$$P\delta f+\delta T\leq 0, \qquad (I.6)$$

откуда

$$P\leq-\frac{\delta T}{\delta f}. \qquad (I.7)$$

Задаваясь различными возможными перемещениями системы δf , мы будем получать различные значения δT и $-\delta T/\delta f$. Величина обобщенной нагрузки P в предельном состоянии должна быть равна минимальному значению $-\delta T/\delta f$:

$$P=\min\left(-\frac{\delta T}{\delta f}\right). \qquad (I.8)$$

Варьируя выражение (I.2), получим*, что

$$\delta T=-\int\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_i}\delta\varepsilon_i\,do, \tag{I.9}$$

или, замечая, что

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_i}=\sigma_i \qquad (i=1,2,3) \tag{I.10}$$

$$\delta T=-\int\sigma_i\delta\varepsilon_i\,do. \tag{I.11}$$

Величины $\delta\varepsilon_i(x,y,z)$ $(i=1,2,3)$ связаны между собой заданной кинематически возможной формой деформации системы

$$\varepsilon_i'=\frac{\delta\varepsilon_i}{\delta f}, \qquad (i=1,2,3) \tag{I.12}$$

соответствующей единичному обобщенному перемещению системы $\delta f = 1$. Отсюда получим, что

$$\delta T=-\delta f\int\sigma_i\varepsilon_i'\,do, \tag{I.13}$$

и, согласно (I.7),

$$P\le\int\sigma_i\varepsilon_i'\,do. \tag{I.14}$$

Поскольку понятие пластического потенциала определено здесь лишь для простого деформирования (система внутренних сил в упруго-пластическом теле неконсервативна), то в данном методе можно рассматривать только случаи сохранения формы деформации системы за все время деформирования последней. Поэтому для линейно деформируемой системы следует положить, что

$$\varepsilon_i=\varepsilon_i'f \qquad (i=1,2,3) \tag{I.15}$$

---

* Знак суммирования по $i = 1,2,3$ везде опускается.

На основании (I.I5) неравенство (I.I4) следует записать в виде

$$P \leqslant \frac{1}{f} \int \sigma_i \varepsilon_i \, d\omega, \qquad (I.I6)$$

причем σ_i являются здесь заданными функциями ε_i ($i = I,2,3$), согласно (I.I0) и (I.2).

В частном случае упруго-пластического материала, пластический потенциал которого зависит только от второго инварианта тензора деформаций, а объемные деформации равны нулю, имеет место зависимость

$$\Pi = \Pi(e_u), \qquad (I.I7)$$

где e_u - интенсивность деформации:

$$e_u = \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\ ; \qquad (I.I8)$$

полагая на основании условия равенства нулю объемной деформации, что

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2; \qquad (I.I9)$$

$$e_u = \sqrt{6}\ \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}\ . \qquad (I.20)$$

Величины напряжений при этом будут равны на основании (I.I0) и (I.I7)

$$\sigma_1 = \Pi'(e_u)\ \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{e_u}, \ldots \qquad (I.2I)$$

или с учетом (I.I9)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3\Pi'(e_u)}{e_u}\varepsilon_i \qquad (i=1,2) \\ \sigma_3 &= \frac{-3\Pi'(e_u)}{e_u}(\varepsilon_1+\varepsilon_2), \end{aligned}\right\} \tag{I.22}$$

Отсюда

$$\sigma_i\varepsilon_i = \frac{3\Pi'(e_u)}{e_u}\left[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2\right] = \frac{6\Pi'(e_u)}{e_u}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right) = e_u\Pi'(e_u). \tag{I.23}$$

При этом неравенство (I.I6) получает вид:

$$P \leqslant \frac{1}{f}\int \Pi'(e_u)\, e_u\, do. \tag{I.24}$$

Величину $\Pi'(e_u)$ можно обозначить через S_u и назвать интенсивностью напряжений. Из (I.22) мы видим, что

$$S_u = \Pi'(e_u) = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \tag{I.26}$$

Обычно интенсивностью напряжений называют величину, пропорциональную S_u и равную

$$\sigma_u = \frac{3}{\sqrt{2}}S_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \tag{I.27}$$

При этом интенсивностью деформаций следует считать величину

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3}e_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} \tag{I.28}$$

или, на основании условия равенства нулю объемных деформаций,

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2}\,. \tag{I.29}$$

Неравенство (I.24) при этом сохраняет свой вид:

$$P \leqslant \frac{1}{f}\int \Pi'(\varepsilon_u)\,\varepsilon_u\,do. \qquad (I.30)$$

Преимущество обозначений (I.24) и (I.26) заключается в том, что при простом растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ интенсивность напряжений $\sigma_u = \sigma_т$ – пределу текучести при растяжении.

Если система геометрически нелинейна, то есть компоненты деформаций ε_1, ε_2, ε_3 нелинейно зависят от f, то следует положить

$$\delta\varepsilon_i = \frac{d\varepsilon_i}{df}\,\delta f. \qquad (i=1,2,3) \qquad (I.31)$$

Тогда из (I.II) вместо (I.I3) получим

$$\delta T = -\delta f \int \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{df}\,do \qquad (I.32)$$

и, считая справедливым закон простого деформирования

$$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{d\varepsilon_i}{df} = c(f), \qquad (i = 1,2,3) \qquad (I.33)$$

будем иметь:

$$\delta T = -\delta f \int c(f)\,\sigma_i\,\varepsilon_i\,do. \qquad (I.34)$$

Отсюда

$$P \leqslant \int c(f)\,\sigma_i\,\varepsilon_i\,do, \qquad (I.35)$$

а в случае справедливости (I.I7)

$$P \leqslant \int c(f)\,\sigma_u\,\varepsilon_u\,do. \qquad (I.36)$$

Так на основе (I.32) и (I.33)

$$\frac{d\varepsilon_u}{df} = c(f)\,\varepsilon_u, \qquad (I.37)$$

то

$$P \le \int \frac{d\varepsilon_u}{df} \sigma_u \, do, \qquad (I.38)$$

и если тело жестко пластическое, то

$$P \le \sigma_T \int \frac{d\varepsilon_u}{df} \, do. \qquad (I.39)$$

Следует сказать знак меньше или равно в неравенстве (I.16) и последующих нельзя заменить знаком min, так как, кроме простого загружения, возможен иной путь деформирования системы, при котором величина $P(f)$ будет принимать минимальное значение. Однако для стержневых конструкций и для большинства случаев расчета пластин и оболочек сохраняется условие простого деформирования ввиду малости или равенства нулю поперечных деформаций, а также из условий симметрии. При этом P можно определить как угодно точно, приближаясь к истинному его значению сверху за счет рассмотрения как можно большего количества возможных форм деформирования. Кроме того, известно [5], что в случае, когда σ_1, σ_2, σ_3 представляют собой однородные функции независимых переменных ε_1, ε_2, ε_3 [*], в процессе загружения тела постоянной по форме нагрузкой перераспределения компонентов деформаций не происходит и в этом случае обязательно осуществляется процесс простого деформирования в каждой точке тела. К этому случаю относится, в частности, закон степенного упрочнения $\sigma_u = A \varepsilon_u^n$ и жестко пластическое тело без упрочнения при

[*] Однородной функцией n-ой степени называется такая функция, которая при умножении всех ее аргументов на одно и то же число a получает множитель a^n

условии отсутствия объемных деформаций. Для того, чтобы σ_1, σ_2, σ_3 были однородными функциями ε_1, ε_2, ε_3, достаточно, чтобы пластический потенциал Π был однородной функцией переменных ε_1, ε_2, ε_3.

2. Применение к расчету пластинок

Расчет плоских пластинок на изгиб производится исходя из гипотезы Кирхгоффа о сохранении перпендикулярности нормалей к срединной поверхности пластинки после ее деформации. Из этой гипотезы следует, что

$$\varepsilon_x = \varkappa_x z ; \quad \varepsilon_y = \varkappa_y z ; \quad \gamma_{xy} = 2\varkappa_{xy} z , \tag{2.1}$$

где z - расстояние от срединной поверхности пластинки, $\varkappa_x$ и $\varkappa_y$ - кривизны срединной поверхности после деформации пластинки в направлениях осей x и y, равные при малых прогибах w;

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} , \tag{2.2}$$

$\varkappa_{xy}$ - кручение срединной поверхности пластинки:

$$\varkappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \tag{2.3}$$

Будем исходить из пластического потенциала (I.I7). Выражение для интенсивности деформаций (I.29) напишем в произвольных прямоугольных осях x, y, совместив ось 3 с осью z. Тогда, используя выражения

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}} , \tag{2.4}$$

получим, что

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}\,, \tag{2.5}$$

а с учетом (2.2) и (2.3)

$$\varepsilon_u = \frac{2z}{\sqrt{3}} \sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_x \varkappa_y + \varkappa_{xy}^2}\,. \tag{2.6}$$

Введя выражение

$$\varkappa_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_x \varkappa_y + \varkappa_{xy}^2}\,, \tag{2.7}$$

получим выражение для работы внутренних сил, приходящейся на элемент поверхности пластинки

$$dT = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_T \varepsilon_u dz\, dF = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_T z \varkappa_u dz\, dF = -m_T \varkappa_u dF, \tag{2.8}$$

где

$$m_T = \frac{\sigma_T h^2}{4} \tag{2.9}$$

- предельный момент в цилиндрическом шарнире текучести пластинки, h - толщина пластинки.

Работа внешней нагрузки q равна

$$V = \int q w\, dF, \tag{2.10}$$

где интегрирование производится по всей площади пластинки.

Из равенства нулю суммы работ внешних и внутренних сил определяется предельная величина нагрузки q_{np}.

Для получения верхней оценки предельной нагрузки q_{np} можно задаваться приближенно функцией прогиба $w(x,y)$, которая должна соответствовать условиям закрепления пластин-

ки. Истинной форме прогиба отвечает минимальное значение $q_{пр}$, определенное таким образом.

Можно также сформулировать данную задачу определения $q_{пр}$ и истинной формы прогиба пластинки $w(x,y)$ как изопериметрическую вариационную задачу о минимуме интеграла

$$-T=\int m_T \varkappa_и dF=\int m_T\sqrt{w_{xx}^2+w_{yy}^2+w_{xx}w_{yy}+w_{xy}^2}\,dF \qquad (2.11)$$

при дополнительном условии

$$V=\int q w dF=\text{const}. \qquad (2.12)$$

В качестве примера рассмотрим круглую симметрично нагруженную пластинку, деформированное состояние которой будет осесимметричным и прогиб w будет являться функцией только одного переменного r - расстояния от центра симметрии. В этом случае выражение для $\varkappa_и$ (2.7) примет вид

$$\varkappa_и=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varkappa_r^2+\varkappa_\theta^2+\varkappa_r\varkappa_\theta}\,, \qquad (2.13)$$

где $\varkappa_r$ и $\varkappa_\theta$ - кривизны изогнутой поверхности пластинки в направлениях радиуса r и линии, перпендикулярной радиусу. Считая прогибы малыми и обозначая через ψ угол наклона меридиональной кривой изогнутой поверхности, имеем:

$$\varkappa_r=w''\,;\ \varkappa_\theta=\frac{\sin\varphi}{r}\approx\frac{\varphi}{r}\approx\frac{w'}{r}. \qquad (2.14)$$

При этом

$$\varkappa_и=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{w''^2+\frac{w'^2}{r^2}+\frac{w''w'}{r}}. \qquad (2.15)$$

Работа внешних сил при осесимметричной нагрузке выражается формулой

$$V = 2\pi \int_0^R q w r\,dr, \qquad (2.16)$$

а работа внутренних сил, согласно (2.8), -

$$T = -2\pi m_T \int_0^R \varkappa_n r\,dr = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T \int_0^R \sqrt{w''^2 r^2 + w'' w' r + w'^2}\; dr. \qquad (2.17)$$

Здесь R - радиус пластинки.

Возьмем случай пластинки, шарнирно опертой по наружному круглому контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой q. Зададимся для прогибов функцией

$$w = w_0\left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right). \qquad (n>0) \qquad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в выражения для V (2.16) и T (2.17), получим:

$$V = \pi R^2 q w_0 \frac{n}{n+2}; \quad T = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T \sqrt{n^2 - n + 1}. \qquad (2.19)$$

Отсюда, положив $V+T = 0$, имеем:

$$q = q_{np} = \frac{4 m_T}{\sqrt{3} R} \frac{(n+2)\sqrt{n^2-n+1}}{n}.$$

Минимум этого выражения будет при

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{(n^2-n+1)(n+2)^2}{n^2} = 0; \; 2n + 3 - \frac{8}{n^3} = 0; \; n = 1{,}147$$

и равен

$$q_{np} = \frac{6{,}85}{R^2} m_T = \frac{1{,}712 h^2 \sigma_T}{R^2}. \qquad (2.20)$$

Точное решение [6] дает

$$q_{np} = 1{,}615\,\frac{h^2\sigma_T}{R^2}$$

и разнится от (2.20) на 6%.

При загрузке той же пластинки сосредоточенной центральной силой P работа внешних сил выразится произведением Pw_0 и при форме прогиба (2.I8) получим:

$$P_{np} = -\frac{T}{w_0} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T \sqrt{n^2 - n + 1}\,.$$

Минимум P_{np} будет при $n = 0{,}5$ и равен

$$P_{np} = 2\pi m_T\,. \qquad (2.2I)$$

Форма прогиба пластинки по (2.I8) при $n = 0{,}5$ приведена на рис. I.

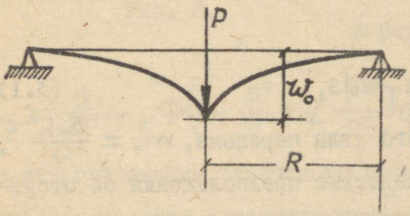


Рис. I.

При $n = I$ получаем $P_{np} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T$; пластинка при этом должна искривляться по конической поверхности.

3. Сосредоточенные кривизны

Удобные приближенные решения для различных конфигураций, загружений и опираний пластинки можно получить, рассматривая формы изгиба с сосредоточенными кривизнами, являющимися двугранными углами перелома поверхности пластинки. Заметим, что сосредоточенное кручение поверхности пластинки не может быть осуществлено без нарушения условия неразрывности деформации и поэтому должно быть исключено из рассмотрения. Кроме того, нетрудно показать, что кривизны, сосредоточенные в точках и

образующие не двугранные, а многогранные углы, дают значения работы внутренних сил, бесконечно малые по сравнению с работой внутренних сил на двугранных углах перелома поверхности пластинки.

Метод расчета пластинок, основанный на рассмотрении форм их деформаций с сосредоточенными кривизнами, был разработан еще в 1931 г. Иогансеном [7] применительно к железобетонным пластинкам и широко применяется в практических расчетах последних.

Работа внутренних сил, приходящаяся на элемент ds длины ребра перелома (цилиндрического шарнира текучести), выражается формулой

$$dT=-\frac{2}{\sqrt{3}}m_T\theta ds, \qquad (3.1)$$

где θ - величина двугранного угла перелома, $m_T=\frac{\sigma_T h^2}{4}$, множитель $2/\sqrt{3}$ возникает вследствие предположения об отсутствии удлинений вдоль ребра перелома. Этот множитель можно включить в условную величину предела текучести $\sigma_T^*=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T$.

Полная работа внутренних сил будет равна

$$T=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\int_0^{\ell_i} m_T\theta_i ds, \qquad (3.2)$$

где суммирование распространяется на все ребра перелома.

Для полигональной шарнирно-опертой пластинки, нагруженной сосредоточенной силой P, была выведена формула [8], которая с поправкой на коэффициент $2/\sqrt{3}$ имеет вид:

$$P_{пр}=\frac{2}{\sqrt{3}}m_T\sum ctg\alpha_i. \qquad (3.3)$$

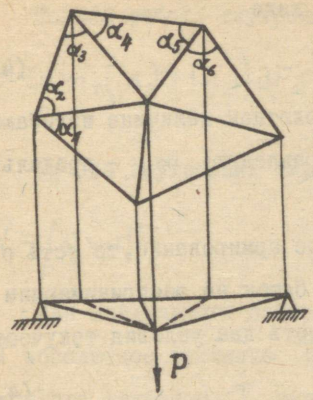


Рис. 2.

Здесь α_i - углы, образованные линиями, идущими из точки приложения силы P в вершины периметра пластинки, со сторонами контура опирания (рис. 2).

Для пластинки, шарнирно опертой по криволинейному выпуклому контуру, уравнение которого в полярных координатах с центром в точке приложения силы P будет $\rho=\rho(\varphi)$, была дана формула [5]

$$P_{np}=\frac{2}{\sqrt{3}}m_T\Phi\left(1-\frac{\rho''}{\rho}+2\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)d\varphi, \qquad (3.4)$$

где интегрирование ведется по всему опорному контуру. Здесь форма искривления пластинки является конической без сосредоточенных кривизн.

Имеются также формулы для плит с заделанными и опертыми краями, для плит опертых в точках и т.д. Все эти формулы получают обоснование и связь с общей теорией малых упруго-пластических деформаций, как приближенные формулы кинематического расчета предельного равновесия.

4. Предельное равновесие железобетонных пластинок

Условия текучести для железобетонных пластинок следует принимать отличными от условия (I.I7). С достаточным основанием для плит, одинаково армированных в двух взаимно перпен-

дикулярных направлениях верхней и нижней сетками арматуры, условия текучести можно принять в виде

$$|m|_{max} = m_T, \qquad (4.1)$$

где $|m|_{max}$ - максимальный по абсолютной величине изгибающий момент, действующий по любому направлению; m_T - предельное значение этого момента.

Если пластинка имеет одиночное армирование, то есть одну нижнюю сетку арматуры, то, считая бетон не воспринимающим растягивающие напряжения, будем иметь два условия текучести

$$m_{max} = m_T \; ; \; m_{min} = 0. \qquad (4.2)$$

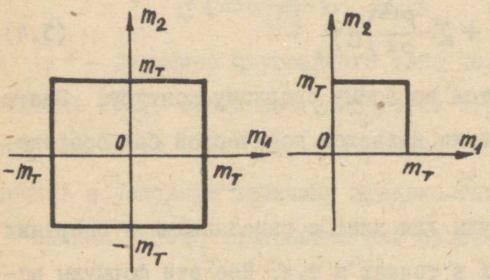


Рис. 3.

Условия (4.1) и (4.2) в координатных осях m_1, m_2, где m_1 и m_2 - главные изгибающие моменты, изображаются квадратами (рис. 3). Они соответствуют потенциальным функциям

$$\Pi(\varkappa_1, \varkappa_2) = m_T \left(|\varkappa_1| + |\varkappa_2| \right) \qquad (4.3)$$

при двустороннем армировании и

$$\Pi(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{m_T}{2} \left(\varkappa_1 + |\varkappa_1| + \varkappa_2 + |\varkappa_2| \right) \qquad (4.4)$$

при одностороннем. В дальнейшем все рассуждения будем вести

для пластинки с симметричным двусторонним армированием.

Полная работа внутренних сил для всей пластинки равна

$$T=-\int_F m_T\left(|\varkappa_1|+|\varkappa_2|\right)dF. \qquad (4.5)$$

Работа внутренних сил, по-прежнему, будет равна

$$V=\int_F qw\,dF. \qquad (4.6)$$

Для предельного состояния требуется, чтобы при заданном V абсолютное значение T имело минимальное значение, или, чтобы при заданном T значение V было максимальным.

Допустим вначале, что кривизны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ имеют везде одинаковый знак, который без ограничения общности можно считать положительным. Тогда при $m_T=\text{const}$

$$T=-m_T\int_F \nabla^2 w\,dF=-m_T\Phi\frac{\partial w}{\partial n}ds=-m_T S\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{cp}. \qquad (4.7)$$

В равенстве (4.7) поверхностный интеграл преобразован в контурный. S - длина контура опирания пластинки, $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{cp}$ - среднее значение угла наклона деформированной пластинки на ее контуре по нормалям к последнему.

Задаваясь величинами $\frac{\partial w}{\partial n}$ на контуре, величину T мы однозначно определим. Для того, чтобы при этом получить максимум V при положительной везде нагрузке q, надо прогибам w внутри пластинки придать максимальное значение. Это приведет к поверхности отрицательной Гауссовой кривизны (рис. 4), для которой формула (4.7) для T будет уже несправедлива.

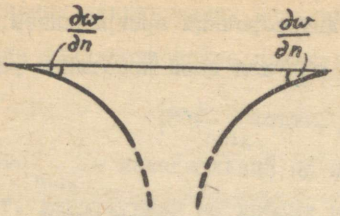


Рис. 4.

Положим теперь, что кривизны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ имеют разные знаки. Тогда Гауссова кривизна пластинки будет отрицательной, а работа внутренних сил выразится формулой

$$T=-\int_F m_T|\varkappa_1-\varkappa_2|\,dF. \tag{4.8}$$

Замечая, что

$$\varkappa_{1,2}=\frac{1}{2}\left[w_{xx}+w_{yy}\pm\sqrt{(w_{xx}-w_{yy})^2+w_{xy}^2}\right], \tag{4.9}$$

получим

$$T=-\int_F m_T\sqrt{(w_{xx}-w_{yy})^2+w_{xy}^2}\,dF. \tag{4.10}$$

Чтобы при заданном V (4.6) величина $|T|$ имела минимальное значение, следует положить

$$w_{xx}-w_{yy}=0;\quad w_{xy}=0,$$

при этом

$$w_{xx}=\varkappa_1=w_{yy}=\varkappa_2$$

и мы будем иметь поверхность положительной Гауссовой кривизны, с уравнением

$$w=f(x)+f(y),$$

где f - произвольная функция аргумента, стоящего в скобках.

Итак, допуская, что $\varkappa_1 \varkappa_2 > 0$, получим, что экстремальное свойство, характеризующее состояние предельного равновесия пластинки, достигается за пределами этого допущения точно так же, как и при альтернативном допущении $\varkappa_1 \varkappa_2 < 0$. Отсюда следует, что состоянию предельного равновесия должно удовлетворять пограничное значение Гауссовой кривизны $\varkappa_1 \varkappa_2 = 0$ во всех точках пластинки, то есть деформированная поверхность пластинки должна состоять из участков нулевой Гауссовой кривизны.

Рассмотрим полигональную пластинку, шарнирно опертую по контуру и нагруженную произвольной положительной нагрузкой. Форма разрушения такой пластинки показана на рис. 5. Обозначим углы наклона элементов пластинки по направлениям, перпендикулярным сторонам одного опорного контура через ψ_i. Тогда вместо (4.7) получим

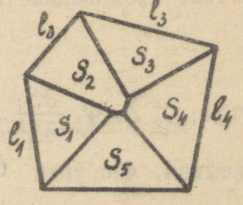


Рис. 5.

$$T = -m_T \Sigma \psi_i l_i \qquad \left(\psi_i = \frac{\partial w}{\partial n_i}\right), \qquad (4.11)$$

где l_i - длина i-ой стороны опорного контура. С другой стороны, прогибы w поверхности, имеющей вид пологого многогранника, равны

$$w = w(x,y) = \psi_k z_k , \qquad (4.12)$$

где z_k - расстояние от рассматриваемой точки (,) до стороны опорного контура, относящейся к той грани поверхности пластинки, где расположена точка (x,y), k - номер этой

грани.

Подставив (4.I2) в выражение работы внешних сил (4.6), найдем, что

$$V=\sum \psi_i S_i , \qquad (4.I3)$$

где S_i - статический момент нагрузки на i -ой грани деформированной поверхности, взятый относительно стороны опорного контура.

Условие максимума $V+T$ выразится теперь в виде

$$\sum \psi_i (S_i - m_T l_i) = max. \qquad (4.I4)$$

Для реализации этого условия необходимо приравнять к нулю частные производные по ψ_i от левой части выражения (4.I4):

$$S_i - m_T l_i + \sum \psi_i \frac{\partial S_i}{\partial \psi_i} = 0. \qquad (4.I5)$$

Учитывая, что углы ψ_i являются малыми величинами, в начальной стадии разрушения пластинки их можно считать стремящимися к нулю, и тогда получим простое условие

$$\frac{S_i}{l_i} = m_T = const. \qquad (4.I6)$$

Таким образом, действительная форма разрушения полигональной пластинки должна обладать тем свойством, что отношение статических моментов нагрузки S_i на каждой грани деформированной поверхности, взятых относительно соответствующих сторон опирания, к длине этой стороны l_i должно быть одинаковым для всех граней.

Представим функцию нагрузки в виде

$$q = q_0 \xi(x,y), \qquad (4.17)$$

где q_0 - коэффициент пропорциональности, подлежащий определению, $\xi(x,y)$ - заданная функция, определяющая единичную нагрузку $q_0 = 1$.

Тогда из условия $T + V = 0$ с учетом (4.11) и (4.13) получим

$$-m_T \Sigma \psi_i l_i + q_0 \Sigma \psi_i S_i' = 0, \qquad (4.18)$$

где

$$S_i' = \frac{S_i}{q_0} \qquad (4.19)$$

- статический момент единичной нагрузки. Отсюда

$$q_0 = \frac{m_T \Sigma \psi_i l_i}{\Sigma \psi_i S_i'}. \qquad (4.20)$$

Согласно доказанному, минимум q_0 достигается при $l_i / S_i' =$ $= \text{const}$.

Сравним теперь истинную форму разрушения, удовлетворяющую критерию (4.16), с какой-либо другой, отличающейся иным очертанием граней поверхности. В этой второй форме площади, поворачивающиеся вокруг каждой из сторон опорного контура, будут иные, причем одни из них будут больше, а другие меньше соответствующих площадей в истинной форме разрушения. То же можно сказать и о статических моментах нагрузки, расположенной на частях пластинки, относящихся к каждой стороне опорного контура. А так как длина сторон l_i в обеих формах разрушения одинакова, то во второй форме разрушения некоторые из величин l_i / S_i' окажутся больше, а некоторые меньше

того одинакового для всех сторон значения $l_i/S_i^1 = q_0/m_T$, которое имеет место в истинной форме разрушения.

Отсюда для любой формы разрушения, состоящей из плоских элементов, вращающихся вокруг сторон опорного контура, имеем:

$$\min \frac{l_i}{S_i^1} \leqslant \frac{q_0}{m_T} \leqslant \max \frac{l_i}{S_i^1}. \qquad (4.21)$$

Таким образом мы получаем возможность двусторонней оценки величины разрушающей нагрузки q_0.

В заключение заметим, что рассмотренные линейчатые формы разрушения могут с успехом применяться и в расчете пластинок из материала с иными условиями текучести, например, с условиями Губера-Генки-Мизеса для верхней оценки несущей способности.

5. Ортотропно армированные плиты

Часто железобетонные плиты армируются различно в направлениях оси x и оси y. Это проявляется как в различном количестве арматуры, укладываемой в этих направлениях, так и в том, что уровень расположения арматурных стержней, ввиду их взаимного пересечения, оказывается разным для разных направлений. Такие плиты в отношении их расчета по предельному равновесию оказываются ортотропными.

Пусть предельный изгибающий момент в направлении оси x равен m_x, а в направлении оси y - m_y. Тогда работа внутренних сил при пластическом изгибе плиты будет равна

$$T = -\iint_F \left(m_x |w_{xx}| + m_y |w_{yy}| \right) dx\, dy. \qquad (5.1)$$

Работа внешних сил равна, как и ранее,

$$V=\iint_F q w\,dx\,dy. \tag{5.2}$$

Введем новые независимые переменные

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{m_x}},\quad \eta=\frac{y}{\sqrt{m_y}}. \tag{5.3}$$

Тогда выражения (5.I) и (5.2) преобразуются следующим образом:

$$T=-\sqrt{m_x m_y}\iint_{F'}\left(\left|\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right|\right)d\xi\,d\eta,$$
$$V=\sqrt{m_x m_y}\iint_{F'} q w\,d\xi\,d\eta. \tag{5.4}$$

Интегрирование здесь производится по преобразованной площади F', в которую переходит площадь F после линейного преобразования координат (5.3).

Приравнивая сумму работ внешних и внутренних сил к нулю, получим условие предельного равновесия:

$$\iint_{F'}\left(\left|\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right|\right)d\xi\,d\eta=\iint_{F'} q w\,d\xi\,d\eta. \tag{5.5}$$

Таким образом, задача расчета ортотропной плиты сводится к расчету изотропной плиты, контур которой получен из контура заданной плиты при помощи линейного преобразования (5.3), причем предельный изгибающий момент в приведенной изотропной плите считается равным единице. Нагрузка q здесь считается отнесенной к единице поверхности заданной плиты.

6. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности пластинки

Обычно формой разрушения пластинки в расчете ее кинематическим методом приходится задаваться в виду трудности получения точного решения экстремальной задачи. При этом получается оценка сверху, которую не всегда удается достаточно понизить. С развитием линейного программирования (см.,напр., [8]) появилась возможность уточненного расчета, исходя из некоторой многократно изменяемой системы, включающей в себя большое количество возможных форм разрушения. Методами линейного программирования можно автоматически найти параметры, определяющие форму разрушения, наиболее близкую к истинной, а также достаточно точное значение разрушающей нагрузки.

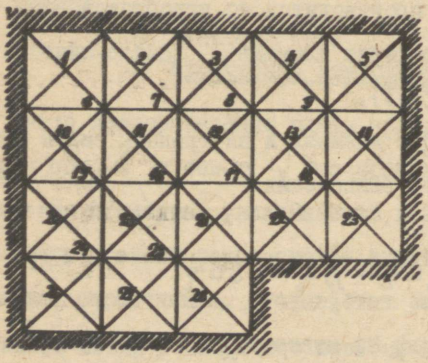


Рис. 6.

Зададимся формой разрушения пластинки в виде пологого многогранника, вершины которого расположены в узлах квадратной сетки с диагоналями (рис. 6). При этом работа внутренних сил T оказывается равной

$$T=\Sigma m_T|\theta_i|l_i\,, \qquad (6.I)$$

где θ_i - двугранный угол перелома в i -м ребре многогранника длиной l_i . Суммирование производится по всем ребрам

перелома. В более общем случае, например, в случае армированных железобетонных плит можно брать различные значения m_T: при положительном угле m_T и при отрицательном - m'_T.

Углы θ_i полностью определяются значениями прогибов пластинки в узлах сетки. Имея перед глазами сетку ребер перелома с пронумерованными узлами, сделать это очень легко. Например, угол перелома на участке 15-16 сетки, изображенной на рис. 6, равен

$$\theta_{15-16}=\left(w_{15}+w_{16}-w_{11}-w_{20}\right)\frac{2}{\lambda},$$

где λ - размер стороны квадрата сетки. Точно так же получим:

$$\theta_{7-16}=\left(w_7+w_{16}-w_{11}-w_{12}\right)\frac{2}{\lambda}.$$

Для диагональных участков сетки угол перелома определяется несколько иначе. Например, для участков 6-11 и 13-17 имеем:

$$\theta_{6-11}=\left(2w_{11}-w_7-w_{15}\right)\frac{\sqrt{2}}{\lambda};\ \theta_{13-17}=\left(2w_{13}-w_8-w_{18}\right)\frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Нетрудно показать, что угол перелома на участках двух полудиагоналей, например, 6-11 и 11-16, всегда один и тот же; поэтому в расчете мы можем иметь дело с целыми диагоналями, не расчленяя их на половины. Таким образом, определяем, например:

$$\theta_{6-16}=\theta_{6-11}=\theta_{11-16}=\left(2w_{11}-w_7-w_{15}\right)\frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Работа внутренних сил на прямых участках сетки ребер перелома равна: $-m_T\theta\lambda$ или $m'_T\theta\lambda$, а на диагоналях (полных): $-m_T\theta\lambda\sqrt{2}$ или $m'_T\theta\lambda\sqrt{2}$, причем первые выражения

берутся в случае $\theta > 0$, а вторые при $\theta < 0$.

Общая работа внутренних сил равна:

$$T = -\sum m_T \varphi, \tag{6.2}$$

Где φ - наибольшая из величин $\lambda\theta$ и $-\frac{m_T'}{m_T}\lambda\theta$. Мы имеем, таким образом, неравенства

$$\varphi \geqslant \theta\lambda\,; \quad \varphi \geqslant -\frac{m_T'}{m_T}\theta\lambda. \tag{6.3}$$

Здесь, как и в некоторых предыдущих формулах, для простоты записи опущены индексы при φ, θ и m_T, обозначающие участок сетки ребер перелома.

Выражая θ через прогибы w, получим вместо (6.3) ряд неравенств вида

$$\varphi_{15-16} \geqslant 2\left(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}\right);\ \varphi_{15-16} \geqslant -2\frac{m_T'}{m_T}\left(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}\right)$$
$$\varphi_{6-16} \geqslant 2w_{11} - w_7 - w_{15};\ \varphi_{6-16} \geqslant -2\frac{m_T'}{m_T}\left(2w_{11} - w_7 - w_{15}\right). \tag{6.4}$$

работа внешних сил в состоянии разрушения равна

$$V = \sum w_i P_i. \tag{6.5}$$

Здесь P - часть вертикальной нагрузки, расположенная на участке пластинки, тяготеющем к узлу i (рис. 7.).

Потеря потенциальной энергии системы на заданном перемещении равна алгебраической сумме работ внешних и внутренних сил:

$$U = V + T = \sum w_i P_i - \sum m_T \varphi_{i-k} \tag{6.6}$$

Во второй сумме суммирование производится по всем учас-

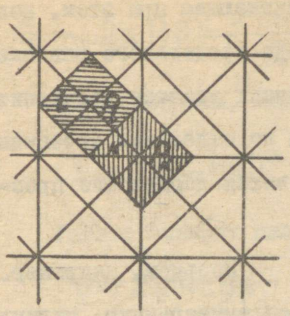


Рис. 7.

ткам сетки возможных ребер перелома.

Для истинной формы разрушения величина U должна быть максимальной. Кроме того, в состоянии предельного равновесия она обращается в нуль. Таким образом, получаем следующую задачу параметрического линейного программирования: требуется найти максимум линейной формы U (6.6) при наличии неравенств (6.4), полагая прогиб одного из узлов равным единице. Далее надо отыскать такое значение параметра нагрузки, то есть общего множителя при величинах P_i, при котором максимум формы U обращается в нуль. Попутно в процессе решения задачи получаются все данные для нахождения формы разрушения пластинки.

Эта задача решается при помощи симплекс-метода, для которого имеются готовые программы вычислений на электронно-цифровых вычислительных машинах.

В ряде случаев, когда требуемая точность расчета позволяет ограничиваться небольшим числом узлов сетки, вычисления можно производить и вручную.

7. Расчет цилиндрических оболочек

При переходе от пластинок к оболочкам появляются новые качественные особенности расчета по предельному равновесию, которые заключаются в том, что в оболочках необходимо учитывать кроме деформаций изгиба также и осевые деформации ее

срединной поверхности. Трудности, возникающие при этом, долгое время мешали распространению метода предельного равновесия на оболочки. Лишь в отдельных случаях удается расчленить осевые деформации и деформации изгиба по отдельным сечениям и тогда задача расчета оболочки становится достаточно простой.

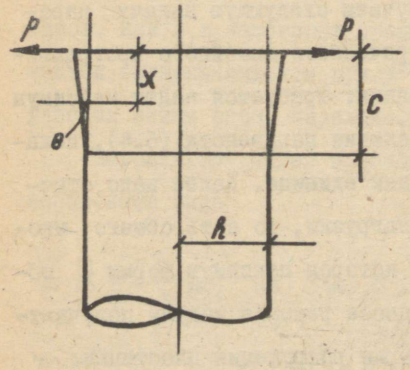


Рис. 8.

Возьмем, например, осесимметричную цилиндрическую оболочку, открытую с одного конца и нагруженную по свободному краю равномерно распределенными радиальными силами p (рис. 8). Материал оболочки будем считать подчиняющимся условиям пластичности (I.I7). Зададимся деформацией, при которой на некоторой длине c оболочка превращается в усеченный конус, причем в ней возникают кольцевые удлинения ε_φ, равные $\frac{c-x}{R}\theta$ (обозначения показаны на рис. 8). В сечении $x=c$ при данной деформации возникает кольцевой шарнир текучести с углом перелома θ.

Нетрудно подсчитать работу внутренних сил на данной деформации. Кольцевые удлинения дают

$$\sigma_T h 2\pi R \int_0^c (c-x)\frac{\theta}{R}\,dx = \pi \sigma_T h c^2 \theta$$

(h - толщина оболочки), а перелом в кольцевом сечении $x = c$ -

$$\frac{2}{\sqrt{3}} m_T 2\pi R\theta = \frac{\pi R h^2 \sigma_T \theta}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, полная работа внутренних сил будет равна

$$T = -\pi \sigma_T h \theta \left(c^2 + \frac{Rh}{\sqrt{3}}\right). \qquad (7.1)$$

Работа внешних сил равна

$$V = 2\pi R c \theta p. \qquad (7.2)$$

Из равенства $V+T=0$ получаем:

$$p = \frac{\sigma_T h}{2R}\left(c + \frac{Rh}{\sqrt{3}c}\right). \qquad (7.3)$$

Минимум p будет при

$$c = \sqrt{\frac{Rh}{\sqrt{3}}} = 0{,}76\sqrt{Rh}. \qquad (7.4)$$

Он равен

$$p_{пр} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sigma_T h \sqrt{\frac{h}{R}} = 0{,}76\, \sigma_T h \sqrt{\frac{h}{R}}. \qquad (7.5)$$

Для железобетонных оболочек это элементарное решение может быть обосновано, как точное. Зададимся формой прогибов оболочки $v(x)$. Тогда в оболочке возникнут кольцевые удлинения $\frac{v}{R}$ и продольные кривизны v''. В железобетонных оболочках, армированных продольной и кольцевой арматурой величина предельного изгибающего момента m_T не зависит от кольцевых удлинений, а предельные кольцевые усилия $\sigma_T h$ не зависят от напряжений в продольной арматуре. Следовательно, работа внутренних сил здесь будет равна

$$T=-2\pi Rh\int_0^c \sigma_T \frac{v}{R}\,dx-2\pi Rm_T\int_0^c |v''|\,dx. \qquad (7.6)$$

Интегрирование ведется в пределах деформированного участка оболочки $0<x<c$. Работа внешних сил для рассматриваемой нагрузки равна

$$V=2\pi Rv(0)p. \qquad (7.7)$$

Истинной форме разрушения будет отвечать минимум суммы двух интегралов:

$$h\sigma_T\int_0^c v\,dx+Rm_T\int_0^c |v''|\,dx=\min \qquad (v>0) \qquad (7.8)$$

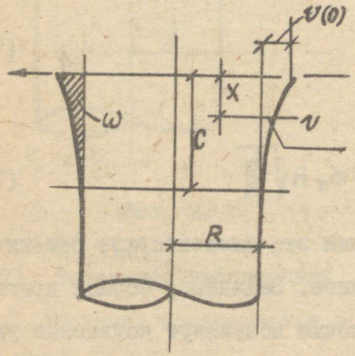


Рис. 9.

Первый интеграл равен умноженной на $h\sigma_T/R$ площади ω эпюры прогибов (рис. 9), а второй - умноженному на m_T приращению v' на участке $0<x<c$, то есть $m_T v'(0)$. Таким образом, при заданном $v(0)$ следует найти минимум суммы:

$$-\frac{T}{2\pi}=h\sigma_T\omega+Rm_T v'(0). \qquad (7.9)$$

Если задаться $v'(0)$, то минимум ω будет при прямолинейной эпюре прогибов (рис. 8), поскольку кривизна v'' не может на протяжении $0<x<c$ менять знак (при перемене зна-

ка кривизны второй интеграл в (7.8) даст уже не $v'(0)$, а большую величину). Таким образом принятое предположение о конической форме деформированной поверхности в ее верхней части соответствует истинной форме разрушения железобетонной оболочки *, для которой, однако, решение несколько видоизменится за счет иных значений $\sigma_т$ и $m_т$. Полагая в (7.9) и (7.7) $v(0)=1, \omega=\frac{c}{2}, v'(0)=\frac{1}{c}$, получим, что

$$p=\frac{h\sigma_т}{2\pi R^2}\frac{c}{2}+\frac{m_т}{2\pi Rc} \qquad (7.10)$$

и

$$\min p=p_{np}=\frac{1}{\pi R}\sqrt{\frac{h\sigma_т m_т}{2R}}$$

при

$$c=\sqrt{\frac{2Rm_т}{h\sigma_т}}\,. \qquad (7.11)$$

Принцип прямолинейности отрезков эпюры прогибов осесимметричной железобетонной цилиндрической оболочки может быть доказан другим способом. Работа такой оболочки аналогична работе жестко-пластической балки на жестко-пластическом основании. На участках прогибов этой балки отпор основания равен постоянной величине, которая вычитается из внешней нагрузки, и балка оказывается эквивалентной обычной балке с неизменяющейся в процессе деформации нагрузкой. При этом, как известно, состояние предельного равновесия может быть достаточно точно аппроксимировано прямолинейными участками прогибов с сосредоточенными кривизнами, представляющими собой

* Этот вывод был получен ранее Савчуком [9].

шарниры текучести.

На основании данного принципа предельное равновесие замкнутого железобетонного цилиндра с днищем под действием равномерного внутреннего давления может быть найдено в виде двух усеченных конусов с цилиндрическим шарниром текучести в середине оболочки (рис.I0). Считая днища нерастяжимыми в своей плоскости и не сопротивляющимися повороту краев, получим работу внутренних сил

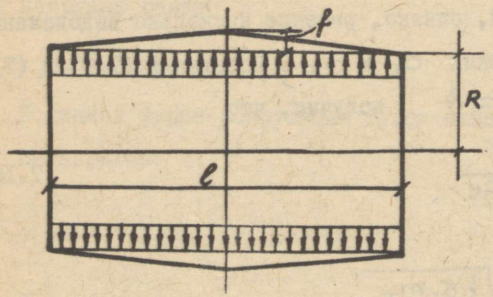


Рис. I0.

$$T=-2\pi R m_T \frac{4f}{l}-2\pi h\sigma_T \frac{fl}{2}.$$

Здесь $4f/l$ - угол поворота в цилиндрическом шарнире текучести, $fl/2$ - площадь эпюры прогибов, f - прогиб в среднем сечении.

Работа внешних сил равна

$$V=2\pi R q \frac{fl}{2}.$$

Из условия $T+V=0$ находим, что

$$q_{np}=\frac{8m_T}{l^2}+\frac{h\sigma_T}{R}. \qquad (7.I2)$$

При бесконечно большой длине l имеем

$$q_{np} = \frac{h\sigma_T}{R}. \qquad (7.13)$$

Для оболочек из материала, подчиняющегося условию (I.I7) Губера-Генка-Мизеса, между продольными изгибающими моментами m_x и кольцевыми усилиями $\sigma_T h$ существует предельное конечное соотношение, которое выявляется из условия $\varepsilon_u = (\varepsilon_u)_{np} = \text{const}$. Используя (2.5) и полагая

$$\varepsilon_x = v''z\,;\ \varepsilon_y = \varepsilon_\varphi = \frac{v}{R}\,;\ \gamma_{xy} = 0, \qquad (7.14)$$

получаем

$$\varepsilon_u = \sqrt{v''^2 z^2 + \frac{v''vz}{R} + \frac{v^2}{R^2}}. \qquad (7.15)$$

Работа внутренних сил равна

$$T = -2\pi R\sigma_T \int_0^c \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_u\, dz\, dx, \qquad (7.16)$$

и, так как работа внешних сил (при загружении оболочки на торце поперечными силами p) $V = 2\pi R v(0) p$, то

$$p_{np} = \frac{\sigma_T}{v(0)} \int_0^c \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_u\, dz\, dx. \qquad (7.17)$$

Зададимся кривой прогибов v в виде

$$v = e^{-\alpha x}, \qquad (7.18)$$

положив соответственно $c = \infty$. Тогда

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_u\, dz = \frac{e^{-\alpha x}}{R} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sqrt{\alpha^4 R^2 z^2 + \alpha^2 Rz + 1}\, dz = \qquad (7.19)$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 R^2} \int_{-\frac{\alpha^2 Rh}{2}}^{\frac{\alpha^2 Rh}{2}} \sqrt{u^2 + u + 1}\, du.$$

Далее, из (7.I7) при получаем

$$p_{пр}=\frac{\sigma_т}{\alpha^3 R}\int_{-\frac{\alpha^2 Rh}{2}}^{\frac{\alpha^2 Rh}{2}}\sqrt{u^2+u+1}\,du \qquad (7.20)$$

или, обозначая

$$\frac{\alpha^2 Rh}{2}=t\,;\ \alpha=\sqrt{\frac{2t}{Rh}}\,, \qquad (7.2I)$$

$$p_{пр}=\sigma_т\sqrt{\frac{h^3}{8Rt^3}}\int_{-t}^{t}\sqrt{u^2+u+1}\,du=\sigma_т\sqrt{\frac{h^3}{8Rt^3}}\cdot \qquad (7.22)$$

$$\cdot\left[\frac{(2t+1)\sqrt{t^2+t+1}+(2t-1)\sqrt{t^2-t+1}}{4}+\frac{3}{8}\ln\frac{2\sqrt{t^2+t+1}+2t+1}{2\sqrt{t^2-t+1}-2t+1}\right.$$

Минимум этого выражения будет при $t\approx 2$ и равен

$$p_{пр}=0{,}720\,\sigma_т\sqrt{\frac{h^3}{R}}\,. \qquad (7.23)$$

Коэффициент затухания прогибов α здесь приблизительно равен, согласно (7.2I),

$$\alpha\approx\frac{2}{\sqrt{Rh}}\,. \qquad (7.24)$$

Поэтому на расстоянии $\approx 2\sqrt{Rh}$ прогибы, вызванные нагрузкой p в предельном состоянии, можно считать затухшими.

Сопоставляя формулу (7.23) с формулой (7.5), замечаем, что форма прогибов (7.I8) дает существенное снижение критической нагрузки по сравнению с конической формой, изображенной на рис. 8, и является, следовательно, более близкой к истинной. Для сравнения укажем, что решение А.А.Ильюшина [I] для этого случая дает

$$p_{пр} = \sigma_т \sqrt[4]{\frac{\pi^2}{48}} \sqrt{\frac{h^3}{R}} = 0{,}675\,\sigma_т \sqrt{\frac{h^3}{R}}, \qquad (7.25)$$

что отличается от (7.23) на 8%.

8. Расчет цилиндрических сводов-оболочек методом линейного программирования

Рассмотрим задачу расчета цилиндрического свода-оболочки, опертого на две торцевые диафрагмы. Продольные борта оболочки могут свободно свешиваться или быть оперты любым образом. Будем считать, что длина оболочки несколько превышает ее ширину, то есть, что оболочка относится к категории средне длинных. Для расчета такой оболочки зададимся классом форм разрушения, удобным для применения линейного программирования.

Примем форму разрушения с сосредоточенными продольными деформациями в среднем сечении оболочки и с цилиндрическими шарнирами текучести вдоль образующих, расположенными настолько часто, что участок оболочки между соседними шарнирами текучести можно считать плоской пластинкой (рис. II). Каждая такая пластинка, благодаря своей малой толщине, почти не сопротивляется продольным изгибающим и крутящим моментам, и поэтому влиянием этих моментов можно пренебречь. Кроме того, будем считать

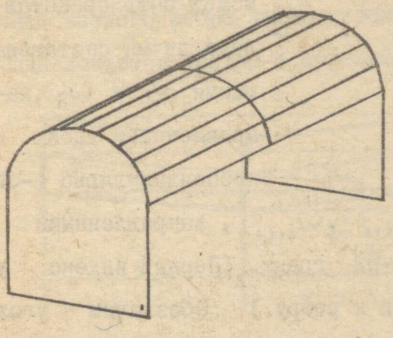


Рис. II.

оболочку не сжимаемой в поперечном направлении так, чтобы в цилиндрических шарнирах текучести возникали только углы поворота, а сосредоточенные деформации поперечного удлинения или сжатия отсутствовали. В промежутках между шарнирами текучести и средним поперечным сечением оболочки пластинки считаются абсолютно жесткими в своей плоскости и на изгиб в поперечном направлении. Такая кинематическая схема, но без сосредоточения продольных деформаций в одном сечении была использована В.В.Власовым в его практическом методе расчета сводов-оболочек по упругой стадии [10].

В качестве параметров формы разрушения возьмем проекции перемещений каждой пластинки в среднем сечении оболочки на плоскость этой пластинки v_i. Будем нумеровать цилиндрические шарниры текучести, которые сокращенно назовем ребрами, той же цифрой, что и предшествующую им пластинку или, сокращенно, грань (рис.12). Тогда полное перемещение i-го ребра может быть представлено двумя составляющими v_i и w_{ii}, направленными вдоль и перпендикулярно i-ой грани, или же составляющими v_{i+1}, $w_{i+1,i}$, направленными вдоль и перпендикулярно $i+1$-ой грани. (Первый индекс у w относится к грани, а второй к ребру.) Обозначим угол между гранями i и $i+1$ через φ_i. Тогда составляющие v_i,

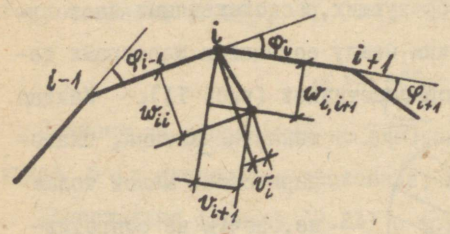


Рис. 12.

w_{ii} и v_{i+1} , w_{i+1} можно выразить друг через друга следующим образом:

$$v_{i+1}\cos\varphi_i - w_{i+1,i}\sin\varphi_i = v_i \,, \tag{8.1}$$

$$v_i\cos\varphi_i + w_{ii}\sin\varphi_i = v_{i+1} \,.$$

Отсюда

$$w_{i+1,i} = -\frac{v_i}{\sin\varphi_i} + v_{i+1}\operatorname{ctg}\varphi_i \,; \quad w_{ii} = \frac{v_{i+1}}{\sin\varphi_i} - v_i\operatorname{ctg}\varphi_i \,. \tag{8.2}$$

Поворот каждой грани в среднем сечении оболочки равен

$$\psi_i = \frac{w_{ii} - w_{i,i-1}}{b_i} = \frac{1}{b_i}\left[\frac{v_{i+1}}{\sin\varphi_i} - v_i\left(\operatorname{ctg}\varphi_i + \operatorname{ctg}\varphi_{i-1}\right) + \frac{v_{i-1}}{\sin\varphi_{i-1}}\right], \tag{8.3}$$

где b_i - ширина грани, а взаимный угол поворота в i-ом ребре

$$\theta_i = \psi_{i+1} - \psi_i = \frac{v_{i+2}}{b_{i+1}\sin\varphi_{i+1}} - v_{i+1}\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi_{i+1} + \operatorname{ctg}\varphi_i}{b_{i+1}} + \frac{1}{b_i\sin\varphi_i}\right) + \tag{8.4}$$

$$+ v_i\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi_i + \operatorname{ctg}\varphi_{i-1}}{b_i} + \frac{1}{b_{i+1}\sin\varphi_i}\right) - \frac{v_{i-1}}{b_i\sin\varphi_{i-1}} \,.$$

Выразим теперь сосредоточенные продольные деформации по линии каждого ребра через перемещения v_i . Так как каждая грань ломается только в середине пролета, то угол ее перелома α_i равен (рис. I3)

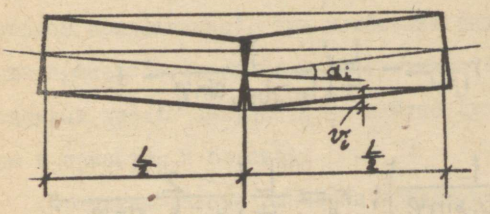


Рис. I3.

$$\alpha_i = \frac{4}{L}v_i \tag{8.5}$$

его же можно выразить формулой

$$\alpha_i = \frac{e_i - e_{i-1}}{b_i}, \qquad (8.6)$$

где e_i и e_{i-1} - сосредоточенные продольные удлинения вдоль i -го и $i-1$ -го ребра (рис. I4). Таким образом имеем:

$$e_i - e_{i-1} = \frac{4b}{L} v_i \; ; \; v_i = \frac{L}{4b_i}\left(e_i - e_{i-1}\right). \qquad (8.7)$$

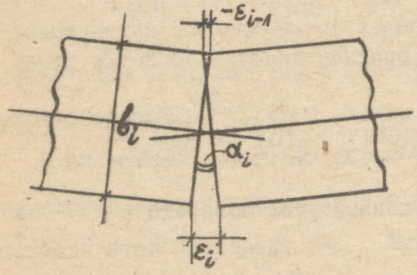


Рис. I4.

Если оболочка оперта только по торцам, то, включая в число продольных ребер ее свободные края, мы будем иметь число продольных деформаций e_i на единицу больше числа перемещений v_i. Поэтому целесообразно в дальнейшем в качестве независимых параметров формы разрушения брать не прогибы v_i, а сосредоточенные удлинения вдоль ребер e_i. Тогда, подставляя в (8.4) (8.7), получим:

$$\theta_i = r_{i,i+2} e_{i+2} + r_{i,i+1} e_{i+1} + r_{ii} e_i + r_{i,i-1} e_{i-1} + r_{i,i-2} e_{i-2}, \qquad (8.8)$$

где

$$r_{i,i+2} = \frac{L}{4b_{i+2}b_{i+1}\sin\varphi_{i+1}}; \; r_{i,i+1} = -\frac{L}{4}\left(\frac{1}{b_{i+2}b_{i+1}\sin\varphi_{i+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{ctg\varphi_{i+1} + ctg\varphi_i}{b_{i+1}^2} + \frac{1}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i}\right); \; r_{ii} = \frac{L}{4}\left(\frac{2}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i} + \right.$$

$$+\frac{ctg\varphi_{i+1}+ctg\varphi_i}{b_{i+1}^2}+\frac{ctg\varphi_i+ctg\varphi_{i-1}}{b_i^2}\Big);\ r_{i,i-1}=-\frac{L}{4}\Big(\frac{1}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i}+$$

$$+\frac{ctg\varphi_i+ctg\varphi_{i-1}}{b_i^2}+\frac{1}{b_ib_{i-1}\sin\varphi_{i-1}}\Big);\ r_{i,i-2}=\frac{L}{4b_ib_{i-1}\sin\varphi_{i-1}}. \quad (8.9)$$

Подсчитаем работу внутренних сил при заданной форме разрушения. В продольных шарнирах текучести образуется постоянный погонный момент m_T, который при симметричном армировании оболочки по толщине будет одинаковым по абсолютной величине, как в случае положительных, так и в случае отрицательных углов поворота θ_i. Поскольку двугранный угол поворота смежных граней линейно изменяется по полупролету оболочки от своей максимальной величины θ_i в среднем сечении до нуля у опорных диафрагм, то работа моментов для всех ребер i будет равна:

$$T_1=-\sum\frac{Lm_T}{2}|\theta_i|. \quad (8.10)$$

На сосредоточенных продольных деформациях e_i в случае положительного их знака произведут работу продольные растягивающие усилия $h\sigma_T$, где h - толщина оболочки, σ_T - приведенный предел текучести на растяжение (учитывающий продольное армирование). При изменении знака деформации e_i работа производится сжимающими усилиями $h\sigma_T'$, где σ_T' - приведенный предел текучести на сжатие (учитывающий сопротивление и арматуры и бетона).

Принимая разные значения пределов текучести σ_T и σ_T', мы учитываем возможность образования трещин по среднему се-

чению оболочки в растянутых зонах. Интегрируя по сечению оболочки численным методом трапеций, получим работу продольных сил на деформациях в виде суммы:

$$T_2 = -h\sigma_T \sum_{+} |e_i| \frac{b_{i+1}+b_i}{2} - h\sigma_T' \sum_{-} |e_i| \frac{b_{i+1}+b_i}{2}, \qquad (8.11)$$

где в первом члене суммирование производится по всем растянутым ребрам, а во втором - по сжатым.

Работу внешних сил легко подсчитать после разложения внешней нагрузки, которую приближенно можно считать сосредоточенной вдоль ребер, на направления, лежащие в плоскостях смежных граней (рис. I5). Тогда, суммируя алгебраически усилия, передающиеся на каждую грань и обозначая эти суммы через Q_i, найдем, что работа внешних сил равна:

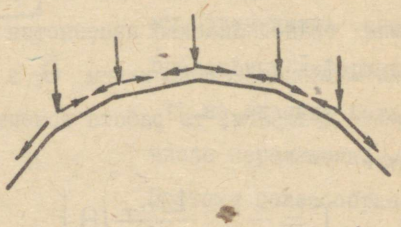


Рис. I5.

$$V = \sum \left[\int_0^{L/2} Q_i v_i \frac{2x}{L} dx + \int_{L/2}^{L} Q_i v_i \frac{2(L-x)}{L} dx \right]. \qquad (8.12)$$

(Здесь учтено, что эпюра прогибов каждой грани вдоль пролета оболочки имеет вид треугольника (рис. I3)).

Введя обозначения для параметров внешней нагрузки

$$P_i = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} Q_i x dx + \int_{L/2}^{L} Q_i (L-x) dx \right] \qquad (8.13)$$

можно записать выражение (8.I2) с учетом (8.7) в виде:

$$V=\sum P_i v_i=\frac{L}{4}\sum P_i\,\frac{e_i-e_{i-1}}{b_i}. \qquad (8.I4)$$

Общая величина работы как внешних, так и внутренних сил, представляющая собой потерю потенциальной энергии системы, выразится формулой

$$U=V+T_1+T_2=\frac{L}{4}\sum\frac{P_i}{b_i}\left(e_i-e_{i-1}\right)-\frac{Lm_T}{2}\sum|\theta_i|-$$
$$-\frac{h\sigma_T}{2}\sum_{+}|e_i|\left(b_i+b_{i+1}\right)-\frac{h\sigma_T'}{2}\sum_{-}|e_i|\left(b_i+b_{i+1}\right). \qquad (8.I5)$$

Учитывая (8.7) и (8.8), замечаем, что это выражение представляет собой однородную функцию независимых переменных e_i. Можно задаться одним из этих переменных и тогда остальные нужно будет подобрать так, чтобы величина U принимала максимальное значение. При этом форма разрушения будет наиболее близка к истинной.

Сведем эту задачу к задаче линейного программирования. Для этого запишем выражение (8.I5) в виде:

$$U=\frac{L}{4}\sum e_i\left(\frac{P_i}{b_i}-\frac{P_{i+1}}{b_{i+1}}\right)-\frac{Lm_T}{2}\sum\theta_i^*-\frac{h\sigma_T}{2}\sum e_i^*\left(b_i+b_{i+1}\right)=\max, \qquad (8.I6)$$

где θ_i^* - наибольшая из величин θ_i и $-\theta_i$, а e_i^* - наибольшая из величин e_i и $-\rho e_i$, где $\rho=\sigma_T'/\sigma_T$. Таким образом, должны удовлетворяться неравенства

$$a_i=\theta_i^*-\theta_i=\theta_i^*-\sum_{k=i-2}^{i+2}r_{ik}e_k\geqslant 0$$
$$b_i=\theta_i^*+\theta_i=\theta_i^*+\sum_{k=i-2}^{i+2}r_{ik}e_k\geqslant 0 \qquad (8.I7)$$

$$c_i = e_i^* - e_i \geq 0, \qquad (8.17)$$

$$d_i = e_i^* + \rho e_i \geq 0 \quad \left(\rho = \frac{\sigma_T'}{\sigma_T}\right).$$

Условия (8.16) и (8.17) дают возможность определить форму разрушения при помощи симплекс-метода. Для определения параметра разрушающей нагрузки необходимо добавить условие

$$U = 0, \qquad (8.18)$$

которое сводит задачу к параметрическому линейному программированию, логарифм которого также хорошо известен. Ввиду однородности задачи одной из неизвестных в первой части (8.16) следует задаться, положив, например $\theta_1^* = 1$.

9. Предельное равновесие оболочек вращения

Рассмотрим теперь предельное равновесие осесимметричных оболочек вращения. Будем считать возможным в состоянии разрушения образования линий сосредоточенных деформаций по параллелям 1,2,3... (рис. 16), а между этими линиями предполагать растяжение или сжатие в кольцевом направлении. Верхнюю линию сосредоточенных деформаций будем считать выродившейся в полюс оболочки. Обозначим ее через K. По линиям сосредоточенных деформаций оболочка может испытывать сосредоточенное меридиональное удлинение e_i и угол поворота θ_i.

Далее, как обычно в численных методах, будем полагать, что внешняя нагрузка сосредоточена вдоль средних линий разделяющих пополам меридиональную дугу между двумя соседними линиями сосредоточенных деформаций. Для вычисления работы внешних сил определим горизонтальные и вертикальные переме-

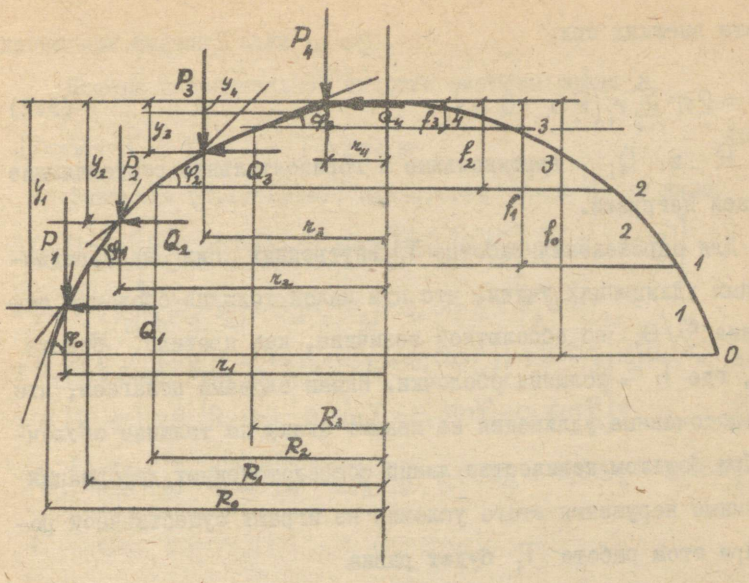


Рис. I6.

щения точек приложения внешних усилий в каждом поясе оболочки между кольцевыми линиями сосредоточенных деформаций

$$v_1 = e_0\cos\varphi_0 + \theta_0(f_0 - y_1),$$
$$v_2 = e_0\cos\varphi_0 + e_1\cos\varphi_1 + \theta_0(f_0 - y_2) + \theta_1(f_1 - y_2),$$
$$v_3 = e_0\cos\varphi_0 + e_1\cos\varphi_1 + e_2\cos\varphi_2 + \theta_0(f_0 - y_3) + \theta_1(f_1 - y_3) + \theta_2(f_2 - y_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.I)$$

$$u_1 = -e_0\sin\varphi_0 + \theta_0(R_0 - r_1),$$
$$u_2 = -e_0\sin\varphi_0 - e_1\sin\varphi_1 + \theta_0(R_0 - r_2) - \theta_1(R_1 - r_2),$$
$$u_3 = -e_0\sin\varphi_0 - e_1\sin\varphi_1 - e_2\sin\varphi_2 + \theta_0(R_0 - r_3) + \theta_1(R_1 - r_3) + \theta_2(R_2 - r_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Обозначения см. на рис. I6. При этом получаем выражение для

работы внешних сил

$$V=2\pi\sum_{i=1}^{K} r_i\left(P_i u_i+Q_i v_i\right), \qquad (9.2)$$

где P_i и Q_i вертикальные и горизонтальные составляющие внешней нагрузки.

Для определения работы T_1 внутренних сил на меридиональных удлинениях учтем, что при малой толщине оболочки отношение e_i/θ_i по абсолютной величине, как правило, больше $h/2$, где h - толщина оболочки. Иными словами полагаем, что сосредоточенные удлинения не меняют знака по толщине оболочки. При большом количестве линий сосредоточенных деформаций единичные нарушения этого условия не играют существенной роли. При этом работа T_1 будет равна

$$T_1=-2\pi\sum_{i=0}^{K-1} R_i h_i |e_i|\sigma_T^*, \qquad (9.3)$$

то есть повороты θ_i не будут оказывать на нее влияние. $\sigma_T^*=\sigma_m$ - пределу текучести на растяжение в меридиональном направлении, если $e_i>0$ и $\sigma_T^*=\sigma_m'$ - пределу текучести в том же направлении при сжатии, если $e_i<0$.

Определяя работу внутренних сил T_2 на кольцевых удлинениях, найдем приближенное выражение T_2 через средние кольцевые удлинения в каждом поясе оболочки $\varepsilon_i=\frac{v_i}{r_i}$

$$T_2=-2\pi\sum_{i=1}^{K} F|v_i|\sigma_T^0, \qquad (9.4)$$

где F_i - площади меридиональных сечений каждого пояса оболочки, $\sigma_T^0=\sigma_T$ - пределу текучести в кольцевом направлении, если $v_i>0$ и $\sigma_T^0=\sigma_T'$ - пределу текучести в том же направ-

лении при сжатии, если $v_i < 0$.

Потеря потенциальной энергии системы равна

$$U = V + T_1 + T_2 = V + T = max . \tag{9.5}$$

Учитывая (9.I)-(9.4), представим V и T в виде

$$V = 2\pi r_1 \left\{ P_1 \left[\theta_0 (R_0 - r_1) - e_0 \sin\varphi_0 \right] + Q_1 \left[\theta_0 (f_0 - y_1) + e_0 \cos\varphi_0 \right] \right\} +$$
$$+ 2\pi r_2 \left\{ P_2 \left[\theta_0 (R_0 - r_2) + \theta_1 (R_1 - r_2) - e_0 \sin\varphi_0 - e_1 \sin\varphi_1 \right] + \right.$$
$$\left. + Q_2 \left[\theta_0 (f_0 - y_2) + \theta_1 (f_1 - y_2) + e_0 \cos\varphi_0 + e_1 \cos\varphi_1 \right] \right\} + 2\pi r_3 \left\{ P_3 \left[\theta_0 (R_0 - r_3) + \right. \tag{9.6}$$
$$+ \theta_1 (R_1 - r_3) + \theta_2 (R_2 - r_3) - e_0 \sin\varphi_0 - e_1 \sin\varphi_1 - e_2 \sin\varphi_2 \left. \right] +$$
$$\left. + Q_3 \left[\theta_0 (f_0 - y_3) + \theta_1 (f_1 - y_3) + \theta_2 (f_2 - y_3) + e_0 \cos\varphi_0 + e_1 \cos\varphi_1 + e_2 \cos\varphi_2 \right] \right\} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$T = -2\pi \left(\sigma_m \sum_{i=0}^{K-1} R_i h_i a_i + \sigma_T \sum_{i=1}^{K} F_i b_i \right). \tag{9.7}$$

Причем величины a_i и b_i подчиняются условиям

$$a_i \geqslant e_i \; ; \; a_i \geqslant -\rho e_i \; ; \; b_i \geqslant v_i \; ; \; b_i \geqslant -\tau v_i \; , \tag{9.8}$$

где

$$\rho = \frac{\sigma_m'}{\sigma_m} \; ; \; \tau = \frac{\sigma_T'}{\sigma_T} . \tag{9.9}$$

Итак, требуется найти максимум целевой функции U (9.5) при ограничениях (9.8). Дополнительным является условие предельного равновесия

$$U = U_{max} = 0. \tag{9.I0}$$

Таким образом, задача свелась снова к параметрическому линейному программированию.

IO. Предельное равновесие пологих оболочек

Расчеты пластинок на пологие оболочки кинематическим методом нами были обобщены в 1956 г. [II]-[I2]. Пластические шарниры текучести здесь заменяются линиями сосредоточенных деформаций, разделяющих области, в которых деформации считаются отсутствующими. По линиям сосредоточенных деформаций происходит взаимное смещение соседних частей оболочки, представляющее собой малый поворот вокруг некоторой взаимной оси вращения. Сделано предположение об отсутствии сдвигов по линиям сосредоточенных деформаций, что приводит к заключению о том, что все взаимные оси вращения лежат в одной плоскости (рис. I7). В плане картина разрушения пологой оболочки соответствует схеме разрушения пластинки того же очертания с той лишь разницей, что все взаимные оси вращения вынесены из срединной поверхности пластинки в некоторую плоскость взаимных осей вращения, положение которой определяется из условия минимума разрушающей нагрузки. Работа внутренних сил на деформациях разрушения, равная в пластинке - $\sum m_T l_i \theta_i$, где l_i - длина i-го участка цилиндрического шарнира текучести, а θ_i - угол поворота в этом шарни-

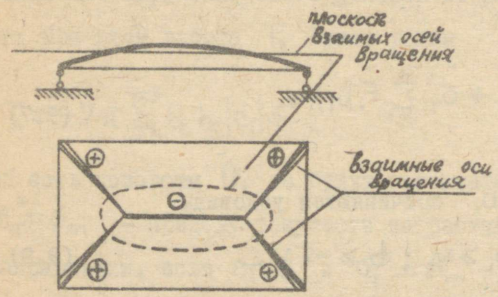


Рис. I7

ре, заменяется выражением

$$-\sum\left(\sigma_T S_i^{+}+\sigma_T' S_i^{-}\right)\theta_i,$$

где σ_T и σ_T' - приведенные пределы текучести на растяжение и сжатие, S_i^{+} и S_i^{-} - статические моменты растянутой и сжатой части сечения оболочки, приведенного через i -ю взаимную ось вращения, взятые относительно этой оси.

Фигурацией осей вращения, так же как и цилиндрических шарниров в случае расчета пластинки, следует задаваться так, чтобы оболочка превращалась в механизм и работа внешних и внутренних сил могла быть определена с точностью до одного неопределенного параметра перемещений, например, максимального прогиба. Положение плоскости осей вращения, как указывалось выше, вводит дополнительные параметры, которые находятся из условия минимума нагрузки.

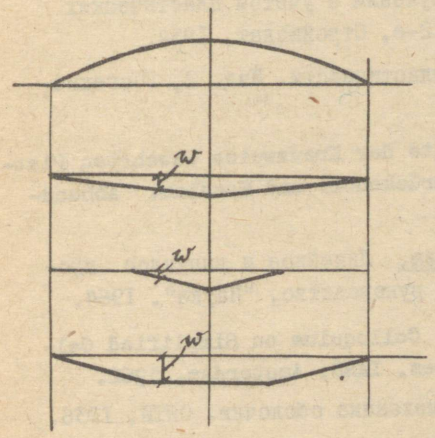


Рис. I8.

Для пологих оболочек вращения, нагруженных симметричной нагрузкой, можно рассматривать форму разрушения с эпюрой прогибов в виде конуса, на всей или на средней части поверхности оболочки или в виде усеченного конуса (рис. I8). В последнем случае средняя часть оболочки поступательно смещается как жесткое целое.

Как и для полигональной оболочки существенными являются условия закрепления краев против горизонтальных смещений. При отсутствии горизонтальных перемещений краев вся оболочка сжата, а при возможности свободного смещения - частично сжата, частично растянута.

Анализ указанных форм разрушения проведен в работе I3 .

Литература

I. А.А.Ильюшин, Пластичность, I948.

2. А.А.Гвоздев, Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Труды конференции по пластическим деформациям АН СССР, I938.

3. А.А.Марков, О вариационных принципах в теории пластичности. ПММ, т. XI, в. 3, I947.

4. H.J. Greenberg, Complementary minimum principles for an elastic-plastic material. Quart. Appl. Math. v.7, 1949

5. А.Р.Ржаницын, Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Изд. 2-е, Стройиздат, I954.

6. В.В.Соколовский, Теория пластичности. Изд. 2, Гостехиздат, I950.

7. K.W. Johansen, Bruchmomente der Kreuzweise bewehrten Platten Intern. Verein. für Brückenbar und Hochbau. Abhandlungen, B.1. 1932

8. С.И.Зуховицкий, Л.И.Авдеева, Линейное и выпуклое программирование. Справочное руководство, "Наука", I964.

9. K.A. Sawczuk, Proc. of the Colloquium on Simplified Calculation Method of Structures, IASS, Amsterdam, 1962.

I0. В.З.Власов, Строительная механика оболочки. ОНТИ, I936.

11. A.R. Rzhanitzyn, The Design of Plates and Shells by the Kinematical Method of Limit Equilibrium. IX Congr. Intern de mecanique Appliqué. Actes, VVI. Bruxelles, 1957.

12. А.Р.Ржаницын, Расчет пологих оболочек методом предельного равновесия "Строит.мех. и расчет сооружений", 1959, № 1.

13. А.Р.Ржаницын, Пологие оболочки и волнистые настилы, Стройиздат, 1960.

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЯМИ

Г.Н.Савин, А.Н.Гузь, И.А.Цурпал

Институт механики АН Укр. ССР, Киев

Дана постановка и разработаны приближенные методы решения задач концентрации напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках с учетом физической нелинейности материала. Даны решения конкретных задач.

§ I. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах. В настоящее время во многих разделах механики сплошной среды становятся актуальными нелинейные задачи. В связи с этим предпринимаются серьезные попытки как постановки, так и решения конкретных задач при различных предположениях относительно вида нелинейной зависимости напряжений - деформаций и характера геометрической нелинейности. В данной статье основное внимание сосредоточено только на задачах физически нелинейных, но геометрически линейных.

Особый интерес представляют задачи о влиянии физической нелинейности на напряженное состояние в зоне концентрации напряжений. Обзор работ по концентрации напряжений около круговых отверстий с учетом физической нелинейности содержится в работах [3, 4, I4], поэтому остановимся только на результатах последних лет, полученных в отделе реологии Института механики АН УССР.

Связь между напряжениями и деформациями для физически

нелинейных тел принимается в виде [I8]:

$$D=\frac{1}{3K}K(s_0)T_0+\frac{1}{2G}g(t_0^2)T', \qquad (I.I)$$

где D - тензор деформации, T_0 - тензор гидростатического давления, T' - девиатор тензора напряжений, K и G - соответственно модули объемной деформации и сдвига. Функции давления $K(s_0)$ и напряжений сдвига $g(t_0^2)$, характеризующие физическую нелинейность материала, представляются степенными рядами по безразмерным параметрам среднего напряжения и интенсивности касательных напряжений:

$$K(s_0)=1+K_1s_0+K_2s_0^2+\ldots;\ g(t_0^2)=1+g_2t_0^2+g_4t_0^4+\ldots \qquad (I.2)$$

Однако для многих материалов объемная деформация в широком диапазоне следует закону Гука, поэтому ограничимся рассмотрением малой физической нелинейности:

$$K(s_0)\equiv 1\ ;\ g(t_0^2)=1+g_2t_0^2. \qquad (I.3)$$

При таком выборе (I.3) нелинейного закона упругости (I.I) задача об упругом равновесии тонкой физически нелинейной пластинки сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения [I2, I8]

$$\Delta\Delta F+\frac{\mu\beta}{R^4}\Big[\frac{1}{r^4}F_{\varphi\varphi}T_{\varphi\varphi}-\frac{1}{r^3}\big(F_{r\varphi}T_{\varphi\varphi}+F_{\varphi\varphi}T_{r\varphi}\big)-\frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{2}F_{rr}T_{\varphi\varphi}- \qquad (I.4)$$

$$-F_{r\varphi}T_{r\varphi}+\frac{1}{2}F_{\varphi\varphi}T_{rr}\Big)-\frac{1}{2r}\big(F_rT_{rr}+F_{rr}T_r\big)-\frac{1}{3}\Delta\big(T\Delta F\big)\Big]=0$$

при соответствующих граничных условиях на контуре отверстия и на бесконечности. Здесь Δ - гармонический оператор; постоянные материала и функция $T(r,\varphi)$ имеют вид

$$\mu=\frac{1}{g_2};\ \beta^2=\frac{K g_2^2}{(3K+G)G^2};\ T(r,\varphi)=\frac{9}{2}G^2 t_0^2. \qquad (I.5)$$

Безразмерная постоянная g_2, характеризующая отклонение нелинейного закона упругости от закона Гука, для некоторых материалов имеет порядок $10^5 \div 10^6$.

Представляя решение уравнения (I.4) в виде ряда по малому параметру μ, было получено [I4] решение ряда нелинейных задач концентрации напряжений около круговых отверстий при различных полях напряжений на бесконечности.

В дальнейшем в работе [I2] был предложен приближенный метод решения задач концентрации напряжений около некруговых отверстий с учетом физической нелинейности материала. В основу этого метода положен приближенный метод "возмущения формы границы" в форме, с успехом примененный в работах [7,9.II] при исследовании концентрации напряжений возле аналогичных криволинейных отверстий в линейно упругих оболочках.

Суть метода состоит в том, что для отверстий, получаемых из отображаемой функции,

$$z=\omega(\xi)=R[\xi+\varepsilon f(\xi)],\ z=re^{i\varphi};\ \xi=\rho e^{i\theta}, \qquad (I.6)$$

где $\varepsilon<1$ - малый параметр, R - действительная постоянная, характеризующая размеры отверстия и его ориентацию относительно координатных осей; решение уравнения (I.4) можно представить в виде разложений по малым параметрам μ (I.5) и ε (I.6), характеризующих соответственно физическую нелинейность материала и криволинейность отверстия

$$F(r,\varphi,\mu,\varepsilon)=H_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^k\varepsilon^j F^{(k,j)}(r,\varphi), \qquad (I.7)$$

где H_0 выбираем из условия $H_0^2\beta^2/R^4=1$.

В выражении (I.6) ε и функция $f(\xi)$ характеризуют отверстия и имеют вид:

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi},\ \varepsilon=\frac{a-b}{a+b},\ a \text{ и } b \text{ - полуоси эллипса} \qquad (I.8)$$

для квадратного (с закругленными углами):

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi^3},\ \varepsilon=\pm\frac{1}{9}\div\frac{1}{6}, \qquad (I.9)$$

для треугольного (с закругленными углами):

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi^2},\ \varepsilon=\frac{1}{4}. \qquad (I.10)$$

Подставляя функцию (I.7) в основное уравнение (I.4) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ^k, ε^j получим уравнения для определения функций $F^{(k,j)}$ в виде

$$\Delta\Delta F^{(k,j)}(r,\varphi)=L_{k,j}\left(F^{(0,0)},\dots,F^{(k-1,j-1)}\right). \qquad (I.11)$$

где $L_{k,j}$ - нелинейный оператор, содержащий функции $F^{(0,0)}$, ..., $F^{(k-1,j-1)}$ и их производные из предыдущих приближений.

Выражения для правых частей уравнения (I.11) для некоторых значений k, j получены в явном виде.

При $k=0$, $j=0,1,\dots$

$$L_{0,j}\left(F^{(0,0)},\dots,F^{(k-1,j-1)}\right)\equiv 0. \qquad (I.12)$$

При $k=1$, $j=0$

$$L_{1,0}\left(F^{(0,0)}\right)\equiv L_0\left(F^{(0,0)}\right). \qquad (I.I3)$$

Развернутый вид оператора L_0 приведен в работе [I9].

При $K = 2$, $j = 0$

$$L_{2,0}\left(F^{(0,0)}, F^{(1,0)}\right)\equiv L_1\left(F^{(0,0)}, F^{(1,0)}\right). \qquad (I.I4)$$

Развернутый вид оператора L_1 приведен в работе [I3].

При $K = I$, $j = I$

$$L_{1,1}\left(F^{(0,0)}, F^{(0,1)}\right)\equiv L_2\left(F^{(0,0)}, F^{(0,1)}\right). \qquad (I.I5)$$

Развернутый вид оператора L_2 приведен в работе [I2].

Поступая аналогично, можно выписать явные выражения для операторов $L_{K,j}$ при любых ($K>1$, $j>1$) значениях K и j.

Решение уравнений (I.II) ищем в виде ряда Фурье:

$$F^{(K,j)}(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{f_{K,j}^{(m)}(r)\cos m\varphi + g_{K,j}^{(m)}(r)\sin m\varphi\right\}. \qquad (I.I6)$$

Для нахождения компонентов напряжений σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$ в криволинейной ортогональной системе координат (ρ,θ), даваемой функцией (I.6), воспользуемся формулами перехода от полярных координат (r,φ) к криволинейным (ρ,θ).

Раскладывая найденное выражение для компонентов напряжений σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$ в ряды по μ (I.5) и ε (I.6)

$$\sigma_\rho=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^K\varepsilon^j\sigma_\rho^{(K,j)},\quad \sigma_\theta=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^K\varepsilon^j\sigma_\theta^{(K,j)},$$

$$\tau_{\rho,\theta}=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^K\varepsilon^j\tau_{\rho\theta}^{(K,j)}. \qquad (I.I7)$$

и принимая во внимание (I.6), получим $\sigma_\rho^{(\kappa,j)}$, $\sigma_\theta^{(\kappa,j)}$, $\tau_{\rho,\theta}^{(\kappa,j)}$. Выпишем здесь только $\sigma_\theta^{(\kappa,j)}$:

$$\sigma_\theta^{(\kappa,j)} = M_0 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} F^{(\kappa,j)}(\rho,\theta) + H_0 \sum_{m=0}^{j-1} \Big[L_1^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + L_2^{(j-m)} \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\rho} \Big) + L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} \Big] F^{(\kappa,m)}(\rho,\theta). \qquad (I.I8)$$

Функции $F^{(\kappa,j)}(\rho,\theta)$, входящие в (I.I8), есть решение уравнений (I.II) $F^{(\kappa,j)}(r,\varphi)$ в виде (I.I6), в которых переменные r и φ формально заменены на ρ и θ.

Произвольные постоянные, входящие в $f_{\kappa,j}^{(m)}$ и $g_{\kappa,j}^{(m)}$ (I.I6), определяются из соответствующих граничных условий для $F^{(\kappa,j)}(\rho,\theta)$.

Задавая на контуре рассматриваемого отверстия напряжения

$$\sigma_r\big|_\Gamma = \psi_1(r,\varphi;\mu);\quad \tau_{\rho\theta}\big|_\Gamma = \psi_2(r,\varphi;\mu) \qquad (I.I9)$$

и учитывая (I.7), (I.I7) и (I.I8), получаем граничные условия для определения (κ,j)-й функции $F^{(\kappa,j)}(r,\varphi)$ в виде

$$\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big) F^{(\kappa,j)}(\rho,\theta)\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{H_0}\psi_1^{(\kappa,j)}(\theta)\Big|_{\rho=1} - \Big\{ \sum_{m=0}^{j-1} \Big[h_1^{(j-m)} \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \Big) + L_2^{(j-m)} \Big(2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \Delta \Big) - L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} \Big] F^{(\kappa,m)}(\rho,\theta) \Big\}\Big|_{\rho=1}, \qquad (I.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} F^{(\kappa,j)}(\rho,\theta)\Big|_{\rho=1} = -\frac{1}{M_0}\psi_2^{(\kappa,j)}(\theta)\Big|_{\rho=1} - \Big\{ \sum_{m=0}^{j-1} \Big[\Big(L_1^{(j-m)} -$$

$$-2L_2^{(j-m)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2}L_3^{(j-m)}\left(\Delta-2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\Big]F^{(k,m)}(\rho,\theta)\Big\}\Big|_{\rho=1}.$$

Из (I.II), (I.I6)-(I.20) видим, что для каждой функции $F^{(k,j)}$ получаем краевую задачу для кругового отверстия. Этим и объясняется то, что все основные уравнения и соотношения были записаны в полярной системе координат.

В (I.I8) и (I.20) $L_i^{(j-m)}$ - дифференциальные операторы, вид которых зависит от функций $f(\xi)$ (I.6). Развернутые выражения этих операторов для нулевого, первого и второго приближений приведены в работе [7].

В [I2] решена задача о напряженном состоянии всесторонне растянутой физически нелинейной тонкой пластинки с эллиптическим отверстием. Функция напряжений (I.7) для этой задачи находилась с точностью

$$F(r,\varphi,\mu,\varepsilon)=H_0\left[F^{(0,0)}+\mu F^{(1,0)}+\mu^2F^{(2,0)}+\varepsilon F^{(0,1)}+\right. \qquad (I.2I)$$
$$\left.+\varepsilon^2F^{(0,2)}+\mu\varepsilon F^{(1,1)}\right].$$

Функции напряжений нулевого $F^{(0,0)}$, первого $F^{(1,0)}$ и второго $F^{(2,0)}$ приближений для физически нелинейной упругой пластинки с круговым отверстием из (I.I3), (I.I4) приведены в [I3].

Функция напряжений $F^{(0,1)}$ и $F^{(0,2)}$ для линейно упругой пластинки с эллиптическим отверстием найдена в [9].

Функция $F^{(1,1)}$ для нелинейно упругой пластинки с эллиптическим отверстием находится из уравнений (I.II), (I.I5) путем подстановки в них функций $F^{(0,0)}$, $F^{(0,1)}$ и их произ-

водных. Получим уравнение

$$\Delta\Delta F^{(1,1)} + 64\frac{P^3}{H_0^3}\left(\frac{1}{r^8} + 36\frac{1}{r^{10}}\right)\cos\varphi = 0. \qquad (I.22)$$

Проинтегрируем это уравнение путем наложения частного интеграла этого уравнения

$$F^{(1,1)}_{част} = -\frac{P^3}{H_0^3}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{r^4} + \frac{6}{5}\frac{1}{r^6}\right)\cos 2\varphi \qquad (I.23)$$

и интеграла однородного уравнения

$$F^{(1,1)}_{одн} = \sum_{m=2}^{\infty}\left(C_{m3}r^{-m+2} + C_{m4}r^{-m}\right)\cos m\varphi. \qquad (I.24)$$

Постоянные интегрирования C_{m3}, C_{m4} определятся из граничных условий (I.20).

Отображающая функция для рассматриваемого случая имеет вид (I.6), (I.8).

Приведем окончательный вид $F^{(1,1)}$:

$$F^{(1,1)} = -\frac{P^3}{30H_0^3}\left(32 - 73\frac{1}{r^2} + 5\frac{1}{r^4} + 36\frac{1}{r^6}\right)\cos 2\varphi. \qquad (I.24'')$$

Учитывая значения найденных функций (I.21), по формулам (I,I7), (I.I8) найдем компоненты тензора напряжений. Коэффициент концентрации $K = \frac{\sigma_\theta}{P}$ напряжения σ_θ по контуру эллиптического отверстия (I.8) с точностью (I.20) имеет вид:

$$K|_{\rho=1} = 2\left(1 - 1{,}500\lambda p^2 + 10{,}605\lambda^2 p^2 + 2\varepsilon\cos 2\theta + \right. \qquad (I.25)$$

$$\left. + 2\varepsilon^2\cos 4\theta - 10{,}660\lambda\varepsilon p^2\cos 2\theta\right).$$

В табл. I приведены значения коэффициента концентрации (I.25) для различных значений p, $a:b$ для линейной и нелинейной теорий. Пластинка изготовлена из чистой меди с ха-

рактеристиками: $K = 1{,}37 \cdot 10^6$ кг/см^2, $G = 0{,}46 \cdot 10^6$ кг/см^2, $q_2 = 0{,}18 \cdot 10^6$, $\lambda = 0{,}255 \cdot 10^{-6}$ см^4/кг^2 (I.26)

Таблица I

a:b \ P	Линейная теория	Нелинейная теория				
		I00	200	300	500	600
I,00	2,000 2,00	I,992 I,992	I,970 I,970	I,9I0 I,9I0	I,894 I,894	I,809 I,809
I,20	2,435 I,669	2,384 I,667	2,348 I,66I	2,230 I,66I	2,I58 I,668	2,I22 I,75I
I,50	2,960 I,360	2,942 I,363	2,888 I,375	2,699 I,447	2,583 I,526	2,472 I,655

Положив в (I.25) $\varepsilon = 0$, получим значение K для кругового отверстия с учетом физической нелинейности материала, а при $\lambda = 0$ - значение K для эллиптического отверстия, если материал пластинки следует закону Гука. Но для последнего случая существует точное решение [23] этой задачи. Сопоставление соответствующих значений K из точного решения и приближенного (I.25) приведено в [I3]. Сопоставление коэффициентов концентрации ($\varepsilon = 0$) с учетом нулевого, первого и второго приближений и нелинейных эффектов приведено в работе [I3]. На основе этих сопоставлений и можно судить о быстроте сходимости развиваемого здесь метода.

В [I6] в такой же постановке дано решение задачи о напряженном состоянии пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием (I.8) при одноосном напряженном состоянии на бесконечности. Искомую функцию напряжений (I.7) будем определять

с точностью

$$F(r,\varphi,\mu,\varepsilon)=H_0[F^{(0,0)}(r,\varphi)+\mu F^{(1,0)}(r,\varphi)+\varepsilon F^{(0,1)}(r,\varphi)+ \quad (I.27)$$

$$+\varepsilon^2 F^{(0,2)}(r,\varphi)+\mu\varepsilon F^{(1,1)}(r,\varphi).$$

Положив в (I.27) $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, получим решение задачи Кирша $F^{(0,0)}(r,\varphi)$.

При $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ получим решение рассматриваемой задачи для линейно упругой пластины. Функции $F^{(0,1)}$ и $F^{(0,2)}$ найдены [10] методом возмущения формы границы.

При $\varepsilon = 0$, $\mu \neq 0$ получим решение рассматриваемой задачи для физически нелинейной упругой пластинки с круговым отверстием с учетом приближений [18,21].

При $\mu \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ получим решение рассматриваемой задачи. Функция $F^{(1,1)}$ и компоненты тензора напряжений определяются так же, как и в предыдущей задаче.

Приведем значение [16] коэффициента концентрации напряжений по контуру эллиптического отверстия для установленного приближения (I.27):

$$K|_{\rho=1}=1-2\cos 2\theta+2\varepsilon(\cos 2\theta-\cos 4\theta+\varepsilon^2(2\cos 4\theta- \quad (I.28)$$

$$-\cos 2\theta-\cos 6\theta)+\lambda\rho^2(-3{,}068+4{,}2922\cos 2\theta-$$

$$-2{,}1076\cos 4\theta+0{,}7738\cos 6\theta)+\lambda\varepsilon\rho^2(1{,}2977-11{,}5517\cdot$$

$$\cdot\cos 2\theta+8{,}9039\cos 4\theta-5{,}3963\cos 6\theta+2{,}2834\cos 8\theta).$$

В табл. 2 для пластинки из алюминиевой бронзы с характеристиками $K = 1{,}35\cdot10^6$ кг/см^2, $G = 0{,}477\cdot10^6$ кг/см^2, $g_2 = 0{,}040\cdot10^6$, $\lambda = 0{,}053\cdot10^{-6}$ см^4/кг^2 (I.29)

приведены значения коэффициента концентрации (I.28) для различных значений параметра ε (I.8) и величины внешней нагрузки для линейной и нелинейной теорий.

Таблица 2

	P \ a/b	I,20	I,20	I,5	$\frac{I}{I,20}$	$\frac{I}{I,5}$
Линейная теория		3,00	2,6692	2,3600	3,3972	3,9600
Нелинейная теория	400	2,9I29	2,6049	2,3229	3,2873	3,8229
	600	2,8044	2,5248	2,2768	3,I504	3,6520
	800	2,6528	2,4I28	2,2I23	2,9592	3,4I33
	I000	2,4572	2,2683	2,I292	2,7I25	3,I052

Задача о распределении напряжений около квадратного отверстия (I.9) при всестороннем равномерном напряженном состоянии на бесконечности для нелинейного закона упругости (I.I), (I.3) рассматривалась в [I5]. Задача решалась с точностью до μ^2 и ε^2 (I.2I). Функции напряжений для линейно упругой пластинки с квадратным отверстием с учетом ε и ε^2 найдены в [7]. Используя эти функции и функции напряжений нелинейной задачи для кругового отверстия, получим уравнения (I.II), (I.I5) для определения функции $F^{(1,1)}(r,\varphi)$:

$$\Delta\Delta F^{(1,1)} = 96\frac{p^3}{H_0^3}\left(28r^{-10} - 135r^{-12}\right)\cos 4\varphi. \qquad (I.30)$$

Решение этого уравнения находим аналогичным путем (I.23), (I.24). Функция $F^{(1,1)}(r,\varphi)$ имеет вид:

$$F^{(1,1)}_{(r,\varphi)} = \frac{P^3}{H_0^3}\left(-\frac{149}{70}r^{-2} + \frac{89}{35}r^{-4} + \frac{14}{5}r^{-6} - \frac{45}{14}r^{-8}\right)\cos 4\varphi \quad (I.31)$$

Приведем значение коэффициента концентрации по контуру рассматриваемого отверстия [I7]:

$$K|_{\rho=1} = 2\left(1 + 0{,}666\cos 4\theta + 0{,}197\cos 8\theta - 1{,}500\lambda\rho^2 - \right. \quad (I.32)$$
$$\left. - 3{,}152\lambda\rho^2\cos 4\theta + 10{,}608\lambda^2\rho^2\right).$$

В табл.3 приведены значения коэффициента концентрации (I.32) для линейной и нелинейной теорий, для материала (I.29) и для различной величины внешней нагрузки ρ в точках $\theta = 0^0$, $\theta = 45^0$.

Таблица 3

θ \ P	Линейная теория	Нелинейная теория					
		200	400	600	800	I000	II00
0	3,726	3,705	3,645	3,550	3,424	3,278	3,200
45	I,062	I,069	I,092	I,I35	I,204	I,307	I,375

Исследование напряженного состояния неограниченной физически нелинейной (I.I), (I.3) изотропной пластинки с квадратным отверстием при чистом сдвиге на бесконечности проведено в [25]. Отображающая функция (I.6) внешности квадратного отверстия на внешность круга единичного радиуса имеет вид:

$$z = R\left(\xi \pm \frac{1}{9}\frac{1}{\xi^3}\right). \quad (I.33)$$

Задача решается с точностью (I.27). Используя известные решения линейной задачи для кругового [I] и квадратного [27] отверстий и нелинейной задачи для кругового отверстия [I4],

найдем уравнение (I.II), (I.I5) для определения неизвестной функции $F^{(1,1)}(r,\varphi)$. Интегрирование его проведем аналогичным образом и найдем функцию напряжений.

$$F^{(1,1)}(r,\varphi)=\frac{\tau^3}{H_0^3}\Big[\big(188{,}72-249{,}24r^{-2}+24r^{-2}\ln z+25{,}5r^{-4}-$$
$$-17{,}033r^{-6}+17{,}311r^{-8}+16{,}431r^{-10}+25{,}2r^{-12}-6{,}75r^{-14}\big)\sin 2\varphi+$$
$$+\big(-0{,}25+4{,}4r^{-2}-307{,}608r^{-4}+20{,}825r^{-4}\ln z- \qquad (I.34)$$
$$-316{,}974r^{-6}-190{,}015r^{-6}\ln z-80{,}143r^{-8}+37{,}771r^{-10}+$$
$$+7{,}483r^{-12}+54{,}39r^{-14}\big)\sin 6\varphi+\big(4{,}094r^{-4}-19{,}465r^{-6}-$$
$$-26{,}643r^{-8}-41{,}035r^{-10}\big)\sin 10\varphi\Big].$$

Приведем только значение коэффициента концентрации напряжений σ_θ по контуру квадратного отверстия при чистом сдвиге:

$$K=\left(\frac{\sigma_\theta}{\tau}\right)_{\rho=1}=-4\sin 2\theta+\varepsilon\big(4\sin 2\theta-12\sin 6\theta\big)-\varepsilon^2\big(4\sin 2\theta-$$
$$-12\sin 6\theta+36\sin 10\theta\big)+\lambda\tau^2\big(17{,}38\sin 2\theta-6{,}2\sin 6\theta\big)+ \qquad (I.35)$$
$$+\lambda\tau^2\varepsilon\big(3905{,}48\sin 2\theta+5952{,}518\sin 6\theta+2105{,}568\sin 10\theta\big).$$

В работе [42] дано решение задачи о концентрации напряжений ромбического отверстия с учетом физической нелинейности материала.

Из приведенных результатов видно, что учет малой физической нелинейности приводит к более равномерному распределению напряжений в зоне концентрации, а коэффициент концентрации нелинейно зависит от величины внешней нагрузки и параметров λ и ε, характеризующих соответственно физичес-

кую нелинейность материала и криволинейность отверстия.

Представление о быстроте сходимости применяемого метода в случае линейной [I2] и нелинейной теорий [I3] можно получить, сопоставив коэффициенты концентрации для различных приближений.

§ 2. Подкрепленные отверстия. Основной целью проектирования конструкций с отверстиями является устранение концентрации напряжений около отверстий. В борьбе с концентрацией напряжений применяются различные методы. Главной задачей как с научной, так и с инженерной точки зрения в борьбе с концентрацией является подбор параметров подкрепляющих элементов таким образом, чтобы концентрация напряжений около отверстий или вовсе отсутствовала, или была бы минимальной.

Остановимся на некоторых вариантах постановки контактных задач о подкреплении отверстий при исследовании концентрации напряжений в пластинах с учетом физической нелинейности. Во всех этих вариантах упругое равновесие пластинки описывается уравнениями плоской физически нелинейной теории упругости (I.4), (I.II).

I. Упругое кольцо принимается достаточно широким. Напряженное состояние такого кольца-пластинки описывается уравнениями плоской теории упругости или теорией изгиба тонких плит. Легко решаются задачи для простого или составного кругового кольца.

2. Задача пункта I о подкреплении криволинейного отверстия упругим широким кольцом из другого материала значительно сложнее задачи для круговых областей и может быть ре-

шена путем существенных ограничений формы кольца. При этом рассматривались такие подкрепляющие кольца, область которых вместе с областью пластинки отображается на внешность круга с помощью функции вида (I.6).

Отображение с помощью этой функции велось так, чтобы контур спая между пластинкой и кольцом перешел в единичную окружность, а внутренний контур кольца, свободный от внешних усилий, перешел в одну из координатных линий $\xi = \rho_0 e^{i\theta}$, где $\rho_0 < 1$.

3. Подкрепляющим кольцом служит криволинейный тонкий упругий стержень постоянного или переменного сечения. Напряженное состояние такого кольца-линии, работающего на изгиб и растяжение, описывается уравнениями теории малых деформаций тонких криволинейных стержней.

4. В дальнейшем постановка контактной задачи пункта 3 для некруговых отверстий была упрощена [2] путем смягчения граничных условий. Предполагается, что подкрепляющий стержень работает лишь на растяжение или сжатие в случае плоской задачи, или на изгиб из своей плоскости при изгибе тонкой плиты.

Для случая подкрепления кругового отверстия широкими кольцами рассматривались некоторые примеры. Для всех вариантов подкрепления предполагается, что неограниченная изотропная плоскость (пластинка, полоса) с отверстием находится под действием заданной системы внешних усилий, а внутренний контур подкрепляющего элемента свободен от внешних усилий. Подкрепляющий элемент припаян к краю рассматриваемого отверстия

пластинки. При этих предположениях для любого приближения с учетом физической нелинейности получены однородные граничные условия. В [20] дана постановка контактных физически нелинейных задач о подкреплении кругового отверстия упругими концентрическими кольцами из разных физически нелинейных материалов при любом поле напряжений на бесконечности. Сформулированы граничные условия и условия сопряжения. На контуре спая составного кольца с пластинкой должны выполняться следующие условия сопряжения:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{K_s}^{i}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_{K_s}^{(i,0)}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_{K_s}^{(i,0)}}{\partial r}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n\Lambda}^{i}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_{n\Lambda}^{(i,0)}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_{n\Lambda}^{(i,0)}}{\partial r}\right), \qquad (2.1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{K_s}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_{K_s}^{(i,0)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_{K_s}^{(i,0)}}{\partial r\partial\varphi}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n\Lambda}^{i}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_{n\Lambda}^{(i,0)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_{n\Lambda}^{(i,0)}}{\partial r\partial\varphi}\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{K_s}^{i}U_{K_s}^{(i,0)}=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n\Lambda}^{i}U_{n\Lambda}^{(i,0)};\ \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{K_s}^{i}V_{K_s}^{(i,0)}=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n\Lambda}^{i}V_{n\Lambda}^{(i,0)}. \qquad (2.2)$$

Задача о напряженном состоянии пластинки возле подкрепленного некругового отверстия с учетом физической нелинейности материала пластинки и кольца очень сложная. Слишком громоздкие выражения получаются для компонентов тензора напряжений и деформаций. Поэтому в работе [25] постановка задачи упрощена следующим образом.

А. Так как материал подкрепляющего кольца берется обычно более жестким, чем материал пластинки, то предполагается, что материал кольца следует закону Гука, а материал пластинки следует нелинейному закону упругости (I.I), (I.3).

Б. Поскольку задача для случая подкрепления упругим кольцом сложна, то рассматриваются, как и в линейной теории [I], два предельных случая:

абсолютно гибкое кольцо, т.е. когда отверстие не подкреплено кольцом. Упругое состояние такой пластинки характеризуется коэффициентом концентрации K_{max};

абсолютно жесткое кольцо. Упругое равновесие такой пластинки характеризуется коэффициентом концентрации K'_{min}. Для всякого упругого кольца упругое равновесие характеризуется некоторым "средним значением" K'_{cp}, $K'_{min} < K'_{cp} < K_{max}$.

В работе [I9] дано решение задачи о напряженном состоянии неограниченной упругой изотропной пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Предполагается, что пластинка и кольцо изготовлены из физически нелинейного упругого материала. Методом малого параметра получены в первом приближении расчетные формулы для напряжений в пластинке и кольце при всестороннем растяжении. В [2I,22] исследуется влияние физической нелинейности на напряженное состояние в пластинке, когда отверстие в ней подкрепляется упругим, из другого материала, или абсолютно жестким кольцом, или, наконец, когда в отверстие впаяна упругая шайба. Все эти задачи рассматриваются при всестороннем, одноосном напряженном состоянии и при чистом изгибе пластинки на бесконечности.

Предполагая, что соприкосновение пластинки с тонким кольцом происходит по контуру оси кольца, в работах [28] и [29] решения нелинейной контактной задачи о концентрации на-

пряжений представляются через комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили и ищутся методом [8] последовательных приближений. Приводятся условия сопряжения для любого приближения. Получены решения задачи о напряженном состоянии нелинейной пластинки с подкрепленным круговым отверстием при чистом изгибе и двухосном однородном напряженном состоянии на бесконечности.

В [26] для различных вариантов подкрепления отверстий получены основные уравнения, граничные условия и условия сопряжения, и рассматривается влияние физической нелинейности материала и жесткости подкрепляющего элемента на концентрацию напряжений около отверстий в пластинах. Исследуется напряженное состояние физически нелинейной пластинки с круговым отверстием, подвергающейся чистому сдвигу, когда край отверстия подкреплен широким кольцом и тонким стержнем. В обоих случаях предполагается, что материал кольца подчиняется закону Гука.

Выражение для коэффициента концентрации на контуре спая для напряжений σ_θ при широком кольце имеет вид:

$$\frac{\sigma_\theta}{\tau}\Big|_{r=R}=\left(-1+3\beta_{-3}\right)\sin 2\theta+\lambda\tau^{3}\left[\left(\frac{6A_{22}}{\tau^{3}R^{4}}+60\alpha_{-1}^{2}+170\alpha_{-1}\beta_{-3}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{168}{5}\alpha_{-1}^{2}\beta_{-3}-\frac{378}{5}\alpha_{-1}\beta_{-3}^{2}+\frac{1161}{28}\beta_{-3}^{3}\right)\sin 2\theta+ \qquad (2.3)$$

$$\left.+\left(\frac{20A_{61}}{\tau^{3}R^{6}}+\frac{42A_{62}}{\tau^{3}R^{8}}-\frac{12}{5}\alpha_{-1}^{2}+\frac{27}{4}\beta_{-3}\right)\sin 6\theta\right].$$

В случае, когда подкрепляющее кольцо является тонким стержнем, упругое равновесие которого описывается уравнения-

ми теории малых деформаций тонких криволинейных стержней, закон Гука берется в виде:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{g_1^*} + \frac{M}{\rho g_1^*}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{g_2^*} + \frac{M}{\rho^2 g_1^*} + \frac{N}{\rho g_1^*}. \tag{2.4}$$

Здесь g_1^*, g_2^* - жесткости на растяжение и изгиб, ρ - радиус кривизны оси стержня. M, N - изгибающий момент и нормальная сила, ε_0 и θ - соответственно относительное удлинение и угол поворота элемента оси стержня. Коэффициент концентрации напряжений σ_θ по контуру спая имеет в этом случае вид:

$$\frac{\sigma_\theta}{\tau}\Big|_{\rho=1} = (1-b_0)\cos 2\theta + \frac{\tau^2}{1+\varkappa}\frac{4g_2}{gG^2}\left\{(b_4+2c_2+D_2)\cos 2\theta + \right. \tag{2.5}$$

$$\left. + (b_8 - 4a_6 + 2c_6 + D_6)\cos 6\theta\right\}.$$

Здесь b_0, b_4, c_2, D_2, b_8, a_6, c_6, D_6 - некоторые коэффициенты, зависящие от жесткости кольца g_1^*, g_2^* и от характеристик материала пластинки $\varkappa$, G.

В таблице 4 приведены значения коэффициента концентрации напряжений (2.5) в зависимости от жесткости кольца g_1^*, g_2^*, когда материалом пластинки является мартеновская сталь ($G = 0{,}87 \cdot 10^6$ кг/см^2, $g_2 = 0{,}035 \cdot 10^6$, $\varkappa = 2{,}0913$) при $\tau = 800$ кг/см^2.

В числителе даны значения коэффициента концентрации, соответствующие линейной теории, а в знаменателе - нелинейной теории.

Таблица 4

$q_2^* \cdot 10^{-6}$ \ $q_1^* \cdot 10^{-6}$	0,00	0,50	0,70	I,0
0,00	4,0000 3,5070	2,4609 2,I578	2,I568 I,9527	I,8360 I,7853
0,05	3,39I4 3,I305	2,0538 I,9328	I,7864 I,6275	I,5032 I,4446
0,07	3,2222 3,0725	I,9392 I,7553	I,68I8 I,5453	I,409I I,3550
0,I0	3,0I73 2,9873	I,7996 I,6578	I,5544 I,4448	I,2940 I,2459

§ 3. Концентрация напряжений около отверстий в плитах и оболочках. В последние годы начаты исследования по концентрации напряжений около круговых и криволинейных (свободных и подкрепленных) отверстий при изгибе тонких плит, материал которых подчиняется нелинейному закону упругости (I.I),(I.3).

При тех же гипотезах, что в линейной теории, в работе [30] выведено уравнение изгиба тонкой плиты (при малых прогибах) в полярной системе координат с учетом физической нелинейности материала

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p(r,\varphi) - 3\frac{D_1}{\gamma_2}\left\{\frac{2}{3}\nu_1\nabla^2\left(\psi\nabla^2 w\right) + \left[\varkappa_\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varkappa_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right) - 2\varkappa_{r\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]\right\} \qquad (3.I)$$

и получены зависимости между изгибающими и крутящимися моментами, перерезывающими усилиями и прогибом плиты. Аналогичные зависимости и уравнение изгиба в криволинейной орто-

гональной системе координат приведены в статье [31].

Решение нелинейного уравнения (3.I) при соответствующих граничных условиях для областей в круговой границей (круглая плита, кругло-кольцевая плита, бесконечная плита с круговым отверстием) определяется методом малого параметра. Прогиб плиты представляется в виде ряда по безразмерному параметру λ, зависящему от нагрузки, толщины плиты и механических свойств материала:

$$W(r,\varphi,\lambda)=W^{(0)}(r,\varphi)+\lambda W^{(1)}(r,\varphi)+\lambda^2 W^{(2)}(r,\varphi)+\dots . \quad (3.2)$$

Для небольших значений параметра нагрузки $\lambda<<1$ можно ограничиться в (3.2) двумя членами. После известных процедур метода малого параметра приходим к последовательности краевых вых задач для неоднородных бигармонических уравнений (I.II).

Решение ряда физически нелинейных осесимметричных задач для кругло-кольцевых плит получено в работах [32-34]. Дается решение задачи об изгибе кольцевой плиты, внутренний край которой свободен, а внешний шарнирно оперт, под действием равномерно распределенного по внешнему краю момента $M_r = \mathrm{const}$. Рассмотрен равномерно распределенный нормальной нагрузкой изгиб $q=\mathrm{const}$ такой же плиты, но с жестко защемленным внешним краем. Аналогично монографии [I] дано решение контактной задачи об изгибе равномерно распределенным по внешнему краю моментом $M_r=\mathrm{const}$ кольцевой плиты, внешний край которой свободно оперт, а внутренний подкреплен тонким линейно-упругим ребром жесткости [3-4]. Во всех случаях определены "нулевое" и первое приближения.

Особенности физически нелинейной задачи о концентрации напряжений около отверстий в плитах и оболочках отмечены в работе [36]. Нелинейность основных соотношений и разрешающего уравнения не позволяет воспользоваться принципом суперпозиции напряжений, применяемым при постановке линейной задачи о концентрации напряжений [1]. Однако возмущение напряженного состояния, вносимое отверстием, носит локальный характер и при определенных соотношениях размеров отверстия и плиты последнюю можно считать бесконечной и требовать, чтобы напряженное состояние в плите с отверстием на бесконечности совпадало с невозмущенным напряженным состоянием (плита без отверстия).

Концентрация напряжений около кругового отверстия при различных нагрузках на бесконечности изучалась в работах [32, 37]. В статье [37] получено решение осесимметричной задачи о чистом изгибе плиты с отверстием в "нулевом", первом и втором приближениях. Согласно этим результатам коэффициент концентрации изгибающего момента M_r на контуре отверстия равен

$$k=\frac{M_r}{M}=2+14{,}4(1+\nu)\lambda-\frac{192}{500}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(1203-2036\nu+1273\nu^2\right)\lambda^2, \qquad (3.3)$$

где $\lambda=\frac{\gamma^2 M^2}{G^2 h^4}$, ν - коэффициент Пуассона, G - модуль сдвига материала, h - толщина плиты, M - внешний изгибающий момент.

Из формулы (3.3) видно, что коэффициент концентрации уже не остается, как в линейной теории, а зависит от нагрузки, толщины плиты и механических свойств материала; причем

для материалов с жесткой характеристикой ($\gamma_2 > 0$) он увеличивается, а с мягкой ($\gamma_2 < 0$) - уменьшается. В табл. 5 приведены значения K в нулевом, первом и втором приближениях, подсчитанные по формуле (3.3).

Таблица 5

$\frac{M}{h^2}$ $\frac{кг}{см^2}$	Чистая медь $\gamma_2 = -0{,}18 \cdot 10^{-6}$		Алюминиевая бронза $\gamma_2 = -0{,}040 \cdot 10^{-6}$	
	I-е прибл.	2-е прибл.	I-е прибл.	2-е прибл.
20	I,993	I,933	2,000	2,000
60	I,94I	I,936	I,988	I,988
I00	I,835	I,797	I,966	I,964
I40	-	-	I,933	I,927
I80	-	-	I,890	I,873
220	-	-	I,836	I,798

В случае кручения плиты с круговым отверстием [37] и цилиндрического изгиба [32] коэффициент концентрации определен в "нулевом" и первом приближениях.

Анализ этих результатов (чистый изгиб, цилиндрический изгиб и кручение плиты) позволяет сделать вывод: в случае свободного кругового отверстия наибольшие значения коэффициента концентрации с приемлемой точностью могут быть определены по формуле:

$$K_{max} = \hat{K}_{max} + \frac{20\gamma_2 M^2}{G^2 h^4}, \qquad (3.4)$$

где $\hat{K}_{max}$ - максимальное значение K по линейной теории.

В работе [35] рассматривается чистый изгиб бесконечной

физически нелинейной плиты с круговым отверстием, в которое впаяна широкая круговая шайба также из нелинейного материала.

Чистый изгиб физически нелинейной плиты с круговым отверстием, край которого подкреплен тонким линейно-упругим ребром жесткости, исследуется в статье [38]. Деформация кольца описывается теорией малых деформаций криволинейных стержней (2.4). Проведенные расчеты как в случае плоской задачи, так и в случае изгиба плит показывают, что при оптимальном подкреплении отверстия тонким упругим кольцом эффект нелинейности тем меньше, чем лучше достигается равномерное распределение напряжений. Это позволяет для материалов со слабой нелинейностью в случае оптимального подкрепления пользоваться результатами линейной теории.

Для решения нелинейной краевой задачи концентрации напряжений около криволинейных отверстий при изгибе плит используется либо метод возмущения формы границы (I.6)-(I.20), либо применяется метод Колосова-Мусхелишвили. В первом случае рассматриваются отверстия, близкие в определенном смысле к круговому. Решение ищется в виде ряда по двум параметрам (I.7). Этим методом изучается концентрация тангенциального изгибающего момента в плите с эллиптическим [31], треугольным [38] и квадратным [40] (с закругленными углами) отверстиями при чистом изгибе на бесконечности. Приведем значение коэффициента для эллиптического отверстия:

$$K=2+\frac{4(1+\nu)}{3+\nu}\left(\varepsilon\cos 2\theta+\varepsilon^2\cos 4\theta\right)+14{,}4(1+\nu)\lambda-\frac{192}{500}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(1203-\right.$$

$$-2036\nu+1273\nu^2)\lambda^2+\frac{16}{25}\frac{1+\nu}{(3+\nu)^2}\left(421+692\nu+151\nu^2\right)\varepsilon\lambda. \quad (3.5)$$

В работе 39 приводится решение нелинейной задачи изгиба тонких плит методом последовательных приближений. В каждом приближении задача сводится к определению комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Дана постановка задачи о концентрации моментов в плите с отверстием и приводится решение для кругового и эллиптического отверстий при чистом изгибе на бесконечности.

В связи с быстрым ростом производства синтетических материалов и проектированием оболочечных конструкций из них, большой теоретический и инженерный интерес представляет исследование напряженных состояний около отверстий в оболочках с учетом физической нелинейности материала. Однако таких работ очень мало. Здесь можно указать на работы [36, 41]. В первой из них выводятся разрешающие уравнения изгиба пологих оболочек при нелинейно упругом законе (I.II), а во второй дана постановка задачи о концентрации напряжений около отверстий произвольной формы. Решение предлагается находить методом последовательных приближений. Для удовлетворения граничных условий в каждом приближении используется метод возмущения формы границы.

В заключение отметим, что результаты, полученные как в плоской задаче теории упругости, так и в задачах изгиба плит, могут быть использованы не только при нелинейном законе упругости в форме (I.3), но и для упругих более общих видов функций (I.2),характеризующих физическую нелинейность материала.

Литература

I. Г.Н.Савин, Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

2. Г.Н.Савин, Н.П.Флейтман, Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Изд. "Наукова думка", Киев, 1964.

3. Г.Н.Савин, Нелинейные задачи концентрации напряжений около отверстий в пластинах. Теория оболочек и пластин, Тр. IУ Всесоюзной конференции, Ереван, 1964.

4. Г.Н.Савин, Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках. Сб. Концентрация напряжений, в. I, изд. "Наукова думка", Киев, 1965.

5. Г.Н.Савин, Распределение напряжений в тонкой оболочке, ослабленной каким-либо отверстием. Проблемы механики сплошной среды. К 70-летию акад. Н.И.Мусхелишвили, изд. АН СССР, 1961.

6. G.N. Savin, Concentration of stresses arcund curvilinear holes in plates and shells. Proc. of the Eleventh International congress of App. Mech., Munich, 1964.

7. Г.Н.Савин, А.Н.Гузь, О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр, 1964, № 4.

8. Г.Н.Савин, Л.П.Хорошун, Плоская задача физически нелинейных упругих тел. Прикл.механика, т. I, в. 4, 1965.

9. А.Н.Гузь, О приближенном методе определения концентрации напряжений около криволинейных отверстий в оболочках. Прикл.механика, т.8, в. 6, 1962.

IO. А.Н.Гузь, Концентрация напряжений около эллиптического отверстия с малым эксцентрицитетом в цилиндрической оболочке. ДАН УРСР, 1963, № IO.

II. А.Н.Гузь, Тонкие упругие оболочки, ослабленные отверстиями. Автореф. докт.дисс.К. Ин-т механики АН УССР, 1965.

I2. А.Н.Гузь, Г.Н.Савин, И.А.Цурпал, Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Warszawa, V.XVI, 1964, No. 4.

I3. И.А.Цурпал, Приближенное решение физически нелинейных задач концентрации напряжений около отверстий. Прикл.механика, т.IX, в.6, I963.

I4. И.А.Цурпал, Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в физически нелинейной пластинке. Сб.Прочность корпуса судна, в. 67, I965.

I5. И.А.Цурпал, Концентрация напряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке. Изв. АН СССР, Механика, I965, № 6.

I6. И.А.Цурпал, Концентрация напряжений возле эллиптического отверстия в тонкой пластинке с учетом физической нелинейности. Тр. У Всес.конф. по теории пластин и оболочек, изд. АН СССР, I966.

I7. И.А.Цурпал, Физически нелинейные упругие пластины,ослабленные произвольным отверстием. Сб. Концентрация напряжений, в. I, изд. "Наукова думка", Киев, I965.

I8. Г.Каудерер, Нелинейная механика. ИЛ, I96I.

I9. И.А.Цурпал, Приближенное решение задачи об упругом равновесии физически нелинейной упругой пластинки с подкрепленным круговым отверстием. ДАН УРСР, I963, № I.

20. И.А.Цурпал, Физически нелинейная упругая пластинка с подкрепленным круговым отверстием. ДАН УРСР, I964, № 3.

2I. И.А.Цурпал, Исследование напряженного и деформированного состояния физически нелинейной упругой пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Теория оболочек и пластин. Тр. IУ Всесоюзной конференции, изд. АН Арм. ССР, Ереван, I964.

22. И.А.Цурпал, Чистый изгиб физически нелинейной полосы (балки) с подкрепленным круговым отверстием.ДАН УРСР, I965, № 7.

23. Н.И.Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

24. М.А.Бабаев, И.А.Цурпал, Двухосное однородное напряженное состояние физически нелинейной пластинки с круговым отверстием. Инженерный журнал, т. У, в. 5, 1965.

25. М.А.Бабаев, И.А.Цурпал, Решение плоской задачи нелинейной теории упругости о концентрации напряжений в бесконечной пластинке с подкрепленным криволинейным отверстием. Тезисы докладов 2-ой конференции по строительной механике, Л., июнь, 1965.

26. М.А.Бабаев, И.А.Цурпал, Физически нелинейные пластинки с отверстием, подкрепленным упругим элементом. Материалы УI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Изд. "Наука", 1966.

27. А.Н.Гузь, Кручение цилиндрической оболочки, ослабленной квадратным отверстием с закругленными углами. ДАН УРСР, 1964, № 4.

28. М.А.Бабаев, Физически нелинейная пластинка с отверстием, подкрепленным тонким упругим стержнем. Прикл. механика, т.П, в. 7, 1966.

29. М.А.Бабаев, Растянутая физически нелинейная пластинка с отверстием, подкрепленным тонким стержнем. Прикл.механика, т.П, в.9, 1966.

30. K. Özden, Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz, Ing.-Archiv, Bd. 24, H. 3, 1956.

31. Н.А.Шульга, Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия при изгибе тонкой физически нелинейной плиты. Инж. журнал, Мех. твердого тела (в печати).

32. А.В.Степанов, Концентрация моментов около отверстий при изгибе тонких плит с учетом физической нелинейности. Сб. Концентрация напряжений, в. I, Киев, 1965.

33. А.В.Степанов, О концентрации моментов при изгибе круглокольцевых тонких пластин с учетом физической нелинейности. Тези доповідей на науковій конференції аспірантів та молодих вчених по підсумках науково-дослідної роботи за 1964р. КІНГ, Київ, 1965.

34. А.В.Степанов, Приближенное решение контактных задач изгиба тонких пластин с осевой симметрией, материал которых подчиняется нелинейному закону упругости. Тези доповідей ХУП наукової конференції професорсько-викладацького складу Київського Института народного господарства по підсумках науково-дослідної роботи за 1964р., Київ, 1965.

35. А.В.Степанов, Влияние подкрепленного кольца на концентрацию моментов возле отверстий при изгибе тонких пластин с учетом физической нелинейности. Тези доповідей ХУШ наукової конференції професорсько-викладацького складу КІНГА по підсумках науково-дослідної роботи за 1965 р., Київ, 1966.

36. И.А.Цурпал, Н.А.Шульга, Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в пологой оболочке при учете физической нелинейности материала. Прикл. механика, т.П, в. 8. 1966.

37. Н.А.Шульга, Изгиб тонкой пластинки, ослабленной круговым отверстием, при нелинейном законе упругости. Прикл.механика, т. I, в. II, 1965.

38. Н.А.Шульга, Изгиб тонкой пластинки с треугольным отверстием при нелинейном законе упругости. Збірник праць П-ої конференції молодих вчених України, Київ, 1966.

39. Н.А.Шульга, Изгиб тонких физически нелинейных плит. Прикл.механика, т. П, в. 12, 1966.

40. Н.А.Шульга, Изгиб тонкой плиты, ослабленной криволинейным отверстием, при нелинейном законе упругости. Прикл. механика, т. П, в. 4, 1966.

41. И.А.Цурпал, Н.А.Шульга, Основные уравнения теории тонких пологих оболочек с учетом физической нелинейности. Прикл. механика, т. 1, в. 12, 1965.

42. А.С.Аветисян, Концентрация напряжений около ромбического отверстия с учетом физической нелинейности материала. Прикл. механика, т. П, в. 10, 1966.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ПРИ РАСЧЕТЕ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

И.В.Свирский

Казанский физико-технический институт АН СССР

Успехи в практике расчета пластин и оболочек были достигнуты благодаря двум факторам.

Первым фактором явились различные упрощения уравнений теории оболочек (например, замена точных нелинейных уравнений теории пологих оболочек приближенными), применение асимптотических методов расчета краевого эффекта и т.д.

Вторым фактором явилось появление электронных и вычислительных машин и разработка общих, достаточно эффективных математических методов численного решения уравнений.

При поверхностном рассмотрении может создаться впечатление, что с появлением электронных вычислительных машин, производящих десятки тысяч операций в секунду, задача практического численного расчета оболочек решается легко. Однако, как мы увидим ниже из обзора вычислительных методов, даже при наличии вычислительных машин расчет обычными математическими методами наталкивается на трудности ввиду ограниченной емкости внутренних запоминающих устройств машин.

Как мы увидим далее, для численного решения уравнений теории оболочек требуется разработка особых методов; возможно, тут была бы полезна интерпретация различных аналитических методов, например, методов асимптотического интегрирования в

терминах исчисления конечных разностей и дальнейшего их численного решения. К сожалению, в настоящее время идеи различных аналитических методов еще не проникли в область численного решения уравнений способом конечных разностей. Они по-прежнему решаются теми приближенными способами, которые известны в вычислительной математике; мало разработаны специфические численные методы, особенно удобные для расчета оболочек.

Для расчета пластин и оболочек при малых прогибах из физически нелинейных материалов имеются оригинальные методы Качанова Л.М., Ильюшина А.А., Биргера И.А.

В нашем кратком обзоре мы ограничиваемся лишь теми методами, которые могут применяться при расчете больших прогибов пластин и оболочек. При этом мы будем предполагать, что система дифференциальных уравнений каким-либо способом уже приведена к системе алгебраических или трансцендентных уравнений (например, методом Бубнова-Галеркина или методом сеток, путем замены производных конечноразностными отношениями) и сосредоточим наше внимание на различных математических методах численного решения уже полученных больших систем алгебраических или трансцендентных уравнений с большим числом неизвестных.

I. Метод Ньютона. Этот метод позволяет находить уточненное решение систем нелинейных уравнений

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (k = \overline{1, n}), \qquad (I.I)$$

если известно некоторое приближенное её решение $(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)})$

Уточненное решение разыскивается в виде

$$x_k^{(N+1)} = x_k^{(N)} + \Delta_k^{(N)}, \qquad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{I.2}$$

где $\Delta_k^{(N)}$ - малые поправки к решению. Подставляя эти величины в уравнения и пользуясь теоремой о малых приращениях функций, можно записать приближенные уравнения в виде

$$f_k\left(x_1^{(N)},\dots,x_n^{(N)}\right) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k\left(x_1^{(N)},\dots x_n^{(N)}\right)}{\partial x_s^{(N)}} \Delta_s^{(N)} = 0, \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{I.3}$$

Путем решения этих уравнений, линейных относительно $\Delta_s^{(N)}$ определяются поправки, и далее, по формулам (I.2), получаются уточненные значения $x_k^{(N+1)}$ приближенных решений. Далее процесс продолжается снова, причем в качестве исходных приближенных величин принимаются только что полученные приближенные значения для решения $x_k^{(N+1)}$ и т.д.

Процесс обычно достаточно быстро сходится, если начальное приближение достаточно близко к точному решению задачи и поправки малы, в противном случае процесс может сходиться медленно или быть расходящимся. Если процесс Ньютона расходится, то можно попытаться восстановить сходимость (см. Матвеев В.А. [I0]) путем введения в формулу (I.3) множителей релаксации $\theta_N; 0 \le \theta_N \le 1$ и определить величины $\Delta_s^{(N)}$ из системы уравнений:

$$\theta_N f_k\left(x_1^{(N)},\dots,x_n^{(N)}\right) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k\left(x_1^{(N)},\dots,x_n^{(N)}\right)}{\partial x_s^{(N)}} \Delta_s^{(N)} = 0.$$

Числа θ_N следует определять на каждом шаге приближе-

ний путем подбора. Сначала следует произвести вычисления при $\theta_N = 1$; если средняя квадратичная величина невязок (т.е. результатов подстановки приближенных величин в левые части уравнений) вновь полученного приближения увеличивается по сравнению со средней квадратичной величиной невязок для исходного приближения, то величину θ_N следует уменьшить, например, в два раза и повторять вышеописанную процедуру с уменьшением величины θ_N до тех пор, пока среднее квадратичное значение невязки станет меньше, чем подобное значение для исходного приближения.

Кроме метода Ньютона существуют различные варианты методов последовательных приближений. Например, вариант, когда все нелинейные члены уравнений (I.I) переносятся в правую часть

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n); \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (I.4)$$

и последовательные приближения определяются путем решений относительно $x_k^{(N+1)}$ линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{(N+1)} = \varphi_i(x_1^{(N)}, \ldots, x_n^{(N)}); \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (I.5)$$

и т.д.

2. Как уже было указано ранее, метод Ньютона будет сходиться достаточно быстро лишь в том случае, когда исходное приближение к решению достаточно близко к истинному решению. Чтобы это условие выполнялось при решении нелинейных задач об определении зависимости параметров больших прогибов и на-

пряжений x_{is} пластин и оболочек от нагрузки p, Х.М.Муштари и М.С.Корнишин [7] предложили решать нелинейные уравнения

$$f_k(x_1, \ldots, x_n; p) = 0$$

для ряда возрастающих значений нагрузки $p = 0, p_1, \cdots, p_l$.

В качестве исходного приближения для решения задачи при нагрузке p_s выбирается ранее полученное решение $x_k^{(s-1)}$ при нагрузке p_{s-1}. В том случае, когда на каждом шаге изменение нагрузки $|p_s - p_{s-1}|$ невелико, можно надеяться, что метод Ньютона будет сходиться (предполагается, что в рассматриваемом интервале изменения нагрузок прогиб меняется непрерывно и хлопки отсутствуют). Этот способ постепенного изменения нагрузки имеет то принципиальное значение, что позволяет из всего множества вещественных решений нелинейных уравнений выделить то решение, которое соответствует непрерывному увеличению нагрузок на оболочку.

М.С.Корнишин [6] предложил существенное усовершенствование только что описанного метода: исходное приближение $x_{k,s}^{(0)}$ при решении задачи для нагрузки p_s он предложил определять путем применения экстраполяционной формулы: например, если ряд значений нагрузок возрастает равномерно $p_s - p_{s-1} = p_{s-1} - p_{s-2}$ и т.д., то можно воспользоваться формулой линейных экстраполяций

$$x_{k,s}^{(0)} = x_{k,s-1} + (x_{k,s-1} - x_{k,s-2}) = 2x_{k,s-1} - x_{k,s-2}$$

или квадратичной экстраполяцией:

$$x_{k,s}^{(0)} = 3x_{k,s-1} - 3x_{k,s-2} + x_{k,s-3}.$$

Корнишин М.С. [I] также рекомендует формулу

$$x^{(0)}_{k,s} = \left(2x_{k,s-1} - x_{k,s}\right)\frac{x_{k,s-1}}{x^{(0)}_{k,s-1}},$$

дающую значительное усиление сходимости.

3. Кирия В.С. [5] и Давиденко Д.Ф. [3-4] предложили метод параметрического решения системы уравнений

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (k = \overline{1,n}) \qquad (3.1)$$

Метод состоит в том, что подбирается вспомогательная система уравнений, зависящая от параметра t .

$$f_k(x_1, \ldots, x_n ; t) = 0, \quad (k = \overline{1,n}) . \qquad (3.2)$$

При подборе этой системы ставятся два условия:

I) при значении параметра $t = 0$ она должна быть достаточно простой и такой, что для нее решение $(x_{1_0}, \ldots, x_{n_0})$ легко определяется, или заранее известно;

2) при значении $t = t_k$ она должна совпадать с системой (3.I):

$$f_k(x_1, \ldots, x_n ; t_k) = f_k(x_1, \ldots, x_n)$$

В качестве системы (3.2) можно, например, принять систему уравнений

$$f_k(x_1, \ldots, x_n; t) = x_k(1-t) + tf(x_1, \ldots, x_n) = 0; \quad (k = \overline{1,n}), \qquad (3.2)$$

которая при $t = 0$ обладает решением $x_k = 0$, а при $t = I$ совпадает с системой уравнений (3.I).

Продифференцируем уравнения (3.2) по t

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \cdot \frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

и решим эту систему относительно производных

$$\frac{dx_s}{dt} = \varphi_s(x_1, \dots, x_n; t). \qquad (3.3)$$

Для решения системы (3.I) следует выполнить численное решение системы дифференциальных уравнений (3.3), например, методом Рунге-Кутта или каким-нибудь другим при начальных условиях

$$x_s\big|_{t=t_0} = x_{s,0}, \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (3.4)$$

Тогда значения приближенного решения дифференциального уравнения при $t = t_k$ дадут искомое решение системы уравнений (3.I).

Наряду с известными достоинствами (возможностью использования стандартных программ для решения дифференциальных уравнений на машинах), этот метод имеет тот недостаток по сравнению с ранее описанным методом М.С.Корнишина, что ошибки, накопленные при некотором шаге численного интегрирования, при следующих шагах интегрирования не устраняются, и происходит систематическое накопление ошибок. Этого нет при применении метода Корнишина; ошибки, совершенные на предыдущих шагах вычисления, подавляются при последующих шагах.

И.В.Свирский предложил усовершенствование метода Кирия В.С. [5] и Давиденко Д.Ф. [3-4]. Возьмем какую-либо простую систему дифференциальных уравнений, обладающую лишь убывающими по абсолютной величине к нулю решениями, например, систему

$$\frac{dz_k}{dt} = -Rz_k \; ; \; R>0 ; \qquad (k=1,\dots,n), \qquad (3.5)$$

которая обладает лишь стремящимися к нулю решениями

$$z_k = C_k e^{-Rt}$$

и единственным частным решением $z_k(t) = 0$, удовлетворяющим нулевым начальным условиям $z_k(0) = 0$. Далее подставим в (3.5) в качестве величины z_k выражения $z_k = f_k(x_1,\dots,x_n)$:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = -Rf_k . \qquad (3.6)$$

Будем интегрировать полученные таким образом дифференциальные уравнения при начальных условиях $x_k\big|_{t=t_0} = x_{k_0}$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Численное значение величин x_k при $t = t_k$ дадут приближенные решения системы уравнений (3.I).

Благодаря тому, что система уравнений (3.5) обладает лишь затухающими решениями, можно надеяться, что влияние ошибок, совершенных при численном интегрировании уравнений, будет постепенно затухать (по-видимому, это случится, если шаг интегрирования невелик и поэтому свойством затухания решений будут обладать не только сами дифференциальные уравнения, но и их конечноразностные аналоги).

Метод, предложенный в работах Кирия В.С. и Давиденко, является частным случаем только что списанного, когда в уравнениях (3.5) величина $R = 0$; общим решением уравнений (3.5) будут при этом постоянные $z_k = C_k$.

Отсюда видно, что если на каком-то шаге вычислений была

допущена погрешность вычислений и если даже дальнейшее интегрирование дифференциальных уравнений вести весьма точно, то при $R = 0$ величины левых частей уравнений (3.2), характеризующие точность решения, будут оставаться постоянными и не будут затухать.

В случае, когда решается задача о хлопке выпуклых оболочек методом, изложенным в предыдущем параграфе, и когда параметр в уравнениях (3.2) обозначает давление на оболочку, могут встретиться затруднения при интегрировании системы дифференциальных уравнений (3.3). Они состоят в том, что при подходе к критическому значению нагрузки величины производных $\frac{dx_i}{dt}$ параметров прогиба по нагрузке могут обращаться в бесконечность.

В этом случае исследование послекритического состояния оболочки путем интегрирования системы (3.3) представляет трудности. Здесь одному значению параметра нагрузки t может соответствовать несколько равновесных форм оболочки, т.е. несколько решений системы (3.I). Вышеописанный метод решения может дать лишь одно решение. Для получения нескольких различных решений системы (3.I) И.И.Ворович и В.Ф.Зипалова [2] предложили вместо параметра t ввести новый параметр

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{1 + \sum_1^n \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{dt^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2} \quad ; \qquad (3.7)$$

который представляет собой как бы "длину кривой нагружения" в пространстве параметров $(x_1, \ldots, x_n; t)$; из (3.7) имеем

$$\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{d\sigma}\right)^2 = 1, \qquad (3.8)$$

$$\frac{dt}{d\sigma} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{d\sigma}\right)^2} \qquad (3.9)$$

После введения нового параметра уравнения (3.3) примут вид

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{dx_s}{d\sigma} + \frac{\partial f_k}{\partial t}\frac{dt}{d\sigma} = 0. \qquad (3.10)$$

Ворович и Зипалова предложили для решения системы (3.2) численно интегрировать дифференциальные уравнения (3.9) и (3.10).

При этом во многих случаях устраняются трудности интегрирования, когда величины $\frac{dx_i}{dt}$ обращаются в бесконечность (в силу (3.8) все производные $\frac{dt}{d\sigma}$ и $\frac{dx_i}{d\sigma}$ ограничены).

4. Описанные в предыдущих параграфах методы удобно применять лишь в тех случаях, когда число уравнений и неизвестных невелико. Если же ставится, например, задача об определении прогибов и напряжений методом сеток при несимметричном нагружении прямоугольной пластины или оболочки, для получения достаточной точности приходится каждую сторону пластины делить на число частей порядка 10. В этом случае число узлов сетки оказывается порядка 100, а матрица системы уравнений (1.3), которую приходится решать при применении метода Ньютона, будет иметь 100^2 элементов. В этом случае размещение данных о величине элементов матрицы в оперативной памяти электронной вычислительной машины встречает затруднение, а

применение внешних запоминающих устройств сильно замедляет процесс решения. Поэтому здесь желательны другие методы, требующие умеренного объема запоминающих устройств. К ним относятся методы релаксации и им подобные, не требующие операций с полными матрицами; к обзору подобных методов мы сейчас переходим.

В 1950 г. Френкель [20] описал метод решения линейных уравнений, не требующий большой памяти у вычислительной машины. Для простоты рассмотрим задачу об определении прогиба свободно опертой прямоугольной пластины при действии на нее небольшой равномерной нагрузки p. В этом случае прогиб пластины определяется дифференциальным уравнением

$$D\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)^2 w = p \qquad \text{, на границе } w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0. \quad (4.1)$$

Собственными функциями оператора $\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)^2$, то есть функциями φ_{mn}, которые при действии на них оператора

$$D\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)^2 \varphi_{mn} = \lambda_{mn}\varphi_{mn}$$

не изменяют свою форму, а лишь увеличивают свою величину в λ_{mn} раз, будут функции

$$\varphi_{mn} = \sin m\frac{\pi x}{a}\cdot \sin n\frac{\pi y}{b}.$$

Собственными значениями оператора будут величины

$$\lambda_{mn} = D\left(\frac{\pi^2}{a^2}m^2+\frac{\pi^2}{b^2}n^2\right)^2 \qquad (4.2)$$

Отсюда видно, что эти собственные значения быстро возрастают с увеличением числа узлов $(m-1)$ и $(n-1)$ собственных функ-

ций; например, при увеличении чисел m и n от I до I0 собственные значения увеличиваются в I0 000 раз. Для приближенного решения задачи заменим в уравнении (4.I) дифференциальный оператор $\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)^2$ конечно-разностным

$$\left(\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{h^2}\right)^2 w_{ik} = p'_{ik}, \qquad (4.3)$$

где Δ_x^2 и Δ_y^2 вторые конечные разности в направлении осей x и y, h - шаг сетки, $p'_{ik} = p_{ik}/D$

Для определения состояния равновесия нашей системы будем исходить из некоторого неравновесного состояния $w'_{ik}\big|_{t=0} = w^0_{ik}$ и представим себе, что узлы нашей сетки связаны с элементами вязкого трения величины r. Уравнения движения нашей системы будут иметь вид

$$r\frac{dw'_{ik}}{dt} + \left(\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{h^2}\right)^2 w'_{ik} = p'_{ik}. \qquad (4.4)$$

Очевидно, что с течением времени состояние нашей механической системы будет стремиться к равновесному, а поэтому решение уравнений (4.4) будет стремиться к функции, удовлетворяющей решению уравнений равновесия (4.3). Поэтому можно получить итерационный процесс для решения системы (4.3) путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (4.4), например, методом Адамса или Крылова А.Н. и т.д., принимая в качестве начальных условий какое-либо исходное грубо приближенное решение уравнения (4.3).

В частности, если применить самый примитивный шаговый

процесс Эйлера для решения системы (4.4), то получим итерационный процесс

$$w_{ik}^{(n+1)} = w^{(n)} + \frac{\Delta t}{r}\left[p'_{ik} - \frac{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2)^2}{h^4} w_{ik} \right]. \qquad (4.5)$$

Для ускорения сходимости желательно было бы выбрать величину Δt большой, однако этому препятствует то, что при больших величинах шага Δt процесс приближения становится неустойчивым и расходящимся. Можно доказать (на этом мы не останавливаемся), что расходимость может произойти в том случае, когда величина ($\Delta t/2$) больше одного из времен релаксации нашей системы. Поясним, что такое времена релаксации. Вычтем из уравнения (4.4) уравнение (4.3); учитывая, что точное решение задачи от времени не зависит: $\frac{dw}{dt} = 0$, мы получим уравнения, которым удовлетворяет погрешность решения $(w' - w)$:

$$r \frac{d(w'_{ik} - w_{ik})}{dt} + \left(\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{h^2} \right)^2 (w'_{ik} - w_{ik}) = 0. \qquad (4.6)$$

Разложим величины $w'_{ik} - w_{ik}$ в ряд по нормальным координатам, т.е.

$$w'_{ik} - w_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha(t)\, \varphi_{\alpha\, ik}, \qquad (4.7)$$

где $\varphi_{\alpha, ik}$ "собственные функции", т.е. функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\left(\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{h^2} \right)^2 \varphi_{\alpha, ik} = \lambda_\alpha \varphi_{\alpha, ik} \qquad (4.8)$$

при собственных значениях λ_α. Подставляя выражения (4.7) в

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[r\,\frac{dx_\alpha(t)}{dt}+\lambda_\alpha x_\alpha(t)\right]\varphi_{\alpha,ik}=0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\varphi_{\alpha,ik}$, получим дифференциальные уравнения для нормальных координат $x_\alpha(t)$

$$r\,\frac{dx_\alpha(t)}{dt}+\lambda_\alpha x_\alpha(t)=0. \qquad (4.9)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$x_\alpha(t)=x_\alpha e^{-\frac{\lambda_\alpha}{r}t}=x_\alpha e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}},$$

где $\tau_\alpha = r/\lambda_\alpha$. Величины τ_α называются временами релаксации. Эти величины показывают за какие времена нормальные координаты $x_\alpha(t)$ уменьшаются в $e = 2{,}71$ раз.

Несложный расчет показывает (Френкель [20]), что если мы пожелаем решить численно уравнения (4.6) или, что то же, уравнения (4.9) методом шагов Эйлера, то в качестве шага нельзя выбирать шаг больше удвоенных величин времен релаксаций, иначе процесс решения окажется расходящимся; поэтому приходится выбирать в качестве шага величину порядка самого меньшего времени релаксации.

Но при этом на каждом шаге другие медленно меняющиеся, нормальные координаты, соответствующие большим временам релаксации, успевают уменьшиться мало. Оказывается, что порядок сходимости, характеризующий часть погрешности, которая успевает уменьшиться за один шаг интегрирования, совпадает с порядком отношения наименьшего собственного числа к наиболь-

шему из них.

Как мы уже указывали ранее, для дифференциального оператора $D\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)^2$ отношение величины собственного значения, соответствующего собственной функции с десятью узловыми линиями вдоль оси X и десятью узловыми линиями параллельными оси Y, к наименьшему собственному значению равна 10 000. Для конечноразностного оператора при делении сторон на 10 частей это отношение, как показывают вычисления, несколько меньше, оно равно 6087, при этом после каждой итерации (однократном обходе всех узлов сетки) величина погрешности путем подходящего подбора величины $\Delta\tau$ может быть уменьшена лишь примерно на $\frac{1}{3043}$ своей величины (Френкель [20]).

При увеличении числа делений каждой стороны прямоугольника скорость сходимости убывает обратно пропорционально четвертой степени числа делений. Феодосьев В.И. [14-15] применил вышеописанный метод к решению нелинейных задач теории оболочек и стержней.

5. Метод сопряженных градиентов и его обобщение для решения систем нелинейных уравнений. Удобным способом решения систем линейных уравнений с симметрической матрицей, который допускает обобщение, позволяющее решать системы нелинейных уравнений, является метод сопряженных градиентов Хестенса и Штифеля [21-22]. Этот метод требует сравнительно малой памяти вычислительной машины и поэтому является подходящим для решения систем с большим числом неизвестных. Применение обычного способа Гаусса требует $(n^2+n)/2$ ячеек па-

мяти (n - число неизвестных); например, при расчете пластин методом сеток и делении каждой стороны пластины на десять частей, когда n = 100 требуется около 5050 ячеек памяти, что вызывает необходимость использования сравнительно медленной внешней памяти машины. При применении метода сопряженных градиентов требуется всего около $3n$ ячеек памяти, что в нашем примере составляет около 300 ячеек.

Кроме того, применение метода сопряженных градиентов к расчету способом сеток значительно сокращает количество вычислений. В самом деле, применение обычного метода Гаусса к матрицам конечноразностных уравнений, содержащих подавляющее количество нулевых элементов, приводит к трате большей части машинного времени на вычисления с нулевыми элементами. Этого можно избежать, применяя метод сопряженных градиентов.

Метод сопряженных градиентов является итерационным, однако в отличие от обычных итерационных методов в применении к линейным системам дает точный результат за конечное число n шагов, где n - число неизвестных (конечно, если все промежуточные вычисления произведены абсолютно точно). Так как на практике вычисления сопровождаются всегда ошибками округления, то за n шагов обычно не получается точного решения, однако в этом случае вычисления могут продолжаться дальше, пока не будет достигнута достаточная точность.

Опишем процедуру метода. Подробное его обоснование для случая линейных систем уравнений дано в работах Хестенса и Штифеля [21-22] (смотрите также [13]). Для решения системы линейных уравнений, которую мы запишем в матричной форме

$$A\bar{x} = \bar{F}, \qquad (5.1)$$

(где A - знакоопределенная симметричная матрица, $\bar{x}$ - вектор-столбец, составленный из неизвестных, $\bar{F}$ - вектор-столбец, составленный из правых частей уравнений), поступают так: исходя из некоторого исходного приближения $\bar{x}_0$ вычисляют невязку

$$\bar{F} - A\bar{x}_0 = \bar{r}_0 = \bar{s}_1 \qquad (5.2)$$

и величину

$$a_1 = (\bar{r}_0, \bar{r}_0) / (\bar{s}_1, A\bar{s}_1). \qquad (5.3)$$

Новое приближение к решению $\bar{x}$ вычисляется по формулам

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + a_1\bar{s}_1,$$

невязка $\bar{r}_1$ этого приближения равна

$$\bar{r}_1 = \bar{F} - A\bar{x}_1 = \bar{F} - A\bar{x}_0 - Aa_1\bar{s}_1 = r_0 - a_1 A\bar{s}_1.$$

Допустим, что мы уже построили (i - I)-ое приближение; i -тое приближение строится по формулам

$$\bar{r}_i = \bar{F} - A\bar{x}_i = \bar{r}_{i-1} - a_i A\bar{s}_i, \qquad (5.4)$$

$$b_i = (\bar{r}_i, \bar{r}_i) / (\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i-1}), \qquad (5.5)$$

$$\bar{s}_{i+1} = \bar{r}_i + b_i\bar{s}_i, \qquad (5.6)$$

$$a_i = (\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i-1}) / (\bar{s}_i, A\bar{s}_i), \qquad (5.7)$$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + a_i\bar{s}_i. \qquad (5.8)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не станет

достаточно малой невязки $\bar{r}_i = \bar{F} - A\bar{x}_i$. Рассматривая предыдущие формулы, легко заметить, что при решении конечноразностных уравнений метода сеток не требуется сохранение в памяти машины элементов матрицы A, а достаточно сохранять в памяти машины формулы для конечноразностной звезды, которая дает возможность с помощью итерационных циклов вычислять $A\bar{s}_i$. В этом главное преимущество метода сопряженных градиентов.

И.В.Свирским предложено применение метода сопряженных градиентов для решения нелинейных систем уравнений

$$b_K(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (K = \overline{1,n}) \tag{5.9}$$

или в короткой векторной записи

$$B[\bar{x}] = 0. \tag{5.10}$$

Допустим, что исходное приближение $\bar{x}^0$ $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ не слишком отличается от точного решения $\bar{x}$. Представим уравнение (5.9) в виде:

$$b_K(x_1, \ldots, x_n) = b_K\left[x_1^0 + (x_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + (x_n - x_n^0)\right] = 0. \tag{5.11}$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами разложения, получаем

$$b_K(x_1, \ldots, x_n) = b_K(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b_K}{\partial x_s}(x_s - x_s^0) = 0. \tag{5.12}$$

Обозначим вектор с компонентами $b_K(x_1^0, \ldots, x_n^0) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b_K}{\partial x_s} x_s^0$ через $\bar{F}$, а матрицу с элементами $-\frac{\partial b_K}{\partial x_s}$ через A. При этом систему уравнений (5.12) можно записать короче:

$$B[\bar{x}] \simeq \bar{F} - A\bar{x} = 0. \tag{5.13}$$

Когда уравнения (5.I3) представляют собой уравнения устойчивого равновесия механической системы, то при отклонении Δ системы от состояния равновесия $\bar{x}$, в силу (5.I3) и (5.I0), возникает неуравновешенность

$$B(\bar{x}+\bar{\Delta}) \simeq \bar{F} - A\bar{x} - A\bar{\Delta} \simeq B(\bar{x}) - A\bar{\Delta} = -A\bar{\Delta}$$

Так как при отклонении от состояния устойчивого равновесия работа сил упругости $\left(B(\bar{x}+\bar{\Delta}), \bar{\Delta}\right)$ положительна, то $\left(A\bar{\Delta}, \bar{\Delta}\right) > 0$. Следовательно, матрица A является знакоопределенной.

К уравнению (5.I3) можно применить вышеописанный метод сопряженных градиентов. При этом формулы (5.2) и (5.4) примут вид:

$$B[\bar{x}_0] = \bar{r}_0 = \bar{s}_0 \quad (5.2'); \quad \bar{r}_i = B[\bar{x}_i]. \tag{5.I4}$$

Все остальные формулы, за исключением (5.7) остаются неизменными. Для применения формулы (5.7) вектор-столбец $A\bar{s}_i$ вычисляется так:

$$A\bar{s}_i = \frac{B[\bar{x}_{i-1}] - B[\bar{x}_i + \alpha_i s_i]}{\alpha_i}, \tag{5.I5}$$

где α_i - небольшое число. В самом деле, в силу (5.I3)

$$\frac{B[\bar{x}_{i-1}] - B(\bar{x}_{i-1} + \alpha_i \bar{s}_i)}{\alpha_i} \simeq \frac{\bar{F} - A\bar{x}_{i-1} - [\bar{F} - A(\bar{x}_{i-1} + \alpha_i \bar{s}_i)]}{\alpha_i} = A\bar{s}_i$$

Величину α_i следует выбирать небольшой с тем, чтобы вектор $\bar{x}_{i+1} + \alpha_i \bar{s}_i$ немного отличался от $\bar{x}$ и чтобы формулы (5.I2) не давали слишком грубых приближений. В качестве величины α_i можно, например, принять

$$\alpha_i = \beta \frac{\max\limits_k \left| x_k^{(i-1)} \right|}{\max\limits_k \left| s_{i,k} \right|},$$

где $\max\limits_k \left| x_k^{(i-1)} \right|$ – максимальная по абсолютной величине из неизвестных $x_1^{(i-1)}, \ldots, x_n^{(i-1)}$, а $\max\limits_k \left| s_{i,k} \right|$ – наибольшая по абсолютной величине компонента вектора-столбца $\bar{s}_i$, β – число, значительно меньшее единицы.

Приводим схему вычислений. Положим $\bar{s}_0 = 0$, $e_1 = I$. Последовательно вычисляются величины, начиная с $i = 0$;

(I) $r_i = B\bar{x}_i$,

(2) $e_i = (\bar{r}_i, \bar{r}_i)$.

(3) Определяется максимум абсолютных величин компонент невязки $\bar{r}_i$; если максимум достаточно мал, то счет прекращают, в ином случае счет продолжается;

(4) $b_i = e_i / e_{i-1}$,

(5) $\bar{s}_{i+1} = \bar{r}_i + b_i \bar{s}_i$,

(6) $\alpha_i = \beta \max\limits_k \left| x_k^{(i-1)} \right| \Big/ \max\limits_k \left| s_{i,k} \right|$,

(7) $a_i = (\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i-1}) \Big/ \left(\bar{s}_{i+1}, \frac{B[\bar{x}_{i-1}] - B[\bar{x}_{i-1} + \alpha_i \bar{s}_i]}{\alpha_i} \right)$,

(8) $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + a_i \bar{s}_{i+1}$.

(9) Переходят к операции (I).

6. В статье [8] М.А.Красносельский и Я.Б.Рутицкий предложили следующий общий способ решения систем нелинейных

уравнений с помощью итерационных методов, предназначенных для решения линейных уравнений.

Для итерационного решения нелинейной системы $b_k[x_1, \ldots, x_n] = 0$ или в короткой векторной записи $\bar{B}(x) = 0$ представим уравнения (I.I) в виде

$$b_k[x_1, \ldots, x_n] = b_k[x_1^{(s)} + (x - x_1^{(s)}), \ldots, x_n^{(s)} + (x - x_n^{(s)})] = 0.$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами разложения, имеем систему линейных уравнений, которая приближенно будет удовлетворяться величинами $(x_1, \ldots, x_n)$

$$b_k[x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}] + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}\left(x_\alpha - x_\alpha^{(s)}\right) = 0. \qquad (6.2)$$

Обозначим вектор с компонентами

$$F_k^{(s)} = b_k\left(x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} x_\alpha^{(s)}, \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad (6.3)$$

через $\bar{F}^{(s)}$, а матрицу с элементами $\frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}$ через

$$\bar{B}\left(\bar{x}^{(s)}\right) = \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} \right\|. \qquad (6.4)$$

Тогда систему (6.2) можно записать в виде:

$$B'\left(\bar{x}^{(s)}\right)\bar{x} + \bar{F}^{(s)} = 0. \qquad (6.5)$$

Если имеется какой-либо итерационный способ для решения систем линейных уравнений

$$A\bar{x} + F = 0, \qquad (6.6)$$

описываемый формулами

$$\bar{x}^{(s)} = [\bar{x}^{(s-1)}, A, \bar{F}], \quad (s = 0,1,2,\ldots), \tag{6.7}$$

то его можно применить к итерационному решению нелинейной системы (6.I), вычисляя приближения по формулам:

$$x^{(s)} = [\bar{x}^{(s-1)}, B'(\bar{x}^{(s-1)}), \bar{F}^{(s)}], \tag{6.8}$$

где $B'(\bar{x}^{(s-1)}), \bar{F}^{(s)}$ определяются формулами (6.3) и (6.4). В отличие от обобщенного метода сопряженных градиентов, здесь, к сожалению, приходится сохранить в памяти все элементы матрицы $B'(x^{(s-1)})$.

7. В качестве еще одного способа решения нелинейных задач можно указать на применение энергетического метода, когда в выражении для энергии системы производные заменяются конечноразностными отношениями, вследствие чего функционал энергии приближенно путем численного интегрирования заменяется функцией от конечного числа перемещений узлов сеточной области, и далее равновесное состояние оболочки разыскивается с помощью минимизации по перемещениям узлов приближенного выражения энергии системы. Эта минимизация может быть выполнена с помощью метода сопряженных градиентов Флетчера [I9] для минимизации функций многих переменных.

Литература

I. И.С.Березин, Н.П.Жидков, Методы вычислений, т. 2, М., I959, 76-I76.

2. И.И.Ворович, В.Ф.Зипалова, К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши. ПММ, I965, т. 29, вып. 5, 894-90I.

3. Д.Ф.Давиденко, О приближенном решении систем нелинейных уравнений. Укр.мат.журн., 1953, т. 5, № 2.

4. Д.Ф.Давиденко, Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. Докл.АН СССР, 1953,т.83,№ 4.

5. В.С.Кирия, Движение тел в сопротивляющихся средах. Тр. Тбилисского ун-та, 1951, т. 44.

6. М.С.Корнишин, Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения, "Наука", М., 1964, 95-106.

7. М.С.Корнишин, Х.М.Муштари, Об одном алгоритме решения нелинейных задач теории пологих оболочек. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1, 159-163.

8. М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий, О некоторых приближенных методах решения нелинейных операторных уравнений, основанных на линеаризации. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 4, 785-788.

9. А.А.Курдюмов, К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1961, вып. 34.

10. В.А.Матвеев, Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений. Журн.выч.мат. и мат.физ., 1954, т. 4, № 6, 983-994.

11. Ш.Б.Микеладзе, Решение численных уравнений. Тбилиси, "Мицниереба", 1965.

12. С.Г.Михлин, Численная реализация вариационных методов. "Наука", М., 1966.

13. Д.К.Фадеев, В.Н.Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры. ГИФМТ, М-Л, 1963, 470-476.

14. В.И.Феодосьев, Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, 1963, т.27,вып.2.

15. В.И.Феодосьев, Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.

16. J.G.P. Barnes, An algoritm for solving non-linear equations based on the secant method. The Computer Journal, 1965, 8, N. 1, 66 - 72.

17. C.G. Broyden, A class of methodes for solving non-linear simultaneous equations. Mathematics of Computation, 1965, V. 19, N. 92, 577 - 593.

18. R. Fletcher, C.M. Reevs, Function minimization by conjugate gradients. The Computer Journal, 1964, V. 7, N. 2, 149 - 153.

19. S. Frenkel, Convergencerates of iterative treatments of partial differential equations. Math. Tables and other Airs Comput., 1950, V. 4, N. 30, 65 - 75.

20. R. Hestens, E. Stiefel, Methods of conjugate gradients for solving linear systems. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, 409 - 436.

21. E. Stieffel, Einige Methoden der Relaxations-rechnung. Z. angew. Mathem. und Phys., 1952, V. 3, N. 1, 1 - 33.

О ПОВЕДЕНИИ ПЛАСТИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ИМПУЛЬСИВНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

Г.С.Шапиро

Институт проблем механики АН СССР, Москва

Предлагаемый обзор посвящен работам по динамике жестко-идеально-пластических конструкций. В этих работах влияние упругих деформаций не учитывается и целью является определение остаточных прогибов и деформаций. Задачи этого типа имеют практическое значение, например, для создания теории формовки листов взрывом, оценки действия взрывов на строительные или корабельные конструкции и т.п.

Первая работа в этом направлении принадлежит одному из основоположников теории предельного равновесия - А.А.Гвоздеву [I], еще в 1943 г. рассмотревшему динамическое поведение прямоугольной пластинки под действием взрывной нагрузки. Однако работа А.А.Гвоздева осталась фактически незамеченной. Лишь спустя 10 лет начали публиковаться исследования в этой области в США (Саймондс, Прагер, Гопкинс, Ли и др.). С тех пор работы по динамике жестко-пластических тел ведутся широким фронтом во многих странах. В США, СССР, Англии, Польше, КНР, КНДР, Чехословакии, Японии, Австралии и Канаде этому вопросу уже посвящено несколько сот работ. В данном обзоре я коснусь почти исключительно тех из них, которые были выполнены прежде в отделе волновой динамики Института механики АН СССР, а в последнее время - в отделе теории упругости и пластичности Института проблем механики АН СССР и на кафедре

теории пластичности МГУ. Обзор содержит две части и заключение.

В первой части кратко рассматриваются работы, посвященные некоторым общим вопросам теория: единственности и вариационным принципам, построению приближенных методов пределам применимости жестко-пластического анализа, а также проблемам динамического критерия текучести.

Вторая часть обзора посвящена решениям конкретных задач и их экспериментальной проверке. В ней обсуждаются работы, посвященные изгибу балок, колец, пластинок и оболочек.

В заключении отмечены работы, находящиеся в стадии разработки.

I. Некоторые общие вопросы теории

Единственность и вариационные принципы. Динамические задачи жестко-пластического анализа можно рассматривать как обобщение к динамике теории предельного равновесия. Как известно, в теории предельного равновесия имеет место единственность только для величины предельных нагрузок; поле скоростей не является единственным. Естественно, что в динамических задачах вопрос об единственности приобретает определенный интерес.

Все теоретические решения строятся с учетом следующих требований [2]:

I) удовлетворяются уравнения движения для отдельных частей конструкций;

2) удовлетворяются начальные и граничные условия;

3) напряжения не должны нарушать условия текучести;

4) скорости деформаций подчиняются ассоциированному закону течения;

5) в шарнирах или шарнирных линиях удовлетворяются условия непрерывности скоростей, в то время как ускорения могут быть разрывны.

Прежде, чем перейти к обсуждению вопроса о единственности, следует отметить работу А.Р.Ржаницына [I], в которой для нахождения формы движения жестко-пластической балки используется вариационный принцип. Идея А.Р.Ржаницына состоит в создании аналогии кинематического метода определения несущей способности конструкции при статической нагрузке, т.е. предлагается задать форму движения конструкции с точностью до некоторых параметров и установить критерий, по которому можно выбрать форму разрушения, наиболее близкую к действительной. Предполагается неизменность формы движения конструкции во времени. Развивая работу А.Р.Ржаницына, В.П. Тамуж [2] показал, что из всех кинематически возможных $\ddot{\varepsilon}_{ij}$, w_i и σ_{ij} действительные w_i^*, $\ddot{\varepsilon}_{ij}^*$ и σ_{ij}^* в каждый момент времени минимизируют выражение

$$I=\int_V \frac{m w_i^2}{2} dV - \int_V p_i w_i dV - \int_{S_\tau} T_i w_i dS + \int_V \sigma_{ij} \ddot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_l \sigma_{ij} n_j [w_i] dl, \quad (I)$$

где m - плотность, p_i - массовые силы, S_τ - часть гра-

ницы, на которые заданы поверхностные нагрузки T_i, l – поверхность разрыва полей ускорений. Отсюда В.П.Тамух вывел единственность решения для поля ускорений в каждый момент времени. Следует отметить, что в случае неизменности формы движения конструкций во времени принцип Тамужа совпадает с принципом Ржаницына. М.И.Рейтман [3] показал, что принцип Тамужа справедлив для широкого класса сплошных сред, включая упруго-пластические среды.

Полученный минимальный принцип В.П.Тамух [2] использовал для приближенного решения задач. Можно задаться кинематически возможным полем скоростей в теле, зависящим от некоторого числа параметров. Путем дифференцирования получаем возможное поле ускорений, после чего ищется минимум функционала (I) как функции, зависящей от этих параметров. Если к конструкции, сстоящей из прямых или кривых стержней, под динамической нагрузкой возникает несколько пластических шарниров, положение которых следует найти, то может быть использован метод квадратичного программирования.

Недавно Мартин [4], опираясь на постулат об устойчивости материала Друккера [5], показал, что при малых смещениях и отсутствиях разрывов в скоростях (последнее всегда выполняется для балок, пластинок и оболочек) единствснность поля скоростей можно установить не только для жестко-пластической, но и для жестко-вязко-пластической, упруго-пластической и упруго-вязко-пластической сред.

Пределы применимости теории. Обычным требованием применимости рассматриваемой теории является условие, что полная

энергия, затраченная на пластическую деформацию, должна на порядок (число n) превышать максимальную возможную величину упругой энергии, которая может быть накоплена в балке. Саймондс и Лез [5] показали, что, например, в случае удара с постоянной скоростью V по балке должно быть $V^2 \geqslant n M_0^2 / mE$, где m - масса единицы длины балки. Для балки прямоугольного сечения, считая, что скорость распространения упругих волн составляет около 5000 м/сек, отношение $n = 10$, получается

$$V \geqslant 15 \text{ м/сек.}$$

Другое требование состоит в том, что деформации балки должны быть малы. Это дает условие [5] $h/L \geqslant 100$. Следует, однако, иметь в виду, что недавние опыты Кэмпбелла показали, что для стали кривая зависимости моменты-кривизны имеет зуб. Поэтому для стали число n должно быть значительно больше 10.

Динамический критерий текучести. В задачах динамики жестко-пластического анализа как и в статических задачах теории предельного равновесия принимается, что критерий текучести не зависит от скоростей деформации. Это противоречит данным экспериментов. Иногда для учета этого обстоятельства используют вязко-пластические зависимости, простейшая из которых имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} = k(\sigma - \sigma_0), \quad \sigma \geqslant \sigma_0. \tag{2}$$

Интересно отметить, что эту формулу можно интерпретировать по-разному. В теории вязко-пластического движения этот закон принимается при нагружении и разгрузке. Если же интерпрети-

ровать σ как динамический предел текучести, то закон (2) справедлив только при нагрузке, а при разгрузке должно быть $\varepsilon = 0$. Сравним, что это дает в случае удара с постоянной скоростью по полубесконечному стержню [6]. В первой интерпретации задача была решена Соколовским [7]. Уравнение движения в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ,$$

где V - скорость. Его решение, как показано в [7], имеет вид:

$$V = V_0 \left[1 - \operatorname{erf}(X)\right], \quad X \sim \frac{x}{\sqrt{t}} .$$

Весь стержень мгновенно охвачен движением.

Во второй интерпретации, рассмотренной в [6], мы имеем дело с задачей Стефана, причем

$$V = 3{,}17\, V_0 \left[1 - \operatorname{erf}(X)\right].$$

Следует заметить, что вопрос о динамическом критерии текучести при сложном напряженном состоянии экспериментально не изучен.

2. Решения конкретных задач и их экспериментальная проверка

Балки. Экспериментальное и теоретическое исследование поперечного удара с постоянной скоростью по консольной балке прямоугольного сечения [8] дало хорошее качественное совпадение теории и эксперимента. Скорость удара составляла 17,2 м/сек, пролет балки - 260 мм, удар производился на рас-

стоянии 150 мм от места заделки. Балки имели сечения 9·9, 5.5 и 3·3 мм, время контакта составили 260, 300 и 690 м/сек. В сечении, где производился удар, возникал стационарный шарнир, в обе стороны от него двигались два нестационарных шарнира. Первый из них двигался к заделке, второй - к свободному концу. Оказалось, что второй шарнир не может продвинуться дальше, чем на половину длины свободного участка, т.е. на 55 мм. Сближение экспериментальных и теоретических результатов получено при увеличении времени контакта в 3–4 раза, а также повышении расчетного предела текучести в соответствии с экспериментальными данными Менджойна.

Арки. Удар с постоянной скоростью по арке полукругового очертания исследован В.П.Тамужем [9]. Груз весом 4 кг падал с высоты 3,5 м и ударял по свинцовой арке прямоугольного сечения 26·46 мм радиусом 150 мм. Качественное совпадение теории и эксперимента оказалось удовлетворительным.

Пластинки. Теоретическое решение задачи об ударе с постоянной скоростью по кольцевой пластинке получено в [10]. Движение разбивается на три фазы. В первой фазе в месте удара образуется кольцевая шарнирная окружность, которая движется по направлению к месту заделки. Во второй фазе пластинка переходит в усеченный конус и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг шарнирной окружности в заделке. В третьей фазе, при снятии нагрузки движение, аналогичное фазе второй, совершается по инерции вплоть до остановки. Опыты, проведенные на кафедре теории пластичности Московского университета и в Институте механики АН СССР [11] обнаружили ка-

чественное совпадение теории и эксперимента. Продолжая эти работы, Флоренс на опытах с алюминиевыми пластинками диаметром 250 мм, внутренним диаметром 40 или 60 мм и толщиной 6 мм под действием кольцевой взрывной нагрузки показал, что совпадение теоретических и экспериментальных результатов можно улучшить, если учесть мембранные напряжения, возникающие в пластинке при прогибах порядка ее толщины.

Цилиндрические оболочки. Теоретическое решение задачи о кольцевом радиальном ударе по цилиндрической оболочке получено в [II] и [I2], причем и в этом случае отмечено качественное совпадение теоретического и экспериментального решений.

3. Некоторые вопросы теории

Теория оптимального проектирования. В теории проектирования пластических конструкций минимального веса, подвергнутых статическому нагружению, критерием оптимальности служит постоянство удельной мощности диссертации, отнесенной к толщине конструкции. При динамическом нагружении, когда силы, действующие на конструкцию, меняются во времени, этот критерий становится непригодным. Взамен можно сформулировать какие-либо иные ограничения, например, ограничения на прогибы или деформации. Такой подход применил недавно И.М. Рабинович для задачи об оптимальном проектировании балок [I3].

Теория действия сосредоточенных нагрузок. Статические решения о действии сосредоточенных нагрузок на жестко-пластические пластинки оказывается невозможным распространить на

случай динамического нагружения. Некоторый подход к этой задаче дан Н.А.Форсман в работе [I4], публикуемой во второй части данного сборника.

Литература

I. А.Р.Ржаницын, Экстремальное свойство формы движения жестко-пластической системы, нагруженной за пределом несущей способности. Изв. ОТН, Мех и машиностр., I959, № 2.

2. В.П.Тамуж, О единственности решения динамических задач для жестко-пластических тел. ПММ, I962, № 2.

3. М.И.Рейтман, Об одном методе решения задач динамики твердого тела и его приложении к неупругим оболочкам. Изв.АН СССР, Мех. и машиностр., I964, № 6.

4. Мартин. Замечание об единственности решений для жестко-пластической и жестко-вязко-пластической сред при динамическом нагружении. Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков (русский перевод), I966, № I.

5. P.Symonds, I.Leth, Large plastic deformations of beams under transver impact. Journ. Mech. Phys. Solyds. 1954, N.2.

6. Г.С.Шапиро, О распространении упруго-вязко-пластических волн. Труды П Всесоюзного симпозиума по распространению упруго-пластических волн. Изд. АН Аз.ССР, Баку, I966.

7. В.В.Соколовский, Некоторые задачи динамики вязко-пластических тел. ПММ, I949, № 6.

8. В.В.Викторов, И.П.Добровольский, П.А.Кузин, Г.С.Шапиро, О поперечном ударе по пластической балке. Тезисы докладов к Ш Всесоюзному симпозиуму по распространению упруго-пластических волн. Изд. АН Уз.ССР, Ташкент, I966.

9. В.П.Тамуж, Пластические деформации круговой арки и кольца под действием динамической нагрузки. Изв. ОТН АН СССР. Мех. и машиностр., I963, № 2.

I0. Г.С.Шапиро, Удар по кольцевой жестко-пластической пластинке. ПММ, I959, № I.

II. Бен-Ен-Рин, Сюнь-Чжу-Хуа, Г.С.Шапиро, О динамике жестко-пластических конструкций. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Изд. АН СССР. Аннотация докладов, М., I960.

I2. П.А.Кузин, Г.С.Шапиро, О влиянии свободного края на динамический изгиб жестко-пластической цилиндрической оболочки. Изв. АН СССР. Механика, I965, № 3.

I3. И.М.Рабинович, Об оптимальном проектировании балок при динамической нагрузке. Сборник по исследованию конструкции, № I4. Госстройиздат, I965.

I4. Н.А.Форсман, О динамическом изгибе жестко-пластической пластинки. В сб. Материалы летней школы по проблеме "Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек", ч. П, Тарту, I966.

Оглавление

Стр.

I. Предисловие 3

2. Б.М.Броуде. Роль нелинейных задач теории пластин в расчете конструкций 5

3. Н.Ф.Ершов. Послекритическая работа пластин и инженерные методы расчета тонкостенных конструкций 26

4. Л.М.Качанов. О времени разрушения оболочек в условиях ползучести 45

5. М.С.Корнишин, М.М.Сулейманова, А.Н.Спиваковская. Большие прогибы круглой пластины ступенчато-переменной жесткости 58

6. Ю.Р.Лепик. Некоторые вопросы теории гибких упругопластических пластин и оболочек 72

7. Н.Н.Малинин. Некоторые нелинейные задачи изгиба полосы и листа I06

8. М.Ш.Микеладзе. Некоторые вопросы технической теории пластичных тонких оболочек I27

9. П.М.Огибалов, М.А.Колтунов. К вопросу о расчете изгиба и устойчивости пластин и оболочек с учетом реономности механических свойств материала I37

I0. А.Р.Ржаницын. Расчет пластин и оболочек кинематическим методом предельного равновесия ... I55

II. Г.Н.Савин, А.Н.Гузь, И.А.Цурпал. Физически нелинейные задачи пластин и оболочек,ослабленных отверстиями 204

I2. И.В.Свирский. Методы решения систем алгебраических и трансцендентных уравнений, встречающихся при расчете больших прогибов пластин и оболочек 234

I3. Г.С.Шапиро. О поведении пластичных конструкций при импульсивном действии нагрузки.. 258

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, I8

МАТЕРИАЛЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ ПО ПРОБЛЕМЕ
"ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК"

Тарту-Кяэрику, 22-3I июля
I966 г.

I
Обзорные доклады

Ответственный редактор Ю.Р.Лепик
Корректор Ю.Х.Сарв
==========
Ротапринт ТГУ I966. Печ.листов I6,75 (условных I5,24).
Учетн.-издат.листов I0,08. Тираж 500 экз.
Бумага 30х42. I/4. Сдано в печать 4/XI I966 г.
МВ-09882. Заказ № 50I.
Цена 68 коп.

Цена 68 коп.

XI
4A-13625

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00423389 8