

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Stella Arusoo
**Hägasate esimest järku lineaarsete
diferentsiaalvõrrandite lahendamine**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Urve Kangro

TARTU 2026

HÄGUSATE ESIMEST JÄRKU LINEAARSETE DIFERENTSIAALVÖRRANDITE LAHENDAMINE

Bakalaureusetöö

Stella Arusoo

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös anname ülevaate hägusate esimest järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahenditest sõltuvalt algtingimusega ülesande kujust. Seejuures teeme läbi mõned nädisülesanded iga käsitletud ülesande kuju kohta. Bakalaureusetöö teoreetiline osa toetub peamiselt A. Khastani ja R. Rodríguez-Lópeze artiklile [11] ning B. Bede, I. J. Rudase ja A. L. Bencsiki artiklile [3].

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Hägusad hulgad, arvud, funktsioonid, esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid, lahendid.

SOLVING FUZZY FIRST-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Bachelor's thesis

Stella Arusoo

Abstract

In this bachelor's thesis, we provide an overview of solutions to fuzzy first-order linear differential equations depending on the form of problem with the initial condition. We will consider some examples for each form of discussed problems. The theoretical part of the bachelor's thesis is based mainly on the article [11] by A. Khastan and R. Rodríguez-López and the article [3] by B. Bede, I. J. Ruda and A. L. Bencsik.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Fuzzy sets, numbers, functions, first-order linear differential equations, solutions.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Hägusad arvud	4
2 Hägusate funktsioonide analüüs	9
3 Vaadeldavad hägusad diferentsiaalvõrrandid	25
4 Diferentsiaalvõrrandite lahendid	26
4.1 Ülesande (1) lahendid	26
4.2 Näited ülesande (1) lahendustest	28
4.3 Ülesande (2) lahendid	31
4.4 Näited ülesande (2) lahendustest	33
4.5 Ülesande (3) lahendid	36
4.6 Näited ülesande (3) lahendustest	39
5 Hägusate diferentsiaalvõrrandite rakendused	43
6 Kokkuvõte	46
Viited	47

Sissejuhatus

Diferentsiaalvõrrandid on üks olulisemaid matemaatilisi vahendeid, mida kasutatakse eluliste ülesannete lahendamiseks erinevates valdkondades. Näiteks kasutatakse diferentsiaalvõrrandeid majandusteaduses intressi teenimise kirjeldamiseks, füüsikas aga sumbuvate võnkumiste näitlikustamiseks.

Harilikud diferentsiaalvõrrandid kujutavad endast aga üldistatud mudeleid, kus kasutatakse mõõtmistulemuste, parameetrite ning algandmete üldistust – konkreetset arvu, mitte kogu väärtuste vahemikku. Seetõttu võib osutuda kasulikuks ebamäärasuste vältimiseks kasutada diferentsiaalvõrrandites hägusaid arve, mis võimaldavad väärtusi vaadelda ühtse väärtuste intervallina. Kuna hägusate arvude aritmeetika erineb oluliselt tavaliste *täpsete* arvude aritmeetikast, nõuab hägusate diferentsiaalvõrrandite lahendamine täiendavaid meetodeid võrreldes harilike diferentsiaalvõrranditega.

Bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade hägusate arvude ja hulkadega seotud mõistetest ning tõestada teoreemid erinevatel kujudel diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Lisaks aitab käesolev töö suurendada eestikeelse kirjanduse hulka hägusate arvude valdkonnas.

Töö koosneb viiest peatükist. Esimeses peatükis selgitame põhilisi hägusate arvudega seotud mõisteid. Teises peatükis keskendume hägusale analüüsile, tõestades defineeritud Hukuhara tuletise omadused, mida kasutame järgmises osas. Kolmandas peatükis selgitame täpsemat töö suunitlust ning toome sisse erinevate diferentsiaalvõrrandite kujud. Neljandas peatükis tõestame erinevate ülesannete H-lahendite kujud ning lahendame mõned näidisülesanded. Viiendas peatükis toome välja mõned näited hägusate diferentsiaalvõrrandite rakendustest.

1 Hägusad arvud

Selles peatükis esitame hägusate arvudega seotud mõisted.

Esmalt defineerime hägusad hulgad, mille definitsioon pärineb Ebinesari artiklist [7], kuid on esialgu antud Zadehi artiklis [17].

Definitsioon 1.1. [17] Hägusaks hulgaks ruumis X nimetatakse hulka

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\},$$

kus kuuluvusfunktsioon $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ näitab $x \in X$ kuulumisastet hägusasse hulka A .

Seega, mida lähemal on kuuluvusfunktsiooni $\mu_A(x)$ väärtus ühele, seda suurem on arvu x kuulumisaste hulka A .

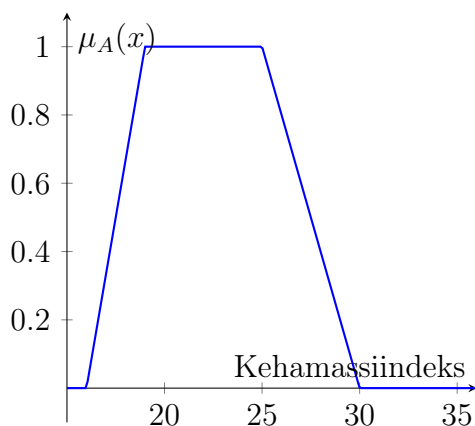
Parema arusaamise eesmärgil toome ka ühe näite.

Näide 1.1. Vaatleme inimeste kehamassiindeksit, kirjeldades sõna “normaalkaaluline”. Eristame siinjuures erinevaid kategooriaid: “alakaaluline”, “normaalkaaluline”, “ülekaaluline” ja “rasvumine”.

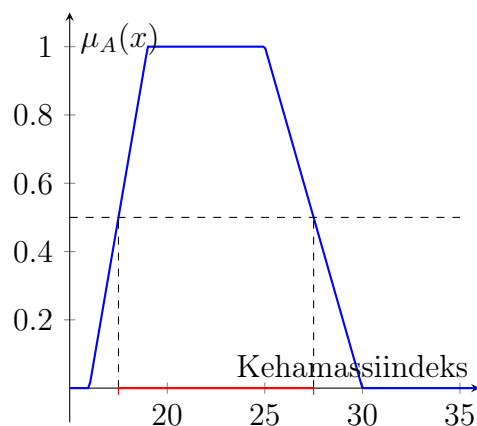
Moodustame hägusa hulga kuuluvusmäära kujutuse $\mu_A: [16, 40] \rightarrow [0, 1]$ järgmiselt

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-16}{3}, & \text{kui } 16 \leq x < 19 \\ 1, & \text{kui } 19 \leq x \leq 25 \\ \frac{30-x}{5}, & \text{kui } 25 < x \leq 30 \\ 0, & \text{muul juhul} \end{cases}$$

Esitame hulga A ka joonisel 1.1.



Joonis 1.1: Normaalkaaluliste inimeste hulk hägusa hulvana.



Joonis 1.2: Tasemehulk $r = 0.5$ korral.

Definitsioon 1.2. [14] Olgu A hägus hulk ruumis X . Hulga A tasemehulgaks nimetatakse hulka, mis koosneb kõigist elementidest $x \in X$, mille kuulumisastme väärtus hägusas hulgas A on suurem või võrdne etteantud arvuga $r \in [0, 1]$, st

$$A_r = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq r\}.$$

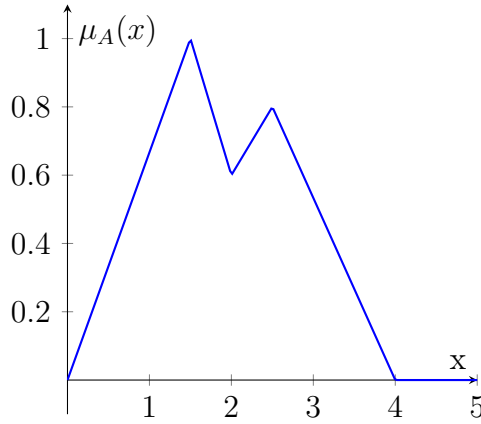
Näide 1.2. Eelmise näite tasemehulk $r = 0,5$ korral on esitatud joonisel 1.2 horisontaalteljel katkendlike joonte vahel.

Definitsioon 1.3. [6] Hägusaks arvuks nimetatakse hägusat hulka, mille kuulumisfunktsioon on defineeritud kui $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ning rahuldab järgmisi tingimusi:

1. u on ülevalt poolpidev, st $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ nii, et kui $|x - x_0| < \delta$, siis $u(x) - u(x_0) < \varepsilon$;
2. u on normaalne, st leidub selline x_0 , mille korral $u(x_0) = 1$;
3. u on hägusalt kumer, st $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$;
4. $\overline{\{x \in \mathbb{R}: u(x) > 0\}}$ on kompaktne hulk.

Edaspidi, et teha vahet hägusatel arvudel ja hulkadel, tähistame hägusad arvud tema kuulumisfunktsiooni järgi väikeste tähtedega. Tähistame siinjuures ka kõikide hägusate arvude hulka kui $\mathbb{R}_F$.

Näide 1.3. Toome näite joonisel 1.3 esitatud hägusast hulgast, mis ei ole hägus arv.



Joonis 1.3: Hägus hulk, mis ei ole hägus arv.

Paneme tähele, et kuigi joonisel kujutatud hägusa hulga kuuluvusfunktsioon on ülevalt poolpidev, normaalne ning tal on olemas kompaktne kandja, siis see ei ole hägusalt kumer.

Järgnev käsitlus põhineb artiklitel [8] ja [10] ning raamatul [2].

On hästi teada, et iga $r \in [0, 1]$ korral on hägusa arvu tasemehulk u_r kinnine intervall $u_r = [u_r^-, u_r^+]$, kus r -tasemehulga u_r otspunktid on $u_r^- = u^-(r) = \inf u_r$ ja $u_r^+ = u^+(r) = \sup u_r$.

Tõepoolest, olgu u hägus arv. Teame, et kõik hulgad u_r on mittetühjad ja tõkestatud, kuna $u_1 \neq \emptyset$ ning u_0 on tõkestatud (kompaktne hulk hulgas $\mathbb{R}$ on kinnine ja tõkestatud).

Olgu $r \in (0, 1]$. Kui $a, b \in u_r$ (sellised arvud leiduvad, sest hägus arv on normaalne), siis tasemehulga definitsiooni põhjal $u(a) \geq r$ ja $u(b) \geq r$. Siis hägusa arvu hägusalt kumeruse tõttu $u(x) \geq \min\{u(a), u(b)\} \geq r \forall x \in [a, b]$ korral. Seega sisaldab u_r kinnist intervalli $[a, b]$, järelikult u_r on kumer.

Jääb veel näidata, et u_r on kinnine. Vaatame hulka $A = \{x | u(x) < r\}$. Olgu $x_0 \in A$, st $u(x_0) < r$. Teame, et u on ülevalt poolpidev, seega leidub punktile x_0 lahtine ümbrus W , mille korral $u(x) < r$ iga $x \in W$ korral. Sellest järeldub

vahetult, et hulk A on lahtine. Seega on selle täiend kinnine, mistõttu u_r on kinnine. Kuna reaalteljel on kinnised kumerad hulgad kinnised intervallid, siis u_r on kinnine intervall iga $r \in [0, 1]$ korral.

Intervalli u_r pikkuse saame kirja panna kui $\text{diam}(u_r) = u_r^+ - u_r^-$.

Teoreem 1.4. [2] *u on hägus arv parajasti siis, kui r -tasemehulgas tema otspunkte defineerivad funktsioonid $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ rahuldavad järgmiseid tingimusi:*

1. $u^-(r) = u_r^- \in \mathbb{R}$ on tõkestatud, mittekahanev, vasakult pidev poollõigus $(0, 1]$ ja paremalt pidev punktis 0;
2. $u^+(r) = u_r^+ \in \mathbb{R}$ on tõkestatud, mittekasvav, vasakult pidev poollõigus $(0, 1]$ ja paremalt pidev punktis 0;
3. $u_1^- \leq u_1^+$.

Tõestus. Teoreem on tõestatud raamatus [2]. □

Edasi vaatleme ühte hägusa arvu erijuhtu.

Definitsioon 1.5. [7] *Kolmnurkseks hägusaks arvuks nimetatakse hägusat arvu $u = (a, b, c)$, kus $a < b < c$ ning selle kuuluvusfunktsioon on kujul*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{kui } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{kui } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kui u on kolmnurkne arv, st $u = (a, b, c)$, siis saame taseme kaupa leida kujul

$$u_r^- = a + r(b-a), \quad u_r^+ = c - r(c-b).$$

Järgnevalt vaatame peamisi aritmeetilisi tehteid hägusatel arvudel r -tasemehulgas, kus $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ ja $v_r = [v_r^-, v_r^+]$, mida on käsitletud artiklis [8].

Defineerime hagusate arvude u ja v summa $u + v$ taseme kaupa järgmiselt:

$$(u + v)_r = u_r + v_r = [u_r^- + v_r^-, u_r^+ + v_r^+].$$

Defineerime ka skalaariga $\lambda \in \mathbb{R}$ korrutamise $\lambda \cdot u$ taseme kaupa kui

$$(\lambda u)_r = \lambda u_r = \begin{cases} [\lambda u_r^-, \lambda u_r^+], & \text{kui } \lambda \geq 0 \\ [\lambda u_r^+, \lambda u_r^-], & \text{kui } \lambda < 0. \end{cases}$$

Hagusate arvude u ja v korrutis $u \cdot v$ on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)_r^- &= \min\{u_r^- v_r^-, u_r^+ v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^+\}, \\ (u \cdot v)_r^+ &= \max\{u_r^- v_r^-, u_r^+ v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^+\}. \end{aligned}$$

Sellisel defineeritud otspunktid $(u \cdot v)_r^-$ ja $(u \cdot v)_r^+$ rahuldavad teoreemi 1.4 tingimusi. Tõepoolest, kui $u, v \in \mathbb{R}_F$ on sellised, et r -tasemehulgas $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ ja $v_r = [v_r^-, v_r^+]$, siis sellest, et u_r^- ja v_r^- ning u_r^+ ja v_r^+ on tõkestatud, pidevad vasakult poollõigus $(0, 1]$ ja paremalt punktis 0, järeldub vahetult otspunktide $(u \cdot v)_r^-$ ja $(u \cdot v)_r^+$ tõkestatus ning pidevus vasakult poollõigus $(0, 1]$ ja paremalt punktis 0. Seejuures

$$(uv)_1^- = \min\{u_1^- v_1^-, u_1^+ v_1^-, u_1^- v_1^+, u_1^+ v_1^+\} \leq \max\{u_1^- v_1^-, u_1^+ v_1^-, u_1^- v_1^+, u_1^+ v_1^+\} = (uv)_1^+.$$

Näitame niid, et $(u \cdot v)_r^-$ on mittekahanev ja $(u \cdot v)_r^+$ on mittekasvav. Olgu $0 \leq r_2 < r_1 \leq 1$. Sellisel juhul, et $[u_{r_1}^-, u_{r_1}^+] \subseteq [u_{r_2}^-, u_{r_2}^+]$ ning $[v_{r_1}^-, v_{r_1}^+] \subseteq [v_{r_2}^-, v_{r_2}^+]$, siis $[(uv)_{r_1}^-, (uv)_{r_1}^+] \subseteq [(uv)_{r_2}^-, (uv)_{r_2}^+]$. Tõepoolest, olgu $x \in [(uv)_{r_1}^-, (uv)_{r_1}^+]$, seega leiduvad $y \in [u_{r_1}^-, u_{r_1}^+] \subseteq [u_{r_2}^-, u_{r_2}^+]$ ja $z \in [v_{r_1}^-, v_{r_1}^+] \subseteq [v_{r_2}^-, v_{r_2}^+]$ nii, et $x = yz$. Sellest aga järeldub vahetult, et $x = yz \in [(uv)_{r_2}^-, (uv)_{r_2}^+]$. Järelikult kehtib

$$[(uv)_{r_1}^-, (uv)_{r_1}^+] \subseteq [(uv)_{r_2}^-, (uv)_{r_2}^+] \text{ ning } (uv)_{r_1}^+ \leq (uv)_{r_2}^+ \text{ ja } (uv)_{r_2}^- \leq (uv)_{r_1}^-.$$

Sellega oleme näidanud, et teoreemi 1.4 tingimused on täidetud.

2 Hägusate funktsioonide analüüs

Selles peatükis tutvume hägusate funktsioonide, tuletise ja integraali mõistetega. Samuti tõestame mõned olulisemad nendega seotud omadused.

Definitsioon 2.1. [20] Öeldakse, et f on hägusate väärtustega funktsioon (fuzzy-valued function), kui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$, kus $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

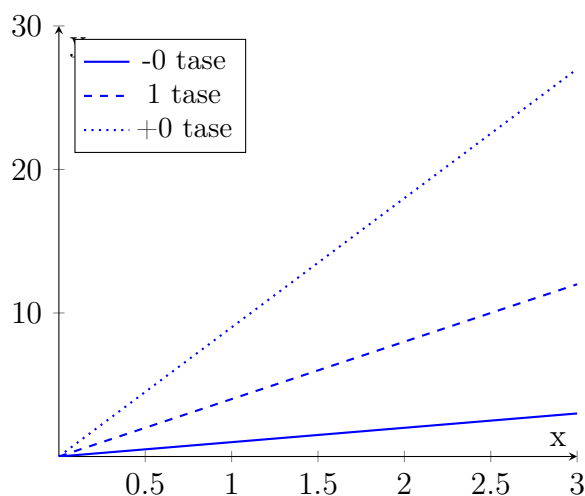
Hägusate väärtustega funktsiooni saab tasemehulkade kaupa kirjutada kujul $f(x)_r = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$, kus $f_r^-, f_r^+: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $r \in [0, 1]$.

Edaspidi nimetame hägusate väärtustega funktsiooni lihtsalt hägusaks funktsiooniks. Vaatleme ka näidet.

Näide 2.1.

$$f(x) = u^2 x,$$

kus $u = (1, 2, 3)$ on kolmnurkne hägus arv ning $x \in [0, 3]$.



Joonis 2.1: Hägusa funktsiooni $f(x) = u^2 x$ graafik.

Joonisel on kujutatud kolmnurkse hägusa funktsiooni $f(x) = (x, 4x, 9x)$ graafik. Väärtus 1 tähistab funktsiooni tuuma ehk 1-tasemehulka $f_1(x) = 4x$ ning väärtused -0 ja $+0$ määravad funktsiooni 0-tasemehulga $f_0(x) = [x, 9x]$.

Selleks, et hinnata kaugust kahe hägusa arvu vahel, defineerime Hausdorffi kauguse.

Definitsioon 2.2. [1] Hausdorffi kaugus kahe h gusa arvu vahel on määratud kujul $D: \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ning

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \max\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\},$$

kus $u_r = [u_r^-, u_r^+]$, $v_r = [v_r^-, v_r^+]$.

Defineerime ka h gusate funktsioonide piirväärtuse ja pidevuse.

Definitsioon 2.3. [1] Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ h gus funktsioon ja $x_0 \in [a, b]$. Kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow D(f(x), L) < \varepsilon),$$

siis öeldakse, et $L \in \mathbb{R}_F$ on funktsiooni f piirväärtus punktis x_0 ning kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

H gusat funktsiooni f nimetatakse pidevaks punktis x_0 , kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Defineerime h gusate funktsioonide ühtlase pidevuse.

Definitsioon 2.4. [18] H gusat funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ nimetatakse ühtlaselt pidevaks hulgas $X \subset [a, b]$, kui iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et iga $x, x' \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, kehtib v  rratus $D(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Sõnastame ka omaduse ühtlasest pidevusest, mis järeldub vahetult Heine-Cantori teoreemist.

Teoreem 2.5. [16] Kui (X, d_X) ja (Y, d_Y) on meetrilised ruumid, $f: X \rightarrow Y$ on pidev funktsioon ja X on kompaktne, siis f on ühtlaselt pidev.

Tõestus. Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid. Oletame vastuv  teliselt, et f pole ühtlaselt pidev. Siis leidub selline $\epsilon_0 > 0$, et iga $\delta > 0$ puhul saab valida

punktid $\bar{x}, \bar{x'} \in X$ omadusega $d_X(\bar{x}, \bar{x'}) < \delta$ ja $d_Y(f(\bar{x}), f(\bar{x'})) \geq \epsilon_0$. Suvalise $k \in \mathbb{N}$ puhul leiame arvule $\frac{1}{k}$ vastavad punktid $x_k \in X$ ja $x'_k \in X$ nii, et

$$d_X(x_k, x'_k) < \frac{1}{k}, \quad d_Y(f(x_k), f(x'_k)) \geq \epsilon_0.$$

Kuna X on kompaktne, siis leidub jadadel koonduv osajada, st $x_{k_j} \rightarrow x \in X$ ja $x'_{k_j} \rightarrow x' \in X$. Kuna $k \rightarrow \infty$ korral $d_X(x_k, x'_k) \rightarrow 0$, siis $x = x'$. Kuna f on pidev, siis sellisel juhul $d_Y(f(x_{k_j}), f(x'_{k_j})) \rightarrow 0$, mis on vastuolus sellega, et $d_Y(f(x_k), f(x'_k)) \geq \epsilon_0$. Seega on funktsioon ühtlaselt pidev meetrilises ruumis X . $\square$

Järeldus 2.6. [18] Kui hāgus funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ on pidev lõigus $[a, b]$, siis on see selles lõigus ka ühtlaselt pidev.

Tõestus. Tulemus järeldub vahetult eelmisest teoreemist, kuna kinnised intervallid on kompaktsed ja moodustavad kauguse $d(x, y) = |x - y|$ suhtes meetrilise ruumi. Samuti on raamatu [2] põhjal $(\mathbb{R}_F, D)$, kus D on Hausdorffi kaugus, meetriline ruum. $\square$

Jārgnevalt vaatleme, kuidas on hāgusatel funktsioonidel defineeritud tuletis. Selleks on meil kõigepealt tarvis kahe hāgusa arvu vahet. Eelnevalt oleme defineerinud hāgusate arvude korrutamise skalaariga ja nende vahelise summa. Paneme tähele, et hāgusa arvu u korral r -tasemehulgas ($u_r = [u_r^-, u_r^+]$) $(-1)u_r = [-u_r^+, -u_r^-]$, mis ei ole võrdne u_r vastandelemendiga.

Kui proovida defineerida $a - b := a + (-1)b$ ja üritada seda kasutada tuletise defineerimisel, siis on funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ tuletiseks punktis $x \in [a, b]$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

r -tasemehulgas on lugeja võrdne

$$\begin{aligned}[f(x+h) - f(x)]_r &= [f_r^-(x+h), f_r^+(x+h)] + (-1)[f_r^-(x), f_r^+(x)] \\ &= [f_r^-(x+h) - f_r^+(x), f_r^+(x+h) - f_r^-(x)].\end{aligned}$$

Kuna f on hägus funktsioon, siis üldiselt $f_r^-(x) \neq f_r^+(x)$, mistõttu protsessis $h \rightarrow 0$

$$f_r^-(x+h) - f_r^+(x) \nrightarrow 0 \text{ ja } f_r^+(x+h) - f_r^-(x) \nrightarrow 0.$$

Seega, korrutades mõlemad otspunktid suurusega $\frac{1}{h}$ ning minnes piirile $h \rightarrow 0$, siis tuletise definitsiooni piirväärtuses lugeja piirväärtus pole 0, aga nimetaja läheneb nullile. Järelikult neid piirväärtuseid kas ei eksisteeri või need on lõpmatud, mistõttu selline vahe ei ole sobivaks viisiks tuletise defineerimiseks.

Seega tuleb kõigepealt vaadata erinevaid mooduseid, kuidas kahe hägusa arvu vahet leida. Järgnevalt vaatame Hukuhara vahet ning anname taseme kaupa valemi selle reaalseks kasutamiseks.

Definitsioon 2.7. [2] *Hukuhara vahe (H -vahe, tähistatud kui $\ominus_H$) hägusate arvude u ja v vahel on defineeritud järgmiselt:*

$$u \ominus_H v = w \Leftrightarrow u = v + w.$$

Kui $u \ominus_H v$ eksisteerib, siis saame selle r -tasemehulga järgi kirjutada kui

$$(u \ominus_H v)_r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+].$$

Selleks, et edaspidi kergema vaevaga H -vahe eksisteerimist kontrollida, esitame järgmise tulemuse.

Järeldus 2.8. [13] *Olgu $u, v \in \mathbb{R}_F$. H -vahe $u \ominus_H v$ eksisteerib parajasti siis, kui iga $r \in [0, 1]$ korral kehtivad järgmised väited:*

$$(i) \text{ diam}(u_r) \geq \text{diam}(v_r);$$

(ii) $u_r^- - v_r^-$ on mittekahanev r järgi;

(iii) $u_r^+ - v_r^+$ on mittekasvav r järgi.

Tõestus. Väide järeldub vahetult definitsioonist 2.7 ja teoreemist 1.4. $\square$

Järgmised lemmad sõnastavad mõned H-vahe omadused.

Lemma 2.9. [11] Olgu $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}_F$.

(i) Kui $a \ominus_H b$ eksisteerib ja $\lambda \in \mathbb{R}$, siis eksisteerib $\lambda \cdot a \ominus_H \lambda \cdot b$ ja

$$\lambda \cdot a \ominus_H \lambda \cdot b = \lambda \cdot (a \ominus_H b).$$

(ii) Kui $a \ominus_H c$ eksisteerib, siis eksisteerib ka $(a + b) \ominus_H c$ ning

$$(a + b) \ominus_H c = (a \ominus_H c) + b.$$

(iii) H-vahed $a \ominus_H c$ ja $(a \ominus_H c) \ominus_H d$ eksisteerivad parajasti siis, kui eksisteerib $a \ominus_H (c + d)$, ning $a \ominus_H (c + d) = (a \ominus_H c) \ominus_H d$.

(iv) Kui $a \ominus_H c$ ja $b \ominus_H d$ eksisteerivad, siis eksisteerib $(a + b) \ominus_H (c + d)$ ning $(a + b) \ominus_H (c + d) = (a \ominus_H c) + (b \ominus_H d)$.

(v) Kui $a \ominus_H b = c \ominus_H d + e$ ning H-vahed $a \ominus_H c$ ja $b \ominus_H d$ eksisteerivad, siis $a \ominus_H c = b \ominus_H d + e$.

Tõestus. Tõestame väite (i). Ülejäänud saadakse analoogiliselt H-vahe definitsioonist.

Olgu $a, b \in \mathbb{R}_F$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Eksisteerigu $a \ominus_H b$. Vaatame esmalt juhtu, kus $\lambda > 0$. Seega tasemehulgas, kus $r \in [0, 1]$, saame

$$\begin{aligned} \lambda[a \ominus_H b]_r &= \lambda[a_r^- - b_r^-, a_r^+ - b_r^+] \\ &= [\lambda(a_r^- - b_r^-), \lambda(a_r^+ - b_r^+)] = [\lambda a_r^- - \lambda b_r^-, \lambda a_r^+ - \lambda b_r^+] \\ &= [[\lambda a]_r^- - [\lambda b]_r^-, [\lambda a]_r^+ - [\lambda b]_r^+] = [\lambda a \ominus_H \lambda b]_r. \end{aligned}$$

Kui $\lambda < 0$, siis r -tasemehulgas

$$\begin{aligned}\lambda[a \ominus_H b]_r &= \lambda[a_r^- - b_r^-, a_r^+ - b_r^+] \\ &= [\lambda \cdot (a_r^+ - b_r^+), \lambda \cdot (a_r^- - b_r^-)] = [\lambda a_r^+ - \lambda b_r^+, \lambda a_r^- - \lambda b_r^-] \\ &= [[\lambda a]_r^- - [\lambda b]_r^-, [\lambda a]_r^+ - [\lambda b]_r^+] = [\lambda a \ominus_H \lambda b]_r.\end{aligned}$$

Seega vastav H-vahe eksisteerib ja võrdus kehtib. $\square$

Lemma 2.10. [11] Olgu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ning $u \in \mathbb{R}_F$.

(i) Kui $\lambda > \mu \geq 0$, siis $\lambda u \ominus_H \mu u = (\lambda - \mu)u$.

(ii) Kui $\lambda < \mu \leq 0$, siis $\lambda u \ominus_H \mu u = (\lambda - \mu)u$.

Tõestus. Tõestame väite (i), väite (ii) tõestus on analoogiline. Olgu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ning $u \in \mathbb{R}_F$ sellised, et $\lambda > \mu \geq 0$. Sellisel juhul saame võrratust $(\lambda - \mu) > 0$ arvestades järgmised võrdused:

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu)u_r &= (\lambda - \mu)[u_r^-, u_r^+] = [(\lambda - \mu)u_r^-, (\lambda - \mu)u_r^+] \\ &= [\lambda u_r^- - \mu u_r^-, \lambda u_r^+ - \mu u_r^+] = [\lambda u \ominus_H \mu u]_r.\end{aligned}$$

Väide (i) on tõestatud. $\square$

Lemma 2.11. [11] Kui $a, b, c, d \in \mathbb{R}_F$ on sellised, et H-vahed $a \ominus_H b$, $a \ominus_H c$ ja $b \ominus_H c$ eksisteerivad, siis eksisteerib ka $(a \ominus_H c) \ominus_H (b \ominus_H c)$ ning

$$(a \ominus_H c) \ominus_H (b \ominus_H c) = a \ominus_H b.$$

Tõestus. Väide järeldub vahetult H-vahe definitsioonist. $\square$

Lemma 2.12. [11] Olgu $f, g: (0, h_0) \rightarrow \mathbb{R}_F$ sellised, et H-vahed $f(h) \ominus_H g(h)$ eksisteerivad iga $h \in (0, h_0)$ korral. Olgu $u, v \in \mathbb{R}_F$ sellised, et $\lim_{h \rightarrow 0+} f(h) = u$, $\lim_{h \rightarrow 0+} g(h) = v$. Sellisel juhul eksisteerib $u \ominus_H v$ ning $\lim_{h \rightarrow 0+} (f(h) \ominus_H g(h)) = u \ominus_H v$.

Tõestus. Väide on tõestatud artiklis [11]. $\square$

Järgnevalt defineerime H -vahele vastava tuletise.

Definitsioon 2.13. [4] Funktsiooni $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ nimetatakse Hukuhara diferentseeruvaks punktis $x_0 \in (a, b)$, kui iga piisavalt väikese $h > 0$ korral eksisteerivad Hukuhara vahed $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)$ ja $f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ ning leidub element $f'(x_0) \in \mathbb{R}_F$, nii et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0).$$

Hägasat arvu $f'(x_0)$ nimetatakse funktsiooni f Hukuhara tuletiseks punktis x_0 .

Seega võime raamatu [2] põhjal kirjutada, et $[f'(x_0)]_r = [(f_r^-)'(x_0), (f_r^+)'(x_0)]$.

Näide 2.2. Vaatame hägasate väärtustega funktsiooni $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_F$, mis on defineeritud taseme kaupa järgmiselt: $[f(x)]_r = [(1-x)r, (1-x)(2-r)]$. Urime, kas funktsioon on H -diferentseeruv. Selleks vaatame, kas piisavalt väikese $h > 0$ korral eksisteerib esmalt H -vahe $f(x+h) \ominus_H f(x)$:

$$\text{diam}[f_r(x+h)] = (1-x-h)(2-2r) \not\geq (1-x)(2-2r) = \text{diam}[f_r(x)].$$

Järelduse 2.8 põhjal H -vahet ei eksisteeri. Seega pole funktsioon H -diferentseeruv.

Selleks, et vähendada kirjutamise mahtu järgmistes tõestustes ja peatükkides, ütleme, et funktsioon f rahuldab tingimust

(H_1) , kui piisavalt väikese $h > 0$ korral eksisteerivad punktis x järgmised H -vahed: $f(x+h) \ominus_H f(x)$ ja $f(x) \ominus_H f(x-h)$.

Kuna H -tuletist aga ei eksisteeri kõikidel juhtudel, vaatame ka teist viisi, kuidas hägasate funktsioonide tuletist saab defineerida.

Definitsioon 2.14. [11] Olgu $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ ja $x_0 \in (a, b)$. Öeldakse, et f on diferentseeruv punktis x_0 , kui leidub element $f'(x_0) \in \mathbb{R}_F$ nii, et

(i) iga piisavalt väikese $h > 0$ korral eksisteerivad H -vahed $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)$,

$f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ ning piirväärtused

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

või

(ii) iga piisavalt väikese $h > 0$ korral eksisteerivad H -vahed $f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)$, $f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)$ ning piirväärtused

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0).$$

Paneme tähele, et selles definitsioonis on tingimus (i) samaväärne Hukuhara diferentseeruvusega. Seetõttu nimetame edaspidi tingimust (i) rahuldavat funktsiooni H -diferentseeruvaks ning tingimust (ii) rahuldavat funktsiooni (ii)-diferentseeruvaks.

Tõestame ka mõned tuletise tehetega seotud omadused.

Lemma 2.15. [3] Olgu $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ H -diferentseeruvad punktis $x \in (a, b)$, siis $f + g$ on H -diferentseeruv punktis x ning $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Tõestus. Olgu f, g H -diferentseeruvad punktis x . Näitame, et nende summa $f + g$ on H -diferentseeruv punktis x . Kuna f, g on H -diferentseeruvad, siis eksisteerivad H -vahed $f(x + h) \ominus_H f(x)$, $f(x) \ominus_H f(x - h)$, $g(x + h) \ominus_H g(x)$, $g(x) \ominus_H g(x - h)$. Seega saame lemma 2.9(iv) põhjal, et

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x + h) + g(x + h) \ominus_H (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x + h) \ominus_H f(x) + g(x + h) \ominus_H g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x + h) \ominus_H f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x + h) \ominus_H g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x) + g(x) \ominus_H (f(x-h) + g(x-h))}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Väide on tõestatud. □

Teoreem 2.16. [3] Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruv ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ (g diferentseeruvus täpsustatakse hiljem).

(i) Kui $f(x) \cdot f'(x) > 0$ ja g on H -diferentseeruv, siis $f \cdot g$ on H -diferentseeruv ning

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(ii) Kui $f(x) \cdot f'(x) < 0$, g on H -diferentseeruv ja $f \cdot g$ rahuldab tingimust (H_1) punktis x , siis $f \cdot g$ on H -diferentseeruv ning

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) \ominus_H (-f'(x)) \cdot g(x).$$

(iii) Kui $f(x) \cdot f'(x) > 0$, g on (ii)-diferentseeruv ja $f \cdot g$ rahuldab tingimust (H_1) punktis x , siis $f \cdot g$ on H -diferentseeruv ja

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \ominus_H (-f(x)) \cdot g'(x).$$

Tõestus. Tõestame väite (i). Väidete (ii) ja (iii) tõestused on analoogilised.

Kuna f on pidev, siis piisavalt väikse $h > 0$ korral on $f(x), f(x-h)$ ja $f(x+h)$ sama märgiga. Kuna g on punktis x H -diferentseeruv, siis eksisteerib H -vahe $g(x+h) \ominus_H g(x)$ piisavalt väikese $h > 0$ korral. Seega leidub $u_1(x, h) \in \mathbb{R}_F$ selline, et $g(x+h) = g(x) + u_1(x, h)$. Samuti $f(x+h) = f(x) + v_1(x, h)$, kus $v_1(x, h) = f(x+h) - f(x)$ omab piisavalt väikese $h > 0$ korral sama märki, mis $f(x)$ ja $f(x+h)$. Seega

$$f(x+h) \cdot g(x+h) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot u_1(x, h) + v_1(x, h) \cdot g(x) + v_1(x, h) \cdot u_1(x, h).$$

Järelikult eksisteerib H-vahe $f(x+h) \cdot g(x+h) \ominus_H f(x) \cdot g(x)$ ning

$$f(x+h) \cdot g(x+h) \ominus_H f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot u_1(x, h) + v_1(x, h) \cdot g(x) + v_1(x, h) \cdot u_1(x, h).$$

Korrutades saadut suurusega $\frac{1}{h}$ ning minnes piirile $h \rightarrow 0+$, saame

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \ominus_H f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x) \cdot u_1(x, h) + v_1(x, h) \cdot g(x) + v_1(x, h) \cdot u_1(x, h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x)u_1(x, h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{v_1(x, h)g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{v_1(x, h)u_1(x, h)}{h}. \end{aligned}$$

Seega, pidevuse ja H-tuletise definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \ominus_H f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) + f'(x) \lim_{h \rightarrow 0+} u_1(x, h). \end{aligned}$$

Kuna g on pidev, siis viimane liidetav on võrdne nulliga. Analoogiliselt saame

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x) \cdot g(x) \ominus_H f(x-h) \cdot g(x-h)}{h} = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Väide (i) on tõestatud. □

Lemma 2.17. [11] Olgu $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ H-diferentseeruvad funktsioonid ning eksisteerigu $f \ominus_H g$ selles intervallis. Kui $f \ominus_H g$ rahuldab iga $x \in (a, b)$ korral tingimust (H_1) , siis $f \ominus_H g$ on H-diferentseeruv ja $(f \ominus_H g)'(x) = f'(x) \ominus_H g'(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.

Tõestus. Olgu f, g H-diferentseeruvad punktis x . Seega eksisteerivad piisavalt väikese $h > 0$ korral H-vahed

$$f(x+h) \ominus_H f(x), f(x) \ominus_H f(x-h), g(x+h) \ominus_H g(x), g(x) \ominus_H g(x-h)$$

ehk leiduvad $u_1(x, h), u_2(x, h), v_1(x, h), v_2(x, h)$ sellised, et

$$f(x + h) = f(x) + u_1(x, h), f(x) = f(x - h) + u_2(x, h)$$

ja

$$g(x + h) = g(x) + v_1(x, h), g(x) = g(x - h) + v_2(x, h).$$

Kuna $f \ominus_H g$ eksisteerib ning rahuldab tingimust (H_1) punktis x , siis eksisteerivad ka piisavalt väikese $h > 0$ korral H-vahed

$$(f(x+h) \ominus_H g(x+h)) \ominus_H (f(x) \ominus_H g(x)) \text{ ja } (f(x) \ominus_H g(x)) \ominus_H (f(x-h) \ominus_H g(x-h)).$$

Seega leiduvad $w_1(x, h), w_2(x, h) \in \mathbb{R}_F$ sellised, et

$$f(x + h) \ominus_H g(x + h) = (f(x) \ominus_H g(x)) + w_1(x, h)$$

ja

$$f(x) \ominus_H g(x) = (f(x - h) \ominus_H g(x - h)) + w_2(x, h).$$

Siis H-vahe definitsiooni ja lemma 2.9(v) põhjal

$$f(x + h) \ominus_H f(x) = g(x + h) \ominus_H g(x) + w_1(x, h)$$

ja

$$f(x) \ominus_H f(x - h) = g(x) \ominus_H g(x - h) + w_2(x, h).$$

Korrutades viimast suurusega $\frac{1}{h}$ ja minnes piirile $h \rightarrow 0+$, saame eelnevast, et $f'(x) = g'(x) + (f \ominus_H g)'(x)$, millest vahetult H-vahe definitsiooni põhjal saame $(f \ominus_H g)'(x) = f'(x) \ominus_H g'(x)$. $\square$

Teoreem 2.18. [3] Olgu $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ sellised, et f on (i)-diferentseeruv ja g (ii)-diferentseeruv või f on (ii)-diferentseeruv ja g (i)-diferentseeruv intervallis (α, β) . Kui H-vahe $f(x) \ominus_H g(x)$ eksisteerib iga $x \in (\alpha, \beta)$ korral, siis $f \ominus_H g$ on

diferentseeruv ning iga $x \in (\alpha, \beta)$ korral

$$(f \ominus_H g)'(x) = f'(x) + (-1)g'(x).$$

Tõestus. Olgu f (ii)-diferentseeruv, siis eksisteerib H -vahe $f(x) \ominus_H f(x+h)$, st leidub $u_1(x, h)$ selline, et $f(x) = f(x+h) + u_1(x, h)$. Analoogiliselt, et g on (i)-diferentseeruv, siis leidub $v_1(x, h)$ selline, et $g(x+h) = g(x) + v_1(x, h)$.

Seega saame, et $f(x) + g(x+h) = f(x+h) + g(x) + u_1(x, h) + v_1(x, h)$. Kuna eelduse põhjal H -vahed $f(x) \ominus_H g(x)$ ja $f(x+h) \ominus_H g(x+h)$ eksisteerivad sellise $h > 0$ korral, et $x+h \in (\alpha, \beta)$, siis saame

$$f(x) \ominus_H g(x) = f(x+h) \ominus_H g(x+h) + u_1(x, h) + v_1(x, h).$$

Viimane aga tähendab, et leidub H -vahe $(f(x) \ominus_H g(x)) \ominus_H (f(x+h) \ominus_H g(x+h))$ ning

$$(f(x) \ominus_H g(x)) \ominus_H (f(x+h) \ominus_H g(x+h)) = u_1(x, h) + v_1(x, h).$$

Sarnase arutelu põhjal saame näidata, et eksisteerivad $u_2(x, h)$ ja $v_2(x, h)$ sellised, et

$$f(x-h) = f(x) + u_2(x, h),$$

$$g(x) = g(x-h) + v_2(x, h),$$

ning $(f(x-h) \ominus_H g(x-h)) \ominus_H (f(x) \ominus_H g(x)) = u_2(x, h) + v_2(x, h)$.

Seejuures paneme tähele, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u_1(x, h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u_2(x, h)}{(-h)} = f'(x)$$

ja

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{v_1(x, h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{v_2(x, h)}{(-h)} = (-1)g'(x).$$

Seega, korrutades lõpuks võrdused suurusega $-\frac{1}{h}$ ning minnes piirile $h \rightarrow 0+$, saame, et $f \ominus_H g$ on (ii)-diferentseeruv ja

$$(f \ominus_H g)'(x) = f'(x) + (-1) \cdot g'(x).$$

Analoogiliselt saab tõestada väite juhul, kui f on (i)-diferentseeruv ning g (ii)-diferentseeruv. $\square$

Toome sisse ka Riemanni integraali mõiste hägusatel funktsioonidel.

Definitsioon 2.19. [2] Funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$, kus $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nimetatakse Riemanni mõttes integreeruvaks lõigus $[a, b]$, kui leidub element $I \in \mathbb{R}_F$, millel on järgmine omadus:

iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et iga jaotuse $d: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ korral, mille norm $\Delta(d) < \delta$, ja iga punktide valiku $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, korral kehtib

$$D \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), I \right) < \varepsilon.$$

Sel juhul tähistatakse

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

ja nimetatakse seda hägusaks Riemanni integraaliks.

Veelgi enam, raamatu [2] põhjal saab kirjutada, et r -tasemehulgal kehtib pideva hägusa funktsiooni korral

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]_r = \left[\int_a^b f_r^-(x) dx, \int_a^b f_r^+(x) dx \right].$$

Nimelt saame Riemanni summad kirjutada taseme kaupa kujul

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right]_r = \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_r^-(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \sum_{i=0}^{n-1} f_r^+(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right].$$

Järelduse 2.6 põhjal on lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon selles lõigus ühtlaselt

pidev. Raamatu [2] põhjal hädusate väärtustega funktsiooni ühtlane pidevus tähendab seda, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et suvaliste $x, x_0 \in [a, b]$ korral, kui $|x - x_0| < \delta$, siis

$$D(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Hausdorffi kauguse definitsioonist järeldub, et

$$\sup_{r \in [0,1]} \max \left\{ |f_r^-(x) - f_r^-(x_0)|, |f_r^+(x) - f_r^+(x_0)| \right\} < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

mis annab

$$|f_r^\pm(x) - f_r^\pm(x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{iga } r \in [0, 1] \text{ korral.}$$

Valime lõigu $[a, b]$ jaotuse d sellise, et $\Delta(d) < \delta$. Kuna iga pidev funktsioon saavutab oma maksimum- ja miinimumväärtused, siis leiduvad

$$M_{i,r}^\pm = \max\{f_r^\pm(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ ja } m_{i,r}^\pm = \min\{f_r^\pm(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Järelikult $M_{i,r}^\pm - m_{i,r}^\pm < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Seega

$$S(f_r^\pm, d) - s(f_r^\pm, d) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon,$$

kus $S(f_r^\pm, d) := \sum_{i=0}^{n-1} M_{i,r}^\pm \Delta x_i$ ja $s(f_r^\pm, d) := \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,r}^\pm \Delta x_i$. Järelikult, kuna lõigus pidevad reaalarvulised funktsioonid on selles lõigus integreeruvad, siis leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta > 0$, mis ei sõltu r väärtustest.

Esitame ka mõned Riemanni integraaliga seotud omadused.

Lemma 2.20. [3] Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ pidev hädus funktsioon. Sellisel juhul $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ on H -diferentseeruv ning $F'(x) = f(x)$.

Tõestus. Väide järeldub vahetult tähelepanekust Riemanni integraali esitusest ta-

semehulkade järgi

$$[F(x)]_r = \left[\int_a^b f_r^-(x) dx, \int_a^b f_r^+(x) dx \right]$$

ning H-tuletise esitusest r -tasemehulgas

$$[F'(x)]_r = [(F_r^-)'(x), (F_r^+)'(x)].$$

□

Teoreem 2.21. [10] Olgu F pidev hägus funktsioon intervallis (a, b) ning

$$u(x) = v \ominus_H \int_0^x -F(t) dt,$$

kus $v \in \mathbb{R}_F$ on selline, et eelmine H -vahe eksisteerib iga $x \in (a, b)$ korral. Siis on u (ii)-diferentseeruv ja $u'(x) = F(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.

Tõestus. Olgu $x_0 \in (a, b)$ ja $h > 0$ piisavalt väike 0-lähedane arv. Seega

$$\text{diam}[u_r(x)] = \text{diam}[v_r] - \int_0^x \text{diam}[F_r(t)] dt.$$

Kuna F on pidev, siis vastavalt lemmale 2.20 on $\int_0^x F(t) dt$ H-diferentseeruv ja $\int_0^x \text{diam}[F_r(t)] dt$ on mittekahanev muutuja x suhtes iga $r \in [0, 1]$ korral. Seega on $\text{diam}[u_r(x)]$ mittekasvav punktis x iga $r \in [0, 1]$ korral. Järelikult eksisteerivad järgmised H-vahed

$$\begin{aligned} u(x_0) \ominus_H u(x_0 + h) &= - \int_{x_0}^{x_0+h} F(t) dt, \\ u(x_0 - h) \ominus_H u(x_0) &= - \int_{x_0-h}^{x_0} F(t) dt. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{h \rightarrow 0+} D\left(\frac{u(x_0) \ominus_H u(x_0 + h)}{(-h)}, F(x_0)\right) = \lim_{h \rightarrow 0+} D\left(\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} F(t) dt}{h}, F(x_0)\right) = 0,$$

kuna F on pidev, $g(x) = \int_0^x F(t) dt$ on H-diferentseeruv ning $g'(x) = F(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral. Analoogiliselt saame, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} D\left(\frac{u(x_0 - h) \ominus_H u(x_0)}{(-h)}, F(x_0)\right) = 0.$$

Seega $u'(x) = F(x)$ ja väide on tõestatud. □

3 Vaadeldavad hägusad diferentsiaalvõrrandid

Hägasate diferentsiaalvõrrandite varasem käsitus põhineb Hukuhara tuletisel, mille formaliseerisid Puri ja Ralescu. See lähenemine võimaldab defineerida hägasate funktsioonide tuletisi klassikalise diferentsiaalarvutuse analoogina [2]. Kuigi viimane tähelepanek lihtsustab ülesannete lahendamist, siis tänapäeval on kasutusel ka teised viisid tuletise defineerimiseks [12].

Hukuhara tuletise kasutamise peamine puudus seisneb selles, et hägusa diferentsiaalvõrrandi lahendite ebamäärasus kasvab pidevalt, mis ei võimalda perioodiliste lahendite ega asümptootiliste nähtuste olemasolu [2]. Seega on hägasate diferentsiaalvõrrandite uurimine võrreldes tavaliste diferentsiaalvõrranditega käsitletav iseseisva distsipliinina [11].

Käesolevas töös uurime hägasate esimest järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamist Hukuhara tuletise järgi, otsides lahendeid järgmistele mitte-ekvivalentsetele diferentsiaalvõrranditele, mida on käsitletud artiklis [11]:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x), & x \in I, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(x) + (-a(x))y(x) = b(x), & x \in I, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

ja

$$\begin{cases} y'(x) + (-b(x)) = a(x)y(x), & x \in I, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

Eeldame ülesannetes (1)–(3), et $y_0 \in \mathbb{R}_F$ ning funktsioonid $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $b: I \rightarrow \mathbb{R}_F$ on pidevad intervallis I , kus I on $(0, T)$ tüüpi intervall, milles y on diferentseeruv ning y on pidev poollõiguses $[0, T)$.

4 Diferentsiaalvõrrandite lahendid

Definitsioon 4.1. [10] Olgu hägus funktsioon $y: I \rightarrow \mathbb{R}_F$ selline, et eksisteerib Hukuhara tuletis y' . Kui y ja y' rahuldavad algtingimusega ülesannet, siis öeldakse, et y on vastava algtingimusega ülesande lahend.

Järgnevates alapeatükkides uurime lahendite olemasolu ja kuju juhtudel, kui $a < 0$ ja $a > 0$ (juhul $a \equiv 0$ on tulemused samad, mis juhtudel $a < 0$ ja $a > 0$) [11]. Vaatleme esmalt (1) tüüpi ülesandeid.

Tähistame peatükis läbivalt

$$f_1(x) := \cosh\left(\int_0^x a(z) dz\right) \text{ ja } f_2(x) := \sinh\left(\int_0^x a(z) dz\right).$$

4.1 Ülesande (1) lahendid

Järgmine teoreem esitab valemid ülesande (1) lahendamiseks. Artiklis [10] on pikemalt selgitatud lahendite kuju tekkimist.

Teoreem 4.2. [11]

(i) Kui $a(x) > 0$ intervallis $x \in I$, siis

$$y(x) = e^{\int_0^x a(z) dz} \left(y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)$$

on diferentsiaalvõrrandi (1) lahend intervallis I .

(ii) Kui $a(x) < 0$ intervallis $x \in I$, siis

$$\begin{aligned} y(x) = & f_1(x) \left(y_0 + \int_0^x \left[b(s) f_1(s) \ominus_H b(s) f_2(s) \right] ds \right) \\ & + f_2(x) \left(y_0 + \int_0^x \left[b(s) f_1(s) \ominus_H b(s) f_2(s) \right] ds \right) \end{aligned}$$

on ülesande (1) lahend selles intervallis eeldusel, et H -vahed eksisteerivad.

Tõestus. Tõestame väite eraldi juhtudena $a > 0$ ja $a < 0$.

Juht (i).[3] Olgu $a > 0$. Lemma 2.20 ja 2.15 põhjal on

$$y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds$$

H-diferentseeruv ning

$$\left(y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)' = b(x) \cdot e^{-\int_0^x a(z) dz}.$$

Kui tähistame $f(x) = e^{\int_0^x a(z) dz}$ ning $g(x) = y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds$, siis sellest, et $a(x) > 0$ iga $x \in I$ korral, saame $f(x)f'(x) > 0$ ning seega teoreemi 2.16 põhjal $f \cdot g$ on H-diferentseeruv. Järelikult $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ ning y rahuldab võrrandit.

Juht (ii). Olgu $a < 0$ ning

$$g(x) = y_0 + \int_0^x \left[b(s)f_1(s) \ominus_H b(s)f_2(s) \right] ds.$$

Siis on $f_1(x) \cdot f_1'(x) > 0$, $f_2(x) \cdot f_2'(x) > 0$. Lemma 2.20 põhjal on g H-diferentseeruv ning

$$g'(x) = b(x)f_1(x) \ominus_H b(x)f_2(x).$$

Seega, teoreemi 2.16 põhjal on $f_1(x) \cdot g(x)$ ja $f_2(x) \cdot g(x)$ H-diferentseeruvad funktsioonid. Siis

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot g)'(x) &= f_1'(x) \cdot g(x) + f_1(x) \cdot g'(x), \\ (f_2 \cdot g)'(x) &= f_2'(x) \cdot g(x) + f_2(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Lemmade 2.16 ja 2.15 põhjal on y H-diferentseeruv ja

$$y'(x) = f_1'(x) \cdot g(x) + f_1(x) \cdot g'(x) + f_2'(x) \cdot g(x) + f_2(x) \cdot g'(x).$$

Paneme tähele, et

$$f_1'(x) \cdot g(x) + f_2'(x) \cdot g(x) = a(x)y(x) \text{ ja } f_1(x) \cdot g'(x) + f_2(x) \cdot g'(x) = b(x).$$

Seega $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.

Teoreem on tõestatud. □

4.2 Näited ülesande (1) lahendustest

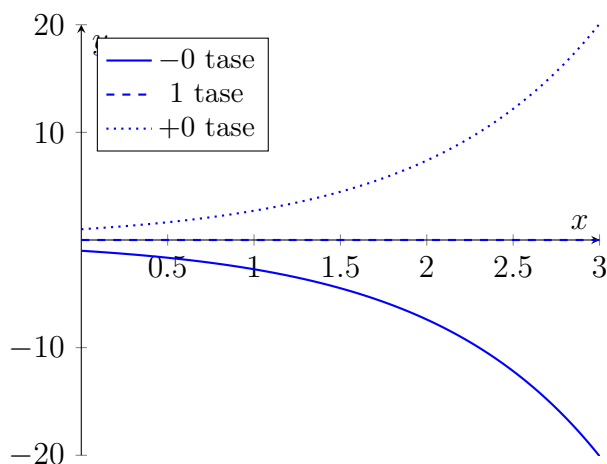
Üldiselt on suhteliselt kerge lahendada ülesannet (1), kui $a > 0$. Vaatame järgmist näidet.

Näide 4.1. *Vaatleme ülesannet*

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), \\ y(0) = (-1, 0, 1). \end{cases}$$

Kuna $a = 1 > 0$, siis võib kasutada teoreemi 4.2(i). Seega saame lahendiks

$$y(x) = e^{\int_0^x dz} \left(y_0 + \int_0^x 0 \cdot e^{-\int_0^s dz} ds \right) = e^x y_0.$$



Joonis 4.1: Ülesande lahendi y graafik.

Vaatleme aga keerulisemat näidet, kui $a < 0$.

Näide 4.2. Olgu ülesandeks leida lahend järgmisele diferentsiaalvõrrandile

$$\begin{cases} y'(x) = -3x^2 y(x) + x^2(1, 2, 3), \\ y(0) = (-1, 0, 1), \end{cases}$$

kus $x \geq 0$.

Sellisel juhul $a(x) = -3x^2 \leq 0$, mistõttu peame kasutama teoreemi 4.2(ii).

Kuna $f_1(x) = \cosh(x^3)$ ja $f_2(x) = -\sinh(x^3)$, siis lahendiks on

$$\begin{aligned} y(x) = & \cosh(x^3) \left(y_0 + \int_0^x \left[s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3) \right] ds \right) \\ & - \sinh(x^3) \left(y_0 + \int_0^x \left[s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3) \right] ds \right), \end{aligned}$$

kui eksisteerib H -vahe $s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3)$.

Näitame, et see leidub. Kasutame selleks järeldust 2.8. Selleks leiame taseme-
hulgas, kus $r \in [0, 1]$, vastavate liikmete väärtused otspunktide kaudu, arvestades,
et $(1, 2, 3)_r = [1 + r, 3 - r]$ ja $(-1, 0, 1)_r = [r - 1, r + 1]$.

$$\begin{aligned} u_r(s) &= \left[s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \right]_r = [s^2(1 + r) \cosh(s^3), s^2(3 - r) \cosh(s^3)], \\ v_r(s) &= \left[-s^2(1, 2, 3) \sinh(s^3) \right]_r = [-s^2(3 - r) \sinh(s^3), -s^2(1 + r) \sinh(s^3)]. \end{aligned}$$

Seega, et

$$\text{diam}(u_r(s)) = s^2(2 - 2r) \cosh(s^3) \geq s^2(2 - 2r) \sinh(s^3) = \text{diam}(v_r(s)),$$

$$u_r^-(s) - v_r^-(s) = s^2(2e^{s^3} - e^{-s^3} + re^{-s^3}) \text{ on kasvav } r \text{ järgi ja}$$

$$u_r^+(s) - v_r^+(s) = s^2(2e^{s^3} + e^{-s^3} - re^{-s^3}) \text{ on kahanev } r \text{ järgi,}$$

siis H -vahe eksisteerib ning

$$\begin{aligned} & \left[s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3) \right]_r \\ &= [s^2(2e^{s^3} - e^{-s^3} + re^{-s^3}), s^2(2e^{s^3} + e^{-s^3} - re^{-s^3})]. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^x (s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3)) ds \right]_r \\
&= \left[\int_0^x s^2(2e^{s^3} + (r-1)e^{-s^3}) ds, \int_0^x s^2(2e^{s^3} + (1-r)e^{-s^3}) ds \right] \\
&= \left[\frac{2}{3}(e^{x^3} - 1) + \frac{1 - e^{-x^3}}{3}(-1, 0, 1) \right]_r.
\end{aligned}$$

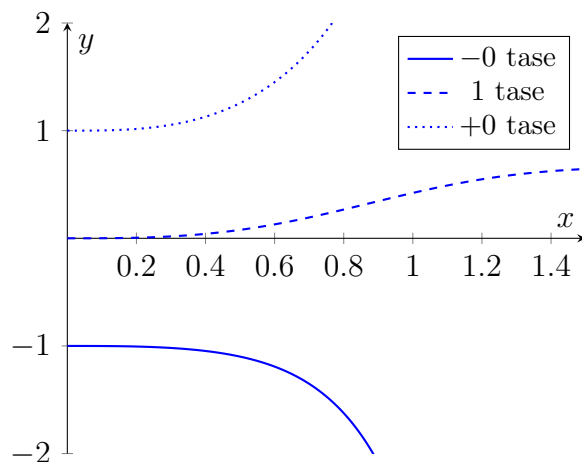
Liidame sellele kolmnurkse arvule $(-1, 0, 1)$

$$\begin{aligned}
& (-1, 0, 1) + \int_0^x \left[s^2(1, 2, 3) \cosh(s^3) \ominus_H (-s^2)(1, 2, 3) \sinh(s^3) \right] ds \\
&= \frac{2}{3}(e^{x^3} - 1) + \frac{4 - e^{-x^3}}{3}(-1, 0, 1).
\end{aligned}$$

Seega saame lahendiks

$$\begin{aligned}
y(x) &= \cosh(x^3) \left(\frac{2}{3}(e^{x^3} - 1) + \frac{4 - e^{-x^3}}{3}(-1, 0, 1) \right) \\
&+ (-1) \sinh(x^3) \left(\frac{2}{3}(e^{x^3} - 1) + \frac{4 - e^{-x^3}}{3}(-1, 0, 1) \right) \\
&= \frac{2}{3}(1 - e^{-x^3}) + \frac{4e^{x^3} - 1}{3}(-1, 0, 1).
\end{aligned}$$

Esitame ka lahendi graafiku



Joonis 4.2: Ülesande lahendi y graafik.

4.3 Ülesande (2) lahendid

Uurime nüüd, missugused on ülesande (2) lahendid.

Teoreem 4.3. [11]

(i) Kui $a < 0$ ja

$$y(x) = e^{\int_0^x a(z) dz} \left(y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)$$

rahuldab tingimust (H_1) intervallis I , siis see on ülesande (2) lahend selles intervallis.

(ii) Kui $a > 0$,

$$y(x) = f_1(x) \left(y_0 + \int_0^x [b(s)f_1(s) - b(s)f_2(s)] ds \right) \\ \ominus_H f_2(x) \left(y_0 + \int_0^x [b(s)f_1(s) - b(s)f_2(s)] ds \right)$$

eeldusel, et vastav H -vahe eksisteerib, ning y rahuldab tingimust (H_1) iga $x \in I$ korral, siis y on ülesande (2) lahend intervallis I .

Tõestus. Vaatame eraldi mõlemat juhtu.

Juht (i). [3] $a < 0$. Eeldame, et y rahuldab tingimust (H_1) . Kui tähistame $f(x) = e^{\int_0^x a(z) dz}$ ning $g(x) = y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds$, siis sellest, et $a(x) < 0$ iga $x \in I$, saame $f(x)f'(x) < 0$. Lemma 2.20 ja 2.15 põhjal on $y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds$ H -diferentseeruv ning

$$\left(y_0 + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)' = b(x) \cdot e^{-\int_0^x a(z) dz}.$$

Seega teoreemi 2.16(ii) põhjal

$$y'(x) = f(x) \cdot g'(x) \ominus_H (-f'(x)) \cdot g(x) = b(x) \ominus_H (-a(x))y(x)$$

ehk

$$y'(x) + (-a(x)) \cdot y(x) = b(x)$$

ning y rahuldab võrrandit.

Juht (ii). [11] $a > 0$. Olgu

$$g(x) = y_0 + \int_0^x [b(s)f_1(s) - b(s)f_2(s)] ds.$$

Siis on $f_1(x) \cdot f_1'(x) > 0$, $f_2(x) \cdot f_2'(x) > 0$ ning lemma 2.20 põhjal on $g(x)$ H-diferentseeruv ja

$$g'(x) = b(x)f_1(x) - b(x)f_2(x).$$

Teoreemi 2.16(i) põhjal on $f_1(x) \cdot g(x)$ ja $f_2(x) \cdot g(x)$ H-diferentseeruvad funktsioonid. Kuna y rahuldab tingimust (H_1) iga $x \in I$ korral, siis teoreemi 2.17 põhjal on y H-diferentseeruv. Kusjuures

$$\begin{aligned} y'(x) &= (f_1 \cdot g \ominus_H (-f_2) \cdot g)'(x) = (f_1 \cdot g)'(x) \ominus_H (-f_2 \cdot g)'(x) \\ &= (f_1'(x) \cdot g(x) + f_1(x) \cdot g'(x)) \ominus_H (-f_2'(x) \cdot g(x) - f_2(x) \cdot g'(x)). \end{aligned}$$

Siis lemma 2.9(i, iv) põhjal

$$\begin{aligned} &y'(x) + (-a(x))y(x) \\ &= (f_1'(x) \cdot g(x) + f_1(x) \cdot g'(x)) \ominus_H (-f_2'(x) \cdot g(x) - f_2(x) \cdot g'(x)) \\ &+ (-a(x))(f_1(x) \cdot g(x) \ominus_H (-f_2(x)) \cdot g(x)) \\ &= (f_1'(x) \cdot g(x) + f_1(x) \cdot g'(x) + (-a(x))f_1(x) \cdot g(x)) \\ &\ominus_H (-f_2'(x) \cdot g(x) - f_2(x) \cdot g'(x) + a(x)f_2(x) \cdot g(x)). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et järgmised H -vahed eksisteerivad:

$$\begin{aligned} & (f'_1(x) \cdot g(x) + (-a(x))f_1(x) \cdot g(x)) \ominus_H (-f'_2(x) \cdot g(x) + a(x)f_2(x) \cdot g(x)) \\ &= (a(x)f_2(x) \cdot g(x) + (-a(x))f_1(x) \cdot g(x)) \\ & \ominus_H ((-a(x))f_1(x) \cdot g(x) + a(x)f_2(x) \cdot g(x)) = 0 \end{aligned}$$

ning $f_1(x) \cdot g'(x) \ominus_H (-f_2(x)) \cdot g'(x) = b(x)$. Seega, lemma 2.9 põhjal

$$\begin{aligned} & y'(x) + (-a(x))y(x) \\ &= (f'_1(x) \cdot g(x) + (-a(x))f_1(x) \cdot g(x)) \ominus_H (-f'_2(x) \cdot g(x) + a(x)f_2(x) \cdot g(x)) \\ &+ f_1(x) \cdot g'(x) \ominus_H (-f_2(x)) \cdot g'(x) = 0 + b(x) = b(x). \end{aligned}$$

Teoreem 4.3 on tõestatud. □

4.4 Näited ülesande (2) lahendustest

Vaatleme järgmiseid näiteid.

Näide 4.3. *Vaatleme ülesannet*

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = (1, 2, 3), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Paneme tähele, et $a = 1 > 0$, mistõttu kasutame teoreemi 4.3(ii). Arvestades, et $f_1(x) = \cosh(x)$ ja $f_2(x) = \sinh(x)$, saame ülesande lahendiks

$$\begin{aligned} y(x) &= \cosh(x) \left(0 + \int_0^x \left[(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s) \right] ds \right) \\ &\ominus_H -\sinh(x) \left(0 + \int_0^x \left[(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s) \right] ds \right) \end{aligned}$$

eeldusel, et vastav H -vahe eksisteerib ning y rahuldab tingimust (H_1) iga $x > 0$

korral. Kuna $(1, 2, 3)$ tasemehulga saame kirjutada kujul $[1 + r, 3 - r]$, siis

$$\begin{aligned} & \left[(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s) \right]_r \\ &= [(1 + r) \cosh(s) - (3 - r) \sinh(s), (3 - r) \cosh(s) - (1 + r) \sinh(s)] \\ &= [e^s r - e^s + 2e^{-s}, 2e^{-s} + e^s - re^s] = [2e^{-s} + e^s(-1, 0, 1)]_r. \end{aligned}$$

Leiame integraali

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^x [(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s)] ds \right]_r \\ &= \left[\int_0^x (e^s r - e^s + 2e^{-s}) ds, \int_0^x (-e^s r + e^s + 2e^{-s}) ds \right] \\ &= [-2e^{-x} + 2 + (e^x - 1)(-1, 0, 1)]_r. \end{aligned}$$

Enne H -vahe eksisteerimise näitamist korrutame saadud integraali väärtuse kor-
dajatega, tähistades

$$\begin{aligned} u(x) &:= \cosh(x) \left(0 + \int_0^x [(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s)] ds \right) \\ &= \cosh(x)(-2e^{-x} + 2 + (e^x - 1)(-1, 0, 1)), \\ v(x) &:= -\sinh(x) \left(0 + \int_0^x [(1, 2, 3) \cosh(s) - (1, 2, 3) \sinh(s)] ds \right) \\ &= -\sinh(x)(-2e^{-x} + 2 + (e^x - 1)(-1, 0, 1)). \end{aligned}$$

Seejuures H -vahe $u \ominus_H v$ eksisteerib ning

$$y(x) = u(x) \ominus_H v(x) = 2e^x - 2 + (1 - e^{-x})(-1, 0, 1).$$

Selleks, et viimane oleks lahend r -tasemehulgas, peab y rahuldama tingimust (H_1) ,
st peavad eksisteerima $y(x + h) \ominus_H y(x)$, $y(x) \ominus_H y(x - h)$. Kasutame järeldust
2.8:

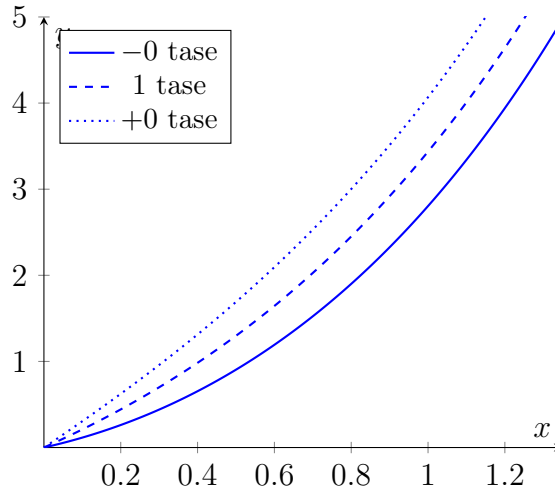
$$(i) \quad \text{diam}[y_r(x + h)] = (1 - r)(1 - e^{-x-h}) - (r - 1)(1 - e^{-x-h}) \geq$$

$$(1-r)(1-e^{-x}) - (r-1)(1-e^{-x}) = \text{diam}[y_r(x)],$$

(ii) $y_r^-(x+h) - y_r^-(x) = 2e^{x+h} + (1-e^{-x-h})(r-1) - 2e^x - (1-e^{-x})(r-1)$ on r järgi kasvav,

(iii) $y_r^+(x+h) - y_r^+(x) = 2e^{x+h} + (1-e^{-x-h})(1-r) - 2e^x - (1-e^{-x})(1-r)$ on r järgi kahanev.

Seega eksisteerib $y(x+h) \ominus_H y(x)$. Analoogiliselt saab näidata, et eksisteerib $y(x) \ominus_H y(x-h)$. Seega on ülesande lahendiks $y(x) = 2e^x - 2 + (1-e^{-x})(-1, 0, 1)$ ning selle graafik on kujul



Joonis 4.3: Ülesande lahendi y graafik.

Näide 4.4. Vaatleme ülesannet piirkonnas $x \geq 0$

$$\begin{cases} y'(x) + e^{-x}y(x) = 0, \\ y(0) = (-1, 0, 1). \end{cases}$$

Kuna $a = -e^{-x} < 0$, siis 4.3 põhjal on lahendiks

$$y(x) = e^{\int_0^x -e^{-z} dz} \left((-1, 0, 1) + \int_0^x 0 e^{\int_0^s e^{-x} dz} ds \right) = e^{e^{-x}-1}(-1, 0, 1),$$

kui see rahuldab tingimust (H_1) . Paneme tähele, et viimane ei rahulda seda, sest ei eksisteeri $y(x+h) \ominus_H y(x)$. Tõepoolest, järelduses 2.8 pole rahuldatud tingimus

(i):

$$\text{diam}[y_r(x+h)] = 2(1-r)e^{e^{-x-h}-1} \not\geq 2(1-r)e^{e^{-x}-1} = \text{diam}[y_r(x)].$$

Seega pole saadud y H -diferentseeruv. Saab näidata, et ülesandel puudub H -lahend.

4.5 Ülesande (3) lahendid

Ülesande (3) lahendite kuju on esitatud järgmises teoreemis.

Teoreem 4.4. [11]

(i) Kui $a > 0$ ja

$$y(x) = e^{\int_0^x a(z) dz} \left(y_0 \ominus_H \int_0^x (-b(s)) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)$$

rahuldab tingimust (H_1) intervallis I , siis see on ülesande (3) lahend selles intervallis.

(ii) Olgu $a < 0$ ja

$$\begin{aligned} y(x) = & f_1(x) \left(y_0 \ominus_H (-1) \int_0^x [b(s)f_1(s) \ominus_H b(s)f_2(s)] ds \right) \\ & + f_2(x) \left(y_0 \ominus_H (-1) \int_0^x [b(s)f_1(s) \ominus_H b(s)f_2(s)] ds \right) \end{aligned}$$

eeldusel, et vastavad H -vahed eksisteerivad. Kui y rahuldab tingimust (H_1) iga $x \in I$ korral, siis y on H -lahend ülesandele (3) intervallis I .

Tõestus. Vaatame 2 erinevat juhtu, kui $a > 0$ ja $a < 0$.

Juht (i). [3] Olgu $a > 0$ ning defineerime funktsioonid $f(x) = e^{\int_0^x a(z) dz}$ ning $g(x) = y_0 \ominus_H \int_0^x (-b(s)) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds$. Sellisel juhul näeme, et $f(x) \cdot f'(x) > 0$. Lemma 2.20 ja teoreemi 2.18 põhjal on g (ii)-diferentseeruv ja

$$\left(y_0 \ominus_H \int_0^x (-b(s)) e^{-\int_0^s a(z) dz} ds \right)' = b(x) e^{-\int_0^x a(z) dz}.$$

Eelduse põhjal y rahuldab tingimust (H_1) , seega teoreemi 2.16(iii) eeldused on täidetud. Seega saame, et

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \ominus_H (-b(x)).$$

Viimane on aga H -vahe definitsiooni põhjal samaväärne sellega, et

$$y'(x) + (-b(x)) = a(x) \cdot y(x),$$

mis tähendabki, et y on ülesande (3) lahend.

Juht (ii). [11] Olgu $a < 0$ ning olgu $y(x) = f_1(x) \cdot g(x) + f_2(x) \cdot g(x)$, kus g on defineeritud järgmiselt:

$$g(x) = y_0 \ominus_H (-1) \int_0^x \left[b(s)f_1(s) \ominus_H b(s)f_2(s) \right] ds.$$

Tõestame, et y on H -diferentseeruv ja ülesande (3) lahendiks, st

$$\begin{aligned} y'(x) &= f_1'(x) \cdot g(x) + f_2'(x) \cdot g(x) \ominus_H -[f_1(x) \cdot g'(x) + f_2(x) \cdot g'(x)] \\ &= a(x)y(x) \ominus_H (-b(x)). \end{aligned}$$

Kuna y rahuldab intervallis tingimust (H_1) , leidub $w_1(x, h) \in \mathbb{R}_F$ nii, et

$$\begin{aligned} y(x+h) \ominus_H y(x) &= f_1(x+h) \cdot g(x+h) + f_2(x+h) \cdot g(x+h) \\ \ominus_H [f_1(x) \cdot g(x) + f_2(x) \cdot g(x)] &= w_1(x, h) \end{aligned}$$

piisavalt väikese nullilähedase $h > 0$ korral.

Seejuures teoreemi 2.21 põhjal on funktsioon g (ii)-diferentseeruv. Järelikult

leidub $v_1(x, h) \in \mathbb{R}_F$ selline, et $g(x) = g(x + h) + v_1(x, h)$. Seega

$$\begin{aligned} w_1(x, h) &= f_1(x + h) \cdot g(x + h) + f_2(x + h) \cdot g(x) \ominus_H [f_1(x) \cdot g(x) + f_2(x) \cdot g(x)] \\ &= f_1(x + h) \cdot g(x + h) + f_2(x + h) \cdot g(x) \\ &\ominus_H [f_1(x) \cdot (g(x + h) + v_1(x, h)) + f_2(x) \cdot (g(x + h) + v_1(x, h))]. \end{aligned}$$

Lemma 2.10 põhjal eksisteerivad H-vahed

$$\begin{aligned} f_1(x + h) \cdot g(x + h) \ominus_H f_1(x)g(x + h) &= [f_1(x + h) - f_1(x)]g(x + h) \\ f_2(x + h) \cdot g(x + h) \ominus_H f_2(x)g(x + h) &= [f_2(x + h) - f_2(x)]g(x + h). \end{aligned}$$

Seega, lemma 2.9 (iii) põhjal saame kirjutada, et

$$\begin{aligned} w_1(x, h) &= [f_1(x + h) \cdot g(x + h) + f_2(x + h) \cdot g(x) \ominus_H (f_1(x) \cdot g(x + h) \\ &+ f_2(x) \cdot g(x + h))] \ominus_H [f_1(x) \cdot v_1(x, h) + f_2(x) \cdot v_1(x, h)]. \end{aligned}$$

Jõudsime selleni, et eksisteerib H-vahe

$$f_1(x + h) \cdot g(x + h) + f_2(x + h) \cdot g(x) \ominus_H [f_1(x) \cdot g(x + h) + f_2(x) \cdot g(x + h)].$$

Teisalt saame g (ii)-diferentseeruvuse ja lemma 2.9 (i) põhjal, et

$$\begin{aligned} f_1(x)g(x) \ominus_H f_1(x)g(x + h) &= f_1(x)[g(x) \ominus_H g(x + h)], \\ f_2(x)g(x) \ominus_H f_2(x)g(x + h) &= f_2(x)[g(x) \ominus_H g(x + h)]. \end{aligned}$$

Seetõttu eksisteerib lemma 2.9 (iv) põhjal ka H-vahe

$$f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x) \ominus_H [f_1(x)g(x + h) + f_2(x)g(x + h)].$$

Näidatud H-vahede eksisteerimise tõttu saame nüüd lemmade 2.11, 2.10 ja 2.9 (i, iv) põhjal, et

$$\begin{aligned}
y(x+h) \ominus_H y(x) &= f_1(x+h) \cdot g(x+h) + f_2(x+h) \cdot g(x+h) \\
&\ominus_H (f_1(x) \cdot g(x+h) + f_2(x) \cdot g(x+h)) \ominus_H [f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x) \\
&\ominus_H (f_1(x)g(x+h) + f_2(x)g(x+h))] \\
&= (f_1(x+h) - f_1(x))g(x+h) + (f_2(x+h) - f_2(x))g(x+h) \\
&\ominus_H [f_1(x)(g(x) \ominus_H g(x+h)) + f_2(x)(g(x) \ominus_H g(x+h))].
\end{aligned}$$

Korrutades saadud avaldist suurusega $\frac{1}{h}$ ning minnes piirile $h \rightarrow 0+$, saame lemma 2.12 põhjal

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y(x+h) \ominus_H y(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0+} \left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} g(x+h) + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} g(x+h) \right. \\
&\quad \left. \ominus_H \left[-f_1(x) \frac{g(x) \ominus_H g(x+h)}{-h} + (-f_2(x)) \frac{g(x) \ominus_H g(x+h)}{-h} \right] \right) \\
&= f'_1(x) \cdot g(x) + f'_2(x) \cdot g(x) \ominus_H -[f_1(x) \cdot g'(x) + f_2(x) \cdot g'(x)] \\
&= a(x)y(x) \ominus_H (-b(x)),
\end{aligned}$$

nagu oligi tarvis näidata. Analoogiliselt saab näidata, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y(x) \ominus_H y(x-h)}{h} = a(x)y(x) \ominus_H (-b(x)).$$

Seega on y H-diferentseeruv ning rahuldab võrrandit.

Teoreem on tõestatud. □

4.6 Näited ülesande (3) lahendustest

Näide 4.5. Vaatleme ülesannet, mis on välja toodud artiklis [11].

$$\begin{cases} y'(x) + (-xy_0) = 2xy(x), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

kus $y_0 = (-1, 0, 1)$. Kuna $a(x) = 2x > 0$, kui $x > 0$, siis teoreemi 4.4 (i) põhjal on lahend kujul

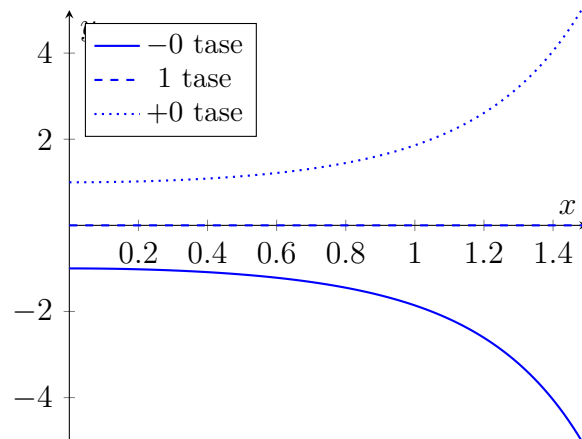
$$y(x) = e^{\int_0^x 2z dz} \left(y_0 \ominus_H \int_0^x (-sy_0) e^{-\int_0^s 2z dz} ds \right) = e^{x^2} \left(y_0 \ominus_H \int_0^x (-sy_0) e^{-s^2} ds \right).$$

Leiame integraali väärtuse $\int_0^x (-sy_0) e^{-s^2} ds = y_0 \frac{1 - e^{-x^2}}{2}$.

Leides vastava H -vahe, saame

$$\left[y_0 \ominus_H \int_0^x (-sy_0) e^{-s^2} ds \right]_r = \left[\frac{1}{2}(r-1)(1+e^{-x^2}), \frac{1}{2}(1-r)(1+e^{-x^2}) \right].$$

Korrutades viimast veel e^{x^2} -ga, saame, et lahend on kujul $y(x) = \frac{1}{2}(1+e^{x^2})y_0$, kui eeldus on täidetud. On lihtne näidata, et intervallis $x > 0$ on tingimus (H_1) täidetud. Seega on y lahend sellisele ülesandele.



Joonis 4.4: Ülesande lahendi y graafik.

Näide 4.6. Vaatleme ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) + (1, 2, 3) = -y(x), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

kus $y_0 = (-1, 0, 1)$. Kuna $a = -1 < 0$, siis teoreemi 4.4 (ii) põhjal on lahend, kui

see leidub, kujul

$$y(x) = \cosh(x) \left(y_0 \ominus_H (-1) \int_0^x \left[-(1, 2, 3) \cosh(s) \ominus_H (1, 2, 3) \sinh(s) \right] ds \right) \\ - \sinh(x) \left(y_0 \ominus_H (-1) \int_0^x \left[-(1, 2, 3) \cosh(s) \ominus_H (1, 2, 3) \sinh(s) \right] ds \right).$$

Seejuures eksisteerib integraalilune H -vahe:

$$-(1, 2, 3) \cosh(s) \ominus_H (1, 2, 3) \sinh(s) = -2e^s + (-1, 0, 1)e^{-s}.$$

Leiame integraali

$$\left[\int_0^x \left[-(1, 2, 3) \cosh(s) \ominus_H (1, 2, 3) \sinh(s) \right] ds \right]_r \\ = \left[\int_0^x (re^{-s} - 2e^s - e^{-s}) ds, \int_0^x (-re^{-s} - 2e^s + e^{-s}) ds \right] \\ = [-re^{-x} - 2e^x + e^{-x} + r + 1, re^{-x} - 2e^x - e^{-x} - r + 3] \\ = [2 - 2e^x + (1 - e^{-x})y_0]_r.$$

Seega saame

$$(-1, 0, 1) \ominus_H (-1) \int_0^x \left[-(1, 2, 3) \cosh(s) \ominus_H (1, 2, 3) \sinh(s) \right] \\ = 2 - 2e^x + e^{-x}y_0.$$

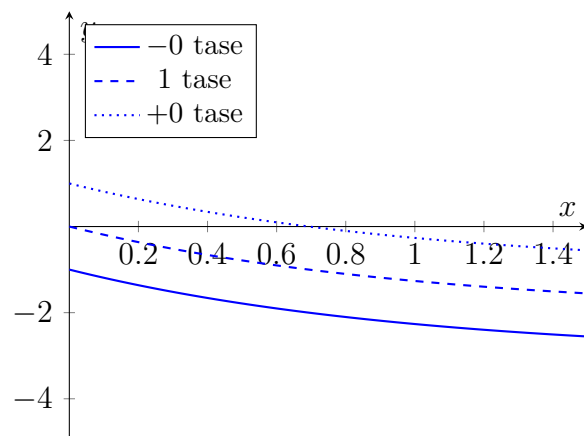
Järelikult, leides

$$\cosh(x)(2 - 2e^x + e^{-x}y_0) = e^x + e^{-x} - e^{-2x} - 1 + \frac{1 + e^{-2x}}{2}y_0, \\ \sinh(x)(2 - 2e^x + e^{-x}y_0) = e^x - e^{-x} - e^{-2x} + 1 + \frac{1 - e^{-2x}}{2}y_0$$

saame, et $[y(x)]_r = [r - 3 + 2e^{-x}, -1 - r + 2e^{-x}]$ ehk $y(x) = -(1, 2, 3) + 2e^{-x}$.

Lõpuks tuleb kontrollida, kas y rahuldab tingimust (H_1) . Selleks piisab tähele

panna, et $y(x+h)\ominus_H y(x) = 2e^{-x-h} - 2e^{-x}$ ning $y(x)\ominus_H y(x-h) = 2e^{-x} - 2e^{-x+h}$.



Joonis 4.5: Ülesande lahendi y graafik.

5 Hägusate diferentsiaalvõrrandite rakendused

Sarnaselt harilike diferentsiaalvõrranditega on ka hägusad diferentsiaalvõrrandid kasulikud erinevate eluliste ülesannete lahendamiseks. Eriti osutub viimane otsustavaks, kui tahame vaadata mõnda parameetrit väärtuste intervallina. Vaatame järgnevalt mõnda hägusate esimest järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite rakendusvaldkonda.

1. Newtoni jahtumisseadus

Vaatleme vastavat ülesannet artikli [19] eeskujul, kus teemat on täpsemalt käsitletud.

Newtoni jahtumisseaduse kohaselt muutub keha soojushulk kiirusega, mis on võrdeline keha enda ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega. Kui T_* on ümbritseva keskkonna temperatuur ja T on keha temperatuur ajahetkel t , siis saame seda olukorda modelleerida esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi abil järgmiselt:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_*), \\ T(0) = T_0, \end{cases}$$

kus k on süsteemi iseloomustav konstant ja $T_0, T_* \in \mathbb{R}_F$. Seejuures märgitakse, et vastava seaduse ümberkirjutamised ülesannetena 2 ja 3 pole omavahel samaväärsed. Samuti tuuakse artiklis välja, et võime valida ükskõik millise neist lahendustest, mis peegeldab kõige paremini süsteemi tegelikku käitumist.

2. Populatsiooni kasvamise ja kahanemise mudel

Ülesannet on käsitletud näiteks artiklis [15].

Populatsiooni kasvu iseloomustab lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

kus y väljendab populatsiooni suurst ajahetkel t , k on võrdetegur, mis tähistab kasvukiirust. Reaalses elus on aga populatsiooni suurus pidevas muutumises, mistõttu on kasvukiiruse määramine ebamäärane. Järelikult võib võrdetegurit käsitleda hädusa arvuna. Seetõttu kirjeldatakse sobivat kasvu- või kahanemismudelit hädusa kontseptsiooni abil. Ülesandele antakse juurde algtingimus $y(0) = c$, kus c võib olla hädus arv.

3. Tuuma lagunemise võrrand

Tuuma lagunemise võrrandit on artiklis [3] vaadeldud kujul

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

kus N on antud radioaktiivses materjalis sisalduvate radionukliidide arv, λ on lagunemiskonstant ja N_0 on radionukliidide algarv. Mudelis tekib määramatus juhul, kui meil on materjalis sisalduvate radionukliidide algarvu N_0 kohta ebakindel teave.

4. Ravimi sisaldus veres

Näide on võetud artiklist [5].

Olgu $C(t)$ ravimi sisaldus veres t tunni möödumisel. Vaatame seda iseloomustavat võrrandit

$$C'(t) = -kC(t),$$

kus k on positiivne võrdetegur. Oletame, et algsisaldus veres on ebamäärane ja see on kirja pandud hädusa arvuna C_0 . Ülesandes otsitakse ravimi sisaldust veres hädusa väärtusena T tunni möödumisel.

Lisaks eelnevale on hädusaid diferentsiaalvõrrandeid ja -süsteeme artikli [9] põhjal rakendatud mitmesugustes valdkondades, näiteks nafta- ja gaasitööstuse ohutusanalüüsis, malaaria, HIV-i ja COVID-19 leviku modelleerimisel, ajukasvajate levimise uurimisel, diabeedi prognoosimisel ning põllumajanduses saagikorisuse ja juhtimisprotsesside modelleerimisel.

Artiklis [12] tuuakse täiendavate võimalike rakendusvaldkondadena esile ka kiskja–saaklooma süsteemid, tootmis- ja laomudelid, investeeringute optimeerimine ning õlipalmi lehtede kasvuga seotud protsesside modelleerimine.

6 Kokkuvõte

Selles töös tutvustati põhilisi hägusate arvude ja funktsioonidega seotud mõisteid, tõestades seejuures olulisemad H -tuletise ja Riemanni integraaliga seotud omadused. Viimastele toetudes esitati ülesannete (1), (2) ja (3) jaoks eeldused lahenduvuseks ning erinevad lahendite kujud sõltuvalt reaalarvuliste väärtustega funktsiooni a märgist. Samuti tehti põhjalikult läbi iga erineva lahendikuju kohta näited ning tutvustati hägusate diferentsiaalvõrrandite rakendusi.

Töö põhilise nõrkusena saab vaadata seda, et hägusate esimest järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks kasutati H -tuletist, mis võimaldab vaadata ülesandeid harilike diferentsiaalvõrrandite analoogina. Kuigi viimane tähelepanek lihtsustas ülesannete lahendamist, siis on kasutusel ka teistel viisidel defineeritud tuletised.

Seetõttu saaks tulevikus tööd jätkata näiteks tugevalt üldistatud Hukuhara tuletist kasutades, et uurida funktsiooni a märgist sõltuvalt ka (ii)-lahendeid. Samuti saab eraldi uurida mõne teistmoodi defineeritud vahega tuletisi, näiteks gH -tuletisega seotud lahendeid. Kuna väga paljud elulised ülesanded pole lähendatavad esimest järku lineaarsete võrranditega, saab tööd jätkata ka hägusate süsteemide või kõrgemat järku võrranditega.

Viited

- [1] Armand, A., T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh (2018). Some fundamental results on fuzzy calculus. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. **15(3)**, 27–46.
- [2] Bede, B. (2013). *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer.
- [3] Bede, B., I. J. Rudas, A. L. Bencsik (2007). First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Inf. Sci.* **177(7)**, 1648–1662.
- [4] Bede, B., S. G. Gal (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*. **151(3)**, 581–599.
- [5] Chehlabi, M., T. Allahviranloo (2018). Positive or negative solutions to first-order fully fuzzy linear differential equations under generalized differentiability. *Applied Soft Computing*. **70**, 359–370.
- [6] Darabi, P., S. Moloudzadeh, H. Khandani (2016). A numerical method for solving first-order fully fuzzy differential equation under strongly generalized H-differentiability. *Methodologies and Application*. **20**, 4085–4098.
- [7] Ebinesar, M. D. (2015). Different Types of Fuzzy Numbers and Certain Properties. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*. **6(11)**, 631–651.
- [8] Fodor, J., B. Bede (2006). Arithmetics with Fuzzy Numbers: a Comparative Overview. *Proceedings of 4th Joint Slovakian-Hungarian Symposium on Applied Machine Intelligence SAMI 2006*. 54–68.
- [9] Gazi, K. H. *et al.* (2025). A Comprehensive Literature Review of Fuzzy Differential Equations with Applications. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*. **6(1)**, 134–161.
- [10] Khastan, A., J. J. Nieto, R. Rodríguez-López (2011). Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.* **177(1)**, 20–33.

- [11] Khastan, A., R. Rodríguez-López (2016). On the solutions to first order linear fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*. **295**, 114–135.
- [12] Mazandarani, M., L. Xiu (2021). A Review on Fuzzy Differential Equations. *IEEE Access*. **9**, 62195–62211. DOI:10.1109/ACCESS.2021.3074245.
- [13] Melliani, S., M. Elomari, L. S. Chadli, R. Ettoussi (2015). Extension of Hukuhara difference in intuitionistic fuzzy set theory. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*. **21(4)**, 34–47.
- [14] Nagoor Gani, A., C. Duraisamy, C. Veeramani (2009). A Note on Fuzzy Linear Programming Problem Using L-R Fuzzy Number. *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*. **2(3)**, 93–106.
- [15] Pirzada, S. (2017). Solution of Fuzzy Growth and Decay Model. DOI:10.48550/arXiv.1712.03786.
- [16] Sánchez-Palomino, M. (2026). Kolmogorov-Arnold representation theorem and its applications to neural networks. URL: <https://hdl.handle.net/2445/228456> (vaadatud 18.05.2026).
- [17] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. **8(3)**, 338–353.
- [18] Zhang, G. (1991). Fuzzy continuous function and its properties. *Fuzzy Sets and Systems*. **43(2)**, 159–171.
- [19] Vasavi, Ch., G. Suresh Kumar, T. Srinivasa Rao, B. V. Appa Rao (2017). Application of Fuzzy Differential Equations For Cooling Problems. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*. **8(12)**, 712–721.
- [20] Wu, H. C. (1997). Fuzzy-Valued Integrals of Fuzzy-Valued Measurable Functions with Respect to Fuzzy-Valued Measures Based on Closed Intervals. *Fuzzy Sets and Systems*. **87(1)**, 65–78.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Stella Arusoo,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Hägusate esimest järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamine“, mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Stella Arusoo

27.05.2026