

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut

Jane Albre

**Dünaamilised slaidid 12. klassi matemaatikaõpiku
juurde**

Magistritöö

Juhendaja: dotsent Tiit Lepmann
Kaasjuhendaja: lektor Eno Tõnisson

Tartu 2008

Sisukord

SISSEJUHATUS	4
1 PROGRAMMI GEOGEBRA TUTVUSTUS	5
1.1 GEOGEBRA EKRAANIPIILT	5
1.2 GEOGEBRA KASUTAMISEST	6
1.3 INTERAKTIIVSETE VEEBILEHTEDE TEGEMISEST	8
1.4 KONSTRUKTSIOONI SAMM-SAMMULINE TAASESITAMINE	10
1.5 KONSTRUKTSIOONI PROTOKOLL.....	11
1.6 VEEL MÕNINGAID PROGRAMMI GEOGEBRA VÕIMALUSI	13
2 GEOGEBRA EESTIS	14
2.1 GEOGEBRA ASETUS KOOLIDES KASUTADA OLEVATE PROGRAMMIDE HULGAS	14
2.2 GEOGEBRA TÖLKIMISEST	15
3 SOOVITUSED ÕPPEMATERJALI KOOSTAMISEKS	17
3.1 TEKSTILISE INFORMATSIOONI ESITAMINE	17
3.2 GRAAFILISE INFORMATSIOONI ESITAMINE.....	18
3.3 ERINEVATE VÄRVIDE KASUTAMINE.....	20
3.4 INFO PAIGUTUS	20
3.5 INFO KOKKUSOBIVUS JA JÄRJEKINDLUS.....	21
3.6 MULTIMEEDIA HARIDUSTEOREETILISED PRINTSIIBID.....	22
4 KOMMENTAARID DÜNAAMILISTE SLAIDIDE KOHTA	24
4.1 INTEGRAAL.....	26
4.1.1 <i>Funktsiooni tuletis</i>	26
4.1.1.1 Tuletise geomeetriline vaste	26
4.1.2 <i>Algfunktsioon</i>	27
4.1.2.1 Joonis 1.2'.....	27
4.1.2.2 Joonis 1.3.....	28
4.1.3 <i>Kõvertrapetsi pindala</i>	28
4.1.3.1 Joonis 1.4'.....	28
4.1.3.2 Joonis 1.7'.....	28
4.1.4 <i>Määratud integraal</i>	29
4.1.4.1 Joonis 1.8 – 1.9.....	29
4.1.4.2 Joonis 1.10 – 1.11.....	29
4.1.5 <i>Määratud integraali omadused</i>	30
4.1.5.1 Ülesanne 52	30
4.1.6 <i>Määratud integraal piirväärtusena</i>	31
4.1.6.1 Joonis 1.22	31
4.1.7 <i>Pindala arvutamine</i>	32
4.1.7.1 Ülesanne 81	32
4.1.7.2 Ülesanne 82	32
4.1.7.3 Ülesanne 83	32
4.1.7.4 Ülesanne 84	32
4.1.7.5 Ülesanne 85	33
4.1.7.6 Ülesanne 87	33
4.1.7.7 Ülesanne 89	33
4.1.7.8 Ülesanne 91	34
4.1.7.9 Ülesanne 92	34
4.2 SIRGED JA TASANDID RUUMIS	35
4.2.1 <i>Tasandigeomeetria kordamine</i>	35
4.2.1.1 Meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas	35
4.2.1.2 Ülesanne 115.....	35
4.2.1.3 Ülesanne 116.....	36
4.2.1.4 Ülesanne 117.....	36
4.2.1.5 Ülesanne 120.....	37
4.2.1.6 Ülesanne 121'.....	37
4.2.1.7 Ülesanne 129.....	38
4.2.1.8 Ülesanne 130.....	38

4.2.1.9	Ülesanne 131	38
4.2.1.10	Ülesanne 154	39
4.2.1.11	Ülesanne 155	39
4.2.1.12	Ülesanne 156	40
4.2.2	<i>Punkti asukoha määramine ruumis</i>	40
4.2.2.1	Joonis 2.4	40
4.2.2.2	Joonis 2.5	41
4.2.2.3	Joonis 2.6	41
4.2.2.4	Joonis 2.7	41
4.2.2.5	Joonis 2.8	42
4.2.3	<i>Kahe punkti vaheline kaugus ruumis</i>	42
4.2.3.1	Joonis 2.9	42
4.2.4	<i>Sirged ruumis</i>	43
4.2.4.1	Joonis 2.10	43
4.2.4.2	Joonis 2.11	44
4.2.4.3	Joonis 2.12	44
4.2.4.4	Joonis 2.14	44
4.2.5	<i>Sirge ja tasand ruumis</i>	45
4.2.5.1	Joonis 2.15	45
4.2.5.2	Joonis 2.16	45
4.2.5.3	Joonis 1.18 a	46
4.2.5.4	Joonis 1.18 b	46
4.2.5.5	Joonis 1.18 c	47
4.2.6	<i>Sirge ja tasandi vaheline nurk</i>	47
4.2.6.1	Sirge ja tasandi vaheline nurk	47
4.2.6.2	Ülesanne 213	48
4.2.7	<i>Kaks tasandit ruumis</i>	48
4.2.7.1	Paralleelsed tasandid	48
4.2.7.2	Joonis 2.23	49
4.2.7.3	Joonis 2.24	49
4.2.8	<i>Hulknurga projektsiooni pindala</i>	50
4.2.8.1	Joonis 2.26	50
4.2.8.2	Joonis 2.27	51
4.3	LISASLAIDID	52
4.3.1.1	Silindri ruumala ja koonuse ruumala	52
4.3.1.2	Kera ruumala	53
4.3.1.3	Risttahuka ruumala	54
4.3.1.4	Kolmnurkse püstprisma ruumala	54
SUMMARY		56
KASUTATUD KIRJANDUS		57
LISA GeoGebra eestikeelne manuaal		

Sissejuhatus

Paljude õpilaste jaoks tundub matemaatika ühe raskema õppeainena koolis. Matemaatika aine abstraktsuse tõttu nõuab selle aine õpetamine rohkem kui üksnes kirjalikku ja suulist selgitamist. Vastavalt ka Clarki ja Paivio [2] duaalse kodeerimise teooriale õpitakse kahe sensoorse kanali kaudu: verbaalselt ja mitteverbaalselt (kujundlikult). Seejuures omandatakse õpitav paremini kui aktiveeritakse mõlemad süsteemid. Seega peab õppetöös verbaalsele esitusele lisanduma kujunduslik ja näitlik esitus, mis vähendab samas õpitava abstraktsust. Nägemise abil võib luua situatsioonist kiiremini ettekujutuse kui verbaalselt ja kujundlikkus aitab alati kaasa info paremale säilimisele püsivusel [6]. Seega võib öelda, et visualiseerimisel on oluline roll õppetöös. Kaasaegse infotehnoloogia kasutuselevõtuga on võimalik matemaatika õpetamist ka senisest rohkem visualiseerida.

Käesoleva magistr töö peaesmärgiks oli dünaamiliste slaidide valmistamine 12. klassi matemaatikaõpiku [5] juurde. Dünaamilise slaidi all mõistetakse elektroonilist visuaalset näitevahendit, millega on võimalik dünaamiliselt või siis etappide viisi demonstree-rida mingit seost, mõistet või ülesande lahendust. Slaidil on võimalik nn vabasid objekte muuta (näiteks: punktide asukohta, lõigu pikkust jt) ja näha, kuidas muutuvad sellest sõltuvad teised slaidil olevad objektid.

Töö autor alustas oma tööd vajaliku tarkvara otsingutega ning leidis tema arvates sobiva koolitarkvaraprogrammi GeoGebra. Antud programm on loodud spetsiaalselt koolima-temaatika õppimise ning õpetamise hõlbustamiseks. Magistr töö autor võttis endale eesmärgiks antud programm eestindada sellisel määral, et Eesti koolides oleks võimalik seda kasutada ja valminud slaidid oleksid eestikeelsed. Lisaks eestindati ka antud prog-rammi manuaal [4] ning töö autori arvates olulisemad osad GeoGebra ametlikust kodu-lehest [3].

Magistr töö raames valmisid dünaamilised slaidid 12. klassi matemaatikaõpiku [5] pea-tükkide „Integraal“ ja „Sirged ja tasandid ruumis“ jaoks. Slaidid on koostatud õpetajate-le tundides näitevahenditena kasutamiseks. Samuti on töösse lisatud mõned dünaamili-sed slaidid pöördkehade ja hulktahukate ruumalade leidmise kohta, mis valmisid kõige-pealt programmi võimaluste uurimisel. Kõik loodud dünaamilised slaidid asuvad ma-gistr töö elektroonilises osas CD-l.

Käesoleva magistritöö paberosa koosneb järgmistest osadest:

- programmi GeoGebra tutvustus, põgus ülevaade selle tõlkimisest ja asetusest teiste Eesti koolides kasutada olevate programmide seas;
- soovitused arvutipõhise õppematerjali koostamiseks, muuhulgas peatutakse informatsiooni esitamisega, värvide kasutamisega ja info paigutamise seotud küsimustele;
- kommentaarid õpetajale CD-l asuvate dünaamiliste slaidide kasutamise kohta;
- lisas asuv programmi GeoGebra eestikeelne manuaal, milles on ülevaade GeoGebra võimalustest ja kõik eestikeelses versioonis kasutatavad käsud.

1 Programmi GeoGebra tutvustus

Käesoleva peatüki eesmärgiks on anda põgus ülevaade programmist GeoGebra. Antud peatükk on täiendatud ja ümbertöötatud variant artiklist [1].

GeoGebra on koolimatemaatika tarkvara ning loodud geomeetria, algebra ja matemaatilise analüüsi õpetamise ja õppimise hõlbustamiseks nii põhikoolis kui gümnaasiumis. See on vabavaraprogramm ja kergesti kättesaadav GeoGebra ametlikult veebilehelt [3]. Programm on mitmeplatvormiline, see tähendab, et leiduvad versioonid erinevate Javat võimaldavate operatsioonisüsteemide jaoks.

GeoGebra loojaks on Markus Hohenwarter, kes alustas tegelemist selle projektiga 2001. aastal oma magistritöö raames Salzburgi Ülikoolis Austrias ja jätkas programmi arendamist oma doktoritöö osana. Tänapäevaks on GeoGebra pälvinud mitmeid rahvusvahelisi auhindu ja on tõlgitud enam kui 35 keelde. Alates 2006. aastast toimub GeoGebra arendamine USAs Floridas Atlandi Ülikoolis.

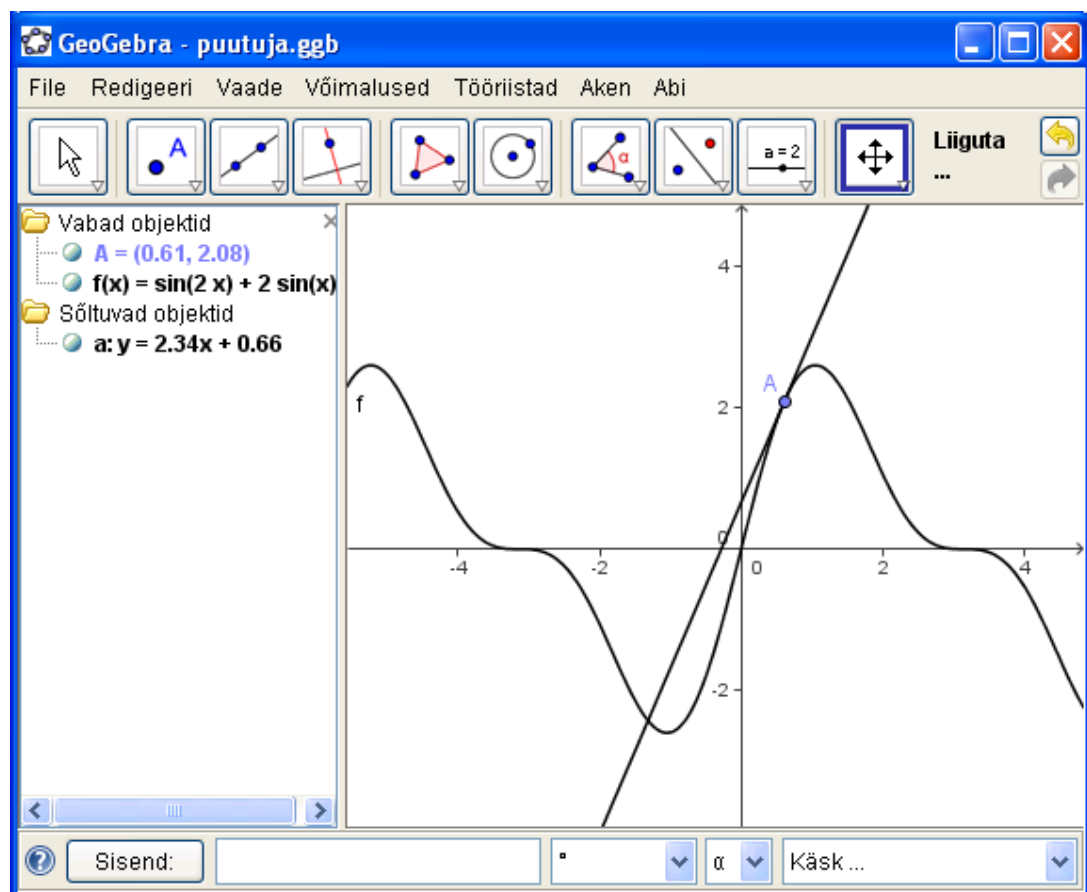
Programmiga GeoGebra on võimalik geomeetrilisi konstruktsioone teha punktide, vektorite, lõikude, sirgete, koonuselõigetega, samuti ka funktsioonidega. Konstrueeritud objekte saab hilisema töö käigus ümber defineerida või nende asukohta muuta. Võimalik on leida funktsioonide tuletisi ja integraale. Samuti leiduvad käsud näiteks polünoomi nullkohtade ja ekstreemumi leidmiseks.

1.1 GeoGebra ekraanipilt

Programmi ekraanipilt (joonis 1) on järgmine: menüüriba, nende all vasakul asub algebraken ja paremal joonestusväli ehk geomeetriaaken ning ekraani allääres asub sisendri-



ba. Algebraaknas antakse objektide algebraalne esitus. Algebraakna esimeses plokis näidatakse vabad objektid, mida saab igal hetkel muuta. Teises plokis näidatakse sõltuvad objektid, mis on konstrueeritud vabade objektide abil ja mis muutuvad üksnes siis, kui muudame vabasid objekte. Sisendribale on võimalik kirjutada algebralisi avaldisi ja käske. Joonestusväli on geomeetriselise konstruktsiooni jaoks. Ühelt poolt saab geomeetrisi objekte konstrueerida geomeetriselt nupurea ja hiire abil, saades samas algebraaknast vastava objekti algebraalise mudeli (näiteks sirge joonestusväljal ning vastav võrrand algebraaknas). Teiselt poolt võimaldab programm sisestada objekte algebraisel kujul sisendriba kaudu, andes samas vastava vaste ka joonestusväljal. Avaldis algebraaknas vastab alati objektile joonestusväljal ning vastupidi.


Joonis 1




1.2 GeoGebra kasutamisest

Keskmisel arvutikasutajal on programmi lihtne kasutada. Joonisel 1 on GeoGebra joonestusväljal funktsiooni $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ graafik ning selle puutuja suvaliselt valitud punktis A . Joonise tegemiseks toimiti järgmiselt:

1. Funktsioon sisestati sisendribale kujul $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$. Joonestusväljale tekkis funktsiooni graafik ning võrrand ilmus algebraakna vabade objektide hulka.
2. Hiirega klõpsati režiimile / nupule *Uus punkt*  ning seejärel klõpsati hiirega funktsiooni graafikul kohas, kuhu sooviti asetada punkt A. Nii saadi funktsiooni $f(x)$ graafikul hiirega vabalt lohistatav punkt A.
3. Funktsioonile punkti A puutuja joonestamiseks klõpsatakse kõigepealt režiimile *Puutujad* , seejärel punktile A ja funktsiooni $f(x)$ graafikule suvalises kohas. Tekkinud puutuja võrrand $y = 2,34x + 0,66$ ilmub algebraaknasse sõltuvate objektide hulka, sest see sõltub funktsioonist $f(x)$ ja punktist A. Puutujat saab tekitada veel sisendrealale käsku `Puutuja [f , A]` sisestades.

Valminud joonis on dünaamiline. Ülaltoodud joonise korral saab punkti A hiirega mööda funktsiooni graafikut liigutada ja jälgida, kuidas muutub puutujasirge. Selleks tuleb ainult eelnevalt sisse lülitada režiim *Liiguta* .

Objekte saab muuta nii algebraliselt kui geomeetriliselt ja jälgida muutust vastavalt geomeetria- või algebraaknas. Funktsiooni $f(x)$ algebraliseks muutmiseks tuleb teha sellel topeltklõps algebraaknas ja see avaneb redigeerimiseks. Muutus kajastub joonestusväljal. Funktsiooni graafilise muutmise all mõistetakse näiteks funktsiooni $f(x)$ hiirega lohistamist / liigutamist teise kohta ekraanil olles eelnevalt valinud režiimi *Liiguta* . Algebraaknas näidatakse funktsiooni $f(x)$ uut algebralist kuju.

Programmis GeoGebra on võimalik avada nii algebraaknas mingil objektile kui ka joonestusväljal paremaklahvimenüü (e. kohtmenüü). Sõltuvalt sellest, millisel objektile paremaklahvimenüü avada, on võimalik näiteks:

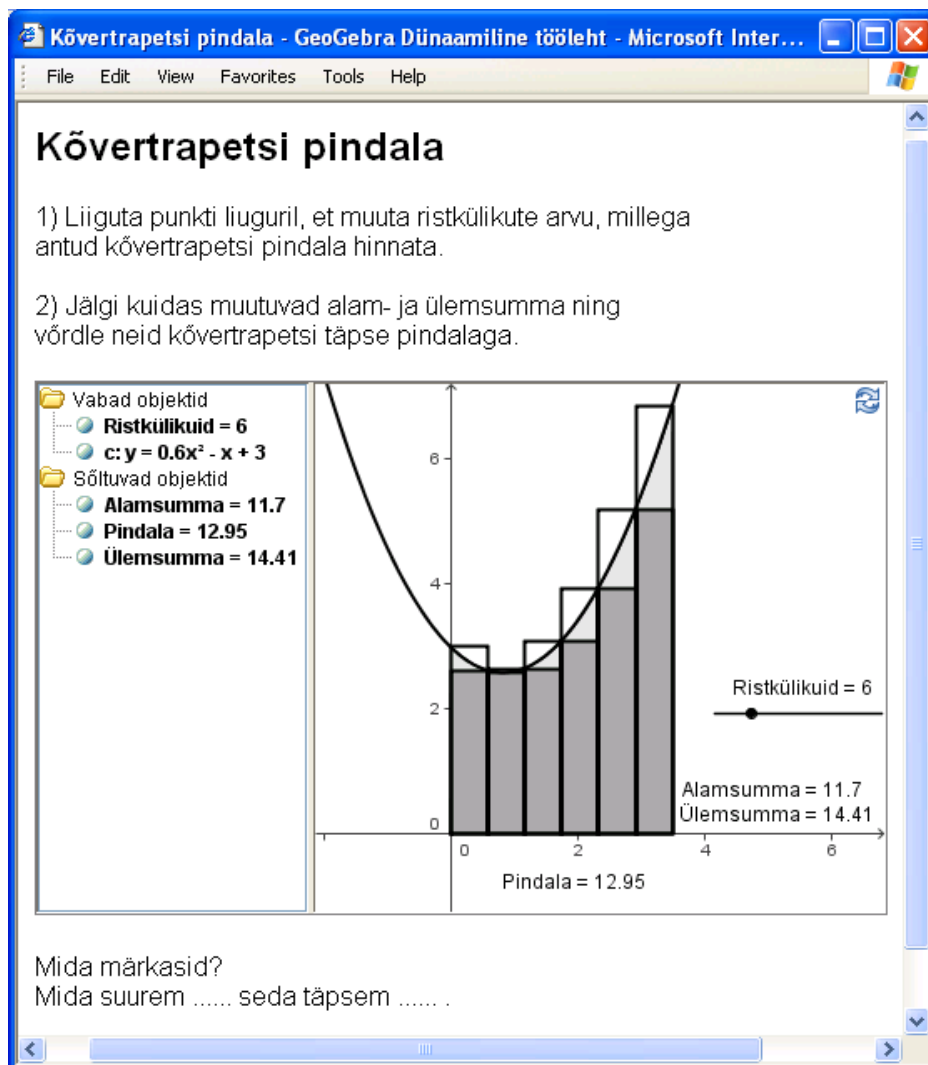
- näidata või peita antud objekti;
- näidata või peita objekti tähist;
- nimetada või defineerida objekti ümber;
- objekti kustutada;
- lülitada sisse objekti jälg, st objekti liikumisel näidatakse selle trajektoori;
- punktide korral näidata kas rist või polaarkoordinaate;
- võrrandeid näidata ilmutatud-, ilmutamata- või parameetrilisel kujul;
- muuta objekti värvi, joone jämedust ja laadi, täitevärvi;
- anda tingimused, millal objekti näidata;

- tähistada nurk ja/või lõik eriliselt (kasulik võrdsete nurkade ja võrdsete lõikude kujutamisel).

1.3 Interaktiivsete veebilehtede tegemisest

Programmi GeoGebra üheks oluliseks võimaluseks on see, et õpetaja saab väga lihtsalt ise luua interaktiivseid veebilehti ehk dünaamilisi töölehti. Nimelt on võimalik algebraaken ja joonis joonestusväljal salvestada veebilehena (joonis 2), millele saab lisada juurde teksti nii konstruktsiooni ette kui järele.


Joonis 2



Selleks, et dünaamilist töölehte kasutada, ei pea tema arvutisse olema GeoGebra installeeritud. Ainsaks tingimuseks on see, et arvutis on veebibrauser ning Java (1.4.2 või hilisem versioon). Viimast saab vabalt alla laadida veebilehelt <http://www.java.com>. Joonisel 2 on näide ühest võimalikust dünaamilisest töölehest, mis illustreerib kõvertrapetsi

pindala leidmist. Nimetame siinkohal lõikudel funktsiooni vähima (suurima) väärtusega määratud ristkülikute pindalade summat alamsummaks (ülemsummaks). Liuguri *Ristkülikuid* abil on võimalik muuta ristkülikute arvu. Ristkülikute arvu muutmisel muutuvad nii alam- kui ülemsumma väärtused. Samas on võrdluseks antud ka kõvertrapetsi täpne pindala.

Ülaltoodud dünaamilise veebilehe tegemiseks toimiti järgmiselt:

1. Sisendribale sisestatakse `Ristkülikuid=3`, mis on vabalt muudetav arv hetkeväärtusega 3. Algebraaknas avatakse arvul Ristkülikuid paremaklahvimenüü ning seejärel tekitatakse käsu *Näita objekti* abil joonestusväljale liugur, mille abil saab selle arvu väärtust muuta. Liugur on arvu graafiline esitus. Avades paremaklahvimenüü liuguril joonestusväljal, saab valida käsu *Omadused* alt liuguri minimaalset ja maksimaalset väärtust ja muutumise viisi;
2. Sisendribale sisestatakse funktsioon kujul $y=0.6x^2-x+3$;
3. Selleks, et näidata ekraanil alamsumma moodustavad ristkülikud, sisestatakse sisendribale käsk `Alamsumma[0.6x2-x+3,0,3.5,Ristkülikuid]`;
4. Käsu `Ülemsumma[0.6x2-x+3,0,3.5,Ristkülikuid]` näidatakse ülemsumma moodustavad ristkülikud. Viimaste käskude korral antakse ka alam- ja ülemsumma arvulised väärtused;
5. Täpne kõvertrapetsi pindala saadakse, kui sisestatakse sisendribale käsk `Integraal[0.6x2-x+3,0,3.5]`;
6. Edasi muudetakse paremaklahvimenüü abil ristkülikute värvi, joonte jämedust ning nimetatakse ümber alamsumma, ülemsumma ja täpse pindala tähised.
7. Režiimis *Liiguta*  lohistatakse liugur ja arvulised väärtused sobivatesse kohtadesse;
8. Lõpuks salvestatakse tööleht .html laiendiga menüüst *Fail* → *Ekspordi* → *Dünaamiline tööleht veebilehena*. Avanenud aknasse kirjutatakse pealkiri, tekst töölehe ette ja järele.

1.4 Konstruktiooni samm-sammuline taasesitamine

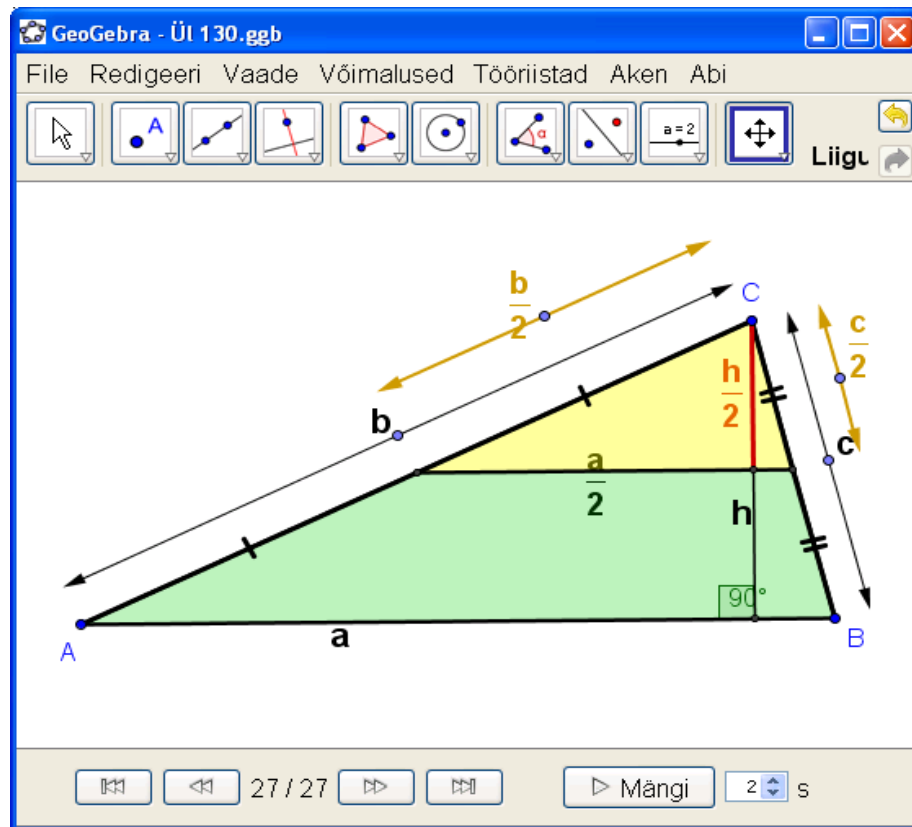
Programmi GeoGebra praktiliseks kasutamiseks annab hea võimaluse juba kord loodud konstruktiooni samm-sammuline animeerimine ehk taasesitamine. Selleks tuleb menüüst *Vaade* sisse lülitada *Konstruktiooni sammude navigeerimisriba*.





Joonisel 3 on programmi algebraaken suletud, joonestusväljale on konstrueeritud joonis 12. klassi õpiku [5] ülesande 130 jaoks.

Ülesanne 130

Millisteks kujunditeks jaotab kolmnurga kesklõik kolmnurga? Kuidas suhtuvad nende kujundite ümbermõõdud ja pindalad?

Joonis 3



Vajutades nupule *Mängi* näidatakse konstruktiooni 27 etappi kahe sekundilise intervalliga. Animeerimise kiirust saab ise määrata. Samuti saab konstruktiooni iga järgmist sammu näidata nupu  abil, eelmist sammu nupu  abil. Konstruktiooni algusesse ja lõppu viivad vastavalt nupud  ja .

1.5 Konstruktiooni protokoll

Konstruktiooni protokolliks nimetatakse tabelit, kuhu on koondatud konstruktiooni loomise kõik etapid. Samas on antud ka iga objekti (punkti, kõigu, sirge, hulknurga, teksti, nurga, vektori) kirjeldus:

- tähistus;
- definitsioon;
- objekti loomiseks vajalik käsk;
- objekti algebraline esitus (punktil koordinaadid, lõigul pikkus, hulknurgal pindala, nurgal suurus, vektoril koordinaadid).

Ülesande 130 lahendamiseks loodud joonise konstruktiooni protokoll on esitatud joonisel 4. Seal on näidatud kõigi animatsioonietappide kirjeldused. On näha, et konstruktioon algab kolmnurga tippude määramisega ning jätkub kolmnurga külgede ja kesklõigu joonestamisega. Seejärel näidatakse kolmnurk ja nelinurk, milleks kolmnurga kesk-lõik kolmnurga jaotab. Järgnevalt antakse kolmnurga kõrgus, näidatakse kõrguse ja aluse vaheline täisnurk ning näidatakse võrdsete pikkustega lõigud. Lõpuks lisatakse abi-jooned ja lõikude pikkused tekstina.


Mõned konstrueerimisel kasutatud abiobjektid on peidetud nagu näiteks punktid D , E ja F . Kuna töö autor soovis, et abijooned oleksid liigutatavad, siis kasutati tegelikult konstruktiooniks 74 käsku, millest rohkem kui pooli antud protokollis ei näidata. Nimelt on konstruktiooni protokollis võimalik määrata need etapid, mida näidatakse animatsioonis. Neid etappe nimetatakse katkestuspunktideks. Kahe katkestuspunkti vahele jäänud konstruktioonisammud näidatakse korraga teise katkestuspunktiks oleva sammu näitamisel. Tabelikujulises konstruktiooni protokollis antakse kõik konstruktiooni tegemisel kasutatud sammud. See on interaktiivne, st sinna saab samme lisada või sealt kustutada. Seejärel saab konstruktiooni uuendatult taasesitada.

Konstruktiooni protokollis on võimalik ka etappide järjekorda muuta. Näiteks võiks joonise 4 konstruktiooni protokollis viienda etapi, mis joonestab lõigu CB viia kolmandaks kohe peale punktide B ja C märkimist. Sellisel viisil võib animatsiooni järjekorda vajadusel lihtsalt muuta ega pea konstruktiooni otsast peale uuesti tegema.

Joonis 4

Konstruktsiooni protokoll					
Nr.	Nimi	Definitsioon	Käsk	Algebra	Katkestuspunkt
1	Punkt C			$C = (12.82, 3.88)$	✓
2	Punkt B			$B = (14.3, -1.74)$	✓
3	Punkt A			$A = (0.82, -1.84)$	✓
4	Lõik b	Lõik[A, C]	Lõik[A, C]	$b = 13.29$	✓
5	Lõik c	Lõik[C, B]	Lõik[C, B]	$c = 5.81$	✓
6	Lõik a	Lõik[B, A]	Lõik[B, A]	$a = 13.48$	✓
7	Lõik d	Lõik[D, E]	Lõik[D, E]	$d = 6.74$	✓
8	Lõik e1	Lõik[C, D]	Lõik[C, D]	$e1 = 6.65$	✓
9	Lõik h1	Lõik[D, A]	Lõik[D, A]	$h1 = 6.65$	✓
10	Lõik f1	Lõik[C, E]	Lõik[C, E]	$f1 = 2.91$	✓
11	Lõik g1	Lõik[E, B]	Lõik[E, B]	$g1 = 2.91$	✓
12	Kolmnurk poly1	Hulknurk E, D, C	Hulknurk[E, D, C]	$poly1 = 9.49$	✓
13	Nelikülik poly2	Hulknurk B, E, D, A	Hulknurk[B, E, D, A]	$poly2 = 28.46$	✓
14	Lõik i	Lõik[C, F]	Lõik[C, F]	$i = 5.63$	✓
15	Nurk α	Nurk B, F, C	Nurk[B, F, C]	$\alpha = 90^\circ$	✓
16	Tekst text4			text4 = "a"	✓
17	Tekst text1			text1 = " $\frac{a}{2}$ "	✓
18	Vektor w	Vektor[I, B]	Vektor[I, B]	$w = (0.74, -2.81)$	✓
19	Tekst text6			text6 = "c"	✓
20	Vektor t	Vektor[N, E' ₁]	Vektor[N, E' ₁]	$t = (0.37, -1.4)$	✓
21	Tekst text5			text5 = " $\frac{c}{2}$ "	✓
22	Vektor l	Vektor[J, A]	Vektor[J, A]	$l = (-6, -2.86)$	✓
23	Tekst text7			text7 = "b"	✓
24	Vektor v1	Vektor[M, D' ₁]	Vektor[M, D' ₁]	$v1 = (-3, -1.43)$	✓
25	Tekst text2			text2 = " $\frac{b}{2}$ "	✓
26	Lõik c1	Lõik[C, O]	Lõik[C, O]	$c1 = 2.82$	✓
27	Tekst text8			text8 = " $\frac{h}{2}$ "	✓

1.6 Veel mõningaid programmi GeoGebra võimalusi

- GeoGebras leiduvad käsud nurgapoolitaja, lõigu keskristsirge, objektide lõikepunktide leidmiseks, paralleelsete ja ristsirgete joonestamiseks, hulknurkade ja korrapärase hulknurkade joonestamiseks, erinevad võimalused kaarte, sektorite ja ringjoonte joonestamiseks.
- Võimalik on teha geomeetrilisi teisendusi nagu näiteks objekti peegeldamine sirgest või punktist, objekti lüke vektoriga, homoteetsusteisendus antud teguriga, objekti pööre ümber punkti mingi nurga võrra.
- Funktsioonide sisestamisel saab kasutada eelnevalt defineeritud funktsioone.
- Programmiga loodud konstruktsioone on võimalik salvestada ka pildifailina näiteks .png ja .eps laiendiga või viia lõikepuhvrisse.
- Ekraanipilti on võimalik suurendada ja vähendada, näidata või peita telgesid, näidata või peita ruudustikku, määrata milline on x- ja y-telje ühikute suhe.
- Võimalik on kopeerida ühe objekti visuaalset stiili teistele objektidele.
- Leidub võimalus piltide toomiseks joonestusväljale.
- Joonestusväljale on võimalik režiimis  paigutada nii staatilist kui ka dünaamilist teksti või LaTeX'i avaldise.

Internetis leidub mitmeid programmi GeoGebra tutvustavaid juhendeid, dünaamilisi töölehti ja nende tegemise õpetusi. Lisaks GeoGebra ametlikule veebilehele on töö autori arvates sisukad veel järgmised veebilehed:

- <http://math247.pbwiki.com/GeoGebra>
- <http://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
- <http://www.slu.edu/classes/maymk/GeoGebra/>
- <http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html>
- <http://www.screencast.com/users/LFS/folders/GeoGebra%20Lessons>

Kokkuvõtteks: programm GeoGebra annab küllaltki palju võimalusi selleks, et aidata õpilasel koolimatemaatikat paremini mõista ja seoseid tajuda, ise avastada ning on samas lihtsalt kasutatav.

2 GeoGebra Eestis

2.1 GeoGebra asetus koolides kasutada olevate programmide hulgas

Eesti koolides on (suuresti Tiigrihüppe ja Phare ISE programmi toel) olemas suhteliselt hea komplekt matemaatika õppimiseks ja õpetamiseks loodud tarkvara. Koolides on võimalik kasutada programme GeomeTricks, TableTalk, Function, Pattern, Tõenäosusteooria, APSTest, MSExcel, StudyWorks, GeoLog-Win, T-Algebra, Wiris jt. Koolitarkvaraprogramm GeoGebra sarnaneb programmidele GeomeTricks ja Function.

GeomeTricks on dünaamilise geomeetria programm, mida saab kasutada planimeetria õppimisel ja õpetamisel. GeomeTricksi abil saab joonestada geomeetrilisi kujundeid ja konstrueerida uusi objekte juba olemasolevate objektide baasil. Võimalik on töötada nähtava koordinaatteljestikuga või ilma selleta. Sisendaknasse saab sisestada punkti koordinaate ja sirge võrrandeid. Hiirega saab liigutada punkte ning vaadata, kuidas muutuvad seeläbi kujundid. Võimalik on mõõta kaugusi, nurki ja pindalaid. Tulemused ilmuvad vastavasse väljundaknasse.

Programmi Function on võimalik kasutada abivahendina funktsioonide uurimisel. Functioni abil saab defineerida kuni 6 funktsiooni, joonistada nende graafikud, määrates telgede maksimaalsed ja minimaalsed väärtused ning muutes koordinaattelgede alguspunkti paigutust ekraanil manipuleerida koordinaadistikuga. Parema ülevaate saamiseks graafikust võimaldab Function vaadelda suurendamise abil detailsemalt selle erinevaid osasid. Lisaks on defineeritavad 5 vaba parameetrit, mida saab kasutada funktsioonide kirjeldamisel. Vabadele parameetritele saab ette anda nende muutumise vahemiku ning kerimisriba abil selles vahemikus liikudes jälgida funktsiooni graafiku vastavat muutumist. Kasutada saab programmisisesid funktsioone: abs, sqr, sin, cos, atn, log, int, exp, ran, rnd, gam, sinh, cosh, sgn. Kuni kahe eelnevalt defineeritud funktsiooni jaoks saab leida nende lõikepunkti(d), nullkoha(d), maksimum- ja miinimumkoha(d) ning funktsiooni väärtuse etteantud kohal.

GeoGebra võimaldab kõike seda, mis programmid GeomeTricks ja Function ning GeoGebra on mitmeid järgnevad eelised ja lisavõimalusi:

- Programmiga on võimalik luua interaktiivseid veebilehti.

- Programmiga saab konstruktsioone luua nii geomeetriliselt (hiire ja nupurea abil) kui algebraliselt (sisendribale käske sisestades).
- GeoGebras on võimalik redigeerida konstruktsiooni protokoll, et juba valminud konstruktsiooni muuta.
- GeoGebra võimaldab joonist taasesitada ehk animeerida.
- GeoGebras on olemas vektoritega seotud käsud nt vektori rakendamine antud punkti ja objekti lüke vektoriga.
- On võimalik leida tuletisi, integraale, illustreerida alam- ja ülemsummasid.
- On võimalik joonestada koonuselõikeid, leida nende telgi, pooltelgede pikkuseid, haripunkte, fookuseid, sümmeetriakeskpunkte jms.
- Igal objektil avaneb paremaklahvimenüü objekti ümberdefineerimiseks või selle omaduste muutmiseks.
- On võimalik teostada geomeetrilisi teisendusi nagu objekti peegeldamine punktist või sirgest, homoteetsusteisendus etteantud teguriga ja objekti pööre ümber punkti.
- Joonestusväljale on võimalik lisada nii staatilist kui dünaamilist teksti ja LaTeX'i valemeid.
- Leiduvad käsud hulknurkade, objektide loendite ja parameetriliste võrranditega esitatud kõverate loomiseks.
- On võimalik määrata tingimused, mille täidetuse korral objekti näidatakse joonestusväljal.

2.2 GeoGebra tõlkimisest

Programmi GeoGebra tõlkimine seisnes menüü-, teadete-, käskude- ja abifaili tõlkimisest. Antud failid on internetiaadressilt <http://www.geogebra.org/source/translation/gui/> vabalt kättesaadavad. Samas tõlkis käesoleva töö autor ka GeoGebra manuaali, milles sisalduvad muuhulgas kõikide käskude eestikeelsed vasted. Manuaali ingliskeelne versioon on kättesaadav aadressilt <http://www.geogebra.org/source/translation/help/>. Lisaks tõlkis töö autor GeoGebra ametliku kodulehe <http://www.geogebra.org/> tema arvates olulisemad osad.

Programmi eestikeelse tõlke aluseks on ingliskeelne versioon. Tõlkimiseks kasutati programmi *Atteroso* nagu seda soovitasid teha GeoGebra loojad. Protsess toimus selliselt, et tõlkefailid saadeti e-posti teel programmi GeoGebra arendajatele, kes laadisid need GeoGebra internetiversiooni. Antud protsessi korrati mitmeid kordi.

Tõlkimisel ette tulnud raskused:

- Kuna eesti keele ja inglise keele struktuurid on üksteisest erinevad ja mõned laused pannakse üksikutest tõlkesõnadest kokku, siis tekib üksikutes veateadetes ja konstrueeritud objektide kirjeldustes eesti keeles ebakorrektsed lauseid.
- Tihti kasutatakse ingliskeelses programmis käsu sisendina objekti „line“ ning selle all mõistetakse sirget, kuid mõningate teiste käskude all mõistetakse selle sõna all aga sirget, kiirt ja lõiku. Selline olukord tekib näiteks käsu Kaugus korral, kus selle käsu süntaks on järgmine: Kaugus[punkt A, sirge g]. Sellisel juhul on eestikeelsesesse manuaali selgitusse lisatud sirge (või selle osa). Sama olukord tekib veel näiteks käskude Tõus, Nurk, Punkt, Lõikepunkt, Sihivektor, Ühikvektor, Ristsirge, Nurgapoolitaja korral.

Programmi GeoGebra arendajatel jätkub programmi pidev täiendamine, programmi lisatakse uusi võimalusi ja käske. Esiolgu on need automaatselt ka eestikeelses programmis ingliskeelsetena. Selleks, et GeoGebra oleks pidevalt eestikeelsena kättesaadav, võiks toimuda ka jätkuv tõlkefailide uuendamine.

3 Soovitused õppematerjali koostamiseks

Kuna käesoleva töö eesmärgiks on dünaamilise näitematerjali koostamine õpiku [5] tarvis, siis peatutakse järgnevas põgusalt ka sellise materjali koostamisega seotud küsimustele. Käesolev peatükk on referatiivne materjal, mis on koostatud peamiselt allika [7] põhjal, vastasel korral on viidatud muule materjalile.

3.1 Tekstilise informatsiooni esitamine

Tekstilise informatsiooni esitamisel näitematerjalide juures on olulised teksti paigutus ja vorming ning see, kuidas tuua tekstist välja olulist infot. Loomulikult on tähtis ka teksti kvaliteet.

Teksti paigutuse ja vormingu puhul tuleks arvestada järgmist:

- Tuleks võimalikult vältida poolitamist.
- Uue lõiguga alustades tuleks lisada tühi rida.
- Reavahe suurus mõjutab teksti loetavust. Liiga kokkusurutud teksti on raske ekraanilt lugeda.
- Tekst ei tohiks olla pigistatud poolele ekraanile jättes samasülejäänud ekraaniosa tühjaks.
- Soovitav on anda erinevas stiilis pealkiri ja põhitekst.
- Kirjatüüp peaks olema mitte liiga suur, selge ja kerge lugeda. Ühele leheküljele mitte panna enam kui kaks erinevat kirjatüüpi.
- Kirjatüüp tuleks loetavuse seisukohast valida selline, mida on hea lugeda ja vältida uudseid ning "põnevaid" kirjatüüpe.
- Loetavuse seisukohalt on kõige parem vasakpoolne ja parempoolne teksti joondamine, mitte rööpjoondus.

Olulise info esiletoomisega seotud soovitused:

- Ei tohiks anda kõiki teksti elemente sama kaalukusega, vaid lähtuda tuleks nende olulisusest. Esitatava materjali sisulist hierarhiat aitavad edasi anda ka elementide grupeerimine ja vahed, suurus, stiil, värv. Samas ei tohiks õppematerjalis kasutada enam kui kolme erinevat kirjasuurust ning mitte liialdada värvidega.

- Olulise info väljatoomiseks tuleks kasutada teksti rõhutamist: paks kiri, kogu sõna suurtähtedes (kogu teksti võib esitada suurtähtedes vaid juhul, kui tegemist õpilastega, kes kirjatähti ei tunne), kast ümber teksti, nool teksti ees.
- Vältida tuleks allajoonimist, sest seda aetakse segamini hüperlinkidega. Samuti on soovitatav vältida plinkivat ja liikuvat teksti ning ka kaldkiri on halvemini loetav.

Teksti kvaliteeti puudutavad nõuded:

- Tekst olgu konkreetne. Arvutipõhistes materjalides tuleks vältida pikka teksti. Lühike ja konkreetne tekst on pikast lohisevast parem. Tuleb arvestada sellega, et ekraanilt loetakse 25-30% aeglasemalt kui paberilt.
- Üleminekud ühelt teemalt teisele olgu selged.
- Tekst peab olema selge, vältida tuleks ebamääraseid väljendeid.
- Teksti keerukus peab vastama konkreetsele vanuseastmele, kelle jaoks õppematerjal on mõeldud.
- Loomulikult on omal kohal korrektne grammatika, kirjavahemärkide õige kasutus ja teised sellised faktorid.

3.2 Graafilise informatsiooni esitamine

Arvutipõhine õppematerjal on eelkõige visuaalne meedium, seepärast peaks see sisaldama enam visuaalsust ja vähem teksti. Pildid, eriti animatsioonid (kasutavad graafika seeriaid, mis muutuvad ajas ja/või ruumis), tõmbavad enam tähelepanu kui tekst, seetõttu tuleks jälgida, et graafikaga esitataks olulist infot ja et see poleks lihtsalt dekoreerimiseks.

Soovitused graafilise materjali koostamisele:

- Keerukad illustratsioonid tuleks jaotada lihtsamateks osadeks. Vältima peaks ka liigset detailidesse laskumist.
- Vältida tuleks kolmemõõtmelisi graafikuid, sest need võivad õpilasi segadusse ajada. Kolmemõõtmeliste graafikute korral võivad näiteks väiksemad väärtused peituda suuremate taha ning õpilane ei pruugi näha, kuidas tulbad üksteise suhtes paiknevad.
- Vältima peaks ka fotosid ja kolmemõõtmelisi jooniseid (eriti nooremate õppijate puhul). Keerukamad pildid võtavad inimese ajul enam töötlemisaega ja võivad olulise info üldse blokeerida.

- Graafikaks on soovitatav valida materjal, mis näitab seoseid, illustreerib isikuid, kohti või asju ja selgitab abstraktseid mõisteid.
- Pilt ja sellega seondud tekst on soovitatav esitada üheaegselt, et soodustada duaalset kodeerimist. Võimaluse korral tuleks graafika selgitus anda hoopis heliga.
- Soovitatav on kasutada ka graafika juures sama stiili, näiteks kui õppematerjalis kasutatakse fotosid, siis selles materjalis on kõik ainult fotod.
- Kindlasti peaks jälgima, et materjalis poleks vajaduseta „ilusaju“. Eriti hoolikas tuleb olla lõikepiltide kasutamisel, sest neid pilte kasutatakse liiga sageli ja tihti-peale ei vasta need teemale. Kujundid, mis pole seotud tekstiga ajavad õppija segadusse.
- Animatsioone tuleks kasutada vaid siis, kui dünaamiline muutus on oluline. Animatsioone ei peaks kasutada materjalides, mille eesmärgiks on ainult tekstilise info edastamine.

Artikli [9] põhjal on animatsioonid on head:

- näitamaks pidevust üleminekul;
- osutamaks ülemineku dimensionaalsusele;
- illustreerimaks muutust ajas;
- rikastamaks graafilist esitust;
- visualiseerimaks kolmemõõtmelisi struktuure;
- tähelepanu haaramiseks.

Animatsioonide kasutamise korral on suurimaks ohuks nende ebaõigelt valitud esitamise kiirus. Keeruka animatsiooni korral tuleks lubada õppijal pause, kordamist ja ka kiiruse muutmist. Parim on, kui õppija saab ise määrata graafika vaatamise ajalise pikkuse.

3.3 Erinevate värvide kasutamine

Enamik õppijaist leiab must-valge materjali olevat vanamoodsa ja igava. Seetõttu kasutatakse õppematerjali atraktiivsemaks muutmiseks värve. Värvivalik on mõjutatud eelkõige individuaalsetest eelistustest. Sageli eelistatakse punast ja sinist, kuid neid on raskem tajuda ja seetõttu tuleks vältida neid värve tekstis ning detailsetes piltides. Paremini märgatavad värvid on kollane ja roheline. Teine viga, mida tehakse, on erinevate värvide liiga rohke kasutamine. Konkreetse värvi sobivus või mitesobivus sõltub ka naabervärvidest. Omavahel kokkusobivad värvid loovad meeleolu ja tasakaalu.

Soovitused erinevate värvide kasutamiseks:

- Ei soovitata kasutada värvikombinatsioone punane-roheline, punane-sinine, sinine-kollane, sinine-roheline.
- Vältida tuleks enam kui nelja värvi üheaegset kasutamist, eriti nooremate õpilaste puhul.
- Värvide tuleks kasutada vastavalt ühiskonna tavadega.
- Värvide tuleks kasutada rõhutamiseks, olulisele infole tähelepanu juhtimiseks ja erinevuste väljatoomiseks.
- Punast värvi tuleks kasutada ettevaatlikult.
- Tuleks jälgida, et tekiks hea kontrast esiplaanil ja tagapõhjaks olevate värvide vahel, eriti teksti- ja taustavärvi vahel.
- Värvide tuleks kasutada kui lisavihjet (info esitamine peab olema arusaadav ka värvideta).
- Värvide kasutamises tuleks olla järjekindel. Kui ühel lehel on näited rohelisega, siis peaks see olema nii kõikjal.

3.4 Info paigutus

Kasutada tuleks ekraani kujundust, mis soodustab alustamist kõige olulisemast. Seejuures võiks arvestada järgmiste faktidega:

- Läänekultuurides, kus loetakse vasakult paremale on kriitiline punkt ülal vasakul nurgas, kuhu inimese silm tahtmatult kõige esimesena satub.
- Lisaks on uurimused näidanud, et inimese pilk liigub kõige suuremalt objektilt väiksematele ja sama kehtib seoses värvidega - silm alustab kõige tugevamast (tumedamast) värvist.
- Tumedad või võnkuvad elemendid on tugevamad kui pehmed ja mahedad.

- Suuremad kujundid ja tugevamad värvid tõmbavad enam tähelepanu kui väikesed ja mahedad.

Arvestades öeldut tuleb ekraan panna ka tasakaalu. Selleks ei ole vaja tõmmata mõtetelist joont keskele ning hakata lugema, kas paremal-vasemal ja ülal-all on võrdselt elemente, vaid vaadata, et proportsioonid kujundite vahel oleks kõikjal tasakaalus. Kui näiteks paremal tume kujund, siis vasakule tuleks panna tekst suuremana jne.

Soovitused teksti ja graafika integreerimiseks:

- Graafika peab olema tihedalt seotud tekstilise infoga.
- Mitte kunagi ei tasu sisse võtta graafika elemente ainult efekti pärast - see viib tähelepanu olulistelt asjadelt kõrvale. Pilti võib esitlusse sisse lülitada vaid siis, kui see on oluline esituse jaoks, kui info esitus selle abil on efektiivsem kui vaid teksti abil.
- Tekst ja graafika tuleks esitada üheaegselt, mitte järjestikku.
- Graafika (nii staatiline kui dünaamiline) peaks olema integreeritud teksti nii, et see aitaks luua kognitiivseid seoseid ja soodustaks duaalset kodeerimist. Tekst tuleks asetada kohe nende elementide kõrvale, mida see kirjeldab.
- Arvutipõhine õppematerjal on ühendavam, kui see sisaldab kaalutletud värvilahenduse, järjekindla ja mittekuhjatud stiiliformaadi. Ei tohiks kuhjata liiga palju elemente ekraanile ja kasutada keerulist või kokkusobimatut graafikat.
- Üldkujundus peab jääma ühe õppematerjali kestel samaks. Sellel on lisaks visuaalse väljanägemise kujundamisele ka kognitiivne ülesanne: pannes õppematerjali pealkirju, alapealkirju ja muud infot kogu aeg enam-vähem samasse kohta ning sama stiiliga on õppijatel lihtsam keskenduda olulisele.

3.5 Info kokkusobivus ja järjekindlus

Kogu informatsioon, mida õppematerjal esitatakse, mistahes esitusviisi (tekst, graafika, heli, video) kasutades, peab olema kokkusobiv ja järjekindel, lihtne ja loomulik.

Soovitused:

- Kõik esituses (põhiline disain, taust, kõik spetsiaalsed iseärasused, sõnad slaidil ja graafika) peab olema teemale vastav.
- Kontrolli tingimused (nupud, mille abil navigeeritakse või vastavad hüperlingid) tuleks panna lehekülje alla.
- Ühele lehele tuleks panna ainult üks teema.

- Klahve, nuppe ja hüperlinke tuleks kasutada järjekindlalt (näiteks, kui NEXT nupule vajutades saab järgmisele leheküljele, ei või seda nuppu kasutada mõnel teisel lehel lisamaterjali saamiseks).
- Peaks jälgima, et värvilahendust ja stiile on kasutatud järjekindlalt.
- Tuleks kasutada järjekindlaid märgistusi (nuppude ja hüperlinkide kujundus läbi terve õppematerjali sama).
- Animeeritud teksti või graafika korral (näiteks PowerPointi esitlus), tuleb kindlustada, et viimasena ilmuv info jääks kauemaks ekraanile.

3.6 Multimeedia haridusteoreetilised printsiibid

Mayer ja Moreno [8] on välja töötanud multimeedia esituse printsiibid, mida tuleks arvestada multimeedia kasutamisel õppematerjalides.

- Multimeedia printsiip (Multimedia Principle): Õpilased õpivad enam sõnadest ja piltidest kui ainult sõnadest. Ainult tekst (kas kirjalik või auditiivne) on vähem efektiivne, kui see on koos visuaalsete kujutistega.
- Ruumilise kokkupuutuvuse printsiip (Spatial Contiguity Principle): Õpilased õpivad enam kui vastavuses olevad sõnad ja pildid esitatakse üksteise lähedal, mitte aga teineteisest kaugel leheküljel või ekraanil. Selleks tuleks tekst asetada kujutise alla või veelgi efektiivsem on teksti integreerimine kujutisse: asetada tekst kohe nende elementide kõrvale, mida see kirjeldab.
- Ajalise kokkupuutuvuse printsiip (Temporal Contiguity Principle): Õpilased õpivad enam kui vastavuses olevad sõnad ja pildid esitatakse üheaegselt, mitte järjestikku. Tuleks sünkroniseerida materjal vastavalt auditiivsele ja visuaalsele materjalile. Kui kasutatakse näiteks animatsiooni ja auditiivset jutustust, siis need peavad ajaliselt ning tähenduslikult kokku langema.
- Tiheda seostatuse printsiip (Coherence Principle): Õpilased õpivad enam kui üleliigsed sõnad, pildid ja heli on välja jäetud. Multimeedia esitus peab olema si-sutihe ja selge, kuhu ei tohiks lisada huvitavaid, kuid üleliigseid heliefekte ega atraktiivset lisainfot, et õppija ei tegeleks kõrvalise töötlusega.
- Signaliseerimise printsiip (Signaling Principle): Õpilased mõistavad multimeedia esitust paremini, kui see sisaldab signaale, mis osutavad, kuidas töödelda materjali. Kui pole võimalik eemaldada kõiki multimeedia kaunistusi, siis tuleb õppijale pakkuda vihjeid, kuidas selekteerida ja organiseerida materjali.

- Modaaluse printsiip (Modality Principle): Õpilased õpivad enam animatsiooni koos auditiivse jutustusega kui animatsioonist kirjaliku tekstiga. Multimeedias info esitus peab olema loodud nii, et see kasutaks nii auditiivset kui visuaalset kanalit, mitte kaht samaliigilist kanalit. Kasutades kaht samaliigilist kanalit õppija visuaalne tähelepanu on lõhustatud. Silmad saavad suur hulga infot, kuid ainult osa sellest infost on võimalik edaspidi töödelda visuaalses töötavas mälus.
- Segmenteerimise printsiip (Segmentation Principle): Õpilased mõistavad multimeedia esitust paremini, kui see esitatakse õppija poolt kontrollitavate väikeste segmentidena, mitte aga pideva esitusena. Seda printsiipi tuleks arvestada, kui info esitus on keeruline ja esituskiirus suur, mistõttu õppijatel pole piisavalt aega tegelemaks sõnade organiseerimisega verbaalsesse mudelisse ja kujutuste organiseerimisega visuaalsesse mudelisse ning mudelite integreerimisega.
- Eelkoolituse printsiip (Pretraining Principle): Õppijad mõistavad multimeedia esitust paremini kui nad teavad juba eelnevalt süsteemi komponentide nimesid ja käitumist.
- Individuaalsete erinevuste printsiibid (Individual Differences Principles): Disaini efektid mõjuvad enam madalamate teadmiste baasiga õppijatele kui kõrgema teadmiste baasiga õppijatele ja enam kõrgema ruumilise tajuga õppijatele kui madala ruumilise tajuga õppijatele. Seega kõik need strateegiad on kõige efektiivsemad uustulnukatele ja visuaalsetele õppijatele.
- Ruumilise võimekuse printsiip (Spatial Ability Principles): Kõrgekvaliteediline multimeedia disain sobib enam kõrge ruumilise võimekusega õppijatega.

4 Kommentaarid dünaamiliste slaidide kohta

Alljärgnevalt on toodud kommentaarid ja näpunäiteid õpetajatele kõigi 57 antud töös koostatud dünaamilise slaidi (ehk dünaamilise töölehe, -joonise, -näitevahendi) kasutamise kohta. Peamiselt on slaidid õpiku [5] jooniste dünaamilised variandid. Slaidide nimetused on vastavuses õpikuga, näiteks õpiku joonise 1.2 jaoks koostatud dünaamilise slaidi nimetus on *Joonis 1.2*. Kui töölehe nimi lõpeb ' -ga (primiga), siis see tähendab, et töö autor on õpiku joonist veidi muutnud. Kommentaarides tuuakse ära, milles antud muutus seisnes.

Mõningad töölehed on loodud õpiku ülesannete lahenduskäikude visualiseerimiseks. Need on ülesannete lahendused, mida õpetaja saab õpilastele animeerida ehk taasesitada. Sellised slaidid on näiteks õpiku peatüki *1.9 Pindala arvutamine* teatud ülesannete jaoks ja slaidide nimetuseks on *Ülesanne*, millele on lisatud õpiku vastava ülesande number. Slaididele pole reeglina lisatud õpiku ülesande teksti.

Mõningad näitevahendid on tehtud ka eelnevalt õpitu kordamiseks, näiteks *Tuletise geomeetiline vaste* (selle kohta õpikus joonis puudub ja seega on slaidi nimetuseks selle kirjeldus) või uue osa visualiseerimiseks, näiteks *Joonis 1.8-1.9* korral.

Õpiku peatüki „Sirged ja tasandid ruumis“ jaoks valmistatud dünaamiliste slaidide jaoks on võetud kasutusele 3D teljestik, mille definitsioon on võetud üle GeoGebra materjalide kogumikust GeoGebraWiki.

Slaidide ja animatsioonide ülesehituses on püütud järgida koolis kasutatavat ülesannete lahendamise käiku. Näiteks ülesande korral, kus tuleb leida funktsiooni graafiku ja x-teljega piiratud kõvertrapetsi pindala, antakse lahenduskäik järgmiselt:

1. esitatakse funktsioon algebralisel kujul;
2. antakse funktsiooni graafiku lõikepunktid x-teljega;
3. joonestatakse funktsiooni graafik;
4. värvitakse kõvertrapets, mille pindala otsitakse;
5. kirjutatakse välja integraal, mida on vaja leida;
6. antakse vastus.

Antud slaidide kasutamisel on olulised ka õpetaja sõnalised kommentaarid ja selgitused slaididel toimuva kohta, sest õpilased omandavad materjali paremini, kui saavad infot samaaegselt nii verbaalselt kui visuaalselt.

Dünaamilistel slaididel saab õpetaja ise teatud määral kujundust muuta. Õpetajal on võimalik tähistusi, teksti ja joonist slaidil hiirega nihutada. Lisaks on mõningatel slaididel võimalus liuguri abil teljestiku pööramiseks. Selle juures on oluline jälgida, et õpilasele tähtis info ei jääks varju.

Reeglina tähistavad sinised punktid slaididel punkte, mida on võimalik hiirega liigutada. Siniste punktide liigutamisel on võimalik jälgida nendest sõltuvate objektide muutumist slaidil.

Kõikide slaidide üleval paremas nurgas asub slaidi lähtestamise nupp, millele vajutades taastatakse slaidi algkuju. See on oluline just siis, kui slaidil on vabasid objekte palju nihutatud ja tekib vajadus kiiresti saada tagasi slaidi algkuju.

Mitmetel slaididel asuvad märkeruudud, millele klõpsates on võimalik ekraanile tuua vihjeid või vastuseid eelnevalt esitatud küsimustele.

Dünaamilistel slaididel on püütud järgida ühtset stiili, põhivärvideks on roheline ja kollane. Slaidid, millel on rohkem teksti, on animeeritud selliselt, et tekst ilmub ekraanile sammhaaval.

Animeeritavatel slaididel asub ekraani allääres navigeerimisriba, mille abil on võimalik õpetajal näidata järgmist või eelmist animatsioonietappi, minna animatsiooni algusesse või lõppu. Teine võimalus on animatsiooni taasesitamise kiiruse valimine. Sel juhul esitatakse animatsiooni etapid õpetaja poolt määratud ajavahemiku järel pärast nupule

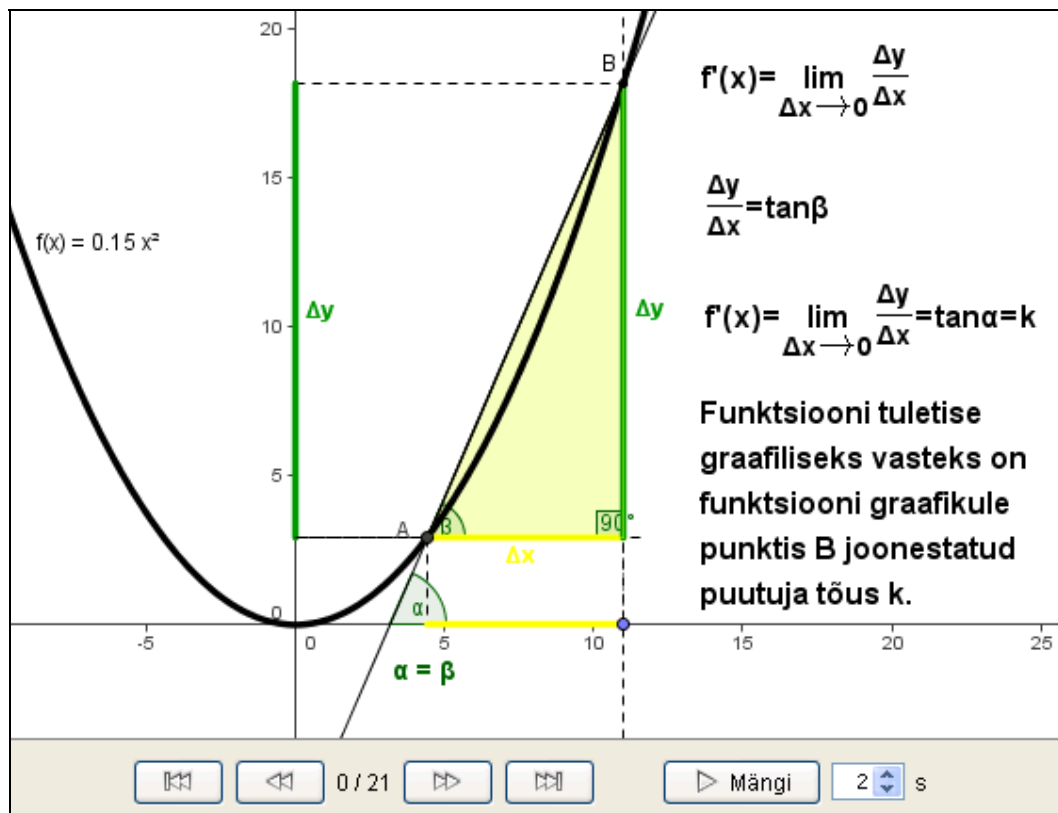
 vajutamist.

4.1 Integraal

4.1.1 Funktsiooni tuletis

4.1.1.1 Tuletise geomeetriline vaste

Dünaamilise slaidi abil on võimalik õpilastele meelde tuletada, mida tähendab geomeetriliselt funktsiooni tuletis. Seda slaidi on võimalik sammhaaval õpilastele animeerida ehk taasesitada. Õpetaja saab x-teljel asuva sinise punkti nihutamiselega muuta Δx väärtust. Ekraanile esitatakse tuletise mõiste ka formaalselt. Selle dünaamilise näitevahendi abil jõutakse tõdemuseni, et funktsiooni tuletis kohal B on funktsiooni graafikule punktis B joonestatud puutuja tõus.

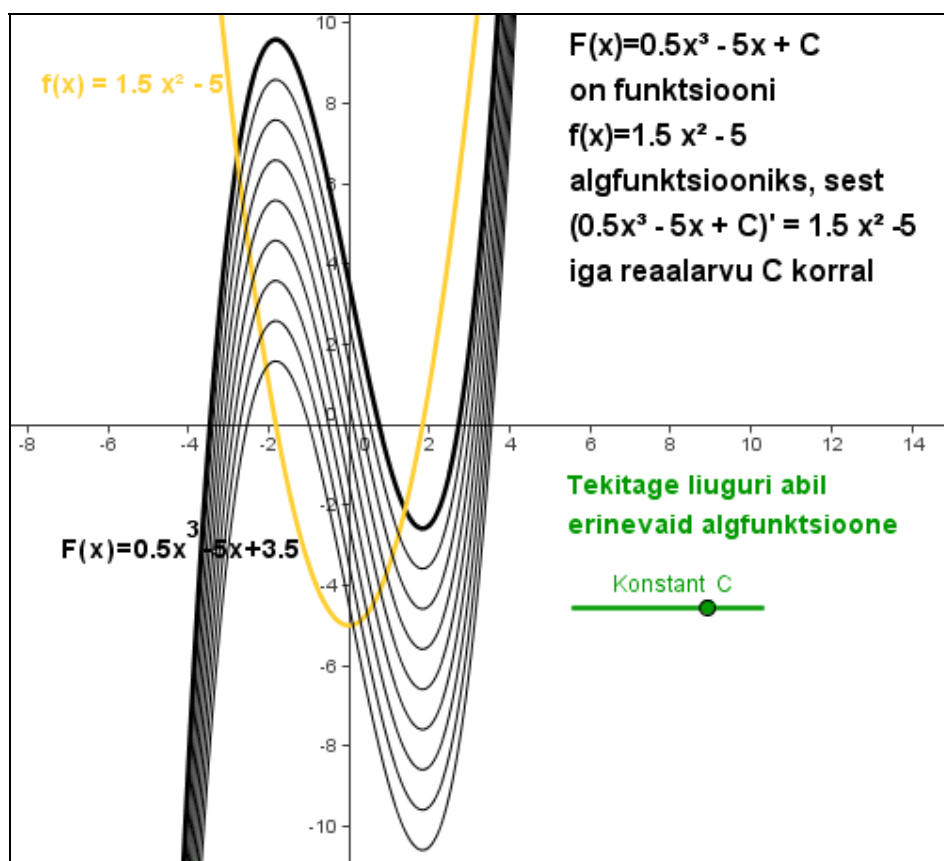


4.1.2 Algfunktsioon

4.1.2.1 Joonis 1.2'

Dünaamiline slaid võimaldab illustreerida fakti, et ühel funktsioonil on rohkem kui üks algfunktsioon. Näitena vaadeldakse funktsiooni $f(x) = 1,5x^2 - 5$ algfunktsioone. Õpikus on funktsiooni $f(x)$ asemel antud lineaarfunktsioon $f(x) = 2x$.

Muutes konstandi C väärtust lõigul $[-4,5; 4,5]$ liuguril *Konstant C* abil, näidatakse ekraanil, kuidas muutub vastav algfunktsioon ja selle graafik. Ekraanil näidatakse algfunktsioone konstandi väärtuste $-4,5, -3,5, -2,5, -1,5, -0,5, 1,5, 2,5, 3,5$ ja $4,5$ korral. Slaidilt on võimalik uurida, kuidas muutub algfunktsiooni graafik konstandi C muutudes. Samuti saab uurida, missugused algfunktsioonide omadused muutuvad (nullkohtade arv) ja millised jäävad püsima (ekstreemumkohad). Uurida võiks ka seda, kuidas on seotud konstandi C väärtus ja vastava algfunktsiooni graafiku ning y -telje lõikepunkti koordinaadid.



4.1.2.2 Joonis 1.3

Dünaamiline slaid võimaldab graafiliselt leida funktsiooni $f(x) = 2x + 3$ sellist algfunktsiooni, mis läbib etteantud punkti. Kasutades liugurit *Konstant C* saame ekraanile kuvada erinevaid funktsiooni $f(x) = 2x + 3$ algfunktsioone (algfunktsioonide üldavaldis antud juhul on $F(x) = x^2 + 3x + C$). Juhul kui algfunktsiooni graafik läbib etteantud punkti, muudab graafik oma värvi. Samas on graafikult kohe loetav ka vastava algfunktsiooni valem. Antud slaidiga on võimalik genereerida sama algfunktsiooniga uusi ülesandeid. Nimelt on võimalik hiirega muuta ka etteantud punkti.

4.1.3 Kõvertrapetsi pindala

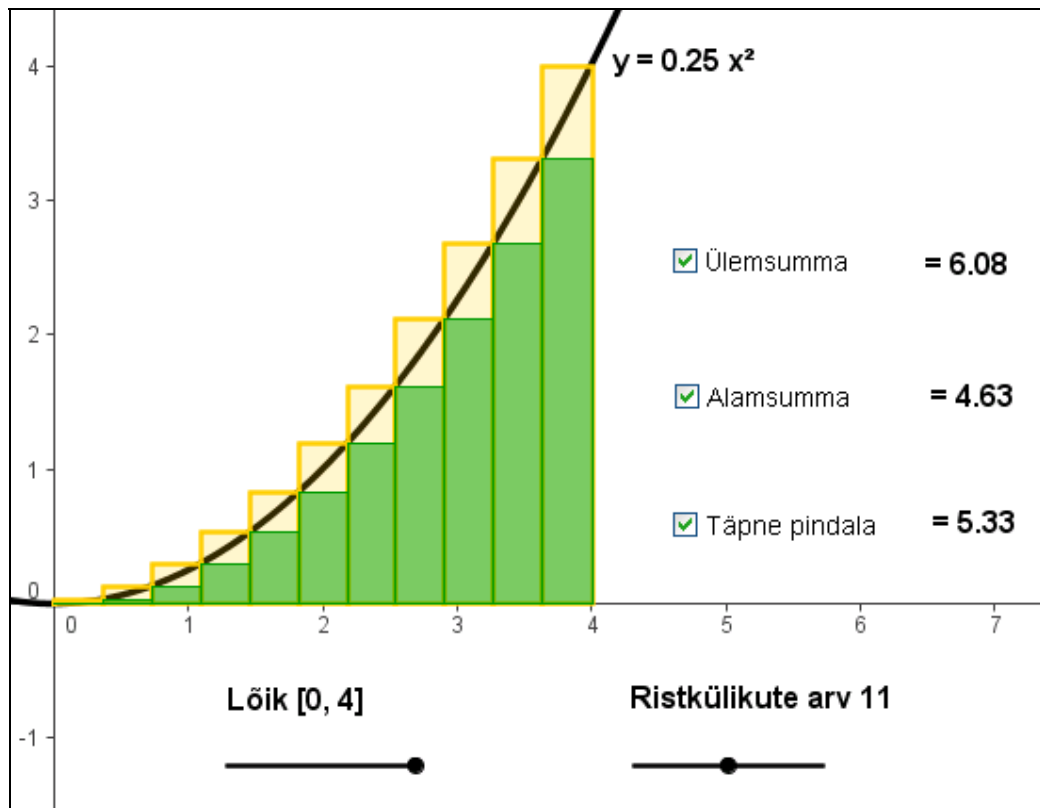
4.1.3.1 Joonis 1.4'

Slaidil on antud Peipsi järve ja Pihkva järve kaart. Õpilastele saab demonstreerida, kuidas ligikaudu arvutada järvede pindala (ja igasuguste kõveratega piiratud kujundite pindala). Slaidil asub kolm erineva tihedusega ruudustikku (õpikus kaks erineva tihedusega ruudustikku Peipsi järve kohta) ning on võimalik demonstreerida, et mida tihedamat ruudustikku kasutatakse, seda täpsem vastus saadakse. Iga ruudustik on animeeritud. Kõigepealt antakse kaart ruudustikul, seejärel ühe ruudu pindala. Edasi näidatakse, mitu tervet ja mitu pooliku ruutu asub Peipsi järve sisepiirkonnas ning antakse vastav pindala. Sama sooritatakse Pihkva järvega. Saadud ligikaudseid pindalasisid on võimalik võrrelda järvede täpsete pindaladega.

4.1.3.2 Joonis 1.7'

Dünaamilise slaidiga on võimalik demonstreerida, kuidas leida kõvertrapetsi pindala lõigul $[0;a]$. Seejuures konstandi a väärtuse saab valida liugurilt *Lõik* ($a = 1, 2, 3$, või 4). Funktsiooniks on joonise parema ülevaatlikkuse huvides õpikust erinevalt võetud funktsioon $y = 0,25 x^2$ (õpikus on $y = x^2$). Liugurilt *Ristkülikute arv* saab valida alam- ja ülemsummat määrava ristkülikute arvu (võimalikud väärtused 2 kuni 20). Märkeruutude abil saab sinna linnukese lisamisega või eemaldamisega kas näidata või peita alamsumma, ülemsumma ja kõvertrapetsi pindala täpse väärtuse.

Väiksema ristkülikute arvu puhul oleks otstarbekas lasta õpilastel peast arvutada vastavad ülem- ja alamsummad ning neid võrrelda pindala täpse väärtusega. Vastuseid saab kontrollida märkeruute kasutades. Suurema ristkülikute arvu korral tuleks aga ekraanile tuua ka programmi poolt arvutatavad alam- ja ülemsummad.



4.1.4 Määratud integraal

4.1.4.1 Joonis 1.8 – 1.9

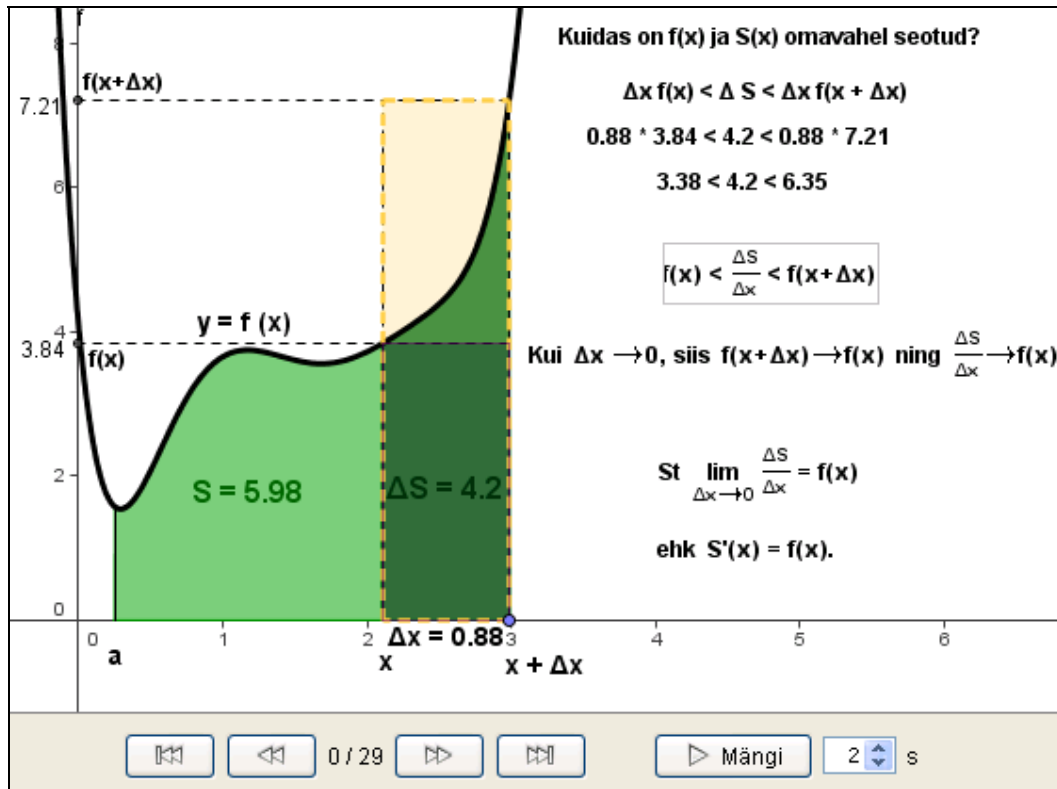
Antud dünaamilise slaidiga on võimalik näitlikult selgitada, et kõvertrapetsi pindala on muutuja x funktsioon. Näitevahend on animeeritud ning selgitused tuuakse kolmes etapis. Esimesel etapil selgub, et igale muutuja x väärtusele vastab üks kindel kõvertrapets, teisel etapil aga, et igal sellisel kõvertrapetsil on üheselt määratud pindala. Kolmandal etapil üldistatakse saadu tõdemuses, et kõvertrapetsi pindala S on muutuja x funktsioon. Iga etapi juures on soovitatav muutujat x varieerida seda x -telje sihis liigutades ja samas saadud joonist analüüsides. Erinevate etappide tulemused saab muuta nähtavaks märkeruutudele klikkides.

4.1.4.2 Joonis 1.10 – 1.11

Dünaamilise slaidi abil saab jälgida järgmise teoreemi tõestuse skeemi animatsioonina. Teoreem: *Kui kõvertrapetsi kõverhaar on määratud võrrandiga $y = f(x)$ ja selle kõvertrapetsi pindala on $S(x)$, siis $S'(x) = f(x)$.*

Animatsiooni käigus on võimalik Δx väärtust muuta vastavat x -telje punkti x -telje sihis liigutades. Vähendades järjest Δx väärtust on võimalik arvutustulemusi jälgides jõuda

tulemusele, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, st $S'(x) = f(x)$.



4.1.5 Määratud integraali omadused

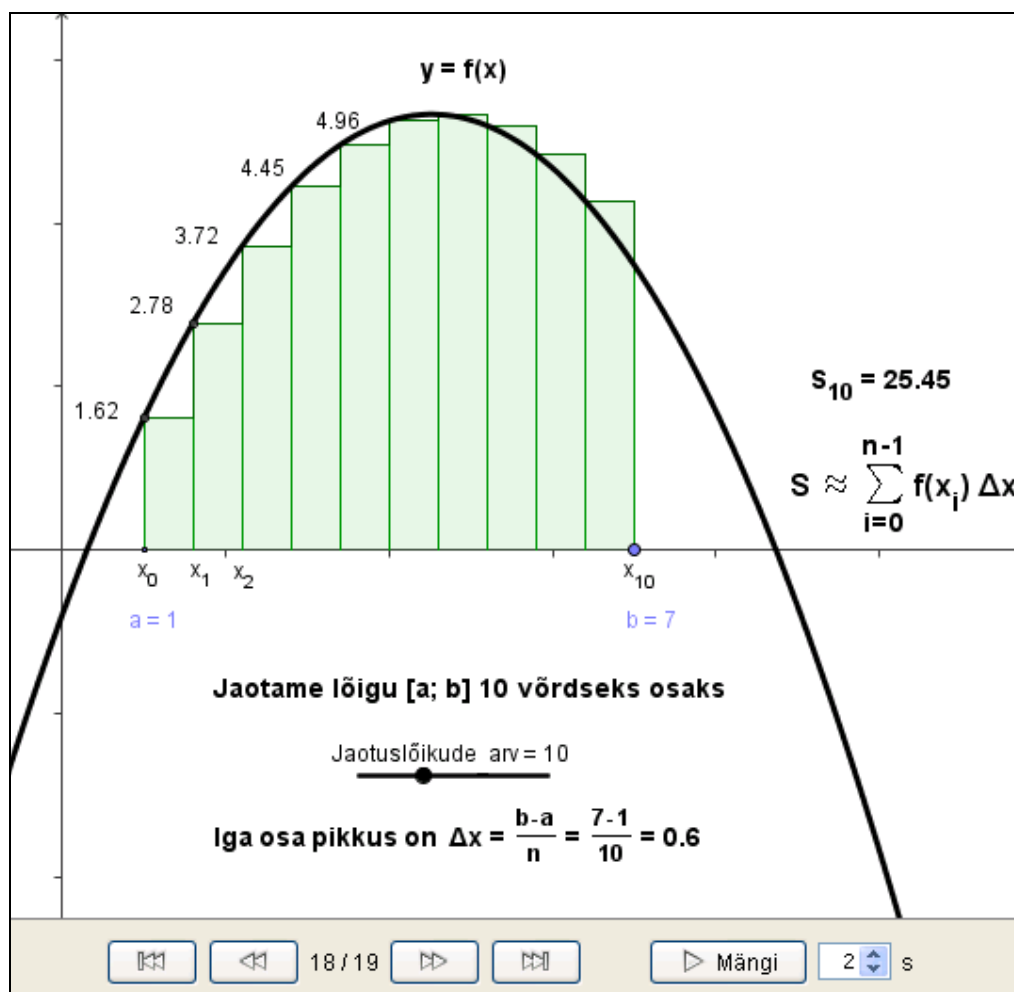
4.1.5.1 Ülesanne 52

Dünaamilise slaidi abil on võimalik uurida funktsiooni $y = x^n$ graafikut. Astendajat n saab seejuures muuta liugurilt *Astendaja* lõigul $[1;10]$. Samaaegselt saab uurida, millisteks osadeks jaotab iga konkreetse funktsiooni graafik ühikruudu pindala. Ekraanil esitatakse vastavad pindalad ning pindalade suhe. Õpilasel on võimalus leida üldine seos pindalade suhte ja astendaja n vahel.

4.1.6 Määratud integraal piirväärtusena

4.1.6.1 Joonis 1.22

Animeeritud slaid võimaldab dünaamiliselt näitlikustada kõvertrapetsi pindala arvutamist piirväärtusena. Funktsiooniga $f(x)$ ja x -teljega määratud kõvertrapetsi alused on $x = a$ ja $x = b$, kusjuures a on fikseeritud ja b on x -telje sihis liigutatav. Liuguriga *Jaotuslõikude arv* saame määrata ristkülikute arvu, millega lähendada otsitavat kõvertrapetsi pindala. Jaotuslõikude arvu 2 kuni 5 korral saab ekraanilt näha, kuidas konkreetselt vastavat pindala leitakse. Suurema jaotuslõikude arvu korral näeme ekraanilt vaid vastavat pindala. Ekraanil on nähtav ka kõvertrapetsi täpne pindala. Kasutades liugurit *Jaotuslõikude arv*, saame jälgida ka seda, kuidas jaotuslõikude arvu kasvades saadud pindala läheneb otsitud pindala täpsele väärtusele.



4.1.7 Pindala arvutamine

4.1.7.1 Ülesanne 81

Antud dünaamilised slaidid võimaldavad esitada ülesande 81 alaülesannete 1 – 4 lahendused. Ülesandes tuleb leida x -telje ja antud joontega piiratud kujundite pindalad. See näitevahend võimaldab õpetajal ekraanile kuvada ülesande lahendused sammhaaval. Alaülesannete 2 ja 3 korral saab tekkinud kujundit liuguri *Graafiku lüke* abil x -telje sihis liigutada ja veenduda, et uuritud kujundi pindala sellest ei muutu. Samas võimaldab selline graafiku nihutamine koostada uusi ülesandeid. Näiteks alaülesandes nr 2 võime vaadelda funktsiooni $y = (x + 1)^3 - 4(x + 1)$.

4.1.7.2 Ülesanne 82

Antud slaidid võimaldavad esitada ülesande 82 kõikide alaülesannete 1 – 4 lahendused. Ülesandes tuleb leida antud joontega piiratud kujundite pindalad. Nagu eelmise ülesande korral, võimaldab ka see näitevahend õpetajal ülesande lahenduse sammhaaval ekraanile esitada. Alaülesande 1 korral tuleb leida pindala kujundile, mis on piiratud joontega $y = x^2 - 2x + 2$, $2x - y = 2$ ja $x = 0$. Näeme, et teine joon on esimese puutuja kohal $A(2;2)$. Lisavõimalusena saab selle ülesande juures puutujat mööda parabooli liigutada ja uurida, kuidas muutub joone puutuja võrrand (mis juhtub tõusuga ja algordinaadiga) ning vaadeldava kujundi pindala. Alaülesande 2 korral tuleb leida pindala kujundile, mis on piiratud joontega $y = \sqrt{x}$ ja $y = x^2$. Lisavõimalusena saab graafikuid liuguri *Lükka graafikuid* abil y -telje sihis liigutada ja uurida, kuidas muutuvad joonte võrrandid ning vaadeldava kujundi pindala.

4.1.7.3 Ülesanne 83

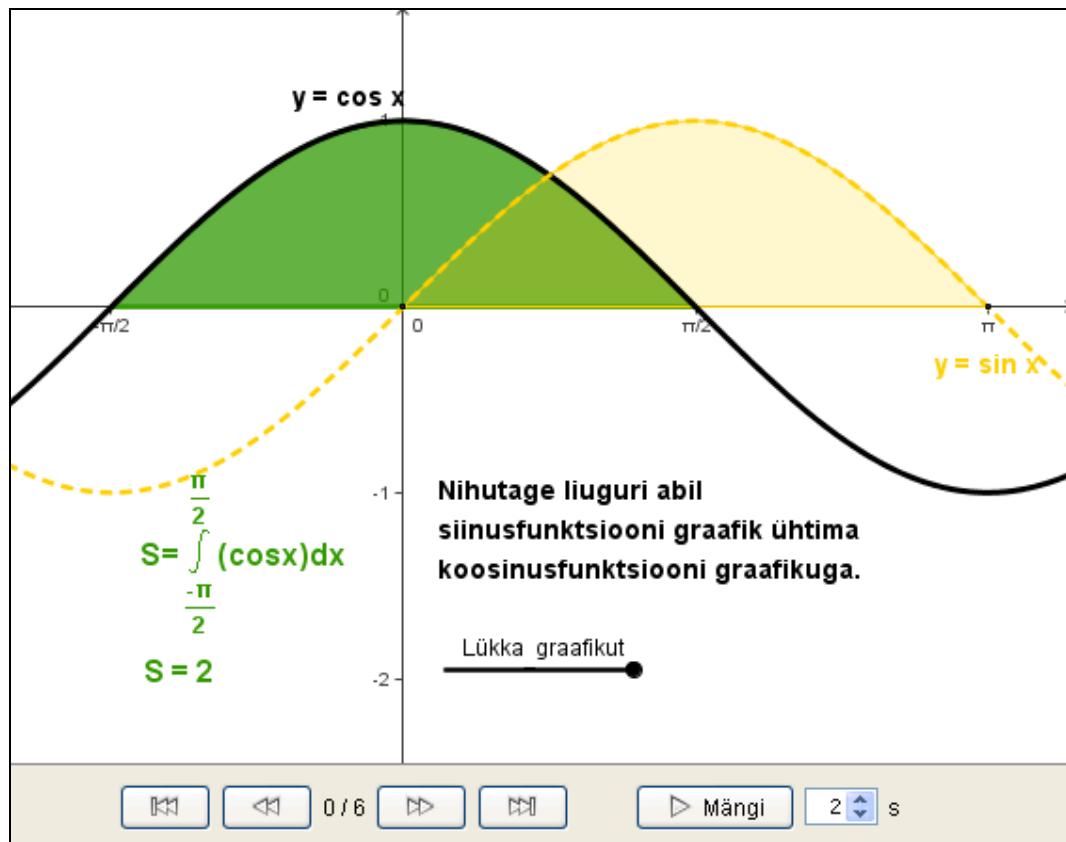
Dünaamiline slaid võimaldab samm sammult demonstreerida, kuidas leida x -teljega, y -teljega ning funktsioonide $y = 1 + \sin x$ ja $x = \pi$ graafikutega piiratud kujundi pindala.

4.1.7.4 Ülesanne 84

Dünaamiline slaid võimaldab demonstreerida funktsiooni $y = \sin x$ graafiku ja x -telje vahelise kujundi pindala leidmist lõigus $[0, \pi]$ ja lõigus $[\pi, 2\pi]$ ning võrrelda saadud tulemusi nende kujundite ühitamise teel. Ühitamiseks tuleb klikkida märkeruudule ja seejärel saadud kujundit liuguri abil lohistada.

4.1.7.5 Ülesanne 85

Slaidil esitatakse funktsiooni $y = \cos x$ graafiku ja x -telje vahelise kujundi pindala lõigis $[-\pi/2; \pi/2]$. Samale joonisele on võimalik tuua ka funktsiooni $y = \sin x$ graafik ja võrrelda selle ning x -telje vahelise pinnaosa pindala lõigis $[0; \pi]$ antud ülesandes saadud pinnaosa pindalaga. Selleks tuleb liuguri *Lükka graafikut* abil ühitada vastavad pinnaosad.



4.1.7.6 Ülesanne 87

Dünaamiline slaid võimaldab sammhaaval näidata, kuidas leida kõveratega $y = 3x^2 - x^3$ ja $y = x^2 - 3x$ piiratud kujundi pindala. Liuguri *Lükka graafikuid* abil saab demonstreerida, et tekkinud kujundi pindala ei muutu, kui seda nihutada x -telje sihis. Samuti saab liuguri abil genereerida uusi sama vastusega ülesandeid.

4.1.7.7 Ülesanne 89

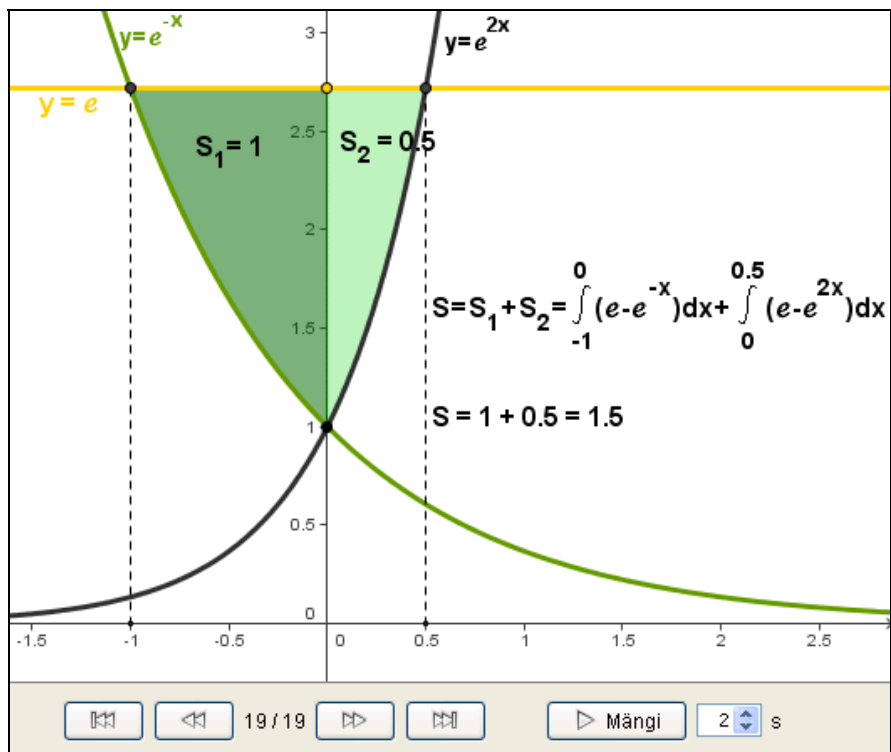
Dünaamilise slaidiga saab demonstreerida, et parabooli $y = a^3x^2 - a$ ja x -teljega piiratud kujundi pindala on muutumatu. Liuguri abil saab parameetri a väärtust muuta ning näha, kuidas muutub parabool, tekkinud kujund ja selle pindala. Õpiku ülesandes on parameetri a lubatavad väärtused positiivsed. Töölehel on võimalik jälgida ka seda, mis juhtub siis, kui parameeter a omandab negatiivseid väärtusi.

4.1.7.8 Ülesanne 91

Dünaamilise slaidi abil saab graafiliselt leida parameetri k väärtuse, mille korral funktsiooni $y = x^2 - k^2$ ja x -teljega piiratud kujundi pindala on 36 ruutühikut. Liuguri *Lüikka graafikut* abil on võimalik joonistel saavutada olukord, kus otsitav pindala on 36 ruutühikut. Samas on jooniselt loetav vastav parameetri k väärtus. Sama tööleht võimaldab genereerida ka analoogseid integreerimisülesandeid.

4.1.7.9 Ülesanne 92

Antud dünaamiline slaid demonstreerib sammhaaval, kuidas leida joontega $y = e^{2x}$, $y = e^{-x}$ ja $y = e$ piiratud kujundi pindala.



4.2 *Sirged ja tasandid ruumis*

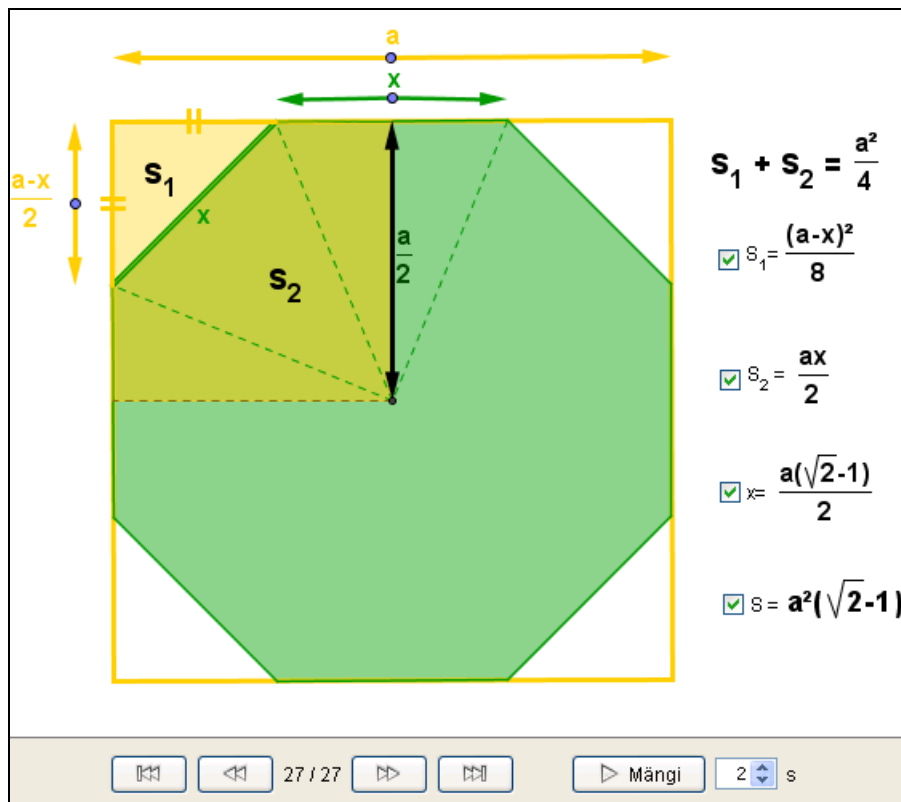
4.2.1 Tasandigeomeetria kordamine

4.2.1.1 Meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas

Dünaamiline slaid võimaldab korrata 9. klassis õpitud Pythagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ning kõrgusega seotud valemeid. Kuna neid seoseid vajatakse õpiku ülesannete 110 – 114 lahendamisel, siis võib näitevahendit kasutada enne nende lahendamata asumist. Ekraanil on täisnurkne kolmnurk, mille täisnurka võib lohistada kolmnurga ümberringjoonel. Ekraanil näidatakse kolmnurga külgede pikkused ning hüpotenuusile joonestatud kõrguse pikkus. Tähistus on traditsiooniline ja ühtib õpiku tähistusega. Eraldi on tähelepanu juhitud kaatetite projektsioonidele hüpotenuusil. Need on eraldi välja toodud kolmnurgast väljaspool asuval lõigul ja selle lõigu kaugust hüpotenuusist saab muuta punktist L lohistades. Märkeruutudele klõpsates kas näidatakse või peidetakse seosed ja nende arvulised vasted. Antud näitevahendiga saab õpetaja lisaks tähelepanu juhtida 8. klassis õpitud Thalese teoreemile (poolringjoonele toetuv piirdenurk on täisnurk).

4.2.1.2 Ülesanne 115

Animeeritud näitevahendiga on võimalik sammhaaval koos õpilastega ülesanne lahendada. Tööleht võimaldab igal etapil arutelu ja suunata õpilasi leidma jooniselt vajalikke andmeid ja neid rakendada. Kõigepealt joonestatakse ruut ning sellesse korrapärane kaheksanurk. Seejärel joonestatakse abilõigud, viiakse sisse tähistused, märgitakse võrdsed lõigud ja leitakse seosed lõikude pikkuste vahel. Järgmisena vaadatakse erinevate kujundite pindalaid ning leitakse seos, mille põhjal ülesanne lahendada. Edasise animatsiooni käigus ilmuvad järjest ekraanile märkeruudud, mille abil saab näidata või peita alaülesannete vastuseid. Lahenduseks tähtsamate lõikude pikkused / tähistused on toodud joonisest väljaspool asuval lõigule ning neid saab siniste punktide abil joonisele lähemale või sellest kaugemale liigutada.



4.2.1.3 Ülesanne 116

Animeeritud näitevahendiga on võimalik sammhaaval koos õpilastega ülesanne lahendada. See võimaldab igal animatsiooni etapil dialoogi õpetaja ja õpilaste vahel. Kõigepealt joonestatakse võrdhaarne kolmnurk, mida on võimalik ühes tipus asuvat punkti liigutades muuta kogu animatsiooniprotsessi käigus. Kolmnurgast väljaspool asub lõik, mis tähistab haara pikkust a . Seda lõiku on võimalik nihutada kolmnurgale lähemale või sellest kaugemale lõigul asuvast punktist liigutades. Kolmnurga alusel olev punkt L , millest joonestatakse haaradega paralleelsed sirged, on alusel liigutatav. Punkti L liigutades, muutub ka tekkinud nelinurk. Küsimuste ja vihje abil saab suunata õpilasi leidma vastust küsimusele, mis liiki nelinurk joonisel tekkis. Vihjet saab näha või peita märkeruudule klikkides. Tekkinud võrdsed lõigud tähistatakse sarnaste kriipsukestega, ka võrdsed nurgad märgitakse ühtmoodi. Edasi suunatakse õpilasi leidma võrdhaarseid kolmnurki. Ülesande vastust saab kontrollida märkeruudu abil.

4.2.1.4 Ülesanne 117

Animeeritud slaidiga on võimalik ülesanne sammhaaval lahendada. Esmalt joonestatakse võrdhaarne kolmnurk ning selle tipunurga poolitaja. Võrdsete lõikude ja võrdsete nurkade paarid tähistatakse sarnaselt. Animatsiooni käigus antakse küsimusi ja vihjeid

ülesande edukaks lahendamiseks. Vihjeid ja vastuseid saab näha või peita märkeruudule klõpsates.

4.2.1.5 Ülesanne 120

Animeeritud näitevahendiga on võimalik ülesanne sammhaaval lahendada. Kõigepealt joonestatakse võrdkülgne kolmnurk, mida saab kahe kolmnurga tipus asuvast punktist lohistades muuta. Edasi joonestatakse kolmnurga kõrgus ning tähistatakse kolmnurga külge, pool aluseks olevast küljest ning kõrgus. Järgnevalt joonestatakse nii sise- kui ümberringjoon. Edasi võib ülesande lahendamine toimuda küsimustele vastates. Vastuseid saab näha või peita märkeruutudele klõpsates.

Millises punktis asub kolmnurga siseringjoone keskpunkt? ümberringjoone keskpunkt?

Mis lõiguks on võrdkülgse kolmnurga kõrgus AO?

Vastus

Kuidas jaotab kolmnurga mediaanide lõikepunkt mediaani?

Vastus

Leidke eelmise vastuse abil, millega võrduvad r ja R?

r = R =

Leidke suhe $\frac{S_r}{S_R}$

Vastus

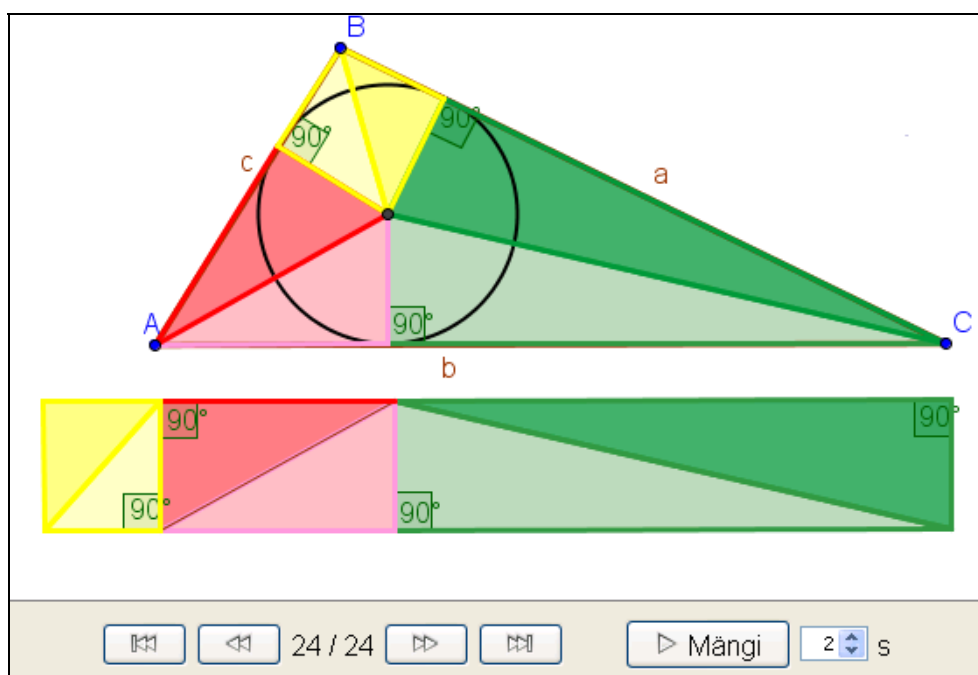
0 / 16 Mängi 2 s

4.2.1.6 Ülesanne 121'

Dünaamilise slaidiga on võimalik meenutada hulknurga sisenurkade ja välisnurkade summa arvutamise valemeid, antud juhul küll korrapärase hulknurga näitel. Liuguri *Nurki* abil saab määrata nurkade arvu 3 kuni 10 ja ekraanile joonestatakse vastav korrapärane hulknurk. Hulknurga külje pikkust on võimalik muuta kahest sinise punktiga tähistatud hulknurga tipust lohistades. Hulknurgal on märgitud üks sisenurk ja välisnurk ja antud ka nende suurused. Ekraanil näidatakse, kuidas konkreetse hulknurga korral arvutatakse sise- ja välisnurkade summa.

4.2.1.7 Ülesanne 129

Animeeritud slaidiga on võimalik näidata, kuidas avaldub kolmnurga pindala selle kolmnurga poole ümbermõõdu ja siseringjoone raadiuse kaudu. Kõigepealt joonestatakse vastav kolmnurk, mida saab animatsiooni käigus muuta otpunktidest lohistades. Slaidil näidatakse ka siseringjoon, need siseringjoone raadiused, mille otpunktid asuvad kolmnurga küljel ning lõigud, mis ühendavad kolmnurga tippu siseringjoone keskpunktiga. Sellisel moel jaotatakse esialgne kolmnurk kuueks väiksemaks kolmnurgaks. Näitevahendi abil tõstetakse tekkinud kolmnurgad ringi nii, et tekib ristkülik, mille ühe külje pikkus on võrdne siseringjoone raadiusega ja teise külje pikkuseks on pool esialgse kolmnurga ümbermõõtu.



4.2.1.8 Ülesanne 130

Animeeritud slaidiga on võimalik sammhaaval tekitada ekraanile joonis ülesande edukaks lahendamiseks. Kõigepealt luuakse ekraanile kolmnurk, mida saab animatsiooni igal etapil tippudest lohistades muuta. Järgnevalt antakse kolmnurga keskloik, näidatakse võrdse pikkusega lõigud ja tekkinud kujundid värvitakse erinevalt. Edasi joonestatakse esialgse kolmnurga kõrgus ning näidatakse kolmnurkade külgede pikkuste ja kõrguste vaheline seos.

4.2.1.9 Ülesanne 131

Dünaamiline slaid võimaldab luua joonise ülesande edukaks lahendamiseks. Animeeritud slaidiga saab sammhaaval tekitada ekraanile kolmnurga, mida saab animatsiooni

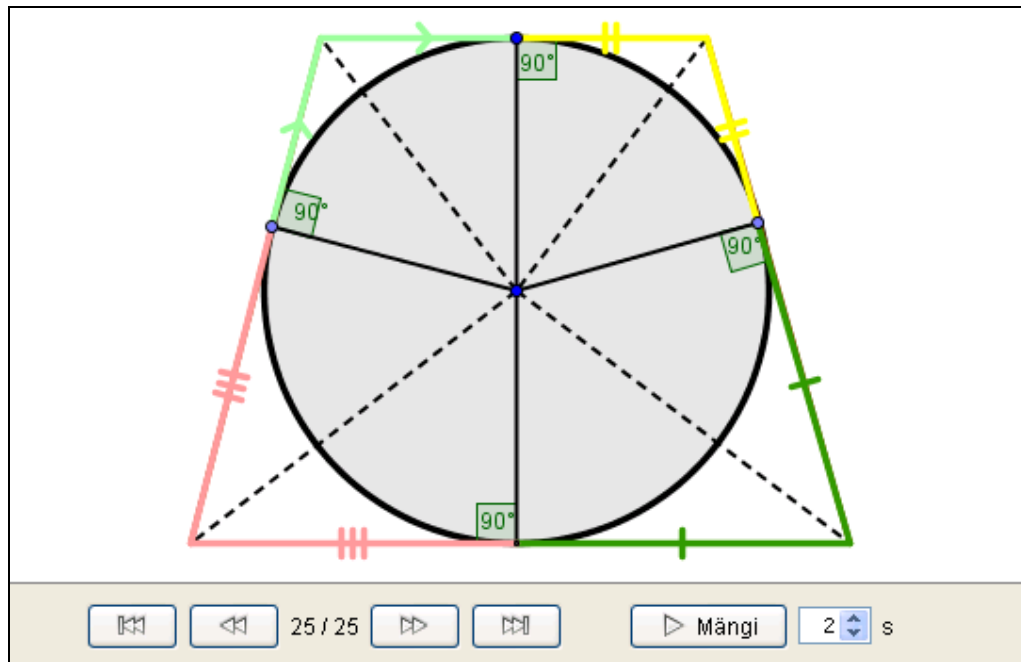
igal etapil tippudest lohistades muuta. Järgnevalt antakse kolmnurga mediaanid, mis jaotavad kolmnurga kuueks väiksemaks kolmnurgaks ning näidatakse võrdse pikkusega lõigud. Kuna õpilased peavad selles ülesandes leidma, millised neist kuuest kolmnurgast on pindvõrdsed, siis joonestatakse järgmiseks nende kolmnurkade kõrgused. Erijuhuna võib vaadelda kolmnurka, mille korral näiteks üks joonestatud kõrgus asub väljaspool kolmnurka.

4.2.1.10 Ülesanne 154

Animeeritud näitevahendiga saab luua joonise ülesande lahendamiseks. Esmalt joonestatakse ringjoon, mille suurust ja asukohta saab muuta selle keskpunktist lohistades. Ekraanil märgitakse suvaline punkt L, millest joonestatakse ringjoonele puutujad. Punkti L asukohta saab ekraanil muuta seda punkti ekraanil lohistades. Järgnevalt joonestatakse raadiused puutepunktidesse ning punkti L ja ringjoone keskpunkti vaheline lõik. Edasi võiksid õpilased põhjendada, miks puutujalõikude pikkused on võrdsed. Märkeruudule klikkides saab näha vihjet, mille abil põhjendada.

4.2.1.11 Ülesanne 155

Animeeritud näitevahend võimaldab sammhaaval esitada ülesande lahendamiseks tarviliku joonise. Kõigepealt antakse ringjoon, mille asukohta ja suurust on võimalik muuta ringjoone keskpunkti ja ringjoonel asuva punkti lohistamisega. Seejärel antakse ringjoone ümber joonestatud trapets (puutujanelinurk), mida saab muuta haaradel asuvate punktide lohistamisega. Joonist täiendatakse ringjoone raadiustega puutepunktidesse ning lõikudega, mis ühendavad trapetsi tippe ringjoone keskpunktiga. Lõpuks näidatakse võrdsed lõigud.



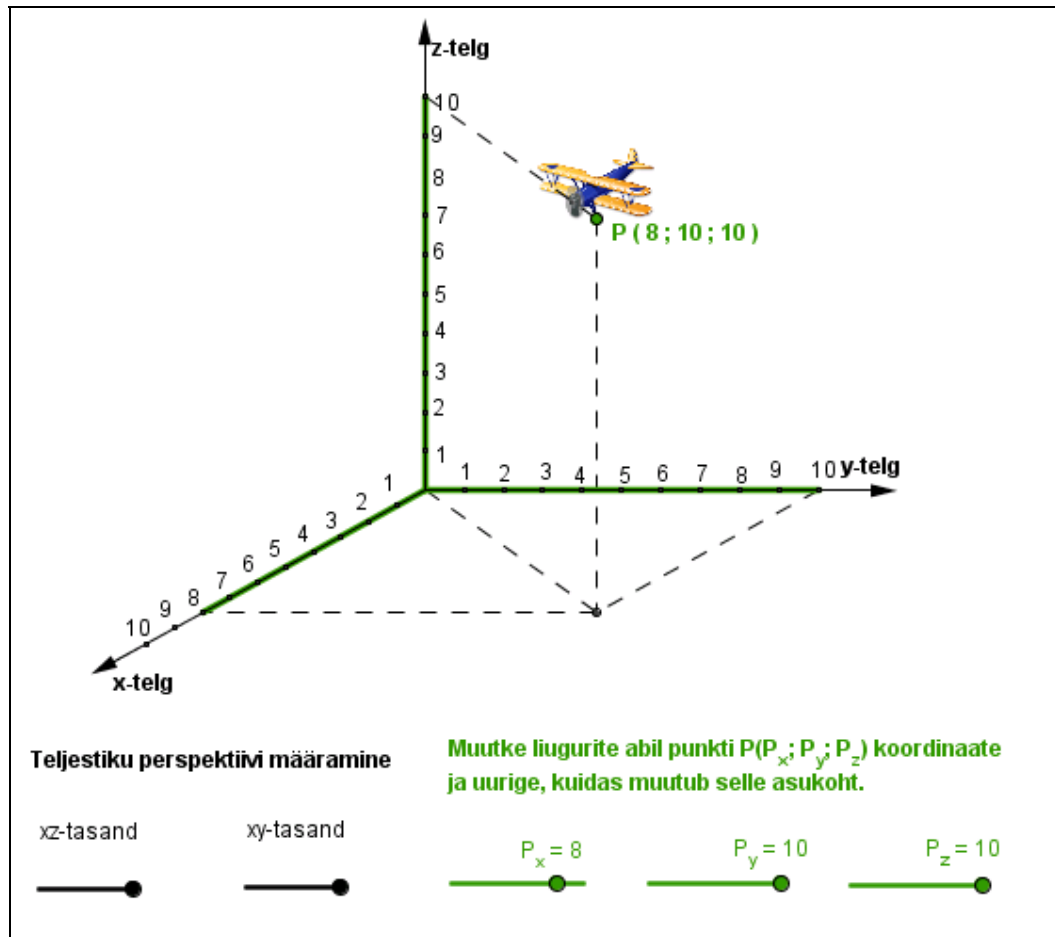
4.2.1.12 Ülesanne 156

Animeeritud näitevahend võimaldab sammhaaval esitada ülesande lahendamiseks vajaliku joonise. Kõigepealt luuakse täisnurkne kolmnurk, mida saab igal animatsiooni etapil muuta selle tippudest lohistades. Edasi joonestatakse kolmnurga siseringjoon, raadiused puutepunktidesse ning kolmnurga tippe siseringjoone keskpunktiga ühendavad lõigud. Joonisel näidatakse võrdse pikkusega lõigud ning avaldatakse hüpotenuus kaatete ja siseringjoone raadiuse kaudu. Selle abil on võimalik avaldada otsitav (siseringjoone raadius) täisnurkse kolmnurga külgede kaudu.

4.2.2 Punkti asukoha määramine ruumis

4.2.2.1 Joonis 2.4

Dünaamilise slaidi abil on võimalik demonstreerida punkti (näites lennuki) asukoha määramist ruumi esimeses oktandis. Joonisel on x -, y - ja z -telg, mille perspektiivi on võimalik muuta liugurite xz -tasand ja xy -tasand abil. Punkti asukohta saab muuta selle koordinaate esitavate liugurite P_x , P_y ja P_z abil. Muutes punkti koordinaati, muutub ka vastavalt punkti asukoht.



4.2.2.2 Joonis 2.5

Dünaamiline slaid võimaldab demonstreerida, kuidas näeb välja koordinaatteljestik kolmemõõtmelises ruumis. Joonisel on antud x-, y- ja z-telg ehk abstsiss-, ordinaat- ja aplikaattelg. Lisaks on välja toodud ka xy-tasand. Liugurite *Pööra ümber z-telje* ja *Pööra ümber y-telje* abil saab teljestikku pöörata vastavalt ümber z-telje ja ümber y-telje.

4.2.2.3 Joonis 2.6

Dünaamilise slaidi abil saab näidata koordinaatteljestikku ruumis, samuti xy-, xz- ja yz-tasandit ning kaheksat oktant. Iga tasand on erinevat värvi. Tasandite visuaalset pilti saab muuta vastavalt liugurite *xz- ja xy-tasandi muutmise*, *xy- ja yz-tasandi muutmise* ja *yz- ja xz-tasandi muutmise* abil. Teljestikku on võimalik pöörata liugurite *Pööra ümber z-telje* ja *Pööra ümber y-telje* abil vastavalt ümber z- ja y-telje.

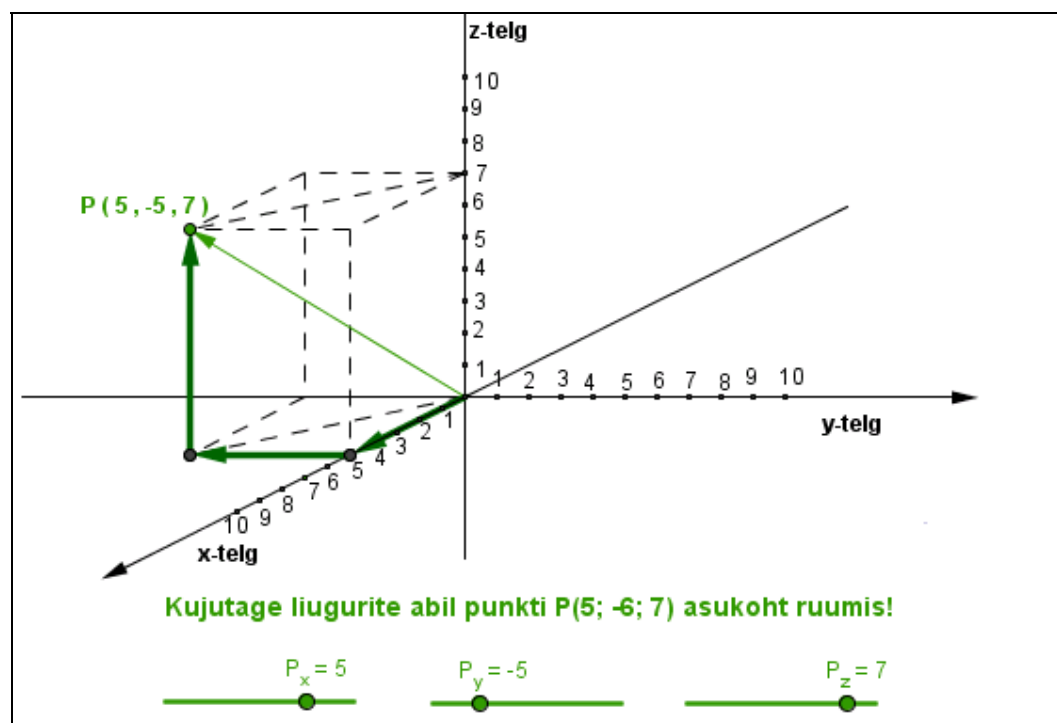
4.2.2.4 Joonis 2.7

Dünaamilise slaidi abil on võimalik muuta punkti P koordinaate liugurite P_x , P_y ja P_z abil ning jälgida, kuidas muutub punkti P asukoht selle koordinaatide muutmisel. Samu-

ti võib õpilastelt küsida, millises oktandis punkt asetseb. Eraldi on välja toodud punkti ristprojektsioonid koordinaattelgedel. Slaidil näidatakse punkti P ristprojektsioonide leidmiseks konstrueeritud lõigud ning risttahukas, mille kolme tahu diagonaalideks need lõigud on.

4.2.2.5 Joonis 2.8

Selle dunaamilise slaidi abil on võimalik kujutada punkti P asukohta ruumis. Selleks saab liuguri P_x abil määrata punkti abstsiss-, liuguri P_y abil ordinaat- ning liuguri P_z abil aplikaatkoordinaat. Õpilastelt on võimalik küsida, millises oktandis punkt asub. Näitevahendi abil on võimalik genereerida ja lahendada uusi analoogilisi ülesandeid.



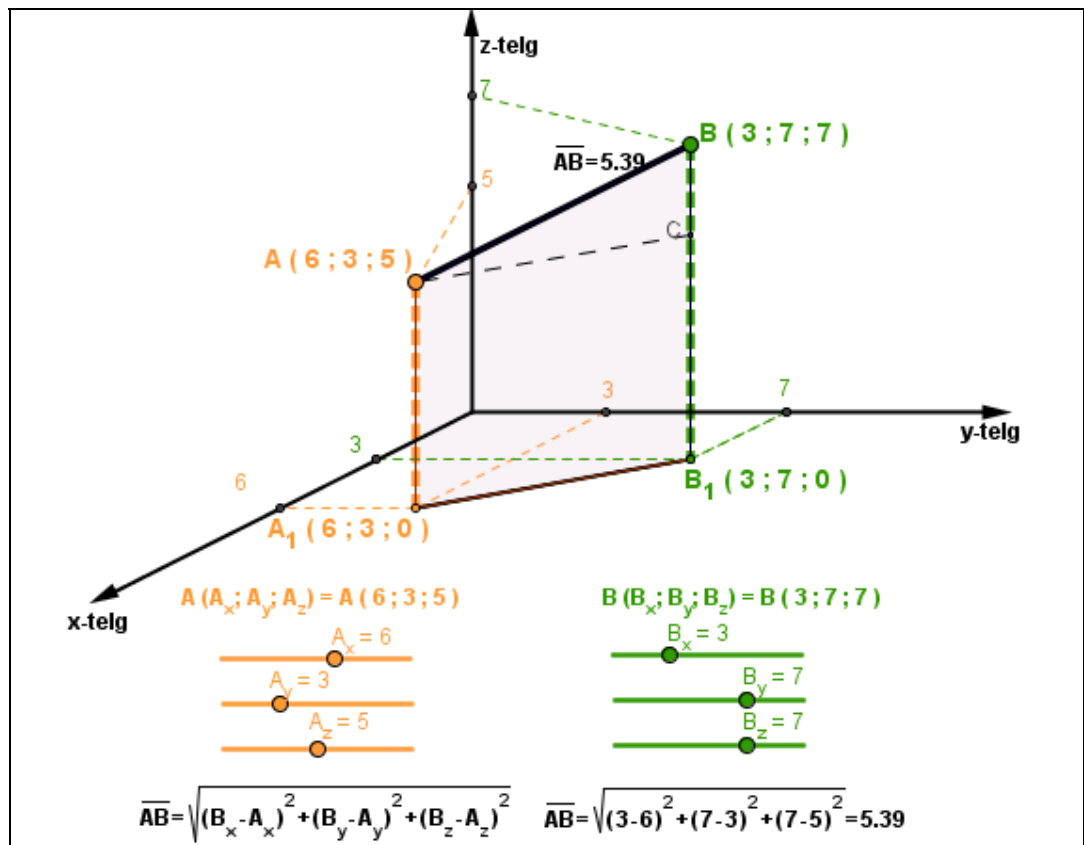
4.2.3 Kahe punkti vaheline kaugus ruumis

4.2.3.1 Joonis 2.9

Näitevahendi abil on võimalik demonstreerida, kuidas arvutada kahe punkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis (esimeses oktandis). Animatsiooni käigus esitatakse sammhaaval teljestik ning selles kaks punkti A ja B. Peale seda on liugurite A_x , A_y , A_z , B_x , B_y ja B_z abil võimalik animatsiooni käigus nende punktide koordinaate muuta ning jälgida, kuidas muutub joonis. Ekraanile esitatakse punktide A ja B projektsioonid xy-tasandile, punkte A ja B ühendav lõik ja selle projektsioon xy-tasandile. Muutes punkti-

de koordinaate, muutub punktide vaheline kaugus. Samuti antakse ekraanil valem kahe punkti vahelise kauguse leidmiseks ruumis.

Näitevahendi abil on samuti võimalik genereerida ülesandeid konkreetsete punktide vahelise kauguse leidmiseks. Õpilased võivad sellisel juhul esmalt ülesande lahendada ise-iseisvalt ja näitevahendil oleks seejuures tagasisideme andmise funktsioon. Samuti on huvitav joonist uurida nõ piirjuhtumitel – juhtudel, kus A või/ja B asuvad mingitel koordinaattasanditel.



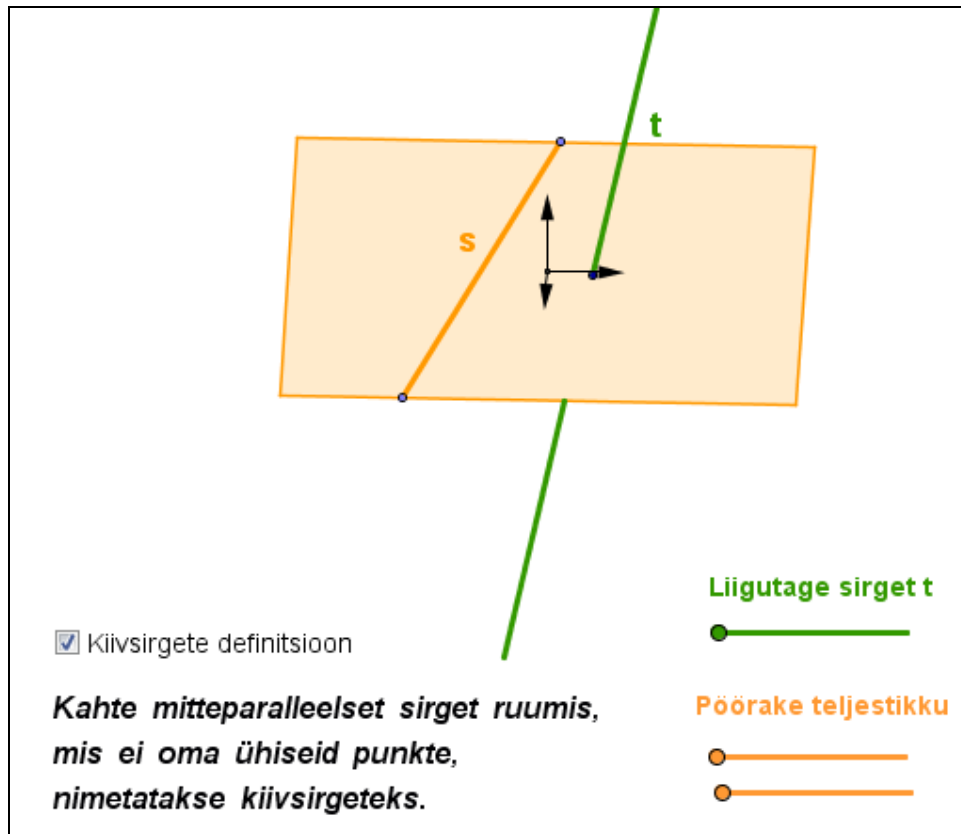
4.2.4 Sirged ruumis

4.2.4.1 Joonis 2.10

Näitevahendiga saab visualiseerida paralleelsete sirgete definitsiooni. Sirged s ja t asuvad tasandil, mida on võimalik liuguri Pööra tasandit abil pöörata. Seega on võimalik jälgida, kuidas muutub sirgete asend ruumis tasandi pööramise ajal. Samuti on võimalik muuta sirge s ja t asukohta tasandil sirget tähistava lõigu otspunktist lohistades. Sirget s saab lohistada mõlemast äärest. Märkeruudule klõpsates saab ekraanile tuua ka paralleelsete sirgete definitsiooni.

4.2.4.2 Joonis 2.11

Slaidiga saab näidata, kuidas asetsevad kiivsirged ruumis üksteise suhtes. Üks sirgetest asub tasandil. Tasandit on võimalik liugurite *Pöörake teljestikku* abil pöörata. See võib luua joonisest parema ruumilise ettekujutuse. Tasandil asetseva sirge s asukohta on võimalik muuta, seda tähistava lõigu otspunktist lohistades. Teist sirget t saab liigutada liuguri *Liiguta sirget t* abil. Ekraanile on võimalik märkeruudule klõpsates tuua ka kiivsirgete definitsioon.



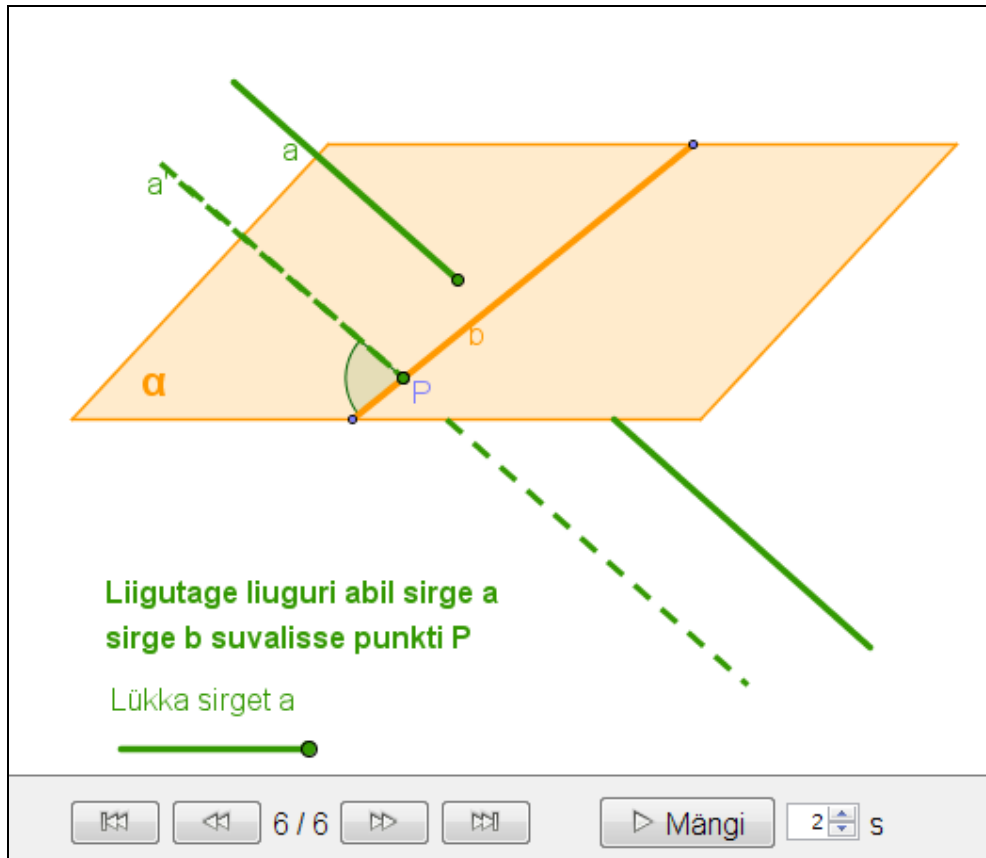
4.2.4.3 Joonis 2.12

Slaidi abil on võimalik demonstreerida, et kaks lõikuvat sirget moodustavad tasandil kaks tippnurkade ja neli kõrvunurkade paari. Joonisele on võimalik tuua märkeruudule klõpsates ka kahe sirge vahelise nurga definitsiooni. Lõikuvatest sirgetest ühte saab punktist L lohistades ümber lõikepunkti pöörata ning jälgida, kuidas muutub sirgete vaheline nurk.

4.2.4.4 Joonis 2.14

Animeeritud slaid võimaldab sammhaaval näidata, kuidas leida kiivsirgete vahelist nurka. Esmalt antakse tasand ja sellel suvaline sirge, mille asukohta tasandil saab muuta

seda tähistava lõigu otspunktidest lohistades. Seejärel antakse sellele sirgele kiivsirge, mida saab tasandil liigutada. Edasi on võimalik liuguri *Liiguta sirget a* abil kiivsirge lükata nii, ta see lõikaks antud tasandil asuvat sirget. Tekkinud sirget on võimalik lõikepunktist lohistada piki tasandil asuvat sirget. Lõpuks näidatakse ka sirgete vaheline nurk.



4.2.5 Sirge ja tasand ruumis

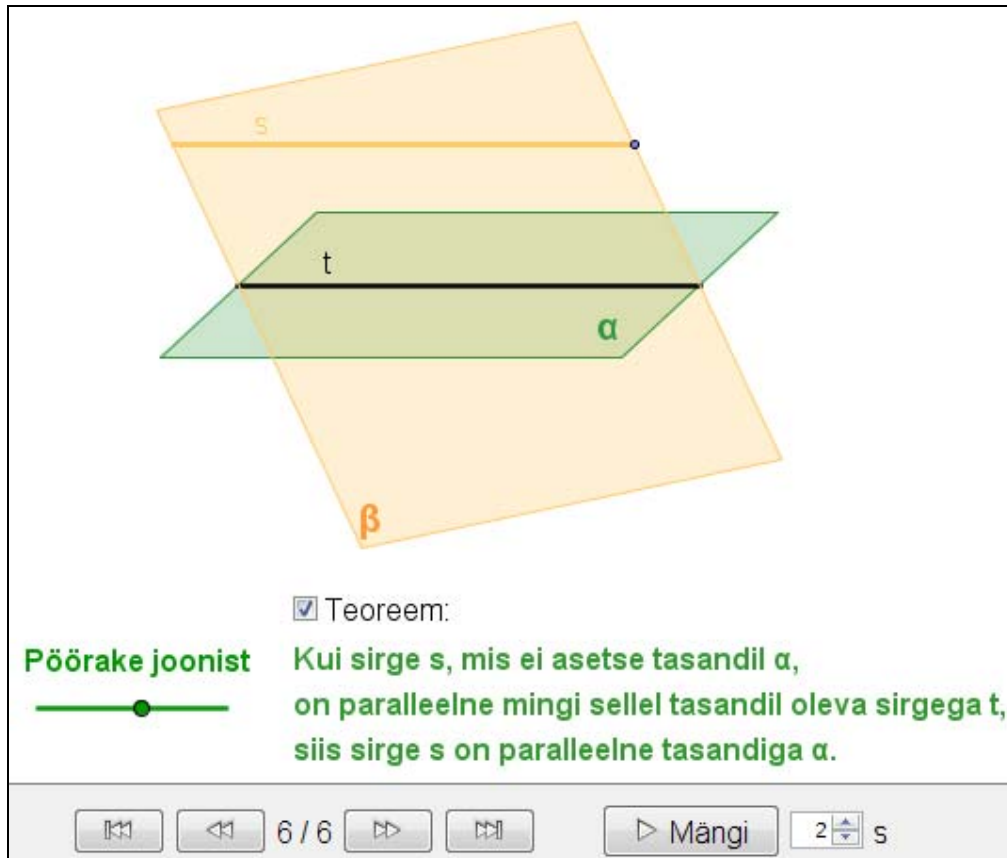
4.2.5.1 Joonis 2.15

Slaid võimaldab õpilastele visualiseerida sirge ja tasandi vastastikuseid asendeid lähtudes sellest, kui palju on iga võimaluse juures sirgel ja tasandil ühiseid punkte. Joonist on võimalik pöörata liugurite *Pöörake tasandit α* abil. Tasandil asuva sirge h asukohta on võimalik muuta seda tähistava lõigu otspunktidest lohistades. Klõpsates märkeruutudele, ilmuvad ekraanile kokkuvõtavad tulemused.

4.2.5.2 Joonis 2.16

Animeeritud slaidiga on võimalik luua sammhaaval joonis teoreemi (sirge ja tasandi paralleelsuse tunnuse kohta) tõestamiseks. Kõigepealt antakse ekraanil tasand α ja sellel

tasandil mitteasuv sirge s . Järgmisena tuuakse slaidile sirgega s paralleelne tasandil α asuv sirge t ning tasand β , mis on määratud sirgetega s ja t . Parema ruumilise ettekujutuse saamiseks on võimalik joonist igal animatsiooni etapil liuguri *Pöörake joonist* abil pöörata. Ekraanil antakse ka vastava teoreemi sõnastus, mida saab näha märkeruudule klõpsates. Sirget s on võimalik nihutada seda tähistava lõigu otspunktist lohistades.



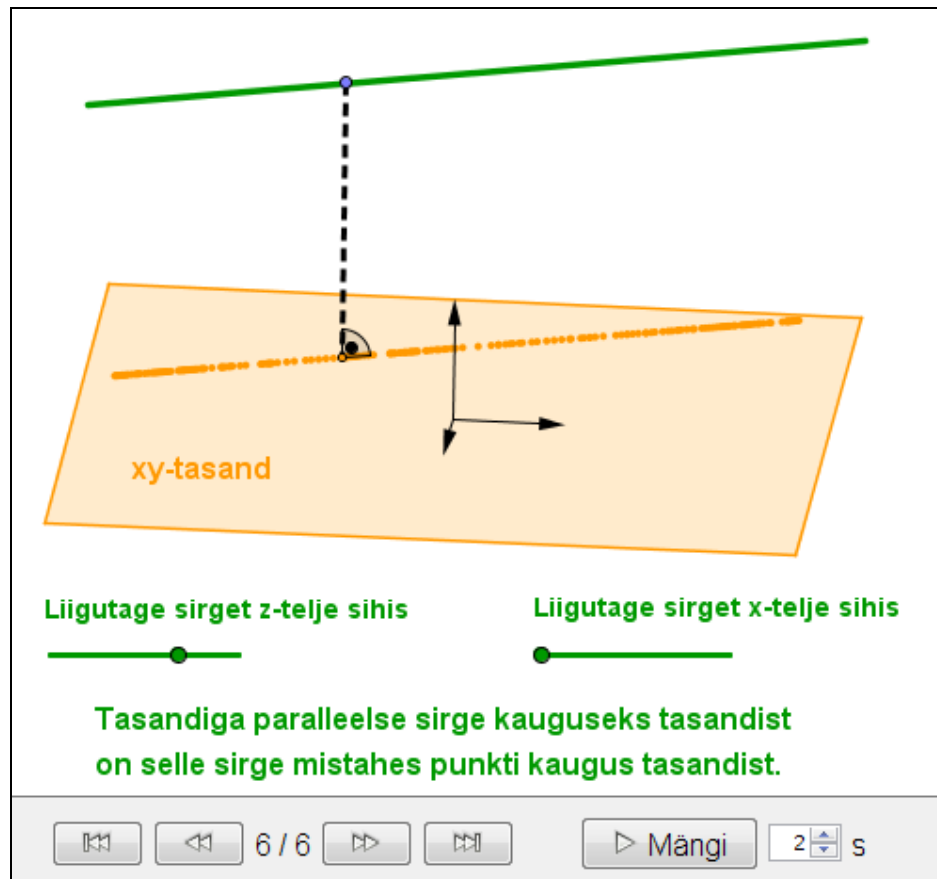
4.2.5.3 Joonis 1.18 a

Animeeritud slaidiga saab näitlikustada punkti projektsiooni leidmist tasandil. Kõigepealt tuuakse slaidile tasand α , mida saab igal etapil pöörata liugurite *Pöörake tasandit* α abil. Järgnevalt antakse väljaspool tasandit punkt A , mida saab lohistada ning mille kaugust saab määrata liugurist *Punkti kaugus tasandist*. Lõpuks joonestatakse punkti A läbiv tasandi α normaal ning normaali ja tasandi lõikepunkt A' .

4.2.5.4 Joonis 1.18 b

Dünaamiline slaid võimaldab illustreerida tasandiga paralleelse sirge kaugust sellest tasandist. Animatsiooni käigus antakse esmalt xy -tasand, järgmisena tuuakse slaidile selle tasandiga paralleelne sirge, mida on võimalik liigutada liugurite *Liiguta sirget z-telje sihis* ja *Liiguta sirget x-telje sihis* abil. Edasi ilmub sirgel vabalt liigutatav punkt ning

selle punkti projektsioon tasandile. Kui sirgel asuvat punkti liigutada, siis tekib tasandile selle punkti liikumise jälg. Lõpuks tuuakse slaidile mõiste (tasandiga paralleelse sirge kaugus tasandist) selgitus.



4.2.5.5 Joonis 1.18 c

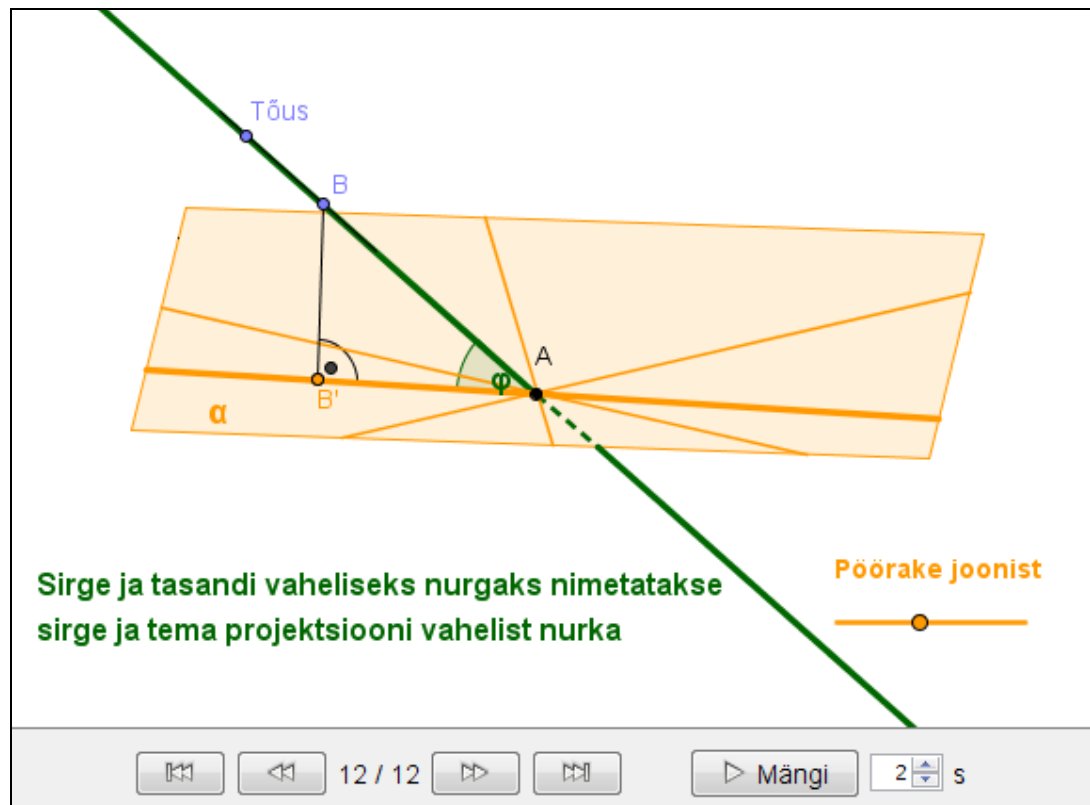
Slaidiga saab näitlikustada lõigu projektsiooni tasandist. Animatsiooni käigus antakse esmalt xy-tasand, mida saab pöörata liuguri *Pöörake joonist* abil ning lõigu AB ots-punktid. Punkti A asukohta saab liugurite A_x , A_y ja A_z abil muuta. Järgmisena tuuakse slaidile lõik AB ning punktide A ja B projektsioonid tasandil. Lõpuks näidatakse lõigu projektsiooni tasandil.

4.2.6 Sirge ja tasandi vaheline nurk

4.2.6.1 Sirge ja tasandi vaheline nurk

Slaidiga on võimalik visualiseerida sirge ja tasandi vahelise nurga mõistet. Animatsiooni käigus tuuakse slaidile kõigepealt tasand, mida saab pöörata liuguri *Pöörake joonist* abil. Järgnevalt märgitakse tasandile punkt A ning läbi selle punkti joonestatakse tasandit lõikav sirge. Tekkinud sirge tõusu on võimalik muuta punkti *Tõus* liigutades. Tasan-

dile joonestatakse kolm tasandil asuvat sirget, mis lõikuvad punktis A. Lõikesirgel mär-
gitakse punkt B, mida saab sirgel liigutada. Seejärel joonestatakse punkti B ristprojekt-
sioon ning lõikaja ristprojektsioon tasandile. Viimasena näidatakse lõikesirge ja tasandi
vaheline nurk φ ning esitatakse ka tasandi ja sirge vahelise nurga mõiste.



4.2.6.2 Ülesanne 213

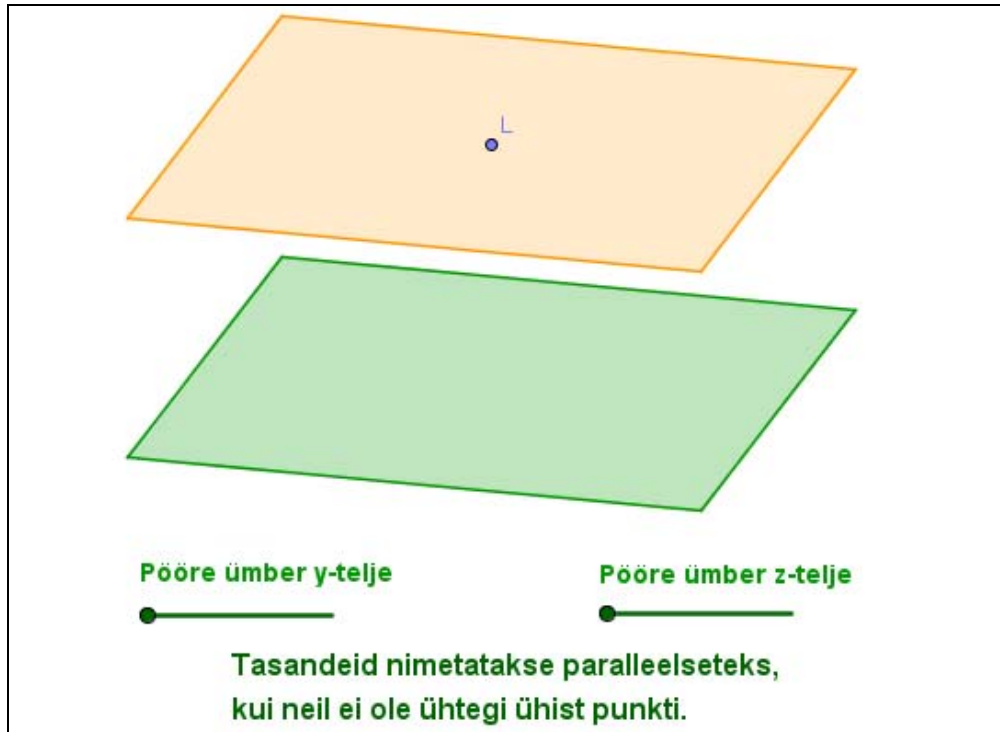
Antud dünaamilise slaidi abil on võimalik leida vastused ülesandes 213 esitatud küsi-
mustele. Ekraanil on punktid A ja B, lõik AB, punktide projektsioonid tasandil ning lõi-
gu AB projektsioon tasandil. Punktide A ja B koordinaate on võimalik liugurite A_x , A_y ,
 A_z , B_x , B_y ja B_z abil muuta ning selle abil leida vastused ülesandes esitatud küsimustele,
mis on kirjas ka slaidil. Klõpsates küsimuste juures asuvatele märkeruutudele, näida-
takse võimalikke vastuseid. Joonist on võimalik parema nähtavuse huvides liugurite
Pööre ümber y-telje ja *Pööre ümber z-telje* abil pöörata.

4.2.7 Kaks tasandit ruumis

4.2.7.1 Paralleelsed tasandid

Dünaamilise slaidi abil on võimalik visualiseerida paralleelsete tasandite mõistet. Ek-
raanil on kaks paralleelset tasandit. Parema ülevaate saamiseks on võimalik joonist pöo-
rata liugurite *Pööre ümber y-telje* ja *Pööre ümber z-telje* abil. Samuti on võimalik ühel

tasandil asuvat punkti L liigutades muuta tasandite vahelist kaugust. Slaidil antakse ka paralleelsete sirgete definitsioon.

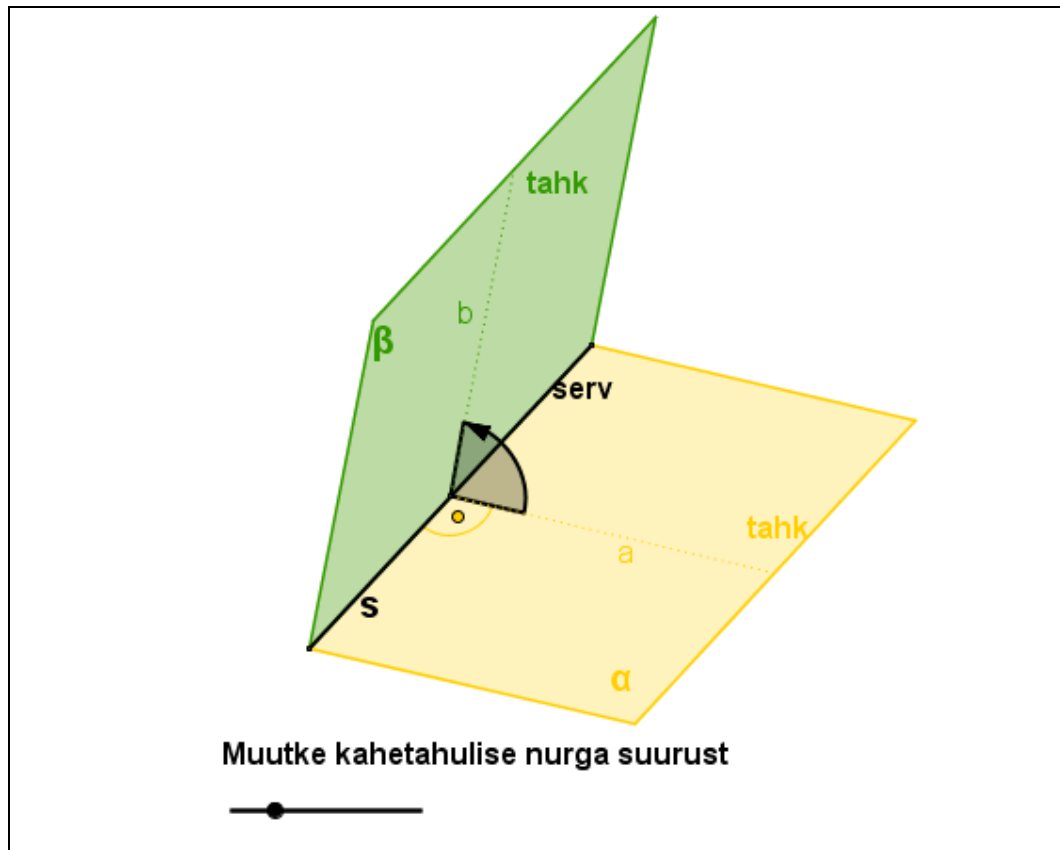


4.2.7.2 Joonis 2.23

Dünaamilise slaidi abil on võimalik demonstreerida tasandite vahelise nurga mõistet. Slaidil on lõikuvad tasandid α ja β . Kasutajal on võimalik liuguri *Muutke tasandite vahelist nurka* abil muuta tasandite vahelist nurka ja jälgida kuidas muutub joonis. Slaidil on kirjas ka kahe tasandi vahelise nurga mõiste.

4.2.7.3 Joonis 2.24

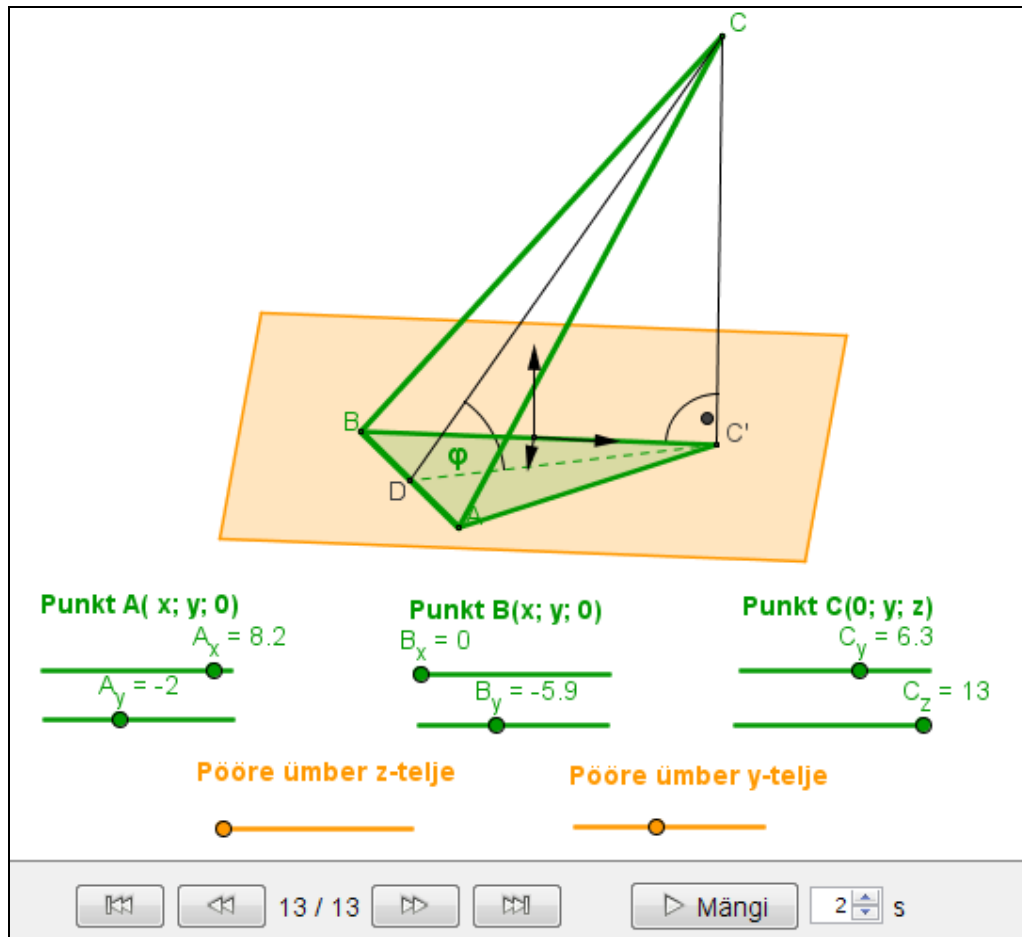
Näitevahendi abil on võimalik visualiseerida kahetahulise nurga mõistet. Liuguri *Muutke kahetahulise nurga suurust* abil saab näha, kuidas muutub tahkude vaheline nurk. Kuna kahetahuline nurk võib olla ka nürinurk, siis võimaldab ka näitevahend muuta vastavat nurka nürinurgaks.



4.2.8 Hulknurga projektsiooni pindala

4.2.8.1 Joonis 2.26

Slaidi abil saab näitlikustada, kuidas konstrueerida kolmnurga projektsiooni tasandile, kui kolmnurga üks külg asub sellel tasandil. Animatsiooni käigus antakse tasand, mida saab liugurite *Pööre ümber y-telje* ja *Pööre ümber z-telje* abil pöörata ümber vastavate telgede. Järgnevalt antakse kolmnurga tipud ja nende koordinaate esitavad liugurid A_x , A_y , B_x , B_y , C_x ja C_z . Muutes liuguritel koordinaatide väärtuseid, muutuvad vastavate punktide asukohad. Edasi joonestatakse kolmnurk ABC, mille külg AB asub tasandil ning punkti C projektsioon C' tasandile. Lõpuks antakse kolmnurga ABC projektsioon tasandile ning kolmnurga ABC ja selle projektsiooni vaheline nurk φ .



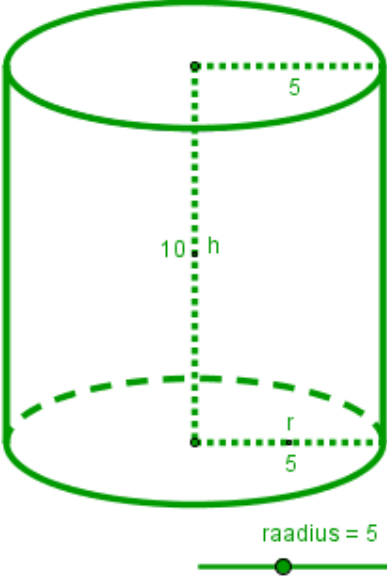
4.2.8.2 Joonis 2.27

Slaidi abil saab näidata, kuidas konstrueerida kolmnurga projektsioon tasandile, kui kolmnurga üks külg on paralleelne antud tasandiga. Animatsiooni käigus antakse tasand α , kolmnurga tipud ning nende koordinaate esitavad liugurid A_x , A_y , B_x , B_y , C_x ja C_z . Muutes liuguritel koordinaatide väärtuseid, muutuvad punktide asukohad. Edasi joonestatakse kolmnurk ABC, mille külg AB on paralleelne tasandiga α . Järgmisena tuuakse slaidile tasandiga α paralleelne tasand β , millel asub kolmnurga külg AB. Liuguri *Tasandite vaheline kaugus* abil on võimalik muuta tasandite α ja β vahelist kaugust. Järgmisena antakse kolmnurga ABC projektsioon tasandile β ning kolmnurga ABC ja selle projektsiooni vaheline nurk φ . Lõpuks näidatakse kolmnurga ABC projektsiooni tasandil α . Kogu joonist saab animatsiooni käigus liugurite *Pööre ümber y-telje* ja *Pööre ümber z-telje* abil pöörata ümber vastavate telgede.

4.3 Lisaslaidid

4.3.1.1 Silindri ruumala ja koonuse ruumala

Dünaamilise slaidiga on võimalik näitlikustada silindri / koonuse ruumala leidmist. Slaidil on silindri / koonuse kõrgus ja põhja raadius etteantud vahemikus liugurite *kõrgus* ja *raadius* abil muudetavad. Nende väärtuste muutmisel muutub ka silinder / koonus. Ekraanil on silindri / koonuse põhja (ringi) pindala arvutamise valem ja vastav arvutus. Liugurite *Valem* ja *Arvutus* abil on võimalik ekraanil näidata või peita silindri / koonuse ruumala leidmise valemit ja vastavat arvutust. Silindri / koonuse põhja pindala ja ruumala arvutused on dünaamilised, st kõrguse ja raadiuse väärtuste muutmisel muutub ka vastav arvutus.



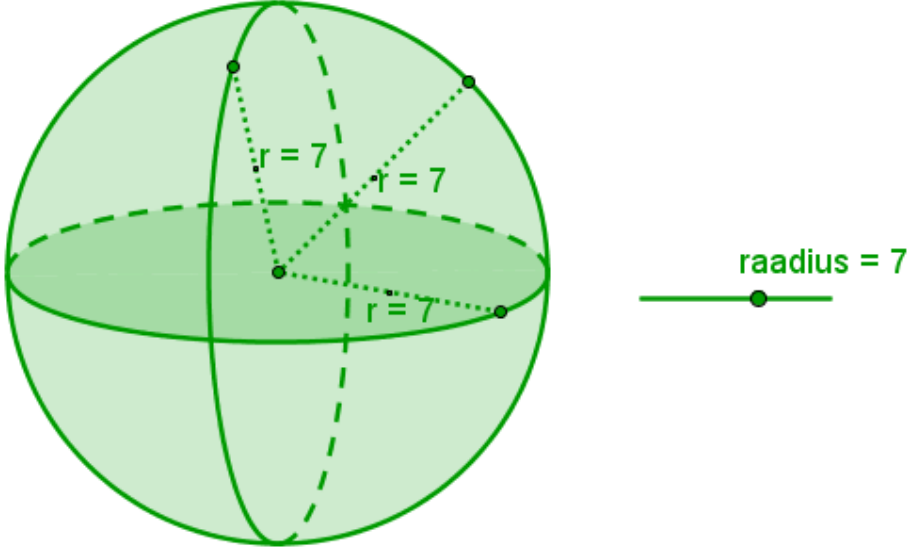
$S_p = \pi r^2$
 $S_p = 3.14 * 5 * 5 = 78.54$

Valem
Arvutus

$V = S_p * H$
 $V = 78.54 * 10 = 785.4$

4.3.1.2 Kera ruumala

Dünaamiline slaid võimaldab korrata kera ruumala valemit. Slaidil on kera raadius etteantud vahemikus liuguri *raadius* abil muudetav. Selle väärtuse muutmisel muutub ka kera. Liugurite *Valem* ja *Arvutus* abil on võimalik ekraanil näidata või peita kera ruumala leidmise valemit ja vastavat arvutust. Kera ruumala arvutus on dünaamiline. Liigutades punkte sfääril mööda kolme ringjoont on õpetajal võimalik juhtida õpilaste tähelepanu fakte, et sfääri kõik punktid on võrdsel kaugusel kera keskpunktist.

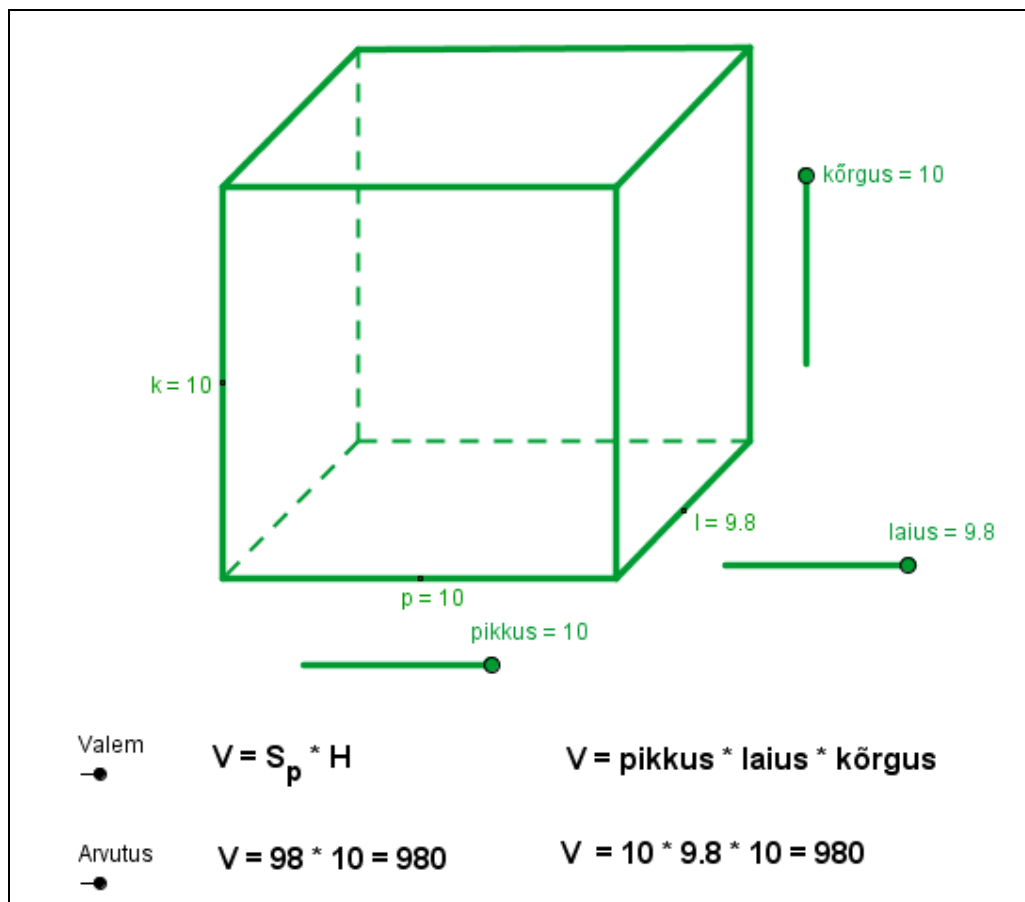


The diagram shows a sphere with a radius of 7. Three dashed lines represent the radius from the center to the surface at different points, each labeled $r = 7$. To the right of the sphere is a horizontal line with a central dot, labeled "raadius = 7", representing a slider control.

Valem	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Arvutus	$V = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 1436.76$

4.3.1.3 Risttahuka ruumala

Dünaamiline slaid võimaldab näitlikustada risttahuka ruumala leidmist. Slaidil saab risttahuka mõõtmeid etteantud vahemikes liugurite *kõrgus*, *laius* ja *pikkus* abil muuta. Nende väärtuste muutmisel muutub ka risttahukas. Liugurite *Valem* ja *Arvutus* abil on võimalik ekraanil näidata või peita risttahuka ruumala valemeid ja vastavat arvutust. Risttahuka ruumala arvutus on dünaamiline.



4.3.1.4 Kolmnurkse püstprisma ruumala

Dünaamilise slaidiga on võimalik korrata kolmnurkse püstprisma ruumala leidmist. Slaidil on kolmnurkse püstprisma kõrgus ja põhjaks oleva kolmnurga aluseks võetud külje pikkus etteantud vahemikus liugurite *kõrgus* ja *alus* abil muudetavad. Nende väärtuste muutmisel muutub ka kolmnurkne püstprisma. Ekraanil on kirjas ka põhja (kolmnurga) pindala (aluse ja kõrgusega) arvutamise valem ja vastav arvutus. Liugurite *Valem* ja *Arvutus* abil on võimalik ekraanil näidata või peita kolmnurkse püstprisma ruumala leidmise valemit ja vastavat arvutust. Kolmnurkse püstprisma põhja pindala ja ruumala arvutused on dünaamilised.

Teisel samateemalisel slaidil on kolmnurkse püstprisma põhjaks oleva kolmnurga tipud liigutatavad ning prisma kõrgus on etteantud vahemikus liuguri *kõrgus* abil muudetav. Ekraanil on näha ka põhja külgede pikkused ja põhja (kolmnurga) pindala arvutamise (Heroni) valem ja vastavad arvutused. Liugurite *Valem* ja *Arvutus* abil on võimalik ekraanil näidata või peita kolmnurkse püstprisma ruumala leidmise valemit ja vastavat arvutust. Kolmnurkse püstprisma põhja pindala ja ruumala arvutused on dünaamilised. Põhjaks oleva kolmnurga tippude liigutamisel peaks õpetaja jälgima, et tekkiv kolmnurkne püstprisma oleks õpilastele hästi arusaadav.

Summary

Dynamic slides for 12th grade mathematics book

Jane Albre

There are lot of students who find mathematics a difficult subject to study. Mathematics is an abstract subject by its nature and demands more than oral and written explanation for teaching it. Students understand mathematics better when visualization is added to written and oral presentation. It reduces abstractness of the subject also. Illustration helps to store information in the long term memory. Visualization has an important role in studying and teaching. With usage of modern infotechnology it is possible to visualize math lessons even more.

The purpose of present Master's thesis was to create dynamic slides for 12th grade mathematics book [5]. Dynamic slide is an electronic visualizing tool that can be used to demonstrate dynamically or animated way some relation, definition or solution of an exercise. On the slide it is possible to change so called free objects (e.g. location of point, length of segment) and to see how objects that depend on them are changing on the slide.

While carrying out software search the author found freeware program GeoGebra which is created specifically for teaching and studying of mathematics. Author set a goal to translate GeoGebra into Estonian. Additionally the manual of the program was translated and some parts of the official webpage of GeoGebra [3].

Dynamic slides were created for topics "Integral" and "Lines and Planes in the Space" of the mathematics book [5]. Created slides are meant for teachers as tools of visualizing math lessons. All created dynamic slides form the electronic part of present Master's thesis on CD. Written part of the Master's thesis consists of following parts:

- Introduction to the program GeoGebra, short overview of translation process and GeoGebra's position amongst other mathematics software Estonian schools can use;
- Guidelines for creating teaching materials;
- Commentaries to the dynamic slides that lie on CD;
- Manual of GeoGebra in Estonian.

Kasutatud kirjandus

- [1] Albre, J., *Koolitarkvaraprogrammist GeoGebra*, Koolimatemaatika XXXIV, TÜ Eesti Matemaatika Selts, Tartu 2007.
- [2] Clark, J. M., Paivio, A., *Dual coding theory and education*, Education Psychology Review, 3, 149 – 170, 1991.
- [3] *GeoGebra ametlik veebileht*, URL <http://www.geogebra.org>.
- [4] Hohenwarter, M., Preiner, J., *GeoGebra Help*, Official Manual 3.0, June 2007.
- [5] Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K., *Matemaatika õpik 12. klassile*, Kirjastus „Koolibri“ 2003.
- [6] Leppik, P., *Lapse arendamine ja õpetamise probleeme koolis*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu 2000.
- [7] Luik, P., *Õppematerjali koostamine ja hindamine*, Õpetajakoolituse loengumaterjal, URL <http://lepo.it.da.ut.ee/~piretl/ylddidak/>.
- [8] Mayer, R. E., Moreno, R., *Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning*, Educational Psychologist, 38, 43-52, 2003.
- [9] Nielsen, J., *Guidelines for Multimedia on the Web*, Alertbox for December 1995, URL <http://www.useit.com/alertbox/9512.html>.