

P
A-1459 III

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Seeria A nr. 31

1948

Л. А. ТЕПАКС

К ВОПРОСУ О ПОГРАНИЧНЫХ
УСЛОВИЯХ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА



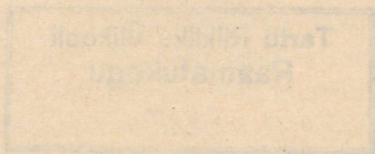
ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

A-1459 III

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Seeria A nr. 31 1948

Л. А. ТЕПАКС

К ВОПРОСУ О ПОГРАНИЧНЫХ
УСЛОВИЯХ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА



ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

ТАРТУ, 1949

21

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

8209

1. Введение.

Область применения гидродинамики в настоящее время очень широка. Не только каждое новое направление в развитии этой дисциплины, но и даже каждое уточнение существующих достижений имеют большое прикладное значение и представляют актуальную область исследования.

Большинство проблем гидродинамики связано с турбулентным движением жидкости. Из-за сложности вопроса математический анализ не в состоянии решить проблему в исчерпывающем виде; это повело к развитию так называемой полуэмпирической гидродинамики. Появилось несколько теорий турбулентности, основанных на различных упрощающих предположениях, которые, в более или менее значительной мере отходят от действительной физической картины. Пригодность выбранной схемы проверяется опытом; им же определяются и коэффициенты формул.

Большим недостатком современных теорий турбулентности является то обстоятельство, что опытные коэффициенты, или так называемые „универсальные“ константы, оказываются неуниверсальными величинами. Они приобретают различные значения в случаях круглой трубы, щели, прямоугольного лотка, обтекаемого тела и т. д., т. е. зависят от характера потока.¹⁾ Даже при одном и том же виде движения, как, например, в случае движения жидкости в круглой гладкой трубе, величина константы, определённой по замеренному профилю скоростей, отличается от той же константы, определённой по вымеренному сопротивлению. Такая „игра“ констант препятствует переносу полученных результатов на различные случаи, встречающиеся в практике.

В качестве второго недостатка, обнаруживающегося в случае обтекания гладкой поверхности, следует отметить неточность полу-

¹⁾ См. напр. ссылки в работе Г. В. Железняка [4], где подробно рассматривается изменимость константы Кармана κ .

эмпирических выражений при малых числах Рейнольдса и вблизи стенки. Этот недостаток обычно приписывают неучёту влияния вязкости.

Ценным достижением в области уточнения теоретических основ турбулентного движения является работа Г. А. Гуржиенко [2]. В этой работе процесс турбулентного перемешивания в круглой гладкой трубе определяется уравнениями Маттиоли. Уточнённый учёт пограничных условий приводит к результатам, хорошо подтверждающимся опытами Никурадзе. Эмпирические константы оказываются, действительно, постоянными в широких пределах чисел Рейнольдса. К сожалению, уравнения Гуржиенко имеют очень сложный вид и интегрируются лишь графическим путём. Ввиду этого полученные результаты трудно использовать в случае потока некруглого сечения или при обтекании тел.

В настоящей работе представляется попытка устранить указанные недостатки более простым путём.

2. Схематичность моделей турбулентности.

Недостатки теории турбулентности, указанные во введении, можно приписать схематичности выбранной модели. О движении жидкости вдоль гладкой поверхности сложилось представление, что в турбулентном потоке, в непосредственной близости от стенки, расположен тонкий ламинарный слой. Прандтль [8] разбивает поток на две области, имеющие совершенно различные физические свойства: турбулентная область и тонкий ламинарный подслой у стенки. Пограничное условие выражается отождествлением скоростей обеих областей на границе ламинарного слоя.

Ввиду того, что безупречной теории турбулентности нет и что все существующие теории имеют свои недостатки, мы останавливаемся на теории Прандтля, имеющей самое простое математическое оформление. Однако, принятая методика допускает применение и других теорий.

Основы теорий турбулентности и их анализ излагаются в специальных работах²⁾ и поэтому здесь не рассматриваются. Отметим лишь один основной недостаток: в теориях турбулентности нет объяснения возникновения и затухания вихрей. Вязкость жидкости,

²⁾ См. напр. [1].

являющейся причиной возникновения турбулентности и диссипации энергии, отсутствует в формулах и учитывается лишь в виде пограничных условий у гладкой стенки. Можно предположить, что так называемая виртуальная вязкость Буссинеска учитывает в себе каким-то неопределённым образом элементы вязкостного трения.

С другой стороны, несмотря на беспрестанно развивающуюся технику экспериментирования, наши представления о пограничных условиях являются пока ещё весьма ограниченными. В случае гладкой поверхности вопрос ещё не исчерпан, не говоря о шероховатости, где гидравлическое влияние физической структуры шероховатой поверхности ещё далеко не ясно. Мы можем определённо сказать, что вблизи стенки имеется тонкий слой, где турбулентные закономерности не действительны, или, вернее, где математические выражения, приближённо установленные для турбулентной зоны, теряют свой смысл. Мы знаем о наличии большого градиента скорости у стенки; следует также считать доказанным прилипание жидкости к стенке. Вихри, повидимому, затухают и превращаются в извилистое движение, как это было установлено визуальными наблюдениями Фейджа и Тоуненда [9] при помощи микроскопа. В праве ли мы утверждать, что вблизи стенки движение происходит по поазейлевской модели, т. е. прямолинейно? Следует отметить, что при извилистом течении диссипация энергии соответствует ламинарному закону, как это имеет место в мелкозернистых грунтах (закон Дарси). В недавно появившейся работе проф. Г. И. Ломизе [6], где рассматривается движение воды в щелях, доказываются очень убедительными экспериментами, что при ламинарном течении и при наличии сильной шероховатости щели, обуславливающей удлинение траекторий струек, сопротивление подчиняется ламинарному закону с некоторым поправочным коэффициентом, зависящим от извилистости траекторий. Это позволяет заключить, что поазейлевская модель применима лишь как приближённая. В действительности траектории частиц криволинейны, причём отклонения от прямой линии, повидимому, являются функцией расстояния от стенки. Извилистое движение, по мере удаления от стенки, переходит в вихреобразное. Таким образом, элементы турбулентного перемешивания кроются в „ламинарном“ слое.

Разложение текущей среды на отдельные зоны с совершенно различными физическими закономерностями является лишь схемой. Толщина ламинарного слоя — понятие условное, и физически она не измеряема. В нашем представлении эта толщина является мате-

матической величиной, при которой элементы принятых турбулентной и ламинарной моделей должны быть равными.

В настоящей работе рассматривается лишь движение жидкости вдоль гладкой поверхности. Мы придерживаемся модели поазейлевского течения в ламинарном слое и прандтлевской модели в турбулентной области, давая себе отчёт о приближённости обеих моделей.

Оказывается, что путём уточнения одних условий сопряжения обеих областей получаются удовлетворительные результаты. Уточнение состоит в выражении тождественности основных элементов потока на границе ламинарного слоя. Этими элементами являются: касательное напряжение, продольная скорость и виртуальная вязкость.

3. Динамические масштабы.

Выводы гидродинамики обычно выражаются в безразмерном виде, на основе гидродинамического подобия.

Следуя предложению проф. Л. Г. Лойцянского [5], при построении „универсальных“ формул движения вязкой жидкости оказывается полезным выражать отдельные величины посредством так называемых динамических величин:

$$\text{динамическая скорость } u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$\text{и динамическая длина } l_* = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \frac{\nu}{u_*}.$$

Сущность этих динамических величин, по проф. Л. Г. Лойцянскому, состоит в следующем: как известно из теории гидродинамического подобия, при движении жидкости с преобладающим влиянием сил вязкости, подобие осуществляется при удовлетворении критериев Рейнольдса и Эйлера:

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu} \quad \text{и} \quad \text{Eu} = \frac{P}{\rho u^2},$$

где u обозначает скорость, l — длину, ν — кинематическую вязкость, P — давление и ρ — плотность. Пользуясь произвольностью масштабов отдельных величин, мы можем подобрать их так, чтобы числа Рейнольдса и Эйлера стали некоторыми заданными наперёд числами, например, единицами. Для этого достаточно выбрать:

$$u = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad \text{и} \quad l = \frac{\nu}{u} = \nu \sqrt{\frac{\rho}{P}}.$$

Выражая давление P через касательное напряжение на стенке τ_0 , получаем динамические величины u_* и l_* .

В дальнейшем, для упрощения транскрипций, мы будем пользоваться маленькими буквами для обозначения физических величин и большими буквами для обозначения тех же величин в динамическом масштабе:

скорость:	$U = \frac{u}{u_*},$
средняя скорость:	$U_m = \frac{u_m}{u_*},$
максимальная скорость:	$U_{max} = \frac{u_{max}}{u_*},$
радиус трубы:	$R = \frac{ru_*}{\nu},$
расстояние от стенки:	$Y = \frac{yu_*}{\nu},$
толщина ламинарного слоя:	$\Delta = \frac{\delta u_*}{\nu},$
градиент скорости:	$\frac{dU}{dY} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{\nu}{u_*^2},$
расход круглой трубы:	$Q = q \cdot \frac{u_*}{\nu^2} \text{ и т. д.}$

В принятых обозначениях, например, универсальный закон скоростей, представленный Никурадзе [7] на основе теории Прандтля, имеет вид:

$$U = 5,50 + 5,75 \lg Y. \quad (1)$$

В качестве другого примера, скорость ламинарного потока выражается параболическим законом

$$U = Y - \frac{Y^2}{2R},$$

причём в ламинарном слое, ввиду малого значения второго члена, обычно принимают (Прандтль)

$$U = Y. \quad (2)$$

Суть пограничных условий Прандтля наглядно представляется „динамической диаграммой“ (фиг. 1). На границе ламинарного слоя скорости равны. При этом толщина ламинарного слоя (в динамическом масштабе) находится из решений уравнений (1) и (2): $\Delta = 11,6$.

Нетрудно выяснить из сравнения производных скоростей, что на границе ламинарного слоя скоростная диаграмма Прандтля имеет точку излома, что явно противоречит действительности.

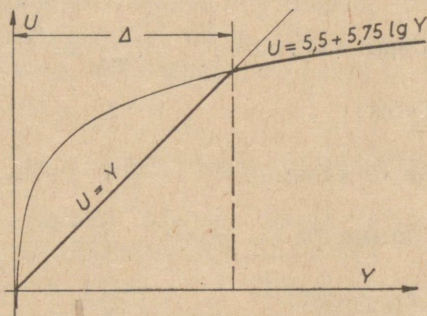
Далее, интересно отметить, что так называемая „длина перемешивания“, по Прандтлю

$$l = \kappa y \quad \text{или} \quad L = \kappa Y,$$

принимает значение на границе ламинарного слоя, при $\kappa = 0,4$ и $\Delta = 11,6$,

$$L = \sim 4,6.$$

Это значит, что, при принятой модели, отдельные частицы жидкости могут переноситься из турбулентной зоны в ламинарный слой чуть



Фиг. 1.

ли не на половину толщины последнего. По той же модели в ламинарном слое имеет место слоистое, параллельное движение частиц жидкости. Это противоречие также указывает на приближённость схемы физического явления.

4. Уточнение граничных условий.

Закон распределения скоростей, по Прандтлю, имеет вид

$$U = \Delta - \frac{1}{\kappa} \ln \Delta + \frac{1}{\kappa} \ln Y. \quad (3)$$

В этой формуле имеются две константы, определяемые эмпирическим путём: безразмерная толщина ламинарного слоя Δ (фиг. 1) и так называемая константа Кармана κ .

Формула основана на предположении о переносе количеств движения. По Прандтлю [8], касательное напряжение выражается

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Величину l Прандтль называет „длиной перемешивания“, которая представляет средний размер поперечных перемещений частиц

жидкости в рассматриваемой точке. Длина эта неизмеряема и не имеет строгого физического характера.

Далее Прандтль предполагает, что величина l пропорциональна расстоянию от стенки y :

$$l = \kappa y.$$

Смысл этого предположения состоит в том, что турбулентное перемешивание на стенке сводится к нулю ($y = 0$). Согласно граничным условиям, предлагаемым Прандтлем, в пределах ламинарного слоя турбулентное перемешивание отсутствует полностью. Поэтому мы считаем правильным ввести поправку и выразить величину линейного коэффициента l через

$$l = \kappa (y - \delta').$$

Физический смысл последнего выражения состоит в том, что перемешивание прекращается не у стенки, а на расстоянии δ' от стенки. Из вышеизложенных рассуждений о затухании вихрей и о криволинейности струек у стенки можно предположить, что

$$\delta' < \delta.$$

Это предположение, как увидим в дальнейшем, подтверждается.

Отодвинув таким образом начальную точку оси координат y на величину δ' , в остальном мы придерживаемся положений Прандтля. Предполагая, что касательное напряжение постоянно и равно напряжению на стенке, получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \kappa (y - \delta') \frac{du}{dy},$$

интегрирование которого даёт формулу

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y - \delta'}{y - \delta'},$$

которая может быть выражена в динамическом масштабе

$$U_{max} - U = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R - \delta'}{Y - \delta'}. \quad (4)$$

Тождественность скоростей.

В ламинарном слое мы придерживаемся модели поазейлевского течения. Распределение скорости выражается приближённо формулой (2). Теорией Прандтля была уже выражена тождественность касательных напряжений. Естественно, что и в распределении ско-

ростей не может быть разрыва. Тождественность скоростей выражается при $Y = \Delta$ в следующем виде:

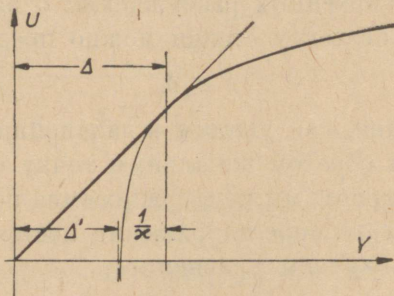
$$U_{max} = \Delta + \frac{1}{z} \ln \frac{R - \Delta'}{\Delta - \Delta'},$$

$$U = \Delta - \frac{1}{z} \ln(\Delta - \Delta') + \frac{1}{z} \ln(Y - \Delta'). \quad (5)$$

По сравнению с выражением Прандтля (3), мы видим, что здесь имеется одна новая безразмерная константа Δ' , которая однако исключается весьма простым путём.

Тождественность вязкостей.

При тождественности касательного напряжения и скорости, вполне логично предположить, что и элементы, выражающие дисси-



Фиг. 2.

пацию энергии, равны между собой. Таким образом, мы вправе выразить тождественность кинематической вязкости ν с одной стороны и виртуальной вязкости ε с другой, при условии $Y = \Delta$.

Влияние вязкости учитывается, как известно, классической формулой Ньютона

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{dy},$$

причём, по предложению Буссинеска, в случае турбулентного потока величина ν заменяется величиной ε .

Так как тождественность касательных напряжений была уже учтена, то условие тождественности вязкостей приводит непосредственно к тождественности скоростных градиентов. Это значит, что кривая распределения скорости не имеет точки излома (фиг. 2).

Градиенты скоростей, вычисленные по выражениям (2) и (5), имеют значения (в динамическом масштабе):

$$\text{в ламинарном слое: } \frac{dU}{dY} = 1,$$

$$\text{в турбулентной зоне: } \frac{dU}{dY} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{Y - \Delta'}.$$

При $Y = \Delta$, тождественность выражается в виде

$$\frac{1}{\kappa} = \Delta - \Delta'.$$

Таким образом, второе граничное условие даёт нам возможность исключить одну из трёх констант.

Универсальный закон распределения скоростей (5) переписывается в виде

$$U = \Delta - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \left(Y + \frac{1}{\kappa} - \Delta \right). \quad (6)$$

Максимальная скорость даётся этим же выражением:

$$U_{max} = \Delta - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \left(R + \frac{1}{\kappa} - \Delta \right),$$

которое можно несколько упростить, разлагая логарифм в ряд:

$$\ln \left(R + \frac{1}{\kappa} - \Delta \right) = \ln R + \frac{\frac{1}{\kappa} - \Delta}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{\kappa} - \Delta}{R} \right)^2 + \dots,$$

причём можно ограничиться лишь первыми членами ряда, так как величины $\frac{1}{\kappa}$ и Δ малы в сравнении с R .

Так получается

$$U_{max} = \Delta - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln R + \frac{\frac{1}{\kappa} - \Delta}{\kappa R}. \quad (7)$$

Наконец, выражение (4) принимает вид

$$U_{max} - U = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R + \frac{1}{\kappa} - \Delta}{Y + \frac{1}{\kappa} - \Delta}. \quad (8)$$

Интересно ещё отметить, что длина перемешивания, выраженная в динамическом масштабе

$$L = \kappa (Y - \Delta') = \kappa \left(Y + \frac{1}{\kappa} - \Delta \right),$$

превращается в единицу при $Y = \Delta$. Из опытных данных, изложенных далее, получается $\Delta = 8$; это приводит к заключению, что перемешивание в представлении Прандтля может иметь место лишь в небольшой части ламинарного слоя.

5. Универсальный закон распределения скоростей.

Из сопоставления экспериментальных данных мы предлагаем следующие значения констант:

$$\Delta = 8, \quad \alpha = 0,4, \quad \frac{1}{\alpha} = 2,5.$$

Величины эти приближённые, но использованный эмпирический материал, который излагается в дальнейшем, вряд ли позволит определить их с большей точностью.

С данными значениями универсальный закон распределения скоростей переписывается в

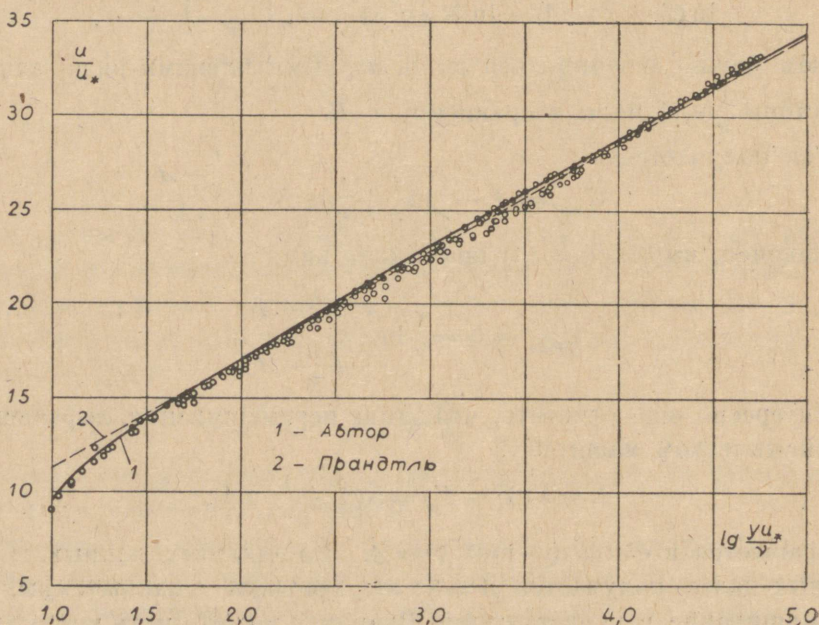
$$U = 5,71 + 2,5 \ln(Y - 5,5), \text{ или} \quad (9)$$

$$U = 5,71 + 5,75 \lg(Y - 5,5). \quad (10)$$

Выражение (8) принимает вид

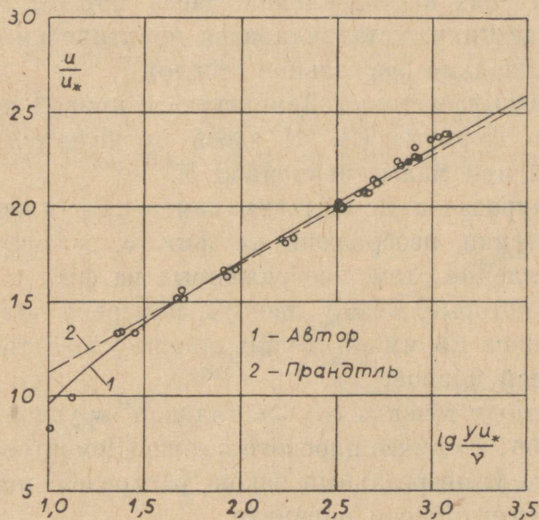
$$U_{max} - U = 2,5 \ln \frac{R - 5,5}{Y - 5,5}. \quad (11)$$

Фиг. 3 показывает сопоставление измерений Никурадзе [7] в круглой гладкой трубе с кривой, построенной по формуле (10), и



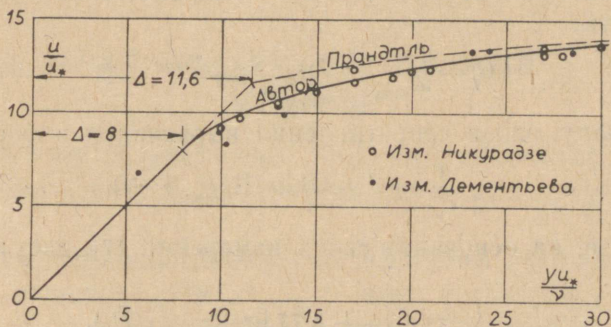
Фиг. 3.

прямой, построенной самим Никурадзе на основе теории Прандтля [формула (1)]. При значительной рассеянности точек, преимущество нашей кривой проявляется чётко в нижней части, где опытные точки закономерно отклоняются от прямой Никурадзе.



Фиг. 4.

Далее, мы произвели сравнение с измерениями М. А. Дементьева в аэродинамической трубе прямоугольного сечения [3]. В этих



Фиг. 5.

измерениях касательное напряжение измерялось непосредственно путём уравнивания элемента стенки; элемент этот был вырезан в длинной стороне прямоугольника, и его ширина была 250 мм при общей ширине канала 600 мм. Неравномерность распределе-

ния касательного напряжения по периметру не учитывалась. Поэтому мы ограничились лишь рассмотрением случаев самых пологих сечений (прот. XXIII, XXIV и XXV в работе Дементьева), где высота прямоугольника равнялась 75 и 50 мм. Можно предположить, что в этих случаях в центральной части потока, в области измерительной пластинки, устанавливался практически плоский поток. Стенки были гладкие (зеркальное стекло).

Фиг. 4 показывает точки Дементьева с кривой по формуле (10) и прямой по формуле (1). И здесь проявляется преимущество нашей кривой при малых значениях Y .

Точки Никурадзе и Дементьева, измеренные в непосредственной близости от стенки, изображены на фиг. 5, которая представляет собой сопоставление схем, изображённых на фиг. 1 и 2. Расположение точек, которые, между прочим, измерены все на расстоянии, не превышающем 1,5 мм от стенки, вполне удовлетворительно соответствует нашей кривой.

Число опытных точек в случае гладкой круглой трубы (Никурадзе) было 256; в случае плоского потока (Дементьев) — 34. Можно заключить, что универсальный закон распределения скоростей по формуле (10) практически оправдан.

6. Закон сопротивления по Карману.

При изучении сопротивления обтекаемых тел, удобно выразить коэффициент сопротивления и число Рейнольдса через максимальную скорость:

$$C_f' = \frac{2u_*^2}{u_{max}^2}, \quad Re_{max} = \frac{u_{max} \cdot r}{\nu}.$$

По Карману, закон сопротивления выражается в форме

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = A + B \lg (Re_{max} \sqrt{C_f}).$$

Никурадзе, на основании своих измерений [7], даёт эту формулу в виде

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4,75 + 3,77 \lg (Re_{max} \sqrt{C_f}). \quad (12)$$

При этом Никурадзе отмечает, что при малых значениях $Re_{max} \cdot \sqrt{C_f}$ измеренные точки отклоняются от прямой.

Наша формула (7), при $A=8$ и $\kappa=0,4$, переписывается в

$$U_{max} = 5,71 + 5,75 \lg R - \frac{14}{R}. \quad (13)$$

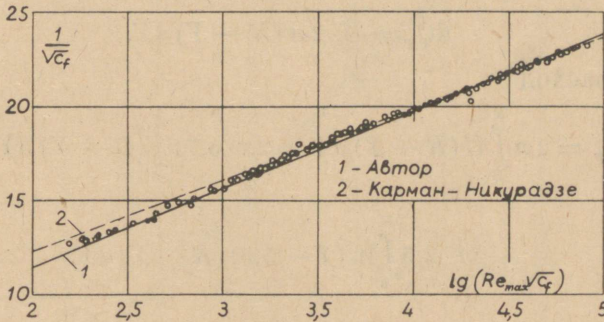
Подставляя

$$U_{max} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_f}} \quad \text{и} \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Re}_{max} \cdot \sqrt{C_f},$$

получаем после преобразования

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 3,43 + 4,07 \lg(\text{Re}_{max} \sqrt{C_f}) - \frac{14}{\text{Re}_{max} \sqrt{C_f}}. \quad (14)$$

Сопоставление прямой Кармана-Никурадзе (12) и нашей кривой (14) с измерениями Никурадзе (фиг. 6) показывает, что закон сопро-



Фиг. 6.

тивления хорошо выражается формулой (14). При этом универсальные константы сохранили те же значения, как в законе распределения скоростей.

7. Закон сопротивления, приведённый к средней скорости.

Выражение (9) распределения скорости позволяет подсчитать среднюю скорость потока. Рассмотрим здесь случай трубы круглого сечения.

Средняя скорость определяется из величины расхода, делённого на площадь сечения. Обычно при этом пренебрегают расходом ламинарного слоя и интегрируют функцию скорости от стенки до центра трубы. Имея в виду уточнение в граничных условиях, мы считаем правильным уточнить и расчёт расхода, и вычислить отдельно расходы ламинарного слоя и турбулентного ядра. При этом, имея в виду, что величина Δ мала в сравнении с R , можно отбросить все члены с множителем порядка $\left(\frac{\Delta}{R}\right)^2$.

Расход (в динамическом масштабе) ламинарного слоя определяется непосредственно

$$Q_{\lambda} = 2 \pi R \cdot \Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = \pi R \Delta^2, \quad \text{или} \quad \frac{Q_{\lambda}}{\pi R^2} = \frac{\Delta^2}{R} = \frac{64}{R}. \quad (15)$$

В турбулентной области следует проинтегрировать выражение скорости

$$U = 5,71 + 2,5 \ln(Y - 5,5) \quad (9)$$

в пределах от $\Delta = 8$ до R . Элементарный расход через элементарную площадь на расстоянии Y от стенки

$$dQ_T = U \cdot 2 \pi (R - Y) dY,$$

целый же расход

$$Q_T = 2 \pi \int_8^R U (R - Y) dY = 2 \pi \cdot 5,71 \int_8^R (R - Y) dY + \\ + 2 \pi \cdot 2,5 \int_8^R \ln(Y - 5,5) (R - Y) dY.$$

Приводим здесь лишь окончательные результаты интегрирования, полученные после всех упрощений:

$$\frac{Q_T}{\pi R^2} = 1,96 + 5,75 \lg R - \frac{63,3}{R} \lg R - \frac{62,8}{R}. \quad (16)$$

Средняя скорость даётся

$$U_m = \frac{Q_{\lambda}}{\pi R^2} + \frac{Q_T}{\pi R^2}; \quad \text{после подставления из (15) и (16)}$$

$$U_m = 1,96 + 5,75 \lg R - \frac{63,3}{R} \lg R + \frac{1,2}{R}. \quad (17)$$

Коэффициент сопротивления

$$\lambda = \frac{2gdJ}{u_m^2}$$

может быть выражен в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{U_m}{\sqrt{8}}.$$

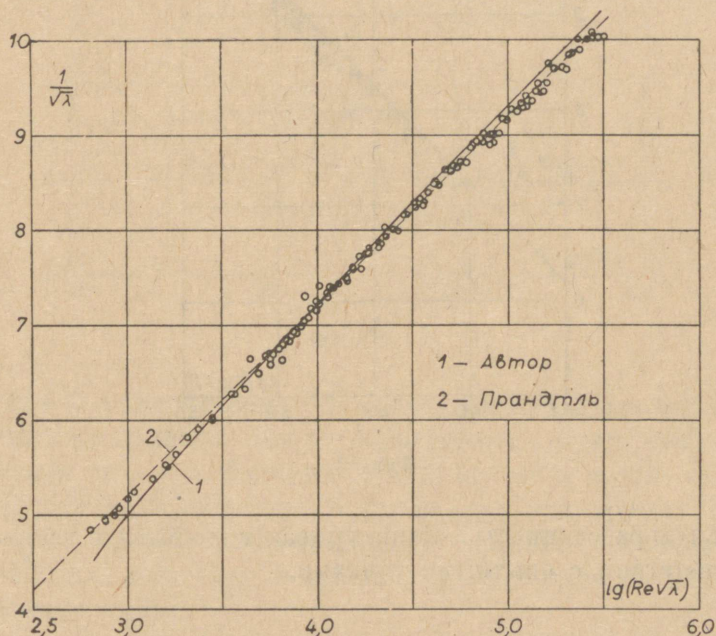
Безразмерная величина R может быть заменена выражением

$$R = \frac{ru_*}{\nu} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{u_m \sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}.$$

Подставляя эти величины в выражение (17), получаем после преобразований и упрощений

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,83 + 2,03 \lg(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - \frac{127 \lg(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 98}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} \quad (18)$$

Последнее выражение можно сравнить с экспериментальными



Фиг. 7.

данными. Фиг. 7 представляет 125 точек Никурадзе. Как видно, прямая Прандтля-Никурадзе

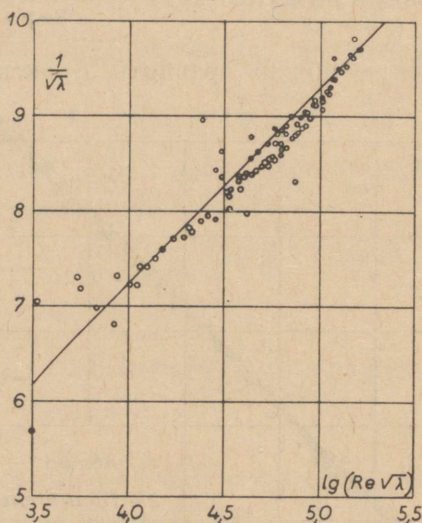
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + 2,0 \lg(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})$$

TRD Вааматукэгу

лучше соответствует точкам. Преимущество же формулы (18) состоит в том, что она получена при одних и тех же значениях констант.

Не желая ограничиться лишь данными Никурадзе, мы сравнили нашу кривую с измерениями Стритера [10]. Стритер измерял сопротивления гладких (латунных) и шероховатых труб. Диаметр гладкой трубы, данные которой приведены на фиг. 8, равен 5,24 см. Темпера-

ратура воды изменялась в больших пределах: от 11° до 73°C , причём кинематическая вязкость менялась в соотношении 1:3. Несмотря на все предосторожности, приведённые 97 точек показывают



Фиг. 8.

значительную рассеянность. Наша кривая находится в весьма хорошем соответствии с опытными точками.

8. „Константа“ Прандтля D .

По теории Прандтля, разность

$$U_{max} - U_m = D$$

величина постоянная и равна $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\kappa}$.

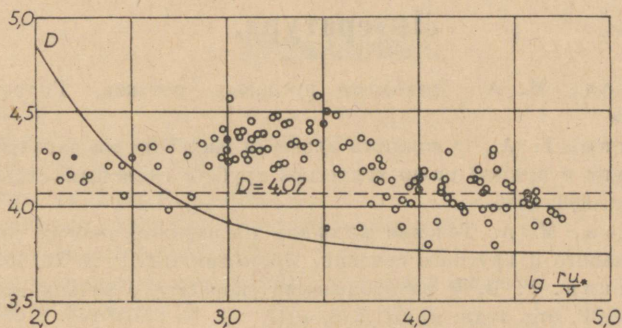
При $\kappa=0,4$, $D=3,75$; в действительности же Никурадзе даёт, на основании своих измерений, $D=4,07$.

Величина D подсчитывается из разности выражений (13) и (17):

$$D = 3,75 + \frac{63 \lg R 15}{R}. \quad (19)$$

По этому выражению, D — величина непостоянная и может быть рассматриваема, как таковая, лишь при больших значениях R .

Мы пытались найти экспериментальную проверку для последнего вывода, подсчитав из измерений Никурадзе [7] 125 значений D при различных значениях R . При этом все погрешности измерений увеличились в несколько раз, что обусловило сильную рассеянность точек (фиг. 9). Хотя опытные точки как будто и указывают на



Фиг. 9.

уменьшение D с возрастанием R , наша кривая не вполне соответствует опытным данным. Кроме погрешностей измерений, следует ещё добавить, что, как формулы Прандтля, так и наши, не учитывают закруглённости скоростного профиля у оси трубы. Поэтому теоретические значения максимальных скоростей отличаются от действительных; величину погрешностей невозможно подсчитать при выбранной схеме.

9. Выводы.

Итоги настоящей работы можно выразить следующим образом

1. Полуэмпирические выражения Прандтля для течения вдоль гладкой поверхности сохраняют постоянство констант при учёте поправки, предлагаемой в настоящей работе.

2. В результате поправки, универсальный закон распределения скоростей сохраняет свою действительность в непосредственной близости от стенки и при малых числах Рейнольдса.

3. Сопоставление полученных формул с экспериментальными данными (Никурадзе, Дементьев, Стритер) даёт вполне удовлетворительные результаты. Это побуждает к дальнейшим применениям формул в случае турбулентного потока различного характера (некруглые трубы, обтекание тел и т. д.).

Литература.

1. Великанов, М. А. Динамика русловых потоков. Гидрометеоиздат. М. Л. 1946.
2. Гуржиенко, Г. А. О влиянии вязкости жидкости на законы турбулентного течения в прямой цилиндрической трубе с гладкими стенками. Труды ЦАГИ, вып. 303, 1936.
3. Дементьев, М. А. Течение жидкости на входном участке гладких труб прямоугольного и круглого сечений. Известия НИИГ, № 21, 1937.
4. Железняков, Г. В. О распределении скоростей в речном потоке. Известия АН СССР, отд. техн. наук, № 8, 1947.
5. Лойцянский, Л. Г. Об „универсальных“ формулах в теории сопротивления шероховатых труб. Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936.
6. Ломизе, Г. И. Движение воды в щелях. Изд. АН Армянской ССР, 1947.
7. Никурадзе, И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах. Проблемы турбулентности, сборник статей под ред. М. А. Великанова и Н. Т. Швейковского. М. Л. 1936.
8. Прандтль, Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности. Сборник: Проблемы турбулентности [7].
9. Фейдж и Тоуненд. Исследование турбулентного течения при помощи ультрамикроскопа. Сборник: Проблемы турбулентности [7].
10. Streeter, V. L. Frictional Resistance in artificially roughened Pipes. Proceedings Am. Soc. Civ. Eng. Nr. 2, 1935.

Оглавление.

1. Введение	3
2. Схематичность моделей турбулентности	4
3. Динамические масштабы	6
4. Уточнение граничных условий	8
5. Универсальный закон распределения скоростей	12
6. Закон сопротивления по Карману	14
7. Закон сопротивления, приведённый к средней скорости	15
8. „Константа“ Прандтля D	18
9. Выводы	19
Литература	20

Vastutav toimetaja

A. Vēlner.

Tehniline toimetaja

H. Kohu.

Ladumisele antud 13. XI 48.
Trükkimisele antud 14. II 49.
Paberi kaust 67 X 95. 1/16. Trüki-
poognaid 1 1/2. Autoripoognaid
0,73. Arvestuspoognaid 0,98.
MB 00169. Laotihedus trpg.
34 100. Tiraaž 970. Trükikoja
tellimus nr. 2213. Trükikoda
„Hans Heidemann“ Tartu,
Vallikraavi 4.