Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Aljona Kritševskaja

Riemanni pindade geomeetria ja minimaalpinnad

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD/prof. Viktor Abramov

Tartu 2021

RIEMANNI PINDADE GEOMEETRIA JA MINIMAALPINNAD

Bakalaureusetöö

Aljona Kritševskaja

Lühikokkuvõte

Antud töö on pühendatud Riemanni pindade diferentsiaalgeomeetria uurimisele. Töös käsitletakse pinnateooria järgmisi tähtsaid mõisteid: esimene ja teine fundamentaalvorm, Gaussi kõverus, keskmine kõverus. On kirjeldatud Riemanni pinna stuktuur. Vaadeldakse Riemanni sfääri, mis on Riemanni pinna üks oluline näide. Sfääri Riemanni pinna struktuuri konstrueerimiseks kasutatakse stereograafilist projektsiooni. On leitud Riemanni sfääri konformne meetrika. On tuletatud Weingarteni ja Gaussi võrrandid, mis mängivad tähtsat rolli pinnateoorias. On antud isotermilise, harmoonilise ja kaasharmoonilise pinna definitsioon. Töös tõestatakse, et isotermiline pind on minimaalpind parajasti siis, kui ta on harmooniline. Antud seos on aluseks minimaalpindade uurimiseks Riemanni pindade abil. Vaadeldakse minimaalpinna kahte tähtsat näidet, kus tõestatakse, et helikoid ja katenoid on isotermilised, kaasharmoonilised minimaalpinnad. Töös näidatakse, kuidas kahe isotermilise kaasharmoonilise pinnaga assotsieerub minimaalpindade pere. See teoreetiline konstruktsioon on realiseeritud helikoidi ja katenoidi näitel.

CERCS teaduseriala: P150 Geomeetria, algebraline topoloogia.

Märksõnad: Riemanni pind, meetrika pinnal, harmooniline pind, Gaussi võrrandid, Weingarteni võrrandid, minimaalpind.

GEOMETRY OF RIEMANN SURFACES AND MINIMAL SURFACES

Bachelor thesis

Aljona Kritchevskaya

Abstract

This work is dedicated to the study of differential geometry of Riemann surfaces. The following important notions of surface theory are considered in the thesis: first and second fundamental form, Gaussian curvature, mean curvature. The structure of a Riemann surface is described. An important example of Riemann surface is considered and this is Riemann sphere. Stereographic projection is used to construct the Riemann surface structure on a sphere. The Riemann sphere conformal metric is calculated. The Weingarten and Gaussian equations, which play an important role in surface theory, are derived. The definitions of isothermal, harmonic and conjugate harmonic surfaces are given. It is proved that an isothermal surface is a minimal surface iff it is harmonic. This relation is the basis for the study of minimal surfaces by means of Riemann surfaces. Two important examples of a minimal surface are considered and it is proved that the helicoid and catenoid are isothermal, conjugate harmonic minimal surfaces. In thesis it is showen how a family of minimal surfaces can be associated with two isothermal conjugate harmonic surfaces. This theoretical construction is realized with the help of example of a helicoid and a catenoid.

CERCS research specialisation: P150 Geometry, algebraic topology.

Key Words: Riemann surface, metric on the surface, harmonic surface, Gauss equations, Weingarten equations, minimal surfaces.

Sisukord

Sissejuhatus

Riemanni pinna mõiste tekkis seoses algebraliste funktsioonide $w = f(z)$ uurimisega, kus z on kompleksmuutuja [7]. Analüütilist funktiooni $w = f(z)$ nimetatakse algebraliseks, kui ta rahuldab võrrandit $a_0(z)w^m + a_1(z)w^{m-1} + \ldots + a_m(z) = 0$, kus $a_0(z), a_1(z), \ldots, a_m(z)$ on komplekesete kordajatega polünoomid (z suhtes). Oli näidatud, et üldiselt algebraline funktsioon on mitmene funktsioon, see tähendab, et kompleksmuutuja z iga väärtusele vastab m funktsiooni $f(z)$ väärtust. Aastal 1851 näitas B. Riemann oma doktoritöös, et iga analüütiline funktsioon määrab pinna, millel antud funktsiooni võime vaadelda ühese funktsioonina. Riemanni pindade teoorias kasutatakse nii kompleksmuutuja funktsioonide teooriat, kui ka algebrat ja algebralist geomeetriat. Tegelikult Riemanni pindade teooria on kompleksmuutuja funktsioonide teooria ja algebralise geomeetria süntees. F. Klein, H. Poincare, P. Koebe ja teised panustasid väga palju Riemanni pindade teooria arengusse. Riemanni pindade teoorial on väga tähtis roll kaasaegses matemaatikas ja seda kasutatakse sellistes matemaatika valdkondades nagu geomeetriline analüüs, arvuteooria ja algebraline geomeetria. Riemanni pindadae teooria tähtsus ja aktuaalsus on suurenenud seoses sellega, et Riemanni pindade teooria mõisted ja meetodid on stringiteooria baasiks. Mainime, et stringiteooria on kaasaegse teoreetilise füüsika kõige tähtsam teooria ja on lootus, et selle abil saab konstrueerida ühtset väljateooriat.

Aastal 1955 H. Weyl pakkus abstraktse Riemanni pinna definitsiooni ja vastavat mõistet praegu kasutatakse põhimõistena Riemanni pindade teoorias. Käesolevas töös kasutame H. Weyl'i lähenemist ja Riemanni pinna definitsioon H. Weyli käsitluses on antud kahe definitsiooniga Definitsioon 1.1, Definitsioon 2.1. H. Weyl'i lähenemises Riemanni pind on kompleksarvudega $\mathbb{C}$ lokaalselt homöomorfne topoloogiline ruum, kusjuures kõik üleminekufunktsioonid on holomorfsed.

Minimaalpinna probleemi esimesena hakkas uurima J. Lagrange 1768. aastal [6].Tema hakkas uurima järgmist probleemi: oletame, et kolmemõõtmelises ruumis on antud kontuur; leida pind nii, et antud kontuur on selle pinna rajaks ja pinna pindala on minimaalne. J. Lagrange uuris antud probleemi juhul, kui pind on funktsiooni $z = f(x, y)$ graafik ja tema tuletas diferentsiaalvõrrandit (praegu nimetatakse Euler-Lagrange'i võrrandiks) funktsiooni $z = f(x, y)$ jaoks ning kui funktsioon rahuldab vastavat võrrandit, siis tema poolt määratud pind on minimaalpind. Minimaalpinna teooria arendamisel järgmine tähtis samm oli tehtud G. Monge töös (1776. aastal). Selleks ajaks oli piisavalt arendatud pinnateooria diferentsiaalgeomeetria, milles kasutati sellist mõistet nagu keskmine kõverus ja seda tähistati H. G. Monge'i suur avastus seisnes selles, et ta näitas seost minimaalpinna ja keskmise kõveruse vahel. Teiste sõnadega ta näitas, et kui pind on minimaalpind, siis $H = 0$. Sellest ajast pinda, mis rahuldab $H = 0$, nimetatakse minimaalpinnaks ja käesolevas töös kasutatakse vastavat definitsiooni. Aastal 1774 esimesena näitas L. Euler, et katenoid on minimaalpind. Aastal 1776 esimesena näitas J. Meusiner, et helikoid on minimaalpind. Hiljem selgus, et Riemanni pindade teooria on väga kasulik ja effektiivne meetod minimaalpindade uurimiseks ning antud töös näidatakse kuidas Riemanni pindade teooriat rakendatakse minimaalpindade uurimiseks.

Töö eesmärk on näidata, et sfäär on Riemanni pind. Veenduda, et Weingarteni ja Gaussi võrrandit kehtivad. Konstrueerida katenoidiga ja helikoidiga assotsieeritud peret. Bakalaureusetöö koosneb kuuest paragrahvist. Esimeses paragrahvis on antud muutkonna ja pinna definitsioon. Definitsioonide mõistmiseks on tekst varustatud joonistega. Näidatakse, kuidas pinnal tekkivad koordinaatjooned ja nende puutujavektorid. On antud isotermilise pinna definitsioon, mis on tähtis kogu töö jaoks. Esimene ja teine fundamentaalvorm on tähtsad mõisted pinna diferentsiaalgeomeetria jaoks ja nendest räägitakse antud paragrahvi teisel poolel. Esimese fundamentaalvormi definitsioonis kasutatakse pinna puutujavektorite skalaarkorrutist ja pinna teise fundamentaalvormi definitsioon tugineb pinna põhioperaatori mõistele.

Teise paragrahvi eesmärk on näidata kuidas pinnal tekkib Riemanni pinna struktuur. Esimeses paragrahvis antud pinna definitsioonist järeldub, et lokaalselt (see tähendab suvalise punkti ümbruses) on pind homöomorfne tasandi $\mathbb{R}^2$ lahtise alamhulgaga. Kuid teame, et tasandit $\mathbb{R}^2$ võime samastada kompleksarvudega $\mathbb{C}$, kasutades kujutust $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x + iy \in \mathbb{C}$. Seega, kui tasandi punkti (x, y) samastame kompleksarvuga $x + iy$, siis pinnal tekkib lokaalne kompleksne koordinaat. Kui nüüd lisaks nõuame, et pinna kõik üleminekufunktsioonid on holomorfsed, siis tekib antud töö jaoks väga tähtis mõiste ja see on Riemanni pind. Selles paragrahvis on antud harmoonilise funktsiooni mõiste ja vastavat mõistet kasutatakse harmoonilise pinna defineerimiseks. Paragrahvi suurem osa on pühendatud Riemanni pindade teooria väga tähtsale näitele, kus sfääri pinnal määratakse Riemanni pinna struktuur stereograafilise projektsiooni abil. Stereograafiline projektsioon on kujutus, mis seab sfääri igale punktile vastavusse üheselt määratud tasandi punkti. Kui nüüd tasandit samastada kompleksarvudega, siis sfääril tekib kompleksne koordinaat. Kogu sfääri saab katta kahe koordinaadisüsteemiga, üks kord projekteerime sfääri põhjapoolusest ja teine kord lõunapoolusest. Antud paragrahvis ma leian kahel viisil, kuidas sfääri punkti kolmemõõtmelise ruumi koordinaadid avalduvad komplekse koordinaadi kaudu. Seejärel ma arvutan, kuidas üks lokaalne kompleksne koordinaat avaldub teise lokaalse komplekse koordinaadi kaudu ja näitan, et vastav funktsioon on holomorfne (rahuldab Cauchy-Riemanni tingimusi). Siit järeldub, et sfäär on Riemanni pind. Stereograafilise projektsiooni visualiseerimiseks tegin jooniseid GeoGebra abil.

Kolmandas paragrahvis uuritakse Riemanni pinnal antud konformset meetrikat. Jätkatakse sfääri näidet sellega, et leitakse erinevate kaartide jaoks meetrika kompleksetes koordinaatides ζ, ξ nii, et arvutatakse puutujavektorid $\vec{r}_\zeta,\ \vec{r}_{\bar{\zeta}},\ \vec{r}_\xi,\ \vec{r}_{\bar{\xi}}$ ja diferentsiaalide $(d\zeta)^2,\ d\zeta d\bar{\zeta},\ (d\bar{\zeta})^2,\ (d\xi)^2,\ d\xi d\bar{\xi},\ (d\bar{\xi})^2$ kordajad. Näidatakse, et saadud meetrika on konformne. Kontrollitakse, et kehtib konformse meetrika teisenduse valem ühelt lokaalselt kaardilt teisele lokaalsele kaardile.

Neljandas paragrahvis uuritakse Weingarteni võrrandite kehtivust. Näidatakse, kuidas saab vektorite $-\vec{N}_u, -\vec{N}_v$ koordinaadid baasis $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ avaldada esimese ja teise fundamentaalvormi abil. Leitakse pinna põhioperaatori maatriks. Selle maatriksi determinant on pinna Gaussi kõverus ja jälg korrutatud ühe kahendikuga on keskmine kõverus. Selles paragrahvis seletatakse, mida tähendab minimaalpind. Vaadeldakse kahte näidet: pinnad katenoid ja helikoid on minimaalpinnad. Selleks leitakse nende pindade keskmised kõverused.

Viiendas paragrahvis näidatakse, et Riemanni pinnal kehtivad Gaussi võrrandid. Näidatakse kuidas saab avaldada vektoreid $\vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N}_\zeta, \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{N}_{\bar{\zeta}}$ liikuva reeperi vektorite $\{\vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{N}\}$ kaudu. Leitud vektorite koordinaatidest moodustatakse kaks maatriksit. Üleminekuga kompleksmuutujatelt reaalmuutujatele asendusega $\zeta = u + iv,\ \bar{\zeta} = u - iv$ leitakse teise fundamentaalvormi maatriks.

Viimases ehk kuuendas paragrahvis uuritakse seost isotermilise harmoonilise ja isotermilise minimaalpinna vahel. Lahendatakse probleemi, kuidas leida teine isotermiline harmooniline pind, see tähendab, et on antud esimene isotermiline harmooniline pind ja tuleb leida teist isotermilist harmoonilist pinda nii, et esimene ja teine on kaasharmoonilised pinnad. Konstrueeritakse kahe pinnaga assotsieeritud pindade pere. Tõestatakse, et iga pind konstrueeritud perest on ka minimaalpind. Näidatakse, et helikoid ja katenoid on isotermilised kaasharmoonilised minimaalpinnad. Lõpetuseks konstrueeritakse helikoidiga ja katenoidiga assotsieeritud pindade pere.

1 Muutkond ja pind

Esimeses peatükis seletame üldiseid mõisteid, millest kõige tähtsamad on muutkonna ja pinna mõisted. Töös kasutame diferentsiaalgeomeetriast tuntud termineid nagu esimene fundamentaalvorm, teine fundamentaalvorm ja pinna põhioperaator, mille antud paragrahvis defineerime.

Topoloogiliseks ruumiks nimetatakse hulka T koos lahtiste alamhulkade parvega, kus kehtivad järgmised tingimused:

1. lahtiste alamhulkade ühend on lahtine alamhulk,
2. lõpliku arvu lahtiste alamhulkade ühisosa on lahtine alamhulk,
3. tühihulk $\emptyset$ ja kogu hulk T kuuluvad lahtiste alamhulkade parve.

Topoloogilist ruumi nimetatakse Hausdorffi ruumiks, kui igal kahel erineval elemendil leiduvad lõikumatud ümbrused.

Olgu X ja Y topoloogilised ruumid. Kujutust $\varphi\colon X \mapsto Y$ nimetatakse homöomorfismiks, kui φ on pidev bijektsioon ja φ^{-1} on pidev.

Definitsioon 1.1. n-mõõtmeliseks topoloogiliseks muutkonnaks M^n [3] nimetatakse topoloogilist Hausdorffi ruumi, kus on täidetud järgmised tingimused:

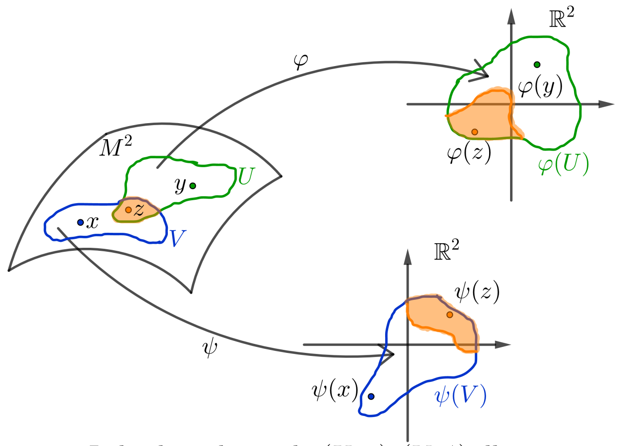
1. leidub lahtise topoloogia loenduv baas;
2. iga $x \in M^n$ korral leidub punkti x lahtine ümbrus $U \subset M^n$, mis on homöomorfne $\mathbb{R}^n$ lahtise alamhulgaga, st leidub homöomorfism $\varphi\colon U \mapsto \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Paari (U, φ) nimetatakse lokaalseks kaardiks punkti x ümbruses.

Lokaalsete kaartide parve $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ nimetatakse atlaseks, kui $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ moodustavad muutkonna M^n katte, st $\cup_{i \in \mathcal{I}} U_i = M^n$. Olgu M^n n-mõõtmeline topoloogiline muutkond. Olgu $x, y \in M^n$, $x \neq y$, $(U, \varphi), (V, \psi)$ punktide x, y lokaalsed kaardid ja $U \cap V \neq \emptyset$. Tähistame $M^n \supset W = U \cap V$. Vaatleme punkti $z \in W$. Olgu $\varphi(z) = (z^1, z^2, \dots, z^n)$ ja $\psi(z) = (\tilde{z}^1, \tilde{z}^2, \dots, \tilde{z}^n)$, kus $(z^1, z^2, \dots, z^n)$ nimetatakse punkti z lokaalseteks koordinaatideks lokaalses kaardis (U, φ) ja $(\tilde{z}^1, \tilde{z}^2, \dots, \tilde{z}^n)$ punkti z lokaalseteks koordinaatideks lokaalses kaardis (V, ψ). Antud olukorda illustreerib joonis (1).

Kuna φ ja ψ on homöomorfismid, siis leiduvad φ^{-1} ja ψ^{-1}. Saab avaldada ühed koordinaadid teiste kaudu järgmiselt:

$$\begin{cases} (z^1, z^2, \dots, z^n) = \varphi \circ \psi^{-1}(\tilde{z}^1, \tilde{z}^2, \dots, \tilde{z}^n) \\ (\tilde{z}^1, \tilde{z}^2, \dots, \tilde{z}^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(z^1, z^2, \dots, z^n) \end{cases},$$

kus funktsioone $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(W) \mapsto \varphi(W)$ ja $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(W) \mapsto \psi(W)$ nimetatakse ülemineku funktsioonideks ühelt lokaalselt kaardilt teisele.



Joonis 1: Lokaalsete kaartide $(U, \varphi), (V, \psi)$ illustratsioon.

Muutkonna atlast nimetatakse siledaks atlaseks, kui selle atlase kõik ülemineku funktsioonid on siledad funktsioonid. Lokaalset kaarti nimetatakse kooskõlaliseks sileda atlasega, kui selle kaardi lisamisel atlasele, atlas jääb siledaks. Kui antud atlasele lisame kõikvõimalikud temaga kooskõlalised kaardid, siis saame maksimaalse atlase. Maksimaalset atlast nimetatakse topoloogilise muutkonna siledaks struktuuriks.

Definitsioon 1.2. Siledaks muutkonnaks nimetatakse topoloogilist muutkonda, millel on määratud sile struktuur.

Definitsioon 1.3. Pinnaks nimetatakse 2-mõõtmelist siledat muutkonda.

Olgu $W \subset \mathbb{R}^3$ lahtine alamhulk, $f\colon W \to \mathbb{R}$ lõpmata diferentseeruv funktsioon ja $c \in \mathbb{R}$ mingi reaalarv. Vaatleme võrrandit $f(x, y, z) = c$. Selle võrrandi lahendihulka tähistame $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^3$. Tuletame meelde, et funktsiooni gradiendiks nimetatakse vektorvälja, mille komponendid on osatuletised koordinaatide x, y, z järgi. Seega

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Saab näidata [2], et kui $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ ja $\mathrm{grad}\, f \neq \vec{0}$, siis lahendihulk $f^{-1}(c)$ on pind. Vastavat pinda nimetatakse funktsiooni f tasemepinnaks. Tähistame $M^2 = f^{-1}(c)$. Olgu $p \in M^2$ pinna mingi punkt. Definitsioonist (1.3) järeldub, et leidub punkti p ümbrus, kus pinna M^2 saab lokaalselt parametriseerida järgmiselt

$$(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \to \vec{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in M^2,$$

kus U on tasandi $\mathbb{R}^2$ lahtine alamhulk ja $\vec{x}\colon U \to \vec{x}(U)$ on bijektiivne kujutus. Olgu $p = \vec{x}(q)$, kus $q \in U$ ja $q = (u, v)$. Kui fikseerime parameetri u ning parameetri v muudame, siis vektorfunktsioon $\vec{x}(u, v)$ tekitab v-koordinaatjoont $\vec{x}(u, v + t)$ pinnal M^2, kusjuures koordinaatjoon läbib punkti $p = \vec{x}(q)$, kui $t = 0$. Analoogiliselt kui fikseerime parameetri v ja parameeter u muutub, siis vektorfunktsioon $\vec{x}(u, v)$ tekitab u-koordinaatjoont $\vec{x}(u+t, v)$ pinnal M^2. Tähistame u-koordinaatjoone puutujavektori $\vec{x}_u$ ja v-koordinaatjoone puutujavektori $\vec{x}_v$. On ilmne

$$\vec{x}_u = (x_u, y_u, z_u), \;\; \vec{x}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

kus

$$x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \ \ y_u = \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \ \ z_u = \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}$$

on funktsioonide $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ osatuletised u järgi ja x_v, y_v, z_v on samade funktsioonide osatuletised v järgi. Kolmemõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^3$ vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ skalaarkorrutist tähistame $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Definitsioon 1.4. Pinna M^2 parametriseerimist $\vec{x}\colon U \to \vec{x}(U) \subset M^2$ nimetatakse isotermiliseks, kui kehtib

$$\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = \lambda^2(u,v), \ \ \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = 0.$$

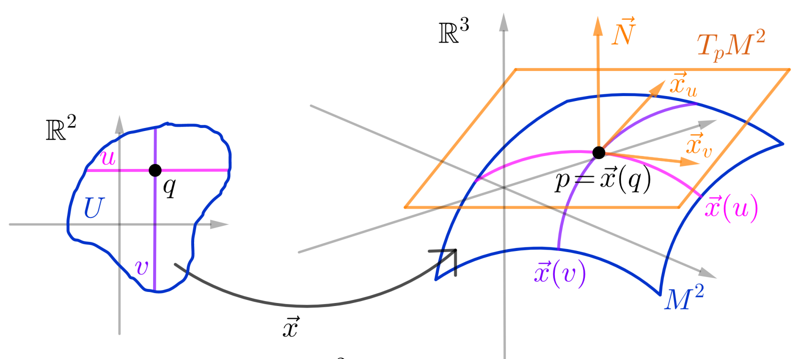
Funktsiooni $\lambda^2(u,v)$ nimetatakse normeerimisfunktsiooniks.

Eeldusest grad $f \neq \vec{0}$ järeldub, et $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$, kus $\vec{x}_u \times \vec{x}_v$ on vektorkorrutis. Vektorid $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ moodustavad pinna M^2 puutujatasandi T_pM^2 baasi. Vektor

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{||\vec{x}_u \times \vec{x}_v||}$$

on pinna M^2 normaalvektor. Antud olukorda illustreerib joonis (2). Seega kehtib

$$\langle \vec{N}, \vec{x}_u \rangle = 0, \ \ \langle \vec{N}, \vec{x}_v \rangle = 0, \ \ ||\vec{N}|| = 1.$$



Joonis 2: Pinna M^2 lokaalne parametriseerimine.

Bilineaarvormi $\mathrm{I}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$, kus $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ on pinna puutujavektorid punktis p, nimetatakse esimeseks fundamentaalvormiks. Esimese fundamentaalvormi kordajaid baasis $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ tähistatakse järgmiselt

$$\begin{aligned} E =& \mathrm{I}(\vec{x}_u, \vec{x}_u) = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle, \\ F =& \mathrm{I}(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle, \\ G =& \mathrm{I}(\vec{x}_v, \vec{x}_v) = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Esimese fundamentaalvormi nimetatakse ka pinna Riemanni meetrikaks ja kirjutatakse kujul $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Juhul kui pinna parametriseerimine on isotermiline, kehtib $E = G = \lambda^2, F = 0$. Seega isomeetrilise parametriseerimise korral $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$.

Olgu $\alpha(t)$ parametriseeritud joon pinnal M^2, selline, et ta läbib punkti p, kui $t = 0$, ja selle joone puutujavektorit tähistame $\vec{v}$. Seega

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(t)\big|_{t=0} = \vec{v}.$$

Nüüd normaalvektorvälja $\vec{N}$ ahendame joonele α ja saadud vektorvälja piki joont α tähistame $\vec{N}(t)$. Seega

$$\vec{N}\big|_{\alpha(t)} = \vec{N}(t).$$

Normaalvektorvälja tuletist t järgi punktis $t = 0$ nimetatakse normaalvektorvälja kovariantseks tuletiseks ja tähistatakse $\nabla_{\vec{v}}\vec{N}$. Seega

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{N} = \frac{d}{dt}\big(\vec{N}(t)\big)\Big|_{t=0}.$$

Mainime, et $\nabla_{\vec{v}}\vec{N}$ on vektor ja ta sõltub vektorist $\vec{v}$ lineaarselt, see tähendab

$$\nabla_{a\vec{v}+\vec{w}}\vec{N} = a\nabla_{\vec{v}}\vec{N} + \nabla_{\vec{w}}\vec{N},$$

kus $a \in \mathbb{R}$ ja $\vec{v}, \vec{w}$ on pinna puutujavektorid punktis p.

Lemma 1.1. *Vektorväli $\vec{N}'(t)$ on risti vektorväljaga $\vec{N}(t)$.*

Tõestus. Normaalvektorväli $\vec{N}(t)$ on ühikvektorväli piki joont α. Seega

$$\langle\vec{N}(t), \vec{N}(t)\rangle = 1.$$

Diferentseerides t järgi, saame

$$\langle\vec{N}'(t), \vec{N}(t)\rangle + \langle\vec{N}(t), \vec{N}'(t)\rangle = 0,$$

kust järeldub $\langle\vec{N}'(t), \vec{N}(t)\rangle = 0$ või $\vec{N}'(t) \perp \vec{N}(t)$. □

Lemmast järeldub, et vektor $\nabla_{\vec{v}}\vec{N}$ on risti normaalvektoriga $\vec{N}$. Järelikult vektor $\nabla_{\vec{v}}\vec{N}$ on pinna M^2 puutujavektor punktis p. Seega kujutus $\vec{v} \to \nabla_{\vec{v}}\vec{N}$ on pinna puutujatasandi lineaarteisendus.

Definitsioon 1.5. Pinna põhioperaatoriks nimetatakse puutujatasndi lineaarteisendust $S\colon T_pM^2 \mapsto T_pM^2$, kus $S(\vec{v}) = -\nabla_{\vec{v}}\vec{N}$.

Pinna põhioperaatorit nimetatakse ka Weingarteni operaatoriks ja järgnevas kasutame nii esimest, kui ka teist terminit. Pinnateoorias tõestatakse [4], et Weingarteni operaator on sümmeetriline operaator. Kehtib $S(\vec{x}_u) = -\vec{N}_u$ ja $S(\vec{x}_v) = -\vec{N}_v$. Kasutades Weingarteni operaatorit võime konstrueerida bilineaarvormi $\mathrm{II}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \langle S(\vec{w}_1), \vec{w}_2\rangle$ pinna puutujatasandil, mida nimetatakse pinna teiseks fundamentaalvormiks. Teise fundamenntaalvormi kordajaid baasis $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ tähistame järgmiselt

$$\begin{aligned} l =& \mathrm{II}(\vec{x}_u, \vec{x}_u) = \langle S(\vec{x}_u), \vec{x}_u\rangle, \\ m =& \mathrm{II}(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \langle S(\vec{x}_u), \vec{x}_v\rangle, \\ n =& \mathrm{II}(\vec{x}_v, \vec{x}_v) = \langle S(\vec{x}_v), \vec{x}_v\rangle. \end{aligned}$$

2 Riemanni pind

Geomeetrias on huvitav uurimisobjekt Riemanni pind, mille definitsiooni anname antud peatükis. Konstruktsioon on sarnane eelmise paragrahviga, kuid nüüd võtame kasutusele kompleksarvud. Näitena uurime sfääri S^2 ja veendume, et see on Riemanni pind.

Olgu M^2 pind, $x, \tilde{x} \in M^2$ pinna kaks punkti, (U, φ) pinna lokaalne kaart punkti x ümbruses ja (V, ψ) lokaalne kaart punkti $\tilde{x}$ ümbruses. Teame, et tasandit $\mathbb{R}^2$ saab samastada kompleksarvudega $\mathbb{C}$ järgmiselt: kui (x, y) on tasandi punkt, siis tasandi punkti samastame kompleksarvuga $x+iy$. Seega lokaalsed kaardid on nüüd homöomorfismid $\varphi\colon U \mapsto \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ja $\psi\colon V \mapsto \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, see tähendab, et φ seab ümbruse U igale punktile vastavusse üheselt määratud kompleksarvu. Analoogiliselt, ψ seab ümbruse V igale punktile vastavusse üheselt määratud kompleksarvu.

Olgu $W = U \cap V$ ja $p \in W$. Kui $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on punkti p reaalsed koordinaadid, siis $\varphi(p) = u + iv = z$ ja $\psi(p) = \tilde{u} + i\tilde{v} = \tilde{z}$, kus $(\tilde{u}, \tilde{v})$ on punkti p lokaalsed koordinaadid ümbruses (V, ψ). Kuna ühed lokaalsed koordinaadid (u, v) saab avaldada teiste lokaalsete koordinaatide $(\tilde{u}, \tilde{v})$ kaudu, siis võime ülemineku funktsioonid nüüd kirjutada kujul

$$\begin{cases} z = \varphi \circ \psi^{-1}(\tilde{z}) \\ \tilde{z} = \psi \circ \varphi^{-1}(z) \end{cases}$$

Definitsioon 2.1. Riemanni pinnaks nimetatakse 2-mõõtmelist siledat muutkonda, kus kõik ülemineku funktsioonid $f(z) = f_1(u, v) + i f_2(u, v)$ on holomorfsed ehk kehtivad Cauchy-Riemanni tingimused

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}. \tag{2}$$

Riemanni pinda tähistame Σ. Riemanni pinna lokaalse kaardi tähistame (U, φ), kus $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$. Kui on antud teine lokaalne kaart (V, ψ), siis üleminekufunktsioonid on $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diferentseerime võrdust (1) u järgi ja võrdust (2) v järgi ning liidame saadud tulemused kokku

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} = 0. \tag{3}$$

Funktsiooni f_1, mis rahuldab tingimust (3) nimetatakse harmooniliseks funktsiooniks. Analoogiliselt diferentseerime võrdust (1) v järgi ja võrdust (2) u järgi ning liidame saadud tulemused kokku

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}, \quad -\frac{\partial^2 f_1}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2} = 0. \tag{4}$$

Seega funktsioon f_2 on ka harmooniline funktsioon. Näitasime, et kui funktsioon f on holomorfne funktsioon ja $f = f_1 + if_2$, siis $f_1 = \mathrm{Ref}(f), f_2 = \mathrm{Im}(f)$ on harmoonilised funktsioonid. See tähendab, et kehtivad võrdused $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$, kus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

ning funktsioone f_1, f_2 hakkame nimetama kaasharmoonilisteks funktsioonideks. Operaatorit Δ nimetatakse Laplace'i operaatoriks.

Näide 2.1. Vaatleme kahemõõtmelist sfääri $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ja näitame, et sfäär on Riemanni pind. Selleks konstrueerime sfääril atlast, mis koosneb kahest lokaalsest kaardist ja näitame, et üleminekufunktsioon on holomorfne. Alustame safääri võrrandist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Kaks lahtist alamhulka sfääril S^2 tähistame

$$D_1 = S^2 \backslash \{N\};\ D_2 = S^2 \backslash \{L\},$$

kus N on punkt koordinaatidega $(0,0,1)$ ja L on punkt koordinaatidega $(0,0,-1)$.

Esimese koordinaatfunktsiooni $\varphi\colon D_1 \to \mathbb{C}$ konstrueerimiseks kasutame stereograafilist projektsiooni punktist N. Olgu $\mathfrak{L}$ sfääri puutujatasand punktis L. Kui $F \in D_1$ on sfääri punkt, siis tõmbame kiire, mis lähtub punktist N, läbib punkti F ja lõikab puutujatasandit $\mathfrak{L}$ punktis H. Siis kujutust $s_N(F) = H$ nimetatakse stereograafiliseks projektsiooniks punktist N. Seega $s_N\colon D_1 \to \mathfrak{L}$. Teise koordinaatfunktsiooni $\psi\colon D_2 \to \mathbb{C}$ konstrueerimiseks kasutame stereograafilist projektsiooni punktist L. Olgu $\mathfrak{N}$ sfääri puutujatasand punktis N. Kui $\tilde{F} \in D_2$ on sfääri punkt, siis tõmbame kiire, mis lähtub punktist L, läbib punkti $\tilde{F}$ ja lõikab puutujatasandit $\mathfrak{N}$ punktis $\tilde{H}$. Siis kujutust $s_L(\tilde{F}) = \tilde{H}$ nimetatakse stereograafiliseks projektsiooniks punktist L. Seega $s_L\colon D_2 \to \mathfrak{N}$.

On ilmne, et stereograafilised projektsioonid s_N, s_L on homöomorfismid. Seega (D_1, φ), (D_2, ψ) on lokaalsed kaardid sfääril ja nad moodustavad sfääri atlase $D_1 \cup D_2 = S^2$. Meie eesmärk on leida koordinaatfunktsioonide φ, ψ valemeid koordinaatides ja nende ülemineku funktsioonid.

Kõigepealt leiame valemid stereograafiliste projektsioonide jaoks. Stereograafilise projektsiooni s_N leidmiseks määrame puutujatasandil $\mathfrak{L}$ (u,v)-koordinaadisüsteemi järgmiselt: alguspunkt asub punktis koordinaatidega (0,0,-1), u-koordinaattelg on samasuunaline lähtekoordinaadisüsteemi x-teljega ja v-koordinaattelg on samasuunaline y-teljega. Olgu (x_0, y_0, z_0) sfääri punkti F koordinaadid. Sirge, mis läbib kahte punkti N, F, parameetriline võrrand on

$$x = x_0\, t,\ y = y_0\, t,\ z = (z_0 - 1)\, t + 1.$$

Leiame selle sirge ja tasandi $\mathfrak{L}$ lõikepunkti H koordinaadid. Tasandi $\mathfrak{L}$ võrrand on $z + 1 = 0$. Asendades parameetrilisest võrrandist leiame $(z_0 - 1)\, t + 1 + 1 = 0$ ehk

$$t = \frac{2}{1 - z_0}.$$

Seega

$$u = \frac{2x_0}{1 - z_0},\ v = \frac{2y_0}{1 - z_0}.$$

Analoogiliselt arvutame sfääri punkti koordinaadid u, v, kui projekteerimine toimub punktist $(0, 0, -1)$ sfääri puutujatasandile $\mathfrak{N}$ (puutepunkt $(0, 0, 1)$). Selle puutujatasandi (u, v)-koordinaadisüsteemi definitsioon on sarnane, see tähendab alguspunkt asub punktis koordinaatidega (0,0,1), u-koordinaattelg on samasuunaline lähtekoordinaadisüsteemi x-teljega ja v-koordinaattelg on samasuunaline y-teljega. Sirge, mis läbib kahte punkti L, F, parameetriline võrrand on

$$x = x_0\, t,\ y = y_0\, t,\ z = (z_0 + 1)\, t - 1.$$

Nüüd puutujatasandi $\mathfrak{N}$ võrrand on $z - 1 = 0$. Siit leiame kohe, et lõikepunkti koordinaadid on

$$u = \frac{2x_0}{1 + z_0},\ v = \frac{2y_0}{1 + z_0}.$$

Teine võimalus nende valemite leidmiseks on sarnaste kolmnurkade omaduste kasutamine. Joonisel (3) on tähistused ja näeme, et kolmnurgad $\triangle\, NMF \sim\triangle\, NKH$ (on sarnased). Seega kehtib võrdus

$$\frac{MF}{KH} = \frac{NF}{NH}.$$

Kolmnurgad $\triangle\, NFR \sim\triangle\, NHE$ ja siit saame

$$\frac{FR}{HE} = \frac{NF}{NH}.$$

Analoogiliselt $\triangle\, NZF \sim\triangle\, NLH$ ja seega kehtib võrdus

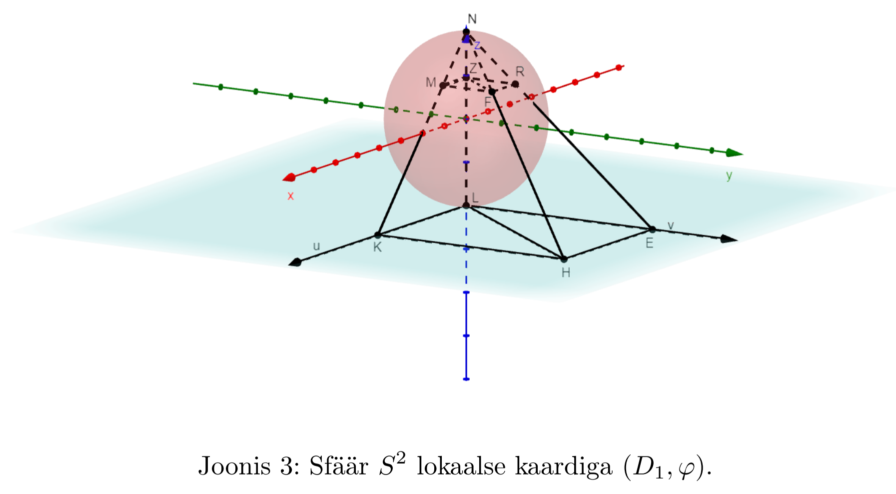
$$\frac{NZ}{NL} = \frac{NF}{NH}.$$

Kokkuvõttes saame

$$\frac{MF}{KH} = \frac{FR}{HE} = \frac{NZ}{NL} \quad\Rightarrow\quad \frac{y_0}{v} = \frac{x_0}{u} = \frac{1 - z_0}{2},$$

ja seega

$$u = \frac{2x_0}{1 - z_0},\ \ v = \frac{2y_0}{1 - z_0}.$$



Joonis 3: Sfäär S^2 lokaalse kaardiga (D_1, φ).

Analoogiliselt leiame s_L kuju. Tähistused on joonisel (4). Sarnased kolmnurgad on $\triangle\, LMF$ ja $\triangle\, LKH$. Seega kehtib võrdus

$$\frac{MF}{KH} = \frac{LF}{LH}.$$

Sarnased kolmnurgad on $\triangle\, LFR$ ja $\triangle\, LHE$. Seega kehtib võrdus

$$\frac{FR}{HE} = \frac{LF}{LH}.$$

Sarnased kolmnurgad on $\triangle\, LZF$ ja $\triangle\, LNH$. Seega kehtib võrdus

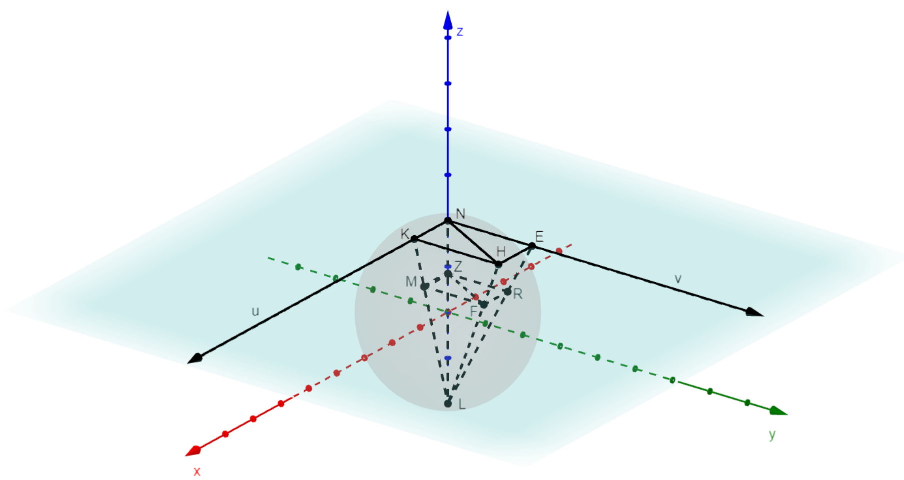
$$\frac{LZ}{LN} = \frac{LF}{LH}.$$

Kokkuvõttes saame

$$\frac{MF}{KH} = \frac{FR}{HE} = \frac{LZ}{LN} \text{ ehk } \frac{y_0}{v} = \frac{x_0}{u} = \frac{1+z_0}{2},$$

millest

$$u = \frac{2x_0}{1+z_0} \text{ ja } v = \frac{2y_0}{1+z_0}.$$



Joonis 4: Sfäär S^2 lokaalse kaardiga (D_2, ψ).

Esimese koortdinaatfunktsiooni konstrueerime järgmiselt

$$\varphi\colon F \in D_1 \to s_N(F) = (u, v) \to u + iv \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Tähistame $\zeta = u + iv$. Seega $\varphi(F) = \zeta, \varphi\colon D_1 \to \mathbb{C}$. Järelikult esimeses lokaalses koordinaadisüsteemis sfääri punkti $F(x_0, y_0, z_0)$ kompleksne koordinaat on

$$\zeta = \frac{2(x_0 + iy_0)}{1 - z_0}.$$

Teise koordinaatfunktsiooni konstrueerime järgmiselt

$$\psi\colon F \in D_2 \to s_L(F) = (u, v) \to u + iv \to \overline{u + iv} = u - iv \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Tähistame $\xi = u - iv$. Järelikult teises lokaalses koordinaadisüsteemis sfääri punkti $F(x_0, y_0, z_0)$ kompleksne koordinaat on

$$\xi = \frac{2(x_0 - iy_0)}{1 + z_0}.$$

Üleminekufunktsiooni leidmiseks moodustame lokaalsete koordinaatide korrutise

$$\zeta \cdot \xi = \frac{2(x_0 + iy_0)}{1 - z_0} \frac{2(x_0 - iy_0)}{1 + z_0} = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{1 - z_0^2} = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2 + y_0^2} = 4$$

Järelikult üheks üleminekufunktsiooniks on funktsioon

$$\xi = \frac{4}{\zeta}.$$

Näitame, et üleminekufunktsioon $\xi(\zeta)$ on holomorfne funktsioon. Piisab, kui näitame, et funktsioon $\xi(\zeta)$ rahuldab Cauchy-Riemanni tingimust (2.1). Selleks arvutame selle funktsiooni reaal- ja imaginaarosa. Lugejat ja nimetajat korrutades kaaskompleksarvuga, leiame

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{4}{\zeta} = \frac{4}{u + iv} = \frac{4(u - iv)}{u^2 + v^2} = \frac{4u}{u^2 + v^2} - i\frac{4v}{u^2 + v^2}, \\ f_1(u, v) &= \frac{4u}{u^2 + v^2}, \ f_2(u, v) = -\frac{4v}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Osatuletiste arvutamine annab

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{-4u^2 + 4v^2}{(u^2 + v^2)^2}, \ \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{-4u^2 + 4v^2}{(u^2 + v^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} &= \frac{-8uv}{(u^2 + v^2)^2}, \ \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{8uv}{(u^2 + v^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}, \end{aligned}$$

millest näeme, et Cauchy-Riemanni tingimus (2.1) on täidetud. Seega näitasime, et sfäär S^2 on Riemanni pind ja sellega lõpeb sfääri näide. $\diamondsuit$

3 Meetrika Riemanni pinnal

Eukleidilises geomeetrias on tähtis mõiste pikkus. Antud paragrahvis näitame, kuidas käsitletakse pikkuse mõistet Riemanni pinnal. Infinitesimaalset lähenemist eukleidilisele pikkusele pinnal nimetatakse meetrikaks. Tegelikult pinna meetrika on skalaarkorrutis pinna puutujatasandil, see tähendab, et pinna meetrika annab võimaluse pinna puutujavektorite pikkuste ja nende vaheliste nurkade arvutamiseks.

Kõigepealt anname konformse meetrika definitsiooni. Olgu Σ Riemanni pind ja (U, ζ), (V, ξ) selle pinna lokaalsed kaardid, kus $U \cap V \neq \emptyset$.

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et Riemanni pinnal on antud konformne meetrika g, kui igas lokaalses kaardis (U, ζ) on antud

$$g(d\zeta, d\bar{\zeta}) = \lambda^2(\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta}, \tag{7}$$

kus $\lambda(\zeta)$ on lõpmata diferentseeruv funktsioon, $\lambda(\zeta) \in \mathbb{R}, \lambda(\zeta) > 0$. Kui

$$g(d\zeta, d\bar{\zeta}) = \lambda^2(\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta}$$

on konformne meetrika lokaalses kaardis (U, ζ) ja

$$g(d\xi, d\bar{\xi}) = \mu^2(\xi)\, d\xi\, d\bar{\xi}$$

on konformne meetrika lokaalses kaardis (V, ξ), siis peab kehtima

$$\mu^2(\xi) = \lambda^2(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\xi)} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\xi}}. \tag{8}$$

Märkus 3.1. $d\zeta, d\bar{\zeta}$ on lokaalse koordinaadi ζ diferentsiaalid ja meie käsitluses nad on sõltumatud suurused.

Olgu $F(x, y, z)$ lõpmata diferentseeruv funktsioon määramispiirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$ reaalarv. Meie vaatleme pinda $\mathbb{S}$, mis on määratud võrrandiga $F(x, y, z) = c$. Võrrandiga $F(x, y, z) = c$ määratud pind on kahemõõtmeline muutkond [2]. Meie eeldame, et pinna $\mathbb{S}$ punktides funktsiooni F gradient

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right),$$

on nullvektorist erinev vektor. Saab näidata, et funktsiooni F gradient pinna punktis on risti pinna puutujatasandiga, seega funktsiooni F gradient on pinna normaalvektor. Kuna ta on määratud pinna igas punktis, siis pinnal tekib normaalvektorväli. Vastavat ühiknormaalvektorvälja tähistame $\vec{N}$, see tähendab

$$\vec{N} = \frac{\text{grad } F}{||\text{grad } F||}.$$

Seega $||\vec{N}|| = 1$. Oletame, et võrrandiga määratud pind on Riemanni pind konformse meetrikaga g. See tähendab, et pinda $\mathbb{S}$ saab katta lokaalsete kaartidega nii, et kõik üleminekufunktsioonid on holomorfsed ja igas lokaalses kaardis meetrika on konformne. Antud juhul lokaalseks kaardiks nimetame pinna $\mathbb{S}$ parametriseerimist komplekse parameetriga ζ, see tähendab

$$\zeta \in U \subset \mathbb{C} \to \vec{r}(\zeta) = (x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta)) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3.$$

Siin $x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsoonid ja kehtib

$$F(x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta)) = c.$$

Kui

$$\xi \in V \subset \mathbb{C} \to \vec{r}(\xi) = (\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), \tilde{z}(\xi)) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$$

on pinna $\mathbb{S}$ teine lokaalne parametriseerimine, kus $U \cap V \neq \emptyset$ ja $\zeta = \zeta(\xi)$ on vastav üleminekufunktsioon (holomorfne), siis

$$x(\zeta(\xi)) = \tilde{x}(\xi),\ y(\zeta(\xi)) = \tilde{y}(\xi),\ z(\zeta(\xi)) = \tilde{z}(\xi).$$

Kuna pind $\mathbb{S}$ asub kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$, siis selle ruumi eukleidiline meetrika $dx^2 + dy^2 + dz^2$ indutseerib pinna $\mathbb{S}$ meetrikat g, kusjuures meie eeldame, et pinna kõik lokaalsed parametriseerimised on sellised, et indutseeritud meetrika g on konformne. Mainime seda, et pinna sellist prametriseerimist nimetatakse konformseks. Teiste sõnadega meie eeldame, et kõik lokaalsed parametriseerimised on konformsed. Olgu $g(d\zeta, d\bar{\zeta}) = \lambda^2(\zeta)d\zeta d\bar{\zeta}$ konformne meetrika lokaalses koordinaadis ζ ja $g(d\xi, d\bar{\xi}) = \mu^2(\xi)d\xi d\bar{\xi}$ konformne meetrika lokaalses koordinaadis ξ. Siis kehtib

$$\mu^2(\xi) = \lambda^2(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\xi)} \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\xi}}.$$

Nüüd arvutame pinna meetrika lokaalses koordinaadis ζ nii, et eukleidilises meetrikas $dx^2+dy^2+dz^2$ koordinaatide diferentsiaalid on avaldatud $d\zeta, d\bar{\zeta}$ diferentsiaalide kaudu järgmiselt

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial x}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial y}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta},$$

kus

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Saame

$$\begin{aligned} & dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial x}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial y}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}\right)^2 \\ &= \langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta\rangle\,(d\zeta)^2 + 2\,\langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle\,d\zeta d\bar{\zeta} + \langle\vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle\,(d\bar{\zeta})^2, \end{aligned} \tag{9}$$

kus

$$\vec{r}_\zeta = \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}, \frac{\partial y}{\partial\zeta}, \frac{\partial z}{\partial\zeta}\right), \quad \vec{r}_{\bar{\zeta}} = \left(\frac{\partial x}{\partial\bar{\zeta}}, \frac{\partial y}{\partial\bar{\zeta}}, \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right), \tag{10}$$

ja

$$\langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2, \tag{11}$$

$$\langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle = \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}, \tag{12}$$

$$\langle\vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial\bar{\zeta}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\bar{\zeta}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right)^2, \tag{13}$$

Valem (9) on pinna meetrika lokaalses koordinaadis ζ. Kuna meie eeldame, et selle pinna meetrika on konformne, siis tema kuju peab olema selline nagu valemis (7). Siit järeldub, et

$$\langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta\rangle = 0, \quad \langle\vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle = \frac{1}{2}\lambda^2(\zeta), \quad \langle\vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}}\rangle = 0.$$

Järelikult Riemanni pinna konformne meetrika lokaalses koordinaadis ζ avaldub järgmiselt $g = \lambda^2(\zeta)\,d\zeta d\bar{\zeta}$. Kui nüüd asendame $\zeta = u+iv$, kus u, v on reaalsed parameetrid, siis kujutus $\zeta \in U \to \vec{r}(\zeta)$ määrab pinna $\mathbb{S}$ $(u,v)-$ parametriseerimist, kus meetrika avaldub järgmiselt $g = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2)$, see tähendab, et $(u,v)-$ parametriseerimine on isotermiline. Tõepoolest

$$g = \lambda^2(\zeta)\,d\zeta d\bar{\zeta} = \lambda^2(u,v)(du + idv)(du - idv) = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2).$$

Seega Riemanni pinna konformse meetrika g korral võime kõik arvutused läbi viia kas lokaalses kompleksses koordinaadis ζ või isotermilistes lokaalsetes koordinaatides u, v, kusjuures $\zeta = u + iv$. Järgnevas tuletame valemid Riemanni pinna karakteristikute arvutamiseks nii kompleksses koordinaadis ζ, kui ka isotermisistes koordinaatides u, v.

Juhime tähelepanu sellele, et pinna meetrika arvutamisel lokaalses koordinaadis ζ, võtsime kasutusele kaks vektorit $r_\zeta, r_{\bar{\zeta}}$ (10). Lisaks kasutame vektorite skalaarkorrutise analoogi, mis seisab valemite(11), (12), (13) vasakpooltel. Antud skalaarkorrutise analoogi defineeritakse järgmiselt: kui $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on kaks vektorit kompleksete koordinaatidega, siis

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \tag{14}$$

Mainime seda, et (14) ei ole Hermite'i skalaarkorrutis kompleksses vektorruumis. Seega antud skalaarkorrutise analoog ei ole positiivselt määratud ning järelikult võrranditest $\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle = 0, \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = 0$ ei järeldu, et $\vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}}$ on nullvektorid.

Näitame, et kehtivad valemid

$$\langle \vec{r}_\zeta, \vec{N} \rangle = \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle = 0. \tag{15}$$

Pinna võrrandist $F(x, y, z) = c$ järeldub, et pinna suvalises punktis $dF = 0$. Diferentsiaali võime avaldada järgmiselt

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \\
&= \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) + \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial y}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \\
&= \langle \text{grad } F, \vec{r}_\zeta \rangle d\zeta + \langle \text{grad } F, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle d\bar{\zeta} = 0.
\end{aligned}$$

Kuna koordinaatide $\zeta, \bar{\zeta}$ diferentsiaalid on suvalised lõpmata väiksed kompleksaevud, siis saame viimasest võrrandist

$$\langle \text{grad } F, \vec{r}_\zeta \rangle = \langle \text{grad } F, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = 0,$$

kust järeldub (15).

Näide 3.1. Vaatleme sfääri S^2 Riemanni pinna struktuuri, mis oli kirjeldatud näites (2.1). Leiame sfääri S^2 meetrikat kompleksetes koordinaatides ζ, ξ ja näitame, et see meetrika on konformne. Vaatame lokaalset kaarti (D_1, φ). Näites (2.1) oli näidatud, et kehtivad võrdused $\frac{y_0}{v} = \frac{x_0}{u} = \frac{1 - z_0}{2}$ ja $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, millest leiame

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{2} u (1 - z_0), \\
y_0 &= \frac{1}{2} v (1 - z_0), \\
\frac{1}{4} u^2 &(1 - z_0)^2 + \frac{1}{4} v^2 (1 - z_0)^2 + z_0^2 = 1.
\end{aligned}$$

Nüüd saame avaldada x_0, y_0, z_0 tundmatute u, v kaudu järgmiselt

$$x_0 = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y_0 = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \quad z_0 = \frac{u^2 + v^2 - 4}{u^2 + v^2 + 4}.$$

Läheme üle kompleksarvudele. Kirjutame kujul $\vec{r}(\zeta) = (x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))$, kus

$$x(\zeta) = \frac{2(\zeta + \bar{\zeta})}{|\zeta|^2 + 4}, \quad y(\zeta) = \frac{2i(\bar{\zeta} - \zeta)}{|\zeta|^2 + 4}, \quad z(\zeta) = \frac{|\zeta|^2 - 4}{|\zeta|^2 + 4}.$$

Arvutame välja osatuletised.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \zeta} &= \frac{2(|\zeta|^2 + 4) - 2(\zeta + \bar{\zeta})\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{2(4 - (\bar{\zeta})^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \\
\frac{\partial x}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{2(|\zeta|^2 + 4) - 2(\zeta + \bar{\zeta})\zeta}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{2(4 - \zeta^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \\
\frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \frac{-2i(|\zeta|^2 + 4) - 2i(\bar{\zeta} - \zeta)\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{-2i(4 + (\bar{\zeta})^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \\
\frac{\partial y}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{2i(|\zeta|^2 + 4) - 2i(\bar{\zeta} - \zeta)\zeta}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{2i(4 + \zeta^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \\
\frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\bar{\zeta}(|\zeta|^2 + 4) - (|\zeta|^2 - 4)\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{8\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \\
\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{\zeta(|\zeta|^2 + 4) - (|\zeta|^2 - 4)\zeta}{(|\zeta|^2 + 4)^2} = \frac{8\zeta}{(|\zeta|^2 + 4)^2}
\end{aligned}$$

Moodustame vektorid

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\zeta &= \left(\frac{2(4 - (\bar{\zeta})^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2}, \frac{-2i(4 + (\bar{\zeta})^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2}, \frac{8\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \right), \\
\vec{r}_{\bar{\zeta}} &= \left(\frac{2(4 - \zeta^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2}, \frac{2i(4 + \zeta^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^2}, \frac{8\zeta}{(|\zeta|^2 + 4)^2} \right).
\end{aligned}$$

Leiame skalaarkorrutised $\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle, \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle, \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle &= \frac{64 - 32(\bar{\zeta})^2 + 4(\bar{\zeta})^4 - 64 - 32(\bar{\zeta})^2 - 4(\bar{\zeta})^4 + 64(\bar{\zeta})^2}{(|\zeta|^2 + 4)^4} = 0 \\
\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle &= \frac{64 - 32\zeta^2 + 4\zeta^4 - 64 - 32\zeta^2 - 4\zeta^4 + 64\zeta^2}{(|\zeta|^2 + 4)^4} = 0 \\
\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle &= \frac{64 - 16\zeta^2 - 16(\bar{\zeta})^2 + 4|\zeta|^4 + 64 + 16\zeta^2 + 16(\bar{\zeta})^2 + 4|\zeta|^4 + 64|\zeta|^2}{(|\zeta|^2 + 4)^4} \\
&= \frac{8(16 + |\zeta|^4 + 8|\zeta|^2)}{(|\zeta|^2 + 4)^4} = \frac{8(|\zeta|^2 + 4)^2}{(|\zeta|^2 + 4)^4} = \frac{8}{(|\zeta|^2 + 4)^2}
\end{aligned}$$

Saime, et sfääri S^2 meetrika lokaalses kaardis (D_1, φ) komplekses koordinaadis ζ avaldub kujul

$$\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle (d\zeta)^2 + 2\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle d\zeta d\bar{\zeta} + \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle (d\bar{\zeta})^2 = \frac{16}{(|\zeta|^2 + 4)^2} d\zeta d\bar{\zeta}.$$

Seega oleme saanud, et sfääri meetrika lokaalses koordinaadis ζ on konformne ja

$$\lambda^2(\zeta) = \frac{16}{(|\zeta|^2 + 4)^2}.$$

Nüüd peame näitama, et sääri meetrika on konformne ka teises lokaalses kaardis (D_2, ψ) koordinaadiga ξ. Kasutame $\frac{y_0}{v} = \frac{x_0}{u} = \frac{1+z_0}{2}$ ja $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, millest avaldame x_0, y_0, z_0 tundmatute u, v kaudu. Esimestest võrdustest saame avaldada x_0, y_0 ning paneme saadud avaldised võrdusesse $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$

$$\begin{aligned}
&x_0 = \frac{1}{2}u(1+z_0),\\
&y_0 = \frac{1}{2}v(1+z_0),\\
&\frac{1}{4}u^2(1+z_0)^2 + \frac{1}{4}v^2(1+z_0)^2 + z_0^2 = 1.
\end{aligned}$$

Avaldame x_0, y_0, z_0 tundmatute u, v kaudu

$$x_0 = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \quad y_0 = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \quad z_0 = \frac{4-u^2-v^2}{u^2+v^2+4}.$$

Läheme üle kompleksarvudele. Kirjutame kujul $\vec{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, kus

$$x(\xi) = \frac{2(\xi+\bar{\xi})}{|\xi|^2+4}, \quad y(\xi) = \frac{2i(\bar{\xi}-\xi)}{|\xi|^2+4}, \quad z(\xi) = \frac{4-|\xi|^2}{|\xi|^2+4}.$$

Arvutame välja osatuletised.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{2(|\xi|^2+4) - 2(\xi+\bar{\xi})\bar{\xi}}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{2(4-(\bar{\xi})^2)}{(|\xi|^2+4)^2}\\
\frac{\partial x}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{2(|\xi|^2+4) - 2(\xi+\bar{\xi})\xi}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{2(4-\xi^2)}{(|\xi|^2+4)^2}\\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{-2i(|\xi|^2+4) - 2i(\bar{\xi}-\xi)\bar{\xi}}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{-2i(4+(\bar{\xi})^2)}{(|\xi|^2+4)^2}\\
\frac{\partial y}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{2i(|\xi|^2+4) - 2i(\bar{\xi}-\xi)\xi}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{2i(4+\xi^2)}{(|\xi|^2+4)^2}\\
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{-\bar{\xi}(|\xi|^2+4) - (4-|\xi|^2)\bar{\xi}}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{-8\bar{\xi}}{(|\xi|^2+4)^2}\\
\frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{-\xi(|\xi|^2+4) - (4-|\xi|^2)\xi}{(|\xi|^2+4)^2} = \frac{-8\xi}{(|\xi|^2+4)^2}
\end{aligned}$$

Moodustame vektorid

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\xi} &= \left(\frac{2(4-(\bar{\xi})^2)}{(|\xi|^2+4)^2}, \frac{-2i(4+(\bar{\xi})^2)}{(|\xi|^2+4)^2}, \frac{-8\bar{\xi}}{(|\xi|^2+4)^2}\right),\\
\vec{r}_{\bar{\xi}} &= \left(\frac{2(4-\xi^2)}{(|\xi|^2+4)^2}, \frac{2i(4+\xi^2)}{(|\xi|^2+4)^2}, \frac{-8\xi}{(|\xi|^2+4)^2}\right).
\end{aligned}$$

Leiame skalaarkorrutised $\langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_\xi \rangle, \langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle, \langle \vec{r}_{\bar{\xi}}, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle$.

$$\langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_\xi \rangle = \frac{64 - 32(\bar{\xi})^2 + 4(\bar{\xi})^4 - 64 - 32(\bar{\xi})^2 - 4(\bar{\xi})^4 + 64(\bar{\xi})^2}{(|\xi|^2+4)^4} = 0$$

$$\langle \vec{r}_{\bar{\xi}}, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle = \frac{64 - 32\xi^2 + 4\xi^4 - 64 - 32\xi^2 - 4\xi^4 + 64\xi^2}{(|\xi|^2+4)^4} = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle &= \frac{64 - 16\xi^2 - 16(\bar{\xi})^2 + 4|\xi|^4 + 64 + 16\xi^2 + 16(\bar{\xi})^2 + 4|\xi|^4 + 64|\xi|^2}{(|\xi|^2+4)^4} \\ &= \frac{8(16 + |\xi|^4 + 8|\xi|^2)}{(|\xi|^2+4)^4} = \frac{8(|\xi|^2+4)^2}{(|\xi|^2+4)^4} = \frac{8}{(|\xi|^2+4)^2} \end{aligned}$$

Saime, et sfääri S^2 meetrika lokaalses kaardis (D_2, ψ) kompleksses koordinaadis ξ avaldub kujul

$$\langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_\xi \rangle (d\xi)^2 + 2\langle \vec{r}_\xi, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle d\xi d\bar{\xi} + \langle \vec{r}_{\bar{\xi}}, \vec{r}_{\bar{\xi}} \rangle (d\bar{\xi})^2 = \frac{16}{(|\xi|^2+4)^2} d\xi d\bar{\xi},$$

ja see näitab, et sfääri meetrika on konformne ka teises lokaalses kaardis ning

$$\mu^2(\xi) = \frac{16}{(|\xi|^2+4)^2}.$$

Seega meil on konformne meetrika kogu sfääril.

Kontrollime, et kehtib sfääri konformne meetrika teisenduse valem (8), kui toimub üleminek ühelt lokaalselt koordinaadilt teisele $\zeta \to \xi$ või $\xi \to \zeta$. Näites (2.1) leidsime, et lokaalsed koordinaadid on omavahel seotud valemiga

$$\zeta = \frac{4}{\xi}, \;\; \xi = \frac{4}{\zeta}.$$

Antud näites leidsime, et lokaalses kaardis (D_1, φ)

$$\lambda^2(\zeta) = \frac{16}{(|\zeta|^2+4)^2},$$

ja lokaalses kaardis (D_2, ψ)

$$\mu^2(\xi) = \frac{16}{(|\xi|^2+4)^2}. \tag{16}$$

Nüüd peame näitama, et

$$\mu^2(\xi) = \lambda^2(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\xi)} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\xi}}, \text{ kus } \zeta = \zeta(\xi) = \frac{4}{\xi} \tag{17}$$

Leiame

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial \left(\frac{4}{\xi}\right)}{\partial \xi} = -\frac{4}{\xi^2}, \;\; \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \left(\frac{4}{\bar{\xi}}\right)}{\partial \bar{\xi}} = -\frac{4}{(\bar{\xi})^2}.$$

Korrutise (17) esimene tegur on võrdne

$$\begin{aligned} \lambda^2(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\xi)} &= \frac{16}{\left(|\frac{4}{\xi}|^2 + 4\right)^2} = \frac{16}{\left(\frac{16+4|\xi|^2}{|\xi|^2}\right)^2} \\ &= \frac{16|\xi|^4}{16^2 + 16\cdot 8|\xi|^2 + 16|\xi|^4} = \frac{|\xi|^4}{16 + 8|\xi|^2 + |\xi|^4}. \end{aligned}$$

Arvutame korrutise

$$\lambda^2(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\xi)} \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\xi}} = \frac{|\xi|^4}{16+8|\xi|^2+|\xi|^4}\left(-\frac{4}{\xi^2}\right)\left(-\frac{4}{(\bar{\xi})^2}\right)$$
$$= \frac{16|\xi|^4}{(|\xi|^2+4)^2|\xi|^4} = \frac{16}{(|\xi|^2+4)^2}$$

Sellega näitasime, et korrutis (17) on võrdne (16) ja meetrika teisenduse valem on täidetud. $\diamondsuit$

4 Weingarteni võrrandid

Antud paragrahvis uurime pinna lokaalset struktuuri diferentsiaalgeomeetria meetodite abil. Juhime tähelepanu sellele, et antud paragrahvis uurimisobjektiks on pind, see tähendab 2-mõõtmeline muutkond, mille mudelruumiks on vektorruum $\mathbb{R}^2$. Antud paragrahvis käsitletakse pinna tähtsamaid struktuure nagu täiskõverus ehk Gaussi kõverus, keskmine kõverus ja pinna põhivõrrandid.

Olgu $\mathbb{S}$ pind. Vaatleme pinda lokaalselt (see tähendab mingi punkti ümbruses). Olgu $\vec{N}$ pinna $\mathbb{S}$ ühiknormaalvektorväli, $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ pinna puutujavektorid.

Lemma 4.1. *Kehtib*

$$\langle\vec{N}, \vec{x}_{uu}\rangle = -\langle\vec{N}_u, \vec{x}_u\rangle, \quad \langle\vec{N}, \vec{x}_{uv}\rangle = -\langle\vec{N}_v, \vec{x}_u\rangle,$$
$$\langle\vec{N}, \vec{x}_{vu}\rangle = -\langle\vec{N}_u, \vec{x}_v\rangle, \quad \langle\vec{N}, \vec{x}_{vv}\rangle = -\langle\vec{N}_v, \vec{x}_v\rangle.$$

Tõestus. Võrdust $\langle\vec{N}, \vec{x}_u\rangle = 0$ diferentseerime u järgi. Saame

$$\langle\vec{N}_u, \vec{x}_u\rangle + \langle\vec{N}, \vec{x}_{uu}\rangle = 0$$

ehk $\langle\vec{N}, \vec{x}_{uu}\rangle = -\langle\vec{N}_u, \vec{x}_u\rangle$. Ülejäänud võrdused tõestatakse analoogiliselt. $\square$

Lause 4.2. (Weingarteni võrrandid) *Kehtib*

$$-\vec{N}_u = s_{11}\vec{x}_u + s_{21}\vec{x}_v, \ -\vec{N}_v = s_{12}\vec{x}_u + s_{22}\vec{x}_v,$$

kus $s_{11} = \dfrac{lG-mF}{EG-F^2}, s_{12} = \dfrac{mG-nF}{EG-F^2}, s_{21} = \dfrac{mE-lF}{EG-F^2}, s_{22} = \dfrac{nE-mF}{EG-F^2}.$

Tõestus. Kasutades eelmist lemmat, saame:

$$\begin{aligned} l =& \mathrm{II}(\vec{x}_u, \vec{x}_u) = \langle S(\vec{x}_u), \vec{x}_u\rangle = -\langle\vec{N}_u, \vec{x}_u\rangle = \langle\vec{N}, \vec{x}_{uu}\rangle, \\ m =& \mathrm{II}(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \langle S(\vec{x}_u), \vec{x}_v\rangle = -\langle\vec{N}_u, \vec{x}_v\rangle = -\langle\vec{x}_u, \vec{N}_v\rangle = \langle\vec{N}, \vec{x}_{uv}\rangle, \\ n =& \mathrm{II}(\vec{x}_v, \vec{x}_v) = \langle S(\vec{x}_v), \vec{x}_v\rangle = -\langle\vec{N}_v, \vec{x}_v\rangle = \langle\vec{N}, \vec{x}_{vv}\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Korrutades võrduse $-\vec{N}_u = s_{11}\vec{x}_u + s_{21}\vec{x}_v$ skalaarselt vektoritega $\vec{x}_u$ ja $\vec{x}_v$, saame

$$\begin{cases} s_{11}E + s_{21}F = l, \\ s_{11}F + s_{21}G = m, \end{cases}$$

millest leiame

$$s_{11} = \frac{lG - mF}{EG - F^2}, \;\; s_{21} = \frac{mE - lF}{EG - F^2}.$$

Analoogiliselt korrutame võrduse $-\vec{N}_v = s_{12}\vec{x}_u + s_{22}\vec{x}_v$ skalaarselt vektoritega $\vec{x}_u$ ja $\vec{x}_v$, siis

$$\begin{cases} s_{12}E + s_{22}F = m, \\ s_{12}F + s_{22}G = n, \end{cases}$$

millest

$$s_{12} = \frac{mG - nF}{EG - F^2}, \;\; s_{22} = \frac{nE - mF}{EG - F^2}.$$

□

Weingarteni operaatori maatriks baasis $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ on

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{lG - mF}{EG - F^2} & \dfrac{mG - nF}{EG - F^2} \\[2ex] \dfrac{mE - lF}{EG - F^2} & \dfrac{nE - mF}{EG - F^2} \end{pmatrix}$$

Pinna Gaussi kõverus on võrdne maatriksi S determinandiga, seega

$$\begin{aligned} K &= \frac{lnGE - lmGF - mnFE + (mF)^2 - m^2EG + mnEF + lmFG - lnF^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{lnGE + (mF)^2 - m^2EG - lnF^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{(ln - m^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Pinna keskmine kõverus on põhioperaatori maatriksi S jälg jagatud kahega, seega

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\; S = \frac{lG - mF + nE - mF}{2(EG - F^2)} = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}. \tag{19}$$

Pinda nimetatakse minimaalpinnaks, kui pinna keskmine kõverus igas punktis on võrdne nulliga, see tähendab $H = 0$. Maatriksi S saab esitada kahe maatriksi korrutisena

$$S = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II},$$

kus I on esimese fundamentaalvormi maatriks ja II on teise fundamentaalvormi maatriks. Maatriksid I ja II on kujul

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Arvutame avaldise $\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}$ väärtuse ja veendume, et see on võrdne maatriksiga S. Maatriksi I pöördmaatriks on

$$\mathrm{I}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Leiame korrutise $\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}$ väärtuse

$$\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} lG - mF & mG - nF \\ mE - lF & nE - mF \end{pmatrix} = S.$$

Lause 4.3. *Olgu $\mathbb{S}$ Riemanni pind konformse meetrikaga $g, p \in \mathbb{S}$ pinna mingi punkt. Olgu ζ Riemanni pinna lokaalne koordinaat punkti p ümbruses ja $g = \lambda^2 \; d\zeta d\bar{\zeta}$. Riemanni pinna Gaussi kõveruse jaoks kehtib valem*

$$K = -\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial \ln\lambda}{\partial\bar{\zeta}}\right)$$

või vastavates isotermilistes koordinaatides (u, v)

$$K = -\frac{\Delta \ln\lambda}{\lambda^2},$$

kus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Tõestus. Gaussi kõveruse ortogonaalsete koordinaatjoonte korral ($F = 0$) saab arvutada järgmise valemi järgi ([2], Corollary 22.4, p. 505)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right). \tag{20}$$

Teame, et isotermilise parametriseerimise korral kehtivad valemid

$$E = G = \lambda^2, \quad F = 0.$$

Seega valem (20) muutub järgmiseks:

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\lambda\lambda_u}{\lambda^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\lambda\lambda_v}{\lambda^2}\right)\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)\right)$$

Märkame, et

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}(\ln\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\ln\lambda),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}(\ln\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial v^2}(\ln\lambda).$$

Järelikult

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)(\ln\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta(\ln\lambda)$$

Näitame, et

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}.$$

Selleks kasutame võrduseid

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Saame

$$4\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{4}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = \Delta.$$

□

Näide 4.1. Leiame sfääri S^2 Gaussi kõveruse. Selleks kasutame näites (3.1) leitud avaldist

$$\lambda^2(\zeta) = \frac{16}{(|\zeta|^2+4)^2}.$$

avaldist. Arvutame välja Gaussi kõveruse

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\ln\lambda\right) = -\frac{4}{\frac{16}{(|\zeta|^2+4)^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\ln\left(\frac{4}{|\zeta|^2+4}\right)\right)\\
&= -\frac{(|\zeta|^2+4)^2}{4}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{1}{\frac{4}{|\zeta|^2+4}}\frac{4\zeta}{(|\zeta|^2+4)^2}\right) = \frac{(|\zeta|^2+4)^2}{4}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|^2+4}\right)\\
&= \frac{(|\zeta|^2+4)^2}{4}\frac{|\zeta|^2+4-\zeta\bar{\zeta}}{(|\zeta|^2+4)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Saime, et sfääri S^2 Gaussi kõverus on võrdne ühega. $\diamondsuit$

Nüüd vaatleme minimaalpinna kahte näidet.

Näide 4.2. Näitame, et helikoid on minimaalpind. Selleks arvutame välja helikoidi keskmise kõveruse H. Helikoidi võrrand on

$$\vec{x}(u,v) = (a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, av),$$

kus $a, b, u > 0, v \in \mathbb{R}$. Keskmise kõveruse arvutamiseks kasutame valemit (19)

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}.$$

Esiteks arvutame esimese fundamentaalvormi kordajad. Leiame kujutuse $\vec{x}(u,v)$ kõik esimest järku osatuletised

$$\vec{x}_u = (a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, 0), \quad \vec{x}_v = (-a\sinh u\sin v, a\sinh u\cos v, a).$$

Nüüd arvutame esimese fundamentaalvormi kordajad

$$\begin{aligned}
E &= \langle\vec{x}_u,\vec{x}_u\rangle = a^2\cosh^2 u\cos^2 v + a^2\cosh^2 u\sin^2 v = a^2\cosh^2 u,\\
F &= \langle\vec{x}_u,\vec{x}_v\rangle = -a^2\sinh u\cosh u\sin v\cos v + a^2\sinh u\cosh u\sin v\cos v = 0,\\
G &= \langle\vec{x}_v,\vec{x}_v\rangle = a^2\sinh^2 u\sin^2 v + a^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2 = a^2(\sinh^2 u + 1) = a^2\cosh^2 u.
\end{aligned}$$

Teiseks arvutame teise fundamentaalvormi kordajad. Selleks peame leidma normaalvektori

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u\times\vec{x}_v}{||\vec{x}_u\times\vec{x}_v||}.$$

Arvutame vektorkorrutise

$$\vec{x}_u\times\vec{x}_v = (a^2\cosh u\sin v, -a^2\cosh u\cos v, a^2\sinh u\cosh u)$$

ja vektori $\vec{x}_u\times\vec{x}_v$ pikkuse

$$||\vec{x}_u\times\vec{x}_v|| = \sqrt{a^4\cosh^2 u\sin^2 v + a^4\cosh^2 u\cos^2 v + a^4\sinh^2 u\cosh^2 u} = a^2\cosh^2 u.$$

Saime, et normaalvektori kuju on

$$\vec{N} = \left(\frac{a^2\cosh u\sin v}{a^2\cosh^2 u}, -\frac{a^2\cosh u\cos v}{a^2\cosh^2 u}, \frac{a^2\sinh u\cosh u}{a^2\cosh^2 u}\right).$$

Leiame kujutuse $\vec{x}(u,v)$ kõik teist järku osatuletised

$$\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= (a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, 0),\\ \vec{x}_{uv} &= (-a\cosh u\sin v, a\cosh u\cos v, 0),\\ \vec{x}_{vv} &= (-a\sinh u\cos v, -a\sinh u\sin v, 0).\end{aligned}$$

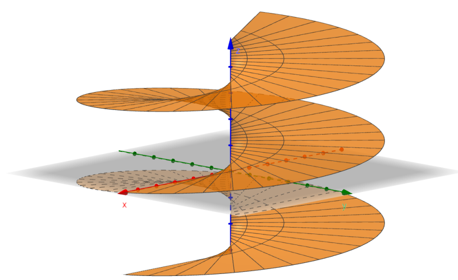
Nüüd arvutame teise fundamentaalvormi kordajad

$$\begin{aligned}l = \langle\vec{N}, \vec{x}_{uu}\rangle &= \frac{a^3\sinh u\cosh u\sin v\cos v - a^3\sinh u\cosh u\sin v\cos v}{a^2\cosh^2 u} = 0,\\ m = \langle\vec{N}, \vec{x}_{uv}\rangle &= \frac{-a^3\cosh^2 u\sin^2 v - a^3\cosh^2 u\cos^2 v}{a^2\cosh^2 u} = \frac{-a^3\cosh^2 u}{a^2\cosh^2 u} = -a,\\ n = \langle\vec{N}, \vec{x}_{vv}\rangle &= \frac{-a^3\sinh u\cosh u\sin v\cos v + a^3\sinh u\cosh u\sin v\cos v}{a^2\cosh^2 u} = 0.\end{aligned}$$

Järelikult helikoidi keskmine kõverus on

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Joonisel (5) on näha helikoidi kuju.



Joonis 5: Helikoid

Sellega esimene näide lõpeb. $\diamondsuit$

Näide 4.3. Näitame, et katenoid on minimaalpind. Katenoidi võrrand on

$$\vec{x}(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u).$$

Arvutused viime läbi analoogiliselt eelmise näitega (4.2). Leiame esimese fundamentaalvormi kordajad. Selleks arvutame kujutuse $\vec{x}(u,v)$ esimest ja teist järku osatuletised

$$\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, 0), & \vec{x}_u &= (\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, 1),\\ \vec{x}_{uv} &= (-\sinh u\sin v, \sinh u\cos v, 0), & \vec{x}_v &= (-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0),\\ \vec{x}_{vv} &= (-\cosh u\cos v, -\cosh u\sin v, 0).\end{aligned}$$

Esimese fundamentaalvormi kordajad on

$$\begin{aligned}E &= \sinh^2 u\cos^2 v + \sinh^2 u\sin^2 v + 1 = \cosh^2 u,\\ F &= -\sinh u\cosh u\sin v\cos v + \sinh u\cosh u\sin v\cos v = 0,\\ G &= \cosh^2 u\sin^2 v + \cosh^2 u\cos^2 v = \cosh^2 u.\end{aligned}$$

Leiame normaalvektori $\vec{N}$. Selleks arvutame vektorkorrutise $\vec{x}_u \times \vec{x}_v$ ja selle pikkuse

$$\begin{aligned}
\vec{x}_u \times \vec{x}_v &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u),\\
||\vec{x}_u \times \vec{x}_v|| &= \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cosh^2 u}\\
&= \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u \cosh^2 u} = \sqrt{\cosh^2 u(1+\sinh^2 u)}\\
&= \sqrt{\cosh^4 u} = \cosh^2 u.
\end{aligned}$$

Seega normaalvektor on kujul

$$\vec{N} = \left(-\frac{\cosh u \cos v}{\cosh^2 u}, -\frac{\cosh u \sin v}{\cosh^2 u}, \frac{\sinh u \cosh u}{\cosh^2 u}\right) = \left(-\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u}\right).$$

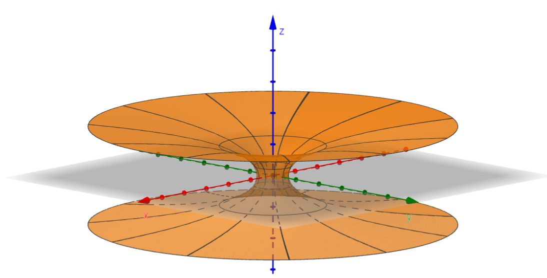
Leiame teise fundamentaalvormi kordajad

$$\begin{aligned}
l &= -\frac{\cosh u \cos^2 v}{\cosh u} - \frac{\cosh u \sin^2 v}{\cosh u} = -\cos^2 v - \sin^2 v = -1,\\
m &= \frac{\sinh u \sin v \cos v}{\cosh u} - \frac{\sinh u \sin v \cos v}{\cosh u} = 0,\\
n &= \frac{\cosh u \cos^2 v}{\cosh u} + \frac{\cosh u \sin^2 v}{\cosh u} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.
\end{aligned}$$

Järelikult keskmine kõverus on

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} = \frac{-\cosh^2 u + \cosh^2 u}{2\cosh^4 u} = 0.$$

Joonisel (6) on näha katenoidi kuju.



Joonis 6: Katenoid

Sellega lõpeb teine näide. $\diamondsuit$

5 Gaussi võrrandid

Pinnateoorias on tähtis roll võrranditel, mis näitavad, kuidas puutujavektorid $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ ja pinna normaalvektor $\vec{N}$ avalduvad samade vektorite kaudu. Neid võrrandeid nimetatakse Gaussi võrranditeks. Antud paragrahvis tuletame Gaussi võrrandeid Riemanni pinna jaoks.

Olgu $\mathbb{S}$ pind võrrandiga $F(x,y,z)=c$ ja $\vec{N}$ pinna $\mathbb{S}$ ühiknormaalvektorväli. Eeldame, et $\mathbb{S}$ on Riemanni pind konformse meetrikaga g. Olgu

$$\vec{r}\colon \zeta\in U\subset\mathbb{C}\to\vec{r}(\zeta)\in\mathbb{S},$$

pinna lokaalne parametriseerimine komplekse koordinaadiga ζ. Hulga U kujutist pinnal $\mathbb{S}$ tähistame $V=\vec{r}(U)\subset\mathbb{S}$. Pinna osa V igas punktis $p\in V$ on määratud kolm vektorit $\{\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\bar\zeta},\vec{N}\}$. Neid nimetatakse pinna liikuvaks reeperiks. Tähistame $R=(\vec{r}_\zeta\ \vec{r}_{\bar\zeta}\ \vec{N})^T$. Kehtivad valemid

$$\langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_\zeta\rangle=0,\ \langle\vec{r}_{\bar\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=0,\ \langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2,\ \langle\vec{r}_\zeta,\vec{N}\rangle=0,\ \langle\vec{r}_{\bar\zeta},\vec{N}\rangle=0,\ \langle\vec{N},\vec{N}\rangle=1.$$

Meie eesmärk on leida kordajad valemites

$$\begin{cases}\vec{r}_{\zeta\zeta} &=\alpha_1\vec{r}_\zeta+\beta_1\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_1\vec{N}\\ \vec{r}_{\bar\zeta\zeta} &=\alpha_2\vec{r}_\zeta+\beta_2\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_2\vec{N}\\ \vec{N}_\zeta &=\alpha_3\vec{r}_\zeta+\beta_3\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_3\vec{N}\end{cases}\tag{21}$$

$$\begin{cases}\vec{r}_{\zeta\bar\zeta} &=\alpha_4\vec{r}_\zeta+\beta_4\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_4\vec{N}\\ \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta} &=\alpha_5\vec{r}_\zeta+\beta_5\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_5\vec{N}\\ \vec{N}_{\bar\zeta} &=\alpha_6\vec{r}_\zeta+\beta_6\vec{r}_{\bar\zeta}+\gamma_6\vec{N}\end{cases}\tag{22}$$

Moodustame maatriksid

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\ \alpha_2&\beta_2&\gamma_2\\ \alpha_3&\beta_3&\gamma_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha_4&\beta_4&\gamma_4\\ \alpha_5&\beta_5&\gamma_5\\ \alpha_6&\beta_6&\gamma_6\end{pmatrix}$$

Võrrandid (21), (22) kirjutame maatrikskujul

$$R'_\zeta=AR,\quad R'_{\bar\zeta}=BR.$$

Lemma 5.1. *Kehtivad valemid*

$$\begin{array}{ll}\langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{r}_\zeta\rangle=0, & \langle\vec{r}_{\zeta\bar\zeta},\vec{r}_\zeta\rangle=0,\\ \langle\vec{r}_{\bar\zeta\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=0, & \langle\vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=0,\\ \langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=\lambda\lambda_\zeta, & \langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}\rangle=\lambda\lambda_{\bar\zeta},\\ \langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{N}\rangle=-\langle\vec{r}_\zeta,\vec{N}_\zeta\rangle, & \langle\vec{r}_{\zeta\bar\zeta},\vec{N}\rangle=-\langle\vec{r}_\zeta,\vec{N}_{\bar\zeta}\rangle,\\ \langle\vec{r}_{\bar\zeta\zeta},\vec{N}\rangle=-\langle\vec{r}_{\bar\zeta},\vec{N}_\zeta\rangle, & \langle\vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta},\vec{N}\rangle=-\langle\vec{r}_{\bar\zeta},\vec{N}_{\bar\zeta}\rangle.\\ \langle\vec{N}_\zeta,\vec{N}\rangle=0, & \langle\vec{N}_{\bar\zeta},\vec{N}\rangle=0.\end{array}$$

Tõestus. Võrdust $\langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_\zeta\rangle=0$ diferentseerime ζ järgi. Saame

$$\langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{r}_\zeta\rangle+\langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\zeta\zeta}\rangle=0$$

ehk $\langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{r}_\zeta\rangle=0$. Võrdused $\langle\vec{r}_{\zeta\bar\zeta},\vec{r}_\zeta\rangle=0$, $\langle\vec{r}_{\bar\zeta\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=0$, $\langle\vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=0$ tõestatakse analoogiliselt. Võrdust $\langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2$ diferentseerime ζ järgi. Saame

$$\langle\vec{r}_{\zeta\zeta},\vec{r}_{\bar\zeta}\rangle+\langle\vec{r}_\zeta,\vec{r}_{\bar\zeta\zeta}\rangle=\lambda\lambda_\zeta.$$

Kasutame võrdust $\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle = 0$. Saame, et kehtib $\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \lambda\lambda_\zeta$. Teine võrdus $\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \rangle = \lambda\lambda_{\bar{\zeta}}$ tõestatakse analoogiliselt. Võrdust $\langle \vec{r}_\zeta, \vec{N} \rangle = 0$ diferentseerime ζ järgi. Saame

$$\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle + \langle \vec{r}_\zeta, \vec{N}_\zeta \rangle = 0$$

ehk $\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{r}_\zeta, \vec{N}_\zeta \rangle$. Võrdused $\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{r}_\zeta, \vec{N}_{\bar{\zeta}} \rangle$, $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{N}_\zeta \rangle$, $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{N}_{\bar{\zeta}} \rangle$ tõestatakse analoogiliselt. Võrdust $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$ diferentseerime ζ järgi. Saame

$$\langle \vec{N}_\zeta, \vec{N} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{N}_\zeta \rangle = 0$$

ehk $\langle \vec{N}_\zeta, \vec{N} \rangle = 0$. Võrdus $\langle \vec{N}_{\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle = 0$ tõestatakse analoogiliselt. □

Teoreem 5.2. *Maatriksid A ja B võrrandites (21), (22) on järgmise kujuga*

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda_\zeta}{\lambda} & 0 & \langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle \\ \dfrac{-2\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & \dfrac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle \\ 0 & \dfrac{2\lambda_{\bar{\zeta}}}{\lambda} & \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle \\ \dfrac{-2\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & \dfrac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tõestus. Kasutades eelmist lemmat (5.1) leiame kordajad valemites (21), (22) ehk maatriksite A ja B elemendid. Esimest võrdust $\vec{r}_{\zeta\zeta} = \alpha_1 \vec{r}_\zeta + \beta_1 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_1 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_1 \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_1 = \frac{\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Esimest võrdust $\vec{r}_{\zeta\zeta} = \alpha_1 \vec{r}_\zeta + \gamma_1 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar{\zeta}}$. Seega saame $\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle} = \frac{\lambda\lambda_\zeta}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2\lambda_\zeta}{\lambda}.$$

Esimest võrdust $\vec{r}_{\zeta\zeta} = \alpha_1 \vec{r}_\zeta + \gamma_1 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_1 = \langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle.$$

Teist võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta} = \alpha_2 \vec{r}_\zeta + \beta_2 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_2 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_2 \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_2 = \frac{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Nüüd teist võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta} = \alpha_2 \vec{r}_\zeta + \gamma_2 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar{\zeta}}$. Saame $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \alpha_2 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Teist võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta} = \gamma_2 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_2 = \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle.$$

Kolmandat võrdust $\vec{N}_\zeta = \alpha_3 \vec{r}_\zeta + \beta_3 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_3 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{N}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_3 \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_3 = \frac{\langle \vec{N}_\zeta, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{-\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2}.$$

Kolmandat võrdust $\vec{N}_\zeta = \alpha_3 \vec{r}_\zeta + \beta_3 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_3 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar{\zeta}}$. Saame $\langle \vec{N}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \alpha_3 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_3 = \frac{\langle \vec{N}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle} = \frac{-\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{-2\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2}.$$

Kolmandat võrdust $\vec{N}_\zeta = \alpha_3 \vec{r}_\zeta + \beta_3 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_3 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_3 = \langle \vec{N}_\zeta, \vec{N} \rangle = 0.$$

Neljandat võrdust $\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}} = \alpha_4 \vec{r}_\zeta + \beta_4 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_4 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_4 \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_4 = \frac{\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Neljandat võrdust $\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}} = \alpha_4 \vec{r}_\zeta + \gamma_4 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar{\zeta}}$. Seega saame $\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \alpha_4 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_4 = \frac{\langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Neljandat võrdust $\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}} = \gamma_4 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_4 = \langle \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle.$$

Viiendat võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} = \alpha_5 \vec{r}_\zeta + \beta_5 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_5 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_5 \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_5 = \frac{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{\lambda \lambda_{\bar{\zeta}}}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2\lambda_{\bar{\zeta}}}{\lambda}.$$

Viiendat võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} = \alpha_5 \vec{r}_\zeta + \beta_5 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_5 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar{\zeta}}$. Saame $\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle = \alpha_5 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_5 = \frac{\langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar{\zeta}} \rangle} = \frac{0}{\frac{1}{2}\lambda^2} = 0.$$

Viiendat võrdust $\vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} = \beta_5 \vec{r}_{\bar{\zeta}} + \gamma_5 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_5 = \langle \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \vec{N} \rangle.$$

Kuuendat võrdust $\vec{N}_{\bar\zeta} = \alpha_6 \vec{r}_\zeta + \beta_6 \vec{r}_{\bar\zeta} + \gamma_6 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_\zeta$. Saame $\langle \vec{N}_{\bar\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle = \beta_6 \langle \vec{r}_{\bar\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle$, millest järeldub

$$\beta_6 = \frac{\langle \vec{N}_{\bar\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle}{\langle \vec{r}_{\bar\zeta}, \vec{r}_\zeta \rangle} = \frac{-\langle \vec{r}_{\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2}.$$

Kuuendat võrdust $\vec{N}_{\bar\zeta} = \alpha_6 \vec{r}_\zeta + \beta_6 \vec{r}_{\bar\zeta} + \gamma_6 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{r}_{\bar\zeta}$. Saame $\langle \vec{N}_{\bar\zeta}, \vec{r}_{\bar\zeta} \rangle = \alpha_6 \langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar\zeta} \rangle$, millest järeldub

$$\alpha_6 = \frac{\langle \vec{N}_{\bar\zeta}, \vec{r}_{\bar\zeta} \rangle}{\langle \vec{r}_\zeta, \vec{r}_{\bar\zeta} \rangle} = \frac{-\langle \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{-2\langle \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2}.$$

Kuuendat võrdust $\vec{N}_{\bar\zeta} = \alpha_6 \vec{r}_\zeta + \beta_6 \vec{r}_{\bar\zeta} + \gamma_6 \vec{N}$ korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{N}$. Saame

$$\gamma_6 = \langle \vec{N}_{\bar\zeta}, \vec{N} \rangle = 0.$$

Seega saime jägmised maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_\zeta}{\lambda} & 0 & \langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \vec{r}_{\bar\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle \\ \frac{-2\langle \vec{r}_{\bar\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & \frac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle \vec{r}_{\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle \\ 0 & \frac{2\lambda_{\bar\zeta}}{\lambda} & \langle \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle \\ \frac{-2\langle \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & \frac{-2\langle \vec{r}_{\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Tähistame $Q_{\zeta\zeta} = \langle \vec{r}_{\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle$, $Q_{\zeta\bar\zeta} = \langle \vec{r}_{\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle$, $Q_{\bar\zeta\zeta} = \langle \vec{r}_{\bar\zeta\zeta}, \vec{N} \rangle$, $Q_{\bar\zeta\bar\zeta} = \langle \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta}, \vec{N} \rangle$. Kasutades teoreemis (5.2) leitud maatrikseid A ja B, näeme, et võrrandite $R'_\zeta = AR, R'_{\bar\zeta} = BR$ kuju on järgmine:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_{\zeta\zeta} \\ \vec{r}_{\bar\zeta\zeta} \\ \vec{N}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_\zeta}{\lambda} & 0 & Q_{\zeta\zeta} \\ 0 & 0 & Q_{\bar\zeta\zeta} \\ \frac{-2Q_{\bar\zeta\zeta}}{\lambda^2} & \frac{-2Q_{\zeta\zeta}}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_\zeta \\ \vec{r}_{\bar\zeta} \\ \vec{N} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_{\zeta\bar\zeta} \\ \vec{r}_{\bar\zeta\bar\zeta} \\ \vec{N}_{\bar\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_{\zeta\bar\zeta} \\ 0 & \frac{2\lambda_{\bar\zeta}}{\lambda} & Q_{\bar\zeta\bar\zeta} \\ \frac{-2Q_{\bar\zeta\bar\zeta}}{\lambda^2} & \frac{-2Q_{\zeta\bar\zeta}}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_\zeta \\ \vec{r}_{\bar\zeta} \\ \vec{N} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Võrrandeid (23), (24) nimetatakse pinna Gaussi võrranditeks.

Kirjutame kompleksarvud $\zeta, \bar\zeta$ kujul $\zeta = u + iv, \bar\zeta = u - iv$, kus $u, v \in \mathbb{R}$. Seega $\vec{r}(\zeta, \bar\zeta) = \vec{r}(\zeta(u,v), \bar\zeta(u,v))$. Et leida teise fundamentaalvormi maatriks II, kasutame valemeid $l = \langle \vec{N}, \vec{r}_{uu} \rangle, m = \langle \vec{N}, \vec{r}_{uv} \rangle, n = \langle \vec{N}, \vec{r}_{vv} \rangle$, mida oleme enne leidnud (18). Selleks leiame esialgu $\vec{r}$ tuletised u ja v järgi

$$\vec{r}_u = \vec{r}_\zeta \zeta_u + \vec{r}_{\bar\zeta} \bar\zeta_u = \vec{r}_\zeta + \vec{r}_{\bar\zeta}, \quad \vec{r}_v = \vec{r}_\zeta \zeta_v + \vec{r}_{\bar\zeta} \bar\zeta_v = i\vec{r}_\zeta - i\vec{r}_{\bar\zeta}.$$

Nüüd leiame $\vec{r}$ teist järku osatuletised

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}_\zeta + \vec{r}_{\bar{\zeta}}) = \vec{r}_{\zeta\zeta}\zeta_u + \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_u + \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}\zeta_u + \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_u = \vec{r}_{\zeta\zeta} + 2\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}} + \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}},\\
\vec{r}_{uv} &= \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}_\zeta + \vec{r}_{\bar{\zeta}}) = \vec{r}_{\zeta\zeta}\zeta_v + \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_v + \vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}\zeta_v + \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_v = i\vec{r}_{\zeta\zeta} - i\vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}},\\
\vec{r}_{vv} &= \frac{\partial}{\partial v}(i\vec{r}_\zeta - i\vec{r}_{\bar{\zeta}}) = i\vec{r}_{\zeta\zeta}\zeta_v + i\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_v - i\vec{r}_{\bar{\zeta}\zeta}\zeta_v - i\vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_v = -\vec{r}_{\zeta\zeta} + 2\vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}} - \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}.
\end{aligned}$$

Leiame maatriksi II elemendid

$$\begin{aligned}
l &= \langle \vec{N}, \vec{r}_{uu}\rangle = \langle \vec{N}, \vec{r}_{\zeta\zeta}\rangle + 2\langle \vec{N}, \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}\rangle + \langle \vec{N}, \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\rangle = Q_{\zeta\zeta} + 2Q_{\zeta\bar{\zeta}} + Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}},\\
m &= \langle \vec{N}, \vec{r}_{uv}\rangle = i\langle \vec{N}, \vec{r}_{\zeta\zeta}\rangle - i\langle \vec{N}, \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\rangle = iQ_{\zeta\zeta} - iQ_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}},\\
n &= \langle \vec{N}, \vec{r}_{vv}\rangle = -\langle \vec{N}, \vec{r}_{\zeta\zeta}\rangle + 2\langle \vec{N}, \vec{r}_{\zeta\bar{\zeta}}\rangle - \langle \vec{N}, \vec{r}_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}\rangle = -Q_{\zeta\zeta} + 2Q_{\zeta\bar{\zeta}} - Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}.
\end{aligned}$$

Saime maatriksi II kujul

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\zeta\zeta} + 2Q_{\zeta\bar{\zeta}} + Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} & i(Q_{\zeta\zeta} - Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}) \\ i(Q_{\zeta\zeta} - Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}) & -Q_{\zeta\zeta} + 2Q_{\zeta\bar{\zeta}} - Q_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \end{pmatrix}.$$

6 Harmooniline pind

Teises peatükkis oli selgitatud harmoonilise funktsiooni mõiste (3). Antud paragrahvis vaatame üldisemat definitsiooni. Olgu $U \subset \mathbb{R}^2$ lahtine hulk. Olgu $\vec{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ parametriseeritud pind.

Definitsioon 6.1. Pinda $\vec{x}$ nimetatakse harmooniliseks pinnaks, kui kehtib võrdus $\Delta\vec{x} = \vec{0}$ ehk $\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$.

Kui $\vec{y}\colon U \to \mathbb{R}^3$ on teine parametriseeritud pind ja kehtivad võrdused $\vec{x}_u = \vec{y}_v$, $\vec{x}_v = -\vec{y}_u$, siis ütleme, et parametriseeritud pinnad rahuldavad Cauchy-Riemann'i tingimusi. On lihtne veenduda, et kui parameetriseeritud pinnad $\vec{x}, \vec{y}$ rahuldavat Cauchy-Riemann'i tingimusi, siis pinnad $\vec{x}, \vec{y}$ on harmoonilised parameetriseeritud pinnad, see tähendab $\Delta\vec{x} = \Delta\vec{y} = \vec{0}$. Seoses sellega, et Cauchy-Riemann'i tingimusi rahuldatavad pinnad $\vec{x}, \vec{y}$ on harmoonilised, nimetame järgnevas neid kaasharmoonilisteks parametriseeritud pindadeks.

Teoreem 6.1. *Isotermiline parametriseeritud pind $\vec{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ on minimaalpind parajasti siis, kui pind $\vec{x}$ on harmooniline.*

Tõestus. Olgu $\vec{x}$ isotermiline parametriseeritud pind. Teame, et isotermilise pinna korral kehtivad võrdused: $E = G = \lambda^2,\ F = 0$. Kasutades keskmise kõveruse valemit (19) ja isotermilise pinna tingimusi, saame

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} = \frac{\lambda^2(l+n)}{2\lambda^4} = \frac{l+n}{\lambda^2}.$$

Tuletame meelde, et $l = \langle \vec{x}_{uu}, \vec{N}\rangle,\ n = \langle \vec{x}_{vv}, \vec{N}\rangle$. Seega kehtib

$$H = \frac{\langle \vec{x}_{uu}, \vec{N}\rangle + \langle \vec{x}_{vv}, \vec{N}\rangle}{2\lambda^2} = \frac{\langle \vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}, \vec{N}\rangle}{2\lambda^2} = \frac{\langle \Delta\vec{x}, \vec{N}\rangle}{2\lambda^2}. \tag{25}$$

Olgu $\vec{x}$ harmooniline parametriseeritud pind. Siis $\Delta\vec{x} = \vec{0}$ ja valemist (25) saame, et kehtib $H = 0$ ehk $\vec{x}$ on minimaalpind.

Nüüd eeldame, et $\vec{x}$ on minimaalpind ehk $H = 0$. Peame näitama, et $\Delta\vec{x} = \vec{0}$. Valemist (25) järeldub $\langle \Delta\vec{x}, \vec{N}\rangle = 0$ ehk $\Delta\vec{x} \perp \vec{N}$. Kuna $\vec{N}$ on pinna normaalvektor, siis $\Delta\vec{x}$ on pinna puutujavektor ja teda saab avaldada puutujatasandi baasvektorite kaudu kujul

$$\Delta\vec{x} = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v, \tag{26}$$

kus a, b on mingid arvud. Diferentseerime võrdust $\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u\rangle = \lambda^2$ u ja v järgi:

$$2\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u\rangle = 2\lambda\lambda_u, \quad 2\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_u\rangle = 2\lambda\lambda_v.$$

Diferentseerime võrdust $\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v\rangle = \lambda^2$ u ja v järgi:

$$2\langle \vec{x}_{vu}, \vec{x}_v\rangle = 2\lambda\lambda_u, \quad 2\langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v\rangle = 2\lambda\lambda_v.$$

Saadud valemitest järeldub, et

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u\rangle = \langle \vec{x}_{vu}, \vec{x}_v\rangle, \quad \langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_u\rangle = \langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v\rangle. \tag{27}$$

Diferentseerime võrdust $\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle = 0$ u ja v järgi:

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v\rangle + \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vu}\rangle = 0, \quad \langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v\rangle + \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv}\rangle = 0.$$

Nüüd valemid (27) muutuvad järgmisteks:

$$-\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v\rangle = \langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v\rangle, \quad -\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv}\rangle = \langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u\rangle$$

ehk

$$\langle \vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}, \vec{x}_u\rangle = 0, \quad \langle \vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v\rangle = 0.$$

Järelikult saime, et samal ajal kehtivad väited $\Delta\vec{x} \perp \vec{x}_u$, $\Delta\vec{x} \perp \vec{x}_v$, $\Delta\vec{x} \perp \vec{N}$. Korrutame võrdust (26) skalaarselt vektoriga $\vec{x}_u$ saame $\langle \Delta\vec{x}, \vec{x}_u\rangle = aE$ ehk $aE = a\lambda^2 = 0$, seega $a = 0$. Analoogiliselt korrutame võrdust (26) skalaarselt vektoriga $\vec{x}_v$ saame $\langle \Delta\vec{x}, \vec{x}_v\rangle = bG$ ehk $bG = b\lambda^2 = 0$, seega $b = 0$. Tulemuseks saime, et kehtib $\Delta\vec{x} = \vec{0}$ ja pind $\vec{x}$ on harmooniline parametriseeritud pind. □

Edaspidi hakkame isotermiliseks minimaalpinnaks nimetama harmoonilist isotermilist pinda. Seega pind $\vec{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ on isotermiline minimaalpind, kui ta rahuldab tingimusi $E = G = \lambda^2,\ F = 0,\ \Delta\vec{x} = \vec{0}$.

Olgu $\vec{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\vec{y}\colon U \to \mathbb{R}^3$ kaasharmoonilised isotermilised minimaalpinnad. Defineerime pindade üheparameetrilist peret valemiga

$$\vec{z}_{[t]} = \cos t\ \vec{x} + \sin t\ \vec{y} = \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x} + i\vec{y})),$$

kus $\vec{z}_{[t]}$ nimetatakse kahe kaasharmoonilise isotermilise minimaalpinnaga $\vec{x}, \vec{y}$ assotsieeritud pindade pereks. Edaspidi nimetame $\vec{z}_{[t]}$ pindadega $\vec{x}, \vec{y}$ assotsieeritud pereks. Veendume, et võrdus $\cos t\ \vec{x} + \sin t\ \vec{y} = \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x} + i\vec{y}))$ kehtib. Tõepoolest

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x} + i\vec{y})) = \mathrm{Re}((\cos t - i\sin t)(\vec{x} + i\vec{y}))\\ &= \mathrm{Re}(\cos t\ \vec{x} + \sin t\ \vec{y} + i(\cos t\ \vec{y} - \sin t\ \vec{x})) = \cos t\ \vec{x} + \sin t\ \vec{y}.\end{aligned}$$

Lause 6.2. *Pinnad $\vec{z}_{[t]}, \vec{z}_{[t+\frac{\pi}{2}]}$ on kaasharmoonilised.*

Tõestus. Näitame, et $\vec{z}_{[t]}, \vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right]}$ rahuldavad Cauchy-Riemann'i tingimusi ehk kehtivad $\vec{z}_{[t],u} = \vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right],v}$ ja $\vec{z}_{[t],v} = -\vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right],u}$. Veendume, et kehtib esimene võrdus

$$\begin{aligned}
\vec{z}_{[t],u} &= \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x}_u + i\vec{y}_u)) = \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{y}_v - i\vec{x}_v)),\\
\vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right],v} &= \mathrm{Re}(e^{-i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}(\vec{x}_v + i\vec{y}_v)) = \mathrm{Re}(-ie^{-it}(\vec{x}_v + i\vec{y}_v)) \qquad (28)\\
&= \mathrm{Re}(e^{-it}(-i\vec{x}_v + \vec{y}_v)),
\end{aligned}$$

kus real (28) kasutasime lihtsustust

$$e^{-i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-it}e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-it}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = -ie^{-it}.$$

Näitame, et kehtib $\vec{z}_{[t],v} = -\vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right],u}$

$$\begin{aligned}
\vec{z}_{[t],v} &= \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x}_v + i\vec{y}_v)) = \mathrm{Re}(e^{-it}(-\vec{y}_u + i\vec{x}_u)),\\
\vec{z}_{\left[t+\frac{\pi}{2}\right],u} &= \mathrm{Re}(e^{-i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}(\vec{x}_u + i\vec{y}_u)) = \mathrm{Re}(-ie^{-it}(\vec{x}_u + i\vec{y}_u))\\
&= -\mathrm{Re}(e^{-it}(i\vec{x}_u - \vec{y}_u)).
\end{aligned}$$

□

Lause 6.3. *Pind $\vec{z}_{[t]}$ iga t väärtuse korral on isotermiline pind.*

Tõestus. Tuletame meelde, et $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kaasharmoonilised isotermilised pinnad. Seega kehtivad $\langle\vec{x}_u, \vec{x}_u\rangle = \langle\vec{x}_v, \vec{x}_v\rangle = \lambda^2$, $\langle\vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle = 0$, $\vec{x}_u = \vec{y}_v$, $\vec{x}_v = -\vec{y}_u$. Leiame $\vec{z}_{[t]}$ esimese fundamentaalvormi kordajad

$$\begin{aligned}
E(t) &= \langle\vec{z}_{[t],u}, \vec{z}_{[t],u}\rangle = \langle\cos t\,\vec{x}_u + \sin t\,\vec{y}_u, \cos t\,\vec{x}_u + \sin t\,\vec{y}_u\rangle\\
&= \cos^2 t\,||\vec{x}_u||^2 + \sin^2 t\,||\vec{y}_u||^2 + 2\cos t\sin t\langle\vec{x}_u, \vec{y}_u\rangle\\
&= \cos^2 t\,||\vec{x}_u||^2 + \sin^2 t\,||\vec{x}_v||^2 - 2\cos t\sin t\langle\vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle = \lambda^2,\\
G(t) &= \langle\vec{z}_{[t],v}, \vec{z}_{[t],v}\rangle = \langle\cos t\,\vec{x}_v + \sin t\,\vec{y}_v, \cos t\,\vec{x}_v + \sin t\,\vec{y}_v\rangle\\
&= \cos^2 t\,||\vec{x}_v||^2 + \sin^2 t\,||\vec{y}_v||^2 + 2\cos t\sin t\langle\vec{x}_v, \vec{y}_v\rangle\\
&= \cos^2 t\,||\vec{x}_v||^2 + \sin^2 t\,||\vec{x}_u||^2 + 2\cos t\sin t\langle\vec{x}_v, \vec{x}_u\rangle = \lambda^2,\\
F(t) &= \langle\vec{z}_{[t],u}, \vec{z}_{[t],v}\rangle = \langle\cos t\,\vec{x}_u + \sin t\,\vec{y}_u, \cos t\,\vec{x}_v + \sin t\,\vec{y}_v\rangle\\
&= \cos^2 t\langle\vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle + \sin^2 t\langle\vec{y}_u, \vec{y}_v\rangle + \cos t\sin t\langle\vec{x}_u, \vec{y}_v\rangle + \cos t\sin t\langle\vec{x}_v, \vec{y}_u\rangle\\
&= 0 + 0 + \lambda^2\cos t\sin t - \lambda^2\cos t\sin t = 0.
\end{aligned}$$

□

Saime näidatud, et E, F, G ei sõltu t väärtusest. Järelikult kõik pere $\vec{z}_{[t]}$ pinnad omavad sama esimese fundamentaalvormi kuju $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$.

Olgu $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ kaks pinda. Siledat kujutust $\psi\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ nimetatakse isomeetriaks, kui ψ on bijektsioon ja iga puutujavektori $\vec{v}$ pinnal $\mathbb{S}_1$ korral kehtib $||\psi_*(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$, kus $(\psi_*)_p\colon T_p\mathbb{S}_1 \to T_p\mathbb{S}_2$ on kujutuse ψ diferentsiaal [5]. Kuna kõik pere $\vec{z}_{[t]}$ pinnad omavad sama esimese fundamentaalvormi kuju, siis $\vec{z}_{[t]}$ nimetatakse pinna isotermiliseks deformatsiooniks.

Lause 6.4. *Iga t väärtuse korral $\vec{z}_{[t]}$ on harmooniline pind.*

Tõestus. Leiame $\Delta\vec{z}_{[t]}$ väärtuse:

$$\Delta\vec{z}_{[t]} = \vec{z}_{[t],uu} + \vec{z}_{[t],vv} = \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} + i(\vec{y}_{uu} + \vec{y}_{vv}))) = \mathrm{Re}(e^{-it}(\vec{0} + \vec{0}i)) = \vec{0}.$$

□

Oleme näidanud, et suvalise t korral $\vec{z}_{[t]}$ on isotermiline harmooniline pind ehk minimaalpind.

Näitame, kuidas saab avaldada ühe isotermilise harmoonilise pinna teise kaudu nii, et mõlemad pinnad oleksid kaasharmoonilised. Olgu $U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ lahtine alamhulk ja $h(u,v)\colon U \to \mathbb{R}$ harmooniline funktsioon ehk kehtib $\Delta h = h_{uu} + h_{vv} = 0$. Olgu $z_0 = u_0 + iv_0 \in U$ ja $f(z)\colon U \to \mathbb{C}$ selline, et $\mathrm{Re}\, f(u+iv) = h(u,v)$, $\mathrm{Im}\, f(z_0) = 0$. Avaldame funktsiooni f funktsiooni h kaudu. Märkame, et kehtib

$$h(u,v) = \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)})\Big|_{z=u+iv} = \frac{1}{2}(f(u+iv)+\overline{f(u+iv)}) = \frac{1}{2}(f(u+iv)+\overline{f(\overline{u-iv})}).$$

Teeme asenduse $u = \dfrac{z+\bar{z}_0}{2}$, $v = \dfrac{z-\bar{z}_0}{2i}$, siis

$$u+iv = \frac{z+\bar{z}_0}{2} + i\frac{z-\bar{z}_0}{2i} = \frac{2z}{2} = z,$$
$$u-iv = \frac{z+\bar{z}_0}{2} - i\frac{z-\bar{z}_0}{2i} = \frac{2\bar{z}_0}{2} = \bar{z}_0.$$

Seega

$$h\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\overline{\overline{z_0}})}) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z_0)}).$$

Saime, et kehtib

$$f(z) = 2h\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)} = 2h\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - h(u_0,v_0). \tag{29}$$

Mainime, et kui $z_0 = 0$, siis

$$f(z) = 2h\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - h(0,0). \tag{30}$$

Olgu antud $\vec{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ ja $\vec{y}\colon U \to \mathbb{R}^3$ isotermilised kaasharmoonilised pinnad. Vektorite komponendid tähistame järgmiselt: $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$. Nende kompleksifitseerimine on avaldis $\vec{x} + i\vec{y}\colon U \to \mathbb{C}^3$, mida tähistame

$$\vec{\psi} = \vec{x} + i\vec{y} = (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2, x^3 + iy^3)$$

ja kehtib $\mathrm{Im}\,\vec{\psi}(0) = \vec{0}$. Paneme tähele, et iga $k \in \{1,2,3\}$ korral funktsioonid x^k on isotermilised harmoonilised ja sobivad h rolli valemis (29). Olgu $z_0 = 0$. Funktsiooniks f valemis (29) sobivad iga $k \in \{1,2,3\}$ korral funktsioonid $x^k + iy^k$. Kasutades valemit (30), kehtib

$$\vec{\psi} = 2\vec{x}\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \vec{x}(0,0).$$

Järelikult saame $\vec{y}$ avaldada $\vec{x}$ kaudu järgmiselt:

$$\vec{y}(u,v) = \mathrm{Im}\left(2\vec{x}\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - \vec{x}(0,0)\right).$$

Näide 6.1. Vaatleme edasi helikoidi näidet. Algus oli näites (4.2). Näitame, et helikoid $\vec{x}(u,v) = (a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, av)$ on isotermiline pind. Selleks on vaja näidata, et $E = G = \lambda^2(u,v),\ F = 0$. Näites (4.2) leidsime esimese fundamentaalvormi kordajad $E = a^2\cosh^2 u,\ F = 0,\ G = a^2\cosh^2 u$, millest saame $\lambda(u) = a\cosh u > 0$. Järelikult helikoid on isotermiline pind. Näites (4.2) oleme näinud, et helikoid on minimaalpind. Järelikult helikoid on isotermiline minimaalpind.

Konstrueerime pinda

$$\vec{y}(u,v) = \operatorname{Im}\left(2\vec{x}\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - \vec{x}(0,0)\right).$$

Arvutame pinna $\vec{y}$ esimese koordinaatfunktsiooni. Selleks kasutame valemeid

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u,\ \cosh u = \cos(iu),\ i\sinh u = \sin(iu),\\
&2\sinh^2 u + 1 = \cosh(2u),\ 2\cosh^2 u - 1 = \cosh(2u),\\
&\sinh(u+iv) = \sinh u\cos v + i\cosh u\sin v,\\
&\cos^2 u - \sin^2 u = \cos(2u) \Rightarrow 2\sin^2 u = 1 - \cos(2u).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(2a\sinh\left(\frac{u+iv}{2}\right)\cos\left(\frac{v-iu}{2}\right)\right)\\
=&\operatorname{Im}\left(2a\left(\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i\cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)\left(\cos\frac{v}{2}\cos\frac{iu}{2} + \sin\frac{v}{2}\sin\frac{iu}{2}\right)\right)\\
=&\operatorname{Im}\left(2a\left(\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i\cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)\left(\cos\frac{v}{2}\cosh\frac{u}{2} + i\sin\frac{v}{2}\sinh\frac{u}{2}\right)\right)\\
=&a\left(\sin v\cosh^2\frac{u}{2} + \sin v\sinh^2\frac{u}{2}\right) = a\left(2\sin v\cosh^2\frac{u}{2} - \sin v\right)\\
=&a\sin v\left(2\cosh^2\frac{u}{2} - 1\right) = a\sin v\cosh u.
\end{aligned}$$

Arvutame pinna $\vec{y}$ teise koordinaatfunktsiooni

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(2a\sinh\left(\frac{u+iv}{2}\right)\sin\left(\frac{v-iu}{2}\right)\right)\\
=&\operatorname{Im}\left(2a\left(\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i\cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)\left(\sin\frac{v}{2}\cos\frac{iu}{2} - \sin\frac{iu}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\right)\\
=&\operatorname{Im}\left(2a\left(\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i\cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)\left(\sin\frac{v}{2}\cosh\frac{u}{2} - i\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\right)\\
=&2a\left(-\sinh^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2} + \cosh^2\frac{u}{2}\sin^2\frac{v}{2}\right) = 2a\left(\sinh^2\frac{u}{2}(-\cos v) + \sin^2\frac{v}{2}\right)\\
=&2a\sinh^2\frac{u}{2}(-\cos v) + a - a\cos v = a - a\cos v\left(1 + 2\sinh^2\frac{u}{2}\right) = a - a\cos v\cosh u.
\end{aligned}$$

Arvutame pinna $\vec{y}$ kolmanda koordinaatfunktsiooni

$$\operatorname{Im}\left(2a\left(\frac{v-iu}{2}\right)\right) = -au.$$

Seega

$$\vec{y}(u,v) = (a\sin v\cosh u, a - a\cos v\cosh u, -au).$$

Antud võrrand näitab, et teine pind $\vec{y}$ on katenoid. Näitame, et $\vec{y}$ on isotermiline ja $\vec{x}, \vec{y}$ on kaasharmoonilised pinnad. Leiame $\vec{y}_u, \vec{y}_v$:

$$\vec{y}_u = (a \sinh u \sin v, -a \sinh u \cos v, -a)\,,\ \vec{y}_v = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, 0)\,.$$

Kontrollime, et kehtivad isotermilisuse tingimused $E = G = \lambda^2, F = 0$. Leiame E, F, G

$$E = \langle \vec{y}_u, \vec{y}_u \rangle = a^2 \sinh^2 u \sin^2 v + a^2 \sinh^2 u \cos^2 v + a^2 = a^2(\sinh^2 u + 1) = a^2 \cosh^2 u,$$
$$G = \langle \vec{y}_v, \vec{y}_v \rangle = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + a^2 \cosh^2 u \sin^2 v = a^2 \cosh^2 u,$$
$$F = \langle \vec{y}_u, \vec{y}_v \rangle = a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v - a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v = 0.$$

Näeme, et $\vec{y}$ on isotermiline pind. Näites (4.2) oleme leidnud $\vec{x}_u, \vec{x}_v$:

$$\vec{x}_u = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, 0), \quad \vec{x}_v = (-a \sinh u \sin v, a \sinh u \cos v, a).$$

Märkame, et kehtivad võrdused $\vec{x}_u = \vec{y}_v,\ \vec{x}_v = -\vec{y}_u$. Järelikult $\vec{x}, \vec{y}$ on kaasharmoonilised pinnad. Leidsime pindadega $\vec{x}, \vec{y}$ assotsieeritud pered

$$\begin{aligned}
&\vec{z}_{[t]} = \cos t\ \vec{x} + \sin t\ \vec{y} \\
&= (\cos t\ a \sinh u \cos v + \sin t\ a \sin v \cosh u, \\
&\cos t\ a \sinh u \sin v + \sin t\ (a - a \cos v \cosh u), \cos t\ av + \sin t\ (-au)).
\end{aligned}$$

Sellega näide lõpeb. $\diamondsuit$

Kokkuvõte

Töös on näidatud, et sfäär on Riemanni pind, arvutatud pinna meetrika ja näidatud, et see on konformne. Tuletatud Weingarteni võrrandid pinna reaalarvulise parametriseerimise korral. On tuletatud Gaussi võrrandid Riemanni pinna korral. On näidatud, et katenoid ja helikoid on isotermilised kaasharmoonilised minimaalpinnad. Töös on kirjeldatud meetod, kuidas leida antud isotermilise minimaalpinna jaoks kaasharmoonilist minimaalpinda. Selle meetodi abil on leitud kruvipinna kaasharmooniline minimaalpind ja on näidatud, et see on katenoid. On konstrueeritud katenoidiga ja kruvipinnaga assotsieeritud isotermiliste minimaalpindade pere.

Töö teema valik on seotud teadusartikliga [1], kus autor kirjutab seosest diferentsiaalgeomeetria pinnateooria tuntud võrrandite ja integreeruvate diferentsiaalvõrrandite vahel. Selle seose esimeseks näiteks oli tuntud sine-Gordon'i võrrand, mis oli tuletatud seoses konstantse negatiivse Gaussi kõverusega pindade leidmiseks. Autor rakendab integreeruvate võrrandite meetodeid pinnateooria võrranditele. On plaanis uurida, kuidas antud rakendamine töötab minimaalpindade korral.

Viited

[1] A.I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic Maps and Integrable Systems, Aspects of Mathematics, 83–127 1994.

[2] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRS Press, 1998.

[3] J. Jost, *Compact Riemann Surfaces*, An Introduction to Contemporary Mathematics, Springer, 2002.

[4] J.A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1979.

[5] F.W. Warner, *Foundations of Differentable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, 1983.

[6] Математическая энциклопедия (глав. ред. И. М. Виноградов), статья „Минимальная поверхность “, том 3, страница 684, Москва 1984.

[7] Математическая энциклопедия (глав. ред. И. М. Виноградов), статья „Римaнова поверхность“, том 4, страница 1015, Москва 1984.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Aljona Kritševskaja,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Riemanni pindade geomeetria ja minimaalpinnad“, mille juhendaja on Viktor Abramov, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Aljona Kritševskaja
18.05.2021