

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Arvutusteek inflatsiooni ülesannete lahendamiseks mitte-minimaalselt seotud skalaarvälja teoorias

Magistritöö (30 EAP)

Füüsika eriala

Martin Vasar

Juhendaja:

PhD Margus Saal

Tartu 2022

Arvutusteek inflatsiooni ülesannete lahendamiseks mitte-minimaalselt seotud skalaarvälja teoorias

Universumi kirjelduses esineb probleeme, mida on võimalik lahendada, eeldades ruumi lühiajalist eksponentsiaalset paisumist. Seda perioodi nimetatakse kosmoloogiliseks inflatsiooniks, mille jaoks töötati välja teooria, kus skalaarväli ja gravitatsioon on omavahel minimaalselt seotud. Skalaarvälja käsitletakse kui eksootilist ainet, mille potentsiaali kaudu on määratud inflatsiooni dünaamika. Üldistusena saab vaadata teooriat, kus skalaarväli on gravitatsiooniga mitte-minimaalselt seotud. Üldine skalaar-tensor tüüpi teooria sisaldab kolme mudelfunktsiooni. Invariantide formalismi kasutades on võimalik teisendada mitte-minimaalselt seotud teooria minimaalselt seotud teooriaks, kus saab kasutada olemasolevaid tulemusi ja arvutusi. Samas on võimalik anda teooriale füüsikaline interpretatsioon mudelfunktsioonide kaudu. Antud töö osana valmis Pythoni kood, millega on võimalik lahendada erinevaid ülesandeid. Programmiga on võimalik teha nii numbrilisi kui ka sümbolkujul arvutusi. Koodi tööd on kontrollitud mitme mudeli näitel. Töö lisana valmisid ka Jupyter Notebooki töölehed, kus on võimalik valminud teeki kasutada.

Märksõnad: inflatsioon, kosmoloogia, skalaar-tensor teooria, Python (programmeerimis-keel)

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Computational package for solving inflation problems in non-minimally coupled scalar field theory

The description of the universe description has problems which can be solved if short-lived space exponential expansion was assumed near singularity. This period is called the cosmological inflation, for which minimally coupled theory has been formulated. In this theory scalar field behaves as an exotic matter and scalar field potential describes inflation dynamics. Non-minimally coupled theory can be viewed as a generalized theory which has three scalar field functions. Non-minimally coupled theory can be transformed to minimally coupled theory when the invariant formalism is used. This allows to use results and equations for the minimally coupled theory without losing any interpretability. Original part of this work is Python code which can solve multiple problems analytically and numerically. The code has been checked with multiple analytical solutions. To learn and use this package Jupyter Notebook worksheets have been created.

Keywords: inflation, cosmology, scalar-tensor theory, Python (programming language)

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Sisukord

Sissejuhatus	5
1 Inflatsioon	7
1.1 Üldrelatiivsusteooria ja Einsteini väljavõrrandid	7
1.2 Friedmanni võrrandid	8
1.3 Inflatsioon	10
1.3.1 Motivatsioon inflatsiooniteooria jaoks	10
1.3.2 Skalaarvälja dünaamika	10
1.3.3 Inflatsioon aeglase veeremise lähendis	11
1.4 Vaatlused ja nendest arvutatavad suurused	13
2 Mitte-minimaalselt seotud teooria	16
2.1 Väljavõrrandid	16
2.2 Raami teisendused	17
2.3 Vaatluslikud suurused esitatuna invariantide kaudu	18
2.4 Tundmatu funktsiooni leidmine	19
2.4.1 A funktsioon	19
2.4.2 B funktsioon	19
2.4.3 V funktsioon	19
2.5 N -väärtuste erinevus raamide vahel	20
3 Programm	22
3.1 Programmi ülesehitus	22
3.2 Inflatsiooni vaatlusparameetrite arvutamine	26
3.2.1 Skalaarvälja väärtus inflatsiooni lõpus	26
3.2.2 Skalaarvälja algväärtuse leidmine	28
3.3 Tundmatu funktsiooni leidmine	31
3.3.1 Funktsiooni $A(\phi)$ leidmine	31
3.3.2 Funktsiooni $B(\phi)$ leidmine	33
3.3.3 Funktsiooni $V(\phi)$ leidmine	35
3.4 N -väärtuse parandi arvutamine	36
3.5 Mudelite võrdlemine	37
3.5.1 Invariantse potentsiaali võrdlemine	38
3.5.2 Invariantse skalaarvälja võrdlemine	39

3.5.3	Invariantse skalaarvälja tuletise võrdlemine	39
3.6	Edasiarendus	40
	Kokkuvõte	41
	Tänuavaldused	43
	Kasutatud kirjandus	44
	Lisa A Tööleht vaatluslike parameetrite arvutamiseks	47
	Lisa B Tööleht tundmatu funktsiooni leidmiseks	54
	Lisa C Tööleht mudelite võrdlemiseks	63
	Lihtlistsents	68

Sissejuhatus

Aastal 1948 ennustati esmakordselt, et kosmosest saab mõõta kiirgust, mis vastab ideaalsele musta keha spektrile [1, 2]. 1964. aastal avastati taevast tundmatu päritoluga elektromagnetlaineline signaal, mis vastas 1948. aasta ennustusele [3]. Esialgu arvati, et tegemist on mõõteveaga või seade on korrast ära, aga pärast põhjalikku kontrollimist leiti, et tegemist on reaalse signaaliga. 1978. aastal saadi signaali avastamise eest Nobeli preemia. Seda signaali hakati kutsuma kosmiliseks mikrolaineliseks taustkiirguseks ehk reliktkiirguseks (*cosmic microwave radiation, CMB*).

Mikrolaine taustkiirgus annab meile infot aja kohta, mis toimus umbes 400 000 aastat pärast universumi singulaarsuspunkti. Reliktkiirgust mõõtes saab näha, kuidas materia varases universumis oli jaotunud. Esimeste mõõtmiste jooksul oli signaal isotroopne ja homogeenne, hilisematel mõõtmistel aga leiti, et signaalis esineb vähesel määral ka juhuslikult jaotunud häiritusi [3]. Seda nähtust on seni kirjeldanud kõige paremini kosmoloogia standardmudel (Λ CDM *Lambda cold dark matter*), mis eeldab, et signaali tekkel on oluliseks kosmoloogilise inflatsiooni periood, kus universum paisus väga lühikese aja jooksul eksponentsiaalselt [4]. Teooria võimaldab ka arvutada füüsikalised suurused (n_s – skalaarne spektraalindeks ja r – tensor-skalaar häirituste suhe), mida saab võrrelda reliktkiirguse vaatlustega. Viimased olulised vaatluslikud tulemused publitseeriti 2018. aastal Plancki satelliidi rühma poolt ja 2021. aastal BICEP ja KECK rühmade poolt [5, 6].

Antud töö käigus käsitletakse üldist skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriat (STG) inflatsiooni perioodil [7]. Selle teooria raames on vaja defineerida kolm mudelfunktsiooni $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$, mis määravad ühe mudeli ja inflatsiooni dünaamika. Nendest funktsioonidest $A(\phi)$ määrab, kas skalaarväli on seotud gravitatsiooniga ja $V(\phi)$ on skalaarvälja omainteraktsioon. Esialgne teooria formuleeriti ja võrreldi vaatlustega STG erijuhul, milleks on minimaalselt seotud teooria. Sellises teoorias on inflatsiooni dünaamika kirjeldatud skalaarvälja potentsiaaliga $V(\phi)$. Tasub mainida Starobinsky ja Higgsi inflatsiooni mudeleid, mis on vaatlustega kooskõlalised [8, 9]. Konformse teisenduse ja skalaarvälja ümberdefineerimisega on võimalik teooria kuju muuta – seda nimetatakse raami teisendusteks. Minimaalselt seotud raami nimetatakse ka Einsteini raamiks ja esialgset konformselt teisendamata raami nimetatakse Jordani raamiks [10]. Kas raamid on füüsikaliselt ekvivalentsed, on olnud pikalt vaidlusalune teema ning konsensusele ei ole jõutud [10, 11].

STG teooria üldistamiseks on võimalik teha arvutusi ka erinevates formalismides, mis määravad, kas ruumi kirjeldavad suurused, meetrika ja seostus, on üksteisest sõltuvad või sõltumatud suurused.

Sellest lähtuvalt püstitati ülesandeks valmistada arvutuste tegemiseks kasutajasõbralik Pythoni teek. Selleks kasutatakse interaktiivset keskkonda Jupyter Notebook, mis võimaldab vormistada töölehti ning samal ajal kirjutada ja käivitada koodi. Kuna ülesannete lahendamine osutub tihtipeale keeruliseks, siis töö ühe osana valmis Pythoni pakett, kus on kirjutatud iga ülesande lahendamise jaoks analüütilised ja numbrilised lahendamise meetodid. Kompaktsuse ja lihtsuse mõttes on meetodid kirjutatud Pythoni failidena, mida kasutaja saab Jupyteri töölehes mõne rea koodiga välja kutsuda.

Esimeses peatükis antakse lühiülevaade üldrelatiivsusteooriast ning kosmoloogia dünaamika kirjeldamiseks tuletatud Friedmanni võrranditest. Peatüki lõpus kirjeldatakse STG teooria erijuhtu, minimaalselt seotud skalaarvälja teooriat ning antakse ülevaade vaatlustest. Teises peatükis tutvustatakse mitte-minimaalselt seotud teooriat, mis sisaldab vabu funktsioone $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$. Samuti antakse ülevaade invariantide teooriast, mis võimaldab teha teisendusi Einsteini raami [12, 13, 14]. Peatüki lõpus tutvustatakse erinevaid ülesandeid, mida kirjutatud programmiga on võimalik lahendada. Kolmandas peatükis kirjeldatakse programmi ülesehitust. Iga ülesande jaoks on ka põhjalikumalt välja toodud, kuidas programmis ülesandeid lahendatakse.

Töös kasutatud kokkulepped ja tähistused on:

- meetrika signatuur on $(-, +, +, +)$;
- kasutatud on loomulikke ühikuid $c = \hbar = 1$;
- funktsiooni tuletis skalaarvälja järgi kirjutatakse lühidalt ülakomaga $\frac{df(\phi)}{d\phi} = f'(\phi)$.
- invariantse suuruse jaoks tähistab ülakoma tuletist invariantse skalaarvälja järgi;
- täpp sümboolite kohal $\dot{x}$ tähistab suuruse x ajalist tuletist.

1. Inflatsioon

Kosmoloogia standardmudeli kohaselt toimus vahetult pärast singulaarsust ruumi eksponentsiaalne paisumine, mida nimetatakse inflatsiooni perioodiks. Peatükis 1.1 antakse lühiülevaade üldrelatiivsusteooriast ja Einsteini võrranditest, mida läheb vaja geomeetria kirjeldamiseks. Peatükis 1.2 tutvustatakse Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) meetrikat ja materiat ideaalse vedeliku lähendis, millest on võimalik tuletada universumi dünaamikat kirjeldavad võrrandid. Peatükis 1.3.3 kirjeldatakse skalaarvälja dünaamikat, mis põhjustab inflatsiooni. Viimases peatükis 1.4 tutvustatakse inflatsiooni kirjeldavaid füüsikalisi suuruseid, mis on võimalik tuletada vaatlustest kogutud andmetest.

1.1 Üldrelatiivsusteooria ja Einsteini väljavõrrandid

Üldrelatiivsusteooria väljavõrrandid saab tuletada mõjufunktsionaalist, mis on esitatav kujul

$$S = S_{\text{E-H}}(g, \Gamma) + S_m(g, \chi_m) = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + S_m(g, \chi_m) , \quad (1.1)$$

kus Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaal $S_{\text{E-H}}(g, \Gamma)$ kirjeldab gravitatsioonivälja ja mõjufunktsionaal $S_m(g, \chi_m)$ kõiki teisi välju ning materiat χ_m . Seoses (1.1) olev suurus $M_p^{-2} = 8\pi G_N$ on redutseeritud Plancki mass ja suurus $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ on Ricci tensor, mis on esitatud seostuse $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ kaudu. Täiendavalt on eeldatud, et materia mõjufunktsionaal S_m ei sisalda seostust. Ricci tensor on leitav Riemanni kõverustensori

$$R^\mu_{\nu\sigma\tau} \equiv \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\tau} - \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\rho_{\tau\nu} - \Gamma^\mu_{\tau\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \quad (1.2)$$

ahendina esimese ja kolmanda indeksi järgi

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu} . \quad (1.3)$$

Paneme tähele, et mõjufunktsionaalis (1.1) esinevad geomeetrilised suurused meetrika $g_{\mu\nu}$ ja seostus $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ on üldjuhul sõltumatud. Seostus võimaldab muutkonnal defineerida paralleelnihke eeskirja ning meetrika kauguse arvutamise eeskirja. Formalismi, mille raames vaadatakse seostust ning meetrikat sõltumatute suurustena, nimetatakse Palatini formalismiks ja juhtu, kus meetrika ja seostus on omavahel seotud, nimetatakse meetriliseks

formalismiks. Osutub, et viimasel juhul on seostus ja meetrika üheselt seotud

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) . \quad (1.4)$$

ning sellist seostust nimetatakse meetriliseks või ka Levi-Civita seostuseks. Kui seostus ja meetrika on üksüheselt seotud, siis kirjeldab mõjufunktsionaalis (1.1) olev liige $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ Ricci skalaari

$$R(g) = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (1.5)$$

mis on määratud meetrika, meetrika esimeste ja teiste tuletiste kaudu. Varieerides mõju-funktsionaali (1.1) meetrika järgi saadakse Einsteini väljavõrrandid

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{M_p^2}T_{\mu\nu} , \quad (1.6)$$

kus energia-impulsi tensor $T_{\mu\nu}$ on defineeritud seosega

$$T_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.7)$$

1.2 Friedmanni võrrandid

Kosmoloogiline printsiip väidab, et universum on suurtel skaaladel homogeenne ja isot-roopne. Homogeensus tähendab, et alates mingist skaalast ei sõltu universumi omadused asukohast, mis tähendab, et universum näeb nendel skaaladel kõikjal välja ühesugune. On teada, et väiksematel skaaladel ei ole universum homogeenne. Isotroopsus tähendab seda, et universumis ei ole eelissuundi ehk sõltumata vaatesuunast nähakse ühesugust universumit. Nendest eeldustest lähtuvalt on võimalik näidata, et aegruumi geomeetria on kirjeldatav FLRW meetrikaga

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] , \quad (1.8)$$

mis on esitatud sfäärilistes koordinaatides. Meetrikas esinev suurus $a(t) > 0$ on ajas muu-tuv mastaabitegur ning parameeter k kirjeldab ruumi geomeetriat. Kõverusparameetri k võimalikud väärtused on $[-1, 0, 1]$, kus $k = 0$ korral on kolmruum tasane, $k = -1$ korral on kolmruumi geomeetria hüperboolne (avatud) ja $k = 1$ korral on kolmruumi geomeetria sfääriline (suletud).

Kosmoloogilisest printsiibist tuletatud homogeenset ja isotroopset aegruumi kirjeldav FL-RW meetrika nõuab, et aegruumi täitvat materiat käsitletakse ideaalse vedelikuna. See tähendab, et eri kihtide vahel ei toimu hõõrdumist ega soojusvahetust. On võimalik näi-

data, et ideaalset vedelikku kirjeldav energia-impulsitensor on esitatav kujul

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} . \quad (1.9)$$

Kusjuures nelikiirus rahuldab nn kaasaliikuvate koordinaatsüsteemide tingimust

$$u_\mu u^\mu = -1 , \quad (1.10)$$

mis lisab täiendava seose ja kõrvaldab ühe vabadusastme.

Kasutades eeldust, et aegruumi meetrika on kirjeldatud FLRW meetrikaga (1.8), aine on kirjeldatud ideaalse vedeliku energia-impulsitensoriga (1.9) ning Einsteini võrrandid (1.6) kehtivad, on võimalik näidata, et kosmoloogia põhivõrrandid on esitatavad kujul

$$\dot{H} + H^2 \equiv \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} \sum_{i=r,m,\Lambda} (\rho_i + 3p_i) , \quad (1.11a)$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \sum_{i=r,m,\Lambda} \rho_i - \frac{k}{a^2} , \quad (1.11b)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 . \quad (1.11c)$$

Sealjuures (1.11c) on võimalik tuletada (1.11a) ja (1.11b) kaudu.

Võrrandites esinev suurus $H = \frac{\dot{a}}{a}$ tähistab Hubble'i parameetrit, G_N Newtoni gravitatsioonikonstanti ning summeerimisel tähistavad indeksid: (m) - aine, (r) - kiirgus, (Λ) - kosmoloogiline konstant. Need võrrandid on olulised, sest kirjeldavad universumi evolutsiooni suurtel skaaladel, kus aine mõjutab globaalset dünaamikat. Friedmanni võrranditest on võimalik kindlaks teha, mis juhtudel on tegemist tasase ruumiga. Kasutades võrrandit (1.11b) on võimalik leida tihedus

$$\rho_{\text{kriitiline}} = \sum_{i=r,m,\Lambda} \rho_i = \frac{3H^2}{8\pi G_N} , \quad (1.12)$$

millele vastab tasane geomeetria. Seda nimetatakse kriitiliseks tiheduseks. Defineerides dimensionitu parameeter $\Omega = \frac{\sum_{i=r,m,\Lambda} \rho_i}{\rho_{\text{kriitiline}}}$ ning asetades see võrrandisse (1.11b) on võimalik jõuda seoseni

$$\Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1 . \quad (1.13)$$

Sellistes muutujates esitatuna tähistab $\Omega = 1$ tasast ruumi. Plancki uurimisrühma 2018. aastal ilmunud tulemuste järgi $\Omega = 1.0000 \pm 0.0112$ [5].

1.3 Inflatsioon

1.3.1 Motivatsioon inflatsiooniteooria jaoks

1964. aastal tuvastasid raadioastronoomid kosmosest tuleneva millimeetrise lainepikkusega signaali [3, 15]. Tänapäeval tuntakse seda signaali kosmilise mikrolainelise taustkiirguse ehk reliktkiirguse nime all (*cosmic microwave background* CMB). Kosmoloogia standardmudeli kohaselt on see pärit ajast, kus universumi tihedus ja temperatuur olid piisavalt kõrged, et materia oli plasma kujul. Seetõttu materia kiirgatud soojuskiirgus neelati koheselt. Umbes 400 000 aastat pärast universumi singulaarsuspunkti oli universum saavutanud temperatuuri, kus plasmast hakkas moodustuma vesiniku aatomeid ning tihedus langes. See tähendas, et kõik tekkinud footonid ei neeldunud enam koheselt. Universumi paisumise tõttu tekkinud punanihkst on tänapäevaks antud kiirguse lainepikkus suurenenud nii palju, et see vastab musta keha spektrile, mille temperatuur on ligikaudu 2.7 Kelvinit [16]. Mõõtmised on näidanud, et saadud spekter on võrdlemisi isotroopne ja homogeenne, sisaldades siiski ka väikeseid häiritusi. Kui arvutada universumi mõõtmed reliktkiirguse tekke ajal, siis selgub, et kõik punktid ei saanud sel hetkel olla põhjuslikult seotud, sisaldades umbes 10^5 piirkonda, mis ei olnud kausaalselt seotud. Siiski on reliktkiirguse spekter väga ühtlane. Seda tuntakse horisondi probleemina [17, 18, 16].

Eelmise alapeatüki lõpus oli välja toodud ka dimensioonitu tihedusparameetri väärtus, mis viitab, et meie universum on tasane. Kui ekstrapoleerida tihedusparameetri väärtust tagasi, universumi algusesse, siis saadakse, et $|1 - \Omega| \leq 2 \cdot 10^{-62}$ ehk universum pidi alguses olema juhuslikult väga täpselt tasane. Seda probleemi nimetatakse tasasuse probleemiks või siis täppishäällestuse probleemiks [17].

Kirjeldatud probleeme on võimalik lahendada, kui eeldada, et väga varajane universum paisus ligikaudu eksponentsiaalselt. Vastavat perioodi on hakatud nimetama kosmoloogiliseks inflatsiooniks ning seda kirjeldavat teooriat inflatsiooniteooriaks.

1.3.2 Skalaarvälja dünaamika

Inflatsioon on periood, kus ruum väga lühikese aja jooksul paisus eksponentsiaalselt. Vastava tingimuse saab kirja panna valemi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} > 0 \quad (1.14)$$

abil. Friedmanni võrrandist (1.11a) ja seosest (1.14) saab tuletada nõuded sobivale materiale

$$\rho + 3p < 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3} . \quad (1.15)$$

Järeldub, et barotroopne indeks w peab olema negatiivne. Tavalise mateeria, kiirguse ja tolmu jaoks antud võrrand ei kehti. Lihtsaimaks võimaluseks oleks eeldada, et inflatsioon on põhjustatud kosmoloogilise konstandi poolt ($w = -1$). Sellise teooria korral $a \propto \exp(\Lambda t)$ on näha, et inflatsioonile ei oleks sel juhul lõppu. Seega on põhjendatud eeldus, et inflatsioonilise paisumise tekitas eksootiline mateeria, mis rahuldab olekuvõrrandit (1.15).

Osutub, et inflatsioonilise paisumise tekitamiseks sobib skalaarväli ϕ , mida selles kontekstis nimetatakse ka inflatonväljaks. Skalaarväljale ϕ vastav mõjufunktsionaal on esitatav kujul:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) , \quad (1.16)$$

kus $V(\phi)$ on skalaarväljale vastav potentsiaal. Kokkuvõtvalt käsitletakse teooriat, kus gravitatsioon on kirjeldatud Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliga ja mateeria mõjuks on skalaarvälja mõjufunktsionaal (1.16). Seega on skalaarväli justkui eksootiline mateeria, mille barotroopse w indeksi saab esitada kujul:

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} , \quad (1.17)$$

kus on täiendavalt eeldatud, et skalaarväli on üksnes kosmoloogilise aja funktsioon $\phi(t)$ ning $\dot{\phi}$ tähistab välja ajalist tuletist. Paneme tähele, et barotroopne indeks rahuldab võrratust $|w| < 1$. Negatiivsele juhule vastab olukord, kus domineerib täielikult potentsiaal $V(\phi)$ ja positiivsele juhule selline, kus domineerib kineetiline liige $\dot{\phi}^2$. Mõjufunktsionaali (1.16) varieerimisel skalaarvälja järgi saadakse välja liikumisvõrrandid [16]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0 . \quad (1.18)$$

1.3.3 Inflatsioon aeglase veeremise lähendis

Lähtudes tingimusest (1.15), mis peab olema täidetud, et tekiks eksponentsiaalne paisumine ja arvestades skalaarvälja barotroopse indeksi avaldist (1.17), jõutakse tingimuseni

$$\frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} < -\frac{1}{3} . \quad (1.19)$$

Tingimusest (1.19) on näha, et inflatsiooni toimumiseks vajaliku negatiivse barotroopse indeksi väärtus saadakse juhul, kui skalaarvälja potentsiaal $V(\phi)$ domineerib kineetilise liikme $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ üle st on täidetud tingimus $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$.

Järgnevalt saab defineerida kaks suurust, mille abil edaspidi inflatsiooni kirjeldada ning

mida nimetatakse aeglase veeremise Hubble'i parameetriteks [16, 19]:

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 3\frac{\dot{\phi}^2/2}{V + \dot{\phi}^2/2} , \quad (1.20)$$

$$\eta_H = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} . \quad (1.21)$$

Nende abil saab kirjutada Friedmanni võrrandid ümber kompaktsel kujul

$$(3 - \eta_H)H\dot{\phi} + V' = 0 , \quad (1.22a)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} (\epsilon_H M_p^2 H^2 + V) , \quad (1.22b)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon_H) . \quad (1.22c)$$

Viimasest võrdusest (1.22c) on näha, et inflatsiooni tingimus (1.14) on rahuldatud ainult juhul, kui $\epsilon_H < 1$ ning inflatsiooni lõpus on $\epsilon_H = 1$. Defineerides ka aeglase veeremise parameetrid viisil, et need on antud mitte Hubble'i parameetri, vaid potentsiaali $V(\phi)$ kaudu [19]

$$\epsilon_V = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 , \quad (1.23)$$

$$\eta_V = M_p^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} . \quad (1.24)$$

Hubble'i parameetri ja potentsiaali kaudu defineeritud aeglase veeremise parameetrid on omavahel algebraliselt seotud valemitega [19]

$$\epsilon_V = \epsilon_H \left(\frac{3 - \eta_H}{3 - \epsilon_H} \right)^2 , \quad (1.25)$$

$$\eta_V = \sqrt{2M_p^2\epsilon_H} \frac{\eta'_H}{3 - \epsilon_H} + \left(\frac{3 - \eta_H}{3 - \epsilon_H} \right) (\epsilon_H + \eta_H) . \quad (1.26)$$

Võttes avaldistes (1.25) ja (1.26) arvesse ainult esimest järku liikmeid saadakse tulemuseks

$$\epsilon_V \approx \epsilon_H , \quad (1.27a)$$

$$\eta_V \approx \eta_H + \epsilon_H \quad (1.27b)$$

ning inflatsiooni lõpu tingimuseks määratakse $\epsilon_V \approx 1$ [19]. Edaspidi kasutatakse töös tähistusi $\eta_V = \eta$ ja $\epsilon_V = \epsilon$.

Inflatsiooni määra iseloomustamiseks kasutatakse suurust N , mis kirjeldab universumi ruumi paisumise määra e astmetes. Kirjeldatud horisondi ja tasasuse probleemi lahenda-

miseks on vajalik paisumine, mille käigus universumi mõõtmed suurenesid minimaalselt e^{50} korda st $N = 50$. Sellest tulenevalt on hakatud erinevaid inflatsiooni kirjeldavaid mudeleid võrdlema nii, et eeldatakse N jaoks väärtuseid $N = 50$ ja $N = 60$ ning arvutatakse nendele vastavad suurused, mida on võimalik vaatlustulemustega võrrelda (alapeatükk 1.4). Inflatsiooni määra arvutamiseks saab defineerida suuruse, mis on logaritmi mastaabitegurite erinevusest inflatsiooni alguses ja lõpus ning esitada see alljärgneva seosena

$$\begin{aligned}
N &= \ln\left(\frac{a(t_{\text{löpp}})}{a(t_{\text{alg}})}\right) = \int_{t_{\text{alg}}}^{t_{\text{löpp}}} H(t) dt = \int_{\phi_{\text{alg}}}^{\phi_{\text{löpp}}} \frac{H(t)}{\dot{\phi}} d\phi \\
&\approx \int_{\phi_{\text{alg}}}^{\phi_{\text{löpp}}} -\frac{3H}{V'} H d\phi \approx \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_{\text{alg}}}^{\phi_{\text{löpp}}} \frac{V}{V'} d\phi .
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Seda seost ja kokkuleppelisi N väärtuseid $N = 50$ ja $N = 60$ kasutades saab leida skalaarvälja väärtuse ϕ_{alg} , millal aeglase veeremise lähendis kirjeldatud inflatsioon algas.

1.4 Vaatlused ja nendest arvutatavad suurused

Vaatlustulemuste analüüsimisel on võimalik näha, et reliktkiirguses esinevad väikesed fluktuatsioonid, mis tähendab seda, et algne väli ei olnud täiesti homogeenne. See on kooskõlas arusaamaga, et igas väljas tekivad kvantfluktuatsioonid, mis eksponentsiaalselt paisuvas ruumis kasvavad. Paisumisega kaasaliikuv koordinaatsüsteem on vastava häirituse lainepikkus konstantne, aga kaasaliikuv Hubble'i horisont $\frac{1}{aH}$ kahaneb (1.14). Seega tekkis olukord, kus häirituste lainepikkus sai suuremaks kui Hubble'i horisont ja häiritused „väljusid horisondist“. Sellisel juhul ei olnud häiritused enam põhjuslikult seotud ja öeldakse, et häiritused justkui „külmutusid“. Inflatsiooni lõppedes hakkas horisont uuesti suurenema ning horisondist väljunud häiritused sisenesid. See tekitas materias tihedushäiritusi, mis omakorda gravitatsioonilise ebastabiilsuse tõttu võimendusid. Selle tõttu on võimalik mõõta häiritusi ja vaadelda mitte-homeogeenset materia jaotust reliktkiirguse spektris [16].

Kasutades sobivat kalibratsiooni (*gauge*) on võimalik skalaarvälja häiritused võtta nulliks ning meetrika häiritused esitada kujul [20]

$$g_{ij} = a[1 - 2\mathcal{R}\delta_{ij} + h_{ij}] . \tag{1.29}$$

Sellises kalibratsioonis on kõik skalaarsed häiritused esitatud suuruse $\mathcal{R}$ abil, mis tähistab skalaarset kõverushäiritust. Valemis (1.29) esinev suurus h_{ij} tähistab meetrika häiritust, mida võib mõista ürgsete gravitatsioonilainetena (*primordial gravitational wave*).

Skalaarne kõverushäiritus on vaatlustulemuste tõlgendamise seisukohalt oluline suurus. Kõverushäiritusele vastav võimsusspekter $P_{\mathcal{R}}$ defineeritakse kujul

$$\langle \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(k + k') P_{\mathcal{R}}(k) \quad (1.30)$$

kus $\langle \dots \rangle$ tähistab autokorrelatsiooni funktsiooni [16]. Antud valem tuleneb Wiener-Khinchini teoreemist, mis väidab, et statsionaarsete juhuslike protsesside võimsusspekter on esitatav autokorrelatsioonina [21]. Valemis $\delta(k + k')$ tähistab Kronecker delta funktsiooni ning $k = -k'$ korral on see võrdne nulliga. Võimsusspektri saab siduda mõõdetud häirituste amplituudiga, kasutades seost [16]

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) . \quad (1.31)$$

Skalaarse häirituse amplituudi saab esitada ka aeglase veeremise lähendis skalaarvälja ja Hubble'i parameetri kaudu [16]

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \Big|_{k=aH} . \quad (1.32)$$

Kuna erinevad häiritused sisenesid Hubble'i raadiusesse eri aegadel, siis amplituud võib sõltuda lainearvust k . Amplituudi sõltuvust lainearvust iseloomustatakse skalaarse spektraalindeksi abil [16]

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} . \quad (1.33)$$

Seega kui spektri amplituud ei sõltu häirituse lainearvust (skaalast) k , siis $n_s = 1$. Vaatlustulemused kinnitavad, et $n_s < 1$ ja seega on skaalast sõltuv [16].

Teine oluline suurus on tensor-skalaar häirituste suhe

$$r = \frac{\Delta_h^2}{\Delta_{\mathcal{R}}^2} , \quad (1.34)$$

kus Δ_h^2 on tensorhäirituste amplituud [16].

Osutub et vaatlusest tulevad suurused saab esitada ka potentsiaali aeglase veeremise parameetrite kaudu (esimest järku lähendis) [20]

$$n_s = 1 - 6\epsilon(\phi_{\text{alg}}) + 2\eta(\phi_{\text{alg}}) , \quad (1.35)$$

$$r = 16\epsilon(\phi_{\text{alg}}) . \quad (1.36)$$

Osutub, et kõveruse häirituse amplituudi ja inflatsiooni kirjeldamiseks kasutatud potent-

siaali saab siduda kõveruse võimsusspektri amplituudiga [13]

$$A_s(\phi) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V(\phi)}{\epsilon_V(\phi)} . \quad (1.37)$$

Selle abil on võimalik määrata kas kasutatud skalaarvälja potentsiaal annab skalaarse häirituse amplituudile vastava väärtuse. Kui ei anna, siis tuleb potentsiaali normaliseerida.

Viimastele vaatlustulemuste analüüsile tuginedes on eespool kirjeldatud suurustele n_s , r ja A_s leitud vaatluslikud piirangud/väärtused [5, 6]

$$r < 0.035 , \quad (1.38a)$$

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042 , \quad (1.38b)$$

$$\ln(10^{10} A_s) = 3.044 \pm 0.014 . \quad (1.38c)$$

Antud suurusi kasutades on võimalik kindlaks teha, kas inflatsiooni mudelid on kooskõlas vaatlustulemustega või ei ole. Mitte-vastavus võimaldab seega mitmeid inflatsiooni mudeleid kõrvale jätta.

2. Mitte-minimaalselt seotud teooria

Gravitatsiooniga minimaalselt seotud skalaarvälja teooriat võib vaadelda kui üldise skalaar-tensor tüüpi teooria erijuhtu. Lisades iga mõjufunktsionaali liikme juurde skalaarväljast sõltuv funktsioon, saadakse mitte-minimaalselt seotud teooria. Sellist nimetust kasutatakse põhjusel, et skalaarväli ja kõverus on mitte-minimaalselt seotud ja ka skalaarväli on osa gravitatsiooniväljast. Alapeatükis 2.1 tutvustatakse uut mõjufunktsionaali. Alapeatükis 2.2 kirjeldatakse teisendusi, mis jätavad mõjufunktsionaali funktsionaalse kuju muutumatuks. Samuti tutvustatakse invariantseid suuruseid, mis teisendamisel ei muutu. Alapeatükkides 2.3, 2.4 ja 2.5 esitatakse kõige olulisemad valemid, mida läheb vaja töö järgmises peatükis.

2.1 Väljavõrrandid

Mitte-minimaalselt seotud teooria mõjufunktsionaal on esitatav kujul [10, 12]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} A(\phi) R - \frac{1}{2} B(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right\} + S_m [e^{2\alpha(\phi)} g_{\mu\nu}, \chi_m] . \quad (2.1)$$

Teooria sisaldab nelja skalaarväljast sõltuvat mudelfunktsiooni: $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ ning $\alpha(\phi)$. Funktsioonid $A(\phi)$, $B(\phi)$, $\alpha(\phi)$ on dimensioonitud ning $[V(\phi)] = M^4$. Mudelfunktsioonid on tavaliselt matemaatilisest aspektist vaadatuna vabalt valitavad, kuid on siiski mitmeid füüsikalisi kaalutlusi, mis muudavad mõned funktsioonide klassid huvitavaks. Antud töös käsitleme ainult selliseid $A(\phi)$ funktsioone, mille korral $A(\phi) > 0$, sest vastasel korral oleks tegemist tõukava gravitatsiooniga. Antud töö raames käsitletakse juhtu, kus $S_m = 0$, sest materia tekib alles pärast inflatsiooni.

Üldjuhul eeldatakse, et seostus ja meetrika on sõltumatud suurused. Sellisel juhul on Ricci skalaar esitatav kujul $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}[\Gamma, \partial\Gamma]$. Seda tüüpi teooria korral on võimalik mõju varieerida nii meetrika kui ka seostuse järgi. Kui seostus Γ on võimalik esitada meetrika kaudu ehk tegemist oleks meetrilise seostusega, siis suurust $R = R[g, \partial g, \partial^2 g]$ on võimalik varieerida ainult meetrika järgi. Sellisel juhul on tegemist meetrilise formalismiga.

2.2 Raami teisendused

Nii skalaarvälja kui meetrikat saab teisendada. Meetrika teisenduseks nimetame konformset teisendust kujul

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} \exp(2\hat{\gamma}(\hat{\phi})) \quad (2.2)$$

ja skalaarvälja teisendust nimetame välja reparametriseerimiseks

$$\phi = \hat{f}(\hat{\phi}), \quad \hat{f}' > 0. \quad (2.3)$$

Konformne teisendus jätab meetrilise tensori märgid ning vektorite vahelised nurgad samaks, kuid muudab pikkuseid. Seega aegruumi kausaalne struktuur jääb muutumatuks. Tihti öeldakse ka, et konformsel teisendusel muudetakse raami või tehakse raami teisendus. Teemal, kas erinevad raamid on matemaatiliselt ja füüsikaliselt ekvivalentsed, on palju vaieldud ning ühest seisukohta ei ole [10, 11]. Käesolevas töös jäetakse antud teema laiahaardeliselt käsitlemata ning eeldatakse, et arvutusi võib konformselt teisendatud raamis teha. Seejuures füüsikaline interpretatsioon antakse raamis, kus on defineeritud füüsikaline meetrika.

On võimalik näidata, et rakendades konformset teisendust (2.2) ja välja reparametriseerimist (2.3) mõjufunktsionaalile (2.1), jääb mõjufunktsionaali funktsionaalne kuju invariantseks, kui mudelfunktsioonid $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ teisenevad teatud viisil. Neid teisendusi nimetatakse Flanagani teisendusteks [10]. On näidatud, et on võimalik defineerida suurused, mis jäävad Flanagani teisendustel invariantseteks [12]. Antud töös osutuvad tähtsaks kaks skalaarset funktsiooni, mille saab esitada mõjufunktsionaali mudelfunktsioonide $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ kaudu [12, 13, 14]:

- invariantne potentsiaal

$$I_V(\phi) = \frac{V(\phi)}{A^2(\phi)} \quad (2.4)$$

- invariantne skalaarväli

$$I_\phi(\phi) = \int \sqrt{\frac{B(\phi)}{A(\phi)} + \delta_\Gamma \frac{3M_p^2}{2} \left(\frac{A'(\phi)}{A(\phi)} \right)^2} d\phi = \int \sqrt{F(\phi)} d\phi. \quad (2.5)$$

Invariantse skalaarvälja definitsioonis on kasutatud funktsiooni $F(\phi)$, mis võimaldab valemide lühemalt kirja panna. Skalaarvälja funktsioon $F(\phi)$ peab rahuldama tingimust $F(\phi) > 0$ [12]. Invariantse skalaarvälja avaldises (2.5) kasutatakse suurust δ_Γ tähistamiseks formalismi:

- $\delta_\Gamma = 1$ vastab meetrilisele formalismile

- $\delta_\Gamma = 0$ vastab Palatini formalismile.

Seega on invariantne skalaarväli I_ϕ kasutatavast formalismist sõltuv. Lisaks skalaarsetele invariantidele (2.4) ja (2.5) saab defineerida ka tensoriaalse invariantse meetrika

$$\hat{g}_{\mu\nu} = A(\phi)g_{\mu\nu} . \quad (2.6)$$

Kui mõjufunktsionaali teisendada (2.1), kasutades invariantseid suuruseid (2.6), (2.5) ja (2.4) on võimalik mõjufunktsionaal kirjutada kujul [22]

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ \frac{M_p^2}{2} \hat{R} - \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu I_\phi \hat{\nabla}_\nu I_\phi - I_V(I_\phi) \right\} . \quad (2.7)$$

Tasub tähele panna, et mõjufunktsionaal (2.7) on funktsionaalselt samasuguse kujuga kui minimaalselt seotud skalaarvälja mõjufunktsionaal (1.16).

2.3 Vaatluslikud suurused esitatuna invariantide kaudu

Eelmises peatükis jõuti tulemuseni, et üldise skalaar-tensor teooria mõjufunktsionaal on esitatav invariantsete suuruste kaudu nii, et teisendatud mõjufunktsionaalil on minimaalselt seotud skalaarvälja mõjufunktsionaaliga sama kuju. Sellisel juhul on võimalik kasutada alapeatükkides 1.3.3 ja 1.4 esitatud valemeid. Kui invariantse skalaarvälja funktsioonid esitada skalaarvälja funktsioonide $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ kaudu, siis on võimalik jõuda tulemusteni, kus mudel on algselt defineeritud Jordani raamis, aga arvutused on tehtud konformselt teisendatud raamis.

Aeglase veeremise parameetrid on seega esitatavad kujul

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{dI_V}{dI_\phi} \frac{1}{I_V} \right)^2 = \frac{M_p^2}{2F} \left(\frac{V'A - 2VA'}{AV} \right)^2 \quad (2.8)$$

ja

$$\eta = \frac{d^2 I_V}{dI_\phi^2} \frac{M_p^2}{I_V} = \frac{M_p^2}{VF} \left[V'' - 4V' \frac{A'}{A} - V' \frac{F'}{2F} - 2V \frac{A''}{A} + 6V \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{VA'F'}{AF} \right] . \quad (2.9)$$

Analoogilisel viisil saab defineerida inflatsiooni määra

$$N = \frac{1}{M_p^2} \int_{I_\phi^{\text{löpp}}}^{I_\phi^{\text{alg}}} I_V \left(\frac{dI_V}{dI_\phi} \right)^{-1} = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi^{\text{löpp}}}^{\phi^{\text{alg}}} \frac{AVF}{V'A - 2VA'} , \quad (2.10)$$

mida kasutatakse peatükis 3 skalaarvälja algväärtuse leidmiseks. Antud valemitest on

näha, et kui $A = B = 1$ ehk tegemist on minimaalselt seotud teooriaga, siis $\epsilon(\phi)$, $\eta(\phi)$ ja $N(\phi_{\text{alg}})$ võtavad minimaalsele teooriale vastava kuju, nagu oli oodata.

2.4 Tundmatu funktsiooni leidmine

Kui on defineeritud invariantsest skalaarväljast sõltuv invariantne potentsiaal ja kaks skalaarväljast sõltuvat mudelfunktsiooni, siis on võimalik leida lahend kolmanda mudelfunktsiooni jaoks. Sellisel juhul invariantne potentsiaal ja mudelfunktsioonid koos leitud lahendiga kirjeldavad sama mudelit st annavad samad väärtused vaatlustega võrreldavatele suurustele n_s ja r . Antud peatükis esitatakse võrrandid, mille lahendamise tegeletakse peatükis 3. Võrrandite detailsed tuletuskäigud on esitatud bakalaureusetöös [23].

2.4.1 A funktsioon

Mudelfunktsiooni $A(\phi)$ leidmiseks on võimalik tuletada difertentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{4AVV' \pm |I_\phi^*|^{-1} \sqrt{16A^5BV^2 + \delta_\Gamma 6M_p^2 A^6 [V'^2 - A^3 B I_\phi^{*-2}]}}{8V^2 - \delta_\Gamma 3M_p^2 A^4 I_\phi^{*-2}}, \quad (2.11)$$

kus $I_\phi^* = \frac{dI_\phi(I_V)}{dI_V}$ ning I_V on asendatud funktsiooniga $\frac{V(\phi)}{A^2(\phi)}$. Võrrandi (2.11) kujust on näha, et seda on võimalik analüütiliselt lahendada vaid üksikutel erandjuhtudel. Probleemi teeb keerulisemaks ka asjaolu, et antud seos ei ole üheselt määratud, sest valemis (2.11) on võimalik valida kahe märgi vahel. Seega tuleb lahendi leidmiseks enamasti kasutada numbrilist arvutust.

2.4.2 B funktsioon

Mudelfunktsiooni $B(\phi)$ on võimalik leida analüütilisel kujul, kui invariantsele potentsiaalile I_V leidub pöördfunktsioon $I_\phi(I_V)$. Sellisel juhul on lahendiks

$$B(\phi) = A \left[\left(\frac{dI_\phi}{d\phi} \right) - \delta_\Gamma \frac{3M_p^2}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 \right]. \quad (2.12)$$

2.4.3 V funktsioon

Potentsiaali $V(\phi)$ leidmiseks tuleb eelnevalt leida invariantse skalaarvälja integraal (2.5), kus tuleb ka määrata integreerimiskonstant C . Seejärel saab lahendi asetada invariantse potentsiaali funktsiooni

$$V(\phi) = I_V[I_\phi(\phi, C)]A^2. \quad (2.13)$$

Konstandi vabas valikus saab veenduda, kui $V(\phi)$ lahend kujul (2.13) asetada valemisse (2.8). Eelnevalt on vaja leida ka potentsiaali tuletis

$$V'(\phi) = \frac{dI_V}{dI_\phi} \sqrt{F} A^2(\phi) + 2A(\phi)A'(\phi)I_V(\phi) , \quad (2.14)$$

kus antud arvutuse korral funktsioonid $\frac{dI_V}{dI_\phi}$ ja I_V tähistavad skalaarväljast sõltuvaid funktsioone. Asendades saadud tulemuse avaldisse (2.8) jõutakse tulemuseni

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_p^2}{2F} \left(\frac{\frac{dI_V}{dI_\phi} \sqrt{F} A^3 + 2A^2 A' I_V - 2A^2 A' V}{A^3 I_V} \right)^2 = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{1}{I_V} \frac{dI_V}{dI_\phi} \right)^2 . \quad (2.15)$$

Saadud tulemus on võrdne ϵ definitsiooniga (1.23).

2.5 N -väärtuste erinevus raamide vahel

Selguse huvides tähistatakse antud alapeatükis suurusega $g_{\mu\nu}^J$ Jordani raami meetrikat, mis on defineeritud mõjufunktsionaali (2.1) jaoks. Suurus $\hat{g}_{\mu\nu}^E$ tähistab Einsteini raami meetrikat, mis esineb mõjus (2.7). Meetrikad on võimalik siduda funktsiooni $A(\phi)$ abil

$$\hat{g}_{\mu\nu}^E = A(\phi) g_{\mu\nu}^J . \quad (2.16)$$

Lähtudes meetrikast (1.8) on näha, et mastaabiteguri jaoks peab kehtima seos

$$a_E(t) = \sqrt{A(\phi)} a_J(t) . \quad (2.17)$$

Kirjutades Einsteini raami jaoks lahti N -väärtuse avaldise, on võimalik jõuda tulemuseni

$$\begin{aligned} N_E &= \ln \left(\frac{a_E(t_{\text{löpp}})}{a_E(t_{\text{alg}})} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{A(\phi_{\text{löpp}})} a_J(t_{\text{löpp}})}{\sqrt{A(\phi_{\text{alg}})} a_J(t_{\text{alg}})} \right) \\ &= \ln \left(\frac{a_J(t_{\text{löpp}})}{a_J(t_{\text{alg}})} \right) + \ln \left(\sqrt{\frac{A(\phi_{\text{löpp}})}{A(\phi_{\text{alg}})}} \right) = N_J + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A(\phi_{\text{löpp}})}{A(\phi_{\text{alg}})} \right) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tulemusest selgub, et Jordani ja Einsteini raamis saadud N -väärtused on erinevad, kui $A(\phi_{\text{löpp}}) \neq A(\phi_{\text{alg}})$. Sellisel juhul on vaja fikseerida millisele raamile vastab kasutatav N -väärtus [24].

Selleks, et raamide vahel ei eksisteeriks N -väärtuse erinevust tuleb inflatsiooni määra definitsiooni muuta. Ühe võimalusena on selleks defineerida inflatsiooni määra suhtelistes ühikutes. Näiteks on võimalik mõõta pikkusi raamile vastavas Plancki pikkuses l_P . Suh-

telise pikkuse saab seega kirja panna avaldisega

$$\Delta \hat{\mathbf{r}} = \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{l_P^i}, \quad (2.19)$$

kus indeks i tähistab raami ja $\hat{\mathbf{r}}$ suhtelist pikkust. Suurus $\Delta \mathbf{r}_i = a(t)_i \Delta \mathbf{x}$ tähistab füüsilist pikkust, kus $\Delta \mathbf{x}$ on kaasaliikivas koordinaatsüsteemis olev pikkus. Seega saab kirjutada

$$\Delta \hat{\mathbf{r}} = \frac{\Delta \mathbf{r}_J}{l_P^J} = a_J(t) \Delta \mathbf{x} \sqrt{A(\phi)} M_p = a_E(t) \Delta \mathbf{x} M_p = \frac{\Delta \mathbf{r}_E}{l_P^E}. \quad (2.20)$$

Esitades N -väärtuse suhtelise pikkuse abil

$$\hat{N} = \ln \left(\frac{\Delta \hat{\mathbf{r}}(t_{\text{löpp}})}{\Delta \hat{\mathbf{r}}(t_{\text{alg}})} \right), \quad (2.21)$$

on võimalik näidata, et sellisel kujul defineeritud N -väärtus on invariantne suurus ega sõltu raamist [24].

3. Programm

Alapeatükkides 2.3, 2.4 ja 2.5 esitatud suuruseid ei ole alati võimalik analüütiliselt arvutada. Sellisel juhul tuleb arvutusi teha numbriliselt. Antud töö raames kirjutati Pythoni teek, mis võimaldab ülesandeid lahendada nii analüütiliselt kui ka numbriliselt. Lisaks on teegi kasutamise õppimiseks valminud ka töölehed interaktiivses keskkonnas Jupyter Notebook. Kirjutatud koodi ja Jupyteri töölehtedega saab tutvuda lisades A, B, C või leheküljel <https://github.com/vasarm/InflationPy>.

Alapeatükis 3.1 antakse ülevaade programmi ülesehitusest. Alapeatükis 3.2 antakse ülevaade sellest, kuidas programm arvutab inflatsiooni vaatlusparameetreid. Alapeatükis 3.3 tutvustatakse tundmatu funktsiooni leidmise meetodeid ning võrreldakse tulemusi analüütiliste lahenditega. Alapeatükis 3.4 kirjeldatakse, kuidas on võimalik arvutada varasemas alapeatükis 2.5 N -väärtuse parandit. Eelviimases alapeatükis 3.5 esitatakse meetodid, millega on võimalik selgeks teha, kas invariantse potentsiaali kaudu ja $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ funktsioonide kaudu defineeritud mudelid on ekvivalentsed. Viimases alapeatükis 3.6 tuuakse välja, mida võib tulevikus teeki juurde lisada ja mis probleemid hetkel esinevad.

3.1 Programmi ülesehitus

Arvutusteed on kirjutatud programmeerimiskeeles Python. Valik Pythoni kasuks tuli mitmel põhjusel. Esiteks on Python vabavara ning selle süntaks on lihtsasti loetav. See on ka üheks põhjuseks, miks Python on väga laialt levinud. Teiseks on selles keeles olemas erinevad teegid nii numbrilisteks kui ka sümbolarvutusteks ning nende kasutamine enamasti ei ole litsentsidega piiratud. Kõige tähtsamad antud töö raames on: NumPy[25], SciPy[26], SymPy[27] ja Mpmath[28]. Otsustavaks sai ka asjaolu, et Pythoni jaoks on välja arendatud veebipõhine platvorm Jupyter Notebook, kus on võimalik valmistada interaktiivseid töölehti. Arvutusteegi loomisel eeldati, et peamiselt kasutatakse seda mainitud platvormil, kuigi see ei ole ainus võimalus. Teegi kasutamisel on soovituslik, et kasutaja oskaks ka baastasemel inglise keelt.

Hetke seisuga on võimalik lahendada järgmiseid ülesandeid:

- arvutada teooriale vastavad skalaarne spektraalindeks, tensor-skalaar häirituste suhe ning häirituste amplituud. Võimalik on kasutada selleks mudelfunktsioone $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ või siis kasutada ainult invariantset potentsiaali $I_V(I_\phi)$;
- leida tundmatu mudelfunktsioon $A(\phi)$, $B(\phi)$ või $V(\phi)$ kui on antud teised kaks

modelfunktsiooni ning invariantne potentsiaal $I_V(I_\phi)$ (alapeatükk 3.3);

- arvutada Einsteini ja Jordani raami jaoks N -väärtuse parandi arvutamine (alapeatükk 2.5);
- võrrelda omavahel invariantse potentsiaali kaudu esitatud mudelit ja $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ funktsioonide kaudu defineeritud mudelit.

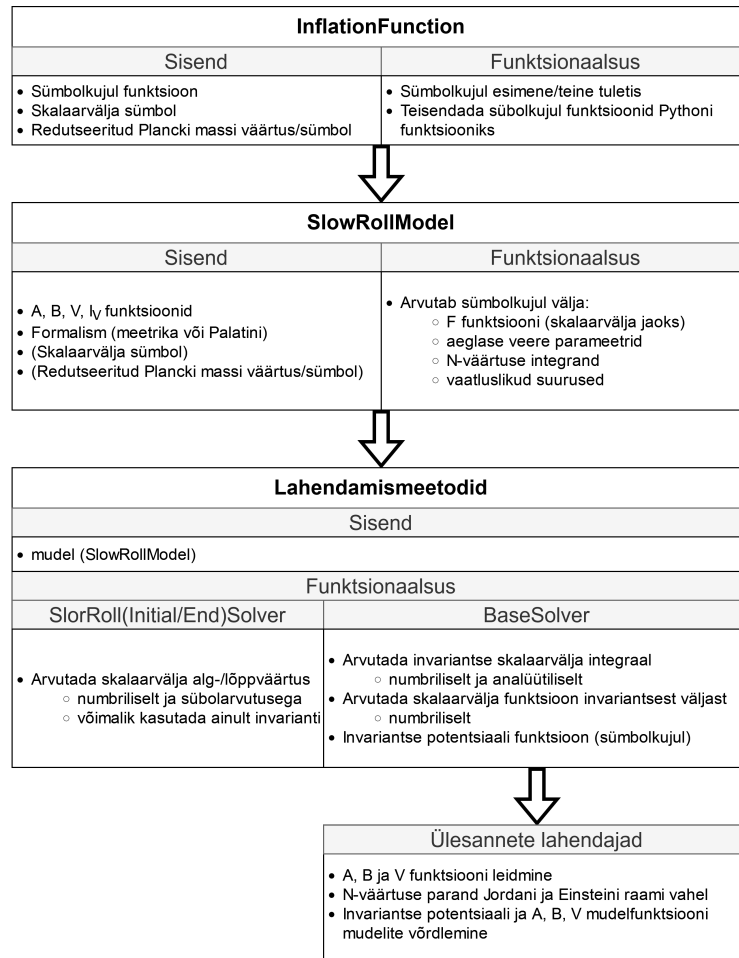
Loetelus välja toodud esimene punkt on varasemalt käsitletud bakalaureusetöös [29] ning teine punkt bakalaureusetöös [23]. Antud töö raames kirjutati need ümber nii, et neid oleks võimalik mugavamalt ja töökindlamalt kasutada. Võrreldes varasema tööga [23] on antud teegis ka töötav $A(\phi)$ funktsiooni leidmise meetod, seda küll ainult numbrilise lahendamise kujul.

Enamike ülesannete lahendamise jaoks on olemas ka võimalus kasutada sümbolkujul (analüütilist) lahendamist, mille kirjeldused on leitavad peatükist 2. Sümbolarvutusteks kasutatakse Pythoni teeki SymPy, mis on vabavarana kasutatav. Võrreldes teise väga levinud arvutusprogrammiga, Wolfram Mathematica, ei ole SymPy nii töökindel. Lisaks sellele on osad ülesanded sümbolkujul, näiteks integraali (2.5) lahendamine väga keerulised. Sellisteks juhtudeks on mõeldud numbriline arvutamine. Alati on võimalik minna sümbolarvutustelt üle numbrilisele ning mõningatel juhtudel on võimalik ka teha vastupidi.

Esialgu oli planeeritud, et kiiremad numbrilised arvutused saab teha teekide NumPy ja SciPy abil ning täpsemad arvutused teegiga Mpmath. Hiljem arendamise käigus selgus, et SciPy võimaldab enamikel juhtudel ka teha piisavalt täpseid arvutusi, eelkõige on siin mõeldud diferentsiaalvõrrandi lahendamist. Kuna Mpmath oli juba sisse ehitatud siis jäi see ka alles. Teatud juhtudel, kui skalaarvälja väärtused lähenevad suurusjärgule 10^{-12} muutub SciPy ka ebatäpseks, sest see kasutab arvutusteks 64 bitist ujuvkomaarvu, mille resolutsioon on suurusjärgus 10^{-15} . Sellisel juhul on võimalik kasutada teeki Mpmath, mille resolutsiooni saab vabalt valida, vaikimisi on resolutsiooniks 10^{-15} .

Programm on jaotatud mitmeks osaks (joonis 3.1), et kood oleks hiljem loetav. Samuti struktuuri loomine vähendab kirjutamisel tekkivate vigade hulka ning tekkinud vigu on kergem parandada. Koodi kirjutamisel lähtuti objektorienteeritud programmeerimise (OOP) põhimõtetest. Teegi arhitektuuri võib jaotada kolme erinevasse rühma. Klass InflationFunction tagab, et defineeritud analüütilise funktsiooniga oleks lihtsamalt võimalik teha nii sümbolarvutusi kui ka numbrilisi arvutusi. Samuti hoiab see mälus skalaarvälja sümbolit ning redutseeritud Plancki massi väärtust. Pythoni klass SlowRollModel võimaldab defineerida mudelfunktsioonid $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ ja $I_V(I_\phi)$. Seejärel arvutab mudelfunktsioonide kaudu vajaminevad funktsioonid nagu aeglase veeremise parameetrid. Samuti võimaldab see defineerida, kas arvutamisel lähtutakse Palatini või meetrilisest formalismist. Ühe kasuliku omadusena on võimalik välja kutsuda antud klassi meetod, mis

proovib tagastada (invariantse) skalaarvälja määramispiirkonda, kasutades selleks mudel-funktsioone ning aeglase veeremise parameetrite funktsioone. See põhineb SymPy teegil, mis ei suuda alati kõikide funktsioonide jaoks määramispiirkonda leida. Mudeli defineerimisel saadud Pythoni objekt on pärast sisendiks erinevate ülesannete lahendamismeetodile.



Joonis 3.1: Valminud Pythoni koodi ülesehitus. Nooded tähistavad suunda, kus programmi funktsionaalsus muutub spetsiifilisemaks. Teisisõnu eeldavad ülesannete lahendajad sisendina SlowRollModel klassi objekte, mis omakorda vajab sisendina InflationFunction tüüpi objekte.

Järgnevates alapeatükkides on kasutatud näidetena kolme mudelit, mille jaoks on defineeritud nii $I_V(I_\phi)$ funktsioon kui ka $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$. Nimi, mida näidetele viitamisel kasutatakse, on valitud mudelile vastava invariantse potentsiaali $I_V(I_\phi)$ järgi.

1. Astme potentsiaal

$$A(\phi) = \xi \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2 \quad (3.1a)$$

$$B(\phi) = \frac{16M_p^8 p^6 \xi \left(\frac{M_p^4}{\phi^4 \xi^2} - \frac{1}{p^4 \xi^2} \right)^{2/p}}{(M_p^4 p^4 - \phi^4)^2} - \delta_\Gamma 6\xi \quad (3.1b)$$

$$V(\phi) = M^4 \left[1 - \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^4 \right] \quad (3.1c)$$

$$I_V(I_\phi) = M^4 \left(\frac{I_\phi}{M_p} \right)^p \quad (3.1d)$$

2. Üldistatud Starobinsky potentsiaal ($\alpha > 1$) [8].

$$A_g(\phi) = 1 + \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2 \quad A_\Gamma(\phi) = \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^{-2\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right) \quad (3.2a)$$

$$B = \frac{6(\alpha-1)\phi^2}{A(\phi)} \quad (3.2b)$$

$$V = M^4 \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^4 \quad (3.2c)$$

$$I_V(I_\phi) = M^4 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}} I_\phi \right) \right]^2 \quad (3.2d)$$

3. α -atraktor [30]

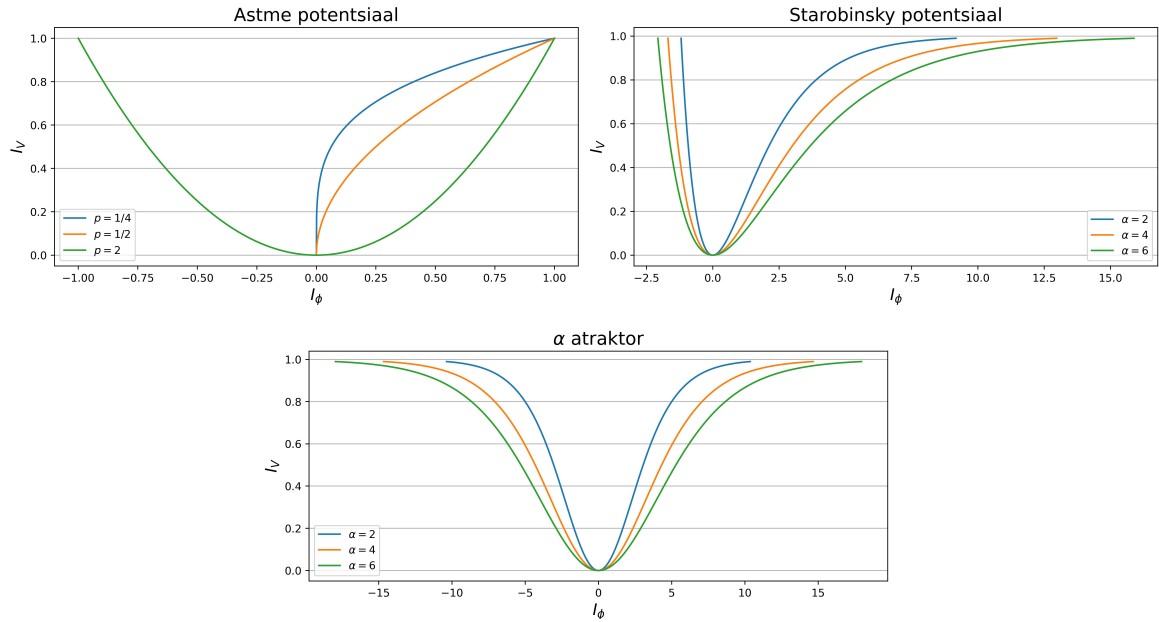
$$A(\phi) = 1 \quad (3.3a)$$

$$B(\phi) = \frac{6\alpha}{(1 - \frac{\phi}{M_p})^2} \quad (3.3b)$$

$$V(\phi) = M^4 \frac{\left(\frac{\phi}{M_p} - 2 \right)^2 \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2}{\left(\left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2 - 2 \left(\frac{\phi}{M_p} \right) + 2 \right)^2} \quad (3.3c)$$

$$I_V(I_\phi) = M^4 \tanh^2 \left(\frac{I_\phi}{\sqrt{6\alpha} M_p} \right) \quad (3.3d)$$

Invariantseid potentsiaale ja mudelfunktsioone $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ valiti selliselt, et nendel juhtudel oleks võimalik leida analüütilised lahendid. Invariantsete potentsiaalide kujud on välja toodud ka joonisel 3.2



Joonis 3.2: Invariantsete potentsiaalide (3.1d), (3.2d), (3.3d) graafikud. On näha, et miinimum kõikide potentsiaalide puhul asub kohal $I_\phi = 0$.

3.2 Inflatsiooni vaatlusparameetrite arvutamine

Võrdlemaks teooriat vaatlustest saadud tulemustega, tuleb eelnevalt arvutada teooria poolt ennustatavad füüsikalised suurused: skalaarne spektraalindeks n_s ning tensor-skalaar häirituste suhe r , mille valemid on esitatud alapeatükis 1.4. Kolmas oluline suurus on häirituste amplituud A_s , kuid seda kasutatakse potentsiaali normaliseerimiseks. Otsitavate suuruste leidmiseks on vaja leida skalaarvälja väärtused inflatsiooni alguses, mis on määratud N -väärtusega (2.10).

3.2.1 Skalaarvälja väärtus inflatsiooni lõpus

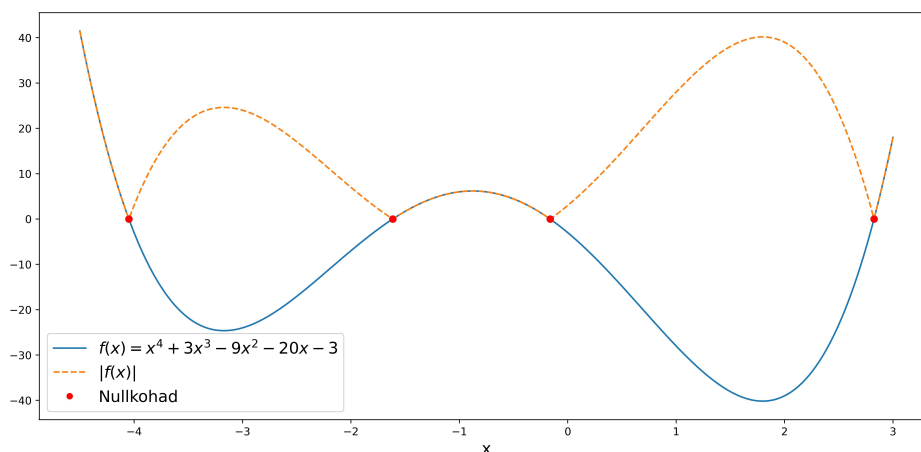
Leidmaks skalaarvälja väärtust inflatsiooni lõpus tuleb lahendada võrrand

$$\epsilon(\phi) - 1 = 0 . \quad (3.4)$$

Nullkohtade numbrilise leidmise meetodit jaotatakse tavaliselt kahte rühma: poolitamise meetodid (*bisection*) ning iteratiivsed (*iterative*) meetodid. Poolitamise meetod eeldab, et kasutaja annab ette kaks punkti a ja b , kus otsitava funktsiooni f väärtused rahuldavad võrratust $f(a) < 0 < f(b)$. Eeldades seejärel, et funktsioon on vahemikus $[a, b]$ pidev, leidub vahe-väärtuste teoreemi põhjal selles vahemikus nullpunkt. Teise meetodi puhul on vajalik, et nullkoha leidmiseks sisestatakse nullkohale piisavalt lähedal olev punkt. Seejärel, kasutades meetodile vastavat iteratiivset algoritmi, leitakse nullkoht.

Programmi kirjutamisel oli valik kasutada mõlemaid meetodeid. Esimese, poolitamise

meetodi jaoks esines probleem, et ei ole teada, kas suvalise $\epsilon(\phi) - 1$ jaoks leiduvad sellised kaks väärtust, kus üks funktsiooni väärtus on negatiivne ning teine positiivne. Selle tõttu otsustati kasutada iteratiivseid meetodeid, mis vajavad lahendamiseks ainult ühe punkti määramist. Viimase peamiseks probleemiks on aga asjaolu, et juhul kui valitud punkt on nullkohast liiga kaugel, siis iteratiivne algoritm ei koonu nullkoha läheduses ning lähendit ei leita. See probleem lahendati järgmiselt. Kasutaja peab määrama skalaarvälja jaoks määramispiirkonna, kus nullkohti otsida. Seejärel määratakse antud piirkonnas võrdsetel kaugustel 100 000 (mis on vaikumisi seatud väärtus) punkti, kus leitakse funktsiooni absoluutväärtused. See tagab, et kõik nullkohad, mis jäävad määratud vahemikku on nüüd globaalseteks miinimumideks (joonis 3.3). Seejärel on võimalik kasutada algoritmi lokaalsete miinimumide leidmiseks. Tulemus võib küll sisaldada lokaalseid miinimume, mis ei ole nullkohaks, kuid need saame hiljem välja sorteerida. Rakendades igas leitud punktis nullkoha leidmise algoritmi. Võimalik on kasutada SciPy ja Mpmath pakettides olemas olevaid meetodeid: Newton, Halley. Antud meetodid vajavad nullkoha leidmiseks $\epsilon(\phi) - 1$ esimest järku tuletist ning Halley meetod võimaldab kasutada ka teist järku tuletist. Antud meetodi probleemiks võib olla see, et kasutaja defineeritud määramispiirkond on liiga suur ja seega genereeritud funktsiooni väärtused asuvad liiga hõredalt. Sellisel juhul võib leiduda olukord, kus lokaalne miinimum jääb kahe genereeritud punkti vahele selliselt, et programm ei suuda seda tuvastada.



Joonis 3.3: Nullkoha leidmise meetodi näitlikustamine. Sinine on funktsioon, mille nullkohtadest ollakse huvitatud. Seejärel leitakse funktsiooni absoluutväärtus, milleks on oranž joon. Siit on näha, et kõik miinimumpunktid on nullkohtadeks või nullkohtade lähedal. Seejärel saab rakendada algoritmi, mis leiab miinimumid, teades et miinimum peab rahuldama võrratust $f(x_n) < f(x_{n-1})$ ja $f(x_n) < f(x_{n+1})$, kus x_n tähistab ühe punkti väärtust kohal n .

Nullkoha leidmisel on kasutajal võimalik muuta enamikke funktsiooni parameetreid: kui

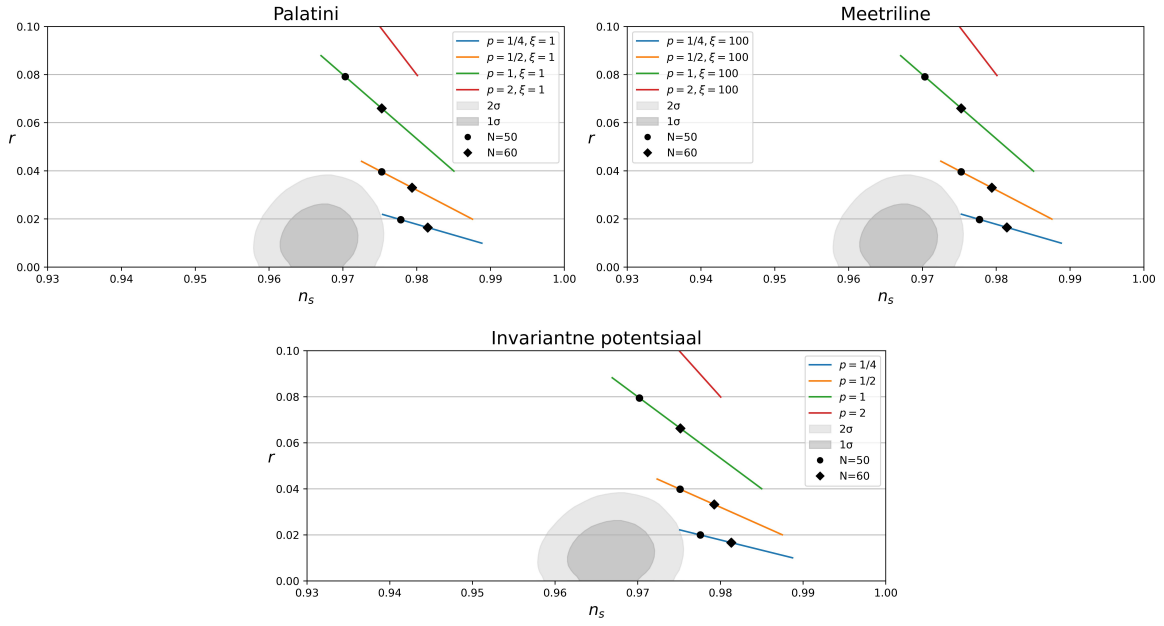
tihedalt punktid genereeritakse, millist meetodit kasutatakse lahendamiseks jne. Samuti on kasutajal võimalik ise defineerida algoritm nullkohtade leidmiseks. Programm annab selleks ette funktsiooni $\epsilon(\phi) - 1$ ning selle esimesed kaks tuletist.

3.2.2 Skalaarvälja algväärtuse leidmine

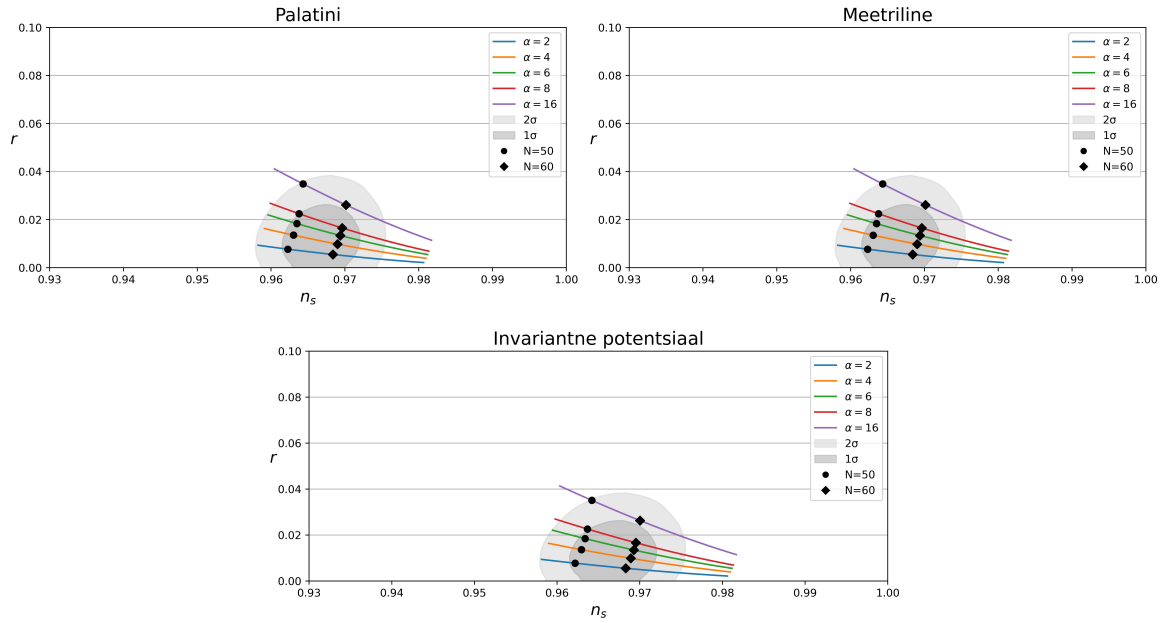
N -väärtuse võrrand on antud valemiga (2.10) kust on näha, et tegemist on integraalse suhtega. Probleemne on veel asjaolu, et otsitav suurus on integraali ülemiseks rajaks. Seega tähendaks see numbrilist integreerimist ja võrrandi lahendamist välja algväärtuse jaoks. See oleks väga aeglane ning palju arvutusi nõudev protsess. Selle asemel on võimalik ülesanne teisiti formuleerida. Viies integraali diferentsiaalsele kujule ning tuletades diferentsiaali $\frac{d\phi}{dN}$ jaoks, saab hoopis lahendada diferentsiaalvõrrandi [29]

$$\frac{d\phi}{dN} = M_p^2 \frac{I'_V}{I_V} = M_p^2 \frac{V'A - 2VA'}{AVF} . \quad (3.5)$$

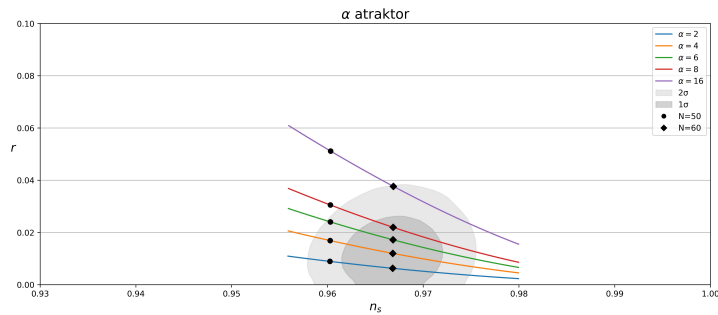
Sellise lahendusmeetodi eeliseks on, et tulemuseks on funktsioon $\phi_{\text{alg}}(N)$ ehk skalaarvälja algväärtuse sõltuvus inflatsiooni määrast. Numbriliseks lahendamiseks on vaja veel fikseerida algtingimus, mille saab määrata välja väärtusega inflatsiooni lõpus. Nimelt kui $\phi_{\text{lõpp}} = \phi_{\text{alg}}$, siis sellele peab vastama N -väärtus $N = 0$. Sellisel juhul ei saanud inflatsioon toimuda, kuna skalaarvälja väärtus ei muutunud [29]. Seejärel on võimalik leida skalaarvälja algväärtused vastavatel N -väärtustel. Joonistel 3.4, 3.5 ja 3.6 on kujutatud antud programmiga leitud tulemusi töös kasutatud näidete jaoks. Graafikutele on peale märgitud ka vaatlustele vastavad regioonid n_s ja r jaoks [6, 31]. Invariantide formalismi (alapeatükk 2.2) kohaselt peavad Palatini ja meetrilises formalismis saadud tulemused olema võrdsed invariantse potentsiaali kaudu arvutatud tulemustega. Selle abil saab veenduda, kas invariantide teooria kehtib, ning koodi korrektsuses.



Joonis 3.4: Arvutatud tulemused astmepotentsiaali jaoks. Arvutused on tehtud nii invariantset potentsiaali kui ka mudelfunktsioonide kasutades. Seejuures on arvestatud, et mudelfunktsioonid on meetrilise ja Palatini formalismi korral erinevad. Tasub mainida, et Palatini ja meetrilise formalismi korral on funktsioonides parameeter ξ , mida ei esine invariantse potentsiaalis (3.1d). Seega ei tohiks antud parameeter mõjutada teooria ennustusi. Palatini ja meetrilise formalismi graafikutelt on näha, et erinevate ξ väärtuste korral on tulemused võrdsed. Kui invariantsele mudelile vastav potentsiaal on astmefunktsiooni kujul, siis mudeli ennustused ei rahulda vaatluslikke piiranguid. Sarnased tulemused on esitatud ka Bicep/Keck artiklis [6].



Joonis 3.5: Arvutatud tulemused Starobinsky potentsiaali näite jaoks. Kahel ülemisel graafikul on esitatud tulemused mudelfunktsioonide jaoks Palatini ja meetrilise raami jaoks, Jordani raamis. Alumisel joonisel on arvutatud tulemused invariantsest potentsiaalist lähtuvalt (3.2d) Einsteini raamis. Programmiga saadud tulemused kõikidel juhtudel on samad. Sellest saab järeldada, et mudelid on ekvivalentsed. Samuti on näha, et üldistatud Starobinsky potentsiaali poolt ennustatud n_s ja r väärtused on peaaegu kõikide parameetrite jaoks kooskõlas vaatlustulemustega.



Joonis 3.6: α -atraktorit kirjeldava potentsiaali (3.3d) ennustused on samuti teatud juhtudel kooskõlas vaatlustulemustega.

3.3 Tundmatu funktsiooni leidmine

Käesolevas alapeatükis on ülesande püstitus järgnev. Defineeritud on invariantne potentsiaal $I_V(I_\phi)$, mille vastavuse vaatlustega saab kindlaks teha alapeatükis 3.2 kirjeldatud meetodil. Lisaks on fikseeritud kaks kolmest mudelfunktsioonist $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$. Seejärel otsitakse kolmandat mudelfunktsiooni, mis vastaks invariantsele potentsiaalile. Kui selline otsitav funktsioon leidub, siis nimetatud kolmest mudelfunktsioonist moodustatud mudel kirjeldab invariantsele potentsiaaliga ekvivalentset mudelit.

3.3.1 Funktsiooni $A(\phi)$ leidmine

Funktsiooni $A(\phi)$ leidmiseks on vaja lahendada diferentsiaalvõrrand (2.11), mis on lahendatav ainult erijuhtudel. Seega on antud ülesandes väga tähtis numbrilise arvutamise meetod, mille jaoks on vaja määrata algtingimus skalaarvälja ja $A(\phi)$ jaoks. Sobilik algtingimus ei ole üheselt määratud, kuid samas ei saa valida ka suvalist $A(\phi)$, ϕ paari. Invariantsest potentsiaali definitsioonist (2.4) on võimalik leida seos $A(\phi)$ jaoks

$$A(\phi) = \sqrt{\frac{V(\phi)}{I_V(I_\phi)}} , \quad (3.6)$$

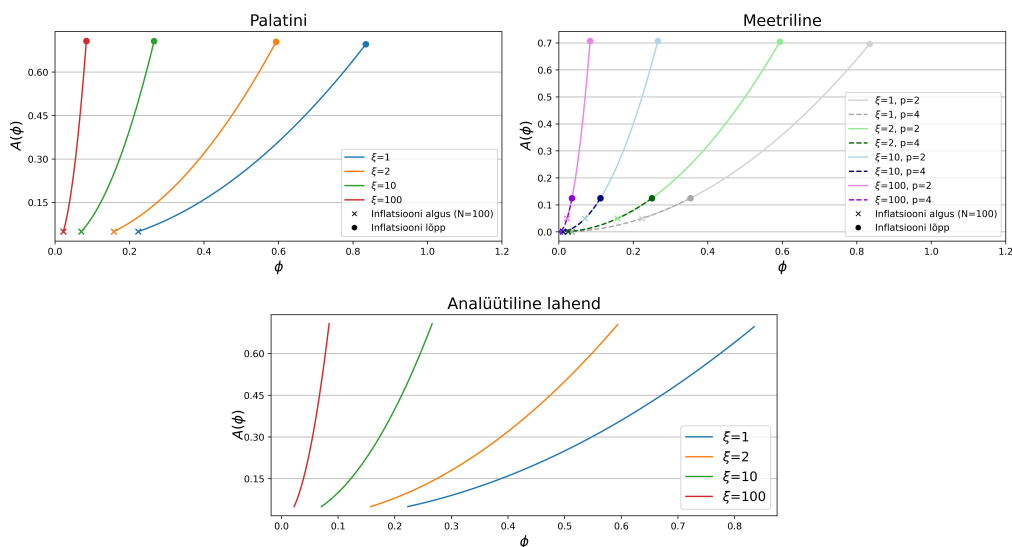
kus ruutjuure võtmisel sobib ainult positiivne haru, sest $A(\phi) > 0$. Kui eeldada, et vabu parameetreid ei ole, siis võrrandis esineb kolm muutujat: funktsioon $A(\phi)$, skalaarväli ϕ ja invariantne skalaarväli I_ϕ .

Invariantse potentsiaali väärtuse saab arvutada, kui määrata invariantse skalaarvälja väärtus. See on vabalt valitav, kuid sealjuures tuleb veenduda, et see väärtus asuks invariantsele potentsiaalile vastava $\epsilon(I_\phi)$ määramispiirkonnas. Soovitav oleks valida mõni invariantse välja väärtus, mis jääb inflatsiooni perioodi, näiteks välja väärtus inflatsiooni lõpus. Kui invariantse välja väärtus on olemas, tuleb määrata sellele punktile vastav skalaarvälja väärtus. Kokkuvõtvalt tuleb määrata kahe raami vahel üks punkt, kus on teada nii skalaarvälja ϕ kui ka invariantse välja I_ϕ väärtus. Jällegi pole valik ühene. Valimisel tuleb jälgida, et skalaarvälja väärtus oleks $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ funktsioonide määramispiirkonnas, et potentsiaali ning invariantse potentsiaali märgid oleksid samad ja soovitatav oleks valida punkt, mis asuks eemal singulaarsustest. Viimane soovitus tuleneb asjaolust, et singulaarsuste lähedal on numbriline arvutamine keerulisem ja ebatäpsem. Potentsiaalide märgid peavad olema samad, sest valemis (3.6) ei oleks vastasel korral ruutjuur defineeritud. Sellisel viisil toimides määratakse kaudselt ka I_ϕ ja ϕ vaheline seos ehk määratakse invariantse skalaarvälja integraali jaoks integreerimiskonstant.

Seejärel on võimalik valitud ϕ ja I_ϕ jaoks arvutada vastav $A(\phi)$ väärtus, mida kasutatakse algtingimusena. Enne lahendamist on vaja valida diferentsiaalvõrrandi (2.11) jaoks

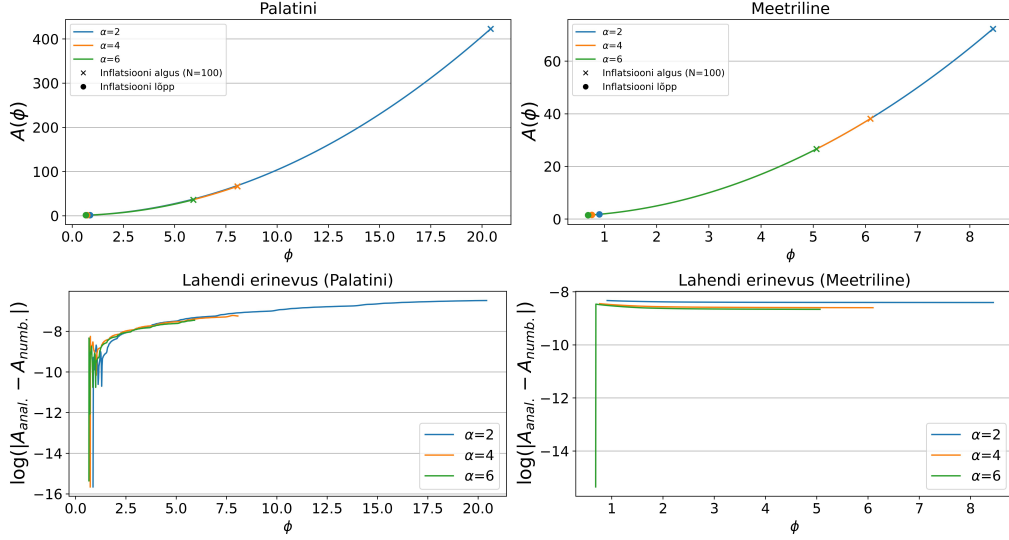
sobilik märk. Antud töö raames ei leitud ühest vastust. On võimalik, et selle määramisel mängib rolli, millises suunas välja väärtus inflatsiooni ajal liigub. Kasutatud kolme näite puhul leidus seaduspära, et kui skalaarvälja algväärtus on lõppväärtusest suurem, siis tuleb valida „−“ märk. Kui algväärtus on väiksem, siis tuleb valida „+“ märk. Kui märk on korrektselt valitud, on võimalik diferentsiaalvõrrand numbriliselt lahendada. Selleks tuleb programmile ette anda ka skalaarvälja väärtus, milleni arvutusi teha.

Lahendamiseks on võimalik kasutada kahte erinevat Pythoni teeki: SciPy ja Mpmath. Esimene neist on kiirem, aga see-eest võib olla ebatäpsem. SciPy võimaldab kasutada erinevaid algoritme. Vaikimisi on selleks Runge-Kutta-Fehlbergi (RKF45) meetod. Mpmath võimaldab kasutada ainult Tayloriga meetodit. Antud näidete (3.1a - 3.3d) puhul kasutati lahendamiseks SciPy teeki ning RKF45 meetodit, mis andis piisava täpsusega lahendid (joonised 3.7, 3.8, 3.9).

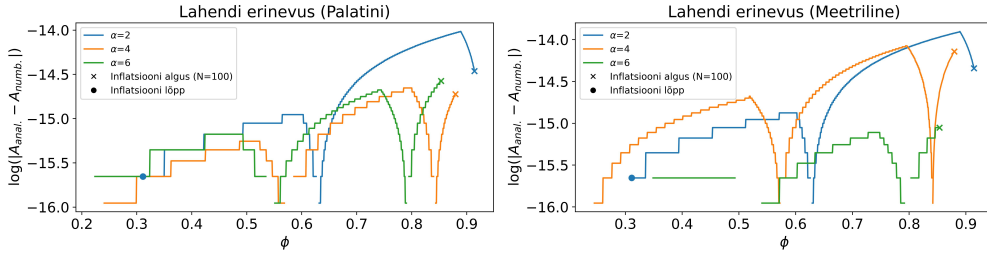


Joonis 3.7: Ülemised kaks graafikut on arvutatud, lahendades diferentsiaalvõrrand numbriliselt mõlema formalismi jaoks. Palatini juhul ($p = 2$) on näha, et joonis on sarnane analüütilise lahendiga. Meetrilisel juhul on testitud, kas p väärtuse muutmine mõjutab ka lahendeid, mida see antud juhul teha ei tohiks, sest $A(\phi)$ funktsiooni definitsioonis ei ole sees parameetrit p . On näha, et $A(\phi)$ funktsionaalne kuju jääb samaks. Diferentsiaalvõrrandi lahendamisel valisin võrrandis (2.11) märgiks „+“.

Tulemuste võrdlemiseks analüütilise $A(\phi)$ lahendiga tuli määrata sobiv algtingimus. Kuna kolme näite puhul on teada kõik neli funktsiooni $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$ ja $I_V(I_\phi)$, siis arvutati skalaarvälja mudelfunktsioonidele ja invariantsele väljale vastavad välja väärtused inflatsiooni lõpus. Saadud väärtusi kasutati $A(\phi)$ algtingimuse määramiseks vastavalt valemile (3.6). Sellisel juhul saab kindel olla, et leitud numbriline lahend on võrdne analüütilise $A(\phi)$ funktsiooniga.



Joonis 3.8: Funktsiooni $A(\phi)$ lahendid on kujutatud ülemisel real. Alumisel real on kujutatud analüütilise ja numbrilise lahendi logaritmilist absoluutset erinevust. Võrrandi (2.11) lahendamiseks kasutati „–“ märki. Tähelepanu tasub juhtida alumise real ordinaattelje väärtustele. Maksimaalne täpsus numbrite esitamisel kasutatud andmetüübil on umbes 15 komakohta ja arvutuses saadud erinevus on umbes 8 komakohta.



Joonis 3.9: Funktsiooni $A(\phi)$ numbrilise lahendi võrdlemine analüütilisega. Kuna erinevuse esitati logaritm funktsiooni abil, siis punktides, kus arvutatud analüütiline väärtus on võrdne numbrilise lahendiga, puuduvad väärtused. Näeme, et lahendid on suure täpsusega samad. Võrrandi (2.11) lahendamiseks kasutasin „–“ märki. Tähelepanu tasub pöörata ordinaattelje väärtustele alumisel real. Maksimaalne täpsus numbrite esitamisel kasutatud andmetüübil on umbes 15 komakohta ja lahendite erinevus jääb samuti sellesse piirkonda.

3.3.2 Funktsiooni $B(\phi)$ leidmine

Funktsiooni $B(\phi)$ arvutamiseks on vaja ainult invariantse potentsiaali pöördfunktsiooni analüütilist lahendit (2.12). Seejärel on võimalik funktsiooni väärtused vahetult välja arvutada. Kolmest käesolevas paragrahvis kirjeldatud ülesandest on see kõige lihtsam ning see on enamasti analüütilisel kujul teostatav. Selleks on ainult vaja eelnevalt leida invariantse potentsiaali pöördfunktsioon kujul $I_\phi = I_V(I_\phi)$. Hiljem on vaja teha asendus $I_V = \frac{V(\phi)}{A^2(\phi)}$ ja lõpuks kõik kokku panna vastavalt valemile (2.12).

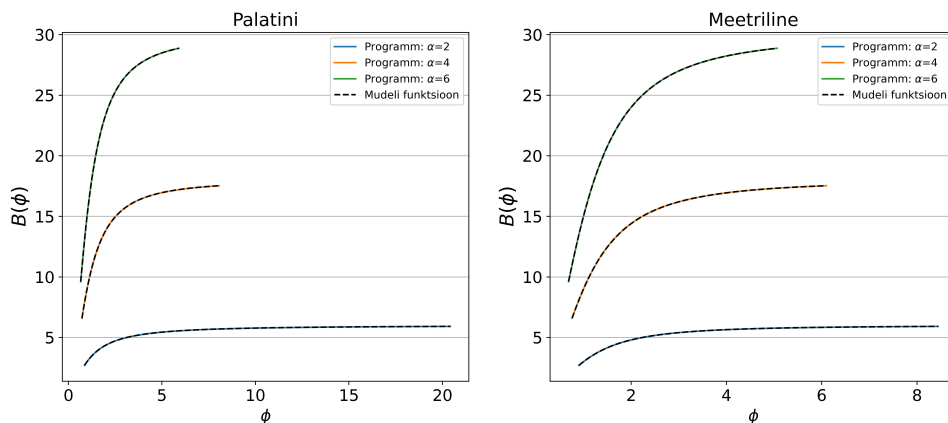
Kui invariantne potentsiaal on esitatud astmefunktsioonina, siis on programm võimaline

leidma analüütilise lahendi funktsiooni $B(\phi)$ jaoks

$$B(\phi) = \frac{16M_p^8 p^6 \xi \left(\frac{M_p^4}{\phi^4 \xi^2} - \frac{1}{p^4 \xi^2} \right)^{\frac{2}{p}}}{(M_p^4 p^4 - \phi^4)^2} - \delta_{\text{r}} 6\xi . \quad (3.7)$$

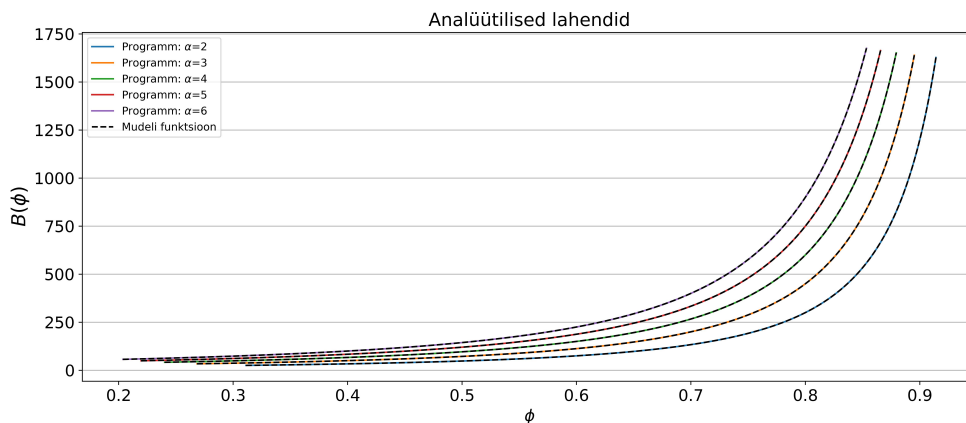
Võrreldes saadud lahendit esialgse $B(\phi)$ mudelfunktsiooniga (3.1b) on näha, et analüütiline kuju on täpselt sama.

Starobinsky potentsiaalile vastavate mudelfunktsioonide jaoks suudab programm samuti lahendid leida. Meetrilist formalism kasutades on leitud tulemus kujul, mis vastab mudelfunktsioonile (3.2b). Palatini formalismi korral on analüütilise lahendi kuju palju keerulisem (3.2b). Põhjus seisneb selles, et SymPy ei suuda saadud funktsiooni lihtsustada sobivale kujule, et saaks lahendeid võrrelda teadaoleva lahendiga. Seega on vaja arvutada saadud lahendile numbrilised väärtused ning võrrelda seda olemasoleva lahendiga (3.2b). Joonisel 3.10 on näha, et saadud analüütiline lahend ja teadaolev lahend (3.2b) langevad kokku. Seega on saadud tulemus korrektne ning probleem seisneb analüütilise lahendi lihtsamale kujule viimises.



Joonis 3.10: Analüütilisel kujul oli lahendit keeruline võrrelda. Arvutades mudeli ja leitud lahendi jaoks numbrilised väärtused, on näha et tulemused on võrdsed.

α -atraktorit kirjeldava mudeli korral tekib eelmises näites kirjeldatuga sarnane olukord, kus SymPy ei suuda lahendit lihtsustada kujule, kus see oleks võrreldav teadaoleva $B(\phi)$ funktsiooni kujuga. Joonisel 3.11 on esitatud analüütilise lahendi ja teadaoleva lahendi (3.3b) väärtused graafiliselt.



Joonis 3.11: Analüütilisel kujul oli lahendit keeruline võrrelda, sest lahendit ei olnud võimalik viia lihtsamale kujul. Arvutades mudeli ja leitud lahendi jaoks numbrilised väärtused, on näha et tulemused on võrdsed. Kuna $A(\phi)$ on konstant, siis tulemused Palatini ja meetrilise formalismi korral on võrdsed ja sellepääst eraldi võrdust välja toodud ei ole.

3.3.3 Funktsiooni $V(\phi)$ leidmine

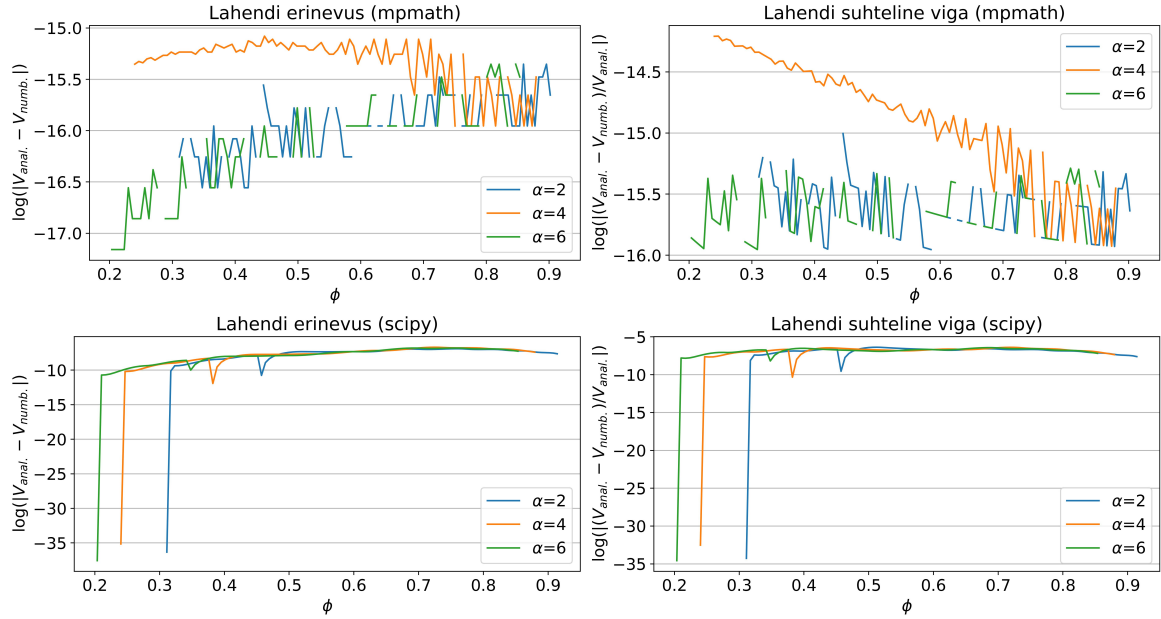
Sarnaselt funktsiooni $A(\phi)$ leidmisele ei ole ka potentsiaali leidmine üheselt määratud. Selle põhjuseks on asjaolu, et on vaja arvutada invariantse skalaarvälja integraal ja selle käigus arvutamisel tuleb määrata ka integreerimiskonstant. Invariantse skalaarvälja definitsiooni integraali (2.5) ei ole alati võimalik analüütiliselt arvutada. Meetrilise formalismi korral teeb arvutamise keerulisemaks ka asjaolu (kui $A \neq \text{konst.}$), et ruutjuure alla lisandub lisaliige.

Kui SymPy ei ole võimeline integraali arvutama, siis on olemas võimalus, et kasutaja sisestab antud integraali lahendi ise, kui see on arvutatud näiteks kasutaja enda poolt või mõne teise arvutialgebrasüsteemi poolt. Juhul kui see ei ole võimalik, saab kasutada ka numbrilist lahendamist. Selle käigus lahendatakse diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dI_\phi}{d\phi} = \sqrt{F(\phi)}, \quad (3.8)$$

kus funktsioon $F(\phi)$ on defineeritud valemis (2.5). Numbrilise lahendamise jaoks on vaja määrata algtingimus, mis on üldiselt vaba. Tuleb jälgida, et algtingimuseks valitud skalaarväli kuulub $A(\phi)$ ja $B(\phi)$ funktsiooni määramispiirkonda ja soovitav on valida singulaarsusest eemal olev väärtus. Lisaks tuleb kontrollida, et valitud ϕ väärtuse korral $A(\phi) > 0$. Potentsiaali $V(\phi)$ leidmisel kasutati kahte numbrilise arvutamise teeki Mpmath ja SciPy, et võrrelda lahendite täpsuse erinevust. SciPy kasutab andmetüüpi 64 bitist ujukomaarvu, millest 52 bitti on komakohtade jaoks. Mpmath võimaldab valida sobiva komakohtade arvu või siis arvu kirjeldamiseks kasutatavate bittide arvu, mille kaudu ongi võimalik teha täpsemaid arvutusi. Täpsus tuleb tihti kiiruse arvelt ja seega ei tasu

enamasti kasutada liiga palju komakohti. Näite jaoks kasutasin Mpmath vaikeväärtust, milleks on 15 komakohta (53 bitti). Tulemused on esitatud joonisel 3.12.



Joonis 3.12: Graafikutelt on näha, et Mpmath on arvutamisel mõnevõrra täpsem kuigi komakohtade kirjeldamiseks kasutatakse sisuliselt sama palju infot. Mpmath teegiga saadud lahendi erinevus analüütilisest lahendist esineb 15. komakoha juures. See vastab analüütilise lahendi numbriliste väärtuste täpsusele. Seega on analüütiline lahend ja Mpmath numbriline lahend samad antud täpsuse juures. Scipy lahendi korral on viga kümnendas komakohas ja seega ka ebatäpsem. Siiski on see piisav täpsus antud arvutuste juures.

3.4 N -väärtuse parandi arvutamine

Magistritöö raames kirjutatud programmis määratakse N -väärtus alati Einsteini raamis, sest invariantide formalismi kasutades minnakse arvutamisel alati üle Einsteini raami. Selleks et määrata N -väärtus Jordani raamis, tuleb leida parand, mille definitsioon on välja toodud valemis (2.18). Definitsiooni järgi on eelnevalt vaja leida Jordani raamis oleva skalaarvälja jaoks alg- ja lõppväärtused.

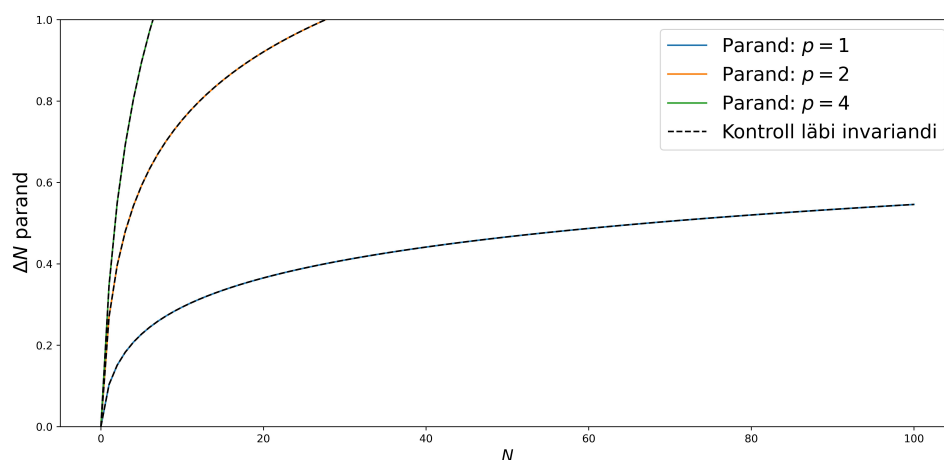
Leidmaks vajalikud alg- ja lõppväärtused, on vaja teada mudelfunktsioone $A(\phi)$ ja $B(\phi)$. Lisaks sellele, et mudel oleks defineeritud, on vaja veel teada kas potentsiaali $V(\phi)$ või invariantset potentsiaali $I_V(I_\phi)$. Esimesel juhul, kui on teada funktsioonid $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$, on lahenduskäik kirjeldatud alapeatükis 3.2, kus käsitleti vaatlustega võrreldavate suuruste n_s ja r leidmist.

Teisel juhul, kui on teada $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $I_V(I_\phi)$, on arvutuskäik mõnevõrra keerulisem. Esiteks tuleb leida invariantse skalaarvälja jaoks alg- ja lõppväärtused. Kuna vaja läheb skalaarvälja väärtusi Jordani raami jaoks, siis tuleb leitud invariantse välja väärtused

teisendada Jordani raami. Selleks tuleb leida välja väärtuste teisendamiseks funktsioon $\phi(I_\phi)$, milleks saab kasutada funktsioone $A(\phi)$ ja $B(\phi)$, avaldise (2.5) definitsiooni ning pöördfunktsiooni teoreemi. Seejärel on võimalik jõuda diferentsiaalvõrrandini

$$\frac{d\phi}{dI_\phi} = \left(\sqrt{F(\phi)} \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

kus $F(\phi)$ on defineeritud valemis (2.4). Diferentsiaalvõrrandi lahendiks ongi funktsioon $\phi(I_\phi)$. Seega on võimalik teisendada invariantse välja väärtused Jordani raami ning kasutada avaldist (2.18) leidmaks N -väärtuse parandid. Tulemused mõlema meetodi kaudu on esitatud joonisel 3.13.



Joonis 3.13: Parand N -väärtuse jaoks on leitud astme funktsioonile $I_V = M^4 \left(\frac{I_\phi}{M_P} \right)^p$ vastava mudeli jaoks (3.1a - 3.1d). Värviliselt ja pideva joonega on tähistatud lahendid, kus arvutused tehti funktsioonide $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ kaudu. Kontrolliks, mis on tähistatud katkendliku musta joonega, lahendati eelkõige alg- ja lõppväärtused invariantse välja jaoks ning seega teisendati need üle Jordani raami skalaarvälja väärtusteks. Teisendamiseks kasutatud funktsioon $\phi(I_\phi)$ leiti numbriliselt.

3.5 Mudelite võrdlemine

Kui on teada invariantne potentsiaal $I_V(I_\phi)$ ja mudelfunktsioonid $A(\phi)$, $B(\phi)$, $V(\phi)$, siis on võimalik kontrollida, kas invariantide poolt defineeritud mudel annab A , B ja V funktsioonidele vastavad vaatlustulemused ilma et peaks välja arvutama mõlemal juhul skalaarse spektraalindeksi n_s ja tensor-skalaar häirituste suhte r väärtused.

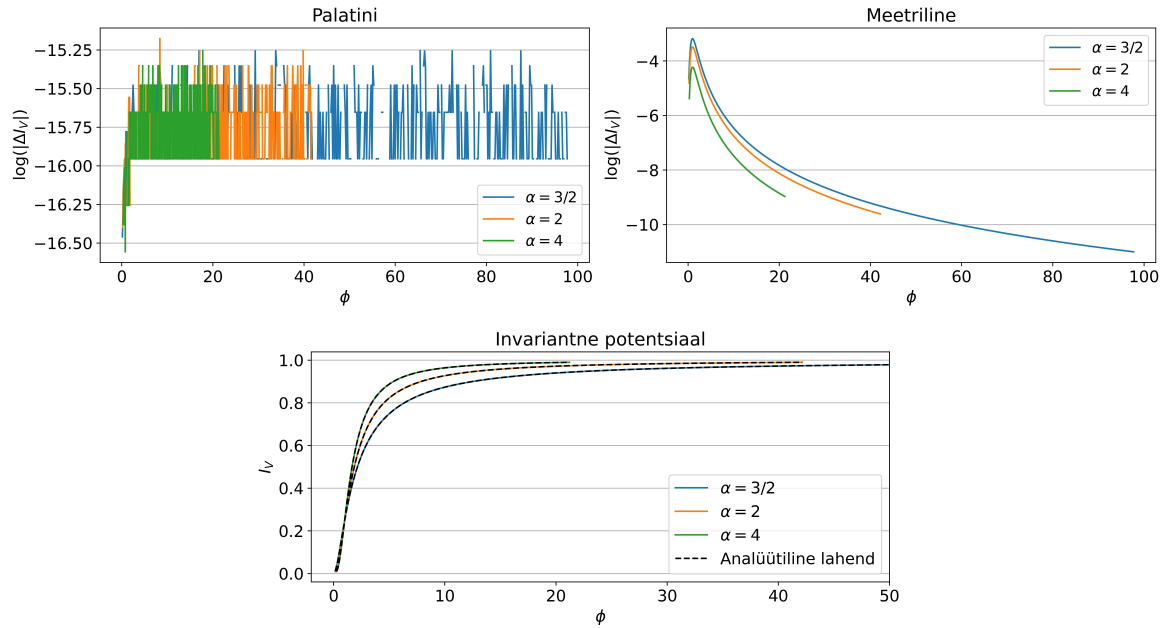
Antud alapeatükis on esitatud kolm lahendamise meetodit:

- võrrelda invariantset potentsiaali;
- võrrelda invariantset skalaarvälja;

- võrrelda invariantse skalaarvälja tuletist.

3.5.1 Invariantse potentsiaali võrdlemine

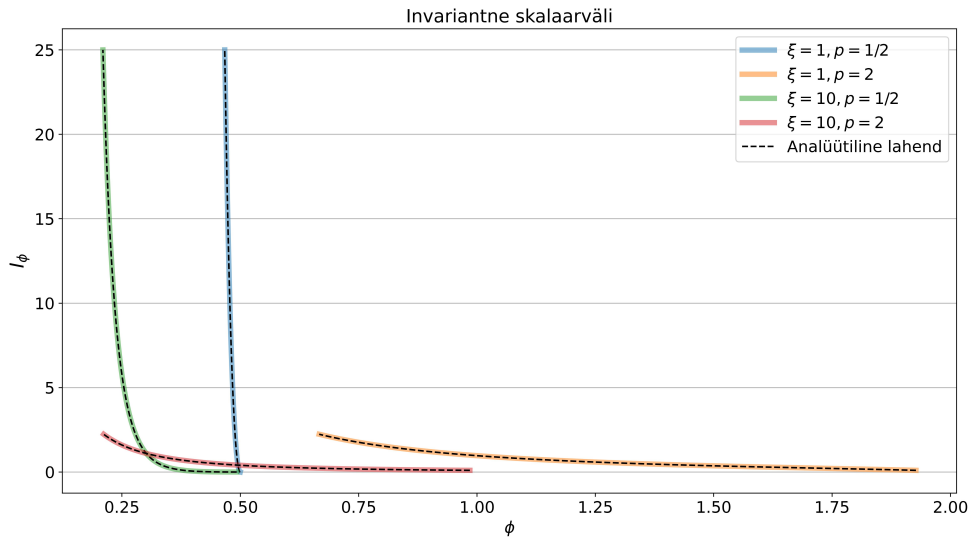
Esimene võrdlemise meetod põhineb ideel, et kui arvutada invariantne potentsiaal kahel üksteisest sõltumatul, meetodil siis mudelid on samaväärsed. Esimesel juhul lähtutakse invariantse potentsiaali definitsioonist (2.4). Teisel juhul tuleb arvutada invariantse skalaarvälja I_ϕ integraal (2.5) kas analüütiliselt või numbriliselt. Integreerimiskonstant või numbrilise arvutamise juhul algväärtus tuleb määrata ühe teadaoleva punkti kaudu. Näiteks võib arvutada invariantse välja ja skalaarvälja väärtused inflatsiooni lõpus. Seejärel tuleb saadud tulemus asendada funktsiooni $I_V(I_\phi)$. Lõpuks tuleb kahte lahendit omavahel võrrelda. Kui skalaarvälja väärtustel, kus toimub inflatsioon, on lahendid võrdsed, siis antud mudelid on ekvivalentsed. Sellisel võrdlemisel leitakse seega erinevus $\Delta I_V = \frac{V(\phi)}{A(\phi)^2} - I_V[I_\phi(\phi)]$. Näide Starobinsky potentsiaalile (3.2a-3.2d) vastaval juhul on esitatud joonisel 3.14.



Joonis 3.14: Arvutused on tehtud nii meetrilise kui ka Palatini formalismi jaoks. Kahel ülemisel graafikul on võrreldud kuidas erinevad kahel viisil leitud lahendid $\Delta I_V = I_V[I_\phi(\phi)] - \frac{V(\phi)}{A(\phi)^2}$. Tähelepanu tasub pöörata ordinaatteljele, kus kuvatakse lahendite erinevuse logaritmi väärtust ehk seda kui mitmendas komakohas esineb erinevus. Arvutamisel kasutati andmetüüpi, mis võimaldab teha arvutusi kuni 15 komakoha täpsusega. Palatini formalismi korral olid arvutused täpsemad kui meetrilise korral, kus erinevus on halvimal juhul ka neljandas komakohas. Seda oli ka oodata, sest Palatini formalismis on I_ϕ arvutamine kergem – integraal (2.5) sisaldab vähem liikmeid. Alumisel graafikul on kujutatud ka meetrilise formalismi kaudu saadud invariantse potentsiaali numbrilist lahendit koos analüütilise lahendiga, mis on sama kujuga.

3.5.2 Invariantse skalaarvälja võrdlemine

Teine meetod on võrrelda kahel erineval viisil arvutatud invariantset skalaarvälja väärtusi. Esimesel juhul tuleb arvutada integraal (2.5). Teisel juhul tuleb leida invariantse potentsiaalile vastav pöördfunktsioon $I_\phi(I_V)$. Seejärel tuleb teha asendus $I_V \rightarrow \frac{V(\phi)}{A(\phi)^2}$, kusjuures vaja on veenduda, et integreerimisel määratud konstant või numbrilise lahendamise puhul algtingimus on õigesti valitud. Sellisel viisil leitakse erinevus $\Delta I_\phi = I_\phi[I_V(\phi)] - I_\phi(\phi)$. Sarnaselt invariantse potentsiaali leidmise juhule võib selleks punktiks kasutada näiteks inflatsiooni lõpus olevaid väljade väärtusi. Tulemused kolmanda mudeli (3.3a - 3.3d) näitel on esitatud joonisel 3.15.



Joonis 3.15: Joonisel on esitatud numbriline tulemus ning võrreldud seda analüütiliselt arvutatud tulemusega. Kuna $A(\phi)$ on konstantne, siis Palatini ja meetrilisel juhul on lahendid samad.

3.5.3 Invariantse skalaarvälja tuletise võrdlemine

Kolmanda võrdlusmeetodina on programmis võimalik võrrelda invariantse välja tuletist skalaarväljast läbi kahe sõltumatu meetodi. Selleks tuleb arvutada invariantse potentsiaali I_V pöördfunktsioon $I_\phi(I_V)$, asendada $I_V \rightarrow \frac{V(\phi)}{A(\phi)^2}$ ning leida tuletis $\frac{d}{d\phi} I_\phi[I_V(\phi)]$. Saadud tulemust tuleb võrrelda funktsiooniga $\frac{dI_\phi}{d\phi} = \sqrt{F(\phi)}$, mis on defineeritud valemiga (2.5). Kui saadud lahendid on samad, siis saab öelda, et invariantne skalaarväli on konstandi täpsusega võrdne. Seega peavad ka mudelite ennustused vaatlustele olema samad. Sellisel võrdlemisel leiame seega erinevuse $\Delta \frac{dI_\phi}{d\phi} = \frac{dI_\phi[I_V(\phi)]}{d\phi} - \sqrt{F(\phi)}$.

3.6 Edasiarendus

Võrreldes bakalaureusetööga [23] on paljusid meetodeid täiendatud ning lisatud on ka moodul Mpmath täpsemateks arvutusteks. Samuti on võimalik numbriliselt leida ka funktsiooni $A(\phi)$. Varasemalt esinenud probleem numbrilise tuletise võtmisega on lahendatud sellega, et kasutaja saab defineerida funktsioone ainult analüütilisel kujul ja seega on võimalik kõik tuletise võtmised teha sümbolkujul. Lisaks sellele on kõik vormistatud Pythoni paketi, mida oleks võimalik teistel inimestel kasutada. Töö käigus valmisid ka Jupyter Notebooki töölehed (Lisad A, B, C).

Valminud teegi puhul võib välja tuua mõned puudused:

- puudub korralik dokumentatsioon. Esialgse lahendusena on selle asemel võimalik vaadata töölehti, kus peamised funktsionaalsused on esitatud;
- kui $A(\phi)$, $B(\phi)$ või $V(\phi)$ numbriliselt välja arvutada, siis ei ole võimalik antud funktsioone kasutada vaatlustulemuste arvutamiseks. See ei ole kõige suurem probleem, sest sellisel juhul on defineeritud invariantne potentsiaal;
- lisaks oleks vaja kirjutada meetod, mis võimaldaks võrrelda mudeleid ka juhul, kui mõlemad mudelid on defineeritud funktsioonide $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ kaudu.

Kokkuvõte

Varajases universumis toimunud inflatsiooni kirjeldamiseks on osutunud kõige paremaks selline mudel, kus inflatsiooni põhjustab skalaarvälja ϕ dünaamika. Algselt defineeriti teooria, kus skalaarväli oli gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Kasutades aeglase veere-mise lähendit, kus skalaarvälja potentsiaal domineerib kineetilise liikme üle, on võimalik tuletada teooria ennustused vaatlustele. Osutub, et teooria mõjufunktsionaal on võimalik kirja panna ka üldisemal juhul, kus skalaarvälja saab käsitleda osana gravitatsiooniväljast. Sellist teooriat nimetatakse mitte-minimaalselt seotud teooriaks. Viimaste aastate relikt-kiirguse mõõtmised võimaldavad tuvastada üha paremini erinevate inflatsioonimudelite kooskõla vaatlustega.

Käesolevas töös rakendati invariantide formalismi, mille raames on võimalik teisendada mitte-minimaalselt seotud teooria minimaalselt seotud teooriaks. See asjaolu võimaldab kasutada minimaalselt seotud teooria jaoks arendatud valemeid ja tulemusi. Käesoleva töö ühe osana sai veendutud, et invariantide formalismi korrektsuses.

Antud töö põhiosana valmis Pythoni teek, mida kasutades on võimalik lahendada erinevaid ülesandeid gravitatsiooniga mitte-minimaalselt seotud inflatsiooniteooria raamistikus. Selleks kasutati invariantide formalismi. Arvutustes on võimalik valida Palatini ja meetrilise formalismi vahel. Arvutusi on võimalik teha sümbolkujul kui ka numbriliselt. Kuna analüütilised arvutused antud teoorias osutuvad tihti keeruliseks, siis on numbrilise arvutuse meetodid väga olulised. Programmiga on võimalik lahendada järgmisi ülesandeid:

- arvutada mudelile vastavad skalaarne spektraalindeks n_s , tensor-skalaar häirituste suhe r ning häirituste amplituud A_s ;
- leida tundmatu mudelfunktsioon hulgast $A(\phi)$, $B(\phi)$ või $V(\phi)$, kui kaks mudelfunktsiooni on antud ja otsime vastavust invariantse potentsiaaliga;
- arvutada Einsteini ja Jordani raami vahelise N -väärtuse parandit, kui on antud teooriat kirjeldavad mudelfunktsioonid;
- võrrelda, kas invariantse potentsiaali kaudu esitatud mudel on ekvivalentne mudelfunktsioonide $A(\phi)$, $B(\phi)$ ja $V(\phi)$ kaudu esitatud mudeliga.

Pythoni teegiga tehtud arvutusi on võrreldud teadaolevate analüütiliste mudelite lahenditega. Seejuures on võrreldud ka numbrilise arvutuse täpsust. Programmis kasutatakse Pythoni teeki, millega on soovi korral võimalik ka täpsust suurendada. Veendutud on, et

kirjutatud kood on töökorras ning saadud tulemusi võib usaldada.

Töö ühe olulise osana valmisid ka Jupyter Notebooki töölehed, mida kasutades on võimalik eespool kirjeldatud ülesandeid lahendada nii, et vajalikud on üksnes baasteadmised kosmoloogilisest inflatsiooniteooriast ja Pythoni koodist. Antud töö käigus kirjutatud Pythoni arvutuspaketti on võimalik kätte saada teegi GitHubi koodivaramust leheküljelt <https://github.com/vasarm/InflationPy>.

Tänuavaldused

Ma tänan oma juhendajat Margus Saali kellega sai palju arutatud antud lõputöö teemal. Samuti kelle abil ja juhendamisel antud magistritöö ka lõpuks valmis. Samuti tänan kaasõpilasi kellega kahe aasta jooksul kokku puutusin ja kes tegid õppetöö palju toredamaks.

Martin Vasar

Kasutatud kirjandus

- [1] G. Gamow, „The origin of elements and the separation of galaxies,” *Phys. Rev.* **74**, 505–506 (1948).
- [2] G. Gamow, „The Evolution of the Universe,” *Nature* **162**, 680–682 (1948).
- [3] A. A. Penzias and R. W. Wilson, „A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.” *Astrophysical Journal* **142**, 419–421 (1965).
- [4] A. H. Guth, „Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Phys. Rev. D* **23**, 347–356 (1981).
- [5] A. N. *et al.*, „Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020).
- [6] P. A. R. Ade *et al.*, „Improved constraints on primordial gravitational waves using planck/ , WMAP, and BICEP/ keck observations through the 2018 observing season,” *Physical Review Letters* **127** (2021).
- [7] V. Faraoni, *Cosmology in scalar tensor gravity* (2004).
- [8] A. Starobinsky, „A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Phys. Rev. B* **91**, 99 – 102 (1980).
- [9] F. L. Bezrukov and M. Šhaposnikov, „The Standard Model Higgs boson as the inflaton,” *Phys. Lett. B* **659**, 703–706 (2008).
- [10] É. É. Flanagan, „The conformal frame freedom in theories of gravitation,” *Classical and Quantum Gravity* **21**, 3817–3829 (2004).
- [11] R. H. Dicke, „Mach’s principle and invariance under transformation of units,” *Phys. Rev.* **125**, 2163–2167 (1962).
- [12] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, and O. Vilson, „Invariant quantities in the scalar-tensor theories of gravitation,” *Phys. Rev. D* **91**, 024041 (2015).
- [13] L. Järv, K. Kannike, L. Marzola, A. Racioppi, M. Raidal, M. Rünkla, M. Saal, and H. Veermäe, „Frame-independent classification of single-field inflationary models,” *Phys. Rev. Lett.* **118**, 151302 (2017).

- [14] L. Järv, A. Karam, A. Kozak, A. Lykkas, A. Racioppi, and M. Saal, „On the equivalence of inflationary models between the metric and palatini formulation of scalar-tensor theories,” *Physical Review D* arXiv:2005.14571v2 (2020).
- [15] „Cosmic anniversary: 'big bang echo' discovered 50 years ago today,” <https://www.space.com/25945-cosmic-microwave-background-discovery-50th-anniversary.html>. Kasutatud: 23.05.2022.
- [16] D. Baumann, „Tasi lectures on inflation,” arXiv:0907.5424 (2009).
- [17] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, 2006).
- [18] J. A. Vázquez, L. E. Padilla, and T. Matos, „Inflationary Cosmology: From Theory to Observations,” *Revista Mexicana de Física E* arXiv:1810.09934v2 (2020).
- [19] A. R. Liddle, P. Parsons, and J. D. Barrow, „Formalizing the slow-roll approximation in inflation,” *Phys. Rev. D* **50**, 7222–7232 (1994).
- [20] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure* (Cambridge University Press, 2009).
- [21] E. W. Weisstein, „Wiener-khinchin theorem. from mathworld—a wolfram web resource.” <https://mathworld.wolfram.com/Wiener-KhinchinTheorem.html>. Kasutatud: 29.05.2022.
- [22] P. Kuusk, M. Rünkla, M. Saal, and O. Vilson, „Invariant slow-roll parameters in scalar tensor theories,” *Class. Quant. Grav.* **33**, 195008 (2016).
- [23] M. Vasar, „Erinevad inflatsioonimudelid skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteoorias,” (2020).
- [24] A. Racioppi and M. Vasar, „On the number of e-folds in the jordan and einstein frames,” *Eur. Phys. J. Plus* **137**, 637 (2022).
- [25] Charles R. H. *et al.*, „Array programming with NumPy,” *Nature* **585**, 357–362 (2020).
- [26] P. Virtanen *et al.*, „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *Nature Methods* **17**, 261–272 (2020).
- [27] A. Meurer *et al.*, „SymPy: symbolic computing in python,” *PeerJ Computer Science* **3**, e103 (2017).
- [28] F. Johansson *et al.*, *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.2)* (2021). <http://mpmath.org/>.
- [29] K. Kristjuhan, „Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelite võrdlemine vaatlustega,” (2018).

- [30] R. Kallosh and A. Linde, „Planck, lhc, and α -attractors,“ *Physical Review D* **91** (2015).
- [31] M. A. Y. Akrami, F. Arroja *et al.*, „Planck 2018 results. x. constraints on inflation,“ *Astronomy & Astrophysics* **641**, A10 (2020).

A. Tööleht vaatluslike parameetrite arvutamiseks

Observables

May 30, 2022

```
[1]: # For symbolic calculations
import sympy as sp
# For numeric calculations
import numpy as np

# For plotting
import matplotlib.pyplot as plt

from inflationpy import SlowRollModel, SlowRollEndSolver, SlowRollStartSolver
```

1 Notebook for calculating observables

Non-minimally coupled scalar field action:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} A(\phi) R - \frac{1}{2} B(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right\} \quad (1)$$

1.1 1) Define model functions

To start calculating, required symbols must be defined. By default SlowRollModel assumes that 'phi' is used as scalar field ('I_phi' for invariant field) symbol and 'M_p' as Planck's mass. If other symbols are used then this information must be given to the SlowRollModel class.

To define symbols and equations it is advised to use sympy although it can try to convert strings to equations as well this method is not too reliable. To look more how to define functions with sympy: <https://docs.sympy.org/latest/modules/functions/index.html#contents>

```
[2]: # Define symbols. phi for scalar field and I_phi for invariant scalar field.
phi, I_phi = sp.symbols('phi I_phi', real=True)
# Define model specific free parameters and Planck's mass
alpha, M_p = sp.symbols('alpha M_p', real=True, positive=True)
# Also program uses some default symbols: 'N' for e-folds
N = sp.symbols('N', real=True, positive=True)
```

```
[3]: # Define functions.
A = 1
B = 6*alpha/(phi/M_p-1)**2
V = (phi/M_p - 2)**2 * (phi/M_p)**2/((phi/M_p)**2 - 2*phi/M_p + 2)**2
```

```
I_V = sp.tanh(I_phi/(sp.sqrt(6*alpha)*M_p))**2
```

Put all functions into SlowRollModel class which then sets up all required combinations for later calculations. It is possible to define only some of the functions. Although to calculate observables (A, B, V) or invariant potential must be defined.

When only invariant potential is defined then it is possible to use it two ways: Set: A=1, B=1 and V=invariant potential or set I_V = invariant potential.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu I_\phi \nabla_\nu I_\phi - I_V(I_\phi) \right\} \quad (2)$$

Invariant functions are defined as:

$$I_V = \frac{V}{A^2} \quad (3)$$

$$I_\phi = \int \sqrt{\frac{B}{A} + \delta_\Gamma \frac{3}{2} M_p^2 \left(\frac{A'}{A} \right)^2} d\phi \quad (4)$$

where $\delta_\Gamma = 1$ for metric formalism and 0 for Palatini.

SlowRollModel will calculate following equations: 1) Slow-roll parameters ϵ and η . 2) For scalar field $F(\phi) = \frac{B}{A} + \delta_\Gamma \frac{3}{2} M_p^2 \left(\frac{A'}{A} \right)^2$ 3) Also N-fold integrand $\frac{AVF}{AV'-2VA'} = \frac{I'_V}{I_V}$ 4) Observable functions from ϵ and η .

```
[4]: # A, B, V and I_V and functions which are possible to define
# palatini (True/False) - to use Palatini formalism or not
# symbol is set to phi (this is actually not required if phi=sp.Symbol('phi',
# real=True))
# Planck's mass symbol/value is set to M_p (this is actually not required if
# mp=sp.Symbol('M_p', real=True, positive=True))
model = SlowRollModel(A=A, B=B, V=V, I_V=I_V, palatini=False, symbol=phi,
# symbolI=I_phi, mp=M_p)
# Try to simplify all functions (also which are calculated in model). This
# might make later calculations easier/faster.
model.simplify()
model.simplify(invariant=True)
model
```

```
[4]: A = 1
B = 6*alpha/(-1+phi/M_p)**2
V = phi**2*(-2+phi/M_p)**2/(M_p**2*(2-2*phi/M_p+phi**2/M_p**2))
I_V = tanh**2(sqrt(6)*I_phi/(6*M_p*sqrt(alpha)))
```

1.2 2) Calculate scalar field values at the end of inflation

This is defined by condition:

$$\epsilon = 1 \quad (5)$$

In this paragraph is showed how to calculate field values for scalar field and invariant scalar field. Simply this requires to say solver if to use invariant potential or not.

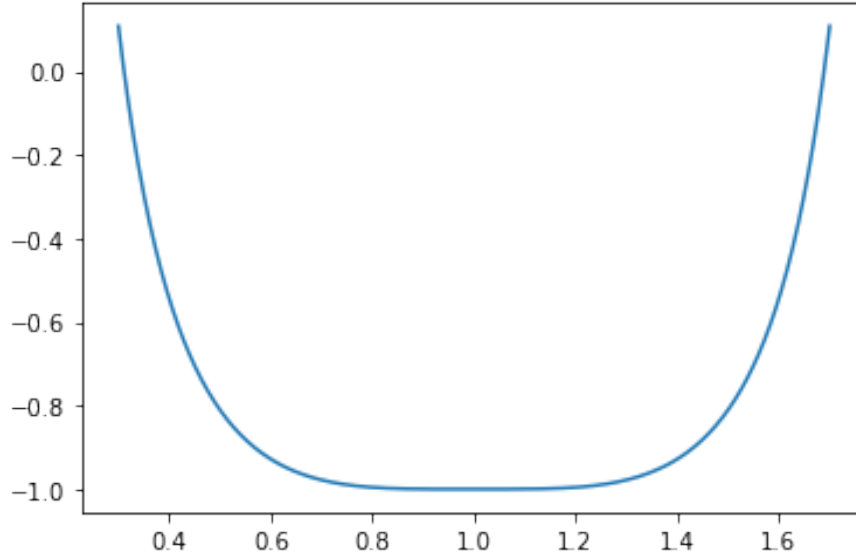
```
[5]: # Use functions A, B and V to calculate inflation end value
end_solver = SlowRollEndSolver(model, invariant=False)
```

```
[6]: # Currently sympy finds multiple solutions for end value. Calculate for alpha=2
      and M_p=1
analytical_end = end_solver.solve()
display(analytical_end[2].subs({alpha:2, M_p:1}))
print(sp.N(analytical_end[2].subs({alpha:2, M_p:1})))
```

$$\frac{2^{\frac{3}{4}} \left(-3^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{14 - 4\sqrt{10}} + 3\sqrt[4]{2} \right)}{6}$$

0.311161943699334

```
[7]: # To look beforehand where the roots might be let's calculate some function
      values
x = np.linspace(0.3, 1.7, 1000)
epsilon_values = model.epsilon.f_n(x, M_p=1, alpha=2) - 1 # We have parameters
      M_p and alpha as free parameters. Assign some values
plt.plot(x, epsilon_values)
# We can see that there are two roots between [0, 2]. Let's calculate for range
      [0, 1].
plt.show()
```



```
[8]: # Results are in list, so take first value as this is what we wanted
# nsolve_np uses scipy method to find roots. It is also possible to use mpmath
# package with nsolve_mp
numerical_end = end_solver.nsolve_np([0, 1], params={M_p:1, alpha:2})[0]
print("End value for alpha=2, M_p=1 in range [0, 1]: ", numerical_end)
# Numerical value is same as analytical
```

End value for alpha=2, M_p=1 in range [0, 1]: 0.3111619436993338

1.3 3) Calculate scalar field values at the beginning of inflation

Solve differential equation $\frac{d\phi}{dN} = \frac{AV' - 2VA'}{AVF}$ with initial condition ($\phi_0 = \phi_{\text{end}}$; $N = 0$)

```
[9]: # Use A, B and V functions to for calculations
initial_solver = SlowRollStartSolver(model, invariant=False)
# Calculate function phi_0(N) from N=0 to N=N_max. By default N_max = 100
initial_value_function = initial_solver.nsolve_np(end_value=numerical_end,
# N_max=100, params={"M_p":1, 'alpha':2})
# To calculate initial scalar field value at the N just insert required N value
# into the function
# initial_value_function(N) -> returns initial scalar field value at N.
# To use mpmath for solver use nsolve_mp
```

```
[10]: print(f'Scalar field initial value with N=50: {initial_value_function(50)}')
print(f'Scalar field initial value with N=60: {initial_value_function(60)}')
```

Scalar field initial value with N=50: [0.87968121]

Scalar field initial value with N=60: [0.88978241]

1.4 4) Calculate values for observables at N=50 and N=60

This requires scalar field values at the start of inflation. Functions are already defined in model.

```
[11]: # Uses sympy to calculate ns and returns sp.Expr type value. To find numerical_
      ↪value for that use sp.N
n_s50 = model.calculate_ns(initial_value_function(50), params={M_p:1, alpha:2})
print('n_s (N=50) =', n_s50)
print('n_s (N=50) =', sp.N(n_s50[0]))
# Uses numpy to calculate ns. To use mpmath use calculate_ns_mp
n_s60 = model.calculate_ns_np(initial_value_function(60), params={M_p:1, alpha:
      ↪2})
print('n_s (N=60) =', n_s60)
```

```
n_s (N=50) = [0.960253236166713]
n_s (N=50) = 0.960253236166713
n_s (N=60) = [0.96680393]
```

```
[12]: # Uses sympy to calculate ns and returns sp.Expr type value. To find numerical_
      ↪value for that use sp.N
r50 = model.calculate_r(initial_value_function(50), params={M_p:1, alpha:2})
print('r (N=50) =', r50)
print('r (N=50) =', sp.N(r50[0]))
# Uses numpy to calculate ns
r60 = model.calculate_r_np(initial_value_function(60), params={M_p:1, alpha:2})
print('r (N=60) =', r60)
```

```
r (N=50) = [0.00894549943140786]
r (N=50) = 0.00894549943140786
r (N=60) = [0.00629826]
```

```
[13]: # Calculate current model's amplitude of the scalar power spectrum A_s
A_s_scalar = model.A_s.f_n(initial_value_function(60), M_p=1, alpha=2)
print("A_s =", A_s_scalar)
# We need to normalize potential to get correct value
normalize = sp.N(model.
      ↪normalize_potential(scalar_value=initial_value_function(60)[0], params={M_p:
      ↪1, alpha:2}))
print("Normalization for potential:", normalize)
```

```
A_s = [10.21608199]
Normalization for potential: 0.00378596860502031
```

1.5 4) Calculate observable values for invariant field

This time we try to calculate values for multiple alpha values. As analytical solution is not available we have to do it numerically. To make calculations faster without selecting values we assume that if multiple roots exist we select the closest to minimum.

```

[14]: end_solver2 = SlowRollEndSolver(model, invariant=True)
alpha_values = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256]

invariant_end_values = []
for alpha_value in alpha_values:
    # Select first root value (results are ordered from lowest to highest)
    calculated_end_value = end_solver2.nsolve_np([0, 5], params={alpha:
    ↵alpha_value, M_p:1})[-1]
    invariant_end_values.append(calculated_end_value)

[15]: initial_solver2 = SlowRollStartSolver(model, invariant=True)
invariant_initial_functions = []
for alpha_value, end_value in zip(alpha_values, invariant_end_values):
    # Find numerical functions  $\phi(N)$ 
    function = initial_solver2.nsolve_np(end_value, params={alpha:alpha_value,
    ↵M_p:1})
    invariant_initial_functions.append(function)

Finally we have all required to make plots

[16]: # Load latest observable results (published 2018 and 2021)
from inflationpy.data.data import load_planck_data
sigma1_ns, sigma1_r, sigma2_ns, sigma2_r = load_planck_data()

[17]: sp.N(model.calculate_ns(invariant_initial_functions[1](50), params={alpha:2,
    ↵M_p:1}, invariant=True)[0])

[17]: 0.960293750739217

[18]: # Create matplotlib object
fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 7))
fontsize = 15

ax.set_ylim(0, 0.09)
ax.set_xlim(0.95, 0.985)
ax.set_xlabel("$n_s$", fontsize=fontsize)
ax.set_ylabel("$r$", fontsize=fontsize, rotation=0)

ax.fill_between(sigma2_ns, sigma2_r, label='$2\\sigma$', color='lightgrey',
    ↵alpha=0.3)
ax.fill_between(sigma1_ns, sigma1_r, label='$1\\sigma$', color='grey', alpha=0.
    ↵2)

color_iterator = plt.cm.rainbow(np.linspace(0, 1, len(alpha_values)))
# Plot  $n_s$  and  $r$  points
for initial_function, alpha_value, color in zip(invariant_initial_functions,
    ↵alpha_values, color_iterator):
    ax.scatter(

```

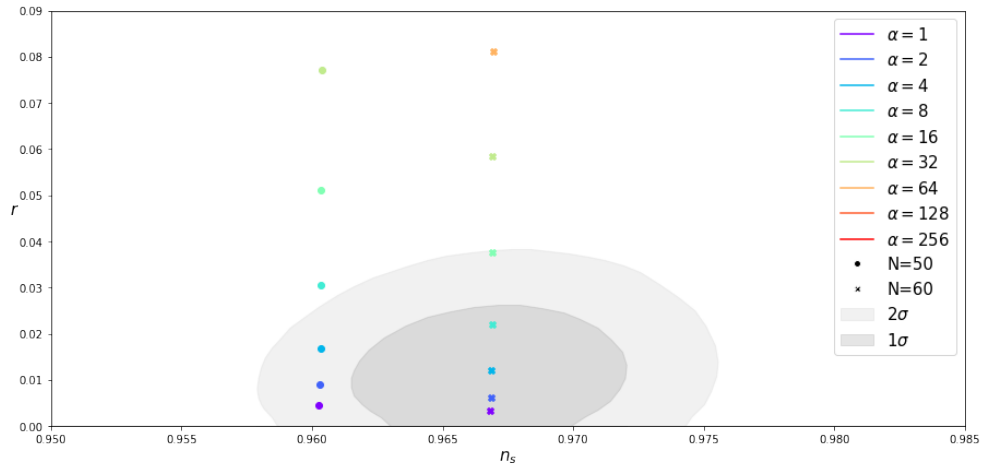
```

        model.calculate_ns_np(initial_function([50]), params={alpha:
alpha_value, M_p:1}, invariant=True),
        model.calculate_r_np(initial_function([50]), params={alpha:alpha_value,
M_p:1}, invariant=True),
        color=color, marker='o')
    ax.scatter(
        model.calculate_ns_np(initial_function([60]), params={alpha:
alpha_value, M_p:1}, invariant=True),
        model.calculate_r_np(initial_function([60]), params={alpha:alpha_value,
M_p:1}, invariant=True),
        color=color, marker='X')

custom_legend = []
for alpha_value, c in zip(alpha_values, color_iterator):
    custom_legend.append(plt.Line2D([0], [0], color=c, linestyle='-',
label=f'$\\alpha$={alpha_value}$'))
custom_legend.append(plt.Line2D([0], [0], marker='o', color='white',
markerfacecolor='black', label='N=50'))
custom_legend.append(plt.Line2D([0], [0], marker='X', color='white',
markerfacecolor='black', label='N=60'))
old_handles, old_labels = ax.get_legend_handles_labels()
custom_legend = custom_legend + old_handles
ax.legend(handles=custom_legend, fontsize=fontsize)

plt.show()

```



B. Tööleht tundmatu funktsiooni leidmiseks

Unknown_functions

May 30, 2022

```
[1]: # For symbolic calculations
import sympy as sp
# For numeric calculations
import numpy as np

# For plotting
import matplotlib.pyplot as plt

from inflationpy import SlowRollModel, SlowRollEndSolver, FunctionAsolver,
FunctionBsolver, FunctionVsolver
```

1 Notebook for calculating unknown functions

Non-minimally coupled scalar field action:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} A(\phi) R - \frac{1}{2} B(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right\} \quad (1)$$

1.1 1) Define model functions

To start calculating, required symbols must be defined. By default SlowRollModel assumes that 'phi' is used as scalar field ('I_phi' for invariant field) symbol and 'M_p' as Planck's mass. If other symbols are used then this information must be given to the SlowRollModel class.

To define symbols and equations it is advised to use sympy although it can try to convert strings to equations as well this method is not too reliable. To look more how to define functions with sympy: <https://docs.sympy.org/latest/modules/functions/index.html#contents>

```
[2]: # Define symbols. phi for scalar field and I_phi for invariant scalar field.
phi, I_phi = sp.symbols('phi I_phi', real=True)
# Define model specific free parameters and Planck's mass
alpha, M_p = sp.symbols('alpha M_p', real=True, positive=True)
# Also program uses some default symbols: 'N' for e-folds
N = sp.symbols('N', real=True, positive=True)
```

```
[3]: # Define functions.
A = 1
B = 6*alpha/(phi/M_p-1)**2
```

```
V = (phi/M_p - 2)**2 * (phi/M_p)**2/((phi/M_p)**2 - 2*phi/M_p + 2)**2
I_V = sp.tanh(I_phi/(sp.sqrt(6*alpha)*M_p))**2
```

Put all functions into SlowRollModel class which then sets up all required combinations for later calculations. It is possible to define only some of the functions. Although to calculate observables (A, B, V) or invariant potential must be defined.

When only invariant potential is defined then it is possible to use it two ways: Set: A=1, B=1 and V=invariant potential or set I_V = invariant potential.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu I_\phi \nabla_\nu I_\phi - I_V(I_\phi) \right\} \quad (2)$$

Invariant functions are defined as:

$$I_V = \frac{V}{A^2} \quad (3)$$

$$I_\phi = \int \sqrt{\frac{B}{A} + \delta_\Gamma \frac{3}{2} M_p^2 \left(\frac{A'}{A} \right)^2} d\phi \quad (4)$$

where $\delta_\Gamma = 1$ for metric formalism and 0 for Palatini.

SlowRollModel will calculate following equations: 1) Slow-roll parameters ϵ and η . 2) For scalar field $F(\phi) = \frac{B}{A} + \delta_\Gamma \frac{3}{2} M_p^2 \left(\frac{A'}{A} \right)^2$ 3) Also N-fold integrand $\frac{AVF}{AV'-2VA'} = \frac{I'_V}{I_V}$ 4) Observable functions from ϵ and η .

```
[4]: # A, B, V and I_V and functions which are possible to define
# palatini (True/False) - to use Palatini formalism or not
# symbol is set to phi (this is actually not required if phi=sp.Symbol('phi',
# real=True))
# Planck's mass symbol/value is set to M_p (this is actually not required if
# mp=sp.Symbol('M_p', real=True, positive=True))
model = SlowRollModel(A=A, B=B, V=V, I_V=I_V, palatini=False, symbol=phi,
# mp=M_p)
# Try to simplify all functions (also which are calculated in model). This
# might make later calculations easier/faster.
model.simplify()
model
```

```
[4]: A = 1
B = 6*alpha/(-1+phi/M_p)**2
V = phi**2*(-2+phi/M_p)**2/(M_p**2*(2-2*phi/M_p+phi**2/M_p**2))
I_V = tanh**2(sqrt(6)*I_phi/(6*M_p*sqrt(alpha)))
```

1.2 2) Find Function A

$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{4AVV' \pm |I_\phi^*|^{-1} \sqrt{16A^5BV^2 + \delta_\Gamma 6M_p^2 A^6 [V'^2 - A^3 B I_\phi^{*-2}]}}{8V^2 - \delta_\Gamma 3M_p^2 A^4 I_\phi^{*-2}} \quad (5)$$

This is analytically impossible to solve usually. So we need to turn to numerical solving. This requires to set initial condition. We can use following solution. 1) As we have invariant potential, we can calculate it's value. For example we calculate invariant potential value at the end of inflation. 2) Insert potential value to invariant potential definition. 3) Select scalar field value for end of inflation and calculate A

$$A = \sqrt{\frac{V(\phi_{\text{end}})}{I_V(I_{\phi_{\text{end}}})}} \quad (6)$$

```
[5]: # Define solver
a_solver = FunctionAsolver(model)
# Define parameter values
parameters = {M_p:1 , alpha:2}
# Find invariant potential inverse function. Currently sympy finds two
# solutions. We select the sceond solution.
inverse_I_V = a_solver.inverse_invariant_potential()[1]
# Find initial condition for function. For that we use invariant potential
# definition.
end_value_solver = SlowRollEndSolver(model, invariant=True)
invariant_end = end_value_solver.nsolve_np([0, 2], params=parameters)[0]
# For one sample calculate current model's field value at the end of inflation
end_value_solver2 = SlowRollEndSolver(model, invariant=False)
field_end = end_value_solver2.nsolve_np([0, 5], params=parameters)[0]
# We select initial value such that V/I_V isn't equal to 0/0
# Also B and V functions must behave well. Thus we can see at field=1 we have
# singularity.
A_initial_value1 = a_solver.return_initial_condition_np(invariant_end_value =
# invariant_end, field_value=0.1, params=parameters)
# A_initial_value2 corresponds to our current A, B, V functions
A_initial_value2 = a_solver.return_initial_condition_np(invariant_end_value =
# invariant_end, field_value=field_end, params=parameters)
```

```
[6]: (model.V.f_s()/model.I_V.f_s()).subs({M_p:1, alpha:2})
```

$$[6]: \frac{\phi^2 (\phi - 2)^2}{(\phi^2 - 2\phi + 2)^2 \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{3} I_\phi}{6} \right)}$$

Solving differential equation we have to select sign value. This depend on our functions and which way field should move. Currently no good explanation which sign in which case we must take. Also when choosing initial conditions for scalar field we have to analyze other functions as well to not take values at singularteis. For B it is $\phi = M_P$.

numerical_solution_1 is solution where for initial condition we take, that scalar field = 0.1 and we calculate A value for that.

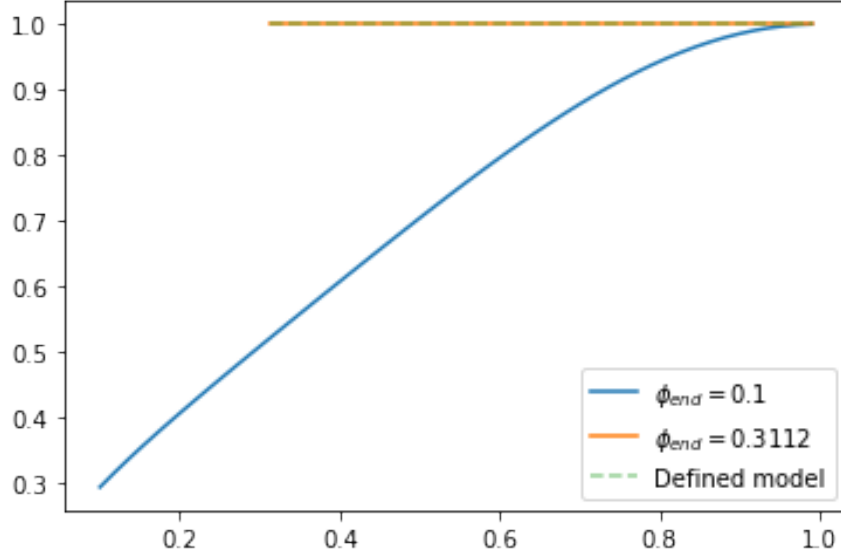
numerical_solution_2 is solution where we take known A function and calculation end value for our A, B, V functions. This is only for testin purposes as we don't know that if we try to solve for A.

```
[7]: # With initial condition phi=1
# From B function we have limitation that at 1 is singularity. Thus we
# calculate between (0, 1)
# sc_kwargs let's us change settings for scipy solve_ivp settings
numerical_solution_1 = a_solver.nsolve_np(
    x=[0.1, 0.99],
    y0=A_initial_value1,
    invariant_potential_inverse = inverse_I_V,
    sign='-',
    params=parameters,
    sc_kwargs={'atol':1e-9, 'rtol':1e-9})

numerical_solution_2 = a_solver.nsolve_np(
    x=[field_end, 0.99],
    y0=A_initial_value2,
    invariant_potential_inverse = inverse_I_V,
    sign='-',
    params=parameters,
    sc_kwargs={'atol':1e-9, 'rtol':1e-9})
```

Let's test our found functions by plotting these functions.

```
[8]: x1 = np.linspace(0.1, 0.99)
x2 = np.linspace(field_end, 0.99)
plt.plot(x1, numerical_solution_1(x1), label=f"$\\phi_{{end}}$={0.1}$")
plt.plot(x2, numerical_solution_2(x2), label=f"$\\phi_{{end}}$={field_end:.4f}$")
plt.plot(x2, model.A.f_n(x2, M_p=1, alpha=2), linestyle='--', alpha=0.5,
    label='Defined model')
plt.legend()
plt.show()
```



We can see that we have two different $A(\phi)$ solutions but this is okay as we used different initial conditions. This means we have different function to convert scalar field to invariant scalar field as well which in the end causes the difference in A function.

1.3 3) Find Function B

Calculating B function is easier in most cases. This only requires to find invariant potential inverse function analytically.

$$B = A \left[\left(\frac{dI_\phi}{d\phi} \right) - \delta_\Gamma \frac{3M_p^2}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 \right], \quad (7)$$

where $I_\phi = I_\phi(I_V)$ and we substitute I_V with $\frac{V}{A^2}$. Otherwise it is easy to calculate B analytically. Only problem is that sympy can't always simplify given expression to simple forms (if it exists). There are many reasons: first symbolic simplification is complicated and also we don't have correct assumptions for free parameters (and currently sympy does not provide it too).

```
[9]: b_solve = FunctionBsolver(model)
      # We can find two solutions. Let's select the second one
      invariant_potential_inverse = b_solve.inverse_invariant_potential()[1]
      invariant_potential_inverse
```

```
[9]: 
$$\frac{\sqrt{6}M_p\sqrt{\alpha}\log\left(-\frac{(2\sqrt{I_V+I_V+1})^3}{(I_V-1)^3}\right)}{6}$$

```

```
[10]: b_function = b_solve.solve(invariant_potential_inverse =  $\frac{\sqrt{6}M_p\sqrt{\alpha}\log\left(-\frac{(2\sqrt{I_V+I_V+1})^3}{(I_V-1)^3}\right)}{6}$ 
      ↪ invariant_potential_inverse)
      b_function
```

[10]:

$$M_p^2 \alpha \left(-1 + \frac{\phi^2 \left(-2 + \frac{\phi}{M_p} \right)^2}{M_p^2 \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2} \right)^6 \left(\frac{1 + \frac{2|\phi| \left| 2 - \frac{\phi}{M_p} \right|}{M_p \left| 2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right|} + \frac{\phi^2 \left(-2 + \frac{\phi}{M_p} \right)^2}{M_p^2 \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{6 \left(-\frac{2}{M_p} + \frac{2\phi}{M_p^2} \right) |\phi| \left| 2 - \frac{\phi}{M_p} \right| \operatorname{sign} \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)}{M_p \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2} + \frac{6 \left| 2 - \frac{\phi}{M_p} \right| \operatorname{sign}(\phi)}{M_p \left| 2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right|} + \frac{3\phi^2 \left(-2 + \frac{\phi}{M_p} \right)^2}{M_p^2 \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2} \right) - \frac{\left(-1 + \frac{\phi^2 \left(-2 + \frac{\phi}{M_p} \right)^2}{M_p^2 \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2} \right)^3}{M_p^2 \left(2 - \frac{2\phi}{M_p} + \frac{\phi^2}{M_p^2} \right)^2}$$

Lets compare result with known function There are couple of notions. We know that there is singularity in point $\phi = M_p$ and $I_\phi = 0$ which corresponds to $\phi = 0$ (look potential) can't be calculated, as ϵ_{I_ϕ} is not defined. We can see conditions for invariant field with

[11]: `model.inspect(invariant=True);`

$I_V : \phi \in \mathbb{R}$

$\epsilon : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

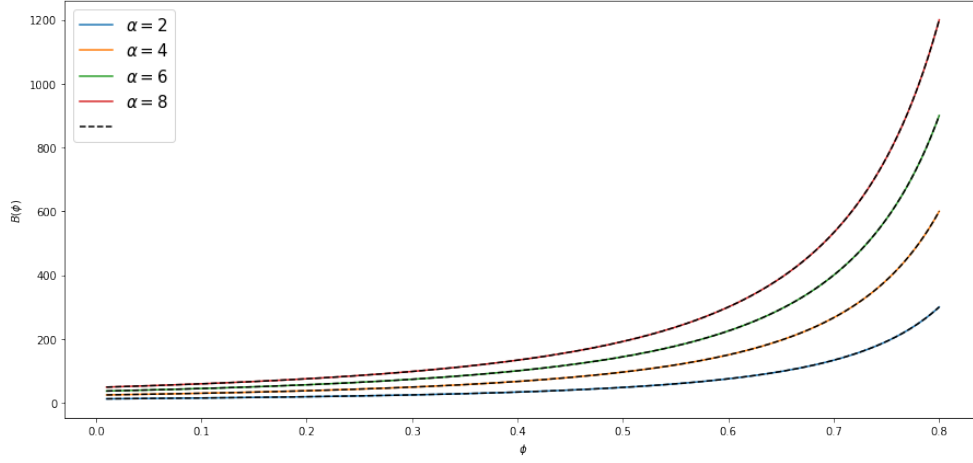
$\eta : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Intersection : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

```
[12]: fig, ax = plt.subplots(figsize=(15,7))

analytical_solution_marker = plt.Line2D([0], [0], linestyle='--', color='black')
# Calcualte values from 0.01 to 0.8
x = np.linspace(0.01, 0.8, 500)
for alpha_value in [2, 4, 6, 8]:
    known_B = model.B.f_n(x, alpha=alpha_value, M_p=1)
    calculated_B = b_function.f_n(x, alpha=alpha_value, M_p=1)
    ax.plot(x, calculated_B, label=f"$\\alpha = {alpha_value}$")
    ax.plot(x, known_B, linestyle='--', color='black')

ax.legend(handles = ax.get_legend_handles_labels()[0] +_
    ↵[analytical_solution_marker], fontsize=15)
ax.set_ylabel("$B(\\phi)$")
ax.set_xlabel("$\\phi$")
plt.show()
```



We can see our result is correct function.

1.4 4) Calculate V

To calculate potential function we need to solve invariant scalar field integral. To derive solution for V we can see it easily why:

$$I_V(I_\phi) = \frac{V}{A^2} \Rightarrow V = A^2 I_V(I_\phi) \quad (8)$$

If user knows the solution for invariant field integral or sympy can solve it analytically then the result can be used to find result analytically. In our case let's do it numerically.

There is no unique initial condition (we can set integration constant usually the value we want to). To just compare if our calculated solution is same as given model's one we have to calculate specific values. Also one example is if we choose our condition randomly.

```
[13]: v_solver = FunctionVsolver(model)
```

Calcuatte initial conditon that corresponds to our model

```
[14]: # Find end value for invariant potential
end_value_solver = SlowRollEndSolver(model, invariant=True)
invariant_end = end_value_solver.solve_np([0, 2], params=parameters)[0]
# Find enc value for our A, B, V
end_value_solver2 = SlowRollEndSolver(model, invariant=False)
field_end = end_value_solver2.solve_np([0, 5], params=parameters)[0]
```

Numerical integration returns function which can evaluate solution 'continuously'.

```
[15]: # Solution with our defined solution. Important is that invariant potential
      ↪ and potential
      # have same sign as A must be positive.
```

```

calculate_iphi1 = v_solver.nsolve_field_np([0.1, 0.99], 0.1, params={M_p:1,
    ↪alpha:2})
# To use mpmath use nsolve_field_mp
# Remember, B function has singularity at  $\phi=M_p$ 
calculate_iphi2 = v_solver.nsolve_field_np([field_end, 0.99], invariant_end,
    ↪params={M_p:1, alpha:2})

```

```

[16]: # V function values for initial condition  $\phi=0.1 \rightarrow I_\phi = 0.1$ 
V_solution1 = v_solver.nsolve_np(calculate_iphi1, np.linspace(0.1, 0.99),
    ↪params={M_p:1, alpha:2})
# V function values for initial condition from our defined model
V_solution2 = v_solver.nsolve_np(calculate_iphi2, np.linspace(field_end, 0.99),
    ↪params={M_p:1, alpha:2})

```

```

[17]: fig2, ax2 = plt.subplots(figsize=(15,7))

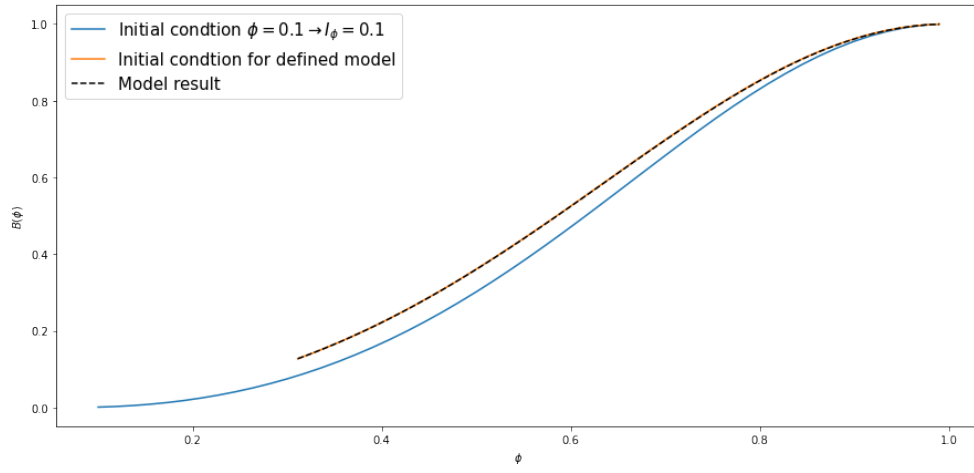
analytical_solution_marker = plt.Line2D([0], [0], linestyle='--',
    ↪color='black', label='Model result')
# Calcualte values from 0.01 to 0.8

our_model_V = model.V.f_n(np.linspace(field_end, 0.99), alpha=2, M_p=1)

ax2.plot(np.linspace(0.1, 0.99), V_solution1, label=f"Initial condtion  $B(\phi)=0.1$ 
    ↪1  $\rightarrow I_\phi=0.1$ ")
ax2.plot(np.linspace(field_end, 0.99), V_solution2, label=f"Initial condtion
    ↪for defined model")
ax2.plot(np.linspace(field_end, 0.99), our_model_V, linestyle='--',
    ↪color='black')

ax2.legend(handles = ax2.get_legend_handles_labels()[0] +
    ↪[analytical_solution_marker], fontsize=15)
ax2.set_ylabel(" $B(\phi)$ ")
ax2.set_xlabel(" $\phi$ ");
plt.show()

```



We can see if we take right initial condition we can get the same potential. But the solution with blue line is also correct but with other initial condition (integration constant).

Also approaching singularity for B function we can see that both solutions converge at the same point.

C. Töoleht mudelite võrdlemiseks

Compare_models

May 30, 2022

```
[1]: # For symbolic calculations
import sympy as sp
# For numeric calculations
import numpy as np

# For plotting
import matplotlib.pyplot as plt

from inflationpy import SlowRollModel, SlowRollEndSolver, SlowRollStartSolver,
ModelCompare
```

1 Notebook for calculating observables

For general scalar-tensor field theory during inflation we can write action in form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} A(\phi) R - \frac{1}{2} B(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right\} \quad (1)$$

When using invariants action can be expressed as

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu I_\phi \nabla_\nu I_\phi - I_V(I_\phi) \right\} \quad (2)$$

This notebook shows how to use this package to compare if model defined with A , B , V functions predicts the same values as model defined by I_V function.

1.1 1) Define model functions

To start calculating, required symbols must be defined. By default `SlowRollModel` assumes that 'phi' is used as scalar field ('I_phi' for invariant field) symbol and 'M_p' as Planck's mass. If other symbols are used then this information must be given to the `SlowRollModel` class.

To define symbols and equations it is advised to use `sympy` although it can try to convert strings to equations as well this method is not too reliable. To look more how to define functions with `sympy`: <https://docs.sympy.org/latest/modules/functions/index.html#contents>

Currently used model must predict same observable values. As $A = 1$ it does not matter if Palatini or metric formalism is used.

```
[2]: # Define symbols. phi for scalar field and I_phi for invariant scalar field.
phi, I_phi = sp.symbols('phi I_phi', real=True)
# Define model specific free parameters and Planck's mass
alpha, M_p = sp.symbols('alpha M_p', real=True, positive=True)
# Also program uses some default symbols: 'N' for e-folds
N = sp.symbols('N', real=True, positive=True)
```

```
[3]: # Define functions.
A = 1
B = 6*alpha/(phi/M_p-1)**2
V = (phi/M_p - 2)**2 * (phi/M_p)**2/((phi/M_p)**2 - 2*phi/M_p + 2)**2
I_V = sp.tanh(I_phi/(sp.sqrt(6*alpha)*M_p))**2

model = SlowRollModel(A, B, V, I_V, palatini=False)
```

2 2) Model comparer

Create model comparer

```
[4]: comparer = ModelCompare(model)
```

2.1 2.1) Compare invariant potential I_V

This method uses idea that $I_V(\phi) = \frac{V(\phi)}{A^2(\phi)}$ must be equal to $I_V[I_\phi(\phi)]$ where $I_\phi = \int \sqrt{\frac{B(\phi)}{A(\phi)} + \frac{3M_p^2}{2} \left(\frac{A'(\phi)}{A(\phi)} \right)^2} d\phi$. If this turns out to be true, then two models predict same results.

Calculating $\frac{V}{A^2}$ is easy and when calculating then prgoram does it automatically. Thus function $I_\phi(\phi)$ must be found. Currently we have to do it numerically. First we have to setup the initial condition (integration constant). Let's choose the point at the end of inflation.

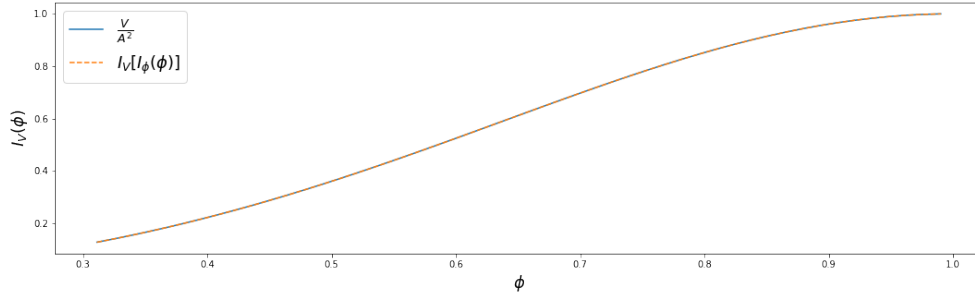
```
[5]: # Solver end value for scalar field
solver1 = SlowRollEndSolver(model)
end_value1 = solver1.nsolve_np([0, 2], params={M_p:1, alpha:2})[0]
# Solver end value for invariant scalar field
solver2 = SlowRollEndSolver(model, invariant=True)
end_value2 = solver2.nsolve_np([0, 2], params={M_p:1, alpha:2})[0]

# To use mpmath call function .nsolve_field_mp
# x=[initial_condition_field, calculate_up_to_value], y0=initial_condition for
# invariant field
invariant_field = comparer.nsolve_field_np(x=[end_value1, 0.99], y0=end_value2,
      sc_kwargs={'atol':1e-9, 'rtol':1e-9}, params={alpha:2, M_p:1})
```

Now we can calculate and compare invariant potential values for scalar field values from end_value to 0.99.

```
[6]: # First returned values are calculate by  $V/A^2$ . Second reutrned value is
      through substitution.
      potential1, potential2 = comparer.compare_invariant_potential_np(x=np.
      linspace(end_value1, 0.99), invariant_scalar_field=invariant_field,
      params={alpha:2, M_p:1})

[7]: plt.figure(figsize=(18, 5))
      plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99), potential1, label='$\\frac{V}{A^2}$')
      plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99), potential2,
      label='$I_V[I_\\phi(\\phi)]$', linestyle='--')
      plt.xlabel("$\\phi$", fontsize=18)
      plt.ylabel("$I_V(\\phi)$", fontsize=18)
      plt.legend(fontsize=18)
      plt.show()
```



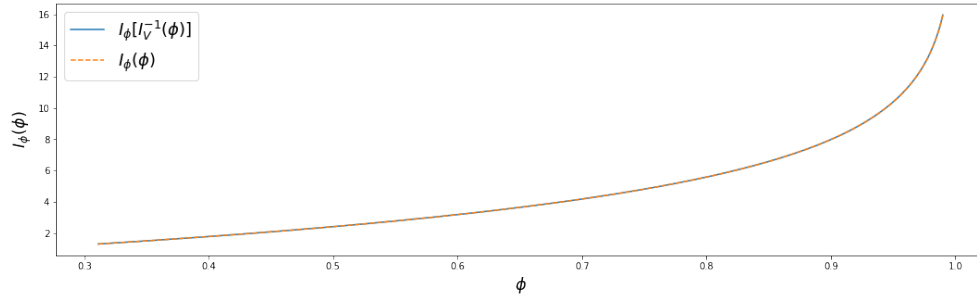
2.2 2.2) Compare invariant scalar field I_ϕ

This method uses idea that $I_\phi(\phi) = \int \sqrt{\frac{B(\phi)}{A(\phi)} + \frac{3M_P^2}{2} \left(\frac{A'(\phi)}{A(\phi)}\right)^2} d\phi$ must be equal to $I_\phi[I_V(\phi)]$. If this turns out to be true, then two models predict same results.

We already have calculated $I_\phi(\phi)$. Now we must find invariant potential inverse function. Currently this method can be used only if analytically inverse function can be found.

```
[8]: inverse_potential = comparer.solve_I_V_inverse()
      # Compare in range end_value to 0.99. Select second solution for inverse
      potential (there are two solutions).
      # First returned values are calculate by invariant potential method. Second
      reutrned value is through integral.
      field1, field2 = comparer.compare_invariant_field_np(
      x=np.linspace(end_value1, 0.99, 1000),
      inverse_invariant_potential=inverse_potential[1],
      invariant_scalar_field=invariant_field,
      params={alpha:2, M_p:1})
```

```
[9]: plt.figure(figsize=(18, 5))
plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99, 1000), field1,
        label='$I_{\phi}[I_V^{-1}(\phi)]$')
plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99, 1000), field2, label='$I_{\phi}(\phi)$',
        linestyle='--')
plt.xlabel("$\phi$", fontsize=18)
plt.ylabel("$I_{\phi}(\phi)$", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=18)
plt.show()
```



2.3 2.3) Compare invariant scalar field derivative $\frac{dI_\phi}{d\phi}$

Third method is to compare invariant field derivative with scalar field. This is simpler method than comparing scalar field. This method does not show that two models are identical, meaning that integral $I_\phi(\phi)$ can be different by some constant value (different integration constant). But this will show that predictions are same.

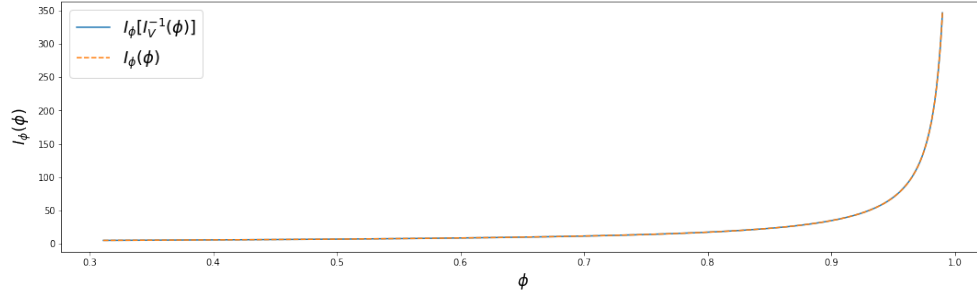
This requires to find invariant potential inverse function (like it was done when comparing invariant scalar fields). The other term is invariant scalar field definition integrand

$$\sqrt{\frac{B(\phi)}{A(\phi)} + \frac{3M_p^2}{2} \left(\frac{A'(\phi)}{A(\phi)} \right)^2}$$

```
[10]: # First returned values are calculate by invariant potential method. Second
        returned value is through integrand.
field_der1, field_der2 = comparer.compare_invariant_field_der_np(
    x=np.linspace(end_value1, 0.99, 1000),
    inverse_invariant_potential=inverse_potential[1],
    params={alpha:2, M_p:1})
```

```
[11]: plt.figure(figsize=(18, 5))
plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99, 1000), field_der1,
        label='$I_{\phi}[I_V^{-1}(\phi)]$')
plt.plot(np.linspace(end_value1, 0.99, 1000), field_der2,
        label='$I_{\phi}(\phi)$', linestyle='--')
```

```
plt.xlabel("$\\phi$", fontsize=18)
plt.ylabel("$I_{\\phi}(\\phi)$", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=18)
plt.show()
```



3 3) Conclusion

As we can see, all three methods showed that for scalar field values from end of inflation up to scalar field value 0.99 these models predict same invariants. This also means that invariant model and A , B , V model are same.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Martin Vasar,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

Arvutusteek inflatsiooni ülesannete lahendamiseks mitte-minimaalselt seotud skalaarvälja teoorias,

mille juhendaja on Margus Saal,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Martin Vasar

Tartu, 6. juuni 2022. a.