

14088
K. MAASIK

ALGEBRA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI III KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

K. MAASIK

ALGEBRA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI III KLASSILE

~~33491~~

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.



- A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
- E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
- A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
- E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.
- K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
- K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
- K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
- E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
- G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
- L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru III ja IV klassile.
- L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru V klassile.
- K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Kindlam.

Trükikoda „Ilutrükk“, Tartu, 1942.

SISUKORD.

	Lk.
Ptk. I. Algebraalne murd	5
Teine tsükkel	5
§ 1. Hulkliikmete tegureiks lahutamine	5
§ 2. Hulkliikmete suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne	14
Hulkliikmete suurim ühistegur	14
Hulkliikmete väikseim ühiskordne	14
§ 3. Murdavaldisi hulkliikmelise nimetajaga	17
§ 4. Murdude teisendamisi ja tehteid murdudega hulkliikmelise nimetaja puhul	19
§ 5. Võrrete omaduste rakendusi	29
§ 6. Täheliste kordajatega lineaarvõrrand	31
§ 7. Võrrandid otsitavaga nimetajas	36
§ 8. Ülesandeid kordamiseks	41
Ptk. II. Võrrand-süsteem	45
§ 9. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteem	45
Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamise liitmis- võttega	48
§ 10. Lahendumatud võrrand-süsteemid	54
§ 11. Võrrand-süsteemi koostamine	56
§ 12. Ruutvõrrand-süsteem	63
§ 13. Ülesandeid kordamiseks	69
Ptk. III. Aste ja juur	73
§ 14. Astmed positiivsete täisarvuliste astendajatega	73
§ 15. Juur	79
§ 16. Juure leidmine proovimise teel	82
§ 17. Tehted juurtega	86
§ 18. Juuravaldiste teisendamisi	98
§ 19. Astmed negatiivsete täisarvuliste astendajatega	107
§ 20. Astmed murruliste astendajatega	112
§ 21. Ülesandeid kordamiseks	117
Ptk. IV. Ainet kordamiseks	119
§ 22. Ülesandeid üldiseks kordamiseks	119

Peatükk I.

Algebraalne murd.

Teine tsükkel.

§ 1. Hulkliikmete tegureiks lahutamine.

Mõned hulkliikmed on esitatavad korrutistena, mille tegurid on üksliikmed ja hulkliikmed. Näiteks

$$\begin{aligned}7a^2 - 7a &= 7a(a - 1), \\n^2 - 5n + 6 &= (n - 2)(n - 3), \\x^3 + 3x^2 - 10x &= x(x + 5)(x - 2).\end{aligned}$$

Sel juhul räägime hulkliikmete tegureiks lahutamisest.

Hulkliikme algtegureiks loeme tema algarvulisi tegureid, nagu

$$3, 5, 7, 11, 13,$$

tähelisi tegureid, nagu

$$a, b, N, u, x,$$

ja hulkliikmelisi tegureid, mis ei luba lahutamist tegureiks, nagu

$$\begin{aligned}b + 1, \quad 3N + 2, \quad a + u, \\a^2 + x^2, \quad u^3 + abc, \quad x^3 + 5a^2b.\end{aligned}$$

Lahutada hulkliige algtegureiks tähendab esitada teda tema algtegurite korrutisena.

Hulkliikme tegureiks lahutamise võtetest käsitleme järgmisi: 1) ühise teguri sulgude ette toomise võte; 2) liik-

mete rühmitamise võtte; 3) arvutamise abivalemite kasutamise võtte ja 4) ruuttrinoomi tegureiks lahutamise võtte.

Sõltub hulkkliikmest, missuguse võtte abil teda õnnestub lahutada tegureiks.

1. võtte. Ühise teguri sulgude ette toomise võtte tugineb valemile

$$ma + mb = m(a + b).$$

Näited.

1. $12x + 36 = 12(x + 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot (x + 3)$.
2. $u^3 - 5u^2 = u^2(u - 5)$.
3. $18ih^2 - 24i^2h^2 = 6ih^2(3 - 4i) = 2 \cdot 3 \cdot ih^2(3 - 4i)$.
4. $7u(3q - 2) + 5(3q - 2) = (3q - 2)(7u + 5)$.

Ülesanded.

1. Kirjuta järgmised avaldised korrutistena, võttes liikmete ühise teguri sulgude ette:

- | | | |
|-------------|--------------|-----------------|
| 1. $3a + 3$ | 2. $6a - 3x$ | 3. $0,6a - 1,8$ |
| $3a + 6$ | $7x - 14a$ | $4,5a - 2,7x$ |
| $9a - 6$ | $15x + 3a$ | $2,3x + 1,7x$ |
| $12 - 4a$ | $16a - 24x$ | $0,8x + 6,4a$ |
| $21 - 35a$ | $72x - 9a$ | $1,8a + 1,2a$ |

2. Võta järgmistes avaldistes ühine tegur sulgude ette:

- | | | |
|------------------------------|---------------|--------------------|
| 1. $5 \cdot 12 + 7 \cdot 12$ | 2. $mn + mx$ | 3. $16r^3 - 24r^2$ |
| $72 \cdot 31 - 31$ | $Q^2 - PQ$ | $4u^3 - u^4$ |
| $15x + 5$ | $mv^2 - gv$ | $pq^2 - 3p^2q$ |
| $7 - 21z$ | $2st - 6at^2$ | $m^3 + 5cm^2$ |
| $4a + 12u$ | $14N^2 - 7Nc$ | $15h^2k^3 - 9h^3k$ |

3. Kirjuta järgmised avaldised üksliikmetena:

- | | | |
|--------------|------------------|--------------------|
| 1. $2a + ab$ | 2. $5a^2 - 10ab$ | 3. $12a^2 - 4a^2x$ |
| $7ax + 2ab$ | $6ax - 12a^2$ | $10ax - 15bx$ |
| $5ab + 3b$ | $9x^2 - 18ax$ | $12ax^2 - 10a^2x$ |

4. Võta järgmistes avaldistes ühine tegur sulgude ette:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1. $6ax - 9bx + 21cx$ | 2. $m(u + a) - n(u + a)$ |
| $42a^2y - 35ay^2 + 7ay$ | $2(3b - v) - 3v(3b - v)$ |
| $9cz^4 - 21c^2z^3 - 15c^3z^2$ | $3q^2(2Q - 1) - (2Q - 1)$ |

2. v õ t e. Liikmete rühmitamise võtte puhul paigutame hulkliikmes liikmed nii sulgudesse, et õnnestuks mõne avaldise sulgude ette võtmise.

N ä i t e d.

- $11N(5z + 4) - 5z - 4 = 11N(5z + 4) - (5z + 4) = (5z + 4)(11N - 1).$
- $px + py - 2qx - 2qy = (px + py) - (2qx + 2qy) = p(x + y) - 2q(x + y) = (x + y)(p - 2q).$
- $u^3 - 5u^2 - 3u + 15 = (u^3 - 5u^2) - (3u - 15) = u^2(u - 5) - 3(u - 5) = (u - 5)(u^2 - 3).$

Ülesanded.

5. Liikmeid kohaselt rühmitades lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $ax + ay + 2x + 2y$ | 2. $2ax - au + 4bx - 2bu$ |
| $n^2 + nz + 5n + 5z$ | $5Nc - 5Nd + 7c^2 - 7cd$ |
| $u^2 + 7u + au + 7a$ | $z^2 - hz + 11z - 11h$ |
| $3a^2 + 2ab + 6a + 4b$ | $8x^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 4y^3$ |
| $6x^2 - 13x + 6xy - 13y$ | $ax^2 - bx^2 + ax - bx$ |

<p>3. $t^2 - at - 3t + 3a$ $8m^2 - 4mn - 6m + 3n$ $16pq - 12q - 8pr + 6r$ $20ab + 4b - 5a - 1$ $5z^2 - 5hz + ah - az$</p>	<p>4. $x^3 + x^2 + x + 1$ $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ $3x^3 - 7x^2 - 9x + 21$ $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ $5x^3 - 35x^2 + x - 7$</p>
--	---

6. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1. $3a(x + y) + x + y$
 $4m(2m - n) + 2m - n$
 $5c(3d - 1) - 3d + 1$
 $7(3p - 4) - 3p + 4$
 $(4p + q)(x + y) + 3q(x + y)$

2. $(a - 2b)(4m + 7n) - a(4m + 7n)$
 $(2u + v)(6R^2 - 1) - (6R^2 - 1)$
 $(P + 2Q)(N^2 + 2) - 3Q(N^2 + 2)$
 $(h - 2k)(h + k) + 3k(h + k)$
 $(5l + 3m)(l - 2m) - 3m(l - 2m)$

3. võtke. Arvutamise abivalemite kasutamise võtte tugineb valemile:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Näited.

1. $9a^2x^2 - 1 = (3ax)^2 - 1^2 = (3ax + 1)(3ax - 1).$
 2. $h^2x^2 + 2ah^2x + h^2a^2 = h^2(x^2 + 2ax + a^2) = h^2(x + a)^2.$
 3. $63x^2 - 84x + 28 = 7(9x^2 - 12x + 4) = 7(3x - 2)^2.$

$$4. \quad 64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3 = (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 4x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = (4x - 3y)^3.$$

$$5. \quad 343x^3 + 8y^3 = (7x)^3 + (2y)^3 = (7x + 2y)(49x^2 - 14xy + 4y^2).$$

$$6. \quad x^2 + 11x + 24 = x^2 + (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = (x + 3)(x + 8).$$

Ülesanded.

7. Kirjuta järgmised avaldised, kui võimalik, binoomide ruutudena:

$$1. \quad x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 + 14x + 49$$

$$x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 18x + 72$$

$$2. \quad 25 - 10y + y^2$$

$$1 + 2z + z^2$$

$$4u + 8 + u^2$$

$$v^2 - 2v - 1$$

$$t^2 - 16t + 64$$

8. Kirjuta järgmised avaldised, kui võimalik, binoomide ruutudena:

$$1. \quad x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$$

$$4f^2 + 4f + 1$$

$$x^2 - 0,2x + 0,01$$

$$x^2 - 2,4x + 1,44$$

$$x^2 - 0,6x - 0,09$$

$$2. \quad x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$16g^2 - 16g + 4$$

$$h^2 - 6ah + 9a^2$$

$$c^2 - 4ck + 4k^2$$

$$25m^2 - 30mn + 9n^2$$

9. Kirjuta järgmised avaldised korrutistena:

$$1. \quad x^2 - 1$$

$$1 - x^2$$

$$y^2 - 4$$

$$25 - y^2$$

$$49 - 9z^2$$

$$2. \quad 16z^2 - 9a^2$$

$$25u^2 - 49v^2$$

$$c^2 - \frac{1}{4}$$

$$36 - 121a^2b^2$$

$$81p^2 - 4c^2q^2$$

$$3. \quad 9 - a^2$$

$$64u^2 - v^2$$

$$x^2 - \frac{64}{81}$$

$$0,04 - c^2$$

$$a^2 - 0,49$$

10. Esita järgmised avaldised korrutistena, soovi korral sulgusid enne avades, kus need olemas:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $ax^2 - ay^2$ | 2. $9s^3t^2 - s$ |
| $a^3 - ax^2$ | $(m + n)^2 - n^2$ |
| $27b^2 - 12a^2$ | $p^2 - (p - q)^2$ |
| $a^2b^2 - c^2$ | $w^2 - (w - uv)^2$ |
| $\pi R^2 - \pi r^2$ | $az^2 - a(y - z)^2$ |
3. $y^2 + (a + b)y + ab$ 4. $z^2 + (2m + 3)z + 6m = 0$
 $x^2 - (a + 3)x + 3a$ $z^2 - (3n - 1)z - 3n = 0$
 $x^2 + (b + 5)x + 5b$ $u^2 - (c - 5)u - 5c = 0$
 $x^2 - (a - 7)x - 7a$ $v^2 - (3m - 4n)v - 12mn = 0$
 $y^2 + (9n - 7)y - 63n$ $w^2 - (1 - 7k)w - 7k = 0$

11. Lahuta järgmised trinoomid tegureiks:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. $x^2 + 5x + 6$ | 2. $z^2 + 3z - 28$ |
| $x^2 + 9x + 20$ | $u^2 + 2u - 15$ |
| $y^2 - 10y + 21$ | $u^2 - u - 20$ |
| $y^2 - 19y + 90$ | $p^2 + 4p - 12$ |
| $z^2 + z - 6$ | $x^2 + x - 42$ |

12. Esita järgmised avaldised korrutistena:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 + 6x + 9$ | 2. $1 - 8y + 16y^2$ |
| $x^2 - 10x + 25$ | $1 - a^2z^2$ |
| $u^2 - 49$ | $c^2x^2 - 81$ |
| $36u^2 - 25v^2$ | $49 - 14pq + p^2q^2$ |
| $z^2 + z + \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16} - 25u^2v^2$ |

13. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| 1. $3x^2 - 6x + 3$ | 2. $7a^2b^2 - 7c^4$ |
| $6 - 24p^2q^2$ | $245Q^2 - 140Q + 20$ |
| $5y^2 - 1445$ | $121a^2b^2 - 100c^2d^2$ |
| $11x^2 - 66x + 99$ | $24x^2 + 72x + 54$ |
| $u^2 - 1,21$ | $4f^2 - \frac{9}{25}$ |

14. Kirjuta järgmised avaldised binoomide kuupidena:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & 8 - 12a + 6a^2 - a^3 \\
 & c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\
 & - a^3 - 30a^2 - 300a - 1000 \\
 & y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & x^3 + 18x^2 + 108x + 216 \\
 & 1 + 0,03p + 0,0003p^2 + 0,000001p^3 \\
 & 125 - 75z + 15z^2 - z^3 \\
 & 8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3 \\
 & 125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3
 \end{aligned}$$

15. Esita järgmised avaldised korrutistena:

$ \begin{aligned} 1. \quad & a^3 + 125 \\ & 64 - x^3 \\ & 8x^3 + 1 \\ & 27a^3 - 8b^3 \\ & z^3 + 0,001 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 2. \quad & 250p^3 + 54q^3r^3 \\ & x^3 - 0,008 \\ & \frac{1}{8} - 8a^3 \\ & 125u^3 + 216 \\ & 128a^3b^2 - 432b^2c^3 \end{aligned} $
---	--

4. v õ t e. Ruuttrinoomi tegureiks lahutamisel kasutame tihti taandatud ruutvõrrandi lahendite omadusi. Me nägime eelmisel õppeaastal, et ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

võime kirjutada tema lahendite kaudu kujus:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Avades sulud leiame:

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0;$$

rakendades rühmitamise võtet saame:

$$(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2) = 0$$

ehk

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

ehk

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 ;$$

seega

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

et lahutada ruuttrinoom $x^2 + px + q$ tegureiks, võrrandame ta nulliga ja lahendame saadud võrrandi; leitud lahendite x_1 ja x_2 abil ruuttrinoom lahutub tegureiks kujul:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Kui trinoom on antud kujul

$$ax^2 + bx + c,$$

siis võtame kõigepealt kordaja a sulgude ette ja toimime eespool-antud juhise järgi.

Ülesanne 1. Lahuta tegureiks trinoom:

$$x^2 - 7x + 6.$$

Lahendus. Võrrandame trinoomi nulliga:

$$x^2 - 7x + 6 = 0 ;$$

lahendame saadud võrrandi:

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

ehk

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1 ;$$

seega

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6).$$

Ülesanne 2. Lahuta tegureiks trinoom

$$3x^2 - 7x + 4.$$

Lahendus. Kirjutame trinoomi kujus

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\right).$$

Taandatud võrrandi $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3} = 0$ lahendid on
needsamad, mis võrrandil

$$3x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid aga on

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6};$$

seega

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3} \text{ ja } x_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Järelikult

$$3x^2 - 7x + 4 = 3(x - 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

ehk

$$3x^2 - 7x + 4 = (x - 1)(3x - 4).$$

Ülesanded.

16. Lahuta järgmised trinoomid tegureiks:

1. $v^2 - v - 30$

2. $p^2 + 5p - 66$

$v^2 - 3v - 40$

$q^2 - 8q - 20$

$w^2 - 10w - 24$

$q^2 + 8q - 9$

$w^2 - 5w - 24$

$n^2 - n - 72$

$p^2 - 17p + 70$

$n^2 - m - 12$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & a^2 - 20a + 36 \\
 & c^2 + 14c + 48 \\
 & 2f^2 - 7f - 4 \\
 & 3h^2 + 5h - 2 \\
 & 5l^2 - 14l + 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & k^2 + k - 132 \\
 & m^2 + 11m - 42 \\
 & 12n^2 + 5n - 3 \\
 & 4p^2 - 16p + 15 \\
 & 6r^2 + 5r - 1
 \end{aligned}$$

§ 2. Hulkliikmete suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

Hulkliikmete suurim ühistegur.

Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmiseks lahutame hulkliikmed algteureiks, kirjutame välja nende ühised algtegurid ja moodustame viimaste korrutise.

Ülesanne. Leia polünoomide

$$15h^2 - 15h, 9h^3 - 9h \text{ ja } 24h^3 - 48h^2 + 24h$$

suurim ühistegur.

Lahendus. Antud avaldiste algteureiks lahutamine annab:

$$\begin{aligned}
 15h^2 - 15h &= 15h(h - 1) = 3 \cdot 5 \cdot h(h - 1), \\
 9h^3 - 9h &= 9h(h^2 - 1) = 3^2 \cdot h(h + 1)(h - 1), \\
 24h^3 - 48h^2 + 24h &= 24h(h^2 - 2h + 1) = \\
 &= 2^3 \cdot 3 \cdot h(h - 1)^2.
 \end{aligned}$$

Seega nõutud suurim ühistegur on

$$3h(h - 1).$$

Ülesanded.

17. Leia järgmiste avaldispaaride suurimad ühistegurid:

$$1. \quad \begin{aligned} & 4a \\ & 3a - 1 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} & 7a \\ & 7a - b \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} & 8mnp \\ & 12m^2np - 4mn^2p \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} & a^2x + ax^2 \\ & a^2x - ax^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} & 15pq - 5p \\ & 10p^2 + 15p \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} & 7a^2 - 21ab \\ & 5a - 15b \end{aligned}$$

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|--|
| 7. $a^2 - 1$
$a + 1$ | 8. $5(a + x)^2$
$10(a^2 - x^2)$ | 9. $N^2 - 9$
$N^2 - 6N + 9$ |
| 10. a^3
$a^2x + ax^2$ | 11. $m^2n^2 - 1$
$5mn^2 + 5n$ | 12. $u^3 - c^2u$
$u^3 - 2u^2c + uc^2$ |

18. Leia järgmiste avaldiskolmikute suurimad ühistegurid:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $x^2 - 2x + 1$
$x^2 - 1$
$5x - 5$ | 2. $9 - x^2$
$x^2 + 6x + 9$
$2x + 6$ | 3. $25 - 36x^2$
$5 + 6x$
$36x^2 - 60x + 25$ |
| 4. $x^2 - 4x + 4$
$x^2 + x - 6$
$x^2 - 7x + 10$ | 5. $x^2 - 25$
$x^2 + 6x + 5$
$x^2 + 3x - 10$ | 6. $3x^2 + x$
$3x + 3$
$3x^2 - 3x + 6$ |
| 7. $2a - 5$
$10 - 4a$
$6a - 15$ | 8. $a^2 - 2a - 3$
$4a^2 - 4$
$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ | 9. $4c^2 - 28cf + 49f^2$
$10c^2 - 35cf$
$49f^2 - 4c^2$ |

Hulkliikmete väikseim ühiskordne.

Hulkliikmete väikseima ühiskordse leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegureiks, kirjutame välja ühe hulkliikme, siis selles puuduvad algtegurid teistest hulkliikmetest ja moodustame välja-kirjutatud avaldistest korrutise.

Ü l e s a n n e. Leia avaldiste

$4N^2x - 4N^2$, $6N(x^2 + 2x - 3)$ ja $20Nx^2 - 20N$ väikseim ühiskordne.

L a h e n d u s. Antud avaldiste algtegureiks lahutamine annab:

$$4N^2x - 4N^2 = 4N^2(x - 1) = 2^2 \cdot N^2(x - 1),$$

$$6N(x^2 + 2x - 3) = 6N(x - 1)(x + 3) = \\ = 2 \cdot 3 \cdot N(x - 1)(x + 3),$$

$$20Nx^2 - 20N = 20N(x^2 - 1) = \\ = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x - 1)(x + 1);$$

seega nõutud väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot N^2(x-1) \cdot 3 \cdot (x+3) \cdot 5 \cdot (x+1)$$

ehk

$$60N^2(x-1)(x+1)(x+3).$$

Ülesanded.

19. Leia järgmiste avaldispaaride väikseimad ühiskordsed:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1. 5
$5a - 5x$ | 2. 12
$12a + 5b$ | 3. m
$m^2 + m$ |
| 4. Ny
$N^2 - N$ | 5. $3p^2$
$p^2 + pq$ | 6. $4a + 4n$
$5a - 5n$ |
| 7. $a^3 - aR^2$
$6a - 6R$ | 8. $(t-1)^2$
$4t^3 - 4t$ | 9. $(v-9)^2$
$(18-2v)^2$ |
| 10. $3x$
$3x^2 - 6xy$ | 11. $x^2 - u^2$
$7x + 7u$ | 12. $1 - x^2$
$(x-1)(x+2)$ |

20. Leia järgmiste avaldiskolmikute väikseimad ühiskordsed:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $12a^2x$
$15a^3x^2$
$18a^4x^4$ | 2. $a + 2$
$a + 3$
$a^2 + 2a$ | 3. $(b-7)^2$
$b^2 - 7b$
$5b$ |
| 4. ax
$a^2 + ax$
$ax + x^2$ | 5. $3x^2 - 48$
$3x - 12$
$(x+4)^2$ | 6. $(x-3)^2$
$x^2 - 9$
$5x - 15$ |
| 7. $3(n^2 - 1)$
$(n-1)(n^2 + 1)$
$n^3 + n$ | 8. $2(x-1)^2$
$7(x+1)^2$
$14(x^2 - 1)$ | 9. $a^2 - b^2$
$(a-b)^2$
$a + b$ |

21. Leia järgmiste avaldiskolmikute väikseimad ühiskordsed:

$$\begin{aligned} 1. \quad & a(a + b) + a^2 - b^2 \\ & 4a^2 - 4ab + b^2 \\ & a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & x^2 - 4x + 3 \\ & x^2 + 4x - 5 \\ & x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x^2 - 5x - 14 \\ & 4x - 16 \\ & x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & x^2 - 3x - 4 \\ & x^2 - 6x + 8 \\ & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

§ 3. Murdavaldisi hulkliikmelise nimetajaga.

22. Üks tööliste salk paneb päevas uuel raudteel p meetri pikkuselt rööpaid, teine salk q meetri pikkuselt. Kui palju aega kulub mõlemal salgal rööbaste panemiseks s -kilomeetrilisel teel?

23. Kivi kaalub õhus p kg, vees aga ainult q kg. Avalda kivi erikaal e .

24. Veepaaki mahub m mõõduühikut vett. Paagi täitmine toimub kahe toru kaudu. Esimese kaudu voolab tunnis p mõõduühikut vett, teise kaudu q samasugust mõõduühikut. Kui palju aega kulub paagi täitmiseks mõlema toru kaudu?

(Heron Aleksandriast, 100 a. e. Kr.)

25. Kaks ookeaniaurikut sõidavad teineteisest mööda, üks kiirusega u km tunnis, teine kiirusega v km tunnis. Mõlemal on raadiojaamad r km tegevusraadiusega. Mitme tunni jooksul peale kohtumist võivad nad teineteisega teateid vahetada, liikudes samas suunas ja liikudes vastassuunas?

26. Raamatu käsikiri on l lehekülge suur. Ta on kahe masinakirjutaja käes ümber kirjutada. Esimene kir-

jutab keskmiselt m , teine $2n$ lehekülge tunnis. Kui palju aega kulub käsikirja ümberkirjutamiseks?

27. Perekond A kulutas kuus k korda rohkem elektri-voolu kui perekond B ja pidi seepärast maksma volu eest d marka rohkem kui perekond B . Kui palju maksis kumbki perekond volu eest?

28. Kaks maalrit said maja värvimise eest tasu t marka. Esimene töötas p , teine q päeva. Missuguse tasu peaks saama esimene ja missuguse tasu teine maaler, kui eeldada, et mõlemad töötasid võrdvõimeliselt?

29. Kaks äriosanikku paigutavad ärisse kapitalid, esimene h , teine k marka. Äri aasta-aruanne näitab t marka tulu. Missuguse summa peaks sellest tulust saama esimene ja missuguse summa teine äriosanik?

30. Kooli lõpetanud noormees astub teenistusse, saades kuus a marka palka. Oma sissetulekust kulutab ta päevas elatuskuludeks keskmiselt b marka ja tarvitab igakuulise puhta ülejäägi palgast õppimisvõla v marga tasumiseks. Mitme kuuga on võlg tasutud?

31. Kaupluses segati c kg kohvi hinnaga m marka kg ja d kg kohvi hinnaga n marka kg. Kui kallis on 1 kg segu?

32. Tee pikkus ringi keskpunktist ringjooneni, täis- tiir ringjoont mööda ja tagasi keskkoha on c cm. Kui pikk on ringi raadius?

33. a õpetajat ja b õpilast sõidavad ekskursioonile. Piletite ja pagasi eest tuleb maksta kogusummas s marka, sellest p marka pagasi arvel. Kui kallis on sõidupilet?

§ 4. Murdude teisendamisi ja tehteid murdudega
hulkliikmelise nimetaja puhul.

Järgmised näited selgitavad murdude teisendamisi ja tehteid murdudega hulkliikmelise nimetaja puhul.

Ülesanne 1. Taanda murd

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamine annab:

$$(x+3)(x+2)+2(x-3) = x^2+5x+6+2x-6 = x^2+7x = x(x+7).$$

Nimetaja lahutub tegureiks järgmiselt:

$$x^2+14x+49 = (x+7)^2.$$

Seega

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49} = \frac{x(x+7)}{(x+7)^2} = \frac{x}{x+7}.$$

Ülesanne 2. Lihtsusta avaldis

$$\frac{12}{(2a+b)^2-9b^2} + \frac{1}{ab+b^2} - \frac{1}{ab-b^2}.$$

Lahendus. Nimetajaid tegureiks lahutades saame:

$$\begin{aligned}(2a+b)^2-9b^2 &= (2a+b+3b)(2a+b-3b) = \\ &= (2a+4b)(2a-2b) = 2^2(a+2b)(a-b); \\ ab+b^2 &= b(a+b); \\ ab-b^2 &= b(a-b).\end{aligned}$$

Seega antud nimetajate väikseim ühiskordne on:

$$2^2b(a+b)(a-b)(a+2b).$$

Laiendustegurid on vastavalt:

$$\begin{aligned}b(a+b), \quad 2^2(a-b)(a+2b) \\ \text{ja } 2^2(a+b)(a+2b).\end{aligned}$$

Teisendades antud murrud ühenimelisteks saame antud avaldise kujul:

$$\frac{12b(a+b) + 2^2(a-b)(a+2b) - 2^2(a+b)(a+2b)}{2^2b(a+b)(a-b)(a+2b)}.$$

Lugeja lihtsustamine annab:

$$\begin{aligned} & 12(ab + b^2) + 4(a^2 + ab - 2b^2) - 4(a^2 + 3ab + 2b^2) = \\ & = 12ab + 12b^2 + 4a^2 + 4ab - 8b^2 - 4a^2 - 12ab - 8b^2 = \\ & = 4ab - 4b^2 = 4b(a - b). \end{aligned}$$

Seega omab antud avaldis kuju

$$\frac{4b(a-b)}{4b(a+b)(a-b)(a+2b)}$$

ehk

$$\frac{1}{(a+b)(a+2b)}.$$

Ülesanne 3. Lihtsusta avaldis

$$\frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u}.$$

Lahendus. Saame:

$$\frac{(x+2u)(x-2u)}{x+u} \cdot \frac{(x+u)(x-u)}{x+2u} = (x-2u)(x-u).$$

Ülesanne 4. Lihtsusta avaldis

$$x = \frac{n + \frac{2n-1}{n-2}}{n + \frac{n}{n-2}}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamise annab:

$$\begin{aligned} n + \frac{2n-1}{n-2} &= \frac{n(n-2) + 2n-1}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + 2n - 1}{n-2} = \frac{n^2 - 1}{n-2} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{n-2}. \end{aligned}$$

Nimetaja teisendamisel saame:

$$n + \frac{n}{n-2} = \frac{n(n-2) + n}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + n}{n-2} = \frac{n^2 - n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Seega

$$x = \frac{(n+1)(n-1)}{n-2} : \frac{n(n-1)}{n-2} = \frac{n+1}{n}.$$

Kokkuvõttes:

murdude puhul, mille nimetajateks on hulkliikmed, käime teistendamisel ja tehete sooritamisel nendesamade juhiste järgi, mis andsime üksliikmeliste nimetajatega murdude puhul.

Ülesanded.

34. Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{9m+18}{9m-27}$

$$\frac{ab-ac}{ad+ac}$$

$$\frac{a^2-a}{ab+a}$$

$$\frac{2x-2}{2x+7}$$

$$\frac{a-ax}{n-nx}$$

2. $\frac{7h+14}{7h-35}$

$$\frac{2e-1}{2e+3}$$

$$\frac{n+n^2}{1+n}$$

$$\frac{ar+a^2r^2}{a+ar}$$

$$\frac{6u^3-6u^2}{u-1}$$

3. $\frac{3abc-7abu}{3ac-7au}$

$$\frac{ns+nt}{sv+tv}$$

$$\frac{a^2-az}{ab-bz}$$

$$\frac{Q^3+Q^2}{Q^2+Q}$$

$$\frac{5z^3-6z}{15z^2-18}$$

35. Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{4x^2-4x+1}{10x-5}$

$$\frac{ay^3-2ay+a}{y-1}$$

$$\frac{z^4-2z^2+1}{z^3-z}$$

$$\frac{u^3-2u^2+u}{2u-2}$$

$$\frac{25-10v+v^2}{25a-av^2}$$

2. $\frac{4x^2-1}{4x+2}$

$$\frac{9p^2-16q^2}{6p+8q}$$

$$\frac{4n^2+25}{16n^4-625}$$

$$\frac{gh^2-gf^2}{kh+kf}$$

$$\frac{1-Q^4}{Q^2+1}$$

36. Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

<p>1. $\frac{x-a}{a-x}$</p> <p>$\frac{by-b}{1-y}$</p> <p>$\frac{5nz-15}{3-nz}$</p> <p>$\frac{x^2+xy}{xy+y^2}$</p> <p>$\frac{15a^2-20ab}{21am-28bm}$</p>	<p>2. $\frac{2a-5b}{15b-6a}$</p> <p>$\frac{1-h^2}{ch^2-c}$</p> <p>$\frac{abd^2-abc}{abc-abd^2}$</p> <p>$\frac{ab-bc}{ad-dc}$</p> <p>$\frac{a^2-b^2}{a+b}$</p>	<p>3. $\frac{a^2-1}{1+a}$</p> <p>$\frac{c^2-16}{4-c}$</p> <p>$\frac{d^2u^2-9d^2}{du-3d}$</p> <p>$\frac{w^2-1}{(w+1)^2}$</p> <p>$\frac{(nz+1)^3}{n^2z^2-1}$</p>
--	--	---

37. Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

<p>1. $\frac{-x}{a-x}$</p> <p>$\frac{a-b}{b^2-a^2}$</p> <p>$-\frac{6-x}{x^2-36}$</p> <p>$\frac{3h-k}{k^2-9h^2}$</p> <p>$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$</p>	<p>2. $\frac{9-p^2}{p+3}$</p> <p>$\frac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$</p> <p>$-\frac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$</p> <p>$\frac{u^2-v^2}{u^2-2uv+v^2}$</p> <p>$\frac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$</p>
---	---

38. Anna järgmistele murdudele niisugune kuju, et nii lugejas kui nimetajas seisev avaldis algaks positiivse liikmega:

<p>1. $\frac{a-b}{-a-c}$</p> <p>$\frac{c+x}{-3c+x}$</p> <p>$\frac{-m-n}{n-m}$</p>	<p>2. $\frac{x-1}{-1-x}$</p> <p>$\frac{4P-Q}{-5}$</p> <p>$\frac{5u-1}{-7}$</p>	<p>3. $\frac{-a(b-c)}{-b}$</p> <p>$\frac{(1-a)(b-c)}{-m-n}$</p> <p>$\frac{-R(x-r)}{x^2+r^2}$</p>
--	---	---

39. Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

$$1. \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 18}$$

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{2x^2 - 4x + 2}$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{ax - 2a}$$

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 4x}$$

$$\frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$$

$$2. \frac{a^2 - 13a + 42}{14 - 2a}$$

$$\frac{5x^2 + 10x + 5}{ax^2 - 5ax - 6a}$$

$$\frac{c^2 - 2c - 3}{c^3 + 3c^2 + 3c + 1}$$

$$\frac{4n^2 - 4n - 8}{7n^3 - 42n^2 + 84n - 56}$$

$$\frac{x^2 - y^2 - (x + y)z}{x^2 - y^2 + xz + yz}$$

40. Leia järgmiste murdude numbriline väärtus, võimaluse korral murde enne taandades:

$$\frac{z^2 - 14z + 49}{z^3 - 7z^2 - z + 7}, \text{ kui } z = -5$$

$$\frac{t - t^3}{1 + 3t + 3t^2 + t^3}, \text{ kui } t = -7$$

$$\frac{2a^3 + 3a^2 - 20a - 30}{4a^2 - 9}, \text{ kui } a = 11$$

$$\frac{v^3 - 12v^2 + 48v - 64}{v^2 - 4v^2 - v + 4}, \text{ kui } v = -1,4$$

$$\frac{8x^2 + 16x + 32}{x^3 - 8}, \text{ kui } x = 3$$

41. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

$$1. 1 + \frac{d}{1-d}$$

$$\frac{b}{b+x} + 1$$

$$1 + n + \frac{n^2}{1-n}$$

$$x - 3 + \frac{7}{x+3}$$

$$a - b - \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$2. 1 - \frac{(a-c)^2}{(a+c)^2}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3} - 2x$$

$$1 - \frac{4x + 5}{x^2 - x + 6}$$

$$\frac{5x^3 - 3}{2x^2 + 3x - 8} - x^2 - 2$$

$$a + b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{a}$$

42. Rakenda summa jagamise seadust ja taanda, kus võimalik, tulemus:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \frac{5n + 20}{5} & 2. \quad \frac{h^3 + 5h^2}{h^2} & 3. \quad \frac{14f^2 - 10fg}{7f^2} \\
 \frac{28a - 35b}{21} & \frac{4l^2 - 6l}{8l} & \frac{9ax^2 - 18bz^2}{36ab} \\
 \frac{ab - 2ac}{ab} & \frac{7mn - 14mp}{7m^2} & \frac{12x^2 - 60a^2x^2}{-48ax^2} \\
 \frac{x^2 + mx}{2mx} & \frac{3p^2 - 2pq}{6p^2q^2} & \frac{18a^2b^2c + 72a^2bc^2}{18a^2bc}
 \end{array}$$

43. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$\begin{array}{l}
 \frac{17n - 11}{39} - \frac{8n + 9}{26} \\
 \frac{9x + 5m}{42} + \frac{4x - m}{63} \\
 \frac{2a - 3b}{24} + \frac{5a + b}{32} - \frac{9a - 4b}{40} - \frac{b}{80} \\
 \frac{5a - b}{a^2b} - \frac{3a + b}{ab^2} - \frac{4a^2 - 7ab - b^2}{a^2b^2} \\
 \frac{3r - t}{12rt} - \frac{5r - s}{10rs} - \frac{7s - t}{15st} + \frac{4rt - 3rs}{30rst}
 \end{array}$$

44. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} & 2. \quad \frac{q}{q - p} - \frac{p}{q - p} \\
 \frac{5}{y + 5} + \frac{y}{y + 5} & \frac{ab}{a - c} - \frac{bc}{a - c} \\
 \frac{4z}{z - 1} - \frac{4}{z - 1} & \frac{u^2v^2}{u^2 - v^2} - \frac{v^4}{u^2 - v^2} \\
 \frac{am}{2m + 2n} + \frac{an}{2m + 2n} & \frac{4Rrx}{2x - 1} - \frac{2Rr}{2x - 1} \\
 \frac{7a - 9b}{3a + 2b} + \frac{a}{3a + 2b} & \frac{2a + 3b}{2a - 3b} + \frac{3b - 2a}{2a - 3b}
 \end{array}$$

45. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$1. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{1}{2u-v} - \frac{1}{2u+v}$$

$$\frac{4-3a}{a-1} - \frac{4a-5}{1-a}$$

$$\frac{7b-8a}{3b-2a} - \frac{b-4a}{2b-3a}$$

$$2. \frac{1}{R-\pi r} - \frac{1}{\pi R-r}$$

$$\frac{1}{4a-7b} + \frac{1}{3a-b}$$

$$\frac{1}{2h+5} - \frac{1}{3h+7}$$

$$\frac{5x-6y}{x-y} - \frac{3x-2y}{y-x}$$

$$\frac{3a-4b}{a^2-b^2} - \frac{3b-2a}{b^2-a^2}$$

46. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$1. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{x}{2x-c} + \frac{c}{2x}$$

$$\frac{x-y}{x+3y} - \frac{x+y}{3y}$$

$$\frac{m+2n}{m} - \frac{m+2n}{m-2n}$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$2. \frac{2}{a} + \frac{4a-b}{a^2+ab}$$

$$\frac{1}{1-c} - \frac{1}{c+1}$$

$$\frac{7n}{5m^2-m} - \frac{3n}{10m-2}$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{3}{1-x}$$

$$\frac{a}{b(x+1)} - \frac{b}{a(1-x)}$$

47. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$\frac{2x-19}{3x-7} - \frac{5x}{6x-8} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5z-3}{a-3} - \frac{6z+8}{3(3-a)} - \frac{z}{a} + \frac{a}{z}$$

$$\frac{5}{y-1} - \frac{3}{2y+1} + \frac{1}{y+1}$$

$$\frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7} + 1$$

$$\frac{2u^2}{2u-1} + \frac{3u^2-4}{3u+5} - 2u$$

48. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$\frac{(a+b)^2}{ap+aq-bp-bq} - \frac{a-b}{p+q}$$

$$\frac{m-4}{m^2+m-6} - \frac{m-4}{m^2-3m+2}$$

$$\frac{4x}{(2x-n)^2} - \frac{2n}{4x^2-n^2} - \frac{2}{2x+n}$$

$$\frac{3u-2}{u^2+4u-5} + \frac{4u+1}{u^2-4u+4}$$

$$\frac{7v+2}{v^2-4v} - \frac{2v}{v^2-v-12}$$

49. Teosta järgmised korrutamised:

<p>1. $(2x-2a) \cdot \frac{c}{x-a}$</p> <p>$(x+1) \cdot \frac{3}{x^2-1}$</p> <p>$(2a-b) \cdot \frac{1}{b-2a}$</p> <p>$\frac{4n+1}{6-10n} \cdot (5n-3)$</p> <p>$\frac{x+7u}{x-7u} \cdot (x^2-49u^2)$</p>	<p>2. $\frac{m+n}{7m} \cdot \frac{5m}{2m-2n}$</p> <p>$\frac{a}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{4ab}$</p> <p>$\frac{m}{n-1} \cdot \frac{n^2-2n+1}{m+mn}$</p> <p>$\frac{4ax-4x}{a+1} \cdot \frac{1}{4(a-1)}$</p> <p>$\frac{x^2-u^2}{2a+2b} \cdot \frac{a+b}{3x+3u}$</p>
--	--

50. Teosta järgmised korrutamised:

<p>1. $\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{3a}{x^2-a^2}$</p> <p>$\frac{x^2-1}{4} \cdot \frac{12}{x-1}$</p> <p>$(1+\frac{1}{x}) \cdot \frac{5x}{x^2-1}$</p> <p>$\frac{2}{3(z+2)} \cdot \frac{z^2-4}{8}$</p> <p>$\frac{az-a^2}{2z} \cdot \frac{6z}{5a(z+1)}$</p>	<p>2. $\frac{9-z^2}{3z} \cdot \frac{z}{3+z}$</p> <p>$\frac{u^2-4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u-4v}$</p> <p>$\frac{s^2-3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2-9}$</p> <p>$\frac{4r^2+8r}{3r+9} \cdot \frac{15r+45}{14r^2+28r}$</p> <p>$\frac{5p(p-q)}{3r(p+q)} \cdot \frac{3(p^2+q^2)}{5(p^2-q^2)}$</p>
---	---

51. Teosta järgmised korrutamised:

$$\frac{3a + 3}{a^2 + 6a + 9} \cdot \frac{6a + 18}{a^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{16b} \cdot \frac{24a}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\frac{5c^2 - 10bc}{x^2 - 5x - 6} \cdot \frac{x^2 - 6x}{15c^2 - 60bc + 60b^2}$$

$$\frac{(a + b)(m - n)}{a^2 - 9a + 20} \cdot \frac{a^2 - 3a - 4}{m^2 - n^2}$$

$$\frac{3u - 15}{2u + 8} \cdot \frac{u^2 + 9u + 8}{u^2 + 3u - 40}$$

52. Teosta järgmised jagamised:

1. $\frac{a + b}{c} : (a + b)$	2. $c^2 : \frac{-c^3}{a + b}$
$\frac{4n(p - q)}{p} : (p - q)$	$(2p + 2q) : \frac{p + q}{5a}$
$\frac{x^2 - c^2}{7c} : (x + c)$	$(x + 2y) : \left(-\frac{x + 2y}{4n}\right)$
$\frac{m^2 - mn}{6} : (3m - 3n)$	$(a - m)^2 : \frac{3a - 3m}{8}$
$\frac{5a + 1}{3} : (25a^2 - 1)$	$(14m - 7) : \frac{4m^2 - 1}{9}$

53. Teosta järgmised jagamised:

1. $\frac{x^2 - ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$	2. $\frac{105f^2}{gh - 1} : \frac{84fg}{1 - gh}$
$\frac{2x - 4}{5a} : \frac{x - 2}{15a^2}$	$\left(\frac{Q}{2} - \frac{2}{Q}\right) : \frac{Q + 2}{4Q}$
$\frac{a^2 - x^2}{ax} : \frac{a + x}{a^2x^2}$	$\frac{m^2 - m - 12}{a^2} : \frac{m - 4}{a^2 - a}$
$\frac{(m + n)^2}{4m - 4n} : \frac{6m + 6n}{m - n}$	$\frac{u^2 - 19u + 90}{u^2 - 1} : \frac{u - 10}{u + 1}$
$\frac{p^2 + pq}{rx + sx} : \frac{p^3 + p^2q}{rx^3 + sx^3}$	$\left(R^2 - 2 + \frac{1}{R^2}\right) : 3\left(R - \frac{1}{R}\right)$

54. Teisenda järgmised avaldised nõnda, et neid oleks võimalik kirjutada üheainsa murrujoonega või murrujooneta:

$$*1. \quad \frac{x + \frac{x}{2}}{x - \frac{x}{2}}$$

$$*2. \quad \frac{a + \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$*3. \quad \frac{1 + c}{1 + \frac{1}{c}}$$

$$*4. \quad \frac{1 - \frac{b}{a}}{a + b}$$

$$*5. \quad \frac{x + \frac{1}{2}y}{x - \frac{1}{3}y} - 1$$

$$*6. \quad \frac{\frac{t}{r}}{q - \frac{t}{r}}$$

$$*7. \quad \frac{1 - \frac{p}{q}}{\frac{q - p}{r}}$$

$$*8. \quad \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$*9. \quad \frac{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}$$

$$*10. \quad \frac{a + \frac{5}{6}b}{a - \frac{4}{9}b} - 1$$

$$*11. \quad 1 + \frac{\frac{1}{m-1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

$$*12. \quad \frac{\frac{5m}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$$

$$*13. \quad \frac{1 - \frac{a}{z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$*14. \quad \frac{a^2 - 4b^2}{27(a - 2b)}$$

$$*15. \quad \frac{1}{\frac{c^3 - c}{c + 1}} + c$$

55. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutine läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse vett v liitrit?

56. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega rohkem kulub ujujal ujudes k meetrit vastuvoolu, kui ujudes sama kaugust pärivoolu?

Kui palju aega kulub ujujal ujumiseks k meetrit vastuvoolu ja tagasi lähtekohani?

57. Ülemere-õhusõidul mõeldakse lennata otseteed kaugus s km, lennates maksimaalse kiirusega v kilomeetrit tunnis. Kui palju mõjustab lennuaega kauguse suurenemine u km võrra eksimise tõttu õigest lennuteest?

Kui palju mõjustaks lennuaega lennukiiruse ülehindamine suuruse võrra w kilomeetrit tunnis?

58. Linnavalitsus tõstab vee praegust hinda, H penni hektoliitri eest, h penni võrra. Kooli eelarves on veekuludena nähtud ette K marka. Mitme hektoliitri võrra peab kool veetarvitust vähendama, et veemaks ei tõuseks üle eelarves ettenähtud summa?

§ 5. Võrrete omaduste rakendusi.

Lisaks võrrete juba tuntud omadustele leiame veel mõned uued omadused.

1. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Tõepoolest, kui

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis liitmisaksioomi põhjal

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

ehk, kirjutades võrduse kummagi poole murruna, saame:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

2. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Tõestus toimub lahutamisaksioomi rakendades.

3. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Väide järeldub esimesest ja teisest omadusest jagamisaksioomi rakendamisel.

Ülesanded.

59. Lahenda järgmised võrrandid:

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. $\frac{a-2}{a} = \frac{3}{5}$ | 7. $\frac{u-12}{1-3u} = 2$ | 13. $\frac{5x-1}{x-4} = \frac{1}{4}$ |
| 2. $\frac{c}{c+6} = \frac{1}{3}$ | 8. $\frac{3}{t+14} = \frac{1}{t}$ | 14. $\frac{10m-1}{1-m} = 5$ |
| 3. $\frac{x}{3x+10} = \frac{1,5}{7}$ | 9. $3 = \frac{12}{s+3}$ | 15. $\frac{1-3n}{n-12} = \frac{1}{2}$ |
| 4. $\frac{4u-7}{5u} = \frac{1}{3}$ | 10. $\frac{2v+1}{3v} = \frac{1}{3}$ | 16. $2r = \frac{7r+0,5}{4}$ |
| 5. $\frac{w+6}{2w+15} = \frac{4}{5}$ | 11. $\frac{n+4}{n+3} = \frac{6}{5}$ | 17. $\frac{100w}{3+10w} = \frac{10}{13}$ |
| 6. $\frac{200-x}{x} = \frac{7}{18}$ | 12. $\frac{7z-5}{3z+5} = 1\frac{4}{5}$ | 18. $\frac{10z+25}{2z+7} = \frac{-5}{1}$ |

60. Lahenda järgmised võrrandid:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $\frac{3r}{2r-5} = \frac{8}{11}$ | 2. $\frac{2(4v-1)}{5} = \frac{3(28-5v)}{4}$ |
| $\frac{s+2}{s-5} = \frac{8}{15}$ | $\frac{17}{4w-3} = \frac{13}{2w+3}$ |
| $\frac{14-3t}{13} = \frac{4t-5}{10}$ | $\frac{x^2}{x-4} = x-6$ |
| $\frac{19-13u}{7} = \frac{5u+33}{2}$ | $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-7}$ |
| $\frac{15-4h}{5} = \frac{21-5h}{7}$ | $\frac{3x}{x+1} = \frac{3x+1}{x}$ |

61. Missuguse x -i väärtuse juures on kehtivad järgmised võrded:

$$1. \frac{a}{1-x} = \frac{b}{1+x}$$

$$4. \frac{x+p}{x-1} = \frac{x-p}{x+1}$$

$$2. \frac{m}{x-m} = \frac{n}{x+m}$$

$$5. \frac{mx+2m}{mx+2n} = \frac{mx-2m}{mx-2n}$$

$$3. \frac{p-q}{p-qx} = \frac{r-s}{r+sx}$$

$$6. \frac{ax-5b}{cx-5d} = \frac{ax+3d}{cx+3d}$$

62. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. \frac{x}{x+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$4. \frac{1}{ax-n} = \frac{1}{cx+n}$$

$$2. \frac{1}{\frac{x}{a}-\frac{x}{b}} = \frac{1}{1}$$

$$5. \frac{a+x}{\frac{b+x}{a+b}} = \frac{\frac{a-x}{b+x}}{a+b}$$

$$3. \frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}} = \frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}$$

$$6. \frac{1-\frac{x+a}{x-b}}{1-\frac{x-a}{x+b}} = \frac{1}{1}$$

§ 6. Täheliste kordajatega lineaarvõrrand.

Selgitame järgmiste näidete varal lineaarvõrrandi lahendamise käiku täheliste kordajate puhul.

Ülesanne 1. Lahenda võrrand

$$\frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2,$$

milles x on otsitav ning m ja n on antud arvud.

L a h e n d u s. Vasakul poolel nõutud liitmist teostades saame:

$$\frac{n(n+x) + m(m-x)}{mn} = 2$$

ehk, korrutamisaaksioomi põhjal,

$$n(n+x) + m(m-x) = 2mn.$$

Sulgusid avades saame:

$$n^2 + nx + m^2 - mx = 2mn$$

ehk

$$nx - mx = -n^2 + 2mn - m^2$$

ehk, korrutades kummagi poole -1 -ga,

$$mx - nx = n^2 - 2mn + m^2$$

ehk, kummagi poole teguriteks lahutades,

$$(m-n)x = (n-m)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, leiame:

$$x = \frac{(n-m)^2}{m-n} = \frac{(m-n)^2}{m-n}$$

ehk

$$x = m - n.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse x -i asemele antud võrrandi vasakusse poole, leiame:

$$\begin{aligned} \frac{n + (m-n)}{m} + \frac{m - (m-n)}{n} &= \frac{n + m - n}{m} + \frac{m - m + n}{n} = \\ &= \frac{m}{m} + \frac{n}{n} = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

nagu peab olema.

Ü l e s a n n e 2. Lahenda võrrand

$$\frac{b}{4ax - a} - \frac{a(8x - 1)}{4bx - b} = 2,$$

lugedes arvud a ja b andmeiks ja arvu x otsitavaks.

L a h e n d u s. Vasakul poolel seisvate murdude nimetajaid tegureiks lahutades saame:

$$4ax - a = a(4x - 1) \quad \text{ja} \quad 4bx - b = b(4x - 1),$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$ab(4x - 1)$$

ja murdude laiendustegurid on vastavalt b ja a . Sooritades võrrandi vasakul poolel nõutud lahutamise, leiame:

$$\frac{b^2 - a^2(8x - 1)}{ab(4x - 1)} = 2.$$

Kasutades korrutamisaksiooni vabaneme nimetajast:

$$b^2 - a^2(8x - 1) = 2ab(4x - 1)$$

ehk, sulgusid avades,

$$b^2 - 8a^2x + a^2 = 8abx - 2ab.$$

Siit

$$-8a^2x - 8abx = -a^2 - 2ab - b^2$$

ehk, korrutades kummagi poole -1 -ga:

$$8a^2x + 8abx = a^2 + 2ab + b^2$$

ehk teisiti

$$8a(a + b)x = (a + b)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, saame:

$$x = \frac{a + b}{8a}.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse x -i asemele algvõrrandisse leiame, et võrrandi esimene liige on

$$\frac{b}{4a \cdot \frac{a+b}{8a} - a} = \frac{b}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{2b}{a+b-2a} = \frac{2b}{b-a}.$$

Samuti leiame, et võrrandi teine liige on

$$\begin{aligned} \frac{a(8 \cdot \frac{a+b}{8a} - 1)}{4b \cdot \frac{a+b}{8a} - b} &= \frac{a(\frac{a+b}{a} - 1)}{b \cdot \frac{a+b}{2a} - b} = \frac{a+b-a}{\frac{b(a+b)-2ab}{2a}} = \\ &= \frac{2ab}{ab+b^2-2ab} = \frac{2ab}{b^2-ab} = \frac{2ab}{b(b-a)} = \frac{2a}{b-a}. \end{aligned}$$

Järelikult võrrandi vasak pool on

$$\frac{2b}{b-a} - \frac{2a}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2,$$

nagu peab olema.

Kokkuvõttes:

tähealiste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel

1. vabaneme murdudest, korrutades võrrandi kummagi poole liikmete ühisnimetajaga;
2. avame sulud ja koondame;
3. toome kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik teised liikmed teisele poolele;
4. koondame;
5. võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga;
6. taandame leitud avaldise;
7. kontrollime vastust, asetades leitud avaldise otsitava asemele antud võrrandisse.

Ülesanded.

63. Lahenda järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x :

1. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{b}$

6. $ac \frac{x}{2} + c = bc \frac{x}{2}$

2. $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 0$

7. $np - \frac{nx}{3} = nq \cdot \frac{x}{3}$

3. $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} = 1$

8. $\frac{x}{p} + \frac{x}{q} + \frac{x}{r} = 1$

4. $\frac{x}{m} - 2 \frac{x}{n} = n^2 - 4m^2$

9. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = abc$

5. $a \cdot \frac{x}{b} - c \cdot \frac{x}{d} = 1$

10. $x - \frac{x}{r} + \frac{x}{p} + \frac{x}{rp} = 0$

64. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x-p}{q} = \frac{x-q}{p}$

2. $a(x+b) + b(x-a) = a+b$

3. $m(x+m) = n(n-x)$

4. $\frac{x}{p} + \frac{x}{q} = p+q$

5. $h(x-k) = h^2 - kx$

6. $m(m-x) + n(n+x) = 2mn$

7. $\frac{3x+2a}{2} = a + \frac{2x+5a}{3}$

8. $(p+1)(x+4) = (p+3)(x+2)$

9. $ax - \frac{b}{a} = 1 - bx$

10. $\frac{2}{3}(x-a) + \frac{3}{4}(x-2a) = \frac{5}{6}(x-4a)$

65. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. \frac{m^2 - x}{n} = \frac{n^2 - x}{m}$$

$$6. \frac{x}{m-n} + \frac{x}{m+n} = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

$$2. \frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2$$

$$7. \frac{x-p}{q} + \frac{p-q}{p+q} = 1$$

$$3. \frac{x-h}{h+k} + \frac{x-k}{h-k} = 1$$

$$8. \frac{x+g}{f^2} + \frac{x}{fg} + \frac{x-f}{g^2} = 0$$

$$4. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$$

$$9. \frac{ax-b}{a-b} = \frac{ax}{a+b}$$

$$5. \frac{b+x}{a} = \frac{a-x}{b}$$

$$10. \frac{x+a}{a+b} = \frac{x-a}{a-b}$$

66. Lehekandja teenib kuus a marka, varustades m tellijat. Mitu tellijat ta peab juurde saama, et teenida kuus b marka?

67. Kooli lõpueksamil $p\%$ õpilasist sooritas eksami hästi ja $q\%$ rahuldavalt. Eksami sooritamine ebaõnnestus N õpilasel. Mitu õpilast oli eksamil?

68. Toa tapeetamiseks ostetud a rulli tapeti ja b rulli poordi eest maksti kokku k marka. Kui kallid on rull tapeetit, kui poordirulli hind moodustab $\frac{3}{5}$ tapetirulli hinnast?

§ 7. Võrrandid otsitavaga nimetajas.

Võrrandi lahendamisel võib eksida teisendamistes ja arvutustes. Seepärast on väga soovitatav kontrollida leitud lahendi kõlblikkust, asetades selle lahendi otsitava asemele lahendada antud võrrandisse. Leitud lahendi kontrollimine on ilmtingimata vajalik, kui lahendamiseks ettepanud võrrand sisaldab otsitavat nimetajas. Selgitame sel puhul võrrandi lahendamisel esinevaid iseärasusi järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Lahenda võrrand

$$\frac{x+1}{3x-7} = \frac{3x-8}{3(3x+4)}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab:

$$3(3x+4)(x+1) = (3x-7)(3x-8),$$

millest peale sulgude avamist saame:

$$9x^2 + 21x + 12 = 9x^2 - 45x + 56$$

ehk, koondades,

$$66x = 44,$$

seega

$$x = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse x -i asemele lähte-
võrrandisse, saame võrrandi vasakul poolel

$$\frac{\frac{2}{3} + 1}{3 \cdot \frac{2}{3} - 7} = \frac{\frac{5}{3}}{-5} = -\frac{1}{3}$$

ja võrrandi paremal poolel

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 8}{3\left(3 \cdot \frac{2}{3} + 4\right)} = \frac{2-8}{3(2+4)} = \frac{-6}{3 \cdot 6} = -\frac{1}{3},$$

seega leitud x -i väärtus tõesti rahuldab võrrandit.

Ülesanne 2. Lahenda võrrand

$$\frac{4x+5}{7x-8} = \frac{4}{7}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab

$$7(4x+5) = 4(7x-8);$$

sulgusid avades saame:

$$28x + 35 = 28x - 32.$$

Lahutades võrduse kummastki poolst $28x$ näeme, et arv 35 peaks olema võrdne arvuga -32 , mis on võimatu. Selles võrrandis peituv nõue pole rahuldatav, võrrandil pole lahendit.

Ülesanne 3. Lahenda võrrand:

$$2 + \frac{x+1}{x-1} = 3 + \frac{2x-1}{x-1}.$$

Lahendus. Korrutades vasakul poolel seisva murru lugejat ja nimetajat avaldisega $x-1$, saame:

$$\frac{2(x-1) + (x+1)}{3(x-1) + (2x-1)} = 2$$

ehk, avades sulud ja koondades:

$$\frac{3x-1}{5x-4} = 2.$$

Korrutades võrrandi kummagi poole avaldisega $5x-4$, vabaneme nimetajast ja saame:

$$3x-1 = 2(5x-4)$$

ehk

$$3x-1 = 10x-8$$

ehk

$$-7x = -7$$

ja seega

$$x = 1.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse x -i asemele võrrandi vasakusse poolde, saame:

$$\frac{2 + \frac{1+1}{1-1}}{3 + \frac{2-1}{1-1}} = \frac{3 + \frac{2}{0}}{3 + \frac{1}{0}}.$$

Nii murrul $\frac{2}{0}$ kui ka murrul $\frac{1}{0}$ pole mõtet; leitud väärtus $x = 1$ ei rahulda võrrandit; võrrandil pole lahendit.

Teame, et lineaarvõrrandil $ax + b = 0$ on olemas alati üks ja ainus lahend. Käsiteldud näide õpetab, et võrrand, milles otsitav esineb nimeta-
jas, võib teisendamisel taanduda lineaarsele; sellest hoolimata ei tarvitse tal olla lahendit.

Ülesanded.

69. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1. \frac{59}{5x-3} - \frac{23}{x+3} = 0$$

$$6. \frac{4x-5}{3x+2} - \frac{5x+1}{5x-1} = \frac{1}{3}$$

$$2. \frac{41}{x-7} - \frac{92}{3x-4} = 0$$

$$7. \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{20}{4x-7}$$

$$3. \frac{1}{x} + \frac{2x+5}{x+6} = 2$$

$$8. \frac{8}{x-13} + \frac{15}{3x-16} = \frac{13}{x-8}$$

$$4. \frac{1}{x-5} + \frac{2x-3}{x+2} = 2$$

$$9. \frac{1}{2x-3} + \frac{17}{6x+4} = \frac{10}{3x-6}$$

$$5. \frac{17}{x-3} - \frac{5-x}{22+x} = 1$$

$$10. \frac{1}{x-5} - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x} = 0$$

$$11. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-7}{x-8}$$

$$12. \frac{6}{2x-5} - \frac{3}{x+3} - \frac{22}{2x-7} + \frac{11}{x-2} = 0$$

70. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1. \frac{x}{4} - \frac{4}{x} = \frac{2x}{9}$$

$$6. \frac{x-1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{3(x-1)} = \frac{5}{6}$$

$$2. \frac{3x-4}{x-4} = 9 - \frac{x-2}{2}$$

$$7. \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$3. \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = 2\frac{1}{12}$$

$$8. \frac{x}{a+x} + \frac{a+x}{x} = 2\frac{1}{2}$$

$$4. \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{5}{6}$$

$$9. \frac{2x+7}{3(x-3)} - \frac{x+6}{2x-3} = 3$$

$$5. \frac{x+12}{x} + \frac{x}{x+12} = 5\frac{1}{5}$$

$$10. \frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x+6} = \frac{2x-5}{x+1}$$

71. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riiulile ühepalju raamatuid. Kui igale riiulile panna 8 raamatut rohkem kui esialgu määratud, siis jääb 4 riiulit tühjaks. Mitu riiulit on raamatukapil?

72. Kaks bussi sõidavad kahe linna vahet, mis on võrdne 72 km. Et esimene buss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis sõidab ta nimetatud tee 15 minuti võrra lühema aja jooksul ära kui teine. Kui suure kiirusega liiguvad bussid?

73. Majaperemees müüs oma maja naabrile 7400 marga eest, saades teatava % kahju. Aasta pärast ostis ta maja uuelts omanikult tagasi, kusjuures uus omanik sai sama % kasu. Müügi- ja tagasiostu-operatsioonil kaotas majaomanik kokku 1155 marka. Mitu protsenti sai majaomanik esimesel müügil kahju ja naaber teisel müügil kasu?

74. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 3 tunni jooksul. Leia aeg, mis tarvilik paagi täitumiseks peapumba kaudu.

75. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumi lehele ühepalju pilte. Kui igale lehele mahutada 2 pilti rohkem kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

76. Kaupmees vajab kaste 378 õuna pakkimiseks. Kui ta igasse kasti paneks 9 õuna rohkem kui kavatsetud,

siis vajaks ta kaste ühe võrra vähem. Mitu kasti vajab kaupmees?

77. Turist kavatseb matkata 252 km. Et ta iga päev 3 km rohkem matkas kui kavatsetud, siis kestis matk 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?

78. Kahe aleviku vaheline kaugus on sillutatud maantee kaudu 26 km, halva külatee kaudu 18 km. Autobus ja hobusõiduk asuvad ühel ajal teele; esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobus tunnis 15 km võrra rohkem sõidab kui hobusõiduk, jõuab ta sihtjaama viimasest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobus?

§ 8. Ülesandeid kordamiseks.

79. Teosta järgmised jagamised, enne jagatavat ja jagajat tegureiks lahutades:

$$(nx + ny + 5x + 5y) : (x + y)$$

$$(mz - nz + 3m - 3n) : (m - n)$$

$$(ax^2 - ax - x^2 + x) : (x^2 - x)$$

$$(16mn - 12n^2 + 8mp - 6np) : (2n + p)$$

$$(a^4 - a^3 - a^2 + a) : (a^2 - 1)$$

80. Lahuta järgmised avaldised tegureiks:

1. $\frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$T^2 + 20T - 525$$

$$A^2 + 2A - 899$$

2. $x^2 + 3nx + 2n^2$

$$1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2$$

$$x^2 - 1 - ax - a$$

81. Leia avaldiste

$2R^2 - 7R - 15$, $2R^2 - 24R + 70$ ja $2R^2 - 11R - 21$
väikseim ühiskordne.

82. Kaks raudteerongi, mille pikkused on l meetrit, sõidavad rööbikul teedel. Nõutakse valemit aja arvutamiseks, mis kulub

1. teise rongi möödasõiduks esimesest, kui esimene seisab paigal ja teine liigub kiirusega v meetrit sekundis;

2. rongide teineteisest möödasõiduks, kui mõlemad liiguvad samas suunas, üks kiirusega u , teine kiirusega v meetrit sekundis, ja $v > u$;

3. rongide teineteisest möödasõiduks, kui mõlemad liiguvad vastassuunas, üks kiirusega u ja teine kiirusega v meetrit sekundis.

83. Arvuta avaldise

$$\frac{x^2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{(p+3)x}{p(p+1)(p+2)} + \frac{1}{p}$$

väärtus, kui $x = p + 1$.

84. Lihtsusta avaldised:

$$\frac{2}{r-5} - \frac{3}{r+5} + \frac{5(r-1)}{r^2-25}$$
$$1 + \frac{2}{w+3} - \frac{6}{w+4}.$$

85. Kas on kehtiv võrre

$$\frac{a^2 - ax}{a^2 - x^2} = \frac{an}{an + xn} ?$$

86. Rakendades võrde põhiomadust, avalda:

	seosest	suurus		seosest	suurus
1.	$\frac{I}{E} = \frac{1}{R+r}$	r	3.	$\frac{P}{2Q} = \frac{R}{R-r}$	R
2.	$\frac{I}{R} = \frac{c}{R+1}$	R	4.	$\frac{F-1}{G+2} = \frac{R+r}{R-r}$	r

87. Lahenda võrrandid:

1.	$\frac{1}{x} = 1 - \frac{x}{x+4}$	6.	$\frac{x}{x-1} - \frac{5}{6} = \frac{x+1}{6x-12}$
2.	$x+5 = \frac{x^2+11}{x+7}$	7.	$\frac{3}{x-5} - \frac{x-2}{3x-15} = \frac{x+2}{4x-20}$
3.	$\frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$	8.	$\frac{7}{x-5} + \frac{2}{x+5} = \frac{40-x}{x^2-25}$
4.	$\frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2}{x+4}$	9.	$\frac{2x^2+3}{x^2-8x+16} - 1 = \frac{x-3}{x-4}$
5.	$\frac{2}{x} - \frac{3}{5-x} = \frac{5}{x-2}$	10.	$\frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{x+5}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$

88. Olgu $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$. Arvuta siit järgmiste murdude väärtused:

$$\frac{a+b}{a} \quad \frac{3a+b}{a+b} \quad \frac{3a-b}{2a-b} \quad \frac{a+3b}{5a-2b}$$

89. Määra võrrandi

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

lahendid ligikaudu, veaga alla 0,01.

90. Lahenda võrrandid:

1.	$\frac{2}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-3}$	2.	$\frac{x-3}{x-4} = \frac{x+5}{2x-5}$
----	-------------------------------------	----	--------------------------------------

91. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $ax^2 + (a - b)x - b = 0$

2. $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$

3. $2nx - \frac{a}{x} = 2nb - \frac{a}{b}$

4. $n^2(x^2 + 1) = a^2 + 2n^2x$

5. $abx^2 - b^2x = a^2x - ab$

6. $(a - 1)x^2 - x = a$

7. $a^2(1 - x) - b^2(1 + x) = abx^2$

8. $(x + a)^2 + (x + b)^2 = k^2$

9. $\frac{x - a}{x - b} + \frac{x + a}{x + b} = 1$

10. $\frac{c}{x - d} + \frac{d}{x - c} = 2$

11. $\frac{a}{ax - b} = \frac{bx - a}{b}$

12. $x = \frac{3(n - 1)^2 + 2nx}{x + 2}$

13. $\frac{ax - 2}{bx - 1} = \frac{bx - 1}{ax}$

14. $x + \frac{a}{x} = \frac{x + b}{cx}$

15. $\frac{1}{x^2} + \frac{p}{x} + q = 0$

Peatükk II.

Võrrand-süsteem.

§ 9. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteem.

Mõnede küsimuste lahendamisel on otstarbekohane kasutada mitut tundmatut.

Näide. Elektriäri poolt koostatud valgustusseadme eelarve näitab järgmist: kui võimla valgustamiseks võtta 4 leeklampi ja 7 hõõglampi, läheb valgustusseade maksma 236 marka; kui aga võtta 3 samasugust leeklampi nagu ennemgi ja 11 hõõglampi, siis läheb see seade maksma 223 marka. Kui kallilt on äri poolt arvestatud leeklambi ja kui kallilt hõõglambiseade?

Märgime ühe leeklambiseadme hinna tähega l , ühe hõõõglambiseadme hinna tähega h , kusjuures kumbki hind on arvestatud markades. Ülesande sõnastuse järgi on siis ühelt poolt

$$4l + 7h = 236,$$

teiselt poolt

$$3l + 11h = 223.$$

Ülesande lahendamine on taandatud nõudele: leida k a k s niisugust arvu l ja h , mis rahuldavad ühtaegu nii esimest kui ka teist võrrandit, ehk teisiti, leida k a k s

niisugust arvu l ja h , mis rahuldavad võrrand-süsteemi:

$$\begin{cases} 4l + 7h = 236 \\ 3l + 11h = 223 \end{cases}$$

Nõuet, et tuleb ühtaegu rahuldada kaht võrrandit, märgime sel viisil, et mõlemad võrrandid võtame loogelise suluga ühte.

Et võrrandis tundmatud esinevad esimeses astmes, siis on need võrrandid lineaarsed ja süsteem on lineaarvõrrand-süsteem.

Üldiselt ütleme nii:

kaks võrrandit

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

milles a, b, c, d, m ja n on antud arvud ja x ja y on otsitavad, moodustavad kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi; lahendada see süsteem tähendab leida niisugune x - ja y -väertuspaar, mis ühtaegu rahuldab nii esimest kui ka teist võrrandit.

Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine aetusvõttega.

Olgu lahendada eespool-toodud võrrand-süsteem:

$$\begin{cases} 4l + 7h = 236 \\ 3l + 11h = 223 \end{cases}$$

Arutame nii: kujutleme, et meil on juba õnnestunud leida üht otsitavat, näiteks otsitavat h ; siis pole enam raske leida teist otsitavat l . Tõepoolest, asetame näiteks esimeses võrrandis h asemele tema jaoks leitud väärtuse; peale tuntud liikmete ülekandmist paremale poolele saame siis

$$4l = 236 - 7h,$$

millest

$$l = \frac{236 - 7h}{4}.$$

Seega oleks ka l leitud. Saadud l peab aga rahuldama ka teist võrrandit; see tähendab, et

$$3 \cdot \frac{236 - 7h}{4} + 11h = 223.$$

Nii jõuame võrrandile, milles ainsaks otsitavaks on h . Selle võrrandi lahendamine ei tee raskusi: korrutades võrrandi pooli 4-ga saame:

$$3(236 - 7h) + 44h = 892;$$

siit

$$708 - 21h + 44h = 892$$

ehk

$$23h = 184$$

ehk

$$h = 8.$$

Asetades selle väärtuse l -i avaldises h asemele, saame

$$l = \frac{236 - 7 \cdot 8}{4} = \frac{180}{4} = 45.$$

Niisiis

$$h = 8, \quad l = 45.$$

K o n t r o l l. Asetades tulemused võrrandite vasakutesse pooltesse, saame:

$$4 \cdot 45 + 7 \cdot 8 = 180 + 56 = 236, \text{ nagu peab olema;}$$

$$3 \cdot 45 + 11 \cdot 8 = 135 + 88 = 223, \text{ nagu peab olema.}$$

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks:

Avaldame ühest võrrandist ühe tundmatu teise kaudu; asetame saadud avaldise teise võrrandisse varemini avaldatud tundmatu asemele; lahendame tekkinud võrrandi ja asetame lahendi varemini avaldatud tundmatu avaldisse.

Käsiteldud võtte kannab a s e t u s v õ t t e n i m e.

Ülesanne. Lahenda lineaarvõrrand-süsteem:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 205 \\ 4x + 3y = 135 \end{cases}$$

Lahendus. Teisest võrrandist saame

$$3y = 135 - 4x \text{ ehk } y = \frac{135 - 4x}{3};$$

seega esimesest järeldub, et

$$6x + 5 \cdot \frac{135 - 4x}{3} = 205$$

ehk

$$18x + 5(135 - 4x) = 615$$

ehk

$$18x + 675 - 20x = 615$$

ehk

$$-2x = -60;$$

siit

$$x = 30$$

ja järelikut

$$y = \frac{135 - 4 \cdot 30}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Kontroll. Asetades tulemused võrrandite vasakutesse pooltesse, saame:

$$6 \cdot 30 + 5 \cdot 5 = 180 + 25 = 205, \text{ nagu peab olema};$$

$$4 \cdot 30 + 3 \cdot 5 = 120 + 15 = 135, \text{ nagu peab olema.}$$

Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Kui lähemalt vaatleme lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks antud eeskirja ja selle rakendamist ülalkäsiteldud näitele, siis näeme, et võtte kahe esimese sammu ees-

märgiks on tuletada ühest võrrandist teise abil niisugune võrrand, mis oleks vaba ühest tundmatust. Tõepoolest, võrdus $y = \frac{135 - 4x}{3}$ on vaid võrrandi $4x + 3y = 135$ teisend ja võrdus $6x + 5 \cdot \frac{135 - 4x}{3} = 205$ on võrrandi $6x + 5y = 205$ teisend, mis saadud eelmist võrrandit arvestades.

Toimingut, mille abil kahest kahe tundmatuga võrrandist tuletatakse ühe tundmatuga võrrand, nimetatakse ühe tundmatu elimineerimiseks.

Tundmatu elimineerimist võib teostada mitmel viisil. Üks lihtsamaid on järgmine: tundmatu y elimineerimiseks süsteemist

$$\begin{cases} 6x + 5y = 205 \\ 4x + 3y = 135 \end{cases}$$

korrutame esimese võrrandi kummagi poole -3 -ga, teise võrrandi kummagi poole 5 -ga; lühemas kõnekäänus: korrutame esimest võrrandit -3 -ga, teist 5 -ga; saame süsteemi:

$$\begin{cases} -18x - 15y = -615 \\ 20x + 15y = 675 \end{cases}$$

Liidame võrdsed suurused võrdsetega; liitmisaksioomi põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$2x = 60.$$

See võrrand on vaba tundmatust y ja seega on seatud eesmärk saavutatud. Selleks tarvilikud tehted: korrutamine -3 -ga, korrutamine 5 -ga ja tulemuste liitmine on lubatavad operatsioonid; nende toimingu lubatavust kindlustavad korrutamise- ja liitmisaksioomid.

Edaspidine lahenduskäik on lihtne:

$$\begin{aligned}x &= 30 \\4 \cdot 30 + 3y &= 135 \\3y &= 15 \\y &= 5.\end{aligned}$$

Niisiis süsteemi lahendid on $x = 30$ ja $y = 5$.

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja ühe tundmatu elimineerimiseks kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemist:

korrutame kummagi võrrandi kohase teguriga, valides tegurid nii, et saadavais võrrandis eemaldatava tundmatu ees seisaksid absoluutselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega kordajad; saaduste liitmise tulemus on siis vaba sellest tundmatust.

Ü l e s a n n e. Lahenda võrrand-süsteem:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 1,5 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Kirjutame võrrandid kujul:

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 3 \\ 6 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{y} = 1,5 \end{cases}$$

Märkides murrud $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{y}$ vastavalt tähtedega x_1 ja y_1 , saame:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_1 = 3 \\ 6x_1 - 5y_1 = 1,5 \end{cases}$$

Elimineerime süsteemist tundmatu x_1 . Selleks korrutame esimese võrrandi kõiki liikmeid -2 -ga ja liidame saaduse teise võrrandiga:

$$\begin{array}{r} -6x_1 - 4y_1 = -6 \\ 6x_1 - 5y_1 = 1,5 \\ \hline -9y_1 = -4,5 \\ y_1 = 0,5 \end{array}$$

siit

ja järelikult

$$3x_1 + 2 \cdot 0,5 = 3;$$

siit

$$x_1 = \frac{2}{3}.$$

Et $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{y} = 0,5$,

siis

$$x = 1,5 \quad \text{ja} \quad y = 2.$$

Ülesanded.

92. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

1.
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 15 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y = 5x \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x = -y + 3 \\ 5x + 8y = 24 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = 4y \\ 2x - 7y = 16 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 10x - y = 14 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 10x - y = 21 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}y \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$$

93. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

1.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 7x - 9y = 36 \\ 10x - 11y = 44 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 5x + y = 10 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x - 7y = 5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 4x + 15y = 10 \\ x + 7y = 9 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 3x + 5y = -21 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$$

Exhib. Tart.

94. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 6x + 15y = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y = 17 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 0,8x + 0,3y = 1,7 \\ 0,2x - 1,0y = 0,2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 0,6x + 0,5y = 1,0 \\ 1,5(x - y) = 4,7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 1,4x + 0,3y = -2,7 \\ 1,0x + 0,9y = -1,7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ x - 4y = 19 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 0,4x - 1,5y = 5,9 \\ 2,0x + 1,2y = 0,5 \end{cases}$$

95. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = py + q \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} ax + by = c \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = x - q \\ qx + py = p^2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} ax + y = a^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} px + qy = (p + q)^2 \\ px - qy = p^2 - q^2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} ax - by = a^2 \\ (b - a)x + ay = b^2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} a^2x + y = a^3 \\ (a + 1)x + 1 = y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} nx + my = 0 \\ x + y = m - n \end{cases}$$

96. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 14\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}x = 5\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{3} = 1\frac{1}{2} \\ y - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{3x - y}{2} + x = y \\ \frac{x + 3y}{3} - y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 3\frac{3}{4} \\ \frac{x}{3} + y = 10\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{x + 7}{2} + y = 9 \\ \frac{y + 15}{3} + x = 11 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1 - 2x}{3} + 4y = 13 \\ x + \frac{5 + 8y}{5} = 1 \end{cases}$$

97. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} \frac{h + 5}{8} - \frac{k + 4}{11} = 0 \\ 3(h - 1) + 2(k + 4) = 28 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{3m + 5}{7} = \frac{2m + n}{5} \\ 2(2 - m) + 3(n + 7) = 20 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{2p - 3q}{4} = \frac{5p - 8q}{4} \\ 3(p - q) - 2(2p - 3q) = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{5}{x - 2} + \frac{4}{y - 2} = 0 \\ 3(x - 1) + (y + 3) = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{2}{u-3} - \frac{6}{2v+3} = 0 \\ 13(u-v) - 7v = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{12}{8-s} + \frac{5}{t-5} = 0 \\ 15(s+5) - 2(t+7) = 1 \end{cases}$$

98. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{2}{3x} + \frac{1}{2y} = 3 \\ \frac{5}{6x} - \frac{3}{4y} = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 25 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 26 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{18}{3x-2y} + \frac{11}{2x-3y} = 13 \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}$$

§ 10. Lahendumatud võrrand-süsteemid.

Ülesanne 1. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 6x + 10y = 15 \end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu y . Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise —1-ga; saame:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 16 \\ -6x - 10y = -15 \end{cases}$$

Liitmisaksiooni põhjal järeldub neist võrdusist, et null peaks olema võrdne ühega, mis on võimatu. Siin on tegemist juhuga, kus süsteemi võrrandid on teineteisele vasturääkivad: esimene nõuab, et $6x + 10y$ oleks 16, teine seevastu, et sama summa oleks 15.

Ülesanne 2. Lahenda süsteem:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu x . Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise —1-ga; saame:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ -4x + 6y = -14 \end{cases}$$

Liites need võrrandid saame võrduse
 $0 = 0$.

See nõue on täidetud olenemata sellest, missuguse väärtuse me anname tundmatule y . Seepärast ei saa siit ka mingit y -väärtust määrata. Siin on tegemist juhuga, kus kumbki võrrand nõuab üht ja sedasama või üks võrrandeist on teise võrrandi teisend; tõepoolest: kui teise võrrandi jagame 2-ga, saame esimese. Ühest nõudest ei jätku kahe tundmatu määramiseks.

Kokkuvõttes:

lineaarvõrrand-süsteem on lahendumatu, kui selle süsteemi võrrandid on teineteisele vasturääkivad või kui üks süsteemi võrrandeist on teise võrrandi teisend.

Ülesanded.

99. Allpool järgneb rida võrrand-süsteeme. Misuguste süsteemide võrrandid on ekvivalentsed, missuguste süsteemide võrrandid on teineteisele vasturääkivad?

$$1. \begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ 9x - 6y = 36 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + \frac{1}{4}y = 6 \\ 4x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 7x - 8 = 4y - 2x \\ 18x - 8y = 16 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + \frac{2}{7}y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y = 1 \end{cases}$$

§ 11. Võrrand-süsteemi koostamine.

Ülesanne 1. Kullasepal on kaks hõbepeekrit ja nende juurde kuuluv hõbekandmik, mille hind on 16 marka. Kandmik ühes esimese peekriga maksab 4 korda rohkem kui teine peeker; kandmik ühes teise peekriga maksab 3 korda rohkem kui esimene peeker. Kui kallis on kumbki peeker?

Lahendus. Märgime esimese peekri hinna markades tähega p , teise peekri hinna markades tähega q . Siis esimese peekri ja kandmiku hind kokku on $p + 16$, teise peekri neljakordne hind on $4q$; seega

$$p + 16 = 4q.$$

Teise peekri ja kandmiku koguhind on $q + 16$, esimese peekri kolmekordne hind on $3p$; seega

$$q + 16 = 3p.$$

Nii saame kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi:

$$\begin{cases} p + 16 = 4q \\ q + 16 = 3p \end{cases}$$

ehk teisiti kirjutades:

$$\begin{cases} p - 4q = -16 \\ 3p - q = 16 \end{cases}$$

Seega on ülesande lahendamiseks vajalik võrrand-süsteem leitud.

Süsteemi lahendamine annab

$$p = 7\frac{3}{11}, \quad q = 5\frac{9}{11},$$

s. t. esimene peeker maksab $7\frac{3}{11}$ marka, teine $5\frac{9}{11}$ marka. Ebatavaline vastuse kuju on seletatav sellega, et ülesanne on pärit XVI sajandist.

Ülesanne 2. Kaks sportlast A ja B võistlevad 800 meetri jooksus. Esimesel katsel annab A 30 m maad

B-le ette, tuleb aga sellest hoolimata 2 sekundit varem sihile kui *B*. Teisel katsel annab *A* 50 m maad *B*-le ette ja tuleb nüüd 1,2 sekundit hiljem sihile kui *B*. Kui kiiresti jookseb kumbki sportlane?

L a h e n d u s. Mõõdame jooksukiirust ühikuga meetri sekundis ja märgime sportlase *A* jooksukiiruse tähega *a*, sportlase *B* jooksukiiruse tähega *b*. Oma tee katmiseks kulus *A*-l esimesel katsel $\frac{800}{a}$ sekundit, *B*-l seevastu $\frac{800-30}{b}$ ehk $\frac{770}{b}$ sekundit. Esimene aeg on teisest 2 sekundi võrra lühem, seega

$$\frac{800}{a} + 2 = \frac{770}{b}.$$

Samal viisil arutades leiame, et teise katse puhul

$$\frac{800}{a} - 1,2 = \frac{750}{b}.$$

Saadud võrrandeid teisiti kirjutades saame:

$$\begin{cases} \frac{800}{a} - \frac{770}{b} = -2 \\ \frac{800}{a} - \frac{750}{b} = 1,2 \end{cases}$$

Märkides murrud $\frac{1}{a}$ ja $\frac{1}{b}$ vastavalt tähtedega α ja β näeme, et need a bitundmatud peavad rahuldama võrrand-süsteemi

$$\begin{cases} 800\alpha - 770\beta = -2 \\ 800\alpha - 750\beta = 1,2 \end{cases}$$

Määrates siit α ja β saame

$$\beta = \frac{3,2}{20}, \quad \alpha = \frac{1212}{8000},$$

järelikult

$$a = \frac{8000}{1212} \approx 6,61 \quad \text{ja} \quad b = \frac{20}{3,2} = 6,25.$$

Niisiis sportlase *A* jooksukiirus oli 6,61 meetrit sekundis ja sportlase *B* jooksukiirus 6,25 meetrit sekundis.

Kokkuvõttes toimub lineaarvõrrand-süsteemi koostamine järgmiselt:

märgime otsitavad kohaselt valitud tähtedega; avaldame nende tähtede ja ülesande andmete abil seosed, mis ülesandes on väljendatud sõnadega; saadud võrrandeid teisendame nii, et süsteemi esineks kujul

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n. \end{cases}$$

Tarbe korral kasutame abitundmatuid.

Lineaarvõrrand-süsteemi abil lahenduvaid ülesandeid.

100. Lennuk lendas pärituult kiirusega 165 km tunnis, vastutuult kiirusega 115 km tunnis. Määra lennuki kiirus vaikse ilmaga. Missuguse kiirusega puhus tuul?

101. Klassis on 32 õpilase jaoks 25 pinki, kaheistmelisi ja üheistmelisi; vabu kohti pole. Kui palju on kaheistmelisi ja kui palju üheistmelisi pinke?

102. Minul on kokku 11 raha, 20- ja 5-margaseid, kogusummas 100 marka. Mitu 20- ja mitu 5-margast raha mul on?

103. Väikeloomade laudas on kodujäneseid ja kanu. Kui palju on kodujäneseid ja kui palju kanu, kui päid on 24 ja jalgu 60? (Vanast hiina ülesannetekogust.)

104. Heategevuse otstarbeks korraldatud peol on üheks lõbustuseks märkilaskmine. Igal märgi tabamisel maksab kassa laskjale 10 penni, igal möödalaskmisel maksab laskja 50 penni. 12 lasu järel võlgnes laskja kassale 4,20 marka. Mitu korda ta tabas märki?

105. Kahe arvu summa on 45. Kui suurendaksime üht neist 10% võrra ja teist 20% võrra, siis oleks nende summa 52. Mis arvud need on?

106. Osteti kahelt müüjalt mune, ühelt 14 ja teiselt 13 penniga paar, kokku 23 paari, koguhinnaga 3,10 marka. Mitu paari mune osteti ühelt, mitu teiselt müüjalt?

107. Kahe arvu summa on 37. Kui jagame suurema arvu väiksemaga, saame jagatise 3 ja jäägi 5. Leia need arvud.

108. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

109. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui numbrite järjekorda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 63 võrra väiksem. Mis arvud need on?

110. Mitu kg peab võtma 1. sorti kohvi hinnaga 3,15 marka kg ja 2. sorti kohvi hinnaga 3,00 marka kg, et saada 60 kg segu, hinnaga 3,05 marka kg?

111. Kapital 500 marka on jaotatud kahte ossa. Esimene osa kannab aastas kasu 4%, teine 6%. Kui suured on need osad, kui kogukasu kapitalilt aasta kohta on 23 marka?

112. Lihtkirjad margistatakse 12-pennise ja tähitatud 30-pennise margiga. Äri saatis välja 14 kirja, mille margistamiseks kulutati kokku 2,58 marka. Mitu kirja läks tähitatult?

113. Sulepea on 2 penni kallim kui pliiats. Ühe marga eest saab osta 5 sulepead ja 4 pliiatsit. Kui kallis on sulepea ja kui kallis on pliiats?

114. Peretütar kudus 8 paari sokke ja 6 paari kindaid, milleks kulus kokku 2,1 kg lõnga. Kindapaarisse läks 70 grammi lõnga vähem kui sokipaarisse. Kui palju lõnga kulus sokkidesse?

115. Ema saatis tütre poodi, et ta ostaks 5 kimpu rediseid ja 4 kimpu murulauku, andes selleks kaasa 2 marka. Eksikombel ostis tütar poest 4 kimpu rediseid ja 5 kimpu murulauku, saades kaasavõetud rahast 13 penni tagasi. Palju maksis kimp rediseid ja palju kimp murulauku?

116. Klass õpilasi ostab ühiselt raamatu loteriipileteid. Loosimisel langeb raamatusse kuuluvale piletile võit. Arvutamine näitab, et võidu jaotamisel tuleb 22 marka puudu, kui igale õpilasele määrata 8 marka, ja jääb 12 marka üle, kui igale õpilasele anda 7 marka. Mitu õpilast on klassis ja kui suur on võidusumma?

117. Tööliste rühm, milles on 10 mees- ja 5 naistöölist, teenis päevas 43,50 marka; samal ajal teenis teine rühm, milles on 14 mees- ja 9 naistöölist, 65,50 marka. Leia mees- ja naistööliste päevased töötasud.

118. 12 pirni ja 15 õuna maksavad 3,60 marka, 15 pirni ja 12 õuna maksavad 3,69 marka. Leia pirni hind ja õuna hind.

119. 5 kg leiba ja 2 kg liha maksab 2,90 marka. Kui leiva hind tõuseks 10% ja liha hind langeks 15%, siis maksaks sama hulk leiba ja liha 2,64 marka. Kui kallid on üks kg leiba ja kui kallid üks kg liha?

120. Spordiseltsi aastaaruanne näitab puudujääki, mis liikmete poolt ühiselt tasutakse. Kui iga liige annab selleks 2 marka, jääb ikka veel 7 marka puudu; kui iga liige annab 2,5 marka, jääb 5 marka üle. Kui suur on puudujääk?

121. Puukoolis istutatakse noori õunapuid ühepik-kustesse ridadesse, ettenähtud arv ridu. Kui igasse ritta istutada 55 puud, siis jääks ruumi veel 50 puu jaoks; kui

aga panna ritta 45 puud, jääks 10 puud üle. Mitu noort õunapuud tuli istutada?

122. Osteti hapendamiseks 120 kurki, suuri ja väikesi, kokku 3,60 marga eest. Suured kurgid maksid 35 penni kümme ja väikesed 23 penni kümme. Kui palju maksti suurte ja kui palju väikeste kurkide eest?

123. Klass õpilasi peab lõhutatud aknaruudu asendama uuega. Iga õpilane annab selleks 7 penni; nii saadakse kokku summa, millest ostetakse klaas ja makstakse klaasi ettepanemise eest klaasisevale veel 50 penni. Kui iga õpilane oleks andnud 5 penni, siis oleks saadud kokku ainult $\frac{5}{6}$ klaasi hinnast. Kui palju maksis klaas?

124. Kolme aasta pärast ema on 3 korda vanem tütrest, seitsme aasta eest ema oli 7 korda vanem tütrest. Kui vana on ema ja kui vana on tütar?

125. 3 hõõglambi ja 8 meetri juhtmetraadi eest maksti elektriäris 4,31 marka. 5 hõõglambi ja 12 meetri juhtmetraadi eest maksti 6,89 marka. Kui kallilt müüdi hõõglamp, kui kallilt juhtmetraadi meeter?

126. Üks mees lausub teisele: „Anna mulle 1 penn, siis on mul niipalju kui sinul üle jääb.“ Teine vastab: „Anna sina mulle 1 penn, siis on mul kaks korda niipalju kui sinul üle jääb.“ Kui palju raha on kummalgi? (Riese, a. 1524.)

127. Õpilane vastab küsimusele, kui vana ta on, lausega: „Kuus aastat tagasi oli isa minust 3 korda vanem, kuue aasta pärast on ta minust 1,8 korda vanem.“ Kui vana on õpilane?

128. Rühm töölisi pidi lõpetama töö ettenähtud ajaga. Üks tööline ei ilmunud aga üldse tööle, mistõttu töö lõpetamine hilines 2 päeva. Kui rühmale oleks määratud ühe

puuduva töölise asemele abiks kaks uut töölist, siis oleks jõudnud rühm lõpetada töö ühe päeva võrra varemini kui nõuti. Mitu töölist oli esialgu rühmas ja mitme päevaga pidid nad töö lõpetama?

129. Kui vihu lehe igast äärest lõigata riba laiusega 0,5 cm, siis väheneb lehe pindala 39 cm² võrra. Kui nüüd veel igast äärest lõigata riba laiusega 0,5 cm, siis saame lehe pindalaga 320 cm². Leia vihu lehe pindala.

130. Kui ristküliku-kujulise aia pikkust suurendada ja laiust vähendada 4 meetrit, siis väheneb aia pindala 48 ruutmeetrit; kui aga pikkust vähendada 3 meetrit ja laiust suurendada 6 meetrit, siis suureneb aia pindala 216 ruutmeetrit. Kui pikk ja kui lai on aed?

131. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on peres?

132. Kaks õpilast jaotasid omavahel mati õunu nii, et nendele tulnud osad suhtusid nagu 4 : 5. Kui esimene oli oma õuntest ära söönud 4, teine aga 7, oli kummalgi sama arv õunu järel. Mitu õuna sai kumbki?

133. Reisirongi pikkus on 160 m, kaubarongi pikkus 265 m. Kui need rongid sõidavad rööbikuil teil vastasuunas, siis kulub neil teineteisest möödumiseks aega 25 sekundit; sõidavad nad aga samas suunas, siis reisirong möödub kaubarongist 85 sekundiga. Missuguse kiirusega sõidab kumbki rong?

134. Murru lugeja on nimetajast 7 võrra väiksem. Kui lugejat suurendada 10 võrra ja nimetajat 4 korda, siis saame taandamisel $\frac{1}{3}$. Leia murd.

135. Kui murru lugejat suurendada 2 korda ja nime-
tajat suurendada 5 võrra, siis saame murru $\frac{7}{8}$. Kui aga
murru lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suuren-
dada 7 võrra, siis saame murru $\frac{1}{3}$. Missugune on see murd?

§ 12. Ruutvõrrand-süsteem.

Olgu tegemist süsteemiga, mis koosneb kahest võrran-
dist kahe tundmatuga.

Kui üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga ka
ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nimetame süsteemi ruut-
võrrand-süsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrand-süsteemiks,
kui tema võrrandeis ei esine ei liiget x^2 -ga ega ka liiget
 y^2 -ga, küll aga liige tundmatute korrutisega
 xy . Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteem.

Käsitleme allpool ainult mõnda ruutvõrrand-süsteemi
eritüüpi.

1. tüüpi. Üks süsteemi võrrandeist on ruutvõr-
rand, teine lineaarvõrrand.

Niisugust süsteemi näeme esimeses ülaltoodud näites.
Kõnesolevat tüüpi võrrand-süsteem lahendub järgmiselt:
avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu ja asetame lei-
tud avaldise selle tundmatu asemele ruutvõrrandisse;

saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi; seda lahendades ja lineaarset võrrandit arvestades leiame süsteemi lahendid.

N ä i d e. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame

$$y = 10 - 2x,$$

seega järeldeb teisest, et

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 65$$

ehk

$$x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 65$$

ehk

$$5x^2 - 40x + 35 = 0$$

ehk

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

millest

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 7$$

ja järeldevalt

$$y_1 = 8 \quad \text{ja} \quad y_2 = -4.$$

Meie süsteemil on kaks paari lahendeid

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

2. tüüp. Tundmatud esinevad võrrandis sümmeetriliselt. Sel puhul võrrandid oma kuju ei muuda, kui vahetame tundmatud. Niisugusteks süsteemideks on näiteks 3 järgmist süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ülesanne 1. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Lahendus. Jagamisaksiooni põhjal saame

$$x - y = 3 ;$$

et

$$x + y = 7 ,$$

siis

$$2x = 10 ,$$

seega

$$x = 5$$

ja

$$y = 2 .$$

Ülesanne 2. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Lahendus. Võttes esimese võrrandi kummagi poole ruutu, saame

$$(x + y)^2 = 64 ;$$

lahutades siit

$$4xy = 60 ,$$

saame

$$(x - y)^2 = 4 ,$$

millest

$$x - y = \pm 2 .$$

Seega

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Järelikult süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ülesanne 3. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Lahendus. Korrutame teise võrrandi 2-ga; saame:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

Üks kord võrrandite vastavaid pooli liites, teine kord lahutades saame:

$$(x + y)^2 = 16$$

ja

$$(x - y)^2 = 4.$$

Seega

$$x + y = \pm 4$$

ja

$$x - y = \pm 2.$$

See annab 4 võrrand-süsteemi; neist esimene on

$$\begin{cases} x + y = +4 \\ x - y = +2 \end{cases}$$

Selle lahendamisel saame esimese süsteemi lahendid

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Kolme ülejääva süsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -3 \end{cases}$$

Kokkuvõttes:

olgu antud lahendada ruutvõrrand-süsteem; kui üks antud võrrandeist on lineaarne, siis elimineerime selle abil ühe tundmatu; kui kumbki võrrandeist on teise astme võrrand, siis püüame tuletada niisugust võrrandit, milles vähemalt üks tundmatu esineb esimeses astmes; edasi toimime, nagu eespool seletatud.

Ülesanded.

136. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 = y + 28 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$$

137. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y - x = 7 \\ xy + 10 = 0 \end{cases}$$

138. Kahe järjestikuse paarituurvu korrutis on 195. Leia need arvud.

139. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 340. Leia need arvud.

140. Jaota lõik, mille pikkus on 15 cm, kahte ossa nõnda, et neile osadele ehitatud ristküliku pindala oleks

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. 26 cm ² | 3. 44 cm ² |
| 2. 14 cm ² | 4. 56 cm ² |

141. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkuste summa on 31 cm, hüpotenuusi pikkus on 25 cm. Leia kaatetite pikkused.

142. Ristküliku ümbermõõt on 88 dm, tema pindala 459 dm². Kui pikad on ristküliku küljed?

143. Kahe arvu summa on 34; nende arvude korrutis on 285. Mis arvud need on?

144. Kahe arvu vahe on 26; nende arvude korrutis on 407. Mis arvud need on?

145. Kaks kontsentrilist ringi raadiustega 17 cm ja 10 cm on lõigatud sirgega, nii et kõõlu osa väiksemas ringis on $\frac{2}{5}$ suurema kõõlu pikkusest. Kui pikk on suurema ringi kõõl ja kui kaugel ta asetseb ringide keskpunktist?

§ 13. Ülesandeid kordamiseks.

146. Lahenda võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} \frac{x+2}{3-y} = \frac{5}{7} \\ \frac{4-x}{y+5} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 5 = 3y \\ 7 - 2x = 4y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 = 9y \\ y = 2(x - 4) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x + 4y + 10 = 0 \\ 7x + 6y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ 11x - 9y = 24 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{15}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{20}{x} + \frac{18}{y} = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{63}{y} = 18 \\ \frac{21}{x} + \frac{45}{y} = 16 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} = \frac{y+4}{y-2} \\ 3x + 2 = 2y + 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 5,6x + 1,8y = 30,3 \\ 4,3x + 1,2y = 21,9 \end{cases}$$

147. Jõel ühendust pidav aurik liigub päri voolu kiirusega 15 km tunnis, vastuvoolu kiirusega 9 km tunnis. Määra auriku kiirus seisvas vees ja jõe veevoolu kiirus.

148. Kahekohalise arvu ristsumma on 13; kui jagame kümneliste arvu üheliste arvuga, siis saame jagatise 2 ja jäägi 1. Leia see kahekohaline arv.

149. Kahekohalise arvu kümnelisi on 3 võrra vähem kui ühelisi. Kui liita selle arvuga 27, siis saame arvu, mille saaksime vahetades antud arvu kümnelised ja ühelised. Mis arv see on?

150. Kaupmees segas kompvekke, hinnaga 1,50 marka kg ja 2,30 marka kg, ja sai nii 5 kg segu, kilogrammi hinnaga 2,10 marka. Kui palju kompvekke kummastki sortist võeti seguks?

151. Põllumeesteselts tahab oma esimehele juubeliks kinkida ratsahobuse ja sadula. Kui seltsi iga liige annaks 2 marka, saaks osta ainult hobuse; kui iga liige annaks 2,25 marka, saaks osta ka sadula ja 10 marka jääks veel üle. Sadul maksab 65 marka. Kui kallid hobune kavatsesi kinkida?

152. Mitu liitrit 5%-list ja mitu liitrit 2%-list soolalahust tuleks segada, et saada 12 liitrit 3%-list soolalahust?

153. Kui palju tuleks võtta 540-proovilist ja kui palju 960-proovilist kulda, et saada 24 g sulamit, mille proov oleks 750?

(Proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 g sulami kohta.)

154. Keegi heategija määrab laste varjupaigas asuvatele lastele jõulupühade kingiks teatava raha. Kui määrata igale lapsele 1 mark, jääb kingitud summast 17 marka järele; kui määrata 1,20 marka, tuleb jaotamisel 11,60 marka puudu. Mitu last on varjupaigas ja kui suur summa on nende heaks määratud?

155. Kaks vaatlejat asetsevad vastavalt pealetuult ja allatuult kaugustel a ja b kilomeetrit kahurist. Esimene kuuleb pauku n sekundit, teine m sekundit pärast lasku. Arvuta neist andmeist tuule ja heli kiirus.

156. Mootorratturi ajaarvestus näitab, et sõites kiirusega 60 km tunnis ta jõuaks sihtkohta 1 tund hiljem

kui tarvis; sõites aga kiirusega 72 km tunnis ta jõuaks kohale $\frac{1}{2}$ tundi varem kui tarvis. Kui kaugel on sihtkoht lähtekohast ja mitme tunni pärast mootorrattur peab olema kohal?

157. Osteti 6-penniseid postkaarte ning 12-penniseid postmarke ja maksti nende eest kokku 1,32 marka. Kui palju osteti postkaarte ja kui palju marke, kui saadetavaid kaarte ja kirju oli kokku 15?

158. Kaks tigu asetsevad kõrgel puul kohtadel, mil-
lede vaheline kaugus on 18 jalga. Kui nad teineteisele vastu liiguksid, siis kohtuksid nad 1,5 tunni pärast; kui nad teineteist hakkaksid taga ajama, jõuaks kiirem neist aeglasemale 9 tunni pärast järele. Kui suure kiirusega liigub kumbki tigu?

159. Kaupmees müüs jaanilaadal 110 vikatit ja 42 luisku ja sai nende eest kokku 291,80 marka. Müümata jäi tal 33 vikatit ja 12 luisku, kokku 87,30 marga eest. Kui palju maksis vikat ja kui palju maksis luisk?

160. Kahekohalise arvu jagamisel tema numbrite summaga saame jagatise 7 ja jäägi 3; jagamisel numbrite vahega saame jagatise 18 ja jäägi 1. Missugune kahekohaline arv see on?

161. Muul ja eesel sammusid raskesti koormatult turule. Muul kurtis oma seltsilisele õiglusetut koormast: „Kui sina annaksid minule 1 mõõdu oma koormast, saaks minu koorem sinu omast kaks korda suuremaks; kui mina annaksin omast koormast ühe mõõdu sinule, oleks meil võrdpalju kanda.“ Arvutaja, ütle, kui raske koormad olid neil kanda? (Olevat antud ülesandena Aleksandria ülikoolis, u. 300 a. e. Kr.)

162. Kahe arvu suhe on $\frac{a}{b}$; nende arvude vah e on c .
Leia need arvud.

163. Arv lahutub kaheks teguriks. Kui esimest tegurit suurendada 5 võrra ja teist tegurit vähendada 5 võrra, siis väheneb arv 5 võrra. Kui seevastu esimest tegurit vähendada 5 võrra ja teist tegurit suurendada 5 võrra, siis väheneb arv 45 võrra. Kas saab leida arvu?

164. Kui tasuda tehtud laen 6 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 184,05 marka; kui aga tasuda laen 1 aasta 4 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 190,80 marka. Kui suur on laen ja kui suur on intressim aar?

165. Kui murru lugejaga liidame 5, taandub murd 1-ks; kui aga murru nimetajast lahutame 11, taandub ta 3-ks. Leia see murd.

166. Kaks töolist suudaksid lõpetada ettevõetud t oo, kui esimene t ootaks 10 päeva ja teine 5 päeva. Tegelikult t ootas esimene 2 päeva ja teine 6 päeva, kusjuures teostati 60% kogu t oo. Mitme päevaga oleks kumbki t ooline selle t oo üksinda ära teinud?

Peatükk III.

Aste ja juur.

§ 14. Astmed positiivsete täisarvuliste astendajatega.

Keskkooli algebrakursusest teame, et korrutist

$$a \cdot a \cdot a \dots \cdot a,$$

milles arv a esineb n korda tegurina, tähistatakse sümboliga

$$a^n$$

ja nimetatakse arvu a n -ndaks astmeks. Seejuures arvu a nimetatakse astendatavaks ehk astme aluseks ja arvu n astendajaks. Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui $n = 1$, mõistame sümbolit a^n arvu a endana: $a^1 = a$.

Tehted astmetega toimuvad järgneva viie teoreemi alusel.

1. Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

2. Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendatavad korrutatakse:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

3. Ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n.$$

4. Võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatav jagatavas jagatakse astendatavaga jagajas:

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

5. Astme astendamisel astendajad korrutatakse:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Kui vahetame teises teoreemis antud võrduse pooled, saame eeskirja korrutise astendamiseks:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m,$$

s. t.

korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur.

Kui vahetame neljandas teoreemis antud võrduse pooled, saame eeskirja murru astendamiseks:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

s. t.

murru astendamisel astendatakse tema lugeja ja nimetaja.

Ülesanded.

167. Arvuta järgmised astmed:

1.	2^7	2.	$(-2)^3$	3.	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	4.	$0,9^4$
	2^{10}		$(-2)^6$		$\left(\frac{3}{4}\right)^4$		$0,02^5$
	4^5		$(-7)^4$		$\left(\frac{2}{3}\right)^3$		$(-0,1)^6$
	3^5		$(-3)^5$		$\left(1\frac{1}{4}\right)^5$		$1,1^3$
	5^5		$(-6)^4$		$\left(3\frac{1}{3}\right)^6$		$1,2^4$

168. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $10^3 + 10^2 + 10 + 1$ | 2. $(-6)^2 + (-4)^3 + (-2)^5$ |
| $4^5 + 4^3 + 4^1$ | $7^2 + (-5)^3 + (-1)^{10}$ |
| $10^5 + 10^2 + 1$ | $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3$ |
| $1,3^3 + 1,3^2 + 1,3$ | $1^4 \cdot 2^5 \cdot 3^6$ |
| $0,8^4 + 0,8^3 + 0,8^2 + 0,8$ | $(-1)^{10} \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^4$ |

169. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

- | | | |
|--------------------|---|---------------------|
| 1. $x^2 \cdot x^3$ | 2. $c \cdot c^2 \cdot c^3$ | 3. $x^{m+1}x^{m+2}$ |
| $n^5 \cdot n^2$ | $d^2 \cdot d^4 \cdot d^6$ | $y^{n+3}y^{2n-1}$ |
| $a \cdot a^3$ | $k^2 \cdot k^3 \cdot k^3$ | $z^{p+5}z^{p-5}$ |
| $h^3 \cdot h^3$ | $u \cdot u^5 \cdot u$ | $u^r u^{2r} u^{3r}$ |
| $q^4 \cdot q^5$ | $n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5$ | $v^{q+2}v^{3q-3}$ |

170. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

- | | |
|----------------------|---|
| 1. $x \cdot 3x$ | 2. $h \cdot 0,1h \cdot 0,2h$ |
| $5A \cdot 4A$ | $6x \cdot 0,4x^2 \cdot 0,1x^3$ |
| $3u \cdot 5u^2$ | $0,1D \cdot (-0,2D^2) \cdot 0,3D^3$ |
| $(-6r^2) \cdot 7r^3$ | $c \cdot 3 \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{7} c^4$ |
| $aN^4 \cdot bN^3$ | $(-\frac{3}{5}w^2) \cdot 2\frac{1}{2}w^2 \cdot (-\frac{2}{3}w^2)$ |

171. Kirjuta järgmised jagatised astmetena:

- | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------|
| 1. $n^8 : n^5$ | 2. $f^4 : f^2$ | 3. $x^{3m} : x^m$ |
| $q^6 : q$ | $h^{10} : h^7$ | $y^{2n} : y$ |
| $x^7 : x^2$ | $p^n : p^{n-1}$ | $z^{2r} : z^{r+2}$ |
| $a^{11} : a^{10}$ | $q^{n+3} : q^n$ | $u^{3p+1} : u^{2p-1}$ |
| $r^4 : r^4$ | $d^{m+1} : d^{n+1}$ | $v^{4p-1} : v^{4p-4}$ |

172. Kirjuta järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

1. $\frac{a^5 b^3}{a^2 b}$ $\frac{15m^{10}n^3}{5m^6 n^2}$ $\frac{9x^4 y^3 z^2}{54x^2 y^2 z}$ $\frac{19m^8 n^7 p^6}{57m^5 n^4 p^3}$ $\frac{8a^4}{5b^6} : \frac{16a^2}{25b^8}$	2. $\frac{96x^{m+3}y^{n+1}}{24x^{m+1}y^{n-1}}$ $\frac{a^{2n} b^{5m}}{a^n b^{3m}}$ $\frac{u^{3n+3v}}{u^{2n+1} v^{3m-2}}$ $\frac{x^{m+8} y^{n-5}}{x^{m-2} y^{n-7}}$ $\frac{a^{2n+2}}{b^{n-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{3n-1}}$	3. $42a^5 b^7 : 14a^4 b^3$ $51p^6 q^3 : 17p^2 q$ $3,6x^6 y^5 z^8 : 5,6x^2 y^3 z^4$ $7n^2 q : 0,14n^{q-3}$ $1,72m^{p+6} : 4,3m^{p+2}$
--	---	--

173. Arenda järgmised astmed:

1. $(4a)^3$ $(3mn)^3$ $\left(-\frac{4a}{7H}\right)^2$ $\left(\frac{4z^2}{7u^3}\right)^4$ $\left(-\frac{2x^3}{3a^4}\right)^2$	2. $(-0,3Nu)^4$ $(-2h)^4$ $\left(+\frac{5aQ}{6cE}\right)^3$ $\left(-\frac{0,2cU}{0,5d}\right)^4$ $\left(-\frac{0,7ax}{0,01bz}\right)^2$	3. $(-3aD)^5$ $(-4cmq)^3$ $\left(-\frac{7a^2M}{8b^2N^2}\right)^3$ $\left(-\frac{c^2r^2}{4d^4}\right)^5$ $\left(-\frac{3h^3}{5mnw}\right)^3$
--	---	---

174. Leia lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2^3 \cdot 5^3$ $5^4 \cdot 4^4$ $4^2 \cdot 15^2$ $45^2 \cdot 2^2$ $9^3 \cdot 4^3$	2. $3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$ $6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$ $13^7 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^7$ $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\left(5\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)^2$	3. $(35 \cdot 3)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2$ $(42 \cdot 81)^3 \cdot \left(\frac{1}{21 \cdot 27}\right)^3$ $\left(4\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(1\frac{7}{8}\right)^4$ $3,9^2 \cdot \left(\frac{1}{52}\right)^2$ $4^3 \cdot 8^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3$
--	--	---

175. Leia lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $16^3 : 4^3$	2. $\left(\frac{5}{7}\right)^2 : \left(\frac{25}{21}\right)^2$	3. $\frac{2^4 \cdot 3^4}{12^4}$
$69^2 : 23^2$	$\left(2\frac{1}{3}\right)^4 : \left(3\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$
$9^5 : 18^5$	$\left(1\frac{7}{8}\right)^3 : \left(6\frac{1}{4}\right)^3$	$\frac{5^3 \cdot 12^3}{6^3}$
$160^3 : 640^3$	$2,25^2 : 0,45^2$	$\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{2^5}{5^5}$
$24^3 : 16^3$	$0,72^3 : 2,4^3$	$\frac{2^{10} \cdot 6^{10}}{3^{10} \cdot 4^{10}}$

176. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1. $(3a)^2 \cdot (2a)^3$	2. $(-25f)^3 : (5f)^2$
$(-N^3) \cdot (2N)^5$	$(96ax)^4 : (16x)^4$
$(4u^2)^2 \cdot (-u^3)^3$	$(63cN)^2 : (243c)^2$
$\left(\frac{D}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{D}\right)^4$	$(36nD)^5 : (-81D)^5$
$\left(-\frac{2}{3}q\right)^3 \cdot (6q)^2$	$\left(\frac{1}{2}L\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 L^4$

177. Arenda järgmised astmed:

1. $(m^2)^3$	2. $(D^3)^2$	3. $\left(\frac{m}{2n}\right)^2$
$(a^4)^5$	$(3q^2)^2$	$\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$
$(N^3)^n$	$\left(\frac{4}{5}u\right)^3$	$\left(\frac{4}{7} \cdot \frac{m}{q^2}\right)^3$
$(u^{2n})^3$	$(0,1H^3)^3$	$\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$
$(Q^2)^{n+1}$	$(0,7x^2)^4$	$\left(\frac{cH^2}{10}\right)^5$

178. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \left(\frac{2x}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6x}{5a}\right)^2 & 2. \left(-\frac{1}{N}\right)^3 : \left(\frac{N}{2}\right)^3 \\
 \left(-\frac{4m}{5n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^4 & \frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^2 : \frac{4}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \\
 \left(\frac{7u}{4v}\right)^4 \cdot \left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3 & \left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2 : \left(\frac{0,2}{D^3}\right)^2
 \end{array}$$

179. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. (ax)^m : (bx)^m & 2. (8Nu)^{2a-1} : (-2u)^{2a-1} \\
 (3cu)^n : (cd)^n & \left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1} : \left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1} \\
 (-pqr)^{2t} : (-pq^2t) & \left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m} : \left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}
 \end{array}$$

180. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \frac{2}{5}L^n \cdot \frac{3}{2}L \cdot 6L^3 & 2. \frac{1}{4}x^p \cdot \frac{4}{5}x^{p+2} \cdot \frac{2}{5}x^{2p+1} \\
 u^a \cdot u^{a+b} \cdot u^{a+b+c} & 7H^m \cdot 0,2H^{m+1} \cdot 0,5H^{m+2} \\
 D^n \cdot D^{n-m} \cdot D^{m-p} & N^{x+2} \cdot N^{x-3} \cdot N^{2-2x}
 \end{array}$$

181. Arenda järgmised korrutised:

$$\begin{array}{ll}
 1. (a^2 + a^4) \cdot (a + a^3) & 2. (2p^4 + 5q^3) \cdot (2p^4 - 5q^3) \\
 (a^6 - a^5) \cdot (a^5 + a^4) & \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \\
 (u^3 + v^2) \cdot (u^3 - v^2) & \left(2s^3 + \frac{1}{t^3}\right) \cdot \left(s^3 - \frac{1}{t^3}\right)
 \end{array}$$

182. Arenda järgmised binoomide astmed:

$$\begin{array}{lll}
 1. (a^2 + b^2)^2 & 2. (3x^3 - 5x^5)^2 & 3. (a^2 + b^2)^3 \\
 (a^3 - b^3)^2 & (m^2n^3 + m^3n^2)^2 & (a^3 - b^3)^3 \\
 (a^4 - a^2)^2 & (x^{m+1} - x^{m-1})^2 & (m^3 + m^2)^3 \\
 (a^m + a^n)^2 & (y^{2n} + y^n)^2 & (u^{2m} - u^m)^3 \\
 \left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2}\right)^2 & \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^3 & \left(\frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{p^5}\right)^3
 \end{array}$$

§ 15. Juur.

Sümboliga $\sqrt[3]{a}$ tähistatakse arvu, mille kolmas aste on arv a . Nii on:

$$\sqrt[3]{1000} = 10, \text{ sest } 10^3 = 1000;$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ sest } (-4)^3 = -64;$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}, \text{ sest } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

Arvu $\sqrt[3]{a}$ nimetatakse kuupjuureks arvust a .

Analoogiliselt eelmisega tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$ niisugust arvu, mille n -es aste on arv a . Nii on

$$\sqrt[5]{16807} = 7, \text{ sest } 7^5 = 16807;$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2, \text{ sest } (-2)^7 = -128;$$

$$\sqrt[6]{0,000729} = 0,3, \text{ sest } 0,3^6 = 0,000729.$$

Antud definitsiooni järgi

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Juure definitsioonist järeldub, et

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Arvu $\sqrt[n]{a}$ nimetame n -ndaks juureks arvust a , arvu n —juurijaks, arvu a —juuritavaks ehk juure aluseks.

Juurija n võib olla kas paarisarv või paarituurv. Kui

n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

vasak pool on paarisarvulise n -i puhul ikka positiivne arv, millest järeldub, et ka a on positiivne arv. Seega

negatiivsetel arvudel ei ole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Et oleks võimalik kõnelda arvu nii paarisarvuliste kui ka paaritu arvuliste juurijatega juurtest erandeid tegemata, selleks eeldame, et juuritav on ikka positiivne arv.

Juure definitsioonist järeldub, et sümbolil $\sqrt[n]{a}$ on kaks tähendust, kui a on positiivne ja n on paarisarv.

Tõepoolest, olgu n paarisarv, nii et $n = 2p$; märgime

$\sqrt[2p]{a}$ tähega x . Juure definitsiooni järgi siis

$$x^{2p} = a.$$

Kuid samuti on ka

$$(-x)^{2p} = a,$$

sest

$$(-x)^{2p} = x^{2p}.$$

Seega ka

$$\sqrt[2p]{a} = -x.$$

Et ära hoida ühe ja sellesama sümboli mitmeti mõistmist, lepime kokku mõista sümbolit $\sqrt[n]{a}$ ikka positiivse arvuna.

Mõistes juurt ikka positiivse arvuna saame näidata, et

võrdsete juurijatega juurtest on see juur suurem, millel juuritav on suurem,

s. t. kui

$$a > b,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui $\sqrt[n]{a}$ ei oleks suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b};$$

kuid siis oleks ka

$$(\sqrt[n]{a})^n \leq (\sqrt[n]{b})^n,$$

ehk, rakendades juure definitsiooni,

$$a \leq b,$$

mis on vastuolus oletusega $a > b$. Seega siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestatust järeldame, et

arvust 1 suurema arvu n -es juur on suurem kui 1.

Tõepoolest, kui

$$a > 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}$$

ehk, et

$$\sqrt[n]{1} = 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > 1.$$

Ülesanded.

183. Teisenda järgmised juuravaldised ratsionaalseiks avaldisiks:

1. $(\sqrt{5})^2$	2. $(\sqrt[3]{17})^3$	3. $(\sqrt[5]{37})^5$	4. $(\sqrt[n]{A})^n$
$\sqrt{19^2}$	$\sqrt[3]{12^3}$	$\sqrt[4]{7^4}$	$\sqrt[m]{c^m}$
$(\sqrt{23})^4$	$(\sqrt[3]{16})^6$	$(\sqrt[5]{7})^{10}$	$(\sqrt[n]{Q})^{2n}$
$8\sqrt{49}$	$4\sqrt[3]{27}$	$8\sqrt[4]{256}$	$R\sqrt[p]{R^p}$
$(5\sqrt{N})^2$	$(2\sqrt[3]{5})^3$	$(h^2\sqrt[3]{u})^3$	$(f^3\sqrt[n]{f^{2n}})^n$

184. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $x^3 = 8$	2. $x^5 = -1$	3. $x^3 = \frac{8}{27}$
$y^4 = 81$	$y^4 = -16$	$s^4 = 0,0081$
$z^3 = -27$	$z^6 = 1$	$t^5 = \frac{243}{32}$
$u^5 = 32$	$u^{10} = 1024$	$q^3 = -1$
$v^6 = 729$	$v^6 = -100$	$r^4 = 0,4096$

§ 16. Juure leidmine proovimise teel.

Ruutjuurte leidmiseks on olemas algoritm. Teiste juurte leidmiseks puuduvad lihtsad, kiiret tööd võimaldavad algoritmid. Nende juurte leidmine võib toimuda proovimise teel.

Ülesanne 1. Leia $\sqrt[5]{161051}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille 5. aste on 161051. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame:

$1^5 < 161051$, $2^5 < 161051$, $3^5 < 161051$, ... $11^5 = 161051$;
järelikult

$$\sqrt[5]{161051} = 11.$$

Ülesanne 2. Leia $\sqrt[3]{17}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille kuup on 17. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame:

$$1^3 < 17, \quad 2^3 < 17, \quad 3^3 > 17;$$

arvud 4, 5, 6, ... omavad veelgi suuremaid kuupe, seega ükski neist ei ole $\sqrt[3]{17}$. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille kuup on 17. Kui tähistame otsitava arvu $\sqrt[3]{17}$ sümboliga x , siis

$$2^3 < x^3 < 3^3$$

ehk

$$2 < x < 3.$$

Näeme, et arv x asetseb 2 ja 3 vahel.

Katsume nõuet $x^3 = 17$ rahuldada kohaselt valitud 2 ja 3 vahel asetseva murdarvuga. Tähistame selle arvu sümboliga $\frac{a}{b}$ ja eeldame, et see murd on kirjutatud oma lihtsaimal, see on taandatud kujul; sel puhul lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud. Nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 17 \quad \text{ehk} \quad \frac{a^3}{b^3} = 17.$$

Et arvudel a ja b pole ühiseid tegureid (peale arvu 1), siis pole ühiseid tegureid ka arvudel aaa ja bbb ehk arvudel a^3 ja b^3 ; järelikult murd $\frac{a^3}{b^3}$ on taandumatu. Nõude

kohaselt peab murd $\frac{a^3}{b^3}$ olema võrdne täisarvuga 17. Et murd ei saa olla taandumatu ja ühtaegu võrdne täisarvuga, siis ei leidu ka murdarvu, mis rahuldab nõuet $x^3 = 17$. Seega pole võimalik leida ei täisarvu ega murdarvu x , mille puhul täpselt oleks $x^3 = 17$.

Küll aga on võimalik leida niisuguseid arve, mis seda nõuet rahuldavad ligikaudu; teiste sõnadega: leidub arve, mille kuup on ligikaudu võrdne arvuga 17.

Tõepoolest, niisugusteks arvudeks on näiteks 2 ja 3; esimene annab nõutava arvu puudusega, teine liiaga. Paremate lähisväärtuste saamiseks arvu x jaoks jaotame vahemiku 2 ja 3 vahel kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,1 \quad 2,2 \quad 2,3 \quad \dots \quad 2,8 \quad 2,9.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et $2,5^3$ ehk 15,625 on väiksem kui 17, seevastu $2,6^3$ ehk 17,576 on aga juba suurem kui 17. Järelikult

$$2,5 < x < 2,6.$$

Jaotame saadud vahemiku 2,5 ja 2,6 vahel uuesti kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,51 \quad 2,52 \quad 2,53 \quad \dots \quad 2,58 \quad 2,59.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et

$$2,57 < x < 2,58.$$

Selsamal viisil edasi minnes näeme, et

$$2,571 < x < 2,572.$$

Võrratused

$$2 < x < 3$$

$$2,5 < x < 2,6$$

$$2,57 < x < 2,58$$

$$2,571 < x < 2,572$$

suruvad otsitava x ikka kitsamasse ja kitsamasse vahemikku: esimese vahemiku pikkus on 1, teise pikkus 0,1, kolmanda 0,01, neljanda 0,001 jne. Nende vahemikkude jada määrab meile kümnendmurru

$$x = 2,5712 \dots;$$

ülalseletatud viisil saame määrata selle murru nii mitu kümnendkohta kui iganes soovime. Mida enam selles kümnendmurrus on kümnendkohti, seda vähem selle murru kuup erineb arvust 17. Kümnendmurru 2,5712... kohtade jada ei saa lõppeda; tõepoolest, vastasel korral me saaksime murru, mille kuup on 17, mis eelneva põhjal on võimatu. Seega x on lõpmatu kümnendmurd. Seda murdu me kirjutame sümboliga

$$\sqrt[3]{17}.$$

Et seda juurt ei saa avaldada ei täis- ega murdarvuga, siis on ta irratsionaalarv.

Võib näidata, et iga n -es juur, mille juuritav pole mõne ratsionaalarvu n -es aste, avaldub lõpmatu kümnendmurruna ja on irratsionaalarv. Niisugusteks juurteks on näiteks

$$\sqrt[4]{10} \quad \sqrt[5]{1,82} \quad \sqrt[6]{11} \quad \sqrt[7]{\frac{3}{4}}.$$

Ülesanded.

185. Leia proovimise teel järgmised juured:

1. $\sqrt{169}$

2. $\sqrt{361}$

3. $\sqrt{529}$

$$\sqrt[3]{512}$$

$$\sqrt[3]{1331}$$

$$\sqrt[3]{3,375}$$

$$\sqrt[4]{81}$$

$$\sqrt[4]{2401}$$

$$\sqrt[4]{0,00256}$$

$$\sqrt[5]{32}$$

$$\sqrt[5]{243}$$

$$\sqrt[5]{3125}$$

$$\sqrt[6]{0}$$

$$\sqrt[7]{1}$$

$$\sqrt[4]{0,6561}$$

186. Leia proovimise teel järgmised juured veaga alla 0,01:

1. $\sqrt{28}$	2. $\sqrt[3]{15}$	3. $\sqrt{3,4}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{24,2}$
$\sqrt{0,1}$	$\sqrt[3]{0,9}$	$\sqrt[4]{25}$

§ 17. Tehted juurtega.

Allpool tõestame viis teoreemi, mille järgi toimuvad tehted juurtega. Tõestused rajame aksiomile, et kahe positiivse arvu n -ndad astmed on võrdsed ainult siis, kui astendatavad arvud on võrdsed.

1. Juurte korrutamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse.

Tõestus. Astendades vasakpoolse avaldise arvuga n , saame:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab;$$

korrutise astendamise juure definitsiooni
teoreemi põhjal põhjal

astendades parempoolse avaldise arvuga n , saame juure definitsiooni põhjal:

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka astendatavad, seega

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cN^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2N} = \sqrt[3]{64c^3N^3} = \sqrt[3]{(4cN)^3} = 4cN.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame korru-
tise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

s. t.

korru-tise juurimisel juuritakse iga tema tegur.

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

2. Juurte jagamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas
jagatakse juuritavaga jagajas.

Tõestus. Astendades vasakpoolse avaldise arvuga
 n , saame

$$(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b};$$

astendades parempoolse avaldise arvuga n , saame:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n = \frac{a}{b}.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis peavad olema
võrdsed ka astendatavad; seega

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame jagatise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

s. t.

murru juurimisel juuritakse tema lugeja ja nimetaja.

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

3. Juure astendamise teoreem:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

s. t.

juure astendamisel astendatakse juuritav.

Tõestus. Astendades vasakpoolse avaldise arvuga n , saame:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m;$$

astendades parempoolse avaldise arvuga n , saame:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka astendatavad; seega

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\left(\sqrt{5a^3}\right)^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8 \cdot 5a} = 5a^4 \sqrt{5a}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;$$

selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{16}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{4^2}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{a^2h^2}{4^2}}\right)^3 = \left(\frac{ah}{4}\right)^3 = \frac{a^3h^3}{64}.$$

4. Astme juurimise teoreem.

Astme juurimise puhul väärub kõigepealt märkimist see juhtum, kus juuremärgi all seisev astendaja on juurija kordne. Sel juhul näitame, et

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

s. t.

astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga.

Tõestus. Astendades kõnesoleva võrduse vasaku poole arvuga n , saame:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m;$$

astendades sellesama võrduse parema poole arvuga n , saame:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka astendatavad; seega

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärub, on see juhtum, kus juurijal ja juuremärgi all seisval astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat saab jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija ja juuremärgi all seisva astendaja ühine tegur märgitud tähega k ; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Astendame selle võrduse mõlemad pooled arvuga km . Vasaku poole astendamisel saame

$$\left(\sqrt[km]{a^{kn}}\right)^{km} = a^{kn};$$

parema poole astendamisel saame

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{km} = \left[\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m\right]^k = [a^n]^k = a^{kn}.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis on seda ka astendatavad; seega

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näited.

1. $\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{a^{3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2}.$
2. $\sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat võib korrutada ühe ja sama arvuga.

Näited.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \quad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

5. Juure juurimise teoreem:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

s. t.

juure juurimisel juurijad korrutatakse.

Tõestus. Astendades tõestatava võrduse vasaku poole arvuga mn , saame:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n = \left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a;$$

astendades sellesama võrduse parema poole endiselt arvuga mn , saame

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$$

Et astendamise tulemused on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka astendatavad; seega

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{\frac{30}{15}} = D^2.$$

Nagu varemini-käsiteldud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Ülesanded.

187. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrutamise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} & 2. \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} & 3. \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \\
 \sqrt{162} \cdot \sqrt{0,5} & \sqrt{0,8} \cdot \sqrt{45} & \sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,6} \\
 \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} & \sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{7}} & \sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt[3]{18} \\
 \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} & \sqrt[3]{40\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} & \sqrt[3]{0,32} \cdot \sqrt[3]{-200} \\
 \sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4} & \sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{486} & \sqrt[5]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{48}
 \end{array}$$

188. Lihtsusta järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{49a^2} & 2. \sqrt{121x^4} & 3. \sqrt{a^2b^2} \\
 \sqrt[3]{125u^3} & \sqrt[3]{-343f^6} & \sqrt[2]{-p^3q^9} \\
 \sqrt[4]{256g^4} & \sqrt[5]{k^5x^{10}} & \sqrt[7]{-128r^7}
 \end{array}$$

189. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} & 2. \sqrt{3b} \cdot \sqrt{27b^3} & 3. \sqrt{\frac{1}{2}ax^3} \cdot \sqrt{288ax} \\
 \sqrt[3]{4c} \cdot \sqrt[3]{2c^2} & \sqrt[3]{9u} \cdot \sqrt[3]{-3u^5} & \sqrt[3]{24m^2n^4} \cdot \sqrt[3]{9m^4n^5} \\
 \sqrt[4]{3N^2} \cdot \sqrt[4]{27N^2} & \sqrt[4]{48x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5} & \sqrt[5]{9H^3} \cdot \sqrt[5]{27H^7} \\
 \sqrt[5]{16a} \cdot \sqrt[5]{64a^4} & \sqrt[4]{\frac{243}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^9}{3}} & \sqrt[3]{m^{14}n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}}
 \end{array}$$

190. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} & 2. \sqrt{7} \cdot \sqrt{6} & 3. \sqrt{2} \cdot \sqrt{13,5} \\
 \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{15} & \sqrt[3]{-4,6} \cdot \sqrt[3]{2,5} & \sqrt[3]{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{80} \\
 \sqrt{10} \cdot \sqrt{a} & \sqrt[8]{5x} \cdot \sqrt[8]{3y} & \sqrt[3]{-m} \cdot \sqrt[3]{-n} \\
 \sqrt[4]{15a} \cdot \sqrt[4]{4a^2} & \sqrt[6]{-\frac{x^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2}{x^2}} & \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a+1} \\
 \sqrt[7]{u} \cdot \sqrt[7]{2v} & \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[9]{3b^2} & \sqrt[4]{x-1} \cdot \sqrt[4]{x+1}
 \end{array}$$

191. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{81 \cdot 169} & 2. \sqrt{441 \cdot 144} & 3. \sqrt{7,29 \cdot 121} \\
 \sqrt[3]{216 \cdot 27} & \sqrt[3]{125 \cdot 4096} & \sqrt[3]{3375 \cdot 1331} \\
 \sqrt{225 \cdot 100} & \sqrt{484 \cdot 10000} & \sqrt{57600} \\
 \sqrt[3]{729 \cdot 1000} & \sqrt[3]{64 \cdot 1000000} & \sqrt[3]{512000} \\
 \sqrt{196 \cdot 10^4} & \sqrt[3]{1728 \cdot 10^9} & \sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}
 \end{array}$$

192. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sqrt{50} & 2. \sqrt{45} & 3. \sqrt{32} & 4. \sqrt{63} \\
 \sqrt{72} & \sqrt{245} & \sqrt{300} & \sqrt{768} \\
 \sqrt[3]{54} & \sqrt[3]{375} & \sqrt[3]{108} & \sqrt[3]{1512} \\
 \sqrt[3]{-24} & \sqrt[3]{320} & \sqrt[3]{-1024} & \sqrt[3]{2000} \\
 \sqrt[4]{512} & \sqrt[4]{240} & \sqrt[5]{486} & \sqrt[5]{-96}
 \end{array}$$

193. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1. $\sqrt{N^3}$	2. $\sqrt{a^5}$	3. $\sqrt{c^2n^3}$	4. $\sqrt{ax^4}$
$\sqrt{c^5h}$	$\sqrt{7m^2x^2}$	$\sqrt{4a^4b}$	$\sqrt{25f^4g^3}$
$\sqrt[3]{27c^5}$	$\sqrt[3]{16a^4}$	$\sqrt[3]{2a^2x^3}$	$\sqrt[3]{8a^3b^2}$
$\sqrt[3]{40cu^4}$	$\sqrt[3]{54h^6k}$	$\sqrt[3]{135u^3v^3}$	$\sqrt[3]{-64N^3}$
$\sqrt[4]{6a^4}$	$\sqrt[4]{64n^5}$	$\sqrt[5]{32P^6}$	$\sqrt[5]{81a^5x}$

194. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisenda tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$	2. $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{10n}$	3. $\sqrt{5A} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3A}$
$\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{ah}$	$\sqrt[3]{pq^2r^2} \cdot \sqrt[3]{p^2q}$	$\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \cdot \sqrt[3]{4x^3}$
$\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$	$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{240}$
$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{75}$	$\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[4]{98}$	$\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[5]{96}$	$\sqrt[6]{2,5} \cdot \sqrt[6]{1,6} \cdot \sqrt[6]{48}$

195. Kirjuta järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

1. $\sqrt{72} : \sqrt{2}$	2. $\sqrt{ab} : \sqrt{b}$	3. $\sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$
$\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$
$\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17}$	$\sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2}$	$\sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{P^2}}$

196. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}} & 2. \sqrt{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt{\frac{a^5x}{n^2}} & 3. \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}} \\
 \sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}} & \frac{\sqrt{a^2b - a^2c}}{\sqrt{b - c}} & \frac{\sqrt{(u + v)^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} \\
 \sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}} & \frac{\sqrt{m + n}}{\sqrt{m^2 - n^2}} & \frac{\sqrt[3]{a^2(a^2 - b^2)}}{\sqrt{a(a + b)}}
 \end{array}$$

197. Kirjuta järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{llll}
 1. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} & 2. \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} & 3. \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} & 4. \frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}} \\
 \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}} & \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} & \frac{\sqrt[3]{h^7}}{\sqrt[3]{h}} & \frac{\sqrt[3]{a^2h}}{\sqrt[3]{ah^2}} \\
 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}} & \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}} & \frac{\sqrt{px^3}}{\sqrt{p^2x^2}} \\
 \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}} & \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}} & \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{c^2u^2}} & \frac{\sqrt[3]{max^2}}{\sqrt[3]{m^4x^5}}
 \end{array}$$

198. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

1. $\sqrt{\frac{9}{64}}$	2. $\sqrt{\frac{49}{81}}$	3. $\sqrt{\frac{144}{25}}$	4. $\sqrt{\frac{169}{289}}$
$\sqrt{6\frac{1}{4}}$	$\sqrt{3\frac{1}{16}}$	$\sqrt{7\frac{9}{16}}$	$\sqrt{4\frac{21}{25}}$
$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$	$\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$	$\sqrt[3]{5\frac{23}{64}}$	$\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$
$\sqrt{\frac{5^2}{6^4}}$	$\sqrt{\frac{2^6}{7^3}}$	$\sqrt{\frac{256}{10^8}}$	$\sqrt{\frac{243}{10^{15}}}$
$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}$	$\sqrt[4]{\left(\frac{19}{16}\right)^3}$	$\sqrt[4]{\left(\frac{3^{13}}{81}\right)^2}$	$\sqrt[5]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}$

199. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

1. $\sqrt{\frac{18}{25}}$	2. $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$	3. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{125a}{27x^3}}$
$12\sqrt{\frac{a^3}{16x^2}}$	$\sqrt{1\frac{9x^3}{16a^2}}$	$0,2\sqrt[3]{1000N\omega^3}$
$10\sqrt[3]{\frac{1}{8}M}$	$\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{4}m^2n^4}$	$10\sqrt[3]{\frac{H^2}{0,008}}$

200. Kirjuta järgmised astmed võimalikult väheste sümbolitega:

1. $(\sqrt{5})^4$	2. $(\sqrt[3]{7})^5$	3. $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})^6$
$(\sqrt{3})^3$	$(\sqrt[5]{a})^6$	$(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$
$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt[4]{x})^5$	$(\sqrt[4]{x} : \sqrt[4]{y})^5$
$(\sqrt[3]{3})^6$	$(\sqrt[5]{b^2})^7$	$(\sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{3})^2$
$(\sqrt[9]{5})^9$	$(\sqrt[10]{x^2})^5$	$(\sqrt[5]{u^2} : \sqrt[5]{v^2})^3$

201. Arenda järgmised korrutised ja astmed:

$$\begin{array}{ll}
 1. (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{3} & 2. (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10}) \\
 (\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} & (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \\
 (\sqrt{7}-1)^2 & (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 \\
 (\sqrt{10} - \sqrt{8})^2 & (2\sqrt{8} - 3)(9 + 4\sqrt{8}) \\
 (\sqrt[3]{3}-1)^3 & (2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{3})^3
 \end{array}$$

202. Teisenda järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks võimalikult vähe tegureid:

$$\begin{array}{lll}
 1. (\sqrt{2a^2})^3 & 2. (\sqrt[3]{4x^2})^2 & 3. \left(\sqrt{\frac{bc^3}{3a}}\right)^3 \\
 (\sqrt{3hu^2})^5 & (2\sqrt[3]{cu^6})^3 & \left(\sqrt{\frac{a^3x}{5u^3}}\right)^3 \\
 (\sqrt[3]{5c^2N^2})^2 & (\sqrt[4]{6R^2})^2 & \left(\sqrt{\frac{2m^3x^5}{n^4}}\right)^3 \\
 (\sqrt[4]{7p^4q^2})^4 & (\sqrt[4]{\pi R^3h})^2 & \left(\sqrt[3]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}}\right)^4 \\
 (ax^2\sqrt{2ax})^2 & (2N\sqrt{3N^2u})^4 & \left(\frac{1}{2c}\sqrt[3]{5a^2x^3}\right)^5
 \end{array}$$

203. Taanda järgmised juured:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sqrt[4]{a^2} & 2. \sqrt[9]{a^6} & 3. \sqrt[4]{5^2} & 4. \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} \\
 \sqrt[6]{a^2} & \sqrt[12]{a^4b^8} & \sqrt[4]{64} & \sqrt[3]{\sqrt{x^2}} \\
 \sqrt[4]{a^2x^6} & \sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}} & \sqrt[6]{9} & \sqrt[3]{b\sqrt{b}} \\
 \sqrt[6]{a^2b^4} & \sqrt[15]{u^5v^{10}} & \sqrt[6]{1000} & \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \\
 \sqrt[2n]{a^{2m}} & \sqrt[3n]{a^3p^9q} & \sqrt[6]{\frac{25}{81}} & \sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}
 \end{array}$$

204. Arvuta järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid:

1. $\sqrt[4]{4}$	2. $\sqrt[4]{16}$	3. $\sqrt[6]{25}$	4. $\sqrt[4]{100}$
$\sqrt[6]{36}$	$\sqrt[6]{27}$	$\sqrt[6]{144}$	$\sqrt[6]{1331}$
$\sqrt[8]{81}$	$\sqrt[8]{625}$	$\sqrt[8]{1296}$	$\sqrt[12]{10000}$

205. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

1. $\sqrt{\sqrt{5}}$	2. $\sqrt{\sqrt{N^3}}$	3. $\sqrt[3]{\sqrt{ab^3}}$
$\sqrt[3]{\sqrt{7}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{h^3}}$	$\sqrt[5]{\sqrt{(3c^4)^2}}$
$\sqrt[3]{\sqrt[3]{13}}$	$\sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^9}}$
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{29}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4x^3}}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10}f^{15}}}$
$\sqrt{2\sqrt{3}}$	$\sqrt{\alpha\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt{2x\sqrt[3]{\frac{a}{2}}}$

§ 18. Juuravaldiste teisendamisi.

Juuravaldisteks nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri. Näiteks

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \quad \left(10 - 2\sqrt[5]{100}\right)^2 \quad \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$$

on juuravaldised.

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu; selleks asendame avaldises esinevad irratsionaalsed suurused nende ligikaudsete väärtustega, tavaliselt

2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli kohane enne asendamist avaldist teisendada. Teisendamise võtteist nimetame kaht:

1. teguri juuremärgi alt juuremärgi ette toomine;
2. juure kaotamine murru nimetajast.

Esimene teisendus põhineb korrutise või jagatise juurimise teoreemil ja toimub järgnevalt:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juuravaldisega.

Näited:

$$1. \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$$

$$2. \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt[3]{b^2}.$$

$$3. \quad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{b - c}.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\
 &= \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}.
 \end{aligned}$$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvuta avaldise

$$4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt määrame ruutjuure algoritmi abil 4 antud avaldises esinevat juurt, siis teostame nõutavad korrutamised ja lõpuks teostame liitmised ja lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$\begin{aligned}
 &4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20} = \\
 &= 4\sqrt{9 \cdot 7} - 5\sqrt{4 \cdot 7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} = \\
 &= 4 \cdot 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\
 &= 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\
 &= 2\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimise, 3 korrutamise, 2 lahutamise ja 1 liitmise, seega kokku 10 tehte teostamist. Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab kõigest ühe juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähis-

väärtuse 2,236, leiame kõnesoleva avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$, ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvuta avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist võtame $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse, korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}} = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{2}{5} \sqrt{13} = 0,4 \sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab üheainsa korrutamise teostamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtuse võtame tabelist.

Ülesanne 3. Arvuta avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist leiame $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame selle vahega arvu 8. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juured. Sel-

leks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19} + \sqrt{15}$:

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}} &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{(\sqrt{19} - \sqrt{15})(\sqrt{19} + \sqrt{15})} = \\ &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{19 - 15} = \frac{8}{4}(\sqrt{19} + \sqrt{15}) = 2(\sqrt{19} + \sqrt{15}). \end{aligned}$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab vaid ühe liitmise ja ühe korrutamise teostamist, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

Ülesanded.

206. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

1. $\sqrt{\frac{1}{2}}$	2. $\sqrt{\frac{2}{3}}$	3. $\sqrt{2\frac{1}{2}}$	4. $\sqrt{3\frac{1}{7}}$
$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{5}{12}}$	$\sqrt{1\frac{5}{18}}$	$\sqrt{2\frac{1}{50}}$
$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

207. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

1. $\sqrt{\frac{a}{b}}$	2. $\sqrt{\frac{m}{2n}}$	3. $\sqrt{\frac{5x}{8a}}$	4. $\sqrt{\frac{p}{q^3}}$
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$	$\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}}$	$\sqrt[5]{\frac{a^2}{a^3}}$
$\sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}$	$\sqrt[4]{\frac{m^5}{n}}$	$\sqrt[3]{\frac{250}{3x}}$	$\sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}$

208. Kirjuta järgmised juuravaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne, ja arvuta nende väärtused:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$	2. $\frac{3}{\sqrt{5}}$	3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$
$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{7}{2\sqrt{7}}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$
$\frac{6}{\sqrt{6}}$	$\frac{6}{\sqrt{18}}$	$\frac{10}{3\sqrt[3]{25}}$	$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$
$\frac{9}{2\sqrt{27}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$	$\frac{18}{5\sqrt[3]{3}}$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{50}}$
$\frac{16}{5\sqrt{8}}$	$\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{15}}$	$\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$	$\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{27}}$

209. Kirjuta järgmised avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne:

1. $\frac{1}{\sqrt{a}}$	2. $\frac{a}{\sqrt{a}}$	3. $\frac{m}{\sqrt{2n}}$	4. $\frac{3p}{\sqrt[3]{q}}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2x}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^3}}$	$\frac{b^4}{\sqrt{b^5}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^3}}$
$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$	$\frac{a^2}{x\sqrt{ax}}$	$\frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2}}$	$\frac{3}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$
$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{25}}$	$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2xy^2}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^4}}$	$\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}$

210. Kirjuta järgmised avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne, ja arvuta nende väärtused:

<p>1. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$</p> $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	<p>2. $\frac{21}{5+\sqrt{2}}$</p> $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ $\frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$	<p>3. $\frac{12}{5-\sqrt{13}}$</p> $\frac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}$ $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$ $\frac{8+\sqrt{15}}{8-2\sqrt{15}}$
---	--	--

211. Anna järgmistele murdudele kuju, milles nimetaja on ratsionaalne:

<p>1. $\frac{u}{\sqrt{u}-1}$</p> $\frac{3N}{\sqrt{N}+2}$ $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}}$ $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$	<p>2. $\frac{w}{w\sqrt{w}+1}$</p> $\frac{3m}{m\sqrt{u}-2}$ $\frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}}$ $\frac{3H}{2\sqrt{H}-\sqrt{5}}$ $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$	<p>3. $\frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$</p> $\frac{x^4-a^2}{x-\sqrt{a}}$ $\frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}}$ $\frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{c}+1}$ $\frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$
---	--	---

212. Koonda järgmised juuravaldised:

<p>1. $6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$</p> $8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ $m\sqrt{7}+n\sqrt{7}$ $a\sqrt{z}-2\sqrt{z}$	<p>2. $10\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{5}$</p> $\sqrt[5]{4}+4\sqrt[5]{4}$ $a\sqrt[3]{x}+b\sqrt[3]{x}$ $k\sqrt[n]{a}+\frac{\sqrt[n]{a}}{k}$	<p>3. $a\sqrt{x}+\sqrt{x}$</p> $m\sqrt[3]{d}-2n\sqrt[3]{d}$ $\sqrt[4]{3f}-5\sqrt[4]{3f}$ $a^2\sqrt[5]{b}-a\sqrt[5]{b}$
--	---	---

213. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste ja võimalikult lihtsate juurte abil:

$$1. \quad 8\sqrt{7} + 5\sqrt[3]{7} - 10,7\sqrt{7} - \sqrt[3]{7}$$

$$3\sqrt{10} + \sqrt[3]{10} - 5,5\sqrt[3]{10} - 0,7\sqrt{10}$$

$$2\sqrt{N} - \sqrt{M} + 4\sqrt{N} - 6\sqrt{M}$$

$$\sqrt[3]{H} + 3\sqrt{H} - 2\sqrt{H} + \sqrt[3]{H}$$

$$2. \quad 6\sqrt{3} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{108} + \sqrt{300}$$

$$\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{40} + 9\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{432}$$

$$6\sqrt{18} - 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt{72} + 4\sqrt[3]{1024}$$

$$5\sqrt[3]{72} - 7\sqrt{45} + 11\sqrt[3]{9000} - 10\sqrt{180}$$

$$3. \quad 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$4. \quad 5\sqrt{3} : 2\sqrt{12}$$

$$2\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{12} \cdot \frac{3}{5}\sqrt[3]{32}$$

$$\sqrt{48} : \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{18} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{20}$$

$$\frac{3}{5}\sqrt{56} : 3\sqrt{8}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{3} \cdot 7\sqrt[3]{18} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{16}$$

$$\sqrt{91} : \frac{3}{4}\sqrt{39}$$

214. Võttes tabelist arvude 2, 3, 5 ja 7 ruut- ja kuupjuured, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused:

$$1. \quad \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad 2. \quad \sqrt{7} - \sqrt{5} \quad 3. \quad \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{14}$$

$$\sqrt{35}$$

$$\sqrt{21}$$

$$\sqrt{98}$$

$$\sqrt[3]{45}$$

$$\begin{array}{ll}
 4. \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} & 5. \sqrt{50} - \sqrt{28} + \sqrt{35} \\
 \sqrt[3]{49} & 2\sqrt{15} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75} \\
 \sqrt[3]{448} & \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{200}
 \end{array}$$

215. Teisenda järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

$$\begin{array}{lll}
 1. 2\sqrt{5} & 2. b\sqrt[3]{c^2} & 3. ax^2\sqrt[3]{a} \\
 a\sqrt{b^3} & h\sqrt[4]{3h} & c^2u\sqrt[3]{c^2u} \\
 h^2\sqrt{u} & N^2\sqrt[5]{N} & 3D^2\sqrt[3]{3D} \\
 3\sqrt{\frac{1}{27}} & \frac{5}{2}\sqrt[5]{10} & \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{2}} \\
 c^2\sqrt{\frac{b}{c}} & 4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}} & \frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}
 \end{array}$$

216. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

$$\begin{array}{ll}
 1. \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} & 2. 3N\sqrt{N^2 - \frac{5}{9}N^2} \\
 \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} & \sqrt{4x^2 - \frac{19}{25}x^6} \\
 2\pi\sqrt{r^2 - \frac{3}{8}r^2} & \sqrt{\frac{12}{25}R^4 - \frac{4}{25}R^2}
 \end{array}$$

217. Lihtsusta järgmised korrutised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \frac{a}{2}\sqrt{3x} \cdot \frac{5}{a}\sqrt{6x} & 2. \sqrt{N}(\sqrt{N} - a\sqrt{aN}) \\
 m^2\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot 3\sqrt{m} & \sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x}) \\
 h^2\sqrt[3]{2u} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{4u^2} & m\sqrt{n}(\sqrt{mn} - 5m\sqrt{n}) \\
 \pi\sqrt{aR^2} \cdot \frac{4R^2}{3}\sqrt[3]{a^2R} & 3\sqrt{cD}(\sqrt{cD} + 2\sqrt{aD})
 \end{array}$$

218. Arenda järgmised korrutised:

$$1. (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})$$

$$(3\sqrt{h} - 2\sqrt{k})(3\sqrt{h} + 2\sqrt{k})$$

$$(\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{ab} + 1)$$

$$2. (t - 2\sqrt{uv})(t + 2\sqrt{uv})$$

$$\left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{q}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{q}{3}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{uv}}{s}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{uv}}{s}\right)$$

219. Lahenda järgmised võrrandid ja kontrolli, kas kõik leitud lahendid rahuldavad antud võrrandeid:

$$1. \sqrt{2x} = 8$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{z}{8}} = z$$

$$\sqrt[3]{5x} = x$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 9$$

$$\sqrt[6]{v^5} = 1024$$

$$2. \sqrt{x+7} = x$$

$$y - 2 = \sqrt{y}$$

$$\sqrt{10u - 24} = u$$

$$x - 11\sqrt{x} + 24 = 0$$

$$x + 1 = \sqrt{2x + 4}$$

$$3. \sqrt{x-1} - 3 = 0$$

$$x - 3 + \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$2\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 8$$

$$4. \sqrt[3]{6x+25} - x = 3$$

$$3x - 4\sqrt{x} - 32 = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{x+2}{2}}$$

§ 19. Astmed negatiivsete täisarvuliste astendajatega.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n$$

ja

$$a^m : a^n = 1, \quad \text{kui } m = n.$$

Kui $m < n$, kirjutame astmete jagatise murru kujul ja taandame selle murru arvuga a^m :

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{kui } m < n.$$

Selleks, et kõik need kolm juhtu avaldada üheainsa võrdusega, laiendame astme mõistet. Kirjutame nimelt *i g a l j u h u l*, see on, ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, et

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Kui $m = n$, seisab vasemal pool võrdusmärki kahe võrdse arvu jagatis ja paremal pool sümbol a^0 . Viimasel ei ole astme definitsiooni järgi mõtet: ei ole võimalik võtta arvu a null korda tegurina. Et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$a^0 = 1.$$

Nii on

$$7^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad \left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1.$$

Kui $m < n$, siis ülalantud võrduse vasak pool $a^m : a^n$ kujutab murdu $\frac{1}{a^{n-m}}$; sellesama võrduse parema poole a^{m-n} võime kirjutada kujul $a^{-(n-m)}$. Ka sellel sümbolil pole astme definitsiooni järgi mõtet, kuid ülalantud võrduse järgi

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n - m$ üheainsa tähega r , näeme, et

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Nii on

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2 \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Saab näidata, et tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on positiivsed või negatiivsed täisarvud.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m + (-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Samuti

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2 x^3 \cdot \frac{2}{5} n^{-3} x^{-2} = \frac{2}{5} n^{-1} x = \frac{2x}{5n}.$$

Ülesanded.

220. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1. 3^{-2}	2. 6^{-2}	3. 2^{-5}	4. 10^{-7}
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$	$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$
$1,7^{-2}$	$0,9^{-1}$	$2,4^{-3}$	$3,6^{-2}$
$4^0 \cdot 5^{-2}$	$2^5 \cdot 3^{-4}$	$(-1)^4 \cdot 8^{-2}$	$(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$
$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$	$\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$	$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$	$(-0,2)^{-5} \cdot 10^3$

221. Kirjuta järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

1. $\frac{1}{a^2}$	2. $\frac{1}{x^3}$	3. $\frac{1}{m}$	4. $\frac{1}{u^5}$
$\frac{2}{n^3}$	$\frac{4}{v}$	$\frac{5}{N^6}$	$\frac{a}{b^4}$
$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{2x^3}$	$\frac{u}{3v^4}$	$\frac{m}{p^2q^5}$
$\frac{0,7}{cx^2}$	$\frac{5a}{z^3}$	$\frac{9a}{8b^2u^3}$	$\frac{8}{10c^2u^4}$
$\frac{100}{\pi D^2}$	$\frac{3c^3}{10gh^2}$	$\frac{0,2p}{q^2r^3}$	$\frac{7s^3}{23rh^2}$

222. Kirjuta järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

1. a^{-1}	2. $3b^0$	3. $2^{-1}c^{-1}$
N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
$4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0,9a^{-2}x^{-3}$
$\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
$\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

223. Kasutades arvu 10 astmeid avalda:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1. 1 km meetrites | 2. 1 m millimeetrites |
| 1 mm sentimeetrites | a cm meetrites |
| 1 kg milligrammides | s m ² aarides |
| 0,7 ha ruutmeetrites | V cm ³ liitrites |
| 1,4 l kuupsentimeetrites | P g tonnides |

224. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

- | | | |
|-----------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $7^3 \cdot 7^{-4}$ | 2. $3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$ | 3. $7,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$ |
| $5^3 : 5^{-1}$ | $2 \cdot 10^6 : 10^{-6}$ | $3,43 \cdot 10^{-6} : (0,49 \cdot 10^{-8})$ |
| $4^5 \cdot 4^{-3}$ | $5,7 \cdot 9^{-3} : 9^0$ | $8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,125 \cdot 10^{12}$ |
| $3^{-6} : 3^{-4}$ | $10^4 : (5 \cdot 10^{-2})$ | $1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$ |
| $10^{-4} : 10^{-7}$ | $(\frac{1}{2})^0 : (2 \cdot 10^{-3})$ | $2,25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$ |

225. Kirjuta järgmised arvud kümne astme kordsetena:

- | | | | |
|-----------------|------------------|--------------------|----------------------|
| 1. 70 | 2. 900 | 3. 1400 | 4. 1750 000 |
| $\frac{9}{10}$ | $\frac{13}{100}$ | $\frac{325}{1000}$ | $\frac{283}{10000}$ |
| $\frac{11}{20}$ | $\frac{7}{500}$ | $\frac{15}{4000}$ | $\frac{112}{500000}$ |
| 0,72 | 3,2 | 1,11 | 0,033 |
| 0,025 | 1,375 | 5,0081 | 0,000 765 |

226. Soorita järgmised tehted ja kirjuta tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

- | | | |
|------------------------|----------------------------|---|
| 1. $a^5 : a^0$ | 2. $n^0 : n^2$ | 3. $5a^{-4}x^2 : a^2$ |
| $c^0 \cdot u^{-3}$ | $10p^{-5} \cdot 0,2p^8$ | $3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3}b^{-3}$ |
| $g^0 \cdot f^0$ | $\frac{3}{2}u^3 : 6u^{-2}$ | $4n^2x^2 : 5n^6x^{-3}$ |
| $h^{10} : (-h)^0$ | $8,5q^{-3} : 1,5q^{-5}$ | $10c^2D^{-2} : 0,7c^{-1}D^{-2}$ |
| $3m^5 \cdot (-n)^{-1}$ | $12,1N^{-4} \cdot 0,1N^7$ | $f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{18}f^{-2}g^{-1}h^0$ |

227. Lihtsusta järgmised avaldised ja teisenda tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

1. $(N^{-2})^2$	2. $(\frac{1}{2}m^3)^{-2}$	3. $(0,1a^2x^{-1})^2$
$(a^{-1})^{-3}$	$(0,3h^{-2})^{-1}$	$(1,2H \cdot 5H)^{-2}$
$(cu^{-2})^{-2}$	$(3ax^4)^{-3}$	$(\frac{1}{2}x^{-1} \cdot 3x^{-2})^{-4}$
$(2Q^{-3})^{-2}$	$(\frac{4}{5}c^2u^{-3})^{-2}$	$(\frac{7}{22}R^{-2}h^{-1})^{-2}$
$[(-a)^2]^{-2}$	$[(-3u)^{-1}]^{-2}$	$[(-0,1f)^{-2}]^{-3}$

§ 20. Astmed murruliste astendajatega.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv.

Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a .

Sümbolil $a^{\frac{m}{n}}$ pole esiotsa mingit mõtet, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv: ei ole ju võimalik võtta arvu a tegurina murdarv korda. Et saada sellele sümbolile mõtet ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv, lepime kokku, et iga juurt $\sqrt[n]{a^m}$ võib kirjutada kujul $a^{\frac{m}{n}}$; seega igal juhul

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7,$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(27)^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abiksvõtmisel nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

N ä i d e.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^2 = x^{-\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ülesanded.

228. Leia järgmiste sümbolite väärtused :

1. $9^{\frac{1}{2}}$	2. $16^{\frac{3}{2}}$	3. $27^{\frac{1}{3}}$	4. $64^{\frac{2}{3}}$
$125^{\frac{2}{3}}$	$169^{\frac{5}{2}}$	$216^{\frac{2}{3}}$	$121^{\frac{3}{2}}$
$1,44^{\frac{1}{2}}$	$0,001^{\frac{5}{3}}$	$0,343^{\frac{4}{3}}$	$0,729^{\frac{2}{3}}$
$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{4}{3}}$

229. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata :

1. \sqrt{N}	2. $\sqrt[3]{u}$	3. $\sqrt{x^5}$	4. $\sqrt[3]{h^2}$
$\sqrt{5x}$	$7\sqrt[3]{c^2}$	$0,1\sqrt[3]{D^2}$	$\sqrt[5]{(3cu)^3}$
$\sqrt{cn^3}$	$A\sqrt[4]{a^2}$	$u\sqrt{u^3}$	$\sqrt{ab^2c^3}$
$0,7\sqrt[5]{a^2b^3}$	$\frac{3}{4}\sqrt[4]{H^2u^4}$	$\frac{1}{2}x\sqrt[3]{N^4x}$	$\sqrt[5]{A^3x^5}$
$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$	$\frac{1}{5\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$	$\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$

230. Kirjuta järgmised avaldised juurtena :

1. $19^{\frac{1}{2}}$	2. $7^{\frac{1}{3}}$	3. $83^{\frac{1}{4}}$	4. $100^{\frac{1}{5}}$
$1,3^{\frac{3}{2}}$	$0,58^{\frac{2}{3}}$	$9,2^{\frac{3}{4}}$	$0,06^{\frac{4}{5}}$
$N^{\frac{1}{8}}$	$u^{\frac{4}{3}}$	$a^{\frac{3}{5}}$	$x^{\frac{5}{2}}$
$(2h)^{\frac{4}{3}}$	$\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$	$(10f)^{0,1}$	$(mn^2)^{0,3}$
$aI^{0,5}$	$3QR^{2,4}$	$c\left(\frac{G}{H}\right)^{1,5}$	$m\left(\frac{ax^2}{n}\right)^{0,7}$

231. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

1. $\sqrt[3]{a^{-2}}$	2. $\sqrt[5]{x^{-3}}$	3. $\sqrt[4]{N^{-5}}$	4. $\sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}}$
$\frac{1}{\sqrt{H^3}}$	$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$	$\frac{5}{\sqrt{2px}}$	$\frac{7}{10\sqrt{mn^2}}$
$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3}$	$\sqrt[3]{\frac{u^3}{v^2}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}}$	$\sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}}$
$\frac{a}{\sqrt{a+bx}}$	$\sqrt{\frac{b}{a+bx}}$	$\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{a}$	$\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt{(a+bx)^3}}$

232. Kirjuta järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

1. $27^{-\frac{2}{3}}$	2. $36^{-\frac{1}{2}}$	3. $8^{-\frac{4}{3}}$	4. $64^{-\frac{3}{4}}$
$0,343^{-\frac{1}{3}}$	$0,01^{-\frac{1}{2}}$	$0,0016^{-\frac{3}{4}}$	$0,0169^{-\frac{3}{2}}$
$\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$
$7D^{-\frac{3}{2}}$	$(2S)^{-\frac{2}{3}}$	$(a^2v)^{-\frac{4}{3}}$	$(\pi R^2H)^{-\frac{5}{3}}$
$3a^{-\frac{3}{4}}f^{-\frac{3}{4}}$	$\left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$(5kw^3)^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

233. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$	2. $d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}}$	3. $f^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$	4. $h^0 \cdot h^{\frac{3}{4}}$
$N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{4}}$	$u \cdot u^{-\frac{2}{3}}$	$p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^0$	$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$	$l^0 \cdot l^{-\frac{3}{2}}$	$D^{\frac{1}{3}} \cdot D^{-\frac{3}{4}}$	$c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}$

234. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

$$\begin{array}{llll}
 1. & A : A^{\frac{1}{2}} & 2. & c^2 : c^{\frac{1}{3}} \\
 & c^2 : c^{-\frac{1}{3}} & & f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}} \\
 & N^{-1} : N^{\frac{3}{2}} & & z^{\frac{4}{5}} : z^{-1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 3. & x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}} & & h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}} \\
 & q^0 : q^{-\frac{1}{2}} & & l^{\frac{2}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 4. & a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \\
 & u^{\frac{2}{3}} : u^{-2}
 \end{array}$$

235. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata, toimetada nõutavad tehted ja anna tulemus juure kujul:

$$\begin{array}{lll}
 1. & \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt{N} & 2. & \sqrt[3]{A^2} : \sqrt{A^3} \\
 & \sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} & & \sqrt{c^3} : \sqrt[4]{c} \\
 & \sqrt[3]{D^2} \cdot \sqrt{D^3} & & \sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3. & \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \\
 & \sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2} \\
 & \sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}
 \end{array}$$

236. Kirjuta järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

$$\begin{array}{llll}
 1. & (x^0)^{\frac{1}{2}} & 2. & (h^2)^{\frac{3}{2}} \\
 & (a^{\frac{2}{3}})^3 & & (N^{-1})^{\frac{3}{2}} \\
 & (I^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}} & & (u^{-\frac{1}{2}})^9 \\
 & N^{\frac{2}{5}} \cdot N^{\frac{3}{5}} & & (2u^{\frac{3}{4}})^4 \\
 & \frac{(4D^2)^{\frac{3}{2}}}{(3D^3)^{\frac{5}{2}}} & & \frac{(a^{-3})^{\frac{1}{3}}}{(8b)^{-\frac{2}{3}}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3. & (u^{-1})^{\frac{3}{2}} \\
 & (c^{-2})^{-\frac{1}{3}} \\
 & (F^8)^{\frac{3}{4}} \\
 & x : x^{-\frac{3}{4}} \\
 & \left(a^{\frac{5}{6}} \right)^4 \\
 & \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 4. & (D^{-1})^{-\frac{1}{2}} \\
 & (x^{-\frac{1}{3}})^6 \\
 & (c^0)^0 \\
 & H^2 : H^{\frac{3}{2}} \\
 & \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^9
 \end{array}$$

§ 21. Ülesanded kordamiseks.

237. Lihtsusta järgmised avaldised:

1. $\left(\frac{2}{3} a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2$
2. $\left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3$
3. $\left(\frac{2u}{v}\right)^3 \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3$
4. $\left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(-\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}$

238. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koonda:

1. $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{24\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{\frac{a^5}{8}} - 3a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$

239. Arenda järgmiste binoomide ruudud:

1. $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$
2. $\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2$

240. Lihtsusta järgmised avaldised:

1. $\sqrt{\frac{25}{27}} : 10 - \frac{\sqrt{3}}{6}$
2. $\sqrt{3 - \frac{6a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}}$
3. $\frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$

241. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$$1. \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\frac{2b}{a}}}$$

$$2. \sqrt[3]{x^3 - y^3}$$

$$5u \sqrt[3]{u^2 y}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 - y^3}{xy^2}}$$

242. Arvuta

$$9^{-0,5} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$$

243. Lihtsusta

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$$

Peatükk IV.

Ainet kordamiseks.

§ 22. Ülesandeid üldiseks kordamiseks.

244. Raudteerongil sõites tundub järjest üksikuid tõukeid; need on tingitud rööbaste jätkukohtadest. Reisija loendab minutis N tõuget. Mitu kilomeetrit sõidab rong tunnis, kui rööbaste pikkus on p meetrit?

245. A. 774—779 Karolingide loodud rahasüsteemi ühik *libra* (nael) jagunes 20-ks *solidus*'eks, iga *solidus* 12-ks *denarius*'eks. Mitu *denarius*'t on l *libra*'t, s *solidus*'t ja d *denarius*'t?

246. Olgu antud murdude rida:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \text{jne.}$$

Missugune murd seisab n -ndal kohal? $(n - 1)$ -sel kohal? $(n + 2)$ -sel kohal?

247. Arvu N soovitakse kujutada lõiguna. Selleks on kasutada p mm pikkune riba paberit. Kui suure võib ülimalt valida kujutamisühiku?

248. Kujutamishik on l mm. Mitme detsimeetri pikkune lõik kujutab arvu $10p + q$?

249. Anna üldine avaldis kahekohalise arvu ruudu jaoks.

250. Auto hind langeb masina kulumise tõttu aastas $n\%$ võrra. 2 aasta vanuse auto hinda arvestatakse H margaga. Kui kallilt osteti auto?

251. Olgu $a = -5$, $b = +8$. Arvuta neil andmeil järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$$(a + b) \cdot (2a + 3); \quad (a + b) \cdot 2a + 3; \quad a + b \cdot (2a + 3).$$

252. Kulumise tõttu kaotab mootorratas aasta jooksul $p\%$ väärtusest, mis tal on aasta alguses. Kui suur on mootorratta väärtus praegu, kui tema eest 2 aastat tagasi maksti M marka?

253. n rida sportlasi reavahega d meetrit marsib kiirusega v meetrit sekundis auvõraste tribüüni eest mööda, mille pikkus on l meetrit. Kui palju aega nõuab möödamarssimine?

N ä i d e. $n = 200$; $d = 1,8$; $v = 2,6$; $l = 20$. Arvuta t .

254. Ristküliku-kujulise plaadi valamiseks valmistatud vormi pikkus on p mm ja laius l mm. Jahtumisel kokku tõmbudes väheneb valatud plaadi pikkus $0,3$ mm ja laius $0,2$ mm. Kui palju väheneb jahtumisel plaadi pindala?

255. Kuubi serv pikkusega 1 dm paisus soojenedes s dm võrra. Kui suur on paisunud kuubi ruumala?

256. Olgu teada, et $x + \frac{1}{x} = 3$. Arvuta $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

257. Olgu teada, et $u + \frac{1}{u} = 10$. Arvuta $u^3 + \frac{1}{u^3}$.

258. Arvuta juurdekasvud, mille saavad allpool tabelis antud polünoomid x -i väärtuse muutumisel antud lähteväärtuselt antud lõppväärtusele.

Nr.	Polünoom	x -i lähteväärtus	x -i lõppväärtus
1.	$x^2 + 4x - 7$	3	$3 + h$
2.	$x^2 - 5x + 8$	-2	$-2 + k$
3.	$x^2 + x - 1$	a	$a + a$
4.	$11 - 7x - x^2$	b	$b - \beta$
5.	$-4 + 3x - x^2$	$c - \gamma$	$c + \gamma$

259. Arenda järgmised korrutised:

1. $\left(\frac{2u^3}{3} - \frac{3v^2}{4}\right)\left(\frac{2u^3}{3} + \frac{3v^2}{4}\right)$

2. $(a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$

3. $(x^2 - ax + 1)(x^2 + 4ax + 1)$

260. Arenda järgmised korrutised:

1. $(N - u)^2(N + u)^2$

2. $(z - 4)(z^2 + 4z + 16)$

3. $(n - 1)^3(n^2 + 2n + 1)$

$(a^2 - b^2) : (a - b) = (a^3 + b^3) : (a^2 + b^2)?$

261. Kas kehtib võrre

262. Leia $p\%$ rahasummast a marka b penni.

263. Avalda võrdusest $H = \frac{2xy}{x+y}$ suurus x .

264. Leia järgmiste avaldiste pöördväärtused:

$$\frac{5}{11} \quad 2\frac{3}{4} \quad \frac{a^2}{bc} \quad 1 + \frac{1}{a} \quad p - \frac{1}{p}$$

265. Lahuta tegureiks avaldised:

$$\begin{array}{ll} 1. & 6ac + 15bd + 9bc + 10ad \\ & h^2k^2 - 4h^2 - k^2 + 4 \\ & 6l^2 - 13lm + 6m^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2. & 3N^2 - 4Nx + x^2 \\ & 2c^2 + cu - u^2 \\ & x^2 - 7x - 18 \end{array}$$

266. Lahuta tegureiks avaldised:

$$\begin{array}{l} 1. \quad p^2 + 2ap + a^2 - b^2 \\ 2. \quad (2x + a)^2 - (3x + 2a)^2 \end{array}$$

267. Leia avaldiste

$$m^2n - mn^2, \quad m^3 - mn^2 \quad \text{ja} \quad m^3 - 2m^2n + mn^2$$

suurim ühistegur.

268. Leia avaldiste

$$4a^2u - 9u^3, \quad 4a^2u - 6au^2 \quad \text{ja} \quad 4a^2u - 12au^2 + 9u^3$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

269. Taanda murrud:

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{10u^2 + u - 21}{15u^2 - u - 28} \\ 2. & \frac{4ax}{(1+a)^2 - (1-a)^2} \end{array}$$

270. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1. \left(\frac{24a + 2x}{4} - 2x \right) : \left(3 \frac{5}{6} a - \frac{5x + 3a}{6} \right)$$

$$2. \frac{c + 3}{c^2 + 3c + 2} - \frac{c + 1}{c^2 + 5c + 6}$$

$$3. \frac{2}{(k-1)^2} - \frac{2}{(k+1)^2} + \frac{3}{k^2-1}$$

271. Näita, et $p : q = r : s$, kui

$$(pq + rs)^2 = (p^2 + r^2)(q^2 + s^2).$$

272. Soorita nõutavad tehted ja anna tulemused võimalikult lihtsal kujul:

$$1. \frac{4x^2 - 9y^2}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(2x + 3y)^2}$$

$$2. \frac{9x^5y^3}{35a^8b^9} : \frac{12xy^7}{49a^{13}b^{10}}$$

$$3. \frac{7}{3} (3a - 2b) \cdot \frac{3}{12a^2 - 8ab}$$

$$4. \left(\frac{9x^2}{a^2} - 1 \right) : \left(\frac{3x}{a} + 1 \right)$$

273. Lihtsusta avaldised:

$$1. \left(\frac{x + y}{y} - 2 \right)^4 \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} - 1 \right)^2$$

$$2. 2 \left(\frac{5p - 6q}{4p - 3q} \right) - 3 \left(\frac{3q - 2p}{3q - 4p} \right)$$

$$3. \frac{p}{pq - q^2} + \frac{q}{pq - p^2}$$

$$4. \left(N - \frac{1}{N} \right) \left(N + \frac{1}{N} + 2 \right) : \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) \left(\frac{1}{N} + 1 \right)$$

$$5. \left(1 + \frac{a-x}{a+x} \right) \left(2 - \frac{a^2-ax}{a-x} \right) : \frac{a-2x}{a+x}$$

$$6. \frac{x-5}{2x} \left(\frac{1}{x^2-8x+15} - \frac{1}{x^2-2x-15} \right)$$

274. Liida murrud:

$$\frac{2a-b}{ab-a^2}, -\frac{3a+b}{ab+a^2} \text{ ja } \frac{a-2b}{a^2-b^2}.$$

275. Teisenda võrre.

$$\frac{a^2-b^2}{2ab} : (3a^2+ab-2b^2) = \frac{a-b}{3a-2b} : 2ab$$

nii, et tema liikmed oleksid võimalikult lihtsad täisavaldised.

276. Olgu $\frac{a}{x} = p$. Avalda p kaudu murrud

$$\frac{3a}{x} \quad \frac{a}{2x} \quad \frac{4a}{3x} \quad \frac{a^2}{x^2} \quad \frac{a+nx}{x}.$$

277. Määra murdude $\frac{m^2}{n}$ ja $\frac{m}{n^2}$ korrutis ja jaga see murruga $\left(\frac{m}{n}\right)^2$.

278. Otsusta jagamist sooritamata, missuguse jäägi saame, kui arvu 421 574 607 jagame arvuga 2, arvuga 3, arvuga 4, arvuga 5, arvuga 9, arvuga 10, arvuga 25.

279. Kolmekohalisel arvul on üks ja sama arv sajalisi, kümnelisi ja ühelisi. Kas see arv jagub kolmega?

280. A. 1934 toimetatud rahvaloenduse andmeil oli Eestis elanikke 1 126 413, neist linnaelanikke 323 007.

Anna nende arvude suhte jaoks rida ligikaudseid väärtusi ümmargustes arvudes ja määra igal juhul, kas lähendus annab kujutatava suuruse liiaga või puudusega.

281. Avalda järgmistest valemitest suurused, mis sulgudes märgitud:

- | | | | |
|--------------------------------|-----|---|-----|
| 1. $v = p \sqrt{q - n}$ | [n] | 6. $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ | [V] |
| 2. $s = kt^2 - h$ | [t] | 7. $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ | [g] |
| 3. $k = (z - h)^2$ | [h] | 8. $A = r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ | [r] |
| 4. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ | [x] | 9. $X = a(h - 1)^2$ | [h] |
| 5. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ | [r] | 10. $v = 1 + \sqrt{u + 1}$ | [u] |

282. Leia võrdest

$$\frac{a^2 - a - 6}{a + 4} : x = x : \frac{a^2 + a - 12}{a + 2}$$

arv x .

283. Määra järgmisist võrdeist arv x :

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $5 : \frac{1}{36} = x^2 : 1\frac{1}{4}$ | 3. $1,44 : x = x : 0,36$ |
| 2. $7,5 : x = x : 13,872$ | 4. $x : 3\frac{1}{16} = 1 : 169x$ |

284. Lahenda võrrandid:

1. $\frac{2x + 4\frac{1}{3}}{5} - \frac{3x + 5}{5x - 25} - \frac{x}{2,5} = 0$
2. $\frac{x^2 - 30x + 2}{6x^2 - 6} + \frac{3x + 2}{2x - 2} - \frac{5x - 1}{3x + 3} = 0$
3. $\frac{3x}{x + 5} + \frac{2x}{2x - 10} = \frac{9(x^2 - 15)}{x^2 - 25} - 5$

4.
$$\frac{0,5 - 3x}{2x + \frac{1}{6}} - \frac{\frac{3}{4} - x}{\frac{2x}{3} + \frac{5}{6}} = 0$$
5.
$$\left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2x}{3}\left(x - \frac{3-x}{2}\right) = 1\frac{1}{4}$$
6.
$$\frac{3x}{2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{18}\right) - \left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right)\left(x - \frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
7.
$$\frac{5}{6}\left[\frac{7}{8} : \left(\frac{9x}{11} - 11\right) + 5\right] - 6 = 0$$

285. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $ax + bx = a - cx$
2. $(m - x)^2 = (m + x)^2$
3. $(x - 4a)^2 = x(x + b) + b(7x + 16b)$
4. $(x - b)(a + b) = (x + b)(a - b)$
5. $x(a - x) - a^2 = x(b - x) - b^2$
6. $a(a - x) = 2ab - b(x + b)$
7. $2mx(mx - n) - 2(mx - n)^2 = mn(m + n)$
8. $(mx - n)(m + n) = (mx - nx + n)(m - n)$

286. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{x}{a} + \frac{c}{b} = 1$ 2. $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{1}{ab}$ 3. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = c$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\frac{1}{x-a} = \frac{2}{a}$ 5. $\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}$ 6. $\frac{a-x}{b} + \frac{b-x}{a} = 2$ |
|--|---|

287. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. \frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = 2x$$

$$4. \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{m}{n}$$

$$2. x - \frac{ax}{a+b} = \frac{ab}{a-b} - \frac{b^2x}{a^2-b^2}$$

$$5. \frac{a-x}{b-x} = \frac{x}{b+x}$$

$$3. \frac{ax-1}{bx} + \frac{bx-1}{ax} = 2$$

$$6. \frac{a+x}{a-2x} = \frac{a-x}{a+2x}$$

288. Missuguse x -i väärtuse puhul on kehtivad järgmised võrdded:

$$1. \frac{2a}{x} = \frac{4}{5a}$$

$$3. \frac{x-p}{p+q} = \frac{x+p}{p-q}$$

$$2. \frac{5x-c}{f} = \frac{5-c}{f}$$

$$4. \frac{2x-1}{g-h} = \frac{x}{2g+h}$$

289. Lahenda võrrandid tähe x suhtes:

$$1. a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$$

$$2. \frac{x}{a+b} - c = d + x$$

$$3. \frac{m+n}{x} + \frac{1}{m+n} = \frac{m-n}{x} + \frac{1}{m-n}$$

$$4. 1 - \frac{1 - \frac{1}{a^2}}{\frac{a}{x} \left(1 - \frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{a^2} = 0$$

$$5. \frac{a+b}{a+2b} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{b(b-a)}{a^2+2ab}$$

290. Lahenda võrrandid:

$$1. \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} + \frac{3}{2} = \frac{x - \frac{3}{2}}{x + \frac{3}{2}} + \frac{1}{x}$$

$$2. \frac{1}{\frac{1}{3}x - 1} = \frac{\frac{1}{2}x - 2\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}x^2 - x + 1\frac{1}{3}}$$

291. Lahenda võrrand

$$\frac{4a^2}{x+2} - \frac{b^2}{x-2} = \frac{4a^2 - b^2}{x(4-x^2)}$$

tähe x suhtes.

292. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1. x^2 - \frac{11}{2}x = 20$$

$$3. 5x - 3 = \frac{x-2}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$2. x^2 - 3x + 1\frac{5}{9} = 0$$

$$4. (5x-1)^2 = (4x-1)^2 + 7$$

293. Lahenda järgmised võrrandid otsitava x suhtes:

$$1. 2x(3x-5) = 0$$

$$4. x^2 - px = \frac{x^2}{q}$$

$$2. 6x^2 + 11x = 0$$

$$5. \frac{ax-x^2}{9} = \frac{6x-2x^2}{36}$$

$$3. ax(x-b) = 2cx$$

$$6. \frac{ax}{x-1} = \frac{bx}{x+1}$$

294. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. bx^2 - (a+b^2)x + ab = 0$$

$$2. a^2x^2 + 2acx - (b^2 - c^2) = 0$$

$$3. ax^2 - (a+b+c)x + (b+c) = 0$$

$$4. (a+b)x^2 + 2(a+3b)x = 3a + 7b$$

295. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $x^2 + n = nx + 1$

5. $x^2 - 1 = x(q - \frac{1}{q})$

2. $4k(x - k) = x^2$

6. $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2) = 0$

3. $x^2 - (a - b)x - ab = 0$

7. $(2h + 3k)x = x^2 + 6hk$

4. $2x^2 - ax = a^2$

8. $x^2 - rx + s(r - s) = 0$

296. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{a}{x} + \frac{a-1}{x-2} = 1$

3. $\frac{x-a}{b} + \frac{a}{x-b} = 2$

2. $\frac{x}{x-4a} + \frac{x+3a}{x-a} = 0$

4. $\frac{x+a}{x+c} = \frac{x+c}{x+b}$

297. Avalda järgmistest valemitest suurused, mis sulgudes märgitud:

1. $M = \frac{a}{b+N}$ [N]

2. $H = K(1 - \frac{1}{z})$ [z]

3. $A = 2(bh + hl + lb)$ [l]

4. $l = \frac{S}{\pi r} - r$ [S]

5. $S = 2\pi r(r + h)$ [h]

6. $Y - y = m(X - x)$ [X]

7. $x = \frac{My + mz}{M + m}$ [M]

8. $d = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ [f]

9. $I = \frac{E}{R - r}$ [R]

$$10. \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{1}{w} \quad [w]$$

$$11. \quad a = g \sqrt{\frac{2 + kt}{1 - kt}} \quad [t]$$

$$12. \quad \frac{V + v}{V} = \frac{b}{b - p} \quad [V]$$

298. Lahenda võrrand-süsteemid otsitavate x ja y suhtes:

$$1. \quad \begin{cases} \frac{6x + 5y - 4}{3x + 2y - 1} = 2,1 \\ \frac{5x - 4y + 3}{4x - 3y + 2} = 1,2 \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} 8 \frac{1}{2} x - \left(\frac{3x}{5} - 3 \frac{3}{4} y \right) = 0 \\ 6x - \frac{1}{2} y = \frac{2}{9} \left(x + \frac{3y}{8} \right) \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{a}{n + x} = \frac{b}{n + ny} \\ n(y + 1) = x \end{cases} \quad 4. \quad \begin{cases} \frac{2x + y}{0,5} - \frac{3x - y}{0,8} = 3,75 \\ \frac{x + 2y}{0,4} + \frac{3y - x}{0,9} = 11 \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \frac{a}{b + y} = \frac{b}{3a + x} \\ ax + 2by = b^2 \end{cases} \quad 6. \quad \begin{cases} ax + by = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ a(x - y) - b(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ xy - 2x = 5 \end{cases} \quad 8. \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x^2 - 4y^2 = 2x + 8 \end{cases}$$

298. Lahenda võrrand-süsteemid otsitavate x ja y
 $-3 + \sqrt{5}$ ja $-3 - \sqrt{5}$.

300. Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on

1. võrrandi $x^2 - x - 72 = 0$ lahendite viiekordsed;
2. võrrandi $x^2 + 1,5x + 0,26 = 0$ lahendite kümnekordsed;
3. võrrandi $x^2 - 12x + 35 = 0$ lahendite kümnendikud;
4. võrrandi $x^2 + 6x - 135 = 0$ lahendite kolmandikud.

301. Jaota 100 leiba 10 inimesele nõnda, et 3 neist saavad kokku kahekordse leivahulga teiste saadud kogu hulgaga võrreldes. (A h m e s, 1700 e. Kr.)

302. Rahvapeo einelauapidaja tellib peoks limonaadi-tehaselt suurema vaadi kuremarja-jooki, mille hind on 22 penni liiter, ja väiksema vaadi linnasekalja, mille hind on 8 penni liiter, koguhinnaga 58,20 marka. Saadetise kohalejõudmisel selgus, et tellimise täitmisel on eksikom-bel suurem vaat täidetud kaljaga, väiksem kuremarja-joo-giga, mille tõttu arve on 8,40 marga võrra väiksem kui arvatud. Leia tellitud kuremarja-joogi ja linnasekalja liitrite arv.

303. Talumees ostis linnast 120 ahjupotti ja 300 tel-liskivi, mis maksid kokku 54 marka. Pott oli kivist 24 penni kallim. Kui palju maksis talumees kivide eest?

304. Koolipeoks müüdi 230 piletit kahesuguse hin-naga. Õpilaspilet maksis 20 penni vähem kui külalispilet. Õpilaspiletite müügist saadi 56 marka, külalispiletite müügist 54 marka. Kui kallid olid piletid?

305. Murd muutub pärast taandamist $\frac{3}{4}$ -ks. Kui selle murru lugejaga ja nimetajaga liidame 4, siis saame pärast taandamist $\frac{4}{5}$. Leia see murd.

306. Osteti rukki- ja nisujahu, kokku 37 kg. Nisu-jahu kg eest maksti 2,4 korda rohkem kui rukkijahu kg eest. Rukkijahu maksis 3,30 marka ja nisujahu 5,40 marka. Mitu kg osteti rukkijahu ja mitu kg nisujahu?

307. Ärimees ostis kaks maja ja maksis nende eest kokku 35 000 marka. Aasta jooksul andis üks maja talle

tulu 10% ostuhinnast, teisele majale oli ta aga remonttööde arvel 4% ostuhinnast juurde maksnud. Aastane puhastulu neist majadest oli 700 marka. Mis hinnaga ostis ärimees kummagi maja?

308. Kevadel külvati kaeru 13 hl enam kui otri. Kaer andis 7 seemet, oder 9 seemet; kaeru saadi aga 17 hl rohkem kui otri. Kui suur oli kummagi vilja saak?

309. Peremees ostis katusepappi ja papinaelu. Kaup kaalus kokku 120 kg ja maksis kokku 31,80 marka. Papi ja naelte kg hinnad olid vastavalt 25 ja 70 penni. Kui palju maksis papp?

310. Talumees mahutab osa oma 6000-margasest kapitalist majapidamisse, millest ta saab 4% tulu, ja pagutab ülejääva osa panka 8%-ga, nii et kogutulu aastast on 6,5%. Leia kapitali osad.

311. Jalgrattasõitja tarvitab 20-kilomeetriseks sõiduks lähemasse raudteejaama harilikult 1 tund 40 min. Ühel seesugusel sõidul lõhkes teekonna lõpuosal rattavoolik. Seetõttu tuli viimane osa teest käia jala, kiirusega $4\frac{1}{2}$ km tunnis, mis kaasa tõi hilinemise 30 minuti võrra. Kui kaugel raudteejaamast lõhkes voolik?

312. Kui kahekohalise arvu jagame selle arvu ristsummaga, siis saame jagatise 4 ja jäägi 9; kui otsitavas arvus vahetame numbrid ja jagame saaduse arvu ristsummaga, siis saame jagatise 6 ja jäägi 6. Leia see arv.

313. Kahekohalise arvu kümneliste arv on 3 võrra väiksem üheliste arvust. Kui liita selle arvuga 27, siis saame arvu, mille saaksime ka vahetades antud arvu kümnelised ja ühelised. Mis arv see on?

314. Kui igale lapsele anda a pirni, siis jääb tagavarast m pirni üle; kui aga igale lapsele anda b pirni, siis tuleb n pirni puudu. Kui palju oli lapsi ja kui palju oli pirne?

315. Kahe arvu jagatis on m ; nende arvude summa on s . Leia need arvud.

316. Vaiba pikkus ületab laiuse a cm võrra; vaiba ümbermõõt on u cm. Kui pikk ja kui lai on vaip?

317. Maaler ostis tinavalget ja tsinkvalget kokku m kg ja maksis k marka. Tinavalge kg maksis a penni ja tsinkvalge kg b penni. Kui palju maksis kumbki värv?

318. Kullasepp sulatas kokku a -proovilisi ja b -proovilisi vanu kuldasju ja sai c -proovilise sulami, kaaluga k grammi. Teades, et proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 grammi sulami kohta, leia, mitu grammi oli a -proovilist kulda?

319. Talumees müüs kaks siga; üks kaalus a kg ja teine b kg. Esimene neist arvati peekonliha kõrgemasse sorti. Teise sea kilogrammist sai talumees d penni madalamat hinda ja terve sea eest k marka vähem kui esimesest. Kui palju sai talumees peekoni kõrgema sordi kilogrammist?

320. Tähesõitja B lähtub stardist m minutit hiljem kui tähesõitja A . A sõidab kiirusega a km tunnis ja B kiirusega b km tunnis ($b > a$). Mitme minuti pärast ja kui kaugel stardikohast möödub sõitja B sõitjast A ?

321. Kolmekohalise arvu sajaliste arv on 2 korda suurem kümnelite arvust ja ühelite arv on 1 võrra väiksem sajaliste arvust. Kui jagada see arv tema ristsumмага, siis saame jagatise 47. Leia arv.

322. Suurema läbimüügi saavutamiseks alandab kaubamaja hooajakauba müügihinda 2,5% võrra. Mitme % võrra peab läbimüük tõusma, et brutotulu, hoolimata hinnaalandusest, ometi 1% võrra tõuseks?

323. Ema andis nooremale lapsele $\frac{1}{2}$ õunte arvust ja veel pool õuna, keskmisele $\frac{1}{2}$ ülejäänud õuntest ja veel pool õuna, vanemale $\frac{1}{2}$ ülejäänud õuntest ja veel pool õuna. Ülejäänud 5 õuna jättis ta enesele. Mitu õuna oli emal?

324. Õmblusmasinate hinda tõsteti neid valmistava firma poolt 190 margalt 230 margale põhjendusega, et materjalid on 10% ja tööhind 24% tõusnud. Kui kalliks oleks läinud õmblusmasin, kui ainult tööhind oleks kasvanud nimetatud määra võrra?

325. Leia kolm järjestikust täisarvu, mille korrutis oleks 10 võrra väiksem kui keskmise arvu kuup.

326. Üks kaatet on a cm pikk ja teine kaatet on d cm lühem kui hüpotenuus. Kui pikk on hüpotenuus?

327. Kell 12 seisavad mõlemad kellaosutid teineteise kohal. Millal toimub see uuesti? Millal moodustavad osutid täisnurga? millal sirgenurga?

328. Kell 10.15 stardivad kaks lennukit: üks Helsingist Tallinna suunas ja teine Tallinnast Helsingi suunas. Esimene maabub Tallinnas kell 10.50, teine Helsingis kell 11.00. Tallinn—Helsingi lennuliini pikkus on 90 km. Mitmendal kilomeetril Tallinnast möödusid lennukid teineteisest, kui mõlemad liikusid jääva kiirusega?

329. Stopperid näitasid 100 m jooksus kahele esimesele kohale tulnud jooksja aegadeks 11,2 ja 11,3 sekundit. Võitja oli stardis kaotanud aega 0,3 sekundit. Mitu meetrit enne lõpujoont hakkas võitja „vedama“, kui eeldada, et kõik jooksjad jooksid jääva kiirusega?

330. Linnas võib elektrivoolu tarvitamise eest maksta kahe tariifi järgi: kas 25 penni iga tarvitatud kilovatt-tunni eest või 2,40 marka igas kuus põhimaksu ja lisaks sellele 6 penni iga tarvitatud kilovatt-tunni eest. Kui suure tarvitatud kilovatt-tundide arvu puhul kuus on tarvitajal mõlema tariifi järgi ühepalju maksta?

331. Helsingist sõitis välja reisijateaurik Tallinna suunas keskmise kiirusega 11 sõlme. Poole tunni pärast väljus samast sadamast samas suunas suur ookeaniaurik keskmise kiirusega 16 sõlme. Kui kaugel Helsingist möödus teine aurik esimesest? (Sõlm on kiirus 1 meremiil tunnis; 1 meremiil on 1852 meetrit.)

332. Raudteevaht, kelle maja asetseb 6,3 km Aegviidu jaamast Tallinna pool, hakkab kell 18.00 Aegviidu jaamast mööda raudteed jala koju minema, sammudes kiirusega 5 km tunnis. Kell 18.40 möödub tema majast Aegviidu suunas kiirrong kiirusega 75 km tunnis. Kui kaugel kodust raudteevaht kohtab rongi?

333. Korgi erikaal on 0,24. Kui raske peaks olema korgipakk, et ta parajasti kannaks vee peal 70 kg raskust meest?

334. Jalgrattasõitja reisu-ettevalmistused nõudsid 10 minutit enam aega, kui oli eelarvestatud. Et jõuda õigel ajal sihtkohale, mille kaugus lähtekohast on 38 km, pidi sõitja suurendama harilikku sõidukiirust $\frac{2}{3}$ ühiku võrra

(arvates ühikuks kiirust kilomeeter tunnis). Kui suur on sõitja harilik sõidukiirus?

335. Jaota arv 8 kaheks niisuguseks osaks, mille pöördväärtuste summa on $\frac{2}{3}$.

336. Ristküliku-kujulisest plekitükist on tarvis valmistada ülevalt lahtine karp ruumalaga $3,4 \text{ dm}^3$, nii et laius on $\frac{2}{3}$ pikkusest ja kõrgus on 4,5 cm. Kui pikk ja kui lai peab olema plekitükk?

337. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad 5a^5 \cdot 2a^2 & 2. \quad 9a^6 - 3a^6 & 3. \quad (-a^4)^3 \\
 5a^5 : 2a^2 & 9a^6 \cdot 3a^6 & (x - y)^3 \cdot (y - x)^2 \\
 (5a^5)^2 & 9a^6 : 3a^6 & (a - b)(b - a)^4
 \end{array}$$

338. Arenda järgmiste kaksliikmete astmed:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad (x^m + x^n)^2 & 2. \quad (2u^2 - 3v^3)^3 & 3. \quad (a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}})^2 \\
 (ab^{-1} - a^{-1}b)^2 & \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^3 & (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a})^3
 \end{array}$$

339. Arenda järgmised avaldised, enne neid otstarbekalt teisendades:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad (x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)^2 & \\
 2. \quad (a^2 + a)^3(a + \sqrt{a})^3(a - \sqrt{a})^3 &
 \end{array}$$

340. Lihtsusta avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \frac{18^n}{3^{2n}} & 2. \quad \frac{3^{n+2} \cdot 2^{3n}}{12^{n+1}} \\
 2^{n+2} \cdot 5^{n-1} \cdot 10^{3-n} & (10x^2 - 5x)^4(2x - 1)^4
 \end{array}$$

341. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1. \sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6} \quad 2. \sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}} \quad 3. \sqrt[n]{a^{-3n}b^{2n}}$$

$$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32} \quad \sqrt[n]{a^{3n+3}} : \sqrt[n]{a^{n+3}} \quad \sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}$$

342. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1. \sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}} + 2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}} \quad 2. \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \quad \frac{\sqrt{m^2p - m^2q} - \sqrt{n^2p - n^2q}}{\sqrt{p - q}}$$

343. Vabasta järgmiste murdude nimetajad irratsionaalseist arvudest:

$$1. \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \quad 2. \frac{1}{\sqrt{5} + 1} \quad 3. \frac{8 - 3\sqrt{2}}{8 + 3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} \quad \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{2\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}$$

344. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1. \frac{3}{\sqrt{3}} \quad 2. \frac{16}{\sqrt{8}} \quad 3. \frac{21}{\sqrt{7}} \quad 4. \frac{30}{\sqrt[3]{25}}$$

$$\frac{h}{\sqrt[3]{h}} \quad \frac{a}{b\sqrt{a^2}} \quad \frac{c^2}{a\sqrt{c}} \quad \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$$

345. Lihtsusta järgmised juured ning leia nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

$$1. \sqrt{\frac{2}{25}} \quad 2. \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \quad 3. \sqrt[4]{\frac{10}{81}} \quad 4. \sqrt[4]{\frac{1}{625}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{6}} \quad \sqrt[3]{4\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9 \cdot 64}}$$

346. Lihtsusta avaldised:

$$\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}, \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}, \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[6]{a^4}}.$$

347. Näita, et $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$,

348. Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on:

1. $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$ 2. $-3 + \sqrt{5}$ ja $-3 - \sqrt{5}$

$$\frac{5 + \sqrt{7}}{6} \text{ ja } \frac{5 - \sqrt{7}}{6}, \quad \frac{-9 + \sqrt{11}}{10} \text{ ja } \frac{-9 - \sqrt{11}}{10}$$

349. Teisenda järgmised avaldised nii, et saaduses nimetaja oleks ratsionaalne:

$$\frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

350. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{aligned} & (-5)^3 - (-2)^0 + (-1)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, \\ & \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^0. \end{aligned}$$

351. Vabasta järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsusta tulemus:

$$(a^5 - a^{-3}) : (a - a^{-3}), \quad (a^{-4} - a^{-6}) : (a^{-2} + a^{-3}).$$

352. Näita, et $a = b^{+1}$, kui $a + a^{-1} = b + b^{-1}$.

353. Näita, et $(a - b)^{-2} - (a + b)^{-2} =$
 $= 4ab(a^2 - b^2)^{-2}.$

354. Arenda avaldis $(a^x - a^{-x})^2$.

355. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)^3}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

356. Kirjuta järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juurijaid:

$$\begin{array}{lll} 1. \quad ax^{\frac{1}{2}} & 2. \quad (ab)^{\frac{2}{3}} & 3. \quad (x-y)^{1\frac{1}{2}} \\ a^{-\frac{1}{3}} & a(2n)^{-\frac{3}{4}} & (u+v^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

357. Arenda korrutis $(x^{\frac{1}{2}} - 5)(x^{\frac{1}{2}} + 4)$.

358. Arenda avaldis $(a^x - a^{\frac{1}{x}})^2$.

359. Taanda murd $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

360. Näita, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

361. Lihtsusta avaldised:

$$\sqrt{10} : 0,81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25} \cdot (0,04)^{-\frac{1}{6}}, \quad 0,16^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{5}.$$

362. Leia avaldise $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$ väärtus.

363. Lihtsusta järgmised korrutised ja jagatised:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad (\sqrt[3]{3x^2})^2 \cdot \sqrt{\frac{2y}{81x^5}} & 4. \quad 5c^2 : 2,5c \sqrt{\frac{4a^2}{25}} \\ 2. \quad \sqrt{\frac{2x}{3}} : \frac{1}{3} \sqrt{6x} & 5. \quad \sqrt[3]{\frac{s}{t}} : (5s)^{\frac{1}{3}} \\ 3. \quad \frac{3}{7} a \sqrt[3]{2a^2} : 6 \sqrt{a} & 6. \quad \left(\frac{1,5}{2} a\right)^3 : \left(\frac{0,375}{a}\right)^3 \end{array}$$

364. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

$$1. \quad 6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$2. \quad 8,5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$$

$$3. \quad \sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

365. Leia järgnevate avaldiste väärtused:

$$1. \quad 144^3 : 72^3$$

$$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \quad \sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{-5}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{4}}{3}\right)^3$$

366. Kirjuta avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$\sqrt{\frac{1}{a} \sqrt[3]{a^5} \sqrt[4]{\frac{1}{a}}}$$

367. Arenda binoomi ruut

$$\left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2$$

A
14088

Hind Rmk. 1.75

A
14 088

14 088

K. MAASIK

ALGEBRA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI III KLASSILE

K. MAASIK — ALGEBRA ÕPIK GÜMNAASIUMI III KL.

Hind Rmk. 1.75

TARTU EESTI KIRJASTUS